Tema2:Algoritmul determinării grafului de acoperire (Numai pentru graful neorientat)

Considerăm un graf neorientat **$G=<X,\overline{U}>$,** unde X este mulţimea vârfurilor, iar **$\overline{U}$** – mulţimea muchiilor si fie H **$=<X,\overline{U_1}>$** un graf parţial al grafului **G,** care conţine toate vârfurile.

Definiţie. Dacă pentru orice componentă de conexitate (toate vârfurile se afla pe un lanţ) a lui G graful H defineşte un arbore, atunci H **$=<X,\overline{U_1}>$** se numeste graf de acoperire (schelet, carcasă).

Pentru orice graf neorientat există graful său de acoperire, care se obţine prin eliminarea tuturor ciclurilor din fiecare componentă de conexitate, adică eliminând muchiile, care sunt în plus.

Numim graf aciclic orice graf neorientat care nu conţine cicluri.

Pentru un graf neorientat arbitrar G cu **n** vârfuri, **m** muchii sunt echivalente următoarele afirmaţii:

A1. Graful G este un arbore;

A2. G este un graf conex (conţine o singură componentă conexă, adică există lanţ din orice vârf in orice vârf) şi **m=n-1**;

A3. G este un graf aciclic şi **m=n-1**;

A4. Orice două vârfuri distincte sunt unite printr-un lanţ simplu, care este unic.

A5. G – graf aciclic cu proprietatea, că dacă unim o pereche de vârfuri neadiacente cu o muchie, atunci graful nou obţinut v-a conţine exact un ciclu.

Consecinţă. Numărul de muchii, care-i necesar de eliminat din graful **$G=<X,\overline{U}>$,** pentru a obţine un graf de acoperire nu depinde de ordinea eliminării şi este egal cu numărul ciclomatic al grafului **m-n+p,** unde

m – numărul de muchii, n – numărul de vârfuri, iar k – numărul de componente conexe.

Pentru determinarea grafului de acoperire există mai mulţi algoritmi.

Vom prezenta algoritmul bazat pe principiul parcurgerii în lărgime, care se utilizează pentru efectuarea lucrării de laborator. Utilizăm lista de adiacenţă.

Se utilizează două Fire de Aşteptare (FA_1 şi FA_2), în unul din care (FA_1) se introduce rădăcina (la discreţie) din virfurile nemarcate şi în (FA_2) v-or fi înscrise pe rind numerele vârfurilor adiacente cu vârfurile din (FA_1) cu eliminarea vârfului din topul FA_1. Se elimină toate muchiile ce leagă vârfurile din (FA_2) şi toate muchiile în afară de una (la alegere) ce leagă fiecare vârf din (FA_2) cu vârfurile (FA_1). Cind FA_1 devine vid atunci FA_1 şi FA_2 se schimbă cu denumirile şi procedura se repetă. Când ambele FA devin vide algoritmul stopează.

Toate eliminările se efectuiază in lista de adiacenţă.

Pentru a nu admite ciclarea şi a fi siguri că au fost prelucrate toate componentele conexe se utilizează marcarea vârfurilor parcurse. Dacă după terminarea unui ciclu ordinar nu au mai rămas vârfuri nemarcate, atunci procedura stopează cu afisarea noii liste de adiacenţă.

Algoritmul:

Pasul I. Declarăm două FA_1 şi FA_2 vide, adică $FA_1 = \varnothing$ şi $FA_2 = \varnothing$.

Pasul 2. Alegem vârful iniţial din vârfurile nemarcate (nevizitate) şi-l întroducem în FA_1.

Pasul 3. Verificăm dacă FA_1 este vid. Dacă da, atunci se trece la pasul 8. Dacă nu atunci fie **p** vârful din topul FA_1. Îl marcăm şi-l eliminăm din FA_1.

Pasul 4. Verificam, dacâ lista subarborilor lui **p** nevizitaţi este vidă. Dacă da, atunci se trece la pasul 3. Dacă nu, atunci întroducem in FA_2 toti fiii nevizitati ai lui p.

Pasul 5. Eliminăm toate muchiile care leagă vârfurile din FA_2.

Pasul 6. Eliminăm toate muchiile în afară de una (aleasă arbitrar) care leagă fiecare vârf din FA_2 cu vârfurile din FA_1.

Pasul 7. Repetăm pasii 3-6.

Pasul 8. Schimbăm cu denumirile FA_1 şi FA_2 devine vid.

Verificăm, dacâ $FA_1 = \varnothing$. . Dacă da, atunci se trece la pasul 10.

Dacă nu, atunci

Pasul 9. Repetăm pasii 3-8.

Pasul 10. Asa cum $FA_1 = \varnothing$ şi $FA_2 = \varnothing$, verificăm daca toate vârfurile au fost vizitate. Dacă nu, atunci se trece la pasul 2.

Dacă da, atunci se afiseaza lista obtinută de adicenţă şi STOP.

EXEMPLU.

De determinat graful de acoperire pentru graful **G=<X,U̅>,** unde **X={**x_1**,** x_2 **,** x_3 **,** x_4**,** x_5 **,** x_6 **,** $x_{7\}}$ dat prin lista de adiacenţă:

1 | 2_ 5_ 7_ 0
2 | 1 _3_ 6 _7 _0
3 | 2_ 4 _6_ 0
4 | 3_ 5_ 0
5 | 1_4 _6 _0
6 | 2_ 3_ 5_ 7_ 0
7 | 1_ 2_ 6_ 0

Declarăm două FA_1 şi FA_2 vide, adică $FA_1 = \emptyset$ şi $FA_2 = \emptyset$.
Alegem vârful 1 ca iniţial din vârfurile nemarcate (nevizitate) şi-l întroduc în FA_1:

FA_1= {1}

În topul FA_1 este vârful 1. Îl marcam cu steluţă: 1^* şi-l scoatem din FA_1 , care devine vid.

1^* | 2_ 5_ 7_ 0
2 | 1 _3_ 6 _7 _0
3 | 2_ 4 _6_ 0
4 | 3_ 5_ 0
5 | 1_4 _6 _0
6 | 2_ 3_ 5_ 7_ 0
7 | 1_ 2_ 6_ 0

Întroducem in FA_2 toti fiii nevizitati ai lui 1, adică vârfurile 2, 5, 7.

FA_2= {2, 5, 7}

Eliminăm muchia [2, 7] cu ajutorul listei de adiacenţă

1^* | 2_ 5_ 7_ 0
2 | 1 _3_ 6 _0
3 | 2_ 4 _6_ 0
4 | 3_ 5_ 0
5 | 1_4 _6 _0
6 | 2_ 3_ 5_ 7_ 0
7 | 1_ 6_ 0

Asa cum schimbăm cu denumirile FA_1 şi FA_2 devine vid,iar
$FA_1 = \{2, 5, 7\}$

În topul FA_1 este vârful 2. . Îl marcam cu steluţă: 2^* şi-l scoatem din FA_1

1^* | 2_ 5_ 7_ 0
2^* | 1 _3_ 6 _0
3 | 2_ 4 _6_ 0
4 | 3_ 5_ 0
5 | 1_4 _6 _0
6 | 2_ 3_ 5_ 7_ 0
7 | 1_ 6_ 0

Întroducem in FA_2 toti fiii nevizitati ai lui 2 , adică vârfurile 3 si 6
$FA_2= \{3, 6\}$
Eliminăm muchia [3, 6] cu ajutorul listei de adiacenţă
1^* | 2_ 5_ 7_ 0
2^* | 1 _3_ 6 _0
3 | 2_ 4 _ 0
4 | 3_ 5_ 0
5 | 1_4 _6 _0
6 | 2_5_ 7_ 0
7 | 1_ 6_ 0
În topul FA_1 este vârful 5. . Îl marcam cu steluţă: 5^* şi-l scoatem din FA_1.
Întroducem in FA_2 toti fiii nevizitati ai lui 5 , adică vârfurile 4 si 6. Dar $4 \in FA_2$. Deci $FA_2= \{3, 4, 6\}$.
Eliminăm muchia [3, 4] si cu ajutorul listei de adiacenţă.
Eliminăm muchiile [6, 5] si [6, 7] cu ajutorul listei de adiacenţă.

1^* | 2_ 5_ 7_ 0
2^* | 1 _3_ 6 _0
3 | 2_ 0
4 | 5_ 0
5^* | 1_4 _0
6 | 2_ 0
7^* | 1_ 0

În topul FA_1 este vârful 7. Îl marcam cu steluţă: 7^* şi-l scoatem din FA_1, care devine vid.

Întroducem in FA_2 toti fiii nevizitati ai lui 7 , dar asa ceva nu exista. Deci FA_2= {3, 4, 6}.
Asa cum schimbăm cu denumirile FA_1 şi FA_2, FA_2 devine vid,iar
FA_1 = {3, 4, 6}, $FA_2 = \varnothing$.
În topul FA_1 este vârful 3. Îl marcam cu steluţă: 3^* şi-l scoatem din FA_1 .
Vârful 3 nu are fii nevizitati, deci $FA_2 = \varnothing$.
În topul FA_1 este vârful 4. Îl marcam cu steluţă: 4^* şi-l scoatem din FA_1 .
Vârful 4 nu are fii nevizitati, deci $FA_2 = \varnothing$.
În topul FA_1 este vârful 6. Îl marcam cu steluţă: 6^* şi-l scoatem din FA_1 .
Vârful 6 nu are fii nevizitati, deci $FA_2 = \varnothing$.

1^* | 2_ 5_ 7_ 0
2^* | 1 _3_ 6 _0
3^* | 2_ 0
4^* | 5_ 0
5^* | 1_4 _0
6^*| 2_ 0
7^* | 1_ 0

Asa cum $FA_1 = \varnothing$ şi $FA_2 = \varnothing$, si toate vârfurile au fost vizitate se afiseaza lista de adiacenta.

<u>Exemple pentru lucru individual</u>

Exemplul 1 De determinat graful de acoperire pentru graful **G=<X,$\overline{U}$>,** unde **X={x_1, x_2 , x_3 , x_4, x_5 , x_6 , x_7}** dat prin lista de adiacenţă:

1 | 2_ 6_ 7_ 0
2 | 1 _3_ 6 _7 _0
3 | 2_ 4 _5_ 6_ 7_0
4 | 3_ 5_ 0
5 | 3_4 _6 _0
6 | 1_2_ 3_ 5_ 7_ 0
7 | 1_ 2_ 3_6_ 0

Răspuns (unul din câteva răspunsuri posibile):

1 | 2_ 6_ 7_ 0
2 | 1 _3 _0
3 | 2_ 4_0
4 | 3_ 0
5 | 6 _0
6 | 1_5_0
7 | 1_0

Exemplul 2 De determinat graful de acoperire pentru graful $\mathbf{G=\langle X,\overline{U}\rangle}$**,** unde $\mathbf{X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}}$ dat prin lista de adiacenţă:

1 | 2_3_4_5_ 6_ 7_ 0
2 | 1 _3_7 _0
3 | 1_2_ 4 _6_0
4 | 1_3_ 5_ 0
5 | 1_4 _6 _0
6 | 1_3_ 5_ 7_ 0
7 | 1_ 2_6_ 0

Raspuns (unul din câteva răspunsuri posibile):

1 | 2_3_4_5_ 6_ 7_ 0
2 | 1 _0
3 | 1_0
4 | 1_ 0
5 | 1 _0
6 | 1_0
7 | 1_0