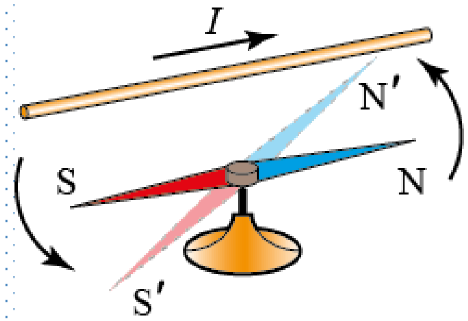
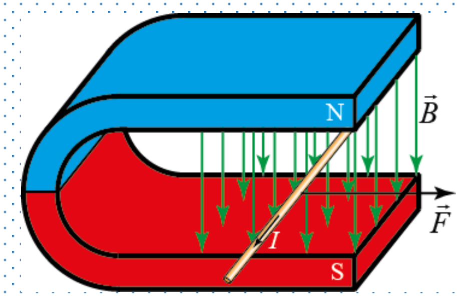
Tema10. Câmpul magnetic în vid

În 1820, Oersted a stabilit experimental că sursa câmpului magnetic este curentul electric.

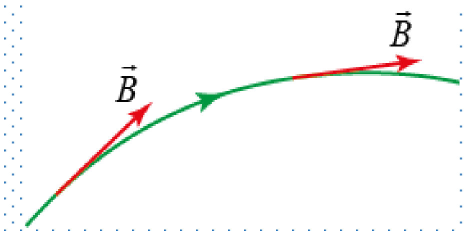


$$F_{\max} = BIl$$

Coeficientul de proporționalitate B este caracteristica de forță a câmpului magnetic și se numește inducția câmpului magnetic

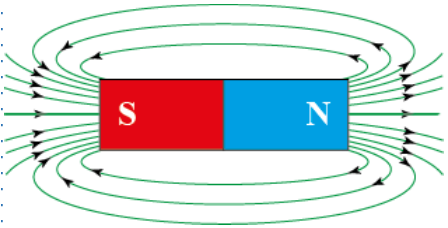


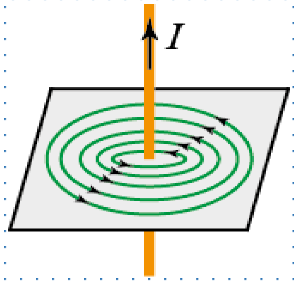
$$B = \frac{F_{\max}}{Il} \qquad [B] = \frac{N}{\text{A}\cdot\text{m}} = \text{T}$$

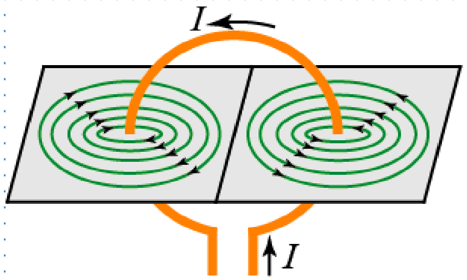


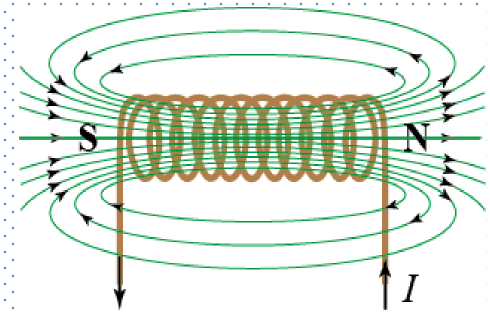
Linia trasată în câmpul magnetic astfel încât direcția tangentei la ea în orice punct să coincidă cu direcția vectorului inducției câmpului se numește linie de câmp.

Tema10. Câmpul magnetic în vid



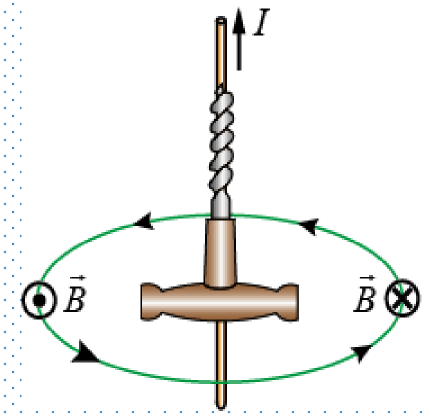






Regula burghiului cu filet de dreapta

La rotirea burghiului cu filet de dreapta, astfel încât acesta să înainteze în sensul curentului din conductor, sensul rotației mânerului său indică sensul liniilor câmpului magnetic format de acest curent.



Pentru un câmp magnetic omogen

$$F = BIl\sin\alpha$$

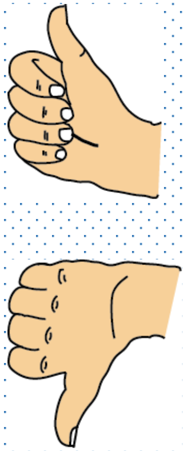
Pentru un câmp magnetic neomogen

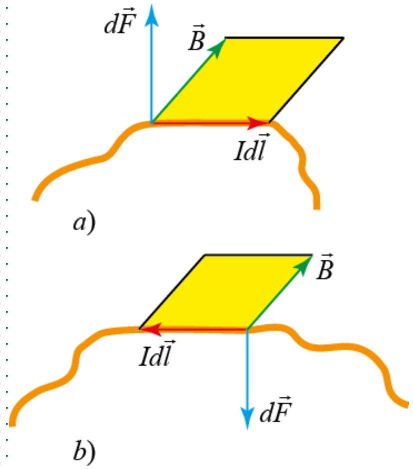
$$dF = BIdl\sin\alpha \qquad \text{sau} \qquad d\vec{F} = I\left[d\vec{l}\,\vec{B}\right]$$

Tema10. Câmpul magnetic în vid

Regula mâinii drepte

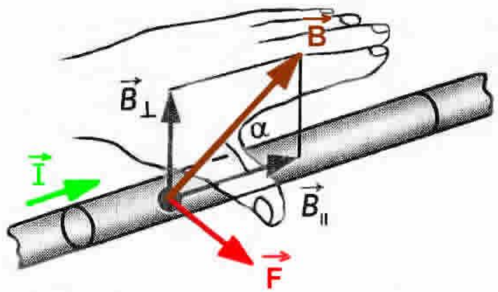
Dacă rotim cu patru degete a mâinii drepte vectorul $d\vec{l}$ spre vectorul $\vec{B}$ pe drumul cel mai scurt , atunci sensul vectorului $d\vec{F}$ va fi indicat de degetul mare îndoit sub unghiul de 90 grade.





Regula mâinii stângi

Dacă așezăm mâna stângă astfel încât vectorul inducției magnetice să intre perpendicular în palmă, iar cele patru degete întinse să indice sensul curentului din conductor, atunci degetul mare îndoit sub unghiul de 90 grade indică sensul forței electromagnetice $d\vec{F}$.



Tema10. Câmpul magnetic în vid

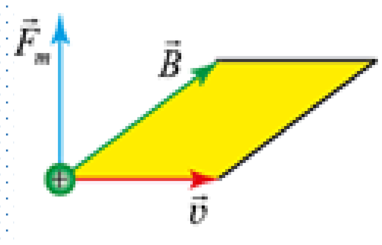
Forța magnetică (forța care acționează asupra unui purtător de sarcină *q*)

$$\vec{F}_m = \frac{d\vec{F}}{dN} = \frac{I\left[d\vec{l}\vec{B}\right]}{dN} = \frac{qdN\left[d\vec{l}\vec{B}\right]}{dtdN} = q\left[\frac{d\vec{l}}{dt}\vec{B}\right] = q\left[\vec{\upsilon}\vec{B}\right]; \qquad F_m = |q|\upsilon B\sin\alpha$$

Formula rezultată este valabilă pentru orice particulă încărcată ce se mișcă într-un câmp magnetic.

Proprietățile forței magnetice

1. Câmpul magnetic nu acționează asupra particulelor încărcate aflate în repaus în raport cu acest câmp.
2. Câmpul magnetic nu acționează asupra particulelor încărcate ce se mișcă în sensul câmpului sau în sens opus acestuia.
3. Forța magnetică este orientată perpendicular pe planul vectorilor $\vec{\upsilon}$ și B.
4. Forța magnetică nu efectuează lucru mecanic



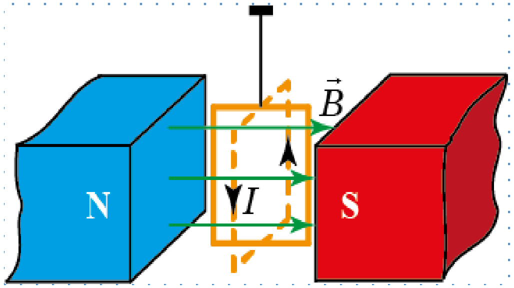
$$dL = \vec{F}_m d\vec{l} = F_m \upsilon dt \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

Tema10. Câmpul magnetic în vid

Forța lui Lorenz

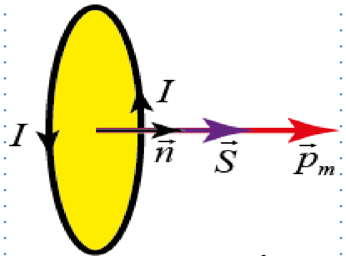
$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q\left[\vec{v}\vec{B}\right]$$

Efectul unui câmp magnetic asupra unui cadru cu curent



$$F_1 = F_3 = BIa; \qquad F_2 = F_4 = IBb\sin\left(\pi/2 - \beta\right) = IBa\cos\beta$$

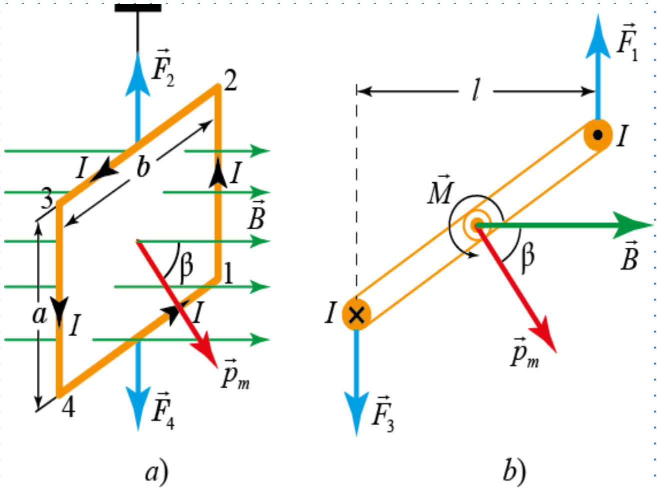
$$M = F_1\frac{b}{2}\sin\beta + F_3\frac{b}{2}\sin\beta = F_1 b\sin\beta = BIab\sin\beta = BIS\sin\beta$$



Momentul magnetic

$$\vec{p}_m = I\vec{S} = IS\vec{n}$$

Dacă rotim mânerul burghiului cu filet de dreapta în sensul curentului din conturul plan, atunci sensul vectorului moment magnetic este indicat de sensul înaintării burghiului.



$$M = p_m B\sin\beta \quad \text{sau} \quad \vec{M} = \left[\vec{p}_m\vec{B}\right] \Rightarrow B = \frac{M_{max}}{p_m}$$

Tema10. Câmpul magnetic în vid

Legea Biot și Savart

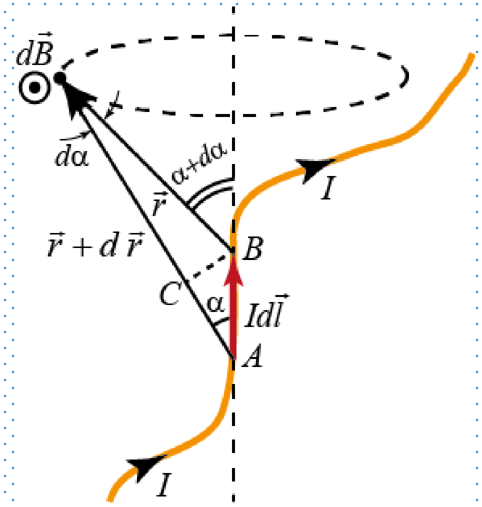
S-a stabilit experimental: $B \sim I$; $B \sim I/r$

Principiul superpoziției

Fiecare conductor parcurs de curent sau parte a acestuia (element de curent) creează câmp magnetic independent de celelalte conductoare sau părți ale conductorului.

$$\vec{B} = \int_{(\mathscr{L})} d\vec{B}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^3}\left[d\vec{l}\,\vec{r}\right]$$



unde $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^2}\,dl\sin\alpha \qquad CB = r\,d\alpha = dl\sin\alpha \;\Rightarrow$$

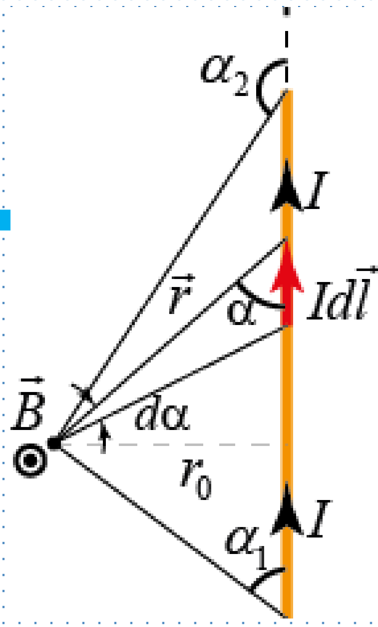
$$\Rightarrow\; dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\,d\alpha$$

Tema10. Câmpul magnetic în vid

Aplicarea Legii Biot și Savart

1) Câmpul magnetic al unui conductor de lungime finită

$$B = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_0 I d\alpha}{4\pi r} \qquad \frac{r_0}{r} = \sin\alpha$$



$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} \left(-\cos\alpha\right)\Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right)}$$

a) cazul conductorului infinit lung parcurs de curent

$$\alpha_1 \to 0 \text{ și } \alpha_2 \to \pi \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}$$

b) cazul conductorului semi infinit parcurs de curent

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}\left(1 + \cos\alpha_1\right) \qquad \text{Dacă } \alpha_1 = \pi/2 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}$$

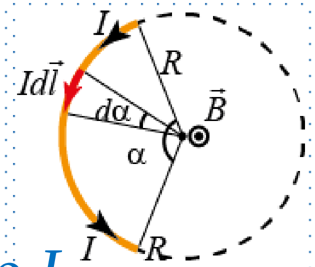
Tema10. Câmpul magnetic în vid

Aplicarea Legii Biot Savart

2) Câmpul magnetic în centrul unui curent circular de intensitate I

$$B=\int_0^{\alpha}\frac{\mu_0 I d\alpha}{4\pi R}=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\int_0^{\alpha}d\alpha=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\alpha$$

Dacă $\alpha = 2\pi$ $\rightarrow$ $B=\dfrac{\mu_0 I}{2R}$



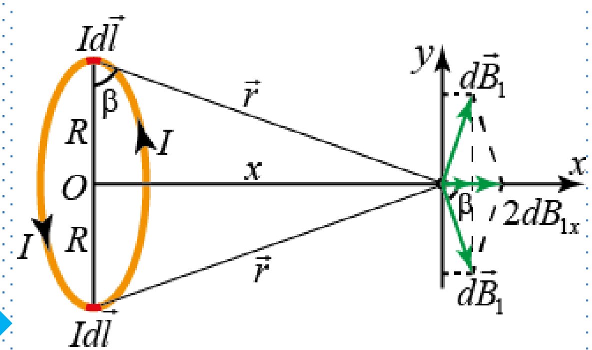
3) Câmpul magnetic pe axa unui curent circular de intensitate I

$$B=\int_{(\mathscr{L})}dB_1\cos\beta$$

$$dB_1=\frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}rdl\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}dl=\frac{\mu_0 I}{4\pi\left(x^2+R^2\right)}dl$$

$$\cos\beta=\frac{R}{r}=\frac{R}{\sqrt{x^2+R^2}}$$

$\rightarrow$

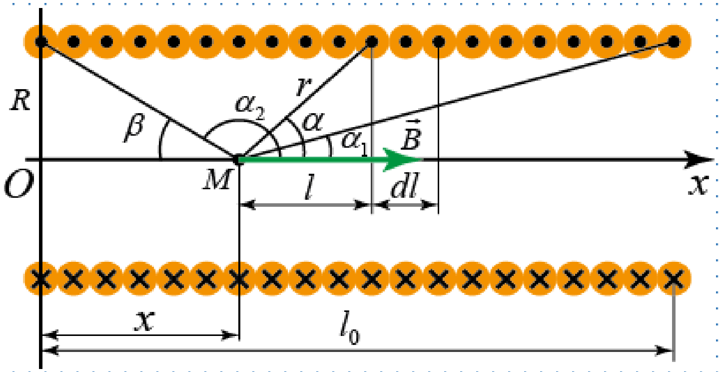


$$\rightarrow\quad B=\frac{\mu_0 IR}{4\pi\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}\int_0^{2\pi R}dl=\frac{\mu_0 IR^2}{2\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}=\frac{\mu_0 IR^2}{2r^3}\quad\rightarrow\quad B\big|_{x=0}=B_{max}=\frac{\mu_0 I}{2R}$$

Tema10. Câmpul magnetic în vid

Aplicarea Legii Biot și Savart

4) Câmpul magnetic al solenoidului



$$dB = \frac{\mu_0 I R^2}{2r^3} n dl$$

$$r = \frac{R}{\sin\alpha};\ l = \frac{R}{\mathrm{tg}\,\alpha} \Longrightarrow dl = -\frac{R d\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$dB = -\frac{\mu_0 n I}{2}\sin\alpha d\alpha$$

$$B = -\frac{\mu_0 n I}{2}\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}\sin\alpha d\alpha = \frac{\mu_0 n I}{2}(\cos\alpha)\Big|_{\alpha_2}^{\alpha_1}$$

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$$

Pentru solenoidul infinit lung $\alpha_1 \rightarrow \pi$ и $\alpha_2 \rightarrow 0$

$$B = \mu_0 n I$$

Tema10. Câmpul magnetic în vid

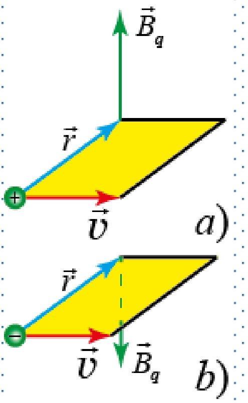
Inducția câmpului magnetic al unei sarcini electrice în mișcare

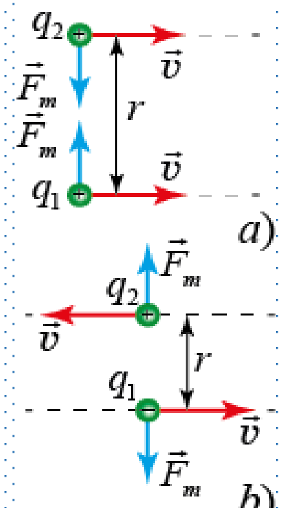
$$\vec{B}_q = \frac{d\vec{B}}{dN} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^3 dN}\left[d\vec{l}\,\vec{r}\right] = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{dq}{r^3 dN\cdot dt}\left[d\vec{l}\,\vec{r}\right] = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q dN}{r^3 dN}\left[\frac{d\vec{l}}{dt}\vec{r}\right] = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q}{r^3}\left[\vec{\upsilon}\vec{r}\right]$$

Forța magnetică de interacțiune dintre sarcinile electrice în miscare

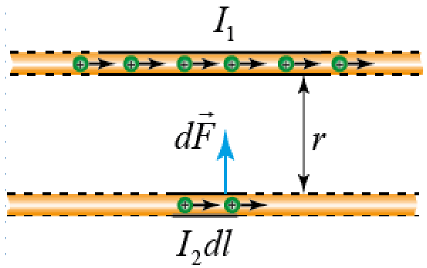
$$\vec{F}_m = q_1\left[\vec{\upsilon}\vec{B}_{q_2}\right] = q_2\left[\vec{\upsilon}\vec{B}_{q_1}\right] = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1 q_2}{r^3}\left[\vec{\upsilon}\left[\vec{\upsilon}\vec{r}\right]\right]$$

$$\left[\vec{\upsilon}\left[\vec{\upsilon}\vec{r}\right]\right] = \vec{\upsilon}\left(\vec{\upsilon}\vec{r}\right) - \vec{r}\left(\vec{\upsilon}\vec{\upsilon}\right) = \vec{\upsilon}\upsilon r\cos\left(\pi/2\right) - \vec{r}\upsilon^2 = -\vec{r}\upsilon^2$$





$$\left.\begin{aligned}\left|F_m\right| &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\left|q_1 q_2\right|}{r^2}\upsilon^2\\ \left|F_{el}\right| &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left|q_1 q_2\right|}{r^2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\left|F_m\right|}{\left|F_{el}\right|} = \varepsilon_0\mu_0\upsilon^2 = \frac{\upsilon^2}{c^2}$$

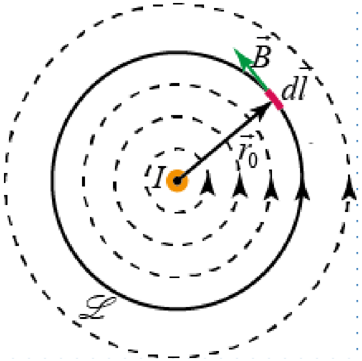


$$dF = B_1 I_2 dl \qquad B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \Rightarrow dF = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}dl$$

Tema10. Câmpul magnetic în vid

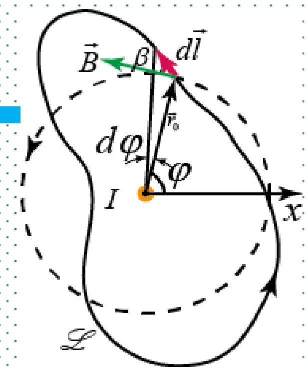
Legea curentului total pentru câmpul magnetic în vid

$$\oint\limits_{(\mathscr{L})}\left(\vec{B}d\vec{l}\right)=\int\limits_{0}^{2\pi r_0} Bdl\cos\beta=\int\limits_{0}^{2\pi r_0} Bdl=\frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}\int\limits_{0}^{2\pi r_0} dl=\frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}2\pi r_0=\mu_0 I$$

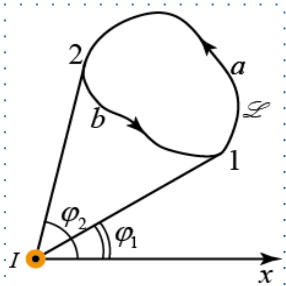


Câmpurile, circulația cărora este diferită de zero se numesc câmpuri turbionare.

$$\oint\limits_{(\mathscr{L})}\left(\vec{B}d\vec{l}\right)=\oint\limits_{(\mathscr{L})} Bdl\cos\beta=\int\limits_{0}^{2\pi} Br_0 d\varphi=\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{\mu_0 I r_0}{2\pi r_0}d\varphi=\frac{\mu_0 I}{2\pi}2\pi=\mu_0 I$$



$$dl\cos\beta=r_0 d\varphi$$



$$\oint\limits_{(\mathscr{L})}\left(\vec{B}d\vec{l}\right)=\int\limits_{1-a-2}\left(\vec{B}d\vec{l}\right)+\int\limits_{2-b-1}\left(\vec{B}d\vec{l}\right)=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi+\int\limits_{\varphi_2}^{\varphi_1}d\varphi\right)=0$$

Legea curentului total sub formă integrală

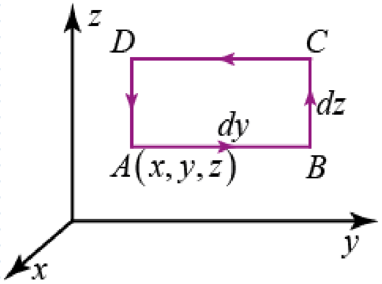
$$\boxed{\oint\limits_{(\mathscr{L})}\left(\vec{B}d\vec{l}\right)=\mu_0\sum_{i=1}^{n}I_i}$$

sau

$$\boxed{\oint\limits_{(\mathscr{L})}\left(\vec{B}d\vec{l}\right)=\mu_0\int\limits_{(S)}\vec{j}d\vec{S}}$$

Tema10. Câmpul magnetic în vid

$$\oint_{(\mathscr{L})} \left(B_x dx + B_y dy + B_z dz \right) = \mu_0 \int_{(S)} \vec{j} d\vec{S}$$



AB* și *CD $-B_y(x,y,z+dz)dy + B_y(x,y,z)dy = -\dfrac{\partial B_y}{\partial z} dydz = -\dfrac{\partial B_y}{\partial z} dS$

BC* și *DA $B_z(x,y+dy,z)dz - B_z(x,y,z)dz = \dfrac{\partial B_z}{\partial y} dzdy = \dfrac{\partial B_z}{\partial y} dS$

ABCD $\displaystyle\oint_{(ABCD)} \left(\vec{B} d\vec{l} \right) = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) dS \Rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 j_x$

analogic $\dfrac{\partial B_x}{\partial z} - \dfrac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 j_y$ $\qquad$ $\dfrac{\partial B_y}{\partial x} - \dfrac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 j_z$

$\boxed{\mathrm{rot}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$ **– legea curentului total sub formă diferențială**

$\displaystyle\oint_{(\mathscr{L})} \left(\vec{B} d\vec{l} \right) = \int_{(S)} \mathrm{rot}\, \vec{B}\, d\vec{S}$ **– Teorema lui Stokes**

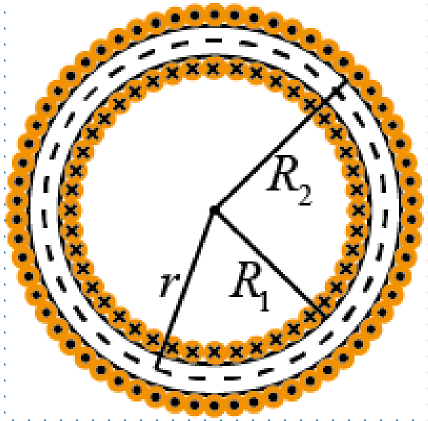
Tema10. Câmpul magnetic în vid

Câmpul magnetic al toroidului parcurs de curent electric staționar

$$\oint_{(\mathscr{L})} \left(\vec{B}d\vec{l}\right) = B \oint_{(\mathscr{L})} dl = B \int_0^{2\pi r} dl = 2\pi r \cdot B$$

Dacă $r < R_1$ sau $r > R_2$, atunci $\sum_{i=1}^{N} I_i = NI - NI = 0$

Dacă $R_1 < r < R_2$, atunci $\sum_{i=1}^{N} I_i = NI$



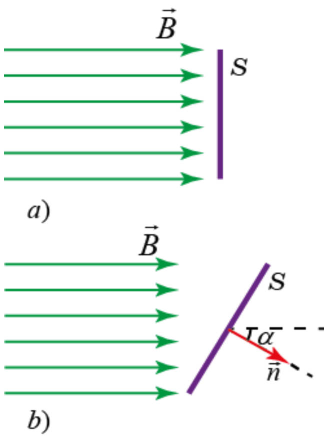
$$r = R_m = \frac{R_1 + R_2}{2}$$

$$2\pi r B = \mu_0 NI$$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \quad \rightarrow \quad B \approx B_m = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R_m} = \mu_0 nI$$

Tema10. Câmpul magnetic în vid

Teorema lui Gauss pentru câmpul magnetic în vid



$$\Phi_m = BS\cos\alpha \qquad \Phi_m = \int_{(S)} \left(\vec{B}\cdot d\vec{S}\right)$$

$\Psi = N\Phi_m$ – fluxul magnetic total al conturului

$$\boxed{\oint_{(S)} \left(\vec{B}\cdot d\vec{S}\right) = 0}$$

– Teorema lui Gauss pentru câmpul magnetic în vid sub formă integrală

$$\oint_{(S)} \left(\vec{B}\cdot d\vec{S}\right) = \int_{(V)} \operatorname{div}\vec{B}\cdot dV$$

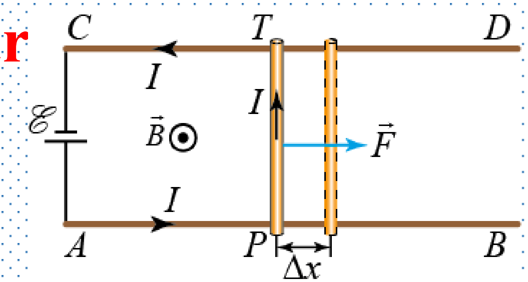
$$\boxed{\operatorname{div}\vec{B} = 0}$$

– Teorema lui Gauss pentru câmpul magnetic în vid sub formă diferențială

În natură nu există „sarcini” magnetice (monopoli magnetici)

Tema10. Câmpul magnetic în vid

Lucrul forțelor electromagnetice la deplasarea conductorului parcurs de curent într-un câmp magnetic staționar



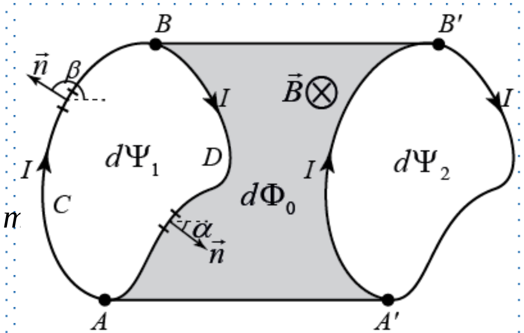
$$dL = IBldx = IBdS = I\cdot d(BS) \longrightarrow dL = I\cdot d\Phi_m$$

$$L_{12} = I\left(\Phi_{m2} - \Phi_{m1}\right)$$

Lucrul efectuat de câmpul magnetic asupra conductorului parcurs de curent este egal cu produsul dintre intensitatea curentului prin conductor și variația fluxului magnetic.

$$\left.\begin{aligned} dL &= dL_1 + dL_2 \\ dL_1 &= -I\left(d\Phi_0 + d\Psi_1\right) \\ dL_2 &= I\left(d\Phi_0 + d\Psi_2\right) \end{aligned}\right\} \longrightarrow dL = I\left(d\Psi_2 - d\Psi_1\right) = I\cdot d\Psi_m$$

$$L_{12} = I\left(\Psi_2 - \Psi_1\right) = I\cdot\Delta\Psi$$

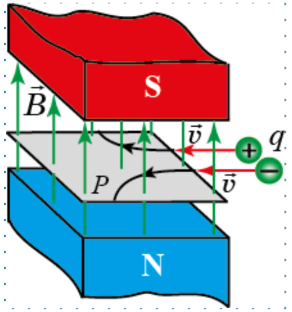


Lucrul efectuat de forțele electromagnetice asupra unui contur parcurs de curent continuu la deplasarea acestuia într-un câmp magnetic staționar este egal cu produsul dintre intensitatea curentului din contur și variația fluxului magnetic total al acestuia.

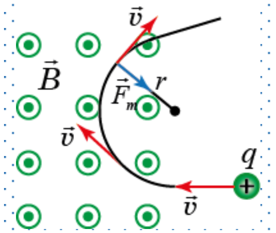
Tema10. Câmpul magnetic în vid

Mişcarea particulelor încărcate în câmpuri magnetice staționare

$$F_m = ma_n \rightarrow |q|\upsilon B = m\frac{\upsilon^2}{r} \rightarrow r = \frac{m\upsilon}{|q|B} \rightarrow r = \frac{m_0}{|q|B}\frac{\upsilon}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$$

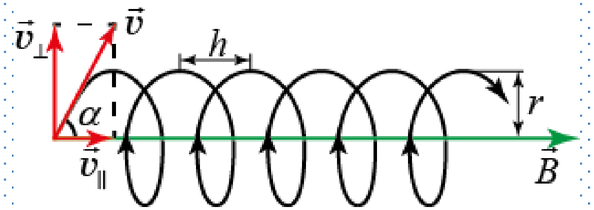


$$T = \frac{2\pi r}{\upsilon} \rightarrow T = \frac{2\pi m}{|q|B} = \frac{2\pi m_0}{|q|B}\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = \frac{2\pi E}{|q|Bc^2}$$



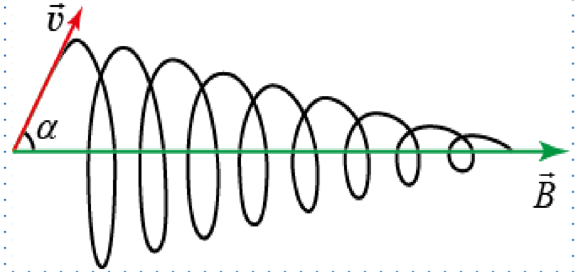
$$r = \frac{m\upsilon_\perp}{|q|B} = \frac{m_0}{|q|B}\frac{\upsilon\sin\alpha}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \qquad T = \frac{2\pi r}{\upsilon_\perp} = \frac{2\pi m}{|q|B} = \frac{2\pi m_0}{|q|B}\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = \frac{2\pi E}{|q|Bc^2}$$

$$h = \upsilon_\parallel \cdot T = \frac{2\pi m\upsilon\cos\alpha}{|q|B} = \frac{2\pi m_0}{|q|B}\cdot\frac{\upsilon\cos\alpha}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$$



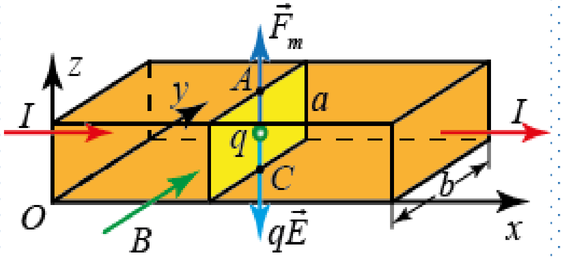
Când $\upsilon << c$

$$r = \frac{m_0\upsilon\sin\alpha}{|q|B} \qquad h = \frac{2\pi m_0\upsilon\cos\alpha}{|q|B}$$



Efectul Hall

$$\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_C = \frac{RIB}{b}$$



R –constanta lui Hall

$$\vec{F}_e + \vec{F}_m = 0 \;\longrightarrow\; q\vec{E} + q\left[\vec{\upsilon}\vec{B}\right] = 0 \;\longrightarrow\; \vec{E} = -\left[\vec{\upsilon}\vec{B}\right] = -\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \upsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \end{vmatrix} = -\upsilon_x B\vec{k}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_C = \int_a^0 E_z dz = -\upsilon_x B \int_a^0 dz = \upsilon_x B a$$

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{qnSdl}{dt} = \frac{qnS\upsilon_x dt}{dt} = qn\upsilon_x ab \;\longrightarrow\; \upsilon_x = \frac{I}{qnab}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_C = \upsilon_x B a = \frac{1}{nq}\frac{BI}{b} \;\longrightarrow\; R = \frac{1}{nq}$$