TEMA: MINIMIZAREA FUNCTIILOR BOOLEENE

Problema reprezentării funcţiilor booleene prin sisteme complete care conţin un număr minim de funcţii elementare vizează posibilitatea folosirii unui număr cât mai redus de tipuri de circuite logice pentru materializarea FB considerate. Există şi un alt aspect al problemei - cel care priveşte utilizarea unui număr cât mai mic de circuite standard. Teoretic această problemă se reflectă în simplitatea funcţiilor booleene. Este evident că formele canonice sunt departe de a fi cele mai simple. Obţinerea unor forme mai simple poate fi realizată prin metoda transformărilor echivalente utilizând proprietatile operatiilor booleene. Însă simplitatea finală depinde de măiestria şi experienţa cercetătorului, mai mult - nu există siguranţa că forma obţinută este cea mai simplă. Din această cauză au fost elaborate metode sistematice pentru obţinerea expresiilor minimale a FB.

6.1. Metoda lui Quine

Definiţie. Numim <u>*termen normal conjunctiv*</u> (TNC) conjuncţia $x_1^{\alpha_1}...x_m^{\alpha_m}$ (m≤ n), în care fiecare variabilă se întâlneşte numai o singură dată. Numărul literelor unui termen normal conjunctiv se numeste *rangul termenului*, iar disjuncţia TNC - *formă normală disjunctivă* (FND), adica FND= $\vee$TNC.

Reieşind din aceste definiţii putem spune că FCDN a unei FB de n argumente este FND la care toţi termenii sunt de rang n (forma normală cea mai complexă).

Definiţie. Forma normal disjunctivă (FND), care conţine cel mai mic număr de litere (variabile) x_i în comparaţie cu toate celelalte FND ale unei FB date este numita formă disjunctivă minimă (FDM).

Definiţie. Numim *implicanţi primi* ai unei FB de n argumente termenii conjunctivi de forma $x_1^{\alpha_1}...x_m^{\alpha_m}$ (k ≤ n) care implică funcţia fără a se putea elimina vre-o variabilă (TNC de rang minim care implică funcţia).

Implicanţii primi pot fi determinaţi plecând de la FCD prin aplicarea sistematică la câte doi termeni conjunctivi care se deosebesc printr-un singur rang (sunt adiacenţi) proprietatea de alipire partial (vezi proprietatile operatiilor booleene $x_1\overline{x}_2 \vee x_1x_2 = x_1$.) $A \wedge x_i \vee A \wedge \overline{x_i} = A$.

Adesea, în rezultatul efectuării operaţiei de alipire parţială, pot apărea termeni normal disjunctivi în repetare sau asupra cărora poate fi executată operaţia absorbţie. Primii, conform proprietăţii idempotenţă se vor scrie o singură dată, pentru cei de categoria a doua se va opera absorbţia ($x_1 \vee x_1x_2 = x_1$).

Executând asupra FCD a unei FB toate operaţiile posibile de alipire parţială şi de absorbţie obţinem disjuncţia implicanţilor primi care se numeşte formă disjunctivă prescurtată (FDP). În FDP ar putea exista în caz general implicanţi primi de prisos (redundanţi, care implică suplimentar funcţia), deci FDP nu este minimă.

Implicanţii primi strict necesari (obţinuţi după eliminarea implicanţilor redundanţi) se numesc *implicanţi esenţiali*.
Implicantii esentiali se determina cu ajutorul tabelului de acoperire.

Disjuncţia implicanţilor esenţiali conduce la FDM.

În concluzie, putem afirma că minimizarea unei FB presupune următorii paşi :

1) Construirea tabelului de adevar pentru FB data;
2) determinarea formei canonice disjunctive normale FCDN;

3) determinarea formei disjunctive prescurtate FDP efectuind *toate* operatiile posibile de alipire si absorbtie;
4) alegerea implicanţilor esenţiali.

Implicanţii esenţiali pot fi aleşi construind un tabel special, numit tabelul implicanţilor primi sau tabel de acoperire.

Fiecare linie în acest tabel corespunde unui implicant prim, iar fiecare coloană unui TCC din FCDN iniţială. Vom spune că un implicant prim se află în relaţia de acoperire cu un TCC, dacă el se conţine în acesta. Se va construi matricea acestei relaţii binare (la intersecţia liniei i cu coloana j se va pune 1, dacă implicantul prim cu numărul i se află în relaţia de acoperire cu TCC cu numărul j, şi 0 în caz contrar.) Vom alege cel mai mic număr de implicanţi primi strict necesari (esenţiali) pentru ca să fie acoperiţi toţi TCC.

Consideram un

Exemplul 1.: De obtinut FDM

pentru funcţia $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ definită prin $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$=Σ(0,4,5,8,9,13)

f=1

FB are tabelul de adevăr

N	x_1	x_2	x_3	x_4	f	N	x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0	1	8	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	9	1	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0	10	1	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0	11	1	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1	12	1	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1	13	1	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0	14	1	1	1	0	0
7	0	1	1	1	0	15	1	1	1	1	0

FCDN a FB (procedura a fost indicate anterior):

$$FCDN = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \quad (1)$$

$$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \quad (2)$$

$$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee \quad (3)$$

$$x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee \quad (4)$$

$$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \vee \quad (5)$$

$$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \quad (6).$$

Să se determine forma disjunctivă minimă după metoda lui Quine.

Rezolvare:

Etapa I. (I Alipire)

Determinăm FDP evidenţiind toţi implicanţii primi (numerotam toti TCC pentru a putea urmari care TCC se alipesc) :

TCC (1) se poate alipi cu(2), asa cum se deosebesc numai printr-un singur rang (x_2)

$$(1) \vee (2) = \quad \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3\bar{x}_4 = \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4(x_2 \vee \bar{x}_2) = \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4$$

Mai compact procedura poate fi scrisa asa:

$$(1)\vee(2) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3\bar{x}_4 = \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4$$

$$(1)\vee(6) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 = \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$$

$$(2)\vee(3) = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$$

$$(3)\vee(4) = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 = x_2 \bar{x}_3 x_4$$

$$(4)\vee(5) = x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 = x_1 \bar{x}_3 x_4$$

$$(5)\vee(6) = x_1 \bar{x}_2\bar{x}_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 = x_1 \bar{x}_2\bar{x}_3$$

Asa cum toti TCC au participat la alipire, iar alipiri parţiale pentru termenii normali de rang 3 în cazul dat nu se pot opera, avem următoarea formă disjunctivă prescurtată (exista 6 implicanti primi):

$$FDP = \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2\bar{x}_3$$

Daca ar fi fost posibil am fi efectuat alipirea a II, apoi in caz de necessitate – a IIIe.t.c..

Etapa a II-a. Construim tabelul de acoperire:

Fiecare linie în acest tabel corespunde unui implicant prim, iar fiecare coloană unui TCC din FCD iniţială. Vom spune că un implicant prim se află în relaţia de acoperire cu un TCC, dacă el se conţine în acesta. Se va construi matricea acestei relaţii binare (la intersecţia liniei *i* cu coloana *j* se va pune 1, dacă implicantul prim cu numărul *i* se află în relaţia de acoperire cu TCC cu numărul j, şi 0 în caz contrar.) Vom alege cel mai mic număr de implicanţi primi strict necesari (esenţiali) pentru ca să fie acoperiţi toţi TCC.

Tabel de acoperire

Implicanţii primi	Termenii canonici conjunctivi					
	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1 x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1 x_2\bar{x}_3 x_4$	$x_1 x_2\bar{x}_3 x_4$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 x_4$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
A: $\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4$	1	1	0	0	0	0
B: $\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	1	0	0	0	0	1
C: $\bar{x}_1 x_2\bar{x}_3$	0	1	1	0	0	0
D: $x_2\bar{x}_3 x_4$	0	0	1	1	0	0
E: $x_1\bar{x}_3 x_4$	0	0	0	1	1	0
F: $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	0	0	0	0	1	1
I varianta	A	A	D	D	F	F
II varianta	B	C	C	E	E	B

Avem două posibilităţi de alegere:

$$FDM_1 = A + D + F = \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_2\bar{x}_3 x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$$

$$FDM_2 = B + C + E = \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_3 x_4$$

Rezultă, că o FB poate avea mai multe forme minime.

Prin metoda Quine poate fi determinate si Forma Conjunctiva Minima (FCM) avind in vedere proprietatile operatiilor booleene (scimbind cu locul operatiile $\vee$ si $\wedge$ proprietatile ramin in vigoare).

Lucru individual:

1)De determinat prin metoda Quine FCM pentru functia

$f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)=\underset{f=1}{\Sigma}(0,4,5,8,9,13)$

Raspuns: Forma conjunctivă minimă:

$$\mathrm{FCM} = (x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4})$$

2)De determinat prin metoda Quine FDM si FCM pentru functia

$$f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)=\underset{f=1}{\Sigma}(4,5,6,7,8,10,11,13)$$

Raspuns: Forma disjunctivă minimă:

$$\mathrm{FDM} = \overline{x_1}x_2 \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_4} \vee x_2\overline{x_3}x_4 \vee x_1\overline{x_2}x_3$$

Forma conjunctivă minimă:

$$\mathrm{FCM} = \overline{x_3} \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_4}) \ .$$

Exemplul 2(FDM): De obtinut FDM

pentru funcţia $f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)$ definită prin

$$f=\underset{f=1}{\Sigma}(4,5,6,7,8,10,11,13) \qquad (*)$$

FB are tabelul de adevăr

N	x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	0

Pentru fiecare combinaţie de valori ale argumentelor aplicate în 1 se scriu termenii canonici conjunctivi în care argumentul x_i este luat ca atare sau negat după cum valoarea lui în combinaţia respectivă este 1 sau 0:

TCC: $\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \qquad x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$

$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \qquad x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$

$\bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \qquad x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4$

$\bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \qquad x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$

Determinăm FCDN, reunind TCC prin semnul disjuncţiei:

FCDN: $f = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee$ *(1)*

$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee$ *(2)*

$\bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \vee$ *(3)*

$\bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \vee$ *(4)*

$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee$ *(5)*

$x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \vee$ *(6)*

$x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee$ *(7)*

$x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$ *(8)*

I Alipire:

(1) $\vee$ (2)= $\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$ (1)

(1) $\vee$ (3)= $\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_4$ (2)

(2) $\vee$ (4)= $\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 = \bar{x}_1 x_2 x_4$ (3)

(2) $\vee$ (8)= $\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 = x_2 \bar{x}_3 x_4$ (4)

(3) $\vee$ (4)= $\bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 = \bar{x}_1 x_2 x_3$ (5)

(5) $\vee$ (6)= $x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 = x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4$ (6)

(6) $\vee$ (7)= $x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 = x_1 \bar{x}_2 x_3$ (7)

La prima alipire au participat toti TCC. Deci, nu-s pina cind implicanti primi.

II Alipire.

Numerotam toti <u>*termenii normali conjunctiv*</u>i (TNC). La a doua alipire pot participa doar acei TNC, care au aceiasi indici si se deosebesc printr-un singur rang:

$$(1) \vee (5)= \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 = \overline{x_1} x_2$$

$$(2) \vee (3)= \overline{x_1} x_2 \overline{x_4} \vee \overline{x_1} x_2 x_4 = \overline{x_1} x_2$$

Mai multe alipiri nu exista. Deci au aparut ***implicantii primi*** (ca rezultat al alipirei si TNC, care nu sau alipit)***:***

A: $\overline{x_1} x_2$

B: $x_2 \overline{x_3} x_4$

C: $x_1 \overline{x_2}\, \overline{x_4}$

D: $x_1 \overline{x_2} x_3$

Si Forma Disjunctiva Prescurtata (FDP) are forma

$$\text{FDP}=A \vee \boldsymbol{B} \vee C \vee D= \overline{x_1} x_2 \vee x_2 \overline{x_3} x_4 \vee x_1 \overline{x_2}\, \overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 .$$

Pentru a allege din implicantii primi pe cei esentiali alcatuim tabelul de acoperire

Tabel de acoperire

			Termenii canonici conjunctivi					
	$\overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4$	$\overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 x_4$	$\overline{x}_1 x_2 x_3 \overline{x}_4$	$\overline{x}_1 x_2 x_3 x_4$	$x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4$	$x_1 \overline{x}_2 x_3 \overline{x}_4$	$x_1 \overline{x}_2 x_3 x_4$	$x_1 x_2 \overline{x}_3 x_4$
A: $\overline{x}_1 x_2$	1	1	1	1	0	0	0	0
B: $x_2 \overline{x}_3 x_4$	0	1	0	0	0	0	0	1
C: $x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_4$	0	0	0	0	1	1	0	0
D: $x_1 \overline{x}_2 x_3$	0	0	0	0	0	1	1	0
	A	A	A	A	C	C	D	B

Toti implicantii primi sunt esentiali si FDM coincide FDP:

FDM= A $\vee$ ***B*** $\vee$ *C* $\vee$ *D*= $\overline{x}_1 x_2 \vee x_2 \overline{x}_3 x_4 \vee x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_4 \vee x_1 \overline{x}_2 x_3$

Exemplul 3(FDM): De obtinut FDM prin metoda Quine

pentru funcţia $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ definită prin

$$f = \Sigma(0,2,4,6,7,12,14,15) \qquad (*)$$

$f=1$

FB are tabelul de adevăr

N	x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

Pentru fiecare combinaţie de valori ale argumentelor aplicate în 1 se scriu termenii canonici conjunctivi în care argumentul x_i este luat ca atare sau negat după cum valoarea lui în combinaţia respectivă este 1 sau 0:

TCC: $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \qquad \bar{x}_1x_2x_3x_4$

$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \qquad x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$

$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \qquad x_1x_2x_3\bar{x}_4$

$\bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4 \qquad x_1x_2x_3x_4$

Determinăm FCDN, reunind TCC prin semnul disjuncţiei si numerotind TCC:

FCDN: $f = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee$ *(1)*

$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \vee$ *(2)*

$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee$ *(3)*

$\bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \vee$ *(4)*

$\bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \vee$ *(5)*

$x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee$ *(6)*

$x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \vee$ *(7)*

$x_1 x_2 x_3 x_4$ *(8)*

I Alipire:

(1) $\vee$ (2)= $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4$ (1)

(1) $\vee$ (3)= $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 = \bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4$ (2)

(2) $\vee$ (4)= $\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 = \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_4$ (3)

(3) $\vee$ (4)= $\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_4$ (4)

(3) $\vee$ (6)= $\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 = x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$ (5)

(4) $\vee$ (5)= $\bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 = \bar{x}_1 x_2 x_3$ (6)

(4) $\vee$ (7)= $\bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 = x_2 x_3 \bar{x}_4$ (7)

(5) $\vee$ (8)= $\bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_3 x_4 = x_2 x_3 x_4$ (8)

(6) $\vee$ (7)= $x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 = x_1 x_2 \bar{x}_4$ (9)

(7) $\vee$ (8)= $x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 x_3 x_4 = x_1 x_2 x_3$ (10)

La prima alipire au participat toti TCC. Deci, nu-s pina cind implicanti primi.

II Alipire.

Numerotam toti <u>*termenii normali conjunctiv*</u>i (TNC). La a doua alipire pot participa doar acei TNC, care au aceiasi indici si se deosebesc printr-un singur rang:

(1) $\vee$ (4)= $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2\bar{x}_4 = \bar{x}_1\bar{x}_4$ *A*

(2) $\vee$ (3)= $\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_3\bar{x}_4 = \bar{x}_1\bar{x}_4$ *A*

(4) $\vee$ (9)= $\bar{x}_1 x_2\bar{x}_4 \vee x_1 x_2\bar{x}_4 = x_2\bar{x}_4$ *B*

(5) $\vee$ (7)= $x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_2 x_3\bar{x}_4 = x_2\bar{x}_4$ *B*

(6) $\vee$ (10)= $\bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 = x_2 x_3$ *C*

(7) $\vee$ (8)= $x_2 x_3\bar{x}_4 \vee x_2 x_3 x_4 = x_2 x_3$ *C*

Mai multe alipiri nu exista. Toti TNC au participat la alipire.

Deci au aparut ***implicantii primi***

A: $\bar{x}_1\bar{x}_4$

B: $x_2\bar{x}_4$

C: $x_2 x_3$

Si Forma Disjunctiva Prescurtata (FDP) are infatisarea

FDP=A $\vee$ $\boldsymbol{B} \vee C$= $\overline{x_1}\,\overline{x_4} \vee x_2\overline{x_4} \vee x_2x_3$.

Pentru a allege din implicantii primi pe cei esentiali alcatuim tabelul de acoperire:

Tabel de acoperire

			Termenii canonici conjunctivi					
	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3\overline{x_4}$	$\overline{x_1}x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	$\overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4}$	$\overline{x_1}x_2x_3x_4$	$x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	$x_1x_2x_3\overline{x_4}$	$x_1x_2x_3x_4$
A: $\overline{x_1}\,\overline{x_4}$	1	1	1	1	0	0	0	0
B: $x_2\overline{x_4}$	0	0	1	1	0	1	1	0
C: x_2x_3	0	0	0	1	1	0	1	1
	A	A	A	A	C	B	C	C

Toti implicantii primi sunt esentiali si FDM coincide FDP:

FDM= A $\vee$ $\boldsymbol{B} \vee C$= $\overline{x_1}\,\overline{x_4} \vee x_2\overline{x_4} \vee x_2x_3$

6.2Metoda Quine-McCluskey

Metoda prezentată mai sus poartă numele lui Quine, care a propus-o, şi are un neajuns evident, datorat necesităţii comparării la primul pas a tuturor perechilor de termeni (complexitatea creşte în mod factorial). Dar aceasta nu este necesar, deoarece operaţia de alipire parţială poate fi executată doar dacă doi termeni se deosebesc printr-un singur bit. McCluskey a propus să se transcrie în binar TCC şi să se împartă pe grupe după numărul de biţi 1. Vom avea grupa 0, grupa 1, etc. Alipirile parţiale pot avea loc numai pentru elementele grupelor vecine, deoarece aceste grupe diferă între ele cu un singur bit 1. În locul variabilelor eliminate la alipire se trece o liniuţă (spatiu) . Metoda Quine-McCluskey presupune îndeplinirea paşilor:

1. Ordonarea echivalenţilor binari ai TCC, corespunzători valorilor 1 ale FB, pe nivele începând cu nivelul 0, unde numarul nivelului coincide cu numarul de 1 in combinatie;

2. Determinarea implicanţilor primi prin comparaţii succesive ale echivalenţilor binari, aparţinând nivelelor adiacentesi alipirea celor care e posibil;

La I alipire se alipesc termenii care se deosebesc printr-o singura valoare si in ultima coloana se marcheaza care termen cu care s-a alipit.

Vom nota prin A, B,... implicanţii primi, adică acei termeni ce nu se mai pot reduce. La a II alipire putem cupla mai departe conjuncţii vecine, cu simbolul „-” în acelaşi rang şi pentru care echivalenţii binari diferă într-un singur rang. Conjuncţia, care nu se mai poate cupla cu nici o altă conjuncţie din tabel, va fi un implicant prim al funcţiei date.

Prin cuplarea conjuncţiei cu echivalentul binar (000-) cu conjuncţia cu (001-) rezultă conjuncţia cu echivalentul binar (00--), etc.

3. Determinarea implicantilor primi cu ajutorul tabelului de acoperire al funcţiei si calculul formal de determinare a tuturor soluţiilor funcţiei.

Exemplul 1. Să se determine după metoda lui Quine-McCluskey FDM a funcţiei $f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)=\sum_{f=1}(0,1,2,3,4,7,8,11,12,13,15)$.

Tabelul de adevar al acestei functii:

N	x_1	x_2	x_3	x_4	f	N	x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0	1	8	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	9	1	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1	10	1	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1	11	1	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1	12	1	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0	13	1	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0	14	1	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1	15	1	1	1	1	1

Etapa I. Ordonarea pe nivele si marcajul pentru prima alipire

Nivelele	Echivalentul binar	Marcajul TCC care se alipesc
0	0000 /0	1,2,3,4
1	0001 /1 0010 /2 0100 /4 1000 /8	1,5 2,6 3,7 4,8
2	0011 /3 1100 /12	5,6,9,10 7,8,11
3	0111 /7 1011 /11 1101 /13	9,12 10,13 11,14
4	1111 /15	12,13

Etapa a II-a. Determinarea implicanţilor primi.

Nivelul o	000- 00-0 0-00 -000	1 2 3 4
Nivelul 1	00-1 001- -100 1-00	2 1 4 3
Nivelul 2 A	0-11 -011 110-	5 6
Nivelul 3 B	-111 1-11 11-1	6 5

Fig.6.2.2. A doua alipire

Prin A,B,.. vom nota implicanţii, adică acei termeni ce nu se mai pot reduce(alipi). În continuare cuplăm conjuncţii vecine care sunt de acelaşi rang.

Conjuncţia care nu se mai poate cupla cu nici o altă conjuncţie din nivelul adiacent al tabelului, va fi un implicant prim al funcţiei date.

La a doua alipire participa doar termenii din nivelele adiacente care contin spatiul (-) pe aceeasi locatie Prin cuplarea conjuncţiei cu echivalentul binar (000-) cu conjuncţia cu (001-) rezultă conjuncţia cu echivalentul binar (00--), etc.

În figura 6.2.3 este prezentat al doilea tabel de comparare.

C D	00-- --00
E	--11

Fig.6.2.3. A doua alipire

Etapa a III-a. Construim tabelul de acoperire ca si in cazul metodei Quine:

Implicantul prim	***Echivalentii binari al TCC iniţiali***										
	0000	0001	0010	0011	0100	0111	1000	1011	1100	1101	1111
A (110-)	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
B(11-1)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
C (00--)	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
D (--00)	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0
E (--11)	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1
FDM_1	C	C	C	C	D	E	D	E	A	A	E
FDM_2	C	C	C	C	D	E	D	E	D	B	B

FDM are două expresii:

$FDM_1 = A+C+D+E = x_1 x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee \overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_3 x_4$ sau

$FDM_2 = B+C+D+E = x_1 x_2 x_4 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee \overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_3 x_4$.

Constatăm, că forma minimală nu este unică.

Exemplul 2.

De obtinut FDM prin metoda Quine-McCluskey

pentru funcţia $f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)$ definită prin

$f=\Sigma(0,2,4,6,7,12,14,15)$

$f=1$

FB are tabelul de adevăr

N	x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

Etapa I. Ordonarea pe nivele si marcajul pentru prima alipire

Nivelele	Echivalentul binar	Marcajul TCC care se alipesc
0	0000 /0	1,2
1	0010 /2 0100 /4	1,3 2,4,5
2	0110 /6 1100 /12	3,4,6,7 5,8
3	0111 /7 1110 /14	6,9 7,8,10
4	1111 /15	9,10

Etapa a II-a. Determinarea implicanţilor primi.

Nivelul o	00-0 0-00	1 2
Nivelul 1	0-10 01-0 -100	2 1,3 4
Nivelul 2	011- -110 11-0	5 4,6 3
Nivelul 3	-111 111-	6 5

al doilea tabel de comparare.

A	0--0 0--0
B	-1-0 -1-0
C	-11- -11-

Mai multe alipiri nu exista. Toti TNC au participat la alipire.

Construim tabelul de acoperire ca si in cazul metodei Quine:

Mai multe alipiri nu exista. Toti TNC au participat la alipire.

Deci au aparut ***implicantii primi***

A: 0—0 ($\overline{x_1}\,\overline{x_4}$)

B: -1-0 $(x_2\overline{x_4})$

C: -11- (x_2x_3)

Si Forma Disjunctiva Prescurtata (FDP) are infatisarea

FDP=A$\vee$ $\boldsymbol{B}$ $\vee$ C= $\overline{x_1}\,\overline{x_4} \vee x_2\overline{x_4} \vee x_2x_3$.

Pentru a allege din implicantii primi pe cei esentiali alcatuim tabelul de acoperire:

Tabel de acoperire

			Termenii canonici conjunctivi					
	0000	*0010*	*0100*	*0110*	*0111*	*1100*	*1110*	*1111*
A: 0--0	1	1	1	1	0	0	0	0
B: *-1-0*	0	0	1	1	0	1	1	0
C: *-11-*	0	0	0	0	1	0	1	1
	A	A	A	A	C	B	C	C

Toti implicantii primi sunt esentiali si FDM coincide FDP:

FDM= A$\vee$ $\boldsymbol{B}$ $\vee$ C= $\overline{x_1}\,\overline{x_4} \vee x_2\overline{x_4} \vee x_2x_3$

Exemplul 3.: De obtinut FDM prin metoda Quine-McCluskey pentru funcţia $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ definită prin

f=Σ(4,5,6,7,8,10,11,13) (*)

f=1

FB are tabelul de adevăr

N	x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	0

Etapa I. Ordonarea pe nivele si marcajul pentru prima alipire

Nivelele	Echivalentul binar	Marcajul TCC care se alipesc
0		
1	0100 /4 1000 /8	1,2 3
2	0101 /5 0110 /6 1010 /10	1,4,5 2,6 3,7
3	0111 /7 1011 /11 1101 /13	4,6 7 5
4		

Etapa a II-a. Determinarea implicanţilor primi.

Nivelul o		
Nivelul 1	010- 01-0 10-0	1 2 C
Nivelul 2	01-1 -101 011- 101-	2 B 1 D
Nivelul 3		

al doilea tabel de comparare.

A	01-- 01--

Mai multe alipiri nu exista. Nu toti TNC au participat la alipire.

Deci au aparut ***implicantii primi*** (ca rezultat al alipirei si TNC, care nu sau alipit)***:***

A: 01-- $(\overline{x_1} x_2)$

B: -101 $(x_2 \overline{x_3} x_4)$

C: 10-0 $(x_1 \overline{x_2}\, \overline{x_4})$

D: 101- $(x_1 \overline{x_2} x_3)$

Si Forma Disjunctiva Prescurtata (FDP) are forma

FDP=A $\vee$ ***B*** $\vee$ *C* $\vee$ *D*= $\overline{x_1} x_2 \vee x_2 \overline{x_3} x_4 \vee x_1 \overline{x_2}\, \overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_2} x_3$.

Pentru a allege din implicantii primi pe cei esentiali alcatuim tabelul de acoperire

Tabel de acoperire

			Termenii canonici conjunctivi					
	0100	0101	0110	0111	*1000*	*1010*	*1011*	*1101*
A: *01*--	1	1	1	1	0	0	0	0
B: *-101*	0	1	0	0	0	0	0	1
C: *10-0*	0	0	0	0	1	1	0	0
D: *101-*	0	0	0	0	0	1	1	0
	A	A	A	A	C	C	D	B

Toti implicantii primi sunt esentiali si FDM coincide FDP:

FDM= $A \vee \boldsymbol{B} \vee C \vee D = \bar{x}_1 x_2 \vee x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3$

Tema 6.3 METODA DIAGRAMEI KARNAUGH

Diagramele Karnaugh au fost concepute pentru compactizarea tabelelor de adevar utilizate la simplificarea (minimizarea) FB şi reprezintă un tablou bidimensional, care pentru o funcţie de n argumente conţine 2^p linii şi 2^q coloane, iar $p+q = n$.

Daca n–par, atunci $p=q=n/2$, iar daca n– impar, atunci $p=q+1$.

Se aplica cu success pentru n=3, 4, 5. Mai dificil pentru n ≥6

In diagrama Karnaugh titlurile coloanelor si liniilor sunt formate din combinatiile posibile ale argumentelor dispuse in cod Gray (binar reflectat), adica titlurile lor adiacente difera printr-un singur rang (valoare), ceia ce asigura relatia de adiacenta (alipire) intre cimpurile diagramei.

Pentru functia de 4 argumente combinaţiile valorilor argumentelor x_1 şi x_2 sunt dispuse în partea superioară a diagramei, iar cele ale argumentelor x_3 şi x_4 vertical în partea stângă. La intersecţia unei coloane şi a unei linii este câmpul diagramei în care se trece 0 sau 1, după cum valoarea funcţiei în tabelul de adevăr este 0 sau 1.

Pentru ilustrare consideram exemplul din tema precedenta:

FB are tabelul de adevăr

N	x_1	x_2	x_3	x_4	f	N	x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0	0	8	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	9	1	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0	10	1	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0	11	1	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1	12	1	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1	13	1	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1	14	1	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1	15	1	1	1	1	0

sau $f=\Sigma(4,5,6,7,8,10,11,13)$

$f=1$

De reprezentat FB prin diagrama sa Karnaugh.
Deci, titlurile coloanelor si liniilor sunt dispuse in ordinea
00 01 11 10

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	1	0	1
10	0	1	0	1

Este demonstrate ca:

Reuniunea a două locaţii vecine ce contin **1** a diagramei(situate alaturea in aceias linie (coloana) sau la extremitatile ei) contribuie la excluderea (eliminarea) variabilei, valoarea căreia se schimbă la trecerea de la o locaţie la alta.

Reuniunea a două perechi de locaţii vecine (pe orizontală sau verticală, sau la extremitatile liniilor (coloanelor), sau varfurile diagramei), care contin **1** oferă posibilitatea excluderii din expresie a două variabile, valorile carora se schimba la trecerea de la o locatie la alta), reuniunea a patru perechi de locaţii vecine aduce la excluderea a trei variabile dupa acelasi principiu

Adica la alipirea a $\mathbf{2^n}$ locatii adiacente care contin **1** se elimina **n** variabile si anume acelea a caror valoare se modifica la trecerea de la o locatie la alta.

La alipire se incepe cu cel mai mare numar posibil de locatii, care pot fi alipite.

Forma disjunctivă minimă (FDM) se obţine prin alipirea mintermenilor prin încercuirea poziţiilor cu valoarea 1:

Determinăm FCDN, reunind TCC prin semnul disjuncţiei:

Pentru exemplu adus de obtinut FDM funcţiei logice date cu ajutorul diagramei Karnaugh

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	1	0	1
10	0	1	0	1

Alipim elementele din coloana II.

Asa cum in coloana II x_1 si x_2 pastreaza neschimbate valorile lor , iar x_3 isi schimba valoarea la trecerea de la linia a III la a IV si x_4 isi schimba valoarea la trecerea de la linia a I la a II rezulta ca in TCC corespunzator ramine doar $\overline{x_1}x_2$, fiindca lui *x_1 ii corespunde 0*, iar lui *x_2 ii corespunde 1*.

x_3x_4	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	1	0	1
10	0	1	0	1

Alipim elementele din coloana IV.

Asa cum in coloana IV x_1 si x_2 pastreaza neschimbate valorile lor , iar x_3 nu-si schimba valoarea la trecerea de la linia a III la a IV si x_4 isi schimba valoarea la trecerea de la linia a III la a IV rezulta ca in TCC corespunzator ramine doar $x_1\overline{x_2}x_3$.

x_3x_4	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	1	0	1
10	0	1	0	1

Alipim elementele din linia II de pe locul 2 si 3.

Asa cum in linia II x_3 si x_4 pastreaza neschimbate valorile lor (0 si 1) , iar x_1 isi schimba valoarea la trecerea de la coloana a II la a III(deci este eliminat) si x_2 isi pastreaza valoarea 1 la trecerea de la coloana a II la a III rezulta ca in TCC corespunzator ramine doar $x_2\overline{x_3}x_4$. Alipim elementele de la extremitati din coloana IV.

x_3x_4	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	1	0	1
10	0	1	0	1

Asa cum in coloana IV x_1 si x_2 pastreaza neschimbate valorile lor(1 si 0), iar x_3 isi schimba valoarea la trecerea de la linia a I la a IV si x_4 isi pastreaza valoarea la trecerea de la linia a I la a IV rezulta ca in TCC corespunzator ramine doar $x_1\overline{x_2}\,\overline{x_4}$.

Deoarece toate celulele care contin 1 au participat la alipire rezulta ca $FDM = \overline{x_1}x_2 \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_4} \vee x_2\overline{x_3}x_4 \vee x_1\overline{x_2}x_3$

Forma conjunctivă minimă (FCM) se obţine prin alipirea mintermenilor prin încercuirea poziţiilor cu valoarea 0:

$$FCM = (x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4})$$

Aceste încercuiri pot cuprinde un număr 2^n (2,4,8 etc) de locaţii vecine (adiacente) ale diagramei. Trebuie de adăugat că în diagramă, locaţiile aflate la extremurile rîndurilor sau a coloanelor se consideră adiacente şi pot participa la o încercuire de eliminare.

Exemplu 2. Să se determine FDM si FCM a funcţiei

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum(0,1,2,3,4,7,8,10,12,13,15)$$

după metoda diagramei Karnaugh.

Completam diagram Karnaugh:

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	0	1	0
11	1	1	1	0
10	1	0	0	1

Alipim elementele din prima linie.

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	0	1	0
11	1	1	1	0
10	1	0	0	1

Obtinem $TCD_1 = \overline{x}_3 \overline{x}_4$,fiindca x_3 si x_4 in linia I pastreaza valorile lor (0 0), iar x_1 isi scimba valoarea la trecerea de la coloana I la a II si x_2 isi scimba valoarea la trecerea de la coloana II la a III.

Alipim elementele din prima coloana:

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	0	1	0
11	1	1	1	0
10	1	0	0	1

Obtinem TCD$_2$= $\overline{x_1}\,\overline{x_2}$.

Alipim elementele din virfurile diagramei:

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	0	1	0
11	1	1	1	0
10	1	0	0	1

Variabila x_1 isi schimba valoarea 0 in 1 la trecerea de la coloana I la IV. Deci ea este eliminata. Variabila x_2 nu-si schimba valoarea 0 la trecerea de la coloana I la IV. Deci ea intra-n TCD ca $\overline{x_2}$. Variabila x_3 isi schimba valoarea 0 in 1 la trecerea de la linia I la IV. Deci ea este eliminata. Variabila x_4 nu-si schimba valoarea 0 la trecerea de la linia I la IV. Deci ea intra-n TCD ca $\overline{x_4}$. Obtinem

TCD3= $\overline{x_2}\,\overline{x_4}$.

Alipim elementele II si al III din coloana a III

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	0	1	0
11	1	1	1	0
10	1	0	0	1

Obtinem TCD4= $x_1x_2x_4$.

Alipim elementele II si al III din linia a III (se poate I cu II)

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	0	1	0
11	1	1	1	0
10	1	0	0	1

Obtinem $TCD_5 = x_2x_3x_4$.

$FDM = \bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_4 \vee x_2x_3x_4$.

Asa cum exista alternative de alegere TCD_4 si TCD_5 mai exista inca 2 FDM.