	$\theta = 0$ (0°)	$\pi/6$ (30°)	$\pi/4$ (45°)	$\pi/3$ (60°)	$\pi/2$ (90°)	$2\pi/3$ (120°)	$3\pi/4$ (135°)	$5\pi/6$ (150°)	π (180°)	$3\pi/2$ (270°)	2π (360°)
$\sin\theta$	0	1/2	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	1/2	0	–1	0
$\cos\theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	1/2	0	–1/2	$-1/\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}/2$	–1	0	1
$\tan\theta$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	–1	$-1/\sqrt{3}$	0	—	0
$\csc\theta$	—	2	$\sqrt{2}$	$2/\sqrt{3}$	1	$2/\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	—	–1	—
$\sec\theta$	1	$2/\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	—	–2	$-\sqrt{2}$	$-2/\sqrt{3}$	–1	—	1
$\cot\theta$	—	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0	$-1/\sqrt{3}$	–1	$-\sqrt{3}$	—	0	—

1) $|b| = |\lambda||a|$;

2) vectorii $\overline{b}$ şi $\overline{a}$ sunt cooorientaţi, dacă $\lambda > 0$ şi opus orientaţi, dacă $\lambda < 0$;

3) $\overline{b} = \overline{0}$, dacă $\lambda = 0$ sau $\overline{a} = \overline{0}$.

Produsul vectorului $\overline{a}$ la numărul λ se notează cu $\lambda\ \overline{a}$.

Proprietăţile operaţiilor liniare asupra vectorilor. Operaţiile de adunare şi înmulţire cu un scalar definite mai sus se numesc liniare. Vom examina proprietăţile de bază ale acestor operaţii şi anume :

1) $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$,

2) $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$,

3) $\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$;

4) pentru orice vector $\overline{a}$ există un astfel de vector, care adunat cu vectorul $\overline{a}$, are ca sumă vectorul nul. Acest vector este notat cu $-\overline{a}$, numit **opusul** vectorului $\overline{a}$: $\overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}$;

5) $(\alpha\beta)\overline{a} = \alpha(\beta\overline{a})$;

6) $(\alpha + \beta)\overline{a} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{a}$,

7) $\lambda(\overline{a} + \overline{b}) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b}$,

8) $\overline{a} \cdot 1 = \overline{a}$, pentru orice numere reale α, β, γ şi pentru orice vectori $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.

Produsul scalar al vectorilor $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ se notează prin unul $(\overline{a}, \overline{b})$ sau $\overline{a} \cdot \overline{b}$. Deci,

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos\left(\overline{a} \,\hat{,}\, \overline{b}\right).$$

Produsul scalar al vectorilor posedă următoarele **proprietăţi**:

1) $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$

2) $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot pr_{\overline{a}}\overline{b} = |\overline{b}| \cdot pr_{\overline{b}}\overline{a}$.

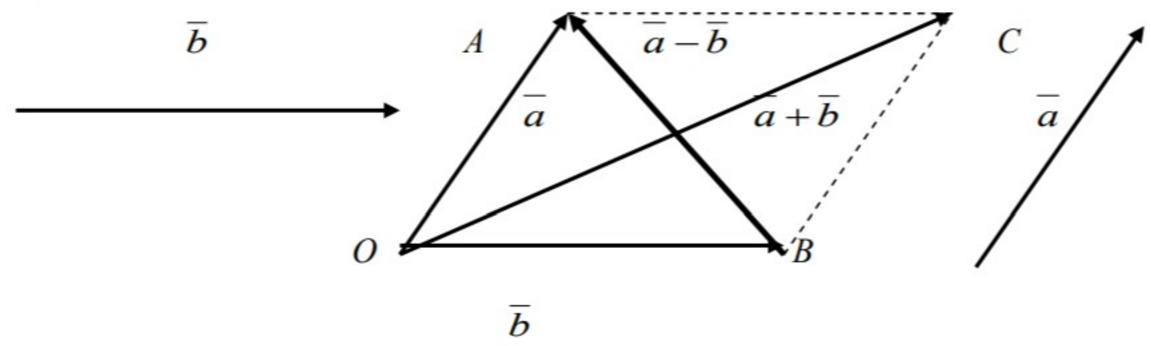
3) Pentru ca doi vectori să fie ortogonali e necesar şi suficient ca $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$

4) $(\lambda\overline{a}) \cdot \overline{b} = \lambda(\overline{a} \cdot \overline{b}) = \overline{a} \cdot (\lambda\overline{b})$, $(\lambda \in R)$

5) $\overline{a} \cdot (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}$

6) $\overline{a} \cdot \overline{a} = \overline{a}^2 = |\overline{a}|^2$

7) Din proprietatea 6) rezultă că $\overline{i} \cdot \overline{i} = |\overline{i}|^2 = 1 = \overline{j} \cdot \overline{j} = \overline{k} \cdot \overline{k}$ **,** iar din proprietatea 3) avem că $\overline{i} \cdot \overline{j} = \overline{j} \cdot \overline{k} = \overline{k} \cdot \overline{i} = 0$



1. $\overline{a}\cdot\overline{b}=\left(x_1\overline{i}+y_1\overline{j}+z_1\overline{k}\right)\cdot\left(x_2\overline{i}+y_2\overline{j}+z_2\overline{k}\right)=x_1x_2\cdot\overline{i}^2+x_1y_2\overline{i}\cdot\overline{j}+x_1z_2\overline{i}\cdot\overline{k}+$

$$+y_1x_2\overline{j}\cdot\overline{i}+y_1y_2\overline{j}^2+y_1z_2\overline{j}\cdot\overline{k}+z_1x_2\overline{k}\cdot\overline{i}+z_1y_2\overline{k}\cdot\overline{j}+z_1z_2\overline{k}^2=$$

$$=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

$|\overline{a}|=\sqrt{\overline{a}^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

6. Proiecția vectorului $\overline{b}=x_2\overline{i}+y_2\overline{j}+z_2\overline{k}$ pe vectorul nenul $\overline{a}=x_1\overline{i}+y_1\overline{j}+z_1\overline{k}$ poate fi calculată după formula $pr_{\overline{a}}\overline{b}=\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}$.

7. Vectorii $\overline{a}=x_1\overline{i}+y_1\overline{j}+z_1\overline{k}$, și $\overline{b}=x_2\overline{i}+y_2\overline{j}+z_2\overline{k}$ sunt ortogonali dacă și numai dacă $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$

1) $\overline{a}\times\overline{b}.=\overline{0}$ dacă și numai dacă acești vectori sunt coliniari.

2) $\overline{a}\times\overline{b}.=-\overline{b}\times\overline{a}$.

3) $\lambda\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)=\left(\lambda\overline{a}\right)\times\overline{b}=\overline{a}\times\left(\lambda\overline{b}\right)$.

4) $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\times\overline{c}=\overline{a}\times\overline{c}+\overline{b}\times\overline{c}$

5) $\overline{i}\times\overline{i}=\overline{j}\times\overline{j}=\overline{k}\times\overline{k}=\overline{0}$, $\overline{i}\times\overline{j}=-\overline{j}\times\overline{i}=\overline{k}$, $\overline{j}\times\overline{k}=-\overline{k}\times\overline{j}=\overline{i}$, $\overline{k}\times\overline{i}=-\overline{i}\times\overline{k}=\overline{j}$

$$\overline{a}\times\overline{b}=\left(x_1\overline{i}+y_1\overline{j}+z_1\overline{k}\right)\times\left(x_2\overline{i}+y_2\overline{j}+z_2\overline{k}\right)=x_1x_2\overline{i}\times\overline{i}+$$

$$+y_1x_2\overline{j}\times\overline{i}+z_1x_2\overline{k}\times\overline{i}+x_1y_2\overline{i}\times\overline{j}+y_1y_2\overline{j}\times\overline{j}+z_1y_2\overline{k}\times\overline{j}+x_1z_2\overline{i}\times\overline{k}+$$

$+y_1z_2\overline{j}\times\overline{k}+z_1z_2\overline{k}\times\overline{k}$. De unde

$$\overline{a}\times\overline{b}=\overline{i}(y_1z_2-y_2z_1)-\overline{j}(x_1z_2-x_2z_1)+\overline{k}(x_1y_2-x_2y_1)$$ sau

$$\overline{a}\times\overline{b}=\overline{i}\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ z_1 & z_2\end{vmatrix}-\overline{j}\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ z_1 & z_2\end{vmatrix}+\overline{k}\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$$

$$\overline{abc}=\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=x_3\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}-y_3\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+z_3\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$$

1. Volumul piramidei, Condiția necesară

al cu $\frac{1}{6}\left|\overline{abc}\right|$. ia: $\overline{abc} \neq 0$, sau

Propoziția 1.5.1. Dreptei l îi corespunde o ecuație de gradul întâi cu două necunoscute $Ax + By + C = 0$. Și invers, fiecărei ecuații de tipul indicat îi corespunde o dreaptă bine determinată din plan.

$\vec{n} = \{A, B\}$, perpendicular dreptei l, numit **vector normal**

completă și poate fi scrisă sub forma $\frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1$ sau $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ **(1.5.3)**, numită **ecuație a dreptei „în segmente".** Numerele a și b sînt segmente tăiate de dreaptă pe

vector director vectorul $\vec{q} = \{m, n\}$

Fie punctele distincte $M_1(x_1\, y_1)$ și $M_2(x_2\, y_2)$. Drept vector director al dreptei M_1M_2 poate servi vectorul $\vec{q} = \overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1\}$. Folosind formula **(1.5.4),** obținem: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ **(1.5.5)** – **ecuația dreptei ce trece prin două puncte**.

Ecuația **(1.5.5)** mai poate fi scrisă sub forma: $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y - y_1 \end{vmatrix} = 0$ sau $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ **(1.5.6)**

Fie dreapta M_1M_2 cu $M_1(x_1y_1)$, $M_2(x_2y_2)$, $x_1 \neq x_2$. Evident, **panta** ei este $m = tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ **(1.5.8).**

Vectorii normali respectivi $\overrightarrow{n_1} = \{A_1, B_1\}$ și $\overrightarrow{n_2} = \{A_2, B_2\}$ formează un unghi, congruent cu o pereche dintre unghiurile formate de l_1 și l_2.

Atunci $\cos(\sphericalangle l_1, l_2) = \cos\left(\sphericalangle \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right) = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \bullet \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$.

Avem $A_{M_1M_2M_3} = \frac{1}{2}\left|\overline{M_1M_2}\right| \cdot \left|\overline{M_1M_3}\right| \sin\left(\sphericalangle M_2M_1M_3\right)$.

Deci, $A_{\Delta M_1M_2M_3} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \cdot \frac{\left|a_1b_2 - b_1a_2\right|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = \frac{1}{2}\left|a_1b_2 - b_1a_2\right| = \frac{1}{2} \bmod \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

Astfel $A_{\Delta M_1M_2M_3} = \frac{1}{2} \bmod \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$ sau $A_{\Delta M_1M_2M_3} = \frac{1}{2} \bmod \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ **(1.5. 11)**