Introducere

Dispozitiv numeric – orice componentă a calculatorului care poate fi descrisă cu ajutorul logicii algebrei Booleene.

Sinteza dispozitivului numeric - este procesul de elaborarea structurii dispozitivului numeric începând cu descrierea destinaţiei dispozitivului respectiv şi terminînd cu schema definitivă a acestuia.

Analiza - analiza dispozitivului numeric reprezintă procedura de descriere a funcţionării dispozitivului numeric respectiv şi de descriere formală a lui în cazul când schema acestui dispozitiv deja există.

Disciplina ASDN este destinată studierii metodelor de sinteza elementelor funcţionale, a automatelor numerice, de comandă şi operaţonale care stau la baza oricărui calculator numeric.

Algebra logică sau algebra booleană este ştiinţa care studiază propoziţiile. Prin noţiunea da propoziţie se înţelege o expresie care comunică o informaţie şi această informaţie poate avea doar două sensuri: adevărat sau fals(1 şi 0). Aceste stări le pot avea orice dispozitiv tehnic.

<u>Capitolul I</u>

Bazele logice a calculatoarelor numerice

<u>Tema: Noţiuni de bază ale algebrei logice (Booleene).</u>

1. **Variabile şi funcţii algebrei booleene.**
2. **Axiomele algebrei booleene**.

1. Variabila logică (booleeană) este o variabilă care poate avea doar două valori 0 şi 1. Pentru 1 se subînţelege că această variabilă reprezintă un adevăr iar pentru 0 – reprezintă o eroare.

Funcţia logică este o funcţie dependentă doar de variabilele logice şi care poate avea numai valori de 0 şi 1.

Dependenţa valorii funcţiei de valorile variabilelor este determinată de operaţii logice îndeplinite în funcţia respectivă pentru a afla valoarea acesteia. Există mai multe tipuri de funcţii booleene.

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

f_0 - constanta zero, fals total.

f_1 - funcţia ŞI, înmulţirea logică, conjuncţia: $f_1 = x_1 x_2 = x_1 \& x_2 = x_1 \wedge x_2$ - AND

f_2 - funcţia inhibare $x_1\overline{x_2}$

f_3 - identitatea x_1;

f_4 - funcţia inhibare $\overline{x_1}x_2$

f_5 - identitatea x_2

f_6 - SAU Exclusiv, suma modulo doi: $f_6 = x_1 \oplus x_2$ - XOR

f_7 - disjuncţia, funcţia SAU, adunarea logică: $f_7 = x_1 \vee x_2 = x_1 + x_2 =$ - OR

f_8 - funcţia Peerce, SAU- NU negarea disjuncţiei: $f_8 = \overline{x_1 \vee x_2}$ NOR

f_9 - funcţia SAU Exclusiv negat, $f_9 = \overline{x_1 \oplus x_2}$ - XNOR

$f_{10} = \overline{x_2}$

f_{11} - anihilare x_2 = $x_1 \vee \overline{x_2}$

$f_{12} = \overline{x_1}$

f_{13} - anihilare x_1 = $\overline{x_1} \vee x_2$

f_{14} - ŞI-NU, funcţia Sheffer: $f_{14} = \overline{x_1 x_2}$; $f_{14} = \overline{x_1 \& x_2} = \overline{x_1 \wedge x_2}$ - NAND

f_{15} - constanta unu

Pentru prelucrarea informaţiei logice se utilizează o serie de **legi şi axiome**.

<u>Legile:</u>

Legea comutativă: $x \vee y = y \vee x$ $xy = yx$

Legea asociativă: $x \vee y \vee z = (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$

Legea distributivă: $x(y \vee z) = xy \vee xz$

Legea complimentarii: $x \vee \bar{x} = 1$, $x \wedge \bar{x} = 0$

Legea dublei negații: $\overline{\overline{x}} = x$; $\overline{\overline{0}} = 0$; $\overline{\overline{1}} = 1$;

Legea absorbtiei: $x \vee xy = x(1 \vee y) = x$; $x(x \vee y) = x$

Legea semiabsorbtiei: $x \vee (\overline{x} \wedge y) = x \vee y$; $x \wedge (\overline{x} + y) = x \wedge y$

Legea înlocuirii: $x \vee x = x$; $x \wedge x = x$

Legea reuniunii și intersecției: $x \vee 0 = x$; $x \wedge 1 = x$; $x \vee 1 = 1$; $x \wedge 0 = 0$

Legea alipirii: $x_1 x_2 \vee x_1 \overline{x_2} = x_1$ $(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee \overline{x_2}) = x_1$

Axiome: $\overline{0} = 1$; $\overline{1} = 0$

<u>Legile lui De Morgan:</u>

$x \wedge y = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$

$x \vee y = \overline{\overline{x} \wedge \overline{y}}$

Poartă logică este un dispozitiv electronic numeric elementar care implementează o funcțiune logică elementară, numărul de intrări al căruia este egal cu numărul variabilelor funcției și o singură ieșire. Porțile logice sunt structurile de bază care permit realizarea unor funcții logice complexe în circuitele integrate digitale.

Tema: Formele de reprezentare a funcţiilor logice

Există trei forme de reprezentare a funcţiilor logice:

- **Formă grafică** (tabel de adevăr, shema logică, diagrama de timp)
- **Formă numerică** – se reprezintă cu ajutorul echivalenților zecimali a codurilor de intrare pentru care funcția ea valoarea 1 sau 0

Dacă fincția este reprezentată $F(x_1, x_2, x_3) = \sum(1, 2, 5, 7)$ sau $F(x_1, x_2, x_3) = \vee(1,\ 2,\ 5,\ 7)$ atunci ea are valoarea 1 pentru combinațiile indicate în paranteze.

Dacă fincția este reprezentată $F(x_1, x_2, x_3) = \prod(0, 3, 4.6)$ sau $F(x_1, x_2, x_3) = \wedge(1,\ 2,\ 5,\ 7)$ atunci ea are valoarea 0 pentru combinațiile indicate în paranteze.

- **Formă analitică (algebrică)** este reprezentată în Forma Disjunctivă Normală Perfectă, Forma Conjunctivă Normală Perfectă și în formele elementare ale acestora.

Formele grafice de reprezentare a funcțiilor logice

Tabelul de adevăr:

Tabelul de adevăr reprezintă lista valorilor funcţiei logice pentru fiecare combinaţie a variabililor de intrare sau pentru fiecare cuvânt de intrare. Un tabel de adevăr care reprezintă m funcţii de n variabile fiecare va avea următoarele dimensiuni n + m – coloane şi 2^n – rânduri. Unde **n** este numărul de variabile iar **m** numărul de funcţii. În acest tabel de adevăr sînt incluse toate combinaţiile posibile care le pot avea variabilele. În fiecare rând este reprezentată una din combinaţiile posibile a variabilelor de intrare şi valorile tutror funcţiilor pentru respectiva combinaţie. Primele n coloane a tabelului de adevăr reprezintă valorile variabilelor funcţiilor câte o coloană pentru fiecare variabilă iar următoarele m coloane reprezintă valorile funcţiei respective pentru fiecare variabilă.

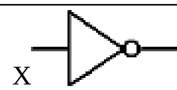
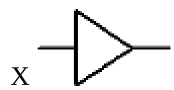
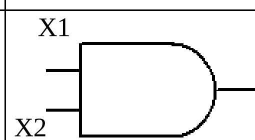
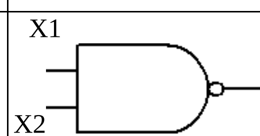
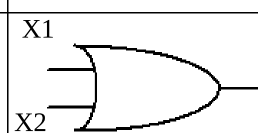
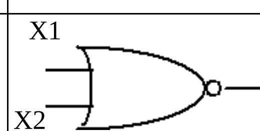
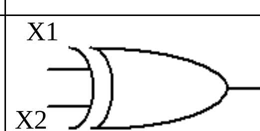
Exemplu de tabel de adevăr cu trei variabile şi două funcţii la ieşire:

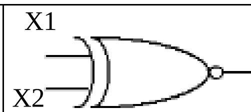
Nr	X1	X2	X3	Y
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Schema logică

În schema logică fiecare operaţie logică este înlocuită printr-un echivalentă aşa numită poartă logică care prin diferite mijloace tehnice poate materializa funcţie logică.

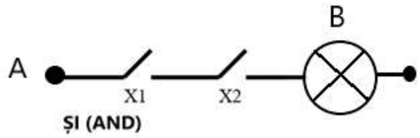
Poartă logică – este reprezentarea tehnică (materială) a unei operaţii logice sau cu alte cuvinte elementul logic realizează una din operaţiile logice având ca bază de realizare procese electronice, electrice sau mecanice. Fiecare operaţie logică are un semn convenţional care se realizează cu ajutorul porțilorlor logice.

Denumirea	Funcția	Simbolul	Tabelul de adevăr
Inversor NOT	$f = x$		x f 0 1 1 0
Buffer	$f = x$		x f 0 0 1 1
Poartă logică ȘI AND	$f = x_1 \cdot x_2$		x_1 x_2 f 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1
Poartă logică ȘI-NU NAND Shaffer	$f = \overline{x_1 \cdot x_2}$		x_1 x_2 f 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0
Poartă logică SAU OR	$f = x_1 + x_2$		x_1 x_2 f 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1
Poartă logică SAU-NU NOR Pirs	$f = \overline{x_1 + x_2}$		x_1 x_2 f 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 0
Poartă logică SAU EXCLUSIV XOR	$f = x_1 \oplus x_2$		x_1 x_2 f 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 0

Poartă logică SAU-NU EXCLUSIV XNOR	$f=\overline{x_1 \oplus x_2}$		x1 x2 f 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 1

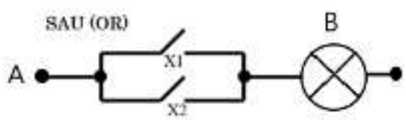
Logica ȘI poate fi reprezentată în felul următor:

Dacă aplicăm tensine și curent la punctul A al circuitului becul B va fi aprins doar în cazul în care ambele întrerupătoarele x_1 și x_2 vor fi în poziția închis.



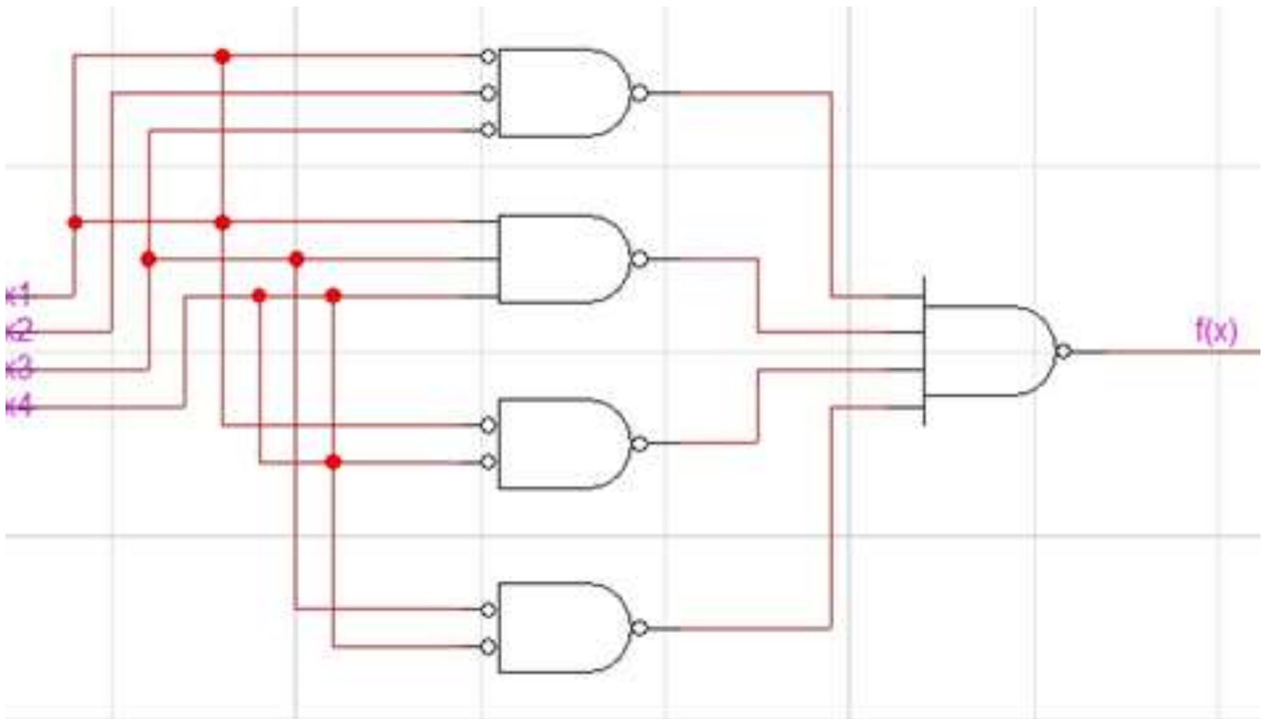
Logica SAU poate fi reprezentată în felul următor:

Dacă aplicăm tensine și curent la punctul A al circuitului becul B va fi aprins dacă cel puțin unul din întrerupătoarele x_1 și x_2 va fi în poziția închis.



Pentru reprezentarea funcţiilor logice cu ajutorul elementelor logice se procedează în felul următor **:** la început funcţia se reprezintă în una din formele analitice normale care este mai apropiată de setul de elemente logice având la dispoziţie pentru realizarea funcţiei logice respective. După aceea fiecare operaţie logică a formei analitice se înlocuieşte cu elementul logic respectiv dacă pentru unele operaţii logice în calitate de variabilă se folosesc rezultatele altor operaţii logice atunci intrările acestor elemente logice se conectează la ieşirile elementelor logice care realizează operaţia logică respectivă:

Exemplu



Costul schemei logice reprezintă totalitatea intrărilor în porți logice care realizează o funcție logică. Costul se notează cu **C** și se măsoară în unități convenționale **λ**.

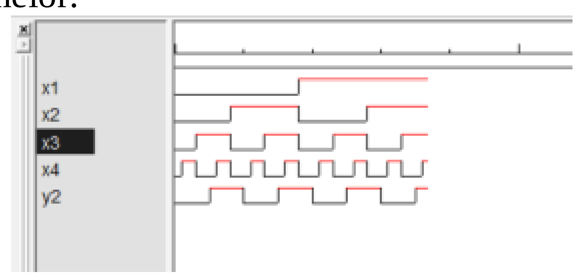
Timpul de reșinere a schemei este numărul maxim de porți logice prin care trece semnalul de la intrare spre ieșire. Se notează cu **T*d*** și se măsoară în **τ**.

Deci pentru schema de mai sus avem

C=14 **λ**

T*d* =2 **τ**

Diagrama de timp – se folosește pentru analiza dependenței funcțieii logice de variabile de intrare în timp. La fel se folosește pentru studierea riscurilor dinamice și statistice în sistem. Risc este un semnal fals care poate duce la erori în lucrul sistemelor.



Formele algebrice de reprezentare a funcțiilor logice

Forma analitică de reprezentare a funcţiilor logice presupune reprezentarea funcţiei prin operaţii logice (conjuncţie, disjuncţie şi negări). Asemenea forme sînt mai multe:

Conjuncţia (operaţia logică ŞI) $x_1 x_2 ... x_n$ se numeşte elementară dacă fiecare variabilă care intră în compoziţia ei este scrisă o singură dată.

Rangul acestei **conjuncţii** este egal cu numărul de variabile din această conjuncţie.

Disjuncţia (operaţia logică SAU) $x_1 + x_2 + ... + x_n$ se numeşte elementară dacă fiecare variabilă care intră în compoziţia ei este scrisă o singură dată.

Disjuncţia conjuncţiilor elementare de rangul n a unei funcţii care are n variabile se numeşte Forma Canonică Disjunctivă Perfectă FCDP.

Regula de formare a formei: pentru fiecare combinaţie de variabile unde funcţia este egală cu 1 se înscrie conjuncţia formată din variabilele acestei funcţii ţinînd seama de următoarea regulă: dacă variabila intră în combinaţie cu valoarea 1 atunci ea se înscrie fără schimbări în caz contrar ea se inversează (este scrisă cu negație). Toate conjuncţiile se unesc prin disjuncţii.

Forma Canonică Conjunctivă Perfectă FCCP – reprezintă conjuncţia disjuncţiilor elementare. Regula de formare a formei: pentru fiecare combinaţie de variabile unde funcţia este egală cu 0 se înscrie disjuncţia formată din variabilele acestei funcţii ţinînd seama de următoarea regulă: dacă variabila intră în combinaţie cu valoarea 0 atunci ea se înscrie fără schimbări, în caz contrar ea se inversează (este scrisă cu negație). Toate disjuncţiile se unesc prin conjuncţii.

Din tabelul de mai sus uitându-ne când y=1 avem

FCDP:

$$y = \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1 x_2 x_3$$

FCCP:

$$y = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)$$

8 – forme de reprezentare a funcţiilor logice:

FCDP: $y = \overline{x_1}\,\overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee x_1 x_2 x_3$ ŞI/SAU

$y = \overline{\overline{\overline{\overline{x_1}\,\overline{x_2} x_3} \wedge \overline{\overline{x_1} x_2 \overline{x_3}} \wedge \overline{x_1 \overline{x_2} x_3} \wedge \overline{x_1 x_2 x_3}}}$ ŞI-NU/ŞI-NU

$y = \overline{x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \wedge x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \wedge \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \wedge \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}}$ SAU/ŞI-NU

$y = \overline{x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}} \vee \overline{x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3} \vee \overline{\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}} \vee \overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}}$ SAU-NU/SAU

FCCP: $y = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \wedge x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \wedge \overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \wedge \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3$ SAU/ȘI

$y = \overline{\overline{x_1 \vee x_2 \vee x_3} \vee \overline{x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}} \vee \overline{\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3} \vee \overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3}}$ SAU-NU/SAU-NU

$y = \overline{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1 x_2 \overline{x_3}}$ ȘI/SAU-NU

$y = \overline{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}} \wedge \overline{\overline{x_1} x_2 x_3} \wedge \overline{x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3}} \wedge \overline{x_1 x_2 \overline{x_3}}$ ȘI-NU/ȘI