Teoria probabilităţilor

1.Obiectul de studiu al TP.

Teoria Probabilităţilor (TP) a apărut în sec.XVII ca rezultat al studierii jocurilor de hazard şi satisfacerii necesităţilor companiilor de asigurare.

În prezentTP serveţte drept bază teoretică pentru un şir de ştiinţe ca: Teoria Informaţiei, Teoria fiabilităţii, Proceselor Stochastice, Ciberneticii e.t.c.

TP operează cu următoarele noţiuni de bază:

1)**Proba** (experimentul);

2)**Eveniment**;

3)**Probabilitatea** evenimentului aleatoriu.

PROBA este modelarea unui anumit complex de condiţii în rezultatul cărora se realizează unul şi numai unul din câteva rezultate echiposibile, simultan irealizabile, numite evenimente elementare, care alcătuiesc spaţiul evenimentelor elementare notat prin Ω.

Există probe determinate - rezultatul este cunoscut apriori şi **probe stochastice** (aleatoare) când la o repetare multiplă în aceleaşi condiţii rezultatele sunt imprevizibile dinainte.

Evenimentul aleatoriu este rezultatul probei stochastice.

Probabilitatea evenimentului este un număr $\in [0,1]$, care caracterizează posibilitatea de realizare a evenimentului.

Teoria Probabilităţlor studiază evenimentele aleatorii (aleas-zar) care se caracterizeaza prin:

1)O mulţime de rezultate posibile;

2)Imprevizibilitatea rezultatului;

3)Prezenta anumitor legităţi cantitative la repetarea multiplă a probelor în condiţii similare.

TP studiază pe baza modelelor matematice legităţile generale proprii evenimentelor aleatoare in masă.

Se mai spune, ca TP stuidiază cantitativ si calitativ modelele matematice pentru luarea deciziilor in situaţii nedeterminate.

2.Classificarea evenimentelor.

Evenimentele pot fi:

a)**Sigure-** se realizeaza intotdeauna in rezultatul probei. Se noteaza Ω.

b)**Imposibile-**niciodata nu se realizeaza in rezultatul probei. Se noteaza $\emptyset$.

c)**Aleatoare** (notate A,B,C,…sau A_1, A_2, A_3, … A_n) ,când realizarea sau ba a evenimentului este dinainte necunoscuta.

TP studiază doar evenimentele aleatoare.

Evenimentul se realizează, daca se realizează cel puţin (măcar) un eveniment elementar care-l favorizează.

Exemplu. Se arunca o moneda de tei ori. Fie A-evenimentul care consta in apariţia cel puţin a unei steme.

Ω={SBS,BSB,BBS,SSB,SBB,BSS,SSS}

Doua evenimente – echiposibile (echiprobabile), daca nu exista motive de a afirma ca unul are prioritate fata de altul.

3.Algebra evenimentelor.

Definitia 1. Numim suma a doua evenimente A si B, notata $A\cup B$, sau A+B, evenimentul care consta in realizarea cel puţin a unuia din ele.

Definitia 2. **Numim produs** al evenimentelor A si B, notat $A\cap B$, sau AB, evenimentul care consta in realizarea simultana a ambelor evenimente.

Definitia 3. Pentru orice evenimentA $\in \Omega$ exista evenimentul **non-A** **(** $\overline{A}$), care consta in nerealizarea lui A.

Definitia 4.Numin **diferenta a evenimentelor A si B** , notata **A/B** , evenimentul care consta in realizarea lui A si nerealizare lui B.

A/B= $A\cap\overline{B}$.

Proprietatile operatiilor:

1.Comutativa: $A\cup B=B\cup A$

$A\cap B=B\cap A$

2.Asociativa $(A\cup B)\cup \mathbf{C}=A\cup(B\cup \mathbf{C})$

$(A\cap B)\cap \mathbf{C}=A\cap(B\cap \mathbf{C})$

3.**Distributiva** $A\cap(B\cup \mathbf{C})=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap \mathbf{C})=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

4. **Idempotenta** $\mathbf{A}\cap A=A \Rightarrow \mathbf{A}=\mathbf{A}\cap A\cap A$

$\mathbf{A}\cup A=A \Rightarrow \mathbf{A}=\mathbf{A}\cup A\cup A \Rightarrow$

5. $\mathbf{A}\cup\overline{A}=\Omega$, $\mathbf{A}\cap\overline{A}=\emptyset$

6. $\mathbf{A}\cup\Omega=\Omega$,

7. $A \cap \Omega = A$,

8. $\overline{\overline{A}} = A$; $\overline{\Omega} = \emptyset$;

9. regulele lui de Morgan: $\overline{A * B} = \overline{A} + \overline{B}$; $\overline{A + B} = \overline{A} * \overline{B}$

Evenimentele A si B se numesc incompatibile daca $A \cap B = \emptyset$.

Grupa de evenimente A_1, A_2, A_3, … A_n se numeşte incompatibila in totalitate, daca oricare doua sunt incompatibile, adică $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Grupa de evenimente A_1, A_2, A_3, … A_n se numeşte completă, daca realizarea unuia si numai a unuia din ele este eveniment sigur, adică:

1) $A_1 \cup A_2, \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$ şi
2) $A_i \cap A_j = \emptyset$ pentru $\forall\, i \neq j$.

Doua **evenimente se numesc independente**, daca realizarea unuia nu depinde de realizarea sau nerealizarea altuia.

EXEMPLU la Algebra evenimentelor

Trei studenti au de sustinut un examen. Fie A_i (i=1,2,3)-evenimentul ca studentul cu numarul i a sustinut examenul. De alcatuit expresiile pentru urmatoarele evenimente:

A – numai unul a sustinut examenul;
B – numai doi au sustinut examenul;
C – toti trei au sustinut;
D – nici unul na sustinut;
E – cel putin unul a sustinut;
F – cel putin doi au sustinut;
G – cel putin unul n-a sustinut.

Rezolvare:

$A = A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3$;

$B = A_1 A_2 \overline{A}_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3$;

$C = A_1 A_2 A_3$;

$D = \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3$;

$E = A_1 + A_2 + A_3$; sau E=A+B+C; sau $E = \Omega / D$;

F=B+C;

G=A+B+D sau G= Ω / C.

4.Elemente de analiză Combinatorică şi Aplicaţiile ei.

Analiza Combinatorie este o disciplină matematică care *studiază metodele de numarare (sau de calcul) ale tuturor combinarilor ce pot pot fi alcătuite din elementele unei mulţimi finite în baza unor reguli prestabilite*. Or, această disciplină are de a face numai cu ***mulţimi finite.***

Analiza combinatorie se bazează esenţial pe două principii:

Principiul adunării şi Principiul înmulţirii. Dacă A şi B sunt două mulţimi finite, atunci distingem două situaţii, după cum cele două mulţimi pot fi disjuncte sau nu. Evident are loc :

Principiul adunării (caz disjunct)

Daca A si B sunt mulţimi finite şi disjuncte, adică $A \cap B = \emptyset$, $card(A) = n$ *şi* $card(B) = m$ *, atunci*

$$card(A \cup B) = n + m \qquad (1)$$

Corolar. *Daca* $A_1, A_2, \ldots A_k$ *sunt mulţimi finite disjuncte doua câte doua, atunci*

$$card\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} cardA_i$$

Principiul adunării (caz general)

Dacă A si B sunt mulţimi finite, $card(A) = n$, $card(B) = m$ *şi* $card(A \cap B) = k$, *atunci*

$$card(A \cup B) = n + m - k . \qquad (2)$$

Exemplul 1. Consideram o grupă de studenti despre care stim că 20 de studenti cunosc limba engleză, 15 limba franceză, 10 limba germană, 5 limbile engleza si franceza, 5 limbile franceza si germana, 4 limbile engleza si germana şi 1 student limbile engleza, franceza si germana. Câţi studenţi sunt în grupă?

Solutie. Notând prin E, F şi G mulţimile de studenţi care posedă, respectiv, limba engleză, franceză, germană şi tinînd cont de datele problemei, deducem:

Card E = 20, card F = 15, card G = 10, card (E ∩ F) = 5,
card(E ∩ G) =4, card (F ∩ G) = 5, card (E ∩ F ∩ G) = 1
şi atunci
card (E U F U G) = card (E) + card (F) + card (G) – card(E ∩ F) –

card(E ∩ G) - card (F ∩ G) + card (E ∩ F ∩ G) =32

Principiul înmulţirii în limbajul produsului cartezian

Dacă A si B sunt două mulţimi finite astfel încât card (A) = n si card (B) = m, atunci

$$card\ (A \times B) = n \cdot m\ . \qquad (3)$$

Remarca. *Pentru orice numar n de mulţimi finite are loc formula:*

$$card(A_1 \times A_2 \times ... A_n) = \prod_{i=1}^{n} card(A_i). \qquad (4)$$

Principiul înmultirii în limbajul produsului cartezian poate fi reformulat în limbajul acţiunilor.

Principiul înmulţirii în limbajul actiunilor

Dacă o acţiune poate fi realizată în k etape succesive astfel încît etapa i poate fi realizata în n_i modalităţi, $i = \overline{1,k}$, *atunci această actiune poate fi realizată în $n_1 \times n_2 \times ... \times n_k$ modalităţi.*

Exemplul 2. Presupunem că un safeu poate fi deschis, cunoscînd un cod de forma $i_1\ i_2\ i_3\ i_4\ i_5\ i_6$, unde $i_k = 0,1,...,9,\ k = 1,2,...,6$. Cu ce este egal numărul total de coduri diferite ce pot fi alcătuite in acest mod?

Solutie. Multimea Ω a tuturor codurilor posibile coincide cu produsul cartezian al mulţimii {0, 1, 2,…, 9} de 6 ori cu ea însăşi, adică $\Omega=\{ (i_1 ,i_2 ,i_3 ,i_4 ,i_5 ,i_6) : i_k=0,1,...,9,\ k=1,2,...,6\}$. Aceasta are, conform Principiului înmulţirii în limbajul produsului cartezian,10^6
elemente. Cu alte cuvinte, numărul total de coduri diferite ce pot fi alcătuite în acest mod este egal cu 10^6.

Exemplul 3. Dacă avem informaţia suplimentară, că acest cod din exemplul anterior este format din cifre diferite atunci numărul total al codurilor diferite descreşte. Într-adevăr, a forma un cod din 6 cifre diferite este echivalent cu a efectua o acţiune în 6 etape succesive, astfel încît prima etapă poate fi realizată în 10 modalităţi, cea de-a doua în 9 modalităţi, etc., ultima (a şasea) în 10 - (6- 1) = 5 modalităţi. Conform Principiului înmultirii în limbajul acţiunilor, numărul tuturor evenimentelor elementare este egal cu 10·9·8·7·6·5. Observăm, că, spre deosebire de exemplul anterior, aplicarea principiului inmulţirii în limbajul produsului cartezian devine defectuoasă.

Definitia 1. Fie *A* o mulţime formată din *n* elemente diferite,

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, atunci vom numi **aranjament din *n* elemente luate câte *k* orice multime *ordonată*** a câte k elemente care se deosebesc sau cel putin printr-un element, sau prin ordinea elementelor.

Evident noţiunea are sens pentru $k = 1, 2, \dots, n$. Mulţimea tuturor aranjamentelor de *n* elemente luate câte *k* se noteaza cu A_n^k,

Conform principiului înmulţirii în limbajul acţiunilor, a construi *un aranjament din n elemente luate câte k* este echivalent cu a realiza o acţiune în *k* etape succesive, astfel încât prima etapa poate fi realizată în *n* modalităţi, cea de a doua în *n-1* modalităţi, etc., ultima (etapa nr. *k*) în $n-(k-1) = n - k+1$ modalităţi. Or, numărul tuturor aranjamentelor din *n* elemente luate câte *k* este egal cu

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = n!/(n-k)! \qquad \textbf{(5)}$$

Exemplul 4.Câte numere de două cifre pot fi create din mulţimea cifrelor {5, 6, 7} dacă:

a) cifrele nu se repetă ;

b) cifrele se pot repeta.

Rezolvare:

Pentru cazul a)

1)Varianta simplă:

Numerele sunt: 56, 57, 67, sau

65, 75, 76. Deci, în total sunt sase numere.

2)Principiul înmulţirii:

Alegerea are loc în 2 etape: La I etapă numărul de modalităţi este $n_1=3$.

La II etapă numărul de modalităţi este $n_2=2$. Numărul total de posibilităţi: $n = n_1 * n_2 = 3*2=6$.

3)Prin aranjamente A_3^2=3!/(3-2)!=6.

Pentru cazul b):

Principiul înmulţirii:

Alegerea are loc în 2 etape: La I etapă numărul de modalităţi este $n_1=3$.

La II etapă numărul de modalităţi este $n_2=3$. Numărul total de posibilităţi: $n = n_1 * n_2 = 3*3=9$.

Exemplul 5. Câte numere de telefon diferite din 6 cifre pot fi formate, astfel ca pe primul loc să nu fie 0, dacă:

a)toate cifrele sunt diferite;

b)se admit repetări.
Rezolvare:
Cazul a):
1)Principiul înmulţirii:
Alegerea are loc în 6 etape: La I etapă numărul de modalităţi este n_1=9,la II etapă numărul de modalităţi este n_2=9, la III etapă numărul de modalităţi este n_3=8, la IV etapă numărul de modalităţi este n_4=7, la V etapă numărul de modalităţi este n_5=6, la VI etapă numărul de modalităţi este n_6=5. Numărul total de posibilităţi: n= $n_1*n_2n_3*n_4*n_5*n_6$= 9*9*8*7*6*5=136080.
2)Prin aranjamente: A_{10}^{6}-A_{9}^{5}**=10!/(10-6)! -9!/(9-4)!** ==136080.
Cazul b):
1)Principiul înmulţirii:
Alegerea are loc în 6 etape: La I etapă numărul de modalităţi este n_1=9,la II etapă numărul de modalităţi este n_2=10, la III etapă numărul de modalităţi este n_3=10, la IV etapă numărul de modalităţi este n_4=10, la V etapă numărul de modalităţi este n_5=10, la VI etapă numărul de modalităţi este n_6=10. Numărul total de posibilităţi: n= $n_1*n_2n_3*n_4*n_5*n_6$= 9*10*10*10*10*10=90000.

Prin definiţie, atunci când *k=n,* aranjamentele se numesc **permutare** de n elemente. Deci, mulţimea tuturor permutărilor de *n* elemente notată prin P_n **coincide cu** A_n^n**,** ceea ce înseamnă că numărul tuturor permutărilor de elemente P_n **este egal cu** A_n^n**,** adică

$$P_n = n!. \qquad (6)$$

Exemplul 6. a)În câte modalităţi pot fi amplasate 10 cărţi pe o poliţă?

b)În câte modalităţi pot fi amplasate 10 cărţi pe o poliţă, astfel înbcât 3 cărţi anumite sa fie situaute alăturea în anumită ordine?
c)În câte modalităţi pot fi amplasate 10 cărţi pe o poliţă, astfel înbcât 3 cărţi anumite sa fie situaute alăturea indiferent ordinea?
Rezolvare:
a) P_{10}=10!=3628800.
b) Principiul înmulţirii: P_7*8=7!*8=8!= P_8
c) Principiul înmulţirii: P_7*8* P_7=7!*8*2!

Definiţia 2. Numim ***combinare din n elemente luate câte k*** notata cu C_n^k (k<=n) submulţimi a câte k elemente luate din cele n date, care se deosebesc cel puţin printr-un element (ordinea internă nu are importanţă). Evident noţiunea are sens pentru $k = 1, 2, \ldots n$ .. Cardinalul acestei mulţimi îl vom nota cu C_n^k .

Observăm că dintr-o combinare din *n* elemente luate câte *k* putem forma *k!* aranjamente din *n* elemente luate câte *k*. Or, a forma un aranjament din *n* elemente luate câte *k* este echivalent cu a realiza o acţiune în două etape succesive:

1. alegem o combinare din *n* elemente luate câte *k*, etapa pentru care avem C_n^k modalităţi de a o efectua;
2. din această combinare, formăm un aranjament din *n* elemente luate câte *k*, etapa care se poate realiza în A_n^k modalitati.

Rezultă că $A_n^k = k! \cdot C_n^k$, adica

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (7)$$

Exemplul 7. Dintr-o grupă de 10 oameni printre care sunt 6 femei şi 4 bărbaţi se aleg 5 persoane.
a) În câte modalitaţi poate fi efectuată alegerea?
b) În câte modalitaţi poate fi efectuată alegerea ca sa fie alese 3 femei si 2 barbati?
c) În câte modalitaţi poate fi efectuată alegerea ca sa fie alese2 femei si 3 barbati?
Rezolvare:

a) C_{10}^5 =10!/((10-5)!5!)= 10!/(5!5!)=10*9*8*7*6/(2*3*4*5)=252

b) $C_6^3 C_4^2$= 6!/((6-3)!3!) [4!/((4-2)!2!)]=120

c) $C_6^2 C_4^3$=15*4=60

Exemplul 7a. Dintr-un complet de 52 cărţi de joc se extrag aleatoriu 10 cărţi. De determinat în câte cazuri printre cele alese există:

a)exact un as;
b)măcar un as;
c)exact 2 aşi;
d)nu mai puţin de doi aşi;
e) 2 aşi şi 2 dame?
Rezolvare:

a) $C_{48}^{9}C_{4}^{1}$;
b)
c) $C_{48}^{9}C_{4}^{1} + C_{48}^{8}C_{4}^{2} + C_{48}^{7}C_{4}^{3} + C_{48}^{6}C_{4}^{4}$;
d)
e) $C_{48}^{8}C_{4}^{2}$;

f) $C_{48}^{8}C_{4}^{2}+C_{48}^{7}C_{4}^{3}+C_{48}^{6}C_{4}^{4}$;

g) $C_{4}^{2}C_{4}^{2}C_{48}^{6}$;

Exemplul 8. Considerăm că avem o mulţime de n elemente astfel încât n_1 elemente sunt de tipul *1*, n_2 elemente sunt de tipul *2*, …, n_k elemente sunt de tipul k, $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Alegem la întâmplare, unul câte unul, toate elementele mulţimii şi le aranjăm în ordinea extragerii lor. Să se calculeze cardinalul numărului total de rezultate posibile in acest experiment.

Soluţie. Notăm prin Ω mulţimea tuturor rezultatelor posibile în acest experiment. Pentru a alcătui un rezultat posibil, corespunzător acestui experiment, este suficient să realizam o acţiune în k etape succesive.

Etapa 1: din n locuri disponibile pentru a aranja elementele extrase, alegem n_1 locuri pe care vom plasa elementele de tipul *1*. Aceasta actiune o putem realiza on $C_n^{n_1}$ modalitati;

Etapa 2: din cele n-n_1 locuri, disponibile după etapa *1* , alegem n_2 locuri pe care vom plasa elementele de tipul 2. Această acţiune o putem realiza în $C_{n-n_1}^{n_2}$ modalităţi, etc.,

Etapa k: din cele $n - n_1 - n_2 - \ldots - n_{k-1} = n_k$ locuri, disponibile după etapa k, alegem n_k locuri pe care vom plasa elementele de tipul k. Această acţiune o putem realiza în $C_{n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}}^{n_k} = C_{n_k}^{n_k}$ modalităţi.

Conform principiului înmulţirii, avem :

$$card(\Omega) = C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot \ldots \cdot C_{n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}}^{n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

Formula obtinută este, de fapt, formula de calcul pentru $P(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, numărul permutărilor a n elemente cu repetări, din care n_1 elemente sunt de tipul *1*, n_2 elemente sunt de tipul *2*, … , n_k elemente sunt de tipul *k*, $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$:

$$P(n_1,n_2,\ldots,n_k)=\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}. \tag{8}$$

Ultima mai poartă denumirea de ***formula permutărilor cu repetare***.

Exemplul 9. Presupunem ca avem la dispozitie 10 cartonaşe marcate cu litere astfel: *M, M, A, A, A, T, T, I, E, C*. Un copil se joaca, extrăgând la întâmplare cîte un cartonas si aranjîndu-l în ordinea extragerii. Cîte cuvinte diferite sunt posibile în acest caz?

Întrucît considerăm cartonaşele marcate la fel ca fiind de acelasi tip, rezultă că avem *2* cartonaşe de tip *M, 3* cartonaşe de tip *A*, 2 cartonase de tip *T, 1* cartonas de tip *I, 1* cartonaş de tip *E* si *1* cartonas de tip *C*. Notăm prin Ω mulţimea tuturor rezultatelor posibile în acest experi-ment.

Atunci, folosind formula dedusă mai sus, tinînd cont că rezultatul aranjării cartonaselor în ordinea extragerii lor defineste un cuvânt, obţinem că numărul cuvintelor diferite ce pot fi obţinute astfel, se calculează după formula:

$$card(\Omega)=\frac{10!}{2!3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!}=151200$$

Exemplui10. pentru principiul inmultirii:

1) Se arunca 3 zaruri.Cite posibile rezultate ar exista?
   Pentru primul zar ∃ 6 posibilitati adica $n_1=6$. La fel pentru zarurile doi si trei: $n_2=6$, $n_3=6$ numarul total de posibilitati este:
   $n= n_1\, n_2\, n_3=216$.

Exemplui 11.(Principiul inmultirii)

5 persoane urca in ascensorul unei case cu 11 etage. Fiecare din ei poate cobori la orice etaj, incepind cu al doilea.

a) Cite posibilitati de coborire ∃?

b)Cite posibilitati de coborire ∃ ca toti sa coboare odata?

c)Cite posibilitati de coborire ∃ ca toti sa coboare la etaje diferite

d)Cite posibilitati de coborire ∃ ca cel putin doi sa coboare la etaje diferite?

e) Cite posibilitati de coborire ∃ ca doi sa coboare la un etaj, iar ceilalti – la diferite?

Rezolvare:

a) 10 10 10 10 10=10^5;

b) 10;

c)Principiul inmultirii:10(10-1)(10-2)(10-3)(10-4)= $A_{10}^{5} = 10!/(10-5)!$

d) 10^5- A_{10}^{5};

e) $C_5^2\ A_9^3$ =(5!/(3!2!))(9!/(9-3) !)=10*9*8*7=

Exemplu 12. (principiul adunarii)

Intr-o urna se afla 5 bile albe si 4 bile negre. Se extrag fara revenire 3. Cite posibilitati exista ca : A – doua sa fie de o culoare ,iar una de alta?

B – toate sa fie de o culoare?

a) $C_5^2\ C_4^1 + C_5^1\ C_4^2$ =10*4+5*6=70.

b) $C_5^3 + C_4^3$ =10+4=14.

5. Calculul probabilităţilor

5.1. Observaţii privind calculul probabilităţilor şi definiţia axiomatică a probabilităţii.

Drept punct de plecare în calculul probabilităţilor serveşte definiţia axiomatică a probabilităţii, care întregeşte modelarea matematică a experimentelor aleatoare ce poseda Proprietatea Regularităţii statistice. Această modelare presupune identificarea urmatoarelor elemente (obiecte) matematice cu ajutorul cărora să descriem:

a) mulţimea de rezultate posibile într-un experiment aleator $\mathcal{E}$;

b) mulţimea (familia) $\mathcal{F}$ a tuturor evenimentelor aleatoare asociate experimentului $\mathcal{E}$;

c) probabilitatea (regula) ***P***, conform căreia fiecărui eveniment aleator *A,* asociat experimentului $\mathcal{E}$ i se pune în corespondenţa probabilitatea acestuia ***P****(A).*

Răspunsul la p. ***a)*** ni-l da

Definiţia 1. Vom numi ***spaţiu de evenimente elementare*** orice multime nevidă Ω, elementele careia corespund rezultatelor posibile într-un experiment aleator $\mathcal{E}$. Elementele ω din Ω se numesc ***evenimente elementare***.

Exemple de spaţii de evenimente elementare.

1. Considerăm aruncarea unei monede de două ori succesiv. Atunci $\Omega=\{SS,SB,BS, BB\}=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, păstrând acelaşi tip de notare.

2. Experimentului aleator $\mathcal{E}$, ce constă în aruncarea unui zar o singura data, îi corespunde spaţiul de evenimente elementare $\Omega=\{1, 2,...,6\}=\{\omega_1, \omega_2,..., \omega_6\}$, unde i sau ω_i reprezintă numărul de puncte apărute, i= 1, $2,...,6$.

3. Iar acum considerăm, în calitate de experiment aleator $\mathcal{E}$, aruncarea unei monede până la prima apariţie a Stemei. Atunci $\Omega=\{S,BS, BBS,...\}=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3,..., \omega_n, ...\}$, unde ω_n, de exemplu, corespunde rezultatului posibil (elementar) ce semnifică faptul că experimentul s-a terminat la aruncarea cu numărul n odată cu apariţia Stemei precedată de aparitia Banului de $n-1$ ori.

4. Considerăm experimentul aleator ce constă în măsurarea staturii unui student luat la întâmplare de la Universitatea Tehnică a Moldovei. Notăm prin ω înălţimea acestuia. Atunci $\Omega=\{\omega: \omega>0\}$.

Observaţie. Vom spune că exemplele de tipul 1-3 se referă la ***cazul discret*** deoarece spaţiul de evenimente elementare Ω corespunzător reprezinta o *multime finită* (vezi exemplele 1-2) sau o *mulţime infinită, cel mult, numărabilă* (în exemplul 3), iar exemplele de tipul 4 se referă la *cazul continuu* deoarece spaţiul de evenimente elementare Ω corespunzător reprezintă o *mulţime infinită nenumărabilă*.

Răspunsul la p. *b)* îl aflăm din

Definiţia 2. Fie Ω un spaţiu de evenimente elementare, atunci vom numi ***eveniment aleator*** orice element A din familia $\mathcal{F}$ **=**$\{A$**:** A este submulţime a lui $\Omega\}$ ce verifică următoarele 2 axiome:

1^0. Dacă A este eveniment aleator, *adică A este element al lui* $\mathcal{F}$ atunci si complementara acestuia, $\bar{A}=\{\omega$ *din* $\Omega : \omega$ *nu aparţine lui* $A\}$ este eveniment aleator;

2^0. Dacă $A_1, A_2, ..., A_n,...$ sunt evenimente aleatoare, atunci şi reuniunea (suma) acestor submulţimi este eveniment aleator.

Familia $\mathcal{F}$ sau perechea $(\Omega, \mathcal{F})$ se mai numeşte *câmp de evenimente aleatoare*.

Observaţie. *Dacă* Ω *este o mulţime de tip discret*, atunci axiomele

1^0- 2^0 ale câmpului de evenimente aleatoare se verific automat, cu alte cuvinte , *în acest caz,* din oficiu, *orice submulţime A din spaţiul de evenimente elementare* Ω *este eveniment aleator.* Dacă evenimentul elementar ω *din* Ω aparţine şi evenimentului A, atunci spunem ca ω *favorizează evenimentul* A.

Mai mult, deoarece evenimentele aleatoare reprezintă submulţimi ale lui Ω, rezultă că asupra lor pot fi aplicate toate operaţiile asupra mulţimilor. Astfel, reuniunea a două evenimente aleatoare se numeste ***sumă***, intersecţia lor se numeste ***produs,*** iar complementara $\bar{A}=\{\omega$ *din* $\Omega : \omega$ *nu apartine lui* $A\}$ a unui eveniment aleator *A* se numeşte eveniment *non-A* sau *opusul* sau *negarea evenimentului A.* Evenimentul Ω se numeşte eveniment ***sigur***, iar evenimentul ce corespunde multimii vide Ø se numeşte *eveniment imposibil.* Dacă produsul (intersecţia) a doua evenimente *A* şi *B* este un eveniment imposibil, atunci se spune că *evenimentele A şi B sunt incompatibile (disjuncte).* Dacă evenimentul *A* se conţine (ca mulţime) în *B,* atunci spunem ca *evenimentul A implică evenimentul B.* Dacă, concomitent cu aceasta, are loc si relaţia inversa, atunci *A=B* şi spunem că evenimentele *A şi B* sunt echivalente.

Evident, operatiile asupra evenimentelor aleatoare posedă aceleaşi proprietăti ca şi operţiile asupra mulţimilor. În particular, sunt valabile

Formulele de dualitate ale lui de Morgan*:*

1) *Complementara* ***sumei*** *a două evenimente A şi B coincide cu* ***produsul*** *complementarelor acestor evenimente;*
2) *Complementara* **produsului** *a două evenimente A si B coincide cu* **suma** *complementarelor acestor evenimente.*

Putem, în sfârşit, răspunde la p. *c)* prin

Definitia3. (*Definiţia axiomatică a probabilităţii*). Vom numi *probabilitate definită pe cîmpul de eveneminte aleatoare* (Ω, $\mathcal{F}$) orice aplicaţie ***P***: $\mathcal{F} \rightarrow \mathbf{R}$ care verifică următoarele axiome:

A1. $\boldsymbol{P}(A)\geq 0$ pentru orice eveniment *A* din $\mathcal{F}$;

A2. $\boldsymbol{P}(\Omega)=1$;

A3. $\boldsymbol{P(A_1+A_2+...+A_n+...)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)+...}$ pentru orice şir de evenimente $A_1, A_2, ..., A_n,...$din $\mathcal{F}$, disjuncte două cate două, aici ,,+'' semnificând operatia de reuniune a multimilor, atunci când acestea sunt disjuncte, două cate două (adica evenimentele $A_1, A_2, ..., A_n,...$*sunt incompatibile (nu se pot realiza simultan doua cite doua)).*

Pentru orice eveniment aleator *A*, numărul ***P****(A)* se numeşte ***probabilitatea evenimentului A*** . Tripletul (Ω,*F*, ***P***) se numeşte *câmp de probabilitate.*

Din aceasta definiţie deducem următoarea

Teoremă *(Proprietăţile probabilităţii)* . *Orice probabilitate* **P** *definită pe câmpul de eveneminte aleatoare* (Ω, F) *posedă următoarele proprietăţi:*

a) 0≤ ***P****(A)≤ 1 pentru orice eveniment A din* F;

b) ***P****(Ā) =1-***P***(A) (* ***P****(A)=1-***P***(Ā))* *(2.1)*

pentru orice eveniment A din F;

c) *Probabilitatea evenimentului imposibil este egala cu zero;*

d) ***(Formula adunării probabilităţilor).*** *Dacă A_1 , A_2 ,..., A_n sunt evenimente aleatoare legate de acest câmp* F, *atunci*

$$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} P(A_i \cap A_j) + \qquad (2.2)$$

$$+ \sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots + (-1)^{n-1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$$

Din d) rezulta, ca **daca *evenimentele A si B sunt compatibile (se pot realiza simultan),*** atunci :

d.1)P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A*B) (2.3)

Consecinta: P(A+B)=1-P($\overline{A+B}$)=1-P($\overline{A}*\overline{B}$) (2.4)

Daca evenimentele A,B,C sunt compatibile in totalitate, atunci are loc:

d.2) P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A*B)- P(A*C)- P(B*C)+P(A*B*C)(2.5)

Consecinta: P(A+B+C)=1-P($\overline{A+B+C}$)=1-P($\overline{A}*\overline{B}$*C) (2.6)

5.2. Calculul probabilităţilor clasice

Pentru început vom formula definiţia clasică a probabilităţii în varianta ei modernă.

Definiţia clasică a probabilităţii. Vom spune că ***avem de a face cu o probabilitate clasică P*** dacă

a) Spaţiul de evenimente elementare Ω conţine un număr finit de evenimente elementare;

b) Familia de evenimente aleatoare *F* este reprezentată de toate submulţimile posibile ale lui Ω;

c) ***P*** este o aplicatie definită pe $\mathcal{F}$ cu valori in mulţimea numerelor reale calculate conform formulei

$$P(A) = \frac{card\ A}{card\ \Omega}, \tag{1}$$

unde *card A* înseamnă numărul de elemente ale submulţimii respective *A* din Ω. ***P****(A)*, reprezentând un numar, se numeşte ***probabilitatea evenimentului*** *A*, iar tripletul (Ω,$\mathcal{F}$, ***P***) - ***câmp de probabilitate clasică***.

Se observă că probabilitatea clasică este un caz particular al probabilităţii definite axiomatic. În plus, observăm că din această definiţie rezultă că toate evenimentele elementare sunt echiprobabile şi egale cu *1/cardΩ*. Or, semnele după care aflăm dacă putem aplica definitia clasică sunt cele care atestă echiprobabilitatea evenimentelor elementare, cum ar fi sintagmele „ extragere la intamplare”, „monedă perfectă” sau „simetrică”, zar „perfect” sau „simetric” etc.

Exemplul 1. Să se calculeze probabilitatea că la aruncarea unui zar *perfect*, de două ori succesiv, suma numerelor de puncte apărute va fi egală cu 5 (evenimentul aleator *A*).

Rezolvare. Spaţiul de evenimente elementare $\Omega = \{(i, j): 1 \le i, j \le 6\}$. Favorabile evenimentului *A* sunt evenimentele elementare $A = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$. Cum *card A* = 4 şi *card* Ω = 36, avem

In[1]:=N[4/36]

Out[1]=0,111111.

Exemplul 2. O urnă conţine 60 de bile albe şi 40 de bile negre. 1) Să se calculeze probabilitatea că o bilă extrasă la întâmplare va fi albă (evenimentul *A*). 2) Să se calculeze probabilitatea că douăsprezece bile extrase fără întoarcere vor fi albe (evenimentul *B*).

Rezolvare. 1) Printre cele 100 de bile din urnă 60 sunt albe. Deci card Ω = 100 şi card *A* = 60. Prin urmare valoarea exactă ***P***(*A*) = 60/100 = 0,6.

2) Deoarece 12 bile din 100 pot fi extrase în C_{100}^{12} moduri, iar 12 bile din cele 60 existente pot fi extrase în C_{60}^{12} moduri, conform definiţiei clasice a probabilităţii şi formulei de calcul a numărului de combinări din *n* elemente luate câte *m*:

$$C_n^m = \frac{n!}{(m!)((n-m)!)} \tag{2}$$

avem:

In[2]:=N[$\dfrac{60!}{(12!)*(48!)} / \dfrac{100!}{(12!)*(88!)}$ **]**

Out[2]]=0.00133219

Am obţinut rezultatul ***P****(B)*=0,00133219.

Exemplul 3.

Se aruncă 3 zaruri**.** Câte variante de rezultat există?

De aflat probabilităţile următoarelor evenimente:

A – Pe toate zarurile cad diferit număr de puncte;

B – Pe două zaruri cad 6 puncte, iar pe a treilea– alt număr;

C - Pe două zaruri cad acelaţi număr de puncte, iar pe a treilea– alt număr;

D – nici pe un zar nu cad 6 puncte

E – Cel puţin pe un zar cad 6 puncte.

Решение:

Pentru un zar ∃ 6 variante $n_1=6$. Analog: $n_2=6$, $n_3=6$ şi numărul total de variante:

$n= n_1 n_2 n_3=216$.

$\boldsymbol{P(A)=m_1/n}=A_6^3/216=6*5*4/216$.

$\boldsymbol{P(B)=m_2/n}= C_3^2*5/216=3*5/216$.

$\boldsymbol{P(C)=m_3/n}= C_3^2*6*5/216$.

$\boldsymbol{P(D)=m_4/n=5^3/6^3=125/216}$

$\boldsymbol{P(E)=1- P(D)=1-5^3/6^3=1 - 125/216=91/216.}$

Exemplul 3. Cinci persoane urcă în ascensorul unei case cu 11 etaje. Fiecare poate coborâ la orice etaj, începând cu al doilea.

a) Câte variante de ieşire ∃?

b) De aflat probabilităţilr evenimentelor:

A- toţi au ieşit odată;

B - toţi au ieşit la diferite etaje;

C – măcar doi cobor la diferite etaje;

D - doi cobor la un etaj, iar ceilalţi – la diferite;

Rezolvare:

Numărul total de posibilităţi de coborâre conform principiului înmulţirii

$n=10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10=10^5$;

$P(A)= \boldsymbol{=m_1/n=10}/10^5$

$P(B)\ \boldsymbol{=m_2/n=} A_{10}^5/10^5=10*9*8*7*6/10^5$;

$P(C)= \boldsymbol{=m_3/n=(}10^5- A_{10}^5)/10^5=1- P(B)$;

$P(D)= \boldsymbol{=m_4/n=} C_5^2*10* A_9^3/10^5$.

Exemplul 4. Principiul adunării.

În urnă sunt 5 bile albe şi 4 negre. Se extrag fāra revenire 3 bile.
De aflat probabilităţile evenimentelor :
A – două bile sunt de aceiaşi culoare, iar al treilea - de altă culoare;
B – toate sunt de o culoare.

Rezolvare:
Numărul total de cazuri posibile este C_9^3ş
P(A)= $=m_1/n=(C_5^2\,C_4^1+C_5^1\,C_4^2)/C_9^3=(10*4+5*6)/C_9^3=70/(9*8*7)$.
P(B)= $=m_2/n=(C_5^3+C_4^3)/C_9^3=(10+4)/C_9^3=14/(9*8*7)$.

5.3. Probabilitate discretă

Aria de aplicabilitate a probabilităţii clasice este, după cum o arata si urmatoarele exemple, limitată.

Exemplul 1. Considerăm aruncarea o singura dată a unui zar, a cărui centru de greutate este deplasat astfel încât probabilităţile apariţiei feţelor 1,2,3,4,5,6 se raportează ca 1:2:3:4:5:6. Sa se afle probabilitatea apariţiei unui număr par de puncte.

Din acest exemplu se vede că formula probabilităţii clasice este inaplicabilă deoarece **rezultatele posibile nu sunt echiprobabile**, chiar dacă mulţimea lor.(spaţiul de evenimente elementare) este finita.

Un alt motiv pentru care formula probabilităţii clasice poate fi imposibil de aplicat este faptul că mulţimea de rezultate posibile intr-un experiment este infinită, fie şi numerabilă (cazul discret).

Exemplul 2. Considerăm experimentul aleator ce constă în aruncarea unei monede „perfecte” până la înregistrarea prima dată a „Stemei”. Ne interesează, de exemplu, probabilitatea că experimentul se va termina în urma a cel mult zece aruncari. Exemplul 3 din p.5.1. arată că acestui experiment âi corespunde un spaţiu de evenimente elementare infinit, numarabil ca mulţime, ceea ce face imposibilă aplicaţia formulei probabilităţii clasice.

În scopul posibilităţii abordării cazurilor mentionate în exemplele 1-2, se foloseşte noţiunea de probabilitate discretă sau de camp de probabilitate discretă.

Definiţia probabilităţii discrete. Vom spune ca ***avem de a face cu o probabilitate discretă P*** dacă:

a) spaţiul de evenimente elementare Ω reprezintă o multime finită sau infinită, cel mult, numerabilă, adică $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3,..., \omega_n, ...\}$;

b) familia de evenimente aleatoare $\mathcal{F}$ este reprezentată de toate submulţimile posibile ale lui Ω;

c) P este o aplicatie definită pe $\mathcal{F}$ cu valori in multimea numerelor reale calculate conform formulei:

P*(A)=suma probabilitatilor pentru fiecare eveniment elementar ce favorizeaza evenimentul A=* $\sum_{\omega_i:\omega_i\in A} P\{\omega_i\}$, unde ***P*** verifica urmatoarele 2 axiome:

A1. $\boldsymbol{P}\{\omega_i\}\geq 0$, pentru orice $i\geq 1$;

A2. $\boldsymbol{P}(\Omega)= \sum_{\omega_i:\omega_i\in\Omega} P\{\omega_i\} =1$.

P*(A)*, reprezentînd un numar, se numeste ***probabilitatea evenimentului*** *A*, iar tripletul (Ω,$\mathcal{F}$, ***P***) - ***câmp de probabilitate discretă***.

Exemplul 3. *(continuare Exemplul 1).* Observăm că în acest exemplu sunt întrunite toate condiţiile aplicabilităţii definiţiei probabilităţii discrete:

1. $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3,..., \omega_6\}=\{1.2,\ldots,6\}$, adică *spaţiul de evenimente elementare este o mulţime finită;*
2. Familia de evenimente aleatoare $\mathcal{F}$ este reprezentată de toate submultimile posibile ale lui Ω, iar in ea regăsim şi evenimentul nostru *A*={*va apare un număr par de puncte}={2,4,6}.*
3. Tinând cont de cum se raportează probabilităţile $\boldsymbol{P}\{i\}$, deducem că $\boldsymbol{P}\{i\}=i/21$. $i=1,2,...,6$, ceea ce inseamnă că sunt verificate axiomele *A1* şi *A2* de mai sus.

In concluzie ***P****(A)=2/21+4/21+6/21=12/21*. Or, spre deosebire de cazul clasic (zarul nefiind „perfect") ***P****(A)=12/21>1/2*.

Exemplul 2 *(continuare).* Observăm că şi în acest exemplu sunt intrunite toate conditiile aplicabilităţii definiţiei probabilităţii discrete:

1. $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3,..., \omega_n,...\}$={S, BS,BBS,BBBS,...} , adica spatiul de *evenimente elementare este o mulţime infinită numarabilă;*
2. Familia de evenimente aleatoare $\mathcal{F}$ este reprezentată de toate submulţimile posibile ale lui Ω, iar in ea regasim şi evenimentul nostru *A={experimentul se va termina în urma a*

cel mult 10 aruncări}={ω_1, ω_2, ω_3,..., ω_{10},}=
={S, BS,BBS,BBBS,...,BBBBBBBBBS}.

3. Deoarece experimentul vizează aruncarea unei monede „perfecte", putem afirma că $\boldsymbol{P}\{\omega_i\}=1/2^i$, pentru orice $i=1,2,\ldots,n,\ldots$. Într-adevar evenimentul elementar ω_i reprezintă unul din cele 2^i evenimente elementare în experimentul cu aruncarea unei monede „perfecte" de *i* ori. Cum acestea sunt echiprobabile, rezultă că şi ω_i are aceeasi probabilitate $1/2^i$. Or, axioma *A1* este valabilă. Este valabila şi axioma *A2* , deoarece $1/2+1/2^2+1/2^3+\ldots=(1/2)/(1-1/2)=1$.

În concluzie,

$$\boldsymbol{P}(A)= 1/2+1/2^2+\ldots+1/2^{10}= (1/2)[1-(1/2)^{10}]/(1-1/2)=1-(1/2)^{10}.$$

5.4. Probabilitate geometrică

În practică se întâlnesc situaţii când modelul probabilist al experimentului aleator are de a face cu evenimente elementare echiprobabile, dar pentru care spaţiul de evenimente elementare este o mulţime infinită nenumărabilă (caz continuu). Drept exemplu putem lua următorul experiment imaginar, care în orice limbaj de programare evoluat (C++, Java, etc.) poate fi reprodus, folosind generatorul de numere (pseudo)aleatoare realizat de functia RANDOM .

Exemplu *(aruncarea unui punct la intamplare pe segmentul [0,1]).* Considerăm experimentul aleatoriu ce constă in aruncarea la întamplare a unui punct pe segmentul [0,1]. Dată fiind sintagma „la întâmplare ", rezultatele posibile ω în acest experiment, fiind numere reale din [0,1], sunt echiprobabile, dar definitia clasică este inaplicabilă, deoarece spaţiul de evenimente elementare Ω=[0,1] este o mulţime infinită nenumărabilă. Pentru astfel de cazuri putem apela la

Definiţia probablitaţii geometrice. Vom spune ca ***avem de a face cu o probabilitate geometrică P*** dacă:

a) spaţiul de evenimente elementare Ω reprezintă o multime infinită nenumărabilă din $\mathbf{R}^n$ pentru care $mes\Omega < +\infty$, unde *mes* reprezinta *lungimea* în $\mathbf{R}^1$, *aria* în $\mathbf{R}^2$ şi *volumul* in $\mathbf{R}^n$ pentru $n\geq3$;

b) Familia de evenimente aleatoare $\mathcal{F}$ este reprezentata de toate submulţimile măsurabile *A* ale lui Ω, adică pentru care *mesA* poate fi definită;

c) P este o aplicaţie definită pe $\mathcal{F}$ cu valori în mulţimea numerelor reale calculate conform formulei:

$\boldsymbol{P}(A)=mesA\ /\ mes\Omega.$

Astfel, în exemplul invocat, aplicând definitia probabilitatii geometrice aflăm că probabilitatea ca un punct aruncat la întâmplare pe [0,1] va nimeri în punctul x este egală cu $\boldsymbol{P}\{x\}=mes\{x\}/mes([0,1])=0/1=0$, pentru orice x din [0,1]. Dacă ne interesează, de exemplu, probabilitatea că un punct aruncat la întamplare pe [0,1] va nimeri în prima jumătate a acestui interval este egala cu $\boldsymbol{P}([0,0.5])= mes([0,0.5])\ /\ mes([0,1])=0.5/1=0.5$. Dealtfel, observam ca $\boldsymbol{P}([0,0.5])= \boldsymbol{P}([0.5,1])$. În genere, probabilitatea că un punct aruncat la intamplare pe [0,1] va nimeri într-un interval (a,b) din [0,1] coincide cu lungimea acestui interval.

5.5. Probabilităţi condiţionate. Formula înmulţirii probabilităţilor. Independenţa evenimentelor aleatoare

Fie A şi B două evenimente aleatoare legate de acelaşi câmp de probabilitate $(\Omega,\mathcal{F}, \boldsymbol{P})$, unde P(B)>0. Atunci putem da

Definiţia 1. Se numeşte ***probabilitate a evenimentului*** *A* ***condiţionată de evenimentul B*** mărimea notată cu $\boldsymbol{P}(A/B)$ şi calculată după formula

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}. \tag{2.5}$$

Din (5) rezultă *formula înmulţirii probabilităţilor pentru două evenimente aleatoare:*

$$P(A\cap B)=P(A)P(B\,|\,A) \quad . \tag{2.6}$$

Are loc urmatoarea

Teoremă (*Formula înmulţirii probabilităţilor în caz general*).

Dacă (Ω, F, P) *este un câmp de probabilitate si* A_1 , A_2 ,..., A_n *sunt evenimente aleatoare legate de acest câmp cu proprietatea*

$$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1})>0\,,$$

atunci

$$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)= \tag{2.7}$$

$$P(A_1)P(A_2\,|\,A_1)P(A_3\,|\,A_1\cap A_2)\ldots P(A_n\,|\,A_1\cap\ldots\cap A_{n-1})$$

Definiţia 2.Vom spune că *două evenimente aleatoare A şi B,* legate de acelaşi câmp de probabilitate $(\Omega,\mathcal{F}, \boldsymbol{P})$, *sunt independente* dacă

$$P(A\cap B)=P(A)P(B).$$

Definiţia 3.Vom spune că *evenimentele aleatoare* A_1 , A_2 ,..., A_n , legate de acelaşi câmp de probabilitate $(\Omega, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{P})$, *sunt independente două* *câte două* dacă $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$ pentru orice *i* diferit de *j*, *i,j=1,2,...,n.*

Definiţia 4. Vom spune ca *evenimentele aleatoare* A_1 , A_2 ,..., A_n , legate de acelaşi câmp de probabilitate (Ω, ***F***, ***P***), *sunt independente (în totalitate)* dacă

$$P(Ai_1 \cap Ai_2 \cap ... \cap Ai_k) = P(Ai_1)P(Ai_2)...P(Ai_k)$$

pentru orice set de indici diferiţi {i_1*,* i_2 *,...,*i_k*} din mulţimea de indici {1,2,...,n}, k=2,3,...,n.*

Observaţia 1. ***Din definiţiile respective, deducem că, independenţa (in totalitate) atrage după sine şi independenţa a două câte două evenimente. Afirmaţia inversă, insă, nu are loc.*** Drept (contra)exemplu putem lua experimentul aleator ce constă în aruncarea unui tetraedru „perfect", cu cele 4 feţe vopsite astfel: faţa 1 vopsita în albastru, faţa 2-în galben, faţa 3-în rosu si faţa 4-în albastru, galben si rosu. Se verifica cu usurinţă că evenimentele *A={va apare culoarea albastră}, G={va apare culoarea galbenă}, R={va apare culoarea rosie}* sunt independente 2 cate 2, dar nu şi în totalitate.

Observaţia 2. În cazul când evenimentele aleatoare A_1, A_2, ..., A_n sunt independente, atunci formula înmulţirii probabilităţilor are forma

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)...P(A_n) \ . \qquad (2.8)$$

Propoziţie (*Formula lui Poisson*). *Daca evenimentele* A_k *, sunt independente (în totalitate) si probabilităţile* **P**(A_k)= p_k *, k=1,2,…,n sunt cunoscute, atunci probabilitatea*

P*{se va produce cel puţin unul din evenimentele* A_k *, k=1,2,…,n}=*
=1-[(1- **P**(A_1))(1- **P**(A_2))... (1-**P**(A_n)]=1-[(1- p_1)(1-p_2)... (1-p_n)].

Exemplul 3. Un aparat constă din trei elemente care în timpul funcţionării lui se pot deteriora, independent unul de altul. Notăm prin A_i = {*elementul i se va deteriora*}, *i* = 1, 2, 3. Să se calculeze probabilitatea evenimentului *A = {se va deteriora un singur element}, B = {se va deteriora, cel puţin, un element}* dacă se ştiu probabilităţile: $p_1 = P(A_1)$ = 0,13, $p_2 = P(A_2)$ = 0,06, $p_3 = P(A_3)$ = 0,12.

Rezolvare. Vom exprima evenimentul aleator A prin intermediul evenimentelor A_1, A_2 şi A_3. Evenimentul A se va produce atunci si numai atunci cand, se va deteriora primul element iar al doilea – nu **şi** al treilea – nu, **sau** se va deteriora al doilea element, iar primul - nu **şi** al treilea – nu, **sau** se va deteriora al treilea element, iar primul – nu **şi** al doilea – nu. Prin urmare, conform definiţiilor operaţiior asupra evenimentelor aleatoare, avem:

$$A = (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) \cup (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3).$$

Calculăm probabilitatea evenimentului *A* folosind succesiv: formula de adunare a probabilităţilor pentru evenimente incompatibile (disjuncte) doua câte două, formula de înmulţire a probabilităţilor evenimentelor independente (în totalitate) şi formula de calcul al probabilităţii evenimentului opus.

P(A)= $p_1*(1-p_2)*(1-p_3)+(1-p_1)*p_2*(1-p_3)+(1-p_1)*(1-p_2)*p_3$=
0.13*(1–0.06)*(1–0.12)+(1–0.13)*0.06*(1–0.12)+(1–0.13)*(1–0.06)*0.12]= 0,251608

In[3]:=N[0.13*(1–0.06)*(1–0.12)+(1–0.13)*0.06*(1–0.12)+(1–0.13)*(1–0.06)*0.12]
Out[3]]=0,251608
Am obţinut ***P****(A)*=0,251608.

Prin analogie, folosind Formula lui Poisson, calculăm *P(B)*:

$$P(B)=P((A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) \cup (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) \cup$$
$$A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) \cup A_1\ A_2\ A_3)$$

Metoda cere mari pierderi de timp. Mai simplu este de utilizat:

$$P(B)=1-P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3)=1-(1-p_1)*(1-p_2)*(1-p_3)$$

Exemplul 4. Presupunem că, într-un lot de 100 de piese de acelaşi tip, 7 piese sunt defecte. Extragem la intâmplare fără intoarcere 5 piese. Dacă toate piesele sunt fără defecte, atunci lotul este acceptat. În caz contrar este refuzat. Să se calculeze probabilitatea evenimentului *A* = *{lotul va fi acceptat}*.

Rezolvare. Notăm: A_i = *{piesa cu numărul de ordine de extragere i va fi fără defecte}, i = 1, 2, 3, 4, 5*. Are loc egalitatea

$$A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5.$$

Conform formulei (7) avem

$$P(A) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)P(A_4 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3) \times$$
$$\times P(A_5 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4).$$

Aplicăm Sistemul Mathematica.

$$P(A) = \mathbf{N[}\ \frac{93}{100} * \frac{92}{99} * \frac{91}{98} * \frac{90}{97} * \frac{89}{96}\ \mathbf{]}$$

Out[4]=0.690304
Obţinem *P(A)*=0,690304.

În cazul când produsul calculat anterior conţine un număr mare de factori, atunci scrierea lui necesită timp relativ îndelungat. Dacă factorii pot fi scrişi în formă de o funcţie de un parametru *i*, atunci poate fi utilizată funcţia **Product[f,{i,$\mathbf{i_{min}}$,$\mathbf{i_{max}}$}].** Cum în acest exemplu avem

$$P(A) = \prod_{i=0}^{4} \frac{93-i}{100-i},$$

putem proceda după cum urmează.

In[5]:=Product[$\frac{93-i}{100-i}$, $\{i,0,4\}$ **]**

Out[5]=$\frac{824941}{1195040}$

Am obţinut valoarea exactă a probabilităţii evenimentului *A*. Ne vom convinge că o valoare aproximativă a expresiei obţinute coincide cu cea obţinută în **Out[4]**

In[6]:=N[%]

Out[6]=0.690304.

5.6. Formula probabilităţii totale. Formula lui Bayes

Teoremă. *Dacă A şi H_1, H_2, ..., H_n,... sunt evenimente aleatoare legate de acelaşi câmp de probabilitate* (Ω,$\mathcal{F}$, **P**) *şi satisfac condiţiile :*

a) evenimentul A implică producerea a cel putin unuia din evenimentele H_1, H_2, ..., H_n,... ;

***b)** evenimentele H_1, H_2, ..., H_n,... sunt incompatibile două câte două;*

c) **P**$(H_i)>0$,

*atunci au loc **formula probabilităţii totale***

$$P(A) = P(H_1)P(A\,|\,H_1) + ... + P(H_n)P(A\,|\,H_n) + ... \qquad (2.9)$$

*şi **formula lui Bayes***

$$P(H_j\,|\,A) = \frac{P(H_j)P(A\,|\,H_j)}{P(H_1)P(A\,|\,H_1) + ... + P(H_n)P(A\,|\,H_n) + ...}. \qquad (2.10)$$

Exemplul 5. La un depozit sunt 1000 de piese de acelaşi tip (identice), fabricate de uzinele nr.1, nr.2 şi nr.3, în proporţie de 5:3:2. Se ştie că n_i% din piesele fabricate de uzina *i* sunt cu defecte: $n_1 = 4$, $n_2 = 5$, $n_3 = 6$.

1) Să se calculeze probabilitatea ca o piesă extrasă la întâmplare va fi calitativă. **2)** Să se calculeze probabilitatea că o piesă extrasă la întâmplare va fi una fabricată de uzina nr.1, dacă se ştie că aceasta piesă este cu defecte.

Rezolvare.1) Notăm: A = *{piesa luată la întâmplare va fi calitativă}*. În dependenţă de uzina la care a fost fabricată piesa extrasă pot fi enunţate ipotezele: H_i = *{piesa luată a fost fabricată de uzina nr.i}*, $i = 1, 2, 3$. Din condiţiile problemei rezultă că uzina nr.1 a fabricat 500 de piese din cele existente la depozit, uzina nr.2 - 300 de piese şi uzina nr.3 - 200 de piese. Aplicând definiţia clasică a probabilităţii, avem: $P(H_1)$ = 500/1000 =0,5, $P(H_2)$ = 300/1000 = 0,3, şi $P(H_3)$ = 200/1000 = 0,2. Cum n_i% din piesele fabricate de uzina i sunt cu defecte, rezultă că $(1-n_i)$% din piese sunt calitative. Deci $P(A|H_1)$ = 0,96, $P(A|H_2)$ = 0,95 şi $P(A|H_3)$ = 0,94. Aplicând formula probabilităţii totale (9).

In[7]:=N[(0.5*0.96 + 0.3*0.95 + 0.2*0.94]
Out[7]=0.953
Deci, $P(A)$=0,953.

2) Conform notaţiei din punctul 1 avem $\overline{A}$ = {*piesa luată la întâmplare este cu defecte*}. Cum $P(\overline{A}\mid H_1)$ = 0,04, $P(\overline{A}\mid H_2)$ = 0,05, $P(\overline{A}\mid H_3)$ = 0,06, din formula lui Bayes (10) avem

$$P(H_1\mid\overline{A})=\frac{P(H_1)P(\overline{A}\mid H_1)}{P(H_1)P(\overline{A}\mid H_1)+P(H_2)P(\overline{A}\mid H_2)+P(H_3)P(\overline{A}\mid H_3)}.$$

In[8]:=N[$\dfrac{0.5*0.04}{0.5*0.04*0.3*0.05+0.2*0.06}$ **]**
Out[8]=0.425532
Am obţinut $P(H_1\mid\overline{A})$ =0,425532.

TEMA6:PROBE REPETATE

6.1 Experienţe independente. Experienţele aleatoare E_1, E_2,..., E_n se numesc *independente* în raport cu evenimentul aleator A, dacă acest eveniment poate să se realizeze sau nu în fiecare din aceste experienţe şi probabilitatea realizării lui în careva experienţă nu depinde de faptul dacă el s-a realizat sau nu în celelalte experienţe. Experienţele independente por tratate ca o experienţă care se repetă de n ori.

6.2 Schema binomială (schema Bernoulli sau schema cu revenire a urnei cu bile de două culori). Formula Bernoulli. Fie că în fiecare din n experienţe independente E_1, E_2,..., E_n evenimentul A poate să se realizeze cu probabilitatea p: $p = P(A)$. Atunci probabilitatea ca evenimentul A să nu se producă este $q = P(\overline{A}) = 1-P(A) = 1-p$. Notăm această probabilitate cu $P_n(k)$ probabilitatea ca evenimentul A să se realizeze de k ori în decursul al acestor n experienţe. Se demonstrează că această probabilitate poate fi calculată conform **formulei Bernoulli:**

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \ \boldsymbol{k = 0, 1, ..., n}. \qquad (1)$$

Schema cu revenire a urnei înseamnă că bilele se scot din urnă câte una şi fiecare bilă scoasă, după observarea culorii ei se întoarce din nou în urnă.

Exemplul 6. Se aruncă o monedă de 100 ori. Să se calculeze o valoare aproximativă a probabilităţii ca valoarea să apară de 47 ori.

Rezolvare. Fie evenimentul V = {apariţia valorii}. Avem: $p = P(V) = 1/2$ şi $q = 1-p = 1/2$. Formula Bernoulli (1) pentru $n = 100$, $k = 47$, $p = 1/2$ şi $q = 1/2$, este

$$P_{100}(47) = C_{100}^{47}(1/2)^{47}(1/2)^{100-47}.$$

Calculul acestei valori prin metode obişnuite este posibil dar prezintă dificultăţi. Apelăm la Sistemul Mathematica. Avem :

In[9]:= $\frac{100!}{(47!)*(53!)}(0.5)^{47}(0.5)^{53}$

Out[9]=0.0665905

Am obţinut $P_{100}(47)=0{,}0665905$.Δ

6.3 Schema polinomială (schema cu revenire a urnei, care conţine bile de mai multe culori). Fie că în rezultatul fiecărui din n experienţe independente $E_1, E_2, ..., E_n$ pot să se realizeze evenimentele aleatoare $A_1, A_2, ..., A_r$, care formează un sistem complet de evenimente. Notăm: $p_i = P(A_i)$, $i = 1, 2, ..., r$. Evident că $p_1 + p_2 + ... + p_r = 1$. Probabilitatea $P_n(k_1,k_2,...,k_r)$ ca în decursul a acestor n experienţe independente evenimentul A_i să se realizeze de k_i ori $i = 1, 2, ..., r$, $n = k_1 + k_2 + ... + k_r$, poate fi calculată conform formulei

$$\boldsymbol{P_n(k_1,k_2,...,k_r)} = \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_r!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_r^{k_r}. \qquad (2)$$

Evident, că pentru $r = 2$ din formula (2) rezultă (1).

Exemplul 7. Într-o urnă sunt bile de trei culori: 5 bile albe, 7 bile negre şi 8 bile albastre. Se extrag succesiv cu revenire 6 bile. Care este probabilitatea ca printre aceste 6 bile una să fie albă, două să fie negre şi trei să fie albastre?

Rezolvare. Fie evenimentele: A_1 = {bila extrasă este albă}, A_2 = {bila extrasă este neagră} şi A_3 = {bila extrasă este albastră}. Atunci: $p_1 = P(A_1)$

= 5/(5+7+8) = 1/4, $p_2 = P(A_2) = 7/20$, şi $p_3 = P(A_3) = 8/20 = 2/5$. Aplicând formula (8.1.12) cu $n = 6$, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, şi $k_3 = 3$, obţinem

$$P_6(1,2,3) = \frac{6!}{1!\cdot 2!\cdot 3!}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{7}{20}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^3.$$

Calculăm această expresie cu ajutorul Sistemului Mathematica.

In[10]:= $\frac{6!}{(1!)*(2!)*(3!)}*(1/4)^1*(7/20)^2*(2/5)^2$

Out[10]= $\frac{147}{1250}$

Am obţinut valoarea exactă $P_6(1,2,3)= \frac{147}{1250}$.

Dacă vrem să obţinem o valoare aproximativă sau o valoarea dată exprimată prin fracţii zecimale, atunci

In[11]:=N[%]

Out[11]=0.1176

Am obţinut iarăşi valoarea exactă $P_6(1,2,3) = 0{,}1176$.Δ

6.4 Schema fără revenire a urnei cu bile de două culori. Fie că într-o urnă sunt n bile dintre care n_1 sunt albe şi n_2 sunt negre. Se extrag la întâmplare m bile fără a întoarce bila extrasă în urnă. Atunci probabilitatea $P_m(m_1,m_2)$ ca printre m bile extrase m_1 să fie albe şi m_2 se calculează conform formulei

$$P_m(m_1,m_2) = \frac{C_{n_1}^{m_1}C_{n_2}^{m_2}}{C_n^m}. \tag{3}$$

Exemplul 9. Într-o loterie sunt 20 bilete câştigătoare şi 80 bilete fără câştig. Să se calculeze probabilitatea ca din 7 bilete cumpărate două să fie cu câştig.

Rezolvare. Aplicăm formula (3) cu $n_1 = 4$, $m_1 = 6$, $m = 10$, $n = 4$, $M = 5$ şi $m = 2$. Avem:

$$P_7(2,5) = \frac{C_{20}^2 C_{80}^5}{C_{100}^7}$$

Calculăm o valoare aproximativă a acestei expresii.

In[13]:=N[($\frac{20!}{(2!)*(18!)}*\frac{80!}{(5!)*(75!)})/(\frac{100!}{(7!)*(93!)})$ **]**

Out[13]=0.28534

Am obţinut rezultatul $P_7(2,5) = 0{,}28534$.Δ

6.5 Schema fără revenire a urnei cu bile de mai multe culori

Fie că într-o urnă sunt n bile din care n_i sunt de culoarea i, $i = 1, 2, ..., r$, $n = n_1 + n_2 + ... + n_r$, se extrag succesiv fără revenire m bile, $m < n$. Atunci probabilitatea $P_m(m_1, m_2, ..., m_r)$ ca printre bilele extrase m_i să fie de culoarea i, $i = 1, 2, ..., r$, $m = m_1 + m_2 + ... + m_r$, se calculează conform formulei

$$P_m(m_1, m_2, ..., m_r) = \frac{C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} \ldots C_{n_r}^{m_r}}{C_n^m}. \qquad (4)$$

Exemplul 10. La un depozit sunt 200 de piese de acelaşi tip, din care 100 sunt de calitatea întâi, 66 de calitatea a doua şi 34 de calitatea a treia. Se iau la întâmplare fără revenire 30 piese. Care este probabilitatea ca printre ele 17 să fie de calitatea întâi, 9 de calitatea a doua şi 4 de calitatea a treia?

Rezolvare. Aplicăm formula (8.1.16) cu $n = 200$, $m = 30$, $n_1 = 100$, $n_2 = 66$, $n_3 = 34$, $m_1 = 17$, $m_2 = 9$, $m_3 = 4$. Avem

$$P_{30}(17,9,4) = \frac{C_{100}^{17} C_{66}^{9} C_{34}^{4}}{C_{200}^{30}}$$

Calculăm o valoare aproximativă a acestei expresii cu ajutorul Sistemului Mathematica.

In[14]:=N[($\frac{100!}{(17!)(83!)} * \frac{66!}{(9!)(57!)} * \frac{34!}{(4!)(30!)}) / (\frac{200!}{(30!)(170!)})$ **]**

Out[14]=0.0278641

Am obţinut $P_{30}(17,9,4) = 0{,}0278641$.Δ

6.6 Schema Pascal (geometrică). Fie că evenimentul aleator A poate să se realizeze în fiecare din experienţele independente E_1, E_2, … cu probabilitatea p. Atunci probabilitatea $P(k)$ ca el să se realizeze prima dată în experienţa E_k se calculează conform formulei

$$P(k) = pq^{k-1}, \qquad (5)$$

unde $q = 1-p$.

Exemplul 11. 1) Să se calculeze probabilitatea apariţiei numărului 4, pentru prima dată, la aruncarea a zecea a zarului. 2) Care este probabilitatea evenimentului aleator B = {la primele 10 aruncări ale unui zar numărul 3 nu va apărea}?

Rezolvare. 1) Cum $p = 1/6$ şi $q = 1-1/6 = 5/6$, din formula (5) obţinem $P(10) = pq^9 = (1/6)(5/6)^9$.

In[15]:=N[(1/6)*(5/6)^9]

Out[15]=0.0323011

Am obţinut $P(10) = 0{,}0323011$

2) Evenimentul B poate fi definit şi astfel: B = {numărul 4 va apărea pentru prima dată la aruncarea a unsprezecea, sau a douăsprezecea, sau a treisprezecea, ...}. Deci

$P(B) = P(11) + P(12) + P(13) + ... = \sum_{k=11}^{\infty}(1/6)(5/6)^{k-1}$.

Calculăm această sumă cu ajutorul Sistemului Mathematica.

In[16]:=Sum[(1/6)*(5/6)^(k–1),{k,11,∞}]

Out[16]= $\dfrac{9765625}{60466176}$

Am obţinut valoarea exactă a probabilităţii lui B. Obţinem o valoare exprimată prin fracţii zecimale.

In[17]:=N[%]

Out[17]=0.161506

Aceeaşi valoare poate fi obţinută şi în modul ce urmează.

In[18]:=NSum[(1/6)*(5/6)^(k–1),{k,11,∞}]

Out[18]=0.161506.∆

6.7. Calculul valorilor aproximative ale probabilităţii din schema Bernoulli. Pentru n şi m relativ mari calculul probabilităţii conform formulei Bernoulli prezintă mari dificultăţi, dacă nu se aplică Sistemul Mathematica. În acest caz se folosesc formule de calcul al unor valori aproximative ale acestei probabilităţi. Una din acestei **formule** rezultă din *teorema* ***locală Moivre-Laplace*** şi are forma

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)^2}, \qquad (6)$$

unde $0 < p < 1$, $P_n(k)$ este probabilitatea ca evenimentul aleator A cu $P(A) = p$, $q = 1-p$, să se realizeze de k ori în decursul a n experienţe independente, n fiind destul de mare.

În cazul când probabilitatea p este aproape de 0 sau de 1, atunci o mai bună aproximaţie în raport cu formula (6) este obţinută prin formula

$$P_n(k) \approx \frac{a^k}{k!}e^{-a}, \qquad (7)$$

unde $a = np$ şi n este destul de mare, iar p este aproape de zero. Această formulă rezultă din *teorema Poisson*. Se recomandă ca această formula să fie aplicată atunci, când $npq < 9$, iar în celelelte cazuri – formula (6).

O valoare aproximativă a probabilităţii $P_n(k_1 \le k \le k_2)$ ca în decursul a n experienţe independente numărul k de realizări ale evenimentului aleator A să fie cuprins între k_1 şi k_2 poate fi calculată conform formulei

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \qquad (8)$$

unde $\Phi(x)$ este *funcţia Laplace* care se defineşte prin egalitatea

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt. \qquad (9)$$

Formula (8.1.20) rezultă di teorema integrală Moivre-Laplace.

Având la dispoziţie Sistemul Mathematica, nu este necesară aplicarea formulelor (6) – (9), dar putem cerceta şi compara erorile care se obţin la aplicarea lor.

Exemplul 12. Probabilitatea ca o piesă, fabricată de o uzină, să fie cu careva defect este p = 0,01. 1) Să se calculeze probabilitatea ca din 10000 piese luate la întâmplare 90 să fie cu defect, folosind: a) formula Bernoulli (); b) formula (6); c) formula (7). 2) Care este probabilitatea ca numărul de piese cu defect să fie cuprins între 95 şi 105?

Rezolvare. 1) a) Valoarea exactă a probabilităţii cerute este dată de formula Bernoulli:

$$P_{10000}(90) = C_{10000}^{90}(0{,}01)^{90}(0{,}99)^{9910}.$$

Folosim Sistemul Mathematica

In[19]:=N[= $\dfrac{10000!}{(90!)(10000-90)!}(0.01)^{90}(0.99)^{10000-90}$ **]**

Out[19]=0.0250257

Am obţinut rezultatul $P_{10000}(90) \approx 0{,}0250257$ şi toate cifrele sunt cele din valoarea exactă în afară, poate că, de ultima.

b) Conform formulei (6) avem

$$P_{10000}(90) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 10000 \cdot 0.01 \cdot 0.99}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{90-100000.01}{\sqrt{100000.01 \cdot 0.99}}\right)^2}.$$

Pentru calculul valorii acestei expresii folosim Sistemul Matematica.

In[20]:=

$$\mathbf{N}[\frac{1}{\sqrt{2*\pi*10000*0.01*0.99}} Exp[-\left(\frac{90-10000*0.01}{\sqrt{10000*0.01*0.99}}\right)\text{^}2/2]]$$

Out[20]=0.0241965

Am obţinut rezultatul $P_{10000}(90) \approx 0.0241965$

c) Calculăm probabilitatea cerută cu ajutorul formulei (7). Avem

$$P_{10000}(90) \approx \frac{(10000 \cdot 0{,}01)^{90}}{90!} e^{-100000{,}01}.$$

Folosim Sistemul Mathematica.

In[21]:=N $\frac{(10000 * 0{,}01)^{90}}{90!} Exp[-10000 * 0.01]]$

Out[21]=0.0250389

Am obţinut rezultatul $P_{10000}(90) \approx 0.0250389.$

2) Conform formulelor (8) şi (9) avem

$$P_{10000}(95 \le k \le 105) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{95-10000*0.1}{\sqrt{10000*0.01*0.99}}}^{\frac{105-10000*0.01*0{,}99}{\sqrt{10000*0.01*0.99}}} e^{-t^2/2} dt \; .$$

Pentru calculul acestei integrale folosim Sistemul Mathematica.

In[22]:=NIntegrate[$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} Exp[-t^2/2], \{t, \frac{95-10000*0.01}{\sqrt{10000*0.01*0.99}},$

$\frac{105-10000*0.01}{\sqrt{10000*0.01*0.99}}\}]$

Out[22]=0.384697

Am obţinut rezultatul $P_{10000}(95 \le k \le 105) \approx 0{,}384697.\Delta$

Exerciţii pentru lucrul individual la Teoria probabilităţilor

1.1. Se aruncă un zar de două ori. Să se calculeze probabilităţile evenimentelor aleatoare: 1) A = {suma numerelor apărute nu întrece m}, 2) B = {suma numerelor apărute este egală cu r}, 3) G = {produsul numerelor apărute este mai mare ca n}. Valorile parametrilor m, n şi r sunt date pe variante.

1) m=4, n=14 , r=5; 2) m=5, n=13 , r=4; 3) m=6, n=12 , r=3;
4) m=7, n=11 , r=6; 5) m=8, n=10 , r=4; 6) m=4, n=13 , r=5;
7) m=5, n=12 , r=6; 8) m=6, n=11 , r=3; 9) m=7, n=10 , r=5;
10) m=8, n=14 , r=6; 11) m=4, n=12 , r=4; 12) m=5, n=11 , r=3;
13) m=6, n=10 , r=6; 14) m=7, n=14 , r=4; 15) m=8, n=13 , r=3;

16) m=4, n=12 , r=5; 17) m=5, n=11 , r=4; 18) m=6, n=10 , r=3;

19) m=7, n=14 , r=5; 20) m=8, n=13 , r=6; 21) m=4, n=11 , r=3;

22) m=5, n=10 , r=5; 23) m=6, n=14 , r=6; 24) m=7, n=13 , r=4;

25) m=8, n=12 , r=5; 26) m=4, n=10 , r=6; 27) m=5, n=11 , r=4;

28) m=6, n=12 , r=3; 29) m=7, n=13 , r=6; 30) m=8, n=14 , r=4.

1.2. Într-un lot care conţine n piese de acelaşi tip sunt 8 piese cu careva defect. Se extrag fără revenire 6 piese. Dacă toate piesele extrase sunt calitative, atunci lotul este acceptat, iar în caz contrar este refuzat. Să se calculeze probabilitatea evenimentului A = {lotul este acceptat}. Parametrul n este egal cu 100 plus numărul variantei.

1.3. Un aparat constă din trei elemente care în timpul funcţionării lui pot să se deterioreze independent unul de altul. Notăm: A_i = {elementul i se deteriorează}, i = 1, 2, 3. Se cunosc probabilităţile acestor evenimente: $p_1 = P(A_1)$, $p_2 = P(A_2)$, $p_3 = P(A_3)$, valorile cărora sunt date pe variante după enunţul exerciţiului. Să se calculeze probabilităţile evenimentelor: A = {nu se deteriorează nici un element}, B = {se deteriorează un singur element}, C = {se deteriorează două elemente}, D = {se deteriorează toate elementele}, E = {primul element nu se deteriorează}.

1) p_1=0,9, p_2=0,8, p_3=0,7; 2) p_1=0,7, p_2=0,8, p_3=0,7;
3) p_1=0,6, p_2=0,8, p_3=0,7; 4) p_1=0,5, p_2=0,8, p_3=0,7;
5) p_1=0,4, p_2=0,8, p_3=0,7; 6) p_1=0,9, p_2=0,8, p_3=0,6;
7) p_1=0,7, p_2=0,8, p_3=0,6; 8) p_1=0,5, p_2=0,8, p_3=0,6;
9) p_1=0,4, p_2=0,8, p_3=0,6; 10) p_1=0,4, p_2=0,6, p_3=0,5;
11) p_1=0,7, p_2=0,6, p_3=0,5; 12) p_1=0,8, p_2=0,6, p_3=0,5;
13) p_1=0,9, p_2=0,6, p_3=0,5; 14) p_1=0,5, p_2=0,8, p_3=0,4;
15) p_1=0,6, p_2=0,8, p_3=0,4; 16) p_1=0,7, p_2=0,8, p_3=0,4;
17) p_1=0,9, p_2=0,8, p_3=0,4; 18) p_1=0,4, p_2=0,8, p_3=0,5;
19) p_1=0,6, p_2=0,7, p_3=0,5; 20) p_1=0,8, p_2=0,7, p_3=0,5;
21) p_1=0,7, p_2=0,8, p_3=0,9; 22) p_1=0,7, p_2=0,8, p_3=0,3;
23) p_1=0,7, p_2=0,8, p_3=0,6; 24) p_1=0,7, p_2=0,6, p_3=0,5;
25) p_1=0,7, p_2=0,8, p_3=0,4; 26) p_1=0,6, p_2=0,8, p_3=0,9;
27) p_1=0,6, p_2=0,7, p_3=0,8; 28) p_1=0,6, p_2=0,8, p_3=0,5;
29) p_1=0,6, p_2=0,8, p_3=0,4; 30) p_1=0,5, p_2=0,6, p_3=0,4.

1.4. Un magazin primeşte pentru vânzare articole cu exterioare identice fabricate la trei uzine în proporţie de: n_1% de la uzina nr.1, n_2% de la uzina nr.2 şi n_3% de la uzina nr.3. Procentele de articole defectate sunt: m_1 pentru uzina nr.1, m_2 pentru uzina nr.2 şi m_3 pentru uzina nr.3.

Valorile parametrilor se conţin, pe variante, după enunţul exerciţiului. !) Care este probabilitatea ca un articol cumpărat să fie calitativ? 2) **U**n articol luat la întâmplare este defectat. Care este probabilitatea că acest articol a fost fabricat la uzina nr.k.

1) n_1=20, n_2=30, n_3=50, m_1=5, m_2=3, m_3=2, k=1;
2) n_1=10, n_2=40, n_3=50, m_1=3, m_2=2, m_3=5; k=2;
3) n_1=30, n_2=20, n_3=50, m_1=4, m_2=1, m_3=5; k=3;
4) n_1=40, n_2=10, n_3=50, m_1=1, m_2=5, m_3=4; k=1;
5) n_1=10, n_2=50, n_3=40, m_1=2, m_2=4, m_3=4; k=2;
6) n_1=20, n_2=40, n_3=40, m_1=3, m_2=3, m_3=4; k=3;
7) n_1=30, n_2=30, n_3=40, m_1=4, m_2=2, m_3=4; k=1;
8) n_1=40, n_2=20, n_3=40, m_1=5, m_2=1, m_3=4; k=2;
9) n_1=50, n_2=10, n_3=40, m_1=1, m_2=6, m_3=3; k=3;
10) n_1=10, n_2=60, n_3=30, m_1=2, m_2=5, m_3=3; k=1;
11) n_1=20, n_2=50, n_3=30, m_1=3, m_2=4, m_3=3; k=2;
12) n_1=30, n_2=40, n_3=30, m_1=4, m_2=3, m_3=3; k=3;
13) n_1=40, n_2=30, n_3=30, m_1=5, m_2=2, m_3=3; k=1;
14) n_1=50, n_2=20, n_3=30, m_1=6, m_2=1, m_3=3; k=2;
15) n_1=60, n_2=10, n_3=30, m_1=1, m_2=7, m_3=2; k=3;
16) n_1=10, n_2=70, n_3=20, m_1=2, m_2=6, m_3=2; k=1;
17) n_1=20, n_2=60, n_3=20, m_1=3, m_2=5, m_3=2; k=2;
18) n_1=30, n_2=50, n_3=20, m_1=4, m_2=4, m_3=2; k=3;
19) n_1=40, n_2=40, n_3=20, m_1=5, m_2=3, m_3=2; k=1;
20) n_1=50, n_2=30, n_3=20, m_1=6, m_2=2, m_3=2; k=2;
21) n_1=10, n_2=40, n_3=50, m_1=7, m_2=5, m_3=4; k=3;
22) n_1=20, n_2=60, n_3=20, m_1=6, m_2=3, m_3=7; k=1;
23) n_1=30, n_2=20, n_3=50, m_1=4, m_2=5, m_3=6; k=2;
24) n_1=40, n_2=20, n_3=40, m_1=5, m_2=7, m_3=6; k=3;
25) n_1=40, n_2=30, n_3=30, m_1=5, m_2=4, m_3=6; k=1;
26) n_1=40, n_2=10, n_3=50, m_1=3, m_2=8, m_3=4; k=2;
27) n_1=50, n_2=30, n_3=20, m_1=3, m_2=4, m_3=5; k=3;
28) n_1=20, n_2=50, n_3=30, m_1=5, m_2=6, m_3=4; k=1;
29) n_1=30, n_2=20, n_3=50, m_1=7, m_2=5, m_3=6; k=2;
30) n_1=40, n_2=50, n_3=10, m_1=5, m_2=6, m_3=8, k=3.

1.5. Un aparat constă din trei elemente care în timpul funcţionării lui pot să se deterioreze independent unul de altul. Notăm: A_i = {elementul i se deteriorează}, i = 1, 2, 3. Se cunosc probabilităţile acestor evenimente: $p_1 = P(A_1)$, $p_2 = P(A_2)$, $p_3 = P(A_3)$, valorile cărora sunt date pe variante după enunţul exerciţiului. Să se calculeze probabilităţile evenimentelor: A = {nu se deteriorează nici un element}, B = {se deteriorează un singur element}, C = {se deteriorează două elemente}, D = {se deteriorează toate elementele}, E = {primul element nu se deteriorează}.

1.6. O monedă se aruncă de n ori. Să se calculeze probabilităţile evenimentelor: A = {valoarea a apărut de k ori}, B = {stema a apărut nu mai mult de 2 ori}, C = {stema nu a apărut nici o dată}. Numărul n este egal cu 25 plus numărul variantei, iar k este egal cu 10 plus numărul variantei.

1.7. Probabilitatea ca un aparat electric să se defecteze în perioada de garanţie este p=0,12. Să se calculeze probabilitatea ca din 1000 aparate cumpărate, în perioada de garanţie, să se defecteze m aparate. Numărul m coincide cu numărul variantei adunat cu 100.

1.8. Într-o urnă sunt n bile de trei culori: n_1 bile albe, n_2 bile negre şi n_3 bile albastre. Se extrag succesiv cu revenire m bile. Să se calculeze probabilităţile evenimentelor: A = {toate bilele sunt albe}, B = {m_1 bile sunt albe, m_2 sunt negre şi m_3 sunt albastre}, C = {m_1 bile sunt albe iar restul sunt de alte culori}.

1) n=15, n_1=4 n_2=5, n_3=6, m=10, m_1=2, m_2=3, m_3=5;
2) n=15, n_1=3, n_2=6, n_3=6, m=10, m_1= 2, m_2=4, m_3=4;
3) n=15, n_1=5, n_2=4, n_3=6, m=10, m_1=3, m_2=2, m_3=5
4) n=15, n_1=6, n_2=5, n_3=4, m=10, m_1=5, m_2=3, m_3=2;
5) n=15, n_1=4, n_2=6, n_3=5, m=10, m_1=2, m_2=4, m_3=4;
6) n=15, n_1=3, n_2=5, n_3=7, m=9, m_1=1, m_2=3, m_3=5;
7) n=15, n_1=5, n_2=6, n_3=4, m=9, m_1=2, m_2=5, m_3=2;
8) n=15, n_1=6, n_2=4, n_3=5, m=9, m_1=3, m_2=2, m_3=4;
9) n=15, n_1=7, n_2=4, n_3=4, m=9, m_1=5, m_2=3, m_3=1;
10) n=15, n_1=7, n_2=3, n_3=5, m=9, m_1=4, m_2=2, m_3=3;
11) n=18, n_1=4, n_2=6, n_3=8, m=10, m_1=2, m_2=3, m_3=5;
12) n=18, n_1=5, n_2=5, n_3=8, m=10, m_1=4, m_2=1, m_3=5;
13) n=18, n_1=4, n_2=8, n_3=6, m=10, m_1=2, m_2=4, m_3=4;
14) n=18, n_1=5, n_2=8, n_3=5, m=10, m_1=3, m_2=5, m_3=2;
15) n=18, n_1=5, n_2=6, n_3=7, m=10, m_1=3, m_2=4, m_3=3;
16) n=16, n_1=5, n_2=7, n_3=6, m=9, m_1=3, m_2=3, m_3=3;
17) n=18, n_1=6, n_2=5, n_3=7, m=9, m_1=3, m_2=2, m_3=4;
18) n=18, n_1=6, n_2=7, n_3=5, m=9, m_1=4, m_2=4, m_3=1;
19) n=18, n_1=6, n_2=8, n_3=4, m=9, m_1=4, m_2=3, m_3=2;
20) n=18, n_1=6, n_2=4, n_3=8, m=9, m_1=3, m_2=2, m_3=5;
21) n=16, n_1=5, n_2=5, n_3=6, m=8, m_1=2, m_2=3, m_3=3;
22) n=16, n_1=5, n_2=6, n_3=5, m=8, m_1=3, m_2=2, m_3=3;
23) n=16, n_1=5, n_2=7, n_3=4, m=8, m_1=3, m_2=4, m_3=1;
24) n=16, n_1=5, n_2=4, n_3=7, m=8, m_1=3, m_2=2, m_3=3;

25) n=16, n_1=6, n_2=5, n_3=5, m=8, m_1=4, m_2=3, m_3=1;
26) n=16, n_1=6, n_2=4, n_3=6, m=9, m_1=3, m_2=3, m_3=3;
27) n=16, n_1=6, n_2=6, n_3=4, m=9, m_1=2, m_2=4, m_3=2;
28) n=16, n_1=7, n_2=4, n_3=5, m=9, m_1=4, m_2=2, m_3=3;
29) n=16, n_1=7, n_2=5, n_3=4, m=9, m_1=5, m_2=2, m_3=2;
30) n=16, n_1=4, n_2=5, n_3=7, m=9, m_1=2, m_2=3, m_3=4.

1.9. Să se calculeze probabilităţile evenimentelor A, B şi C din exerciţiul 1.8 cu condiţia că bilele extrasă nu revine în urnă.

1.10. 1) Care este probabilitatea că numărul 3 va apărea pentru prima dată la a m-a aruncare a zarului? 2) Care este probabilitatea că la primele m aruncări ale zarului numărul 3 nu va apărea? Numărul m este numărul variantei adunat cu 4.

1.11. Probabilitatea unui eveniment A într-o experienţă aleatoare este p: $p = P(A)$. 1) Să se calculeze probabilitatea ca în decursul a 1000 repetări a acestei experienţe evenimentul A se va realiza de k ori (să se folosească formula care rezultă din teorema locală Moivre-Laplace şi formula care rezultă din teorema Poisson). 2) Să se calculeze probabilitatea ca numărul de realizări ale evenimentului A să fie cuprins între k_1 şi k_2.

1) p=0,008, k=9, k_1=5, k_2=13, 2) p=0,009, k=10, k_1=6, k_2=14,
3) p=0,011, k=11, k_1=7, k_2=15, 4) p=0,011 k=9, k_1=7, k_2=15,
5) p=0,012, k=10, k_1=8, k_2=16, 6) p=0,008, k=10, k_1=7, k_2=13,
7) p=0,009, k=11, k_1=8, k_2=14, 8) p=0,01, k=12, k_1=9, k_2=15,
9) p=0,011, k=10, k_1=9, k_2=14, 10) p=0,012, k=11, k_1=10, k_2=15,
11) p=0,008, k=11, k_1=6, k_2=13, 12) p=0,009, k=12, k_1=7, k_2=13,
13) p=0,01, k=13, k_1=8, k_2=15, 14) p=0,011, k=11, k_1=9, k_2=14,
15) p=0,012, k=13, k_1=10, k_2=15, 16) p=0,008, k=7, k_1=5, k_2=10,
17) p=0,009, k=8, k_1=6, k_2=16, 18) p=0,01, k=9, k_1=7, k_2=17,
19) p=0,011, k=10, k_1=6, k_2=17, 20) p=0,012, k=11, k_1=8, k_2=18,
21) p=0,008, k=9, k_1=5, k_2=15, 22) p=0,009, k=10, k_1=6, k_2=15,
23) p=0,01, k=9, k_1=4, k_2=14, 24) p=0,011, k=10, k_1=6, k_2=17,
25) p=0,012, k=11, k_1=5, k_2=14, 26) p=0,008, k=9, k_1=5, k_2=15,
27) p=0,009, k=8, k_1=4, k_2=14, 28) p=0,01, k=9, k_1=7, k_2=17,
29) p=0,011, k=12, k_1=8, k_2=18, 30) p=0,012, k=11, k_1=6, k_2=17.