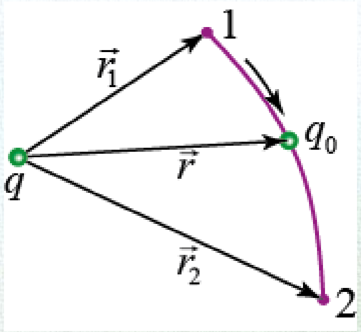
Tema 6. Câmpul electric în vid II

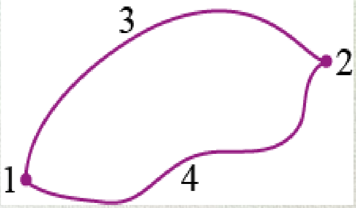
Potențialitatea câmpului electric

Un câmp se numește potențial dacă lucrul forțelor câmpului electrostatic nu depinde de forma traiectoriei sarcinii, ci numai de pozițiile ei inițială și finală.



$$L_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = q_0 \int_1^2 \vec{E} d\vec{r} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$L_{132} = L_{142} \qquad L_{241} = -L_{142}$$



$$\left.\begin{aligned} & L_{132} + L_{241} = L_{13241} = 0 \\ & L_{13241} = q_0 \oint \left(\vec{E} d\vec{l}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\oint \left(\vec{E} d\vec{l}\right) = 0}$$

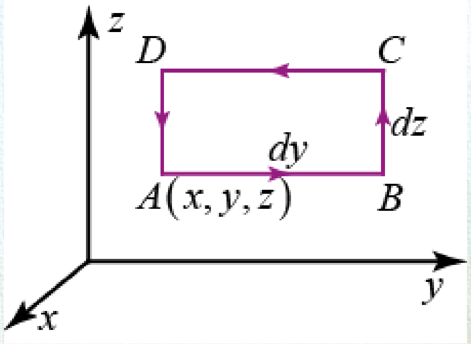
– condiția de potențialitate sub formă integrală

un câmp vectorial este potențial, dacă circulația vectorului acestui câmp de-a lungul oricărei traiectorii închise este egală cu zero.

Tema 6. Câmpul electric în vid II

Forma diferențială a condiției de potențialitate

$$\oint\left(\vec{E}d\vec{l}\right)=0 \longrightarrow \oint\left(E_x dx+E_y dy+E_z dz\right)=0$$



Aportul laturilor *AB* și *CD* la valoarea circulației

$$-E_y\left(x,y,z+dz\right)dy+E_y\left(x,y,z\right)dy=-\frac{\partial E_y}{\partial z}dydz=-\frac{\partial E_y}{\partial z}dS$$

Aportul laturilor *BC* și *DA* la valoarea circulației

$$E_z\left(x,y+dy,z\right)dz-E_z\left(x,y,z\right)dz=\frac{\partial E_z}{\partial y}dzdy=\frac{\partial E_z}{\partial y}dS$$

Circulația totală de-a lungul circuitului *ABCD*

$$\oint E_l dl=\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)dS=0 \longrightarrow \frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=0$$

Tema 6. Câmpul electric în vid II

Analogic, alegând contururi în planele *xOz* și *xOy*, obținem

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

Multiplicând ecuațiile cu vectorii unitari ai axelor de coordonate respective și adunându-le, obținem

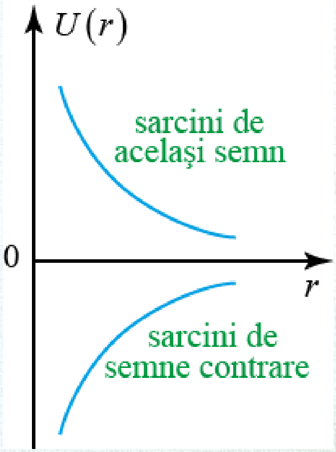
$\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0$ **– condiția de potențialitate sub formă diferențială**

unde $$\mathrm{rot}\,\vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = \left[\vec{\nabla}\vec{E}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}.$$

Tema 6. Câmpul electric în vid II

Potențialul câmpului electric



$$E_p = L_{r\infty} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

$$L_{12} = E_{p1} - E_{p2} = -\left(E_{p2} - E_{p1}\right)$$

$$\varphi = \frac{E_p(r)}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$ – potențialul câmpului electrostatic al sarcinii punctiforme

$$L_{12} = q_0\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) \Longrightarrow \Delta\varphi \equiv \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{L_{12}}{q_0}$$ – diferență de potențial

$$\left[\Delta\varphi\right] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}} = \mathrm{V}$$

voltul este diferența de potențial dintre două puncte ale câmpului, la care pentru deplasarea între ele a unei sarcini de 1C forțele câmpului efectuează un lucru de 1J.

Tema 6. Câmpul electric în vid II

Potențialul este caracteristica energetică a câmpului, iar intensitatea este caracteristica lui de forță

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E_l dl$$ – relația dintre diferența de potențial și intensitatea câmpului electric sub formă integrală

Fie punctele 1 și 2 pe axa Ox, astfel încât $x_2 - x_1 = dx$.

$$\left.\begin{aligned} dL_x &= q_0 E_x dx \\ dL_x &= q_0\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = -q_0 d\varphi \end{aligned}\right\} \Longrightarrow d\varphi = -E_x dx$$, analogic pentru Oy și Oz

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \Longrightarrow \vec{E} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k}\right)$$

sau

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\left(\vec{\nabla}\varphi\right)$$ – relația dintre diferența de potențial și intensitatea câmpului electric sub formă diferențială

Tema 6. Câmpul electric în vid II

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \;\longrightarrow\; \operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \;\longrightarrow\; \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta \equiv \vec{\nabla}^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ – Operatorul diferențial Laplace (Laplacian)

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$ – Ecuația lui Poisson

În lipsa sarcinilor electrice ($\rho = 0$), ecuația lui Poisson trece în

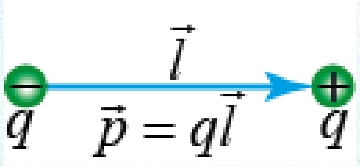
$$\nabla^2\varphi = 0$$ – Ecuația lui Laplace

Tema 6. Câmpul electric în vid II

Sistemul compus din două sarcini egale ca valoare și de semne contrare $+q$ și $-q$ situate la distanța l una de alta se numește **dipol electric.**

$\vec{l}$ – brațul al dipolului

$\vec{p} = q\vec{l}$ – momentul electric al dipolului

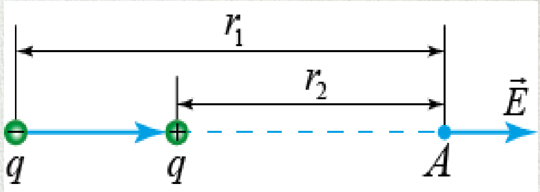


1. Punctul de observație A se află pe continuarea axei dipolului

$$E = E_{+} - E_{-} = kq\left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right) = kq\frac{(r_1 - r_2)(r_1 + r_2)}{(r_1 r_2)^2} \approx kq\frac{2(r_1 - r_2)}{r^3} = k\frac{2p}{r^3}$$

Sub formă vectorială

$$\vec{E} = k\frac{2\vec{p}}{r^3}$$



Potențialul câmpului în punctul A

$$\varphi = \varphi_{-} + \varphi_{+} = kq\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = kq\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} \approx k\frac{p}{r^2}$$

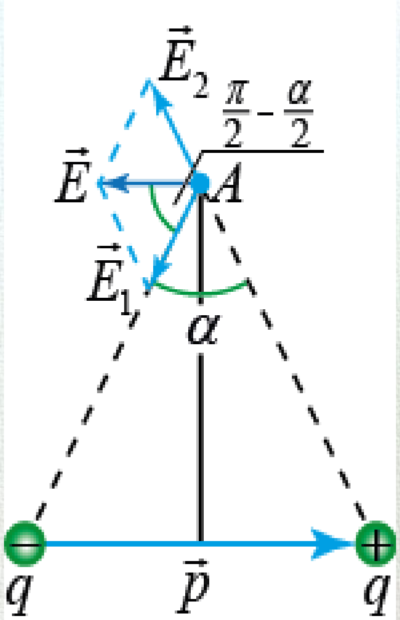
Tema 6. Câmpul electric în vid II

2. Punctul de observație *A* se află pe perpendiculara ridicată din centrul dipolului

$$E = 2E_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = 2E_1 \sin\frac{\alpha}{2}$$

$\sin\frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$ – pentru dipolul punctiform

$$E = E_1\alpha = k\frac{q}{r^2}\frac{l}{r} = k\frac{p}{r^3}$$



sub formă vectorială

$$\vec{E} = -k\frac{\vec{p}}{r^3}$$

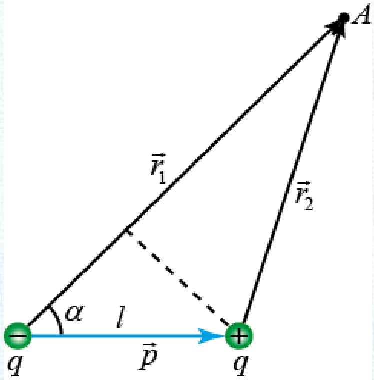
Potențialul câmpului în punctul *A*

$$\varphi = \varphi_- + \varphi_+ = kq\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\right) = 0$$

Tema 6. Câmpul electric în vid II

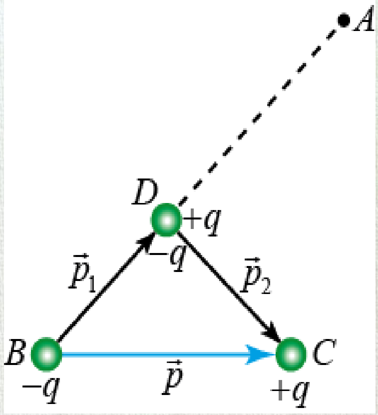
3. Punctul de observare *A* se află într-un loc arbitrar

$$\left.\begin{aligned}\vec{E} &= k\frac{2\vec{p}_1}{r^3} - k\frac{\vec{p}_2}{r^3} = \frac{k}{r^3}\left(2\vec{p}_1 - \vec{p}_2\right)\\ \vec{p} &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{E} = \frac{k}{r^3}\left(3\vec{p}_1 - \vec{p}\right)$$



Momentul dipolar $\vec{p}_1 = \frac{\left(\vec{p}_1\cdot\vec{r}\right)\vec{r}}{r^2}$, iar $\left(\vec{p}_1\cdot\vec{r}\right) = \left(\vec{p}\cdot\vec{r}\right) - \left(\vec{p}_2\cdot\vec{r}\right) = \left(\vec{p}\cdot\vec{r}\right)$

Obținem definitiv $\vec{E} = k\left(\frac{3\left(\vec{p}\cdot\vec{r}\right)}{r^5}\vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right)$



Modulul vectorului intensității câmpului

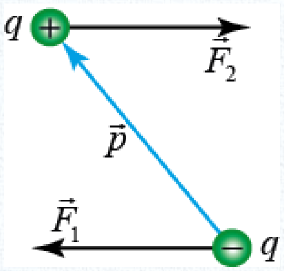
$$E = \sqrt{\vec{E}^2} \Rightarrow E = \frac{kp}{r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\alpha}$$

Potențialul câmpului

$$\varphi = \varphi_- + \varphi_+ = kq\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = kq\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} \qquad \begin{aligned} r_1 r_2 &\approx r^2\\ r_1 - r_2 &= l\cos\alpha\end{aligned} \Rightarrow \varphi = k\frac{p\cos\alpha}{r^2}$$

Tema 6. Câmpul electric în vid II

Dipolul este situat într-un câmp electric omogen de intensitate E



Forța rezultată care acționează asupra sarcinilor punctiforme ale dipolului este zero, deoarece forțele sunt egale în modul și opuse ca sens. Momentul forțelor:

$$\vec{M} = \left[\vec{l} \cdot \vec{F}_2\right] = q\left[\vec{l} \cdot \vec{E}\right] = \left[\vec{p} \cdot \vec{E}\right] \longrightarrow \vec{M} = \left[\vec{p} \cdot \vec{E}\right]$$

În cazul unui câmp electric neomogen

$$\vec{F} = q\left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right)$$

Pentru dipolul punctiform diferența $\vec{E}_2 - \vec{E}_1$ este înlocuită cu diferențiala

$$d\vec{E} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec{E}}{\partial y}dy + \frac{\partial \vec{E}}{\partial z}dz \approx l_x \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + l_y \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + l_z \frac{\partial \vec{E}}{\partial z}$$

Forța rezultantă

$$\vec{F} = p_x \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + p_y \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + p_z \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} \longrightarrow \vec{F} = \left(\vec{p} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{E}$$