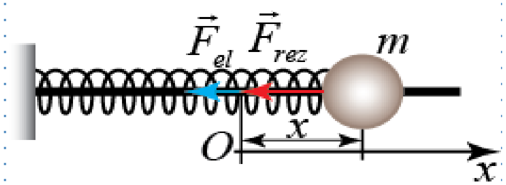
# Tema 14. Oscilații amortizate și forțate

## Oscilatii amortizate ale unui pendul elastic

$$ma = F_{\text{el.}} + F_{\text{rez}} \longrightarrow m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} \longrightarrow$$




$$\longrightarrow \ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \longrightarrow \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

unde $\beta = \dfrac{r}{2m}$ – coeficientul de amortizare; $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{q}{LC} = 0 \longrightarrow \ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \qquad \beta = \frac{R}{2L} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

## Ecuația diferențială generală a oscilațiilor libere amortizate

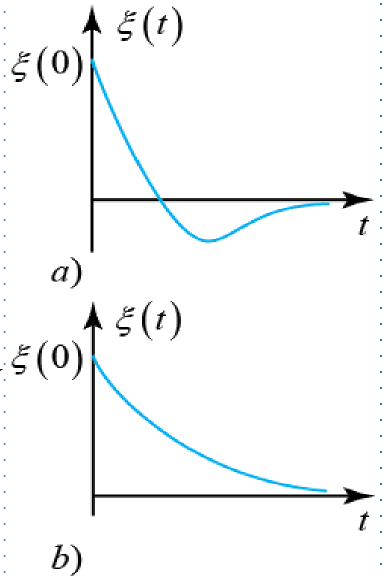
$$\boxed{\ddot{\xi} + 2\beta\dot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0}$$

# Tema 14. Oscilații amortizate și forțate

Soluția generală a ecuației diferențiale $\xi = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$

$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$ – ecuație caracteristică

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$




Pentru $\beta \geq \omega_0$ în sistem nu se stabilește regimul oscilatoriu

$\beta < \omega_0$: $\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = -\beta \pm i\omega$

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ **– frecvența ciclică a oscilațiilor amortizate**

$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$ **– perioada oscilațiilor amortizate**

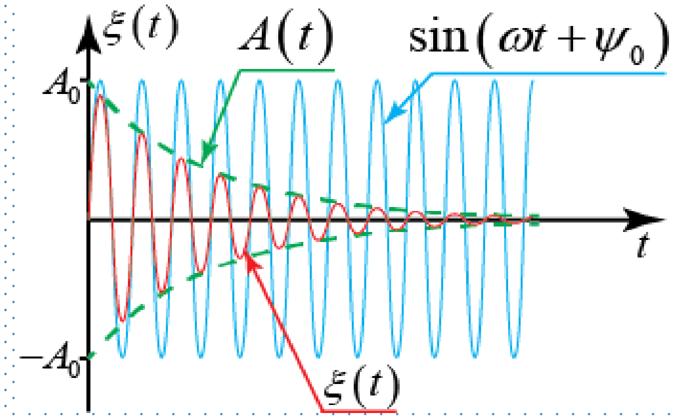
$$\xi(t) = e^{-\beta t}\left(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\right) = e^{-\beta t}\left[\left(C_1 + C_2\right)\cos\omega t + i\left(C_1 - C_2\right)\sin\omega t\right]$$

$$C_1 + C_2 = A_0 \sin\psi_0 \qquad i\left(C_1 - C_2\right) = A_0 \cos\psi_0$$

$$\xi(t) = e^{-\beta t}\left[A_0 \sin\psi_0 \cos\omega t + A_0 \cos\psi_0 \sin\omega t\right] = A_0 e^{-\beta t}\sin\left(\omega t + \psi_0\right)$$

# Tema 14. Oscilații amortizate și forțate

$$\boxed{\xi(t)=A_0e^{-\beta t}\sin(\omega t+\psi_0)}$$




$$A(t)=A_0e^{-\beta t}\quad\longrightarrow\quad\xi(t)=A(t)\sin(\omega t+\psi_0)$$

## Decrementul logaritmic al amortizării

$$\delta=\ln\frac{A(t)}{A(t+T)}=\ln\frac{A_0e^{-\beta t}}{A_0e^{-\beta(t+T)}}=\ln e^{\beta T}=\beta T$$

$$\boxed{\delta=\beta T}\quad\longrightarrow\quad\delta=\sqrt{\omega_0^2-\omega^2}\cdot\frac{2\pi}{\omega}\quad\longrightarrow\quad\frac{\delta^2}{4\pi^2}=\frac{\omega_0^2}{\omega^2}-1\quad\longrightarrow\quad\frac{\delta^2}{4\pi^2}+1=\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\quad\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\quad\omega=\frac{\omega_0}{\sqrt{1+(\delta/2\pi)^2}}\quad\longrightarrow\quad T=T_0\sqrt{1+\left(\frac{\delta}{2\pi}\right)^2}$$

## Factorul de calitate $Q$ al sistemului oscilator

$$Q=2\pi\frac{E(t)}{E(t)-E(t+T)}$$

# Tema 14. Oscilații amortizate și forțate

$$E(t) \sim A^2 \quad \Longrightarrow \quad Q = \frac{2\pi A^2(t)}{A^2(t) - A^2(t+T)} = \frac{2\pi A_0^2 e^{-2\beta t}}{A_0^2 e^{-2\beta t} - A_0^2 e^{-2\beta(t+T)}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta T}}$$

$$\boxed{Q = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\delta}}}$$

Dacă $\delta << 1$, atunci $e^{-2\delta} \approx 1 - 2\delta$. Obținem $\boxed{Q \approx \frac{\pi}{\delta}}$

În acest caz, $\omega \approx \omega_0$ și $T \approx T_0$, de aceea factorul de calitate

$$Q \approx \frac{\pi}{\delta} \approx \frac{\pi}{\beta T_0} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{2m}{2r}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{r}\sqrt{km}$$

Pentru factorul de calitate al circuitului oscilant când $\delta << 1$, obținem

$$Q \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{2L}{2R\sqrt{LC}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

# Tema 14. Oscilații amortizate și forțate

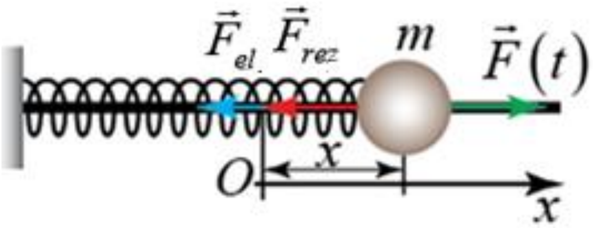
## Corespondența mărimilor fizice mecanice și electromagnetice

| Oscilații mecanice | | Oscilații electromagnetice | |
|---|---|---|---|
| Abaterea punctului material de la poziția de echilibru | $x(t)$ | Sarcina condensatorului, intensitatea curentului | $q(t)$<br>$I(t)$ |
| Masa oscilatorului | $m$ | Inductanța bobinei | $L$ |
| Coeficientul de rezistență | $r$ | Rezistența electrică | $R$ |
| Constanta de elasticitate | $k$ | Mărimea inversă capacității electrice a condensatorului | $\frac{1}{C}$ |
| Coeficientul de amortizare | $\beta = \frac{r}{2m}$ | Coeficientul de amortizare | $\beta = \frac{R}{2L}$ |
| Frecvența ciclică a oscilațiilor proprii | $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ | Frecvența ciclică a oscilațiilor proprii | $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ |
| Factorul de calitate | $Q = \frac{1}{r}\sqrt{km}$ | Factorul de calitate | $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ |

# Tema 14. Oscilații amortizate și forțate

## Oscilații mecanice forțate

$$m\ddot{x} = F_{el} + F_{rez} + F \quad \Longrightarrow \quad m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \sin\Omega t$$




$$F(t) = F_0 \sin\Omega t$$

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\sin\Omega t \quad \Longrightarrow \quad \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\sin\Omega t$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$x_1(t) = A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t + \psi_0) \to 0 \quad \Longrightarrow \quad x(t) = x_2(t) = A\sin(\Omega t - \varphi)$$

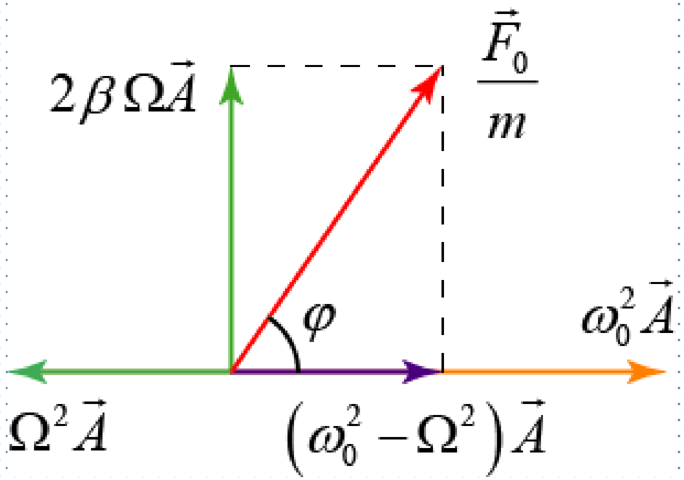
$$-A\Omega^2 \sin(\Omega t - \varphi) + 2\beta A\Omega\cos(\Omega t - \varphi) + \omega_0^2 A\sin(\Omega t - \varphi) = \frac{F_0}{m}\sin\Omega t$$

# Tema 14. Oscilații amortizate și forțate

$$A\Omega^2\sin(\Omega t-\varphi+\pi)+2\beta A\Omega\sin\left(\Omega t-\varphi+\frac{\pi}{2}\right)+\omega_0^2 A\sin(\Omega t-\varphi)=\frac{F_0}{m}\sin\Omega t$$

$$\frac{F_0^2}{m^2}=\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2A^2+4\beta^2\Omega^2A^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{A=\frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+4\beta^2\Omega^2}}}$$




$$\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{2\beta A\Omega}{A\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)}=\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\varphi=\mathrm{arctg}\left[\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}\right]}$$

# Tema 14. Oscilații amortizate și forțate

Fenomenul creșteri pronunțate a amplitudinii oscilațiilor forțate și atingerea valorii ei maxime la apropierea frecvenței forței perturbatoare de frecvența oscilațiilor proprii ale sistemului se numește **rezonanță**.

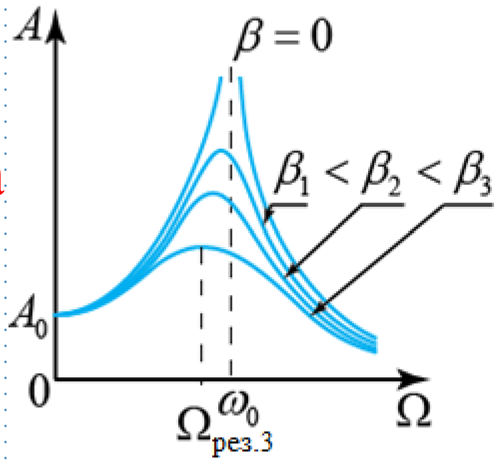
$$\frac{d}{d\Omega}\left[\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+4\beta^2\Omega^2\right]\Bigg|_{\Omega=\Omega_r}=0 \quad \Longrightarrow \quad -4\Omega_r\left(\omega_0^2-\Omega_r^2\right)+8\beta^2\Omega_r=0$$

$$\boxed{\Omega_r=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}=\sqrt{\omega^2-\beta^2}}$$ **– frecvență de rezonanță**

$$A_{max}=A_r=\frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2-\Omega_r^2\right)^2+4\beta^2\Omega_r^2}}=\frac{F_0}{m\sqrt{4\beta^4+4\beta^2\omega_0^2-8\beta^4}}=\frac{F_0}{m\sqrt{4\beta^2\left(\omega_0^2-\beta^2\right)}}$$

# Tema 14. Oscilații amortizate și forțate

$$\boxed{A_r = \frac{F_0}{2\beta m\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}}$$ **–amplitudine de rezonanță**

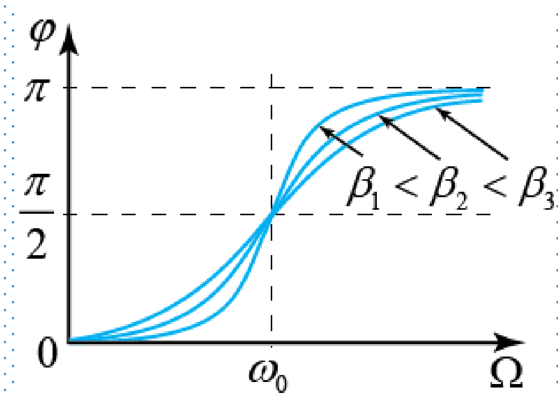



$$A_0 = \left.\frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}\right|_{\Omega=0} = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$$ **– deplasare statică**

$\Omega \to 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi \to 0$

$\Omega \to \omega_0 \quad \Rightarrow \quad \varphi \to \frac{\pi}{2}$

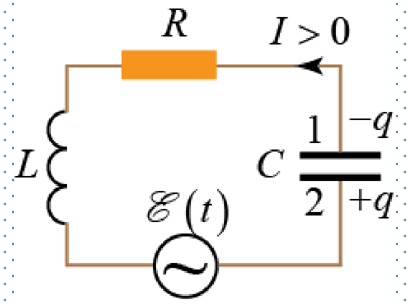
$\Omega \to \infty \quad \Rightarrow \quad \varphi \to \pi$



# Tema 14. Oscilații amortizate și forțate

## Oscilații electrice forțate

$$I=\frac{\varphi_1-\varphi_2+\mathscr{E}_{ai}+\mathscr{E}(t)}{R} \Rightarrow IR=\varphi_1-\varphi_2-L\frac{dI}{dt}+\mathscr{E}(t)$$




$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=\mathscr{E}(t) \Rightarrow \ddot{q}+\frac{R}{L}\dot{q}+\frac{q}{LC}=\frac{1}{L}\mathscr{E}(t)$$

$$\mathscr{E}(t)=\mathscr{E}_0\sin\Omega t$$

$$\ddot{q}+2\beta\dot{q}+\omega_0^2q=\frac{1}{L}\mathscr{E}_0\sin\Omega t$$

$$q(t)=q_0\sin(\Omega t-\varphi)$$

$$q_0=\frac{\mathscr{E}_0}{L\sqrt{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+4\beta^2\Omega^2}}=\frac{\mathscr{E}_0}{L\sqrt{\left(\frac{1}{LC}-\Omega^2\right)^2+R^2\Omega^2/L^2}}$$

$$q_0=\frac{\mathscr{E}_0}{\Omega\sqrt{\left(\frac{1}{\Omega C}-\Omega L\right)^2+R^2}}$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}=\frac{R}{\frac{1}{\Omega C}-\Omega L}$$

# Tema 14. Oscilații amortizate și forțate

Intensitatea curentului în circuit

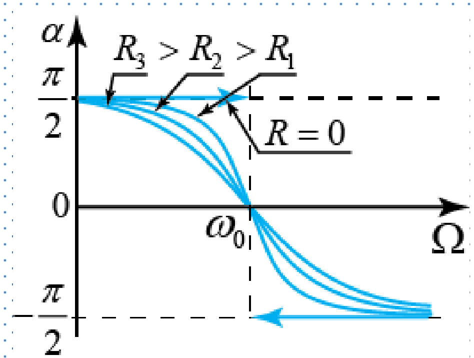
$$I=\frac{dq}{dt}=q_0\Omega\cos(\Omega t-\varphi)=I_0\sin\left(\Omega t-\varphi+\frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{I=I_0\sin(\Omega t+\alpha)}$$

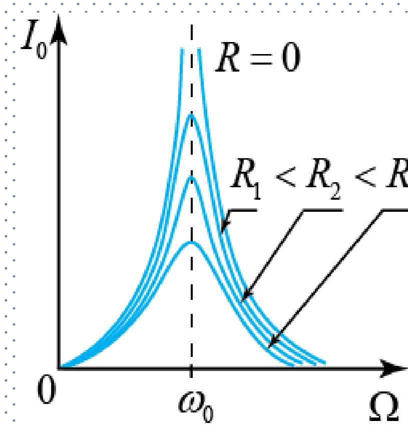
$\alpha=\frac{\pi}{2}-\varphi$ - defazajul dintre intensitatea curentului și *t.e.m.* perturbatoare

Amplitudinea intensității curentului și faza inițială

$$I_0=q_0\Omega=\frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{\Omega C}-\Omega L\right)^2+R^2}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\pi/2-\varphi)=\operatorname{ctg}\varphi=\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}=\frac{\frac{1}{\Omega C}-\Omega L}{R}$$




Curenții de rezonanță

$$\frac{d}{d\Omega}\left(\left[\left(\frac{1}{\Omega C}-\Omega L\right)^2+R^2\right]\right)_{\Omega=\Omega_r}=0$$

$$2\left(\frac{1}{\Omega C}-\Omega L\right)\left(-\frac{1}{\Omega^2 C}-L\right)\Bigg|_{\Omega=\Omega_r}=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Omega_r=\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

# Tema 14. Oscilații amortizate și forțate

Căderile de tensiune pe rezistor, condensator și pe inductanță

$$u_R = IR = I_0 R \sin(\Omega t + \alpha) = U_R \sin(\Omega t + \alpha),$$

$$u_C = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C}\sin(\Omega t - \varphi) = \frac{I_0}{\Omega C}\sin\left(\Omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) = U_C \sin\left(\Omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$u_L = L\frac{dI}{dt} = I_0 \Omega L \cos(\Omega t + \alpha) = I_0 \Omega L \sin\left(\Omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) = U_L \sin\left(\Omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

Valorile de amplitudine ale tensiunii sunt:

$$U_R = I_0 R = RI_0,$$

$$U_C = \frac{I_0}{\Omega C} = X_C I_0,$$

$$U_L = I_0 \Omega L = X_L I_0,$$

# Tema 14. Oscilații amortizate și forțate

$R$ – **rezistență electrică activă**

$X_C = \frac{1}{\Omega C}$ – **rezistență electrică capacitivă sau reactanță capacitivă**

$X_L = \Omega L$ – **rezistență electrică inductivă sau reactanță inductivă**

$X = X_C - X_L = \frac{1}{\Omega C} - \Omega L$ – **rezistență reactivă sau reactanța circuitului**

$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2}$ – **rezistența totală sau impedanța circuitului electric**

**Legea lui Ohm pentru curentul alternativ**

$I_0 = \frac{\mathscr{E}_0}{Z}$ sau $I_0 = \frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2}}$