Tema 5. Câmpul electric în vid I

1. Conservarea sarcinii electrice

Sarcina electrică totală, adică suma algebrică a sarcinilor unui sistem izolat de corpuri se păstrează constantă, pe parcursul timpului

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_n = \text{const}\ .$$

2. Caracterul discret al sarcinii electrice

$q = ne$, $\quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots,\quad$ $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C

3. Legătura cu masa

Orice sarcină electrică este legată de o anumită masă. De exemplu, protonul $q = +e$, $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg

4. Invarianța relativistă

Sarcina electrică nu depinde de sistemul de referință în care aceasta se măsoară - atât în repaus cât și în mișcare, sarcina electrică este aceeași.

Tema 5. Câmpul electric în vid I

Legea lui Coulomb

Forța de interacțiune dintre două sarcini electrice punctiforme fixe este direct proporțională cu mărimea fiecăreia dintre ele, invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele și orientată de-a lungul dreptei care le unește.

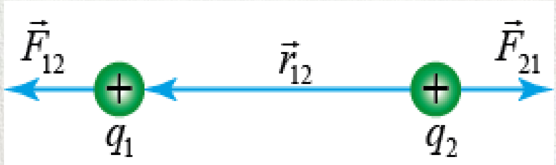
Sub formă scalară

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \qquad k = 9\cdot 10^9\,\frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{C^2}}$$

$$\varepsilon_0 = 8,85\cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$$ – constanta electrică

Sub formă vectorială

$$\vec{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}_{12}}{r}$$



Tema 5. Câmpul electric în vid I

Câmpul electric

Câmpul electric reprezintă o formă particulară de existență a materiei, prin intermediul căruia se realizează interacțiunea dintre particulele încărcate ale substanței.

Intensitatea câmpului electric

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

intensitatea câmpului electric al unei sarcini punctiforme aflate în repaus

$$[E] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}\cdot\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{A}\cdot\mathrm{V}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}\cdot\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

Problema fundamentală a electrostaticii

determinarea intensității câmpului electric E în fiecare punct al spațiului, cunoscând mărimea și distribuția sarcinilor ce creează acest câmp.

Tema 5. Câmpul electric în vid I

Principiul superpoziției

Intensitatea câmpului electric al unui sistem de sarcini punctiforme este egală cu suma vectorială a intensităților câmpurilor electrice, create de fiecare sarcină separat

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$$ – distribuție discretă a sarcinii

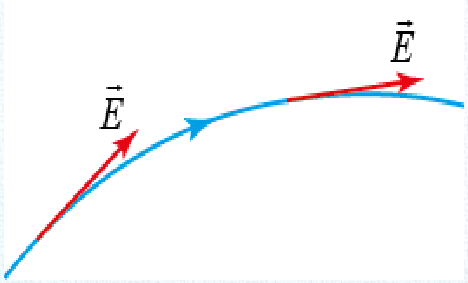
$$\vec{E} = k \int \frac{dq}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$ – distribuție continuă a sarcinii

sarcina electrică *dq* a unui element infinit mic al corpului încărcat se determină cunoscând densitatea distribuției sarcinii: liniară, superficială sau de volum, care se definesc după cum urmează:

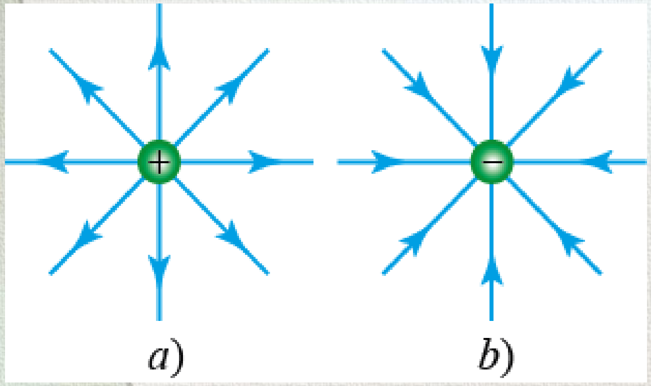
$$\tau = \frac{dq}{dl}, \quad \sigma = \frac{dq}{dS}, \quad \rho = \frac{dq}{dV}$$

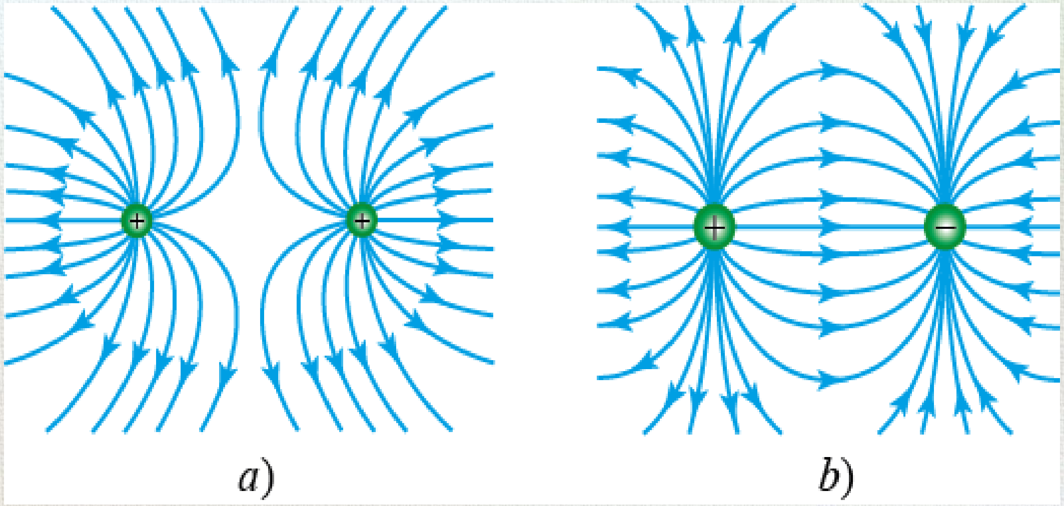
Tema 5. Câmpul electric în vid I

Linia trasată în câmpul electric în așa fel încât direcția tangentei la ea în orice punct să coincidă cu direcția vectorului intensității câmpului se numește linie de câmp.



liniile de câmp electric încep din sarcinile pozitive și se termină în cele negative.

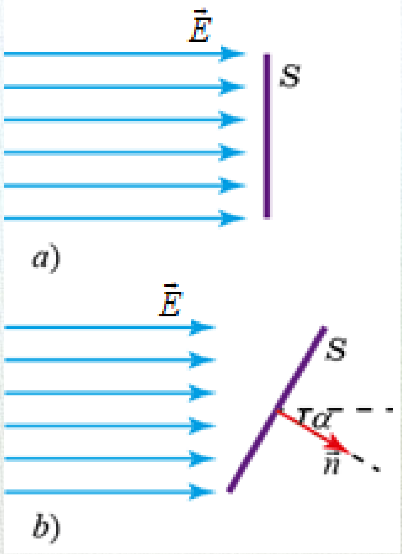




Tema 5. Câmpul electric în vid I

Fluxul vectorului intensității câmpului electric

acesta este numărul liniilor de câmp ce intersectează suprafața cercetată.



Pentru un câmp omogen

$$\Phi = ES\cos\alpha = \left(\vec{E}\vec{S}\right)$$

Pentru un câmp neomogen

$$d\Phi = \left(\vec{E}d\vec{S}\right) \longrightarrow \Phi = \int_{(S)} \left(\vec{E} \cdot d\vec{S}\right)$$

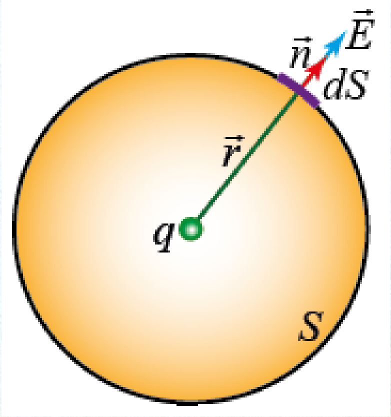
Dacă suprafața intersectată de liniile de câmp este închisă, atunci fluxul se calculează după cum urmează

$$\Phi = \oint_{(S)} \left(\vec{E} \cdot d\vec{S}\right)$$

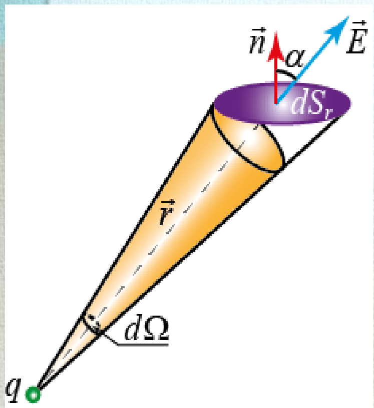
Tema 5. Câmpul electric în vid I

fluxul vectorului $\vec{E}$ al unei sarcini punctiforme printr-o suprafață sferică

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\oint_S (\vec{r}\cdot\vec{n})\,dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\cdot r\cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

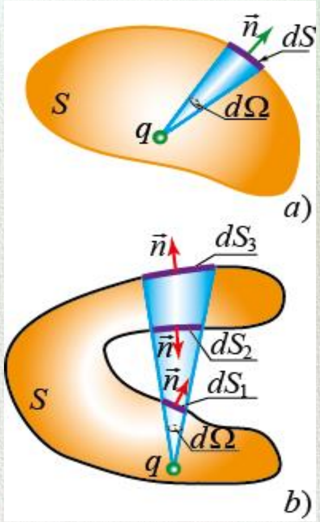


Pentru o suprafață închisă de formă arbitrară



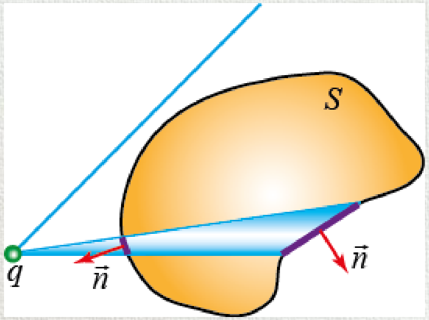
$$d\Phi = (\vec{E}\cdot\vec{n})\,dS = EdS\cos\alpha = EdS_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dS_r}{r^2}$$

$$d\Omega = \frac{dS_r}{r^2}$$ – unghi solid



$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,d\Omega$$

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\Omega} d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot 4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



Tema 5. Câmpul electric în vid I

Teorema lui Gauss sub formă integrală

fluxul vectorului intensității câmpului electric prin orice suprafață închisă este egal cu suma algebrică a tuturor sarcinilor aflate în interiorul acestei suprafețe împărțită la constanta electrică

$$\oint_{(S)} \left(\vec{E} d\vec{S} \right) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

unde $Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$ – suma sarcinilor aflate în interiorul aceste suprafețe

Tema 5. Câmpul electric în vid I

Teorema lui Gauss sub formă diferențiată

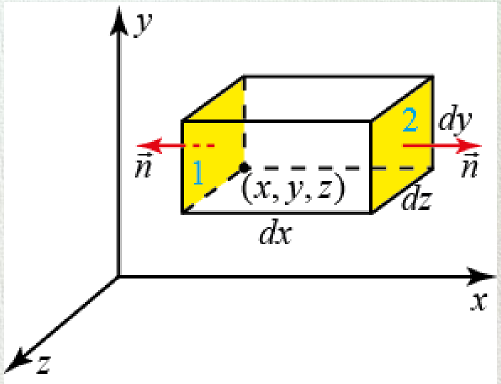
$$\left[E_x(x+dx,y,z)-E_x(x,y,z)\right]dydz=\frac{\partial E_x}{\partial x}dV$$

$$\left[E_y(x,y+dy,z)-E_y(x,y,z)\right]dxdz=\frac{\partial E_y}{\partial y}dV$$

$$\left[E_z(x,y,z+dz)-E_z(x,y,z)\right]dxdy=\frac{\partial E_z}{\partial z}dV$$

$$d\Phi=\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)dV$$

Pe de altă parte $$d\Phi=\frac{dq}{\varepsilon_0}=\frac{\rho dV}{\varepsilon_0}$$



Obținem teorema lui Gauss sub formă diferențială

$$\operatorname{div}\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

unde $$\operatorname{div}\vec{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Tema 5. Câmpul electric în vid I

Din expresiile anterioare obținem fluxul total al intensității câmpului electric E prin suprafața închisă a paralelipipedului

$$d\Phi = \operatorname{div}\vec{E} \cdot dV \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{div}\vec{E} = \frac{d\Phi}{dV}$$

Astfel, divergența vectorului $\vec{E}$ caracterizează puterea sursei vectorului $\vec{E}$ este o mărime scalară și are sens numai pentru mărimi vectoriale

Dacă notăm $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ – operatorul Hamilton

atunci

$$\operatorname{div}\vec{E} = \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}\right)$$

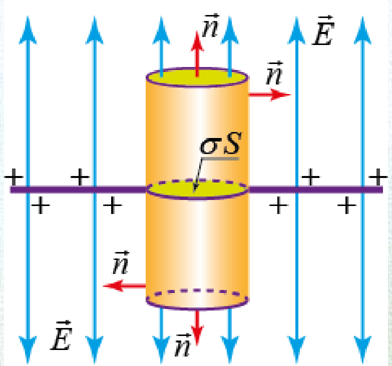
Deoarece $\Phi = \oint\limits_{(S)} \left(\vec{E} \cdot d\vec{S}\right)$ și $\Phi = \int\limits_{(V)} \operatorname{div}\vec{E} \cdot dV$ atunci

$$\int\limits_{(V)} \operatorname{div}\vec{E} \cdot dV = \oint\limits_{(S)} \left(\vec{E} \cdot d\vec{S}\right)$$ – **teorema matematică a lui Gauss**

Tema 5. Câmpul electric în vid I

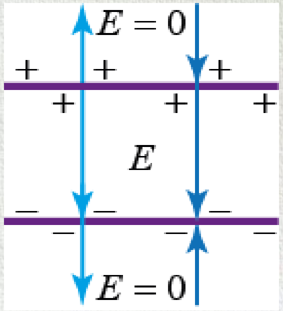
1) Câmpul electric al unui plan infinit încărcat uniform cu sarcina de densitate σ

$$\oint_{(S)} \left(\vec{E}d\vec{S}\right) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad 2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



2) Câmpul electric a două plane paralele infinite încărcate uniform cu sarcini de semne contrare

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



Tema 5. Câmpul electric în vid I

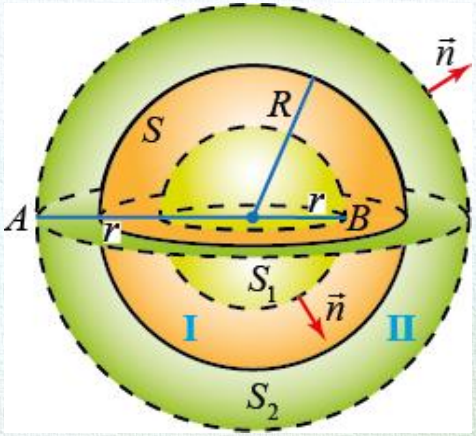
3) Câmpul electric al unei sfere încărcate uniform după volum și pe suprafață

domeniul $r > R$

$$\Phi = \oint_{(S_2)} \left(\vec{E}\cdot d\vec{S}\right) = \oint_{(S_2)} EdS\cos 0^\circ = ES_2 = 4\pi r^2 E$$

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



Acest rezultat pentru $r > R$ este valabil pentru o sferă încărcată uniform după volum sau pe suprafață

domeniul $r \leq R$

În acest caz intensitatea câmpului electric $E = 0$ (sarcina este distribuită uniform pe suprafață)

Dacă sarcina este distribuită uniform după volumul sferei cu densitatea

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{q}{4\pi R^3/3} = \frac{3q}{4\pi R^3} \Rightarrow$$

Tema 5. Câmpul electric în vid I

$$\Phi = \oint_{(S_1)} \left(\vec{E}\cdot d\vec{S}\right) = \oint_{(S_1)} EdS\cos 0^\circ = ES_1 = 4\pi r^2 E$$

$$\Phi = \frac{q'}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi r^3}{3\varepsilon_0}\rho$$

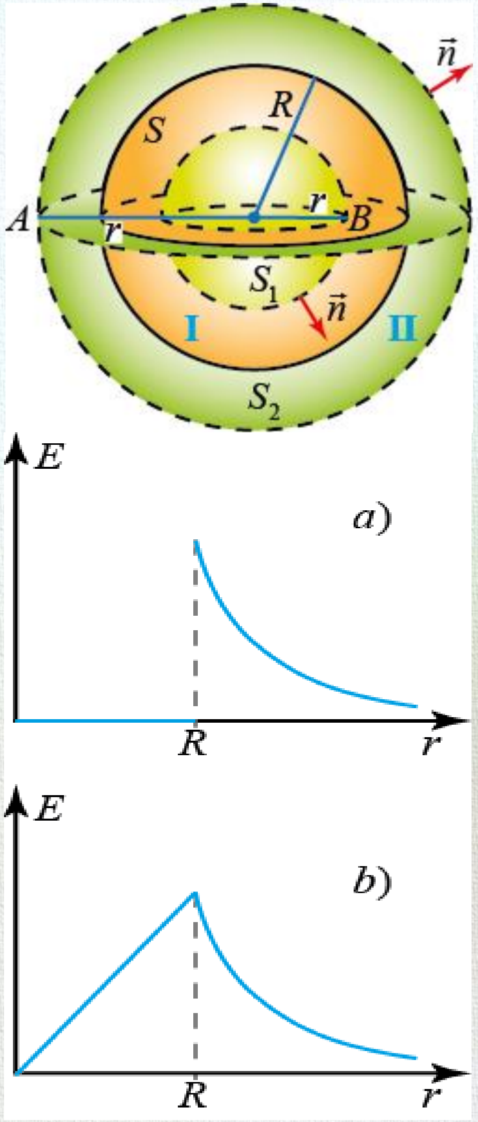
$$\Rightarrow E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

a) pentru câmpul unei sfere încărcate uniform pe suprafață

$$E = \begin{cases} 0, & r \le R, \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}, & r > R. \end{cases}$$

b) pentru câmpul unei sfere încărcate uniform după volum

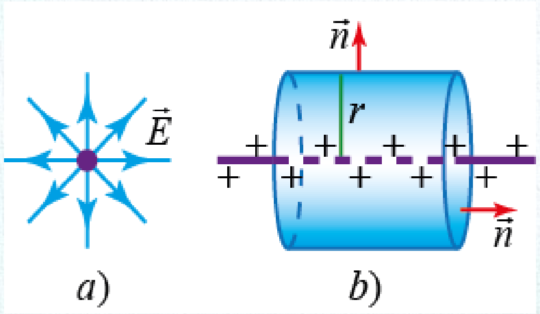
$$E = \begin{cases} \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0} r, & r \le R, \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}, & r \ge R \end{cases}$$



Tema 5. Câmpul electric în vid I

4) Câmpul unui fir rectiliniu infinit și al unui cilindru infinit încărcate uniform

Pentru un fir infinit

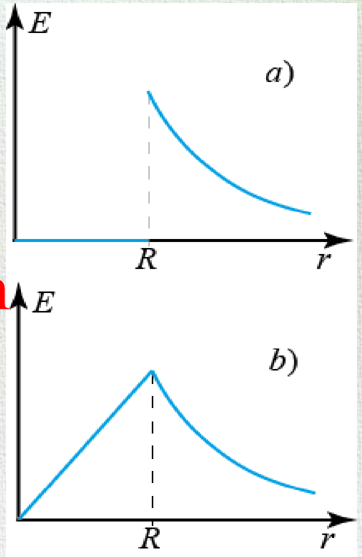


$$\Phi = \oint_{(S)} \left(\vec{E}\cdot d\vec{S}\right) = \int_{(S_{\text{lat}})} EdS\cos 0^\circ + 2\int_{(S_{\text{b}})} EdS\cos 90^\circ = ES_{\text{lat.}} = 2\pi rl\cdot E$$

$$E\cdot 2\pi rl = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Pentru un cilindru gol, infinit, încărcat uniform pe suprafață

$$E = \begin{cases} 0, & r \le R, \\ \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 r}, & r \ge R \end{cases}$$



Pentru un cilindru plin, infinit, încărcat uniform după volum

$$E = \begin{cases} \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0} r, & r \le R, \\ \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}\dfrac{R^2}{r}, & r \ge R. \end{cases}$$