

Tema 6. Câmpul electric în vid II

Potențialitatea câmpului electric

Un câmp se numește **potențial** dacă lucrul forțelor câmpului electrostatic nu depinde de forma traiectoriei sarcinii, ci numai de pozițiile ei inițială și finală.

$$L_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = q_0 \int_1^2 \vec{E} d\vec{r} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

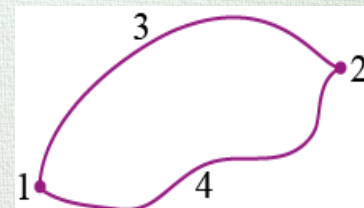
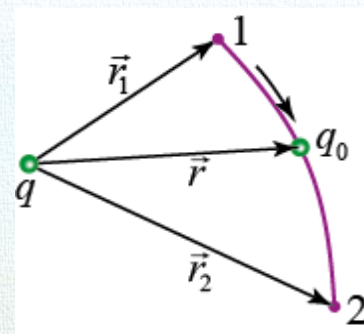
$$L_{132} = L_{142} \quad L_{241} = -L_{142}$$

$$L_{132} + L_{241} = L_{13241} = 0$$

$$L_{13241} = q_0 \oint (\vec{E} d\vec{l})$$

$$\oint (\vec{E} d\vec{l}) = 0$$

– condiția de potențialitate sub formă integrală



un câmp vectorial este potențial, dacă circulația vectorului acestui câmp de-a lungul oricărei traiectorii închise este egală cu zero.

Tema 6. Câmpul electric în vid II

Forma diferențială a condiției de potențialitate

$$\oint (\vec{E} d\vec{l}) = 0 \quad \longrightarrow \quad \oint (E_x dx + E_y dy + E_z dz) = 0$$

Aportul laturilor AB și CD la valoarea circulației

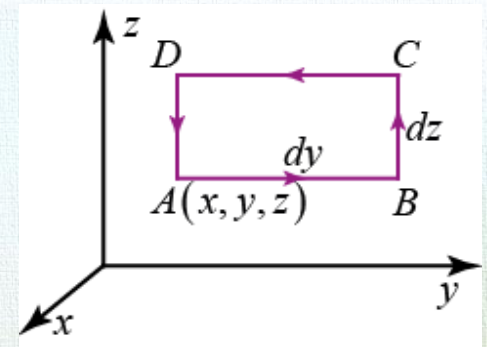
$$-E_y(x, y, z + dz) dy + E_y(x, y, z) dy = -\frac{\partial E_y}{\partial z} dy dz = -\frac{\partial E_y}{\partial z} dS$$

Aportul laturilor BC și DA la valoarea circulației

$$E_z(x, y + dy, z) dz - E_z(x, y, z) dz = \frac{\partial E_z}{\partial y} dz dy = \frac{\partial E_z}{\partial y} dS$$

Circulația totală de-a lungul circuitului $ABCD$

$$\oint E_l dl = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) dS = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0$$



Tema 6. Câmpul electric în vid II

Analogic, alegând contururi în planele xOz și xOy , obținem

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

Multiplicând ecuațiile cu vectorii unitari ai axelor de coordonate respective și adunându-le, obținem

$\text{rot } \vec{E} = 0$ – condiția de potențialitate sub formă diferențială

unde

$$\text{rot } \vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

$$\text{rot } \vec{E} = [\vec{\nabla} \vec{E}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}.$$

Tema 6. Câmpul electric în vid II

Potențialul câmpului electric

$$E_p = L_{r\infty} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

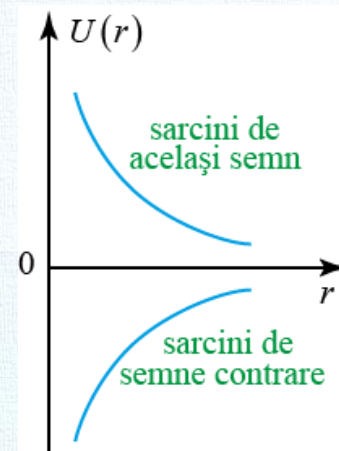
$$L_{12} = E_{p1} - E_{p2} = -\left(E_{p2} - E_{p1}\right)$$

$$\varphi = \frac{E_p(r)}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad \text{— potențialul câmpului electrostatic al sarcinii punctiforme}$$

$$L_{12} = q_0 (\varphi_1 - \varphi_2) \longrightarrow \Delta\varphi \equiv \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{L_{12}}{q_0} \quad \text{— diferență de potențial}$$

$$[\Delta\varphi] = \frac{\text{J}}{\text{C}} = \text{V}$$

voltul este diferența de potențial dintre două puncte ale câmpului, la care pentru deplasarea între ele a unei sarcini de 1C forțele câmpului efectuează un lucru de 1J.



Tema 6. Câmpul electric în vid II

Potențialul este caracteristica energetică a câmpului, iar intensitatea este caracteristica lui de forță

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E_l dl \quad \text{— relația dintre diferența de potențial și intensitatea câmpului electric sub formă integrală}$$

Fie punctele 1 și 2 pe axa Ox , astfel încât $x_2 - x_1 = dx$.

$$\left. \begin{aligned} dL_x &= q_0 E_x dx \\ dL_x &= q_0 (\varphi_1 - \varphi_2) = -q_0 d\varphi \end{aligned} \right\} \longrightarrow d\varphi = -E_x dx \quad , \text{analogic pentru } Oy \text{ și } Oz$$

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad \longrightarrow \quad \vec{E} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right)$$

sau

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi = -(\vec{\nabla} \varphi) \quad \text{— relația dintre diferența de potențial și intensitatea câmpului electric sub formă diferențială}$$

Tema 6. Câmpul electric în vid II

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \longrightarrow \quad \operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta \equiv \vec{\nabla}^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad - \text{Operatorul diferențial Laplace (Laplacian)}$$

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad - \text{Ecuația lui Poisson}$$

În lipsa sarcinilor electrice ($\rho = 0$), ecuația lui Poisson trece în

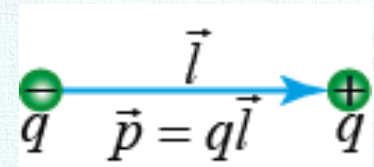
$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad - \text{Ecuația lui Laplace}$$

Tema 6. Câmpul electric în vid II

Sistemul compus din două sarcini egale ca valoare și de semne contrare $+q$ și $-q$ situate la distanța l una de alta se numește **dipol electric**.

\vec{l} – brațul al dipolului

$\vec{p} = q\vec{l}$ – momentul electric al dipolului



1. Punctul de observație A se află pe continuarea axei dipolului

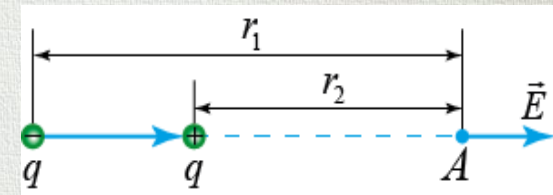
$$E = E_+ - E_- = kq \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) = kq \frac{(r_1 - r_2)(r_1 + r_2)}{(r_1 r_2)^2} \approx kq \frac{2(r_1 - r_2)}{r^3} = k \frac{2p}{r^3}$$

Sub formă vectorială

$$\vec{E} = k \frac{2\vec{p}}{r^3}$$

Potențialul câmpului în punctul A

$$\varphi = \varphi_- + \varphi_+ = kq \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = kq \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} \approx k \frac{p}{r^2}$$



Tema 6. Câmpul electric în vid II

2. Punctul de observație A se află pe perpendiculara ridicată din centrul dipolului

$$E = 2E_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = 2E_1 \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2} \text{ – pentru dipolul punctiform}$$

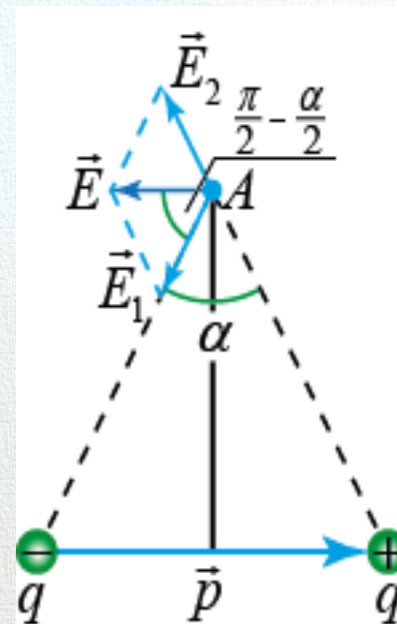
$$E = E_1 \alpha = k \frac{q}{r^2} \frac{l}{r} = k \frac{p}{r^3}$$

sub formă vectorială

$$\vec{E} = -k \frac{\vec{p}}{r^3}$$

Potențialul câmpului în punctul A

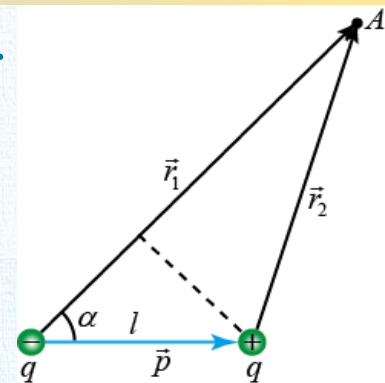
$$\varphi = \varphi_- + \varphi_+ = kq \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r} \right) = 0$$



Tema 6. Câmpul electric în vid II

3. Punctul de observare A se află într-un loc arbitrar

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= k \frac{2\vec{p}_1}{r^3} - k \frac{\vec{p}_2}{r^3} = \frac{k}{r^3} (2\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \\ \vec{p} &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \vec{E} = \frac{k}{r^3} (3\vec{p}_1 - \vec{p})$$

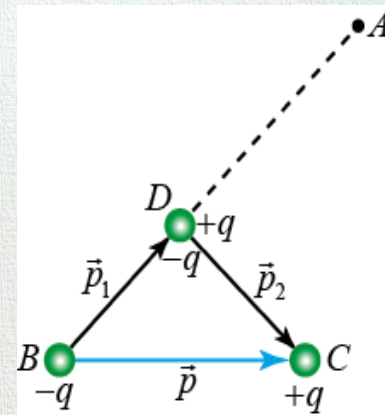


Momentul dipolar $\vec{p}_1 = \frac{(\vec{p}_1 \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2}$, iar $(\vec{p}_1 \cdot \vec{r}) = (\vec{p} \cdot \vec{r}) - (\vec{p}_2 \cdot \vec{r}) = (\vec{p} \cdot \vec{r})$

Obținem definitiv
$$\vec{E} = k \left(\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right)$$

Modulul vectorului intensității câmpului

$$E = \sqrt{\vec{E}^2} \rightarrow E = \frac{kp}{r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2 \alpha}$$

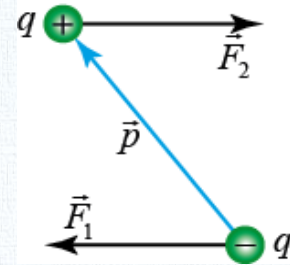


Potențialul câmpului

$$\varphi = \varphi_- + \varphi_+ = kq \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = kq \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} \quad \begin{aligned} r_1 r_2 &\approx r^2 \\ r_1 - r_2 &= l \cos \alpha \end{aligned} \rightarrow \varphi = k \frac{p \cos \alpha}{r^2}$$

Tema 6. Câmpul electric în vid II

Dipolul este situat într-un câmp electric omogen de intensitate E



Forța rezultată care acționează asupra sarcinilor punctiforme ale dipolului este zero, deoarece forțele sunt egale în modul și opuse ca sens. Momentul forțelor:

$$\vec{M} = [\vec{l} \cdot \vec{F}_2] = q[\vec{l} \cdot \vec{E}] = [\vec{p} \cdot \vec{E}] \quad \longrightarrow \quad \vec{M} = [\vec{p} \cdot \vec{E}]$$

În cazul unui câmp electric neomogen

$$\vec{F} = q(\vec{E}_2 - \vec{E}_1)$$

Pentru dipolul punctiform diferența $\vec{E}_2 - \vec{E}_1$ este înlocuită cu diferențiala

$$d\vec{E} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} dz \approx l_x \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + l_y \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + l_z \frac{\partial \vec{E}}{\partial z}$$

Forța rezultantă

$$\vec{F} = p_x \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + p_y \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + p_z \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} \quad \longrightarrow \quad \vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$$