TEMA 5.Alte forme de reprezentare a FB.

5.1.Diagramele Karnaugh au fost concepute pentru compactizarea tabelelor de adevar utilizate la simplificarea (minimizarea) FB şi reprezintă un tablou bidimensional, care pentru o funcţie de *n* argumente conţine 2^p linii şi 2^q coloane, iar $p+q = n$.

Daca *n*–par, atunci $p=q=n/2$, iar daca *n*– impar, atunci $p=q+1$.

Se aplica cu success pentru n=3, 4, 5. Mai dificil pentru $n \geq 6$

In diagrama Karnaugh titlurile coloanelor si liniilor sunt formate din combinatiile posibile ale argumentelor dispuse in cod Gray (binar reflectat), adica titlurile lor adiacente difera printr-un singur rang (valoare), ceia ce asigura relatia de adiacenta (alipire) intre cimpurile diagramei.

Pentru functia de 4 argumente combinaţiile valorilor argumentelor x_1 şi x_2 sunt dispuse în partea superioară a diagramei, iar cele ale argumentelor x_3 şi x_4 vertical în partea stângă. La intersecţia unei coloane şi a unei linii este câmpul diagramei în care se trece 0 sau 1, după cum valoarea funcţiei în tabelul de adevăr este 0 sau 1.

Pentru ilustrare consideram exemplul din tema precedenta:

FB are tabelul de adevăr

N	x_1	x_2	x_3	x_4	f	N	x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0	0	8	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	9	1	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0	10	1	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0	11	1	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1	12	1	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1	13	1	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1	14	1	1	1	0	0

7	0	1	1	1	1	15	1	1	1	1	0

sau $f = \Sigma(4,5,6,7,8,10,11,13)$

$f=1$

De reprezentat FB prin diagrama sa Karnaugh.
Deci, titlurile coloanelor si liniilor sunt dispuse in ordinea
00 01 11 10

x_1x_2 / x_3x_4	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	1	0	1
10	0	1	0	1

La intersectia coloanei 00 cu linia 01 introducem 0.

La intersectia coloanei 00 cu linia 11 introducem 0.

La intersectia coloanei 00 cu linia 10 introducem 0.

La intersectia coloanei 01 cu linia 00 introducem 1.

La intersectia coloanei 01 cu linia 01 introducem 1.

La intersectia coloanei 01 cu linia 11 introducem 1.

La intersectia coloanei 01 cu linia 10 introducem 1.

La intersectia coloanei 11 cu linia 00 introducem 0.

La intersectia coloanei 11 cu linia 01 introducem 1.

La intersectia coloanei 11 cu linia 11 introducem 0.

La intersectia coloanei 11 cu linia 10 introducem 0.

La intersectia coloanei 10 cu linia 00 introducem 1.

La intersectia coloanei 10 cu linia 01 introducem 0.

La intersectia coloanei 10 cu linia 11 introducem 1.

La intersectia coloanei 10 cu linia 10 introducem 1.

Exemplu 2.

De reprezentat prin diagrama Karnaugh functia de trei variabile:

$$f(x_1, x_2, x_3)=\Sigma(1,2,4,5)$$
$$f=1$$

FB are tabelul de adevăr

N	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

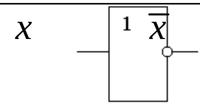
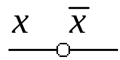
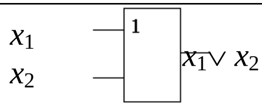
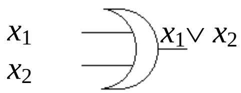
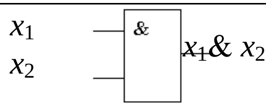
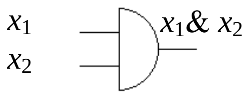
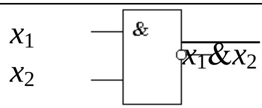
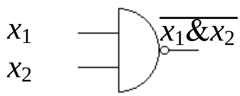
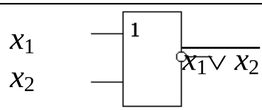
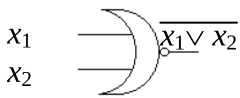
X_1

x_2x_3	0	1
00	0	1
01	1	1
11	0	0
10	1	0

5.2Circuitul logic (sau schema logică) este o reprezentare grafică a FB obtinuta prin adoptarea unor semen conventionale pentru operatiile logice de baza, ceia ce permite materializarea functiilor logice elementare. Unele dintre cele mai des utilizate semne grafice pentru FB elementare sunt prezentate în tab. 1.

Prin implimentarea (realizarea) unei functii logice se intelege realizarea ei cu ajutorul circuitelor de baza.

Tabelul 1. Scheme logice dr baza adoptate

Denumirea funcţiei	**Reprezentarea grafică**	
	Standardele fostei URSS	Standarde internaţionale
Negaţia $f(x) = \bar{x}$		
Disjuncţia $f(x_1,x_2) = x_1 \vee x_2$		
Conjuncţia $f(x_1,x_2) = x_1 \wedge x_2$		
Sheffer $f(x_1,x_2) = x_1 \vert x_2$		
Pierce $f(x_1,x_2) = x_1 \downarrow x_2$		

Pentru sintezarea (implimentarea) schemei logice e necesar de a reprezenta FB prin schemele logice adoptate.

Un interes deosebit prezinta sintezarea (implimentarea) schemei logice in bazele “Si-Nu” (NAND, exprimate prin $\rceil$, $\wedge$) si “Sau-Nu” (NOR, exprimate prin $\rceil$, $\vee$.).

Pentru implimentarea schemei logice in baza “Si-Nu” (NAND) adica exprimata prin $\rceil$, $\wedge$ trancformam FCDN (mai tirziu Forma Disjunctiva Minima ~ FDM) cu ajutorul dublei negatii $\overline{\overline{x}} = x$ si legilor lui de Morgan $\overline{x_1 x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2}$; $\overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1} . \overline{x_2}$.

Exemplu1. Pentru a obţine schema logică în baza “ŞI-NU” vom transforma forma FDM (obtinuta prin prcedura de minimizare din FCDN – va fi aratata in tema urmatoare (FDM contine mai putine simboluri si este mai economa)), aplicând asupra ei dubla negaţie şi legile lui de Morgan:

$$y = \overline{x_1} x_2 \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_4} \vee x_2 \overline{x_3} x_4 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 =$$

$$\overline{\overline{\overline{x_1} x_2 \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_4} \vee x_2 \overline{x_3} x_4 \vee x_1 \overline{x_2} x_3}} = \overline{\overline{\overline{x_1} x_2} \cdot \overline{x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_4}} \cdot \overline{x_2 \overline{x_3} x_4} \cdot \overline{x_1 \overline{x_2} x_3}}$$

(vezi fig.1).

În mod similar cu cazul precedent pentru a obţine schema logică în baza “Sau-Nu” (NOR, exprimate prin $\rceil$, $\vee$.)vom transforma forma FCM(Obtinuta prin minimizarea FCCN).:

$$y = (x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4}) =$$

$$\overline{\overline{(x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4})}} =$$

$$\overline{\overline{(x_1 \vee x_2)} \vee \overline{(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})} \vee \overline{(x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4})}}$$

(vezi fig. 2).

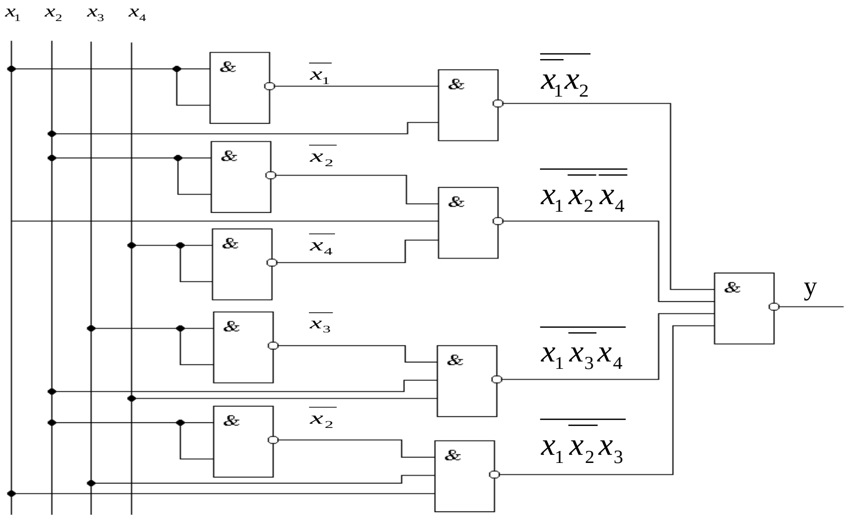

x_1 x_2 x_3 x_4
&
$\overline{x_1}$
$\overline{x_2}$
$\overline{x_4}$
$\overline{x_3}$
$\overline{x_2}$
$\overline{\overline{x_1}x_2}$
$\overline{x_1\overline{x_2}\,\overline{x_4}}$
$\overline{x_1\overline{x_3}x_4}$
$\overline{x_1\overline{x_2}x_3}$
y

Fig. 1

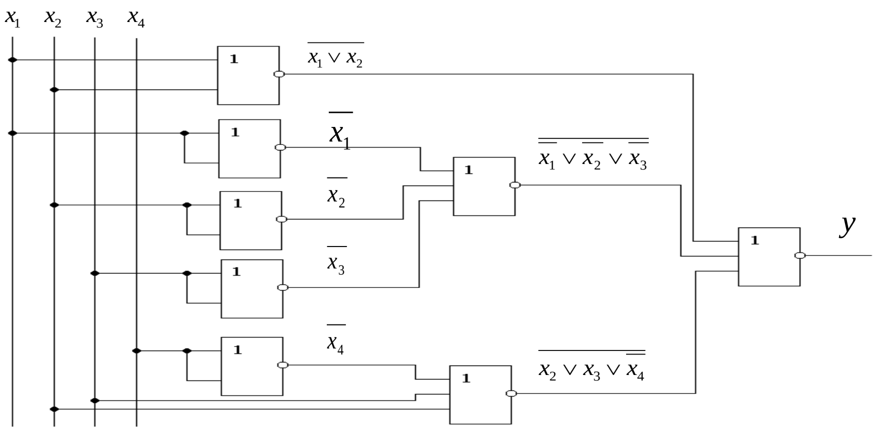

x_1 x_2 x_3 x_4
1
$\overline{x_1 \vee x_2}$
$\overline{x_1}$
$\overline{x_2}$
$\overline{x_3}$
$\overline{x_4}$
$\overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}}$
$\overline{x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4}}$
y

Fig. 2

5.3Diagrama temporală.

Se reprezentă grafic argumentele x_i ca funcţii de timp, ataşând valorii 0 un nivel coborât, iar valorii 1 un nivel ridicat, astfel ca să existe o diferenţiere evidentă a acestor nivele. Acelaşi lucru facem şi cu valorile funcţiei, obţinem reprezentarea FB date prin diagramă în timp.

Reprezentarea prin diagrama temporala este foarte utila in studiul sistemelor secventiale in studiul carora intervine timpul.

EXEMPLU. Să se reprezinte prin diagramă în timp funcţia

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} x_2 \vee \overline{x_2}\,\overline{x_3}$$

$\overline{x_1} = \varphi_1$ $\qquad$ $\overline{x_3} = \varphi_4$

$\varphi_1 x_2 = \varphi_2$ $\qquad$ $\varphi_3 \varphi_4 = \varphi_5$

$\overline{x_2} = \varphi_3$ $\qquad$ $\varphi_2 \vee \varphi_5 = \varphi_6$.

Construim tabelul de adevăr al funcţiei date:

Tabelul de adevăr al functiei

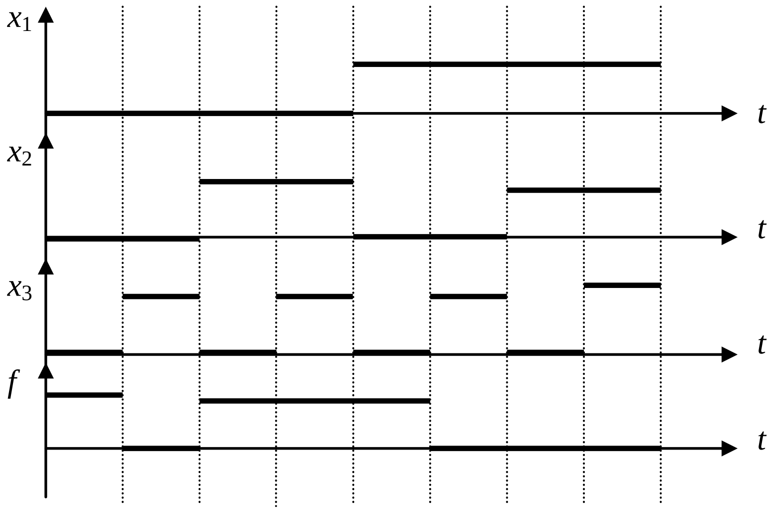
x_1	x_2	x_3	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	$\varphi_6 = f$
0	0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0

$f(x_1, x_2, x_3) = \Sigma(1,2,4,5)$

$f=1$

Reprezentăm grafic argumentele x_i ca funcţii de timp, ataşând valorii 0 un nivel coborât, iar valorii 1 un nivel ridicat, astfel ca să existe o diferenţiere evidentă a acestor nivele. Acelaşi lucru facem şi cu valorile funcţiei, obţinem reprezentarea FB date prin diagramă în timp.

Diagrama temporală a funcţiei $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} x_2 \vee \overline{x_2}\,\overline{x_3}$ are forma prezentată în figura urmatoare:



5.4. Sisteme complete de functii booleene

Definiţie. Numim sistem complet de funcţii booleene (bază) în clasa ℝ sistemul *S=(f1, f2,..., fk),* dacă orice funcţie f ∈ ℝ poate fi reprezentată prin superpoziţia funcţiilor din acest sistem.

În calitate de ℝ poate fi luată mulţimea $P_2(n)$. În această clasă există un sistem complet şi anume toate cele 2^k (unde $k=2^n$) funcţii de n argumente.

Orice funcţie logică de n argumente de asemenea poate fi reprezentată utilizând doar funcţiile negaţie, disjuncţie şi conjuncţie. Deci, în aceeaşi clasă pot exista mai multe sisteme complete cu un număr diferit de funcţii.

Un interes deosebit prezintă problema alegerii bazei, care conţine un număr minim de funcţii.

Definitie. Numim bază minimală (sistem complet minimal) un sistem complet arbitrar de funcţii booleene (*f1, f2,..., fk*), care odată cu eliminarea oricărei funcţii aparţinând sistemului devine incomplet.

Pentru a stabili completitudinea unui sistem oarecare de FB este suficient să se arate că funcţiile sistemului considerat pot reprezenta funcţiile sistemului ($\urcorner$, $\wedge$, $\vee$). Pot fi demonstrate teoremele:

Teorema 1. Sistemul ($\urcorner$,$\vee$.) este un sistem complet minimal în clasa *P2(n)*.

Teorema 2. Sistemul ($\urcorner$, $\wedge$) este un sistem complet minimal în clasa *P2(n)*.

Teorema 3. Funcţia lui Pierce ($\downarrow$) formează în clasa *P2(n)* un sistem complet minimal.

Teorema 4. Funcţia lui Sheffer ($|$) formează în clasa *P2(n)* un sistem complet minimal.

Pentru a demonstra, de exemplu, teorema 1 este suficient să se arate că funcţia disjuncţie ($\vee$) poate să fie reprezentată prin funcţiile negaţie ($\urcorner$) şi conjuncţie ($\wedge$).

Utilizând principiul involuţiei şi una din relaţiile lui De Morgan, avem

$f(x_1, x_2,\dots x_n)= x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n = \urcorner\urcorner(x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n) =$
$\urcorner(\urcorner x_1 \wedge \urcorner x_2 \wedge \dots \wedge \urcorner x_n)$,

adica functia disjuncţie ($\vee$) poate să fie reprezentată prin funcţiile negaţie ($\urcorner$) şi conjuncţie ($\wedge$), ceea ce trebuia demonstrat.

Analogic se demonstrează teorema 2, deci ca operatia conjunctie poate să fie reprezentată prin funcţiile negaţie ($\urcorner$) şi disjuncţie ($\vee$).

$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n = \urcorner\urcorner(x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n) =$
$\urcorner(\urcorner x_1 \vee \urcorner x_2 \vee \ldots \vee \urcorner x_n)$, adica functia conjuncţie ($\wedge$) poate să fie reprezentată prin funcţiile negaţie ($\urcorner$) şi disjuncţie ($\vee$), ceea ce trebuia demonstrat.

Am stabilit că sistemul ($\urcorner$, $\wedge$, $\vee$) este redundant. Una din funcţii (disjuncţia sau conjuncţia) poate fi eliminată, sistemul rămânând complet.

Pentru a demonstra teorema 3 vom arăta că funcţia lui Pierce poate reprezenta sistemul ($\urcorner$, $\wedge$, $\vee$). Negaţia se poate scrie astfel:
$\urcorner x = \urcorner(x \vee x) = x \downarrow x$.

Funcţia conjuncţie poate fi exprimatã în modul următor:

$x_1 \wedge x_2 = \urcorner\urcorner(x_1 \wedge x_2) = \urcorner(\urcorner x_1 \vee \urcorner x_2) = \urcorner((x_1 \downarrow x_1) \vee (x_2 \downarrow x_2)) =$
$(x_1 \downarrow x_1) \downarrow (x_2 \downarrow x_2)$.

Funcţia disjuncţie poate fi exprimatã în modul următor:

$x_1 \vee x_2 = \urcorner\urcorner(x_1 \vee x_2) = \urcorner(x_1 \downarrow x_2) =$
$(x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow x_2)$.

Analogic de demonstrat sinestatator teorema 4.

Teoremele 3 şi 4 prezintă un interes deosebit datorită numărului minim posibil de elemente care formează baza: putem utiliza un singur tip de circuit pentru materializarea oricărei funcţii booleene. În acest context este importantă trecerea de la FCDNsau FCCN la forme cu funcţii Pierce (SAU-NU) sau Sheffer (ŞI-NU), trecere denumită implementare in bazele (SAU-NU) sau (ŞI-NU)