NC 3.2.

INTEGRALA DUBLĂ. PRORIETĂȚI, CALCULAREA INTEGRALEI DUBLE. APLICAȚII

Analog cazului integralei definite a funcției de o singură variabilă, există o serie de probleme, ce duc la definirea integralei duble a funcției de două variabile pe careva domeniu D din planul OXY.

Integrala dublă. Definiții, proprietăți

Problemă. Determinarea volumului unui corp cilindric

Fie dat un corp mărginit de suprafața $z = f(x, y) \geq 0$, planul $z = 0$ și suprafața cilindrică cu generatoarele paralele axei OZ, directoarea căreia este frontiera domeniului închis şi mărginit D din OXY.

Divizăm domeniul D în n părți: $D_1, ..., D_n$ cu ariile respective $\triangle S_1, ..., \triangle S_n$. În fiecare domeniul D_i considerăm punctul $P(x_i, y_i)$ (în interior sau pe frontieră). Notăm cu $f(P_i)$ sau $f(x_i, y_i)$ valoarea funcției f în punctul . Atunci valoarea $f(x_i, y_i)\triangle S_i$ reprezintă volumul unui cilindru cu baza D_i și înălțimea $f(P_i)$, iar $V_n = f(P_i)\triangle S_i + ... + f(P_n)\triangle S_n$ este volumul unui corp format din mici coloane și aproximează volumul V al corpului dat. Este clar că această aproximare este cu atât mai bună cu cât în mai mici părți este divizat domeniul D. Notăm cu λ diametrul maximal al domeniilor D_i. Atunci $V = \lim\limits_{\lambda \to 0} V_n$ sau $V = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i y_i)\triangle S_i$.

Să definim acum integrala dublă . Fie că în domeniul închis şi mărginit D al planului OXY este dată funcția mărginită $f(x, y)$. Procedând ca și mai sus, folosind notațiile, alcătuim suma $\sigma = \sum\limits_{i-1}^{n} f(x_i, y_i)\triangle S_i$, numită **suma integrală** și care generează integrala dublă. Considerăm limita acestei sume când $\lambda \to 0$: $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$. Dacă această limită există și nu depinde de felul de divizare a domeniului D și nici de modul de alegere a punctelor $P_i(x_i, y_i)$, atunci valoarea ei se numește **integrala dublă a funcției $f(x, y)$ pe domeniul** D. Se notează: $\iint\limits_D f(x, y)dS$ sau $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$, unde dS este element de arie a figurii D, iar D se numește **domeniu de integrare**. Deci,

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \triangle S_i \quad .$$

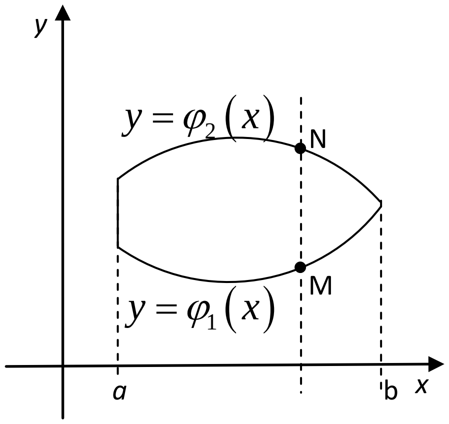
Astfel, **volumul corpului cilindric** poate fi găsit după formula $V = \iint_D f(x,y)dxdy$.

Proprietăți ale integralei duble:

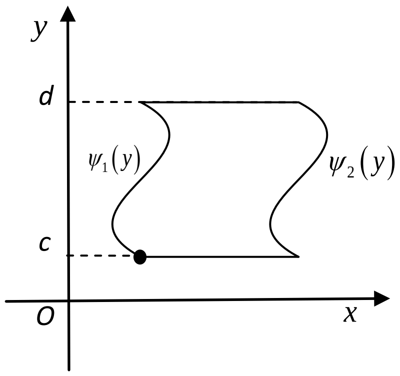
1. Dacă funcția $f(x,y)$ este integrabilă pe domeniul D, atunci și funcția $c \cdot f(x,y)$, unde c este constantă, este integrabilă pe domeniul D și are loc $\iint_D c \cdot f(x,y)dS = c\iint_D f(x,y)dS$
2. Dacă funcțiile $f(x,y)$ și $g(x,y)$ sunt integrabile pe domeniul D, atunci și funcțiile $f(x,y) \pm g(x,y)$ sunt integrabile pe domeniul D și $\iint_D (f \pm g)dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy \pm \iint_D g(x,y)dxdy$
3. Dacă domeniul D este divizat în două domenii D_1 și D_2, fără puncte interioare comune ,și $f(x,y)$ este integrabilă pe domeniile D_1 și D_2, atunci $f(x,y)$ este integrabilă pe domeniul D și $\iint_D f(x,y)ds = \iint_{D_1} f(x,y)ds + \iint_{D_2} f(x,y)ds$
4. Orice funcție continuă pe domeniul D este integrabilă pe acest domeniu.
5. Dacă $f(x,y)$ este integrabilă pe domeniul D și avem $m = f(x,y) = M$, atunci $m \cdot s \le \iint_D f(x,y)dxdy \le M \cdot S$, unde S este aria domeniului D.
6. Teorema despre valoarea medie a integralei duble. Dacă $f(x,y)$ este integrabilă pe domeniul D și $m \le f(x,y) \le M \Rightarrow \exists \mu \in [m,M]$, atunci $\exists \mu \in [m,M]$ astfel încît $\iint_D f(x,y)dxdy = \mu \cdot S$, unde S este aria pe domeniul D.
7. Dacă $f(x,y)$ este integrabilă pe domeniul D și $f(x,y) > 0$, atunci $\iint_D f(x,y)ds \ge 0$
8. Dacă $f(x,y)$ și $g(x,y)$ sunt integrabile pe domeniul D și $f(x,y) \ge g(x,y)$, atunci $\iint_D f(x,y)dxdy \ge \iint_D g(x,y)dxdy$.
9. Dacă funcția $f(x,y)$ este integrabilă pe domeniul D, atunci pe D este integrabilă și funcția $|f(x,y)|$ și $\left|\iint_D f(x,y)dxdy\right| \le \iint_D |f(x,y)|dxdy$.

Calcularea integralei duble

Admitem că domeniul D, situat în planul OXY, are proprietatea că orice dreaptă, paralele cu una dintre axele de coordonate, de exemplu cu OY, şi trece printr-un punct interior intersectează frontiera domeniului în două puncte.



Fie că domeniul D este mărginit de liniile $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$, $x=a$, $x=b$, $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$, $a<b$, unde φ_1 şi φ_2 sunt continui pe segmentul $[a,b]$. Astfel de domeniu se numeşte **regulat în direcția axei OY.**



Analog, se defineşte un **domeniu regulat în direcția axei OX,** adică mărginit de liniile: $x=\psi_1(y)$, $x=\psi_2(y)$, $y=c$, $y=d$, $\psi_1(y)(y)\le\psi_2(y)$, $c<d$, ψ_1 şi ψ_2 sunt continui pe segmentul $[c,d]$.

Presupunem că funcția $f(x,y)$ este continuă pe domeniul D. Considerăm expresia $I_D=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx$, numită **integrala iterată** a funcției $f(x,y)$ pe domeniul D.

În această expresie mai întâi se calculează integrala din paranteze, în raport cu *y* iar *x* se consideră constantă. În rezultat se obține o funcție de x: $\phi(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$.

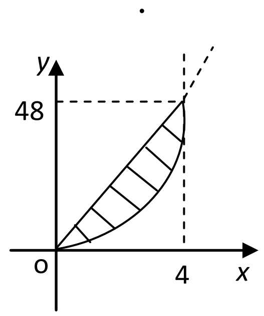
Integrând $\phi(x)$ în limitele de la *a* la *b*,obținem $I_D=\int_a^b\phi(x)dx$ - un număr. Deseori I_D se scrie sub forma: $I_D=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$.

Exemplu. Să se calculeze integrala iterată $\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}dy$

Avem că

$$\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}dy=\int_1^2 x^2\left(-\frac{1}{y}\right)\Bigg|_{\frac{1}{x}}^{x}dx=-\int_1^2 x^2\left(\frac{1}{x}-x\right)dx=\int_1^2\left(x^3-x\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$$

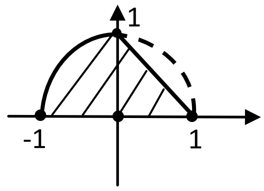


Exemplu. Să se schimbe ordinea integrării:

1. $\int_0^4 dx\int_{3x^2}^{12x} f(x,y)dy=I$ Avem

$$y=12x\Rightarrow x=\frac{1}{12}y;\ y=3x^2\Rightarrow x=\sqrt{\frac{y}{3}}\Rightarrow I=\int_0^{48}dy\int_{\frac{y}{12}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x,y)dx.$$

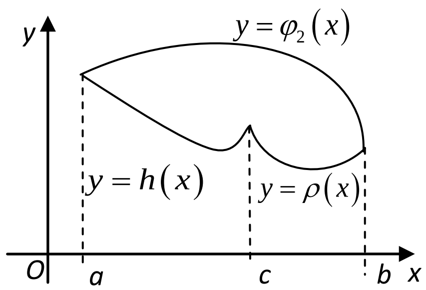
2. $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx=I$.



Avem că $x=-\sqrt{1-y^2}\Rightarrow y=\sqrt{1-x^2}$, $x=1-y\Rightarrow y=1-x$

$$I=\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} fdy+\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy.$$

Notă: Deseori măcar una dintre funcțiile $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$ nu



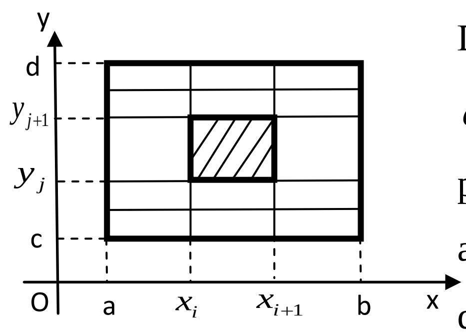
este reprezentată printr-o singură expresie analitică, atunci când *x* variază de la *a* la *b*. De exemplu, pe segmentul $[a, c]$ avem $\varphi_1(x)=h(x)$, iar pe $[c, b]$ avem $\varphi_1(x)=g(x)$. Atunci integrala iterată se scrie sub forma

$$\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy=\int_a^c dx\int_{h(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy+\int_c^b dx\int_{g(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

Teoremă: Fie că D este un dreptunghi mărginit de dreptele: $x=a$, $x=b$, $y=c$, $y=d$. Atunci integrala dublă a funcției $f(x,y)$ pe D este egală cu integrala iterată pe D:

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$$

Demonstrație:



Divizăm $[a, b]$ în n părți, iar $[c, b]$ - în m părți, notând: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,\ \ c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = b$ punctele de diviziune. Prin ele ducem drepte paralele la axele OX și OY, respectiv D este împărțit în $m \cdot n$ dreptunghiuri D_{ij}, $i \in [1, n]$, $j \in [1, m]$.

Notăm: $m_{ij} = \inf\limits_{D_{ij}} f(x, y)$, $M_{ij} = \sup\limits_{D_{ij}} f(x, y)$. Fixăm un punct $\zeta_i \in [x_i, x_{i+1}]$, atunci funcția $f(\zeta_i, y)$ este o funcție de o singură variabilă și $m_{ij} \le f(\zeta_i, y) \le M_{ij}$. Cum funcția este integrabilă pe $[c, d]$ rezultă că funcția este integrabilă pe $[y_j, y_{j+1}]$. Integrând avem:

$m_{ij}\int_{y_j}^{y_{j+1}} dy \le \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\zeta_i, y)dy \le M_{ij}\int_{y_j}^{y_{j+1}} dy$. Cum $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$, rezultă că

$m_{ij}\Delta y_j \le \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\zeta_i, y)dy \le M_{ij}\Delta y_j$. Sumând în raport cu j, avem

$\sum\limits_{j=1}^{m-1} m_{ij}\Delta y_j \le \int_c^d f(\zeta_i, y)dy \le \sum\limits_{j=0}^{m-1} M_{ij}\Delta y_j$.Înmulțind aceste părți cu $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i > 0$ și sumând în raport cu i de la 0 la $n-1$, obținem:

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} m_{ij}\Delta y_j \Delta x_i \le \sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_c^d f\left(\zeta_{,yi}\right)d\ \right)\Delta x_i \le \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} M_{ij}\Delta y_j \Delta x_i .$$

Valoarea $\Delta y_j \Delta x_i$ este aria ΔS_{ij} a dreptunghiului ΔD_{ij}. Evident, când

$n \to \infty,\ m \to \infty,\ \lambda \to 0$, unde λ este diagonala cea mai mare a dreptunghiurilor ΔD_{ij},

avem $\lim\limits_{\lambda \to 0}\left(\sum\limits_{i=0}^{n-1}\sum\limits_{j=0}^{m-1} m_{ij}\Delta s_{ij} - \sum\limits_{i=0}^{n-1}\sum\limits_{j=0}^{m-1} M_{ij}\Delta S_{ij}\right) = 0$ și

$\lim\limits_{\lambda \to 0}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\sum\limits_{j=0}^{m-1} m_{ij}\Delta s_{ij} = \lim\limits_{\lambda \to 0}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\sum\limits_{j=0}^{m-1} M_{ij}\Delta S_{ij} = \iint\limits_D f(x, y)dxdy$.

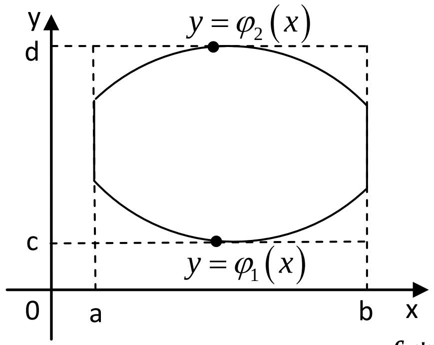
Dar $\lim\limits_{\lambda \to 0}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\left(\int_c^d f(\zeta_i, y)dy\right)\Delta x_i = \int_a^b dx\int_c^d f(x, y)dy$. Astfel,teorema este demonstrată.

Mai general:

Teoremă: Integrala dublă a funcției integrabile $f(x,y)$ pe domeniul regulat D este egală cu integrala iterată de la această funcție pe domeniul D, adică

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

Demonstrație:



Notăm: $d = \max \varphi_2(x)$ pe segmentul $[a,b]$, iar $c = \min \varphi_1(x)$ pe $[a, b]$. Atunci domeniul D este inclus în dreptunghiul mărginit de dreptele: $x=a$, $x=b$, $y=c$ $y=d$, notat cu $D*$. Considerăm funcția auxiliară:

$$f*(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\in D*-D \end{cases}$$

Este evident că funcția $f*(x,y)$ este integrabilă pe domeniul $D*$, deoarece în domeniul D $f*$ coincide cu *f*, care este integrabilă, iar pe domeniul $D*-D$, $f*(x,y)=0$, care este continuă şi deci, integrabilă, şi are la

$$\iint_{D*} f*(x,y)dxdy = \iint_D f(x,y)dy + \iint_{D*-D} 0dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy.$$

Pentru orice *x* fixat, $x\in[a,b]$, există $\int_c^d f*(x,y)dy$ şi

$$\int_c^d f*(x,y)dy = \int_c^{\varphi_1(x)} 0dy + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy + \int_{\varphi_2(x)}^d 0dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

Deci, funcția $f*$ verifică condițiile teoremei de mai sus şi

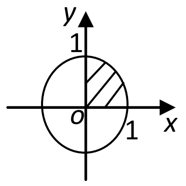
$$\iint_{D*} f*(x,y)dxdy = \int_a^b dx\int_c^d f*(x,y)dy \Rightarrow \iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

Teorema este demonstrată.

Exemple: Să se calculeze integralele duble

1. $\iint_D \frac{xy}{\sqrt{1-y^2}}dxdy$, $D: x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0$.

Avem



$$I=\int_0^1 x dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy=-\int_0^1 x\left(\sqrt{1-y^2}\,\Big|_0^{\sqrt{1-x^2}}\right)dx=$$

$$-\int_0^1\left(x^2-x\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{6}$$

2. $\iint\limits_D y\ln x dxdy$, $D: xy=1,\ y=\sqrt{x},\ x=2$

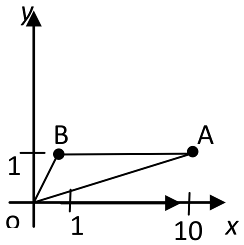
$$I=\int_1^2\ln x dx\int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} y dy=\int_1^2\ln x\frac{y^2}{2}\Bigg|_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}}dx=\int_1^2\ln x\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x^2}\right)dx=$$

$$\ln x\left(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2x}\right)\Bigg|_1^2-\int_1^2\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{2x^2}\right)dx=\frac{5}{4}\ln 2-\left(\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2x^2}\right)\Bigg|_1^2=\frac{5}{4}\ln 2-\frac{5}{8}$$

Dacă domeniul D este regulat în direcția axei OX, adică este mărginit de liniile:

$x=\psi_1(y),\ y=\psi_2(y),\ y=c,\ y=d$, atunci $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$.

Exemplu. Să se calculeze $\iint\limits_D\sqrt{xy-y^2}dxdy$, unde D este triunghiul cu vârfurile



$O(0,0),\ A(10,1),\ B(1,1)$.

Avem: ecuația dreptei OA este: $y=\frac{1}{10}x$, ecuația dreptei

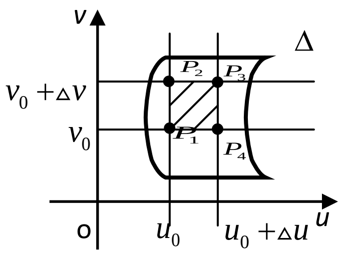
OB este: $y=x$

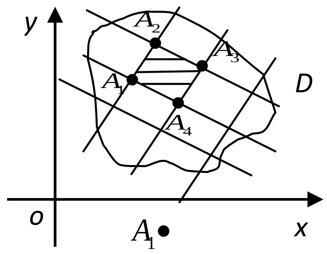
$$I=\int_0^1\frac{2}{3y}\left(xy-y^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_y^{10y}dx=\frac{2}{3}\int_0^1\frac{27y^3}{y}dy=18\int_0^1 y^2dy=6y^3\Big|_0^1=6.$$

Schimbul de variabile în integralele dublă. Coordonatele polare

Fie că pe planul OUV sunt definite două funcții: $\left.\begin{array}{l}x=\varphi(u,v)\\ y=\psi(u,v)\end{array}\right\}$, univoce., care

aplică un punct cu coordonatele (u,v) din careva domeniu Δ din planul OUV, în punctul cu coordonatele (x,y) în careva domeniu D din planul OXY. Presupunem ,de asemenea, că φ și ψ sunt de așa natură, astfel încât fiecărei perechi de numere (x,y) îi corespunde o pereche binedeterminată (u,v). Astfel, avem o corespondență biunivocă între punctele domeniilor Δ și D. În cele ce urmează vom determina modul de “schimbare” a ariilor la aplicația dată.





Împărțim domeniul Δ cu drepte $u = const.$ și $v = const.$ în domenii dreptunghiulare. Liniile din domeniul D, ce corespund acestor drepte, împart la rândul lor domeniul D în dreptunghiuri curbilinii.

Examinăm în planul OUV dreptunghiul $P_1P_2P_3P_4$ de arie $\Delta S'$, mărginit de dreptele $u = u_0$, $u = u_0 + \Delta u$, $v = v_0$, $v = v_0 + \Delta v$. Deci, $\Delta S' = \Delta u \cdot \Delta v$. Fie ΔS aria dreptunghiului curbiliniu $A_1A_2A_3A_4$. Evident, în general, $\Delta S' \neq \Delta S$. Să găsim ΔS. Găsim coordonatele punctelor A_1, A_2, A_3, A_4. Avem:

$A_1(x_1, y_1)$, unde $x_1 = \varphi(u_0, v_0)$, $y_1 = \psi(u_0, v_0)$;

$A_2(x_2, y_2)$, unde $x_2 = \varphi(u_0, v_0 + \Delta v)$, $y_2 = \psi(u_0, v_0 + \Delta v)$;

$A_3(x_3, y_3)$, unde $x_3 = \varphi(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v)$, $y_3 = \psi(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v)$;

$A_4(x_4, y_4)$, unde $x_4 = \varphi(u_0 + \Delta u, v_0)$, $y_4 = \psi(u_0 + \Delta u, v_0)$.

Atunci,

$x_1 = \varphi(u_0, v_0)$, $y_1 = \psi(u_0, v_0)$;

$x_2 \approx \varphi(u_0, v_0) + \varphi_v'(u_0, v_0)\Delta v$; $y_2 \approx \psi(u_0, v_0) + \psi_v'(u_0, v_0)\Delta v$;

$x_3 \approx \varphi(u_0,v_0) + \varphi_u'(u_0,v_0)\vartriangle u + \varphi_v'(u_0,v_0)\vartriangle v$;

$y_3 \approx \psi(u_0,v_0) + \psi_u'(u_0,v_0)\vartriangle u + \psi_v'(u_0,v_0)\vartriangle v$;

$x_4 \approx \varphi(u_0,v_0) + \varphi_u'(u_0,v_0)\vartriangle u$; $y_4 \approx \psi(u_0,v_0) + \psi_u'(u_0,v_0)\vartriangle u$.

La calcularea ariei domeniului $A_1A_2A_3A_4$ vom considera că $A_1A_2 \parallel A_3A_4$, $A_2A_3 \parallel A_4A_1$, de unde rezultă că $A_1A_2A_3A_4$ este paralelogram. Deci, aria $\vartriangle S$ a domeniului $A_1A_2A_3A_4$ este $\vartriangle S \approx 2\cdot S_{\vartriangle A_1A_2A_3} = \left\| \begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \varphi_v'\vartriangle v & \psi_v'\vartriangle v \\ \varphi_u'\vartriangle u & \varphi_u'\vartriangle u \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \varphi_u' & \varphi_v' \\ \psi_u' & \psi_v' \end{matrix} \right\| \vartriangle u \vartriangle v$.

Notăm $I = \begin{vmatrix} \varphi_u' & \varphi_v' \\ \psi_u' & \psi_v' \end{vmatrix}$, numit **determinant funcțional** al funcțiilor $\varphi(u,v)$ și $\psi(u,v)$ sau **jacobianul** (Iacoby) funcțiilor φ, ψ. Astfel, $\vartriangle S \approx |I| \vartriangle S'$.

Fie că pe domeniul D este definită funcția $z = f(x,y)$. Fiecărei valori a funcției $z = f(x,y)$ în domeniul D îi corespunde aceeași valoare a funcției $z = F(u,v)$ în domeniul $\vartriangle$, unde $F(u,v) = f(\varphi(u,v), \psi(u,v))$. Examinăm sumele integrale de la funcția *z* în domeniul *D*. Evident $\sum f(x,y)\vartriangle S = \sum F(u,v)\vartriangle S$. Atunci,

$\sum f(x,y)\vartriangle S \approx \sum F(u,v)|I|\vartriangle S'$. Trecem la limită atunci, când $\lambda \to 0$, adică $\vartriangle S' \to 0$.

Obținem $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\vartriangle} F(u,v)|I|dudv$

Astfel, transformarea de coordonate în integrala dublă are loc după formula de mai sus.

Exemplu. Să se calculeze $\iint\limits_D \sqrt{xy}dxdy$, unde *D* este mărginită de liniile

$y^2 = x,\ y^2 = 2x,\ xy = 1,\ xy = 2$.

Evident, domeniul D este nu simplu. Pentru aceasta trecem la alte variabile care vor fi definite pe alt domeniu - mai simplu. Notăm $u = y^2/x$ și $v = xy$. Atunci

$y=u^{1/3}v^{1/3}$, $x=u^{-1/3}v^{2/3}$, domeniu D' din planul OUV este pătratul determinat de dreptele $u=1, u=2, v=1, v=2$. Jacobianul funcțiilor x şi y este

$$I=\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\frac{1}{3}u^{-4/3}v^{2/3} & \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{-1/3} \\ \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{1/3}v^{-2/3} \end{vmatrix}=-\frac{1}{9}u^{-1}-\frac{2}{9}u^{-1}=-\frac{1}{3}u^{-1}$$ Atunci

$$I=\iint_{D'}\frac{1}{3}\sqrt{v}u^{-1}dudv=\frac{1}{3}\int_1^2 u^{-1}du\int_1^2\sqrt{v}dv=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)\int_1^2 u^{-1}du=\frac{2}{9}\left(2\sqrt{2}-1\right)\ln 2.$$

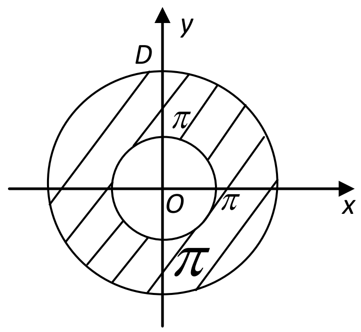
Prezintă interes **trecerea la coordonatele polare în integrala dublă**.

Avem: $u=\theta$, $v=\rho$, iar $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$. Atunci,

$$I=\begin{vmatrix} x'_\theta & x'_\rho \\ y'_\theta & y'_\rho \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\rho\sin\theta & \cos\theta \\ \rho\cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix}=-\rho.$$

Deci, $\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_\Delta f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$

Exemplu:Să se calculeze $\iint_D y^2\sqrt{x^2+y^2}dxdy$,



$D:\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2$,

Avem $x^2+y^2=\pi^2\Rightarrow\rho^2=\pi\Rightarrow\rho=\pi$

$x^2+y^2=4\pi^2\Rightarrow\rho=2\pi$, $0\le\theta\le 2\pi$.

$$I=\int_\pi^{2\pi}\rho d\rho\int_0^{2\pi}\rho^3\sin^2\theta d\theta=\int_\pi^{2\pi}\rho^4 d\rho\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta=$$

$$\int_\pi^{2\pi}\rho^4\left(\frac{\theta}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{2\pi}d\rho=\pi\int_\pi^{2\pi}\rho^4 d\rho=\frac{\pi}{5}\rho^5\Big|_\pi^{2\pi}=\frac{31}{5}\pi^6$$

Aplicații ale integralei duble

1. Dacă vom lua $f(x,y)=1$ pe domeniul D, atunci $\iint_D dxdy$ este **aria domeniului** D, adică

$$A_D=\iint_D dxdy$$

2. **Volumul corpului cilindric**, mărginit de suprafața $z = f(x, y) \geq 0$, planul $z = 0$ și suprafața cilindrică cu generatoarele $\parallel OZ$, iar directoare - frontiera domeniului D, este:

$$V = \iint_D f(x, y)\,dxdy$$

3. Fie că o placă neomogenă este dată de domeniul D și fie $\rho(x, y)$ densitatea acestei plăci. Atunci **masa plăcii** este: $m = \iint_D \rho(x, y)\,dxdy$

4. **Momentele statice ale figurii materiale**:
   Fie dată figura materială D și $\rho(x, y)$ densitatea de distribuție a masei în domeniul D.
   Se numește **moment static al unui sistem de puncte materiale față de o dreaptă** suma produselor maselor, concentrate în aceste puncte, la distanțele lor față de această dreaptă. Se demonstrează că momentele statice ale figurii plane D în raport cu axele OX și OY sunt: $M_x = \iint_D \rho(x, y)\,ydxdy,\ M_y = \iint_D \rho(x, y)\,xdxdy$

5. **Centrul de greutate ale figurii plane** materiale are coordonatele:

$$x_c = \frac{\iint \rho(x, y)\,xdxdy}{\iint \rho(x, y)\,dxdy}; \quad y_c = \frac{\iint \rho(x, y)\,ydxdy}{\iint \rho(x, y)\,dxdy}$$

6. **Momentele de inerție**
   Moment de inerție a unui punct material M cu masa *m*, față de un punct O este egală cu $I = mr^2$, unde *r* este distanța pînă la O. Moment de inerție a unui sistem de puncte materiale este: $I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ .Se demonstrează: că momentul de inerție al figurii plane în raport cu originea de coordonate este egală cu $I_0 = \iint_D \rho(x, y)(x^2 + y^2)\,dxdy$.

   Momentul de inerție față de axele OX și OY sunt egale cu:

$$I_{xx} = \iint_D y^2 \rho(x, y)\,dxdy; \quad I_{yy} = \iint_D x^2 \rho(x, y)\,dxdy.$$