Tema 15. Unde în medii elastice

Procesul de propagare în spațiu a oricăror variații ale stării materiei sub formă de substanță sau de câmp, dar fără transport de substanță, se numește undă.

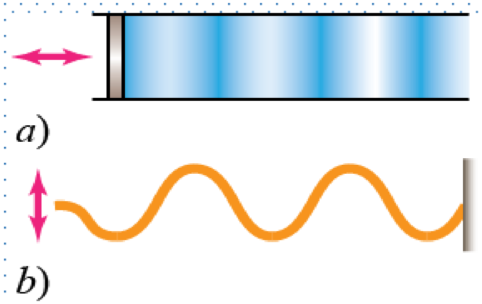
1. Unde mecanice sau elastice: (la suprafața apei în mări și oceane, seismice în scoarța Pământului, sonore în mediile solide, lichide și gazoase etc.)

2. Unde electromagnetice: (undele de lumină, undele radio, radiația Roentgen, radiațiile gamma etc.)

3. Undele de probabilitate, prin care fizica cuantică descrie comportamentul electronilor, atomilor și al altor microparticule

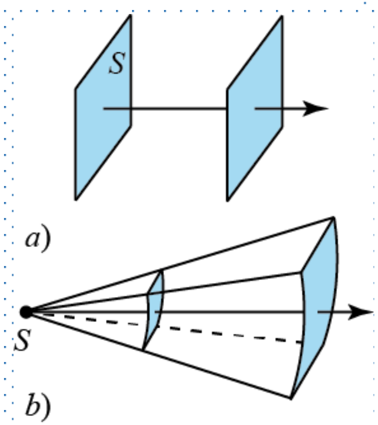
Tema 15. Unde în medii elastice

Dacă oscilațiile particulelor mediului au loc de-a lungul direcției de propagare, atunci undele se numesc **longitudinale**, iar dacă aceste oscilații se produc în direcții perpendiculare pe cea de propagare, atunci undele se numesc **transversale**.



Elasticitatea de volum și elasticitatea de formă

Gazele și lichidele nu au formă proprie de aceea ele posedă doar elasticitate de volum. Solidele, însă, posedă atât elasticitate de volum, cât și elasticitate de formă, care se manifestă prin proprietatea de a se opune alunecării straturilor solidului unul în raport cu altul, adică de a se opune deformației de forfecare.



Locul geometric al punctelor care oscilează în aceeași fază se numește **suprafață de undă**.

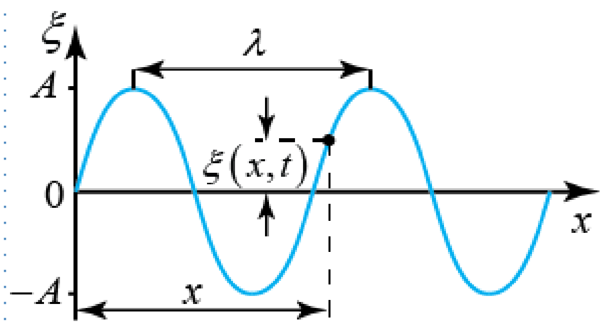
Cea mai avansată suprafață de undă reprezintă suprafața până la care a ajuns unda la momentul de timp considerat și se numește **front de undă**.

Tema 15. Unde în medii elastice

Ecuația undei plane progresive și regresive

$$\xi(x,t) = f\left(t \mp \frac{x}{\upsilon}\right) \Rightarrow \xi(x,t) = A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) + \varphi_0\right]$$

$$\xi(x,t) = A\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\upsilon T}\right) + \varphi_0\right]$$



Distanța la care se propagă unda plană sinusoidală în intervalul de timp egal cu o perioadă se numește **lungime de undă**.

$$\boxed{\lambda = \upsilon T}$$

Numărul de lungimi de undă care se conțin pe un segment de lungime egală cu (2π) m se numește **număr de undă**.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Tema 15. Unde în medii elastice

$$\xi(x,t) = A\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right] \rightarrow \boxed{\xi(x,t) = A\sin(\omega t \pm kx + \varphi_0)}$$

Vectorul egal în modul cu numărul de undă și orientat în sensul propagării undei se numește **vector de undă**.

$$\xi(\vec{r},t) = A\sin\left[\omega t \pm (\vec{k}\cdot\vec{r}) + \varphi_0\right] \qquad \xi(\vec{r},t) = Ae^{i\left[\omega t \pm (\vec{k}\cdot\vec{r}) + \delta\right]}$$

$$\boxed{\nabla^2\xi - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = 0} \qquad \text{unde} \qquad \nabla^2 \equiv \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = f'\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right); \quad \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = f''\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right);$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = -\frac{1}{\upsilon}f'\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right); \quad \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}f''\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right).$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}}$$

Tema 15. Unde în medii elastice

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{(\omega/k)^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

$\upsilon = \frac{\omega}{k}$ – **viteza de propagare a undei sinusoidale**

$$\omega t - k\,x + \varphi_0 = \text{const} \;\Rightarrow\; \omega - k\cdot\frac{dx}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; \upsilon \equiv \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

Viteza de fază a unei unde longitudinale în fluide

$\upsilon = \sqrt{\frac{K}{\rho}},$ K – modulul de elasticitate în volum al fluidului

Viteza de fază a unei unde longitudinale și transversale în solide:

$\upsilon_{\parallel} = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$ $\upsilon_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}},$ E – modulul lui Young, G – modulul de forfecare

Viteza de fază a unei unde longitudinale în gaze

la frecvențe joase

$$\upsilon = \sqrt{\frac{K_{\text{izot}}}{\rho}} = \sqrt{\frac{RT}{M}}$$

la frecvențe înalte

$$\upsilon = \sqrt{\frac{K_{\text{ad}}}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

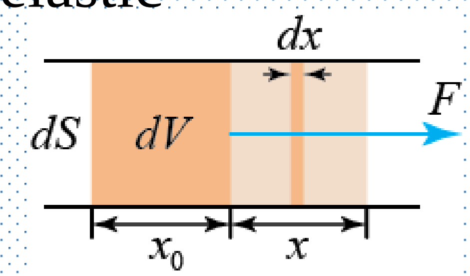
Tema 15. Unde în medii elastice

Densitatea volumică de energie a undelor elastice

Densitatea volumică a energiei cinetice

$$w_c = \frac{dE_c}{dV} = \frac{dm\upsilon_1^2}{2dV} = \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2$$

ρ - densitatea mediului elastic



$$\upsilon_1 = \frac{\partial \xi}{\partial t}$$ – viteza de mișcare oscilatorie a particulelor mediului elastic

$$dE_p = L \qquad dL = Fdx = dS \cdot E\varepsilon \cdot x_0 d\varepsilon = dV \cdot E\varepsilon d\varepsilon$$

$$L = dV \cdot E\int_0^{\varepsilon} \varepsilon d\varepsilon = \frac{E\varepsilon^2}{2}dV; \qquad E = \rho\upsilon^2 \text{ – modulul lui Young}$$

$$w_p = \frac{dE_p}{dV} = \frac{1}{2}\rho\upsilon^2\varepsilon^2$$

$$\upsilon = \frac{\partial x}{\partial t}$$ – viteza de propagare a undei

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial t}\cdot\frac{1}{\partial x/\partial t} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon} \Longrightarrow w = w_c + w_p = \frac{1}{2}\rho\cdot 2\upsilon_1^2 = \rho\upsilon_1^2$$

Tema 15. Unde în medii elastice

$$\upsilon_1 = \frac{\partial \xi}{\partial t} = A\omega\cos(\omega t - kx + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad w = \rho A^2\omega^2\cos^2(\omega t - kx + \varphi_0) = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\left[1 + \cos 2(\omega t - kx + \varphi_0)\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{< w >= \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2}$$

Viteza cu care este transferată energia undei (viteza de propagare a unei suprafețe care corespunde valorii maxime a densității volumice de energie a undei)

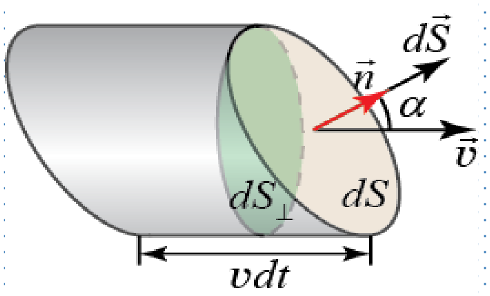
$$2(\omega t - kx + \varphi_0) = 0 \Rightarrow \quad u \equiv \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \upsilon$$

Viteza de transport a energiei unei unde sinusoidale plane este egală cu viteza ei de fază.

Tema 15. Unde în medii elastice

Procesul de transport al energiei este periodic, deaceea pentru descrierea lui este rațional de folosit o mărime dependentă de timp. O astfel de mărime este fluxul de energie:

$$d\Phi = \frac{dE}{dt}$$



$$dE = w \cdot dV = w \cdot vdt \cdot dS\cos\alpha = w \cdot dt\left(\vec{v}d\vec{S}\right)$$

$$d\Phi = w \cdot \left(\vec{v}d\vec{S}\right) = \left(\vec{\mathscr{P}}d\vec{S}\right)$$

$\boxed{\vec{\mathscr{P}} = w\vec{v}}$ – vectorul densității fluxului de energie sau **vectorul Umov-Poynting**

Mărimea fizică egală cu modulul valorii medii a vectorului Umov-Poynting se numește **intensitatea undei.**

$$I = \left|<\mathscr{P}>\right| = \langle w \rangle v = \frac{1}{2}\rho v \omega^2 A^2$$

Tema 15. Unde în medii elastice

Principiul superpoziției undelor

Dacă într-un mediu se propagă simultan mai multe unde, atunci perturbația rezultată a unui punct arbitrar al mediului este egală cu suma perturbațiilor acestui punct, generate de fiecare undă separat.

O undă nesinusoidală poate fi reprezentată printr-o superpoziție a unui număr finit sau infinit de unde sinusoidale de diferite frecvențe. Totalitatea valorilor acestor frecvențe se numește **spectru de frecvențe** al undei nesinusoidale.

Totalitatea undelor sinusoidale, din care este compusă o undă nesinusoidală se numește **pachet de unde**.

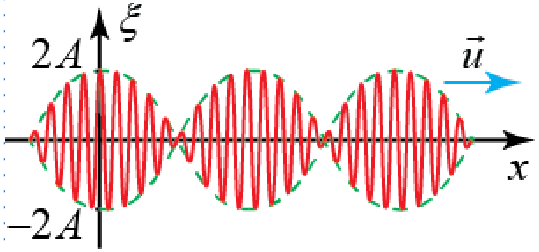
Viteza de propagare a pachetului de unde în întregime diferă de viteza de fază și se numește **viteză de grup**.

Tema 15. Unde în medii elastice

Analizăm cel mai simplu pachet de unde și determinăm viteza de grup

$$\xi_1 = A\sin(\omega t - kx),$$

$$\xi_2 = A\sin\left[(\omega + d\omega)t - (k + dk)x\right].$$



$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A\cos\frac{d\omega\cdot t - dk\cdot x}{2}\sin(\omega t - kx)$$

$$A_p = 2A\left|\cos\frac{d\omega\cdot t - dk\cdot x}{2}\right|$$

$$d\omega\cdot t - dk\cdot x = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} \equiv u = \frac{d\omega}{dk}$$

Relația dintre viteza de grup și viteza de fază

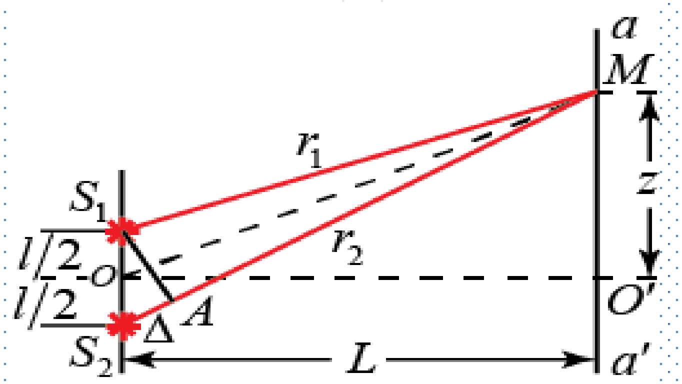
$$u = \frac{d(\upsilon k)}{dk} = \upsilon + k\frac{d\upsilon}{dk}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad dk = -\frac{2\pi}{\lambda^2}d\lambda$$

$$\Rightarrow \quad u = \upsilon - \lambda\frac{d\upsilon}{d\lambda}$$

Tema 15. Unde în medii elastice

Analizăm superpoziția a două unde sinusoidale de amplitudini și frecvențe diferite, excitate de 2 surse punctiforme într-un mediu omogen și izotrop



$$\xi_1 = A_1 \sin\left(\omega_1 t - k_1 r_1 + \alpha_1\right) = A_1 \sin\Phi_1$$

$$\xi_2 = A_2 \sin\left(\omega_2 t - k_2 r_2 + \alpha_2\right) = A_2 \sin\Phi_2$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left(\Phi_2 - \Phi_1\right)$$

$$\operatorname{tg}\Phi = \frac{A_1\sin\Phi_1 + A_2\sin\Phi_2}{A_2\cos\Phi_1 + A_2\cos\Phi_2}$$

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \left(\omega_2 - \omega_1\right)t - \left(k_2 r_2 - k_1 r_1\right) + \alpha_2 - \alpha_1 = \left(\omega_2 - \omega_1\right)t - \left(\frac{\omega_2}{\upsilon_2} r_2 - \frac{\omega_1}{\upsilon_1} r_1\right) + \alpha_2 - \alpha_1$$

Dacă defazajul a două unde nu depinde de timp, atunci undele se numesc coerente.

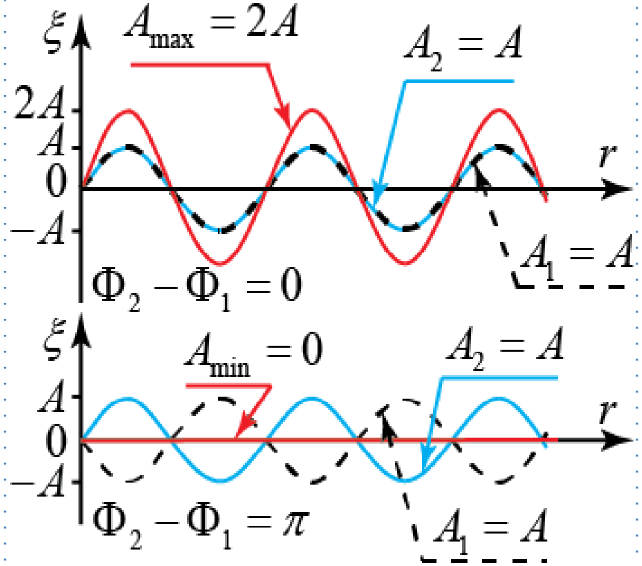
Tema 15. Unde în medii elastice

1) $\omega_2 \neq \omega_1$, undele nu sunt coerente ➡ $\langle A^2 \rangle = A_1^2 + A_2^2$

2) $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ și $k_1 = k_2 = k$, unde coerente

$$\Phi_2 - \Phi_1 = -k\Delta + \alpha_2 - \alpha_1$$

$\Delta = r_2 - r_1$ – **diferență geometrică de drum**



Fenomenul superpoziției undelor coerente, în rezultatul căruia are loc o amplificare reciprocă stabilă în timp în unele puncte ale mediului și o reducere reciprocă în altele se numește **interferența undelor**.

Condițiile maximelor și minimelor de interferență ale undelor coerente exprimate prin diferența de fază

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \pm 2m\pi, \qquad \text{maxim}$$

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \pm(2m+1)\pi, \qquad \text{minim}$$

Tema 15. Unde în medii elastice

Condițiile maximelor și minimelor exprimate prin diferența de drum

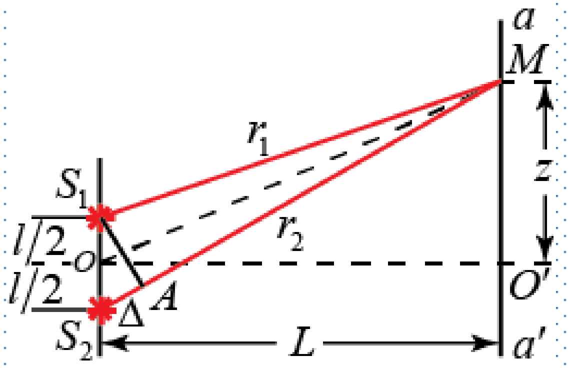
$$\Delta = \pm 2m\frac{\lambda}{2} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\pi}\frac{\lambda}{2}, \quad \text{max} \qquad \longrightarrow \qquad \Delta = \pm 2m\frac{\lambda}{2}, \quad \text{max}$$

$$\Delta = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\pi}\frac{\lambda}{2}, \quad \text{min} \qquad \qquad \Delta = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}, \quad \text{min}$$

m = 0, 1, 2, 3, … – numărul de ordine al maximelor sau al minimelor

Maximul $m = 0$ în punctul O′ se numește **maxim central**

Din $\triangle OO'M$ și $\triangle S_1AS_2$: $\longrightarrow \frac{z}{L} = \frac{\Delta}{l} \longrightarrow z = \frac{L}{l}\Delta$



Poziția maximului și minimului de ordinul m

$$z_m^{\max} = \pm m\frac{L\lambda}{l}; \qquad z_m^{\min} = \pm(2m+1)\frac{L\lambda}{2l}$$

Distanța dintre oricare două maxime sau minime consecutive:

$$z_{m+1} - z_m = \frac{L\lambda}{l}$$

Tema 15. Unde în medii elastice

Unde staționare

$$\xi_1 = A_0 \sin(\omega t - kx)$$
$$\xi_2 = A_0 \sin(\omega t + kx + \alpha)$$

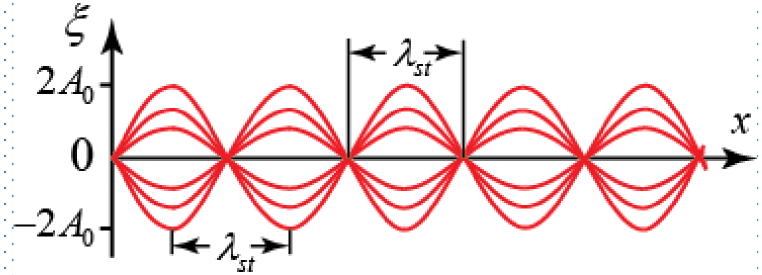
$$\Rightarrow \xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A_0 \cos\left(kx + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\omega t + \frac{\alpha}{2}\right) = A_{st} \sin\left(\omega t + \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$A_{\text{st}} = 2A_0 \cos\left(kx + \frac{\alpha}{2}\right)$$

Punctele, în care amplitudinea undei staționare este nulă ($A_{\text{st}} = 0$) se numesc **noduri** ale undei staționare, iar punctele, în care amplitudinea undei staționare este maximă ($A_{\text{st}} = 2\ A_0$) se numesc **ventre**.

$$kx_{\text{nod}} + \frac{\alpha}{2} = (2m+1)\frac{\pi}{2};$$
$$kx_{\text{v}} + \frac{\alpha}{2} = m\pi$$

$$\Rightarrow x_{\text{nod}} = (2m+1)\frac{\lambda}{4} - \frac{\alpha}{\pi}\frac{\lambda}{4}$$
$$x_{\text{v}} = 2m\frac{\lambda}{4} - \frac{\alpha}{\pi}\frac{\lambda}{4}$$



Lungimea undei staționare:

$$\lambda_{st} = \frac{\lambda}{2} \qquad x_{\text{nod}} - x_{\text{п}} = \frac{\lambda_{st}}{2} = \frac{\lambda}{4}$$