BIBLIOGRAFIE pentru MATEMATICI SPECIALE:

1) V.Beşliu. Ciclu de prelegeri la disciplina „Matematica Discrettă”. Chişinău,U.T.M., 2002.(biblioteca sau variantă electronică).
2) Matematica discretă în inginerie. Indicaţii metodice pentru seminare. Chişinău,U.T.M., 2002. (biblioteca sau variantă electronică).
3) Matematica Discretă. Indicaţii metodice pentru seminare. Chişinău,U.T.M., 2007.(biblioteca sau variantă electronică).
4) Indicaţii metodice la lucrările de laborator la disciplina „Matematica Discrettă”. Chişinău,U.T.M., 1999.(biblioteca sau variantă electronică).
5) I.Balmuş,Gh.Ceban e.t.c.Teoria probabilităţilor şi a Informaţiei în sistemul de programe Mathematica(Teorie, indicaţii metodice şi probleme propuse). Chişinău,U.T.M., 2017. (biblioteca sau variantă electronică).

Matematica Discretă (MD) serveşte drept suport pentru multe disciplinele ce ţin de domeniul informaticii, tehnicii de calcul, reţelelor de comunicare e.t.c.

MD este o întroducere în metodele matematice utilizate în informatică.

Scopul obiectului MD este asigurarea matematică pentru tehnica de calcul modernă şi a tehnologiilor informaţionale. MD este fundamentul unor astfel de discipline ca „Informatica teoretică”, „Programarea logică şi funcţională”,”Analiza şi modelarea sisitemelor”,”Analiza şi sinteza dispozitivelor numerice”,”Sisteme de inteligenţă artificială” e.t.c.

Studiind MD facem cunoştinţă cu modelele matematice şi algoritmii de bază, care vor permite în viitor formularea şi rezolvarea la nivel profesional a unei mulţimi de probleme în domenii concrete ale informaticii, tehnicii de calcul, proiectării structurilor logice şi proceselor de calcul.

Vor fi studiate câteva compartimente ale MD:

1)Sisteme Algebrice;

2)Elemente din teoria grafurilor;

3)Elemente de logică matematică;

4)Modele algoritmice;

5)Probabilităţi discrete.

Alte compartimente ca: limbage formale şi automate, teoria codificării e.t.c. vor fi studiate în cadrul altor discipline.

TEMA I

2. SISTEME ALGEBRICE

2.1. Mulţimi şi submulţimi

2.1.1. Noţiuni generale

Teoria mulţimilor studiază conceptele de mulţime şi de infinit şi legile de operare cu mulţimile. Noţiunea de ***mulţime*** este una din noţiunile primare ale matematicii şi, ca şi majoritatea noţiunilor primare nu are o definiţie unanim acceptată. George Cantor (1845-1918) a definit astfel această noţiune: "*înţeleg prin mulţime, în general, tot ceea ce este mult, dar care poate fi conceput ca o entitate, adică orice colecţie de anumite obiecte putând fi închegate într-un întreg cu ajutorul unei legi oarecare*".

PROBLEMELE PENTRU LUCRAEA DE CONTROL

Deci prin mulţime putem înţălege totalitatea obiectelor (fiinţelor) reunite după un anumit criteriu.

Obiectele care formează mulţimile se numesc ***elemente***. De obicei, elementele se notează cu litere mici, iar mulţimile cu litere mari cu sau fără indici. Elementele se iau în acolade şi se separă prin virgule.

Vom nota apartenenţa elementului *a* mulţimii *C* în felul următor: $a \in C$, iar dacă *g* nu aparţine mulţimii *C* se va scrie $g \notin C$. Mulţimile pot fi finite sau infinite.

Expresia $x \in S$ semnifică, deci, faptul că elementul x este un element al mulţimii S. Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt toate elemente ale mulţimii S, atunci poate fi scris $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Fiecare x trebuie să fie distinct; nu putem repeta scrierea unui element într-o mulţime. Ordinea în care elementele sunt scrise în cadrul mulţimii este arbitrară - mulţimile nu posedă o structură internă.

Numărul elementelor unei mulţimi finite se numeşte cardinalul acestei mulţimi.

Cardinalul mulţimii A se notează prin $|A|$,sau **card**A.

Un loc aparte îi este rezervat **mulţimii de cardinal zero** (fără elemente, $\{\ \}$). Această mulţime se numeşte **mulţime vidă** şi se notează prin $\varnothing$.

Exemplul 2.1. Fie $A = \{1, 3, 6\}$; altfel spus, A este mulţimea care are ca elemente valorile întregi 1, 3 şi 6, alte elemente nu există.

Mulţimile pot avea ca elemente alte mulţimi. De exemplu, fie $B = \{\{1, 2, 3\}, 3, \varnothing\}$. B are aici trei elemente. Primul element este mulţimea $\{1, 2, 3\}$, al doilea este numărul întreg 3, iar al treilea este mulţimea vidă.

Următoarele afirmaţii sunt juste: $\{1, 2, 3\} \in B$, $3 \in B$, şi $\varnothing \in B$. Afirmaţia $1 \in B$ est falsă. Adică, din faptul că 1 este element al unuia dintre elementele lui B nu rezultă că 1 este şi element al lui B.◄

Mulţimea A se va numi **submulţime** (sau parte) a mulţimii B **(**se va nota $A \subseteq B$**,** simbolul $\subseteq$ se numeşte **simbol de incluziune),** dacă fiecare element al mulţimii A este şi element al mulţimii B. Se va mai spune că B acoperă A. Două mulţimi A şi B se vor considera egale dacă conţin aceleaşi elemente, altfel, dacă $A \subseteq B$ şi $B \subseteq A$, atunci $A = B$. În cazul în care $A \subseteq B$ şi $A \neq B$ se va scrie $A \subset B$, iar A se va numi submulţime proprie sau strictă a lui B.

Exemplul 2.2. Mulţimea A, formată din numerele întregi, care se împart fără rest la 6, este o submulţime a multimii B, formată din numerele întregi pare. ◄

N.B. Mulţimea vidă este submulţime a oricărei mulţimi.

Exemplul 2.3. Toate relaţiile de mai jos sunt adevărate:

1. $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 5\}$
2. $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 5\}$
3. $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$

Remarcăm, că o mulţime este întotdeauna şi submulţime a sa , dar niciodată submulţime proprie, adică afirmaţia $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3\}$ este falsă. ◄

Pentru fiecare mulţime A există o mulţime $\boldsymbol{\rho}(A)$ care conţine toate submulţimile lui A (inclusiv mulţimea vidă şi A). Această mulţime $\boldsymbol{\rho}(A)$ se va numi **booleanul** lui A.

Exemplul 2.4. Pentru mulţimea $F = \{a, b, c\}$ vom avea $\boldsymbol{\rho}(F) = \{ \varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$. Adică, $\boldsymbol{\rho}(F)$ este o mulţime cu opt elemente, fiecare element fiind la rândul lui o mulţime. ◄

Mulţimea tuturor obiectelor posibile în cadrul unei cercetări concrete o vom numi **mulţime universală** sau **universum** (fără pretenţii de stricteţe) şi se notează prin E sau U.

2.1.2. Metode de definire a mulţimilor

Mulţimile pot fi definite prin simpla enumerare a elementelor lor, dar această metodă este valabilă doar pentru mulţimile finite cu un număr mic de elemente.

O altă metodă propune să se pornească de la o mulţime *S* şi o proprietate *P* a elementelor, definind o mulţime ca toate elementele lui *S* care verifică proprietatea *P*. Notaţia acestei operaţii, numită *abstracţie* este

$\{x \mid x \in S$ *şi* $P(x)\}$ sau *toate elementele x din S, care verifică proprietatea P.* Variabila *x* din ultima expresie este locală, adică putem scrie cu acelaşi succes $\{y \mid y \in S$ şi $P(y)\}$ pentru a descrie aceeaşi mulţime.

Exemplul 2.5. Fie *A*, mulţimea {1, 3, 6} din exemplul 2.1 şi *P(x)* proprietatea "*x este impar*".

Atunci, $\{x \mid x \in A$ şi *x este impar*$\}$ este o altă modalitate de a defini mulţimea {1, 3}. Altfel, noi acceptăm elementele 1 şi 3 din *A* pentru că ele sunt impare, dar refuzăm elementul 6, pentru că el nu este impar.

Considerăm mulţimea $B = \{\{1, 2, 3\}, 3, \varnothing\}$ din exemplul 2.1. Atunci, $\{A \mid A \in B$ şi *A este o mulţime* $\}$ defineşte mulţimea $\{\{1, 2, 3\}, \varnothing\}$. ◄

Este tentant să presupunem, că mulţimile sunt *finite* sau că există un întreg *n* şi mulţimea considerată are exact *n* elemente. De exemplu, mulţimea {1, 3, 6} are trei elemente. Însă, în foarte multe cazuri mulţimile sunt infinite, adică nu există un întreg care ar limita numărul elementelor mulţimii. Iată câteva exemple:

- ***N*** - mulţimea numerelor naturale;
- ***Z*** - mulţimea numerelor întregi;
- ***R*** – mulţimea numerelor reale;
- ***C*** - mulţimea numerelor complexe.

Plecând de la aceste mulţimi pot fi create prin abstracţie alte mulţimi infinite.

Exemplul 2.6. Mulţimea $\{x \mid x \in Z$ *şi* $x < 3\}$ este mulţimea tuturor numerelor întregi negative la care se adaugă 0, 1 şi 2

A treia metodă constă în definirea mulţimilor prin intermediul unei **proceduri generatoare**, care va descrie modalitatea de obţinere a elementelor mulţimii din elemente iniţiale şi/sau elemente, care au fost obţinute anterior. Se vor considera elemente ale mulţimii toate obiectele care pot fi construite cu ajutorul acestei proceduri. De exemplu, mulţimea $M = \{1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots\}$ poate fi definită cu ajutorul următoarei proceduri:

1) $x_1 = 1, x_2 = 2;$

2) $x_{i+2} = x_{i+1} + x_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$.

O mulţime poate fi definită cu ajutorul **funcţiei caracteristice**, care are domeniul de definiţie mulţimea universală U, iar domeniul de valori mulţimea $\{0, 1\}$:

$$\text{şi } \mu(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \in U \text{ aparţine lui } M \\ 0, \text{ în caz contrar.} \end{cases}$$

2.2. Mulţimi vagi

Definirea unei mulţimi cu ajutorul funcţiei caracteristice presupune că elementul $x \in U$ aparţine sau nu aparţine mulţimii M, o a treia posibilitate este exclusă. Însă în realitate, pentru o mare diversitate de obiecte nu există criterii exacte de apartenenţă: funcţia caracteristică doar pentru unele elemente este zero (se cunoaşte precis neapartenenţa elementului la mulţimea dată) sau unu (elementul aparţine sigur mulţimii considerate). Pentru restul elementelor funcţia $\mu(x)$ ar trebui să ia valori între 0 şi 1. Aceste elemente formează obiectul teoriei mulţimilor **vagi (fuzzy)** (neclar definite**).**

Exemplul 2.7. Mulţimea $A = \{x \mid x >> 1\}$ este definită ca setul de numere mult mai mari ca unu. În sensul obişnuit A nu poate fi considerată o mulţime. Se poate spune precis, că numerele mai mici decât 1 nu aparţin lui A. Numerele mai mari ca 1 pot fi considerate elemente din A cu un anumit grad de subiectivism: cu cât numărul considerat este mai mare cu atât pare mai corect să admitem, că acesta aparţine lui A.

2.3. Operaţii cu mulţimi

În acest paragraf vom defini trei operaţii cu mulţimi: **reuniunea, intersecţia** şi **complementara**, operaţii de bază, şi două operaţii suplimentare: **diferenţa şi diferenţa simetrică**.

Reuniunea a două mulţimi A şi B se va numi mulţimea C $(C = A \cup B)$, care conţine toate elementele lui A şi toate elementele mulţimii B, alte elemente nu are.

De exemplu, pentru $A = \{a, b, c, d\}$ şi $B = \{c, d, e, f\}$ reuniunea lor va fi mulţimea $C = \{a, b, c, d, e, f\}$. Cu alte cuvinte, $C = A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$.

Reuniunea este o operaţie

a) *comutativă:* $A \cup B = B \cup A$;

b) *asociativă:* $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

c) *Ø este elementul său neutru:* $A \cup Ø = A$

d) *idempotentă:* $A \cup A = A$

Remarcăm, că $A \subset B$ atunci şi numai atunci, când $A \cup B = B$.

Intersecţia a două mulţimi A şi B se va numi mulţimea $C = A \cap B$, care conţine toate elementele comune ale acestor două mulţimi: $C = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \in B\}$. Pentru aceleaşi A şi B din exemplul precedent $A \cap B = \{c, d\}$.

Intersecţia este o operaţie

e) *comutativă:* $A \cap B = B \cap A$;

f) *asociativă:* $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$

g) *Ø este elementul său absorbant:* $A \cap Ø = Ø$

h) *idempotentă:* $A \cap A = A$

Remarcăm, că $A \subset B$ atunci şi numai atunci, când $A \cap B = A$.

Diferenţa a două mulţimi A şi B, notată $A - B$ (sau A/B) se numeşte mulţimea $C = \{x \mid x \in A$ şi $x \notin B\}$. Pentru aceleaşi A şi B vom avea $A - B = \{a, b\}$, iar $B - A = \{e, f\}$. Observăm necomutativitatea acestei operaţii.

Diferenţa simetrică se defineşte ca $C = A \,\Delta\, B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \notin B \text{ sau } \notin A \text{ şi } x \in B\}$. Pentru exemplul precedent vom avea $A \,\Delta\, B = B \,\Delta\, A = \{a, b, e, f\}$.

Exemplul 2.8. Fie S, mulţimea $\{1, 2, 3\}$ şi T mulţimea $\{3, 4, 5\}$.

Atunci $S \cup T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $S \cap T = \{3\}$, şi $S / T = \{1,2\}$.◄

Complementara mulţimii A în U ($A \subseteq U$) notată cu $C_U A$ se va numi mulţimea care conţine toate elementele mulţimii U ce nu aparţin mulţimii A:

$C_U A = \{x \mid x \in U$ şi $x \notin A\}$. Atunci când este evident care este mulţimea U, indicele poate fi omis. Complementara lui A se va mai nota prin $\bar{A}$ (A barat).

De exemplu, dacă $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, atunci pentru aceleaşi mulţimi A şi B vom avea $C_U A = \bar{A}_U = \{e, f, g\}$, iar $C_U B = \{a, b, g\}$.

Numim **partiţie** a mulţimii A orice set de părţi $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ ale lui A, care verifică condiţiile:

$1.\ X_i \neq \varnothing, \qquad i = 1, 2, \ldots, n;$

$2.\ X_i \cap X_j, = \varnothing\ i \neq j; \qquad (2.1)$

$3.\ \bigcup X_i = A, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$

2.4. Demonstrarea echivalenţei cu ajutorul incluziunilor Două mulţimi *S* şi *T* sunt egale dacă şi numai dacă $S \subseteq T$ şi $T \subseteq S$; adică fiecare este simultan o submulţime a celeilalte. Aceasta este analogic regulii aritmetice care afirmă că $a = b$ atunci şi numai atunci când simultan $a \leq b$ şi $b \leq a$ sunt adevărate. Putem demonstra echivalenţa a două expresii *E* şi *F* arătând că fiecare este inclusă în cealaltă. Altfel

1. se va lua un element arbitrar *x* din *E* şi se va demonstra că el aparţine de asemenea şi lui *F*,
2. se va lua un element arbitrar *x* din *F* şi se va demonstra că el aparţine de asemenea şi lui *E*.

Exemplul 2.9. Să demonstrăm asociativitatea reuniunii şi diferenţei, $(S - (T \cup R)) \equiv ((S - T) - R)$. Începem cu presupunerea, că *x* aparţine expresiei din stângă. Secvenţa etapelor este arătată în tab.2.1.

Tabelul 2.1. Prima jumătate a demonstraţiei.

	Etapa	**Justificarea**
1)	*x* este din $S - (T \cup R)$	dat
2)	*x* este din *S*	definiţia operaţiei “-” şi (1)
3)	*x* nu este în $T \cup R$	definiţia operaţiei “-” şi (1)
4)	*x* nu este în *T*	definiţia operaţiei “$\cup$” şi (1) (3)
5)	*x* nu aparţine lui *R*	definiţia operaţiei “$\cup$” şi (3)
6)	*x* aparţine lui $S - T$	definiţia operaţiei “-” cu (2) şi (4)
7)	*x* este în $(S - T) - R$	definiţia operaţiei “-” cu (6) şi (5)

Am ajuns la concluzia, că *x* aparţine şi părţii drepte. Concluzie: deoarece *x* a fost luat arbitrar, partea stângă este submulţime a părţii drepte. Dar asta nu-i totul. Mai trebuie să demonstrăm, că şi partea dreaptă este submulţime a părţii stânga, adică dacă un *x* arbitrar este din *(S-T)–R*, atunci el se conţine şi în *S - (T* ∪ *R)*.

Tabelul 2.2. A doua jumătate a demonstraţiei.

	Etapa	**Justificarea**
1)	*x* este din *S - (T - R)*	dat
2)	*x* este din *S-T*	definiţia operaţiei “-” şi (1)
3)	*x* nu este în *R*	definiţia operaţiei “-” şi (1)
4)	*x* este în *S*	definiţia operaţiei “-” şi (2)
5)	*x* nu aparţine lui *T*	definiţia operaţiei “-” şi (2)
6)	*x* nu aparţine lui *R* ∪ *T*	definiţia operaţiei “∪” cu (3) şi (5)
7)	*x* este în *S – (T* ∪ *R)*	definiţia operaţiei “-” cu (6) şi (4)

Am arătat acest lucru în tabelul 2.2. ◄

2.5. Vectori şi produs cartezian

2.5.1. Definiţii

Un set ordonat de elemente se va numi **vector** sau **cortej**. Aceasta nu este definiţia noţiunii de vector, care la fel ca şi noţiunea de mulţime nu se defineşte. Elementele, care formează vectorul se numesc coordonate sau componente şi se numerotează de la stânga spre dreapta. În acest sens se va înţelege prin vector noţiunea **de set ordonat**. Vectorii se scriu în paranteze rotunde, componentele se vor separa, la necesitate, prin virgulă. Numărul de componente se numeşte **lungimea** sau **dimensiunea** vectorului.

De exemplu, *v* = *(2,3,0,3)* este un vector de lungime *4* şi diferă de *b* = *(3,2,0,3)*. Observăm, că este admisă coincidenţa coordonatelor. Vectorul de lungime 2 se mai numeşte pereche sau cuplu, iar de lungime *n* - ***n-uplu***.

Doi vectori sunt **egali** dacă au aceeaşi lungime, iar componentele respective coincid.

Se numeşte **produs cartezian** a două mulţimi A şi B (se notează AxB) mulţimea **tuturor** perechilor (a,b) pentru care $a\in A$, $b\in B$. Pentru $A = B$ vom avea Ax$A = A^2$. Prin analogie, A_1xA_2x...xA_n se va numi mulţimea tuturor vectorilor de lungime n $(a_1,a_2,...,a_n)$ pentru care $a_1\in A_1$, $a_2\in A_2$,..., $a_n\in A_n$. Dacă $A_1=A_2=...=A_n=A$ produsul cartezian A_1xA_2x...xA_n se va nota A^n.

Exemplul 2.10. Mulţimea R x $R = R^2$ este mulţimea tuturor perechilor (a,b) pentru care $a, b\in R$ şi reprezintă coordonatele punctelor unui plan.

Fie A o mulţime finită de simboluri (litere, cifre, semne de operaţii şi ortografice, etc.), care, de obicei, se numeşte alfabet. Elementele mulţimii A^n se numesc cuvinte de lungime n în alfabetul A. Mulţimea A $=A^1\cup A^2\cup A^3\cup$... defineşte toate cuvintele alfabetului A. ◄

Exemplul 2.11. Dacă $A = \{c, d\}$ şi $B = \mathbf{N}_3$, elementele produsului AxB sunt 6 cupluri $(c, 1)$, $(c, 2)$, $(c, 3)$, $(d, 1)$, $(d, 2)$, $(d, 3)$, iar elementele mulţimii BxA sunt:
$(1,c)$, $(2, c)$, $(3, c)$, $(1, d)$, $(2, d)$, $(3, d)$. ◄

La concret, a construi un n-uplu înseamnă să alegem un prim obiect (componentă) din prima mulţime, un al doilea obiect dintre elementele mulţimii a doua şi tot aşa până la componenta cu numărul n din mulţimea cu acelaşi număr.

2.5.2. Cardinalul produsului cartezian

Teorema 2.1. Dacă $A_1, A_2,..., A_n$ sunt mulţimi finite cu $|A_1|=m_1$, $|A_2|=m_2$,..., $|A_n|=m_n$, atunci $|A_1$xA_2x...x$A_n|= m_1m_2...m_n$.

Consecinţă. $|A^n| = |A|^n$.

2.6. Corespondenţe şi funcţii

2.6.1. Vom numi corespondenţă între mulţimile A şi B submulţimea $\boldsymbol{G} \subseteq$ **AxB.**

Dacă $(a, b) \in G$ se va spune că b corespunde lui a în corespondenţa G.

Mulţimea ***pr1G*** se va numi **domeniu de definiţie** (sau **mulţimea sursă**), iar ***pr₂G*** - **domeniu de valori** (sau **imaginea** lui A) ale corespondenţei G. Dacă $\boldsymbol{pr_1G = A}$ corespondenţa se va numi **total definită** (în caz contrar - parţial definită). Corespondenţa pentru care ***pr2G = B*** se numeşte **surjectivă**. Corespondenţa G se va numi **funcţională,** dacă fiecărui element din pr_1G îi va corespunde un singur element din $pr_2G = B$ şi **injectivă** dacă fiecare element din domeniul de valori corespunde unui singur element din domeniul de definiţie.

O corespondenţă se numeşte bijectivă (corespondenţă 1:1) dacă ea este

- total definită,
- surjectivă,
- funcţională,
- injectivă.

Exemplul 2.12. Reprezentarea lunilor anului prin numerele lor este o corespondenţă biunivocă între mulţimea lunilor şi mulţimea ***N12*** a numerelor întregi de la 1 până la 12. ◄

Teorema 2.2. Dacă între două mulţimi A şi B există o corespondenţă biunivocă, atunci

$$|A|=|B|.$$

2.6.2. Funcţii. Compoziţia şi superpoziţia funcţiilor

Se numeşte **funcţie** o corespondenţă funcţională. Dacă funcţia f stabileşte o corespondenţă între mulţimile A şi B se va spune că f are tipul de la A la B şi se va nota $f: A\longrightarrow B$. Două funcţii f şi g se numesc **egale**, dacă $f(x)=g(x)$ pentru orice valoare a lui x (se mai notează $f=g$). Funcţia total definită $f: A\longrightarrow B$ se numeşte **aplicaţie (funcţie totală)** a lui A în B. Dacă corespondenţa f în acest caz este surjectivă vom spune că are loc aplicaţia lui A pe B. Aplicaţia de tipul $A\longrightarrow A$ se numeşte **transformarea** (transformata) lui A.

Funcţia $f: A_1xA_2x...xA_n\longrightarrow B$ se numeşte funcţie n-ară (funcţie de n argumente). Pentru $n = 1$ vom vorbi de funcţii unare, pentru $n = 2$ – funcţii binare, etc.

Exemplul 2.13

a)Într-o arhivă dosarele sunt plasate în căsuţe speciale pentru păstrare şi accesare rapidă. Asociind fiecărui dosar căsuţa, care îl conţine, se va defini o funcţie de tipul "mulţimea dosarelor" în "mulţimea căsuţelor". Imaginea acestei funcţii este mulţimea căsuţelor ocupate (nevide). Zicând că aceasta este o aplicaţie spunem că toate dosarele sunt plasate în căsuţe. Aplicaţia dată este injectivă, dacă fiecare căsuţă conţine cel mult un dosar. Dacă nu există căsuţe libere aplicaţia este surjectivă.

b)Numărul de înmatriculare a unui automobil este format dintr-o succesiune de litere şi cifre în felul următor: 2, 3 sau 4 litere urmate de 2, 3 sau 4 cifre, de exemplu, CES 919. În termeni matematici înmatricularea automobilelor defineşte o funcţie, care pune în corespondenţă mulţimii automobilelor A mulţimea B, elementele căreia sunt obţinute în modul susnumit.

Fie $G \subseteq AxB$. **Dacă corespondenţa $H \subseteq BxA$ are loc atunci când perechea *(b,a)* aparţine lui H dacă şi numai dacă *(a,b)* $\in G$, H se va numi inversa lui G şi se va nota prin G^{-1}**. Dacă corespondenţa inversă funcţiei $f:A \longrightarrow B$ este funcţională ea se va numi funcţie inversă funcţiei f şi se va nota prin f^{-1}.

Fie $f:A \longrightarrow B$ şi $g:B \longrightarrow C$. Funcţia $h:A \longrightarrow C$ se va numi **compunerea** funcţiilor f şi g (vom nota fog), dacă are loc egalitatea $h(x)=g(f(x))$, în care $x \in A$. Se mai spune că h a fost obţinută prin substituirea lui f în g.

Pentru funcţii de mai multe argumente $f:A^m \longrightarrow B$, $g:B^n \longrightarrow C$ sunt posibile mai multe variante de substituţie, care conduc la funcţii de diferite tipuri. Un interes aparte prezintă cazul când avem funcţii de tipul $f_1:A^{m1} \longrightarrow A, \ldots, f_n:A^{mn} \longrightarrow A$. În acest caz sunt posibile orice substituţii de funcţii şi redenumiri de argumente. Funcţia obţinută din $f_1, \ldots, f_n$ printr-o substituire oarecare şi redenumirea argumentelor se numeşte **superpoziţia** $f_1, \ldots, f_n$.

2.7. Relaţii şi proprietăţile lor

2.7.1. Noţiuni introductive

Se numeşte **relaţie** *n*-ară submulţimea R a produsului cartezian $A_1xA_2 \ldots An$: $\boldsymbol{R \subseteq A1xA2x \ldots xAn}$. Vom zice că $a_1, \ldots, a_n$, sunt în relaţia R dacă $(a_1, \ldots, a_n) \in R$. Cardinalul mulţimii vectorilor, care formează relaţia se numeşte cardinalul relaţiei.

O relaţie unară este o parte a mulţimii M şi determină o proprietate a elementelor unei submulţimi a mulţimii M din care cauză pentru $n = 1$ denumirea de relaţie practic nu este utilizată. Un interes mai mare prezintă cazul când $n = 2$ - relaţiile binare. Dacă a şi b se află în relaţia R, aceasta se va scrie aRb.

Exemplul 2.14. Pentru mulţimea N: relaţia "<" are loc în cazul perechii *(3,9)* şi nu are loc pentru perechea *(6,4)*. Relaţia *"a fi divizor"* are loc pentru perechea *(7,35)* şi nu are loc pentru *(18,2)* sau *(4,9)*. Pentru o mulţime de oameni pot fi relaţii de tipul *"a fi prieteni"*, *"a locui in acelaşi oraş"*, *"a fi fiu"*, etc. ◄

Pentru definirea unei relaţii pot fi utilizate oricare din metodele de definire a mulţimilor. O posibilitate suplimentară este matricea de relaţie. Pentru mulţimea $M = \{a_1, a_2,..., a_m\}$ aceasta este o matrice *mxm* în care: $a(i,j) = 1$, dacă $a_i R a_j$ si $a(i,j) = 0$ în caz contrar.

Deoarece relaţia este în ultimă instanţă o mulţime, pot fi executate aceleaşi operaţii (reuniune, intersecţie, etc.) şi cu relaţiile.

Noţiunea *relaţie* formează fundamentul bazelor de date de tip relaţional. Relaţiile sunt analogul matematic al tabelelor. Chiar termenul “reprezentarea relaţională a datelor”, provine de la termenul *relation*. Două momente trebuie subliniate în mod deosebit.

Primul moment: toate elementele unei relaţii sunt vectori (cortejuri) de acelaşi tip. Din această cauză cortejurile sunt analogul liniilor într-un simplu tabel, adică un tabel în care fiecare linie conţine acelaşi număr de câmpuri, iar în câmpurile respective sunt păstrate date de acelaşi tip.

Al doilea moment: relaţia poate să nu cuprindă toate cortejurile posibile ale produsului cartezian (cu excepţia cazului extrem, când relaţia este chiar produsul cartezian). Aceasta înseamnă, că fiecărei relaţii îi corespunde un *criteriu*, care permite să se determine care dintre cortejuri aparţin relaţiei date şi care nu. Acest criteriu determină *sensul* (*semantica*) relaţiei.

O relaţie se numeşte **inversa** relaţiei R (se va nota R^{-1}) dacă $a_i R a_j$ are loc atunci şi numai atunci când are loc $a_j R^{-1} a_i$.

2.7.2. Proprietăţile relaţiilor Relaţia poate poseda o serie de proprietăţi dintre care vom menţiona **reflexivitatea, simetria** şi **tranzitivitatea**. Dacă pentru $\forall a \in M$ are loc aRa relaţia R se numeşte **reflexivă**. Diagonala principală a matricei relaţiei R conţine numai unităţi. Relaţia R se numeşte **antireflexivă** dacă nu există $a \in M$ pentru care ar avea loc aRa. Diagonala principală a matricei unei astfel de relaţii conţine numai zerouri. Relaţiile "$\geq$", *"a avea un divizor comun"* sunt reflexive. Relaţiile *"a fi fiu"*, *">"* - sunt antireflexive.

Dacă pentru o pereche $(a,b) \in M^2$ din aRb rezultă bRa (relaţia are loc în ambele părţi sau nu are loc de fel), relaţia R se numeşte **simetrică**. Pentru astfel de relaţii $c(i,j) = c(j,i)$: matricea este simetrică faţă de diagonala principală.

Relaţia se va numi **antisimetrică**[1]**,** dacă din a_iRa_j şi a_jRa_i rezultă că $a_i=a_j$. Relaţia "≤" este antisimetrică, iar *"a locui în acelaşi oraş"* - simetrică.

Relaţia *R* se numeşte **tranzitivă** dacă pentru oricare a, *b* şi *c* din *aRb* şi *bRc* rezultă *aRc*. Relaţiile *"a locui în acelaşi oraş", "egal", "<"* sunt tranzitive, iar *"a fi fiu"* nu este tranzitivă.

O relaţie binară se numeşte ***relaţie funcţională***, dacă atunci când $(x, y) \in R$ şi

$(y, z) \in R$ vom avea în mod obligator $x=z$ (univocitatea funcţiei).

Pentru oricare relaţie *R* poate fi definită noţiunea de închidere tranzitivă R^*: aR^*b (*a* se află în relaţia R^* cu *b*), dacă în *M* există o secvenţă de *n* elemente $a=a_1,..., a_{n-1}, a_n = b$ în care pentru elementele vecine are loc R: $aRa_2, a_2Ra_3,..., a_{n-1}Rb$. Dacă *R* este tranzitivă, atunci $R^*=R$. Pentru relaţia *"a fi fiu"* relaţia *"a fi descendent direct"* este închidere tranzitivă (este reuniunea relaţiilor *"a fi fiu", "a fi nepot", "a fi strănepot"* s.a.m.d.).

O relaţie care posedă proprietăţile reflexivitate, simetrie şi tranzitivitate se numeşte relaţie de **echivalenţă**.

Se numeşte **relaţie de ordine** oricare relaţie care posedă proprietăţile reflexivitate, antisimetrie şi tranzitivitate. O relaţie antireflexivă, antisimetrică şi tranzitivă se numeşte **relaţie de ordine strictă**. Două elemente *a* şi *b* se numesc **comparabile** conform relaţiei de ordine *R* dacă are loc *aRb* sau *bRa*. O mulţime *M* cu o relaţie de ordine definită pe *M* se numeşte **total ordonată** dacă oricare două elemente din *M* sunt comparabile şi **parţial ordonată,** în caz contrar.

Exemplul 2.15. Relaţiile *"≤", "≥"* pentru o mulţime de numere sunt relaţii de ordine, iar *"<", ">"* - de ordine strictă.
În alfabetul latin literele sunt aranjate într-o ordine binecunoscută: se află în relaţia de precedare a literelor. Conform acestei relaţii poate fi stabilită relaţia de precedare a cuvintelor - ordinea lexicografică a cuvintelor (utilizată de exemplu în dicţionare). Relaţia de ordine lexicografică poate fi definită şi pentru informaţii numerice. De exemplu, în calculator data şi anul sunt memorizate sub forma *"anul, luna, ziua"* pentru ca ordinea de creştere a datei totale să coincidă cu ordinea lexicografică. ◄

[1] Termenul *antisimetric* nu a fost ales prea norocos, deoarece se poate crede că o relaţie, care nu este simetrică este totdeauna antisimetrică, ceea ce nu este corect.

2.7.3. Alte metode de descriere a relaţiilor

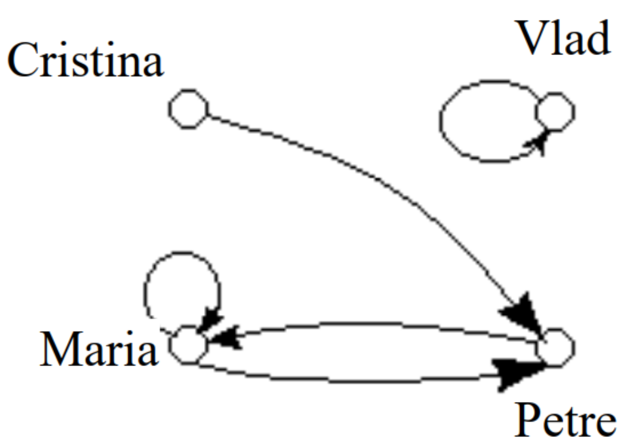
Fie mulţimea tinerilor {*Vlad*, *Petre*, *Maria*, *Cristina*}despre care se cunoaşte că:

1. *Vlad* îl iubeşte pe *Vlad* (egoism☺),
2. *Petre* o iubeşte pe *Maria* (reciproc☺),
3. *Maria* îl iubeşte pe *Petre* (reciproc☺),
4. *Maria* o iubeşte pe *Maria* (egoism feminin☺), 5. *Cristina* îl iubeşte pe *Petre* (dragoste nefericită☹).

Informaţia despre relaţiile dintre aceşti tineri poate fi descrisă cu ajutorul relaţiei binare "*a iubi*", definite peste mulţimea iniţială. Relaţia dată poate fi descrisă prin câteva metode.

Metoda 1. Enumerarea faptelor sub formă de text de formă arbitrară (vezi mai sus).

Metoda 2. Grafic (graful relaţiei):



Metoda 3. Cu ajutorul matricei de relaţie:

	Vlad	Petre	Maria	Cristina
Vlad	1	0	0	0
Petre	0	0	1	0
Maria	0	1	1	0
Cristina	0	1	0	0

Metoda 4. Cu ajutorul unui tabel al faptelor:

Cine iubeşte	Pe cine iubeşte
Vlad	Vlad
Petre	Maria
Maria	Petre
Maria	Maria

Cristina	Petre

Din punctul de vedere al bazelor de date de tip relaţional mai convenabilă este ultima metodă, deoarece permite păstrarea şi manipularea cea mai simplă, eficientă şi comodă a datelor. Într-adevăr, enumerarea faptelor în formă textuală este binevenită în cazul unei opere literare, dar este dificil de algoritmizat. Forma grafică este cea mai elocventă şi poate fi utilizată pentru reprezentarea finală a informaţiilor, dar păstrarea datelor în formă grafică presupune eforturi suplimentare. Matricea relaţiei este mai aproape de cerinţele unui sistem informaţional, fiind comodă pentru manipulare, deşi adesea puternic rarefiată. Însă modificări neesenţiale (de exemplu a apărut un oarecare Vasile care s-a îndrăgostit de nefericita Elena) pot conduce la modificarea întregii matrice (vor apare şi linii şi coloane noi). Tabelul faptelor este liber de toate acestea.

2.8. Operaţii şi algebre. Proprietăţile operaţiilor

Funcţia de tipul $\varphi: M^n \longrightarrow \Omega M$ se va numi **operaţie** *n*-ară pe *M*. Setul $A = \langle M, \Omega \rangle$, în care Ω este o mulţime de operaţii definite pe *M*, se numeşte **algebră**. Mulţimea *M* se va numi mulţime de bază sau suportul, iar $\Omega = \{ \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, \ldots \}$ - signatura algebrei *A*. Vectorul, componentele căruia sunt arităţile operaţiilor $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ se numeşte tipul algebrei *A*.

Operaţia φ se numeşte:

a) comutativă, dacă $a \varphi b = b \varphi a$,
b) asociativă, dacă pentru oricare *a, b, c* are loc $(a \varphi b) \varphi c = a \varphi (b \varphi c)$,
c) idempotentă, dacă $a \varphi a = a$,
d) distributivă stânga faţă de operaţia *g*, dacă pentru oricare *a, b, c* are loc relaţia
e) $a \varphi (bgc) = (a \varphi b)g(a \varphi c)$, şi distributivă dreapta dacă $(agb) \varphi c = (a \varphi c)g(b \varphi c)$.

Dacă există un element *e* pentru care are loc $a \varphi e = e \varphi a = a$, atunci acest element se numeşte neutru (sau unitate).

Exemplul 2.22. a) Pentru o mulţime arbitrară *U* şi mulţimea tuturor părţilor ***B*(*U*)**, algebra $A = \{\mathbf{B}(U), \cup, \cap, \urcorner\}$ se numeşte algebră booleana a mulţimilor. Tipul ei este *(2,2,1)*.

b) Algebra $A = \{R,+,\mathrm{x}\}$ se numeşte câmp al numerelor reale. Ambele operaţii sunt binare, deci tipul este *(2,2)*.◄

Algebrele $L = \{M, \cup, \cap\}$ (cu două operaţii binare - reuniunea şi intersecţia) se numesc ***latice***, dacă au loc axiomele:

P1 $a \cup b = b \cup a$, $a \cap b = b \cap a$ - **comutativitate**,

P2: $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$, $a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$ - **asociativitate**,

P3: $a\cup(b\cap a) = a,\ a\cap(b\cup a) = a$ - **absorbţie**, pentru oricare $a, b, c\in M$.

Se poate observa că în acest sistem de axiome se pot schimba între ele simbolurile $\cup$ şi $\cap$, proprietate cunoscută sub denumirea de principiul dualităţii pentru latici. De asemenea, plecând de la axiomele de mai sus se poate demonstra proprietatea numită **idempotenţă** $a\cup a = a,\ a\cap a = a$ pentru oricare $a\in M$. Prin definiţie, o latice finită (mărginită) are un element care este cea mai mică margine superioară, numit prim element al laticii, notat prin 1, astfel încât $a\cup 1 = 1,\ a\cap 1 = a,\ a\in M$ şi un element care este cea mai mare margine inferioară, numit ultim element al laticii, notat prin 0, astfel încât $a\cup 0 = 0\cup a = a,\ a\cap 0 = 0\cap a = 0,\ a\in M$.

Fie $L = \{M, \cup, \cap, 0, 1\}$ o latice finită şi $a\in M$. Un element complementar sau pe scurt un complement al elementului a este elementul $\bar{a}$ (non a), astfel încât $a\cup \bar{a} = 1$ - principiul terţului exclus, $a\cap \bar{a} = 0$ - principiul contradicţiei.

Evident, nu oricare element dintr-o latice finită are un complement, iar dacă acesta există, nu este în mod necesar unic. Subliniem aici, că elementele 0 şi 1 au fiecare un complement unic, respectiv 1 şi 0: $\rceil 0 = 1, \rceil 1 = 0$.

Dacă într-o latice finită orice element a are un complement $\bar{a}$, această latice se numeşte complementară.

O latice L este distributivă dacă şi numai dacă

$(a\cup b)\cap c = (a\cap c)\cup (b\cap c)$,

$(a\cap b)\cup c = (a\cup c)\cap (b\cup c)$, $a, b, c\in M$.

Pentru două algebre $A = \{C, \varphi 1,\varphi 2,...,\varphi n\}$ şi $B = \{D, g1,g2,...,gn\}$ de acelaşi tip se numim **omomorfismul** algebrei A în algebra B aplicaţia $\Gamma: C\rightarrow D$, care verifică condiţia

$$\Gamma(\varphi i(cj1,..., cjl(i))) = gi(\Gamma(cj1),...,\Gamma(cjl(i))) \qquad (2.2)$$

pentru toţi $i =1,..., n$ şi toate elementele $c_{jr}\in C$.

Un omomorfism biunivoc se numeşte **izomorfism** al algebrei A în algebra B. Dacă există izomorfismul lui A în B, atunci există şi izomorfismul lui B în A - algebrele A şi B se vor spune **izomorfe**.

Pentru cazul $A = B$ izomorfismul se va numi **automorfism**.

2.9. Modele si sisteme algebrice. Algebra relaţiilor

Noţiunea de **model** este una din noţiunile de bază în matematica discretă. Se va numi **model** M setul care constă din mulţimea D - suportul modelului, şi o mulţime de relaţii S definite pe D:

$$M = \langle D, S\rangle, \qquad (2.3)$$

În (2.3) $S = \{R_{11}, R_{12},..., R_{1,n1}, R_{21}, R_{22},..., R_{2,n2},..., R_{m1}, R_{m2},..., R_{m,nm}\}$ este **signatura** modelului, $R_{ij} \in M^i$. Exponenta suportului determină aritatea relaţiei. Două relaţii R_i şi R_j care au aceeaşi aritate se numesc **compatibile.**

Setul care conţine mulţimea D, operaţiile şi relaţiile definite pe D

$$A = <D, F, S> \tag{2.7}$$

se numeşte **sistem algebric**.

Modelul este un caz particular al sistemului algebric, când mulţimea F este vidă, iar pentru o algebră mulţimea S este vidă.

Un alt caz particular al sistemelor algebrice îl constituie **algebra relaţiilor** şi extensia acesteia - **algebra relaţională**. Pentru o algebră a relaţiilor drept suport serveşte mulţimea relaţiilor considerate, iar signatura o formează operaţiile de reuniune, intersecţie, diferenţă şi produsul cartezian extins al relaţiilor. Să facem cunoştinţă cu aceste operaţii.

Reuniunea $\boldsymbol{Ri \cup Rj}$ a două relaţii compatibile R_i şi R_j este mulţimea tuturor cortejurilor, fiecare dintre care aparţine cel puţin uneia din relaţii.

Intersecţia $\boldsymbol{Ri \cap Rj}$ a două relaţii compatibile R_i *şi* R_j se va numi mulţimea tuturor cortejurilor care aparţin simultan ambelor relaţii.

Diferenţa $\boldsymbol{Ri \backslash Rj}$ a două relaţii compatibile R_i şi R_j se numeşte mulţimea tuturor cortejurilor care aparţin lui R_i şi nu aparţin lui R_j .

Produs cartezian extins $\boldsymbol{R_i x R_j}$ a două relaţii R_i şi R_j se va numi mulţimea tuturor cortejurilor formate prin concatenarea lui $a \in R_i$ şi a lui $b \in R_j$.

De exemplu, dacă $R_i=\{(a,b),(a,c),(a,e)\}$, iar $R_j = \{(a,b,c),(c,d,e)\}$, atunci $R_i x R_j = \{(a,b,a,b,c), (a,b,c,d,e), (a,c,a,b,c), (a,c,c,d,e), (a,e,a,b,c), (a,e,c,d,e)\}$.

Algebra relaţiilor şi modelele sunt utilizate pentru formalizarea unor obiecte reale. Vom exemplifica prin folosirea algebrei relaţiilor în cazul bazelor relaţionale de date.

O **bază de date** de tip relaţional este un tablou bidimensional în care coloanele determină aşa numitele *domene* (atribute), iar liniile sunt cortejuri de valori concrete ale atributelor, care se află în relaţia R.

Exemplul 2.23. Relaţia R_5 - "examene" (v.tab. 2.3). Relaţia R_5 este o submulţime a produsului cartezian $D_1xD_2xD_3xD_4xD_5$. Elemente ale domenului D_i sunt valorile atributelor:

$D_1 = \{3\text{-}101, 3\text{-}202, 3\text{-}501, 3\text{-}502, 3\text{-}310\}$ - numerele auditoriilor unde au loc examenele;

D_2 = {Matematica discretă în inginerie, Microelectronica, Fizica, Circuite integrate, Electrotehnica} - denumirea disciplinelor;

D3 = {prof.A.Popescu, conf. V.Negură, conf.V.Sidelnicov, conf.V.Şontea, prof.V.Tronciu} - examinatorii;

D_4 = {3 iunie, 4 iunie, 8 iunie, 13 iunie} - data examenului;

D_5 = {TI-191, TI-192, TI-193, C-191, C-192, C-193, C-194} - codul grupei.

Tabelul 2.3. Relaţia "examene".

R_5	***D_1***	***D_2***	***D_3***	***D_4***	***D_5***
1	3-101	Matematica discretă	prof. A.Popescu	3 iunie	TI-191
2	3-202	Microelectronica	prof. V.Şontea	4 iunie	C-191
3	3-310	Fizica	prof. V.Tronciu	3 iunie	TI-192
4	3-101	Circuite integrate	conf. V. Negură	4 iunie	C-191
5	3-104	Electrotehnica	conf.V.Sidelnicov.	3 iunie	TI-193
6	3-101	Matematica discretă	prof. A. Popescu	8 iunie	TI-192
7	3-101	Matematica discretă	prof. A. Popescu	13 iunie	TI-193
8	3-202	Microelectronica	prof. V. Şontea	8 iunie	C-192
9	3-310	Fizica	prof. V.Tronciu	8iunie	TI-191
10	3-101	Circuite integrate	conf. V. Negură	8iunie	C-192

Numerele *1, 2,..., 10* din prima coloană identifică elemente ale relaţiei *R5*. ◄

2.10. Algebra relaţională

Algebra relaţională este o extensie a algebrei relaţiilor în sens că signatura *S* în afară de cele 4 operaţii descrise anterior mai conţine câteva operaţii speciale, cum ar fi ***proiecţia, selecţia, joncţiunea***. Mai pot fi incluse operaţia de atribuire, care permite să se păstreze în baza de date rezultatele calculelor unor expresii algebrice, operaţia de redenumire a atributelor, care dă posibilitatea formării corecte a schemei relaţiei rezultante, etc. Ideea principală a algebrei relaţionale constă în faptul că, deoarece relaţiile sunt mulţimi, mijloacele de manipulare a relaţiilor se pot baza pe operaţiile tradiţionale cu mulţimi, completate cu câteva operaţii suplimentare, specifice bazelor de date.

Există mai multe abordări în definirea algebrei relaţionale, care diferă prin setul de operaţii şi interpretarea lor, abordări în ultimă instanţă echivalente. Vom descrie în continuare o extensie a variantei iniţiale. Aici signatura algebrei relaţionale conţine şapte operaţii, patru legate de mulţimi şi trei speciale:

- reuniunea relaţiilor;
- intersecţia relaţiilor;
- diferenţa relaţiilor;
- produsul cartezian extins;
- selecţia;
- joncţiunea,
- proiecţia.

Operaţiile enumerate mai sus pot fi interpretate după cum urmează.

- Din reuniunea a două relaţii rezultă relaţia, care include toate cortejurile din cadrul relaţiilor-operanzi.
- Din intersecţia a două relaţii rezultă relaţia, care include doar cortejurile prezente în ambele relaţii-operanzi.
- Relaţia diferenţa a două relaţii conţine toate cortejurile primului operand, care nu sunt prezente şi în cel de-al doilea operand.
- În rezultatul calculării produsului cartezian extins obţinem o nouă relaţie, cortejurile căreia sunt concatenarea (în sensul descris mai sus) cortejurilor din prima şi a doua relaţie.

Operaţia **selecţie** permite evidenţierea unei submulţimi de cortejuri care posedă o proprietate dată. De exemplu, operaţia selecţie permite evidenţierea relaţiei *orarul conf. A.Popescu* - liniile în care valoarea domenului D_3 este prof. A. Popescu:

Tabelul 2.4. Rezultatul operaţiei *selecţie* pentru valoarea “conf. V. Popescu”

R_5	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
1	3-101	Matematica discretă	prof. A. Popescu	3 iunie	TI-191
6	3-101	Matematica discretă	prof. A. Popescu	8 iunie	TI-192
7	3-101	Matematica discretă	prof. A. Popescu	13 iunie	TI-193

Operaţia **proiecţie** se defineşte introducând pentru suportul D al algebrei relaţionale o partiţie de n submulţimi (n este aritatea relaţiei) $R_n \in D^n$. Proiecţia relaţiei binare

$R_2 \in AxB$ pe A (PrR_2/A) se numeşte mulţimea $\{a_i \mid (a_i,b_i) \in R_2\}$. Proiecţia $PrR_n/A_{i1},...,A_{im}$ a relaţiei n-are $R_n \in A_1xA_2x...xA_n$, $m \leq n$, pe $A_{i1}, A_{i2},..., A_{im}$ se numeşte mulţimea cortejurilor $(a_{i1}, a_{i2},..., a_{im})$, în care $a_{i1} \in A_{i1}, a_{i2} \in A_{i2},..., a_{im} \in A_{im}$ şi fiecare cortej este parte a unui element al relaţiei n-are R_n. Cu alte cuvinte, operaţia *proiecţie* permite construirea unei submulţimi *verticale* a relaţiei (a unei mulţimi de submulţimi de atribute care se obţine prin alegerea unor domene concrete). De exemplu, $Pr(R_5/D_2,D_3)$ determină denumirea examenelor şi numele examinatorilor (liniile care coincid se scriu o singură dată, v.tab. 2.5).

Tabelul 2.5. Rezultatul operaţiei "*proiecţie*".

D_2	D_3
Matematica discretă	prof. A.Popescu
Microelectronica	prof. V.Şontea
Fizica	prof. V.Tronciu
Circuite integrate	conf. V.Negură
Electrotehnica	conf. V.Sidelnicov

Operaţia **joncţiune** (join) a două tabele care au un domen comun permite construirea unui tabel nou în care fiecare linie se va obţine din unirea a două linii din tabelele iniţiale. Aceste linii corespund aceluiaşi atribut din domenul comun. Domenul comun se va scrie o singură dată. De exemplu, pentru tabele 2.6 şi 2.7 domenul comun este D_5, rezultatul operaţiei de joncţiune este prezentat în tabelul 2.8.

Tabelul 2.6.

D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
3-202	Microelectronica	prof. V.Şontea	4 iunie	C-191
3-310	Fizica	prof. VTronciu	3 iunie	TI-192

3-104	Electrotehnica	conf. V.Sidelnicov	3 iunie	TI-191

Tabelul 2.7.

D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
3-104	Electrotehnica	conf. V.Sidelnicov	13 iunie	C-191
3-310	Matematica	conf. L.Dohotaru	13 iunie	TI-192
3-202	Microelectronica	prof. V.Şontea	14 iunie	TI-191

Tabelul 2.8. Rezultatul operaţiei "*join*".

D_1	D_2	D_3	D_4	*D11*	*D21*	*D31*	*D41*	D_5
3-202	Microelectronica	prof. V.Şontea	4 iunie	3-104	Electrotehnica	conf. V.Sidelnicov	13 iunie	C-191
3-310	Fizica	prof. V.Tronciu	3 iunie	3-310	Matematica	conf. L.Dogotaru	13 iunie	TI-192
3-104	Electrotehnica	conf. V.Sidelnicov	3 iunie	3-202	Microelectronica	prof. V.Şontea	14 iunie	TI-191

Operaţia *join* este definită nu numai pentru condiţia de *egalitate* a două domene, ci pot fi şi alte condiţii de comparare, de exemplu, $>, \geq, <, \leq$ etc.