

Tema 16. Unde electromagnetice

Undele electromagnetice - o consecință a teoriei lui Maxwell

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{E} = -\mu_0 \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \text{rot } \vec{H} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \text{div } \vec{E} = 0, \\ \text{div } \vec{H} = 0. \end{array} \right. \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot rot } \vec{E} = -\mu_0 \mu \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{H} = -\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \left[\vec{a} \left[\vec{b} \vec{c} \right] \right] = \vec{b} (\vec{a} \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \vec{b}) \\ \text{rot rot } \vec{E} = \left[\vec{\nabla} \left[\vec{\nabla} \vec{E} \right] \right] = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \vec{E}) - \vec{E} (\vec{\nabla} \vec{\nabla}) = \vec{\nabla} \text{div } \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} \end{array} \right. \longrightarrow$$

Ecuția de undă

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \vec{E} - \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} - \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \end{array} \right. \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \equiv \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \nabla^2 \xi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \end{array} \right.$$

Viteza de fază a undelor electromagnetice

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}}$$

Tema 16. Unde electromagnetice

Proprietățile undelor electromagnetice

- 1) Unda electromagnetică se propagă în vid cu viteza egală cu cea a luminii

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}} = \sqrt{9 \cdot 10^{16}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- 2) Orice proces electromagnetic ondulatoriu poate fi reprezentat sub forma unei superpoziții de unde electromagnetice plane monocromatice.

$$\begin{array}{ccc} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \sin[\omega t - (\vec{k} \cdot \vec{r}) + \varphi_E], & \longrightarrow & \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i[\omega t - (\vec{k} \cdot \vec{r}) + \varphi_E]}, \\ \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 \sin[\omega t - (\vec{k} \cdot \vec{r}) + \varphi_H], & & \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 e^{i[\omega t - (\vec{k} \cdot \vec{r}) + \varphi_H]}. \end{array}$$

Aceste ecuații sunt soluții ale ecuației de undă.

Legea dispersiei undelor electromagnetice în mediile libere

$$v = \frac{\omega}{k}$$

Tema 16. Unde electromagnetice

3) Unda electromagnetică obligatoriu constă din ambele câmpuri – electric E și magnetic H .

4) Undele electromagnetice sunt unde transversale.

$$\operatorname{div} \vec{E} = (\vec{\nabla} \vec{E}) = -i(\vec{k} \vec{E}_0) e^{i[\omega t - (\vec{k} \cdot \vec{r}) + \varphi_E]} = -i(\vec{k} \vec{E}) = -ik(\vec{s} \vec{E}) = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{E} \perp \vec{s}$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = (\vec{\nabla} \vec{H}) = -i(\vec{k} \vec{H}_0) e^{i[\omega t - (\vec{k} \cdot \vec{r}) + \varphi_H]} = -i(\vec{k} \vec{H}) = -ik(\vec{s} \vec{H}) = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{H} \perp \vec{s}$$

5) Vectorii \vec{E} și \vec{H} din undă electromagnetică sunt reciproc perpendiculari și sunt în fază.

Introducem soluțiile pentru E și H în primele două ecuații Maxwell. Calculăm separat părțile din stânga și cele din dreapta ale ecuațiilor

$$\operatorname{rot} \vec{E} = [\vec{\nabla} \vec{E}] = -i[\vec{k} \vec{E}_0] e^{i[\omega t - (\vec{k} \cdot \vec{r}) + \varphi_E]} = -i[\vec{k} \vec{E}] = -ik[\vec{s} \vec{E}] = -i \frac{\omega}{v} [\vec{s} \vec{E}],$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = [\vec{\nabla} \vec{H}] = -i[\vec{k} \vec{H}_0] e^{i[\omega t - (\vec{k} \cdot \vec{r}) + \varphi_H]} = -i[\vec{k} \vec{H}] = -ik[\vec{s} \vec{H}] = -i \frac{\omega}{v} [\vec{s} \vec{H}],$$

Tema 16. Unde electromagnetice

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \vec{E}_0 e^{i[\omega t - (\vec{k} \cdot \vec{r}) + \varphi_E]} = i\omega \vec{E},$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = i\omega \vec{H}_0 e^{i[\omega t - (\vec{k} \cdot \vec{r}) + \varphi_E]} = i\omega \vec{H}.$$

Din prima ecuație a lui Maxwell

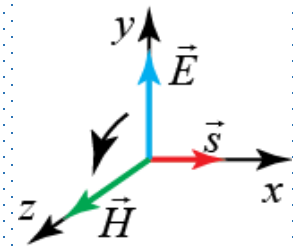
$$-i \frac{\omega}{v} [\vec{s} \vec{E}] = -i \mu_0 \mu \omega \vec{H} \quad \longrightarrow \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu v} [\vec{s} \vec{E}] = \frac{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}}{\mu_0 \mu} [\vec{s} \vec{E}] = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} [\vec{s} \vec{E}]$$

Analogic din a doua ecuație a lui Maxwell

$$-i \frac{\omega}{v} [\vec{s} \vec{H}] = i \varepsilon_0 \varepsilon \omega \vec{E} \quad \longrightarrow \quad \vec{E} = -\sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\varepsilon_0 \varepsilon}} [\vec{s} \vec{H}]. \quad \longrightarrow \quad \boxed{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} |\vec{E}| = \sqrt{\mu_0 \mu} |\vec{H}|}$$

Calculăm produsul vectorial al vectorilor \vec{E} și \vec{H}

$$[\vec{E} \vec{H}] = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} [\vec{E} [\vec{s} \vec{E}]] = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} \left\{ \vec{s} (\vec{E} \vec{E}) - \vec{E} (\vec{E} \vec{s}) \right\} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} E^2 \vec{s}$$



Tema 16. Unde electromagnetice

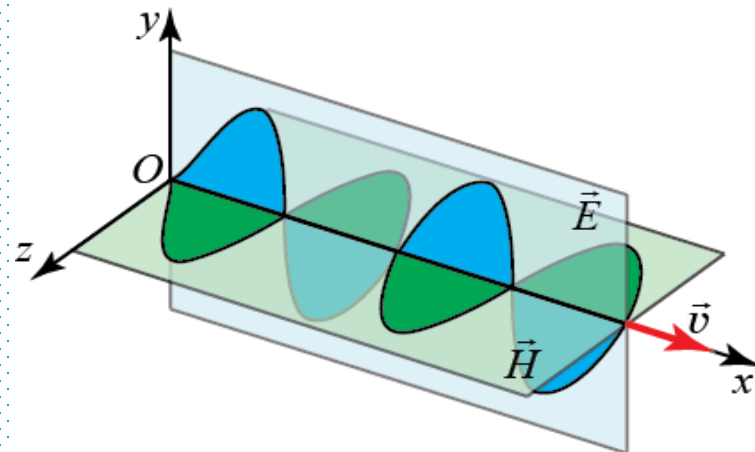
6) Unda electromagnetică este o undă polarizată.

$$E_y = E_{01} \sin(\omega t - kx), \quad H_y = -\sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{\mu_0 \mu}} E_z,$$

$$E_z = E_{02} \sin(\omega t - kx + \varphi), \quad H_z = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{\mu_0 \mu}} E_y,$$

$$\frac{E_y^2}{E_{01}^2} + \frac{E_z^2}{E_{02}^2} - \frac{2E_y E_z}{E_{01} E_{02}} \cos \varphi = \sin^2 \varphi,$$

$$\frac{H_y^2}{E_{02}^2} + \frac{H_z^2}{E_{01}^2} + \frac{2H_y H_z}{E_{01} E_{02}} \cos \varphi = \frac{\epsilon_0 \epsilon}{\mu_0 \mu} \sin^2 \varphi.$$



Dacă defazajul φ , ia valori arbitrare, atunci în fiecare punct al unde vectorii \vec{E} și \vec{H} variază în timp astfel, încât vârfurile lor descriu niște elipse, iar unda plană monocromatică se numește **undă polarizată eliptic**.

Dacă $\varphi = \pm m\pi$, **undă polarizată liniar**, sau undă plan polarizată

Dacă $E_{01} = E_{02}$ și $\varphi = \pm(2m+1)\pi/2$, **undă polarizată circular**

Tema 16. Unde electromagnetice

Energia undelor electromagnetice

Densitatea de energie a undelor electromagnetice

$$\left. \begin{aligned} w = w_e + w_m &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \mu H^2 \\ \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} \vec{E} &= \sqrt{\mu_0 \mu} \vec{H} \end{aligned} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{aligned} w &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \mu \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu} E^2 = \\ &= \varepsilon_0 \varepsilon E^2 = \mu_0 \mu H^2 = \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu} \cdot EH = \frac{1}{v} EH \end{aligned} \right.$$

Densitatea volumică de energie a unei unde monocromatice plan polarizate care se propagă în sensul pozitiv al axei Ox

$$w = \varepsilon_0 \varepsilon E_y^2 = \varepsilon_0 \varepsilon E_0^2 \sin^2(\omega t - kx) \longrightarrow \langle w \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E_0^2$$

Fluxul de energie $d\Phi$ printr-o suprafață arbitrară dS :

$$d\Phi = w \cdot (\vec{v} d\vec{S}) = (\vec{\mathcal{P}} d\vec{S})$$

unde

$$\vec{\mathcal{P}} = w \vec{v}$$

este **vectorul densității fluxului de energie sau vectorul Umov-Poynting**

Tema 16. Unde electromagnetice

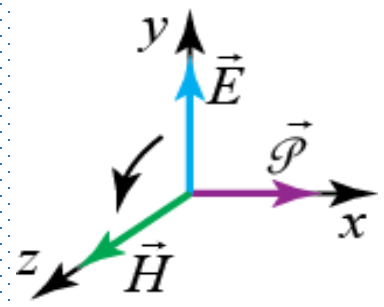
Obținem expresia pentru vectorul Umov-Poynting al unde electromagnetice:

$$\left[\begin{array}{l} [\vec{E}\vec{H}] = \sqrt{\frac{\epsilon_0\epsilon}{\mu_0\mu}} E^2 \vec{s} \\ \sqrt{\epsilon_0\epsilon} \vec{E} = \sqrt{\mu_0\mu} \vec{H} \end{array} \right] \xrightarrow{\text{green arrow}} [\vec{E}\vec{H}] = \sqrt{\frac{\epsilon_0\epsilon}{\mu_0\mu}} E^2 \vec{s} = \frac{\sqrt{\mu_0\mu}}{\sqrt{\mu_0\mu}} EH \cdot \frac{\vec{v}}{v} = EH \cdot \frac{\vec{v}}{v} \xrightarrow{\text{green arrow}}$$

$$\xrightarrow{\text{green arrow}} \vec{v} = \frac{[\vec{E}\vec{H}]}{EH} v$$

atunci

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{EH}{v} \cdot \frac{[\vec{E}\vec{H}]}{EH} \cdot v = [\vec{E}\vec{H}]$$



Intensitatea unde electromagnetice monocromatice progresive

$$I = |\langle \mathcal{P} \rangle| = \langle w \rangle |\vec{v}| = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon E_0^2 \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{\mu_0 \mu}} E_0^2$$

Tema 16. Unde electromagnetice

Generarea undelor electromagnetice

Numai sarcinile electrice aflate în mișcare accelerată pot forma în jurul lor câmp electromagnetic și, deci, generează unde electromagnetice.

Dipolul sau vibratorul lui Hertz

$$\vec{p}_e = \vec{p}_0 \sin \omega t$$

Diagrama polară direcțională de radiație a dipolului

$$I \sim \frac{\omega^4}{r^2} \sin^2 \vartheta$$

