TEMA 2. Elemente din teoria grafurilor

Întroducere

Anul 1736 este considerat pe bună dreptate de început pentru teoria grafurilor. În acel an L.Euler a rezolvat problema despre podurile din Königsberg, stabilind criteriul de existenţă în grafuri a unui circuit special, denumit astăzi ciclu Euler. Acestui rezultat i-a fost hărăzit să fie mai bine de un secol unicul în teoria grafurilor. Doar la jumătatea secolului XIX inginerul G.Kirchof a elaborat teoria arborilor pentru cercetarea circuitelor electrice, iar matematicianul A.Caly a rezolvat problema enumerării pentru trei tipuri de arbori. În aceeaşi perioadă apare şi cunoscuta problemă despre patru culori.

Avându-şi începuturile în rezolvarea unor jocuri distractive (problema calului de şah şi reginelor, "călătoriei în jurul Pământului", despre nunţi şi haremuri, etc.), astăzi teoria grafurilor s-a transformat într-un aparat simplu şi accesibil, care permite rezolvarea unui cerc larg de probleme. Grafuri întâlnim practic peste tot. Sub formă de grafuri pot fi reprezentate sisteme de drumuri şi circuite electrice, hărţi geografice şi molecule chimice, relaţii dintre oameni şi grupuri de oameni.

Foarte fertile au fost pentru teoria grafurilor ultimele trei decenii, ceea ce a fost cauzat de creşterea spectaculoasă a domeniilor de aplicaţii. În termeni grafoteoretici pot fi formulate o mulţime de probleme legate de obiecte discrete. Astfel de probleme apar la proiectarea circuitelor integrate şi sistemelor de comandă, la cercetarea automatelor finite, circuitelor logice, schemelor-bloc ale programelor, în economie şi statistică, chimie şi biologie, teoria orarelor şi optimizarea discretă. Teoria grafurilor a devenit o parte componentă a aparatului matematic al ciberneticii, limbajul matematicii discrete.

2.1. Noţiuni generale

2.1.1. Definiţia grafului

Se numeşte graf, ansamblul format dintr-o mulţime finită X şi o aplicaţie F a lui X în *X, care face ca fiecărui element* $x_i \in X$ să-i corespundă unul, nici unul, sau mai multe elemente din X.

Se notează $G = (X,F)$.

Numărul elementelor mulţimii X determină ordinul grafului finit. Dacă $card\ X = n$, graful $G = (X,F)$ se numeşte *graf finit de ordinul n*. Elementele mulţimii X se numesc *vârfurile* grafului. Geometric, vârfurile unui graf le reprezentăm prin puncte sau cerculeţe. Perechea de vârfuri (x,y) se numeşte *arc*; vârful x se numeşte originea sau extremitatea iniţială a arcului (x,y), iar vârful y se numeşte extremitatea finală sau

terminală. Un arc (x,y) îl reprezentăm geometric printr-o săgeată orientată de la vârful x la vârful y.
Dacă un vârf nu este extremitatea nici unui arc el se numeşte *vârf izolat*, iar dacă este extremitatea a mai mult de două arce - *nod*. Un arc pentru care extremitatea iniţială coincide cu cea finală se numeşte *buclă*.

Arcele unui graf le mai notăm şi cu u_1, u_2,..., iar mulţimea arcelor grafului o notăm cu U. Se observă că mulţimea U a tuturor arcelor unui graf determină complet aplicaţia F, precum şi reciproc, aplicaţia F determină mulţimea U a arcelor grafului. Un graf G poate fi dat fie prin ansamblul (X,F) fie prin ansamblul (X,U).

Două *arce* se numesc *adiacente* dacă sunt distincte şi au o extremitate comună. Două *vârfuri* se zic *adiacente* dacă sunt distincte şi sunt unite printr-un arc.

Un arc (x,y) se spune că este *incident* cu vârful *x spre exterior* şi este *incident* cu vârful y *spre interior*.

Fie $G = (X,F)$ şi $x \in X$. Cardinalul mulţimei tuturor arcelor incidente cu x spre exterior (pleacă din x) se numeşte ***semigradul exterior*** a lui x şi se notează d^+x, *iar c*ardinalul mulţimei tuturor arcelor incidente cu x spre interior (întră în x) se numeşte ***semigradul interior*** a lui x şi se notează d^-x.

Numim gradul (puterea) vârfului x notat $dx = d^+x + d^-x$.

Clasificarea vîrfurilor:

Dacă pentru un vârf x, $d^+x=0$ *şi* $d^-x>0$ atunci el se numeşte vârf terminal.

Dacă pentru un vârf x, $d^+x>0$ *şi* $d^-x=0$ atunci el se numeşte vârf initial.

Dacă pentru un vârf x, $d^+x>0$ *şi* $d^-x>0$ atunci el se numeşte vârf intermediar sau tranzitoriu.

Dacă pentru un vârf x, $d^+x=0$ *şi* $d^-x=0$ atunci el se numeşte vârf izolat.

2.2. Metode de reprezentare a unui graf

Există trei metode de bază de reprezentare a unui graf:

1. *Matricea de incidenţă;*
2. *Matricea de adiacenţă;*
3. *Lista de adiacenţă.*

Vom face cunoştinţă cu fiecare dintre aceste metode.

2.2.1. Matricea de incidenţă

Este o matrice de tipul *m*x*n*, în care *m* este numărul de muchii sau arce (pentru un graf orientat), iar *n* este numărul vârfurilor. La intersecţia liniei *i* cu coloana *j* se vor considera valori de *0* , *1 sau -1* în conformitate cu următoarea regulă:

- *1* - dacă muchia *i* este incidentă cu vârful *j* (dacă arcul *i* "intră" în vârful *j* în cazul unui graf orientat);
- *0* - dacă muchia (arcul) *i* şi vârful *j* nu sunt incidente;
- *-1* - numai pentru grafuri orientate, dacă arcul *i* "iese" din vârful *j*.
- *2* – dacă arcul i este bucla (x_j,x_j)

Exemplu de matrice de incidenţă

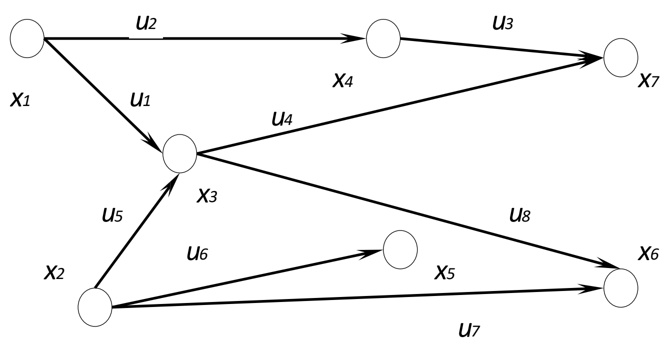


Fig.1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
u_1	-1	0	1	0	0	0	0
u_2	-1	0	0	1	0	0	0
u_3	0	0	0	-1	0	0	1
u_4	0	0	-1	0	0	0	1
u_5	0	-1	1	0	0	0	0
u_6	0	-1	0	0	1	0	0
u_7	0	-1	0	0	0	1	0
u_8	0	0	-1	0	0	1	0

Exemplu de matrice de incidenţă (v.fig.1)

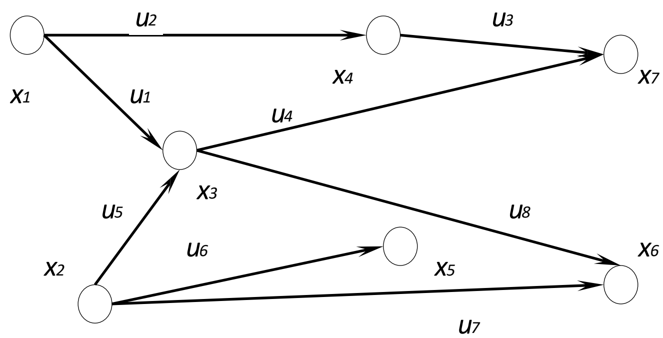
Este uşor de observat că această metodă este de o eficacitate mică în sensul utilizării memoriei calculatorului: fiecare linie conţine doar două elemente diferite de zero (o muchie poate fi incidentă cu nu mai mult de două vârfuri).

2.2.2. Matricea de adiacenţă

Este o matrice pătrată *nxn*, unde *n* este numărul de vârfuri.
Fiecare element a_{ij} poate fi *1*, dacă vârfurile x_i şi x_j sunt adiacente, sau 0, în caz contrar.

Dacă graful conţine buclă în vârful x_i, atunci elementul a_{ii}=1.

Exemplu Pentru graful din fig.1 matricea de adiacenţă are înfăţişarea:



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	0	0	1	1	0	0	0
x_2	0	0	1	0	1	1	0
x_3	0	0	0	0	0	1	1
x_4	0	0	0	0	0	0	1
x_5	0	0	0	0	0	0	0
x_6	0	0	0	0	0	0	0
x_7	0	0	0	0	0	0	0

Pentru un graf fără bucle putem observa următoarele:

- diagonala principală este formată numai din zerouri;
- pentru grafuri neorientate matricea este simetrică faţă de diagonala principală.

După cum este lesne de observat şi în acest caz memoria calculatorului este utilizată nu prea eficace din care cauză matricea de adiacenţă ca şi matricea de incidenţă se vor utiliza de obicei doar în cazul în care se va rezolva o problemă concretă pentru care reprezentarea grafului în această formă aduce unele facilităţi algoritmului respectiv. Pentru păstrarea grafurilor în memoria calculatorului (în deosebi, memoria externă) se va utiliza una din posibilităţile de mai jos.

2.2.3. Lista de adiacenţă

Lista de adiacenţă este o listă cu *n* linii (după numărul de vârfuri *n*), în linia cu numărul *i* vor fi scrise numerele vârfurilor adiacente cu vârful *i departajate prin virgula, sau prin spatiu*.

Reprezentarea grafurilor prin intermediul acestei liste permite utilizarea mai eficace a memoriei calculatorului, însă această formă este mai complicată atât în realizare, cât şi în timpul procesării. Pentru a lua în consideraţie lungimea variabilă a liniilor vor fi utilizate variabile dinamice şi pointeri.

În calitate de simbol de terminare a şirului se va utiliza un simbol care nu a fost folosit la numeraţia vârfurilor (de exemplu *0*), care va fi introdus în calitate de variabilă de tip întreg al ultimului bloc.

De exemplu, lista de adiacenţă (fig.1):

1 - 3, 4, 0
2 - 3, 5, 6, 0
3 - 6, 7, 0
4 - 7, 0
5 - 0
6 - 0
7 – 0

1- 3_ 4_ 0
2- 3_ 5_ 6_ 0
3- 6_ 7_ 0
4- 7_ 0
5- 0
6- 0
7- 0

-

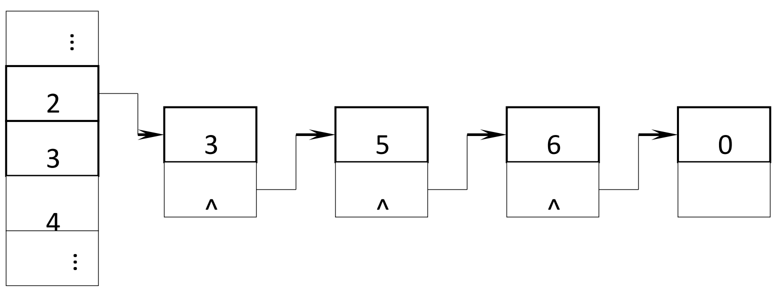


Fig. 2. Reprezentarea internă a listei de adiacenţă

Lucrarea de laborator №1 Păstrarea grafului în memoria calculatorului.

Sarcina de bază:

1.De elaborate procedura întroducerii unui graf în memoria calculatorului în formă de matrice de incidenţă, matrice de adiacenţă şi listă de adiacenţă cu posibilităţi de analiză a corectitudinii.

2.Elaboraţi procedura de transformare dintr-o formă de reprezentare în alta.

3. Folosind procedurile mentionate, elaboraţi porogramul care va permite:

a)întroducerea grafului reprezentat sub oricare din cele trei forme cu posibilităţi de corecţie a datelor;

b)păstrarea grafului în memoria externă în forma de listă de adiacenţă;

c)extragerea informaţiei in una din cele trei forme la imprimantă si display.

2.3. Structuri de date

2.3.1. Liste

Fiecare tip de listă defineşte o mulţime de şiruri finite de elemente de tipul declarat. Numărul de elemente care se numeşte lungimea listei poate varia pentru diferite liste de acelaşi tip. Lista care nu conţine nici un element se va numi vidă. Pentru listă sunt definite noţiunile începutul, sfârşitul listei şi respectiv primul şi ultimul element, de asemenea elementul curent ca şi predecesorul şi succesorul elementului curent. Element curent se numeşte acel unic element care este accesibil la momentul dat.

2.3.2. Fire de aşteptare

Firele de aşteptare (*FA*, rând, coadă, şir de aşteptare) se vor folosi pentru a realiza algoritmul de prelucrare a elementelor listei în conformitate cu care elementele vor fi eliminate din listă în ordinea în care au fost incluse în ea (primul sosit - primul servit)(FIFO).

Operaţiile de bază cu firele de aşteptare:

- Formarea unui FA vid;
- Verificare dacă FA nu este vid;
- Alegerea primului element cu eliminarea lui din FA;
- Introducerea unei valori noi în calitate de ultim element al FA.

2.3.3. Stive

Stiva se utilizează pentru a realiza algoritmul de prelucrare a elementelor după principiul "ultimul sosit - primul prelucrat" (LIFO).

Operaţiile de bază cu stivele sunt următoarele:

. Formarea unei stive vide;
- Verificare la vid;
- Alegerea elementului din topul stivei cu sau fără eliminare;
- Introducerea unui element nou în topul stivei.

2.3.4. Arbori

Se va defini o mulţime de structuri fiecare din care va consta dintr-un obiect de bază numit *vârf* sau *rădăcina arborelui* dat şi o listă de elemente din mulţimea definită, care (elementele) se vor numi *subarbori* ai arborelui dat. Arborele pentru care lista subarborilor este vidă se va numi *arbore trivial*, iar rădăcina lui - *frunză*.

Rădăcina arborelui se va numi tatăl vârfurilor care servesc drept rădăcini pentru subarbori; aceste vârfuri se vor mai numi copiii rădăcinii arborelui: rădăcina primului subarbore se va numi *fiul cel mai mare*, iar rădăcina fiecărui subarbore următor în listă se va numi frate.

Operaţiile de bază pentru arbori vor fi:

- Formarea unui arbore trivial;
- Alegerea sau înlocuirea rădăcinii arborelui;
- Alegerea sau înlocuirea listei rădăcinilor subarborilor.

TEMA3 Concepte legate de grafuri orientate şi neorientate.

3.1. Concepte legate de grafuri orientate

Într-un graf orientat $G = (X,U)$ se numeşte **drum** un şir de arce $(u_1,...,u_k)$, astfel încât extremitatea finală a fiecărui arc u_i coincide cu extremitatea iniţială a arcului următor u_{i+1}.

Un drum care foloseşte o singură dată fiecare arc al său se numeşte **drum simplu**.

Un drum care trece o singură dată prin fiecare vârf al său se numeşte **drum elementar**.

Are loc **Afirmaţia**: Orice drum elementar este simplu, dar nu orice drum simplu este elementar.

Lungimea unui drum este numărul de arce din care este compus drumul.

Un drum elementar ce trece prin toate vârfurile grafului se numeşte **drum hamiltonian**.

Un drum simplu ce conţine toate arcele grafului se numeşte drum **eulerian**.

Un drum finit pentru care vârful iniţial coincide cu vârful terminal se numeşte **circuit**.

Circuitul de lungimea 1 se numeste **buclă.**

Graful obţinut din graful iniţial suprimând cel puţin un vârf al acestuia precum şi toate arcele incidente cu el se numeşte **subgraf** al grafului iniţial .

Graful obţinut suprimând cel puţin un arc se numeşte **graf parţial**.

Un **graf** $G = (X,U)$ se numeşte **complet** dacă oricare ar fi x şi y din X există un arc de la x la y sau de la y la x.

Un graf $G = (X,U)$ *se numeste* ***simetric*** dacă pentru orice x şi y care $\in X$ *şi* pentru care există arcul

$(x, y) \in U$ rezultă că şi arcul $(y, x) \in U$.

În multe cazuri în graful simetric arcele de orientare opusă se reprezintă pentru simplitate prin linii fără săgeţi, care se numesc muchii şi se notează [x,y]. Graful simetric se mai numeste si graf neorientat.

Un **graf** $G = (X,F)$ se numeste **tare conex** dacă pentru orice $x, y \in X$ (x diferit de y) există un drum de la x la y sau că oricare pereche de vârfuri x, y cu x diferit de y se află pe un circuit.

Fie graful $G = (X,F)$ şi $x \in X$. Mulţimea C_x formată din toate vârfurile $x_i \in X$ pentru care există un circuit ce trece prin x şi x_i se numeşte componentă tare conexă a lui G corespunzătoare vârfului x.

Are loc **Afirmaţia**: *Componentele tari conexe ale unui graf $G = (X,F)$ constituie o partiţie a lui X, adică:*

1) $C_{xi} \neq \emptyset$;

2) $C_{xi} \neq C_{xj} \Rightarrow C_{xi} \cap C_{xj} = \emptyset$;

3) $\cup C_{xi} = X$

Are loc **Afirmaţia**: Un graf orientat este tare conex, dacă si numai dacă are o singură componentă tare conexă.

Numim **arboriscenţă** un graf orientat fãra circuite astfel încât ∃ un vîrf şi numai unul singur (numit rădăcină), care nu e precedat de nici un alt vârf şi ∀ alt vârf să fie precedat de un singur vârf.

Noţiunile introduse sunt valabile pentru grafurile orientate.

3.2. Concepte legate de grafuri neorientate

În cazul în care orientarea arcelor nu are nici o importanţă **graful** se va numi ***neorientat***. Arcele se vor numi ***muchii***, drumul - ***lanţ***, circuitul - ***ciclu***. La fel se introduce noţiunea de **lanţ elementar** şi **simplu**, **lanţ Euler şi hamiltonian**.

Graful neorientat se notează $G = (X,\bar{U})$ *, unde X* – mulţimea vîrvurilor, iar $\bar{U}$ *– mulţimea muchiilor*.

Graful tare conex în cazul grafului neorientat se va numi graf **conex,** adică toate vârfurile grafului se situiază pe un lanţ.

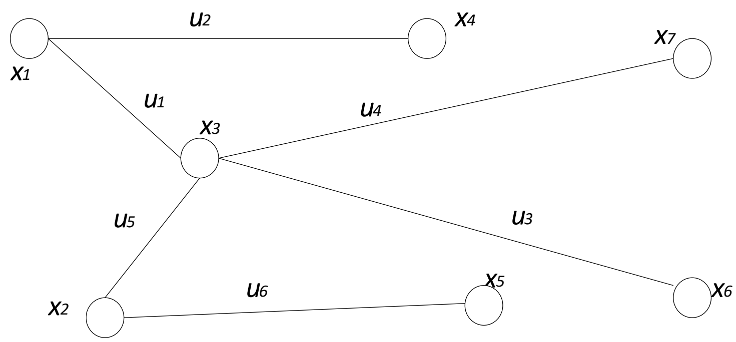
Numim componentă conexă a grafului $G = (X,\bar{U})$ asociată vârfului x_i notată C_{xi} mulţimea tuturor vârfurilor situate cu x_i pe un lanţ.

Propoziţia1. Mulţimea componentelor conexe ale grafului $G = (X,\bar{U})$ *constituie o partiţie a mulţimei X.*

Propoziţia2.Un graf neorientat este conex dacă si numai dacă are o singură component conexă.

Un graf neorientat se numeşte *planar* dacă poate fi reprezentat pe un plan astfel ca două muchii să nu aibă puncte comune în afară de extremităţile lor. Un graf planar determină regiuni numite *feţe*. O faţă este o regiune mărginită de muchii şi care nu are în interior nici vârfuri, nici muchii. Conturul unei feţe este format din muchiile care o mărginesc. Două feţe sunt adiacente dacă contururile au o muchie comună.

Numim arbore un graf conex fără cicluri.



Type equation here.

Fig. 1. Exemplu de arbore

Cele două concepte de graf orientat şi graf neorientat se pot sprijini în practică unul pe altul. De la un graf orientat se poate trece la omologul său neorientat când se abordează o problemă ce nu presupune orientarea şi invers, dacă se precizează orientarea.

Unui graf orientat simetric i se poate asocia un graf neorientat, legătura dintre două vârfuri *x* şi *y* realizată de cele două arce *(x,y)* şi *(y,x)* de sensuri contrarii înlocuindu-se cu muchia *[x,y]*. De asemenea un graf neorientat poate fi identificat cu mai multe grafuri orientate înlocuind fiecare muchie cu două arce orientate în sens opus.

Fie $G = (X,\bar{U})$ un graf neorientat şi $x \in X$. Se numeşte gradul vârfului *x* numărul muchiilor care au o extremitate în vârful *x*. Se notează $g(x)$. Un vârf este izolat dacă $g(x) = 0$.

3.3. Număr cociclomatic şi număr ciclomatic

Fie $G = (X,\bar{U})$ un graf neorientat cu *n* vârfuri, *m* muchii şi *p* componente conexe. Numim **număr cociclomatic** asociat grafului *G* numărul

$$r(G) = n - p$$

iar **numărul ciclomatic** numărul $s(G) = m - r(G) = m - n + p$.

Se numeşte multigraf un graf neorientat în care există perechi de vârfuri unite prin mai multe muchii. Se numeşte *q* - graf un multigraf pentru care numărul maxim de muchii ce unesc două vârfuri este *q*.

Teorema. Fie $G = (X,U)$ un multigraf, iar $G_1 = (X,U_1)$ un multigraf obţinut din G adăugând o muchie. Dacă $x, y \in X$ şi $[x,y]$ este muchia care se adaugă la mulţimea muchiilor grafului *G*, atunci:

1) dacă $x = y$ sau *x* şi *y* sunt unite printr-un lanţ $r(G_1) = r(G), s(G_1) = s(G)+ 1$

(2) în caz contrar $r(G_1) = r(G) + 1, s(G_1) =s(G)$.

Demonstraţia este evidentă.

Consecinţă. Numerele cociclomatic şi ciclomatic sunt nenegative.

3.4. Număr cromatic. Grafuri planare. Arbori

Un graf $G = (X,U)$ se zice ca este *graf p-cromatic* daca vârfurile lui se pot colora cu p-culori distincte astfel ca două vârfuri adiacente să nu fie de aceeaşi culoare. *Cel mai mic* număr întreg şi pozitiv pentru care graful este *p-cromatic* se numeşte *număr cromatic*.

S-a demonstrat că numărul cromatic al unui graf planar este patru. Cu privire la numărul cromatic s-a demonstrat următoarea

Teorema (König). Un graf este bicromatic dacă şi numai dacă nu are cicluri de lungime impară.