

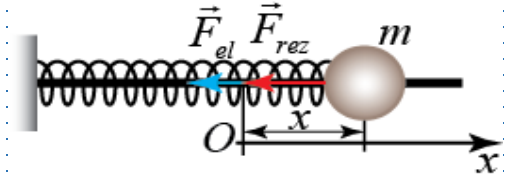
# Tema 14. Oscilații amortizate și forțate

## Oscilații amortizate ale unui pendul elastic

$$ma = F_{\text{el.}} + F_{\text{rez}} \longrightarrow m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \longrightarrow \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

unde  $\beta = \frac{r}{2m}$  – coeficientul de amortizare;  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$



$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{q}{LC} = 0 \longrightarrow \ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad \beta = \frac{R}{2L} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

**Ecuția diferențială generală a oscilațiilor libere amortizate**

$$\ddot{\xi} + 2\beta\dot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0$$

# Tema 14. Oscilații amortizate și forțate

Soluția generală a ecuației diferențiale  $\xi = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$

$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$  – ecuație caracteristică

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Pentru  $\beta \geq \omega_0$  în sistem nu se stabilește regimul oscilatoriu

$\beta < \omega_0$  :  $\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = -\beta \pm i\omega$

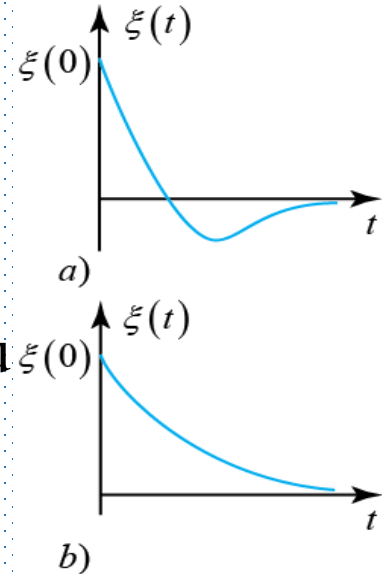
$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  – **frecvența ciclică a oscilațiilor amortizate**

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$  – **perioada oscilațiilor amortizate**

$$\xi(t) = e^{-\beta t} (C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}) = e^{-\beta t} [(C_1 + C_2) \cos \omega t + i(C_1 - C_2) \sin \omega t]$$

$$C_1 + C_2 = A_0 \sin \psi_0 \quad i(C_1 - C_2) = A_0 \cos \psi_0$$

$$\xi(t) = e^{-\beta t} [A_0 \sin \psi_0 \cos \omega t + A_0 \cos \psi_0 \sin \omega t] = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \psi_0)$$



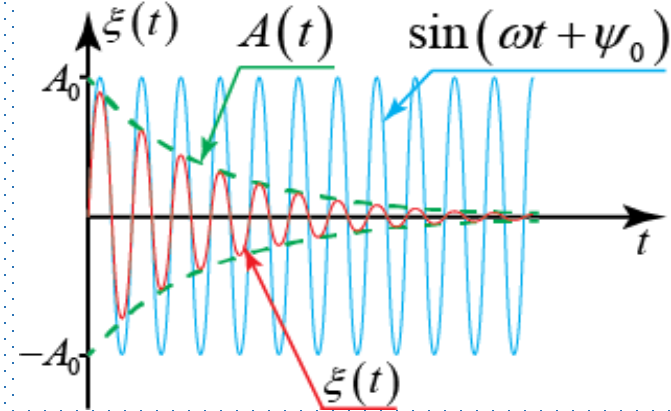
# Tema 14. Oscilații amortizate și forțate

$$\xi(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \psi_0)$$

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t} \longrightarrow \xi(t) = A(t) \sin(\omega t + \psi_0)$$

**Decrementul logaritmic al amortizării**

$$\delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T} = \beta T$$



$$\begin{aligned} \delta = \beta T &\longrightarrow \delta = \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \frac{2\pi}{\omega} \longrightarrow \frac{\delta^2}{4\pi^2} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \longrightarrow \frac{\delta^2}{4\pi^2} + 1 = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \longrightarrow \\ &\longrightarrow \omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + (\delta/2\pi)^2}} \longrightarrow T = T_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{2\pi}\right)^2} \end{aligned}$$

**Factorul de calitate  $Q$  al sistemului oscilator**

$$Q = 2\pi \frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)}$$

# Tema 14. Oscilații amortizate și forțate

$$E(t) \sim A^2 \quad \longrightarrow \quad Q = \frac{2\pi A^2(t)}{A^2(t) - A^2(t+T)} = \frac{2\pi A_0^2 e^{-2\beta t}}{A_0^2 e^{-2\beta t} - A_0^2 e^{-2\beta(t+T)}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta T}}$$

$$Q = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\delta}}$$

Dacă  $\delta \ll 1$ , atunci  $e^{-2\delta} \approx 1 - 2\delta$ . Obținem  $Q \approx \frac{\pi}{\delta}$

În acest caz,  $\omega \approx \omega_0$  și  $T \approx T_0$ , de aceea factorul de calitate

$$Q \approx \frac{\pi}{\delta} \approx \frac{\pi}{\beta T_0} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{2m}{2r} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{r} \sqrt{km}$$

Pentru factorul de calitate al circuitului oscilant când  $\delta \ll 1$ , obținem

$$Q \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{2L}{2R\sqrt{LC}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

# Tema 14. Oscilații amortizate și forțate

## Correspondența mărimilor fizice mecanice și electromagnetice

Oscilații mecanice		Oscilații electromagnetice	
Abaterea punctului material de la poziția de echilibru	$x(t)$	Sarcina condensatorului, intensitatea curentului	$q(t)$ $I(t)$
Masa oscilatorului	$m$	Inductanța bobinei	$L$
Coeficientul de rezistență	$r$	Rezistența electrică	$R$
Constanta de elasticitate	$k$	Mărimea inversă capacității electrice a condensatorului	$\frac{1}{C}$
Coeficientul de amortizare	$\beta = \frac{r}{2m}$	Coeficientul de amortizare	$\beta = \frac{R}{2L}$
Frecvența ciclică a oscilațiilor proprii	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	Frecvența ciclică a oscilațiilor proprii	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Factorul de calitate	$Q = \frac{1}{r} \sqrt{km}$	Factorul de calitate	$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

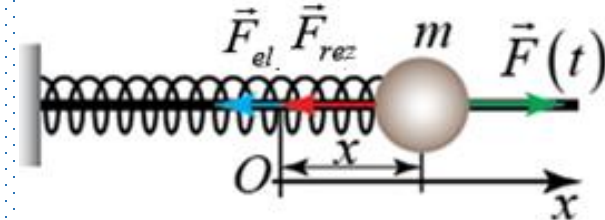
# Tema 14. Oscilații amortizate și forțate

## Oscilații mecanice forțate

$$m\ddot{x} = F_{\text{el}} + F_{\text{rez}} + F$$



$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \sin \Omega t$$



$$F(t) = F_0 \sin \Omega t$$

$$\ddot{x} + \frac{r}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t$$



$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$x_1(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \psi_0) \rightarrow 0$$



$$x(t) = x_2(t) = A \sin(\Omega t - \varphi)$$

$$-A\Omega^2 \sin(\Omega t - \varphi) + 2\beta A\Omega \cos(\Omega t - \varphi) + \omega_0^2 A \sin(\Omega t - \varphi) = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t$$

# Tema 14. Oscilații amortizate și forțate

$$A\Omega^2 \sin(\Omega t - \varphi + \pi) + 2\beta A\Omega \sin\left(\Omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \omega_0^2 A \sin(\Omega t - \varphi) = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t$$

$$\frac{F_0^2}{m^2} = (\omega_0^2 - \Omega^2)^2 A^2 + 4\beta^2 \Omega^2 A^2 \quad \longrightarrow$$

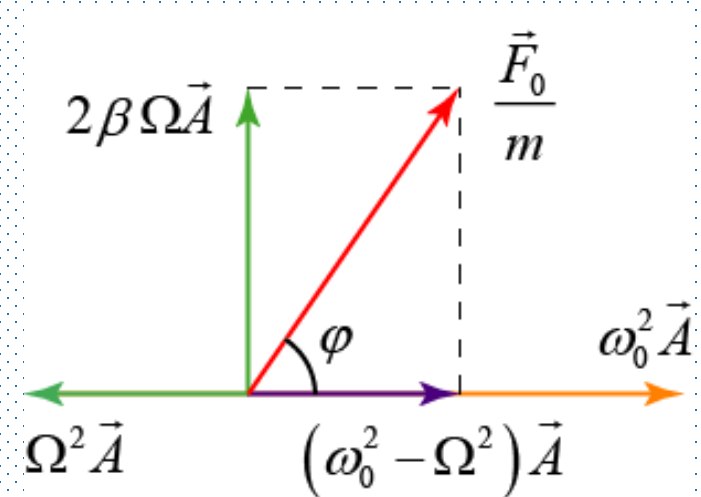


$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta A\Omega}{A(\omega_0^2 - \Omega^2)} = \frac{2\beta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad \longrightarrow$$



$$\varphi = \operatorname{arctg} \left[ \frac{2\beta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \right]$$



# Tema 14. Oscilații amortizate și forțate

Fenomenul creșteri pronunțate a amplitudinii oscilațiilor forțate și atingerea valorii ei maxime la apropierea frecvenței forței perturbatoare de frecvența oscilațiilor proprii ale sistemului se numește **rezonanță**.

$$\left. \frac{d}{d\Omega} \left[ (\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2 \right] \right|_{\Omega=\Omega_r} = 0 \quad \longrightarrow \quad -4\Omega_r (\omega_0^2 - \Omega_r^2) + 8\beta^2 \Omega_r = 0$$

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\omega^2 - \beta^2} \quad \text{— frecvență de rezonanță}$$

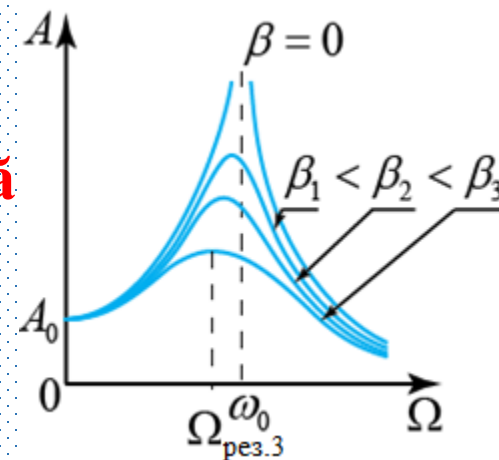
$$A_{\max} = A_r = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega_r^2)^2 + 4\beta^2 \Omega_r^2}} = \frac{F_0}{m\sqrt{4\beta^4 + 4\beta^2 \omega_0^2 - 8\beta^4}} = \frac{F_0}{m\sqrt{4\beta^2 (\omega_0^2 - \beta^2)}}$$



# Tema 14. Oscilații amortizate și forțate

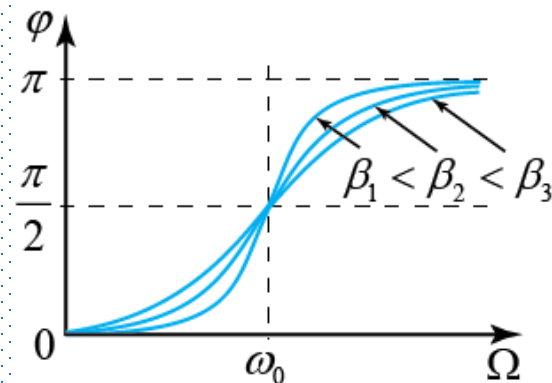
$$A_r = \frac{F_0}{2\beta m \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

–amplitudine de rezonanță



$$A_0 = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}} \Big|_{\Omega=0} = \frac{F_0}{m \omega_0^2} \quad \text{– deplasare statică}$$

$\Omega \rightarrow 0$	$\rightarrow$	$\varphi \rightarrow 0$
$\Omega \rightarrow \omega_0$	$\rightarrow$	$\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$
$\Omega \rightarrow \infty$	$\rightarrow$	$\varphi \rightarrow \pi$



# Tema 14. Oscilații amortizate și forțate

## Oscilații electrice forțate

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{ai} + \mathcal{E}(t)}{R} \quad \longrightarrow \quad IR = \varphi_1 - \varphi_2 - L \frac{dI}{dt} + \mathcal{E}(t)$$

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}(t) \quad \longrightarrow \quad \ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{q}{LC} = \frac{1}{L} \mathcal{E}(t)$$

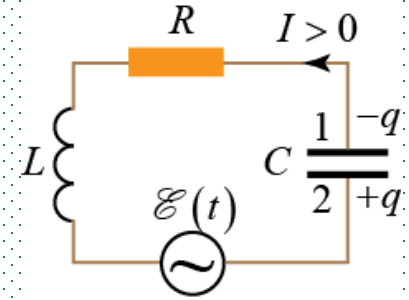
$$\ddot{q} + 2\beta \dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{1}{L} \mathcal{E}_0 \sin \Omega t$$

$$q(t) = q_0 \sin(\Omega t - \varphi)$$

$$q_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}} = \frac{\mathcal{E}_0}{L \sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \Omega^2\right)^2 + R^2 \Omega^2 / L^2}}$$

$$q_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\Omega \sqrt{\left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2 + R^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} = \frac{R}{\frac{1}{\Omega C} - \Omega L}$$



$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin \Omega t$$

# Tema 14. Oscilații amortizate și forțate

Intensitatea curentului în circuit

$$I = \frac{dq}{dt} = q_0 \Omega \cos(\Omega t - \varphi) = I_0 \sin\left(\Omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$I = I_0 \sin(\Omega t + \alpha)$$

$\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$  - defazajul dintre intensitatea curentului și *t.e.m.* perturbatoare

Amplitudinea intensității curentului și faza inițială

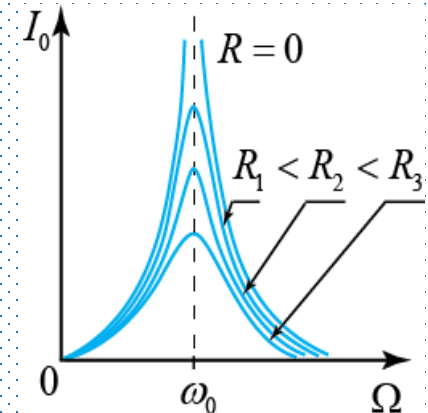
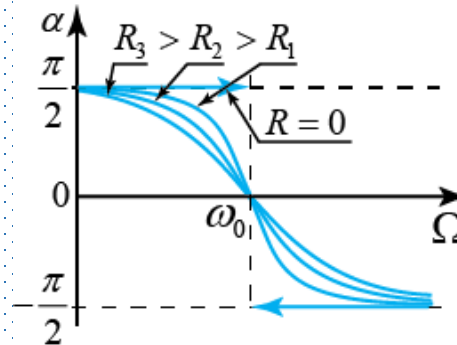
$$I_0 = q_0 \Omega = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2 + R^2}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\pi/2 - \varphi) = \operatorname{ctg} \varphi = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{\frac{1}{\Omega C} - \Omega L}{R}$$

Curenții de rezonanță

$$\frac{d}{d\Omega} \left[ \left( \left( \frac{1}{\Omega C} - \Omega L \right)^2 + R^2 \right) \right]_{\Omega=\Omega_r} = 0$$

$$2 \left( \frac{1}{\Omega C} - \Omega L \right) \left( -\frac{1}{\Omega^2 C} - L \right) \Big|_{\Omega=\Omega_r} = 0 \rightarrow \Omega_r = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



# Tema 14. Oscilații amortizate și forțate

Căderile de tensiune pe rezistor, condensator și pe inductanță

$$u_R = IR = I_0 R \sin(\Omega t + \alpha) = U_R \sin(\Omega t + \alpha),$$

$$u_C = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} \sin(\Omega t - \varphi) = \frac{I_0}{\Omega C} \sin\left(\Omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) = U_C \sin\left(\Omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$u_L = L \frac{dI}{dt} = I_0 \Omega L \cos(\Omega t + \alpha) = I_0 \Omega L \sin\left(\Omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) = U_L \sin\left(\Omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

Valorile de amplitudine ale tensiunii sunt:

$$U_R = I_0 R = R I_0,$$

$$U_C = \frac{I_0}{\Omega C} = X_C I_0,$$

$$U_L = I_0 \Omega L = X_L I_0,$$

# Tema 14. Oscilații amortizate și forțate

$R$  – rezistență electrică activă

$X_C = \frac{1}{\Omega C}$  – rezistență electrică capacitivă  
sau reactanță capacitivă

$X_L = \Omega L$  – rezistență electrică inductivă  
sau reactanță inductivă

$X = X_C - X_L = \frac{1}{\Omega C} - \Omega L$  – rezistență reactivă sau reactanța circuitului

$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2}$  – rezistență totală sau impedanța circuitului electric

**Legea lui Ohm pentru curentul alternativ**

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}$$

sau

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2}}$$