Tema1:<u>Rețele de transport.Algoritmul Ford-Fulkersson de determinare a fluxului maxim</u>

<u>Definitie.</u>Un graf orientat **G=<X,U>,** unde X este mulțimea vârfurilor, iar U – mulțimea arcelor se numește **rețea de transport** dacă sunt satisfăcute urmatoarele condiții:

1)există un unic vârf **a** din **X** în care nu intră nici un arc, dar din care pleacă arce, adică semigradul său interior $d_+a=0$, iar cel exterior $d_-a>0$.Acest vârf **a** se numește sursă sau intrare;

2) există un unic vârf **b** din **X** în care intră arce, dar din care nu pleacă arce, adică semigradul său interior $d_+b>0$, iar cel exterior $d_{-b}=0$. Acest vârf **b** se numește ieșire sau destinație;

3) graful **G** este conex și există drumuri de la **a** la **b** în **G;**

4)pentru orice arc din U se definește o funcție $C:U\rightarrow R$, astfel încât $C(u)>0$ si $C(u)$ se numește funcție de **capacitate** a arcului, sau capacitatea lui riziduală.

Rețeua de transport se noteaza **G=<X,U,C>,** unde **C** mulțimea capacităților.

<u>Definitie.</u> Numim flux în rețeaua de transport **G=<X,U,C>** o funcție $f:U\rightarrow R$, astfel încât $f(u)\geq 0$ pentru orice arc u din U și care satisface următoarele 2 condiții:

1)<u>Condiția de conservare a fluxului</u>, adică pentru orice vârf al grafului (difert de sursă și destinație) suma fluxurilor care intră-n vârful dat este egală cu suma fluxurilor care pleacă din el;

2)<u>Condiția de mărginire a fluxului</u>. Pentru orice arc **u** din U are loc inegalitatea: $f(u)\leq C(u)$.

Dacă $f(u)=C(u)$, atunci arcul se numește saturat. Drumul in rețeaua de transport se numește saturat, dacă conține cel puțin un arc saturat.

Fluxul, toate drumurile căruia sunt saturate se numește flux complet. Cel mai mare din fluxurile complete se numește flux maximal.

Pentru orice submulțime A de vârfuri din X definim o tăietură (sectiune): $W_-(A)=\{(x,y) \mid x \in A, y \in X\backslash A\}$, adică mulțimea tuturor arcelor care „pleacă” din mulțimea A și „intră” în mulțimea X\A .

Analogic definim tăietura:
$W_+(A)=\{(x,y) \mid$ unde y aparține lui A, iar x aparține mulțimii $X\backslash A\}$, adică mulțimea tuturor arcelor care „pleacă” din mulțimea X\A și „intră” în mulțimea A .

Este demonstrată următoarea **afirmație** :

Suma fluxurilor pentru arcele care apartin $W_+(A)$ este egală cu suma fluxurilor pentru arcele care apartin $W_-(A)$. Această valoare comună se notează cu $\mathbf{f_b}$.

Are loc **teorema Ford-Fulkersson:**
Pentru orice rețea de transport **G=<X,U,C>** cu intrarea **a** și destinația **b** valoarea maxima a fluxului la ieșire $\mathbf{f_b}$ este egală cu capacitatea minimă a unei tăieturi, adică:

$\max \mathbf{f_b} = \min C(W_-(A))$.

În baza teoremei Ford-Fulkersson a fost elaborat **algoritmul Ford-Fulkersson** de determinare a fluxului maxim la ieșirea **b** a unei rețele de transport **G=<X,U,C>,** unde capacitățile **c(u)** primesc numai valori întregi.

Pasul I.Se definește fluxul inițial având componentele nule pe fiecare arc al rețelei, adica $f(u)=0$ pentru fiecare arc $u \in U$ (inclusiv și fluxul f_b la ieșire).

Pasul II. Se determină drumurile nesaturate (toate arcele drumului satisfac condiția $f(u)<C(u)$) de la sursa a la vârful destinație b pe care fluxul poate fi mărit prin următorul procedeu de etichetare (marcaj):

1) Se marchează sursa **a** prin [+];
2) Se marchează cu(+a) orice vârf $x_i \in X$, dacă există arcul (a, x_i) nesaturat (adică $f(a, x_i)<C(a, x_i)$) și nu se marchează dacă arcul (a, x_i) este saturat (adică $f(a, x_i)=C(a, x_i)$);
3) Vârful x_k fiind marcat marcăm cu:
   3.1) (+k) orice vârf x_j, dacă există arcul nesaturat (x_k, x_j) (pentru care $f(x_k, x_j)<C(x_k, x_j)$) și nu se marchează, dacă arcul (x_k, x_j) este saturat (pentru care $f(x_k, x_j)=C(x_k, x_j)$);
   3.2) (-k) orice vârf x_j, dacă există arcul (x_j, x_k) pentru care $f(x_j, x_k) >0$ si nu se marchează dacă $f(x_j, x_k) =0$.

Dacă prin acest procedeu de marcaj se etichetează ieșirea **b** ,atunci fluxul $\mathbf{f_b}$ obtinut la pasul curent nu este maxim. Se considera un drum format din virfurile etichetate (ale caror etichete au semnele „+” sau „-”), care unește sursa **a** cu destinația **b** și care poate fi usor determinat urmând etichetele sale de la **b** către **a**. Dacă notăm acest drum prin $\mathbf{v}$,atunci prin $\mathbf{v}_+$ notăm mulțimea arcelor (x,y),unde marcajul lui y are semnul „+”, deci orientate in sensul de la a la b, iar cu $\mathbf{v}_-$ - multimea arcelor (y,x), unde marcajul lui y are semnul „-” adică de la b la a.

Determinam cantitățile:

$e_1=\min\{C(u)-f(u) \mid u \in \mathbf{v}_+\}$,

$e_2=\min\{ f(u) \mid u \in \mathbf{v}_-\}$,

$e=\min\{ e_1, e_2\}$.

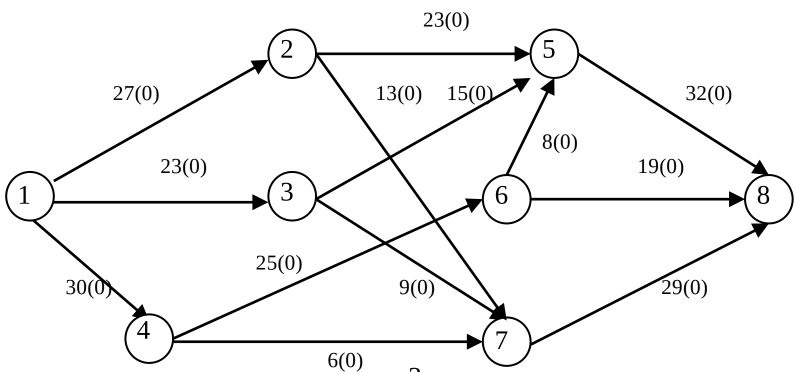
Din modul de etichetare $\Rightarrow$ ca e>0 (In caz contrar –toate arcurile-s saturate și n-am pute marca ieșirea).

Mărim cu e fluxul pe fiecare arc $u \in \mathbf{v}_+$ și il micșorăm cu e pe orice arc $u \in \mathbf{v}_-$, obținând la ieșire un flux egal cu $\mathbf{f_b + e}$.

<u>Pasul III.</u> Repetăm pasul II cu fluxul nou obținut. Dacă prin acest procedeu de etichetare startând din sursă nu există posibilități de-a eticheta ieșirea , atunci fluxul $\mathbf{f_b}$ are valoare maximă la ieșire, iar mulțimea A a tuturor vârfurilor, care au putut fi marcate la ultima tentativa constituie o tăietură de capacitate minimă. Suma capacităților tuturor arcelor care au extremitate inițial in A, iar cea finala in X\A constituie valoarea fluxului maxim in rețeaua dată de transport. Se afișează $\mathbf{f_b}$.

<u>EXEMPLU</u>. De determinat valoarea fluxului maximal in rețeaua de trasport **G=<X,U,C> ,** unde $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ mulțimea vârfurilor;

U={(1,2), (1,3) , (1,4), (2,5), (2,7), (3,5), (3,7), (4,6), (4,7), (5,8), (6,5), (6,8), (7,8) } – mulțimea arcelor, iar C – capacitățile arcelor: $C(x_1, x_2) = c_{12}= 27$, $c_{13}=23$, $c_{14}=30$, $c_{25}=23$, $c_{27}= 13$, $c_{35}=15$, $c_{37}=9$, $c_{46}=25$, $c_{47}= 6$, $c_{58}= 32$, $c_{65}= 6$, $c_{68}= 19$, $c_{78}= 29$. Reprezentăm graful



Etapa I. Declarăm fluxul inițial pe fiecare arc nul. Deci pe fiecare arc din rețea lânga capacitate în paranteze rotunde s-a înscris zero.

Etapa II. Marcăm sursa 1 cu [+]. Marcăm 2 cu (+1) asa cum există arcul (1,2) nesaturat .

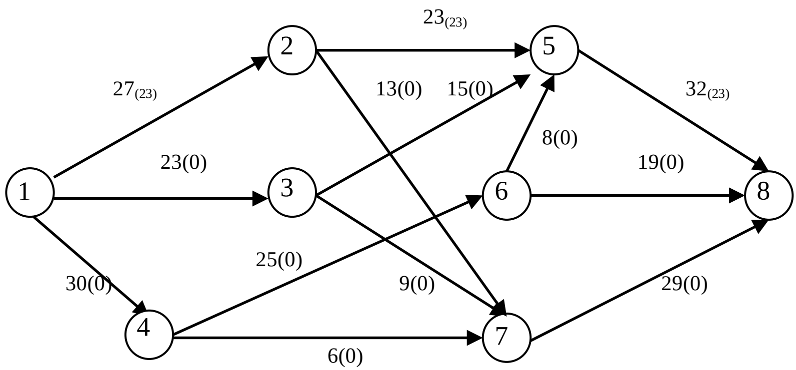
Marcăm vârful 5 cu (+2) asa cum există arcul (2,5) nesaturat .

Marcăm vârful 8(ieșirea) cu (+5) așa cum există arcul (5,8) nesaturat .

Deci, la **etapa II.1** am creat drumul: (1^{+}, 2^{+1}, 5^{+2}, 8^{+5}). Așa cum avem numai marcaj pozitiv ⇒ $e=e_1=\min\{C(u)-f(u)\}$ pentru arcele care formează drumul $e=e_1=\min\{27-0, 23-0, 32-0\}=23$.

Pe toate arcele care formează drumul adăugăm 23 la flux.

Arcul (2,5) devine saturat. Adăugăm la ieșire $\mathbf{f_b+23}$. Deci, $\mathbf{f_b=23}$.

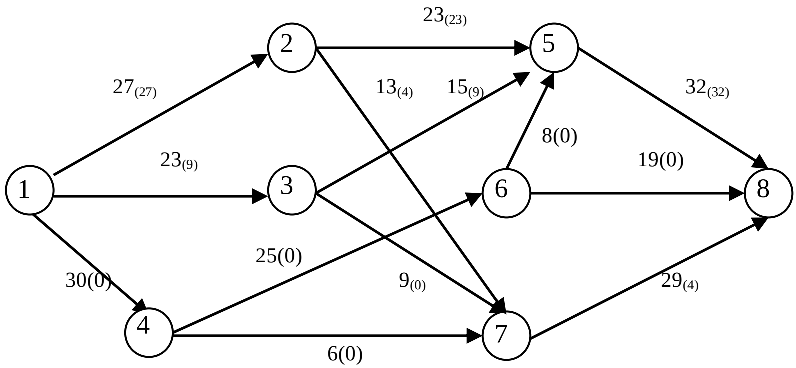


Prin analogie la **etapa II.2** formăm drumul: (1^{+}, 2^{+1}, 7^{+2}, 8^{+7}), fiindcă arcul(2,5) este saturat. Așa cum avem numai marcaj pozitiv ⇒ $e=e_1=\min\{C(u)-f(u)\}$ pentru arcele care formeza drumul

$e=e_1=\min\{27-23, 13-0, 29-0\}=4$.

Pe toate arcele care formeaza drumul adaugam 4 unități la flux.

Arcul (1,2) devine saturat. Adăugăm la ieșire **f_b=23+4.**



EtapaII.3. Trecem la un nou marcaj. Așa cum arcul (1,2) este saturat, după marcarea sursei 1 cu [+] marcăm vârful 3 cu (+1). Din 3 putem merge in 5 cu(+3), iar din 5 – in 8 cu (+5) obținând drumul : (1^+, 3^{+1}, 5^{+3}, 8^{+5}).

Așa cum avem numai marcaj pozitiv ⇒ $e=e_1=\min\{C(u)-f(u)\}$ pentru arcele care formeză drumul $e=e_1=\min\{23-0, 15-0, 32-23\}=9$.

Pe toate arcele care formează drumul adăugăm 9 unități la flux.

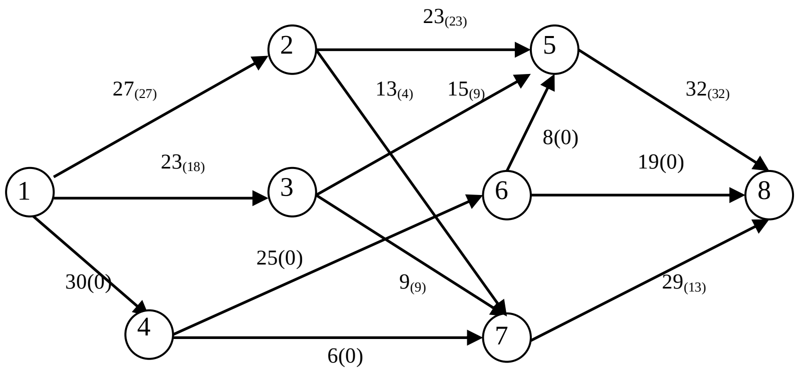
Arcul (5,8) devine saturat. Adăugăm la ieșire **f_b=23+4+9.**

Etapa II.4. Marcăm sursa 1 cu [+],apoi 3 cu (+1), dupa care 7 cu (+3) si ieșirea 8 cu (+7) , obținând drumul : (1^+, 3^{+1}, 7^{+3}, 8^{+7}).

Așa cum avem numai marcaj pozitiv ⇒ $e=e_1=\min\{C(u)-f(u)\}$ pentru arcele care formeza drumul $e=e_1=\min\{23-9, 9-0, 29-4\}=9$.

Pe toate arcele care formează drumul adaugăm 9 unități la flux.

Arcul (3,7) devine saturat. Adăugăm 9 unițati la ieșire **f_b=23+4+9+9.**



Etapa II.5. Marcăm sursa 1 cu [+],apoi 3 cu (+1), după care 5 cu (+3) si așa cum arcul (5,8) este saturat, iar fluxul pe arcul (2,5) este pozitiv marcăm vârful 2 cu (-5). Din 2 este acces la 7, așa cum(2,7) nu este saturat, apoi din 7 marcăm ieșirea 8 cu (+7) , obținând drumul :

$(1^{+}, 3^{+1}, 5^{+3}, 2^{-5}, 7^{+2}, 8^{+7})$.

Determinăm pentru arcele marcate cu (+)

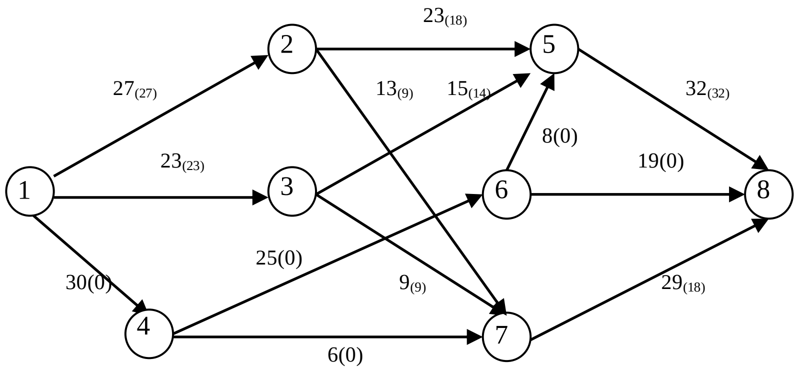
$e_1=\min\{23-18,15-9,13-4, 29-13\}=5$.

Pentru arcele marcate cu (-) determinăm $e_2=\min\{$fluxurile pozitive pe arcele marcate cu (-)$\}= \min\{23\}=23$.

Mărimea $e=\min\{ e_1, e_2\}=\min\{5,23\}=5$.

Pe arcele, care formează drumul și sunt marcate cu (+) adăugăm 5 unități la flux, iar pe cele marcate cu (-) scădem 5 unități din flux, adică pe arcul (2,5).

Arcul (1,3) devine saturat. Adaugam 5 unități la ieșire $\mathbf{f_b=23+4+9+9+5.}$

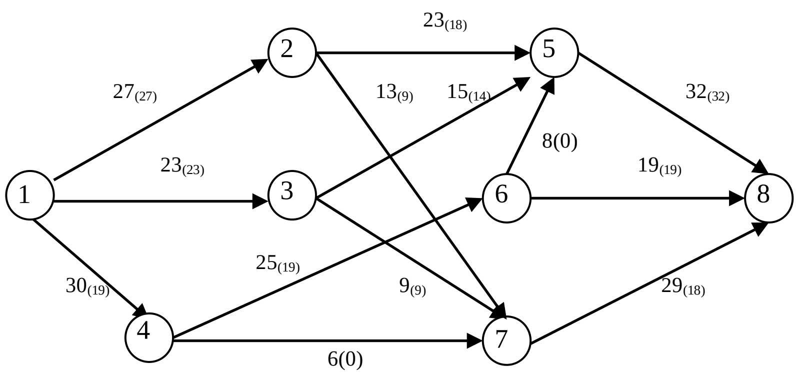


Etapa II.6. Marcăm sursa 1 cu [+],apoi 4 cu (+1), dupa care 6 cu (+4) si ieșirea 8 cu (+6) , obținând drumul : (1^{+}, 4^{+1}, 6^{+4}, 8^{+6}).

Așa cum avem numai marcaj pozitiv $\Rightarrow$ $e=e_1=\min\{C(u)-f(u)\}$ pentru arcele care formeza drumul $e=e_1=\min\{30-0, 25-0, 19-0\}=19$.

Pe toate arcele care formeaza drumul adăugăm 19 unități la flux.

Arcul (6,8) devine saturat. Adăugăm 19 unități la ieșire $\mathbf{f_b=23+4+9+9+5+19.}$

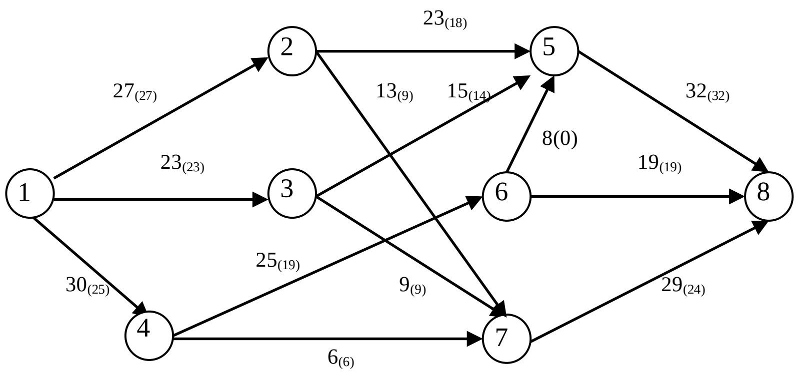


Etapa II.7. Marcăm sursa 1 cu [+],apoi 4 cu (+1), dupa care 7 cu (+4) si ieșirea 8 cu (+7) , obținând drumul : (1^{+}, 4^{+1}, 7^{+4}, 8^{+7}).

Așa cum avem numai marcaj pozitiv ⇒ $e=e_1=\min\{C(u)-f(u)\}$ pentru arcele care formeza drumul $e=e_1=\min\{30-19, 6-0, 29-18\}=6$.

Pe toate arcele care formează drumul adăugăm 6 unități la flux.

Arcul (4,7) devine saturat. Adăugăm 6 unități la ieșire **f_b+23+4+9+9+5+19+6.**



Etapa II.8. Marcăm sursa 1 cu [+],apoi 4 cu (+1), dupa care 6 cu (+4), apoi 5 cu (+6) și asa cum arcul (5,8) este saturat, iar fluxul pe arcul (2,5) este pozitiv marcăm vârful 2 cu (-5). Din 2 este acces la 7, așa cum(2,7) nu este saturat, apoi din 7 marcăm ieșirea 8 cu (+7) , obținând drumul :

(1^{+}, 4^{+1}, 6^{+4}, 5^{+6}, 2^{-5}, 7^{+2}, 8^{+7}).

Determinăm pentru arcele marcate cu (+)

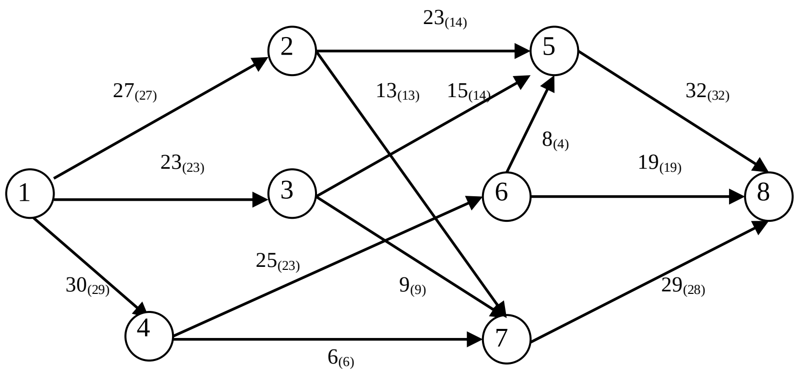
$e_1=\min\{30-25,25-19,13-9, 29-24\}=4$.

Pentru arcele marcate cu (-) determinăm e_2=min{fluxurile pozitive pe arcele marcate cu (-)}= min{18}=18.

Mărimea e=min{ e_1, e_2}=min{4,18}=4.

Pe arcele, care formeaza drumul și sunt marcate cu (+) adăugăm 4 unități la flux, iar pe cele marcate cu (-) scădem 4 unități din flux, adică pe arcul (2,5).

Arcul (2,7) devine saturat. Adăugăm 4 unități la ieșire **f_b=23+4+9+9+5+19+6+4=79.**



Etapa II.9. Marcăm sursa 1 cu [+],apoi 4 cu (+1), dupa care 6 cu (+4), apoi 5 cu (+6) și așa cum arcul (5,8) este saturat, iar fluxul pe arcul (2,5) este pozitiv marcam vârful 2 cu (-5). Din 2 nu este acces la 7, așa cum (2,7) este saturat. Așa cum fluxul pe arcul (3,5) este pozitiv marcăm vârful 3 cu (-5). Din 3 nu este acces la 7, asa cum (3,7) este saturat. Am ajuns la situația, când startând din sursa nu avem nici o posiblitate de a marca ieșirea. Procesul stopează și la ultima tentativă de marcaj a fost etichetată mulțimea de vârfuri A={1, 2, 3, 4, 5, 6}, iar mulțimeaX\A={7,8}.

Tăietura de capacitate minimă $W_-(A)$={(2,7), (3,7), (4,7), (5,8), (6,8)}.

Suma capacităţilor acestor arcuri constituie conform teoremei Ford-Fulkersson valoarea fluxului maximal:

f_b=13+9+6+32+19=79.

Rezultatul se confirmă de cel obţinut prin sumare pe etape.

Problema este rezolvată.

Probleme pentru rezolvare individuală:

<u>Problema1.</u>De determinat valoarea fluxului maximal in reţeaua de trasport **G=<X,U,C> ,** unde X={x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8} mulţimea vârfurilor;

U={(1,2), (1,3) , (1,4), (2,5), (2,7), (3,5), (3,7), (4,6), (4,7), (5,8), (6,5), (6,8), (7,8) } – mulţimea arcelor, iar C – capacităţile arcelor: C(x_1 ,x_2) = c_{12}=30, c_{13}=18, c_{14}=24, c_{25}=31, c_{27}= 9, c_{35}=23, c_{37}=4, c_{46}=26, c_{47}= 2, c_{58}= 42, c_{65}= 8, c_{68}= 14, c_{78}= 25.

Raspuns: **f_b=71**

<u>Problema2.</u>De determinat valoarea fluxului maximal in reţeaua de trasport **G=<X,U,C> ,** unde X={x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8} mulţimea vârfurilor;

U={(1,2), (1,3) , (1,4), (2,5), (2,7), (3,5), (3,7), (4,6), (4,7), (5,8), (6,5), (6,8), (7,8) } – mulţimea arcelor, iar C – capacităţile arcelor: C(x_1 ,x_2) = c_{12}= 29, c_{13}=21, c_{14}=31, c_{25}=31, c_{27}= 20, c_{35}=15, c_{37}=7, c_{46}=28, c_{47}= 4, c_{58}= 30, c_{65}= 7, c_{68}= 18, c_{78}= 26.

Raspuns: **f_b=79**

<u>Problema3.</u>De determinat valoarea fluxului maximal in rețeaua de trasport **G=<X,U,C> ,** unde X={x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8} mulțimea vârfurilor;

U={(1,2), (1,3) , (1,4), (2,5), (2,7), (3,5), (3,7), (4,6), (4,7), (5,8), (6,5), (6,8), (7,8) } – mulțimea arcelor, iar C – capacitățile arcelor: C(x_1 ,x_2) = c_{12}= 23, c_{13}=25, c_{14}=30, c_{25}=27, c_{27}= 13, c_{35}=19, c_{37}=9, c_{46}=23, c_{47}= 7, c_{58}= 31, c_{65}= 2, c_{68}= 20, c_{78}= 26.

Raspuns: **f_b=77.**