TEMA

Drum minim in graful ponderat. Algoritmul lui Ford pentru determinarea drumului minim.

Pentru un graf orientat G = <X,U> se va numi drum un şir de vârfuri D = (x_0, x_1,..., x_r) cu proprietatea că arcele (x_0, x_1), (x_1, x_2),..., (x_{r-1}, x_r) aparţin lui U, deci sunt arce ale grafului şi extremitatea finală a arcului precedent coincide cu extremitatea iniţială a arcului următor.

Vârfurile x_0 şi x_r se numesc extremităţile drumului D.
Lungimea unui drum este dată de numărul de arce pe care le conţine.

Dacă vârfurile x_0, x_1,..., x_r sunt distincte două câte două drumul D este elementar. Adeseori, fiecărui arc (muchii) i se pune în corespondenţă un număr real pozitiv, care se numeşte ponderea (identificat cu lungimea) arcului. Lungimea arcului (x_i, x_j) se va nota P(i,j)=p_{ij}, iar în cazul în care pe un arc este lipsă ponderea lui ea va fi considerată foarte mare (∞) (pentru calculator cel mai mare număr pozitiv posibil).

În cazul grafurilor cu arce ponderate (grafuri ponderate) G = <X,U,P> , unde **P** este multimea ponderilor, se va considera lungime a unui drum suma ponderilor arcelor care formează acest drum.

Drumul care uneşte două vârfuri concrete şi are lungimea cea mai mică se va numi ***drum minim*** iar lungimea drumului minim vom numi ***distanţă***.

Vom nota distanţa dintre x şi t prin d(x, t), evident, d(x,x)=0.

Algoritmul Ford (F) permite determinarea drumului minim dintrun vârf iniţial x_1 (cu cel mai mic indice) până la careva vârf x_k al grafului G. Dacă prin P(i,j)=p_{ij} se va nota ponderea arcului (x_i, x_j) atunci algoritmul conţine următorii paşi:

Pasul1.

Fiecărui vârf x_j al grafului G i se va ataşa un număr foarte mare (numit ***eticheta, sau marca***) Hj, unde Hj = d(x_1, x_j). Vârfului iniţial i se va ataşaH_1 = 0, iar celelalte Hj=∞,ceia ce este echivalent ca distanta d(x_1, x_j) la moment nu este cunoscuta.

Pasul2.

Pentru fiecare arc (x_i, x_j) se calculeza diferenţele dintre eticheta virfului final si cel initial Hj – Hi si aceasta diferenta este comparata cu ponderea Pij.

Sunt posibile trei cazuri:

a) Hj - Hi < Pij;

b) Hj - Hi = Pij;

c) Hj - Hi > Pij.

Cazurile a) si b) nu permit micsorarea distantei dintre vârful iniţial şi x_j, adica Hj, iar cazul "c" permite micşorarea distanţei dintre vârful iniţial şi x_j, adica Hj prin modificarea:

Hj = Hi + Pij.

Pasul3.

Pasul 2 se va repeta de la inceput atâta timp pina cind nu va mai exista nici un arc pentru care are loc inegalitatea “c”.

In final, etichetele Hi vor defini distanţa (drumul minim) de la vârful iniţial până la vârful dat x_i.

Daca Hj=∞, atunci nu exista drum din x_1 in x_j.

Daca Hj exista si este finit, atunci pentru stabilirea secvenţei de vârfuri care va forma drumul minim trecem la pasul

Pasul4.

Se va pleca de la vârful final x_j spre cel iniţial. Predecesorul lui x_j va fi considerat vârful x_i pentru care va avea loc Hj - Hi = Pij. Dacă vor exista câteva arce pentru care are loc această relaţie ele toate trbuie luate in considerare.

Apoi in top este virful cu cel mai mare indice

EXEMPLUL 1.

Să se determine pentru graful din figura 1 drumul de valoare minimă între vârfurile x_1 şi x_7 conform algoritmului lui Ford.

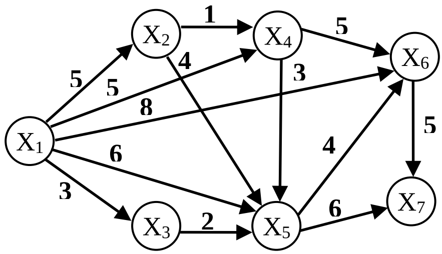


Fig.1

Rezolvare:

I. $H_1 = 0$;

II. $H_2 = \infty$; $H_2 = 5$

$H_3 = \infty$; $H_3 = 3$

$H_4 = \infty$; $H_4 = 5$

$H_5 = \infty$; $H_5 = 6$ $H_5 = 5$;

$H_6 = \infty$; $H_6 = 8$

$H_7 = \infty$ $H_7 = 11$

III. Examinăm toate arcele care pleacă din vârful x_1:

$H_2 - H_1 = \infty - 0 > P_{12} = 5 \Rightarrow$ H_2 se schimba: $H_2 = H_1 + P_{12} = 0 + 5 = 5$

$H_2 = 5$

$H_3 - H_1 = \infty - 0 > P_{13} = 3 \Rightarrow$ H_3 se schimba: $H_3 = H_1 + P_{13} = 0 + 3 = 3$

$H_3 = 3$

$H_4 - H_1 = \infty - 0 > P_{14} = 5 \Rightarrow$ H_4 se schimba: $H_4 = H_1 + P_{14} = 0 + 5 = 5$

$H_4 = 5$

$H_5 - H_1 = \infty - 0 > P_{15} = 6 \Rightarrow$ H_5 se schimba: $H_5 = H_1 + P_{15} = 0 + 6 = 6$

$H_5 = 6$

$H_6 - H_1 = \infty - 0 > P_{16} = 8 \Rightarrow$ H_4 se schimba : $H_6 = H_1 + P_{16} = 0 + 8 = 8$

$H_6 = 8$

(fig. 1)

Examinăm toate arcele care pleacă din vârful x_2:

$H_4 - H_2 = 5 - 5 < P_{24} = 1 \Rightarrow$ Eticheta H_4 la vârful x_4 nu se schimbă.

$H_5 - H_2 = 6 - 5 < P_{25} = 4 \Rightarrow$ Eticheta H_5 la vârful x_5 nu se schimbă.

Examinăm toate arcele care pleacă din vârful x_3:

$H_5 - H_3 = 6 - 3 > P_{35} = 2 \Rightarrow$ H_5 se schimba: $H_5 = H_3 + P_{35} = 3 + 2 = 5$;

$H_5 = 5$;

Examinăm toate arcele care pleacă din vârful x_4:

$H_5 - H_4 = 5 - 5 < P_{45} = 3 \Rightarrow$ Eticheta H_5 la vârful x_5 nu se schimbă.

$H_6 - H_4 = 8 - 5 < P_{46} = 5 \Rightarrow$ Eticheta H_6 vârful x_6 nu se schimbă.

Examinăm toate arcele care pleacă din vârful x_5:

$H_6 - H_5 = 8 - 5 < P_{56} = 4 \Rightarrow$ Eticheta H_6 la vârful x_6 nu se schimbă.

$H_7 - H_5 = \infty - 5 > P57 = 6 \Rightarrow$ H_7 se modifica : $H_7 = H_5 + L_{57} = 5 + 6 = 11$

$H_7 = 11$

Examinăm toate arcele care pleacă din vârful x_6:

$H_7 - H_6 = 11 - 8 < L_{67} = 5 \Rightarrow$ Eticheta la vârful x_7 nu se schimbă.

Verificam inca odata diferentele de la inceput cu etichetele primite:

. $H_1 = 0$;

II. $H_2 = \infty$; $H_2 = 5$

$H_3 = \infty$; $H_3 = 3$

$H_4 = \infty$; $H_4 = 5$

$H_5 = \infty$; $H_5 = 6$ $H_5 = 5$;

$H_6 = \infty$; $H_6 = 8$

$H_7 = \infty$ $H_7 = 11$

$H_2 - H_1 = 5 - 0 = P_{12} = 5 \Rightarrow$ H_2 nu se schimba

$H_3 - H_1 = 3 - 0 = P_{13} = 3 \Rightarrow$ H_3 nu se schimba

$H_4 - H_1 = 5 - 0 = P_{14} = 5 \Rightarrow$ H_4 nu se schimba

$H_5 - H_1 = 5 - 0 < P_{15} = 6 \Rightarrow$ H_5 nu se schimba

$H_6 - H_1 = 8 - 0 = P_{16} = 8 \Rightarrow$ H_4 nu se schimba

Examinăm toate arcele care iese din vârful x_2:

$H_4 - H_2 = 5 - 5 < P_{24} = 1 \Rightarrow$ Eticheta H_4 la vârful x_4 nu se schimbă.

$H_5 - H_2 = 5 - 5 < P_{25} = 4 \Rightarrow$ Eticheta H_5 la vârful x_5 nu se schimbă.

Examinăm toate arcele care iese din vârful x_3:

$H_5 - H_3 = 5 - 3 = P_{35} = 2 \Rightarrow$ H_5 nu se schimba;

Examinăm toate arcele care iese din vârful x_4:

$H_5 - H_4 = 5 - 5 < P_{45} = 3 \Rightarrow$ Eticheta H_5 la vârful x_5 nu se schimbă.

$H_6 - H_4 = 8 - 5 < P_{46} = 5 \Rightarrow$ Eticheta H_6 vârful x_6 nu se schimbă.

Examinăm toate arcele care iese din vârful x_5:

$H_6 - H_5 = 8 - 5 < P_{56} = 4 \Rightarrow$ Eticheta H_6 la vârful x_6 nu se schimbă.

$H_7 - H_5 = 11 - 5 = P_{57} = 6 \Rightarrow$ H_7 nu se modifica

Examinăm toate arcele care iese din vârful x_6:

H_7-H_6=11-8< L_{67} =5$\Rightarrow$ Eticheta la vârful x_7 nu se schimbă.
STOP

Rezolvarea problemei poate fi scrisă cu ajutorul unui tabel (fig.2)

	1	2	3	4	5	6	7
I	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
II_1		5	3	5	6	8	∞
III_2							∞
IV_3					5		∞
V_4							∞
VI_5							11
VII_6							
	0	5	3	5	5	8	11

Fig.2.

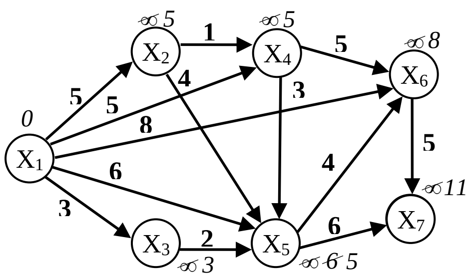


Fig.3.

$l_{\min}(1-7)=11$

IV. Determinăm drumul minim:

Startam de la ultimul virf x_7.

Observam ca $H_7 - H_5 = 11\text{-}5 = 6 = P_{57} \Rightarrow$ Inainte de x_7 se afla x_5;

In top se afla virful x_5 si observam ca

$H_5 - H_3 =$ 5-3 =2= $P_{35} \Rightarrow$ Inainte de x_5 se afla x_3;

In top se afla virful x_3 si observam ca

$H_3 - H_1 =$ 3-0 = 3= $P_{13} \Rightarrow$ Inainte de x_3 se afla x_1

Drumul corespunzător valorii minime 11: $1 \to 3 \to 5 \to 7$

EXEMPLUL 2.

Să se determine pentru graful din figura 1 drumul de valoare minimă între vârfurile x_1 şi x_7 conform algoritmului lui Ford.

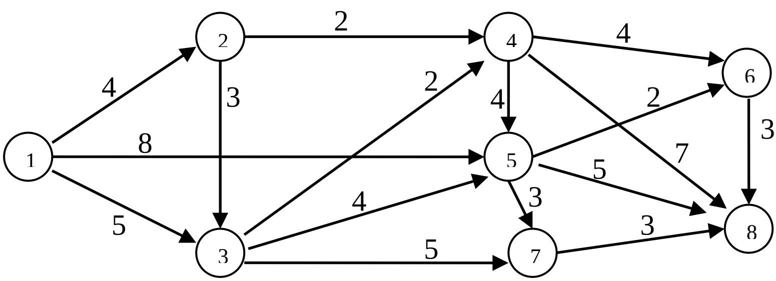


Fig.4

REZOLVARE

Întroducem etichetele

I. $H_1 = 0$;

II. $H_2 = \infty$; $H_2 = 4$

$H_3 = \infty$; $H_3 = 5$

$H_4 = \infty$; $H_4 = 6$

$H_5 = \infty$; $H_5 = 8$

$H_6 = \infty$ $H_6 = 10$

$H_7 = \infty$ $H_7 = 10$

$H_8 = \infty$ $H_8 = 13$

III. Examinăm toate arcele care pleacă din vârful x_1:

$H_2 - H_1 = \infty - 0 > P_{12} = 4 \Rightarrow$ H_2 se schimba: $H_2 = H_1 + P_{12} = 0 + 4 = 4$

$H_2 = 4$

$H_3 - H_1 = \infty - 0 > P_{13} = 5 \Rightarrow$ H_3 se schimba: $H_3 = H_1 + P_{13} = 0 + 5 = 5$

$H_3 = 5$

$H_5 - H_1 = \infty - 0 > P_{15} = 8 \Rightarrow$ H_5 se schimba: $H_5 = H_1 + P_{15} = 0 + 8 = 8$

$H_5 = 8$

Examinăm toate arcele care pleacă din vârful x_2:

$H_3 - H_2 = 5 - 4 < P_{23} = 3 \Rightarrow$ Eticheta H_5 la vârful x_5 nu se schimbă.

$H_4 - H_2 = \infty - 4 > P_{24} = 2 \Rightarrow$ H_4 se schimbă: $H_4 = H_2 + P_{24} = 4 + 2 = 6$.

$H_4 = 6$

Examinăm toate arcele care pleacă din vârful x_3:

$H_4 - H_3 = 6 - 5 < P_{34} = 2 \Rightarrow$ H_4 nu se schimba;

$H_5 - H_3 = 8 - 5 < P_{35} = 4 \Rightarrow$ H_5 nu se schimba;

$H_7 - H_3 = \infty - 5 > P_{37} = 5 \Rightarrow$ H_7 se schimba; $H_7 = H_3 + P_3 = 5 + 5 = 10$

Examinăm toate arcele care pleacă din vârful x_4:

$H_5 - H_4 = 8 - 6 < P_{45} = 4 \Rightarrow$ Eticheta H_5 la vârful x_5 nu se schimbă.

$H_6 - H_4 = \infty - 6 > P_{46} = 4 \Rightarrow$ H_6 se schimbă: $H_6 = H_4 + P_{46} = 6 + 4 = 10$.

H_8-H_4=∞-6> P_{48} =7⇒ H_8 se schimbă: H_8= H_4+P_{48}=6+7=13

H_8=13

Examinăm toate arcele care pleacă din vârful x_5:

H_6-H_5=10-8= P_{56} =2⇒Eticheta H_6 la vârful x_6 nu se schimbă.

H_7-H_5=10-8< P_{57}=3⇒ H_7 nu se modifica

H_8-H_5=13-8= P_{58}=5⇒ H_8 nu se modifica

Examinăm toate arcele care pleacă din vârful x_6:

H_8-H_6=13-10= P_{67} =3⇒Eticheta la vârful x_8 nu se schimbă.

Examinăm toate arcele care pleacă din vârful x_7:

H_8-H_7=13-10= P_{67} =3⇒Eticheta la vârful x_8 nu se schimbă.

Verificam inca odata diferentele de la inceput cu etichetele primite:

$H_1 = 0$;

$H_2 = \infty$; H_2= 4

$H_3 = \infty$; H_3= 5

$H_4 = \infty$; H_4=6

$H_5 = \infty$; H_5= 8

$H_6 = \infty$ H_6=10

$H_7 = \infty$ H_7=10

$H_8 = \infty$ H_8=13

III.Examinăm toate arcele care pleacă din vârful x_1:

H_2-H_1 =4-0=P_{12} = 4 ⇒ H_2 nu se schimba.

H_3-H_1 =5-0= P_{13} = 5 ⇒ H_3 nu se schimba.

H_5-H_1 =8-0= P_{15} =8 ⇒ H_5 nu se schimba.

Examinăm toate arcele care pleacă din vârful x_2:

H_3-H_2=5-4< P_{23} =3 $\Rightarrow$ Eticheta H_5 la vârful x_5 nu se schimbă.

H_4-H_2=6-4= P_{24} =2 $\Rightarrow$ H_4 nu se schimbă.

Examinăm toate arcele care pleacă din vârful x_3:

H_4-H_3 =6-5< P_{34} =2 $\Rightarrow$ H_4 nu se schimba;
H_5-H_3 =8-5< P_{35} =4 $\Rightarrow$ H_5 nu se schimba;
H_7-H_3 =10-5= P_{37} =5 $\Rightarrow$ H_7 nu se schimba;

Examinăm toate arcele care pleacă din vârful x_4:

H_5-H_4 =8-6< P_{45} =4 $\Rightarrow$ Eticheta H_5 la vârful x_5 nu se schimbă.

H_6-H_4=10-6= P_{46} =4 $\Rightarrow$ H_6 nu se schimbă.

H_8-H_4=13-6= P_{48} =7 $\Rightarrow$ H_8 nu se schimbă.

Examinăm toate arcele care pleacă din vârful x_5:

H_6-H_5=10-8= P_{56} =2 $\Rightarrow$ Eticheta H_6 la vârful x_6 nu se schimbă.

H_7-H_5=10-8< P_{57}=3 $\Rightarrow$ H_7 nu se modifica
H_8-H_5=13-8= P_{58}=5 $\Rightarrow$ H_8 nu se modifica

Examinăm toate arcele care pleacă din vârful x_6:

H_8-H_6=13-10= P_{67} =3 $\Rightarrow$ Eticheta la vârful x_8 nu se schimbă.
Examinăm toate arcele care pleacă din vârful x_7:
H_8-H_7=13-10= P_{67} =3 $\Rightarrow$ Eticheta la vârful x_8 nu se schimbă.
STOP.

Am obtinut rezultatele:

$H_1 = 0$;
H_2= 4
H_3= 5
H_4=6
H_5= 8
H_6=10
H_7=10

$H_8=13$

Rezolvarea problemei poate fi scrisă cu ajutorul unui tabel

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
I	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
II_1		4	5		8			
III_2				6				
IV_3							10	
V_4						10		13
VI_5								
VII_6								
	0	4	5	6	8	10	10	13

IV. Determinăm drumul minim:

Startam de la ultimul virf x_8.

Observam ca $H_8 - H_6$ =13-10 =3=$P_{68} \Rightarrow$ Inainte de x_8 se afla x_6;

Observam ca H_8-H_7= 13-10 =3=$p_{78} \Rightarrow$ Inainte de x_8 se afla x_7;

Observam ca H_8-H_5= 13-8 =5=$p_{58} \Rightarrow$ Inainte de x_8 se afla x_5;

Observam ca H_8-H_4= 13-6 =7=$p_{48} \Rightarrow$ Inainte de x_8 se afla x_4;

In top se afla virful x_7 si observam ca

$H_7 - H_3$ = 10-5 =5= P_{37} $\Rightarrow$ Inainte de x_7 se afla x_3;

In top se afla virful x_6 si observam ca

$H_6 - H_5$ = 10-8 = 2= $P_{56} \Rightarrow$ Inainte de x_6 se afla x_5

H_6-H_4=10-6 = 4= $P_{46} \Rightarrow$ Inainte de x_6 se afla x_4

In top se afla virful x_5 si observam ca
H_5-H_1=8-0 = 8= $P_{15} \Rightarrow$ Inainte de x_5 se afla x_1.
In top se afla virful x_4 si observam ca
H_4-H_2=6-4 = 2= $P_{24} \Rightarrow$ Inainte de x_4 se afla x_2.
In top se afla virful x_3 si observam ca
H_3-H_1=5-0 = 5= $P_{13} \Rightarrow$ Inainte de x_3 se afla x_1.
In top se afla virful x_2 si observam ca
H_2-H_1=4-0 = 4= $P_{12} \Rightarrow$ Inainte de x_2 se afla x_1.
Deci, am obtinut 5 drumuri minime:
d_1=(1,2,4,6,8);
d_2=(1,2,4,8);
d_3=(1,3,7,8);
d_4=(1,5,6,8);
d_5=(1,5,8);

EXEMPLUL 3.(Alta Varianta)
Să se determine pentru graful din figura 4 drumul de valoare minimă între vârfurile x_1 şi x_8 conform algoritmului lui Ford.

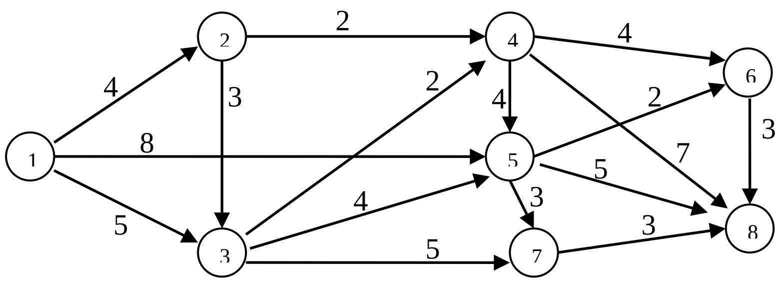


Fig.4

Rezolvare:

I. $H_1 = 0$;

II. $H_2 = \infty$;

$H_3 = \infty$;

$H_4 = \infty$;

$H_5 = \infty$;

$H_6 = \infty$

$H_7 = \infty$

$H_8 = \infty$

Pentru fiecare arc (x_i, x_j) se calculeza diferenţele dintre eticheta virfului final si cel initial Hj – Hi si se compara cu ponderea Pij.

Sunt posibile trei cazuri:

a) Hj - Hi < Pij;

b) Hj - Hi = Pij;

c) Hj - Hi > Pij.

Cazurile a) si b) nu permit micsorarea distantei dintre vârful iniţial şi x_j, adica Hj, iar cazul "c" permite micşorarea distanţei dintre vârful iniţial şi x_j, adica Hj prin modificarea:

Hj = Hi + Pij.

Arcul	Ponderea	Prima diferenta	A doua difer
(x_i,x_j)	P_{ij}	H_j-H_i	H_j-H_i
(1,2)	4	$H_2-H_1=\infty-0>P_{12}$; $H_2=H_1+P_{12}=0+4=4$	$H_2-H_1=4-0=P_{12}$;
(1,3)	5	$H_3-H_1=\infty-0>P_{13}$; $H_3=H_1+P_{13}=0+5=5$	$H_3-H_1=5-0=P_{13}$;
(1,5)	8	$H_5-H_1=\infty-0>P_{15}$; $H_5=H_1+P_{15}=0+8=8$	$H_5-H_1=8-0=P_{15}$;
(2,3)	3	$H_3-H_2=5-4<P_{23}$; H_3 nu se schimba	$H_3-H_2=5-4<P_{23}$;
(2,4)	2	$H_4-H_2=\infty-4>P_{24}$;$H_4=H_2+P_{24}=4+2=6$	$H_4-H_2=6-4=P_{24}$;
(3,4)	2	$H_4-H_3=6-5<P_{34}$;H_4 nu se schimba	$H_4-H_3=6-5<P_{34}$;
(3,5)	4	$H_5-H_3=8-5<P_{35}$;H_5 nu se schimba	$H_5-H_3=8-5<P_{35}$;
(3,7)	5	$H_7-H_3=\infty-5>P_{37}$;$H_7=H_3+P_{37}=5+5=10$	$H_7-H_3=10-5=P_{37}$;
(4,5)	4	$H_5-H_4=8-6<P_{45}$; H_5 nu se schimba	$H_5-H_4=8-6<P_{45}$;
(4,6)	4	$H_6-H_4=\infty-6>P_{46}$;$H_6=H_4+P_{46}=6+4=10$	$H_6-H_4=10-6=P_{46}$;
(4,8)	7	$H_8-H_4=\infty-6>P_{48}$; $H_8=H_4+P_{48}=6+7=13$	$H_8-H_4=13-6=P_{48}$;
(5,6)	2	$H_6-H_5=10-8=P_{56}$; H_6 nu se modifica	$H_6-H_5=10-8=P_{56}$;
(5,7)	3	$H_7-H_5=10-8<P_{57}$; H_7 nu se schimba	$H_7-H_5=10-8=P_{57}$
(5,8)	5	$H_8-H_5=13-8=P_{45}$;H_8 nu se schimba	$H_8-H_5=13-8=P_{58}$
(6,8)	3	$H_8-H_6=13-10=P_{68}$;H_8 nu se schimba	$H_8-H_6=13-10=P_{68}$
(7,8)	3	$H_8-H_7=13-10=P_{78}$;H_8 nu se schimba	$H_8-H_7=13-10=P_{78}$;

Procesul stopează.

Lunjimea drumului minim dintre x_1 şi x_8 coincide cu $H_8=13$

Pentru determinarea vârfurilor prin care trece drumul startăm din ultimul vârf x_8

Înainte de x_8 este situat x_7 fiindcă are loc relaţia $H_8-H_7=13-10=P_{78}$

Înainte de x_8 este situat şi x_6 fiindcă are loc relaţia $H_8-H_6=13-10=P_{68}$

Înainte de x_8 este situat şi x_5 fiindcă are loc relaţia $H_8-H_5=13-8=P_{45}$

Înainte de x_8 este situat şi x_4 fiindcă are loc relaţia $H_8-H_4=13-6=P_{48}$

În top este situat vârful cu cel mai mare indice x_7

Înainte de x_7 este situat x_5 fiindcă are loc relaţia $H_7-H_5=10-8=P_{57}$

Înainte de x_7 este situat şi x_3 fiindcă are loc relaţia $H_7-H_3=10-5=P_{37}$;

În top este situat vârful cu cel mai mare indice x_6

Înainte de x_6 este situat x_5 fiindcă are loc relaţia H_6-H_5=10-8=P_{56}
Înainte de x_6 este situat x_4 fiindcă are loc relaţia H_6-H_4=10-6=P_{46}
În top este situat vârful cu cel mai mare indice x_5
Înainte de x_5 este situat x_1 fiindcă are loc relaţia H_5-H_1=8-0=P_{15}
În top este situat vârful cu cel mai mare indice x_4
Înainte de x_4 este situat x_2 fiindcă are loc relaţia H_4-H_2=6-4=P_{24}
În top este situat vârful cu cel mai mare indice x_3
Înainte de x_3 este situat x_1 fiindcă are loc relaţia H_3-H_1=5-0=P_{13}
În top este situat vârful cu cel mai mare indice x_2
Înainte de x_2 este situat x_1 fiindcă are loc relaţia H_2-H_1=4-0=P_{12}

Am obţinut 5 drumuri minime distincte:
d_1=(1,3,7,8),
d_2=(1,5,8),
d_3=(1,5,6,8),
d_4=(1,2,4,6,8),
d_5=(1,2,4,8).

<u>DRUM MAXIM</u> **<u>(Algoritmul Ford)</u>**

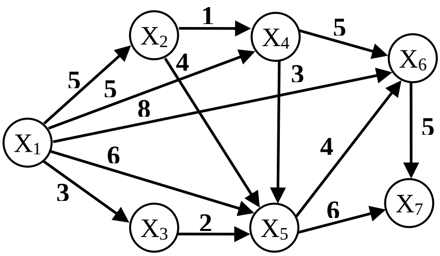
Algoritmul Ford poate fi aplicat si pentru determinarea drumului maxim in graful ponderat, daca in graf nu exista cicluri. Fata de drumul minim exista doar doua modificari:

1) In etichetele initiale in loc de ∞ se introduce (-∞);
2) La calcularea diferentelor Hj – Hi exista cazurile:

a) Hj - Hi < Pij;
b) Hj - Hi = Pij;
c) Hj - Hi > Pij.

Cazurile b) si c) nu permit marirea distantei dintre vârful iniţial şi x_j, adica Hj, iar cazul "a" permite marirea distanţei dintre vârful iniţial şi x_j, adica Hj prin modificarea:
Hj = Hi + Pij.

<u>EXEMPLUL 4.</u> Folosind algoritmului lui Ford să se determine drumul de valoare maximă între vârfurile x_1 şi x_7 ale grafului din figura 1.



Rezolvare:

I. $H_1 = 0$;

II. $H_j = -\infty$;

III. Examinăm toate arcele care iese din vârful x_1:

$H_2-H_1<P_{12}$	$-\infty-0<5\Rightarrow$	$H_2=H_1+P_{12}=0+5=5$
$H_4-H_1<P_{14}$	$-\infty-0<5\Rightarrow$	$H_4=H_1+P_{14}=0+5=5$
$H_6-H_1<P_{16}$	$-\infty-0<8\Rightarrow$	$H_6=H_1+P_{16}=0+8=8$
$H_5-H_1<P_{15}$	$-\infty-0<6\Rightarrow$	$H_5=H_1+P_{15}=0+6=6$
$H_3-H_1<P_{13}$	$-\infty-0<3\Rightarrow$	$H_3=H_1+P_{13}=0+3=3$

(fig. 1.)

Examinăm toate arcele care iese din vârful x_2:

H_4-H_2<P_{24} 5-5<1 $\Rightarrow$ H_4=H_2+P_{24}=5+1=6

H_5-H_2<P_{25} 6-5<4 $\Rightarrow$ H_5=H_2+P_{25}=5+4=9

Examinăm toate arcele care iese din vârful x_3:

H_5-H_3>P_{35} 9-3>2 $\Rightarrow$ Eticheta la vîrful x_5 nu se schimbă.

Examinăm toate arcele care iese din vârful x_4:

H_5-H_4=P_{45} 9-6=3 $\Rightarrow$ Eticheta la vârful x_5 nu se schimbă.

H_6-H_4<P_{46} 8-6<5 $\Rightarrow$ H_6=H_4+P_{46}=6+5=11

Examinăm toate arcele care iese din vârful x_5:

H_6-H_5<P_{56} 11-9<4 $\Rightarrow$ H_6=H_5+P_{56}=9+4=13

H_7-H_5<P_{57} -∞-9<6 $\Rightarrow$ H_7=H_5+P_{57}=9+6=15

Examinăm toate arcele care iese din vârful x_6:

H_7-H_6<P_{67} 15-13<5 $\Rightarrow$ H_7=H_6+P_{67}=13+5=18

	1	2	3	4	5	6	7
I	0	-∞	-∞	-∞	-∞	-∞	-∞
II_1		5	3	5	6	8	-∞
III_2				6	9		-∞
IV_3							-∞
V_4						11	-∞
VI_5						13	15
VII_6							18

Fig.3.

$l_{\max}(1-7)=18$

IV. Determinăm drumul maxim: $H_7 - H_6 = L_{67}$, 18-13 = 5

$H_6 - H_5 = L_{56}$, 13-9 = 4

$H_5 - H_4 = L_{45}$, 9-6 = 3

$H_5 - H_2 = L_{25}$, 9-5 = 4

$H_4 - H_2 = L_{24}$, 6-5 = 1

$H_2 - H_1 = L_{12}$, 5-0 = 5

Drumurile corespunzătoare valorii maxime 18:

$$1 \to 2 \to 5 \to 6 \to 7$$

$$1 \to 2 \to 4 \to 5 \to 6 \to 7$$

EXEMPLUL 5.

Să se determine pentru graful din figura 4 drumul de valoare maximă între vârfurile x_1 şi x_8 conform algoritmului lui Ford.

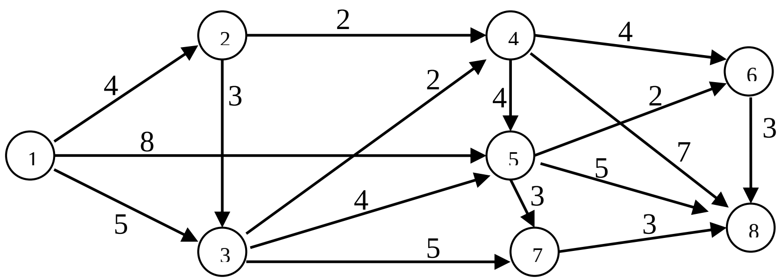


Fig.4

Rezolvare:

I. $H_1 = 0$;

H_2=-∞

H_3=-∞;

H_4=-∞;

H_5=-∞;

H_6=-∞;

H_7=-∞

H_8=-∞

Pentru fiecare arc (x_i, x_j) se calculeza diferenţele dintre eticheta virfului final si cel initial Hj – Hi si se compara cu ponderea Pij.

Sunt posibile trei cazuri:

a) Hj - Hi < Pij;

b) Hj - Hi = Pij;

c) Hj - Hi > Pij.

Cazurile b) si c) nu permit marirea distantei dintre vârful iniţial şi x_j, adica Hj, iar cazul "a" permite marirea distanţei dintre vârful iniţial şi x_j, adica Hj prin modificarea:

Hj = Hi + Pij.

Rezultatele le introducem in tabel

Arcul	Ponder.	Prima diferenta	A doua diferenta
(x_i,x_j)	P_{ij}	H_j-H_i	H_j-H_i
(1,2)	4	$H_2-H_1=-\infty-0<P_{12}$; $H_2=H_1+P_{12}=0+4=4$	$H_2-H_1=4-0=P_{12}$;
(1,3)	5	$H_3-H_1=-\infty-0<P_{13}$;$H_3=H_1+P_{13}=0+5=5$	$H_3-H_1=5-0=P_{13}$;
(1,5)	8	$H_5-H_1=-\infty-0<P_{15}$;$H_5=H_1+P_{15}=0+8=8$	$H_5-H_1=13-0>P_{15}$;
(2,3)	3	$H_3-H_2=5-4<P_{23}$; $H_3=H_2+P_{23}=4+3=7$	$H_3-H_2=7-4=P_{23}$;
(2,4)	2	$H_4-H_2=-\infty-4<P_{24}$;$H_4=H_2+P_{24}=4+2=6$	$H_4-H_2=9-4>P_{24}$;
(3,4)	2	$H_4-H_3=6-7<P_{34}$;$H_4=H_3+P_{34}=7+2=9$	$H_4-H_3=9-7=P_{34}$;
(3,5)	4	$H_5-H_3=8-5<P_{35}$; $H_5=H_3+P_{35}=7+4=11$	$H_5-H_3=13-7>P_{35}$;
(3,7)	5	$H_7-H_3=-\infty-7<P_{37}$;$H_7=H_3+P_{37}=7+5=12$	$H_7-H_3=16-7>P_{37}$;
(4,5)	4	$H_5-H_4=11-9<P_{45}$; $H_5=H_4+P_{45}=9+4=13$	$H_5-H_4=13-9=P_{45}$;
(4,6)	4	$H_6-H_4=-\infty-9<P_{46}$;$H_6=H_4+P_{46}=9+4=13$	$H_6-H_4=15-9>P_{46}$;
(4,8)	7	$H_8-H_4=-\infty-9<P_{48}$; $H_8=H_4+P_{48}=9+7=16$	$H_8-H_4=19-9>P_{48}$;
(5,6)	2	$H_6-H_5=13-13<P_{56}$;$H_6=H_5+P_{56}=13+2=15$	$H_6-H_5=15-13=P_{56}$;
(5,7)	3	$H_7-H_5=12-13<P_{57}$; $H_7=H_5+P_{57}=13+3=16$	$H_7-H_5=16-13=P_{57}$
(5,8)	5	$H_8-H_5=16-13<P_{58}$; $H_8=H_5+P_{58}=13+5=18$	$H_8-H_5=19-13>P_{45}$
(6,8)	3	$H_8-H_6=18-15=P_{68}$; H_8 nu se modifica	$H_8-H_6=19-15>P_{68}$
(7,8)	3	$H_8-H_7=18-16<P_{78}$; $H_8=H_7+P_{68}=16+3=19$	$H_8-H_7=19-16=P_{78}$;

Procesul stopează.

Lunjimea drumului maxim dintre x_1 şi x_8 coincide cu $H_8=19$

Pentru determinarea vârfurilor prin care trece drumul startăm din ultimul vârf x_8

Înainte de x_8 este situat x_7 fiindcă are loc relaţia $H_8-H_7=19-16=P_{78}$

În top este situat vârful cu cel mai mare indice x_7

Înainte de x_7 este situat x_5 fiindcă are loc relaţia $H_7-H_5=16-13= P_{57}$

În top este situat vârful cu cel mai mare indice x_5

Înainte de x_5 este situat x_4 fiindcă are loc relaţia $H_5-H_4=13-9= P_{45}$;

În top este situat vârful cu cel mai mare indice x_4

Înainte de x_4 este situat x_3 fiindcă are loc relaţia $H_4-H_3=9-7= P_{34}$

În top este situat vârful cu cel mai mare indice x_3

Înainte de x_3 este situat x_1 fiindcă are loc relaţia $H_3-H_1=5-0=P_{13}$;

Am obţinut drumu maxim:

$d_1=(1,3,4,5,7,8)$,

TEMA

<u>Drum minim in graful ponderat. Algoritmul Bellman-Kalaba pentru determinarea drumului minim.</u>

<u>Algoritmul Bellman-Calaba</u> permite determinarea drumului de valoare minimă din orice vârf al grafului până la un vârf fixat, numit vârf final.

Etapa I. Construim matricea ponderată de adiacenţă a grafului dat *G=(X,U)*: (fig. 4.)

a) m_{ij}= P_{ij}, dacă există arcul (x_i, x_j) de pondere P_{ij};

b) m_{ij}= ∞, unde ∞ este un număr foarte mare (de tip întreg maximal pentru calculatorul dat), dacă arcul (x_i, x_j) este lipsă; (∞ reprezintă lungimea unui drum arbitrar de la vârful x_i până la vârful x_j);

c) m_{ij}= 0, dacă $i = j$.

Practic incepem cu introducerea zerourilor pe diagonala principala.

Etapa a II-a. Elaborăm in linia (n+1) un vector V^0 în felul următor:

a) $V_i^0 = P_{in}$, dacă există arcul (x_i, x_n), unde x_n este vârful final pentru care se caută drumul minim, P_{in} este ponderea acestui arc;

b) $V_i^0 = \infty$, dacă arcul (x_i, x_n) este lipsă;

c) $V_i^0 = 0$, dacă $i = n$.

Practic aceasta inseana sa transpinem in linia (n+1) valorile din coloana a n-a.

Etapa a III-a.

Calculăm iterativ vectorul *V* în conformitate cu următorul procedeu:

$V_{(i)}^k = \min\left\{P_{ij} + V_{(j)}^{k-1}\right\}$, unde $i = 1,2,...,n-1,\ j = 1,2,...,n; i \neq j$

$V_n^k = 0$.

Dacă $V^k = V^{k-1}$ - STOP.

Componenta cu numărul *i* a vectorului V_i^k cu valoarea diferită de zero ne va da valoarea minimă a drumului dintre vârfurile x_i şi x_n.

Etapa a IV-a. Determinăm drumul de la vârful x_i până la vârful x_n, care corespunde valorii minime:

$$V^k = P_{ij} + V^{k-1} \Rightarrow P_{ij} = V^k - V^{k-1}$$

EXEMPLUL 1.

Să se determine pentru graful din figura 1 drumul de valoare minimă între vârfurile x_1 şi x_7 conform algoritmului lui Bellman-Kalaba in graful:

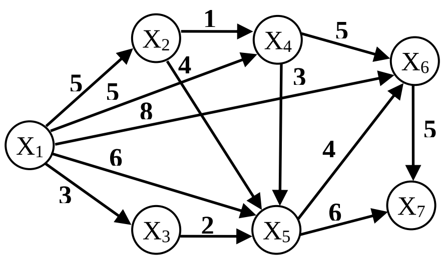


Fig.1

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	5	3	5	6	8	∞
2	∞	0	∞	1	4	∞	∞
3	∞	∞	0	∞	2	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	3	5	∞
5	∞	∞	∞	∞	0	4	6
6	∞	∞	∞	∞	∞	0	5
7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0
$V_{(i)}^0$	∞	∞	∞	∞	6	5	0
$V_{(i)}^1$	12	10	8	9	6	5	0
$V_{(i)}^2$	11	10	8	9	6	5	0
$V_{(i)}^3$	11	10	8	9	6	5	0

Fig. 2.

Construim primele 7 linii ale matricei ponderate de adiacenta.

In linia a 8-a intrdoducem valorile din coloana a 7-a, obtinind vectorul $V_{(i)}^0$.

In linia a 9-a construim vectorul $V_{(i)}^1$ conform etapei a 3-a cu componentele $V_{(i)}^1$:

$$V_{(1)}^1 = \min\{L_{12}+V_2^0, L_{13}+V_3^0, L_{14}+V_4^0, L_{15}+V_5^0, L_{16}+V_6^0, L_{17}+V_7^0\} =$$
$$= \min\{5+\infty, 3+\infty, 5+\infty, 6+6, 8+5, \infty+0\} = 12$$
$$V_{(2)}^1 = \min\{L_{21}+V_1^0, L_{23}+V_3^0, L_{24}+V_4^0, L_{25}+V_5^0, L_{26}+V_6^0, L_{27}+V_7^0\} =$$
$$= \min\{\infty+\infty, \infty+\infty, 1+\infty, 4+6, \infty+5, \infty+0\} = 10$$
$$V_{(3)}^1 = \min\{L_{31}+V_1^0, L_{32}+V_2^0, L_{34}+V_4^0, L_{35}+V_5^0, L_{36}+V_6^0, L_{37}+V_7^0\} =$$
$$= \min\{\infty+\infty, \infty+\infty, \infty+\infty, 2+6, \infty+5, \infty+0\} = 8$$
$$V_{(4)}^1 = \min\{L_{41}+V_1^0, L_{42}+V_2^0, L_{43}+V_3^0, L_{45}+V_5^0, L_{46}+V_6^0, L_{47}+V_7^0\} =$$
$$= \min\{\infty+\infty, \infty+\infty, \infty+\infty, 3+6, 5+5, \infty+0\} = 9$$

$$V_{(5)}^1 = \min\{L_{51}+V_1^0, L_{52}+V_2^0, L_{53}+V_3^0, L_{54}+V_4^0, L_{56}+V_6^0, L_{57}+V_7^0\} =$$
$$= \min\{\infty+\infty, \infty+\infty, \infty+\infty, \infty+\infty, 4+5, 6+0\} = 6$$
$$V_{(6)}^1 = \min\{L_{61}+V_1^0, L_{62}+V_2^0, L_{63}+V_3^0, L_{64}+V_4^0, L_{65}+V_5^0, L_{67}+V_7^0\} =$$
$$= \min\{\infty+\infty, \infty+\infty, \infty+\infty, \infty+\infty, \infty+6, 5+0\} = 5$$
$$V_{(1)}^2 = \min\{L_{12}+V_2^1, L_{13}+V_3^1, L_{14}+V_4^1, L_{15}+V_5^1, L_{16}+V_6^1, L_{17}+V_7^1\} =$$
$$= \min\{5+10, 3+8, 5+9, 6+6, 8+5, \infty+0\} = 11$$

In linia a 10-a construim vectorul $V_{(i)}^2$ conform etapei a 3-a cu componentele $V_{(i)}^2$:

$$V_{(2)}^2 = \min\{L_{21}+V_1^1, L_{23}+V_3^1, L_{24}+V_4^1, L_{25}+V_5^1, L_{26}+V_6^1, L_{27}+V_7^1\} =$$
$$= \min\{\infty+12, \infty+8, 1+9, 4+6, \infty+5, \infty+0\} = 10$$
$$V_{(3)}^2 = \min\{L_{31}+V_1^1, L_{32}+V_2^1, L_{34}+V_4^1, L_{35}+V_5^1, L_{36}+V_6^1, L_{37}+V_7^1\} =$$
$$= \min\{\infty+12, \infty+10, \infty+9, 2+6, \infty+5, \infty+0\} = 8$$
$$V_{(4)}^2 = \min\{L_{41}+V_1^1, L_{42}+V_2^1, L_{43}+V_3^1, L_{45}+V_5^1, L_{46}+V_6^1, L_{47}+V_7^1\} =$$
$$= \min\{\infty+12, \infty+10, \infty+8, 3+6, 5+5, \infty+0\} = 9$$
$$V_{(5)}^2 = \min\{L_{51}+V_1^1, L_{52}+V_2^1, L_{53}+V_3^1, L_{54}+V_4^1, L_{56}+V_6^1, L_{57}+V_7^1\} =$$
$$= \min\{\infty+12, \infty+10, \infty+8, \infty+9, 4+5, 6+0\} = 6$$
$$V_{(6)}^2 = \min\{L_{61}+V_1^1, L_{62}+V_2^1, L_{63}+V_3^1, L_{64}+V_4^1, L_{65}+V_5^1, L_{67}+V_7^1\} =$$
$$= \min\{\infty+12, \infty+10, \infty+8, \infty+9, \infty+6, 5+0\} = 5$$

In linia a 11-a construim vectorul $V_{(i)}^3$ conform etapei a 3-a cu componentele $V_{(i)}^3$:

$$V_{(1)}^3 = \min\{L_{12}+V_2^2, L_{13}+V_3^2, L_{14}+V_4^2, L_{15}+V_5^2, L_{16}+V_6^2, L_{17}+V_7^2\} =$$
$$= \min\{5+10, 3+8, 5+9, 6+6, 8+5, \infty+0\} = 11$$
$$V_{(2)}^3 = \min\{L_{21}+V_1^2, L_{23}+V_3^2, L_{24}+V_4^2, L_{25}+V_5^2, L_{26}+V_6^2, L_{27}+V_7^2\} =$$
$$= \min\{\infty+11, \infty+8, 1+9, 4+6, \infty+5, \infty+0\} = 10$$
$$V_{(3)}^3 = \min\{L_{31}+V_1^2, L_{32}+V_2^2, L_{34}+V_4^2, L_{35}+V_5^2, L_{36}+V_6^3, L_{37}+V_7^3\} =$$

$$= \min\{\infty + 11, \infty + 10, \infty + 9, 2 + 6, \infty + 5, \infty + 0\} = 8$$

$$V_{(4)}^3 = \min\{L_{41} + V_1^2, L_{42} + V_2^2, L_{43} + V_3^2, L_{45} + V_5^2, L_{46} + V_6^3, L_{47} + V_7^3\} =$$

$$= \min\{\infty + 11, \infty + 10, \infty + 8, 3 + 6, 5 + 5, \infty + 0\} = 9$$

$$V_{(5)}^3 = \min\{L_{51} + V_1^2, L_{52} + V_2^2, L_{53} + V_3^2, L_{54} + V_4^2, L_{56} + V_6^3, L_{57} + V_7^3\} =$$

$$= \min\{\infty + 11, \infty + 10, \infty + 8, \infty + 9, 4 + 5, 6 + 0\} = 6$$

$$V_{(6)}^3 = \min\{L_{61} + V_1^2, L_{62} + V_2^2, L_{63} + V_3^2, L_{64} + V_4^2, L_{65} + V_5^3, L_{67} + V_7^3\} =$$

$$= \min\{\infty + 11, \infty + 10, \infty + 8, \infty + 9, \infty + 6, 5 + 0\} = 5$$

Observăm că am ajuns la $V_i^3 = V_i^2$ - STOP (fig.1.)

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	5	3	5	6	8	∞
2	∞	0	∞	1	4	∞	∞
3	∞	∞	0	∞	2	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	3	5	∞
5	∞	∞	∞	∞	0	4	6
6	∞	∞	∞	∞	∞	0	5
7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0
$V_{(i)}^0$	∞	∞	∞	∞	6	5	0
$V_{(i)}^1$	12	10	8	9	6	5	0
$V_{(i)}^2$	11	10	8	9	6	5	0
$V_{(i)}^3$	11	10	8	9	6	5	0

Fig. 1.

$$l_{\min}(1-7) = V_{(1)}^3 = 11$$

Determinăm drumul de valoare minimă:

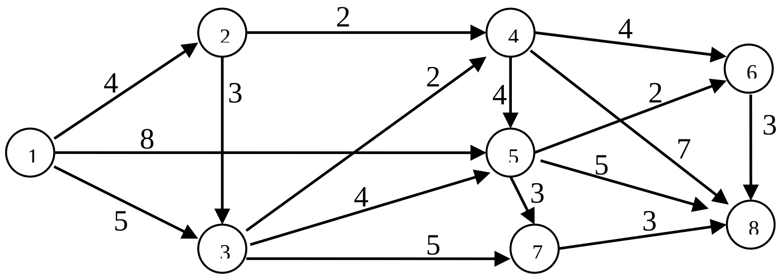
$L_{13} = V_1 - V_3 \Rightarrow$ $L_{35} = V_3 - V_5 \Rightarrow$ $L_{57} = V_5 - V_7 \Rightarrow$

3 = 11 - 8 2 = 8 – 6 6 = 6 – 0

Drumul corespunzător valorii minime 11: $1 \to 3 \to 5 \to 7$

EXEMPLUL 2.

Să se determine drumul de valoare minimă între vârfurile x_1 şi x_8 conform algoritmului lui Bellman-Kalaba in graful:



Rezolvare

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	4	5	∞	8	∞	∞	∞
2	∞	0	3	2	∞	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	2	4	∞	5	∞
4	∞	∞	∞	0	4	4	∞	7
5	∞	∞	∞	∞	0	2	3	5
6	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	3
7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	3
8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0
$V_{(i)}^{0}$	∞	∞	∞	7	5	3	3	0
$V_{(i)}^{1}$	13	9	8	7	5	3	3	0
$V_{(i)}^{2}$	13	9	8	7	5	3	3	0

$V_{(1)}^{2}$ -a_{12}=$V_{(2)}^{2}$ $\Rightarrow x_1 \rightarrow x_2$

13-4=9

$V_{(1)}^{2}$ -a_{13}=$V_{(3)}^{2}$ $\Rightarrow x_1 \rightarrow x_3$

13-5=8

$V_{(1)}^{2}$ -a_{15}=$V_{(5)}^{2}$ $\Rightarrow x_1 \rightarrow x_5$

13-8=5

$V_{(2)}^{2}$ - a_{24} = $V_{(4)}^{2}$ $\Rightarrow x_2 \rightarrow x_4$

$V_{(3)}^{2}$ – a_{37} =$V_{(7)}^{2}$ $\Rightarrow x_3 \rightarrow x_7$

$V_{(4)}^{2}$ -a_{46}= $V_{(6)}^{2}$ $\Rightarrow x_4 \rightarrow x_6$

$V_{(4)}^{2}$ -a_{48}= $V_{(8)}^{2}$ $\Rightarrow x_4 \rightarrow x_8$

$V_{(5)}^{2}$ - a_{56}=$V_{(6)}^{2}$ $\Rightarrow x_5 \rightarrow x_6$

$V_{(5)}^{2}$ -a_{58}= $V_{(8)}^{2}$ $\Rightarrow x_5 \rightarrow x_8$

$V_{(6)}^{2}$ -a_{68}= $V_{(8)}^{2}$ $\Rightarrow x_6 \rightarrow x_8$

$V_{(7)}^{2}$ - a_{78}=$V_{(8)}^{2}$ $\Rightarrow x_7 \rightarrow x_8$

Am obţinut 5 drumuri minime distincte:

d_1=(1,3,7,8),

d_2=(1,5,8),

d_3=(1,5,6,8),

d_4=(1,2,4,6,8),

d_5=(1,2,4,8).

Rezultatele confirmă rezultatele obţinute prin metoda Ford.

DRUMUL MAXIM.ALGORITMUL BELLMAN-KALABA(B-K)

Algoritmul B-K poate fi utilizat si pentru determinarea drumului maxim in graful ponderat aplicind urmatoarele doua modificari fata de determinarea drumului minim:

1)La etapa I , punctul b) m_{ij} = -∞, unde -∞ este un număr foarte mic (de tip întreg minimal pentru calculatorul dat), dacă arcul (x_i, x_j) este lipsă; (-∞ reprezintă lungimea unui drum arbitrar de la vârful x_i până la vârful x_j);

2) La etapa III $V_{(i)}^k = \max\{P_{ij} + V_{(j)}^{k-1}\}$, unde $i = 1,2,...,n-1,\ j = 1,2,...,n; i \neq j$

$V_n^k = 0$.

Dacă $V^k = V^{k-1}$ - STOP.

Pentru graful din figura 1 să se determine drumul de valoare maximă între vârfurile x_1 şi x_7 folosind algoritmul Bellman-Calaba.

Rezolvare:

Etapa I. Construim matricea ponderată de adiacenţă a grafului dat *G=(X,U)*:

a) m_{ij} = L_{ij}, dacă există arcul (x_i, x_j) de pondere L_{ij};

b) m_{ij} = -∞, dacă arcul (x_i, x_j) este lipsă;

c) m_{ij} = 0, dacă $i = j$.

Etapa a II-a. Elaborăm un vector V_0 în felul următor:

a) $V_i^0 = L_{in}$, dacă există arcul (x_i, x_n), unde x_n este vârful final pentru care se caută drumul maxim, L_{in} este ponderea acestui arc;

b) $V_i^0 = -\infty$, dacă arcul (x_i, x_n) este lipsă;

c) $V_i^0 = 0$, dacă $i = n$.

***Etapa a III-a.* Calculăm iterativ vectorul *V* în conformitate cu următorul procedeu:**

$V_{(i)}^k = \max\left\{L_{ij} + V_{(j)}^{k-1}\right\}$, unde $i = 1,2,...,n-1,\ j = 1,2,...,n; i \neq j$

$V_n^k = 0$.

Dacă $V^k = V^{k-1}$ - STOP (fig. 3.12)

Componenta cu numărul *i* a vectorului V_i^k cu valoarea diferită de zero ne va da valoarea maximă a drumului dintre vârfurile x_i şi x_n.

Etapa a IV-a. Determinăm drumul de la vârful x_i până la vârful x_n, care corespunde valorii maxime:

$V^k = L_{ij} + V^{k-1} \Rightarrow L_{ij} = V^k - V^{k-1}$(fig. 3)

$l_{max}(1-7) = 18$

Determinăm drumul de valoare maximă:

$L_{12} = V_1 - V_2$ $L_{24} = V_2 - V_4$ $L_{25} = V_2 - V_5$ $L_{45} = V_4 - V_5$

5 = 18 - 13 1 = 13 – 12 4 = 13 – 9 3 = 12 – 9

$L_{56} = V_5 - V_6$ $L_{67} = V_6 - V_7$

4 = 9 – 5 5 = 5 – 0

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	5	3	5	6	8	-∞
2	-∞	0	-∞	1	4	-∞	-∞
3	-∞	-∞	0	-∞	2	-∞	-∞

4	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	3	5	$-\infty$
5	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	4	6
6	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	5
7	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$V_{(i)}^0$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	6	5	0
$V_{(i)}^1$	13	10	8	10	9	5	0
$V_{(i)}^2$	15	13	11	12	9	5	0
$V_{(i)}^3$	18	13	11	12	9	5	0
$V_{(i)}^4$	18	13	11	12	9	5	0

Fig. 3

Drumurile corespunzătoare valorii maxime 18:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7$$

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7$$