TEMA4.Transformări echivalente şi decompoziţia FB

Formule echivalente Anterior am numit superpoziţie a funcţiilor $f_1, f_2,..., f_n$, funcţia f obţinută prin substituiri şi redenumiri de argumente în aceste funcţii, iar prin formulă înţelegem expresia care descrie această superpoziţie. Vom concretiza noţiunea de formulă pentru funcţiile logice, introducând noţiunea de formulă peste $\Omega = \{ f_1, f_2,..., f_n,...\}$, Ω fiind o mulţime de funcţii logice date. Considerăm formulă peste Ω toate expresiile care conţin numai simboluri de variabile, simboluri de funcţii şi paranteze. Valoarea funcţiei dată de o formulă poate fi calculată, cunoscând valorile argumentelor şi tabelele de adevăr ale funcţiilor logice elementare (v. tab.2).

Deci, o formulă, pune în corespondenţă fiecărui set de valori ale argumentelor o anumită valoare de adevăr a funcţiei şi poate servi, împreună cu tabelele de adevăr, drept metodă de definire şi calculare a valorilor funcţiilor logice. Se mai spune că o formulă reprezintă sau realizează o funcţie logică.

Calculând valorile FB pentru toate 2^n combinaţii ale argumentelor restabilim tabelul de adevăr al acestei funcţii.

Însă, spre deosebire de tabelele de adevăr, o funcţie logică poate fi realizată prin mai multe formule. Cu alte cuvinte, dacă între mulţimea tabelelor de adevăr şi mulţimea funcţiilor logice există o corespondenţă biunivocă, alta este situaţia cu formulele: o FB poate fi prezentată printr-o infinitate de formule. De exemplu, funcţia Pierce $f_8(x_1, x_2)= x_1 \uparrow x_2$ mai poate fi realizată prin formula $\overline{x_1 + x_2}$, sau $\overline{x_1}.\overline{x_2}$ iar funcţia Sheffer $f_{14}(x_1, x_2) = x_1 \mid x_2$ prin $\overline{x_1 x_2}$, sau $\overline{x_1} + \overline{x_2}$

Formulele, care realizează aceeaşi funcţie logică se numesc echivalente. Echivalenţa a două formule se va nota prin simbolul = sau ≡. Metoda generală de stabilire a echivalenţei a două formule constă în construirea tabelelor lor de adevăr şi compararea acestora. Altă metodă, denumită metoda transformărilor echivalente, presupune transformarea uneia dintre formule (sau a ambelor) până se ajunge la o formă evident comună.

EXEMPLUl 1.

Pentru funcţia logică

$$f = \overline{\left(\overline{x_1 \oplus x_2} \downarrow \overline{x_1 \rightarrow \overline{x_3 \oplus x_4}}\right) \sim \overline{\left(\left(x_1\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_4}\right) \mid \left(\overline{x_2 \vee x_3} \downarrow \overline{x_4 \sim x_2}\right)\right)}}$$

de alcătuit tabelul de adevăr;

Rezolvare:

Pentru a simplifica funcţia logică dată întroducem notăţiile:

$x_1 \oplus x_2 = \varphi_1$	$\overline{x_3} = \varphi_8$	$x_4 \sim x_2 = \varphi_{15}$
$\overline{\varphi_1} = \varphi_2$	$x_1\varphi_8 = \varphi_9$	$\overline{\varphi_{15}} = \varphi_{16}$
$x_3 \oplus x_4 = \varphi_3$	$\overline{x_4} = \varphi_{10}$	$\varphi_{14} \downarrow \varphi_{16} = \varphi_{17}$
$\overline{\varphi_3} = \varphi_4$	$x_1\varphi_{10} = \varphi_{11}$	$\varphi_{12} \mid \varphi_{17} = \varphi_{18}$
$x_1 \rightarrow \varphi_4 = \varphi_5$	$\varphi_9 \vee \varphi_{11} = \varphi_{12}$	$\overline{\varphi_{18}} = \varphi_{19}$
$\overline{\varphi_5} = \varphi_6$	$x_2 \vee x_3 = \varphi_{13}$	$\varphi_7 \sim \varphi_{19} = \varphi_{20}$
$\varphi_2 \downarrow \varphi_6 = \varphi_7$	$\overline{\varphi_{13}} = \varphi_{14}$	$\overline{\varphi_{20}} = f$

Rezultatele calculelor pe operatii le introducem in urmatorul tabel de adevăr

N	x_1	x_2	x_3	x_4	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}	φ_{16}	φ_{17}	φ_{18}	φ_{19}	φ_{20}	f
0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0
2	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0
3	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0
4	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1
6	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
7	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1
8	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1
9	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
10	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
12	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0
13	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
14	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0
15	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0

Pentru functia data *f* tabelul de adevar contine obligator coloanele:

N – numarul echivalentului zecimal a seturilor de valori ale argumentelor;

Valorilor argumentelor x_1, x_2, x_3, x_4;

Coloana lui *f:*

Tabelul de adevăr:

N	x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	0

In tabelul de adevar pentru a introduce valorile argumentelor exista o metoda simpla:

In I coloana inscriem 8 de zero si apoi 8 de unu;

In II coloana inscriem 4 de zero si apoi 4 de unu,apoi irasi 4 de zero si apoi 4 de unu;

In III coloana inscriem alternativ cite 2 de 0 si apoi 2 de unu;

In IV coloana inscriem alternativ cite 1 de 0 si apoi 1 de unu;

Functia logica poate fi scrisa si ca suma logica a echvalentilor zecimal a acelor seturi de valori pentru care functia primeste valoarea **1:**

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=\sum_{f=1}(4,5,6,7,8,10,11,13) \qquad (*)$$

Functia logica mai poate fi scrisa ca produsul logic a echvalentilor zecimal a acelor seturi de valori pentru care functia primeste valoarea **0**

$$f = \prod_{f=0}(0,1,2,3,9,12,14,15). \qquad (**)$$

Din tabelul de adevar putem obtine reprezentarile (*) sau (**) si invers.

TEMA4.1.Decompoziţia FB. Forma Canonica Disjunctiva Normala (FCDN)

Notam $x^0 = \bar{x}$ si $x^1 = x$.

Atunci pentru un parametru a∈ ***B={0,1}*** avem

$X^a = 1$, daca x=a si

$X^a = 0$, daca $x \neq a$

Are loc

Teorema: Orice functie logica $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ in mod unic poate fi reprezentata in forma

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigvee_{\alpha_1, ..., \alpha_m} x_1^{\alpha_1} ... x_m^{\alpha_m} f(\alpha_1, ..., \alpha_m, x_{m+1}, ..., x_m), \qquad (1)$$

unde m≤n, iar disjunctiile se vor lua pentru toate 2^m seturi formate de variabilele $x_1, x_2, ..., x_m$.

Formula (1) se numeste decompozitia functiei booleene.

Pentru m=1

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \bar{x}_1 f(0, x_2, ..., x_n) + x_1 f(1, x_2, ..., x_n)$$

Pentru m=2

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 f(0,0, x_3 ..., x_n) + \bar{x}_1 x_2 f(01, x_3 ..., x_n) + x_1 \bar{x}_2 f(1,0, x_3 ..., x_n) + x_1 x_2 f(1,1, x_3 ..., x_n)$$

Un interes deosebit prezinta cazul m=n.

Decompoziţia

$$f\left(x_1, x_2,..., x_n\right) = \underset{\alpha_1,...,\alpha_n}{\vee} x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}\, f\left(\alpha_1,...,\alpha_n\right) = \underset{f\left(\alpha_1,...,\alpha_n\right)=1}{\vee} x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n} \qquad (2)$$

se numeşte *formă canonică disjunctivă normala* (FCDN) sau *formă normală disjunctă perfectă* (FNDP) a funcţiei $f\left(x_1, x_2,..., x_n\right)$, iar conjuncţiile respective $x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}$ se numesc *conjunctii elementare, termeni canonici conjunctivi* (TCC) sau *termeni minimali (mintermi).*

FCDN contine exact atitea TCC cite unitati contine tabelul de adevar al functiei.

Fiecarui set de valori a argumentelor pentru care f=1 ii corespunde un TCC in care variabila x_i *este negata, daca in set ii corespunde valoarea zero si* x_i *este fara negatie, daca in set ii corespunde valoarea 1.*

Algoritmul determinarii FCDN pentru functia booleana:

1)Pentru FB construim tabelul de adevar;

2)Pentru toate seturile de valori a argumentelor pentru care f=1 se scriu TCC s-in fiecare variabila x_i *este negata, daca in set ii corespunde valoarea zero si* x_i *este fara negatie, daca in set ii corespunde valoarea 1.*

3) Reunind toti TCC obtinuti primim FCDN.

Deci, FCDN= $\underset{f\ =1}{\vee} TCC$,

Daca pentru un TCC orice variabila x_i va fi inlocuita cu **0,** daca in TCC intra ca $\overline{x}_i$ si cu 1 daca in TCC intra ca x_i, atunci primim reprezentarea binara a acestui TCC.

De exemplu daca TCC= $\overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 x_4$, reprezentarea binara a acestui TCC va fi 0 1 0 1.

Pentru FCDN poate fi utilizata suma echivalentilor zecimali a seturilor de valori ale argumentelor pentru care f=1.

Pentru ilustrare consideram exemplul din tema precedenta:

FB are tabelul de adevăr

N	x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	0

Pentru fiecare combinaţie de valori ale argumentelor aplicate în 1 se scriu termenii canonici conjunctivi în care argumentul x_i este luat ca atare sau negat după cum valoarea lui în combinaţia respectivă este 1 sau 0:

TCC: $\overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4$ $\qquad$ $x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4$

$\overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 x_4$ $\qquad$ $x_1 \overline{x}_2 x_3 \overline{x}_4$

$\overline{x}_1 x_2 x_3 \overline{x}_4$ $\qquad$ $x_1 \overline{x}_2 x_3 x_4$

$\overline{x}_1 x_2 x_3 x_4$ $\qquad$ $x_1 x_2 \overline{x}_3 x_4$

Determinăm FCDN, reunind TCC prin semnul disjuncţiei:

FCDN: $f= \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \vee$ $x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$

Functia logica poate fi scrisa si ca suma logica a echivalentilor zecimal a acelor seturi de valori pentru care functia primeste valoarea **1:**

$$f=\sum_{f=1}(4,5,6,7,8,10,11,13) \qquad (*)$$

TEMA4.2.Decompoziţia FB. Forma Canonica Conjunctiva Normala (FCCN)

Reprezentarea unei FB se poate face şi sub o altă formă, numită *forma canonică conjunctiva normala* (FCCN).

Orice FB poate fi descrisă printr-o expresie de forma

$$f\left(x_1, x_2,..., x_n\right)= \underset{0}{\&}\left(x_1^{\overline{\alpha_1}} \vee x_2^{\overline{\alpha_2}} \vee ... \vee x_n^{\overline{\alpha_n}}\right) \qquad (1)$$

unde prin $\underset{0}{\&}$ s-a notat faptul că se consideră conjuncţia termenilor disjunctivi pentru care funcţia *f* ia valoarea 0. Reprezentarea FB sub forma (1) se numeşte *formă canonică conjunctivă normala* (FCCN) sau *formă normală conjunctă perfectă* (FNCP) a funcţiei $f\left(x_1, x_2,..., x_n\right)$, iar disjuncţiile respective

$$x_1^{\overline{\alpha_1}} \vee x_2^{\overline{\alpha_2}} \vee ... \vee x_n^{\overline{\alpha_n}}$$

se numesc *disjunctii elementare, termeni canonici disjunctivi* (TCD) sau *factori minimali (minfactori).*

FCCN contine exact atitea TCD cite zerouri contine tabelul de adevar al functiei.

Fiecarui set de valori a argumentelor pentru care f=0 ii corespunde un TCD in care variabila x_i *este negata, daca in set ii corespunde valoarea 1 si* x_i *este fara negatie, daca in set ii corespunde valoarea zero.*

Algoritmul determinarii FCCN pentru functia booleana:

1)Pentru FB construim tabelul de adevar;

2)Pentru toate seturile de valori a argumentelor pentru care f=0 se scriu TCD s-in fiecare variabila x_i *este negata, daca in set ii corespunde valoarea 1 si* x_i *este fara negatie, daca in set ii corespunde valoarea zero.*

3) Consderind produsul logic a tuturor TCD obtinuti primim FCCN.

Deci, FCCN= $\bigwedge_{f=1,}$ TCD

Daca pentru un TCD orice variabila x_i va fi inlocuita cu 1**,** daca in TCD intra ca $\overline{x}_i$ si cu 0 daca in TCD intra ca x_i, atunci primim reprezentarea binara a acestui TCD.

De exemplu, daca TCD= $\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3 \vee x_4$, reprezentarea binara a acestui TCD va fi 1 0 1 0.

Pentru FCCN poate fi utilizata produsul echivalentilor zecimali a seturilor de valori ale argumentelor pentru care f=0.

Pentru ilustrare consideram exemplul din tema precedenta:

FB are tabelul de adevăr

N	x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	0

La fiecare combinaţie de valori ale argumentelor aplicate în 0 se scriu termenii canonici disjunctivi(TCD) în care argumentul x_i este luat ca atare sau negat după cum valoarea lui în combinaţia respectivă este 0 sau 1:

TCD: $x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4$ $\qquad \overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4}$

$x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4}$ $\qquad \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4$

$x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4$ $\qquad \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4$

$x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}$ $\qquad \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}$

Pentru a determina FCCN reunim TCD prin semnul conjuncţiei:

FCCN: $y=(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4}) \wedge$
$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4}) \wedge$
$(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})$.

Functia logica poate fi scrisa si ca produsul logic a echvalentilor zecimal a acelor seturi de valori pentru care functia primeste valoarea 0**:**

$$\text{FCC: } f=\Pi(0,1,2,3,9,12,14,15).$$
$$\qquad\qquad f=0$$