Fie cercul $C:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ Elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ Hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

parabola $y^2=2px$ dau invers

1) $z=x^2+y^2$. Este evident că $D(f)=R^2$

2) $z=\sqrt{x^2+y^2}$ Avem $D(f)=\{(x,y)|x^2+y^2\geq 0\}$

3) $z=arcsin\frac{x}{y}$. Avem $D(f)=\left\{(x,y)|-1\leq\frac{x}{y}\leq 1\right\}$

Valoarea aproximativa

$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+f_x'(x_0,y_0)\Delta x+f_y'(x_0,y_0)\Delta y$ –

derivata intrun punct dupa directie

numește **derivata funcției** $z=f(x,y)$ **în punctul** M_0 **după direcția** $\overline{l}$ şi se notează cu $\frac{\partial f(x_0y_0)}{\partial l}$ sau $\frac{\partial z(M_0)}{\partial l}$. Deci $\frac{\partial f(x_0y_0)}{\partial l}.=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta_l z}{\Delta l}$.

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \boldsymbol{l}}=\mathbf{z}_{\mathbf{x}}'(\boldsymbol{M}_0)\mathbf{cos}\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{z}_{\boldsymbol{y}}'(\boldsymbol{M}_0)\mathbf{cos}\boldsymbol{\beta}.$$

Pentru funcția de trei variabile $u=f(x,y,z)$ derivata după direcția $\bar{l}=\{m,n,p\}$ se calculează după formula:

$$\frac{\partial u}{\partial l}=u_x'(M_0)cos\alpha+u_y'(M_0)cos\beta+\ u_z'(M_0)cos\gamma,$$

unde $cos\alpha=\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$, $cos\beta=\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$, $cos\gamma=\frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$.

SE deriva dupa $u_x'\ =\ u_x'(M)=$ se calculeaza cos

$u_y'\ =\ u_y'(M)=$

$u_z'\ =\ u_z'(M)=$

$cos\alpha=\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$, $cos\beta=\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$, $cos\gamma=\frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$.

gradientul

$a=\mathrm{u}_x'(M_0),\ b=\mathrm{u}_{\mathrm{y}}'(M_0),\ c=\mathrm{u}_z'(M_0)$.

$$\vec{g}=\left\{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right\}=\{cos\mu,cos\tau,cos\sigma\},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}\,\boldsymbol{u}}=\{\mathbf{u}_x'(\boldsymbol{M}_0),\mathbf{u}_{\mathrm{y}}'(\boldsymbol{M}_0),\mathbf{u}_{\mathrm{z}}'(\boldsymbol{M}_0)\}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

numesc **derivate parțiale de ordinul II ale funcției** $z = f(x,y)$ şi se notează astfel:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ sau } \left(z'_x\right)'_x = z''_{x^2} = z''_{xx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ sau } \left(z'_x\right)'_y = z''_{xy},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ sau } \left(z'_y\right)'_x = z''_{yx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \text{ sau } \left(z'_y\right)'_y = z''_{y^2} = z''_{yy}.$$

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$$

$$d^2 z = z''_{xx} dx^2 + 2 z''_{xy} dx dy + z''_{yy} dy^2,$$

Definiție. Punctul $M_0(x_0, y_0)$ se numeşte punct de **maxim** (**minim**) **local**, dacă există o vecinătate V a lui $M_0(x_0, y_0)$, astfel încît pentru orice $M(x,y)$ din $V \cap D(f)$ avem că $f(x_0, y_0) \geq f(x,y)$ $\left(f(x_0, y_0) \leq f(x,y)\right)$.

1.se face un sistem cu derivatele de ordinul 1 egalate cu 0

Definiție. 1. Punctul $M_0(x_0, y_0)$ în care derivatele parțiale se anulează simultan, se numeşte **punct staționar**.

2. Punctul $M_0(x_0, y_0)$ în care derivatele parțiale se anulează simultan sau cel puțin una nu există, se numeşte **punct critic.**

Fie funcția $z = f(x,y)$ şi $M_0(x_0, y_0)$ un punct, în care există derivatele parțiale de ordinul doi şi sînt continui. Notăm cu

$$H(M_0) = \begin{pmatrix} z''_{xx}(M_0) & z''_{xy}(M_0) \\ z''_{yx}(M_0) & z''_{yy}(M_0) \end{pmatrix},$$

1) Dacă $\Delta_1 > 0 \, şi \, \Delta_2 > 0$, atunci $M_0(x_0, y_0)$ este **punct de minim**.
2) Dacă $\Delta_1 < 0 \, şi \, \Delta_2 > 0$, atunci $M_0(x_0, y_0)$ este **punct de maxim.**
3) Dacă $\Delta_2 < 0$, atunci $M_0(x_0, y_0)$ nu este punct de extrem (este **punct "şa"**).
4) Dacă $\Delta_2 = 0$, atunci nu putem afirma nimic despre $M_0(x_0, y_0)$ (este nevoie de un studiu suplimentar)

Puncte de extrem local.

1pas $f'_x =$

$f'_y =$

2pas Puncte staționare - ? $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$

3 pas.

$f''_{xx} =$

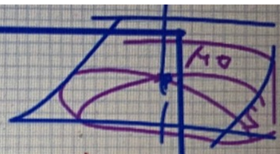
$f''_{xy} =$

$f''_{yy} =$

4 pas. Scrien hessian f. ci f în M_0

$$H(M_0) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(M_0) & f''_{xy}(M_0) \\ f''_{yx}(M_0) & f''_{yy}(M_0) \end{pmatrix}$$

Teorie: $S: \boxed{F(x,y,z)=0}$ $\quad M_0(x_0, y_0, z_0)$



$$\vec{n}_{pl.tg} = \{\underbrace{F'_x(M_0)}_{A}, \underbrace{F'_y(M_0)}_{B}, \underbrace{F'_z(M_0)}_{C}\}.$$

Ec.pl.tg.:

$$F'_x(M_0)(x-x_0) + F'_y(M_0)(y-y_0) + F'_z(M_0)(z-z_0) = 0$$

$$\bar{q}_{nr} = \{\underbrace{F'_x(M_0)}_{m}, \underbrace{F'_y(M_0)}_{n}, \underbrace{F'_z(M_0)}_{p}\}$$

Ec.nor

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}$$