# TEMA 9.Variabile aleatoare de tip (absolut) continuu şi caracteristicele lor numerice

## 9.1. Noţiune de variabilă aleatoare de tip (absolut) continuu

Se numeşte *v.a.de tip (absolut) continuu* (v.a.c.) o variabilă aleatoare, a carei mulţime de valori posibile reprezintă un interval de numere reale şi funcţia de repartiţie este continuă în intervalul $(-\infty; \infty)$, dar şi derivabilă, cu exceptia poate că, de o mulţime finită sau infinita cel mult numărabilă de puncte de pe acest interval.

## 9.2. Exemple de variabile aleatoare continue

1) Durata funcţionării unui aparat electric este o variabilă aleatoare continuă care poate lua valori din intervalul $[0; \infty)$.

2) Fie că se măsoară lungimea unui obiect sau rezistenţa unei linii electrice cu un aparat de măsurare astfel încât rezultatul măsurării se rotunjeşte până la un număr întreg. Atunci eroarea de rotunjire este o v.a.c. care ia valori din intervalul $(-1; 1)$.

3) Cantitatea anuală de precipitaţii atmosferice în careva regiune este o variabilă aleatoare continuă care ia valori din intervalul $[0; \infty)$.

## 9.3. Funcţia de repartiţie

Funcţia de repartiţie pentru orice variabilă aleatoare a fost definită în unul din paragrafele precedente. Pentru comoditate amintim aici definiţia şi proprietăţile acestei funcţii.

Se numeşte *funcţie de repartiţie* a variabilei aleatoare $\xi$ funcţia $F$**:**$\mathbf{R}\to[0,1]$ definită prin egalitatea

$$F(x) = P(\xi < x). \qquad (1)$$

*Funcţia de repartiţie are următoarele* ***proprietăţi caracteristice***:

1) $F(+\infty) = 1$, $F(-\infty) = 0$;

2) $F(x)$ *este o funcţie nedescrescătoare*;

3) $F(x)$ *este continuă la stânga în orice punct* $x\in\mathbf{R}$.

Din formulele de calcul ale probabilitatilor în baza f.r. deducem ca*:*

$$\boldsymbol{P(a \le \xi < b) = F(b) - F(a)}. \qquad (2)$$

$$P(\xi = a) = 0. \quad (3)$$

$$P(a \le \xi < b) = P(a < \xi < b) = P(a < \xi \le b) = P(a \le \xi \le b). \quad (4)$$

## 9.4. Densitatea de repartiţie şi proprietăţile acesteia

**Definiţie.**Vom numi *densitate de repartiţie (d.r.) a v.a.c.* $\xi$ cu f.r. $F(x)$ funcţia $f(x)$ definită prin egalitatea

$$f(x) = F'(x). \quad (5)$$

Din definiţie rezultă că f.r. *F(x)* a unei v.a.c. poate fi exprimata prin d.r. *f(x)* a acestei v.a ca fiind

$$F(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

În concluzie, $P(a \le \xi \le b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$. (6)

Densitatea de repartiţie este o formă alternativă a *legii de repartiţie* a unei variabile aleatoare continue, echivalenta f.r., în sensul că dacă cunoastem una din aceste forme putem restabili cealalată forma. Prima formă a acestei legi este funcţia de repartiţie. Asadar, v.a.c. este determinată dacă este dată f.r. sau densitatea de repartiţie a acesteia.

Graficul d.r. a unei v.a.c. se numeşte *curbă* sau *linia ei de repartiţie*

.

D. r. a v.a.c. are proprietăţile menţionate în următoarea

**Propoziţie.** *Dacă f(x) este d.r. a v.a.c. $\xi$, atunci*:

1) $f(x) \ge 0, \forall x \in \mathbf{R}$; (7)

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$; (8)

3) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. (9)

## 9.5. Caracteristici numerice ale variabilei aleatoare continue

**Definitie.** Vom numi *valoare medie a v.a.c.* $\xi$ cu d.r. $f(x)$ numărul $M[\xi]$ (care se notează şi cu $m_\xi$ ) definit prin egalitatea

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \quad (10)$$

cu condiţia ca integrala $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)dx < +\infty$ , în caz contrar vom spune ca *v.a.c.* $\xi$ nu poseda valoare medie.

Daca densitatea de repartitie ***f*(*x*)** este diferita de zero pe [a,b], atunci

$$M\xi = \int_a^b xf(x)dx \qquad (10^1)$$

**Remarcă.** Toate proprietăţile valorii medii enunţate în cazul v.a. de tip discret sunt valabile şi pentru v.a.c.

Se numeşte *modul* al v.a.c. numărul, notat cu $x_0=Mo[\xi]$, pentru care densitatea de repartiţie $f(x)$ ia valoarea maximală. Dacă numărul acesta este unic, atunci repartitia se numeste unimodala, in caz contrar se numeste multimodală.

Se numeşte *mediană* a variabilei aleatoare $\xi$ numărul, notat cu $x_m$ (sau $Me[\xi]$), care verifică condiţia

$$P(\xi < x_m) = P(\xi > x_m) = 1/2. \qquad (11)$$

Condiţia (11) este echivalentă cu condiţia

$$\int_{-\infty}^{x_m} f(x)dx = 1/2. \qquad (12)$$

Ecuaţia (12), în raport cu variabila $x_m$, poate fi aplicată la determinarea medianei.

Folosind noţiunea de valoare medie, ca şi în cazul unei variabile aleatoare de tip discret, se introduc noţiunile de dispersie, abatere medie pătratică, momente iniţiale şi momente centrate. Condiţia lor de existenţă este similară cu conditia de existenţă a valorii medii. Scriem aici numai formulele de calcul ale lor.

*Formula de calcul a dispersiei*

$$D[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_\xi)^2 f(x)dx \,. \qquad (13)$$

*Formula de calcul a abaterii medii pătratice*

$$\sigma[\xi] = \sqrt{D\xi} \,. \qquad (14)$$

*Formula de calcul a momentelor iniţiale*

$$\alpha_s[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(x)dx, \ s = 1, 2,... \qquad (15)$$

*Formula de calcul a momentelor centrate*

$$\mu_s[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_\xi)^s f(x)dx, \ s = 1, 2,... \qquad (16)$$

Daca densitatea de repartitie ***f*(*x*)** este diferita de zero pe [a,b], atunci

*Formula de calcul a dispersiei*

$$D[\xi] = \int_a^b (x - m_\xi)^2 f(x)dx. \qquad (13^1)$$

*Formula de calcul a abaterii medii pătratice*

$$\sigma[\xi] = \sqrt{D\xi}. \qquad (14^1)$$

*Formula de calcul a momentelor iniţiale*

$$\alpha_s[\xi] = \int_a^b x^s f(x)dx, \ s = 1, 2,... \qquad (15^1)$$

*Formula de calcul a momentelor centrate*

$$\mu_s[\xi] = \int_a^b (x - m_\xi)^s f(x)dx, \ s = 1, 2,... \qquad (16^1)$$

**Remarcă.** Proprietăţile dispersiei v.a.c sunt aceleasi ca şi în cazul v.a. de tip discret. Relaţiile dintre momentele iniţiale şi cele centrate pentru v.a.de tip continuu sunt la fel ca şi în cazul v.a. de tip discret.

Fie $\xi$ o v.a., care poate lua numai valori nenegative, dar cu valoare medie nenulă. Se numeşte *coeficient de variaţie* a acestei variabile aleatoare numărul $v$ definit prin egalitatea

$$v = \sigma_\xi / m_\xi. \qquad (17)$$

Se numeşte *coeficient de asimetrie* (sau *asimetrie*) a variabilei aleatoare $\xi$ mărimea, notată cu $Sk$, definită prin egalitatea

$$Sk[\xi] = \mu_3/\sigma^3. \qquad (18)$$

Se numeşte *exces* al variabilei aleatoare $\xi$ mărimea, notată cu $\varepsilon$ sau $Ex$, definită prin egalitatea

$$Ex[\xi] = \mu_4/\sigma^4 - 3. \qquad (19)$$

## 9.6. Exemple

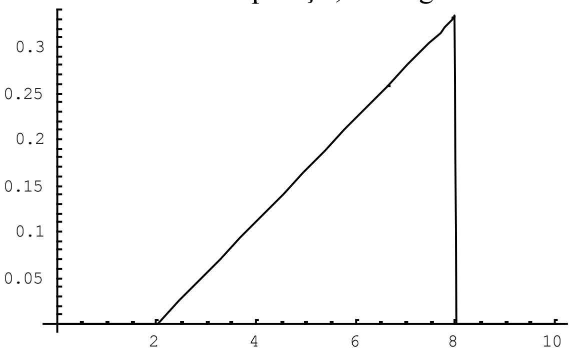
**Exemplul 7.** Variabila aleatoare ξ este definită prin d.r.

$$f(x)=\begin{cases}(x-2)/18, & x\in[2;8],\\ 0, & x\notin[2;8]\end{cases}$$

Să se găsească: 1) linia de repartiţie; 2) probabilitatea ca ξ să ia valori din intervalul inchis [5; 10]; 3) f.r. şi graficul ei; 4) valoarea ei medie; 5) dispersia; 6) abaterea medie pătratică; 7) momentele iniţiale de ordinele *1,2,3 si 4*; 8) momentele centrate de ordinele *1,2,3 şi 4*; 9) coeficientul de asimetrie; 10) excesul; 11) coeficientul de variaţie.

**Rezolvare**.

Construim linia de repartiţie, adică graficul funcţiei f(x).




2) Calculăm probabilitatea cerută conform formulei (6).

P[5<=ξ<=10]= $\int_5^8 \frac{x-2}{18}\,dx$ =**0.75.**

3) Determinăm f.r. Cum toate valorile posibile ale v.a.c. ξ aparţin segmentului [2,8], rezultă că $F(x)=0$, $x<2$, şi $F(x)=1$, $x>8$. Determinăm această funcţie pe segmentului [2,x],unde x<=8 folosind formula (9).

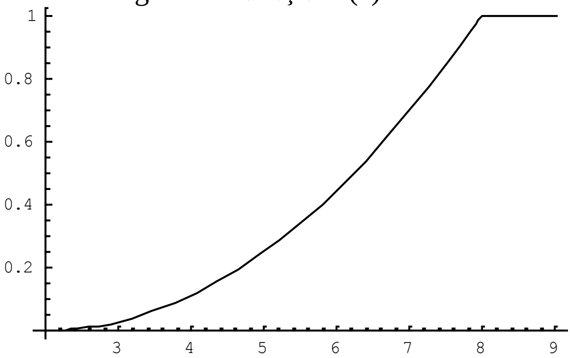
**F[x]=** $\int_2^x \frac{t-2}{18}\,dt$

**Out[33]=** $\frac{1}{9}-\frac{x}{9}+\frac{x^2}{36}$

Deci funcţia de repartiţie este

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \dfrac{1}{9}-\dfrac{x}{9}+\dfrac{x^2}{36}, & 2\le x\le 8, \\ 1, & x>8. \end{cases}$$

Construim graficul funcţiei $F(x)$




.

4) Calculăm valoarea medie folosind formula (10). Avem

$$\mathbf{m}_\xi = \int_2^8 \frac{x(x-2)}{18}dx = 6.$$

Am obţinut $m_\xi=6$.

5) Calculăm dispersia conform formulei (13).

$$\mathbf{D}[\xi] = \int_2^8 (x-m_\xi)^2 f(x)dx = \int_2^8 (x-6)^2 \frac{(x-2)}{18}dx = \mathbf{2}.$$

6) Calculăm abaterea medie pătratică $\sigma_\xi$ conform formulei (14).

**In[38]:=$\sigma_\xi$=** $\sqrt{2}$

**Out[38]=1.41421.**

7) Momentul iniţial $\alpha_1$ coincide cu speranţa matematică şi deci $\alpha_1[\xi] = m_\xi = 6$. Găsim celelalte momente iniţiale conform formulei ($15^1$).

$$\alpha_2[\xi] = \int_2^8 x^2 f(x)dx$$

$\alpha_2[\xi]=$**38**

$\alpha_3[\xi]=\int_2^8 x^3 f(x)dx$ **=250.4**

$\alpha_4[\xi]=\int_2^8 x^4 f(x)dx$ **=1699.2**

Am obţinut $\alpha_1$=6, $\alpha_2$=38, $\alpha_3$=250,4, $\alpha_4$=1699,2.

6) Momentul centrat de ordinul 1 este egal cu zero pentru orice v.a.:

$\mu_1 = 0$. Momentul centrat de ordinul doi coincide cu dispersia şi deci $\mu_2 = D_\xi = 2$. Calculăm momentele $\mu_3$ şi $\mu_4$ folosind formulele :

1) $\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3$;

2) $\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4$, sau

$\mu_3=\int_2^8 (x-m_\xi)^3 f(x)dx$ **=–1.6**

$\mu_4=\int_2^8 (x-m_\xi)^4 f(x)dx$ **]=9.6**

Am obţinut $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 2$, $\mu_3 = -1,6$, $\mu_4 = 9,6$.

9) Calculăm coeficientul de asimetrie conform formulei (18):

**$Sk[\xi]=\mu_3/(\sigma_\xi)^3=-0.565685$**

10) Folosim formula de calcul al excesului (19).

**$Ex[\xi]=\mu_4/(\sigma_\xi)^4-3=-0.6$.**

11)Calculăm coeficientul de variaţie conform formulei (17).

**In[46]:=$v_\xi=\sigma_\xi/m_\xi$=0.235702**

# 9.7. Modele probabiliste (repartiţii) te tip (absolut) continue (uzuale) clasice

## 3.6.1. Repartiţia uniformă

Vom spune că v.a.c. $\xi$ are *repartiţie uniformă* pe segmentul [$a$, $b$], dacă densitatea ei de repartiţie are forma

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & x \in [a;b], \\ 0, & x \notin [a;b]. \end{cases} \tag{20}$$

În calitate de *exemplu de variabilă aleatoare cu repartiţia uniformă* poate servi durata aşteptării autobuzului care vine la staţie peste fiecare 5 minute, în cazul când pasagerul vine la staţie într-un moment aleator de timp (independent de orarul circulaţiei autobuzului).

Folosind formula (9), determinăm funcţia de repartiţie $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ (x-a)/(b-a), & a \le x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases} \tag{21}$$

*Valoarea medie* este $m_\xi = (b–a)/2$, iar *dispersia* este $D_\xi = (b–a)^2/12$. Repartiţia uniformă nu are *mod*. *Mediana* este egală cu $(b+a)/2$.

În particular, atunci cand *a=0, b=1,* avem *repartitia uniformă* pe segmentul *[0,1]*. Orice limbaj de programare evoluat (C++, Java, etc.) conţine funcţia *random* cu ajutorul căreia putem simula valori ale unei v.a. uniform repartizate pe *[0,1]*.

**Remarcă.** Asa cum repartitia uniformă pe *[0,1]* modelează, din punct de vedere matematic, experimentul imaginar, ce constă în aruncarea la întâmplare a unui punct pe segmentul *[0,1]*, tot asa repartiţia uniformă pe *[a,b]* modelează matematic experimentul imaginar cu aruncarea la întamplare a unui punct pe segmentul *[a,b]*. Are loc urmatoarea

**Propoziţie.** *Dacă v.a.* $\xi$ *este uniform repartizată pe segmentul [a,b] , atunci v.a.* $\eta = (\xi - a) / (b - a)$ *este uniform repartizată pe [0,1]. Dimpotrivă, dacă v.a.* $\eta$ *este uniform repartizată pe [0,1], atunci v.a.* $\xi = (b-a)\eta + a$ *este uniform repartizată pe [a,b].*

**Exemplul 8.** Un troleibuz soseşte în staţie peste fiecare 5 minute. Care este probabilitatea că un pasager, care vine în staţie într-un moment aleator de timp, va aştepta troleibuzul cel mult 2 minute (evenimentul *A*)?

**Rezolvare.** D.r. a v.a. ξ, care reprezintă durata aşteptării troleibuzului, este

$$f(x) = \begin{cases} 1/5, & x \in [0;5], \\ 0, & x \notin [0;5]. \end{cases}$$

**In[48]:=** $P(0 \le \xi \le 2) = \int_0^2 (1/5)dx$

**Out[48[=2/5**

Am obţinut $P(A)=2/5$.

### 3.6.2. Repartiţia exponenţială

Vom spune că o v.a.c. ξ are *repartiţie exponenţială* de parametrul λ, λ>0, dacă densitatea ei de repartiţie are forma

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{3.62}$$

*Funcţia de repartiţie* este

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases} \tag{3.63}$$

Folosind f.r., obţinem probabilitatea că o v.a. cu repartiţie exponenţială să ia valori din intervalul închis $[a; b]$, $0 < a < b$ coincide cu:

$$P(a < \xi < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Au loc egalităţile:

$$M[\xi] = 1/\lambda.\ D[\xi] = 1/\lambda^2;\ \ \sigma[\xi] = 1/\lambda. \tag{3.64}$$

Un exemplu de v.a. care are repartiţie exponenţială de parametru λ este durata vietii unui calculator. Funcţia

$$R(x) = 1 - F(x) = e^{-\lambda x},\ x \geq 0 \tag{3.65}$$

se numeşte *funcţie de fiabilitate* a aparatului şi valoarea ei în punctul *x* reprezintă probabilitatea că aparatul să funcţioneze fără refuz *x* unităţi de timp. Or, funcţia de fiabilitate este, prin definiţie, funcţia

$$R(x) = 1 - F(x),\ x \geq 0.$$

Această repartiţie poseda o propretate remarcabilă redata în:

**Propoziţie** ***(Proprietatea lipsei „memoriei”).*** *Dacă v.a. ξ este exponenţial repartizată cu parametrul λ, λ>0, atunci are loc proprietatea „lipsei memoriei” în sensul că probabilitatea condiţionata*

$$\boldsymbol{P}(\xi<t+h/\xi\geq t) = F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda h}, & h > 0, \\ 0, & h \leq 0. \end{cases}$$

**Exemplul 9.** Fie că durata funcţionării fără a iesi din functiune a unui PC este o variabilă aleatoare ξ care are repartiţie exponenţială de paramertul λ = 0,001. Să se determine: 1) d.r.; 2) f.r.; 3) fiabilitatea; 4) valoarea medie şi dispersia; 5) probabilitatea ca PC-ul să funcţioneze fără refuz cel puţin 2000 de ore (evenimentul *A*).

**Rezolvare.** 1) Cum λ = 0,001, din (3.62) rezultă că densitatea de repartiţie a variabilei aleatoare ξ este

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}001 e^{-0{,}001x},\ x \geq 0, \\ 0, \quad x < 0. \end{cases}$$

2) Conform formulei (3.63), funcţia de repartiţie este

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-0{,}001x},\ x \geq 0, \\ 0, \quad x < 0. \end{cases}$$

3) Din (3.65) rezultă că funcţia de fiabilitate este

$$R(x) = e^{-0{,}001x},\ x \geq 0.$$

4) Din (3.64) rezultă că valoarea medie este $M[\xi] = 1/0{,}001 = 1000$, iar dispersia este $D[\xi] = 1/(0{,}001)^2 = 1000000$.

5) Folosim formula (3.65).

**In[49]:=P(ξ>2000)=N[e$^{-0.001*2000}$]**

**Out[49]=0.135335**

Am obţinut $P(A)$=0,135335.

### 3.6.3. Repartiţia normală

Vom spune că v.a.c. ξ are *repartiţie normală*, dacă d.r. este de forma

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (3.66)$$

unde $m$ şi $\sigma>0$ sunt valori constante reale, numite *parametri* ai repartiţiei normale.

Atunci când $m=0$ şi $\sigma=1$ repartiţia se mai numeste normală standard cu parametrii 0 şi 1. In acest caz functia de repartitie coincide cu

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-t^2/2}dt\,.$$

Exemple de v.a.c. de repartiţie normală sunt: cantitatea anuală de precipitaţii atmosferice dintr-o anumită regiune, eroarea care se obţine la măsurarea unei mărimi cu un aparat cu gradaţii, înălţimea unui bărbat luat la întamplare.

Linia repartiţiei normale poartă denumirea de *linia lui Causs*.

**Propozitie.** *F.r. a v.a ξ normal repartizate cu parametrii m şi σ coincide cu*

$$F(x)=\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right), \qquad (3.67)$$

*unde Φ(x) este funcţia Laplace care se defineşte prin egalitatea*

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dt\,, \qquad (3.68)$$

*şi reprezintă f.r. a unei v.a. repartizată normal standard cu parametrii 0,1.*

Cu alte cuvinte *Φ(x)*, fiind f.r. a unei v.a. normal standard repartizate cu parametrii 0 şi 1, au loc egalităţile:

$$m_\xi = m\,,\ D_\xi = \sigma^2\,,\ \sigma_\xi = \sigma\,, \tag{3.69}$$

$$P(\alpha \le \xi \le \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right). \tag{3.70}$$

**Exemplul 10.** Presupunem că, anual, cantitatea de precipitaţii atmosferice dintr-o anumita regiune este o v.a.c. cu repartiţie normală de parametri $m$ = 400 mm şi σ = 100 mm. Să se calculeze probabilitatea că la anul viitor cantitatea de precipitaţii atmosferice va întrece 500 mm (evenimentul $A$).

**Rezolvare.** Densitatea de repartiţie este

$$f(x) = \frac{1}{100\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-400)^2}{2(100)^2}}.$$

Folosim formula ($3.46^1$).

**In[50]:=N[** $\int_{500}^{\infty} \frac{1}{100\sqrt{2\pi}} e^{-(x-400)^2/(2*100^2)} dx$ **]**

**Out[50]=0.158655**

Am obţinut $P(A)$=0,158655.

Sistemul Mathematica contine un pachet de programe dedicat repartiţiei normale. Acest pachet poate fi înstalat cu agutorul funcţiei **<<Statistics`NormalDistribution`.** Dăm un exemplu de utilizare a acestui pachet.

**Exemplul 11.** Fie ξ o v.a.c. cu repartiţie normală de parametri $m$=3 şi σ=2. Se cere: 1) să se instaleze pachetul de programe **Statistics`NormalDistribution`** ; 2) să se definească (introducă) v.a.c. dată ; 3) să se determine d.r. ; 4) să se construiască linia de repartiţie ; 5) să se determine f.r.; 6) să se construiască graficul f.r.; 7) să se construiască, pe acelaşi desen, graficele d.r. şi a f.r.; 8) să se construiască pe acelaşi desen graficele d.r. a f.r. astfel, ca grosimea graficului densităţii de repartiţie să fie egală cu 0,5 din grosimea standard, iar grosimea graficului funcţiei de repartiţie să fie egală cu 0,9 din grosimea standard.

**Rezolvare.** 1) Ne aflăm (lucrăm cu un document) în Sistemul Mathematica. Instalăm pachetul cerut de programe.

**Statistics`NormalDistribution`**

1) Definim v.a.c. dată ξ de repartiţie normală şi îi dăm numele **rn**.

2)

```
In[21]:= rn = NormalDistribution[3, 2]

Out[21]= NormalDistribution[3, 2]
```

3) Definim densitatea de repartiţie şi îi dăm numele **drn**.

4)

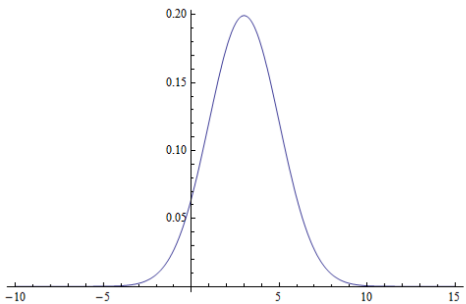
```
In[22]:= drn = PDF[rn, x]
```

$$\text{Out[22]=}\ \frac{e^{-\frac{1}{8}(-3+x)^2}}{2\sqrt{2\pi}}$$

4) Construim graficul densităţii de repartiţie drn folosind funcţia Plot.

```
In[23]:= Plot[drn, {x, -10, 15}]
```

Out[23]=



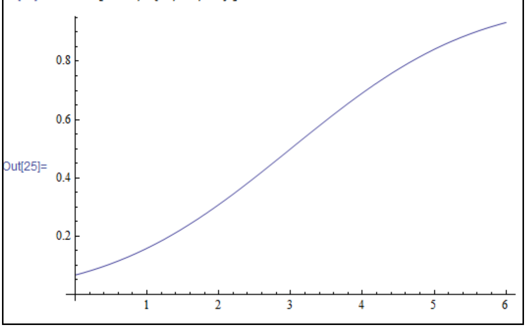

5) Definim funcţia de repartiţie şi îi dăm numele **frn**.

```
In[24]:= frn = CDF[rn, x]
```

Out[24]= $\frac{1}{2}\,\mathrm{Erfc}\left[\frac{3-x}{2\sqrt{2}}\right]$

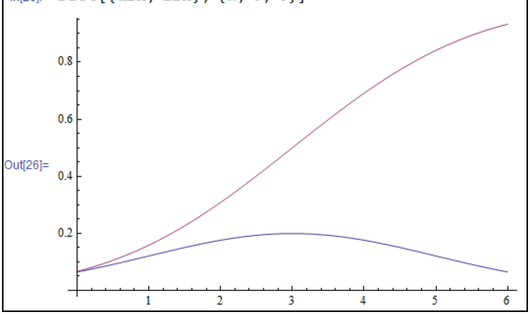
Aici funcţia Erf este următoarea

```
In[25]:= Plot[frn, {x, 0, 6}]
```




6)Construim graficul funcţiei de repartiţie.

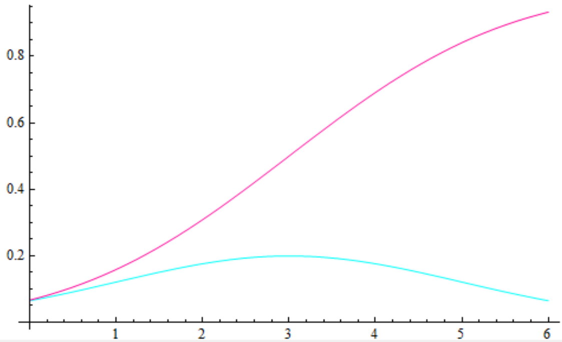
```
In[26]:= Plot[{drn, frn}, {x, 0, 6}]
```




7) Construim pe acelaşi desen graficul densităţii de repartiţie cu grosimea egală cu 0,5 din grosimea standard şi graficul funcţiei de repartiţie cu grosimea egală cu 0,9 din grosimea standard

```
In[28]:= Plot[{drn, frn}, {x, 0, 6},
          PlotStyle -> {Hue[0.5], Hue[0.9]}]
```

Out[28]=




Pe ecran apare graficul densităţii de repartiţie de culoare albastră şi graficul funcţiei de repartiţie de culoate roşie.

Rezolvarea exerciţiului s-a terminat. Rămune să scoatem valorile parametrilor.

```
In[29]:= Clear[rn, drn, frn]
```

### 3.6.4. Repartiţia gamma

Se spune că v.a. continuă ξ are *repartiţia gamma* de parametri *a* şi *b*, dacă densitatea de repartiţie a ei este

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{a-1} e^{-x/b}}{b^a \Gamma(a)}, & a > 0,\ b > 0, \quad x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \tag{3.71}$$

unde Γ este funcţia gamma, care se defineşte prin egalitatea

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt.$$

Au loc egalităţile $M\xi = ba$, $D\xi = b^2 a$, $\sigma[\xi] = b\sqrt{a}$.

### 3.6.5. Repartiţia hi-pătrat ($\chi^2$)

Se spune că variabila aleatoare continuă $\xi$ are repartiţie hi-pătrat ($\chi^2$) de parametri $r$ şi $\sigma$ dacă are densitatea de repartiţie

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{r/2-1}e^{-x/(2\sigma^2)}}{2^{r/2}\sigma^r\Gamma(r/2)}, \sigma>0, r\in N, & x\geq 0,\\ 0, & x<0.\end{cases} \tag{3.72}$$

Repartiţia hi-pătrat este un caz particular al repartiţiei gamma: funcţia (3.72) se obţine din (3.71) pentru $a = r/2$ şi $b = 2\sigma^2$. Folosind rezultatele punctului precedent, deducem că pentru o variabilă aleatoare $\xi$ cu repartiţia hi-pătrat (3.71) avem:

$$M\xi = r\sigma^2,\ D\xi = 2r\sigma^4,\ \sigma[\xi] = \sigma\sqrt{2r}\ .$$

Se demonstrează că dacă $\xi_1$, $\xi_2$, ..., $\xi_r$ sunt variabile aleatoare cu repartiţie normală de parametri $m = 0$ şi $\sigma = 1$, atunci variabila aleatoare

$$\xi=\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_r^2$$

are repartiţie hi-pătrat de parametri $\sigma = 1$ şi $r$.

## 3.7. Exerciţii pentru lucrul individual

**1.** Este dată repartiţia v.a. de tip discret $\xi$:

$$\xi:\ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix}$$

(datele numerice se conţin pe variante după enunţul exerciţiului). Se cere: 1) să se introducă în Sistemul Mathematica repartiţia v.a.d. $\xi$; 2) funcţia de repartiţie şi graficul ei; 3) probabilitatea ca $\xi$ va lua valori din intervalul [1; 4); 4) valoarea medie; 5) dispersia; 6) abaterea medie pătratică; 7) momentele iniţiale de ordine până la 4 inclusiv; 8) momentele centrate de ordine până la 4 inclusiv; 9) asimetria; 10) excesul.

1) $x_1$=–1, $x_2$=0, $x_3$=2, $x_4$=3, $p_1$=0,1, $p_2$=0,5, $p_3$=0,4, $p_4$=0,2;
2) $x_1$=0, $x_2$=1, $x_3$=7, $x_4$=3, $p_1$=0,6, $p_2$=0,2, $p_3$=0,1, $p_4$=0,1;
3) $x_1$=–2, $x_2$=–1, $x_3$=0, $x_4$=1, $p_1$=0,2, $p_2$=0,4, $p_3$=0,3, $p_4$=0,1;

4) $x_1$=1, $x_2$=2, $x_3$=5, $x_4$=6, $p_1$=0,1, $p_2$=0,5, $p_3$=0,3, $p_4$=0,1;
5) $x_1$=2, $x_2$=3, $x_3$=4, $x_4$=3, $p_1$=0,1, $p_2$=0,2, $p_3$=0,3, $p_4$=0,4;
6) $x_1$=1, $x_2$=3, $x_3$=4, $x_4$=5, $p_1$=0,2, $p_2$=0,6, $p_3$=0,1, $p_4$=0,1;
7) $x_1$=2, $x_2$=4, $x_3$=5, $x_4$=6, $p_1$=0,1, $p_2$=0,4, $p_3$=0,4, $p_4$=0,1;
8) $x_1$=–1, $x_2$=0, $x_3$=1, $x_4$=2, $p_1$=0,4, $p_2$=0,1, $p_3$=0,3, $p_4$=0,2;
9) $x_1$=–2, $x_2$=–1, $x_3$=0, $x_4$=1, $p_1$=0,1, $p_2$=0,2, $p_3$=0,1, $p_4$=0,6;
10) $x_1$=0, $x_2$=1, $x_3$=2, $x_4$=3, $p_1$=0,6, $p_2$=0,1, $p_3$=0,2, $p_4$=0,1;
11) $x_1$=1, $x_2$=2, $x_3$=4, $x_4$=5, $p_1$=0,1, $p_2$=06, $p_3$=0,2, $p_4$=0,1;
12) $x_1$=2, $x_2$=3, $x_3$=5, $x_4$=7, $p_1$=0,1, $p_2$=0,4, $p_3$=0,3, $p_4$=0,2;
13) $x_1$=3, $x_2$=4, $x_3$=5, $x_4$=6, $p_1$=0,1, $p_2$=0,5, $p_3$=0,3, $p_4$=0,1;
14) $x_1$=1, $x_2$=3, $x_3$=4, $x_4$=5, $p_1$=0,2, $p_2$=0,6, $p_3$=0,1, $p_4$=0,1;
15) $x_1$=2, $x_2$=4, $x_3$=5, $x_4$=6, $p_1$=0,1, $p_2$=0,6, $p_3$=0,2, $p_4$=0,1;
16) $x_1$=0, $x_2$=1, $x_3$=3, $x_4$=4, $p_1$=0,5, $p_2$=0,3, $p_3$=0,1, $p_4$=0,1;
17) $x_1$=–2, $x_2$=–1, $x_3$=0, $x_4$=2, $p_1$=0,1, $p_2$=0,4, $p_3$=0,3, $p_4$=0,2;
18) $x_1$=–1, $x_2$=0, $x_3$=1, $x_4$=2, $p_1$=0,1, $p_2$=0,5, $p_3$=0,3, $p_4$=0,1;
19) $x_1$=0, $x_2$=1, $x_3$=2, $x_4$=3, $p_1$=0,1, $p_2$=0,6, $p_3$=0,2, $p_4$=0,1;
20) $x_1$=1, $x_2$=2, $x_3$=3, $x_4$=5, $p_1$=0,2, $p_2$=0,5, $p_3$=0,1, $p_4$=0,2;
21) $x_1$=–1, $x_2$=0, $x_3$=1, $x_4$=2, $p_1$=0,2, $p_2$=0,4, $p_3$=0,3, $p_4$=0,1;
22) $x_1$=–2, $x_2$=–1, $x_3$=0, $x_4$=2, $p_1$=0,3, $p_2$=0,1, $p_3$=0,4, $p_4$=0,2;
23) $x_1$=0, $x_2$=1, $x_3$=3, $x_4$=4, $p_1$=0,1, $p_2$=0,3, $p_3$=0,4, $p_4$=0,2;
24) $x_1$=1, $x_2$=3, $x_3$=5, $x_4$=7, $p_1$=0,2, $p_2$=0,1, $p_3$=0,3, $p_4$=0,4;
25) $x_1$=2, $x_2$=3, $x_3$=4, $x_4$=5, $p_1$=0,4, $p_2$=0,2, $p_3$=0,1, $p_4$=0,3;
26) $x_1$=0, $x_2$=2, $x_3$=3, $x_4$=5, $p_1$=0,3, $p_2$=0,4, $p_3$=0,2, $p_4$=0,1;
27) $x_1$=1, $x_2$=2, $x_3$=3, $x_4$=5, $p_1$=0,2, $p_2$=0,3, $p_3$=0,4, $p_4$=0,1;
28) $x_1$=2, $x_2$=3, $x_3$=5, $x_4$=6, $p_1$=0,3, $p_2$=0,4, $p_3$=0,1, $p_4$=0,2;
29) $x_1$=1, $x_2$=4, $x_3$=5, $x_4$=6, $p_1$=0,4, $p_2$=0,1, $p_3$=0,2, $p_4$=0,3;
30) $x_1$=1, $x_2$=3, $x_3$=4, $x_4$=5, $p_1$=0,1, $p_2$=0,2, $p_3$=0,3, $p_4$=0,4.

**2.** Presupunem că probabilitatea statistică că un copil nou născut să fie băiat este egală cu 0.51. Se cere: 1) să se determine repartiţia v.a. $\xi$ care reprezintă numărul de băieţi printre 1000 de copii noi născuţi; 2) să se calculeze probabilitatea că printre 1000 de copii noi născuţi numărul băieţilor va fi cuprims între 300+$k$ şi 500+$k$, unde $k$ este numărul variantei.

**3.** Numărul $\xi$ de particule alfa emise de un gram de substanţă radioactivă într-o secundă este o v.a.d. cu repartiţia Poisson cu parametrul *a*, unde *a* este numărul mediu de particule alfa emise într-o secundă. 1) Să se determine seria de repartiţie a v.a.d. $\xi$. 2) Să se calculeze probabilităţile evenimentelor: *A* = {*într-o secundă vor fi emise nu mai mult de două particule alfa*} şi *B* = {*într-o secundă vor fi emise cinci particule alfa*}, *C* = {*într-o secundă vor fi emise mai mult de zece particule alfa*}. Care este numărul de particule alfa care corespunde celei mai mari probabilităţi? Să se considere că $a$=1+0,25$n$, unde *n* este numărul variantei.

**4.** Să se scrie legea de repartiţie a variabilei aleatoare $\xi$ care reprezintă numărul de aruncări nereuşite ale unui zar până la prima apariţie a numărului 4. Să se calculeze probabilitatea că numarul aruncărilor nereuşite va varia între 5+$k$ si 15+$k$, unde *k* este numărul variantei..

**5.** V.a.c. $\xi$ este definită de densitatea sa de repartiţie *f*(*x*). Să se determine: 1) reprezentarea v.a.c. $\xi$ în Sistemul Mathematica; 2) linia de repartiţie; 3) funcţia de repartiţie *F*(*x*) şi graficul ei, 4) valoarea ei medie; 5) dispersia; 6) abaterea medie pătratică; 7) coeficientul de variaţie; 8) momentele iniţiale de ordinele până la 4 inclusiv, 9) momentele centrale de ordinele până la 4 inclusiv; 10) asimetria; 11) excesul; 12) probabilitatea ca $\xi$ va lua valori din prima jumătate a intervalului de valori posibile. Funcţia *f*(*x*) este dată pe variante.

1) $f(x)=\begin{cases}(x-1)/2, & x\in[1,3],\\ 0, & x\notin[1,3];\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases}2(x-1)/9, & x\in[1,4],\\ 0, & x\notin[1,4];\end{cases}$

1) $f(x)=\begin{cases}(x-1)/2, & x\in[1,3],\\ 0, & x\notin[1,3];\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases}2(x-1)/9, & x\in[1,4],\\ 0, & x\notin[1,4];\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}2x-2, & x\in[1,2],\\ 0, & x\notin[1,2];\end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases}(x-1)/8, & x\in[1,5],\\ 0, & x\notin[1,5];\end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases}2(x-1)/25, & x\in[1,6],\\ 0, & x\notin[1,6];\end{cases}$

6) $f(x)=\begin{cases}(x-1)/18, & x\in[1,7],\\ 0, & x\notin[1,7];\end{cases}$

7) $f(x)=\begin{cases}2(x-1)/49, & x\in[1,8],\\ 0, & x\notin[1,8];\end{cases}$

8) $f(x)=\begin{cases}2(x-2), & x\in[2,3],\\ 0, & x\notin[2,3];\end{cases}$ 9) $f(x)=\begin{cases}(x-2)/2, & x\in[2,4],\\ 0, & x\notin[2,4];\end{cases}$

10) $f(x)=\begin{cases}2(x-2)/9, & x\in[2,5],\\ 0, & x\notin[2,5];\end{cases}$

11) $f(x)=\begin{cases}(x-2)/8, & x\in[2,6],\\ 0, & x\notin[2,6];\end{cases}$ 12) $f(x)=\begin{cases}2(x-2)/25, & x\in[2,7],\\ 0, & x\notin[2,7];\end{cases}$

13) $f(x)=\begin{cases}(x-2)/18, & x\in[2,8],\\ 0, & x\notin[2,8];\end{cases}$

14) $f(x)=\begin{cases}2(x-2)/49, & x\in[2,9],\\ 0, & x\notin[2,9];\end{cases}$

15) $f(x)=\begin{cases}2x-6, & x\in[3,4],\\ 0, & x\notin[3,4];\end{cases}$ 16) $f(x)=\begin{cases}(x-3)/2, & x\in[3,5],\\ 0, & x\notin[3,5];\end{cases}$

17) $f(x)=\begin{cases}2(x-3)/9, & x\in[3,6],\\ 0, & x\notin[3,6];\end{cases}$ 18)

$f(x)=\begin{cases}(x-3)/8, x\in[3,7],\\ 0, \quad x\notin[3,7];\end{cases}$

19) $f(x)=\begin{cases}2(x-3)/25, x\in[3,8],\\ 0, \quad x\notin[3,8];\end{cases}$ 20)

$f(x)=\begin{cases}(x-3)/18, x\in[3,9],\\ 0, \quad x\notin[3,9];\end{cases}$

21) $f(x)=\begin{cases}(2-x)/2, & x\in[0,2],\\ 0, & x\notin[0,2];\end{cases}$

22) $f(x)=\begin{cases}(4-x)/8, & x\in[0,4],\\ 0, & x\notin[0,4];\end{cases}$

23) $f(x)=\begin{cases}(6-x)/18, & x\in[0,6],\\ 0, & x\notin[0,6];\end{cases}$ 24)

$f(x)=\begin{cases}(8-x)/32, & x\in[0,8],\\ 0, & x\notin[0,8];\end{cases}$

25) $f(x)=\begin{cases}(10-x)/50, & x\in[0,10],\\ 0, & x\notin[0,10];\end{cases}$

26) $f(x)=\begin{cases}2(1-x), & x\in[0,1],\\ 0, & x\notin[0,1];\end{cases}$

27) $f(x)=\begin{cases}2(3-x)/9, & x\in[0,3],\\ 0, & x\notin[0,3];\end{cases}$ 28) $f(x)=\begin{cases}2(5-x)/25, & x\in[0,5],\\ 0, & x\notin[0,5];\end{cases}$

29) $f(x)=\begin{cases}2(7-x)/49, & x\in[0,7],\\ 0, & x\notin[0,7];\end{cases}$ 30)
$f(x)=\begin{cases}2(9-x)/81, & x\in[0,9],\\ 0, & x\notin[0,9].\end{cases}$

**6.**V.a. ξ are repartiţia normală cu valoarea medie *m* şi cu abaterea medie pătratică σ. 1) să se instaleze pachetul de programe **Statistics\`NormalDistribution\`** ; 2) să se definească (introducă) v.a.c. dată ; 3) să se definească (determine) densitatea de repartiţie ; 4) să se construiască linia de repartiţie ; 5) să se definească (determine) funcţia de repartiţie ; 6) să se construiască graficul funcţiei de repartiţie ; 7) să se construiască pe acelaşi desen graficele densităţii de repartiţie şi al funcţiei de repartiţie ; 8) să se construiască pe acelaşi desen gfaficele densităţii de repartiţie şi al funcţiei de repartiţie astfel, ca grosimea graficului densităţii de repartiţie să fie egală cu 0,5 din grosimea standard, iar grosimea graficului funcţiei de repartiţie să fie egală cu 0,9 din grosimea standard; 9) Să se calculeze probabilitatea ca ξ să ia valori din intervalul [α, β]. Valorile lui *m*, σ, α şi β sunt date pe variante.

1)*m*=3, σ=2, α=2, β=8; 2)*m*=4, σ=2, α=2, β=7; 3)*m*=5, σ=2, α=2, β=6; 4)*m*=6, σ=2, α=4, β=9; 5)*m*=7, σ=2, α=4, β=8; 6)*m*=9, σ=2, α=6, β=9; 7)*m*=9, σ=2, α=7, β=12; 8)*m*=3, σ=3, α=2, β=5; 9)*m*=4, σ=3, α=2, β=7; 10)*m*=5, σ=3, α=4, β=7; 11)*m*=6, σ=3, α=4, β=9; 12)*m*=7, σ=3, α=6, β=9; 13)*m*=8, σ=3, α=5, β=9; 14)*m*=9, σ=3, α=7, β=10; 15)*m*=5, σ=4, α=4, β=8; 16)*m*=6, σ=4, α=4, β=9; 17)*m*=7, σ=4, α=5, β=8; 18)*m*=8, σ=4, α=5, β=9; 19)*m*=9, σ=4, α=7, β=10; 20)*m*=6, σ=5, α=4, β=7; 21)*m*=7, σ=5, α=4, β=9; 22)*m*=8, σ=5, α=5, β=9; 23)*m*=8, σ=5, α=6, β=9; 24)*m*=8, σ=5, α=7, β=9; 25)*m*=2, σ=2, α=1, β=3; 26)*m*=3, σ=2, α=1, β=4; 27)*m*=4, σ=2, α=1, β=5; 28)*m*=4, σ=3, α=2, β=5; 29)*m*=5, σ=2, α=1, β=6; 30)*m*=6, σ=3, α=2, β=8.

**7**. Înălţimea unui bărbat este o v.a. cu repartiţia normală. Presupunem că această repartiţie are parametrii *m*=175+$(-1)^n/n$ cm şi σ=6-$(-1)^n/n$ cm. Să se formeze programul de conficţionate a costumelor bărbăteşti pentru o fabrică de confecţii care se referă la asigurarea cu costume a bărbaţilor, înălţimile cărora aparţin intervalelor: [150, 155), [155, 160), [160, 165), [165, 170), [170, 175), [175, 180), [180, 185), [185, 190), [190, 195), [195, 200], *n* fiind numarul variantei, $n=1,2,...30$.

**8.** Presupunem că o convorbire telefonică durează în medie 5 minute şi este o v.a. $\xi$ de repartiţie exponenţială. 1) Să se introducă în Sistemul Mathematica d.r. a v.a.c. $\xi$. 2) Să se determine funcţia de repartiţie şi să se construiască graficul ei. 3) Dacă vă apropriaţi de o cabină telefonică imediat după ce o persoană a întrat în ea atunci care este probabilitatea că o să aşteptaţi nu mai mult de $2+n/3$ minute, unde *n* este numărul variantei, $n=1,2,...,30$?

**9.** Un autobuz circulă regulat cu intervalul 30 minute. 1) Să se scrie în Sistemul Mathematica d.r. a v.a.c. $\xi$ care reprezintă durata aşteptării autobuzului de către un pasager care soseste în staţie într-un moment aleator de timp. 2) Să se construiască linia de repartiţie. 3) Să se determine f.r.e şi să se construiască graficul ei. 4) Care este probabilitatea că, sosind în staţie, pasagerul va aştepta autobuzul nu mai mult de $10+n/2$ minute, unde numărul *n* coincide cu numărul variantei.

**10.** Cantitatea anuală de precipitaţii atmosferice are repartiţie normală. Presupunem că anual, cantitatea de precipitaţii într-o anumită regiune este o v.a. aleatoare de repartiţie normală de parametrii $m$ = 500 (mm) şi $\sigma$ = 150. Care este probabilitatea că în anul viitor cantitatea de precipitaţii va fi cuprinsă între $400+5n$ şi $500+5n$, unde *n* este numărul variantei. Dacă considerăm că un an este secetos când cantitatea de precipitaţii nu depăşeşte 300 mm, atunci care este probabilitatea că doi din viitorii zece ani vor fi secetoşi?