Teoremă. Dacă este convergentă seria $|a_1|+|a_2|+...+|a_n|+...=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, atunci este convergentă şi seria cu termeni de semne variabile $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

Teoremă. Dacă seria funcțională $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ este majorată pe mulțimea M, atunci ea este uniform convergentă pe această mulțime.

Teoremă . Dacă termenii seriei funcționale sunt funcții continue şi această serie este uniform convergentă pe segmentul $[a,b]$, atunci suma $s(x)$ a ei este o funcție continuă pe acest segment.

Teoremă . Dacă seria funcțională $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ este uniform convergentă pe $[a,b]$, suma ei $S(x)$ şi termenii $f_n(x)$, $n=1,2,...$ sunt integrabile pe acest segment, atunci $\int_a^b S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx$.

Teoremă. Fie că seria $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ este convergentă pe segmentul $[a,b]$ şi suma ei este $S(x)$, funcțiile $f_n(x)$, $n=1,2,...,$ sunt continuu derivabile pe $[a,b]$. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ este uniform convergentă pe $[a,b]$, atunci funcția $S(x)$ este derivabilă pe acest segment şi are loc egalitatea $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(x)$.

Serii de puteri. Teorema Abel. Raza de convergență

Definiție. Se numeşte serie de puteri o serie funcțională de forma

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...,$$

unde x este o variabilă reală, $a_0,a_1,...,a_n,...$ sunt constante reale, care se numesc coeficienți ai acestei serii.

Se numeşte serie de puteri şi o serie de forma $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(X-a)^n$, care se reduce la seria $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ cu ajutorul substituției $x=X-a$. Vom studia mai întâi numai convergența seriei $\sum_{}^{\infty}a_nx^n$.

Teoremă. (**Abel**) Dacă seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este convergentă pentru careva valoare nenulă x_1, atunci ea este absolut convergentă pentru orice valoare a lui x care verifică condiția $|x| < |x_1|$.

Dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este divergentă pentru careva valoare x_2, atunci ea este divergentă şi pentru orice valoare a variabilei x, care verifică condiția $|x| > |x_2|$.

u $R = \lim_{n=\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$.

ci obținem $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Formule de calcul ale razei de convergență.

∞ ∞

Teoremă. Dacă seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ are raza de convergență R, atunci ea este uniform convergentă pe segmentul $[-r, r]$ pentru orice r care verifică condiția $0 < r < R$.

Teoremă. Dacă seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ are raza de convergență $R > 0$, atunci suma acestei serii este o funcție continue pe segmentul $[-r, r]$ pentru orice $r \in (0, R)$.

Teoremă. Dacă seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ are raza de convergență $R > 0$ şi suma ei este $S(x)$, atunci această serie poate fi integrată termen cu termen pe segmentul $[a, b] \subset [-r, r]$ pentru orice $r \in (0, R)$.

Teoremă. Dacă seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ are raza de convergență $R > 0$, atunci ea poate fi derivată termen cu termen pe segmentul $[-r, r]$ pentru orice $r \in (0, R)$.

Astfel, $C_0 = f(a), C_1 = \frac{f'(a)}{1!}, C_2 = \frac{f''(a)}{2!}, \ldots, C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, de unde $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.

Criteriul radical Cauchy. Fie că pentru seria cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ există limita $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ atunci:

a) dacă $l < 1$, atunci seria dată este convergentă;
b) dacă $l > 1$, atunci seria este divergentă.

Criteriul integral de convergență. Fie că termenii seriei cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ verifică condiția $a_n \geq a_{n+1}$, $n = 1,2,\ldots$, și fie că există o funcție $f(x)$ continuă și descrescătoare pe $[1,+\infty)$ și care verifică condiția $f(n) = a_n$, $n = 1,2,\ldots$ Atunci:

a) dacă integrala improprie $\int_1^{\infty} f(x)dx$ este convergentă, atunci este convergentă și seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

b) dacă integrala improprie $\int_1^{\infty} f(x)dx$ este divergentă, atunci este divergentă și seria

Criteriul câtului. Fie că pentru seriile cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ există limita $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$. Dacă

- $0 < k < \infty$, atunci seriile date au aceeași natură de convergență,
- $k = 0$ și seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, atunci este convergentă și seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,
- $k = \infty$ și seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă, atunci este divergentă și seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Consecință. Dacă termenii respectivi ai seriilor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sunt echivalenți când $n \to \infty$, adică $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, atunci seriile date sunt convergente sau divergente simultan.

Criteriul Raabe - Duhamel. Fie că pentru seria cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ există limita $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = l$. Atunci :

- dacă $l > 1$, atunci seria este convergentă.
- dacă $l < 1$, atunci seria este divergentă;

Teoremă. (Criteriul Leibniz). Dacă termenii seriei alternante $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ verifică condițiile: $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$, $\lim_{n\to\infty n} a_n = 0$, atunci această serie este convergentă și suma S a ei nu întrece primul termen: $S < a_1$.

Serii numerice

Definiție. Se numește **serie numerică** o expresie de forma $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$,unde $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sunt numere reale. Seria numerică se mai notează cu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ se numesc **termeni** ai seriei, iar a_n se numește **termen general** sau **termen de rang n** al acestei serii.

Definiție. Suma primilor n termeni ai seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se numește **sumă parțială de rang** n a acestei serii și se notează cu S_n.

Din definiție rezultă că $S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2, \ldots,\ S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots$

Definiție. Dacă există limita finită S a șirului sumelor parțiale (S_n): $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$,

4) Considerăm seria $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, $a \neq 0$.

Această serie reprezintă suma termenilor unei progresii geometrice cu primul termen a și cu rația q. Cum pentru această serie $S_n = a + aq + aq^2 + aq^{n-1} = \dfrac{a - aq^n}{1-q}$, avem:

a) dacă $|q| < 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a - aq^n}{1-q} = \dfrac{a}{1-q}$;

b) dacă $|q| > 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$;

c) dacă $q = 1$ atunci $S_n = a + a + \ldots + a = na \to \pm\infty$ când $n \to \infty$;

d) dacă $q = -1$, atunci $S_n = 0$, dacă n este par, și $S_n = a$, dacă n este impar.

Rețineți !!! Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ **este convergentă cu suma** $S = \dfrac{a}{1-q}$ **dacă** $|q| < 1$.

Altfel, seria dată este divergentă.

Criteriul de comparație. Fie că termenii seriilor $\sum\limits_{n=1} a_n$ și $\sum\limits_{n=1} b_n$ verifică condiția $a_n \geq b_n > 0$, $n = 1,2,\ldots$ Atunci:

a) dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă, atunci este convergentă și seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$;

b) dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă, atunci este divergentă și seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Criteriul D'Alambert. Fie că pentru seria cu termeni pozitivi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ există limita $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Atunci :

a) dacă $l < 1$, atunci seria este convergentă;

b) dacă $l > 1$, atunci seria este divergentă.

general sau termen de rang n al acestei serii.

Exemple de serii numerice.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ (seria armonică)

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \ldots + \frac{1}{n^{\alpha}} + \ldots$ (seria Dirichlet)

4) $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$ (seria geometrică)

6) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$

Teoremă (Criteriul necesar de convergență) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Definiție. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ se numește **serie cu termeni pozitivi** dacă $a_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$