Tema 16. Unde electromagnetice

Undele electromagnetice - o consecință a teoriei lui Maxwell

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\,\vec{E} = -\mu_0\mu\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \mathrm{rot}\,\vec{H} = \varepsilon_0\varepsilon\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \mathrm{div}\,\vec{E} = 0, \\ \mathrm{div}\,\vec{H} = 0. \end{cases} \Rightarrow \quad \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\mu_0\mu\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\,\vec{H} = -\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\left[\vec{a}\left[\vec{b}\vec{c}\right]\right] = \vec{b}\left(\vec{a}\,\vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a}\,\vec{b}\right)$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} = \left[\vec{\nabla}\left[\vec{\nabla}\vec{E}\right]\right] = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\vec{E}\right) - \vec{E}\left(\vec{\nabla}\vec{\nabla}\right) = \vec{\nabla}\,\mathrm{div}\,\vec{E} - \nabla^2\vec{E}$$

Ecuația de undă

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \nabla^2\vec{E} - \varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2\vec{H} - \varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\nabla^2 \equiv \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\xi - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

Viteza de fază a undelor electromagnetice

$$\boxed{\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}}}$$

Tema 16. Unde electromagnetice

Proprietățile undelor electromagnetice

1) Unda electromagnetică se propagă în vid cu viteza egală cu cea a luminii

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}} = \sqrt{9 \cdot 10^{16}} = 3 \cdot 10^8 \ \frac{\text{m}}{s}$$

2) Orice proces electromagnetic ondulatoriu poate fi reprezentat sub forma unei superpoziții de unde electromagnetice plane monocromatice.

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \sin\left[\omega t - \left(\vec{k} \cdot \vec{r}\right) + \varphi_E\right], \qquad \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i\left[\omega t - \left(\vec{k} \cdot \vec{r}\right) + \varphi_E\right]},$$

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}_0 \sin\left[\omega t - \left(\vec{k} \cdot \vec{r}\right) + \varphi_H\right]. \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}_0 e^{i\left[\omega t - \left(\vec{k} \cdot \vec{r}\right) + \varphi_H\right]}.$$

Aceste ecuații sunt soluții ale ecuației de undă.

Legea dispersiei undelor electromagnetice în mediile libere

$$\upsilon = \frac{\omega}{k}$$

Tema 16. Unde electromagnetice

3) Unda electromagnetică obligatoriu constă din ambele câmpuri – electric *E* și magnetic *H*.

4) Undele electromagnetice sunt unde transversale.

$$\operatorname{div}\vec{E} = \left(\vec{\nabla}\vec{E}\right) = -i\left(\vec{k}\vec{E}_0\right)e^{i\left[\omega t - \left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right) + \varphi_E\right]} = -i\left(\vec{k}\vec{E}\right) = -ik\left(\vec{s}\vec{E}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{E} \perp \vec{s}$$

$$\operatorname{div}\vec{H} = \left(\vec{\nabla}\vec{H}\right) = -i\left(\vec{k}\vec{H}_0\right)e^{i\left[\omega t - \left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right) + \varphi_H\right]} = -i\left(\vec{k}\vec{H}\right) = -ik\left(\vec{s}\vec{H}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{H} \perp \vec{s}$$

5) Vectorii $\vec{E}$ și $\vec{H}$ din undă electromagnetică sunt reciproc perpendiculari și sunt în fază.

Introducem soluțiile pentru *E* și *H* în primele două ecuații Maxwell. Calculăm separat părțile din stânga și cele din dreapta ale ecuațiilor

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \left[\vec{\nabla}\vec{E}\right] = -i\left[\vec{k}\vec{E}_0\right]e^{i\left[\omega t - \left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right) + \varphi_E\right]} = -i\left[\vec{k}\vec{E}\right] = -ik\left[\vec{s}\vec{E}\right] = -i\frac{\omega}{\upsilon}\left[\vec{s}\vec{E}\right],$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \left[\vec{\nabla}\vec{H}\right] = -i\left[\vec{k}\vec{H}_0\right]e^{i\left[\omega t - \left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right) + \varphi_H\right]} = -i\left[\vec{k}\vec{H}\right] = -ik\left[\vec{s}\vec{H}\right] = -i\frac{\omega}{\upsilon}\left[\vec{s}\vec{H}\right],$$

Tema 16. Unde electromagnetice

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \vec{E}_0 e^{i\left[\omega t - \left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right) + \varphi_E\right]} = i\omega \vec{E},$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = i\omega \vec{H}_0 e^{i\left[\omega t - \left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right) + \varphi_E\right]} = i\omega \vec{H}.$$

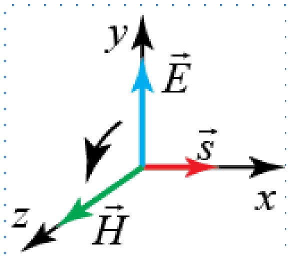
Din prima ecuație a lui Maxwell

$$-i\frac{\omega}{\upsilon}\left[\vec{s}\vec{E}\right] = -i\mu_0\mu\omega\vec{H} \quad \Longrightarrow \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0\mu\upsilon}\left[\vec{s}\vec{E}\right] = \frac{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}}{\mu_0\mu}\left[\vec{s}\vec{E}\right] = \sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu}}\left[\vec{s}\vec{E}\right]$$

Analogic din a doua ecuație a lui Maxwell

$$-i\frac{\omega}{\upsilon}\left[\vec{s}\vec{H}\right] = i\varepsilon_0\varepsilon\omega\vec{E} \quad \Longrightarrow \quad \vec{E} = -\sqrt{\frac{\mu_0\mu}{\varepsilon_0\varepsilon}}\left[\vec{s}\vec{H}\right]. \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}\left|\vec{E}\right| = \sqrt{\mu_0\mu}\left|\vec{H}\right|}$$

Calculăm produsul vectorial al vectorilor $\vec{E}$ și $\vec{H}$



$$\left[\vec{E}\vec{H}\right] = \sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu}}\left[\vec{E}\left[\vec{s}\vec{E}\right]\right] = \sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu}}\left\{\vec{s}\left(\vec{E}\vec{E}\right) - \vec{E}\left(\vec{E}\,\vec{s}\right)\right\} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu}}E^2\vec{s}$$

Tema 16. Unde electromagnetice

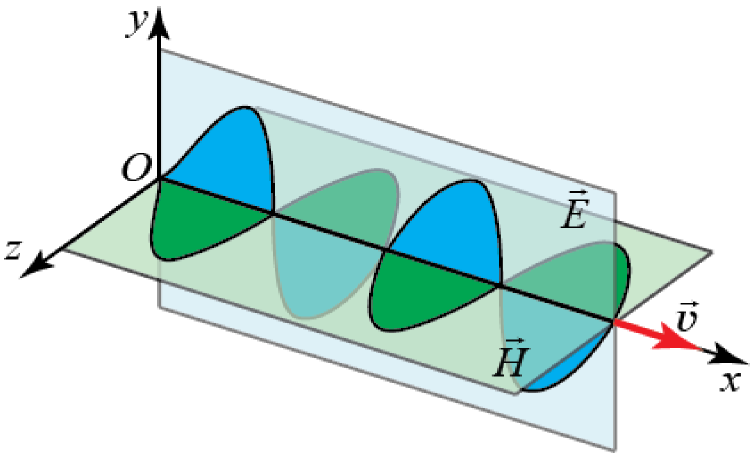
6) Unda electromagnetică este o undă polarizată.

$$E_y = E_{01}\sin(\omega t - kx), \quad H_y = -\sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu}}E_z,$$

$$E_z = E_{02}\sin(\omega t - kx + \varphi), \quad H_z = \sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu}}E_y,$$

$$\frac{E_y^2}{E_{01}^2} + \frac{E_z^2}{E_{02}^2} - \frac{2E_yE_z}{E_{01}E_{02}}\cos\varphi = \sin^2\varphi,$$

$$\frac{H_y^2}{E_{02}^2} + \frac{H_z^2}{E_{01}^2} + \frac{2H_yH_z}{E_{01}E_{02}}\cos\varphi = \frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu}\sin^2\varphi.$$



Dacă defazajul φ, ia valori arbitrare, atunci în fiecare punct al undei vectorii $\vec{E}$ și $\vec{H}$ variază în timp astfel, încât vârfurile lor descriu niște elipse, iar unda plană monocromatică se numește **undă polarizată eliptic.**

Dacă $\varphi = \pm m\pi$, **undă polarizată liniar**, sau undă plan polarizată

Dacă $E_{01} = E_{02}$ și $\varphi = \pm(2m+1)\pi/2$, **undă polarizată circular**

Tema 16. Unde electromagnetice

Energia undelor electromagnetice

Densitatea de energie a undelor electromagnetice

$$\left.\begin{aligned} &w = w_e + w_m = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu_0\mu H^2 \\ &\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}\vec{E} = \sqrt{\mu_0\mu}\vec{H} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &w = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu_0\mu\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu}E^2 = \\ &= \varepsilon_0\varepsilon E^2 = \mu_0\mu H^2 = \sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}\cdot EH = \frac{1}{\upsilon}EH \end{aligned}\right.$$

Densitatea volumică de energie a unei unde monocromatice plan polarizate care se propagă în sensul pozitiv al axei *Ox*

$$w = \varepsilon_0\varepsilon E_y^2 = \varepsilon_0\varepsilon E_0^2\sin^2(\omega t - kx) \Rightarrow \langle w\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon E_0^2$$

Fluxul de energie $d\Phi$ printr-o suprafață arbitrară dS:

$$d\Phi = w\cdot(\vec{\upsilon}d\vec{S}) = (\vec{\mathscr{P}}d\vec{S})$$

unde

$$\vec{\mathscr{P}} = w\vec{\upsilon}$$

este **vectorul densității fluxului de energie sau vectorul Umov-Poynting**

Tema 16. Unde electromagnetice

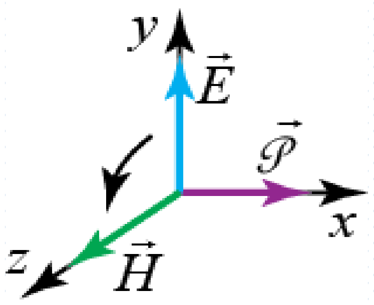
Obținem expresia pentru vectorul Umov-Pointing al undei electromagnetice:

$$\left.\begin{aligned} \left[\vec{E}\vec{H}\right] &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu}}E^2\vec{s} \\ \sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}\vec{E} &= \sqrt{\mu_0\mu}\vec{H} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\vec{E}\vec{H}\right] = \sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu}}E^2\vec{s} = \frac{\sqrt{\mu_0\mu}}{\sqrt{\mu_0\mu}}EH\cdot\frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon} = EH\cdot\frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\upsilon} = \frac{\left[\vec{E}\vec{H}\right]}{EH}\upsilon$$

atunci

$$\vec{\mathscr{P}} = \frac{EH}{\upsilon}\cdot\frac{\left[\vec{E}\,\vec{H}\right]}{EH}\cdot\upsilon = \left[\vec{E}\,\vec{H}\right]$$



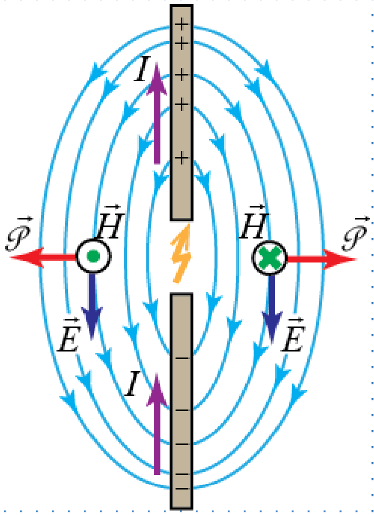
Intensitatea undei electromagnetice monocromatice progresive

$$I = \left|<\vec{\mathscr{P}}>\right| = \langle w\rangle\left|\vec{\upsilon}\right| = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon E_0^2\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu}}E_0^2$$

Tema 16. Unde electromagnetice

Generarea undelor electromagnetice

Numai sarcinile electrice aflate în mişcare accelerată pot forma în jurul lor câmp electromagnetic şi, deci, generează unde electromagnetice.



Dipolul sau **vibratorul lui Hertz**

$$\vec{p}_e = \vec{p}_0 \sin \omega t$$

Diagrama polară direcţională de radiaţie a dipolului

$$I \sim \frac{\omega^4}{r^2} \sin^2 \vartheta$$