SEMINAR NR. 4 EDDP 27.10.2009

REZOLVARE EXERCIȚII

a) Ec. omogene.

$$x' = \left(\frac{t+1}{x-t+2}\right)^2$$

$$x' = g\left(\frac{t+1}{x-t+2} \quad \frac{at+bx+c}{\alpha t+\beta x+\gamma}\right) \qquad \begin{matrix} a=1, b=0, c=1 \\ \alpha=1, \beta=-1, \gamma=2 \end{matrix}$$

Calculăm $a\beta - \alpha b = \cancel{-1-1} = \cancel{-2}\ 1$

Rezolvăm sistemul $\begin{cases} t+1=0 \\ x-t+2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} t_0=-1 \\ t_0=-3 \end{cases}$

Schimbare de variabilă $s = t - t_0 = t+1$

$y = x - x_0 = x+3$

$x(t) = y(s(t))$ $\quad \dfrac{dy(s(t))}{dt} = \left(\dfrac{s}{y-3+1-s+2}\right)^2$

$$\left(\frac{s}{y-s}\right)^2 = \frac{dy}{ds}\cdot s'(t) \iff \frac{dy}{ds} = \frac{s^2}{s^2\left(\frac{y}{s}-1\right)^2} \iff \frac{1}{\left(\frac{y}{s}-1\right)^2} = \frac{dy}{ds}$$

$$\frac{y}{s} = z \Rightarrow y = sz \iff y(s) = s\cdot z(s) \iff \frac{dy}{ds} = s\cdot z'(s) + z(s)$$

$$s\cdot z'(s) + z(s) = \frac{1}{(z-1)^2} \iff s\cdot z' + z = \frac{1}{z^2-2z+1}$$

$$z' = \frac{1}{s}\cdot\frac{-z(z^2-2z+1)+1}{z^2-2z+1} \iff \frac{z^2-2z+1}{1-z(z^2-2z+1)}\,dz = \frac{ds}{s} \iff$$

• soluții staționare : $f(z) = z^3 + 2z^2 - z + 1 = 0$

$f'(z) = -3z^2 + 4z - 1$

$= -3z^2 + 3z + z - 1 = -3z(z-1) + (z-1) = (z-1)(1-3z)$

$z_{1,2} = \{1, \frac{1}{3}\}$

z	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$f(z)$	$+$	$+$	$+$	$-$

$\exists\ z_0 \in (1,\infty)$ a.î. $f(z_0) = 0$. Avem $z = z_0$ soluție staționară

$y(s) = s\cdot z_0$

$x(t) = (t+1)\cdot z_0$

$$\frac{(z-1)^2}{1-z(z-1)^2}\,dz = \frac{ds}{s} \Rightarrow \int \frac{z^2-2z+1}{-z^3+2z^2-z+1}\,dz = \int\frac{ds}{s} = \ln s + C \Rightarrow z = \frac{y}{s}$$

b) Problema Cauchy.

$t x' - x - \ln x' = 0$, $x(1) = 1$

$$\begin{cases} t = u \\ x = uv - \ln v \\ y = v \end{cases} \quad \begin{matrix} v > 0 \\ u \in \mathbb{R} \end{matrix} \qquad x = t x' - \ln x' \quad y = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dy = y \cdot dt$$

$d(uv - \ln v) = v \cdot du$

$v du + (u - \frac{1}{v}) dv = \cancel{v du}$ $\qquad (u - \frac{1}{v}) dv = 0$

• $u - \frac{1}{v} = 0 \Rightarrow u = \frac{1}{v} \Rightarrow x = 1 - \ln v$

$$\begin{cases} x = 1 - \ln \frac{1}{u} \\ t = u \end{cases}$$ soluția în formă parametrică

$x(t) = 1 + \ln(t)$

$x(1) = 1 + 0 = 1 \Rightarrow$ verifică pb. Cauchy

$x(t) = 1 + \ln(t)$ - soluție a ecuației

• $du = 0 \Rightarrow v = \text{const}$

$$\begin{cases} t = u \\ x = c \cdot u - \ln c \end{cases}$$

$x(t) = c t - \ln c$

$x(1) = 1 \Leftrightarrow x(1) = c - \ln c$

$c - \ln c = 1 \qquad \rightarrow c = 1$ soluție

$f(c) = c - \ln c - 1$

$\ln c = c - 1 \Leftrightarrow c = e^{c-1}$

$c - e^{c-1} = 0 \Leftrightarrow 1 - e^{c-1} = 0 \Rightarrow e^{c-1} = 1 \Rightarrow c = 1$

$x(t) = t - \ln 1 = t \Rightarrow x(t) = t$

Obs: pb. Cauchy are două soluții $\begin{cases} x(t) = 1 + \ln t \\ x(t) = t \end{cases}$

ECUAȚII CAUCHY

a) $(x')^2 - 2xx' + x^2(-e^t + 1) = 0$, $x(0) = 1$

Not. : $x' = y \Rightarrow y^2 - 2xy + x^2(1 - e^t) = 0$

$\Delta = 4x^2 - 4x^2(1 - e^t) = 4e^t x^2$

$y_{1,2} = \dfrac{2x \pm 2xe^{\frac{t}{2}}}{2} = x \pm xe^{\frac{t}{2}}$

$\boxed{1}$ $\begin{cases} x' = x(1 + e^{t/2}) \\ x(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow x(t) = c \cdot e^{\int (1 + e^{\frac{t}{2}})dt} = c \cdot e^{t + 2 \cdot e^{\frac{t}{2}}}$

pt. $t = 0 \Rightarrow c \cdot e^2 = 1 \Rightarrow c = e^{-2}$

$x(t) = e^{-2} e^{t + 2 \cdot e^{t/2}}$

$\boxed{2}$ $\begin{cases} x' = x(1 - e^{t/2}) \Rightarrow x(t) = c \cdot e^{t - 2 \cdot e^{\frac{t}{2}}} \\ x(0) = 1 \end{cases}$

$x(0) = 1 \Rightarrow c \cdot e^{-2} = 1 \Rightarrow c = e^2$

$x(t) = e^2 \cdot e^{t - 2e^{t/2}}$

- două soluții ale problemei Cauchy.

$\boxed{4}$ TEMA : Să se scrie soluția generală a ecuației

a) $(x')^2 - 2x' - t^2 + 4x = 0$ (explicitată în raport cu x)

b) $t(x')^2 - 2xx' + x = 0$ — " —

$\boxed{5}$ Să se determine $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_5$ din șirul aproximatelor succesive (Picard) pt. problema Cauchy.

a) $\begin{cases} x' = t + 1 - x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$

TEMA b) $\begin{cases} x' = 1 + t \sin x \\ x(\pi) = 2\pi \end{cases}$

$\boxed{6}$ Să se studieze existența și unicitatea soluției pt următoarele ec. dif:

a) $x' = 3x^{2/3} + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$

TEMA b) $x' = g(x)$, unde $g(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

EX. 5. REZOLVARE $\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

$(\varphi_i)_{i \geq 0}$: $\varphi_0(t) = x_0$

$\varphi_{i+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\,ds$, $\forall i \geq 0$

a) $f(t,x) = t + 1 - x^2$ $\quad t_0 = 0$, $x_0 = 1$

$\varphi_0(t) = x_0 = 1$

$\varphi_1(t) = 1 + \int_0^t f(s, \varphi_0(s))\,ds = 1 + \int_0^t (s+1-1)\,ds = 1 + \frac{s^2}{2}\Big|_0^t = 1 + \frac{t^2}{2}$

$\varphi_2(t) = 1 + \int_0^t f(s, \varphi_1(s))\,ds = 1 + \int_0^t \left(s+1-\left(1+\frac{s^2}{2}\right)^2\right)ds =$

$= 1 + \int_0^t \left(s + \cancel{1} - \cancel{1} - \frac{s^4}{4} - 2s^2\right)ds = 1 + \left(\frac{s^2}{2} - \frac{s^5}{20} - \frac{2s^3}{3}\right)\Big|_0^t = 1 + \frac{t^2}{2} - \frac{t^5}{20} - \frac{2t^3}{3}$

$\varphi_3(t) = 1 + \int_0^t f(s, \varphi_2(s))\,ds = 1 + \int_0^t \left(s+1-\left(1+\frac{s^2}{2}-\frac{s^5}{20}-\frac{2s^3}{3}\right)\right)ds$

EX. 6. REZOLVARE

a) $f(t,x) = 3x^{2/3} + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă (funcție elementară în x) $\Rightarrow$ $\forall (t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se poate construi șirul aproximațiilor succesive $(\varphi_i)_{i \geq 0}$ (din th. Cauchy-Picard), care tinde la soluția probl. Cauchy:

$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow$ $(\exists)$ soluție a problemei Cauchy (f, t_0, x_0)

Calculăm $\frac{\partial f}{\partial x} = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = 2x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ cont pe $\mathbb{R}^* \Rightarrow$ $\forall (t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, pb. Cauchy are soluție unică.

Fie $(t_0, 0)$ și $\lambda = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} x' = 3x^{2/3} \\ x(t_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow$ $x = 0$ soluție staționară

$x(t_0) = 0$

$x(t) = 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

$\frac{dx}{3x^{2/3}} = dt \Rightarrow \frac{1}{3}\int x^{-2/3}\,dx = \int dt \Rightarrow \cancel{\frac{1}{3}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\cancel{\frac{1}{3}}} = t + C \Rightarrow \sqrt[3]{x} = t + C$

$x(t) = (t + C)^3$

$0 = (t_0 + t_0 C)^3 \Rightarrow C = -t_0 \Rightarrow x(t) = (t - t_0)^3 \Rightarrow$

$\forall t_0 \in \mathbb{R}$ problema Cauchy $(f, t_0, 0)$ nu are soluție unică.