Existenţa şi unicitatea soluţiei problemei Cauchy pentru ecuaţii diferenţiale scalare de ordin 1

(Partea I)

Curs Nr. 2

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \,, \tag{1}$$

Ecuaţia diferenţială (1) este definită de câmpul vectorial $f(\cdot,\cdot) : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Definiţia problemei Cauchy

Spunem că s-a dat o **problemă Cauchy** pentru ecuaţia (1), notată (f, t_0, x_0), dacă se caută o funcţie derivabilă $\phi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel încât $\phi(t_0) = x_0$, $\Gamma_\phi = \{(t, \phi(t)|t \in I\} \subset D$şi să verifice ecuaţia (1) $\iff$ $\phi'(t) = f(t, \phi(t)), \forall t \in I$.

Problema Cauchy se scrie sub forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}, f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2}$$

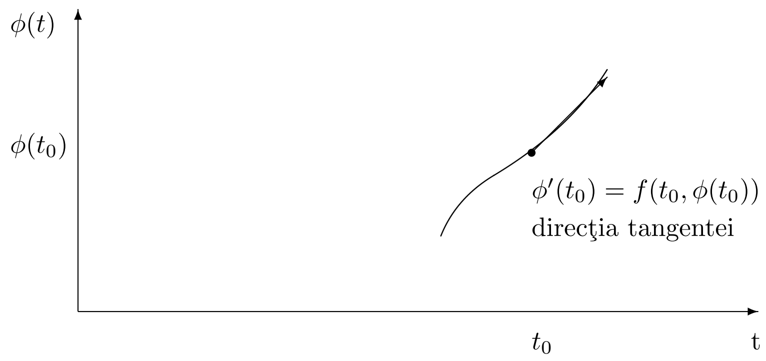
Condiţia $x(t_0) = x_0$ este numită *condiţie iniţială.*

Probleme de studiat pentru problema Cauchy

1. Existenţa soluţiei (ne interesează obiecte care există)
2. Unicitatea soluţiei (asigură posibilitatea previziunii ştiinţifice)
3. Existenţa unei soluţii maximale (dacă $D = [a, b] \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$, atunci interesează dacă există soluţie ϕ definită pe întreg domeniul)
4. Dependenţa de datele iniţiale: t_0, x_0 (dependenţa continuă asigură că la erori mici ale datelor iniţiale corespund erori mici ale soluţiei)
5. Metode de aproximare a soluţiei în cazul în care nu poate fi determinată soluţia prin integrare directă prin cuadraturi (folosirea calculatoarelor)

Interpretarea geometrică a soluţiei problemei Cauchy

Dacă ϕ soluţie a problemei (2), avem $\Gamma_\phi \subset D$



Teorema Cauchy-Picard
(existenţa şi unicitatea problemei Cauchy)

Se dă $f(\cdot,\cdot) : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Considerăm $(t_0, x_0) \in D$. Acestea definesc problema Cauchy (2). Considerăm $a, b > 0$ astfel încât $D_1 = [t_0 - a, t_0 + a] = [x_0 - b, x_0 + b] \subset D$. Considerăm că f continuă şi $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ este mărginită pe D_1. *Deci* $\exists M_1 > 0, M_1 = \max_{(t,x)\in D_1} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right|$. Cum f este continuă pe D_1 rezultă că $\exists M = \sup_{(t,x)\in D_1} |f(t,x)|$. Fie $\alpha \leq \min(a, \frac{b}{M})$. Atunci problema Cauchy are o unică soluţie $\phi : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}$, adică există şi este unică ϕ astfel încă să verifice

$$\begin{cases} \phi'(t) = f(t, \phi(t)) \\ \phi(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Preliminarii (Şiruri de funcţii)

Fie $(f_i)_{i\geq 0}, f_i : I \to \mathbb{R}$ un şir de funcţii continue.

Definiţii:

1. Şirul $f(f_i)_{i\geq 0}$ *converge* la $f : I \to \mathbb{R}$ ($f_i \xrightarrow[i \to \infty]{} f$) dacă $\forall \epsilon > 0$, $\forall t \in I$,
$$\exists N(\epsilon, t) \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } |f_i(t) - f(t)| < \epsilon,\ \forall i \geq N(\epsilon, t). \tag{3}$$
2. Şirul $(f_i)_{i\geq 0}$ *converge uniform* la $f : I \to \mathbb{R}$ dacă $\forall \epsilon > 0$, $\exists N(\epsilon, t) \in \mathbb{N}$
$$\text{astfel încât } |f_i(t) - f(t)| < \epsilon,\ \forall i \geq N(\epsilon, t),\ \forall t \in I. \tag{4}$$
3. Şirul $f(f_i)_{i\geq 0}$ este*şir Cauchy* dacă $\forall \epsilon > 0$, $\exists N(\epsilon, t) \in \mathbb{N}$ astfel încât
$$|f_i(t) - f_j(t)| < \epsilon,\ \forall i, j \geq N(\epsilon, t),\ \forall t \in I. \tag{5}$$

Propoziţie: Fie $f(f_i)_{i\geq 0}$ şir Cauchy de funcţii continue,$f_i : I \to \mathbb{R},\ I = [a, b]$. Atunci:

1. $f_i \xrightarrow[i\to\infty]{} f$
2. $\lim_{i\to\infty} \int\limits_a^b f_i(t)\ \mathrm{d}t = \int\limits_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$

Demonstraţie:

1. Pentru $t \in [a, b],\ (f_i(t))_{i\geq 0}$ este şir Cauchy. Deci $\exists l_t = \lim_{i\to\infty} f_i(t)$. Definim $f : [a, b] \to \mathbb{R},\ f(t) = l_t,\ \forall t \in [a, b]$. Cum $(f_i)_{i\geq 0}$ şir Cauchy, considerăm în (5) $j \to \infty$, deci $\forall \epsilon > 0,\ \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $|f_i(t) - f(t)| < \epsilon,\ \forall i \geq N(\epsilon),\ \forall t \in [a, b]$, de unde rezultă că $(f_i)_{i\geq 0}$ converge uniform la f.
   Arătăm că f este uniform continuă: fie $\epsilon > 0$ şi $t_1,\ t_2 \in [a, b]$. Avem:
   $$\begin{aligned}&|f(t_1) - f(t_2)| = |f(t_1) - f_i(t_1) + f_i(t_1) - f_i(t_2) + (f_i(t_2) - f(t_2))| \leq \\ &\leq \underbrace{|f(t_1) - f_i(t_1)|}_{<\epsilon} + \underbrace{|f_i(t_1) - f_i(t_2)|}_{<\epsilon\ (f_i \text{ continuă pe intervalul compact } [a,b])} + \underbrace{|f_i(t_2) - f(t_2)|}_{<\epsilon} < \\ &<\ 3\epsilon\end{aligned}$$
   Deci, f este continuă pe intervalul $[a, b]$.
2. Avem:
   $$\left|\int_a^b f_i(t)\ \mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\right| = \left|\int_a^b (f_i(t) - f(t))\ \mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b \underbrace{|f_i(t) - f(t)|}_{<\epsilon}\ \mathrm{d}t \leq \epsilon(b - a)$$
   De unde rezultă că: $\int\limits_a^b f_i(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[i\to\infty]{} \int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t$ ∎

Lema 1: În ipotezele teoremei Cauchy-Picard, câmpul vectorial $f(\cdot, \cdot)$ verifică condiţia de a fi funcţie Lipschitz în raport cu al doilea argument.

$$\exists L > 0 \text{astfel încât } |f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L\,|x_1 - x_2|\,,\ \forall (t, x_1),\ (t, x_2)\ \in D \tag{6}$$

Demonstraţie: Fie $(t, x_1),\ (t, x_2)\ \in D$. Cum $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ este continuă şi f este continuă pe D, aplicăm teorema creşterilor finite pentru x pe $[x_1, x_2]$: $\exists(\delta, \xi) \in D$ astfel încât $f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2) = \underbrace{\dfrac{\partial f}{\partial x}(\delta, \xi)}_{\text{mărginită}}(x_1 - x_2)$. De unde se obţine: $|f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)| \leq M_1|x_1 - x_2|$, adică condiţia (6) pentru $L = M_1$ ∎

Lema 2 (de reprezentare integrală a soluţiei): În ipotezele teoremei Cauchy-Picard, fie problema Cauchy (f, t_0, x_0). Are loc următoarea echivalenţă: $\phi : [t_0-\alpha, t_0+\alpha] \to \mathbb{R}$ este soluţie a problemei Cauchy $(f, t_0, x_0) \iff \phi(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^t (f(s), \phi(s))\mathrm{d}s$.

Demonstraţie: $\boxed{\Rightarrow}$ ϕ soluţie $\Rightarrow \begin{cases}\phi'(t) = f(t, \phi(t)),\ \forall t \in I \\ \phi(t_0) = x_0\end{cases} \Rightarrow \int\limits_{t_0}^t \phi(s)\ \mathrm{d}s =$
$= \int\limits_{t_0}^t f(s, \phi(s))\ \mathrm{d}s \Rightarrow \phi(t) - \phi(t_0) = \int\limits_{t_0}^t f(s, \phi(s))\ \mathrm{d}s \Rightarrow \phi(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^t f(s, \phi(s))\ \mathrm{d}s.$

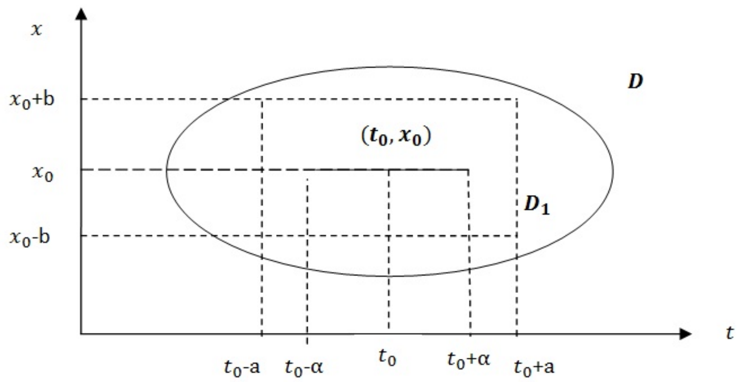
$\boxed{\Leftarrow}$ Cum $f(\cdot,\phi(\cdot))$ este continuă, pentru $t=t_0$ se obţine $\phi(t_0)=x_0+\int\limits_{t_0}^{t} f(s,\phi(s))\ \mathrm{d}s = x_0$.
Cum $\int\limits_{t_0}^{t} f(s,\phi(s))\ \mathrm{d}s$ este derivabilă $\Rightarrow \phi'(t)=f(t,\phi(t))t' - f(t_0,\phi(t_0))t_0' \Rightarrow \phi'(t) = f(t,\phi(t))$ ■

Demonstraţia Teoremei Cauchy-Picard

Demonstraţia existenţei soluţiei teoremei Cauchy-Picard

Considerăm un şir de funcţii $(\phi_i)_{i\geq 0},\ \phi_i : I=[t_0-\alpha, t_0+\alpha]\to\mathbb{R},\ \alpha\leq \min(a,\dfrac{b}{M})$, definit astfel: $\phi_0 : I\to\mathbb{R},\ \phi_0(t)=x_0,\ \forall t\in I$.
Pentru $i\geq 0$ definim $\phi_{i+1}(t)=x_0+\int\limits_{t_0}^{t} f(s,\phi(s))\ \mathrm{d}s$. Considerăm $t\in[t_0,t_0+\alpha]$.

1. Arătăm că graficele $\Gamma_{\phi_i}\subset D_1\subset D$ (demonstraţie prin inducţie)
   Avem $\phi_0(t)=x_0\Rightarrow \Gamma_{\phi_0}=(t,x_0)|t\in[t_0-\alpha,t_0+\alpha]\subset D_1$
   Presupunem adevărat pentru ϕ_i şi demonstrăm pentru ϕ_{i+1}.



   $\Gamma_{\phi_i}=(t,\phi_i(t)|t\in I\subset D_1,\ \forall k=\overline{0,i}$
   Demonstăm că $\Gamma_{\phi_k}\subset D_1$.
   Avem $\Gamma_{\phi_k}\subset D\Rightarrow |\phi_k(t)-x_0|,\ \forall t\in I,\ \forall k=\overline{0,i}$.
   Arătăm că $|\phi_{i+1}(t)-x_0|<b$.

$$|\phi_{i+1}(t)-x_0| = \left|\int\limits_{t_0}^{t} f(s,\phi_i(s))\ \mathrm{d}s\right| \leq \int\limits_{t_0}^{t} \underbrace{|f(s,\phi(s))|}_{\leq M}\ \mathrm{d}s \leq M\underbrace{(t-t_0)}_{<\alpha} \leq$$

$$\leq M\alpha \leq M\frac{b}{M} = b \Rightarrow \Gamma_{\phi_{i+1}}\subset D_1$$

2. Demonstrăm că $(\phi_i)_{i\geq 0}$ este şir Cauchy ca şi şir de funcţii. Arătăm prin inducţie că
   $|\phi_{i+1}(t)-\phi_i(t)|\leq \dfrac{ML^1(t-t_0)^{i+1}}{(i+1)!},\ \forall i\geq 0,\ (t\in[t_0,t_0+\alpha])$.

Pentru $i = 0$ avem:

$$|\phi_1(t) - \phi_0(t)| = \left| x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi_0(s))\, \mathrm{d}s - x_0 \right| \leq \int_{t_0}^{t} \underbrace{|f(s, \phi_0(s))|}_{\leq M}\, \mathrm{d}s \leq$$

$$\leq M(t - t_0) = \frac{ML^0(t - t_0)^1}{1!} \Rightarrow \text{ se verifică pentru } i = 0.$$

Presupunem propoziţia adevărată pentru $k = \overline{0, i}$ şi demonstrăm pentru $i + 1$.

$$|\phi_{i+2}(t) - \phi_{i+1}(t)| = \left| x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi_{i+1}(s))\, \mathrm{d}s - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, \phi_i(s))\, \mathrm{d}s \right| =$$

$$= \left| \int_{t_0}^{t} (f(s, \phi_{i+1}(s)) - f(s, \phi_i(s)))\, \mathrm{d}s \right| \leq \int_{t_0}^{t} \underbrace{|f(s, \phi_{i+1}(s)) - f(s, \phi_i(s))|}_{\leq L|\phi_{i+1}(s) - \phi_i(s)|}\, \mathrm{d}s \leq$$

$$\leq L \int_{t_0}^{t} |\phi_{i+1}(s) - \phi_i(s)|\, \mathrm{d}s \leq L \int_{t_0}^{t} \frac{ML^i(s - t_0)^{i+1}}{(i+1)!}\, \mathrm{d}s =$$

$$= \frac{ML^{i+1}}{(i+1)!} \cdot \left. \frac{(s - t_0)^{i+2}}{i+2} \right|_{t_0}^{t} = \frac{ML^i(t - t_0)^{i+2}}{(i+2)!}$$

Pentru a arăta că este şir Cauchy: $|\phi_{i+p}(t) - \phi_i(t)| \to 0,\ \forall p \in \mathbb{N}$.
Fie $p \in \mathbb{N}$ şi $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$. Avem:

$$|\phi_{i+p}(t) - \phi_i(t)| = \sum_{k=0}^{p-1} |\phi_{i+p-k}(t) - \phi_{i+p-k-1}(t)| \leq M \sum_{k=0}^{p-1} \frac{L^{i+p-k-1}(t - t_0)^{i+p-k}}{(i+p-k)!} =$$

$$= M \left(\sum_{k=0}^{p-1} \frac{L^{p-k-1}(t - t_0)^{p-k}}{(p-k-1)!} \right) \cdot \underbrace{\frac{L(t - t_0)}{i!}}_{\xrightarrow[i \to \infty]{}} \longrightarrow 0$$

Am folosit inegalitatea :
$\boxed{(l + p - k)! \geq (i+1)!(p - k - 1)!}$

Avem deci $(\phi_i)_{i \geq 0}$ şir Cauchy. Din **Propoziţie** rezultă că $(\phi_i)_{i \geq 0}$ este convergent. Prin urmare, $\exists\ \phi : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to [x_0 - b, x_0 + b]]$ astfel încât $\phi_i \xrightarrow[i \to \infty]{} \phi$, ϕ funcţie continuă.
Arătăm că ϕ este soluţie. Avem: $\phi_i(t_0) = x_0,\ \forall i \geq 0 \Rightarrow \phi(t_0) = x_0$.

$$|f(s, \phi_i(s)) - f(s, \phi(s))| \leq L \underbrace{|\phi_i(s) - \phi(s)|}_{\to 0} \Rightarrow \left. \begin{array}{c} f(s, \phi_i(s)) \to f(s, \phi(s)) \\ \\ \phi'_{i+1}(t) = f(t, \phi_i(t)) \end{array} \right| \Rightarrow \phi'(t) \to f(t, \phi(t))$$

S-a arătat că $\phi_i \xrightarrow[i \to \infty]{} \phi$, unde ϕ este soluţie a problemei Cauchy (f, t_0, x_0) ∎

Exerciţiu

Se dă problema Cauchy: $\begin{cases} x' = x \\ x(0) = 1 \end{cases}$.

Avem:

$$f(t,x) = x,\ t_0 = 0,\ x_0 = 1$$
$$\phi_0(t) = 1$$
$$\phi_1(t) = 1 + \int_0^t 1\ \mathrm{d}t = 1 + t$$
$$\phi_2(t) = 1 + \int_0^t f(t, \phi_1(t))\ \mathrm{d}t = 1 + \int_0^t (1+s)\ \mathrm{d}s = 1 + t + \frac{t^2}{2}$$

ş.a.m.d.

Arătaţi că:

a) Soluţia este $x(t) = e^t$.

b) $\phi_i(t) = 1 + t + \frac{t^2}{1!} + \cdots + \frac{t^2}{i!},\ \forall i \geq 0.$