Lema Farkas-Minkowski

Fie $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Considerăm următoarele sisteme liniare:

$$\text{(S1)} \quad \begin{cases} A\cdot x = b \\ x \geq \mathbf{0} \end{cases} \qquad\qquad \text{(S2)} \quad \begin{cases} A^\top \cdot u \geq \mathbf{0} \\ b^\top \cdot u < 0 \end{cases}$$

Lemă. ***Dintre sistemele (S1) şi (S2) doar unul şi numai unul are soluţii.***

Lema se poate aplica şi la alte perechi de sisteme liniare.

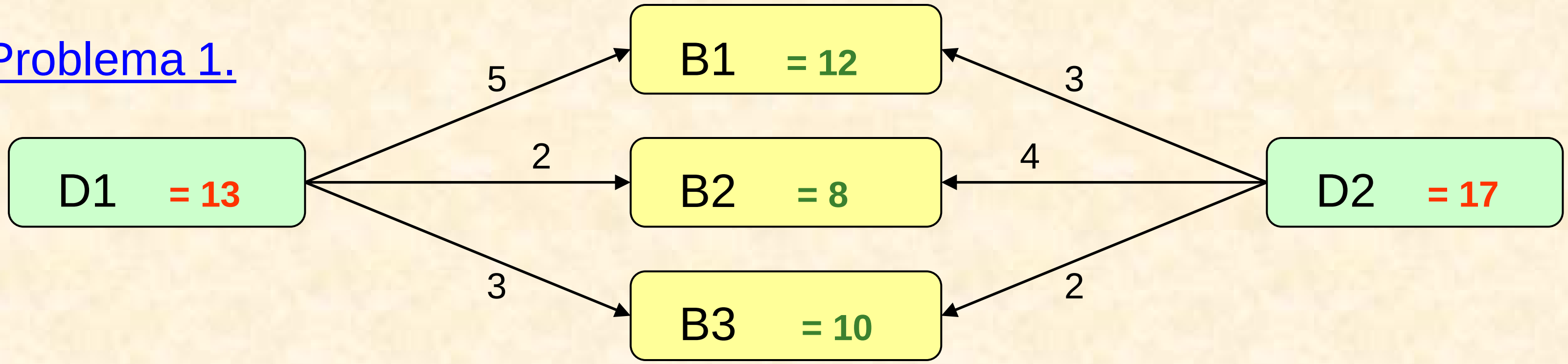
$$\boxed{\begin{cases} A\cdot x \leq b \\ x \geq \mathbf{0} \end{cases}} \Longleftrightarrow \left.\begin{cases} A\cdot x + \mathbf{I}\cdot y = b \\ x \geq \mathbf{0},\ y \geq \mathbf{0} \end{cases}\right\} \xLeftrightarrow{\text{duala F-M}} \boxed{\begin{cases} A^\top \cdot u \geq \mathbf{0} \\ u \geq \mathbf{0} \\ b^\top \cdot u < 0 \end{cases}}$$

O consecinţă la Lema Farkas-Minkowski:

Teoremă. *Fie* $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *o matrice antisimetrică* $\left(S = -S^\top\right)$. *Sistemul* $\begin{cases} S\cdot x \geq \mathbf{0} \\ x \geq \mathbf{0} \end{cases}$ *are o soluţie* $\overline{x} \geq \mathbf{0}$ *cu proprietatea* $S\cdot\overline{x} + \overline{x} > \mathbf{0}$.

Dualitate în optimizarea liniară

Problema 1.



Să se distribuie marfa din depozite la beneficiari, în aşa fel încât, costul total de transport să fie minim.

Dacă notăm $x_{ij},\ i=1,2,\ j=1,2,3,$ cantitatea de marfă transportată de la depozitul Di către beneficiarul Bj, modelul matematic este:

$$\min\{5x_{11}+2x_{12}+3x_{13}+3x_{21}+4x_{22}+2x_{23}\}$$

$$-x_{11}-x_{12}-x_{13}\geq -13$$

$$-x_{21}-x_{22}-x_{23}\geq -17$$

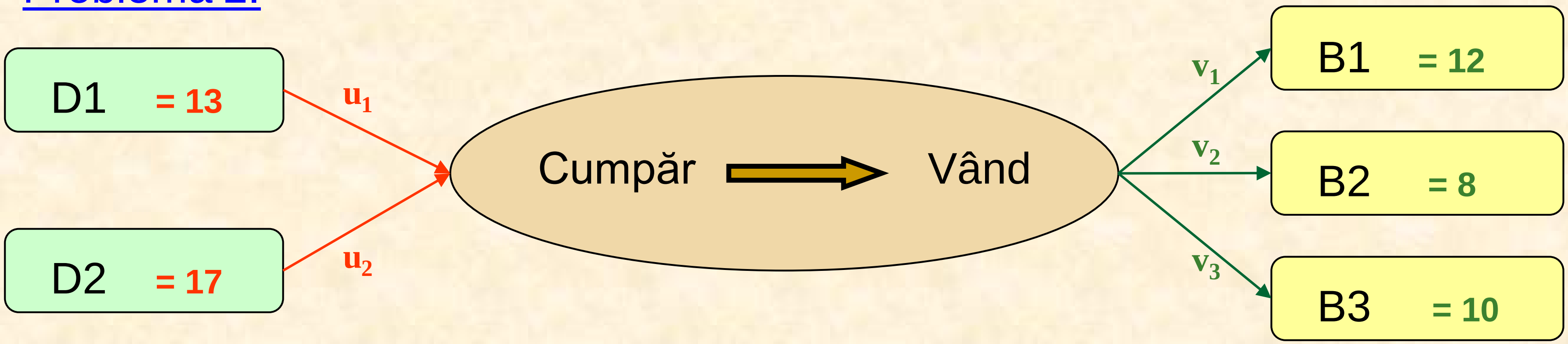
$$x_{11}+x_{21}\geq 12$$

$$x_{12}+x_{22}\geq 8$$

$$x_{13}+x_{23}\geq 10$$

$$x_{ij}\geq 0,\ i=1,2,\ j=1,2,3.$$

Problema 2.



Să se stabilească **costurile de cumpărare şi vânzare** a mărfii în aşa fel încât să se obţină un beneficiu maxim.

$$\max\{-13u_1 - 17u_2 + 12v_1 + 8v_2 + 10v_3\}$$

$$v_1 - u_1 \le 5$$
$$v_2 - u_1 \le 2$$
$$v_3 - u_1 \le 3$$
$$v_1 - u_2 \le 3$$
$$v_2 - u_2 \le 4$$
$$v_3 - u_2 \le 2$$
$$u_i \ge 0,\ i = 1,2,\ v_j \ge 0,\ \ j = 1,2,3.$$

Condiţie: diferenţa dintre preţul de vânzare şi cel de cumpărare să nu depăşească costul unitar de transport de la depozitul Di la beneficiarul Bj.

Problema primală:

$$\inf\left\{c_1^\top \cdot x_1 + c_2^\top \cdot x_2 + c_3^\top \cdot x_3\right\}$$

în raport cu

$$\left.\begin{array}{l} A_{11} \cdot x_1 + A_{12} \cdot x_2 + A_{13} \cdot x_3 \ \geq b_1 \\ A_{21} \cdot x_1 + A_{22} \cdot x_2 + A_{23} \cdot x_3 = b_2 \\ A_{31} \cdot x_1 + A_{32} \cdot x_2 + A_{33} \cdot x_3 \leq b_3 \\ x_1 \geq \mathbf{0} \qquad\qquad\qquad x_3 \leq \mathbf{0} \end{array}\right\} \quad (\text{P})$$

===

Problema duală:

$$\sup\left\{b_1^\top \cdot u_1 + b_2^\top \cdot u_2 + b_3^\top \cdot u_3\right\}$$

în raport cu

$$\left.\begin{array}{l} A_{11}^\top \cdot u_1 + A_{21}^\top \cdot u_2 + A_{31}^\top \cdot u_3 \leq c_1 \\ A_{12}^\top \cdot u_1 + A_{22}^\top \cdot u_2 + A_{32}^\top \cdot u_3 = c_2 \\ A_{13}^\top \cdot u_1 + A_{23}^\top \cdot u_2 + A_{33}^\top \cdot u_3 \geq c_3 \\ u_1 \geq \mathbf{0} \qquad\qquad\qquad u_3 \leq \mathbf{0} \end{array}\right\} \quad (\text{D})$$

Reguli de asociere a problemelor duale

- Unei probleme de minimizare îi corespunde o problemă de maximizare, şi reciproc.
- Coeficienţii din funcţia obiectiv a unei probleme devin coeficienţii termenului liber în cealaltă problemă, şi reciproc.
- Matricea restricţiilor dintr-o problemă este matricea transpusă din cealaltă problemă, şi reciproc.
- Fiecărei restricţii dintr-o problemă îi corespunde o variabilă în cealaltă problemă, şi reciproc.

  Relaţia de asociere este următoarea:
  - unei <u>restricţii concordante</u> îi corespunde o <u>variabilă nenegativă</u> (≥ 0), şi reciproc;
  - unei <u>restricţii egalitate</u> îi corespunde o <u>variabilă oarecare</u> (fără condiţii de semn), şi reciproc;
  - unei <u>restricţii neconcordante</u> îi corespunde o <u>variabilă nepozitivă</u> (≤ 0), şi reciproc.

<u>Problema primală:</u>

$$\inf\left\{c_1^\top \cdot x_1 + c_2^\top \cdot x_2 + c_3^\top \cdot x_3\right\}$$

în raport cu

$$\left.\begin{aligned}
&\boxed{A_{11}\cdot x_1 + A_{12}\cdot x_2 + A_{13}\cdot x_3 \ \geq b_1}\\
&A_{21}\cdot x_1 + A_{22}\cdot x_2 + A_{23}\cdot x_3 = b_2\\
&A_{31}\cdot x_1 + A_{32}\cdot x_2 + A_{33}\cdot x_3 \leq b_3\\
&x_1 \geq \mathbf{0} \qquad\qquad\qquad x_3 \leq \mathbf{0}
\end{aligned}\right\} \quad \text{(P)}$$

==

<u>Problema duală:</u>

$$\sup\left\{b_1^\top \boxed{\cdot u_1} + b_2^\top \cdot u_2 + b_3^\top \cdot u_3\right\}$$

în raport cu

$$\left.\begin{aligned}
&A_{11}^\top \boxed{\cdot u_1} + A_{21}^\top \cdot u_2 + A_{31}^\top \cdot u_3 \leq c_1\\
&A_{12}^\top \boxed{\cdot u_1} + A_{22}^\top \cdot u_2 + A_{32}^\top \cdot u_3 = c_2\\
&A_{13}^\top \boxed{\cdot u_1} + A_{23}^\top \cdot u_2 + A_{33}^\top \cdot u_3 \geq c_3\\
&\boxed{u_1 \geq \mathbf{0}} \qquad\qquad\qquad u_3 \leq \mathbf{0}
\end{aligned}\right\} \quad \text{(D)}$$

<u>Problema primală:</u>

$$\left.\begin{aligned}
&\inf \left\{ c_1^\top \cdot x_1 + c_2^\top \cdot x_2 + c_3^\top \boxed{\cdot x_3} \right\}\\
&\text{în raport cu}\\
&A_{11} \cdot x_1 + A_{12} \cdot x_2 + A_{13} \cdot \boxed{x_3} \geq b_1\\
&A_{21} \cdot x_1 + A_{22} \cdot x_2 + A_{23} \cdot \boxed{x_3} = b_2\\
&A_{31} \cdot x_1 + A_{32} \cdot x_2 + A_{33} \cdot \boxed{x_3} \leq b_3\\
&x_1 \geq \mathbf{0} \qquad \boxed{x_3 \leq \mathbf{0}}
\end{aligned}\right\} \quad (\text{P})$$

==

<u>Problema duală:</u>

$$\left.\begin{aligned}
&\sup \left\{ b_1^\top \cdot u_1 + b_2^\top \cdot u_2 + b_3^\top \cdot u_3 \right\}\\
&\text{în raport cu}\\
&A_{11}^\top \cdot u_1 + A_{21}^\top \cdot u_2 + A_{31}^\top \cdot u_3 \leq c_1\\
&A_{12}^\top \cdot u_1 + A_{22}^\top \cdot u_2 + A_{32}^\top \cdot u_3 = c_2\\
&\boxed{A_{13}^\top \cdot u_1 + A_{23}^\top \cdot u_2 + A_{33}^\top \cdot u_3 \geq c_3}\\
&u_1 \geq \mathbf{0} \qquad u_3 \leq \mathbf{0}
\end{aligned}\right\} \quad (\text{D})$$

$$\begin{cases} \text{primala în formă standard:} & \inf\left\{\, c^{\top}\cdot x \mid A\cdot x = b,\ x \geq \mathbf{0} \,\right\} \\ \text{problema duală:} & \sup\left\{\, b^{\top}\cdot u \mid A^{\top}\cdot u \leq c \,\right\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{primala în formă canonică:} & \inf\left\{\, c^{\top}\cdot x \mid A\cdot x \geq b,\ x \geq \mathbf{0} \,\right\} \\ \text{problema duală:} & \sup\left\{\, b^{\top}\cdot u \mid A^{\top}\cdot u \leq c,\ u \geq \mathbf{0} \,\right\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{primala în formă mixtă:} & \begin{cases} \inf\left\{\, c^{\top}\cdot x \,\right\} \\ \text{în raport cu:} \\ \begin{matrix} A_1\cdot x \geq b_1 \\ A_2\cdot x = b_2 \end{matrix},\ x \geq \mathbf{0} \end{cases} \\ \text{problema duală:} & \begin{cases} \sup\left\{\, b_1^{\top}\cdot u_1 + b_2^{\top}\cdot u_2 \,\right\} \\ \text{în raport cu:} \\ A_1^{\top}\cdot u_1 + A_2^{\top}\cdot u_2 \leq c, \\ \qquad u_1 \geq \mathbf{0} \end{cases} \end{cases}$$

Teoreme de dualitate

Fie $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ şi definim domeniile de admisibilitate:

$$\mathcal{P} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid A\cdot x \geq b,\ x \geq \mathbf{0} \right\}, \qquad \mathcal{D} = \left\{ u \in \mathbb{R}^m \mid A^\top \cdot u \leq c,\ u \geq \mathbf{0} \right\}$$

Considerăm perechea de probleme (canonice) duale:

$$\inf \left\{ c^\top \cdot x \mid x \in \mathcal{P} \right\} \quad \text{.............................} \quad (\text{P})$$

$$\sup \left\{ b^\top \cdot u \mid u \in \mathcal{D} \right\} \quad \text{.............................} \quad (\text{D})$$

Teoremă (dualitate slabă)**.** *Dacă domeniile de admisibilitate* $\mathcal{P} \neq \emptyset,\ \mathcal{D} \neq \emptyset,$ *atunci* $\forall\, x \in \mathcal{P},\ \ \forall\, u \in \mathcal{D},$ *are loc relaţia:* $\boxed{c^\top \cdot x \geq b^\top \cdot u.}$

Demonstraţie. Pentru $\forall\, x \in \mathcal{P},\ \ \forall\, u \in \mathcal{D},$ avem:

$$\left.\begin{array}{c} A\cdot x - b \geq \mathbf{0} \\ u \geq \mathbf{0} \end{array}\right\} \Rightarrow u^\top \cdot A\cdot x \geq u^\top \cdot b, \qquad \left.\begin{array}{c} x \geq \mathbf{0} \\ A^\top \cdot u - c \leq \mathbf{0} \end{array}\right\} \Rightarrow x^\top \cdot A^\top \cdot u \leq x^\top \cdot c.$$

Prin urmare, $c^\top \cdot x \geq x^\top \cdot A^\top \cdot u = u^\top \cdot A\cdot x \geq b^\top \cdot u.$ (q.e.d.)

Teoremă (dualitate tare). *Dacă domeniile de admisibilitate* $\mathcal{P} \neq \emptyset$, $\mathcal{D} \neq \emptyset$, *şi* $\exists\, \bar{x} \in \mathcal{P}$, $\exists\, \bar{u} \in \mathcal{D}$, *astfel încât* $c^\top \cdot \bar{x} = b^\top \cdot \bar{u}$, *atunci,* $\bar{x}$ *este soluţie optimă pentru* (P) *şi* $\bar{u}$ *este soluţie optimă pentru* (D) *.*

Demonstraţie. Presupunem prin absurd că $\bar{x}$ nu este optimă pentru (P). Atunci, $\exists\, x_0 \in \mathcal{P}$ astfel încât $c^\top \cdot x_0 < c^\top \cdot \bar{x} = b^\top \cdot \bar{u}$. Contradicţie! (q.e.d.)

Teorema (fundamentală a dualităţii). *Fiind dată perechea de probleme duale* (P) *şi* (D) *doar una din următoarele afirmaţii are loc:*

a) $\mathcal{P} \neq \emptyset$ *şi* $\mathcal{D} \neq \emptyset$. *În cazul acesta* $\exists\, \tilde{x} \in \mathcal{P}$ *şi* $\exists\, \tilde{u} \in \mathcal{D}$, *soluţii optime pentru* (P), *respectiv* (D), *astfel încât* $c^\top \cdot \tilde{x} = b^\top \cdot \tilde{u}$.

b) $\mathcal{P} = \emptyset$ *şi* $\mathcal{D} = \emptyset$.

c) $\mathcal{P} \neq \emptyset$ *şi* $\mathcal{D} = \emptyset$ *sau* $\mathcal{P} = \emptyset$ *şi* $\mathcal{D} \neq \emptyset$. *În cazul acesta problema care are soluţii admisibile are optimul infinit.*

Demonstraţie. Considerăm matricea pătratică de ordinul $n+m+1$:

$$S = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & -A^\top & c \\ A & \mathbf{0}_m & -b \\ -c^\top & b^\top & 0 \end{pmatrix}$$

Deoarece $S = -S^\top$, putem aplica consecinţa Lemei Farkas-Minkowski:

există $\bar{z} \in \mathbb{R}^{n+m+1}$, $\bar{z} \ge \mathbf{0}$, astfel încât $S \cdot \bar{z} \ge \mathbf{0}$ şi $S \cdot \bar{z} + \bar{z} > \mathbf{0}$.

Notăm: $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{u}, r)^\top$, unde $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$, $r \in \mathbb{R}$.

Avem:

$$\bar{x} \ge \mathbf{0},$$

$$\bar{u} \ge \mathbf{0},$$

$$\boxed{r \ge 0,}$$

$$\boxed{r > 0} \qquad \boxed{r = 0}$$

$$-A^\top \cdot \bar{u} + cr \ge \mathbf{0}, \tag{1}$$

$$A \cdot \bar{x} - br \ge \mathbf{0}, \tag{2}$$

$$-c^\top \cdot \bar{x} + b^\top \cdot \bar{u} \ge 0, \tag{3}$$

$$\bar{x} - A^\top \cdot \bar{u} + cr > \mathbf{0}, \tag{4}$$

$$A \cdot \bar{x} + \bar{u} - br > \mathbf{0}, \tag{5}$$

$$-c^\top \cdot \bar{x} + b^\top \cdot \bar{u} + r > 0. \tag{6}$$

$\boxed{\text{Cazul } r > 0.}$ Definim: $\boxed{\tilde{x} = \dfrac{\bar{x}}{r} \quad \text{şi} \quad \tilde{u} = \dfrac{\bar{u}}{r}}$

Evident, $\tilde{x} \geq \mathbf{0}$ şi $\tilde{u} \geq \mathbf{0}$. Împărţind relaţiile (1) şi (2) la r, obţinem:

$$A \cdot \tilde{x} \geq b \text{ şi } A^{\top} \cdot \tilde{u} \leq c.$$

Deci, $\underline{\tilde{x} \in \mathcal{P}}$ şi $\underline{\tilde{u} \in \mathcal{D}}$, adică, $\boxed{\mathcal{P} \neq \emptyset \quad \text{şi} \quad \mathcal{D} \neq \emptyset.}$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Din dualitatea slabă} & \Rightarrow & c^{\top} \cdot \tilde{x} \geq b^{\top} \cdot \tilde{u} \\ \text{Din relaţia (3) / } r & \Rightarrow & c^{\top} \cdot \tilde{x} \leq b^{\top} \cdot \tilde{u} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{c^{\top} \cdot \tilde{x} = b^{\top} \cdot \tilde{u}.}$$

Din dualitatea tare rezultă $\tilde{x}$ şi $\tilde{u}$ optime pentru (P), respectiv (D).

$\boxed{\text{Cazul } r = 0.}$ Nu putem avea $\mathcal{P} \neq \varnothing$ şi $\mathcal{D} \neq \varnothing.$

Prin absurd, dacă există $x_0 \in \mathcal{P}$ şi $u_0 \in \mathcal{D}$, avem:

$$\left.\begin{array}{r} A \cdot x_0 - b \geq \mathbf{0} \\ \bar{u} \geq \mathbf{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{u}^\top \cdot b \leq \bar{u}^\top \cdot A \cdot x_0 \leq 0,$$

≤ 0 din (1)

$$\left.\begin{array}{r} \bar{x} \geq \mathbf{0} \\ A^\top \cdot u_0 - c \leq \mathbf{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{x}^\top \cdot c \geq \underbrace{\bar{x}^\top \cdot A^\top}_{\geq 0 \text{ din } (2)} \cdot u_0 \geq 0,$$

deci, $\bar{x}^\top \cdot c \geq 0 \geq \bar{u}^\top \cdot b.$ Contradicţie! cu (6)

Rezultă:

$$\boxed{\mathcal{P} = \varnothing \quad \text{şi} \quad \mathcal{D} = \varnothing.}$$

$$\boxed{\mathcal{P} \neq \varnothing \text{ şi } \mathcal{D} = \varnothing \quad \text{sau} \quad \mathcal{P} = \varnothing \text{ şi } \mathcal{D} \neq \varnothing.}$$

Presupunem, spre exemplu, că există $x_0 \in \mathcal{P}$.

Definim vectorul $x(\lambda) = x_0 + \lambda \bar{x}, \quad \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \geq 0.$

Avem evident $x(\lambda) \geq \mathbf{0}$ şi

$$A \cdot x(\lambda) = A \cdot x_0 + \lambda \underbrace{A \cdot \bar{x}}_{\geq 0 \text{ din } (2)} \geq A \cdot x_0 \geq b.$$

Deci, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \geq 0, \quad \Rightarrow \quad x(\lambda) \in \mathcal{P}.$

Deoarece $\underbrace{c^\top \cdot \bar{x} \ < \ b^\top \cdot \bar{u}}_{\text{din } (6)} \ \leq \ x_0^\top \cdot \underbrace{A^\top \cdot \bar{u}}_{\leq 0,\ \text{din } (1)} \ \leq \ 0,$

rezultă, $$\lim_{\lambda \to \infty} c^\top \cdot x(\lambda) = \lim_{\lambda \to \infty} \left(c^\top \cdot x_0 + \lambda \underbrace{c^\top \cdot \bar{x}}_{<0} \right) = -\infty.$$

(q.e.d.)

Teoremă (tare a ecarturilor complemetare). *Dacă* $\mathcal{P} \neq \varnothing$, $\mathcal{D} \neq \varnothing$, *atunci, pentru* (P) *şi* (D) *există soluţiile optime* $\tilde{x}$, *respectiv* $\tilde{u}$, *astfel încât*

$$(A \cdot \tilde{x} - b) + \tilde{u} > \mathbf{0},$$

$$(c - A^{\top} \cdot \tilde{u}) + \tilde{x} > \mathbf{0}.$$

Demonstraţie. Rezultă din (4) şi (5) pentru cazul $r > 0$. (q.e.d.)

Teoremă (slabă a ecarturilor complemetare). *Fie* $x \in \mathcal{P} \neq \varnothing$, $u \in \mathcal{D} \neq \varnothing$.

Atunci,

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ este soluţie optimă pentru (P)} \\ u \text{ este soluţie optimă pentru (D)} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u^{\top} \cdot (A \cdot x - b) = 0, \\ x^{\top} \cdot (c - A^{\top} \cdot u) = 0. \end{array}\right.$$

Demonstraţie. $\Rightarrow$ Din TFD a) rezultă: $c^{\top} \cdot x - b^{\top} \cdot u = 0$. Deci,

$$c^{\top} \cdot x - b^{\top} \cdot u + u^{\top} \cdot A \cdot x - x^{\top} \cdot A^{\top} \cdot u = \underbrace{u^{\top} \cdot (A \cdot x - b)}_{\geq 0} + \underbrace{x^{\top} \cdot (c - A^{\top} \cdot u)}_{\geq 0} = 0.$$

$\Leftarrow$ Adunăm membru cu membru relaţiile din enunţ şi obţinem: $c^{\top} \cdot x = b^{\top} \cdot u$.

Din teorema de dualitate tare rezultă ca soluţiile sunt optime. (q.e.d.)