Algoritmul simplex dual

Considerăm problema de programare liniară în forma standard:

$$\inf\left\{ c^\top \cdot x \mid A \cdot x = b,\ x \geq \mathbf{0} \right\} \qquad \text{(P)}$$

şi duala ei,

$$\sup\left\{ b^\top \cdot u \mid A^\top \cdot u \leq c \right\} \qquad \text{(D)}$$

unde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad b \in \mathbb{R}^m, \quad c \in \mathbb{R}^n, \quad rang(A) = m < n.$

Fie B o bază optimă a problemei (P). Avem:

$\boxed{\bar{x} = B^{-1} \cdot b \geq \mathbf{0}}$ (primal-admisibilitatea lui B)

$\boxed{c_{\mathcal{B}}^\top B^{-1} \cdot A \leq c^\top}$ (condiţia de optimalitate a lui B)

Notăm: $\boxed{\bar{u}^\top = c_{\mathcal{B}}^\top B^{-1}}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\bar{u}^\top \cdot A \leq c^\top}$ $\bar{u}$ admisibil pentru (D)

În plus, $\bar{z} = \underline{c_{\mathcal{B}}^\top \cdot \bar{x} =} c_{\mathcal{B}}^\top \cdot B^{-1} \cdot b \underline{= \bar{u}^\top \cdot b}.$

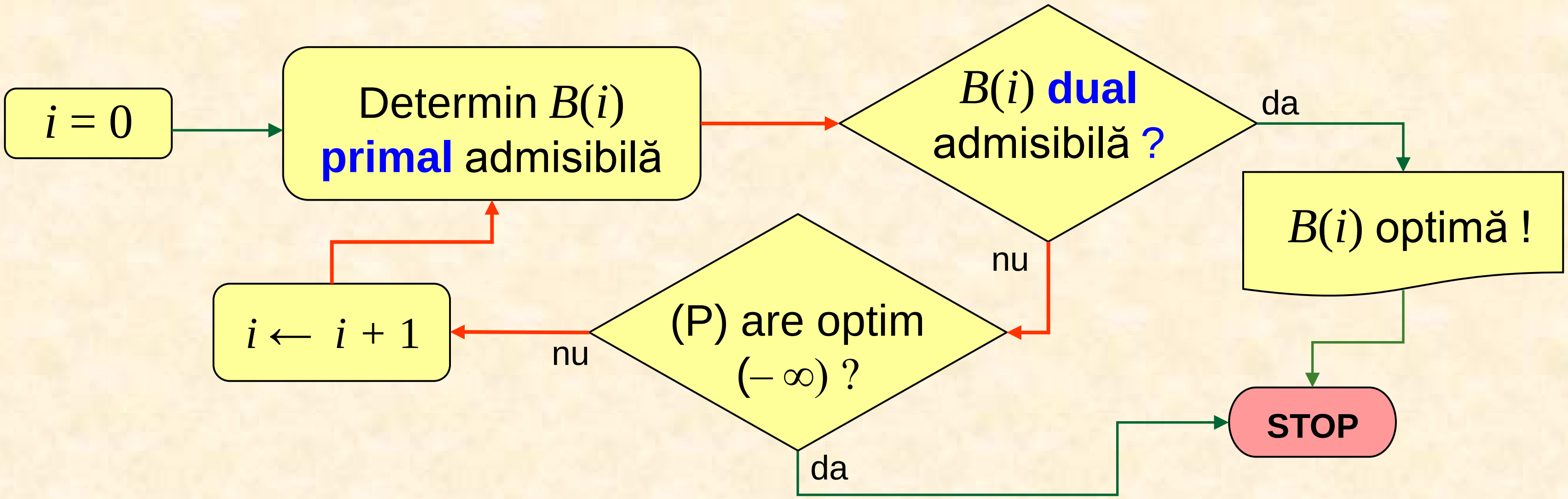
$\bar{u}$ optim pentru (D).
(teorema de dualitate tare)

Matricea de bază B se numeşte ***dual admisibilă****, dacă*

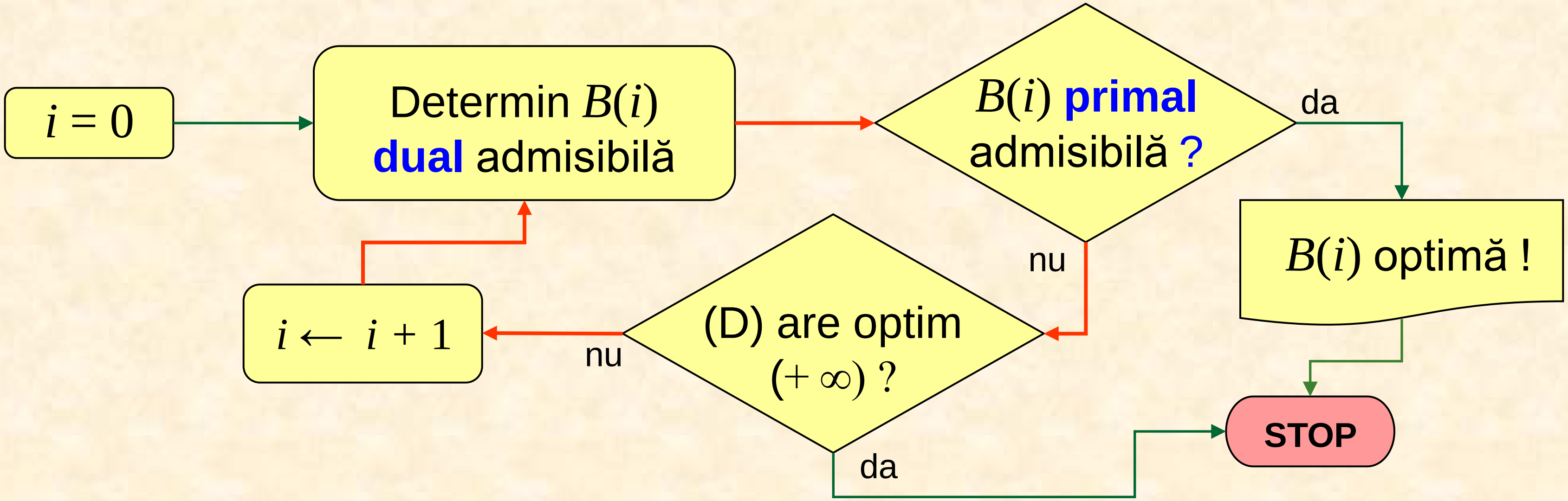
$$\boxed{c_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot B^{-1} \cdot A \leq c^{\top}}$$

Teoremă (optim): *Dacă baza B este* ***primal*** *şi* ***dual admisibilă****, atunci ea este* ***optimă*** *pentru problemele (P) şi (D).*

Algoritmul simplex primal:



Algoritmul simplex dual:



Teoremă (domeniu vid). *Fie* B *o bază dual admisibilă. Dacă există o componentă* $\overline{x}_i < 0,$ *pentru care* $y_{ij} \geq 0, \ \forall\ j = \overline{1,n},$ *atunci problema* (P) nu *are soluţie.*

Demonstraţie. Notăm $\overline{u}^\top = c_{\mathcal{B}}^\top \cdot B^{-1}$ şi B_i^{-1} linia i a lui B^{-1}.

Definim vectorul: $u^\top(\lambda) = \overline{u}^\top - \lambda B_i^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0.$

Pentru orice $j=\overline{1,n}$, avem:

$$u^{\top}(\lambda)\cdot A^j = \underbrace{\bar{u}^{\top}\cdot A^j}_{z_j} - \lambda \underbrace{B_i^{-1}\cdot A^j}_{y_{ij}} = z_j \underbrace{-\lambda y_{ij}}_{\leq 0} \leq \underbrace{z_j \leq c_j}_{B \text{ dual admis.}}$$

deci, $\forall\, \lambda \geq 0,\ u(\lambda)$ este o soluţie admisibilă pentru problema (D).

Valoarea funcţiei obiectiv este: $u^{\top}(\lambda)\cdot b = \bar{u}^{\top}\cdot b - \lambda B_i^{-1}\cdot b = \bar{z} - \lambda \bar{x}_i$

$$\Longrightarrow \qquad \lim_{\lambda\to\infty} u^{\top}(\lambda)\cdot b = \bar{z} + \lim_{\lambda\to\infty}\big(\underbrace{-\lambda\bar{x}_i}_{>0}\big) = +\infty.$$

Problema (D) are optimul $+\infty$ şi din T.F.D. rezultă că (P) nu are soluţie.

(q.e.d.)

Teoremă (schimbarea bazei): *Fie* $B=\left(A^{s_1}A^{s_2}\cdots A^{s_m}\right)$ *o bază dual admisibilă şi componenta* $\overline{x}_r<0,$ *pentru care există* $j\in\mathcal{R}$ *cu* $y_{rj}<0.$ *Dacă alegem indicele* $k\in\mathcal{R}$ *astfel încât*

$$\frac{z_k-c_k}{y_{rk}}=\min_{j\in\mathcal{R}}\left\{\frac{z_j-c_j}{y_{rj}}\;\middle|\; y_{rj}<0\right\}$$

atunci, matricea $\tilde{B}=\left(A^{s_1}\cdots A^{s_{r-1}}A^{k}A^{s_{r+1}}\cdots A^{s_m}\right)$ *este o bază dual admisibilă, pentru care* $\tilde{z}=c_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\top}\cdot\tilde{B}^{-1}\cdot b\;\geq\; c_{\mathcal{B}}^{\top}\cdot B^{-1}\cdot b=\overline{z}.$

Demonstraţie. Evident, $y_{rk}<0.$ Din Lema substituţiei rezultă că $\tilde{B}$ este o matrice nesingulară.

Trebuie arătat că $\forall\; j=\overline{1,n}, \quad\Rightarrow\quad \tilde{z}_j-c_j=c_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\top}\cdot\tilde{B}^{-1}\cdot A^j-c_j\leq 0.$

Din formulele de schimbare a bazei avem:

$$\tilde{z}_j - c_j = \left(z_j - c_j\right) - \frac{\left(z_k - c_k\right) y_{rj}}{y_{rk}}.$$

B fiind dual admisibilă, rezultă: $\left(z_j - c_j\right) \le 0, \quad \forall\, j = \overline{1,n}.$

Dacă $y_{rj} \ge 0$, evident $\tilde{z}_j - c_j \le 0.$

Dacă $y_{rj} < 0$, avem: $\tilde{z}_j - c_j = \underbrace{y_{rj}}_{<0} \underbrace{\left(\frac{z_j - c_j}{y_{rj}} - \frac{z_k - c_k}{y_{rk}} \right)}_{\ge 0} \le 0.$

Deci, $\tilde{B}$ este dual admisibilă.

Din formula de schimbare a valorii funcţiei obiectiv obţinem:

$$\tilde{z} = \overline{z} - \underbrace{\frac{\left(z_k - c_k\right)}{y_{rk}}}_{\ge 0} \overline{x}_r \ge \overline{z}.$$

(q.e.d.)

Paşii algoritmului simplex dual

- Pasul 0. Se determină (dacă există?!) o bază dual admisibilă B şi se calculează B^{-1}.

- Pasul 1. Se calculează
$$\bar{x} = B^{-1} \cdot b,\ \bar{z} = c_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot \bar{x},\ Y = B^{-1} \cdot A,\ z^{\top} - c^{\top} = c_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot Y - c^{\top} \leq \mathbf{0}^{\top}.$$

- Pasul 2. (test de optimalitate) Dacă $\bar{x} \geq \mathbf{0},$ atunci s-a obţinut valoarea optimă $\bar{z},$ şi soluţia optimă de bază $x_{\mathcal{B}} = \bar{x},\ x_{\mathcal{R}} = \mathbf{0}.$ STOP.

- Pasul 3. (test domeniu vid) Dacă $\exists\, \bar{x}_i < 0$ pentru care $y_{ij} \geq 0, \forall j = \overline{1,n},$ atunci problema (P) nu are soluţie. STOP.

- Pasul 4. (schimbarea bazei) Dacă $\bar{x}_r < 0$ şi $\exists\, j \in \mathcal{R}$ cu $y_{rj} < 0,$ se determină $k \in \mathcal{R}$ astfel încât
$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \min_{j \in \mathcal{R}} \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} \,\middle|\, y_{rj} < 0 \right\}.$$

  Se formează $\tilde{B} = B \setminus A^{s_r} \bigcup A^k,$ se calculează inversa $\tilde{B}^{-1} = E_r(\eta) \cdot B^{-1}$ şi se revine la Pasul 1.

Tabloul simplex standard

$$
\begin{array}{c|c|c|}
\cline{2-3}
x_{\mathcal{B}} & \bar{x} & Y = B^{-1} \cdot A \\
\cline{2-3}
 & \bar{z} & z^{\top} - c^{\top} \\
\cline{2-3}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc|c|ccccccc|}
 & & & \cdots & c_j & \cdots & c_k & \cdots \\
\underline{c_{\mathcal{B}}} & \underline{x_{\mathcal{B}}} & \bar{x} & \cdots & x_j & \cdots & x_k & \cdots \\
\cline{3-8}
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
c_{s_i} & x_{s_i} & \bar{x}_i & \cdots & y_{ij} & \cdots & y_{ik} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
c_{s_r} & x_{s_r} & \bar{x}_r & \cdots & y_{rj} & \cdots & \boxed{y_{rk}} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\cline{3-8}
 & & \bar{z} & \cdots & z_j - c_j & \cdots & z_k - c_k & \cdots \\
\cline{3-8}
\end{array}
$$

$$\bar{z} = \sum_{i=1}^{m} c_{s_i} \bar{x}_i$$

$$z_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_{s_i} y_{ij} - c_j$$

Exemple.

Considerăm problema:

$$\inf\left\{2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5\right\}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 & = & 5 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 + x_5 & = & -10 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 & = & 8 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad \forall i = \overline{1,5}.$$

Tabloul simplex pentru $B = \left(A^1 A^2 A^3\right)$ este:

	$\bar{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	$-\frac{2}{5}$	1	0	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$
x_2	$-\frac{2}{3}$	0	1	0	1	-3
x_3	$\frac{61}{15}$	0	0	1	$\frac{7}{5}$	$-\frac{13}{5}$
	$\frac{59}{15}$	0	0	0	$-\frac{17}{5}$	$-\frac{12}{5}$

	$\bar{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	$-\frac{14}{45}$	1	$-\frac{2}{15}$	0	$-\frac{8}{15}$	0
x_5	$\frac{2}{9}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1
x_3	$\frac{209}{45}$	0	$-\frac{13}{15}$	1	$\frac{8}{15}$	0
	$\frac{67}{15}$	0	$-\frac{4}{5}$	0	$-\frac{21}{5}$	0

Baza B este dual admisibilă !
dar **nu** este şi primal admisibilă.

	$\bar{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	$-\frac{14}{45}$	1	$-\frac{2}{15}$	0	$-\frac{8}{15}$	0
x_5	$\frac{2}{9}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1
x_3	$\frac{209}{45}$	0	$-\frac{13}{15}$	1	$\frac{8}{15}$	0
	$\frac{67}{15}$	0	$-\frac{4}{5}$	0	$-\frac{21}{5}$	0

	$\bar{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	$\frac{7}{3}$	$-\frac{15}{2}$	1	0	4	0
x_5	1	$-\frac{5}{2}$	0	0	1	1
x_3	$\frac{20}{3}$	$-\frac{13}{2}$	0	1	4	0
	$\frac{19}{3}$	–6	0	0	–1	0

$$\min\left\{\frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{2}{15}}, \frac{-\frac{21}{5}}{-\frac{8}{15}}\right\} = \min\left\{6, \frac{63}{8}\right\} = 6$$

Bază primal & dual admisibilă !

Soluţia optimă

Considerăm problema:

$$\inf\left\{2x_1+3x_2+x_3+6x_4+3x_5+3x_6\right\}$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-2x_5-3x_6=-2\\ 3x_2+2x_3+x_4+2x_6=1\\ 2x_1-x_2-3x_4+x_5-x_6=-1\end{cases}$$

$$x_i\ge 0,\quad \forall i=\overline{1,6}.$$

Tabloul simplex pentru $B=\left(A^1A^3A^6\right)$ este:

	$\bar{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	$-\frac{5}{22}$	1	$-\frac{5}{22}$	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{8}{11}$	0
x_3	$-\frac{1}{22}$	0	$\frac{21}{22}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{11}$	0
x_6	$\frac{6}{11}$	0	$\frac{6}{11}$	0	0	$\frac{5}{11}$	1
	$\frac{25}{22}$	0	$-\frac{19}{22}$	0	$-\frac{17}{2}$	$-\frac{7}{11}$	0

$$\min\left\{\frac{-\frac{19}{22}}{-\frac{5}{22}},\ \frac{-\frac{17}{2}}{-\frac{3}{2}}\right\}=\min\left\{\frac{19}{5},\ \frac{17}{3}\right\}=\frac{19}{5}.$$

Baza B este dual admisibilă !

dar **nu** este şi primal admisibilă.

	$\bar{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	1	$-\frac{22}{5}$	1	0	$\frac{33}{5}$	$-\frac{16}{5}$	0
x_3	-1	$\frac{21}{5}$	0	1	$-\frac{29}{5}$	$\frac{13}{5}$	0
x_6	0	$\frac{12}{5}$	0	0	$-\frac{18}{5}$	$\frac{11}{5}$	1
	2	$-\frac{19}{5}$	0	0	$-\frac{14}{5}$	$-\frac{17}{5}$	0

	$\bar{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	$-\frac{4}{29}$	$\frac{11}{29}$	1	$\frac{33}{29}$	0	$-\frac{7}{29}$	0
x_4	$\frac{5}{29}$	$-\frac{21}{29}$	0	$-\frac{5}{29}$	1	$-\frac{13}{29}$	0
x_6	$\frac{18}{29}$	$-\frac{6}{29}$	0	$-\frac{18}{29}$	0	$\frac{17}{29}$	1
	$\frac{72}{29}$	$-\frac{169}{29}$	0	$-\frac{14}{29}$	0	$-\frac{135}{29}$	0

	$\bar{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_5	$\frac{4}{7}$	$-\frac{11}{7}$	$-\frac{29}{7}$	$-\frac{33}{7}$	0	1	0
x_4	$\frac{3}{7}$	$-\frac{10}{7}$	$-\frac{13}{7}$	$-\frac{16}{7}$	1	0	0
x_6	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{17}{7}$	$\frac{15}{7}$	0	0	1
	$\frac{36}{7}$	$-\frac{92}{7}$	$-\frac{135}{7}$	$-\frac{157}{7}$	0	0	0

Bază primal & dual admisibilă !

Soluţia optimă