ECUAŢII DIFERENŢIALE ŞI CU DERIVATE PARŢIALE

anul III, grupa 344, informatică, 2012-2013

– 25 ianuarie 2013, examen –

I. 1. Fie ecuaţia

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(t)b(x) \tag{1}$$

unde $a : I = [\alpha, \beta] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ şi $b : J = [\gamma, \delta] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sunt funcţii continue.

a) Scrieţi soluţia generală a ecuaţiei de forma (1).

b) Să se determine soluţia generală a ecuaţiei (1) în cazul în care $a(t) = 2t$, pentru $t \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$, şi $b(x) = \sin 2x$, pentru $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Apoi aflaţi soluţia φ care verifică condiţia $x(0) = \frac{\pi}{8}$.

c) Enunţaţi teorema de existenţă şi unicitate a soluţiei problemei Cauchy şi precizaţi dacă problema Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t \sin 2x\,, \ (t, x) \in \left[-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right] \times \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right] \subset \mathbf{R}^2 \\ x(0) = \dfrac{\pi}{8}\,, \end{cases} \tag{2}$$

verifică condiţiile acestei teoreme. Se poate aplica teorema de existenţă a soluţiei maximale?

d) Calculaţi primele trei aproximaţii din şirul aproximaţiilor Picard pentru problema (2).

e) Pentru $N = 2$ calculaţi folosind metoda Euler, aproximarea x_2 în $t_2 = \frac{1}{4}$ şi evaluaţi $|\varphi(t_2) - x_2|$ în cazul problemei Cauchy (2).

2. a) Fie ecuaţia diferenţială de ordinul al doilea de forma $F\left(t, \frac{x'}{x}, \frac{x''}{x}\right) = 0$. Precizaţi prin ce schimbare de variabilă se poate face reducerea ordinului acestei ecuaţii.

b) Fie ecuaţia

$$x'' = a_1(t)x' + a_0(t)x\,, \quad t > 0\,, \tag{3}$$

unde $a_0, a_1 : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sunt funcţii continue. Determinaţi ce tip de ecuaţie de ordinul întâi se obţine aplicând reducerea ordinului.

c) Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$x'' = \frac{2t+1}{t}x' - \frac{t+1}{t}x\ , t > 0,$$

ştiind că admite o soluţie de forma $\varphi_0(t) = e^{\alpha t}$, cu $\alpha \in \mathbf{R}$.

II. 1. Fie sistemul

$$\begin{cases} x_1' = -5\,t^4 x_2 \\ x_2' = -5\,t^4 x_1\,. \end{cases} \tag{4}$$

a) Scrieţi sistemul (4) în formă vectorială

$$x' = A(t)x\,.$$

b) Arătaţi că $\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} -e^{t^5} \\ e^{t^5} \end{pmatrix}$ este soluţie a sistemului (4).

c) Folosind metoda de reducere a dimensiunii sistemelor liniare, determinaţi soluţia generală asistemului (4) şi precizaţi o soluţie φ_2 astfel încât $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ să formeze sistem fundamental de soluţii pentru sistemul (4).

2. a) Scrieţi sistemul caracteristic asociat problemei Cauchy pentru ecuaţii neliniare cu derivate parţiale de ordinul întâi

$$\begin{cases} F(x_1, \ldots, x_n, u, \partial_1 u, \ldots, \partial_n u) = 0 \\ u(\alpha_1(s), \ldots, \alpha_n(s)) = \psi(s)\,, \quad s \in D \subset \mathbf{R}^{n-1}, \end{cases}$$

şi particularizaţi apoi pentru cazul $n = 2$.

b) Determinaţi soluţia problemei Cauchy:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + (\partial_1 u)^2 + (\partial_2 u)^2 - 5u = 0 \\ u(s, 1) = s^2 + 1\,, \quad s > 0\,, \end{cases}$$

în cazul $(\partial_1 u)(0) > 0$, $(\partial_2 u)(0) > 0$.

Precizare:
Studenţii care păstrează parţialul rezolvă doar subiectul II *şi au timp de lucru 2 ore.*