Postoptimizare

Considerăm problema: $\inf\left\{ c^{\top} \cdot x \mid A \cdot x = b,\ x \geq \mathbf{0} \right\}$

în care $A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ b \in \mathbb{R}^{m},\ c \in \mathbb{R}^{n},\ rang(A) = m < n.$

Fie matricea de bază $B = \left(A^{s_1} A^{s_2} \ldots A^{s_m} \right)$, şi notăm mulţimile de indici

$$\mathcal{B} = \{ s_1, \ldots, s_m \}, \qquad \mathcal{R} = \{1, \ldots, n\} \setminus \mathcal{B}.$$

Condiţiile de optimalitate: $\begin{cases} B^{-1} \cdot b \geq \mathbf{0} \\ c_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot B^{-1} \cdot A - c^{\top} \leq \mathbf{0} \end{cases}$

primal admisibilitatea

dual admisibilitatea

Efectul unei perturbaţii Δ asupra:

- termenului liber: $b' = b + \Delta, \Longrightarrow B^{-1} \cdot (b + \Delta) \geq \mathbf{0}$ **?**

- coeficienţilor din funcţia obiectiv:

$$c' = c + \Delta, \Longrightarrow \left(c_{\mathcal{B}}^{\top} + \Delta_{\mathcal{B}}^{\top} \right) \cdot B^{-1} \cdot A - \left(c^{\top} + \Delta^{\top} \right) \leq \mathbf{0} \quad \mathbf{?}$$

Analiza sensibilităţii

Notăm elementele lui $B^{-1} = \left(\beta_{ij}\right)$.

O coloană j a lui B^{-1} o notăm cu β^{j} iar o linie i din B^{-1} o notăm cu β_i .

Variaţia unei componente din *b* .

Fie indicele fixat $r \in \{1,\ldots m\}$, şi definim $\boxed{b(\lambda) = b + \lambda e^r}$,

unde $e^r \in \mathbb{R}^m$ este vector unitar cu 1 în poziţia r. Pentru $1 \le i \le m,$ avem:

$$b_i(\lambda) = \begin{cases} b_r + \lambda, & \text{dacă } i = r \\ b_i & \text{dacă } i \ne r \end{cases}$$

Condiţia pentru ca B să rămână primal admisibilă este:

$$\begin{aligned} \bar{x}(\lambda) &= B^{-1} \cdot b(\lambda) = B^{-1} \cdot \left(b + \lambda e^r\right) = \\ &= B^{-1} \cdot b + \lambda\left(B^{-1} \cdot e^r\right) = \boxed{\bar{x} + \lambda \beta^r \ge \mathbf{0},} \end{aligned}$$

adică, $\overline{x}_i(\lambda) = \overline{x}_i + \lambda\beta_{ir} \geq \mathbf{0}, \quad \forall i = \overline{1,m}.$

Rezultă, $$\begin{cases} \lambda \geq \dfrac{-\overline{x}_i}{\beta_{ir}} \ \text{dacă} \ \beta_{ir} > 0, \\ \lambda \leq \dfrac{-\overline{x}_i}{\beta_{ir}} \ \text{dacă} \ \beta_{ir} < 0. \end{cases}$$

Definim: $$\lambda' = \begin{cases} \max\limits_{1 \leq i \leq m} \left\{ \dfrac{-\overline{x}_i}{\beta_{ir}} \,\middle|\, \text{pentru } \beta_{ir} > 0 \right\} & \text{dacă } \exists\, \beta_{ir} > 0 \\ -\infty & \text{dacă } \nexists\, \beta_{ir} > 0 \end{cases}$$

$$\lambda'' = \begin{cases} \min\limits_{1 \leq i \leq m} \left\{ \dfrac{-\overline{x}_i}{\beta_{ir}} \,\middle|\, \text{pentru } \beta_{ir} < 0 \right\} & \text{dacă } \exists\, \beta_{ir} < 0 \\ +\infty & \text{dacă } \nexists\, \beta_{ir} < 0 \end{cases}$$

Observaţie. Avem evident $\lambda' \leq 0, \ \lambda'' \geq 0.$

Primal admisibilitatea lui B se păstrează dacă $\lambda \in [\, \lambda', \lambda'' \,].$

Variaţia componentei b_r poate avea loc în intervalul:

$$b_r \in \left[b_r^{'} , \; b_r^{''} \right] = \left[\; \underbrace{b_r + \lambda'}_{b_r^{'}} , \; \underbrace{b_r + \lambda''}_{b_r^{''}} \; \right]$$

Variaţia funcţiei obiectiv în raport cu λ este dată de relaţia:

$$z(\lambda) = c_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot \overline{x}(\lambda) = c_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot \left(\overline{x} + \lambda \beta^r \right) =$$

$$= \overline{z} + \lambda \underbrace{\left(c_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot \beta^r \right)}_{\overline{u}_r} = \overline{z} + \lambda \overline{u}_r$$

şi deci,

$$z(\lambda) \in [\; z' , \; z'' \;] = \left[\; \underbrace{\overline{z} + \lambda' \overline{u}_r}_{z'} , \; \underbrace{\overline{z} + \lambda'' \overline{u}_r}_{z''} \; \right] .$$

Observaţie.

Vectorul $\overline{u}^{\top} = c_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot B^{-1}$ este soluţia optimă a problemei duale.

Componentele sale se numesc **”costuri umbră ”**.

Exemplu.

$$\inf\left\{-3x_1+x_2-2x_3+2x_4\right\}$$

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-x_4=3+\lambda \\ x_1+2x_2-4x_3+x_4=4 \end{cases}$$

$$x_i\ge 0,\quad i=\overline{1,4}.$$

Baza optimă este $B=\left(A^1A^2\right)=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ cu inversa $B^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

Tabloul simplex:

				-3	1	-2	2
$c_{\mathcal{B}}$		$\bar{x}$	β^1	x_1	x_2	x_3	x_4
-3	x_1	2	$\frac{2}{5}$	1	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$
1	x_2	1	$-\frac{1}{5}$	0	1	$-\frac{11}{5}$	$\frac{3}{5}$
		-5	$-\frac{7}{5}$	0	0	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{4}{5}$

$$\left.\begin{array}{l} x_1(\lambda)=2+\frac{2}{5}\lambda\ge 0\Rightarrow\lambda\ge -5 \\ x_2(\lambda)=1-\frac{1}{5}\lambda\ge 0\Rightarrow\lambda\le 5 \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow\quad \lambda\in[-5,5]$$

$$b_1=3+\lambda\in[3-5,3+5]=[-2,8]$$

$$\bar{z}(\lambda)=-5-\tfrac{7}{5}\lambda\in[-5-7,-5+7]=[-12,2]$$

Variaţia unei componente din c .

Considerăm un indice fixat $k \in \{1,\ldots n\}$, şi definim: $c(\mu) = c + \mu e^k$.

Pentru $1 \le i \le n$, avem: $c_i(\mu) = \begin{cases} c_k + \mu, & \text{dacă } i = k \\ c_i & \text{dacă } i \ne k \end{cases}$

Cazul $k \in \mathcal{R}$.

Pentru $\forall j = \overline{1,n}$, valorile $z_j = c_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot B^{-1} \cdot A^j$ nu se modifică prin variaţia lui c_k.

Condiţia de dual admisibilitate a lui B se va păstra dacă:

$$z_k - c_k(\mu) = c_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot B^{-1} \cdot A^k - (c_k + \mu) =$$
$$= z_k - (c_k + \mu) \le 0,$$

Prin urmare, $c_k + \mu \in [\, z_k \,,\, \infty \,)$.

Valoarea funcţiei obiectiv nu se modifică: $\overline{z} = c_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot \overline{x} = c_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot B^{-1} \cdot b$.

Cazul $k \in \mathcal{B}$, unde $loc_{\mathcal{B}}(k) = i.$

Pentru $\forall\, j \in \mathcal{R}$ trebuie să avem:

$$z_j(\mu) - c_j = c(\mu)_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot B^{-1} \cdot A^j - c_j = \left(c + \mu e^k\right)_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot B^{-1} \cdot A^j - c_j =$$

$$= c_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot B^{-1} \cdot A^j - c_j + \mu\left(e^k\right)_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot B^{-1} \cdot A^j = \boxed{\left(z_j - c_j\right) + \mu\underbrace{\left(\beta_i \cdot A^j\right)}_{y_{ij}} \leq 0.}$$

Notăm $y_{ij} = \beta_i \cdot A^j$, şi definim:

$$\mu' = \begin{cases} \max\limits_{j \in \mathcal{R}} \left\{ \dfrac{c_j - z_j}{y_{ij}} \;\middle|\; \text{pentru } y_{ij} < 0 \right\} & \text{dacă } \exists\, y_{ij} < 0 \\ -\infty & \text{dacă } \nexists\, y_{ij} < 0 \end{cases}$$

$$\mu'' = \begin{cases} \min\limits_{j \in \mathcal{R}} \left\{ \dfrac{c_j - z_j}{y_{ij}} \;\middle|\; \text{pentru } y_{ij} > 0 \right\} & \text{dacă } \exists\, y_{ij} > 0 \\ +\infty & \text{dacă } \nexists\, y_{ij} > 0 \end{cases}$$

Observaţie. Avem evident: $\mu' \leq 0,\ \mu'' \geq 0.$

Dual admisibilitatea lui B se păstrează dacă: $\mu \in [\ \mu' ,\ \mu''\ ]$

Valoarea coeficientului c_k din funcţia obiectiv poate aparţine intervalului:

$$\left[c_k^{'}\ ,\ c_k^{''}\right] = \left[\ \underbrace{c_k + \mu'}_{c_k^{'}}\ ,\ \underbrace{c_k + \mu''}_{c_k^{''}}\ \right]$$

Variaţia funcţiei obiectiv în raport cu μ este dată de relaţia:

$$z(\mu) = c_{\mathcal{B}}^{\top}(\mu) \cdot \overline{x} = \left(c + \mu e^k\right)_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot \overline{x} =$$
$$= \overline{z} + \mu \overline{x}_k$$

şi deci,

$$z(\mu) \in [\ z'\ ,\ z''\ ] = \left[\ \underbrace{\overline{z} + c_k^{'} \overline{x}_k}_{z'}\ ,\ \underset{z''}{\overline{z} + c_k^{''}\ \overline{x}_k}\ \right].$$

Exemplu.

$$\inf\{-3x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4\}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,4}.$$

Tabloul simplex optimal:

	$\bar{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	2	1	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$
x_2	1	0	1	$-\frac{11}{5}$	$\frac{3}{5}$
	-5	0	0	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{4}{5}$

Pentru variaţia lui c_3 $\left(3 \notin \mathcal{B}\right)$

punem condiţia:

$$z_3 - (c_3 + \mu) \le 0 \iff \mu \ge z_3 - c_3 = -\frac{7}{5}$$

$$c_3 + \mu \ge z_3 = -\frac{7}{5} + (-2) = -\frac{17}{5},$$

$$c_3 \in \left[-\frac{17}{5}, +\infty\right)$$

Pentru variaţia lui c_1 $\left(1 \in \mathcal{B}\right)$

punem condiţiile:

$$\left.\begin{aligned} (z_3 - c_3) + \mu y_{13} &= -\frac{7}{5} + \frac{2}{5}\mu \le 0 \Rightarrow \mu \le \frac{7}{2} \\ (z_4 - c_4) + \mu y_{14} &= -\frac{4}{5} - \frac{1}{5}\mu \le 0 \Rightarrow \mu \ge -4 \end{aligned}\right\}$$

$$\mu \in \left[-4, \frac{7}{2}\right]. \quad c_1 + \mu \in \left[-3-4, -3+\frac{7}{2}\right] = \left[-7, \frac{1}{2}\right]$$

$$\bar{z}(\mu) = \bar{z} + \mu \bar{x}_1 = -5 + 2\mu \in [-5-8, -5+7] = [-13, 2]$$