1. Sa se dea doi algoritmi de generare pentru variabila aleatoare X cu densitatea de repartitie

$$f(x) = e^{-\pi x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

Rezolvare:

Ne uitam la multimea pentru care f(x) ia valori diferite de zero (multimea reala, multimea numerelor reale pozitive, intervalul [0,1]). Aici este multimea reala. Dintre toate variabilele studiate de noi la Tehnici de simulare, doar variabila normala are domeniul pe multimea numerelor reale. Deci deja putem spune ca este vorba de o variabila normala.

Trebuie sa-i gasim parametrii.

Forma generala a unei variabile normale, de parametrii m si σ este:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R} \qquad (2)$$

Facem o comparatie cu functia noastra. Uitandu-ne la puterea lui e, se pare ca m=0. Atunci (2) ar fi:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R} \qquad (3)$$

Facem din nou comparatie cu (1). Observam ca in (1) fractia $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ nu exista, deci e foarte probabil ca $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Verificam si observam ca intr-adevar (3) cu $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ devine (1).

Deci X este o variabila normala de parmetrii 0 si $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, N(0, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$). Variabila X se genereaza folosind relatia ei cu variabila Y, unde Y este o normala de parametrii 0 si 1.

$$X = m + \sigma Y = 0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} Y$$

Iata doi algoritmi de generare ai variabilei Y.

1. Primul se bazeaza pe teorema limita centrala (curs 4, pag 12):
   P1: Pentru i = 1 la 12 genereaza $U_i \sim U(0,1)$;
   P2: $Y = \sum_{i=1}^{12} U_i$.
2. Al doilea se bazeaza pe o metoda de compunere-respingere, curs 6, pag 9: se descrie algoritmul norm2 de la pagina 11.

2. Sa se dea un doi algoritmi de generare pentru variabila aleatoare X cu functia de probabilitate

$$f(x) = \frac{3^x}{4^{x+1}}, \qquad x = 0, 1, 2, \dots$$

Rezolvare:

Daca ne uitam la domeniul pe care e definita functia de probabilitate atunci putem avea o variabila Pascal, sau una geometrica, sau una Poisson. Uitandu-ne la forma celor trei functii de probabilitate deducem ca este o variabila geometrica cu parametrii $p = \frac{1}{4}, q = \frac{3}{4}$ (Atentie! Probabilitatile sunt intotdeauna subunitare!). Atunci doi algoritmi de generare sunt urmatorii:

1. Algoritm de generare al variabilei Pascal pentru k=1:
   P1: p=1/4;
   P2: Se genereaza Y~Bernoulli(p);
   P3: Daca Y=0, X=X+1. Altfel stop.
   Iesire: X

2. Algoritm de generare cu metoda inversa:
   P1: p=1/4; q=1-p;
   P2: Se genereaza U~U(0,1);
   P3: X=int(log U/log q)-1;
   Iesire: X