Seminarul 3
Dualitate. Algoritmul simplex dual.

1) Să se scrie duala problemei

$$\inf\left\{3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5\right\}$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 - 2x_5 \le 2 & \cdots u_1 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 \ge -1 & \cdots u_2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 \le 5 & \cdots u_3 \end{cases}$$
$$x_1 \le 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \in \mathbb{R},\ x_4 \le 0,\ x_5 \in \mathbb{R}.$$

$$\sup\left\{2u_1 - u_2 + 5u_3\right\}$$
$$\begin{cases} 2u_1 - 2u_2 + u_3 \ge 3 & \cdots x_1 \\ 3u_1 + u_2 + 2u_3 \le -1 & \cdots x_2 \\ -4u_1 + 2u_2 - u_3 = -1 & \cdots x_3 \\ u_1 - u_2 + 3u_3 \ge 1 & \cdots x_4 \\ -2u_1 + u_2 + u_3 = 2 & \cdots x_5 \end{cases}$$
$$u_1 \le 0,\ u_2 \ge 0,\ u_3 \le 0.$$

2) Se consideră problema

$$\inf\left\{x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4\right\}$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -3 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R}, x_4 \ge 0.$$

a) Să se scrie problema duală.

Rezolvare.

$$\sup\left\{5u_1 - 3u_2\right\}$$
$$\begin{cases} u_1 + 3u_2 \le 1 \\ 2u_1 - 2u_2 = 3 \\ -u_1 + u_2 = -4 \\ 3u_1 - u_2 \le 2 \end{cases}$$
$$u_1 \in \mathbb{R}, u_2 \in \mathbb{R}.$$

b) Să se rezolve ambele probleme.

Rezolvare. Deoarece problema primală are soluţia admisibilă $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1,$ iar problema duală nu admite soluţii deoarece $\begin{cases} 2u_1 - 2u_2 = 3 \\ -u_1 + u_2 = -4 \end{cases}$ este incompatibil, din TFD rezultă că primala are optimul $-\infty$.

Într-adevăr, pentru $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ soluţia $x_1 = 0,\ x_2 = 1 + \lambda,\ x_3 = 2\lambda,\ x_4 = 1$ este admisibilă şi

$$\lim_{\lambda \to \infty}\left\{0 + 3(1+\lambda) - 4(2\lambda) + 2\right\} = \lim_{\lambda \to \infty}\left\{5 - 5\lambda\right\} = -\infty.$$

3) Se consideră problema

$$\inf\left\{x_1+2x_2+4x_3+3x_4\right\}$$

$$\begin{cases}-x_1+x_2+2x_3-3x_4=1\\ 2x_1+2x_2-x_3+x_4=1\end{cases}$$

$$x_i\geq 0,\ i=\overline{1,4}.$$

a) Alcătuiţi tabloul simplex pentru bazele $B=\left(A^2A^4\right)$ şi $B=\left(A^3A^4\right)$ şi stabiliţi natura acestora.

Rezolvare. $B=\left(A^2A^4\right)=$ bază oarecare (nici primal, nici dual admisibilă):

	$\bar{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{7}$	1	$-\frac{1}{7}$	0
x_4	$-\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	0	$-\frac{5}{7}$	1
	$\frac{5}{7}$	$\frac{15}{7}$	0	$-\frac{45}{7}$	0

$B=\left(A^3A^4\right)=$ bază dual admisibilă:

	$\bar{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	-4	-5	-7	1	0
x_4	-3	-3	-5	0	1
	-25	-30	-45	0	0

b) Rezolvaţi problema cu algoritmul simplex dual.

Rezolvare. Din tabloul precedent obţinem:

	$\bar{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0
x_4	$-\frac{3}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$	1
	-1	0	-3	-6	0

	$\bar{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	$-\frac{1}{4}$	1	0	$-\frac{5}{4}$	$\frac{7}{4}$
x_2	$\frac{3}{4}$	0	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{4}$
	$\frac{5}{4}$	0	0	$-\frac{15}{4}$	$-\frac{15}{4}$

	$\bar{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	$\frac{1}{5}$	$-\frac{4}{5}$	0	1	$-\frac{7}{5}$
x_2	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$
	2	-3	0	0	-9

c) Scrieţi problema duală şi soluţia acesteia.
Rezolvare. Duala este:

$$\inf\left\{u_1+u_2\right\}$$

$$\begin{cases} -u_1+2u_2\le 1 \\ u_1+2u_2\le 2 \\ 2u_1-u_2\le 4 \\ -3u_1+u_2\le 3 \end{cases}$$

Baza optimă este $B=\left(A^3A^2\right)$, deci, soluţia optimă a dualei este:

$$\left(\bar{u}_1,\bar{u}_2\right)=c_{\mathcal{B}}^{\top}\cdot B^{-1}=\begin{pmatrix}4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\end{pmatrix}$$

4) Considerăm problema:

$$\inf\left\{x_1+3x_2-x_3+2x_4\right\}$$

$$\begin{cases} -2x_1+x_2-x_3+3x_4=3 \\ -x_1+2x_2+x_3+4x_4=2 \end{cases}$$

$$x_i\ge 0,\ i=\overline{1,4}.$$

a) Alcătuiţi tabloul simplex pentru baza $B=\left(A^1A^3\right)$ şi rezolvaţi problema plecând de la această bază.

Rezolvare. Tabloul simplex este:

	$\bar{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	$-\frac{5}{3}$	1	-1	0	$-\frac{7}{3}$
x_3	$\frac{1}{3}$	0	1	1	$\frac{5}{3}$
	-2	0	-5	0	-6

	$\bar{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_4	$\frac{5}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	0	1
x_3	$-\frac{6}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{2}{7}$	1	0
	$\frac{16}{7}$	$-\frac{18}{7}$	$-\frac{17}{7}$	0	0

Problema nu admite soluţii.

b) Verificaţi rezultatul şi prin metoda celor două faze.