Probleme de optimizare liniară

O problemă de optimizare constă din minimizarea sau maximizarea unei anumite funcţii - numită funcţie obiectiv - în prezenţa unor restricţii care trebuie satisfăcute.

Este suficient să studiem doar probleme de **minimizare**, deoarece

$$\inf\left\{ f(x) \mid x \in \mathcal{P} \right\} = -\sup\left\{ -f(x) \mid x \in \mathcal{P} \right\}$$

Fie $\alpha \in \mathbb{R}^n$ şi $\beta \in \mathbb{R}$.

Tipuri de restricţii în raport cu felul problemei de optimizare:

- **minimizare**
  - **concordantă**: $\alpha^\top \cdot x \geq \beta$
  - **neconcordantă**: $\alpha^\top \cdot x \leq \beta$
- **maximizare**
  - **concordantă**: $\alpha^\top \cdot x \leq \beta$
  - **neconcordantă**: $\alpha^\top \cdot x \geq \beta$

Forma generală:

Conţine toate tipurile de restricţii şi variabile care pot apărea.

$$\inf\left\{c_1^\top \cdot x_1 + c_2^\top \cdot x_2 + c_3^\top \cdot x_3\right\}$$

în raport cu

$$\begin{cases} A_{11}\cdot x_1 + A_{12}\cdot x_2 + A_{13}\cdot x_3 \geq b_1 & \text{concordante} \\ A_{21}\cdot x_1 + A_{22}\cdot x_2 + A_{23}\cdot x_3 = b_2 & \text{egalitate} \\ A_{31}\cdot x_1 + A_{32}\cdot x_2 + A_{33}\cdot x_3 \leq b_3 & \text{neconcordante} \\ x_1 \geq \mathbf{0} \qquad x_3 \leq \mathbf{0} & \end{cases}$$

Datele problemei: $A_{ij} \in \mathbb{R}^{m_i \times n_j}, \quad b_i \in \mathbb{R}^{m_i}, \quad c_j \in \mathbb{R}^{n_j}, \quad 1 \leq i \leq 3,\ 1 \leq j \leq 3.$

Necunoscutele problemei sunt grupate în trei variabile vectoriale:

$$x_j \in \mathbb{R}^{n_j}, 1 \leq j \leq 3, \qquad \begin{cases} x_1 & - & \text{are componente nenegative;} \\ x_2 & - & \text{oarecare;} \\ x_3 & - & \text{are componente nepozitive.} \end{cases}$$

Forma standard:

Conţine restricţii egalitate şi variabile nenegative.

$$\inf\left\{c^\top \cdot x \,\middle|\, A\cdot x = b,\ x \geq 0\right\}$$

Datele problemei: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^{m}$, $c \in \mathbb{R}^{n}$.

Forma canonică:

Conţine restricţii concordante şi variabile nenegative.

$$\inf\left\{c^\top \cdot x \,\middle|\, A\cdot x \geq b,\ x \geq 0\right\}$$

Datele problemei: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^{m}$, $c \in \mathbb{R}^{n}$.

Forma mixtă:

Conţine restricţii concordante şi egalitate, şi variabile nenegative.

$$\inf\left\{ c^\top \cdot x \;\middle|\; \begin{array}{l} A_1 \cdot x \geq b_1 \\ A_2 \cdot x = b_2 \end{array}, \; x \geq 0 \right\}$$

Datele problemei: $\begin{cases} A_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}, & b_1 \in \mathbb{R}^{m_1} \\ A_2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}, & b_2 \in \mathbb{R}^{m_2} \end{cases}, \quad c \in \mathbb{R}^n.$

Formele problemelor de programare liniară sunt echivalente!

Alegerea formei → în funcţie de necesităţi:

- forma standard pentru algoritmi;
- forma canonica pentru dualitate.

Transformări echivalente:

- Sensul unei inegalităţi se schimbă prin înmulţire cu – 1.
- Transformarea unei inegalităţi într-o ecuaţie:

$$\begin{cases} \alpha^\top \cdot x \le \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^\top \cdot x + y = \beta \\ \alpha^\top \cdot x \ge \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^\top \cdot x - y = \beta \end{cases} , \quad y \ge 0$$

  variabila $\boldsymbol{y}$ se numeşte variabilă ecart (slack variable).
- Transformarea unei ecuaţii în inegalităţi:

$$\alpha^\top \cdot x = \beta \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha^\top \cdot x \le \beta \\ \alpha^\top \cdot x \ge \beta \end{cases}$$

- O variabilă nepozitivă $\quad x \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad x' = -x \ge 0.$
- O variabilă oarecare $\quad x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad x = x^+ - x^-,$

  unde $\quad x^+ \ge 0,\ x^- \ge 0.$

Exemplu.

$$\inf \left\{ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 \right\}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 \le -3 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 \ge 5 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \le 0, \quad x_3 \in \mathbb{R}, \quad x_4 \ge 0$$

Transformarea la forma standard:

$$\inf \left\{ 2x_1 + 3x'_2 + x'_3 - x''_3 + 5x_4 + 0x_5 + 0x_6 \right\}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x'_2 - x'_3 + x''_3 - 2x_4 + x_5 = -3 \\ x_1 + 3x'_2 + 2x'_3 - 2x''_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 - x'_2 - 2x'_3 + 2x''_3 + 3x_4 - x_6 = 5 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0 \quad x'_2 \ge 0 \quad x'_3 \ge 0 \quad x''_3 \ge 0 \quad x_4 \ge 0 \quad x_5 \ge 0 \quad x_6 \ge 0$$

$$x'_2 = -x_2 \ge 0 \qquad x_3 = x'_3 - x''_3$$

$$x'_3 \ge 0, \; x''_3 \ge 0$$

Teorema fundamentală a programări liniare

Considerăm problema de programare liniară în forma standard:

$$\inf \left\{ c^{\top} \cdot x \mid A \cdot x = b,\ x \geq \mathbf{0} \right\} \qquad \text{(P)}$$

Fără a restrânge generalitatea, presupunem: $rang(A) = m < n.$

Vectorul $v \in \mathbb{R}^n$ se va numi soluţie admisibilă a problemei (P), dacă

$$A \cdot v = b,\ v \geq \mathbf{0}.$$

O soluţie admisibilă $v \in \mathbb{R}^n$ este o soluţie optimă a problemei (P), dacă oricare ar fi soluţia admisibilă y, avem: $c^{\top} \cdot v \leq c^{\top} \cdot y.$

Teoremă:

1. *Dacă problema* (P) *are o soluţie admisibilă, atunci ea are şi o soluţie admisibilă de bază*.
2. *Dacă problema* (P) *are o soluţie optimă, atunci ea are şi o soluţie optimă de bază*.

Demonstraţie.

Fie $v \in \mathbb{R}^n$ o soluţie admisibilă a problemei (P).

Considerăm $v = (v_1, v_2, ..., v_k, 0, ..., 0)^\top$, $v_i > 0$, $i = \overline{1, k}$.

- $k = 0 \Rightarrow v = \mathbf{0}$ este evident o soluţie de bază.
- $k \geq 1.$ Dacă $\{A^1, A^2, ..., A^k\}$ sunt liniar independente, atunci $\boldsymbol{v}$ este o soluţie admisibilă de bază.

Dacă $\{A^1, A^2, ..., A^k\}$ sunt liniar dependente, $\exists\, y_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, k}$, $\sum_{i=1}^{k} |y_i| > 0$, astfel încât: $\sum_{i=1}^{k} A^i y_i = \mathbf{0}.$

Considerăm: $y \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, y_2, ..., y_k, 0, ..., 0)^\top$. Rezultă:

$$\boxed{y \neq \mathbf{0}, \quad \text{şi} \quad A \cdot y = \mathbf{0}.}$$

Definim vectorul: $\boxed{x(\lambda) = v + \lambda y, \quad \lambda \in \mathbb{R}.}$

Avem: $A \cdot x(\lambda) = A \cdot (v + \lambda y) = A \cdot v + \lambda A \cdot y = A \cdot v = b,$

deci, $x(\lambda)$ este o soluţie a sistemului $A \cdot x = b$ pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}.$

Deoarece $x_i(\lambda)=0,\ i=\overline{k+1,n},$ avem:

$$x(\lambda)\geq \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad x_i(\lambda)=v_i+\lambda y_i\geq 0,\ \text{ pentru } i=\overline{1,k}.$$

$$\lambda\geq\frac{-v_i}{y_i}\ \text{ dacă } y_i>0, \qquad \lambda\leq\frac{-v_i}{y_i}\ \text{ dacă } y_i<0.$$

Definim:

$$\lambda'=\begin{cases}\max\limits_{1\leq i\leq k}\left\{\dfrac{-v_i}{y_i}\ \middle|\ y_i>0\right\} & \text{dacă există } y_i>0,\\ -\infty & \text{dacă nu există } y_i>0,\end{cases}$$

$$\lambda''=\begin{cases}\min\limits_{1\leq i\leq k}\left\{\dfrac{-v_i}{y_i}\ \middle|\ y_i<0\right\} & \text{dacă există } y_i<0,\\ +\infty & \text{dacă nu există } y_i<0,\end{cases}$$

deci, $\forall\lambda\in[\lambda',\lambda''] \Rightarrow x(\lambda)\geq\mathbf{0},$ adică <u>este soluţie admisibilă</u>.

<u>Observaţie:</u> cel puţin una dintre valorile λ',λ'' este <u>finită</u>!

Pentru $\lambda_0=\text{finit}\{\lambda',\lambda''\} \Rightarrow \exists\, i_0,\ 1\leq i_0\leq k,$ astfel încât $v_{i_0}+\lambda_0 y_{i_0}=0.$

Deci, vectorul $x(\lambda_0)$ este o soluţie <u>admisibilă</u> a problemei (P) şi are cel mult $(k-1)$ componente nenule.

Fie $\overline{v} \in \mathbb{R}^n$ o soluţie optimă a problemei (P) cu $\overline{v}_i > 0,\ i = \overline{1,k}$.

Raţionăm analog ca în cazul precedent: …

Dacă $\left\{A^1, A^2, ..., A^k\right\}$ sunt liniar dependente, există un interval astfel încât $\forall\, \lambda \in [\lambda', \lambda''] \quad \Rightarrow \quad x(\lambda) = \overline{v} + \lambda y$ este soluţie admisibilă.

Din relaţia: $\quad c^\top \cdot \overline{v} \le c^\top \cdot x(\lambda) = c^\top \cdot \overline{v} + \lambda c^\top \cdot y$

rezultă: $\quad \forall\, \lambda \in [\lambda', \lambda'']$ avem $\underline{\lambda c^\top \cdot y \ge 0}.$

Observaţie: Deoarece $\lambda' < 0,\ \lambda'' > 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c^\top \cdot y = 0.}$

În caz contrar, luând $\lambda = -sign\left\{c^\top \cdot y\right\} \quad \Rightarrow \quad \lambda c^\top \cdot y < 0,$ contradicţie!

Deci, $c^\top \cdot x(\lambda) = c^\top \cdot \overline{v}$, adică, $\forall\, \lambda \in [\lambda', \lambda''],\quad x(\lambda)$ este optimă.

Pentru $\lambda_0 = \text{finit}\{\lambda', \lambda''\} \quad \Rightarrow \quad \exists\, i_0, 1 \le i_0 \le k,$ astfel încât $\overline{v}_{i_0} + \lambda_0 y_{i_0} = 0.$

Deci, vectorul $x(\lambda_0)$ este o soluţie optimă a problemei (P) şi are cel mult $(k-1)$ componente nenule.

(q.e.d.)

În general, mulţimea soluţiilor admisibile a problemei (P) este infinită, spre deosebire de cea a soluţiilor admisibile de bază, care are cel mult C_n^m elemente. Importanţa teoremei fundamentale a programării liniare constă în aceea că, pentru determinarea unei soluţii optime, dacă ea există, căutarea este redusă de la o mulţime infinită, la una finită, fiind suficientă investigarea doar a soluţiilor de bază.

Teoremele algoritmului simplex

Considerăm problema de programare liniară în forma standard:

$$\inf\left\{c^{\top}\cdot x \mid A\cdot x = b,\ x \geq \mathbf{0}\right\} \qquad \text{(P)}$$

unde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad b \in \mathbb{R}^{m}, \quad c \in \mathbb{R}^{n}, \quad rang\left(A\right) = m < n.$

Considerăm matricea de bază $B = \left(A^{s_1} A^{s_2} \ldots A^{s_m}\right).$

Partiţionăm matricea $A = \left(B \vdots R\right)$ şi obţinem:

$$A\cdot x = b \quad \Leftrightarrow \quad x_{\mathcal{B}} = B^{-1}\cdot b - B^{-1}\cdot R\cdot x_{\mathcal{R}} = \bar{x} - \sum_{j\in\mathcal{R}} Y^{j} x_{j}$$

unde am notat: $\bar{x} = B^{-1}\cdot b \in \mathbb{R}^{m}$ şi $Y^{j} = B^{-1}\cdot A^{j},\ 1 \leq j \leq n.$

Poziţia indicelui $s_i \in \mathcal{B} = \left\{s_1, s_2, \ldots, s_m\right\}$ o notăm $loc_{\mathcal{B}}\left(s_i\right) = i.$

Pe componente, sistemul se scrie:

$$x_{s_i} = \bar{x}_i - \sum_{j\in\mathcal{R}} y_{ij} x_j, \quad s_i \in \mathcal{B},\ i = loc_{\mathcal{B}}\left(s_i\right).$$

Soluţia de bază corespunzătoare lui B : $x = \begin{pmatrix} x_{\mathcal{B}} \\ x_{\mathcal{R}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$

Matricea de bază B se numeşte ***primal admisibilă****, dacă* $\boxed{B^{-1} \cdot b \geq \mathbf{0}.}$

Funcţia obiectiv se poate exprima astfel:

$$z = c^{\top} \cdot x = c_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot x_{\mathcal{B}} + c_{\mathcal{R}}^{\top} \cdot x_{\mathcal{R}} = c_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot \left(\overline{x} - \sum_{j \in \mathcal{R}} Y^j x_j \right) + c_{\mathcal{R}}^{\top} \cdot x_{\mathcal{R}} =$$

$$= c_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot \overline{x} - \sum_{j \in \mathcal{R}} \left(c_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot Y^j - c_j \right) x_j = \overline{z} - \sum_{j \in \mathcal{R}} \left(z_j - c_j \right) x_j$$

unde am notat: $\overline{z} = c_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot \overline{x}, \quad z_j = c_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot Y^j, 1 \leq j \leq n.$

Teoremă (optim): *Fie B o bază primal admisibilă. Dacă $\left(z_j - c_j \right) \leq 0,$ pentru orice $j \in \mathcal{R},$ atunci baza B este optimă.*

Demonstraţie. Pentru orice soluţie admisibilă $v \in \mathbb{R}^n$ avem:

$$z = c^{\top} \cdot v = \overline{z} - \sum_{j \in \mathcal{R}} \left(z_j - c_j \right) v_j \geq \overline{z}.$$

(q.e.d.)

Teoremă (optim infinit): *Fie* B *o bază primal admisibilă. Dacă există un indice* $k \in \mathcal{R}$, *astfel încât* $(z_k - c_k) > 0$, *şi* $Y^k = B^{-1} \cdot A^k \leq \mathbf{0}$, *atunci problema* (P) *are optimul* (-)*infinit.*

Demonstraţie. Fie $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$. Definim vectorul:

$$x(\lambda) = \begin{pmatrix} x_{\mathcal{B}}(\lambda) = \overline{x} - \lambda Y^k \\ x_{\mathcal{R}}(\lambda) = \lambda e^{loc_{\mathcal{R}}(k)} \end{pmatrix}, \quad \text{unde} \quad e^{loc_{\mathcal{R}}(k)} \in \mathbb{R}^{n-m}$$

este vector unitar.

Se verifică fără dificultate că: $x(\lambda) \geq \mathbf{0}$,

$$A \cdot x(\lambda) = B \cdot x_{\mathcal{B}}(\lambda) + R \cdot x_{\mathcal{R}}(\lambda) = b - \lambda A^k + \lambda A^k = b.$$

Rezultă, $\forall \lambda \geq 0$, $x(\lambda)$ este soluţie admisibilă pentru (P).

Funcţia obiectiv este: $c^\top \cdot x(\lambda) = c_{\mathcal{B}}^\top \cdot x_{\mathcal{B}}(\lambda) + c_{\mathcal{R}}^\top \cdot x_{\mathcal{R}}(\lambda) =$

$$= c_{\mathcal{B}}^\top \cdot \left(\overline{x} - \lambda Y^k\right) + \lambda c_k = \overline{z} - \lambda(z_k - c_k)$$

Deoarece $(z_k - c_k) > 0$, rezultă: $\lim\limits_{\lambda \to \infty} c^\top \cdot x(\lambda) = -\infty$.

(q.e.d.)

Observaţie.

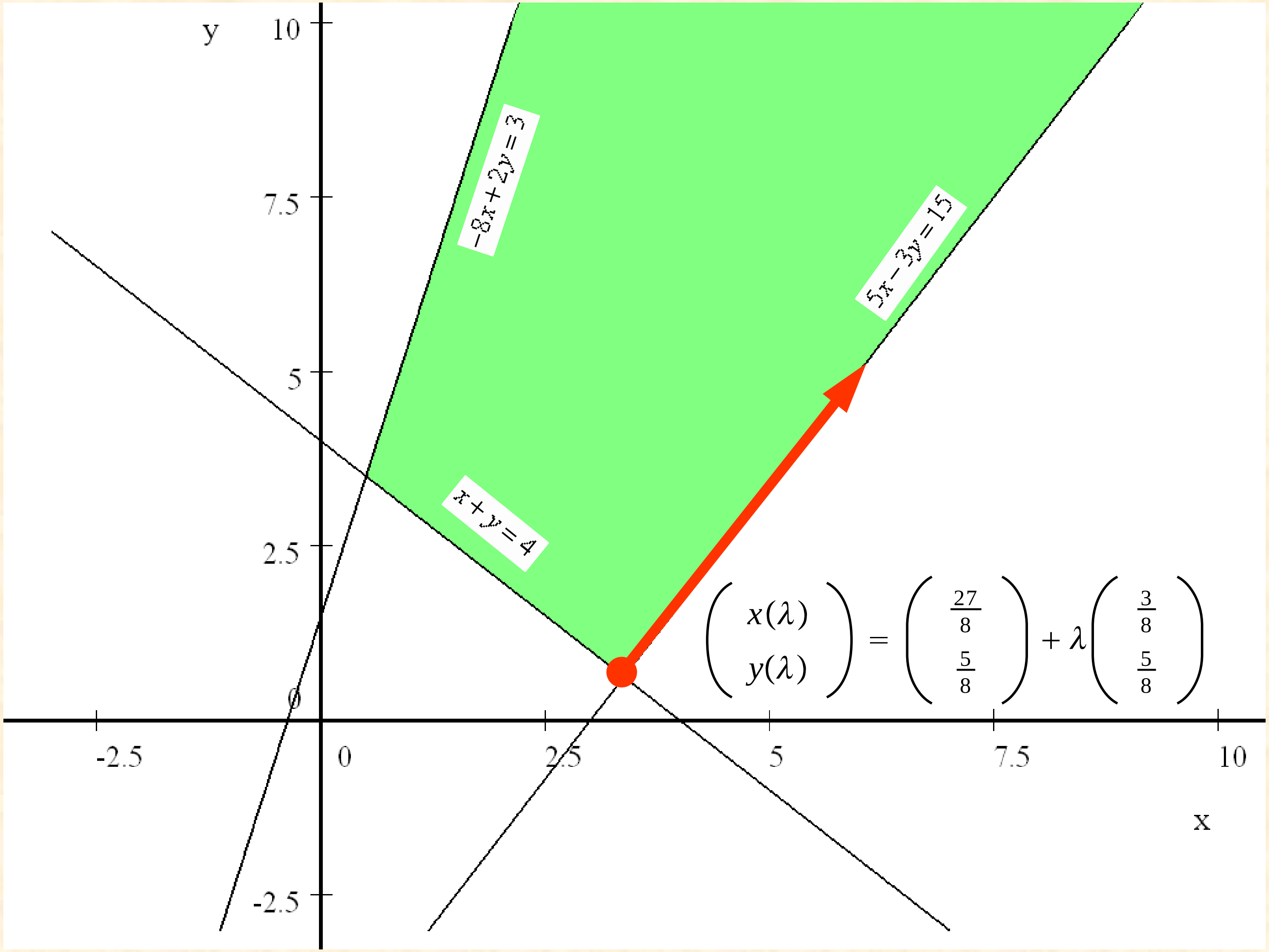
În condiţiile Teoremei de optim infinit, baza B defineşte o soluţie nenulă a sistemului omogen $\{A \cdot x = \mathbf{0},\ x \geq \mathbf{0}\}$:

$$v \in \mathbb{R}^n, \quad v = \begin{pmatrix} v_{\mathcal{B}} = -Y^k \\ v_{\mathcal{R}} = e^{loc_{\mathcal{R}}(k)} \end{pmatrix}$$

Acest vector reprezintă o direcţie (rază) de-a lungul căreia soluţiile admisibile

$$x(\lambda) = \begin{pmatrix} \overline{x}_{\mathcal{B}} \\ \mathbf{0}_{\mathcal{R}} \end{pmatrix} + \lambda v$$ sunt nemărginite.

Vectorul v se mai numeşte *direcţia spre (–)infinit*, şi împreună cu soluţia de bază, pentru $\lambda \in [0, \infty)$, descrie o muchie nemărginită a domeniului de admisibilitate.



y
10
7.5
5
2.5
0
-2.5
-2.5
0
2.5
5
7.5
10
x
$-8x+2y=3$
$5x-3y=15$
$x+y=4$
$\begin{pmatrix} x(\lambda) \\ y(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{27}{8} \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix}$

Lema (substituţiei): *Fie* $B=\left(A^{s_1}A^{s_2}\cdots A^{s_m}\right)\in\mathbb{R}^{m\times m}$ *nesingulară şi vectorul* $A^k\in\mathbb{R}^m,\ \ k\notin\mathcal{B}=\{s_1,s_2,\dots,s_m\}$. *Considerăm matricea:*

$$\tilde{B}=\left(A^{s_1}\cdots A^{s_{r-1}}A^{k}A^{s_{r+1}}\cdots A^{s_m}\right).$$

Notăm vectorul $Y^k=B^{-1}A^k=\left(y_{1k},y_{2k},\dots,y_{mk}\right)^{\top}$.

Au loc următoarele afirmaţii:

- $\det\tilde{B}\neq 0 \iff y_{rk}\neq 0,$ *unde* $r=loc_{\mathcal{B}}\left(s_r\right)$.
- *Pentru* $y_{rk}\neq 0$, *avem:* $\boxed{\tilde{B}^{-1}=E_r\left(\eta\right)\cdot B^{-1}}$

unde $\eta=\left(\dfrac{-y_{1k}}{y_{rk}},\dots,\dfrac{-y_{r-1,k}}{y_{rk}},\dfrac{1}{y_{rk}},\dfrac{-y_{r+1,k}}{y_{rk}},\dots,\dfrac{-y_{mk}}{y_{rk}}\right)^{\top}$

$$E_r\left(\eta\right)=\left(e^1\cdots e^{r-1}\,\eta\,e^{r+1}\cdots e^m\right)=\begin{pmatrix}\ddots & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & 1 & \cdots & \dfrac{-y_{ik}}{y_{rk}} & \cdots \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \cdots & 0 & \cdots & \dfrac{1}{y_{rk}} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \ddots\end{pmatrix},$$

$e^i\in\mathbb{R}^m$ *este vector unitar cu* 1 *in pozitia* i.

Demonstraţie. Din notaţia $Y^k = B^{-1}A^k$ rezultă: $A^k = B \cdot Y^k = \sum_{j=1}^{m} A^{s_j} y_{jk}$

- Fie $\det \tilde{B} \neq 0.$

  Prin absurd, $y_{rk} = 0 \Rightarrow$ coloanele lui $\tilde{B}$ liniar dependente. Contradicţie!

  Fie acum $\underline{y_{rk} \neq 0}.$

  Prin absurd, $\det \tilde{B} = 0 \Rightarrow$ are coloanele liniar dependente. Deci, există

$$\lambda_j \in \mathbb{R}, \ \sum_{j=1}^{m} \left|\lambda_j\right| > 0, \text{ astfel încât } \sum_{j=1,\ j\neq r}^{m} A^{s_j}\lambda_j + A^k\lambda_r = \mathbf{0}.$$

  Avem: $\underline{\lambda_r \neq 0}.$ În caz contrar obţinem $\det B = 0.$ Contradicţie!

  Înlocuind pe A^k şi regrupând termenii, obţinem:

$$\sum_{j=1,\ j\neq r}^{m} A^{s_j}\left(\lambda_j + y_{jk}\lambda_r\right) + A^{s_r} y_{rk}\lambda_r = \mathbf{0},$$

  adică o combinaţie liniară de coloane ale matricei B care este egală cu zero şi deci toţi coeficienţii trebuie să fie nuli. Dar, $\underline{y_{rk}\lambda_r \neq 0}.$ Contradicţie!

- Coloanele lui B şi $\tilde{B}$ coincid pentru $j \neq r.$ Avem deci,

$$A^{s_j} = \tilde{B} \cdot e^j \ , \quad j \neq r.$$

Deoarece $y_{rk} \neq 0,$ din relaţia $A^k = \sum_{j=1}^{m} A^{s_j} y_{jk}$ rezultă:

$$A^{s_r} = \sum_{j=1,\ j\neq r}^{m} A^{s_j} \left(\frac{-y_{jk}}{y_{rk}} \right) + A^k \frac{1}{y_{rk}} = \tilde{B} \cdot \eta$$

Prin urmare, putem scrie:

$$B = \tilde{B} \cdot E_r(\eta) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{B}^{-1} = E_r(\eta) \cdot B^{-1}.$$

(q.e.d.)

Teoremă (schimbarea bazei): *Fie* $B = \left(A^{s_1} A^{s_2} \cdots A^{s_m} \right)$ *o bază primal admisibilă. Presupunem că există* $k \in \mathcal{R}$, *astfel încât* $\left(z_k - c_k \right) > 0$ *şi vectorul* $Y^k = B^{-1} \cdot A^k$ *are cel puţin un element pozitiv.*

Dacă alegem indicele $s_r \in \mathcal{B}$, $loc_{\mathcal{B}}\left(s_r \right) = r$, *astfel încât*

$$\boxed{\frac{\overline{x}_r}{y_{rk}} = \min_{1 \le i \le m} \left\{ \frac{\overline{x}_i}{y_{ik}} \;\middle|\; y_{ik} > 0 \right\},}$$

atunci, matricea $\tilde{B} = \left(A^{s_1} \cdots A^{s_{r-1}} A^k A^{s_{r+1}} \cdots A^{s_m} \right)$ *este o bază primal admisibilă, pentru care* $\tilde{z} = c_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\top} \cdot \tilde{B}^{-1} \cdot b \le c_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot B^{-1} \cdot b = \overline{z}$.

Demonstraţie. Evident, $y_{rk} > 0$. Din Lema substituţiei rezultă că $\tilde{B}$ este o matrice nesingulară.

Trebuie arătat că $\tilde{B}^{-1} \cdot b \ge \mathbf{0}$.

$$\tilde{B}^{-1}\cdot b = E_r(\eta)\cdot B^{-1}\cdot b = E_r(\eta)\cdot \overline{x} =$$

$$= \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & 1 & \cdots & \dfrac{-y_{ik}}{y_{rk}} & \cdots \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \cdots & 0 & \cdots & \dfrac{1}{y_{rk}} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vdots \\ \overline{x}_i \\ \vdots \\ \overline{x}_r \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \overline{x}_i - \dfrac{y_{ik}}{y_{rk}}\overline{x}_r \\ \vdots \\ \dfrac{\overline{x}_r}{y_{rk}} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Evident, $\dfrac{\overline{x}_r}{y_{rk}} \geq 0.$ Dacă $y_{ik} \leq 0, \Rightarrow \overline{x}_i - y_{ik}\dfrac{\overline{x}_r}{y_{rk}} \geq 0.$

Dacă $y_{ik} > 0, \Rightarrow \overline{x}_i - y_{ik}\dfrac{\overline{x}_r}{y_{rk}} = \underset{>0}{y_{ik}} \underbrace{\left(\dfrac{\overline{x}_i}{y_{ik}} - \dfrac{\overline{x}_r}{y_{rk}}\right)}_{\geq 0} \geq 0.$

Ţinând seama că pentru $k \in \tilde{\mathcal{B}}$ avem $loc_{\tilde{\mathcal{B}}}(k) = r,$ obţinem:

$$\tilde{z} = c_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\top} \cdot \tilde{B}^{-1} \cdot b = c_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\top} \cdot E_r(\eta) \cdot B^{-1} \cdot b = c_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\top} \cdot E_r(\eta) \cdot \overline{x} =$$

$$= \left(\cdots, c_{s_i}, \cdots, c_k, \cdots\right) \cdot \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & 1 & \cdots & \dfrac{-y_{ik}}{y_{rk}} & \cdots \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \cdots & 0 & \cdots & \dfrac{1}{y_{rk}} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \overline{x} =$$

$$=\left(\cdots,c_{s_i},\cdots,\sum_{i\neq r}\frac{-c_{s_i}y_{ik}}{y_{rk}}+\frac{c_k}{y_{rk}},\cdots\right)\cdot\overline{x}=$$

$$=\sum_{i\neq r}c_{s_i}\overline{x}_i-\left(\sum_{i\neq r}c_{s_i}y_{ik}-c_k\right)\frac{\overline{x}_r}{y_{rk}}+c_{s_r}\overline{x}_r-c_{s_r}y_{rk}\frac{\overline{x}_r}{y_{rk}}=$$

$$=\underbrace{\sum_{i=1}^{m}c_{s_i}\overline{x}_i}_{\overline{z}}-\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{m}c_{s_i}y_{ik}}_{z_k}-c_k\right)\frac{\overline{x}_r}{y_{rk}}=\overline{z}-\underbrace{\left(z_k-c_k\right)}_{>0}\underset{\geq 0}{\frac{\overline{x}_r}{y_{rk}}}\leq\overline{z}.$$

(q.e.d.)

Paşii algoritmului simplex

- Pasul 0. Se determină (dacă există?!) o bază primal admisibilă B şi se calculează B^{-1}.
- Pasul 1. Se calculează
$$\bar{x} = B^{-1} \cdot b \geq \mathbf{0}, \ \bar{z} = c_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot \bar{x}, \ Y = B^{-1} \cdot A, \ z^{\top} - c^{\top} = c_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot Y - c^{\top}.$$
- Pasul 2. (test de optimalitate) Dacă $z - c \leq \mathbf{0},$ atunci s-a obţinut valoarea optimă $\bar{z}$, şi soluţia optimă de bază $x_{\mathcal{B}} = \bar{x}, \ x_{\mathcal{R}} = \mathbf{0}.$ STOP.
- Pasul 3. (test de optim infinit) Dacă $\exists\, k \in \mathcal{R}$ pentru care $z_k - c_k > 0$ şi $Y^k \leq \mathbf{0},$ atunci problema are optim (-)infinit. STOP.
- Pasul 4. (schimbarea bazei) Se alege $k \in \mathcal{R}$ cu $z_k - c_k > 0$ şi de determină $s_r \in \mathcal{B}, \ loc(s_r) = r,$ astfel încât
$$\frac{\bar{x}_r}{y_{rk}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{x}_i}{y_{ik}} \,\middle|\, y_{ik} > 0 \right\}.$$
Se formează matricea $\tilde{B} = B \setminus A^{s_r} \bigcup A^k,$ se calculează inversa $\tilde{B}^{-1} = E_r(\eta) \cdot B^{-1}$ şi se revine la Pasul 1.