SE: ECUAȚII DIFERENȚIALE ȘI CU DERIVATE PARȚIALE NR. 3. 20.10.2009

REZOLVARE EXERCIȚII SEMINAR 2

APLICAȚIE (pg. 4) 1) $x' = \dfrac{t-x+1}{t-x+2}$

Ecuația este de forma:

$$x' = g\left(\frac{at+bx+c}{\alpha t+\beta x+\gamma}\right) \text{ cu } a,b,c,\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R} \text{ și } \begin{array}{l}|a|+|\alpha|>0\\ |b|+|\beta|>0\end{array}$$

Amintim: Fie $\Delta = a\beta + b\alpha$.

Dacă
- $\Delta = 0$, atunci se face schimbarea de var: $\begin{cases} y = at+bx, \text{ dacă } b\neq 0 \\ y = \alpha t+\beta x, \text{ dacă } \beta \neq 0\end{cases}$
- $\Delta \neq 0$, atunci se face schimbarea de var: $\begin{cases} s = t-t_0 \\ y = x-x_0\end{cases}$, unde (t_0, x_0)

este soluția sistemului $\begin{cases} at+bx+c=0 \\ \alpha t+\beta x+\gamma = 0\end{cases}$

Suntem pe cazul $\Delta = 0 \Rightarrow$ facem $y = t-x \Rightarrow x = t-y \Rightarrow$

$$(t-y)' = \frac{\cancel{t}-\cancel{t}+y+1}{\cancel{t}-\cancel{t}+y+2} \Rightarrow (t-y)' = \frac{y+1}{y+2} \Rightarrow y' = \frac{1}{y+2}$$

Separăm variabilele: $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{y+2} \Rightarrow (y+2)\,dy = dt \Rightarrow$

$\Rightarrow \int (y+2)\,dy = t+c,\ c\in\mathbb{R} \Longleftrightarrow \dfrac{(y+2)^2}{2} = t+c,\ c\in\mathbb{R} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow (y+2)^2 = 2(t+c),\ c\in\mathbb{R} \Longleftrightarrow y+2 = \pm\sqrt{2(t+c)},\ c\in\mathbb{R}$

$\Longleftrightarrow y = -2 \pm \sqrt{2(t+c)},\ c\in\mathbb{R}$.

Soluția se alege în funcție de condiția inițială

$$x(t) = t+2 \mp \sqrt{2(t+c)}$$

TEMĂ ① Să se determine soluția generală pentru următoarele ecuații diferențiale.

ⓐ $x' = \dfrac{2x - t + 1}{x + t - 2} + 1$ ($\Delta \neq 0$)

ⓑ $x' = \left(\dfrac{t+1}{x - t + 2}\right)^2$ ($\Delta \neq 0$)

ⓒ $x' = \dfrac{1}{2x - t + 3}$ (fie $\Delta = 0$, fie cu ec. răsturnată)

② Fie ecuația $x' = at^{\alpha} + bx^{\beta}$, unde $a, \alpha, b, \beta \in \mathbb{R}$. Cât este $m \in \mathbb{R}$ a.î. schimbarea de variabilă $x = y^m$ să conducă la o ecuație omogenă în y?

③ Să se integreze ecuația $x' = \dfrac{-2x}{t^3 x + t}$ folosind o schimbare de variabilă de tipul $x = y^m$ (pt anumite valori ale lui m)

Observăm că se poate rezolva prin răsturnare și se obține o ecuație Bernoulli.

② $x(t) = (y(t)^m) \Rightarrow (y(t)^m)' = a \cdot t^{\alpha} + b \cdot y^{m\beta}(t)$

$m y^{m-1} \cdot y' = a \cdot t^{\alpha} + b y^{m\beta} \Rightarrow y' = \dfrac{a}{m} \cdot \dfrac{t^{\alpha}}{y^{m-1}} + \dfrac{b}{m} y^{m\beta - m + 1}$

Ecuația este de tipul $y' = f(t, y)$, unde $f(t,y) = \dfrac{a}{m} \dfrac{t^{\alpha}}{y^{m-1}} + \dfrac{b}{m} y^{m\beta - m + 1}$

Ecuația în y este omogenă $\Leftrightarrow$ $f(t,y)$ este omogenă $\Leftrightarrow$ avem $f(\lambda t, \lambda y) = f(t,y)\ \forall \lambda$

$f(\lambda t, \lambda y) = \dfrac{a}{m} \cdot \dfrac{\lambda^{\alpha} t^{\alpha}}{\lambda^{m-1} y^{m-1}} + \dfrac{b}{m} \cdot \lambda^{m\beta - m + 1} y^{m\beta - m + 1} \Rightarrow \begin{cases} \alpha - m + 1 = 0 \\ m\beta - m + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \alpha + 1 \\ m = \dfrac{-1}{\beta - 1} \end{cases}$

Schimbarea de variabile conduce la o ecuație omogenă $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha + 1 = \dfrac{-1}{\beta - 1} \Rightarrow (\alpha + 1)(\beta - 1) = -1 \Rightarrow \alpha\beta - \alpha + \beta - 1 = -1 \Rightarrow \alpha = -\dfrac{\beta}{\beta - 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{-1}{\beta - 1} = m}$. Adică $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ cu $\alpha\beta - \alpha + \beta = 0$ și $m = \dfrac{\alpha}{\beta}$.

③ $x(t) = y^{m}(t)$ schimbăm variabila

$$m \cdot y^{m-1} \cdot y' = \frac{-2y^{m}}{t^{3} \cdot y^{m} + t} \Rightarrow y' = -\frac{2y}{m(t^{3}y^{m}+t)}$$

Pentru $m=-2$ obținem o ecuație omogenă

$$f(t,y) = \frac{-2y}{m(t^{3}y^{m}+t)} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2\lambda y}{m\lambda^{3}t^{3}\lambda^{m}y^{m}+\lambda t} = \frac{-2y}{m\cdot t^{3}\cdot y^{m}+t} \Leftrightarrow \frac{\cancel{\lambda}}{\lambda(\lambda^{m+2}t^{3}y^{m}+t)} = \frac{1}{t^{3}y^{m}+t}$$

$$\Rightarrow m+2=0 \Rightarrow m=-2 \Rightarrow x(t) = \frac{1}{(y(t))^{2}}, \quad y' = \frac{-\cancel{2}y}{-\cancel{2}\left(\frac{t^{3}}{y^{2}}+t\right)}$$

$y' = \dfrac{\frac{y}{t}}{\left(\frac{t}{y}\right)^{2}+1}$ este ecuație omogenă. Notăm $\frac{y}{t} = z$

Amintim: $y = f(t,y)$ omogenă $\Leftrightarrow f(\lambda t, \lambda y) = f(t,y)$ $\forall \lambda$ a.î. $(\lambda t, \lambda y) \in D_f$

$y(t) = t\cdot z(t)$

$y'(t) = t\cdot z' + z$

$$tz + z = \frac{z}{\frac{1}{z^{2}}+1} \Rightarrow t\cdot z' + z = \frac{z^{3}}{1+z^{2}} \Leftrightarrow t\cdot z' = \frac{z^{3}-z^{3}+z}{(1+z^{2})t}$$

$\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{-z}{1+z^{2}}\cdot\dfrac{1}{t}$ separăm variabilele

$\dfrac{dz}{dt} = 0 \Rightarrow z=0$ soluție $\Rightarrow$ sch. de var. $y=0$, dar contradicție pt. $x = \dfrac{1}{y^{2}}$

$\Rightarrow$ Nu avem soluții staționare

$$\Rightarrow -\frac{1+z^{2}}{z}dz = \frac{dt}{t}$$

$$-\ln|z| - \frac{z^{2}}{2} = -\ln|t| + C$$

$$z = \frac{y}{t} \Rightarrow -\ln\left|\frac{y}{t}\right| - \frac{y^{2}}{2t^{2}} = \ln|t| + C \Leftrightarrow -\ln|y| - \frac{y^{2}}{2t^{2}} = C$$

$x = \dfrac{1}{y^{2}} \Rightarrow y = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow -\ln\left|\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right| - \dfrac{1}{2t^{2}x} = C$ soluție implicită

INTEGRAREA ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE IMPLICITE DE ORDIN 1

$$F(t, x, x') = 0$$

I. Dacă se poate explicita sub forma $x' = f(t, x)$, atunci se caută o modalitate de integrare cunoscută (REGULA GENERALĂ)

II. Dacă nu se poate explicita, atunci căutăm o parametrizare pentru suprafața $S = \{(t, x, y) \in \mathbb{R}^3\}$

$F(t, x, y) = 0$. O astfel de parametrizare, dacă există, se notează:

$$\begin{cases} t = \alpha(u, v) \\ x = \beta(u, v) \\ y = \gamma(u, v) \end{cases}, \text{ cu } (u, v) \in \Delta \subset \mathbb{R}^2$$

$x' = \frac{dx}{dt}$. Se pune condiția ca $y\,dt = dx \Rightarrow \gamma(u,v)\, d(\alpha(u,v)) = d(\beta(u,v))$

$$\gamma(u,v) \cdot \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} du + \frac{\partial \alpha}{\partial v} dv \right) = \frac{\partial \beta}{\partial u} du + \frac{\partial \beta}{\partial v} dv$$

$$\underbrace{\left(\gamma(u,v) \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial u} - \frac{\partial \beta}{\partial u} \right)}_{\overset{not}{=}\ a(u,v)} du = \underbrace{\left(\frac{\partial \beta}{\partial v} - \gamma(u,v) \frac{\partial \alpha}{\partial v} \right)}_{\overset{not}{=}\ b(u,v)} dv$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{b(u,v)}{a(u,v)} \Rightarrow \text{integrând } u = u(v) \Rightarrow \text{soluție param.} \begin{cases} t = \alpha(u(v), v) \\ x = \beta(u(v), v) \end{cases}, v \in I \subset \mathbb{R}$$

sau

$$\frac{dv}{du} = \frac{a(u,v)}{b(u,v)} \Rightarrow v = v(u) \Rightarrow \text{soluție parametrică} \begin{cases} t = \alpha(u, v(u)) \\ x = \beta(u, v(u)) \end{cases}, u \in J \subset \mathbb{R}$$

CAZURI PARTICULARE

I. Dacă $t = \alpha(x, x')$, atunci parametrizarea va fi $\begin{cases} t = \alpha(u, v) \\ x = u \\ y = v \end{cases}$

II. Dacă $x = \beta(t, x')$, atunci parametrizarea va fi $\begin{cases} t = u \\ x = \beta(u, v) \\ y = v \end{cases}$

EXEMPLU: Să se determine soluțiile ecuației diferențiale:

$$x + t x' - 4\sqrt{x'} = 0$$

$x = 4\sqrt{x'} - t x'$ se încadrează în cazul particular I, având $\beta(t, x')$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = u \\ x = \beta(u,v) = 4\sqrt{v} - uv \quad , v > 0 \\ y = v \end{cases}$$

$$y\,dt = dx \Rightarrow v\,du = \frac{\partial \beta}{\partial u} du + \frac{\partial \beta}{\partial v} dv \Leftrightarrow v\,du = -v\,du + \left(4\frac{1}{2\sqrt{v}} - u\right) dv \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2v\,du = \left(\frac{2}{\sqrt{v}} - u\right) dv \Leftrightarrow \frac{du}{dv} = \frac{1}{v\sqrt{v}} - \frac{-u}{2v} \Leftrightarrow \frac{du}{dv} = -\frac{1}{2v} u + v^{-\frac{3}{2}}$$ este ecuație afină în u, ca funcție de v.

$$\frac{d\bar{u}}{dv} = -\frac{1}{2v}\bar{u} \Rightarrow \bar{u}(v) = c \cdot e^{\int -\frac{1}{2v} dv} = \frac{c}{\sqrt{v}}$$

Variem constanta: $u(v) = \dfrac{c(v)}{\sqrt{v}}$

$$\frac{c'(v)}{\sqrt{v}} + \cancel{c(v)\left(-\frac{1}{2}\right) v^{-\frac{3}{2}}} = \cancel{-\frac{1}{2v} \cdot \frac{c(v)}{\sqrt{v}}} + v^{-\frac{3}{2}}$$

$$c'(v) = v^{-1}$$

$$\frac{dc}{dv} = \frac{1}{v} \Rightarrow c = \int \frac{1}{v} dv = \ln v + C_1 \Rightarrow u(v) = \frac{\ln(v) + C_1}{\sqrt{v}}$$

$$\begin{cases} t = \dfrac{\ln(v) + C_1}{\sqrt{v}} \\ x = 4\sqrt{v} - \dfrac{\ln v + C_1}{\sqrt{v}} \cdot v \end{cases}, v > 0 \Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{\ln v + C_1}{\sqrt{v}} \\ x = \sqrt{v}\,(4 - \ln v - C_1) \end{cases}, v > 0$$

Lăsăm soluția în formă parametrică.

$\boxed{\text{TEMĂ}}$ Soluția problemelor Cauchy:

a) $\begin{cases} (x')^2 - 2xx' + x^2(-e^t+1) = 0 \\ x(0) = 1 \end{cases}$

Observație: poate fi determinată, având $x' = \beta(t, x)$

Indicație: $\Delta = 4x^2 - 4x^2(-e^t+1) = 4x^2 \cdot e^t$ (considerând-o ca ecuație de gradul II în x)

b) $\begin{cases} tx' - x - \ln x' = 0 \\ x(1) = 1 \end{cases}$

Obs: Nu poate fi explicitată