Seminarul 5
Postoptimizare. Programare în numere întregi.

1) Considerăm problema:

$$\inf\left\{x_1-3x_2+x_3-2x_4\right\}$$
$$\begin{cases}3x_1+x_2-2x_3+x_4=1\\ -x_1+2x_2+x_3+4x_4=0\end{cases}$$
$$x_i\ge 0,\ i=\overline{1,4}.$$

a) Alcătuiţi tabloul simplex pentru baza $B=\left(A^1A^3\right)$ şi rezolvaţi problema plecând de la această bază.
b) Determinaţi intervalul de variaţie pentru $b_2=0$ pentru ca baza obţinută să rămână optimă şi variaţia soluţiei şi a valorii optime.
c) Determinaţi intervalul de variaţie pentru $c_2=-3$, şi respectiv $c_3=1$ pentru ca baza obţinută să rămână optimă şi variaţia soluţiei şi a valorii optime acolo unde este cazul.

Rezolvare. Tabloul simplex este:

	$\bar{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1	5	0	9
x_3	1	0	7	1	13
	2	0	15	0	24

	$\bar{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	$\frac{2}{7}$	1	0	$-\frac{5}{7}$	$-\frac{2}{7}$
x_2	$\frac{1}{7}$	0	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{13}{7}$
	$-\frac{1}{7}$	0	0	$-\frac{15}{7}$	$-\frac{27}{7}$

$$B=\left(A^1A^2\right)=\begin{pmatrix}3&1\\-1&2\end{pmatrix},\quad B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{7}&-\frac{1}{7}\\ \frac{1}{7}&\frac{3}{7}\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r}x_1(\lambda)=\frac{2}{7}-\frac{1}{7}\lambda\ge 0\Rightarrow\lambda\le 2\\ x_2(\lambda)=\frac{1}{7}+\frac{3}{7}\lambda\ge 0\Rightarrow\lambda\ge-\frac{1}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow\lambda\in\left[-\frac{1}{3},2\right]$$

$$z(\lambda)=c_{\mathbf{B}}^{\top}x(\lambda)=\begin{pmatrix}1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{7}-\frac{1}{7}\lambda\\ \frac{1}{7}+\frac{3}{7}\lambda\end{pmatrix}=-\frac{1}{7}-\frac{10}{7}\lambda$$

Pentru $2\in\mathcal{B}$ trebuie ca $\left(z_j-c_j\right)+\lambda y_{2j}\le 0\ \ \forall j\in\mathcal{R}$.

$$\left.\begin{array}{r}-\frac{15}{7}+\frac{1}{7}\lambda\le 0\Rightarrow\lambda\le 15\\ -\frac{27}{7}+\frac{13}{7}\lambda\le 0\Rightarrow\lambda\le\frac{27}{13}\end{array}\right\}\Rightarrow\lambda\in\left(-\infty,\frac{27}{13}\right]\Rightarrow c_2\in\left(-\infty,-\frac{12}{13}\right]$$

$$z(\lambda)=\bar{z}+\lambda\bar{x}_2=-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\lambda\in\left(-\infty,\frac{2}{13}\right]$$

Pentru $3\notin\mathcal{B}$ trebuie ca $z_3-\left(c_3+\lambda\right)\le 0.\ \Leftrightarrow-\frac{15}{7}-\lambda\le 0\Rightarrow\lambda\in\left[-\frac{15}{7},\infty\right)\Rightarrow c_3\in\left[-\frac{8}{7},\infty\right).$

2) Să se rezolve în numere întregi problema

$$\inf\{3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4\}$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$
$$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}.$$

Rezolvare. Tabloul simplex pentru $B = \left(A^3 A^4\right)$ este:

	$\bar{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	0
x_4	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	1
	-4	-1	-3	0	0

Dacă alegem $x_3 = \frac{3}{4}$ obţinem:

	$\bar{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1
x_3	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	0	0
x_4	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	1	0
y_1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	0	0	1
	-4	-1	-3	0	0	0

	$\bar{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1
x_3	1	$-\frac{2}{3}$	0	1	0	$-\frac{1}{3}$
x_4	0	$-\frac{4}{3}$	0	0	1	$\frac{10}{3}$
x_2	1	$\frac{1}{3}$	1	0	0	$-\frac{4}{3}$
	-4	0	0	0	0	-4

Dacă alegem $x_4 = \frac{5}{2}$ obţinem:

	$\bar{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1
x_3	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	0	0
x_4	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	1	0
y_1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	1
	-4	-1	-3	0	0	0

	$\bar{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1
x_3	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{3}{2}$
x_4	3	0	3	0	1	-1
x_1	1	1	1	0	0	-2
	-3	0	-2	0	0	-2

	$\bar{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2
x_3	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{3}{2}$	0
x_4	3	0	3	0	1	-1	0
x_1	1	1	1	0	0	-2	0
y_2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	1
	-3	0	-2	0	0	-2	0

	$\bar{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2
x_3	1	0	0	1	0	-2	1
x_4	0	0	0	0	1	-4	6
x_1	0	1	0	0	0	-3	2
x_2	1	0	1	0	0	1	-2
	-1	0	0	0	0	0	-4