# Existenţa şi unicitatea soluţiei problemei Cauchy pentru ecuaţii diferenţiale scalare de ordin 1

(Partea a II-a)

Curs Nr. 3

**Demonstraţia Teoremei Cauchy-Picard**

*Demonstraţia unicităţii soluţiei teoremei Cauchy-Picard*

Fie $\phi(\cdot) : I_1 \to \mathbb{R},\ \psi(\cdot) : I_2 \to \mathbb{R}$ soluţii ale problemei Cauchy $(f, t_0, x_0)$.

$$\begin{aligned} &\phi(t_0) = \psi(t_0) = x_0 \\ &(t_0, x_0) \in I_1,\ \Gamma_\phi \subset D_1 \\ &(t_0, x_0) \in I_2,\ \Gamma_\psi \subset D_2 \end{aligned}$$

Din **Lema 2** *(de reprezentare integrală a soluţiei)* avem:

$$\left.\begin{aligned} \phi(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))\ \mathrm{d}s \\ \psi(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \psi(s))\ \mathrm{d}s \end{aligned}\right. \quad \forall t \in I_1 \cap I_2.$$

Calculăm pentru $t \in I_1 \cap I_2$ :

$$|\phi(t) - \psi(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} (f(s, \phi(s)) - f(s, \psi(s)))\ \mathrm{d}s \right| \leq \int_{t_0}^{t} \underbrace{f(s, \phi(s)) - f(s, \psi(s))}_{\leq L|\phi(s) - \psi(s)|}\ \mathrm{d}s \leq$$

$$\leq L \int_{t_0}^{t} |\phi(s) - \psi(s)|\ \mathrm{d}s$$

Notăm $\theta(t) = \int_{t_0}^{t} |\phi(s) - \psi(s)|\ \mathrm{d}s$.

Pentru a demonstra unicitatea trebuie să arătăm că $\theta(t) = 0 \Rightarrow \theta'(t) = |\phi(t) - \psi(t)|$.

$$\begin{aligned}\theta'(t) \le L\theta(t) \Rightarrow \theta'(t) - L\theta(t) \le 0 / \cdot e^{-L(t-t_0)} \\ \iff \theta'(t)e^{-L(t-t_0)} - L\theta(t)e^{-L(t-t_0)} \le 0 \\ \iff \underbrace{(\theta(t)e^{-L(t-t_0)})'}_{g(t)} \le 0\end{aligned}$$

$g(t)$ are derivata $< 0$, deci este descrescătoare. Deoarece $\theta$ este modul, iar exponenţiala $\ge 0$, avem pentru $t \ge t_0\ :\ 0 \le g(t) \le g(t_0),\ \forall t \in [t_0, t_0+\alpha]$, unde $I_1 \cap I_2 = [t_0-\alpha, t_0+\alpha]$. Dar,

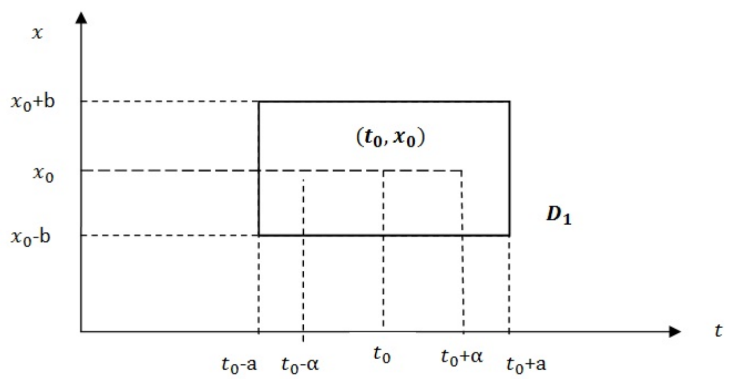
$$\begin{aligned}&g(t_0) = \theta(t_0) \cdot e^{-L(t-t_0)} = |\phi(t_0) = \psi(t_0)| = 0 \Rightarrow 0 \le g(t) \le 0 \Rightarrow \\ &g(t) = 0,\ \forall t \in [t_0, t_0+\alpha] \Rightarrow \theta(t) = 0 \Rightarrow \phi(t) = \psi(t),\ \forall t \in [t_0, t_0+\alpha]\end{aligned}$$

Atât existenţa cât şi unicitatea au fost demonstrate pe jumătate de interval. La fel se procedează şi pentru $t \in [t_0-\alpha, t_0]$ ■

**Aplicaţie** ***(pentru seminar)***

Fie ecuaţia $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x}$, definită de câmpul vectorial $f(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(t,x) = \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x}$.

a) Verifică $f$ condiţiile teoremei Cauchy-Picard pe $\mathbb{R}^2$, $\forall (t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ ? (Se poate construi dreptunghiul - $D_1$ - astfel încât funcţia să îndeplinească condiţiile teoremei ?)




b) Demonstraţi că problema Cauchy $(f, 0, 0)$ nu are soluţie unică.

**Obs.** Teorema nu are şi reciprocă.

**Existenţa soluţiei maximale**
**Necesitatea determinării soluţiei maximale*(exemplu)***

Considerăm problema Cauchy: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha(1+x^2) \\ x(0) = 0 \end{cases}$ , $(t,x) \in \mathbb{R}^2$.

$\dfrac{dx}{1+x^2} = \alpha dt \Rightarrow arctg(x) = \alpha t + k,\ k \in \mathbb{R}$

$arctg(0) = 0 + k \Rightarrow k = 0 \Rightarrow$ soluţia este $arctg(x) = \alpha t \Rightarrow x = tg(\alpha t),\ \alpha t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

$x(t) = tg(\alpha t),\ t \in \left(-\dfrac{\pi}{2\alpha}, \dfrac{\pi}{2\alpha}\right)$

Deci intervalul pe care este definită soluţia se restrânge.

**Teorema de existenţă a soluţiei maximale**

Considerăm problema Cauchy $(f, t_0, x_0),\ t_0 \in [a,b]$ (nu e necesar ca intervalul să fie simetric în jurul lui $t_0$ cu $f(\cdot,\cdot) : D = [a,b] \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f$ continuă, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ este continuă, $[a,b] \times [x_0 - \beta, x_0 + \beta] \subset D,\ \forall \beta > 0,\ f$ are creştere liniară, adică $\exists A, B \geq 0$ astfel încât $|f(t,x)| \leq A|x| + B,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in [a,b]$. În aceste condiţii, problema Cauchy $(f, t_0, x_0)$ are soluţie $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$, iar aceasta este unică.

*Demonstraţie:*

Considerăm $(\phi_i)_{i\geq 0}$ şirul de funcţii din teorema Cauchy-Picard, extinse la intervalul $[a,b]$. Practic avem:
$\phi_0(t) = x_0,\ \forall t \in [a,b]$
$\phi_{i+1}(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \phi_i(s))\, \mathrm{d}s,\ \forall t \in [a,b]$.
Pentru ca $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}(\phi_i \xrightarrow[i \to \infty]{} \phi)$ să fie soluţie pe întreg intervalul $[a,b]$ este suficient să arătăm că şirul $(\phi_i)_{i\geq 0}$ este mărginit în sensul următor:
$\exists\ C_1, C_2 \geq 0$ astfel încât $|\phi_i(t)| \leq C_1 e^{C2(t-t_0)},\ \forall t \in [a,b]$
Pentru $i = 0$ avem $|\phi_(t)| = |x_0|$. Deci alegem $C_1 \geq |x_0|$ şi $C_2 \geq 0$.
Presupunem că am găsit $C_1$ şi $C_2$ pentru $\phi_i$ şi le verificăm în condiţia de mărginire pentru $\phi_{i+1}$, pentru $t \in [t_0, b]$. Pentru $t \in [a, t_0]$ se reia acelaşi raţionament.

$$
\begin{aligned}
|\phi_{i+1}(t)| &\leq |x_0| + \left| \int_{t_0}^{t} f(s,\phi(s))\ \mathrm{d}s \right| \leq |x_0| + \int_{t_0}^{t} \underbrace{|f(s,\phi(s))|}_{\leq A|\phi_i(s)|+B}\ \mathrm{d}s \leq \\
&\leq |x_0| + \int_{t_0}^{t} (A|\phi_i(s)| + B)\ \mathrm{d}s = |x_0| + B(t-t_0) + A \int_{t_0}^{t} \underbrace{|\phi_i(s)|}_{\leq C_1 \cdot e^{C_2(s-t_0)}}\ \mathrm{d}s \leq \\
&\leq |x_0| + B(t-t_0) + AC_1 \int_{t_0}^{t} e^{C_2(s-t_0)}\ \mathrm{d}s = \\
&= |x_0| + B(t-t_0) + AC_1 \frac{L}{C_2} e^{C_2(s-t_0}\Big|_{t_0}^{t} = \\
&= |x_0| + B(t-t_0) + \frac{AC_1}{C_2}\left(e^{C_2(t-t_0)} - 1\right) = \\
&= |x_0| + B(t-t_0) - \frac{AC_1}{C_2} + \frac{AC_1}{C_2} e^{C_2(t-t_0)}
\end{aligned}
$$

Ne trebuie inegalitatea: $|\phi_{i+1}(t)| \leq C_1 e^{C_2(t-t_0)}$.

Aceasta rezultă din: $\begin{cases} |x_0| + B(t-t_0) - \dfrac{AC_1}{C_2} = 0 \Rightarrow C_1 = |x_0| + B(t-t_0),\ \forall t \in [t_0, b] \\ \dfrac{AC_1}{C_2} = C_1 \Rightarrow C_2 = A \end{cases}$.

Analog, pentru $t \in [a, t_0] \Leftarrow \begin{cases} C_2 = A \\ C_1 = |x_0| + B(t-t_0) \end{cases}$.

Deci alegem $C_2 = A,\ C_1 = |x_0| + B|t-t_0|$ ■

**Metode de aproximare a soluţiei problemei Cauchy**

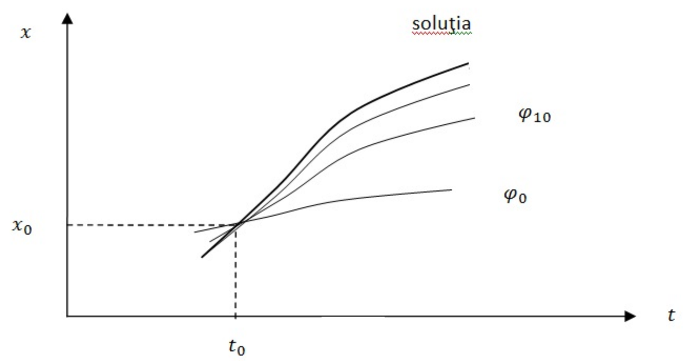
Se dă problema Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

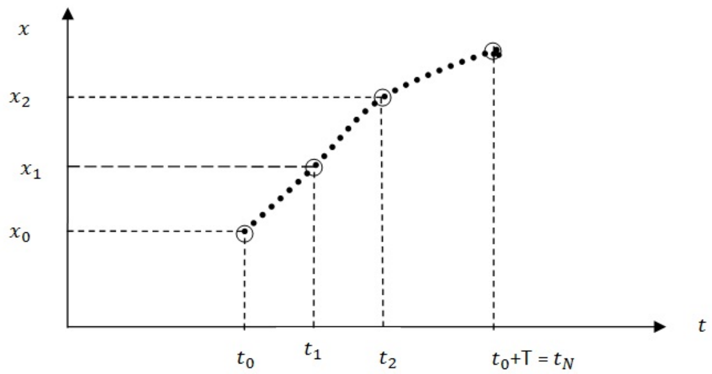
Presupunem $f$ continuă şi $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ mărginită (sau spunem că $f$ este Lipschitz în raport cu al doilea argument).

1. ŞIRUL APROXIMĂRILOR SUCCESIVE din teorema Cauchy-Picard

   Se construiesc funcţiile $(\phi_i)_{i\geq 0}$.




2. Avem problema Cauchy (1) şi pentru $t_0 + T$ determinăm aproximarea soluţiei în $t_0 + T :\approx x(t_0 + T)$.




   Se împarte intervalul $[t_0, t_N]$ şi se calculează pentru $t_k$ valorile $x_k$.

$h > 0$ este dat şi reprezintă distanţa dintre două puncte

$\boxed{N = \frac{T}{H}}$

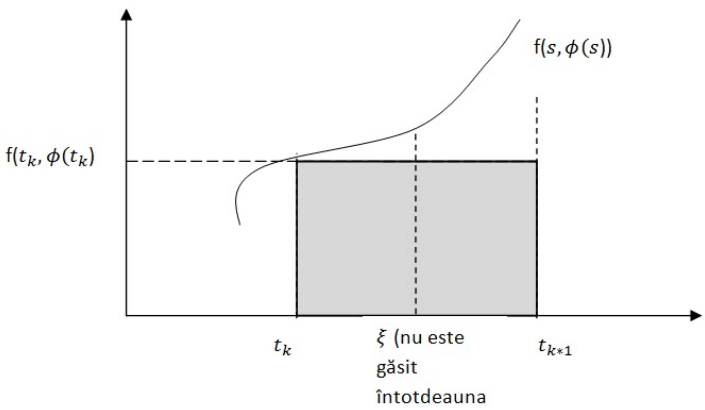
$t_k = t_{k-1} + h$

$t_k = t_0 + h, \ \forall k = \overline{0, N}$

$x_0 = x(t_0)$

Din **Lema 2** avem pe $[t_k, t_{k+1}]$ :
$\phi(t_{k+1}) = \phi(t_k) + \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, \phi(s))\, \mathrm{d}s.$

Dacă se aplică o teoremă de medie, se obţine că:
$\exists \xi \in [t_k, t_{k+1}]$ astfel încât $\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, \phi(s))\, \mathrm{d}s = f(\xi, \phi(\xi))\, \mathrm{d}s \Rightarrow$
$\phi(t_{k+1}) = \phi(t_k) = hf(\xi, f(\xi)).$
Atunci când aproximăm integrala, nu luăm întreaga arie, ci doar dreptunghiul.




SCHEMA EULER explicită de calcul a aproximărilor $(x_k)_{k=\overline{0,N}}$ :

$$\begin{cases} x_0 \text{ din problema Cauchy} \\ x_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_k), \ k = \overline{0, N-1} \end{cases} \tag{2}$$

Trebuie să arătăm că acest şir converge la soluţie.

**Lema 3:** Fie $(x_k)_{k=\overline{0,N}}$ şirul aproximărilor din (2) şi $M = \sup_{(t,x)\in D_f} |f(t, x)|$ constanta de mărginire a lui $f$ pe $D_f$. Atunci avem: $|x_k - x_0| \leq Mkh$.

*Demonstraţie* (prin inducţie până la $N$): $\underline{k = 1}$
$|x_1 - x_0| = |x_0 + hf(t_0, x_0) - x_0| = h|f(t_0, x_0)| \leq Mh = M \cdot 1 \cdot h.$
Presupunem propoziţia adevărată până la $k$ $(i = \overline{1, k})$ şi o demonstrăm pentru $k + 1$.
$|x_{k+1} - x_0| = |x_k + hf(t_k, x_k) - x_0| \leq |x_k - x_0| + h|f(t_k, x_k)| = Mkh + hM = M(k + 1)h.$ ■