David NACCACHE Emil SIMION
Adela MIHĂIȚĂ Ruxandra-Florentina OLIMID Andrei-George OPRINA

Criptografie și securitatea informației

Aplicații

MATRIX ROM BUCUREȘTI

David NACCACHE, Emil SIMION, Adela MIHĂIȚĂ, Ruxandra-Florentina OLIMID, Andrei-George OPRINA - Criptografie și securitatea informației. Aplicații

9789737556752

Criptografie şi Securitatea Informaţiei. Aplicaţii.

Colectivul de coordonare
David Naccache Emil Simion

Colectivul de autori
Adela Georgescu [cap.]
David Naccache [cap.]
Ruxandra-Florentina Olimid[cap.]
Andrei-George Oprina [cap.]
Steluţa Pricopie [cap.]
Emil Simion [cap.]

Prefaţă

Intrând progresiv în era informaţiei, societăţile industrializate se găsesc în faţa unui paradox: pe de o parte, puterea şi influenţa Europei şi a Americii de Nord au crescut semnificativ, în principal datorită măiestriei modalităţilor prin care se controlează fluxurile de informaţii, precum şi valorii crescute a datelor procesate. Pe de altă parte, după cum au demonstrat-o deja criza Wikileaks sau viermele Stuxnet, apar noi ameninţări şi vulnerabilităţi care fac ca dependenţa noastră de sistemele informaţionale să fie crucială.

De aceea, dezvoltarea atacurilor cibernetice, precum şi disponibilitatea online a instrumentelor utilizate în activitatea de piraterie conduce la obiective strategice importante şi cultivă necesitatea de a pregăti experţi pentru acest domeniu.

Criptografia este peste tot în jurul tău. În timp ce tu citeşti aceste rânduri, în vecinătatea ta se transmit informaţii cifrate prin telefoane mobile, relee de pay-TV, precum şi routere wireless. Mediul în care trăim se schimbă într-un ritm alert. Această evoluţie este rezultatul progresului în domeniul tehnologiilor hardware şi al matematicii.

Criptografia aplicată s-a dezvoltat considerabil în ultimii ani, pentru a putea satisface cerinţele crescute de securitate ale diverselor domenii legate de tehnologia informaţiei, cum ar fi telecomunicaţiile, reţelistica, bazele de date, precum şi aplicaţiile de telefonie mobilă. Sistemele criptografice sunt din ce în ce mai complexe şi mai tehnice şi necesită din ce în ce mai multă putere de calcul (de exemplu schema de cifrare perfect homomorfă a lui Gentry). În plus, algoritmii criptografici trebuie utilizaţi împreună cu protocoale adecvate, a căror proiectare şi înţelegere necesită o analiză delicată.

Această carte vă oferă instrumentele necesare pentru a începe să vă dezvoltaţi aptitudinile în domeniul criptografiei. În timp ce citiţi aceste rânduri în limba română, străinul care sunt vă îndeamnă să realizaţi că unele dintre cele mai luminate minţi care au adus contribuţii acestui domeniu îşi aveau originile în spaţiul lingvistic şi cultural românesc. De exemplu, cel care a spart maşina de cifrat "Purple" a japonezilor, faptă care a dus la divulgarea secretelor diplomatice japoneze înainte de intrarea Americii în cel de-al doilea război mondial, provenea din oraşul Chişinău, Republica Moldova, oraş în care familia lui se mutase după plecarea din Bucureşti la sfârşitul anilor 1890. Ştiinţa secretelor are o lungă tradiţie în România, ţară care a fost nevoită constant să se bazeze pe propriile talente pentru a-şi păstra independenţa. Experţii au prezis că următoarele războaie vor începe în spaţiul cibernetic. Autorii acestei cărţi, care sunt pedagogi şi cercetători, au importanta datorie morală de a lăsa moştenire României astfel de talente vitale.

În trecut, am avut onoarea de a cunoaşte sau a fi mentorul unor cercetători şi studenţi români foarte talentaţi. Întotdeauna am fost uimit de creativitatea acestora, de dorinţa lor de a-şi atinge scopurile, precum şi de dăruirea pentru muncă. Sper că această carte va contribui la dezvoltarea continuă de asemenea talente, astfel încât domeniul ştiinţific căruia i-am dedicat o bună parte a vieţii mele să beneficieze de acest formidabil rezervor de talente.

Dacă sunteţi un student talentat şi interesat de studii doctorale în domeniu, nu ezitaţi să mă contactaţi pentru sfaturi.

Prof. David Naccache
Université Paris II, Pantheon-Assas, PRES Sorbonne Universités
Membru al laboratorului informatic al Ecole normale superiéure. Paris, Franţa

Cuvânt înainte

Lucrarea de faţă conţine aplicaţii practice abordate de autori în cadrul seminariilor ce se desfăşoară la disciplina *Criptografie şi Securitate*, la Facultatea de Matematică Informatică din cadrul Universităţii din Bucureşti, la masterul de *Securitatea Tehnologiei Informaţiei*, organizat de Academia Tehnică Militară, precum şi la masterul de *Teoria Codării şi Stocării Informaţiei*, organizat de Facultatea de Ştiinţe Aplicate din cadrul Universităţii Politehnica Bucureşti.

Această culegere de probleme este un prim pas în dezvoltarea colaborării dintre şcoala românească de criptologie şi şcoala franceză reprezentată în cazul de faţă de David Naccache, profesor la universitatea Pantheon-Assas Paris II. Din acest motiv se regăsesc, în culegerea de faţă, capitolele dedicate principiilor criptologice şi atacurilor în mediul de implementare, ce acoperă un gol din curricula sistemului de învăţământ din Romania, capitole elaborate în colaborare cu profesorul David Naccache.

Materialul este structurat în capitole independente, fiecare capitol fiind constituit din trei părţi: prezentarea metodei (breviar teoretic), exemple de aplicare şi probleme propuse spre rezolvare, pentru fiecare dintre acestea indicându-se rezultatul ce trebuie obţinut.

Întrucât criptografia este o disciplină computaţională, autorii au considerat utilă introducerea unui capitol special dedicat aplicaţiilor software care pot constitui logistica necesară desfăşurării în bune condiţii a laboratoarelor la această disciplină.

În continuare considerăm util să definim unele dintre principalele noţiuni utilizate în cadrul acestei culegeri de probleme.

Criptologia este ştiinţa scrierilor secrete, având drept obiect apărarea secretului datelor şi informaţiilor confidenţiale, cu ajutorul sistemelor criptografice.

Criptografia este latura defensivă a *criptologiei*, având drept obiect de activitate elaborarea (conceperea) sistemelor criptografice şi a regulilor folosite.

Criptanaliza este latura ofensivă a *criptologiei*, având drept obiect de activitate studierea sistemelor criptografice proprii pentru a le oferi caracteristicile necesare, astfel încât acestea să-şi îndeplinească funcţia pentru care au fost concepute. Totodată criptanaliza poate analiza sistemele criptografice ale terţelor părţi (prin intermediul criptogramelor realizate cu ele) astfel încât prin spargerea acestora să obţină informaţii utile instituţiei pe care o deserveşte.

Prin *algoritm criptografic* înţelegem o mulţime de transformări uniinversabile prin care mulţimea mesajelor (textelor) clare dintr-o limbă se transformă în mulţimea $\mathcal{M}$ a criptogramelor.

Cheia de cifrare constituie o convenţie particulară, materializată, printr-un cuvânt, frază, număr, şir numeric etc. şi care dirijează (reglementează) *operaţia de cifrare*.

Un *protocol criptografic* este un set de reguli, între doi sau mai mulţi parteneri, prin intermediul căruia are loc o operaţie de autentificare şi/sau transfer de cheie sau mesaje.

Un *sistem criptografic* este compus din trei elemente: algoritm de cifrare, sistem de generare al cheilor şi protocol de distribuţie al cheilor de cifrare.

Descifrarea este operaţia inversă cifrării şi ea constă în aplicarea sistemului de cifrare cunoscut (în prezenţa cheii corecte) asupra criptogramelor pentru aflarea mesajului clar.

Decriptarea este operaţia prin care, numai pe baza analizei criptogramelor realizate cu un sistem de cifru necunoscut, se pune în evidenţă mesajul clar care a fost criptografiat şi se determină caracteristicile sistemului criptografic folosit pentru cifrare.

Dr. mat. Emil Simion

Cuprins

Capitolul 1

Sistemul de cifrare Cezar

1.1 Breviar teoretic

Algoritmul de cifrare al lui Cezar este un sistem de cifrare monoalfabetic pentru care textul clar este construit din literele alfabetului latin $A-Z$ şi cheia de cifrare este reprezentată de un număr întreg $k \in \{0, \ldots, 25\}$.

În faza de preprocesare, delimitatorul de spaţiu este ignorat sau înlocuit cu caracterul cel mai puţin frecvent din limba în care este textul clar (în limba română Q).

Fiecarei litere din textul sursă i se asociază ordinea lexicografică x. Pentru cifrare, aceasta se înlocuieşte prin caracterul cod $(x + k) \bmod 26$. Pentru descifrare se utilizează regula inversă: $(x - k) \bmod 26$.

1.2 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 1.2.1 *Să se cifreze mesajul:*
CRIPTOGRAFIE
algoritmul utilizat fiind cifrul lui Cezar cu cheia de cifrare $k = 7$.

Rezolvare: Se cifrează literă cu literă, ţinând cont de poziţia ocupată de litere în alfabet:
- Literei C îi corespunde $x = 2$, deci se va cifra în $(2 + 7) \bmod 26 = 9$ adică J;
- Literei R îi corespunde $x = 16$, deci se va cifra în $(17 + 7) \bmod 26 = 24$, adică Y;

Se continuă în mod analog pentru fiecare literă şi în final se obţine JYPWA VNYHM PL.

Exerciţiul 1.2.2 *Să se decripteze mesajul:*
JAJSN SHWDU YTQTL DXNQJ SHJNX LTQIJ SXXXX
algoritmul utilizat fiind cifrul lui Cezar. Indicaţi cheia de cifrare.

Rezolvare: Se verifică, pe rând, toate cheile posibile, până când se obţine un text cu sens.

În funcţie de lungimea cheii, corespondenţa dintre literele textului clar şi cele ale textului cifrat devine:

x	0	1	2	3	4	5	6	...	25
textul clar	A	B	C	D	E	F	G	...	Z
$k = 1$	B	C	D	E	F	G	H	...	A
$k = 2$	C	D	E	F	G	H	I	...	B
$k = 3$	D	E	F	G	H	I	J	...	C
$k = 4$	E	F	G	H	I	J	K	...	D
$k = 5$	F	G	H	I	J	K	L	...	E
...	..	..	..	..	..	..	..	..	..

Se observă că sistemul presupune înlocuirea fiecărei litere cu litera corespunzătoare în alfabetul rotit cu k poziţii.

Decriptând fiecare caracter în corespondentul său clar se obţine, pe rând:

- pentru $k = 1$: IZIRM RGVCT XSPSK CWMPI RGIMW KSPHI RWWWW
- pentru $k = 2$: HYHQL QFUBS WRORJ BVLOH QFHLV JROGH QVVVV
- pentru $k = 3$: GXGPK PETAR VQNQI AUKNG PEGKU IQNFG PUUUU
- pentru $k = 4$: FWFOJ ODSZQ UPMPH ZTJMF ODFJT HPMEF OTTTT
- pentru $k = 5$: EVENI NCRYP TOLOG YSILE NCEIS GOLDE NSSSS

După o regrupare a literelor, pentru $k = 5$ se obţine: EVEN IN CRYPTOLOGY SILENCE IS GOLDEN.

1.3 Exerciţii propuse

Exerciţiul 1.3.1 *Scrieţi o aplicaţie care să implementeze următoarele funcţii:*

- cifrarea unui text cu ajutorul algoritmului de cifrare Cezar;

- descifrarea unui text cifrat cu algoritmul lui Cezar;

- decriptarea unui text, despre care se ştie că a fost cifrat prin metoda Cezar, prin generarea tuturor soluţiilor posibile.

Verificaţi rezultatul pe datele de intrare din exerciţiile următoare.

Exerciţiul 1.3.2 *Să se cifreze mesajul:*

MIRACLE

algoritmul utilizat fiind cifrul lui Cezar, cheia de cifrare $k = 3$.

Răspuns: PLUDFOH.

Exerciţiul 1.3.3 *Să se cifreze mesajul:*

CALCULATOR

algoritmul utilizat fiind cifrul lui Cezar, cheia de cifrare $k = 11$.

Răspuns: NLWNF WLEZC.

Exerciţiul 1.3.4 *Să se cifreze mesajul:*
ELECTRONIC MAIL
algoritmul utilizat fiind cifrul lui Cezar, cheia de cifrare $k = 5$.

Răspuns: JQJHY WTSNH RFNQ.

Exerciţiul 1.3.5 *Să se cifreze mesajul:*
DIGITAL SIGNATURE
algoritmul utilizat fiind cifrul lui Cezar, cheia de cifrare $k = 2$.

Răspuns: FKIKV CNUKI PCVWT G.

Exerciţiul 1.3.6 *Să se decripteze mesajul:*
IGQTI GYCUJ KPIVQ PXXXX
algoritmul utilizat fiind cifrul lui Cezar. Indicaţi cheia de cifrare.

Răspuns: GEORGE WASHINGTON, $k = 2$.

Exerciţiul 1.3.7 *Să se decripteze mesajul:*
UIPNB TKFGG FSTPO
algoritmul utilizat fiind cifrul lui Cezar. Indicaţi cheia de cifrare.

Răspuns: THOMAS JEFFERSON, $k = 1$.

Exerciţiul 1.3.8 *Să se decripteze mesajul:*
AREYY KYYOS VYUTM XGTZ
algoritmul utilizat fiind cifrul lui Cezar. Indicaţi cheia de cifrare.

Răspuns: ULYSSES SIMPSON GRANT, $k = 6$.

Exerciţiul 1.3.9 *Să se decripteze mesajul:*
CDTC JCON KPEQ NP
algoritmul utilizat fiind cifrul lui Cezar. Indicaţi cheia de cifrare.

Răspuns: ABRAHAM LINCOLN, $k = 2$.

Exerciţiul 1.3.10 *Să se decripteze mesajul:*
ECFDEPO ALCEJ
algoritmul utilizat fiind cifrul lui Cezar. Indicaţi cheia de cifrare.

Răspuns: TRUSTED PARTY, $k = 11$.

Exerciţiul 1.3.11 *Să se cifreze mesajul:*
EXAMEN CRIPTOGRAFIE
algoritmul utilizat fiind cifrul lui Cezar, cheia de cifrare $k = 3$.

Răspuns: HADPH QFULS WRJUD ILH.

Exerciţiul 1.3.12 *Să se decripteze mesajul:*
HADPH QFULS WRJUD ILH
algoritmul utilizat fiind cifrul lui Cezar. Indicaţi cheia de cifrare.

Răspuns: EXAMEN CRIPTOGRAFIE, $k = 3$.

Exerciţiul 1.3.13 *Să se cifreze mesajul:*
KANSAS CITY
algoritmul utilizat fiind cifrul lui Cezar, cheia de cifrare $k = 4$.

Răspuns: OERWE WGMXC.

Exerciţiul 1.3.14 *Să se decripteze mesajul:*
OERWE WGMXC
algoritmul utilizat fiind cifrul lui Cezar. Indicaţi cheia de cifrare.

Răspuns: KANSAS CITY, $k = 4$.

Capitolul 2

Metoda substituţiei

2.1 Breviar teoretic

Operaţia de cifrare se bazează pe o *corespondenţă* biunivocă între *alfabetul clar* şi *alfabetul cifrat*. Se presupune că alfabetul clar este format din cele 26 de litere (în limba română fără diacritice) plus *delimitatorul de cuvânt* spaţiul. Alfabetul cifrat poate fi format din aceeleaşi caractere sau doar din cele 26 de litere (ale limbii române) caz în care spaţiul se va înlocui cu cea mai puţin frecventă literă (Q) sau se va ignora pur şi simplu. În continuare, delimitatorul de cuvânt este înlocuit cu litera Q.

Corespondenţa dintre cele două alfabete poate fi:

- aleatoare;

- pseudoaleatoare: plecând de la o parolă se construieşte alfabetul cifrat.

Întrucât în cazul corespondenţei aleatoare lucrurile sunt cât se poate de clare, vom prezenta pe scurt o metodă de construcţie a corespondenţei în cel de-al doilea caz. Pornind de la o parolă, alfabetul cifrat este construit după următorul algoritm:

- se scriu, o singură dată, în ordinea apariţiei, literele din parolă;

- se scriu literele alfabetului care nu apar în parolă.

Corespondenţa între cele două alfabete se realizează după regula alfabet în alfabet după o permutare fixă σ (aceasta poate fi chiar permutarea identică iar la descifrare se aplică aceelaşi procedeu dar cu inversa permutării σ).

În funcţie de forma permutării substituţia se numeşte:

- *directă* (alfabetul cifrat are acelaşi sens lexicografic cu alfabetul clar, sunt în total 26 astfel de substituţii). Exemplu de substituţie directă:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F

- *inversă* (alfabetul cifrat are sens invers lexicografic cu alfabetul clar, sunt în total 26 de astfel de substituţii). Exemplu de substituţie inversă:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
U	T	S	R	Q	P	O	N	M	L	K	J	I

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
H	G	F	E	D	C	B	A	Z	Y	X	W	V

Reamintim aici trei exemple celebre (vechile coduri ebraice) de substituţii reciproce (dacă litera $\mathcal{X}$ se substituie cu litera $\mathcal{Y}$ atunci $\mathcal{Y}$ se va substitui cu $\mathcal{X}$) şi anume:

- *atbash* (prima jumătate a literelor alfabetului se mapează în cea de-a două jumătate în ordine invers lexicografică):

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Z	Y	X	W	V	U	T	S	R	Q	P	O	N

- *albam* (prima jumătate a literelor alfabetului se mapează în cea de-a două jumătate în ordine lexicografică):

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z

- *atbah*:

A	B	C	D	J	K	L	M	E	S	T	U	V
I	H	G	F	R	Q	P	O	N	Z	Y	X	W

În cele ce urmează vom presupune faptul că substituţia este directă dacă nu este specificat altfel.

Definiţia 2.1 *Un* **cifru de substituţie liniar** *de la* $\mathbf{Z}_m$ *la* $\mathbf{Z}_m$ *(*m *fiind numărul de caractere al alfabetului sursă) poate fi descris prin funcţia* $f : \mathbf{Z}_m \to \mathbf{Z}_m$ *definită prin* $f(x) = \alpha x + \beta$ *cu* $\gcd(\alpha, m) = 1$, *funcţia de descifrare fiind* $f^{-1}(x) = \alpha^{-1}(x - \beta)$. *Cheia de cifrare o formează numerele* α *şi* β.

Observaţia 2.1 *Cifrul de substituţie are proprietatea de confuzie (ascunderea legăturii dintre textul clar şi textul cifrat).*

2.2 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 2.2.1 *Să se construiască alfabetul de cifrare cu ajutorul parolei*

TESTARESISTEM

iar apoi să se cifreze mesajul IN CRIPTOGRAFIE NICI O REGULA NU ESTE ABSOLUTA. Permutarea care realizează corespondenţa este:

0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
25	*24*	*23*	*22*	*21*	*20*	*19*	*18*	*17*	*16*	*15*	*14*	*13*

13	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*	*21*	*22*	*23*	*24*	*25*
12	*11*	*10*	*9*	*8*	*7*	*6*	*5*	*4*	*3*	*2*	*1*	*0*

Rezolvare:

Corepondenţa dintre alfabetul clar şi alfabetul de cifrare (înainte de realizarea permutării) este:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
T	E	S	A	R	I	M	B	C	D	F	G	H

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
J	K	L	N	O	P	Q	U	V	W	X	Y	Z

Corepondenţa dintre alfabetul clar şi alfabetul de cifrare după realizarea permutării este:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Z	Y	X	W	V	U	Q	P	O	N	L	K	J

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
H	G	F	D	C	B	M	I	R	A	S	E	T

Mesajul clar se procesează astfel încât spaţiul este înlocuit cu cea mai puţin frecventă literă:

$$INQCRIPTOGRAFIEQNICIQOQREGULAQNUQESTEQABSOLUTA.$$

Mesajul cifrat va fi:
OHDXC OFMGQ CZUOV DHOXO DGDCV QIKZD HIDVB MVDZY BGKIM Z.

Exerciţiul 2.2.2 *Să se descifreze mesajul:*
DOJMD OVPGF OMATN BXXXX
algoritmul utilizat fiind o substituţie simplă determinată de cuvântul cheie PASSWORD.

Rezolvare:

Corespondenţa dintre alfabetul clar şi alfabetul de cifrare este:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
P	A	S	W	O	R	D	B	C	E	F	G	H

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
I	J	K	L	M	N	Q	T	U	V	X	Y	Z

Mesajul clar devine (dupa o regrupare a literelor) GEORGE WALKER BUSH. Se observă că de această dată nu s-a mai folosit Q pe post de delimitator de cuvânt.

2.3 Exerciţii propuse

Exerciţiul 2.3.1 *Dezvoltaţi o aplicaţie care să simuleze execuţia funcţiilor de cifrare/descifrare corespunzătoare metodei substituţiei.*

Exerciţiul 2.3.2 *Dezvoltaţi o aplicaţie care să decripteze, prin metoda frecvenţei, mesajele cifrate prin metoda substituţiei.*

Exerciţiul 2.3.3 *Dezvoltaţi o aplicaţie care să decripteze, prin metoda atacului cu text clar cunoscut, mesajele cifrate prin metoda substituţiei.*

Exerciţiul 2.3.4 *Să se cifreze mesajul:*
WEB DESIGN
algoritmul utilizat fiind o substituţie simplă determinată de cuvântul cheie BROWSER.

Răspuns: VSRWS PDAJ.

Exerciţiul 2.3.5 *Să se cifreze mesajul:*
PUBLIC KEY
algoritmul utilizat fiind o substituţie simplă determinată de cuvântul cheie ASYMMETRIC.

Răspuns: KQSFC YDEX.

Exerciţiul 2.3.6 *Să se descifreze mesajul:*
ONCJB DFJPT DCJKN KKQTV TDSXXX
algoritmul utilizat fiind o substituţie simplă determinată de cuvântul cheie CRIPTOGRAFIE.

Răspuns: FRANKLIN DELANO ROOSEVELT.

Exerciţiul 2.3.7 *Să se descifreze mesajul:*
EKBJO DSZAT NCGPF TJJTP YXXXX
algoritmul utilizat fiind o substituţie simplă determinată de cuvântul cheie CRIPTO.

Răspuns: JOHN FITZGERALD KENNEDY.

Exerciţiul 2.3.8 *Demonstraţi că metoda de cifrare prin substituţie este un sistem închis.*

Exerciţiul 2.3.9 *Să se cifreze mesajul:*
PRIVATE KEY
algoritmul utilizat fiind o substituţie simplă determinată de cuvântul cheie BUCURESTI.

Răspuns: LNAVB PEFEY.

Exerciţiul 2.3.10 *Să se descifreze mesajul:*
LNAVB PEFEY
algoritmul utilizat fiind o substituţie simplă determinată de cuvântul cheie BUCURESTI.

Răspuns: PRIVATE KEY.

Exerciţiul 2.3.11 *Să se cifreze mesajul:*
ASSYMETRIC ENCRYPTION
algoritmul utilizat fiind o substituţie simplă determinată de cuvântul cheie BRASOV.

Exerciţiul 2.3.12 *Să se descifreze mesajul:*
BPPYI OQNEA OJANY LQEKJ
algoritmul utilizat fiind o substituţie simplă determinată de cuvântul cheie BRASOV.

Răspuns: ASSYMETRIC ENCRYPTION.

Capitolul 3

Sistemul de cifrare Playfair

3.1 Breviar teoretic

Sistemul *Playfair*, propus în anul 1854 de Charles Wheatstone dar promovat pentru utilizare de Lordul Playfair, este unul dintre cele mai cunoscute sisteme de cifrare digrafice (transformă un grup de 2 litere într-un grup de alte două litere). Acest sistem de cifrare este foarte simplu de folosit şi mult mai sigur decât sistemele de substituţie monoalfabetice.

Descriem în continuare modul de utilizare în cazul alfabetului latin compus din 26 litere. Literele alfabetului $A - Z$ sunt trecute într-un careu de 5×5 (litera I fiind asimilată literei J). Textul clar este preprocesat astfel încât acesta să fie compatibil cu matricea de cifrare: delimitatorul de cuvânt este ignorat sau este înlocuit cu cea mai puţin frecventă literă, litera I este asimilată cu litera J, şi dacă este cazul, se adaugă o literă la text pentru a avea un număr par de digrame.

Regula de cifrare este următoarea:

i) Dacă digrama care se doreşte cifrată nu are literele pe aceeaşi linie sau coloană, atunci regula de cifrare este *regula dreptunghiului*, traseul fiind pe verticală de la cea de-a doua literă a digramei către prima literă. Sau, altfel spus, prima litera a perechii cifrate este aceea care se gaseste pe aceeasi linie cu prima litera a perechii în clar.

ii) Dacă digrama ce se doreşte cifrată are literele pe aceeaşi linie, atunci se aplică regula: *cifrează la dreapta, descifrează la stânga.*

iii) Dacă digrama ce se doreşte cifrată are literele pe aceeiaşi coloană, atunci se aplică regula: *cifrează în jos, descifrează în sus.*

Observaţia 3.1 *Dacă o digramă apare în textul clar în ordine inversă atunci acelaşi lucru se va întâmpla şi în textul cifrat.*

Observaţia 3.2 *Algoritmul Playfair nu are regulă pentru cifrarea literelor duble: digramele ce conţin două litere identice sunt sparte prin introducerea artificială a unei alte litere.*

Observaţia 3.3 *Algoritmul Playfair apare ca o extindere, în sensul reducerii numărului de tabele rectangulare folosite (de la două la unul), al cifrului cu* 2 *tabele.*

Metoda cea mai freventă de atac a acestui tip de cifru constă în analiza frecvenţei digramelor de text clar combinată cu metoda comparaţiei patternurilor din textul cifrat cu patternuri din dicţionar.

3.2 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 3.2.1 *Să se construiască matricea de cifrare Playfair cu ajutorul parolei*

$$CRIPTOGRAFIE$$

iar apoi să se cifreze mesajul SI IN CRIPTOGRAFIE TACEREA ESTE AUR.

Rezolvare: Matricea Playfair se obţine trecând literele din parolă o singură dată în careul de 5×5 iar apoi celelalte litere ale alfabetului în ordine lexicografică:

C	R	I/J	P	T
O	G	A	F	E
B	D	H	K	L
M	N	Q	S	U
V	W	X	Y	Z

Mesajul este preprocesat, prin introducerea literei Q ca delimitator de cuvânt şi la finalul mesajului (pentru ca acesta să aibă lungime pară):

$$SIQINQCRIPTOGRAFIEQTACEREAQESTEQAURQ.$$

Exemplificăm pentru fiecare caz câte o digramă:

- SI - conform regulii de cifrare se formează dreptunghiul cu colţurile I şi S parcurs în sensul IQSP. Textul cifrat îl constituie digrama formată din colţurile care nu apar în textul clar, luate conform ordinii de parcurgere: QP.
- QI - întrucât literele sunt pe aceeaşi coloană se aplică regula cifrează în jos, descifrează în sus, obţinându-se digrama XA (X este litera situată sub Q şi A este litera situată sub I).
- NQ - întrucât literele sunt situate pe aceeaşi linie se aplică regula cifrează la dreapta, descifrează la stânga, obţinându-se digrama QS(Q este in dreapta lui N şi S este în dreapta lui Q).

În continuare, respectând regulile de cifrare Playfair mesajul cifrat devine:
QPXAQ SRIPT CEDGF ETAUI OIGTO FUAUP AUEQI NXXXX.

Exerciţiul 3.2.2 *Să se descifreze mesajul:*
UFRIL ERGPC RQAW
Algoritmul utilizat este cifrul lui Playfair, parola utilizată fiind CRIPTOGRAFIE.

Rezolvare: Matricea Playfair este aceeaşi din exerciţiul anterior, fiind formată pornind de la aceeaşi parolă.

Exemplificăm pentru fiecare caz operaţia de descifrare pe câte o digramă:

- UF - conform regulii de descifrare, se formează dreptunghiul cu colţurile U şi F. Textul clar îl constituie celelalte 2 colţuri, primul caracter al textului clar fiind cel care se găseşte pe aceeaşi linie cu primul caracter în clar din digramă. Se obţine SE.
- RI - întrucât literele sunt situate pe aceeaşi linie se aplică regula cifrează la dreapta, descifrează la stânga, obţinându-se digrama CR(R este in stânga lui R şi R este în stânga lui I).
- LE - întrucât literele sunt pe aceeaşi coloană se aplică regula cifrează în jos, descifrează în sus, obţinându-se digrama ET (E este litera situată deasupra lui L şi T este litera situată deasupra lui E).

  În continuare, respectând regulile de descifrare Playfair mesajul cifrat devine:

  SECRET WRITING.

3.3 Exerciţii propuse

Exerciţiul 3.3.1 *Scrieţi o aplicaţie care să implementeze următoarele funcţii:*
- cifrarea unui text cu ajutorul algoritmului Playfair;
- descifrarea unui text cifrat cu algoritmul Playfair;
Verificaţi rezultatul pe datele de intrare din exerciţiile următoare.

Exerciţiul 3.3.2 *Să se cifreze mesajul:*
SECURITY IS CHANGING FIELD
Algoritmul utilizat este cifrul lui Playfair, parola utilizată fiind CHANNEL.

Răspuns: UAEQQ KYNMQ HANEL PEFLO CGMA.

Exerciţiul 3.3.3 *Să se cifreze mesajul:*
AUTONOMOUS ATTACK AGENTS
Algoritmul utilizat este cifrul lui Playfair, parola utilizată fiind MALICIOUS.

Răspuns: UFNDV EOESB CPZQL MFCHF PNGL.

Exerciţiul 3.3.4 *Să se cifreze mesajul:*
VALUABLE SOURCE OF REFERENCE
Algoritmul utilizat este cifrul lui Playfair, parola utilizată fiind INSTITUTE.

Răspuns: WERDB CFDNP DZDAM GMDMF MDTABV.

Exerciţiul 3.3.5 *Să se cifreze mesajul:*
THE CIRCLE
Algoritmul utilizat este cifrul lui Playfair, parola utilizată fiind ALBUM.

Răspuns: POFDKQDAKB.

Exerciţiul 3.3.6 *Să se descifreze mesajul:*
KDDPM RUBVR PTSFU HPEBV
Algoritmul utilizat este cifrul lui Playfair, parola utilizată fiind PASSWORD.

Răspuns: GERALD RUDOLPH FORD.

Exerciţiul 3.3.7 *Să se descifreze mesajul:*
KDPEK DOSTF RDRXB NBBBB
Algoritmul utilizat este cifrul lui Playfair, parola utilizată fiind PASSWORD.

Răspuns: GEORGE WALKER BUSH.

Exerciţiul 3.3.8 *Să se descifreze mesajul:*
KDPEK DKBDC RDQOP MTKDC XPNS
Algoritmul utilizat este cifrul lui Playfair, parola utilizată fiind PASSWORD.

Răspuns: GEORGE HERBERT WALKER BUSH.

Exerciţiul 3.3.9 *Să se descifreze mesajul:*
GBQY YAAO RNBM
Algoritmul utilizat este cifrul lui Playfair, parola utilizată fiind TEST.

Răspuns: HARRY TRUMAN.

Exerciţiul 3.3.10 *Să se descifreze mesajul:*
PIGOY CLETY AEYLQ VSFWN
Algoritmul utilizat este cifrul lui Playfair, parola utilizată fiind CRYPTOOL.

Răspuns: THE ART OF PROGRAMMING.

Exerciţiul 3.3.11 *Să se cifreze mesajul:*
SINAIA
Algoritmul utilizat este cifrul lui Playfair, parola utilizată fiind SECRET KEY.

Răspuns: RFOYHB.

Exerciţiul 3.3.12 *Să se descifreze mesajul:*
RFOYHB
Algoritmul utilizat este cifrul lui Playfair, parola utilizată fiind SECRET KEY.

Răspuns: SINAIA.

Exerciţiul 3.3.13 *Să se cifreze mesajul:*
PREDEAL
Algoritmul utilizat este cifrul lui Playfair, parola utilizată fiind PASSWORD.

Răspuns: RFRBD ONU.

Exerciţiul 3.3.14 *Să se descifreze mesajul:*
RFRBD ONU
Algoritmul utilizat este cifrul lui Playfair, parola utilizată fiind PASSWORD.

Răspuns: PREDEAL.

Capitolul 4

Sistemul de cifrare Hill

4.1 Breviar teoretic

Sistemul de cifrare Hill este o metodă de substituţie poligrafică bazată pe calcule efectuate în algebra mod p.

În faza de preprocesare delimitatorul de spaţiu este ignorat sau înlocuit cu caracterul cel mai puţin frecvent din limba în care este textul clar (în limba română Q).

Algoritmul procesează un bloc de date $\mathbf{M}$ de n caractere (litere), cheia de cifrare fiind reprezentată de o matrice $\mathbf{K}$ de dimensiune $n \times n$, inversabilă mod p.

Există două subclase ale algoritmului Hill pentru care regulile de cifrare diferă prin ordinea în care se efectuează înmulţirile: o prima subclasa are ca regulă de cifrare operaţia de înmulţire $\mathbf{C} = \mathbf{MK}$ cu descifrarea $\mathbf{M} = \mathbf{CK}^{-1}$ iar a doua subclasa foloseşte ca regulă de cifrare înmulţirea $\mathbf{C} = \mathbf{KM}$ având descifrarea corespunzătoare $\mathbf{M} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{C}$.

Observaţia 4.1 *Dacă matricea* $\mathbf{K}$ *este simetrică (matricea* $\mathbf{K}$ *şi transpusa ei sunt egale) atunci regulile de cifrare pentru cele două subclase sunt echivalente.*

Observaţia 4.2 *În cazul alfabetului latin* $p = 26$*, cheia de cifrare* $\mathbf{K}$ *trebuie să fie o matrice inversabilă mod* 26*.*

4.2 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 4.2.1 *Să se cifreze mesajul:*

BLAZE OF GLORY.

Algoritmul utilizat este cifrul lui Hill (2×2*), cheia de cifrare fiind matricea:*

$$\begin{pmatrix} J & B \\ V & I \end{pmatrix}.$$

Rezolvare: Prin înlocuirea literelor din cheie cu poziţiile corespunzătoare din alfabet (A - 0, B - 1, etc.) se obţine:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 21 & 8 \end{pmatrix}.$$

Textul clar se sparge în blocuri de 2 caractere, care se cifrează pe rând. De exemplu, BL corespunde matricii

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Digrama se cifrează în:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 21 & 8 \end{pmatrix} \bmod 26 = \begin{pmatrix} 6 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G & L \end{pmatrix}.$$

Deci, BL se cifrează în GL. Se continuă în mod analog. În final se obţine:
GLFSS MPBDT HB.

Exerciţiul 4.2.2 *Să se descifreze mesajul:*
JESHB JJAZM TANCF VBJXX.
Algoritmul utilizat este cifrul lui Hill (2×2), cheia de cifrare fiind matricea:

$$\begin{pmatrix} H & U \\ D & F \end{pmatrix}.$$

Rezolvare: Prin înlocuirea literelor din cheie cu poziţiile corespunzătoare din alfabet (A - 0, B - 1, etc.) se obţine:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 7 & 20 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Se determină inversa matricei K mod 26 :

$$\mathbf{K}^{-1} = det(\mathbf{K})^{-1}\mathbf{K}^{*} \bmod 26, unde$$

$$det(\mathbf{K})^{-1} \bmod 26 = (7 \cdot 5 - 3 \cdot 20)^{-1} \bmod 26 = (-25)^{-1} \bmod 26 = 1$$

şi

$$\mathbf{K}^{*} = \begin{pmatrix} 5 & -20 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \bmod 26 = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 23 & 7 \end{pmatrix}.$$

S-a obţinut:

$$\mathbf{K}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 23 & 7 \end{pmatrix}.$$

Pentru descifrarea perechii JE, se determină matricea linie care conţine valorile corespunzătoare din alfabet:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} J & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Prin înmulţire cu cheia de descifrare se obţine:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 23 & 7 \end{pmatrix} \bmod 26 = \begin{pmatrix} 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H & E \end{pmatrix}.$$

Deci, JE se descifrează în HE.

Se procedează în mod analog pentru toate perechile de câte 2 caractere cifrate: SH se descifrează în RB, BJ în ER, etc.

În final, după efectuarea tuturor calculelor şi regruparea literelor, se obţine: HERBERT CLARK HOOVER.

4.3 Exerciţii propuse

Exerciţiul 4.3.1 *Scrieţi o aplicaţie care să implementeze funcţiile de cifrare şi descifrare, specifice algoritmului Hill cu $p = 26$.*

Verificaţi rezultatul pe datele de intrare din exerciţiile următoare.

Exerciţiul 4.3.2 *Să se cifreze mesajul:*

COMPLETE AND PROPER PACKAGE.

Algoritmul utilizat este cifrul lui Hill, cheia de cifrare fiind matricea:

$$\begin{pmatrix} N & T \\ C & R \end{pmatrix}.$$

Răspuns: GIZTL MLCNN MBTML UMDMI AUYC.

Exerciţiul 4.3.3 *Să se cifreze mesajul:*

ESOTERIC TOPIC OF RESEARCH.

Algoritmul utilizat este cifrul lui Hill, cheia de cifrare fiind matricea:

$$\begin{pmatrix} B & Y \\ G & P \end{pmatrix}.$$

Răspuns: ICYXC NUOZQ LMIYD LICES DWHM.

Exerciţiul 4.3.4 *Să se cifreze mesajul:*
BENJAMIN HARRISON.
Algoritmul utilizat este cifrul lui Hill (3×3), cheia de cifrare fiind matricea:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \\ C & A & B \end{pmatrix}.$$

Răpuns: EJPYJ EBIXZ IRUSE ANA.

Exerciţiul 4.3.5 *Să se descifreze mesajul:*
ZKNAW NIOZO BRXSW QNNXX.
Algoritmul utilizat este cifrul lui Hill (2×2), cheia de cifrare fiind matricea:

$$\begin{pmatrix} B & E \\ V & H \end{pmatrix}.$$

Răpuns: RONALD WILSON REAGAN.

Exerciţiul 4.3.6 *Să se descifreze mesajul:*
ZPXUB IRHNU VXWSP DJTNN.
Algoritmul utilizat este cifrul lui Hill (2×2), cheia de cifrare fiind matricea:

$$\begin{pmatrix} J & D \\ X & C \end{pmatrix}.$$

Răpuns: RICHARD MILHOUS NIXON.

Exerciţiul 4.3.7 *Să se descifreze mesajul:*
EJPYJ EBIXZ IRUSE ANA.
Algoritmul utilizat la cifrare este cifrul lui Hill (3×3), cheia de cifrare fiind matricea:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \\ C & A & B \end{pmatrix}.$$

Răpuns: BENJAMIN HARRISON.

Exerciţiul 4.3.8 *Să se descifreze mesajul:*
NYNAF JUWBL ZXANM NGLEI JQWF
Algoritmul utilizat este cifrul lui Hill, cheia de cifrare fiind matricea:

$$\begin{pmatrix} J & S \\ W & V \end{pmatrix}.$$

Răspuns: FINAL ROUND TRANSFORMATION.

Exerciţiul 4.3.9 *Să se descifreze mesajul:*
NKTNM QZQEY WVDIA CIGMG.
Algoritmul utilizat este cifrul lui Hill, cheia de cifrare fiind matricea:

$$\begin{pmatrix} D & I \\ K & B \end{pmatrix}.$$

Răspuns: RETRIEVE YOUR BAGGAGE.

Exerciţiul 4.3.10 *Demonstraţi că algoritmul lui Hill este un algoritm de cifrare închis.*

Exerciţiul 4.3.11 *Să se cifreze mesajul:*
OPERATIONAL RESEARCH.
Algoritmul utilizat este cifrul lui Hill, cheia de cifrare fiind matricea:

$$\begin{pmatrix} F & H \\ H & I \end{pmatrix}.$$

Răspuns: TKJID WIMNN SFQQU CVFLD.

Exerciţiul 4.3.12 *Să se descifreze mesajul:*
TKJID WIMNN SFQQU CVFLD.
Algoritmul utilizat este cifrul lui Hill, cheia de cifrare fiind matricea:

$$\begin{pmatrix} F & H \\ H & I \end{pmatrix}.$$

Răspuns: OPERATIONAL RESEARCH.

Exerciţiul 4.3.13 *Să se cifreze mesajul:*
CRYPTOLOGY.
Algoritmul utilizat este cifrul lui Hill, cheia de cifrare fiind matricea:

$$\begin{pmatrix} T & E \\ S & T \end{pmatrix}.$$

Răspuns: CVWPB KFWCS.

Exerciţiul 4.3.14 *Să se cifreze mesajul:*
NAVAJO CODE.
Algoritmul utilizat este cifrul lui Hill, cheia de cifrare fiind matricea:

$$\begin{pmatrix} L & Q \\ L & J \end{pmatrix}.$$

Răspuns: NNXXL RMSTR.

Exerciţiul 4.3.15 *Să se descifreze mesajul:*
CVWPB KFWCS.
Algoritmul utilizat este cifrul lui Hill, cheia de cifrare fiind matricea:

$$\begin{pmatrix} T & E \\ S & T \end{pmatrix}.$$

Răspuns: CRYPTOLOGY.

Exerciţiul 4.3.16 *Să se descifreze mesajul:*
NNXXL RMSTR.
Algoritmul utilizat este cifrul lui Hill, cheia de cifrare fiind matricea:

$$\begin{pmatrix} L & Q \\ L & J \end{pmatrix}.$$

Răspuns: NAVAJO CODE.

Capitolul 5

Sisteme de cifrare polialfabetice

5.1 Breviar teoretic

Un sistem de cifrare de tip substituţie polialfabetică este generalizarea sistemului de cifrare de substituţie monoalfabetică, fiind compus dintr-un număr N de alfabete. Fiecare alfabet reprezintă o permutare (stabilită în funcţie de parolă) a alfabetului de intrare. Algoritmul de cifrare constă în substituirea celei de a $i-$a litere m din textul clar cu litera corespunzătoare din cel de al $i \bmod N$ alfabet.

Sistemele polialfabetice sunt uşor de identificat prin aplicarea analizei frecvenţelor de apatiţie a literelor în secvenţe decimate din textul cifrat.

Un exemplu de sistem polialfabetic este algoritmul lui Vigenère în care parola $k_1, \ldots, k_n$ este folosită periodic pentru a transforma caracterul $m_j \in \{A, \ldots, Z\}$ din textul clar după formula: $c_j = (m_j + k_{j \bmod n}) \bmod 26$. Pentru descifrare se foloseşte formula: $m_j = (c_j - k_{j \bmod n}) \bmod 26$.

Atacul sistemelor polialfabetice este similar cu atacul a N sisteme de substituţie monoalfabetică. Deci, o procedură de *tip divide et impera* are o complexitate de $O(N)$. Procedura este descrisă în continuare:

Intrare: Textul cifrat de lungime M suficient de mare.

Ieşire: Textul clar corespunzător sistemului de cifrare polialfabetic.

PASUL 1. Determină numărul de alfabete N.

PASUL 2. Pentru $j = 0$ to 4 execută:

pentru $i = 1$ to $N - j$ execută:

aplică procedura de reconstrucţie parţială (pe baza frecvenţelor $(j+1)-$gramelor) a alfabetelor $i, \ldots, i + j$.

PASUL 3. Conform celor N alfabete reconstruieşte textul clar.

Observaţia 5.1 *Procedura descrisă mai sus are ca parametru implicit de analiză numărul maxim de legături* 4 : *astfel,* $1-$*gramele sunt caracterele,* $2-$*gramele sunt dubleţii, etc.*

5.2 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 5.2.1 *Să se cifreze mesajul WINDS OF CHANGE cu ajutorul algoritmului Vigenère, parola fiind FUTURE.*

Rezolvare: Aplicând cifrarea pentru fiecare caracter al textului clar, ţinând cont de poziţia acestora în alfabet, se obţine:

$\mathbf{j}$	$\mathbf{m_j}$	$\mathbf{k_{j(\mathbf{mod}\,6)}}$	$\mathbf{c_j} = (\mathbf{m_j} + \mathbf{k_{j(\mathbf{mod}\,6)}})(\mathbf{mod}\,\mathbf{26})$
1	$W-22$	$F-5$	$(22+5)(mod\,26) = 1-B$
2	$I-8$	$U-20$	$(8+20)(mod\,26) = 2-C$
3	$N-13$	$T-19$	$(13+19)(mod\,26) = 6-G$
4	$D-3$	$U-20$	$(3+20)(mod\,26) = 23-X$
5	$S-18$	$R-17$	$(18+17)(mod\,26) = 9-J$
6	$O-14$	$E-4$	$(14+4)(mod\,26) = 18-S$
7	$F-5$	$F-5$	$(5+5)(mod\,26) = 10-K$
8	$C-2$	$U-20$	$(2+20)(mod\,26) = 22-W$
9	$H-7$	$T-19$	$(7+19)(mod\,26) = 0-A$
10	$A-0$	$U-20$	$(0+20)(mod\,26) = 20-U$
11	$N-13$	$R-17$	$(13+17)(mod\,26) = 4-E$
12	$G-6$	$E-4$	$(6+4)(mod\,26) = 10-K$
13	$E-4$	$F-5$	$(4+5)(mod\,26) = 9-J$

Rezultă textul cifrat: BCGXJ SKWAU EKJ.

Exerciţiul 5.2.2 *Să se descifreze mesajul IHWGZ CIHGO GKAJV OI ştiind că a fost cifrat cu ajutorul algoritmului Vigenère, parola fiind PASSWORD.*

Rezolvare: Aplicând descifrarea pentru fiecare caracter al textului cifrat, ţinând cont de poziţia acestora în alfabet, se obţine:

$\mathbf{j}$	$\mathbf{c_j}$	$\mathbf{k_{j(mod\,8)}}$	$\mathbf{m_j = (c_j - k_{j(mod\,8)})(mod\,26)}$
1	$I-8$	$P-15$	$(8-15)(mod\,26) = 19-T$
2	$H-7$	$A-0$	$(7-0)(mod\,26) = 7-H$
3	$W-22$	$S-18$	$(22-18)(mod\,26) = 4-E$
4	$G-6$	$S-18$	$(6-18)(mod\,26) = 14-O$
5	$Z-25$	$W-22$	$(25-22)(mod\,26) = 3-D$
6	$C-2$	$0-14$	$(2-14)(mod\,26) = 14-O$
7	$I-8$	$R-17$	$(8-17)(mod\,26) = 17-R$
8	$H-7$	$D-3$	$(7-3)(mod\,26) = 4-E$
9	$G-6$	$P-15$	$(6-15)(mod\,26) = 17-R$
10	$O-14$	$A-0$	$(14-0)(mod\,26) = 14-O$
11	$G-6$	$S-18$	$(6-18)(mod\,26) = 14-O$
12	$K-10$	$S-18$	$(10-18)(mod\,26) = 18-S$
13	$A-0$	$W-22$	$(0-22)(mod\,26) = 4-E$
14	$J-9$	$0-14$	$(9-14)(mod\,26) = 21-V$
15	$V-21$	$R-17$	$(21-17)(mod\,26) = 4-E$
16	$O-14$	$D-3$	$(14-3)(mod\,26) = 11-L$
17	$I-8$	$P-15$	$(8-15)(mod\,26) = 19-T$

Dupa gruparea literelor rezultă: THEODORE ROOSEVELT.

5.3 Exerciţii propuse

Exerciţiul 5.3.1 *Să se cifreze mesajul OPTIMISTIC cu ajutorul algoritmului Vigenère, folosind parola GOODDAYS.*

Răspuns: UDHLPIQLOQ.

Exerciţiul 5.3.2 *Să se cifreze mesajul THANK YOU cu ajutorul algoritmului Vigenère, folosind parola POLITE.*

Răspuns: IVLVD CDI.

Exerciţiul 5.3.3 *Să se cifreze mesajul GOING BACK IN TIME cu ajutorul algoritmului Vigenère, folosind parola MEMORY.*

Răspuns: SSUBX ZMGW WE RUQQ.

Exerciţiul 5.3.4 *Să se cifreze mesajul FAST CARS cu ajutorul algoritmului Vigenère, folosind parola RADAR.*

Răspuns: WAVT TRRV.

Exerciţiul 5.3.5 *Să se cifreze mesajul SUITCASE cu ajutorul algoritmului Vigenère, folosind parola TRIP.*

Răspuns: LLQIVRAT.

Exerciţiul 5.3.6 *Să se descifreze mesajul WIUXGHG WXGALFYK ştiind că a fost cifrat cu ajutorul algoritmului Vigenère, parola fiind TEST.*

Răspuns: DECENDO DECISMUS.

Exerciţiul 5.3.7 *Să se descifreze mesajul UAEGQD OOGAT ştiind că a fost cifrat cu ajutorul algoritmului Vigenère, parola fiind TANGO.*

Răspuns: BARACK OBAMA.

Exerciţiul 5.3.8 *Să se descifreze mesajul XVLGM OXLDC ştiind că a fost cifrat cu ajutorul algoritmului Vigenère, parola fiind BRIDE.*

Răspuns: WEDDING DAY.

Exerciţiul 5.3.9 *Să se descifreze mesajul IHZSV SKIEE CHWPU ACSH ştiind că a fost cifrat cu ajutorul algoritmului Vigenère, parola fiind PARADOX.*

Răspuns: THIS SENTENCE IS FALSE.

Exerciţiul 5.3.10 *Să se descifreze mesajul MYEYS VOJFQ ZAVLL N ştiind că a fost cifrat cu ajutorul algoritmului Vigenère, parola fiind TRANSILVANIA.*

Răspuns: THE LAND OF DRACULA.

Exerciţiul 5.3.11 *Să se cifreze mesajul OPERATIONAL RESEARCH cu ajutorul algoritmului Vigenère, folosind parola PASSWORD.*

Răspuns: DPWJW HZRCA DJAGV DGCZ.

Exerciţiul 5.3.12 *Să se descifreze mesajul DPWJW HZRCA DJAGV DGCZ ştiind că a fost cifrat cu ajutorul algoritmului Vigenère, parola fiind PASSWORD.*

Răspuns: OPERATIONAL RESEARCH.

Exerciţiul 5.3.13 *Să se cifreze mesajul CRIPTOGRAFIE cu ajutorul algoritmului Vigenère, folosind parola TEST.*

Răspuns: VVAIM SYKTJ AX.

Exerciţiul 5.3.14 *Să se descifreze mesajul VVAI MSYK TJAX ştiind că a fost cifrat cu ajutorul algoritmului Vigenère, parola fiind TEST.*

Răspuns: CRIPTOGRAFIE.

Capitolul 6

Metoda transpoziţiei

6.1 Breviar teoretic

Metoda transpoziţiei asigură, în cadrul sistemelor criptografice, realizarea difuziei: împrăştierea proprietăţilor statistice ale textului clar în textul cifrat. Metoda transpoziţiei îmbracă mai multe forme: textul *este citit* într-o formă matriceală linie cu linie sau coloană cu coloană, *se permută* liniile şi/sau coloanele, rezultatul fiind apoi *scris* linie cu linie sau coloană cu coloană. Spre exemplu, în cazul transpoziţiei coloanelor, textul clar se citeşte, linie cu linie, într-o formă tabelară cu n coloane, acesta fiind scris pe coloane în funcţie de cheia de cifrare reprezentată de o permutare din σ_n.

Dacă dimensiunea textului clar nu este un multiplu de n atunci acesta se poate completa sau nu cu un caracter bine precizat. În faza de preprocesare delimitatorul de spaţiu este ignorat sau înlocuit cu caracterul cel mai puţin frecvent din limba în care este textul clar (în limba română Q).

6.2 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 6.2.1 *Să se cifreze prin metoda transpoziţiei* ($N = 12$), *pornind de la parola*

$$CRIPTOGRAFIE$$

mesajul SI IN CRIPTOGRAFIE TACEREA ESTE AUR.

Rezolvare: Vom construi secvenţa numerică de cifrare asociind fiecărei litere din parolă indicele din ordinea lexicografică: astfel literele din parolă, scrise în ordine lexicografică sunt:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	C	E	F	G	I	I	O	P	R	R	T

deci parola $CRIPTOGRAFIE$ produce permutarea: 2 10 6 9 12 8 5 11 1 4 7 3.

Textul clar este scris într-o tabelă cu 12 coloane:

2	10	6	9	12	8	5	11	1	4	7	3
S	I	Q	I	N	Q	C	R	I	P	T	O
G	R	A	F	I	E	Q	T	A	C	E	R
E	A	Q	E	S	T	E	Q	A	U	R	Q

Deoarece lungimea textului nu este divizibilă cu 12 vom completa ultimul rând cu o secvenţă cunoscută (în acest caz caracterul Q). Textul cifrat se obţine citind coloanele tabelei de cifrare în ordinea indicată de parola numerică: IAASG EORRQ PCUCQ EQAQT ERQET IFEIR ARTQN IS.

Descifrarea se va realiza în mod similar folosind permutarea inversă σ^{-1}.

Dacă dimensiunea transpoziţiei N este mai mică decât lungimea parolei atunci se vor reţine N caractere din parolă.

6.3 Exerciţii propuse

Exerciţiul 6.3.1 *Scrieţi un program care să implementeze funcţiile de cifrare/descifrare specifice metodei transpoziţiei coloanelor.*

Exerciţiul 6.3.2 *Să se cifreze mesajul:*
ELECTRIC HOTPLATE
printr-o transformare de tip transpoziţie cu ajutorul permutării $\sigma = (2, 1, 3)$.

Răspuns: LTCOL EECIH PTERQ TAQ.

Exerciţiul 6.3.3 *Să se cifreze mesajul:*
CERCETARI OPERATIONALE
printr-o transformare de tip transpoziţie cu ajutorul permutării $\sigma = (3, 1, 2)$.

Răspuns: EEROR IAQRT IPAOL QCCAQ ETNE.

Exerciţiul 6.3.4 *Să se cifreze mesajul CRIPTOGRAFIE prin metoda transpoziţiei utilizând permutarea* $\sigma = (4, 2, 1, 3)$. *Verificaţi rezultatul obţinut.*

Exerciţiul 6.3.5 *Să se descifreze mesajul:*
EORSE TOROE LHDEO VT
cifrat printr-o transformare de tip transpoziţie cu ajutorul permutării $\sigma = (2, 3, 1)$.

Răspuns: THEODORE ROOSEVELT.

Exerciţiul 6.3.6 *Să se descifreze mesajul:*
SFCME TAEAE NLR
cifrat printr-o transformare de tip transpoziţie cu ajutorul permutării $\sigma = (1, 2, 3)$.

Răspuns: STEFAN CEL MARE.

Exerciţiul 6.3.7 *Să se descifreze mesajul:*
HTZMA VEUII IAL
cifrat printr-o transformare de tip transpoziţie cu ajutorul permutării $\sigma = (2, 3, 1)$.

Răspuns: MIHAI VITEAZUL.

Exerciţiul 6.3.8 *Să se descifreze mesajul:*
NMTMA STEDI NEINO NT
cifrat printr-o transformare de tip transpoziţie cu ajutorul permutării $\sigma = (2, 3, 1)$.

Răspuns: SENTIMENT DOMINANT.

Exerciţiul 6.3.9 *Să se descifreze mesajul:*
TDDDR TEAAU EIASN RLCPR
cifrat printr-o transformare de tip transpoziţie cu ajutorul permutării $\sigma = (3, 1, 2)$.

Răspuns: STANDARDUL DE CRIPTARE.

Exerciţiul 6.3.10 *Demonstraţi că algoritmul de cifrare ce utilizează transpoziţia este un sistem închis.*

Exerciţiul 6.3.11 *Să se cifreze mesajul:*
CERCETARI OPERATIONALE
printr-o transformare de tip transpoziţie cu ajutorul permutării $\sigma = (2, 1, 3)$.

Răspuns: EERPAOLCC AORIARTIETNE.

Exerciţiul 6.3.12 *Să se descifreze mesajul:*
EERPAOLCC AORIARTIETNE
cifrat printr-o transformare de tip transpoziţie cu ajutorul permutării $\sigma = (2, 1, 3)$.

Răspuns: CERCETARI OPERATIONALE.

Exerciţiul 6.3.13 *Să se cifreze mesajul:*
OPERATIONAL RESEARCH
printr-o transformare de tip transpoziţie cu ajutorul permutării $\sigma = (2, 1, 4, 3)$.

Răspuns: PTASC OANER RORAE ILEH.

Exerciţiul 6.3.14 *Să se descifreze mesajul:*
PTASC OANER RORAE ILEH
cifrat printr-o transformare de tip transpoziţie cu ajutorul permutării $\sigma = (2, 1, 4, 3)$.

Răspuns: OPERATIONAL RESEARCH.

Capitolul 7

Sisteme mixte

7.1 Breviar teoretic

Sistemele mixte au la bază o cifrare succesivă a mesajului prin metoda substituţiei şi apoi prin metoda transpoziţiei sau invers.

Atacarea sistemul de cifrare se realizează de la ultima sa componentă către prima. Remarcăm faptul că substituţia simplă este comutativă cu operaţia de transpoziţie deci se poate oricând aborda mai întâi substituţia şi apoi transpoziţia. În cazul utilizării unui sistem polialfabetic, cu număr necunoscut de alfabete, recomandarea este ca după stabilirea, prin metode statistice, a numărului de alfabete, să se abordeze concomitent identificarea efectivă a alfabetelor şi al transpoziţiei utilizate. În cazul utilizării unui sistem poligrafic (tabele de cifrare) şi o transpoziţie este recomandabilă o tehnică de tip backtracking.

7.2 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 7.2.1 *Să se cifreze mesajul GEOMETRIC FIGURE cu ajutorul algoritmului lui Cezar ($k = 5$) şi al transpoziţiei $\sigma = (2, 1, 3)$.*

Rezolvare: Mai întâi textul este cifrat cu sistemul Cezar folosind cheia $k = 5$, deci corespondenţa dintre cele 2 alfabete devine:

text clar	A	B	C	D	E	F	G	H	I	...
text cifrat	F	G	H	I	J	K	L	M	N	...

Astfel se obţine: LJT RJY WNH KNL ZWJ. Apoi, textul obţinut se aşează într-o tabelă cu 3 coloane:

2	1	3
L	J	T
R	J	Y
W	N	H
K	N	L
Z	W	J

Textul cifrat se determină citind pe coloane în ordinea indicată de permutare (coloana din mijloc, apoi cea din stânga şi în final cea din dreapta): JJNNWLRW KZTYHLJ .

Exerciţiul 7.2.2 *Să se decripteze mesajul următor:*

DKVUR UTUBK WFCVG ETGOC XWVWC

OCVPQ VUVWG FGHTQ VKUUV KKNKC

RKCPQ OQFKC EWVG

ştiind că a fost cifrat cu ajutorul algoritmului lui Cezar ($k = 2$) şi supracifrat prin metoda transpoziţiei utilizând permutarea $(3, 2, 1)$.

Rezolvare: Cum substituţia şi transpoziţia sunt comutative, putem mai întâi decripta mesajul folosind Cezar cu cheia $k = 2$ şi apoi decripta prin metoda transpoziţiei.

Pentru decriptarea mesajului folosind metoda Cezar cu $k = 2$, fiecare caracter se înlocuieşte cu caracterul situat cu 2 poziţii mai înainte în alfabet:

text cifrat	A	B	C	D	E	F	G	H	I	...
text clar	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	...

După decriptare, textul devine: BITSP SRSZI UDATE CREMA VUTUA MATNO TSTUE DEFRO TISST IILIA PIANO MODIA CUTE .

Acesta reprezintă un text cifrat prin metoda transpoziţiei. Cum textul are 64 de caractere şi permutarea este de lungime 3, atunci numărul de litere pe coloane este: 21, 21 şi 22. Coloanele cu numai 21 de caractere sunt cele care corespund valoriilor luate în ordine descrescătoare din permutarea inversă $\sigma^{-1} = (3, 2, 1)$:

3	2	1
B	U	S
I	T	S
T	U	T
S	A	I
P	M	I
S	A	L
R	T	I
S	N	A
Z	O	P
I	T	I
U	S	A
D	T	N
A	U	O
T	E	M
E	D	O
C	E	D
R	F	I
E	R	A
M	O	C
A	T	U
V	I	T
		E

1	2	3
S	U	B
S	T	I
T	U	T
I	A	S
I	M	P
L	A	S
I	T	R
A	N	S
P	O	Z
I	T	I
A	S	U
N	T	D
O	U	A
M	E	T
O	D	E
D	E	C
I	F	R
A	R	E
C	O	M
U	T	A
T	I	V
E		

După rearanjarea coloanelor conform permutării inverse σ^{-1} se obţine tabela din dreapta. Citind pe linii se descoperă textul clar: SUBSTITUTIA SIMPLA SI TRANSPOZITIA SUNT DOUA METODE DE CIFRARE COMUTATIVE .

7.3 Exerciţii propuse

Exerciţiul 7.3.1 *Dezvoltaţi o aplicaţie care să implementeze rutine specifice decriptării sistemelor mixte compuse din transpoziţii şi substituţii simple.*

Exerciţiul 7.3.2 *Se dau criptogramele:*
Criptograma 1:
VXEVW LWXWL DVLPS ODVLW UDQVS
RCLWL DVXQW GRXDP HWRGH GHFLI
UDUHF RPXWD WLYHX
Criptograma 2:
YAHYZ OZAZO GYOSV RGYOZ XGTYV
UFOZO GYATZ JUAGS KZUJK JKIOL
XGXKI USAZG ZOBKX

Care din afirmaţiile de mai jos sunt adevărate:
a) metoda de cifrare utilizată este o substituţia simplă;
b) metoda de cifrare utilizată este o transpoziţie;
c) metoda de cifrare este reprezentată de algoritmul lui Cezar;
d) nu se poate preciza sistemul criptografic utilizat.
Justificaţi răspunsul. Decriptaţi mesajul.

Răspuns: a) şi c). Textul clar: SUBSTITUTIA SIMPLA SI TRANSPOZITIA SUNT DOUA METODE DE CIFRARE COMUTATIVE.

Exerciţiul 7.3.3 *Se dau criptogramele:*
Criptograma 1:
BITSP SRSZI UDATE CREMA VUTUA
MATNO TSTUE DEFRO TISST IILIA
PIANO MODIA CUTE
Criptograma 2:
UTUAM ATNOT STUED EFROT IBITS
PSRSZ IUDAT ECREM AVSST IILIA
PIANO MODIA CUTE
Care din afirmaţiile de mai jos sunt adevărate:
a) metoda de cifrare utilizată este o substituţia simplă;
b) metoda de cifrare utilizată este o transpoziţie;
c) metoda de cifrare este reprezentată de algoritmul lui Cezar;
d) nu se poate preciza sistemul criptografic utilizat.
Justificaţi răspunsul. Decriptaţi mesajul.

Răspuns: b). Textul clar: SUBSTITUTIA SIMPLA SI TRANSPOZITIA SUNT DOUA METODE DE CIFRARE COMUTATIVE.

Exerciţiul 7.3.4 *Cifraţi mesajul SPECIAL PROPERTY folosind algoritmului lui Cezar* ($k = 13$) *şi transpoziţia dată de* $\sigma = (2, 4, 3, 1)$.

Răspuns: PCRFVEE RYCLCNBG.

Exerciţiul 7.3.5 *Decriptaţi mesajul CPKQCG ZGTVTKGOERIH ştiind că a fost cifrat cu ajutorul algoritmului lui Cezar şi al unei transpoziţii.*

Răspuns: EXAMEN CRIPTOGRAFIE.

Exerciţiul 7.3.6 *Decriptaţi mesajul ZGTVTK GOERIHCPKQCG ştiind că a fost cifrat cu ajutorul algoritmului lui Cezar şi al unei transpoziţii.*

Răspuns: EXAMEN CRIPTOGRAFIE.

Capitolul 8

Generatoare pseudoaleatoare

8.1 Breviar teoretic

Un registru de deplasare cu feedback constă în n locaţii de memorie de câte un bit care se "deplasează" spre dreapta şi o funcţie de feedback care exprimă orice element nou $a(t)$, cu $t \geq n$, al secvenţei în funcţie de elementele generate anterior $a(t-n), a(t-n+1), \ldots, a(t-1)$.

Funcţia de feedback trebuie să fie nesingulară, adică de forma:

$a(t) = g(a(t-1), \ldots, a(t-n+1)) \oplus a(t-n)$, unde $\oplus$ desemnează operaţia SAU exclusiv (XOR). Dacă funcţia de feedback este liniară (se poate implementa doar folosind operaţia SAU exclusiv) spunem că generatorul este un registru de deplasare cu feedback liniar (**LFSR**). Altfel, spunem că generatorul este un registru de deplasare cu feedback neliniar (**NLFSR**).

O locaţie de memorie a registrului se numeşte nivel, iar semnalele binare $a(0), a(1), \ldots, a(n-1)$ sunt încărcate ca date iniţiale. Perioada secvenţei produse depinde atât de numărul de niveluri, cât şi de detaliile conexiunilor de feedback. Mai exact, perioada maximă a secvenţei care poate fi generată de un registru de deplasare cu feedback, având n niveluri şi o funcţie de feedback nesingulară este $2^n - 1$, adică numărul maxim de stări în care se poate afla un registru cu n niveluri (se exclude starea nulă). **LFSR**-urile sunt folosite de mult timp pentru teste **VSLI**, comunicaţii cu spectru distribuit etc. Funcţia de feedback a unui **LFSR** are forma:

$$a(t) = c_1 a(t-1) \oplus c_2 a(t-2) \oplus \ldots \oplus c_{n-1} a(t-n+1) \oplus a(t-n), \tag{8.1}$$

unde $c_i \in \{0, 1\}$. Conexiunea de feedback a unui **LFSR** poate fi exprimată printr-un polinom de feedback:

$$f(X) = 1 + c_1 X + c_2 X^2 + \ldots + c_{n-1} X^{n-1} + X^n,$$

cu nedeterminata X. Acest polinom decide perioada şi comportarea statistică a secvenţei de ieşire. Pentru a preveni o secvenţă de ieşire trivială, trebuie ca starea ,,zero peste tot" să nu

fie stare iniţială. De exemplu, dacă un **LFSR** cu patru niveluri are polinomul de feedback:

$$f(X) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4,$$

dependent de starea iniţială, atunci el va genera una din secvenţele de perioadă 5.

a) 1111011110 . . . ,

b) 1000110001 . . . ,

c) 0100101001 . . . ,

Sau, alt exemplu, dacă **LFSR** are polinomul de feedback dat de $f(X) = 1 + X + X^4$, atunci el generează o singură secvenţă netrivială de perioadă 15, cu cea mai bună statistică pe care o astfel de secvenţă o poate avea:

101100100011110 . . .

Pentru a garanta cea mai mare perioadă posibilă $2^n - 1$, polinomul de feedback $f(X)$ al **LFSR**-ului trebuie să fie *primitiv*. Aceasta însemnă că $f(X)$ trebuie ales astfel încât cel mai mic număr întreg pozitiv T pentru care $X^T - 1$ este divizibil cu $f(X)$ să fie $T = 2^n - 1$. Există algoritmi care testează primitivismul unui polinom. Numărul de polinoame primitive de grad n este:

$$N_p(n) = \frac{\Phi(2^n - 1)}{n},$$

unde $\Phi(x)$, cunoscută ca *funcţia lui Euler*, desemnează cardinalul de numere naturale mai mici ca x şi relativ prime cu x. Observăm că dacă un polinom $f(X)$ este primitiv atunci şi polinomul *reciproc* lui adică $X^n f(\frac{1}{X})$ este primitiv. Se ştie că orice polinom primitiv este ireductibil. Reciproca nu este adevărată. Numărul de polinoame ireductibile de grad n în algebra mod p ($p = 2$) este dat de formula următoare:

$$N_I(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} p^d \mu(\frac{n}{d}),$$

unde μ este *funcţia lui Möebius* definită în felul următor pentru $n = \prod_1^k p_i^{\alpha_i}$: $\mu(n) = 0$ dacă $\prod_i^k \alpha_i > 1$, $\mu(n) = (-1)^k$ dacă n este produsul a k numere prime distincte şi $\mu(1) = 1$. Legătura între funcţia lui Moebius şi funcţia lui Euler este dată de:

$$\frac{\phi(n)}{n} = \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}.$$

Dacă k este un *număr prim Mersenne*, adică k este număr prim de forma $2^n - 1$ unde n este număr prim, atunci orice polinom ireductibil de grad k (în algebra mod 2) este primitiv:

$$\begin{aligned} N_I(k) &= \frac{1}{2^n - 1} \sum_{d|2^n-1} 2^d \mu(\frac{2^n - 1}{d}) = \frac{1}{2^n - 1}[-2 + 2^{2^n-1}] \\ &= \frac{\Phi(2^{2^n-1} - 1)}{2^n - 1} = N_P(k). \end{aligned}$$

8.2 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 8.2.1 *O secvenţă determinată de polinomul de feedback* $1+X^3+X^4$ *are perioadă maximă?*

Rezolvare: Notăm cu $\alpha = X \bmod f(X)$ o rădacină a polinomului de feedback: $1 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0$. Succesiv obţinem puterile lui α:
$\alpha^1=\alpha$;
$\alpha^2=\alpha^2$;
$\alpha^3=\alpha^3$;
$\alpha^4=1+\alpha^3$;
$\alpha^5=\alpha\alpha^4 = \alpha(1+\alpha^3) = 1+\alpha+\alpha^3$;
$\alpha^6=\alpha\alpha^5 = \alpha(1+\alpha+\alpha^3) = 1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3$;
$\alpha^7=\alpha\alpha^6 = \alpha(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3) = 1+\alpha+\alpha^2$;
$\alpha^8=\alpha\alpha^7 = \alpha(1+\alpha+\alpha^2) = \alpha+\alpha^2+\alpha^3$;
$\alpha^9=\alpha\alpha^8 = \alpha(\alpha+\alpha^2+\alpha^3) = 1+\alpha^2$;
$\alpha^{10}=\alpha\alpha^9 = \alpha(1+\alpha^2) = \alpha+\alpha^3$;
$\alpha^{11}=\alpha\alpha^{10} = \alpha(\alpha+\alpha^3) = 1+\alpha^2+\alpha^3$;
$\alpha^{12}=\alpha\alpha^{11} = \alpha(1+\alpha^2+\alpha^3) = 1+\alpha$;
$\alpha^{13}=\alpha\alpha^{12} = \alpha(1+\alpha) = \alpha+\alpha^2$;
$\alpha^{14}=\alpha\alpha^{13} = \alpha(\alpha+\alpha^2) = \alpha^2+\alpha^3$;
$\alpha^{15}=\alpha\alpha^{14} = \alpha(\alpha^2+\alpha^3) = 1$.
Ordinul lui α este 2^4-1, în concluzie, polinomul de feedback este primitiv.

8.3 Exerciţii propuse

Exerciţiul 8.3.1 *Implementaţi o rutină de testat primitivismul unui polinom din* $\boldsymbol{Z}_2[X]$.

Exerciţiul 8.3.2 *O secvenţă determinată de polinomul de feedback* $1+X^2+X^4$ *are perioadă maximă?*

Răspuns: Nu. Polinomul nu este ireductibil, deci nu este primitiv.

Exerciţiul 8.3.3 *O secvenţă determinată de polinomul de feedback* $1+X+X^4$ *are perioadă maximă?*

Răspuns: Da. Polinomul de feedback este primitiv.

Exerciţiul 8.3.4 *O secvenţă determinată de polinomul de feedback* $1+X+X^3$ *are perioadă maximă?*

Răspuns: Da. Polinomul de feedback este primitiv.

Exerciţiul 8.3.5 *O secvenţă determinată de polinomul de feedback* $1 + X + X^2 + X^3$ *are perioadă maximă?*

Răspuns: Nu. Polinomul nu este primitiv.

Exerciţiul 8.3.6 *O secvenţă determinată de polinomul de feedback* $1+X^2+X^5$ *are perioadă maximă?*

Răspuns: Da. Polinomul de feedback este primitiv.

Exerciţiul 8.3.7 *O secvenţă determinată de polinomul de feedback* $1 + X + X^3 + X^4 + X^5$ *are perioadă maximă?*

Răspuns: Da. Polinomul de feedback este primitiv.

Exerciţiul 8.3.8 *O secvenţă determinată de polinomul de feedback* $1 + X + X^3 + X^5$ *are perioadă maximă?*

Răspuns: Nu. Polinomul nu este primitiv.

Exerciţiul 8.3.9 *O secvenţă determinată de polinomul de feedback* $1 + X + X^2 + X^3 + X^5$ *are perioadă maximă?*

Răspuns: Da. Polinomul de feedback este primitiv.

Exerciţiul 8.3.10 *O secvenţă determinată de polinomul de feedback* $1+X^2+X^3+X^4+X^5$ *are perioadă maximă?*

Răspuns: Da. Polinomul de feedback este primitiv.

Capitolul 9

Calcule în corpuri Galois

9.1 Breviar teoretic

Corpul Galois $GF(2^n)$ este definit de un polinom $f(X) \in Z_2[X]$ de grad n. Elementele acestui corp sunt polinoame.

Operaţiile între două polinoame $a(X) = a_0 + a_1X + \ldots a_nX^n$ şi $b(X) = b_0 + b_1X + \ldots b_nX^n$ din $GF(2^n)$ se definesc în modul următor:

a) $a(X) \oplus b(X) = c(X)$, $c_i = (a_i + b_i) \bmod 2$;

b) $a(X) \bullet b(X) = a(X)b(X) \bmod f(X)$.

Un element din $GF(2^n)$ se poate reprezenta sub forma binară (şi apoi hexazecimală) prin coeficienţii săi : $a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ se identifică cu $a_n \ldots a_1a_0$, $a_i \in \{0, 1\}$

Inversul unui element din $GF(2^n)$ se determină cu algoritmul lui Euclid, exemplificat în continuare.

9.2 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 9.2.1 *Care este inversul elementului* $\{45\}$ *(reprezentat în format hexa) din* $GF(2^8)$ *definit de polinomul* $f(X) = 1 + X + X^3 + X^4 + X^8$.

Rezolvare: Elementului $\{45\}$ îi corespunde polinomul $X^6 + X^2 + 1$. Pentru a afla inversul lui $\{45\} \bmod f(X)$ utilizăm algoritmul lui Euclid:

$X^8 + X^4 + X^3 + X + 1 = X^2(X^6 + X^2 + 1) + X^3 + X^2 + X + 1$,

$X^6 + X^2 + 1 = (X^3 + X^2)(X^3 + X^2 + X + 1) + 1$,

plecând de la ultima ecuaţie către prima, succesiv obţinem:

$1 = (X^3 + X^2)(X^3 + X^2 + X + 1) + X^6 + X^2 + 1$

$1 = (X^3 + X^2)(X^2(X^6 + X^2 + 1) + X^8 + X^4 + X^3 + X + 1) + X^6 + X^2 + 1$

$1 = (X^5 + X^4 + 1)(X^6 + X^2 + 1) + (X^3 + X^2 + 1)(X^8 + X^4 + X^3 + X + 1)$

deci inversul polinomului $X^6 + X^2 + 1$ este $X^5 + X^4 + 1$. Utilizând codificarea hexa ajungem la concluzia că inversul elementului $\{45\}$ este $\{31\}$.

Exerciţiul 9.2.2 *Să se adune elementele* $\{57\}$ *şi* $\{83\}$ *în corpul Galois* $GF(2^8)$ *definit de polinomul* $1 + X + X^3 + X^4 + X^8$.

Rezolvare: Scrierea binară a celor două elemente este $\{57\} = \{01010111\}$ respectiv $\{83\} = \{10000011\}$. Efectuând calculele obţinem $\{57\} \oplus \{83\} = \{11010100\} = \{D4\}$.

Exerciţiul 9.2.3 *Să se înmulţească elementele* $\{57\}$ *şi* $\{83\}$ *în corpul Galois* $GF(2^8)$ *definit de polinomul* $1 + X + X^3 + X^4 + X^8$.

Rezolvare: $\{57\} \bullet \{83\} = (X^6 + X^4 + X^2 + X + 1)(X^7 + X + 1) = X^{13} + X^{11} + X^9 + X^8 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + 1 \bmod (X^8 + X^4 + X^3 + X + 1) = X^7 + X^6 + 1 = \{11000001\} = \{C1\}$.

9.3 Exerciţii propuse

Exerciţiul 9.3.1 *Implementaţi proceduri de calcul în corp Galois.*

Exerciţiul 9.3.2 *Care este inversul elementului* $\{33\}$ *(reprezentat în format hexa) din* $GF(2^8)$ *definit de polinomul* $1 + X + X^3 + X^4 + X^8$.

Răspuns: $\{6C\}$.

Exerciţiul 9.3.3 *Care este inversul elementului* $\{12\}$ *(reprezentat în format hexa) din* $GF(2^8)$ *definit de polinomul* $1 + X + X^3 + X^4 + X^8$.

Răspuns: $\{AA\}$.

Exerciţiul 9.3.4 *Care este inversul elementului* $\{31\}$ *(reprezentat în format hexa) din* $GF(2^8)$ *definit de polinomul* $1 + X + X^3 + X^4 + X^8$.

Răspuns: $\{45\}$.

Exerciţiul 9.3.5 *Arătaţi că elementele* $\{12\}$ *şi* $\{AA\}$ *(reprezentate în format hexa) sunt inverse în corpul Galois* $GF(2^8)$ *definit de polinomul* $1 + X + X^3 + X^4 + X^8$.

Exerciţiul 9.3.6 *Să se adune elementele* $\{5\}$ *şi* $\{7\}$ *în corpul Galois* $GF(2^4)$ *definit de polinomul* $1 + X + X^4$.

Răspuns: $\{2\}$.

Exerciţiul 9.3.7 *Să se înmulţească elementele* $\{5\}$ *şi* $\{7\}$ *în corpul Galois* $GF(2^4)$ *definit de polinomul* $1 + X + X^4$.

Răspuns: $\{8\}$.

Exerciţiul 9.3.8 *Se consideră transformarea dată de*

$$g(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}^{-1} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{9.1}$$

unde $\mathbf{y}^{-1}$ *este inversul lui* $\mathbf{y}$ *în corpul Galois* $GF(2^8)$ *definit de polinomul* $1 + X + X^3 + X^4 + X^8$. *Calculaţi* $g(1), g(2), g(3), g(4), g(5)$.

Răspuns: Transformarea indicată în problemă defineşte tabela de substituţie a algoritmului RIJNDAEL. Valorile solicitate (în zecimal) sunt: $g(1) = 124, g(2) = 119, g(3) = 123, g(4) = 242, g(5) = 107$.

Capitolul 10

Algoritmul RIJNDAEL - Standardul AES

10.1 Breviar teoretic

Pentru rezolvarea următoarelor exerciţii plecăm de la ipoteza cunoaşterii standardului FIPS 197 - Advanced Encryption Standard compus din patru operaţii (sumare modulo 2 cu cheia de rundă, subtituţia la nivel de octet, shiftarea liniilor, mixarea coloanelor etc.) în cadrul procesului de transformare a stărilor şi din generatorul de chei de rundă.

10.2 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 10.2.1 *Intrarea în runda $i = 6$ a algoritmului AES 128/128 pentru cifrarea textului ,,zero peste tot", cu ajutorul cheii ,,zero peste tot", este:*

$$\begin{bmatrix} D4 & 55 & 7E & 79 \\ 6F & B8 & 05 & 79 \\ 4F & 96 & BB & DE \\ 6C & 33 & 3D & 23 \end{bmatrix}$$

cheia de rundă fiind:

$$\begin{bmatrix} EC & 14 & 99 & 6A \\ 61 & 25 & FF & B4 \\ 4B & 75 & 09 & 9B \\ 85 & 8C & 37 & A7 \end{bmatrix}$$

Care este ieşirea după procesarea rutinelor SubBytes, ShiftRows, MixColumns şi AddRoundKey?

Rezolvare:
Rutina SubBytes presupune folosirea următorului Sbox:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f
0	63	7c	77	7b	f2	6b	6f	c5	30	01	67	2b	fe	d7	ab	76
1	ca	82	c9	7d	fa	59	47	f0	ad	d4	a2	af	9c	a4	72	c0
2	b7	fd	93	26	36	3f	f7	cc	34	a5	e5	f1	71	d8	31	15
3	04	c7	23	c3	18	96	05	9a	07	12	80	e2	eb	27	b2	75
4	09	83	2c	1a	1b	6e	5a	a0	52	3b	d6	b3	29	e3	2f	84
5	53	d1	00	ed	20	fc	b1	5b	6a	cb	be	39	4a	4c	58	cf
6	d0	ef	aa	fb	43	4d	33	85	45	f9	02	7f	50	3c	9f	a8
7	51	a3	40	8f	92	9d	38	f5	bc	b6	da	21	10	ff	f3	d2
8	cd	0c	13	ec	5f	97	44	17	c4	a7	7e	3d	64	5d	19	73
9	60	81	4f	dc	22	2a	90	88	46	ee	b8	14	de	5e	0b	db
a	e0	32	3a	0a	49	06	24	5c	c2	d3	ac	62	91	95	e4	79
b	e7	c8	37	6d	8d	d5	4e	a9	6c	56	f4	ea	65	7a	ae	08
c	ba	78	25	2e	1c	a6	b4	c6	e8	dd	74	1f	4b	bd	8b	8a
d	70	3e	b5	66	48	03	f6	0e	61	35	57	b9	86	c1	1d	9e
e	e1	f8	98	11	69	d9	8e	94	9b	1e	87	e9	ce	55	28	df
f	8c	a1	89	0d	bf	e6	42	68	41	99	2d	0f	b0	54	bb	16

Găsirea octetului din S-box corespunzator octetului din stare se face astfel: pentru octetul $D4$ se caută în SBox elementul aflat la intersecţia liniei D cu coloana 4 şi se substituie în stare elementul găsit in Sbox. $D4$ se va substitui cu 48. Procedeul se aplică similar pentru ceilalţi octeţi din stare.

Rezultatul aplicării rutinei SubBytes se constituie în următoarea stare:

$$\begin{bmatrix} 48 & FC & F3 & B6 \\ A8 & 6C & 6B & B6 \\ 84 & 90 & EA & 1D \\ 50 & C3 & 27 & 26 \end{bmatrix}$$

Rutina ShiftRows acţioneaza în felul următor asupra stării: prima linie rămane neschimbată, a doua linie se roteşte la stânga cu un octet, a treia linie se roteşte la stânga cu doi octeţi iar a patra linie se roteşte la stânga cu trei octeţi.

După aplicarea rutinei ShiftRows, starea va fi următoarea:

$$\begin{bmatrix} 48 & FC & F3 & B6 \\ 6C & 6B & B6 & A8 \\ EA & 1D & 84 & 90 \\ 26 & 50 & C3 & 27 \end{bmatrix}$$

Rutina MixColumns presupune înmulţirea fiecărei coloane din stare cu următoarea matrice fixată:

$$\begin{bmatrix} 02 & 03 & 01 & 01 \\ 01 & 02 & 03 & 01 \\ 01 & 01 & 02 & 03 \\ 03 & 01 & 01 & 02 \end{bmatrix}$$

Operaţiile care rezultă din înmulţirea matricilor se fac în corpul Galois GF(2^8) şi sunt înmulţiri de polinoame modulo polinomul generator al corpului GF(2^8) care este $h(X) = X^8 + X^4 + X^3 + X + 1$. Observăm că singurele înmulţiri care apar sunt cele cu 02 şi 03. Inmulţirea cu polinomul 02 in $GF(2^8)$ înseamnă înmulţirea cu polinomul X.

Fie $f(X) = b_7X^7 + b_6X^6 + b_5X^5 + b_4X^4 + b_3X^3 + b_2X^2 + b_1X + b_0$ un polinom din $GF(2^8)$. Să vedem ce presupune înmulţirea $02 * f(X)$ adică $X * f(X)$:

$$X * f(X) = b_7X^8 + b_6X^7 + b_5X^6 + b_4X^5 + b_3X^4 + b_2X^3 + b_1X^2 + b_0X(\mathrm{mod}m(X)),$$

unde $m(X)$ este polinomul generator $m(X) = X^4 + X^3 + X + 1$ al corpului Galois GF(2^8). Dacă $b_7 = 0$, atunci polinomul este în forma redusă în $GF(2^8)$ (are gradul 7).

Dacă $b_7 = 1$, atunci:

$$X * f(X) = X^8 \bmod m(X) + b_6X^7 + b_5X^6 + b_4X^5 + b_3X^4 + b_2X^3 + b_1X^2 + b_0X.$$

Deci:

$$X * f(X) = (X^4 + X^3 + X + 1) + b_6X^7 + b_5X^6 + b_4X^5 + b_3X^4 + b_2X^3 + b_1X^2 + b_0X.$$

Prin urmare, înmulţirea cu polinomul X poate fi implementată, în cazul în care bitul cel mai semnificativ al polinomului $f(X)$ este 1, ca o operaţie de shift la stânga cu 1 bit urmată de un XOR cu (00011011), care reprezintă polinomul $(X^4 + X^3 + X + 1)$.

Dacă bitul cel mai semnificativ al polinomului $f(X)$ este 0, atunci înmulţirea presupune doar operaţie de shift la stânga cu un bit.

Pentru a trece starea curentă prin rutina MixColumns, se înmulţeste pe rând fiecare coloană din stare cu matricea fixată de mai sus.

Vom prezenta doar modul de efectuare al înmulţirii:

$$\begin{bmatrix} 02 & 03 & 01 & 01 \\ 01 & 02 & 03 & 01 \\ 01 & 01 & 02 & 03 \\ 03 & 01 & 01 & 02 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 48 \\ 6C \\ EA \\ 26 \end{bmatrix}$$

Coloana rezultat va conţine următoarele linii:

$$\begin{bmatrix} 02 * 48 \oplus 03 * 6C \oplus EA \oplus 26 \\ 01 * 48 \oplus 02 * 6C \oplus 03 * EA \oplus 26 \\ 48 \oplus 6C \oplus 02 * EA \oplus 03 * 26 \\ 03 * 48 \oplus 6C \oplus EA \oplus 02 * 26 \end{bmatrix}$$

Rămân de efectuat înmulţirile care apar pe fiecare linie:
$02 * 48 = 02 * 01001000 = 10010000$.
$03 * 48 = 02 * 48 \oplus 48 = 11011000$.
$03 * 6C = 03 * 01101100 = 02 * 01101100 \oplus 01101100 = 11011000 \oplus 01101100 = 10110100$.
$02 * EA = 02 * 11101010 = 11010100 \oplus 00011011 = 11110001$.
$03 * EA = 02 * EA \oplus EA = 11110001 \oplus 11101010 = 00011011$.
$02 * 26 = 02 * 00100110 = 01001100$.
$03 * 26 = 02 * 26 \oplus 26 = 01001100 \oplus 00100110 = 01101010$.
După calculele rămase, coloana rezultat va fi:

$$\begin{bmatrix} \text{E8} \\ 93 \\ 81 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Pentru celelalte coloane din stare se procedează similar.
Starea rezultată după aplicarea rutinei MixColumns este următoarea:

$$\begin{bmatrix} \text{E8} & 13 & 7B & 23 \\ 93 & 5D & D0 & 71 \\ 81 & 5D & 08 & 4C \\ 12 & C9 & A1 & B7 \end{bmatrix}$$

Aplicarea rutinei AddRoundKey presupune o simplă operaţie de XOR pe fiecare octet din stare cu octet-ul corespunzător din cheia de rundă.

$$\begin{bmatrix} \text{E8} & 13 & 7B & 23 \\ 93 & 5D & D0 & 71 \\ 81 & 5D & 08 & 4C \\ 12 & C9 & A1 & B7 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \text{EC} & 14 & 99 & 6A \\ 61 & 25 & FF & B4 \\ 4B & 75 & 09 & 9B \\ 85 & 8C & 37 & A7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 04 & 07 & \text{E2} & 49 \\ \text{F2} & 78 & 2F & \text{C5} \\ \text{CA} & 28 & 01 & \text{D7} \\ 97 & 45 & 96 & 10 \end{bmatrix}$$

10.3 Exerciţii propuse

Exerciţiul 10.3.1 *Intrarea în runda $i = 7$ a algoritmului AES 128/128 pentru cifrarea textului ,,zero peste tot", cu ajutorul cheii ,,zero peste tot", este:*

$$\begin{bmatrix} 04 & 07 & E2 & 49 \\ F2 & 78 & 2F & C5 \\ CA & 28 & 01 & D7 \\ 97 & 45 & 96 & 10 \end{bmatrix}$$

cheia de rundă fiind:

$$\begin{bmatrix} 21 & 35 & AC & C6 \\ 75 & 50 & AF & 1B \\ 17 & 62 & 6B & F0 \\ 87 & 0B & 3C & 9B \end{bmatrix}$$

Care este ieşirea după procesarea rutinelor SubBytes, ShiftRows, MixColumns şi AddRoundKey?

Răspuns: Ieşirea din runda 7 este:

$$\begin{bmatrix} \text{B7} & \text{1D} & \text{6C} & 94 \\ \text{AA} & 25 & 92 & \text{E5} \\ \text{E4} & \text{2D} & \text{0F} & 81 \\ \text{C5} & \text{4F} & 81 & 50 \end{bmatrix}$$

Exerciţiul 10.3.2 *Intrarea în runda $i = 8$ a algoritmului AES 128/128 pentru cifrarea textului ,,zero peste tot", cu ajutorul cheii ,,zero peste tot", este:*

$$\begin{bmatrix} B7 & 1D & 6C & 94 \\ AA & 25 & 92 & E5 \\ E4 & 2D & 0F & 81 \\ C5 & 4F & 81 & 50 \end{bmatrix}$$

cheia de rundă fiind:

$$\begin{bmatrix} 0E & 3B & 97 & 51 \\ F9 & A9 & 06 & 1D \\ 03 & 61 & 0A & FA \\ 33 & 38 & 04 & 9F \end{bmatrix}$$

Care este ieşirea după procesarea rutinelor SubBytes, ShiftRows, MixColumns şi AddRoundKey?

Răspuns: Ieşirea din runda 8 este:

$$\begin{bmatrix} 23 & 13 & \text{AA} & \text{2E} \\ 37 & 21 & \text{C0} & 03 \\ \text{8C} & 63 & \text{C6} & \text{CB} \\ \text{3C} & \text{DB} & 57 & 95 \end{bmatrix}$$

Exerciţiul 10.3.3 *Intrarea în runda $i = 8$ a algoritmului AES 128/128 pentru cifrarea textului ,,zero peste tot", cu ajutorul cheii ,,zero peste tot", este:*

$$\begin{bmatrix} 23 & 13 & AA & 2E \\ E7 & 21 & C0 & 03 \\ 8C & 63 & C6 & CB \\ 3C & DB & 57 & 95 \end{bmatrix}$$

cheia de rundă fiind:

$$\begin{bmatrix} B1 & 8A & 1D & 4C \\ D4 & 7D & 7B & 66 \\ D8 & B9 & B3 & 49 \\ E2 & DA & DE & 41 \end{bmatrix}$$

Care este ieşirea după procesarea rutinelor SubBytes, ShiftRows, MixColumns şi AddRoundKey?

Răspuns: Ieşirea din runda 9 este:

$$\begin{bmatrix} 7F & 51 & 0E & 29 \\ FE & A5 & 34 & 29 \\ 0E & 66 & 7C & EC \\ 95 & 35 & 47 & CB \end{bmatrix}$$

Exerciţiul 10.3.4 *Executaţi o rundă completă, pentru algoritmul RIJNDAEL (AES), cu următoarele intrări:*

pentru starea curentă:

$$\begin{bmatrix} 00 & 00 & 00 & 00 \\ 00 & 00 & 00 & 00 \\ 00 & 00 & 00 & 00 \\ 00 & 00 & 00 & 01 \end{bmatrix}$$

pentru cheia de rundă:

$$\begin{bmatrix} 62 & 62 & 62 & 62 \\ 63 & 63 & 63 & 63 \\ 7C & 7C & 7C & 7C \\ 63 & 63 & 63 & 62 \end{bmatrix}$$

Răspuns: Ieşirea din rundă este:

$$\begin{bmatrix} 1E & 01 & 01 & 01 \\ 1F & 00 & 00 & 00 \\ 3E & 1F & 1F & 1F \\ 3E & 00 & 00 & 01 \end{bmatrix}$$

Exerciţiul 10.3.5 *Executaţi o rundă completă, pentru algoritmul RIJNDAEL (AES), cu următoarele intrări:*

pentru starea curentă:

$$\begin{bmatrix} 1E & 01 & 01 & 01 \\ 1F & 00 & 00 & 00 \\ 3E & 1F & 1F & 1F \\ 3E & 00 & 00 & 01 \end{bmatrix}$$

pentru cheia de rundă:

$$\begin{bmatrix} 9B & F9 & 9B & F9 \\ 73 & 10 & 73 & 10 \\ D6 & AA & D6 & AA \\ C9 & AA & C9 & AB \end{bmatrix}$$

Răspuns: Ieşirea din rundă este:

$$\begin{bmatrix} 66 & D6 & 17 & F9 \\ E0 & 43 & 67 & CF \\ D8 & E3 & 13 & 28 \\ 04 & F2 & 5A & E9 \end{bmatrix}$$

Exerciţiul 10.3.6 *Executaţi o rundă completă, pentru algoritmul RIJNDAEL (AES), cu următoarele intrări:*

pentru starea curentă:

$$\begin{bmatrix} 66 & D6 & 17 & F9 \\ E0 & 43 & 67 & CF \\ D8 & E3 & 13 & 28 \\ 04 & F2 & 5A & E9 \end{bmatrix}$$

pentru cheia de rundă:

$$\begin{bmatrix} 55 & AC & 37 & CE \\ DF & CF & BC & AC \\ B4 & 1E & C8 & 62 \\ 50 & FA & 33 & 98 \end{bmatrix}$$

Răspuns: Ieşirea din rundă este:

$$\begin{bmatrix} 7E & 09 & A1 & 70 \\ 41 & 86 & 69 & 61 \\ 45 & 08 & F0 & E1 \\ 5E & B5 & DA & BF \end{bmatrix}$$

Exerciţiul 10.3.7 *Executaţi o rundă completă, pentru algoritmul RIJNDAEL (AES), cu următoarele intrări:*

pentru starea curentă:

$$\begin{bmatrix} 7E & 09 & A1 & 70 \\ 41 & 86 & 69 & 61 \\ 45 & 08 & F0 & E1 \\ 5E & B5 & DA & BF \end{bmatrix}$$

pentru cheia de rundă:

$$\begin{bmatrix} CC & 60 & 57 & 99 \\ 75 & BA & 06 & AA \\ F2 & EC & 24 & 46 \\ DB & 21 & 12 & 8A \end{bmatrix}$$

Răspuns: Ieşirea din rundă este:

$$\begin{bmatrix} 79 & D2 & A2 & C2 \\ 89 & 19 & 96 & E1 \\ 5E & 17 & 41 & 0D \\ 0D & 93 & 74 & 64 \end{bmatrix}$$

Exerciţiul 10.3.8 *Executaţi o rundă completă, pentru algoritmul RIJNDAEL (AES), cu următoarele intrări:*

pentru starea curentă:

$$\begin{bmatrix} 79 & D2 & A2 & C2 \\ 89 & 19 & 96 & E1 \\ 5E & 17 & 41 & 0D \\ 0D & 93 & 74 & 64 \end{bmatrix}$$

pentru cheia de rundă:

$$\begin{bmatrix} 70 & 10 & 47 & DE \\ 2F & 95 & 93 & 39 \\ 8C & 60 & 44 & 02 \\ 35 & 14 & 06 & 8C \end{bmatrix}$$

Răspuns: Ieşirea din rundă este:

$$\begin{bmatrix} A0 & CA & A4 & 04 \\ F7 & AE & 76 & D0 \\ 36 & 92 & 49 & D6 \\ 25 & 22 & 4B & 8B \end{bmatrix}$$

Capitolul 11

Criptanaliza cifrurilor bloc

11.1 Breviar teoretic

Deoarece nu există o formulă matematică universală care să poată fi aplicată în operaţia de criptanaliză, am propus ca exerciţii la acest capitol modificări ale unor algoritmi de cifruri bloc consacrate. Sunt date o serie de indicaţii precedate de o scurtă descriere a algoritmilor propriu-zişi.

11.2 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 11.2.1 *Studiaţi următorele simplificări ale algoritmului RC5:*
-RC5 cu 8 *iteraţii dar fără rotaţii;*
-RC5 cu 8 *iteraţii iar numărul de rotaţii egal cu numărul de iteraţii.*

Răspuns. În cele ce urmează facem o scurtă descriere a cifrului RC5 cu r iteraţii. Acesta are lungimea blocului de date variabilă dar vom considera în cele ce urmează că aceasta a fost setată la 64 biţi. Operaţia de cifrare foloseşte $2r + 2$ chei dependente de cuvintele pe 32 biţi $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_{2r+2}$ unde r este numărul de iteraţii. Pentru cifrare blocul de date se împarte în două părţi de 32 biţi notate cu L respectiv R (RC5 face apel la codificarea *little-endian* pentru împachetarea octeţilor în cuvinte: primul octet se transformă în cele mai puţin semnificative poziţii ale lui L, etc.). Apoi avem:

$$\begin{cases} L = L + S_0, \\ R = R + S_1. \end{cases}$$

Pentru $i = 1, \ldots, r$ se execută:

$$\begin{cases} L = ((L \oplus R) << R) + S_{2i}, \\ R = ((R \oplus L) << L) + S_{2i+1}. \end{cases}$$

Ieşirea constă în registrele L şi R. Simbolul $\oplus$ are semnificaţia sumei $\bmod 2$, simbolul $<<$ semnifică rotire circulară şi în fine simbolul $+$ are semnificaţia sumei $\bmod 2^{32}$. Operaţia de

decriptare este similară (intervin operatorii $\oplus, >>$ şi $-$). Modul de construcţie al secvenţei S (care derivă din cheie) nu este esenţial în cadrul acestui exerciţiu.

Dacă setăm numărul de iteraţii $r = 8$ şi nu facem nici un fel de rotaţii atunci pentru $i = 1, \ldots, 8$ se execută:

$$\begin{cases} L = (L \oplus R) + S_{2i}, \\ R = (R \oplus L) + S_{2i+1}. \end{cases}$$

Algoritmul astfel setat nu îndeplineşte criteriul de avalanşă strictă (schimbarea unui bit în blocul de text clar produce, în medie, schimbări de 50% la ieşire). Schema de mai sus permite atacul cu ajutorul tehnicii criptanalizei liniare pentru aflarea lui S, deci a cheii efective.

Dacă setăm numărul de iteraţii $r = 8$ şi numărul de rotaţii egal cu r atunci pentru $i = 1, \ldots, 8$ se execută:

$$\begin{cases} L = ((L \oplus R) << 8) + S_{2i}, \\ R = ((R \oplus L) << 8) + S_{2i+1}. \end{cases}$$

Algoritmul astfel setat nu îndeplineşte criteriul de avalanşă strictă. Schema de mai sus permite atacul cu ajutorul tehnicii criptanalizei diferenţial/liniare pentru aflarea lui S.

Exerciţiul 11.2.2 *Studiaţi următorele simplificări ale algoritmului DES:*
-DES cu 12 *iteraţii dar fără aplicaţiile S;*
-DES cu 4 *iteraţii;*
-DES cu 6 *iteraţii.*

Răspuns. Cifrul bloc DES (proiectat în 1977) este sub controlul unei chei efective de 56 biţi (cheia de bază este de 64 biţi, 8 biţi fiind pentru detecţia erorilor) iar mărimea blocului de date este de 64 biţi. Textul clar este permutat iar apoi este împărţit în două blocuri L şi R de lungime 32 biţi. Se execută apoi iterativ operaţiile (pentru $i = 1, \ldots,$ *numărul de iteratii*):

$$\begin{cases} L_i = R_i, \\ R_i = L_i \oplus f(R_{i-1}, K_i). \end{cases}$$

În final textul este supus permutării inverse. Ne concentrăm asupra descrierii funcţiei $f : \mathbf{Z}_2^{32} \times \mathbf{Z}_2^{48} \to \mathbf{Z}_2^{32}$. Iniţial blocul R (32 biţi) este extins cu ajutorul funcţiei E la un bloc pe 48 biţi care este sumat mod2 cu cheia K (extinsă la 48 biţi cu ajutorul algoritmului de producere a subcheilor). Opt aplicaţii $S : \mathbf{Z}_2^6 \to \mathbf{Z}_2^4$ produc o ieşire pe 32 biţi care este permutată pentru a produce ieşirea finală dintr-o iteraţie. Dacă aplicaţiile S sunt fixe (se selectează 4 biţi din 6 în mod fix) atunci se poate aplica tehnica criptanalizei diferenţiale (biţii de la ieşire sunt biţii de la intrare (sumaţi mod2 cu cheia K) dar într-o altă ordine).

Algoritmul DES cu 4 cât şi cu 6 iteraţii poate fi spart cu ajutorul tehnicii atacului cu text clar cunoscut.

11.3 Exerciţii propuse

Exerciţiul 11.3.1 *Studiaţi regula B a algoritmului Skipjack cu* 8 *iteraţii.*

Exerciţiul 11.3.2 *Ce defect are un algoritm de cifrare care este închis (un algoritm de cifrare se numeşte închis dacă pentru orice chei k_1 şi k_2 există o cheie k_3 astfel încât pentru orice text clar M avem $E_{k_1}E_{k_2}(M) = E_{k_3}(M)$)?*

Răspuns. Ca metodă de atac generică se poate opta pentru cifrarea repetitivă.

Exerciţiul 11.3.3 *Aplicaţi tehnica criptanalizei diferenţiale şi criptanalizei liniare asupra algorimului FEAL.*

Exerciţiul 11.3.4 *Studiaţi tehnica criptanalizei diferenţiale în cazul algoritmului DES cu* 16 *iteraţii.*

Exerciţiul 11.3.5 *Aplicaţi tehnica criptanalizei liniare în cazul algoritmului DES cu* 16 *iteraţii.*

Exerciţiul 11.3.6 *Având la dispoziţie un cifru bloc $E_k(.)$ proiectaţi un cifru flux şi viceversa.*

Exerciţiul 11.3.7 *Scrieţi funcţia analitică a celor opt funcţii de substituţie S ale cifrului DES.*

Exerciţiul 11.3.8 *Fie $E_M(.)$ şi $D_K(.)$ funcţiile de cifrare respectiv descifrare ale unui cifru. Care este valoarea lui $D_K(E_K(M))$?*

Notă. Descrierea algoritmilor RC5, DES, Skipjack şi FEAL poate fi găsită în *Schneier* [8] sau *Menezes* [4].

Exerciţiul 11.3.9 *Implementaţi modalităţi de testare a cifrurilor bloc.*

Exerciţiul 11.3.10 *Implementaţi modalităţi de generare a tabelelor de substituţie.*

Exerciţiul 11.3.11 *Fie $E(\cdot,\cdot)$ o funcţie de cifrare pe m biţi de cheie şi n biţi de date. Care este valoarea maximă a lui m astfel încât cheia efectivă a cifrului să fie m?*

Capitolul 12

Lema chinezească a resturilor

12.1 Breviar teoretic

Teorema 12.1 *(Lema chinezească a resturilor- CRT) Fie* $m_1, \ldots, m_k$ *numere întregi cu* $(m_i, m_j) = 1$ *pentru orice* $i \neq j$*. Atunci sistemul*

$$x \equiv a_i \bmod m_i$$

are o soluţie unică modulo $\prod_{i=1}^{k} m_i$*.*

Demonstraţie. Existenţa soluţiei. Vom nota

$$M = \prod_{i=1}^{k} m_i$$

şi

$$M_i = \frac{M}{m_i} \text{ pentru orice } i = 1, \ldots, k.$$

Deoarece $(m_i, m_j) = 1$ pentru orice $i \neq j$ avem $(M_j, m_j) = 1$ pentru orice j adică există N_j astfel ca $M_j N_j = 1 \bmod m_j$. Atunci dacă notăm

$$x = \sum_{i=0}^{k} a_i M_i N_i$$

şi reducem modulo m_i avem:

$$x = \sum_{j=0}^{k} a_j M_j N_j \bmod m_i \text{ pentru orice } i.$$

Folosind faptul că $(M_i, m_j) \neq 1$ pentru $i \neq j$ obţinem:

$$\begin{aligned} x &= a_i M_i N_i \bmod m_i \\ &= a_i \bmod m_i \ \text{ pentru orice } \ i. \end{aligned}$$

Unicitatea soluţiei. Fie $x^{'}$ şi $x^{''}$ două soluţii atunci

$$x = x^{'} - x^{''} = 0 \bmod m_i \ \text{ pentru orice } \ i$$

deci

$$x = 0 \bmod M.$$

12.2 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 12.2.1 *Să se rezolve sistemul de ecuaţii:*

$$\begin{cases} x \equiv 3 \mod 13 \\ x \equiv 34 \mod 47 \\ x \equiv 2 \mod 51 \end{cases}$$

Rezolvare:
Soluţia sistemului de congruenţe este dată de formula:

$$x = \sum_{j=1}^{3} a_j M_j N_j \bmod M.$$

unde $a_1 = 3, a_2 = 34, a_3 = 2$ iar $m_1 = 13, m_2 = 47, m_3 = 51$. Se observă că m_1, m_2 şi m_3 sunt prime între ele.

Calculăm $M = 13 \cdot 47 \cdot 51 = 31161$ şi $M_1 = 47 \cdot 51 = 2397$, $M_2 = 13 \cdot 51 = 663$ si $M_3 = 13 \cdot 47 = 611$.

Mai departe trebuie calculat inversul lui M_j pentru $j = 1$, $j = 2$ şi $j = 3$.

Cu algoritmul lui Euclid extins, se calculează $N_1 = M_1^{-1} \bmod m_1 = 2397^{-1} \bmod 13 = 5^{-1} \bmod 13 = 8$.

Similar se calculează $N_2 = M_2^{-1} \bmod m_2 = 663^{-1} \bmod 47 = 5^{-1} \bmod 47 = 19$, iar

$N_3 = M_3^{-1} \bmod m_3 = 611^{-1} \bmod 51 = 50^{-1} \bmod 51 = 50$.

În acest moment, avem toate datele necesare pentru a calcula soluţia x a sistemului de congruenţe:

$x = a_1 M_1 N_1 + a_2 M_2 N_2 + a_3 M_3 N_3 \bmod M$.

Deci $x = 3{\cdot}2397{\cdot}8{+}34{\cdot}663{\cdot}19{+}2{\cdot}611{\cdot}50 \bmod 31161 = 57528{+}428928{+}61100 \bmod 31161$ de unde $x = 17819 \bmod 31161$; se poate verifica faptul că într-adevăr aceasta este soluţia sistemului.

12.3 Exerciţii propuse

Exerciţiul 12.3.1 *Să se rezolve sistemul de ecuaţii:*

$$\begin{cases} x \equiv 1 \mod 13 \\ x \equiv 2 \mod 17 \\ x \equiv 3 \mod 11 \end{cases}$$

Răspuns: $x = 1158 \bmod 2431$.

Exerciţiul 12.3.2 *Să se rezolve sistemul de ecuaţii:*

$$\begin{cases} x \equiv 3 \mod 13 \\ x \equiv 2 \mod 11 \\ x \equiv 2 \mod 19 \end{cases}$$

Răspuns: $x = 211 \bmod 2717$.

Exerciţiul 12.3.3 *Să se rezolve sistemul de ecuaţii:*

$$\begin{cases} x \equiv 3 \mod 5 \\ x \equiv 5 \mod 7 \\ x \equiv 7 \mod 11 \end{cases}$$

Răspuns: $x = 348 \bmod 385$.

Exerciţiul 12.3.4 *Să se rezolve sistemul de ecuaţii:*

$$\begin{cases} x \equiv 5 \mod 17 \\ x \equiv 3 \mod 19 \\ x \equiv 2 \mod 23 \end{cases}$$

Răspuns: $x = 991 \bmod 7429$.

Exerciţiul 12.3.5 *Să se rezolve sistemul de ecuaţii:*

$$\begin{cases} x \equiv 5 \mod 11 \\ x \equiv 3 \mod 19 \\ x \equiv 2 \mod 23 \end{cases}$$

Răspuns: $x = 3613 \bmod 4807$.

Exerciţiul 12.3.6 *Să se rezolve sistemul de ecuaţii:*

$$\begin{cases} x \equiv 5 \mod 17 \\ x \equiv 3 \mod 21 \\ x \equiv 2 \mod 23 \end{cases}$$

Răspuns: $x = 4119 \bmod 8211$.

Exerciţiul 12.3.7 *Să se rezolve sistemul de ecuaţii:*

$$\begin{cases} x \equiv 4 \mod 21 \\ x \equiv 9 \mod 31 \\ x \equiv 14 \mod 23 \end{cases}$$

Răspuns: $x = 6178 \bmod 14973$.

Exerciţiul 12.3.8 *Să se rezolve sistemul de ecuaţii:*

$$\begin{cases} x \equiv 4 \mod 47 \\ x \equiv 9 \mod 11 \\ x \equiv 3 \mod 23 \end{cases}$$

Răspuns: $x = 10767 \bmod 11891$.

Exerciţiul 12.3.9 *Să se rezolve sistemul de ecuaţii:*

$$\begin{cases} x \equiv 11 \mod 17 \\ x \equiv 12 \mod 19 \\ x \equiv 13 \mod 23 \end{cases}$$

Răspuns: $x = 3394 \bmod 7429$.

Exerciţiul 12.3.10 *Să se rezolve sistemul de ecuaţii:*

$$\begin{cases} x \equiv 8 \mod 23 \\ x \equiv 14 \mod 29 \\ x \equiv 17 \mod 31 \end{cases}$$

Răspuns: $x = 1319 \bmod 20677$.

Exerciţiul 12.3.11 *Să se rezolve sistemul de ecuaţii:*

$$\begin{cases} x \equiv 15 \mod 23 \\ x \equiv 3 \mod 19 \\ x \equiv 13 \mod 36 \end{cases}$$

Răspuns: $x = 15241 \bmod 15732$.

Capitolul 13

Sistemul de cifrare Merkle-Hellman

13.1 Breviar teoretic

Algoritmul de cifrare *Merkle-Hellman* constă în codificarea mesajului ca o soluţie a unei probleme de tip rucsac pentru care ponderile $\{M_1, ..., M_n\}$ constituie cheia de cifrare, şi textului clar $\{b_1, ..., b_n\}$ îi corespunde textul cifrat $\sum_{i=1}^{n} b_i M_i$.

Definiţia 13.1 *Un şir de ponderi* $\{M_1, ..., M_n\}$ *se numeşte supercrescător dacă:*

$$M_k > \sum_{i=1}^{k-1} M_i \text{ pentru orice } k. \tag{13.1}$$

Problema rucsacului supercrescător este uşor de rezolvat folosind următoarea schemă: pentru $k = n, ..., 1$:

- dacă $M_k < S$ atunci $b_k = 1$ şi $S = S - M_k$;
- altfel $b_k = 0$.

Algoritmii de tip rucsac care nu sunt supercrescători nu sunt uşor de rezolvat şi nu există niciun algoritm rapid care să rezolve problema. Singura modalitate cunoscută de a determina dacă $b_i = 1$ constă în testarea tuturor soluţiilor. Cei mai rapizi algoritmi de testare au o complexitate exponenţială.

Algoritmul Merkle-Hellman se bazează pe această proprietate: *cheia privată* este şirul ponderilor pentru un rucsac supercrescător iar *cheia publică* este şirul ponderilor pentru un rucsac care are aceeaşi soluţie, dar nu este supercrescător. *Merkle* şi *Hellman* au găsit o metodă prin care se poate transforma o problemă a rucsacului supercrescător într-o problemă normală a rucsacului. Tehnica de conversie face apel la aritmetica modulară.

Având la dispoziţie o problemă de tip rucsac supercrescător (cheia privată) cu ponderile $\{M_1, ..., M_n\}$ atunci aceasta se transformă într-o problemă de tip rucsac normală (cheia publică) cu şirul ponderilor

$$\{mM_1 \bmod p, ..., mM_n \bmod p\},$$

unde m şi p sunt numere naturale prime între ele (acestea fac parte din cheia privată) şi $p > \sum_{i=1}^{n} M_i$.

Pentru a cifra un mesaj binar acesta se va împărţi în blocuri de lungimi egale cu cardinalul mulţimii ponderilor. Cifrarea unui bloc $b_1...b_n$ va fi numărul natural:

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(mM_i \bmod p).$$

Pentru descifrare destinatarul mesajului cunoaşte cheia privată: ponderile originale şi valorile lui m şi p. Acesta va calcula mai întâi pe $m^{-1} \bmod p$. Se va multiplica apoi textul cifrat cu $m^{-1} \bmod p$ iar după aceea se va rezolva problema rucsacului supercrescător pentru a recupera textul original.

13.2 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 13.2.1 *Să se construiască cheia publică pentru algoritmul Merkle-Hellman reprezentat de cheia privată* $\{2, 3, 6, 13, 27, 52\}$*, modulul* $p = 105$ *şi multiplicatorul* $m = 31$*. Cifraţi mesajul* 101110*.*

Rezolvare:

Având la dispoziţie cheia privată $\{M_1, ..., M_n\}$, cheia publică se obţine astfel $\{mM_1 \bmod p, ..., mM_n \bmod p\}$.

Prin urmare, cheia privată pentru datele de mai sus este $\{31{\cdot}2 \bmod 105, 31{\cdot}3 \bmod 105, 31{\cdot}6 \bmod 105, 31 \cdot 13 \bmod 105, 31 \cdot 27 \bmod 105, 31 \cdot 52 \bmod 105\}$ adică $\{62, 93, 81, 88, 102, 37\}$.

Cifrarea mesajului 101110 ($(m_1, ..., m_6)$) se face după formula $\sum_{i=1}^{n} m_i(mM_i \bmod p)$, adică pe baza cheii publice. Rezultatul va fi $62 + 81 + 88 + 102$, deci mesajul cifrat este $c = 333$.

Exerciţiul 13.2.2 *Să se descifreze mesajul* $C = 4608$ *cifrat cu ajutorul algoritmului Merkle-Hellman cu următorii parametrii:* $n = 9$*, cheia privată* $\{1, 2, 5, 10, 19, 40, 98, 179, 355\}$*, modulul* $p = 1717$ *şi multiplicatorul* $m = 507$*.*

Rezolvare: Se determină $C \cdot m^{-1} \bmod 1717 = 4608 \cdot 507^{-1} \bmod 1717 = 4608 \cdot 657 \bmod 1717 = 385$.

Apoi se rezolvă problema supercrescătoare a rucsacului de dimensiune 385 : $385 = 355 + 19 + 10 + 1$. Mesajul clar va conţine 1 pe poziţiile corespunzătoare acestor ponderi, deci se obţine 100110001.

13.3 Exerciţii propuse

Exerciţiul 13.3.1 *Dezvoltaţi o aplicaţie care să implementeze funcţiile de cifrare/descifrare ale sistemului Merkle-Hellman.*

Exerciţiul 13.3.2 *Să se construiască cheia publică pentru algoritmul Merkle-Hellman reprezentat de cheia privată* $\{2, 3, 6, 13, 27, 52\}$*, modulul* $p = 105$ *şi multiplicatorul* $m = 31$*. Cifraţi mesajul* 011111*.*

Răspuns: Cheia publică $\{62, 93, 81, 88, 102, 37\}$, mesajul cifrat $c = 401$.

Exerciţiul 13.3.3 *Să se construiască cheia publică pentru algoritmul Merkle-Hellman reprezentat de cheia privată* $\{2, 3, 6, 13, 27, 52\}$*, modulul* $p = 105$ *şi multiplicatorul* $m = 31$*. Cifraţi mesajul* 111110*.*

Răspuns: Cheia publică $\{62, 93, 81, 88, 102, 37\}$, mesajul cifrat $c = 426$.

Exerciţiul 13.3.4 *Să se construiască cheia publică pentru algoritmul Merkle-Hellman reprezentat de cheia privată* $\{2, 3, 6, 13, 27, 52\}$*, modulul* $p = 105$ *şi multiplicatorul* $m = 31$*. Cifraţi mesajul* 001110*.*

Răspuns: Cheia publică $\{62, 93, 81, 88, 102, 37\}$, mesajul cifrat $c = 271$.

Exerciţiul 13.3.5 *Să se descifreze mesajul* 333 *cifrat cu ajutorul algoritmului Merkle-Hellman cu următorii parametrii:* $n = 6$*, cheia privată* $\{2, 3, 6, 13, 27, 52\}$*, modulul* $p = 105$ *şi multiplicatorul* $m = 31$*.*

Răspuns: Cheia publică $\{62, 93, 81, 88, 102, 37\}$, mesajul clar 101110.

Exerciţiul 13.3.6 *Să se descifreze mesajul* 320 *cifrat cu ajutorul algoritmului Merkle-Hellman cu următorii parametrii:* $n = 6$*, cheia privată* $\{2, 5, 14, 23, 56, 125\}$*, modulul* $p = 228$ *şi multiplicatorul* $m = 191$*.*

Răspuns: Cheia publică $\{154, 43, 166, 61, 208, 163\}$, $m^{-1} \bmod p = 191$, mesajul clar 101000.

Exerciţiul 13.3.7 *Să se construiască cheia publică pentru algoritmul Merkle-Hellman cu următorii parametrii:* $n = 6$*, cheia privată* $\{3, 4, 11, 25, 50, 113\}$*, modulul* $p = 209$ *şi multiplicatorul* $m = 20$*. Cifraţi mesajul* 27*.*

Răspuns: Cheia publică este $\{60, 80, 11, 82, 164, 170\}$, mesajul cifrat 425.

Exerciţiul 13.3.8 *Să se descifreze mesajul* 425 *cifrat cu ajutorul algoritmului Merkle-Hellman cu următorii parametrii:* $n = 6$*, cheia privată* $\{3, 4, 11, 25, 50, 113\}$*, modulul* $p = 209$ *şi multiplicatorul* $m = 20$*.*

Răspuns: Cheia publică $\{60, 80, 11, 82, 164, 170\}$, $m^{-1} \bmod p = 115$, mesajul clar 011011.

Exerciţiul 13.3.9 *Să se construiască cheia publică pentru algoritmul Merkle-Hellman cu următorii parametrii: $n = 6$, cheia privată $\{3, 4, 11, 26, 58, 106\}$, modulul $p = 238$ şi multiplicatorul $m = 167$. Cifraţi mesajul* 29.

Răspuns: Cheia publică este $\{25, 192, 171, 58, 166, 90\}$, mesajul cifrat 511.

Exerciţiul 13.3.10 *Să se descifreze mesajul* 511 *cifrat cu ajutorul algoritmului Merkle-Hellman cu următorii parametrii: $n = 6$, cheia privată $\{3, 4, 11, 26, 58, 106\}$, modulul $p = 238$ şi multiplicatorul $m = 167$.*

Răspuns: Cheia publică $\{25, 192, 171, 58, 166, 90\}$, $m^{-1} \bmod p = 181$, mesajul clar 011101.

Capitolul 14

Sistemul de cifrare RSA

14.1 Breviar teoretic

Algoritmul *RSA* a fost inventat de către *Ron Rivest, Adi Shamir* şi *Leonard Adleman* şi a fost studiat în cadrul unor studii criptanalitice extinse. Securitatea RSA-ului se bazează pe dificultatea factorizării numerelor mari. Cheia publică şi cheia privată sunt funcţie de o pereche de numere prime mari (de 200 de cifre sau chiar mai mari). Factorizarea produsului a două numere prime implică recuperarea textului clar din textul cifrat, cunoscând cheia publică.

Pentru generarea a două chei (publică şi privată) se aleg aleatoriu două numere prime mari p şi q. Din raţionamente de securitate p şi q au acelaşi ordin de mărime. Se va calcula produsul $n = p \cdot q$. Se va alege apoi, aleatoriu, exponentul public (de cifrare) e astfel ca e şi $(p-1)(q-1)$ să fie relativ prime. Utilizând algoritmul extins al lui Euclid vom calcula exponentul privat (de descifrare) d astfel ca

$$ed \equiv 1 \bmod (p-1)(q-1).$$

Cu alte cuvinte

$$d \equiv e^{-1} \bmod (p-1)(q-1).$$

Remarcăm faptul că d şi n sunt relativ prime. Perechea (e, n) constituie cheia publică iar (d, p, q) este cheia privată. Cele două numere p şi q nu mai sunt necesare la cifrare/descifrare, dar nu vor fi niciodată făcute publice (cunoaşterea lor şi a exponentului de cifrare e conduce imediat la determinarea coeficientului de descifrare d, deci sistemul de criptare devine inutil).

Pentru a cifra un mesaj M îl vom diviza în blocuri de lungime mai mică n (cu date binare vom alege cea mai mare putere a lui 2 mai mică decât n). Dacă p şi q sunt numere prime de 100 cifre atunci n va avea sub 200 de cifre iar fiecare mesaj bloc M_i va avea sub 200 de cifre. Dacă trebuie cifrate blocuri de lungime fixă atunci vom apela la operaţia de padding cu zero. Mesajul cifrat C se va obţine prin concatenarea mesajelor C_i care au aproximativ aceeiaşi lungime. Formula de cifrare va fi:

$$C_i \equiv M_i^e \bmod n.$$

Pentru a descifra un mesaj se calculează:

$$M_i \equiv C_i^d \bmod n,$$

deoarece

$$\begin{aligned} C_i^d &\equiv (M_i^e)^d \equiv M_i^{ed} \equiv M_i^{k(p-1)(q-1)+1} \\ &\equiv M_i M_i^{k(p-1)(q-1)} \equiv M_i \bmod n. \end{aligned}$$

Observaţia 14.1 *Pentru a evita metodele de factorizare cunoscute numerele p şi q trebuie să fie numere prime tari. Un număr prim p se numeşte număr prim tare dacă:*
i) $p-1$ are un factor mare r;
ii) $p+1$ are un factor mare s;
iii) $r-1$ are un factor mare t.

Operaţia de semnare a unui mesaj M se realizează prin exponenţierea amprentei $H(M)$ cu ajutorul cheii private: $s = H(M)^d \bmod n$. Verificarea semnăturii se realizează prin comparaţia lui $H(M)$ cu $s^e \bmod n$.

În cazurile practice valoarea lui e este un număr relativ mic, deci d are o valoare mare. Acest lucru conduce la timpi de rulare diferiţi între operaţiile private (descifrare/semnare) şi cele publice(cifrare/verificare semnătură).

Pentru optimizarea calculelor de verificare a semnăturii se poate utiliza lema chinezească a resturilor (CRT), însă acest lucru induce vulnerabilităţi în mediul de implementare.

Astfel, dacă $p > q$, sunt **precalculate** valorile:

$$\begin{aligned} dP &= (e^{-1} \bmod n) \bmod (p-1), \\ dQ &= (e^{-1} \bmod n) \bmod (q-1), \\ qInv &= q^{-1} \bmod p. \end{aligned}$$

În **faza de calcul** se execută:

$$\begin{aligned} m_1 &= c^{dP} \bmod p, \\ m_2 &= c^{dQ} \bmod q, \\ h &= qInv(m_1 - m_2) \bmod p, \\ m &= m_2 + hq. \end{aligned}$$

Cheia privată ce se stochează fiind $(p, q, dP, dQ, qInv)$.

14.2 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 14.2.1 *Se dă numărul $n = 36187829$ despre care se cunoaste faptul că este un produs de două numere cu valoarea $\phi(n) = 36175776$. Factorizaţi numărul n.*

Rezolvare: Folosim relaţile $p + q = n - (p - 1)(q - 1) + 1$ şi $p - q = \sqrt{(p+q)^2 - 4n}$. Obţinem $p = 5657$ şi $q = 6397$.

Exerciţiul 14.2.2 *Să se cifreze mesajul $M = 3$, utilizând sistemul RSA cu următorii parametrii: $N = 187$ (modulul de cifrare), $e = 7$ (exponentul de cifrare).*

Rezolvare: Criptograma este: $C = M^e = 3^7 = 2187 = 130 \bmod 187$.

Exerciţiul 14.2.3 *Să se descifreze mesajul $C = 130$, utilizând sistemul RSA cu următorii parametrii: $N = 187 = 11 \cdot 17$ (modulul de cifrare), $e = 7$ (exponentul de cifrare).*

Rezolvare: Deoarece se cunoaşte factorizarea $N = 11 \cdot 17$, se poate calcula $\varphi(N) = 16 \cdot 10 = 160$, $\varphi(\varphi(N)) = 64$.
Exponentul de descifrare va fi:
$d = e^{\varphi(\varphi(N))-1} = 7^{63} = (7^9)^7 = (40353607)^7 = 7^7 = 823543 = 23 \bmod 160$.
Descifrarea mesajului cifrat C va fi: $C^d = 130^{23} = 3 = M \bmod 187$.

Exerciţiul 14.2.4 *Să se descifreze, utilizând CRT, mesajul cifrat $c = 8363$, pentru cazul în care $p = 137$, $q = 131$, $n = p \cdot q = 17947$, $e = 3$, $d = 11787$.*

Rezolvare: În faza de precalcul avem:

$$\begin{aligned} dP &= (e^{-1} \bmod n) \bmod (p-1) = 91, \\ dQ &= (e^{-1} \bmod n) \bmod (q-1) = 87, \\ qInv &= q^{-1} \bmod p = 114. \end{aligned}$$

Calculăm apoi:

$$\begin{aligned} m_1 &= c^{dP} \bmod p = 102, \\ m_2 &= c^{dQ} \bmod q = 120, \\ h &= qInv(m_1 - m_2) \bmod p = 3, \\ m &= m_2 + hq = 513. \end{aligned}$$

14.3 Exerciţii propuse

Exerciţiul 14.3.1 *Fie numerele prime $p = 211$ şi $q = 167$. Să se cifreze mesajul TEST cu ajutorul algoritmului RSA, utilizând exponentul public $e = 2^8 + 1$. Elementele din mesajul clar se codifică conform codului ASCII.*

Răspuns: $N = 35237$, $\phi(N) = 34860$, $d = 23873$, mesajul cifrat este: 01154 05746 04357 01154.

Exerciţiul 14.3.2 *Să se descifreze mesajul 01154 05746 04357 01154 cu ajutorul algoritmului RSA ($p = 211$ şi $q = 167$), utilizând exponentul public $e = 2^8 + 1$. Elementele din mesajul clar se decodifică conform codului ASCII.*

Răspuns: $N = 35237$, $\phi(N) = 34860$, $d = 23873$, mesajul clar este TEST.

Exerciţiul 14.3.3 *Să se cifreze mesajul $M = 146$, utilizând sistemul RSA cu următorii parametrii: $n = 187$ (modulul de cifrare), $e = 7$ (exponentul de cifrare).*

Răspuns: $C = 141$.

Exerciţiul 14.3.4 *Să se descifreze mesajul $C = 141$, utilizând sistemul RSA cu următorii parametrii: $n = 187$ (modulul de cifrare), $d = 23$(exponentul de descifrare).*

Răspuns: $M = 146$.

Exerciţiul 14.3.5 *Să se cifreze mesajul $M = 9$, utilizând sistemul RSA cu următorii parametrii: $n = 187$ (modulul de cifrare), $e = 7$ (exponentul de cifrare).*

Răspuns: $C = 70$.

Exerciţiul 14.3.6 *Să se descifreze mesajul $C = 70$, utilizând sistemul RSA cu următorii parametrii: $n = 187$ (modulul de cifrare), $d = 23$ (exponentul de descifrare).*

Răspuns: $M = 9$.

Exerciţiul 14.3.7 *Să se cifreze mesajul $M = 3$, utilizând sistemul RSA cu următorii parametrii: $n = 35237$ (modulul de cifrare), $e = 11$ (exponentul de cifrare).*

Răspuns: $C = 962$.

Exerciţiul 14.3.8 *Să se descifreze mesajul $C = 962$, utilizând sistemul RSA cu următorii parametrii: $n = 35237$ (modulul de cifrare), $d = 31691$ (exponentul de descifrare).*

Răspuns: $M = 3$.

Exerciţiul 14.3.9 *Să se cifreze mesajul $M = 5$, utilizând sistemul RSA cu următorii parametrii: $n = 221$ (modulul de cifrare), $e = 11$ (exponentul de cifrare).*

Răspuns: $C = 164$.

Exerciţiul 14.3.10 *Să se descifreze mesajul $C = 164$, utilizând sistemul RSA cu următorii parametrii: $n = 221 = 13 \cdot 17$ (modulul de cifrare), $e = 11$ (exponentul de cifrare).*

Răspuns: $M = 5$, $d = 35$.

Exerciţiul 14.3.11 *Să se cifreze mesajul $M = 4$, utilizând sistemul RSA cu următorii parametrii: $N = 209$ (modulul de cifrare), $e = 11$ (exponentul de cifrare).*

Rezolvare: Criptograma este: $C = M^e = 4^{11} = 92 \bmod 209$.

Exerciţiul 14.3.12 *Să se descifreze mesajul $C = 92$, utilizând sistemul RSA cu următorii parametrii: $N = 209 = 11 \cdot 19$ (modulul de cifrare), $e = 11$ (exponentul de cifrare).*

Rezolvare: Deoarece se cunoaşte factorizarea $N = 11 \cdot 19$, se poate calcula $\varphi(N) = 18 \cdot 10 = 180$, $d = 131$, $M = 4$.

Capitolul 15

Sistemul de cifrare ElGamal

15.1 Breviar teoretic

Algoritmul de cifrare ElGamal este definit de un număr prim p şi un element $g \in Z_p^*$ primitiv, numit generator. Pentru cheia privată $x \in Z_p^*$ se calculează $y = g^x \bmod p$, cheia publică fiind tripletul (y, g, p).

Pentru a cifra un mesaj $M \in Z_p$ se alege aleatoriu $k \in Z_{p-1}$, textul cifrat fiind $(y_1, y_2) = (g^k \bmod p, My^k \bmod p)$.

Pentru a descifra mesajul (y_1, y_2) se calculează $y_2(y_1^x)^{-1} \bmod p$.

15.2 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 15.2.1 *Să se cifreze mesajul $M = 4$ cu ajutorul algoritmului ElGamal cu parametrii $p = 17$, $g = 14$, $x = 2$.*

Rezolvare: Cheia publică este $(y, g, p) = (14^2 \bmod 17, 14, 17) = (9, 14, 17)$, cheia privată $x = 2$. Alegem, spre exemplu, $k = 7$ relativ prim cu $16 = p - 1$. Obţinem mesajul cifrat $C = (14^7 \bmod 17, 4 \cdot 9^7 \bmod 17) = \{6, 8\}$.

Exerciţiul 15.2.2 *Să se descifreze mesajul $\{6, 8\}$, ştiind că a fost cifrat cu ajutorul algoritmului ElGamal cu parametrii $p = 17$, $g = 14$, $x = 2$.*

Rezolvare: Cheia publică este $\{y, g, p\} = \{9, 14, 17\}$, cheia privată $x = 2$. Mesajul clar se obţine aplicând formula $y_2 y_1^{-x} \bmod p = 4$.

15.3 Exerciţii propuse

Exerciţiul 15.3.1 *Să se cifreze mesajul 5 cu ajutorul algoritmului ElGamal cu parametrii $p = 23$, $g = 14$, $x = 2$. Valoarea k utilizată pentru cifrare este 7.*

Răspuns: Mesajul cifrat este $(19, 11)$.

Exerciţiul 15.3.2 *Să se cifreze mesajul* 5 *cu ajutorul algoritmului ElGamal cu parametrii* $p = 23$, $g = 14$, $x = 2$. *Valoarea* k *utilizată pentru cifrare este* 9.

Răspuns: Mesajul cifrat este $(21, 20)$.

Exerciţiul 15.3.3 *Să se cifreze mesajul* 3 *cu ajutorul algoritmului ElGamal cu parametrii* $p = 47$, $g = 14$, $x = 3$. *Valoarea* k *utilizată pentru cifrare este* 5.

Răspuns: Mesajul cifrat este $(3, 34)$.

Exerciţiul 15.3.4 *Să se cifreze mesajul* 8 *cu ajutorul algoritmului ElGamal cu parametrii* $p = 47$, $g = 4$, $x = 2$. *Valoarea* k *utilizată pentru cifrare este* 3.

Răspuns: Mesajul cifrat este $(17, 9)$.

Exerciţiul 15.3.5 *Să se cifreze mesajul* 4 *cu ajutorul algoritmului ElGamal cu parametrii* $p = 23$, $g = 7$, $x = 3$. *Valoarea* k *utilizată pentru cifrare este* 3.

Răspuns: Mesajul cifrat este $(21, 14)$.

Exerciţiul 15.3.6 *Să se descifreze mesajul* $(17, 9)$ *cu ajutorul algoritmului ElGamal cu parametrii* $p = 47$, $g = 4$, $x = 2$.

Răspuns: Mesajul clar este 8.

Exerciţiul 15.3.7 *Să se descifreze mesajul* $(3, 34)$ *cu ajutorul algoritmului ElGamal cu parametrii* $p = 47$, $g = 14$, $x = 3$.

Răspuns: Mesajul clar este 3.

Exerciţiul 15.3.8 *Să se descifreze mesajul* $(21, 14)$ *cu ajutorul algoritmului ElGamal cu parametrii* $p = 23$, $g = 7$, $x = 3$.

Răspuns: Mesajul clar este 4.

Capitolul 16

Aritmetica pe curbe eliptice

16.1 Breviar teoretic

Definiţia 16.1 *O curbă eliptică E este constituită din elemente (numite puncte) de tipul (x, y) ce satisfac ecuaţia:*

$$y^2 \equiv x^3 + ax + b \bmod p$$

unde a şi b sunt constante astfel încât $4a^3 + 27b^2 \neq 0 \bmod p$ şi p este un număr prim, împreună cu un element singular, notat $\mathcal{O}$ şi numit punctul de la infinit. Acest punct poate fi privit ca fiind punctul din vârful şi de la baza oricărei linii verticale.

O curbă eliptică E are o structură de grup abelian împreună cu operaţia adunare. Adunarea a două puncte de pe o curbă eliptică este definită în concordanţă cu o mulţime simplă de reguli (vezi figura 16.1).

Fiind date două puncte pe E, $P_1(x_1, y_1)$ şi $P_2(x_2, y_2)$, avem următoarele cazuri:

- dacă $x_2 = x_1$ şi $y_2 = -y_1$ atunci $P_1 + P_2 = \mathcal{O}$.
- altfel $P_1 + P_2 = (x_3, y_3)$, unde:

$$\begin{cases} x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2 \\ y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1 \end{cases}$$

cu

$$\lambda = \begin{cases} \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ dacă } P_1 \neq P_2 \\ \dfrac{3x_1^2 + a}{2y_1}, \text{dacă } P_1 = P_2. \end{cases}$$

Observaţia 16.1 *A nu se confunda punctul la infinit $\mathcal{O}$ cu perechea $(0, 0)$. Punctul la infinit aparţine tuturor curbelor eliptice, în timp ce punctul $(0, 0)$ este un element doar pentru curbele eliptice cu parametrul $b = 0$.*

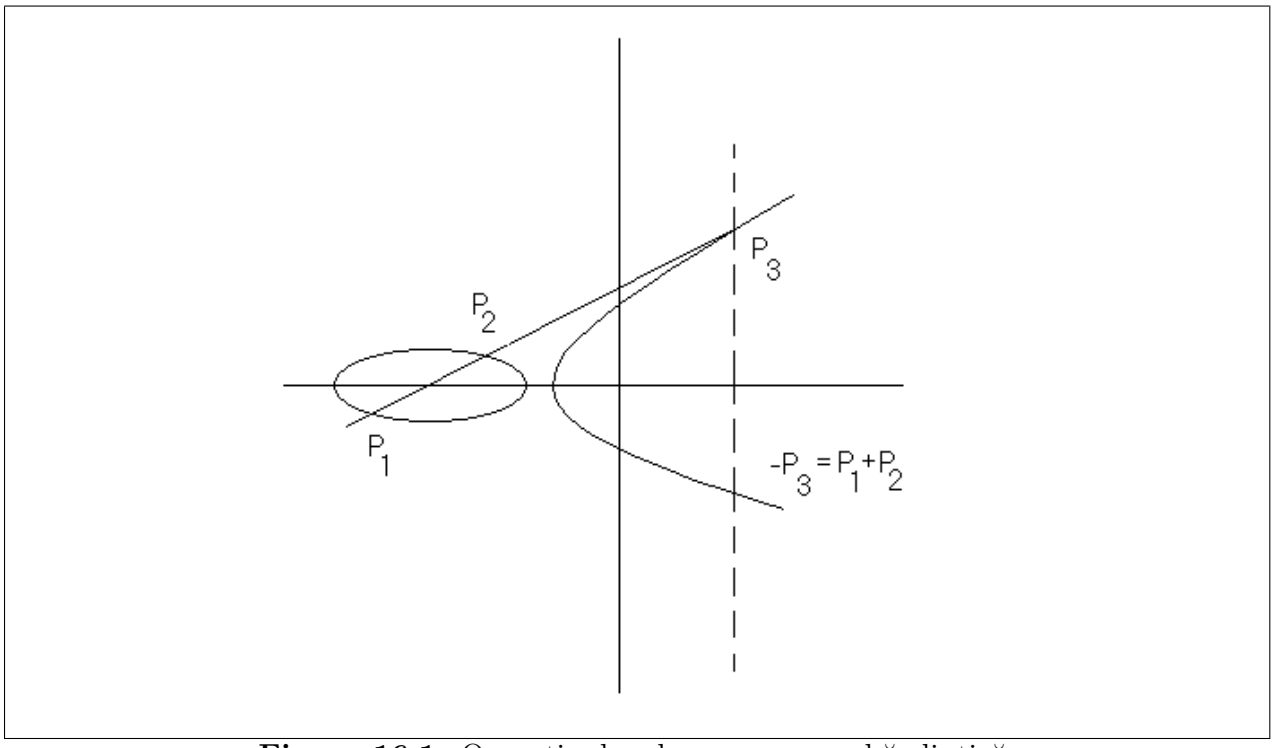


Figura 16.1: Operaţia de adunare pe o curbă eliptică.

16.2 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 16.2.1 *Fie curba eliptică* $y^2 = x^3+7x+4$ *definită peste* F_{71}. *Să se adune punctele* $P(15, 17)$ *şi* $Q(43, 24)$.

Rezolvare:
Coordoantele punctului $P + Q = (x_3, y_3)$, sunt date de formulele:

$$\begin{cases} x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2 \\ y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1 \end{cases}$$

unde $\lambda = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Pentru calculul $\lambda = 7 \cdot (28^{-1} \bmod 71)$, se foloseşte algoritmul lui Euclid care gaseşte $33 = 28^{-1} \bmod 71$, deci $\lambda = 231$.

Atunci $x_3 = 231^2 - 15 - 43 \bmod 71 = 53$ iar $y_3 = 231(15 - 53) - 17 \bmod 71 = 9$. În concluzie, coordoantele punctului care reprezinta suma celor doua puncte de pe curba eliptică dată sunt $(53, 9)$.

Exerciţiul 16.2.2 *Fie curba eliptică* $y^2 = x^3 + x + 3$ *definită peste* F_{17}. *Arătaţi că punctul* $(2, 8)$ *este un generator al punctelor de pe curba eliptică.*

Rezolvare: Succesiv putem scrie $1P = (2, 8)$, $2P = (12, 3)$, $3P = (16, 16)$, $4P = (8, 8)$, $5P = (7, 9)$, $6P = (6, 15)$, $7P = (11, 6)$, $8P = (3, 13)$, $9P = (3, 4)$, $10P = (11, 11)$, $11P = (6, 2)$, $12P = (7, 8)$, $13P = (8, 9)$, $14P = (16, 1)$, $15P = (12, 14)$, $16P = (2, 9)$, $17P = O$.

16.3 Exerciţii propuse

Exerciţiul 16.3.1 *Fie curba eliptică* $y^2 = x^3+2x+3$ *definită peste* F_{23}. *Să se adune punctele* $P(6,1)$ *şi* $Q(13,8)$.

Răspuns: $R(5,0)$.

Exerciţiul 16.3.2 *Fie curba eliptică* $y^2 = x^3 + 7x + 4$ *definită peste* F_{71}. *Se dă punctul* $P(15,17)$. *Aflaţi* $2P$.

Răspuns: $(66,25)$.

Exerciţiul 16.3.3 *Fie curba eliptică* $y^2 = x^3 + x + 6$ *definită peste* F_{11}. *Să se arate că punctul* $(2,7)$ *este un generator al punctelor de pe curba eliptică.*

Răspuns: $1P = (2,7)$, $2P = (5,2)$, $3P = (8,3)$, $4P = (10,2)$, $5P = (3,6)$, $6P = (7,9)$, $7P = (7,2)$, $8P = (3,5)$, $9P = (10,9)$, $10P = (8,8)$, $11P = (5,9)$, $12P = (2,4)$, $13P = O$.

Exerciţiul 16.3.4 *Fie curba eliptică* $y^2 = x^3 + 6x + 11$ *definită peste* F_{17}. *Se dă punctul* $P(6,5)$. *Aflaţi* $2P$.

Răspuns: $(1,1)$.

Exerciţiul 16.3.5 *Fie curba eliptică* $y^2 = x^3 + x + 3$ *definită peste* F_7. *Arătaţi că punctul* $(4,6)$ *este un generator al punctelor de pe curba eliptică.*

Răspuns: Succesiv obţinem $1P = (4,6)$, $2P = (6,1)$, $3P = (5,0)$, $4P = (6,6)$, $5P = (4,1)$, $6P = O$.

Exerciţiul 16.3.6 *Fie curba eliptică* $y^2 = x^3 + 9$ *definită peste* F_{37}. *Se dă punctul* $P(6,22)$. *Aflaţi* $2P$.

Răspuns: $(35,1)$.

Exerciţiul 16.3.7 *Fie curba eliptică* $y^2 = x^3+9$ *definită peste* F_{37}. *Se dau punctele* $P(6,22)$ *şi* $Q(8,15)$. *Aflaţi* $P + Q$.

Răspuns: $(26,11)$.

Exerciţiul 16.3.8 *Fie curba eliptică* $y^2 = x^3 + 11x + 20$ *definită peste* F_{23}. *Se dau punctele* $P(7,7)$ *şi* $Q(15,15)$. *Aflaţi* $P + Q$.

Răspuns: $(2,21)$.

Exerciţiul 16.3.9 *Fie curba eliptică* $y^2 = x^3 + 7x + 11$ *definită peste* F_{23}. *Se dau punctele* $P(21, 14)$ *şi* $Q(7, 9)$. *Aflaţi* $P + Q$.

Răspuns: $(22, 7)$.

Exerciţiul 16.3.10 *Fie curba eliptică* $y^2 = x^3 + 5x + 5$ *definită peste* F_{17}. *Se dă punctul* $P(3, 8)$. *Aflaţi* $3P$.

Răspuns: $(12, 5)$.

Exerciţiul 16.3.11 *Fie curba eliptică* $y^2 = x^3 + 3x$ *definită peste* F_{11}. *Arătaţi că punctele* $P(0, 0)$ *şi* $Q(1, 2)$ *aparţin curbei. Aflaţi* $P + Q$.

Răspuns: Cele 2 puncte satisfac fiecare ecuaţia curbei eliptice. Suma lor este $(3, 5)$.

Exerciţiul 16.3.12 *Fie curba eliptică* $y^2 = x^3 + 6x + 11$ *definită peste* F_{17}. *Se dau punctele* $P(12, 3)$ *şi* $Q(6, 12)$. *Aflaţi* $P + Q$.

Răspuns: $(14, 0)$.

Capitolul 17

Sistemul de cifrare ElGamal bazat pe curbe eliptice

17.1 Breviar teoretic

Algoritmul ElGamal poate fi extins pe orice grup finit $(G, \circ)$, în care problema logaritmului discret este dificilă, în particular şi pe grupul punctelor de pe o curbă eliptică.

Astfel, fie $\alpha \in G$ pentru care problema logaritmului în subgrupul $H = \{\alpha^i | i \geq 0\}$ este dificilă. Pe baza cheii private $x \in Z$, se construieşte $\beta = \alpha^x$, cheia publică fiind $\{G, \alpha, \beta\}$.

Pentru a cifra un mesaj M se alege aleatoriu $k \in Z_{|H|}$ şi se aplică regula de cifrare: $E(M, k) = (\alpha^k, M \circ \beta^k)$.

Mesajul clar m se recuperează din mesajul cifrat (y_1, y_2) după regula: $y_2 \circ (y_1^x)^{-1}$. Într-adevăr $y_2 \circ (y_1^x)^{-1} = M \circ \beta^k \circ ((\alpha^k)^x)^{-1} = M \circ \alpha^{kx} \circ (\alpha^{kx})^{-1} = M$.

17.2 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 17.2.1 *Să se cifreze mesajul* $(10, 9)$ *utilizând curba eliptică (publică)* $E : y^2 = x^3 + x + 6$ *pe* $\mathbf{Z}_{11}$ *cu ajutorul algoritmului ElGamal.*

Rezolvare: Pentru a calcula punctele curbei eliptice se calculează valorile $z = x^3 + x + 6 \bmod 11$, se vede care din aceste valori sunt reziduri pătratice cu ajutorul teoremei lui Euler (z este reziduu pătratic dacă şi numai dacă $z^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \bmod p$) şi apoi se calculează rădăcinile pătrate ale acestor reziduri prin formula $y = \pm z^{\frac{p+1}{2}} \bmod p$). Punctele curbei eliptice vor fi: $\{(2,7), (2,4), (3,5), (3,6), (5,2), (5,9), (7,2), (7,9), (8,3), (8,8), (10,2), (10,9), \mathcal{O}\}$.

Grupul E este grup ciclic (numărul de elemente este al grupului este număr prim) şi se ia ca generator pentru acesta elementul (public) $\alpha = (2, 7)$. Cheia privată de descifrare, notată prin d, este o valoare între 1 şi numărul de puncte de pe o curbă eliptică -1. Cheia publică, notată prin β, se obţine din α şi exponentul secret d prin formula $\beta = d\alpha$.

Operaţia de cifrare a mesajul M cu ajutorul cheii (secrete) k este:

$$E(M, k) = (k\alpha, M + k\beta).$$

Operaţia de descifrare pentru a obţine M este:

$$D_k(y_1, y_2) = y_2 - dy_1.$$

Fie $d = 3$. Se determină $\beta = 3(2, 7) = (8, 3)$.

Considerând valoarea aleatoare $k = 4$, se obţine: $E(M, k) = (4(2, 7), (10, 9) + 4(8, 3)) = ((10, 2), (10, 9) + (2, 4)) = ((10, 2), (3, 5))$

Exerciţiul 17.2.2 *Să se descifreze mesajul* $((10, 2), (3, 5))$ *ştiind că a fost cifrat cu algoritmul ElGamal utilizând curba eliptică(publică)* $E : y^2 = x^3 + x + 6$ *pe* $\mathbf{Z}_{11}$ *şi cheia privată* $d = 3$.

Rezolvare: Se determină mesajul clar ca fiind: $M = y_2 - dy_1 = (3, 5) - 3(10, 2) = (3, 5) - (2, 4) = (3, 5) + (2, 7) = (10, 9)$.

17.3 Exerciţii propuse

Exerciţiul 17.3.1 *Se consideră algoritmul ElGamal precizat de parametrii* $E : y^2 = x^3 + x + 6$ *peste* $\boldsymbol{Z}_{11}$. *Arătaţi că* $\alpha = (2, 7)$ *este un generator al grupului* E. *Se consideră cheia privată* $d = 5$. *Să se cifreze mesajul* $(10, 9)$ *cu valoarea aleatoare* $k = 3$.

Răspuns: Valoarea cheii publice este $\beta = d\alpha = (3, 6)$. Mesajul cifrat este $(k\alpha, M + k\beta) = ((8, 3), (10, 9) + (5, 2)) = ((8, 3), (5, 9))$.

Exerciţiul 17.3.2 *Se consideră algoritmul ElGamal precizat de parametrii* $E : y^2 = x^3 + x + 6$ *peste* $\boldsymbol{Z}_{11}$. *Arătaţi că* $\alpha = (2, 7)$ *este un generator al grupului* E. *Să se descifreze mesajul* $((8, 3), (5, 9))$ *cu ajutorul cheii private* $d = 5$.

Răspuns: $D_k(y_1, y_2) = (y_2 - dy_1) = ((5, 9) - 5(8, 3)) = ((5, 9) - (5, 2)) = ((5, 9) + (5, 9)) = (10, 9)$.

Exerciţiul 17.3.3 *Se consideră algoritmul ElGamal precizat de parametrii* $E : y^2 = x^3 + x + 6$ *peste* $\boldsymbol{Z}_{13}$. *Arătaţi că* $\alpha = (4, 3)$ *este un generator al grupului* E. *Se consideră cheia privată* $d = 3$. *Să se cifreze mesajul* $(3, 7)$ *cu valoarea aleatoare* $k = 4$.

Răspuns: Valoarea cheii publice este $\beta = d\alpha = (3, 7)$. Mesajul cifrat este $(k\alpha, M + k\beta) = ((9, 4), (3, 7) + (4, 10)) = ((9, 4), (2, 9))$.

Exerciţiul 17.3.4 *Se consideră algoritmul ElGamal precizat de parametrii* $E : y^2 = x^3 + x + 6$ *peste* $\boldsymbol{Z}_{13}$. *Arătaţi că* $\alpha = (4, 3)$ *este un generator al grupului* E. *Să se descifreze mesajul* $((9, 4), (2, 9))$ *cu ajutorul cheii private* $d = 3$.

Răspuns: $D_k(y_1, y_2) = (y_2 - dy_1) = ((2, 9) - 3(9, 4)) = ((2, 9) - (4, 10)) = ((2, 9) + (4, 3)) = (3, 7)$.

Exerciţiul 17.3.5 *Se consideră algoritmul ElGamal precizat de parametrii* $E : y^2 = x^3 + x + 6$ *peste* $\boldsymbol{Z}_{17}$. *Se alege generatorul subgrupului ciclic* $\alpha = (1, 5)$ *al lui* E. *Se consideră cheia privată* $d = 7$. *Să se cifreze mesajul* $(8, 4)$ *utilizând valoarea aleatoare* $k = 3$.

Răspuns: Valoarea cheii publice este $\beta = d\alpha = (7, 13)$. Mesajul cifrat este $(k\alpha, M + k\beta) = ((7, 4), (8, 4) + (1, 5)) = ((7, 4), (16, 2))$.

Exerciţiul 17.3.6 *Se consideră algoritmul ElGamal precizat de parametrii* $E : y^2 = x^3 + x + 6$ *peste* $\boldsymbol{Z}_{17}$. *Să se descifreze mesajul* $((7, 4), (16, 2))$ *cu ajutorul cheii private* $d = 3$.

Răspuns: $D_k(y_1, y_2) = (y_2 - dy_1) = ((16, 2) - 7(7, 4)) = ((16, 2) - (1, 5)) = ((2, 9) + (1, 12)) = (8, 4)$.

Exerciţiul 17.3.7 *Se consideră algoritmul ElGamal precizat de parametrii* $E : y^2 = x^3 + 2x + 6$ *peste* $\boldsymbol{Z}_{29}$. *Se alege generatorul subgrupului ciclic* $\alpha = (20, 10)$ *al lui* E. *Se consideră cheia privată* $d = 5$. *Să se cifreze mesajul* $(10, 9)$ *utilizând valoarea aleatoare* $k = 6$.

Răspuns: Valoarea cheii publice este $\beta = d\alpha = (1, 3)$. Mesajul cifrat este $(k\alpha, M + k\beta) = ((14, 9), (10, 9) + (14, 9)) = ((14, 9), (5, 20))$.

Exerciţiul 17.3.8 *Se consideră algoritmul ElGamal precizat de parametrii* $E : y^2 = x^3 + 2x + 6$ *peste* $\boldsymbol{Z}_{29}$. *Să se descifreze mesajul* $((14, 9), (5, 20))$ *cu ajutorul cheii private* $d = 5$.

Răspuns: $D_k(y_1, y_2) = (y_2 - dy_1) = ((5, 20) - 5(14, 9)) = ((5, 20) - (14, 9)) = ((5, 20) + (14, 20)) = (10, 9)$.

Exerciţiul 17.3.9 *Se consideră algoritmul ElGamal precizat de parametrii* $E : y^2 = x^3 + 2x + 7$ *peste* $\boldsymbol{Z}_{17}$. *Să se descifreze mesajul* $((16, 2), (2, 6))$ *cu ajutorul cheii private* $d = 5$.

Răspuns: $D_k(y_1, y_2) = (y_2 - dy_1) = ((2, 6) - 5(16, 2)) = ((2, 6) - (16, 2)) = ((2, 6) + (16, 15)) = (8, 12)$.

Capitolul 18

Sistemul de cifrare Menezes-Vanstone

18.1 Breviar teoretic

În acest sistem de cifrare - de fapt o variantă a lui ElGamal - curba eliptică este utilizată pentru mascare, textele clare şi cele cifrate putând fi formate din orice elemente nenule (nu neapărat puncte din E).

Fie E o curbă eliptică peste Z_p, $p > 3$ număr prim care conţine un subgrup ciclic G în care problema logaritmului discret este dificilă. Pe baza cheii private $d \in Z$, se construieşte $\beta = d\alpha$, cheia publică fiind $\{E, \alpha, \beta\}$.

Pentru a cifra mesajul $m = (m_1, m_2) \in Z_p^* \times Z_p^*$ se alege aleatoriu k şi se construieşte textul cifrat (y_0, y_1, y_2) după regulile:

$$y_0 = k\alpha,\ (c_1, c_2) = k\beta,\ y_i = c_i m_i,\ i = 1, 2.$$

La descifrare, cunoscând (y_0, y_1, y_2) şi cheia privată d se determină textul clar astfel:

$$(m_1, m_2) = (y_1 c_1^{-1} \bmod p, y_2 c_2^{-1} \bmod p), \text{ unde } dy_0 = (c_1, c_2)$$

18.2 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 18.2.1 *Se consideră algoritmul Menezes-Vanstone precizat de parametrii* $E : y^2 = x^3 + x + 6$ *peste* $\boldsymbol{Z}_{13}$. *Arătaţi că* $\alpha = (4, 3)$ *este un generator al grupului* E. *Se consideră cheia privată* $d = 3$. *Să se cifreze mesajul* $(3, 7)$ *cu valoarea aleatoare* $k = 4$.

Rezolvare: Curba eliptica are 13 puncte deci grupul E este ciclic şi orice element este generator.

Se calculează $\beta = 3\alpha = 3 \cdot (4, 3) = (3, 7)$

Cifrarea mesajului $(3, 7)$ cu valoarea aleatoare $k = 4$ se face dupa următoarea formulă $e_k(x, k) = (y_0, y_1, y_2)$ unde $y_0 = k \cdot \alpha, (c_1, c_2) = k \cdot \beta, y_i = c_i \cdot x_i (\mathrm{mod} p)$ pentru $i = 1, 2$.

Calculăm $y_0 = 4 \cdot (4, 3) = (9, 4)$ iar $(c_1, c_2) = 4 \cdot \beta = 12\alpha = (4, 10)$ deci $c_1 = 4$ iar $c_2 = 10$

Se calculează şi $y_1 = 4 \cdot 3 \bmod 13 = 12$ şi $y_2 = 10 \cdot 7 \bmod 13 = 5$. Rezultatul cifrarii mesajului $(3, 7)$ cu valoarea aleatoare $k = 4$ este ((9,4), 12,5).

18.3 Exerciţii propuse

Exerciţiul 18.3.1 *Se consideră algoritmul Menezes-Vanstone precizat de parametrii* $E : y^2 = x^3 + x + 6$ *peste* $\boldsymbol{Z}_{13}$. *Arătaţi că* $\alpha = (4, 3)$ *este un generator al grupului* E. *Se consideră cheia privată* $d = 3$. *Să se cifreze mesajul* $(1, 1)$ *cu valoarea aleatoare* $k = 2$.

Răspuns: $\beta = (3, 7)$, $(y_0, y_1, y_2) = ((2, 9), 11, 3)$.

Exerciţiul 18.3.2 *Se consideră curba eliptică* $E : y^2 = x^3 + x + 6$ *peste* $\boldsymbol{Z}_{13}$. *Câte puncte are această curbă? Gasiţi un generator al punctelor de pe curba eliptică. Câte elemente se pot cifra prin algoritmul ElGamal? Dar cu ajutorul algoritmului Menezes-Vanstone?*

Răspuns: Curba are 13 puncte. Cum numărul de puncte este prim, grupul E este ciclic şi deci orice punct din E este generator. Folosind sistemul ElGamal se pot cifra numai punctele de pe curbă, deci 13. Cu Menezes-Vanstone se poate cifra orice punct din $\mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{13}$.

Exerciţiul 18.3.3 *Se consideră algoritmul Menezes-Vanstone precizat de parametrii* $E : y^2 = x^3 + 2x + 5$ *peste* $\boldsymbol{Z}_{11}$. *Cunoscând cheia publică* $(\alpha, \beta) = ((3, 7), (4, 0))$, *să se cifreze mesajul* $(5, 2)$ *cu valoarea aleatoare* $k = 7$.

Răspuns: $(y_0, y_1, y_2) = ((0, 7), 9, 0)$.

Exerciţiul 18.3.4 *Se consideră algoritmul Menezes-Vanstone precizat de parametrii* $E : y^2 = x^3 + 7x + 3$ *peste* $\boldsymbol{Z}_{17}$. *Cunoscând cheia publică* $(\alpha, \beta) = ((12, 8), (7, 2))$, *să se cifreze mesajul* $(14, 7)$ *cu valoarea aleatoare* $k = 7$.

Răspuns: $(y_0, y_1, y_2) = ((12, 9), 13, 3)$.

Exerciţiul 18.3.5 *Se consideră algoritmul Menezes-Vanstone precizat de parametrii* $E : y^2 = x^3 + 3x + 2$ *peste* $\boldsymbol{Z}_{23}$. *Cunoscând cheia publică* $(\alpha, \beta) = ((15, 15), (15, 8))$, *să se cifreze mesajul* $(13, 19)$ *cu valoarea aleatoare* $k = 2$.

Răspuns: $(y_0, y_1, y_2) = ((18, 0), 4, 0)$.

Exerciţiul 18.3.6 *Se consideră algoritmul Menezes-Vanstone precizat de parametrii* $E : y^2 = x^3 + 2x + 7$ *peste* $\boldsymbol{Z}_{23}$. *Cunoscând cheia publică* $(\alpha, \beta) = ((5, 21), (16, 15))$, *să se cifreze mesajul* $(8, 10)$ *cu valoarea aleatoare* $k = 4$.

Răspuns: $(y_0, y_1, y_2) = ((21, 8), 13, 12)$.

Exerciţiul 18.3.7 *Se consideră algoritmul Menezes-Vanstone precizat de parametrii* $E : y^2 = x^3 + 2x + 7$ *peste* $\boldsymbol{Z}_{23}$. *Cunoscând cheia publică* $(\alpha, \beta) = ((5, 21), (16, 15))$, *să se cifreze mesajul* $(19, 2)$ *cu valoarea aleatoare* $k = 5$.

Răspuns: $(y_0, y_1, y_2) = ((15, 13), 5, 16)$.

Exerciţiul 18.3.8 *Se consideră algoritmul Menezes-Vanstone precizat de parametrii* E : $y^2 = x^3 + 2x + 5$ *peste* $\boldsymbol{Z}_{17}$. *Cunoscând cheia privată* $d = 3$, *să se descifreze mesajul* $(y_0, y_1, y_2) = ((1, 12), 2, 10)$.

Răspuns: $(m_1, m_2) = (12, 5)$.

Exerciţiul 18.3.9 *Se consideră algoritmul Menezes-Vanstone precizat de parametrii* E : $y^2 = x^3 + 5x + 4$ *peste* $\boldsymbol{Z}_{19}$. *Cunoscând cheia privată* $d = 2$, *să se descifreze mesajul* $(y_0, y_1, y_2) = ((17, 9), 12, 14)$.

Răspuns: $(m_1, m_2) = (11, 11)$.

Exerciţiul 18.3.10 *Se consideră algoritmul Menezes-Vanstone precizat de parametrii* E : $y^2 = x^3 + 2x + 7$ *peste* $\boldsymbol{Z}_{23}$. *Cunoscând cheia privată* $d = 7$, *să se descifreze mesajul* $(y_0, y_1, y_2) = ((21, 8), 8, 4)$.

Răspuns: $(m_1, m_2) = (12, 11)$.

Capitolul 19

Funcţii de dispersie

19.1 Breviar teoretic

Problematica funcţiilor hash fiind deosebit de vastă, în cele ce urmează ne vom opri numai asupra aspectelor strict necesare înţelegerii utilizării acestor funcţii în cadrul algoritmilor de semnătură digitală.

Definiţia 19.1 *O funcţie f se numeşte funcţie unidirecţională dacă:*
a) fiind dat x, este uşor de calculat $f(x)$;
b) fiind dat $f(x)$, este greu de calculat x.

Definiţia 19.2 *O funcţie f se numeşte funcţie unidirecţională cu trapă (trap-door) dacă:*
a) fiind dat x, este uşor de calculat $f(x)$;
b) fiind dat $f(x)$, este greu de calculat x;
c) pe baza unei informaţii secrete y, este uşor de calculat x din $f(x)$.

Definiţia 19.3 *Funcţia hash este o funcţie care se aplică unui şir de lungime oarecare obţinându-se un şir de lungime fixată (de obicei, mai mică decât lungimea şirului de intrare).*

Definiţia 19.4 *O funcţie H se numeşte funcţie hash unidirecţională dacă:*
a) H este funcţie hash;
b) H este funcţie unidirecţională.

Pentru a putea fi folosite pentru semnături digitale, funcţiile hash unidirecţionale trebuie să mai îndeplinească, printre altele una din următoarele două condiţii:
1) oricare ar fi M dat, este greu de găsit M' astfel încât $H(M') = H(M)$;
2) este greu de găsit o pereche oarecare M, M' astfel încât $H(M) = H(M')$.
Funcţiile hash unidirecţionale care îndeplinesc condiţia (1) se numesc funcţii hash unidirecţionale slabe (sau universale), iar cele care îndeplinesc condiţia (2) se numesc funcţii hash unidirecţionale tari (sau fără coliziuni).

Prima condiţie este uşor de justificat: dacă A a semnat mesajul M cu $H(M)$, iar B obţine M' astfel încât $H(M') = H(M)$, atunci B ar putea pretinde că A ar fi semnat mesajul M'.

A doua condiţie este justificată de existenţa atacului *birthday*, metodă generală de atac aplicabilă oricărei funcţii hash, atac inspirat de paradoxul matematic al zilei de naştere.

Datorită atacului birthday, pentru o funcţie hash care are la ieşire un şir cu o lungime de m biţi (2^m posibilităţi) se pot găsi coliziuni generând doar $2^{m/2}$ perechi de mesaje-valori hash.

În aceste condiţii, algoritmii hash care produc valori hash de 64 biţi se consideră nesiguri deoarece, cu tehnologia actuală, se pot genera $2^{64/2} = 2^{32}$ mesaje şi deci este posibilă găsirea de mesaje care să intre în coliziune. De aceea se recomandă ca valoarea hash să fie de lungime de cel puţin 128 biţi.

În cele ce urmează vom descrie funcţia de dispersie Chaum -van Heijt-Pfitzmann. Fie p un număr prim mare astfel ca $q = \dfrac{p-1}{2}$ să fie de asemenea prim. Considerăm α, $\beta \in \mathbf{Z}_p$ elemente primitive. Calculul valorii logaritmului discret $log_\alpha \beta$ este dificil din punct de vedere computaţional. Vom defini funcţia de dispersie *Chaum -van Heijt-Pfitzmann* $h : \mathbf{Z}_q \times \mathbf{Z}_q \rightarrow \mathbf{Z}_p^*$ prin

$$h(x_1, x_2) = \alpha^{x_1} \beta^{x_2} \bmod p.$$

Dacă există o coliziune pentru funcţia Chaum -van Heijt-Pfitzmann atunci calculul logaritmului discret $log_\alpha \beta$ este uşor.

Să vedem cum anume se poate determina valoarea logaritmului discret $log_\alpha \beta$. Să presupunem că avem coliziunea $h(x_1, x_2) = h(x_3, x_4)$ cu $(x_1, x_2) \neq (x_3, x_4)$. Deci $\alpha^{x_1}\beta^{x_2} = \alpha^{x_3}\beta^{x_4} \bmod p$ sau echivalent $\alpha^{x_1 - x_3} = \beta^{x_4 - x_2} \bmod p$. Fie $d = (x_4 - x_2, p-1)$. Deoarece $p - 1 = 2q$ iar q este număr prim avem $d \in \{1, 2, q, p-1\}$.

Cazul $d = 1$. Deoarece $(x_4 - x_2, p-1) = 1$ există $y = (x_4 - x_2)^{-1} \bmod p$. Deci:

$$\beta = \beta^{(x_4 - x_2)y} \bmod p = \alpha^{(x_1 - x_3)y} \bmod p.$$

Deci $log_\alpha \beta = (x_1 - x_3)(x_4 - x_2)^{-1} \bmod (p-1)$.

Cazul $d = 2$. Deoarece $p - 1 = 2q$, q număr prim, rezultă $(x_4 - x_2, q) = 1$. Fie $y = (x_4 - x_2)^{-1} \bmod q$. Deci, există k număr întreg astfel încât $(x_4 - x_2)y = kq + 1$. Deoarece $\beta^q = -1 \bmod p$, rezultă:

$$\beta^{(x_4 - x_2)y} = \beta^{(kq+1)} = (-1)^k \beta \bmod p = \pm\beta \bmod p.$$

Acest lucru conduce la:

$$\alpha^{(x_1 - x_3)y} = \beta^{(x_4 - x_2)y} \bmod p = \pm\beta \bmod p.$$

Suntem în una din următoarele două situaţii:

$$\log_\alpha \beta = (x_1 - x_3)(x_4 - x_2)^{-1} \bmod (p-1),$$

$$\log_\alpha \beta = (x_1 - x_3)(x_4 - x_2)^{-1} + q \bmod (p-1),$$

Se verifică direct care dintre rezultate este cel corect.

Cazul $d = q$. Deoarece $0 \leq x_2 \leq q-1$ şi $0 \leq x_4 \leq q-1$ rezultă faptul că $-(q-1) \leq x_4 - x_2 \leq q-1$. Acest lucru arată faptul că este imposibil să avem $(x_4 - x_2, p-1) = q$.

Cazul $d = p-1$. Aceast caz este posibil numai dacă $x_4 = x_2$, rezultă $x_1 = x_3$. S-a ajuns la $(x_1, x_2) = (x_3, x_4)$, ceea ce contrazice ipoteza.

19.2 Exerciţii propuse

Exerciţiul 19.2.1 *Fie* $f : \mathbf{Z}_2{}^n \rightarrow \mathbf{Z}_2{}^n$ *o funcţie hash pentru care problema* **CSP** [1] *este satisfăcută. Definim funcţia* $g : \mathbf{Z}_2{}^{2n} \rightarrow \mathbf{Z}_2{}^n$ *prin* $g(x_1||x_2) = f(x_1 \oplus x_2)$. *Arătaţi că* g *nu satisface problema* **CSP**.

Exerciţiul 19.2.2 *Fie* $p = 12347$, $\alpha = 2$, $\beta = 8461$ *parametrii pentru funcţia de dispersie Chaum - van Heijst - Pfitzmann. Fiind dată coliziunea* $\alpha^{5692}\beta^{144} = \alpha^{212}\beta^{4214} \bmod p$, *să se calculeze* $log_\alpha \beta$.

Răspuns: $log_\alpha \beta = 5689$.

Exerciţiul 19.2.3 *Fie* $p = 15083$, $\alpha = 154$, $\beta = 2307$ *parametrii pentru funcţia de dispersie Chaum - van Heijst - Pfitzmann. Fiind dată coliziunea* $\alpha^{7431}\beta^{5564} = \alpha^{1459}\beta^{954} \bmod p$, *să se calculeze* $log_\alpha \beta$.

[1] Fiind dată o pereche validă (x, y) este dificil de aflat $x_1 \neq x$ astfel încât $f(x_1) = f(x)$.

Capitolul 20

Semnătura ElGamal

20.1 Breviar teoretic

Fie p un număr prim pentru care problema logaritmului discret în Z_p este dificilă şi $\alpha \in Z_p{}^*$ un element primitiv. Cheia publică β se construieşte din cheia privată a: $\beta = \alpha^a \bmod p$.

Semnătura mesajului x, calculată cu ajutorul valorii aleatoare (secrete) $k \in Z_{p-1}$, este definită ca fiind (γ, δ) unde:

$$\gamma = \alpha^k \bmod p \text{ şi } \delta = (H(x) - a\gamma)k^{-1} \bmod (p-1),$$

$H(\cdot)$ fiind o funcţie hash ($H(x) = x$ dacă nu este specificată funcţia hash).

Semnătura (γ, δ) a mesajului x este verificată dacă are loc:

$$\beta^\gamma \gamma^\delta = \alpha^{H(x)} \bmod p.$$

20.2 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 20.2.1 *Să se semneze mesajul $x = 101$ cu ajutorul algoritmului ElGamal specificat de parametrii următori: $p = 467$, $\alpha = 2$, cheia privată $a = 127$, alegând valoarea $k = 213$.*

Rezolvare: Se calculează $\beta = \alpha^a \bmod p = 2^{127} \bmod 467 = 132$

Semnătura mesajului $x = 101$ cu $k = 213$ (de remarcat faptul că $(213, 466) = 1$ şi $213^{-1} \bmod 466 = 431$) este:

$$\gamma = \alpha^k \bmod p = 2^{213} \bmod 467 = 29 \text{ şi } \delta = (101 - 127 \cdot 29) \cdot 431 \bmod 466 = 16.$$

20.3 Exerciţii propuse

Exerciţiul 20.3.1 *Să se semneze mesajul $x = 100$ cu ajutorul algoritmului ElGamal specificat de parametrii următori: $p = 163$, $\alpha = 2$, cheia privată $a = 127$, alegând valoarea $k = 215$.*

Răspuns: Semnătura mesajului este $(\gamma, \delta) = (52, 24)$.

Exerciţiul 20.3.2 *Să se semneze mesajul* $x = 102$ *cu ajutorul algoritmului ElGamal specificat de parametrii următori:* $p = 467$, $\alpha = 2$, *cheia privată* $a = 127$, *alegând valoarea* $k = 213$.

Răspuns: Semnătura mesajului este $(\gamma, \delta) = (29, 447)$.

Exerciţiul 20.3.3 *Să se semneze mesajul* $x = 57$ *cu ajutorul algoritmului ElGamal specificat de parametrii următori:* $p = 97$, $\alpha = 3$, *cheia privată* $a = 27$, *alegând valoarea* $k = 37$.

Răspuns: Semnătura mesajului este $(\gamma, \delta) = (66, 39)$.

Exerciţiul 20.3.4 *Să se semneze mesajul* $x = 29$ *cu ajutorul algoritmului ElGamal specificat de parametrii următori:* $p = 127$, $\alpha = 5$, *cheia privată* $a = 13$, *alegând valoarea* $k = 19$.

Răspuns: Semnătura mesajului este $(\gamma, \delta) = (66, 89)$.

Exerciţiul 20.3.5 *Să se semneze mesajul* $x = 78$ *cu ajutorul algoritmului ElGamal specificat de parametrii următori:* $p = 131$, $\alpha = 7$, *cheia privată* $a = 19$, *alegând valoarea* $k = 17$.

Răspuns: Semnătura mesajului este $(\gamma, \delta) = (3, 93)$.

Exerciţiul 20.3.6 *Mesajul* $x = 57$ *a fost semnat cu ajutorul algoritmului ElGamal specificat de parametrii următori:* $p = 97$, $\alpha = 3$, $\beta = 70$, *obţinându-se semnătura* $(\gamma, \delta) = (66, 39)$. *Este aceasta o semnătură validă?*

Răspuns: Semnătura este validă deoarece se satisface relaţia de verificare $\beta^{\gamma}\gamma^{\delta} \bmod p = \alpha^{x} \bmod p = 89$.

Exerciţiul 20.3.7 *Mesajul* $x = 34$ *a fost semnat cu ajutorul algoritmului ElGamal specificat de parametrii următori:* $p = 131$, $\alpha = 7$, $\beta = 16$, *obţinându-se semnătura* $(\gamma, \delta) = (3, 110)$. *Este aceasta o semnătură validă?*

Răspuns: Semnătura nu este validă deoarece nu se satisface relaţia de verificare $\beta^{\gamma}\gamma^{\delta} \bmod p = 4$; $\alpha^{x} \bmod p = 9$.

Exerciţiul 20.3.8 *Mesajul* $x = 78$ *a fost semnat cu ajutorul algoritmului ElGamal specificat de parametrii următori:* $p = 131$, $\alpha = 7$, $\beta = 16$, *obţinându-se semnătura* $(\gamma, \delta) = (3, 93)$. *Este aceasta o semnătură validă?*

Răspuns: Semnătura este validă deoarece se satisface relaţia de verificare $\beta^{\gamma}\gamma^{\delta} \bmod p = \alpha^{x} \bmod p = 61$.

Capitolul 21

Semnătura DSA/ECDSA

21.1 Breviar teoretic

Fie p un număr prim de 512 biţi şi q un factor prim de 160 biţi ai lui $p-1$ şi $\alpha \in Z_p{}^*$ o rădacină primitivă de ordin q a unităţii.

Cheia publică β se construieşte din cheia privată a: $\beta = \alpha^a \bmod p$. Semnătura mesajului x, calculată cu ajutorul valorii aleatoare (secrete) $k \in Z_q^*$, este definită ca fiind (γ, δ) unde:

$$(\gamma, \delta) = ((\alpha^k \bmod p) \bmod q, (H(x) + a\gamma)k^{-1} \bmod q),$$

$H(\cdot)$ fiind o funcţie hash ($H(x) = x$ dacă nu este specificată funcţia hash).

Semnătura (γ, δ) a mesajului x este verificată dacă are loc următoarea egalitate, unde $e_1 = H(x)\delta^{-1} \bmod q$ şi $e_2 = \gamma\delta^{-1} \bmod q$:

$$(\alpha^{e_1}\beta^{e_2} \bmod p) \bmod q = \gamma.$$

O variantă a DSA-ului este reprezentată de extensia acesteia pe curbele eliptice (ECDSA). În această situaţie se lucrează pe curbă eliptică E peste Z_q. Elementele necesare algoritmului sunt:

$G(x_G, y_G)$ generatorul punctelor de pe curba eliptică;

n numărul elementelor de pe curba eliptică (sau ordinul lui G dacă G nu este generator);

L_n numărul de biţi ai lui n;

d_A cheia privată,$d_A \in [1, n]$;

$Q_A = d_A G$ cheia publică.

În contexul celor de mai sus, algoritmul ECDSA este următorul:

PASUL 1. Se calculează $e = H(M)$. Fie z cei cei mai semnificativi L_n biţi ai lui e.

PASUL 2. Se alege valoarea aleatoare[1] k in intervalul $[1, n-1]$.

PASUL 3. $r = x_1 \bmod n$, unde $(x_1, y_1) = kG$. Dacă $r = 0$ atunci revenim la PASUL 2.

PASUL 4. $s = k^{-1}(z + rd_A) \bmod n$. Dacă $r = 0$ atunci revenim la PASUL 2.

PASUL 5. Semnătura este (r, s).

Verificarea semnăturii ECDSA (r, s se realizează după următorul algoritm.

PASUL 1. Dacă $r, s \notin [1, n]$ semnătura este invalidă.

[1] valoarea k se numeşte cheie efemeră.

PASUL 2. Fie $e = H(M)$, z cei mai semnificativi L_n biţi ai lui e.
PASUL 3. Se calculează: $w = s^{-1} \bmod n$.
PASUL 4. Se calculează: $u_1 = zw \bmod n$ şi $u_2 = rw \bmod n$.
PASUL 5. Fie $(x_1, y_1) = u_1 G + u_2 Q_A$.
PASUL 6. Semnătura este validă dacă şi numai dacă $r = x_1 \bmod n$.

21.2 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 21.2.1 *Să se semneze mesajul $x = 100$ cu ajutorul algoritmului DSA specificat de parametrii următori: $p = 7879$, $q = 101$, $\alpha = 170$, valoarea aleatoare utilizată $k = 50$, cheia secretă fiind $a = 75$. Verificaţi rezultatul obţinut.*

Rezolvare: Se calculează:

$\gamma = (\alpha^k \bmod p) \bmod q = (170^{50} \bmod 7879) \bmod 101 = 2518 \bmod 101 = 94$.
$\delta = (x + a\gamma)k^{-1} \bmod q = (100 + 75 \cdot 94)50^{-1} \bmod 101 = 7150 \cdot 50^{-1} \bmod 101 = 7150 \cdot 99 \bmod 101 = 42$.
S-a folosit $50^{-1} (\text{mod} 101) = -2 \bmod 101 = 99$ (fiindcă $101 = 50 \cdot 2 + 1$).

Verificare:
$\beta = \alpha^a \bmod p = 170^{75} \bmod 7879 = 4567$.
$e_1 = x\delta^{-1} \bmod q = 100 \cdot 42^{-1} \bmod 101 = 100 \cdot 89 \bmod 101 = 12$.
$e_2 = \gamma\delta^{-1} \bmod q = 94 \cdot 42^{-1} \bmod 101 = 94 \cdot 89 \bmod 101 = 84$.
Se obţine:
$(\alpha^{e_1}\beta^{e_2} \bmod p) \bmod q = (170^{12} \cdot 4567^{84} \bmod 7879) \bmod 101 = 2518 \bmod 101 = 94 = \gamma$.

21.3 Exerciţii propuse

Exerciţiul 21.3.1 *Să se semneze mesajul $x = 101$ cu ajutorul algoritmului DSA specificat de parametrii următori: $p = 7879$, $q = 101$, $\alpha = 170$, valoarea aleatoare utilizată $k = 50$, cheia secretă fiind $a = 75$. Verificaţi rezultatul obţinut.*

Răspuns: Semnătura mesajului este $(\gamma, \delta) = (94, 40)$. Cheia publică este $\beta = 4567$.

Exerciţiul 21.3.2 *Să se semneze mesajul $x = 102$ cu ajutorul algoritmului DSA specificat de parametrii următori: $p = 7879$, $q = 101$, $\alpha = 170$, valoarea aleatoare utilizată $k = 50$, cheia secretă fiind $a = 75$. Verificaţi rezultatul obţinut.*

Răspuns: Semnătura mesajului este $(\gamma, \delta) = (94, 38)$. Cheia publică este $\beta = 4567$.

Exerciţiul 21.3.3 *Să se semneze mesajul $x = 75$ cu ajutorul algoritmului DSA specificat de parametrii următori: $p = 131$, $q = 13$, $\alpha = 7$, $a = 3$, valoarea aleatoare utilizată $k = 11$. Verificaţi rezultatul obţinut.*

Răspuns: Semnătura mesajului este $(\gamma, \delta) = (10, 6)$. Totuşi, semnătura nu se verifică pentru ca $ord(\alpha) = 65$ şi nu $q = 13$. În concluzie, algoritmul DSA este setat impropriu.

Exerciţiul 21.3.4 *Mesajul $x = 502$ a fost semnat cu ajutorul algoritmului DSA specificat de parametrii următori: $p = 617$, $q = 11$, $\alpha = 113$, $\beta = 489$, valoarea aleatoare utilizată $k = 21$ şi s-a obţinut semnătura $(\gamma, \delta) = (3, 10)$. Este această semnătură validă?*

Răspuns: Semnătura este validă deoarece se satisface relaţia de verificare $(\alpha^{e_1}\beta^{e_2} \bmod p) \bmod q = \gamma = 3$.

Exerciţiul 21.3.5 *Mesajul $x = 99$ a fost semnat cu ajutorul algoritmului DSA specificat de parametrii următori: $p = 7879$, $q = 101$, $\alpha = 170$, $\beta = 4567$, valoarea aleatoare utilizată $k = 50$ şi s-a obţinut semnătura $(\gamma, \delta) = (94, 78)$. Este această semnătură validă?*

Răspuns: Semnătura nu este validă deoarece nu se satisface relaţia de verificare $(\alpha^{e_1}\beta^{e_2} \bmod p) \bmod q \neq \gamma$.

Exerciţiul 21.3.6 *Mesajul $x = 99$ a fost semnat cu ajutorul algoritmului DSA specificat de parametrii următori: $p = 7879$, $q = 101$, $\alpha = 170$, $\beta = 4567$, valoarea aleatoare utilizată $k = 50$ şi s-a obţinut semnătura $(\gamma, \delta) = (94, 44)$. Este această semnătură validă?*

Răspuns: Semnătura este validă deoarece se satisface relaţia de verificare $(\alpha^{e_1}\beta^{e_2} \bmod p) \bmod q = \gamma = 94$.

Capitolul 22

Protocolul Diffie-Hellman de stabilire a cheilor

22.1 Breviar teoretic

Fie p un număr prim, q un divizor prim al lui $p-1$ şi $\alpha \in Z_p^*$, element de ordin q. Protocolul Diffie-Hellman (DH), ce returnează o cheie comună de sesiune K este următorul:

PASUL 1. A genererază aleator $a \in Z_q^*$ şi trimite lui B valoarea $R_A = \alpha^a (\mathrm{mod} p)$.
PASUL 2. B genererază aleator $b \in Z_q^*$ şi trimite lui A valoarea $R_B = \alpha^b (\mathrm{mod} p)$.
PASUL 3. A calculează $K = K_{A,B} = {R_B}^a = \alpha^{ab}$.
PASUL 4. B calculează $K = K_{B,A} = {R_A}^b = \alpha^{ab}$.

22.2 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 22.2.1 *Să se specifice cheia rezultată în urma aplicării protocolului Diffie-Hellman specificat de parametrii:* $p = 25307$, $\alpha = 2$, $a = 2009$, $b = 2010$.

Răspuns: $k = 21554$.

Rezolvare:
PASUL 1. A trimite lui B valoarea $R_A = \alpha^a (\mathrm{mod} p) = 2^{2009} \bmod 25307 = 5755$.
PASUL 2. B trimite lui A valoarea $R_B = \alpha^b (\mathrm{mod} p) = 2^{2010} \bmod 25307 = 11510$.
PASUL 3. A calculează $K = K_{A,B} = {R_B}^a = 11510^{2009} \bmod 25307 = 21554$.
PASUL 4. B calculează $K = K_{B,A} = {R_A}^b = 5755^{2010} \bmod 25307 = 21554$.

22.3 Exerciţii propuse

Exerciţiul 22.3.1 *Să se specifice cheia rezultată în urma aplicării protocolului Diffie-Hellman specificat de parametrii:* $p = 25307$, $\alpha = 2$, $a = 3578$, $b = 19956$.

Răspuns: $k = 3694$.

Exerciţiul 22.3.2 *Să se specifice cheia rezultată în urma aplicării protocolului Diffie-Hellman specificat de parametrii:* $p = 25307$, $\alpha = 2$, $a = 1989$, $b = 2009$.

Răspuns: $k = 12034$.

Exerciţiul 22.3.3 *Să se specifice cheia rezultată în urma aplicării protocolului Diffie-Hellman specificat de parametrii:* $p = 17$, $\alpha = 7$, $a = 9$, $b = 3$.

Răspuns: $k = 14$.

Exerciţiul 22.3.4 *Să se specifice cheia rezultată în urma aplicării protocolului Diffie-Hellman specificat de parametrii:* $p = 10163$, $\alpha = 652$, $a = 6026$, $b = 3510$.

Răspuns: $k = 7944$.

Exerciţiul 22.3.5 *Să se specifice cheia rezultată în urma aplicării protocolului Diffie-Hellman specificat de parametrii:* $p = 63299$, $\alpha = 49297$, $a = 5671$, $b = 59073$.

Răspuns: $k = 57286$.

Exerciţiul 22.3.6 *Să se specifice cheia rezultată în urma aplicării protocolului Diffie-Hellman specificat de parametrii:* $p = 1319$, $\alpha = 527$, $a = 1088$, $b = 584$.

Răspuns: $k = 352$.

Exerciţiul 22.3.7 *Să se specifice cheia rezultată în urma aplicării protocolului Diffie-Hellman specificat de parametrii:* $p = 2099$, $\alpha = 1023$, $a = 1496$, $b = 648$.

Răspuns: $k = 612$.

Exerciţiul 22.3.8 *Să se specifice cheia rezultată în urma aplicării protocolului Diffie-Hellman specificat de parametrii:* $p = 1823$, $\alpha = 776$, $a = 1515$, $b = 476$.

Răspuns: $k = 1555$.

Exerciţiul 22.3.9 *Să se specifice cheia rezultată în urma aplicării protocolului Diffie-Hellman specificat de parametrii:* $p = 2207$, $\alpha = 371$, $a = 839$, $b = 1358$.

Răspuns: $k = 731$.

Exerciţiul 22.3.10 *În urma aplicării protocolului Diffie-Hellman, una dintre entităţile care doresc să genereze o cheie comună alege parametrul secret* $a = 1$ *(sau* $b = 1$*). Cum poate un atacator determina cheia în acest caz?*

Capitolul 23

Protocolul Blom

23.1 Breviar teoretic

Protocolul lui Blom asigură implementarea principiului compartimentării, între oricare doi participanţi, dintr-o mulţime de n utilizatori. Protocolul se bazează pe existenţa unei autorităţi de încredere T. Fie $n \geq 3$ numărul de utilizatori şi $p \geq n$ un număr prim. Cheia, ce urmează a fi calculată de oricare doi participanţi este un element din $\mathbf{Z}_p{}^*$. Vom nota prin k numărul maxim de intruşi[1] împotriva cărora poate fi asigurată protecţia. Vom exemplifica protocolul pentru $k = 1$.

PASUL 0. T face public: numărul prim p şi pentru fiecare utilizator A un număr aleator $r_A \in \mathbf{Z}_p$, $r_A \neq r_B$ pentru orice $A \neq B$.

PASUL 1. T generează aleatoriu trei numere $a, b, c \in \mathbf{Z}_p$ şi formează polinomul[2]:

$$f(X, Y) = a + b(X + Y) + cXY \bmod p.$$

PASUL 2. Pentru fiecare utilizator A, T va construi polinomul:

$$g_A(X) = f(X, r_A) \bmod p,$$

pe care îl va transmite, cu asigurarea confidenţialităţii, către A.

PASUL 3. Cheia stabilită de către A şi B va fi:

$$K_{A,B} = K_{B,A} = f(r_A, r_B).$$

Observaţia 23.1 *Protocolul Blom, pentru $k = 1$, este necondiţionat sigur împotriva oricărui atac individual. Cu alte cuvinte, orice alt participant C nu poate determina, din valorile publice r_A şi r_B, cheia $K_{A,B}$. Acesta este utilizat în schema de protecţie, utilizată de HDCP (High-bandwidth Digital Content Protection), în generarea cheilor dintre sursă şi destinaţie (playere HD DVD sau televiziunea HD).*

[1] numit şi nivel de compartimentare.

[2] pentru k arbitrar polimonul utilizat în cadrul protocolului este $f(X, Y) = \sum_{i,j=0}^{k} a_{i,j} X^i Y^j \bmod p$, $a_{i,j} \in \mathbf{Z}_p$, $a_{i,j} = a_{j,i}$ pentru orice i, j.

23.2 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 23.2.1 *Specificaţi elementele de securitate pentru protocolul Blom, ce asigură compartimentarea între trei utilizatori A, B, C, caracterizat de $p = 17$, $k = 1$, cheile publice ale acestora fiind $r_A = 12$, $r_B = 7$ şi $r_C = 1$. Valorile alese de către T fiind $a = 8$, $b = 7$, $c = 2$.*

Rezolvare: T construieşte polinomul:

$$f(X, Y) = 8 + 7(X + Y) + 2XY.$$

Polinoamele specifice fiecărui utilizator sunt:

$$g_A(X) = 7 + 14X, g_B(X) = 6 + 4X, g_C(X) = 15 + 9X.$$

Cheile de compartimentare (secrete) sunt:

$$K_{A,B} = 3, K_{A,C} = 4, K_{B,C} = 10.$$

A poate calcula K_{AB} prin:

$$g_A(r_B) = 7 + 14 \cdot 7 \bmod 17 = 3.$$

B poate calcula K_{BA} prin:

$$g_B(r_A) = 6 + 4 \cdot 12 \bmod 17 = 3.$$

23.3 Exerciţii propuse

Exerciţiul 23.3.1 *Specificaţi cheile rezultate în urma protocolului Blom, ce asigură compartimentarea între trei utilizatori A, B, C, caracterizat de $p = 29$, $k = 1$, cheile publice ale acestora fiind $r_A = 1$, $r_B = 2$ şi $r_C = 3$. Valorile alese de către T fiind $a = 13$, $b = 11$, $c = 17$.*

Răspuns. Polinoamele secrete sunt $g_A(X) = 324 + 28X$, $g_B(X) = 6 + 16X$, $g_C(X) = 17 + 4X$. Cheile rezultate sunt $K_{AB} = 22$, $K_{AC} = 21$, $K_{BC} = 25$.

Exerciţiul 23.3.2 *Specificaţi cheile rezultate în urma protocolului Blom, ce asigură compartimentarea între trei utilizatori A, B, C, caracterizat de $p = 29$, $k = 1$, cheile publice ale acestora fiind $r_A = 13$, $r_B = 11$ şi $r_C = 17$. Valorile alese de către T fiind $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.*

Răspuns. Polinoamele secrete sunt $g_A(X) = 27 + 12X$, $g_B(X) = 23 + 6X$, $g_C(X) = 6 + 24X$. Cheile rezultate sunt $K_{AB} = 14$, $K_{AC} = 28$, $K_{BC} = 9$.

Capitolul 24

Protocolul Shamir de partajare a secretelor

24.1 Breviar teoretic

Schema lui Shamir îşi propune să partajeze cheia de cifrare $S \in \mathcal{K} = Z_q$ la o mulţime de n participanţi ($q \geq n+1$) astfel încât pentru reconstrucţia cheii să fie nevoie de cooperarea a cel puţin k dintre participanţi.

Iniţializare. n numărul participanţilor, k pragul minim de reconstrucţie al secretului S. Se aleg n valori (publice) distincte $x_1, \ldots x_n$ şi se distribuie fiecărui participant i valoarea x_i.

PASUL 1. Se alege de către *autoritatea de distribuţie a secretului* TP (Trusted Party) un număr prim q suficient de mare ($q \geq n+1$). Se generează *aleatoriu*, de către autoritatea de distribuţie a secretului TP, un polinom de grad $k-1$:

$$P(X) = \sum_{i=1}^{k-1} a_i X^i + S \bmod q.$$

PASUL 2 (distribuţia secretului). Autoritatea TP distribuie participantului i valoarea $y_i = P(x_i),\ i = 1, \ldots, n$.

PASUL 3 (recuperarea secretului). Cu informaţia oferită de k participanţi se poate recupera, prin rezolvarea unui sistem liniar de k ecuaţii, valoarea S. Dacă numărul participanţilor care pun la dispoziţie informaţia y_i este mai mic decât k, atunci *nu se poate* determina S.

24.2 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 24.2.1 *Să se partajaze secretul $S = 13$, pentru o schema majoritară $k = 3$ din $n = 5$ participanţi, utilizând algoritmul lui Shamir specificat de $q = 17$, valorile publice $x_i = i$, $i = 1, \ldots, 5$ şi valorile aleatoare $a[1] = 10$, $a[2] = 2$.*

Rezolvare: Se obţine polinomul $P(X) = a_2X^2 + a_1X + S = 2X^2 + 10X + 13$.

Secretul se partajează în:
$y_1 = P(1) = (2 + 10 + 13) \bmod 17 = 8$;
$y_2 = P(2) = (8 + 20 + 13) \bmod 17 = 7$;
$y_3 = P(3) = (18 + 30 + 13) \bmod 17 = 10$;
$y_4 = P(4) = (32 + 40 + 13) \bmod 17 = 0$;
$y_5 = P(5) = (50 + 50 + 13) \bmod 17 = 11$.

24.3 Exerciţii propuse

Exerciţiul 24.3.1 *Să se partajaze secretul $S = 4$, pentru o schema majoritară $k = 3$ din $n = 5$ participanţi, utilizând algoritmul lui Shamir specificat de $q = 17$, valorile publice $x_i = i$, $i = 1, \ldots, 5$ şi valorile aleatoare $a[1] = 10$, $a[2] = 2$.*

Răspuns: $\{16, 15, 1, 8, 2\}$.

Exerciţiul 24.3.2 *Să se partajaze secretul $S = 0$, pentru o schema majoritară $k = 3$ din $n = 5$ participanţi, utilizând algoritmul lui Shamir specificat de $q = 17$, valorile publice $x_i = i$, $i = 1, \ldots, 5$ şi valorile aleatoare $a[1] = 10$, $a[2] = 2$.*

Răspuns: $\{12, 11, 14, 4, 15\}$.

Exerciţiul 24.3.3 *Să se reconstituie secretul S, din valorile $\{12, 4, 15\}$, ştiind că acestea au fost obţinute cu ajutorul schemei majoritare $(5, 3)$ a lui Shamir specificată de $q = 17$ şi valorile publice $\{1, 4, 5\}$.*

Răspuns: $S = 0$.

Exerciţiul 24.3.4 *Să se reconstituie secretul S, din valorile $\{1, 8, 2\}$, ştiind că acestea au fost obţinute cu ajutorul schemei majoritare $(5, 3)$ a lui Shamir specificată de $q = 17$ şi valorile publice $\{3, 4, 5\}$.*

Răspuns: $S = 4$.

Exerciţiul 24.3.5 *Să se reconstituie secretul S, din valorile $\{10, 0, 11\}$, ştiind că acestea au fost obţinute cu ajutorul schemei majoritare $(5, 3)$ a lui Shamir specificată de $q = 17$ şi valorile publice $\{3, 4, 5\}$.*

Răspuns: $S = 13$.

Exerciţiul 24.3.6 *Ce se întâmplă dacă în protocolul lui Shamir se renunţă la condiţia de primalitate asupra lui q?*

Capitolul 25

Scheme de partajare a secretelor bazate pe CRT

25.1 Breviar teoretic

Una dintre primele scheme de partajare a secretelor, bazate pe CRT, este *schema Mignotte*. Aceasta presupune faptul că şirul $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ este un şir Mignotte:

$$\prod_{i=0}^{k-2} p_{n-i} < \prod_{i=0}^{k} p_i.$$

Secretul S, ce trebuie partajat, trebuie să aparţină intervalului[1] (β, α), unde $\alpha = \prod_{i=0}^{k} p_i$ şi $\beta = \prod_{i=0}^{k-2} p_{n-i}$. Valorile ce se distribuie fiecăruia dintra cei n participanţi sunt $S \bmod p_i$, $i = 1, \ldots, n$. Recuperarea secretului se realizează, de către k participanţi, prin rezolvarea, cu ajutorul CRT, a sistemului $S = S_{i_j} \bmod p_i$, $j = 1, \ldots, k$.

25.2 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 25.2.1 *Fie şirul* $\{5, 7, 9, 11, 13\}$ *o secvenţă* $(5, 3)$ *Mignotte ,* $\alpha = 11 \cdot 13$*,* $\beta = 5 \cdot 7 \cdot 9$*, secretul* $S = 235 \in (\alpha, \beta)$*. Care sunt secretele ce sunt distribuite celor cinci participanţi?*

Rezolvare: $S_1 = S \bmod 5 = 0$, $S_2 = S \bmod 7 = 5$, $S_3 = S \bmod 9 = 6$, $S_4 = S \bmod 11 = 10$, $S_5 = S \bmod 13 = 12$. Spre exemplu, grupul $\{P_1, P_3, P_4\}$ trebuie să rezolve problema:

$$\begin{cases} x & \equiv & 0 & \bmod & 5 \\ x & \equiv & 6 & \bmod & 9 \\ x & \equiv & 10 & \bmod & 11 \end{cases}$$

ce are soluţie unică 285.

[1]Dacă lungimea intervalului este mică, atunci schema nu este practică, existând posibilitatea ca printre valorile distribuite să este coliziuni.

Capitolul 26

Canale subliminale

26.1 Breviar teoretic

În sistemul de autentificare ElGamal, A alege un număr prim mare q şi un element primitiv $\alpha \in Z_q$. Valorile q şi α sunt publice. Printr-un canal sigur, A şi B stabilesc un număr $p \in Z_q$. Protocolul prin care A transmite lui B mesajul subliminal $y \in Z_q$ prin utilizarea textului x este următorul:

PASUL 0. A calculeaza $\beta = \alpha^y \bmod q$.

PASUL 1. Se determină γ ca soluţie a ecuaţiei $x = p \cdot \beta + y \cdot \gamma \bmod (q-1)$.

PASUL 2. A trimite lui B tripletul (x, β, γ).

PASUL 3. B calculează $a = (\alpha^p)^\beta \cdot \beta^\gamma \bmod q$.

PASUL 4. Dacă $a = \alpha^x \bmod q$ atunci B decide că mesajul este autentic.

PASUL 5. B recuperează mesajul subliminal: $y = (x - p \cdot \beta) \cdot \gamma^{-1} \bmod (q-1)$.

26.2 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 26.2.1 *Se consideră canalul subliminal ElGamal dat de $q = 11$ şi $\alpha = 2$. Să presupunem că se doreşte transmiterea mesajului $y = 9$ folosind cheia secretă $k = 0$ şi textul cifrat $x = 5$. Care este mesajul ce se va transmite pe canalul de comunicaţie?*

Rezolvare:

PASUL 0. A calculează $\beta = \alpha^y \bmod q = 2^9 \bmod 11 = 6$.

PASUL 1. Se determină γ ca soluţie a ecuaţiei $x = p \cdot \beta + y \cdot \gamma \bmod (q-1)$, echivalent cu $5 = 0 + 9\gamma \bmod 10$ de unde rezultă $\gamma = 5 \cdot 9^{-1} \bmod 10 = 5 \cdot 9 \bmod 10 = 5$.

PASUL 2. A trimite lui B tripletul $(x, \beta, \gamma) = (5, 6, 5)$.

26.3 Exerciţii propuse

Exerciţiul 26.3.1 *Se consideră canalul subliminal ElGamal dat de $q = 11$ şi $\alpha = 2$. Să presupunem că se doreşte transmiterea mesajului $y = 9$ folosind cheia secretă $k = 8$ şi textul*

cifrat $x = 5$. Care este mesajul ce se va transmite pe canalul de comunicaţie?

Răspuns: $\{5, 6, 3\}$.

Exerciţiul 26.3.2 *Se consideră canalul subliminal ElGamal dat de $q = 11$ şi $\alpha = 2$. Să presupunem că se doreşte transmiterea mesajului $y = 1$ folosind cheia secretă $k = 8$ şi textul cifrat $x = 5$. Care este mesajul ce se va transmite pe canalul de comunicaţie?*

Răspuns: $\{5, 2, 9\}$.

Exerciţiul 26.3.3 *Se consideră canalul subliminal ElGamal dat de $q = 11$, $\alpha = 2$ şi cheia secretă $k = 8$. Se recepţionează mesajul $\{5, 6, 3\}$. Acesta conţine mesaje ascunse?*

Răspuns: Mesajul recepţionat este autentic, mesajul subliminal fiind $y = 9$.

Exerciţiul 26.3.4 *Se consideră canalul subliminal ElGamal dat de $q = 11$, $\alpha = 2$ şi cheia secretă $k = 8$. Se recepţionează mesajul $\{5, 6, 2\}$. Acesta conţine mesaje ascunse?*

Răspuns: Mesajul recepţionat nu este autentic.

Exerciţiul 26.3.5 *Se consideră canalul subliminal ElGamal dat de $q = 11$, $\alpha = 2$ şi cheia secretă $k = 8$. Se recepţionează mesajul $\{5, 2, 9\}$. Acesta conţine mesaje ascunse?*

Răspuns: Mesajul recepţionat este autentic, mesajul subliminal fiind $y = 1$.

Exerciţiul 26.3.6 *Se consideră canalul subliminal ElGamal dat de $q = 11$, $\alpha = 2$ şi cheia secretă $k = 0$. Se recepţionează mesajul $\{5, 6, 5\}$. Acesta conţine mesaje ascunse?*

Răspuns: Mesajul recepţionat este autentic, se ajunge la rezolvarea următoarei ecuaţii $5 = 5 \times y \bmod 10$ ce nu are soluţie unică, verificarea autenticităţii se face prin repetarea procedeului de construcţie a mesajului ce se transmite. Se obţine mesajul ascuns $y = 9$.

Exerciţiul 26.3.7 *În cadrul protocolui ElGamal, de transmitere a mesajelor subliminale, autentificatorul obţinut γ nu este relativ prim cu $q - 1$. Cum se rezolvă această speţă?*

Capitolul 27

Principii criptografice

Exerciţiul 27.1 *Metoda one-time pad (OTP) cifrează un mesaj m prin aplicarea operaţiei XOR cu o cheie secretă k. Având în vedere că o cheie bună are, statistic, jumătate din biţi zero şi că operaţia XOR cu zero nu modifică nimic, rezultă că metoda OTP lasă jumătate din mesaj în clar. Cu alte cuvinte, prin simpla observare a unui text cifrat cu această metodă, un atacator cunoaşte jumătate din biţii textului clar. Acest lucru înseamnă, de fapt, că metoda OTP este una foarte slabă? Cum poate fi considerat "'perfect" un cifru bloc care cifrează numai jumătate din textul clar?*

Exerciţiul 27.2 *Verificarea semnăturii El Gamal presupune efectuarea operaţiei $a^x b^y \bmod p$ unde a, b sunt fixate iar x, y sunt variabile. Arăţi că numărul de înmulţiri necesare pentru efectuarea acestui calcul este mai mic decât numărul de operaţii necesare pentru a calcula $a^x b^y \bmod p$ prin două exponenţieri succesive.*

Exerciţiul 27.3 *Considerăm două numere prime p şi q. Fie $i_p = p^{-1} \bmod q$ si $i_q = q^{-1} \bmod p$ iar $n = p \cdot q$. Care este valoarea rezultată în urma operaţiei $q \cdot i_q + p \cdot i_p$? Puteţi explica cum poate fi folosită această valoare pentru a reduce stocarea cheii secrete la implementarea RSA CRT?*

Exerciţiul 27.4 *Se doreşte semnarea a două mesaje cu algoritmul de semnătura El Gamal. Cum putem calcula valorile g^{k_1} şi g^{k_2} pentru a produce semnăturile într-un timp mai scurt decât cel necesar pentru a calcula două semnături secvenţiale?*

Exerciţiul 27.5 *Considerăm protocolul Fiat-Shamir unde secretul s este ales astfel încât încât $vs^2 = 1 \bmod n$, v fiind cheia publică. Protocolul este după cum urmează:*

- *Alice alege un r aleator şi îi trimite lui Bob $x = r^2 \bmod n$;*
- *Bob răspunde cu un bit aleator e;*
- *Alice răspunde cu $y = s^e r \bmod n$;*

- *Bob verifică dacă* $y^2 = v^e x \bmod n$.

Arătaţi că valorile rezultate în urma protocolului, adică $\{x, r, y\}$*, definesc o distribuţie ce poate fi simulată fără a-l folosi pe* s*. Explicaţi de ce acest lucru asigură protocolului o securitate foarte bună.*

Exerciţiul 27.6 *Se dă o cutie neagră care rulează algoritmul AES (*12 *runde pentru o cheie de* 192 *biţi); cutia conţine o cheie necunoscută* k *şi acceptă ca parametru un întreg* r *a cărui valoare poate fi setată la* 12, 11 *sau* 10 *de către utilizator. Vi se permite să introduceţi în cutie texte clare după cum doriţi. Cum aţi proceda pentru a ataca această implementare?*

Exerciţiul 27.7 *Un administrator de sistem are o cheie de 100 de biţi pe care doreşte să o împartă celor doi utilizatori în care are încredere în mod egal. El doreşte ca accesul la informaţie să fie posibilă numai când cei doi cooperează. Câti biţi din cheie ar trebui să dea fiecăruia din cei doi utilizatori?*

Exerciţiul 27.8 *Pentru a grăbi verificarea semnăturilor* s_i *de tip RSA a mesajelor* m_i*, se foloseşte următoarea idee: se verifică dacă* $(\prod s_i)^e = \prod hash(m_i) \bmod n$ *unde "hash" reprezintă full domain hash - o schemă de semnătură bazată pe RSA care mai întâi aplică o funcţie hash şi apoi semnătura RSA. Arătaţi că această idee nu este sigură pentru un exponent* e *mic şi propuneţi o contramăsură.*

Exerciţiul 27.9 *De ce următorul context este nesigur? O autoritate de încredere generează un modul RSA* n *a cărui factorizare rămâne secretă. Autoritatea furnizează fiecărui utilizator din sistem o pereche* (e_i, d_i) *aşa încât* $e_i d_i = 1 \bmod \phi(n)$ *unde* $i \neq j \Rightarrow d_i \neq d_j$.

Exerciţiul 27.10 *Să presupunem că cineva trimite mesaje cifrate utilizând DES în modul de operare OFB cu o valoare iniţială secretă (fixată)* IV.

1) Arătaţi cum poate fi efectuat un atac cu text clar pentru a decripta mesajele transmise?

2) Este mai bun modul de operare CFB?

3) Dar modul de operare CBC?

Exerciţiul 27.11 *După ce a studiat protocolul Diffie-Hellman, un tânăr criptograf decide să îl implementeze. Pentru a simplifica implementarea, el hotărăşte să folosească grupul aditiv* $(\boldsymbol{Z}_p, +)$ *în locul grupului multiplicativ* $(\boldsymbol{Z}_p^*, \cdot)$*. În calitate de criptograf cu experienţă, ce credeţi despre acest protocol?*

Exerciţiul 27.12 *Să presupunem că Alice şi Bob folosesc chei publice RSA cu acelaşi modul* n *dar cu exponenţi publici diferiti* e_1 *şi* e_2.

1) Arătaţi că Alice poate decripta mesajele trimise lui Bob;

2) Arătaţi că Alice poate decripta mesaje trimise către Alice şi Bob dacă $gcd(e_l, e_2) = 1$.

Exerciţiul 27.13 *Presupunem că $n = p \cdot q$, unde p si q sunt numere prime distincte.*

1) Calculaţi $S = n + 1 - \phi(n)$.

2) Care sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2 - Sx + n$? Daţi expresiile acestor rădăcini şi explicaţi cum pot fi găsite p şi q cu ajutorul unui simplu algoritm pentru calculul rădăcinilor pătrate întregi?

3) Factorizaţi n în următoarele două cazuri:

a) $n = 667, \phi(n) = 616$;

b) $n = 15049, \phi(n) = 14800$.

Exerciţiul 27.14 *Să construim un MAC folosind modul CFB de implementare, în loc de modul CBC: fiind date blocurile de text clar $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, definim vectorul de iniţializare $\beta_0 = \alpha_1$. Apoi cifrăm secvenţa de blocuri $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ după formulele:*

$$\beta_i = \alpha_{i+1} \oplus E(\beta_{i-1}; K).$$

În final, $MAC(\alpha_1 || \ldots \alpha_n) = E(\beta_{i-1}; K)$. Arătaţi că acesta este identic cu CBC MAC.

Exerciţiul 27.15 *Pentru S-boxul S_5 din DES calculaţi tendinţa variabilei aleatoare:*

$$X_2 \oplus Y_1 \oplus Y_2 \oplus Y_3 \oplus Y_4.$$

Exerciţiul 27.16 *Într-un sistem de cifrare simetric, o cheie k este slabă dacă $e_k = d_k$. Determinaţi toate cheile slabe ale sistemelor afine peste $\mathbf{Z}_{15}$.*

Capitolul 28

Atacuri în mediul de implementare

28.1 Breviar teoretic

Atacurile în mediul de implementare presupun o serie de măsurători hardware asupra modului criptografic:

Atacuri prin măsurarea timpului de execuţie. Prin măsurarea *timpului necesar efectuării unor operaţii asupra cheii private*, atacatorul poate determina exponenţii utilizaţi în protocolul Diffie-Hellman, factorul RSA (în special asupra algoritmului RSA ce foloseşte pentru semnătură lema chinezească a resturilor CRT), precum şi o serie de alte sisteme criptografice cum ar fi algoritmul de semnătură digitală DSS.

Atacuri prin măsurarea puterii consumate. Atacul cu ajutorul *analizei simple a puterii* (SPA) constă în măsurarea puterii consumate de dispozitiv în timpul operaţiei criptografice. Acest tip de atac se aplică, de regulă, dispozitivelor cu sursă de tensiune exterioară (ca de exemplu smart-cardurile). Consumul de putere depinde de instrucţiunea executată. Astfel, monitorizând consumul de putere, se poate deduce secvenţa de instrucţiuni (codul sursă). Dacă secvenţa de instrucţiuni depinde de lungimea cheii, atunci consumul de putere poate da informaţii despre cheie. În majoritatea procesoarelor, patternul puterii consumate de o instrucţiune depinde şi de valoarea operanzilor (de exemplu setarea unui bit într-un registru consumă mai multă energie decât ştergerea acestuia). Măsurători efectuate asupra mai multor intrări pot deduce valoarea operandului. Tehnica se numeşte *analiza diferenţială a puterii* (DPA).

Atacuri cu ajutorul defecţiunilor (erorilor) hardware. Echipamentele hardware pot genera erori (tranziente, latente sau induse) în timpul efectuarii unor operaţii aritmetice. Prin exploatarea raţională a acestor erori se pot recupera cheia privată pentru algoritmii de semnătură RSA şi Rabin. O serie de protocoale criptografice cum ar fi Fiat-Schamir şi Schnorr se pot sparge prin folosirea judicioasă a rezultatelor acestor erori.

Analiza diferenţială a defecţiunilor. Analiza diferenţială a defecţiunilor (DFA) este o schemă ce se utilizează pentru recuperarea cheilor secrete ale unui sistem criptografic dintr-un dispozitiv HSM (Hardware Security Module) securizat fizic. Modelul de defect este acela al defectelor tranziente (aleatoare) şi al defectelor induse. Metoda foloseşte la identificarea

cheilor în cazul utilizării unor cifruri cunoscute (de exemplu DES) şi/sau a unor cifruri cu algoritm necunoscut sau la reconstrucţia algoritmului (cu o structură cunoscută).

28.2 Exerciţii propuse

Exerciţiul 28.2.1 *Arătaţi că tehnica DPA poate fi accelerată folosind un compromis spaţiu-timp.*

Rezolvare: Faceţi referire la articolul *Computational Improvements to Differential Side Channel Analysis, NATO Advanced Research Workshop on Security and Embedded Systems, August 2005.*

Exerciţiul 28.2.2 *Descrieţi un atac prin măsurarea timpului de execuţie asupra unei proceduri de comparaţie a parolelor.*

Exerciţiul 28.2.3 *Pentru a proteja implementarea RSA de un atac prin măsurarea timpului de execuţie, dezvoltatorii decid să adauge la finalul procedurii un timp de aşteptare de durată aleatoare, cuprins între 0 şi n tacturi de ceas. În acest fel, se va elimina total riscul atacului sau acesta va fi doar încetinit?*

Exerciţiul 28.2.4 *Numiţi 3 factori care determină forma graficului puterii consumate de un microprocesor.*

Rezolvare: Instrucţiunea, datele manipulate de instrucţiune şi adresa instrucţiunii.

Capitolul 29

Resurse software

29.1 CrypTool

CrypTool este un pachet software dedicat simulării şi analizei de mecanisme criptologice într-un mod ilustrativ. De la rolul iniţial de instruire în domeniul securităţii personalului diverselor companii private, CrypTool a evoluat într-un proiect educaţional de tip open source cu aplicaţii în domeniul criptografiei şi majoritatea domeniilor conexe. Produsul vizează în primul rând studenţii facultăţilor de matematică şi informatică, a firmelor ce activează în domeniul securitaţii informaţiilor precum şi a dezvoltatorilor de aplicaţii sau utlizatorilor de calculatoare în general care doresc sa-şi dobândească bagajul minimal de cunoştinţe criptografice.

În prezent produsul este gratuit şi disponibil în mai multe versiuni, prima dintre acestea fiind CrypTool 1.4.x dezvoltată integral în mediul $C++$. Aceasta s-a extins ulterior în alte două versiuni, încă aflate la nivel beta, ce folosesc standarde de dezvoltare de ultimă generaţie aflându-se într-o continuă actualizare. Astfel, în iulie 2008, s-a lansat CryptTool 2.0 dezvoltat în mediul $C\#$, versiune ce furnizează o paleta mai largă de funcţionalităţi combinată cu o interfaţă grafică cu facilităţi de tip "drag-and-drop". La începutul lui 2010 s-a lansat versiunea JCrypTool dezvoltată în mediul Java, avantajele acestei versiuni fiind că este independentă de platforma pe care rulează (Windows, Linux, Mac) şi că foloşeşte din plin puternicul instrument FlexiProvider prin care se pot încărca cu uşurinţă module criptografice în orice aplicaţie construită peste JCA (Java Cryptography Architecture).

CrypTool a fost dezvoltat în colaborare cu instituţii de învăţământ devenind astfel un soft educaţional şi un bun instrument de iniţiere în domeniul criptologiei, folosindu-se în prezent cu succes in multe universităţi de prestigiu. Datorită manipulării facile a mecanismelor criptologice precum şi a vizualizării şi prezentării într-o manieră facilă şi inedită a rezultatelor, CrypTool poate reprezenta componenta practică a cursurilor teoretice din domeniul criptologiei precum şi o metodă rapidă de familiarizare cu componente esenţiale ale acestui domeniu.

Produsul acoperă ambele ramuri ale criptologiei şi anume *criptografia* şi *criptanaliza*.

Sunt tratate majoritatea aspectelor fundamentale ale criptografiei. Astfel, produsul are

implementate facilităţi în cadrul fiecărui subdomeniu după cum urmează:

• criptografia clasică: cifrurile Caesar, substituţie monoalfabetică, substituţie omofonică, Vigenère, Hill, Playfair, ADFGVX, Addition, XOR, Vernam, Solitaire etc;

• criptografia simetrică modernă: cifrurile IDEA, RC2, RC4, DES, 3DES, DESX precum şi toţii finaliştii cifrului AES şi anume MARS, RC6, Rijndael, Serpent and Twofish;

• criptografia asimetrică: RSA;

• criptografia hibridă: cifrarea datelor realizâdu-se cu algoritmi simetrici (AES), protecţia cheii de cifrare fiind asigurată prin metode asimetrice (RSA);

• semnături digitale: RSA, DSA, ECDSA (Elliptic Curve Digital Signature Algorithm), Nyberg-Rueppel;

• funcţii hash: MD2, MD4, MD5, SHA, SHA-1, SHA-2, RIPEMD-160;

• generatoare aleatoare: secude, $x^2 \bmod n$, LCG (linear congruence generator), ICG (inverse congruence generator).

În cadrul criptanalizei se regăsesc implementate majoritatea atacurilor standard după cum urmează:

• atac cu text cifrat: Caesar, Vigenère, Addition, XOR, Substitution, Playfair;

• atac cu text clar: Hill, Single-column transposition;

• atac manual: substituţie mono alfabetică, Playfair, ADFGVX, Solitaire;

• atac prin forţă brută: pentru toţi algoritmii; se presupune fie că entropia textului clar este mică sau cheia este parţial cunoscută sau alfabetului textului clar este cunoscut;

• atacuri asupra RSA: bazate pe factorizare sau tehnici care apelează la structurile algebrice (latice);

• atacuri asupra sistemelor hibride: atacuri asupra RSA sau AES(side channels attacks);

• atacuri asupra semnaturilor digitale: RSA prin factorizare; viabil până la lungime de 250 biţi (adica 75 cifre);

• atacuri asupra funcţiilor hash: generare coliziuni texte ASCII cu paradoxul zilelor de naştere (până la 40 biţi);

• analiză aleatorism: bateria de teste FIPS-PUB-140-1, periodicitate, Vitany, entropie, histograme, autocorelaţii, testul de compresie ZIP etc.

În sprijinul utilizatorilor, CrypTool are implementate o serie de demo-uri şi animaţii prin care sunt exemplificate diverse facilităţi pe care produsul le oferă folosindu-se primitive criptografice suportate şi implementate în aplicaţie ca de exemplu Caesar, Vigenère, Nihilist, DES (toate patru cu ANIMAL), Enigma (Flash), Rijdael/AES (Flash and Java), criptare hibridă şi decriptare (AES-RSA şi AES-ECC), generare şi verificare de semnături digitale, protocolul de schimb de chei Diffie-Hellman, secret sharing (CRT sau Shamir), metoda challenge-response (autentiicare), atacuri tip side-channel, securizarea e-mail-ului prin protocolul S/MIME (Java şi Flash), prezentări grafice 3D pentru date (pseudo)aleatoare, sensibilitatea funcţiilor hash privind modificări ale textului clar, teoria numerelor şi cripto sisteme RSA (Authorware).

CrypTool conţine şi un modul educaţional interactiv dedicat aplicaţiilor criptografice ce necesită aspecte elementare de teoria numerelor denumit "NT". Acest modul introduce utilizatorul în probleme elementare de teoria numerelor precum algoritmul lui Euclid pentru

găsirea celui mai mare divizor comun, testul Fermat pentru primalitate, factorizarea Fermat, factorizarea Pollard Rho şi altele.

Un alt avantaj al produslui CrypTool îl reprezintă existenţa unui meniu de documentare consistent şi o extindere online a acestuia conţinând în plus explicaţii privind noţiuni generale de criptografie, o cronologie privind dezvoltarea domeniului, exemple de utilizare a facilităţilor aplicaţiei, index sortat pe topicuri criptografice şi listă de referinţe.

Faptul că pachetul software este open source, că acoperă aspecte legate atât de criptografia clasică cât şi cea modernă, a modalităţilor multiple de simulare şi vizualizare originale, precum şi a modului facil de aplicare şi analiză a mecanismelor criptografice ne conduc la concluzia ca pachetul CrypTool reprezintă atât o modalitate rapidă de iniţiere în domeniul criptografiei cât şi un instrument de lucru puternic pentru specialişti în vederea studierii şi aplicării în acelaşi mediu a a diverse probleme concrete ce pot apărea in criptografie şi criptanaliză.

29.2 OpenSSL

OpenSSL este o suită de aplicaţii ce implementează protocoalele Secure Sockets Layer (SSL v2/v3) şi Transport Layer Security (TLS v1) precum şi o librărie dedicată ce acoperă o gamă largă de primitive criptografice. Proiectul este manageriat de o comunitate de voluntari din întreaga lume ce comunică, folosind Internetul, în vederea planificării şi dezvoltării continue a toolkit-ului OpenSSL precum şi a documentaţiei aferente.

OpenSSL este bazat pe librăria SSLeavy dezvoltată de Eric A. Young şi Tim J. Hudson, proiect încheiat la sfârşitul anului 1998. Asupra produsului acţionează o dublă licenţiere, atât cea de OpenSSL cât şi cea originală a librăriei SSLeavy. Ambele tipuri de licenţe sunt de tipul BSD open-source, toolkit-ul putând astfel fi folosit atât pentru scopuri comerciale cât şi non-comerciale. Pachetul sofware foloseşte instrumente criptografice puternice, fiind dezvoltat continuu şi distribuit legal de câteva tări europene, supunându-se însă unor restricţii de import/export şi uz în unele ţări din lume.

OpenSSL este disponibil în numeroase versiuni fiind într-o continuă dezvoltare, bug-uri fiind des semnalate şi corectate. Versiunea stabilă curentă este OpenSSL 0.9.8m aceasta fiind disponibilă din luna februarie 2010; in plus utilizatorii beneficiază de acces online permananent pentru studierea dezvoltărilor ulterioare ultimei versiuni stabile. Versiunile sunt disponibile pentru majoritatea sistemelor de operare tip UNIX (incluzând Solaris, Linux, Mac OS X şi cele patru sisteme de operare BSD open source), Open VMS şi Microsoft Windows.

OpenSSL implementeaza protocoalele SSL şi TSL. Transport Layer Security (TLS) şi predecesorul său Secure Sockets Layer (SSL), sunt protocoale criptografice ce furnizează securitatea comunicaţiilor peste reţele similare Internetului. Cele două protocoale permit aplicaţiilor de tip client/server să comunice securizat. TLS furnizează autentificare endpoint precum şi confidenţialitatea comunicaţiilor peste Internet folosindu-se securizare RSA suportând lungimi de chei de până la 2048 de biţi. Protocoale sunt utilizate pentru navigare pe Internet, poştă electronică, voice-over-IP (VoIP) etc.

Librăria criptografică OpenSSL implemenează o gamă largă de algoritmi utilizaţi în diverse standarde utilizate în Internet. Facilităţile furnizate de această librărie sunt folosite pentru a implementa SSL, TLS şi S/MIME, precum şi pentru SSH, OpenPGP şi alte standarde criptografice. Librăria are implementate o varietate de primitive criptografice şi alte facilităţi după cum urmează:

• Algoritmi de cifrare simetrice: Blowfish, CAST, DES, IDEA, RC2, RC4, RC5;

• Algoritmi de cifrare asimetrici: RSA (bazat pe factorizarea numerelor mari), DSA (bazat pe problema logaritmului discret), EC (curbe eliptice) Diffie-Hellman key exchange;

• Certificate digitale: X509, X509v3;

• Funcţii hash şi coduri de autentificare: HMAC, MD2, MD4, MD5, MDC2, RIPEMD, SHA;

• Funcţii de control a intrărilor şi ieşirilor, funcţii de codificare a datelor: PKCS7, PKCS12, ASN1, BIO, EVP, PEM.

Utilitarul *OpenSSL* este un tool linie comandă utilizat în gestionarea diverselor funcţii criptografice din librăria OpenSSL. Acesta poate fi folosit pentru:

• Creare şi management de chei private, chei publice şi parametrii;

• Operaţii ce implică criptografia cu chei publice;

• Creare de certificate X.509 , CSRs şi CRLs;

• Calculare de rezumate de mesaj;

• Cifrare şi descifrare folosind diverse cifruri;

• testare clienţi/servere (SSL/TLS);

• Semnături şi cifrare de mail (S/MIME);

• Cereri, generări şi verificări de mărci temporare.

OpenSSL este unul dintre puţinele proiecte open source supuse validării de conformitate cu standardului FIPS 140-2, utilizat în securitatea calculatoarelor, dezvoltat de National Institute of Standards and Technology (NIST). Pachetul software în sine nu este validat, fiind dezvoltată o componentă software a acestuia denumită OpenSSL FIPS Object Module, aceasta fiind compatibilă cu OpenSSL fiind creată pentru a oferi posibilitatea produselor ce folosesc API de tip OpenSSL de a fi supuse validării de confomitate FIPS 140-2. În ianuarie 2006 această componentă fost certificată, aceasta fiind însă revocată în iulie 2006 datorită unor nelămuriri privind validitatea interacţionării modulului cu software extern. În februarie 2007 produsul a fost recertificat.

Validarea OpenSSL FIPS Object Module este unică printre toate validările FIPS 140-2 prin faptul că producătorul pune la dispoziţie întreg codul sursă. Prin urmare, folosit fără nicio modificare şi construit pe orice platformă conform documentaţiei pusă la dispoziţie se obţine direct un modul criptografic validat. Orice modificare minoră asupra codului implică necesitatea revalidării, proces costisitor (aproximativ 50000$) şi îndelungat (între 6 şi 12 luni). Cea mai recentă validare open source este OpenSSL FIPS Object Module (Software Version: 1.2), FIPS 140-2 certificate #1051. În prezent nu există niciun alt produs open source supus validării FIPS 140-2 datorită lispei de finanţare. Validarea versiunilor precedente au fost finanţate de sectorul comercial şi sponsori guvernamentali, o parte dintre aceştia preferând să rămână anonimi.

29.3 Studiu de caz: Implementarea funcţiilor criptografice în MAPLE

În cadrul acestei secţiuni vom exemplifica, printr-o serie de exemple, modalităţile de rezolvare a problemelor propuse, în cadrul acestei culegeri, cu ajutorul aplicaţiei software MAPLE.

Exemplu 29.1 *Algoritmul de cifrare ElGamal.*

p (ordinul grupului), α (generatorul) numere prime publice;
a cheia privată;
$\beta := \alpha^a \bmod p$ cheia publică;
m mesajul clar;
k număr aleator secret;
regula de cifrare: $y_1 := \alpha^k \bmod p$; $y_2 := (m * \beta^k) \bmod p$;
regula de descifrare: $des := y_2 * (y_1^a)^{-1} \bmod p$.

```
> p:=17;
> alpha:=14;
> a:=2;
> beta:=alpha^a mod p;
> m:=4;
> k:=4;
> y1:=alpha^k mod p;
> y2:=(m*(beta^k)) mod p;
> text_cifrat:=(y1,y2);
> text_descifrat:=y2*(y1^a)^(-1) mod p;
```

Exemplu 29.2 *Algoritmul de semnătură ElGamal.*

p şi α numere prime publice;
a cheia secretă;
$\beta := \alpha^a \bmod p$ cheia publică;
x mesajul ce trebuie semnat;
k număr secret;
$\gamma := \alpha^k \bmod p$;
$\delta := (x - a * \gamma)k^{-1} \bmod (p-1)$;
$sign := (\gamma, \delta)$;
verificarea semnăturii: $\beta^\gamma * \gamma^\delta \bmod p = \alpha^x \bmod p$.

```
> p:=467;
> alpha:=2;
```

```
> a:=127;
> beta:=alpha^a mod p;
> x:=102;
> k:=15;
> gamma:=alpha^k mod p;
> delta:=(x-a*gamma)*k^(-1) mod (p-1);
> (beta^gamma*gamma^delta - alpha^x) mod p;
```

Exemplu 29.3 *Algoritmul de semnătură DSA.*

p număr prim (public);
q număr prim (public);
α (public) rădăcina de ordin q a unităţii;
a cheia secretă;
$\beta = (\alpha^a) \bmod p$;
x mesajul;
k număr aleatoriu (secret);
$sign = (\gamma, \delta)$ unde $\gamma = (\alpha^k \bmod p) \bmod q$ şi $\delta = (x + a * \gamma) * k^{-1} \bmod q$.

```
> p:=7879;
> q:=101;
> alpha:=170;
> a:=75;
> beta:=(alpha^a) mod p;
> x:=1234;
> k:=50;
> gamma:=(alpha^k mod p) mod q;
> delta:=(x+a*gamma)*k^(-1) mod q;
```

Exemplu 29.4 *Protocolul Diffie-Hellman.*

Caracteristicile protocolului:
p număr prim (minim 1024 biţi);
q divizor prim al lui $q - 1$ (minim 160 biţi);
α element de ordin q;
a număr generat de A şi trimis lui B;
b număr generat de B şi trimis lui A;
cheia comună este $k := \alpha^{a*b} \bmod p$.

```
> p:=25307;
> alpha:=2;
```

```
> a:=3578;
> b:=19956;
> k:=((alpha^a) mod p)^b mod p;
```

Exemplu 29.5 *Protocolul Blom.*

p număr prim, n numărul de utilizatori;
$k = 1$ nivel de compartimentare (protocolul este neconditionat sigur împotriva atacului unui utilizator);
a, b, c coeficienţii polinomului;
A denumire generică participant protocol, r_A cheia publică a lui A;
$f(X, Y)a + b(X + Y) + cXY$ polinom (simetric), $g_A(X) = f(X, r_A)$ polinomul secret al lui A.
K matricea cheilor de compartimentare(simetrică).

```
> p:=29;
> a:=1;
> b:=2;
> c:=3;
> n:=3;
> r:=array(1..n,[13,11,17]);
> f(X,Y):=a+b*(X+Y)+c*X*Y;
> g:=array(1..n);
> for i from 1 to n do:
> g[i]:=eval(f(X,Y),Y=r[i]) mod p;
> end do;
> K:=array(1..n, 1..n);
> for i from 1 to n do:
> for j from 1 to n do:
> K[i,j]:=eval(g[i],X=r[j]) mod p;
> end do;
> end do;
> print(K);
```

Exemplu 29.6 *Schema de partajare a lui Shamir.*

n numărul de participanţi;
k numărul minim de participanţi care pot reconstitui secretul;
q număr prim (identifică corpul $Z[q]$ în care se lucrează);
S secretul care se doreşte partajat;

x_i (publice) se distribuie utilizatorilor, $i = 1, \ldots, n$;
a_i (aleatoare), $i = 1, \ldots, k-1$.

```
> n:=5;
> k:=3;
> q:=17;
> S:=13;
> x[1]:=1;
> x[2]:=2;
> x[3]:=3;
> x[4]:=4;
> x[5]:=5;
> a[1]:=10;
> a[2]:=2;
> p:=S+a[1]*x+a[2]*x^2 mod q;
> for i from 1 to n do subs(x=x[i],p) mod q
> od;
```

Exemplu 29.7 *Recuperarea secretului din schema lui Shamir.*

n numărul de participanţi;
k numărul minim de participanţi care pot reconstitui secretul; q număr prim (identifica corpul $Z[q]$ în care se lucreaza);
S secretul care se doreste partajat;
x_i (publice) se distribuie utilizatorilor, $i = 1, \ldots, n$;
s_i secretul distribuit, $i = 1, \ldots, k-1$;

```
> n:=5;
> k:=3;
> q:=17;
> x[1]:=1;
> x[2]:=2;
> x[3]:=3;
> x[4]:=4;
> x[5]:=5;
> s[1]:=8;
> s[2]:=7;
> s[3]:=10;
> p:=S+a[1]*x+a[2]*x^2 mod q;
```

```
> solve({subs(x=x[1],p)=s[1],subs(x=x[2],p)=s[2],subs(x=x[3],p)=s[3]
},{S,a[1],a[2]});
```

Exemplu 29.8 *Canalul subliminal ElGamal.*

q număr prim;
α element primitiv;
x mesaj cifrat;
y mesaj subliminal;
k cheia secretă;
β autentificator;
γ autentificator;
mesajul subliminal (x, β, γ).

```
> q:=11;
> alpha:=2;
> y:=9;
> x:=5;
> k:=0;
> beta:=alpha^y mod q;
> gama:=y^(-1)*(x-k*beta) mod (q-1);
> M:=(x,beta,gama);
```

Exemplu 29.9 *Extragerea datelor din canalul subliminal ElGamal.*

q număr prim;
α element primitiv;
x mesaj cifrat;
y mesaj subliminal;
k cheia secretă;
β autentificator;
γ autentificator;
mesajul subliminal (x, β, γ).

```
> q:=11;
> alpha:=2;
> k:=0;
> x:=5;
> beta:=6;
> gamma:=5;
> a:=alpha^x mod q;
> b:=((alpha^k)^beta)*beta^gamma mod q;
```

```
> if( a= b) then print("Mesaj_Auth_OK");
> Mesaj_subliminal:=(x-k*beta)*gamma^(-1) mod (q-1);
> else print("Mesaj_Auth_FAIL")
> fi;
```

29.4 PARI/GP

PARI/GP a fost iniţial dezvoltat în 1985 de o echipă condusă de către Henri Cohen, iar în prezent este mentţinut de Karim Belabas, ajutat de o mulţime de voluntari. Numele PARI provine de la faptul că la început iniţiatorii proiectului au dorit să implementeze o librărie pentru aritmetica în limbajul de programare Pascal, "Pascal ARIthmetic" , iar partea GP vine de la Great Programmable Computer. Produsul este gratuit, versiunea stabilă curentă fiind 2.5.0, disponibilă din iunie 2011.

Scopul acestui program este facilitarea calculelor din teoria numerelor (factorizări, teoria algebrică a numerelor, curbe eliptice etc.), însă sunt incluse şi alte funcţii utile pentru calcule cu polinoame, matrice, numere algebrice etc.

PARI/GP recunoaşte mai multe tipuri de elemente, dintre care menţionăm:

• numere întregi;

• numere raţionale: scriem `a/b`, cu a şi b întregi;

• numere reale;

• numere complexe: scrise sub forma `a+b*I`, cu a şi b reale;

• întregi modulo n: pentru n mod m scriem `Mod(n,m)`;

• polinoame: de exemplu, pentru $x^9 + 7x + \frac{6}{5}$ vom scrie `x^ 9+7*x+6/5`;

• funcţii polinomiale: `P/Q`, cu P şi Q polinoame;

• polinoame modulo un polinom P: `Mod(P,Q)`, unde Q este un polinom;

• vectori: scriem `v=[1,2,3]` pentru un vector linie, şi `w=[1,2,3]~` pentru un vector coloană; prin `v[i]` se înţelege a i-a componentă a vectorului v;

• matrice: liniile sunt separate prin punct şi virgulă, iar elementele unei linii sunt separate prin virgulă; pentru o matrice `A`, prin `A[i,j]` înţelegem elementul aflat la intersecţia dintre linia i şi coloana j.

Funcţiile disponibile în PARI sunt numeroase:

Funcţii aritmetice. Acestea sunt funcţii al căror domeniu de definiţie este $\mathbb{Z}$ sau $\mathbb{Z}_n$. Dăm câteva exemple de astfel de funcţii:

• `binary(x)`: transformă numărul întreg x din baza 10 în baza 2;

• `contfrac(x)`: scrierea întregului x ca fracţie continuă;

• `bezout(x,y)`: returnează un vector `v=[a,b,d]`, unde d=c.m.m.d.c(x, y), iar a şi b sunt astfel încât $ax + by = d$;

• `divisors(x)`: vector care are drept componente divizorii lui x, în ordine crescătoare;

• `divrem(x,y)`: returnează câtul şi restul împărţirii lui x la y;

• `eulerphi(n)`: calculează valoarea funţiei lui Euler $\varphi(n)$;

• `factorint(n)`: returnează toţii factorii primi ai lui n, împreună cu multiplicităţile lor;
• `gcd(x,y)`, `lcm(x,y)`: c.m.m.d.c(x, y), respectiv c.m.m.mc(x, y);
• `isprime(x)`: returnează 1 dacă x este prim şi 0 în caz contrar;
• `kronecker(x,y)`: returnează valoarea simbolului Legendre (sau a generalizării sale, simbolul lui Jacobi) $(\frac{x}{y})$;
• `omega(x)`: numărul de divizori primi distincţi ai lui x;
• `znorder(x)`: calculează orninul elementului $x \in \mathbb{Z}_n$ în grupul $\mathbb{Z}_n$.

Funţii referitoare la polinoame.

• `algdep(z,k)`: găseşte un polinom din $\mathbb{Z}[x]$ cu gradul cel mult egal cu K şi care are pe z ca rădăcină;
• `factormod(f,p)`: factorizează un polinom dn $\mathbb{Z}[x]$ modulo numărul prim p;
• `polidisc(f,x)`: returnează discriminatul polinomului f, privit ca polinom în nedeterminata x;
• `polisirreductible(f)`: verifică ireductibiitatea polinomului f;
• `polrecip(f)`: returnează polinomul obţinut din f scriindu-se coeficienţii în ordine inversă;
• `polresultant(f,g,x)`: calculează rezultanta polinoamelor f şi g, privite ca polinoame în nedeterminata x;
• `polroots`: returnează un vector coloană ale cărui componente sunt rădăcinile lui f, repetate conform multiplicităţii fiecăreia;
• `prod(x=a,b,f(x))`: calculează $\prod_{x=a}^{b} f(x)$;
• `prodeuler(x=a,b,f(x))`: calculează produsul $\prod_{a \le p \le y} f(p)$, unde p este prim;
• `solve(x=a,b,f(x))`: găseşte o rădăcină pentru $f(x)$ cuprinsă între a şi b, presupunând că $f(a)f(b) \le 0$;
• `sum(x=a,b,f(x))`: calculează $\sum_{x=a}^{b} f(x)$;
• `sumdiv(n,x,f(x))`: sumează $f(x)$ după toţi divizorii pozitivi ai lui n.

Funţii referitoare la curbe eliptice. PARI/GP are implementate câteva funcţii care sunt foarte folositoare atunci când lucrăm peste curbe eliptice. Aceste funcţii presupun o curbă eliptică în formă Weierstrass generalizată:

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

Astfel, o curbă eliptică poate fi creată dându-se un vector cu 5 componente. Punctele curbei sunt reprezentate ca vetori cu 2 componente, mai puţin punctul de la infinit, acesta fiind reprezentat prin `[0]`.

Exemple de funţii referitoare la curbe eliptice sunt:
• `E=ellinit[a1,a2,a3,a4,a6]`: creează o curbă eliptică $\mathcal{E}$ cu coeficienţii a_1, a_2, a_3, a_4, a_6;
• `E.disc`: returnează discriminantul curbei $\mathcal{E}$;
• `E.j`: returnează j-invariantul curbei $\mathcal{E}$;
• `elladd(E,P,Q)`: adună punctele P şi Q, puncte ce aparţin curbei $\mathcal{E}$;
• `ellap(E,p)`: returnează urma Frobenius (p este un număr prim);
• `ellisoncurve(E,P)`: adevărat dacă şi numai dacă punctul P este pe curba $\mathcal{E}$;

• `ellorder(E,P)`: returnează ordinul punctului P, dacă acesta este un puct de torsiune, altfel returnează 0;

• `ellordinate(E,x)`: găseşte y astfel încât punctul (x, y) apartţine curbei $\mathcal{E}$; dacă nu există un astfel de y, returnează `[]`;

• `ellpow(E,P,n)`: calculează punctul $nP \in \mathcal{E}$;

• `ellsub(E,P,Q)`: calculează $P - Q \in \mathcal{E}$.

Capitolul 30

Concursuri publice

În acest capitol ne propunem să facem o scurtă descriere a celor 4 probleme date la MITRE Cyber Challenge [1], în perioada 9-12 ianuarie 2012. Pentru fiecare problemă prezentăm şi câte o sugestie de rezolvare.

Primele trei probleme sunt legate între ele, în sensul că pentru rezolvarea celei de-a doua probleme este nevoie de parola obţinută în urma rezolvarii primei probleme, iar rezolvarea celei de-a doua probleme ne conduce la un indiciu folositor în rezolvarea problemei cu numărul trei. Ultima problemă este independentă de primele trei, aceasta având de fapt rolul de a scoate în evidenţă o vulnerabilitate a ECDSA (acelaşi tip de vulnerabilitate care a fost folosită şi pentru aflarea cheii de semnare de la PlayStation3).

Problema 1. Obiectivul primei probleme este acela de a recunoaşte când s-a folosit criptografia clasică (cifrurile Caesar, Vigenère, Hill etc) în mediul digital.

Scenariul ipotetic este următorul: găsim un fişier "ciudat, pe care nu l-am creat noi, în calculatorul personal. Acest fişier, `neededinformation.txt`, este pus la dispoziţie în cadrul problemei.

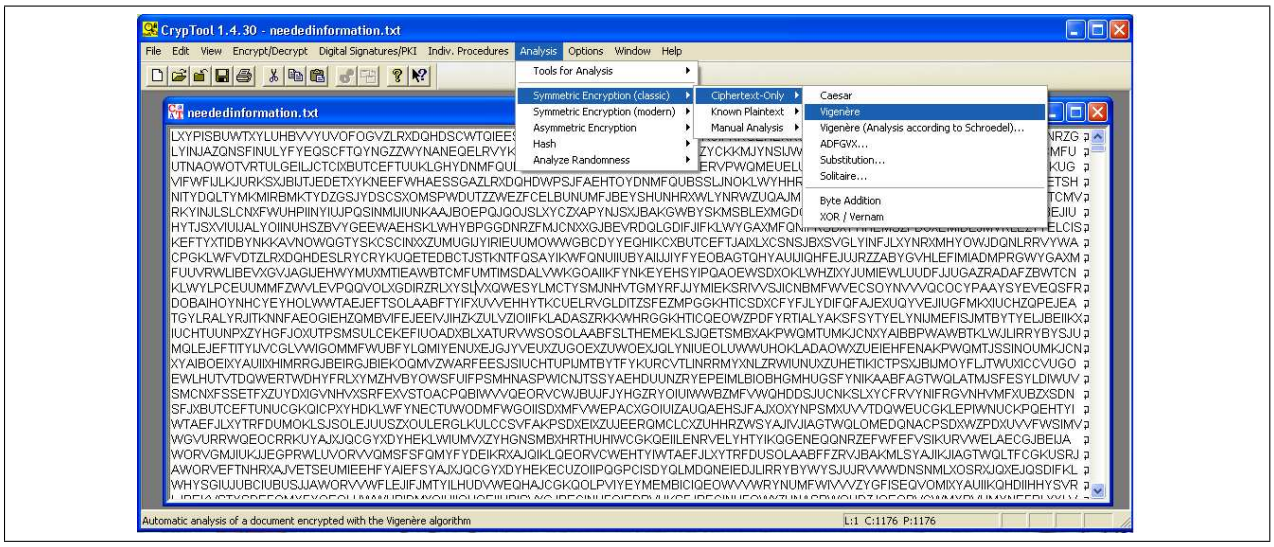
Se cere decriptarea informaţiei conţinute în acest fişier şi găsirea parolei ascunse în interiorul său. Ştim că această parolă începe cu "S", se termină cu "D" şi este formată numai din majuscule.

Problema se poate rezolva foarte uşor folosind pachetul software **CrypTool** pentru a face o criptanaliză a `nedeedinformation.txt`: *Analysis* $\rightsquigarrow$ *Symmetric encryption(classic)* $\rightsquigarrow$ *Ciphertext-Only* $\rightsquigarrow$ *Vigenère*.

În urma acestei criptanalize rezultă pentru început că lungimea cheii folosite este 6, iar la următorul pas obţinem cheia "SQUARE" cu ajutorul căreia putem decripta textul conţinut în `neededinformation.txt`. La sfârşitul textului decriptat se află şi parola pe care o căutam: "[...]THEPASSWORDFORTOMMOROWIS**STRONGPASSWORDSAREGOOD**".

Problema 2. Această problemă îşi propune să arate posibilele locuri în care un adversar poate ascunde informaţii, precum şi modurile în care acest lucru se poate face. Mai precis

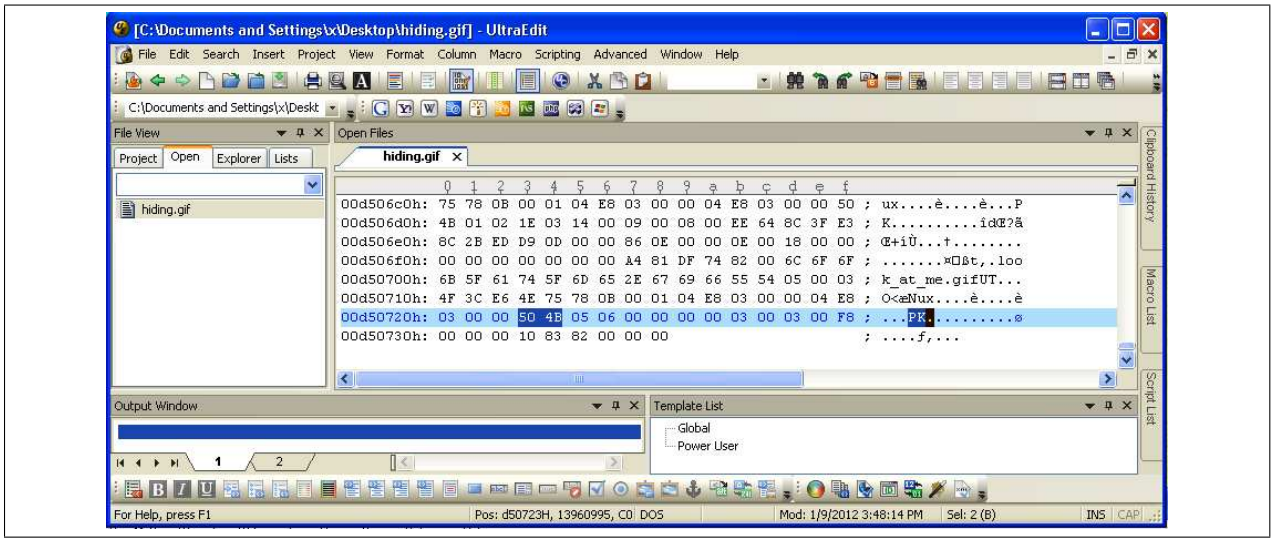
[1] http://www.iccs.fordham.edu/mitre/



problema presupune găsirea unor informaţii ascunse în interiorul unei imagini.

Presupunem că avem o imagine `hiding.gif`. Cerinţa problemei este aceea de a găsi informaţia ascunsă în această imagine, ştiind că aceasta începe cu "h", se termină cu "l", iar mărimea fiecărei litere contează. De asemenea, aşa cum am menţionat anterior, vom avea nevoie de parola obţinută la prima problemă.

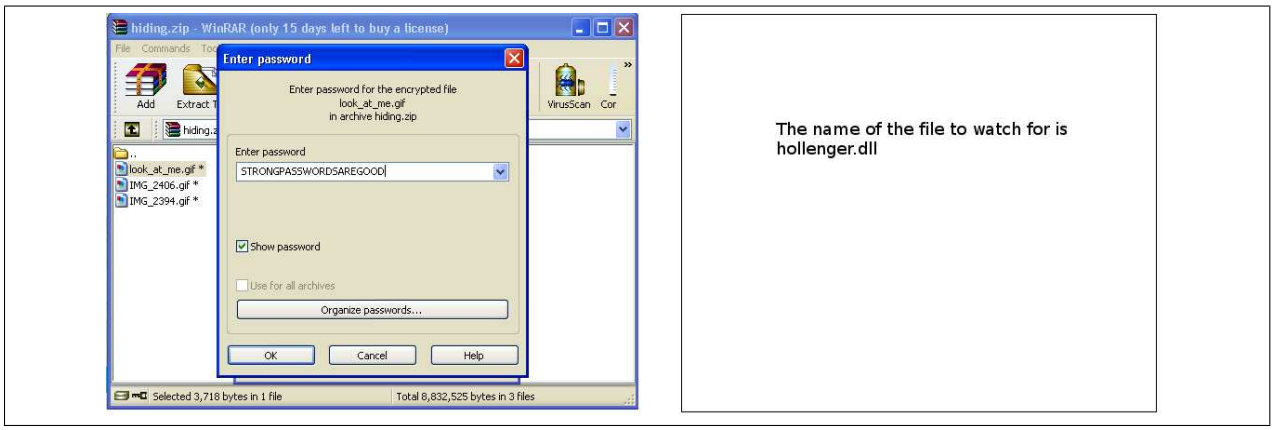
Uitându-ne la proprietăţile imaginii `hiding.gif`, observăm că aceasta are 13.3 MB, ceea ce ni se pare suspect de mult. Pentru a vedea mai multe detalii, deschidem `hiding.gif` cu **UltraEdit** şi observăm că apare "PK"în format hexa 50 4B), ceea ce înseamnă că este vorba despre o arhivă (PK reprezintă iniţialele lui Phil Katz).



Prin urmare schimbăm extensia şi obţinem `hinding.zip`. Deschizând această arhivă găsim alte imagini, una dintre ele (care atrage atenţia în mod deosebit) fiind `look_at_`-

`me.gif`. Pentru a putea vedea această imagine însă, avem nevoie de parola obţinută la problema 1.

Găsim în final şi informaţia pe care o căutam, şi anume `hollenger.dll`.

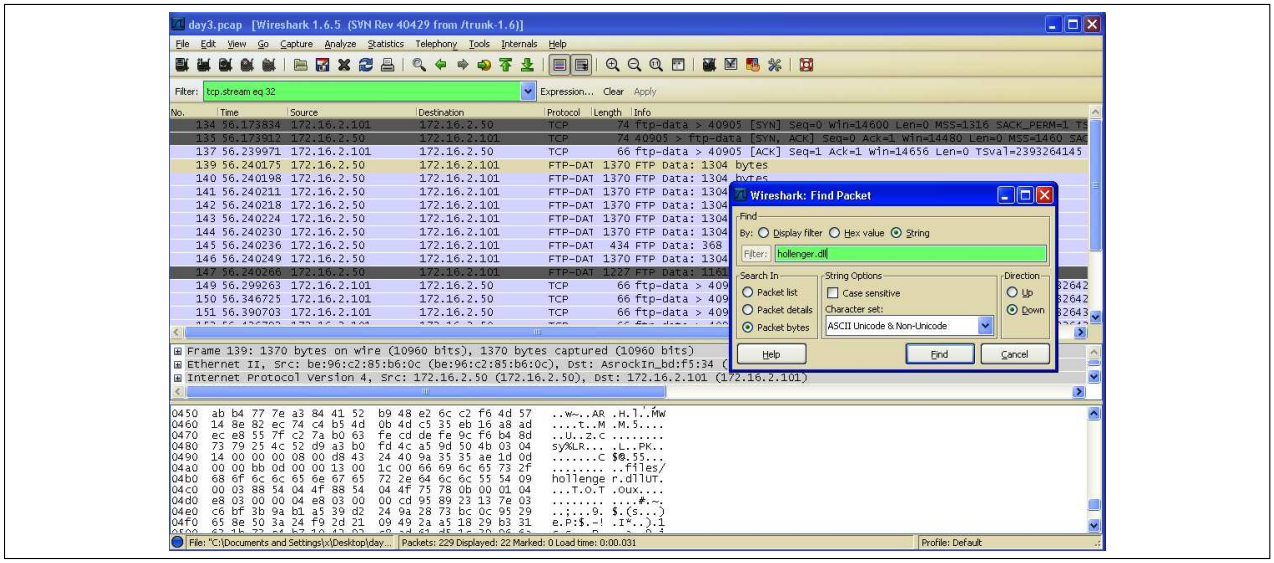


Problema 3. Cea de-a treia problemă este legată de analiza traficului de date.

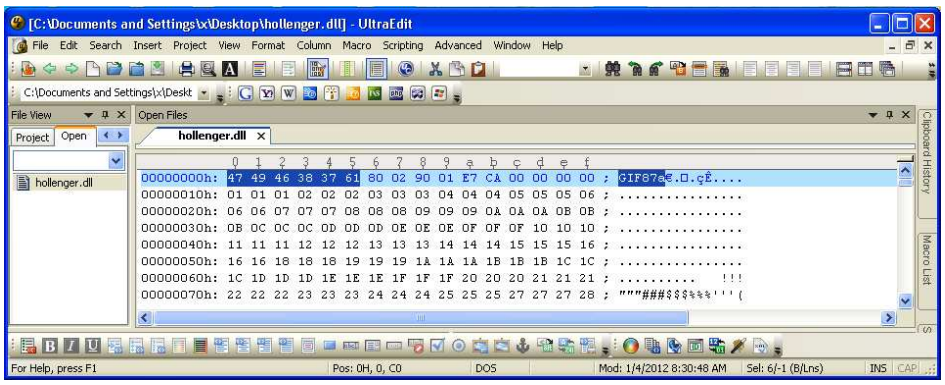
Presupunem că avem la dispoziţie o captură de trafic de date, `day3.pcap`.

Se cere să se găsească, cu ajutorul răspunsului de la problema anterioră, fişierul transferat din calculatorul personal către o sursă necunoscută. Răspunsul pentru această problemă îl va constitui informaţia ascunsă în fişierul respectiv. Ştim că începe cu "P", se termină cu "k" şi mărimea fiecărei litere este importantă.

Pentru a putea deschide `day3.pcap` vom folosi **Wireshark**. În continuare căutăm `hollenger.dll` astfel: *Edit* $\rightsquigarrow$ *Find Packet* $\rightsquigarrow$ *Filter* : hollenger.dll (selectăm *Packet bytes* şi *String*) $\rightsquigarrow$ *Find*, iar apoi *Follow TCP stream.*



Observăm din nou PK şi folosim opţiunea *Save as* pentru a obţine `day3.zip`. Arhiva conţine mai multe fişiere, printre care şi `hollenger.dll`. Deschidem `hollenger.dll` cu UltraEdit şi observăm "numărul magic" GIF87a (în format hexa 47 49 46 38 37 61), ceea ce înseamnă că este vorba de o imagine.



Schimbând deci extensia obţinem `hollenger.gif`, aceasta fiind o imagine care conţine următoarea frază : "The Root Password is **Pengu1nsR0ck**".

Problema 4. Obiectivul acestei probleme este recuperarea unei chei private ECDSA care a fost folosită pentru semnarea a două mesaje diferite.

Înainte însă de a continua prezentarea acestei ultime probleme, reamintim algoritmul de semnătură ECDSA:

Parametrii publici în acest caz sunt: un număr prim p, o curbă eliptică $\mathcal{E}(\mathbb{F}_p)$ şi un punct $G \in \mathcal{E}(\mathbb{F}_p)$ cu ord$G = q$, q prim.

Cheia publică (de verificare) $V \in \mathcal{E}(\mathbb{F}_p)$ se construieşte cu ajutorul cheii private (de semnare) $1 \leq s \leq q-1$ astfel: $V = sG$.

Semnătura mesajului $m \pmod q$, calculată cu ajutorul unei chei efemere $e \pmod q$, este definită ca fiind perechea $(s_1, s_2) = \big(x_{eG} \bmod q\ , (m + ss_1)e^{-1} \bmod q\big)$, unde prin x_{eG} înţelegem coordonata x a punctului $eG \in \mathcal{E}(\mathbb{F}_p)$.

Semnătura (s_1, s_2) a mesajului m este verificată dacă are loc următoarea egalitate (în care $v_1 = ds_2^{-1} \bmod q$ şi $v_2 = s_1 s_2^{-1} \bmod q$) : $x_{v_1 G + v_2 V} \bmod q = s_1$.

Revenim acum la problema noastră. Datele care ne sunt puse la dispoziţie se află în trei fişiere: `signatures.txt`,`parameters.der` şi `public.oct`.

Primul fişier conţine valorile hash-urilor şi semnăturile pentru cele două mesaje (în format hexa):

m_1=DE37B3145DB7359A0ACC13F0A4AFBD67EB496903
s_{11}=ACB2C1F5898E7578A8A861BDF1CA39E7EF41EAC0B6AAA49468DD70E2
s_{12}=BE4FA99C9D261C5F387A3ACE025702F6FB7884DD07CE18CAD48654B8
m_2=28469B02BF0D2CFC86FF43CB612EE8FC05A5DBAA
s_{21}=ACB2C1F5898E7578A8A861BDF1CA39E7EF41EAC0B6AAA49468DD70E2
s_{22}=D3540E2B13E51605F5FEB8C87EE8E176E59213F31EA8B8FFDAD077E2

Pentru a putea vedea informaţiie din cel de-al doilea fişier,`parameters.der`, vom folosi **OpenSSL** astfel:

```
openssl ecparam -inform DER -in /cygdrive/e/parameters.der
              -outform PEM -out /cygdrive/e/parameters.pem
openssl ecparam -text -in /cygdrive/e/parameters.pem -noout
Field Type:  prime-field
Prime:
    00:ff:ff:ff:ff:ff:ff:ff:ff:ff:ff:ff:ff:ff:ff:
    ff:ff:ff:ff:ff:ff:ff:ff:ff:fe:ff:ff:e5:6d
A: 0
B: 5 (0x5)
Generator (uncompressed):
    04:a1:45:5b:33:4d:f0:99:df:30:fc:28:a1:69:a4:
    67:e9:e4:70:75:a9:0f:7e:65:0e:b6:b7:a4:5c:7e:
    08:9f:ed:7f:ba:34:42:82:ca:fb:d6:f7:e3:19:f7:
    c0:b0:bd:59:e2:ca:4b:db:55:6d:61:a5
Order:
    01:00:00:00:00:00:00:00:00:00:00:00:00:00:01:
    dc:e8:d2:ec:61:84:ca:f0:a9:71:76:9f:b1:f7
Cofactor:  1 (0x1)
```

Prin urmare, `parameters.der` conţine de fapt parametrii publici:

• numărul prim p:

p=FFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFEFFFFE56D.

• curba eliptică $\mathcal{E}: \ y^2 = x^3 + 5$ considerată peste $\mathbb{F}_p$.

• coordonatele punctului G (`04` semnifică faptul că asupra coordonatelor punctului G nu s-a aplicat o compresie, prin urmare jumătate din octeţii care urmează vor constitui coordonata x a punctului G, iar cealaltă jumătate coordonata y a punctului G):

x_G=85CEE9C98EFDFDFCF64CB522A773F1435D568173677D1D28FC00643

y_G=58A105CC1AB1A53D77B278850776E144197F3FA4E27AA676408DFE22

• numărul prim q, acesta fiind ordinul punctului G:

q=0100000000000000000000000001DCE8D2EC6184CAF0A971769FB1F7.

• cofactorul, care în acest caz este 1, ceea ce înseamnă că punctul G este generator pentru grupul punctelor curbei eliptice considerate.

Pentru ultimul fişier, `public.oct`, folosim **UltraEdit** şi găsim reprezentarea hexa a informaţiei conţinute în interiorul său:

```
04:85:CE:EE:9C:98:EF:DF:DF:CF:64:CB:52:2A:77:3F:14:35:D5:
68:17:36:77:D1:D2:8F:C0:06:43:58:A1:05:CC:1A:B1:A5:3D:77:
B2:78:85:07:76:E1:44:19:7F:3F:A4:E2:7A:A6:76:40:8D:FE:22
```

Aceasta este cheia publică, mai precis punctul V de coordonate:

x_V =85CEEE9C98EFDFDFCF64CB522A773F1435D568173677D1D28FC00643

y_V =58A105CC1AB1A53D77B278850776E144197F3FA4E27AA676408DFE22

Avem acum toate datele necesare pentru a afla cheia privată s.

Observaţia importantă pe care se bazează însă întreaga rezolvare este aceea că valorile s_{11} şi s_{21} sunt egale. În acest caz, dacă notăm cu e_1, respectiv e_2 cheile efemere folosite pentru semnarea mesajelor m_1, respectiv m_2, rezultă fie că $e_1 = e_2 = e$, fie că $e_1 + e_2 = q$.

Vom arăta cum putem afla cheia privată s dacă presupunem că este vorba de primul caz, anume că pentru semnarea celor două mesaje diferite m_1 şi m_2 s-a folosit aceeaşi cheie efemeră e. Notând cu r valoare comună $s_{11} = s_{21}$, avem următoarele două relaţii:

$s_{21} = (m_1 + sr)e^{-1} \bmod q = r_1 \quad$ şi $\quad s_{22} = (m_2 + sr)e^{-1} \bmod q = r_2$

de unde putem afla cheia privată s astfel:

$r_1 {r_2}^{-1} = (m_1 + sr)(m_2 + sr)^{-1} \bmod q \Rightarrow s = (m_2 r_1 - m_1 r_2)[r(r_2 - r_1)]^{-1} \bmod q$

În continuare vom lucra în **PARI/GP**, prin urmare transformăm mai întâi toate valorile de care avem nevoie din baza 16 în baza 10. O metodă de a face acest lucru poate fi următoarea:

```
gp>  n=length(w);
gp>  for(i=1,n,if(w[i]==A,w[i]=10,if(w[i]==B,w[i]=11,if(w[i]==C,w[i]=12,
        if(w[i]==D,w[i]=13,if(w[i]==E,w[i]=14,if(w[i]==F,w[i]=15)))))));
gp>  W=sum(i=1,n,16^ (i-1)*w[n+1-i]);
```

Aflăm acum, în ipoteza că s-a folosit aceeaşi cheie efemeră e, cheia privată s:

```
gp> q=269599466671506397946670150870196403465103270831200745489949586682 79;
gp> m1=126863809213821016326075805582242953806661035033 9;
gp> m2=229934186335685840756719395324394646288453721002;
gp> r=181872508000979720105210800739375851001549018585711307784371661334 74;
gp> r1=200421066876435888723892421805065268328322513716312598231736221912 88;
gp> r2=222554719053051266943780747330403890094391367365427932389778559119 06;
gp> s=(((m2*r1-m1*r2)%q))*(bezout((r*(r2-r1))%q,q)[1])%q
  150105758150298517726420852183293232330918155587226707130866411800 71
```

Verificăm că aceasta este corectă, adică vrem să vedem dacă într-adevăr are loc egalitatea $V = sG$. Pentru aceasta iniţiallizăm curba eliptică $\mathcal{E}$ peste care vrem să lucrăm, iar apoi calculăm punctul sG:

```
gp> p=269599466671506397946670150870196306736371444225405724810993152 7511;
gp> E=ellinit([0,0,0,0,5]*Mod(1,p));
gp> xG=169838104656567934451781833418223221758836422215366266375122939833 24;
gp> yG=132728967533068621545367854476150776004798628713168298627836137558 13;
gp> G=[xG,yG];
gp> ellpow(E,G,s);
```

Obţinem că:

$x_{sG} = 14091661710852556870833728605751404033863675975464814254659297347139$

$y_{eG} = 93337225411387194870329268062846037753744917245016116572944899763 54$

Aceste valori sunt egale cu x_V, respectiv y_V, prin urmare, cheia privată s pe care am găsit-o este bună.

Deoarece problema cerea cheia privată s în format hexa, facem în final şi transformarea numărului s din baza 10 în baza 16:

```
gp> v=vector(60);
gp> v[1]=divrem(s,16)[1];
gp> for(i=2,60,v[i]=divrem(v[i-1],16)[1]);
gp> w=vector(60);
gp> w[1]=divrem(s,16)[2];
gp> for(i=2,60,w[i]=divrem(v[i-1],16)[2]);
gp> S=vector(60,i,w[61-i]);
gp> for(i=1,60,if(S[i]==10,S[i]=A,if(S[i]==11,S[i]=B,if(S[i]==12,S[i]=C,
        if(S[i]==13,S[i]=D,if(S[i]==14,S[i]=E,if(S[i]==15,S[i]=F)))))));
```

Obţinem că S=8E88B0433C87D1269173487795C81553AD819A1123AE54854B3C0DA7.

Capitolul 31

Probleme de sinteză

31.1 Enunţuri

1. Completaţi: Scopul cifrării este de a asigura ..... unei comunicaţii.

   (a) autenticitatea

   (b) confidentialitatea

   (c) integritatea

   (d) nerepudierea

2. Următorul text a fost obţinut utilizând sistemul de cifrare Cezar (au fost eliminate accentele, spaţiile si semnele de punctuaţie): MHPEUDVVHPRQULYDOPDLVFHVWSRXUOHWRXIIHU. Care este decriptarea sa?

   (a) Chacun semble des yeux approuver mon courroux.

   (b) Ma bouche mille fois lui jura le contraire.

   (c) J'embrasse mon rival mais c'est pour l'etouffer.

   (d) De grâce, apprenez-moi, Seigneur, mes attentats.

3. Cifraţi textul "Attaque à l'aube " cu ajutorul algoritmului de substituţie precizat mai jos.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
J	G	F	K	P	R	M	T	S	V	Z	D	Q

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
I	Y	B	C	W	A	O	X	E	H	N	U	L

   Care este textul cifrat obţinut?

(a) JOOJCXPJDJXGP

(b) SHHSMYVSWSYPV

(c) JOOJCXPJBJXGP

(d) SHHSMYVSZSYPV

4. Cifrul Vigenère reprezintă o modalitate de cifrare îmbunătăţită a sistemelor de cifrare cu substituţie simplă. În ce constă acesta?

   (a) în aplicarea succesivă a mai multor substituţii alfabetice pe acelaşi text.

   (b) în aplicarea de substituţii alfabetice care nu cifrează niciodată o literă în ea însăşi.

   (c) în cifrarea literelor care apar cel mai frecvent (cum ar fi e) în mai multe simboluri diferite.

   (d) în alegerea mai multor alfabete de sustituţie independente şi schimbarea alfabetului folosit, la fiecare literă, în mod ciclic.

5. Reprezentarea în baza 2 a numărului 1729 este:

   (a) 10010110100

   (b) 11011000001

   (c) 11001100011

   (d) 6C1

6. Propunem următorul algoritm de cifrare: Alice şi Bob doresc să schimbe un mesaj m care reprezintă un număr întreg între 0 şi $N-1$. Pentru aceasta, ei partajează o cheie secretă comună k extrasă aleator între 0 şi $N-1$. Mesajul cifrat se obţine ca $c = m + k \bmod N$. Ce părere aveţi despre securitatea sistemului?

   (a) Proastă: sistemul reprezintă o variantă a sistemului lui Cezar.

   (b) Bună, dacă adversarul nu cunoaşte algoritmul de cifrare.

   (c) Foarte bună, cu condiţia să nu utilizeze cheia k decât o singură dată.

   (d) Excelentă: sistemul reprezintă o variantă a algoritmului RSA.

7. Alice îi trimite lui Bob un mesaj cifrat c obţinut cu ajutorul algoritmului precedent. Cum determină Bob mesajul original m?

   (a) $m = c + k \bmod N$

   (b) $m = c - k \bmod N$

   (c) $m = c \times k \bmod N$

   (d) $m = c^k \bmod N$

8. Care dintre acronimele următoare desemnează un algoritm de cifrare de tip bloc?

   (a) AES
   (b) HMAC
   (c) SHA-1
   (d) NIST

9. Inversul lui 17 modulo 100:

   (a) este 83.
   (b) este 53.
   (c) este 1/17.
   (d) nu există.

10. Am în posesia mea un mesaj m pe care nu vreau încă să îl divulg, dar doresc să pot dovedi peste câţiva ani că îl cunoşteam deja în 2010 (conform amprentei de timp). Pentru aceasta, este suficient să public astăzi:

    (a) un text cifrat corespunzător lui m cu o cheie cunoscută numai de mine.
    (b) un text cifrat corespunzător lui m cu o cheie cunoscută de toată lumea.
    (c) imaginea lui m printr-o funcţie de dispersie (funcţie hash).
    (d) imaginea lui m printr-un MAC folosind o cheie aleatoare.

11. Funcţia de dispersie (hash) SHA-512 întoarce valori între 0 şi $2^{512} - 1$. Se calculează imagini prin această funcţie în mod aleator. Care este ordinul de mărime al numerelor pentru care trebuie calculate valorile prin aceasta funcţie pentru a găsi 2 valori care să aibă primii 20 de biţi egali?

    (a) 20
    (b) 1000
    (c) 1000000
    (d) 2^{512}

12. Construim un generator de numere pseudo-aleatoare care iniţializează cu x_0 cu o valoare între 0 şi 999 şi determină $x_{n+1} = 500x_n + 789 \bmod 1000$. În ce condiţii aţi utiliza acest generator?

    (a) Pentru a produce numere aleatoare între 0 şi 999, dacă nu prezintă interes nivelul de securitate.
    (b) Pentru generarea unei chei de tip *one-time pad*.
    (c) Pentru construcţia unei funcţii de dispersie.

(d) Niciodată.

13. Cum este obţinută cheia secretă necesară pentru criptarea comunicaţiei, la conectarea la un site web securizat?

(a) Se obţine din parola introdusă pentru conectare, printr-un algoritm de derivare a cheii precum PBKDF (Password Based Key Derivation Function).

(b) Provine din cheia publică a serverului, conţinută într-un certificat.

(c) Provine din cheia privată a serverului, divulgată clientului după stabilirea conexiunii.

(d) Se obţine în urma unui schimb de chei între client şi server, precum schimbul de chei Diffie-Hellman.

14. Care este dificultatea de a factoriza un număr prim pe 1024 de biţi astăzi?

(a) Este simplu!

(b) Numărul poate fi factorizat cu ajutorul a câteva mii de calculatoare actuale care să ruleze între 1 şi 2 ani.

(c) Nimeni nu poate face asta momentan, dar poate se va reuşi de către agenţii precum NSA.

(d) Acest lucru nu va fi posibil timp de mai multe milenii.

15. Algoritmul RSA (fără padding) este un algoritm de cifrare:

(a) simetric, tip bloc.

(b) simetric, tip fluid (debit).

(c) parţial homomorfic.

(d) bazat pe identitate.

16. Fie generatorul Geffe descris de trei registre de deplasare $\mathbf{LFSR}_i$ (ale căror polinoame de feedback sunt primitive de grad 19, 21 şi respectiv 24) iar ieşirea de formula: $y(t) = a_1(t) \cdot a_3(t) \oplus \bar{a}_1\ (t) \cdot a_2(t)$. Care este complexitatea **LC** şi perioada **P** a acestui generator?

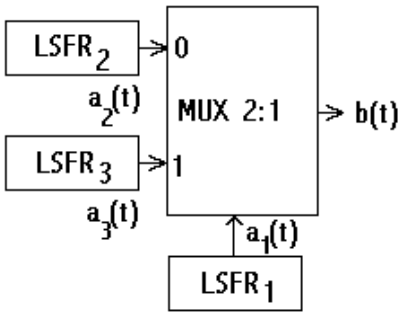


Figura 31.1: Generatorul Geffe.

(a) **LC**= 640, **P**= 2^{64}.

(b) **LC**=64 , **P**=$(2^{19}-1)(2^{21}-1)(2^{24}-1)$.

(c) **LC**=876 , **P**=$(2^{19}-1)(2^{21}-1)(2^{24}-1)$.

(d) Niciunul dintre răspunsuri nu este corect.

17. Fie secvenţa dată de reprezentarea binară (scrisă pe 8 biţi) a numărului i, $i = 0, ..., 255$:

$\underbrace{00000000}\ \underbrace{00000001}\ \underbrace{00000010}\underbrace{00000011}\underbrace{00000100}...\underbrace{11111111}$

Care este statistica testului frecvenţei aplicată acestei secvenţe binare? Este secvenţa aleatoare, relativ la testul frecvenţei, la riscul de ordinul 1 de 5%?

(a) $f_{tf} = 256$, şirul nu este aleatoriu.

(b) $f_{tf} = 1$, şirul este aleatoriu.

(c) $f_{tf} = 0$, şirul este aleatoriu.

(d) niciunul dintre răspunsuri nu este corect.

18. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate:

(a) Atac reuşit asupra a două preimagini ale unei funcţii hash implică reuşita atacului de generare de coliziuni.

(b) Atac reuşit de generare de coliziuni asupra unei funcţii hash implică reuşita atacului asupra a două preimagini a aceleiaşi funcţii hash.

19. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate:

(a) Un registru de deplasare de lungime n are perioada de $2^n - 1$.

(b) Un registru de deplasare de lungime n are perioada maximă de $2^n - 1$.

(c) Un registru de deplasare de lungime n, cu polinomul caracteristic primitiv, are perioada de $2^n - 1$.

20. Probabilitatea de coliziune a două mesaje de lungime n biţi procesate de aceeaşi funcţie hash ideală, ce are ieşirea pe m biţi, este:

(a) 2^{-m}.
(b) 2^{-n}.
(c) 2^{-mn}.
(d) 2^{m-n}.
(e) 2^{n-m}.
(f) Niciuna din valorile de mai sus.

21. Fie extensia Galois GF(3^2) generată de rădăcina polinomului $X^2 - X - 1$. În această extensie valoarea $log_{2\alpha+1}(1 + \alpha)$ este:

(a) 8.
(b) 4.
(c) 2.
(d) 5.
(e) 6.
(f) Niciuna din valorile de mai sus.

22. Simbolul lui Jacobi $\left(\frac{6278}{9975}\right)$ este:

(a) -1.
(b) 0.
(c) 1.
(d) Niciuna din valorile de mai sus.

23. În cadrul unui acţiuni judiciare urmează a fi desemnat unul dintre cei doi judecătorii de serviciu. Deoarece niciunul dintre cei doi nu doreşte să facă acest lucru în mod benevol, se propune modalitatea de decizie bazată pe rezultatul obţinut din aruncarea unei monede. Astfel, judecătorul A alege "stema" sau "banul" iar judecătorul B aruncă moneda, decizia fiind luată în urma rezultatului obţinut. Având în vedere faptul că A şi B în locaţii fizice diferite se propune, de către criptograf, următorul protocol.

PASUL 1. Participantul A alege $x = 0$ ("stema") sau $x = 1$ ("banul") şi o cheie aleatoare k. Se cifrează cu ajutorul algoritmului DES valoarea x: $y = DES(x; k)$.

PASUL 2. A transmite y către B.

PASUL 3. B aruncă o monedă şi comunică lui A rezultatul obţinut.

PASUL 4. A comunică lui B cheia k.

PASUL 5. B descifrează y, cu ajutorul algoritmului DES şi obţine ceea ce a ales A.

Criptograful afirmă faptul că "participantul A nu îşi poate schimba opţiunea" datorită valorii transmise y. Arătaţi următoarele:

a) Utilizând "birthday attack" utilizatorul A poate trişa;

b) Care este complexitatea atacului de la punctul a)?

c) Care este cerinţa primitivei criptografice ce asigură valabilitatea afirmaţiei "participantul A nu îşi poate schimbă opţiunea";

d) Corectaţi protocolul astfel încât să nu mai fie posibil atacul de la punctul a).

24. Fie p un număr prim şi G mulţimea tuturor elementelor $x \in \mathbf{Z}_{p^2}$ care satisfac relaţia $x \equiv 1 \bmod p$. Arătaţi faptul că:

a) G este grup multiplicativ;

b) $|G| = p$;

c) $L : G \to \mathbf{Z}_p$ definit de $L(x) = (x-1)p^{-1} \bmod p$ este un izomorfism de grupuri;

d) $p+1$ este un generator al lui G şi izomorfismul este logaritmul în baza $p+1$ a lui G. Cu alte cuvinte avem: $(p+1)^{L(x)} \bmod p^2 \equiv x$ pentru orice x.

25. Să considerăm algoritmul de semnare DSS cu parametrii p, q, g, o funcţie hash H şi o cheie secretă x. În cadrul implementării se precalculează perechea (k, r) ce satisface relaţia $r = (g^k \bmod p) \bmod q$, aceasta fiind utilizată pentru generarea semnăturilor. Recuperaţi cheia privată de semnare.

26. Protocolul Wired Equivalent Privacy (WEP) utilizat în standardul IEEE 802.11 este utilizat pentru a proteja datele în cadrul transmisiilor wireless. Protocolul WEP are o cheie K de 40 de biţi, partajată între entităţile ce comunică şi este utilizată pentru protecţia fiecărui "frame"[1] transmis. În cadrul acestui exerciţiu vom presupune faptul că cheia K este fixă şi nu îşi schimbă valoarea. Pentru ca utilizatorul A să transmită un "frame" la B va proceda după cum urmează:

PASUL 1. Codificarea CRC: Dându-se un mesaj de n-biţi M (n este constant), A calculează o sumă de control de 32 de biţi $L(M)$, unde L este o funcţie liniară [2] ce nu depinde de K. Textul clar, de lungime $(n+32)$ biţi, este $P = M||L(M)$.

PASUL 2. A cifrează P cu algoritmului RC4, cheia K şi vectorul IV de 24 de biţi specific fiecărui "frame" transmis. Textul cifrat va fi $C = P \oplus RC4(IV, K)$.

[1] pachet de date.

[2] $L(X \oplus Y) = L(X) \oplus L(Y)$.

PASUL 3. A transmite pe canalul radio (IV, C) către B.

Întrebări:

a) Anumiţi producători specifică faptul că protocolul WEP are o securitate de 40+24=64 biţi de cheie. Ce părere aveţi de acest fapt. Justificaţi răspunsul.

b) Care este modalitatea prin care B extrage mesajul original M?

c) În cadrul unor implementări, vectorul IV de 24 de biţi, este ales aletoriu la fiecare "frame" transmis. Arătaţi că acest lucru conduce la probleme de securitate atunci când traficul de date este mare. Propuneţi o modalitate de remediere a problemei apărute.

d) Să examinăm o altă problemă de securitate a protocolului WEP. Vom presupune faptul că atacatorul interceptează datele (IV, C) transmise de A. Arătaţi faptul că adversarul, chiar dacă nu cunoaşte cheia K, poate calcula uşor un text cifrat C^* ($C^* \neq C$) şi retransmite (IV, C^*) fără ca B să poată detecta acest lucru. Câte posibilităţi de alegere avem pentru C^*? Ce proprietate a securităţii este violată?

27. Descifraţi, cu ajutorul algoritmului RSA-CRT, indicând semnificaţiile elementelor algoritmului, mesajul:

    C = 9686 9613 7546 2206 1477 1409 2225 4355 8829 0575 9991 1245 7431 9874 6951 2093 0816 2982 2514 5708 3569 3147 6622 8839 8962 8013 3919 9055 1829 9451 5781 5154.

    Textul clar este în limba engleză.

    Parametrii algoritmului sunt următorii:

    a) exponentul de cifrare este $e = 9007$,

    b) p = 3490 5295 1084 7650 9491 4784 9619 9038 9813 3417 7646 3849 3387 8439 9082 0577,

    c) q = 0003 2769 1329 9326 6709 5499 6198 8190 8344 6141 3177 6429 6799 2942 5397 9828 8533.

28. Fie numerele prime $q = 7541$ şi $p = 2q + 1$. Fie $\alpha = 604$ şi $\beta = 3791$.

    a) Arătaţi că $ord(\alpha) = ord(\beta) = q$ în $\mathbb{Z}_q$. Mai mult, arătaţi că α şi β generează acelaşi subgrup G în $\mathbb{Z}_p^*$.

    b) Definim funcţia hash $h : \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_q \rightarrow G$ prin $h(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$. Calculaţi $h(7431, 5564)$ şi $h(1459, 954)$.

    c) La punctul precedent aţi obţinut o coliziune pentru h. Folosiţi-o pentru a calcula logaritmul discret $dlog_{\alpha}\beta$.

    d) Folosind logaritmul discret calculat, determinaţi şi alte coliziuni pentru h.

31.2 Răspunsuri

1. *Răspuns:* (b). Pentru autenticitate, se folosesc MAC sau semnăturile electronice. Pentru integritate, în funcţie de nivelul de exigenţă, se pot utiliza sume de control, funcţii hash, MAC, etc.

2. *Răspuns:* (c). Vă puteţi ajuta de poziţia literelor dublate. Întrebare suplimentară: de unde provin aceste versuri?

3. *Răspuns:* (a). Literele de pe a doua linie sunt imaginile celor din prima linie, şi nu invers.

4. *Răspuns:* (d). Metoda (a) este doar o substituţie normală (compunerea a 2 permutări este tot o permutare). Metoda (b) este mai slabă decât prima întrucât expune mai multe informaţii despre textul clar. Metoda (c) se numeşte substituţie polialfabetică.

5. *Răspuns:* (b). Este de ajuns să se calculeze restul împărţirii lui 1729 la 4 pentru a elimina (a) şi (c). (d) este 1729 în hexazecimal (i.e. în baza 16).

6. *Răspuns:* (c). Algoritmul este o variantă a *one-time pad*. Oferă securitate perfectă dacă nu se utilizează cheia de criptare decât o singură dată. Poate fi de asemenea considerat o variantă a cifrului lui Cezar, dar aplicat unei singure litere şi cu un decalaj ales aleator. Utilizat în acest fel, cifrul lui Cezar ar fi sigur. Sistemul nu are nicio legătură cu RSA. Răspunsul (b) nu ar satisface principiul lui Kerckhoff: un sistem de criptare trebuie să rămână sigur când adversarul cunoaşte tot despre acesta, mai puţin cheia utilizată.

7. *Răspuns:* (b). Operaţia inversă adunării cu k mod N este scăderea cu k mod N.

8. *Răspuns:* (a). HMAC este MAC, SHA-1 este o funcţie de dispersie şi NIST este o agenţie americană de standardizare.

9. *Răspuns:* (b). $53 \times 17 = 1 \bmod 100$

10. *Răspuns:* (c). La momentul divulgării mesajului, toată lumea va putea verifica faptul că hash-ul este corect şi că se cunoştea mesajul m la momentul calculării acestui hash. Metoda nu permite dezvăluirea mesajului m.
    O cifrare a lui m cu o cheie cunoscută doar de cel care face criptarea nu garantează nimic: se poate de asemenea publica un cuvânt aleator pentru ca ulterior să se aleagă cheia care să corespundă unei criptări corecte. Aceeaşi problemă apare în cazul MAC. O cheie cunoscută de toată lumea ar conduce la determinare textului clar m, ceea ce ar fi echivalent cu divulgarea mesajului m.

11. *Răspuns:* (b). Conform paradoxului naşterilor, pentru obţinerea unei coliziuni pe primii 20 de biţi ai funcţiei de dispersie, este necesar să se calculeze valoare funcţiei hash pentru $\sqrt{2^{20}}$, adică aproximativ 1000 numere.

12. *Răspuns:* (d). Valoarea lui x_n este constantă, egală cu 289, începând cu al treilea termen. Deci nu este vorba despre apariţii aleatoare.

13. *Răspuns:* (d). Cheia de sesiune este determinată printr-un schimb de chei.

14. *Răspuns:* (a). Factorizarea unui număr prim este imediată.

15. *Răspuns:* (c). Proprietatea de homomorfism este aceea că cifrarea RSA a produsului a 2 mesaje (modulo N) este produsul cifrărilor corespunzătoare celor 2 numere.
Restul variantelor sunt eronate, fiindcă RSA este un cifru cu cheie publică, deci asimetric.

16. *Răspuns:* (c). Se aplică proprietăţile generatorului Geffe.

17. *Răspuns:* (c). În această situaţie secvenţa supusă testării este ideală, numărul de biţi de 0 este egal cu numărul de biţi de 1 şi anume 1024.

18. *Răspuns:* (a).

19. *Răspuns:* (b), (c). Un registru de deplasare de lungime n are $2^n - 1$ stări posibile (starea nulă este exclusă). În situaţia în care polinomul caracteristic este primitiv atunci el generează toate stările posibile.

20. *Răspuns:* (a). Numărul de ieşiri posibile, ale unei funcţii hash ideale cu ieşirea pe m biţi, este 2^m.

21. *Răspuns:* (e).

22. *Răspuns:* (a).

23. *Răspuns:* a) A va determina două chei k şi k^* astfel încât:

    $DES(\text{"}banul\text{"}; k) = DES(\text{"}stema\text{"}, k^*)$.

    Pentru acest lucru procedează după cum urmează:

    i) A va construi două liste $(DES(\text{"}banul\text{"}; k), k)$ şi $(DES(\text{"}stema\text{"}; k^*), k^*)$, pentru toate cheile k respectiv k^*. Listele sunt sortate în raport cu primul câmp al fiecărei intrări (i.e. $DES(\text{"}banul\text{"}; k)$ respectiv $DES(\text{"}stema\text{"}; k^*)$).

    ii) A va căuta coliziuni în cadrul acestor liste şi va obţine k, k^* astfel încât:

    $DES(\text{"}banul\text{"}; k) = DES(\text{"}stema\text{"}; k^*)$.

    iii) După ce se aruncă moneda A comunică lui B cheia k sau k^* după caz.

    b) Complexitatea atacului anterior este reprezentată de căutarea coliziunilor în cadrul celor două liste, pe 64 de biţi, $DES(\text{"}banul\text{"}; k)$ şi $DES(\text{"}stema\text{"}; k^*)$. Conform "birthday attack" este nevoie numai de 2^{32} evaluări ale algoritmului DES pentru a determina o coliziune.

c) Cerinţa primitivei criptografice este ca funcţiile:

$k \to DES(\text{"}banul\text{"}; k)$ şi $k \to DES(\text{"}stema\text{"}; k)$

să fie rezistente la coliziuni.

d) Se poate utiliza un algoritm de cifrare bloc pe 128 de biţi, spre exemplu AES (în acest caz "birthday attack" are nevoie de 2^{64} evaluari ale AES). Ca o alternativă se poate utiliza o funcţie hash h rezistentă la coliziuni. Participantul A alege $x \in \{\text{"}stema\text{"}, \text{"}banul\text{"}\}$, o valoare aleatoare r şi calculează $y = h(x||r)$. După ce B face alegerea, A poate dezvălui x şi r.

24. *Răspuns:* a) Vom arăta faptul că $G = \{x \in \mathbf{Z}_{p^2} | x \equiv 1 \bmod p\}$ în raport cu multiplicarea modul p^2 este grup. Pentru aceasta se vor verifica următoarele: operaţia este parte stabilă, asociativitatea, elementul neutru şi elementul simetrizabil.

b) Orice element a din $\mathbf{Z}^{p^2}$ se poate scrie în mod unic $a = a_1 + a_2 p$, unde a_1 şi a_2 sunt numere întregi ce satisfac relaţia $0 \leq a_1, a_2 \leq p - 1$. Orice element a din $\mathbf{Z}^{p^2}$ este în G dacă şi numai dacă elementul corespunzător a_1 este egal cu 1, de aici rezultă faptul că $|G| = p$.

c) Fie $a = 1 + kp$, $0 \leq k < p$ şi $b = 1 + lp$, $0 \leq l < p$ elemente din G. Se verifică faptul că L este homomorfism: $L(a \cdot b) = k + l \bmod p$ şi $L(a) + L(b) = k + l \bmod p$, deci $L(a \cdot b) = L(a) + L(b)$. Direct se verifică injectivitatea şi sujectivitatea lui L, deci L este izomorfism de grupuri.

d) Avem de arătat faptul că orice element $a \in G$ poate fi scris ca o putere a lui $p + 1$. Din binomul lui Newton rezultă:

$$(p+1)^2 \bmod p^2 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i \bmod p^2 = 1 + np.$$

Deci, $p + 1$ generează G. Pentru orice $y \in G$ avem: $y = log_{p+1}(x)$ dacă şi numai dacă $x = (p+1)^y \bmod p^2$.

Deoarece $(p+1)^y \bmod p^2 = 1 + py$, obţinem:

$$y = \frac{x-1}{p} \bmod p = L(x).$$

Acestă funcţie logaritm stă la baza algoritmului criptografic Okamoto-Uchiyama.

25. *Răspuns:* Să considerăm semnăturile pentru mesajele m şi m^*. Semnăturile sunt (r, s) şi (r, s^*). Avem:

$$s = \frac{H(m) + xr}{k} \bmod q$$

$$s^* = \frac{H(m^*) + xr}{k} \bmod q.$$

Deducem

$$k = \frac{H(m) - H(m^*)}{s - s^*} \bmod q.$$

Vom calcula apoi $r = (g^k \bmod p) \bmod q$ şi în final vom recupera x prin formula:

$$x = \frac{ks - H(m)}{r} \bmod q.$$

26. *Răspuns:* a) Nu este corect să se calculeze dimensiunea cheii prin sumarea dimensiunii celor două intrări în algoritm deoarece numai una este secretă. Deci dimensiunea cheii este de 40 de biţi nu de 64 de biţi.

b) Mai întâi B reconstruieşte textul clar $P^* = C \oplus RC4(IV, K)$. Ulterior P^* este împărţit în două părţi $P^* = M^*||Q^*$, unde M^* este de n biţi iar Q^* de 32 de biţi. B calculează $L(M^*)$ şi compară cu Q^*. B acceptă mesajul M^* dacă şi numai dacă $L(M^*) = Q$, altfel va respinge mesajul M^*.

c) Conform "birthday paradox" alegând IV aleatoriu la fiecare "frame" rezultă că la fiecare $2^{\frac{24}{2}} \approx 5000$ "frame"-uri există o coliziune pentru două IV din cele 5000 transmise de la/către acelaşi utilizator. În această situaţie avem o coliziune în şirurile cheie, ceea ce poate conduce la informaţie despre textul clar ([9]). O alternativă este de a incrementa IV.

d) Fie $M^* = M \oplus \Delta$ un nou mesaj, unde Δ este un şir de n biţi. Vom calcula diferenţa dintre noul text cifrat C^* şi C:

$$\begin{aligned} C^* \oplus C &= (P^* \oplus RC4(IV, K)) \oplus (P \oplus RC4(IV, K)) \\ &= P^* \oplus P \\ &= (M \oplus M^*)||(L(M) \oplus L(M^*)) \\ &= \Delta \oplus L(\Delta). \end{aligned}$$

Deci, pentru orice Δ nenul, adversarul cunoaşte faptul că $C^* = C \oplus (\Delta||L(\Delta))$ care verifică CRC-ul. În concluzie acesta are $(2^n - 1)$ posibilităţi de alegere pentru Δ (şi C^*). Proprietatea violată este cea de *integritate a mesajului*. O concluzie ce se desprinde din acest exerciţiu este aceea că CRC-urile (cu sau fără cheie) ne asigură protecţia contra erorilor de transmisie nu şi împotriva unui adversar maliţios.

27. *Raspuns:* Prin calcule directe vom obţine: $d = e^{-1} = 0001\ 0669\ 8614\ 3685\ 7802\ 4442\ 8687\ 7132\ 8920\ 1547\ 8070\ 9906\ 6339\ 3786\ 2801\ 2262\ 2449\ 6631\ 0631\ 2591\ 1774\ 4708\ 7334\ 0168\ 5974\ 6230\ 6553\ 9685\ 4451\ 3277\ 1090\ 5360\ 6095 \bmod (p-1)(q-1)$.

Apoi, prin calcul direct sau utilizând CRT:

$M = C^d = 20\ 0805\ 0013\ 0107\ 0903\ 0023\ 1518\ 0419\ 0001\ 1805\ 0019\ 1721\ 0501\ 1309\ 1908\ 0015\ 1919\ 0906\ 1801\ 0705 \bmod N$, $N = p \cdot q$.

Folosind codificarea spaţiu= 00, A = 01, B = 02, ..., Z = 26 obţinem textul clar:

"THE MAGIC WORDS ARE SQUEAMISH OSSIFRAGE".

Bibliografie

[1] **A. Atanasiu**, *Securitatea Informaţiei, vol. 1, Criptografie*, ed. InfoData, Cluj, 2008.

[2] **A. Atanasiu**, *Securitatea Informaţiei, vol. 2, Protocoale de securitate*, ed. InfoData, Cluj, 2009.

[3] **T. Baignères, P. Junod, Y. Lu, J. Monnerat, S. Vaudenay**, *A Classical Introduction to Cryptography Exercise Book*, Springer, ISBN 978-0-387-27934-3, 2006.

[4] **A.J. Menezes**, *Handbook of Applied Cryptography*, CRC Press, 1997.

[5] **E. Simion şi Gh. Oprişan**, *Elemente de Cercetări Operaţionale şi Criptologie*, Politehnica Press, ISBN 973-8449-006, 2002.

[6] **E. Simion, V. Preda şi A. Popescu**, *Criptanaliza. Rezultate şi Tehnici Matematice*, Ed. Univ. Buc., ISBN 973575975-6, 2004.

[7] **E. Simion**, *Enciclopedie Matematică*, Ediţie coordonată de M. Iosifescu, O. Stănăşilă şi D. Ştefănoiu, Editura AGIR, ISBN 978-973-720-288-8, pp. 905-944, 2010.

[8] **B. Schneier,** *Applied Cryptography*, Adison-Wesley, 1998.

[9] **S. Vaudenay,** *A Classical Introduction to Cryptography: Applications for Communications Security*, Springer-Verlag, 2005.