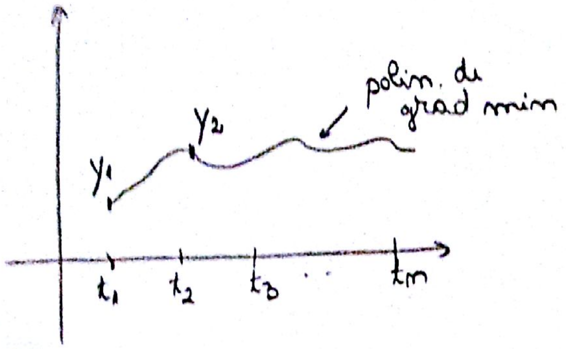
CURS VI

Interpolare



Trebuie să găsim o fct care trece prin tte pct.

Def: Fie $[a,b] \subset \mathbb{R}$, pct $x_1, x_2, \dots x_m$ dist două câte 2 din int. $[a,b]$. Fie $y_1 \dots y_m \in \mathbb{R}$. Sn polin de interpolare atașat pct $x_1 \dots x_m$ și val $y_1 \dots y_m$ un pol P cu propr.

1) grad $P \leq m-1$
2) $P(x_i) = y_i, \ \forall i = \overline{1,m}$

Th: Polin de interpolare există și este unic.

Forma de reprez.

Form lui Lagrange

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m} \left(y_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ cont. Constr polin:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m} \left(f(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$ pol de grad $\leq m-1$, cu

$$P(x_i) = f(x_i) \ \forall i = \overline{1,m}.$$

Form lui Newton cu diferențe divizate

Fie $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $x_1 \dots x_m \in [a,b]$ dist 2 câte 2 și o fct $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ cont. Notăm cu $P(f; x_1 \dots x_m; X)$ polin de interpolare atașat fct f și pct $x_1 \dots x_m$, adică acel polin P cu:

Generated by CamScanner from intsig.com

$\begin{cases} \text{grad}(P) \le m-1 \\ P(x_i) = f(x_i) \ \forall\, i = \overline{1,m} \end{cases}$

Noi notăm cu $\underbrace{f(x_1, \dots x_m)}$ – coef lui x^{m-1} al polin $P(f; x_1 \dots x_m; x)$

dif divizată a fct f

în pct $x_1 \dots x_m$

Avem: • $f(x_i) = f(x_i) \ \forall\, i = \overline{1,m}$

dif diviz   val fct

• $m \ge 2$: $\quad f(x_1, x_2 \dots x_{m-1}; x_m) = \dfrac{f(x_1, \dots x_m) - f(x_1 \dots x_{m-1})}{x_m - x_1}$

Teoremă:

$$P(f; x_1 \dots x_m; x) = f(x_1) + \sum_{i=2}^{m} \left(f(x_1, \dots, x_i) \cdot \prod_{j=1}^{i-1} (x - x_j) \right)$$ – form lui Newton

Algoritm

Se dau fct f, pct $x_1 \dots x_n$ și pct x.

Notăm cu $\quad a_{ij} = f(x_{j-i+1}; \dots x_{j-1}; x_j) \ \forall\, i = \overline{1,m}, \ \forall j = \overline{1,m}$

$c_i = a_{ii} = f(x_1 \dots x_i)$

nr. de pct   ind ult. pct.

• Se ia $a_{1j} = f(x_j)$; $\forall\, j = \overline{1,m}$

• Pt $i = \overline{2,m}$, avem: – $a_{ij} = \dfrac{f(x_{j-i+2}; \dots x_j) - f(x_{j-i+1}, \dots x_{j-1})}{x_j - x_{j-i+1}} =$

$= \dfrac{a_{i-1\,j} - a_{i-1\,j-1}}{x_j - x_{j-i+1}}, \ \forall j = \overline{1,m}$

– $c_i = a_{ii}$

• Pt calc lui P se poate fol o schemă de tip Horner

$\left[\begin{array}{l} - p = c_m. \\ - \text{pt } i = \overline{m-1, 1}, \ p = p(x - x_i) + c_i. \end{array}\right.$

Generated by CamScanner from intsig.com