Seminarul 1
Soluţii de bază şi tabloul simplex

1) Se consideră sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$$

a) Scrieţi "soluţia generală" în raport cu $B = \left(A^1 A^3\right)$ şi $B = \left(A^4 A^2\right)$.

b) Determinaţi soluţiile de bază corespunzătoare şi câte o soluţie arbitrară.

Rezolvare:

$$B = \left(A^1 A^3\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = B^{-1}\left(b - R \cdot x_{\mathbf{R}}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 4x_2 + 5x_4 \\ 1 - 7x_2 - 8x_4 \end{pmatrix}$$

Soluţia de bază: $\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)^{\top} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{\top}$

Soluţie arbitrară: $\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)^{\top} = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -9 & 3 \end{pmatrix}^{\top}$

$$B = \left(A^4 A^2\right) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ x_2 \end{pmatrix} = B^{-1}\left(b - R \cdot x_{\mathbf{R}}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{3} + \frac{7}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_3 \\ \frac{13}{3} - \frac{8}{3}x_1 - \frac{5}{3}x_3 \end{pmatrix}$$

Soluţia de bază: $\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)^{\top} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{13}{3} & 0 & -\frac{11}{3} \end{pmatrix}^{\top}$

Soluţie arbitrară-1: $\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)^{\top} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{\top}$

Soluţie arbitrară-2: $\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)^{\top} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 & 5 \end{pmatrix}^{\top}$

2) Se consideră problema:

$$\inf\{3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4\}$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 \le 3 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \ge -1 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 \le 4 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\quad x_2 \in \mathbb{R},\quad x_3 \le 0,\quad x_4 \in \mathbb{R}$$

Să se aducă problema la forma standard.

3) Se consideră problema:

$$\inf\{3x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4\}$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 = 3 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

$$x_i \ge 0,\quad i = \overline{1,4}$$

a) Să se verifice primal-admisibilitatea bazelor $B = (A^1 A^4)$ şi $B = (A^2 A^3)$

$$B = (A^1 A^4) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},\quad B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{7} \\ -\frac{9}{7} \end{pmatrix} \ngeq 0$$

$$B = (A^2 A^3) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\quad B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ge 0.$$

b) Folosind baza $B = (A^2 A^3)$ şi luând $x_1 = 0$, $x_4 = \lambda \to \infty$, să se arate că problema are optimul $= -\infty$.

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{7}{9}\lambda \\ 1 + \frac{1}{9}\lambda \end{pmatrix} \ge 0,\quad \forall \lambda \ge 0.$$

$$c^\top x = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 + \frac{7}{9}\lambda \\ 1 + \frac{1}{9}\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = -3 - 2\lambda \to -\infty$$

c) Să se alcătuiască tabloul simplex pentru baza $B = (A^2 A^3)$:

	$\bar{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	1	0	1	0	$-\frac{7}{9}$
x_3	1	-1	0	1	$-\frac{1}{9}$
	-3	-1	0	0	2

4) Se consideră problema:

$$\inf\left\{-2x_1+2x_2-x_3+x_4\right\}$$
$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3-2x_4=2 \\ -3x_1+2x_2-x_3+x_4=-4 \end{cases}$$
$$x_i\geq 0,\quad i=\overline{1,4}$$

a) Să se alcătuiască tabloul simplex pentru baza $B=\left(A^1A^3\right)$:

	$\bar{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
x_3	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{5}{2}$
	-3	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

b) Să se verifice optimalitatea şi să se alcătuiască tabloul simplex pentru baza $B=\left(A^4A^3\right)$:

	$\bar{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_4	2	2	-1	0	1
x_3	6	5	-3	1	0
	-4	-1	0	0	0