

Ecuatii diferentiale si cu derivate partiale

2010 – 2011

Seminarul nr.1

Cunoasterea umana a oricarui domeniu al realitatii incepe cu observarea atenta a acestuia, culegerea de cat mai multe date despre respectivul domeniu, continuata cu gruparea si ordonarea acestora dupa anumite criterii, formularea unor ipoteze de lucru, studierea lor cu diferite metode si mijloace, tragerea unor concluzii, toate cele de mai inainte fiind urmate de confruntarea rezultatelor cercetarii cu realitatea.

Rolul jucat de matematica in studiul diverselor domenii ale cunoasterii a fost diferit, in functie de epocile istorice. Daca la inceput aplicatiile matematicii erau legate de o utilizare directa in viata de zi cu zi, ulterior acestea s-au diversificat ajungand astazi ca in aproape orice domeniu sa poata fi decelat un "parfum" matematic cu intensitati mai mult sau mai putin accentuate. Pe parcursul vremurilor au avut loc sedimentari si acumulari succesive influentate, mai mult sau mai putin, de dezvoltarea generala a societatii umane. Intre cerintele dezvoltarii tehnologice, ale avantului schimburilor comerciale si necesitatile progresului in multe alte sfere ale activitatilor umane pe de o parte si dezvoltarea matematicii pe de alta parte exista o interdependenta care nu este greu de pus in evidenta de un studiu serios al istoriei cunoasterii umane.

Cunoasterea *stiintifică* este bazată pe *schematizarea* proprietăților părților sistemelor materiale sau de orice alta natură, până la obținerea unor atribute între care se pot stabili relații simple, prin care se urmărește obținerea unor legi generale. Această schematizare se numește *modelare*, iar schemele obținute se numesc *modele*.

Printre cele mai importante *modele științifice* sunt cele numite *matematice*. Un model matematic al unui anumit fenomen sau obiect din lumea înconjurătoare este o descriere aproximativă a acestuia (i.e. a fenomenului sau a obiectului) realizată cu ajutorul noțiunilor, obiectelor și simbolurilor matematice. Analiza modelului matematic cu ajutorul teoriilor și mijloacelor matematicii permite pătrunderea în esența fenomenului studiat. Modelarea matematică reprezintă un instrument, probabil cel mai puternic și uneori singurul, de *cunoaștere* a lumii atât la nivelul macro, cât și la cel micro. Totodată ea permite *evidențierea* unor caracteristici noi ale fenomenului studiat, *descoperirea unor obiecte și procese* noi precum și „*controlul*” asupra *comportării lor*, fapt care ne ajută la aplicarea acestora la îmbunătățirea vieții și la progresul civilizației umane.

Pentru obținerea unor modele matematice este însă nevoie să se realizeze preliminar, de exemplu în cadrul fizicii teoretice sau experimentale, alte modele, specifice fenomenelor fizice. În acest scop este necesară cunoașterea stărilor

mediilor fizice în care au loc astfel de fenomene, respectiv *caracteristicile de stare* cum ar fi, de exemplu, temperatura, presiunea, sarcina electrică, vâscozitatea etc.

Procesul de modelare matematică presupune, în esență, parcurgerea a patru etape.

1) În prima etapă **se selectează mărimile (caracteristicile) fundamentale care caracterizează fenomenul avut în vedere și se formulează legile care le conexează**. Această etapă necesită o bună și (eventual) amplă cunoaștere a faptelor legate de procesul respectiv și o fină decelare a relațiilor (interconexiunilor) dintre ele. Această etapă se finalizează prin (de)scrierea în termeni matematici a reprezentărilor calitative formulate privind conexiunile între obiectele modelului. De multe ori problemele matematice care apar pe baza modelării matematice a unor fenomene diferite (cel puțin în aparență) coincid, ceea ce constituie o anumită proprietate de **universalitate** pe baza căreia se pun evidență clase mari de procese cum ar fi cele oscilatorii, cele de difuzie sau cele staționare etc. Având în vedere această caracteristică asemenea probleme și noțiuni matematice **universale** se pot considera ca obiecte de sine stătătoare, abstractizări ale fenomenelor studiate.

2) În etapa a doua **se studiază problema matematică la care s-a ajuns în urma procesului de modelare matematică**. Chestiunea fundamentală pentru acest moment o constituie rezolvarea **problemei directe**, adică obținerea ca rezultat al analizei modelului a **datelor de ieșire** (care sunt deci consecințe ale unui demers teoretic) în vederea unei comparări ulterioare a lor cu rezultatele observațiilor (experimentelor) asupra fenomenului studiat. În această etapă un rol decisiv îl joacă **aparatură matematică** necesară pentru analiza (studiul) modelului matematic cât și **tehnica de calcul** – mijloc important (de multe ori indispensabil) pentru obținerea informației cantitative de ieșire ca rezultat al rezolvării unor probleme matematice care se dovedesc a fi, în majoritatea cazurilor, complicate.

3) În etapa a treia **se cercetează dacă, în ipotezele făcute, modelul asociat avut în studiu îndeplinește (satisfacă) criteriile practice**, adică se răspunde la întrebarea dacă rezultatele obținute pe baza deducțiilor teoretice din model concordă, în limitele de exactitate (precizie) admise, cu cele ale observațiilor directe (experimentale). Dacă modelul a fost complet definit (adică toți parametrii săi au fost determinați) problema directă a fost rezolvată și se trece la evaluarea erorii ceea ce înseamnă că se măsoară abaterile dintre rezultatele obținute pe baza considerațiilor teoretice și cele determinate din măsurători directe. În cazul în care abaterile constatate depășesc marja de toleranță admisă pentru observații modelul propus este invalidat. Este necesară reexaminarea modelului fizic, a ipotezelor făcute, a procesului de modelare matematică pentru a vedea dacă nu s-au făcut simplificări (idealizări) prea mari (severe) etc.

Adesea, pentru a se putea face construcția unui model **corect**, unele dintre caracteristicile sale rămân, momentan, neprecizate (nedeterminate). Problemele în care este necesară determinarea unor anumite caracteristici (trăsături) (parametrice, funcționale etc.) ale modelului așa încât informația furnizată de acesta să fie în concordanță, în limitele de toleranță ale măsurătorilor, cu rezultatele

observațiilor directe efectuate asupra fenomenului se numesc *inverse*. Dacă se întâmplă ca pentru nici o alegere a caracteristicilor avute în vedere modelul să nu furnizeze date de ieșire comparabile, în limitele de eroare admise pentru măsuratori, atunci acesta se dovedește ca fiind inacceptabil pentru studiul fenomenului respectiv.

Aplicarea **criteriilor practicii** în *evaluarea* modelelor matematice ne permite să tragem concluzii asupra plauzibilității (corectitudinii) ipotezelor care se află la fundamentul modelului (ipotetic) supus studiului.

4) În sfârșit, în etapa a patra, **pe măsură ce apar abateri între datele de ieșire ale modelului matematic și observațiile directe sau indirecte asupra fenomenului studiat se rafinează modelul pentru a obține o diminuare a lor (a abaterilor)**. Dar la un moment dat nu se mai poate face nimic! **Atunci cand între observații și predicțiile furnizate de model apar diferențe semnificative ce nu mai pot fi explicate de acesta se abandonează modelul și se trece la altul nou care să fie mai convingător decât cel vechi.**

Până acum scenariul (procesul) descris mai sus s-a repetat ciclic, uneori cu perioade de sute și chiar mii de ani. Exemplul cel mai cunoscut este cel al sistemului solar care, la începuturile umanității, a fost „explicat” prin diverse mituri, apoi a apărut modelul geocentric al lui Ptolomeu, urmat de cel heliocentric al lui Copernic, completat de Kepler, Newton, Einstein etc. Pe baza modelelor matematice ale sistemului solar, care la un moment dat nu mai funcționau cum trebuie, au fost descoperite planetele Neptun (în anul 1846 de către astronomul francez Le Verrier) și Pluto (în anul 1930 de către astronomul american William Tombaugh).

Printre modelele matematice ale celor mai importante fenomene din natura sunt cele descrise prin intermediul unor ecuații diferențiale ordinare sau cu derivate parțiale.

1.Ecuatii diferențiale ordinare

Ecuatiile diferențiale ordinare au apărut cam odată cu calculul diferențial și integral, adică la cumpăna dintre veacurile al XVII - lea și al XVIII - lea. Newton și-a dat seama imediat de potențialul extraordinar al noii discipline matematice și ani buni a pastrat descoperirea numai pentru sine.

Aceste ecuații diferențiale au contribuit nu doar la creșterea importanței rolului jucat de matematica în progresul societății umane dar și la progrese fundamentale în dezvoltarea matematicii în sine.

Pentru a vedea care este esența procesului de elaborare a unui model matematic guvernat de una sau mai multe ecuații diferențiale ordinare sau cu derivate parțiale vom apela la excelenta lucrare *Numerele naturii* a lui Ian Stewart care, cu un talent remarcabil și cu o deosebită expresivitate, în termeni proprii limbajului „natural”, surprinde și fixează, în tușe precise, ideile de forță ale procesului.

„Toate legile naturii care au fost descoperite urmând ideea de bază a lui Newton conform căreia schimbările în natură pot fi descrise prin procese matematice, exact așa cum formele în natură pot fi descrise prin obiecte matematice, au un caracter oarecum asemănător. Legile sunt formulate ca ecuații care leagă între

ele nu (neapărat) mărimile fizice importante (care intervin în descrierea procesului sau fenomenului fizic), ci, mai degrabă, vitezele cu care aceste mărimi se schimbă în timp sau / și spațiu (poate mai bine ar fi ca, în loc de termenul viteză, să utilizăm expresia „rată a schimbării”, adică schimbarea mărimii respective în unitatea de timp sau spațiu). De exemplu, „ecuația căldurii”, care determină modul de difuzie (propagare) a căldurii printr-un (corp / mediu) conductor, implică numai rata schimbării temperaturii corpului, iar „ecuația undelor”, care guvernează mișcarea undelor în aer, apă sau alte medii (inclusiv în vid), se referă (numai) la rata schimbării ratei schimbării înălțimii unde (accelerația!). Legile fizice ale luminii, sunetului, electricității, magnetismului, deformărilor elastice ale materialelor, curgerii fluidelor, ale reacțiilor chimice etc. sunt toate ecuații pentru diferite rate ale schimbării.

Deoarece rata schimbării se referă la **diferența** dintre o anumită cantitate în momentul de față și aceeași cantitate o clipă mai târziu, ecuațiile care se obțin în acest fel se numesc **ecuații diferențiale**. De la Newton încolo strategia fizicii matematice a fost mereu să descrie universul în termenii ecuațiilor diferențiale pe care apoi să le rezolve și pe baza răspunsurilor obținute să progreseze în cunoașterea acestuia”.

Strategia conturată mai sus s-a aplicat, în mod constant, timp de mai bine de trei secole, cu un succes crescând, în domenii din ce în ce mai variate, la înțelegerea unor fenomene tot mai complicate situate la nivele ale cunoașterii tot mai înalte. Ceva totuși s-a schimbat pe parcurs și anume: înțelesul sintagmei „a rezolva”. La început acest fapt a presupus găsirea unei (unor) formule matematice precise (și explicite !) pe baza căreia (căror) să se poată obține o descriere adecvată a fenomenului (sistemului, procesului sau obiectului) avut (avute) în vedere (și, eventual, a evoluției lor într-un interval stabilit de timp). Pe măsură ce acest deziderat devenea tot mai greu de îndeplinit, accentul s-a pus pe găsirea valorilor **aproximative** ale soluțiilor. Apoi s-a constatat că, de fapt, ceea ce interesează cu adevărat sunt „**proprietățile soluțiilor**” și că pentru obținerea informației dorite este suficient să se dea o descriere calitativă a acestora, care să nu mai facă apel la rezultate greu sau chiar imposibil de găsit. Astăzi se știe că există probleme de matematică, având sursa în realitatea înconjurătoare, ale caror „soluții” nu se pot exprima prin intermediul unor formule. Faptul că se întâmplă așa ceva nu este prea grav deoarece nu formulele în sine sunt importante ci informația care s-ar obține din ele este valoroasă. Dacă nu se pot obține formule atunci se încearcă aflarea informației care ne interesează prin alte metode și cu alte mijloace și / sau (alte) tehnici. Schimbarea de accent către o teorie calitativă a constituit un progres important. Pentru prima dată s-a început înțelegerea naturii în, ceea ce s-ar putea numi, după unii savanți, proprii ei termeni.

În continuare vom prezenta câteva exemple foarte simple de modele matematice ale unor procese naturale descrise prin intermediul unor *ecuații diferențiale ordinare*.

1) **Ecuatii diferentiale in mecanica.**

Conform *legii a doua a lui Newton* miscarea unui punct material de masa m , care evolueaza sub actiunea unei forte \vec{F} , se desfasoara astfel incat:

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad (1.1.1)$$

,unde \vec{a} este acceleratia.

O alta contributie majora a lui Newton a constatat in intelegerea si descrierea matematica a conceptului de *acceleratie*.

Mai precis, pentru a descrie miscarea unui punct material, vom alege un sistem de coordonate in spatiul tridimensional pe care il vom identifica cu \mathbf{R}^3 . Vom nota cu $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ vectorul coordonatelor punctului material la momentul $t \in \mathbf{R}$, $t \geq 0$. Vectorul $x(t)$ se mai numeste si *vectorul de pozitie* al punctului material, iar aplicatia

$$[0, \infty) \ni t \longrightarrow x(t) \in \mathbf{R}^3$$

se numeste *traiectoria* punctului material.

De la Cursul de Analiza din anul I ne reamintim ca $x'(t) := \vec{v}(t)$ reprezinta vectorul **viteza** (la momentul t), iar $x''(t) := \vec{a}(t)$ desemneaza vectorul **acceleratie** (tot la momentul t). Din punct de vedere matematic forta \vec{F} nu este altceva decat o aplicatie care asociaza fiecărei pozitii $x(t)$ si viteze $v(t) = x'(t)$ vectorul $F(t, x(t), x'(t)) \in \mathbf{R}^3$.

Prin urmare legea a doua a lui Newton poate fi rescrisa, mai precis (din punct de vedere matematic), sub forma:

$$m x''(t) = F(t, x(t), x'(t)), t \geq 0, \quad (1.1.2)$$

unde $x : [0, \infty) \longrightarrow \mathbf{R}^3$ este traiectoria punctului material a carui miscare o avem de studiat. Se presupune ca forta \vec{F} este cunoscuta si ca functia care o defineste are proprietati convenabile de regularitate. Evident ca *necunoscuta* va fi traiectoria punctului material aflat in miscare.

Ecuatia din (1.1.2) se scrie, in mod simbolic, sub forma:

$$x'' = \frac{1}{m} F(t, x, x'). \quad (1.1.3)$$

Uneori relatia vectoriala din (1.1.3) se transcrie sub forma a trei relatii scalare:

$$\begin{cases} x_1'' &= \frac{1}{m} F_1(t, x_1, x_2, x_3, x_1', x_2', x_3'), \\ x_2'' &= \frac{1}{m} F_2(t, x_1, x_2, x_3, x_1', x_2', x_3'), \\ x_3'' &= \frac{1}{m} F_3(t, x_1, x_2, x_3, x_1', x_2', x_3'), \end{cases} \quad (1.1.4)$$

obtinandu-se ceea ce, in teoria ecuatiilor diferentiale, se numeste un sistem de ecuatii diferentiale, *de ordinul al doilea*, format din trei ecuatii si avand trei necunoscute.

Este usor de vazut ca sistemul de mai sus este echivalent cu sistemul de ecuatii diferentiale *de ordinul intai*:

$$\begin{cases} x_1' &= v_1 \\ x_2' &= v_2 \\ x_3' &= v_3 \\ v_1' &= \frac{1}{m} F_1(t, x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3) \\ v_2' &= \frac{1}{m} F_2(t, x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3) \\ v_3' &= \frac{1}{m} F_3(t, x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3), \end{cases} \quad (1.1.5)$$

dar avand sase ecuatii, cu sase necunoscute $x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3$.

Chiar si in cazul cel mai simplu in care $F = 0 \in \mathbf{R}^3$ se observa ca ecuatia diferentiala:

$$x'' = 0$$

are ca solutie $x(t) = \alpha t + \beta$, cu $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^3$ doi vectori *arbitrari*. Asadar ecuatia are o infinitate de solutii. Cum procesele fizice sunt deterministe (o anumita cauza are un efect bine determinat) inseamna ca modelul matematic format numai din ecuatia (1.1.3) nu este complet. Pentru a obtine un model determinist mai trebuie sa adaugam si doua *conditii initiale* sau *conditii Cauchy* :

$$\begin{cases} x(0) &= x_0 \\ x'(0) &= v_0. \end{cases} \quad (1.1.6)$$

Se obtine astfel o *problema Cauchy*:

$$\begin{cases} x'' &= \frac{1}{m} F(t, x, x') \\ x(0) &= x_0 \\ x'(0) &= v_0. \end{cases} \quad (1.1.7)$$

Intr-un limbaj apropiat de cel comun spunem ca traiectoria unui punct material este bine (complet) determinata daca se cunoaste forta care actioneaza asupra sa, pozitia sa initiala, precum si viteza sa initiala.

Pentru a fi mai expliciti vom aborda o problema mai concreta: *studiul evolutiei unui punct material sub actiunea fortei de atractie a Pamantului*.

Asadar se considera un punct material de masa $m > 0$ care este lansat dintr-un punct aflat la suprafata Pamantului sau undeva in spatiu, cu viteza initiala \vec{v}_0 . Punctul se misca in continuare numai sub influenta fortei de atractie a Pamantului. Se admite ca Pamantul are forma unei sfere de raza $R = 6400$ km, iar rezistenta aerului si a altor forte exterioare sunt neglijabile.

Pentru a elabora *modelul matematic* al problemei de mai sus vom alege un sistem ortogonal de axe avand originea in centrul Pamantului, iar una dintre axele acestuia sa treaca prin punctul initial (cel de lansare). Pentru precizare vom admite ca axa Ox_3 este cea privilegiata. Daca vom nota cu $x(t) =$

$(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ vectorul coordonatelor pozitiei punctului material la momentul $t \in \mathbf{R}$, $t \geq 0$, atunci $x : [0, \infty) \longrightarrow \mathbf{R}^3$ va fi traiectoria, ce trebuie determinata, a punctului material. Această functie verifică, pe lângă ecuatia (1.1.3), si conditiile initiale:

$$\begin{cases} x(0) &= x_0 &= (0, 0, x_3^0), \\ x'(0) &= \vec{v}_0 &= (v_1^0, v_2^0, v_3^0). \end{cases} \quad (1.1.8)$$

Tinand cont de conditiile problemei (singura forta care actioneaza asupra punctului material, dupa lansarea sa in spatiu, este forta de atractie gravitationala a Pământului) \vec{F} actioneaza dinspre punctul material catre centrul Pamantului si are, conform legii atractiei universale a lui Newton, marimea:

$$\|\vec{F}\| = k \frac{M \cdot m}{d^2}, \quad (1.1.9)$$

unde $k > 0$ este o constanta de proportionalitate, M este masa Pamantului, m masa punctului material si d este distanta de la centrul Pamantului pana la punctul material. Din cele spuse mai sus deducem si faptul ca exista $\lambda < 0$ astfel incat:

$$\vec{F}(t) = \lambda x(t).$$

Inlocuind in (1.9) rezulta:

$$-\lambda \|x(t)\| = k \frac{M \cdot m}{\|x(t)\|^2},$$

de unde obtinem:

$$\lambda = -k \frac{M \cdot m}{\|x(t)\|^3},$$

ceea ce conduce la urmatoarea expresie pentru forta \vec{F} :

$$\vec{F}(t, x) = -k \frac{M \cdot m}{\|x\|^3} x,$$

unde $x \in \mathbf{R}^3$, $t \geq 0$.

Ce s-ar intampla daca lansarea ar avea loc de la suprafata Pamantului ?

Atunci au loc relatiile:

1) $\|\vec{F}\| = mg$, unde g reprezinta acceleratia gravitationala,

2) $d = R$.

Prin urmare:

$$mg = k \frac{M \cdot m}{\|x\|^2} = k \frac{M \cdot m}{R^2},$$

de unde obtinem:

$$kM = gR^2.$$

Asadar

$$\vec{F}(x) = -\frac{gR^2 \cdot m}{\|x\|^3}x,$$

ceea ce face ca ecuatia diferentiala a miscarii punctului material sa devina:

$$x'' = -\frac{gR^2}{\|x\|^3}x. \quad (1.1.10)$$

Evident ca va trebui sa avem in vedere si cele doua conditii initiale (1.1.8)

Sa reamintim, inca o data, ca ecuatia diferentiala de mai sus s-a obtinut in ipoteza ca se neglijeaza frecarea cu aerul.

2) Ecuatii diferentiale in fizica.

Experienta a dovedit, de la Newton incoace, ca legile fizicii care descriu procese de evolutie, descoperite, de regula, experimental, se pot reformula sub forma unor ecuatii diferentiale sau cu derivate partiale sau conduc in mod natural la astfel de ecuatii. De fapt, tocmai aceasta rescriere a fost cea care a dovedit extraordinara valoare practica a acestor legi.

a) Dezintegrarea substantelor radioactive.

Una dintre legile fundamentale ale dezintegrării substantelor radioactive, asociata cu numele lui Rutherford, stabileste ca: *viteza de dezintegrare* (inteleasa ca numarul de atomi, din substanta radioactiva, dezintegrati in unitatea de timp) *este proportionala cu cantitatea totala de substanta* (adica numarul total de atomi) *existenta la momentul respectiv*. In foarte multe situatii ne intereseaza, in primul rand, evolutia in timp a cantitatii dintr-o anumita substanta radioactiva. Sa ne mai reamintim si faptul ca pentru fiecare substanta radioactiva exista un **timp de injumatatire** (adica timpul in care jumatate dintre atomii dintr-o anumita cantitate din acea substanta se dezintegreaza) notat cu $T_{1/2}$. De exemplu, in cazul carbonului radioactiv (C^{14}) acest timp este $T_{1/2} = 5568$ ani. Dupa alti 5 568 de ani inca jumatate din ceea ce a ramas. Astfel, dupa aproximativ 10 „vieti” (10 perioade de injumatatire), cantitatea de carbon radioactiv din proba analizata este redusa la cantitati nesemnificative. Cu alte cuvinte, într-o perioada de 50 – 60.000 de ani se ating limitele metodei; fizica ofera, în schimb, peste acest interval de timp, tehnicile radiometrice. Masuratori mai recente propun o valoare cuprinsa in intervalul $[5568 - 40, 5568 + 40]$ de ani a timpului de injumatatire $T_{1/2}$.

Sa vedem cum "sună" varianta "diferentială" a legii lui Rutherford. Pentru aceasta sa notam cu $x(t)$ cantitatea de substanta radioactiva la momentul $t > 0$. Atunci, pentru un $\tau > 0$ suficient de mic, are loc relatia:

$$\frac{x(t + \tau) - x(t)}{\tau} = kx(t) + o(t, \tau),$$

unde $o(t, \tau) \rightarrow 0$, daca $\tau \rightarrow 0$, iar $k \in \mathbf{R}$ este o constantă specifică substantei radioactive in chestiune. Intrucat, prin dezintegrare, cantitatea de substanta radioactiva descreste cu trecerea timpului constanta k trebuie sa fie < 0 . Trecand la limita in relatia de mai sus obtinem ecuatia diferentiala:

$$x'(t) = kx(t) \quad (1.2.1)$$

Inmultind egalitatea (2.1) cu e^{-kt} rezulta:

$$\frac{d}{dt}(e^{-kt}x(t)) = 0.$$

Prin urmare trebuie sa existe o constanta reala C astfel incat:

$$x(t) = Ce^{kt}, t \geq 0.$$

Cum pentru $t = 0$ rezulta $x_0 := x(0) = C$ deducem ca:

$$x(t) = x_0 e^{kt}, t \geq 0,$$

unde x_0 este cantitatea de substanta radioactiva la momentul initial $t = 0$.

Printre aplicatiile importante ale rezultatului de mai sus se numara *metoda carbonului radioactiv* (C^{14}). În 1949, echipa profesorului Willard F. Libby de la Universitatea din Chicago (Premiul Nobel pentru Chimie în 1960) realizeaza o adevarata revolutie în stiinta (în primul rând geologie si geofizica, dar si in hidrologie, stiintele atmosferice, oceanografie, geologie, paleoclimatologie, biomedicina) si istorie (în primul rând în arheologie) prin descoperirea metodei de datare cu carbon radioactiv. Ca orice mare idee, si aceasta este extrem de simpla si a inceput a fi utilizata, printre altele, incepand cu anul 1949, la stabilirea varstei unor ramasite (fosile) ale unor animale sau plante disparute cu mult timp in urma sau in arheologie pentru datarea unor vestigii istorice.

Pe acelasi principiu se bazeaza si metoda plumbului radioactiv, initiata de un grup de savanti de la Universitatea Carnrgie Mellon din SUA, in anul 1967, in vederea determinarii cat mai corecte a anului in care au fost pictate o serie de tablouri pentru a putea stabili daca acestea sunt sau nu falsuri.

Pentru a vedea cum se poate utiliza metoda de care a fost vorba mai sus vom reaminti faptul ca in natura carbonul se prezinta sub forma a trei izotopi dintre care doi, si anume C^{12} , C^{13} , sunt stabili, iar al treilea, C^{14} , este instabil si radioactiv. C^{12} este cel mai prezent în natura: 98,89%. In schimb C^{14} este mult mai putin prezent: doar un atom de C^{14} la un trilion (10^{12}) atomi de C^{12} !

Abia format, C^{14} se oxideaza rapid în dioxid de carbon si intra astfel în ciclul natural al planetelor si animalelor, prin fotosinteza si ciclul alimentar.

O alta observatie importanta ne arata ca *izotopul C^{14} este produs in continuu, in straturile inalte ale atmosferei, din azotul N^{14} , de razele cosmice si se afla in orice materie vie.*

S-a stabilit experimental ca orice organism viu contine o cantitate constanta de carbon radioactiv C^{14} . Aceasta se intampla deoarece rata de dezintegrare a carbonului radioactiv este contrabalansata de procesul de asimilare din atmosfera a acestui izotop radioactiv.

Fie $T < 0$ momentul extinctiei unui anumit organism.

Deoarece $x(T_{1/2}) = \frac{x_0}{2} = x_0 e^{kT_{1/2}}$ rezulta ca:

$$k = -\ln 2 / T_{1/2}.$$

Utilizand tehnica moderna se poate masura viteza de dezintegrare $x'(-T) = r_{-T}$ la momentul actual $-T$. De asemenea se poate masura si viteza de dezintegrare a aceleiasi substante intr-un organism viu, de aceeaasi natura, adica $x'(0) = r_0$.

Prin urmare

$$\begin{aligned} r_{-T} &= x'(-T) = kx(-T), \\ r_0 &= x'(0) = kx(0), \end{aligned}$$

de unde deducem ca:

$$x_0 = \frac{r_0}{r_{-T}} x(-T).$$

Din relatia

$$x(-T) = x_0 e^{-kT}$$

si cunoscand raportul $\frac{x(-T)}{x(0)} = \frac{r_0}{r_{-T}}$ precum si constanta k se obtine:

$$T = [(\ln \frac{r_0}{r_{-T}}) / \ln 2] \cdot T_{1/2}.$$

La început Libby si echipa sa au testat metoda pe probe de vârsta cunoscuta din alte surse, cum ar fi lemnul de salcâm din mormântul faraonului *Zoser*, din a treia dinastie egipteană (aproximativ 2.700-2.600 î.Chr.). Rezultatul testului cu carbon radioactiv a înregistrat o eroare de numai 10% fata de vârsta reala.

Cu metoda carbonului radioactiv se pot face datari pana in limita a 50 000 de ani vechime. Pentru perioade de timp mai indelungate se folosesc izotopii altor elemente chimice cum ar fi uraniul, rubidiul etc. care au timpii de injumatatire mult mai mari.

3) Ecuatii diferentiale in biologie

Dinamica populatiilor.

a) Modelul lui Malthus.

O veche si mereu actuala preocupare a oamenilor de stiinta, dar si a unora dintre reprezentantii conducerilor diferitelor state, a constituit-o estimarea si predictia evolutiei in timp a numarului de indivizi dintr-o anumita populatie, inclusiv umana. Pe baza cunoasterii volumului acelei populatii se pot face diverse predictii in privinta organizarii acelu stat, a alocarii diferitelor resurse si a asigurarii armoniei sociale sau a pastrarii echilibrului ecologic.

Încă din prima jumătate a veacului al XIX-lea s-au creat modele din ce în ce mai complexe si mai rafinate ale fenomenelor de dinamica populatiilor, o data cu perfectionarea metodelor de investigare sociologica sau biologica, rezultatele obtinute fiind tot mai precise si descriind tot mai adecvat realitatea inconjuratoare.

Începutul, cum este si firesc, s-a facut cu o situatie mai simpla, chiar "simplificata" am putea spune: evolutia populatiei unei singure specii. Fie $x(t)$ volumul populatiei dintr-o anumita specie, intr-un anumit areal, care dispune de surse de hrana suficiente si nu este in competitie, pentru resursele de hrana, dar nici din alte motive, nici cu o populatie alogena, dar nici in "interiorul" acelei populatii.

Pornind de la observarea atenta a evolutiei unei asemenea populatii s-a observat ca, intr-un interval "mic" de timp $[t, t + \tau]$, ($\tau > 0$ "mic"), rata de crestere a acelei populatii

$$\frac{x(t + \tau) - x(t)}{\tau}$$

este proportionala cu volumul populatiei $x(t)$. Deci exista $k \in \mathbf{R}$ astfel incat

$$\frac{x(t + \tau) - x(t)}{\tau} \approx kx(t).$$

Aproximatia devine din ce in ce mai acurata pe masura ce $\tau > 0$ devine mai mic. Trecand la limita cu $\tau \searrow 0$ obtinem

$$x'(t) = kx(t),$$

adica ecuatia diferentiala liniara, de ordinul intai,

$$x' = kx. \quad (1.3.1)$$

Aceasta ecuatie diferentiala descrie acurat evolutia diferitelor culturi microbiene sau bacteriene. Ea a fost adoptata ca model matematic de evolutie si pentru populatia umana de catre Malthus. In anumite perioade din evolutia societatii umane, de exemplu intre anii 1700 - 1960, predictiile bazate pe acest model matematic s-au dovedit corecte, dar exista si perioade in care predictiile nu mai corespund cu realitatea.

b) Modelul lui Verhulst.

Din nevoia de a pune de acord predictiile modelului matematic cu datele obtinute experimental, in anul 1837, matematicianul, totodata si biolog, belgian Verhulst a propus un model mai "realist" de crestere a populatiei, descris de ecuatia "logistica" :

$$x' = ax - bx^2, \quad (1.3.2)$$

cu a, b constante strict pozitive.

Pentru determinarea constantelor a si b se determina efectiv solutiile acestei ecuatii (aceasta este o problema de matematica !) si din compararea acestor solutii cu datele experimentale se estimeaza parametrii.

c) Modelul Lotka - Volterra.

Modele matematice si mai realiste trebuie sa puna in evidenta "interactiunea" intre diferite specii. De exemplu, in cazul interactiunii a doua specii, una fiind considerata "prada" si avand volumul $x_1(t)$, iar alta considerata drept "pradator" si avand volumul $x_2(t)$ se obtine sistemul de ecuatii diferentiale, atribuit matematicienilor Lotka si Volterra, urmator:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = ax_1 - bx_1x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -cx_1 + dx_1x_2 \end{cases}, \quad (1.3.3)$$

unde a, b, c, d sunt constante strict pozitive care se determina experimental.

Exista aplicatii importante ale ecuatiilor diferentiale si cu derivate parțiale in chimie, economie, sociologie etc.

■

În multe cazuri, pentru descrierea adecvată a unui anumit proces, fenomen etc. din natura, este necesară evidențierea unei dependențe a unora dintre variabilele care le descriu nu doar ca funcții de timp ci și de poziția în spațiu. Într-o asemenea situație în loc de ecuații diferențiale ordinare se obțin:

2. Ecuații cu derivate parțiale.

Prima ecuație cu derivate parțiale, cu valoare semnificativă în fizica matematică, a fost ecuația coardei vibrante (finite sau infinite) descoperită în anul 1748, după aproape douăzeci de ani de cercetări, de matematicianul elvețian Daniel Bernoulli. La studiul acestei ecuații și al problemelor asociate au contribuit decisiv, pe lângă D. Bernoulli, matematicienii L. Euler și d'Alembert. Rezultatele și problemele matematice noi, apărute pe parcursul studiului său, au jucat un rol excepțional în dezvoltarea analizei matematice mai bine de un secol și jumătate.

2.1. Ecuația coardei staționare (i.e. ecuația stării de echilibru a unei coarde).

În cele ce urmează vom considera o coardă elastică omogenă aflată în stare de repaus ce va fi identificată (în modelul matematic) cu segmentul $[0, l]$ ($l > 0$ fiind lungimea coardei). Sub acțiunea unei forțe exterioare coarda se va deforma. Vom presupune că forța exterioară acționează perpendicular pe direcția coardei și că mișcarea este plană. Deci se poate alege un sistem ortogonal de coordonate xOy cu originea în capătul 0 al segmentului și axa Ox orientată în lungul lui $[0, l]$. Fie $f(x)$ intensitatea forței exterioare ce acționează în punctul $x \in [0, l]$ (admitem că $f : [0, l] \rightarrow \mathbf{R}$ este continuă). Din ipotezele de omogenitate și de elasticitate făcute asupra coardei se deduce că tensiunea în coardă este (în modul), conform legii lui Hooke, constantă (notată μ), iar densitatea (liniară) va fi tot constantă.

Fie $u : [0, l] \rightarrow \mathbf{R}$ funcția al cărei grafic descrie poziția căutată a coardei în starea de echilibru (după deformarea datorată acțiunii forței externe). Până a ajunge în poziția de echilibru coarda trece prin niște poziții intermediare. Dacă $v : [0, l] \rightarrow \mathbf{R}$ este o funcție cu proprietăți adecvate (mai scurt o vom numi funcție *admisibilă*), vom presupune că, pentru $\delta > 0$ suficient de mic, oricare ar fi $\varepsilon \in (-\delta, \delta)$ funcțiile $u + \varepsilon v$ descriu poziții intermediare ale corzii (sunt necesare condiții de regularitate și privind comportamentul la capete asupra lui v).

Vom determina mai întâi energia de poziție corespunzătoare unei deformări oarecare u (admitem că $u : [0, l] \rightarrow \mathbf{R}$ este derivabilă, cu derivata continuă pe $[0, l]$). Această energie este datorată (acțiunii) forței externe precum și tensiunii interne din coardă:

$$E = E_{ext} + E_{tens}.$$

Energia "externă" $E_{ext}(u)$ este egală cu lucrul mecanic efectuat pentru a duce coarda din poziția inițială nedeformată în noua poziție (descrisă de u).

Deci:

$$E_{ext}(u) = \int_0^l f(x) u(x) dx.$$

Energia datorată tensiunii $E_{tens}(u)$ este, conform legii lui Hooke, proporțională cu alungirea. Așadar:

$$E_{tens}(u) = \mu \left(\int_0^l \sqrt{1 + u_x^2} dx - l \right) = \mu \int_0^l (\sqrt{1 + u_x^2} - 1) dx,$$

unde $\mu > 0$ este o constantă care se determină experimental. Prin urmare:

$$E(u) = \mu \int_0^l (\sqrt{1 + u_x^2} - 1) dx + \int_0^l f(x) u(x) dx. \quad (2.1.1)$$

Principiul energiei potențiale minime afirmă că *dintre toate pozițiile intermediare posibile cea de echilibru este aceea pentru care energia (totală) E este minimă.*

Fie $\varphi : (-\delta, \delta) \longrightarrow \mathbf{R}$, $\varphi(\varepsilon) := E(u + \varepsilon v)$, $\varepsilon \in (-\delta, \delta)$. Deoarece $\varphi(\varepsilon) \geq \varphi(0)$, pentru $\varepsilon \in (-\delta, \delta)$, iar $\varphi \in \mathbf{C}^1(-\delta, \delta)$, conform teoremei lui Fermat trebuie că $\varphi'(0) = 0$. Prin urmare:

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left\{ \left[\mu \int_0^l (\sqrt{1 + (u_x + \varepsilon v_x)^2} - 1) dx \right] + \int_0^l f(x) [u(x) + \varepsilon v(x)] dx \right\} = 0.$$

Deci:

$$\mu \int_0^l (1 + u_x^2)^{-\frac{1}{2}} u_x v_x dx + \int_0^l f v dx = 0,$$

oricare ar fi $v \in \mathbf{C}^1([0, l])$ funcție admisibilă. Așadar, în cazul când $u \in \mathbf{C}^2([0, l])$, vom avea:

$$\int_0^l \left\{ -\mu \frac{d}{dx} [(1 + u_x^2)^{-\frac{1}{2}} u_x] + f \right\} v dx + [\mu (1 + u_x^2)^{-\frac{1}{2}} u_x v] \Big|_0^l = 0, \quad (2.1.2)$$

pentru orice funcție admisibilă v .

Sunt posibile următoarele cazuri (dar nu singurele):

i) **ambele capete ale coardei să fie fixe.**

Aceasta înseamnă, în primul rând, că :

$$u(0) = u(l) = 0.$$

Atunci pentru ca $u + \varepsilon v$ să fie o poziție intermediară este necesar ca funcția admisibilă

$v \in \mathbf{C}^1([0, l])$ să verifice (și) condițiile la capete (frontieră) :

$$v(0) = v(l) = 0.$$

Se obține problema (de tip Dirichlet):

$$\begin{cases} (1) & \mu \frac{d}{dx} [(1 + u_x^2)^{-\frac{1}{2}} u_x] = f(x), \quad \text{pentru } x \in (0, l) \\ (2) & u(0) = u(l) = 0, \quad \text{unde } u \in \mathcal{C}^2([0, l]), u = ? \end{cases} \quad (2.1.3)$$

ii) **ambele capete ale coardei sunt libere.**

Atunci funcției admisibile $v \in \mathbf{C}^1([0, l])$ nu i se impun condiții suplimentare. Presupunând, la început, că $v(0) = v(l) = 0$ se obține ecuația (1). Alegând apoi $v \in \mathbf{C}^1([0, l])$ cu $v(0) \neq 0$, $v(l) = 0$ deducem că $u_x(0) = 0$. Analog, pentru $v \in \mathbf{C}^1([0, l])$ cu $v(0) = 0$, $v(l) \neq 0$, obținem și $u_x(l) = 0$. Deci (funcția necunoscută) $u \in \mathbf{C}^2([0, l])$ va verifica problema (de tip Neumann):

$$\begin{cases} (1') & \mu \frac{d}{dx} [(1 + u_x^2)^{-\frac{1}{2}} u_x] = f(x), \quad \text{pentru } x \in (0, l), \\ (2') & u_x(0) = u_x(l) = 0. \end{cases} \quad (2.1.4)$$

iii) **capătul din stânga fix și cel din dreapta mobil:**

$$\begin{cases} (1'') & \mu \frac{d}{dx} [(1 + u_x^2)^{-\frac{1}{2}} u_x] = f(x), \quad \text{pentru } x \in (0, l), \\ (2'') & u(0) = 0, u_x(l) = 0, \quad \text{unde } u \in \mathcal{C}^2([0, l]), u = ? \end{cases} \quad (2.1.5)$$

iv) **capătul din stânga mobil și cel din dreapta fix:**

$$\begin{cases} (1''') & \mu \frac{d}{dx} [(1 + u_x^2)^{-\frac{1}{2}} u_x] = f(x), \quad \text{pentru } x \in (0, l) \\ (2''') & u_x(0) = 0, u(l) = 0, \quad \text{unde } u \in \mathcal{C}^2([0, l]), u = ? \end{cases} \quad (2.1.6)$$

Observații.

a) Este posibil să avem la capete, mai general, condiții de forma:

$$u(0) = a, u(l) = b. \quad (2.1.7)$$

b) În cazul când există anumite legături la capete se obțin condiții la limită de tipul :

$$\begin{aligned} \alpha u(0) + \beta u_x(0) &= a \\ \gamma u(l) + \delta u_x(l) &= b. \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

În cazul deformărilor "mici" ($(u_x)^k \approx 0$, pentru $k \geq 4$) rezultă $\sqrt{1 + u_x^2} \approx 1 + \frac{1}{2} u_x^2$ și deci

$$E(u) = \frac{\mu}{2} \int_0^l u_x^2 dx + \int_0^l f(x) u(x) dx, \quad (2.1.9)$$

de unde se deduce ecuația lui Poisson:

$$\mu u_{xx} = f, \text{ pe } (0, l). \quad (2.1.10)$$

Condițiile la capete rămân cele obținute mai sus. Întegrând ultima ecuație diferențială (pentru $u \in \mathbf{C}^2([0, l])$), obținem soluția

$$u(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x (x-y)f(y)dy + ax + b, x \in [0, l], \quad (2.1.11)$$

constantele a și b obținându-se din condițiile la capete. De exemplu, pentru $u(0) = 0$, $u(l) = 0$ vom avea $b = 0$ și $al + \frac{1}{\mu} \int_0^l (l-y)f(y)dy = 0$. Rezultă:

$$u(x) = -\frac{x}{l\mu} \int_0^l (l-y)f(y)dy + \frac{1}{\mu} \int_0^l (x-y)f(y)dy. \quad (2.1.12)$$

În cazul $f = 1$ se obține arcul de parabolă:

$$u(x) = \frac{1}{2\mu} x(x-l), x \in [0, l]. \quad (2.1.13)$$

Pentru $\mu = 0,5$ și $l = 3$, graficul lui $u(x)$ este:

0.2 2.2.Ecuatia coardei vibrante

Fie $u = u(\cdot, t)$ poziția coardei la momentul t ,

$$u : [0, l] \times [t_1, t_2] \longrightarrow \mathbf{R}.$$

Presupunem funcția u suficient de netedă. Energia de poziție, la momentul t , are expresia:

$$E_p(t) = \mu \int_0^l [\sqrt{1+u_x^2} - 1] dx + \int_0^l f(x, t) u(x, t) dx. \quad (2.1.14)$$

În fiecare punct al coardei energia este $\frac{1}{2} \text{masa} \cdot |\text{viteza}|^2$ (masa = $m \cdot dx$, viteza = u_t) astfel încât energia cinetică a întregii coarde (la momentul t) va fi:

$$E_c(t) = \frac{1}{2} \rho \cdot \int_0^l u_t^2 dx.$$

Prin urmare funcția Lagrange asociată este dată de:

$$L(t) = E_c(t) - E_p(t) = \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} \rho u_t^2 - \mu \sqrt{1+u_x^2} + \mu - f u \right\} dx. \quad (2.1.15)$$

și deci se va obține funcția de acțiune:

$$S(u) = \int_{t_1}^{t_2} L(t) dt. \quad (2.1.16)$$

Principiul lui Hamilton afirmă că mișcarea reală a coardei din momentul t_1 până în momentul t_2 minimizează funcționala S pe mulțimea tuturor pozițiilor

posibile care coincid cu mișcarea reală la momentele de timp t_1 și t_2 .
Fie atunci $v : [0, l] \times [t_1, t_2] \longrightarrow \mathbf{R}$, de clasă convenabilă așa încât

$$v(x, t_1) = v(x, t_2) = 0, \quad x \in [0, l]$$

și u funcția (presupusă suficient de netedă) care descrie mișcarea reală a coardei.
Dacă $\delta > 0$ este suficient de mic va trebui ca, pentru orice $\varepsilon \in (-\delta, \delta)$, să avem:

$$S(u + \varepsilon v) \geq S(u)$$

și deci, datorită teoremei lui Fermat

$$\left[\frac{d}{d\varepsilon} S(u + \varepsilon v) \right]_{|\varepsilon=0} = 0.$$

Avem

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} \rho (u_t + \varepsilon v_t)^2 - \mu [1 + (u_x + \varepsilon v_x)^2]^{\frac{1}{2}} + \mu - f \cdot (u + \varepsilon v) \right\} dx dt \Big|_{\varepsilon=0} = \\ = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \{ \rho u_t v_t - \mu (1 + u_x^2)^{-\frac{1}{2}} u_x v_x - f v \} dx dt. \end{aligned}$$

Folosind o integrare prin părți, ultima expresie se poate scrie:

$$\begin{aligned} \int_0^l \{ [\rho u_t v] \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \rho u_{tt} v dt \} dx - \int_{t_1}^{t_2} \{ \mu (1 + u_x^2)^{-\frac{1}{2}} u_x v \Big|_0^l - \\ - \int_0^l \mu \frac{d}{dx} [(1 + u_x^2)^{-\frac{1}{2}} u_x] v dx \} dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l f v dx dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \{ -\rho u_{tt} + \mu \frac{d}{dx} [(1 + u_x^2)^{-\frac{1}{2}} u_x] - f \} v dx dt - \\ - \int_{t_1}^{t_2} \mu [(1 + u_x^2(l, t))^{-\frac{1}{2}} u_x(l, t) v(l, t) - (1 + u_x^2(0, t))^{-\frac{1}{2}} u_x(0, t) v(0, t)] dt = 0. \end{aligned}$$

Alegem mai întâi $v \in \mathcal{C}_0^\infty((0, l) \times (t_1, t_2))$ și obținem ecuația diferențială (cu derivate parțiale):

$$\rho u_{tt} - \mu \frac{d}{dx} [(1 + u_x^2)^{-\frac{1}{2}} u_x] + f = 0, \text{ pe } (0, l) \times (t_1, t_2). \quad (2.1.17)$$

Rămâne că :

$$\int_{t_1}^{t_2} \mu [(1 + u_x^2(l, t))^{-\frac{1}{2}} u_x(l, t) v(l, t) - (1 + u_x^2(0, t))^{-\frac{1}{2}} u_x(0, t) v(0, t)] dt = 0,$$

pentru orice $v \in \mathcal{C}^1([0, l] \times [t_1, t_2])$ cu $v(x, t_1) = v(x, t_2) = 0$, $x \in [0, l]$.

În cazul capetelor fixe ($u(0, t) = \alpha$, $u(l, t) = \beta$, pentru orice $t \in [t_1, t_2]$) va trebui să avem $v(l, t) = v(0, t) = 0$ și deci relația (2.1.17) este adevărată. Prin urmare:

$$\begin{cases} \rho u_{tt} - \mu \frac{d}{dx} [(1 + u_x^2)^{-\frac{1}{2}} u_x] + f = 0, & \text{pe } (0, l) \times (t_1, t_2); \\ u(0, t) = \alpha, \quad u(l, t) = \beta, & t \in [t_1, t_2]. \end{cases} \quad (2.1.18)$$

În plus, pentru a determina mișcarea corzii, avem nevoie și de *condițiile inițiale* la momentul $t_0 \in (t_1, t_2)$:

$$\begin{aligned} u|_{t=t_0} &= u_0, & \text{pe } (0, l), \\ u_t|_{t=t_0} &= u_1, & \text{pe } (0, l). \end{aligned}$$

În cazul capetelor mobile nu vom avea restricții pentru u și v . Vom obține :

$$\begin{cases} \rho u_{tt} - \mu \frac{d}{dx} [(1 + u_x^2)^{-\frac{1}{2}} u_x] + f = 0 & \text{pe } (0, l) \times (t_1, t_2), \\ u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0 & , \quad t \in [t_1, t_2], \\ u|_{t=t_0} = u_0 & \text{pe } (0, l), \\ u_t|_{t=t_0} = u_1 & \text{pe } (0, l). \end{cases} \quad (2.1.19)$$

unde $u_0, u_1 \in C([0, l])$ sunt funcții cunoscute; u_0 descrie forma inițială a coardei, iar u_1 descrie viteza inițială a punctelor coardei.

Observație.

Dacă oscilațiile sunt „mici” avem $\sqrt{1 + u_x^2} \approx 1 + \frac{1}{2}u_x^2$ și se obține drept funcție de acțiune:

$$S(u) = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left(\frac{1}{2} \rho u_t^2 - \frac{1}{2} \mu u_x^2 - f u \right) dx dt.$$

Prin urmare ecuația neliniară de mai sus din (2.1.19) se înlocuiește cu ecuația (*liniară* a) coardei vibrante:

$$\rho u_{tt} - \mu u_{xx} + f = 0, \quad \text{pe } (0, l) \times (t_1, t_2). \quad (2.1.20)$$

■

Ecuația coardei vibrante exprimă, în limbaj matematic, ideea că accelerația fiecărui mic fragment de coardă este proporțională cu forța de tensiune care acționează asupra acestui fragment; prin urmare ecuația este o consecință a legii de mișcare a lui Newton.

Când studiem vibrațiile unei corzi de vioară observăm că aceasta se mișcă efectuând oscilații periodice și face acest lucru din două motive: coarda nu poate rămâne în repaus întrucât a fost ciupită și nu poate să se miște oricât de departe deoarece capetele sale sunt fixate, iar energia totală nu poate crește (cf. Stewart).

* * * * *

O generalizare naturală a rezultatelor legate de diferitele ecuații ale coardei o constituie studiul unor:

0.3 2.3 Ecuația ale membranei.

Ecuația (stării de echilibru a) membranei staționare

Se procedează similar cu cazul coardei staționare. Așadar vom presupune că, în stare de repaus, în lipsa unei forțe externe, membrana omogenă și elastică ocupă un domeniu (mărginit) $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ situat în planul de coordonate xOy . Dacă o forță externă cu intensitatea $f(x)$ (în punctul $x = (x_1, x_2) \in \Omega$) acționează vertical (perpendicular) pe planul membranei (i.e. planul xOy), după direcția axei Ou , forma membranei deformate va fi descrisă de graficul unei funcții $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$.

Vom presupune că deformarea membranei este mică, funcția u este suficient de netedă, iar $f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$. În ipotezele de natură fizică făcute mai înainte asupra membranei rezultă că tensiunea internă în membrană este (în modul) o constantă μ , iar densitatea este, de asemenea, tot o constantă ρ . Până a ajunge în poziția de echilibru membrana trece prin anumite poziții intermediare. Dacă $v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție admisibilă (cu proprietăți adecvate) vom presupune că, pentru $\delta > 0$ suficient de mic, oricare ar fi $\varepsilon \in (-\delta, \delta)$, funcțiile $u + \varepsilon v$ descriu poziții intermediare ale membranei, apropiate de poziția de echilibru; pentru aceasta este necesară îndeplinirea anumitor condiții privind regularitatea și comportamentul la frontieră asupra lui v).

Vom determina mai întâi energia de poziție corespunzătoare unei deformări oarecare u (admitem că u este derivabilă, cu derivata continuă pe $\bar{\Omega}$). Această energie este datorată forței externe precum și tensiunii interne din membrană:

$$E = E_{ext} + E_{tens}.$$

Energia „externă” $E_{ext}(u)$ este egală cu lucrul mecanic efectuat pentru a duce membrana din poziția inițială nedeformată în noua poziție (descrisă de u). Deci :

$$E_{ext}(u) = \int_{\Omega} f(x) u(x) dx.$$

Energia datorată tensiunii $E_{tens}(u)$ este, conform legii lui Hooke, proporțională cu întinderea membranei. Așadar :

$$E_{tens}(u) = \mu \left(\int_{\Omega} \sqrt{1 + |\partial u|^2} dx - |\Omega| \right) = \mu \int_{\Omega} (\sqrt{1 + |\partial u|^2} - 1) dx,$$

unde $\mu > 0$ este o constantă care se determină experimental. Prin urmare :

$$E(u) = \mu \int_{\Omega} (\sqrt{1 + |\partial u|^2} - 1) dx + \int_{\Omega} f(x) u(x) dx. \quad (2.3.1)$$

Principiul energiei potențiale minime afirmă că, dintre toate pozițiile intermediare posibile ale membranei, cea de echilibru este aceea pentru care energia (totală) E este minimă.

Fie $\varphi : (-\delta, \delta) \longrightarrow \mathbf{R}$, $\varphi(\varepsilon) := E(u + \varepsilon v)$, $\varepsilon \in (-\delta, \delta)$. Deoarece $\varphi(\varepsilon) \geq \varphi(0)$, pentru $\varepsilon \in (-\delta, \delta)$, iar $\varphi \in \mathcal{C}^1(-\delta, \delta)$, conform teoremei lui Fermat trebuie ca $\varphi'(0) = 0$. Prin urmare

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left\{ \mu \int_{\Omega} (\sqrt{1 + |\partial u + \varepsilon \partial v|^2} - 1) dx + \int_{\Omega} f(x) [u(x) + \varepsilon v(x)] dx \right\}_{|\varepsilon=0} = 0.$$

Deci:

$$\mu \int_{\Omega} (1 + |\partial u|^2)^{-1/2} \langle \partial u, \partial v \rangle dx + \int_{\Omega} f v dx = 0,$$

oricare ar fi $v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ funcție admisibilă. Mai sus am notat

$$\langle \partial u, \partial v \rangle := \sum_{k=1}^2 \partial_k u \cdot \partial_k v.$$

În cazul $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ avem

$$\begin{aligned} & (1 + |\partial u|^2)^{-1/2} \langle \partial u, \partial v \rangle = \\ & = \sum_{k=1}^2 \partial_k [v \cdot (1 + |\partial u|^2)^{-1/2} \partial_k u] - v \cdot \sum_{k=1}^2 \partial_k [(1 + |\partial u|^2)^{-1/2} \partial_k u]. \end{aligned}$$

Prin urmare

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left\{ -\mu \sum_{k=1}^2 \partial_k [(1 + |\partial u|^2)^{-1/2} \partial_k u] + f \right\} \cdot v dx + \\ & + \int_{\Omega} \left\{ \sum_{k=1}^2 \partial_k [v \cdot (1 + |\partial u|^2)^{-1/2} \partial_k u] \right\} dx = 0, \end{aligned}$$

pentru orice funcție admisibilă $v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. Dacă deschisul Ω are frontiera suficient de netedă atunci ultima integrală se poate calcula cu teorema Gauss-Ostrogradski și obținem:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left\{ -\mu \sum_{k=1}^2 \partial_k [(1 + |\partial u|^2)^{-1/2} \partial_k u] + f \right\} \cdot v dx + \\ & + \int_{\partial \Omega} \left\{ \sum_{k=1}^2 [(1 + |\partial u|^2)^{-1/2} \partial_k u] \cdot \nu_k \right\} \cdot v dx = 0, \end{aligned}$$

oricare ar fi $v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ funcție admisibilă; am notat cu $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ versorul

normalei exterioare la $\partial\Omega$. Dar $\sum_{k=1}^2 \partial_k u \cdot \nu_k := \frac{\partial u}{\partial \nu} \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ și ultima egalitate devine:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \{ -\mu \sum_{k=1}^2 \partial_k [(1 + |\partial u|^2)^{-1/2} \partial_k u] + f \} \cdot v \, dx + \\ + \int_{\partial\Omega} [(1 + |\partial u|^2)^{-1/2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu}] \cdot v \, dx = 0, \end{aligned}$$

pentru orice funcție admisibilă $v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$.

Atunci

i) dacă membrana are *frontiera liberă* funcția v poate fi aleasă arbitrar în $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ și obținem:

$$\begin{cases} \mu \sum_{k=1}^2 \partial_k [(1 + |\partial u|^2)^{-1/2} \partial_k u] = f, & \text{pe } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \text{pe } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.3.2)$$

ii) dacă membrana are *frontiera fixată* rezultă $v = 0$ pe $\partial\Omega$ și deci:

$$\begin{cases} \mu \sum_{k=1}^2 \partial_k [(1 + |\partial u|^2)^{-1/2} \partial_k u] = f, & \text{pe } \Omega, \\ u = \varphi, & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.3.3)$$

unde φ este o funcție dată pe frontiera $\partial\Omega$.

Remarcă.

i) Dacă $f = 0$, ecuația neliniară cu derivate parțiale

$$\mu \sum_{k=1}^2 \partial_k [(1 + |\partial u|^2)^{-1/2} \partial_k u] = 0$$

se numește *ecuația suprafeței minimale* sau ecuația lui Euler.

ii) Dacă deformarea membranei este „mică” vom avea $(|\partial u|)^k \approx 0$, pentru $k \geq 4$. Rezultă $\sqrt{1 + |\partial u|^2} \approx 1 + \frac{1}{2} |\partial u|^2$. Vom obține:

$$E(u) = \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} |\partial u|^2 \, dx + \int_{\Omega} f(x) u(x) \, dx$$

și de aici se deduce *ecuația lui Poisson*:

$$\mu \Delta u = f, \text{ pe } \Omega. \quad (2.3.4)$$

0.4 Ecuația membranei vibrante

Se procedează asemănător cu cazul coardei vibrante. Fie $u = u(\cdot, t)$ poziția membranei la momentul t , $u : \overline{\Omega} \times [t_1, t_2] \longrightarrow \mathbf{R}$. Presupunem u suficient de

netedă. Energia de poziție, la momentul t , are expresia:

$$E_p(t) = \mu \int_{\Omega} [\sqrt{1 + |\partial u|^2} - 1] dx + \int_{\Omega} f(x, t) u(x, t) dx.$$

În fiecare punct al membranei energia este $\frac{1}{2} masa \cdot |viteza|^2$ (masa = $m \cdot dx$, viteza = u_t) astfel încât energia cinetică a întregii membrane (la momentul t) va fi:

$$E_c(t) = \frac{1}{2} \rho \cdot \int_{\Omega} u_t^2 dx.$$

Prin urmare *funcția Lagrange* atașată este dată de:

$$L(t) = E_c(t) - E_p(t) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \rho u_t^2 - \mu \sqrt{1 + |\partial u|^2} + \mu - f u \right\} dx.$$

și deci se va obține *funcția de acțiune*:

$$S(u) = \int_{t_1}^{t_2} L(t) dt.$$

Principiul lui Hamilton afirmă că *mișcarea reală a membranei din momentul t_1 până în momentul t_2 minimizează funcționala S pe mulțimea tuturor pozițiilor posibile care coincid cu mișcarea reală la momentele de timp t_1 și t_2 .*

Fie deci $v : \bar{\Omega} \times [t_1, t_2] \longrightarrow \mathbf{R}$, de clasă convenabilă așa încât

$$v(x, t_1) = v(x, t_2) = 0, x \in \bar{\Omega}$$

și u funcția (presupusă suficient de netedă) care descrie mișcarea reală a membranei. Dacă $\delta > 0$ este suficient de mic va trebui ca, pentru orice $\varepsilon \in (-\delta, \delta)$, să avem:

$$S(u + \varepsilon v) \geq S(u)$$

și prin urmare, conform teoremei lui Fermat,

$$\left[\frac{d}{d\varepsilon} S(u + \varepsilon v) \right]_{|\varepsilon=0} = 0.$$

Avem

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \rho (u_t + \varepsilon v_t)^2 - \mu [1 + (|\partial u + \varepsilon \partial v|^2)^{\frac{1}{2}}] + \mu - f \cdot (u + \varepsilon v) \right\} dx dt \Big|_{\varepsilon=0} = \\ = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \{ \rho u_t v_t - \mu (1 + |\partial u|^2)^{-\frac{1}{2}} \langle \partial u, \partial v \rangle - f v \} dx dt. \end{aligned}$$

Deci:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \{ \rho u_t v_t - \mu(1 + |\partial u|^2)^{-\frac{1}{2}} \langle \partial u, \partial v \rangle - f v \} dx dt = 0,$$

oricare ar fi $v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega} \times [t_1, t_2])$ funcție admisibilă.

În continuare vom presupune că funcția necunoscută $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega} \times [t_1, t_2])$. Folosind o integrare prin părți vom avea

$$\int_{t_1}^{t_2} \rho u_t v_t dt = [\rho u_t v]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \rho u_{tt} v dt.$$

Am văzut că

$$\begin{aligned} & (1 + |\partial u|^2)^{-1/2} \langle \partial u, \partial v \rangle = \\ & = \sum_{k=1}^2 \partial_k [v \cdot (1 + |\partial u|^2)^{-1/2} \partial_k u] - v \cdot \sum_{k=1}^2 \partial_k [(1 + |\partial u|^2)^{-1/2} \partial_k u]. \end{aligned}$$

Cu teorema Gauss-Ostrogradski rezultă

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [(1 + |\partial u|^2)^{-\frac{1}{2}} \langle \partial u, \partial v \rangle] dx = \\ & = \int_{\partial \Omega} v \cdot (1 + |\partial u|^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds - \int_{\Omega} [\sum_{k=1}^2 \partial_k [(1 + |\partial u|^2)^{-1/2} \partial_k u] v] dx. \end{aligned}$$

Prin urmare

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \{ [\rho u_t v]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \rho u_{tt} v dt \} dx - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial \Omega} v \cdot (1 + |\partial u|^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds + \\ & + \mu \{ \int_{\Omega} [\sum_{k=1}^2 \partial_k [(1 + |\partial u|^2)^{-1/2} \partial_k u] v] dx \} dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} f v dx dt = 0, \end{aligned}$$

adică

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \{ -\rho u_{tt} + \mu \sum_{k=1}^2 \partial_k [(1 + |\partial u|^2)^{-\frac{1}{2}} \partial_k u] - f \} dx dt + \\ & + \int_{\Omega} \rho u_t(\cdot, t_2) v(\cdot, t_2) dx - \int_{\Omega} \rho u_t(\cdot, t_1) v(\cdot, t_1) dx - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial \Omega} v \cdot (1 + |\partial u|^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = 0, \end{aligned}$$

oricare ar fi $v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega} \times [t_1, t_2])$ funcție admisibilă.

Alegem mai întâi $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega \times (t_1, t_2))$ și obținem ecuația diferențială (cu derivate parțiale):

$$\rho u_{tt} - \mu \sum_{k=1}^2 \partial_k [(1 + |\partial u|^2)^{-\frac{1}{2}} \partial_k u] + f = 0, \text{ pe } \Omega \times (t_1, t_2). \quad (2.3.5)$$

Rămâne că :

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega} v \cdot (1 + |\partial u|^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = 0,$$

pentru orice $v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega} \times [t_1, t_2])$ cu $v(x, t_1) = v(x, t_2) = 0$, dacă $x \in \overline{\Omega}$.

Prin urmare

i) dacă membrana are *frontiera liberă* funcția v poate fi aleasă arbitrar în $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega} \times [t_1, t_2])$ și obținem:

$$\begin{cases} \rho u_{tt} - \mu \sum_{k=1}^2 \partial_k [(1 + |\partial u|^2)^{-\frac{1}{2}} \partial_k u] + f = 0, \text{ pe } \Omega \times (t_1, t_2) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \text{ pe } \partial\Omega \times (t_1, t_2). \end{cases} \quad (2.3.6)$$

ii) dacă membrana are *frontiera fixată* rezultă $v = 0$ pe $\partial\Omega \times [t_1, t_2]$ și deci :

$$\begin{cases} \rho u_{tt} - \mu \sum_{k=1}^2 \partial_k [(1 + |\partial u|^2)^{-\frac{1}{2}} \partial_k u] + f = 0, \text{ pe } \Omega \times (t_1, t_2) \\ u = \varphi, \text{ pe } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.3.7)$$

unde φ este o funcție dată pe frontiera $\partial\Omega$.

În plus, pentru a determina mișcarea membranei, avem nevoie și de *condițiile inițiale* la momentul $t_0 \in (t_1, t_2)$:

$$\begin{aligned} u|_{t=t_0} &= u_0, \text{ pe } \Omega, \\ u_t|_{t=t_0} &= u_1, \text{ pe } \Omega. \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

În cazul frontierei mobile nu vom avea restricții pentru u și v . Vom obține:

$$\begin{cases} \rho u_{tt} - \mu \sum_{k=1}^2 \partial_k [(1 + |\partial u|^2)^{-\frac{1}{2}} \partial_k u] + f = 0 & \text{pe } \Omega \times (t_1, t_2), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & , \quad t \in [t_1, t_2], \\ u|_{t=t_0} = u_0 & \text{pe } \Omega, \\ u_t|_{t=t_0} = u_1 & \text{pe } \Omega, \end{cases} \quad (2.3.9)$$

unde $u_0, u_1 \in C(\overline{\Omega})$ sunt funcții cunoscute; u_0 descrie forma inițială a membranei, iar u_1 descrie viteza inițială a punctelor acesteia.

Observație. i). Dacă oscilațiile sunt „mici” avem

$$\sqrt{1 + |\partial u|^2} \approx 1 + \frac{1}{2} |\partial u|^2$$

și se obține drept funcție de acțiune:

$$S(u) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \rho u_t^2 - \frac{1}{2} \mu |\partial u|^2 - f u \right) dx dt.$$

Prin urmare ecuația neliniară de mai sus din (1.2.9) se înlocuiește cu ecuația (liniară a) membranei vibrante:

$$\rho u_{tt} - \mu \Delta u + f = 0, \text{ pe } \Omega \times (t_1, t_2). \quad (2.3.10)$$

ii). Aplicații importante ale studiului problemelor legate de diferitele ecuații ale membranei au loc în tehnică în proiectarea supapelor, diafragmelor etc.

iii). **Ecuația undelor sferice** (cazul $n = 3$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + f, \text{ pe } \Omega \times (t_1, t_2), \quad (2.3.11)$$

descrie, printre altele, propagarea sunetului într-un mediu omogen sau propagarea luminii într-un mediu omogen neconductor. Aceeași ecuație este verificată și de densitatea și de presiunea unui gaz, de potențialul vitezelor, de componentele câmpului electromagnetic, de potențialul acestui câmp etc. ■

În natură există însă și fenomene, cum ar fi cele calorice, reacțiile nucleare în lanț etc. care au o natură complet diferită de aceea a fenomenelor oscilatorii evocate mai sus. Acestea fac parte din clasa extrem de importantă a ceea ce constituie, sub o denumire generică, așa zise:

1 Fenomene de difuzie

1.1 2.4. Propagarea căldurii

Fie $\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbf{R}^n$, $n = 1, 2, 3$ un domeniu ocupat de un corp (conductor termic) izotrop, cu densitatea de masă (punctuală) $\rho(x)$, capacitatea calorică (sau căldura specifică) $c(x) > 0$ și cu coeficientul de conductivitate termică $k(x) > 0$, $x \in \Omega$. Se presupune, pentru moment, că funcțiile ρ , c , k sunt suficient de netede (în Ω).

Fie t_0 momentul inițial și T momentul final ($t_0 < T$) ale procesului termic ce se desfășoară în Ω . Se mai presupun cunoscute temperatura la momentul inițial t_0 , în orice punct $x \in \Omega$, notată $f(x)$, precum și densitatea sursei exterioare (de încălzire sau răcire) care produce sau absoarbe căldura, notată F . Vrem să determinăm temperatura $u = u(x, t)$ în punctul $x \in \bar{\Omega}$, la momentul $t \in (t_0, T)$. Evident și despre u vom presupune că are regularitatea dorită.

Observații

i) În unele cazuri se cunoaște densitatea $q_0(x, t)$, $x \in \partial\Omega$, $t \in [t_0, T)$ a fluxului de căldură pe $\partial\Omega$, iar alteori temperatura mediului ambiant $u_0 = u|_{\partial\Omega}$ și $k_1 = k_1(x) > 0$, $x \in \partial\Omega$ coeficientul de transfer termic superficial (pe $\partial\Omega$).

ii) Modele mai complicate dar mai „coerente” (mai bine legate de realitate) presupun că unele dintre mărimile de mai sus, cum sunt c , k sau k_1 , depind de temperatură (deci de u).

Fie Ω_1 un subdomeniu „mic” al lui Ω (cu frontiera netedă) și $[t_1, t_2] \subset (t_0, T)$ un interval (de asemenea „mic”) de timp, $t_2 - t_1 = \Delta t$, în care se studiază procesul termic.

Se știe că (observație experimentală) în procesele termice căldura „curge” dinspre zonele mai calde spre zonele mai reci.

Conform legii lui Fourier (atribuită uneori și lui Newton) cantitatea de căldură ce intră în Ω_1 prin frontiera $\partial\Omega_1$ (datorită neomogenității distribuției căldurii în corpul Ω) în intervalul de timp $[t_1, t_2]$, este:

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\partial\Omega_1} k(x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) ds \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\partial\Omega_1} \langle k(x) \partial_x u, \nu \rangle ds \right) dt =$$

$$\stackrel{T.G.O.}{=} \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega_1} \operatorname{div}(k(x) \partial_x u) dx \right) dt.$$

La aceasta trebuie adăugată și cantitatea de căldură datorată sursei externe ce va fi:

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega_1} F(x, t) dx \right) dt.$$

Între căldură și temperatură există, bineînțeles, o strânsă legătură. Ținând cont că, prin definiție, capacitatea calorică este dată de energia ce trebuie comunicată (transmisă) corpului (de fapt unității de masă) pentru a-i mări temperatura cu un grad (se admite că toată energia este folosită pentru ”încălzire”, nu și pentru dilatarea sau contractarea corpului) rezultă că, în intervalul de timp $[t_1, t_2]$, s-a produs în Ω căldura:

$$Q_3 = \int_{\Omega_1} \rho(x) c(x) [u(x, t_2) - u(x, t_1)] dx = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_1} \rho(x) c(x) \partial_t u(x, t) dx dt.$$

Făcând bilanțul energetic trebuie să avem

$$Q_3 = Q_1 + Q_2,$$

adică:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_1} [\rho(x) c(x) \partial_t u - \operatorname{div}(k(x) \partial_x u) - F(x, t)] dx dt = 0.$$

Cum integrandul este o funcție continuă, iar Ω_1 și $[t_1, t_2]$ au fost luate „arbitrare” se obține ecuația „punctuală”, numită *ecuația căldurii* (Fourier, 1822):

$$\rho(x) c(x) \partial_t u(x, t) - \operatorname{div}(k(x) \partial_x u)(x, t) = F(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t \in (t_0, T). \quad (2.4.1)$$

Dacă mediul este omogen, adică ρ , c , k sunt constante ecuația căldurii capătă forma :

$$\partial_t u - \omega^2 \Delta u = F_1, \text{ pe } \Omega \times (t_0, T), \quad (2.4.2)$$

unde $\omega = \frac{k}{c\rho}$, $F_1 = \frac{F}{c\rho}$.

Observații:

i) la obținerea ecuației căldurii sub forma „simplificată” (2.4.1) nu au fost utilizate cu deplină acuratețe premisele fizice și teoretice; de exemplu, s-a neglijat complet inerția mișcării moleculare. Acest fapt conduce la unele concluzii nefirești, cum ar fi viteza de propagare infinită a căldurii. Modele mai adecvate pentru procesele termice sunt date de ecuațiile de transfer (vezi V. Vladimirov și V. Barbu).

ii) Printr-o alegere convenabilă a unităților de măsură se poate presupune în (2.4.2) că $\omega \equiv 1$. De fapt se face o schimbare simplă de argument : $\tilde{u}(x, t) := u(x, \omega^{-2}t)$.

iii) Este evident că numai din ecuația căldurii nu se poate determina univoc soluția (temperatura corpului). De exemplu, dacă u este o soluție pentru ecuația (2.4.2) atunci $u + c$ ($c = \text{constantă}$) este iarăși soluție.

iv) Ecuația (2.4.1) are loc numai pe $\Omega \times (t_0, T)$ (deci nu neapărat) și pentru $t = t_0$ sau pentru $x \in \partial\Omega$).

v) Pentru $t = t_0$, u este dat de :

$$u|_{t=t_0} = f, \text{ pe } \Omega. \quad (2.4.3)$$

vi) Pe $\partial\Omega$ se impune una din următoarele condiții :

a) se cunoaște temperatura pe $\partial\Omega$, tot timpul, adică:

$$u = h_0, \text{ pe } \partial\Omega \times [t_0, T]; \quad (2.4.4)$$

b) se cunoaște densitatea $q_0(x, t)$ a fluxului termic prin $\partial\Omega$, tot timpul, adică:

$$k(x) \frac{\partial u}{\partial \nu} = q_0(x, t), \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in (t_0, T); \quad (2.4.5)$$

c) se cunoaște temperatura u_0 din exteriorul lui $\partial\Omega$, iar densitatea fluxului este proporțională cu diferența de temperatură dintre $u|_{\partial\Omega}$ și $u_0|_{\partial\Omega}$, adică:

$$k \frac{\partial u}{\partial \nu} = k_1(u_0 - u), \text{ pe } \partial\Omega,$$

unde $k_1 = k_1(x)$, $x \in \partial\Omega$ este coeficientul de schimb termic superficial.

Prin urmare:

$$k \frac{\partial u}{\partial \nu} + k_1 u = k_1 u_0, \text{ pe } \partial\Omega \times [t_0, T]. \quad (2.4.6)$$

vii) De obicei, din motive de simplitate, se alege $t_0 \equiv 0$.

O problemă care constă în determinarea unei funcții

$$u : \bar{\Omega} \times [t_0, T) \longrightarrow \mathbf{R} \text{ (sau } \mathbf{C}),$$

de clasă convenabilă, ce verifică (2.4.1) „+” (2.4.3) „+” una dintre condițiile (2.4.4), (2.4.5) sau (2.4.6) se numește **problemă mixtă** (respectiv prima, a doua sau a treia problemă mixtă) **pentru operatorul căldurii** (după alții, pentru ecuația căldurii). De fapt avem de-a face cu o problemă mixtă clasică.

În cazul în care Ω este de dimensiuni foarte mari, iar observațiile (măsurătorile) privind temperatura se fac într-o zonă a corpului aflată „departe” de frontieră, experimental s-a constatat că acest fapt influențează, cel puțin un interval scurt de timp, foarte puțin asupra evoluției termice a zonei cercetate. Lucrurile stau ca și cum frontiera ar fi „zburat” la infinit, adică Ω nu ar avea frontieră, deci se poate identifica $\Omega \equiv \mathbf{R}^n$.

Se ajunge astfel la ceea ce se numește **problema Cauchy pentru operatorul căldurii** : să se determine o funcție

$$u : \mathbf{R}^n \times [t_0, T) \longrightarrow \mathbf{R} \text{ (sau } \mathbf{C}),$$

de clasă convenabilă, așa încât să se verifice (2.4.1) pe $\mathbf{R}^n \times (t_0, T)$ și (condiția Cauchy):

$$u|_{t=t_0} = f, \text{ pe } \mathbf{R}^n. \quad (2.4.7)$$

(desigur se presupune cunoscută temperatura la momentul inițial, f , în toate punctele spațiului).

Alt caz particular interesant este acela în care fenomenul este staționar, adică evoluția sa nu este influențată de timp.

Deci se cere să se determine $u : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbf{R}$ (sau \mathbf{C}), de clasă convenabilă, așa încât:

$$-div(k(x)\partial_x u) = F, \text{ pe } \Omega \quad (2.4.8)$$

și

$$u = h_0, \text{ pe } \partial\Omega; \quad (2.4.9)$$

sau

$$k \frac{\partial u}{\partial \nu} = q_0, \text{ pe } \partial\Omega; \quad (2.4.10)$$

sau

$$k \frac{\partial u}{\partial \nu} + k_1 u = k_1 u_0, \text{ pe } \partial\Omega. \quad (2.4.11)$$

Obținem astfel **problema Dirichlet** {(2.4.8) „+” (2.4.9)}, respectiv **problema Neumann** {(2.4.8) „+” (2.4.10)} sau **problema derivatei oblice** {(2.4.8) „+” (2.4.11)}.

Când se **studiază** problemele anterioare de fapt se procedează **invers**: se începe cu cazul staționar și apoi se trece la cel nestaționar, de evoluție.

Este de remarcă că ecuații parabolice liniare de tipul (1.3.1) sau, mai general, de forma:

$$\partial_t u - \sum_{i,j=1}^n \partial_i(a_{ij}(x,t)\partial_j u) + \sum_{i=1}^n b_i(x,t)\partial_i u + c(x,t)u = f, \text{ în } \Omega \times (t_0, T)$$

cu

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \geq \gamma |\xi|^2, \text{ pentru } x \in \bar{\Omega}, t \in [t_0, T), \xi \in \mathbf{R}^n,$$

apar și în studiul proceselor stochastice (proceses Markov, proceses Wiener), în programarea dinamică și în teoria jocurilor diferențiale.

1.2 Ecuația difuziei unor particule

Se procedează asemănător cu modul de deducere a ecuației căldurii (care este tot un proces fizic de difuzie !), dar în locul legii lui Fourier se utilizează o lege a lui Nernst care afirmă că **fluxul de particule în unitatea de timp prin elementul de suprafață** ds este dat de: $dQ = -D \frac{\partial u}{\partial \nu} ds$, unde $D = D(x)$ este **coeficientul de difuzie**, iar $u = u(x, t)$ este **densitatea de particule** în punctul x , la momentul t . Se va obține ecuația (cu necunoscuta u)

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(D \operatorname{grad} u) - qu + F(x, t),$$

unde ρ este **coeficientul de porozitate**, q caracterizează **absorbția** mediului, iar $F(x, t)$ descrie **intensitatea sursei** de particule în punctul x , la momentul t . În cazul $\rho = 1$, $D = 1$, $q = 0$ se regăsește chiar ecuația căldurii.

Roľul jucat de ecuația undelor în istoria umanității este deosebit de important. În a doua jumătate a secolului al XIX-lea (mai precis, între anii 1861 și 1873) marele fizician (și foarte bun matematician!) Maxwell, valorificând rezultatele obținute, mai mult pe baza unor observații cu caracter experimental, în principal, de Faraday, Gauss și Ampère a creat modelul matematic al câmpului electromagnetic. Dacă mediul în care acționează câmpul electromagnetic are proprietăți „bune”, iar $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$ reprezintă componenta electrică a câmpului și $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)$ descrie componenta magnetică a câmpului, ecuațiile lui Maxwell sunt următoarele:

$$\begin{cases} 1) & \operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = \rho, & \text{legea lui Gauss,} \\ 2) & \operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) = 0, & \text{„lege” experimentală,} \\ 3) & \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial_t(\mu \mathbf{H}), & \text{legea lui Faraday,} \\ 4) & \operatorname{rot} \mathbf{H} = \partial_t(\varepsilon \mathbf{E}) + \mathbf{I}, & \text{legea lui Ampère,} \end{cases}$$

unde ρ = densitatea de sarcină, ε = „constantă” dielectrică (sau permitivitatea electrică) a mediului, μ = permeabilitatea magnetică a mediului, iar $\mathbf{I} = (I_1, I_2, I_3)$ reprezintă densitatea curentului de conducție (noțiune introdusă de Maxwell).

În cazul cel mai simplu, al unui mediu linear, omogen, izotrop, neconductiv și în absența sarcinilor și a curenților (– de exemplu, în vid –) vom avea $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{constantă}$, $\mu = \mu_0 = \text{constantă}$, $\rho = 0$, $\mathbf{I} = (0, 0, 0)$, iar sistemul lui Maxwell devine:

$$\begin{cases} 1') & \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \\ 2') & \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \\ 3') & \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \partial_t \mathbf{H}, \\ 4') & \operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}. \end{cases}$$

In coordonate carteziene avem:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \partial_{x_1} E_1 + \partial_{x_2} E_2 + \partial_{x_3} E_3, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= \partial_{x_1} H_1 + \partial_{x_2} H_2 + \partial_{x_3} H_3, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= (\partial_{x_2} E_3 - \partial_{x_3} E_2, \partial_{x_3} E_1 - \partial_{x_1} E_3, \partial_{x_1} E_2 - \partial_{x_2} E_1), \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= (\partial_{x_2} E_3 - \partial_{x_3} E_2, \partial_{x_3} E_1 - \partial_{x_1} E_3, \partial_{x_1} E_2 - \partial_{x_2} E_1). \end{cases}$$

Derivand ecuația 4') în raport cu t (evident ca vom admite implicit ca E_1, \dots, H_3 sunt de clasa C^2) obținem:

$$\operatorname{rot}(\partial_t \mathbf{H}) = \varepsilon \partial_t^2 \mathbf{E}$$

și având în vedere 3') deducem

$$-\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{E}) = \varepsilon_0 \partial_t^2 \mathbf{E}.$$

Dar $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{E}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} \stackrel{1')}{=} \operatorname{grad}(0) - \Delta \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E}$ (cu $\Delta \mathbf{E} := (\Delta E_1, \Delta E_2, \Delta E_3)$) și prin urmare

$$\partial_t^2 \mathbf{E} = c^2 \Delta \mathbf{E},$$

unde $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} (= 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0})$, adică

$$\partial_t^2 E_k = c^2 \Delta E_k, 1 \leq k \leq 3. \quad (*)$$

Procedând absolut analog obținem și ecuația vectorială pentru componenta magnetică a câmpului:

$$\partial_t^2 \mathbf{H} = c^2 \Delta \mathbf{H},$$

care, în varianta scalară, devine

$$\partial_t^2 H_k = c^2 \Delta H_k, 1 \leq k \leq 3. \quad (**)$$

Cunoscând ε_0 și μ_0 (pentru vid) Maxwell a *descoperit* ca mărimea c este tocmai viteza luminii în vid. De aici, o primă concluzie importantă: lumina este o formă de radiație electromagnetică. Apoi, având în vedere relațiile (*) și (**), Maxwell a tras concluzia că din moment ce fiecare componentă a câmpului electromagnetic verifică o ecuație a undelor înseamnă că fenomenele electromagnetice au un caracter ondulatoriu, de unde a dedus că forma de manifestare a câmpului electromagnetic o constituie *undele electromagnetice*, care pot diferi prin lungimea de undă, frecvența etc.

Evidențierea experimentală a acestui tip de unde a fost realizată în anul 1887 de către Heinrich Hertz. Ulterior aplicațiile practice au curs în cascadă: radioul (Marconi), telefonul (Bell), iconoscopul (stramosul televizorului) (Zvorâkin), becul electric (Edison), generatorul electric, patefonul, cinematograful, tramvaiul (Siemens), troleibuzul, frigiderul, calculatorul electronic, magnetofonul, casetofonul, videocasetofonul, diferite aparate medicale, microscopul electronic, telefonul mobil etc.

Cele doua mari descoperiri stiintifice ulterioare cu un impact atat de pregnant asupra modului de concepere a lumii: teoria relativitatii (A. Einstein) si mecanica cuantica(M. Plank) isi au originea tot in sistemul de ecuatii al lui Maxwell.

Fara tagada si fara teama de-a gresi putem spune ca, in cea mai mare parte a sa, civilizatia actuala nu este altceva decat o transpunere in realitate a sistemului abstract de ecuatii cu derivate partiale (de ordinul intai) al lui Maxwell.

**Probleme fundamentale in teoria
Ecuatiilor differentiale ordinare.**

- 1) Formularea problemei Cauchy.
- 2) Solutie a unei asemenea probleme.
- 3) Tipuri de solutii.
- 4) Existenta unei solutii.
- 5) Unicitatea unei solutii.
- 6) Existenta unei solutii globale.
- 7) Dependenta solutiei de datele initiale si parametri.
- 8) Ecuatii liniare.
- 9) Ecuatii liniare cu coeficienti constanti.
- 10) Aplicatii.

Bibliografie

- 1) Banța V., Ecuatii cu derivate partiale, Editura Univ. Bucuresti, 2009.
- 2) Barbu V., Ecuatii differentiale, Editura Junimea, 1986
- 3) Halanay A., Ecuatii differentiale, EDP, 1972
- 4) Mirica St., Ecuatii differentiale si cu derivate partiale, Ed. Univ. Bucuresti, 1999
- 5) Philippov A. Recueil de problèmes d'équations différentielles, Ed. Mir, 1976.
- 6) Stewart, I., Numerele naturii, Editura Humanitas, 1999.