Seminarul nr. 4

Ecuatii diferentiale

Tematica seminarului.
1) Existenta solutiilor.
2) Unicitatea solutiilor.
3) *Existenta si unicitatea solutiilor.*
2) Evaluarea unui interval de definitie.
3) Aproximatii succesive.

A) Se considera ecuatia diferentiala de tip Riccati:

$$\frac{dx}{dt} = ax^2 + bt^\alpha, \ a, b, \alpha \in \mathbb{R}, \ a \neq 0, \ b \neq 0.$$

Matematicianul francez J. Liouville a demonstrat ca *ecuatia diferentiala (1) este integrabila prin cuadraturi daca si numai daca* $\alpha = -2$ sau $\alpha = \frac{4k}{1-2k}$, pentru un anumit $k \in \mathbb{Z}$. In particular ecuatia

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + t^2$$

nu este integrabila prin cuadraturi.

Acest rezultat a schimbat punctul de vedere al matematicienilor: in loc sa caute metode de integrare pentru diferitele cazuri de ecuatii diferentiale particulare atentia merita sa fie acordata dezvoltarii unei teorii generale care sa stabileasca acele conditii care sa asigure existenta solutiilor, unicitatea lor si dependenta lor continua de datele problemei, parametri etc. Primele rezultate generale au fost obtinute de catre A.L.Cauchy.

B) Fie D functia lui Dirichlet data prin:

$$D(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t \in \mathbb{Q} \\ 0 & , \quad t \notin \mathbb{Q} \end{cases} .$$

Atunci ecuatia diferentiala

$$\frac{dx}{dt} = D(t)(1 + x^2)$$

nu are solutie clasica.

C) Problema Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} & = & D(t)x \\ x(0) & = & x_0 \end{cases}$$

are solutie daca si numai daca $x_0 = 0$.

Exemple precum cele de mai sus au impus evidentierea acelor conditii care sa asigure existenta unei solutii a problemei Cauchy.

Formularea problemei Cauchy.

Fie D o multime deschisa si nevida din $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$ si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Daca $(t_0, x_0) \in D$ o functie $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ este solutie a problemei Cauchy:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{dx}{dt} & = & f(t,x) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array} \right. \tag{4.1}$$

(notata, mai pe scurt, (f, t_0, x_0)) daca si numai daca:

i) $G_\varphi = \{(t, \varphi(t)); t \in I\} \subseteq D$,

ii) φ derivabila pe I si

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \varphi'(t) & = & f(t, \varphi(t)),\ \forall t \in I, \\ \varphi(t_0) & = & x_0. \end{array} \right.$$

Se arata usor ca $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ este solutie a problemei Cauchy (4.1) daca si numai daca:

i) $G_\varphi \subset D$;

ii) φ este continua si

$$\varphi(x) = x_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s)) ds,\ \forall t \in I.$$

Sa retinem ca cerintele in formularea a doua sunt mai putin restrictive decat cele din prima formulare.

Primul rezultat important si, totodata, *simplu de formulat,* dar nu si usor de demonstrat, privind existenta unei solutii a problemei Cauchy a fost obtinut de catre Peano.

Teorema lui Peano.

Fie D o multime deschisa si nevida din $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$ si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua, $(t_0, x_0) \in D$. Atunci exista I_0 vecinatate a lui t_0 si $\varphi : I_0 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ solutie a problemei Cauchy (f, t_0, x_0).

■

O alegere posibila pentru I_0 se face astfel:

i) Se aleg α, $r > 0$ asa incat

$$K_{t_0,x_0,\alpha,r} = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B(x_0, r)} \subset D.$$

Observatie. Nu are importanta ce norma $\|\cdot\|$ se utilizeaza pe $\mathbb{R}^n$.

Notam

$$M = \max_{(t,x) \in K_{t_0,x_0,\alpha,r}} \|f(t,x)\|.$$

Daca

$$a := \min\{\alpha, r/M\}$$

se poate lua $I_0 = [t_0 - a, t_0 + a]$.

Pentru a vedea lucrurile mai clar vom considera urmatorul:

Exemplu.

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{dx}{dt} & = & t-x^2 \\ x(0) & = & 0 \end{array}\right. .$$

Asadar $f(t,x) = t - x^2$, $D = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $t_0 = 0$, $x_0 = 0$. Alegem, deocamdata arbitrar, $\alpha > 0$ si $r > 0$. Cum este natural, drept norma pe $\mathbb{R}$ alegem modulul obisnuit $|\cdot|$. Sa determinam

$$M = \max_{|t|\le\alpha, |x|\le r} \left|t - x^2\right| = \alpha + r^2.$$

Functia $(0,+\infty) \ni r \longrightarrow \frac{r}{\alpha+r^2} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\frac{2r\sqrt{\alpha}}{\alpha+r^2} \le \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$ are maximul atins pentru $r = \sqrt{\alpha}$. Rezulta

$$a = \min\{\alpha, \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\}.$$

Se verifica usor ca $\max\limits_{\alpha>0}[\min\{\alpha, \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\}] = 2^{-2/3}$. Se obtine $I_0 = [-2^{-2/3}, +2^{-2/3}]$.

Observatie. Daca f nu este continua este posibil ca problema Cauchy sa nu aiba solutie.

D) *Unicitatea solutiilor.* Fie $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ data prin:

$$f(t,x) = 2\,|x|^{1/2},\ (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}.$$

Este evident ca f este continua, dar problema Cauchy:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{dx}{dt} & = & 2\,|x|^{1/2} \\ x(0) & = & x_0 \end{array}\right.$$

are solutie unica $\Longleftrightarrow x_0 \ne 0$. Sa retinem ca $f_{|\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\setminus\{\mathbf{0}\})}$ este de clasa $\mathcal{C}^\infty$. Prin urmare pentru $x_0 \ne 0$ avem proprietatea de unicitate locala (si deci si globala) a solutiilor.

In cazul $x_0 = 0$ o solutie globala este $\varphi_0 \equiv 0$. Alte solutii sunt:

$$\varphi_\alpha(t) = \left\{\begin{array}{lcl} 0 & , & t \le \alpha, \\ (t-\alpha))^2 & , & t > \alpha \end{array}\right. ,$$

pentru $\alpha \ge 0$. Mai exista si alte solutii !

E) *Existenta si unicitatea solutiilor.*

Un rezultat important si simplu de enuntat, totodata, este dat de:

Teorema Cauchy-Lipschitz.

Fie D o multime deschisa si nevida din $R_t \times R_x^n$ si $f : D \longrightarrow R^n$ continua in ansamblul variabilelor si local lipschitziana in raport cu al doilea argument. Atunci oricare ar fi $(t_0,x_0) \in D$ exista $I_0 \in V(t_0)$ si exista si este unic $\varphi : I_0 \longrightarrow R^n$ solutie pentru problema Cauchy (f,t_0,x_0).

Observatie.

O solutie aproximativa se poate gasi cu metoda aproximatiilor aproximative:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \varphi_0(t) & = & x_0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_m(t) & = & x_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,\varphi_{m-1}(s))ds,\ t \in [t_0-a, t_0+a] \end{array}\right. ,$$

unde $a > 0$ este ales la fel ca in teorema lui Peano, iar $m \geq 1$.

Remarca.

Fie $a \neq 0$ si $f_a(t,x) = x^{1/3} + a$, $f_a : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Evident ca f_a este continua, dar nu este si local lipschitziana in raport cu al doilea argument. Dar (f, t_0, x_0) are solutie unica oricare ar fi $a \neq 0$. Afirmatia nu mai este adevarata si pentru $a = 0$.

Pentru comoditatea cititorului reamintim urmatoarea:

Definitie.

Fie $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Se spune ca f **este local-lipschitziana** in $(t_0, x_0) \in D$ daca si numai daca exista o vecinatate D_0 a lui (t_0, x_0) si $L > 0$ astfel incat:

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L \|x - y\|, \ \forall (t,x), \ (t,y) \in D_0 \cap D.$$

Cea mai utilizabila forma pentru aceasta proprietate este urmatoarea:

Fie $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ deschisa si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua. Atunci f este local lipschitziana in al doilea argument $\Longleftrightarrow \forall\ K$ compact $\subset D$ exista o constanta $L = L_K > 0$ astfel incat:

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L \|x - y\|, \ \forall (t,x), \ (t,y) \in K.$$

Remarca.

i) In cazul D deschisa se poate alege D_0 astfel incat $D_0 \subseteq D$.

ii) Pentru a se verifica ipotezele teoremei anterioare este suficient sa alegem D multime deschisa in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua in ansamblul variabilelor si de clasa $\mathcal{C}^1$ in raport cu al doilea argument.

Teme pentru acasa.

4.1) Fie $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ data prin:

$$f(t,x) := \begin{cases} 0 & , \quad (t,x) = (0,0), \\ \frac{4t^3 x}{t^4 + x^2} & , \quad (t,x) \neq (0,0) \end{cases}.$$

Probati ca:

α) f este continua (pe intreg $\mathbf{R}^2$).

β) f are proprietatea de existenta globala.

γ) f nu este local lipschitziana in raport cu al doilea argument.

δ) Pentru orice constanta $C \in \mathbf{R}$ functia:

$$\varphi_C(t) = C^2 - \sqrt{t^4 + C^4}, \ t \in \mathbf{R}$$

este solutie maximala a ecuatiei diferentiale definite de f :

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x).$$

ε) f nu are proprietatea de unicitate a solutiilor.

ζ) f nu este aplicatie local lipschitziana, in al doilea argument, in $(0,0)$.

4.2) Fie $f : I \times \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ continua in raport cu ansamblul variabilelor si global lipschitziana in raport cu al II-lea argument. Atunci f are proprietatea de existenta si unicitate globala (E.U.G.). De fapt f are proprietatea de crestere afina (C.A.).

4.3) Se considera sistemul:

$$\begin{cases} x_1' & = & (x_2)^2 \\ x_2' & = & -2(x_1)^3 x_2 \end{cases}.$$

α) Daca $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : I \longrightarrow \mathbf{R}^2$ este o solutie a sistemului de mai sus atunci exista o constanta $C > 0$ astfel incat:

$$[\varphi_1(t)]^4 + [\varphi_2(t)]^2 = C,\ \forall t \in I.$$

β) Pentru orice solutie $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : I \longrightarrow \mathbf{R}^2$ a sistemului exista un compact $K \subset \mathbf{R}^2$ astfel incat $\varphi(t) \in K$, $\forall t \in I$.

γ) Sistemul are proprietatea de existenta si unicitate globala.

4.4) Fie $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ deschisa si $A : D \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{R}^k, \mathbf{R}^n)$ continua in ansamblul variabilelor si local lipschitziana in raport cu al doilea argument care defineste sistemul:

$$\frac{dx}{dt} = A(t,x)\lambda,\ (t,x) \in D,\ \lambda \in \mathbf{R}^k.$$

Pentru $(t_0, x_0) \in D$, $\lambda \in \mathbf{R}^k$ notam cu $\varphi(\cdot; t_0, x_0, \lambda) : I(t_0, x_0, \lambda) \longrightarrow \mathbf{R}^n$ solutia maximala a problemei Cauchy (f_λ, t_0, x_0), unde $f_\lambda(t,x) = A(t,x)\lambda$, $(t,x) \in D$.

Atunci exista $r > 0$ astfel incat $[-1, +1] \subset I(t_0, x_0, \lambda)$, $\forall\, |\lambda| < r$.

4.5) Fie $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $f(t,x) = -x^3$, $(t,x) \in \mathbf{R}^2$. Aratati ca solutiile maximale prin $(t_0, x_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$ sunt globale la dreapta, dar nu sunt globale la stanga. Intervalul de definitie al solutiei maximale $\varphi(\cdot, t_0, x_0)$ este de forma $(t_0 - r, +\infty)$, cu $r = \frac{1}{2x_0^2} > 0$.

4.6) Fie $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ data prin:

$$f(t,x) = \sqrt[5]{\frac{x^4+1}{t^6+1}}, (t,x) \in \mathbf{R}^2.$$

Aratati ca:

α) Problema Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} & = & f(t,x) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{cases}$$

are solutie maximala unica $\varphi(\cdot, t_0, x_0) : I(t_0, x_0) \longrightarrow \mathbf{R}$.

β) Determinati doua functii continue a, $b : \mathbf{R} \longrightarrow [0, \infty)$ astfel incat:

$$|f(t,x)| \le a(t)\,|x| + b(t),\ \forall t \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathbf{R}.$$

Deduceti ca $I(t_0, x_0) = \mathbf{R}$.

γ) Demonstrati ca exista si sunt finite $\lim\limits_{t \to -\infty} \varphi(t, t_0, x_0)$ si $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t, t_0, x_0)$.

4.7) Fie $\varphi(\cdot) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o solutie a ecuatiei:

$$2xx'' = 1 + (x')^2. \tag{*}$$

Aratati ca:
α) $\varphi(t) \neq 0$, $\varphi''(t) \neq 0$, $\forall t \in I$.
β) $\exists\ \varphi'''(\cdot)$ si $\varphi(\cdot)$ este solutie a ecuatiei

$$x''' = 0. \tag{**}$$

γ) Reciproca afirmatiei de la β) nu este adevarata.
δ) Sa se determine toate solutiile maximale ale ecuatiei $(**)$.
ε) Sa se determine toate solutiile maximale ale ecuatiei $(*)$.
ζ) Sa se scrie sistemul canonic asociat ecuatiei $(*)$ si sa se enunte teorema de echivalenta pentru acest caz particular.
η) Sistemul canonic asociat admite proprietatea de existenta si unicitate globala.
θ) Campul vectorial care defineste sitemul canonic nu verifica ipotezele teoremei privind existenta globala.

4.8) Fie $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ campul vectorial dat prin:

$$f(t,x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0,\ t \in \mathbf{R} \\ 0 & , \quad x = 0,\ t \in \mathbf{R} \end{cases}$$

care defineste ecuatia

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x).$$

Sa se demonstreze urmatoarele afirmatii:
α) Ecuatia admite existenta globala a solutiilor.
β) Ecuatia admite existenta si unicitatea locala pe multimea $D_0 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$.
γ) Daca $\varphi : I \subseteq \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ este o solutie atunci

$$|\varphi(t)| \leq |\varphi(t_0)|\, e^{|t-t_0|},\ \forall\ t, t_0 \in I.$$

δ) Functia $\varphi \equiv 0$ este unica solutie globala a problemei Cauchy $(f, t_0, 0),\ t_0 \in \mathbf{R}$.
ε) Functia f nu este local lipschitziana in al doilea argument.

4.9) Fie $a \in \mathbf{R}$ si $f_a : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ campul vectorial dat prin:

$$f_a(t,x) = x^{1/3} + a,\ (t,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}.$$

Demonstrati ca:
α) Daca $a \neq 0$ problema Cauchy (f_a, t_0, x_0) are solutie locala unica.
β) f_a are crestere afina.
γ) Unde sunt definite solutiile maximale ale problemei Cauchy (f_a, t_0, x_0) ?
δ) In cazul $a = 0$ proprietatea de unicitate se pierde. De ce ?