Sisteme de ecuaţii diferenţiale

Curs Nr. 6

Definiţie : Se dă o funcţie vectorială $f = (f_1 ... f_n) : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n,\ f(t,x) = (f_1(t,x), ..., f_n(t,x)),\ x \in \mathbb{R}^n,\ x = (x_1, ..., x_n)$. Se cere determinarea unei funcţii $\phi = (\phi_1, ..., \phi_n) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ astfel încât $\Gamma_\phi = (t, \phi_1(t), ..., \phi_n(t) | t \in I \subset D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ şi să verifice ecuaţiile următoare:

$$\phi_j^{'}(t) = f_j(t, \phi_1(t), ..., \phi_n(t)),\ \forall t \in I,\ \forall j = \overline{1,n} \tag{1}$$

Relaţiile (1) reprezintă sistemul de ecuaţii diferenţiale:

$$x' = f(t,x) \tag{2}$$

sau

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} f_1(t,x) \\ \vdots \\ f_n(t,x) \end{pmatrix} \tag{3}$$

Notaţii :

- normă în $\mathbb{R}^n$

  $|x| = \sum_{i=1}^n |x_i| = \|x\|_1$

  sau $|x| = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|x\|_2$

  sau $|x| = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i| = \|x\|_\infty$

- $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$

- $\int f(t)\ \mathrm{d}t = \int \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \begin{pmatrix} \int f_1(t)\ \mathrm{d}t \\ \vdots \\ \int f_n(t)\ \mathrm{d}t \end{pmatrix}$

- $\left(f^{(k)}\right)_{k\geq 0}$
  $f^{(k)} = \left(f_1^{(k)} ... f_n^{(k)}\right)$
  $f^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} f; f = (f_1, ..., f_n)$
  $\Rightarrow f_j^{(k)} \to f_j,\ j = \overline{1,n}$

- $\left(f^{(k)}\right)_{k\geq 0}$ şir Cauchy $\Leftrightarrow \left(f_j^{(k)}\right)_{k\geq 0}$ şir Cauchy $\forall j = \overline{1,n}$.

Exemplu de sistem de ecuaţii diferenţiale

(se asociază un sistem de ecuaţii diferenţiale unei ecuaţii diferenţiale de ordin n)

Fie $F(t, x, x^{(1)}, ..., x^{(n)}) = 0$ o presupusă cvasiliniară, cu x scalar şi $x^{(n)} = g(t, x^{(1)}, ..., x^{(n-1)})$.

Se notează:

$$\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = x' \\ \dots \\ y_n = x^{(n-1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1' = x^{(1)} = y_2 \\ y_2' = x^{(2)} = y_3 \\ \dots \\ x_n' = x^{(n)} = g(t, y_1, ..., y_n) \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}' = \right.$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_n \\ g(t, y_1, ..., y_n) \end{pmatrix}}_{f(t,y)=\begin{pmatrix} f_1(t,y) \\ \dots \\ f_n(t,y) \end{pmatrix}}, \text{ unde } \begin{cases} f_1(t,y) = y_2 \\ f_2(t,y) = y_3 \\ \vdots \\ f_{n-1}(t,y) = y_n \\ f_n(t,y) = g(t,y) \end{cases}$$

Fie un sistem de ecuaţii diferenţiale în forma (2) sau (3). Spunem că am definit o problemă Cauchy dacă se cere determinarea soluţiei pentru:

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{4}$$

unde $(t_0, x_0) \in D \subset \mathbb{R}^{n+1},\ x_0 = (x_{01}, ..., x_{0n})$

Teorema de existeţă şi unicitate

(extensie a teoremei Cauchy-Picard pentru sisteme de ecuaţii diferenţiale)

Fie $f = (f_1, ..., f_n) : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ continuă (a se înţelege că fiecare omponentă $f_1, ..., f_n$ este continuă pe D. Fie $(t_0, x_0) \in D$ astfel încât $\exists a, b > 0$, cu proprietatea că $D_1 = [t_0 - a, t_0 + a] \times x \in \mathbb{R}^n |\, |x - x_0| \leq b \subset D,\ x_0 = (x_{01}, ..., x_{0n})$.

Considerăm îndeplinite proprietăţiile:

- Există şi sunt continue $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,n}}}$ pe D.
- $M = \sup_{(t,x)\in D_1} |f(t,x)|$
- $\alpha = \min\left\{a, \dfrac{a}{M}\right\}$

În aceste condiţii $\exists!\phi : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to \{x \in \mathbb{R}^n | |x - x_0| < b\}$ care verifică problema (4), adică $\phi = (\phi_1, ..., \phi_n)$.

$$\begin{pmatrix} \phi_1'(t) \\ \vdots \\ \phi_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, \phi_1(t), ..., \phi_n(t)) \\ \vdots \\ f_n(t, \phi_1(t), ..., \phi_n(t)) \end{pmatrix}, \ \phi_j(t_0) = x_{0j}, \ j = \overline{1, n}$$

Teorema asupra existenţei soluţiei maximale

În condiţiile teoremei Cauchy-Picard, dacă $D = I \times \mathbb{R}^n$ şi dacă $\exists a, b > 0$ astfel încât $|f(t, x)| \leq a|x| + b \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ (adică f are creştere liniară), atunci $\exists! \ \phi : I \to \mathbb{R}^n$ soluţie a problemei (4).

Sisteme liniare de ecuaţii diferenţiale

Se consideră:

$$f_j(t, x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}(t)x_i + b_j(t), \ \forall j = \overline{1, n} \tag{5}$$

Sistemul de ecuaţii diferenţiale se scrie sub forma:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + ... + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + ... + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\ \vdots \\ x_1' = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + ... + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{cases} \tag{6}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}' = \left(\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} (t) \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \tag{7}$$

(7) se poate scrie matriceal :

$$x' = A(t)x + b(t), \tag{8}$$

unde $A \in L(I, M_n(\mathbb{R}))$ (mulţimea aplicaţiilor liniare de la I la $M_n((R))$)

Notaţii pentru matrice:

$A \in M_n(\mathbb{R})$

$A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$

norma lui A : $|A| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$

sau $|A| = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \|A\|_\infty$ (norma infinită a lui A)

sau $|A| = \max_{j=\overline{1,n}} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \|A\|_1$

sau $|A| = \sqrt{\sum_{i,j=\overline{1,n}} |a_{ij}|^2} = \|A\|_F$ (Frobenius)

Proprietăţi pentru normă:

$$\forall\ A, B \in M_n(\mathbb{R}), c \text{ constantă} \begin{cases} |A+B| \le |A| + |B| \\ |c \cdot A| = |c| \cdot |A| \\ |AB| \le |A| \cdot |B| \end{cases}$$

$\forall\ A \in M_n(\mathbb{R}),\ \forall x \in \mathbb{R}^n\ |Ax| \le |A| \cdot |x|$

Teoremă 1: Un sistem liniar în care $a_{ij} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt continue pentru orice $i, j = \overline{1,n}$ şi $b_j : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, unde I este un interval compact din $\mathbb{R}$, admite soluţie maximală unică.

Demonstraţie: Sunt îndeplinite condiţiile teoremei Cauchy-Picard şi în plus $D = I \times \mathbb{R}^n$.

Arătăm că f are creştere liniară:

$$\begin{cases} |f(t,x)| = |A(t,x) + b(t)| \le |A(t)x| + |b(t)| \le |A(t)||x| + |b(t)| \\ A(t) = (a_{ij}(t) \text{ continue pe } I \Rightarrow a_1 = \max_{t\in I} |A(t)|,\ a_1 \ge 0 \\ b(t) = (b_j(t))_{j=\overline{1,n}} \text{ continue pe } I \Rightarrow \exists b_1 \ge 0,\ b_1 = \max_{t\in I} |b(t)| \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow |f(t,x)| \le a_1|x| + b_1 \Rightarrow$ f are creştere liniară $\Rightarrow$ existenţa şi unicitatea soluţiei maximale.$\blacksquare$

Considerăm sisteme omogene:

$$x' = A(t) \cdot x \tag{8'}$$

Teoremă 2: Spaţiul soluţiilor ecuaţiilor (8) este spaţiul vectorial de dimensiune n.

Demonstraţie: Fie ϕ_1, ϕ_2 soluţii pentru (8'). Avem:

$$\left.\begin{array}{l}\phi_1'(t) = A(t)\phi_1(t) \\ \phi_2'(t) = A(t)\phi_2(t)\end{array}\right\} \Rightarrow (\phi_1(t) + \phi_2(t))' = A(t)(\phi_1(t) + \phi_2(t)) \Rightarrow$$

$\Rightarrow (\phi_1 + \phi_2)$ este soluţie pentru (8').

Fie $\alpha \in \mathbb{R}$, avem: $(\alpha\phi_1)'(t) = \alpha\phi_1'(t) = \alpha A(t)\phi_1(t) = A(t)(\alpha\phi_1(t)) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\alpha\phi_1)$ este soluţie.

Cum valorile soluţiilor sunt în $\mathbb{R}^n$, atunci dimensiunea spaţiului vectorial al soluţiilor este n.$\blacksquare$

Conform teoremei 2, rezolvarea sistemului (8') propune determinarea unei baze $\phi_1, ..., \phi_n$

$$(\phi_j = (\phi_{j1}, ..., \phi_{jn}))_{j=\overline{1,n}}$$

în spaţiul soluţiilor, bază care se va numi sistem fundamental de soluţii, iar soluţia generală va fi scrisă sub forma:

$$\phi(t) = c_1\phi_1(t) + ... + c_n\phi_n(t),\ c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$$

Construcţia unui sistem fundamental de soluţii pentru un sistem liniar omogen cu coeficienţi constanţi (8')

$x' = Ax$

$A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$

$f(t, x) = Ax$

$f(\cdot, \cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Pas 1 : Se determină valorile proprii pentru matricea A.

Se rezolvă: $det(A - \lambda I_n) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1, ..., \lambda_m$ valori proprii distincte (reale sau complexe cu multiplicităţile $k_1, ..., k_m$

$det(A - \lambda I_n) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}...(\lambda - \lambda_m)^{k_m}$

$k_1 + ... + k_m = n$

Pas 2 : Pentru fiecare valoare proprie λ_j se determină k_j soluţia care formează sistemul fundamental de soluţii.

I $\lambda_j \in \mathbb{R},\ k_j = 1$

Se determină $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ vector propriu corespunzător valorii proprii λ_j astfel încât $(A - \lambda_j I_n)u = 0$.

$\Rightarrow \phi(t) = e^{x_j t} u$ este soluţie.

II $\lambda_j \in \mathbb{C},\ \lambda_j = \alpha_j + i\beta_j,\ \beta_j \neq 0,\ k_j = 1$

$\exists \overline{\lambda_j}$ valoare proprie.

Determinăm $u \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ astfel încât $(A - \lambda_j I_n)u = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi(t) = Re(e^{\lambda_j t} u) \\ \overline{\phi}(t) = Im(e^{\lambda_j t} u) \end{cases}$$

unde $\begin{array}{l} e^{\lambda_j t} = e^{\alpha_j t}(\cos \beta_j t + i \sin \beta_j t) \\ u = u_1 + i u_2,\ \text{cu } u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n \end{array}$

III $\lambda_j \in \mathbb{R},\ k_j > 1$

Se determină $p_0, ..., p_{k_j - 1} \in \mathbb{R}^n$, nu toţi nuli, astfel încât

$$\phi(t) = e^{\lambda_j t} \left(\sum_{r=0}^{k_j - 1} p_r t^r \right) \tag{9}$$

să verifice ecuaţia $x' = Ax$, adica:

$\lambda_j e^{\lambda_j t} \left(\sum_{r=0}^{k_j-1} p_r t^r \right) + e^{\lambda_j t} \left(\sum_{r=1}^{k_j-1} p_r r t^{r-1} \right) = A \cdot e^{\lambda_j t} \left(\sum_{r=0}^{k_j-1} p_r t^r \right)$

Identificând după puterile lui t, obţinem k_j-cupluri de $p_0 ... p_{k_j - 1}$:

$$\begin{cases} \lambda_j p_0 + p_1 = A p_0 \\ r = \overline{1, k_{j-2}} \Rightarrow \lambda_j \cdot p_r + (r+1) p_{r+1} = A p_r \\ \lambda_j p_{k_j - 1} = A p_{k_j - 1} \end{cases}$$

Rezultă deci k_j soluţii de tipul (9).

IV $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j,\ k_j > 0,\ \beta_j \neq 0$

Se determină $p_0, ..., p_{k_j - 1} \in \mathbb{C}^n$ astfel încât $\phi(t) = e^{\lambda_j t} \left(\sum_{r=1}^{k_j - 1} p_r t^r \right)$ să verifice ecuaţia $x' = Ax$.

La fel ca în cazul III. Obţinem $2k_j$ soluţii astfel:

$$\begin{cases} \phi(t) = Re(\phi(t)) \\ \overline{\phi}(t) = Im(\phi(t)) \end{cases}$$

Temă: Se cere soluţia generală a sistemului $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 \\ x_2' = 4x_1 + x_2 \end{cases}$