Ecuatii diferentiale

Seminarul nr. 2

Ecuatii integrabile prin cuadraturi

Dupa cum vom vedea studiul ecuatiilor diferentiale ridica o multitudine de probleme, unele fiind dificil de surmontat. Practica a dovedit ca pentru intelegerea acestei discipline matematice este important sa avem in portofoliu un numar de tipuri de ecuatii pentru care sa putem determina "exact" solutiile, daca se poate cu ajutorul unor formule. Acestea vor servi drept *banc de proba* pentru teoria dezvoltata in cadrul disciplinei. O asemenea clasa de ecuatii o constituie **clasa ecuatiilor integrabile prin cuadraturi**. Asemenea ecuatii sunt sau direct rezolvabile sau devin asa in urma unor transformari nu prea complicate.

In continuare vom prezenta cateva clase importante de ecuatii integrabile prin cuadraturi. Cea mai simpla categorie de ecuatii integrabile prin cuadraturi este formata din:

1) *Ecuatii cu variabile separarabile.*

Fie $I \subseteq R_t$ si $J \subseteq \mathbf{R}_x$ doua intervale *proprii* ale lui $\mathbf{R}$ (ambele au masura strict pozitiva, posibil si infinita) si $a : I \longrightarrow \mathbf{R}$, $b : J \longrightarrow \mathbf{R}$ doua functii **continue**.

Cele doua functii definesc **ecuatia diferentiala cu variabile separate.**

$$\frac{dx}{dt} = a(t) \cdot b(x).$$

Cazul cel mai simplu este acela in care $b \equiv 1$ (pe $J = \mathbf{R}$). In acest caz problema se reduce la determinarea primitivelor functiei a. Acestea exista deoarece a este continua.

O solutie a acestei ecuatii este o functie derivabila $\varphi : I_1 \subseteq I \longrightarrow J$, unde I_1 este un subinterval propriu al lui I, astfel incat:

$$\varphi'(t) = a(t)b(\varphi(t)), \ \forall t \in I_1. \tag{2.0}$$

Daca $b(\varphi(t)) \neq 0$, $\forall t \in I_1$, se poate imparti cu $b(\varphi(t))$ (se separa variabilele !) si obtinem:

$$\frac{\varphi'(t)}{b(\varphi(t))} = a(t), \ \forall t \in I_1. \tag{2.1}$$

Pentru a putea aplica regula de derivare a functiilor compuse sa consideram

$$\beta : J \longrightarrow \mathbf{R}$$

o primitiva a functiei continue $1/b : J \longrightarrow \mathbf{R}$. Atunci relatia (2.1) se scrie sub forma:

$$\varphi'(t) \cdot \beta(\varphi(t)) = a(t), \ \forall t \in I_1, \tag{2.2}$$

adica:

$$(\beta \circ \varphi)'(t) = a(t),\ \forall t \in I_1. \tag{2.3}$$

Daca $A : I_1 \longrightarrow \mathbf{R}$ este o primitiva a lui a (functie continua !) conform unui rezultat clasic de analiza trebuie sa existe o *constanta* $C \in \mathbf{R}$ astfel incat:

$$\beta(\varphi(t)) = A(t) + C,\ \forall t \in I_1. \tag{2.4}$$

Intrucat $\beta'(x) = 1/b(x) \neq 0$, iar derivatele au proprietatea lui Darboux rezulta ca functia β este strict monotona si deci injectiva. Cum functia β este si continua deducem ca $\beta(J)$ va fi un interval *propriu* al axei reale pe care il vom nota cu $\widetilde{J}$. Inseamna ca functia, notata tot cu β, $\beta : J \longrightarrow \widetilde{J}$, va fi bijectiva si deci si inversabila. Rezulta:

$$\varphi(t) := \beta^{-1}(A(t) + C),\ t \in I_1. \tag{2.5}$$

Evident ca va fi necesar ca intervalul $I_1 \subseteq I$ sa fie ales astfel incat $A(t) + C \in \widetilde{J}, \forall t \in I_1$.

Observatie.

1) Cazul cel mai simplu de ecuatie cu variabile separabile este acela in care $b \equiv 1$. Aceasta varianta se reduce la problema determinarii primitivelor unei functii continue.

2) Conditia $b(\varphi(t)) \neq 0$, $\forall t \in I_1$ se verifica automat daca:

$$b(x) \neq 0, \forall x \in J. \tag{2.6}$$

3) Pentru a preciza constanta C din (2.5), in ipoteza ca se verifica (2.6), va fi suficient sa alegem $t_0 \in I$ si $x_0 \in J$, iar ecuatiei (2.0) sa-i adaugam si conditia initiala:

$$x(t_0) = x_0. \tag{2.0'}$$

Rezulta $C = \beta(x_0) - A(t_0)$. Daca alegem

$$\beta(x) = \int_{x_0}^{x} 1/b(y)dy, \tag{2.7}$$

iar

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)ds \tag{2.8}$$

rezulta $C = 0$. Prin urmare

$$\varphi(t) := \beta^{-1}(A(t)),\ t \in I_1,$$

unde I_1 este cel mai mare subinterval al lui I cu proprietatile:

a) $t_0 \in I_1$,

b) $A(t) \in \widetilde{J}$, $\forall t \in I_1$.

Sa retinem ca in cazul $b(x) \neq 0, \forall x \in J$, *problema* $(2.0) + (2.0')$ *are solutie unica !*

Tema.

1) Determinati solutia problemei:

$$\begin{cases} x' &= 1 + x^2, \\ x(t_0) &= x_0. \end{cases}$$

Raspuns: $I_1 = (t_0 - arctg\ x_0 - \pi/2,\ t_0 - arctg\ x_0 + \pi/2)$, $\varphi_{t_0,\ x_0}(t) = tg(t - t_0 + arctg\ x_0)$. Sa retinem ca in acest caz $a(t) = 1$, $I = \mathbf{R}$, $b(x) = 1 + x^2$, $J = \mathbf{R}$. Cu toate acestea I_1 are doar lungimea π.

2) Aratati ca problema

$$\begin{cases} x' &= x^2, \\ x(t_0) &= x_0. \end{cases}$$

are solutie unica. Determinati explicit aceasta solutie.

Raspuns. $I_{t_0,\ x_0} = \mathbf{R}$, daca $x_0 = 0$, $(-\infty,\ t_0 + 1/x_0)$, daca $x_0 > 0$ si $(t_0 + 1/x_0, +\infty)$, daca $x_0 < 0$. Solutia este $\varphi_{t_0,\ x_0}(t) = x_0/[1 - (t - t_0)x_0]$, $t \in I_{t_0,\ x_0}$. Trasati graficul solutiei si veti intelege mai clar de ce nu totdeauna intervalul de definitie al unei solutii "maximale" este atat de mare pe cat v-ati astepta.

3) Demonstrati ca problema

$$\begin{cases} x' &= 3x^{2/3}, \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

are solutie unica numai daca $x_0 \neq 0$. In cazul $x_0 = 0$ exista o infinitate de solutii.

4) Fie $D : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ functia lui Dirichlet (cu valoarea 1 pentru argumente rationale si valoarea 0 pentru argumente irationale). Atunci problema

$$\begin{cases} x' &= D(t)x, \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

are solutie unica in cazul $x_0 = 0$ si nu are solutie daca $x_0 \neq 0$.

5) Determinatii solutiile generale ale ecuatiilor:

a) $x' - tx^2 = 2tx$;

b) $x' = \cos(x - t)$;

c) $t^2x^2x' + 1 = x$;

d) $xx' + t = 1$.

6) Demonstrati ca $\forall\ (t_0, x_0) \in \mathbf{R}\text{x}\mathbf{R}$ solutia "maximala" $\varphi_{t_0,\ x_0}$ a problemei Cauchy:

$$\begin{cases} x' &= \sqrt[3]{\frac{x^2+1}{t^4+1}}, \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

este definita pe intreaga axa reala si exista si sunt finite limitele $\lim\limits_{t \to -\infty} \varphi_{t_0,\ x_0}(t)$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi_{t_0,\ x_0}(t)$.

7) Fie $a,\, b : (0, \infty) \longrightarrow \mathbf{R}$ doua functii **continue** care definesc ecuatia afina:

$$x' = a(t)x + b(t).$$

Notam cu $\varphi_{t_0,\ x_0} : (0, \infty) \longrightarrow \mathbf{R}$ unica solutie a ecuatiei de mai sus care verifica si conditia initiala:

$$\varphi_{t_0,\ x_0}(t_0) = x_0, (t_0,\ x_0) \in (0, \infty)\mathrm{x}\mathbf{R}.$$

Aratati ca urmatoarele afirmatii sunt echivalente:
a) $\varphi_{t_0,\ x_0}(t) \in [0, 1]$, $\forall\ t \geq t_0$ si $\forall\ x_0 \in [0, 1]$;
b) $0 \leq b(t) \leq -a(t)$, $\forall t > 0$.

* * * * *

Dupa cum se vede si din unele dintre exemplele anterioare *probleme* apar in momentul in care *exista* $x_0 \in J$ astfel incat $b(x_0) = 0$. In aceasta ipoteza functia constanta

$$\varphi_{t_0,\ x_0}(t) \equiv x_0,\ t \in I$$

este o solutie, numita *solutie stationara*, a problemei Cauchy:

$$\begin{cases} x' & = & a(t)b(x), \\ x(t_0) & = & x_0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Fie $J_0 := \{x \in J \mid b(x) \neq 0\}$. Pentru a simplifica discutia vom admite ca exista o *submultime cel mult numarabila* $\{x_1,\, x_2, ...\} \subset J$ astfel incat $b(x_1) = b(x_2) = ... = 0$ si $b(x) \neq 0$, $\forall x \in J \setminus \{x_1,\, x_2, ...\}$. Rezulta ca J_0 este o reuniune cel mult numarabila de intervale *proprii,* mutual disjuncte. Daca $\varphi : I_1 \longrightarrow J_0$ este o solutie a ecuatiei (2.0), I_1 subinterval *propriu* $\subseteq I$, atunci $\varphi(I_1)$ este un interval inclus in J_0. Daca $A : I_1 \longrightarrow \mathbf{R}$ este o primitiva a lui a, iar $\beta : J_0 \longrightarrow \mathbf{R}$ este o primitiva pentru $1/b_{|J_0}$, aplicand iarasi o cunoscuta teorema de analiza, rezulta ca exista o constanta reala C astfel incat:

$$\beta(\varphi(t)) = A(t) + C,\ \forall t \in I_1.$$

Observatie. Procedura descrisa mai sus furnizeaza numai o parte dintre solutiile ecuatiei diferentiale cu variabile separabile. Alte solutii se obtin printr-o procedura de *"lipire".* Mai precis se demonstreaza *usor* urmatorul rezultat:

Propozitie. Fie $D = \overset{\circ}{D} \subseteq \mathbf{R}\mathrm{x}\mathbf{R}^n$ si $f : D \longrightarrow \mathbf{R}^n$ o functie **continua** care defineste ecuatia diferentiala:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \tag{*}$$

Daca $\varphi_1 : (a, b) \longrightarrow \mathbf{R}^n$, $\varphi_2 : (b, c) \longrightarrow \mathbf{R}^n$ sunt doua solutii ale sale care verifica:

$$\lim_{t\nearrow b}\varphi_1(t) = \lim_{t\searrow b}\varphi_2(t) = x_0,\ (b, x_0) \in D,$$

atunci aplicatia $\varphi : (a, c) \longrightarrow \mathbf{R}^n$ definita prin:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) & , \quad t \in (a, b), \\ x_0 & , \quad t = b, \\ \varphi_2(t) & , \quad t \in (b, c) \end{cases}$$

este solutie a ecuatiei $(*)$.

Tema.

1) Sa se determine solutia generala a ecuatiilor:

a) $tx' - 2x = 2t^4$;

b) $x' = \frac{x}{3t - x^2}$;

c) $tx' - 2t^2\sqrt{x} = 4x$;

d) $x' + 2xe^t - x^2 = e^{2t} + e^t$.

2) Se considera ecuatia:

$$x' + a(t)x = b(t),$$

unde $a, b : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ sunt continue, $a(t) \geq \gamma > 0$, $\forall t \in \mathbf{R}$ si $\lim\limits_{t \to \infty} b(t) = 0$. Atunci orice solutie a ecuatiei de mai sus tinde la zero cand $t \to \infty$.