CURS = **2** ORE / SĂPTĂMÂNĂ

SEMINAR = **1** ORĂ / SĂPTĂMÂNĂ

FORMA DE EXAMINARE: **examen !** (scris)

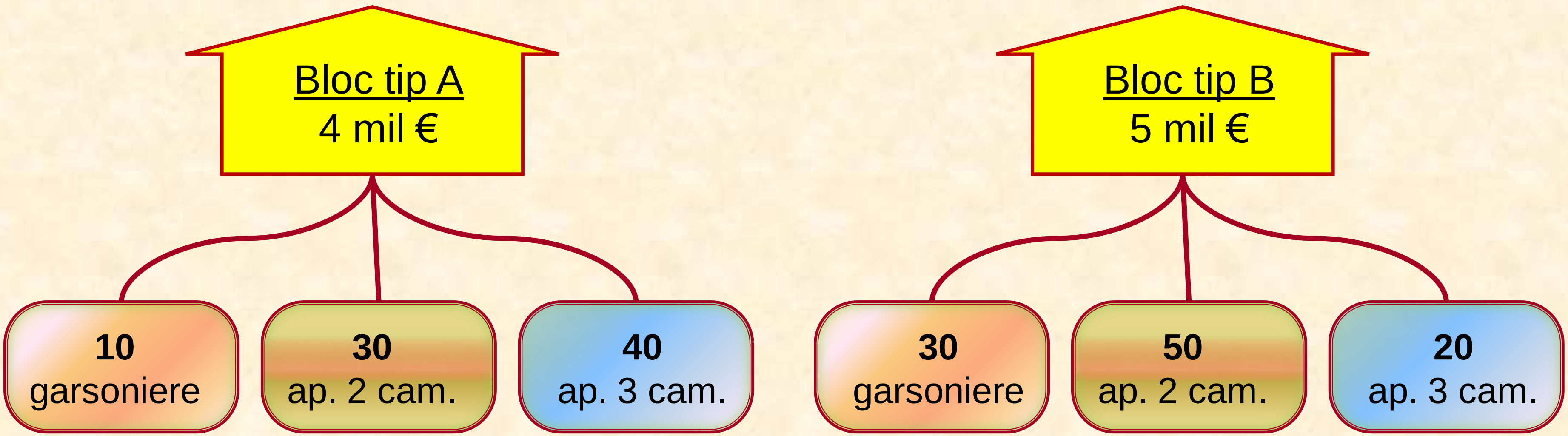
- 2 subiecte de teorie:
  - enunţuri cu demonstraţii;
  - enunţuri descriptive.
- 1 exerciţiu de seminar (cu subpuncte)

Conținutul cursului:

- Teorema fundamentală a programării liniare.
- Teoremele algoritmului simplex primal.
- Algoritmul simplex. Formule de schimbarea bazei.
- Determinarea unei baze primal admisibile. Metoda celor două faze.
- Sisteme liniare de inegalităţi. Lema Farkaş-Minkowski.
- Dualitate în programarea liniară. Teoreme de dualitate.
- Algoritmul simplex dual.
- Programare liniară în numere întregi.
- Postoptimizare.

Problema 1.

Un complex de locuinţe trebuie să cuprindă cel puţin 900 garsoniere, 2100 apartamente cu două şi 1400 apartamente cu trei camere.



Să se stabilească câte blocuri de fiecare fel trebuie construite astfel încât **cheltuielile** de construcţie să fie **minime**.

Modelul matematic

- Variabilele de decizie:
  - **x** = numărul de blocuri de tipul A
  - **y** = numărul de blocuri de tipul B

- Funcţia obiectiv: Costul = $4x + 5y$;
  trebuie minimizat !

- Restricţiile:
  - garsoniere: $10x + 30y \geq 900$;
  - ap. cu 2 camere: $30x + 50y \geq 2100$;
  - ap. cu 3 camere: $40x + 20y \geq 1400$;

- Condiţii implicite (naturale): x şi $y \geq 0$ şi în plus, numere întregi.

Problema 2.

O secţie a unei fabrici produce două tipuri de aparate.

Pentru aceasta trebuie să comande zilnic piese din care s-ar putea face, în combinaţie, cel puţin, 80 de aparate de primul tip **sau** 60 de aparate de al doilea tip.

Capacitatea de montaj este de cel mult 100 de aparate pe zi din ambele tipuri.

La vânzare sunt solicitate zilnic cel puţin 40 de aparate de primul tip şi cel puţin 20 de aparate de al doilea tip.

Pentru realizarea unui aparat de primul tip se cheltuiesc 200 €, iar pentru un aparat de al doilea tip, 400 €.

Să se stabilească planul de producţie zilnic care se realizează cu **minimum** de cheltuieli.

Modelul matematic

- Variabilele de decizie:
  - **x** = numărul de aparate de primul tip
  - **y** = numărul de aparate de al doilea tip

- Funcţia obiectiv: Costul = $200\,x + 400\,y$; să fie minim !

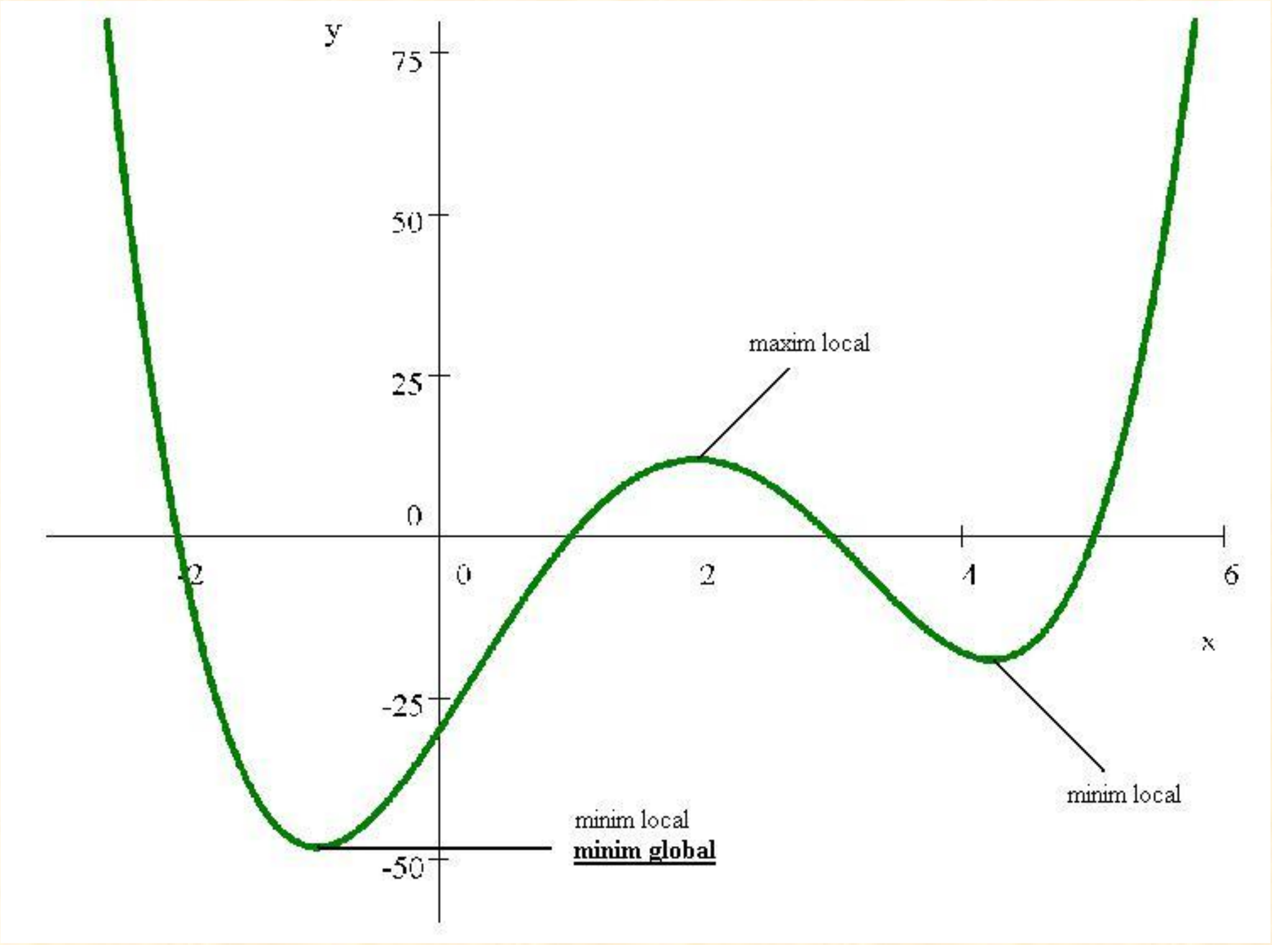
- Restricţiile:

comanda:	$x/80 + y/60 >= 1$;
capacitate:	$x + y <= 100$;
limita inferioară x:	$40 <= x$;
limita inferioară y:	$20 <= y$;

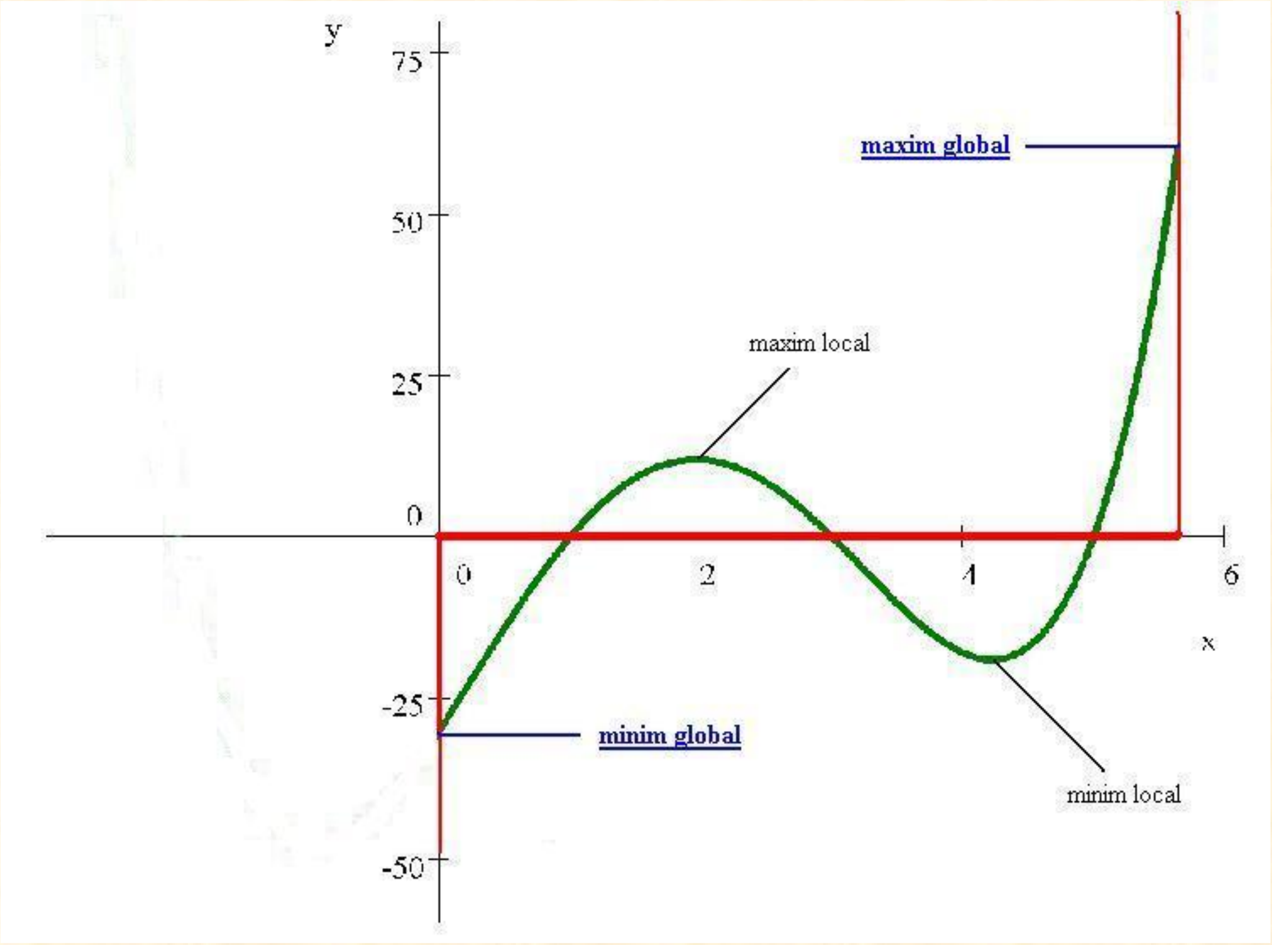
- Condiţii implicite (naturale): x şi y să fie numere întregi.

Exemplu – optimizare neliniară

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=(x+2)(x-1)(x-3)(x-5)=x^4-7x^3+5x^2+31x-30$$



$$f:[0,\ 5.6]\to\mathbb{R},\quad f(x)=x^4-7x^3+5x^2+31x-30$$



Exemplu – optimizare liniară

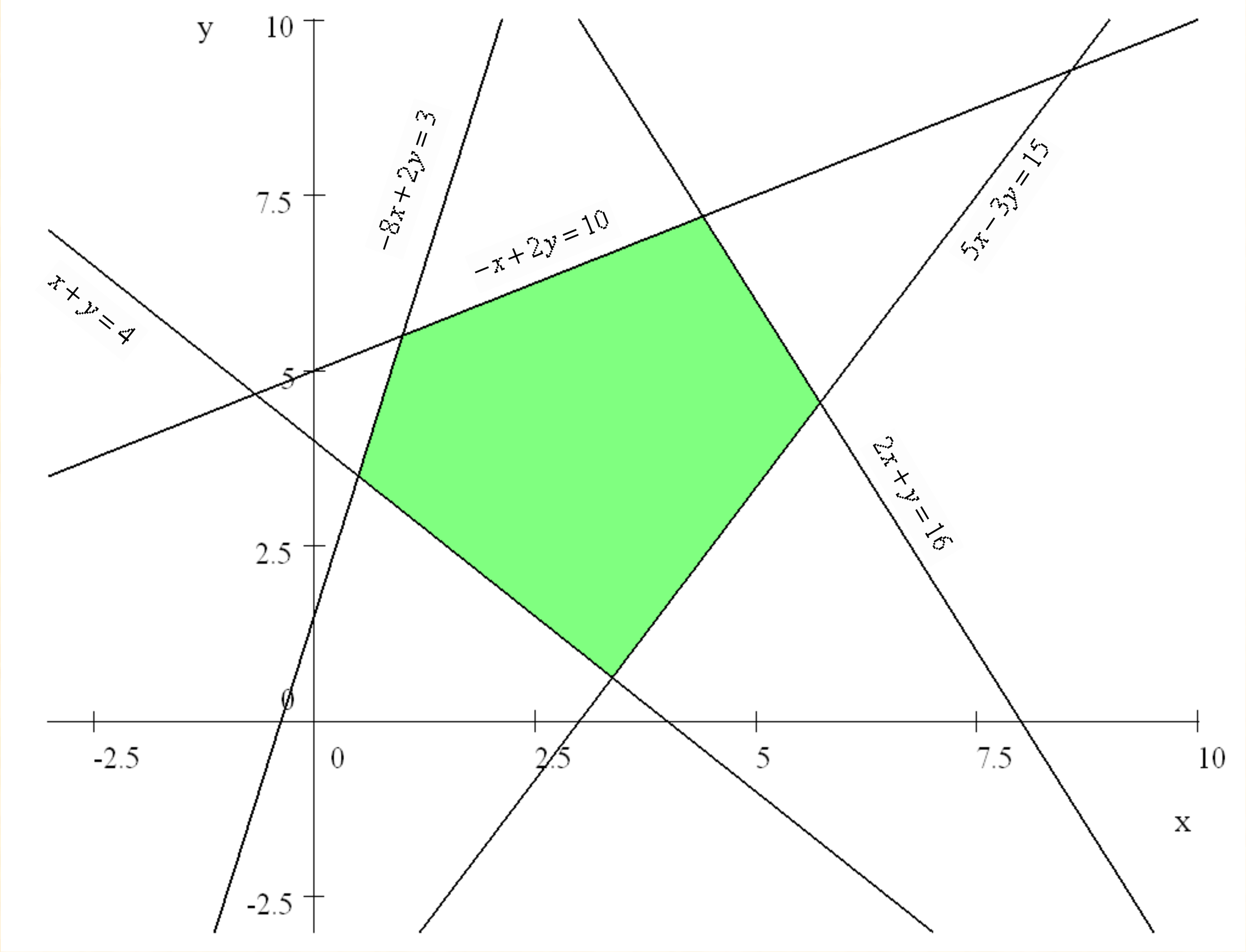
Să se determine:

$$optim\{2x+3y\}, \qquad \text{unde} \quad optim = \min \vee \max$$

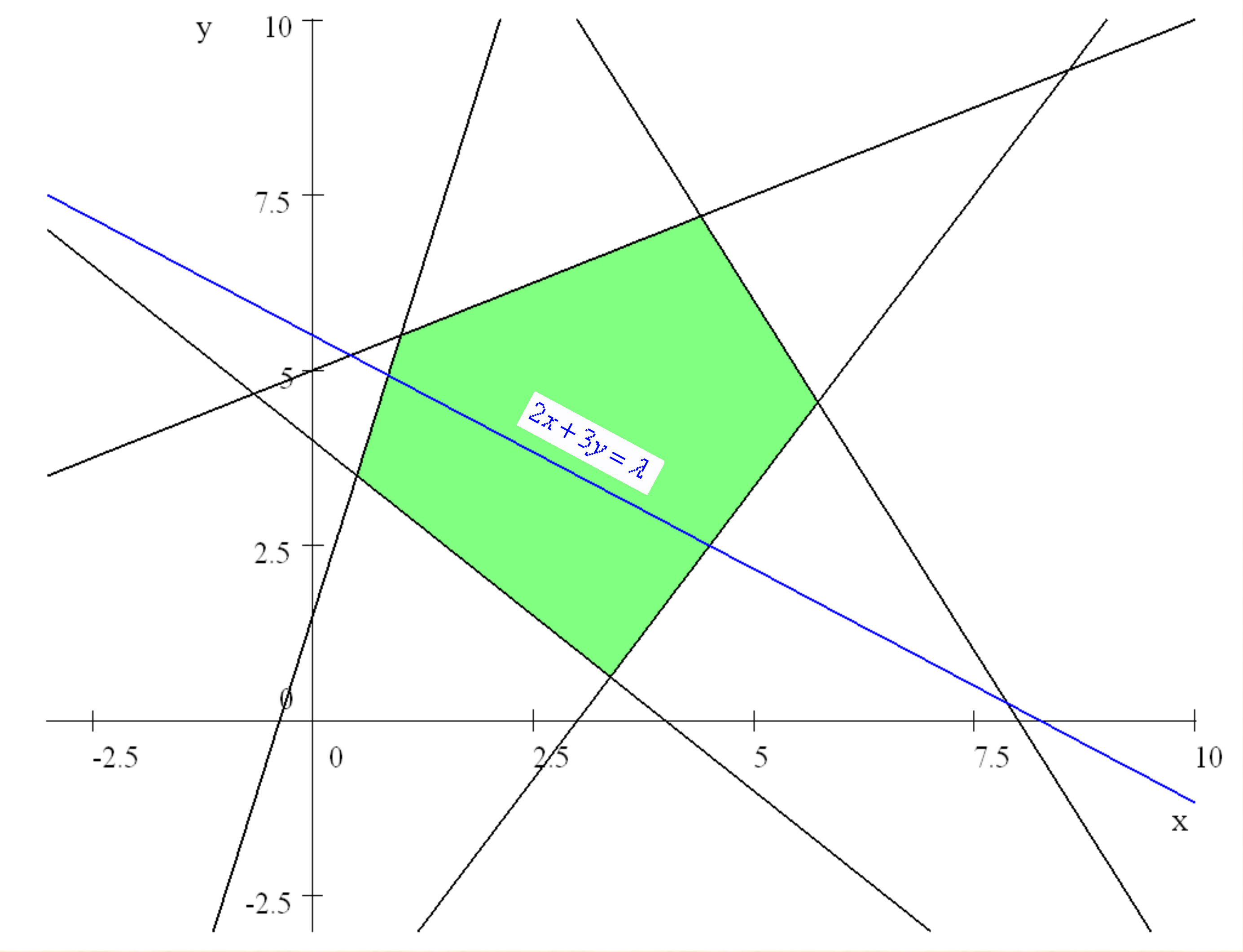
Cu îndeplinirea condiţiilor:

$$\begin{cases} x+y \geq 4 \\ -8x+2y \leq 3 \\ 5x-3y \leq 15 \\ -x+2y \leq 10 \\ 2x+y \leq 16 \end{cases}$$

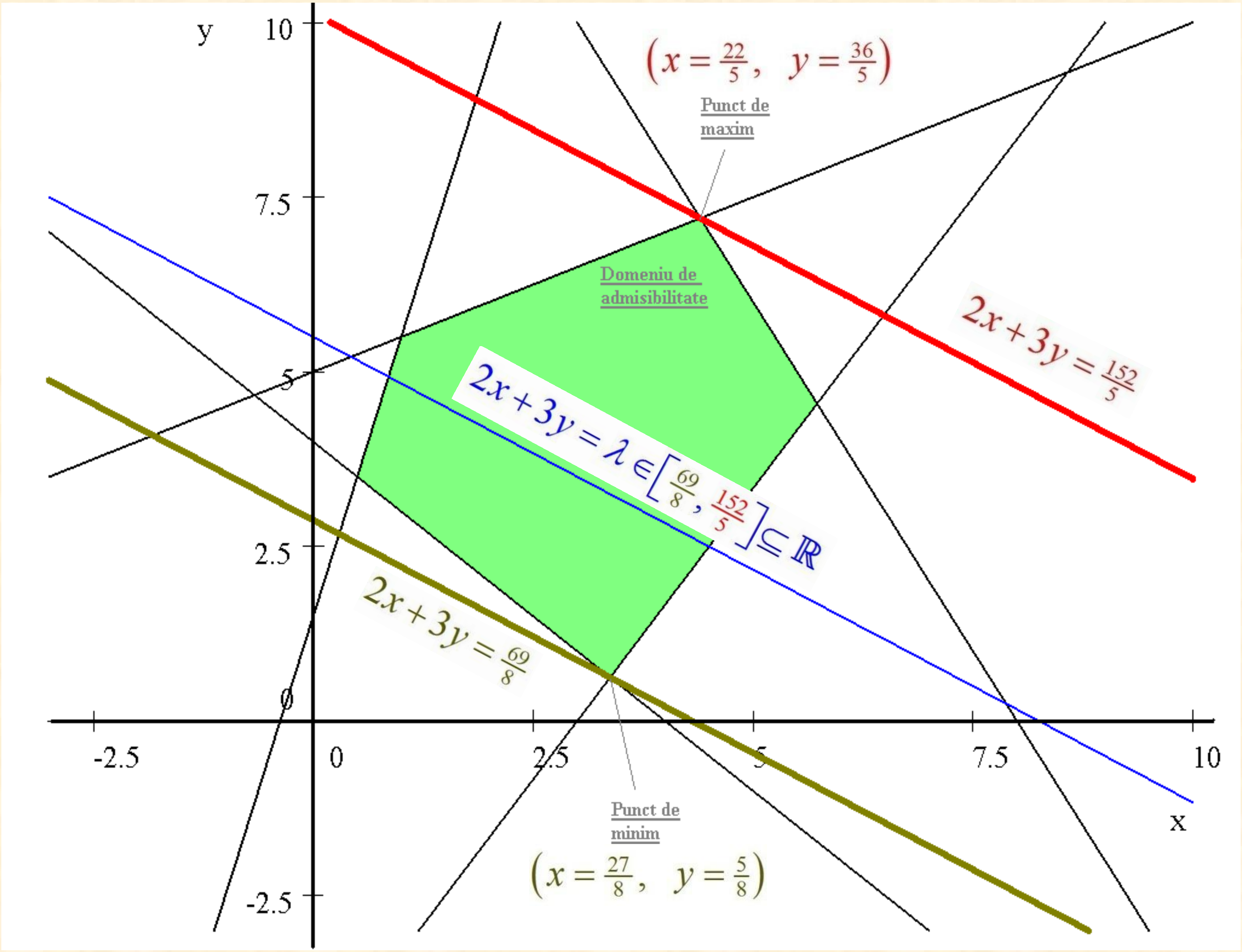
Rezolvare grafică



Rezolvare grafică



Rezolvare grafică



Notaţii şi câteva definiţii

Vom nota cu $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ o matrice cu m linii şi n coloane:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$$

unde, $a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad 1 \le i \le m, 1 \le j \le n,$

Transpusa matricei A o vom nota cu $A^{\top} \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

Mulţimea matricelor de aceeaşi dimensiune formează un spaţiu vectorial peste corpul numerelor reale.

$$A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}, \alpha \in \mathbb{R}, \quad \Rightarrow \quad A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}, \quad \alpha B = \left(\alpha b_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$$

Produsul matricelor: $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$ este matricea:

$$A \cdot B = C \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} b_{lj}\,, \; 1 \le i \le m,\; 1 \le j \le n.$$

Determinantul unei matrice pătratice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este numărul

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

Dacă $\det A \neq 0$, matricea A se numeşte nesingulară, iar în acest caz, există o unică matrice A^{-1} numită matrice inversă:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Un vector coloana $v \in \mathbb{R}^n$ este considerat ca fiind o matrice $v \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, iar transpusa acesteia este un vector linie.

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \qquad v^\top = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$$

Produsul scalar a doi vectori $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\quad x^\top \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = y^\top \cdot x.$

Definim relaţiile:

$$x = y \iff x_i = y_i \quad \text{pentru orice } i = \overline{1,n},$$

$$x \le y \iff x_i \le y_i \quad \text{pentru orice } i = \overline{1,n} \iff y - x \in \mathbb{R}^n_+$$

În particular, $\quad x \ge \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \iff x_i \ge 0, \forall i = \overline{1,n}.$

Sisteme de ecuaţii liniare

Fie: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^{m}$ şi considerăm sistemul de ecuaţii liniare:

$$A \cdot x = b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

unde $x \in \mathbb{R}^{n}$ reprezintă vectorul necunoscutelor.

Notăm: $A_i = \left(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}\right)$ linia "i" a matricei A;

$A^j = \left(a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj}\right)^{\mathsf{T}}$ coloana "j" a matricei A.

$$A \cdot x = b \quad \Leftrightarrow \quad A_i \cdot x = b_i \,, \quad i = \overline{1,m} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} A^j x_j = b.$$

- Teorema Kronecker-Capelli : $rang(A) = rang(A \vdots b) = r \le \min\{m, n\}$
- Ecuaţii principale, respectiv variabile principale.
- Ecuaţii secundare, respectiv variabile secundare.
- Prin eliminarea ecuaţiilor secundare, considerăm: $\boxed{rang(A) = m \le n.}$
- Pentru $m = n$, avem soluţia unică: $x = A^{-1} \cdot b.$
- Pentru $m < n$, avem o infinitate de soluţii.

  Există m coloane liniar independente ale matricei A, care formează

  o matrice de bază: $B = \left(A^{s_1} A^{s_2} \ldots A^{s_m}\right).$

  Restul coloanelor formează matricea $\boldsymbol{R}$.

Partiţionarea matricei: $A=\left(B \vdots R\right).$

Notăm mulţimea de indici corespunzătoare coloanelor lui B cu

$$\mathcal{B}=\left\{s_1, s_2, \ldots, s_m\right\},$$

iar mulţimea de indici corespunzătoare coloanelor lui R cu

$$\mathcal{R}=\left\{1, 2, \ldots, n\right\} \setminus \mathcal{B}.$$

Partiţionarea variabilei $x \in \mathbb{R}^n$, $\quad x=\begin{pmatrix} x_{\mathcal{B}} \\ x_{\mathcal{R}} \end{pmatrix}$, în care,

$$x_{\mathcal{B}}=\left(x_i\right)_{i\in\mathcal{B}}=\left(x_{s_1}, x_{s_2}, \ldots, x_{s_m}\right)^{\top} \in \mathbb{R}^m$$ variabile de bază (principale)

$$x_{\mathcal{R}}=\left(x_j\right)_{j\in\mathcal{R}} \in \mathbb{R}^{n-m}$$ variabile secundare

$$A \cdot x = b \quad \Leftrightarrow \quad B \cdot x_{\mathcal{B}} + R \cdot x_{\mathcal{R}} = b \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x_{\mathcal{B}} = B^{-1} \cdot b - B^{-1} \cdot R \cdot x_{\mathcal{R}}}$$

Vectorul $v \in \mathbb{R}^n$ se numeşte **soluţie** a sistemului dacă $A \cdot v = b$.

O soluţie a sistemului este numită **soluţie de bază**, dacă componentele ei diferite de zero corespund unor coloane liniar independente ale matricei A.

Pentru orice bază B, se poate obţine o soluţie de bază:

$$v = \begin{pmatrix} v_{\mathcal{B}} \\ v_{\mathcal{R}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[B^{-1} \cdot b \right]_{\mathcal{B}} \\ \mathbf{0}_{\mathcal{R}} \end{pmatrix}$$

Deoarece $rang(A) = m$, cel mult m componente ale unei soluţii de bază pot fi nenule. Dacă soluţia de bază are exact m componente nenule, ea se numeşte **nedegenerată**; în caz contrar ea se numeşte **degenerată**.