SE : ECUAȚII DIFERENȚIALE ȘI CU DERIVATE PARȚIALE NR. 2.

13.10.2009

ECUAȚII BERNOULLI

EX. 1. Să se rezolve (soluția generală)

TEMĂ b), c)

a) $x' = \dfrac{2tx - x^2}{t^2}$

b) $x' = x\, tg\, t + x^4 \cos t$, $t \in (0, \frac{\pi}{2})$

c) $x' = \dfrac{tx^2 + t^3 - t}{2t}$, $t \in (1, \infty)$

Amintim:

ec. Bernoulli

$x' = a(t)\cdot x + b(t)\cdot x^{\alpha}$, $a(\cdot), b(\cdot)$ funcții continue, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

a)

$$x' = \frac{2t}{t^2} x - \frac{1}{t^2}\cdot x^2 \qquad t \in (-\infty, 0)$$

$$a(t) = \frac{2}{t}, \quad b(t) = -\frac{1}{t^2}, \quad \alpha = 2$$

Rezolvăm ecuația liniară atașată : $\bar{x}' = \dfrac{2\bar{x}}{t}$

$$\bar{x}(t) = c\cdot e^{\int a(t)dt} \Rightarrow \bar{x}(t) = c\cdot e^{\int \frac{2}{t} dt} = c\cdot e^{2\ln|t|} = c\cdot e^{\ln|t|^2}$$

$$\Rightarrow \bar{x}(t) = c\cdot t^2$$

Aplicăm metoda variației constantelor

Determinăm $c(t)$ a.î. $x(t) = c(t)\cdot t^2$ să fie soluție a ecuației Bernoulli

$$(c(t)t^2)' = \frac{2}{t}\cdot c(t)\cdot t^2 - \frac{1}{t^2}(c(t)t^2)^2$$

$$c'(t)\cdot t^2 + \cancel{2\cdot c(t)\cdot t} = \cancel{2\cdot t\cdot c(t)} - \frac{1}{\cancel{t^2}} c^2(t) t^{\cancel{4}}$$

$$c'(t)\cancel{t^2} = -c^2(t)\cancel{t^2}$$

$c'(t) = -c^2(t)$ ecuație cu variabile separabile

Cazul $c^2(t) = 0 \Rightarrow c(t) = 0 \Rightarrow x(t) = 0 \cdot t^2 = 0$ soluție pt. ec. Bernoulli

$$\frac{dc}{dt} = -c^2 \Rightarrow \frac{dc}{c^2} = -dt \Rightarrow -\frac{dc}{c^2} = dt \Rightarrow -\int \frac{dc}{c^2} = \int dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c} = t + k \Rightarrow c = \frac{1}{t+k} \Rightarrow x(t) = \frac{t^2}{t^2 + k}, \ k \in \mathbb{R}$$

ECUAȚII RICCATI

$\boxed{EX.2}$ Se cere soluția generală a ecuațiilor

$\boxed{TEMĂ}$ (b) (c) (d)

a) $x' = -x^2 + 2tx + 5 - t^2$ știind că are soluție particulară de formă polinom: $\varphi_0(t) = mt + n, \quad m, n \in \mathbb{N}$

b) $x' = x^2 - \dfrac{x}{t} - \dfrac{4}{t^2}$

c) $x' = x^2 - \dfrac{3x}{t} + \dfrac{1}{t^2}$

$\Big\}$ sol. partic $\varphi_0(t) = \dfrac{k}{t}$

d) $x' = x^2 + x - 4 \cdot e^{2t}$, $\varphi_0(t) = k \cdot e^t$

Amintim:

ec. Riccati
$x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$, $a(\cdot), b(\cdot), c(\cdot)$ funcții continue
$\varphi_0(\cdot)$ soluție particulară

a) Facem schimbarea de variabilă $y = x - \varphi_0 \quad y(t) = x(t) - \varphi_0(t)$

$x' = -x^2 + 2tx + 5 - t^2, \quad \varphi_0(t) = mt + n, \quad m, n \in \mathbb{N}$

$a(t) = -1 \qquad b(t) = 2t \qquad c(t) = 5 - t^2$

$(mt + n)' = -(mt+n)^2 + 2t(mt+n) + 5 - t^2$

$m = -m^2t^2 - 2mnt - n^2 + 2mt^2 + 2tn + 5 - t^2$

$t^2(m^2 - 2m + 1) + t(2mn - 2n) + m + n^2 - 5 = 0$

$$\begin{cases} m^2 - 2m + 1 = 0 \Rightarrow m = 1 \\ 2mn - 2n = 0 \\ m + n^2 - 5 = 0 \quad \Rightarrow n = \pm 2 \quad \text{Alegem } n = +2 \end{cases}$$

$\varphi_0(t) = t + 2$

$x = y + \varphi_0 \iff x = y + t + 2$

$(y + t + 2)' = -(y+t+2)^2 + 2t(y+t+2) + 5 - t^2$

$y' + 1 = -y^2 - (t+2)^2 - 2y(t+2) + 2ty + 2t^2 + 4t + 5 - t^2$

$y' \cancel{+1} = -y^2 \cancel{-t^2} \cancel{-4} \cancel{-4t} - 2yt - 4y \cancel{+2ty} \cancel{+2t^2} \cancel{+4t} \cancel{+5} \cancel{-t^2}$

$y' = -y^2 - 4y$ Am obținut pt $\alpha = 2$ o ec. Bernoulli; dar cum $a(\cdot), b(\cdot)$

$\;\;\;= -(y^2 + 4y)$ sunt constante putem să o considerăm ca ec. cu variabile separabile

$\boxed{y' = \alpha(t)\cdot\beta(y)}$

$\alpha(t) = -1,\ \beta(y) = y^2 + 4y$

$\beta(y) = 0 \Rightarrow$ putem afla soluțiile staționare

$y = 0 \Rightarrow x\,dt = t + 2 = \varphi_0(t)$

sau $y = -4 \Rightarrow x' = t - 2 = \varphi_{01}(t)$

Dacă $\beta(y) \neq 0$ $\quad \dfrac{dy}{dt} = (4y + y^2) \Rightarrow \dfrac{dy}{y(y+4)} = -dt$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} = (4y+y^2) \Rightarrow \frac{dy}{y(y+4)} = -dt \\ &\int \frac{dy}{y(y+4)} = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+4}\right)dy = \frac{1}{4}\left(\ln|y| - \ln|y+4|\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\ln\frac{|y|}{|y+4|} = -t + c \Rightarrow \ln\frac{|y|}{|y+4|} = 4(-t+c) \Rightarrow \frac{|y|}{|y+4|} = e^{-4t}\cdot \underset{\substack{d>0\\ \exp}}{d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y}{y+4} = d\cdot e^{-4t},\ d \in \mathbb{R}$$

$$y = d\cdot e^{-4t} + 4\cdot d e^{-4t} \Rightarrow y = \frac{4de^{-t}}{1 - de^{-4t}} \Rightarrow x = \frac{4de^{-t}}{1 - d\cdot e^{-4t}} + t + 2$$

ECUAȚII OMOGENE

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = g\left(\frac{x}{t}\right)}$$

Se face schimbarea de variabilă $\frac{x}{t} = y$

ex: Caz special de ecuație care duce la o ecuație omogenă

$$\frac{dx}{dt} = g\left(\frac{at + bx + c}{\alpha t + \beta x + \gamma}\right) \qquad \begin{array}{l} |a| + |\alpha| > 0 \\ |b| + |\beta| > 0 \end{array}$$

a) $a\beta - b\alpha = 0 \Rightarrow$ prin schimbarea de variabilă $y = at + bx$, dacă $b \neq 0$ sau $y = \alpha t + \beta x$, dacă $\beta \neq 0$ se ajunge la o ecuație cu variabile separabile

b) $a\beta - b\alpha \neq 0 \Rightarrow$ se face schimbarea de variabile $\begin{cases} s = t - t_0 \\ x - x_0 = y \end{cases}$ unde t_0 și x_0 (t_0, x_0) sunt soluțiile sistemului $\begin{cases} at + bx + c = 0 \\ \alpha t + \beta x + \gamma = 0 \end{cases}$. Astfel se ajunge la o ec. omogenă.

Aplicație 1) $x' = \dfrac{t - x + 1}{t + x + 2}$ 2) $x' = \dfrac{2(x+2)}{t + x - 1}$ $\circledast$

a) $b \neq 0 \to y = at + bx \Rightarrow x = \dfrac{y - at}{b}$

$$\left(\frac{y - at}{b}\right)' = g\left(\frac{\cancel{at} + y - \cancel{at} + c}{\alpha t + \frac{\beta x - \beta a t}{b} + \gamma}\right)$$

$$\frac{y'}{b} - \frac{a}{b} = g\left(\frac{b(y + c)}{\beta y + \gamma}\right) \to y' = a + b g\left(\frac{b(y+c)}{\beta y + \gamma}\right)$$

deoarece $a\beta - b\alpha = 0$

ec. cu variab. separabile

b) $s = t - t_0 \Rightarrow s(t) = t - t_0 \Rightarrow s'(t) = 1$ (Nu întotdeauna va fi 1)

$y(s) : y(s(t)) = x(t) - x_0$

$$(y(s(t)) + x_0)' = g\left(\frac{a(s + \cancel{t_0}) + b(y + \cancel{x_0}) + \cancel{c}}{\alpha(s + \cancel{t_0}) + \beta(y + \cancel{x_0}) + \cancel{\gamma}}\right) \leftarrow \text{sunt ecuații din sistem}$$

$$y'(s) \cdot s'(t) = g\left(\frac{a \cdot s + by}{\alpha s + by}\right) \Rightarrow y'(s) = g\left(\frac{a + b\frac{y}{s}}{\alpha + \beta\frac{y}{s}}\right) \text{ ecuație omogenă}$$

(*) 2) $x' = \dfrac{2(x+2)}{t+x-1}$.

Aflăm t_0 şi x_0 din sistemul: $\begin{cases} 2x+4=0 \\ t+x-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=-2 \\ t_0=3 \end{cases}$

Deci efectuăm schimbarea de variabile $\begin{cases} s=t-3 \\ y=x+2 \end{cases}$

$$\begin{cases} y(s(t)) = x(t)+2 \\ s(t) = t-3 \Rightarrow s'(t)=1 \end{cases}$$

$y'(s(t))\cdot s'(t) = x'(t)$

În ecuaţie se obţine $y'(s)\cdot 1 - 0 = 2\dfrac{y-2+2}{s+3+y-2-1} \Rightarrow y'(s) = \dfrac{2y}{s+y}$ (Verificare: să nu rămână termenul liber)

$y' = \dfrac{2y}{s(1+\frac{y}{s})}$ $\boxed{\frac{y}{s}=z}$ y şi z fiind funcţii de s.

$y = s\cdot\frac{y}{z}$

$(sz)' = \dfrac{2y}{1+z}$

$s'z + sz' = \dfrac{2\cdot z}{1+z}$

$s'=1 \Rightarrow sz' = \dfrac{2z}{1+z} - z \Rightarrow sz' = \dfrac{z-z^2}{1+z}$

$z' = \dfrac{1}{s}\cdot\dfrac{z-z^2}{1+z} \Rightarrow \dfrac{dz}{ds} = \dfrac{1}{s}\cdot\dfrac{z-z^2}{1+z}$

a) $\dfrac{z-z^2}{1+z} = 0 \Rightarrow \begin{cases} z=1 \Rightarrow y(s)=s \Rightarrow x(t)=y(s(t))-2 \overset{s=t-3}{=} t-5 \\ z=0 \Rightarrow y(s)=0 \Rightarrow x(t)=-2 \end{cases}$

b) $z \notin \{0,1\}$

$\dfrac{1+z}{z-z^2}dz = \dfrac{1}{s}ds \Leftrightarrow \displaystyle\int\dfrac{1+z}{z-z^2}dz = \int\dfrac{1}{s}ds \Leftrightarrow \dfrac{1+z}{z(1-\frac{1}{z})} = \dfrac{A}{z} + \dfrac{B}{1-z}$

$A(1-z)+Bz = 1+z$
$\begin{cases} B-A=1 \Rightarrow B=2 \\ A=1 \end{cases}$

$\dfrac{1+z}{z-z^2} = \dfrac{1}{z} - \dfrac{2}{z-1} \Rightarrow \displaystyle\int\dfrac{1+z}{z-z^2}dz = \int\left(\dfrac{1}{z}-\dfrac{2}{z-1}\right)dz \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln|z| - 2\ln|z-1|$

$\ln \frac{|z|}{(z-1)^2} = \ln|s| + \ln c, c>0 \Rightarrow \frac{|z|}{|z-1|^2} = |s|\cdot c \quad, c>0$

$\frac{z}{(\cancel{z-1})^2} = c\cdot s, c\neq 0$

$\boxed{z = \frac{y}{s}} \Rightarrow \frac{\frac{y}{s}}{\left(\frac{y}{s}-1\right)^2} = s\cdot c, \ c\neq 0.$

$\boxed{y = x+2} \Rightarrow \frac{\frac{x+2}{s}}{\left(\frac{x+2}{s}-1\right)^2} = s\cdot c \quad, c\neq 0$