Proprietăţi ale sistemelor liniare omogene

Curs Nr. 7

$$\begin{aligned} x' &= A(t)x \\ A(\cdot) &: I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \end{aligned} \tag{1}$$

Teorema 1. *Dacă S este mulţimea soluţiilor sistemului ecuaţiilor (1), atunci S este spaţiu vectorial real de dimensiune n. O bază $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ în S se numeşte* <u>*sistem fundamental de soluţii*</u>*. Dacă $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \subset S$, $\phi_j = \begin{pmatrix} \phi_{1j} \\ \vdots \\ \phi_{nj} \end{pmatrix}$, atunci numim* <u>*matrice de soluţii*</u> *este matricea Φ ce are drept coloane cele n soluţii:*

$$\Phi(t) = (\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t)) = \begin{pmatrix} \phi_{11}(t) & \ldots & \phi_{1n}(t) \\ \phi_{21}(t) & \ldots & \phi_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{n1}(t) & \ldots & \phi_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

În cazul în care $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ este sistem liniar independent, atunci $\Phi(t)$ este <u>*matrice fundamentală de soluţii*</u>*.*

Observaţii:

1. Dacă $\Phi(t)$ este matrice de soluţii, atunci $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$.

   Demonstraţie: $\Phi'(t) = (\phi_1'(t), \ldots, \phi_n'(t)) = (A(t)\phi_1(t), \ldots, A(t)\phi_n(t)) = A(t)(\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t)) = A(t)\Phi(t)$ ■

2. Dacă $\Phi(t)$ este matrice fundamentală de soluţii, atunci pentru orice ϕ soluţie a ecuaţiilor omogene (1) $(\exists!)c = (c_1, \ldots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$ astfel încât $\phi(t) = \Phi(t)c$.

   Demonstraţie: Cum $\Phi(t)$ este matrice fundamentală, coloanele $\phi_1, \ldots, \phi_n$ formează sistem fundamental de soluţii, deci este sistem liniar independent şi de generatori(bază) în mulţimea soluţiilor. Rezultă că

   $\forall \phi \in S(\exists!)c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ astfel încât $\Phi(t) = c_i\phi_1(t) + \ldots + c_n\phi_n(t),\ \forall t \in I$ ■.

Teorema 2. ***(Formula Lionville)*** *Dacă $\Phi(t)$ este matrice de soluţii pentru sistemul omogen (1), atunci $\forall t, t_0 \in I$ avem:*

$$\det\Phi(t) = \det\Phi(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^{t} Tr(A(s))\,\mathrm{d}s}, \tag{2}$$

unde $Tr(A(s) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(s),\ A(s) = (a_{ij}(s))_{i,j=\overline{1,n}}$

Demonstraţie: Arătăm că $\Phi(t)$ verifică o ecuaţie liniară omogenă de tipul următor:

$$W'(t) = Tr(A(t)) \cdot W(t), \tag{3}$$

unde W este funţie scalară.

$$(\det\Phi(t))' = \left(\begin{vmatrix} \phi_{11}(t) & \ldots & \phi_{1n}(t) \\ \phi_{21}(t) & \ldots & \phi_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{n1}(t) & \ldots & \phi_{nn}(t) \end{vmatrix} \right)'$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} \phi'_{11}(t) & \ldots & \phi'_{1n}(t) \\ \phi_{21}(t) & \ldots & \phi_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{n1}(t) & \ldots & \phi_{nn}(t) \end{vmatrix}}_{d_1(t)} + \underbrace{\begin{vmatrix} \phi_{11}(t) & \ldots & \phi_{1n}(t) \\ \phi'_{21}(t) & \ldots & \phi'_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{n1}(t) & \ldots & \phi_{nn}(t) \end{vmatrix}}_{d_2(t)} + \ldots + \underbrace{\begin{vmatrix} \phi_{11}(t) & \ldots & \phi_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{n-11}(t) & \ldots & \phi_{n-1n}(t) \\ \phi'_{n1}(t) & \ldots & \phi'_{nn}(t) \end{vmatrix}}_{d_n(t)}$$

ϕ_j soluţie a sistemului omogen, deci $\phi_j'(t) = A(t) \cdot \phi_j(t), \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \phi_{1j}'(t) \\ \vdots \\ \phi_{nj}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{1j}(t) \\ \vdots \\ \phi_{nj}(t) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \phi_{ij}'(t) = a_{11}(t)\phi_{1j}(t) + a_{12}(t)\phi_{2j}(t) + \dots + a_{1n}(t)\phi_{nj}(t) = \sum_{k=1}^n a_{1k}(t)\phi_{kj}(t)$

$$d_1(t) = \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}(t)\phi_{k1}(t) & \dots & \sum_{k=1}^n a_{1k}\phi_{kn}(t) \\ \phi_{21}(t) & \dots & \phi_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{n1}(t) & \dots & \phi_{nn}(t) \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(t) \begin{vmatrix} \phi_{11}(t) & \dots & \phi_{1n}(t) \\ \phi_{21}(t) & \dots & \phi_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{n1}(t) & \dots & \phi_{nn}(t) \end{vmatrix} + \sum_{k=2}^n a_{1k}(t) \begin{vmatrix} \underbrace{\begin{matrix} \phi_{k1}(t) & \dots & \phi_{kn}(t) \\ \phi_{21}(t) & \dots & \phi_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \phi_{k1}(t) & \dots & \phi_{kn}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \phi_{n1}(t) & \dots & \phi_{nn}(t) \end{matrix}}_{0 \text{ oricare au două linii egale}} \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow d_1(t) = a_{11}(t) = \det(\Phi(t))$.

Analog, $\forall\, d_j = a_{jj}(t)\det\Phi(t), \forall\, j = \overline{2, n}$

Obţinem $\underbrace{(\det\Phi(t))' = (a_{11}(t) + \dots + a_{nn}(t))\det\Phi(t)}_{Tr(A(t))}$

$\det\Phi(t)$ verifică ecuaţia liniară (3).

Din $\det\Phi(t) = c \cdot e^{\int_{t_0}^{t} Tr(A(s))\, ds}$ şi $t = t_0 \Rightarrow \det\Phi(t) = c \cdot e^0 \Rightarrow c = \det\Phi(t)$ rezultă (2)$\blacksquare$.

Teorema 3. *Fie $\Phi(t)$ matrice de soluţii pentru sistemul (1). Are loc următoarea echivalenţă:*

$\Phi(t)$ *este matrice fundamentală de soluţii* $\Leftrightarrow \det \Phi(t) \neq 0, \ \forall\, t \in I$

Demonstraţie: $\boxed{\Rightarrow}$ $\Phi(t)$ este matrice fundamentală de soluţii $\Rightarrow$ $\forall \phi(\cdot)$ soluţie $(\exists!) c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ astfel încât $\phi(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j(t)$

$\Phi(t) = (\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t))$

Presupunem prin absurd că $\exists k_0 \in I$ astfel încât $\det \Phi(t_0) = 0$.

Considerând problema Cauchy $\begin{cases} x' = Ax \\ x(t_0) = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ problema are soluţie unică $\phi(t) = 0, \ \forall t \in I$.

Dar $(\exists!) c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ astfel încât $\phi(t) = \Phi(t) c \Rightarrow$ coloanele $\phi_1, \ldots, \phi_n$ sunt dependente $\forall t \in I \Rightarrow \det \Phi(t) = 0, \ \forall t \in I \Rightarrow \Phi(\cdot)$ nu este matrice fundamentală de soluţii.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\det \Phi(t) \neq 0 \ \forall t \in I \Rightarrow \{\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t)\}$ liniar independentă $\forall t \Rightarrow \{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \subset S$ liniar independentă. Cum $\dim S = n$ rezultă că $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ bază în $S \Rightarrow \Phi$ este matrice fundamentaă de soluţii.$_b lacksquare$

Sistemele de ecuaţii diferenţiale neomogene cu coeficienţi (a_{ij}) constanţi

$$\begin{gathered} x' = Ax + b(t) \\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ b(\cdot) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \end{gathered} \tag{4}$$

Teorema 4. *Fie ϕ_0 soluţie pentru (4) şi $\Phi(t)$ matrice fundamentală de soluţie pentru sistemul:*

$$x' = Ax. \tag{5}$$

Atunci pentru orice solutţe ϕ a lui (4) $\exists\ c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ astfel încât:

$$\phi(t) = \phi_0(t) + \underbrace{\Phi(t)c}_{\sum_{j=1}^{n} c_j\phi_j(t)} \tag{6}$$

Demonstraţie:

1. (6) verifică ecuaţiile (4).

   $\phi'(t) = \phi_0'(t) + \Phi'(t_0)c = A(\phi_0(t)) + b(t) + A\Phi(t)c =$

   $= A(\phi_0(t) + \Phi(t)c) + b(t) = A\phi(t) + b(t)$

2. Orice soluţie ϕ pentru sistemul (4) poate fi scrisă sub forma (6):

   $\left.\begin{aligned} \phi'(t) &= A\phi(t) + b(t) \\ \phi_0'(t) &= A\phi_0(t) + b(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow (\phi(t) - \phi_0(t))' = A(\phi(t) - \phi_0(t)) \Rightarrow$

   $\Rightarrow \phi - \phi_0$ este soluţie pentru sistemul omogen (5).

   Deci $(\exists!)c \in \mathbb{R}^n$ astfel încât $\phi(t) - \phi_0(t) = \Phi(t)c$ ■

Teorema 5. *Soluţia generală pentru (4) este:*

$$\phi(t) = \Phi(t)\left[c + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s\right],\ \forall t \in I, \tag{7}$$

$$\textit{unde}\begin{cases}\Phi \textit{ este matrice fundamentală pentru sistemul omogen (5)}\\ t_0 \in I \textit{ fixat}\\ c \in \mathbb{R}^n \textit{ oarecare}\end{cases}$$

Demonstraţie:

Pentru (4) considerăm sistemul omogen $\overline{x}' = A\overline{x}$ şi Φ matrice fundamentală de soluţii pentru (5). Rezultă că orice soluţie $\overline{x}(t) = \Phi(t)k,\ k \in \mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow (\Phi(t)k(t))' = A\Phi(t)k(t) + b(t) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{\Phi'(t)}_{A\Phi(t)} k(t) + \Phi(t)k'(t) = A\Phi(t)k(t) + b(t) \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{c}\Leftrightarrow \Phi(t)k'(t) = b(t)\\ \text{Cum } \Phi(t) \text{ matrice fundamentală de soluţii } \Rightarrow \det\Phi(t) \neq 0,\ \forall t \in I \Rightarrow \exists(\Phi(t))^{-1},\ \forall t \in I\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow k'(t) = (\Phi(t))^{-1}b(t)$

$k(t) = \int_{t_0}^{t}(\Phi(s))^{-1}b(s)\,\mathrm{d}s + c,\ c \in \mathbb{R}^n \Rightarrow (7)$

■

Observaţie:

Dacă ecuaţiei (4), $x' = Ax + b$, îi asociem condiţia Cauchy $x(t_0) = x_0$, atunci din(7), pentru $t = t_0$, avem $\underbrace{\phi(t_0)}_{x_0} = \Phi(t_0)c \Rightarrow c = (\Phi(t_0))^{-1}x_0$.

Deci, soluţia problemei Cauchy $\begin{cases}x' = Ax + b(t)\\ x(t_0) = x_0\end{cases}$ este:

$$\phi(t) = \Phi(t)\left[(\Phi(t_0))^{-1}x_0 + \int_{t_0}^{t}(\Phi(s))^{-1}b(s)\,\mathrm{d}s\right],\ \forall t \in I$$

Sisteme liniare omogene cu coeficienţi constanţi

$$x' = Ax,\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$\boxed{n = 1}$

$x' = Ax,\ A \in \mathbb{R} \Rightarrow$ soluţia generală $x(t) = c \cdot e^{\int A\,\mathrm{d}t} = c \cdot e^{tA} \Rightarrow$

$\Phi(t) = e^{tA}$ matrice fundamentală de soluţii.

Pentru $A \in \mathbb{R} \Rightarrow e^{tA} = \sum_{j=0}^{\infty} \dfrac{(tA)^j}{j!}$

$\boxed{n > 1}$

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Considerăm seria $\sum_{j=0}^{\infty} \dfrac{A^j}{j!}$. Avem sumele parţiale

$$\left(s_k = \sum_{j=0}^{k} \frac{A^j}{j!} \right)_{k \geq 0} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Dacă şirul sumelor parţiale $(s_k)_{k\geq 0}$ converge, vom nota:

$$e^A = \lim_{k \to \infty} s_k \Rightarrow e^A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}$$

Pentru $k, l \geq 0,\ l \neq 0$, avem:

$|s_{k+l} - s_k| = \left| \sum_{j=k+1}^{k+l} \dfrac{A^j}{j!} \right| \leq \sum_{j=k+1}^{k+l} \dfrac{|A|^j}{j!} = \sum_{j=0}^{k+l} \dfrac{|A|^j}{j!} - \sum_{j=0}^{k} \dfrac{|A|^j}{j!}$

Observăm că $\sum_{j=0}^{k+l} \dfrac{|A|^j}{j!}$ şi $\sum_{j=0}^{k} \dfrac{|A|^j}{j!}$ provin din seria $\sum_{j=0}^{\infty} \dfrac{|A|^j}{j!} = e^{|A|}$.

Deci $(s_k)_{k\geq 0}$ converge, şi notăm: $e^A = \sum_{j=0}^{\infty} \dfrac{A^j}{j!}$

Proprietăţi:

1. $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ care comută $(AB = BA)$
2. $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$

Demonstraţii:

1. $e^A \cdot e^B = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \dfrac{A^j}{j!}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} \dfrac{B^i}{i!}\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} \dfrac{A^j B^i}{i!j!}$

   $e^{A+B} = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(A+B)^k}{k!} \overset{AB=BA}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{\sum_{i=0}^{k} c_k^p A^{k-p} B^p}{k!} =$

   $= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{k} \dfrac{1}{k!}\dfrac{k!}{p!(k-p)!} A^{k-p}B^p = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{k} \dfrac{A^{k-p}B^p}{(k-p)!k!}$

   Din (2) avem $k \to \infty \Rightarrow e^A \cdot e^B = e^{A+B}$.$\blacksquare$