Exponenţiala unei matrice

Curs Nr. 8

$$\left.\begin{array}{c} x' = Ax \\ A \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow x(t) = e^{tA}c, c \in \mathbb{R}$$

$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(tA)^k}{k!}$

Pentru $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ definim $\boxed{e^A = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}}$

Propozitie 1. *Pentru exponentiala unei matrice au loc proprietatile:*

1. $e^A \cdot e^B = e^{A+B}, \ \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \ AB = BA$
2. $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

Demonstraţie:

1. $e^A \cdot e^B = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \dfrac{A^j}{j!}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} \dfrac{B^i}{i!}\right) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \dfrac{A^i B^j}{i!j!} =$
   $= \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k!} \cdot \underbrace{\displaystyle\sum_{i+j=k} \frac{k!}{i!j!} A^i B^j}_{\sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} A^i B^{k-1} \overset{AB=BA}{=} (A+B)^k} =$
   $= \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k!}(A+B)^k = e^{A+B}$
2. Verificăm că $\left(e^A\right) \cdot \left(e^{-A}\right) = \left(e^{-A}\right) \cdot \left(e^A\right) = I_n \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow e^{O_n} = e^{O_n} = I_n$ (adevărat)
   din definiţie: $e^{O_n} = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{O_n^k}{k!} = I_n + \underbrace{\dfrac{O_n}{1!} + \cdots}_{O_n} = I_n$

Teorema 1. *Fie sistemul*

$$x' = Ax,\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \tag{1}$$

Matricea $e^{tA} \overset{not}{=} \Phi(t)$ *este matrice fundamentală de soluţii pentru sistemul (1).*

Demonstraţie: Arătăm că $\Phi'(t) = A\Phi(t)$. Avem:

$$\left|\frac{\Phi(t+h)-\Phi(t)}{h} - A\Phi(t)\right| = \left|\frac{e^{t+h}A - e^{tA}}{h} - A\cdot e^{tA}\right| = \left|e^{tA}\left(\frac{e^{hA}-I_n}{h} - A\right)\right| \overset{*}{=}$$

$$= \left|e^{tA}\right| \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{k-1}A^k}{k!} - A\right| = \left|e^{tA}\right| \left|\frac{A^1}{1!} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^{k-1}A^k}{k!} - A\right| =$$

$$= \left|e^{tA}\right| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|h|^{k-1}|A|^k}{k!} =$$

$$= \left|\underbrace{e^{tA}}_{\text{mărginită}}\right| |h| \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{|h|^{k-2}|A|^k}{k!}}_{\text{exponenţială fără primii doi termeni, deci mărginită}} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

$$\left.\begin{array}{c} \text{Obţinem că } |\Phi'(t) - A\Phi(t)| \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \\ \text{Cum } \Phi(t) = e^t A \end{array}\right\} \Rightarrow \left(e^{tA}\right)' = A\cdot e^{tA} \Rightarrow$$

$\Rightarrow e^{tA}$ matrice de soluţii pentru (1).

Pentru a fi matrice fundamentală: $\det(e^{tA}) \neq 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$

Ştim că: $\Phi(t)$ matrice de soluţii $\Rightarrow$

$\det\Phi(t) = (\det\Phi(t_0))e^{t(\mathrm{Tr}A)},\ \forall t \in \mathbb{R},\ t_0 \in \mathbb{R}$ fixat

Pentru $\Phi(t) = e^{tA}$ avem $\Phi(0) = I_n \Rightarrow \det\Phi(0) = 1 \neq 0 \Rightarrow \det\Phi(t) \neq 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \Phi(t) = e^{tA}$ matrice fundamentală de soluţii.

Consecinţă a propoziţiei 1.2: $\left(e^{tA}\right)' = Ae^{tA},\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Pentru a calcula exp(A):

Determinăm matricea fundamentală de soluţii pentru sistemul $x' = Ax$.

$\Phi(t) = e^{tA},\ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow exp(A) = e^A = \Phi(1)$

Definiţie: Rezolvanta unui sistem $x' = Ax,\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$\mathcal{R}_A(t,\tau) = \Phi(t)\cdot(\Phi(\tau))^{-1}$

Observaţie: $\mathcal{R}_A(t,\tau) = e^{tA}\left(e^{\tau A}\right)^{-1} = e^{tA}\left(e^{-\tau A}\right) = e^{(t-\tau)A} = \Phi(t-\tau)$

Rezolvarea sistemelor neomogene liniare cu coeficienţi constantţi

$$x' = Ax + b(t), \tag{2}$$

unde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ b(\cdot) : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

Teorema 2. *1. Sistemul (2) are soluţia generală de forma*

$$x(t) = e^{tA}\left[k + \int_{t_0}^{t} e^{-sA} b(s)\,\mathrm{d}s\right],$$

unde $k \in \mathbb{R}^n$ arbitrar, $t_0 \in D$

2. Dacă, considerăm problema Cauchy:

$$\begin{cases} x' = Ax + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \tag{3}$$

atunci soluţia este

$$x(t) = e^{tA}\left[e^{-t_0 A} x_0 + \int_{t_0}^{t} e\right]$$

Demonstraţie:

1. Pentru rezolvarea sistemului (2): $\overline{x}' = A\overline{x} \Rightarrow \overline{x}(t) = e^t A \cdot c,\ c \in \mathbb{R}^n$

   Variem constanta, determinăm $c(\cdot) : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ astfel încât $x(t) = e^{tA} \cdot c(t)$ să verifice ecuaţia (2). Rezultă că:

   $Ae^{tA} \cdot c(t) + e^{tA} \cdot c'(t) = Ae^{tA} \cdot c(t) + b(t)$

   $\Rightarrow c'(t) = \left(e^{tA}\right)^{-1} \cdot b(t) \Rightarrow c'(t) = e^{-tA} \cdot b(t)$

   $\Rightarrow c(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-sA} b(s)\,\mathrm{d}s + k,\ k \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$

$$\Rightarrow x(t) = e^{tA}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-sA} b(s)\,\mathrm{d}s + k\right],\ k \in \mathbb{R}^n \tag{4}$$

2. Pentru rezolvarea sistemului (3): $t = t_0$ în (4). Observăm că t_0 fixat poate fi ales chiar cel din problema Cauchy.

   $x(t_0) = x_0$

   $x_0 = e^{t_0 A} \cdot k \Rightarrow k = \left(e^{t_0 A}\right)^{-1} \cdot x_0 = e^{-t_0 A} \cdot x_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} b(s)\, \mathrm{d}s.$$

Observaţie: Dacă avem sistemul $x' = Ax,\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi $\exists\ m_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A^{m_0} = O_1$, atunci $A^k = O_n,\ \forall k \geq n_0$. Deci matricea fundamentală de soluţii pentru $x' = Ax$ este:

$$\Phi(t) = e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m_0-1} \frac{(tA)^k}{k!}$$

Modalităţi de determinare a matricei fundamentale de soluţii pentru sistemul $x' = Ax$

$$x' = Ax,\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$
$$\Phi(t) = e^{tA}$$

I. Determinăm $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ sistem fundamental de soluţii pentru $x' = Ax$. Rezultă că $\Phi(t) = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ cu ajutorul valorilor proprii şi vectorilor proprii. (aplicaâ deja la seminar)

II.

Propozitie 2. *1) Dacă matricea B poate fi scrisă pe blocuri Jordan, adică se scrie sub forma* $B = \begin{pmatrix} J_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & J_s \end{pmatrix}$, *atunci* $e^B = \begin{pmatrix} e^{J_1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & e^{J_s} \end{pmatrix}$.

2) Dacă $B = diag(b_1, \ldots, b_n) = \begin{pmatrix} bJ_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & b_n \end{pmatrix}$, *atunci* $e^B = \begin{pmatrix} e^{b_1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & e^{b_n} \end{pmatrix}$.

3) Dacă C este o matrice inversabilă şi $A = CBC^{-1}$, atunci $e^A = Ce^BC^{-1}$.

Demonstraţie:

1) Deoarece $\forall k \in \mathbb{N}^*$ avem $B^k = \begin{pmatrix} J_1^k & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_s^k \end{pmatrix}$.

2) Evident

3) $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(CBC^{-1})^k}{k!} \underbrace{=}_{(CBC^{-1})^k = CB^kC^{-1}}$

$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{CB^kC^{-1}}{k!} = C \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} \cdot C^{-1} = C \cdot e^B \cdot C^{-1}$

III. **Algoritm de rezolvare:**

- Se determină valorile proprii ale lui A.

  $Spect(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$

- Se determină $n \geq m$ vectori proprii liniar independenţi $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$, $v_j = \begin{pmatrix} v_{1j} \\ \vdots \\ v_{nj} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

- Se scrie matricea vectorilor proprii

  $C = (v_1, \dots, v_n) = (v_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$

- Avem că $\exists\, C^{-1}$ şi se calculează $B = C^{-1}AC$.

  Rezultă că B este matrice diagonală, pentru că v_j este vector propriu pentru λ_k

  $$\left.\begin{array}{c} \Rightarrow (A - \lambda_k I_n)v_j = 0 \Rightarrow Av_j = \lambda_k v_j \\ \text{dar } C = (v_1, \dots, v_n) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

  $\Rightarrow AC = C \cdot diag(\lambda_k) \Rightarrow C^{-1}AC = diag(\lambda_k)$.

  Avem că $e^{tB} = diag\left(e^{\lambda_k t}\right) \Rightarrow e^{tA} = C \cdot e^{tB} \cdot C^{-1}$.

Aplicând teorema reziduurilor pentru $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avem $e^{tA} = \sum_{j=1}^{m} \mathcal{R}(\lambda_j)$, unde $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sunt valori proprii pentru A, având multiplicităţile $k_1, \ldots, k_m$, iar $\mathcal{R}(\lambda_j)$ este reziduul corespunzător valorii proprii λ_j:

$$\mathcal{R}(\lambda_j) = \frac{1}{(k_j - 1)!} \cdot \frac{d^{k_j-1}}{d\lambda^{k_j-1}} \left[\frac{e^{\lambda_j t} A^*(\lambda)(\lambda - \lambda_j)}{D(\lambda)}\right]\Bigg|_{\lambda=\lambda_j}$$

în care: $\begin{cases} A(\lambda) = \lambda I_n - A \\ A^*(\lambda) \text{ este matricea adjunctă a lui } A(\lambda) \\ D(\lambda) = \det A(\lambda) \end{cases}$

Observaţie: În cazul valorilor proprii simple (care au multiplicitatea egală cu 1) avem:

$$\mathcal{R}(\lambda_j) = \left[\frac{e^{\lambda_j t} A^*(\lambda)(\lambda - \lambda_j)}{D(\lambda)}\right]\Bigg|_{\lambda=\lambda_j}$$

Aplicaţie: Rezolvaţi următorul sistem folosind modalităţile II şi III.

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 - x_3 \\ x_2' = 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ x_3' = -x_1 + x_2 + 2x_3 \end{cases}$$

Avem $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$A(\lambda) = \lambda I_3 - A = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 1 & 1 \\ -3 & \lambda + 2 & 3 \\ 1 & -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$

$D(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2$ $Spect(A) = 0, 1,\ k_1 = 1,\ k_2 = 2$

Aplicând metoda II. $\boxed{\lambda_1 = 0,\ k_1 = 1}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2u_1 + u_2 + u_3 = 0 \\ 3u_1 + 2u_2 + 3u_3 = 0 \\ u_1 - u_2 - 2u_3 \end{cases}$$

$\Rightarrow u_3 = 2u_1 - u_2 \Rightarrow -3u_1 + 2u_2 + 6u_1 - 3u_2 = 0 \Rightarrow$

$3u_1 - u_2 = 0 \Rightarrow \boxed{u_2 = 3u_1}$

$u_1 - u_2 - 4u_1 + 2u_3 = 0 \Rightarrow \boxed{u_2 = 3u_1} \Rightarrow \boxed{u_3 = -u_1}$

$$\begin{cases} u_1 \in \mathbb{R} \\ u_2 = 3u_1 \\ u_3 = -u_1 \end{cases} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\lambda_2 = 1,\ k_2 = 2}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow -u_1 + u_2 + u_3 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2 + u_3,\ u_2, u_3 \in \mathbb{R}$

$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ liniar independenţi $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha v_2 + \beta v_3 = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = 0 \Rightarrow \alpha, \beta = 0$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculăm $C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$B = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = Ce^{tB}C^{-1} = C \begin{pmatrix} e^{0t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{1t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{1t} \end{pmatrix} C^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2e^t - 1 & 1 - e^t & 1 - e^t \\ 3e^t - 3 & 3 - 2e^t & 3 - 3e^t \\ 1 - e^t & e^t - 1 & 2e^t - 1 \end{pmatrix}$$

Aplicând metoda III. $e^{tA} = \mathcal{R}(0) + \mathcal{R}(1)$

$$\mathcal{R}(0) = \left(\frac{e^{\lambda t} A^*(\lambda)\lambda}{D(\lambda)} \right)\Bigg|_{\lambda=0} = \left(\frac{e^{\lambda t} A^*(\lambda)\lambda}{\lambda(\lambda-1)^2} \right)\Bigg|_{\lambda=0} =$$

$$= A^*(0) = -A$$

$$\mathcal{R}(1) = \frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left(\frac{e^{\lambda t} A^*(\lambda)(\lambda-1)^2}{\lambda(\lambda-1)^2} \right)\Bigg|_{\lambda=1} =$$

$$= \left[\frac{e^{\lambda t} t A^*(\lambda)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \cdot e^{\lambda t} A^*(\lambda) + \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} \left(A^*(\lambda) \right)' \right]_{\lambda=1} =$$

$$= \frac{e^t A * (1)}{1}$$