EDDPSENR 1. 6.10.2009

O ecuație diferențială $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ (1)

$f(\cdot,\cdot)$ $G \subset R \times R^n \to R$ definește ecuația diferențială ($n=1$)

vectorială pt $n>1$

Rezolvarea înseamnă să se determine $x(\cdot): I \subset R \to R^n$ a.i. să verifice egalitatea (1)

Exemple: ① $\frac{dx}{dt} = f(t)$ (prob. det. primitivei)

$x(t) = \int f(t)\,dt + c$

$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds + x(t_0)$

Problema Cauchy: (f, t_0, x_0) pt. ecuația (1) înseamnă să determinăm pe $x(\cdot): I \subset R \to R$, unde I să fie o vecinătate a lui t_0 (adică $I = (t_0, t_0 + a)$)

a.i. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

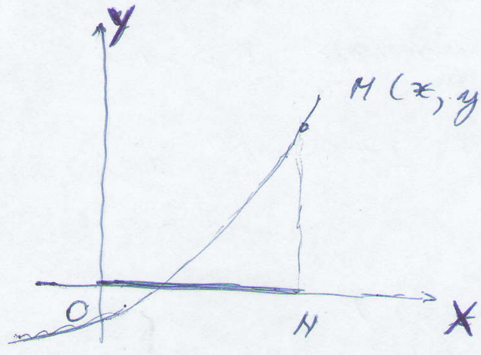
② $\frac{dx}{dt} = f(x)$

i) $f(x) = 0$ Se determină punctele în care $f(x)=0$ $\Rightarrow$ dacă $\exists\, x_1, \dots x_k \in R$ soluții ale ecuației $f(x) = 0$, atunci $\varphi_j(t) = x_j$, $j = \overline{1,k}$

ii) $f(x) \neq 0$

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = dt \Rightarrow A(x) = t + c$, unde $A(x) = \int \frac{1}{f(x)}\,dx$

(3) Să se determine curbele $y = y(x)$ care au proprietatea că admit tangentă în orice punct $M(x, y(x))$ şi dacă N este punctul în care tangenta taie sau întâlneşte axa Ox, avem $MN = NO$ $(MN^2 = NO^2)$



$$Y - y(x) = y'(x)(X - x)$$

(ecuaţia cunoscută de noi sub forma $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$)

$N(X_n, Y_n) \Rightarrow$ avem egalitatea

$$-y = y'(X_n - x)$$

$$X_n = x - \frac{y}{y'}$$

deci $N\left(x - \frac{y}{y'}, 0\right)$

(ec. distanţei de la M la N)

$$\left(x - \frac{y}{y'} - x\right)^2 + (0 - y)^2 = \left(x - \frac{y}{y'} - 0\right)^2 + 0^2$$ (ecuaţia distanţelor de la O la N)

$$\frac{y^2}{(y')^2} + y^2 = x^2 - 2x\frac{y}{y'} + \frac{y^2}{(y')^2} \Rightarrow \frac{2xy}{y'} = x^2 - y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}}$$ ecuaţia diferenţială omogenă (pt că se poate exprima ca o fct. de $\frac{y}{x}$)

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 - y^2} = \frac{2}{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}} = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

Ecuaţia $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ s.n. OMOGENĂ dacă fct. care o defineşte se poate scrie: $f(t, x) = g\left(\frac{x}{t}\right)$

Se poate face o schimbare de variabilă $\frac{x(t)}{t} = z(t)$

$$x(t) = tz(t)$$

$$x'(t) = t'z(t) + tz'(t) = z(t) + tz'(t)$$

Ecuaţia omogenă se transformă: $z + t \cdot z' = g(z) \Rightarrow z' = \frac{1}{t}(g(z) - z)$

(ecuaţia cu variabilă separabilă)

(4) $F = m \cdot a$

$m \cdot \underbrace{x''(t)}_{\text{acceleratie}} = F(t, x, \underbrace{x'}_{\text{viteză}})$ ecuație diferențială de ordin 2

$m\, \ddot{x}(t) = F(t, x, \dot{x})$ (R e o forță de rezistență)

$F(t, x, \dot{x}) = mg + R$, unde R poate fi de ex. $R = k \cdot \dot{x}$

TIPURI DE ECUAȚII

- ECUAȚII CU VARIABILĂ SEPARABILĂ: $\frac{dx}{dt} = a(t) b(x)$ (2)

$a : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$b : I_1 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1) $b(x) = 0 \Rightarrow$ soluții staționare, adică dacă găsesc $x_1, \dots x_k \in \mathbb{R}$ a.î. $b(x_j) = 0$ $\Rightarrow \varphi_j(t) = x_j$, $j = \overline{1,k}$

2) sep. variabilele $\frac{dx}{b(x)} = a(t)\,dt \Rightarrow \boxed{B(x) = A(t) + C,\ c \in \mathbb{R}}$ soluția implicită

$$B(x) = \int \frac{dx}{b(x)} \quad ; \quad A(t) = \int a(t)\,dt$$

Dacă se poate rezolva $\boxed{x = \varphi(t, c)} \Rightarrow$ soluția explicită a ecuației (2)

EX (1) Să se determine soluția generală a ecuației $\frac{dx}{dt} = e^t(x^2+1), t \in \mathbb{R}$

Obs. că $x^2 + 1 \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ nu are soluții staționare $\Big]$ $\frac{dx}{x^2+1} = e^t dt$

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \int e^t dt \Rightarrow \operatorname{arctg} x = e^t + c,\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow x = \operatorname{tg}(e^t + c)$$

EX (2) $x' = \frac{t}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+t^2}}$;

$$a(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$b(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$, $x \neq 0$ $b(x) \neq 0$ $\forall x \neq 0 \Rightarrow$ nu avem soluții staționare

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \left(\sqrt{1+x^2}\right)' \; ; \; \int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt = \left(\sqrt{1+t^2}\right)dt + c$$

deci $\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+t^2} + c \Rightarrow 1 + x^2 = 1 + t^2 + c^2 + 2c\sqrt{1+t^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \; x = \pm\sqrt{t^2 + c^2 + 2c\sqrt{1+t^2}}$ se alege în fct. de condiția inițială + sau −

$x(1)=1 \Rightarrow 1 = \pm\sqrt{1+c^2+2c\sqrt{2}} \Rightarrow 1 = 1 + c^2 + 2c\sqrt{2} \Rightarrow c^2 + 2c\sqrt{2} = 0$ $\Rightarrow$ nu are soluție unică

$c = 0$

$c = -2\sqrt{2}$

$x_1(t) = |t|$

$x_2(t) = \sqrt{t^2 + 8 - 4\sqrt{2(1+t^2)}}$

Ecuația liniară (caz particular)

$$\frac{dx}{dt} = a(t)\,x \quad (\text{cazul } h(x) = x)$$

are mereu soluții staționare $\varphi_0(t) = 0, \forall t \Rightarrow \frac{dx}{x} = a(t)dt$

$\ln|x| = \underbrace{\int a(t)dt}_{A(t)} + \ln c, \; c > 0, \; |x| = e^{A(t)} \cdot e^{\ln c} = c\, e^{A(t)} \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = c\, e^{A(t)}, \; c \neq 0$

soluția generală este:

$$\boxed{x(t) = c\, e^{\int a(t)\,dt}, \; c \in \mathbb{R}.}$$

Ecuația afină $\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)$ (4).

$a(\cdot), b(\cdot)$ sunt funcții continue pe $I \subset \mathbb{R}$

1) Se rezolvă ec. liniară atașată

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = a(t)\bar{x} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \bar{x}(t) = Ce^{\int a(t)dt}$

2) Se aplică metoda variației constantelor:

det $C(t)$ a.î. $x(t) = C(t)\cdot e^{\int a(t)dt}$ să fie sol. a ec. (4)

$$C'(t)e^{\int a(t)dt} + \cancel{C(t)e^{\int a(t)dt}\cdot a(t)} = \cancel{a(t)\cdot C(t)e^{\int a(t)dt}} + b(t) \Rightarrow$$

$$C'(t) = \underbrace{b(t)\cdot e^{-\int a(t)dt}}_{\text{not } \psi(t)}$$

deci $C(t) = \int \psi(t)dt + k$

$$\boxed{x(t) = \left(\int \psi(t)dt + k\right)e^{\int a(t)dt}}$$

Ex (3) $x' = \frac{-2}{t^2-1}x + 2t + 2$. Se cere soluția generală.

- ec. afină.

$a(t) = -\frac{2}{t^2-1}$ $b(t) = 2t+2$. $t \in (1, \infty)$

$$\int a(t)dt = \int -\frac{2}{(t-1)(t+1)} = \int \frac{1}{t+1}dt - \int \frac{1}{t-1}dt = \ln(t+1) - \ln(t-1) =$$

$= \ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right)$

$$\boxed{\int \frac{dt}{t^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{t-a}{t+a}\right| + C}$$

$\bar{x}(t) = Ce^{\ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right)} = C\cdot\frac{t+1}{t-1}$

$x(t) = C(t)\cdot\frac{t+1}{t-1}$

$$\left(c(t)\cdot\frac{t+1}{t-1}\right)' = \frac{-2}{\cancel{t^2-1}\ (t-1}\cdot c(t)\cdot\frac{\cancel{t+1}}{t-1}+2t+2$$

$$c'(t)\frac{t+1}{t-1}+c(t)\cdot\left(\frac{t+1}{t-1}\right)' = -\frac{2}{x^2-1}\,c(t)\frac{t+1}{t-1}+2t+2$$

$$c'(t)\frac{t+1}{t-1}+c(t)\cdot\frac{t+1}{(t-1)^2}\cdot\frac{-2}{(t^2-1)^2} = -\frac{2}{(t^2-1)^2}\cdot c(t)\frac{t+1}{t-1}+2t+2$$

$$c'(t)=2t-2$$

$$c(t)=\int(2t-2)\,dt$$

$$c(t)=(t-1)^2+K$$

$$x(t)=\left((t-1)^2+k\right)\cdot\frac{t+1}{t-1}$$

TEMĂ

Să se afle soluția generală a ecuației:

1) $x' = \dfrac{1+x^2}{1-t^2}$, $t\in(-1,1)$

2) $x' = \dfrac{e^t}{e^t+1}\cdot\dfrac{1}{2x}$, $t\in\mathbb{R}$

3) $x' = 2\cdot e^t\cdot x$, $t\in\mathbb{R}$

4) $x' = \dfrac{x}{t}+t$, $t>0$ Determinați soluția care verifică $x(1)=0$.