SEMINAR NR. 8 ECUAȚII DIFERENȚIALE CU DERIVATE PARȚIALE 24.11.2009

REZOLVARE EXERCIȚII SEMINAR 7.

(2) $$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2' = x_1 + x_2 \\ x_3' = 3x_1 + x_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 + 3(1-\lambda) + (1-\lambda)$$

$$= (1-\lambda)((1-\lambda)^2 + 1)$$

$$= (1-\lambda)(1 - 2\lambda + \lambda^2 + 4)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 5)$$

$\lambda_1 = 1$

$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$

$\Delta = 4 - 20 = -16.$

$$\lambda_{2,3} = \frac{2 \pm 4i}{2} \qquad \lambda_2 = 1 + 2i, \quad \lambda_3 = 1 - 2i$$

$\mathrm{Spec}(A) = \{1, 1 \pm 2i\}$

$k_1 = k_2 = k_3 = 1$

pt. $\lambda_1 = 1 \in \mathbb{R}$, $k = 1$

Căutăm $u \in \mathbb{R}^3$, $u \neq 0$ a.î. $(A - \lambda_1 I_3)u = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} -u_2 - u_3 = 0 \\ u_1 = 0 \\ 3u_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_3 = -u_2, \ u_2 \in \mathbb{R} \\ u_1 = 0 \end{cases}$$

(depinde de atâția param. cât este ordinul de multiplicitate)

Alegem $u_2 = 1 \Rightarrow u_3 = -1 \Rightarrow u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\varphi_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$$

În cazul în care λ e val. complexă, se elimină şi conjugata ei.

$\lambda_2 = 1 + 2i \ , k_2 = 1$

Căutăm $u \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ a.î. $(A - \lambda_2 I_3) u = 0$

$$\begin{pmatrix} -2i & -1 & -1 \\ 1 & -2i & 0 \\ 3 & 0 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2iu_1 - u_2 - u_3 = 0 \\ u_1 - 2iu_2 = 0 \\ 3u_1 - 2iu_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_2 = \dfrac{1}{2i} u_1 \\ u_3 = \dfrac{3}{2i} u_1 \end{cases}$$

verificăm

$\Rightarrow -2iu_1 - \dfrac{1}{2i} u_1 - \dfrac{3}{2i} u_1 = 0$

$2u_1 - 2u_1 = 0$ adevărat

Alegem $u_1 = 2i \Rightarrow u_2 = 1 \ , u_3 = 3 \Rightarrow u = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\varphi(t) = e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\varphi(t) = e^t \cdot (\cos 2t + i \sin 2t) \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\varphi(t) = e^t \begin{pmatrix} 2i(\cos 2t + i \sin 2t \\ \cos 2t + i \sin 2t \\ 3\cos 2t + 3i \sin 2t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} -2e^t \sin 2t \\ e^t \cos 2t \\ 3e^t \cos 2t \end{pmatrix} \quad \text{(partea reală)}$$

$$\Rightarrow \varphi_3(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \cos 2t \\ e^t \sin 2t \\ 3e^t \sin 2t \end{pmatrix} \quad \text{(partea imaginară).}$$

$$\phi(t) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t) + c_3 \varphi_3(t) \ , \text{cu } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Putem scrie pe componente soluția:

$$x_1(t) = -2c_2 \cdot e^t \sin 2t + 2c_3 e^t \cos 2t$$
$$x_2(t) = c_1 e^t + c_2 e^t \cos 2t + c_3 e^t \sin 2t$$
$$x_3(t) = -c_1 e^t + 3c_2 e^t \cos 2t + 3c_3 e^t \sin 2t$$

① (EXEMPLU DE SISTEM CARE POATE FI REDUS LA UN SISTEM CU COEF. CONSTANȚI)

Fie sistemul următor: $\begin{cases} x_1' = 3t^2 x_2 \\ x_2' = 3t^2 x_1 \end{cases}$ (1)

a) Să se arate că prin schimbarea de variabilă

$$s = t^3 \quad \left(x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = y(s(t)) = \begin{pmatrix} y_1(s(t)) \\ y_2(s(t)) \end{pmatrix} \right)$$

se obține sistemul: $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_1 \end{cases}$ (2)

b) Se cer relațiile de legătură între soluțiile sistemelor (1) și (2).

c) Determinați soluția generală pt. sistemul (2).

d) Determinați soluția generală pt. sistemul (1)

Rezolvare: a) $s = t^3 \Rightarrow t = \sqrt[3]{s}$

$$\begin{cases} x_1(t) = y_1(s(t)) \\ x_2(t) = y_2(s(t)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1'(t) = y_1'(s(t)) \cdot s'(t) = 3t^2 \cdot y_1'(s(t)) = 3\sqrt[3]{s^2} \cdot y_1' \\ x_2'(t) = y_2'(s(t)) \cdot s'(t) = 3t^2 \cdot y_2'(s(t)) = 3\sqrt[3]{s^2}\, y_2' \end{cases}$$

Sistemul devine: $\begin{cases} 3\sqrt[3]{s^2}\, y_1' = 3\sqrt[3]{s^2} \cdot y_2 \\ 3\sqrt[3]{s^2}\, y_2' = 3\sqrt[3]{s^2}\, y_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1(t) = y_1(t^3) \\ x_2(t) = y_2(t^3) \end{cases}$

c) $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_1 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 1 = 0.$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ răd. reale, distincte.

$Spec(A) = \{1, -1\}$

Pt. $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} -u_1 + u_2 = 0 \\ u_1 - u_2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} u_1 = u_2 \\ u_1 = u_2 \end{cases}$$

Alegem pe $u_1 = 1 \Rightarrow u_2 = 1$

$$\varphi_1(s) = e^{s} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{s} \\ e^{s} \end{pmatrix}$$

Pt. $\lambda_2 = -1$

$\Rightarrow u_2 = -u_1$

$$\Rightarrow \varphi_2(s) = \begin{pmatrix} e^{-s} \\ -e^{-s} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1(s) = c_1 e^{s} + c_2 e^{-s} \\ y_2(s) = c_1 e^{s} - c_2 e^{-s} \end{cases} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

d) $\begin{cases} x_1(t) = y_1(t^3) = c_1 e^{t^3} + c_2 e^{-t^3} \\ x_2(t) = y_2(t^3) = c_1 e^{t^3} - c_2 e^{-t^3} \end{cases}$

$\boxed{\text{TEMĂ}}$ ② Fie sistemul: $\begin{cases} x_1' = f(t) x_2 \\ x_2' = f(t) x_1 \end{cases}$, unde $f : I \subset \mathbb{R} \to J \subset \mathbb{R}$ continuă şi inversabilă

a) Să se arate că prin schimbarea de variabilă

$$s = F(t) \quad (F \text{ primitivă pt. } f,\ F : I \to J)$$

se obţine sistemul $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_1 \end{cases}$

b, c, d la fel ca la ①

TEMA 3 Se dă sistemul:

$$x' = \frac{1}{t} A x \qquad , A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

a) Să se arate că prin schimbarea de variabilă

$$t = e^s$$

se obține sistemul $y' = Ay$. Precizați legătura între soluțiile celor două sisteme.

b) Determinați soluția generală pt. $\begin{cases} x_1' = \dfrac{x_1 + x_2}{t} \\ x_2' = \dfrac{-2x_1 + 4x_2}{t} \end{cases}$, $t > 0$

(aplicație pt. a)

Pt. un sistem $x' = Ax$ (1), $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ știm să determinăm $\{\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\}$ sistem fundamental de soluții.

Se notează $\phi(t) = (\varphi_1(t), \dots \varphi_n(t))$ este matricea fundamentală de soluții.

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$$

Pt. sistemul (1) numim <u>REZOLVANTA SISTEMULUI</u>

$$R_n(t, \tau) = \phi(t) \cdot (\phi(\tau))^{-1} = e^{(t-\tau)A}.$$

<u>Consecință</u>: $e^A = \phi(1)(\phi(0))^{-1}$

<u>Exemplu</u>: Se cere exponențiala matricei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

+ determinăm sist. fundam. de soluții pt $x' = Ax \Rightarrow$

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$$

+ scriem matricea fundam. de soluții

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow R_2(t, \tau) = \phi(t) (\phi(\tau))^{-1}$$

$$- \phi(\tau)^t = \begin{pmatrix} e^{\tau} & e^{\tau} \\ e^{-\tau} & -e^{-\tau} \end{pmatrix} \quad \text{(transpusa)}$$

$$- \det \phi(\tau) = -2 \neq 0$$

$$- (\phi(\tau))^* = \begin{pmatrix} -e^{-\tau} & -e^{-\tau} \\ -e^{\tau} & e^{\tau} \end{pmatrix} \text{ (adjuncta)} \qquad (\phi(\tau))^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -e^{-\tau} & -e^{-\tau} \\ -e^{\tau} & e^{\tau} \end{pmatrix}$$

(inversa)

$$\rightarrow R_2(t, \tau) = \phi(t) (\phi(\tau))^{-1}$$

[EX] (4) Să se determine exponențiala următoarei matrici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- det. sist. fundamental de soluții pt $x' = Ax$

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 - x_2 \\ x_2' = 2x_1 \end{cases}$$

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 3) + 2 = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = 1$$

$$k_1 = k_2 = 1$$

$$\operatorname{spec}(A) = \{1, 2\}$$

Pt. $\lambda_1 = 1$ căutăm $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ a.î. $(A - \lambda_1 I_2)u = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2u_1 - u_2 = 0 \\ 2u_1 - u_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow u_2 = 2u_1$$

Alegem $u_1 = 1 \Rightarrow u_2 = 2 \Rightarrow u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \varphi_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}$$

Pt. $\lambda_2 = 1$ căutăm $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ a.î. $(A - \lambda_2 I_2)u = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u_1 - u_2 = 0 \\ 2u_2 - u_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow u_1 = u_2 \Rightarrow$$

Alegem $u_1 = 1 \Rightarrow u_2 = 1 \Rightarrow u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \varphi_2(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^t \\ 2e^t & e^t \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{R}_2(t,\tau) = \phi(t)\cdot(\phi(\tau))^{-1}$$

$$\phi(\tau) = \begin{pmatrix} e^{\tau} & e^{2\tau} \\ 2e^{\tau} & e^{2\tau} \end{pmatrix} \qquad (\phi(\tau))^{t} = \begin{pmatrix} e^{\tau} & 2e^{\tau} \\ e^{2\tau} & e^{2\tau} \end{pmatrix}$$

$$\det \phi(\tau) = -e^{3\tau} \neq 0$$

$$(\phi(\tau))^{*} = \begin{pmatrix} e^{2\tau} & -e^{2\tau} \\ -2e^{\tau} & e^{\tau} \end{pmatrix} \qquad (\phi(\tau))^{-1} = \frac{1}{e^{-3\tau}}\begin{pmatrix} e^{2\tau} & -e^{2\tau} \\ -2e^{\tau} & e^{\tau} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -e^{-\tau} & e^{-\tau} \\ 2e^{-2\tau} & -e^{-2\tau} \end{pmatrix}$$

$$R_2(t,\tau) = \phi(t)(\phi(\tau))^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{t} & e^{2t} \\ 2e^{t} & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -e^{-\tau} & e^{-\tau} \\ 2e^{-2\tau} & -e^{-2\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{t-\tau}+2e^{2(t-\tau)} & e^{t-\tau}-e^{2(t-\tau)} \\ -2e^{t-\tau}+e^{2(t-\tau)} & 2e^{t-\tau}-e^{2(t-\tau)} \end{pmatrix}$$

$$= e^{(t-\tau)A}$$

$$e^{A} = \begin{pmatrix} -e+2e^{3} & e-e^{2} \\ -2e+2e^{2} & 2e-e^{2} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{TEMA}}$ Să se determine exponențiala următoarelor matrice:

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$