REZOLVARE EXERCIȚII

EX. 6 (b)

$$x' = f(t, x), \quad f(t,x) = \begin{cases} x \cdot \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \ t \in \mathbb{R} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\lim_{x \to 0} x \cdot \underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\text{mărginită}} = 0$ f continuă în $x = 0$, f continuă pe $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ $\Rightarrow f$ cont. pe $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

(f cont în raport cu $x \Rightarrow f$ cont în ambele arg.)

$x \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin\frac{1}{x} + x \cdot \cos\frac{1}{x} \cdot \left(-x^{-2}\right) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$ continuă pe $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

Din th. Cauchy-Picard $\Rightarrow \forall (t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ problema Cauchy

$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ are soluție unică.

$x = 0$ $\frac{\partial f(t,0)}{\partial x}$, $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(t,x) - f(t,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} \cdot \sin\frac{1}{x} - 0}{\cancel{x}} = \lim_{x \to 0} \sin\frac{1}{x} \ (\nexists)$$

$\Rightarrow \forall \ V \subseteq \mathcal{V}((t_0, 0))$ (vecinătate a lui $(t_0, 0)$), $\frac{\partial f}{\partial x}$ nu e continuă.

(nu înseamnă că nu are soluție unică! Nu se poate aplica th. Cauchy-Picard)

Fie problema Cauchy $\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = 0. \end{cases}$

Obs. că soluția staționară $x(t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$ e soluție.

Separarea variabilelor se face pt $x \neq 0$ și condiția Cauchy e dată în $x = 0$, nu pot fi separate

$\Rightarrow$ Tr. probl. Cauchy $\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = 0 \end{cases}$ avem doar soluția $x(t) = 0$.

$\boxed{EX\ 4}$ (a) $(x')^2 - 2x' - t^2 + 4x = 0$

$x = \frac{1}{4}((-x')^2 + 2x' + t^2) = \beta(t, x')$

$$\begin{cases} t = u \\ y = v = x' \\ x = \beta(u,v) = \dfrac{-v^2 + 2v + u^2}{4} \end{cases}$$

$\frac{dx}{dt} = y \Rightarrow dx = y\,du$

$\Rightarrow \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv = v\,du$

$\Rightarrow \frac{u}{2} du + \left(-\frac{v}{2} + \frac{1}{2}\right) dv = v\,du$

$\Rightarrow \left(-\frac{v}{2} + \frac{1}{2}\right) dv = \left(v - \frac{u}{2}\right) du$

$\Rightarrow \frac{1-v}{\cancel{2}} dv = \frac{2v-u}{\cancel{2}} du \Rightarrow \frac{du}{dv} = \frac{1-v}{2v-u} \Rightarrow \frac{du}{dv} = \frac{v-1}{u-2v}$

$\Rightarrow$ ec. omogenă $a = 1$, $b = 0$, $\alpha = -2$, $\beta = 1$, $d = a\beta - \alpha b = 1$

$\begin{cases} s = v - v_0 \\ z = u - u_0 \end{cases}$ unde $\begin{cases} v_0 - 1 = 0 \Rightarrow v_0 = 1 \\ u_0 - 2v_0 = 0 \Rightarrow u_0 = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} s = v - 1 \Rightarrow v = s + 1 \\ z = u - 2 \Rightarrow u = z + 2 \end{cases}$ $\Bigg/$ $z(s(v)) = u(v) - 2$

$\frac{du}{dv} = \frac{d}{dv}(z(s(v)) + 2) = \frac{dz}{dy} \cdot z'(s)$

$\frac{dz}{ds} = \frac{s}{z + 2 - 2s - 2} \Rightarrow \frac{dz}{ds} = \frac{s}{z - 2s} \Rightarrow \frac{dz}{ds} = \frac{\cancel{s}}{\cancel{s}\left(\frac{z}{s} - 2\right)} \Rightarrow \frac{dz}{ds} = \frac{1}{\frac{z}{s} - 2}$

Notăm $p(s) = \frac{z(s)}{s} \Rightarrow z(s) = p(s) \cdot s$

$\frac{dz}{ds} = \frac{1}{p-2} \Rightarrow p's + p = \frac{1}{p-2} \Rightarrow \frac{dp}{ds} = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{p-2} - p\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{dp}{ds} = \frac{1}{s} \cdot \frac{-p^2 + 2p + 1}{p-2} \Rightarrow \frac{p-2}{2p - p^2 + 1} dp = \frac{1}{s} ds$

Soluții staționare: $\frac{-p^2 + 2p + 1}{p-2} = 0 \Rightarrow p_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$ sol. staționare

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow z(s) = (1 \pm \sqrt{2}) s \\ u(v) = z(s(v)) + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow u(v) = (1 \pm \sqrt{2})(v - 1) + 2$

$\Downarrow$

soluția parametrică

$t = (1 \pm \sqrt{2})(v-1) + 2$ $\quad \boxed{x = \frac{1}{4}(-v^2 + 2v + t^2)}$

Cazul nestaționar:

$$\frac{1-p^2+2p}{p-2} \neq 0 \Rightarrow \frac{p-2}{1-p^2+2p}\,dp = \frac{1}{s}\,ds =$$

$$= -\left[\frac{1}{2}\frac{2p-2}{p^2-2p-1} - \frac{1}{p^2-2p-1}\right]dp = \frac{1}{s}\,ds =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|p^2-2p-1| + \int\frac{dp}{(p-1)^2-(\sqrt{2})^2} = \ln(C|s|)$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|p^2-2p-1| + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{p-1-\sqrt{2}}{p-1+\sqrt{2}}\right| = \ln(C|s|)$$

soluție implicită în p și 0

$\Rightarrow$ Soluția implicită în z și s: $-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{z^2}{s^2}-\frac{2z}{s}-1\right| +$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\frac{z}{s}-1-\sqrt{2}}{\frac{z}{s}-1+\sqrt{2}}\right| = \ln(C|s|)$$

$\Rightarrow$ Soluția implicită în u și v:

$$-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(u-2)^2}{(v-1)^2}-2\frac{u-2}{v-1}-1\right| + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\frac{u-2}{v-1}-1-\sqrt{2}}{\frac{u-2}{v-1}-1+\sqrt{2}}\right| = \ln(C|s|)$$

$\Rightarrow$ Soluția implicită în t și x.

ECUAȚII DE ORDIN SUPERIOR

Ecuație dif. de ordin n: $F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0$

① $F(t, x^{(k)}, \dots, x^{(n)}) = 0$ - nu depinde de $x, x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}$

Se face reducerea ordinului prin schimbarea de variabilă

$$\boxed{x^{(k)} = y}$$

$$x^{(k)}(t) = y(t)$$
$$x^{(k+1)}(t) = y'(t)$$
$$\dots$$
$$x^{(n)}(t) = y^{(n-k)}(t)$$

$\Rightarrow F(t, y, y', \dots y^{(n-k)}) = 0$

② $F(x, x', \dots, x^{(n)})$

Se face prin reducerea ordinului

$$x' = y$$
$$x'(t) = y(x(t))$$
$$x^{(2)}(t) = y'(x(t))\,x'(t) = y'(x(t))\cdot y \Rightarrow$$
$$\boxed{x^{(2)} = y'y}$$

$\Rightarrow F(x, y, \dots y^{(n-1)}) = 0$ (s-a redus ordinul cu 1)

③ $F(t, \frac{x'}{x}, \dots, \frac{x^{(n)}}{x}) = 0$

Se face schimbarea de variabilă: $\boxed{\frac{x'}{x} = y}$

$$\boxed{\frac{x'(t)}{x(t)} = y(t)} \Leftrightarrow x'(t) = x(t)y(t)$$

$$x' = yx \Rightarrow x^{(2)} = y'x + yx' \quad /: x$$

$$\Rightarrow \frac{x^{(2)}}{x} = y' + y\frac{x'}{x} \Rightarrow \boxed{\frac{x^{(2)}}{x} = y' + y^2}$$

$\Rightarrow F_1(t, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}) = 0$

④ $F(x, tx', t^2 x^{(2)}, \dots, t^n x^{(n)}) = 0$ (ec. Euler)

Se face schimbarea de variab. $|t| = e^s \Leftrightarrow s = \ln|t|$

$x \to y(s) = x(t(s))$

$y \to x(t) = y(s(t)) = y(\ln|t|)$

$x' = y'(s(t))\, s'(t)$

$t > 0 \quad s = \ln t$

$s'(t) = \frac{1}{t}$

$t < 0 : s = \ln(-t) \quad \Rightarrow s'(t) = \frac{1}{-t}$

$x' = y'(s(t)) \cdot s'(t) = y'(s(t)) \cdot \frac{1}{t} \Rightarrow \boxed{t x' = y'}$

$t x'(t) = y'(s(t))$

$x''(t) = \left(y'(s(t))\frac{1}{t}\right)' = y''(s(t)) \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{t} + y'(s(t)) \left(-\frac{1}{t^2}\right) t^2 \,/\cdot t^2$

$t^2 x''(t) = y'' - y'$

⑤ $F\left(\frac{x}{t}, x', t x^{(2)}, \dots, t^{n-1} x^{(n)}\right) = 0$

Se face schimbarea : $\boxed{\frac{x}{t} = y}$ (ec. omogenă)

$$\boxed{\frac{x(t)}{t} = y(t)}$$

$x' = y + t y'$

$x'' = y' + y' + t y''$

$x'' = 2y' + t y'' \,/\cdot t$

$\Rightarrow t x'' = 2y' t + t^2 y''$

$\Rightarrow$ Ec. Euler în y, t:

$F_1(y, t y', \dots, t^n y^{(n)}) = 0$

$\boxed{\text{TEMĂ}}$ Să se determine soluția generală pentru:

① $2(x'')^2 + 3(x^{(3)}) = 0$

Indicație: $x'' = y \Rightarrow x^{(3)} = y' \xrightarrow[\text{la}]{\text{ec. se reduce}} 2y^2 + 3y' = 0$.

② $txx'' - t(x')^2 - xx' = 0$

Indicație: Împărțim ec la x^2, are soluție $x = 0$.

$$\Downarrow$$

$$t\frac{x^{(2)}}{x} - t\left(\frac{x'}{x}\right)^2 - \frac{x'}{x} = 0. \qquad \boxed{\frac{x'}{x} = y}$$

③ $t^2 xx'' - (x - tx')^2 = 0$.

Indicație: la fel ca la ②

④ $\left(\frac{x}{t}\right)^2 + (x')^2 = 3t\,x'' + \frac{2xx'}{t}$

Indicație: $\frac{x}{t} = y \Rightarrow$ Ec. Euler