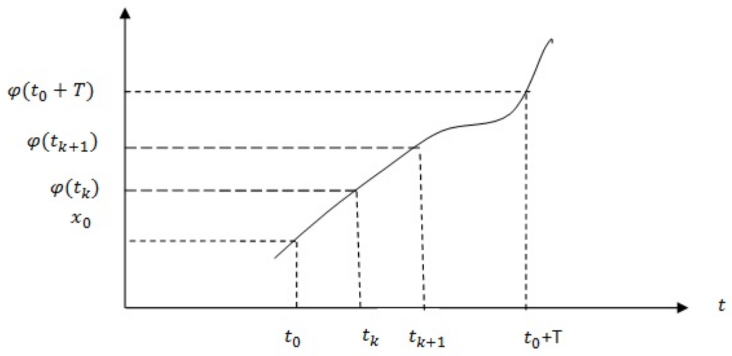
Metoda Euler pentru rezolvarea numerică a problemei Cauchy pentru ecuaţii diferenţiale

Curs Nr. 4

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

Fie $\phi(\cdot)$ soluţie a problemei (1), rezultă că avem: $\phi'(t) = f(t, \phi(t)),\ \forall t \in D_\phi$.



Fie $N \in \mathbb{N}*$ numărul de puncte din $[t_0, t_0+T]$, fie $h = \dfrac{T}{N}$ pasul.
Punctele sunt echidistante: $t_k = t_{k-1} + h = t_0 + (k-1)h,\ k = \overline{1, N}$

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \phi'(t)\ \mathrm{d}t = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t,\phi(t))\ \mathrm{d}t \Rightarrow \phi(t_{k+1}) - \phi(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t,\phi(t))\ \mathrm{d}t \tag{2}$$

$$\int_{t_0}^{t_k} \phi'(t)\ \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_k} f(t,\phi(t))\ \mathrm{d}t$$

$$\phi(t_k) = \phi(t_0) + \int_{t_0}^{t_k} f(t,\phi(t))\ \mathrm{d}t \tag{3}$$

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t,\phi(t))\,\mathrm{d}t \approx f(t_k,\phi(t_k))\cdot \underbrace{(t_{k+1}-t_k)}_{h} = f(t_k,\phi(t_k))\cdot h.$$

Din (2) $\Rightarrow \phi(t_{k+1}) \approx \phi(t_k) + h\cdot f(t_k,\phi(t_k))$

Schema de aproximare în metoda explicită:

$$\boxed{\begin{cases} x_0 \\ x_{k+1} = x_k + h\cdot f(t_k,x_k),\ k=\overline{0,N-1} \end{cases}} \tag{4}$$

Teorema de aproximare în metoda Euler

Fie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continuă
$\dfrac{\partial f}{\partial t}, \dfrac{\partial f}{\partial x}$ continue
$(t_0, x_0) \in D$
D_1 dreptunghiul centrat în (t_0, x_0), $D_1 \subset D$
$M = \sup_{(t,x)\in D_1} |f(t,x)|$
Se consideră schema de aproximare (4).
Fie $\phi(\cdot) : [t_0 - T, t_0 + T] \to \mathbb{R}$ soluţie unică rezultată conform teoremei Cauchy-Picard.
Atunci: $\exists\ A > 0$ astfel încât $|\phi(t_0 + T) - x_N| < A\cdot h$, adică metoda Euler este de ordin h.

Observaţie : $\dfrac{\partial f}{\partial f}, \dfrac{\partial f}{\partial x}$ sunt continue pe D, rezultă că f este Lipschitz în ambele argumente. Deci avem:
$\exists\ L_1 > 0$ astfel încât $|f(t_1,x) - f(t_2,x)| \le L_1|t_1 - t_2|,\ \forall (t_1,x),(t_2,x) \in D_1$
$\exists\ L_2 > 0$ astfel încât $|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \le L_2|x_1 - x_2|,\ \forall (t,x_1),(t,x_2) \in D_1$

Lema 1: Fie $x_0, ..., x_N$ rezultate din schema (4). În condiţiile teoremei de aproximare, avem că: $|x_k - x_0| < Mkh,\ k = \overline{1,N}$.

Demonstraţie*(prin induţie) :* $k = 1 :\ |x_1 - x_0| = |h|\cdot|\underbrace{f(t_0,x_0)}_{\le M}| < Mh = M\cdot 1\cdot h$

Presupunem adevărat pentru k şi demonstrăm pentru $k+1$.

$$\begin{aligned} |x_{k+1} - x_0| &= |(x_{k+1} - x_k) + (x_k - x_0)| \le |x_{k+1} - x_k| + |x_k - x_0| < \\ &< |h||f(t_k,x_k)| + Mkh = hM + Mkh = K(k+1)h \end{aligned}$$

Concluzie Lema 1: $|x_k - x_0| < Mkh,\ \forall k = \overline{1,N}$.

Lema 2: În ipotezele teoremei, $\exists\ B > 0$ astfel încât
$|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} f(t,\phi(t))\ \mathrm{d}t - hf(t_k,\phi(t_k))| < Bh^2,\ \forall k = \overline{0, N-1},\ B = L_1 + L_2 M.$

Demonstraţie : f este continuă pe D, rezultă că $f(t,\phi(t))$ este continuă pe $D_\phi = [x_0 - t, x_0 + t]$. Deci, se poate aplica o teoremă de medie:

$\exists\ c \in [t_k, t_{k+1}]$ astfel încât $\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} f(t,\phi(t))\ \mathrm{d}t = f(c,\phi(c))h,\ h = t_{k+1} - t_k$

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t,\phi(t))\ \mathrm{d}t - hf(t_k,\phi(t_k))\right| = |hf(c,\phi(c)) - hf(t_k,\phi(t_k))| = \\
&= h\,|f(c,\phi(c)) - f(t_k,\phi(c)) + f(t_k,\phi(c)) - f(t_k,\phi(t_k))| \le \\
&\le h\left(\left|\underbrace{f(c,\phi(c)) - f(t_k,\phi(c))}_{f \text{ Lipschitz}}\right| + \left|\underbrace{f(t_k,\phi(c)) - f(t_k,\phi(t_k))}_{f \text{ Lipschitz}}\right|\right) \le \\
&\le h\left(L1|\underbrace{ct_k}_{\le h}| + L2|\underbrace{\phi(c) - \phi(t_k)}_{\phi'(d)(c-t_k),\ d\in(t_k,c)}|\right) \le \left|\underbrace{f(d,\phi(d))}_{\le M}\right|\left|\underbrace{c - t_k}_{\le h}\right| \le \\
&\le h(L_1 h + L_2 M h) = \underbrace{(L_1 + L_2 M)}_{B} h^2
\end{aligned}$$

Demonstraţia teoremei de aproximare în metoda Euler

Notăm: $E_k = |\phi(t_k) - x_k|$ (eroarea), $k = \overline{0, N}$.
Căutăm o relaţie de recurenttă între E_{k+1}, E_k.

$$\begin{cases} \phi(t_{k+1}) = \phi(t_k) + \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} f(t,\phi(t))\ \mathrm{d}t \\ x_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_k) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\phi(t_{k+1} - xk + 1 = (\phi(t_k) - x_k) + \left(\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, \phi(t))\, \mathrm{d}t - hf(t_k, x_k) \right) \Rightarrow$$

$$E_{k+1} = |\phi(t_{k+1}) - x_{k+1}| \leq |\phi(t_k) - x_k| + \left| \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, \phi(t))\, \mathrm{d}t - hf(t_k, x_k) \right| =$$

$$= E_k + \left| \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, \phi(t))\, \mathrm{d}t - hf(t_k, \phi(t_k)) + h(f(t_k, \phi(t_k)) - f(t_k, x_k)) \right| \Rightarrow$$

$$E_{k+1} \leq E_k + \left| \underbrace{\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, \phi(t))\, \mathrm{d}t - hf(t_k, \phi(t_k))}_{\leq Bh^2} \right| + h| \underbrace{f(t_k, \phi(t_k)) - f(t_k, x_k)}_{\leq L_2|\phi(t_k) - x_k|} | \leq$$

$$\leq E_k + Bh^2 + hL_2| \underbrace{\phi(t_k) - x_k}_{E_k} | \Rightarrow$$

$$\boxed{E_{k+1} \leq E_k(1 + hL_2) + Bh^2,\ \forall k = \overline{0, N-1}} \tag{5}$$

Demonstrăm prin inducţie că: $E_k \leq \dfrac{(1 + hL_2)^k - 1}{hL_2} Bh^2,\ \forall k = \overline{1, N}$.
Obsevăm că $E_0 = 0$.
$E_1 \leq Bh^2$ adevărat pentru că avem $E_1 \leq E_0(1 + hL_2) + Bh^2$ din (5).
Presupunem adevărat până la k şi demonstrăm pentru $k + 1$.
Din (5) rezultă că : $E_{k+1} \leq E_k(1 + hL_2) + Bh^2 \leq$
$\leq \dfrac{(1 + hL_2)^k - 1}{hL_2} Bh^2(1+hL_2)+Bh^2 = Bh^2 \left(\dfrac{(1 + hL_2)^{k+1} - 1 - 1hL_2 + hL_2}{hL_2} \right) =$
$= \dfrac{(1 + hL_2)^{k+1} - 1}{hL_2} Bh^2$.

Pentru $k = N$ avem $E_N = |\phi(\underbrace{t_N}_{t_0+T}) - x_N|$.
Se ştie că $1 + x < e^x,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 1 + hL_2 < e_{hL_2} \Rightarrow$

$$E_k \leq \frac{e^{hkL_2} - 1}{hL_2} Bh^2,\ \forall k = \overline{0, N} \tag{6}$$

Din (6) rezultă că : $E_N = |\phi(t_N) - x_N| \leq \dfrac{e^{hNL_2}}{hL_2} Bh^2 = \underbrace{\dfrac{B(e^{hNL_2} - 1)}{L_2} h}_{=A}$

Observaţii :

1. Metoda Euler explicită este de ordin 1.

2. Metoda Euler se numeşte implicită dacă schema (4) se înlocuieşte cu:

$$\begin{cases} x_0 \\ x_{k+1} = x_k + hf(t_{k+1}, x_{k+1} \ \forall k = \overline{0, N-1} \end{cases} \tag{7}$$

Pentru $k = \overline{0, N-1}$ se rezolvă ecuaţia neliniară (7) şi se obţine x_{k+1}.

Temă Fie problema Cauchy:

$$\begin{cases} x' = 1 - \frac{x}{t} \ t \in [1, 2] \\ x(1) = 1 \end{cases}$$

a) Determinaţi soluţia exactă a problemei.
b) Pentru $N = 2$, calculaţi $x_2 \approx \phi(2)$ cu metoda Euler explicită.

Algoritm pentru metoda Euler explicită

<u>`INPUT:`</u> $f(\cdot, \cdot), t_0, x_0, N, T$
`1.` $h = \dfrac{T}{N}$
`2.` `FOR` $k = \overline{0, N-1}$
`3.` $t_{k+1} = t_k + h$
`4.` $x_{k+1} \leftarrow x_k + hf(t_k, x_k)$
<u>`OUTPUT:`</u> $(t_k)_{k=\overline{0,N}}$, $(x_k)_{k=\overline{0,N}}$, $\{(t_k, x_k)\}_{k=\overline{0,N}}$ `(reprezentare grafică)`

Metoda Taylor de construire a unei scheme de aproximare de ordin $p \in \mathbb{N}*$ pentru o problema Cauchy pentru ecuaţii diferenţiale

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Se consideră o schemă numerică:

$$\begin{cases} x_0 \\ x_{k+1} = x_k + h\emptyset(t_k, x_k, h) \end{cases} \tag{8}$$

Dacă $\emptyset$ soluţie pentru (8), spunem că (9) aproximează o soluţie numerică de ordin p pentru aproximarea soluţiei problemei (8), dacă:

$$\max_{k=\overline{0,N-1}} \left| \frac{1}{h} \left(\phi(t_{k+1}) - \phi(t_k)\right) - h\emptyset(t_k, x_k, h) \right| = O(h^p)$$

Fie $t \in [t_0, t_0 + T]$. Din dezvoltarea în serie Taylor:

$$\phi(t + h) = \phi(t) - \frac{\phi'(t)}{1!}h + \frac{\phi^{(2)}(t)}{2!}h^2 + ... + \frac{\phi^{(p)}(t)}{p!}h^p + O(h^{p+1})$$

$$\Rightarrow \frac{\phi(t+h)-\phi(t)}{h} = \phi'(t) + \underbrace{+\frac{\phi^{(2)}(t)}{2!}h + ... + \frac{\phi^{(p)}(t)}{p!}h^{p-1} + O(h^p)}_{O(h)}$$

$\phi'(t) = f(t, \phi(t))$
Pentru $p = 1$: $\dfrac{\phi(t+h)-\phi(t)}{h} = f(t,\phi(t)) \Rightarrow \emptyset(t,x,h) = f(t,x) \Rightarrow$ metoda Euler explicită: $x_{k+1} - x_k = f(t_k, x_k)$.

Pentru $p = 2$: $\phi^{(2)}(t) = \dfrac{d}{dt}(\phi'(t)) = \dfrac{d}{dt}(f(t,\phi(t))) = \dfrac{\partial}{\partial t}f(t,\phi(t)) + \dfrac{\partial}{\partial x}f(t,\phi(t))\phi'(t) = \dfrac{\partial}{\partial t}f(t,\phi(t)) + \dfrac{\partial}{\partial x}f(t,\phi(t)) \cdot f(t,\phi(t))$.

$\emptyset(t,x,h) = g_0(t,x) + g_1(t,x)h + ... + g_{p-1}(t,x)h^{p-1}$
$g_1(t,x) = \dfrac{\partial}{\partial t}f(t,x) + \left(\dfrac{\partial}{\partial x}f(t,x)\right) \cdot f(t,x)$

$$\emptyset(t,x,h) = f(t,x) + \left(\frac{\partial}{\partial t}f(t,x) + \left(\frac{\partial}{\partial x}f(t,x)\right) f(t,x)\right) h$$

Temă $g_2 =?$
Pentru $p = 3$: $\phi^{(3)}(t) = \dfrac{d}{dt}\left(\phi^{(2)}(t)\right) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,\phi(t)) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,\phi(t)) \cdot f(t,\phi(t))\right)$
$\Rightarrow g_2(x,t) = \emptyset(t,x,h) = f(t,x) + hg_1(t,x) + h^2 g_2(t,x)$

Temă Construiţi o schemă de ordin 2 pentru:

$$\begin{cases} x' = 1 + \frac{x}{t},\ t \in [1,2] \\ x(1) = 2 \end{cases}$$

$$f(t,x) = 1 + \frac{x}{t}$$

$f(t,x) = 1 + \dfrac{x}{t} = g_0(t,x)$
$\phi'(t) = f(t,\phi(t))$
$\phi^{(2)} = \dfrac{d}{dt}\left(1 + \dfrac{\phi(t)}{t}\right) = -\dfrac{1}{t^2}\phi(t) +' \dfrac{\phi'(t)}{t} = -\dfrac{\phi(t)}{t^2} + \dfrac{f(t,\phi(t))}{t} = -\dfrac{\phi(t)}{t^2} + \dfrac{1 + \frac{\phi(t)}{t}}{t} = \dfrac{-\phi(t) + t + \phi(t)}{t^2} = \dfrac{1}{t}$
$g_1(t,x) = \dfrac{1}{t}$
Calculăm g_2.