Seminarul nr. 3

Ecuatii diferentiale

I. **Ecuatii liniare**.

Fie I un interval propriu al axei reale si $a : I \longrightarrow \mathbf{R}$ o functie continua. Vom mai considera ca fiind date: $t_0 \in I$ si $x_0 \in \mathbf{R}$.

Simbolic ecuatiile liniare au forma:

$$x' = a(t)x. \tag{3.1}$$

Problema Cauchy pentru aceste ecuatii are forma:

$$\begin{cases} x' & = & a(t)x \ , \\ x(t_0) & = & x_0 \ . \end{cases} \tag{3.2}$$

Conform teoremei lui Peano aceasta problema **are solutie** definita intr-o vecinatate locala a lui t_0. Teorema Cauchy-Lipschitz asigura si **unicitatea** solutiei. De fapt problema are **solutie unica globala**, adica solutie unica $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}$. Deci φ este derivabila si

$$\begin{cases} \varphi'(t) & = & a(t)\varphi(t), \quad \forall t \in I, \\ \varphi(t_0) & = & x_0 \ . \end{cases} \tag{3.3}$$

Evident ca ecuatiile liniare sunt un caz particular de ecuatii cu variabile separate si anume cazul in care $b(x) \equiv x$, $x \in \mathbf{R}$. Cum $b(x) = 0 \Longleftrightarrow x = x_0 = 0$ rezulta ca o solutie stationara este

$$\varphi_0(t) = 0, t \in I. \tag{3.4}$$

Teorema de unicitate ne spune ca, pentru $x_0 = 0$, unica solutie a problemei Cauchy (3.2) este cea identic nula, adica tocmai solutia stationara de sus.

Sa retinem concluzia importanta:

O solutie a unei ecuatii liniare nula intr-un punct este identic nula, ceea ce se poate reformula si sub forma: **daca o solutie a unei ecuatii liniare este diferita de zero intr-un punct $t_0 \in I$ atunci ea este diferita de zero in orice punct din domeniul sau de definitie I.**

Aplicand algoritmul de rezolvare pentru ecuatiile cu variabile separate obtinem:

$$\frac{dx}{x} = a(t)dt. \tag{3.5}$$

Integrand in ambii membri ai relatiei (3.5) obtinem:

$$\ln|x| = \int a(t)dt + C_1.$$

Rescriind constanta C_1 sub forma $C_1 = \ln C$ din egalitatea de mai sus deducem:

$$x(t) = C \exp(\int a(t)dt), t \in I.$$

Pentru a rezolva problema Cauchy (3.2) vom alege primitiva $\int_{t_0}^{t} a(s)ds$ a lui a (adica primitiva care se anuleaza in punctul t_0) si din conditia Cauchy obtinem:

$$C = x(t_0) = x_0.$$

Asadar obtinem solutia unica:

$$\varphi(t) = x_0 \exp(\int_{t_0}^{t} a(s)ds) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}, t \in I.$$

Daca dorim un rationament mai acurat, dupa ce avem informatia de mai sus, pentru a rezolva problema Cauchy (3.2), daca φ este o solutie a problemei va fi suficient sa inmultim relatia (3.3), scrisa sub forma:

$$\varphi'(t) - a(t)\varphi(t) = 0,$$

cu $e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$ si sa observam ca:

$$e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}[\varphi'(t) - a(t)\varphi(t)] = \frac{d}{dt}[\varphi(t)e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}] = 0, \ t \in I.$$

Conform unui rezultat cunoscut de analiza trebuie sa existe o constanta C asa incat:

$$\varphi(t)e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} = C \Longleftrightarrow \varphi(t) = Ce^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}, \ \forall t \in I.$$

Din conditia initiala $\varphi(t_0) = x_0$ obtinem $C = x_0$.

Asadar solutia problemei Cauchy (3.2) este data de:

$$\varphi(t) = x_0 \ e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}, \ \forall t \in I.$$

II. **Ecuatii afine**.

Fie a, $b : I \longrightarrow \mathbf{R}$ continue si $t_0 \in I$ si $x_0 \in \mathbf{R}$. Asociem problema:

$$\begin{cases} x\prime & = & a(t)x + b(t) \ , \\ x(t_0) & = & x_0 \ . \end{cases}$$

Si aceasta problema are solutie unica $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}$.Deci

$$\varphi'(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)$$

Pentru a o determina sa admitem ca am gasit o solutie particulara $\varphi_p : I \longrightarrow \mathbf{R}$ a ecuatiei diferentiale: $x' = a(t)x + b(t)$. Si in acest caz vom avea:

$$\varphi_p'(t) = a(t)\varphi_p(t) + b(t).$$

Scazand membru cu membru obtinem:

$$\varphi'(t) - \varphi_p'(t) = a(t)[\varphi(t) - \varphi_p(t)],\ t \in I.$$

Prin urmare

$$\varphi(t) - \varphi_p(t) = x_0\ e^{\int_{t_0}^t a(s)ds},\ \forall t \in I.$$

Asadar totul se reduce la determinarea unei solutii particulare. Lagrange propus determinarea unei solutii particulare de forma:

$$\varphi_p(t) = C(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds},\ \forall t \in I,$$

unde $C : I \longrightarrow \mathbf{R}$ este o functie derivabila necunoscuta care se determina cerand ca φ_p sa fie solutie a acuatiei afine. Rezulta:

$$C'(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + C(t)a(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} = a(t)C(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + b(t).$$

Reducand termenii egali obtinem:

$$C'(t) = e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds}b(t),$$

de unde determinam $C(t)$ prin:

$$C(t) = \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^\tau a(s)ds}b(\tau)d\tau,\ t \in I.$$

In fine obtinem solutia finala:

$$\varphi(t) = x_0\ e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + \int_{t_0}^t e^{\int_\tau^t a(s)ds}b(\tau)d\tau,\ t \in I$$

Tema.

1) Sa se determine solutia generala a ecuatiilor:
a) $tx' - 2x = 2t^4$;
b) $x' = \frac{x}{3t-x^2}$;
c) $tx' - 2t^2\sqrt{x} = 4x$;
d) $x' + 2xe^t - x^2 = e^{2t} + e^t$.
2) Se considera ecuatia:

$$x' + a(t)x = b(t),$$

unde $a, b : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ sunt continue, $a(t) \geq \gamma > 0$, $\forall t \in \mathbf{R}$ si $\lim_{t\to\infty} b(t) = 0$. Atunci orice solutie a ecuatiei de mai sus tinde la zero cand $t \to \infty$.