TEHNICI DE OPTIMIZARE

- Istoric
- Dificultăți de abordare şi/sau rezolvare
- Planul de învățământ (= 10 săptămâni)

ANTON BĂTĂTORESCU

TEHNICI DE OPTIMIZARE

CURS = **2** ORE / SĂPTĂMÂNĂ

SEMINAR = **1** ORĂ / SĂPTĂMÂNĂ

FORMA DE EXAMINARE: **examen !** (scris)

- 2 subiecte de teorie:
  - enunțuri cu demonstrații;
  - enunțuri descriptive.
- 1 exercițiu de seminar (cu subpuncte)

Conținutul cursului:

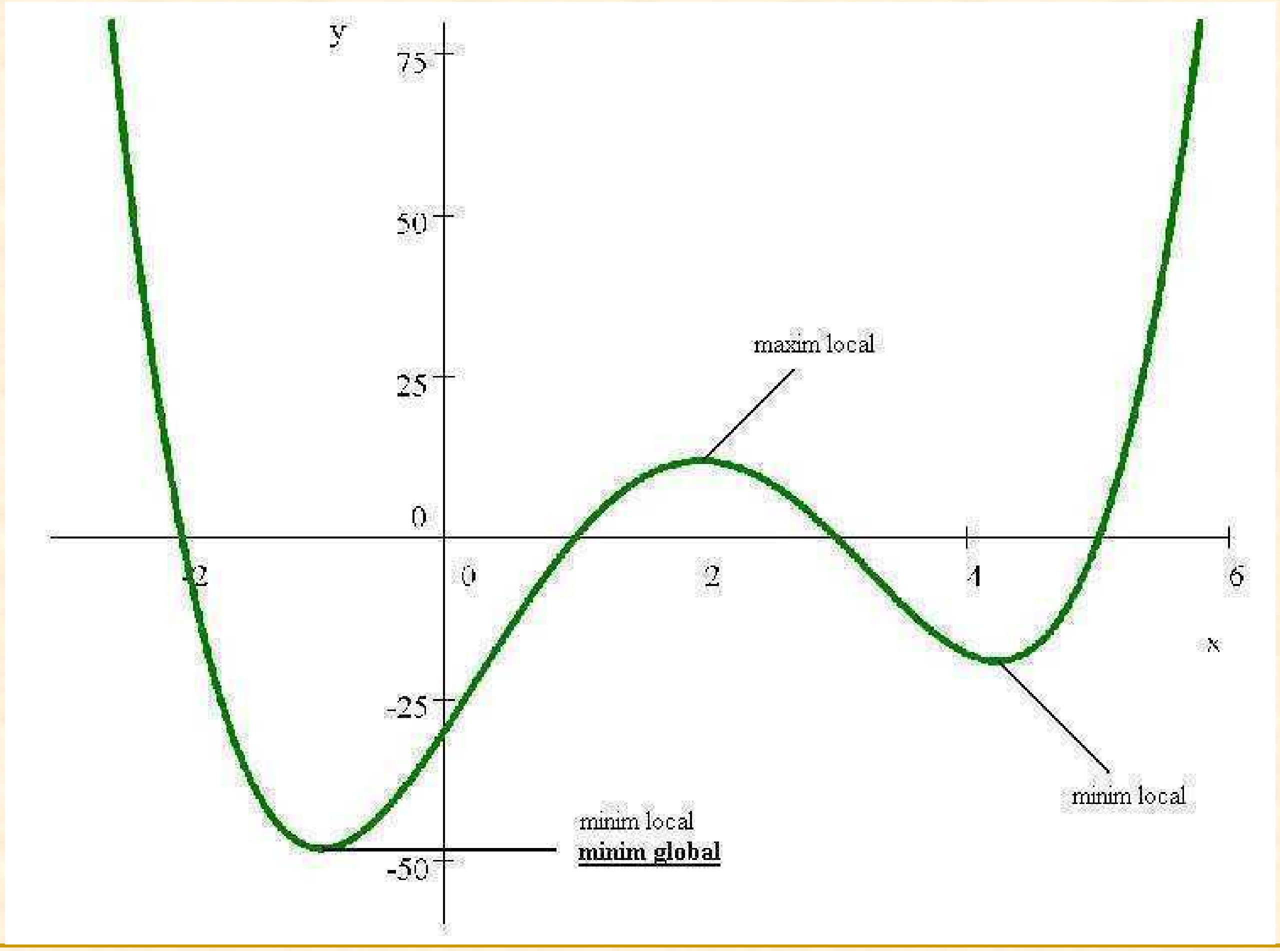
- Modele de optimizare liniară şi programe software.
- **Algoritmul simplex primal şi algoritmul simplex dual.**
- **Interpretarea economică a valorilor şi soluțiilor.**
- Metode de partiționare şi relaxare.
- Metode pentru probleme de optimizare neliniară.

Bibliografie

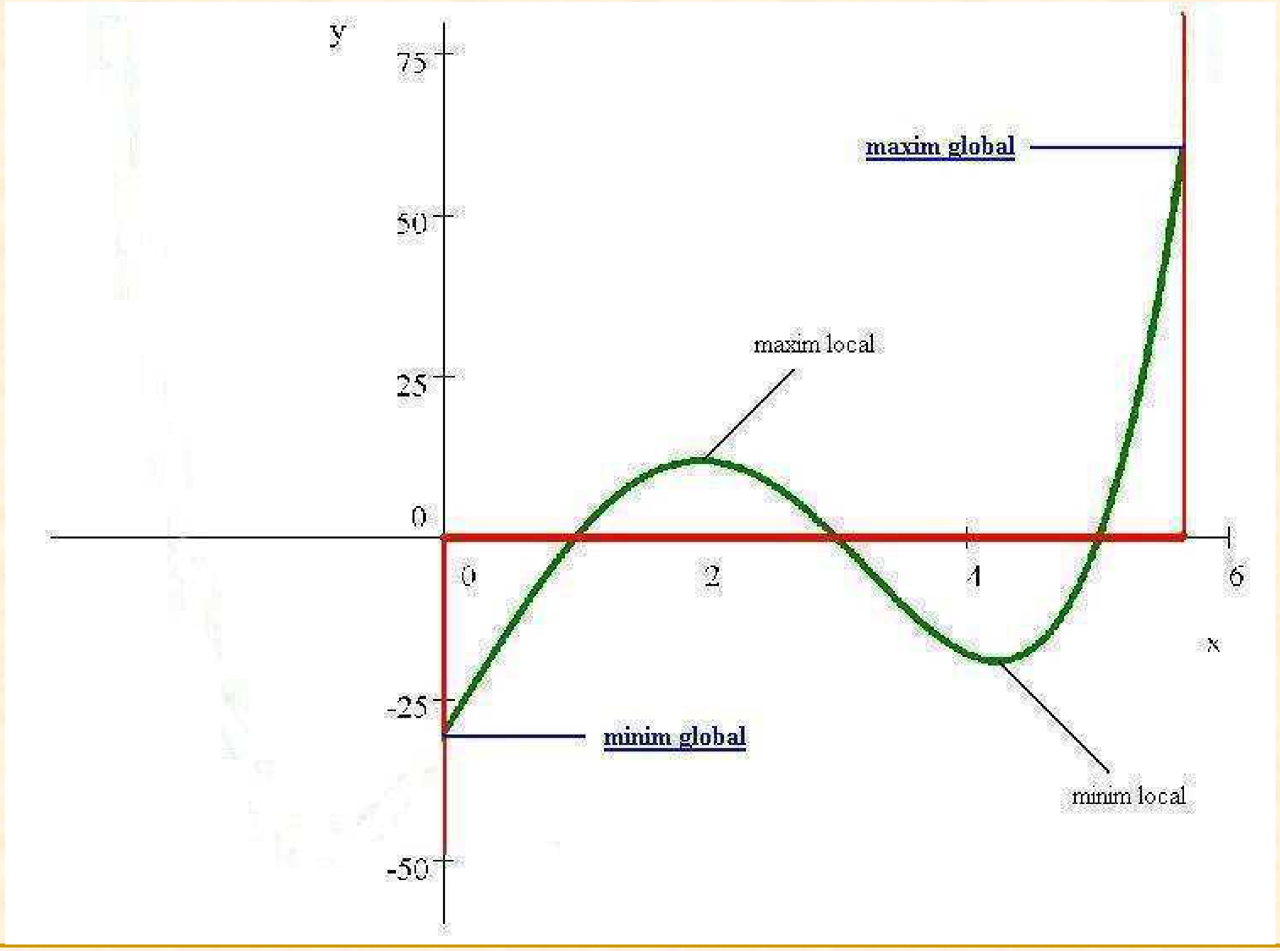
- A. Ştefănescu, C. Zidăroiu, "Cercetări Operaționale", Ed. Did. şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.
- H. Karloff, ”Linear Programming”, Progress in Theoretical Computer Science, Birkhäuser, 1991, Berlin.
- A. Bătătorescu, "Metode de optimizare liniară", Ed. Universității din Bucureşti, 2003.
- V. Preda, M. Bad, "Culegere de probleme de cercetări operaționale", Tipografia Universității din Bucureşti, 1978.
- http://www.ilog.com/
- www.maximalsoftware.com

Exemplu – optimizare neliniară

$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, \quad f(x)=(x+2)(x-1)(x-3)(x-5)=x^4-7x^3+5x^2+31x-30$



$$f:[0,\ 5.6]\to\mathbf{R},\quad f(x)=x^4-7x^3+5x^2+31x-30$$



Exemplu – optimizare liniară

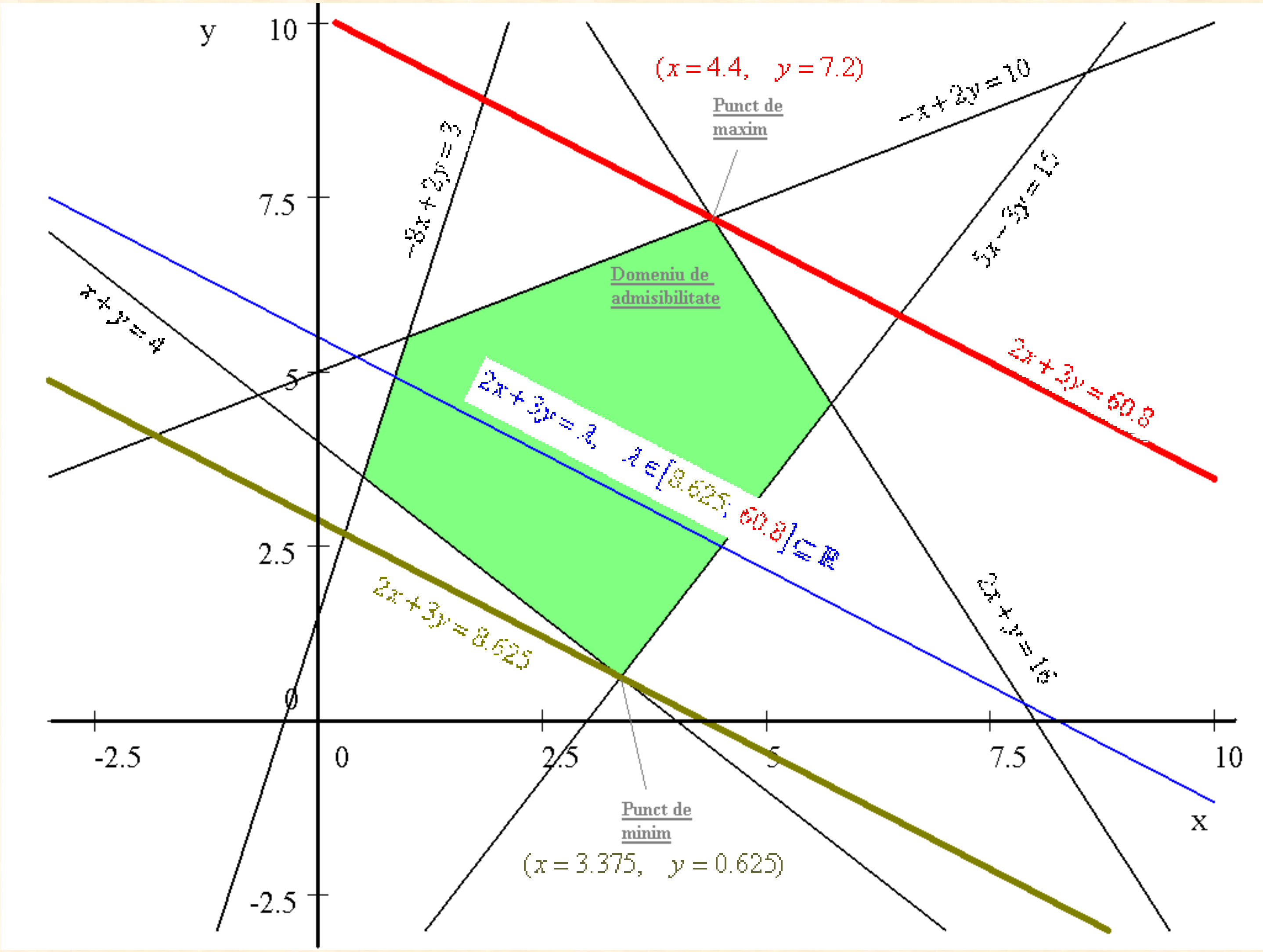
Să se determine:

$$optim\{2x+3y\}, \qquad \text{unde} \quad optim = \min \vee \max$$

Cu îndeplinirea condițiilor:

$$\begin{aligned} x + y &\geq 4 \\ -8x + 2y &\leq 3 \\ 5x - 3y &\leq 15 \\ -x + 2y &\leq 10 \\ 2x + y &\leq 16 \end{aligned}$$

Rezolvare grafică



Notații și câteva definiții

Vom nota cu $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ o matrice cu *m* linii şi *n* coloane:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

unde, $a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad 1 \le i \le m, 1 \le j \le n,$

Transpusa matricei A o vom nota cu $A^{\mathrm{f}} \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Mulțimea matricelor de aceeaşi dimensiune formează un spațiu vectorial peste corpul numerelor reale.

$$A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}, \alpha \in \mathbb{R}, \Rightarrow \quad A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}, \quad \alpha B = \left(\alpha b_{ij}\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

Produsul matricelor: $A \in \mathbf{R}^{m\times k}$, $B \in \mathbf{R}^{k\times n}$ este matricea:

$$A \cdot B = C \in \mathbf{R}^{m\times n}, \quad c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} b_{lj}, \ 1 \le i \le m, \ 1 \le j \le n.$$

Determinantul unei matrice pătratice $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ este numărul

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

Dacă $\det A \neq 0$, matricea A se numeşte nesingulară, iar în acest caz, există o unică matrice A^{-1} numită matrice inversă:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n\times n}$$

Un vector coloana $v \in \mathbf{R}^n$ este considerat ca fiind o matrice $v \in \mathbf{R}^{n \times 1}$, iar transpusa acesteia este un vector linie.

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \left(v_1, v_2, \cdots, v_n\right)^{\mathrm{f}}, \quad v^{\mathrm{f}} = \left(v_1, v_2, \cdots, v_n\right)$$

Produsul scalar a doi vectori $x, y \in \mathbf{R}^n, \quad x^{\mathrm{f}} \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = y^{\mathrm{f}} \cdot x.$

Definim relațiile:

$$x = y \;\Leftrightarrow\; x_i = y_i \text{ pentru orice } i = \overline{1, n},$$

$$x \le y \;\Leftrightarrow\; x_i \le y_i \text{ pentru orice } i = \overline{1, n} \;\Leftrightarrow\; y - x \in \mathbf{R}_+^n$$

În particular, $x \ge \mathbf{0} \in \mathbf{R}^n \;\Leftrightarrow\; x_i \ge 0, \forall i = \overline{1, n}.$

Sisteme de ecuații liniare

Fie: $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbf{R}^{m}$ şi considerăm sistemul de ecuații liniare:

$$A \cdot x = b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

unde $x \in \mathbf{R}^{n}$ reprezintă vectorul necunoscutelor.

Notăm: $A_i = \left(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}\right)$ linia "i" a matricei A;

$A^j = \left(a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj}\right)^{f}$ coloana "j" a matricei A.

$$A \cdot x = b \quad \Leftrightarrow \quad A_i \cdot x = b_i\ ,\ \ i = \overline{1,m} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} A^j x_j = b.$$

- Teorema Kronecker-Capelli : $rang\left(A\right)=rang\left(A\vdots b\right)=r\leq\min\left\{m,n\right\}$

- Ecuații principale, respectiv variabile principale.

- Ecuații secundare, respectiv variabile secundare.

- Prin eliminarea ecuațiilor secundare, considerăm: $rang\left(A\right)=m\leq n.$

- Pentru $m = n$, avem soluția unică: $x=A^{-1}\cdot b.$

- Pentru $m < n$, avem o infinitate de soluții.

  Există m coloane liniar independente ale matricei A, care formează

  o matrice de bază: $B=\left(A^{s_1}A^{s_2}\ldots A^{s_m}\right).$

  Restul coloanelor formează matricea $\boldsymbol{R}$.

Partiționarea matricei: $A = (B \vdots R)$.

Notăm mulțimea de indici corespunzătoare coloanelor lui B cu

$$\mathrm{B} = \{s_1, s_2, \dots, s_m\},$$

iar mulțimea de indici corespunzătoare coloanelor lui R cu

$$\mathrm{R} = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \mathrm{B}.$$

Partiționarea variabilei $x \in \mathbf{R}^n$, $\quad x = \begin{pmatrix} x_{\mathrm{B}} \\ x_{\mathrm{R}} \end{pmatrix}$, în care,

$$x_{\mathrm{B}} = (x_i)_{i \in \mathrm{B}} = \left(x_{s_1}, x_{s_2}, \dots, x_{s_m}\right)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^m$$ variabile de bază (principale)

$$x_{\mathrm{R}} = (x_j)_{j \in \mathrm{R}} \in \mathbf{R}^{n-m}$$ variabile secundare

$$A \cdot x = b \quad \Leftrightarrow \quad B \cdot x_B + R \cdot x_R = b \quad \Leftrightarrow \quad x_B = B^{-1} \cdot b - B^{-1} \cdot R \cdot x_R$$

Vectorul $v \in \mathbb{R}^n$ se numeşte **soluție** a sistemului dacă $A \cdot v = b$.

O soluție a sistemului este numită **soluție de bază**, dacă componentele ei diferite de zero corespund unor coloane liniar independente ale matricei A.

Pentru orice bază B, se poate obține o soluție de bază:

$$v = \begin{pmatrix} v_B \\ v_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[B^{-1} \cdot b\right]_B \\ \mathbf{0}_R \end{pmatrix}$$

Deoarece $rang(A) = m$, cel mult m componente ale unei soluții de bază pot fi nenule. Dacă soluția de bază are exact m componente nenule, ea se numeşte **nedegenerată**; în caz contrar ea este **degenerată**.

Probleme de optimizare liniară

O problemă de optimizare constă din minimizarea sau maximizarea unei anumite funcții - numită funcție obiectiv - în prezența unor restricții care trebuie satisfăcute.

Este suficient să studiem doar probleme de **minimizare**, deoarece

$$\inf\left\{ f(x) \mid x \in \mathrm{P} \right\} = -\sup\left\{ -f(x) \mid x \in \mathrm{P} \right\}$$

Fie $\alpha \in \mathbf{R}^n$ şi $\beta \in \mathbf{R}$

Tipuri de restricții în raport cu felul problemei de optimizare:

- **minimizare**
  - concordantă: $\alpha^{\mathrm{f}} \cdot x \geq \beta,$
  - neconcordantă: $\alpha^{\mathrm{f}} \cdot x \leq \beta,$
- **maximizare**
  - concordantă: $\alpha^{\mathrm{f}} \cdot x \leq \beta,$
  - neconcordantă: $\alpha^{\mathrm{f}} \cdot x \geq \beta,$

Forma generală:

Conține toate tipurile de restricții şi variabile care pot apărea.

$$\inf\left\{c_1^{\mathrm{f}}\cdot x_1 + c_2^{\mathrm{f}}\cdot x_2 + c_3^{\mathrm{f}}\cdot x_3\right\}$$

în raport cu

$$\begin{cases} A_{11}\cdot x_1 + A_{12}\cdot x_2 + A_{13}\cdot x_3 \geq b_1 & \text{concordante} \\ A_{21}\cdot x_1 + A_{22}\cdot x_2 + A_{23}\cdot x_3 = b_2 & \text{egalitate} \\ A_{31}\cdot x_1 + A_{32}\cdot x_2 + A_{33}\cdot x_3 \leq b_3 & \text{neconcordante} \\ x_1 \geq \mathbf{0} \qquad x_3 \leq \mathbf{0} & \end{cases}$$

Datele problemei: $A_{ij} \in \mathbf{R}^{m_i \times n_j},\quad b_i \in \mathbf{R}^{m_i},\quad c_j \in \mathbf{R}^{n_j},\quad 1 \leq i \leq 3,\ 1 \leq j \leq 3.$

Necunoscutele problemei sunt grupate în trei variabile vectoriale:

$x_j \in \mathbf{R}^{n_j}, 1 \leq j \leq 3,$

- x_1 – are componente nenegative;
- x_2 – oarecare;
- x_3 – are componente nepozitive.

Forma standard:

Conține restricții egalitate şi variabile nenegative.

$$\inf\left\{c^{\mathrm{f}}\cdot x \,\middle|\, A\cdot x = b,\ x \geq 0\right\}$$

Datele problemei: $A \in \mathbf{R}^{m\times n}, \quad b \in \mathbf{R}^{m}, \quad c \in \mathbf{R}^{n}$.

Forma canonică:

Conține restricții concordante şi variabile nenegative.

$$\inf\left\{c^{\mathrm{f}}\cdot x \,\middle|\, A\cdot x \geq b,\ x \geq 0\right\}$$

Datele problemei: $A \in \mathbf{R}^{m\times n}, \quad b \in \mathbf{R}^{m}, \quad c \in \mathbf{R}^{n}$.

Forma mixtă:

Conține restricții concordante şi egalitate, şi variabile nenegative.

$$\inf\left\{ c^{\mathrm{t}} \cdot x \;\middle|\; \begin{array}{l} A_1 \cdot x \geq b_1 \\ A_2 \cdot x = b_2 \end{array} ,\ x \geq 0 \right\}$$

Datele problemei: $\begin{cases} A_1 \in \mathbf{R}^{m_1 \times n}, & b_1 \in \mathbf{R}^{m_1} \\ A_2 \in \mathbf{R}^{m_2 \times n}, & b_2 \in \mathbf{R}^{m_2} \end{cases} ,\quad c \in \mathbf{R}^n.$

Formele problemelor de programare liniară sunt echivalente!

Alegerea formei → în funcție de necesități:

- forma standard pentru algoritmi;
- forma canonica pentru dualitate.

Transformări echivalente:

- Sensul unei inegalități se schimbă prin înmulțire cu – 1.
- Transformarea unei inegalități într-o ecuație:

$$\begin{cases} \alpha^{\mathrm{f}} \cdot x \le \beta & \Leftrightarrow \quad \alpha^{\mathrm{f}} \cdot x + y = \beta \\ \alpha^{\mathrm{f}} \cdot x \ge \beta & \Leftrightarrow \quad \alpha^{\mathrm{f}} \cdot x - y = \beta \end{cases}, \quad y \ge 0$$

y se numeşte variabilă ecart (slack variable).

- Transformarea unei ecuații în inegalități:

$$\alpha^{\mathrm{f}} \cdot x = \beta \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha^{\mathrm{f}} \cdot x \le \beta \\ \alpha^{\mathrm{f}} \cdot x \ge \beta \end{cases}$$

- O variabilă nepozitivă $x \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad x' = -x \ge 0.$

- O variabilă oarecare $x \in \mathbf{R} \quad \Leftrightarrow \quad x = x^{+} - x^{-},$

  unde $\quad x^{+} \ge 0, \; x^{-} \ge 0.$

Teorema fundamentală a programări liniare

Considerăm problema de programare liniară în forma standard:

$$\inf\left\{c^{\mathrm{f}}\cdot x \mid A\cdot x=b,\ x\geq \mathbf{0}\right\} \qquad \text{(P)}$$

Fără a restrânge generalitatea, presupunem: $rang\left(A\right)=m<n.$

Vectorul $v\in \mathbf{R}^n$ se va numi soluție admisibilă a problemei (P), dacă

$$A\cdot v=b,\ v\geq \mathbf{0}.$$

O soluție admisibilă $v\in \mathbf{R}^n$ este o soluție optimă a problemei (P), dacă oricare ar fi soluția admisibilă y, avem: $c^{\mathrm{f}}\cdot v\leq c^{\mathrm{f}}\cdot y.$

Teoremă:

1. *Dacă problema* (P) *are o soluție admisibilă, atunci ea are şi o soluție admisibilă de bază*.
2. *Dacă problema* (P) *are o soluție optimă, atunci ea are şi o soluție optimă de bază*.

Demonstrație.

Fie $v \in \mathbb{R}^n$ o <u>soluție admisibilă</u> a problemei (P).

Considerăm $v = (v_1, v_2, ..., v_k, 0, ..., 0)^T$, $v_i > 0$, $i = \overline{1,k}.$

- $k = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \mathbf{0}$ este evident o soluție de bază.
- $k \geq 1.$ Dacă $\{A^1, A^2, ..., A^k\}$ sunt liniar independente, atunci $\boldsymbol{v}$ este o soluție admisibilă de bază.

Dacă $\{A^1, A^2, ..., A^k\}$ sunt liniar dependente, $\exists\, y_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,k},\quad \sum_{i=1}^{k} |y_i| > 0,$

astfel încât: $\sum_{i=1}^{k} A^i y_i = \mathbf{0}.$

Considerăm: $y \in \mathbb{R}^n,\ y = (y_1, y_2, ..., y_k, 0, ..., 0)^T.$ Rezultă:

$$\boxed{y \neq \mathbf{0}, \text{și} \quad A \cdot y = \mathbf{0}}$$

Definim vectorul: $x(\lambda) = v + \lambda y, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Avem: $A \cdot x(\lambda) = A \cdot (v + \lambda y) = A \cdot v + \lambda A \cdot y = A \cdot v = b,$

deci, $x(\lambda)$ <u>este o soluție</u> a sistemului $A \cdot x = b$ pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$

Deoarece $x_i(\lambda)=0,\ i=\overline{k+1,n},$ avem:

$$x(\lambda)\geq \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad x_i(\lambda)=v_i+\lambda y_i\geq 0, \ \text{ pentru } \ i=\overline{1,k}.$$

$$\lambda\geq\frac{-v_i}{y_i} \ \text{ dacă } \ y_i>0, \qquad \lambda\leq\frac{-v_i}{y_i} \ \text{ dacă } \ y_i<0.$$

Definim:

$$\lambda'=\begin{cases}\max\limits_{1\leq i\leq k}\left\{\dfrac{-v_i}{y_i}\ \middle|\ y_i>0\right\} & \text{dacă există } \ y_i>0,\\ -\infty & \text{dacă nu există } \ y_i>0,\end{cases}$$

$$\lambda''=\begin{cases}\min\limits_{1\leq i\leq k}\left\{\dfrac{-v_i}{y_i}\ \middle|\ y_i<0\right\} & \text{dacă există } \ y_i<0,\\ +\infty & \text{dacă nu există } \ y_i<0,\end{cases}$$

deci, $\forall\,\lambda\in[\lambda',\lambda''] \ \Rightarrow \ x(\lambda)\geq\mathbf{0},$ adică <u>este soluție admisibilă</u>.

<u>Observație:</u> cel puțin una dintre valorile λ', λ'' este <u>finită</u>!

Pentru $\lambda_0=\text{finit}\{\lambda',\lambda''\} \ \Rightarrow \ \exists\, i_0, 1\leq i_0\leq k,$ astfel încât $v_{i_0}+\lambda_0 y_{i_0}=0.$

Deci, vectorul $x(\lambda_0)$ este o soluție <u>admisibilă</u> a problemei (P) şi are cel mult $(k-1)$ componente nenule.

Fie $\overline{v} \in \mathbf{R}^n$ o <u>soluție optimă</u> a problemei (P) cu $\overline{v}_i > 0,\ i = \overline{1,k}.$

Raționăm analog ca în cazul precedent: …

Dacă $\{A^1, A^2, ..., A^k\}$ sunt liniar dependente, există un interval astfel încât $\forall\, \lambda \in [\lambda', \lambda''] \quad \Rightarrow \quad x(\lambda) = \overline{v} + \lambda y$ este <u>soluție admisibilă</u>.

Din relația: $c^{\mathrm{f}} \cdot \overline{v} \le c^{\mathrm{f}} \cdot x(\lambda) = c^{\mathrm{f}} \cdot \overline{v} + \lambda c^{\mathrm{f}} \cdot y$

rezultă: $\forall\, \lambda \in [\lambda', \lambda'']$ avem $\underline{\lambda c^{\mathrm{f}} \cdot y \ge 0}.$

<u>Observație:</u> Deoarece $\lambda' < 0,\ \lambda'' > 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c^{\mathrm{f}} \cdot y = 0.}$

În caz contrar, luând $\lambda = -sign\{c^{\mathrm{f}} \cdot y\} \quad \Rightarrow \quad \lambda c^{\mathrm{f}} \cdot y < 0,$ contradicție!

Deci, $c^{\mathrm{f}} \cdot x(\lambda) = c^{\mathrm{f}} \cdot \overline{v},$ adică, $\forall\, \lambda \in [\lambda', \lambda''],\quad x(\lambda)$ este <u>optimă</u>.

Pentru $\lambda_0 = \text{finit}\{\lambda', \lambda''\} \quad \Rightarrow \quad \exists\, i_0, 1 \le i_0 \le k,$ astfel încât $\overline{v}_{i_0} + \lambda_0 y_{i_0} = 0.$

Deci, vectorul $x(\lambda_0)$ este o soluție <u>optimă</u> a problemei (P) şi are cel mult $(k-1)$ componente nenule.

În general, mulțimea soluțiilor admisibile a problemei (P) este infinită, spre deosebire de cea a soluțiilor admisibile de bază, care are cel mult C_n^m elemente. Importanța teoremei fundamentale a programării liniare constă în aceea că, pentru determinarea unei soluții optime, dacă ea există, căutarea este redusă de la o mulțime infinită, la una finită, fiind suficientă investigarea doar a soluțiilor de bază.

Teoremele algoritmului simplex

Considerăm problema de programare liniară în forma standard:

$$\inf\left\{c^{T}\cdot x \mid A\cdot x = b,\ x \geq \mathbf{0}\right\} \qquad \text{(P)}$$

unde $A \in \mathbf{R}^{m\times n}, \quad b \in \mathbf{R}^{m}, \quad c \in \mathbf{R}^{n}, \quad rang(A) = m < n.$

Considerăm matricea de bază $B = \left(A^{s_1} A^{s_2} \ldots A^{s_m}\right).$

Partiționăm matricea $A = (B\;R)$ şi obținem:

$$A\cdot x = b \quad \Leftrightarrow \quad x_{\mathrm{B}} = B^{-1}\cdot b - B^{-1}\cdot R\cdot x_{\mathrm{R}} = \overline{x} - \sum_{j\in \mathrm{R}} Y^{j} x_{j}$$

unde am notat: $\overline{x} = B^{-1}\cdot b \in \mathbf{R}^{m}$ şi $Y^{j} = B^{-1}\cdot A^{j},\ 1 \leq j \leq n.$

Poziția indicelui $s_i \in \mathrm{B} = \left\{s_1, s_2, \ldots, s_m\right\}$ o notăm $loc(s_i) = i.$

Pe componente, sistemul se scrie:

$$x_{s_i} = \overline{x}_i - \sum_{j\in \mathrm{R}} y_{ij} x_j\,, \quad s_i \in \mathrm{B},\ i = loc(s_i).$$

În raport cu baza B, soluția de bază este: $x = \begin{pmatrix} x_{\mathrm{B}} \\ x_{\mathrm{R}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$

Matricea de bază B se numeşte ***primal admisibilă****, dacă* $\boxed{B^{-1} \cdot b \geq \mathbf{0}.}$

Funcția obiectiv se poate exprima astfel:

$$z = c^{\mathrm{f}} \cdot x = c_{\mathrm{B}}^{\mathrm{f}} \cdot x_{\mathrm{B}} + c_{\mathrm{R}}^{\mathrm{f}} \cdot x_{\mathrm{R}} = c_{\mathrm{B}}^{\mathrm{f}} \cdot \left(\overline{x} - \sum_{j \in \mathrm{R}} Y^{j} x_{j} \right) + c_{\mathrm{R}}^{\mathrm{f}} \cdot x_{\mathrm{R}} =$$

$$= c_{\mathrm{B}}^{\mathrm{f}} \cdot \overline{x} - \sum_{j \in \mathrm{R}} \left(c_{\mathrm{B}}^{\mathrm{f}} \cdot Y^{j} - c_{j} \right) x_{j} = \overline{z} - \sum_{j \in \mathrm{R}} \left(z_{j} - c_{j} \right) x_{j}$$

unde am notat: $\overline{z} = c_{\mathrm{B}}^{\mathrm{f}} \cdot \overline{x}, \quad z_{j} = c_{\mathrm{B}}^{\mathrm{f}} \cdot Y^{j}, 1 \leq j \leq n.$

Teoremă (optim): *Fie B o bază primal admisibilă. Dacă* $\left(z_{j} - c_{j} \right) \leq 0,$ *pentru orice $j \in \mathrm{R},$ atunci baza B este optimă.*

Demonstrație. Pentru orice soluție admisibilă $v \in \mathbb{R}^{n}$ avem:

$$z = c^{\mathrm{f}} \cdot v = \overline{z} - \sum_{j \in \mathrm{R}} \left(z_{j} - c_{j} \right) v_{j} \geq \overline{z}.$$

Teoremele algoritmului simplex

Considerăm problema de programare liniară în forma standard:

$$\inf\left\{c^{T}\cdot x \mid A\cdot x=b,\ x\geq \mathbf{0}\right\} \qquad \text{(P)}$$

unde $A\in \mathbb{R}^{m\times n},\quad b\in \mathbb{R}^{m},\quad c\in \mathbb{R}^{n},\quad rang\left(A\right)=m<n.$

Considerăm matricea de bază $B=\left(A^{s_1}A^{s_2}\ldots A^{s_m}\right).$

Partiționăm matricea $A = \left(B\ R\right)$ şi obținem:

$$A\cdot x=b \quad\Leftrightarrow\quad x_{\mathrm{B}}=B^{-1}\cdot b-B^{-1}\cdot R\cdot x_{\mathrm{R}}=\overline{x}-\sum_{j\in \mathrm{R}}Y^{j}x_{j}$$

unde am notat: $\overline{x}=B^{-1}\cdot b\in \mathbb{R}^{m}$ şi $Y^{j}=B^{-1}\cdot A^{j},\ 1\leq j\leq n.$

Poziția indicelui $s_i\in \mathrm{B}=\left\{s_1,s_2,\ldots,s_m\right\}$ o notăm $loc_{\mathrm{B}}\left(s_i\right)=i.$

Pe componente, sistemul se scrie:

$$x_{s_i}=\overline{x}_i-\sum_{j\in \mathrm{R}}y_{ij}x_j\,,\quad s_i\in \mathrm{B},\ i=loc_{\mathrm{B}}\left(s_i\right).$$

Soluția de bază corespunzătoare lui B : $x = \begin{pmatrix} x_{\mathrm{B}} \\ x_{\mathrm{R}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$

*Matricea de bază B se numeşte **primal admisibilă**, dacă* $\boxed{B^{-1} \cdot b \geq \mathbf{0}.}$

Funcția obiectiv se poate exprima astfel:

$$z = c^{\mathrm{f}} \cdot x = c_{\mathrm{B}}^{\mathrm{f}} \cdot x_{\mathrm{B}} + c_{\mathrm{R}}^{\mathrm{f}} \cdot x_{\mathrm{R}} = c_{\mathrm{B}}^{\mathrm{f}} \cdot \left(\overline{x} - \sum_{j \in \mathrm{R}} Y^j x_j \right) + c_{\mathrm{R}}^{\mathrm{f}} \cdot x_{\mathrm{R}} =$$

$$= c_{\mathrm{B}}^{\mathrm{f}} \cdot \overline{x} - \sum_{j \in \mathrm{R}} \left(c_{\mathrm{B}}^{\mathrm{f}} \cdot Y^j - c_j \right) x_j = \overline{z} - \sum_{j \in \mathrm{R}} \left(z_j - c_j \right) x_j$$

unde am notat: $\overline{z} = c_{\mathrm{B}}^{\mathrm{f}} \cdot \overline{x}, \;\; z_j = c_{\mathrm{B}}^{\mathrm{f}} \cdot Y^j, 1 \leq j \leq n.$

Teoremă (optim): *Fie B o bază primal admisibilă. Dacă* $\left(z_j - c_j \right) \leq 0,$ *pentru orice $j \in \mathrm{R}$, atunci baza B este optimă.*

Demonstrație. Pentru orice soluție admisibilă $v \in \mathbf{R}^n$ avem:

$$z = c^{\mathrm{f}} \cdot v = \overline{z} - \sum_{j \in \mathrm{R}} \left(z_j - c_j \right) v_j \geq \overline{z}.$$

Teoremă (optim infinit): *Fie* B *o bază primal admisibilă. Dacă există un indice* $k \in \mathrm{R},$ *astfel încât* $(z_k - c_k) > 0,$ *şi* $Y^k = B^{-1} \cdot A^k \leq \mathbf{0},$ *atunci problema* (P) *are optimul* (-)*infinit.*

Demonstrație. Fie $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0.$ Definim vectorul:

$$x(\lambda) = \begin{pmatrix} x_{\mathrm{B}}(\lambda) = \overline{x} - \lambda Y^k \\ x_{\mathrm{R}}(\lambda) = \lambda e^{loc_{\mathrm{R}}(k)} \end{pmatrix}, \quad \text{unde} \quad e^{loc_{\mathrm{R}}(k)} \in \mathbb{R}^{n-m}$$

este vector unitar.

Se verifică fără dificultate că: $x(\lambda) \geq \mathbf{0},$

$$A \cdot x(\lambda) = B \cdot x_{\mathrm{B}}(\lambda) + R \cdot x_{\mathrm{R}}(\lambda) = b - \lambda A^k + \lambda A^k = b.$$

Rezultă, $\forall\, \lambda \geq 0,$ $x(\lambda)$ este <u>soluție admisibilă</u> pentru (P).

Funcția obiectiv este: $c^{\mathrm{f}} \cdot x(\lambda) = c_{\mathrm{B}}^{\mathrm{f}} \cdot x_{\mathrm{B}}(\lambda) + c_{\mathrm{R}}^{\mathrm{f}} \cdot x_{\mathrm{R}}(\lambda) =$

$$= c_{\mathrm{B}}^{\mathrm{f}} \cdot \left(\overline{x} - \lambda Y^k\right) + \lambda c_k = \overline{z} - \lambda\left(z_k - c_k\right)$$

Deoarece $(z_k - c_k) > 0,$ rezultă: $\lim\limits_{\lambda \to \infty} c^{\mathrm{f}} \cdot x(\lambda) = -\infty.$

Observație.

În condițiile Teoremei de optim infinit, baza B definește o soluție nenulă a sistemului omogen $\{A\,x = \mathbf{0},\ x \geq \mathbf{0}\}$:

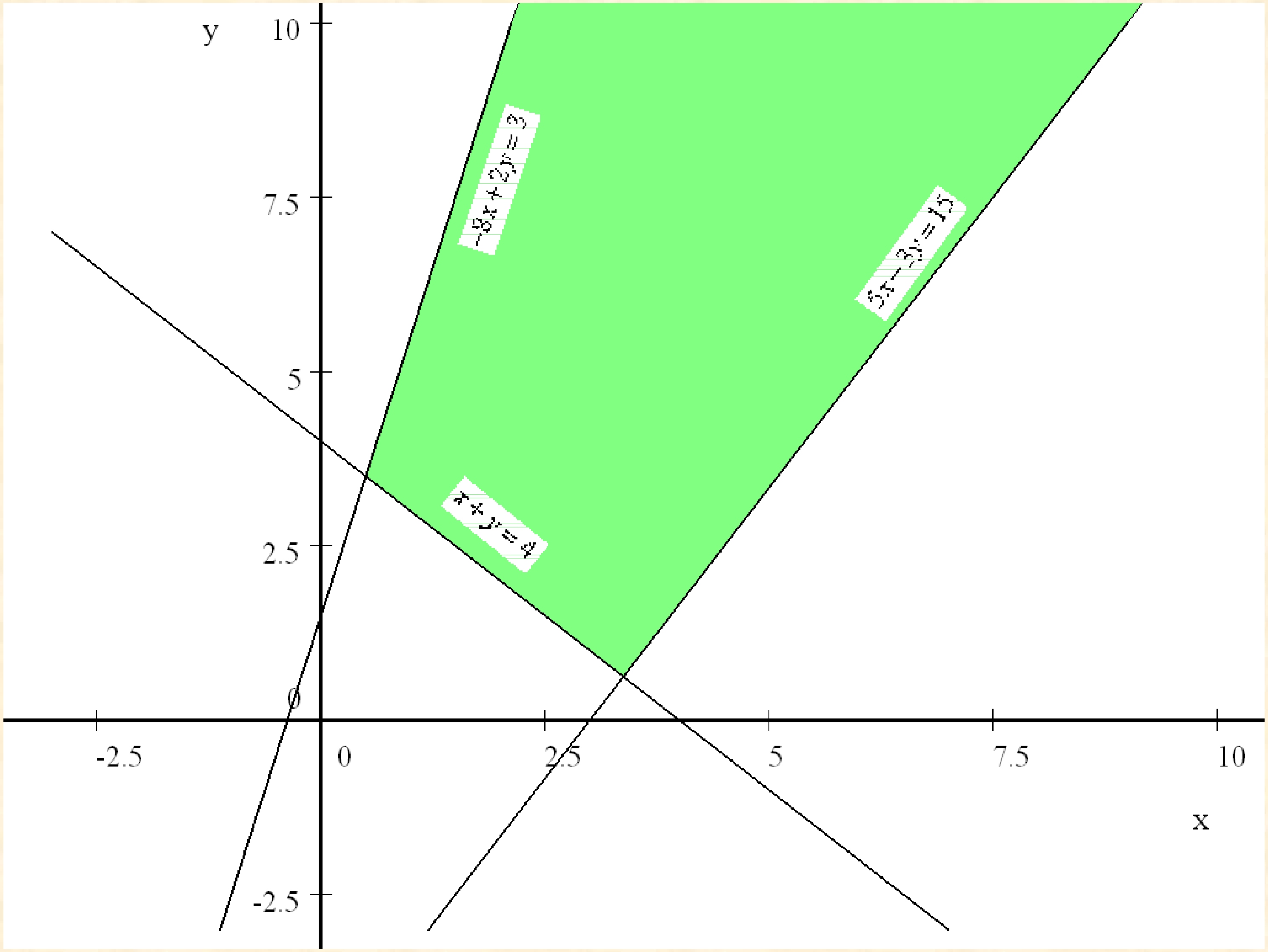
$$v \in \mathbf{R}^n, \quad v = \begin{pmatrix} v_{\mathrm{B}} = -Y^k \\ v_{\mathrm{R}} = e^{loc_{\mathrm{R}}(k)} \end{pmatrix}$$

Acest vector reprezintă o direcție (rază) de-a lungul căreia soluțiile admisibile

$$x(\lambda) = \begin{pmatrix} \overline{x}_{\mathrm{B}} \\ \mathbf{0}_{\mathrm{R}} \end{pmatrix} + \lambda v$$

sunt nemărginite.

Vectorul v se mai numeşte *direcția spre (–)infinit*, şi împreună cu soluția de bază, pentru $\lambda \in [0, \infty)$, descrie o muchie nemărginită a domeniului de admisibilitate.


y
10
7.5
5
2.5
0
-2.5
-2.5
0
2.5
5
7.5
10
x
$-8x + 2y = 3$
$5x - 3y = 15$
$x + y = 4$

Lema (substituției): *Fie* $B=\left(A^{s_1}A^{s_2}\cdots A^{s_m}\right)\in\mathbb{R}^{m\times m}$ *nesingulară şi vectorul* $A^k\in\mathbb{R}^m$, $k\notin\mathcal{B}=\{s_1,s_2,\dots,s_m\}$. *Considerăm matricea:*

$$\tilde{B}=\left(A^{s_1}\cdots A^{s_{r-1}}\,A^{k}\,A^{s_{r+1}}\cdots A^{s_m}\right).$$

Notăm vectorul $Y^k=B^{-1}A^k=\left(y_{1k},y_{2k},\dots,y_{mk}\right)^{T}$.

Au loc următoarele afirmații:

- $\det\tilde{B}\neq 0 \iff y_{rk}\neq 0,\ unde\ \ r=loc_{\mathcal{B}}\left(s_r\right).$
- *Pentru* $y_{rk}\neq 0$, *avem:* $\boxed{\tilde{B}^{-1}=E_r(\eta)\cdot B^{-1}}$

unde $\eta=\left(\frac{-y_{1k}}{y_{rk}},\dots,\frac{-y_{r-1,k}}{y_{rk}},\frac{1}{y_{rk}},\frac{-y_{r+1,k}}{y_{rk}},\dots,\frac{-y_{mk}}{y_{rk}}\right)^{T}$

$$E_r(\eta)=\left(e^1\cdots e^{r-1}\,\eta\,e^{r+1}\cdots e^m\right)=\begin{pmatrix}\ddots & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & 1 & \cdots & \frac{-y_{ik}}{y_{rk}} & \cdots \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \cdots & 0 & \cdots & \frac{1}{y_{rk}} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \ddots\end{pmatrix},$$

$e^i\in\mathbb{R}^m$ *este vector unitar cu* 1 *in pozitia* i.

Demonstrație. Din notația $Y^k = B^{-1}A^k$ rezultă: $A^k = B \cdot Y^k = \sum_{j=1}^{m} A^{s_j} y_{jk}$

- Fie $\det \mathring{B} \neq 0.$

Prin absurd, $y_{rk} = 0 \;\Rightarrow$ coloanele lui $\mathring{B}$ liniar dependente. Contradicție!

Fie acum $\underline{y_{rk} \neq 0.}$

Prin absurd, $\det \mathring{B} = 0 \;\Rightarrow$ are coloanele liniar dependente. Deci, există

$$\lambda_j \in \mathbf{R},\ \sum_{j=1}^{m} |\lambda_j| > 0, \text{ astfel încât } \sum_{j=1,\ j\neq r}^{m} A^{s_j}\lambda_j + A^k \lambda_r = \mathbf{0}.$$

Avem: $\underline{\lambda_r \neq 0.}$ În caz contrar obținem $\det B = 0.$ Contradicție!

Înlocuind pe A^k şi regrupând termenii, obținem:

$$\sum_{j=1,\ j\neq r}^{m} A^{s_j}\left(\lambda_j + y_{jk}\lambda_r\right) + A^{s_r} y_{rk}\lambda_r = \mathbf{0},$$

adică o combinație liniară de coloane ale matricei B care este egală cu zero şi deci toți coeficienții trebuie să fie nuli. Dar, $\underline{y_{rk}\lambda_r \neq 0.}$ Contradicție!

- Coloanele lui B şi $\bar{B}$ coincid pentru $j \neq r$. Avem deci,

$$A^{s_j} = \bar{B} \cdot e^j \;, \quad j \neq r.$$

Deoarece $y_{rk} \neq 0$, din relația $A^k = \sum_{j=1}^{m} A^{s_j} y_{jk}$ rezultă:

$$A^{s_r} = \sum_{j=1,\ j \neq r}^{m} A^{s_j} \left(\frac{-y_{jk}}{y_{rk}} \right) + A^k \frac{1}{y_{rk}} = \bar{B} \cdot \eta$$

Prin urmare, putem scrie:

$$B = \bar{B} \cdot E_r(\eta) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{B}^{-1} = E_r(\eta) \cdot B^{-1}.$$

Teoremă (schimbarea bazei): *Fie* $B = \left(A^{s_1} A^{s_2} \cdots A^{s_m} \right)$ *o bază primal admisibilă. Presupunem că există* $k \in \mathcal{R}$, *astfel încât* $\left(z_k - c_k \right) > 0$ *şi vectorul* $Y^k = B^{-1} \cdot A^k$ *are cel puțin un element pozitiv.*

Dacă alegem indicele $s_r \in \mathcal{B}$, $loc_{\mathcal{B}}\left(s_r \right) = r$, *astfel încât*

$$\frac{\overline{x}_r}{y_{rk}} = \min_{1 \le i \le m} \left\{ \frac{\overline{x}_i}{y_{ik}} \;\middle|\; y_{ik} > 0 \right\},$$

atunci, matricea $\breve{B} = \left(A^{s_1} \cdots A^{s_{r-1}} A^k A^{s_{r+1}} \cdots A^{s_m} \right)$ *este o bază primal admisibilă, pentru care* $\tilde{z} = c_{\breve{B}}^T \cdot \breve{B}^{-1} \cdot b \le c_B^T \cdot B^{-1} \cdot b = \overline{z}$.

Demonstrație. Evident, $y_{rk} > 0$. Din Lema substituției rezultă că $\breve{B}$ este o matrice nesingulară.

Trebuie arătat că $\breve{B}^{-1} \cdot b \ge \mathbf{0}$.

$$\mathring{B}^{-1} \cdot b = E_r(\eta) \cdot B^{-1} \cdot b = E_r(\eta) \cdot \overline{x} =$$

$$= \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & 1 & \cdots & \dfrac{-y_{ik}}{y_{rk}} & \cdots \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \cdots & 0 & \cdots & \dfrac{1}{y_{rk}} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vdots \\ \overline{x}_i \\ \vdots \\ \overline{x}_r \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \overline{x}_i - \dfrac{y_{ik}}{y_{rk}} \overline{x}_r \\ \vdots \\ \dfrac{\overline{x}_r}{y_{rk}} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Evident, $\dfrac{\overline{x}_r}{y_{rk}} \geq 0.$ Dacă $y_{ik} < 0, \Rightarrow \overline{x}_i - y_{ik} \dfrac{\overline{x}_r}{y_{rk}} \geq 0.$

Dacă $y_{ik} > 0, \Rightarrow \overline{x}_i - y_{ik} \dfrac{\overline{x}_r}{y_{rk}} = \underbrace{y_{ik}}_{>0} \underbrace{\left(\dfrac{\overline{x}_i}{y_{ik}} - \dfrac{\overline{x}_r}{y_{rk}} \right)}_{\geq 0} \geq 0.$

Ținând seama că pentru $k \in \tilde{\mathrm{B}}$ avem $loc_{\tilde{\mathrm{B}}}(k) = r,$ obținem:

$$\tilde{z} = c_{\tilde{\mathrm{B}}}^{\mathrm{f}} \cdot \tilde{B}^{-1} \cdot b = c_{\tilde{\mathrm{B}}}^{\mathrm{f}} \cdot E_r(\eta) \cdot B^{-1} \cdot b = c_{\tilde{\mathrm{B}}}^{\mathrm{f}} \cdot E_r(\eta) \cdot \overline{x} =$$

$$= \left(\cdots, c_{s_i}, \cdots, c_k, \cdots \right) \cdot \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & 1 & \cdots & \dfrac{-y_{ik}}{y_{rk}} & \cdots \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \cdots & 0 & \cdots & \dfrac{1}{y_{rk}} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \overline{x} =$$

$$= \left(\cdots, c_{s_i}, \cdots, \sum_{i \neq r} \frac{-c_{s_i} y_{ik}}{y_{rk}} + \frac{c_k}{y_{rk}}, \cdots\right) \cdot \bar{x} =$$

$$= \sum_{i \neq r} c_{s_i} \bar{x}_i - \left(\sum_{i \neq r} c_{s_i} y_{ik} - c_k\right) \frac{\bar{x}_r}{y_{rk}} + c_{s_r} \bar{x}_r - c_{s_r} y_{rk} \frac{\bar{x}_r}{y_{rk}} =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{m} c_{s_i} \bar{x}_i}_{\bar{z}} - \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{m} c_{s_i} y_{ik}}_{z_k} - c_k\right) \frac{\bar{x}_r}{y_{rk}} = \bar{z} - \underbrace{(z_k - c_k)}_{>0} \underbrace{\frac{\bar{x}_r}{y_{rk}}}_{\geq 0} \leq \bar{z}.$$

Paşii algoritmului simplex

- Pasul 0. Se determină (dacă există?!) o bază primal admisibilă B şi se calculează B^{-1}.
- Pasul 1. Se calculează
  $\overline{x} = B^{-1} \cdot b,\ \overline{z} = c_{\mathrm{B}}^{T} \cdot \overline{x},\ Y = B^{-1} \cdot A,\ z^{T} - c^{T} = c_{\mathrm{B}}^{T} \cdot Y - c^{T}.$
- Pasul 2. (test de optimalitate) Dacă $z - c \leq \mathbf{0},$ atunci s-a obținut valoarea optimă $\overline{z}$, şi soluția optimă de bază $x_{\mathrm{B}} = \overline{x},\ x_{\mathrm{R}} = \mathbf{0}.$ STOP.
- Pasul 3. (test de optim infinit) Dacă $\exists\, k \in \mathrm{R}$ pentru care $z_k - c_k > 0$ şi $Y^k \leq \mathbf{0},$ atunci problema are optim (-)infinit. STOP.
- Pasul 4. (schimbarea bazei) Se alege $k \in \mathrm{R}$ cu $z_k - c_k > 0$ şi de determină $s_r \in \mathrm{B},\ loc(s_r) = r,$ astfel încât
  $$\frac{\overline{x}_r}{y_{rk}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\overline{x}_i}{y_{ik}} \,\middle|\, y_{ik} > 0 \right\}.$$
  Se formează matricea $\tilde{B} = B \setminus A^{s_r} \cup A^k,$ se calculează inversa $\tilde{B}^{-1} = E_r(\eta) \cdot B^{-1}$ şi se revine la Pasul 1.

Formule pentru schimbarea bazei

Fiecare iterație a algoritmului simplex este caracterizată de inversa bazei primal admisibile B^{-1}.

$$\bar{x} = B^{-1} \cdot b; \quad u^{\mathrm{f}} = c_{\mathrm{B}}^{\mathrm{f}} \cdot B^{-1};$$

$$\bar{z} = c_{\mathrm{B}}^{\mathrm{f}} \cdot \bar{x} = c_{\mathrm{B}}^{\mathrm{f}} \cdot B^{-1} \cdot b = u^{\mathrm{f}} \cdot b;$$

$$Y = B^{-1} \cdot A;$$

$$z^{\mathrm{f}} - c^{\mathrm{f}} = c_{\mathrm{B}}^{\mathrm{f}} \cdot Y - c^{\mathrm{f}} = u^{\mathrm{f}} \cdot A - c^{\mathrm{f}}$$

Componentele vectorului u se numesc *multiplicatori simplex*.

Componentele lui $z - c$ se numesc *costuri reduse*.

Recalcularea elementelor din algoritmul simplex în urma schimbării unei baze se face cu ajutorul Lemei substituției. (Sunt cunoscuți indicii s_r şi k, precum şi vectorul Y^k.)

Valoarea nouă ← Formulă de calcul cu valori vechi

Valorile pentru noua inversă a matricei de bază:

Notăm: $B^{-1} = \left(\beta_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le m}}$ $\tilde{B}^{-1} = \left(\tilde{\beta}_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le m}}$

Avem:

$$\tilde{B}^{-1} = E_r\left(\eta\right)\cdot B^{-1},$$

de unde rezultă:

$$\boxed{\begin{aligned} &\tilde{\beta}_{ij} = \beta_{ij} - \frac{\beta_{rj} y_{ik}}{y_{rk}} \text{ pentru } i = \overline{1,m},\ i \ne r,\ \ j = \overline{1,m};\\ &\tilde{\beta}_{rj} = \frac{\beta_{rj}}{y_{rk}} \text{ pentru } j = \overline{1,m}. \end{aligned}}$$

Valorile soluției de bază:

$$\tilde{x} = \tilde{B}^{-1} \cdot b = E_r(\eta) \cdot B^{-1} \cdot b = E_r(\eta) \cdot \overline{x} =$$

$$= \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & 1 & \cdots & \dfrac{-y_{ik}}{y_{rk}} & \cdots \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \cdots & 0 & \cdots & \dfrac{1}{y_{rk}} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vdots \\ \overline{x}_i \\ \vdots \\ \overline{x}_r \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \overline{x}_i - \dfrac{y_{ik}}{y_{rk}} \overline{x}_r \\ \vdots \\ \dfrac{\overline{x}_r}{y_{rk}} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \tilde{x}_i = \overline{x}_i - \dfrac{y_{ik}}{y_{rk}} \overline{x}_r \quad \text{pentru } i \neq r; \\ \tilde{x}_r = \dfrac{\overline{x}_r}{y_{rk}} \quad \text{unde } r = loc(k) \text{ pentru } k \in \tilde{B}. \end{array}}$$

Valorile pentru multiplicatorii simplex:

$$\tilde{u}^{f} = c_{\hat{B}}^{f} \cdot \hat{B}^{-1} = \left(\cdots, c_{s_i}, \cdots, c_k, \cdots\right) \cdot E_r(\eta) \cdot B^{-1}$$

Componenta j:

$$\tilde{u}_j = \left(\cdots, c_{s_i}, \cdots, \sum_{i \neq r} \frac{-c_{s_i} y_{ik}}{y_{rk}} + \frac{c_k}{y_{rk}}, \cdots\right) \cdot \begin{pmatrix} \vdots \\ \beta_{ij} \\ \vdots \\ \beta_{rj} \\ \vdots \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{i \neq r} c_{s_i} \beta_{ij} - \left(\sum_{i \neq r} c_{s_i} y_{ik} - c_k\right) \frac{\beta_{rj}}{y_{rk}} + c_{s_r} \beta_{rj} - c_{s_r} \beta_{rj} \frac{y_{rk}}{y_{rk}}$$

$$\boxed{\tilde{u}_j = u_j - (z_k - c_k) \frac{\beta_{rj}}{y_{rk}}, \quad 1 \leq j \leq m.}$$

Pentru matricea $\tilde{Y} = \tilde{B}^{-1} \cdot A,$ coloana $\tilde{Y}^{j},\ j = \overline{1,n}$ este:

$$\tilde{Y}^{j} = \tilde{B}^{-1} \cdot A^{j} = E_r(\eta) \cdot B^{-1} \cdot A^{j} = E_r(\eta) \cdot Y^{j} = \begin{pmatrix} \vdots \\ y_{ij} - \dfrac{y_{ik}}{y_{rk}} y_{rj} \\ \vdots \\ \dfrac{y_{rj}}{y_{rk}} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \tilde{y}_{ij} = y_{ij} - \dfrac{y_{ik}}{y_{rk}} y_{rj} \quad \text{pentru } i = \overline{1,m},\ i \neq r; \\ \tilde{y}_{rj} = \dfrac{y_{rj}}{y_{rk}} \end{array}}$$

Valoarea funcției obiectiv:

$$\tilde{z} = c_{\mathrm{B}}^{\mathrm{f}} \cdot \tilde{B}^{-1} \cdot b = \tilde{u}^{\mathrm{f}} \cdot b = \sum_{j=1}^{m} \tilde{u}_j b_j$$

$$\tilde{z} = \sum_{j=1}^{m} \left(u_j - (z_k - c_k) \frac{\beta_{rj}}{y_{rk}} \right) b_j = \sum_{j=1}^{m} u_j b_j - \frac{(z_k - c_k)}{y_{rk}} \sum_{j=1}^{m} \beta_{rj} b_j$$

$$\boxed{\tilde{z} = \overline{z} - \frac{(z_k - c_k)}{y_{rk}} \overline{x}_r}$$

Valoarea costurilor reduse:

$$\tilde{z}_j - c_j = c_B^T \cdot \tilde{B}^{-1} \cdot A^j - c_j = \tilde{u}^T \cdot A^j - c_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \tilde{u}_i a_{ij} - c_j = \sum_{i=1}^{m} \left(u_i - (z_k - c_k) \frac{\beta_{ri}}{y_{rk}} \right) a_{ij} - c_j =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij} - c_j \right) - \frac{(z_k - c_k)}{y_{rk}} \sum_{i=1}^{m} \beta_{ri} a_{ij}$$

$$\boxed{\tilde{z}_j - c_j = (z_j - c_j) - \frac{(z_k - c_k) y_{rj}}{y_{rk}}, \ \ 1 \le j \le n.}$$

Organizarea calculelor

Tabloul simplex standard

x_B	$\bar{x}$	$Y = B^{-1} A$
	$\bar{z}$	$z - c$

			⋯	c_j	⋯	c_k	⋯
c_B	V.B	$\bar{x}$	⋯	x_j	⋯	x_k	⋯
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	
c_{s_i}	x_{s_i}	$\bar{x}_i$	⋯	y_{ij}	⋯	y_{ik}	⋯
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	
c_{s_r}	x_{s_r}	$\bar{x}_r$	⋯	y_{rj}	⋯	$\boxed{y_{rk}}$	⋯
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	
		$\bar{z}$	⋯	$z_j - c_j$	⋯	$z_k - c_k$	⋯

$$\bar{z} = \sum_{i=1}^{m} c_{s_i} \bar{x}_i$$

$$z_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_{s_i} y_{ij} - c_j$$

Tabloul simplex revizuit

x_B			
	$\bar{x}$	B^{-1}	
	$\bar{z}$	u^{T}	

c_B	V.B.					x_k
		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
c_{s_i}	x_{s_i}	$\bar{x}_i$	$\cdots$	β_{ij}	$\cdots$	y_{ik}
		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
c_{s_r}	x_{s_r}	$\bar{x}_r$	$\cdots$	β_{rj}	$\cdots$	$\boxed{y_{rk}}$
		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
		$\bar{z}$	$\cdots$	u_j	$\cdots$	$z_k - c_k$

$$\bar{z} = \sum_{i=1}^{m} c_{s_i} \bar{x}_i$$

$$u_j = \sum_{i=1}^{m} c_{s_i} \beta_{ij}$$

$$z_k - c_k = u^{T} \cdot A^k - c_k > 0$$

$$Y^k = B^{-1} \cdot A^k$$

Regula dreptunghiului

Elementul $y_{rk} \neq 0,$ se numeşte pivot. Restul elementelor le redenumim t_{ij} .

- Linia pivotului se împarte la pivot:

$$\tilde{t}_{rj} = \frac{t_{rj}}{y_{rk}}, \quad \forall\ j = \overline{0, n}.$$

- Coloana pivotului devine un vector unitar:

$$\tilde{t}_{rk} = 1 \text{ şi } \quad \tilde{t}_{ik} = 0, \quad \forall\ i = \overline{1,\ m+1}, \quad i \neq r.$$

- Restul elementelor din tablou, se calculează după *regula dreptunghiului*:

$$\tilde{t}_{ij} = t_{ij} - \frac{t_{rj}\, t_{ik}}{y_{rk}}, \quad \begin{cases} \forall\ i = \overline{1, m+1},\ i \neq r, \\ \forall\ j = \overline{0, n},\ j \neq k. \end{cases}$$

Determinarea unei baze primal admisibile

Considerăm problema de programare liniară în forma standard:

$$\inf\left\{ c^{\mathrm{T}} \cdot x \mid A \cdot x = b,\ x \geq \mathbf{0} \right\} \qquad \text{(P)}$$

unde $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbf{R}^{m}$, $\boxed{b \geq \mathbf{0},}$ $c \in \mathbf{R}^{n}$.

Acestei probleme îi asociem **problema artificială**:

$$\min\left\{ \mathbf{e}^{\mathrm{T}} \cdot x^{a} \mid A \cdot x + \mathbf{I}_{m} \cdot x^{a} = b,\ x \geq \mathbf{0},\ x^{a} \geq \mathbf{0} \right\} \qquad (\mathrm{P_a})$$

unde $\mathbf{e} = (1,\ldots,1)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^{m}$, $x^{a} = \left(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}\right)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^{m}$,

iar $\mathbf{I}_m$ este matricea unitate de ordinul m .

Proprietăți ale problemei (P$_a$) :

- matricea restricțiilor: $\left(A \vdots \mathbf{I}_m\right) \in \mathbf{R}^{m\times(n+m)}$, $rang\left(A \vdots \mathbf{I}_m\right) = m < n+m$;
- $\mathbf{I}_m$ este o bază primal admisibilă: $\mathbf{I}_m^{-1} \cdot b = b \geq \mathbf{0}$;
- are o soluție optimă finită: $x^{a} \geq \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \overline{z}_a = \mathbf{e}^{\mathrm{T}} \cdot x^{a} = \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \geq 0.$

Concluzie: (P$_a$) se poate rezolva cu algoritmul simplex.

Fie B baza optimă a problemei (P$_a$) iar $\mathcal{B}$ mulțimea indicilor de bază.

Teoremă. *Dacă valoarea minimă a problemei* (P$_a$), $\bar{z}_a > 0,$ *atunci problema inițială* (P) *nu are soluție.*

Demonstrație. Prin absurd, dacă (P) are o soluție admisibilă, conform TFPL are şi o soluție admisibilă de bază.

Fie B_* baza corespunzătoare. Ea este formată doar din coloane ale matricei A **!**

Avem: $B_*^{-1} \cdot b \geq \mathbf{0},$ deci B_* este bază primal admisibilă **şi** pentru (P$_a$), iar variabilele x^a sunt secundare!

Deci, (P$_a$) are o soluție admisibilă (de bază), pentru care,

$$x^a = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}^{\mathrm{f}} \cdot x^a = 0 < \bar{z}_a \rightarrow \text{ valoarea optimă. Contradicție.}$$

Teoremă. *Dacă* $\mathcal{B} \cap \{n+1, \ldots, n+m\} = \varnothing,$ *atunci* $\bar{z}_a = 0$ *şi* B *este o bază primal admisibilă a problemei inițiale* (P).

Demonstrație. Evident, B este formată doar din coloane a matricei A.

Teoremă. *Dacă valoarea minimă a lui* (P$_a$) *este* $\overline{z}_a = 0$ *şi există* $n+i_0 \in$ B *,* *pentru care* $y_{i_0 j} = 0,\ \forall\ j = \overline{1,n},\quad i_0 = loc_{\mathrm{B}}\left(n+i_0\right),$ *atunci,* $rang\left(A\right) \le m-1$ *şi restricția* i_0 *din* (P) *este o combinație liniară de celelalte restricții.*

Demonstrație. Notăm: $B^{-1} = \left(\beta_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le m}}$ şi $Y = \left(y_{i\,j}\right) = B^{-1}\cdot A.$

Din ipoteză, $0 = y_{i_0 j} = \sum_{k=1}^{m} \beta_{i_0 k} a_{kj} = \sum_{k=1,\ k\ne i_0}^{m} \beta_{i_0 k} a_{kj} + \beta_{i_0 i_0} a_{i_0 j}\ ,\ \forall\ j = \overline{1,n}.$

Deoarece B conține vectorul e^{i_0}, în B^{-1} vom avea $\beta_{i_0 i_0} = 1.$

Deci, $a_{i_0 j} = -\sum_{k=1,\ k\ne i_0}^{m} \beta_{i_0 k} a_{kj},\ \forall\ j = \overline{1,n},\quad \Leftrightarrow\quad A_{i_0} = -\sum_{k=1,\ k\ne i_0}^{m} \beta_{i_0 k} A_k\ ,$

adică, linia A_{i_0} este combinație liniară de celelalte linii. Deci, $rang\left(A\right) \le m-1.$

Sistemul fiind compatibil, rezultă şi $b_{i_0} = -\sum_{k=1,\ k\ne i_0}^{m} \beta_{i_0 k} b_k\ .$

Teoremă. *Dacă valoarea minimă a lui* (P$_a$) *este* $\overline{z}_a = 0$ *şi există* $n + i_0 \in \mathrm{B}$*, pentru care* $i_0 = loc_{\mathrm{B}}(n + i_0)$, $\exists\, k \in \{1, \ldots, n\}$, $y_{i_0 k} \neq 0$, *atunci, se poate efectua o schimbare de bază prin care vectorul unitar* e^{i_0} *din* B *să fie înlocuit de coloana* A^k*.*

Demonstrație. Din Lema substituției, $y_{i_0 k} \neq 0 \;\Rightarrow\; \det\left(\hat{B}\right) \neq 0.$

În plus, din formulele de schimbare a bazei, deoarece

$$\overline{x}_{i_0} = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \tilde{x}_i = \overline{x}_i \,,\ \forall\, i = \overline{1,m} \\ \tilde{z} = \overline{z}\,. \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \hat{B}^{-1} \cdot b = B^{-1} \cdot b \geq \mathbf{0}\,,$$

Observație. Dacă $\overline{z}_a = 0$, toate variabilele artificiale au valoarea zero ! inclusiv cele care au mai rămas în bază.

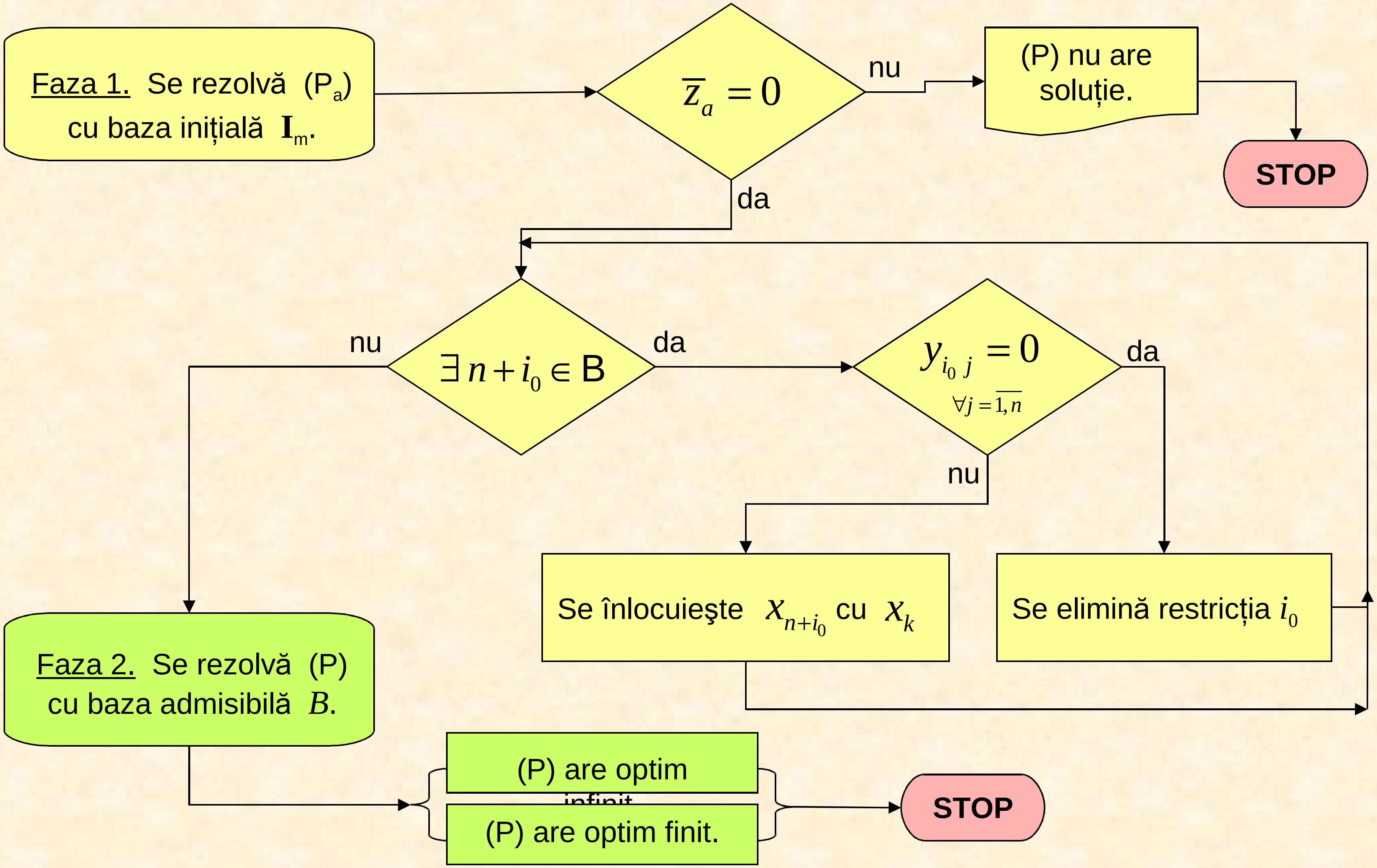
Variabilele artificiale din bază care au valoarea zero, pot fi:

- eliminate împreună cu restricția asociată.

sau

- înlocuite cu o variabilă a problemei date.

Metoda celor două faze



Exemple ………

Degenerare şi ciclare

Descreşterea funcției obiectiv: $$\tilde{z} = \bar{z} - \frac{(z_k - c_k)}{y_{rk}} \bar{x}_r$$ $\bar{x}_r \geq 0$

Metoda perturbării (A. Charnes, 1952)

$$\inf\left\{ c^{\mathrm{f}} \cdot x \,\middle|\, A \cdot x = b(\varepsilon),\, x \geq \mathbf{0} \right\} \quad \text{cu} \quad b(\varepsilon) = b + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^j A^j, \quad \varepsilon > 0.$$

Propoziția 1. *Fie* $B = (A^1, \ldots, A^m)$ *o bază primal admisibilă. Atunci există* $\varepsilon^B > 0$ *astfel încât* $\bar{x}(\varepsilon) = B^{-1} \cdot b(\varepsilon) > 0, \quad \forall\, \varepsilon \in \left(0, \varepsilon^B\right).$

Demonstrație. Avem $\bar{x}(\varepsilon) = \bar{x} + \sum_{j=1}^{n} Y^j \varepsilon^j$, unde $\left(Y^1, \ldots, Y^m\right) = \mathrm{I}_m$.

Pe componente, pentru $i = \overline{1,m}$, $\bar{x}_i(\varepsilon) = \bar{x}_i + \varepsilon^i \left(1 + \sum_{j=m+1}^{n} y_{ij} \varepsilon^{j-i}\right).$

Rezultă, $\exists\, \varepsilon_i > 0$, suficient de mic, pentru care $\bar{x}_i(\varepsilon_i) > 0.$

Luăm $\varepsilon^B = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m\}.$ Rezultă, $\forall\, \varepsilon \in \left(0, \varepsilon^B\right)$, $\bar{x}(\varepsilon) > 0.$

Observație. Dacă în algoritmul simplex alegerea indicelui r nu este unică, după efectuarea iterației se obține o soluție de bază degenerată.

Propoziția 2. *Fie B primal admisibilă în condițiile Teoremei de schimbare a bazei şi $\overline{x}(\varepsilon) > 0, \quad \forall\, \varepsilon \in \left(0, \varepsilon^B\right).$ Atunci, $\exists\, \varepsilon' > 0$ astfel încât criteriul de ieşire din bază este îndeplinit pentru un singur indice $r, \quad \forall\, \varepsilon \in \left(0, \varepsilon'\right)$:*

$$\frac{\overline{x}_r(\varepsilon)}{y_{rk}} = \min_{1 \le i \le m} \left\{ \frac{\overline{x}_i(\varepsilon)}{y_{ik}} \;\middle|\; y_{ik} > 0 \right\}.$$

Demonstrație. Trebuie ca

$$\forall s, t \text{ cu } y_{sk} > 0, y_{tk} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{x}_s(\varepsilon_{st})}{y_{sk}} \ne \frac{\overline{x}_t(\varepsilon_{st})}{y_{tk}},$$

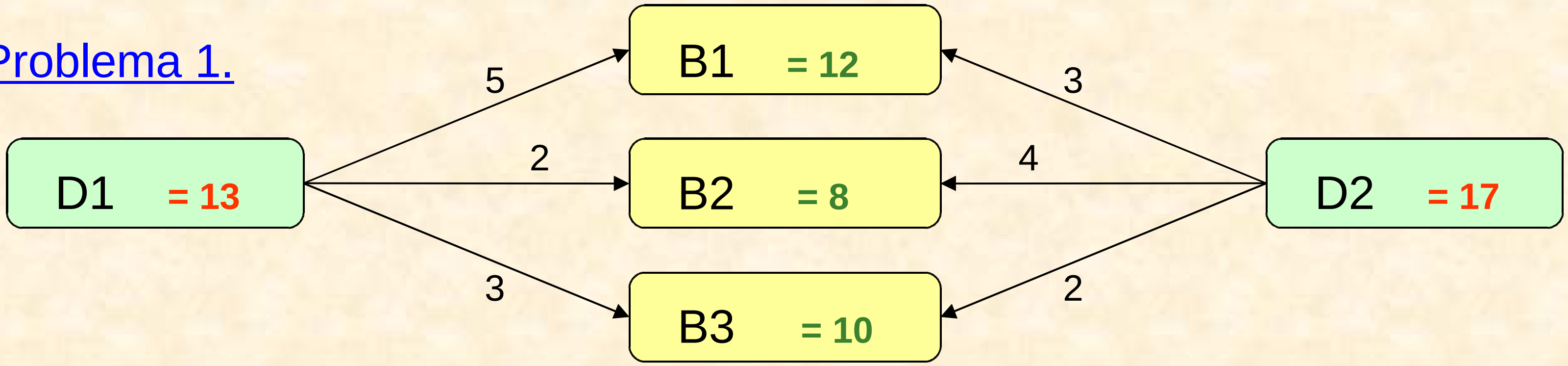
adică, $\left(\dfrac{\overline{x}_s}{y_{sk}} - \dfrac{\overline{x}_t}{y_{tk}}\right) + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left(\dfrac{y_{sj}}{y_{sk}} - \dfrac{y_{tj}}{y_{tk}}\right) \varepsilon_{st}^{j} \ne 0.$ Dacă $\left(\dfrac{\overline{x}_s}{y_{sk}} - \dfrac{\overline{x}_t}{y_{tk}}\right) = 0,$

$$\Rightarrow \quad \exists\, p, 1 \le p \le n, \quad \left(\frac{y_{sp}}{y_{sk}} - \frac{y_{tp}}{y_{tk}}\right) \ne 0. \quad \text{Altfel,} \quad \det B = 0\,!$$

Luăm $\varepsilon' = \min\left\{ \varepsilon_{st} > 0 \;\middle|\; s \ne t, y_{sk} > 0, y_{tk} > 0 \right\}.$

Dualitate în optimizarea liniară

Problema 1.



Să se distribuie marfa din depozite la beneficiari, în aşa fel încât, costul total de transport să fie minim.

Dacă notăm $x_{ij},\ i=1,2,\ \ j=1,2,3,$

cantitatea de marfă transportată de la depozitul Di către beneficiarul Bj, modelul matematic este:

$$\min\{5x_{11}+2x_{12}+3x_{13}+3x_{21}+4x_{22}+2x_{23}\}$$

$$-x_{11}-x_{12}-x_{13}\geq -13$$

$$-x_{21}-x_{22}-x_{23}\geq -17$$

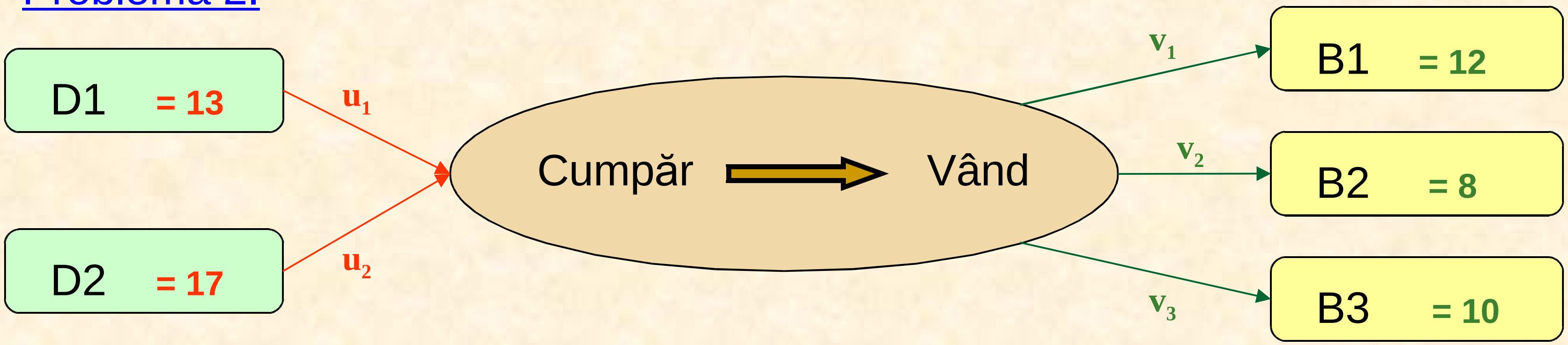
$$x_{11}+x_{21}\geq 12$$

$$x_{12}+x_{22}\geq 8$$

$$x_{13}+x_{23}\geq 10$$

$$x_{ij}\geq 0,\ i=1,2,\ \ j=1,2,3.$$

Problema 2.



Să se stabilească costurile de cumpărare şi vânzare a mărfii în aşa fel încât să se obțină un beneficiu maxim.

$$\max\left\{-13u_1 - 17u_2 + 12v_1 + 8v_2 + 10v_3\right\}$$

$$v_1 - u_1 \le 5$$
$$v_2 - u_1 \le 2$$
$$v_3 - u_1 \le 3$$
$$v_1 - u_2 \le 3$$
$$v_2 - u_2 \le 4$$
$$v_3 - u_2 \le 2$$
$$u_i \ge 0,\ i = 1,2,\ v_j \ge 0,\ j = 1,2,3.$$

Condiție: diferența dintre prețul de vânzare şi cel de cumpărare să nu depăşească costul unitar de transport de la depozitul Di la beneficiarul Bj.

Problema primală:

$$\inf\left\{c_1^{\mathsf{T}}\cdot x_1 + c_2^{\mathsf{T}}\cdot x_2 + c_3^{\mathsf{T}}\cdot x_3\right\}$$

în raport cu

$$\left.\begin{array}{l}
A_{11}\cdot x_1 + A_{12}\cdot x_2 + A_{13}\cdot x_3 \ \geq b_1 \\
A_{21}\cdot x_1 + A_{22}\cdot x_2 + A_{23}\cdot x_3 = b_2 \\
A_{31}\cdot x_1 + A_{32}\cdot x_2 + A_{33}\cdot x_3 \leq b_3 \\
x_1 \geq \mathbf{0} \qquad\qquad x_3 \leq \mathbf{0}
\end{array}\right\} \quad (\mathrm{P})$$

==

Problema duală:

$$\sup\left\{b_1^{\mathsf{T}}\cdot u_1 + b_2^{\mathsf{T}}\cdot u_2 + b_3^{\mathsf{T}}\cdot u_3\right\}$$

în raport cu

$$\left.\begin{array}{l}
A_{11}^{\mathsf{T}}\cdot u_1 + A_{21}^{\mathsf{T}}\cdot u_2 + A_{31}^{\mathsf{T}}\cdot u_3 \leq c_1 \\
A_{12}^{\mathsf{T}}\cdot u_1 + A_{22}^{\mathsf{T}}\cdot u_2 + A_{32}^{\mathsf{T}}\cdot u_3 = c_2 \\
A_{13}^{\mathsf{T}}\cdot u_1 + A_{23}^{\mathsf{T}}\cdot u_2 + A_{33}^{\mathsf{T}}\cdot u_3 \geq c_3 \\
u_1 \geq \mathbf{0} \qquad\qquad u_3 \leq \mathbf{0}
\end{array}\right\} \quad (\mathrm{D})$$

Reguli de asociere a problemelor duale

- Unei probleme de minimizare îi corespunde o problemă de maximizare, şi reciproc.

Problema primală:

$$\boxed{\inf}\left\{c_1^{\mathrm{f}}\cdot x_1+c_2^{\mathrm{f}}\cdot x_2+c_3^{\mathrm{f}}\cdot x_3\right\}$$

în raport cu

$$\left.\begin{array}{l} A_{11}\cdot x_1+A_{12}\cdot x_2+A_{13}\cdot x_3\ \geq b_1\\ A_{21}\cdot x_1+A_{22}\cdot x_2+A_{23}\cdot x_3=b_2\\ A_{31}\cdot x_1+A_{32}\cdot x_2+A_{33}\cdot x_3\leq b_3\\ x_1\geq \mathbf{0} \qquad\qquad x_3\leq \mathbf{0}\end{array}\right\} \quad (\mathrm{P})$$

===

Problema duală:

$$\boxed{\sup}\left\{b_1^{\mathrm{f}}\cdot u_1+b_2^{\mathrm{f}}\cdot u_2+b_3^{\mathrm{f}}\cdot u_3\right\}$$

în raport cu

$$\left.\begin{array}{l} A_{11}^{\mathrm{f}}\cdot u_1+A_{21}^{\mathrm{f}}\cdot u_2+A_{31}^{\mathrm{f}}\cdot u_3\ \leq c_1\\ A_{12}^{\mathrm{f}}\cdot u_1+A_{22}^{\mathrm{f}}\cdot u_2+A_{32}^{\mathrm{f}}\cdot u_3=c_2\\ A_{13}^{\mathrm{f}}\cdot u_1+A_{23}^{\mathrm{f}}\cdot u_2+A_{33}^{\mathrm{f}}\cdot u_3\geq c_3\\ u_1\geq \mathbf{0} \qquad\qquad u_3\leq \mathbf{0}\end{array}\right\} \quad (\mathrm{D})$$

Reguli de asociere a problemelor duale

- Unei probleme de minimizare îi corespunde o problemă de maximizare, şi reciproc.
- Coeficienții din funcția obiectiv a unei probleme devin coeficienții termenului liber în cealaltă problemă, şi reciproc.

Problema primală:

$$\left.\begin{array}{l}
\inf \left\{ c_1^{f} \cdot x_1 + c_2^{f} \cdot x_2 + c_3^{f} \cdot x_3 \right\} \\
\text{în raport cu} \\
A_{11} \cdot x_1 + A_{12} \cdot x_2 + A_{13} \cdot x_3 \geq b_1 \\
A_{21} \cdot x_1 + A_{22} \cdot x_2 + A_{23} \cdot x_3 = b_2 \\
A_{31} \cdot x_1 + A_{32} \cdot x_2 + A_{33} \cdot x_3 \leq b_3 \\
x_1 \geq \mathbf{0} \qquad\qquad x_3 \leq \mathbf{0}
\end{array}\right\} \quad (\text{P})$$

===

Problema duală:

$$\left.\begin{array}{l}
\sup \left\{ b_1^{f} \cdot u_1 + b_2^{f} \cdot u_2 + b_3^{f} \cdot u_3 \right\} \\
\text{în raport cu} \\
A_{11}^{f} \cdot u_1 + A_{21}^{f} \cdot u_2 + A_{31}^{f} \cdot u_3 \leq c_1 \\
A_{12}^{f} \cdot u_1 + A_{22}^{f} \cdot u_2 + A_{32}^{f} \cdot u_3 = c_2 \\
A_{13}^{f} \cdot u_1 + A_{23}^{f} \cdot u_2 + A_{33}^{f} \cdot u_3 \geq c_3 \\
u_1 \geq \mathbf{0} \qquad\qquad u_3 \leq \mathbf{0}
\end{array}\right\} \quad (\text{D})$$

Reguli de asociere a problemelor duale

- Unei probleme de minimizare îi corespunde o problemă de maximizare, şi reciproc.
- Coeficienții din funcția obiectiv a unei probleme devin coeficienții termenului liber în cealaltă problemă, şi reciproc.
- Matricea restricțiilor dintr-o problemă este matricea transpusă din cealaltă problemă, şi reciproc.

Problema primală:

$$\inf\left\{c_1^{\mathsf{T}}\cdot x_1+c_2^{\mathsf{T}}\cdot x_2+c_3^{\mathsf{T}}\cdot x_3\right\}$$

în raport cu

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{\begin{array}{l}A_{11}\cdot x_1+A_{12}\cdot x_2+A_{13}\cdot x_3\\ A_{21}\cdot x_1+A_{22}\cdot x_2+A_{23}\cdot x_3\\ A_{31}\cdot x_1+A_{32}\cdot x_2+A_{33}\cdot x_3\end{array}}\begin{array}{l}\ge b_1\\ =b_2\\ \le b_3\end{array}\\ x_1\ge \mathbf{0}\qquad\qquad x_3\le \mathbf{0}\end{array}\right\}\qquad (P)$$

==

Problema duală:

$$\sup\left\{b_1^{\mathsf{T}}\cdot u_1+b_2^{\mathsf{T}}\cdot u_2+b_3^{\mathsf{T}}\cdot u_3\right\}$$

în raport cu

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{\begin{array}{l}A_{11}^{\mathsf{T}}\cdot u_1+A_{21}^{\mathsf{T}}\cdot u_2+A_{31}^{\mathsf{T}}\cdot u_3\\ A_{12}^{\mathsf{T}}\cdot u_1+A_{22}^{\mathsf{T}}\cdot u_2+A_{32}^{\mathsf{T}}\cdot u_3\\ A_{13}^{\mathsf{T}}\cdot u_1+A_{23}^{\mathsf{T}}\cdot u_2+A_{33}^{\mathsf{T}}\cdot u_3\end{array}}\begin{array}{l}\le c_1\\ =c_2\\ \ge c_3\end{array}\\ u_1\ge \mathbf{0}\qquad\qquad u_3\le \mathbf{0}\end{array}\right\}\qquad (D)$$

Reguli de asociere a problemelor duale

- Unei probleme de minimizare îi corespunde o problemă de maximizare, şi reciproc.
- Coeficienții din funcția obiectiv a unei probleme devin coeficienții termenului liber în cealaltă problemă, şi reciproc.
- Matricea restricțiilor dintr-o problemă este matricea transpusă din cealaltă problemă, şi reciproc.
- Fiecărei restricții dintr-o problemă îi corespunde o variabilă în cealaltă problemă, şi reciproc.

  Relația de asociere este următoarea:
  - unei restricții concordante îi corespunde o variabilă nenegativă (≥ 0), şi reciproc;
  - unei restricții egalitate îi corespunde o variabilă oarecare (fără condiții de semn), şi reciproc;
  - unei restricții neconcordante îi corespunde o variabilă nepozitivă (≤ 0), şi reciproc.

Problema primală:

$$\inf\left\{c_1^{\mathrm{f}}\cdot x_1 + c_2^{\mathrm{f}}\cdot x_2 + c_3^{\mathrm{f}}\cdot x_3\right\}$$

în raport cu

$$\left.\begin{aligned}
&\boxed{A_{11}\cdot x_1 + A_{12}\cdot x_2 + A_{13}\cdot x_3 \geq b_1}\\
&A_{21}\cdot x_1 + A_{22}\cdot x_2 + A_{23}\cdot x_3 = b_2\\
&A_{31}\cdot x_1 + A_{32}\cdot x_2 + A_{33}\cdot x_3 \leq b_3\\
&x_1 \geq \mathbf{0} \qquad\qquad x_3 \leq \mathbf{0}
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{P})$$

==

Problema duală:

$$\sup\left\{b_1^{\mathrm{f}}\cdot \boxed{u_1} + b_2^{\mathrm{f}}\cdot u_2 + b_3^{\mathrm{f}}\cdot u_3\right\}$$

în raport cu

$$\left.\begin{aligned}
&A_{11}^{\mathrm{f}}\cdot \boxed{u_1} + A_{21}^{\mathrm{f}}\cdot u_2 + A_{31}^{\mathrm{f}}\cdot u_3 \leq c_1\\
&A_{12}^{\mathrm{f}}\cdot \boxed{u_1} + A_{22}^{\mathrm{f}}\cdot u_2 + A_{32}^{\mathrm{f}}\cdot u_3 = c_2\\
&A_{13}^{\mathrm{f}}\cdot \boxed{u_1} + A_{23}^{\mathrm{f}}\cdot u_2 + A_{33}^{\mathrm{f}}\cdot u_3 \geq c_3\\
&\boxed{u_1 \geq \mathbf{0}} \qquad\qquad u_3 \leq \mathbf{0}
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{D})$$

Problema primală:

$$\inf\left\{c_1^{\mathrm{f}}\cdot x_1 + c_2^{\mathrm{f}}\cdot x_2 + c_3^{\mathrm{f}}\cdot x_3\right\}$$

în raport cu

$$\left.\begin{array}{l} A_{11}\cdot x_1 + A_{12}\cdot x_2 + A_{13}\cdot x_3 \geq b_1 \\ \boxed{A_{21}\cdot x_1 + A_{22}\cdot x_2 + A_{23}\cdot x_3 = b_2} \\ A_{31}\cdot x_1 + A_{32}\cdot x_2 + A_{33}\cdot x_3 \leq b_3 \\ x_1 \geq \mathbf{0} \qquad\qquad x_3 \leq \mathbf{0} \end{array}\right\} \quad (\mathrm{P})$$

==

Problema duală:

$$\sup\left\{b_1^{\mathrm{f}}\cdot u_1 + b_2^{\mathrm{f}}\cdot \boxed{u_2} + b_3^{\mathrm{f}}\cdot u_3\right\}$$

în raport cu

$$\left.\begin{array}{l} A_{11}^{\mathrm{f}}\cdot u_1 + A_{21}^{\mathrm{f}}\cdot u_2 + A_{31}^{\mathrm{f}}\cdot u_3 \leq c_1 \\ A_{12}^{\mathrm{f}}\cdot u_1 + A_{22}^{\mathrm{f}}\cdot u_2 + A_{32}^{\mathrm{f}}\cdot u_3 = c_2 \\ A_{13}^{\mathrm{f}}\cdot u_1 + A_{23}^{\mathrm{f}}\cdot u_2 + A_{33}^{\mathrm{f}}\cdot u_3 \geq c_3 \\ u_1 \geq \mathbf{0} \qquad\qquad u_3 \leq \mathbf{0} \end{array}\right\} \quad (\mathrm{D})$$

Problema primală:

$$\inf\left\{c_1^{\mathrm{f}}\cdot x_1 + c_2^{\mathrm{f}}\cdot x_2 + c_3^{\mathrm{f}}\cdot x_3\right\}$$

în raport cu

$$\left.\begin{array}{l} A_{11}\cdot x_1 + A_{12}\cdot x_2 + A_{13}\cdot x_3 \geq b_1 \\ A_{21}\cdot x_1 + A_{22}\cdot x_2 + A_{23}\cdot x_3 = b_2 \\ \boxed{A_{31}\cdot x_1 + A_{32}\cdot x_2 + A_{33}\cdot x_3 \leq b_3} \\ x_1 \geq \mathbf{0} \qquad\qquad x_3 \leq \mathbf{0} \end{array}\right\} \quad \text{(P)}$$

===

Problema duală:

$$\sup\left\{b_1^{\mathrm{f}}\cdot u_1 + b_2^{\mathrm{f}}\cdot u_2 + b_3^{\mathrm{f}}\cdot \boxed{u_3}\right\}$$

în raport cu

$$\left.\begin{array}{l} A_{11}^{\mathrm{f}}\cdot u_1 + A_{21}^{\mathrm{f}}\cdot u_2 + A_{31}^{\mathrm{f}}\cdot \boxed{u_3} \leq c_1 \\ A_{12}^{\mathrm{f}}\cdot u_1 + A_{22}^{\mathrm{f}}\cdot u_2 + A_{32}^{\mathrm{f}}\cdot \boxed{u_3} = c_2 \\ A_{13}^{\mathrm{f}}\cdot u_1 + A_{23}^{\mathrm{f}}\cdot u_2 + A_{33}^{\mathrm{f}}\cdot \boxed{u_3} \geq c_3 \\ u_1 \geq \mathbf{0} \qquad\qquad \boxed{u_3 \leq \mathbf{0}} \end{array}\right\} \quad \text{(D)}$$

Problema primală:

$$\inf\left\{c_1^{\mathrm{f}}\boxed{\cdot x_1}+c_2^{\mathrm{f}}\cdot x_2+c_3^{\mathrm{f}}\cdot x_3\right\}$$

în raport cu

$$\left.\begin{aligned}
A_{11}\cdot \boxed{x_1}+A_{12}\cdot x_2+A_{13}\cdot x_3 &\geq b_1\\
A_{21}\cdot \boxed{x_1}+A_{22}\cdot x_2+A_{23}\cdot x_3 &= b_2\\
A_{31}\cdot \boxed{x_1}+A_{32}\cdot x_2+A_{33}\cdot x_3 &\leq b_3\\
\boxed{x_1\geq \mathbf{0}} \qquad\qquad x_3 &\leq \mathbf{0}
\end{aligned}\right\}\quad (\mathrm{P})$$

==

Problema duală:

$$\sup\left\{b_1^{\mathrm{f}}\cdot u_1+b_2^{\mathrm{f}}\cdot u_2+b_3^{\mathrm{f}}\cdot u_3\right\}$$

în raport cu

$$\left.\begin{aligned}
\boxed{A_{11}^{\mathrm{f}}\cdot u_1+A_{21}^{\mathrm{f}}\cdot u_2+A_{31}^{\mathrm{f}}\cdot u_3 \leq c_1}&\\
A_{12}^{\mathrm{f}}\cdot u_1+A_{22}^{\mathrm{f}}\cdot u_2+A_{32}^{\mathrm{f}}\cdot u_3 &= c_2\\
A_{13}^{\mathrm{f}}\cdot u_1+A_{23}^{\mathrm{f}}\cdot u_2+A_{33}^{\mathrm{f}}\cdot u_3 &\geq c_3\\
u_1\geq \mathbf{0} \qquad\qquad u_3 &\leq \mathbf{0}
\end{aligned}\right\}\quad (\mathrm{D})$$

<u>Problema primală:</u>

$$\left.\begin{array}{l}
\inf\left\{c_1^{f}\cdot x_1 + c_2^{f}\cdot \boxed{x_2} + c_3^{f}\cdot x_3\right\} \\
\text{în raport cu} \\
A_{11}\cdot x_1 + A_{12}\cdot \boxed{x_2} + A_{13}\cdot x_3 \geq b_1 \\
A_{21}\cdot x_1 + A_{22}\cdot \boxed{x_2} + A_{23}\cdot x_3 = b_2 \\
A_{31}\cdot x_1 + A_{32}\cdot \boxed{x_2} + A_{33}\cdot x_3 \leq b_3 \\
x_1 \geq \mathbf{0} \qquad\qquad x_3 \leq \mathbf{0}
\end{array}\right\} \quad (P)$$

==

<u>Problema duală:</u>

$$\left.\begin{array}{l}
\sup\left\{b_1^{f}\cdot u_1 + b_2^{f}\cdot u_2 + b_3^{f}\cdot u_3\right\} \\
\text{în raport cu} \\
A_{11}^{f}\cdot u_1 + A_{21}^{f}\cdot u_2 + A_{31}^{f}\cdot u_3 \leq c_1 \\
\boxed{A_{12}^{f}\cdot u_1 + A_{22}^{f}\cdot u_2 + A_{32}^{f}\cdot u_3 = c_2} \\
A_{13}^{f}\cdot u_1 + A_{23}^{f}\cdot u_2 + A_{33}^{f}\cdot u_3 \geq c_3 \\
u_1 \geq \mathbf{0} \qquad\qquad u_3 \leq \mathbf{0}
\end{array}\right\} \quad (D)$$

Problema primală:

$$\inf\left\{c_1^{\mathsf{f}}\cdot x_1 + c_2^{\mathsf{f}}\cdot x_2 + c_3^{\mathsf{f}}\boxed{\cdot x_3}\right\}$$

în raport cu

$$\left.\begin{array}{ll}
A_{11}\cdot x_1 + A_{12}\cdot x_2 + A_{13}\cdot \boxed{x_3} \geq b_1 & \\
A_{21}\cdot x_1 + A_{22}\cdot x_2 + A_{23}\cdot \boxed{x_3} = b_2 & \\
A_{31}\cdot x_1 + A_{32}\cdot x_2 + A_{33}\cdot \boxed{x_3} \leq b_3 & \\
x_1 \geq \mathbf{0} & \boxed{x_3 \leq \mathbf{0}}
\end{array}\right\} \quad (\,P\,)$$

===

Problema duală:

$$\sup\left\{b_1^{\mathsf{f}}\cdot u_1 + b_2^{\mathsf{f}}\cdot u_2 + b_3^{\mathsf{f}}\cdot u_3\right\}$$

în raport cu

$$\left.\begin{array}{ll}
A_{11}^{\mathsf{f}}\cdot u_1 + A_{21}^{\mathsf{f}}\cdot u_2 + A_{31}^{\mathsf{f}}\cdot u_3 \leq c_1 & \\
A_{12}^{\mathsf{f}}\cdot u_1 + A_{22}^{\mathsf{f}}\cdot u_2 + A_{32}^{\mathsf{f}}\cdot u_3 = c_2 & \\
\boxed{A_{13}^{\mathsf{f}}\cdot u_1 + A_{23}^{\mathsf{f}}\cdot u_2 + A_{33}^{\mathsf{f}}\cdot u_3 \geq c_3} & \\
u_1 \geq \mathbf{0} & u_3 \leq \mathbf{0}
\end{array}\right\} \quad (\,D\,)$$

$$\begin{cases} \text{primala în formă standard:} & \inf\left\{\, c^{f} \cdot x \mid A \cdot x = b,\ x \geq \mathbf{0} \,\right\} \\ \text{problema duală:} & \sup\left\{\, b^{f} \cdot u \mid A^{f} \cdot u \leq c \,\right\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{primala în formă canonică:} & \inf\left\{\, c^{f} \cdot x \mid A \cdot x \geq b,\ x \geq \mathbf{0} \,\right\} \\ \text{problema duală:} & \sup\left\{\, b^{f} \cdot u \mid A^{f} \cdot u \leq c,\ u \geq \mathbf{0} \,\right\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{primala în formă mixtă:} & \begin{cases} \inf\left\{\, c^{f} \cdot x \,\right\} \\ \text{în raprt cu:} \\ \begin{matrix} A_1 \cdot x \geq b_1 \\ A_2 \cdot x = b_2 \end{matrix},\ x \geq \mathbf{0} \end{cases} \\ \text{problema duală:} & \begin{cases} \sup\left\{\, b_1^{f} \cdot u_1 + b_2^{f} \cdot u_2 \,\right\} \\ \text{în raprt cu:} \\ A_1^{f} \cdot u_1 + A_2^{f} \cdot u_2 \leq c, \\ \qquad u_1 \geq \mathbf{0} \end{cases} \end{cases}$$

Teoreme de dualitate

Fie $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ şi definim domeniile de admisibilitate:

$$\mathrm{P} = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x \geq b,\ x \geq \mathbf{0} \,\}, \qquad \mathrm{D} = \{\, u \in \mathbb{R}^m \mid A^{\mathrm{f}} \cdot u \leq c,\ u \geq \mathbf{0} \,\}$$

Considerăm perechea de probleme (canonice) duale:

$$\inf\{\, c^{\mathrm{f}} \cdot x \mid x \in \mathrm{P} \,\} \quad \text{...........................} \quad (\mathrm{P})$$

$$\sup\{\, b^{\mathrm{f}} \cdot u \mid u \in \mathrm{D} \,\} \quad \text{...........................} \quad (\mathrm{D})$$

Teoremă (dualitate slabă)**.** *Dacă domeniile de admisibilitate* $\mathrm{P} \neq \emptyset, \quad \mathrm{D} \neq \emptyset,$ *atunci* $\forall\, x \in \mathrm{P}, \quad \forall\, u \in \mathrm{D},$ *are loc relația:* $c^{\mathrm{f}} \cdot x \geq b^{\mathrm{f}} \cdot u.$

Demonstrație. Pentru $\forall\, x \in \mathrm{P}, \quad \forall\, u \in \mathrm{D},$ avem:

$$\left.\begin{array}{r} A \cdot x - b \geq \mathbf{0} \\ u \geq \mathbf{0} \end{array}\right\} \Rightarrow u^{\mathrm{f}} \cdot A \cdot x \geq u^{\mathrm{f}} \cdot b, \qquad \left.\begin{array}{r} x \geq \mathbf{0} \\ A^{\mathrm{f}} \cdot u - c \leq \mathbf{0} \end{array}\right\} \Rightarrow x^{\mathrm{f}} \cdot A^{\mathrm{f}} \cdot u \leq x^{\mathrm{f}} \cdot c.$$

Prin urmare, $c^{\mathrm{f}} \cdot x \geq x^{\mathrm{f}} \cdot A^{\mathrm{f}} \cdot u = u^{\mathrm{f}} \cdot A \cdot x \geq b^{\mathrm{f}} \cdot u.$

Teoremă (dualitate tare). *Dacă domeniile de admisibilitate* $\mathrm{P} \neq \emptyset$, $\mathrm{D} \neq \emptyset$, *şi* $\exists\, \bar{x} \in \mathrm{P}$, $\exists\, \bar{u} \in \mathrm{D}$, *astfel încât* $c^{\mathrm{f}} \cdot \bar{x} = b^{\mathrm{f}} \cdot \bar{u}$, *atunci,* $\bar{x}$ *este soluție optimă pentru* (P) *şi* $\bar{u}$ *este soluție optimă pentru* (D) *.*

Demonstrație. Presupunem prin absurd că $\bar{x}$ nu este optimă pentru (P). Atunci, $\exists\, x_0 \in \mathrm{P}$ astfel încât $c^{\mathrm{f}} \cdot x_0 < c^{\mathrm{f}} \cdot \bar{x} = b^{\mathrm{f}} \cdot \bar{u}$. Contradicție!

Teorema (fundamentală a dualității). *Fiind dată perechea de probleme duale* (P) *şi* (D) *doar una din următoarele afirmații are loc:*

a) $\mathrm{P} \neq \emptyset$ *şi* $\mathrm{D} \neq \emptyset$. *În cazul acesta* $\exists\, \tilde{x} \in \mathrm{P}$ *şi* $\exists\, \tilde{u} \in \mathrm{D}$, *soluții optime pentru* (P)*, respectiv* (D)*, astfel încât* $c^{\mathrm{f}} \cdot \tilde{x} = b^{\mathrm{f}} \cdot \tilde{u}$.

b) $\mathrm{P} = \emptyset$ *şi* $\mathrm{D} = \emptyset$.

c) $\mathrm{P} \neq \emptyset$ *şi* $\mathrm{D} = \emptyset$ *sau* $\mathrm{P} = \emptyset$ *şi* $\mathrm{D} \neq \emptyset$. *În cazul acesta problema care are soluții admisibile are optimul infinit.*

Demonstrație. Considerăm matricea pătratică de ordinul $n+m+1$:

$$S = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & -A^{\mathrm{f}} & c \\ A & \mathbf{0}_m & -b \\ -c^{\mathrm{f}} & b^{\mathrm{f}} & 0 \end{pmatrix}$$

Deoarece $S = -S^{\mathrm{f}}$, putem aplica consecința Lemei Farkas-Minkowski:

există $\overline{z} \in \mathbf{R}^{n+m+1}$, $\overline{z} \geq \mathbf{0}$, astfel încât $S \cdot \overline{z} \geq \mathbf{0}$ şi $S \cdot \overline{z} + \overline{z} > \mathbf{0}$.

Notăm: $\overline{z} = (\overline{x}, \overline{u}, r)^{\mathrm{f}}$, unde $\overline{x} \in \mathbf{R}^n$, $\overline{u} \in \mathbf{R}^m$, $r \in \mathbf{R}$.

Avem:

$$-A^{\mathrm{f}} \cdot \overline{u} + cr \geq \mathbf{0}, \qquad (1)$$

$$\overline{x} \geq \mathbf{0},$$

$$A \cdot \overline{x} - br \geq \mathbf{0}, \qquad (2)$$

$$\overline{u} \geq \mathbf{0},$$

$$-c^{\mathrm{f}} \cdot \overline{x} + b^{\mathrm{f}} \cdot \overline{u} \geq 0, \qquad (3)$$

$$\boxed{r \geq 0,}$$

$$\overline{x} - A^{\mathrm{f}} \cdot \overline{u} + cr > \mathbf{0}, \qquad (4)$$

$$A \cdot \overline{x} + \overline{u} - br > \mathbf{0}, \qquad (5)$$

$$r > 0 \qquad\qquad r = 0$$

$$-c^{\mathrm{f}} \cdot \overline{x} + b^{\mathrm{f}} \cdot \overline{u} + r > 0. \qquad (6)$$

Cazul $r > 0.$ Definim: $\boxed{\tilde{x} = \dfrac{\overline{x}}{r} \quad \text{şi} \quad \tilde{u} = \dfrac{\overline{u}}{r}}$

Evident, $\tilde{x} \geq \mathbf{0}$ şi $\tilde{u} \geq \mathbf{0}.$ Împărțind relațiile (1) şi (2) la r, obținem:

$$A \cdot \tilde{x} \geq b \quad \text{şi} \quad A^{\mathrm{f}} \cdot \tilde{u} \leq c.$$

Deci, $\underline{\tilde{x} \in \mathrm{P}}$ şi $\underline{\tilde{u} \in \mathrm{D}}$, adică, $\mathrm{P} \neq \varnothing$ şi $\mathrm{D} \neq \varnothing.$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Din dualitatea slabă} & \Rightarrow & c^{\mathrm{f}} \cdot \tilde{x} \geq b^{\mathrm{f}} \cdot \tilde{u} \\ \text{Din relația (3) / } r & \Rightarrow & c^{\mathrm{f}} \cdot \tilde{x} \leq b^{\mathrm{f}} \cdot \tilde{u} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{c^{\mathrm{f}} \cdot \tilde{x} = b^{\mathrm{f}} \cdot \tilde{u}.}$$

Din dualitatea tare rezultă $\tilde{x}$ şi $\tilde{u}$ optime pentru (P), respectiv (D).

Cazul $r = 0$. Nu putem avea $\mathsf{P} \neq \emptyset$ şi $\mathsf{D} \neq \emptyset$.

Prin absurd, dacă există $x_0 \in \mathsf{P}$ şi $u_0 \in \mathsf{D}$,
avem:

$$\left.\begin{aligned} A \cdot x_0 - b \geq \mathbf{0} \\ \bar{u} \geq \mathbf{0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \bar{u}^{\mathsf{f}} \cdot b \leq \underbrace{\bar{u}^{\mathsf{f}} \cdot A}_{\leq 0 \text{ din } (1)} \cdot x_0 \leq 0,$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} \geq \mathbf{0} \\ A^{\mathsf{f}} \cdot u_0 - c \leq \mathbf{0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \bar{x}^{\mathsf{f}} \cdot c \geq \underbrace{\bar{x}^{\mathsf{f}} \cdot A^{\mathsf{f}}}_{\geq 0 \text{ din } (2)} \cdot u_0 \geq 0,$$

deci, $\bar{x}^{\mathsf{f}} \cdot c \geq 0 \geq \bar{u}^{\mathsf{f}} \cdot b$. Contradicție! cu (6)

Rezultă:

$\mathsf{P} = \emptyset$ şi $\mathsf{D} = \emptyset$.

$\mathsf{P} \neq \emptyset$ şi $\mathsf{D} = \emptyset$ sau $\mathsf{P} = \emptyset$ şi $\mathsf{D} \neq \emptyset$.

Presupunem, spre exemplu, că există $x_0 \in \mathrm{P}$.

Definim vectorul $x(\lambda) = x_0 + \lambda \overline{x}, \quad \lambda \in \mathbf{R},\ \lambda \geq 0.$

Avem evident $x(\lambda) \geq \mathbf{0}$ şi

$$A \cdot x(\lambda) = A \cdot x_0 + \lambda \underbrace{A \cdot \overline{x}}_{\geq 0 \text{ din } (2)} \geq A \cdot x_0 \geq b.$$

Deci, $\forall\, \lambda \in \mathbf{R},\ \lambda \geq 0, \quad \Rightarrow \quad x(\lambda) \in \mathrm{P}$.

Deoarece $c^{\mathrm{f}} \cdot \overline{x} \underbrace{<}_{\text{din } (6)} b^{\mathrm{f}} \cdot \overline{u} \leq x_0^{\mathrm{f}} \cdot \underbrace{A^{\mathrm{f}} \cdot \overline{u}}_{\leq 0,\ \text{din } (1)} \leq 0,$

rezultă, $\lim\limits_{\lambda \to \infty} c^{\mathrm{f}} \cdot x(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \to \infty} \left(c^{\mathrm{f}} \cdot x_0 + \lambda \underbrace{c^{\mathrm{f}} \cdot \overline{x}}_{<0} \right) = -\infty.$

<u>Teoremă (tare a ecarturilor complemetare).</u> *Dacă* $\mathrm{P} \neq \varnothing$, $\mathrm{D} \neq \varnothing$, *atunci, pentru* (P) *şi* (D) *există soluțiile optime* $\tilde{x}$, *respectiv* $\tilde{u}$, *astfel încât*

$$(A \cdot \tilde{x} - b) + \tilde{u} > \mathbf{0},$$

$$(c - A^{\mathrm{t}} \cdot \tilde{u}) + \tilde{x} > \mathbf{0}.$$

<u>Demonstrație.</u> Rezultă din (4) şi (5) pentru cazul $r > 0$.

<u>Teoremă (slabă a ecarturilor complemetare).</u> *Fie* $x \in \mathrm{P} \neq \varnothing$, $u \in \mathrm{D} \neq \varnothing$.

Atunci, $\left.\begin{array}{l} x \text{ este soluție optimă pentru (P)} \\ u \text{ este soluție optimă pentru (D)} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u^{\mathrm{t}} \cdot (A \cdot x - b) = 0, \\ x^{\mathrm{t}} \cdot (c - A^{\mathrm{t}} \cdot u) = 0. \end{array}\right.$

<u>Demonstrație.</u> $\Longrightarrow$ Din TFD a) rezultă: $c^{\mathrm{t}} \cdot x - b^{\mathrm{t}} \cdot u = 0$. Deci,

$$c^{\mathrm{t}} \cdot x - b^{\mathrm{t}} \cdot u + u^{\mathrm{t}} \cdot A \cdot x - x^{\mathrm{t}} \cdot A^{\mathrm{t}} \cdot u = \underbrace{u^{\mathrm{t}} \cdot (A \cdot x - b)}_{\geq 0} + \underbrace{x^{\mathrm{t}} \cdot (c - A^{\mathrm{t}} \cdot u)}_{\geq 0} = 0.$$

$\Longleftarrow$ Adunăm membru cu membru relațiile din enunț şi obținem: $c^{\mathrm{t}} \cdot x = b^{\mathrm{t}} \cdot u$.

Din teorema de dualitate tare rezultă ca soluțiile sunt optime.

Algoritmul simplex dual

Considerăm problema de programare liniară în forma standard:

$$\inf\left\{ c^{\mathsf{T}} \cdot x \mid A \cdot x = b,\ x \geq \mathbf{0} \right\} \qquad \text{(P)}$$

şi duala ei,

$$\sup\left\{ b^{\mathsf{T}} \cdot u \mid A^{\mathsf{T}} \cdot u \leq c \right\} \qquad \text{(D)}$$

unde $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbf{R}^{m}$, $c \in \mathbf{R}^{n}$, $rang(A) = m < n.$

Fie B o bază optimă a problemei (P). Avem:

$\boxed{\bar{x} = B^{-1} \cdot b \geq \mathbf{0}}$ (primal-admisibilitatea lui B)

$\boxed{c_{\mathrm{B}}^{\mathsf{T}} B^{-1} \cdot A \leq c^{\mathsf{T}}}$ (condiția de optimalitate a lui B)

Notăm: $\boxed{\bar{u}^{\mathsf{T}} = c_{\mathrm{B}}^{\mathsf{T}} B^{-1}}$ $\Longrightarrow$ $\bar{u}^{\mathsf{T}} \cdot A \leq c^{\mathsf{T}}$ $\bar{u}$ admisibil pentru (D)

În plus, $\bar{z} = \underline{c_{\mathrm{B}}^{\mathsf{T}} \cdot \bar{x} =} c_{\mathrm{B}}^{\mathsf{T}} \cdot B^{-1} \cdot b \underline{= \bar{u}^{\mathsf{T}} \cdot b}.$

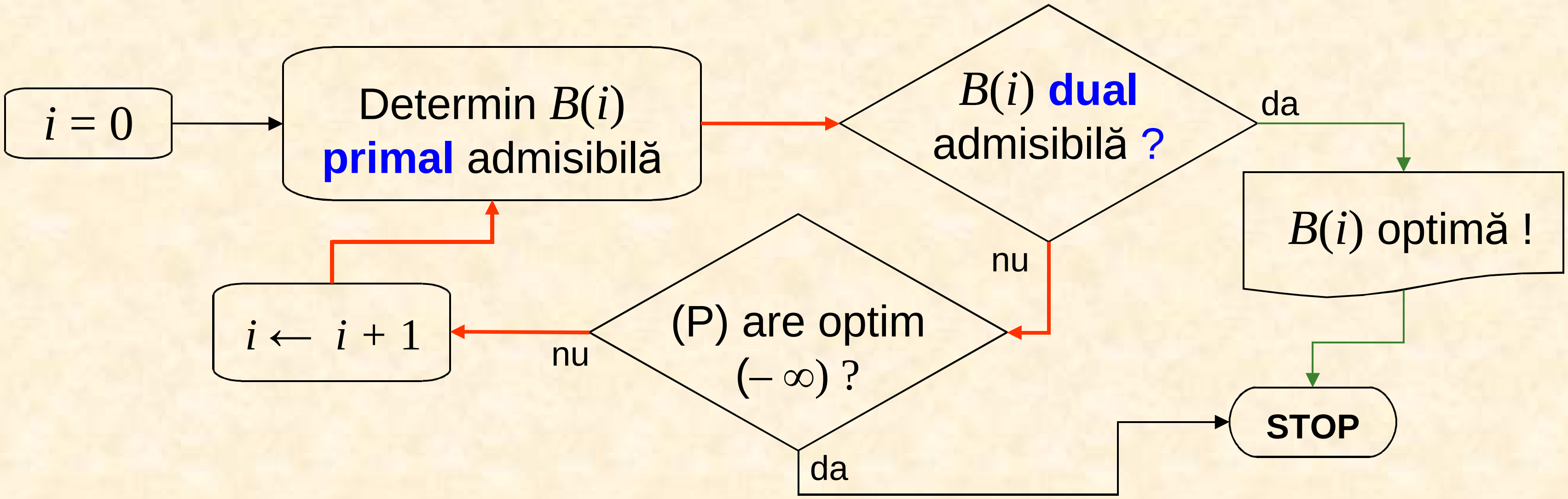
$\bar{u}$ optim pentru (D).
(teorema de dualitate tare)

*Matricea de bază B se numeşte **dual admisibilă**, dacă*

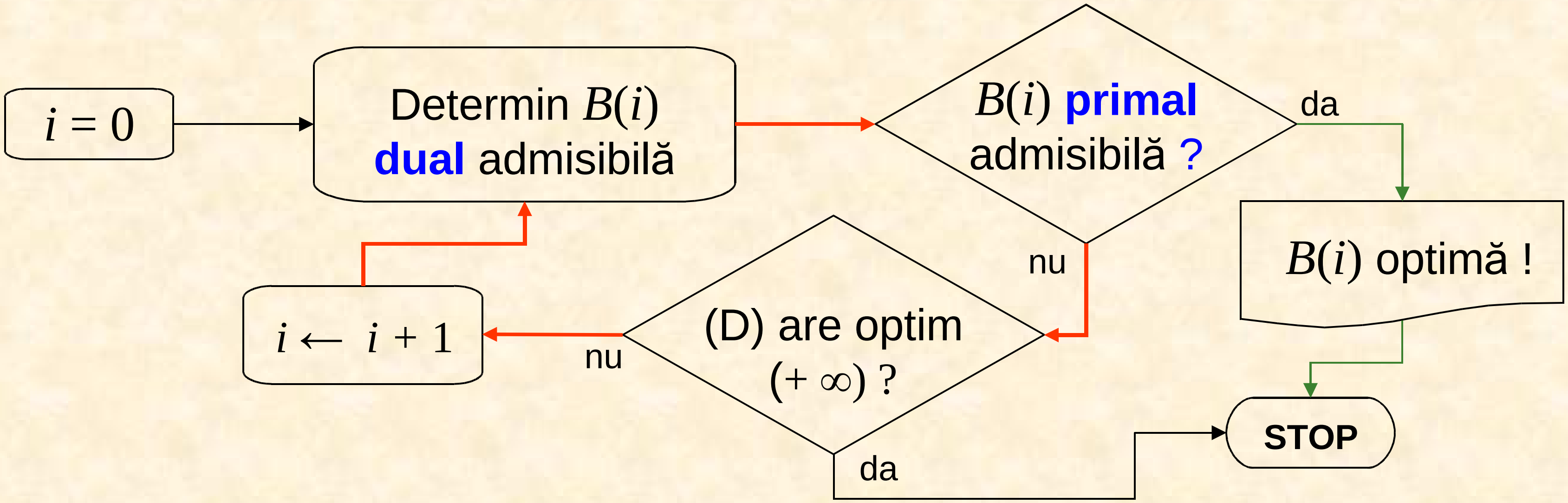
$$\boxed{c_B^f \cdot B^{-1} \cdot A \le c^f}$$

Teoremă (optim): *Dacă baza B este **primal** şi **dual admisibilă**, atunci ea este **optimă** pentru problemele (P) şi (D).*

Algoritmul simplex primal:



Algoritmul <u>simplex dual</u>:



Teoremă (domeniu vid). *Fie B o bază dual admisibilă. Dacă există o componentă $\overline{x}_i < 0$, pentru care $y_{ij} \geq 0,\ \forall\ j = \overline{1, n},$ atunci problema* (P) nu *are soluție.*

Demonstrație. Notăm $\overline{u}^{\mathrm{f}} = c_{\mathrm{B}}^{\mathrm{f}} \cdot B^{-1}$ şi B_i^{-1} linia i a lui B^{-1}.

Definim vectorul: $u^{\mathrm{f}}(\lambda) = \overline{u}^{\mathrm{f}} - \lambda B_i^{-1}, \quad \lambda \in \mathbf{R}, \lambda \geq 0.$

Pentru orice $j=\overline{1,n}$, avem:

$$u^{\mathrm{f}}(\lambda)\cdot A^j = \underbrace{\overline{u}^{\mathrm{f}}\cdot A^j}_{z_j} - \lambda \underbrace{B_i^{-1}\cdot A^j}_{y_{ij}} = z_j \underbrace{-\lambda y_{ij}}_{\leq 0} \leq \underbrace{z_j \leq c_j}_{B \text{ dual admis.}}$$

deci, $\forall\, \lambda \geq 0,\ u(\lambda)$ este o soluție admisibilă pentru problema (D).

Valoarea funcției obiectiv este: $u^{\mathrm{f}}(\lambda)\cdot b = \overline{u}^{\mathrm{f}}\cdot b - \lambda B_i^{-1}\cdot b = \overline{z} - \lambda \overline{x}_i$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{\lambda\to\infty} u^{\mathrm{f}}(\lambda)\cdot b = \overline{z} + \lim_{\lambda\to\infty}\big(-\lambda \underbrace{\overline{x}_i}_{>0}\big) = +\infty.$$

Problema (D) are optimul $+\infty$ şi din T.F.D. rezultă că (P) nu are soluție.

Teoremă (schimbarea bazei): *Fie* $B=\left(A^{s_1}A^{s_2}\cdots A^{s_m}\right)$ *o bază dual admisibilă şi componenta* $\overline{x}_r<0$, *pentru care există* $j\in\mathcal{R}$ *cu* $y_{rj}<0$.
Dacă alegem indicele $k\in\mathcal{R}$ *astfel încât*

$$\frac{z_k-c_k}{y_{rk}}=\min_{j\in\mathcal{R}}\left\{\frac{z_j-c_j}{y_{rj}}\;\middle|\;y_{rj}<0\right\}$$

atunci, matricea $\hat{B}=\left(A^{s_1}\cdots A^{s_{r-1}}A^{k}A^{s_{r+1}}\cdots A^{s_m}\right)$ *este o bază dual admisibilă, pentru care* $\tilde{z}=c_{\hat{B}}^{T}\cdot\hat{B}^{-1}\cdot b\;\geq\;c_{B}^{T}\cdot B^{-1}\cdot b=\overline{z}.$

Demonstrație. Evident, $y_{rk}<0.$ Din Lema substituției rezultă că $\hat{B}$ este o matrice nesingulară.

Trebuie arătat că $\forall\; j=\overline{1,n},\quad\Rightarrow\quad\tilde{z}_j-c_j=c_{\hat{B}}^{T}\cdot\hat{B}^{-1}\cdot A^{j}-c_j\leq 0.$

Din formulele de schimbare a bazei avem:

$$\tilde{z}_j - c_j = \left(z_j - c_j\right) - \frac{\left(z_k - c_k\right) y_{rj}}{y_{rk}}.$$

B fiind dual admisibilă, rezultă: $\left(z_j - c_j\right) \le 0, \ \ \forall\, j = \overline{1,n}.$

Dacă $y_{rj} \ge 0$, evident $\tilde{z}_j - c_j \le 0.$

Dacă $y_{rj} < 0$, avem: $\tilde{z}_j - c_j = \underbrace{y_{rj}}_{<0} \underbrace{\left(\frac{z_j - c_j}{y_{rj}} - \frac{z_k - c_k}{y_{rk}} \right)}_{\ge 0} \le 0.$

Deci, $\tilde{B}$ este dual admisibilă.

Din formula de schimbare a valorii funcției obiectiv obținem:

$$\tilde{z} = \overline{z} - \underbrace{\frac{\left(z_k - c_k\right)}{y_{rk}}}_{\ge 0} \overline{x}_r \ \ge \overline{z}.$$

Paşii algoritmului simplex dual

- Pasul 0. Se determină (dacă există?!) o bază dual admisibilă B şi se calculează B^{-1}.

- Pasul 1. Se calculează
$$\overline{x} = B^{-1} \cdot b,\ \ \overline{z} = c_{\mathrm{B}}^{\mathrm{f}} \cdot \overline{x},\ \ Y = B^{-1} \cdot A,\ \ z^{\mathrm{f}} - c^{\mathrm{f}} = c_{\mathrm{B}}^{\mathrm{f}} \cdot Y - c^{\mathrm{f}} \le \mathbf{0}^{\mathrm{f}}.$$

- Pasul 2. (test de optimalitate) Dacă $\overline{x} \ge \mathbf{0},$ atunci s-a obținut valoarea optimă $\overline{z},$ şi soluția optimă de bază $x_{\mathrm{B}} = \overline{x},\ x_{\mathrm{R}} = \mathbf{0}.$ STOP.

- Pasul 3. (test domeniu vid) Dacă $\exists\, \overline{x}_i < 0$ pentru care $y_{ij} \ge 0, \forall j = \overline{1,n},$ atunci problema (P) nu are soluție. STOP.

- Pasul 4. (schimbarea bazei) Dacă $\overline{x}_r < 0$ şi $\exists\, j \in \mathrm{R}$ cu $y_{rj} < 0,$ se determină $k \in \mathrm{R}$ astfel încât
$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \min_{j \in \mathrm{R}} \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} \;\middle|\; y_{rj} < 0 \right\}.$$

  Se formează $\hat{B} = B \setminus A^{s_r} \cup A^k,$ se calculează inversa $\hat{B}^{-1} = E_r(\eta) \cdot B^{-1}$ şi se revine la Pasul 1.

Tabloul simplex standard

x_B	$\bar{x}$	$Y = B^{-1} \cdot A$
	$\bar{z}$	$z^T - c^T$

				c_j		c_k	
c_B	V.B	$\bar{x}$	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_k	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
c_{s_i}	x_{s_i}	$\bar{x}_i$	$\cdots$	y_{ij}	$\cdots$	y_{ik}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
c_{s_r}	x_{s_r}	$\bar{x}_r$	$\cdots$	y_{rj}	$\cdots$	$\boxed{y_{rk}}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
		$\bar{z}$	$\cdots$	$z_j - c_j$	$\cdots$	$z_k - c_k$	$\cdots$

$$\bar{z} = \sum_{i=1}^{m} c_{s_i} \bar{x}_i$$

$$z_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_{s_i} y_{ij} - c_j$$

Algoritmul simplex adaptat pentru problema de transport

x_{11}	x_{12}	....	x_{1n}	a_1
x_{21}	x_{22}	....	x_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{m1}	x_{m2}	....	x_{mn}	a_m
b_1	b_2	....	b_n	

Marfă disponibilă

m Depozite

n Beneficiari

Marfă solicitată

Matricea costurilor

c_{11}	....	c_{1n}
$\vdots$	....	$\vdots$
c_{m1}	....	c_{mn}

Modelul matematic: $$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$ Costul total

în raport cu
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i\,, & i=\overline{1,m}\,, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j\,, & j=\overline{1,n}\,, \\ x_{ij} \ge 0\,, & i=\overline{1,m}\,,\ j=\overline{1,n}\,. \end{cases}$$

Cantitatea disponibilă (oferta)

Cantitatea solicitată (cererea)

Condiția naturală de existență a unei soluții admisibile este:

$$\boxed{\text{Oferta} \quad \ge \quad \text{Cererea}}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \ge \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right)}_{\ge b_j} \ge \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Forma standard a problemei de transport: $\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$

în raport cu
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i\,, \quad i=\overline{1,m}\,, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j\,, \quad j=\overline{1,n}\,, \\ x_{ij} \ge 0\,, \quad i=\overline{1,m}\,,\ j=\overline{1,n}\,. \end{cases} \qquad \text{(PT)}$$

Teoremă. (PT) *are o soluție admisibilă dacă şi numai dacă*

$$a_i \ge 0,\ i=\overline{1,m};\quad b_j \ge 0,\ j=\overline{1,n};\quad \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j\,.$$

Demonstrație. $\Longrightarrow$ Rezultă imediat:

$$x_{ij} \ge 0\,,\quad i=\overline{1,m}\,,\ j=\overline{1,n}\,,\quad \Rightarrow \quad \sum x_{ij} \ge 0 \quad \begin{cases} a_i \ge 0 \\ b_j \ge 0 \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right)}_{=a_i} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right)}_{=b_j} = \sum_{j=1}^{n} b_j\,.$$

$\Leftarrow$ Notăm $S = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \geq 0.$

Dacă $S = 0 \;\Rightarrow\; a_i = b_j = 0 \;\Rightarrow\; x_{ij} = 0, \; \forall i, j.$

Dacă $S > 0$ este suficient să luăm $x_{ij} = \dfrac{a_i b_j}{S} \geq 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}.$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{S} = \frac{b_j}{\cancel{S}} \cancel{\sum_{i=1}^{m} a_i} = b_j, \quad j = \overline{1,n}.$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{S} = \frac{a_i}{\cancel{S}} \cancel{\sum_{j=1}^{n} b_j} = a_i, \quad i = \overline{1,m}.$$

<u>**Observație.**</u> Putem considera mereu $c_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}.$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \underbrace{(c_{ij} + \lambda)}_{\geq 0} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \lambda \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \lambda S$$

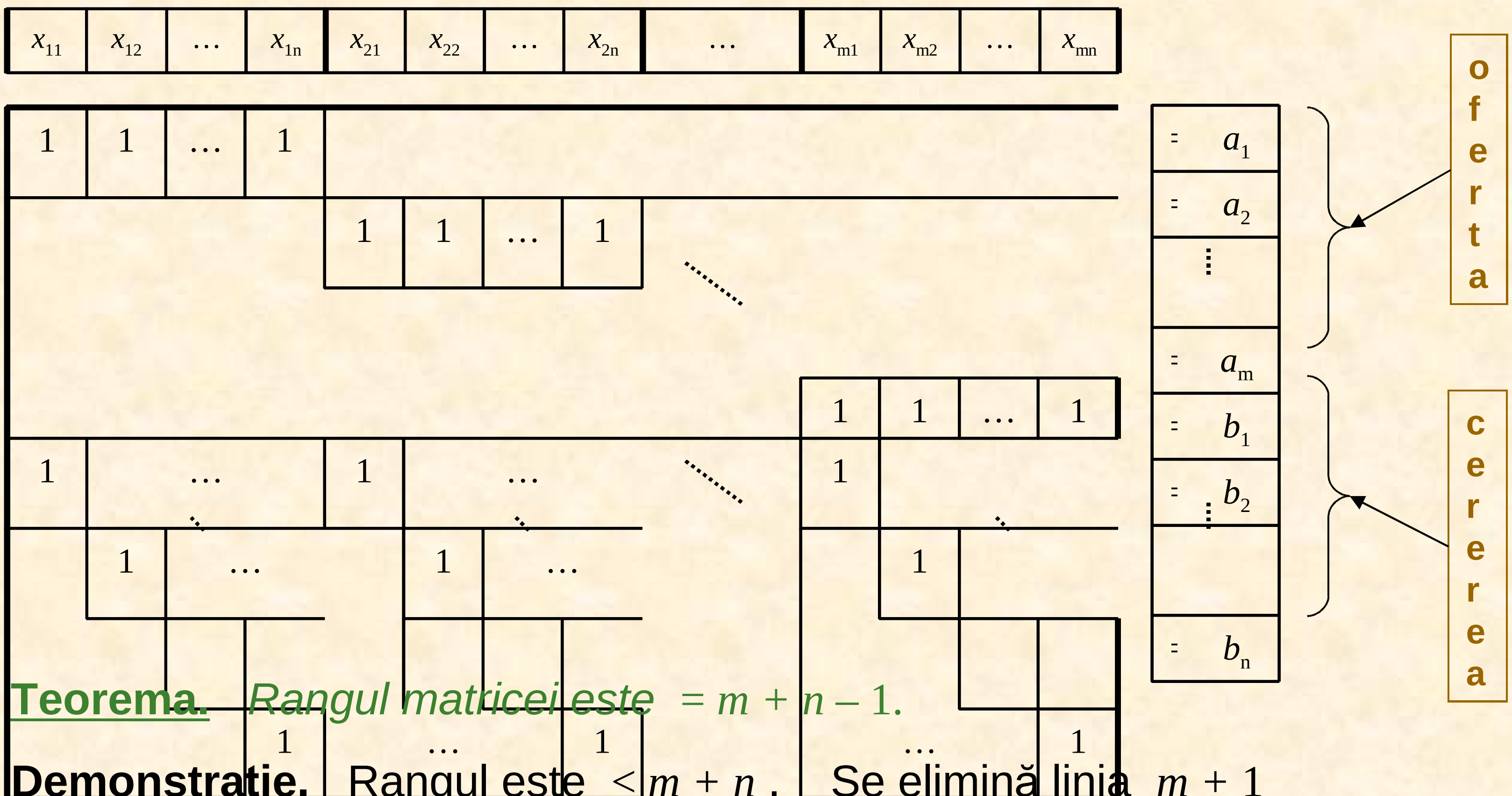
pentru $\lambda = \max\limits_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \{ -c_{ij}, 0 \}$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \geq 0$

<u>**(PT) are optim finit !**</u>

= constantă

Structura matricei restricțiilor:



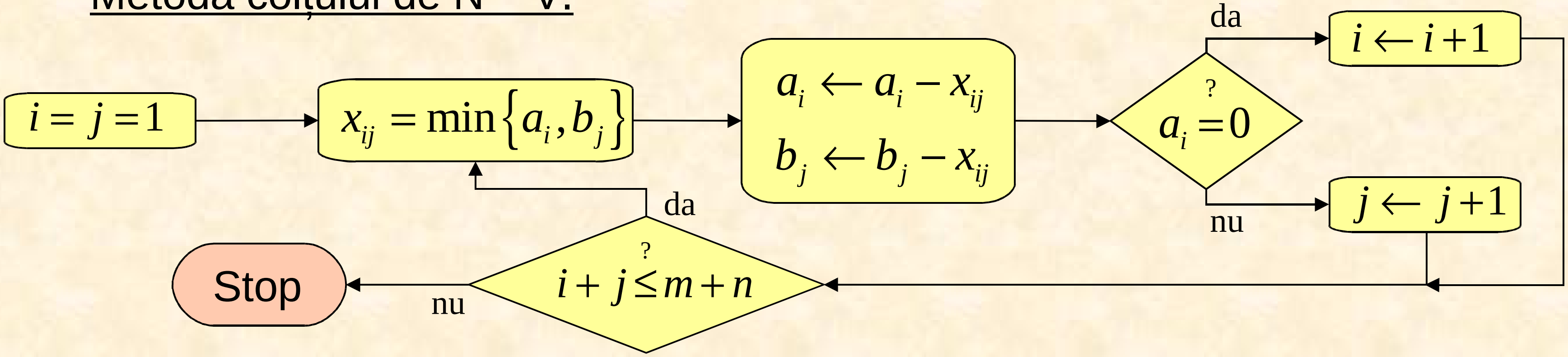
Teorema. *Rangul matricei este* $= m + n - 1$.

Demonstrație. Rangul este $< m + n$. Se elimină linia $m + 1$

şi atunci, $\det\left(A^{11}, A^{21}, \cdots, A^{m-1,1} A^{m1}, A^{m2}, \cdots, A^{mn}\right) = 1 \neq 0.$

Determinarea unei soluții inițiale de bază

Metoda colțului de N – V.

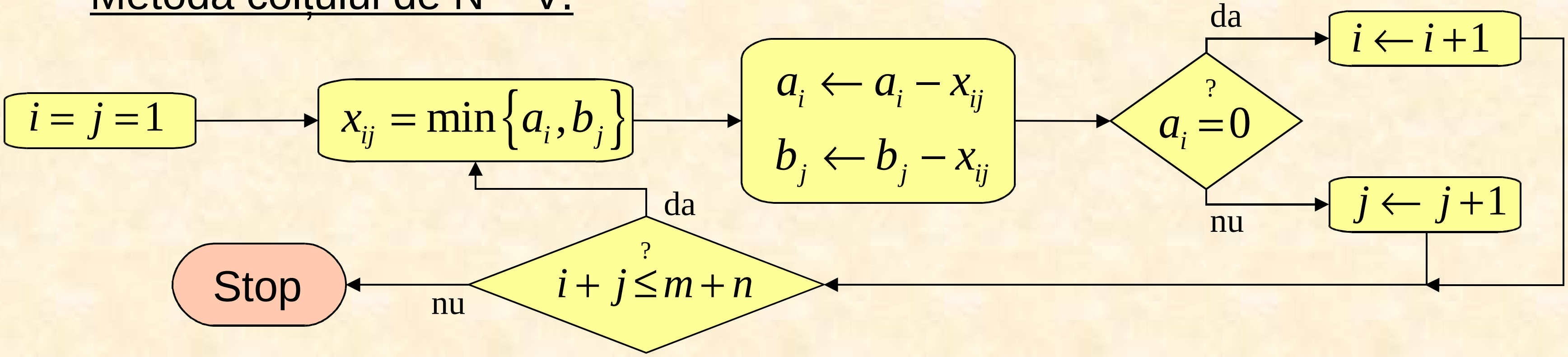


Exemplu.

					13
					17
					11
					19
7	18	9	16	10	

Determinarea unei soluții inițiale de bază

Metoda colțului de N – V.

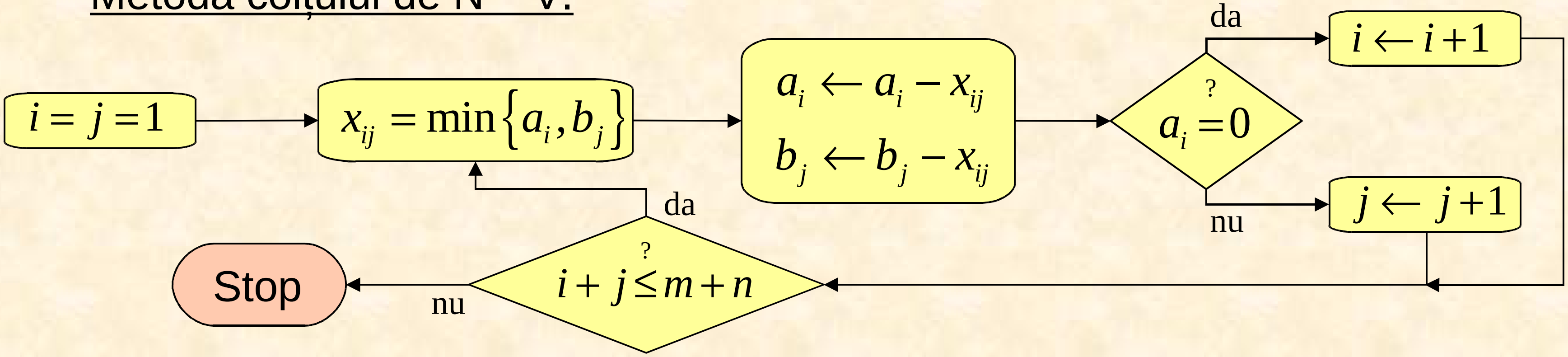


Exemplu.

x_{11}					13
					17
					11
					19
7	18	9	16	10	

Determinarea unei soluții inițiale de bază

Metoda colțului de N – V.

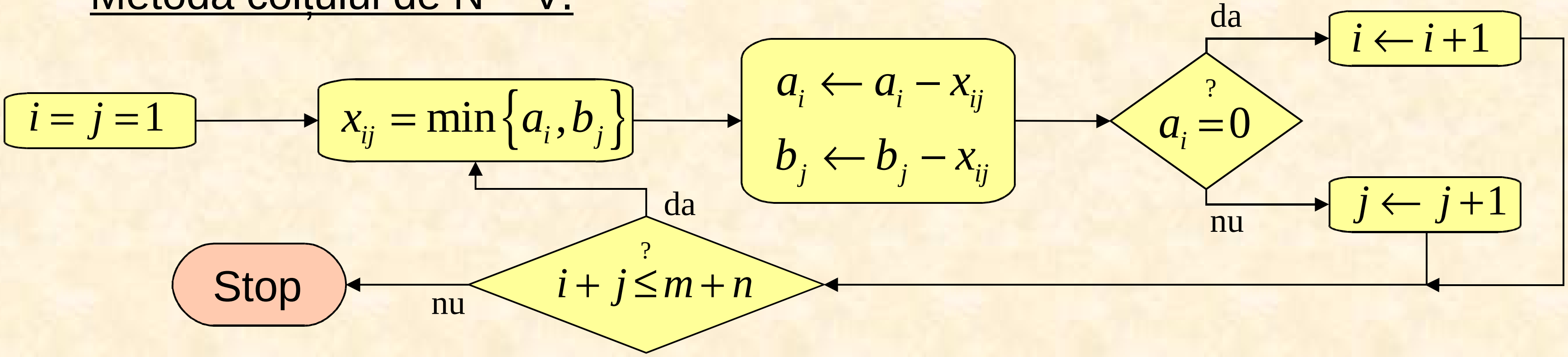


Exemplu.

7					6
					17
					11
					19
0	18	9	16	10	

Determinarea unei soluții inițiale de bază

Metoda colțului de N – V.

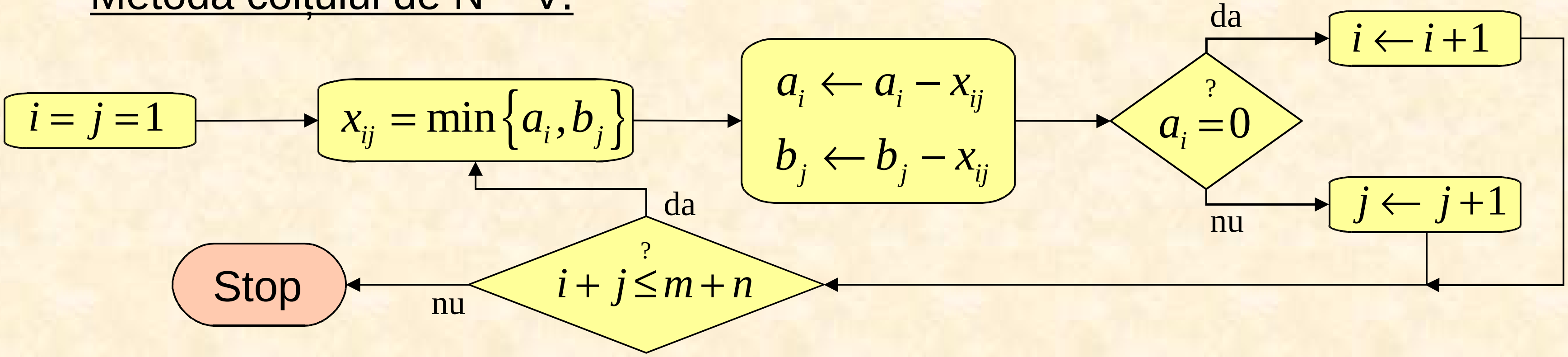


Exemplu.

7	x_{12}				6
					17
					11
					19
0	18	9	16	10	

Determinarea unei soluții inițiale de bază

Metoda colțului de N – V.

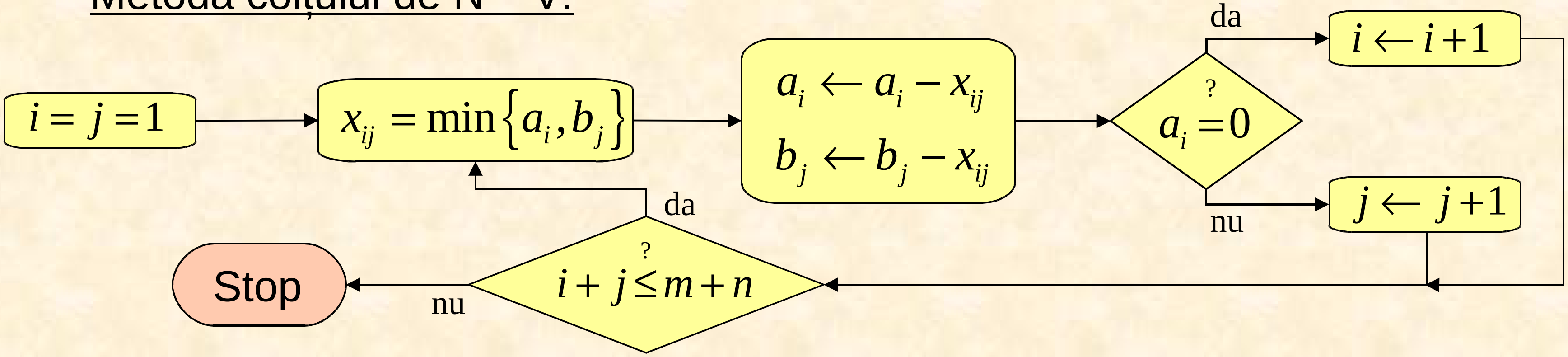


Exemplu.

7	6				0
					17
					11
					19
0	12	9	16	10	

Determinarea unei soluții inițiale de bază

Metoda colțului de N – V.

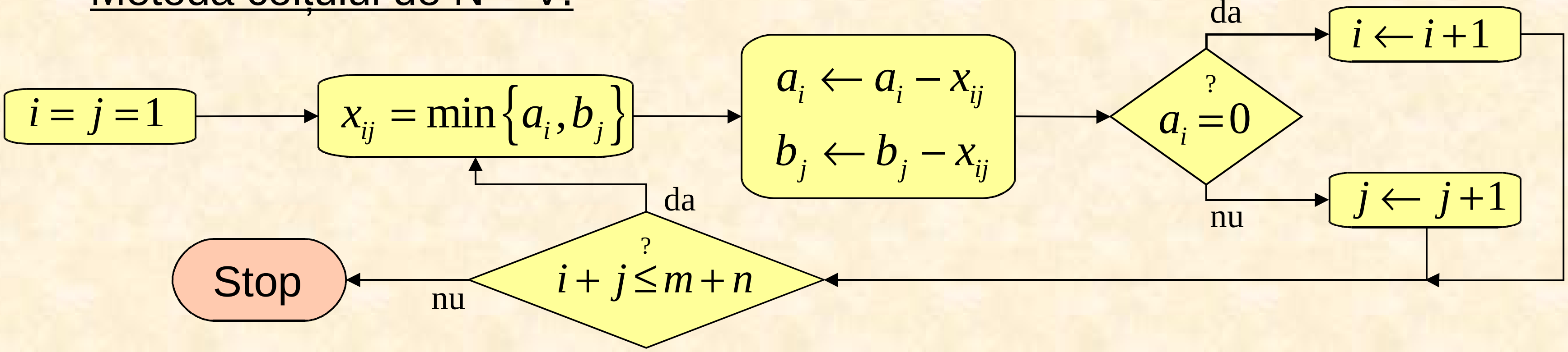


Exemplu.

7	6				0
	x_{22}				17
					11
					19
0	12	9	16	10	

Determinarea unei soluții inițiale de bază

Metoda colțului de N – V.

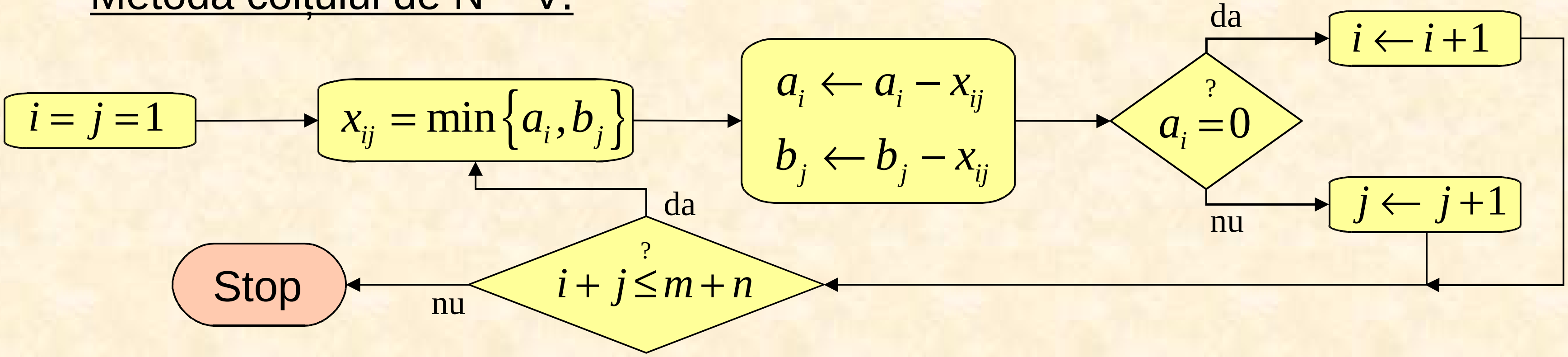


Exemplu.

7	6				0
	12				5
					11
					19
0	0	9	16	10	

Determinarea unei soluții inițiale de bază

Metoda colțului de N – V.

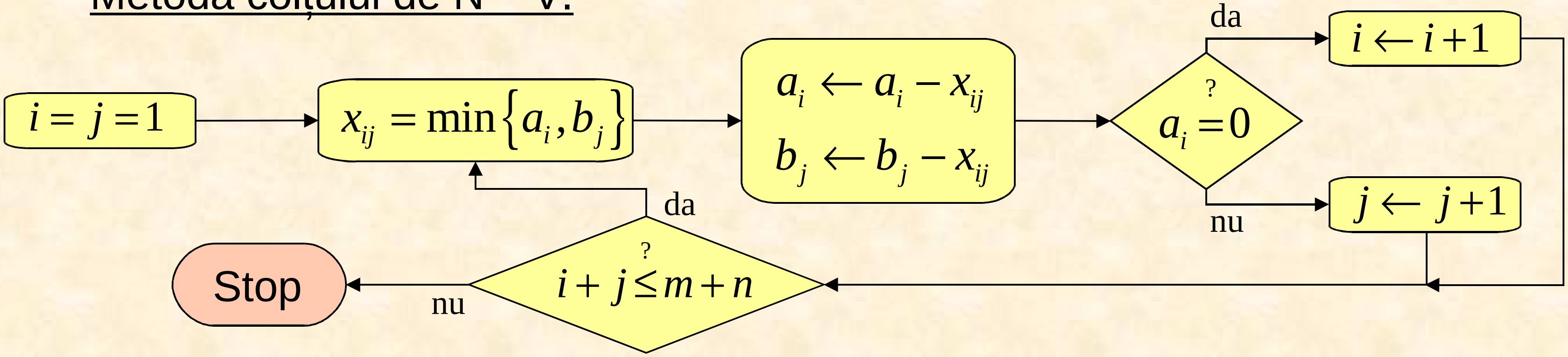


Exemplu.

7	6				0
	12	x_{23}			5
					11
					19
0	0	9	16	10	

Determinarea unei soluții inițiale de bază

Metoda colțului de N – V.

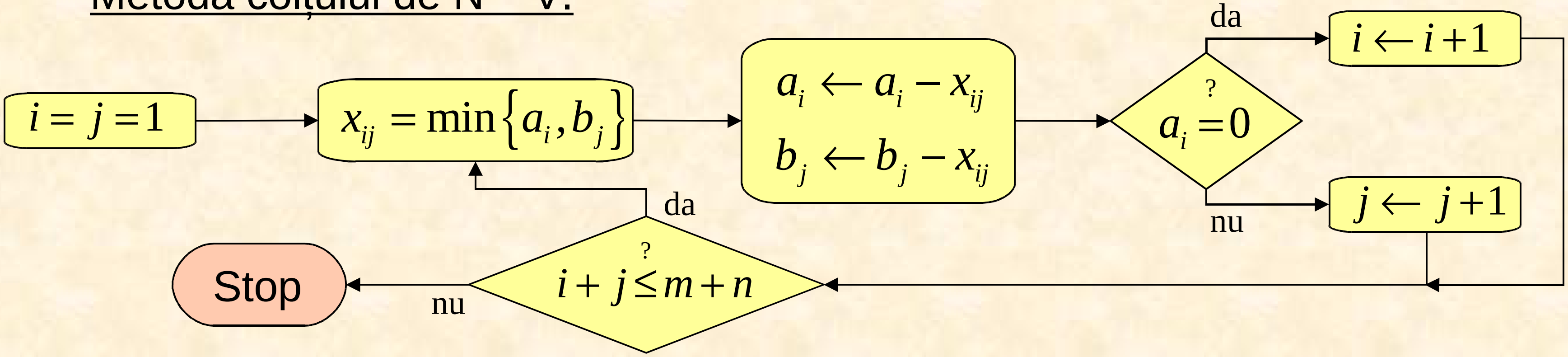


Exemplu.

7	6				0
	12	5			0
					11
					19
0	0	4	16	10	

Determinarea unei soluții inițiale de bază

Metoda colțului de N – V.

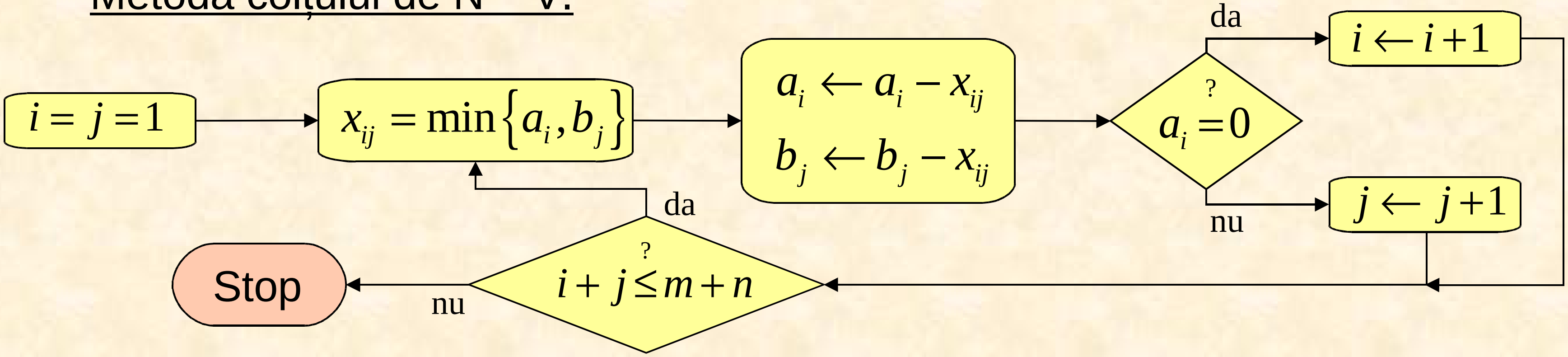


Exemplu.

7	6				0
	12	5			0
		x_{33}			11
					19
0	0	4	16	10	

Determinarea unei soluții inițiale de bază

Metoda colțului de N – V.

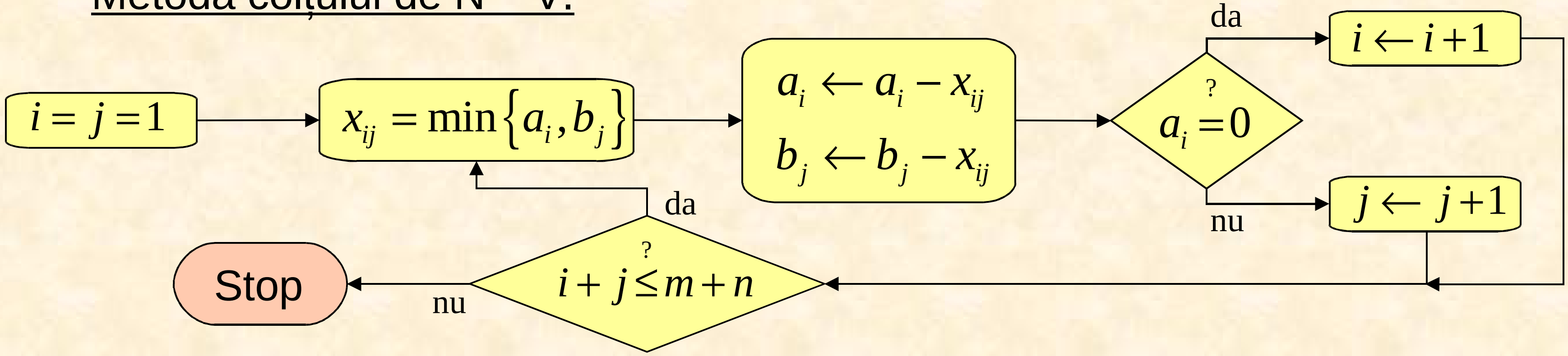


Exemplu.

7	6				0
	12	5			0
		4			7
					19
0	0	0	16	10	

Determinarea unei soluții inițiale de bază

Metoda colțului de N – V.

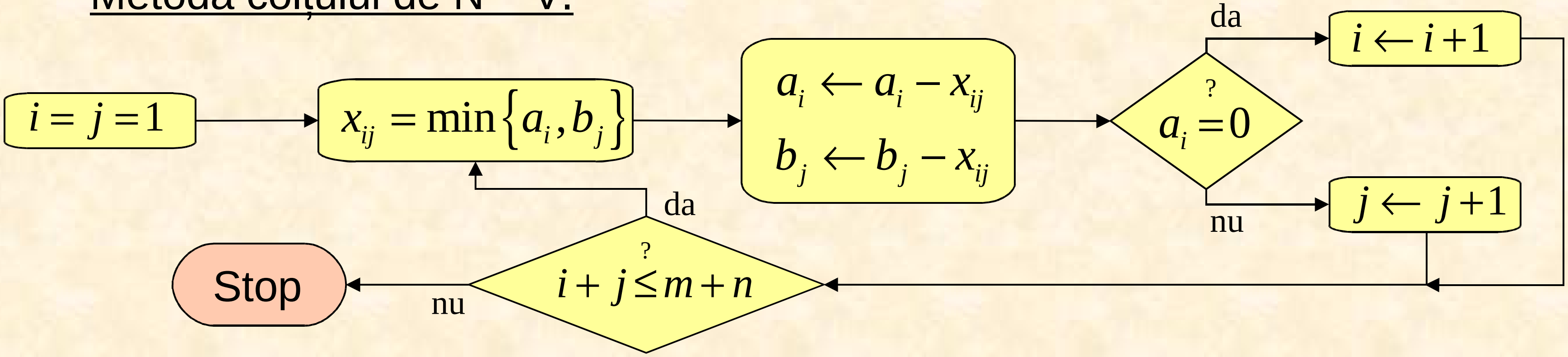


Exemplu.

7	6				0
	12	5			0
		4	x_{34}		7
					19
0	0	0	16	10	

Determinarea unei soluții inițiale de bază

Metoda colțului de N – V.

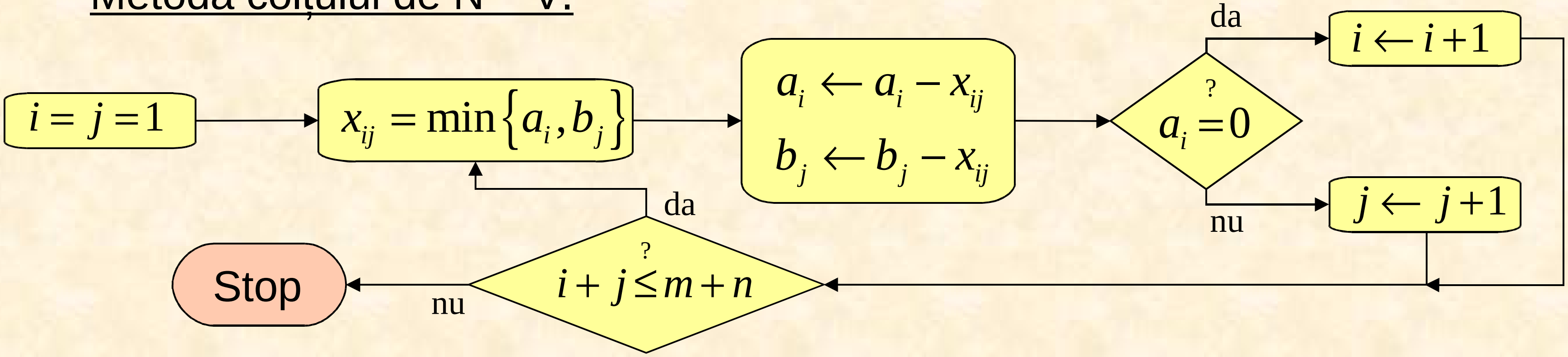


Exemplu.

7	6				0
	12	5			0
		4	7		0
					19
0	0	0	9	10	

Determinarea unei soluții inițiale de bază

Metoda colțului de N – V.

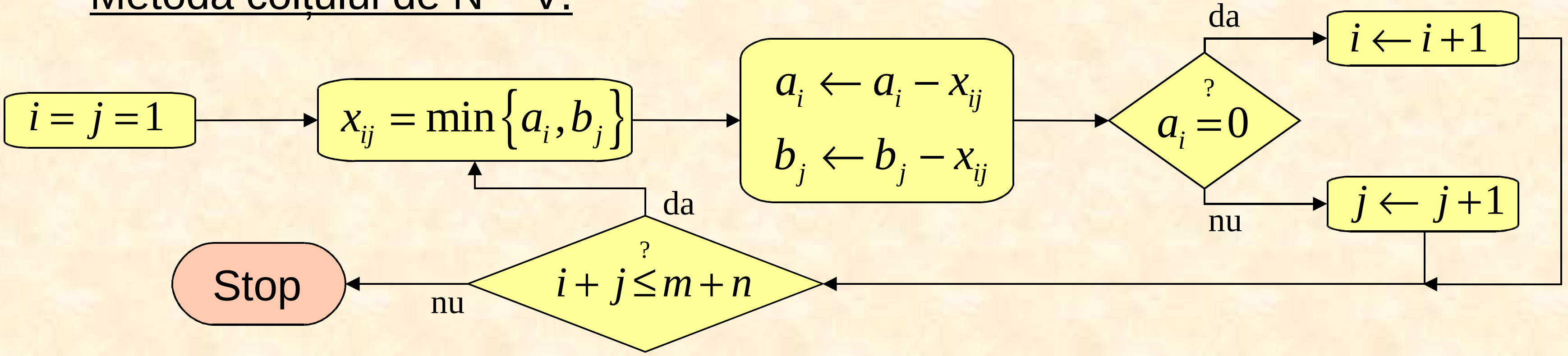


Exemplu.

7	6				0
	12	5			0
		4	7		0
			x_{44}		19
0	0	0	9	10	

Determinarea unei soluții inițiale de bază

Metoda colțului de N – V.

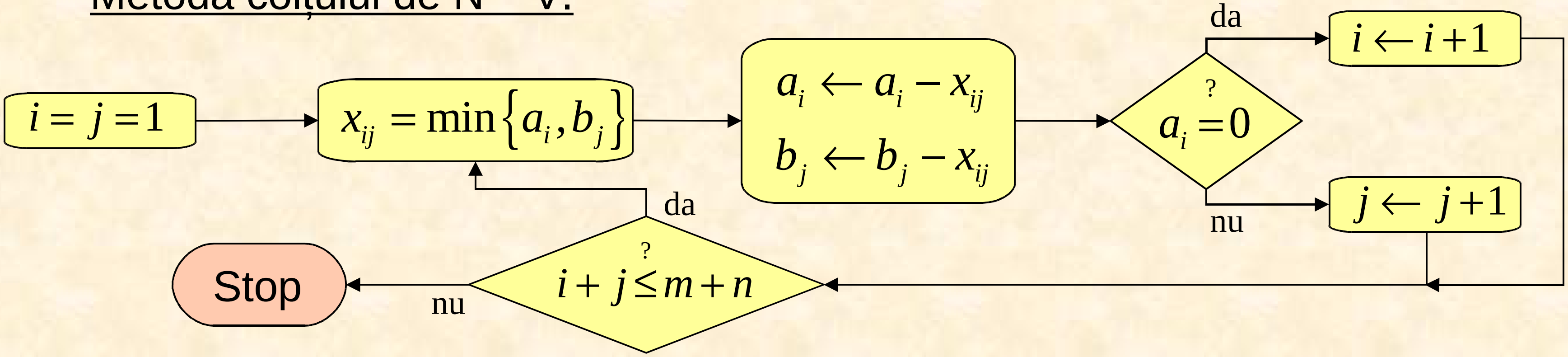


Exemplu.

7	6				0
	12	5			0
		4	7		0
			9		10
0	0	0	0	10	

Determinarea unei soluții inițiale de bază

Metoda colțului de N – V.

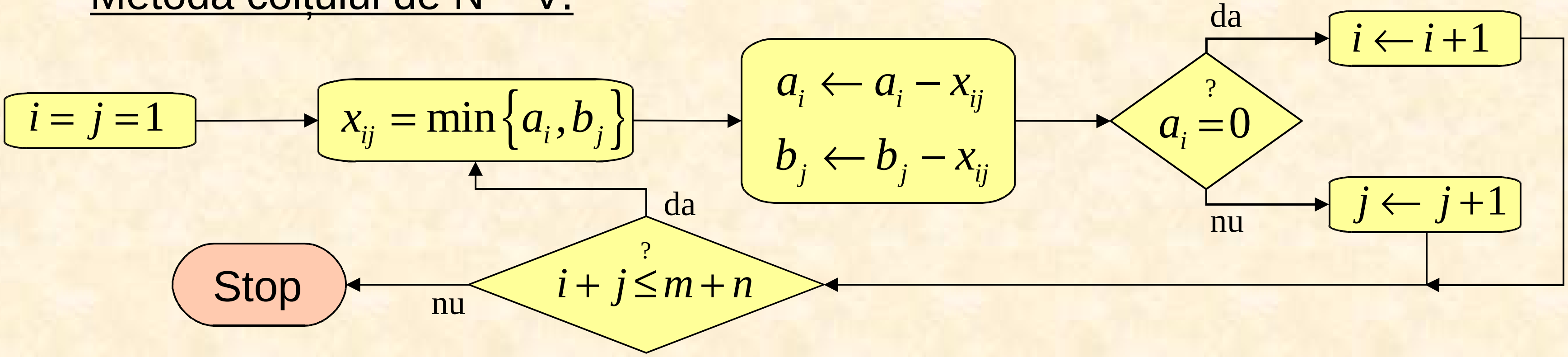


Exemplu.

7	6				0
	12	5			0
		4	7		0
			9	x_{45}	10
0	0	0	0	10	

Determinarea unei soluții inițiale de bază

Metoda colțului de N – V.

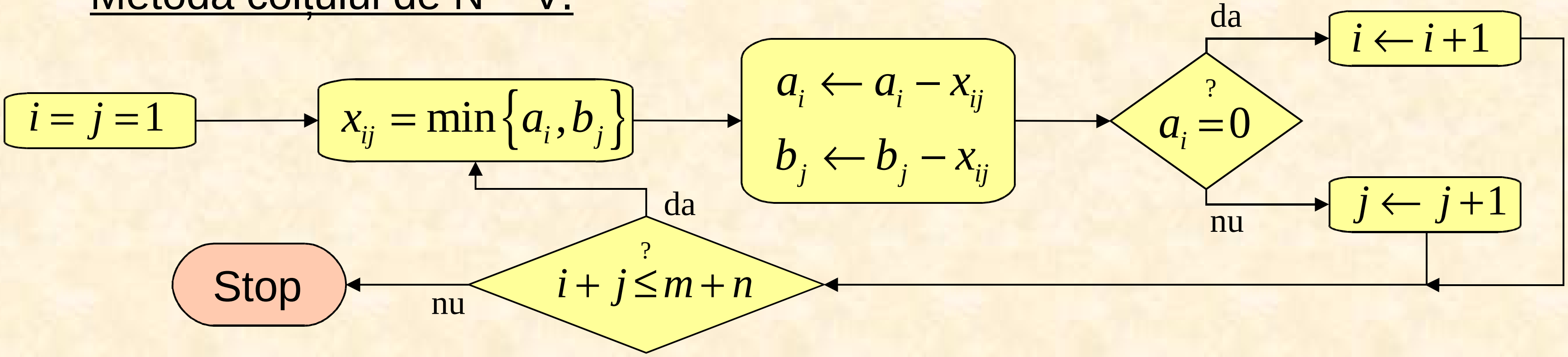


Exemplu.

7	6				0
	12	5			0
		4	7		0
			9	10	0
0	0	0	0	0	

Determinarea unei soluții inițiale de bază

Metoda colțului de N – V.

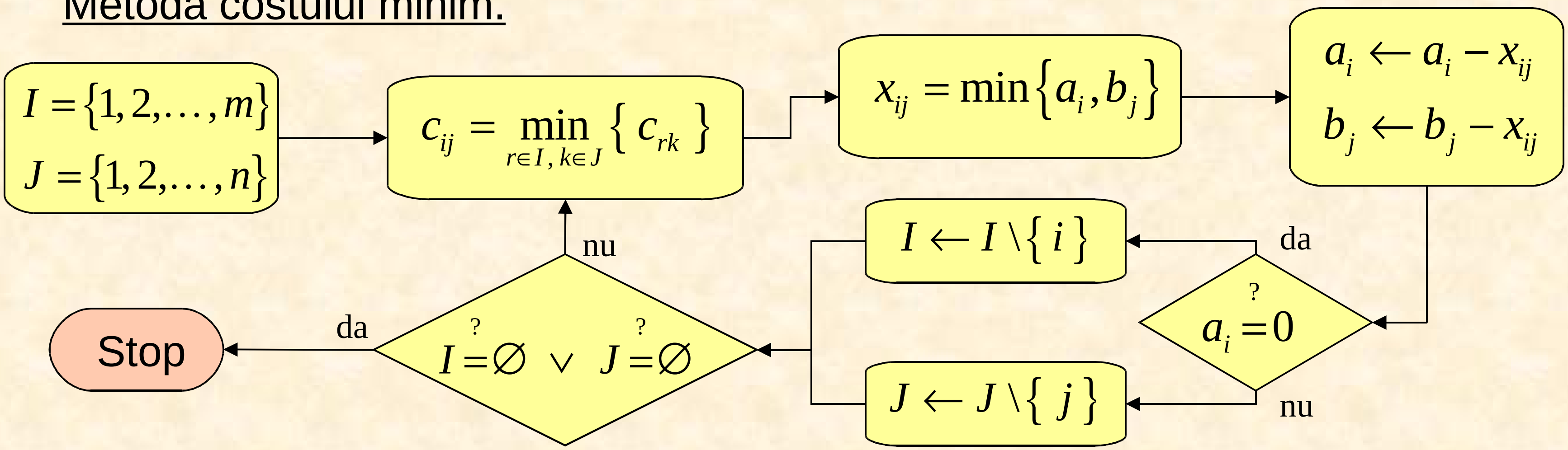


Exemplu.

7	6				13
	12	5			17
		4	7		11
			9	10	19
7	18	9	16	10	

Determinarea unei soluții inițiale de bază

Metoda costului minim.



Exemplu.

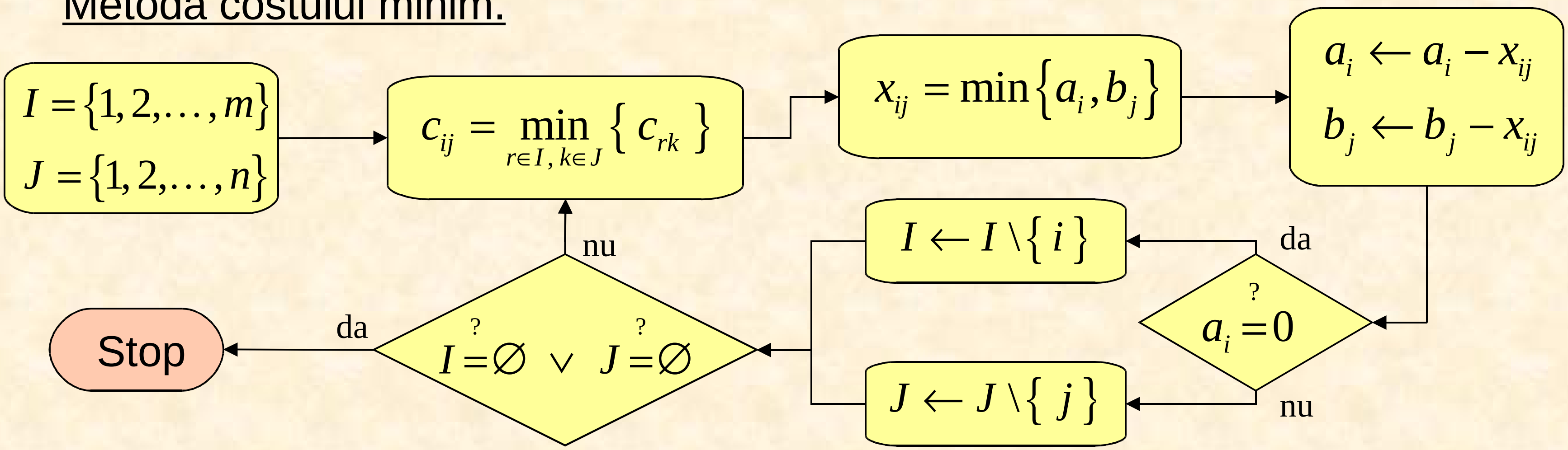
5	8	2	4	3
4	3	4	1	5
3	4	2	1	3
2	3	2	1	3

Matricea costurilor

					13
					17
					11
					19
7	18	9	16	10	

Determinarea unei soluții inițiale de bază

Metoda costului minim.



Exemplu.

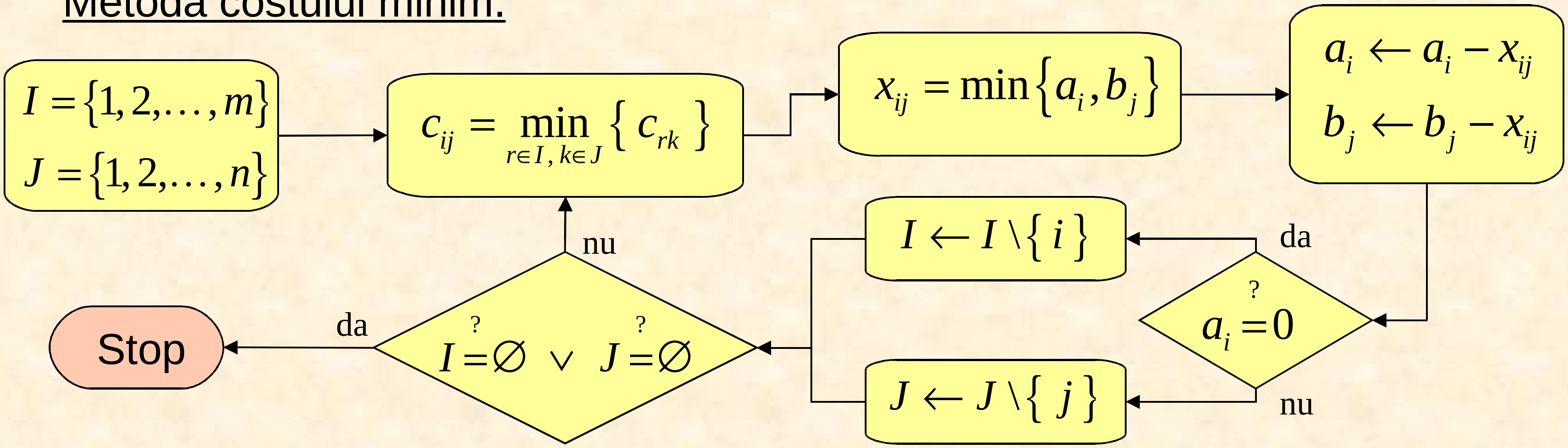
5	8	2	4	3
4	3	4	1	5
3	4	2	1	3
2	3	2	1	3

Matricea costurilor

					13
			x_{24}		17
					11
					19
7	18	9	16	10	

Determinarea unei soluții inițiale de bază

Metoda costului minim.



Exemplu.

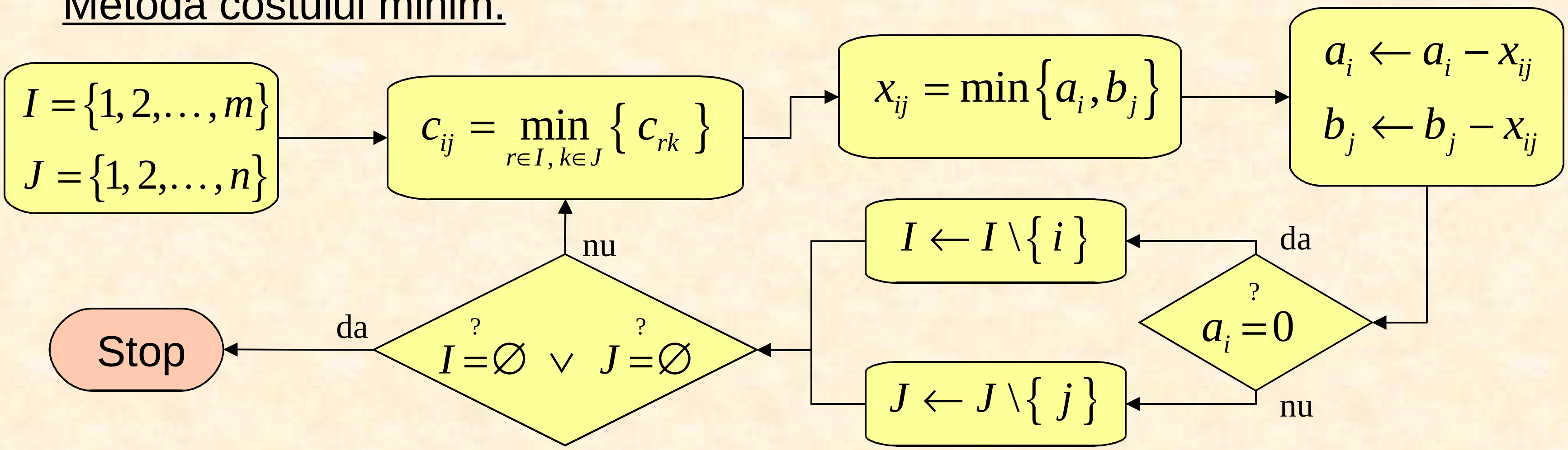
5	8	2	4	3
4	3	4	1	5
3	4	2	1	3
2	3	2	1	3

Matricea costurilor

					13
			16		1
					11
					19
7	18	9	0	10	

Determinarea unei soluții inițiale de bază

Metoda costului minim.



Exemplu.

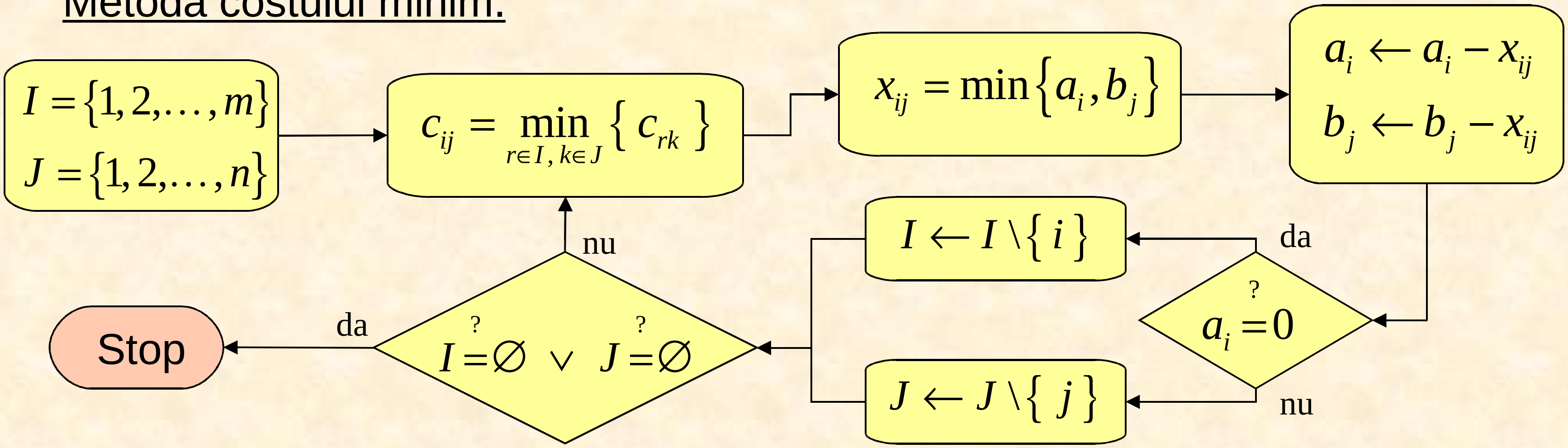
5	8	2	4	3
4	3	4	1	5
3	4	2	1	3
2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		x_{13}			13
			16		1
					11
					19
7	18	9	0	10	

Determinarea unei soluții inițiale de bază

Metoda costului minim.



Exemplu.

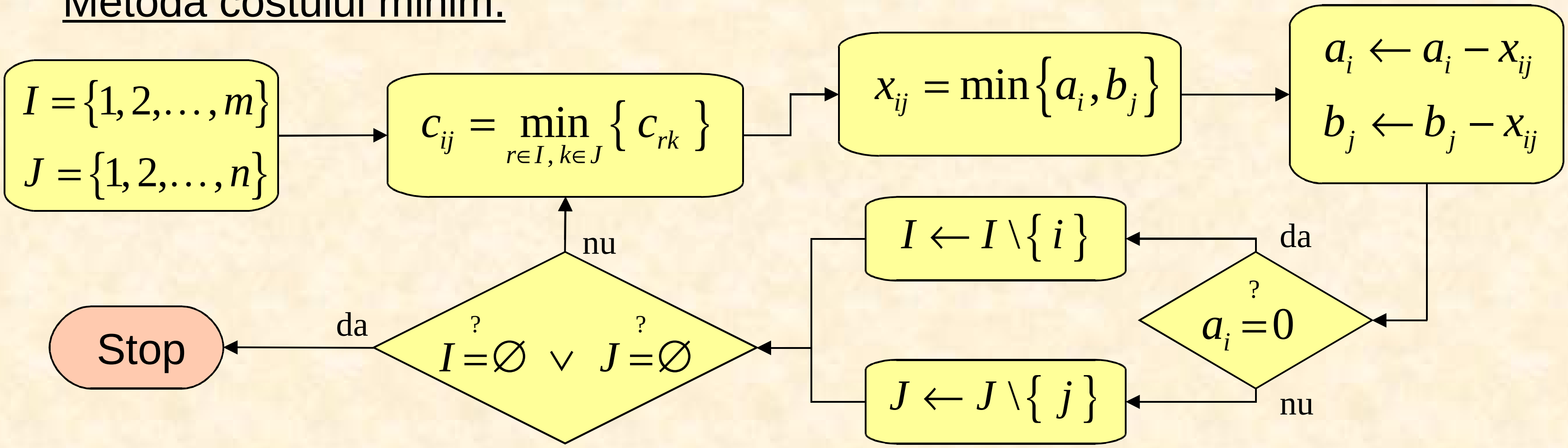
5	8	2	4	3
4	3	4	1	5
3	4	2	1	3
2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9			4
			16		1
					11
					19
7	18	0	0	10	

Determinarea unei soluții inițiale de bază

Metoda costului minim.



Exemplu.

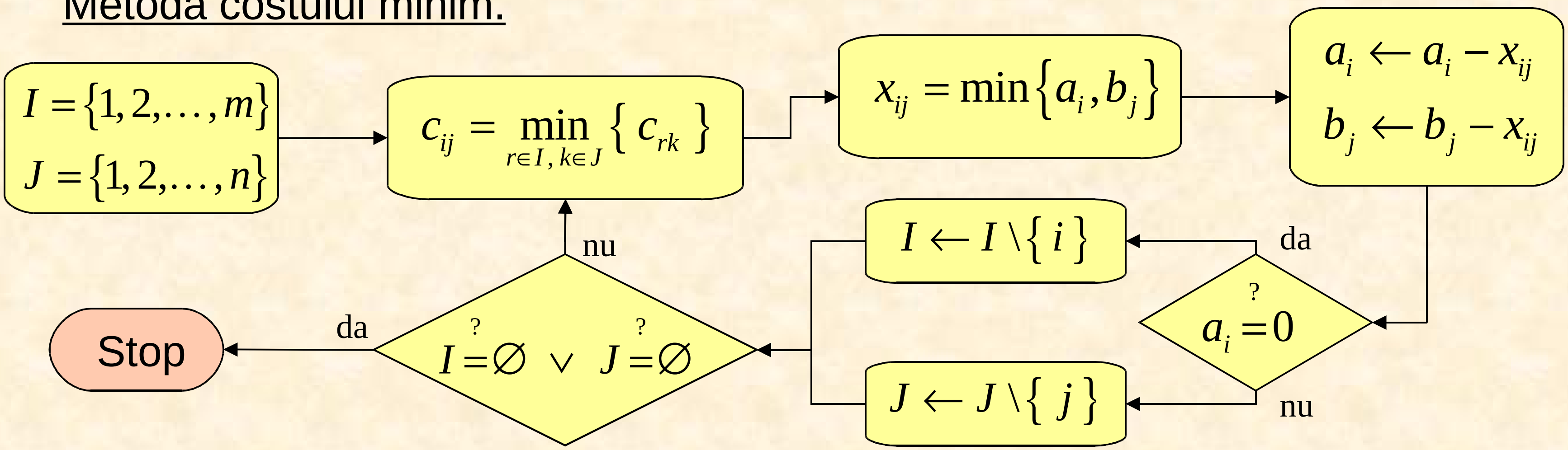
5	8	2	4	3
4	3	4	1	5
3	4	2	1	3
2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9			4
			16		1
					11
x_{41}					19
7	18	0	0	10	

Determinarea unei soluții inițiale de bază

Metoda costului minim.



Exemplu.

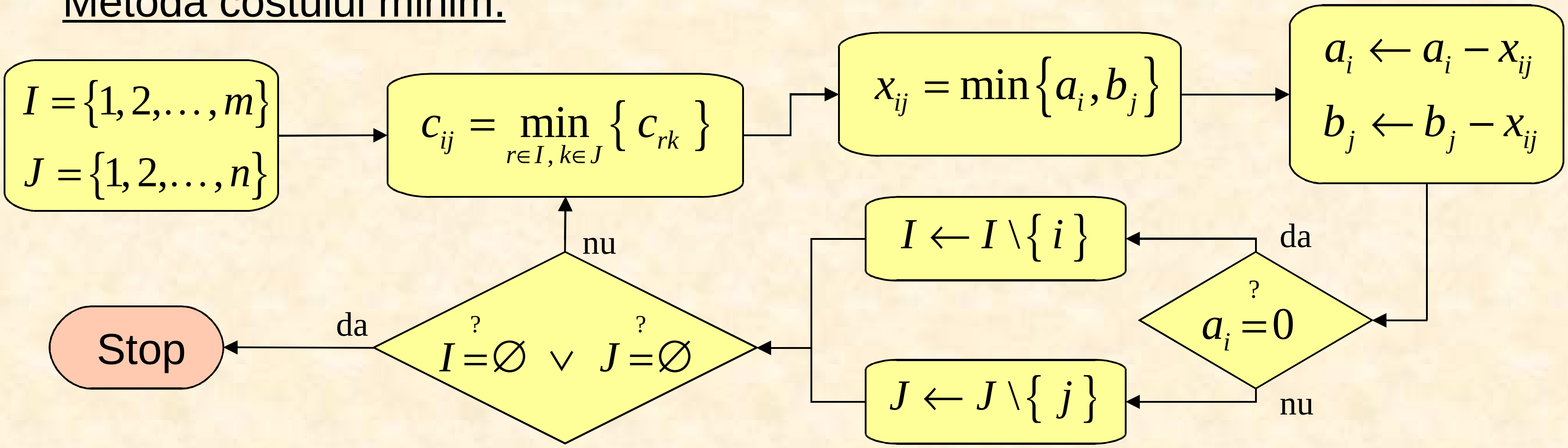
5	8	2	4	3
4	3	4	1	5
3	4	2	1	3
2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9			4
			16		1
					11
7					12
0	18	0	0	10	

Determinarea unei soluții inițiale de bază

Metoda costului minim.



Exemplu.

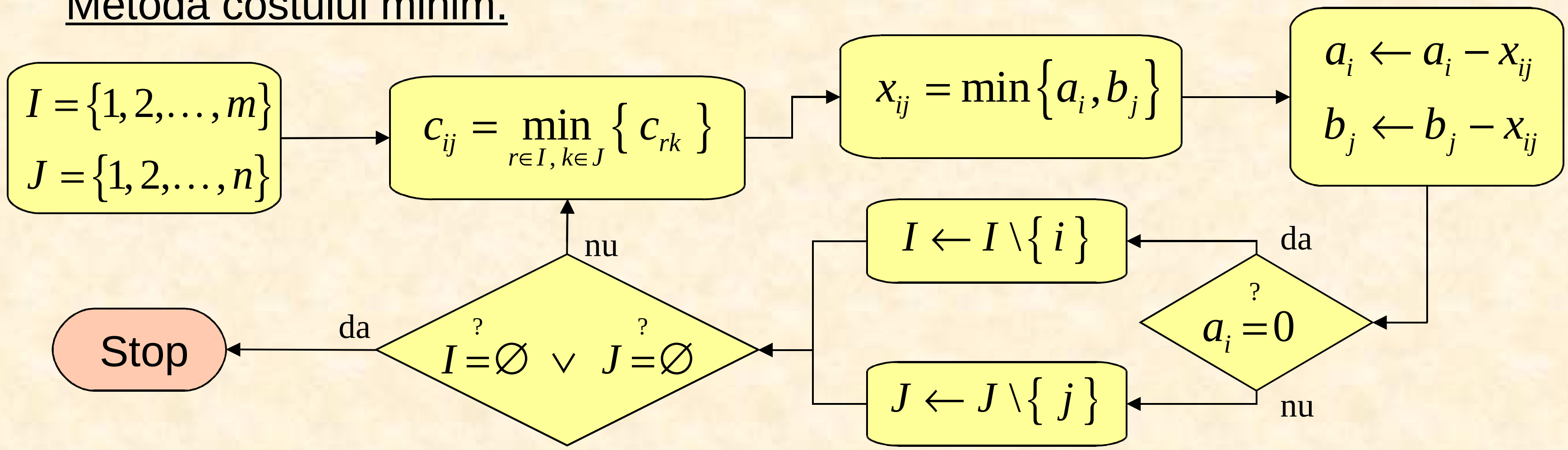
5	8	2	4	3
4	3	4	1	5
3	4	2	1	3
2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9		x_{15}	4
			16		1
					11
7					12
0	18	0	0	10	

Determinarea unei soluții inițiale de bază

Metoda costului minim.



Exemplu.

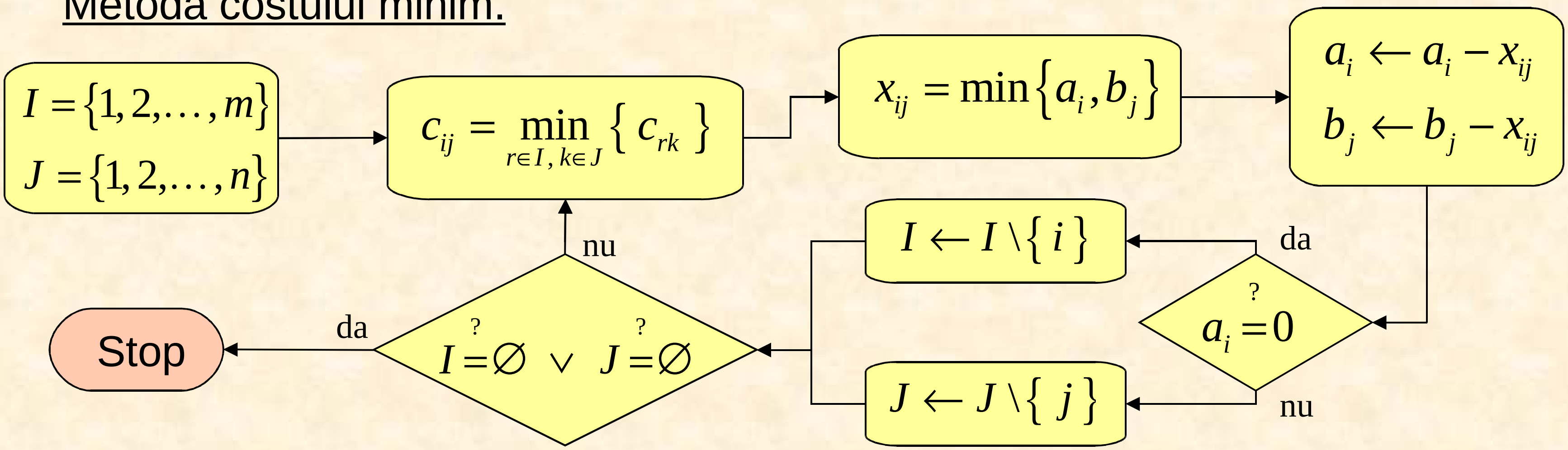
5	8	2	4	3
4	3	4	1	5
3	4	2	1	3
2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9		4	0
			16		1
					11
7					12
0	18	0	0	6	

Determinarea unei soluții inițiale de bază

Metoda costului minim.



Exemplu.

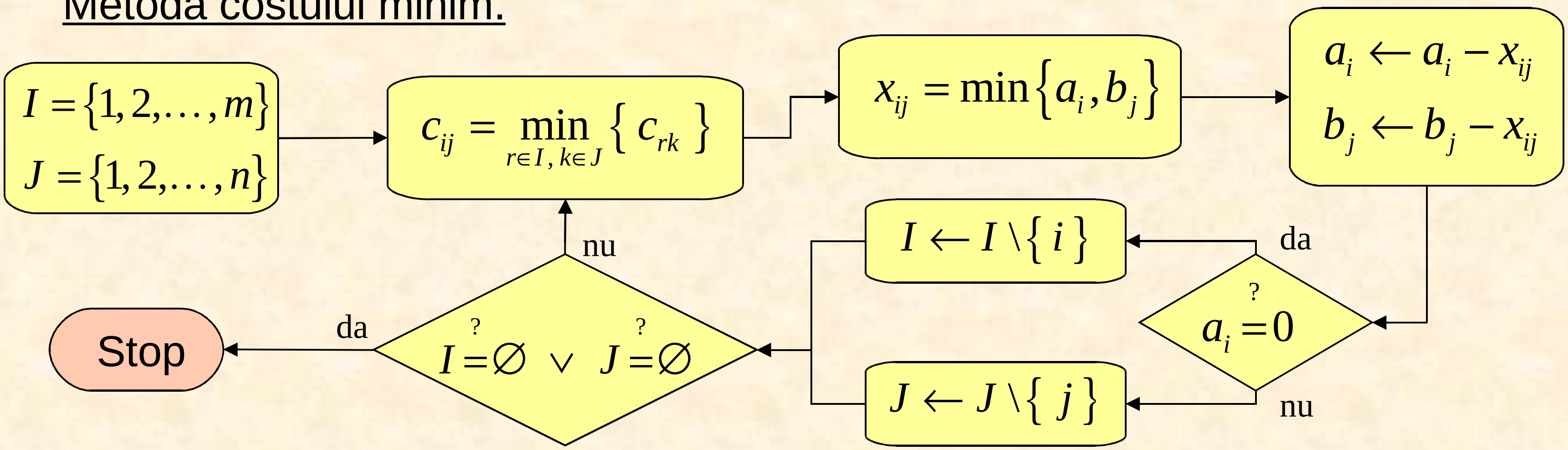
5	8	2	4	3
4	3	4	1	5
3	4	2	1	3
2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9		4	0
	x_{22}		16		1
					11
7					12
0	18	0	0	6	

Determinarea unei soluții inițiale de bază

Metoda costului minim.



Exemplu.

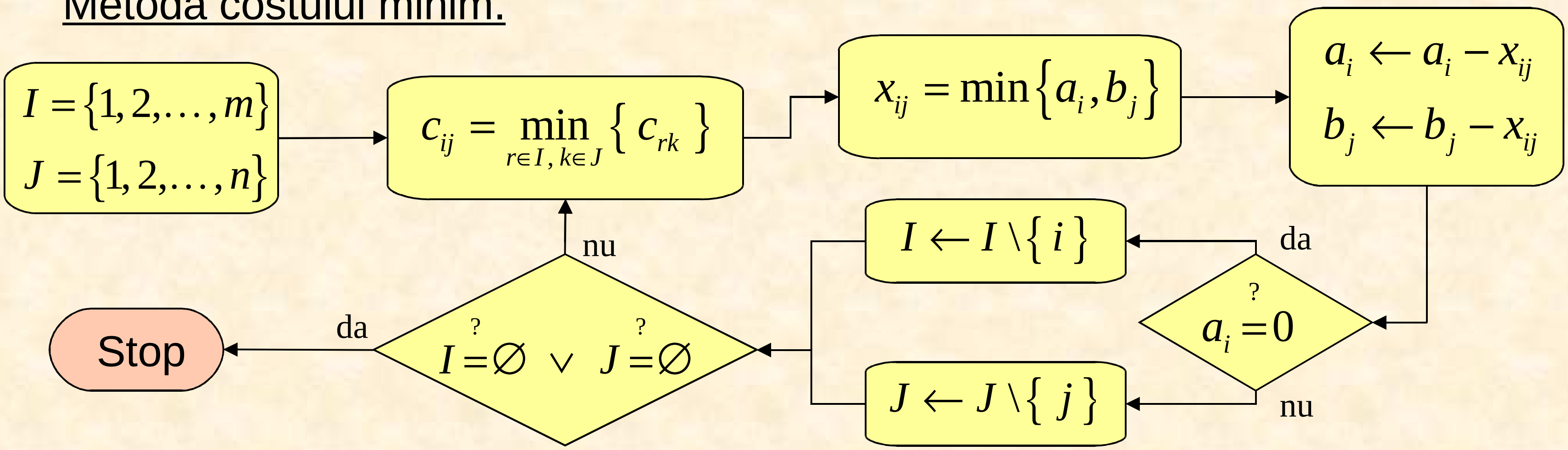
5	8	2	4	3
4	3	4	1	5
3	4	2	1	3
2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9		4	0
	1		16		0
					11
7					12
0	17	0	0	6	

Determinarea unei soluții inițiale de bază

Metoda costului minim.



Exemplu.

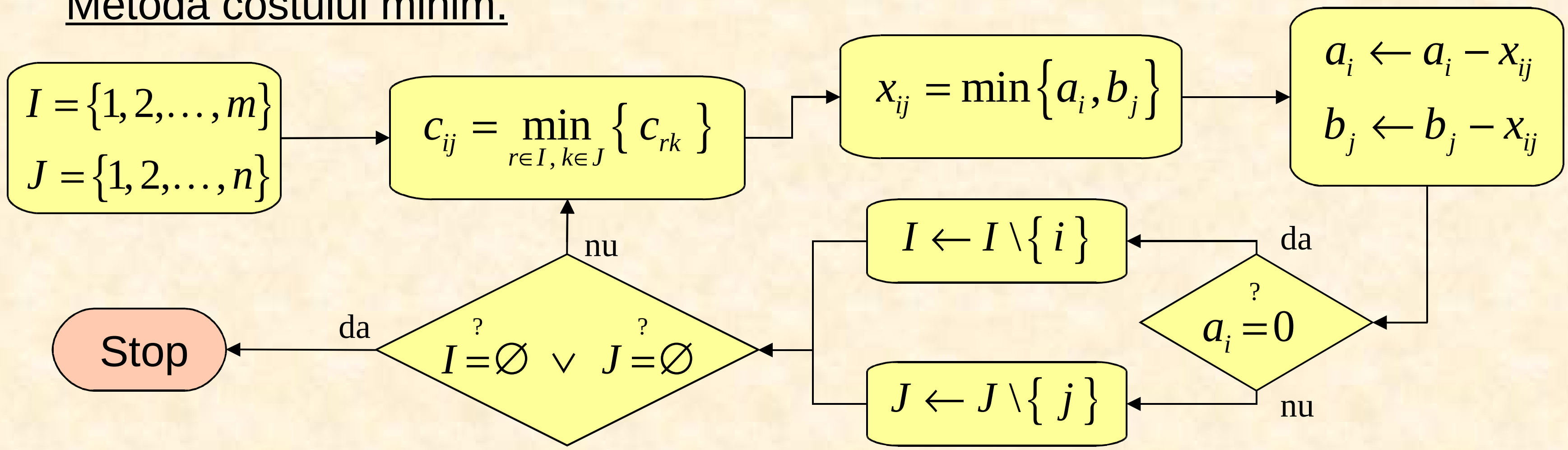
5	8	2	4	3
4	3	4	1	5
3	4	2	1	3
2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9		4	0
	1		16		0
				x_{35}	11
7					12
0	17	0	0	6	

Determinarea unei soluții inițiale de bază

Metoda costului minim.



Exemplu.

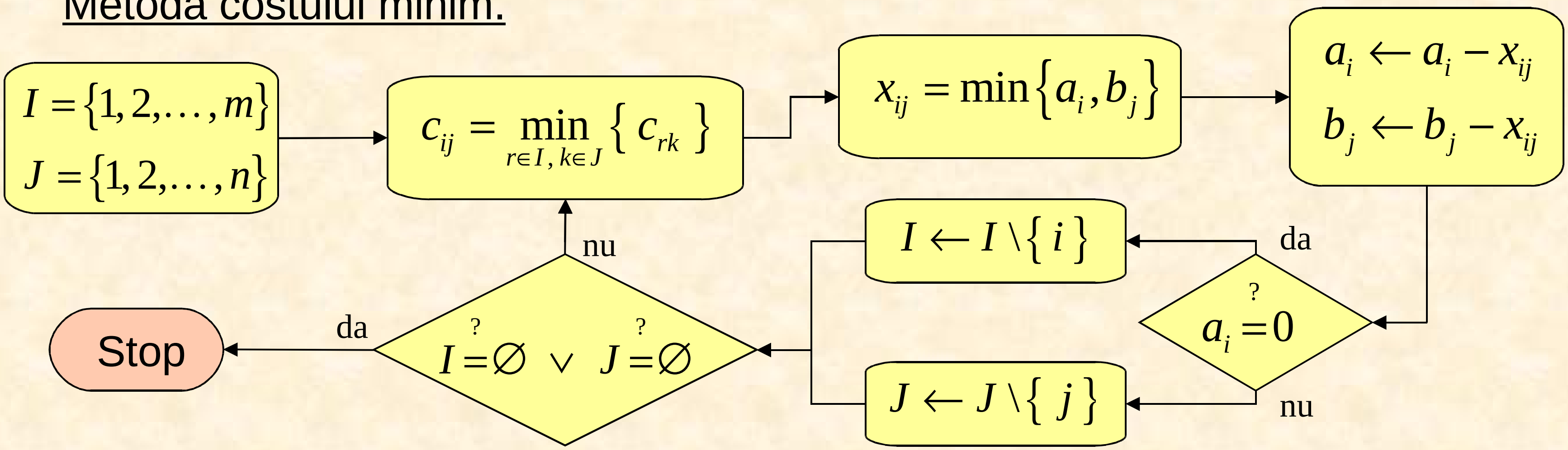
5	8	2	4	3
4	3	4	1	5
3	4	2	1	3
2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9		4	0
	1		16		0
				6	5
7					12
0	17	0	0	0	

Determinarea unei soluții inițiale de bază

Metoda costului minim.



Exemplu.

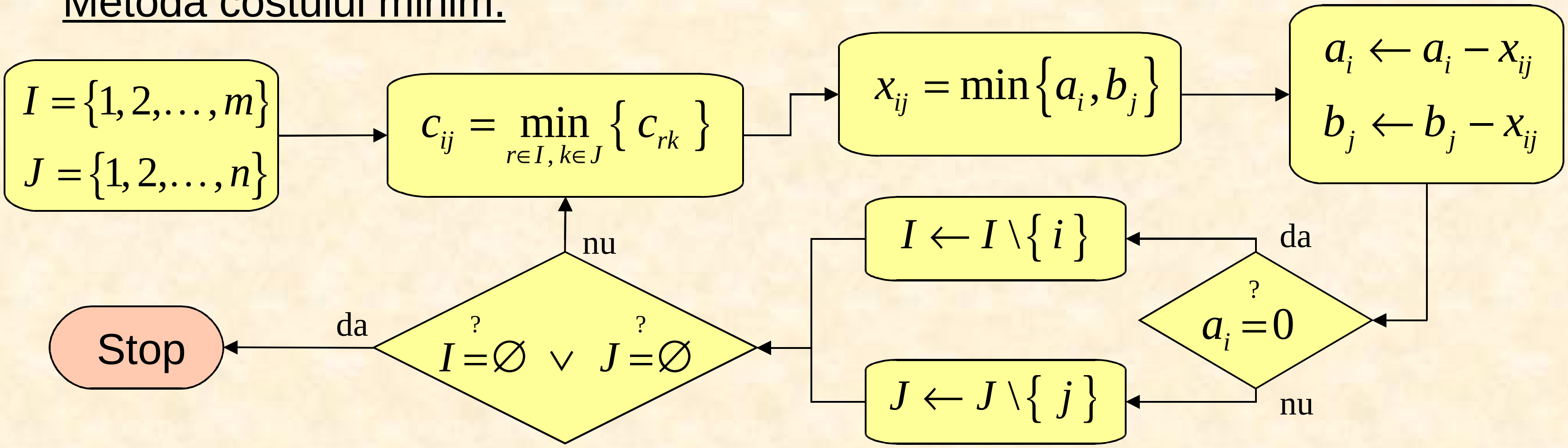
5	8	2	4	3
4	3	4	1	5
3	4	2	1	3
2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9		4	0
	1		16		0
				6	5
7	x_{42}				12
0	17	0	0	0	

Determinarea unei soluții inițiale de bază

Metoda costului minim.



Exemplu.

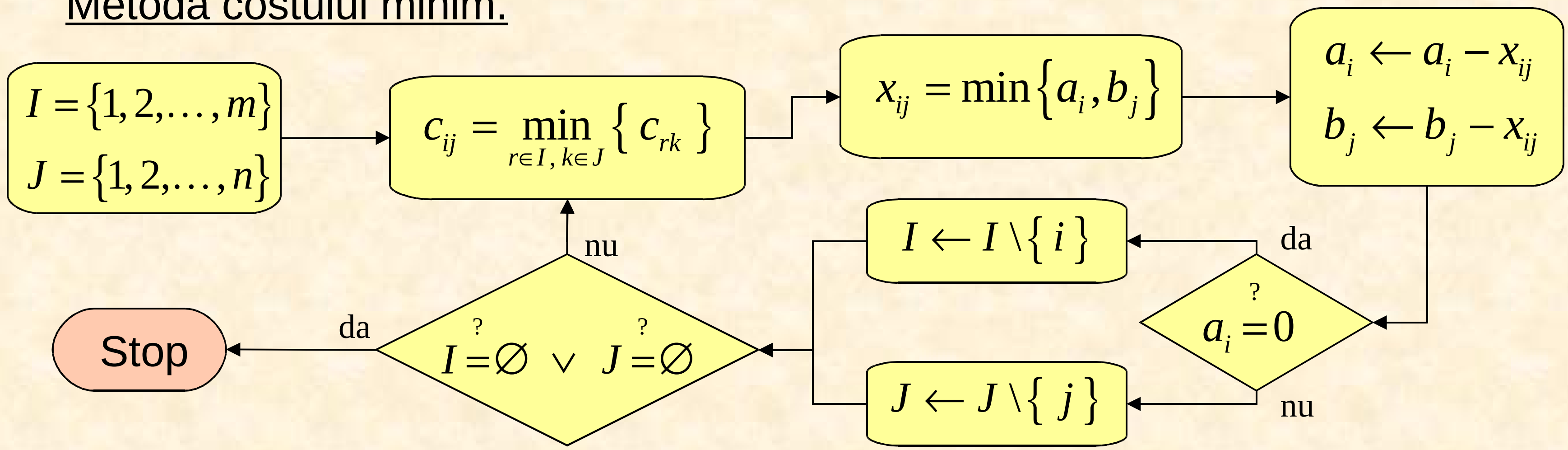
5	8	2	4	3
4	3	4	1	5
3	4	2	1	3
2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9		4	0
	1		16		0
				6	5
7	12				0
0	5	0	0	0	

Determinarea unei soluții inițiale de bază

Metoda costului minim.



Exemplu.

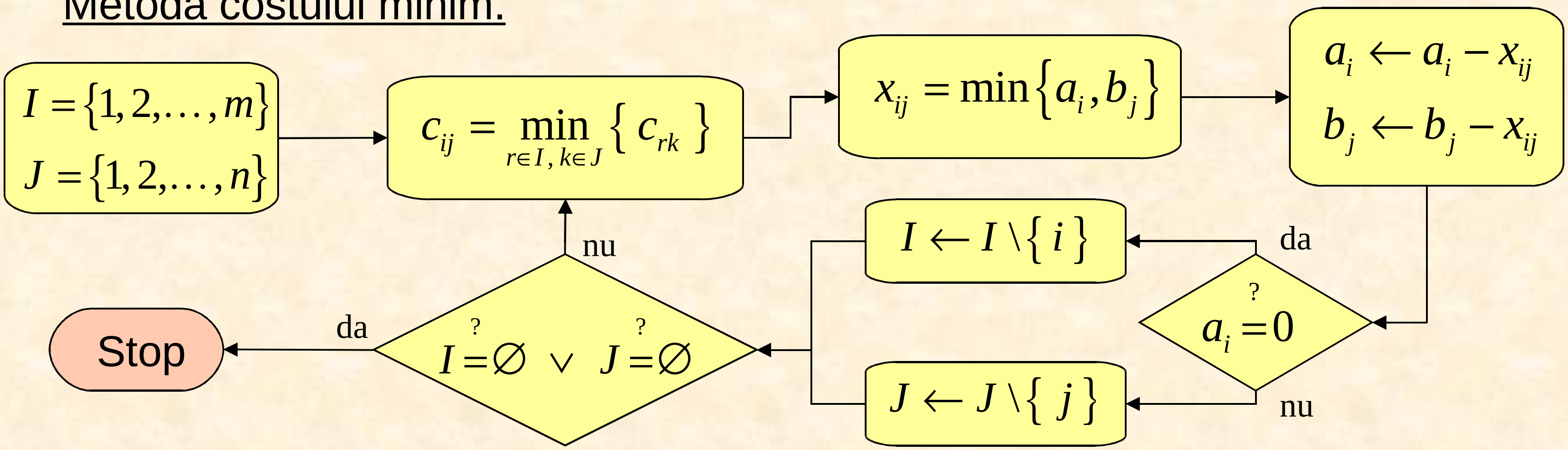
5	8	2	4	3
4	3	4	1	5
3	4	2	1	3
2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9		4	0
	1		16		0
	x_{32}			6	5
7	12				0
0	5	0	0	0	

Determinarea unei soluții inițiale de bază

Metoda costului minim.



Exemplu.

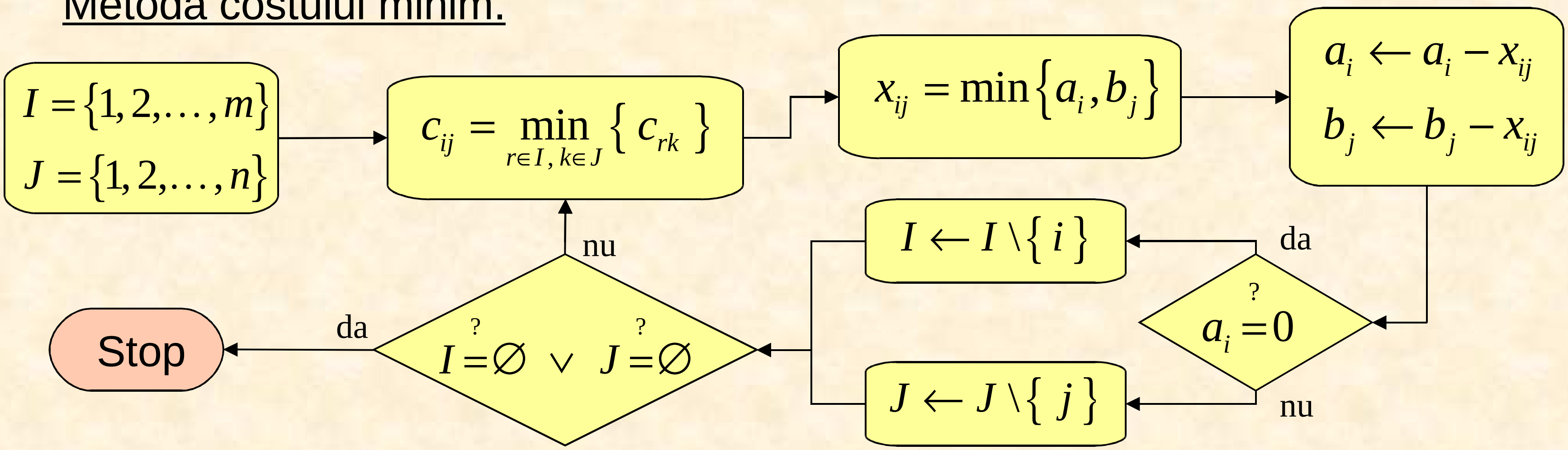
5	8	2	4	3
4	3	4	1	5
3	4	2	1	3
2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9		4	0
	1		16		0
	5			6	0
7	12				0
0	0	0	0	0	

Determinarea unei soluții inițiale de bază

Metoda costului minim.



Exemplu.

5	8	2	4	3
4	3	4	1	5
3	4	2	1	3
2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9		4	13
	1		16		17
	5			6	11
7	12				19
7	18	9	16	10	

Determinarea unei soluții inițiale de bază

7	6				13
	12	5			17
		4	7		11
			9	10	19
7	18	9	16	10	

Metoda colțului de N – V.
Costul total = 193

Metoda costului minim.
Costul total = 137

5	8	2	4	3
4	3	4	1	5
3	4	2	1	3
2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9		4	13
	1		16		17
	5			6	11
7	12				19
7	18	9	16	10	

Soluții inițiale de bază

7	6				13
	12	5			17
		4	7		11
			9	10	19
7	18	9	16	10	

Metoda colțului de N – V.
Costul total = 193

Este soluția optimă ?

		9		4	13
	1		16		17
	5			6	11
7	12				19
7	18	9	16	10	

5	8	2	4	3
4	3	4	1	5
3	4	2	1	3
2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		3		10	13
	6		11		17
		6	5		11
7	12				19
7	18	9	16	10	

O soluție mai bună.
Costul total = 132

5	8	2	4	3
4	3	4	1	5
3	4	2	1	3
2	3	2	1	3

Matricea costurilor

Metoda costului minim.
Costul total = 137

		9		4	13
	1		16		17
	5			6	11
7	12				19
7	18	9	16	10	

Testul de optimalitate

Forma standard a problemei de transport:

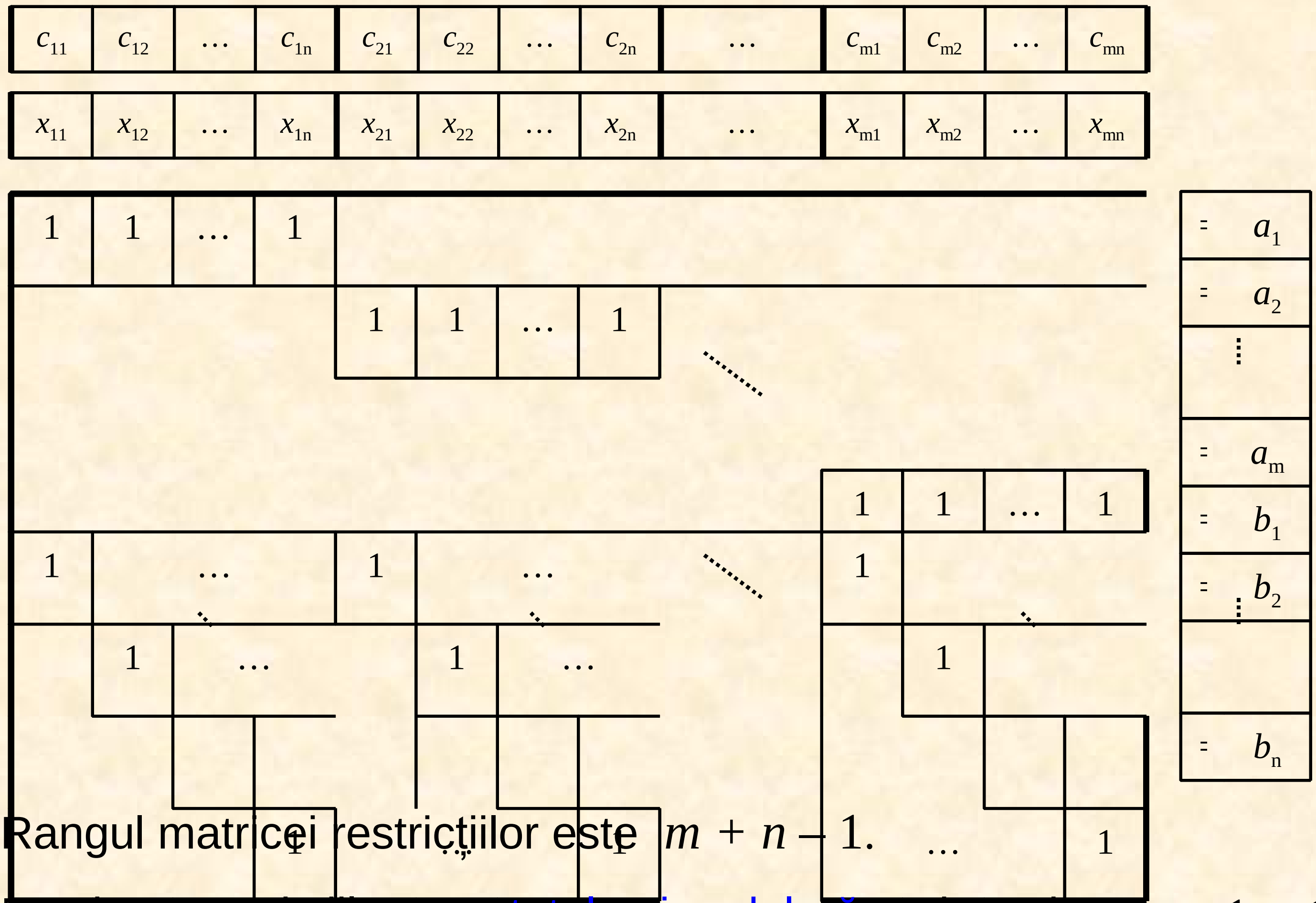
$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{în raport cu} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i\,, \quad i = \overline{1,m}\,, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j\,, \quad j = \overline{1,n}\,, \\ x_{ij} \geq 0\,, \quad i = \overline{1,m}\,, \quad j = \overline{1,n}\,. \end{cases} \qquad \text{(PT)}$$

Condiția de existență a soluției:

$$a_i \geq 0,\, i = \overline{1,m}; \quad b_j \geq 0,\, j = \overline{1,n}; \quad \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j\,.$$

Structura datelor în problema de transport:



Rangul matricei restricțiilor este $m + n - 1$.

Matricea restricțiilor este total unimodulară: orice minor $= +1,\ -1$ sau 0.

Fie B o bază optimă şi $\overline{x}_{ij}, \ (i,j) \in \mathrm{B}$ soluția optimă de bază a problemei (PT).

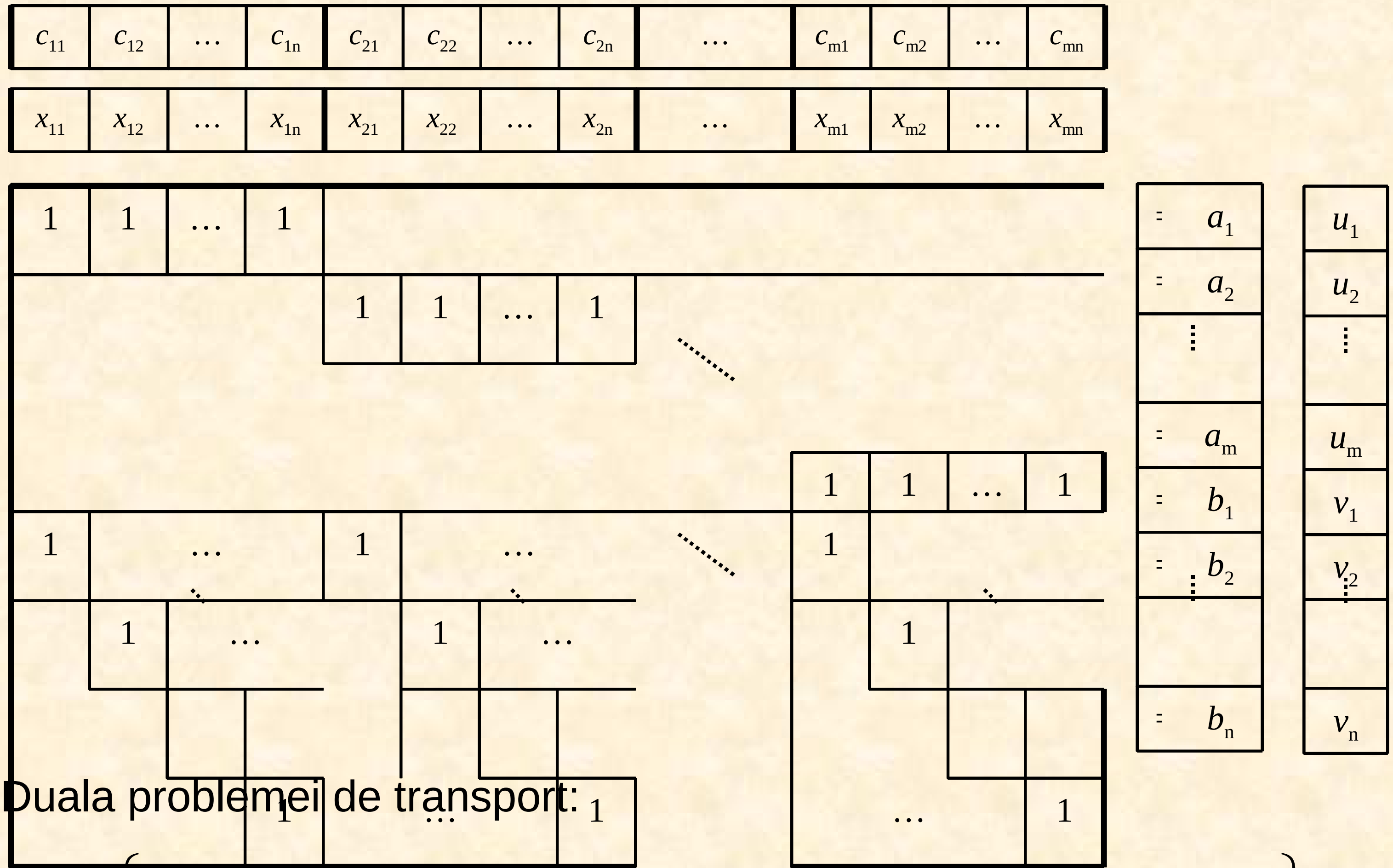
Avem: $z_{ij} - c_{ij} \le 0, \ \forall (i,j), \ 1 \le i \le m, 1 \le j \le n.$

În particular, pentru $\forall (i,j) \in \mathrm{B}, \ z_{ij} - c_{ij} = 0.$

Dar, $z_{ij} = c_{\mathrm{B}}^{\mathrm{f}} \cdot B^{-1} \cdot A_{\mathrm{o}}^{(ij)} = \left(\overline{u}^{\mathrm{f}}, \overline{v}^{\mathrm{f}}\right) \cdot A_{\mathrm{o}}^{(ij)} = \overline{u}_i + \overline{v}_j$, unde $A_{\mathrm{o}}^{(ij)} \in \mathbf{R}^{m+n-1}$.

Rezultă,
$$\begin{cases} \overline{u}_i + \overline{v}_j = c_{ij}, & \forall (i,j) \in \mathrm{B}, \\ \overline{u}_i + \overline{v}_j \le c_{ij}, & \forall (i,j) \notin \mathrm{B}. \end{cases}$$

Dacă $\overline{x}_{ij}, \ (i,j) \in \mathrm{B}$ este o soluție optimă de bază, atunci $\left(\overline{u}_i, \overline{v}_j\right), \ (i,j) \in \mathrm{B}$ va fi soluția optimă a dualei problemei (PT).



Duala problemei de transport:

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \;\middle|\; \boxed{u_i + v_j \le c_{ij},\quad i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n}}\right\} \qquad \text{(DT)}$$

<u>Teorema slabă a ecarturilor complementare</u>: Fie soluțiile admisibile x_{ij}, respectiv (u_i, v_j), $1 \le i \le m, 1 \le j \le n,$ pentru (PT) şi (DT).

Acestea sunt optime, dacă şi numai dacă,

$$\left.\begin{aligned} u_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - a_i \right) &= 0, \quad i = \overline{1,m}, \\ v_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - b_j \right) &= 0, \quad j = \overline{1,n}, \end{aligned}\right\} \text{Condiții evident satisfăcute !}$$

$$x_{ij} \cdot \left(u_i + v_j - c_{ij} \right) = 0, \quad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Condiții evident} \\ \text{satisfăcute pentru} \\ \overline{x}_{ij} = 0,\ \forall (i, j) \notin \mathrm{B}. \end{array} \right.$$

Dacă soluția admisibilă de bază este: $\overline{x}_{ij} > 0,\ \forall (i, j) \in \mathrm{B}$,

pentru ca aceasta să fie optimă, trebuie ca: $u_i + v_j - c_{ij} = 0, \quad \forall (i, j) \in \mathrm{B}$.

<u>Problemă:</u> Cum putem identifica existența unei soluții admisibile a problemei duale (DT) care să verifice condiția de optimalitate ?

Considerăm sistemul: $u_i + v_j = c_{ij}, \quad \forall (i, j) \in \mathrm{B}$.

Acesta are $card(\mathrm{B}) = m + n - 1$ ecuații şi $m + n$ variabile.

Rangul matricei acestui sistem este $m + n - 1$, deci sistemul este compatibil nedeterminat.

<u>Rezolvarea sistemului:</u> se dă unei variabile u_i sau v_j o valoare arbitrară, iar restul variabilelor se calculează succesiv din ecuațiile respective.

Fie $\overline{u}_i, i = \overline{1, m}, \ \overline{v}_j, j = \overline{1, n},$ soluția obținută.

Dacă $\overline{u}_i + \overline{v}_j \le c_{ij}, \quad \forall (i, j) \notin \mathrm{B}$, $\Longrightarrow$ soluția este dual admisibilă.

Teorema ecarturilor complementare $\Longrightarrow$ $\overline{x}_{ij}, \ (i, j) \in \mathrm{B}$, <u>soluție de bază optimă</u> pentru problema (PT).

Dacă $\exists (r, k) \notin \mathrm{B}, \quad \overline{u}_r + \overline{v}_k - c_{rk} = z_{rk} - c_{rk} > 0,$

soluția de bază $\overline{x}_{ij}, \ (i, j) \in \mathrm{B}$, **<u>nu</u>** îndeplineşte condiția de optimalitate pentru problema (PT).

Schimbarea soluției de bază

Fie $(r,k)\notin \mathrm{B}, \quad u_r + v_k > c_{rk}$. Se introduce în bază variabila $\overline{x}_{rk} = x \geq 0$.

Schimbarea bazei conform algoritmului simplex:

Criteriul de ieşire din bază: $\mathrm{B} \setminus (s,t)$

$$\frac{\overline{x}_{st}}{y_{(st)(rk)}} = \min_{(ij)\in \mathrm{B}} \left\{ \frac{\overline{x}_{ij}}{y_{(ij)(rk)}} \;\middle|\; y_{(ij)(rk)} > 0 \right\}$$

Recalcularea valorilor corespunzătoare noii baze: $\hat{\mathrm{B}} = \mathrm{B} \setminus (s,t) \cup (r,k)$

$$\begin{cases} \tilde{x}_{ij} = \overline{x}_{ij} - \dfrac{y_{(ij)(rk)}}{y_{(st)(rk)}} \overline{x}_{st}\,, \quad \forall (i,j) \in \mathrm{B} \setminus (s,t), \\ \tilde{x}_{rk} = \dfrac{\overline{x}_{st}}{y_{(st)(rk)}} = x \geq 0. \end{cases}$$

Care sunt valorile componentelor vectorului $Y^{(rk)} = B^{-1} \cdot A_o^{(rk)}$?

Considerăm două selecții de câte p indici distincți:

$$i_1, i_2, \ldots, i_p \in \{1, 2, \ldots, m\}, \qquad j_1, j_2, \ldots, j_p \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Definiție. Mulțimea perechilor $(i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2), \ldots, (i_p, j_p), (i_p, j_1)$ se numeşte **ciclu**.

Observație: orice ciclu are un număr par de elemente $= 2p$.

Propoziție. *Dacă mulțimea indicilor* (i,j) *a unor coloane* $A^{(ij)}$ *din matricea restricțiilor a problemei* (PT) *formează un ciclu, atunci aceste coloane sunt liniar dependente.*

Demonstrație. Notăm vectorul unitar: $e^i \in \mathbf{R}^{m+n}$. $\Rightarrow$ $A^{(ij)} = e^i + e^{m+j} \in \mathbf{R}^{m+n}$

$$A^{(i_1 j_1)} - A^{(i_1 j_2)} + A^{(i_2 j_2)} - A^{(i_2 j_3)} + \cdots + A^{(i_p j_p)} - A^{(i_p j_1)} =$$

$$\cancel{e^{i_1}} + \cancel{e^{m+j_1}} - \cancel{e^{i_1}} - \cancel{e^{m+j_2}} + \cancel{e^{i_2}} + \cancel{e^{m+j_2}} - \cancel{e^{i_2}} - \cancel{e^{m+j_3}} + \cdots$$

$$\cdots + \cancel{e^{i_p}} + \cancel{e^{m+j_p}} - \cancel{e^{i_p}} - \cancel{e^{m+j_1}} = 0.$$

Corolar. Mulțimea indicilor de bază B nu conține cicluri.

Propoziție. *Pentru orice pereche* $(r,k)\notin \mathrm{B}$, *există un ciclu unic format din această pereche şi elemente din* B.

Determinarea elementelor lui $Y^{(rk)} = B^{-1}\cdot A_o^{(rk)}$.

Avem: $A_o^{(rk)} = B\cdot Y^{(rk)} = \sum_{(ij)\in \mathrm{B}} y_{(ij)(rk)} A_o^{(ij)}$

Combinație liniară (unică) cu vectorii $A^{(ij)}$ din bază.

Dar există şi un ciclu unic: $\mathrm{C} = \Big\{ \underbrace{\overbrace{(r,k)}^{0}}_{\notin \mathrm{B}}, \underbrace{\overbrace{(r,j_1)}^{1},\overbrace{(i_1,j_1)}^{2},\dots,\overbrace{(i_p,j_p)}^{2p-2},\overbrace{(i_p,k)}^{2p-1}}_{\in \mathrm{B}} \Big\}$

pentru care $A^{(rk)} = A^{(rj_1)} - A^{(i_1j_1)} + A^{(i_1j_2)} - \dots - A^{(i_pj_p)} + A^{(i_pk)}$.

Rezultă:
$$\boxed{y_{(ij)(rk)} = \begin{cases} 1 & \text{pentru } (i,j)\in \mathrm{C} \text{ de ordin impar} \\ -1 & \text{pentru } (i,j)\in \mathrm{C} \text{ de ordin par} \\ 0 & \text{pentru } (i,j)\notin \mathrm{C} \end{cases}}$$

Criteriul de ieşire din bază: $\dfrac{\overline{x}_{st}}{y_{(st)(rk)}} = \min\limits_{(ij)\in \mathrm{B}} \left\{ \dfrac{\overline{x}_{ij}}{y_{(ij)(rk)}} \;\middle|\; y_{(ij)(rk)} > 0 \right\}$

$= \quad +1$

adică,

$$\overline{x}_{st} = \min\left\{ \overline{x}_{ij} \;\middle|\; (i, j) \in \mathrm{C} \text{ de ordin impar} \right\}$$

Perechea de indici (s,t) va părăsi baza B.

Formulele de schimbare a soluției de bază:

$= \ +1, \ -1, \ 0$

$$\begin{cases} \tilde{x}_{ij} = \overline{x}_{ij} - \dfrac{y_{(ij)(rk)}}{y_{(st)(rk)}} \overline{x}_{st}, \quad \forall (i,j) \in \mathrm{B} \setminus (s,t), \\ \tilde{x}_{rk} = \dfrac{\overline{x}_{st}}{y_{(st)(rk)}} = x \geq 0. \end{cases}$$

$= \ +1$

Rezultă:

$$\tilde{x}_{ij} = \begin{cases} \overline{x}_{ij} - x & \text{pentru} \quad (i,j) \in \mathrm{C} \text{ de ordin impar} \\ \overline{x}_{ij} + x & \text{pentru} \quad (i,j) \in \mathrm{C} \text{ de ordin par} \\ \overline{x}_{ij} & \text{pentru} \quad (i,j) \notin \mathrm{C} \end{cases}$$

Exemplu

$$B = \{(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,2),(3,5),(4,1),(4,2)\}$$

5	8	2	4	3
4	3	4	1	5
3	4	2	1	3
2	3	2	1	3

Matricea costurilor

Metoda costului minim.
Costul total $= 137$

		9		4	13
	1		16		17
	5			6	11
7	12				19
7	18	9	16	10	

$$B = \{(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,2),(3,5),(4,1),(4,2)\}$$

Rezolvarea sistemului: $u_i + v_j = c_{ij}$ pentru $(i,j) \in B$

Valoare inițială: $v_2 = 0$.

u_i \ v_j		0			
	5	8	2	4	3
	4	3	4	1	5
	3	4	2	1	3
	2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9		4	13
	1		16		17
	5			6	11
7	12				19
7	18	9	16	10	

$$B = \{(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,2),(3,5),(4,1),(4,2)\}$$

Rezolvarea sistemului: $u_i + v_j = c_{ij}$ pentru $(i,j) \in B$

Valoare inițială: $\boldsymbol{v_2 = 0}$.

u_i \ v_j		0			
	5	8	2	4	3
3	4	3	4	1	5
	3	4	2	1	3
	2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9		4	13
	1		16		17
	5			6	11
7	12				19
7	18	9	16	10	

$$\mathrm{B} = \{(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,2),(3,5),(4,1),(4,2)\}$$

Rezolvarea sistemului: $u_i + v_j = c_{ij}$ pentru $(i,j) \in \mathrm{B}$

Valoare inițială: $\mathbf{v_2 = 0}$.

u_i \ v_j		0			
	5	8	2	4	3
3	4	3	4	1	5
4	3	4	2	1	3
	2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9		4	13
	1		16		17
	5			6	11
7	12				19
7	18	9	16	10	

$$B = \{(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,2),(3,5),(4,1),(4,2)\}$$

Rezolvarea sistemului: $u_i + v_j = c_{ij}$ pentru $(i,j) \in B$

Valoare inițială: $\mathbf{v_2 = 0}$.

u_i \ v_j		0			
	5	8	2	4	3
3	4	3	4	1	5
4	3	4	2	1	3
3	2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9		4	13
	1		16		17
	5			6	11
7	12				19
7	18	9	16	10	

$B = \{(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,2),(3,5),(4,1),(4,2)\}$

Rezolvarea sistemului: $u_i + v_j = c_{ij}$ pentru $(i,j) \in B$

Valoare inițială: $\mathbf{v_2 = 0}$.

u_i \ v_j		0			
	5	8	2	4	3
3	4	3	4	1	5
4	3	4	2	1	3
3	2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9		4	13
	1		16		17
	5			6	11
7	12				19
7	18	9	16	10	

$$B = \{(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,2),(3,5),(4,1),(4,2)\}$$

Rezolvarea sistemului: $u_i + v_j = c_{ij}$ pentru $(i,j) \in B$

Valoare inițială: $v_2 = 0$.

u_i \ v_j		0		-2	
	5	8	2	4	3
3	4	3	4	1	5
4	3	4	2	1	3
3	2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9		4	13
	1		16		17
	5			6	11
7	12				19
7	18	9	16	10	

$$\mathrm{B} = \{(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,2),(3,5),(4,1),(4,2)\}$$

Rezolvarea sistemului: $u_i + v_j = c_{ij}$ pentru $(i, j) \in \mathrm{B}$

Valoare inițială: $\mathbf{v_2 = 0}$.

u_i \ v_j		**0**		-2	-1
	5	8	2	4	3
3	4	3	4	1	5
4	3	4	2	1	3
3	2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9		4	13
	1		16		17
	5			6	11
7	12				19
7	18	9	16	10	

$$\mathrm{B} = \{(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,2),(3,5),(4,1),(4,2)\}$$

Rezolvarea sistemului: $u_i + v_j = c_{ij}$ pentru $(i,j) \in \mathrm{B}$

Valoare inițială: $\boldsymbol{v_2 = 0}$.

u_i \ v_j	-1	0		-2	-1
	5	8	2	4	3
3	4	3	4	1	5
4	3	4	2	1	3
3	2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9		4	13
	1		16		17
	5			6	11
7	12				19
7	18	9	16	10	

$$\text{B} = \{(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,2),(3,5),(4,1),(4,2)\}$$

Rezolvarea sistemului: $u_i + v_j = c_{ij}$ pentru $(i,j) \in \text{B}$

Valoare inițială: $\mathbf{v_2 = 0}$.

u_i \ v_j	-1	**0**		-2	-1
4	5	8	2	4	3
3	4	3	4	1	5
4	3	4	2	1	3
3	2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9		4	13
	1		16		17
	5			6	11
7	12				19
7	18	9	16	10	

$\mathrm{B} = \{(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,2),(3,5),(4,1),(4,2)\}$

Rezolvarea sistemului: $u_i + v_j = c_{ij}$ pentru $(i,j) \in \mathrm{B}$

Valoare inițială: $v_2 = 0$.

u_i \ v_j	-1	0	-2	-2	-1
4	5	8	2	4	3
3	4	3	4	1	5
4	3	4	2	1	3
3	2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9		4	13
	1		16		17
	5			6	11
7	12				19
7	18	9	16	10	

$B = \{(1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (3,2), (3,5), (4,1), (4,2)\}$

Rezolvarea sistemului: $u_i + v_j = c_{ij}$ pentru $(i, j) \in B$

Valoare inițială: $\mathbf{v_2 = 0}$.

u_i \ v_j	-1	0	-2	-2	-1
4	5	8	2	4	3
2	4	3	4	1	5
4	3	4	2	1	3
2	2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9		4	13
	1		16		17
	5			6	11
7	12				19
7	18	9	16	10	

$B = \{(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,2),(3,5),(4,1),(4,2)\}$

Test de optimalitate: $u_i + v_j \le c_{ij}$ pentru $(i,j) \notin B$?

u_i \ v_j	-1	0	-2	-2	-1
4	5	8	2	4	3
3	4	3	4	1	5
4	3	4	2	1	3
3	2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9		4	13
	1		16		17
	5			6	11
7	12				19
7	18	9	16	10	

$$B=\{(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,2),(3,5),(4,1),(4,2)\}$$

Test de optimalitate: $u_i + v_j \le c_{ij}$ pentru $(i,j)\notin B$?

$u_3 + v_4 > c_{34}$ $(3,4)\notin B$!

u_i \ v_j	-1	0	-2	-2	-1
4	5	8	2	4	3
3	4	3	4	1	5
4	3	4	2	1	3
3	2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9		4	13
	1		16		17
	5			6	11
7	12				19
7	18	9	16	10	

$$B = \{(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,2),(3,5),(4,1),(4,2)\}$$

Îmbunătățirea soluției de bază.

Determinarea unui ciclu. $C = \{(3,4)\}$

u_i \ v_j	-1	0	-2	-2	-1
4	5	8	2	4	3
3	4	3	4	1	5
4	3	4	2	1	3
3	2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9		4	13
	1		16		17
	5		$+x$	6	11
7	12				19
7	18	9	16	10	

$$B = \{(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,2),(3,5),(4,1),(4,2)\}$$

Îmbunătățirea soluției de bază.

Determinarea unui ciclu. $C = \{(3,4),(3,2)\}$

u_i \ v_j	-1	0	-2	-2	-1
4	5	8	2	4	3
3	4	3	4	1	5
4	3	4	2	1	3
3	2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9		4	13
	1		16		17
	5-x		+x	6	11
7	12				19
7	18	9	16	10	

$$B = \{(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,2),(3,5),(4,1),(4,2)\}$$

Îmbunătățirea soluției de bază.

Determinarea unui ciclu. $C = \{(3,4),(3,2),(2,2)\}$

u_i \ v_j	-1	0	-2	-2	-1
4	5	8	2	4	3
3	4	3	4	1	5
4	3	4	2	1	3
3	2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9		4	13
	$1+x$		16		17
	$5-x$		$+x$	6	11
7	12				19
7	18	9	16	10	

$$B = \{(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,2),(3,5),(4,1),(4,2)\}$$

Îmbunătățirea soluției de bază.

Determinarea unui ciclu. $C = \{(3,4),(3,2),(2,2),(2,4)\}$

u_i \ v_j	-1	0	-2	-2	-1
4	5	8	2	4	3
3	4	3	4	1	5
4	3	4	2	1	3
3	2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9		4	13
	1+x		16-x		17
	5-x		+x	6	11
7	12				19
7	18	9	16	10	

$$B = \{(1,3), (1,5), (2,2), (2,4), \cancel{(3,2)}, (3,5), (4,1), (4,2)\}$$

Îmbunătățirea soluției de bază.

Determinarea unui ciclu. $C = \{(3,4), (3,2), (2,2), (2,4)\}$

$x = \min \{ 5, 16 \} = 5$

u_i \ v_j	-1	0	-2	-2	-1
4	5	8	2	4	3
3	4	3	4	1	5
4	3	4	2	1	3
3	2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9		4	13
	1+x		16-x		17
	~~5-x~~		+x	6	11
7	12				19
7	18	9	16	10	

$\mathrm{B} = \{(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,4),(3,5),(4,1),(4,2)\}$

Rezolvarea sistemului: $u_i + v_j = c_{ij}$ pentru $(i,j) \in \mathrm{B}$

Valoare inițială: $\boldsymbol{u_1 = 0}$.

u_i \ v_j	2	3	2	1	3
0	5	8	2	4	3
0	4	3	4	1	5
0	3	4	2	1	3
0	2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9		4	13
	6		11		17
			5	6	11
7	12				19
7	18	9	16	10	

$$B = \{(1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (3,4), (3,5), (4,1), (4,2)\}$$

Test de optimalitate: $u_i + v_j \le c_{ij}$ pentru $(i,j) \notin B$?

u_i \ v_j	2	3	2	1	3
0	5	8	2	4	3
0	4	3	4	1	5
0	3	4	2	1	3
0	2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9		4	13
	6		11		17
			5	6	11
7	12				19
7	18	9	16	10	

$$B = \{(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,4),(3,5),(4,1),(4,2)\}$$

Test de optimalitate: $u_i + v_j \le c_{ij}$ pentru $(i,j) \notin B$?

Soluție optimă. Valoarea optimă = 137 + 5(1 – 4 + 3 – 1) = 132

u_i \ v_j	2	3	2	1	3
0	5	8	2	4	3
0	4	+3	4	−1	5
0	3	−4	2	+1	3
0	2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9		4	13
	6		11		17
			5	6	11
7	12				19
7	18	9	16	10	

$$\text{B} = \{(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,4),(3,5),(4,1),(4,2)\}$$

Determinarea unei alte soluții optime:

Condiție: $u_i + v_j = c_{ij}$ pentru $(i, j) \notin \text{B}$. De exemplu, $(4,3) \notin \text{B}$.

$$\text{C} = \{(4,3)\}$$

u_i \ v_j	2	3	2	1	3
0	5	8	2	4	3
0	4	3	4	1	5
0	3	4	2	1	3
0	2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9		4	13
	6		11		17
			5	6	11
7	12	$+x$			19
7	18	9	16	10	

$$\mathrm{B} = \{(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,4),(3,5),(4,1),(4,2)\}$$

Determinarea unei alte soluții optime:

Condiție: $u_i + v_j = c_{ij}$ pentru $(i, j) \notin \mathrm{B}$. De exemplu, $(4,3) \notin \mathrm{B}$.

$$\mathrm{C} = \{(4,3),(1,3)\}$$

u_i \ v_j	2	3	2	1	3
0	5	8	2	4	3
0	4	3	4	1	5
0	3	4	2	1	3
0	2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9-x		4	13
	6		11		17
			5	6	11
7	12	+x			19
7	18	9	16	10	

$$\text{B} = \{(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,4),(3,5),(4,1),(4,2)\}$$

Determinarea unei alte soluții optime:

Condiție: $u_i + v_j = c_{ij}$ pentru $(i,j) \notin \text{B}$. De exemplu, $(4,3) \notin \text{B}$.

$$\text{C} = \{(4,3),(1,3),(1,5)\}$$

u_i \ v_j	2	3	2	1	3
0	5	8	2	4	3
0	4	3	4	1	5
0	3	4	2	1	3
0	2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9-x		4+x	13
	6		11		17
			5	6	11
7	12	+x			19
7	18	9	16	10	

$\text{B} = \{(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,4),(3,5),(4,1),(4,2)\}$

Determinarea unei alte soluții optime:

Condiție: $u_i + v_j = c_{ij}$ pentru $(i,j) \notin \text{B}$. De exemplu, $(4,3) \notin \text{B}$.

$$\text{C} = \{(4,3),(1,3),(1,5),(3,5)\}$$

u_i \ v_j	2	3	2	1	3
0	5	8	2	4	3
0	4	3	4	1	5
0	3	4	2	1	3
0	2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9-x		4+x	13
	6		11		17
			5	6-x	11
7	12	+x			19
7	18	9	16	10	

$$\mathrm{B}=\{(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,4),(3,5),(4,1),(4,2)\}$$

Determinarea unei alte soluții optime:

Condiție: $u_i+v_j=c_{ij}$ pentru $(i,j)\notin$ B. De exemplu, $(4,3)\notin$ B.

$$\mathrm{C}=\{(4,3),(1,3),(1,5),(3,5),(3,4)\}$$

u_i \ v_j	2	3	2	1	3
0	5	8	2	4	3
0	4	3	4	1	5
0	3	4	2	1	3
0	2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9-x		4+x	13
	6		11		17
			5+x	6-x	11
7	12	+x			19
7	18	9	16	10	

$$\mathrm{B} = \{(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,4),(3,5),(4,1),(4,2)\}$$

Determinarea unei alte soluții optime:

Condiție: $u_i + v_j = c_{ij}$ pentru $(i, j) \notin \mathrm{B}$. De exemplu, $(4,3) \notin \mathrm{B}$.

$$\mathrm{C} = \{(4,3),(1,3),(1,5),(3,5),(3,4),(2,4)\}$$

u_i \ v_j	2	3	2	1	3
0	5	8	2	4	3
0	4	3	4	1	5
0	3	4	2	1	3
0	2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9-x		4+x	13
	6		11-x		17
			5+x	6-x	11
7	12	+x			19
7	18	9	16	10	

$$\mathrm{B}=\{(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,4),(3,5),(4,1),(4,2)\}$$

Determinarea unei alte soluții optime:

Condiție: $u_i + v_j = c_{ij}$ pentru $(i, j) \notin \mathrm{B}$. De exemplu, $(4,3) \notin \mathrm{B}$.

$$\mathrm{C}=\{(4,3),(1,3),(1,5),(3,5),(3,4),(2,4),(2,2)\}$$

u_i \ v_j	2	3	2	1	3
0	5	8	2	4	3
0	4	3	4	1	5
0	3	4	2	1	3
0	2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9-x		4+x	13
	6+x		11-x		17
			5+x	6-x	11
7	12	+x			19
7	18	9	16	10	

$$\text{B} = \{(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,4),(3,5),(4,1),(4,2)\}$$

Determinarea unei alte soluții optime:

Condiție: $u_i + v_j = c_{ij}$ pentru $(i, j) \notin$ B. De exemplu, $(4,3) \notin$ B.

$$\text{C} = \{(4,3),(1,3),(1,5),(3,5),(3,4),(2,4),(2,2),(4,2)\}$$

u_i \ v_j	2	3	2	1	3
0	5	8	2	4	3
0	4	3	4	1	5
0	3	4	2	1	3
0	2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9-*x*		4+*x*	13
	6+*x*		11-*x*		17
			5+*x*	6-*x*	11
7	12-*x*	+*x*			19
7	18	9	16	10	

$\mathrm{B} = \{(1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (3,4), \cancel{(3,5)}, (4,1), (4,2)\}$

Determinarea unei alte soluții optime:

Condiție: $u_i + v_j = c_{ij}$ pentru $(i, j) \notin \mathrm{B}$. De exemplu, $(4,3) \notin \mathrm{B}$.

$$\mathrm{C} = \{(4,3), (1,3), (1,5), (3,5), (3,4), (2,4), (2,2), (4,2)\}$$

$x = \min\{9, 6, 11, 12\} = 6$

u_i \ v_j	2	3	2	1	3
0	5	8	2	4	3
0	4	3	4	1	5
0	3	4	2	1	3
0	2	3	2	1	3

Matricea costurilor

		9-x		4+x	13
	6+x		11-x		17
			5+x	$\cancel{6-x}$	11
7	12-x	+x			19
7	18	9	16	10	

$$B = \{(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,4),(4,3),(4,1),(4,2)\}$$

Test de optimalitate: $u_i + v_j \le c_{ij}$ pentru $(i,j) \notin B$?

Soluție optimă. Valoarea optimă = 132 + 6(2–2+3–3+1–1+3–3) = 132

u_i \ v_j	2	3	2	1	3
0	5	8	− 2	4	+ 3
0	4	+ 3	4	−1	5
0	3	4	2	+ 1	− 3
0	2	− 3	+ 2	1	3

Matricea costurilor

		3		10	13
	12		5		17
			11		11
7	6	6			19
7	18	9	16	10	

Programare liniară în numere întregi

Considerăm problema:

$$\inf\left\{c^{\mathrm{t}}\cdot x \,\middle|\, A\cdot x=b,\ x\in \mathbb{R}^n_+,\ \ x_k\in\mathbb{Z},\ k\in \mathrm{K}\subseteq\{1,2,\dots,n\}\right\} \qquad \text{(P*)}$$

unde: $\quad A\in\mathbb{R}^{m\times n},\quad b\in\mathbb{R}^m,\quad c\in\mathbb{R}^n,\quad rang(A)=m<n.$

$\emptyset\neq \mathrm{K}\subsetneq\{1,2,\dots,n\}$ $\Longrightarrow$ Problemă de programare liniară mixtă

$\mathrm{K}=\{1,2,\dots,n\}$ $\Longrightarrow$ <u>Problemă de programare liniară în numere întregi</u>

Notații:
$$\begin{cases} \mathrm{P}_0=\left\{x\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, A\cdot x=b,\ x\geq \mathbf{0}\right\} \\ \mathrm{P}^*=\left\{x\in \mathrm{P}_0 \,\middle|\, x_k\in\mathbb{Z},\ k\in \mathrm{K}\right\} \end{cases}$$

Evident, $\mathrm{P}_0\supset \mathrm{P}^*$

Putem considera problemele:

(P$_0$) $\quad \inf\left\{c^{\mathrm{t}}\cdot x \,\middle|\, x\in \mathrm{P}_0\right\}$ $\Longrightarrow$ Se rezolvă cu algoritmul simplex.

(P*) $\quad \inf\left\{c^{\mathrm{t}}\cdot x \,\middle|\, x\in \mathrm{P}^*\right\}$ $\Longrightarrow$ Trebuie elaborată o metodă!

Propoziție. *Fie* $\overline{x} \in \mathsf{P}_0$ *soluția optimă a lui* (P_0). Dacă $\overline{x} \in \mathsf{P}^*$, atunci $\overline{x}$ este soluție optimă şi pentru problema (P*).

Demonstrație. $\mathsf{P}_0 \supset \mathsf{P}^*$

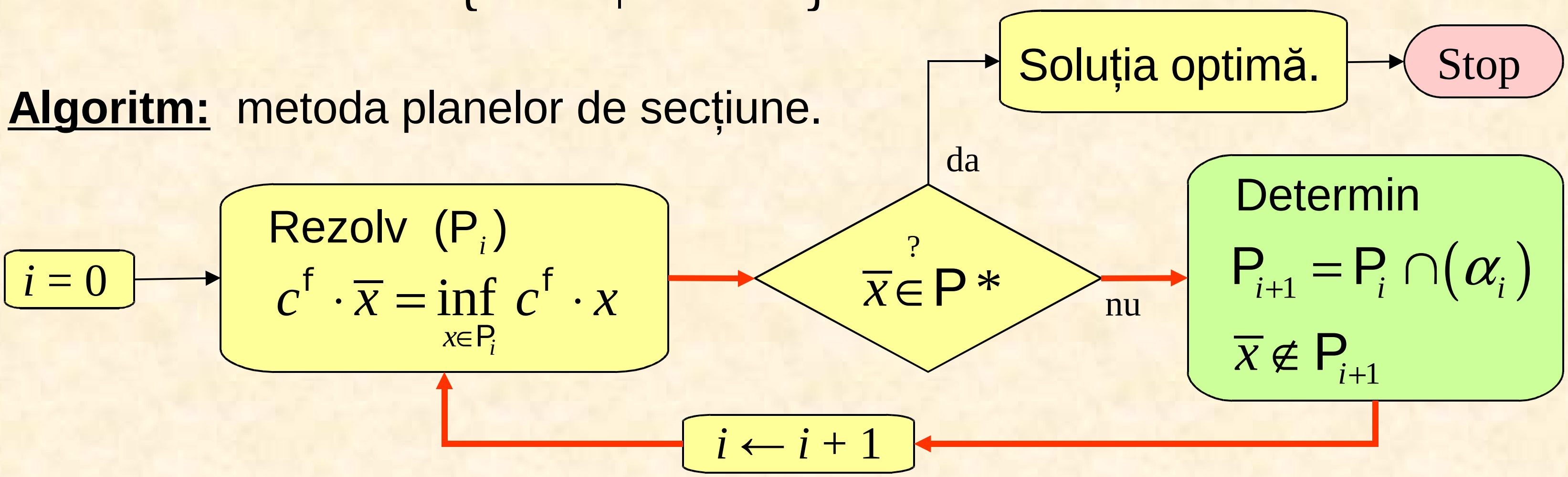
Avem:

$$c^{\mathrm{f}} \cdot \overline{x} = \inf \left\{ c^{\mathrm{f}} \cdot x \,\middle|\, x \in \mathsf{P}_0 \right\} \le \inf \left\{ c^{\mathrm{f}} \cdot x \,\middle|\, x \in \mathsf{P}^* \right\} \le c^{\mathrm{f}} \cdot \overline{x}$$

Pe de altă parte, $\overline{x} \in \mathsf{P}^*$

Rezultă, $c^{\mathrm{f}} \cdot \overline{x} = \inf \left\{ c^{\mathrm{f}} \cdot x \,\middle|\, x \in \mathsf{P}^* \right\}$.

Algoritm: metoda planelor de secțiune.



Observație: $\mathsf{P}_0 \supset \mathsf{P}_1 \supset \cdots \supset \mathsf{P}_i \supset \mathsf{P}_{i+1} \supset \cdots \supset \mathsf{P}^*$.

<u>Determinarea planelor de secțiune (Gomory).</u>

Considerăm problema (P*) în care $K = \{1, 2, \dots, n\}$.

Fie B o bază optimă pentru (P_i) şi presupunem că $\exists\, s_k \in B, \quad x_{s_k} \notin \mathbf{Z}$

Avem: $$x_{s_k} = \bar{x}_k - \sum_{j \in R} y_{kj} x_j$$

Introducem notațiile: $$\bar{x}_k = \left[\bar{x}_k\right] + f_{k0} \quad \text{unde} \quad 0 < f_{k0} < 1,$$
$$y_{kj} = \left[y_{kj}\right] + f_{kj} \quad \text{unde} \quad 0 \le f_{kj} < 1.$$

Rezultă, $$\underbrace{x_{s_k} - \left[\bar{x}_k\right] + \sum_{j \in R} \left[y_{kj}\right] x_j}_{\in \mathbf{Z}} = \underbrace{f_{k0} - \sum_{j \in R} f_{kj} x_j}_{\in \mathbf{Z}} \ \le\ 0 \ < \ 1.$$

Dar, $\forall\, x \in P^*$

În plus, avem: $$\sum_{j \in R} f_{kj} x_j \ge 0 \quad \& \quad f_{k0} \in (0,1)$$

Se adaugă restricția: $$\sum_{j \in R} \left(-f_{kj}\right) x_j \le -f_{k0}\ .$$

Observație. Soluția de bază corespunzătoare lui $\overline{x}$ **nu** verifică restricția adăugată. Într-adevăr,

$$x = \begin{pmatrix} x_{\mathrm{B}} \\ x_{\mathrm{R}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \Longrightarrow \sum_{j \in \mathrm{R}} \left(-f_{kj}\right) x_j = 0 \le -f_{k0} < 0 .$$

Contradicție!

Prin urmare, putem defini:

$$\mathrm{P}_{i+1} = \mathrm{P}_i \cap \left(\alpha_i\right) = \left\{ x \in \mathrm{P}_i \;\middle|\; \sum_{j \in \mathrm{R}} \left(-f_{kj}\right) x_j + y_{(i+1)} = -f_{k0} ,\;\; y_{(i+1)} \ge 0 \right\}$$

Algoritmul se termină într-un număr finit de pași:

- Există o soluție optimă $\in \mathbb{Z}$
- Nu există soluții în $\in \mathbb{Z}$

Implementare.

Fie $B_{(i)}$ o bază optimă pentru (P_i). Pentru (P_{i+1}) considerăm matricea:

$$B_{(i+1)} = \begin{pmatrix} B_{(i)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^{\mathsf{f}} & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow B_{(i+1)}^{-1} = \begin{pmatrix} B_{(i)}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^{\mathsf{f}} & 1 \end{pmatrix}$$

Matricea $B_{(i+1)}$ este dual admisibilă pentru (P_{i+1}) :

$$\overline{x}_{(i+1)} = B_{(i+1)}^{-1} \cdot b_{(i+1)} = \begin{pmatrix} B_{(i)}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^{\mathsf{f}} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{(i)} \\ -f_{k0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{(i)}^{-1} \cdot b_{(i)} \\ -f_{k0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{x}_{(i)} \\ -f_{k0} \end{pmatrix} \ngeq \mathbf{0}$$

$$Y_{(i+1)}^{j} = B_{(i+1)}^{-1} A_{(i+1)}^{j} = \begin{pmatrix} B_{(i)}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^{\mathsf{f}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{(i)}^{j} \\ -f_{kj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{(i)}^{j} \\ -f_{kj} \end{pmatrix}$$

$$z_j^{(i+1)} - c_j = c_{\mathrm{B}_{(i+1)}}^{\mathsf{f}} Y_{(i+1)}^{j} - c_j = \left(c_{\mathrm{B}_{(i)}}^{\mathsf{f}}, 0\right) \begin{pmatrix} Y_{(i)}^{j} \\ -f_{k0} \end{pmatrix} - c_j = z_j^{(i)} - c_j \le 0$$

$$\overline{z}^{(i+1)} = c_{\mathrm{B}_{(i+1)}}^{\mathsf{f}} \overline{x}^{(i+1)} = \left(c_{\mathrm{B}_{(i)}}^{\mathsf{f}}, 0\right) \begin{pmatrix} \overline{x}^{(i)} \\ -f_{k0} \end{pmatrix} = \overline{z}^{(i)}$$

Tabloul simplex:

	$\bar{x}$		x_j		x_p		$y_{(i+1)}$
	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_{s_i}	$\bar{x}_i$	$\cdots$	y_{ij}	$\cdots$	y_{ip}	$\cdots$	0
	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_{s_k}	$[\bar{x}_k] + f_{k0}$	$\cdots$	$[y_{kj}] + f_{kj}$	$\cdots$	$[y_{kp}] + f_{kp}$	$\cdots$	0
	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$y_{(i+1)}$	$-f_{k0}$	$\cdots$	$-f_{kj}$	$\cdots$	$\boxed{-f_{kp}}$	$\cdots$	1
	$\bar{z}$	$\cdots$	$z_j - c_j$	$\cdots$	$z_p - c_p$	$\cdots$	0

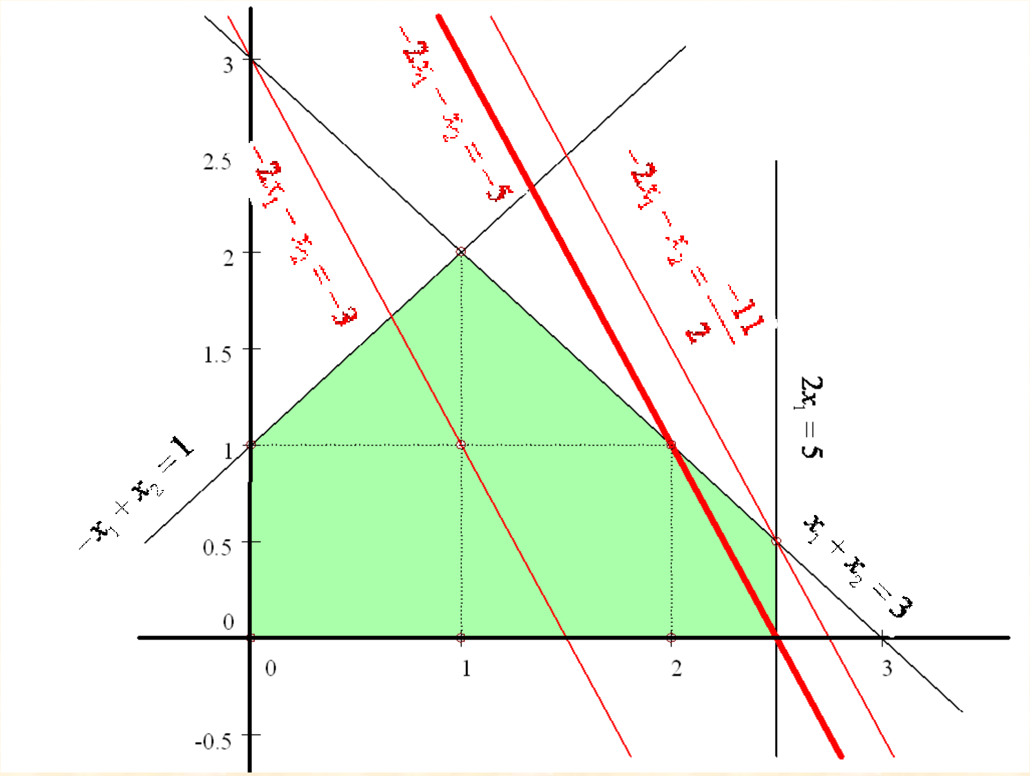
Exemplu.

$$\min\{-2x_1 - x_2\}$$

în raport cu

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ 2x_1 \le 5 \end{cases} \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$$

Rezolvare grafică:



Rezolvarea cu algoritmul ciclic al lui Gomory:

	$\bar{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	1	-1	1	1	0	0
x_4	3	1	1	0	1	0
x_5	5	$\boxed{2}$	0	0	0	1
	0	2	1	0	0	0

	$\bar{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	$\frac{7}{2}$	0	1	1	0	$\frac{1}{2}$
x_4	$\frac{1}{2}$	0	$\boxed{1}$	0	1	$\frac{-1}{2}$
x_1	$\frac{5}{2}$	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$
	-5	0	1	0	0	-1

	$\bar{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	3	0	0	1	-1	1
x_2	$\frac{1}{2}$	0	1	0	1	$\frac{-1}{2}$
x_1	$\frac{5}{2}$	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$
	$\frac{-11}{2}$	0	0	0	-1	$\frac{-1}{2}$

	$\bar{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y
x_3	3	0	0	1	-1	1	0
x_2	$\frac{1}{2}$	0	1	0	1	$\frac{-1}{2}$	0
x_1	$\frac{5}{2}$	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0
y	$\frac{-1}{2}$	0	0	0	0	$\boxed{\frac{-1}{2}}$	1
	$\frac{-11}{2}$	0	0	0	-1	$\frac{-1}{2}$	0

	$\bar{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y
x_3	3	0	0	1	-1	1	0
x_2	$\frac{1}{2}$	0	1	0	1	$-\frac{1}{2}$	0
x_1	$\frac{5}{2}$	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0
y	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\boxed{-\frac{1}{2}}$	1
	$-\frac{11}{2}$	0	0	0	-1	$-\frac{1}{2}$	0

	$\bar{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y
x_3	2	0	0	1	-1	0	$\frac{1}{2}$
x_2	1	0	1	0	1	0	-1
x_1	2	1	0	0	0	0	1
y	1	0	0	0	0	1	-2
	-5	0	0	0	-1	0	-1

Principiul de descompunere Dantzig-Wolfe

Problemele de programare liniară de dimensiuni mari au o structură specială a restricțiilor, matricea coeficienților având o formă "bloc-unghiulară":

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_k \\ D_1 & & & \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_k \end{pmatrix}$$

unde $A_i \in \mathbf{R}^{m_0 \times n_i},\ D_i \in \mathbf{R}^{m_i \times n_i}, 1 \le i \le k.$

Rezolvarea în două etape:

1. Rezolv k subprobleme independente.
2. Rezolv un $\underbrace{\text{program principal.}}$

Problema inițială

Rezultate preliminare

Definiție. Fie $X \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime convexă. Mulțimea punctelor extreme

$$Ext(X) = \left\{ x \in X \;\middle|\; \forall a, b \in X \setminus \{x\},\; x \neq \lambda a + (1-\lambda) b,\; \lambda \in [0,1] \right\}$$

Observatie. *Orice soluție admisibilă de bază a unei probleme de programare liniară este un punct extrem al domeniului de admisibilitate.*

Definiție. *Fie* $M \subset \mathbb{R}^n$ *o mulțime oarecare. Acoperirea convexă* $Co(M)$ *a lui* M *este cea mai mică mulțime convexă ce conține pe* M.

Teoremă. *Fie* $X \subset \mathbb{R}^n$ *o mulțime convexă şi compactă. Atunci*

$$Co(Ext(X)) = X.$$

Corolar. *Fie mulțimea* $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = b,\; x \geq \mathbf{0}\}$ *nevidă şi mărginită şi* $Ext(X) = \{x^i,\; 1 \leq i \leq r\}$. *Atunci, orice element* $x \in X$ *poate fi scris sub forma:*

$$x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x^i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1.$$

Principiul de descompunere

Considerăm problema $\inf \; c^{\mathrm{f}} \cdot x$

$$\begin{cases} A \cdot x = b_0 & (m_0 \text{ restricții}) \\ D \cdot x = b & (m \text{ restricții}) \\ x \geq \mathbf{0} & \end{cases}$$

Presupunem poliedrul convex $S = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid D \cdot x = b, \; x \geq \mathbf{0} \}$ mărginit şi

$$Ext(S) = \{ x^j, \; 1 \leq j \leq r \}.$$

Prin urmare, $\forall x \in S,$ $\Longrightarrow$ $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x^i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1.$

Reformulăm problema inițială: $\inf \{ c^{\mathrm{f}} \cdot x \mid x \in S \;\; \& \;\; A \cdot x = b_0 \}$

Notăm: $\left.\begin{aligned} \gamma_j &= c^{\mathrm{f}} \cdot x^j \\ \alpha^j &= A \cdot x^j \end{aligned}\right\}$ $\Longrightarrow$

Programul principial:

$$\inf \sum_{j=1}^{r} \gamma_j \lambda_j \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{r} \alpha^j \lambda_j = b_0 \\ \sum_{j=1}^{r} \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \; 1 \leq j \leq r \end{cases}$$

Comentarii pro şi contra:

$$\inf \sum_{j=1}^{r} \gamma_j \lambda_j \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{r} \alpha^j \lambda_j = b_0 \\ \sum_{j=1}^{r} \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0,\ 1 \leq j \leq r \end{cases}$$

Avem doar $m_0 + 1$ restricții !

Numărul de variabile/coloane: $\boldsymbol{r = card(Ext(S))}$.

Cum se poate obține o bază B primal admisibilă pentru programul principal **?**

Printr-o procedură de fază 1 aplicată mulțimii $S = \{x \in \mathbf{R}^n \mid D \cdot x = b,\ x \geq \mathbf{0}\}$ determinându-se apoi $l \geq m_0 + 1$ puncte extreme.

Notăm: $u^{\mathrm{f}} = \gamma_{\mathrm{B}}^{\mathrm{f}} \cdot B^{-1}$. Baza B va fi optimă dacă

$$u^{\mathrm{f}} \cdot \begin{pmatrix} \alpha^s \\ 1 \end{pmatrix} - \gamma_s = \max_{1 \leq j \leq r} \left\{ u^{\mathrm{f}} \cdot \begin{pmatrix} \alpha^j \\ 1 \end{pmatrix} - \gamma_j \right\} \leq 0.$$

Partiționăm vectorul $u^{\mathrm{f}} = \left(u_0^{\mathrm{f}}, u_1\right)$, $\quad u_0 \in \mathbf{R}^{m_0}$, $u_1 \in \mathbf{R}$

$$u^{\mathrm{f}}\cdot\begin{pmatrix}\alpha^j\\ 1\end{pmatrix}-\gamma_j=\left(u_0^{\mathrm{f}},u_1\right)\cdot\begin{pmatrix}A\cdot x^j\\ 1\end{pmatrix}-c^{\mathrm{f}}\cdot x^j=\left(u_0^{\mathrm{f}}\cdot A-c^{\mathrm{f}}\right)\cdot x^j+u_1$$

Determinarea maximului revine la rezolvarea problemei:

$$\max_{1\le j\le r}\left\{u^{\mathrm{f}}\cdot\begin{pmatrix}\alpha^j\\ 1\end{pmatrix}-\gamma_j\right\}=\max_{x^j\in Ext(S)}\left\{\left(u_0^{\mathrm{f}}\cdot A-c^{\mathrm{f}}\right)\cdot x^j\right\}+u_1$$

$$=\boxed{\underbrace{\max_{x\in\mathbf{R}^n}\left\{\left(u_0^{\mathrm{f}}\cdot A-c^{\mathrm{f}}\right)\cdot x\;\middle|\;D\cdot x=b,x\ge\mathbf{0}\right\}}_{\text{Subproblema pentru testul de optimalitate}}}+u_1=\Delta$$

Fie x^s soluția optimă de bază a subproblemei (punct extrem optim!).

Dacă $\Delta\le 0,$ baza B este optimă pentru programul principal, cu soluția optimă:

$$\bar{\lambda}=B^{-1}\cdot\begin{pmatrix}b_0\\ 1\end{pmatrix}. \Longrightarrow \boxed{\tilde{x}=\sum_{i\in\mathrm{B}}\bar{\lambda}_i x^i \quad \text{soluția optimă a problemei inițiale}}$$

Dacă $\Delta > 0,$ coloana care intră în bază este: $\begin{pmatrix} \alpha^s \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cdot x^s \\ 1 \end{pmatrix},$

având coeficientul de cost: $\gamma_s = c^{\mathrm{f}} \cdot x^s.$

Efectuând operația de schimbare a bazei în programul principal, se obține o nouă bază primal admisibilă şi calculele se reiau cu testul de optimalitate.

Acest procedeu devine atractiv dacă se aplică la

probleme bloc-unghiulare:

$$\inf \left\{ c_1^{\mathrm{f}} \cdot \mathbf{x}_1 + c_2^{\mathrm{f}} \cdot \mathbf{x}_2 + \cdots + c_k^{\mathrm{f}} \cdot \mathbf{x}_k \right\}$$

$$\begin{cases} A_1 \cdot \mathbf{x}_1 + A_2 \cdot \mathbf{x}_2 + \cdots + A_k \cdot \mathbf{x}_k & = b_0 \\ D_1 \cdot \mathbf{x}_1 & = b_1 \\ \qquad D_2 \cdot \mathbf{x}_2 & = b_2 \\ \qquad\qquad \ddots & \vdots \\ \qquad\qquad\qquad D_k \cdot \mathbf{x}_k & = b_k \end{cases}$$

$$\mathbf{x}_i \geq \mathbf{0},\ i = \overline{1,k},\ k > 0$$

$$A_i \in \mathbf{R}^{m_0 \times n_i},\ D_i \in \mathbf{R}^{m_i \times n_i},\ c_i \in \mathbf{R}^{n_i},\ b_i \in \mathbf{R}^{m_i}.$$

Subproblema pentru testul de optimalitate:

$$\max\left\{ \sum_{i=1}^{k}\left(u_0^{\mathrm{f}} \cdot A_i - c_i^{\mathrm{f}}\right)\cdot \mathbf{x}_i \;\middle|\; D_i \cdot \mathbf{x}_i = b_i,\ \mathbf{x}_i \ge \mathbf{0},\ i = \overline{1,k} \right\}$$

Funcția obiectiv fiind aditivă iar restricțiile independente, subproblema este echivalentă cu rezolvarea următoarelor k subprobleme independente:

$$\max_{\mathbf{x}_i \in \mathbf{R}^{n_i}}\left\{ \left(u_0^{\mathrm{f}} \cdot A_i - c_i^{\mathrm{f}}\right)\cdot \mathbf{x}_i \;\middle|\; D_i \cdot \mathbf{x}_i = b_i,\ \mathbf{x}_i \ge \mathbf{0} \right\}, \qquad i = \overline{1,k}.$$

Algoritmul de descompunere Dantzig-Wolfe.

1. Se determină o bază primal admisibilă B pentru programul principal şi multiplicatorii simplex $u^{\mathrm{f}} = \left(u_0^{\mathrm{f}}, u_1\right)$ corespunzători.

2. Se rezolvă subproblemele independente şi se obțin soluțiile

$$\overline{\mathbf{x}}_i\left(u_0\right),\ i = \overline{1,k}.$$

1. Se calculează $\Delta = \sum_{i=1}^{k}\left(u_0^{\mathrm{f}} \cdot A_i - c_i^{\mathrm{f}}\right)\cdot \overline{\mathbf{x}}_i\left(u_0\right) + u_1$

1. Dacă $\Delta \le 0$, soluția optimă pentru problema inițială este

$$\tilde{x} = \sum_{i \in B} \lambda_i x^i$$

unde x^i sunt punctele extreme ale mulțimii

$$S = \left\{ x \in \mathbf{R}^{\sum_{i=1}^{k} n_i} \;\middle|\; \begin{pmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_k \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} \right\}$$

1. Dacă $\Delta > 0$, se formează coloana

$$\begin{pmatrix} \alpha^s \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{k} A_i \overline{\mathbf{x}}_i (u_0) \\ 1 \end{pmatrix}$$

care va fi introdusă în noua bază. Se calculează multiplicatorii simplex corespunzători şi se revine la pasul 2.

Programul principal restrâns

Schimbarea bazei curente a programului principal prin introducerea unei variabile noi λ pentru care $u_0^{f} \cdot \alpha + u_1 - \gamma > 0$, se poate face rezolvând problema:

$$\inf \left\{ \sum_{i=1}^{m_0+1} \gamma_i \lambda_i + \gamma\lambda \right\}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m_0+1} \alpha^i \lambda_i + \alpha\lambda = b_0 \\ \sum_{i=1}^{m_0+1} \lambda_i + \lambda = 1 \\ \lambda_i \geq 0,\ i = \overline{1, m_0+1},\quad \lambda \geq 0 \end{cases}$$