FORMULARIO PROBABILITÀ E STATISTICA

Probabilità di un evento: $P\ (\ A\ ) = \frac{n.di\ casi\ favorevoli}{n.di\ casi\ possibili}$

Spazi di probabilità: è l'insieme di tutti i possibili esiti di un esperimento aleatorio. Possiamo indicarla con la terna ($\Omega,\ \mathcal{A},\ P$)

Probabilità condizionata: La probabilità condizionata di un evento A dato un evento B è data da:

$$P\ (\ A\ |\ B\ ) = \frac{P\ (\ A\ \cap B\ )}{P\ (\ B\ )}$$

Dove: P (A∩B) è la probabilità che si verifichino sia A che B

P (B) è la probabilità dell'evento B.

Formula delle probabilità totali: Se abbiamo eventi B1, B2, …, Bn che sono disgiunti e la loro unione è l'intero spazio campionario, allora per ogni evento A del nostro spazio campionario, vale la formula delle probabilità totali:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(\ A\ |\ B_i\ )\ P(B_i)$$

Formula di Bayes: La formula di Bayes, che è un'applicazione della definizione di probabilità condizionata, è data da:

$$P\ (\ A\ |\ B\ ) = \frac{P\ (\ B\ |\ A\ )\ P\ (\ A\ )}{P\ (\ B\ )}$$

Indipendenza tra eventi: Due eventi A e B sono indipendenti se e solo se la probabilità che si verifichino entrambi è il prodotto delle loro probabilità, cioè se

$$P\ (A \cap B) = P(A)\ P(B)$$

Variabili aleatorie: Una variabile aleatoria è una funzione che associa un numero reale a ciascun esito di un esperimento aleatorio. Può essere discreta (se può assumere un numero finito o numerabile di valori) o continua (se può assumere qualsiasi valore in un intervallo continuo).

Funzione di distribuzione: La funzione di distribuzione di una variabile aleatoria X, denotata con F(x), è definita come F (x) = P (X ≤ x)

DISTRIBUZIONI (Variabili Aleatorie Discrete)

1. **Distribuzione ipergeometrica**: si applica quando si estraggono senza reinserimento da una popolazione finita. La probabilità che una variabile aleatoria X assuma il valore k è data da:

$$p_X\ (k) = \frac{\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k}}{\binom{n_1+n_2}{n}}$$

2. **Distribuzione binomiale**: si applica quando si ripetono n volte esperimenti Bernoulliani indipendenti, ciascuno dei quali ha probabilità di successo p. La variabile aleatoria X che conta il numero di successi ha distribuzione binomiale. La probabilità che X assuma il valore k è data da:

$$P(X = k) = \binom{n}{k}\ p^k\ (1-p)^{n-k}$$

3. **Distribuzione geometrica**: conta il numero di fallimenti prima del primo successo in una sequenza di esperimenti Bernoulliani indipendenti. La probabilità che X assuma il valore k è data da:

$$P(X = k) = (1-p)^k\ p$$

4. **Distribuzione binomiale negativa**: conta il numero di fallimenti prima del r-esimo successo in una sequenza di esperimenti Bernoulliani indipendenti. La probabilità che X assuma il valore k è data da:

$$P(X = k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r\ (1-p)^k$$

5. **Distribuzione di Poisson**: è utilizzata per modellare il numero di eventi che si verificano in un intervallo di tempo o di spazio, dato un tasso medio di eventi per intervallo λ. La probabilità che X assuma il valore k è data da:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

DISTRIBUZIONI (Variabili Aleatorie Continue)

1. **Distribuzione uniforme**: Una variabile aleatoria X ha distribuzione uniforme in un intervallo [a, b] se ogni sotto intervallo di [a, b] ha la stessa probabilità. La funzione di densità di probabilità f(x) è data da:

$$F\,(\,x\,) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & se\ a\ \leq x\ \leq b \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

2. **Distribuzione esponenziale**: Questa distribuzione è spesso utilizzata per modellare il tempo tra eventi in un processo di Poisson. Se X ha una distribuzione esponenziale con parametro λ, la sua funzione di densità di probabilità f(x) è data da:

$$F\,(\,x\,) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & se\ x\ \geq 0 \\ 0 & se\ x < 0 \end{cases}$$

3. **Distribuzione normale**: Questa è una delle distribuzioni più comuni in statistica. È definita da due parametri: la media μ e la deviazione standard σ. La funzione di densità di probabilità f(x) di una variabile aleatoria X che segue una distribuzione normale è data da:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Calcolo combinatorio: **permutazioni**, **disposizioni** e **combinazioni**.

1. **Permutazioni**

- **Permutazioni semplici**: sono i possibili modi per ordinare totalmente n elementi distinti.
  Il numero di permutazioni semplici si indica con P_n è pari al fattoriale di n,
  P_n = n!

- **Permutazioni con ripetizione**: sono i possibili modi per ordinare n elementi di cui alcuni sono ripetuti due o più volte.

$$P_{n,r} = \frac{n\,!}{r_1\,! * \;.... \; * r_n\,!}$$

2. **Disposizioni**

   Disposizioni semplici: sono i raggruppamenti ordinati di k elementi distinti estratti tra n elementi distinti.

$$D_{\,r} = n\,(\,n-1\,) * ... * (\,n-k+1\,)$$

   Disposizioni con ripetizioni: è un raggruppamento ordinato di k elementi formato a partire da n elementi distinti, nel quale uno stesso elemento può essere ripetuto fino a k volte.

$$D_{\,n,r} = n^k$$

3. **Combinazioni**

   - **Combinazioni semplici**: è un raggruppamento ordinato di k elementi formato a partire da n elementi distinti, nel quale uno stesso elemento può essere ripetuto fino a k volte.

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$$

   - **Combinazioni con ripetizioni:** un raggruppamento di k elementi estratti da n elementi distinti, nel quale uno stesso elemento può ripetersi fino a k volte, e in cui l'ordine di estrazione non è rilevante

$$\binom{\boldsymbol{n}+k-1}{\boldsymbol{k}}$$

La **densità congiunta discreta**, o funzione di massa di probabilità congiunta, di due variabili aleatorie discrete X e Y è una funzione che associa a ciascuna coppia di valori (x, y) la probabilità che X assuma il valore x e Y assuma il valore y.

$$P(X = x, Y = y)$$

Questa funzione soddisfa la seguente equazione:

$$\sum_{x} \quad \sum_{y} P\ (X = x, Y = y) = 1$$

Questo significa che la somma delle probabilità di tutte le possibili combinazioni di valori di X e Y deve essere uguale a 1.

Le densità marginali possono essere ottenute dalla densità congiunta sommando le probabilità congiunte su tutti i possibili valori dell'altra variabile. In notazione matematica, si esprimono come:

$$p_{x\,(\,X\,)=} \sum_{y} P\ (X = x, Y = y)$$

$$p_{y}\,(\,y\,) = \sum_{y} P\ (X = x, Y = y)$$

Queste formule danno la probabilità che X o Y assumano un certo valore, indipendentemente dal valore dell'altra variabile.

La **speranza matematic**a, o valore atteso, di una variabile casuale X è un numero che esprime il valore medio del fenomeno rappresentato da quella variabile. Questo valore è la media ponderata di tutti i valori della variabile, con ciascun valore che risulta pesato in base alla probabilità di verificarsi. Abbiamo due casi:

Caso discreto: nel caso di una variabile casuale discreta, la speranza matematica è la somma dei possibili valori di tale variabile, ciascuno moltiplicato per la probabilità di essere assunto (ossia di verificarsi). Questo si può esprimere come:

$$E\,[\,X\,] = \sum_k x_k\, p\,(x_K)$$

Dove: $p\,(x_K)$ è la probabilità che la variabile casuale assuma il valore x_k

Caso continuo: nel caso di una variabile casuale continua X, calcoliamo la speranza matematica nel seguente modo

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx$$

Quindi, nel caso continuo, il valore atteso è l'integrale del prodotto del valore e la sua densità di probabilità, integrato su tutto lo spazio dei possibili valori.

N.B: Per entrambi i casi abbiamo 2 proprietà:

Proprietà lineare dell'aspettazione: $E\,[\,c_1\,X_1\;+\;c_2\,X_2\,] = \;[\,c_1 E\,[\,X_1\,]\;+\;\;c_2\,E\,[\,X_2\,]\,]$

Indipendenza e aspettazione del prodotto: se $X_1\;\cap\;X_2\;=\;\emptyset \rightarrow E\,[\,X_1\;X_2\,] = \;E\,[\,c_1]\;\;E\,[\,X_2\,]$

SOMMATORIE…(Da Ricordare)

Somma geometrica decrescente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{q^{n=0}}{1-r}$$

La **Varianza** indica quanto i valori si discostano dalla media.
Ad esempio, se si lancia un dado, la varianza sarà un numero che indica quanto i risultati dei lanci si discostano in media dal valore atteso di 3.5.

$$Var\,[\,X\,] = E\,[\,X - E\,(\,X_2\,)^2] = [\,E\,[\,X^2\,] - E^2\,[\,X\,]\,]$$

$$Var\,[\,cX\,] = c^2\,Var\,[\,X\,]$$

$$Var\,[\,c + X\,] = Var\,[\,X\,]$$