PROBABILITA E STATISTICA (Esercizi)

Anno Accademico 2023/2024 (Simulazioni)

- **ESTRAZIONE DI PALLINE DA UN URNA**

Esercizio 2. Abbiamo due urne. Entrambe hanno 2 palline bianche e 3 nere. Si estrae a caso una pallina dalla prima urna e la si mette nella seconda. Poi si estraggono a caso due palline in blocco dalla seconda urna.
D4) Calcolare la probabilità di estrarre due palline dello stesso colore dalla seconda urna.

Soluzione:

D4) Per calcolare la probabilità di estrarre due palline dello stesso colore nella seconda urna andrò a calcolarmi la probabilità totale nel seguente modo:

Definisco la prima urna con A e la seconda urna con B. Se pesco da A una pallina bianca, ho una probabilità di pescare una pallina bianca di $\frac{2}{5}$
Successivamente, la inserisco in B, la probabilità di estrarre da B due palline dello stesso colore sarà:

Per definire la probabilità di pescare 2 palline bianche o 2 palline nere userò le combinazioni: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$P\ (\ pesco\ 2\ palline\ bianche\ ) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

$$P\ (\ pesco\ 2\ palline\ nere\ ) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

La probabilità totale di pescare due palline dello stesso colore (2 bianche o 2 nere) è la somma di queste due probabilità:

$$P\ (\ pesco\ 2\ palline\ dello\ stesso\ colore\ ) = \ P\ (\ 2\ bianche\ ) + P\ (\ 2\ nere\ ) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

Se invece, pesco da A una pallina nera, ho una probabilità di pescare una pallina nera di $\frac{3}{5}$
Successivamente, la inserisco in B, la probabilità di estrarre da B due palline dello stesso colore sarà:

Per definire la probabilità di pescare 2 palline bianche o 2 palline nere userò le combinazioni: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$P\ (\ pesco\ 2\ palline\ bianche\ ) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{1}{15}$$

$$P\ (\ pesco\ 2\ palline\ nere\ ) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

La probabilità totale di pescare due palline dello stesso colore (2 bianche o 2 nere) è la somma di queste due probabilità:

$$P\ (\ 2\ palline\ dello\ stesso\ colore\ ) = \ P\ (\ 2\ bianche\ ) + P\ (\ 2\ nere\ ) = \frac{1}{15} + \frac{2}{5} = \frac{7}{15}$$

La probabilità totale di estrarre due palline dello stesso colore dalla seconda urna è la media ponderata delle due probabilità calcolate sopra:

$$P\ (\ 2\ palline\ dello\ stesso\ colore\ ) = \left(\frac{2}{5} * \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{3}{5} * \frac{7}{15}\right) = \frac{11}{25}$$

Esercizio 1. Un'urna ha 4 palline con in numeri $0, 1, 2, 3$. Si estraggono a caso 2 palline in blocco.
D1) Calcolare la probabilità di estrarre un numero pari e un numero dispari in un qualsiasi ordine.
D2) Trovare la densità della variabile aleatoria X che indica il prodotto dei due numeri estratti.
D3) Si ripeta più volte il procedimento indicato fino a quando viene estratto per la prima volta l'insieme di numeri $\{1, 2\}$. Calcolare la probabilità che il procedimento venga ripetuto un numero pari di volte (due volte, quattro volte, sei volte, ecc.).

Soluzione:

D1) Per calcolarci la probabilità di estrarre un numero pari e un numero dispari faremo:
L'urna contiene 4 palline = { 0, 1, 2, 3 }. Possiamo avere diverse combinazioni di numeri pari e dispari:

- O pari e dispari
- O dispari e pari

Calcoliamo la probabilità di ciascun caso:

- Pari e Dispari:

Ci sono due palline pari (0 e 2) e due palline dispari (1 e 3).
La probabilità di estrarre un numero pari seguito da un numero dispari è

$$\frac{2}{4} * \frac{2}{3} = (esce\ un\ pari * esce\ un\ dispari\ dopo\ aver\ gia\ pescato\ un\ pari\ ) = \frac{1}{3}$$

- Dispari e Pari:

Ci sono due palline pari (0 e 2) e due palline dispari (1 e 3).
La probabilità di estrarre un numero dispari seguito da un numero pari è

$$\frac{2}{4} * \frac{2}{3} = (esce\ un\ dispari * esce\ un\ pari\ dopo\ aver\ gia\ pescato\ un\ pari\ ) = \frac{1}{3}$$

La somma di questi due casi sarà $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

D2) Per trovare la densità di X che indica il prodotto dei due numeri estratti
$\{(\ P_x\ (\ 0\ ) = 0 * n.), (\ P_x\ (\ 2\ ) = 1 * 2\ ),\ (\ P_x\ (\ 3\ ) = 1 * 3\ ), (\ P_x\ (\ 6\ ) = 3 * 2\ )\}$

$$\begin{cases} p_X(0) = P(\{\{0,1\},\{0,2\},\{0,3\}\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \\ p_X(2) = P(\{1,2\}) = \frac{1}{6}, \\ p_X(3) = P(\{1,3\}) = \frac{1}{6}, \\ p_X(6) = P(\{2,3\}) = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

Ciascuno dei 6 sottoinsiemi hanno probabilità $\frac{1}{6}$

D3)

$$\sum_{h\geq 1}(1-p)^{2h-1}p = \frac{p}{1-p}\frac{(1-p)^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p(1-p)}{1-(1-2p+p^2)} = \frac{1-p}{2-p} = \frac{1-1/6}{2-1/6} = \frac{5/6}{11/6} = \frac{5}{11}.$$

- **DADO**

Esercizio 1. Si lanciano due dadi: il primo è un dado equo, il secondo è un dado con i numeri $1, 2, 3, 4, 5, 5$. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di volte che esce il numero 5, e sia Y la variable aleatoria che conta il numero di volte che esce un numero minore o uguale a 3.
D1) Trovare la densità discreta di X.
D2) Trovare la densità discreta di Y.
D3) Sia E l'evento *esce il 5 nel lancio del dado equo.* Calcolare $P(E|X = 1)$.

Soluzione:

D1) Abbiamo un dado equo, cioè un dado che ha le seguenti facce { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }, sappiamo che X è la variabile aleatoria che conta il numero di volte in cui esce 5. Per trovare la densità discreta di X facciamo la seguente analisi:
Essendo il dato equo la probabilità di ottenere 5 sarà: $\frac{\#A}{n} = \frac{n.\ di\ 5\ presenti\ nel\ dado}{n.\ di\ facce\ del\ dado} = \frac{1}{6}$

Nel secondo dado abbiamo due 5, quindi la probabilità sarà: $\frac{\#A}{n} = \frac{n.\ di\ 5\ presenti\ nel\ dado}{n.\ di\ facce\ del\ dado} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

X rappresenta il numero di volte che esce un dado il n. 5 nei due dadi. Quindi X = 0, 1, 2

$$\begin{cases} P_x\,(\,0\,) = \; nessun\; 5\; esce = \left(1 - \frac{1}{6}\right) * \left(1 - \frac{2}{6}\right) = \frac{5}{6} * \frac{4}{6} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9} \\ P_x\,(\,1\,) = esce\; un\; 5 = \left(\frac{1}{6} * \frac{4}{6}\right) + \left(\frac{5}{6} * \frac{2}{6}\right) = \frac{14}{36} = \frac{7}{18} \\ P_x\,(\,2\,) = \; escono\; due\; 5 = \left(\frac{1}{6}\right) * \left(\frac{2}{6}\right) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \end{cases}$$

Dove:

P_x (0) = (tutti i casi del primo dado - il caso in cui esce 5 nel primo dado) * (tutti i casi del secondo dado - il caso in cui esce 5 nel primo dado)
P_x (1) = (un 5 esce nel primo dado * un 5 non esce nel secondo dado) + (un 5 non esce nel primo dado * un 5 esce nel secondo dado)
P_x (2) = (esce un 5 nel primo dado) * (esce un 5 nel secondo dado)

D2) La variabile aleatoria Y rappresenta il numero di volte che esce un numero minore o uguale a 3. Possiamo avere Y = 0, 1, 2

Possiamo dividere entrambi i dadi in: A = { numeri minori uguali a 3 } e B = { numeri maggiori di 3 }.
Quindi le facce accettate sono $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, stessa cosa vale per le facce non accettate. Quindi avremo:

$$\begin{cases} P_y\,(\,0\,) = \; nessun\; n \;\leq 3\; esce = \left(\frac{3}{6}\right) * \left(\frac{3}{6}\right) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \\ P_y\,(\,1\,) = esce\; un\; n \;\leq 3 = \left(\frac{3}{6} * \frac{3}{6}\right) + \left(\frac{3}{6} * \frac{3}{6}\right) = \frac{1}{2} \\ P_y\,(\,2\,) = \; escono\; due\; n \;\leq 3 = \left(\frac{3}{6}\right) * \left(\frac{3}{6}\right) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Dove:
P_y (0) = (non esce $n \leq 3$ nel primo) * (non esce $n \leq 3$ nel primo)
P_y (1) = (esce $n \leq 3$ nel primo * non esce $n \leq 3$ nel secondo) + (non esce $n \leq 3$ nel primo * esce $n \leq 3$ nel primo)
P_y (2) = (esce $n \leq 3$ nel primo) * (esce $n \leq 3$ nel primo)

D3) Per calcolare P (E | X = 1) dove E = esce il 5 nel dado equo e X = 1 è l'uscita di un 5 in uno dei due dadi (in questo caso esce nel secondo) . Per farlo applichiamo la formula di Bayes:

$$P\,(\,A\,|\,B\,) = \frac{P\,(\,A\,\cap B\,)}{P\,(\,B\,)}$$

Quindi:

$$P\,(\,E\,|X = 1\,) = \frac{P\,(\,E\,\cap (X = 1)\,)}{P\,(\,X = 1\,)} = \frac{\frac{1}{6} * (\,1 - \frac{2}{6})}{(\frac{7}{18})} = \frac{2}{7}$$

Esercizio 2. Si lancia un dado equo. Se esce il numero 1 si lanciano due monete eque, se esce un numero diverso da 1 si lanciano due monete le cui probabilità che esca testa lanciandole è uguale a 1/3.
D4) Calcolare la probabilità che sia uscito il numero 1 nel lancio del dado sapendo di aver ottenuto due teste nei due lanci di moneta.

Soluzione:

Per risolvere questo problema, possiamo utilizzare il teorema di Bayes, che ci permette di calcolare la probabilità condizionata. Iniziamo definendo gli eventi:

- A: "è uscito il numero 1 nel lancio del dado"
- B: "sono uscite due teste nei due lanci di moneta"

Vogliamo calcolare P(A|B), cioè la probabilità che sia uscito il numero 1 nel lancio del dado sapendo di aver ottenuto due teste nei due lanci di moneta.

Il teorema di Bayes afferma che: $P\ (A\mid B\ ) = \frac{P\ (B\mid A) * P\ (A)}{P\ (B)}$

Dove:

- P(A) è la probabilità che esca 1 lanciando il dado, che è $\frac{1}{6}$
- P(B | A) è la probabilità di ottenere due teste lanciando due monete eque, che è $\left(\frac{1}{2}\right) * \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$
- P(B) è la probabilità di ottenere due teste in entrambi i casi, quindi avrò: $\left(\frac{1}{2}\right) * \left(\frac{1}{2}\right) * \left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{5}{6}\right)$

$$P\ (A\mid B\ ) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{6}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right) * \left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{5}{6}\right)} = \frac{9}{29}$$

Anno Accademico 2022/2023 (Simulazioni + Appelli)

- **ESTRAZIONE DI PALLINE DA UN URNA**

Esercizio 1. Un'urna ha 100 palline numerate da 1 a 100. Si estraggono a caso 4 palline, una alla volta e con reinserimento.
D1) Calcolare la probabilità di estrarre 2 palline con un numero dispari.
D2) Calcolare la probabilità di estrarre la sequenza (pari, pari, dispari, dispari) sapendo che si è verificato l'evento alla domanda precedente.
D3) Calcolare la speranza matematica della variabile aleatoria Z che conta il numero di palline estratte con un numero minore di 21 (cioè ≤ 20).

Soluzione:

D1) La probabilità di estrarre una pallina con un numero dispari è 1/2, poiché ci sono 50 numeri dispari tra 1 e 100. Poiché le estrazioni sono con reinserimento, la probabilità rimane la stessa per ogni estrazione. Quindi, la probabilità di estrarre 2 palline con un numero dispari in 4 estrazioni la risolviamo con la distribuzione binomiale:

$$P\,(\,X = k\,) = \binom{n}{k} * p^k * (\,1 - p\,)^{n-k}$$

Dove:

- n è il numero di prove (4 in questo caso)
- k è il numero di successi desiderati (2 in questo caso),
- p è la probabilità di successo (1/2 in questo caso).

Quindi otteniamo:

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{4-2} = \frac{3}{8}$$

D2) La probabilità condizionata P(E|X=2) rappresenta la probabilità dell'evento E (estrarre la sequenza specifica: pari, pari, dispari, dispari) dato che l'evento X=2 (estrazione di 2 palline con un numero dispari) si è verificato.

$$P(\,E \mid X = 2\,) = \frac{P(E \cap X = 2)}{P(X = 2)} = \frac{P(E)}{P(X = 2)}$$

Quindi:

$$P(\,E \mid X = 2\,) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{\frac{6}{16}} = \frac{1}{6}$$

D3) La speranza matematica, o valore atteso, di una variabile aleatoria è data da :

Esercizio 2. Si lancia un dado equo. Se esce uno dei numeri $\{1, 2\}$ si lancia una moneta equa; se esce uno dei numeri $\{3, 4, 5, 6\}$ si lancia una moneta la cui probabilità che esca testa lanciandola è uguale a $\frac{1}{4}$.
`D4)` Calcolare la probabilità che esca testa nel lancio di moneta che si effettua.

Soluzione:

Esercizio 2.
`D4)` Con notazioni ovvie, usando la formula delle probabilità totali si ha

$$P(T) = P(T|M_1)P(M_1) + P(T|M_2)P(M_2) = \frac{1}{2}\frac{2}{6} + \frac{1}{4}\frac{4}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$