Algebră și Geometrie

Ludovic Dan LEMLE

Universitatea Politehnica Timișoara

2017-2018

Conținutul cursului

Conținutul cursului

1. Algebră liniară

Conținutul cursului

1. Algebră liniară
2. Geometrie analitică

Conținutul cursului

1. Algebră liniară
2. Geometrie analitică
3. Geometrie diferențială

Algebră liniară

Algebră liniară

- Spații vectoriale

Algebră liniară

- Spații vectoriale
- Operatori liniari

Algebră liniară

- Spații vectoriale
- Operatori liniari
- Forme pătratice

Geometrie analitică

Geometrie analitică

- Algebră vectorială

Geometrie analitică

- Algebră vectorială
- Drepte și plane

Geometrie analitică

- Algebră vectorială
- Drepte și plane
- Cuadrice

Geometrie diferențială

Geometrie diferențială

- Geometria diferențială a curbelor

Geometrie diferențială

- Geometria diferențială a curbelor
- Geometria diferențială a suprafețelor

Geometrie diferențială

- Geometria diferențială a curbelor
- Geometria diferențială a suprafețelor
- Operatori diferențiali liniari

Bibliografie

Bibliografie

LEMLE, L.D. *Algebră liniară.* Ed. Mirton, Timișoara, 2002.

Bibliografie

- LEMLE, L.D. *Algebră liniară.* Ed. Mirton, Timișoara, 2002.
- LEMLE, L.D. *Lecții de geometrie analitică.* Ed. Mirton, Timișoara, 2004.

Bibliografie

- LEMLE, L.D. *Algebră liniară.* Ed. Mirton, Timișoara, 2002.
- LEMLE, L.D. *Lecții de geometrie analitică.* Ed. Mirton, Timișoara, 2004.
- LEMLE, L.D. *Algebră și geometrie.* Ed. Politehnica, Timișoara, 2006.

Bibliografie

- LEMLE, L.D. *Algebră liniară.* Ed. Mirton, Timișoara, 2002.
- LEMLE, L.D. *Lecții de geometrie analitică.* Ed. Mirton, Timișoara, 2004.
- LEMLE, L.D. *Algebră și geometrie.* Ed. Politehnica, Timișoara, 2006.
- LEMLE, L.D. *Elemente de geometrie analitică și diferențială.* Ed. Politehnica, Timișoara, 2016.

Bibliografie

- LEMLE, L.D. *Algebră liniară.* Ed. Mirton, Timișoara, 2002.
- LEMLE, L.D. *Lecții de geometrie analitică.* Ed. Mirton, Timișoara, 2004.
- LEMLE, L.D. *Algebră și geometrie.* Ed. Politehnica, Timișoara, 2006.
- LEMLE, L.D. *Elemente de geometrie analitică și diferențială.* Ed. Politehnica, Timișoara, 2016.
- MAKSAY, S., VLAIC, G. *Algebra liniară și geometrie analitică și diferențială.* Vol. I, Litografia Universității "Politehnica", Timișoara, 1996.

Noțiunea de spațiu vectorial

Noțiunea de spațiu vectorial

Notăm cu $\mathcal{X}$ o mulțime nevidă ale cărei elemente se vor numi *vectori* și cu $\mathbb{R}$ corpul numerelor reale ale cărui elemente se vor numi *scalari*.

Noțiunea de spațiu vectorial

Pe mulțimea $\mathcal{X}$ se definesc:

Noțiunea de spațiu vectorial

Pe mulțimea $\mathcal{X}$ se definesc:

- o lege de compoziție internă:

$$+ : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$$

$$\mathcal{X} \times \mathcal{X} \ni (\bar{x}, \bar{y}) \longmapsto \bar{x} + \bar{y} \in \mathcal{X}$$

  numită *adunarea vectorilor*;

Noțiunea de spațiu vectorial

Pe mulțimea $\mathcal{X}$ se definesc:

- o lege de compoziție internă:

$$+\ :\mathcal{X}\times\mathcal{X}\longrightarrow\mathcal{X}$$

$$\mathcal{X}\times\mathcal{X}\ni(\bar{x},\bar{y})\longmapsto\bar{x}+\bar{y}\in\mathcal{X}$$

  numită *adunarea vectorilor*;

- o lege de compoziție externă:

$$\cdot\ :\mathbb{R}\times\mathcal{X}\longrightarrow\mathcal{X}$$

$$\mathbb{R}\times\mathcal{X}\ni(\lambda,\bar{x})\longmapsto\lambda\cdot\bar{x}\in\mathcal{X}$$

  numită *înmulțirea vectorilor cu scalari*

Noțiunea de spațiu vectorial

Noțiunea de spațiu vectorial

Definiție

Noțiunea de spațiu vectorial

Definiție

Tripletul $(\mathcal{X}, +, \cdot)$ se numește $\mathbb{R}$-spațiu vectorial dacă sunt satisfăcute următoarele proprietăți:

Noțiunea de spațiu vectorial

Definiție

Tripletul $(\mathcal{X}, +, \cdot)$ se numește $\mathbb{R}$-spațiu vectorial dacă sunt satisfăcute următoarele proprietăți:

1. $(\mathcal{X}, +)$ este grup comutativ;

Noțiunea de spațiu vectorial

Definiție

Tripletul $(\mathcal{X}, +, \cdot)$ se numește $\mathbb{R}$-spațiu vectorial dacă sunt satisfăcute următoarele proprietăți:

1. $(\mathcal{X}, +)$ este grup comutativ;
2. $1 \cdot \bar{x} = \bar{x} \quad , \quad (\forall)\bar{x} \in \mathcal{X}$;

Noțiunea de spațiu vectorial

Definiție

Tripletul $(\mathcal{X}, +, \cdot)$ se numește $\mathbb{R}$-spațiu vectorial dacă sunt satisfăcute următoarele proprietăți:

1. $(\mathcal{X}, +)$ este grup comutativ;
2. $1 \cdot \bar{x} = \bar{x} \quad , \quad (\forall)\bar{x} \in \mathcal{X}$;
3. $\lambda \cdot (\bar{x} + \bar{y}) = \lambda \cdot \bar{x} + \lambda \cdot \bar{y} \quad , \quad (\forall)\lambda \in \mathbb{R}$ și $(\forall)\, \bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{X}$;

Noțiunea de spațiu vectorial

Definiție

Tripletul $(\mathcal{X}, +, \cdot)$ se numește $\mathbb{R}$-spațiu vectorial dacă sunt satisfăcute următoarele proprietăți:

1. $(\mathcal{X}, +)$ este grup comutativ;
2. $1 \cdot \bar{x} = \bar{x} \quad , \quad (\forall)\bar{x} \in \mathcal{X}$;
3. $\lambda \cdot (\bar{x} + \bar{y}) = \lambda \cdot \bar{x} + \lambda \cdot \bar{y} \quad , \quad (\forall)\lambda \in \mathbb{R}$ și $(\forall)\, \bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{X}$;
4. $(\lambda + \mu) \cdot \bar{x} = \lambda \cdot \bar{x} + \mu \cdot \bar{x} \quad , \quad (\forall)\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ și $(\forall)\, \bar{x} \in \mathcal{X}$;

Noțiunea de spațiu vectorial

Definiție

Tripletul $(\mathcal{X}, +, \cdot)$ se numește $\mathbb{R}$-spațiu vectorial dacă sunt satisfăcute următoarele proprietăți:

1. $(\mathcal{X}, +)$ este grup comutativ;
2. $1 \cdot \bar{x} = \bar{x} \quad , \quad (\forall)\bar{x} \in \mathcal{X}$;
3. $\lambda \cdot (\bar{x} + \bar{y}) = \lambda \cdot \bar{x} + \lambda \cdot \bar{y} \quad , \quad (\forall)\lambda \in \mathbb{R}$ și $(\forall)\, \bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{X}$;
4. $(\lambda + \mu) \cdot \bar{x} = \lambda \cdot \bar{x} + \mu \cdot \bar{x} \quad , \quad (\forall)\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ și $(\forall)\, \bar{x} \in \mathcal{X}$;
5. $\lambda \cdot (\mu \cdot \bar{x}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \bar{x} \quad , \quad (\forall)\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ și $(\forall)\, \bar{x} \in \mathcal{X}$.

Noțiunea de spațiu vectorial

Exemplu

Noțiunea de spațiu vectorial

Exemplu

$\mathbb{R}$-*spațiul vectorial* $\mathbb{R}^n = \left\{ \left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right) \middle| x^i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n} \right\}$

Noțiunea de spațiu vectorial

Exemplu

$\mathbb{R}$-*spațiul vectorial* $\mathbb{R}^n = \left\{ \left(x^1, x^2, \ldots, x^n \right) \middle| x^i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n} \right\}$

i) adunarea vectorilor:

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\bar{x} + \bar{y} = \left(x^1 + y^1, x^2 + y^2, \ldots, x^n + y^n \right)$$

pentru orice $\bar{x} = \left(x^1, x^2, \ldots, x^n \right), \bar{y} = \left(y^1, y^2, \ldots, y^n \right) \in \mathbb{R}^n$;

Noțiunea de spațiu vectorial

Exemplu

$\mathbb{R}$-*spațiul vectorial* $\mathbb{R}^n = \left\{ \left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right) \middle| x^i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n} \right\}$

i) adunarea vectorilor:

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\bar{x} + \bar{y} = \left(x^1 + y^1, x^2 + y^2, \ldots, x^n + y^n\right)$$

pentru orice $\bar{x} = \left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right), \bar{y} = \left(y^1, y^2, \ldots, y^n\right) \in \mathbb{R}^n$;

ii) înmulțirea vectorilor cu scalari:

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\lambda \cdot \bar{x} = \left(\lambda x^1, \lambda x^2, \ldots, \lambda x^n\right)$$

pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$ și orice $\bar{x} = \left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right) \in \mathbb{R}$.

Sisteme de generatori

Sisteme de generatori

Fie $\mathcal{X}$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial.

Sisteme de generatori

Fie $\mathcal{X}$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial.

Definiție

Sisteme de generatori

Fie $\mathcal{X}$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial.

Definiție

Spunem că un vector $\bar{x} \in \mathcal{X}$ este combinație liniară a vectorilor $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n \in \mathcal{X}$ dacă există scalarii $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n \in \mathbb{R}$ astfel încât:

$$\bar{x} = \lambda^1 \bar{x}_1 + \lambda^2 \bar{x}_2 + \ldots + \lambda^n \bar{x}_n \quad .$$

Sisteme de generatori

Definiție

Sisteme de generatori

Definiție

Spunem că sistemul de vectori $S \subset \mathcal{X}$ este un sistem de generatori pentru $\mathbb{R}$-spațiul vectorial $\mathcal{X}$ dacă orice vector $\bar{x} \in \mathcal{X}$ este o combinație liniară a vectorilor din S.

Sisteme de generatori

Definiție

Spunem că sistemul de vectori $S \subset \mathcal{X}$ este un sistem de generatori pentru $\mathbb{R}$-spațiul vectorial $\mathcal{X}$ dacă orice vector $\bar{x} \in \mathcal{X}$ este o combinație liniară a vectorilor din S.

Exemplu

Sisteme de generatori

Definiție

Spunem că sistemul de vectori $S \subset \mathcal{X}$ este un sistem de generatori pentru $\mathbb{R}$-spațiul vectorial $\mathcal{X}$ dacă orice vector $\bar{x} \in \mathcal{X}$ este o combinație liniară a vectorilor din S.

Exemplu

Mulțimea

$$E = \{\bar{e}_1 = (1,0,0), \bar{e}_2 = (0,1,0), \bar{e}_3 = (0,0,1)\}$$

este sistem de generatori pentru $\mathbb{R}$-spațiul vectorial $\mathbb{R}^3$.

Dependență și independență liniară

Dependență și independență liniară

Definiție

Dependență și independență liniară

Definiție

Spunem că sistemul de vectori $S = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$ este liniar dependent dacă există scalarii $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n \in \mathbb{R}$ nu toți nuli astfel încât:

$$\lambda^1 \bar{x}_1 + \lambda^2 \bar{x}_2 + \ldots + \lambda^n \bar{x}_n = \bar{0} \quad .$$

În caz contrar, spunem că S este sistem liniar independent.

Dependență și independență liniară

Definiție

Spunem că sistemul de vectori $S = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$ este liniar dependent dacă există scalarii $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n \in \mathbb{R}$ nu toți nuli astfel încât:

$$\lambda^1 \bar{x}_1 + \lambda^2 \bar{x}_2 + \ldots + \lambda^n \bar{x}_n = \bar{0} \quad .$$

În caz contrar, spunem că S este sistem liniar independent.

Sistemul $S = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$ este liniar independent dacă din egalitatea:

$$\lambda^1 \bar{x}_1 + \lambda^2 \bar{x}_2 + \ldots + \lambda^n \bar{x}_n = \bar{0}$$

se obține $\lambda^1 = \lambda^2 = \ldots = \lambda^n = 0$.

Dependență și independență liniară

Exemplu

Dependență și independență liniară

Exemplu

Sistemul de vectori

$$E = \{\bar{e}_1 = (1,0,0), \bar{e}_2 = (0,1,0), \bar{e}_3 = (0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

este liniar independent.

Dependență și independență liniară

Exemplu

Sistemul de vectori

$$E = \{\bar{e}_1 = (1,0,0), \bar{e}_2 = (0,1,0), \bar{e}_3 = (0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

este liniar independent.

- Orice subsistem al unui sistem liniar independent este liniar independent.

Dependență și independență liniară

Exemplu

Sistemul de vectori

$$E = \{\bar{e}_1 = (1, 0, 0), \bar{e}_2 = (0, 1, 0), \bar{e}_3 = (0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

este liniar independent.

- Orice subsistem al unui sistem liniar independent este liniar independent.
- Un sistem de vectori S este liniar dependent dacă și numai dacă cel puțin un vector din S este combinație liniară a celorlalți vectori din S.

Dependență și independență liniară

Exemplu

Sistemul de vectori

$$E = \{\bar{e}_1 = (1,0,0), \bar{e}_2 = (0,1,0), \bar{e}_3 = (0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

este liniar independent.

- Orice subsistem al unui sistem liniar independent este liniar independent.
- Un sistem de vectori S este liniar dependent dacă și numai dacă cel puțin un vector din S este combinație liniară a celorlalți vectori din S.
- Orice sistem de vectori care conține vectorul nul $\bar{0}$ este liniar dependent.

Baze

Baze

Definiție

Baze

Definiție

Spunem că un sistem de vectori $B \subset \mathcal{X}$ este o bază a lui $\mathcal{X}$ dacă:

Baze

Definiție

Spunem că un sistem de vectori $B \subset \mathcal{X}$ este o bază a lui $\mathcal{X}$ dacă:
i) B este sistem liniar independent;

Baze

Definiție

Spunem că un sistem de vectori $B \subset \mathcal{X}$ este o bază a lui $\mathcal{X}$ dacă:
i) B este sistem liniar independent;
ii) B este sistem de generatori pentru $\mathcal{X}$.

Baze

Definiție

Spunem că un sistem de vectori $B \subset \mathcal{X}$ este o bază a lui $\mathcal{X}$ dacă:
i) B este sistem liniar independent;
ii) B este sistem de generatori pentru $\mathcal{X}$.

Sistemul $E = \{\bar{e}_1 = (1,0,0), \bar{e}_2 = (0,1,0), \bar{e}_3 = (0,0,1)\}$ este o bază a lui $\mathbb{R}^3$, numită *bază canonică*.

Coordonatele unui vector în raport cu o bază

Coordonatele unui vector în raport cu o bază

Teoremă

Coordonatele unui vector în raport cu o bază

Teoremă

Fie $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\}$ o bază a unui $\mathbb{R}$-spațiu vectorial $\mathcal{X}$. Atunci pentru orice vector $\bar{x} \in \mathcal{X}$ există în mod unic scalarii $x^1, x^2, \ldots, x^n \in \mathbb{R}$ astfel încât:

$$\bar{x} = x^1 \bar{b}_1 + x^2 \bar{b}_2 + \ldots + x^n \bar{b}_n \quad .$$

Coordonatele unui vector în raport cu o bază

Teoremă

Fie $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\}$ o bază a unui $\mathbb{R}$-spațiu vectorial $\mathcal{X}$. Atunci pentru orice vector $\bar{x} \in \mathcal{X}$ există în mod unic scalarii $x^1, x^2, \ldots, x^n \in \mathbb{R}$ astfel încât:

$$\bar{x} = x^1\bar{b}_1 + x^2\bar{b}_2 + \ldots + x^n\bar{b}_n \quad .$$

Definiție

Coordonatele unui vector în raport cu o bază

Teoremă

Fie $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\}$ o bază a unui $\mathbb{R}$-spațiu vectorial $\mathcal{X}$. Atunci pentru orice vector $\bar{x} \in \mathcal{X}$ există în mod unic scalarii $x^1, x^2, \ldots, x^n \in \mathbb{R}$ astfel încât:

$$\bar{x} = x^1 \bar{b}_1 + x^2 \bar{b}_2 + \ldots + x^n \bar{b}_n \quad .$$

Definiție

Scalarii $x^1, x^2, \ldots, x^n \in \mathbb{R}$ se numesc coordonatele vectorului $\bar{x}$ în raport cu baza B.

Coordonatele unui vector în raport cu o bază

Se notează prin:

$$[\bar{x}]_B = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

matricea coloană a coordonatelor vectorului $\bar{x}$ în raport cu baza B.

Lema substituției

Lema substituției

Lemă

Lema substituției

Lemă

Fie $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\}$ o bază a unui $\mathbb{R}$-spațiu vectorial $\mathcal{X}$ și

$$\bar{a} = a^1 \bar{b}_1 + a^2 \bar{b}_2 + \ldots + a^i \bar{b}_i$$

astfel încât $a^i \neq 0$.
Atunci $B' = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_{i-1}, \bar{a}, \bar{b}_{i+1}, \ldots, \bar{b}_n\}$ este o bază a lui $\mathcal{X}$.

Lema substituției

Lemă

Fie $B=\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\}$ o bază a unui $\mathbb{R}$-spațiu vectorial $\mathcal{X}$ și

$$\bar{a} = a^1\bar{b}_1 + a^2\bar{b}_2 + \ldots + a^i\bar{b}_i$$

astfel încât $a^i \neq 0$.
Atunci $B'=\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_{i-1}, \bar{a}, \bar{b}_{i+1}, \ldots, \bar{b}_n\}$ este o bază a lui $\mathcal{X}$.

Folosind lema substituției, se poate construi un algoritm pentru calculul coodonatelor unui vector $\bar{x}$ atunci când se schimbă baza.

Dimensiunea unui spațiu vectorial

Dimensiunea unui spațiu vectorial

Teorema lui Steinitz

Dimensiunea unui spațiu vectorial

Teorema lui Steinitz

Dacă $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\}$ este o bază a $\mathbb{R}$-spațiului vectorial $\mathcal{X}$ și $S = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_p\}$ este un sistem liniar independent în $\mathcal{X}$, atunci:
i) $p \leq n$;
ii) sistemul $B' = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_p, \bar{b}_{p+1}, \ldots, \bar{b}_n\}$ este o bază a lui $\mathcal{X}$ (renumerotând eventual vectorii lui $\mathcal{B}$).

Dimensiunea unui spațiu vectorial

Teorema lui Steinitz

Dacă $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\}$ este o bază a $\mathbb{R}$-spațiului vectorial $\mathcal{X}$ și $S = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_p\}$ este un sistem liniar independent în $\mathcal{X}$, atunci:
i) $p \leq n$;
ii) sistemul $B' = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_p, \bar{b}_{p+1}, \ldots, \bar{b}_n\}$ este o bază a lui $\mathcal{X}$ (renumerotând eventual vectorii lui $\mathcal{B}$).

Corolar

Dimensiunea unui spațiu vectorial

Teorema lui Steinitz

Dacă $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\}$ este o bază a $\mathbb{R}$-spațiului vectorial $\mathcal{X}$ și $S = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_p\}$ este un sistem liniar independent în $\mathcal{X}$, atunci:
i) $p \leq n$;
ii) sistemul $B' = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_p, \bar{b}_{p+1}, \ldots, \bar{b}_n\}$ este o bază a lui $\mathcal{X}$ (renumerotând eventual vectorii lui $\mathcal{B}$).

Corolar

Dacă $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\}$ este o bază a lui $\mathcal{X}$, atunci orice altă bază a lui $\mathcal{X}$ are tot n vectori.

Dimensiunea unui spațiu vectorial

Definiție

Dimensiunea unui spațiu vectorial

Definiție

Spunem că un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial $\mathcal{X}$ are dimensiunea n (și notăm $dim\mathcal{X} = n$) dacă în $\mathcal{X}$ există o bază formată din n vectori.

Dimensiunea unui spațiu vectorial

Definiție

Spunem că un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial $\mathcal{X}$ are dimensiunea n (și notăm $dim\mathcal{X} = n$) dacă în $\mathcal{X}$ există o bază formată din n vectori.

Dacă $dim\,\mathcal{X} = n$, atunci din teorema lui Steinitz rezultă că orice sistem liniar independent de n vectori este o bază a lui $\mathcal{X}$.

Schimbări de baze

Schimbări de baze

Fie $\mathcal{X}_n$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial n-dimensional și $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\}$, $B' = \left\{\bar{b}'_1, \bar{b}'_2, \ldots, \bar{b}'_n\right\}$ două baze ale sale.

Schimbări de baze

Fie $\mathcal{X}_n$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial n-dimensional și $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\}$, $B' = \left\{\bar{b}'_1, \bar{b}'_2, \ldots, \bar{b}'_n\right\}$ două baze ale sale.

Definiție

Schimbări de baze

Fie $\mathcal{X}_n$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial n-dimensional și $B = \left\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\right\}$, $B' = \left\{\bar{b}_1', \bar{b}_2', \ldots, \bar{b}_n'\right\}$ două baze ale sale.

Definiție

Expresiile:

$$\begin{cases} \bar{b}_1' = p_1^1 \bar{b}_1 + p_1^2 \bar{b}_2 + \ldots + p_1^n \bar{b}_n \\ \bar{b}_2' = p_2^1 \bar{b}_1 + p_2^2 \bar{b}_2 + \ldots + p_2^n \bar{b}_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{b}_n' = p_n^1 \bar{b}_1 + p_n^2 \bar{b}_2 + \ldots + p_n^n \bar{b}_n \end{cases}$$

unde $p_i^j \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$, se numesc formule de trecere de la baza B la baza B'.

Schimbări de baze

Definiție

Schimbări de baze

Definiție

Matricea

$$[B \to B'] = \begin{pmatrix} p_1^1 & p_2^1 & \dots & p_n^1 \\ p_1^2 & p_2^2 & \dots & p_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1^n & p_2^n & \dots & p_n^n \end{pmatrix}$$

se numește matrice de trecere de la baza B la baza $B^{'}$.

Schimbări de baze

Definiție

Matricea

$$[B \to B'] = \begin{pmatrix} p_1^1 & p_2^1 & \dots & p_n^1 \\ p_1^2 & p_2^2 & \dots & p_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1^n & p_2^n & \dots & p_n^n \end{pmatrix}$$

se numește matrice de trecere de la baza B la baza $B^{'}$.

Teoremă

Schimbări de baze

Definiție

Matricea

$$[B \to B'] = \begin{pmatrix} p_1^1 & p_2^1 & \dots & p_n^1 \\ p_1^2 & p_2^2 & \dots & p_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1^n & p_2^n & \dots & p_n^n \end{pmatrix}$$

se numește matrice de trecere de la baza B la baza $B^{'}$.

Teoremă

Dacă $[B \to B']$ este matricea de trecere de la baza B la baza $B^{'}$, atunci $[B' \to B] = [B \to B']^{-1}$ este matricea de trecere de la baza $B^{'}$ la baza B.

Transformări de coordonate

Transformări de coordonate

Teoremă

Transformări de coordonate

Teoremă

Fie $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\}$, $B' = \left\{\bar{b}'_1, \bar{b}'_2, \ldots, \bar{b}'_n\right\}$ două baze ale unui $\mathbb{R}$-spațiu vectorial n-dimensional $\mathcal{X}_n$ și

$$[B \to B'] = \begin{pmatrix} p_1^1 & p_2^1 & \ldots & p_n^1 \\ p_1^2 & p_2^2 & \ldots & p_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_1^n & p_2^n & \ldots & p_n^n \end{pmatrix}$$

matricea de trecere de la baza B la baza $B^{'}$.

Transformări de coordonate

Dacă $\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)$ sunt coordonatele unui vector $\bar{x}$ în baza B și $\left(x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'}\right)$ sunt coordonatele aceluiași vector în baza B', atunci:

$$\begin{cases} x^1 = p_1^1 x^{1'} + p_2^1 x^{2'} + \ldots + p_n^1 x^{n'} \\ x^2 = p_1^2 x^{1'} + p_2^2 x^{2'} + \ldots + p_n^2 x^{n'} \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n = p_1^n x^{1'} + p_2^n x^{2'} + \ldots + p_n^n x^{n'} \end{cases}$$

sunt formulele de transformare a coordonatelor $\left(x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'}\right)$ în coordonatele $\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)$.

Transformări de coordonate

Dacă $\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)$ sunt coordonatele unui vector $\bar{x}$ în baza B și $\left(x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'}\right)$ sunt coordonatele aceluiași vector în baza $B^{'}$, atunci:

$$\begin{cases} x^1 = p_1^1 x^{1'} + p_2^1 x^{2'} + \ldots + p_n^1 x^{n'} \\ x^2 = p_1^2 x^{1'} + p_2^2 x^{2'} + \ldots + p_n^2 x^{n'} \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n = p_1^n x^{1'} + p_2^n x^{2'} + \ldots + p_n^n x^{n'} \end{cases}$$

sunt formulele de transformare a coordonatelor $\left(x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'}\right)$ în coordonatele $\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)$.

Are loc egalitatea evidentă:

$$[\bar{x}]_B = \left[B \to B^{'}\right] [\bar{x}]_{B'} .$$

Subspații vectoriale

Subspații vectoriale

Fie $\mathcal{X}$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial.

Subspații vectoriale

Fie $\mathcal{X}$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial.

Definiție

Subspații vectoriale

Fie $\mathcal{X}$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial.

Definiție

Spunem că $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ este subspațiu vectorial al lui $\mathcal{X}$ dacă $\mathcal{Y}$ cu operațiile induse din $\mathcal{X}$ este $\mathbb{R}$-spațiu vectorial.

Subspații vectoriale

Fie $\mathcal{X}$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial.

Definiție

Spunem că $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ este subspațiu vectorial al lui $\mathcal{X}$ dacă $\mathcal{Y}$ cu operațiile induse din $\mathcal{X}$ este $\mathbb{R}$-spațiu vectorial.

Teorema de caracterizare a subspațiilor vectoriale

Subspații vectoriale

Fie $\mathcal{X}$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial.

Definiție

Spunem că $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ este subspațiu vectorial al lui $\mathcal{X}$ dacă $\mathcal{Y}$ cu operațiile induse din $\mathcal{X}$ este $\mathbb{R}$-spațiu vectorial.

Teorema de caracterizare a subspațiilor vectoriale

Fie $\mathcal{X}$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial și $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$.
Următoarele afirmații sunt echivalente:

Subspații vectoriale

Fie $\mathcal{X}$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial.

Definiție

Spunem că $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ este subspațiu vectorial al lui $\mathcal{X}$ dacă $\mathcal{Y}$ cu operațiile induse din $\mathcal{X}$ este $\mathbb{R}$-spațiu vectorial.

Teorema de caracterizare a subspațiilor vectoriale

Fie $\mathcal{X}$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial și $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$.
Următoarele afirmații sunt echivalente:
i) $\mathcal{Y}$ este subspațiu vectorial al lui $\mathcal{X}$;

Subspații vectoriale

Fie $\mathcal{X}$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial.

Definiție

Spunem că $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ este subspațiu vectorial al lui $\mathcal{X}$ dacă $\mathcal{Y}$ cu operațiile induse din $\mathcal{X}$ este $\mathbb{R}$-spațiu vectorial.

Teorema de caracterizare a subspațiilor vectoriale

Fie $\mathcal{X}$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial și $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$.
Următoarele afirmații sunt echivalente:
i) $\mathcal{Y}$ este subspațiu vectorial al lui $\mathcal{X}$;
ii) pentru orice $\bar{y}_1, \bar{y}_2 \in \mathcal{Y}$ și $\lambda^1, \lambda^2 \in \mathbb{R}$ rezultă $\lambda^1\bar{y}_1 + \lambda^2\bar{y}_2 \in \mathcal{Y}$.

Subspații vectoriale

Teoremă

Subspații vectoriale

Teoremă

Fie $\mathcal{X}$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial și $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$ două subspații vectoriale ale lui $\mathcal{X}$. Atunci:

$$\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2 = \{\bar{x} \in \mathcal{X} \mid \bar{x} \in \mathcal{X}_1 \text{ și } \bar{x} \in \mathcal{X}_2\}$$

este un subspațiu vectorial al lui $\mathcal{X}$

Subspații vectoriale

Subspații vectoriale

Reuniunea

$$\mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2 = \{\bar{x} \in \mathcal{X} \mid \bar{x} \in \mathcal{X}_1 \text{ sau } \bar{x} \in \mathcal{X}_2\}$$

a două subspații vectoriale nu este un subspațiu vectorial.

Subspații vectoriale

Reuniunea

$$\mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2 = \{\bar{x} \in \mathcal{X} \mid \bar{x} \in \mathcal{X}_1 \text{ sau } \bar{x} \in \mathcal{X}_2\}$$

a două subspații vectoriale nu este un subspațiu vectorial.

Dacă se consideră $\mathbb{R}$-spațiul vectorial $\mathbb{R}^2$ și subspațiile :

$$\mathcal{X}_1 = \{\bar{x} = (a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

și

$$\mathcal{X}_2 = \{\bar{x} = (0, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$$

atunci există $\bar{x}_1 = (1, 0) \in \mathcal{X}_1$ și $\bar{x}_2 = (0, 1) \in \mathcal{X}_2$ astfel încât

$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = (1, 1) \notin \mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2 \quad .$$

Produsul scalar

Produsul scalar

Fie $\mathcal{X}$ un $\mathbb{R}$- spațiu vectorial.

Produsul scalar

Fie $\mathcal{X}$ un $\mathbb{R}$- spațiu vectorial.

Definiție

Produsul scalar

Fie $\mathcal{X}$ un $\mathbb{R}$- spațiu vectorial.

Definiție

Se numește produs scalar pe $\mathcal{X}$ o aplicație:

$$\langle \cdot / \cdot \rangle : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$$

cu proprietățile:

Produsul scalar

Fie $\mathcal{X}$ un $\mathbb{R}$- spațiu vectorial.

Definiție

Se numește produs scalar pe $\mathcal{X}$ o aplicație:

$$\langle \cdot / \cdot \rangle : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$$

cu proprietățile:

1. $\langle \bar{x} / \bar{x} \rangle \geq 0$, $(\forall)\bar{x} \in \mathcal{X}$. În plus, $\langle \bar{x} / \bar{x} \rangle = 0$ dacă și numai dacă $\bar{x} = \bar{0}$.

Produsul scalar

Fie $\mathcal{X}$ un $\mathbb{R}$- spațiu vectorial.

Definiție

Se numește produs scalar pe $\mathcal{X}$ o aplicație:

$$\langle \cdot / \cdot \rangle : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$$

cu proprietățile:

1. $\langle \bar{x} / \bar{x} \rangle \geq 0$, $(\forall)\bar{x} \in \mathcal{X}$. În plus, $\langle \bar{x} / \bar{x} \rangle = 0$ dacă și numai dacă $\bar{x} = \bar{0}$.
2. $\langle \bar{x} / \bar{y} \rangle = \langle \bar{y} / \bar{x} \rangle$, $(\forall)\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{X}$;

Produsul scalar

Fie $\mathcal{X}$ un $\mathbb{R}$- spațiu vectorial.

Definiție

Se numește produs scalar pe $\mathcal{X}$ o aplicație:

$$\langle \cdot / \cdot \rangle : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$$

cu proprietățile:

1. $\langle \bar{x} / \bar{x} \rangle \geq 0$, $(\forall)\bar{x} \in \mathcal{X}$. În plus, $\langle \bar{x} / \bar{x} \rangle = 0$ dacă și numai dacă $\bar{x} = \bar{0}$.
2. $\langle \bar{x} / \bar{y} \rangle = \langle \bar{y} / \bar{x} \rangle$, $(\forall)\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{X}$;
3. $\langle \bar{x} + \bar{y} / \bar{z} \rangle = \langle \bar{x} / \bar{z} \rangle + \langle \bar{y} / \bar{z} \rangle$, $(\forall)\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathcal{X}$;

Produsul scalar

Fie $\mathcal{X}$ un $\mathbb{R}$- spațiu vectorial.

Definiție

Se numește produs scalar pe $\mathcal{X}$ o aplicație:

$$\langle \cdot / \cdot \rangle : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$$

cu proprietățile:

1. $\langle \bar{x} / \bar{x} \rangle \geq 0$, $(\forall)\bar{x} \in \mathcal{X}$. În plus, $\langle \bar{x} / \bar{x} \rangle = 0$ dacă și numai dacă $\bar{x} = \bar{0}$.
2. $\langle \bar{x} / \bar{y} \rangle = \langle \bar{y} / \bar{x} \rangle$, $(\forall)\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{X}$;
3. $\langle \bar{x} + \bar{y} / \bar{z} \rangle = \langle \bar{x} / \bar{z} \rangle + \langle \bar{y} / \bar{z} \rangle$, $(\forall)\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathcal{X}$;
4. $\langle \alpha\bar{x} / \bar{y} \rangle = \alpha \langle \bar{x} / \bar{y} \rangle$, $(\forall)\alpha \in \mathbb{R}$ și $(\forall)\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{X}$;

Produsul scalar

Fie $\mathcal{X}$ un $\mathbb{R}$- spațiu vectorial.

Definiție

Se numește produs scalar pe $\mathcal{X}$ o aplicație:

$$\langle \cdot / \cdot \rangle : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$$

cu proprietățile:

1. $\langle \bar{x}/\bar{x} \rangle \geq 0$, $(\forall)\bar{x} \in \mathcal{X}$. În plus, $\langle \bar{x}/\bar{x} \rangle = 0$ dacă și numai dacă $\bar{x} = \bar{0}$.
2. $\langle \bar{x}/\bar{y} \rangle = \langle \bar{y}/\bar{x} \rangle$, $(\forall)\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{X}$;
3. $\langle \bar{x} + \bar{y}/\bar{z} \rangle = \langle \bar{x}/\bar{z} \rangle + \langle \bar{y}/\bar{z} \rangle$, $(\forall)\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathcal{X}$;
4. $\langle \alpha\bar{x}/\bar{y} \rangle = \alpha \langle \bar{x}/\bar{y} \rangle$, $(\forall)\alpha \in \mathbb{R}$ și $(\forall)\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{X}$;

Cuplul $(\mathcal{X}, \langle \cdot / \cdot \rangle)$ se numește $\mathbb{R}$-spațiu vectorial euclidian.

Produsul scalar

Exemplu

Produsul scalar

Exemplu

Aplicația

$$\langle \cdot / \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle \overline{x} / \overline{y} \rangle = x^1 y^1 + x^2 y^2 + \ldots + x^n y^n$$

unde $\overline{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $\overline{y} = (y^1, y^2, \ldots, y^n) \in \mathbb{R}^n$, este un produs scalar pe $\mathbb{R}^n$.

Produsul scalar

Exemplu

Aplicația

$$\langle \cdot / \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle \overline{x} / \overline{y} \rangle = x^1 y^1 + x^2 y^2 + \ldots + x^n y^n$$

unde $\overline{x} = \left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)$, $\overline{y} = \left(y^1, y^2, \ldots, y^n\right) \in \mathbb{R}^n$, este un produs scalar pe $\mathbb{R}^n$.

Teoremă

Produsul scalar

Exemplu

Aplicația

$$\langle \cdot / \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle \overline{x} / \overline{y} \rangle = x^1 y^1 + x^2 y^2 + \ldots + x^n y^n$$

unde $\overline{x} = \left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)$, $\overline{y} = \left(y^1, y^2, \ldots, y^n\right) \in \mathbb{R}^n$, este un produs scalar pe $\mathbb{R}^n$.

Teoremă

Fie $\mathcal{X}$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial euclidian. Atunci pentru orice $\overline{x}$, $\overline{y} \in \mathcal{X}$ are loc inegalitatea:

$$(\langle \overline{x} / \overline{y} \rangle)^2 \leq \langle \overline{x} / \overline{x} \rangle \langle \overline{y} / \overline{y} \rangle$$

numită *inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz*.

Norma

Norma

Definiție

Norma

Definiție

Se numește normă pe $\mathbb{R}$-spațiul vectorial $\mathcal{X}$ orice aplicație

$$||\cdot|| : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

cu proprietățile:

Norma

Definiție

Se numește normă pe $\mathbb{R}$-spațiul vectorial $\mathcal{X}$ orice aplicație

$$||\cdot||:\mathcal{X}\longrightarrow\mathbb{R}_+$$

cu proprietățile:

1. $\|\overline{x}\|\geq 0$, $(\forall)\overline{x}\in\mathcal{X}$ și $\|\overline{x}\|=\overline{0}$ dacă și numai dacă $\overline{x}=\overline{0}$;

Norma

Definiție

Se numește normă pe $\mathbb{R}$-spațiul vectorial $\mathcal{X}$ orice aplicație

$$||\cdot||:\mathcal{X}\longrightarrow\mathbb{R}_+$$

cu proprietățile:

1. $\|\overline{x}\|\geq 0$, $(\forall)\overline{x}\in\mathcal{X}$ și $\|\overline{x}\|=\overline{0}$ dacă și numai dacă $\overline{x}=\overline{0}$;
2. $\|\alpha\overline{x}\|=|\alpha|\,\|\overline{x}\|$, $(\forall)\alpha\in\mathbb{R}$ și $(\forall)\overline{x}\in\mathcal{X}$;

Norma

Definiție

Se numește normă pe $\mathbb{R}$-spațiul vectorial $\mathcal{X}$ orice aplicație

$$||\cdot|| : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

cu proprietățile:

1. $\|\overline{x}\| \geq 0$, $(\forall)\overline{x} \in \mathcal{X}$ și $\|\overline{x}\| = \overline{0}$ dacă și numai dacă $\overline{x} = \overline{0}$;
2. $\|\alpha\overline{x}\| = |\alpha|\,\|\overline{x}\|$, $(\forall)\alpha \in \mathbb{R}$ și $(\forall)\overline{x} \in \mathcal{X}$;
3. $\|\overline{x} + \overline{y}\| \leq \|\overline{x}\| + \|\overline{y}\|$, $(\forall)\overline{x}, \overline{y} \in \mathcal{X}$.

Norma

Definiție

Se numește normă pe $\mathbb{R}$-spațiul vectorial $\mathcal{X}$ orice aplicație

$$||\cdot|| : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

cu proprietățile:

1. $\|\overline{x}\| \geq 0$, $(\forall)\overline{x} \in \mathcal{X}$ și $\|\overline{x}\| = \overline{0}$ dacă și numai dacă $\overline{x} = \overline{0}$;
2. $\|\alpha\overline{x}\| = |\alpha| \, \|\overline{x}\|$, $(\forall)\alpha \in \mathbb{R}$ și $(\forall)\overline{x} \in \mathcal{X}$;
3. $\|\overline{x} + \overline{y}\| \leq \|\overline{x}\| + \|\overline{y}\|$, $(\forall)\overline{x}, \overline{y} \in \mathcal{X}$.

Cuplul $(\mathcal{X}; \|\cdot\|)$ se numește $\mathbb{R}$-spațiu vectorial normat.

Norma

Teoremă

Norma

Teoremă

Fie $(\mathcal{X}, \langle\cdot/\cdot\rangle)$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial euclidian. Atunci aplicația

$$||\cdot|| : \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+$$

definită prin

$$\|\overline{x}\| = \sqrt{\langle\overline{x}/\overline{x}\rangle}$$

este o normă pe $\mathcal{X}$.

Norma

Teoremă

Fie $(\mathcal{X}, \langle \cdot / \cdot \rangle)$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial euclidian. Atunci aplicația

$$|| \cdot || : \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+$$

definită prin

$$\|\overline{x}\| = \sqrt{\langle \overline{x} / \overline{x} \rangle}$$

este o normă pe $\mathcal{X}$.

Definiție

Norma

Teoremă

Fie $(\mathcal{X}, \langle \cdot / \cdot \rangle)$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial euclidian. Atunci aplicația

$$|| \cdot || : \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+$$

definită prin

$$\|\overline{x}\| = \sqrt{\langle \overline{x} / \overline{x} \rangle}$$

este o normă pe $\mathcal{X}$.

Definiție

O normă definită cu ajutorul unui produs scalar se numește normă euclidiană.

Norma

Exemplu

Norma

Exemplu

Pe $\mathbb{R}$-spațiul vectorial euclidian aritmetic $\mathbb{R}^n$ se consideră norma euclidiană

$$\|\overline{x}\| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2}$$

oricare ar fi $\overline{x} = \left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right) \in \mathbb{R}^n$.

Norma

Definiție

Norma

Definiție

Se numește vector unitar (sau versor) orice vector $\overline{e} \in \mathcal{X}$ cu proprietatea $\|\overline{e}\| = 1$.

Norma

Definiție

Se numește vector unitar (sau versor) orice vector $\overline{e} \in \mathcal{X}$ cu proprietatea $\|\overline{e}\| = 1$.

Oricărui vector nenul $\overline{v}$ i se poate asocia un vector unitar

$$\overline{v}^* = \frac{\overline{v}}{\|\overline{v}\|}$$

această operație purtând numele de *normare*.

Distanța

Distanța

Definiție

Distanța

Definiție

Se numește distanță (sau metrică) pe $\mathbb{R}$-spațiul vectorial $\mathcal{X}$, orice aplicație

$$d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$$

cu următoarele proprietăți:

Distanța

Definiție

Se numește distanță (sau metrică) pe $\mathbb{R}$-spațiul vectorial $\mathcal{X}$, orice aplicație

$$d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$$

cu următoarele proprietăți:

1. $d(\overline{x}, \overline{y}) \geq 0$, $(\forall)\overline{x}$, $\overline{y} \in \mathcal{X}$ și $d(\overline{x}, \overline{y}) = 0$ dacă și numai dacă $\overline{x} = \overline{y}$;

Distanța

Definiție

Se numește distanță (sau metrică) pe $\mathbb{R}$-spațiul vectorial $\mathcal{X}$, orice aplicație

$$d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$$

cu următoarele proprietăți:

1. $d(\overline{x}, \overline{y}) \geq 0$, $(\forall)\overline{x}$, $\overline{y} \in \mathcal{X}$ și $d(\overline{x}, \overline{y}) = 0$ dacă și numai dacă $\overline{x} = \overline{y}$;
2. $d(\overline{x}, \overline{y}) = d(\overline{y}, \overline{x})$, $(\forall)\overline{x}, \overline{y} \in \mathcal{X}$;

Distanța

Definiție

Se numește distanță (sau metrică) pe $\mathbb{R}$-spațiul vectorial $\mathcal{X}$, orice aplicație

$$d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$$

cu următoarele proprietăți:

1. $d\left(\overline{x}, \overline{y}\right) \geq 0$, $(\forall)\overline{x}$, $\overline{y} \in \mathcal{X}$ și $d\left(\overline{x}, \overline{y}\right) = 0$ dacă și numai dacă $\overline{x} = \overline{y}$;
2. $d\left(\overline{x}, \overline{y}\right) = d\left(\overline{y}, \overline{x}\right)$, $(\forall)\overline{x}, \overline{y} \in \mathcal{X}$;
3. $d\left(\overline{x}, \overline{y}\right) \leq d\left(\overline{x}, \overline{z}\right) + d\left(\overline{z}, \overline{y}\right)$, $(\forall)\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z} \in \mathcal{X}$.

Distanța

Definiție

Se numește distanță (sau metrică) pe $\mathbb{R}$-spațiul vectorial $\mathcal{X}$, orice aplicație

$$d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$$

cu următoarele proprietăți:

1. $d(\overline{x}, \overline{y}) \geq 0$, $(\forall)\overline{x}$, $\overline{y} \in \mathcal{X}$ și $d(\overline{x}, \overline{y}) = 0$ dacă și numai dacă $\overline{x} = \overline{y}$;
2. $d(\overline{x}, \overline{y}) = d(\overline{y}, \overline{x})$, $(\forall)\overline{x}, \overline{y} \in \mathcal{X}$;
3. $d(\overline{x}, \overline{y}) \leq d(\overline{x}, \overline{z}) + d(\overline{z}, \overline{y})$, $(\forall)\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z} \in \mathcal{X}$.

Cuplul $(\mathcal{X}; d)$ se numește $\mathbb{R}$-spațiu vectorial metric.

Distanța

Teoremă

Distanța

Teoremă

Fie $(\mathcal{X}; \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial normat. Atunci aplicația

$$d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definită prin

$$d(\overline{x}, \overline{y}) = \|\overline{x} - \overline{y}\|$$

este o metrică pe $\mathcal{X}$.

Distanța

Exemplu

Distanța

Exemplu

Aplicația

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

definită prin

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + \ldots + (x^n - y^n)^2}$$

este o metrică pe $\mathbb{R}^n$ împreună cu care $\mathbb{R}^n$ este spațiu vectorial metric.

Unghiul a doi vectori

Unghiul a doi vectori

Teoremă

Unghiul a doi vectori

Teoremă

Fie $(\mathcal{X}, \langle \cdot / \cdot \rangle)$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial euclidian și $\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{X}$ doi vectori nenuli. Ecuația

$$\cos\theta = \frac{\langle \bar{x} / \bar{y} \rangle}{\|\bar{x}\| \|\bar{y}\|}$$

are o soluție unică $\theta \in [0, \pi]$.

Unghiul a doi vectori

Teoremă

Fie $(\mathcal{X}, \langle \cdot / \cdot \rangle)$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial euclidian și $\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{X}$ doi vectori nenuli. Ecuația

$$\cos\theta = \frac{\langle \bar{x} / \bar{y} \rangle}{\|\bar{x}\| \|\bar{y}\|}$$

are o soluție unică $\theta \in [0, \pi]$.

Definiție

Unghiul a doi vectori

Teoremă

Fie $(\mathcal{X}, \langle\cdot/\cdot\rangle)$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial euclidian și $\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{X}$ doi vectori nenuli. Ecuația

$$\cos\theta = \frac{\langle\bar{x}/\bar{y}\rangle}{\|\bar{x}\|\|\bar{y}\|}$$

are o soluție unică $\theta \in [0, \pi]$.

Definiție

Unica soluție $\theta \in [0, \pi]$ a ecuației

$$\cos\theta = \frac{\langle\bar{x}/\bar{y}\rangle}{\|\bar{x}\|\,\|\bar{y}\|}$$

se numește măsura unghiului vectorilor $\bar{x}, \bar{y}$.

Baze ortonormate

Baze ortonormate

Produsul scalar al vectorilor $\bar{x}/\bar{y} \in \mathcal{X}$ se poate calcula și cu relația

$$\langle \bar{x}/\bar{y} \rangle = \|\bar{x}\| \, \|\bar{y}\| \cos \theta$$

unde $\theta \in [0, \pi]$ este măsura unghiului celor doi vectori.

Baze ortonormate

Produsul scalar al vectorilor $\bar{x}/\bar{y} \in \mathcal{X}$ se poate calcula și cu relația

$$\langle \bar{x}/\bar{y} \rangle = \|\bar{x}\| \, \|\bar{y}\| \cos \theta$$

unde $\theta \in [0, \pi]$ este măsura unghiului celor doi vectori.
Este evident că $\theta = \frac{\pi}{2}$ dacă și numai dacă $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = 0$.

Baze ortonormate

Produsul scalar al vectorilor $\bar{x}/\bar{y} \in \mathcal{X}$ se poate calcula și cu relația

$$\langle \bar{x}/\bar{y} \rangle = \|\bar{x}\| \, \|\bar{y}\| \cos \theta$$

unde $\theta \in [0, \pi]$ este măsura unghiului celor doi vectori.
Este evident că $\theta = \frac{\pi}{2}$ dacă și numai dacă $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = 0$.

Definiție

Baze ortonormate

Produsul scalar al vectorilor $\bar{x}/\bar{y} \in \mathcal{X}$ se poate calcula și cu relația

$$\langle \bar{x}/\bar{y} \rangle = \|\bar{x}\| \, \|\bar{y}\| \cos\theta$$

unde $\theta \in [0, \pi]$ este măsura unghiului celor doi vectori.
Este evident că $\theta = \frac{\pi}{2}$ dacă și numai dacă $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = 0$.

Definiție

Spunem că vectorii $\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{X}$ sunt ortogonali (și notăm $\bar{x} \perp \bar{y}$) dacă $\langle \bar{x}/\bar{y} \rangle = 0$.

Baze ortonormate

Definiție

Baze ortonormate

Definiție

Spunem că sistemul de vectori $S = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$ este ortogonal dacă fiecare vector din S este ortogonal cu ceilalți vectori din S, adică

$$\bar{x}_i \perp \bar{x}_j \quad , \quad (\forall) i, j \in \{1, 2, ..., n\} \, , \; i \neq j \quad .$$

Baze ortonormate

Definiție

Spunem că sistemul de vectori $S = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$ este ortogonal dacă fiecare vector din S este ortogonal cu ceilalți vectori din S, adică

$$\bar{x}_i \perp \bar{x}_j \quad , \quad (\forall) i, j \in \{1, 2, ..., n\} \; , \; i \neq j \quad .$$

Definiție

Baze ortonormate

Definiție

Spunem că sistemul de vectori $S = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$ este ortogonal dacă fiecare vector din S este ortogonal cu ceilalți vectori din S, adică

$$\bar{x}_i \perp \bar{x}_j \quad , \quad (\forall) i, j \in \{1, 2, ..., n\} \, , \; i \neq j \quad .$$

Definiție

Spunem că un sistem de vectori $S \subset \mathcal{X}$ este ortonormat dacă:

Baze ortonormate

Definiție

Spunem că sistemul de vectori $S = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$ este ortogonal dacă fiecare vector din S este ortogonal cu ceilalți vectori din S, adică

$$\bar{x}_i \perp \bar{x}_j \quad , \quad (\forall) i, j \in \{1, 2, ..., n\} \, , \; i \neq j \quad .$$

Definiție

Spunem că un sistem de vectori $S \subset \mathcal{X}$ este ortonormat dacă:

1. S este sistem ortogonal;

Baze ortonormate

Definiție

Spunem că sistemul de vectori $S = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$ este ortogonal dacă fiecare vector din S este ortogonal cu ceilalți vectori din S, adică

$$\bar{x}_i \perp \bar{x}_j \quad , \quad (\forall) i, j \in \{1, 2, ..., n\} \, , \; i \neq j \quad .$$

Definiție

Spunem că un sistem de vectori $S \subset \mathcal{X}$ este ortonormat dacă:

1. S este sistem ortogonal;
2. orice vector din S este unitar (are norma egală cu 1).

Procedeul Gramm-Schmidt

Procedeul Gramm-Schmidt

Teoremă

Procedeul Gramm-Schmidt

Teoremă

În orice $\mathbb{R}$-spațiu vectorial euclidian n-dimensional $\mathcal{X}_n$ există o bază ortonormată.

Procedeul Gramm-Schmidt

Fie $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\}$ o bază a lui $\mathcal{X}_n$.
Vom construi o mulțime ortogonală care conține n vectori nenuli și căreia îi vom norma elementele. Această mulțime ortogonală $F = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_n\}$ se construiește în felul următor:

Procedeul Gramm-Schmidt

Fie $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\}$ o bază a lui $\mathcal{X}_n$.
Vom construi o mulțime ortogonală care conține n vectori nenuli și căreia îi vom norma elementele. Această mulțime ortogonală $F = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_n\}$ se construiește în felul următor:

i) $\bar{f}_1 = \bar{b}_1$. Evident $\bar{f}_1 \neq \bar{0}$.

Procedeul Gramm-Schmidt

ii) $\bar{f}_2 = \bar{b}_2 + a_2^1 \bar{f}_1$.

Procedeul Gramm-Schmidt

ii) $\bar{f}_2 = \bar{b}_2 + a_2^1 \bar{f}_1$.
Scalarul a_2^1 se determină din condiția de ortogonalitate $\bar{f}_2 \perp \bar{f}_1$, adică:

$$0 = \left\langle \bar{f}_2 / \bar{f}_1 \right\rangle = \left\langle \bar{b}_2 + a_2^1 \bar{f}_1 / \bar{f}_1 \right\rangle$$

din care rezulă

$$a_2^1 = -\frac{\left\langle \bar{b}_2 / \bar{f}_1 \right\rangle}{\left\langle \bar{f}_1 / \bar{f}_1 \right\rangle} \quad .$$

Procedeul Gramm-Schmidt

ii) $\bar{f}_2 = \bar{b}_2 + a_2^1 \bar{f}_1$.
Scalarul a_2^1 se determină din condiția de ortogonalitate $\bar{f}_2 \perp \bar{f}_1$, adică:

$$0 = \left\langle \bar{f}_2 / \bar{f}_1 \right\rangle = \left\langle \bar{b}_2 + a_2^1 \bar{f}_1 / \bar{f}_1 \right\rangle$$

din care rezulă

$$a_2^1 = -\frac{\left\langle \bar{b}_2 / \bar{f}_1 \right\rangle}{\left\langle \bar{f}_1 / \bar{f}_1 \right\rangle} \quad .$$

Așadar

$$\bar{f}_2 = \bar{b}_2 - \frac{\left\langle \bar{b}_2 / \bar{f}_1 \right\rangle}{\left\langle \bar{f}_1 / \bar{f}_1 \right\rangle} \bar{f}_1 \quad .$$

Procedeul Gramm-Schmidt

iii) $\bar{f}_3 = \bar{b}_3 + a_3^1 \bar{f}_1 + a_3^2 \bar{f}_2$

Procedeul Gramm-Schmidt

iii) $\bar{f}_3 = \bar{b}_3 + a_3^1 \bar{f}_1 + a_3^2 \bar{f}_2$
Scalarii a_3^1 și a_3^2 se determină din condițiile de ortogonalitate $\bar{f}_3 \perp \bar{f}_1$ și $\bar{f}_3 \perp \bar{f}_2$.

Procedeul Gramm-Schmidt

iii) $\bar{f}_3 = \bar{b}_3 + a_3^1 \bar{f}_1 + a_3^2 \bar{f}_2$
Scalarii a_3^1 și a_3^2 se determină din condițiile de ortogonalitate $\bar{f}_3 \perp \bar{f}_1$ și $\bar{f}_3 \perp \bar{f}_2$.
Se obține sistemul :

$$\begin{cases} \langle \bar{f}_3 / \bar{f}_1 \rangle = 0 \\ \langle \bar{f}_3 / \bar{f}_2 \rangle = 0 \end{cases}$$

cu soluția:

$$\begin{cases} a_3^1 = -\dfrac{\langle \bar{b}_3 / \bar{f}_1 \rangle}{\langle \bar{f}_1 / \bar{f}_1 \rangle} \\ a_3^2 = -\dfrac{\langle \bar{b}_3 / \bar{f}_2 \rangle}{\langle \bar{f}_2 / \bar{f}_2 \rangle} \end{cases} .$$

Procedeul Gramm-Schmidt

Așadar

$$\bar{f}_3 = \bar{b}_3 - \frac{\langle \bar{b}_3 / \bar{f}_1 \rangle}{\langle \bar{f}_1 / \bar{f}_1 \rangle} \bar{f}_1 - \frac{\langle \bar{b}_3 / \bar{f}_2 \rangle}{\langle \bar{f}_2 / \bar{f}_2 \rangle} \bar{f}_2 \quad .$$

Procedeul Gramm-Schmidt

Se repetă acest procedeu până se obține un sistem ortogonal

$$F = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_n\}$$

care este o bază ortogonală a lui $\mathcal{X}_n$.

Procedeul Gramm-Schmidt

Se repetă acest procedeu până se obține un sistem ortogonal

$$F = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$$

care este o bază ortogonală a lui $\mathcal{X}_n$.

Prin normarea vectorilor lui F, se obține o bază otonormată

$$F^* = \{\bar{f}_1^*, \bar{f}_2^*, \dots, \bar{f}_n^*\} \quad ,$$

unde $\bar{f}_i^* = \frac{\bar{f}_i}{\|\bar{f}_i\|}$, $i = \overline{1, n}$.

Coordonate euclidiene

Coordonate euclidiene

Definiție

Coordonate euclidiene

Definiție

Fie $\bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{X}_n$, $\bar{b} \neq \bar{0}$. Numărul real

$$pr_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\langle \bar{a}/\bar{b} \rangle}{\|\bar{b}\|}$$

se numește proiecția lui $\bar{a}$ pe $\bar{b}$.

Coordonate euclidiene

Definiție

Fie $\bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{X}_n$, $\bar{b} \neq \bar{0}$. Numărul real

$$pr_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\langle \bar{a}/\bar{b} \rangle}{\|\bar{b}\|}$$

se numește proiecția lui $\bar{a}$ pe $\bar{b}$.

Propoziție

Coordonate euclidiene

Definiție

Fie $\bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{X}_n$, $\bar{b} \neq \bar{0}$. Numărul real

$$pr_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\langle \bar{a}/\bar{b} \rangle}{\|\bar{b}\|}$$

se numește proiecția lui $\bar{a}$ pe $\bar{b}$.

Propoziție

Fie $\mathcal{X}_n$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial euclidian n-dimensional și $B = \left\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\right\}$ o bază ortonormată a sa.
Dacă $\bar{x} = x^1\bar{b}_1 + x^2\bar{b}_2 + \ldots + x^n\bar{b}_n$, atunci:

$$x^i = \langle \bar{x}/\bar{b}_i \rangle = pr_{\bar{b}_i}\bar{x} \quad , \quad (\forall) i = \overline{1, n}.$$

Coordonate euclidiene

Definiție

Coordonate euclidiene

Definiție

Coordonatele $x^i = pr_{\bar{b}_i}\bar{x}$, $i = \overline{1,n}$, ale unui vector $\bar{x}$ raportate la o bază ortonormată $B = \left\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\right\}$ se numesc coordonate euclidiene.

Coordonate euclidiene

Definiție

Coordonatele $x^i = pr_{\bar{b}_i}\bar{x}$, $i = \overline{1, n}$, ale unui vector $\bar{x}$ raportate la o bază ortonormată $B = \left\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\right\}$ se numesc coordonate euclidiene.

Fie $\bar{x} = x^1\bar{b}_1 + x^2\bar{b}_2 + \ldots + x^n\bar{b}_n$, $\bar{y} = y^1\bar{b}_1 + y^2\bar{b}_2 + \ldots + y^n\bar{b}_n$ doi vectori ale căror coordonate sunt date în raport cu o bază ortonormată $B = \left\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\right\}$.

Coordonate euclidiene

Definiție

Coordonatele $x^i = pr_{\bar{b}_i}\bar{x}$, $i = \overline{1, n}$, ale unui vector $\bar{x}$ raportate la o bază ortonormată $B = \left\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\right\}$ se numesc coordonate euclidiene.

Fie $\bar{x} = x^1\bar{b}_1 + x^2\bar{b}_2 + \ldots + x^n\bar{b}_n$, $\bar{y} = y^1\bar{b}_1 + y^2\bar{b}_2 + \ldots + y^n\bar{b}_n$ doi vectori ale căror coordonate sunt date în raport cu o bază ortonormată $B = \left\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\right\}$.
Atunci

$$\langle\bar{x}/\bar{y}\rangle = x^1y^1 + x^2y^2 + \ldots + x^ny^n$$

Schimbări de baze ortonormate

Schimbări de baze ortonormate

Fie $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\}$ și $B' = \left\{\bar{b}'{}_1, \bar{b}'{}_2, \ldots, \bar{b}'{}_n\right\}$ două baze ortonormate în $\mathbb{R}$-spațiul vectorial euclidian n-dimensional $\mathcal{X}_n$

Schimbări de baze ortonormate

Fie $B = \left\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\right\}$ și $B' = \left\{\bar{b}'_1, \bar{b}'_2, \ldots, \bar{b}'_n\right\}$ două baze ortonormate în $\mathbb{R}$-spațiul vectorial euclidian n-dimensional $\mathcal{X}_n$ și

$$\begin{cases} \bar{b}'_1 = a_1^1 \bar{b}_1 + a_1^2 \bar{b}_2 + \ldots + a_1^n \bar{b}_n \\ \bar{b}'_2 = a_2^1 \bar{b}_1 + a_2^2 \bar{b}_2 + \ldots + a_2^n \bar{b}_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{b}'_n = a_n^1 \bar{b}_1 + a_n^2 \bar{b}_2 + \ldots + a_n^n \bar{b}_n \end{cases}$$

formulele de trecere de la baza B la baza B'.

Schimbări de baze ortonormate

Fie $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\}$ și $B' = \left\{\bar{b}'_1, \bar{b}'_2, \ldots, \bar{b}'_n\right\}$ două baze ortonormate în $\mathbb{R}$-spațiul vectorial euclidian n-dimensional $\mathcal{X}_n$ și

$$\begin{cases} \bar{b}'_1 = a_1^1 \bar{b}_1 + a_1^2 \bar{b}_2 + \ldots + a_1^n \bar{b}_n \\ \bar{b}'_2 = a_2^1 \bar{b}_1 + a_2^2 \bar{b}_2 + \ldots + a_2^n \bar{b}_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{b}'_n = a_n^1 \bar{b}_1 + a_n^2 \bar{b}_2 + \ldots + a_n^n \bar{b}_n \end{cases}$$

formulele de trecere de la baza B la baza B'.
Atunci:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

este matricea de trecere de la baza ortonormată B la baza ortonormată B'.

Schimbări de baze ortonormate

Fie

$$
{}^tA = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}
$$

transpusa matricii A.

Schimbări de baze ortonormate

Fie

$$ {}^tA = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} $$

transpusa matricii A.
Atunci avem:

$$ {}^tA \cdot A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} = $$

Schimbări de baze ortonormate

$$= \begin{pmatrix} \left\|\bar{b}'_1\right\|^2 & \left\langle \bar{b}'_1/\bar{b}'_2 \right\rangle & \cdots & \left\langle \bar{b}'_1/\bar{b}'_n \right\rangle \\ \left\langle \bar{b}'_2/\bar{b}'_1 \right\rangle & \left\|\bar{b}'_2\right\|^2 & \cdots & \left\langle \bar{b}'_2/\bar{b}'_n \right\rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left\langle \bar{b}'_n/\bar{b}'_1 \right\rangle & \left\langle \bar{b}'_n/\bar{b}'_2 \right\rangle & \cdots & \left\|\bar{b}'_n\right\|^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Schimbări de baze ortonormate

Definiție

Schimbări de baze ortonormate

Definiție

Spunem că o matrice A este ortogonală dacă:

$$^{t}A \cdot A = I \quad .$$

Schimbări de baze ortonormate

Definiție

Spunem că o matrice A este ortogonală dacă:

$$^{t}A \cdot A = I \quad .$$

Dacă A este o matrice ortogonală, atunci $detA = \pm 1$.

Noțiunea de operator liniar

Noțiunea de operator liniar

Fie $\mathcal{X}$ un $\mathbb{R}$- spațiu vectorial.

Noțiunea de operator liniar

Fie $\mathcal{X}$ un $\mathbb{R}$- spațiu vectorial.

Definiție

Noțiunea de operator liniar

Fie $\mathcal{X}$ un $\mathbb{R}$- spațiu vectorial.

Definiție

Se numește operator liniar pe $\mathcal{X}$ o aplicație

$$T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$$

cu următoarele proprietăți:

Noțiunea de operator liniar

Fie $\mathcal{X}$ un $\mathbb{R}$- spațiu vectorial.

Definiție

Se numește operator liniar pe $\mathcal{X}$ o aplicație

$$T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$$

cu următoarele proprietăți:

1. T este aplicație aditivă, adică:

$$T\left(\bar{x} + \bar{y}\right) = T\left(\bar{x}\right) + T(\bar{y}) \quad , \quad (\forall)\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{X} \quad ;$$

Noțiunea de operator liniar

Fie $\mathcal{X}$ un $\mathbb{R}$- spațiu vectorial.

Definiție

Se numește operator liniar pe $\mathcal{X}$ o aplicație

$$T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$$

cu următoarele proprietăți:

1. T este aplicație aditivă, adică:

$$T(\bar{x} + \bar{y}) = T(\bar{x}) + T(\bar{y}) \quad , \quad (\forall)\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{X} \quad ;$$

2. T este aplicație omogenă, adică:

$$T(\lambda \bar{x}) = \lambda T(\bar{x}) \quad , \quad (\forall)\lambda \in \mathbb{R} \text{ și } (\forall)\bar{x} \in \mathcal{X} \quad .$$

Noțiunea de operator liniar

Se notează cu $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ mulțimea operatorilor liniari pe $\mathcal{X}$.

Noțiunea de operator liniar

Se notează cu $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ mulțimea operatorilor liniari pe $\mathcal{X}$.
Pe $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ se pot introduce următoarele operații:

Noțiunea de operator liniar

Se notează cu $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ mulțimea operatorilor liniari pe $\mathcal{X}$.
Pe $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ se pot introduce următoarele operații:

- *adunarea operatorilor*:

$$+ : \mathcal{L}(\mathcal{X}) \times \mathcal{L}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$$

$$(T + U)(\overline{x}) = T(\overline{x}) + U(\overline{x}) \quad , \quad (\forall)\overline{x} \in \mathcal{X} \quad ;$$

Noțiunea de operator liniar

Se notează cu $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ mulțimea operatorilor liniari pe $\mathcal{X}$.
Pe $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ se pot introduce următoarele operații:

- *adunarea operatorilor*:

$$+ : \mathcal{L}(\mathcal{X}) \times \mathcal{L}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$$

$$(T + U)(\overline{x}) = T(\overline{x}) + U(\overline{x}) \quad , \quad (\forall)\overline{x} \in \mathcal{X} \quad ;$$

- *înmulțirea operatorilor cu scalari*:

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{L}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$$

$$(\lambda \cdot T)(\overline{x}) = \lambda T(\overline{x}) \quad , \quad (\forall)\overline{x} \in \mathcal{X} \quad ;$$

Noțiunea de operator liniar

- *produsul (compunerea) operatorilor*:

$$\circ : \mathcal{L}(\mathcal{X}) \times \mathcal{L}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$$

$$(T \circ U)(\overline{x}) = T(U(\overline{x})) \quad , \quad (\forall)\overline{x} \in \mathcal{X} \quad .$$

Noțiunea de operator liniar

Teoremă

Noțiunea de operator liniar

Teoremă

Următoarele afirmații sunt echivalente:

Noțiunea de operator liniar

Teoremă

Următoarele afirmații sunt echivalente:

i) $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$;

Noțiunea de operator liniar

Teoremă

Următoarele afirmații sunt echivalente:

i) $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$;

ii) pentru orice $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ și orice $\overline{x}, \overline{y} \in \mathcal{X}$ are loc egalitatea:

$$T\left(\lambda\overline{x} + \mu\overline{y}\right) = \lambda T\left(\overline{x}\right) + \mu T\left(\overline{y}\right) \quad .$$

Nucleul unui operator liniar

Nucleul unui operator liniar

Definiție

Nucleul unui operator liniar

Definiție

Se numește nucleu al operatorului liniar $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ mulțimea:

$$\mathcal{K}er\ T = \left\{ \overline{x} \in \mathcal{X} \,\middle|\, T(\overline{x}) = \overline{0} \right\} \quad .$$

Nucleul unui operator liniar

Definiție

Se numește nucleu al operatorului liniar $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ mulțimea:

$$\mathcal{K}er\ T = \left\{ \overline{x} \in \mathcal{X} \,\middle|\, T(\overline{x}) = \overline{0} \right\} \quad .$$

Teoremă

Nucleul unui operator liniar

Definiție

Se numește nucleu al operatorului liniar $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ mulțimea:

$$\mathcal{K}er\ T = \left\{ \overline{x} \in \mathcal{X} \,\middle|\, T(\overline{x}) = \overline{0} \right\} \quad .$$

Teoremă

Fie $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$. Atunci $\mathcal{K}er\ T$ este un subspațiu vectorial al lui $\mathcal{X}$.

Matricea asociată unui operator liniar

Matricea asociată unui operator liniar

Fie $\mathcal{X}_n$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial n-dimensional și $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\}$ o bază a sa.

Matricea asociată unui operator liniar

Fie $\mathcal{X}_n$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial n-dimensional și $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\}$ o bază a sa. Dacă $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_n)$, atunci:

$$\begin{cases} T\left(\bar{b}_1\right) = t_1^1 \bar{b}_1 + t_1^2 \bar{b}_2 + \ldots + t_1^n \bar{b}_n \\ T\left(\bar{b}_2\right) = t_2^1 \bar{b}_1 + t_2^2 \bar{b}_2 + \ldots + t_2^n \bar{b}_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ T\left(\bar{b}_n\right) = t_n^1 \bar{b}_1 + t_n^2 \bar{b}_2 + \ldots + t_n^n \bar{b}_n \end{cases}$$

Matricea asociată unui operator liniar

Fie $\mathcal{X}_n$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial n-dimensional și $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\}$ o bază a sa. Dacă $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_n)$, atunci:

$$\begin{cases} T\left(\bar{b}_1\right) = t_1^1 \bar{b}_1 + t_1^2 \bar{b}_2 + \ldots + t_1^n \bar{b}_n \\ T\left(\bar{b}_2\right) = t_2^1 \bar{b}_1 + t_2^2 \bar{b}_2 + \ldots + t_2^n \bar{b}_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ T\left(\bar{b}_n\right) = t_n^1 \bar{b}_1 + t_n^2 \bar{b}_2 + \ldots + t_n^n \bar{b}_n \end{cases}$$

Definiție

Matricea asociată unui operator liniar

Fie $\mathcal{X}_n$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial n-dimensional și $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\}$ o bază a sa. Dacă $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_n)$, atunci:

$$\begin{cases} T\left(\bar{b}_1\right) = t_1^1 \bar{b}_1 + t_1^2 \bar{b}_2 + \ldots + t_1^n \bar{b}_n \\ T\left(\bar{b}_2\right) = t_2^1 \bar{b}_1 + t_2^2 \bar{b}_2 + \ldots + t_2^n \bar{b}_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ T\left(\bar{b}_n\right) = t_n^1 \bar{b}_1 + t_n^2 \bar{b}_2 + \ldots + t_n^n \bar{b}_n \end{cases}$$

Definiție

Matricea:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 & \ldots & t_n^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & \ldots & t_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_1^n & t_2^n & \ldots & t_n^n \end{pmatrix}$$

se numește matrice asociată operatorului T în raport cu baza B.

Matricea asociată unui operator liniar

Definiție

Matricea asociată unui operator liniar

Definiție

Egalitățile :

$$\begin{cases} y^1 = t_1^1 x^1 + t_2^1 x^2 + \ldots + t_n^1 x^n \\ y^2 = t_1^2 x^1 + t_2^2 x^2 + \ldots + t_n^2 x^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^n = t_1^n x^1 + t_2^n x^2 + \ldots + t_n^n x^n \end{cases}$$

se numesc expresii analitice ale operatorului T în raport cu baza B.

Matricea asociată unui operator liniar

Definiție

Egalitățile :

$$\begin{cases} y^1 = t^1_1 x^1 + t^1_2 x^2 + \ldots + t^1_n x^n \\ y^2 = t^2_1 x^1 + t^2_2 x^2 + \ldots + t^2_n x^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^n = t^n_1 x^1 + t^n_2 x^2 + \ldots + t^n_n x^n \end{cases}$$

se numesc expresii analitice ale operatorului T în raport cu baza B.

Expresiile analitice se pot scrie sub forma matricială :

$$[\bar{y}]_B = [T]_B [\bar{x}]_B \quad .$$

Matricea asociată unui operator liniar

Teoremă

Matricea asociată unui operator liniar

Teoremă

Fie $\mathcal{X}_n$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial n-dimensional și $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_n)$ un operator liniar a cărui matrice asociată în raport cu o bază B a lui $\mathcal{X}_n$ este $[T]_B$. Dacă $\left[B \to B'\right]$ este matricea de trecere de la baza B la o altă bază B' a lui $\mathcal{X}_n$, atunci matricea asociată operatorului T în raport cu baza B' este:

$$[T]_{B'} = \left[B' \to B\right][T]_B\left[B \to B'\right] \quad .$$

Vectori proprii și valori proprii

Vectori proprii și valori proprii

Fie $\mathcal{X}_n$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial n-dimensional și $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_n)$.

Vectori proprii și valori proprii

Fie $\mathcal{X}_n$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial n-dimensional și $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_n)$.

Definiție

Vectori proprii și valori proprii

Fie $\mathcal{X}_n$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial n-dimensional și $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_n)$.

Definiție

Un vector nenul $\bar{x} \in \mathcal{X}_n$ și un scalar $\lambda \in \mathbb{R}$ care satisfac egalitatea

$$T(\bar{x}) = \lambda \bar{x}$$

se numesc vector propriu, respectiv valoare proprie a operatorului liniar T.

Vectori proprii și valori proprii

Teoremă

Vectori proprii și valori proprii

Teoremă

Fie $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_n)$ și $[T]_B$ matricea asociată operatorului T în raport cu o bază B a lui $\mathcal{X}_n$.
Următoarele afirmații sunt echivalente:

Vectori proprii și valori proprii

Teoremă

Fie $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_n)$ și $[T]_B$ matricea asociată operatorului T în raport cu o bază B a lui $\mathcal{X}_n$.
Următoarele afirmații sunt echivalente:
i) $\lambda \in \mathbb{R}$ este valoare proprie a lui T;

Vectori proprii și valori proprii

Teoremă

Fie $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_n)$ și $[T]_B$ matricea asociată operatorului T în raport cu o bază B a lui $\mathcal{X}_n$.
Următoarele afirmații sunt echivalente:
i) $\lambda \in \mathbb{R}$ este valoare proprie a lui T;
ii) $\lambda \in \mathbb{R}$ este rădăcină a ecuației

$$det([T]_B - \lambda[I]_B) = 0$$

unde $[I]_B$ este matricea unitate asociată operatorului identic în raport cu baza B.

Vectori proprii și valori proprii

Teoremă

Fie $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_n)$ și $[T]_B$ matricea asociată operatorului T în raport cu o bază B a lui $\mathcal{X}_n$.
Următoarele afirmații sunt echivalente:
i) $\lambda \in \mathbb{R}$ este valoare proprie a lui T;
ii) $\lambda \in \mathbb{R}$ este rădăcină a ecuației

$$det([T]_B - \lambda[I]_B) = 0$$

unde $[I]_B$ este matricea unitate asociată operatorului identic în raport cu baza B.

Valorile proprii ale unui operator liniar $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_n)$ nu depind de baza în raport cu care se scrie matricea asociată lui T.

Vectori proprii și valori proprii

Definiție

Vectori proprii și valori proprii

Definiție

Egalitatea

$$det([T]_B - \lambda[I]_B) = 0$$

se numește ecuație caracteristică asociată operatorului T în raport cu o bază B.

Vectori proprii și valori proprii

Definiție

Egalitatea

$$det([T]_B - \lambda[I]_B) = 0$$

se numește ecuație caracteristică asociată operatorului T în raport cu o bază B.

Definiție

Vectori proprii și valori proprii

Definiție

Egalitatea

$$det([T]_B - \lambda[I]_B) = 0$$

se numește ecuație caracteristică asociată operatorului T în raport cu o bază B.

Definiție

Mulțimea

$$\sigma_p(T) = \{\underbrace{\lambda^1, \dots, \lambda^1}_{m_1 \text{ori}}, \underbrace{\lambda^2, \dots, \lambda^2}_{m_2 \text{ori}}, \dots, \underbrace{\lambda^p, \dots, \lambda^p}_{m_p \text{ori}}\} \quad ,$$

se numește spectrul punctual al operatorului liniar T.

Vectori proprii și valori proprii

Definiție

Egalitatea

$$det([T]_B - \lambda[I]_B) = 0$$

se numește ecuație caracteristică asociată operatorului T în raport cu o bază B.

Definiție

Mulțimea

$$\sigma_p(T) = \{\underbrace{\lambda^1, \ldots, \lambda^1}_{m_1 \text{ori}}, \underbrace{\lambda^2, \ldots, \lambda^2}_{m_2 \text{ori}}, \ldots, \underbrace{\lambda^p, \ldots, \lambda^p}_{m_p \text{ori}}\} \quad ,$$

se numește spectrul punctual al operatorului liniar T.
Numerele m_1, m_2, ..., m_p se numesc ordine de multiplicitate algebrică ale valorilor proprii λ^1, λ^2, ..., λ^p.

Operatori diagonalizabili

Operatori diagonalizabili

Fie $\mathcal{X}_n$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial n-dimensional.

Operatori diagonalizabili

Fie $\mathcal{X}_n$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial n-dimensional.

Definiție

Operatori diagonalizabili

Fie $\mathcal{X}_n$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial n-dimensional.

Definiție

Spunem că operatorul $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_n)$ este diagonalizabil dacă există o bază B a lui $\mathcal{X}_n$ astfel încât

$$[T]_B = \begin{pmatrix} t_1^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t_n^n \end{pmatrix}$$

Operatori diagonalizabili

Propoziție

Operatori diagonalizabili

Propoziție

Dacă un operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_n)$ are n valori proprii reale și distincte, atunci T este diagonalizabil.

Operatori diagonalizabili

Propoziție

Dacă un operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_n)$ are n valori proprii reale și distincte, atunci T este diagonalizabil.

Propoziție

Operatori diagonalizabili

Propoziție

Dacă un operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_n)$ are n valori proprii reale și distincte, atunci T este diagonalizabil.

Propoziție

Operatorul $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_n)$ este diagonalizabil dacă și numai dacă în spațiul $\mathcal{X}_n$ există o bază formată numai din vectori proprii ai lui T.

Operatori diagonalizabili

Definiție

Operatori diagonalizabili

Definiție

Subspațiul

$$\mathcal{X}_{\lambda,T} = \mathcal{K}er\left(T - \lambda I\right)$$

se numește subspațiu propriu al operatorului T corespunzător valorii proprii λ.

Operatori diagonalizabili

Definiție

Subspațiul

$$\mathcal{X}_{\lambda,T} = \mathcal{K}er\left(T - \lambda I\right)$$

se numește subspațiu propriu al operatorului T corespunzător valorii proprii λ.
$dim\, \mathcal{X}_{\lambda,T}$ se numește ordin de multiplicitate geometrică al valorii proprii λ.

Operatori diagonalizabili

Teoremă

Operatori diagonalizabili

Teoremă

Un operator liniar $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_n)$ este diagonalizabil dacă și numai dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:

Operatori diagonalizabili

Teoremă

Un operator liniar $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_n)$ este diagonalizabil dacă și numai dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:

i) $\sigma_p(T) = \{\underbrace{\lambda^1, \ldots, \lambda^1}_{m_1 \text{ori}}, \underbrace{\lambda^2, \ldots, \lambda^2}_{m_2 \text{ori}}, \ldots, \underbrace{\lambda^p, \ldots, \lambda^p}_{m_p \text{ori}}\} \subset \mathbb{R}$ și

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_p = n \quad ;$$

Operatori diagonalizabili

Teoremă

Un operator liniar $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_n)$ este diagonalizabil dacă și numai dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:

i) $\sigma_p(T) = \{\underbrace{\lambda^1, \ldots, \lambda^1}_{m_1 \text{ori}}, \underbrace{\lambda^2, \ldots, \lambda^2}_{m_2 \text{ori}}, \ldots, \underbrace{\lambda^p, \ldots, \lambda^p}_{m_p \text{ori}}\} \subset \mathbb{R}$ și

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_p = n \quad ;$$

ii) $dim\, \mathcal{X}_{\lambda^i, T} = m_i$, $(\forall) i \in 1, 2, \ldots, p$.

Funcționale biliniare

Funcționale biliniare

Fie $\mathcal{X}$ un $\mathbb{R}$- spațiu vectorial.

Funcționale biliniare

Fie $\mathcal{X}$ un $\mathbb{R}$- spațiu vectorial.

Definiție

Funcționale biliniare

Fie $\mathcal{X}$ un $\mathbb{R}$- spațiu vectorial.

Definiție

Se numește funcțională biliniară pe $\mathbb{R}$-spațiul vectorial $\mathcal{X}$ o aplicație:

$$g : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$$

liniară în raport cu fiecare variabilă, adică:

Funcționale biliniare

Fie $\mathcal{X}$ un $\mathbb{R}$- spațiu vectorial.

Definiție

Se numește funcțională biliniară pe $\mathbb{R}$-spațiul vectorial $\mathcal{X}$ o aplicație:

$$g : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$$

liniară în raport cu fiecare variabilă, adică:

$$g(\lambda^1 \bar{x}_1 + \lambda^2 \bar{x}_2 / \bar{y}) = \lambda^1 g(\bar{x}_1 / \bar{y}) + \lambda^2 g(\bar{x}_2 / \bar{y})$$

Funcționale biliniare

Fie $\mathcal{X}$ un $\mathbb{R}$- spațiu vectorial.

Definiție

Se numește funcțională biliniară pe $\mathbb{R}$-spațiul vectorial $\mathcal{X}$ o aplicație:

$$g : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$$

liniară în raport cu fiecare variabilă, adică:

$$g(\lambda^1 \bar{x}_1 + \lambda^2 \bar{x}_2 / \bar{y}) = \lambda^1 g(\bar{x}_1 / \bar{y}) + \lambda^2 g(\bar{x}_2 / \bar{y})$$

și

$$g(\bar{x} / \lambda^1 \bar{y}_1 + \lambda^2 \bar{y}_2) = \lambda^1 g(\bar{x} / \bar{y}_1) + \lambda^2 g(\bar{x} / \bar{y}_2)$$

Funcționale biliniare

Fie $\mathcal{X}$ un $\mathbb{R}$- spațiu vectorial.

Definiție

Se numește funcțională biliniară pe $\mathbb{R}$-spațiul vectorial $\mathcal{X}$ o aplicație:

$$g : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$$

liniară în raport cu fiecare variabilă, adică:

$$g(\lambda^1 \bar{x}_1 + \lambda^2 \bar{x}_2 / \bar{y}) = \lambda^1 g(\bar{x}_1 / \bar{y}) + \lambda^2 g(\bar{x}_2 / \bar{y})$$

și

$$g(\bar{x} / \lambda^1 \bar{y}_1 + \lambda^2 \bar{y}_2) = \lambda^1 g(\bar{x} / \bar{y}_1) + \lambda^2 g(\bar{x} / \bar{y}_2)$$

pentru orice $\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2 \in \mathcal{X}$ și orice $\lambda^1, \lambda^2 \in \mathbb{R}$.

Funcționale biliniare

Fie $\mathcal{X}$ un $\mathbb{R}$- spațiu vectorial.

Definiție

Se numește funcțională biliniară pe $\mathbb{R}$-spațiul vectorial $\mathcal{X}$ o aplicație:

$$g : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$$

liniară în raport cu fiecare variabilă, adică:

$$g(\lambda^1 \bar{x}_1 + \lambda^2 \bar{x}_2 / \bar{y}) = \lambda^1 g(\bar{x}_1 / \bar{y}) + \lambda^2 g(\bar{x}_2 / \bar{y})$$

și

$$g(\bar{x} / \lambda^1 \bar{y}_1 + \lambda^2 \bar{y}_2) = \lambda^1 g(\bar{x} / \bar{y}_1) + \lambda^2 g(\bar{x} / \bar{y}_2)$$

pentru orice $\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2 \in \mathcal{X}$ și orice $\lambda^1, \lambda^2 \in \mathbb{R}$.
Se notează $g \in \mathcal{BL}(\mathcal{X})$.

Funcționale biliniare

Pe $\mathcal{BL}(\mathcal{X})$ se pot defini operațiile:

Funcționale biliniare

Pe $\mathcal{BL}(\mathcal{X})$ se pot defini operațiile:

- adunarea funcționalelor biliniare:

$$+ : \mathcal{BL}(\mathcal{X}) \times \mathcal{BL}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{BL}(\mathcal{X})$$

$$(g_1 + g_2)(\bar{x}/\bar{y}) = g_1(\bar{x}/\bar{y}) + g_2(\bar{x}/\bar{y})$$

  pentru orice $\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{X}$;

Funcționale biliniare

Pe $\mathcal{BL}(\mathcal{X})$ se pot defini operațiile:

- adunarea funcționalelor biliniare:

$$+ : \mathcal{BL}(\mathcal{X}) \times \mathcal{BL}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{BL}(\mathcal{X})$$

$$(g_1 + g_2)(\bar{x}/\bar{y}) = g_1(\bar{x}/\bar{y}) + g_2(\bar{x}/\bar{y})$$

  pentru orice $\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{X}$;

- înmulțirea funcționalelor biliniare cu scalari:

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{BL}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{BL}(\mathcal{X})$$

$$(\alpha \cdot g)(\bar{x}/\bar{y}) = \alpha \cdot g(\bar{x}/\bar{y})$$

  pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ și orice $\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{X}$.

Funcționale biliniare

Pe $\mathcal{BL}(\mathcal{X})$ se pot defini operațiile:

- adunarea funcționalelor biliniare:

$$+ : \mathcal{BL}(\mathcal{X}) \times \mathcal{BL}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{BL}(\mathcal{X})$$

$$(g_1 + g_2)(\bar{x}/\bar{y}) = g_1(\bar{x}/\bar{y}) + g_2(\bar{x}/\bar{y})$$

  pentru orice $\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{X}$;

- înmulțirea funcționalelor biliniare cu scalari:

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{BL}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{BL}(\mathcal{X})$$

$$(\alpha \cdot g)(\bar{x}/\bar{y}) = \alpha \cdot g(\bar{x}/\bar{y})$$

  pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ și orice $\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{X}$.

$(\mathcal{BL}(\mathcal{X}), +, \cdot)$ are structură de $\mathbb{R}$-spațiu vectorial.

Funcționale biliniare

Fie $\mathcal{X}_n$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial n-dimensional având baza $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\}$ și $g : \mathcal{X}_n \times \mathcal{X}_n \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcțională biliniară pe $\mathcal{X}_n$.

Funcționale biliniare

Fie $\mathcal{X}_n$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial n-dimensional având baza $B = \left\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\right\}$ și $g : \mathcal{X}_n \times \mathcal{X}_n \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcțională biliniară pe $\mathcal{X}_n$.
Dacă $\bar{x} = x^1\bar{b}_1 + x^2\bar{b}_2 + \ldots + x^n\bar{b}_n$ și $\bar{y} = y^1\bar{b}_1 + y^2\bar{b}_2 + \ldots + y^n\bar{b}_n$ sunt doi vectori din $\mathcal{X}_n$, atunci:

$$g(\bar{x}/\bar{y}) = g_{11}x^1y^1 + g_{12}x^1y^2 + \ldots + g_{nn}x^ny^n$$

unde $g_{ij} = g(\bar{b}_i/\bar{b}_j)$, $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Funcționale biliniare

Fie $\mathcal{X}_n$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial n-dimensional având baza $B = \left\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\right\}$ și $g : \mathcal{X}_n \times \mathcal{X}_n \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcțională biliniară pe $\mathcal{X}_n$.
Dacă $\bar{x} = x^1\bar{b}_1 + x^2\bar{b}_2 + \ldots + x^n\bar{b}_n$ și $\bar{y} = y^1\bar{b}_1 + y^2\bar{b}_2 + \ldots + y^n\bar{b}_n$ sunt doi vectori din $\mathcal{X}_n$, atunci:

$$g(\bar{x}/\bar{y}) = g_{11}x^1y^1 + g_{12}x^1y^2 + \ldots + g_{nn}x^ny^n$$

unde $g_{ij} = g(\bar{b}_i/\bar{b}_j)$, $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Definiție

Funcționale biliniare

Fie $\mathcal{X}_n$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial n-dimensional având baza $B = \left\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\right\}$ și $g : \mathcal{X}_n \times \mathcal{X}_n \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcțională biliniară pe $\mathcal{X}_n$.
Dacă $\bar{x} = x^1\bar{b}_1 + x^2\bar{b}_2 + \ldots + x^n\bar{b}_n$ și
$\bar{y} = y^1\bar{b}_1 + y^2\bar{b}_2 + \ldots + y^n\bar{b}_n$ sunt doi vectori din $\mathcal{X}_n$, atunci:

$$g(\bar{x}/\bar{y}) = g_{11}x^1y^1 + g_{12}x^1y^2 + \ldots + g_{nn}x^ny^n$$

unde $g_{ij} = g(\bar{b}_i/\bar{b}_j)$, $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Definiție

Egalitatea:

$$g(\bar{x}/\bar{y}) = g_{11}x^1y^1 + g_{12}x^1y^2 + \ldots + g_{nn}x^ny^n$$

se numește expresie analitică a funcționalei biliniare g în raport cu baza B.

Funcționale biliniare

Definiție

Funcționale biliniare

Definiție

Se numește matrice asociată funcționalei biliniare g în raport cu baza B matricea:

$$[g]_B = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

Funcționale biliniare

Expresia analitică a funcționalei biliniare g în raport cu o bază B se poate scrie și sub forma matricială:

$$g(\bar{x}/\bar{y}) =$$

$$= \begin{pmatrix} x^1 & x^2 & \dots & x^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{2n} & \cdots & g_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$$

$$= {}^t[\bar{x}]_B [g]_B [\bar{y}]_B$$

unde ${}^t[\bar{x}]_B$ este transpusa matricei $[\bar{x}]_B$.

Funcționale biliniare

Definiție

Funcționale biliniare

Definiție

Spunem că funcționala biliniară $g \in \mathcal{BL}(\mathcal{X})$ este simetrică (și notăm $g \in \mathcal{BL}_{sim}(\mathcal{X})$) dacă

$$g(\bar{x}/\bar{y}) = g(\bar{y}/\bar{x}) \quad , \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{X} \quad .$$

Forme pătratice

Forme pătratice

Fie $\mathcal{X}$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial și $g \in \mathcal{BL}_{sim}(\mathcal{X})$.

Forme pătratice

Fie $\mathcal{X}$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial și $g \in \mathcal{BL}_{sim}(\mathcal{X})$.

Definiție

Forme pătratice

Fie $\mathcal{X}$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial și $g \in \mathcal{BL}_{sim}(\mathcal{X})$.

Definiție

Se numește formă pătratică asociată funcționalei biliniare simetrice g aplicația:

$$h : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$$

definită prin:

$$h(\bar{x}) = g(\bar{x}/\bar{x}) \quad , \quad (\forall)\bar{x} \in \mathcal{X}.$$

Se notează: $h \in \mathcal{FP}(\mathcal{X})$

Forme pătratice

Fie $\mathcal{X}_n$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial n-dimensional având baza $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\}$ și $g \in \mathcal{BL}_{sim}(\mathcal{X}_n)$ astfel încât:

$$g(\bar{x}/\bar{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x^i y^j \quad .$$

Forme pătratice

Fie $\mathcal{X}_n$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial n-dimensional având baza $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\}$ și $g \in \mathcal{BL}_{sim}(\mathcal{X}_n)$ astfel încât:

$$g(\bar{x}/\bar{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x^i y^j \quad .$$

Atunci:

$$h(\bar{x}) = g(\bar{x}, \bar{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x^i x^j = \sum_{i=1}^{n} g_{ii} (x^i)^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} g_{ij} x^i x^j \quad .$$

Forme pătratice

Definiție

Forme pătratice

Definiție

Se numește expresie analitică a formei pătratice h în raport cu baza B egalitatea

$$h(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} g_{ii}(x^i)^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} g_{ij} x^i x^j \quad ,$$

Forme pătratice

Definiție

Se numește expresie analitică a formei pătratice h în raport cu baza B egalitatea

$$h(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} g_{ii}(x^i)^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} g_{ij} x^i x^j \quad ,$$

Expresia analitică a formei pătratice h în raport cu baza B se poate scrie și sub formă matricială

$$h(\bar{x}) = {}^t[\bar{x}]_B [h]_B [\bar{x}]_B$$

unde $[h]_B = [g]_B$ este matricea simetrică asociată formei pătratice h în raport cu baza B.

Forme pătratice

Definiție

Forme pătratice

Definiție

Termenii de forma $(x^i)^2$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ din expresia analitică a unei forme pătratice se numesc *termeni pătratici*, iar termenii de forma $x^i x^j$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$, se numesc *termeni dreptunghiulari*.

Forme pătratice

Definiție

Termenii de forma $(x^i)^2$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ din expresia analitică a unei forme pătratice se numesc *termeni pătratici*, iar termenii de forma $x^i x^j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$, se numesc *termeni dreptunghiulari*.

Definiție

Forme pătratice

Definiție

Termenii de forma $(x^i)^2$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ din expresia analitică a unei forme pătratice se numesc *termeni pătratici*, iar termenii de forma $x^i x^j$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$, se numesc *termeni dreptunghiulari*.

Definiție

Spunem că o formă pătratică are expresia analitică redusă dacă există o bază în raport cu care expresia analitică a formei nu are termeni dreptunghiulari.

Metoda Gauss-Lagrange

Metoda Gauss-Lagrange

Teoremă

Metoda Gauss-Lagrange

Teoremă

Fie $\mathcal{X}_n$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial n-dimensional și $h \in \mathcal{FP}(\mathcal{X}_n)$. Atunci există o bază a lui $\mathcal{X}_n$ în raport cu care h are expresia redusă.

Metoda Gauss-Lagrange

Teoremă

Fie $\mathcal{X}_n$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial n-dimensional și $h \in \mathcal{FP}(\mathcal{X}_n)$. Atunci există o bază a lui $\mathcal{X}_n$ în raport cu care h are expresia redusă.

Fie $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\}$ o bază a lui $\mathcal{X}_n$,

$$\bar{x} = x^1\bar{b}_1 + x^2\bar{b}_2 + \ldots + x^n\bar{b}_n \in \mathcal{X}_n$$

și $h \in \mathcal{FP}(\mathcal{X}_n)$,

$$h(\bar{x}) = g_{11}(x^1)^2 + g_{12}x^1x^2 + \ldots + g_{nn}(x^n)^2 \quad .$$

Metoda Gauss-Lagrange

Dacă $g_{11} = g_{12} = \ldots = g_{nn} = 0$, atunci există cel puțin un coeficient $g_{ij} \neq 0$. Putem presupune că $g_{12} \neq 0$.

Metoda Gauss-Lagrange

Dacă $g_{11} = g_{12} = \ldots = g_{nn} = 0$, atunci există cel puțin un coeficient $g_{ij} \neq 0$. Putem presupune că $g_{12} \neq 0$.
Facem transformarea de coordonate:

$$\begin{cases} x^1 = x^{1'} + x^{2'} \\ x^2 = x^{1'} - x^{2'} \\ x^3 = x^{3'} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n = x^{n'} \end{cases}$$

Metoda Gauss-Lagrange

Dacă $g_{11} = g_{12} = \ldots = g_{nn} = 0$, atunci există cel puțin un coeficient $g_{ij} \neq 0$. Putem presupune că $g_{12} \neq 0$.
Facem transformarea de coordonate:

$$\begin{cases} x^1 = x^{1'} + x^{2'} \\ x^2 = x^{1'} - x^{2'} \\ x^3 = x^{3'} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n = x^{n'} \end{cases}$$

Atunci expresia analitică a formei pătratice h devine:

$$h(\bar{x}') = g_{12}\left(x^{1'}\right)^2 + h'(x^{2'}, x^{3'}, \ldots, x^{n'})$$

Metoda Gauss-Lagrange

Putem presupune că $g_{11} \neq 0$. Atunci:

Metoda Gauss-Lagrange

Putem presupune că $g_{11} \neq 0$. Atunci:

$$\begin{aligned} h(\bar{x}) &= \left[g_{11}(x^1)^2 + 2 \sum_{2 \leq j \leq n} g_{1j} x^1 x^j \right] + \sum_{i,j=2}^{n} g_{ij} x^i x^j = \\ &= \frac{1}{g_{11}} \left[(g_{11}x^1)^2 + 2g_{11}x^1 \sum_{2 \leq j \leq n} g_{1j} x^j \right] + \sum_{i,j=2}^{n} g_{ij} x^i x^j = \\ &= \frac{1}{g_{11}} (g_{11}x^1 + \ldots + g_{1n}x^n)^2 + h_1(x^2, \ldots, x^n) \end{aligned}$$

unde h_1 este o formă pătratică în care nu apare x^1 (deci are $n-1$ variabile).

Metoda Gauss-Lagrange

Facem transformarea de coordonate:

$$\begin{cases} y^1 = g_{11}x^1 + \ldots + g_{1n}x^n \\ y^2 = x^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^n = x^n \end{cases}$$

și se repetă procedeul pentru forma pătratică

$$h_1(y^2, y^3, \ldots, y^n) = \sum_{i,j=2}^{n} g'_{ij} y^i y^j$$

După un număr finit de pași se obține rezultatul dorit.

Metoda lui Jacobi

Metoda lui Jacobi

Teoremă

Metoda lui Jacobi

Teoremă

Fie $h : \mathcal{X}_n \longrightarrow \mathbb{R}$ o formă pătratică a cărei matrice asociată în raport cu o bază $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\}$ a lui $\mathcal{X}_n$ este

$$[h]_B = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{12} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{1n} & g_{2n} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}.$$

Metoda lui Jacobi

Teoremă

Fie $h : \mathcal{X}_n \longrightarrow \mathbb{R}$ o formă pătratică a cărei matrice asociată în raport cu o bază $B = \left\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\right\}$ a lui $\mathcal{X}_n$ este

$$[h]_B = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{12} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{1n} & g_{2n} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \quad .$$

Dacă

$$\Delta_1 = |g_{11}| \neq 0$$

Metoda lui Jacobi

Teoremă

Fie $h : \mathcal{X}_n \longrightarrow \mathbb{R}$ o formă pătratică a cărei matrice asociată în raport cu o bază $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\}$ a lui $\mathcal{X}_n$ este

$$[h]_B = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{12} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{1n} & g_{2n} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} .$$

Dacă

$$\Delta_1 = |g_{11}| \neq 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

Metoda lui Jacobi

....

Metoda lui Jacobi

....

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{12} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{1n} & g_{2n} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Metoda lui Jacobi

....

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{12} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{1n} & g_{2n} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

atunci există o bază $B' = \left\{ \bar{b}'_1, \bar{b}'_2, \ldots, \bar{b}'_n \right\}$ astfel încât

$$h(\bar{x}') = \frac{1}{\Delta_1}(x^{1'})^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}(x^{2'})^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}(x^{n'})^2 \quad .$$

Metoda spectrală

Metoda spectrală

Teoremă

Metoda spectrală

Teoremă

Fie $(\mathcal{X}_n, \langle \cdot / \cdot \rangle)$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial euclidian n-dimensional și $h \in \mathcal{FP}(\mathcal{X}_n)$. Atunci există o bază ortonormată în raport cu care h are expresia redusă.

Metoda spectrală

Teoremă

Fie $(\mathcal{X}_n, \langle \cdot / \cdot \rangle)$ un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial euclidian n-dimensional și $h \in \mathcal{FP}(\mathcal{X}_n)$. Atunci există o bază ortonormată în raport cu care h are expresia redusă.

Fie B o bază ortonormată a lui $\mathcal{X}_n$. Deoarece $[h]_B$ este simetrică, se poate defini un operator simetric $H \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_n)$ astfel încât $[H]_B = [h]_B$.

Metoda spectrală

Atunci există o bază B^* ortonormată a lui $\mathcal{X}_n$ în raport cu care $[H]_{B^*}$ are forma diagonală:

Metoda spectrală

Atunci există o bază B^* ortonormată a lui $\mathcal{X}_n$ în raport cu care $[H]_{B^*}$ are forma diagonală:

$$[H]_{B^*} = \begin{pmatrix} \lambda^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^n \end{pmatrix}$$

unde $\lambda^1, \dots, \lambda^n$ sunt valorile proprii ale lui H, nu neapărat distincte.

Metoda spectrală

Prin urmare:

Metoda spectrală

Prin urmare:

$$[h]_{B^*} = \begin{pmatrix} \lambda^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^n \end{pmatrix} .$$

Metoda spectrală

Prin urmare:

$$[h]_{B^*} = \begin{pmatrix} \lambda^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^n \end{pmatrix} .$$

Deci:

$$h(\bar{y}) = \lambda^1 (y^1)^2 + \lambda^2 (y^2)^2 + \ldots + \lambda^n (y^n)^2$$

unde $\bar{y} = (y^1, \ldots, y^n)$ în raport cu baza B^*.

Teorema lui Sylvester

Teorema lui Sylvester

În general expresiile reduse ale unei forme pătratice nu sunt unice.

Teorema lui Sylvester

În general expresiile reduse ale unei forme pătratice nu sunt unice.

Definiție

Teorema lui Sylvester

În general expresiile reduse ale unei forme pătratice nu sunt unice.

Definiție

Se numește indice pozitiv de inerție al unei forme pătratice, numărul de termeni pozitivi din expresia redusă.

Teorema lui Sylvester

În general expresiile reduse ale unei forme pătratice nu sunt unice.

Definiție

Se numește indice pozitiv de inerție al unei forme pătratice, numărul de termeni pozitivi din expresia redusă.
Se numește indice negativ de inerție numărul de termeni negativi din expresia redusă.

Teorema lui Sylvester

Definiție

Teorema lui Sylvester

Definiție

Spunem că o formă pătratică h este pozitiv definită dacă indicele negativ de inerție este nul (sau dacă toți termenii din expresia redusă sunt pozitivi).

Teorema lui Sylvester

Definiție

Spunem că o formă pătratică h este pozitiv definită dacă indicele negativ de inerție este nul (sau dacă toți termenii din expresia redusă sunt pozitivi).
Spunem că o formă pătratică este negativ definită dacă indicele pozitiv de inerție este nul.

Teorema lui Sylvester

Definiție

Spunem că o formă pătratică h este pozitiv definită dacă indicele negativ de inerție este nul (sau dacă toți termenii din expresia redusă sunt pozitivi).
Spunem că o formă pătratică este negativ definită dacă indicele pozitiv de inerție este nul.

Teoremă lui Sylvester

Indicele de inerție (pozitiv sau negativ) al unei forme pătratice nu depinde de baza în raport cu care se obține expresia redusă.

$\mathbb{R}$-spațiul vectorial al segmentelor orientate

$\mathbb{R}$-spațiul vectorial al segmentelor orientate

Notăm cu $\mathcal{E}_3$ mulțimea punctelor din spațiu și cu

$$\mathcal{E}_3^0 = \left\{ \overrightarrow{OA} \middle| \; A \in \mathcal{E}_3 \right\}$$

mulțimea segmentelor orientate din $\mathcal{E}_3$ cu originea O.

$\mathbb{R}$-spațiul vectorial al segmentelor orientate

Notăm cu $\mathcal{E}_3$ mulțimea punctelor din spațiu și cu

$$\mathcal{E}_3^0 = \left\{ \overrightarrow{OA} \middle| \ A \in \mathcal{E}_3 \right\}$$

mulțimea segmentelor orientate din $\mathcal{E}_3$ cu originea O.
Vom nota cu $\left\| \overrightarrow{OA} \right\|$ mărimea (lungimea sau norma) segmentului orientat $\overrightarrow{OA}$.

$\mathbb{R}$-spațiul vectorial al segmentelor orientate

Se definesc operațiile:

$\mathbb{R}$-spațiul vectorial al segmentelor orientate

Se definesc operațiile:

- adunarea segmentelor orientate din $\mathcal{E}_3^0$:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} \quad \left(\text{sau } \vec{a} + \vec{b} = \vec{c}\right)$$

unde C este simetricul punctului O față de mijlocul segmentului $[AB]$

$\mathbb{R}$-spațiul vectorial al segmentelor orientate

Se definesc operațiile:

- adunarea segmentelor orientate din $\mathcal{E}_3^0$:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} \quad \left(\text{sau } \vec{a} + \vec{b} = \vec{c}\right)$$

  unde C este simetricul punctului O față de mijlocul segmentului $[AB]$

- înmulțirea cu scalari a segmentelor orientate din $\mathcal{E}_3^0$:

$$\lambda\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'} \quad \left(\text{sau } \lambda\vec{a} = \vec{a'}\right)$$

  unde $\overrightarrow{OA'}$ are același sens cu $\overrightarrow{OA}$ dacă $\lambda > 0$ și are sens opus lui $\overrightarrow{OA}$ dacă $\lambda < 0$

$\mathbb{R}$-spațiul vectorial al segmentelor orientate

Definiție

$\mathbb{R}$-spațiul vectorial al segmentelor orientate

Definiție

$(\mathcal{E}_3^0, +, \cdot)$ se numește $\mathbb{R}$-spațiul vectorial al vectorilor legați (sau $\mathbb{R}$-spațiul vectorial tangent la $\mathcal{E}_3$ în O).

$\mathbb{R}$-spațiul vectorial al segmentelor orientate

$\mathbb{R}$-spațiul vectorial al segmentelor orientate

- vectorii $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} \in \mathcal{E}_3^0$ sunt liniar dependenți dacă și numai dacă ei sunt coplanari.

$\mathbb{R}$-spațiul vectorial al segmentelor orientate

- vectorii $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} \in \mathcal{E}_3^0$ sunt liniar dependenți dacă și numai dacă ei sunt coplanari.

În acest caz avem

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} =$$
$$= a \cdot \overrightarrow{OA} + b \cdot \overrightarrow{OB}$$

$\mathbb{R}$-spațiul vectorial al segmentelor orientate

$\mathbb{R}$-spațiul vectorial al segmentelor orientate

- sistemul de vectori $\left\{\overrightarrow{OB}_1; \overrightarrow{OB}_2; \overrightarrow{OB}_3\right\}$ este o bază în $\mathcal{E}_3^0$ dacă și numai dacă vectorii $\overrightarrow{OB}_1, \overrightarrow{OB}_2, \overrightarrow{OB}_3$ sunt necoplanari.

$\mathbb{R}$-spațiul vectorial al segmentelor orientate

- sistemul de vectori $\left\{\overrightarrow{OB}_1; \overrightarrow{OB}_2; \overrightarrow{OB}_3\right\}$ este o bază în $\mathcal{E}_3^0$ dacă și numai dacă vectorii $\overrightarrow{OB}_1, \overrightarrow{OB}_2, \overrightarrow{OB}_3$ sunt necoplanari.

În acest caz, pentru un vector $\vec{a} = \overrightarrow{OA} \in \mathcal{E}_3^0$ avem:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} =$$

$$= a^1 \cdot \overrightarrow{OB}_1 + a^2 \cdot \overrightarrow{OB}_2 + a^3 \cdot \overrightarrow{OB}_3$$

$\mathbb{R}$-spațiul vectorial al segmentelor orientate

- sistemul de vectori $\left\{\overrightarrow{OB}_1; \overrightarrow{OB}_2; \overrightarrow{OB}_3\right\}$ este o bază în $\mathcal{E}_3^0$ dacă și numai dacă vectorii $\overrightarrow{OB}_1, \overrightarrow{OB}_2, \overrightarrow{OB}_3$ sunt necoplanari.

În acest caz, pentru un vector $\vec{a} = \overrightarrow{OA} \in \mathcal{E}_3^0$ avem:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OA}_3 = \overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2 + \overrightarrow{OA}_3 =$$

$$= a^1 \cdot \overrightarrow{OB}_1 + a^2 \cdot \overrightarrow{OB}_2 + a^3 \cdot \overrightarrow{OB}_3$$

Definiție

$\mathbb{R}$-spațiul vectorial al segmentelor orientate

- sistemul de vectori $\left\{\overrightarrow{OB}_1; \overrightarrow{OB}_2; \overrightarrow{OB}_3\right\}$ este o bază în $\mathcal{E}_3^0$ dacă și numai dacă vectorii $\overrightarrow{OB}_1, \overrightarrow{OB}_2, \overrightarrow{OB}_3$ sunt necoplanari.

În acest caz, pentru un vector $\vec{a} = \overrightarrow{OA} \in \mathcal{E}_3^0$ avem:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OA}_3 = \overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2 + \overrightarrow{OA}_3 =$$

$$= a^1 \cdot \overrightarrow{OB}_1 + a^2 \cdot \overrightarrow{OB}_2 + a^3 \cdot \overrightarrow{OB}_3$$

Definiție

Scalarii $a^1, a^2, a^3 \in \mathbb{R}$ se numesc coordonatele vectorului $\vec{a} = \overrightarrow{OA} \in \mathcal{E}_3^0$ în raport cu baza $B = \left\{\overrightarrow{OB}_1; \overrightarrow{OB}_2; \overrightarrow{OB}_3\right\}$.

$\mathbb{R}$-spațiul vectorial al segmentelor orientate

Definiție

$\mathbb{R}$-spațiul vectorial al segmentelor orientate

Definiție

Aplicația

$$\langle \cdot \,/\, \cdot \rangle : \mathcal{E}_3^O \times \mathcal{E}_3^O \to \mathbb{R}$$

definită prin

$$\left\langle \vec{a}/\vec{b} \right\rangle = \begin{cases} \|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{a}/\vec{b}}\right) & \text{, dacă } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ și } \vec{b} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{, dacă } \vec{a} = \vec{0} \text{ sau } \vec{b} = \vec{0} \end{cases}$$

se numește produs scalar pe $\mathcal{E}_3^O$ împreună cu care $\mathcal{E}_3^O$ este un spațiu vectorial euclidian.

$\mathbb{R}$-spațiul vectorial al segmentelor orientate

Fie $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB} \neq \vec{0}$ doi vectori și A' proiecția ortogonală a punctului A pe dreapta OB.

$\mathbb{R}$-spațiul vectorial al segmentelor orientate

Fie $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB} \neq \vec{0}$ doi vectori și A' proiecția ortogonală a punctului A pe dreapta OB.
În triunghiul dreptunghic AOA' avem

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) = \frac{\left\|\overrightarrow{OA'}\right\|}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\|} \quad ,$$

sau

$$\left\|\overrightarrow{OA'}\right\| = \left\|\overrightarrow{OA}\right\| \cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) \quad .$$

$\mathbb{R}$-spațiul vectorial al segmentelor orientate

Definiție

$\mathbb{R}$-spațiul vectorial al segmentelor orientate

Definiție

Se numește proiecție ortogonală a vectorului $\vec{a}$ pe vectorul nenul $\vec{b}$ numărul real definit prin:

$$pr_{\vec{b}}\vec{a} = \|\vec{a}\| \cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) \quad .$$

$\mathbb{R}$-spațiul vectorial al segmentelor orientate

Definiție

Se numește proiecție ortogonală a vectorului $\vec{a}$ pe vectorul nenul $\vec{b}$ numărul real definit prin:

$$pr_{\vec{b}}\vec{a} = \|\vec{a}\| \cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) \quad .$$

$$pr_{\vec{b}}\vec{a} = \|\vec{a}\| \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \|\vec{a}\| \frac{\left\langle \vec{a}/\vec{b} \right\rangle}{\|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\|} = \frac{\left\langle \vec{a}/\vec{b} \right\rangle}{\left\|\vec{b}\right\|} \quad .$$

Repere carteziene

Repere carteziene

Fie $\mathcal{E}_3^0$ $\mathbb{R}$-spațiul vectorial euclidian al vectorilor legați.

Repere carteziene

Fie $\mathcal{E}_3^0$ $\mathbb{R}$-spațiul vectorial euclidian al vectorilor legați.
Din teorema lui Gramm-Schmidt, rezultă că în $\mathcal{E}_3^0$ există o bază ortonormată

$$E = \left\{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right\}$$

Repere carteziene

Fie $\mathcal{E}_3^0$ $\mathbb{R}$-spațiul vectorial euclidian al vectorilor legați.
Din teorema lui Gramm-Schmidt, rezultă că în $\mathcal{E}_3^0$ există o bază ortonormată

$$E = \left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$$

Definiție

Repere carteziene

Fie $\mathcal{E}_3^0$ $\mathbb{R}$-spațiul vectorial euclidian al vectorilor legați.
Din teorema lui Gramm-Schmidt, rezultă că în $\mathcal{E}_3^0$ există o bază ortonormată

$$E = \left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$$

Definiție

Se numește reper cartezian în $\mathcal{E}_3^0$ ansamblul $\left\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$.

Repere carteziene

Fie $\mathcal{E}_3^0$ $\mathbb{R}$-spațiul vectorial euclidian al vectorilor legați.
Din teorema lui Gramm-Schmidt, rezultă că în $\mathcal{E}_3^0$ există o bază ortonormată

$$E = \left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$$

Definiție

Se numește reper cartezian în $\mathcal{E}_3^0$ ansamblul $\left\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$.
Direcțiile versorilor $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ generează un sistem de axe perpendiculare Ox, Oy, Oz.

Repere carteziene

Fie $\mathcal{E}_3^0$ $\mathbb{R}$-spațiul vectorial euclidian al vectorilor legați.
Din teorema lui Gramm-Schmidt, rezultă că în $\mathcal{E}_3^0$ există o bază ortonormată

$$E = \left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$$

Definiție

Se numește reper cartezian în $\mathcal{E}_3^0$ ansamblul $\left\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$.
Direcțiile versorilor $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ generează un sistem de axe perpendiculare Ox, Oy, Oz.
O se numește originea reperului, dreptele Ox, Oy, Oz se numesc axe de coordonate iar planele Oxy, Oxz, Oyz se numesc plane de coordonate.

Repere carteziene

Definiție

Repere carteziene

Definiție

- Spunem că sistemul de axe $Oxyz$ este direct orientat dacă un observator așezat după axa Oz vede axele Ox, Oy în sens trigonometric direct (invers rotației acelor de ceas).

Repere carteziene

Definiție

- Spunem că sistemul de axe $Oxyz$ este direct orientat dacă un observator așezat după axa Oz vede axele Ox, Oy în sens trigonometric direct (invers rotației acelor de ceas).
- Spunem că sistemul de axe $Oxyz$ este invers orientat dacă un observator așezat după axa Oz vede axele Ox, Oy în sens trigonometric invers (sensul rotației acelor de ceas).

Repere carteziene

Definiție

- Spunem că sistemul de axe $Oxyz$ este direct orientat dacă un observator așezat după axa Oz vede axele Ox, Oy în sens trigonometric direct (invers rotației acelor de ceas).
- Spunem că sistemul de axe $Oxyz$ este invers orientat dacă un observator așezat după axa Oz vede axele Ox, Oy în sens trigonometric invers (sensul rotației acelor de ceas).

În raport cu reperul cartezian $\left\{O;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right\}$, orice vector $\vec{a} = \overrightarrow{OA} \in \mathcal{E}_3^0$ admite o scriere unică de forma:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

numită *expresie analitică a vectorului $\vec{a}$*.

Repere carteziene

Dacă $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ și $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ sunt doi vectori dați prin expresiile lor analitice, atunci

Repere carteziene

Dacă $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ și $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ sunt doi vectori dați prin expresiile lor analitice, atunci

- produsul scalar al vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ are expresia analitică:

$$\left\langle \vec{a}/\vec{b} \right\rangle = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Repere carteziene

Dacă $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ și $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ sunt doi vectori dați prin expresiile lor analitice, atunci

- produsul scalar al vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ are expresia analitică:

$$\left\langle \vec{a}/\vec{b} \right\rangle = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

- norma lui $\vec{a}$ este dată prin:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Repere carteziene

Definiție

Repere carteziene

Definiție

Se numește vector de poziție al unui punct $M \in \mathcal{E}_3$ în raport cu reperul cartezian $\left\{O;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right\}$ vectorul $\vec{r} = \overrightarrow{OM} \in \mathcal{E}_3^0$.

Repere carteziene

Definiție

Se numește vector de poziție al unui punct $M \in \mathcal{E}_3$ în raport cu reperul cartezian $\left\{O;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right\}$ vectorul $\vec{r} = \overrightarrow{OM} \in \mathcal{E}_3^0$.
Numerele

$$x_M = pr_{\vec{i}}\vec{r}, \quad y_M = pr_{\vec{j}}\vec{r}, \quad z_M = pr_{\vec{k}}\vec{r}$$

se numesc coordonate carteziene ale punctului M.

Repere carteziene

Definiție

Se numește vector de poziție al unui punct $M \in \mathcal{E}_3$ în raport cu reperul cartezian $\left\{O;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right\}$ vectorul $\vec{r} = \overrightarrow{OM} \in \mathcal{E}_3^0$.

Numerele

$$x_M = pr_{\vec{i}}\vec{r}, \quad y_M = pr_{\vec{j}}\vec{r}, \quad z_M = pr_{\vec{k}}\vec{r}$$

se numesc coordonate carteziene ale punctului M.

x_M este abscisa, y_M este ordonata și z_M este cota punctului M și se notează $M\left(x_M, y_M, z_M\right)$.

Repere carteziene

Definiție

Se numește vector de poziție al unui punct $M \in \mathcal{E}_3$ în raport cu reperul cartezian $\left\{O;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right\}$ vectorul $\vec{r} = \overrightarrow{OM} \in \mathcal{E}_3^0$.
Numerele

$$x_M = pr_{\vec{i}}\vec{r}, \quad y_M = pr_{\vec{j}}\vec{r}, \quad z_M = pr_{\vec{k}}\vec{r}$$

se numesc coordonate carteziene ale punctului M.
x_M este abscisa, y_M este ordonata și z_M este cota punctului M și se notează $M\left(x_M, y_M, z_M\right)$.

Are loc egalitatea:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x_M\vec{i} + y_M\vec{j} + z_M\vec{k} \quad .$$

Repere carteziene

Dacă punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ are vectorul de poziție $\vec{r_0} = \overrightarrow{OM_0} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$, atunci:

$$\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r_0} = (x_M - x_{M_0})\,\vec{i} + (y_M - y_{M_0})\,\vec{j} + (z_M - z_{M_0})\,\vec{k} \quad .$$

Repere carteziene

Axele de coordonate au următoarele ecuații carteziene:

$$Ox: \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$Oy: \quad \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$Oz: \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Repere carteziene

Planele de coordonate sunt caracterizate de ecuațiile carteziene:

$$Oxy: \quad z = 0$$

$$Oxz: \quad y = 0$$

$$Oyz: \quad x = 0$$

Translația

Translația

Reperul $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ supus unei translații $\mathcal{T}$ devine $\{O'; \vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}\}$ unde

$$O' = \mathcal{T}(O)$$

$$\vec{i'} = \mathcal{T}\left(\vec{i}\right) = \vec{i}$$

$$\vec{j'} = \mathcal{T}\left(\vec{j}\right) = \vec{j}$$

$$\vec{k'} = \mathcal{T}\left(\vec{k}\right) = \vec{k}$$

Translația

Fie $O'(a, b, c)$ în raport cu $Oxyz$. Ne propunem să stabilim relațiile între coordonatele x_M, y_M, z_M ale unui punct M raportat la sistemul de axe $Oxyz$ și coordonatele x'_M, y'_M, z'_M ale aceluiași punct raportat la sistemul translatat $O'x'y'z'$.

Translația

Fie $O'(a, b, c)$ în raport cu $Oxyz$. Ne propunem să stabilim relațiile între coordonatele x_M, y_M, z_M ale unui punct M raportat la sistemul de axe $Oxyz$ și coordonatele $x_M^{'}$, $y_M^{'}$, $z_M^{'}$ ale aceluiași punct raportat la sistemul translatat $O^{'}x^{'}y^{'}z^{'}$.
Observăm că:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO^{'}} + \overrightarrow{O^{'}M}$$

Translația

Fie $O'(a,b,c)$ în raport cu $Oxyz$. Ne propunem să stabilim relațiile între coordonatele x_M, y_M, z_M ale unui punct M raportat la sistemul de axe $Oxyz$ și coordonatele $x_M^{'}$, $y_M^{'}$, $z_M^{'}$ ale aceluiași punct raportat la sistemul translatat $O^{'}x^{'}y^{'}z^{'}$.
Observăm că:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO^{'}} + \overrightarrow{O^{'}M}$$

de unde obținem

$$\begin{cases} x_M = x_M^{'} + a \\ y_M = y_M^{'} + b \\ z_M = z_M^{'} + c \end{cases}.$$

Translația

Sub forma matricială:

$$\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_M \\ y'_M \\ z'_M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad .$$

Rotația

Rotația

Definiție

Rotația

Definiție

Un operator liniar $\mathcal{R} : \mathcal{E}^3 \to \mathcal{E}^3$ asociat unei matrici ortogonale A se numește rotație dacă $detA = 1$.

Rotația

Definiție

Un operator liniar $\mathcal{R} : \mathcal{E}^3 \to \mathcal{E}^3$ asociat unei matrici ortogonale A se numește rotație dacă $detA = 1$.

Reperul $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ supus unei rotații $\mathcal{R}$ devine $\{O^{'}; \vec{i}^{'}, \vec{j}^{'}, \vec{k}^{'}\}$ unde

$$O^{'} = \mathcal{R}(O) = O$$

$$\vec{i}^{'} = \mathcal{R}\left(\vec{i}\right) = r_1^1 \vec{i} + r_1^2 \vec{j} + r_1^3 \vec{k}$$

$$\vec{j}^{'} = \mathcal{R}\left(\vec{j}\right) = r_2^1 \vec{i} + r_2^2 \vec{j} + r_2^3 \vec{k}$$

$$\vec{k}^{'} = \mathcal{R}\left(\vec{k}\right) = r_3^1 \vec{i} + r_3^2 \vec{j} + r_3^3 \vec{k}$$

Rotația

Fie

$$[\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\} \to \{\vec{i'},\vec{j'},\vec{k'}\}] = \begin{pmatrix} r_1^1 & r_2^1 & r_3^1 \\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 \\ r_1^3 & r_2^3 & r_3^3 \end{pmatrix}$$

matricea (ortogonală) de trecere de la baza ortonormată $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ la baza ortonormată $\{\vec{i'},\vec{j'},\vec{k'}\}$.

Rotația

Fie

$$[\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\} \to \{\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}'\}] = \begin{pmatrix} r_1^1 & r_2^1 & r_3^1 \\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 \\ r_1^3 & r_2^3 & r_3^3 \end{pmatrix}$$

matricea (ortogonală) de trecere de la baza ortonormată $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ la baza ortonormată $\{\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}'\}$.
Dacă

$$det[\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\} \to \{\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}'\}] = 1$$

atunci

$$[\mathcal{R}]_{\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}} = [\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\} \to \{\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}'\}]$$

este matricea asociată rotației $\mathcal{R}$ în raport cu baza $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$.

Rotația

Ne propunem să găsim legătura dintre coordonatele x_M, y_M, z_M ale punctului M raportat la sistemul $Oxyz$ și coordonatele $x_M^{'}$, $y_M^{'}$, $z_M^{'}$ ale aceluiași punct raportat la sistemul transformat $Ox^{'}y^{'}z^{'}$.

Rotația

Ne propunem să găsim legătura dintre coordonatele x_M, y_M, z_M ale punctului M raportat la sistemul $Oxyz$ și coordonatele x'_M, y'_M, z'_M ale aceluiași punct raportat la sistemul transformat $Ox'y'z'$.
Avem:

$$[\overrightarrow{OM}]_{\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}} = [\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\} \to \{\vec{i'},\vec{j'},\vec{k'}\}] \cdot [\overrightarrow{OM}]_{\{\vec{i'},\vec{j'},\vec{k'}\}}$$

Rotația

Ne propunem să găsim legătura dintre coordonatele x_M, y_M, z_M ale punctului M raportat la sistemul $Oxyz$ și coordonatele $x_M^{'}$, $y_M^{'}$, $z_M^{'}$ ale aceluiași punct raportat la sistemul transformat $Ox^{'}y^{'}z^{'}$.
Avem:

$$[\overrightarrow{OM}]_{\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}} = [\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\} \to \{\vec{i}^{'},\vec{j}^{'},\vec{k}^{'}\}] \cdot [\overrightarrow{OM}]_{\{\vec{i}^{'},\vec{j}^{'},\vec{k}^{'}\}}$$

deci

$$\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix} = [\mathcal{R}]_{\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}} \cdot \begin{pmatrix} x_M^{'} \\ y_M^{'} \\ z_M^{'} \end{pmatrix}$$

Produsul vectorial al segmentelor orientate

Produsul vectorial al segmentelor orientate

Fie $\mathcal{E}_3^0$ $\mathbb{R}$-spațiul vectorial euclidian al vectorilor legați.

Produsul vectorial al segmentelor orientate

Fie $\mathcal{E}_3^0$ $\mathbb{R}$-spațiul vectorial euclidian al vectorilor legați.

Definiție

Produsul vectorial al segmentelor orientate

Fie $\mathcal{E}_3^0$ $\mathbb{R}$-spațiul vectorial euclidian al vectorilor legați.

Definiție

Spunem că vectorul $\vec{d}$ este produsul vectorial al vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ (în această ordine) dacă:

Produsul vectorial al segmentelor orientate

Fie $\mathcal{E}_3^0$ $\mathbb{R}$-spațiul vectorial euclidian al vectorilor legați.

Definiție

Spunem că vectorul $\vec{d}$ este produsul vectorial al vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ (în această ordine) dacă:

1. $\vec{d}$ are direcția perpendiculară pe planul determinat de vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$;

Produsul vectorial al segmentelor orientate

Fie $\mathcal{E}_3^0$ $\mathbb{R}$-spațiul vectorial euclidian al vectorilor legați.

Definiție

Spunem că vectorul $\vec{d}$ este produsul vectorial al vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ (în această ordine) dacă:

1. $\vec{d}$ are direcția perpendiculară pe planul determinat de vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$;
2. $\vec{d}$ are sensul astfel încât sistemul de axe generat de vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$ să fie direct orientat (regula burghiului drept);

Produsul vectorial al segmentelor orientate

Fie $\mathcal{E}_3^0$ $\mathbb{R}$-spațiul vectorial euclidian al vectorilor legați.

Definiție

Spunem că vectorul $\vec{d}$ este produsul vectorial al vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ (în această ordine) dacă:

1. $\vec{d}$ are direcția perpendiculară pe planul determinat de vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$;
2. $\vec{d}$ are sensul astfel încât sistemul de axe generat de vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$ să fie direct orientat (regula burghiului drept);
3. $\vec{d}$ are norma egală cu aria paralelogramului determinat de vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$.

Produsul vectorial al segmentelor orientate

Fie $\mathcal{E}_3^0$ $\mathbb{R}$-spațiul vectorial euclidian al vectorilor legați.

Definiție

Spunem că vectorul $\vec{d}$ este produsul vectorial al vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ (în această ordine) dacă:

1. $\vec{d}$ are direcția perpendiculară pe planul determinat de vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$;
2. $\vec{d}$ are sensul astfel încât sistemul de axe generat de vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$ să fie direct orientat (regula burghiului drept);
3. $\vec{d}$ are norma egală cu aria paralelogramului determinat de vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$.

Se notează $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Produsul vectorial al segmentelor orientate

Aria paralelogramului determinat de vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ este:

$$\mathcal{S}_{[\vec{a},\vec{b}]} = \|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot \sin\widehat{\left(\vec{a},\vec{b}\right)} = \left\|\vec{d}\right\| \quad .$$

Produsul vectorial al segmentelor orientate

Aria paralelogramului determinat de vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ este:

$$\mathcal{S}_{[\vec{a},\vec{b}]} = \|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot \sin \widehat{\left(\vec{a}, \vec{b}\right)} = \left\|\vec{d}\right\| \quad .$$

Dacă $\vec{n}_0$ este un versor al direcției perpendiculare pe planul determinat de vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$, atunci:

$$\vec{d} = \|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot \sin \widehat{\left(\vec{a}, \vec{b}\right)} \cdot \vec{n}_0 \quad .$$

Produsul vectorial al segmentelor orientate

Teoremă

Produsul vectorial are următoarele proprietăți:

Produsul vectorial al segmentelor orientate

Teoremă

Produsul vectorial are următoarele proprietăți:

- dacă $\vec{a} = \vec{0}$ sau $\vec{b} = \vec{0}$, atunci $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$; dacă $\vec{a} \neq \vec{0}$ și $\vec{b} \neq \vec{0}$ atunci $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ dacă și numai dacă $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt coliniari;

Produsul vectorial al segmentelor orientate

Teoremă

Produsul vectorial are următoarele proprietăți:

- dacă $\vec{a} = \vec{0}$ sau $\vec{b} = \vec{0}$, atunci $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$; dacă $\vec{a} \neq \vec{0}$ și $\vec{b} \neq \vec{0}$ atunci $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ dacă și numai dacă $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt coliniari;
- dacă $\vec{a} || \vec{b}$, atunci $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$; în particular $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$;

Produsul vectorial al segmentelor orientate

Teoremă

Produsul vectorial are următoarele proprietăți:

- dacă $\vec{a} = \vec{0}$ sau $\vec{b} = \vec{0}$, atunci $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$; dacă $\vec{a} \neq \vec{0}$ și $\vec{b} \neq \vec{0}$ atunci $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ dacă și numai dacă $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt coliniari;
- dacă $\vec{a} || \vec{b}$, atunci $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$; în particular $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$;
- pentru orice $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{E}_3^0$ are loc egalitatea:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad ;$$

Produsul vectorial al segmentelor orientate

- pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$ și orice $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{E}_3^0$, au loc egalitățile:

$$\lambda \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = (\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(\lambda \cdot \vec{b}\right) \quad ;$$

Produsul vectorial al segmentelor orientate

- pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$ și orice $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{E}_3^0$, au loc egalitățile:

$$\lambda \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = (\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(\lambda \cdot \vec{b}\right) \quad ;$$

- pentru orice $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathcal{E}_3^0$, are loc egalitatea:

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) + (\vec{a} \times \vec{c}) \quad .$$

Produsul vectorial al segmentelor orientate

Definiție

Produsul vectorial al segmentelor orientate

Definiție

Fie $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$ și $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$.

Produsul vectorial al segmentelor orientate

Definiție

Fie $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$ și $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) \cdot \vec{i} + (a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z) \cdot \vec{j} + (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x) \cdot \vec{k}$$

se numește expresie analitică a produsului vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$.

Produsul vectorial al segmentelor orientate

Definiție

Fie $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$ și $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) \cdot \vec{i} + (a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z) \cdot \vec{j} + (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x) \cdot \vec{k}$$

se numește expresie analitică a produsului vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$.

Expresia analitică a produsului vectorial se poate scrie formal ca un determinant

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Produsul mixt al segmentelor orientate

Produsul mixt al segmentelor orientate

Definiție

Produsul mixt al segmentelor orientate

Definiție

Se numește produs mixt al vectorilor $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ numărul real

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \left\langle \vec{a} / \vec{b} \times \vec{c} \right\rangle \quad .$$

Produsul mixt al segmentelor orientate

Definiție

Se numește produs mixt al vectorilor $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ numărul real

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \left\langle \vec{a} / \vec{b} \times \vec{c} \right\rangle \quad .$$

Teoremă

Produsul mixt al segmentelor orientate

Definiție

Se numește produs mixt al vectorilor $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ numărul real

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \left\langle \vec{a} / \vec{b} \times \vec{c} \right\rangle \quad .$$

Teoremă

Valoarea absolută a produsului mixt al vectorilor $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ este egală cu volumul paralelipipedului determinat de cei trei vectori.

Produsul mixt al segmentelor orientate

Definiție

Se numește produs mixt al vectorilor $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ numărul real

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \left\langle \vec{a} / \vec{b} \times \vec{c} \right\rangle \quad .$$

Teoremă

Valoarea absolută a produsului mixt al vectorilor $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ este egală cu volumul paralelipipedului determinat de cei trei vectori.

Condiția de coplanaritate a trei vectori:

Produsul mixt al segmentelor orientate

Definiție

Se numește produs mixt al vectorilor $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ numărul real

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \left\langle \vec{a} / \vec{b} \times \vec{c} \right\rangle \quad .$$

Teoremă

Valoarea absolută a produsului mixt al vectorilor $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ este egală cu volumul paralelipipedului determinat de cei trei vectori.

Condiția de coplanaritate a trei vectori:

$$\left\langle \vec{a} / \vec{b} \times \vec{c} \right\rangle = 0$$

Produsul mixt al segmentelor orientate

Fie $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$ și $\vec{c} = c_x \cdot \vec{i} + c_y \cdot \vec{j} + c_z \cdot \vec{k}$. Atunci:

Produsul mixt al segmentelor orientate

Fie $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$ și $\vec{c} = c_x \cdot \vec{i} + c_y \cdot \vec{j} + c_z \cdot \vec{k}$. Atunci:

$$\left\langle \vec{a} / \vec{b} \times \vec{c} \right\rangle = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} .$$

Parametrii directori ai unei drepte

Parametrii directori ai unei drepte

Definiție

Parametrii directori ai unei drepte

Definiție

Se numește vector director al unei drepte (d) orice vector nenul

$$\vec{a} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$$

coliniar sau paralel cu dreapta (d).

Parametrii directori ai unei drepte

Definiție

Se numește vector director al unei drepte (d) orice vector nenul

$$\vec{a} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$$

coliniar sau paralel cu dreapta (d).
Numerele l, m, n se numesc parametrii directori ai dreptei (d).

Parametrii directori ai unei drepte

Definiție

Se numește vector director al unei drepte (d) orice vector nenul

$$\vec{a} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$$

coliniar sau paralel cu dreapta (d).
Numerele l, m, n se numesc parametrii directori ai dreptei (d).

Unui vector director $\vec{a} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$ i se poate asocia un vector unitar

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

numit versor director.

Parametrii directori ai unei drepte

Versorul director formează cu axele de coordonate unghiurile α, β, γ numite unghiuri directoare ale dreptei (d).

Parametrii directori ai unei drepte

Versorul director formează cu axele de coordonate unghiurile α, β, γ numite unghiuri directoare ale dreptei (d).
Au loc următoarele egalități:

$$\cos\alpha = \frac{\left\|\overrightarrow{OP_x}\right\|}{\left\|\overrightarrow{OP}\right\|} = \left\|\overrightarrow{OP_x}\right\| = pr_{\vec{i}}\vec{e}$$

$$\cos\beta = \frac{\left\|\overrightarrow{OP_y}\right\|}{\left\|\overrightarrow{OP}\right\|} = \left\|\overrightarrow{OP_y}\right\| = pr_{\vec{j}}\vec{e}$$

$$\cos\gamma = \frac{\left\|\overrightarrow{OP_z}\right\|}{\left\|\overrightarrow{OP}\right\|} = \left\|\overrightarrow{OP_z}\right\| = pr_{\vec{k}}\vec{e} \quad .$$

Parametrii directori ai unei drepte

Definiție

Parametrii directori ai unei drepte

Definiție

Numerele $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ se numesc cosinuși directori ai dreptei (d).

Parametrii directori ai unei drepte

Definiție

Numerele $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ se numesc cosinuși directori ai dreptei (d).

Are loc egalitatea

$$\vec{e} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + cos\gamma\vec{k}$$

și deoarece $\|\vec{e}\| = 1$, rezultă

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad .$$

Dreapta determinată de un punct și un vector

Dreapta determinată de un punct și un vector

Teoremă

Dreapta determinată de un punct și un vector

Teoremă

Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct și $\vec{a} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$ un vector oarecare. Atunci dreapta $(M_0; \vec{a})$ care trece prin M_0 și are direcția $\vec{a}$ are ecuațiile carteziene:

$$(M_0; \vec{a}) : \quad \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

Dreapta determinată de un punct și un vector

Definiție

Dreapta determinată de un punct și un vector

Definiție

Relațiile:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda l \\ y = y_0 + \lambda m \\ z = z_0 + \lambda n \end{cases}$$

unde $\lambda \in \mathbb{R}$, se numesc ecuații parametrice ale dreptei $(M_0; \vec{a})$.

Dreapta determinată de două puncte distincte

Dreapta determinată de două puncte distincte

Teoremă

Dreapta determinată de două puncte distincte

Teoremă

Fie $M_1(x_1, y_1, z_1)$ și $M_2(x_2, y_2, z_2)$ două puncte distincte. Dreapta (M_1M_2) determinată de punctele M_1 și M_2 are ecuațiile carteziene:

$$(M_1M_2): \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad .$$

Dreapta determinată de două puncte distincte

Definiție

Dreapta determinată de două puncte distincte

Definiție

Relațiile:

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda \cdot (x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda \cdot (y_2 - y_1) \\ z = z_1 + \lambda \cdot (z_2 - z_1) \end{cases}$$

unde $\lambda \in \mathbb{R}$, se numesc ecuații parametrice ale dreptei determinate de punctele distincte M_1 și M_2.

Dreapta determinată de două puncte distincte

Definiție

Relațiile:

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda \cdot (x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda \cdot (y_2 - y_1) \\ z = z_1 + \lambda \cdot (z_2 - z_1) \end{cases}$$

unde $\lambda \in \mathbb{R}$, se numesc ecuații parametrice ale dreptei determinate de punctele distincte M_1 și M_2.

Trei puncte sunt coliniare dacă coordonatele unuia verifică ecuațiile dreptei determinate de celelalte două.

Ecuația generală a unui plan

Ecuația generală a unui plan

Definiție

Ecuația generală a unui plan

Definiție

Se numește normală la un plan (π) orice dreaptă (N) perpendiculară pe planul (π).

Ecuația generală a unui plan

Definiție

Se numește normală la un plan (π) orice dreaptă (N) perpendiculară pe planul (π).

Teoremă

Ecuația generală a unui plan

Definiție

Se numește normală la un plan (π) orice dreaptă (N) perpendiculară pe planul (π).

Teoremă

Fie $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ un punct situat într-un plan (π) și $\vec{n} = A \cdot \vec{i} + B \cdot \vec{j} + C \cdot \vec{k}$ vectorul director al normalei (N) la planul (π). Atunci planul (π) are ecuația carteziană

$$(\pi) : \qquad Ax + By + Cz + D = 0$$

unde $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

Ecuația generală a unui plan

Definiție

Ecuația generală a unui plan

Definiție

Ecuația

$$(\pi): \quad A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$$

se numește ecuația generală a planului (π).

Ecuația generală a unui plan

Definiție

Ecuația

$$(\pi): \quad A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$$

se numește ecuația generală a planului (π).

Normala la planul:

$$(\pi): \quad A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$$

într-un punct $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right) \in (\pi)$ are ecuațiile carteziene:

$$(N): \quad \frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C} \quad .$$

Ecuația normală a unui plan

Ecuația normală a unui plan

Fie (π) un plan și $\overrightarrow{OP}$, $P \in (\pi)$ vectorul director al normalei (N) la planul (π) care trece prin origine, astfel încât $\left\| \overrightarrow{OP} \right\| = p \neq 0$.

Notăm cu $\vec{e}_N = \frac{\overrightarrow{OP}}{\left\| \overrightarrow{OP} \right\|}$ versorul director al normalei (N) la planul (π) și cu $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ cosinușii directori ai normalei (N) la planul (π).

Ecuația normală a unui plan

Fie (π) un plan și $\overrightarrow{OP}$, $P \in (\pi)$ vectorul director al normalei (N) la planul (π) care trece prin origine, astfel încât $\left\|\overrightarrow{OP}\right\| = p \neq 0$.

Notăm cu $\vec{e}_N = \frac{\overrightarrow{OP}}{\left\|\overrightarrow{OP}\right\|}$ versorul director al normalei (N) la planul (π) și cu $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ cosinușii directori ai normalei (N) la planul (π).

Definiție

Ecuația normală a unui plan

Fie (π) un plan și $\overrightarrow{OP}$, $P \in (\pi)$ vectorul director al normalei (N) la planul (π) care trece prin origine, astfel încât $\left\|\overrightarrow{OP}\right\| = p \neq 0$.

Notăm cu $\vec{e}_N = \dfrac{\overrightarrow{OP}}{\left\|\overrightarrow{OP}\right\|}$ versorul director al normalei (N) la planul (π) și cu $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ cosinușii directori ai normalei (N) la planul (π).

Definiție

Expresia:

$$(\pi): \quad \cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z - p = 0$$

se numește ecuație normală a planului (π).

Ecuația normală a unui plan

Fie (π) un plan caracterizat prin ecuația generală:

$$(\pi): \quad A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$$

și prin ecuația normală:

$$(\pi): \quad \cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z - p = 0 \quad .$$

Ecuația normală a unui plan

Fie (π) un plan caracterizat prin ecuația generală:

$$(\pi): \quad A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$$

și prin ecuația normală:

$$(\pi): \quad \cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z - p = 0 \quad .$$

Coeficienții ecuațiilor trebuie să fie proporționali.

Ecuația normală a unui plan

Fie (π) un plan caracterizat prin ecuația generală:

$$(\pi): \quad A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$$

și prin ecuația normală:

$$(\pi): \quad \cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z - p = 0 \quad .$$

Coeficienții ecuațiilor trebuie să fie proporționali.
Fie λ factorul de proporționalitate. Atunci:

Ecuația normală a unui plan

Fie (π) un plan caracterizat prin ecuația generală:

$$(\pi): \quad A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$$

și prin ecuația normală:

$$(\pi): \quad \cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z - p = 0 \quad .$$

Coeficienții ecuațiilor trebuie să fie proporționali.
Fie λ factorul de proporționalitate. Atunci:

$$\cos\alpha = \lambda \cdot A$$

$$\cos\beta = \lambda \cdot B$$

$$\cos\gamma = \lambda \cdot C$$

Ecuația normală a unui plan

Din aceste relații se obține:

Ecuația normală a unui plan

Din aceste relații se obține:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \lambda^2 \cdot (A^2 + B^2 + C^2)$$

Ecuația normală a unui plan

Din aceste relații se obține:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \lambda^2 \cdot \left(A^2 + B^2 + C^2\right)$$

Deci

$$\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad .$$

Ecuația normală a unui plan

Din aceste relații se obține:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \lambda^2 \cdot \left(A^2 + B^2 + C^2\right)$$

Deci

$$\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad .$$

Așadar ecuația generală a planului (π) se poate aduce la forma normală:

$$(\pi): \quad \frac{A\cdot x + B\cdot y + C\cdot z + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

unde semnul $"+"$ sau $"-"$ se ia opus semnului lui D.

Ecuația normală a unui plan

Din cele de mai sus rezultă cosinușii directori ai normalei la planul (π):

Ecuația normală a unui plan

Din cele de mai sus rezultă cosinușii directori ai normalei la planul (π):

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Ecuațiile generale ale unei drepte

Ecuațiile generale ale unei drepte

Considerăm planele:

$$(\pi_1): \quad A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0$$

$$(\pi_2): \quad A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0$$

Ecuațiile generale ale unei drepte

Considerăm planele:

$$(\pi_1): \quad A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0$$

$$(\pi_2): \quad A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0$$

Definiție

Ecuațiile generale ale unei drepte

Considerăm planele:

$$(\pi_1): \quad A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0$$

$$(\pi_2): \quad A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0$$

Definiție

Dreapta (d) determinată de intersecția planelor (π_1), (π_2) are ecuațiile:

$$(d): \quad \begin{cases} A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0 \\ A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0 \end{cases}$$

numite *ecuații generale* ale dreptei (d).

Ecuațiile generale ale unei drepte

Dacă $\vec{n}_1$ și $\vec{n}_2$ sunt vectorii directori ai normalelor la planele (π_1) și, respectiv, (π_2), atunci vectorul director al dreptei (d) este

Ecuațiile generale ale unei drepte

Dacă $\vec{n}_1$ și $\vec{n}_2$ sunt vectorii directori ai normalelor la planele (π_1) și, respectiv, (π_2), atunci vectorul director al dreptei (d) este

$$\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} .$$

Planul determinat de trei puncte necoliniare

Planul determinat de trei puncte necoliniare

Teoremă

Planul determinat de trei puncte necoliniare

Teoremă

Planul (π) determinat de punctele necoliniare $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ are ecuația carteziaă :

$$(\pi) : \quad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

Planul determinat de trei puncte necoliniare

Punctele $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, $M_4(x_4, y_4, z_4)$ sunt coplanare dacă coordonatele unuia verifică ecuația planului determinat de celelalte trei, adică:

$$\begin{vmatrix} x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

Planul determinat de trei puncte necoliniare

Fie $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ punctele în care un plan (π) intersectează axele de coordonate, numite *tăieturi*.

Planul determinat de trei puncte necoliniare

Fie $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ punctele în care un plan (π) intersectează axele de coordonate, numite *tăieturi*.
Atunci ecuația planului (π) prin tăieturi este:

$$(\pi): \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0 \quad .$$

Planul determinat de două drepte concurente

Planul determinat de două drepte concurente

Teoremă

Planul determinat de două drepte concurente

Teoremă

Fie

$$(d_1): \quad \frac{x - x_0}{l_1} = \frac{y - y_0}{m_1} = \frac{z - z_0}{n_1}$$

și

$$(d_2): \quad \frac{x - x_0}{l_2} = \frac{y - y_0}{m_2} = \frac{z - z_0}{n_2}$$

două drepte concurente în punctul $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$.

Planul determinat de două drepte concurente

Teoremă

Fie

$$(d_1): \quad \frac{x-x_0}{l_1} = \frac{y-y_0}{m_1} = \frac{z-z_0}{n_1}$$

și

$$(d_2): \quad \frac{x-x_0}{l_2} = \frac{y-y_0}{m_2} = \frac{z-z_0}{n_2}$$

două drepte concurente în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$.
Planul (π) determinat de dreptele (d_1) și (d_2) are ecuația carteziană:

$$(\pi): \quad \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

Planul determinat de o dreaptă și un punct exterior ei

Planul determinat de o dreaptă și un punct exterior ei

Teoremă

Planul determinat de o dreaptă și un punct exterior ei

Teoremă

Fie

$$(d): \quad \frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$

o dreaptă care trece printr-un punct $M_1(x_1, y_1, z_1)$ și $M_2(x_2, y_2, z_2)$ un punct nesituat pe dreapta (d).

Planul determinat de o dreaptă și un punct exterior ei

Teoremă

Fie

$$(d): \quad \frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

o dreaptă care trece printr-un punct $M_1(x_1,y_1,z_1)$ și $M_2(x_2,y_2,z_2)$ un punct nesituat pe dreapta (d).
Planul (M_2,d) determinat de punctul M_2 și dreapta (d) are ecuația carteziană:

$$(M_2,d): \quad \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0$$

Unghiul a două drepte

Unghiul a două drepte

Definiție

Unghiul a două drepte

Definiție

Se numește unghi al dreptelor (d_1) și (d_2), unghiul vectorilor directori ai celor două drepte.

Unghiul a două drepte

Definiție

Se numește unghi al dreptelor (d_1) și (d_2), unghiul vectorilor directori ai celor două drepte.

Teoremă

Unghiul a două drepte

Definiție

Se numește unghi al dreptelor (d_1) și (d_2), unghiul vectorilor directori ai celor două drepte.

Teoremă

Fie (d_1) și (d_2) două drepte care au vectorii directori $\vec{a}_1 = l_1\vec{i} + m_1\vec{j} + n_1\vec{k}$, respectiv, $\vec{a}_2 = l_2\vec{i} + m_2\vec{j} + n_2\vec{k}$.

Unghiul a două drepte

Definiție

Se numește unghi al dreptelor (d_1) și (d_2), unghiul vectorilor directori ai celor două drepte.

Teoremă

Fie (d_1) și (d_2) două drepte care au vectorii directori $\vec{a}_1 = l_1\vec{i} + m_1\vec{j} + n_1\vec{k}$, respectiv, $\vec{a}_2 = l_2\vec{i} + m_2\vec{j} + n_2\vec{k}$. Atunci:

$$\cos\left(\widehat{d_1, d_2}\right) = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} \quad .$$

Unghiul a două drepte

Definiție

Se numește unghi al dreptelor (d_1) și (d_2), unghiul vectorilor directori ai celor două drepte.

Teoremă

Fie (d_1) și (d_2) două drepte care au vectorii directori $\vec{a}_1 = l_1\vec{i} + m_1\vec{j} + n_1\vec{k}$, respectiv, $\vec{a}_2 = l_2\vec{i} + m_2\vec{j} + n_2\vec{k}$. Atunci:

$$\cos\left(\widehat{d_1, d_2}\right) = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

- $d_1 \perp d_2$ dacă și numai dacă $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$;

Unghiul a două drepte

Definiție

Se numește unghi al dreptelor (d_1) și (d_2), unghiul vectorilor directori ai celor două drepte.

Teoremă

Fie (d_1) și (d_2) două drepte care au vectorii directori $\vec{a}_1 = l_1\vec{i} + m_1\vec{j} + n_1\vec{k}$, respectiv, $\vec{a}_2 = l_2\vec{i} + m_2\vec{j} + n_2\vec{k}$. Atunci:

$$\cos\left(\widehat{d_1, d_2}\right) = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} \quad .$$

- $d_1 \perp d_2$ dacă și numai dacă $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$;
- $d_1 \parallel d_2$ dacă și numai dacă $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$.

Unghiul unei drepte cu un plan

Unghiul unei drepte cu un plan

Definiție

Unghiul unei drepte cu un plan

Definiție

Se numește unghi al dreptei (d) cu planul (π), complementul unghiului format de dreapta (d) și normala la planul (π).

Unghiul unei drepte cu un plan

Definiție

Se numește unghi al dreptei (d) cu planul (π), complementul unghiului format de dreapta (d) și normala la planul (π).

Teoremă

Unghiul unei drepte cu un plan

Definiție

Se numește unghi al dreptei (d) cu planul (π), complementul unghiului format de dreapta (d) și normala la planul (π).

Teoremă

Fie (d) o dreaptă având vectorul director $\vec{a} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$ și (π) un plan a cărui normală (N) are vectorul director
$\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$.

Unghiul unei drepte cu un plan

Definiție

Se numește unghi al dreptei (d) cu planul (π), complementul unghiului format de dreapta (d) și normala la planul (π).

Teoremă

Fie (d) o dreaptă având vectorul director $\vec{a} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$ și (π) un plan a cărui normală (N) are vectorul director $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$. Are loc egalitatea:

$$\sin\left(\widehat{d,\pi}\right) = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \quad .$$

Unghiul unei drepte cu un plan

Definiție

Se numește unghi al dreptei (d) cu planul (π), complementul unghiului format de dreapta (d) și normala la planul (π).

Teoremă

Fie (d) o dreaptă având vectorul director $\vec{a} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$ și (π) un plan a cărui normală (N) are vectorul director $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$. Are loc egalitatea:

$$\sin\left(\widehat{d,\pi}\right) = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

- $d \perp \pi$ dacă și numai dacă $d \parallel N$ sau $\frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}$;

Unghiul unei drepte cu un plan

Definiție

Se numește unghi al dreptei (d) cu planul (π), complementul unghiului format de dreapta (d) și normala la planul (π).

Teoremă

Fie (d) o dreaptă având vectorul director $\vec{a} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$ și (π) un plan a cărui normală (N) are vectorul director $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$. Are loc egalitatea:

$$\sin\left(\widehat{d,\pi}\right) = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \quad .$$

- $d \perp \pi$ dacă și numai dacă $d \parallel N$ sau $\frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}$;
- $d \parallel \pi$ dacă și numai dacă $d \perp N$ sau $Al + Bm + Cn = 0$.

Unghiul a două plane

Unghiul a două plane

Definiție

Unghiul a două plane

Definiție

Se numește unghi diedru al planelor (π_1), (π_2) unghiul format de normalele celor două plane.

Unghiul a două plane

Definiție

Se numește unghi diedru al planelor (π_1), (π_2) unghiul format de normalele celor două plane.

Teoremă

Unghiul a două plane

Definiție

Se numește unghi diedru al planelor (π_1), (π_2) unghiul format de normalele celor două plane.

Teoremă

Fie (π_1) și (π_2) două plane ale căror normale (N_1) și (N_2) au vectorii directori $\vec{n}_1 = A_1\vec{i} + B_1\vec{j} + C_1\vec{k}$, respectiv, $\vec{n}_2 = A_2\vec{i} + B_2\vec{j} + C_2\vec{k}$.

Unghiul a două plane

Definiție

Se numește unghi diedru al planelor (π_1), (π_2) unghiul format de normalele celor două plane.

Teoremă

Fie (π_1) și (π_2) două plane ale căror normale (N_1) și (N_2) au vectorii directori $\vec{n}_1 = A_1\vec{i} + B_1\vec{j} + C_1\vec{k}$, respectiv, $\vec{n}_2 = A_2\vec{i} + B_2\vec{j} + C_2\vec{k}$. Atunci:

$$\cos\left(\widehat{\pi_1, \pi_2}\right) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Unghiul a două plane

Definiție

Se numește unghi diedru al planelor (π_1), (π_2) unghiul format de normalele celor două plane.

Teoremă

Fie (π_1) și (π_2) două plane ale căror normale (N_1) și (N_2) au vectorii directori $\vec{n}_1 = A_1\vec{i} + B_1\vec{j} + C_1\vec{k}$, respectiv, $\vec{n}_2 = A_2\vec{i} + B_2\vec{j} + C_2\vec{k}$. Atunci:

$$\cos\left(\widehat{\pi_1, \pi_2}\right) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad .$$

- $\pi_1 \parallel \pi_2$ dacă și numai dacă $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$ sau $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$;

Unghiul a două plane

Definiție

Se numește unghi diedru al planelor (π_1), (π_2) unghiul format de normalele celor două plane.

Teoremă

Fie (π_1) și (π_2) două plane ale căror normale (N_1) și (N_2) au vectorii directori $\vec{n}_1 = A_1\vec{i} + B_1\vec{j} + C_1\vec{k}$, respectiv, $\vec{n}_2 = A_2\vec{i} + B_2\vec{j} + C_2\vec{k}$. Atunci:

$$\cos\left(\widehat{\pi_1, \pi_2}\right) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad .$$

- $\pi_1 \parallel \pi_2$ dacă și numai dacă $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$ sau $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$;
- $\pi_1 \perp \pi_2$ dacă și numai dacă $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Distanța de la un punct la o dreaptă

Distanța de la un punct la o dreaptă

Teoremă

Distanța de la un punct la o dreaptă

Teoremă

Fie (d) o dreaptă care trece printr-un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și care are vectorul director $\vec{a} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$.

Distanța de la un punct la o dreaptă

Teoremă

Fie (d) o dreaptă care trece printr-un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și care are vectorul director $\vec{a} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$.
Distanța de la un punct $M(x, y, z) \notin (d)$ la dreapta (d) este

$$dist(M, d) = \frac{\left\| \overrightarrow{M_0M} \times \vec{a} \right\|}{\|\vec{a}\|}.$$

Distanța de la un punct la un plan

Distanța de la un punct la un plan

Teoremă

Distanța de la un punct la un plan

Teoremă

Fie

$$(\pi) \quad : \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

un plan.

Distanța de la un punct la un plan

Teoremă

Fie

$$(\pi) \quad : \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

un plan.

Distanța de la un punct $P_0(x_0, y_0, z_0)$ la planul (π) este

$$dist(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Sfera

Sfera

Fie $\mathcal{E}_3$ mulțimea punctelor din spațiu, $\left\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ un reper cartezian în $\mathbb{R}$-spațiul vectorilor legați, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct fixat și $R > 0$ un număr real.

Sfera

Fie $\mathcal{E}_3$ mulțimea punctelor din spațiu, $\left\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$ un reper cartezian în $\mathbb{R}$-spațiul vectorilor legați, $M_0(x_0,y_0,z_0)$ un punct fixat și $R>0$ un număr real.

Definiție

Sfera

Fie $\mathcal{E}_3$ mulțimea punctelor din spațiu, $\left\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ un reper cartezian în $\mathbb{R}$-spațiul vectorilor legați, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct fixat și $R > 0$ un număr real.

Definiție

Se numește sferă de centru $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și rază $R > 0$, mulțimea

$$\mathcal{S}(M_0, R) = \{ M \in \mathcal{E}_3 \mid d(M, M_0) = R \} \quad ,$$

unde $d(M, M_0)$ este distanța de la punctul M la punctul M_0.

Sfera

Un punct $M(x, y, z)$ se găsește pe sfera $\mathcal{S}(M_0, R)$ dacă și numai dacă $d(M, M_0) = R$.

Sfera

Un punct $M(x, y, z)$ se găsește pe sfera $\mathcal{S}(M_0, R)$ dacă și numai dacă $d(M, M_0) = R$.
Așadar:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = R$$

Sfera

Un punct $M(x, y, z)$ se găsește pe sfera $\mathcal{S}(M_0, R)$ dacă și numai dacă $d(M, M_0) = R$.
Așadar:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = R$$

sau

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \quad .$$

Sfera

Definiție

Sfera

Definiție

Expresia

$$\mathcal{S}(M_0, R): \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

se numește ecuație carteziană implicită a sferei de centru $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și rază R.

Sfera

Definiție

Expresia

$$\mathcal{S}(M_0, R): \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

se numește ecuație carteziană implicită a sferei de centru $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și rază R.

Teoremă

Sfera

Definiție

Expresia

$$\mathcal{S}(M_0, R) : \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

se numește ecuație carteziană implicită a sferei de centru $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și rază R.

Teoremă

Ecuația:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0 \quad , \quad a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$$

reprezintă o sferă cu centrul $M_0(-a, -b, -c)$ și raza $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$ și se numește ecuație generală a sferei.

Elipsoidul

Elipsoidul

Fie $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ un reper cartezian în **R**-spațiul vectorial $\mathcal{E}_3^O$.

Elipsoidul

Fie $\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ un reper cartezian în **R**-spațiul vectorial $\mathcal{E}_3^O$.

Definiție

Elipsoidul

Fie $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ un reper cartezian în **R**-spațiul vectorial $\mathcal{E}_3^O$.

Definiție

Se numește elipsoid cuadrica $(\mathcal{E})$ de ecuație:

$$(\mathcal{E}) : \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad ; \quad a, b, c > 0 \quad .$$

Elipsoidul

Fie $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ un reper cartezian în **R**-spațiul vectorial $\mathcal{E}_3^O$.

Definiție

Se numește elipsoid cuadrica $(\mathcal{E})$ de ecuație:

$$(\mathcal{E}): \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad ; \quad a, b, c > 0 \quad .$$

Numerele reale strict pozitive a, b, c, se numesc semiaxe, iar punctele $A(a, 0, 0)$, $A'(-a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $B'(0, -b, 0)$, $C(0, 0, c)$ și $C'(0, 0, -c)$ se numesc vârfurile elipsoidului.

Elipsoidul

Fie $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ un reper cartezian în **R**-spațiul vectorial $\mathcal{E}_3^O$.

Definiție

Se numește elipsoid cuadrica $(\mathcal{E})$ de ecuație:

$$(\mathcal{E}) : \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad ; \quad a, b, c > 0 \quad .$$

Numerele reale strict pozitive a, b, c, se numesc semiaxe, iar punctele $A(a, 0, 0)$, $A'(-a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $B'(0, -b, 0)$, $C(0, 0, c)$ și $C'(0, 0, -c)$ se numesc vârfurile elipsoidului.

- punctul $O(0, 0, 0)$ este centrul de simetrie al elipsoidului.

Elipsoidul

Fie $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ un reper cartezian în **R**-spațiul vectorial $\mathcal{E}_3^O$.

Definiție

Se numește elipsoid cuadrica $(\mathcal{E})$ de ecuație:

$$(\mathcal{E}): \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad ; \quad a, b, c > 0 \quad .$$

Numerele reale strict pozitive a, b, c, se numesc semiaxe, iar punctele $A(a, 0, 0)$, $A'(-a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $B'(0, -b, 0)$, $C(0, 0, c)$ și $C'(0, 0, -c)$ se numesc vârfurile elipsoidului.

- punctul $O(0, 0, 0)$ este centrul de simetrie al elipsoidului.
- axele de coordonate sunt axe de simetrie ale elipsoidului

Elipsoidul

Fie $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ un reper cartezian în **R**-spațiul vectorial $\mathcal{E}_3^O$.

Definiție

Se numește elipsoid cuadrica $(\mathcal{E})$ de ecuație:

$$(\mathcal{E}) : \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad ; \quad a, b, c > 0 \quad .$$

Numerele reale strict pozitive a, b, c, se numesc semiaxe, iar punctele $A(a, 0, 0)$, $A'(-a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $B'(0, -b, 0)$, $C(0, 0, c)$ și $C'(0, 0, -c)$ se numesc vârfurile elipsoidului.

- punctul $O(0, 0, 0)$ este centrul de simetrie al elipsoidului.
- axele de coordonate sunt axe de simetrie ale elipsoidului
- planele de coordonate sunt plane de simetrie ale elipsoidului.

Elipsoidul

- Intersecțiile elipsoidului cu planele paralele cu xOy se determină rezolvând sistemul

$$\begin{cases} z = z_0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

Elipsoidul

- Intersecțiile elipsoidului cu planele paralele cu xOy se determină rezolvând sistemul

$$\begin{cases} z = z_0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

Dacă $z_0 \in (-c, c)$, se obțin elipsele

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{z_0^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{z_0^2}{c^2}\right)} = 1 \quad .$$

Elipsoidul

- Intersecțiile elipsoidului cu planele paralele cu yOz se determină rezolvând sistemul

$$\begin{cases} x = x_0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

Elipsoidul

- Intersecțiile elipsoidului cu planele paralele cu yOz se determină rezolvând sistemul

$$\begin{cases} x = x_0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

Dacă $x_0 \in (-a, a)$, se obțin elipsele

$$\frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right)} = 1 \quad .$$

Elipsoidul

- Intersecțiile elipsoidului cu planele paralele cu xOz se determină rezolvând sistemul

$$\begin{cases} y = y_0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

Elipsoidul

- Intersecțiile elipsoidului cu planele paralele cu xOz se determină rezolvând sistemul

$$\begin{cases} y = y_0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

Dacă $y_0 \in (-b, b)$, se obțin elipsele

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{y_0^2}{b^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - \frac{y_0^2}{b^2}\right)} = 1 \quad .$$

Hiperboloidul cu o pânză

Hiperboloidul cu o pânză

Definiție

Hiperboloidul cu o pânză

Definiție

Se numește hiperboloid cu o pânză cuadrica $(\mathcal{H}_1)$ de ecuație:

$$(\mathcal{H}_1): \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0 \quad , \quad a,\ b,\ c>0.$$

Hiperboloidul cu o pânză

Definiție

Se numește hiperboloid cu o pânză cuadrica $(\mathcal{H}_1)$ de ecuație:

$$(\mathcal{H}_1): \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0 \quad , \quad a,\ b,\ c>0.$$

Numerele a, b, c se numesc semiaxe iar punctele $A(a,0,0)$, $A'(-a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $B'(0,-b,0)$ se numesc vârfuri.

Hiperboloidul cu o pânză

Definiție

Se numește hiperboloid cu o pânză cuadrica $(\mathcal{H}_1)$ de ecuație:

$$(\mathcal{H}_1): \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad , \quad a,\ b,\ c > 0.$$

Numerele a, b, c se numesc semiaxe iar punctele $A(a, 0, 0)$, $A'(-a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $B'(0, -b, 0)$ se numesc vârfuri.

- punctul $O(0, 0, 0)$ este centrul de simetrie al hiperboloidului cu o pânză

Hiperboloidul cu o pânză

Definiție

Se numește hiperboloid cu o pânză cuadrica $(\mathcal{H}_1)$ de ecuație:

$$(\mathcal{H}_1): \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad , \quad a,\ b,\ c > 0.$$

Numerele a, b, c se numesc semiaxe iar punctele $A(a, 0, 0)$, $A'(-a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $B'(0, -b, 0)$ se numesc vârfuri.

- punctul $O(0, 0, 0)$ este centrul de simetrie al hiperboloidului cu o pânză
- axele de coordonate sunt axe de simetrie ale hiperboloidului cu o pânză

Hiperboloidul cu o pânză

Definiție

Se numește hiperboloid cu o pânză cuadrica $(\mathcal{H}_1)$ de ecuație:

$$(\mathcal{H}_1): \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0 \quad , \quad a,\ b,\ c>0.$$

Numerele a, b, c se numesc semiaxe iar punctele $A(a,0,0)$, $A'(-a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $B'(0,-b,0)$ se numesc vârfuri.

- punctul $O(0,0,0)$ este centrul de simetrie al hiperboloidului cu o pânză
- axele de coordonate sunt axe de simetrie ale hiperboloidului cu o pânză
- planele de coordonate sunt plane de simetrie ale hiperboloidului cu o pânză

Hiperboloidul cu o pânză

- Intersecțiile hiperboloidului cu o pânză cu planele paralele cu xOy se determină rezolvând sistemul

Hiperboloidul cu o pânză

- Intersecțiile hiperboloidului cu o pânză cu planele paralele cu xOy se determină rezolvând sistemul

$$\begin{cases} z = z_0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

Hiperboloidul cu o pânză

- Intersecțiile hiperboloidului cu o pânză cu planele paralele cu xOy se determină rezolvând sistemul

$$\begin{cases} z = z_0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

Se obțin elipsele

$$\frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{{z_0}^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{{z_0}^2}{c^2}\right)} = 1.$$

Hiperboloidul cu o pânză

- Intersecțiile hiperboloidului cu o pânză cu planele paralele cu yOz se determină rezolvând sistemul

Hiperboloidul cu o pânză

- Intersecțiile hiperboloidului cu o pânză cu planele paralele cu yOz se determină rezolvând sistemul

$$\begin{cases} x = x_0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

Hiperboloidul cu o pânză

- Intersecțiile hiperboloidului cu o pânză cu planele paralele cu yOz se determină rezolvând sistemul

$$\begin{cases} x = x_0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

Se obțin hiperbolele

$$\frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{{x_0}^2}{a^2}\right)} - \frac{z^2}{c^2\left(1 - \frac{{x_0}^2}{a^2}\right)} = 1$$

Hiperboloidul cu o pânză

- Intersecțiile hiperboloidului cu o pânză cu planele paralele cu xOz se determină rezolvând sistemul

Hiperboloidul cu o pânză

- Intersecțiile hiperboloidului cu o pânză cu planele paralele cu xOz se determină rezolvând sistemul

$$\begin{cases} y = y_0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

Hiperboloidul cu o pânză

- Intersecțiile hiperboloidului cu o pânză cu planele paralele cu xOz se determină rezolvând sistemul

$$\begin{cases} y = y_0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

Se obțin hiperbolele

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{{y_0}^2}{b^2}\right)} - \frac{z^2}{c^2\left(1 - \frac{{y_0}^2}{b^2}\right)} = 1$$

Hiperboloidul cu două pânze

Hiperboloidul cu două pânze

Definiție

Hiperboloidul cu două pânze

Definiție

Se numește hiperboloid cu două pânze cuadrica $(\mathcal{H}_2)$ de ecuație:

$$(\mathcal{H}_2): \quad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad , \quad a, b, c > 0.$$

Hiperboloidul cu două pânze

Definiție

Se numește hiperboloid cu două pânze cuadrica $(\mathcal{H}_2)$ de ecuație:

$$(\mathcal{H}_2): \quad -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \quad , \quad a,b,c>0.$$

Numerele reale a, b, c se numesc semiaxe, iar punctele $C(0,0,c)$ și $C'(0,0,-c)$ se numesc vârfuri.

Hiperboloidul cu două pânze

Definiție

Se numește hiperboloid cu două pânze cuadrica $(\mathcal{H}_2)$ de ecuație:

$$(\mathcal{H}_2): \quad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad , \quad a, b, c > 0.$$

Numerele reale a, b, c se numesc semiaxe, iar punctele $C(0,0,c)$ și $C'(0,0,-c)$ se numesc vârfuri.

- punctul $O(0,0,0)$ este centrul de simetrie al hiperboloidului cu două pânze

Hiperboloidul cu două pânze

Definiție

Se numește hiperboloid cu două pânze cuadrica $(\mathcal{H}_2)$ de ecuație:

$$(\mathcal{H}_2): \quad -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \quad , \quad a,b,c>0.$$

Numerele reale a, b, c se numesc semiaxe, iar punctele $C(0,0,c)$ și $C'(0,0,-c)$ se numesc vârfuri.

- punctul $O(0,0,0)$ este centrul de simetrie al hiperboloidului cu două pânze
- axele de coordonate sunt axe de simetrie ale hiperboloidului cu două pânze

Hiperboloidul cu două pânze

Definiție

Se numește hiperboloid cu două pânze cuadrica $(\mathcal{H}_2)$ de ecuație:

$$(\mathcal{H}_2): \quad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad , \quad a, b, c > 0.$$

Numerele reale a, b, c se numesc semiaxe, iar punctele $C(0,0,c)$ și $C'(0,0,-c)$ se numesc vârfuri.

- punctul $O(0,0,0)$ este centrul de simetrie al hiperboloidului cu două pânze
- axele de coordonate sunt axe de simetrie ale hiperboloidului cu două pânze
- planele de coordonate sunt plane de simetrie ale hiperboloidului cu două pânze

Hiperboloidul cu două pânze

- Intersecțiile hiperboloidului cu două pânze cu planele paralele cu xOy se determină rezolvând sistemul

Hiperboloidul cu două pânze

- Intersecțiile hiperboloidului cu două pânze cu planele paralele cu xOy se determină rezolvând sistemul

$$\begin{cases} z = z_0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \end{cases} .$$

Hiperboloidul cu două pânze

- Intersecțiile hiperboloidului cu două pânze cu planele paralele cu xOy se determină rezolvând sistemul

$$\begin{cases} z = z_0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \end{cases} .$$

Dacă $z_0 \in (-\infty, -c) \cup (c, \infty)$, intersecțiile sunt elipsele

$$\frac{x^2}{a^2\left(\frac{z_0^2}{c^2} - 1\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(\frac{z_0^2}{c^2} - 1\right)} = 1 .$$

Hiperboloidul cu două pânze

- Intersecțiile hiperboloidului cu două pânze cu planele paralele cu xOz se determină rezolvând sistemul

Hiperboloidul cu două pânze

- Intersecțiile hiperboloidului cu două pânze cu planele paralele cu xOz se determină rezolvând sistemul

$$\begin{cases} y = y_0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \end{cases}.$$

Hiperboloidul cu două pânze

- Intersecțiile hiperboloidului cu două pânze cu planele paralele cu xOz se determină rezolvând sistemul

$$\begin{cases} y = y_0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \end{cases} .$$

Se obțin hiperbolele

$$\frac{z^2}{c^2\left(\frac{y_0^2}{b^2}+1\right)} - \frac{x^2}{a^2\left(\frac{y_0^2}{b^2}+1\right)} = 1 \quad .$$

Hiperboloidul cu două pânze

- Intersecțiile hiperboloidului cu două pânze cu planele paralele cu yOz se determină rezolvând sistemul

Hiperboloidul cu două pânze

- Intersecțiile hiperboloidului cu două pânze cu planele paralele cu yOz se determină rezolvând sistemul

$$\begin{cases} x = x_0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \end{cases} .$$

Hiperboloidul cu două pânze

- Intersecțiile hiperboloidului cu două pânze cu planele paralele cu yOz se determină rezolvând sistemul

$$\begin{cases} x = x_0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \end{cases} .$$

Se obțin hiperbolele

$$\frac{z^2}{c^2\left(\frac{x_0^2}{a^2}+1\right)} - \frac{y^2}{b^2\left(\frac{x_0^2}{a^2}+1\right)} = 1 .$$

Paraboloidul eliptic

Paraboloidul eliptic

Definiție

Paraboloidul eliptic

Definiție

Se numește paraboloid eliptic cuadrica $\mathcal{P}_e$ de ecuație:

$$(\mathcal{P}_e) : \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2 \cdot z \quad , \quad a > 0, b > 0$$

Numerele reale a și b se numesc semiaxe.

Paraboloidul eliptic

Definiție

Se numește paraboloid eliptic cuadrica $\mathcal{P}_e$ de ecuație:

$$(\mathcal{P}_e): \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2 \cdot z \quad , \quad a > 0, b > 0$$

Numerele reale a și b se numesc semiaxe.

- $O(0,0,0)$ este vârful paraboloidului eliptic

Paraboloidul eliptic

Definiție

Se numește paraboloid eliptic cuadrica $\mathcal{P}_e$ de ecuație:

$$(\mathcal{P}_e): \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2 \cdot z \quad , \quad a > 0, b > 0$$

Numerele reale a și b se numesc semiaxe.

- $O(0,0,0)$ este vârful paraboloidului eliptic
- Oz este axa de simetrie

Paraboloidul eliptic

Definiție

Se numește paraboloid eliptic cuadrica $\mathcal{P}_e$ de ecuație:

$$(\mathcal{P}_e): \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2 \cdot z \quad , \quad a > 0, b > 0$$

Numerele reale a și b se numesc semiaxe.

- $O(0,0,0)$ este vârful paraboloidului eliptic
- Oz este axa de simetrie
- Oyz și Oxz sunt plane de simetrie.

Paraboloidul eliptic

- Intersecțiile paraboloidului eliptic cu planele paralele cu xOy se determină rezolvând sistemul

Paraboloidul eliptic

- Intersecțiile paraboloidului eliptic cu planele paralele cu xOy se determină rezolvând sistemul

$$\begin{cases} z = z_0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \end{cases}$$

Paraboloidul eliptic

- Intersecțiile paraboloidului eliptic cu planele paralele cu xOy se determină rezolvând sistemul

$$\begin{cases} z = z_0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \end{cases}$$

Dacă $z_0 > 0$, se obțin elipsele

$$\frac{x^2}{2a^2 z_0} + \frac{y^2}{2b^2 z_0} = 1$$

Paraboloidul eliptic

- Intersecțiile paraboloidului eliptic cu planele paralele cu yOz se determină rezolvând sistemul

Paraboloidul eliptic

- Intersecțiile paraboloidului eliptic cu planele paralele cu yOz se determină rezolvând sistemul

$$\begin{cases} x = x_0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \end{cases}$$

Paraboloidul eliptic

- Intersecțiile paraboloidului eliptic cu planele paralele cu yOz se determină rezolvând sistemul

$$\begin{cases} x = x_0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \end{cases}$$

Se obțin parabolele

$$z = \frac{1}{2b^2} y^2 + \frac{x_0^2}{2a^2}$$

Paraboloidul eliptic

- Intersecțiile paraboloidului eliptic cu planele paralele cu xOz se determină rezolvând sistemul

Paraboloidul eliptic

- Intersecțiile paraboloidului eliptic cu planele paralele cu xOz se determină rezolvând sistemul

$$\begin{cases} y = y_0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \end{cases}$$

Paraboloidul eliptic

- Intersecțiile paraboloidului eliptic cu planele paralele cu xOz se determină rezolvând sistemul

$$\begin{cases} y = y_0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \end{cases}$$

Se obțin parabolele

$$z = \frac{1}{2a^2}x^2 + \frac{y_0^2}{2b^2}$$

Paraboloidul hiperbolic

Paraboloidul hiperbolic

Definiție

Paraboloidul hiperbolic

Definiție

Se numește paraboloid hiperbolic cuadrica $\mathcal{P}_h$ de ecuație:

$$(\mathcal{P}_h): \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2 \cdot z \quad , \quad a > 0, b > 0$$

Numerele reale pozitive a și b se numesc semiaxe.

Paraboloidul hiperbolic

Definiție

Se numește paraboloid hiperbolic cuadrica $\mathcal{P}_h$ de ecuație:

$$(\mathcal{P}_h): \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2 \cdot z \quad , \quad a > 0, b > 0$$

Numerele reale pozitive a și b se numesc semiaxe.

- $O(0,0,0)$ este vârful paraboloidului eliptic

Paraboloidul hiperbolic

Definiție

Se numește paraboloid hiperbolic cuadrica $\mathcal{P}_h$ de ecuație:

$$(\mathcal{P}_h): \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2 \cdot z \quad , \quad a > 0, b > 0$$

Numerele reale pozitive a și b se numesc semiaxe.

- $O(0,0,0)$ este vârful paraboloidului eliptic
- Oz este axa de simetrie

Paraboloidul hiperbolic

Definiție

Se numește paraboloid hiperbolic cuadrica $\mathcal{P}_h$ de ecuație:

$$(\mathcal{P}_h): \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2 \cdot z \quad , \quad a > 0, b > 0$$

Numerele reale pozitive a și b se numesc semiaxe.

- $O(0,0,0)$ este vârful paraboloidului eliptic
- Oz este axa de simetrie
- Oyz și Oxz sunt plane de simetrie.

Paraboloidul hiperbolic

- Intersecțiile paraboloidului hiperbolic cu planele paralele cu xOy se determină rezolvând sistemul

Paraboloidul hiperbolic

- Intersecțiile paraboloidului hiperbolic cu planele paralele cu xOy se determină rezolvând sistemul

$$\begin{cases} z = z_0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \end{cases}$$

Paraboloidul hiperbolic

- Intersecțiile paraboloidului hiperbolic cu planele paralele cu xOy se determină rezolvând sistemul

$$\begin{cases} z = z_0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \end{cases}$$

Dacă $z_0 \neq 0$, se obțin hiperbolele

$$\frac{x^2}{2a^2 z_0} - \frac{y^2}{2b^2 z_0} = 1$$

Paraboloidul hiperbolic

- Intersecțiile paraboloidului hiperbolic cu planele paralele cu yOz se determină rezolvând sistemul

Paraboloidul hiperbolic

- Intersecțiile paraboloidului hiperbolic cu planele paralele cu yOz se determină rezolvând sistemul

$$\begin{cases} x = x_0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \end{cases}$$

Paraboloidul hiperbolic

- Intersecțiile paraboloidului hiperbolic cu planele paralele cu yOz se determină rezolvând sistemul

$$\begin{cases} x = x_0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \end{cases}$$

Se obțin parabolele

$$z = -\frac{1}{2b^2}y^2 + \frac{x_0^2}{2a^2}$$

Paraboloidul hiperbolic

- Intersecțiile paraboloidului hiperbolic cu planele paralele cu xOz se determină rezolvând sistemul

Paraboloidul hiperbolic

- Intersecțiile paraboloidului hiperbolic cu planele paralele cu xOz se determină rezolvând sistemul

$$\begin{cases} y = y_0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \end{cases}$$

Paraboloidul hiperbolic

- Intersecțiile paraboloidului hiperbolic cu planele paralele cu xOz se determină rezolvând sistemul

$$\begin{cases} y = y_0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \end{cases}$$

Se obțin parabolele

$$z = \frac{1}{2a^2}x^2 - \frac{y_0^2}{2b^2}$$

Reprezentarea analitică a unei curbe în spațiu

Reprezentarea analitică a unei curbe în spațiu

Fie $(a, b) \subset \mathbb{R}$ și $\left\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ un reper cartezian în spațiul vectorial al segmentelor orientate $\mathcal{E}_3^O$.

Reprezentarea analitică a unei curbe în spațiu

Fie $(a, b) \subset \mathbb{R}$ și $\left\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ un reper cartezian în spațiul vectorial al segmentelor orientate $\mathcal{E}_3^O$.

Definiție

Reprezentarea analitică a unei curbe în spațiu

Fie $(a, b) \subset \mathbb{R}$ și $\left\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ un reper cartezian în spațiul vectorial al segmentelor orientate $\mathcal{E}_3^O$.

Definiție

Se numește curbă în $\mathcal{E}_3^O$ orice aplicație

$$\vec{r} : (a, b) \to \mathcal{E}_3^O$$

$$(a, b) \ni t \mapsto \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Reprezentarea analitică a unei curbe în spațiu

O curbă $(\mathcal{C})$ se poate reprezenta prin:

Reprezentarea analitică a unei curbe în spațiu

O curbă $(\mathcal{C})$ se poate reprezenta prin:

- ecuația vectorială

$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) \quad , \quad t \in (a, b)$$

Reprezentarea analitică a unei curbe în spațiu

O curbă $(\mathcal{C})$ se poate reprezenta prin:

- ecuația vectorială

$$(\mathcal{C}) : \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) \quad , \quad t \in (a, b)$$

- ecuațiile parametrice

$$(\mathcal{C}) : \qquad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t), \qquad t \in (a, b) \end{cases}$$

Reprezentarea analitică a unei curbe în spațiu

Definiție

Reprezentarea analitică a unei curbe în spațiu

Definiție

Spunem că un punct P al unei curbe $(\mathcal{C})$ este

Reprezentarea analitică a unei curbe în spațiu

Definiție

Spunem că un punct P al unei curbe $(\mathcal{C})$ este

- punct singular dacă există un singur $t \in (a, b)$ astfel încât $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}$.

Reprezentarea analitică a unei curbe în spațiu

Definiție

Spunem că un punct P al unei curbe $(\mathcal{C})$ este

- punct singular dacă există un singur $t \in (a, b)$ astfel încât $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}$.
- punct multiplu dacă există $t_1 \neq t_2 \neq \cdots \neq t_n \in (a, b)$ astfel încât
$$\overrightarrow{OP} = \vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2) = \cdots = \vec{r}(t_n)$$

Reprezentarea analitică a unei curbe în spațiu

Definiție

Reprezentarea analitică a unei curbe în spațiu

Definiție

Spunem că a curbă $(\mathcal{C})$ este simplă dacă toate punctele sale sunt puncte singulare.

Reprezentarea analitică a unei curbe în spațiu

Definiție

Spunem că a curbă $(\mathcal{C})$ este simplă dacă toate punctele sale sunt puncte singulare.

Definiție

Reprezentarea analitică a unei curbe în spațiu

Definiție

Spunem că a curbă $(\mathcal{C})$ este simplă dacă toate punctele sale sunt puncte singulare.

Definiție

Spunem că un arc $\widetilde{AB}$ al unei curbe simple $(\mathcal{C})$ este rectificabil dacă

$$\lim_{A \to B} \frac{\left\| \overrightarrow{AB} \right\|}{\left| \widetilde{AB} \right|} = 1$$

unde cu $\left| \widetilde{AB} \right|$ am notat lungimea arcului $\widetilde{AB}$.

Elementul de arc al unei curbe

Elementul de arc al unei curbe

Fie

$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

o curbă rectificabilă și $\Delta t = t - t_0$ o creștere a argumentului astfel încât $t + \Delta t \in (a, b)$.

Elementul de arc al unei curbe

Fie

$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

o curbă rectificabilă și $\Delta t = t - t_0$ o creștere a argumentului astfel încât $t + \Delta t \in (a, b)$. Atunci:

$$\begin{aligned}
\vec{r}'(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\vec{i} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}\vec{j} + \\
&+ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t}\vec{k} = \\
&= \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}
\end{aligned}$$

Elementul de arc al unei curbe

Definiție

Elementul de arc al unei curbe

Definiție

Spunem că o curbă rectificabilă are ordinul de regularitate 1 dacă $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, oricare ar fi $t \in (a, b)$.

Elementul de arc al unei curbe

Definiție

Spunem că o curbă rectificabilă are ordinul de regularitate 1 dacă $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, oricare ar fi $t \in (a, b)$.

Direcția vectorului $\vec{r}'(t)$ este dată de direcția tangentei la curbă în punctul $M(x(t), y(t), z(t))$ iar sensul său este dat de sensul creșterii argumentului.

Elementul de arc al unei curbe

Fie $s(t) = |\widetilde{AM}|$ lungimea arcului $\widetilde{AM} \subset (\mathcal{C})$. Avem:

Elementul de arc al unei curbe

Fie $s(t) = |\widetilde{AM}|$ lungimea arcului $\widetilde{AM} \subset (\mathcal{C})$. Avem:

$$\left|\widetilde{MM'}\right| = \left|\widetilde{AM'}\right| - \left|\widetilde{AM}\right| = s(t + \Delta t) - s(t) = \Delta s$$

Elementul de arc al unei curbe

Fie $s(t) = |\widetilde{AM}|$ lungimea arcului $\widetilde{AM} \subset (\mathcal{C})$. Avem:

$$\left|\widetilde{MM'}\right| = \left|\widetilde{AM'}\right| - \left|\widetilde{AM}\right| = s(t + \Delta t) - s(t) = \Delta s$$

Remarcăm că:

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = \Delta \vec{r}$$

Elementul de arc al unei curbe

Fie $s(t) = |\widetilde{AM}|$ lungimea arcului $\widetilde{AM} \subset (\mathcal{C})$. Avem:

$$\left|\widetilde{MM'}\right| = \left|\widetilde{AM'}\right| - \left|\widetilde{AM}\right| = s(t + \Delta t) - s(t) = \Delta s$$

Remarcăm că:

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = \Delta \vec{r}$$

Prin urmare:

$$\begin{aligned} \|\vec{r}'(t)\| &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\|\Delta \vec{r}\|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\|\overrightarrow{MM'}\|}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\|\overrightarrow{MM'}\|}{|\widetilde{MM'}|} \cdot \frac{|\widetilde{MM'}|}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \end{aligned}$$

Elementul de arc al unei curbe

Așadar:

Elementul de arc al unei curbe

Așadar:

$$ds = \|\vec{r'}(t)\|dt$$

Elementul de arc al unei curbe

Așadar:

$$ds = \|\vec{r}'(t)\| dt$$

Definiție

Elementul de arc al unei curbe

Așadar:

$$ds = \|\vec{r}'(t)\| dt$$

Definiție

Se numește element de arc al unei curbe

$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t), \quad t \in (a, b)$$

expresia

$$ds = \left\|\vec{r}'(t)\right\| dt = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt$$

Tangenta la o curbă în spațiu

Tangenta la o curbă în spațiu

Teoremă

Tangenta la o curbă în spațiu

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}) : \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 1,

Tangenta la o curbă în spațiu

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 1, $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al curbei $(\mathcal{C})$,

Tangenta la o curbă în spațiu

Teoremă

Fie
$$(\mathcal{C}) : \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$
o curbă cu ordinul de regularitate 1, $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al curbei $(\mathcal{C})$, (tg) tangenta la curba $(\mathcal{C})$ în M_0

Tangenta la o curbă în spațiu

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 1, $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al curbei $(\mathcal{C})$, (tg) tangenta la curba $(\mathcal{C})$ în M_0 și $W(X, Y, Z) \in (tg)$.

Tangenta la o curbă în spațiu

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 1, $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al curbei $(\mathcal{C})$, (tg) tangenta la curba $(\mathcal{C})$ în M_0 și $W(X, Y, Z) \in (tg)$. Atunci tangenta (tg) are ecuațiile:

Tangenta la o curbă în spațiu

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}) : \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 1, $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al curbei $(\mathcal{C})$, (tg) tangenta la curba $(\mathcal{C})$ în M_0 și $W(X, Y, Z) \in (tg)$. Atunci tangenta (tg) are ecuațiile:

$$(tg) : \qquad \frac{X - x(t_0)}{\dot{x}(t_0)} = \frac{Y - y(t_0)}{\dot{y}(t_0)} = \frac{Z - z(t_0)}{\dot{z}(t_0)}$$

Tangenta la o curbă în spațiu

Versorul tangentei (tg) la curba $(\mathcal{C})$ în punctul M_0 este

Tangenta la o curbă în spațiu

Versorul tangentei (tg) la curba $(\mathcal{C})$ în punctul M_0 este

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{a}_{(tg)}}{\|\vec{a}_{(tg)}\|}$$

Tangenta la o curbă în spațiu

Versorul tangentei (tg) la curba $(\mathcal{C})$ în punctul M_0 este

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{a}_{(tg)}}{\|\vec{a}_{(tg)}\|} = \frac{\dot{x}(t_0)\vec{i} + \dot{y}(t_0)\vec{j} + \dot{z}(t_0)\vec{k}}{\sqrt{\dot{x}^2(t_0) + \dot{y}^2(t_0) + \dot{z}^2(t_0)}}$$

Planul normal al unei curbe în spațiu

Planul normal al unei curbe în spațiu

Fie

$$(\mathcal{C}) : \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t), & t \in (a, b) \end{cases}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 1 și $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său.

Planul normal al unei curbe în spațiu

Fie

$$(\mathcal{C}) : \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t), & t \in (a, b) \end{cases}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 1 și $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său.

Definiție

Planul normal al unei curbe în spațiu

Fie

$$(\mathcal{C}): \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t), \qquad t \in (a, b) \end{cases}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 1 și $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său.

Definiție

Se numește plan normal al curbei $(\mathcal{C})$ în punctul M_0, planul (π_N) perpendicular pe tangenta (tg) la curba $(\mathcal{C})$ în M_0.

Planul normal al unei curbe în spațiu

Teoremă

Planul normal al unei curbe în spațiu

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}) : \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 1,

Planul normal al unei curbe în spațiu

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 1, $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său,

Planul normal al unei curbe în spațiu

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 1, $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său, (π_N) planul normal al curbei $(\mathcal{C})$ în M_0

Planul normal al unei curbe în spațiu

Teoremă

Fie
$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$
o curbă cu ordinul de regularitate 1, $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său, (π_N) planul normal al curbei $(\mathcal{C})$ în M_0 și $W(X, Y, Z) \in (\pi_N)$.

Planul normal al unei curbe în spațiu

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 1, $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său, (π_N) planul normal al curbei $(\mathcal{C})$ în M_0 și $W(X, Y, Z) \in (\pi_N)$. Atunci planul normal are ecuația

Planul normal al unei curbe în spațiu

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}) : \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 1, $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său, (π_N) planul normal al curbei $(\mathcal{C})$ în M_0 și $W(X, Y, Z) \in (\pi_N)$. Atunci planul normal are ecuația

$$(\pi_N) : \qquad \dot{x}(t_0)[X - x(t_0)] + \dot{y}(t_0)[Y - y(t_0)] + \dot{z}(t_0)[Z - z(t_0)] = 0$$

Planul oscilator al unei curbe în spațiu

Planul oscilator al unei curbe în spațiu

Fie

$$(\mathcal{C}) : \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t), \qquad t \in (a, b) \end{cases}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 2 și $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său.

Planul oscilator al unei curbe în spațiu

Fie

$$(\mathcal{C}): \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t), & t \in (a, b) \end{cases}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 2 și $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său.

Definiție

Planul oscilator al unei curbe în spațiu

Fie

$$(\mathcal{C}) : \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t), \qquad t \in (a, b) \end{cases}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 2 și $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său.

Definiție

Se numește plan oscilator al curbei $(\mathcal{C})$ în punctul M_0 planul (π_O) determinat de vectorii $\vec{r}'(t_0)$ și $\vec{r}''(t_0)$.

Planul oscilator al unei curbe în spațiu

Teoremă

Planul oscilator al unei curbe în spațiu

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 2,

Planul oscilator al unei curbe în spațiu

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 2, $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său,

Planul oscilator al unei curbe în spațiu

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 2, $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său, (π_O) planul oscilator al curbei $(\mathcal{C})$ în M_0

Planul oscilator al unei curbe în spațiu

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 2, $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său, (π_O) planul oscilator al curbei $(\mathcal{C})$ în M_0 și $W(X, Y, Z) \in (\pi_O)$.

Planul oscilator al unei curbe în spațiu

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 2, $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său, (π_O) planul oscilator al curbei $(\mathcal{C})$ în M_0 și $W(X, Y, Z) \in (\pi_O)$. Atunci planul oscilator are ecuația

Planul oscilator al unei curbe în spațiu

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 2, $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său, (π_O) planul oscilator al curbei $(\mathcal{C})$ în M_0 și $W(X, Y, Z) \in (\pi_O)$. Atunci planul oscilator are ecuația

$$(\pi_O): \qquad \begin{vmatrix} X - x(t_0) & Y - y(t_0) & Z - z(t_0) \\ \dot{x}(t_0) & \dot{y}(t_0) & \dot{z}(t_0) \\ \ddot{x}(t_0) & \ddot{y}(t_0) & \ddot{z}(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

Binormala la o curbă în spațiu

Binormala la o curbă în spațiu

Fie

$$(\mathcal{C}) : \qquad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t), \qquad t \in (a, b) \end{cases}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 2 și $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său.

Binormala la o curbă în spațiu

Fie

$$(\mathcal{C}) : \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t), \qquad t \in (a, b) \end{cases}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 2 și $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său.

Definiție

Binormala la o curbă în spațiu

Fie

$$(\mathcal{C}): \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t), \qquad t \in (a, b) \end{cases}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 2 și $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său.

Definiție

Se numește binormală la curba $(\mathcal{C})$ în punctul M_0 dreapta (bn) perpendiculară pe planul oscilator (π_O) al curbei $(\mathcal{C})$ în M_0.

Binormala la o curbă în spațiu

Teoremă

Binormala la o curbă în spațiu

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 2,

Binormala la o curbă în spațiu

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}) : \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 2, $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său,

Binormala la o curbă în spațiu

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 2, $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său, (bn) binormala la curba $(\mathcal{C})$ în M_0

Binormala la o curbă în spațiu

Teoremă

Fie
$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$
o curbă cu ordinul de regularitate 2, $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său, (bn) binormala la curba $(\mathcal{C})$ în M_0 și $W(X, Y, Z) \in (bn)$.

Binormala la o curbă în spațiu

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 2, $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său, (bn) binormala la curba $(\mathcal{C})$ în M_0 și $W(X, Y, Z) \in (bn)$. Atunci binormala are ecuațiile

Binormala la o curbă în spațiu

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 2, $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său, (bn) binormala la curba $(\mathcal{C})$ în M_0 și $W(X, Y, Z) \in (bn)$. Atunci binormala are ecuațiile

$$(bn): \qquad \frac{X - x(t_0)}{l} = \frac{Y - y(t_0)}{m} = \frac{Z - z(t_0)}{n}$$

Binormala la o curbă în spațiu

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 2, $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său, (bn) binormala la curba $(\mathcal{C})$ în M_0 și $W(X, Y, Z) \in (bn)$. Atunci binormala are ecuațiile

$$(bn): \qquad \frac{X - x(t_0)}{l} = \frac{Y - y(t_0)}{m} = \frac{Z - z(t_0)}{n}$$

unde

$$l = \begin{vmatrix} \dot{y}(t_0) & \dot{z}(t_0) \\ \ddot{y}(t_0) & \ddot{z}(t_0) \end{vmatrix},$$

Binormala la o curbă în spațiu

Teoremă

Fie
$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$
o curbă cu ordinul de regularitate 2, $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său, (bn) binormala la curba $(\mathcal{C})$ în M_0 și $W(X, Y, Z) \in (bn)$. Atunci binormala are ecuațiile
$$(bn): \qquad \frac{X - x(t_0)}{l} = \frac{Y - y(t_0)}{m} = \frac{Z - z(t_0)}{n}$$
unde
$$l = \begin{vmatrix} \dot{y}(t_0) & \dot{z}(t_0) \\ \ddot{y}(t_0) & \ddot{z}(t_0) \end{vmatrix}, m = -\begin{vmatrix} \dot{x}(t_0) & \dot{z}(t_0) \\ \ddot{x}(t_0) & \ddot{z}(t_0) \end{vmatrix},$$

Binormala la o curbă în spațiu

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 2, $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său, (bn) binormala la curba $(\mathcal{C})$ în M_0 și $W(X, Y, Z) \in (bn)$. Atunci binormala are ecuațiile

$$(bn): \qquad \frac{X - x(t_0)}{l} = \frac{Y - y(t_0)}{m} = \frac{Z - z(t_0)}{n}$$

unde

$$l = \begin{vmatrix} \dot{y}(t_0) & \dot{z}(t_0) \\ \ddot{y}(t_0) & \ddot{z}(t_0) \end{vmatrix}, m = -\begin{vmatrix} \dot{x}(t_0) & \dot{z}(t_0) \\ \ddot{x}(t_0) & \ddot{z}(t_0) \end{vmatrix}, n = \begin{vmatrix} \dot{x}(t_0) & \dot{y}(t_0) \\ \ddot{x}(t_0) & \ddot{y}(t_0) \end{vmatrix}$$

Binormala la o curbă în spațiu

Versorul binormalei este

Binormala la o curbă în spațiu

Versorul binormalei este

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{a}_{(bn)}}{\|\vec{a}_{(bn)}\|}$$

Binormala la o curbă în spațiu

Versorul binormalei este

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{a}_{(bn)}}{\|\vec{a}_{(bn)}\|} = \frac{l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

Planul rectificator al unei curbe în spațiu

Planul rectificator al unei curbe în spațiu

Fie

$$(\mathcal{C}) : \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t), \qquad t \in (a, b) \end{cases}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 2 și $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său.

Planul rectificator al unei curbe în spațiu

Fie

$$(\mathcal{C}) : \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t), \qquad t \in (a, b) \end{cases}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 2 și $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său.

Definiție

Planul rectificator al unei curbe în spațiu

Fie

$$(\mathcal{C}) : \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t), & t \in (a, b) \end{cases}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 2 și $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său.

Definiție

Se numește plan rectificator al curbei $(\mathcal{C})$ în punctul M_0 planul (π_R) determinat de tangenta (tg) și binormala (bn) la curba $(\mathcal{C})$ în M_0.

Planul rectificator al unei curbe în spațiu

Teoremă

Planul rectificator al unei curbe în spațiu

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}) : \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 2,

Planul rectificator al unei curbe în spațiu

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}) : \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 2, $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său,

Planul rectificator al unei curbe în spațiu

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 2, $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său, (π_R) planul rectificator al curbei $(\mathcal{C})$ în M_0

Planul rectificator al unei curbe în spațiu

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 2, $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său, (π_R) planul rectificator al curbei $(\mathcal{C})$ în M_0 și $W(X, Y, Z) \in (\pi_R)$.

Planul rectificator al unei curbe în spațiu

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 2, $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său, (π_R) planul rectificator al curbei $(\mathcal{C})$ în M_0 și $W(X, Y, Z) \in (\pi_R)$. Atunci planul rectificator are ecuația

Planul rectificator al unei curbe în spațiu

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}) : \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 2, $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său, (π_R) planul rectificator al curbei $(\mathcal{C})$ în M_0 și $W(X, Y, Z) \in (\pi_R)$. Atunci planul rectificator are ecuația

$$(\pi_R) : \qquad \begin{vmatrix} X - x(t_0) & Y - y(t_0) & Z - z(t_0) \\ \dot{x}(t_0) & \dot{y}(t_0) & \dot{z}(t_0) \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0$$

Normala principală la o curbă în spațiu

Normala principală la o curbă în spațiu

Fie

$$(\mathcal{C}) : \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t), \qquad t \in (a, b) \end{cases}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 2 și $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său.

Normala principală la o curbă în spațiu

Fie

$$(\mathcal{C}) : \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t), \qquad t \in (a, b) \end{cases}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 2 și $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său.

Definiție

Normala principală la o curbă în spațiu

Fie

$$(\mathcal{C}) : \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t), \qquad t \in (a, b) \end{cases}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 2 și $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său.

Definiție

Se numește normală principală la curba $(\mathcal{C})$ în punctul M_0 dreapta (np) perpendiculară pe planul rectificator (π_R) al curbei $(\mathcal{C})$ în M_0.

Normala principală la o curbă în spațiu

Teoremă

Normala principală la o curbă în spațiu

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 2,

Normala principală la o curbă în spațiu

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 2, $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său,

Normala principală la o curbă în spațiu

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 2, $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său, (np) normala principală la curba $(\mathcal{C})$ în M_0

Normala principală la o curbă în spațiu

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 2, $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său, (np) normala principală la curba $(\mathcal{C})$ în M_0 și $W(X, Y, Z) \in (np)$.

Normala principală la o curbă în spațiu

Teoremă

Fie
$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$
o curbă cu ordinul de regularitate 2, $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său, (np) normala principală la curba $(\mathcal{C})$ în M_0 și $W(X, Y, Z) \in (np)$. Atunci normala principală are ecuațiile

Normala principală la o curbă în spațiu

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 2, $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său, (np) normala principală la curba $(\mathcal{C})$ în M_0 și $W(X, Y, Z) \in (np)$. Atunci normala principală are ecuațiile

$$(np): \qquad \frac{X - x(t_0)}{L} = \frac{Y - y(t_0)}{M} = \frac{Z - z(t_0)}{N}$$

Normala principală la o curbă în spațiu

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 2, $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său, (np) normala principală la curba $(\mathcal{C})$ în M_0 și $W(X, Y, Z) \in (np)$. Atunci normala principală are ecuațiile

$$(np): \qquad \frac{X - x(t_0)}{L} = \frac{Y - y(t_0)}{M} = \frac{Z - z(t_0)}{N}$$

unde

$$L = \begin{vmatrix} \dot{y}(t_0) & \dot{z}(t_0) \\ m & n \end{vmatrix},$$

Normala principală la o curbă în spațiu

Teoremă

Fie
$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$
o curbă cu ordinul de regularitate 2, $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său, (np) normala principală la curba $(\mathcal{C})$ în M_0 și $W(X, Y, Z) \in (np)$. Atunci normala principală are ecuațiile
$$(np): \qquad \frac{X - x(t_0)}{L} = \frac{Y - y(t_0)}{M} = \frac{Z - z(t_0)}{N}$$
unde
$$L = \begin{vmatrix} \dot{y}(t_0) & \dot{z}(t_0) \\ m & n \end{vmatrix}, M = -\begin{vmatrix} \dot{x}(t_0) & \dot{z}(t_0) \\ l & n \end{vmatrix},$$

Normala principală la o curbă în spațiu

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 2, $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său, (np) normala principală la curba $(\mathcal{C})$ în M_0 și $W(X, Y, Z) \in (np)$. Atunci normala principală are ecuațiile

$$(np): \qquad \frac{X - x(t_0)}{L} = \frac{Y - y(t_0)}{M} = \frac{Z - z(t_0)}{N}$$

unde

$$L = \begin{vmatrix} \dot{y}(t_0) & \dot{z}(t_0) \\ m & n \end{vmatrix}, M = -\begin{vmatrix} \dot{x}(t_0) & \dot{z}(t_0) \\ l & n \end{vmatrix}, N = \begin{vmatrix} \dot{x}(t_0) & \dot{y}(t_0) \\ l & m \end{vmatrix}$$

Normala principală la o curbă în spațiu

Versorul normalei principale este

Normala principală la o curbă în spațiu

Versorul normalei principale este

$$\vec{\nu} = \frac{\vec{a}_{(np)}}{\left\|\vec{a}_{(np)}\right\|}$$

Normala principală la o curbă în spațiu

Versorul normalei principale este

$$\vec{\nu} = \frac{\vec{a}_{(np)}}{\|\vec{a}_{(np)}\|} = \frac{L\vec{i} + M\vec{j} + N\vec{k}}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}$$

Triedrul lui Frenet

Triedrul lui Frenet

Fie

$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 2 și $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său.

Triedrul lui Frenet

Fie

$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 2 și $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său.

Triedrul lui Frenet

Fie

$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 2 și $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său.

- au loc egalitățile

$$\vec{\tau} = \vec{\nu} \times \vec{\beta}, \quad \vec{\nu} = \vec{\beta} \times \vec{\tau}, \quad \vec{\beta} = \vec{\tau} \times \vec{\nu}$$

și

$$\langle \vec{\tau} / \vec{\nu} \rangle = \left\langle \vec{\tau} / \vec{\beta} \right\rangle = \left\langle \vec{\nu} / \vec{\beta} \right\rangle = 0$$

Triedrul lui Frenet

Fie

$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

o curbă cu ordinul de regularitate 2 și $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un punct al său.

- au loc egalitățile

$$\vec{\tau} = \vec{\nu} \times \vec{\beta}, \quad \vec{\nu} = \vec{\beta} \times \vec{\tau}, \quad \vec{\beta} = \vec{\tau} \times \vec{\nu}$$

și

$$\langle \vec{\tau} / \vec{\nu} \rangle = \left\langle \vec{\tau} / \vec{\beta} \right\rangle = \left\langle \vec{\nu} / \vec{\beta} \right\rangle = 0$$

- sensurile versorilor se aleg astfel încât reperul $\left\{ M_0; \vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta} \right\}$ să fie direct orientat.

Triedrul lui Frenet

Definiție

Triedrul lui Frenet

Definiție

Reperul $\left\{M_0; \vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}\right\}$ se numește reperul lui Frenet asociat curbei $(\mathcal{C})$ în punctul M_0.

Triedrul lui Frenet

Definiție

Reperul $\left\{M_0; \vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}\right\}$ se numește reperul lui Frenet asociat curbei $(\mathcal{C})$ în punctul M_0.
Dreptele și planele definite de acest reper formează triedrul lui Frenet.

Definiția curburii unei curbe în spațiu

Definiția curburii unei curbe în spațiu

Notăm cu

$$\alpha = \widehat{\vec{\tau}(s), \vec{\tau}(s + \Delta s)}$$

unghiul de contingență al tangentelor.

Definiția curburii unei curbe în spațiu

Notăm cu

$$\alpha = \widehat{\vec{\tau}(s), \vec{\tau}(s+\Delta s)}$$

unghiul de contingență al tangentelor.

Definiție

Definiția curburii unei curbe în spațiu

Notăm cu

$$\alpha = \widehat{\vec{\tau}(s), \vec{\tau}(s+\Delta s)}$$

unghiul de contingență al tangentelor.

Definiție

Se numește curbură a curbei $(\mathcal{C})$ în punctul M limita raportului dintre unghiul α de contingență al tangentelor și creșterea Δs a lungimii arcului $\widetilde{MM'}$ cand $\Delta s \to 0$.

Definiția curburii unei curbe în spațiu

Notăm cu

$$\alpha = \widehat{\vec{\tau}(s), \vec{\tau}(s + \Delta s)}$$

unghiul de contingență al tangentelor.

Definiție

Se numește curbură a curbei $(\mathcal{C})$ în punctul M limita raportului dintre unghiul α de contingență al tangentelor și creșterea Δs a lungimii arcului $\widetilde{MM'}$ cand $\Delta s \to 0$.
Notăm

$$\frac{1}{R} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\alpha}{\Delta s}$$

Definiția curburii unei curbe în spațiu

Notăm cu

$$\alpha = \widehat{\vec{\tau}(s), \vec{\tau}(s+\Delta s)}$$

unghiul de contingență al tangentelor.

Definiție

Se numește curbură a curbei $(\mathcal{C})$ în punctul M limita raportului dintre unghiul α de contingență al tangentelor și creșterea Δs a lungimii arcului $\widetilde{MM'}$ cand $\Delta s \to 0$.
Notăm

$$\frac{1}{R} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\alpha}{\Delta s}$$

R se numește rază de curbură.

Definiția curburii unei curbe în spațiu

Notăm cu

$$\alpha = \widehat{\vec{\tau}(s), \vec{\tau}(s + \Delta s)}$$

unghiul de contingență al tangentelor.

Definiție

Se numește curbură a curbei $(\mathcal{C})$ în punctul M limita raportului dintre unghiul α de contingență al tangentelor și creșterea Δs a lungimii arcului $\widetilde{MM'}$ cand $\Delta s \to 0$.
Notăm

$$\frac{1}{R} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\alpha}{\Delta s}$$

R se numește rază de curbură.

$$\frac{1}{R} = \left\| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right\|$$

Definiția torsiunii unei curbe în spațiu

Definiția torsiunii unei curbe în spațiu

Notăm cu

$$\beta = \widehat{\vec{\beta}(s), \vec{\beta}(s + \Delta s)}$$

unghiul de contingență al binormalelor.

Definiția torsiunii unei curbe în spațiu

Notăm cu

$$\beta = \widehat{\vec{\beta}(s), \vec{\beta}(s+\Delta s)}$$

unghiul de contingență al binormalelor.

Definiție

Definiția torsiunii unei curbe în spațiu

Notăm cu

$$\beta = \widehat{\vec{\beta}(s), \vec{\beta}(s+\Delta s)}$$

unghiul de contingență al binormalelor.

Definiție

Se numește torsiune absolută a curbei $(\mathcal{C})$ în punctul M limita raportului dintre unghiul β de contingență al binormalelor și creșterea Δs a lungimii arcului $\widetilde{MM'}$ cand $\Delta s \to 0$.

Definiția torsiunii unei curbe în spațiu

Notăm cu

$$\beta = \widehat{\vec{\beta}(s), \vec{\beta}(s+\Delta s)}$$

unghiul de contingență al binormalelor.

Definiție

Se numește torsiune absolută a curbei $(\mathcal{C})$ în punctul M limita raportului dintre unghiul β de contingență al binormalelor și creșterea Δs a lungimii arcului $\widetilde{MM'}$ cand $\Delta s \to 0$.

Notăm

$$\left|\frac{1}{T}\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\beta}{\Delta s}$$

T se numește rază de torsiune.

Definiția torsiunii unei curbe în spațiu

Notăm cu

$$\beta = \widehat{\vec{\beta}(s), \vec{\beta}(s+\Delta s)}$$

unghiul de contingență al binormalelor.

Definiție

Se numește torsiune absolută a curbei $(\mathcal{C})$ în punctul M limita raportului dintre unghiul β de contingență al binormalelor și creșterea Δs a lungimii arcului $\widetilde{MM'}$ cand $\Delta s \to 0$.
Notăm

$$\left|\frac{1}{T}\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\beta}{\Delta s}$$

T se numește rază de torsiune.

$$\frac{1}{T} = \left\| \frac{d\vec{\beta}}{ds} \right\|$$

Formulele lui Frenet

Teoremă

Formulele lui Frenet

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t), \quad t \in (a, b)$$

o curbă având ordinul de regularitate cel puțin 2, $M \in (\mathcal{C})$, R raza de curbură și T raza de torsiune ale curbei $(\mathcal{C})$ în punctul M.

Formulele lui Frenet

Teoremă

Fie
$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t), \quad t \in (a, b)$$
o curbă având ordinul de regularitate cel puțin 2, $M \in (\mathcal{C})$, R raza de curbură și T raza de torsiune ale curbei $(\mathcal{C})$ în punctul M. Atunci

Formulele lui Frenet

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t), \quad t \in (a, b)$$

o curbă având ordinul de regularitate cel puțin 2, $M \in (\mathcal{C})$, R raza de curbură și T raza de torsiune ale curbei $(\mathcal{C})$ în punctul M. Atunci

1. $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{R}\vec{\nu}$

Formulele lui Frenet

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t), \quad t \in (a, b)$$

o curbă având ordinul de regularitate cel puțin 2, $M \in (\mathcal{C})$, R raza de curbură și T raza de torsiune ale curbei $(\mathcal{C})$ în punctul M. Atunci

1. $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{R}\vec{\nu}$
2. $\frac{d\vec{\nu}}{ds} = -\frac{1}{R}\vec{\tau} + \frac{1}{T}\vec{\beta}$

Formulele lui Frenet

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}) : \qquad \vec{r} = \vec{r}(t), \quad t \in (a, b)$$

o curbă având ordinul de regularitate cel puțin 2, $M \in (\mathcal{C})$, R raza de curbură și T raza de torsiune ale curbei $(\mathcal{C})$ în punctul M.
Atunci

1. $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{R}\vec{\nu}$
2. $\frac{d\vec{\nu}}{ds} = -\frac{1}{R}\vec{\tau} + \frac{1}{T}\vec{\beta}$
3. $\frac{d\vec{\beta}}{ds} = -\frac{1}{T}\vec{\nu}$

Calculul curburii unei curbe în spațiu

Teoremă

Calculul curburii unei curbe în spațiu

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t), \quad t \in (a, b)$$

o curbă având ordinul de regularitate cel puțin 2, $M \in (\mathcal{C})$ și R raza de curbură a curbei $(\mathcal{C})$ în punctul M.

Calculul curburii unei curbe în spațiu

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}) : \qquad \vec{r} = \vec{r}(t), \quad t \in (a, b)$$

o curbă având ordinul de regularitate cel puțin 2, $M \in (\mathcal{C})$ și R raza de curbură a curbei $(\mathcal{C})$ în punctul M. Atunci

$$\frac{1}{R} = \frac{\left\| \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) \right\|}{\left\| \vec{r}'(t) \right\|^3}$$

Calculul torsiunii unei curbe în spațiu

Teoremă

Calculul torsiunii unei curbe în spațiu

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}) : \qquad \vec{r} = \vec{r}(t), \quad t \in (a, b)$$

o curbă având ordinul de regularitate cel puțin 3, $M \in (\mathcal{C})$ și T raza de torsiune a curbei $(\mathcal{C})$ în punctul M.

Calculul torsiunii unei curbe în spațiu

Teoremă

Fie

$$(\mathcal{C}): \qquad \vec{r} = \vec{r}(t), \quad t \in (a, b)$$

o curbă având ordinul de regularitate cel puțin 3, $M \in (\mathcal{C})$ și T raza de torsiune a curbei $(\mathcal{C})$ în punctul M. Atunci

$$\frac{1}{T} = \frac{\left|\left\langle \vec{r'}(t) \times \vec{r''}(t) / \vec{r'''}(t) \right\rangle\right|}{\left\| \vec{r'}(t) \times \vec{r''}(t) \right\|^2}$$

Reprezentarea analitică a suprafețelor

Reprezentarea analitică a suprafețelor

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ o mulțime deschisă.

Reprezentarea analitică a suprafețelor

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ o mulțime deschisă.

Definiție

Reprezentarea analitică a suprafețelor

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ o mulțime deschisă.

Definiție

Se numește porțiune regulată de suprafață imaginea geometrică a unei funcții vectoriale $\vec{r} : D \to \mathcal{E}_3^O$

$$D \ni (u, v) \mapsto \vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$$

unde funcțiile x, y, z satisfac următoarele condiții de regularitate:

Reprezentarea analitică a suprafețelor

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ o mulțime deschisă.

Definiție

Se numește porțiune regulată de suprafață imaginea geometrică a unei funcții vectoriale $\vec{r}: D \to \mathcal{E}_3^O$

$$D \ni (u,v) \mapsto \vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$$

unde funcțiile x, y, z satisfac următoarele condiții de regularitate:

- stabilesc o corespondență bijectivă și bicontinuă între $(u,v) \in D$ și $M \in (\Sigma)$

Reprezentarea analitică a suprafețelor

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ o mulțime deschisă.

Definiție

Se numește porțiune regulată de suprafață imaginea geometrică a unei funcții vectoriale $\vec{r} : D \to \mathcal{E}_3^O$

$$D \ni (u, v) \mapsto \vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$$

unde funcțiile x, y, z satisfac următoarele condiții de regularitate:

- stabilesc o corespondență bijectivă și bicontinuă între $(u, v) \in D$ și $M \in (\Sigma)$
- admit derivate parțiale de ordinul 1 nu toate nule și continue pe D

Reprezentarea analitică a suprafețelor

- nu toți determinanții funcționali

Reprezentarea analitică a suprafețelor

- nu toți determinanții funcționali

$$A = \frac{D(y,z)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{y}_u & \dot{z}_u \\ \dot{y}_v & \dot{z}_v \end{vmatrix}$$

Reprezentarea analitică a suprafețelor

- nu toți determinanții funcționali

$$A = \frac{D(y,z)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{y}_u & \dot{z}_u \\ \dot{y}_v & \dot{z}_v \end{vmatrix}$$

$$B = -\frac{D(x,z)}{D(u,v)} = -\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \dot{x}_u & \dot{z}_u \\ \dot{x}_v & \dot{z}_v \end{vmatrix}$$

Reprezentarea analitică a suprafețelor

- nu toți determinanții funcționali

$$A = \frac{D(y,z)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{y}_u & \dot{z}_u \\ \dot{y}_v & \dot{z}_v \end{vmatrix}$$

$$B = -\frac{D(x,z)}{D(u,v)} = -\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \dot{x}_u & \dot{z}_u \\ \dot{x}_v & \dot{z}_v \end{vmatrix}$$

$$C = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{x}_u & \dot{y}_u \\ \dot{x}_v & \dot{y}_v \end{vmatrix}$$

se anulează simultan pe D.

Reprezentarea analitică a suprafețelor

Definiție

Reprezentarea analitică a suprafețelor

Definiție

Se numește punct regulat al suprafeței (Σ) orice punct M_0 în care sunt îndeplinite condițiile de regularitate.

Reprezentarea analitică a suprafețelor

Definiție

Se numește punct regulat al suprafeței (Σ) orice punct M_0 în care sunt îndeplinite condițiile de regularitate.
Se numește punct singular al suprafeței (Σ) un punct M_0 în care cel puțin una din condițiile de regularitate nu este satisfăcută.

Reprezentarea analitică a suprafețelor

Definiție

Se numește punct regulat al suprafeței (Σ) orice punct M_0 în care sunt îndeplinite condițiile de regularitate.
Se numește punct singular al suprafeței (Σ) un punct M_0 în care cel puțin una din condițiile de regularitate nu este satisfăcută.

Reprezentarea analitică a suprafețelor

Definiție

Se numește punct regulat al suprafeței (Σ) orice punct M_0 în care sunt îndeplinite condițiile de regularitate.
Se numește punct singular al suprafeței (Σ) un punct M_0 în care cel puțin una din condițiile de regularitate nu este satisfăcută.

Orice suprafață se poate reprezenta prin ecuații parametrice de forma

$$(\Sigma): \quad \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} , (u, v) \in D$$

Coordonate curbilinii

Se consideră o suprafață regulată

$$(\Sigma): \quad \vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k} \quad ,(u,v) \in D$$

și $(u_0, v_0) \in D$ fixat.

Coordonate curbilinii

Se consideră o suprafață regulată

$$(\Sigma): \quad \vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k} \quad , (u,v) \in D$$

și $(u_0, v_0) \in D$ fixat.

Definiție

Coordonate curbilinii

Se consideră o suprafață regulată

$$(\Sigma): \quad \vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k} \quad ,(u,v) \in D$$

și $(u_0, v_0) \in D$ fixat.

Definiție

Se numește curbă de coordonate de tip (u) curba $(\Gamma_u) \subset (\Sigma)$ dată prin ecuația

$$(\Gamma_u): \qquad \vec{r}(u,v_0) = x(u,v_0)\vec{i} + y(u,v_0)\vec{j} + z(u,v_0)\vec{k}$$

Coordonate curbilinii

Se consideră o suprafață regulată

$$(\Sigma): \quad \vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k} \quad ,(u,v) \in D$$

și $(u_0, v_0) \in D$ fixat.

Definiție

Se numește curbă de coordonate de tip (u) curba $(\Gamma_u) \subset (\Sigma)$ dată prin ecuația

$$(\Gamma_u): \qquad \vec{r}(u,v_0) = x(u,v_0)\vec{i} + y(u,v_0)\vec{j} + z(u,v_0)\vec{k}$$

Se numește curbă de coordonate de tip (v) curba $(\Gamma_v) \subset (\Sigma)$ dată prin ecuația

$$(\Gamma_v): \qquad \vec{r}(u_0,v) = x(u_0,v)\vec{i} + y(u_0,v)\vec{j} + z(u_0,v)\vec{k}$$

Coordonate curbilinii

Definiție

Coordonate curbilinii

Definiție

Perechile (u, v) se numesc coordonate curbilinii pe suprafața (Σ)

Coordonate curbilinii

Definiție

Perechile (u, v) se numesc coordonate curbilinii pe suprafața (Σ)

Coordonate curbilinii

Definiție

Perechile (u, v) se numesc coordonate curbilinii pe suprafața (Σ)

- printr-un punct regulat $M_0(x_0, y_0, z_0)$ al unei suprafețe trece o singură curbă de coordonate Γ_u, respectiv Γ_v

Coordonate curbilinii

Definiție

Perechile (u, v) se numesc coordonate curbilinii pe suprafața (Σ)

- printr-un punct regulat $M_0(x_0, y_0, z_0)$ al unei suprafețe trece o singură curbă de coordonate Γ_u, respectiv Γ_v
- vectorul

$$\vec{r}_u'(u_0, v_0) = \dot{x}_u(u_0, v_0)\vec{i} + \dot{y}_u(u_0, v_0)\vec{j} + \dot{z}_u(u_0, v_0)\vec{k}$$

este tangent la (Γ_u) în M_0

Coordonate curbilinii

Definiție

Perechile (u, v) se numesc coordonate curbilinii pe suprafața (Σ)

- printr-un punct regulat $M_0(x_0, y_0, z_0)$ al unei suprafețe trece o singură curbă de coordonate Γ_u, respectiv Γ_v
- vectorul

$$\vec{r}_u'(u_0, v_0) = \dot{x}_u(u_0, v_0)\vec{i} + \dot{y}_u(u_0, v_0)\vec{j} + \dot{z}_u(u_0, v_0)\vec{k}$$

  este tangent la (Γ_u) în M_0
- vectorul

$$\vec{r}_v'(u_0, v_0) = \dot{x}_v(u_0, v_0)\vec{i} + \dot{y}_v(u_0, v_0)\vec{j} + \dot{z}_v(u_0, v_0)\vec{k}$$

  este tangent la $(\Gamma)_v$ în M_0

Planul tangent la o suprafață

Planul tangent la o suprafață

Fie

$$(\Sigma):\quad \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \quad ,(u,v)\in D$$

o suprafață regulată și $M_0(u_0, v_0)$ un punct al său.

Planul tangent la o suprafață

Fie

$$(\Sigma) : \quad \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad , (u, v) \in D$$

o suprafață regulată și $M_0(u_0, v_0)$ un punct al său.

Definiție

Planul tangent la o suprafață

Fie

$$(\Sigma): \quad \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}, (u,v) \in D$$

o suprafață regulată și $M_0(u_0, v_0)$ un punct al său.

Definiție

Se numește plan tangent la suprafața (Σ) în punctul M_0 planul (π_T) determinat de vectorii $\vec{r}'_u(u_0, v_0)$ și $\vec{r}'_v(u_0, v_0)$.

Planul tangent la o suprafață

Teoremă

Planul tangent la o suprafață

Teoremă

Fie

$$(\Sigma): \quad \vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k} \quad ,(u,v) \in D$$

o suprafață regulată, $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (\Sigma)$ un punct al său, (π_T) planul tangent la (Σ) în M_0 și $W(X, Y, Z) \in (\pi_t)$.

Planul tangent la o suprafață

Teoremă

Fie

$$(\Sigma): \quad \vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k} \quad ,(u,v) \in D$$

o suprafață regulată, $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (\Sigma)$ un punct al său, (π_T) planul tangent la (Σ) în M_0 și $W(X,Y,Z) \in (\pi_t)$. Planul tangent are ecuația

$$(\pi_T): \quad \begin{vmatrix} X - x_0 & Y - y_0 & Z - z_0 \\ \dot{x}_u(u_0, v_0) & \dot{y}_u(u_0, v_0) & \dot{z}_u(u_0, v_0) \\ \dot{x}_v(u_0, v_0) & \dot{y}_v(u_0, v_0) & \dot{z}_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0$$

Normala într-un punct al unei suprafețe

Normala într-un punct al unei suprafețe

Fie

$$(\Sigma): \quad \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad , (u, v) \in D$$

o suprafață regulată și $M_0(u_0, v_0)$ un punct al său.

Normala într-un punct al unei suprafețe

Fie

$$(\Sigma): \quad \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad , (u, v) \in D$$

o suprafață regulată și $M_0(u_0, v_0)$ un punct al său.

Definiție

Normala într-un punct al unei suprafețe

Fie

$$(\Sigma): \quad \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \quad , (u,v) \in D$$

o suprafață regulată și $M_0(u_0, v_0)$ un punct al său.

Definiție

Se numește normală la suprafața (Σ) în punctul M_0 dreapta (Δ_N) perpendiculară pe planul tangent (π_T) la suprafața (Σ) în M_0.

Normala într-un punct al unei suprafețe

- vectorul director al normalei la suprafața (Σ) în M_0 este

$$\vec{N} = \vec{r}'_u(u_0, v_0) \times \vec{r}'_v(u_0, v_0)$$

Normala într-un punct al unei suprafețe

- vectorul director al normalei la suprafața (Σ) în M_0 este

$$\vec{N} = \vec{r}_u'(u_0, v_0) \times \vec{r}_v'(u_0, v_0)$$

- normala (Δ_N) se poate orienta astfel încât sensul ei pozitiv sa coincidă cu sensul vectorului $\vec{N}$.

Normala într-un punct al unei suprafețe

- vectorul director al normalei la suprafața (Σ) în M_0 este

$$\vec{N} = \vec{r}'_u(u_0, v_0) \times \vec{r}'_v(u_0, v_0)$$

- normala (Δ_N) se poate orienta astfel încât sensul ei pozitiv sa coincidă cu sensul vectorului $\vec{N}$.

Definiție

Normala într-un punct al unei suprafețe

- vectorul director al normalei la suprafața (Σ) în M_0 este

$$\vec{N} = \vec{r}_u'(u_0, v_0) \times \vec{r}_v'(u_0, v_0)$$

- normala (Δ_N) se poate orienta astfel încât sensul ei pozitiv sa coincidă cu sensul vectorului $\vec{N}$.

Definiție

Spunem că suprafața (Σ) este orientată dacă considerăm pozitivă fața suprafeței dinspre partea pozitiva a normalei, cealaltă față considerându-se negativă.

Normala într-un punct al unei suprafețe

Teoremă

Fie

$$(\Sigma): \quad \vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k} \quad ,(u,v) \in D$$

o suprafață regulată, $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (\Sigma)$ un punct al său, (Δ_N) normala la (Σ) în M_0 și $W(X, Y, Z) \in (\Delta_N)$.

Normala într-un punct al unei suprafețe

Teoremă

Fie

$$(\Sigma): \quad \vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k} \quad ,(u,v) \in D$$

o suprafață regulată, $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (\Sigma)$ un punct al său, (Δ_N) normala la (Σ) în M_0 și $W(X,Y,Z) \in (\Delta_N)$. Atunci normala are ecuațiile

$$\frac{X - x_0}{A} = \frac{Y - y_0}{B} = \frac{Z - z_0}{C}$$

Normala într-un punct al unei suprafețe

Teoremă

Fie

$$(\Sigma): \quad \vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k} \quad ,(u,v) \in D$$

o suprafață regulată, $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (\Sigma)$ un punct al său, (Δ_N) normala la (Σ) în M_0 și $W(X, Y, Z) \in (\Delta_N)$. Atunci normala are ecuațiile

$$\frac{X - x_0}{A} = \frac{Y - y_0}{B} = \frac{Z - z_0}{C}$$

unde $A = \frac{D(y,z)}{D(u,v)}(u_0, v_0)$, $B = -\frac{D(x,z)}{D(u,v)}(u_0, v_0)$, $C = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u_0, v_0)$

Notațiile lui Gauss

Notațiile lui Gauss

Fie

$$(\Sigma): \quad \vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k} \quad ,(u,v) \in D$$

o suprafață regulată.

Notațiile lui Gauss

Fie

$$(\Sigma): \quad \vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k} \quad ,(u,v) \in D$$

o suprafață regulată.

Notațiile lui Gauss:

$$E = \left\langle \vec{r}_u^{\,\prime} / \vec{r}_u^{\,\prime} \right\rangle$$

$$F = \left\langle \vec{r}_u^{\,\prime} / \vec{r}_v^{\,\prime} \right\rangle$$

$$G = \left\langle \vec{r}_v^{\,\prime} / \vec{r}_v^{\,\prime} \right\rangle$$

Elementul de arc al unei curbe trasate pe o suprafață

Elementul de arc al unei curbe trasate pe o suprafață

Teoremă

Elementul de arc al unei curbe trasate pe o suprafață

Teoremă

Elementul de arc al unei curbe Γ trasată pe o suprafață

$$(\Sigma): \quad \vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k} \quad ,(u,v) \in D$$

este

$$ds = \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt$$

Elementul de arie al unei suprafețe

Teoremă

Elementul de arie al unei suprafețe

Teoremă

$$EG - F^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

Elementul de arie al unei suprafețe

Teoremă

$$EG - F^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

Definiție

Elementul de arie al unei suprafețe

Teoremă

$$EG - F^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

Definiție

Se numește element de arie al suprafeței (Σ) forma diferențială

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}dudv$$

Câmpuri scalare

Câmpuri scalare

Fie D un domeniu din $\mathcal{E}_O^3$ raportat la reperul cartezian $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Câmpuri scalare

Fie D un domeniu din $\mathcal{E}_O^3$ raportat la reperul cartezian $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Definiție

Câmpuri scalare

Fie D un domeniu din $\mathcal{E}^3_O$ raportat la reperul cartezian $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Definiție

Se numește **câmp scalar** pe D orice funcție scalară $\phi : D \to \mathbb{R}$

$$D \ni P(x, y, z) \mapsto \phi(P) = \phi(x, y, z)$$

Câmpuri scalare

Fie D un domeniu din $\mathcal{E}_O^3$ raportat la reperul cartezian $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Definiție

Se numește **câmp scalar** pe D orice funcție scalară $\phi : D \to \mathbb{R}$

$$D \ni P(x, y, z) \mapsto \phi(P) = \phi(x, y, z)$$

În continuare vom presupune că

Câmpuri scalare

Fie D un domeniu din $\mathcal{E}_O^3$ raportat la reperul cartezian $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Definiție

Se numește **câmp scalar** pe D orice funcție scalară $\phi : D \to \mathbb{R}$

$$D \ni P(x, y, z) \mapsto \phi(P) = \phi(x, y, z)$$

În continuare vom presupune că

- ϕ este continuă

Câmpuri scalare

Fie D un domeniu din $\mathcal{E}^3_O$ raportat la reperul cartezian $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Definiție

Se numește **câmp scalar** pe D orice funcție scalară $\phi : D \to \mathbb{R}$

$$D \ni P(x, y, z) \mapsto \phi(P) = \phi(x, y, z)$$

În continuare vom presupune că

- ϕ este continuă
- ϕ are derivate parțiale continue

Câmpuri scalare

Fie D un domeniu din $\mathcal{E}_O^3$ raportat la reperul cartezian $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Definiție

Se numește **câmp scalar** pe D orice funcție scalară $\phi : D \to \mathbb{R}$

$$D \ni P(x, y, z) \mapsto \phi(P) = \phi(x, y, z)$$

În continuare vom presupune că

- ϕ este continuă
- ϕ are derivate parțiale continue
- $\dfrac{\partial \phi}{\partial x}, \dfrac{\partial \phi}{\partial y}, \dfrac{\partial \phi}{\partial z}$ nu se anulează simultan în nici un punct din D.

Câmpuri scalare

Definiție

Câmpuri scalare

Definiție

Se numește **suprafață de nivel în punctul** $P_0 \in D$ mulțimea

$$\{P(x, y, z) \in D \mid \phi(P) = \phi(P_0)\}$$

Câmpuri scalare

Definiție

Se numește **suprafață de nivel în punctul** $P_0 \in D$ mulțimea

$$\{P(x, y, z) \in D \mid \phi(P) = \phi(P_0)\}$$

Curbele situate pe o suprafață de nivel se numesc **curbe de nivel**.

Derivata unui câmp scalar în raport cu o direcție

Derivata unui câmp scalar în raport cu o direcție

Fie $\vec{s} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$ un versor conținut în D, unde α, β și γ sunt unghiurile pe care direcția $\vec{s}$ le face cu axele de coordonate.

Derivata unui câmp scalar în raport cu o direcție

Fie $\vec{s} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$ un versor conținut în D, unde α, β și γ sunt unghiurile pe care direcția $\vec{s}$ le face cu axele de coordonate.

Definiție

Derivata unui câmp scalar în raport cu o direcție

Fie $\vec{s} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$ un versor conținut în D, unde α, β și γ sunt unghiurile pe care direcția $\vec{s}$ le face cu axele de coordonate.

Definiție

Se numește **derivată a câmpului scalar** ϕ **în raport cu direcția** $\vec{s}$ **într-un punct** $P_0 \in D$ numărul real

$$\frac{d\phi}{d\vec{s}}(P_0) = \frac{\partial\phi}{\partial x}(P_0)\cos\alpha + \frac{\partial\phi}{\partial y}(P_0)\cos\beta + \frac{\partial\phi}{\partial z}(P_0)\cos\gamma.$$

Derivata unui câmp scalar în raport cu o direcție

Fie $\vec{s} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$ un versor conținut în D, unde α, β și γ sunt unghiurile pe care direcția $\vec{s}$ le face cu axele de coordonate.

Definiție

Se numește **derivată a câmpului scalar** ϕ **în raport cu direcția** $\vec{s}$ **într-un punct** $P_0 \in D$ numărul real

$$\frac{d\phi}{d\vec{s}}(P_0) = \frac{\partial\phi}{\partial x}(P_0)\cos\alpha + \frac{\partial\phi}{\partial y}(P_0)\cos\beta + \frac{\partial\phi}{\partial z}(P_0)\cos\gamma.$$

Dacă $\vec{n}$ este versorul normalei la suprafața de nivel în punctul P_0, atunci

$$\frac{d\phi}{d\vec{s}}(P_0) = \frac{d\phi}{d\vec{n}}(P_0)\cos\left(\widehat{\vec{s},\vec{n}}\right).$$

Derivata unui câmp scalar în raport cu o direcție

Fie $\vec{s} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$ un versor conținut în D, unde α, β și γ sunt unghiurile pe care direcția $\vec{s}$ le face cu axele de coordonate.

Definiție

Se numește **derivată a câmpului scalar** ϕ **în raport cu direcția** $\vec{s}$ **într-un punct** $P_0 \in D$ numărul real

$$\frac{d\phi}{d\vec{s}}(P_0) = \frac{\partial\phi}{\partial x}(P_0)\cos\alpha + \frac{\partial\phi}{\partial y}(P_0)\cos\beta + \frac{\partial\phi}{\partial z}(P_0)\cos\gamma.$$

Dacă $\vec{n}$ este versorul normalei la suprafața de nivel în punctul P_0, atunci

$$\frac{d\phi}{d\vec{s}}(P_0) = \frac{d\phi}{d\vec{n}}(P_0)\cos\left(\widehat{\vec{s},\vec{n}}\right).$$

Așadar, derivata în raport cu o direcție este maximă dacă $\vec{s} = \vec{n}$.

Gradientul unui câmp scalar

Gradientul unui câmp scalar

Fie $\vec{n}$ versorul normalei la suprafața de nivel în punctul P_0.

Gradientul unui câmp scalar

Fie $\vec{n}$ versorul normalei la suprafața de nivel în punctul P_0.

Definiție

Gradientul unui câmp scalar

Fie $\vec{n}$ versorul normalei la suprafața de nivel în punctul P_0.

Definiție

Se numește **gradient al câmpului scalar** ϕ **în** P_0 vectorul

$$\overrightarrow{grad}_{P_0}\phi = \frac{d\phi}{d\vec{n}}(P_0)\vec{n}$$

Gradientul unui câmp scalar

Fie $\vec{n}$ versorul normalei la suprafața de nivel în punctul P_0.

Definiție

Se numește **gradient al câmpului scalar** ϕ **în** P_0 vectorul

$$\overrightarrow{grad}_{P_0}\phi = \frac{d\phi}{d\vec{n}}(P_0)\vec{n}$$

Deoarece $\cos\left(\widehat{\vec{s},\vec{n}}\right) = \langle \vec{n}/\vec{s} \rangle$, rezultă

$$\frac{d\phi}{d\vec{s}}(P_0) = \frac{d\phi}{d\vec{n}}(P_0)\cos\left(\widehat{\vec{s},\vec{n}}\right) = \left\langle \frac{d\phi}{d\vec{n}}(P_0)\vec{n}/\vec{s} \right\rangle$$

$$= \left\langle \overrightarrow{grad}_{P_0}\phi/\vec{s} \right\rangle = \mathrm{pr}_{\vec{s}}\overrightarrow{grad}_{P_0}\phi$$

Gradientul unui câmp scalar

Deoarece

$$\text{pr}_{\vec{i}}\overrightarrow{grad}_{P_0}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}(P_0),$$

$$\text{pr}_{\vec{j}}\overrightarrow{grad}_{P_0}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial y}(P_0),$$

$$\text{pr}_{\vec{k}}\overrightarrow{grad}_{P_0}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial z}(P_0),$$

rezultă expresia analitică a gradientului în punctul P_0:

$$\overrightarrow{grad}_{P_0}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}(P_0)\vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}(P_0)\vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}(P_0)\vec{k}$$

Gradientul unui câmp scalar

Pentru un punct oarecare $P(x, y, z) \in D$ vom nota

$$\overrightarrow{grad}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\vec{k}$$

Gradientul unui câmp scalar

Pentru un punct oarecare $P(x, y, z) \in D$ vom nota

$$\overrightarrow{grad}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\vec{k}$$

Reguli de calcul pentru gradient

Gradientul unui câmp scalar

Pentru un punct oarecare $P(x, y, z) \in D$ vom nota

$$\overrightarrow{grad}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\vec{k}$$

Reguli de calcul pentru gradient

- $\overrightarrow{grad}(\lambda\phi + \mu\psi) = \lambda\overrightarrow{grad}\phi + \mu\overrightarrow{grad}\psi$

Gradientul unui câmp scalar

Pentru un punct oarecare $P(x, y, z) \in D$ vom nota

$$\overrightarrow{grad}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\vec{k}$$

Reguli de calcul pentru gradient

- $\overrightarrow{grad}(\lambda\phi + \mu\psi) = \lambda\overrightarrow{grad}\phi + \mu\overrightarrow{grad}\psi$
- $\overrightarrow{grad}(\phi \cdot \psi) = \overrightarrow{grad}\phi \cdot \psi + \phi \cdot \overrightarrow{grad}\psi$

Gradientul unui câmp scalar

Pentru un punct oarecare $P(x, y, z) \in D$ vom nota

$$\overrightarrow{grad}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\vec{k}$$

Reguli de calcul pentru gradient

- $\overrightarrow{grad}(\lambda\phi + \mu\psi) = \lambda\overrightarrow{grad}\phi + \mu\overrightarrow{grad}\psi$
- $\overrightarrow{grad}(\phi \cdot \psi) = \overrightarrow{grad}\phi \cdot \psi + \phi \cdot \overrightarrow{grad}\psi$
- $\overrightarrow{grad}\left(\frac{\phi}{\psi}\right) = \frac{\overrightarrow{grad}\phi \cdot \psi - \phi \cdot \overrightarrow{grad}\psi}{\psi^2}$

Gradientul unui câmp scalar

Pentru un punct oarecare $P(x, y, z) \in D$ vom nota

$$\overrightarrow{grad}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\vec{k}$$

Reguli de calcul pentru gradient

- $\overrightarrow{grad}(\lambda\phi + \mu\psi) = \lambda\overrightarrow{grad}\phi + \mu\overrightarrow{grad}\psi$
- $\overrightarrow{grad}(\phi \cdot \psi) = \overrightarrow{grad}\phi \cdot \psi + \phi \cdot \overrightarrow{grad}\psi$
- $\overrightarrow{grad}\left(\frac{\phi}{\psi}\right) = \frac{\overrightarrow{grad}\phi \cdot \psi - \phi \cdot \overrightarrow{grad}\psi}{\psi^2}$
- $\overrightarrow{grad}F(\phi) = F'(\phi)\overrightarrow{grad}\phi$

Gradientul unui câmp scalar

Operatorul lui Hamilton

Gradientul unui câmp scalar

Operatorul lui Hamilton

Dacă se notează cu

$$\vec{\nabla}\cdot = \frac{\partial\cdot}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\cdot}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\cdot}{\partial z}\vec{k}$$

operatorul lui Hamilton (sau operatorul nabla), atunci

$$\overrightarrow{grad}\phi = \vec{\nabla}\phi.$$

Câmpuri vectoriale

Câmpuri vectoriale

Fie D un domeniu din $\mathcal{E}_O^3$ raportat la reperul cartezian $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Câmpuri vectoriale

Fie D un domeniu din $\mathcal{E}_O^3$ raportat la reperul cartezian $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Definiție

Câmpuri vectoriale

Fie D un domeniu din $\mathcal{E}_O^3$ raportat la reperul cartezian $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Definiție

Se numește **câmp vectorial** pe D orice funcție vectorială $\vec{V} : D \to \mathcal{E}_O^3$

$$D \ni P(x,y,z) \mapsto \vec{V}(P) = \vec{V}(x,y,z)$$

unde $\vec{V}(x,y,z) = V_1(x,y,z)\vec{i} + V_2(x,y,z)\vec{j} + V_3(x,y,z)\vec{k}$.

Câmpuri vectoriale

Fie D un domeniu din $\mathcal{E}_O^3$ raportat la reperul cartezian $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Definiție

Se numește **câmp vectorial** pe D orice funcție vectorială $\vec{V} : D \to \mathcal{E}_O^3$

$$D \ni P(x, y, z) \mapsto \vec{V}(P) = \vec{V}(x, y, z)$$

unde $\vec{V}(x, y, z) = V_1(x, y, z)\vec{i} + V_2(x, y, z)\vec{j} + V_3(x, y, z)\vec{k}$.

În continuare vom presupune că

Câmpuri vectoriale

Fie D un domeniu din $\mathcal{E}_O^3$ raportat la reperul cartezian $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Definiție

Se numește **câmp vectorial** pe D orice funcție vectorială $\vec{V} : D \to \mathcal{E}_O^3$

$$D \ni P(x, y, z) \mapsto \vec{V}(P) = \vec{V}(x, y, z)$$

unde $\vec{V}(x, y, z) = V_1(x, y, z)\vec{i} + V_2(x, y, z)\vec{j} + V_3(x, y, z)\vec{k}$.

În continuare vom presupune că

- $\vec{V}$ este continuă

Câmpuri vectoriale

Fie D un domeniu din $\mathcal{E}_O^3$ raportat la reperul cartezian $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Definiție

Se numește **câmp vectorial** pe D orice funcție vectorială $\vec{V} : D \to \mathcal{E}_O^3$

$$D \ni P(x, y, z) \mapsto \vec{V}(P) = \vec{V}(x, y, z)$$

unde $\vec{V}(x, y, z) = V_1(x, y, z)\vec{i} + V_2(x, y, z)\vec{j} + V_3(x, y, z)\vec{k}$.

În continuare vom presupune că

- $\vec{V}$ este continuă
- $\vec{V}$ are derivate parțiale continue

Câmpuri vectoriale

Fie D un domeniu din $\mathcal{E}_O^3$ raportat la reperul cartezian $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Definiție

Se numește **câmp vectorial** pe D orice funcție vectorială $\vec{V} : D \to \mathcal{E}_O^3$

$$D \ni P(x, y, z) \mapsto \vec{V}(P) = \vec{V}(x, y, z)$$

unde $\vec{V}(x, y, z) = V_1(x, y, z)\vec{i} + V_2(x, y, z)\vec{j} + V_3(x, y, z)\vec{k}$.

În continuare vom presupune că

- $\vec{V}$ este continuă
- $\vec{V}$ are derivate parțiale continue
- $\dfrac{\partial \vec{V}}{\partial x}, \dfrac{\partial \vec{V}}{\partial y}, \dfrac{\partial \vec{V}}{\partial z}$ nu se anulează simultan în nici un punct din D.

Divergența unui câmp vectorial

Divergența unui câmp vectorial

Definiție

Divergența unui câmp vectorial

Definiție

Se numește **divergență a câmpului vectorial** $\vec{V}$ într-un punct oarecare $P(x, y, z) \in D$ scalarul

$$\operatorname{div} \vec{V} = \langle \vec{\nabla} / \vec{V} \rangle$$

Divergența unui câmp vectorial

Definiție

Se numește **divergență a câmpului vectorial** $\vec{V}$ într-un punct oarecare $P(x, y, z) \in D$ scalarul

$$\text{div } \vec{V} = \langle \vec{\nabla} / \vec{V} \rangle$$

Are loc egalitatea

$$\text{div } \vec{V} = \left\langle \frac{\partial \cdot}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \cdot}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \cdot}{\partial z}\vec{k} / V_1\vec{i} + V_2\vec{j} + V_3\vec{k} \right\rangle =$$

$$= \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}$$

derivatele parțiale fiind calculate în $P(x, y, z)$.

Divergența unui câmp vectorial

Definiție

Divergența unui câmp vectorial

Definiție

Se numește **câmp solenoidal** orice câmp vectorial $\vec{V}$ pentru care div $\vec{V} = 0$.

Rotorul unui câmp vectorial

Definiție

Rotorul unui câmp vectorial

Definiție

Se numește **rotor al câmpului vectorial** $\vec{V}$ într-un punct oarecare $P(x, y, z) \in D$ vectorul

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V}$$

Rotorul unui câmp vectorial

Definiție

Se numește **rotor al câmpului vectorial** $\vec{V}$ într-un punct oarecare $P(x,y,z) \in D$ vectorul

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V}$$

Are loc egalitatea

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial V_3}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\vec{k}$$

derivatele parțiale fiind calculate în $P(x,y,z)$.

Rotorul unui câmp vectorial

Definiție

Rotorul unui câmp vectorial

Definiție

Se numește **câmp irotațional** orice câmp vectorial $\vec{V}$ pentru care $\overrightarrow{rot}\,\vec{V} = \vec{0}$.

Formule de calcul cu rotor si divergență

Formule de calcul cu rotor si divergență

Au loc următoarele reguli de calcul

Formule de calcul cu rotor si divergență

Au loc următoarele reguli de calcul

- $\text{div}\ (\vec{U} + \vec{V}) = \text{div}\ \vec{U} + \text{div}\ \vec{V}$

Formule de calcul cu rotor si divergență

Au loc următoarele reguli de calcul

- $\mathrm{div}\ (\vec{U} + \vec{V}) = \mathrm{div}\ \vec{U} + \mathrm{div}\ \vec{V}$
- $\overrightarrow{rot}(\vec{U} + \vec{V}) = \overrightarrow{rot}\,\vec{U} + \overrightarrow{rot}\,\vec{V}$

Formule de calcul cu rotor si divergență

Au loc următoarele reguli de calcul

- $\text{div }(\vec{U} + \vec{V}) = \text{div }\vec{U} + \text{div }\vec{V}$
- $\overrightarrow{rot}(\vec{U} + \vec{V}) = \overrightarrow{rot}\,\vec{U} + \overrightarrow{rot}\,\vec{V}$
- $\text{div }(\phi\vec{V}) = \langle \overrightarrow{grad}\phi / \vec{V} \rangle + \phi \text{div }\vec{V}$

Formule de calcul cu rotor si divergență

Au loc următoarele reguli de calcul

- $\text{div } (\vec{U} + \vec{V}) = \text{div } \vec{U} + \text{div } \vec{V}$
- $\overrightarrow{rot}(\vec{U} + \vec{V}) = \overrightarrow{rot}\,\vec{U} + \overrightarrow{rot}\,\vec{V}$
- $\text{div } (\phi\vec{V}) = \langle \overrightarrow{grad}\phi / \vec{V} \rangle + \phi \text{div } \vec{V}$
- $\overrightarrow{rot}(\phi\vec{V}) = \overrightarrow{grad}\phi \times \vec{V} + \phi\overrightarrow{rot}\,\vec{V}$

Formule de calcul cu rotor si divergență

Au loc următoarele reguli de calcul

- $\mathrm{div}\ (\vec{U} + \vec{V}) = \mathrm{div}\ \vec{U} + \mathrm{div}\ \vec{V}$
- $\overrightarrow{rot}(\vec{U} + \vec{V}) = \overrightarrow{rot}\,\vec{U} + \overrightarrow{rot}\,\vec{V}$
- $\mathrm{div}\ (\phi\vec{V}) = \langle \overrightarrow{grad}\phi / \vec{V} \rangle + \phi\mathrm{div}\ \vec{V}$
- $\overrightarrow{rot}(\phi\vec{V}) = \overrightarrow{grad}\phi \times \vec{V} + \phi\overrightarrow{rot}\,\vec{V}$
- $\mathrm{div}\ (\vec{U} \times \vec{V}) = \langle \overrightarrow{rot}\,\vec{U} / \vec{V} \rangle - \langle \vec{U} / \overrightarrow{rot}\,\vec{V} \rangle$

Operatori diferențiali de ordinul II

Operatori diferențiali de ordinul II

Considerăm un câmp scalar ϕ și un câmp vectorial $\vec{V}$ definite pe un domeniu $D \subset \mathcal{E}_O^3$ și având derivate parțiale de ordinul doi continue.

Operatori diferențiali de ordinul II

Considerăm un câmp scalar ϕ și un câmp vectorial $\vec{V}$ definite pe un domeniu $D \subset \mathcal{E}_O^3$ și având derivate parțiale de ordinul doi continue. Se pot defini următorii operatori diferențiali de ordinul II

Operatori diferențiali de ordinul II

Considerăm un câmp scalar ϕ și un câmp vectorial $\vec{V}$ definite pe un domeniu $D \subset \mathcal{E}_O^3$ și având derivate parțiale de ordinul doi continue. Se pot defini următorii operatori diferențiali de ordinul II

- div $(\overrightarrow{grad}\phi) = \langle \vec{\nabla} / \vec{\nabla}\phi \rangle \overset{not}{=} \Delta\phi$, numit operatorul lui Laplace

Operatori diferențiali de ordinul II

Considerăm un câmp scalar ϕ și un câmp vectorial $\vec{V}$ definite pe un domeniu $D \subset \mathcal{E}_O^3$ și având derivate parțiale de ordinul doi continue. Se pot defini următorii operatori diferențiali de ordinul II

- div $(\overrightarrow{grad}\phi) = \langle \vec{\nabla} / \vec{\nabla}\phi \rangle \overset{not}{=} \Delta\phi$, numit operatorul lui Laplace
- $\overrightarrow{grad}(\text{div } \vec{V}) = \vec{\nabla}(\langle \vec{\nabla} / \vec{V} \rangle)$

Operatori diferențiali de ordinul II

Considerăm un câmp scalar ϕ și un câmp vectorial $\vec{V}$ definite pe un domeniu $D \subset \mathcal{E}_O^3$ și având derivate parțiale de ordinul doi continue. Se pot defini următorii operatori diferențiali de ordinul II

- $\operatorname{div}\,(\overrightarrow{grad}\phi) = \langle \vec{\nabla} / \vec{\nabla}\phi \rangle \overset{not}{=} \Delta\phi$, numit operatorul lui Laplace
- $\overrightarrow{grad}(\operatorname{div}\ \vec{V}) = \vec{\nabla}(\langle \vec{\nabla} / \vec{V} \rangle)$
- $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\,\vec{V}) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V})$

Operatori diferențiali de ordinul II

Considerăm un câmp scalar ϕ și un câmp vectorial $\vec{V}$ definite pe un domeniu $D \subset \mathcal{E}_O^3$ și având derivate parțiale de ordinul doi continue. Se pot defini următorii operatori diferențiali de ordinul II

- $\text{div}\ (\overrightarrow{grad}\phi) = \langle \vec{\nabla} / \vec{\nabla}\phi \rangle \overset{not}{=} \Delta\phi$, numit operatorul lui Laplace
- $\overrightarrow{grad}(\text{div}\ \vec{V}) = \vec{\nabla}(\langle \vec{\nabla} / \vec{V} \rangle)$
- $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{V}) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V})$

Se observă că

Operatori diferențiali de ordinul II

Considerăm un câmp scalar ϕ și un câmp vectorial $\vec{V}$ definite pe un domeniu $D \subset \mathcal{E}_O^3$ și având derivate parțiale de ordinul doi continue. Se pot defini următorii operatori diferențiali de ordinul II

- div $(\overrightarrow{grad}\phi) = \langle \vec{\nabla} / \vec{\nabla}\phi \rangle \overset{not}{=} \Delta\phi$, numit operatorul lui Laplace
- $\overrightarrow{grad}(\text{div } \vec{V}) = \vec{\nabla}(\langle \vec{\nabla} / \vec{V} \rangle)$
- $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{V}) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V})$

Se observă că

- $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}\phi) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi) = \vec{0}$, deci orice câmp de gradienți este irotațional

Operatori diferențiali de ordinul II

Considerăm un câmp scalar ϕ și un câmp vectorial $\vec{V}$ definite pe un domeniu $D \subset \mathcal{E}_O^3$ și având derivate parțiale de ordinul doi continue. Se pot defini următorii operatori diferențiali de ordinul II

- $\operatorname{div}\,(\overrightarrow{grad}\phi) = \langle \vec{\nabla} / \vec{\nabla}\phi \rangle \stackrel{not}{=} \Delta\phi$, numit operatorul lui Laplace
- $\overrightarrow{grad}(\operatorname{div}\,\vec{V}) = \vec{\nabla}(\langle \vec{\nabla} / \vec{V} \rangle)$
- $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\,\vec{V}) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V})$

Se observă că

- $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}\phi) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi) = \vec{0}$, deci orice câmp de gradienți este irotațional
- $\operatorname{div}\,(\overrightarrow{rot}\,\vec{V}) = \langle \vec{\nabla} / \vec{\nabla} \times \vec{V} \rangle = 0$, deci orice câmp de rotori este solenoidal.