SPAȚII VECTORIALE

Seminar

1. *Să se arate că sistemul*

$$B = \left\{ \overline{b}_1 = (1,-1,0);\ \ \overline{b}_2 = (-4,6,-10);\ \ \overline{b}_3 = (-1,3,-9) \right\}$$

este o bază în $\Re^3$.

2. *Să se studieze dependența liniară a sistemului de vectori*

$$S = \left\{ \overline{s}_1 = (3,-1,4);\ \ \overline{s}_2 = (2,-3,1);\ \ \overline{s}_3 = (1,2,3) \right\}$$

3. *Să se determine coordonatele vectorului* $\overline{x} = (5,-1,3)$ *în raport cu baza*

$$B = \left\{ \overline{b}_1 = (1,1,1);\ \ \overline{b}_2 = (1,1,2);\ \ \overline{b}_3 = (1,2,3) \right\}$$

4. *Să se determine formulele de trecere de la baza*

$$B = \left\{ \overline{b}_1 = (2,2,-1);\ \ \overline{b}_2 = (2,-1,2);\ \ \overline{b}_3 = (-1,2,2) \right\}$$

la baza canonică din $\Re^3$.

5. *Să se arate că mulțimea*

$$S = \left\{ a(2,0,-1) + b(1,-1,3) + c(-2,0,0)\ \middle|\ a,b,c \in \Re \right\}$$

este un subspațiu vectorial al lui $\Re^3$.

6. *Să se arate că mulțimea*

$$V = \left\{ (a+b,-a+2b,3b)\ \middle|\ a,b \in \Re \right\}$$

este un subspațiu vectorial al lui $\Re^3$ *şi să se determine* $\dim V$

7. *Să se arate că aplicația* $\langle\ |\ \rangle : \Re^2 \times \Re^2 \to \Re$,

$$\langle \overline{x} | \overline{y} \rangle = 5x^1y^1 - 2x^1y^2 - 2x^2y^1 + x^2y^2$$

este un produs scalar pe $\Re^2$.

8. *Să se ortonormeze baza*

$$B = \left\{ \overline{b}_1 = (1,-2,2);\ \ \overline{b}_2 = (-1,0,-1);\ \ \overline{b}_3 = (5,-3,-7) \right\}$$

Studiu individual

1. *În $\Re$-spațiul vectorial $\Re^3$ se consideră sistemul de vectori*

$$A = \left\{ \overline{a}_1 = (1,2,0);\ \overline{a}_2 = (2.1.2);\ \overline{a}_3 = (3,1,3) \right\}$$

Să se arate că A este o bază a lui $\Re^3$.

2. *Se consideră $\Re$-spațiul vectorial $\Re^3$ şi vectorul $\overline{x} = (2,2,3)$ în raport cu baza canonică din $\Re^3$. Fie*

$$A = \left\{ \overline{a}_1 = (1,2,0);\ \overline{a}_2 = (2.1.2);\ \overline{a}_3 = (3,1,3) \right\}$$

o altă bază a lui $\Re^3$. Să se determine $\left[\overline{x}\right]_A$.

3. *Să se determine coordonatele vectorului $\overline{x} = (1,1,1)$ în raport cu baza*

$$B = \left\{ \overline{b}_1 = (1,1,0);\ \overline{b}_2 = (0,1,1);\ \overline{b}_3 = (1,0,1) \right\}$$

4. *Să se determine matricea de trecere şi formulele de trecere de la baza*

$$B = \left\{ \overline{b}_1 = (1,1,1);\ \overline{b}_2 = (1,1,2);\ \overline{b}_3 = (1,2,3) \right\}$$

la baza canonică a lui $\Re^3$

5. *Să se arate că mulțimea*

$$S = \left\{ a(2,1,3) + b(1,4,1) + c(1,-3,2) \ \middle|\ a,b,c \in \Re \right\}$$

este un subspațiu vectorial al lui $\Re^3$

6. *Să se arate că mulțimea*

$$V = \left\{ (3a, -a + 2b, 2a + b) \ \middle|\ a,b \in \Re \right\}$$

este un subspațiu vectorial al lui $\Re^3$ şi să se determine $\dim V$

7. *Să se arate că aplicația $\langle\ |\ \rangle : \Re^3 \times \Re^3 \to \Re$,*

$$\langle \overline{x} | \overline{y} \rangle = x^1 y^1 + x^1 y^2 + x^2 y^1 + 2x^2 y^2 - x^2 y^3 - x^3 y^2 + 2x^3 y^3$$

este un produs scalar pe $\Re^3$.

8. *Să se ortonormeze baza*

$$B = \left\{ \overline{b}_1 = (1,1,1);\ \overline{b}_2 = (1,1,0);\ \overline{b}_3 = (1,0,0) \right\}$$

OPERATORI LINIARI

Seminar

1. *Să se arate că aplicația*

$$T:\Re^3 \to \Re^3$$

$$T\left(x^1, x^2, x^3\right) = \left(x^1 - 2x^2 + x^3,\ \ 2x^1 + x^2 - x^3,\ \ x^2 - 3x^3 \right)$$

este un operator liniar pe $\Re^3$.

2. *Se consideră operatorul liniar* $T \in L\left(\Re^3\right)$ *astfel încât*

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Să se determine $Ker(T)$.

3. *Se consideră operatorul liniar* $T \in L\left(\Re^3\right)$ *ale cărui expresii analitice în raport cu baza canonică E din* $\Re^3$ *sunt*

$$\begin{cases} y^1 = x^1 - x^2 + 2x^3 \\ y^2 = -x^1 + x^2 - 2x^3 \\ y^3 = 2x^1 - 2x^2 \end{cases}$$

Să se precizeze dacă T este diagonalizabil şi, în caz afirmativ, să se determine o bază B a lui $\Re^3$ *în raport cu care matricea asociată lui T are forma diagonală.*

4. *Fie* $T:\Re^3 \to \Re^3$ *un operator liniar a cărei matrice asociată în raport cu baza canonică E din* $\Re^3$ *este*

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Să se arate că T nu este diagonalizabil.

Studiu individual

1. *Se consideră aplicația*

$$T : \Re^3 \to \Re^3$$

$$T\left(x^1, x^2, x^3\right) = \left(-x^1 + x^2 + 2x^3,\ \ 3x^1 + 3x^2 + 4x^3,\ \ 2x^1 + x^2 + 2x^3\right)$$

Să se arate că T este un operator liniar pe $\Re^3$.

2. *Se consideră aplicația*

$$T : \Re^3 \to \Re^3$$

$$T\left(x^1, x^2, x^3\right) = \left(-x^1 + x^2 + 2x^3,\ \ 3x^1 + 3x^2 + 4x^3,\ \ 2x^1 + x^2 + x^3\right)$$

Să se determine $Ker(T)$.

3. *Se consideră operatorul liniar* $T \in L\left(\Re^3\right)$ *ale cărui expresii analitice în raport cu baza canonică E din* $\Re^3$ *sunt*

$$\begin{cases} y^1 = x^1 + 2x^2 \\ y^2 = 2x^2 \\ y^3 = -2x^2 + x^3 \end{cases}$$

Să se precizeze dacă T este diagonalizabil şi, în caz afirmativ, să se determine o bază B a lui $\Re^3$ *în raport cu care matricea asociată lui T are forma diagonală.*

FORME PĂTRATICE

Seminar

1. *Să se determine expresia analitică redusă a formei pătratice*

$$h:\Re^3 \to \Re$$

$$h(\overline{x}) = x^1x^2 - 2x^1x^3 + x^2x^3$$

folosind metoda Gauss-Lagrange.

2. *Să se determine expresia analitică redusă a formei pătratice*

$$h:\Re^3 \to \Re$$

$$h(\overline{x}) = (x^1)^2 + 2(x^2)^2 + 5(x^3)^2 + 2x^1x^2 + 4x^2x^3$$

folosind metoda lui Jacobi.

3. *Să se determine expresia analitică redusă a formei pătratice*

$$h:\Re^3 \to \Re$$

$$h(\overline{x}) = (x^1)^2 + 2(x^2)^2 + 3(x^3)^2 - 4x^1x^2 - 4x^2x^3$$

folosind metoda spectrală.

Studiu individual

1. *Să se determine expresia analitică redusă a formei pătratice*

$$h : \Re^3 \to \Re$$
$$h(\overline{x}) = 3(x^1)^2 + 4x^1x^3$$

folosind metoda Gauss-Lagrange.

2. *Să se determine expresia analitică redusă a formei pătratice*

$$h : \Re^3 \to \Re$$
$$h(\overline{x}) = (x^1)^2 + 2(x^2)^2 + 3(x^3)^2 - 4x^1x^2 + 2x^2x^3 + 2x^1x^3$$

folosind metoda lui Jacobi.

3. *Să se determine expresia analitică redusă a formei pătratice*

$$h : \Re^3 \to \Re$$
$$h(\overline{x}) = 3(x^1)^2 + 4x^1x^3$$

folosind metoda spectrală.

ALGEBRĂ VECTORIALĂ

Seminar

1. *Să se determine* λ *astfel încât vectorii* $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ *şi* $\vec{b} = \lambda\vec{i} + \vec{j} - (1 + 2\lambda)\vec{k}$ *să fie perpendiculari*

2. *Să se determine un vector de lungime 12 situat în planul yOz care să fie perpendicular pe vectorul* $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$

3. *Să se decompună vectorul* $\vec{x} = \vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ *după direcțiile vectorilor* $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{v} = 3\vec{i} + \vec{k}$ *şi* $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

4. *Să se calculeze norma vectorului* $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ *ştiind că* $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ *şi* $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$

5. *Se dau vectorii* $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{v} = 4\vec{i} + 6\vec{j} - \vec{k}$ *şi* $\vec{w} = 6\vec{i} + 9\vec{j} + 2\vec{k}$. *Să se arate că vectorii* $\vec{u} \times \vec{v}$ *şi* $\vec{v} \times \vec{w}$ *sunt coliniari*

6. *Să se determine* α *şi* β *astfel încât vectorii* $\vec{u} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \alpha\vec{k}$ *şi* $\vec{v} = \beta\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ *să fie coliniari*

7. *Să se determine aria triunghiului ale cărui vârfuri sunt date de vectorii de poziție* $\vec{r}_A = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{r}_B = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ *şi* $\vec{r}_C = 3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

8. *Să se afle volumul paralelipipedului determinat de vectorii* $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{v}_2 = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ *şi* $\vec{v}_3 = -\vec{j} + 2\vec{k}$

Studiu individual

1. *Să se determine* $\lambda \in \Re$ *astfel încât vectorii* $\vec{v}_1 = \vec{i} + 2\lambda\vec{j} - (\lambda - 1)\vec{k}$ *şi* $\vec{v}_2 = (3 - \lambda)\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ *să fie ortogonali.*

2. *Se dau vectorii* $\vec{v}_1 = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{v}_2 = 2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$ *şi* $\vec{v}_3 = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$. *Să se verifice dacă are loc egalitatea* $\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) = (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \times \vec{v}_3$

3. *Să se calculeze aria triunghiului ABC ştiind că A(1,-1,2), B(-3,0,5), C(2,1,2).*

4. *Să se studieze coplanaritatea vectorilor* $\vec{v}_2 = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{v}_2 = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{v}_3 = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$

5. *Să se determine* $\lambda \in \Re$ *astfel încât vectorii* $\vec{v}_1 = \lambda\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v}_2 = \vec{i} + \lambda\vec{j} + \vec{k}$ *şi* $\vec{v}_3 = \vec{i} + \vec{j} + \lambda\vec{k}$ *să fie coplanari.*

6. *Să se afle înălţimea paralelipipedului generat de vectorii* $\vec{v}_1 = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{v}_2 = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v}_3 = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, *luând ca baza paralelogramul generat de vectorii* $\vec{v}_1$ *şi* $\vec{v}_3$.

7. *Să se calculeze lungimea diagonalelor paralelogramului construit pe vectorii* $\vec{v}_1 = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ *şi* $\vec{v}_2 = 2\vec{i} + \vec{j} + 8\vec{k}$ *şi să se arate că acesta este un dreptunghi.*

8. *Să se calculeze aria paralelogramului construit pe vectorii* $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ *şi* $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j}$.

9. *Să se calculeze înălţimea paralelipipedului construit pe vectorii* $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ *şi* $\vec{c} = -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, *care este perpendiculară pe planul vectorilor* $\vec{a}$ *şi* $\vec{b}$.

DREPTE ŞI PLANE

Seminar

1. *Să se găsească cosinuşii directori ai dreptei care trece prin punctele* $P_1(5,2,-1)$ *şi* $P_2(-3,-2,0)$
2. *Să se calculeze cosinuşii directori ai dreptei*

$$(d)\quad \begin{cases} 5x-6y+2z+21=0 \\ x-z+3=0 \end{cases}$$

3. *Să se verifice dacă punctele P(-1,2,0), Q(3,0,2) şi R(1,-2,2)* sunt coliniare.
4. *Să se scrie ecuaţia unui plan care trece prin origine şi prin punctele A(1,2,3) şi B(-1,3,-3).*
5. *Să se scrie ecuaţia unui plan care trece prin punctul* $M_0(2,2,1)$ *şi care este perpendicular pe dreapta*

$$(d)\quad \begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$$

6. *Să* scrie *se ecuaţia planului determinat de dreptele*

$$(d_1):\quad \frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{1}$$

şi

$$(d_2):\quad \frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-3}{7}$$

7. *Să se determine punctul de intersecţie a planului*

$$(p):\quad 3x+5y-2z-6=0 \text{ cu dreapta } (d):\quad \frac{x+3}{4}=\frac{y-7}{-6}=\frac{z+2}{3}$$

8. *Să se calculeze unghiul dreptelor*

$$(d_1):\quad \begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases} \quad \text{şi} \quad (d_2):\quad \frac{x+3}{4}=\frac{y-6}{-3}=\frac{z-3}{2}$$

9. *Să se calculeze unghiul dintre dreapta* $(d):\quad \frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{1}$

şi planul $(p):\quad 2x-y+z-3=0$

10. *Să se găsească distanţa de la punctul* $M_1(7,9,7)$ *la dreapta*

$$(d): \quad \frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2}$$

11. *Să se calculeze distanţa de la punctul* $\mathrm{M}(-1,0,1)$ *la planul*

$$(\mathrm{p}): \quad 2\mathrm{x}-3\mathrm{y}+\mathrm{z}+2=0$$

Studiu individual

1. *Să se scrie ecuaţiile dreptei care trece prin punctul* $M_0(2,-5,3)$ *şi care este paralelă cu dreapta*

$$(d)\qquad \frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-6}=\frac{z+3}{9}$$

2. *Să se determine cosinuşii directori ai dreptei*

$$(d)\qquad \begin{cases} 2x-3y-3z-9=0 \\ x-2y+z+3=0 \end{cases}$$

3. *Să se determine ecuaţiile dreptei care trece prin punctul* $M_0(2,-5,3)$ *şi care este paralelă cu dreapta*

$$(d):\qquad \begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ 5x+4y-z-7=0 \end{cases}$$

4. *Un plan taie pe axele de coordonate segmentele* $a=11,\ b=55,\ c=10$. *Să se determine cosinuşii directori ai normalei la plan.*

5. *Să se determine cosinuşii directori ai dreptei*

$$(d)\qquad \frac{x-1}{4}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z+2}{12}$$

6. *Să se studieze coliniaritatea punctelor* $M_1(3,0,1)$, $M_2(0,2,4)$, $M_3(1,\frac{4}{3},3)$

7. *Să se scrie ecuaţia unui plan care trece prin punctul* $M_0(2,-5,9)$ *şi este paralel cu planul Oxy*

8. *Să se aducă la forma normală ecuaţia planului*

$$(\pi)\quad 10x+2y-11z+60=0$$

9. *Să se scrie ecuaţia planului determinat de punctele* $M_1(3,1,0)$, $M_2(0,7,2)$ *şi* $M_3(4,1,5)$

10. *Fiind date punctele* $M_1(2,-3,0)$, $M_2(1,-1,4)$ *şi* $M_3(0,3,4)$, *să se scrie ecuaţiile dreptei care trece prin* M_1 *şi este paralelă cu* M_2M_3

11. *Punctele P(2,3,-1), Q(0,3,1) şi R(2,0,1) determină un plan. Să se scrie ecuaţiile normalei la plan care trece prin punctul P*

12. *Să se precizeze poziţia dreptei* (d): $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{-3}$

faţă de planul (p): $x+y+z+4=0$

13. *Să se calculeze unghiul dreptelor* (d_1): $\begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ x-2y+z+1=0 \end{cases}$ *şi*

(d_2): $\begin{cases} x-y-z-1=0 \\ x-y+2z+1=0 \end{cases}$

14. *Să se calculeze distanţa de la punctul A(3,1,7) la dreapta*

(d): $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-1}{1}$

CUADRICE PE ECUAȚII REDUSE

Seminar

1. *Să se afle coordonatele centrului şi raza sferei*

$$(S): \quad 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 5x + 2y + 3z + 2 = 0$$

2. *Să se determine sfera de centru C(1,-2,3) care este tangentă planului*

$$(p): \quad x + y - z + 7 = 0$$

3. *Care este poziția planului* $(p): \quad x - y + z + 1 = 0$ *față de sfera*

$(S): \quad (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 - 9 = 0$ *?*

4. *Să se găsească punctele de intersecție ale dreptei*

$$(d): \quad x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

cu hiperboloidul cu două pânze

$$(H_2): \quad x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} + 1 = 0$$

Studiu individual

1. *Să se determine centrul şi raza sferei dată de ecuaţia*

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + y - 3z = 1$$

2. *Să se determine ecuaţia sferei care are centrul în punctul* $M_0(1,1,1)$ *şi este tangentă la planul*

$$(\pi): \qquad x + 2y + 2z - 1 = 0$$

3. *Să se găsească punctele de intersecţie ale elipsoidului*

$$(E): \qquad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} - 1 = 0$$

cu dreapta (d): $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -6 - 3t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$

4. *Să se găsească punctele de intersecţie ale dreptei*

$$(d): \qquad x - 3 = y - 1 = \frac{z - 6}{3}$$

cu hiperboloidul (H_2): $\dfrac{x^2}{4} + y^2 - \dfrac{z^2}{9} + 1 = 0$

5. *Să se determine ecuaţiile dreptelor care au vectorul director* $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ *şi care trec prin punctele de intersecţie ale paraboloidului eliptic*

(P_e): $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{4} = 9z$ *cu dreapta* (d): $x = y = z$

GEOMETRIA DIFERENȚIALĂ A CURBELOR

Seminar

1. *Se consideră o curbă dată prin ecuațiile parametrice*

$$(C): \quad \begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = e^{-t} \\ z(t) = \sqrt{2}t \end{cases}$$

Să se determine elementele triedrului lui Frenet la curba (C) în punctul $t_0 = 0$

2. *Se consideră curba*

$$(C): \quad \begin{cases} x(t) = 1 - \cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = t \end{cases}$$

Să se determine elementele triedrului lui Frenet la curba (C) în punctul $\mathrm{t}_0 = \dfrac{\pi}{2}$

3. *Se consideră curba*

$$(C): \quad \begin{cases} x(t) = 2(t^3 + 3t^2 + 3t) \\ y(t) = 2(t^3 + 1) \\ z(t) = -3(2t + 1) \end{cases}$$

Să se determine elementele triedrului lui Frenet la curba (C) în punctul $\mathrm{t}_0 = 0$

4. *Să se calculeze curbura şi torsiunea curbei*

$$(C): \quad \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = \dfrac{2t^3}{3} \end{cases}$$

într-un punct oarecare al curbei.

Studiu individual

1. *Se consideră curba*

$$(C): \quad \begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{2} \\ y(t) = \dfrac{2t^3}{3} \\ z(t) = \dfrac{t^4}{2} \end{cases}$$

Să se determine elementele triedrului lui Frenet la curba (C) în punctul $\mathrm{t}_0 = 1$

2. *Se consideră curba*

$$(C): \quad \begin{cases} x(t) = 3t^3 \\ y(t) = 4t^2 \\ z(t) = t \end{cases}$$

Să se determine elementele triedrului lui Frenet la curba (C) în punctul $\mathrm{t}_0 = 1$

3. *Se consideră curba*

$$(C): \quad \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^3 \\ z(t) = e^t \end{cases}$$

Să se determine elementele triedrului lui Frenet la curba (C) în punctul $\mathrm{t}_0 = 1$

4. *Să se calculeze curbura şi torsiunea curbei*

$$(C): \quad \begin{cases} x(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1 \\ y(t) = 3(t^2 - 1) \\ z(t) = 3(t-1)^2 \end{cases}$$

într-un punct oarecare al curbei.

GEOMETRIA DIFERENȚIALĂ A SUPRAFEȚELOR

Seminar

1. *Să se scrie ecuația planului tangent şi ecuațiile normalei la suprafața*

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} x(u,v) = u + v \\ y(u,v) = u - v \\ z(u,v) = uv \end{cases}$$

în punctul $M_0(u_0 = 2, v_0 = 1)$.

2. *Să se calculeze elementul de arie pe suprafața*

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} x(u,v) = u^2 + v \\ y(u,v) = u^2 - v \\ z(u,v) = uv \end{cases}$$

Studiu individual

1. *Să se scrie ecuația planului tangent şi ecuațiile normalei la suprafața*

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} x(u,v) = u + v \\ y(u,v) = u^2 + v^2 \\ z(u,v) = u^3 + v^3 \end{cases}$$

în punctul $M_0(u_0 = 1, v_0 = 1)$.

2. *Să se calculeze elementul de arie pe suprafața*

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = v \\ z(u,v) = uv \end{cases}$$

OPERATORI DIFERENŢIALI LINIARI

Seminar

1. *Să se determine suprafaţa de nivel în punctul* $M(1,1,0)$ *pentru câmpul scalar*

$$\varphi(x,y,z)=2x^3-3y^2+6xyz.$$

2. *Să se calculeze derivata câmpului scalar*

$$\varphi(x,y,z)=2x^3-3y^2+6xyz$$

în raport cu direcţia $\overrightarrow{AB}$*, ştiind că* $A(1,1,0)$ *şi* $B(4,-2,3)$.

3. *Se consideră câmpurile scalare* $\varphi(x,y,z)=x+y+z$ *şi* $\psi(x,y,z)=xy+xz+yz$.

Să se calculeze $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi\times\overrightarrow{\mathrm{grad}}\psi$.

4. *Să se calculeze* $\mathrm{div}\vec{V}$ *pentru câmpul vectorial*

$$\vec{V}(x,y,z)=\left(x^2+2yz\right)\vec{i}+\left(y^2+2xz\right)\vec{j}+\left(z^2+2xy\right)\vec{k}$$

5. *Să se calculeze* $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V}$ *pentru câmpul vectorial*

$$\vec{V}(x,y,z)=xyz\vec{i}+\left(2x+3y+z\right)\vec{j}+\left(x^2+z^2\right)\vec{k}$$

6. *Să se arate că* $div\vec{u}\times\vec{v}=\left\langle\vec{v}/\overrightarrow{rot}\vec{u}\right\rangle-\left\langle\vec{u}/\overrightarrow{rot}\vec{v}\right\rangle$

Studiu individual

***1**. Să se determine suprafaţa de nivel în punctul* $M(1,-1,2)$ *pentru câmpul scalar*

$$\varphi(x,y,z)=x^3+y^3-3x^2yz+z^3.$$

***2.** Să se calculeze derivata câmpului scalar*

$$\varphi(x,y,z)=x^2yz+4xz^2$$

în raport cu direcţia $\vec{v}=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$.

***3.** Se consideră câmpul scalar* $\varphi(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-xz+yz-xy$.

Să se calculeze $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi$.

***4.** Să se calculeze* $\mathrm{div}\,\vec{V}$ *pentru câmpul vectorial*

$$\vec{V}(x,y,z)=\left(x^2-yz\right)\vec{i}+\left(xy-z^2\right)\vec{j}+\left(x^2+y^2\right)\vec{k}$$

***5.** Să se calculeze* $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}$ *pentru câmpul vectorial*

$$\vec{V}(x,y,z)=x^2yz\vec{i}+xy^2z\vec{j}+xyz^2\vec{k}$$

***6.** Să se arate că* $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\varphi\vec{u}\right)=\varphi\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{u}-\vec{u}\times\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi$.