Grafuri Orientate

Grafuri Orientate

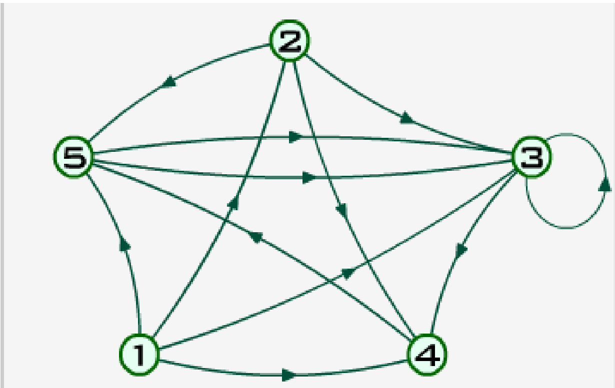
Adicenta.Incidenta.Grad

➤ Numim **graf orientat**, o pereche ordonată de mulţimi G=(X,U), unde:

- X este o mulţime finită şi nevidă numită mulţimea nodurilor (vârfurilor);
- U este o mulţime formată din **perechi ordonate** de elemente ale lui X, numită mulţimea arcelor.

Exemplu:

➤ În graful G=(X,U) de mai jos avem: X={1, 2, 3, 4, 5},
U={(5,3), (5,3), (1,2), (1,3),(1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (4,5), (3,3)}.



Nodul 4 este **succesor** al nodului 2.

Nodul 2 este **predecesor** al nodului 4.

Nodurile 2 şi 4 sunt **adiacente**.

Arcul (2,4) şi nodul 2 se numesc **incidente**.

La fel arcul (2,4) şi nodul 4.

Observaţi că avem **bucla** (3,3)

Există două arce (5,3), adică G este **2-graf**

Succesor/Predecesor

Dacă (x,y) este un arc, nodul y se numeşte **succesor** al lui x, iar nodul x se numeşte **predecesor** al lui y.

Bucla

Un arc de forma (x,x), care iese din nodul x şi intră tot în x, se numeşte **buclă**.

Adiacente/Incidente

Pentru un arc de forma u=(x,y) nodurile x şi y se numesc **adiacente**, iar arcul u şi nodul x sunt **incidente**.

P-Graf

Se numeşte **p-graf**, un graf orientat în care numărul arcelor identice este mai mic sau egal cu o valoare dată p.

Grafuri Orientate

$d^+(2)$=3

$d^-(2)$=1

$\Gamma^+(2)$={3,4,5}

$\Gamma^-(2)$={1}

$\omega^+(2)$={(2,5), (2,3), (2,4)}

$\omega^-(2)$={(1,2)}

Gradul exterior

Gradul exterior al unui vârf x, notat $d^+(x)$, reprezintă numărul arcelor care ies din nodul x, adică numărul arcelor de forma $(x,y) \in U$.

Grad interior

Gradul interior al unui vârf x, notat $d^-(x)$, reprezintă numărul arcelor care intră în nodul x, adică numărul arcelor de forma $(y,x) \in U$.

Multimea Succesorilor

$\Gamma^+(x) = \{y \in X / (x,y) \in U\}$ reprezintă mulţimea nodurilor ce constituie extremităţi finale ale arcelor care pleacă din nodul x. Pe scurt, **mulţimea succesorilor** lui x.

Multimea predecesorilor

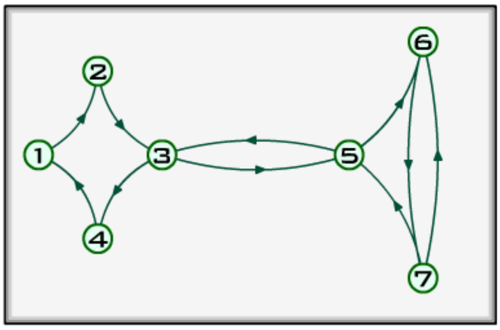
$\Gamma^-(x) = \{y \in X / (y,x) \in U\}$ reprezintă mulţimea nodurilor ce constituie extremităţi iniţiale ale arcelor care intră în nodul x. Pe scurt, **mulţimea predecesorilor** lui x.

Multimea arcelor care ies din nod

$\omega^+(x) = \{u = (x,y) / u \in U\}$ reprezintă mulţimea arcelor care ies din nodul x.

Multimea arcelor care intra din nod

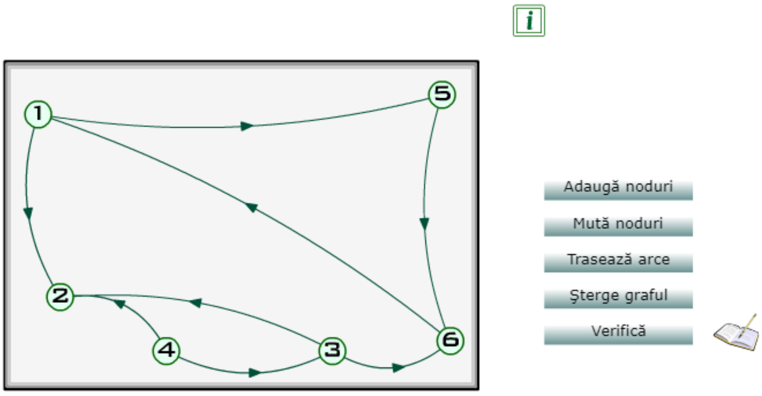
$\omega^-(x) = \{u = (y,x) / u \in U\}$ reprezintă mulţimea arcelor care intră în nodul x.



- $d^+(3)=\boxed{2}$ — *Corect !*
- $d^-(5)=\boxed{2}$ — *Corect !*
- $\Gamma^+(1)=\{\boxed{2}\}$ — *Corect !*
- $\Gamma^-(3)=\{\boxed{2}\}$ — *Corect !*
- $\omega^+(5)=\{(\boxed{5},\boxed{6}),(\boxed{5},\boxed{3})\}$ — *Corect !*
- $\omega^-(4)=\{(\boxed{3},\boxed{4})\}$ — *Corect !*

Grafuri Orientate

➤ Desenaţi graful orientat definit de: X={1,2,3,4,5,6} şi U={(1,2), (1,5), (3,2), (5,6), (3,6), (6,1), (4,2), (4,3)}



Corect !

a) Dacă (x,y) este arc, atunci x este ***predecesor*** al lui y.

b) Arcul (x,y) şi nodul x se numesc ***incidente***

c) Un arc de forma ***(x, x)*** se numeşte ***bucla***

d) Gradul ***interior*** al nodului x se notează cu $d^{-}(x)$

e) Mulţimea de ***succesori*** ai lui x se notează cu $\Gamma^{+}(x)$

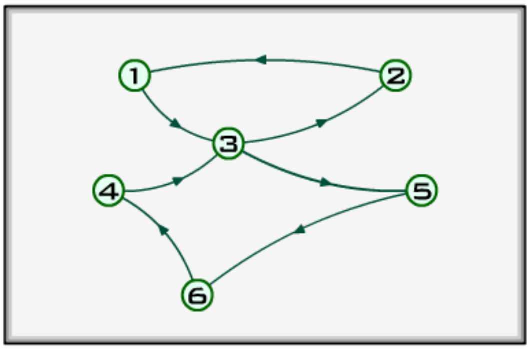
Graf Partial.Subgraf

Definitie

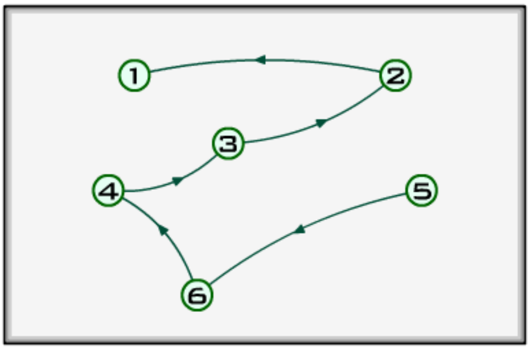
➤ Se consideră graful G de mai jos în care X={1, 2, 3, 4, 5, 6} şi U={(2,1), (1,3), (3,2), (4,3), (3,5), (6,4), (5,6)}. Construim **graful parţial** G_1=(X,V), unde X={1, 2, 3, 4, 5, 6} şi V={(2,1), (3,2), (4,3), (6,4), (5,6)}, adică din graful G au fost eliminate arcele (1,3) şi (3,5).

Fie graful G=(X,U). Un **graf parţial** al lui G, este un graf G_1=(X,V), cu V ⊆ U. Altfel spus, un graf parţial G_1 al lui G, este chiar G, sau se obţine din G păstrând toate vârfurile şi suprimând nişte arce.

Grafuri Orientate



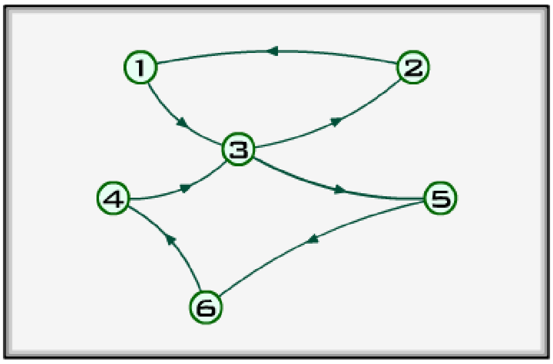
Graful G=(X,U)



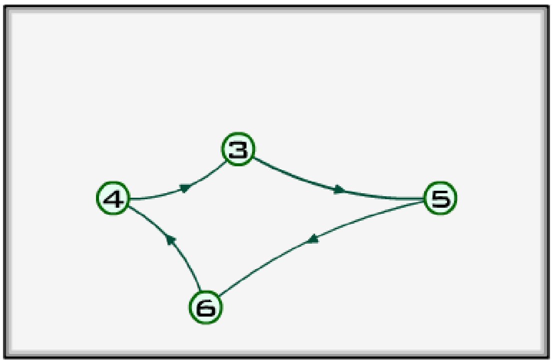
Graful G_1=(X,V)

- Se consideră graful G de mai jos în care X={1, 2, 3, 4, 5, 6} şi U={(2,1), (1,3), (3,2), (4,3), (3,5), (6,4), (5,6)}. Construim **subgraful** G_2=(Y,V), unde Y={3, 4, 5, 6} şi V={(4,3), (3,5), (6,4), (5,6)} adică din graful G au fost eliminate nodurile 1 şi 2 şi arcele incidente acestora.

Fie graful G=(X,U). Un **subgraf** al lui G, este un graf G_1=(Y,V), unde Y⊂ X, iar V va conţine toate arcele din U care au ambele extremităţi în Y. Altfel spus, un subgraf al unui graf se obţine eliminând nişte noduri şi toate arcele incidente acestor noduri.



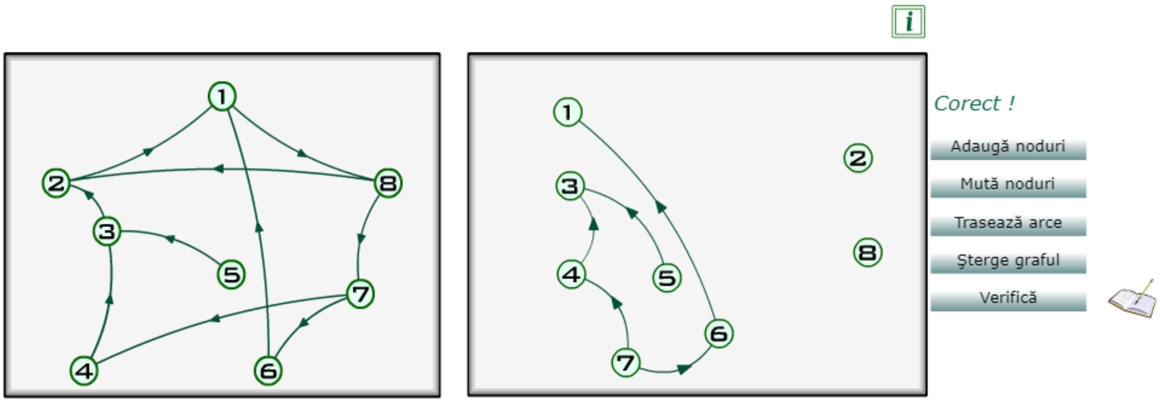
Graful G=(X,U)



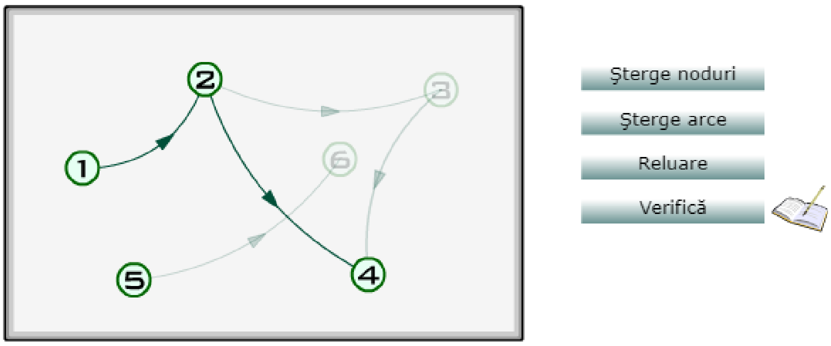
Graful G_1=(Y,V)

Grafuri Orientate

➤ Construiţi **graful parţial** obţinut prin eliminarea arcelor ce trec prin nodurile 2 şi 8 din graful de mai jos.



➤ Construiţi **subgraful** generat de mulţimea de noduri Y={1, 2, 4, 5}



Corect !

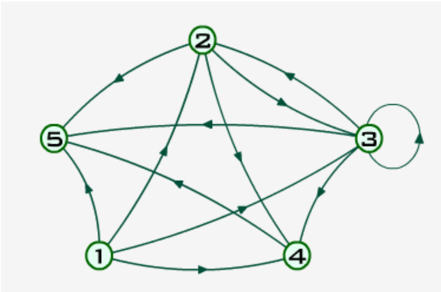
Matrice de adiacenta

Definitie

➤ **Matricea de adiacenţă** este o matrice **a** cu **n** linii şi **n** coloane, în care elementele **a[i,j]** se definesc astfel:

$$a[i,j] = \begin{cases} 1, \text{ dacă } \exists \text{ arcul } (i,j) \text{ în mulţimea U} \\ 0, \text{ în caz contrar} \end{cases}$$

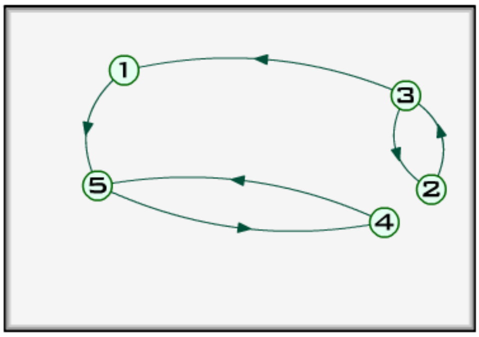
Grafuri Orientate



Matricea de adiacenţă

	1	2	3	4	5
1	0	1	1	1	1
2	0	0	1	1	1
3	0	1	1	1	1
4	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0

➤ Desenaţi un graf şi urmăriţi cum se modifică matricea de adiacenţă.

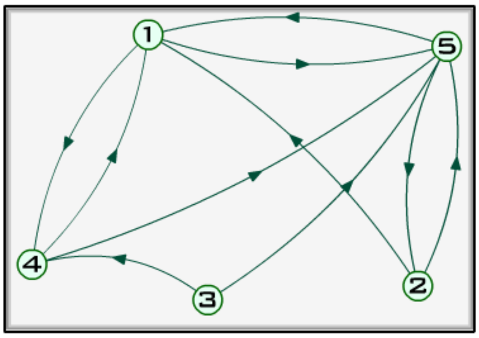


Matricea de adiacenţă

	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	1
2	0	0	1	0	0
3	1	1	0	0	0
4	0	0	0	0	1
5	0	0	0	1	0

➤ Desenaţi graful corespunzător matricei de adiacenţă date.

*Folosiţi butonul **Generare matrice** pentru a genera o altă matrice.*



Corect !

	1	2	3	4	5
1	0	0	0	1	1
2	1	0	0	0	1
3	0	0	0	1	1
4	1	0	0	0	1
5	1	1	0	0	0

➤ Completaţi frazele de mai jos cu unul din cuvintele disponibile.

a) Numărul de ***arce*** ale unui graf orientat este egal cu ***suma*** valorilor 1 din matricea de adiacenţă.

b) Suma elementelor din ***linia*** i reprezintă gradul ***exterior*** al nodului i.

c) Suma elementelor din coloana i reprezintă gradul ***interior*** al nodului i.

d) Un nod ***izolat*** are în linia şi coloana corespunzătoare în matricea de adiacenţă doar zerouri.

Grafuri Orientate

➤ Determinarea gradului exterior şi a gradului interior ale unui nod oarecare x.

```
int d_plus (int x)
{
/*returnează gradul exterior d+ pentru un nod x;
acesta este numărul valorilor de 1 de pe linia x a
matricei de adiacenţă*/
    int nr, j;
    nr=0;
    for (j=1; j<=n; j++)
        if (a[x][j]==1) nr++;
    return nr;
}

int d_minus (int x)
{
/*returnează gradul interior d- pentru un nod x; acesta
este numărul valorilor de 1 de pe coloana x a matricei
de adiacenţă*/
    int nr, i;
    nr=0;
    for (i=1;i<=n;i++)
        if (a[i][x]==1) nr++;
    return nr;
}
```

Matricea varfuri-arce

Definitie

➤ Matricea **vârfuri-arce** este o matrice **B** cu **n**=|X| linii şi **m**=|U| coloane, în care fiecare element b[i,j] este:

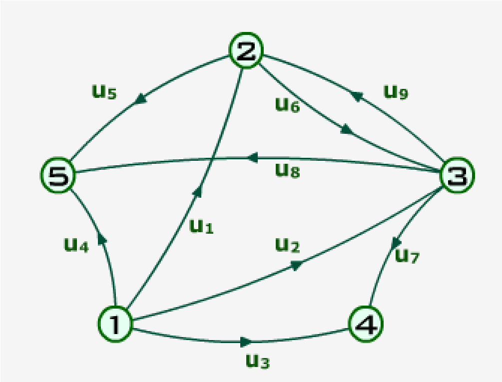
- 1, dacă nodul i este o extremitate iniţială a arcului u_j ;
- -1, dacă nodul i este o extremitate finală a arcului u_j ;
- 0, dacă nodul i nu este o extremitate a arcului u_j .

Teorie

➤ Pe fiecare coloană j (aferentă arcului u_j), avem exact două elemente nenule: un 1 (linia i pe care se află reprezintă extremitatea iniţială a arcului u_j) şi un -1 (linia i pe care se află reprezintă extremitatea finală a arcului u_j).

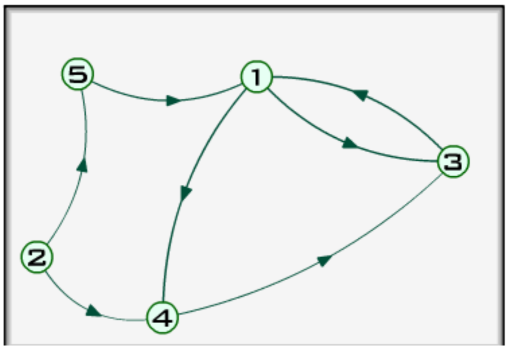
➤ Numărul valorilor de 1 de pe linia i reprezintă gradul exterior al nodului i, iar numărul valorilor de -1 de pe linia i reprezintă gradul interior al nodului i.

Grafuri Orientate



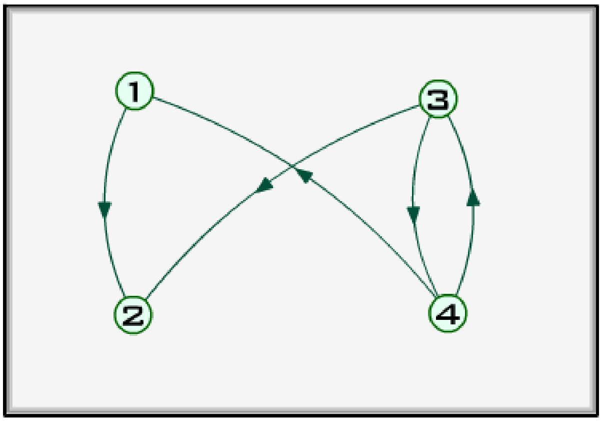
Matricea vârfuri-arce

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$



Matricea vârfuri-arce

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	-1	1	0	0	0	-1
2	0	0	0	0	1	1	0
3	-1	1	0	-1	0	0	0
4	0	0	-1	1	-1	0	0
5	0	0	0	0	0	-1	1



Corect !

Matricea vârfuri-arce

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Grafuri Orientate

Lista Vecinilor

Lista Succesorilor

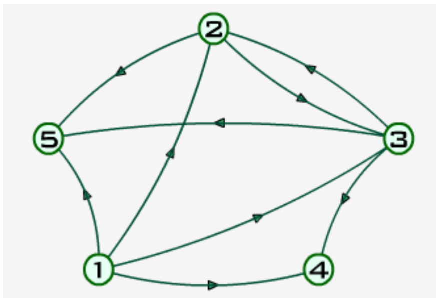
Mulţimea $\Gamma^{+}(x)$, numită **lista succesorilor lui x** conţine nodurile ce sunt extremităţi finale ale arcelor care ies din nodul **x**.
Matematic, $\Gamma^{+}(x)$ poate fi definit astfel:
$\Gamma^{+}(x)=\{y \mid y \in X$ şi $(x,y) \in U\}$

Lista Predecesorilor

Mulţimea $\Gamma^{-}(x)$, numită **lista predecesorilor lui x** conţine nodurile ce sunt extremităţi iniţiale ale arcelor care intră în nodul **x**.
Matematic, $\Gamma^{-}(x)$ poate fi definit astfel:
$\Gamma^{-}(x)=\{y \mid y \in X$ şi $(y,x) \in U\}$

Grad exterior/interior

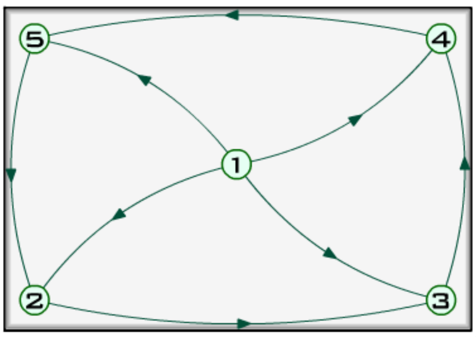
➤ Numărul de elemente din lista succesorilor lui x reprezintă gradul exterior al nodului x, iar numărul de elemente din lista predecesorilor lui x reprezintă gradul interior al nodului x.



Listele vecinilor

nodul	$\Gamma^{+}(x)$	$\Gamma^{-}(x)$
1	2,3,4,5	
2	3,5	1,3
3	2,4,5	1,2
4		1,3
5		1,2,3

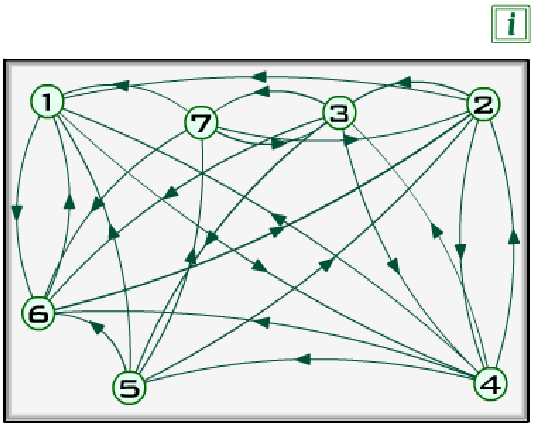
➤ Desenaţi un graf şi urmăriţi cum se actualizează **lista succesorilor** şi **lista predecesorilor** pentru fiecare nod în parte.



Listele vecinilor

nodul	$\Gamma^{+}(x)$	$\Gamma^{-}(x)$
1	4 2 3 5	
2	3	1 5
3	4	1 2
4	5	1 3
5	2	1 4

Grafuri Orientate



Corect !

Listele vecinilor

nodul	$\Gamma^{+}(x)$	$\Gamma^{-}(x)$
1	4 6	2 4 5 6 7
2	1 3 4	4 5 6 7
3	4 5 6 7	2 4 7
4	1 2 3 5 6	1 2 3
5	1 2 6 7	3 4
6	1 2	1 3 4 5 7
7	1 2 3 6	3 5

Vectorul de arce

➤ Fiecare arc al grafului poate fi privit ca o înregistrare cu două componente şi anume cele două noduri care constituie extremităţile arcului:

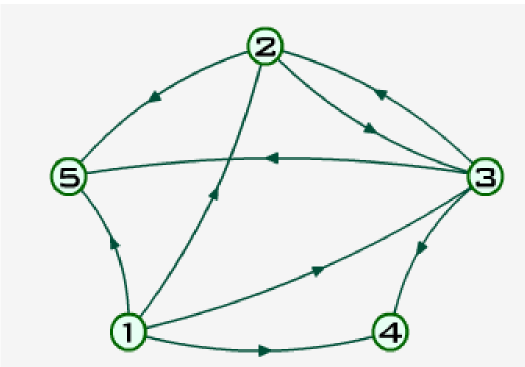
- **x** - nodul din care iese arcul ("nodul de început" al arcului);
- **y**- nodul în care intră arcul ("nodul de sfârşit" al arcului).

Putem defini tipul de dată **ARC**, astfel:

```
typedef struct ARC{
        int x, y;
        }
```

➤ Astfel că putem reprezenta graful şi ca un *"vector de muchii "*, adică un vector cu elemente de tipul **ARC**:

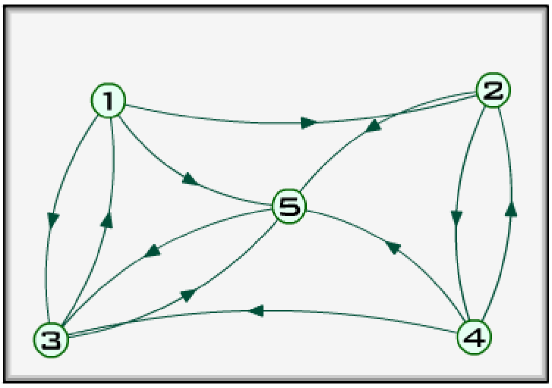
```
ARC v[25];
```



Vectorul de arce

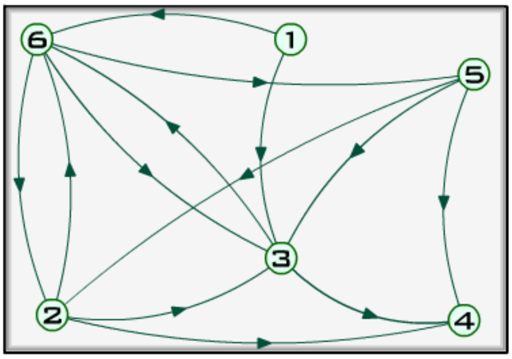
U={(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,5), (3,2), (3,4), (3,5)}

Grafuri Orientate



Vectorul de arce

U={(1,5), (1,3), (1,2), (4,5), (4,2), (4,3), (2,5), (5,3), (2,4), (3,1), (3,5)}



Corect !

Numărul de noduri: 6

Vectorul de arce

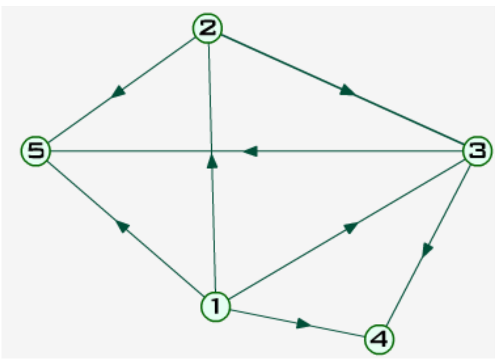
U={(1,3), (1,6), (2,3), (2,4), (2,6), (3,4), (3,6), (5,2), (5,3), (5,4), (6,2), (6,3), (6,5)}

Generare vector

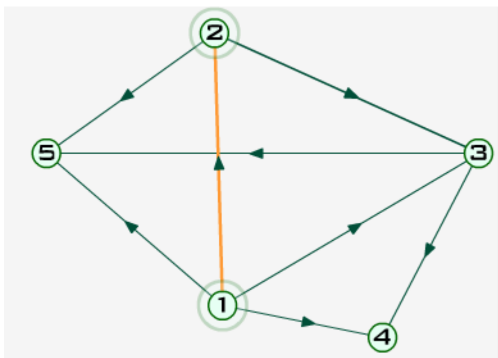
Lant.Drum.Circuit

Definitie

Se numeşte **lanţ** într-un graf orientat, un şir de arce $L=[u_1,u_2,\dots,u_k]$ cu proprietatea că oricare două arce vecine au o extremitate comună.
În definirea unui lanţ nu se ţine cont de orientarea arcelor.
Dacă lanţul nu trece de mai multe ori printr-un nod, atunci se numeşte **elementar**, altfel se numeşte **neelementar**.

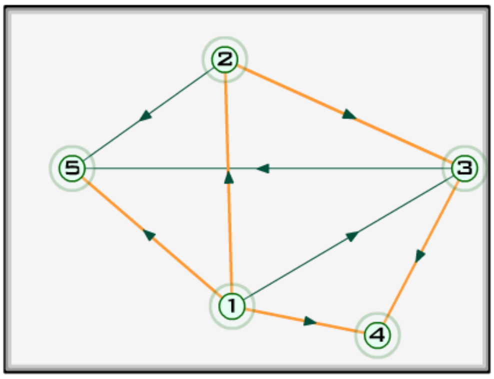


Desenaţi un **lanţ elementar** de la nodul 1 la nodul 2.



Grafuri Orientate

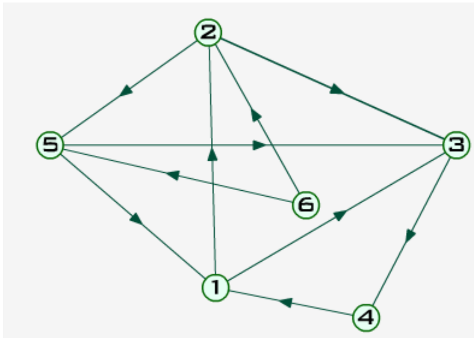
➤ Desenaţi un **lanţ neelementar** de la nodul 1 la nodul 5 şi trece prin cel mult 6 noduri.



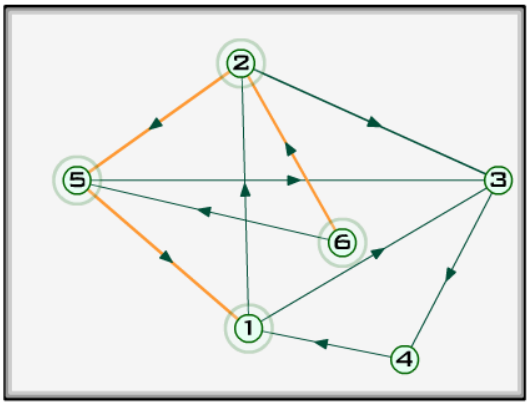
L={1,4,3,2,1,5}

Definitie

Se numeşte **drum** în graful G, un şir de noduri $D=\{x_1,x_2,\dots,x_k\}$ din X, cu proprietatea că oricare două noduri consecutive sunt adiacente, adică există arcele $[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3]$,... $[x_{k-1},x_k] \in U$.
Dacă nodurile $z_1,z_2,\dots,z_k$ sunt distincte două câte două, drumul se numeşte **elementar**. În caz contrar, drumul este **ne-elementar**.



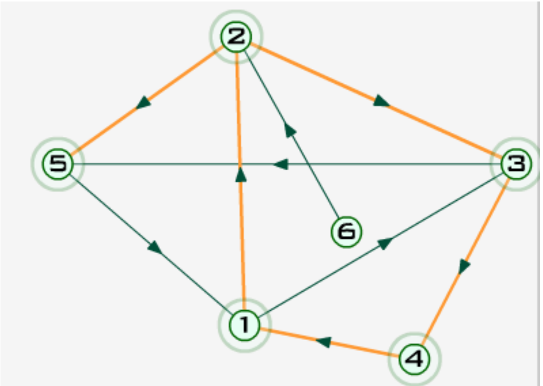
➤ Desenaţi un **drum elementar** de la nodul 6 la nodul 1.



D={6,2,5,1}

Grafuri Orientate

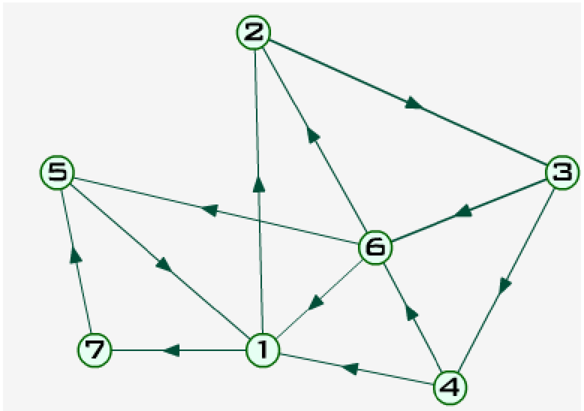
➤ Desenaţi un **drum neelementar** de la nodul 2 la nodul 5.



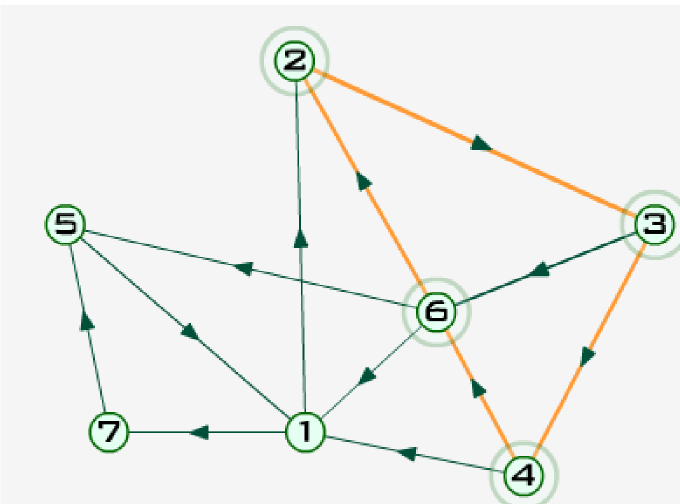
D={2,3,4,1,2,5}

Definitie

Se numeşte **circuit** într-un graf, un drum în care primul şi ultimul nod coincid, iar arcele care-l compun sunt distincte două câte două. Dacă toate nodurile cu excepţia primului şi a ultimului sunt distincte două câte două, atunci circuitul se numeşte **elementar**. În caz contrar, el este **ne-elementar**.



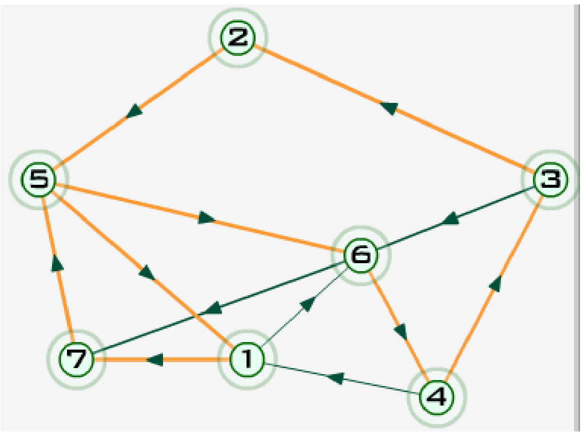
➤ Desenaţi un **circuit elementar** pornind de la nodul 2.



C={2,3,4,6,2}

Grafuri Orientate

➤ Desenaţi un **circuit neelementar** pornind de la nodul 7.



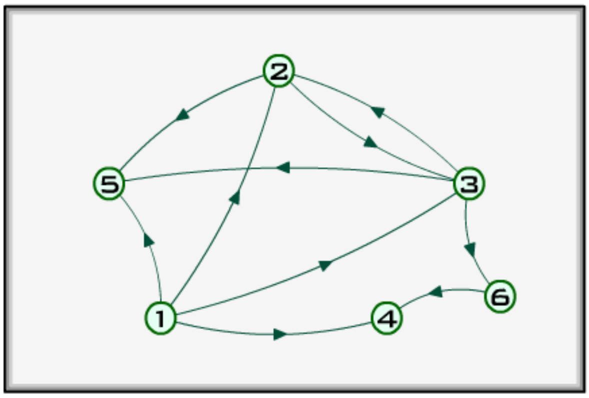
C={7,5,6,4,3,2,5,1,7}

Matricea Drumurilor

Definitie

➤ **Matricea drumurilor** este o matrice **D** cu **n** linii şi **n** coloane, în care: **d[i,j]**= { 1, dacă există drum de la **i** la **j**; 0, în caz contrar

➤ Pentru graful de mai jos urmăriţi cum arată matricea de adiacenţă şi matricea drumurilor.



Matricea de adiacenţă

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	1	1	0
2	0	0	1	0	1	0
3	0	1	0	1	1	1
4	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	1	0	0

Matricea drumurilor

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	1	1	1
2	0	1	1	1	1	1
3	0	1	1	1	1	1
4	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	1	0	0

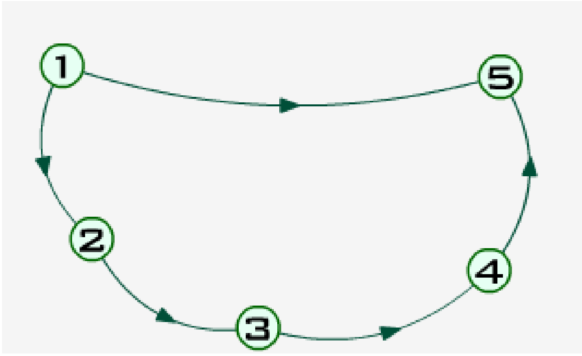
Grafuri Orientate

Teorie

ALGORITMUL ROY-WARSHALL

Determină **matricea drumurilor** pornind de la matricea de adiacenţă. Astfel, un element a[i,j] care este 0 devine 1 dacă există un nod k astfel încât a[i,k]=1 şi a[k,j]=1.

```
for (k=1; k<=n; k++)
    for (i=1; i<=n; i++)
        for (j=1; j<=n; j++)
            if (a[i][k] && a[k][j]) a[i][j]=1;
```



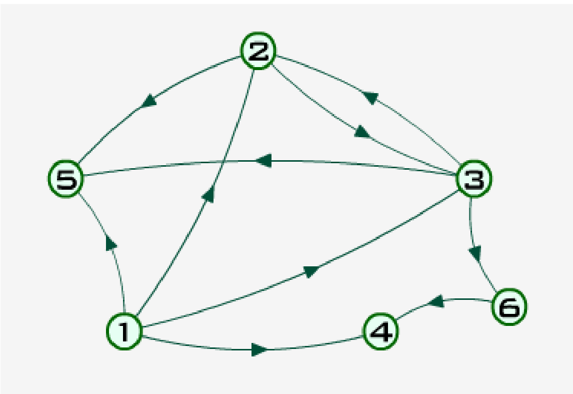
Matricea de adiacenţă

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	0	1	0
4	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0

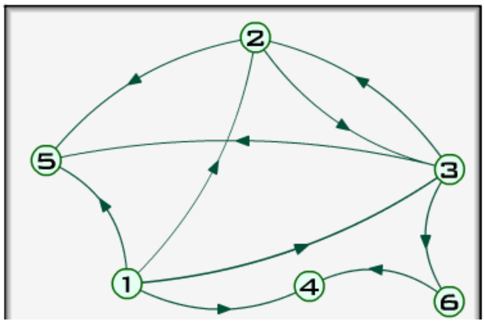
Matricea drumurilor

	1	2	3	4	5
1	0	1	1	1	1
2	0	0	1	1	1
3	0	0	0	1	1
4	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0

➤ Pentru graful de mai jos determinaţi:



- d[2,3]= 1 *Corect !*
- d[3,4]= 1 *Corect !*
- d[1,6]= 1 *Corect !*
- d[5,2]= 0 *Corect !*



Matricea de adiacenţă

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	1	1	0
2	0	0	1	0	1	0
3	0	1	0	0	1	1
4	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	1	0	0

Matricea drumurilor

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	1	1	1
2	0	1	1	1	1	1
3	0	1	1	1	1	1
4	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	1	0	0

Grafuri Orientate