1 Mathematical Models

Nome	Definição
H_o	conjunto que contém o número de linhas em cada pátio o;
W_o	conjunto que contém o número de colunas em cada pátio o;
n	índice dos contêineres;
N_o	conjunto que contém a quantidade de contêineres em cada pátio o;
Ω_o	conjunto que contém os índices dos contêineres em cada pátio o;
$\phi_{o,d}$	conjunto que contém o índice n de um contêiner dada a sua origem o e destino d;
i	índice da posição de um contêiner na linha de um pátio;
j	índice da posição de um contêiner na coluna de um pátio;
k	índice da linha de um pátio de um contêiner depois de ser remanejado;
l	índice da coluna de um pátio de um contêiner depois de ser remanejado;
p	índice de um porto;
P	quantidade de portos;
t	índice de tempo;
T_o	quantidade de períodos de tempo;
r	índice da linha do navio;
R	quantidade de linhas do navio
c	índice da coluna do navio;
C	quantidade de colunas do navio;
$F_{o,d}$	Matriz de transporte de dimensão $(P-1) \times (P-1)$ que contém o número de contêineres com origem em o e destino d;

Tabela 1 Definição dos parâmetros e conjuntos

i: *variáveis de configuração*, indicam onde os contêineres estão alocados no pátio em cada período de tempo t.

$$b_{ijnt} = \begin{cases} 1, & \text{se o contêiner } n \text{ está na posição } (i,j) \text{ no período de tempo } t, \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

$$v_{nt} = \begin{cases} 1, & \text{se o contêiner } n \text{ foi retirado no período } t'\text{, onde } t' \in \{1, \cdots, t-1\}, \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

ii: *variáveis de movimento*, variáveis que contam os movimentos no pátio, seja retirada ou de remanejamento.

$$x_{ijklnt} = \begin{cases} 1, & \text{se o contêiner } n \text{ é realocado de } (i,j) \text{ para } (k,l) \text{ no período de tempo } t, \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

$$y_{ijnt} = \begin{cases} 1, & \text{se o contêiner } n \text{ é retirado de } (i,j) \text{ no período de tempo } t, \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

iii: *variável de carregamento do navio*, integra a movimentação no pátio e no navio

$$z_{ntrc} = \begin{cases} 1, & \text{se no período de tempo } t\text{, o contêiner } n \text{ ocupa a posição } (r,c) \text{ no navio,} \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

$$q_{odrc} = \begin{cases} 1, & \text{se um contêiner com destino final o porto } d \text{ é remanejado no porto } o \text{ e} \\ & \text{realocado na posição } (r,c) \text{ no navio,} \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

iv: *variáveis do navio*, variáveis que indicam a movimentação no navio

$$w_{odarc} = \begin{cases} 1, & \text{se há um contêiner na posição } (r,c) \text{ que foi embarcado no porto } o, \\ & \text{com destino final no porto } d \text{ e remanejado porto } a, \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

$$u_{orc} = \begin{cases} 1, & \text{se saindo do porto } o \text{, a posição } (r,c) \text{ está ocupada por um contêiner,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

I: *Restrições dos pátios*

$$\sum_{i=1}^{W_o} \sum_{j=1}^{H_o} b_{ijnt} + v_{nt} = 1 \quad (1)$$

$$n \in \Omega_o; \; t = 1, ..., T_o; \; o = 1, ..., P-1.$$

$$\sum_{n \in \Omega_o} b_{ijnt} \leq 1 \quad (2)$$

$$i = 1, ..., W_o; \; j = 1, ..., H_o; \; t = 1, ..., T_o; \; o = 1, ..., P-1.$$

$$\sum_{n \in \Omega_o} b_{ijnt} \geq \sum_{n \in \Omega_o} b_{i(j+1)nt} \quad (3)$$

$$i = 1, ..., W_o; \;\; j = 1, ..., H_o - 1; \; t = 1, ..., T_o; \; o = 1, ..., P-1.$$

$$b_{ijnt} = b_{ijn(t-1)} + \sum_{k=1}^{W_o} \sum_{l=1}^{H_o} x_{klijn(t-1)} - \sum_{k=1}^{W_o} \sum_{l=1}^{H_o} x_{ijkln(t-1)} - y_{ijn(t-1)} \quad (4)$$

$$n \in \Omega_o; \;\; i = 1, ..., W_o; \; j = 1, ..., H_o; \; t = 2, ..., T_o; \; o = 1, ..., P-1.$$

$$v_{nt} = \sum_{i=1}^{W_o} \sum_{j=1}^{H_o} \sum_{t'=1}^{t-1} y_{ijnt'} \quad (5)$$

$$n \in \Omega_o; \; t = 2, ..., T_o; \; o = 1, ..., P-1.$$

$$M \left(1 - \sum_{n \in \Omega_o} x_{ijklnt} \right) \geq \sum_{n \in \Omega_o} \sum_{j'=j+1}^{H_o} \sum_{l'=l+1}^{H_o} x_{ij'kl'nt} \quad (6)$$

$$i = 1, ..., W_o; \; j = 1, ..., H_o; \; t = 1, ..., T_o; \; o = 1, ..., P-1.$$

$$M \left(1 - \sum_{j=1}^{H_o} b_{ijtt} \right) \geq \sum_{j=1}^{H_o} \sum_{k=1}^{W_o} \sum_{l=1}^{H_o} \sum_{n \in \Omega_o} \sum_{i' \neq i}^{W_o} x_{i'jklnt} \quad (7)$$

$$i = 1, ..., W_o; \; t = 1, ..., T_o; \; o = 1, ..., P-1.$$

$$x_{ijilnt} = 0 \quad (8)$$

$$n \in \Omega_o; \;\; i = 1, ..., W_o; \; j, \; l = 1, ..., H_o; \; t = 1, ..., T_o; \; o = 1, ..., P-1$$

$$\sum_{k=1}^{W_o} \sum_{l=1}^{H_o} \sum_{n \in \Omega_o} x_{i(j+1)klnt} - \sum_{n \in \Omega_o} b_{i(j+1)nt} + 1 \geq \sum_{k=1}^{W_o} \sum_{l=1}^{H_o} \sum_{n \in \Omega_o} x_{ijklnt} + \sum_{n \in \Omega_o} y_{ijnt} \quad (9)$$

$$i = 1, ..., W_o; \; j = 1, ..., H_o - 1; \; t = 1, ..., T_o; \; o = 1, ..., P-1.$$

II: *Restrições de integração*

$$\sum_{n \in \Omega_o} v_{nt} = t \qquad (10)$$

$$t = 1, ..., T_o;\ o = 1, ..., P-1.$$

$$v_{n(t+1)} \geq v_{nt} \qquad (11)$$

$$n \in \Omega_o;\ t = 1, ..., T_o - 1;\ o = 1, ..., P-1.$$

$$\sum_{r=1}^{R} \sum_{c=1}^{C} z_{ntrc} = v_{n(t+1)} \qquad (12)$$

$$n \in \Omega_o;\ t = 1, ..., T_o - 1;\ o = 1, ..., P-1.$$

$$\sum_{o'=1}^{o-1} \sum_{d=o+1}^{P} \sum_{a=o+1}^{d} w_{o'darc} + \sum_{d=o+1}^{P} q_{odrc} + \sum_{n \in \Omega_o} z_{ntrc} \leq 1 \qquad (13)$$

$$r = 1, ..., R;\ c = 1, ..., C;\ t = 1, ..., T_o;\ o = 1, ..., P-1.$$

$$z_{n(t+1)rc} \geq z_{ntrc} \qquad (14)$$

$$n \in \Omega_o;\ r = 1, ..., R;\ c = 1, ..., C;\ t = 1, ..., T_o - 1;\ o = 1, ..., P-1.$$

$$\sum_{a=o+1}^{d} w_{odarc} = \sum_{n \in \phi_{o,d}} z_{nT_orc} + q_{odrc} \qquad (15)$$

$$r = 1, ..., R;\ c = 1, ..., C;\ d = o+1, ..., P;\ o = 1, ..., P-1.$$

$$\sum_{r=1}^{R} \sum_{c=1}^{C} z_{nT_orc} = 1 \qquad (16)$$

$$n \in \Omega_o;\ t = 1, ..., T_o - 1;\ o = 1, ..., P-1.$$

$$\sum_{n \in \Omega_o} z_{ntrc} + \sum_{o'=1}^{o-1} \sum_{d=o+1}^{P} \sum_{a=o+1}^{d} w_{o'darc} + \sum_{d=o+1}^{P} q_{odrc} \geq \sum_{n \in \Omega_o} z_{nt(r+1)c} \qquad (17)$$

$$t = 1, ..., T_o;\ r = 1, ..., R-1;\ c = 1, ..., C;\ o = 1, ..., P-1$$

$$\sum_{o'=1}^{o-1} \sum_{c=1}^{C} \sum_{r=1}^{R} w_{o'dorc} = \sum_{r=1}^{R} \sum_{c=1}^{C} q_{odrc} \qquad (18)$$

$$d = o+1, ..., P;\ o = 1, ..., P-1.$$

III: *Restrições do navio*

$$\sum_{a=o+1}^{d}\sum_{r=1}^{R}\sum_{c=1}^{C} w_{odarc} - \sum_{m=1}^{o-1}\sum_{r=1}^{R}\sum_{c=1}^{C} w_{mdorc} = F_{od} \tag{19}$$

$$o = 1,...,P-1;\; d = o+1,...,P.$$

$$\sum_{m=1}^{o}\sum_{d=o+1}^{P}\sum_{a=o+1}^{d} w_{mdarc} = u_{orc} \tag{20}$$

$$o = 1,...,P-1;\; r = 1,...,R;\; c = 1,...,C.$$

$$u_o(r,c) - u_o(r+1,c) \geq 0 \tag{21}$$

$$o = 1,...,P-1;\;\; r = 1,...,R-1;\;\; c = 1,...,C;$$

$$\sum_{o=1}^{d-1}\sum_{e=d}^{P} w_{oedrc} + \sum_{o=1}^{d-1}\sum_{e=d+1}^{P}\sum_{a=d+1}^{e} w_{oea(r+1)c} \leq 1 \tag{22}$$

$$d = 2,...,P;\; r = 1,...,R-1;\; c = 1,...,C;$$

.

Este modelo extende e integra os modelos apresentados em Caserta et al (2015) e Avriel et al (1998).

Neste modelo é representada a viagem de um navio por uma rota de P portos. Em cada porto $p = 1,...,P-1$ em que este navio atraca existe um pátio com contêineres que devem ser embarcados nele. No primeiro porto $p = 1$ o navio chega vazio e recebe o carregamento dos contêineres deste porto que estavam no pátio. Nos portos $p = p+1,...,P-1$ o navio descarrega os contêineres com destino ao porto p no qual se encontra e recebe o carregamento de contêineres com destino os portos seguintes. Por fim, quando o navio chega ao último porto P, apenas o descarregamento é efetuado.

O primeiro grupo de restrições (1 até 9) são restrições exclusivas para o processo de retirada dos contêineres dos pátios nos portos onde o navio atraca.

A restrição (1) garante que em cada período de tempo, cada contêiner deve estar dentro do pátio ou fora dele. A restrição (2) garante que em cada período de tempo, cada posição (i, j) no pátio deve estar ocupada por um único contêiner. A restrição (3) garante que não hajam 'buracos' no pátio ao restringir que se há um contêiner posição $(i, j+1)$, então a posição (i, j) abaixo também deve estar ocupada. A restrição (4) é a restrição de equilíbrio de fluxo entre as variáveis de configuração e de movimento no pátio. Ele vincula o layout no período t com o layout no período t + 1 através das retiradas e realocações executadas. A restrição (5) define a variável v_{nt} e assegura que todos os contêineres sejam retirados do pátio. A restrição (6) garante a política LIFO, ou seja, se no período t, o contêiner n está abaixo do contêiner q e o contêiner n é remanejado, então no período $t+1$ o contêiner n não pode estar alocado em uma posição abaixo do contêiner q. A restrição

(7) garante que sejam remanejados apenas os contêineres que estão acima, ou seja, na mesma coluna, de um contêiner a ser retirado. A restrição (8) garante que nenhum contêiner pode ser remanejado para outra posição que esteja da mesma coluna na qual ele se encontra. A restrição (9) garante que um contêiner na posição (i, j) só pode ser movido depois que o contêiner na posição $(i, j + 1)$ é movido. Se o contêiner na posição $(i, j + 1)$ não é movido então temos que $b_{i(j+1)nt} = 1$ e o lado esquerdo da equação se torna 0, e consequentemente o lado direito da equação também deve ser 0. Dessa forma, nenhuma realocação ou remanejamento é permitido para o contêiner na posição (i, j).

O segundo grupo de restrições (10 até 18) são restrições de integração entre o pátio e o navio. Estas restrições garantem que o navio seja preenchido de forma correta.

A restrição (10) garante que em cada período de tempo um contêiner seja retirado do pátio. A restrição (11) define a variável v_{nt}. Quando um contêiner n é retirado do pátio, a variável v_{nt} se torna 1 e se mantém igual a 1 nos períodos de tempo seguintes. A restrição (12) garante que o contêiner n seja carregado no navio no período de tempo t. A restrição (13) assegura que uma posição (r, c) no navio só pode ser ocupada por um contêiner, seja ele um contêiner que foi carregado no porto atual (porto o), em algum porto anterior (porto $o - 1$) ou um contêiner que já estava no navio e está sendo remanejado em o. A restrição (14) certifica que o contêiner n, depois de carregado, não mude de posição enquanto o navio estiver parado no mesmo porto. A restrição (15) garante que se há um contêiner na posição (r, c) do navio, ele deve ser um contêiner que acabou de ser embarcado, ou um contêiner de remanejamento. A restrição (16) assegura que todos os N_o contêineres do pátio o já foram embarcados no navio. A restrição (17) garante que, durante o processo de carregamento do navio, nenhum contêiner seja alocado em uma posição flutuante ou que ocupe a posição de um contêiner que já estava no navio ou foi remanejado. A restrição (18) contabiliza o número total de contêineres que foram remanejados no porto o.

O terceiro grupo de restrições (19 até 22) são restrições exclusivas para o navio.

A restrição 19 é a restrição de conservação de fluxo, e indica que o número total de contêineres no porto o deve ser igual ao número de contêineres que foram embarcados nos portos $p = 1, 2, ..., o$ menos os contêineres que foram desembarcados nos portos $p = 1, 2, ..., o$. Esta restrição pode ser redundante, mas é mantida no modelo porque deixa-o mais rápido. A restrição 20 garante que cada posição (r, c) tenha no máximo um único contêiner. A restrição 21 é necessária para garantir que existam contêineres embaixo do contêiner que ocupa a célula (r, c). A restrição 22 é responsável por definir como um contêiner pode ser desembarcado no porto d ao impor que se um contêiner que ocupa a posição (r, c), então ele será desembarcado no porto d, se não houver um contêiner na posição $(r + 1, c)$ acima dele.