3. Funções reais de variável real

3.6 Aplicações do cálculo diferencial

Otimização

- Intervalos de monotonia de uma função
- Extremos locais (ou relativos)
- Sentido da concavidade de uma função
- Pontos de inflexão

Cálculo de limites

Aproximação polinomial de funções

- Polinómio de Taylor
- Aproximação de funções
- Estimativa do erro

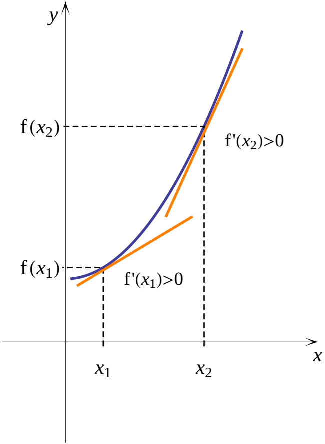
Otimização

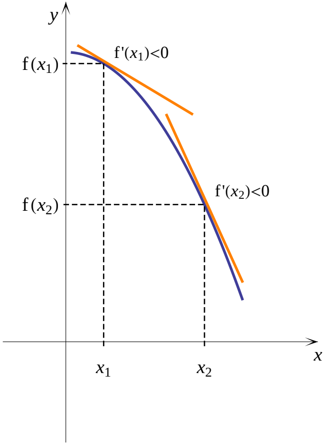
A otimização é o processo pelo qual se determinam os máximos ou os mínimos locais de uma função, também designados por extremos locais (ou relativos).

Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável no intervalo I. Já vimos que:

- se $f'(x) > 0,\ \forall x \in I,$ então f é estritamente crescente em I;
- se $f'(x) < 0,\ \forall x \in I,$ então f é estritamente decrescente em I.

Intervalos de monotonia de uma função





Intervalos de monotonia de uma função

Exemplo

Dada a função $f(x) = 5x^2 - 20x + 3$ *, vamos determinar os intervalos de monotonia da função* f*.*

Primeiro devemos determinar f'*:*

$$f'(x) = 10x - 20.$$

f *será uma função estritamente crescente quando* $f'(x) > 0$*, ou seja, quando*

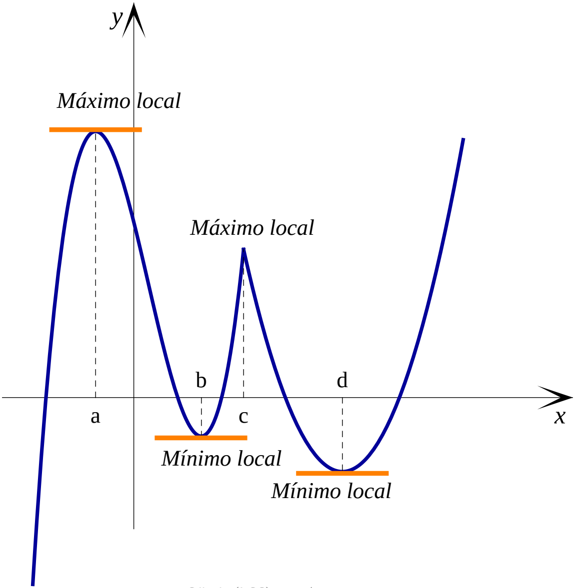
$$10x - 20 > 0 \iff 10x > 20 \iff x > 2;$$

f *será uma função estritamente decrescente quando* $f'(x) < 0$*, ou seja, quando*

$$10x - 20 < 0 \iff x < 2;$$

f *não estará a crescer nem a decrescer quando* $f'(x) = 0$*, ou seja, quando* $x = 2$*.*

Extremos locais (ou relativos)



Extremos locais (ou relativos)

Teremos particular interesse na determinação de máximos e mínimos locais (extremos locais). Será importante saber como distinguir entre estes pontos.

Para que a função tenha um extremo local em $x = x_0$, a função não deverá ser crescente nem decrescente em $x = x_0$.

Condição necessária para a existência de um extremo local (máximo ou mínimo) em $x = x_0$:

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{ou} \quad f'(x_0) \text{ não está definida}$$

Um ponto nestas condições diz-se um ponto crítico (ou estacionário).

Extremos locais (ou relativos)

Teste da primeira derivada

Seja $x = x_0$ um ponto crítico da função f. Então,

- f tem um máximo local em $x = x_0$ se $f'(x) > 0$ à esquerda de x_0 e $f'(x) < 0$ à direita de x_0;
- f tem um mínimo local em $x = x_0$ se $f'(x) < 0$ à esquerda de x_0 e $f'(x) > 0$ à direita de x_0;
- f não tem um extremo relativo se $f'(x)$ tem o mesmo sinal de ambos os lados de x_0.

Sentido da concavidade de uma função

Diz-se que uma função f tem a concavidade voltada para cima em $x = x_0$ se numa vizinhança de x_0 o gráfico da função fica acima da reta tangente em $(x_0, f(x_0))$.

Diz-se que f tem a concavidade voltada para baixo em $x = x_0$ se numa vizinhança de x_0 o gráfico da função fica abaixo da reta tangente em $(x_0, f(x_0))$.

A segunda derivada da função fornece-nos a informação relevante para determinar o sentido da concavidade da função.

- se $f''(x_0) > 0$, f tem a concavidade voltada para cima em $x = x_0$;
- se $f''(x_0) < 0$, f tem a concavidade voltada para baixo em $x = x_0$;
- se $f''(x_0) = 0$, nenhuma conclusão se pode tirar sobre a concavidade de f em $x = x_0$.

O declive da primeira derivada é, pois, relevante para a concavidade.

Extremos locais (ou relativos)

Teste da segunda derivada

Seja $x = x_0$ um ponto crítico da função tal que $f'(x_0) = 0$. Então,

- se $f''(x_0) > 0$, a função tem um mínimo local em $x = x_0$;
- se $f''(x_0) < 0$, a função tem um máximo local em $x = x_0$;
- se $f''(x_0) = 0$, nada se pode concluir quanto à natureza do ponto crítico. Outro teste é necessário.

Extremos locais (ou relativos)

Exemplo

Determine os pontos críticos da função

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3$$

e estude a sua natureza.

- *Pontos críticos:*

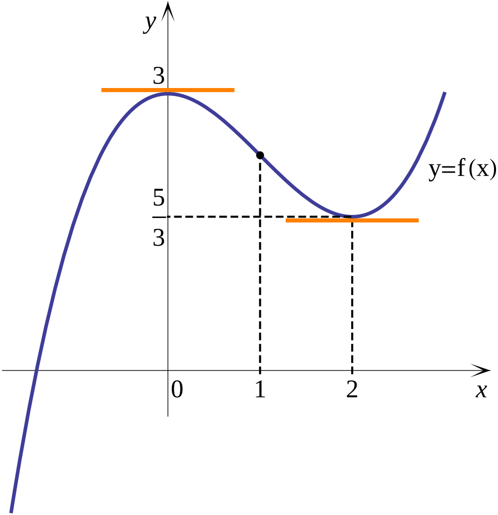
$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Longleftrightarrow x(x-2) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \quad \vee \quad x = 2$$

- *Teste da segunda derivada:*

$$f''(x) = 2x - 2$$

Como $f''(0) = -2 < 0$, *então* f *tem um* *máximo local em* $x = 0$ *que é igual a* $f(0) = 3$.
Como $f''(2) = 2 > 0$, *então* f *tem um* *mínimo local em* $x = 2$ *que é igual a* $f(2) = \frac{5}{3}$.

Extremos locais (ou relativos)



O ponto $x = 1$ é um *ponto de inflexão* (mudança do sentido da concavidade).

Pontos de inflexão

Um ponto de inflexão de uma curva é um ponto onde muda o sentido da concavidade da curva.

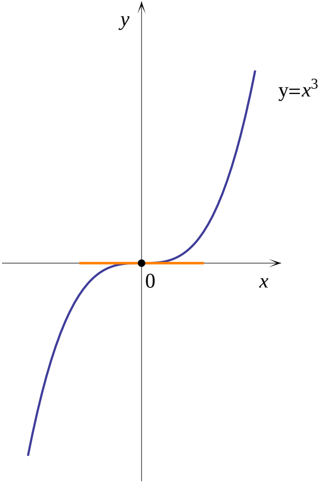
Para que uma função f tenha um ponto de inflexão em $x = x_0$, é necessário que

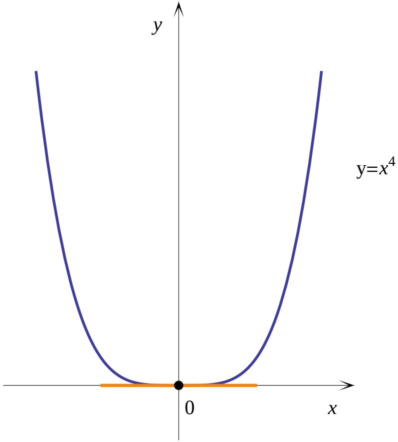
- $f''(x_0) = 0$ ou $f''(x_0)$ não está definida;
- o sentido da concavidade muda em $x = x_0$.

Pontos de inflexão

Exemplos

Observe-se que nos pontos críticos destas funções a f'' também se anula.





Cálculo de limites

A derivada pode ser usada com sucesso no cálculo de limites, nomeadamente no levantamento de indeterminações do tipo $\dfrac{0}{0}$ e $\dfrac{\infty}{\infty}$. Trata-se da técnica conhecida por *regra de L'Hôpital* que passaremos agora a apresentar.

A versão mais simples desta regra refere-se ao caso em que pretendemos calcular

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}\,,$$

onde f e g são deriváveis em a, com $g'(a)\neq 0$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$.

Estamos perante uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$.

Teorema

[Regra de L'Hôpital]

Sejam $f, g :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *deriváveis e tais que:*

- $g(x) \neq 0\,,\ \ g'(x) \neq 0\,,\ \ \forall x \in]a, b[\,;$
- $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} g(x) = 0.$

Se existir $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ *então também existe* $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, *tendo-se*

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Observação

Demonstra-se um resultado análogo ao deste teorema para o limite lateral à esquerda. Da conjugação dos dois resultados relativos a limites laterais, resulta um teorema para o limite "completo". Além disso, modificando a forma indeterminada para $\dfrac{\infty}{\infty}$, *os resultados referidos anteriormente estendem-se com relativa facililidade.*

Teorema

[Extensão da Regra de L'Hôpital]

Sejam $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *funções deriváveis em* $I \backslash \{c\}$, *com* c *ponto de* I.

Se

- $g'(x) \neq 0\,, \ \forall x \in I \setminus \{c\}$
- $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} g(x) = \ell$, *com* $\ell = 0$ *ou* $\ell = +\infty$ *ou* $\ell = -\infty$

então

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,,$$

desde que o segundo limite exista (finito ou infinito).

Observação

Este teorema estende-se a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *e a* $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, *desde que as hipóteses sejam formuladas em intervalos* $]a, +\infty[$ *e* $]-\infty, b[$, *respetivamente.*

Cálculo de limites

Observação

[Aplicabilidade da Regra de L'Hôpital]

A regra de L'Hôpital constitui uma "ferramenta" extremamente útil no cálculo de limites provenientes de indeterminações do tipo $\dfrac{0}{0}$ *ou* $\dfrac{\infty}{\infty}$, *ou outras quaisquer que se reduzam a uma destas formas.*

Claro que a regra pode ser usada sucessivamente, desde que a indeterminação permaneça em cada "etapa". Ocorre frequentemente o erro de "continuar a aplicar a regra" quando a indeterminação já não existe.

Exemplos

1. *Verificar que* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

   Estamos perante uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$.

   Como $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1$, *conclui-se que o limite proposto também vale* 1.

2. *Calcular* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\cos(3x) - 1 + 4,5x^2}{x^3}$.

   Estamos perante uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$.

   Derivando uma vez, vem $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-3\operatorname{sen}(3x) + 9x}{3x^2}$ *e a indeterminação permanece. Derivando mais uma vez e calculando agora* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{-9\cos(3x) + 9}{6x}$, *a indeterminação ainda permanece. Mas derivando uma terceira vez, vem* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{27\operatorname{sen}(3x)}{6} = 0$, *pelo que todos os limites anteriores, incluindo o limite proposto, valem* 0.

Exemplos

3. *Calcular* $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^4 - 4x + 3}{(x-1)^2}$.

   Estamos perante uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$.

   Derivando uma vez e calculando $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{4x^3 - 4}{2(x-1)}$, *a indeterminação permanece. Derivando novamente vem* $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{12x^2}{2} = 6$, *pelo que o limite proposto vale* 6 *.*

4. *Calcular* $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{7x^2 - 2x + 3}{5x^2 + x - 5}$.

   Estamos perante uma indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

   Derivando uma vez obtém-se o limite $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{14x - 2}{10x + 1}$ *e a indeterminação permanece.*

   Mas derivando novamente, vem $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$, *e o limite proposto vale* $\dfrac{7}{5}$.

Exemplos

5. *Calcular* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2 - x - 1}{4x^2 - x - 3}$.

   Estamos perante uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$.

   Derivando uma vez a indeterminação desaparece porque $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4x-1}{8x-1} = \dfrac{3}{7}$, *pelo que o limite proposto vale também* $\dfrac{3}{7}$. *Uma resposta errada muito frequente é*

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2 - x - 1}{4x^2 - x - 3} = \lim_{x\to 1} \frac{4x-1}{8x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{4}{8} = \frac{1}{2}\,.$$

6. *Calcular* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x}{x + 2\,\mathrm{sen}\,x}$.

   Estamos perante uma indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

   O limite do quociente das derivadas é $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3}{1 + 2\cos x}$, *que não existe, pelo que a regra de L'Hôpital não é aplicável.* *No entanto,*

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3x}{x + 2\,\mathrm{sen}\,x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{3}{1 + 2\dfrac{1}{x}\ \mathrm{sen}\,x} = 3.$$

Exemplos

7. *Calcular* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x}$.

   Estamos perante uma indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

   Derivando uma vez obtém-se o limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$, *que não existe, logo a regra de L'Hôpital não é aplicável.* *Mas*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \dfrac{1}{x} \operatorname{sen} x}{1 + \dfrac{1}{x} \operatorname{sen} x} = 1.$$

Polinómio de Taylor

Dada uma função $f\colon I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida num intervalo I, que é n vezes derivável no ponto $a \in I$, existem as constantes

$$f(a),\ f'(a),\ f''(a),\ \ldots,\ f^{(n)}(a)$$

com as quais podemos construir o polinómio

$$P_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

ou ainda

$$P_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

a que se chama polinómio de Taylor de ordem n da função f em torno do ponto a.

No caso particular de ser $a = 0$, o polinómio de Taylor também costuma designar-se por polinómio de MacLaurin de ordem n da função f .

Polinómio de Taylor

Derivando sucessivamente, vem

$$
\begin{array}{rcl}
P'_{n,a}(x) & = & f'(a) + f''(a)(x-a) + \frac{f'''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{(n-1)} \\
\\
P''_{n,a}(x) & = & f''(a) + f'''(a)(x-a) + \frac{f^{(4)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{(n-2)} \\
 & & \cdots \qquad\qquad \cdots \qquad\qquad \cdots \\
P^{(n-1)}_{n,a}(x) & = & f^{(n-1)}(a) + f^{(n)}(a)(x-a) \\
\\
P^{(n)}_{n,a}(x) & = & f^{(n)}(a)
\end{array}
$$

e as restantes derivadas são identicamente nulas.

Em particular, no ponto a tem-se

$$P_{n,a}(a) = f(a), \quad P'_{n,a}(a) = f'(a), \quad \ldots, \quad P^{(n)}_{n,a}(a) = f^{(n)}(a).$$

Dizemos que f e $P_{n,a}$ possuem um contato de ordem n no ponto a.

Polinómio de Taylor

Pode mostrar-se que não existe outro polinómio de grau $\leq n$ que, juntamente com as suas derivadas até à ordem n, verifique condições como as que figuram acima. De facto, vale o seguinte resultado.

Teorema

[Unicidade do Polinómio de Taylor]

O polinómio $P_{n,a}$ é o único polinómio de grau não superior a n cujas derivadas no ponto a, desde a ordem 0 até à ordem n, coincidem com as correspondentes derivadas de f no ponto a.

Polinómio de Taylor

Exemplos

[Polinómio de Taylor de algumas funções]
Determinemos o polinómio de Taylor com a ordem indicada, em torno do ponto $a = 0$ (polinómio de MacLaurin), para cada uma das seguintes funções;

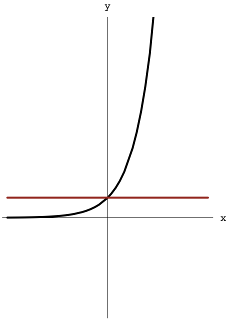
1. $f(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}$ *(ordem n);*

   Como
   $$f^{(k)}(x) = e^x,\ \forall k \in \mathbb{N}_0,\ \forall x \in \mathbb{R},$$
   vem em particular
   $$f^{(k)}(0) = 1,\ \forall k \in \mathbb{N}_0\,,$$
   donde
   $$P_{n,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\,.$$

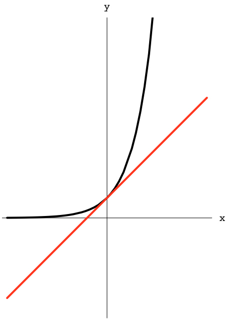
Polinómio de Taylor

Exemplos

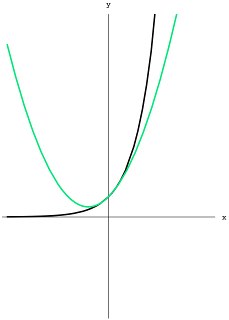
Nas figuras seguintes estão representados os polinómios de ordens $0, 1, 2, 3, 4, 5$.



função f
polinómio $P_{0,0}$

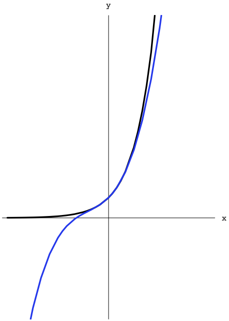


função f
polinómio $P_{1,0}$

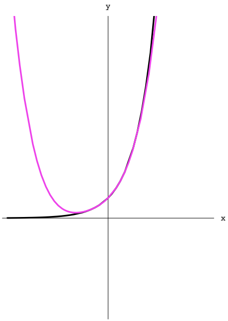


função f
polinómio $P_{2,0}$

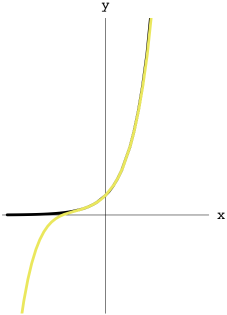
Exemplos



função f
polinómio $P_{3,0}$



função f
polinómio $P_{4,0}$



função f
polinómio $P_{5,0}$

Polinómio de Taylor

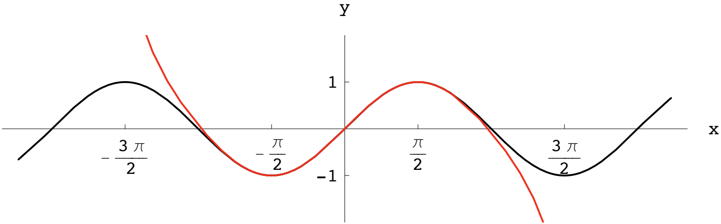
Exemplos

2. $f(x) = \operatorname{sen} x,\ x \in \mathbb{R}$ *(ordem $2n+1$);*
   tem-se

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \textit{para} \quad k = 0, 2, 4, 6, 8, \ldots \\ 1 & \textit{para} \quad k = 1, 5, 9, 13, \ldots \\ -1 & \textit{para} \quad k = 3, 7, 11, 15, \ldots \end{cases}$$

   e consequentemente

$$P_{2n+1,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ ;$$

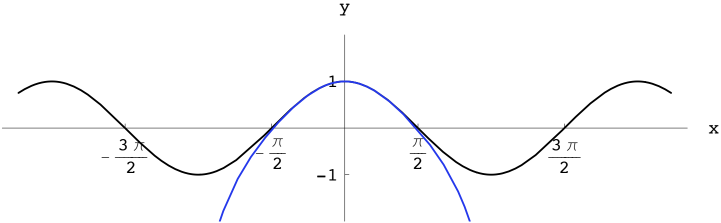


Função seno (preto) e polinómio de MacLaurin de grau 3 (vermelho).

Exemplos

3. $f(x) = \cos x,\ x \in \mathbb{R}$ *(ordem $2n$);*
   com uma resolução muito semelhante à do exemplo 2., sai

$$P_{2n,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\ ;$$



Função cosseno (preto) e polinómio de MacLaurin de grau 2 (azul).

Aproximação de funções

Já sabemos que, sendo f derivável num ponto a, então para x próximo de a, a função f pode ser aproximada pelo polinómio de grau ≤ 1 que define a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a, ou seja, pelo polinómio $f(a) + f'(a)(x - a)$. Vamos agora melhorar esta aproximação. Mais concretamente, vamos ver que uma função f que é n vezes derivável em a pode ser aproximada, numa vizinhança de a, pelo seu polinómio de Taylor de ordem n em torno do ponto a.

O resultado fundamental sobre a aproximação de funções por intermédio do polinómio de Taylor é apresentado no teorema seguinte.

Aproximação de funções

Teorema

[Fórmula de Taylor infinitesimal]

Seja $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função n vezes derivável no ponto $a \in I$. Então:

i) *para todo $x \in I$, tem-se*

$$f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x),$$

onde $P_{n,a}$ é o polinómio de Taylor de ordem n da função f em torno do ponto a e $R_{n,a}$ é uma função tal que

$$\lim_{x \to a} \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0;$$

ii) *$P_{n,a}$ é o único polinómio de grau não superior a n que obedece a uma decomposição como a de i) para f, com $R_{n,a}$ verificando a condição em i) de pequenez.*

Aproximação de funções

A função $R_{n,a} \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $R_{n,a}(x) = f(x) - P_{n,a}(x)$ designa-se por *resto de Taylor* de ordem n da função f em torno do ponto a . À expressão

$$f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x) \qquad \text{com} \qquad \lim_{x \to a} \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

chama-se fórmula de Taylor de ordem n para a função f em torno do ponto a .

Observação

A segunda condição do diapositivo anterior exprime o facto de o resto de Taylor tender para 0 *mais rapidamente do que* $(x-a)^n$ *tende para* 0 *e, portanto, muito mais rapidamente do que* x *tende para* a.

O polinómio de Taylor $P_{n,a}$ *pode ser utilizado para aproximar a função* f *na vizinhança do ponto* a. *A precisão de tal aproximação depende da ordem* n *do polinómio: quanto mais elevada for a ordem do polinómio melhor será a aproximação considerada.*

Para cada x *numa vizinhança de* a, *ao tomarmos* $f(x)$ *aproximado pelo correspondente valor* $P_{n,a}(x)$, *o erro cometido é dado pela diferença entre o valor exato e o valor aproximado, ou seja, por*

$$R_{n,a}(x) = f(x) - P_{n,a}(x),$$

que é pequeno no sentido da segunda condição referida.

Estimativa do erro

No contexto da aproximação de funções por polinómios através da fórmula de Taylor, torna-se fundamental fornecer uma estimativa para o erro cometido. Ter-se-á $R_{n,a}(x)$ positivo ou negativo, consoante o valor aproximado é menor ou maior do que o valor exato mas, em geral, apenas nos interessa estimar a grandeza

$$|R_{n,a}(x)| = |f(x) - P_{n,a}(x)|.$$

Teorema

[Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange]

Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função $n+1$ vezes derivável no intervalo aberto I e a um ponto de I. Então, para cada $x \in I \setminus \{a\}$, existe $c_x \in \,]a, x[$ ou $c_x \in \,]x, a[$ tal que

$$f(x) = P_{n,a}(x) + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}.$$

Estimativa do erro

Observação

A última parcela da fórmula no teorema define o chamado resto de Lagrange. A equação é conhecida por fórmula de Taylor com resto de Lagrange.

A fórmula apresentada é essencial para controlar a precisão de qualquer aproximação polinomial através da fórmula de Taylor, porque permite obter uma estimativa para o erro cometido ao aproximar uma função pelo correspondente polinómio de Taylor com uma certa ordem. De facto,

$$|R_{n,a}(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c_x)\,(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \frac{M}{(n+1)!}\,|x-a|^{n+1},$$

onde M representa o máximo de $|f^{(n+1)}|$ no intervalo de extremos a e x, desde que exista.