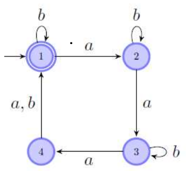
7ª aula

19 de abril de 2021 15:00

23. Considere o alfabeto $A = \{a, b\}$ e o autómato $\mathcal{A}$ descrito na figura abaixo.



(a) Determine $L(\mathcal{A})$, utilizando o método das equações lineares.
(b) Determine o autómato minimal equivalente ao autómato dado.

a)
$$\begin{cases} X_1 = bX_1 + aX_2 + \varepsilon \\ X_2 = bX_2 + aX_3 \\ X_3 = bX_3 + aX_4 \\ X_4 = (a+b)X_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ X_2 = b^* a X_3 \\ X_3 = b^* a X_4 \\ \overline{} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ X_2 = b^* a b^* a (a+b) X_1 \\ \overline{} \\ \overline{} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = bX_1 + ab^* a b^* a (a+b) X_1 + \varepsilon \\ = \\ = \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = (b + ab^* a b^* a (a+b)) X_1 + \varepsilon \\ = \\ = \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = (b + ab^* a b^* a (a+b))^* . \\ = \\ = \end{cases} \qquad L(\mathcal{A}) = \mathcal{L}\left(\left(b + ab^* a b^* a (a+b)\right)^* \right).$$

$$X_2 = bX_2 + aX_3 = \underbrace{rX_2 + s}, \quad \begin{matrix} r = b \\ s = aX_3 \end{matrix} \qquad X_2 = \underbrace{r^* s} = b^* a X_3$$

b) O autómato do enunciado é DCA. Vamos então calcular a relação de equivalência $\sim$.

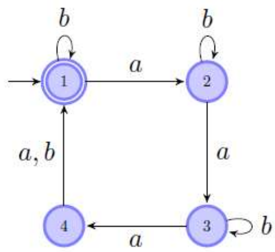
$$Q/\sim_0 = \{ \{1\}, \{2, 3, 4\} \}$$

$2 \sim_0 3$, $\delta(2,a) \sim_0 \delta(3,a)$ e $\delta(2,b) \sim_0 \delta(3,b)$

Logo $2 \sim_1 3$.

$2 \sim_0 4$, $\delta(2,a) = 3 \not\sim_0 1 = \delta(4,a)$, pelo que $2 \not\sim_1 4$.

$$Q/\sim_1 = \{ \{1\}, \{4\}, \{2, 3\} \}$$



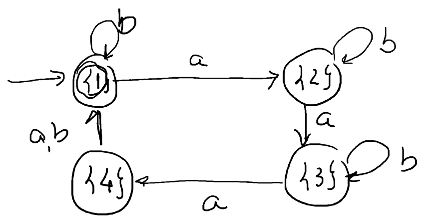
$2 \sim_1 3$, $\delta(2,a) = 3 \not\sim_1 4 = \delta(3,a)$

Logo $2 \not\sim_2 3$.

$$Q/\sim_2 = \{ \{1\}, \{4\}, \{2\}, \{3\} \}$$

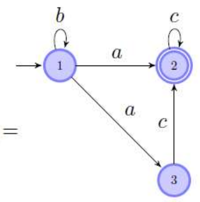
Como todas as classes de equivalência têm um único elemento, então o processo iterativo termina e $\sim = \sim_2$, pelo que $Q/\sim = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$.
Logo o autómato minimal tem 4 estados, pelo que, o autómato dado no enunciado é ...

Logo o autómato minimal tem 4 estados, pelo que, o autómato dado no enunciado é o autómato minimal.



24. Considere os autómatos $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ representados respetivamente por

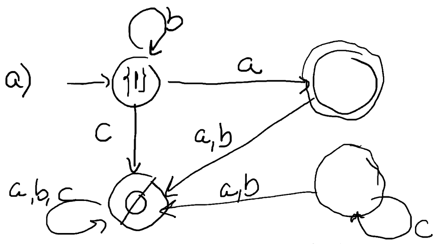
$\mathcal{A}_2 =$



(a) Calcule um autómato determinista completo e acessível que lhe seja equivalente.

(b) Determine o autómato minimal que lhe é equivalente.

a)



$\delta(2,a) \cup \delta(3,a) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$

$\delta(2,b) \cup \delta(3,b) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$

$\delta(2,c) \cup \delta(3,c) = \{2\} \cup \{2\} = \{2\}$

$F = \{\{2,3\}, \{2\}\}$
$= \{\mathrm{III}, \mathrm{II}\}$

Este é um autómato DCA equivalente a $\mathcal{A}_2$.

b) Vamos determinar $Q/\sim$

I - $\{1\}$
II - $\{2\}$
III - $\{2,3\}$
IV - $\emptyset$

$Q/\sim_0 = \{F, Q \setminus F\}$

$$Q/\sim_0 = \{ \underbrace{\{\{2,3\}, \{2\}\}}, \underbrace{\{\{1\}, \emptyset\}} \}$$

$\{1\} \sim_0 \emptyset$ e $\delta(\{1\}, a) = \{2,3\} \not\sim_0 \emptyset = \delta(\emptyset, a)$

Logo $\{1\} \not\sim_1 \emptyset$

$\{2,3\} \sim_0 \{2\}$, $\delta(\{2,3\},a) = \emptyset = \delta(\{2\},a)$, $\delta(\{2,3\},b) = \emptyset = \delta(\{2\},b)$

e $\delta(\{2,3\}, c) = \{2\} = \delta(\{2\}, c)$

Logo $\{2,3\} \sim_1 \{2\}$.

Então $Q/\sim_1 = \{ \{\{2,3\}, \{2\}\}, \{\{1\}\}, \{\emptyset\} \}$ ✓ ✓

$\{2,3\} \sim_1 \{2\}$, $\delta(\{2,3\},a) = \emptyset = \delta(\{2\},a)$, $\delta(\{2,3\},b) = \emptyset = \delta(\{2\},b)$

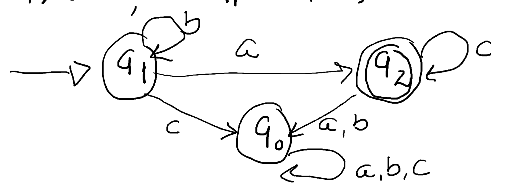
e $\delta(\{2,3\}, c) = \{2\} = \delta(\{2\}, c)$

Logo $\{2,3\} \sim_2 \{2\}$. e

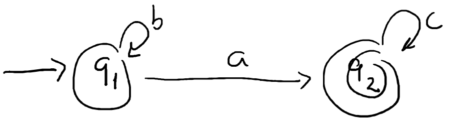
$$Q/\sim_2 = \{ \{\{2,3\}, \{2\}\}, \{\{1\}\}, \{\emptyset\} \}$$

Como $Q/\sim_2 = Q/\sim_1$, então $\sim_2 = \sim_1 = \sim$. Logo o autómato minimal tem 3 estados:

$q_0 = \{\emptyset\}$, $q_1 = \{\{1\}\}$ e $q_2 = \{\{2,3\},\{2\}\}$.



Este é o autómato minimal equivalente a A_2.

NOTA:
- O autómato  é equivalente a A_2, mas não é minimal porque não é completo.
- $L(A_2) = b^* a c^*$.

27. Seja $A = \{0, 1\}$. Considere as linguagens:

- L_1 constituída pelas palavras sobre A que têm pelo menos um algarismo repetido;
- L_2 constituída pelas palavras sobre A que têm um número par de ocorrências do símbolo 1 e um número ímpar de ocorrências do símbolo 0.

(a) Para cada uma das linguagens anteriores, determine um autómato que a reconhece.

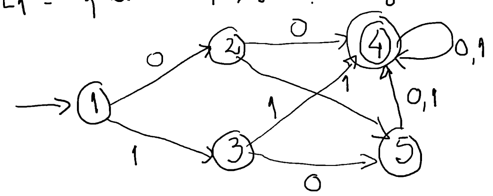
(b) Para cada uma das linguagens anteriores, indique uma expressão regular que a represente.

(c) Determine o autómato minimal que reconhece L_1:

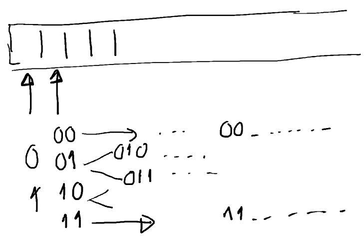
i. determinando-o por minimização do autómato calculado anteriormente;

ii. usando a construção com base no cálculo de resíduos.

a) $L_1 = \{u \in \{0,1\}^* : |u|_0 > 1 \vee |u|_1 > 1\}$

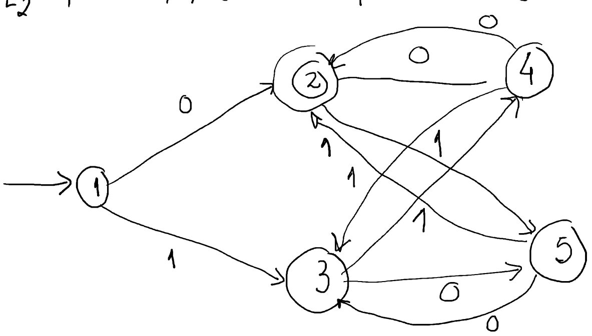


A_1



A_1 reconhece L_1 e A_1 é DCA.

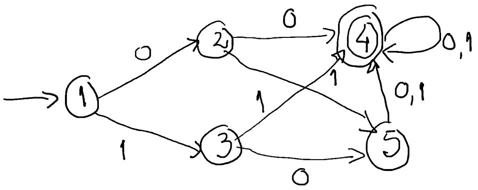
$L_2 = \{u \in \{0,1\}^* : |u|_1 = 2k, |u|_0 = 2k'+1, k, k' \in \mathbb{N}_0\}$



2	p 1	i 0
3	i 1	p 0
4	p 1	p 0
5	i 1	i 0

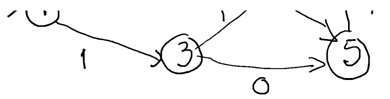
A_2 é DCA e reconhece L_2.

b)



A_1

$$\begin{cases} X_1 \quad 0X_2 + 1X_3 \\ X_2 = 0X_4 + 1X_5 \\ X_3 = 1X_4 + 0X_5 \\ X_. = (0+1)X_. + \varepsilon \end{cases} \iff$$



A_1

$$\begin{cases} X_3 = 1\,X_4 + 0\,X_5 \\ X_4 = (0+1)\,X_4 + \varepsilon \\ X_5 = (0+1)\,X_4 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} X_2 = 0\,(0+1)^* + 1\,(0+1)^+ \\ X_3 = 1\,(0+1)^* + 0\,(0+1)^+ \\ X_4 = (0+1)^*\varepsilon \\ X_5 = (0+1)\,(0+1)^* = (0+1)^+ \end{cases} \iff \begin{cases} X_1 = 00\,(0+1)^* + 01\,(0+1)^+ + 11\,(0+1)^* + 10\,(0+1)^+ \end{cases}$$

$$L(A_1) = \mathcal{L}\left(00\,(0+1)^* + 01\,(0+1)^+ + 11\,(0+1)^* + 10\,(0+1)^+\right) =$$
$$= \mathcal{L}\left((00+11)(0+1)^* + (01+10)\,(0+1)^+\right)$$

A_2 ...

c) i) análoga ao ex. 23, 24.

NOTA: $(0+1)^* = \left((0+1)^+ + \varepsilon\right)$

ii) $L = \mathcal{L}\left((00+11)\,(0+1)^* + (01+10)\,(0+1)^+\right) =$
$= \mathcal{L}\left((00+11+01+10)(0+1)^+ + 00 + 11\right)$

$L_0 = L$

$L_1 = 0^{-1}L = 0^{-1}\left(\{00, 11, 01, 10\}\{0,1\}^+ \cup \{00, 11\}\right) = 0^{-1}\{00,11,01,10\}\{0,1\}^+ \cup 0^{-1}\{00,11\}$
$= \{0, 1\}\{0,1\}^+ \cup \{0\}$

$L_2 = 1^{-1}L = 1^{-1}\left(\qquad\right) = 1^{-1}\{00,11,01,10\}\{0,1\}^+ \cup 1^{-1}\{00,11\}$
$= \{1, 0\}\{0,1\}^+ \cup \{1\}$

$L_3 = 0^{-1}L_1 = 0^{-1}\left(\{0,1\}\{0,1\}^+ \cup \{0\}\right) = \{\varepsilon\}\{0,1\}^+ \cup \{\varepsilon\} = \{0,1\}^+ \cup \{\varepsilon\} = \{0,1\}^*$

$L_4 = 1^{-1}L_1 = 1^{-1}\left(\{0,1\}\{0,1\}^+ \cup \{0\}\right) = \{\varepsilon\}\{0,1\}^+ = \{0,1\}^+$

$L_4 = 0^{-1}L_2 = 0^{-1}\left(\{1,0\}\{0,1\}^+ \cup \{1\}\right) = \{\varepsilon\}\{0,1\}^+ = \{0,1\}^+$

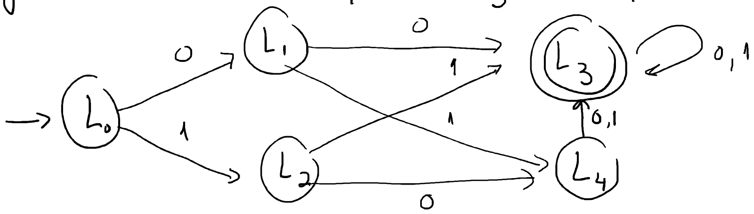
$L_3 = 1^{-1}L_2 = 1^{-1}\left(\{1,0\}\{0,1\}^+ \cup \{1\}\right) = \{\varepsilon\}\{0,1\}^+ \cup \{\varepsilon\} = \{0,1\}^*$

$0^{-1}L_3 = 1^{-1}L_3 = L_3$

$0^{-1}L_4 = \quad \dots \quad = L_3$

$1^{-1}L_4 = \quad \dots \quad = L_3$

O autómato minimal tem 5 estados: L_0, L_1, L_2, L_3, L_4.
Estado inicial L_0 $(= L)$.
Estados finais: é só um que é L_3 porque $\varepsilon \in L_3$.



Este é o autómato minimal.

28. Seja $A = \{a, b, c\}$ um alfabeto. Considere os seguintes autómatos finitos:

(i) $\mathcal{B}_1 = (\{1, 2, 3, 4\}, A, \delta_1, 1, \{2, 3\})$ em que a função de transição δ_1 é definida pela tabela abaixo.

δ_1	1	2	3	4
a	$\{2,4\}$	$\{3\}$	$\varnothing$	$\{4\}$
b	$\{1\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{1\}$
c	$\{1\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{1\}$

(ii) $\mathcal{B}_2 = (\{1, 2, 3, 4\}, A, \delta_2, 1, \{3, 4\})$ em que a função de transição δ_2 é definida pela tabela abaixo.

δ_2	1	2	3	4
a	$\{3\}$	$\{2\}$	$\{4\}$	$\{2\}$
b	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
c	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$

(iii) $\mathcal{B}_3 = (\{1, 2, 3, 4\}, A, \delta_3, 1, \{3, 4\})$ em que a função de transição δ_3 é definida pela tabela abaixo.

δ_3	1	2	3	4
a	$\{1\}$	$\{1,3\}$	$\{4\}$	$\varnothing$
b	$\{2\}$	$\{1\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
c	$\{2\}$	$\{1\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

De entre as afirmações seguintes selecione a afirmação verdadeira.

(a) $\mathcal{B}_2$ é um autómato minimal e $\mathcal{B}_2$ é equivalente a $\mathcal{B}_1$.
(b) $\mathcal{B}_1$ é um autómato minimal e $\mathcal{B}_2$ é equivalente a $\mathcal{B}_1$.
(c) $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_3$ são autómatos equivalentes.
(d) $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_3$ são autómatos e acessíveis e são equivalentes.