resolução de exercícios

exercício 41. Seja G um grupo não abeliano de ordem 8.

(a) Mostre que G tem um subgrupo H tal que $|H| = 4$.

(b) Prove que $H \triangleleft G$.

(a) Se $|G| = 8$, sabemos que $o(x) \mid 8$, para todo $x \in G$. Assim,

$$\forall x \in G \backslash \{1_G\},\ o(x) = 2 \text{ ou } o(x) = 4 \text{ ou } o(x) = 8.$$

Suponhamos que, para todo $x \in G \backslash \{1_G\}$, $o(x) = 2$. Então, G é abeliano (recordar ex. 20), o que é uma contradição.

Logo, temos que existe $x_0 \in G \backslash \{1_G\}$ tal que $o(x_0) = 4$ ou $o(x_0) = 8$.

Se $o(x_0) = 8$, como $|G| = 8$, temos que G é cíclico e, por isso, abeliano, o que também é uma contradição.

Estamos então em condições de concluir que $o(x_0) = 4$ e, por isso, $< x_0 >$ é um subgrupo de G com ordem 4.

(b) Se $|H| = 4$ e $|G| = 8$, pelo Teorema de Lagrange, concluímos que $[G : H] = 2$. Assim, estamos em condições de concluir que $H \triangleleft G$ (recordar exemplo 26 das teóricas - slide 56).

exercício 42. Determine os subgrupos cíclicos de um grupo cíclico de ordem 10.

Seja $G =< a >= \{1_G, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9\}$. Podemos responder a este exercício determinando o subgrupo gerado por cada um dos elementos de G. Como sabemos que $o(a) = 10$ e $o(a^k) = \frac{10}{\mathrm{m.d.c.}(k,10)}$, concluímos que:

- $< 1_G >= \{1_G\}$
- $< a >= G$
- $o(a^2) = 5$ e, por isso, $< a^2 >= \{1_G, a^2, (a^2)^2, (a^2)^3, (a^2)^4\} = \{1_G, a^2, a^4, a^6, a^8\}$
- $o(a^3) = 10$ e, por isso, $< a^3 >= G$
- $o(a^4) = 5$ e, por isso, $< a^4 >= \{1_G, a^4, (a^4)^2, (a^4)^3, (a^4)^4\} = \{1_G, a^4, a^8, a^2, a^6\}$
- $o(a^5) = 2$ e, por isso, $< a^5 >= \{1_G, a^5\}$
- $o(a^6) = 5$ e, por isso, $< a^6 >= \{1_G, a^6, (a^6)^2, (a^6)^3, (a^6)^4\} = \{1_G, a^6, a^2, a^8, a^4\}$
- $o(a^7) = 10$ e, por isso, $< a^7 >= G$
- $o(a^8) = 5$ e, por isso, $< a^8 >= \{1_G, a^8, (a^8)^2, (a^8)^3, (a^8)^4\} = \{1_G, a^8, a^6, a^4, a^2\}$
- $o(a^9) = 10$ e, por isso, $< a^9 >= G$

Assim, os subgrupos cíclicos de G (de facto, são todos os subgrupos de G) são:

- $\{1_G\}$
- $\{1_G, a^5\}$
- $\{1_G, a^2, a^4, a^6, a^8\}$
- G

Alternativa: Sabemos que para cada divisor k de 10, $< a^{\frac{n}{k}} >$ é um subgrupo de G com ordem igual a k. Como os divisores de 10 são 1, 2, 5 e 10, temos que $< a >= G$, $< a^5 >= \{1_G, a^5\}$,
$< a^2 >= \{1_G, a^2, a^4, a^6, a^8\}$ e $< a >= G$ são subgrupos de G.

Como $o(a^4) = \frac{10}{\mathrm{m.d.c.}(4,10)} = 5$ e $a^4 \in < a^2 >$, podemos concluir que $< a^4 >=< a^2 >$. De igual modo, concluímos que $< a^6 >=< a^8 >=< a^2 >$.

Finalmente, se $\mathrm{m.d.c.}(r, 10) = 1$ (ou seja, se $r \in \{3, 7, 9\}$, temos que $o(r) = 10$ e, por isso, $< a^r >= G$.

exercício 43. Seja $G = \langle a \rangle$ um grupo cíclico de ordem ímpar tal que $a^{47} = a^{17}$, $a^{10} \neq 1_G$ e $a^6 \neq 1_G$. Determine, justificando:

(a) a ordem de G;

(b) o número de subgrupos de G;

(c) todos os geradores distintos de G;

(d) o número de automorfismos de G.

(a) De $a^{47} = a^{17}$ temos que $a^{30} = 1_G$, pelo que $o(a) \mid 30$, ou seja, $o(a) \in \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$.

Como $|G|$ é ímpar e $|G| = o(a)$, temos que $o(a) \in \{1, 3, 5, 15\}$.

- se $o(a) = 1$,$a = 1_G$ e, neste caso, $a^{10} = 1_G$ (contradição)
- se $o(a) = 3$, $a^3 = 1_G$ e, neste caso, $a^6 = 1_G$ (contradição)
- se $o(a) = 5$, $a^5 = 1_G$ e, neste caso, $a^{10} = 1_G$ (contradição)

Logo, $o(a) = 15$ e, portanto, $|G| = 15$.

(b) Um subgrupo cíclico G de ordem finita n tem um e um só subgrupo de ordem k, para cada k divisor de n. Assim, como 15 tem 4 divisores (1,3, 5 e 15), concluímos que G tem 4 subgrupos.

Observação. Não é pedido, mas os 4 subgrupos são $\{1_G\}$, $< a^5 >$, $< a^3 >$ e $< a >$, de ordens 1, 3, 5 e 15, respetivamente.

(c) Sabemos que $G =< a >$ e que $o(a) = 15$. Então, $G =< a^r >$ se e só se $o(a^r) = 15$. Como $o(a^r) = \frac{15}{\mathrm{m.d.c.}(r,15)}$, concluímos que $G =< a^r >$ se e só se $\mathrm{m.d.c.}(r, 15) = 1$. Logo, os geradores de G são: a, a^2, a^4, a^7, a^8, a^{11}, a^{13} e a^{14}.

Observação. O número de geradores distintos de um grupo cíclico de ordem n é igual à imagem de n pela função *phi* de Euler, que nos dá o número de números naturais menores do que n e primos com n (recordar que se $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$ é a fatorização em primos de n, então $\varphi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \cdots (1 - \frac{1}{p_k})$).

Neste caso, como $15 = 3 \times 5$, $\varphi(15) = 15 \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = 2 \times 4 = 8$.

(d) Sabemos que, se G e H são grupos cíclicos, para $f : G \to H$ ser um isomorfismo, a imagem de um gerador de G tem de ser um gerador de H.

Assim, para $f : G \to G$ ser um automorfismo (isomorfismo onde domínio e conjunto de chegada são iguais), a imagem de um gerador de G tem de ser um gerador de G. Como temos 8 geradores distintos, vamos ter 8 automorfismos distintos, definidos por:

$$f_1(a) = a, \qquad f_2(a) = a^2, \qquad f_3(a) = a^4, \qquad f_4(a) = a^7$$

$$f_1(a) = a^8, \qquad f_2(a) = a^{11}, \qquad f_3(a) = a^{13}, \qquad f_4(a) = a^{14}$$

Observação. Porque é que é suficiente definir a imagem do gerador? Porque estamos a trabalhar com morfismos e a imagem da potência é a potência da imagem. Por exemplo, de $f_3(a) = a^4$, concluímos que

$$f_3 =$$

$$\begin{pmatrix} 1_G & a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & a^7 & a^8 & a^9 & a^{10} & a^{11} & a^{12} & a^{13} & a^{14} \\ 1_G & a^4 & (a^4)^2 & (a^4)^3 & (a^4)^4 & (a^4)^5 & (a^4)^6 & (a^4)^7 & (a^4)^8 & (a^4)^9 & (a^4)^{10} & (a^4)^{11} & (a^4)^{12} & (a^4)^{13} & (a^4)^{14} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1_G & a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & a^7 & a^8 & a^9 & a^{10} & a^{11} & a^{12} & a^{13} & a^{14} \\ 1_G & a^4 & a^8 & a^{12} & a & a^5 & a^9 & a^{13} & a^2 & a^6 & a^{10} & a^{14} & a^3 & a^7 & a^{11} \end{pmatrix}$$