TP1 1ª aula

ε ab ba aabb .... abab abba

1b) Definimos $L \subseteq A^*$, como sendo o conjunto definido recursivamente por: TP

1) $\varepsilon \in L$
2) Se $u \in L$, então $aub, bua \in L$.
3) Se $u, v \in L$, então $uv \in L$.

$L' = \{ u \in A^* : |u|_a = |u|_b \}$

Para verificar que a definição indutiva de L é a resposta à questão, temos que verificar que $L = L'$.

I) $L \subseteq L'$.

Como L foi definido indutivamente, podemos usar o Princípio de Indução Estrutural:

Princípio de Indução Estrutural para L

Seja P uma propriedade relacionada com as palavras de L.

Se: i) $P(\varepsilon)$ é verdadeira.
ii) Sendo $u \in L$ uma palavra tal que $P(u)$ é verdadeira, então $P(aub)$ e $P(bua)$ também são proposições verdadeiras.
iii) se $u, v \in L$ e são palavras tais que $P(u)$ e $P(v)$ são verdadeiras, então $P(uv)$ é verdadeira,

então P é uma propriedade válida para todas as palavras de L.

Em concreto, neste exercício $P(u)$ significa (é equivalente) que $|u|_a = |u|_b$. Vamos então fazer a demonstração usando o princípio de indução estrutural enunciado acima.

i) $|\varepsilon|_a = 0 = |\varepsilon|_b$, logo $P(\varepsilon)$ é verdadeira.

ii) Seja $u \in L$ tal que $|u|_a = |u|_b$.

$|aub|_a = 1 + |u|_a + 0 = 1 + |u|_a = 1 + |u|_b = |u|_b + 1 = |aub|_b$ //

Logo $P(aub)$ é verdadeira.

Logo $P(aub)$ é verdadeira.

$|bua|_a = \quad \ldots \quad = |bua|_b$

Logo $P(bua)$ é verdadeira.

iii) Sejam $u, v \in L$ palavras tais que $P(u)$ e $P(v)$ são verdadeiras, ou seja, $|u|_a = |u|_b$ e $|v|_a = |v|_b$.

$|uv|_a = |u|_a + |v|_a = |u|_b + |v|_b = |uv|_b$

Logo $P(uv)$ é verdadeira.

Por i), ii) e iii) conclui-se que para toda a palavra $u \in L$ se verifica que $|u|_a = |u|_b$; ou seja, $u \in L'$.

Logo $L \subseteq L'$ //

$\underline{\text{II}}$ $L' \subseteq L$

Vamos usar o princípio de indução matemática sobre o comprimento da palavra $u \in L'$, para provar que se $u \in L'$ então $u \in L$.

Seja $u \in L'$. Se $|u| = 0$, então $u = \varepsilon$. Como $\varepsilon \in L$ por 1.
então $P(\varepsilon)$ é válida.

Se $u \in L'$ é uma palavra de comprimento $k+1$, para algum $k \in \mathbb{N}_0$, em que todas as palavras de L' de comprimento menor ou igual a k pertencem a L, então

1.º caso se $u = au'b$ $\quad (|u'|_a = |u'|_b)$

Então $|u'| < |u| = k+1$. Logo $|u'| \leq k$. Pela hipótese de indução $u' \in L$. Então aplicando uma regra indutiva a u' do tipo 2, resulta que $au'b \in L$, ou seja, $u \in L$.

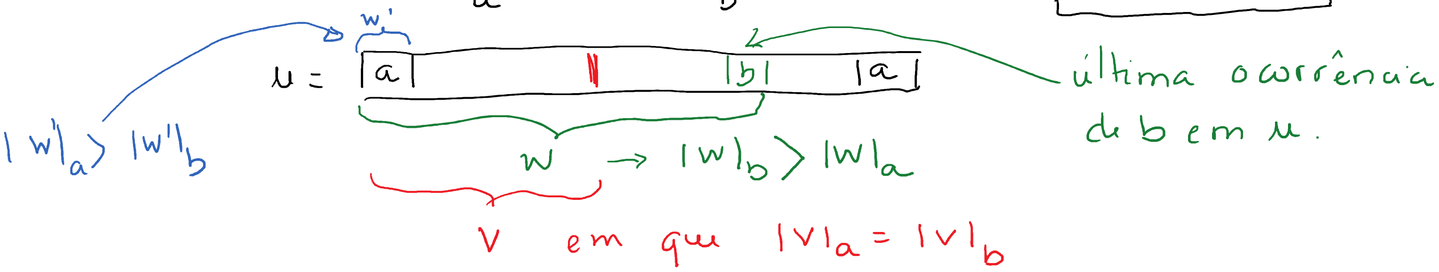
2.º caso se $u = bu'a$ $\quad (|u'|_a = |u'|_b)$

Por semelhança com o caso anterior, conclui-se que $u \in L$.

3.º caso se $u = au'a$

Então $|u'|_a + 2 = |u'|_b$ $\quad (|u|_a = \underbrace{2 + |u'|_a = |u'|_b} = |u|_b)$

$|u|_a + 0 = |u|_b$



$u = v \cdot v'$ em que $|v|_a = |v|_b$ e $|v'|_a = |v'|_b$

Como, temos também que $|v|, |v'| < |u|$, então pela hipótese de indução $v, v' \in L$.

Se $v, v' \in L$, por 3 na definição indutiva de L, resulta que $vv' \in L$, ou seja, $u \in L$.

4.º caso: se $u = bu'b$ com $u' \in A^*$.

Este caso é análogo ao 3.º caso, pelo que sabemos que $u \in L$, também neste caso.

Logo em todos os casos concluímos que $u \in L$.

Então, pelo Princípio de indução matemática, temos que se $u \in L'$, então $u \in L$, ou seja, $L' \subseteq L$.

De I e II, $L = L'$.

1d) Rascunho:

$j=0 \quad i=1 \quad ac$

$j=1 \quad i= \quad a^2cb$

$\vdots \qquad a^{j+1}cb^j$

$ac \downarrow a\,acb \downarrow a\,aacbb \downarrow \vdots$

$L' = \{a^{j+1}cb^j : j \in \mathbb{N}_0\}$

1d) Definimos indutivamente a linguagem L como sendo o menor conjunto de A^* tal que

1. $ac \in L$
2. Se $u \in L$, então $aub \in L$.

Faltava verificar que $L = L'$.

...

$U = \{u \in \{0,1\}^* : 001$ não é fator$\}$

Rascunho: ε, 0, 00, 000, ..., 1, 11, ..., 11...1,

~~000~~ 01 011...11.0000X 01 _ _ 1 . _ _ _ _ _

$\longrightarrow 0$

011010100000 $\longrightarrow$

0111011111 $\longrightarrow$

1g) Definimos L indutivamente como sendo o conjunto tal que:

1) $\varepsilon \in L$

2) se $u \in L$, então $u0 \in L$

3) se $u \in L$ então $01u$, $1u \in L$.

Falta verificar que $L = U$.

2c) Rascunho:

$u = ab \quad u^I = ba$

$u = aba \quad u^I = aba$

$u = \underbrace{ab}\cdot\underbrace{aa} \quad u^I = (aa)^I . (ab)^I$

$= aaba$

Vamos fazer a demonstração por indução matemática sobre o comprimento da palavra u.

Se $|u| = 0$, então $u = \varepsilon$ e $\varepsilon^I = \varepsilon$. Logo $|u| = |u^I| = 0$

Seja $k \in \mathbb{N}_0$ e seja $u \in A^*$ uma palavra tal que $|u| = k+1$.

Por hipótese de indução suponhamos que todas as palavras de comprimento menor ou igual a k verificam $|w| = |w^I|$.

Assim $u = w . x \quad x \in A$ e $w \in A^*$ e $|w| = k$.

Pela H.I, temos que $|w| = |w^I|$, e, consequentemente

$|u| = |u^I|$ pois

$u^I = (wx)^I = x w^I$ e então

$$|u^I| = |x\,w^I| = 1 + |w^I| = 1 + |w| = |wx|$$
$$= |u|.$$

Conclui-se assim a prova do passo indutivo.
Logo para qualquer que seja o comprimento de uma palavra $u \in A^*$, verifica-se que $|u| = |u^I|$.