MATEMÁTICA DISCRETA

Lic. Ciências da Computação

Exercícios de Teoria de Números - Divisibilidade

---

1. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Mostre que:
   (a) $1 \mid a, \quad a \mid a \quad$ e $\quad a \mid 0$;
   (b) $a \mid 1$ sse $a = \pm 1$;
   (c) $0 \mid a$ sse $a = 0$;
   (d) se $c \neq 0$, então $a \mid b$ sse $ac \mid bc$;
   (e) $a \mid b$ e $a \mid b + c$ implica que $a \mid c$;
   (f) se $ab \neq 0$ e $a \mid b$ e $b \mid a$, então $|a| = |b|$.
2. Sejam $a, x, y \in \mathbb{Z}$. Mostre que, se $a \mid (2x + 3y)$ e $a \mid (4x + 5y)$, então $a \mid y$.
3. Usando indução natural, mostre que $4 \mid 5^n - 1$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
4. Calcule o quociente e o resto da divisão de a por b em cada caso:
   (a) $a = 29$ e $b = 4$;
   (b) $a = -29$ e $b = 4$;
   (c) $a = -29$ e $b = -4$;
   (d) $a = 29$ e $b = -4$;
   (e) $a = -1350$ e $b = 45$;
   (f) $a = -1351$ e $b = 45$;
   (g) $a = -1351$ e $b = -45$;
   (h) $a = 0$ e $b = -37$.
5. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$. Prove as afirmações seguintes.
   (a) m.d.c.(a, b) = m.d.c.$(|a|, |b|)$ = m.d.c.(b, a).
   (b) se $b \mid a$, então m.d.c.$(a, b) = |b|$.
   (c) m.d.c.$(0, b) = |b|$.
6. Em cada caso, utilizando o algoritmo de Euclides, calcule o máximo divisor comum de a e b e escreva-o como combinação linear de a e b.
   (a) $a = 144$ e $b = 34$;
   (b) $a = 34$ e $b = 144$;
   (c) $a = 39$ e $b = 51$;
   (d) $a = -39$ e $b = -51$;
   (e) $a = -63$ e $b = -37$;
   (f) $a = -63$ e $b = 37$.

7. Resolva as seguintes equações no conjunto dos números inteiros:

   (a) $144x + 34y = 20$,

   (b) $39x + 51y = 7$,

   (c) $63x - 37y = 3$,

   (d) $63x + 37y = 3$,

   (e) $119x - 29y = 8$.

8. Sejam a e b inteiros não ambos nulos. Mostre que o conjunto

$$S = \{ax + by \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$$

   é o conjunto de todos os múltiplos de m.d.c.(a, b).

9. Prove que o resto da divisão do quadrado de qualquer número inteiro por 4, ou é 0 ou é 1.

10. Seja $a \in \mathbb{Z}$. Mostre que $\frac{a(a^2+2)}{3} \in \mathbb{Z}$.

11. Utilizando o Algoritmo da Divisão, prove que:

    (a) um quadrado perfeito não é da forma $3k + 2$;

    (b) um inteiro da forma $3k^2 - 1$ não é um quadrado perfeito.

12. Sejam a e b inteiros não ambos nulos. Mostre que:

    (a) a e b são primos entre si sse, existem inteiros x e y, tais que $1 = ax + by$;

    (b) se $d =$ m.d.c.(a, b), então $\frac{a}{d}$ e $\frac{b}{d}$ são primos entre si;

    (c) se m.d.c.$(a, b) = 1$ e $c \in \mathbb{Z}$ é tal que $a \mid c$ e $b \mid c$, então $ab \mid c$.

13. Prove que dois inteiros consecutivos são primos entre si.

14. Verifique que $6 \mid a(a + 1)(2a + 1)$, qualquer que seja $a \in \mathbb{Z}$.

15. Verifique que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $6 \mid n^3 - n$.

16. Sejam $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Mostre que:

    (a) m.m.c.$(a, b) =$ m.m.c.$(|a|, |b|) =$ m.m.c.(b, a).

    (b) m.m.c.$(a, a) = |a|$.

    (c) se $b \mid a$, então m.m.c.$(a, b) = |a|$.

    (d) m.d.c.$(a, b) \mid$ m.m.c.(a, b).

    (e) m.m.c.$(ka, kb) = |k|$m.m.c.(a, b) para qualquer $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

17. Em cada caso, calcule o mínimo múltipo comum de a e b e escreva-o como combinação linear de a e b.

    (a) $a = 144$ e $b = 34$;

    (b) $a = 34$ e $b = 144$;

    (c) $a = 39$ e $b = 51$;

    (d) $a = -39$ e $b = -51$;

    (e) $a = -63$ e $b = -37$.