Capítulo 2 - Séries de números reais

Neste Capítulo vamos lidar com expressões envolvendo somas com um número infinito de parcelas. O objetivo é atribuir significado matemático a este tipo de somas, recorrendo ao conceito de limite. Vamos ver que apenas em alguns casos estas somas podem ser calculadas.

2.Séries de números reais

Introdução

Sabemos bem o que significa

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_p = \sum_{n=1}^{p} u_n$$

e conhecemos as propriedades desta operação - comutatividade, associatividade, etc..

Neste Capítulo, vamos lidar com expressões do tipo

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \ = \ \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \,,$$

no sentido de atribuir um significado matemático rigoroso à operação de adição com um número infinito de parcelas .

Introdução

Suponhamos que pretendemos calcular o valor da soma

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \; = \; 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

Associando as parcelas duas a duas, escreveríamos

$$S = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots$$

e seríamos levados a concluir que $S = 0$.

Se agora destacarmos a primeira parcela e associarmos as restantes duas a duas, escrevemos

$$S = 1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \cdots$$

e já somos levados a pensar que será $S = 1$.

E poderíamos ainda destacar simplesmente a primeira parcela, resultando

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \cdots) = 1 - S,$$

donde $S = 1/2$.

Introdução

É então claro que estas "manobras" não levaram a qualquer conclusão sobre o valor de S.

Somos levados a pensar que as propriedades da adição em $\mathbb{R}$, com um número finito de parcelas, em particular a propriedade associativa, não são válidas quando estendemos a adição a um número infinito de parcelas.

Para dar sentido à expressão

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n ,$$

iremos recorrer à noção de limite .

Definições e consequências

Considere-se uma sucessão $(u_n)_n$ de números reais. À expressão $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$, que representa uma soma com um número infinito de parcelas, chama-se série numérica de termo geral u_n ou série numérica gerada por u_n .

Usa-se as notações

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\,, \qquad \sum_{n\geq 1} u_n\,, \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n\,, \qquad \sum_{n} u_n\,.$$

A sucessão $(u_n)_n$ diz-se a sucessão geradora da série.

Definições e consequências

Dada a série gerada por $(u_n)_n$, construa-se uma nova sucessão $(s_n)_n$, pondo

$$
\begin{aligned}
& s_1 = u_1 \\
& s_2 = u_1 + u_2 \\
& s_3 = u_1 + u_2 + u_3 \\
& \vdots \\
& s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\
& \vdots
\end{aligned}
$$

a que se chama sucessão das somas parciais da série.

Definições e consequências

Diz-se que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ é convergente}$$

quando a correspondente sucessão das somas parciais é convergente , ou seja, quando

$$\exists\, S \in \mathbb{R} : \quad S = \lim_n s_n.$$

Escreve-se

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

e diz-se que

$$S \text{ é a soma da série } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

Por outro lado, se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ não é convergente, dizemos que é divergente .

Definições e consequências

Exemplo

Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}.$$

A correspondente sucessão geradora é

$$u_n = (-1)^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e a sucessão das somas parciais é

$$s_n = 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então $s_{2n} = 0$ *e* $s_{2n-1} = 1$ *, pelo que* $(s_n)_n$ *não tem limite .*
Logo, a série é divergente.

Definições e consequências

Exercício

Considere a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

a) *Determine os primeiros quatro termos da sucessão das somas parciais.*

b) *Encontre uma expressão para s_n e diga qual a soma da série.*

Exercício

Considere a série

$$0.9 + 0.09 + 0.009 + 0.0009 + \cdots ,$$

onde cada termo da soma é $\dfrac{1}{10}$ do termo anterior.

a) *Determine os primeiros cinco termos da sucessão das somas parciais.*

b) *Que valor atribuiria à série?*

Definições e consequências

Das definições apresentadas extraem-se as seguintes consequências.

Consequência 1

Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ séries convergentes de somas s e t, respetivamente. Então:

a) a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n + v_n)$ converge e tem soma $s + t$;

b) a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha u_n$ converge e tem soma αs, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Consequência 2

Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente então, dado $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha u_n$ também é divergente.

Consequência 3

Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ convergente e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ divergente. Então $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + v_n)$ é divergente.

Observação

Se as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ *forem divergentes, nada se pode concluir, em geral, sobre a natureza da série* $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + v_n)$.

Primeiros resultados sobre convergência

Começamos com um resultado fundamental, muito útil no estudo da convergência de séries.

Teorema
[Condição necessária de convergência]

Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *é convergente então* $\lim_n u_n = 0$.

Corolario
[Condição suficiente de divergência (ou teste da divergência)]

Se a sucessão $(u_n)_n$ *não tem limite ou se* $\lim_n u_n = \ell$, *com* $\ell \neq 0$, *então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *é divergente.*

Primeiros resultados sobre convergência

Observação

O recíproco deste Teorema é obviamente falso. Isto é,

$$\lim_n u_n = 0 \quad \not\Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \ \textit{convergente.}$$

Pensar no exemplo clássico da série harmónica ,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$

Primeiros resultados sobre convergência

Teorema

Sejam $(u_n)_n$ *e* $(v_n)_n$ *duas sucessões que diferem, quando muito, num número finito de termos. Então as séries* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *e* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ *têm a mesma natureza.*

Observação

Este teorema estabelece que se uma das séries converge então a outra também converge e se uma das séries diverge então a outra também diverge.

Equivalentemente, significa que a natureza de uma série não depende dos seus k *primeiros termos, por maior que seja* k *.*

Primeiros resultados sobre convergência

Exercício

Use o teste da divergência para determinar se as séries seguintes divergem ou se o teste é inconclusivo.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2n+1}$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{n^3+1}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$

Exercício

Justifique que:

a) *se* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *converge, então* $\displaystyle\sum_{n=10}^{+\infty} u_n$ *também converge;*

b) *se* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *diverge, então* $\displaystyle\sum_{n=10}^{+\infty} u_n$ *também diverge;*

c) *se* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *converge, então* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + 0.001)$ *diverge.*

Resultados sobre algumas séries particulares

Vamos agora estudar, a partir da definição, algumas séries clássicas de relevo. O conhecimento da natureza destas séries será muito útil no estudo de outras séries.

A - Série geométrica

Chama-se série geométrica de razão r a uma série do tipo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r^{n-1}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

A sucessão geradora, $(u_n)_n$, é definida por

$$u_n = r^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

e a sucessão das somas parciais, $(s_n)_n$, é definida por

$$s_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}.$$

A - Série geométrica

Para $r = 1$ tem-se $s_n = n$ e para $r \neq 1$, como também

$$rs_n = r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n,$$

sai que

$$s_n - rs_n = 1 - r^n,$$

donde

$$s_n = \begin{cases} n & \text{se } \ r = 1 \\ \dfrac{1-r^n}{1-r} & \text{se } \ r \neq 1. \end{cases}$$

A - Série geométrica

Da definição de convergência de uma série e da condição suficiente de divergência, sai que:

$r = 1 \quad \Longrightarrow \quad$ série divergente,

porque $u_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$, e $\lim_n u_n = 1 \neq 0$
(além disso, tem-se $\lim_n s_n = \lim_n n = +\infty$);

$r > 1 \quad \Longrightarrow \quad$ série divergente,

porque $\lim_n u_n = \lim_n r^{n-1} = +\infty$
(além disso, como $\lim_n r^n = +\infty$, vem $\lim_n s_n = +\infty$);

$r \leq -1 \quad \Longrightarrow \quad$ série divergente,

porque $\nexists \lim_n u_n = \lim_n r^{n-1}$
(neste caso, também não existe $\lim_n s_n$);

A - Série geométrica

$$-1 < r < 1 \quad \Longrightarrow \quad \text{série convergente com soma } s = \frac{1}{1-r},$$

$$\text{porque } \lim_n s_n = \frac{1}{1-r}$$

$$(\text{repare-se que } \lim_n r^n = 0);$$

Conclusão

A série geométrica de razão r,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r^{n-1},$$

é convergente se e só se $|r| < 1$. Neste caso a sua soma é $S = \dfrac{1}{1-r}$.

A - Série geométrica

Observação

Mais em geral, uma série geométrica de razão r apresenta a forma

$$\sum_{n=p}^{+\infty} ar^{n+k}\,, \quad a, r \in \mathbb{R}\,,\ \ a \neq 0\,,\ \ p \in \mathbb{N}\,,\ \ k \in \mathbb{Z}\,,$$

representando a soma

$$ar^{p+k} + ar^{p+k+1} + ar^{p+k+2} + \cdots = ar^{p+k}\left(1 + r + r^2 + \cdots\right),$$

e tem a mesma natureza que as séries $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} r^{n+k}$ *e* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} r^{n-1}$.

Então a série $\sum_{n=p}^{+\infty} ar^{n+k}$ *converge se e só se* $|r| < 1$. *Em caso de convergência, a sua soma é*

$$s = ar^{p+k}\frac{1}{1-r}\,.$$

A - Série geométrica

Exercício

Use as propriedades das séries para determinar a soma das séries seguintes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left[5\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2^{n-1}}{7^n}\right]$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{2}(0.2)^n + \frac{3}{2}(0.8)^n\right]$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{6}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2-3^n}{6^n}$

Exercício

Justifique que as séries seguintes são divergentes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{6}{5}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}\right]$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+7^n}{6^n}$

B - Série harmónica

Trata-se da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

com sucessão geradora, $(u_n)_n$, definida por

$$u_n = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N},$$

e sucessão das somas parciais, $(s_n)_n$, definida por

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

A série harmónica é divergente.

B - Série harmónica

Vejamos que $(s_n)_n$ é divergente , analisando a subsucessão constituída pelos termos

$$s_2\,,\ s_4\,,\ s_8\,,\ s_{16}\,,\ s_{32}\,,\ \ldots\,,\ s_{2^n}\,,\ \ldots$$

Atendendo a que

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \\ &\quad + \left(\frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{32}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{8} + 8\cdot\frac{1}{16} + 16\cdot\frac{1}{32} + \cdots + 2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^n} \\ &= 1 + n\cdot\frac{1}{2}\,, \end{aligned}$$

conclui-se que

$$\lim_n s_{2^n} = +\infty\,,$$

pelo que $(s_n)_n$ é divergente.

C - Série de Riemann

Chama-se série de Riemann (de expoente $r > 0$) a uma série da forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\,r}}\ ,\ r \in \mathbb{R}^+,$$

cuja sucessão geradora é definida por

$$u_n = \frac{1}{n^r},\ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

A correspondente sucessão das somas parciais, $(s_n)_n$, é dada por

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \cdots + \frac{1}{n^r}\,.$$

C - Série de Riemann

i) Se $r = 1$ então a série reduz-se à série harmónica e, portanto, é divergente .

ii) Se $0 < r < 1$ então

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \cdots + \frac{1}{n^r} \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Então

$$\lim_n s_n = +\infty$$

porque, como se viu para a série harmónica,

$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) = +\infty.$$

A correspondente série de Riemann é divergente .

C - Série de Riemann

iii) Para $r > 1$, mostra-se que a sucessão $(s_n)_n$ é convergente verificando que

- $(s_n)_n$ é monótona crescente;
- a subsucessão de $(s_n)_n$ constituída pelos termos

$$s_1, s_3, s_7, s_{15}, s_{31}, \ldots, s_{2^n-1}, \ldots$$

  é limitada (usando uma técnica semelhante à usada para a série harmónica);
- $(s_n)_n$ é limitada porque é monótona e possui uma subsucessão limitada;
- $(s_n)_n$ é convergente porque é limitada e monótona.

Logo, a correspondente série de Riemann é convergente.

Conclusão

A série de Riemann (de expoente $r > 0$), é convergente se e só se $r > 1$.

C - Série de Riemann

Exemplos

1. *São convergentes as séries de Riemann seguintes.*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{10}}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^5}} \qquad \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)^2}$$

2. *São divergentes as séries de Riemann seguintes.*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2/3}} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\frac{1}{3}} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$$

Exercício

Justifique que as séries

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{4}{3}\right)^k + \frac{1}{n^5}\right]$

são divergentes.

D - Série de Mengoli (ou telescópica)

Chama-se série de Mengoli a uma série do tipo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+p}), \quad p \geq 1,$$

onde $(a_n)_n$ é uma sucessão qualquer .

Para estas séries, é possível estudar a sucessão das somas parciais de uma forma muito simples.

D - Série de Mengoli (ou telescópica)

Exemplo

Consideremos a seguinte série de Mengoli

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right).$$

Tem-se

$$\begin{aligned}
s_n &= \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \cdots \\
&\qquad + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right), \\
&= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) - \\
&\qquad - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)
\end{aligned}$$

D - Série de Mengoli (ou telescópica)

ou seja,

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\,,$$

de onde

$$\lim_n s_n = 3/2$$

e conclui-se que a série de Mengoli apresentada é convergente e tem soma $S = 3/2$.

Todas as séries de Mengoli se estudam desta forma.

D - Série de Mengoli (ou telescópica)

Em geral, para série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+p}), \quad p \geq 1,$$

vem

$$\begin{aligned} s_n &= (a_1 - a_{p+1}) + (a_2 - a_{p+2}) + (a_3 - a_{p+3}) + \cdots \\ &\quad + (a_p - a_{2p}) + (a_{p+1} - a_{2p+1}) + (a_{p+2} - a_{2p+2}) + \cdots \\ &\quad + (a_{n-2} - a_{n+p-2}) + (a_{n-1} - a_{n+p-1}) + (a_n - a_{n+p}), \end{aligned}$$

ou seja,

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_p - (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots a_{n+p}),$$

pelo que,

$$\text{existe} \quad \lim_n s_n$$

se e só se

$$\text{existe} \quad \lim_n (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots a_{n+p}),$$

ou seja, se e só se

$$\text{existe} \quad \lim_n a_n.$$

D - Série de Mengoli (ou telescópica)

Conclusão

A série de Mengoli

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+p}), \quad p \geq 1,$$

é convergente se e só se a correspondente sucessão $(a_n)_n$ também é convergente . Em caso de convergência, a soma da série é é precisamente

$$\begin{aligned} S &= \lim_n \left[a_1 + a_2 + \cdots + a_p - (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots a_{n+p})\right] \\ &= a_1 + a_2 + \cdots + a_p - p \lim_n a_n. \end{aligned}$$

Exercício

Para cada uma das séries telescópicas seguintes, determine a sucessão das somas parciais $(s_n)_n$ e diga se a série converge ou diverge.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

Quadro resumo

	Converge	Diverge
Série geométrica de razão r, $r \in \mathbb{R}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} r^{n-1}$	$\lvert r \rvert < 1$ $\displaystyle S = \frac{1}{1-r}$	$\lvert r \rvert \geq 1$
Série harmónica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$		divergente
Série de Riemann de expoente α, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$	$\alpha > 1$	$\alpha \leq 1$
Série de Mengoli $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+p}), \quad p \geq 1$	se $(a_n)_n$ converge $S = a_1 + \cdots + a_p - p \lim_n a_n$	se $(a_n)_n$ diverge

Séries de termos não negativos

Nesta seção, vamos concentrar-nos num tipo particular de séries, a saber

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\,, \quad \text{com} \quad u_n \geq 0\,,\ \ \forall n \in \mathbb{N},$$

para as quais a sucessão $(s_n)_n$ das somas parciais é monótona crescente, já que

$$s_n \;=\; s_{n-1} + u_n \;\geq\; s_{n-1}\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Séries de termos não negativos

Consequentemente, uma série deste tipo é convergente se e só se a correspondente sucessão $(s_n)_n$ é majorada .

De facto,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ convergente} \quad &\Longleftrightarrow \quad (s_n)_n \text{ convergente} \\
&\Longleftrightarrow \quad (s_n)_n \text{ limitada} \qquad [\text{porque } (s_n)_n \text{ é monótona}] \\
&\Longleftrightarrow \quad (s_n)_n \text{ majorada} \quad [\text{porque } (s_n)_n \text{ é crescente}]
\end{aligned}$$

Esta conclusão é crucial para estabelecer os chamados *critérios de convergência* de uma série de termos positivos, que se baseiam, exclusivamente, na sucessão geradora da série.

A - Critérios de comparação

Recorrendo a uma comparação com o termo geral de uma série conhecida, a aplicação de um dos seguintes critérios permite concluir, de forma muito simples, a natureza de uma vasta classe de séries numéricas.

Teorema

[Primeiro Critério de Comparação]

Sejam $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *e* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ *séries de termos não negativos tais que*

$$\exists p \in \mathbb{N} : \; n \geq p \implies u_n \leq v_n \, .$$

a) *Se* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ *converge então* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *também converge .*

b) *Equivalentemente, se* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *diverge então* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ *também diverge.*

Teorema

[Segundo Critério de Comparação]

Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ *séries de termos positivos tais que* $\ell = \lim_n \frac{u_n}{v_n}$, *onde* $\ell \in [0, +\infty[$.

a) *Se* $\ell \neq 0$ *e* $\ell \neq +\infty$ *então as séries* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ *têm a mesma natureza.*

b) *Se* $\ell = 0$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ *converge então* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *também converge.*

Equivalentemente, se $\ell = 0$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *diverge então* $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ *também diverge.*

c) *Se* $\ell = +\infty$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ *diverge então* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *também diverge.*

Equivalentemente, se $\ell = +\infty$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *converge então* $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ *também converge.*

Exercício

Use um critério de comparação para decidir sobre a natureza das séries seguintes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{7^n+1}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n+1}{n^3+1}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3+(-1)^n}{n^4}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+1}{3^n-1}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{10}+5}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{1+n^4}$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n-3}}$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{2n^4-1}$

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4-2n^2+3}{2n^6-n+5}$

B - Critério de D'Alembert (ou da razão)

Este critério é motivado pela simplicidade das séries geométricas,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \quad \text{com } a_n = r^{n-1} \quad (r \neq 0),$$

que apresentam a propriedade de se ter $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$ e que convergem quando e só quando $|r| < 1$.

Vamos agora ver que uma série arbitrária de termos positivos, digamos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n,$$

mesmo que não seja geométrica (a razão $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ não é constante) for tal que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq c, \quad \text{com} \quad 0 < c < 1, \qquad \text{para } n \geq p,$$

é convergente.

B - Critério de D'Alembert (ou da razão)

De
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq c, \qquad 0 < c < 1, \qquad n \geq p$$
concluímos que
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq c \implies \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{c^{n+1}}{c^n} \implies \frac{u_{n+1}}{c^{n+1}} \leq \frac{u_n}{c^n}, \quad n \geq p,$$
o que significa que a sucessão $\left(\frac{u_n}{c^n}\right)_n$ é não crescente a partir da ordem p, sendo, portanto, uma sucessão limitada, com todos os termos em $]0, L]$, onde $L = \max\left\{\frac{u_1}{c^1}, \frac{u_2}{c^2}, \ldots, \frac{u_p}{c^p}\right\}$.

Então,
$$\frac{u_n}{c^n} \leq L, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$
donde
$$u_n \leq Lc^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Usando o primeiro critério de comparação, uma vez que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} c^n$ é convergente, temos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é também convergente.

B - Critério de D'Alembert (ou da razão)

Na generalidade dos casos práticos, revela-se muito mais útil a formulação do resultado exposto em termos de limite.

Teorema

[Critério de D'Alembert (ou da razão)]

Seja $(u_n)_n$ uma sucessão de termos positivos e suponha-se que existe

$$\ell = \lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

a) *Se $\ell < 1$ então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente.*

b) *Se $\ell > 1$ então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente.*

c) *Se $\ell = 1$ nada se pode concluir quanto à natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.*

C - Critério de Cauchy (ou da raíz)

Este critério, de aplicação muito frequente, é também motivado pela simplicidade das séries geométricas.

Por comparação com a série geométrica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r^n, \quad r \geq 0$$

que converge quando $r \in [0, 1[$, podemos concluir que também converge qualquer série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n, \qquad u_n \geq 0,$$

que verifique

$$u_n \leq r^n, \quad r < 1 \qquad (n \geq p),$$

ou seja,

$$\sqrt[n]{u_n} \leq r < 1 \qquad (n \geq p).$$

C - Critério de Cauchy (ou da raíz)

A formulação deste resultado em termos de limite conduz a um resultado de aplicação muito simples.

Teorema
[Critério de Cauchy (ou da raíz)]
Seja $(u_n)_n$ uma sucessão de termos não negativos e suponha-se que existe

$$\ell = \lim_n \sqrt[n]{u_n}\,.$$

a) *Se $\ell < 1$ então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente.*

b) *Se $\ell > 1$ então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente.*

c) *Se $\ell = 1$ então nada se pode concluir quanto à natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.*

C - Critério de Cauchy (ou da raíz)

Exercício

Use o critério de Cauchy (ou da raíz) para estudar a convergência das séries seguintes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(1+a)^n}, \quad \text{com } a \in \mathbb{R}^+$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{e}+\frac{1}{n}\right)^n$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right)^n$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

(Recorde que $\lim\limits_{n} \sqrt[n]{n} = 1$.*)*

Convergência absoluta e convergência simples

Consideremos uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ cujos termos têm sinal arbitrário.
Formemos a correspondente série dos módulos,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n| \, ,$$

que é obviamente uma série de termos não negativos, para a qual valem todos os resultados apresentados na secção anterior.

Teorema

Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ é convergente então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ também é convergente.

Convergência absoluta e convergência simples

Dizemos que uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é *absolutamente convergente* quando a correspondente série dos módulos, $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$, é convergente.

Quando uma série é convergente mas não é absolutamente convergente, dizemos que é *simplesmente convergente*.

Observação

Se uma série é absolutamente convergente então é convergente.
O recíproco é falso. Há séries convergentes que não são absolutamente convergentes. Veremos que a série harmónica alternada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

é convergente mas não é absolutamente convergente. A correspondente série dos módulos,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}, \quad \text{é a série harmónica que é divergente.}$$

Exemplos

1. *Uma série convergente com termos de sinal constante é absolutamente convergente.*

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{1}{n^2}$ *é absolutamente convergente.*

   De facto, a sua série dos módulos, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ *, é uma série de Riemann convergente.*

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} n}{n^7}$ *é absolutamente convergente.*

   Como
   $$0 \leq \left|\frac{\operatorname{sen} n}{n^7}\right| \leq \frac{1}{n^7}\,,\ \forall n\in\mathbb{N},$$
   e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^7}$ *é uma série de Riemann convergente, por comparação conclui-se que a série dos módulos da série dada é convergente.*

Séries alternadas

Entre as séries com termos de sinal variável, destacam-se aquelas cujos termos são alternadamente positivos e negativos. Estas séries apresentam a forma geral

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\, a_n = \; a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \cdots$$

ou

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n}\, a_n = \; -a_1 + a_2 - +a_3 + a_4 - a_5 + \cdots$$

onde $a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$, e designam-se por *séries alternadas*.

Quanto à natureza de uma série alternada, pode acontecer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\, a_n$ seja absolutamente convergente, quando a correspondente série dos módulos é convergente, seja simplesmente convergente, quando a série dos módulos é divergente mas a série alternada converge, ou seja divergente.

Séries alternadas

Um resultado muito útil para estudar séries alternadas, sobretudo quando a correspondente série dos módulos é divergente, é o seguinte.

Teorema

[Critério de Leibnitz (condição suficiente de convergência das séries alternadas)]

Seja $(a_n)_n$ *uma sucessão decrescente , isto é,*

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \cdots a_n \geq \cdots ,$$

e tal que

$$\lim_n a_n = 0.$$

Então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *é convergente.*

Observação

O resultado enunciado neste teorema continua válido quando a sucessão $(a_n)_n$ *é decrescente apenas a partir de uma certa ordem* $p \in \mathbb{N}$.

Exemplos

1. *A série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *é simplesmente convergente.*
   A série dos módulos é a série harmónica, logo divergente.
   Como
   $$\lim_n \frac{1}{n} = 0 \qquad e \qquad \left(\frac{1}{n}\right)_n \text{ é decrescente,}$$
   usando o critério de Leibnitz, concluímos que esta série é convergente.
2. *A série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ *é simplesmente convergente.*
   Semelhante ao exemplo anterior.
3. *A série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$ *é absolutamente convergente.*

   A série dos módulos é a série de Riemann $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ *convergente.*

Observação

O critério de Leibnitz é uma condição suficiente de convergência, pelo que nada se poderá concluir quando falha alguma das hipóteses.

Saliente-se, no entanto, que quando

$$a_n \not\longrightarrow 0, \quad \textit{a série alternada é divergente,}$$

já que também $(-1)^{n+1} a_n \not\longrightarrow 0$ *(condição suficiente de divergência).*

Os casos mais complexos são aqueles em que

$$a_n \longrightarrow 0 \textit{ mas } (a_n)_n \textit{ não é decrescente.}$$

Exemplos

1. *A série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{n+5}{n}$ *é divergente.*

   Basta atender a que não existe $\displaystyle\lim_n\,(-1)^{n+1}\,\frac{n+5}{n}$.

2. *A série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$, *com* $a_n=\begin{cases} 1/n^2 & \text{se } n \text{ par}\\ 1/n^3 & \text{se } n \text{ ímpar,}\end{cases}$

   converge absolutamente.

   Basta atender a que a série dos módulos, por comparação, é convergente, uma vez que

   $$0 < a_n \leq \frac{1}{n^2},\ \forall n \in \mathbb{N},$$

   e que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ *é uma série de Riemann convergente.*

   Repare-se que o critério de Leibnitz não é aplicável à série proposta, uma vez que a sucessão $(a_n)_n$ *não é decrescente a partir de ordem alguma.*

Exercício

Use o critério de Leibnitz para justificar que as séries alternadas seguintes são convergentes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n+2}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n e^{-n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{1+n^2}$

Exercício

Determine se as seguintes séries alternadas divergem, convergem absolutamente ou convergem simplesmente.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^3}}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\operatorname{sen} n)^2}{n^4}$

c) $\displaystyle 2 - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \cdots$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n^2}$

Resto de uma série alternada

Excepto em casos particulares simples, como os da série geométrica e da série de Mengoli, a teoria estudada apenas nos indica se a série é ou não convergente, mas não nos fornece nenhum método para calcular exactamente o valor da soma (quando existe). Nas aplicações práticas, torna-se então necessário determinar valores aproximados da soma S, isto é, substituir o valor de S pela soma S_m de um número finito m de termos. É claro que a aproximação será tanto melhor quanto maior for m.

Escrevendo

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n}_{S} = \underbrace{\sum_{n=1}^{m} u_n}_{S_m} + \underbrace{\sum_{n=m+1}^{+\infty} u_n}_{R_m},$$

assume especial importância o chamado *resto de ordem m da série,*

$$R_m = \sum_{n=m+1}^{+\infty} u_n = S - S_m,$$

uma vez que é o erro que se comete quando se toma o valor de S_m como aproximação para o valor da soma S.

Resto de uma série alternada

No caso de uma série alternada convergente,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n, \qquad \text{com } a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

ou

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}a_n \qquad \text{com } a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

em que $\lim_n a_n = 0$ e $(a_n)_n$ é decrescente, temos o resultado

$$|R_m| \leq a_{m+1},$$

ou seja, o erro que se comete é, em valor absoluto, não superior ao primeiro termo que se despreza.

Resto de uma série alternada

Basta observar que, no primeiro caso, a soma $S = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ verifica

$$0 \leq S \leq a_1$$

e, no segundo caso, para $S = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ tem-se

$$-a_1 \leq S \leq 0.$$

Ou seja, podemos sempre escrever

$$|S| \leq a_1.$$

O resto de ordem m, sendo uma série alternada,

$$R_m = \sum_{n=m+1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

verifica, portanto,

$$|R_m| \leq a_{m+1}.$$

Resto de uma série alternada

Exemplo

Consideremos a série harmónica alternada

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

que sabemos ser convergente. Podemos escrever neste caso

$$|R_m| \leq \frac{1}{m+1}.$$

Supondo que pretendíamos obter a soma com erro inferior a 0.0005, *bastaria escolher m de forma que*

$$\frac{1}{m+1} < 0.0005$$

ou seja, $m + 1 > 2000$. *Portanto, podemos garantir que a soma*

$$\sum_{n=1}^{2000}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0.692897\ldots$$

aproxima a soma da série harmónica alternada com erro inferior a 0.0005.