

**1. Matrizes**

1. Considere as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ .

- (a) Calcule os produtos  $AB$  e  $BA$  e diga se as matrizes são comutáveis.  
(b) Determine a matriz  $X$  que satisfaz a equação

$$3X + (A - 2I_2)B = BA - (X + B^T).$$

Resolução.

$$(a) \quad AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 1 & 1 \times 1 + 1 \times (-1) \\ 2 \times 1 + 1 \times 1 & 2 \times 1 + 1 \times (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Uma vez que  $AB \neq BA$ , as matrizes  $A$  e  $B$  não são comutáveis.

(b)

$$\begin{aligned} 3X + (A - 2I_2)B &= BA - (X + B^T) \\ \Leftrightarrow 3X + AB - 2B &= BA - X - B^T \\ \Leftrightarrow 3X + X &= -AB + 2B + BA - B^T \\ \Leftrightarrow 4X &= -\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow 4X &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow X = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow X &= \begin{bmatrix} 1/2 & 3/4 \\ -3/4 & -1/2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. Sendo  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , encontre todas as matrizes de ordem  $2 \times 2$  que comutam com a matriz  $B$ .

Resolução.

Seja  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  uma matriz real. Devemos ter  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , ou seja,  
 $\begin{bmatrix} a & a \\ c & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , donde se conclui que  $c = 0$  e  $a = b + d$ . Logo, as matrizes  
 que comutam com  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  são da forma  $\begin{bmatrix} b+d & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$ .

3. Determine a matriz  $A$  sabendo que

$$\frac{1}{2} \left( 4A - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 2A.$$

Resolução.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( 4A - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 2A \iff 2A - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} - 2A \\ \iff 2A + 2A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \iff A = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -9 & 4 \end{bmatrix} \\ \iff A &= \begin{bmatrix} 1/2 & 3/4 \\ -9/4 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4. Prove que se  $A$  é uma matriz invertível então

- (a)  $AB = O \implies B = O$ ;
- (b)  $AX = AY \implies X = Y$ .

Resolução.

Sendo  $A$  uma matriz invertível de ordem  $n$ , existe  $A^{-1}$  tal que  $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ . Assim,

- (a)  $AB = O \implies A^{-1}(AB) = A^{-1}O \implies (A^{-1}A)B = O \implies I_n B = O \implies B = O$ .
- (b)  $AX = AY \implies A^{-1}(AX) = A^{-1}(AY) \implies (A^{-1}A)X = (A^{-1}A)Y \implies X = Y$ .

5. Sendo  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$  invertível, verifique que a equação matricial na variável  $X$

$$A + AX = 2I_n$$

tem solução  $X = 2A^{-1} - I_n$ .

Resolução.

$$A + AX = A + A(2A^{-1} - I_n) = A + 2AA^{-1} - AI_n = A + 2I_n - A = 2I_n$$

6. (a) Considere a matriz  $D = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ . Verifique que  $D$  e  $D^2$  são matrizes ortogonais.

(b) Mostre que o produto de quaisquer duas matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal.

Resolução.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad DD^T &= \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = I_2 = D^T D; \\ D^2 &= \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}; \quad D^2 (D^2)^T = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = I_2 = (D^2)^T D^2. \end{aligned}$$

- (b) Sejam  $A$  e  $B$  duas matrizes ortogonais de ordem  $n$ , ou seja, matrizes  $A$  e  $B$  tais que  $AA^T = A^T A = I_n$  e  $BB^T = B^T B = I_n$ . Pretende-se mostrar que  $AB$  é também uma matriz ortogonal.

De facto,  $(AB)(AB)^T = (AB)(B^T A^T) = A(BB^T)A^T = AI_n A^T = AA^T = I_n$ . De forma análoga se verifica que  $(AB)^T(AB) = I_n$ . Ou seja,  $AB$  é uma matriz ortogonal.

7. Determine os valores dos parâmetros reais  $a, b$  e  $c$  para os quais a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

tem característica 3.

Resolução.

Efetuada o produto das duas matrizes, temos

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 4a & 4+2b & 6 \\ 6a & 6+5b & 11+3c \end{bmatrix}.$$

Façamos agora a redução de  $A$  a uma forma em escada equivalente.

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 4a & 4+2b & 6 \\ 6a & 6+5b & 11+3c \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \leftarrow l_3 - 6l_1]{l_2 \leftarrow l_2 - 4l_1} \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & 2b & 2 \\ 0 & 5b & 5+3c \end{bmatrix} \xrightarrow{l_2 \leftarrow l_2/2} \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 5b & 5+3c \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \leftarrow l_3 - 5l_2]{l_3 \leftarrow l_3 - 5l_2} \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 3c \end{bmatrix}$$

Podemos então concluir que a característica de  $A$  é igual a 3 se e só se  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$  e  $c \neq 0$ .

8. Determine os valores dos parâmetros reais  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  para os quais a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ -\beta & -\gamma & 1 \end{bmatrix} \quad \text{é a inversa da matriz} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & \gamma & 1 \end{bmatrix}.$$

Resolução.

Efetuada o produto das duas matrizes, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ -\beta & -\gamma & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & \gamma & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & \gamma & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ -\beta & -\gamma & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\alpha\gamma & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para que as matrizes sejam inversas uma da outra, deve ter-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\alpha\gamma & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ ou seja, } -\alpha\gamma = 0.$$

Assim,  $\alpha = 0$  ou  $\gamma = 0$  e  $\beta$  pode tomar qualquer valor real.

9. Determine, se possível, os valores dos parâmetros reais  $a, b$  e  $c$  para os quais as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & c \end{bmatrix}$$

são comutáveis, isto é, tais que  $AB = BA$ .

Resolução. Temos

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 4a & b & 0 \\ 6a+3 & 2b & 3c \end{bmatrix}$$

e

$$BA = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 4b & b & 0 \\ 6c+1 & 2c & 3c \end{bmatrix}.$$

Para que  $AB = BA$  deve ter-se

$$\begin{cases} 4a = 4b \\ 2b = 2c \\ 6a+3 = 1+6c \end{cases} \iff \begin{cases} a = b \\ b = c \\ 6a+3 = 1+6a \end{cases} \iff \begin{cases} a = b \\ b = c \\ 3 = 1 \end{cases} \quad (\text{Condição impossível})$$

Logo, não é possível as matrizes  $A$  e  $B$  serem comutáveis.

10. (a) Seja  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  uma matriz invertível tal que  $A^3 = A$ . Resolva em ordem a  $X$  a equação matricial

$$A(A^2 + XA^{-1}) = A^{-1} - A.$$

- (b) Verifique que  $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  é tal que  $A^3 = A$  e apresente a solução da equação matricial anterior para este caso particular.

Resolução.

(a)

$$\begin{aligned} A(A^2 + XA^{-1}) &= A^{-1} - A \iff A^3 + AXA^{-1} = A^{-1} - A \\ &\iff A + AXA^{-1} = A^{-1} - A \\ &\iff AXA^{-1} = A^{-1} - 2A \\ &\iff X = A^{-1}(A^{-1} - 2A)A \\ &\iff X = A^{-1}A^{-1}A - 2AA^{-1}A \\ &\iff X = A^{-1} - 2A \end{aligned}$$

$$(b) \quad A^2 = AA = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2, \text{ logo } A^{-1} = A;$$

$$A^3 = A^2A = I_2A = A;$$

$$X = A^{-1} - 2A = A - 2A = -A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

11. Considere as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ . Calcule

$$X = I_2 + BC(A^{-1})^T.$$

Resolução. Calculemos a inversa de  $A$ .

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{l_1 \leftarrow l_1 - l_2} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Assim,  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  e

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

12. Sejam  $A, B$  e  $C$  matrizes reais simétricas de ordem  $n$  tais que

- $A - B = I_n$  e
- $A$  e  $C$  são invertíveis.

Resolva em ordem a  $X$  a equação matricial

$$A(C^{-1}XC + B)^T = A^2.$$

Resolução.

$$\begin{aligned} A(C^{-1}XC + B)^T = A^2 &\iff A^{-1}(A(C^{-1}XC + B)^T) = A^{-1}(AA) && (A \text{ é invertível}) \\ &\iff (A^{-1}A)(C^{-1}XC + B)^T = (A^{-1}A)A \\ &\iff (C^{-1}XC + B)^T = A && (A^{-1}A = AA^{-1} = I_n) \\ &\iff C^{-1}XC + B = A^T \\ &\iff C^{-1}XC + B = A && (\text{sendo } A \text{ simétrica, } A = A^T) \\ &\iff C^{-1}XC = A - B \\ &\iff C^{-1}XC = I_n && (A - B = I_n) \\ &\iff C(C^{-1}XC)C^{-1} = CI_nC^{-1} && (C \text{ é invertível}) \\ &\iff (CC^{-1})X(CC^{-1}) = CC^{-1} && (C^{-1}C = CC^{-1} = I_n) \\ &\iff I_nXI_n = I_n \\ &\iff X = I_n. \end{aligned}$$

## 2. Sistemas de equações lineares

1. Justifique que existe um sistema de equações lineares  $Ax = b$  com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

tal que  $(1, 2, 3)$  é solução desse sistema. Indique as equações de um sistema nessas condições.

Resolução. O vetor dos termos independentes desse sistema é dado por

$$A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 13 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix}$$

As equações desse sistema nas incógnitas  $x$ ,  $y$  e  $z$  são, então,

$$\begin{cases} x - z = -2 \\ 2x + y + 3z = 13 \\ -x + 2z = 5 \\ 3x + y + 2z = 11 \end{cases}.$$

2. Verifique que a matriz inversa de  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  é a matriz  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$ .

Use  $A^{-1}$  para calcular a solução do sistema  $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ .

Resolução.

$$\text{Tem-se } AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

$$\text{Também se tem } A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Solução do sistema:

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3. Considere as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$  e  $C = \begin{bmatrix} 6 & 10 & -5 \\ d & -9 & 5 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ , onde  $d$  é um número real.

(a) Determine o número  $d$  de forma que  $C$  seja a inversa de  $A$ .

(b) Suponha que o vetor  $\mathbf{x}$  satisfaz a equação  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , onde  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

Use a inversa da matriz  $A$  para determinar  $\mathbf{x}$ .

(c) Considere agora a equação  $2A^T\mathbf{y} = \mathbf{b}$ . Determine  $\mathbf{y}$  usando novamente a inversa de  $A$ .

Resolução.

(a) De  $AC = I_3$ , ou seja, de

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 10 & -5 \\ d & -9 & 5 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

obtém-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6+d & 1 & 0 \\ 12+2d & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{cases} 6+d=0 \\ 12+2d=0 \end{cases} \iff \begin{cases} d=-6 \\ 2d=-12 \end{cases} \iff \begin{cases} d=-6 \\ d=-6 \end{cases}.$$

Assim,

$$A^{-1} = C = \begin{bmatrix} 6 & 10 & -5 \\ -6 & -9 & 5 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Também se tem  $CA = I_3$ ).

(b)

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \mathbf{x} = A^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 6 & 10 & -5 \\ -6 & -9 & 5 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 72 \\ -66 \\ -14 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\begin{aligned} 2A^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} &\iff A^T\mathbf{y} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \iff A^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \mathbf{y} = (A^T)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\iff \mathbf{y} = (A^{-1})^T \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 6 & 10 & -5 \\ -6 & -9 & 5 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\iff \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 6 & -6 & -1 \\ 10 & -9 & -2 \\ -5 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \mathbf{y} = \begin{bmatrix} -12 \\ -17 \\ 10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4. Considere a matriz invertível  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ .

(a) Determine  $A^{-1}$ .

(b) Use a alínea anterior para resolver o sistema de equações lineares  $A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Resolução.

(a)

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_3 \leftarrow l_3 - l_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 & \xrightarrow{l_3 \leftarrow l_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_2 \leftarrow (-1) \cdot l_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 & \xrightarrow{\substack{l_2 \leftarrow l_2 + l_3 \\ l_1 \leftarrow l_1 - l_3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_1 \leftarrow l_1 - l_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Temos, então,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Uma vez que  $A$  é uma matriz invertível, vem

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5. Para  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , considere a matriz  $A$  e o vetor  $\mathbf{b}$  dados por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ \beta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \beta \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}.$$

(a) Considere  $\alpha = \beta = 1$  e resolva o sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ .

(b) Considere  $\alpha = \beta = 0$  e verifique que o sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  é um sistema possível e indeterminado. Apresente duas soluções particulares do sistema.

Resolução.

(a) Se  $\alpha = \beta = 1$ , temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_2 \leftarrow l_2 - l_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_3 \leftarrow l_3 - l_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Por substituição inversa obtemos a solução única  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 1)$ .

(b) Quando  $\alpha = \beta = 0$ , ficamos com a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$



e temos um sistema possível e indeterminado pois  $c(A) = c(A|b) = 2 < n = 4$ .  
O conjunto de soluções é dado por

$$C.S. = \{(1, 0, a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Para, por exemplo,  $a = 1$  e  $b = 1$  temos a solução particular  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, 1)$  e para  $a = 2$  e  $b = 1$  vem  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 2, 1)$ .

6. Sendo  $\alpha$  e  $\beta$  parâmetros reais, considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x & -y & -z & = & 1 \\ -x & +3y & +3z & = & -1 \\ x & +3y & +\alpha z & = & \beta \end{cases}.$$

(a) Use o método de eliminação de Gauss para determinar os valores dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  para os quais o sistema não tem solução, tem uma única solução ou um número infinito de soluções. Justifique.

(b) Resolva o sistema para (i)  $\alpha = 5$  e  $\beta = 5$ ; (ii)  $\alpha = 3$  e  $\beta = 1$ .

Resolução.

(a)

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & \alpha & \beta \end{array} \right] & \xrightarrow[l_3 \leftarrow l_3 - l_1]{} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & \alpha + 1 & \beta - 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow[l_3 \leftarrow l_3 - 2l_2]{} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - 3 & \beta - 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

- Se  $\alpha = 3$  e  $\beta = 1$ , temos a matriz ampliada

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

que corresponde a um sistema possível e indeterminado. Se  $A$  é a matriz simples do sistema e  $\mathbf{b}$  o vetor dos termos independentes, temos  $c(A) = c(A|b) = 2 < n = 3$ .

- Se  $\alpha = 3$  e  $\beta \neq 1$ , a matriz ampliada é a matriz

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta - 1 \end{array} \right]$$

e o sistema correspondente é impossível uma vez que  $c(A) = 2 \neq c(A|b) = 3$ . A última equação corresponde à condição impossível  $0 = \beta - 1$ , pois  $\beta \neq 1$ .

- Se  $\alpha \neq 3$  e  $\beta \in \mathbb{R}$ , o sistema tem uma única solução.  
Neste caso,  $c(A) = c(A|b) = n = 3$ .

(b) (i) Se  $\alpha = 5$  e  $\beta = 5$ , temos a matriz ampliada

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right]$$

correspondente ao sistema equivalente

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & -y & -z = 1 \\ & 2y & +2z = 0 \\ & & 2z = 4 \end{array} \right. .$$

Por substituição inversa obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} z = \frac{4}{2} = 2 \\ y = -2z/2 = -z = -2 \\ x = 1 + y + z = 1 \end{array} \right. .$$

Trata-se de um sistema possível e determinado cuja solução única é  $(x, y, z) = (1, -2, 2)$ .

(ii) Se  $\alpha = 3$  e  $\beta = 1$ , como já observado, temos a matriz ampliada

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

que corresponde ao sistema possível e indeterminado

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & -y & -z = 1 \\ & 2y & +2z = 0 \\ & & 0 = 0 \end{array} \right. .$$

Assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1 + y + z \\ y = -z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -z \end{array} \right. .$$

Ou seja, temos o conjunto de soluções

$$C.S. = \{(1, -\gamma, \gamma) : \gamma \in \mathbb{R}\} .$$

7. Use o método de eliminação de Gauss para determinar os valores dos parâmetro  $\alpha$  e  $\beta$  para os quais o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & +y & +3z = -2 \\ x & +2y & +4z = -3 \\ -x & +3y & +\alpha z = \beta \end{array} \right.$$

não tem solução, tem uma única solução ou um número infinito de soluções.

Resolva o sistema para (i)  $\alpha = 2$  e  $\beta = -2$  e para (ii)  $\alpha = 1$  e  $\beta = -2$ .

Resolução.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & -3 \\ -1 & 3 & \alpha & \beta \end{array} \right] \xrightarrow[l_3 \leftarrow l_3 + l_1]{l_2 \leftarrow l_2 - l_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & \alpha + 3 & \beta - 2 \end{array} \right] \xrightarrow{l_3 \leftarrow l_3 - 4l_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha - 1 & \beta + 2 \end{array} \right]$$

- Se  $\alpha = 1$  e  $\beta = -2$ , temos a matriz ampliada

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

que corresponde a um sistema possível e indeterminado. Se  $A$  é a matriz simples do sistema e  $\mathbf{b}$  o vetor dos termos independentes, temos  $c(A) = c(A|\mathbf{b}) = 2 < n = 3$ .

- Se  $\alpha = 1$  e  $\beta \neq -2$ , a matriz ampliada é a matriz

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta + 2 \end{array} \right]$$

e o sistema correspondente é um sistema impossível, pois a última equação corresponde à condição  $0 = \beta + 2$  que é impossível pois  $\beta + 2 \neq 0$ . O seja, neste caso tem-se  $c(A) = 2 \neq c(A|\mathbf{b}) = 3$ .

- Se  $\alpha \neq 1$ , o sistema é possível e determinado qualquer que seja o valor de  $\beta$ . Neste caso,  $c(A) = c(A|\mathbf{b}) = n = 3$ .

(i) Para  $\alpha = 2$  e  $\beta = -2$  temos a matriz ampliada

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

que corresponde ao sistema

$$\begin{cases} x + y + 3z = -2 \\ y + z = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Por substituição inversa obtém-se

$$z = 0, \quad y = -1, \quad x = -2 - 3 \times 0 - (-1) = -1.$$

(ii) Para  $\alpha = 1$  e  $\beta = -2$ , como já observado, temos o sistema possível e indeterminado

$$\begin{cases} x + y + 3z = -2 \\ y + z = -1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

A variável  $z$  é uma variável livre e, por substituição inversa, obtém-se

$$y = -1 - z, \quad x = -2 - 3z - (-1 - z) = -2z - 1.$$

O conjunto de soluções é, então,

$$C.S. = \{(-2a - 1, -1 - a, a) : a \in \mathbb{R}\}.$$

8. Considere o sistema de equações lineares  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  com matriz ampliada

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2\alpha & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2\alpha & 0 & \beta \end{array} \right],$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros reais.

- (a) Em função dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , classifique o sistema.  
 (b) Considere  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$  e resolva o sistema. Apresente duas soluções particulares.  
 (c) Considere  $\alpha = 1$  e  $\beta = 0$  e verifique, sem resolver o sistema, que  $(1, -1, 0, 1)$  é a única solução do sistema.

Resolução.

(a)

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2\alpha & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2\alpha & 0 & \beta \end{array} \right] & \xrightarrow{\substack{l_3 \leftarrow l_3 - l_1 \\ l_4 \leftarrow l_4 - l_1 \\ l_5 \leftarrow l_5 - 2l_1}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\alpha & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{array} \right] & \xrightarrow{l_3 \leftarrow l_3 - l_2} \\ & \xrightarrow{l_4 \leftarrow l_4 - \alpha l_3} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{array} \right] & \xrightarrow{l_4 \leftarrow l_4 - \alpha l_3} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{array} \right] \end{aligned}$$

Se

- $\beta \neq 0$ , o sistema é impossível uma vez que  $c(A) < c(A|b)$ ;
- $\beta = 0$  e  $\alpha \neq 0$ , o sistema é possível e determinado uma vez que  $c(A) = c(A|b) = 4 = n$ ;
- $\beta = 0$  e  $\alpha = 0$ , o sistema é possível e indeterminado pois  $c(A) = c(A|b) = 3 < n$ .

(b) Quando  $\alpha = \beta = 0$ , a matriz ampliada do sistema fica reduzida à matriz

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

e temos um sistema possível e indeterminado. O conjunto solução é dado por

$$C.S. = \{(\alpha, -\alpha, 1 - \alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Duas soluções particulares:  $(1, -1, 0, 1)$  e  $(0, 0, 1, 0)$ .

(c) Quando  $\alpha = 1$  e  $\beta = 0$ , de acordo com a alínea (a), o sistema tem solução única ( $\alpha \neq 0$  e  $\beta = 0$ ). Ficamos com o sistema

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

e a única solução é  $(1, -1, 0, 1)$  pois

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## 2. Determinantes

1. Seja  $D \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  uma matriz diagonal.

- (a) Indique uma condição necessária e suficiente para  $D$  ser invertível.
- (b) Se  $D$  é invertível, determine  $D^{-1}$ .

Resolução.

(a) Seja  $D = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{bmatrix}$ ,  $d_i \in \mathbb{R}$ .  $D$  é invertível se e só se  $\det(D) \neq 0$ , ou seja, se e só se  $d_1 d_2 \cdots d_n \neq 0$ , ou ainda, se e só se  $d_i \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

(b)

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & & \\ & 1/d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & 1/d_n \end{bmatrix}, \quad d_i \neq 0, i = 1, \dots, n.$$

2. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Calcule o determinante de  $A$  e conclua que  $A$  é invertível.
- (b) Determine  $A^{-1}$ .

(c) Use a alínea anterior para resolver o sistema de equações lineares  $A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Resolução.

(a) Se escolhermos a segunda linha da matriz para fazermos o desenvolvimento de Laplace, vem

$$\det \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right) = (-1)^3 \cdot 1 \cdot \det \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = -1 \cdot (-1) = 1.$$

Como  $\det(A) \neq 0$ , a matriz  $A$  é uma matriz invertível.

(b)

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_3 \leftarrow l_3 - l_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{l_3 \leftrightarrow l_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_2 \leftarrow (-1) \cdot l_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{\begin{matrix} l_2 \leftarrow l_2 + l_3 \\ l_1 \leftarrow l_1 - l_3 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_1 \leftarrow l_1 - l_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Temos, então,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Uma vez que  $A$  é uma matriz invertível, temos

$$\begin{aligned} A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} &\iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3. Seja  $A$  uma matriz de ordem  $n$  tal que  $\det(A) = 1$ . Escreva a que é igual

- (a)  $\det(-A)$ ;      (b)  $\det(3A^T)$ ;      (c)  $\det(A^{-1})$ ;      (d)  $\det(P^{-1}AP)$ .

Resolução.

(a)  $\det(-A) = (-1)^n \det(A) = (-1)^n$ ;

(b)  $\det(3A^T) = 3^n \det(A^T) = 3^n \det(A) = 3^n$ ;

(c)  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = 1$ ;

(d)  $\det(P^{-1}AP) = \det(P) \det(A) \det(P^{-1}) = \det(P) \det(A) \frac{1}{\det(P)} = \det(A) = 1$ .

4. Sejam  $A, B$  matrizes de ordem 3 tais que  $\det(A) = \frac{1}{2}$  e  $\det(B) = 6$ , e sejam  $E_1, E_2, E_3$  matrizes elementares do tipo I, II e III, respetivamente, também de ordem 3. Suponha que  $E_2$  foi obtida multiplicando-se a segunda linha de  $I_3$  por 4. Determine:

(a)  $\det(2A)$ ;      (b)  $\det(A^2B^T)$ ;      (c)  $\det(A^{-1}B)$ ;      (d)  $\det(PA^TP^{-1})$ ;

(e)  $\det(E_3A)$ ;      (f)  $\det(E_1A)$ ;      (g)  $\det(E_2^{-1})$ ;      (h)  $\det(E_2A)$ .

Resolução.

(a)  $\det(2A) = 2^3 \cdot \det(A) = 8 \times \frac{1}{2} = 4$ ;

(b)  $\det(A^2B^T) = \det(A^2) \cdot \det(B^T) = (\det(A))^2 \cdot \det(B) = \frac{1}{4} \times 6 = \frac{3}{2}$ ;

(c)  $\det(A^{-1}B) = \det(A^{-1}) \cdot \det(B) = \frac{1}{\det(A)} \cdot \det(B) = 12$ ;

(d)  $\det(PA^TP^{-1}) = \det(P) \cdot \det(A^T) \cdot \det(P^{-1}) = \det(P) \cdot \det(A) \cdot \frac{1}{\det(P)} = \det(A) = \frac{1}{2}$ ;

(e)  $\det(E_3A) = \det(A) = \frac{1}{2}$ ;

(f)  $\det(E_1A) = -\det(A) = -\frac{1}{2}$

(g)  $\det(E_2^{-1}) = \frac{1}{\det(E_2)} = \frac{1}{4}$

(h)  $\det(E_2A) = 4 \det(A) = 2$ .

5. Seja  $A$  uma matriz de ordem  $n$  tal que  $\det(A) = 2$ . Escreva a que é igual

(a)  $\det(-3A)$ ;                      (b)  $\det((A^2)^{-1})$ ;                      (c)  $\det(A^T A^{-1})$ ;                      (d)  $\det(PAP^{-1})$ .

Resolução.

(a)  $\det(-3A) = (-3)^n \cdot \det(A) = 2 \cdot (-3)^n$ ;

(b)  $\det((A^2)^{-1}) = \frac{1}{\det(A^2)} = \frac{1}{(\det(A))^2} = \frac{1}{4}$ ;

(c)  $\det(A^T A^{-1}) = \det(A^T) \cdot \det(A^{-1}) = \det(A) \cdot \frac{1}{\det(A)} = 1$ ;

(d)  $\det(PAP^{-1}) = \det(P) \cdot \det(A) \cdot \det(P^{-1}) = \det(P) \cdot \det(A) \cdot \frac{1}{\det(P)} = \det(A) = 2$ .

6. Sejam  $A, B \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$  tais que  $\det(A) = 2$  e  $\det(B) = -3$ . Determine

(a)  $\det(A^n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;                      (b)  $\det(-BA^T)$ ;                      (c)  $\det(2AB^{-1})$ .

Resolução.

(a)  $\det(A^n) = [\det(A)]^n = 2^n$ ;

(b)  $\det(-BA^T) = \det(-B) \det(A^T) = (-1)^4 \det(B) \det(A) = 1 \times (-3) \times 2 = -6$ ;

(c)  $\det(2AB^{-1}) = \det(2A) \det(B^{-1}) = 2^4 \det(A) \det(B^{-1}) = 2^4 \times 2 \times \frac{1}{\det(B)} = -\frac{32}{3}$ .

7. Obtenha uma matriz em forma de escada equivalente por linhas à matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & a \\ a & b & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{com } a, b \in \mathbb{R}.$$

Calcule  $\det(A)$ , usando a forma em escada obtida, e verifique que a matriz é invertível se e só se  $a \neq b$ .

Resolução.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & a \\ a & b & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \leftarrow l_3 - al_1]{l_2 \leftarrow l_2 - l_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & a - b \\ 0 & b - a & 1 - ab \end{bmatrix} \xrightarrow{l_2 \leftrightarrow l_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & b \\ 0 & b - a & 1 - ab \\ 0 & 0 & a - b \end{bmatrix} = B$$

Temos

$$\det(A) = -\det(B) = -(b-a)(a-b) = (a-b)^2.$$

$A$  é invertível  $\iff \det(A) \neq 0 \iff (a-b)^2 \neq 0 \iff a-b \neq 0 \iff a \neq b$ .

8. Considere matrizes  $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  tais que  $AB = -BA$ . Mostre que

$$[\det(A + B)]^2 = \det(A^2 + B^2).$$

Resolução.

$$\begin{aligned} [\det(A + B)]^2 &= \det(A + B) \cdot \det(A + B) \\ &= \det((A + B)^2) \\ &= \det(A^2 + AB + BA + B^2) \\ &= \det(A^2 - BA + BA + B^2), \quad \text{uma vez que } AB = -BA, \\ &= \det(A^2 + B^2). \end{aligned}$$

9. Considere as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ . Resolva em ordem a  $X$  a equação matricial

$$(XA^T - BC)^T = A.$$

Resolução.

$$\begin{aligned} (XA^T - BC)^T = A &\iff XA^T - BC = A^T \\ &\iff XA^T = A^T + BC \\ &\iff XA^T(A^T)^{-1} = (A^T + BC)(A^T)^{-1} \\ &\iff XI_2 = A^T(A^T)^{-1} + BC(A^T)^{-1} \\ &\iff X = I_2 + BC(A^{-1})^T \end{aligned}$$

Calculemos agora a inversa de  $A$ .

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{l_1 \leftarrow l_1 - l_2} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Assim,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$



10. Seja  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  uma matriz idempotente, isto é, tal que  $A^2 = A$ . Mostre que  $\det(A) = 0$  ou  $\det(A) = 1$ .

Resolução.

Temos

$$\det(A^2) = \det(A) \det(A) = (\det(A))^2 = \det(A).$$

A condição  $(\det(A))^2 = \det(A)$  é equivalente a

$$\det(A)(\det(A) - 1) = 0,$$

ou seja,  $\det(A) = 0$  ou  $\det(A) = 1$ .

11. Sejam  $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  quaisquer. Mostre que:

- (a)  $\det(AB) = \det(BA)$ ;
- (b) se  $AB$  é invertível, então o mesmo sucede a  $A$  e a  $B$ .

Resolução.

- (a)  $\det(AB) = \det(A) \det(B) = \det(B) \det(A) = \det(BA)$ .
- (b) Se  $AB$  é invertível, então  $\det(AB) \neq 0$ . Como  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ , então terá de ser  $\det(A) \neq 0$  e  $\det(B) \neq 0$ . Ou seja,  $A$  e  $B$  são também invertíveis.

12. Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ .

- (a) Calcule o determinante de  $A$  e conclua que  $A$  é invertível.
- (b) Considere o sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  onde  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Use a regra de Cramer para determinar o valor da incógnita  $x_1$ .

Resolução.

- (a) Se escolhermos a segunda linha da matriz para fazermos o desenvolvimento de Laplace, vem

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -1 \times 3 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -1 \times 3 \times (-2) = 6.$$

Como  $\det(A) \neq 0$ , a matriz  $A$  é uma matriz invertível.

- (b)

$$x_1 = \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \left[ -2 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 3 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = -\frac{1}{6}.$$

13. Seja  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ . Calcule a terceira coluna de  $A^{-1}$  usando a regra de Cramer para resolver o sistema  $A\mathbf{x} = [0 \ 0 \ 1]^T$ .

Solução.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{4} = -\frac{3}{4}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{4} = 1.$$

14. Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ .

- (a) Calcule o determinante de  $A$  e conclua que  $A$  é invertível.
- (b) Considere o sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  onde  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Use a regra de Cramer para determinar a solução do sistema.

Resolução.

- (a) Se escolhermos a segunda coluna da matriz para fazermos o desenvolvimento de Laplace, vem

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -1 \times 1 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = -1 \times (-7) = 7.$$

Como  $\det(A) \neq 0$ , a matriz  $A$  é uma matriz invertível.

- (b)

$$x_1 = \frac{1}{7} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \left[ -1 \times 1 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{7} (-1 \times (-3)) = \frac{3}{7}$$

$$x_2 = \frac{1}{7} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \left[ 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{7} (2 \times (-3) + 2 \times (-2)) = -\frac{10}{7}$$

$$x_3 = \frac{1}{7} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \left[ -1 \times 1 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{7} (-1 \times (-2)) = \frac{2}{7}$$

15. Seja  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ . Determine o elemento  $(2, 3)$  de  $A^{-1}$  calculando o quociente entre dois determinantes.

Resolução.

Sendo

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 2 + 2 = 4,$$

vem

$$(A^{-1})_{2,3} = \frac{[\text{adj}(A)]_{2,3}}{\det(A)} = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}{\det(A)} = -\frac{3}{4}.$$

16. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Calcule o determinante de  $A$  e conclua que  $A$  é invertível.
- (b) Verifique que  $A \text{adj}(A) = \det(A)I_3$  e determine  $A^{-1}$ .
- (c) Use a matriz  $A^{-1}$  para obter a solução do sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  com  $\mathbf{b} = [1 \ 1 \ 2]^T$ .

Resolução.

- (a)  $\det(A) = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2$  (desenvolvimento de Laplace segundo a segunda coluna).

Como  $\det(A) \neq 0$ , a matriz  $A$  é invertível.

- (b)

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2I_3$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (c)

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

17. Considere as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  e  $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ . Resolva em ordem a  $X$  a equação matricial

$$A(X + C^T C)A^T = \text{adj}(A).$$

Resolução.

$$\begin{aligned} A(X + C^T C)A^T = \text{adj}(A) &\iff X + C^T C = A^{-1} \cdot \text{adj}(A) \cdot (A^T)^{-1} \\ &\iff X = A^{-1} \cdot \text{adj}(A) \cdot (A^{-1})^T - C^T C. \end{aligned}$$

Temos

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A) = \text{adj}(A).$$

Assim,

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

18. Seja  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  uma matriz invertível. Sabendo que  $A \text{adj}(A) = \det(A)I_n$ , mostre que  $\text{adj}(A)$  também é invertível e

$$(\text{adj}(A))^{-1} = \det(A^{-1}) A;$$

Resolução.

Uma vez que  $A$  é invertível, temos  $\det(A) \neq 0$  e de  $A \text{adj}(A) = \det(A)I_n$  obtemos

$$\frac{A}{\det(A)} \text{adj}(A) = I_n,$$

ou seja,  $\frac{A}{\det(A)}$  é a matriz inversa de  $\text{adj}(A)$ . Escrevemos, então,

$$(\text{adj}(A))^{-1} = \frac{A}{\det(A)} = \det(A^{-1}) A.$$