2ª aula

1 de março de 2021 17:00

6. Em cada uma das alíneas seguintes define-se indutivamente um conjunto L de palavras sobre $A = \{a, b\}$. Em cada caso dê uma definição explícita para L.

(e) (i) $a \in L$; (ii) se $x \in L$, então $xb, ax, bx \in L$.

(f) (i) $a \in L$; (ii) se $x \in L$, então $xb, xba \in L$.

e) $L = \{a, aa, a \dots a, ba, bba, bba\dots a, abbaaa, ab, abb, abbaaab, \dots\}$

$$\underbrace{\dots a\, abb\, ab}_{u \in A^*}\ \underbrace{a}_{a}\ \underbrace{bb \dots b}_{b^n} \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

$L = \{u a b^n : u \in A^*, n \in \mathbb{N}_0\} = A^* a \{b\}^*$

$= \{u \in A^+ : |u|_a \geqslant 1\} = \{u \in A^* : |u|_a \geqslant 1\}$ //

...

f) $L = \{a, ab, aba, abb, abba, abab, abba, abbb, abbba, \dots\}$

$L = \{u \in A^+ :$ a é prefixo de u e aa não é fator de $u\}$ //

$= aA^* \setminus A^* aa A^*$

8. Sejam A um alfabeto, $a, b \in A$ e $u \in A^*$. Mostre que se $au = ub$ então $a = b$ e $u \in \{a\}^*$.

Vamos provar esta implicação por indução matemática sobre n, onde $n = |u| \geqslant 0$.

Se $n = 0$, ou seja, se $|u| = 0$, então $u = \varepsilon$. Neste caso, se $a\varepsilon = \varepsilon b$, então $a = b$. É uma implicação trivialmente verdadeira.

Suponhamos que $|u| = 4$

$au = \boxed{a}\,|a|a|a|a|$

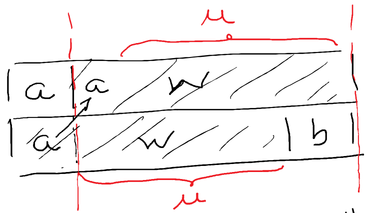
$ub = |a|a|a|a|\,\boxed{b}$

$u = aaaa \qquad a = b$

Neste caso, se $a\varepsilon = \varepsilon b$, então $a=b$ é uma implicação trivialmente verdadeira. Logo o resultado é válido no caso base de $n=0$.

$u = aaaa = a^4 \in \{a\}^*$ $\quad a=b$

Por hipótese de indução, suponhamos que para certo $n \in \mathbb{N}_0$, qualquer palavra u tal que $|u| = n$, verifica se $au = ub$, então $a=b$ e $u \in \{a\}^*$.
Seja $w \in A^*$ uma palavra tal que $|w| = n+1$ e em que $aw = wb$.
Queremos mostrar que $a=b$ e $w \in \{a\}^*$.



Da figura tiramos que

$w = au$ e que $au = ub$

Então $|u| = n$ e $au = ub$, pelo que da hipótese de indução resulta que

$a = b$ e $u \in \{a\}^*$.

Assim, $a=b$, e $w = au \in \{a\}^+ \subseteq \{a\}^*$. Isto completa a prova do passo indutivo.

Logo, se $u \in A^*$ e $au = ub$, então $a=b$ e $u \in \{a\}^*$, para qualquer palavra $u \in A^*$.

9. Seja $X = \{aa, bb\}$ e $Y = \{\varepsilon, b, ab\}$.

(a) Indique as palavras do conjunto XY.

(b) Indique as palavras do conjunto Y^* de comprimento não superior a 3.

(c) Quantas palavras de comprimento 6 existem em X^*.

a) $XY = \{aa, bb\} \cdot \{\varepsilon, b, ab\} = \{\underbrace{aa}\underbrace{\varepsilon}, bb\varepsilon, aab, bbb, aaab, bbab\}$ $\quad 2 \times 3$

b) $Y^* = Y^0 \cup Y^1 \cup Y^2 \cdots = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} Y^n$

$L = Y^* \setminus \{u \in Y^* : |u| > 3\}$

$= \{\varepsilon, b, ab, bb, bab, abb, bbb\}$

$Y^0 = \{\varepsilon\}$, $Y^1 = Y$

$Y^2 = Y \cdot Y = \{\varepsilon, b, ab, bb, bab, abb, abab\}$

$Y^3 = Y^2 \cdot Y = \{\varepsilon, b, abb, abab, bbb, \dots\}$

c) $X = \{aa, bb\}$

2 2 2 ← 3 blocos de palavras de comprimento 2: aa ou bb.

No total temos 2^3 palavras de X^* com comprimento 6.

11. Sejam $A = \{a, b\}$ e $L = A^*abaA^*$.

(a) Determine L^2 e L^*.

(b) Calcule $a^{-1}L$, $b^{-1}L$, $(aa)^{-1}L$, $(ba)^{-1}L$, $(ab)^{-1}L$ e $(abab)^{-1}L$.

$u = \underline{\quad}\, aba \,\underline{\quad} \in L$

$L = A^* aba A^* = \{u \in A^+ : aba \text{ é um fator de } u\}$

a) $L^2 = A^* aba A^* \cdot A^* aba A^* = A^* aba (A^* A^*) aba A^* = A^* aba A^* aba A^*$

$= \{u \in A^* : u$ tem duas ocorrências não sobrepostas de aba $\}$

Se $u \in A^*$, então $\underbrace{u \cdot \varepsilon}_{u} \in A^* A^*$, ou seja, $u \in A^* A^*$.

Logo $A^* \subseteq A^* A^* \subseteq A^*$, ou seja $\boxed{A^* A^* = A^*}$

conjunto de todas as palavras sobre A

$\underline{\varepsilon}\, ab a\underline{b} \in L$? Sim $abab \in L^2$? Não. Então $L \not\subseteq L^2$.

$L^2 \subset L$? As palavras de L^2 têm pelo menos 2 ocorrências de aba, logo têm pelo menos uma ocorrência de aba.

Logo Sim, $L^2 \subset L$.

Genericamente, se $m \geq n$, então $L^m \subset L^n$

$L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} L^n = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup \ldots = \{\varepsilon\} \cup L$ //

b) $a^{-1}L = a^{-1}(\underbrace{A^*}_{L_1}\underbrace{aba A^*}_{L_2}) = a^{-1}A^* . aba A^* \cup \cancel{a^{-1}} \cancel{a}ba A^* =$

$= \underline{A^* aba A^*} \cup ba A^* = L \cup ba A^*$

$a^{-1} A^* = ?$

Seja $u \in A^*$. Então $au \in A^*$.

$\cancel{a^{-1}}\cancel{a} u = u \in a^{-1} A^*$.

Logo $A^* \subseteq a^{-1} A^* \subseteq A^*$.

Então $a^{-1} A^* = A^*$

- $b^{-1}L = b^{-1}(A^* aba A^*) = b^{-1}A^* \cdot aba A^* \cup \underbrace{b^{-1} aba A^*}_{\emptyset} =$
  $= A^* aba A^* \cup \emptyset = L$

- $(aa)^{-1}L = a^{-1}(a^{-1} \cdot A^* aba A^*) = a^{-1}(L \cup ba A^*) =$
  $= a^{-1}L \cup \underbrace{a^{-1} ba A^*}_{\emptyset} = L \cup ba A^* \cup \emptyset = L \cup ba A^* = a^{-1}L$

Notar que: $a^{-1}L = (aa)^{-1} L$.

- $(ba)^{-1}L = a^{-1}(b^{-1} L) = a^{-1} L = L \cup ba A^*$ //

12. Sejam L, L_1 e L_2 linguagens sobre um alfabeto A. Mostre que:

ou 14?

(a) $L(L_1 \cup L_2) = LL_1 \cup LL_2$.

(b) $L(L_1 \cap L_2) \neq LL_1 \cap LL_2$.

12 a) $L(L_1 \cup L_2) = \{uv \in A^* : u \in L \text{ e } v \in L_1 \cup L_2\}$

$= \{uv \in A^* : u \in L \text{ e, } v \in L_1 \text{ ou } v \in L_2\}$

$= \{uv \in A^* : u \in L \text{ e } v \in L_1 \text{, ou, } u \in L \text{ e } v \in L_2\}$

$= \{uv \in A^* : u \in L \text{ e } v \in L_1\} \cup \{uv \in A^* : u \in L \text{ e } v \in L_2\}$

$= LL_1 \cup LL_2$

b) $L(L_1 \cap L_2) = \{u \in A^* : u \in L \text{ e } v \in L_1 \cap L_2\}$

$= \{uv \in A^* : u \in L \text{ e } v \in L_1 \text{ e } v \in L_2\}$

$\subseteq \underbrace{\{uv \in A^* : u \in L, v \in L_1\}} \cap \underbrace{\{u'v' \in A^* : u' \in L, v' \in L_2\}} = LL_1 \cap LL_2$

Vamos procurar um exemplo em que $LL_1 \cap LL_2 \nsubseteq L(L_1 \cap L_2)$

$L = \{b, ba\}$

$L_1 = \{\varepsilon\}$ $\quad LL_1 = L$

$L_2 = \{a\}$ $\quad LL_2 = La$

$L_1 \cap L_2 = \emptyset$

$u = ba \in \overset{ba \in}{LL_1} \cap \overset{ba}{LL_2}$

$u = \_\_\_\_\_\_ \notin L\underbrace{(L_1 \cap L_2)}_{\emptyset} = \emptyset$

Este exemplo prova que $LL_1 \cap LL_2 \nsubseteq L(L_1 \cap L_2)$.

14. Sejam A um alfabeto, L uma linguagem sobre A e $u, v, w \in A^*$. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(a) $uv = uw \Rightarrow v = w$; (b) $vu = wu \Rightarrow v = w$.

(c) $\varepsilon L = L\varepsilon = L$; (d) $\emptyset L = \emptyset$;

(e) $L\emptyset = L$; (f) $L = L^1$;

(g) $L^+ = L^*L$; (h) $\emptyset^+ = \emptyset$;

(i) $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$; (j) $\varepsilon \in L^+, \forall L$;

(k) $L^+ \cup \{\varepsilon\} = L^*$; (l) $L^+ \neq L^*, \forall L$;

(m) $L^+ \subseteq L^*$; (n) $L^* \subseteq L^+$.