Cálculo do Tipo mais geral

1) $\alpha = swap \cdot (id \times swap)$

$$\frac{E\times D \xleftarrow{swap} D\times E, \quad A\times(C\times B) \xleftarrow{id\times swap} A\times(B\times C)}{\{D\times E = A\times(C\times B)\} \quad E\times D \xleftarrow{\alpha} A\times(B\times C)}$$

$$\frac{A \xleftarrow{id} A, \quad C\times B \xleftarrow{swap} B\times C}{\{\} \quad A\times(C\times B) \xleftarrow{id\times swap} A\times(B\times C)}$$

↳ Para compormos 2 funções, o codomínio de uma tem de ser igual ao domínio da outra!

↳ Não existe nenhuma condição que se precise respeitar para fazer o produto de 2 funções

$$D\times E = A\times(C\times B) \Rightarrow \begin{cases} D = A \\ E = C\times B \end{cases}$$

Logo, o tipo mais geral de α é:

$$\boxed{(C\times B)\times A \xleftarrow{\alpha} A\times(B\times C)}$$

2) $\alpha = dup \cdot join = \langle id, id\rangle \cdot [id, id]$

$$\frac{B \xleftarrow{id} B, \quad A \xleftarrow{id} A}{\{A = B\} \quad B\times A \xleftarrow{\langle id, id\rangle} A}$$

$$\frac{D \xleftarrow{id} D, \quad C \xleftarrow{id} C}{\{D = C\} \quad D \xleftarrow{[id, id]} D+C}$$

↳ Para se poder juntar 2 funções num split, ambas têm de ter o mesmo domínio

$$\begin{tikzcd} B & B\times C \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & C \\ & A \arrow[ul, "g"] \arrow[u] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

$$A \xrightarrow{\langle g, f\rangle} B\times C$$

↳ Para se poder juntar 2 funções num either, ambas as funções têm de ter o mesmo codomínio

$$\begin{tikzcd} & C & \\ B \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "i_1"'] & B+A \arrow[u, "{[f,g]}"] & A \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "i_2"] \end{tikzcd}$$

$$\frac{A\times A \xleftarrow{\langle id, id\rangle} A, \quad C \xleftarrow{[id, id]} C+C}{A\times A \xleftarrow{\alpha} C+C \quad \{A = C\}}$$

Logo, o tipo mais geral de α é:

$$\boxed{A\times A \xleftarrow{\alpha} A+A}$$

(3) $iso = \langle ! + !, join \rangle$

$$\{\}\ \frac{1 \xleftarrow{!} B \quad , \quad 1 \xleftarrow{!} A}{1+1 \xleftarrow{!+!} B+A}$$

$$\frac{1+1 \xleftarrow{!+!} B+A \quad , \quad C \xleftarrow{join} C+C}{(1+1) \times C \xleftarrow{iso} C+C} \{B+A = C+C\}$$

Logo, o tipo mais geral de iso é:

$$\boxed{(1+1) \times A \xleftarrow{iso} A+A}$$

(7.)

$$comb\ f = [id, f] \cdot (i_1 + i_2) \cdot f$$
$$= [i_1, f \cdot i_2] \cdot f \qquad \{(22), (1)\}$$

Ou seja, comb é uma função que recebe uma função f e que devolve uma outra função $[i_1, f \cdot i_2] \cdot f$

Para obter o tipo mais geral de comb, vamos tentar obter o tipo mais geral de $[i_1, f \cdot i_2] \cdot f$

$$\frac{B \xleftarrow{f} A \ , \quad D + C \xleftarrow{i_2} C}{B \xleftarrow{f \cdot i_2} C \quad \{A = D + C\}}$$

$$\frac{E + F \xleftarrow{i_1} E, \quad B \xleftarrow{f \cdot i_2} C}{E + F \xleftarrow{[i_1, f \cdot i_2]} E + C \quad \{B = E + F\}}$$

$$\frac{E + F \xleftarrow{[i_1, f \cdot i_2]} E + C, \quad B \xleftarrow{f} A}{E + F \xleftarrow{comb\ f} A \quad \{B = E + C\}}$$

Assim, temos um sistema de 3 equações:

$$\begin{cases} A = D + C \\ B = E + F \\ B = E + C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = D + C \\ F = C \\ B = E + C \end{cases}$$

Assim, f que era do tipo $B \leftarrow A$, passa para:

$$E + C \xleftarrow{f} D + C$$

comb f, que era do tipo $E + F \leftarrow A$, passa para:

$$E + C \xleftarrow{comb\ f} D + C$$

Assim:

$$(E + C)^{D + C} \xrightarrow{comb} (E + C)^{D + C}$$

Tipo que contém todas as funções com assinatura:

$$E + C \xleftarrow{f} D + C$$