



Sistemas de equações lineares

Exercícios

1. Sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, determine $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ tal que $Ax = b$.

2. Resolva os sistemas seguintes por substituição (direta ou inversa).

(a)
$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 1 \\ 4y - 2z = 2 \\ 3z = 3 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ -3x_2 + x_3 - 2x_4 = -3 \\ 2x_3 + 5x_4 = -3 \\ -7x_4 = -7 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} 2x_1 = 2 \\ 4x_1 - 2x_2 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

(d)
$$\begin{cases} x = 1 \\ 1.5x + 0.25y = 1.25 \\ x + 1.5y - 4z = -0.5 \\ 4x + y + 2z + 2w = 5 \end{cases}$$

3. Para cada um dos sistemas apresentados a seguir, comece por escrever a matriz ampliada do sistema. Use o método de eliminação de Gauss para transformar a matriz ampliada numa matriz triangular superior, resolvendo em seguida o sistema equivalente ao sistema inicial.

(a)
$$\begin{cases} x + z = 1 \\ 2y + z = 1.5 \\ x - y = 0.25 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 6 \\ 4x + 5y - z = 2 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} x - 3y + z = 2 \\ 2x - 4y + 3z = 7 \\ -3x + y + 2z = 9 \end{cases}$$

(d)
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 6 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

(e)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ -2x_1 - x_2 = -4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$$

(f)
$$\begin{cases} x - y + z - w = 2 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x + y - w = 6 \\ -2x + 3y + z + 3w = -2 \end{cases}$$

4. Verifique que os sistemas

$$\begin{cases} x + 3y - 11z = -4 \\ 3x - 2y + 3z = 5 \\ -x + 8y - 25z = -3 \end{cases}$$

e
$$\begin{cases} 5y + 2z = 5 \\ x + y = 2 \\ -x + 4y + 2z = 1 \end{cases}$$

são impossíveis.

5. Use o método de eliminação de Gauss para resolver o sistema tridiagonal

$$\begin{cases} x & -y & & & & = 1 \\ -x & +2y & -z & & & = 0 \\ & -y & +2z & -w & & = 1 \\ & & -z & +2w & -u & = 0 \\ & & & -w & +2u & = 0 \end{cases}.$$

6. Dado o sistema

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = 1 \\ 2x_1 & +kx_2 & +6x_3 & = 6 \\ -x_1 & +3x_2 & +(k-3)x_3 & = 0 \end{cases},$$

resolva-o para os seguintes valores de k :

(a) $k = -4$

(b) $k = 0$

(c) $k = 4$

7. Em cada caso, encontre condições sobre os números a, b e c para que o sistema apresentado não tenha solução, tenha uma única solução ou um número infinito de soluções.

$$(a) \begin{cases} ax_1 & +x_2 & = -1 \\ 2x_1 & +x_2 & = b \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x_1 & -2x_2 & +2x_3 & = a \\ -2x_1 & +x_2 & +x_3 & = b \\ x_1 & -5x_2 & +7x_3 & = c \end{cases}$$

8. Apresente um sistema de equações lineares, de coeficientes reais, com quatro equações e quatro incógnitas que seja

(a) possível e determinado.

(c) impossível.

(b) possível e indeterminado.

9. Verifique que $\mathbf{x} = (1, 4, 1, 1)$ é uma solução do sistema

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +x_4 & = -3 \\ 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & -x_4 & = 0 \end{cases}.$$

Encontre todas as soluções do sistema.

10. Resolva os dois sistemas

$$\begin{cases} x & +2y & -2z & = 1 \\ 2x & +5y & +z & = 9 \\ x & +3y & +4z & = 9 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x & +2y & -2z & = 9 \\ 2x & +5y & +z & = 9 \\ x & +3y & +4z & = -2 \end{cases}$$

simultaneamente usando operações elementares numa matriz ampliada 3×5 e substituição inversa duas vezes.

11. Considere um sistema de equações lineares cuja matriz ampliada tem a forma

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & a & 3 \end{array} \right].$$

Para que valores de a o sistema tem uma única solução?

12. Considere um sistema de equações lineares cuja matriz ampliada é a matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & a & b \end{array} \right].$$

Para que valores de a e b o sistema

- (a) tem uma infinidade de soluções? (c) tem solução única?
(b) é impossível?

13. Considere um sistema de equações lineares cuja matriz ampliada é a matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & \beta & 0 \end{array} \right].$$

- (a) O sistema pode ser impossível?
(b) Para que valores de β o sistema tem uma infinidade de soluções?

14. Considere um sistema da forma

$$\begin{cases} -m_1x + y = b_1 \\ -m_2x + y = b_2 \end{cases}$$

onde m_1, m_2, b_1 e b_2 são constantes.

- (a) Mostre que o sistema tem uma única solução se $m_1 \neq m_2$.
(b) Se $m_1 = m_2$, mostre que o sistema só é possível se $b_1 = b_2$.
(c) Interprete geometricamente os resultados.

15. Seja (c_1, c_2) uma solução do sistema 2×2

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y = 0 \end{cases}$$

onde a_{11}, a_{21}, a_{12} e a_{22} são constantes reais.

Mostre que, qualquer que seja o número real α , o par $(\alpha c_1, \alpha c_2)$ é também uma solução.

16. Determine os valores de h tais que a matriz apresentada é a matriz ampliada de um sistema possível.

$$(a) \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 2 \\ -3 & h & -1 \end{array} \right] \quad (b) \left[\begin{array}{cc|c} 1 & h & 3 \\ 2 & 8 & 1 \end{array} \right] \quad (c) \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & h \end{array} \right] \quad (d) \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 1 \\ h & 6 & -2 \end{array} \right]$$

17. Diga se cada um dos seguintes sistemas de equações lineares é possível e, em caso afirmativo, indique se é determinado ou indeterminado.

$$(a) \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + y + 3z + w = 0 \\ -y + 2z + w = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y = 1 \\ x + 4y + 2z = 4 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + 6z = 6 \\ -x + 3y - 3z = 1 \end{cases} \quad (d) \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + z = 0 \\ x + 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

18. Resolva o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

19. Considere o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ e cujo vetor dos termos independentes é } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Verifique que $\mathbf{s}_1 = (-1, 1, 1, 2)$ é uma solução do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
- (b) Resolva o sistema homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- (c) Observe que se \mathbf{s}_h é uma solução do sistema homogêneo, então $\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_h$ é uma solução do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Apresente outras soluções do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

20. Use o método de eliminação de Gauss para verificar que a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ não é invertível.

21. Calcule, caso exista, a inversa de cada uma das matrizes apresentadas a seguir.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} & \text{(b)} B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} & \text{(c)} C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ \text{(d)} D = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} & \text{(e)} E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} & \text{(f)} F = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \end{array}$$

22. Utilize o exercício anterior para resolver os seguintes sistemas:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \begin{cases} x & -y & = -1 \\ 2x & -3y & = -5 \end{cases} & \text{(b)} \begin{cases} 2x & +3y & = 1 \\ 4x & +7y & = 3 \end{cases} & \text{(c)} \begin{cases} x & & -z & = 1 \\ -x & +y & -z & = 2 \\ -x & & +2z & = 7 \end{cases} \\ \text{(d)} \begin{cases} x & & -z & = 5 \\ -x & +y & -z & = 4 \\ -x & & +2z & = -3 \end{cases} & \text{(e)} \begin{cases} & 3y & +z & = 12 \\ x & +y & & = 8 \\ 2x & +3y & +3z & = -4 \end{cases} & \text{(f)} \begin{cases} & 3y & +z & = 4 \\ x & +y & & = 8 \\ 2x & +3y & +3z & = 12 \end{cases} \end{array}$$

23. Encontre os valores de r para os quais a matriz

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & r & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} & \text{(b)} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & r & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

é invertível.

24. Use o método de eliminação de Gauss para determinar o conjunto de soluções dos sistemas de equações lineares apresentados a seguir.

$$(a) \begin{cases} x_1 & & -x_3 & +3x_4 & = 4 \\ 2x_1 & +2x_2 & & +x_4 & = -3 \\ -3x_1 & -2x_2 & +x_3 & +4x_4 & = -1 \\ -x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +16x_4 & = -15 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x & +y & +u & +v & +w & = 1 \\ x & -y & -u & +v & -w & = 1 \\ x & +3y & +3u & +v & +3w & = 1 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x_1 & -2y & -z & +3u & = 1 \\ 2x & -4y & +z & & = 5 \\ x & -2y & +2z & +2u & = 4 \end{cases} \quad (d) \begin{cases} 4x_1 & & +x_3 & = 0 \\ & 2x_2 & +x_3 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & +9x_3 & = 0 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} x_1 & & -2x_3 & & = 0 \\ & x_2 & +x_3 & -x_4 & = 0 \end{cases} \quad (f) \begin{cases} & x_2 & +2x_3 & +x_4 & = 0 \\ x_1 & +2x_2 & +2x_3 & & = 0 \\ -2x_1 & +4x_2 & +2x_3 & +3x_4 & = 0 \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} 2x & +y & +2z & +w & = 5 \\ 4x & +2y & +7z & +3w & = 8 \\ 6x & +4y & +9z & +4w & = 13 \\ -4x & -2y & +4z & -2w & = -10 \end{cases} \quad (h) \begin{cases} x & +y & +z & = 6 \\ 2x & +y & -2z & = -2 \\ x & -y & -z & = -4 \\ 5x & +2y & -2z & = 7 \end{cases}$$

25. Uma empresa produziu três produtos, A , B e C , num total de 80000 unidades. Sabe-se que, em unidades, a produção do produto B excedeu em 10000 a produção do produto C e que a produção do produto C foi o triplo da produção do produto A . Quantas unidades de cada produto foram produzidas?
26. Numa certa secção do centro de determinada cidade, dois conjuntos de ruas de sentido único cruzam-se de acordo com a figura abaixo.

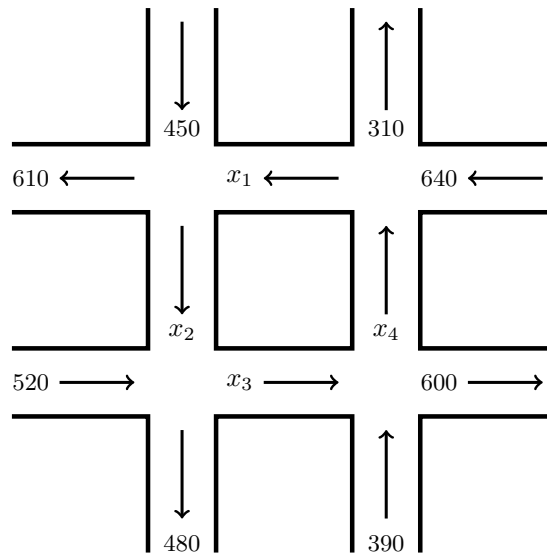
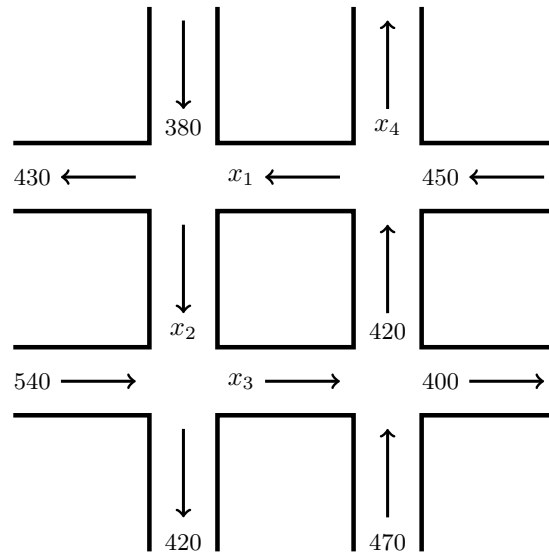


Figura 1: Diagrama de fluxo de tráfego

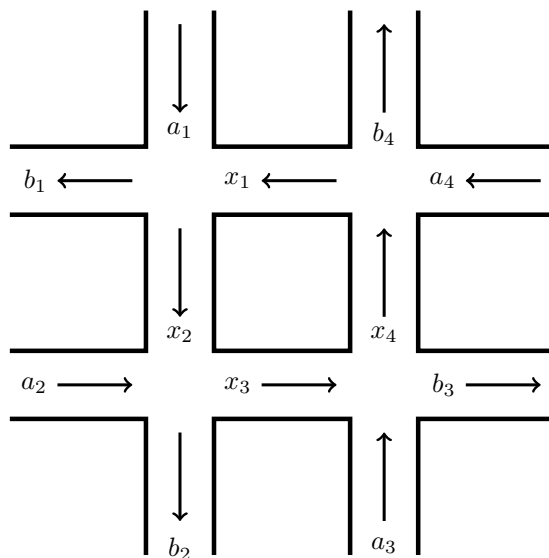
A média do número de veículos por hora que entram e saem dessa secção durante a hora de ponta é apresentada no diagrama. Determine a quantidade de veículos que circulam entre cada um dos cruzamentos.

27. Considere o seguinte diagrama de fluxo de tráfego:



Determine os valores de x_1 , x_2 , x_3 e x_4 .

28. Considere o seguinte diagrama de fluxo de tráfego onde $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$ são números inteiros positivos:



Escreva um sistema de equações lineares com as incógnitas x_1, x_2, x_3, x_4 e mostre que o sistema é possível se e somente se

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4.$$

O que pode concluir sobre o número de veículos que entram e saem da seção ilustrada no diagrama?

Soluções

1. $\mathbf{x} = [5/12 \quad 2/3 \quad 1/2]^T$
2. (a) $(1, 1, 1)$ (b) $(7, -1, -4, 1)$ (c) $(1, 0, 2)$ (d) $(1, -1, 0, 1)$
3. (a) $(1, 0.75, 0)$ (b) $(\frac{5}{2}, -\frac{7}{4}, -\frac{3}{4})$ (c) $(-1, 0, 3)$
(d) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1)$ (e) $(2, 0, -\frac{1}{3})$ (f) $(4, -2, 0, 4)$
5. $(8, 7, 6, 4, 2)$
6. (a) Impossível. (b) $(3 - 3\alpha, 1, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (c) $(\frac{13}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8})$
7. (a) Se $a = 2$ e $b \neq -1$, não há soluções.
Se $a = 2$ e $b = -1$, as soluções são $(\frac{-1-t}{2}, t)$, $t \in \mathbb{R}$.
Se $a \neq 2$, a única solução é $(\frac{b+1}{2-a}, \frac{-2-ab}{2-a})$.
(b) Se $c \neq 3a + b$, não há soluções.
Se $c = 3a + b$, as soluções são $(\frac{4}{3}t - \frac{a+2b}{3}, \frac{5}{3}t - \frac{2a+b}{3}, t)$, $t \in \mathbb{R}$.
8. (a)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{Solução: } (0, 0, 0, 0)$$

(b)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{Conjunto de soluções: } \{(\alpha, -\alpha, 0, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

(c)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$
9. $\{(1 + t - s, 2 + t + s, s, t), s, t \in \mathbb{R}\}$
10. $(-1, 2, 1)$ e $(3, 1, -2)$
11. $a \neq -2$
12. (a) $a = 5, b = 4$ (b) $a = 5, b \neq 4$ (c) $a \neq 5$
13. (a) Não. $(0, 0, 0)$ é sempre solução. (b) $\beta = 2$
16. (a) $h \neq -12$ (b) $h \neq 4$ (c) $h \in \mathbb{R}$ (d) $h \in \mathbb{R}$
17. (a) Possível e indeterminado. Conjunto de soluções: $\{(-5\alpha - 2\beta, 2\alpha + \beta, \alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.
(b) Possível e determinado. Conjunto de soluções: $\{(0, 1, 0)\}$.
(c) Impossível.
(d) Possível e indeterminado. Conjunto de soluções: $\{(2\alpha, -\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$

18. $\{(1 - 2a, a, a - 1, 0), a \in \mathbb{R}\}$

19. (b) Conjunto de soluções: $\{(\alpha - \beta, -\alpha, \alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

(c) Por exemplo, $(-1, 0, 2, 3)$ e $(-1, -1, 3, 4)$.

21.

(a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $C^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $D^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$ (e) E não é invertível. (f) $F^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

22. (a) $(2, 3)$ (b) $(-1, 1)$ (c) $(9, 19, 8)$ (d) $(7, 13, 2)$ (e) $(1, 7, -9)$ (f) $(6, 2, -2)$

23. (a) Não invertível, para qualquer valor de r . (b) Invertível para $r \neq 0$.

24.

(a) $\{(4 + \alpha, -\frac{11}{2} - \alpha, \alpha, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$

(b) $\{(1 - \beta, -\alpha - \gamma, \alpha, \beta, \gamma) : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$.

(c) $\{(2 + 2s - t, s, 1 + 2t, t) : s, t \in \mathbb{R}\}$

(d) $\{(0, 0, 0)\}$

(e) $\{(2\alpha, -\alpha + \beta, \alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

(f) $\{(\alpha, 0, -\frac{\alpha}{2}, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$

(g) $(\frac{7}{2}, 0, 0, -2)$

(h) Impossível.

25. 10000 unidades do produto A , 40000 do produto B e 30000 do produto C .

26. $\{(330 + \alpha, 170 + \alpha, 210 + \alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$.

27. $x_1 = 280, x_2 = 230, x_3 = 350, x_4 = 590$.