Universidade do Minho
Escola de Ciências
DMat

Cálculo
LCC
2019/2020

Folha 5 - Limite de uma função

Exercício 1 Seja f a função definida por $f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{se } x<0 \\ x+1 & \text{se } x\geq 0\end{cases}$.

a) Esboce o gráfico da função f.

b) Da observação do gráfico o que pode concluir quanto aos limites

$$\lim_{x\to 0^+} f(x), \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0} f(x)?$$

Exercício 2 Considere a função $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

Esboce o gráfico da função f e calcule

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$; c) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$; d) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

Exercício 3 Seja f a função definida por

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+2x & \text{se } x<1 \\ x & \text{se } x>1.\end{cases}$$

a) Esboce o gráfico da função f.

b) Diga se existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Exercício 4 Seja f a função definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se } x<3 \\ 7 & \text{se } x=3 \\ 2x+3 & \text{se } x>3.\end{cases}$$

Diga se existe $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

Exercício 5 Em cada uma das seguintes alíneas, esboce um gráfico possível para uma função $f\colon D\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ que verifique as condições indicadas:

a) $D=\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-\infty$ e f sobrejetiva;

b) $D=]-1,4[$, $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=3$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=4$, $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=-\infty$ e f não sobrejetiva;

c) $D=\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$, $f(1)=1$, $f(2)=-1$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$ e f sobrejetiva;

d) $D=\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=2$, f crescente em $]-\infty,1[$ e em $]1,+\infty[$.

Exercício 6 Calcule, se existirem, os seguintes limites (recorde que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}=1$):

1) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{|x|}$;

2) $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{7}{x+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$;

5) $\lim\limits_{x\to -5^+}\dfrac{|x+5|}{x+5}$;

6) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$;

7) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$;

8) $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\operatorname{tg} x}{1-\cos x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{|\operatorname{sen} x|}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2}$;

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 3x-\operatorname{sen} 2x}{x}$;

12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(x^3)-\operatorname{sen}^3 x}{x^3}$;

13) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}$;

14) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}$;

15) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$;

16) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{|x-2|}{x^2+x-6}$;

17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}$;

18) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2+x-3}{x-1}$;

19) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2-x+3}{3x^2+5}$;

20) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{5x+2}{2x^3-1}$;

21) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3+1}{x^2+1}$;

22) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{5x+3}{2x+7}$;

23) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-3x+10}{x^4-2x+4}$;

24) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{7x^4-2x+1}{-3x+1}$;

25) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+x}-x$;

26) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-x}{(x-2)^3}$;

27) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-3}{x^2-4}$;

28) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x+\operatorname{sen} x}$;

29) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$;

30) $\lim\limits_{x\to 0}\pi x\cos\left(\dfrac{1}{3\pi x}\right)$;

31) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^2+x\cos x)$;

32) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{sen}(2x)+x^2\cos(5x))$;

33) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\cos x}{e^x}$;

34) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{1/x}}$;

35) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{1/x}}$;

36) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{1/x}}$;

37) $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{-1/x^4}$.

Exercício 7 Considere a função u tal que

$$3-x^2\le u(x)\le 3+x^2,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Determine $\lim\limits_{x\to 0} u(x)$.

Exercício 8 Mostre que se $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=0$, então $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$.