Matrizes

Matrizes - conceitos básicos

A um quadro de m vezes n números dispostos em m linhas e n colunas dá-se o nome de **matriz**. Os números contidos na matriz são chamados **elementos** da matriz.

- Usualmente representamos os elementos da matriz entre parênteses retos (ou curvos)
- Usaremos letras maiúsculas para denotar matrizes
- O elemento da matriz A que se encontra na linha i e coluna j diz-se o **elemento** (i, j) e será denotado por a_{ij}
- Uma matriz com m linhas e n colunas diz-se uma matriz de **ordem** $m \times n$

Assim,

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

representa uma matriz de ordem $m \times n$.

Uma **matriz** diz-se **real** se todos os seus elementos são números reais. O conjunto das matrizes reais representa-se, muitas vezes, por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, escrevendo-se,

$$A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$$

quando A é uma matriz real.

Se $m \neq n$, A diz-se **retangular**. Se $m = n$, A diz-se **quadrada**.

Uma matriz de ordem $m \times 1$ tem a forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix},$$

e designa-se por **matriz (ou vetor) coluna**.

Uma matriz de ordem $1 \times n$ tem a forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix},$$

e chama-se **matriz (ou vetor) linha**.

- representação com letras minúsculas a carregado e os seus elementos apenas com um índice. Por exemplo,

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{bmatrix}.$$

Definição

sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ matrizes da mesma ordem. Diz-se que *A é igual a B* *e escreve-se $A = B$ se e só se*

$$a_{ij} = b_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m; \ j = 1, \ldots, n.$$

Definição

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem n. Diz-se que os elementos

$$a_{11}, \ a_{22}, \ \ldots, \ a_{nn}$$

se dispõem na ***diagonal*** *de A ou que são os* ***elementos diagonais*** *de A.*

Definição

Uma matriz cujos elementos são todos iguais a zero chama-se ***matriz nula****. Representaremos, em geral, a matriz nula de ordem $m \times n$ por* $\boldsymbol{O_{m\times n}}$ *ou simplesmente por* $\boldsymbol{O}$*.*

Definição

À matriz quadrada de ordem n cujos elementos são todos nulos excepto os da diagonal que são todos iguais a um, dá-se o nome de ***matriz identidade*** *de ordem n e representa-se por* $\boldsymbol{I_n}$*.*

$$O_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}, \qquad I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Adição de matrizes

Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ duas matrizes de ordem $m \times n$.

Definição

A soma de A e B é uma matriz $C = [c_{ij}]$ *cujos elementos são dados por*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n,$$

e escreve-se

$$C = A + B.$$

Note-se que a adição de matrizes só está definida para matrizes com a mesma ordem.

Multiplicação de uma matriz por um escalar

Definição

Seja $A = [a_{ij}]$ *uma matriz de ordem* $m \times n$ *e* α *um número. O produto de* α *por* A *é a matriz* $C = [c_{ij}]$ *cujos elementos são dados por*

$$c_{ij} = \alpha\, a_{ij} \qquad i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n,$$

e escreve-se

$$C = \alpha A.$$

A multiplicação de uma matriz por um escalar está sempre definida.

Definição

Sendo $-B = [-b_{ij}]$,

$$A - B \quad \textit{significa} \quad A + (-B).$$

Exemplo (soma de matrizes e multiplicação por um escalar)

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Então

$$\tfrac{1}{2}A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \qquad 3A = \begin{bmatrix} 12 & 24 & 6 \\ 18 & 24 & 30 \end{bmatrix},$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 4 \\ 7 & 10 & 13 \end{bmatrix},$$

$$B - 3A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & 24 & 6 \\ 18 & 24 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -22 & -4 \\ -17 & -22 & -27 \end{bmatrix},$$

$$C - 2D = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -8 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Propriedades da adição matricial

No teorema seguinte são enunciadas propriedade de adição de matrizes que seguem da álgebra usual em $\mathbb{R}$.

Teorema

Sejam A, B e C matrizes de ordem $m \times n$. Então,

(i) $A + B = B + A$,

(ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$,

(iii) $A + O = A$, *em que O designa a matriz nula de ordem $m \times n$,*

(iv) $A + (-A) = O$, *onde* $-A = [-a_{ij}]$.

Regras úteis para a aritmética matricial.

A operação de multiplicação de uma matriz por um número goza das propriedades seguintes.

Teorema

sejam A e B matrizes de ordem $m \times n$ e α e β números. Então,

(i) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$,

(ii) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,

(iii) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$,

(iv) $1\,A = A$.

Multiplicação de matrizes

Não se define multiplicando os elementos homólogos!

A multiplicação de matrizes dá significado à notação simples e abreviada,

$$\boxed{A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},}$$

para representar um sistema de m equações em n incógnitas, quaisquer que sejam os valores de m e n.

Por exemplo, o sistema de 3 equações lineares em 3 incógnitas

$$\begin{cases} x & +y & +z = 2 \\ 3x & -2y & -z = 4 \\ -2x & +y & +2z = 2 \end{cases}$$

poderá ser representado por $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Definição

Seja A uma matriz de ordem $m \times p$ e B uma matriz de ordem $p \times n$. O produto de A e B é a matriz AB de ordem $m \times n$ cujos elementos são dados por

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}, \qquad i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n,$$

e escreve-se $C = AB$.

$$c_{ij} = \overbrace{\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ip} \end{bmatrix}}^{\text{linha } i \text{ de } A} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{bmatrix}}^{\text{coluna } j \text{ de } B}$$

$$= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$$

Exemplo (produto de matrizes)

Se

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

então

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2\times 3 + 1\times 2 + 3\times 1 & -2\times(-2) + 1\times 4 + 3\times(-3) \\ 4\times 3 + 1\times 2 + 6\times 1 & 4\times(-2) + 1\times 4 + 6\times(-3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 20 & -22 \end{bmatrix}_{2\times 2} \end{aligned}$$

Exemplo (produto de matrizes)

e

$$
\begin{aligned}
BA &= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 \times (-2) + (-2) \times 4 & 3 \times 1 + (-2) \times 1 & 3 \times 3 + (-2) \times 6 \\ 2 \times (-2) + 4 \times 4 & 2 \times 1 + 4 \times 1 & 2 \times 3 + 4 \times 6 \\ 1 \times (-2) + (-3) \times 4 & 1 \times 1 + (-3) \times 1 & 1 \times 3 + (-3) \times 6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -14 & 1 & -3 \\ 12 & 6 & 30 \\ -14 & -2 & -15 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Exemplo (produto de matrizes)

Se

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix},$$

então é impossível multiplicar A por B, já que o número de colunas de A não é igual ao número de linhas de B. No entanto, é possível multiplicar B por A:

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 3 + 2 \times 1 & 1 \times 4 + 2 \times 2 \\ 4 \times 3 + 5 \times 1 & 4 \times 4 + 5 \times 2 \\ 3 \times 3 + 6 \times 1 & 3 \times 4 + 6 \times 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 17 & 26 \\ 15 & 24 \end{bmatrix}.$$

Com efeito, se A é de ordem $m \times p$ e B de ordem $p \times n$ o produto AB está definido e, neste caso, AB tem ordem $m \times n$. O produto BA apenas está definido quando $m = n$ mas a matriz BA será de ordem $p \times p$. Mas mesmo quando $m = n = p$ (matrizes quadradas da mesma ordem), em geral, $AB \neq BA$.

Definição

Sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem n. Quando se tem $\boldsymbol{AB = BA}$*, as matrizes A e B dizem-se* ***comutáveis****.*

Exemplo (matrizes comutáveis e não comutáveis)

1. Se
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$
então
$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
e
$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$
e, portanto, $AB \neq BA$.
2. A matriz A é comutável com a matriz $C = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, já que,
$$AC = CA = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Propriedades da multiplicação matricial

Teorema

Seja α um número e A, B e C matrizes cujas ordens permitem as operações indicadas a seguir. Então,

(i) $(AB)C = A(BC)$,

(ii) $A(B + C) = AB + AC$,

(iii) $(A + B)C = AC + BC$,

(iv) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$,

(iv) $I_m A = A \quad e \quad AI_n = A$, *se* A *for de ordem* $m \times n$.

Note que a matrizes especiais I_m e I_n atuam como a identidade multiplicativa à esquerda e à direita, respetivamente.

Regras de notação

Como na álgebra usual, se uma expressão envolve multiplicações e somas e não existem parênteses para indicar a ordem das operações, as multiplicações são efetuadas antes das somas.
Isso é válido tanto para a multiplicação por escalar quanto para a multiplicação matricial. Por exemplo, se

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},$$

então

$$A + BC = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 11 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

e

$$3A + B = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Potência de uma matriz

Como $(AB)C = A(BC)$, podemos, simplesmente, omitir os parênteses e escrever ABC. O mesmo é verdade para um produto de quatro ou mais matrizes. No caso em que uma matriz de ordem $n \times n$ é multiplicada por si mesma um certo número de vezes, é conveniente usar a notação exponencial.

Então, se n é um número inteiro positivo,

$$A^n = \underbrace{AA\cdots A}_{n \text{ vezes}}$$

representa a potência de expoente n de A.

Exemplo (potência de uma matriz)

Se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

então

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = AAA = AA^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

e, em geral,

$$A^n = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Transposta de uma matriz

Dada uma matriz A de ordem $m \times n$, é muitas vezes útil formar uma nova matriz de ordem $n \times m$ cujas colunas são as linhas de A pela ordem correspondente (A é “refletida”sobre a sua diagonal principal, no caso em que A é uma matriz quadrada).

Definição

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem $m \times n$. À matrix $B = [b_{ij}]$ de ordem $n \times m$ cujos elementos são dados por

$$b_{ij} = a_{ji}, \qquad i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m,$$

*chamamos **transposta** de A e designamos $B = A^T$.*

Exemplo (transposta de uma matriz)

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, então $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

Se $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, então $B^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

A matriz B é igual à sua transposta (matriz simétrica).

Se $C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, então $C + C^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$

Propriedades da transposição de matrizes

O teorema a seguir apresenta quatro regras algébricas envolvendo a transposição de matrizes.

Teorema

Sejam A e B e α um número. Assumindo que as operações indicadas estão definidas, temos

(i) $\left(A^T\right)^T = A$,

(ii) $(A + B)^T = A^T + B^T$,

(iii) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$,

(iv) $(AB)^T = B^T A^T$.

Inversa de uma matriz

Não se define a operação "divisão de matrizes". No entanto, define-se um conceito semelhante ao de "número inverso".

Definição

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Se existir uma matriz X de ordem n tal que

$$XA = I_n \quad e \quad AX = I_n,$$

*diz-se que A é **invertível**, **regular** ou **não singular**. Uma matriz X que verifique a condição anterior diz-se **matriz inversa** de A.*

Se A for invertível a sua **inversa é única**. Quando existe, a matriz inversa de A é representada por A^{-1}.

Uma matriz quadrada, não nula, pode não ter inversa. Neste caso, diz-se uma matriz **singular** ou **não invertível**.

Exemplo (inversa de uma matriz)

As matrizes

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

são inversas uma da outra, já que

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo (matriz não invertível)

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

não tem inversa.

De facto, se B é uma qualquer matriz de ordem 2×2, então

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, BA não pode ser igual à identidade $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e, portanto, A não é uma matriz invertível.

Exercício (Cálculo da inversa de uma matriz)

Use a definição para calcular a inversa de cada uma das matrizes seguintes.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

(d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Solução:

(a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$

(b) $B^{-1} = B$;

(c) $C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 \end{bmatrix}$;

(d) $D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Propriedades da inversão de matrizes

Teorema

Sejam A e B matrizes de ordem n, invertíveis. Então,

(i) A^{-1} *é invertível, sendo* $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$,

(ii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,

(iii) $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$.

Uma vez que o uso da definição não é um processo computacionalmente eficiente para calcular a inversa de uma matriz, estudaremos mais à frente um método numérico para determinar a inversa.

Algumas matrizes especiais

Definição

*Uma matriz $A = [a_{ij}]$ quadrada diz-se uma matriz **diagonal** se todos os elementos fora da diagonal são nulos, isto é,*

$$i \neq j \implies a_{ij} = 0.$$

Definição

*Uma matriz $A = [a_{ij}]$ quadrada diz-se **triangular superior** (ou **inferior**) se todos os elementos abaixo (respetivamente acima) da diagonal são nulos, isto é,*

$$i > j \implies a_{ij} = 0 \qquad\qquad (ou \quad i < j \implies a_{ij} = 0).$$

Exemplo (matrizes diagonais e triangulares)

As matrizes

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

são ambas triangulares. A primeira é triangular superior e a segunda triangular inferior.

As matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

são todas diagonais.

Uma matriz diagonal é, ao mesmo tempo, triangular superior e inferior.

Definição

*Uma matriz $A = [a_{ij}]$ quadrada diz-se uma matriz **banda**, de largura de banda $2k + 1$, se*

$$|i - j| > k \implies a_{ij} = 0.$$

*Se $k = 1$ a matriz diz-se **tridiagonal** (matriz de largura de banda 3).*

Definição

*Uma matriz diz-se **densa** se a maior parte dos seus elementos são diferentes de zero.*

Definição

*Uma matriz diz-se **dispersa** se uma grande percentagem dos seus elementos são nulos.*

Definição

Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ *de ordem* n *diz-se uma matriz* ***simétrica*** *se* $A^T = A$*, ou seja, se*

$$a_{ij} = a_{ji}, \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

Pode-se verificar que se A é simétrica e invertível então A^{-1} é também simétrica.

Definição

Seja A *uma matriz real de ordem* n*. A matriz* A *diz-se* ***ortogonal*** *se*

$$AA^T = I_n \quad e \quad A^T A = I_n.$$

Podemos concluir que se uma matriz A é ortogonal, então é invertível e a sua transposta é a sua inversa, ou seja, $A^{-1} = A^T$.