Universidade do Minho
Escola de Ciências
DMat

Cálculo
LCC
2019/2020

Folha 6 - **Continuidade**

Exercício 1 Considere a função f definida por $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Z} \\ \pi & \text{se} \quad x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}. \end{cases}$

a) Diga, justificando, se f é contínua em π.

b) Indique dois pontos do domínio onde f seja descontínua.

Exercício 2 Mostre que a função definida por $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ tem uma extensão contínua em $x = 1$ e apresente essa extensão.

Exercício 3 Determine o conjunto dos pontos em que cada uma das seguintes funções é contínua:

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}; \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}; \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}; \end{cases}$

d) $k(x) = \begin{cases} |x| & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$

Exercício 4 Considere a família de funções $f_{a,b}$ definidas por

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+2} & \text{se} \quad x < 0 \\ a & \text{se} \quad x = 0 \\ \cos x + b & \text{se} \quad x > 0, \end{cases}$$

onde a e b são constantes reais. Determine os valores de a e b de modo a que a função $f_{a,b}$ seja contínua.

Exercício 5 Considere a família de funções $f_{a,b}$ definidas por

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{se} \quad x < a \\ b & \text{se} \quad x = a \\ 2x - 6 & \text{se} \quad x > a, \end{cases}$$

onde a e b são constantes reais. Verifique se existem valores de a e b para os quais a função $f_{a,b}$ seja contínua.

Exercício 6 A função g definida por

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \neq 2, \\ 1 & \text{se} \quad x = 2. \end{cases}$$

tem uma descontinuidade removível em $x = 2$. Redefina a função de forma a remover essa descontinuidade.

Exercício 7 Sejam $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ as funções definidas por

$$f(x) = x + 1,\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad x \neq 1, \\ 0 & \text{se} \quad x = 1. \end{cases}$$

a) Verifique que $\lim\limits_{x\to 0} (g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(0)$.

b) Explique porque não há qualquer contradição com o teorema sobre a continuidadde da função composta.

Exercício 8 Defina funções $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ nas condiçẽs indicadas:

a) f contínua, g descontínua, $g \circ f$ contínua;

b) f descontínua, g contínua, $g \circ f$ contínua;

c) f e g descontínuas, $g \circ f$ e $f \circ g$ contínuas.

Exercício 9 Considere a função $g :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = |x|$. Verifique que g possui um mínimo mas não possui máximo. Confronte o resultado com o teorema de Weierstrass.

Exercício 10 Mostre que a função $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \operatorname{sen} x + 1 - x^2$ possui, pelo menos, um zero em $]-\pi, 0[$ e outro em $]0, \pi[$.

Exercício 11 Mostre que as seguintes equações possuem soluções nos intervalos indicados:

a) $x^3 - x + 3 = 0, \quad]-2, -1[$;

b) $x = \cos x, \quad [0, \pi/2]$;

c) $x - 1 = -\ln(x+1), \quad]0, 1[$;

d) $2 + x = e^x, \quad]0, 2[$.

Exercício 12 Seja $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $0 \leq f(x) \leq 1$, para todo $x \in [0,1]$. Mostre que f possui um *ponto fixo*, isto é que existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$.

Sugestão: Considere a função definida por $k(x) = f(x) - x$.

Exercício 13 Dê um exemplo ou mostre porque não existe uma função:

a) $f\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua que nunca se anula e que toma valores negativos e positivos;

b) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ positiva e descontínua tal que f^2 e f^3 sejam contínuas;

c) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ descontínua tal que a função g definida por $g(x) = f(x) + \operatorname{sen} x$ seja contínua;

d) $f\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow f(D)$ bijetiva e contínua tal que a função $f^{-1}\colon f(D) \longrightarrow D$ não seja contínua.

Exercício 14 Diga, justificando, se cada uma das seguintes proposições é verdadeira ou falsa:

a) se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não é contínua, então $g \circ f$ não é contínua;

b) se $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ é contínua, então f é limitada;

c) existe $x \in]1, e[$ tal que $\ln(x^3) = x$;

d) uma função $f\colon [0,2[\longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e limitada possui máximo;

e) se $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que $|f|$ é contínua num ponto a, então f também é contínua em a.

Exercício 15 Em cada uma das alíneas seguintes, defina, se possível, uma função nas condições indicadas (basta um gráfico da função):

a) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, contínua, tal que $f(\mathbb{R}) =]-\infty, 0[\cup [2, +\infty[$;

b) $g\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, contínua, tal que $g(D) = \{0, 1\}$;

c) $h\colon]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e sobrejetiva;

d) $i : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e sobrejetiva;

e) $j : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, que assume valores negativos e positivos e que nunca se anula;

f) $k :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, assume os valores 0 e 1 e não assume o valor $1/2$;

g) $\ell : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua em $]0,1[$, assume apenas os valores $\sqrt{2}$, π e $\sqrt{23}$.