Geometria
LCC

Primeiro teste
19 abril de 2017

# Proposta de Resolução

**1.**

a $\cos \sphericalangle (\vec{v_1}, \vec{v_2}) = \dfrac{\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}}{\|\vec{v_1}\| \|\vec{v_2}\|} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sphericalangle (\vec{v_1}, \vec{v_2}) = \dfrac{3\pi}{4}$

b $d(A,B) = \|\vec{AB}\|$

$\vec{AB} = B - A = (2,1)_R - (1,0)_R = (1,1)_B = \vec{v_1} + \vec{v_2}$

$\vec{AB} \cdot \vec{AB} = (\vec{v_1} + \vec{v_2}) \cdot (\vec{v_1} + \vec{v_2}) = \vec{v_1} \cdot \vec{v_1} + 2\, \vec{v_1} \cdot \vec{v_2} + \vec{v_2} \cdot \vec{v_2} = 2 - 2 + 1 = 1$

$d(A,B) = \|\vec{AB}\| = \sqrt{1} = 1.$

**2** Pelo teorema dos cossenos sabemos que:

$d(B,C)^2 = d(A,B)^2 + d(A,C)^2 - 2\, d(A,B)\, d(A,C) \cos \sphericalangle (\vec{AB}, \vec{AC})$

Logo $d(B,C)^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \times 1 \times 2 \times \frac{1}{2} = 3$ e, portanto, $d(B,C) = \sqrt{3}$

**3** Seja $P$ o paralelogramo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Sabemos que área $(P) = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ e que $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$

Logo $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = 5 \times 3 - 1 = 14$ e, portanto, área $(P) = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \sqrt{14}$

**4.**

a $r = O + \langle \vec{u} \rangle, \quad \vec{u} = (2,1,0)$

Eq. paramétricas de $r$: $\quad (x,y,z) = \lambda (2,1,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

Portanto: $\begin{cases} x = 2y \\ z = 0 \end{cases}$ é um sistema de eq. cartesianas de $r$.

b $\pi = A + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \qquad A = (1,-1,2), \quad \vec{v} = (1,1,1), \quad \vec{w} = (-1,0,1)$

Eq. cartesiana de $\pi$: $\det(X - A, \vec{u}, \vec{v}) = 0$

$$\det \begin{pmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - (y+1) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + (z-2) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow x - 1 - 2(y+1) + z - 2 = 0 \Leftrightarrow x - 2y + z - 5 = 0$

Logo: $x - 2y + z - 5 = 0$ é uma eq. cartesiana de $\pi$.

c Temos que $\vec{u} = \vec{v} - \vec{w}$ logo $\vec{u} \in \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ e portanto $r$ é paralela a $\pi$.

5. $r = (1,2,0) + \langle (1,0,1) \rangle = A + \langle \vec{u} \rangle$

$s = (0,2,-1) + \langle (1,0,-1) \rangle = B + \langle \vec{v} \rangle$

As retas $r$ e $s$ são complanares sse $\dim(\langle \vec{AB}, \vec{u}, \vec{v} \rangle) = 2$

Temos que $\vec{AB} = B - A = (-1,0,-1) = -\vec{u}$

Logo $\langle \vec{AB}, \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$. Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente independentes (não são ~~pro~~ proporcionais).

Assim $\dim(\langle \vec{AB}, \vec{u}, \vec{v} \rangle) = \dim(\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle) = 2$.

Seja $\pi$ o plano que contém $r$ e $s$. Temos que $\pi = A + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$

$$\pi: \det \begin{pmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0 \iff y - 2 = 0$$

Logo $y = 2$ é uma eq. cartesiana de $\pi$.

[ NOTA: Por observação direta das eq. vetoriais de $r$ e $s$ também é possível concluir que ambas estão contidas no plano $\pi: y = 2$ ]

6. Os pontos da reta $r$ são da forma $P = (1+\lambda, -1, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Se $Q$ é a projeção ortogonal de $P$ em $\pi$ então

$$Q = P - \frac{\vec{AP} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \vec{n} \quad \text{onde} \quad A = (1,0,1) \in \pi$$

$\vec{n} = (1,0,1)$ vetor normal a $\pi$

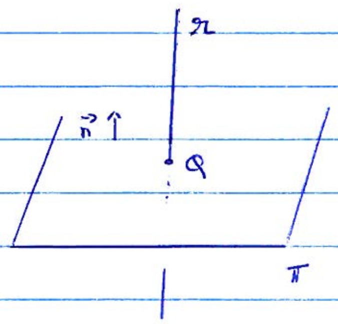
$$Q = (1+\lambda, -1, \lambda) - \frac{(\lambda, -1, \lambda-1) \cdot (1,0,1)}{2} (1,0,1) = (1+\lambda, -1, \lambda) - \frac{(2\lambda - 1)}{2} (1,0,1)$$

$$= (1+\lambda, -1, \lambda) + (1/2 - \lambda, 0, 1/2 - \lambda) = (3/2, -1, 1/2)$$

Interpretação geométrica:

a reta $r$ é perpendicular a $\pi$ e

$Q$ é a interseção de $r$ e $\pi$




De facto: $\vec{v} = (1,0,1)$ é vetor diretor de $r$ e $\vec{v}$ é proporcional a $\vec{n}$ (iguais), logo, $r$ é perpendicular a $\pi$.

$$r \cap \pi: \begin{cases} x = 1 + z \\ y = -1 \\ x + z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} - \\ y = -1 \\ 1 + z + z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3/2 \\ y = -1 \\ z = 1/2 \end{cases} \Rightarrow r \cap \pi = Q.$$