Soluções

- **Extremos de funções**

1. (a) $f(x,y) = 3x^2 + y^2$

- Pontos críticos
$\begin{cases} f_x &= 0 \\ f_y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6x &= 0 \\ 2y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \end{cases}$

- Discriminante
Temos $f_{xx}(x,y) = 6$, $f_{yy}(x,y) = 2$ e $f_{xy}(x,y) = 0$. Assim,

$$\Delta_f(x,y) = f_{xx}(x,y).f_{yy}(x,y) - \big[f_{xy}(x,y)\big]^2 = 12$$

- Classificação dos pontos críticos
Como $\Delta_f(0,0) = 12 > 0$ e $f_{xx}(0,0) = 2 > 0$, o ponto $(0,0)$ é um minimizante e o mínimo local é $f(0,0) = 0$.

(b) $f(x,y) = x^2 - 4y^2 + 3$

- Pontos críticos
$\begin{cases} f_x &= 0 \\ f_y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x &= 0 \\ -8y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \end{cases}$

- Discriminante
Temos $f_{xx}(x,y) = 2$, $f_{yy}(x,y) = -8$ e $f_{xy}(x,y) = 0$. Assim,

$$\Delta_f(x,y) = f_{xx}(x,y).f_{yy}(x,y) - \big[f_{xy}(x,y)\big]^2 = -16$$

- Classificação dos pontos críticos
Como $\Delta_f(0,0) = -16 < 0$, o ponto $(0,0)$ é um ponto de sela.

(c) Para $f(x,y) = xy$, o ponto $(0,0)$ é o único ponto crítico e é um ponto de sela.

(d) $f(x,y) = 5 - x^2 - y^2$

- Pontos críticos
$\begin{cases} f_x &= 0 \\ f_y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x &= 0 \\ -2y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \end{cases}$

- Discriminante
Temos $f_{xx}(x,y) = -2$, $f_{yy}(x,y) = -2$ e $f_{xy}(x,y) = 0$. Assim,

$$\Delta_f(x,y) = f_{xx}(x,y).f_{yy}(x,y) - [f_{xy}(x,y)]^2 = 4$$

- Classificação dos pontos críticos
Como $\Delta_f(0,0) = 4 > 0$ e $f_{xx}(0,0) = -2 < 0$, o ponto $(0,0)$ é um maximizante e o máximo local é $f(0,0) = 5$.

(e) $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$

- Pontos críticos

$$\begin{cases} f_x &= 0 \\ f_y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 4y &= 0 \\ -4x + 3y^2 + 4 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 4 \\ y &= 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x &= 4/3 \\ y &= 2/3 \end{cases}$$

- Discriminante
  Temos $f_{xx}(x,y) = 2$, $f_{yy}(x,y) = 6y$ e $f_{xy}(x,y) = -4$. Assim,

$$\Delta_f(x,y) = f_{xx}(x,y).f_{yy}(x,y) - \big[f_{xy}(x,y)\big]^2 = 12y - 16$$

- Classificação dos pontos críticos
  Como $\Delta_f(4,2) = 8 > 0$ e $f_{xx}(4,2) = 2 > 0$, o ponto $(4,2)$ é um minimizante e o mínimo local é $f(4,2) = 0$.
  Como $\Delta_f(4/3, 2/3) = -8 < 0$, $(4/3, 2/3)$ é um ponto de sela.

(f) $f(x,y) = x^3 - y^3 + 6xy$

- Pontos críticos
  $\begin{cases} f_x &= 0 \\ f_y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 + 6y &= 0 \\ -3y^2 + 6x &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x &= 2 \\ y &= -2 \end{cases}$
- Discriminante
  Temos $f_{xx}(x,y) = 6x$, $f_{yy}(x,y) = -6y$ e $f_{xy}(x,y) = 6$. Assim,

$$\Delta_f(x,y) = f_{xx}(x,y).f_{yy}(x,y) - \big[f_{xy}(x,y)\big]^2 = -36xy - 36$$

- Classificação dos pontos críticos
  Como $\Delta_f(0,0) = -36 < 0$, $(0,0)$ é um ponto de sela.
  Como $\Delta_f(2,-2) = 108 > 0$ e $f_{xx}(2,-2) = 12 > 0$, o ponto $(2,-2)$ é um minimizante e o mínimo local é $f(2,-2) = -8$.

2. (a) $f(x,y) = (x-4)\ln y$

- Pontos críticos
  $\begin{cases} f_x &= 0 \\ f_y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln y &= 0 \\ \dfrac{x-4}{y} &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 4 \\ y &= 1 \end{cases}$
- Discriminante
  Temos $f_{xx}(x,y) = 0$, $f_{yy}(x,y) = -\dfrac{x-4}{y^2}$ e $f_{xy}(x,y) = \dfrac{1}{y}$. Assim,

$$\Delta_f(x,y) = f_{xx}(x,y).f_{yy}(x,y) - [f_{xy}(x,y)]^2 = -\frac{1}{y^2}$$

- Classificação dos pontos críticos
  Como $\Delta_f(4,1) = -1 < 0$, o ponto $(4,1)$ é um ponto de sela.

(b) Ponto $(0,-1)$ é um ponto de sela.

(c) $f(x,y) = 2x^3 - y^3 - 24x + 75y + 7$

- Pontos críticos
  $\begin{cases} f_x &= 0 \\ f_y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6x^2 - 24 &= 0 \\ -3y^2 + 75 &= 0 \end{cases} \iff$
  $\begin{cases} x &= 2 \\ y &= 5 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x &= 2 \\ y &= -5 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x &= -2 \\ y &= 5 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x &= -2 \\ y &= -5 \end{cases}$
- Discriminante
  Temos $f_{xx}(x,y) = 12x$, $f_{yy}(x,y) = -6y$ e $f_{xy}(x,y) = 0$. Assim,

$$\Delta_f(x,y) = f_{xx}(x,y).f_{yy}(x,y) - \big[f_{xy}(x,y)\big]^2 = -72xy$$

- Classificação dos pontos críticos
  Como $\Delta_f(2,5) =< 0$ e $\Delta_f(-2,-5) < 0$, os pontos $(2,5)$ e $(-2,-5)$ são pontos de sela.
  Temos $\Delta_f(-2,5) > 0$ e $f_{xx}(-2,5) < 0$. Logo, $(-2,5)$ é maximizante e $f(-2,5)$ é máximo local.
  Como $\Delta_f(2,-5) > 0$ e $f_{xx}(2,5) > 0$, $(2,-5)$ é minimizante e $f(2,5)$ é mínimo local.

(d) Em $(-6,3)$ existe um máximo local.
Em $(6,3)$ temos um ponto de sela.

(e) Em $(0,0)$ temos um ponto de sela.
Em $(16,64)$ existe um mínimo relativo.

(f) $(-2,3)$ e em $(4,-5)$ são pontos de sela. Máximo local em $(-2,-5)$ e mínimo local em $(4,3)$.

3. $f(x,y) = 8x + 10y - 0.001(x^2 + xy + y^2) - 10000$

- Pontos críticos
$$\begin{cases} f_x &= 0 \\ f_y &= 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 8 - 0.001(2x+y) &= 0 \\ 10 - 0.001(x+2y) &= 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x &= 2000 \\ y &= 4000 \end{cases}$$

- Discriminante
Temos $f_{xx}(x,y) = -0.002$, $f_{yy}(x,y) = -0.002$ e $f_{xy}(x,y) = -0.001$. Assim,
$$\Delta_f(x,y) = f_{xx}(x,y).f_{yy}(x,y) - \left[f_{xy}(x,y)\right]^2 = 0.000003$$

- Classificação dos pontos críticos
Como $\Delta_f(2000, 4000) > 0$ e $f_{xx}(2000, 4000) = -0.002 < 0$, as quantidades $x = 2000$ e $y = 4000$ conduzem a um lucro máximo.

4. Se x e y representarem as dimensões do terreno retangular (largura e comprimento) pretende-se resolver o problema
$$\text{Minimizar } f(x,y) = 2x + y \text{ sujeita a } xy = 1250$$
Podemos transformar este problema num problema de otimização de uma função de uma única variável. Basta fazer, por exemplo,
$$y = \frac{1250}{x}$$
e substituir em $f(x,y)$. Obtemos
$$f(x,y) = 2x + y = 2x + \frac{1250}{x}.$$
Definindo $g(x) = 2x + \dfrac{1250}{x}$, calculemos os zeros de g'.
$$g'(x) = 0 \Longleftrightarrow 2 - \frac{1250}{x^2} = 0 \Longleftrightarrow x = 25 \ \vee \ x = -25.$$
Apenas interessa $x = 25$. Como $g''(25) = \left.\dfrac{2500}{x^3}\right|_{x=25} > 0$, a função g atinge um mínimo em $x = 25$. Logo, as dimensões do terreno com área $1250m^2$ que minimizam a vedação como indicado são
$$x = 25m \ \text{ e } \ y = 50m.$$

5. Sejam x, y e z as dimensões da caixa (comprimento, largura e altura). Pretende-se resolver o problema
$$\begin{array}{rl} \text{Minimizar } f(x,y,z) & = 1.(2xz + 2yz) + 3.xy + 5.xy = 2xz + 2yz + 8xy \\ \text{sujeita a } xyz = 32 & \end{array}$$
Este problema pode ser transformado num problema sem restrições com duas variáveis. Fazendo, por exemplo,
$$z = \frac{32}{xy},$$
vem
$$f(x,y,z) = 2x\frac{32}{xy} + 2y\frac{32}{xy} + 8xy = \frac{64}{y} + \frac{64}{x} + 8xy.$$
Definindo $g(x,y) = \dfrac{64}{y} + \dfrac{64}{x} + 8xy$, verifica-se que $(2,2)$ é o único ponto crítico (Note que se deve ter $x \neq 0$ e $y \neq 0$) onde g atinge um mínimo local. Assim, as dimensões da caixa devem ser $x = 2$, $y = 2$ e $z = 32/4 = 8$.

6. Função objectivo: $f(x,y) = xy$

Restrição: $g(x,y) = 8$ em que $g(x,y) = x^2 + y^2$.

- Pontos críticos

$$\left\{\begin{array}{ll} f_x(x,y) & = \lambda g_x(x,y) \\ f_y(x,y) & = \lambda g_y(x,y) \\ g(x,y) & = 8 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} y & = \lambda 2x \\ x & = \lambda 2y \\ x^2+y^2 & = 8 \end{array}\right.$$

Como nem x nem y podem ser zero (verificar), da primeira e segunda equações podemos tirar

$$2\lambda = \frac{y}{x} \qquad \text{e} \qquad 2\lambda = \frac{x}{y}$$

o que implica que

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{y} \qquad \text{ou} \qquad x^2 = y^2.$$

Agora, substituindo $x^2 = y^2$ na terceira equação obtemos

$$2x^2 = 8 \iff x = \pm 2.$$

De $x^2 = y^2$, para $x = 2$ vem $y = \pm 2$ e para $x = -2$ vem também $y = \pm 2$. Temos então os pontos

$$(2,2),\ (2,-2),\ (-2,2) \text{ e } (-2,-2).$$

- Valor de f nos pontos críticos

Como

$$f(2,2) = f(-2,-2) = 4 \qquad \text{e} \qquad f(-2,2) = f(2,-2) = -4$$

temos que quando $x^2+y^2 = 8$ o máximo valor de f é 4, em $(2,2)$ e $(-2,-2)$, e o mínimo é -4, em $(2,-2)$ e $(-2,2)$.

7. (a) Função objectivo: $f(x,y) = xy$

Restrição: $g(x,y) = 1$ em que $g(x,y) = x+y$.

- Pontos críticos

$$\left\{\begin{array}{ll} f_x(x,y) & = \lambda g_x(x,y) \\ f_y(x,y) & = \lambda g_y(x,y) \\ g(x,y) & = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} y & = \lambda.1 \\ x & = \lambda.1 \\ x+y & = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} - & \\ x & = y \\ x+y & = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} - & \\ x & = \frac{1}{2} \\ y & = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

- Valor de f nos pontos críticos

Admitindo que f tem um máximo quando $x+y=1$, esse máximo ocorre em $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ e é igual a $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

Este problema poderia ser resolvido sem recorrer ao método dos multiplicadores de Lagrange. Como de $x+y=1$, podemos escrever $y = 1-x$ e trata-se de determinar os extremos da função de uma variável

$$h(x) = f(x, 1-x) = x(1-x) = x - x^2.$$

A derivada $h'(x) = 1-2x$ tem um zero em $x = \frac{1}{2}$ e é positiva para $x \in]-\infty, \frac{1}{2}[$ e negativa para $x \in]2, +\infty[$, o que significa que $x = \frac{1}{2}$ é um ponto onde ocorre um máximo: $h(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$. Assim, para $x = \frac{1}{2}$ e $y = 1 - x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ a função f tem um máximo igual a $\frac{1}{4}$.

(b) Função objectivo: $f(x,y) = x^2+y^2$

Restrição: $g(x,y) = 1$ em que $g(x,y) = xy$.

- Pontos críticos

$$\left\{\begin{array}{ll} f_x(x,y) & = \lambda g_x(x,y) \\ f_y(x,y) & = \lambda g_y(x,y) \\ g(x,y) & = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} 2x & = \lambda y \\ 2y & = \lambda x \\ xy & = 1 \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{ll} - & \\ x^2 & = y^2 \\ xy & = 1 \end{array}\right.$$

Note que nem x nem y podem ser nulos. Da segunda equação vem $x = \pm\sqrt{y^2} = \pm|y|$. Se $y > 0$, temos $x = \pm y$ e se $y < 0$ temos $x = \mp y$. Em qualquer dos casos, vem

$$x = \pm y.$$

Se $x = y$, da última equação vem

$$x^2 = 1 \Longleftrightarrow x = \pm 1$$

e obtemos os pontos $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.
Se $x = -y$, a última equação fica $x^2 = -1$ que é impossível.

- Valor de f nos pontos críticos
  Temos
  $$f(1, 1) = 1 \qquad \text{e} \qquad f(-1, -1) = 1.$$
  Nos pontos $(1, 1)$ e $(-1, -1)$ a função f assume um mínimo sujeita à restrição $xy = 1$.

(c) Função objectivo: $f(x, y) = x^2 - y^2$
Restrição: $g(x, y) = 4$ em que $g(x, y) = x^2 + y^2$.

- Pontos críticos
  $$\begin{cases} f_x(x,y) &= \lambda g_x(x,y) \\ f_y(x,y) &= \lambda g_y(x,y) \\ g(x,y) &= 4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x &= \lambda 2x \\ -2y &= \lambda 2y \\ x^2 + y^2 &= 4 \end{cases}$$
  Se $x \neq 0$, da primeira equação podemos tirar que $\lambda = 1$ e segue-se, da segunda equação, que $y = 0$. Da terceira equação tiramos os pontos $(2, 0)$ e $(-2, 0)$.
  Se $x = 0$, obtemos os pontos $(0, 2)$e$(0, -2)$.
- Valor de f nos pontos críticos
  Temos
  $$f(2, 0) = f(-2, 0) = 4 \qquad \text{e} \qquad f(0, 2) = f(0, -2) = -4.$$
  Nos pontos $(0, 2)$ e $(0, -2)$ a função f assume um mínimo sujeita à restrição $x^2 + y^2 = 4$.

8. (b) Função objectivo: $f(x, y) = \mathrm{e}^{xy}$
Restrição: $g(x, y) = 4$ em que $g(x, y) = x^2 + y^2$.

- Pontos críticos
  $$\begin{cases} f_x(x,y) &= \lambda g_x(x,y) \\ f_y(x,y) &= \lambda g_y(x,y) \\ g(x,y) &= 4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y\,\mathrm{e}^{xy} &= \lambda 2x \\ x\,\mathrm{e}^{xy} &= \lambda 2y \\ x^2 + y^2 &= 4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y/x &= 2\lambda/\,\mathrm{e}^{xy} \\ x/y &= 2\lambda/\,\mathrm{e}^{xy} \\ x^2 + y^2 &= 4 \end{cases}$$
  Da duas primeiras equações obtemos que $x^2 = y^2$ e juntamente com a terceira equação chegamos aos pontos
  $$(2, 2), (2, -2), (-2, 2) \text{ e } (-2, -2).$$
- Valor de f nos pontos críticos

  Temos que
  $$f(2, 2) = f(-2, -2) = \mathrm{e}^4$$
  é um máximo de f sujeita à condição $x^2 + y^2 = 4$ e
  $$f(-2, 2) = f(2, -2) = \mathrm{e}^{-4}$$
  é um mínimo.

9. Trata-se de calcular o ponto onde a função que nos dá a distância de um ponto (x, y, z) ao ponto $(1, 2, 3)$,
$$d(x, y, z) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2},$$
atinge um mínimo quando sujeita à restrição $x + y + 2z = 1$. Equivalentemente, podemos antes minimizar o quadrado da distância, isto é, considerar o problema

$$\text{Minimizar } f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 \text{ sujeita a } x + y + 2z = 1.$$

Função objectivo: $f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2$

Restrição: $g(x, y, z) = 1$ em que $g(x, y, z) = x + y + 2z$.

- Pontos críticos

$$\begin{cases} f_x(x,y,z) & = \lambda g_x(x,y,z) \\ f_y(x,y,z) & = \lambda g_y(x,y,z) \\ f_z(x,y,z) & = \lambda g_z(x,y,z) \\ g(x,y,z) & = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2(x-1) & = \lambda \\ 2(y-2) & = \lambda \\ 2(z-3) & = 2\lambda \\ x+y+2z & = 1 \end{cases}$$

Da duas primeiras equações obtemos

$$x-1 = y-2 \Longleftrightarrow y = x+1$$

e da primeira e últimas equações vem

$$z-3 = 2(x-1) \Longleftrightarrow z = 2x+1.$$

Substituindo na última equação temos

$$x + (x+1) + 2\,(2x+1) = 1,$$

donde se obtém $x = -\frac{1}{3}$. Finalmente, encontra-se o ponto

$$(x,y,z) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

que é o ponto do plano $x+y+2z=1$ que se encontra à distância mínima de $M=(1,2,3)$.

10. Trata-se de encontrar o mínimo de $f(x,y) = 8\times 2x + 8\times y + 24\times y = 16x + 32y$ sujeita à restrição $xy = 800$, usando o método dos multiplicadores de Lagrange ou transformando o problema num problema de otimização de uma função de uma única variável.