Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Álgebra Linear LCC Teste 1 Duração: 1h45 [Teste modelo A]

Nome: ______________________ **Número:** __________

Grupo I

Em cada questão deste grupo deve ser assinalada apenas uma das opções de resposta. A uma resposta correta é atribuída uma cotação de 1.25 valores (apenas uma resposta está correta) e a uma resposta errada é atribuída uma cotação de -0.25 valores. A cotação mínima total deste grupo de 0 valores.

1. As matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

   ☐ são comutáveis para qualquer $a \in \mathbb{R}$.
   ☐ B é a inversa de A se $a = 0$.
   ☐ são ambas invertíveis.
   ☐ são comutáveis se $a = 2$.

2. Para uma matriz quadrada de ordem n tal que $A^3 = O$ e $A^p \neq O$ para $p < 3$, a inversa da matriz $I_n - A$ é a matriz

   ☐ $I_n + A + A^2$.
   ☐ $A^3 + 2I_n$.
   ☐ $I_n + A$.
   ☐ $A + A^2 + A^3$.

3. Se A e B são matrizes de ordem $n > 1$ tais que $AB = 2I_n$, então

   ☐ A e B não são matrizes invertíveis.
   ☐ $\det(AB) = 2$.
   ☐ A é invertível e $A^{-1} = 2B$.
   ☐ A é invertível e $A^{-1} = \frac{1}{2}B$.

4. Se A e B são matrizes de ordem 4 tais que $\det(A) = 2$ e $\det(B) = 3$, então

   ☐ $\det\left(AB^{-1}\right) = \frac{2}{3}$ e $\det\left(B^{-1}A\right) = -\frac{3}{2}$.
   ☐ $\det(-B) = -3$.
   ☐ $\det(AA^T) = 2^4$.
   ☐ $\det(AB^T) = 6$.

5. Se $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & \beta-2 \end{array}\right]$ é a matriz ampliada de um sistema de equações lineares, com α e β parâmetros reais, então

   ☐ o sistema é sempre possível.
   ☐ o sistema é possível e indeterminado se e só se $\alpha = -1$ e $\beta = 2$.
   ☐ o sistema é possível e determinado se $\alpha = -1$ e $\beta \neq 2$.
   ☐ o sistema é impossível se $\alpha \neq -1$.

6. A característica da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b-a \end{bmatrix}$, com $a, b \in \mathbb{R}$, é igual a

   ☐ 2 se $a = b$.
   ☐ 3 se $a \neq b$.
   ☐ 2 para quaisquer valores de a e b.
   ☐ 3 se $a \neq 0$ e $a \neq b$.

Grupo II

Neste grupo as respostas a todos as questões devem ser devidamente justificadas.

1. [1.5 valores] Sejam A e B matrizes reais de ordem n invertíveis, tais que B é simétrica e $A+B=I_n$. Mostre que
$$A\left(B-B^{-1}B\right)^T=-A^2.$$
(Recorde que uma matriz quadrada se diz simétrica se for igual à sua transposta).

2. [2.5 valores] Considere o sistema de equações lineares nas incógnitas x, y, z e w com a seguinte matriz ampliada:
$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right]$$
   (a) Verifique que $(4,-6,3,0)$ é solução do sistema.
   (b) Use o método de eliminação de Gauss para verificar que se trata de um sistema possível e indeterminado. Obtenha a solução geral do sistema.

3. [4 valores] Considere a matriz invertível $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$.
   (a) Use o método de eliminação de Gauss-Jordan para determinar A^{-1}.
   (b) Use A^{-1} para resolver o sistema de equações lineares $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ com $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}^T$.
   Nota: Caso não tenho respondido à alínea a), resolva o sistema usando o método de eliminação de Gauss.
   (c) A partir de A^{-1} obtenha a inversa da matriz $2A$ e da matriz A^T.

4. [3 valores] Considere a matriz
$$A=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$
   (a) Mostre que A é invertível.
   (b) Sem calcular $\operatorname{adj}(A)$ nem A^{-1}, determine o elemento na posição $(2,1)$ de cada uma destas matrizes.
   (c) Use a regra de Cramer para obter o valor da incógnita x_3 do sistema $A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$ (sem resolver completamente o sistema).

5. [1.5 valores] Seja $A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz ortogonal, isto é, tal que $AA^T=A^TA=I_n$. Justifique que se $n\geq 2$, então
$$\operatorname{adj}(A)=A^T \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{adj}(A)=-A^T.$$