Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Álgebra Linear LCC Teste 2 Duração: 1h45 [Teste modelo B]

Nome: ______________________ **Número:** __________

Grupo I

Em cada questão deste grupo deve ser assinalada apenas uma das opções de resposta. A uma resposta correta é atribuída uma cotação de 1.25 valores (apenas uma resposta está correta) e a uma resposta errada é atribuída uma cotação de -0.25 valores. A cotação mínima total deste grupo é de 0 valores.

1. Sejam V um espaço vetorial real de dimensão 3 e $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}$ e $\boldsymbol{v_3}$ três vetores de V linearmente independentes. Então

   - ☐ $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}\}$ é um conjunto linearmente dependente.
   - ☐ $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_3}\}$ é um conjunto linearmente dependente.
   - ☐ $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$ é um conjunto gerador de V.
   - ☐ $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, 2\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_3}\}$ é um conjunto linearmente independente.

2. Os seguintes vetores formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

   - ☐ $(1,1,-1), (2,3,4), (1,-2,3), (2,1,1)$.
   - ☐ $(1,1,0), (0,2,3), (-2,0,1)$.
   - ☐ $(1,2,0), (0,1,-1)$.
   - ☐ $(-1,2,1), (3,2,2), (2,4,3)$.

3. Seja $S = \langle (1,1,0), (0,2,0), (4,3,0) \rangle$. Então

   - ☐ $\dim(S) = 3$.
   - ☐ $(2,3,0) \in S$.
   - ☐ $(0,0,0) \notin S$.
   - ☐ $S = \mathbb{R}^3$.

4. Seja $T\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear tal que $\dim\big(\mathsf{Im}(T)\big) = 2$. Então

   - ☐ $\mathsf{Nuc}(T) = \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^4}\}$.
   - ☐ $(0,0,0,0) \notin \mathsf{Nuc}(T)$.
   - ☐ $\mathsf{Nuc}(T)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^4$ com dimensão 2.
   - ☐ $\mathsf{Nuc}(T)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ com dimensão 1.

5. Seja G uma aplicação linear cuja representação matricial é $A_G = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$.

   - ☐ $G(x,y,z) = (x-y, y, -y+z)$, para qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
   - ☐ Tem-se $H(1,1,1) = (-1,1,-3)$ para $H = G \circ G$.
   - ☐ $(0,0,3) \notin \mathsf{Im}(G)$.
   - ☐ $(1,1,1) \in \mathsf{Nuc}(G)$.

6. Seja A uma matriz de ordem 3 cujo polinómio característico é $p(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2-4)$. Então

- [ ] $\det(A - 2I_3) \neq 0$.
- [ ] Os valores próprios da matriz $A^T + 2I_3$ são 0, 3 e 4.
- [ ] o sistema $(A - 2I_3)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ é possível e determinado.
- [ ] $A^T - I_3$ é invertível.

Grupo II

Neste grupo as respostas a todos as questões devem ser devidamente justificadas.

1. [1 valor] Considere, no espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, o conjunto de vetores

$$W = \{(1,0,2), (-1,2,-3), (1,4,k)\}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Determine os valores de k para os quais W é uma base de $\mathbb{R}^3$.

2. [2 valores] Determine uma base e a dimensão dos seguintes subespações de $\mathbb{R}^4$:

   (a) $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}$;

   (b) $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 = x_2 = x_3\}$.

3. [3 valores] Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a aplicação linear definida por

$$T(x,y,z) = (x + 2y - z, y + 2z, 2x + 5y, x + 3y + z).$$

   (a) Determine a representação matricial de T relativamente às bases canónicas.

   (b) Calcule, de duas formas distintas, $T(1,2,3)$.

   (c) Determine $\mathsf{Nuc}(T)$ e uma sua base.

   (d) Indique uma base para $\mathsf{Im}(T)$.

4. [2 valores] Seja $G\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$G(2,1) = (1,-1,3) \quad \text{e} \quad G(1,1) = (1,1,2).$$

Determine $G(x,y)$ para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

5. [2.5 valores] Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

   (a) Determine os valores próprios de A.

   (b) Determine o subespaço próprio associado ao maior valor próprio de A.

6. [2 valores] Sejam A uma matriz real quadrada de ordem n tal que $A^2 = I_n$ e $\boldsymbol{u}$ um vetor não nulo que não é vetor próprio de A.

   (a) Mostre que se λ é um valor próprio de A, então $\lambda \in \{-1, 1\}$.

   (b) Mostre que os vetores $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + A\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} - A\boldsymbol{u}$ são vetores próprios de A e diga a que valores próprios estão associados.