Geometria – 2010/2011

PARTE II - Transformações geométricas.

1 Conceitos básicos

Seja $\mathcal{A}$ um espao afim associado a um espao vectorial E.

Definição 1.1 *Aplicação afim, aplicação linear associada.*
Uma aplicação f de um espaço afim $\mathcal{A}$ associado a um espaço vectorial E, $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$, diz-se **aplicação afim associada à aplicação linear** $\overrightarrow{f}$*, com* $\overrightarrow{f} : E \longrightarrow E$*, se existe um ponto $A \in \mathcal{A}$ tal que para todo o ponto $M \in \mathcal{A}$ se verifica*

$$f(M) = f(A) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM})$$

Dizemos que a aplicação afim f **preserva a orientação** *se a aplicação linear associada $\overrightarrow{f}$ preserva a orientação (i.e.* $\det \overrightarrow{f} > 0$*), caso contrário, dizemos que* **inverte a orientação**.

Proposição 1.2 *Seja $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ uma aplicação afim associada à aplicação linear $\overrightarrow{f} : E \to E$*

1. *Para todos os $A', M \in \mathcal{A}$ verifica-se que $f(M) = f(A) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM})$.*

2. *(Expressão analítica de uma aplicação afim)*

   Seja $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ uma aplicação afim num espaço afim $\mathcal{A}$ munido de um referencial $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$. Se $M \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\mathcal{R}}$, $f(M) \equiv (y_1, y_2, \ldots, y_n)_{\mathcal{R}}$ e $f(O) = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ tem-se

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Equivalentemente, usando coordenadas homogéneas:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \omega_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \omega_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & \omega_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

Proposição 1.3 *Propriedades das aplicações afins*

1. *Uma aplicação afim preserva a colinearidade. De facto, se A, B e C verificam que $C = A + \lambda\overrightarrow{AB}$ ento $f(C) = f(A) + \lambda\overrightarrow{f(A)f(B)}$.*

   As aplicações afins preservam portanto segmentos e semi-rectas ...

2. *Uma aplicação afim preserva o paralelismo, isto é, se f é uma aplicação afim e $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ são subespaços afins de $\mathcal{A}$ paralelos então $f(\mathcal{U})$ e $f(\mathcal{V})$ são paralelos.*

3. *Uma aplicação afim é injectiva (resp. sobrejectiva, bijectiva) se e só se a aplicação linear associada $\overrightarrow{f}$ é injectiva (resp. sobrejectiva, bijectiva). Se f é uma aplicação afim bijectiva associada ao isomorfismo linear $\overrightarrow{f}$ então f^{-1} é uma aplicação afim associada a $\overrightarrow{f}^{-1}$.*

4. *Se f e g são aplicações afins associadas, respectivamente, às aplicações lineares $\overrightarrow{f}$ e $\overrightarrow{g}$, então $f \circ g$ é uma aplicação afim associada à aplicação linear $\overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}$.*

5. *O conjunto de pontos fixos de f:*

   $$\chi = \{M \in \mathcal{A} \ : \ f(M) = M\}$$

   se não for vazio, é um subespaço afim.

Por exemplo, o conjunto de pontos fixos de uma aplicação afim de um plano afim munido de um referencial é simplesmente o conjunto de soluções de uma equação matricial:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & \omega_1 \\ c & d & \omega_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Isto , o subespaço afim definido pelas equações cartesianas:

$$\begin{cases} (a-1)x_1 + bx_2 + w_1 = 0 \\ cx_1 + (d-1)x_2 + w_2 = 0 \end{cases}$$

A partir de agora $\mathcal{A}$ designará um espaço euclidiano associado a um espaço vectorial E e d a distância euclidiana definida em $\mathcal{A}$.

Definição 1.4 *Uma aplicação bijectiva $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ diz-se*

- *uma* **colineação** *se f preserva a colinearidade, isto é, A, B e C são colineares se e só se $f(A)$, $f(B)$ e $f(C)$ são colineares;*
- *uma* **semelhança de razão** λ *($\lambda > 0$), se*

$$d(f(A), f(B)) = \lambda d(A, B), \qquad \forall A, B \in \mathcal{A}$$

- *uma* **isometria** *se*

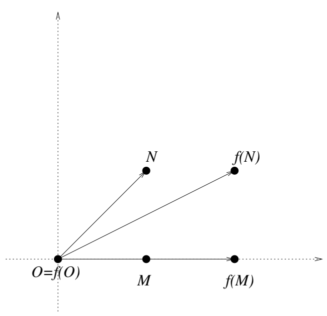
$$d(f(A), f(B)) = d(A, B), \qquad \forall A, B \in \mathcal{A}$$

Proposição 1.5

Isometrias $\subset$ Semelhanças $\subset$ Colineações

Exemplos 1.6 Seja $\mathcal{A}$ um plano afim munido de um referencial ortonormado $\mathcal{R}$. Os pontos de $\mathcal{A}$ identificam-se com as coordenadas no referencial $\mathcal{R}$.

1. A aplicação definida por $f(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$ é uma isometria de $\mathcal{A}$;
2. A aplicação definida por $g(x_1, x_2) = (2x_1, 2x_2)$ é uma semelhança de $\mathcal{A}$ mas não é uma isometria;
3. A aplicação definida por $g(x_1, x_2) = (2x_1, x_2)$ é uma colineação mas não é uma semelhança (e portanto também não é uma isometria);



4. A aplicação definida por $h(x_1, x_2) = (x_1, x_2^3)$ é bijectiva mas não é uma colineação (não preserva a colinearidade).

Pela primeira propriedade de 1.3 sabemos que as aplicações afins bijectivas são colineações. De facto, no caso real, o recíproco também se verifica:

Teorema 1.7 *Teorema fundamental da Geometria Afim*

Sejam $\mathcal{A}$ um espaço afim associado a um espaço vectorial real E e f uma aplicação bijectiva de $\mathcal{A}$, $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$, com $\dim \mathcal{A} \geq 2$. A aplicação f preserva a colinearidade se e só se existe uma isomorfismo linear $\overrightarrow{f} : E \longrightarrow E$ tal que, para todos os pontos $A, M \in \mathcal{A}$ se verifica

$$f(M) = f(A) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM})$$

Além disso, se $\mathcal{A}$ é um espaço euclidiano, a aplicação f é uma isometria se e só se $\overrightarrow{f}$ é uma aplicação linear ortogonal,isto é, se $\overrightarrow{f}$ preserva o produto escalar de E.

Em particular, num referencial $\mathcal{R}$, toda a colinação de $\mathcal{A}$ admite uma representação matricial:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \omega_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \omega_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & \omega_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

com a matriz $A = (a_{ij})$ invertível. Além disto, se o referencial $\mathcal{R}$ for um referencial ortonormado, f será uma isometria se e só se $A = (a_{ij})$ é uma matriz ortogonal (isto é $A^{-1} = A^t$).

Exemplos 1.8

Seja $\mathcal{A}$ um plano euclidiano munido de um referencial $\mathcal{R}$. Se $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ escrevemos $M \equiv (x_1, x_2)_{\mathcal{R}}$ e $f(M) \equiv (y_1, y_2)_{\mathcal{R}}$

1. As aplicações afins de $\mathcal{A}$ representam-se matricialmente, usando coordenadas homogéneas, por

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & \omega_1 \\ c & d & \omega_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   ou seja,

$$f(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2 + \omega_1, cx_1 + dx_2 + \omega_2)$$

   As colineações de $\mathcal{A}$ (aplicações bijectivas que preservam a colinearidade) verificam

$$ad - bc \neq 0$$

2. Se o referencial $\mathcal{R}$ for ortonormado as isometrias de $\mathcal{A}$ representam-se matricialmente, usando coordenadas homogéneas, por

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -\epsilon b & \omega_1 \\ b & \epsilon a & \omega_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   com $\epsilon = \pm 1$ e $a^2 + b^2 = 1$.

As semelhanças são afinidades, em particular são aplicações afins e verificam todas as propriedades enunciadas na proposição 1.3. Também verificam algumas propriedades extra, como se indica na proposição seguinte.

Proposição 1.9 *Propriedades das semelhanças.*

1. *As semelhanças preservam os ângulos não orientados, isto é, se $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ é uma semelhança do espaço euclidiano de razão λ, então*

$$\cos\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\} = \cos\{\overrightarrow{f(A)f(B)}, \overrightarrow{f(A)f(C)}\}$$

   As semlhanças que preservam a orientação (chamadas **semelhanças directas***) preservam os ângulos orientados .*

2. *A composta de um semelhança de razão λ e uma semelhança de razão μ é uma semelhança de razão $\lambda \cdot \mu$.*

3. *A inversa de uma semelhança de razão λ é uma semelhança de razão $1/\lambda$.*

4. *A imagem de uma circunferência de centro Ω e raio r através de uma semelhança f de razão λ é uma circunferência de centro $f(\Omega)$ e raio λr.*

Recorde-se que uma isometria é uma semelhança de razão 1:

Corolário 1.10 *A composta de isometrias é uma isometria e a inversa de uma isometria é uma isometria.*

Nota: As proposições anteriores e o corolário implicam que os conjuntos de afinidades, de semelhanças e de isometrias de um espaço euclidiano $\mathcal{A}$ tem estrutura de grupo. Se designarmos estes grupos (exemplos básicos de grupos não comutativos), respectivamente, por $Aff(\mathcal{A})$, $Sem(\mathcal{A})$ e $Iso(\mathcal{A})$, o teorema 1.5 implica

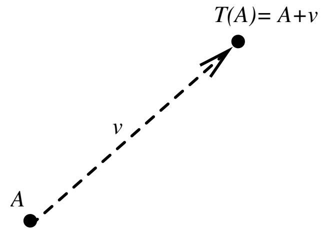
$$Iso(\mathcal{A}) \leq Sem(\mathcal{A}) \leq Aff(\mathcal{A})$$

(O símbolo $\leq$ significa, neste contexto, *subgrupo*)

2 Exemplos

2.1 *Translações*

Seja $\overrightarrow{v}$ um vector fixado de E. Chamamos **translação pelo vector** $\overrightarrow{v}$ e designamos $T_{\overrightarrow{v}}$ à aplicação $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ definida por $T_{\overrightarrow{v}}(M) = M + \overrightarrow{v}$, para todo o $M \in \mathcal{A}$.



Expressão analítica de uma translação.

1. Seja $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$ um referencial de $\mathcal{A}$. Se $T_{\overrightarrow{v}} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ é a translação pelo vector $\overrightarrow{v} \equiv (v_1, v_2)_{\mathcal{B}}$, para cada $M \equiv (x_1, x_2)_{\mathcal{R}}$ tem-se que

$$T_{\overrightarrow{v}}(M) \equiv (x_! + v_1, x_2 + v_2)_{\mathcal{R}}$$

Matricialmente, se $T_{\overrightarrow{v}}(M) \equiv (y_1, y_2)_{\mathcal{R}}$, tem-se

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Ou, equivalentemente, usando coordenadas homogéneas, se $T_{\overrightarrow{v}}(M) \equiv (y_1, y_2)_{\mathcal{R}}$, tem-se

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim euclidiano de dimensão n munido de um referencial.
Se $T_{\overrightarrow{v}} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ é a translação pelo vector $\overrightarrow{v} \equiv (v_1, v_2, \ldots, v_n)_{\mathcal{B}}$, para cada $M \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\mathcal{R}}$ tem-se que

$$T_{\overrightarrow{v}}(M) \equiv (x + v_1, x_2 + v_2, \ldots, x_n + v_n)_{\mathcal{R}}$$

Propriedades das translações

1. As translações são isometrias.

2. As translações formam um grupo abeliano para a composição de aplicações, de facto:

$$(T_{\overrightarrow{v}})^{-1} = T_{-\overrightarrow{v}} \quad \text{e} \quad T_{\overrightarrow{v}} \circ T_{\overrightarrow{w}} = T_{\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}}$$

3. As translações transformam subespaços afins em subespaços afins paralelos aos iniciais, isto é, se $\mathcal{U}$ é um subespaço afim de $\mathcal{A}$ então

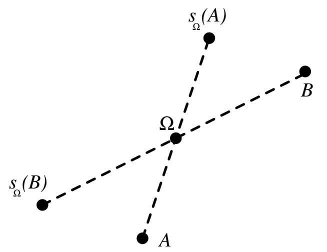
$$\mathcal{U} \mathbin{/\!/} T_{\overrightarrow{v}}(\mathcal{U})$$

2.2 *Simetrias centrais*

Seja Ω um ponto fixado de $\mathcal{A}$. Chamamos *simetria central com centro* Ω e designamos s_Ω à aplicação $s_\Omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ definida por

$$s_\Omega(M) = \Omega - \overrightarrow{\Omega M}$$

para cada $M \in \mathcal{A}$.



Expressão analítica de uma simetria central

1. Seja $\mathcal{A}$ um plano afim euclidiano munido de um referencial $\mathcal{R}$. Se $s_\Omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ é a simetria central com centro $\Omega \equiv (\omega_1, \omega_2)_\mathcal{R}$, então, para cada $M \equiv (x_1, x_2)_\mathcal{R}$, tem-se que

   $$s_\Omega(M) \equiv (2\omega_1 - x_1, 2\omega_2 - x_2)$$

   Matricialmente, se $s_\Omega(M) \equiv (y_1, y_2)_\mathcal{R}$, tem-se

   $$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\omega_1 \\ 2\omega_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

   Ou, equivalentemente, usando coordenadas homogéneas, se $s_\Omega(M) \equiv (y_1, y_2)_\mathcal{R}$, tem-se

   $$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2\omega_1 \\ 0 & -1 & 2\omega_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Em geral, seja $\mathcal{A}$ um espaço afim euclidiano munido de um referencial. Se $s_\Omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ é a simetria central com centro $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$, então, para cada $M = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathcal{A}$, tem-se que

   $$s_\Omega(M) = (2\omega_1 - x_1, 2\omega_2 - x_2, \ldots, 2\omega_n - x_n)$$

Propriedades das simetrias centrais

1. As simetrias centrais são isometrias.

2. As simetrias centrais transformam subespaços afins em subespaços afins paralelos aos iniciais, isto é, se $\mathcal{U}$ é um subespaço afim de $\mathcal{A}$ então

   $$\mathcal{U} \parallel s_\Omega(\mathcal{U})$$

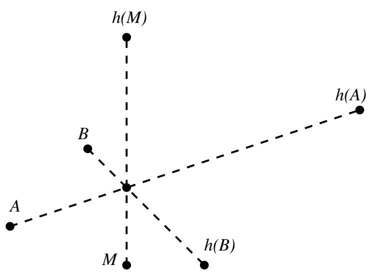
2.3 *Homotetias*

Sejam Ω um ponto fixado de $\mathcal{A}$ eλ um número real não nulo. Chamamos *homotetia* com centro Ω e razão λ à aplicação $h : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ definida por

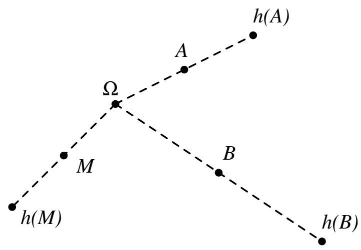
$$h(M) = \Omega + \lambda \Omega M$$

para cada $M \in \mathcal{A}$.

Homotetia de razão −2 e centro Ω



Homotetia de razão 2 e centro Ω



Observe-se que uma simetria central é uma homotetia com razão -1 e a identidade [1] é uma homotetia com razão 1.

Expressão analítica de uma homotetia.

1. Seja $\mathcal{A}$ um plano afim euclidiano munido de um referencial $\mathcal{R}$. Se $h : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ é a homotetia com centro $\Omega \equiv (\omega_1, \omega_2)_\mathcal{R}$ e razão λ, então, para cada $M \equiv (x_1, x_2)_\mathcal{R}$ tem-se que

$$h(M) \equiv ((1-\lambda)\omega_1 + \lambda x_1, (1-\lambda)\omega_2 + \lambda x_2)_\mathcal{R}$$

   Matricialmente, se $h(M) \equiv (y_1, y_2)_\mathcal{R}$, tem-se

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\lambda)\omega_1 \\ (1-\lambda)\omega_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

   Ou, equivalentemente, usando coordenadas homogéneas, se $h \equiv (y_1, y_2)_\mathcal{R}$, tem-se

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & (1-\lambda)\omega_1 \\ 0 & \lambda & (1-\lambda)\omega_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Em geral, se h é uma homotetia com centro Ω e razão λ num espaço afim de dimensão n munido de um referencial, com $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ e $M = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, então

$$h(M) = ((1-\lambda)\omega_1 + \lambda x_1, (1-\lambda)\omega_2 + \lambda x_2, \ldots, (1-\lambda)\omega_n + \lambda x_n)$$

---

[1] Alguns autores não consideram a identidade uma homotetia, excluindo o caso $\lambda = 1$ da definição.

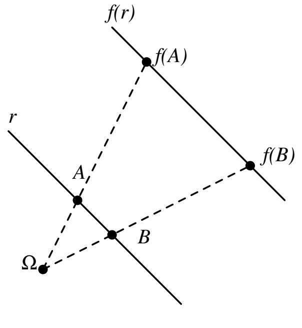
Propriedades das homotetias.

1. Uma homotetia de razão λ é uma semelhança de razão $|\lambda|$.
2. As únicas homotetias que são isometrias são a identidade e as simetrias centrais.
3. A inversa de uma homotetia é uma homotetia com o mesmo centro e razão inversa. A composta de duas homotetias é uma homotetia ou uma translação.
4. As homotetias transformam subespaços afins em subespaços afins paralelos aos iniciais, isto é, se $\mathcal{U}$ é um subespaço afim de $\mathcal{A}$ então
$$\mathcal{U} \parallel h(\mathcal{U})$$

Nota 2.1 Seja $s : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ uma semelhança do plano euclidiano de razão r. Observe-se que, para toda a homotetia $h : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ de razão $1/r$, as aplicações compostas $h \circ s$ e $s \circ h$ são isometrias de $\mathcal{A}$. Em particular, se $h \circ s$ é uma isometria f, isto é, se
$$h \circ s = f$$
então
$$s = h^{-1} \circ f$$
com h^{-1} uma homotetia (a inversa de uma homotetia é uma homotetia de razão inversa) de razão r. Assim, **toda a semelhança de razão r é composta de uma homotetia de razão r e uma isometria.**

Por exemplo, sejam $\mathcal{A}$ é um plano euclidiano munido de um referencial ortonormado e $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ uma semelhança de $\mathcal{A}$ de razão r. Se $M \equiv (x_1, x_2)_{\mathcal{R}}$ e $f(M) \equiv (y_1, y_2)_{\mathcal{R}}$, a representação matricial de f será do tipo:
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra & -\epsilon rb & \omega_1 \\ rb & \epsilon ra & \omega_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
com $\epsilon = \pm 1$ e $a^2 + b^2 = 1$.

Proposição 2.2 *Caracterização das homotetias e translações*
Sejam $\mathcal{A}$ um espaço afim euclidiano e $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ uma aplicação bijectiva que preserva a colinearidade e tal que, para toda a recta r de $\mathcal{A}$, as rectas r e $f(r)$ são paralelas. Então f é uma homotetia ou uma translação.



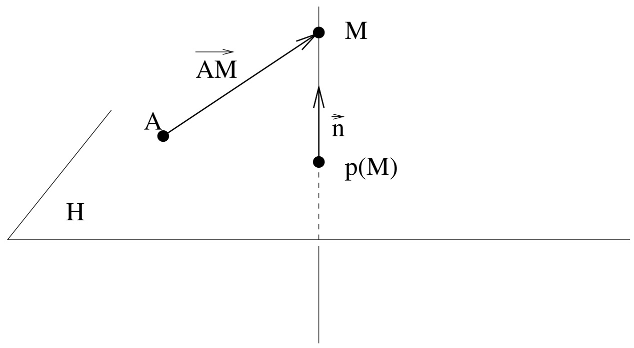
2.4 *Projecções ortogonais.*

Seja $\mathcal{U}$ um subespaço afim de um espaço afim euclidiano $\mathcal{A}$. Para cada ponto M de $\mathcal{A}$ seja $p(M)$ a projecção ortogonal de M em $\mathcal{U}$. A aplicação $p : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ diz-se *projecção ortogonal no subespaço* $\mathcal{U}$.

Projecção ortogonal num hiperplano afim

Sejam $\mathcal{H} = A + H$ um hiperplano de $\mathcal{A}$ e $\overrightarrow{n}$ um vector **unitário** normal ao hiperplano. Se $M \in \mathcal{A}$ e $p : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ é a projecção no hiperplano $\mathcal{H}$ tem-se

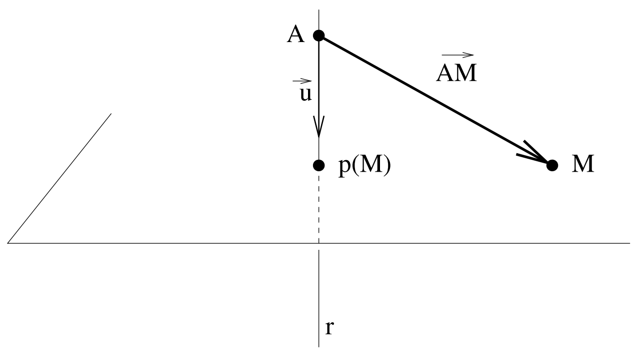
$$p(M) = M - (\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n})\overrightarrow{n}$$



Projecção ortogonal numa recta afim

Seja $r = A+ < \overrightarrow{u} >$ uma recta de $\mathcal{A}$, com $\overrightarrow{u}$ um vector **unitário**. Se $M \in \mathcal{A}$ e $p : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ é a projecção na recta r tem-se:

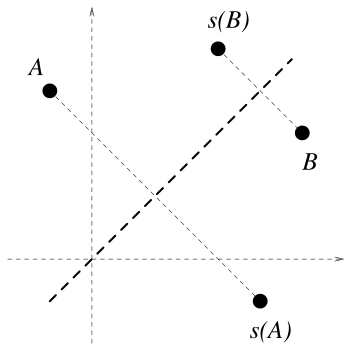
$$p(M) = A + (\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{u}$$



Atenção : As projeções **NÃO** são aplicações bijectivas mas preservam a colinearidade e o paralelismo.

2.5 *Simetrias ortogonais e reflexões.*

Seja $\mathcal{U}$ um subespaço afim de um espaço afim euclidiano $\mathcal{A}$. Para cada ponto M de $\mathcal{A}$ sejam $p(M)$ a projecção ortogonal de M em $\mathcal{U}$ e $s(M)$ o único ponto de $\mathcal{A}$ tal que $p(M)$ é o ponto médio entre M e $s(M)$. A aplicação $s : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ diz-se *simetria ortogonal com base* $\mathcal{U}$. Se $\mathcal{U}$ é um hiperplano, a simetria ortogonal é também chamada *reflexão no hiperplano* $\mathcal{U}$.

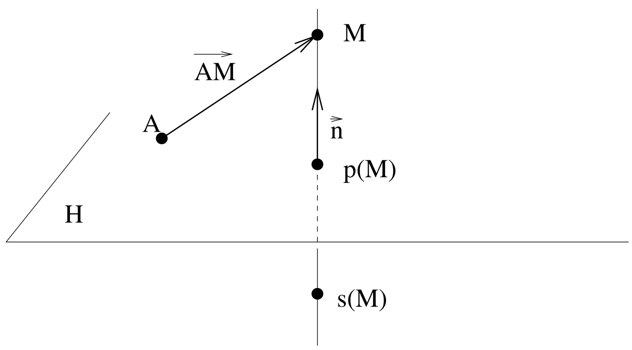


(O desenho corresponde à aplicação definida por $s(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$. Observe-se que os pontos A e $s(A)$ são simétricos em relação à recta $r \equiv y - x = 0$.)

Expressão analítica da reflexão num hiperplano afim

Sejam $\mathcal{A}$ um espaço afim euclidiano, $\mathcal{H} = A + H$ um hiperplano de $\mathcal{A}$ e $\overrightarrow{n}$ um vector **unitário** normal ao hiperplano. Se $M \in \mathcal{A}$ e $s : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ é a reflexão no hiperplano $\mathcal{H}$ tem-se

$$s(M) = M - 2(\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n})\overrightarrow{n}$$



Propriedades das simetrias ortogonais

As simetrias ortogonais são isometrias, em particular, preservam a colinearidade, a medida dos ângulos e o paralelismo.

Reflexões no plano euclidiano

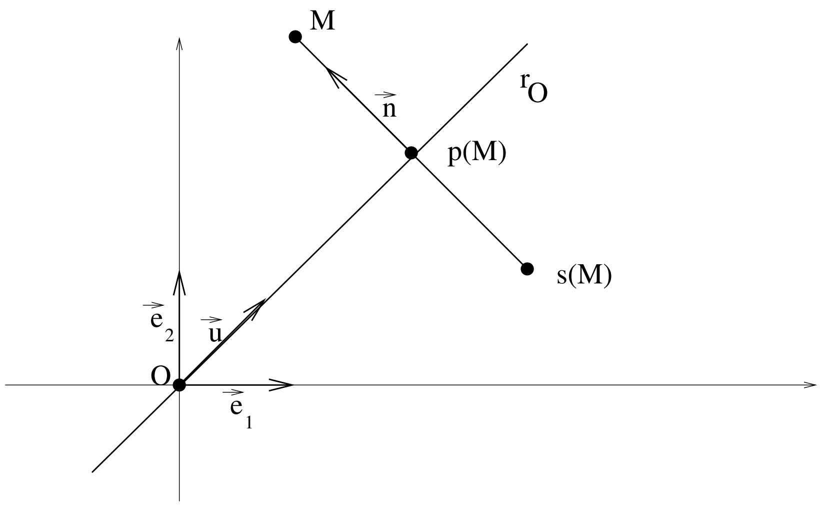
Suponha-se que $\mathcal{A}$ é um plano euclidiano munido de um referencial ortonormado e que $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ é a reflexão numa recta r.

Reflexão numa recta r que passa pela origem O do referencial.

Seja r_O uma recta que passa pela origem O do referencial e $\overrightarrow{u} = (c, d)$ um vector director **unitário** (i.e. $c^2 + d^2 = 1$) de r_O. Podemos considerar $A = O$ e tem-se

$$\sigma_O(M) = M - 2(\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{n})\overrightarrow{n}$$

com $\overrightarrow{n}$ um vector normal unitário da recta.



Tem-se que $\overrightarrow{n} = (-d, c)$ e, se $M = (x, y)$, então $\overrightarrow{OM} = (x, y)$. Assim

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{n} = (x, y) \cdot (-d, c) = dx + cy$$

e

$$\sigma_O(x, y) = (x, y) - 2\,(-dx + cy)\,(-d, c) = \big((1 - 2d^2)x + 2dcy, 2dcx + (1 - 2c^2)y\big)$$

Note-se que, como $c^2 + d^2 = 1$, tem-se $1 - 2c^2 = 2d^2 - 1$ e portanto a expressão matricial de σ_O é

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2d^2 & 2cd & 0 \\ 2cd & 2d^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Notas:

- Se a recta r_O é dada através de uma equação vectorial, para obter o vector unitário $\overrightarrow{u} = (c, d)$ basta normalizar o vector director dado. Se a recta r_O é dada através de uma equação cartesiana,
$$ax + by = 0$$
ao trabalharmos num referencial ortonormado, podemos considerar como vector director de r_O o vector $(-b, a)$ e depois normalizar para obter $\overrightarrow{u}$.

- Recorde-se que um vector unitário $\overrightarrow{u} = (c, d)$ verifica $c^2 + d^2 = 1$. Existe então $\theta \in [0, 2\pi[$ tal que $c = \cos\theta$ e $d = \sin\theta$, ou seja, podemos supor que o vector director unitário de r é da forma:
$$\overrightarrow{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$$
Usando as fórmulas do ângulo duplo, a expressão matricial anterior pode escrever-se do modo seguinte, mais simples de recordar:
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Reflexão numa recta r qualquer.

Seja r uma recta que passa por um ponto $A = (a_1, a_2)$ e está dirigida por um vector **unitário** $\overrightarrow{u} = (c, d)$ (i.e. $c^2 + d^2 = 1$). A reflexão σ na recta r pode obter-se como a composta:
$$\sigma = t^{-1} \circ \sigma_O \circ t$$
onde t é a translação que transforma o ponto A no origem do referencial O. Assim, a matriz que representa σ obtém-se como o produto:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-2d^2 & 2cd & 0 \\ 2cd & 2d^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim, se $\overrightarrow{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$, σ é definida pelo produto:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Reflexões no espaço euclidiano tridimensional

Suponha-se que $\mathcal{A}$ é um espaço euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado e que $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ é a reflexão num plano π.

Reflexão num plano π_O que passa pela origem O do referencial.

Seja π_O um plano que passa pela origem O do referencial definido pela equação cartesiana:

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$$

onde $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$ é um vector **unitário** (i.e.$A^2 + B^2 + C^2 = 1$).

Seja M um ponto genérico do espaço tridimensional. Recorde-se que

$$\sigma_O(M) = M - 2(\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{n})$$

Note-se que, se $M = (x_1, x_2, x_3)$, então $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{n} = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3$ donde

$$(\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{n})\overrightarrow{n} = (A^2x_1 + ABx_2 + ACx_3, ABx_1 + B^2x_2 + BCx_3, ACx_1 + BCx_2 + C^2x_3)$$

Se $\sigma_O(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$, usando a representação matricial em coordenadas homogéneas obtemos:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2A^2 & -2AB & -2AC & 0 \\ -2AB & 1-2B^2 & -2BC & 0 \\ -2AC & -2BC & 1-2C^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Reflexão num plano qualquer.

Seja π um plano que passa por um ponto $A = (a_1, a_2, a_3)$ e é perpendicular ao vector unitário $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$. A reflexão no plano π pode obter-se como a composta:

$$\sigma = t^{-1} \circ \sigma_O \circ t$$

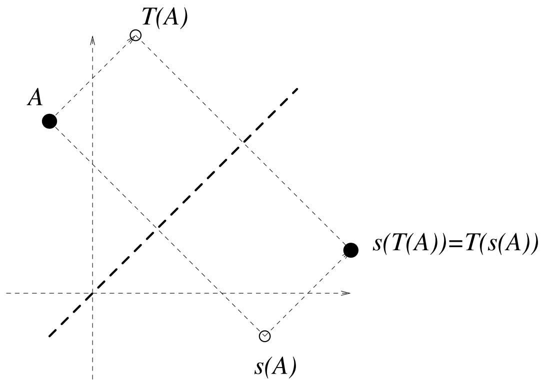
onde t é a translação que transforma o ponto A no origem do referencial O e σ_O é a reflexão no plano π_0 que passa pela origem de coordenadas e é paralelo a π. Assim, a matriz que representa σ obtém-se como o produto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-2A^2 & -2AB & -2AC & 0 \\ -2AB & 1-2B^2 & -2BC & 0 \\ -2AC & -2BC & 1-2C^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.6 *As reflexões deslizantes*

Sejam $\mathcal{A}$ um espaço afim euclidiano, $\mathcal{H}$ um hiperplano de $\mathcal{A}$ e $\overrightarrow{v}$ um vector **não nulo** paralelo ao hiperplano $\mathcal{H}$. A translação pelo vector $\overrightarrow{v}$ e a reflexão s no hiperplano $\mathcal{H}$ comutam, isto é:

$$T_{\overrightarrow{v}} \circ s = s \circ T_{\overrightarrow{v}}$$



A aplicação composta $T_{\overrightarrow{v}} \circ s$ diz-se **reflexão deslizante no hiperplano $\mathcal{H}$ pelo vector $\overrightarrow{v}$.**

Expressão analítica de uma reflexão deslizante num plano afim.

Seja r uma recta dirigida por um vector **unitário** $\overrightarrow{u} = (c, d)$ (i.e. $c^2 + d^2 = 1$) e $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ um vector paralelo à recta r. A reflexão deslizante f composta da reflexão σ em r e a translação pelo vector $\overrightarrow{v}$ representa-se matricialmente por:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2d^2 & 2cd & A_1+v_1 \\ 2cd & 2d^2-1 & A_2+v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

onde a matriz

$$\begin{pmatrix} 1-2d^2 & 2cd & A_1 \\ 2cd & 2d^2-1 & A_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é a matriz na reflexão σ obtida na secção anterior.

Propriedades das reflexões deslizantes: As reflexões deslizantes são isometrias, em particular, as reflexões deslizantes preservam a colinearidade, a medida dos ângulos e o paralelismo.

2.7 *Projecções e simetrias paralelas.*

Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim euclidiano associado a um espaço vectorial E. Considerem-se $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ subespaços afins de $\mathcal{A}$ associados aos subespaços vectoriais U e V verificando

$$U \cap V = \{0\} \qquad \text{e} \qquad U + V = E.$$

Nestas condições, para cada ponto $P \in \mathcal{A}$ o subespaço afim paralelo a $\mathcal{V}$ passando por P

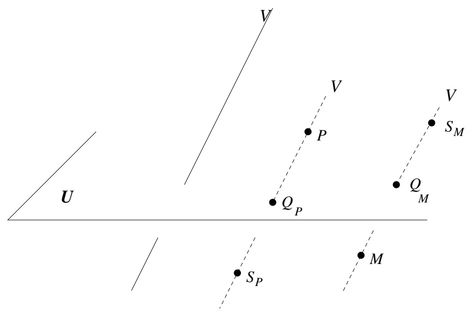
$$\mathcal{V}_P = P + V$$

intersecta $\mathcal{U}$ num único ponto Q_P chamado **projecção de P em $\mathcal{U}$ paralelamente a $\mathcal{V}$**. O ponto

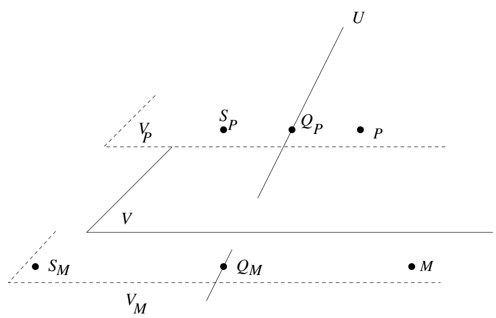
$$S_P = P + 2\overrightarrow{PQ_P}$$

é chamado **simétrico de P sobre $\mathcal{U}$ paralelamente a $\mathcal{V}$**.

(*Projeccção num plano $\mathcal{U}$ paralelamente a uma recta $\mathcal{V}$*)



(*Projeccção numa recta $\mathcal{U}$ paralelamente a um plano $\mathcal{V}$*)



As transformações do espaço euclidiano definidas por

$$P \to Q_P \qquad \text{e} \qquad P \to S_P$$

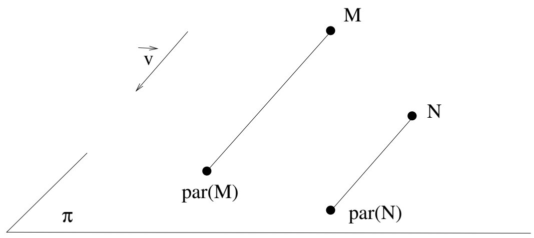
são chamadas respectivamente, **projecção em $\mathcal{U}$ paralelalmente a $\mathcal{V}$** (em inglês "parallel projection") e **simetria sobre $\mathcal{U}$ paralelalmente a $\mathcal{V}$**. São aplicações afins, mas, em geral, não são isometrias (nem semelhanças).

NOTA: A projecção paralela e a simetria paralela onde $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ são ortogonais é de facto a projecção ortogonal em $\mathcal{U}$ (em inglês "orthographic projection") e a simetria ortogonal (que é uma isometria).

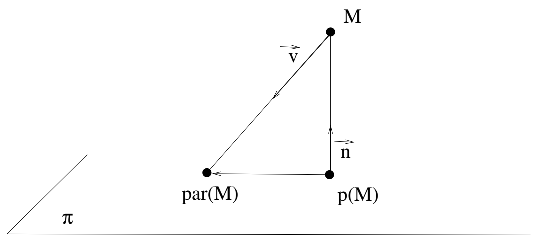
Projecção e simetria num hiperplano afim paralelas a um vector.

Sejam π um hiperplano afim e $\overrightarrow{v}$ um vector do espaço **não** paralelo ao hiperplano π. Para cada ponto M, a recta que passa por M e está dirigida por $\overrightarrow{v}$ intersecta o hiperplano π na **projecção paralela** ao vector $\overrightarrow{v}$ no hiperplano π do ponto M, que designamos $par(M)$. Se designarmos por sim a simetria paralela a $\overrightarrow{v}$ sobre π, o ponto $sim(M)$ será então:

$$sim(M) = M + 2\overrightarrow{Mpar(M)}$$



Seja $\overrightarrow{n}$ um vector normal **unitário** ao hiperplano π:



Note-se que $par(M)$ pertence ao hiperplano π e à recta que passa por M e está dirigida por $\overrightarrow{v}$, portanto existe λ tal que

$$par(M) = M + \lambda\overrightarrow{v}$$

equivalentemente, existe λ tal que $\overrightarrow{Mpar(M)} = \lambda\overrightarrow{v}$. Note-se que

$$\overrightarrow{p(M)par(M)} = \overrightarrow{p(M)M} + \overrightarrow{Mpar(M)}$$

onde $p(M)$ designa a projecção ortogonal de M no plano π. Recorde-se que

$$\overrightarrow{p(M)M} = (\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n})\overrightarrow{n}$$

com A um ponto qualquer do hiperplano π. Tem-se então

$$\overrightarrow{p(M)par(M)} = (\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n})\overrightarrow{n} + \lambda\overrightarrow{v}$$

Como $\overrightarrow{n}$ é ortogonal ao vector $\overrightarrow{p(M)par(M)}$, obtemos $\lambda = -\dfrac{(\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n})}{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{n}}$ donde

$$par(M) = M - \frac{(\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n})}{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{n}}\overrightarrow{v}$$

e também

$$sim(M) = M + 2\overrightarrow{Mpar(M)} = M - 2\frac{(\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n})}{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{n}}\overrightarrow{v}$$

Projecções e simetrias paralelas no espaço tridimensional.

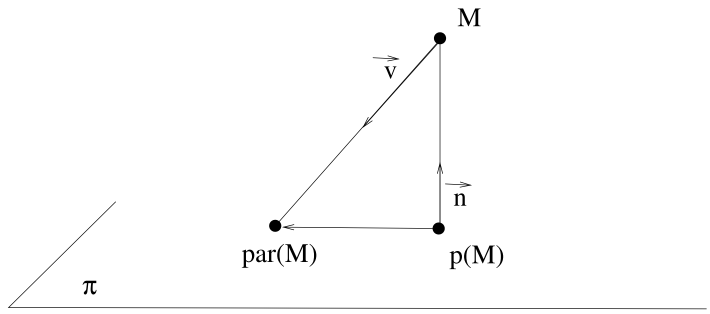
Seja $\mathcal{A}$ um espaço euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado.

Projecção e simetria paralela a um vector $\overrightarrow{v}$ num plano π_O que passa pela origem.

Seja π_O um plano que passa pela origem O de coordenadas definido pela equação cartesiana

$$Ax + By + Cz = 0$$

com $A^2 + B^2 + C^2 = 1$, (isto é, o vector normal $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$ é unitário). Sejam par e sim respectivamente a projecção paralela e a simetria paralela na direcção de um vector $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ no plano π_O.



Recordemos que, como o plano π_O passa pela origem de coordenadas, podemos considerar $A = O$ e obtemos:

$$par(M) = M - \frac{(\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{n})}{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}}\overrightarrow{v} \quad \text{e} \quad sim(M) = M - 2\frac{(\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{n})}{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}}\overrightarrow{v}$$

Para simplificar, considere $d = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} = Av_1 + Bv_2 + Cv_3$. Se $M = (x_1, x_2, x_3)$, como $\overrightarrow{OM} = (x_1, x_2, x_3)$, tem-se

$$par(M) = (x_1, x_2, x_3) - \frac{1}{d}(Ax_1 + Bx_2 + Cx_3)(v_1, v_2, v_3)$$

donde

$$par(M) = ((1 - \frac{Av_1}{d})x_1 - \frac{Bv_1}{d}x_2 - \frac{Cv_1}{d}x_3, -\frac{Av_2}{d}x_1 + (1 - \frac{Bv_2}{d})x_2 - \frac{Cv_2}{d}x_3, -\frac{Av_3}{d}x_1 - \frac{Bv_3}{d}x_2 + (1 - \frac{Cv_3}{d})x_3)$$

Se $par(M) = (y_1, y_2, y_3)$, matricialmente tem-se:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{Av_1}{d} & -\frac{Bv_1}{d} & -\frac{Cv_1}{d} & 0 \\ -\frac{Av_2}{d} & (1 - \frac{Bv_2}{d}) & -\frac{Cv_2}{d} & 0 \\ -\frac{Av_3}{d} & -\frac{Bv_3}{d} & (1 - \frac{Cv_3}{d}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Analogamente, como

$$sim(M) = M - 2\frac{(\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{n})}{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{n}}\overrightarrow{v}$$

considerando $d = \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{n} = Av_1 + Bv_2 + Cv_3$. Se $M = (x_1, x_2, x_3)$, como $\overrightarrow{OM} = (x_1, x_2, x_3)$, tem-se

$$sim(M) = (x_1, x_2, x_3) - \frac{2}{d}(Ax_1 + Bx_2 + Cx_3)(v_1, v_2, v_3)$$

donde

$$sim(M) = ((1-\frac{2Av_1}{d})x_1 - \frac{2Bv_1}{d}x_2 - \frac{2Cv_1}{d}x_3, -\frac{2Av_2}{d}x_1 + (1-\frac{2Bv_2}{d})x_2 - \frac{2Cv_2}{d}x_3, -\frac{2Av_3}{d}x_1 - \frac{2Bv_3}{d}x_2 + (1-\frac{2Cv_3}{d})x_3)$$

Se $sim(M) = (y_1, y_2, y_3)$, matricialmente tem-se:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{2Av_1}{d} & -\frac{2Bv_1}{d} & -\frac{2Cv_1}{d} & 0 \\ -\frac{2Av_2}{d} & (1-\frac{2Bv_2}{d}) & -\frac{2Cv_2}{d} & 0 \\ -\frac{2Av_3}{d} & -\frac{2Bv_3}{d} & (1-\frac{2Cv_3}{d}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Projecção e simetria paralela a um vector $\overrightarrow{v}$ num plano π qualquer.

Como é usual, a projecção paralela ao vector $\overrightarrow{v}$ num plano π pode obter-se como a composta:

$$par = t^{-1} \circ par_O \circ t$$

onde t é a translação que transforma um ponto A do plano π no origem do referencial O e par_O é a projecção paralela ao vector $\overrightarrow{v}$ no plano π_O paralelo a π que passa pela origem de coordenadas. Analogamente, a simetria paralela ao vector $\overrightarrow{v}$ num plano π pode obter-se como a composta:

$$sim = t^{-1} \circ sim_O \circ t$$

onde t é a translação que transforma um ponto A do plano π no origem do referencial O e sim_O é a simetria paralela ao vector $\overrightarrow{v}$ no plano π_O paralelo a π que passa pela origem de coordenadas.

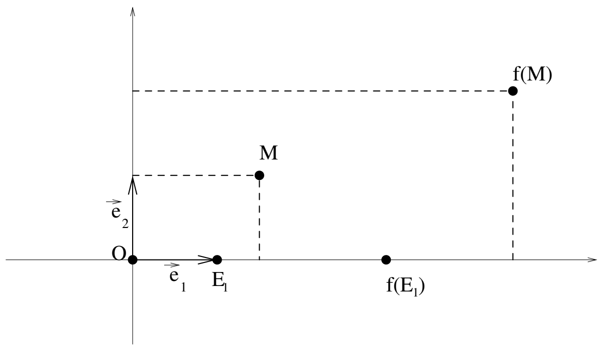
Propriedades das projecções e simetrias paralelas: São aplicações afins mas, em geral, não são isometrias nem semelhanças. As simetrias paralelas são aplicações bijectivas.

2.8 Re-dimensionamentos (transformações "scaling")

Seja $\mathcal{A}$ um espaço euclidiano de dimensão n munido de um referencial $\mathcal{R} = \{O; (\overrightarrow{e}_1, \ldots, \overrightarrow{e}_n)\}$. São chamadas transformações tipo "scaling" ou re-dimensionamentos centrados na origem e de parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ nas direcções principais, às afinidades representadas matricialmente no referencial $\mathcal{R}$ por:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_n & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

Observe-se que, se $\alpha_k = \lambda$, para todo o $k = 1, \ldots, n$, a re-dimensionamento obtido é, de facto, uma homotetia com centro a origem de coordenadas O e razão λ. Este tipo de re-dimensionamentos (homotetias) são também chamadodos re-dimensionamentos uniformes ("uniform scaling").



(Re-dimensionamento de parâmetros 3 e 2 nas direcções principais)

Em geral, se $\mathcal{R}' = \{O', (\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_n)\}$ é um outro referencial do espaço euclidiano, podemos definir o re-dimensionamento no referencial $\mathcal{R}'$ de parâmetros $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de modo análogo. A representação matricial deste re-dimensionamento no referencial original $\mathcal{R}$ obtém-se simplesmente como uma mudança de coordenadas.

Nota 2.3 *Propriedades geométricas dos re-dimensionamentos*

- Os re-dimensionamentos são aplicações afins bijectivas, portanto preservam a colinearidade e o paralelismo.
- Em geral, os re-dimensionamentos não são semelhanças, ou seja, **não** preservam ângulos. Os únicos re-dimensionamentos que são semelhanças são os re-dimensionamentos uniformes (i.e. as homotetias)
- Em geral, os re-dimensionamentos não são isometrias, ou seja **não** preservam distâncias. Os únicos re-dimensionamentos que são isometrias são os "re-dimensionamentos uniformes de parâmetros 1 ou -1", ou seja as homotetias de razão 1 ou -1, ou seja, a identidade ou as simetrias centrais!

Exemplo 1: Re-dimensionamentos no plano euclidiano

Seja $\mathcal{R}' = \{O', (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2))\}$ um referencial do plano euclidiano. O re-dimensionamento f de parâmetros α e β centrado em O nas direcções definidas por $\overrightarrow{v}_1$ e $\overrightarrow{v}_2$, representa-se, no referencial $\mathcal{R}' = \{O', (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)\}$ por:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ 1 \end{pmatrix}$$

se $M \equiv (x_1', x_2')_{\mathcal{R}}$ e $f(M) \equiv (y_1', y_2')_{\mathcal{R}'}$. Assim, o re-dimensionamento f, no **referencial inicial**, $\mathcal{R} = \{O, (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)\}$ pode obter-se realizando a mudança de coordenadas de M e $f(M)$. Por outras palavras, se

- $O' \equiv (\omega_1, \omega_2)_{\mathcal{R}}$;
- $\begin{cases} \overrightarrow{v}_1 & = & \alpha_{11}\overrightarrow{e}_1 & + & \alpha_{21}\overrightarrow{e}_2 \\ \overrightarrow{v}_2 & = & \alpha_{12}\overrightarrow{e}_1 & + & \alpha_{22}\overrightarrow{e}_2 \end{cases}$

tem-se

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \omega_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \omega_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \omega_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \omega_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ 1 \end{pmatrix}$$

Assim

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \omega_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \omega_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11}' & \alpha_{12}' & \omega_1' \\ \alpha_{21}' & \alpha_{22} & \omega_2' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

onde

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}' & \alpha_{12}' & \omega_1' \\ \alpha_{21}' & \alpha_{22} & \omega_2' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é a matriz inversa (mudança de coordenadas inversa) de

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \omega_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \omega_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Em geral, são feitos re-dimensionamentos em direcções ortogonais definidas por vectores unitários. Neste caso, o referencial $\mathcal{R}'$ é um referencial ortonormado e a mudança de coordenadas é uma mudança de referenciais ortonormados, com a consequente simplificação de operações):

$$\begin{pmatrix} \alpha'_{11} & \alpha'_{12} & \omega'_1 \\ \alpha'_{21} & \alpha_{22} & \omega'_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & -\omega_1\alpha_{11} - \omega_2\alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & -\omega_1\alpha_{12} - \omega_2\alpha_{22} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2: Re-dimensionamentos no espaço euclidiano tridimensional

Os re-dimensionamentos em espaços tridimensionais funcionam exactamente igual que no plano. Assim, são chamadas transformações tipo "scaling" ou re-dimensionamentos centrados na origem e de parâmetros α, β e γ nas direcções principais, às afinidades representadas matricialmente por:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

O caso $\alpha = \beta = \gamma$ corresponde às homotetias (re-dimensionamentos uniformes ou "uniform scaling"). Para obter re-dimensionamentos em direcções diferentes das direcções principais efectua-se simplesmente uma mudança de referencial (exactamente igual que no plano).

2.9 Homologias: transvecções e afinidades

Seja $\mathcal{A}$ um espao afim de dimensão n e $\mathcal{H}$ um hiperplano de $\mathcal{A}$. Uma **homologia de base** $\mathcal{H}$ é uma transformação afim bijectiva de $\mathcal{A}$, $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, cujo conjunto de pontos fixos é $\mathcal{H}$.

Propriedade Se $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ é uma homologia de base um hiperplano $\mathcal{H}$ então:

1. todo o hiperplano paralelo a $\mathcal{H}$ é enviado a um hiperplano paralelo a $\mathcal{H}$;
2. existe uma direcção tal que toda a recta nessa direcção é globalmente invariante.

De facto, é possível provar também que f verifica uma e uma só das seguintes propriedades:

1. Todo o hiperplano $\mathcal{H}_1$ paralelo e distinto de $\mathcal{H}$ é globalmente invariante ($f(\mathcal{H}_1) = \mathcal{H}_1$) e a restrição de f a $\mathcal{H}_1$ é uma translação por um vector paralelo à direcção globalmente invariante (neste caso as rectas globalmente invariantes são paralelas ao hiperplano $\mathcal{H}$);

   Globalmente invariante significa que se $A \in \mathcal{H}_1$ então $f(A) \in \mathcal{H}_1$, **NÃO** significa que os pontos de $\mathcal{H}_1$ sejam pontos fixos.

2. Todo o hiperplano $\mathcal{H}_1$ paralelo e distinto de $\mathcal{H}$ é enviado a um hiperplano paralelo e distinto $\mathcal{H}'_1$, as rectas globalmente invariantes não são paralelas ao hiperplano $\mathcal{H}$ e a restrição de f a essas rectas é uma homotetia de razão fixa k (em particular, a distância de $\mathcal{H}'_1$ a $\mathcal{H}$ é kd, com d a distância de $\mathcal{H}$ a $\mathcal{H}_1$). .

O primeiro tipo de homologia é chamado **transvecção**, o segundo tipo é chamado **afinidade de razão** k. Num referencial ortonormado escolhido "adequadamente" as representações matriciais de uma transvecção e uma afinidade de razão k são respectivamente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & r & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se usarmos referenciais não necessariamente ortonomados podemos considerar, no caso da transvecção, $r = 1$.

Exemplo A aplicação afim definida num plano euclidiano munido num referencial ortonormado por

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

isto é, a aplicação definida no referencial por

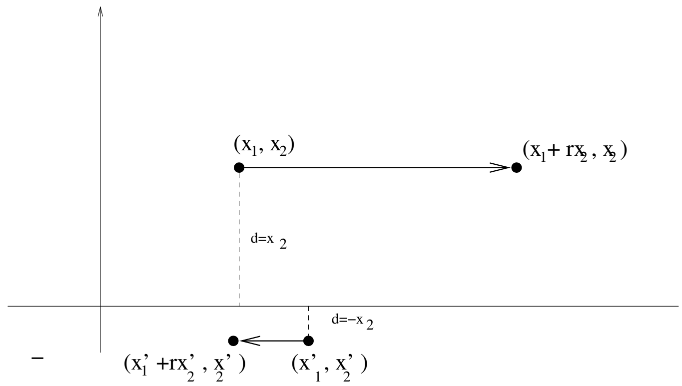
$$f(x_1, x_2) = (x_1 + rx_2, x_1)$$

é uma transvecção.

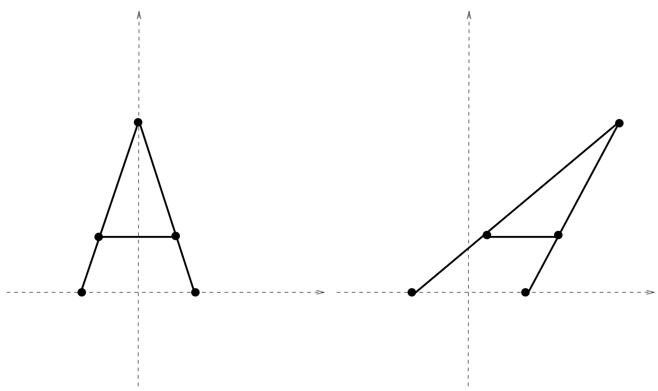
A transvecção indicada

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + rx_2, x_1)$$

fixa os pontos da recta $x_2 = 0$ (base da transvecção) e as rectas paralelas, $x_2 = b$ são globalmente invariantes:



Este tipo de transformação costuma chamar-se, em inglês, "*shear about the point O of factor r in the direction $\overrightarrow{e}_1$*". É usada frequentemente para desenhar letras em itálica:



Em geral, a *shear* sobre um ponto Ω, de factor r na direcção de um vector unitário $\overrightarrow{u}$ define-se de modo análgo. Salienta-se que esta terminologia assume o plano orientado o que permite determinar de modo único um vector unitário $\overrightarrow{v}$ ortogonal a $\overrightarrow{u}$.

Expressão analítica de uma transvecção num ponto Ω de factor r na direcção de um vector unitário $\overrightarrow{u}_1$.

Método:

1. Calcula-se a expressão matricial da transvecção f_O na origem do referencial, com parâmetro r e dirigida pelo vector unitário $\overrightarrow{e}_1 = (1, 0)$, isto é, $f_O(x_1, x_2) = (x_1, rx_1 + x_2)$ (ver exemplo anterior).

2. Calcula-se a expressão da transvecção $f_{O,\overrightarrow{u}_1}$ na origem do referencial, com parâmetro r e dirigida por um vector unitário $\overrightarrow{u}_1 = (v_1, v_2)$.

   Se $\overrightarrow{u}_1 = (v_1, v_2)$ é unitário, o vector unitário perpendicular no sentido directo é $\overrightarrow{u}_2 = (-v_2, v_1)$. A transvecção $f_{O,\overrightarrow{u}_1}$ pode obter-se como a composta

$$\rho^{-1} \circ f_O \circ \rho$$

   com ρ a rotação que verifica $\rho(\overrightarrow{u}_i) = \overrightarrow{e}_i$, para $i = 1, 2$. A representação matricial de $f_{O,\overrightarrow{u}_1}$ é portanto o producto:

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & 0 \\ -v_2 & v_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & -v_2 & 0 \\ v_2 & v_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + rv_1v_2 & rv_1^2 & 0 \\ -rv_2^2 & 1 - rv_1v_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   visto que $\overrightarrow{u}_1 = (v_1, v_2)$ é unitário e portanto $v_1^2 + v_2^2 = 1$

3. Se f é uma transvecção com origem $\Omega = (\omega_1, \omega_2)$, parâmetro r e dirigida pelo vector $\overrightarrow{u}_1$, tem-se

$$f = t^{-1} \circ f_{O,\overrightarrow{u}_1} \circ t$$

   onde $f_{O,\overrightarrow{u}_1}$ é transvecção na origem de parâmetro r e dirigida pelo vector $\overrightarrow{v}$ (caso anterior) e t é a translação que leva o ponto Ω à origem de coordenadas, i.e. , t está definida matricialmente por

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -w_1 \\ 0 & 1 & -w_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3 Isometrias do plano euclidiano e do espaço euclidiano tridimensional

3.1 Isometrias do plano

As translações, as reflexões em rectas e as reflexões deslizantes são isometrias do plano.

Propriedade 3.1 *Seja f uma isometria de um plano euclidiano distinta da identidade.*

1. *Se f possui uma recta r de pontos fixos então f é a reflexão na recta r;*
2. *Se f preserva a orientação e não possui pontos fixos então f é uma translação;*
3. *Se f não preserva a orientação e não possui pontos fixos então f é uma reflexão deslizante.*

O único caso não contemplado seria uma isometria do plano que possua um único ponto fixo.

Propriedade 3.2 *Se f é uma isometria do plano com um único ponto fixo Ω então f preserva a orientao e para todos os pontos M e N do plano tem-se que*

$$\angle(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega f(M)}) = \angle(\overrightarrow{\Omega N}, \overrightarrow{\Omega f(N)})$$

e f diz-se **rotação de centro Ω e ângulo orientado** *θ, com θ a medida de $\angle(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega f(M)})$.*

Rotação centrada na origem de ângulo orientado θ

A rotação centrada na origem de ângulo θ representa-se matricialmente, num referencial ortonormado, como:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rotação centrada num ponto Ω de ângulo orientado θ

Seja $\Omega = (q_1, q_2)$ um ponto do plano euclidiano. A rotação ρ de ângulo θ com centro Ω pode obter-se como a aplicação composta:

$$\rho = t^{-1} \circ \rho_O \circ t$$

onde ρ_O é a rotação na origem de ângulo θ e t é a translação do ponto Ω ao origem, isto é, a translação pelo vector $(-q_1, q_2)$. Assim, a matriz que representa ρ obtém-se como o produto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & q_1 \\ 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -q_1 \\ 0 & 1 & -q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Classificação das isometrias do plano

As isometrias do plano só podem ser um dos quatro tipos de transformações indicados anteriormente: translações, rotações, reflexões e reflexões deslizantes. Ora bem, uma isometria qualquer admite uma representação matricial do tipo:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -\epsilon b & \omega_1 \\ b & \epsilon a & \omega_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

com $a^2 + b^2 = 1$ e $\epsilon = \pm 1$.

E uma nova questão seria ...

como identificar o tipo de isometria do plano a partir da representação analítica?

O tipo de isometria pode obter-se atendendo a dois elementos geométricos:

– o conjunto de pontos fixos[2];

– se a transformação preserva ou não a orientação.

Obtemos a seguinte classificação:

Determinante	**Outras características**	**Tipo de isometria**
$\epsilon = 1$	$a = 1$ e $(q_1, q_2) = (0, 0)$	*Identidade*
(Preservam	$a = 1$ e $(q_1, q_2) \neq (0, 0)$	*Translação*
a orientação)	$a \neq 1$	*Rotação* (*)
$\epsilon = -1$ (Invertem	Tem pontos fixos	*Reflexão*
a orientação)	Não tem pontos fixos	*Reflexão deslizante*

(*) Se $\epsilon = 1$ e $a = -1$ a rotação é uma *simetria central*

[2]O conjunto de pontos fixos de uma isometria do plano, distinta da identidade,por tratar-se de uma aplicação afim, só pode ser $\emptyset$, ou um ponto ou uma recta

3.2 Isometrias do espaço tridimensional

No espaço tridimensional existem só 6 tipos diferentes de isometrias: *Translações, Rotações em torno a um eixo, Reflexões num plano, Reflexões deslizantes, Reflexões rotatórias e "twist", ou transformação do sacarolhas.* As três últimas isometrias são compostas dos três primeiros tipos:

- Reflexões deslizantes: composta de uma reflexão e uma translação por um vector paralelo ao plano da reflexão;
- Reflexões rotatórias: composta de uma reflexão e uma rotação em torno a um eixo perpendicular ao plano da reflexão (se o ângulo é π é uma simetria central);
- O "twist" o transformação sacarolhas: composta de uma rotação em torno a um eixo e uma translação por um vector paralelo a esse eixo.

Assim, para descrever matricialmente as isometrias do plano só se precisa das matrices das translações, das rotações em torno a um eixo e das reflexões num plano.

Rotação em torno de um eixo de ângulo θ

Sejam $\overrightarrow{u}$ um vector **unitário** do espaço e r uma recta dirigida por $\overrightarrow{u}$. Se $\theta \neq \pi$, existem duas rotações distintas de ângulo θ em torno à recta r, mas só numa delas o sentido da rotação é coerente (usando a orientação do espaço) com o vector $\overrightarrow{u}$ fixado. Esta rotação designar-se-á por $Rot_r(\theta, \overrightarrow{u})$. Note-se que a outra rotação é simplesmente $Rot_r(-\theta, \overrightarrow{u})$ ou ainda, $Rot_r(\theta, -\overrightarrow{u})$.

Os casos mais simples são as rotações en torno dos eixos coordenados, representados respectivamente pelas matrices:

$$Rot(\theta, \overrightarrow{e}_3) : \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Rot(\theta, \overrightarrow{e}_2) : \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Rot(\theta, \overrightarrow{e}_1) : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotação em torno de um eixo que passa pela origem.

Seja $\overrightarrow{u}$ um vector **unitário** do espaço e r_O a recta que passa pela origem e está dirigida por $\overrightarrow{u}$. Designamos por $Rot_O(\theta, \overrightarrow{u})$ a rotação em torno deste eixo. Recorde-se que, se M é um ponto do espaço, tem-se

$$M = O + \overrightarrow{OM} = O + (proj_{<\overrightarrow{u}>}(\overrightarrow{OM}) + proj_{<\overrightarrow{u}>^\perp}(\overrightarrow{OM}))$$

com $proj_{<\overrightarrow{u}>}$ a projecção ortogonal na recta $<\overrightarrow{u}>$ e $proj_{<\overrightarrow{u}>^\perp}$ a projecção ortogonal no plano perpendicular a esta recta. Recorde-se que:

$$proj_{<\overrightarrow{u}>}(\overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{u}$$

e

$$proj_{<\overrightarrow{u}>^\perp}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OM} - (\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{u}$$

A rotação do ponto M em torno do eixo definido por $\overrightarrow{u}$ obtém-se mantendo o primeiro vector desta decomposição fixo e rodando o segundo, no plano perpendicular a $\overrightarrow{u}$.

O produto vectorial $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OM}$ é perpendicular a $\overrightarrow{u}$ e forma com $proj_{<\overrightarrow{u}>^\perp}(\overrightarrow{OM})$ uma base ortogonal deste plano. Este dois vectores tem o mesmo comprimento e portanto a rotação de $proj_{<\overrightarrow{u}>^\perp}(\overrightarrow{OM})$ é o vector

$$(\cos\theta)(proj_{<\overrightarrow{u}>^\perp})(\overrightarrow{OM}) + (\sin\theta)(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OM})$$

Em resumo, se M' é o ponto obtido pela rotação de M em torno do eixo dirigido por $\overrightarrow{u}$, tem-se

$$M' = O + (\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{u} + \cos\theta(\overrightarrow{OM} - (\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{u}) + \sin\theta(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OM})$$

Suponha-se que $\overrightarrow{u} = (A, B, C)$ (com $A^2 + B^2 + C^2 = 1$, visto que $\overrightarrow{u}$ é unitário). Desenvolvendo a igualdade anterior, obtemos que

$$Rot_O(\theta, \overrightarrow{u}) : \begin{pmatrix} c + (1-c)A^2 & (1-c)AB - sC & (1-c)AC + sB & 0 \\ (1-c)AB + sC & c + (1-c)B^2 & (1-c)BC - sA & 0 \\ (1-c)AC - sB & (1-c)BC + sA & c + (1-c)C^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

com $c = \cos\theta$ e $s = \sin\theta$.

Rotação em torno a um eixo qualquer.

Seja r uma recta que passa por um ponto A e está dirigida por um vector $\overrightarrow{u}$. A rotação em torno de r dirigida por $\overrightarrow{u}$ pode obter-se como a composta

$$Rot_r(\theta, \overrightarrow{u}) = t^{-1} \circ Rot_O(\theta, \overrightarrow{u}) \circ t$$

onde t é a translação que transforma o ponto A no origem do referencial O e $Rot_O(\theta, \overrightarrow{u})$ é a rotação no eixo que passa pela origem e é paralelo à recta r.

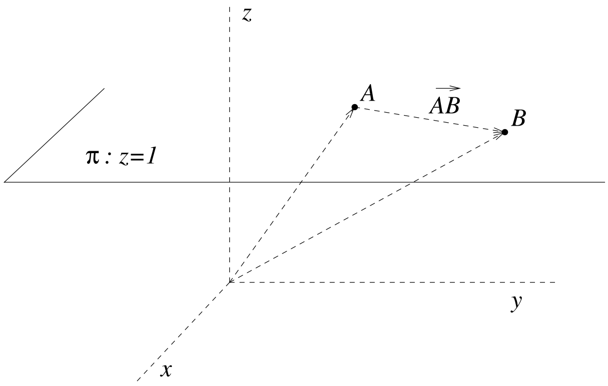
4 As projecções perspectivas

4.1 As coordenadas homogéneas e o plano projectivo.

Recorde-se que, se $\mathcal{A}$ é um plano afim munido de um referencial $\mathcal{R} = \{O, (\vec{e}_1, \vec{e}_2)\}$ e A é um ponto do plano tal que $A \equiv (a_1, a_2)_{\mathcal{R}}$, chamávamos coordenadas homogéneas de ponto A a

$$(a_1, a_2, 1)$$

Geometricamente, podemos interpretar as coordenadas homogéneas como as coordenadas obtidas ao *"encaixar"*[3] o plano afim $\mathcal{A}$ em $\mathbf{R}^3$ como o plano π de equação $z = 1$:



O ponto $A = (a_1, a_2)$ de $\mathcal{A}$ identifica-se então com o vector $(a_1, a_2, 1)$ de $\mathbf{R}^3$. Note-se que:

1. Se $A = (a_1, a_2, 1)$ e $B = (b_1, b_2, 1)$ são coordenadas homogéneas de dois pontos, as coordenadas homogéneas do vector $\overrightarrow{AB}$ são precisamente $(b_1 - a_1, b_2 - a_2, 0)$.

2. *Todo o ponto* do plano afim corresponde univocamente com uma recta vectorial de $\mathbf{R}^3$ passando pela origem de coordenadas. Podemos então identificar o ponto A com a recta r_A do espaço tridimensional que passa pela origem e pelo ponto A.

3. Os vectores (não nulos) dessa recta r_A são da forma

$$\lambda(a_1, a_2, 1) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda)$$

para $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$. Equivalentemente, os vectores da recta r_A são da forma

$$(A_1, A_2, A_3)$$

com $a_1 = A_1/A_3$ e $a_2 = A_2/A_3$. Toda tripla (A_1, A_2, A_3) verificando esta condição diz-se **coordenadas homogéneas** de A (no referencial $\mathcal{R}$).

4. As coordenadas homogéneas assim definidas do ponto A são *únicas a menos multiplicação por uma constante não nula*.

[3]O termo matemático usual é **mergulhar**.

A notação usual das coordenadas homogéneas é

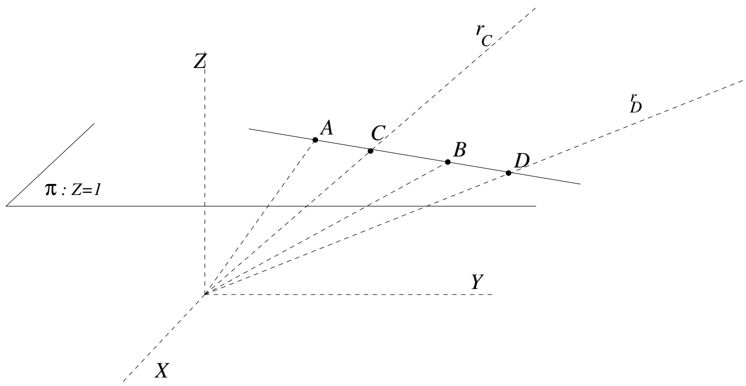
$$A \equiv [A_1 : A_2 : A_3]_{\mathcal{R}}$$

Os parêntesis rectos são usados porque as coordenadas homogéneas não são únicas

$$[A_1 : A_2 : A_3] = [2A_1 : 2A_2 : 2A_3] = [-A_1 : -A_2 : -A_3] = ...$$

e correspondem com a notação usual das relações de equivalência.

Considere agora a recta afim s de $\mathcal{A}$ que passa pelos pontos A e B:



No mergulho do plano afim $\mathcal{A}$ como o plano $\pi : z = 1$ no espaço vectorial $\mathbf{R}^3$, cada ponto dessa recta afim corresponde com uma recta vectorial de $\mathbf{R}^3$ contida num plano. Em coordenadas homogéneas, se

$$A = [a_1 : a_2 : 1], \qquad \text{e} \qquad B = [b_1 : b_2 : 1]$$

o plano vectorial definido pelos vectores $(a_1, a_2, 1)$ e $(b_1, b_2, 1)$ é dado em $\mathbf{R}^3$ pela equação cartesiana:

$$(a_2 - b_2)X + (b_1 - a_1)Y + (a_1 b_2 - b_1 a_2)Z = 0$$

Note-se que a equação da recta que passa por A e por B é precisamente:

$$(a_2 - b_2)x + (b_1 - a_1)y + (a_1 b_2 - b_1 a_2) = 0$$

Em geral, se s é uma recta de $\mathcal{A}$ definida por uma equação cartesiana

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$

o plano vectorial definido pela recta s ao encaixar $\mathcal{A}$ em $\mathbf{R}^3$ é definido pela equação cartesiana

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0$$

Também, toda a equação do tipo

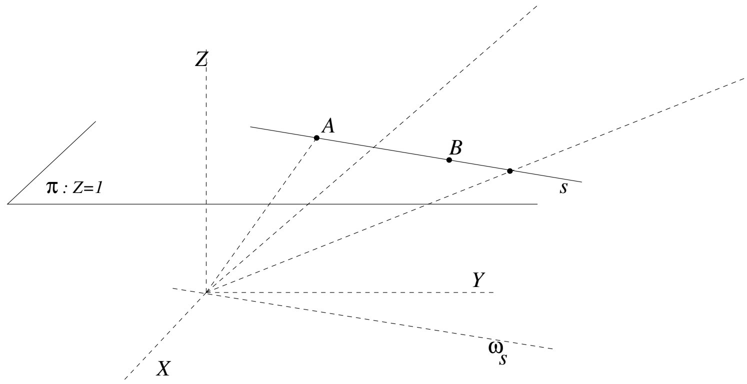
$$\lambda\alpha x + \lambda\beta y + \lambda\gamma = 0$$

para $\lambda \neq 0$ define a mesma recta de $\mathcal{A}$, assim, de modo análogo às coordenadas dos pontos, costumam definir-se as coordenadas homogéneas da recta s como

$$[\alpha : \beta : \gamma]_{\mathcal{R}}$$

onde os parênteses rectos significam de novo *"coordenadas únicas a menos multiplicação por uma constante"*.

Observe-se que, na identificação dos pontos da recta s com rectas vectoriais (com *raios* a sair da origem de coordenadas), há uma recta vectorial que não se identifica a nenhum ponto de s: a recta w_s paralela a s passando pela origem de coordenadas.



A recta w_s é a intersecção do plano $\alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0$ com o plano horizontal $Z = 0$ e está gerada pelo vector $(\beta, -\alpha, 0)$.

Definição 4.1 Chamamos **plano projectivo real** e designamos por $\mathbf{P}^2\mathbf{R}$ ao conjunto cujos elementos são as rectas vectoriais de $\mathbf{R}^3$, ou seja, ao conjunto quociente

$$\mathbf{P}^2\mathbf{R} = (\mathbf{R}^3 - \{0\})/\sim$$

onde $\sim$ é a relação de equivalência definida entre vectores não nulos de $\mathbf{R}^3$ por

$$\overrightarrow{v} \sim \overrightarrow{w} \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0, \overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{w}$$

Se $\overrightarrow{v} = (X, Y, Z)$, a classe de equivalência de $\overrightarrow{v}$ designa-se por $[X : Y : Z]$.

Por definição, **um ponto do plano projectivo $\mathrm{P}^2\mathrm{R}$ é uma recta vectorial de R^3.**

Recordamos que no plano projectivo as coordenadas dos pontos $[X:Y:Z]$ estão definidas a menos multiplicação por uma constante não nula. Assim, para definir subconjuntos do plano projectivo através de coordenadas, é frequente considerar-se equações $F=0$ onde F é tal que

$$F(\lambda X, \lambda Y, \lambda Z) = \lambda^k F(X,Y,Z)$$

para algum $k \in \mathbf{N}$. Este tipo de funções são chamadas homogéneas de grau k.

Exemplos 4.2

1. Se F é um polinómio homogéneo de grau 1, não nulo, isto é,

   $$F(X,Y,Z) = \alpha X + \beta Y + \gamma Z,$$

   o conjunto
   $$\{[X:Y:Z] \in \mathbf{P}^2\mathbf{R} : F(X,Y,Z) = 0\}$$
   diz-se **uma recta projectiva**.

   Observe-se que os pontos do plano projectivo pertencentes a uma recta projectiva são rectas vectoriais contidas num plano.

2. Se F é um polinómio homogéneo de grau 2, não nulo, isto é,

   $$F(X,Y,Z) = a_{11}X^2 + a_{12}XY + a_{13}XZ + a_{22}Y^2 + a_{23}YZ + a_{33}Z^2,$$

   o conjunto
   $$\{[X:Y:Z] \in \mathbf{P}^2\mathbf{R} : F(X,Y,Z) = 0\}$$
   diz-se **uma cónica projectiva**.

Usando o mergulho do plano afim $\mathcal{A}$ em $\mathbf{R}^3$ observamos que todo o ponto do plano projectivo (i.e. *toda a recta vectorial de* $\mathbf{R}^3$) corresponde com um e um só ponto do plano afim $\mathcal{A}$ e que os únicos pontos do plano projectivo que não se identificam com pontos de $\mathcal{A}$ são pontos do tipo $[X:Y:0]$ (rectas vectoriais que não intersectam o plano π). Assim, se designarmos por $\mathbf{r}_\infty$ a recta projectiva de $\mathbf{P}^2\mathbf{R}$ definida pela equação $Z=0$, tem-se

$$\mathbf{P}^2\mathbf{R} \equiv \mathcal{A} \cup \mathbf{r}_\infty$$

isto é, *o plano projectivo é reunião de um plano afim e de uma recta projectiva*. E note-se ainda que os pontos desta recta projectiva $\mathbf{r}_\infty$ são as direcções das rectas afins de $\mathcal{A}$, por outras palavras *o plano projectivo obtém-se a partir de um plano afim adicionando um ponto por cada família de rectas paralelas, que se diz* **ponto no infinito** *dessas família de rectas*. A recta $\mathbf{r}_\infty$ diz-se **recta no infinito** do plano afim $\mathcal{A}$.

Na correspondência anterior
$$\mathbf{P}^2\mathbf{R} \equiv \mathcal{A} \cup \mathbf{r}_\infty$$
um ponto do plano projectivo $[X:Y:Z]$ não contido na recta $\mathbf{r}_\infty$, isto é, tal que $Z \neq 0$, define o *ponto afim* $(X/Z, Y/Z)$ e um ponto do plano projectivo contido na recta do infinito define *a direcção definida pelo vector* (X,Y) do plano afim.

4.2 Transformações afins e coordenadas homogéneas.

Sejam $\mathcal{A}$ um plano afim e $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ uma transformação afim. Num referencial $\mathcal{R}$, se $M = (x_1, x_2)$ e $f(M) = (y_1, y_2)$, podemos representar matricialmente:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & v_1 \\ a_{21} & a_{22} & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sejam $[X_1 : X_2 : W]$ coordenadas homogéneas do ponto M, tem-se

$$(X_1, X_2, W) = (Wx_1, Wx_2, W)$$

com $W \neq 0$, logo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & v_1 \\ a_{21} & a_{22} & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & v_1 \\ a_{21} & a_{22} & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Wx_1 \\ Wx_2 \\ W \end{pmatrix}$$

$$= W \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & v_1 \\ a_{21} & a_{22} & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Wy_1 \\ Wy_2 \\ W \end{pmatrix}$$

Assim, ao multiplicarmos umas coordenadas homogéneas de um ponto M pela matriz que representa a aplicação afim f obtemos umas coordenadas homogéneas do ponto $f(M)$. Na realidade, obtemos umas coordenadas homogéneas de $f(M)$ multiplicando por qualquer matriz da forma λA, com A a matriz considerada na representação matricial de f. Assim, as matrices da forma:

$$\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda v_1 \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda v_2 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

dizem-se representações matriciais em coordenadas homogéneas de f. De novo, para recuperar a representação matricial usual basta dividir a matriz pelo elemento da última fila e coluna.

Nota: Ao considerarmos $\mathcal{A}$ mergulhado no plano projectivo $\mathbf{P}^2\mathbf{R}$ cada transformação afim bijectiva f de $\mathcal{A}$ induz uma aplicação bijectiva

$$\overline{f} : \mathbf{P}^2\mathbf{R} \to \mathbf{P}^2\mathbf{R}$$

definida por $\overline{f}([v]) = [Av]$, onde A é a representação matricial de f e $[v]$ é um ponto do plano projectivo (a recta vectorial gerada por v).

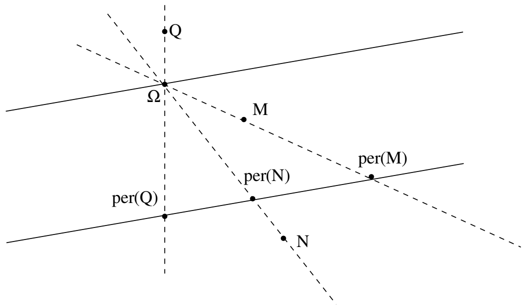
Observe-se que esta aplicação $\overline{f}$ é a passagem ao quociente de um isomorfismo linear de $\mathbf{R}^3$ em $\mathbf{R}^3$ representado matricialmente por A que deixa globalmente invariante o plano vectorial $X_3 = 0$. Em geral, todo isomorfismo linear de $\mathbf{R}^3$ define uma aplicação bijectiva no plano projectivo $\mathbf{P}^2\mathbf{R}$ chamada **projectividade de Poncelet**. As transformações afins obtém-se a partir das projectividades de Poncelet que deixam globalmente invariante a recta projectiva do infinito.

4.3 Os processos de projecção e secção

Sejam $\mathcal{A}$ um plano afim, Ω um ponto de $\mathcal{A}$ e r uma recta de $\mathcal{A}$ que não passa por Ω.

- Se M é um ponto qualquer de $\mathcal{A}$, chamamos projecção de M desde Ω à recta afim r_M definida por M e Ω;
- Se s é uma recta qualquer de $\mathcal{A}$, chamamos secção por r ao ponto afim intersecção de s e r;
- A sucessão dos dois processos anteriores diz-se **projecção perspectiva desde Ω na recta r**, isto é, a projecção perspectiva desde Ω na recta r do ponto M é o ponto $per(M)$ de intersecção

$$per(M) = r \cap r_M$$

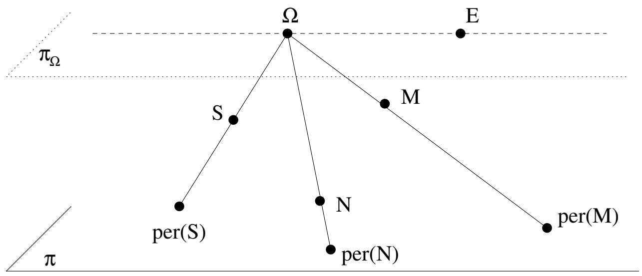


O ponto Ω diz-se **foco** ou **centro** da projecção perspectiva e r diz-se **recta imagem** da projecção perspectiva. Note-se que existe uma recta, a recta paralela a r que passa por Ω, na qual a projecção perspectiva não está definida. Esta recta é chamada **recta de pontos excepcionais**.

De modo análogo, se $\mathcal{A}$ é um espaço afim tridimensional, Ω um ponto de $\mathcal{A}$ e π um plano afim de $\mathcal{A}$ que não passa por Ω.

- Se M é um ponto qualquer de $\mathcal{A}$, chamamos projecção de M desde Ω à recta afim r_M definida por M e Ω;
- Se s é uma recta qualquer de $\mathcal{A}$, chamamos secção por π ao ponto afim intersecção de s e π;
- A sucessão dos dois processos anteriores diz-se **projecção perspectiva desde Ω no plano π**, isto é, a projecção perspectiva desde Ω no plano π do ponto M é o ponto $per(M)$ de intersecção

$$per(M) = \pi \cap r_M$$

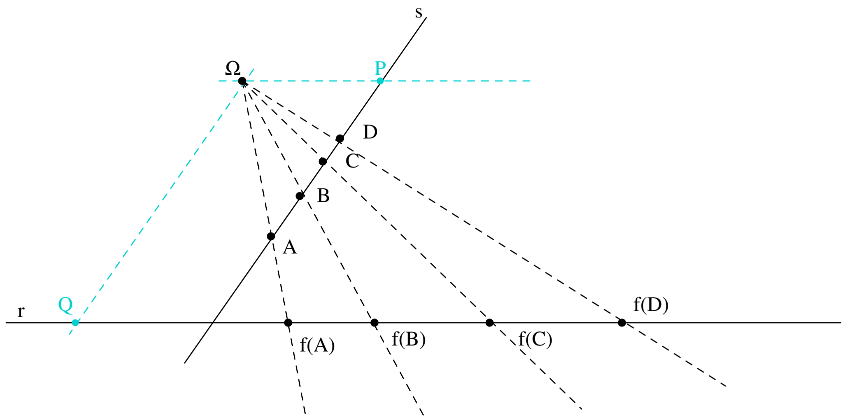


Costumam chamar-se **propriedades projectivas** as propriedades preservadas pelos processos de projecção e secção anteriores.

Exemplos 4.3

1. Sejam $\mathcal{A}$ um plano afim, Ω um ponto de $\mathcal{A}$ e r e s duas rectas de $\mathcal{A}$ que não passam por Ω. Usando a projecção desde Ω e a secção por r obtemos a restrição da projecção perspectiva:

$$f : s - \{P\} \longrightarrow r - \{Q\}$$



Esta aplicação não é uma aplicação afim, não preserva distâncias, nem proporções entre distâncias no entanto, preserva **duplas proporções**, isto é, se A, B, C e D são quatro pontos de s, distintos de P, então

$$\frac{d(A,C)}{d(C,B)} : \frac{d(A,D)}{d(D,B)} = \frac{d(f(A),f(C))}{d(f(C),f(B))} : \frac{d(f(A),f(D))}{d(f(D),f(B))}$$

Este quociente é chamado **razão dupla**.

2. Sejam $\mathcal{A}$ um espaço afim tridimensional, Ω um ponto de $\mathcal{A}$ e π e π' dois planos de $\mathcal{A}$ que não passam por Ω. Usando a projecção desde Ω e a secção por π' obtemos a restrição da projecção perspectiva:

$$f : \pi - r \longrightarrow \pi' - s$$

De novo, esta aplicação não preserva distâncias, nem ângulos ... no entanto, preserva colinearidade, razões duplas entre quatro pontos (como no exemplo anterior) e transforma cónicas em cónicas (isto é, uma elipse pode ser transformada numa elipse, numa hipérbole ou numa parábola)

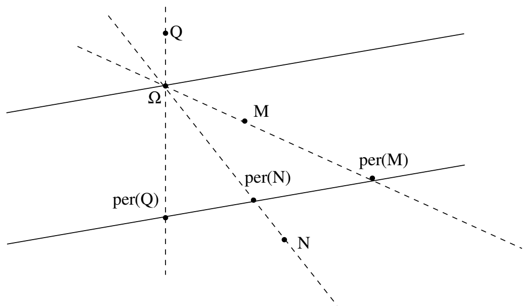
NOTA: Se considerarmos o plano afim $\mathcal{A}$ mergulhado no plano projectivo $\mathbf{P}^2\mathbf{R}$ os processos anteriores correspondem com

- Considerar o plano vectorial definido por dois vectores a e ω;
- Considerar a recta vectorial intersecção de dois planos vectoriais σ e τ;
- Realizar os dois processos anteriores.

4.4 Projecções perspectivas no plano.

Sejam $\mathcal{A}$ um plano afim munido de um referencial, r uma recta afim de $\mathcal{A}$ e Ω um ponto de $\mathcal{A}$ exterior à recta r. Seja r_Ω a recta paralela a π que passa por Ω.

Recorde-se que a **projecção perspectiva** em r desde o ponto Ω é a transformação geométrica que atribui a cada ponto M do espaço, tal que $M \notin r_\Omega$, o ponto $per(M)$ que pertence à recta r e à recta que passa por Ω e por M.



Analiticamente, suponha-se $\mathcal{A}$ munido de um referencial, com $\Omega = (\omega_1, \omega_2)$ e r uma recta de equação

$$Ax + By + d = 0$$

Sejam $M = (x, y)$ um ponto qualquer de $\mathcal{A}$ (que não pertence à recta de pontos excepcionais) e $per(M)$ a projecção perspectiva desde Ω em r de M. O ponto $per(M)$ pertence à recta que passa por Ω e está dirigida por $\overrightarrow{\Omega M}$, portanto existe λ tal que

$$per(M) = \Omega + \lambda\overrightarrow{\Omega M} = (\omega_1, \omega_2) + \lambda(x - \omega_1, y - \omega_2) = (\omega_1 + \lambda(x - \omega_1), \omega_2 + \lambda(y - \omega_2))$$

Como $per(M)$ pertence à recta r, tem-se que

$$A(\omega_1 + \lambda(x - \omega_1)) + B(\omega_2 + \lambda(y - \omega_2)) + d = 0$$

donde

$$\lambda = -\frac{A\omega_1 + B\omega_2 + d}{A(x - \omega_1) + B(y - \omega_2)}$$

e então

$$per(M) = (\omega_1, \omega_2) - \frac{A\omega_1 + B\omega_2 + d}{A(x - \omega_1) + B(y - \omega_2)}(x - \omega_1, y - \omega_2)$$

Desenvolvendo a expressão anterior obtemos:

$$per(M) = \frac{1}{Ax + By - (A\omega_1 + B\omega_2)}(-(B\omega_1 + d)x + B\omega_1 y + d\omega_1, A\omega_2 x - (A\omega_2 + d)y + d\omega_2)$$

Esta transformação geométrica não é uma transformação afim, não admite uma representação matricial do tipo visto no capítulo anterior. No entanto, observe-se que o produto

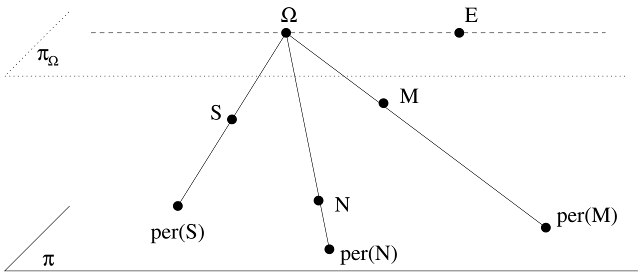
$$\begin{pmatrix} -(B\omega_1 + d) & B\omega_1 & d\omega_1 \\ A\omega_2 & -(A\omega_2 + d) & d\omega_2 \\ A & B & -(A\omega_1 + B\omega_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

define **umas coordenadas homogéneas** de $per(M)$.

4.5 Projecções perspectivas no espaço tridimensional.

Sejam $\mathcal{A}$ um espaço tridimensional munido de um referencial, π um plano de $\mathcal{A}$ e Ω um ponto de $\mathcal{A}$ exterior a π. Seja π_Ω o plano paralelo a π que passa por Ω.

Recorde-se que a **projecção perspectiva** no plano π desde o ponto Ω é a transformação geométrica que atribui a cada ponto M do espaço, tal que $M \notin \pi_\Omega$, o ponto $per(M)$ que pertence ao plano π e a recta que passa por Ω e por M.



O plano π diz-se **plano imagem** da projecção perspectiva e o ponto Ω diz-se **foco**, **olho** ou ainda **câmara** da projecção. Os pontos do plano π_Ω são chamados **pontos excepcionais**.

Exemplo: Perspectiva no plano $x_3 = 0$ desde o foco $\Omega = (0, 0, w)$.

Seja $M = (x_1, x_2, x_3)$ um ponto do espaço afim que não pertence ao plano excepcional (neste caso, é o plano definido pela equação $x_3 - w = 0$). A recta r_M que passa pelos pontos Ω e M é:

$$r_M = C+ < \overrightarrow{CM} >= \{(0, 0, w) + t(x_1, x_2, x_3 - w) \ : \ t \in \mathbf{R}\}$$

Esta recta intersecta o plano de equação $x_3 = 0$ quando $0 = w + t(x_3 - w)$, isto é, quando $t = \dfrac{w}{w - x_3}$ e portanto

$$per(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, w) + \frac{w}{w - x_3}(x_1, x_2, x_3 - w) = (\frac{wx_1}{w - x_3}, \frac{wx_2}{w - x_3}, 0)$$

Observe-se que esta transformação geométrica (que **não é uma transformação afim**) não pode expressar-se do modo habitual usando matrices. Ora bem, se usarmos coordenadas homogéneas, o ponto $per(M)$ pode definir-se pela quádrupla:

$$(wx_1, wx_2, 0, w - x_3)$$

e podemos escrever matricialmente:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ W' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

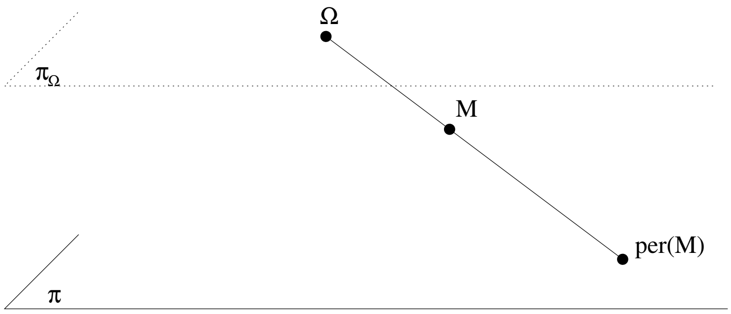
com (Y_1, Y_2, Y_3, W') coordenadas homogéneas de $per(M)$.

Projecção perspectiva num plano que passa pela origem.

Seja per a projecção perspectiva em π desde $\Omega = (w_1, w_2, w_3)$, onde π é um plano definido pela equação cartesiana

$$Ax + By + Cz = 0$$

(neste caso, **não** é necessário considerar o vector normal $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$ unitário).



Seja M um ponto do espaço que não pertence ao plano π_Ω paralelo a π que passa por Ω. O ponto $per(M)$ pertence à recta que passa por Ω e está dirigida por $\overrightarrow{\Omega M}$, portanto existe λ tal que

$$per(M) = \Omega + \lambda\overrightarrow{\Omega M}$$

equivalentemente, existe λ tal que $\overrightarrow{\Omega per(M)} = \lambda\overrightarrow{\Omega M}$. Por outro lado, $per(M)$ pertence ao plano π e como a origem O de coordenadas também pertence a π, tem-se que

$$\overrightarrow{Oper(M)} \cdot \overrightarrow{n} = 0$$

donde

$$0 = (\overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega per(M)}) \cdot \overrightarrow{n} = \overrightarrow{O\Omega} \cdot \overrightarrow{n} + \lambda\overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{n}$$

logo

$$\lambda = -\frac{\overrightarrow{O\Omega} \cdot \overrightarrow{n}}{\overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{n}}$$

Em conclusão

$$per(M) = \Omega - \frac{\overrightarrow{O\Omega} \cdot \overrightarrow{n}}{\overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{n}}\overrightarrow{\Omega M}$$

Note-se que, como $M \notin \pi_\Omega$ e $\Omega \notin \pi$, então os produtos escalares $\overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{n}$ e $\overrightarrow{O\Omega} \cdot \overrightarrow{n}$ são não nulos. Para simplificar a escrita, sejam $d = \overrightarrow{O\Omega} \cdot \overrightarrow{n}$ e $k_M = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{n}$. Tem-se

$$\overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{n} = (\overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{OM}) \cdot \overrightarrow{n} = k_M - d$$

logo

$$per(M) = \Omega - \frac{d}{k_M - d}\overrightarrow{\Omega M}$$

Salienta-se que o escalar k_M depende do ponto M. Se $M = (x_1, x_2, x_3)$, então

$$per(x_1, x_2, x_3) = (w_1, w_2, w_3) - \frac{d}{k_M - d}(x_1 - w_1, x_2 - w_2, x_3 - w_3)$$

ou, equivalentemente

$$per(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{k_M - d}\left((k_M - d)(w_1,w_2,w_3) - d(x_1 - w_1, x_2 - w_2, x_3 - w_3)\right)$$

donde

$$per(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{k_M - d}(k_M w_1 - dx_1, k_M w_2 - dx_2, k_M w_3 - dx_3)$$

Observe-se que, como k_M depende do ponto M, o cálculo de $per(M)$ não pode ser feito através da representação matricial usual de uma aplicação afim. Ora bem, o ponto $per(M)$ admite as seguintes coordenadas homogéneas:

$$(k_M w_1 - dx_1, k_M w_2 - dx_2, k_M w_3 - dx_3, k_M - d)$$

Como

$$d = \overrightarrow{O\Omega} \cdot \overrightarrow{n} = Aw_1 + Bw_2 + Cw_3 \qquad \text{e} \qquad k_M = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{n} = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3$$

obtemos a seguinte representação matricial da projecção perspectiva:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ W' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1A - d & w_1B & w_1C & 0 \\ w_2A & w_2B - d & w_2C & 0 \\ w_3A & w_3B & w_3C - d & 0 \\ A & B & C & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

onde (Y_1, Y_2, Y_3, W') são umas coordenadas homogéneas do ponto $per(M)$.

Exemplo No exemplo inicial, considerou-se a projecção no plano de equação $x_3 = 0$ desde o ponto $\Omega = (0, 0, w)$. Substituindo na expressão obtida, como

$$\overrightarrow{n} = (0,0,1) \qquad \text{e} \qquad \Omega = (0,0,w)$$

tem-se $d = w$ e então esta projecção perspectiva representa-se por

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ W' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esta representação coincide, a menos multiplicação por -1, com a representação matricial obtida inicialmente.

Projecção perspectiva num plano qualquer.

A projecção perspectiva num plano π desde um ponto Ω pode obter-se como a composta[4]:

$$per = t^{-1} \circ per_O \circ t$$

onde t é a translação que transforma um ponto A do plano π no origem do referencial O e per_O é a projecção perspectiva desde o ponto $t(\Omega)$ no plano π_O paralelo a π e incidente na origem de coordenadas.

[4]Esta aplicação composta **NÃO** está definida em todo o espaço $\mathcal{A}$

5 Exercícios resolvidos

Para simplificar as notações, num espaço afim munido de um referencial, os pontos e os vectores identificar-se-ão com as suas coordenadas no referencial e na base associada ao referencial, respectivamente.

Transformações do plano

1. Seja $\mathcal{A}$ um plano afim euclidiano munido de um referencial ortonormado. Determine a expressão analítica de:

   (a) a simetria central com centro $\Omega = (13, -2)$;

   (b) a homotetia com razão -3 e centro $\Omega' = (5, -7)$;

   (c) a projecção ortogonal na recta r definida pela equação cartesiana
   $$4x + 3y + 1 = 0;$$

   (d) a reflexão ortogonal na recta r anterior.

   (Resolução)

   (a) A simetria central s com centro Ω está definida por $s(M) = \Omega - \overrightarrow{\Omega M}$. Se $M = (x, y)$ e $\Omega = (13, -2)$ tem-se
   $$s(x, y) = (13, -2) - (x - 13, y - (-2)) = (26 - x, -4 - y).$$

   (b) A homotetia h com razão -3 e centro Ω' está definida por $h(M) = \Omega' + 3\overrightarrow{\Omega' M}$. Se $M = (x, y)$ e $\Omega' = (5, -7)$ tem-se
   $$h(x, y) = (5, -7) + 3(x - 5, y - (-7)) = (-10 + 3x, 14 + 3y).$$

   (c) Seja r a recta definida pela equação cartesiana
   $$4x + 3y + 1 = 0$$
   Considere-se um vector normal $\overrightarrow{n}$ à recta r, por exemplo $\overrightarrow{n} = (4, 3)$, e A um ponto de r, por exemplo $A = (-1, 1)$. Se $M \in \mathcal{A}$ e $p(M)$ é a projecção ortogonal de M em r tem-se
   $$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{Ap(M)} + \overrightarrow{p(M)M} = \overrightarrow{Ap(M)} + \lambda\overrightarrow{n}$$
   Se $M = (x, y)$, tem-se $\overrightarrow{AM} = (x + 1, y - 1)$ e, como $\overrightarrow{n}$ é ortogonal ao vector $\overrightarrow{Ap(M)}$,
   $$(x + 1, y - 1) \cdot (4, 3) = \lambda(4, 3) \cdot (4, 3)$$
   donde $\lambda = \dfrac{4x + 3y + 1}{25}$ e $\overrightarrow{p(M)M} = \dfrac{4x + 3y + 1}{25}\overrightarrow{n}$. Assim
   $$p(M) = M + \overrightarrow{Mp(M)} = M - \overrightarrow{p(M)M} = (x, y) - \left(\frac{4x + 3y + 1}{25}\right)(4, 3)$$
   logo
   $$p(x, y) = \left(\frac{9x - 12y - 4}{25}, \frac{-12x + 16y - 3}{25}\right)$$

(d) *Usando as notações da alínea anterior, se σ é a reflexão na recta r, tem-se*

$$\sigma(M) = M + 2\overrightarrow{Mp(M)} = M - 2\overrightarrow{p(M)M}$$

donde

$$\sigma(x,y) = (x,y) - 2\left(\frac{4x+3y+1}{25}\right)(4,3) = \left(\frac{-7x-24y-8}{25}, \frac{-24x+7y-6}{25}\right)$$

2. Determine a expressão matricial, usando coordenadas homogéneas, das aplicações definidas no exercício anterior. Se s, h, e p designam, respectivamente, a simetria central, a homotetia e a projecção ortogonal do mesmo exercício, calcule as aplicações compostas:

$$s \circ h \qquad\qquad s \circ h \circ p$$

(Resolução)

(a) *Representação matricial da simetria s:*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 26 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) *Representação matricial da homotetia h:*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -10 \\ 0 & 3 & 14 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) *Representação matricial da projecção p:*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/25 & -12/25 & -4/25 \\ -12/25 & 16/25 & -3/25 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A aplicação composta $s \circ h$ representa-se matricialmente:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 26 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -10 \\ 0 & 3 & 14 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 36 \\ 0 & -3 & -18 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(Observe-se que esta aplicação composta é uma homotetia de razão -3 e centro $\Omega' = (9, -9/2)$).

A aplicação composta $s \circ h \circ p$ representa-se matricialmente por

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 36 \\ 0 & -3 & -18 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9/25 & -12/25 & -4/25 \\ -12/25 & 16/25 & -3/25 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27/25 & 36/25 & 912/25 \\ 36/25 & -48/25 & -441/25 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado. Determine a expressão analítica de:

   (a) a translação pelo vector $\overrightarrow{v} = (10, 15, -8)$;

   (b) a simetria central com centro $\Omega = (1, -1, 2)$;

   (c) a homotetia com razão 6 e centro $\Omega' = (0, 0, 1)$;

   (d) a reflexão ortogonal no plano definido pela equação cartesiana

$$x + y + z + 1 = 0.$$

(Resolução)

(a) A tranlação T pelo vector $\overrightarrow{v} = (10, 15, -8)$ está definida por $T(M) = M + \overrightarrow{v}$. Se $M = (x, y, z)$ tem-se

$$T(x, y, z) = (10 + x, 15 + y, -8 + z)$$

(b) A simetria central s com centro Ω está definida por $s(M) = \Omega - \overrightarrow{\Omega M}$. Se $M = (x, y, z)$ e $\Omega = (1, -1, 2)$ tem-se

$$s(x, y, z) = (1, -1, 2) - (x - 1, y - (-1), z - 2) = (2 - x, -2 - y, 4 - z).$$

(c) A homotetia h com razão 6 e centro Ω' está definida por $h(M) = \Omega' + 6\overrightarrow{\Omega' M}$. Se $M = (x, y, z)$ e $\Omega' = (0, 0, 1)$ tem-se

$$h(x, y, z) = (0, 0, 1) + 6(x, y, z - 1) = (6x, 6y, 6z - 5).$$

(d) Seja π o plano definido pela equação cartesiana

$$x + y + z + 1 = 0.$$

Considere-se um vector normal $\overrightarrow{n}$ ao plano π, por exemplo $\overrightarrow{n} = (1, 1, 1)$, e A um ponto de π, por exemplo $A = (-1, 0, 0)$. Se $M \in \mathcal{A}$ e $p(M)$ é a projecção ortogonal de M em π tem-se

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{Ap(M)} + \overrightarrow{p(M)M} = \overrightarrow{Ap(M)} + \lambda \overrightarrow{n} \qquad (*)$$

Se σ é a reflexão no plano π tem-se

$$\sigma(M) = M + 2\overrightarrow{Mp(M)} = M - 2\lambda\overrightarrow{n}$$

Se $M = (x, y, z)$, tem-se $\overrightarrow{AM} = (x + 1, y, z)$ e, como $\overrightarrow{n}$ é ortogonal ao vector $\overrightarrow{Ap(M)}$, a partir de (*) obtemos:

$$(x + 1, y, z) \cdot (1, 1, 1) = \lambda(1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1)$$

donde $\lambda = \dfrac{x + y + z + 1}{3}$. Assim

$$\sigma(M) = (x, y, z) - 2\left(\frac{x + y + z + 1}{3}\right)(1, 1, 1)$$

logo

$$\sigma(x, y, z) = \left(\frac{x - 2y - 2z - 2}{3}, \frac{-2x + y - 2z - 2}{3}, \frac{-2x - 2y + z - 2}{3}\right)$$

4. Determine, **justificando pela definição**, se as seguintes aplicações são isometrias de um plano euclidiano (munido de um referencial ortonormado).

   (a) $f(x, y) = (-y + x, y)$;
   (b) $f(x, y) = (2 + y, 3 - x)$;
   (c) $f(x, y) = (-y, -x)$;
   (d) $f(x, y) = (\sin x, \sin y)$;
   (e) $f(x, y) = (x, y^3)$;
   (f) $f(x, y) = (+5 - y, -7 - x)$;
   (g) $f(x, y) = (ax - by, bx + ay + 4)$, com $a, b \in \mathbf{R}$ tais que $a^2 + b^2 = 1$.

   (Resolução)

   (a) Consideramos os pontos $A = (0, 0)$ e $B = (1, 1)$ que verificam $f(A) = (0, 0)$ e $f(B) = (0, 1)$. Tem-se

   $$d(A, B) = \sqrt{2} \qquad e \qquad d(f(A), f(B)) = 1,$$

   portanto f não é uma isometria.

   (b) Sejam $A = (x, y)$ e $B = (x', y')$ tem-se

   $$f(A) = (2 + y, 3 - x) \qquad e \qquad f(B) = (2 + y', 3 - x')$$

   donde

   $$\begin{aligned} d(f(A), f(B)) &= \sqrt{((2 + y') - (2 + y))^2 + ((3 - x') - (3 - x))^2} \\ &= \sqrt{(y' - y)^2 + (x' - x)^2} \\ &= d(A, B) \end{aligned}$$

   A aplicação f é uma isometria.

(c) *Sejam* $A = (x, y)$ e $B = (x', y')$ *tem-se*

$$f(A) = (-y, -x) \qquad e \qquad f(B) = (-y', -x')$$

donde

$$\begin{aligned} d(f(A), f(B)) &= \sqrt{(-y' + y)^2 + (-x' + x)^2} \\ &= \sqrt{(y' - y)^2 + (x' - x)^2} \\ &= d(A, B) \end{aligned}$$

A aplicação f *é uma isometria.*

(d) *Consideramos os pontos* $A = (0, 0)$ e $B = (0, 2\pi)$ *que verificam* $f(A) = (0, 0)$ e $f(B) = (0, 0)$. *Assim*

$$d(A, B) = 2\pi \qquad e \qquad d(f(A), f(B)) = 0$$

portanto f *não é uma isometria.*

(e) *Consideramos os pontos* $A = (0, 0)$ e $B = (0, 2)$ *que verificam* $f(A) = (0, 0)$ e $f(B) = (0, 8)$. *Tem-se*

$$d(A, B) = 2 \qquad e \qquad d(f(A), f(B)) = 8$$

portanto f *não é uma isometria.*

(f) *Sejam* $A = (x, y)$ e $B = (x', y')$ *tem-se*

$$f(A) = (5 - y, -7 - x) \qquad e \qquad f(B) = (5 - y', -7 - x')$$

donde

$$\begin{aligned} d(f(A), f(B)) &= \sqrt{((5 - y') - (5 - y))^2 + ((-7 - x') - (-7 - x))^2} \\ &= \sqrt{(y' - y)^2 + (x' - x)^2} \\ &= d(A, B) \end{aligned}$$

A aplicação f *é uma isometria.*

(g) $f(x, y) = (ax - by, bx + ay + 4)$, *com* $a, b \in \mathbf{R}$ *tais que* $a^2 + b^2 = 1$. *Sejam* $A = (x, y)$ e $B = (x', y')$ *tem-se*

$$f(A) = (ax - by, bx + ay + 4) \qquad e \qquad f(B) = (ax' - by', bx' + ay' + 4)$$

Assim

$$d(f(A), f(B)) = \sqrt{((ax' - by') - (ax - by))^2 + ((bx' + ay' + 4) - (bx + ay + 4))^2}$$

donde

$$\begin{aligned}
&d(f(A),f(B))\\
&=\sqrt{(a(x'-x)+b(y-y'))^2+(b(x'-x)+a(y'-y))^2}\\
&=\sqrt{(a^2+b^2)(x'-x)^2+(a^2+b^2)(y-y')^2+2ab((x'-x)(y-y')+(x'-x)(y'-y))}\\
&=\sqrt{(a^2+b^2)(x'-x)^2+(a^2+b^2)(y-y')^2}=d(A,B)
\end{aligned}$$

Portanto, a aplicação f é uma isometria.

5. Determine, **justificando pela definição**, se as seguintes aplicações são isometrias de um espaço euclidiano tridimensional (munido de um referencial ortonormado).

   (a) $f(x,y,z)=(-y+x,y,0)$;

   (b) $f(x,y,z)=(-x,2-y,3-z)$

   (Resolução)

   (a) Não é uma isometria. Tomando $A=(0,0,1)$ e $B=(0,0,-1)$ tem-se $f(A)=(0,0,0)$ e $f(B)=(0,0,0)$, em particular

   $$d(A,B)=2 \qquad e \qquad d(f(A),f(B))=0$$

   logo f não é uma isometria.

   (b) Sejam $A=(x,y,z)$ e $B=(x',y',z')$, tem-se

   $$f(A)=(-x,2-y,3-z) \qquad e \qquad f(B)=(-x',2-y',3-z')$$

   donde

   $$\begin{aligned}
   d(f(A),f(B)) &= \sqrt{((-x'+x)^2+(2-y'-(2-y))^2+((3-z')-(3-z))^2}\\
   &= \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}\\
   &= d(A,B)
   \end{aligned}$$

   Portanto, f é uma isometria.

6. Seja $\mathcal{A}$ um plano afim euclidiano munido de um referencial ortonormado. Determine a representação matricial de:

   (a) A simetria central com centro $(2,-3)$;

   (b) A reflexão na recta $x=-3$.

(Resolução)

(a) *Seja* s *a simetria central com centro* $\Omega = (2, -3)$, *se* $M = (x, y)$ *tem-se*

$$s(M) = \Omega - \overrightarrow{\Omega M} = (2, -3) - (x - 2, y - (-3)) = (4 - x, -6 - y)$$

e, se $s(M) = (x', y')$, *obtemos:*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Em coordenadas homogéneas

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) *Seja* σ *a reflexão na recta* r *definida pela equação* $x = -3$. *Considere-se o ponto* $A = (-3, 0)$ *de* r *e o vector* $\overrightarrow{n} = (1, 0)$ *normal à recta* r. *Seja* $p(M)$ *a projecção de* M *em* r, *tem-se*

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{Ap(M)} + \overrightarrow{p(M)M} = \overrightarrow{Ap(M)} + \lambda \overrightarrow{n}$$

Se $M = (x, y)$ *então* $\overrightarrow{AM} = (x + 3, y)$ *e como* $\overrightarrow{Ap(M)}$ *é ortogonal a* $\overrightarrow{n}$ *obtemos*

$$(x + 3, y) \cdot (1, 0) = \lambda(1, 0) \cdot (1, 0)$$

donde $\lambda = x + 3$. *Recorde-se que*

$$\sigma(M) = M + 2\overrightarrow{Mp(M)} = M - 2\overrightarrow{p(M)M} = M - 2\lambda \overrightarrow{n}$$

donde

$$\sigma(x, y) = (x, y) - 2\,(x + 3)\,(1, 0) = (-x - 6, y)$$

Se $\sigma(x, y) = (x', y')$ *podemos representar matricialmente* σ *como*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Em coordenadas homogéneas

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

7. Seja $\mathcal{A}$ um espaço euclidiano de dimensão 4 munido de um referencial ortonormado. Determine o centro e a razão das seguintes homotetias de $\mathcal{A}$. Apresente a representação matricial. Se houver, indique as simetrias centrais.

(a) $f(x,y,z,t) = (2x+1, 2y, 2z-1, 2t)$;
(b) $f(x,y,z,t) = (2-x, 3-y, -z, -10-t)$;
(c) $f(x,y,z,t) = (-1/2x, -1/2y, -1/2z, 4-1/2t)$.

(Resolução)

(a) Se $f(x,y,z,t) = (x,', y', z', t')$*, a representação matricial de* f *é*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

O centro $\Omega = (x_0, y_0, z_0, t_0)$ *verifica:*

$$(x_0, y_0, z_0, t_0) = f(x_0, y_0, z_0, t_0) = (2x_0+1, 2y_0, 2z_0-1, 2t_0)$$

donde $x_0 = -1$*,* $y_0 = 0$*,* $z_0 = 1$ *e* $t_0 = 0$*. Em resumo,* f *é a homotetia com centro* $\Omega = (-1, 0, 1, 0)$ *e razão 2. Não é uma simetria central.*

(b) Se $f(x,y,z,t) = (x,', y', z', t')$*, a representação matricial de* f *é*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

O centro $\Omega = (x_0, y_0, z_0, t_0)$ *verifica:*

$$(x_0, y_0, z_0, t_0) = f(x_0, y_0, z_0, t_0) = (2-x_0, 3-y_0, -z_0, -10-t_0)$$

donde $x_0 = 1$*,* $y_0 = 3/2$*,* $z_0 = 0$ *e* $t_0 = -5$*. Em resumo,* f *é a homotetia com centro* $\Omega = (1, 3/2, 0, -5)$ *e razão -1.* f *é então a simetria central com centro* $(1, 3/2, 0, -5)$*.*

(c) Se $f(x,y,z,t) = (x,', y', z', t')$*, a representação matricial de* f *é*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

O centro $\Omega = (x_0, y_0, z_0, t_0)$ *verifica:*

$$(x_0, y_0, z_0, t_0) = f(x_0, y_0, z_0, t_0) = (-1/2x_0, -1/2y_0, -1/2z_0, 4-1/2t_0)$$

donde $x_0 = 0$*,* $y_0 = 0$*,* $z_0 = 0$ *e* $t_0 = 8/3$*. Em resumo,* f *é a homotetia com centro* $\Omega = (0, 0, 0, 8/3)$ *e razão -1/2. Não é uma simetria central.*

8. Determine as representações matriciais (em coordenadas usuais e em coordenadas homogéneas) das isometrias de um plano euclidiano munido de um referencial ortonormado seguintes:

   (a) $f(x_1, x_2) = (-5 + x_1, 2 + x_2)$;

   (b) $f(x_1, x_2) = (\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2)$;

   (c) $f(x_1, x_2) = (7 - x_1, 7 - x_2)$;

   (d) $f(x_1, x_2) = (\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2, -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2)$.

   Determine quais as rotações, as translações e as reflexões.

   (Resolução)

   (a) Se $f(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$, a representação matricial de f é:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

   f é a translação pelo vector $\overrightarrow{v} = (-5, 2)$.
   Em coordenadas homogéneas

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (b) Se $f(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$, a representação matricial de f é:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

   f é uma reflexão.
   Em coordenadas homogéneas

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (c) Se $f(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$, a representação matricial de f é:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

f é uma simetria central (com centro $\Omega = (7/2, 7/2)$).
Em coordenadas homogéneas

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(d) $f(x_1, x_2) = (\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2, -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2)$.
Se $f(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$, a representação matricial de f é:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

f é uma rotação.
Em coordenadas homogéneas

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 7 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

9. Determine a expressão analítica das reflexões nas rectas definidas pelas equações seguintes:

(a) $-x + y = 0$;
(b) $2x + y = 0$;
(c) $-x + y = 2$;
(d) $2x + y = -1$.

(Resolução)

(a) Considere-se a recta definida pela equação cartesiana

$$-x + y = 0$$

Um vector director unitário desta recta é $\overrightarrow{u} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Se $\sigma(x, y) = (x', y')$, em coordenadas usuais tem-se

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

e em coordenadas homogéneas tem-se:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) *Considere-se a recta definida pela equação cartesiana*

$$2x + y = 0$$

Um vector director unitário desta recta é $\overrightarrow{u} = (\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{-2\sqrt{5}}{5})$. *Se* $\sigma(x, y) = (x', y')$, *a reflexão* σ *nesta recta pode representar-se matricialmente, em coordenadas usuais por:*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

e em coordenadas homogéneas por

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 & 0 \\ -4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) *Seja* σ *a reflexão na recta* r *definida pela equação cartesiana*

$$-x + y = 2$$

A recta r'_O *paralela a* r' *que passa pelo ponto* O *está definida pela equação*

$$-x + y = 0$$

Se $P = (0, 2)$ *é um ponto da recta* r *e* T *é a translação pelo vector* $\overrightarrow{OP} = (0, 2)$, *com* $O = (0, 0)$, *verifica-se*

$$\sigma = T \circ \sigma_O \circ T^{-1}$$

com σ_O *a reflexão na recta* r'_O *(consultar (a)).*
Em coordenadas usuais, se $\sigma(x, y) = (x', y')$, *como* $T(x, y) = (x, y + 2)$ *e* $T^{-1}(x, y) = (x, y - 2)$ *obtemos*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y - 2 \end{pmatrix} \right]$$

donde se deduz a expressão matricial de σ

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Em coordenadas homogéneas tem-se

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

(d) Seja σ a reflexão na recta r definida pela equação cartesiana

$$2x + y = -1$$

A recta r_O paralela a r que passa pelo ponto O está definida pela equação

$$2x + y = 0$$

Se $P = (0, -1)$ é um ponto da recta r e T é a translação pelo vector $\overrightarrow{OP} = (0, -1)$, com $O = (0, 0)$, verifica-se

$$\sigma = T \circ \sigma_O \circ T^{-1}$$

onde σ_O é a reflexão na recta r_O.
Usando coordeanadas usuais, a reflexão σ_O está representada matricialmente (consultar alinhas anteriores) por

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

com $\sigma_O(x, y) = (x', y')$. Se $\sigma(x, y) = (x', y')$, como $T(x, y) = (x, y - 1)$ e $T^{-1}(x, y) = (x, y + 1)$ obtemos

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y+1 \end{pmatrix} \right]$$

donde se deduz a expressão matricial de σ

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ -2/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Usando coordenadas homogéneas, tem-se que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 & 0 \\ -4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

10. Determine a expressão analítica, num referencial ortonormado de um plano euclidiano, da reflexão deslizante com base a recta r pelo vector $\overrightarrow{v}$ se r está definida pela equação

$$-x + y = 2$$

e $\overrightarrow{v} = (1, 1)$.

(Resolução)

Seja σ a reflexão na recta r definida pela equação

$$-x + y = 2$$

No exercício anterior determinou-se a expressão matricial desta reflexão:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ou, equivalentemente,

$$\sigma(x, y) = (-2 + y, 2 + x)$$

A reflexão deslizante δ é a aplicação composta $T \circ \sigma$, com T a translação pelo vector $(1, 1)$ e portanto

$$\delta(x, y) = (T \circ \sigma)(x, y) = (-2 + y, 2 + x) + (1, 1) = (-1 + y, 3 + x)$$

Em coordenadas homogéneas

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

11. Determine a expressão analítica da rotação centrada na origem de coordenadas e de ângulo com medida α, para

    (a) $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$;

    (b) $\alpha = -\dfrac{-\pi}{3}$;

    (c) $\alpha = \pi$.

    (Resolução)

    (a) Se ρ é a rotação do ângulo com medida $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ tem-se

    $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

    com $\rho(x, y) = (x', y')$. Em coordenadas homogéneas:

    $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Se ρ é a rotação do ângulo com medida $\alpha = -\frac{\pi}{3}$ tem-se

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

com $\rho(x,y) = (x', y')$. Em coordenadas homogéneas:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) Se ρ é a rotação do ângulo com medida $\alpha = \pi$ tem-se

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

com $\rho(x,y) = (x', y')$. Em coordenadas homogéneas:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

12. Determine a expressão analítica, num referencial ortonormado de um plano euclidiano, da rotação com centro $\Omega = (1, -1)$ do ângulo com medida α, para

   (a) $\alpha = \frac{\pi}{4}$;

   (b) $\alpha = -\frac{\pi}{3}$.

   (Resolução)

   (a) Esta rotação ρ com centro Ω verifica, para todo o ponto M do plano:

$$\rho(M) = \Omega + \overrightarrow{\rho}(\overrightarrow{\Omega M})$$

com $\overrightarrow{\rho}$ rotação vectorial do ângulo com medida $\frac{\pi}{4}$. Se $M = (x,y)$ tem-se $\overrightarrow{\Omega M} = (x-1, y+1)$ logo, se $\rho(x,y) = (x', y')$, obtemos

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix} \right]$$

donde

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Note-se que as rotações vectoriais identificam-se de modo evidente com as rotações centradas na origem. Assim, podemos escrever

$$\rho = T^{-1} \circ \rho_O \circ T$$

onde ρ_O *é a rotação do mesmo ângulo orientado centrada na origem* O *e* T *é a translação que verifica* $T(\Omega) = O$. *Usando coordenadas homogéneas:*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 1-\sqrt{2} \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Esta rotação ρ *com centro* Ω *verifica, para todo o ponto* M *do plano:*

$$\rho(M) = \Omega + \overrightarrow{\rho}(\overrightarrow{\Omega M})$$

com $\overrightarrow{\rho}$ *rotação vectorial do ângulo com medida* $\alpha = -\dfrac{\pi}{3}$. *Se* $M = (x, y)$ *tem-se* $\overrightarrow{\Omega M} = (x-1, y+1)$ *logo, se* $\rho(x, y) = (x', y')$, *obtemos*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix}\right]$$

donde

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 - \sqrt{3}/2 \\ -1/2 + \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]$$

De modo análogo à alinha anterior, podemos escrever

$$\rho = T^{-1} \circ \rho_O \circ T$$

onde ρ_O *é a rotação do mesmo ângulo orientado centrada na origem* O *e* T *é a translação que verifica* $T(\Omega) = O$. *Usando coordenadas homogéneas:*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & \dfrac{(3-\sqrt{3})}{2} \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & \dfrac{(-1+\sqrt{3})}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

13. Determine a representação matricial do re-dimensionamento centrado na origem e parâmetros 1 e 3 nas direcções principais.

(Resolução)

A representação matricial deste re-dimensionamento, usando coordenadas homogéneas, é

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

14. Determine o re-dimensionamento inverso do re-dimensionamento da alinha anterior.

(Resolução)

O re-dimensionamento inverso do anterior está representado pela matriz inversa, ou seja:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

15. Determine a representação matricial do re-dimensionamento centrado na origem e parâmetros 1 e 3 nas direcções definidas pelas bissectrizes do primeiro e segundo quadrante.

(Resolução)

Sejam $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ os vectores directores das bissectrizes indicadas. No referencial $\mathcal{R} = \{O'; \vec{v}_1, \vec{v}_2)$ o re-dimensionamento indicado está representado matricialmente por:

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

As bissectrizes das direcções principais estão dirigidas pelos vectores $\vec{v}_1 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ e $\vec{v}_2 = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$. Assim, se (x_1, x_2) são as coordenadas de um ponto no referencial original tem-se que:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e como a matriz indicada é ortogonal, tem-se:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A transformação pedida obtém-se então como a composta:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

16. Determine a transvecção na origem de factor 2 na direcção de $\overrightarrow{v} = (1, 0)$.

    (Resolução)

    Seja f a transvecção (directa) na origem de factor 2. Se $f(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$, então, em coordenadas homogéneas tem-se

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

17. Determine a transvecção inversa na origem de factor 2 na direcção de $\overrightarrow{v} = (1, 0)$.

    (Resolução)

    Seja f a transvecção (directa) na origem de factor 2. Se $f(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$, então, em coordenadas homogéneas tem-se

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

18. Determine a transvecção na origem de factor 3 na direcção do vector $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

    (Resolução)

    Seja f a transvecção (directa) na origem de factor 2 dirigida pelo vector $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$. Se $f(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$, então, em coordenadas homogéneas tem-se

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 & 0 \\ -3/2 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

19. Determine a transvecção inversa na origem de factor 3 na direcção do vector $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

    (Resolução)

Seja f a transvecção inversa na origem de factor 2 dirigida pelo vector $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$. Se $f(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$, então, em coordenadas homogéneas tem-se

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & -3/2 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

20. Determine a transvecção no ponto $O' = (1,1)$ de factor 3 na direcção do vector $(1,0)$.

(Resolução)

A transvecção (directa) na origem de factor 3 na direcção do vector $(1,0)$ representa-se, em coordenadas homogéneas por

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A transvecção f de factor 3 no ponto $O' = (1,1)$ na direcção do vector $(1,0)$ pode obter-se como a composta:

$$f = T^{-1} \circ f_O \circ T$$

onde T é a translação definida por $T(O') = O$ e f_O é a transvecção na origem anterior. Assim, se $f(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ tem-se

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

21. Considere o segmento de extremos $A = (1,1)$ e $B = (3,1)$. Determine a imagem deste segmento através das aplicações seguintes:

    (a) A homotetia h centrada no ponto $(-1,-1)$ e razão 2;

    (b) O re-dimensionamento f na origem com parâmetros 1 e 3 nas direcções principais;

    (c) A rotação ρ centrada no ponto $(2,0)$ de ângulo orientado $\pi/3$;

    (d) A transvecção t na origem de factor 2 e vector $\overrightarrow{w} = (0,1)$;

    (e) A aplicação composta $t \circ \rho \circ f \circ h$.

(Resolução)

Note-se que todas as aplicações consideradas no exercício são aplicações afins e preservam os segmentos. Isto é, se f é uma aplicação afim e A e B são dois pontos do espaço afim, então

$$f(\overline{AB}) = \overline{f(A)f(B)}$$

Assim, **para determinar a imagem de um segmento basta determinar a imagem dos extremos.**

(a) A homotetia h indicada representa-se, em coordenadas homogéneas, por

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

onde $h(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$. Usando a expressão matricial anterior obtemos

$$h(A) = h(1,1) = (3,3) \qquad e \qquad h(B) = h(3,1) = (7,3)$$

(b) O re-dimensionamento f indicado representa-se, em coordenadas homogéneas, por

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

onde $f(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$. Usando a expressão matricial anterior obtemos

$$f(A) = f(1,1) = (1,3) \qquad e \qquad f(B) = f(3,1) = (3,3)$$

(c) A rotação ρ indicada é a composta

$$\rho = T^{-1} \circ \rho_O \circ T$$

onde T é a translação definida por $T(\Omega) = O$ e ρ_O é a rotação na origem de ângulo orientado $\pi/3$. Se $\rho(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ tem-se

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 1 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Usando a expressão matricial anterior obtemos

$$\rho(A) = \rho(1,1) = 1/2(3 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$$

e

$$\rho(B) = \rho(3,1) = 1/2(5 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$$

(d) A transvecção t indicada representa-se, em coordenadas homogéneas, por

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

onde $t(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$. Usando a expressão matricial anterior obtemos

$$t(A) = t(1,1) = (1,3)$$

e

$$t(B) = t(3,1) = (3,7)$$

(e) A aplicação indicada, em coordenadas homogéneas, representa-se matricialmente por:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 1 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3\sqrt{3} & 1/2(3-3\sqrt{3}) \\ 2+\sqrt{3} & 3-6\sqrt{3} & 9/2-\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e então

$$(t \circ \rho \circ f \circ h)(A) = (t \circ \rho \circ f \circ h)(1,1) = 1/2(5 - 9\sqrt{3}, 19 - 17\sqrt{3})$$

e

$$(t \circ \rho \circ f \circ h)(B) = (t \circ \rho \circ f \circ h)(3,1) = 1/2(9 - 9\sqrt{3}, 27 - 13\sqrt{3})$$

22. Considere a circunferência com centro $\Omega = (2,1)$ e raio 3. Determine a imagem desta circunferência através das aplicações seguintes:

(a) A homotetia h centrada no ponto $(-1,-1)$ e razão 2;

(b) A rotação ρ centrada na origem de ângulo orientado $\pi/6$;

(c) A translação t pelo vector $\overrightarrow{w} = (1,1)$;

(d) A aplicação composta $t \circ \rho \circ h$.

(Resolução)

Todas as aplicações indicadas são semelhanças (a rotação e a translação são, de facto, isometrias, isto é, semelhanças de razão 1). Recorde-se que uma circunferência com centro Ω e raio r é definida como

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{A} \ : \ d(M, \Omega) = r\}$$

Assim, se f é uma semelhança de razão λ, tem-se que $M \in \mathcal{C}$ se e só se

$$d(f(M), f(\Omega)) = \lambda r$$

e portanto, $f(\mathcal{C})$ é a circunferência com centro $f(\Omega)$ e raio λr.

(a) A imagem da circunferência indicada será um circunferência com raio 6 *e centrada no ponto* $h(2,1)$. *Usando coordenadas homogéneas, se* $h(x_1,x_2)=(y_1,y_2)$ *tem-se*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde $h(2,1)=(5,3)$. *Em resumo,* $h(\mathcal{C})$ *é a circunferência com centro* $(5,3)$ *e raio 6.*

(b) A imagem da circunferência indicada será um circunferência com raio 3 *e centrada no ponto* $\rho(2,1)$.*Usando coordenadas homogéneas, se* $\rho(x_1,x_2)=(y_1,y_2)$ *tem-se*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde $\rho(2,1)=(\sqrt{3}-1/2, 1+\sqrt{3}/2)$. *Em resumo,* $\rho(\mathcal{C})$ *é a circunferência com centro* $(\sqrt{3}-1/2, 1+\sqrt{3}/2)$ *e raio 3.*

(c) A imagem da circunferência indicada será um circunferência com raio 3 *e centrada no ponto* $t(2,1)=(3,2)$.

(d) A imagem da circunferência indicada será um circunferência com raio 6 *e centrada no ponto* $(t\circ\rho\circ h)(2,1)$. *Usando coordenadas homogéneas, se* $(t\circ\rho\circ h)(x_1,x_2)=(y_1,y_2)$, *tem-se*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

isto é

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \dfrac{3+\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e portanto

$$(t\circ\rho\circ h)(2,1) = 1/2(-1+5\sqrt{3}, 7+3\sqrt{3})$$

23. Num espaço euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado determine a expressão analítica de:

    (a) a translação t pelo vector $\overrightarrow{v} = (1, 5, -8)$;

    (b) a simetria central s com centro $\Omega = (2, -2, 0)$;

    (c) a homotetia h com razão 3 e centro $\Omega' = (3, 0, 0)$;

    (Resolução)

    (a) A tranlação T pelo vector $\overrightarrow{v} = (10, 15, -8)$ está definida por $T(M) = M + \overrightarrow{v}$. Se $M = (x, y, z)$ tem-se

    $$T(x, y, z) = (1 + x, 5 + y, -8 + z)$$

    (b) A simetria central s com centro Ω está definida por $s(M) = \Omega - \overrightarrow{\Omega M}$. Se $M = (x, y, z)$ e $\Omega = (2, -2, 0)$ tem-se

    $$s(x, y, z) = (2, -2, 0) - (x - 2, y - (-2), z) = (4 - x, -4 - y, -z).$$

    (c) A homotetia h com razão 3 e centro Ω' está definida por $h(M) = \Omega' + 3\overrightarrow{\Omega' M}$. Se $M = (x, y, z)$ e $\Omega' = (3, 0, 0)$ tem-se

    $$h(x, y, z) = (3, 0, 0) + 3(x - 3, y, z) = (3x - 6, 3y, 3z).$$

24. Determine a representação matricial de:

    (a) A simetria central com centro $(1, 2, -3)$;

    (b) A reflexão σ no plano definido pela equação $x_1 = 3$;

    (c) A aplicação composta $s \circ \sigma$.

    (Resolução)

    (a) Seja s a simetria central com centro $\Omega = (1, 2, -3)$, se $M = (x_1, x_2, x_3)$ tem-se

    $$s(M) = \Omega - \overrightarrow{\Omega M} = (1, 2, -3) - (x_1 - 1, x_2 - 2, x_3 - (-3)) = (2 - x_1, 4 - x_2, -6 - x_3)$$

    e, se $s(M) = (y_1, y_2, y_3)$, obtemos, em coordenadas homogéneas

    $$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Seja σ a reflexão no plano definido pela equação $x_1 = 3$. Tem-se que

$$\sigma = T^{-1} \circ \sigma_0 \circ T$$

onde T é a translação que verifica, por exemplo $T(3,0,0) = (0,0,0)$ e σ_O é a reflexão no plano $x_1 = 0$. Assim, a representação matricial de σ obtém-se a partir do produto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde, se $\sigma(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$ tem-se

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) A aplicação composta é definida através do produto:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

25. Determine a expressão analítica das reflexões nos planos definidos pelas equações seguintes:

(a) $-x + y + z = 0$;

(b) $-x + y + z + 1 = 0$.

(Resolução)

(a) Um vector normal unitário deste plano é $\overrightarrow{n} = (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$. Assim, se σ_O é a reflexão neste plano, e se $\sigma_O(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$ então:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 & 0 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) *O plano paralelo ao plano indicado passando pela origem está definido pela equação cartesiana:*

$$-x + y + z = 0$$

que é o plano usado na alinha anterior. Assim, a reflexão σ no plano do enunciado pode calcular-se como a aplicação composta:

$$\sigma = T^{-1} \circ \sigma_O \circ T$$

com σ_O a representação matricial obtida na alinha anterior e T a translação que, por exemplo, verifica $T(1,0,0) = (0,0,0)$. A representação matricial de σ é então obtida através do produto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 & 0 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim, se $\sigma(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$ então:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

26. Determine a expressão analítica da rotação de ângulo $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ no eixo dirigido pelo vector $\overrightarrow{e}_1$.

(Resolução)

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

27. Determine a expressão analítica da rotação de ângulo $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ no eixo dirigido pelo vector $\overrightarrow{e}_1$ que passa pelo ponto $A = (3, 2, 1)$.

(Resolução)

A rotação $Rot_A(\pi/3, \overrightarrow{e}_1)$ indicada pode obter-se como a composta:

$$Rot_A(\pi/3, \overrightarrow{e}_1) = T^{-1} \circ Rot_O(\pi/3, \overrightarrow{e}_1) \circ T$$

onde $Rot_O(\pi/3, \overrightarrow{e}_1)$ *é a rotação obtida no exercício anterior e* T *é a translação que verifica, por exemplo,* $T(A) = O$. *Assim, a rotação é então obtida através do produto:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim, se $\sigma(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$ *então:*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 1 + \sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 & 1 - \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

28. Determine a expressão analítica da rotação de ângulo $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ no eixo dirigido pelo vector $\overrightarrow{e}_2$.

(Resolução)

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

29. Determine a expressão analítica da rotação de ângulo $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ no eixo dirigido pelo vector $\overrightarrow{e}_2$ que passa pelo ponto $A = (2, 1, 0)$.

(Resolução)

A rotação $Rot_A(\pi/3, \overrightarrow{e}_2)$ *indicada pode obter-se como a composta:*

$$Rot_A(\pi/3, \overrightarrow{e}_2) = T^{-1} \circ Rot_O(\pi/3, \overrightarrow{e}_2) \circ T$$

onde $Rot_O(\pi/3, \overrightarrow{e}_2)$ *é a rotação obtida no exercício anterior e* T *é a translação que verifica, por exemplo,* $T(A) = O$. *Assim, a rotação é então obtida através do produto:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim, se $\sigma(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$ *então:*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

30. Determine a representação matricial do re-dimensionamento centrado na origem e parâmetros 1, 2 e 3 nas direcções principais.

(Resolução)

A representação matricial deste re-dimensionamento, usando coordenadas homogéneas, é

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

31. Determine o re-dimensionamento inverso do re-dimensionamento da alinha anterior.

(Resolução)

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

32. Considere a esfera com centro $\Omega = (0, 2, 1)$ e raio 3. Determine a imagem desta esfera através das aplicações seguintes:

    (a) A homotetia h centrada no ponto $(0, -1, -1)$ e razão 2;

    (b) A rotação ρ de ângulo $\theta = \pi/6$ no eixo dirigido pelo vector $\overrightarrow{u} = (0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ que passa pelo ponto $A = (0, 0, -2)$.

    (c) A aplicação composta $\rho \circ h$.

(Resolução)

Todas as aplicações indicadas são semelhanças (a rotação é, de facto, de facto, uma isometria). Recorde-se que uma esfera com centro Ω e raio r é definida como

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{A} \ : \ d(M, \Omega) = r\}$$

Assim, se f é uma semelhança de razão λ, tem-se que $M \in \mathcal{C}$ se e só se

$$d(f(M), f(\Omega)) = \lambda r$$

e portanto, $f(\mathcal{C})$ é a esfera com centro $f(\Omega)$ e raio λr.

(a) A imagem da esfera indicada será um circunferência com raio 6 e centrada no ponto $h(0, 2, 1)$. Usando coordenadas homogéneas, se $h(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$ tem-se

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde $h(0,2,1) = (0,5,3)$. *Em resumo,* $h(\mathcal{C})$ *é a esfera com centro* $(0,5,3)$ *e raio 6.*

(b) A imagem da esfera indicada será uma esfera com raio 3 *e centrada no ponto* $\rho(0,2,1)$. *Recorde-se que a matriz que representa a rotação* ρ *pode obter-se como o produto:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -\sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/4 & 0 \\ \sqrt{2}/4 & (2+\sqrt{3})/4 & (2-\sqrt{3})/4 & 0 \\ -\sqrt{2}/4 & (2-\sqrt{3})/4 & (2+\sqrt{3})/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim, se $\rho(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$ *tem-se*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -\sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/4 & (2+\sqrt{3})/4 & (2-\sqrt{3})/4 & 1-\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{2}/4 & (2-\sqrt{3})/4 & (2+\sqrt{3})/4 & (-2+\sqrt{3})/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde $\rho(0,2,1) = (\sqrt{2}/4, (10-\sqrt{3})/4, (2+\sqrt{3})/4)$. *Em resumo,* $\rho(\mathcal{C})$ *é a circunferência com centro* $(\sqrt{2}/4, (10-\sqrt{3})/4, (2+\sqrt{3})/4)$ *e raio 3.*

(c) A imagem da circunferência indicada será um circunferência com raio 6 *e centrada no ponto* $(\rho \circ h)(0,2,1)$. *A matriz que representa a aplicação composta* $\rho \circ h$ *é o produto:*

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -\sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/4 & (2+\sqrt{3})/4 & (2-\sqrt{3})/4 & 1-\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{2}/4 & (2-\sqrt{3})/4 & (2+\sqrt{3})/4 & (-2+\sqrt{3})/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim, se $(\rho \circ h)(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$, *tem-se*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & (2+\sqrt{3})/2 & (2-\sqrt{3})/2 & 2-\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & (2-\sqrt{3})/2 & (2+\sqrt{3})/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e portanto

$$(\rho \circ h)(0,2,1) = (0,5,3)$$

33. Determine a representação matricial da projecção paralela ao vector $\overrightarrow{v} = (1,2,0)$ no plano definido pela equação cartesiana:

$$2x - 2y + z = 0$$

(Resolução)

A partir do vector normal ao plano $\overrightarrow{u} = (2,-2,1)$, *podemos obter um vector normal unitário:*

$$\overrightarrow{n} = (2/3, -2/3, 1/3)$$

como $\overrightarrow{v} = (1,2,0)$, *tem-se*

$$N = 2/3 - 4/3 = -2/3$$

donde

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1/2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

34. Determine a representação matricial da projecção paralela ao vector $\overrightarrow{v} = (1,2,0)$ no plano definido pela equação cartesiana:

$$2x - 2y + z - 2 = 0$$

(Resolução)
Seja $A = (1,0,0)$ *um ponto deste plano. A projecção pedida pode calcular-se como a aplicação composta:*

$$par = T^{-1} \circ par_O \circ T$$

onde $T(A) = O$ *e* par_O *é a projecção paralela ao vector* $\overrightarrow{v}$ *no plano definido pela equação cartesiana:*

$$2x - 2y + z = 0$$

Esta projecção foi calculada no exercício anterior e portanto a matriz que representa esta projecção é o produto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1/2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim, se $par(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$ *tem-se*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1/2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

35. Determine a representação matricial, em coordenadas homogéneas, da projecção perspectiva no plano de equação $x_2 = 0$ desde o ponto $\Omega = (0, 2, 0)$. Qual o plano excepcional desta projecção perspectiva?

    (Resolução)

    O plano excepcional, isto é, os pontos do espaço que nos quais a projecção perspectiva não está definida, são os pontos do plano paralelo a $x_2 = 0$ que passa pelo ponto Ω. Assim, o plano excepcional é o plano definido pela equação cartesiana:

$$x_2 - 2 = 0$$

    Em coordenadas homogéneas, a representação matricial desta perspectiva é:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ W' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ W \end{pmatrix}$$

36. Determine o plano excepcional da projecção perspectiva no plano de equação $x_2 - 4 = 0$ desde o ponto $\Omega = (1, 2, 0)$. Indique a representação matricial, em coordenadas homogéneas, desta projecção perspectiva. Qual a imagem do ponto $M = (2, 1, -3)$?

    (Resolução)

    O plano excepcional, são os pontos do plano paralelo a $x_2 = 0$ que passa pelo ponto Ω. Assim, o plano excepcional é o plano definido pela equação cartesiana:

$$x_2 - 2 = 0$$

    O plano imagem não passa pela origem de coordenadas. Considere-se o ponto $A = (0, 4, 0)$ e seja T a translação que verifica $T(A) = O$. A projecção perspectiva pedida é a aplicação composta:

$$T^{-1} \circ per_O \circ T$$

    onde per_O é a projecção perspectiva desde o ponto $T(\Omega)$ no plano $x_2 = 0$. Como $T(\Omega) =$ $(1, -2, 0)$, a representação matricial de per_O é

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

    Uma matriz que representa a projecção perspectiva inicial é o produto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim, em coordenadas homogéneas, a representação matricial desta perspectiva é:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ W' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ W \end{pmatrix}$$

Seja $M = (2, 1, -3)$*, tem-se que* $per(M) = (Y_1, Y_2, Y_3, W')$ *com*

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ W' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

O último vector coluna representa umas coordenadas homogéneas do ponto $per(M)$*. Para obter as coordenadas usuais, basta dividir pelo elemento da última fila. Assim, o ponto* $per(M)$ *é o ponto de coordenadas* $(1, 4, 6)$*.*

37. Determine o plano excepcional da projecção perspectiva no plano de equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + 1 = 0$$

desde o ponto $\Omega = (1, 1, 1)$. Indique a representação matricial, em coordenadas homogéneas, desta projecção perspectiva.

(Resolução)

O plano excepcional, são os pontos do plano paralelo a $x_1 + x_2 + x_3 + 1 = 0$ *que passa pelo ponto* Ω*. Assim, o plano excepcional é o plano definido pela equação cartesiana:*

$$x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0$$

O plano imagem não passa pela origem de coordenadas. Considere-se o ponto $A = (-1, 0, 0)$ *e seja* T *a translação que verifica* $T(A) = O$*. A projecção perspectiva pedida é a aplicação composta:*

$$T^{-1} \circ per_O \circ T$$

onde per_O *é a projecção perspectiva desde o ponto* $T(\Omega)$ *no plano* $x_1 + x_2 + x_3 = 0$*. Como* $T(\Omega) = (2, 1, 1)$*, e um vector normal ao plano é o vector* $\overrightarrow{n} = (1, 1, 1)$*, a representação matricial de* per_O *é*

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Uma matriz que representa a projecção perspectiva inicial é o produto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim, em coordenadas homogéneas, a representação matricial desta perspectiva é:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ W' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ W \end{pmatrix}$$

6 Exercícios propostos

Para simplificar as notações, num espaço afim munido de um referencial, os pontos e os vectores identificar-se-ão com as suas coordenadas no referencial e na base associada ao referencial, respectivamente.

1. Determine a representação matricial da translação pelo vector $\overrightarrow{v}$ no espaço afim $\mathcal{A}$ (munido de um referencial):

   (a) $\overrightarrow{v} = (1, -2)$;

   (b) $\overrightarrow{v} = (3, 0, -4)$;

   (c) $\overrightarrow{v} = (1, 0, 1, 1)$.

   Indique também a representação em coordenadas homogéneas.

2. Determine a representação matricial da simetria central em Ω no espaço afim $\mathcal{A}$ (munido de um referencial):

   (a) $\Omega = (2, 3)$;

   (b) $\Omega = (1, -1, -1)$;

   (c) $\Omega = (2, 2, 3, 1)$.

   Indique também a representação em coordenadas homogéneas.

3. Determine a representação matricial da homotetia com centro Ω e razão λ no espaço afim $\mathcal{A}$ (munido de um referencial):

   (a) $\Omega = (1, 1)$, $\lambda = 3$;

   (b) $\Omega = (2, 3)$, $\lambda = -1$;

   (c) $\Omega = (1, -1, -1)$, $\lambda = 4$;

   (d) $\Omega = (-2, 2, 0, 1)$, $\lambda = -2$.

   Indique também a representação em coordenadas homogéneas.

4. Seja $\mathcal{A}$ um plano afim munido de um referencial. Considerem-se:

   (a) h a homotetia com centro $(3, 0)$ e razão -2;

   (b) s a simetria central com centro $(-1, -1)$;

   (c) t a translação pelo vector $\overrightarrow{v} = (2, 1)$.

   Determine as aplicações compostas:

   $$h \circ h, \qquad s \circ h, \qquad h \circ s, \qquad s \circ t, \qquad \text{e} \qquad h \circ s \circ t$$

   Qual a imagem da recta de equação $x + y = 0$ através das aplicações anteriores? E da circunferência com raio 1 e centro $(0, 0)$?

5. Seja $\mathcal{A}$ um plano afim euclidiano munido de um referencial ortonormado. Determine a expressão analítica de:

   (a) a simetria central no ponto $\Omega = (2, 1)$;

   (b) a homotetia com razão -3 e centro $\Omega = (2, 1)$;

   (c) a projecção ortogonal na recta definida pela equação cartesiana
   $$2x - y + 1 = 0;$$

   (d) a reflexão ortogonal na recta r anterior;

   (e) a reflexão ortogonal nas rectas s e s' definidas, respectivamente, pelas equações $x = k$ e $y = b$

6. Seja $\mathcal{A}$ um espaço euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado. Determine a expressão analítica de:

   (a) a simetria central no ponto $\Omega = (1, 1, 1)$;

   (b) a homotetia com razão -5 e centro $\Omega = (0, 2, 1)$;

   (c) a projecção ortogonal no plano definido pela equação cartesiana
   $$2x - y + z + 1 = 0;$$

   (d) a reflexão ortogonal no plano anterior;

   (e) a projecção ortogonal na recta definida pela equação vectorial:
   $$s = (1, 0, 0) + < (1, 0, -1) >$$

   (f) a simetria ortogonal na recta definida na alinha anterior.

7. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim euclidiano de dimensão 4 munido de um referencial ortonormado. Determine a expressão analítica de:

   (a) a translação pelo vector $\overrightarrow{v} = (3, 1, 2, 0)$;

   (b) a simetria central no ponto $\Omega = (0, 1, 2, 1)$;

   (c) a homotetia com razão 6 e centro $\Omega = (3, 3, 3, 3)$;

   (d) a reflexão ortogonal no hiperplano definido pela equação cartesiana $2x - y + t = 0$.

8. Determine, **justificando pela definição**, se as seguintes aplicações são isometrias de um plano euclidiano (munido de um referencial ortonormado).

   (a) $f(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + x_2)$;

   (b) $f(x_1, x_2) = (2 - x_2, 1 + x_1)$;

   (c) $f(x_1, x_2) = (3x_1, 3x_2)$;

   (d) $f(x_1, x_2) = (\cos x_1, \cos x_2)$;

   (e) $f(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2)$;

   (f) $f(x_1, x_2) = (-3 - x_2, 1 - x_1)$;

   (g) $f(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2 + 3, bx_1 - ax_2 + 5)$, com $a, b \in \mathbf{R}$ tais que $a^2 + b^2 = 1$.

   Alguma destas aplicações é uma translação? uma homotetia? uma simetria central?

9. Determine as expressões matriciais das homotetias de centro $\Omega = (0, -3)$ e razões $\lambda = -2$ e $\lambda' = 15$. Determine também o centro e a razão da homotetia $f(x, y) = (-2x, -2y + 4)$.

10. Seja $\mathcal{A}$ um espaço euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado. Determine o centro e a razão das seguintes homotetias de $\mathcal{A}$. Apresente a representação matricial. Se houver, indique as simetrias centrais.

    (a) $f(x, y, z) = (-2x, -2y, -2z + 4, -2t)$;
    (b) $f(x, y, z) = (13x, 13y, 26 + 13z)$;
    (c) $f(x, y, z, t) = (-x, -y, -z + 2)$.

11. Determine, **justificando pela definição**, se as seguintes aplicações são isometrias de um espaço euclidiano tridimensional (munido de um referencial ortonormado).

    (a) $f(x_1, x_2, x_3) = (-x_2 + x_1, x_2, 0)$;
    (b) $f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, 2 - x_2, 3 - x_3)$;
    (c) $f(x_1, x_2, x_3) = (ax_1 + bx_2, bx_1 - ax_2 + 10, x_3)$, com $a, b \in \mathbf{R}$ tais que $a^2 + b^2 = 1$.

12. Determine as representações matriciais das isometrias seguintes:

    (a) $f(x_1, x_2) = (2 + x_1, 3 - x_2)$;
    (b) $f(x_1, x_2) = (\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2, \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2)$;
    (c) $f(x_1, x_2) = (3 - x_1, 2 - x_2)$;
    (d) $f(x_1, x_2) = (\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2, \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2)$;
    (e) $f(x_1, x_2) = (1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2)$.

    Determine quais as rotações, as translações e as reflexões.

13. Num plano euclidiano munido de um referencial ortonormado, determine a expressão analítica das reflexões nas rectas definidas pelas equações seguintes:

    (a) $x - 3y = 0$;
    (b) $-3x + 4y = 0$;
    (c) $x - 3y = 1$;
    (d) $-3x + 4y = -8$.

14. Num plano euclidiano munido de um referencial ortonormado, determine a reflexão deslizante com base a recta r pelo vector $\overrightarrow{v}$ se r está definida pela equação $x - 3y = 1$ e $\overrightarrow{v} = (3, 1)$.

15. Num plano euclidiano munido de um referencial ortonormado, determine a expressão analítica

    (a) da rotação centrada na origem de ângulo orientado de medida $\pi/2$;
    (b) da rotação centrada no ponto $(1, 2)$ de ângulo orientado de medida $-\pi/3$.

    Qual a imagem da recta de equação $y - 2x = 1$ através destas rotações?

16. Determine o centro e a medida do ângulo orientado $\theta \in [0, 2\pi]$ das rotações definidas, num referencial ortonormado de um plano euclidiano, pelas expressões matriciais:

(a)
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

(b)
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Qual a imagem da recta de equação $y - 2x = 1$ através destas rotações? E da circunferência de equação $(x-2)^2 + (y+1)^3 = 16$?

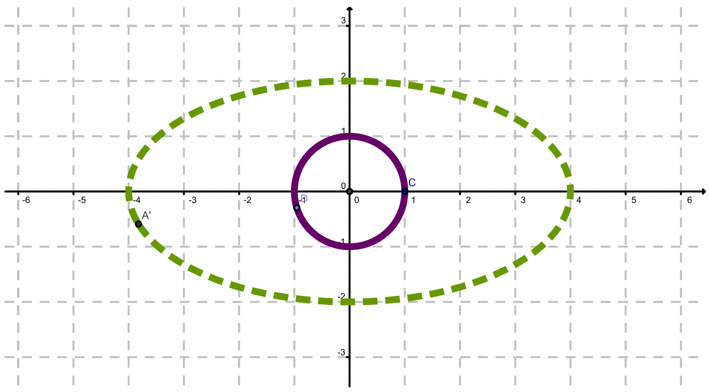
17. Indique a expressão analítica da reflexão deslizante de base r pelo vector $\overrightarrow{v}$ nos casos seguintes:

(a) r é a recta de equação $-x + y = 2$ e $\overrightarrow{v} = (3, 3)$;

(b) r é a recta de equação $2x + y = -1$ e $\overrightarrow{v} = (2, -4)$.

18. Determine a representação matricial do re-dimensionamento centrado na origem e parâmetros 4 e 2 nas direcções principais. Qual o re-dimensionamento inverso?

Considere a circunferência centrada na origem e raio 1. Qual a imagem dessa circunferência através do re-dimensionamento anterior? São os re-dimensionamentos isometrias?



19. Determine a representação matricial do re-dimensionamento centrado na origem e parâmetros 2 e 4 nas direcções definidas pelas bissectrizes do primeiro e segundo quadrante.

20. Determine a representação matricial do re-dimensionamento centrado no ponto $O' = (1, 1)$ e parâmetros 2 e 4 nas direcções definidas pelas bissectrizes do primeiro e segundo quadrante.

21. Determine a transvecção na origem de parâmetro 5 na direcção de $\overrightarrow{v} = (0, 1)$.

22. Determine a transvecção na origem de parâmetro 2 na direcção do vector $(\sqrt{3}/2, 1/2)$.

23. Determine a transvecção no ponto $O' = (1, 1)$ de factor 2 na direcção do vector $(\sqrt{3}/2, 1/2)$.

24. Considere o segmento de extremos $A = (2, 0)$ e $B = (1, -3)$. Determine a imagem deste segmento através das aplicações seguintes:

    (a) A homotetia h centrada no ponto $(1, -3)$ e razão 4;
    (b) O re-dimensionamento f na origem com parâmetros 2 e 3 nas direcções principais;
    (c) A transvecção t na origem de factor 2 e vector $\overrightarrow{w} = (0, 1)$;
    (d) A aplicação composta $t \circ f \circ h$.

25. Considere a circunferência com centro $\Omega = (2, 1)$ e raio λ. Determine a imagem desta circunferência através das aplicações seguintes:

    (a) A homotetia h centrada no ponto $(-1, -1)$ e razão 2;
    (b) A rotação ρ centrada no ponto $(2, 0)$ de ângulo orientado $\pi/3$;
    (c) A translação t pelo vector $\overrightarrow{w} = (1, 1)$;
    (d) A aplicação composta $t \circ \rho \circ h$.

    A imagem desta circunferência através da transvecção na origem de factor 2 e direcção $\overrightarrow{v} = (1, 0)$ é uma circunferência?

26. Determine a expressão analítica de:

    (a) a translação pelo vector $\overrightarrow{v} = (2, 1, 0)$;
    (b) a translação t pelo vector $\overrightarrow{v} = (-3, 7, 1)$;
    (c) a simetria central s com centro $\Omega = (0, 5, -3)$;
    (d) a homotetia h com razão -5 e centro $\Omega' = (0, 2, 2)$;

    Qual a imagem do plano de equação $x + y + z = 0$ através destas aplicações? E da esfera de centro $(1, 1, 1)$ e raio 2?

27. Determine a representação matricial de:

    (a) A simetria central com centro $(3, 3, 3)$;
    (b) A reflexão σ no plano definido pela equação $x_3 = -2$;
    (c) A aplicação composta $s \circ \sigma$.

28. Determine a expressão analítica das reflexões nos planos definidos pelas equações seguintes:

    (a) $2x + 3y - z = 0$;
    (b) $2x + 3y - z + 2 = 0$.

29. Determine a expressão analítica da rotação de ângulo $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ no eixo dirigido pelo vector $\overrightarrow{e}_2 = (0, 1, 0)$.

30. Determine a expressão analítica da rotação de ângulo $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ no eixo dirigido pelo vector $\overrightarrow{e}_2 = (0, 1, 0)$ que passa pelo ponto $A = (2, 1, 0)$.

31. Determine a expressão analítica da rotação de ângulo $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ no eixo dirigido pelo vector $\overrightarrow{u} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$.

32. Determine a representação matricial do re-dimensionamento centrado na origem e parâmetros 1, 2 e 4 nas direcções principais.

33. Determine a representação matricial das aplicações seguintes:

    (a) A rotação de ângulo $\pi/4$ em torno ao eixo definido pelo vector $v = (1, 1, 1)$;

    (b) O "twist" definido pela rotação anterior e o vector v;

    (c) O "twist" definido pela rotação anterior e o vector $-3v$.

    Qual a imagem da recta dirigida pelo vector $(0, 0, 2)$ e que passa pelo ponto $(1, 0, 1)$ através destas aplicações?

34. Considere o segmento de extremos $A = (1, 0, 0)$ e $B = (0, 0, -2)$. Determine a imagem do segmento $\overline{AB}$ através das aplicações seguintes:

    (a) A homotetia h centrada no ponto $(0, -1, -1)$ e razão 2;

    (b) A rotação ρ de ângulo $\theta = \pi/6$ no eixo dirigido pelo vector $\overrightarrow{u} = (0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ que passa pelo ponto $A = (0, 0, -2)$.

    (c) A aplicação composta $\rho \circ h$.

    Qual a imagem da recta $r = (1, 1, 1) + < (2, 3, 0) >$ através da homotetia h? e do plano definido pela equação
    $$2x - 3y + z + 1 = 0?$$
    Qual a imagem desta recta e deste plano através da composta $\rho \circ h$?

35. Determine a expressão matricial da reflexão deslizante num espaço afim tridimensional determinada pelo plano $x - 2z + 1 = 0$ e o vector $(0, 3, 0)$.

36. Determine a expressão matricial da reflexão rotatória no plano $x - 2z + 1$ de ângulo $\pi/2$.

37. Determine a representação matricial da projecção paralela ao vector $\overrightarrow{v} = (0, 1, 3)$ no plano definido pela equação cartesiana:
    $$x - y + z = 0$$

38. Determine a representação matricial da projecção paralela ao vector $\overrightarrow{v} = (1, 2, 0)$ no plano definido pela equação cartesiana $x - y + z - 2 = 0$. Calcule a imagem através desta projecção paralela de:

    (a) a recta que passa pelos pontos $A(1, 1, 0)$ e $B(2, 1, 0)$;

    (b) a recta que passa pelo ponto $(2, 0, 0)$ e está dirigida pelo vector $(1, 2, 0)$;

    (c) o plano definido pela equação $y = 0$;

    (d) a circunferência contida no plano anterior com centro $(0, 0, 0)$ e raio 1.

39. *Exercício de exame - 2006/2007*

Seja $\mathcal{A}$ um plano euclidiano munido de um referencial ortonormado. Considere as seguintes transformações geométricas:

- a homotetia h com centro na origem e razão 2;
- a translação t pelo vector $\overrightarrow{v} = (0, 2)$;
- a reflexão σ na recta definida pela equação cartesiana: $3x + 4y - 1 = 0$.

Determine:

(a) a representação matricial das aplicações indicadas;

(b) a representação matricial das aplicações compostas $f = \sigma \circ h$ e $g = h \circ t$;

(c) se as aplicações f e g são isometrias ou semelhanças do plano euclidiano, e, caso sejam isometrias, indique o tipo;

(d) a imagem através das aplicações h e σ da circunferência centrada na origem e de raio 4 (justifique sucintamente o seu raciocínio).

40. *Exercício de exame 2006/2007*

Seja $\mathcal{A}$ um plano euclidiano munido de um referencial ortonormado. Considere as seguintes transformações geométricas:

- a homotetia h com centro na origem e razão 3;
- a translação t pelo vector $\overrightarrow{v} = (-1, 0)$;
- a rotação ρ com centro no ponto $\Omega = (0, -1)$ e ângulo de medida $\pi/4$.

Determine:

(a) a representação matricial das aplicações indicadas;

(b) a representação matricial das aplicações compostas $f = \rho \circ h$ e $g = h \circ t$;

(c) se as aplicações f e g são isometrias ou semelhanças do plano euclidiano, e, caso sejam isometrias, indique o tipo;

(d) a imagem através das aplicações h e ρ da circunferência centrada na origem e de raio 3 (justifique sucintamente o seu raciocínio).

41. *Exercício de exame 2007/2008*

Sejam f uma afinidade de um espaço euclidiano tridimensional definida, num referencial ortonormado, por

$$f(x, y, z) = (1 + 2x, 1 + 3y, 4z)$$

e π o plano definido pela equação cartesiana $x + y - z + 1 = 0$.

(a) Determine uma equação cartesiana de $f(\pi)$. Indique um vector $\overrightarrow{n}$ normal ao plano π e calcule $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{n})$ com $\overrightarrow{f}$ a parte linear da transformação afim f. Verifique que o plano $f(\pi)$ não é ortogonal ao vector $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{n})$. É f uma isometria?

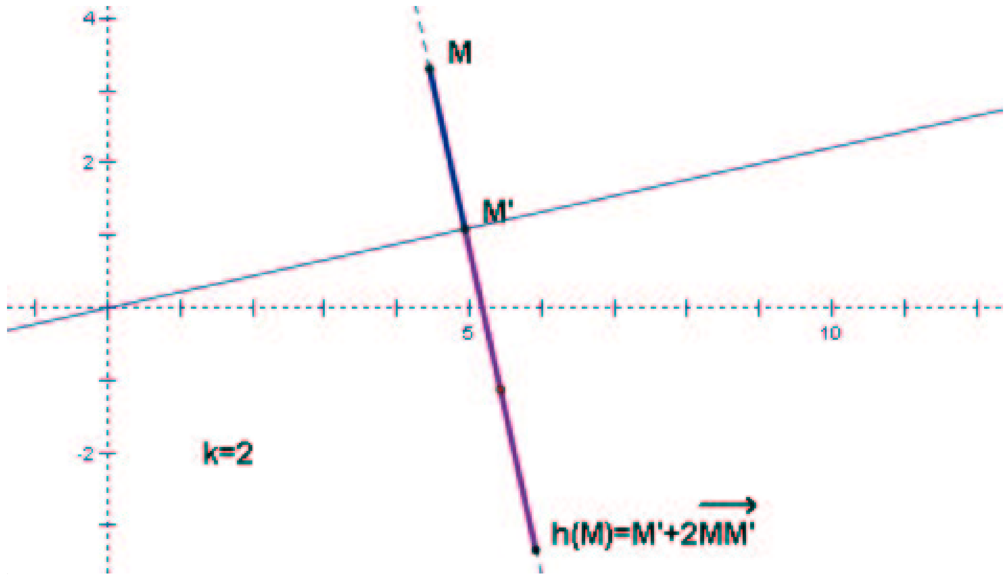
(b) Seja g uma isometria tal que $\overrightarrow{g}(2, 2 - 2) = (0, 0, 4)$ e $g(0, 0, 1) = (-3, 0, 1)$. Determine uma equação cartesiana de $g(\pi)$.

42. *Exercício de exame 2007/2008*

    Seja r uma recta do plano euclidiano definida pela equação cartesiana $ax+by=0$. Determine a expressão analítica e matricial da transformação geométrica h definida por

$$h(M) = M' + 2\overrightarrow{MM'}$$

    com M' a projecção ortogonal de M em r.



    Esta transformação geométrica é uma isometria? É uma homotetia?

43. Determine a representação matricial, em coordenadas homogéneas, da projecção perspectiva no plano de equação $x_1 = 0$ desde o ponto $\Omega = (-3, , 0)$. Qual o plano excepcional desta projecção perspectiva?

44. Determine o plano excepcional da projecção perspectiva desde o ponto $\Omega = (1, 1, 3)$ no plano de equação $x_1 = 0$. Indique a representação matricial, em coordenadas homogéneas, desta projecção perspectiva.

45. Determine o plano excepcional da projecção perspectiva no plano de equação $x_1 - 2 = 0$ desde o ponto $\Omega = (1, 1, 3)$. Indique a representação matricial, em coordenadas homogéneas, desta projecção perspectiva. Calcule a imagem através desta projecção perspectiva de:

    (a) a recta que passa pelos pontos

    (b) a recta que passa pelo ponto $(2, 0, 0)$ e está dirigida pelo vector $(1, 2, 0)$;

    (c) o plano definido pela equação $x_3 = 0$;

    (d) a circunferência contida no plano anterior com centro $(0, 0, 0)$ e raio 1.

46. Determine o plano excepcional da projecção perspectiva no plano de equação

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 1 = 0$$

desde o ponto $\Omega = (0, 1, 1)$. Indique a representação matricial, em coordenadas homogéneas, desta projecção perspectiva. Calcule a imagem através desta projecção perspectiva de:

(a) o segmento de extremos $A(0, 0, 0)$ e $B(0, 1, 0)$;

(b) o triângulo de vértices $A(0, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C = (1, 0, 0)$;

(c) o quadrado de vértices $A(0, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C = (1, 0, 0)$, $D = (1, 1, 0)$;

(d) o cubo de vértices $A(0, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C = (1, 0, 0)$, $D = (1, 1, 0)$, $E = (0, 0, 1)$, $F = (0, 1, 1)$, $G = (1, 0, 1)$ e $H = (1, 1, 1)$.

Desenhe as projecções obtidas.

47. *Exercício Exame 2007/2008*

Seja f a projecção perspectiva desde o ponto $\Omega = (0, 0, 1)$ no plano $x+y+z = 0$. Qual o plano excepcional desta projecção perspectiva? Calcule $d(A, B)$ e $d(f(A), f(B))$ para $A = (2, 2, 0)$ e $B = (1, 1, 0)$. Uma projecção perspectiva é uma isometria?

Conteúdo