Universidade do Minho
Departamento de Matemática

LCC **Análise**

Universidade do Minho
Escola de Ciências

Ficha de exercícios 8 — 2019/2020

• Integral de linha (campos escalares)

1. (a) Calcule $\int_{\mathcal{C}} (y+x)\,ds$, onde $\mathcal{C}$ é a curva de equações $x=t, y=2t$, $1 \leq t \leq 2$.

(b) Calcule $\int_{\mathcal{C}} x\,ds$, onde $\mathcal{C}$ é a curva de equações $x=t^3, y=t$, $0 \leq t \leq 1$.

2. Seja $\mathcal{C}$ a parte superior da circunferência unitária $x^2+y^2=1$. Calcule $\int_{\mathcal{C}} (2+x^2y)\,ds$.

3. Determine $\int_{\mathcal{C}} 2x\,ds$, onde $\mathcal{C}$ é o arco $\mathcal{C}_1$ da parábola $y=x^2$ de $(0,0)$ a $(1,1)$ seguido pelo segmento de reta $\mathcal{C}_2$ de $(1,1)$ a $(1,2)$.

4. Calcule

(a) $\int_{\mathcal{C}} (x-2y^2)\,dy$, onde $\mathcal{C}$ é o arco da parábola $y=x^2$ de $(-2,4)$ a $(1,1)$;

(b) $\int_{\mathcal{C}} \operatorname{sen} x\,dx$, onde $\mathcal{C}$ é o arco da curva $x=y^4$ de $(1,-1)$ a $(1,1)$;

(c) $\int_{\mathcal{C}} xy\,dx+(x-y)\,dy$, onde $\mathcal{C}$ consiste nos segmentos de $(0,0)$ a $(2,0)$ e de $(2,0)$ a $(3,2)$.

5. Calcule $\int_{\mathcal{C}} xy^2z\,ds$, onde $\mathcal{C}$ é o segmento de reta de $(1,0,1)$ a $(0,3,6)$.

6. Calcule $\int_{\mathcal{C}} y \operatorname{sen} z\,ds$, onde $\mathcal{C}$ é a hélice circular dada pelas equações $x=\cos t$, $y=\operatorname{sen} t$, $z=t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

7. Seja $\mathcal{C}$ a curva que consiste no segmento de reta $\mathcal{C}_1$ de $(2,0,0)$ a $(3,4,5)$ seguido pelo segmento de reta vertical $\mathcal{C}_2$ de $(3,4,5)$ a $(3,4,0)$. Determine $\int_{\mathcal{C}} y\,dx+z\,dy+x\,dz$.

• Integral de linha (campos vetoriais)

8. Em cada uma das alíneas seguintes, esboce um número suficiente de vetores que ilustre o padrão do campo vetorial $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

(a) $\mathbf{F}(x,y)=(2,2)$; (b) $\mathbf{F}(x,y)=(x,y)$; (c) $\mathbf{F}(x,y)=(-x,y)$.

9. Sendo $\mathbf{r}$ o caminho definido por $\mathbf{r}(t)=(1,t,e^t)$, $t\in[0,2]$ e $\mathbf{F}$ o campo vetorial $\mathbf{F}(x,y,z)=(\cos z, e^x, e^y)$ calcule o integral de caminho de $\mathbf{F}$ ao longo de $\mathbf{r}$.

10. Considere o campo vetorial $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $\mathbf{F}(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. Calcule o integral de $\mathbf{F}$ ao longo dos seguintes caminhos:

(a) $\mathbf{r}(t)=(t,t,t)$, $t\in[0,1]$; (b) $\mathbf{r}(t)=(\operatorname{sen} t, 0, \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

11. Calcule cada um dos seguintes integrais de caminho:

(a) $\int_{\mathbf{r}} x\,dy-y\,dx$, $\mathbf{r}(t)=(\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0\leq t\leq 2\pi$;

(b) $\int_{\mathbf{r}} x\,dx+y\,dy$, $\mathbf{r}(t)=(\cos(\pi t), \operatorname{sen}(\pi t))$, $0\leq t\leq 2$;

(c) $\int_{\mathcal{C}} yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz$, quando $\mathcal{C}$ é a curva formada pelos segmentos de reta que unem os pontos $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$.

12. Calcule o trabalho realizado pela força $\mathbf{F}(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ no deslocamento de uma partícula ao longo da parábola $y=x^2, z=0$ de $x=-1$ para $x=2$.