TP1 3ª aula

8 de março de 2021 15:00

17. Seja L uma linguagem sobre o alfabeto $A = \{a, b\}$ tal que $\varepsilon \notin L$. Para cada uma das afirmações seguintes, diga se a afirmação é verdadeira ou falsa.

(a) $L \setminus aA^* = L \cap bA^*$.

(b) $L^*A^* \subseteq (LA)^*$.

a) aA^* é o conjunto de todas as palavras que têm a como prefixo.
$L \setminus aA^*$ é o conjunto das palavras de L que não têm a como prefixo.

$L \cap bA^*$ é o conjunto das palavras de L que têm b como prefixo.

Temos que $u \in A^*$ verifica $u \in L \setminus aA^*$ se $u \in L$ e a não é prefixo de u.

Como $u \neq \varepsilon$, u tem um prefixo de comprimento 1.

$u = \boxed{\cdot} \qquad \neq \varepsilon$

Letra de A

$\varepsilon \notin L \cap bA^*$

Como a letra a não é prefixo, então o prefixo de u de comprimento 1 é uma letra de $A \setminus \{a\}$, ou seja, é b. Então $u \in L$ e $u \in bA^*$.

Logo $u \in L \cap bA^*$, pelo que $L \setminus aA^* \subseteq L \cap bA^*$. (1)

Reciprocamente, seja $u \in L \cap bA^*$. Então $u \in L$ e $u b A^*$. Logo o prefixo de comprimento 1 da palavra u é b. Logo $u \notin aA^*$. Assim, $u \in L \setminus aA^*$.

Consequentemente, $L \cap bA^* \subseteq L \setminus aA^*$ (2).

De (1) e (2) resulta que $L \setminus aA^* = L \cap bA^*$. $\boxed{\text{Verdadeira}}$

b) $L^*A^* = \{uv : u \in L^*, v \in A^*\}$
$= (L^+ \cup \{\varepsilon\})A^* = L^+A^* \cup \varepsilon A^* = L^+A^* \cup A^* \underset{(3)}{=} A^*$

(3) $L^+A^* \subseteq A^*$

Em resumo $L^*A^* = A^*$

$(LA)^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} (LA)^n = \{u_1v_1u_2v_2 \ldots u_nv_n : u_1, \ldots, u_n \in L, v_1, \ldots, v_n \in A, n \in \mathbb{N}_0\}$

Obviamente, $(LA)^* \subseteq A^*$.

Se $L = \{b^n : n \in \mathbb{N}\}$, então $LA = \{b^{n+1}, b^n a : n \in \mathbb{N}\}$ e $(LA)^* \neq A^*$ porque existe $u = a^2 \in A^2$ e $u \notin (LA)^*$.

$\varepsilon, b^5, b^4a, b^5a, b^4ab^5ab^5, \ldots, b^{k_1}ab^{k_2}a \ldots ab^{k_m}$,

Logo $A^* \nsubseteq (LA)^*$.

$\boxed{\text{FALSA}}$

12 Sejam $A = \{a, b\}$ e L uma linguagem sobre A definida indutivamente por:

(i) $a \in L$;

(ii) se $x \in L$, então $xb, xba \in L$.

De entre as seguintes afirmações, selecione as afirmações verdadeiras.

a) $a^{-1}L^* = A^*$; b) $L^+ = A^*$; c) $L^* = A^*$; d) $b^{-1}L^* = L^*$.

$L = a(\{b\} \cup \{ba\})^* = a\{b, ba\}^*$

$L^* = (a\{b, ba\}^*)^* = \{\varepsilon, a, ab, aba, a^2, ab^2, \ldots\}$

$L^+ = L^* \setminus \{\varepsilon\}$

~~b)~~ $L^+ = A^*$ é falso porque $\varepsilon \notin L^+$ dado que $\varepsilon \notin L$.

~~c)~~ porque $b \notin L^*$

~~d)~~ $b^{-1}L^* = b^{-1}L \cdot L^* = \underbrace{b^{-1}a}\{b, ba\}^* = \emptyset \neq L^*$

A afirmação verdadeira é a).

$a^{-1}L^* = a^{-1}L\,L^* = \underbrace{a^{-1}a}\{b, ba\}^* L^* = \{b, ba\}^* L^* = A^*$

23. Prove que a expressão regular $(ab+b)^+$ representa a linguagem das palavras sobre A cuja última letra é b e aa não é fator.

$L = \mathcal{L}((ab+b)^+) = \{ab, b\}^+ \quad \overset{?}{=} \quad A^*b \setminus A^*aaA^*$

Então:

1) $b, ab \in L$

2) Se $u \in L$, então uab e ub pertencem a L.

As palavras de L são obtidas por aplicação das regras 1) e 2) um nº finito de vezes.

Vamos então fazer a prova por indução estrutural sobre L.

- Se $u = b$ ou $u = ab$, então o sufixo de u de comprimento 1 é b e verifica-se que aa não é fator de u.

- Por hipótese de indução suponhamos que w é uma palavra de L tal que b é última letra e aa não é fator de w. Então
  - em wb a última letra é b e aa é fator de wb sse aa é fator de w;
  - em wab a última letra é b e aa é fator de wab sse aa é fator de w ou a é a última letra de w.

$wab = |\ w\ |\ ?\ |\ a\ |\ b\ |$ última letra

Por hipótese de indução aa não é fator de w e a não é a última letra de w. Logo wb e wab têm b como sufixo e aa não é fator. O que conclui a prova do passo indutivo.

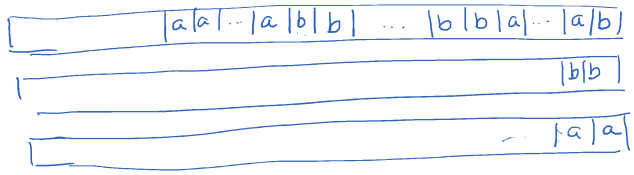
Fica assim completa a prova pedida no enunciado.

24. Indique uma expressão regular representando o conjunto das palavras sobre o alfabeto $\{a, b\}$:

(c) que não têm aba como fator;

(d) que têm pelo menos duas ocorrências do fator aba;

c)



Exemplo:

$u = bb \ldots b\,\underbrace{aa\ldots abb}_{a^+b^2}\, b\, a^+b^2 bbb.$ $\left\{ \begin{matrix} \varepsilon \\ a^+ \\ ab \end{matrix} \right.$

$(b + a^+b^2)^*$

$$(b + a^+b^2)^* \cdot (\varepsilon + a^+ + ab) = (b + a^+b^2)^* (a^* + ab)$$

d) $u = b\,aba\,b^2\,aba$; $u = aba\,aba\,aba$; $u = ababa$

$|a|b|a|$

d) $u = b\,\underbrace{aba}\,b\,\underbrace{aba}$; $u = \underbrace{aba}\,\underbrace{aba}\,\underbrace{aba}$, $u = \ldots$

|a|b|a|
    |a|b|a|

$$L = A^*aba\,A^*aba\,A^* \cup A^*\,ababa\,A^*$$

Uma expressão regular correspondente é $(a+b)^* aba\,(a+b)^* aba\,(a+b)^* + (a+b)^* ababa\,(a+b)^*$

(notar que esta expressão regular é igual a $(a+b)^*\big(aba(a+b)^* + ab\big)aba\,(a+b)^*\big)$
$(a+b)^* ab\,\big(a\,(a+b)^* + \varepsilon\big)\,aba\,(a+b)^*$

25. Indique uma expressão regular representando o conjunto das palavras sobre o alfabeto $\{a, b, c\}$:

(c) cujas palavras inversas são elementos de $(ac)^*(a^2 + ba)^*c$.

$L = \mathcal{L}\big((ac)^*(a^2+ba)^*c\big)$ $u = \underbrace{acac}\,ba\,a^2c \in L$

$w = u^{-1} = c\,a^2\,ab\,\underbrace{caca}$ → a inversa de w é u

A expressão regular pretendida é:

$$c\,(a^2+ab)^*\cdot(ca)^*$$ //

27. Seja $A = \{a, b, c\}$. Preencha os espaços entre as seguintes expressões regulares sobre A com um dos símbolos $=$, $\leq$ ou $\not\leq$:

(e) $a(b + c)^*$ $\not\leq$ $(ab + ac)^*$;
(f) $(ab + ac)^*$______$a^*(b + c)^*$;
(g) $c^*(ab + a)^*$ $\leq$ $(a + ba + c)^*(b + \varepsilon)$;

e) $\mathcal{L}(a(b+c)^*) = \{au \in A^* : |u|_a = 0\} = L_1$
$\mathcal{L}(ab+ac)^* = \{(ab)^{n_1}(ac)^{m_1}(ab)^{n_2}(ac)^{n_2}\ldots(ab)^{n_k}(ac)^{m_k} : n_1, m_1, \ldots, n_k \geq 1, m_k \geq 0\} = L_2$
$u = ababacabac \in L_2$ e $u \notin L_1$ $L_1 \neq L_2$ em particular $L_2 \not\subseteq L_1$.
$w = abb \in L_1$ e $w \notin L_2$ pelo que $L_1 \not\subseteq L_2$.

f) ...

g) $L_1 = \mathcal{L}\big(c^*(ab+a)^*\big) = \{c^n u \in A^* : n \in \mathbb{N}$ e bb não é fator de u e b não é prefixo de u e $|u|_c = 0\}$
$L_2 = \mathcal{L}\big((a+ba+c)^*(b+\varepsilon)\big)$

$ac \in L_2$ e $ac \notin L_1$ $ac = \underbrace{a}\cdot\underbrace{c}\cdot\varepsilon$

Logo $L_2 \not\subseteq L_1$ pelo que $L_1 \neq L_2$.

Será que $L_1 \subset L_2$?

$u \in L_1$ $u = |c|c|\ldots|c|ab|a|\ldots|a|\ldots|ab|\ldots| \in L_2$

$(\_+ba+\_)^*$

$(\_+\_+c)^*\ (a+\_+\_)^*$

$u \in L_1$ $\qquad u = \underbrace{|c|c| \;..\; |c|}_{(\_+\_+c)^*} a|b|a. \quad |a| \quad |ab| \;..\; \in L_2$

$(a+\_+\_)^*$

. . : .

$L_1 \subseteq L_2$.

29. Seja A um alfabeto.

(b) Mostre que, para quaisquer $r, r_1, r_2, s, s_1, s_2 \in ER(A)$, se tem:

iii. $r \leq s \Rightarrow r^* \leq s^*$;

iv. $(r^+s)^* \leq (r^*s^*)^*$;

(c) Verifique se, para quaisquer $r, s \in ER(A)$, $(r^+s)^* = (r^*s^*)^*$.

30. Seja A um alfabeto e sejam $r, s \in ER(A)$. Mostre que:

(b) $r^* = (r^*)^*$;

(e) $(r^*s)^* = \varepsilon + (r+s)^*s$;

(f) $(rs^*)^* = \varepsilon + r(r+s)^*$;