1.2 Limite e Continuidade

Limite

- Definição de limite
- Limites trajetoriais
- Resultados sobre o limite

Continuidade

- Definição de continuidade
- Aritmética das funções contínuas
- Continuidade da função composta

Noção de limite

$$f\colon D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

1. $f\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, função de uma variável real

Escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell, \qquad \ell \in \mathbb{R},$$

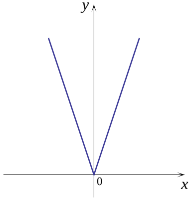
quando os valores de f se aproximam de ℓ à medida que x se aproxima do ponto a, por valores à esquerda ou à direita de a.

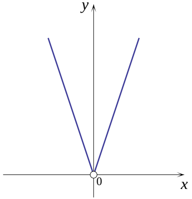
É necessário que a seja *um ponto de acumulação* de D.

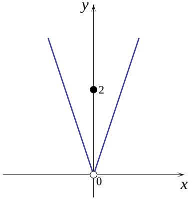
Exemplo

[Análise intuitiva da existência de limite na origem]

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3|x| \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g:\mathbb{R}\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3|x| \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} h: \quad \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x\neq 0 & \mapsto & 3|x| \\ x=0 & \mapsto & 2 \end{array}$$







$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} h(x) = 0.$$

Definição de limite ($n = 1$)

Dizemos que $\ell \in \mathbb{R}$ é o limite de f quando x tende para a e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell,$$

quando é possível tornar a distância de $f(x)$ a ℓ arbitrariamente pequena, desde que se tome x em $D \setminus \{a\}$ suficientemente próximo de a.

Simbolicamente,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

se e só se para qualquer número $\varepsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

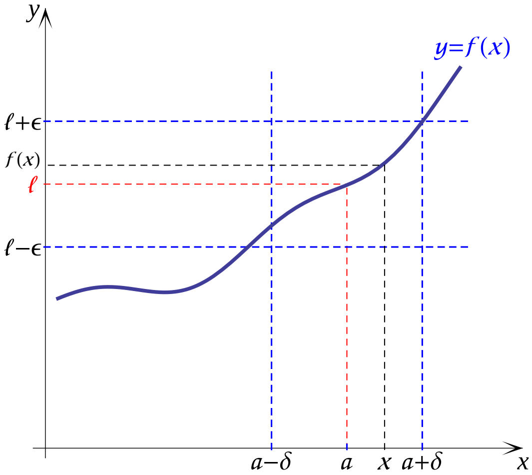


Figura 1: $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$

Se $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - \ell\,| < \varepsilon$.

Temos

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

se e só se existem e são iguais a ℓ os correspondentes limites laterais, isto é,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \iff \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \ell.$$

Consequentemente, se os limites laterais não existirem ou se existirem mas forem diferentes, concluímos que

$$\nexists \lim_{x \to a} f(x) = \ell.$$

2. $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, função de duas variáveis reais

Noção de distância

Bola (aberta) de centro em (a, b) *e raio* $r > 0$

$$B_r(a,b) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r \right\}$$

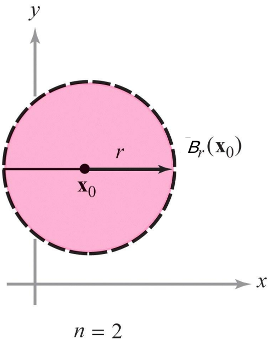


Figura 2: Bola (aberta) de centro em $x_0 = (a, b)$ e raio r

Definição de limite ($n = 2$)

Seja $z = f(x, y)$ uma função de duas variáveis definida numa bola com centro (a, b), exceto possivelmente em (a, b).

Dizemos que o limite de f quando (x, y) tende para (a, b) é L e escrevemos

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

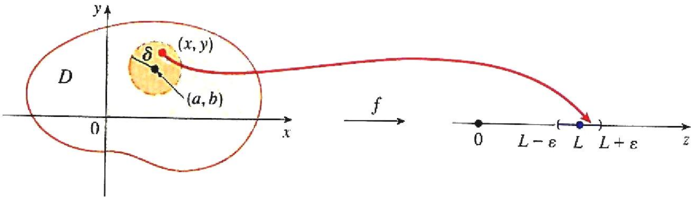
quando é possível tornar $f(x, y)$ arbitrariamente próximo de L desde que se tome (x, y) no domínio de f suficientemente próximo de (a, b).

Simbolicamente,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

se e só se para qualquer número $\varepsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$ tal que

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \Longrightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon.$$



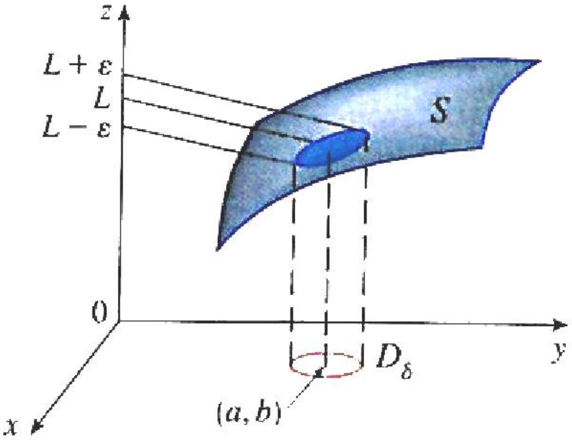
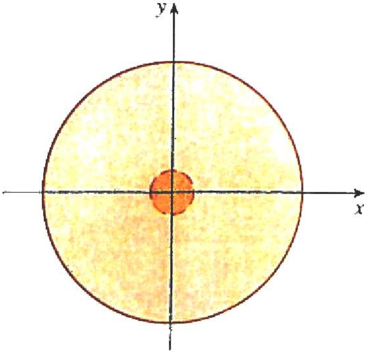
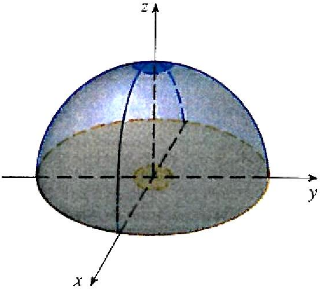


Figura 3: $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$

Exemplo



(a) Domínio de f



(b) Gráfico de f

Figura 4: $f(x,y) = \sqrt{9-(x^2+y^2)}$

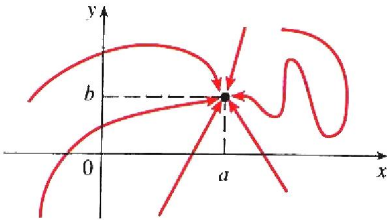
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{9-(x^2+y^2)} = 3$$

Limites trajetoriais

A definição de limite refere a distância entre (x, y) e (a, b) mas não a direção de aproximação.

Quando consideramos que (x, y) se aproxima de (a, b) ao longo de uma determinada curva C, isto é, quando $(x, y) \in C$, estamos a considerar um limite trajetorial e escrevemos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b) \\ (x,y)\in C}} f(x, y)$$



Se o $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ existir, será independente da trajetória descrita pelo ponto (x,y) quando se aproxima de (a,b), ou seja, os limites trajetoriais são iguais qualquer que seja a curva C.

Consequentemente, se

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\(x,y)\in C_1}} f(x,y) = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\(x,y)\in C_2}} f(x,y) = L_2,$$

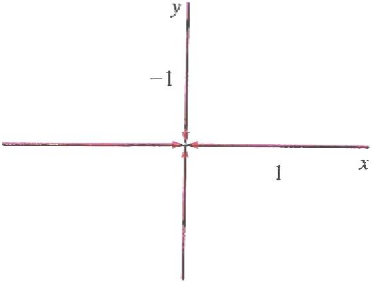
com $L_1 \neq L_2$, podemos conluir que

$$\text{não existe} \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y).$$

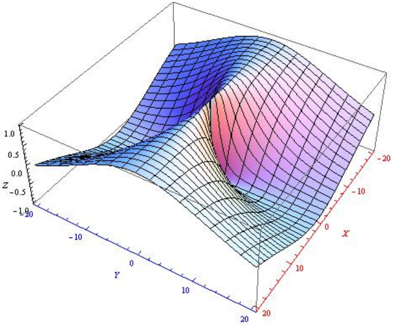
Exemplo

Não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ *uma vez que*

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 1 \quad e \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -1.$$



(a) Limites trajetoriais



(b) Gráfico de f

Figura 5: $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

Exemplo

Estudemos a existência de $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Temos

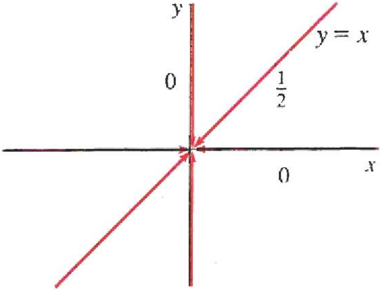
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0 \quad e \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0,$$

mas nada podemos concluir quanto à existência do limite, a não ser que, se existir, será igual a zero.

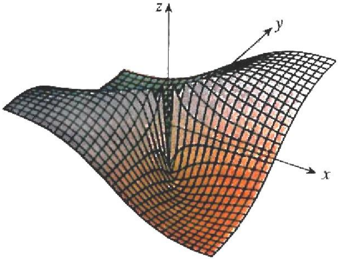
No entanto,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}.$$

Logo, não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.



(a) Limites trajetoriais



(b) Gráfico de f

Figura 6: $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

Exercício

Estude a existência de

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}.$$

Sugestão: considere os limites ao longo das retas $y = mx,\ m \neq 0$*, e ao longo da parábola* $y = x^2$*.*

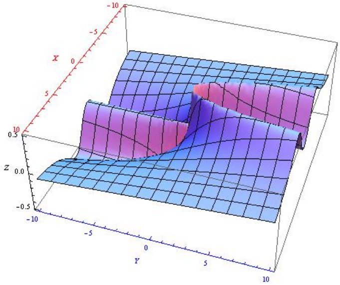


Figura 7: Gráfico de $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

Exemplo

Determine, se existir,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}.$$

Solução. *Podemos mostrar que o limite ao longo de uma reta qualquer que passa pela origem é* 0*, mas isto não prova a existência do limite igual a* 0*. Contudo, também ao longo das parábolas* $y = x^2$ *e* $x = y^2$ *obtemos o limite* 0*, o que nos leva a suspeitar que o limite exista e seja igual a* 0*. Vamos tentar provar que*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$$

usando a definição de limite apresentada na página 9.

Seja $\varepsilon > 0$. Pretendemos determinar $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta,$$

ou seja,

$$\frac{3x^2|y|}{x^2+y^2} < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta.$$

Mas $x^2 < x^2 + y^2$ uma vez que $y^2 \geq 0$, logo $x^2/(x^2+y^2) \leq 1$ e, portanto,

$$\frac{3x^2|y|}{x^2+y^2} \leq 3|y| = 3\sqrt{y^2} \leq 3\sqrt{x^2+y^2}.$$

Então, se escolhermos $\delta = \varepsilon/3$ e sendo $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$, temos

$$\left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| \leq 3\sqrt{x^2+y^2} < 3\delta = 3\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \varepsilon.$$

Definição de limite (caso geral)

Seja f uma função real de n variáveis reais,

$$\begin{array}{rccl} f\colon & D \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & f(x_1, \ldots, x_n), \end{array}$$

e $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ um ponto de acumulação do domínio D.

Dizemos que o limite de f quando $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tende para $(a_1, a_2, \ldots, a$ é L e escrevemos

$$\lim_{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (a_1, a_2, \ldots, a_n)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = L$$

se e só se para qualquer número $\varepsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$ tal que

$$0 < \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2} < \delta \implies |f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - L| < \varepsilon.$$

Resultados sobre o limite ($n = 2$)

Sejam $f, g \colon D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e (a, b) um ponto de acumulação de D.

1. [Unicidade]

   Se existir $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = l$, então l é único.

2. [Aritmética dos limites]

   Se $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = l$ e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x, y) = m$, então

   - $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} [f(x, y) \pm g(x, y)] = l \pm m$
   - $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} [f(x, y) \cdot g(x, y)] = l \cdot m$
   - $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{l}{m}, \qquad m \neq 0$

3. - $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \lambda = \lambda$ (λ constante)
   - $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a$
   - $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b$

4. [Produto de uma função limitada por um infinitésimo]

Se $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 0$ e g é limitada em $D \setminus \{(a,b)\}$, então

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \cdot g(x,y) = 0.$$

5. [Lei do enquadramento]

Se $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$, $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = l$ e

$$f(x,y) \leq h(x,y) \leq g(x,y), \text{ numa vizinhança } B_r(a,b),$$

então

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y) = l.$$

Estes resultados generalizam-se de forma natural para funções com n variáveis e permitem o cálculo de limites sem recorrer à definição.

Continuidade

$f\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

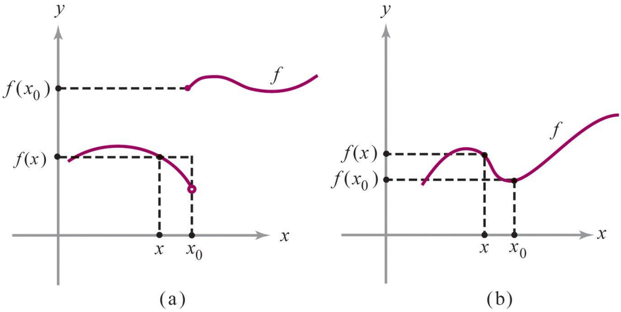


Figura 8: (a) f descontínua em x_0 (b) f contínua em x_0

$f \colon D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

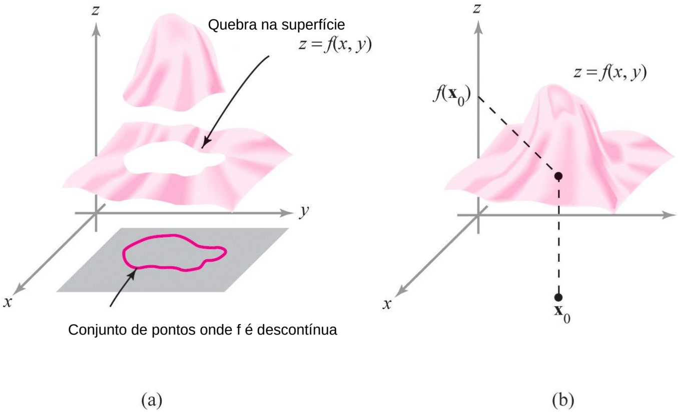


Figura 9: (a) f descontínua (b) f contínua no seu domínio

Consideremos uma função $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e (a, b) um ponto pertencente a D e também ponto de acumulação de D.

Dizemos que f é contínua em (a, b) quando

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

Designa-se por *domínio de continuidade* de f o subconjunto de D formado pelos pontos onde f é contínua. Dizemos que f é contínua se é contínua em D.

1. [Aritmérica de funções contínuas]

   Sejam $f, g\colon D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas em (a, b). Então,

   - $f + g$, λf, $f \cdot g$ são contínuas em (a, b) $\quad (\lambda \in \mathbb{R})$;
   - $\dfrac{f}{g}$ é contínua em (a, b) desde que $g(a, b) \neq 0$.

2. Se $g\colon A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em a e $h\colon B \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em b, então $f\colon A \times B \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$$

   é contínua em (a, b).

Exemplos relevantes

- Toda a função constante é contínua.
- Qualquer função polinomial de duas variáveis é contínua.

  Uma função $p\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se polinomial quando é a soma finita de parcelas do tipo

  $$cx^m y^n,$$

  onde c é uma constante real e m e n são inteiros não negativos.

- Toda a função racional é contínua no seu domínio.

  Uma função $p\colon D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se racional quando é definida pelo quociente entre duas funções polinomiais.

- A função norma $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ é contínua.
- Toda a aplicação linear $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua.

Continuidade da função composta

Sejam $g\colon A\subset\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f\colon B\subset\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $g(A) \subset B$. Se g é contínua em (a,b) e f é contínua em $c = g(a,b)$, então a função composta

$$\begin{array}{rccc} f\circ g\colon & A\subset\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f\big(g(x,y)\big) \end{array}$$

é contínua em (a,b).

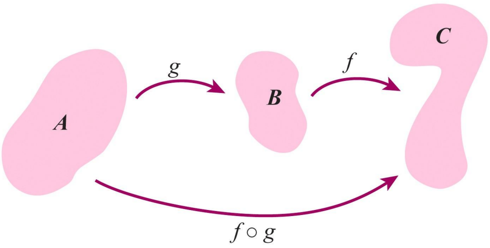


Figura 10: Composição $f \circ g$

Sendo f uma função real de n variáveis reais,

$$\begin{array}{rccc} f\colon & D \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & f(x_1, \ldots, x_n), \end{array}$$

e $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ um ponto pertencente a D e ponto de acumulação de D, dizemos que f é contínua em $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ quando

$$\lim_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\to(a_1,a_2,\ldots,a_n)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

e os resultados apresentados para $n = 2$ também se aplicam (devidamente adaptados).