Valores e vetores próprios **Exercícios**

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine os valores próprios da matriz A.

   (b) Determine o espaço próprio associado ao valor próprio de maior módulo da matriz A.

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Calcule os valores próprios de A e os respetivos subespaços próprios.

3. Determine o espetro das seguintes matrizes, bem como os espaços próprios associados aos seus valores próprios:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$. Mostre que

   (a) se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, então A não tem valores próprios; se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, então A tem dois valores próprios.

   (b) as matrizes A e $B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ têm o mesmo polinómio característico.

5. Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Mostre que o polinómio característico de A, na variável λ, se pode escrever na forma
$$p(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A).$$

6. Seja $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{tr}(A)$=2 e $\det(A)$=0. Determine os valores próprios de A.
   Sugestão: Use o resultado apresentado no exercício anterior.

7. Determine a e b de modo que $(1,1)$ e $(1,0)$ sejam vetores próprios da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$.

8. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e seja $B = A - \alpha I$, sendo α um escalar real. Qual a relação entre os valores próprios de A e de B?

9. Seja A uma matriz de ordem 3 com valores próprios $-1, 1$ e 2. Indique os valores próprios de uma matriz B relacionada com A do seguinte modo:

   (a) $B = 2A$.
   (b) $B = -A$.
   (c) $B = A - I_3$.
   (d) $B = A + pI_3, \ \ p \in \mathbb{R}$.
   (e) $B = A^{-1}$.
   (f) $B = A^T$.
   (g) $B = A^2$.
   (h) $B = A^2 + A$.
   (i) $B = A^4 - I_3$.

10. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ diz-se idempotente se $A^2 = A$. Mostre que se λ é um valor próprio de uma matriz idempotente, então $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

11. Dê um exemplo de uma matriz triangular de ordem 5 com um valor próprio de multiplicidade algébrica dois e três valores próprios simples.

12. Considere as matrizes, apenas com o valor próprio α,

$$A_1 = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

Mostre que em A_i se tem que a multiplicidade algébrica do valor próprio α é igual a $i, i = 1, 2, 3$.

13. Justifique que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$$

são vetores próprios de qualquer matriz diagonal $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e indique os valores próprios correspondentes.

14. (a) Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Mostre que A e A^T têm o mesmo polinómio característico e, portanto, os mesmos valores próprios.

    (b) Considerando a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, mostre que os subespaços próprios, respetivamente, de A e A^T associados ao mesmo valor próprio, não são necessariamente iguais.

15. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Dizemos que A é *semelhante* a B se existe $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ invertível tal que

$$B = P^{-1}AP.$$

Justifique as afirmações seguintes.

   (a) Toda a matriz é semelhante a si própria.

   (b) Se A é semelhante a B, então B é semelhante a A. (Dizemos então que A e B são semelhantes.)

   (c) Se A é semelhante a B e B é semelhante a $C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, então A é semelhante a C.

   (d) Se $\boldsymbol{x}$ é um vetor próprio de A associado a um valor próprio λ, então $P^{-1}\boldsymbol{x}$ é um vetor próprio de B associado ao mesmo valor próprio.

   (e) Se A é semelhante a B, então A e B têm os mesmos valores próprios.

16. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Dizemos que A é *diagonalizável* se A é semelhante a uma matriz diagonal, isto é, se existe uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e uma matriz diagonal D tais que

$$P^{-1}AP = D.$$

Nestas condições, diz-se que P é uma matriz d*iagonalizante* de A.

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$. Verifique que

   (a) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um vetor próprio de A associado ao valor próprio $\lambda_1 = 1$ e o vetor $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ é um vetor próprio de A associado ao valor próprio $\lambda_2 = -4$.

   (b) a matriz $P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ é uma matriz diagonalizante de A.

17. Considere a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{smallmatrix}\right] \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Determine o espectro de A e uma base para cada um dos subespaços próprios de A e mostre que A é diagonalizável indicando uma matriz P invertível e uma matriz diagonal D tais que $P^{-1}AP = D$.

Soluções

1. (a) Os valores próprios de A são as soluções da equação $\det(A-\lambda I)=0$, na variável λ. Temos

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I) &= \det\left(\begin{bmatrix}2-\lambda & 1 & 0\\ 0 & 1-\lambda & -1\\ 0 & 2 & 4-\lambda\end{bmatrix}\right)\\ &= (2-\lambda)\big[(1-\lambda)(4-\lambda)+2\big] = (2-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+6).\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I)=0 &\iff (2-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+6)=0 \iff 2-\lambda=0 \ \vee\ \lambda^2-5\lambda+6=0\\ &\iff \lambda=2 \ \vee\ \lambda=2 \ \vee\ \lambda=3.\end{aligned}$$

Ou seja, $\lambda(A)=\{2,3\}$, tendo o valor próprio $\lambda=2$ multiplicidade algébrica igual a 2 e o valor próprio $\lambda=3$ multiplicidade algébrica igual a 1.

(b) O subespaço próprio associado ao valor próprio $\lambda=3$, E_3, é o espaço das soluções (vetores coluna) do sistema

$$(A-3I_3)\boldsymbol{x}=\mathbf{0} \iff \begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Trata-se de um sistema possível e indeterminado com conjunto solução dado por

$$C.S.=\{(x_2,x_2,-2x_2) : x_2\in\mathbb{R}\}.$$

Assim, $E_3=\langle(1,1,-2)\rangle$.

Nota: em rigor deveríamos escrever $E_3=\left\langle\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}\right\rangle$, quando se adota a definição de vetor próprio como sendo um vetor coluna $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$ tal que $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$, para algum escalar λ.

2.

$$\det(A-\lambda I)=0 \iff \det\left(\begin{bmatrix}\alpha-\lambda & 0 & 0\\ 1 & \alpha-\lambda & 0\\ 1 & 1 & \alpha-\lambda\end{bmatrix}\right)=0 \iff (\alpha-\lambda)^3=0 \iff \lambda=\alpha.$$

Ou seja, existe um único valor próprio $\lambda=\alpha$ (de multipliciade algébrica 3) e o subespaço próprio associado a este valor próprio é $E_\alpha=\langle(0,0,1)\rangle$ que é o conjunto solução do sistema

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

3. $\lambda(A)=\{-1,5\}$; $\quad E_{-1}=\langle(-2,1)\rangle$; $\quad E_5=\langle(1,1)\rangle$

$\lambda(B)=\{0,2\}$; $\quad E_0=\langle(-1,1)\rangle$; $\quad E_2=\langle(1,1)\rangle$

$\lambda(C)=\{-2,1\}$; $\quad E_{-2}=\langle(0,1,1)\rangle$; $\quad E_1=\langle(0,1,2)\rangle$

$\lambda(D)=\{2,4\}$; $\quad E_2=\langle(1,0,1),(0,1,0)\rangle$; $\quad E_4=\langle(-1,0,1)\rangle$

$\lambda(E)=\{0,2\}$; $\quad E_0=\langle(1,-1,1)\rangle$; $\quad E_2=\langle(1,0,1)\rangle$

$\lambda(F)=\{1,2,3\}$; $\quad E_1=\langle(0,1,0)\rangle$; $\quad E_2=\langle(-1,2,2)\rangle$; $\quad E_3=\langle(-1,1,1)\rangle$

5.

$$p(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\det\left(\begin{bmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{bmatrix}\right)=(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-a_{21}a_{12}$$
$$=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}=\lambda^2-\operatorname{tr}(A)\lambda+\det(A).$$

6. Usando o resultado do exercício anterior, vem

$$\det(A-\lambda I)=0 \iff \lambda^2-2\lambda=0 \iff \lambda(\lambda-2)=0 \iff \lambda=0 \ \vee\ \lambda=2.$$

7. Temos

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ a & b\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ a+b\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1\\ \dfrac{a+b}{2}\end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix}1 & 1\\ a & b\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\a\end{bmatrix}.$$

Para que o vetor $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ seja vetor próprio de A deve ser $a=0$ e teremos $\lambda=1$ como valor próprio correspondente. Se $\dfrac{a+b}{2}=1$, ou seja, se $b=2-a$, o vetor $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ é vetor próprio de A associado ao valor próprio $\lambda=2$. Assim, deve ser $a=0$ e $b=2$ para que os dois vetores sejam ambos vetores próprios de A.

8. Seja λ um valor próprio de uma matriz $A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, isto é, por definição, seja λ tal que $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x},\ \ \boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$. Assim,

$$B\boldsymbol{x}=(A-\alpha I)\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{x}=(\lambda-\alpha)\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}.$$

Isto é, se λ é valor próprio de A, então $\lambda-\alpha$ é valor próprio de B e os vetores próprios associados são os mesmos.

9. (a) $\lambda(B)=\{-2,2,4\}$.
   (b) $\lambda(B)=\{-1,1,-2\}$.
   (c) $\lambda(B)=\{-2,0,1\}$.
   (d) $\lambda(B)=\{-1+p,1+p,2+p\}$.
   (e) $\lambda(B)=\left\{-1,1,\frac{1}{2}\right\}$.
   (f) $\lambda(B)=\{-1,1,2\}$.
   (g) $\lambda(B)=\{1,4\}$.
   (h) $\lambda(B)=\{0,2,6\}$.
   (i) $\lambda(B)=\{0,15\}$.

10. Seja λ um valor próprio de uma matriz idempotente A. Então, por definição, $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x},\ \ \boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$. Como $A=A^2$, equivale a dizer que

$$A^2\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x},\ \ \boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}.$$

Uma vez que, para qualquer matriz A,

$$A^2\boldsymbol{x}=A(A\boldsymbol{x})=A(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda A\boldsymbol{x}=\lambda^2\boldsymbol{x},$$

vem

$$\lambda\boldsymbol{x}=\lambda^2\boldsymbol{x} \iff (\lambda-\lambda^2)\boldsymbol{x}=\mathbf{0},\quad \boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}.$$

Como $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$, deve ser $\lambda-\lambda^2=0$, ou seja, $\lambda=0$ ou $\lambda=1$.

11. Por exemplo, a matriz triangular superior

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

tem espetro $\lambda(A) = \{1, 2, 3, 4\}$, sendo o valor próprio $\lambda = 1$ de multipliciade algébrica 2 e os restantes valores próprios de multiplicidade algébrica 1.

14. (a) $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \det\left((A - \lambda I_n)^T\right) = \det(A^T - \lambda I_n) = p_{A^T}(\lambda)$.

14. (a) Tomando $P = I_n$, $A = P^{-1}AP = I_nAI_n = A$, para qualquer matriz A.
    (b) $B = P^{-1}AP \Longrightarrow PBP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} \Longrightarrow PBP^{-1} = I_nAI_n \Longrightarrow PBP^{-1} = A$.
    (c) Se $B = P_1^{-1}AP_1$ e $C = P_2^{-1}BP_2$, então $C = P_2^{-1}P_1^{-1}AP_1P_2 = (P_1P_2)^{-1}A(P_1P_2)$.
    (d) $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \Longrightarrow P^{-1}A\boldsymbol{x} = \lambda P^{-1}\boldsymbol{x} \Longrightarrow P^{-1}AI_n\boldsymbol{x} = \lambda P^{-1}\boldsymbol{x} \Longrightarrow$
    $\Longrightarrow P^{-1}A(PP^{-1})\boldsymbol{x} = \lambda P^{-1}\boldsymbol{x} \Longrightarrow (P^{-1}AP)(P^{-1})\boldsymbol{x} = \lambda P^{-1}\boldsymbol{x} \Longrightarrow$
    $\Longrightarrow B(P^{-1}\boldsymbol{x}) = \lambda(P^{-1}\boldsymbol{x})$.
    (e) De forma análogo à alínea anterior, provamos que se λ é um valor próprio de B com vetor próprio $\boldsymbol{x}$, então λ também é valor próprio de A com vetor próprio $P\boldsymbol{x}$.

17. $\lambda(A) = \{-1, 1\}$. (O valor próprio -1 tem multiplicidade algébrica 2 e o valor próprio 1 tem multiplicidade algébrica 1.)

    Por exemplo, $E_{-1} = \langle(1, -2, 0), (0, 0, 1)\rangle$ e $E_1 = \langle(1, -1, 1)\rangle$.

    Por exemplo, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$