Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Lic. em Ciências da Computação
Lic. em Matemática
2022/2023

Álgebra Universal e Categorias

3. Teoria de Categorias

3.1. Justifique que cada uma das estruturas seguintes define uma categoria.

(a) $\mathbf{M} = (\{M\}, M, \mathrm{dom}, \mathrm{cod}, \circ)$, onde $\mathcal{M} = (M; \cdot, 1_M)$ é um monóide; $\mathrm{dom} : M \to \{M\}$ é a função que a cada elemento de M associa M; $\mathrm{cod} : M \to \{M\}$ é a função que a cada elemento de M associa M, $\circ$ é a operação binária do monóide.

Da definição de $\mathbf{M}$ segue que:

- dom e cod são funções de M em $\{M\}$;
- $\circ$ é uma função de $\{(s,r) \in M \times M \,|\, \mathrm{cod}(s) = \mathrm{dom}(r)\}$ em M, pois $\cdot$ é uma função de $M \times M$ em M;
- a classe de morfismos de M em M é M e M é um conjunto;
- para quaisquer $r, s \in M$, tem-se $r \cdot s \in M$ (pois $\cdot$ é uma operação binária em M), logo

$$\mathrm{dom}(r \circ s) = \mathrm{dom}(r \cdot s) = M = \mathrm{dom}(s) \text{ e } \mathrm{cod}(r \circ s) = \mathrm{cod}(r \cdot s) = M = \mathrm{cod}(r);$$

- para o único elemento de $\{M\}$, existe $id_M = 1_M \in M$ tal que $\mathrm{dom}_{\mathbf{M}}(id_M) = M = \mathrm{cod}_{\mathbf{M}}(id_M)$ e, para quaisquer $r, s \in M$,

$$id_M \circ r = 1_M \cdot r = r \quad \text{e} \quad s \circ id_M = s \cdot 1_M = s,$$

pois 1_M é o elemento neutro de $\mathcal{M}$;
- para quaisquer $r, s, t \in M$, tem-se

$$(r \circ s) \circ t = (r \cdot s) \cdot t = r \cdot (s \cdot t) = r \circ (s \circ t),$$

pois a operação binária $\cdot$ é associativa.

Logo, por definição de categoria, a estrutura $\mathbf{M}$ é uma categoria.

(b) $\mathbf{P} = (P, \leq, \mathrm{dom}, \mathrm{cod}, \circ)$, onde $(P, \leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado; $\mathrm{dom} : \leq \to P$ é a função que a cada par $(a,b) \in \leq$ associa o elemento a; $\mathrm{cod} : \leq \to P$ é a função que cada par $(a,b) \in \leq$ associa o elemento b; $\circ : \{((b,c),(a,b)) \,|\, (a,b),(b,c) \in \leq\} \to \leq$ é a função definida por $(b,c) \circ (a,b) = (a,c)$, para quaisquer $(a,b),(b,c) \in \leq$.

Da definição de $\mathbf{P}$ segue que:

- dom e cod são funções de $\leq$ em P;
- $\circ$ é uma função de $\{((b,c),(a,b)) \,|\, (a,b),(b,c) \in \leq\}$ em $\leq$ (esta função está bem definida, pois a relação $\leq$ é transitiva);
- para quaisquer $a, b \in P$, a classe de morfismos de a em b é $\{(a,b)\} \cap \leq$ e $\{(a,b)\} \cap \leq$ é um conjunto;
- para quaisquer $(a,b),(b,c) \in \leq$,

$$\mathrm{dom}((b,c) \circ (a,b)) = \mathrm{dom}((a,c)) = a = \mathrm{dom}((a,b))$$

e

$$\mathrm{cod}((b,c) \circ (a,b)) = \mathrm{cod}((a,c)) = c = \mathrm{cod}((b,c));$$

- para qualquer $a \in P$, existe $id_a = (a,a) \in \leq$ (pois $\leq$ é reflexiva) tal que $\mathrm{dom}(id_a) = a = \mathrm{cod}(id_a)$ e, para quaisquer $(a,b),(c,a) \in \leq$,

$$id_a \circ (c,a) = (a,a) \circ (c,a) = (c,a) \quad \text{e} \quad (a,b) \circ id_a = (a,b) \circ (a,a) = (a,b);$$

- para quaisquer $(a,b),(b,c),(c,d) \in \leq$, tem-se

$$((c,d) \circ (b,c)) \circ (a,b) = (b,d) \circ (a,b) = (a,d) = (c,d) \circ (a,c) = (c,d) \circ ((b,c) \circ (a,b)).$$

Logo, por definição de categoria, a estrutura $\mathbf{P}$ é uma categoria.

(c) $\mathbf{N} = (\mathbb{N}, \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \mathrm{dom}, \mathrm{cod}, \circ)$, onde, para cada $m, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ é a coleção de todas as matrizes reais do tipo $n \times m$; $\mathrm{dom} : \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{N}$ é a função que a cada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ associa o natural n, $\mathrm{cod} : \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{N}$ é a função que a cada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ associa o natural m; $\circ : \{(A, B) \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{q\times r}(\mathbb{R}) \,|\, p, q, r \in \mathbb{N}\} \to \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ é a função definida por $A \circ B = A \cdot B$, onde $\cdot$ é a multiplicação usual de matrizes.

Da definição de $\mathbf{N}$ segue que:

- dom e cod são funções de $\bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ em $\mathbb{N}$;
- $\circ$ é uma função de $\{(A, B) \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{q\times r}(\mathbb{R}) \,|\, p, q, r \in \mathbb{N}\}$ em $\bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ (esta função está bem definida, pois, para quaisquer $(A, B) \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{q\times r}(\mathbb{R})$, a multiplicação $A \cdot B$ está definida);
- para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, a classe de morfismos de n em m é $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ é um conjunto;
- para quaisquer $(A, B) \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{q\times r}(\mathbb{R})$,
$$\mathrm{dom}(A \circ B) = \mathrm{dom}(A \cdot B) = r = \mathrm{dom}(B), \text{ pois } A \cdot B \in \mathcal{M}_{p\times r}(\mathbb{R})$$
e
$$\mathrm{cod}(A \circ B) = \mathrm{cod}(A \cdot B) = p = \mathrm{cod}(A), \text{ pois } A \cdot B \in \mathcal{M}_{p\times r}(\mathbb{R});$$
- para qualquer $n \in \mathbb{N}$, existe $id_n = I_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{dom}(id_n) = n = \mathrm{cod}(id_n)$ e, para quaisquer $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$,
$$id_n \circ A = I_n \cdot A = A \quad \text{e} \quad B \circ id_n = B \cdot I_n = B;$$
- para quaisquer $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$ e $C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R})$, tem-se
$$(A \circ B) \circ C = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \circ (B \circ C),$$
pois a multiplicação usual de matrizes é comutativa.

Logo, por definição de categoria, a estrutura $\mathbf{N}$ é uma categoria.

3.2. Numa categoria $\mathbf{C}$, considere o diagrama a seguir representado

$$\begin{tikzcd}
& \bullet \arrow[rr, "g"] \arrow[dr] & & \bullet \arrow[dr, "h"] & \\
\bullet \arrow[ur, "f"] \arrow[rr] \arrow[drr, "k"'] & & \bullet \arrow[ur] \arrow[rr] & & \bullet \\
& & \bullet \arrow[urr, "l"'] & &
\end{tikzcd}$$

Mostre que se os quatro triângulos internos do diagrama comutam, então $h \circ g \circ f = l \circ k$.

Consideremos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
& \bullet \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "s"] & & \bullet \arrow[dr, "h"] & \\
\bullet \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "p"'] \arrow[drr, "k"'] & & \bullet \arrow[ur, "r"] \arrow[rr, "q"'] & & \bullet \\
& & \bullet \arrow[urr, "l"'] & &
\end{tikzcd}$$

e admitamos que os quatro triângulos internos do diagrama comutam. Então tem-se:

$$p = s \circ f, \quad q = h \circ r, \quad g = r \circ s, \quad l \circ k = q \circ p.$$

Logo

$$\begin{aligned}
h \circ g \circ f &= h \circ (r \circ s) \circ f \\
&= (h \circ r) \circ (s \circ f) \\
&= q \circ p \\
&= l \circ k.
\end{aligned}$$

3.3. Seja $\mathbf{C}$ a categoria definida pelo diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "s"] \arrow[rr, bend left] \arrow[d, "u"] \arrow[dr, "q"] \arrow[ddrr, bend right=60] & B \arrow[r] \arrow[d, "p"] \arrow[dr, "g"'] & C \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "f"] \\
D \arrow[r, "r"] \arrow[rr, bend right] & E \arrow[r] & F
\end{tikzcd}$$

Construa:

(a) A subcategoria plena $\mathbf{C}'$ de $\mathbf{C}$ tal que $\mathrm{Obj}(\mathbf{C}') = \{A, B, C, F\}$.

A categoria $\mathbf{C}' = (\mathrm{Obj}(C'), \mathrm{Mor}(C'), \mathrm{dom}_{\mathbf{C}'}, \mathrm{cod}_{\mathbf{C}'}, \circ_{\mathbf{C}'})$ diz-se uma subcategoria plena de $\mathbf{C}$ se:

(1) $\mathbf{C}'$ é uma subcategoria de $\mathbf{C}$, ou seja, se:

- $\mathrm{Obj}(\mathbf{C}') \subseteq \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$;
- $\mathrm{Mor}(\mathbf{C}') \subseteq \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ e $\{id_A^C | A \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})'\} \subseteq \mathrm{Mor}(\mathbf{C})'$;
- para qualquer $f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C}')$, $\mathrm{dom}_{\mathbf{C}'}(f) = \mathrm{dom}_{\mathbf{C}}(f)$ e $\mathrm{cod}_{\mathbf{C}'}(f) = \mathrm{cod}_{\mathbf{C}}(f)$;
- para qualquer $A \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C}')$, o morfismo $id_A^{\mathbf{C}'}$ é o mesmo que o morfismo $id_A^{\mathbf{C}}$;
- para quaisquer $\mathbf{C}'$-morfismos $f : A \to B$ e $g : B \to D$, o morfismo $g \circ_{\mathbf{C}'} f$ é o mesmo que o morfismo $g \circ_{\mathbf{C}} f$.

(2) para quaisquer $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C}')$, $\hom_{\mathbf{C}'}(A, B) = \hom_{\mathbf{C}}(A, B)$.

Assim, a subcategoria plena $\mathbf{C}'$ de $\mathbf{C}$ tal que $\mathrm{Obj}(\mathbf{C}') = \{A, B, C, F\}$ é a categoria representada pelo diagrama seguinte

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[rr, bend left] \arrow[drr] & B \arrow[r] \arrow[dr] & C \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "f"] \\
 & & F
\end{tikzcd}$$

(b) A categoria dos objetos sobre E.

A categoria dos objetos sobre E, é a categoria

$$\mathbf{C/E} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{C/E}), \mathrm{Mor}(\mathbf{C/E}), \mathrm{dom}_{\mathbf{C/E}}, cod^{\mathbf{C/E}}, \circ_{\mathbf{C/E}})$$

definida do seguinte modo:

- os objetos de $\mathbf{C/E}$ são todos os morfismos de $\mathbf{C}$ com codomínio E;
- dados objetos f e g de $\mathbf{C/E}$ (isto é, dados $\mathbf{C}$-morfismos $f : X \to E$ e $g : Y \to E$), um $\mathbf{C/E}$-morfismo de f em g é um triplo de morfismos (f, j, g), onde j é um $\mathbf{C}$-morfismo de X em Y tal que $g \circ_{\mathbf{C}} j = f$;
- para cada objeto $f : X \to E$ de $\mathbf{C/E}$, o morfismo identidade $id_f^{\mathbf{C/E}}$ é o triplo de $\mathbf{C}$-morfismos (f, id_X, f);
- a composição $(f_2, h, f_3) \circ_{\mathbf{C/E}} (f_1, g, f_2)$ dos morfismos $(f_1, g, f_2) : f_1 \to f_2$ e $(f_2, h, f_3) : f_2 \to f_3$ de $\mathbf{C}/E$ é o morfismo $(f_1, h \circ_{\mathbf{C}} g, f_3) : f_1 \to f_3$.

Assim, a categoria dos objetos sobre E é a categoria representada por

$$\begin{tikzcd}
q \arrow[loop left, "{(q, id_A, q)}"] \arrow[r, "{(q, s, p)}"] \arrow[d, "{(q, u, r)}"'] \arrow[dr, "{(q, q, id_E)}"] & p \arrow[loop right, "{(p, id_B, p)}"] \arrow[d, "{(p, p, id_E)}"] \\
r \arrow[loop left, "{(r, id_D, r)}"] \arrow[r, "{(r, r, id_E)}"'] & id_E \arrow[loop right, "{(id_E, id_E, id_E)}"]
\end{tikzcd}$$

3.4. (a) Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ as categorias definidas, respetivamente, pelos diagramas seguintes

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & B \arrow[d, "h"] \\
 & C
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "i"] & V
\end{tikzcd}
$$

Defina por meio de um diagrama a categoria produto $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$.

Dadas categorias

$$\mathbf{C} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{C}), \mathrm{Mor}(\mathbf{C}), \mathrm{dom}_{\mathbf{C}}, cod_{\mathbf{C}}, \circ_{\mathbf{C}}) \text{ e } \mathbf{D} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{D}), \mathrm{Mor}(\mathbf{D}), \mathrm{dom}_{\mathbf{D}}, cod_{\mathbf{D}}, \circ_{\mathbf{D}}),$$

designa-se por categoria produto de $\mathbf{C}$ por $\mathbf{D}$, e representa-se por $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$, a categoria definida do seguinte modo:

- os objetos de $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ são todos os pares (A, B), onde A é um objeto de $\mathbf{C}$ e B é um objecto de $\mathbf{D}$;
- os morfismos de $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ são todos os pares (f, g), onde f é um morfismo de $\mathbf{C}$ e g é um morfismo de $\mathbf{D}$;
- para qualquer $(f, g) \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C} \times \mathbf{D})$, $\mathrm{dom}_{\mathbf{C}\times\mathbf{D}}(f, g) = (\mathrm{dom}_{\mathbf{C}}(f), \mathrm{dom}_{\mathbf{D}}(g))$ e $\mathrm{cod}_{\mathbf{C}\times\mathbf{D}}(f, g) = (\mathrm{cod}_{\mathbf{C}}(f), \mathrm{cod}_{\mathbf{D}}(g))$
- para cada objeto (A, B) de $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$, o morfismo identidade $id_{(A,B)}$ é o par $(id_A^{\mathbf{C}}, id_B^{\mathbf{D}})$;
- a composição $(f, g) \circ (f', g')$ dos morfismos (f, g) e (f', g') de $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ é definida componente a componente, isto é, $(f, g) \circ_{\mathbf{C}\times\mathbf{D}} (f', g') = (f \circ_{\mathbf{C}} f', g \circ_{\mathbf{D}} g')$.

A categoria $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ é a categoria definida pelo diagrama

$$
\begin{tikzcd}
(A,U) \arrow[r, "(id_A,i)"] \arrow[d, "(f,id_U)"] \arrow[dr, "(f,i)"] \arrow[dd, bend right=60, "(g,id_U)"'] \arrow[ddr, bend right=90, "(g,i)"'] & (A,V) \arrow[d, "(f,id_V)"] \arrow[dd, bend left=60, "(g,id_V)"] \\
(B,U) \arrow[r, "(id_B,i)"] \arrow[d, "(h,id_U)"] \arrow[dr, "(h,i)"] & (B,V) \arrow[d, "(h,id_V)"] \\
(C,U) \arrow[r, "(id_C,i)"'] & (C,V)
\end{tikzcd}
$$

3.5. Sejam $\mathcal{R} = (R; \cdot^{\mathcal{R}}, 1^{\mathcal{R}})$ e $\mathcal{S} = (S; \cdot^{\mathcal{S}}, 1^{\mathcal{S}})$ monóides vistos como categorias $\mathbf{R}$ e $\mathbf{S}$. O que é a categoria produto $\mathbf{R} \times \mathbf{S}$?

Consideremos os monóides $\mathcal{R} = (R; \cdot^{\mathcal{R}}, 1^{\mathcal{R}})$ e $\mathcal{S} = (S; \cdot^{\mathcal{S}}, 1^{\mathcal{S}})$ vistos como categorias

$$\mathbf{R} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{R}), \mathrm{Mor}(\mathbf{R}), \mathrm{dom}_{\mathbf{R}}, \mathrm{cod}_{\mathbf{R}}, \circ_{\mathbf{R}}) \text{ e } \mathbf{S} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{S}), \mathrm{Mor}(\mathbf{S}), \mathrm{dom}_{\mathbf{S}}, \mathrm{cod}_{\mathbf{S}}, \circ_{\mathbf{S}}),$$

respetivamente.

Então, considerando as categorias $\mathbf{R}$ e $\mathbf{S}$ definidas de acordo com o indicado em 3.1.(a), a categoria produto de $\mathbf{R}$ e $\mathbf{S}$ é a categoria $\mathbf{R} \times \mathbf{S} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{R} \times \mathbf{S}), \mathrm{Mor}(\mathbf{R} \times \mathbf{S}), \mathrm{dom}_{\mathbf{R}\times\mathbf{S}}, \mathrm{cod}_{\mathbf{R}\times\mathbf{S}}, \circ_{\mathbf{R}\times\mathbf{S}})$, onde

- $\mathrm{Obj}(\mathbf{R} \times \mathbf{S}) = \{(A, B) \mid A \in \mathrm{Obj}(\mathbf{R}) \text{ e } B \in \mathrm{Obj}(\mathbf{S})\} = \{(R, S)\}$;
- $\mathrm{Mor}(\mathbf{R} \times \mathbf{S}) = \{(f, g) \mid f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{R}) \text{ e } g \in \mathrm{Mor}(\mathbf{S})\} = R \times S$;
- para qualquer $(r, s) \in \mathrm{Mor}(\mathbf{R} \times \mathbf{S})$, $\mathrm{dom}_{\mathbf{R}\times\mathbf{S}}(r, s) = (R, S)$ e $\mathrm{cod}_{\mathbf{R}\times\mathbf{S}}(r, s) = (R, S)$;
- $id_{(R,S)}^{\mathbf{R}\times\mathbf{S}} = (id_R^{\mathbf{R}}, id_S^{\mathbf{S}}) = (1_R, 1_S)$;
- para quaisquer $(r_1, s_1), (r_2, s_2) \in R \times S$, $(r_1, s_2) \circ_{\mathbf{R}\times\mathbf{S}} (r_2, s_2) = (r_1 \circ_{\mathbf{R}} s_1, r_2 \circ_{\mathbf{S}} s_2) = (r_1 \cdot^{\mathcal{R}} s_1, r_2 \cdot^{\mathcal{S}} s_2)$.

Logo $\mathbf{R} \times \mathbf{S}$ é a categoria correspondente ao produto direto dos monóides $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$.

3.6. (a) Seja $(P, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado visto como uma categoria $\mathbf{P}$. O que é a categoria dual $\mathbf{P}^{op}$?

Sejam $(P, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $\mathbf{P} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{P}), \mathrm{Mor}(\mathbf{P}), \mathrm{dom}_{\mathbf{P}}, \mathrm{cod}_{\mathbf{P}}, \circ_{\mathbf{P}})$ a categoria correspondente ao c.p.o. $(P, \leq)$.

Então, considerando a categoria $\mathbf{P}$ definida de acordo com o indicado em 3.1.(b), a categorial dual de $\mathbf{P}$ é a categoria $\mathbf{P}^{op} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{P}^{op}), \mathrm{Mor}(\mathbf{P}^{op}), \mathrm{dom}_{\mathbf{P}^{op}}, \mathrm{cod}_{\mathbf{P}^{op}}, \circ_{\mathbf{P}^{op}})$, onde:

- $\mathrm{Obj}(\mathbf{P}^{op}) = \mathrm{Obj}(\mathbf{P}) = P$;
- $\mathrm{Mor}(\mathbf{P}^{op}) = \mathrm{Mor}(\mathbf{P}) = \leq$;
- $\mathrm{dom}_{\mathbf{P}^{op}} : \mathrm{Mor}(\mathbf{P}^{op}) \to \mathrm{Obj}(\mathbf{P}^{op})$ e $\mathrm{cod}_{\mathbf{P}^{op}} : \mathrm{Mor}(\mathbf{P}^{op}) \to \mathrm{Obj}(\mathbf{P}^{op})$ são as funções definidas por $\mathrm{dom}_{\mathbf{P}^{op}}(f) = \mathrm{cod}_{\mathbf{P}}(f)$ e $\mathrm{cod}_{\mathbf{P}^{op}}(f) = \mathrm{dom}_{\mathbf{P}}(f)$, para qualquer $f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{P}^{op}) = \mathrm{Mor}(\mathbf{P})$;
- $\circ_{\mathbf{P}}^{op}$ é a função de $\{(g, f) \in \mathrm{Mor}(\mathbf{P}^{op}) \times \mathrm{Mor}(\mathbf{P}^{op}) \,|\, \mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)\}$ em $\mathrm{Mor}(\mathbf{P}^{op})$ definida por $g \circ_{\mathbf{P}^{op}} f = f \circ_{\mathbf{P}} g$, para quaisquer $f, g \in \mathrm{Mor}(\mathbf{P}^{op})$ tais que $\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)\}$;
- para qualquer $a \in \mathrm{Obj}(\mathbf{P}^{op}) = \mathrm{Obj}(\mathbf{P})$, $id_a^{\mathbf{P}^{op}} = id_a^{\mathbf{P}} = (a, a)$.

Na sequência da definição anterior segue que, para quaisquer $a, b \in \mathrm{Obj}(\mathbf{P}^{op}) = \mathrm{Obj}(\mathbf{P})$,

$$\mathrm{hom}_{\mathbf{P}^{op}}(a, b) = \mathrm{hom}_{\mathbf{P}}(b, a) = \{(b, a)\} \cap \leq .$$

Logo, a categoria $\mathbf{P}^{op}$ é a categoria correspondente ao c.p.o dual de $(P, \leq)$, ou seja, é a categoria referente ao c.p.o. $(P, \leq^d)$, onde $\leq^d$ é a relação de ordem dual da relação $\leq$.

(b) Seja $\mathcal{R}$ um monóide visto como uma categoria $\mathbf{R}$. O que é a categoria dual $\mathbf{R}^{op}$?

Consideremos o monóide $\mathcal{R} = (R; \cdot^{\mathcal{R}}, 1^{\mathcal{R}})$ visto como uma categoria

$$\mathbf{R} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{R}), \mathrm{Mor}(\mathbf{R}), \mathrm{dom}_{\mathbf{R}}, \mathrm{cod}_{\mathbf{R}}, \circ_{\mathbf{R}}).$$

Considerando a categoria $\mathbf{R}$ definida de acordo com o indicado em 3.1.(a), a categorial dual de $\mathbf{R}$ é a categoria $\mathbf{R}^{op} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{R}^{op}), \mathrm{Mor}(\mathbf{R}^{op}), \mathrm{dom}_{\mathbf{R}^{op}}, \mathrm{cod}_{\mathbf{R}^{op}}, \circ_{\mathbf{R}^{op}})$, onde:

- $\mathrm{Obj}(\mathbf{R}^{op}) = \mathrm{Obj}(\mathbf{R}) = \{R\}$;
- $\mathrm{Mor}(\mathbf{R}^{op}) = \mathrm{Mor}(\mathbf{R}) = R$;
- $\mathrm{dom}_{\mathbf{R}^{op}} : \mathrm{Mor}(\mathbf{R}^{op}) \to \mathrm{Obj}(\mathbf{R}^{op})$ e $\mathrm{cod}_{\mathbf{R}^{op}} : \mathrm{Mor}(\mathbf{R}^{op}) \to \mathrm{Obj}(\mathbf{R}^{op})$ são as funções definidas por $\mathrm{dom}_{\mathbf{R}^{op}}(r) = \mathrm{cod}_{\mathbf{R}}(r)$ e $\mathrm{cod}_{\mathbf{R}^{op}}(r) = \mathrm{dom}_{\mathbf{R}}(r)$, para qualquer $r \in \mathrm{Mor}(\mathbf{R}^{op}) = \mathrm{Mor}(\mathbf{R})$;
- $\circ_{\mathbf{R}}^{op}$ é a função de $\{(s, r) \in \mathrm{Mor}(\mathbf{R}^{op}) \times \mathrm{Mor}(\mathbf{R}^{op}) \,|\, \mathrm{cod}(r) = \mathrm{dom}(s)\}$ em $\mathrm{Mor}(\mathbf{R}^{op})$ definida por $s \circ_{\mathbf{R}^{op}} r = r \circ_{\mathbf{R}} s = r \cdot^{\mathcal{R}} s$, para quaisquer $r, s \in \mathrm{Mor}(\mathbf{R}^{op})$ tais que $\mathrm{cod}(r) = \mathrm{dom}(s)$;
- $id_R^{\mathbf{R}^{op}} = id_R^{\mathbf{R}} = 1_{\mathcal{R}}$.

Por conseguinte, a categoria $\mathbf{R}^{op}$ é a categoria correspondente ao monóide $\mathcal{R}' = (R; *; 1^{\mathcal{R}'})$ onde, $1^{\mathcal{R}'} = 1^{\mathcal{R}}$ e, para quaisquer $r, s \in R$, $s * r = r \cdot s$.

3.7. Considere a categoria $\mathbf{C}$ representada ao lado.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "p"] \arrow[rr, bend left, "q \circ p"] \arrow[drr, bend right, "j"'] & B \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "i"] & C \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "f"] \\
 & & F
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} i &= g \circ q \\ &= f \circ q \\ j &= i \circ p \\ &= g \circ q \circ p \\ &= f \circ q \circ p \end{aligned}$$

Indique, caso exista:

(a) Um monomorfismo de $\mathbf{C}$.

Um $\mathbf{C}$-morfismo $h : X \to Y$ diz-se um monomorfismo se, para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $s, t : Z \to X$,

$$h \circ s = h \circ t \Rightarrow s = t.$$

O morfismo $p : A \to B$ é um monomorfismo, pois, para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $s, t : Z \to A$,

$$p \circ s = p \circ t \Rightarrow s = t.$$

Note-se que o único $\mathbf{C}$-morfismo com domínio A é o morfismo id_A. Logo, sendo s e t morfismos com codomínio A, tem-se $s = id_A$ e $t = id_A$.

(b) Um morfismo que não seja um epimorfismo de $\mathbf{C}$.

Um $\mathbf{C}$-morfismo $h : X \to Y$ diz-se um epimorfismo se, para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $s, t : Y \to Z$,

$$s \circ h = t \circ h \Rightarrow s = t.$$

O morfismo q não é um epimorfismo, pois existem $f, g \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ tais que $f \neq g$ e $f \circ q = g \circ q$.

(c) Um bimorfismo de $\mathbf{C}$.

O morfismo j é um bimorfismo, pois é simultaneamente um monomorfismo e um epimorfismo.

O morfismo j é um monomorfismo, uma vez que, para quaisquer morfismos $s, t : Z \to A$

$$j \circ s = j \circ t \Rightarrow s = t.$$

De facto, se s e t são morfismos com codomínio A, tem-se $s = id_A = t$, pois id_A é o único morfismo com codomínio A.

O morfismo j também é um epimorfismo, uma vez que, para quaisquer morfismos $s, t : F \to Z$,

$$s \circ j = t \circ j \Rightarrow s = t.$$

Com efeito, se s e t são morfismos com domínio F, então $s = id_F = t$, pois id_F é o único morfismo com domínio F.

(d) Um isomorfismo de $\mathbf{C}$.

Um morfirmo $h : X \to Y$ diz-se um isomorfismo se existe um morfismo $h' : Y \to X$ tal que $h \circ h' = id_Y$ e $h' \circ h = id_X$.

Para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$, id_X é um isomorfismo, uma vez que $id_X \circ id_X = id_X$.

3.8. Numa categoria $\mathbf{C}$, considere o diagrama seguinte

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[rrr] \arrow[ddd] \arrow[dr, "e"] & & & \bullet \arrow[ddd] \arrow[dl] \\
& \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] & \\
& \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[dr, "m"] & \\
\bullet \arrow[rrr] \arrow[ur] & & & \bullet
\end{tikzcd}$$

Sabendo que os quatro trapézios deste diagrama são comutativos, mostre que:

(a) Se o quadrado mais pequeno é comutativo, então o quadrado maior também é comutativo.

Admitamos que no diagrama seguinte os quatro trapézios e o quadrado pequeno são comutativos.

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[rrr, "q"] \arrow[ddd, "p"'] \arrow[dr, "e"'] & & & \bullet \arrow[ddd, "t"] \arrow[dl, "r"] \\
& \bullet \arrow[r, "l"] \arrow[d, "u"'] & \bullet \arrow[d, "k"] & \\
& \bullet \arrow[r, "j"'] & \bullet \arrow[dr, "m"] & \\
\bullet \arrow[rrr, "s"'] \arrow[ur, "i"] & & & \bullet
\end{tikzcd}$$

Então tem-se $r \circ q = l \circ e$, $m \circ k \circ r = t$, $m \circ j \circ i = s$, $u \circ e = i \circ p$, $j \circ u = k \circ l$.

Logo

$$\begin{array}{rclclcl}
s \circ p & = & (m \circ j \circ i) \circ p & = & m \circ j \circ (i \circ p) & = & m \circ j \circ (u \circ e) \\
& = & m \circ (j \circ u) \circ e & = & m \circ (k \circ l) \circ e & = & m \circ k \circ (l \circ e) \\
& = & m \circ k \circ (r \circ q) & = & (m \circ k \circ r) \circ q & = & t \circ q
\end{array}$$

e, portanto, o quadrado maior é comutativo.

(b) Se e é um epimorfismo, m é um monomorfismo e o quadrado maior é comutativo, então o quadrado pequeno também é comutativo.

Admitamos que no diagrama seguinte os quatro trapézios e o quadrado maior são comutativos.

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[rrr, "q"] \arrow[dr, "e"] \arrow[ddd, "p"'] & & & \bullet \arrow[dl, "r"'] \arrow[ddd, "t"] \\
& \bullet \arrow[r, "l"] \arrow[d, "u"'] & \bullet \arrow[d, "k"] & \\
& \bullet \arrow[r, "j"'] & \bullet \arrow[dr, "m"] & \\
\bullet \arrow[ur, "i"] \arrow[rrr, "s"'] & & & \bullet
\end{tikzcd}$$

Então tem-se $r \circ q = l \circ e$, $m \circ k \circ r = t$, $m \circ j \circ i = s$, $u \circ e = i \circ p$, $s \circ p = t \circ q$.

Admitamos tambem que e é um epimorfismo e m é um monomorfismo.

Considerando as igualdades anteriores e atendendo a que m é um monomorfismo e e é um epimorfismo, segue que

$$\begin{array}{rcll}
s \circ p = t \circ q & \Rightarrow & (m \circ j \circ i) \circ p = (m \circ k \circ r) \circ q & \\
& \Rightarrow & m \circ (j \circ i \circ p) = m \circ (k \circ r \circ q) & \\
& \Rightarrow & j \circ i \circ p = k \circ r \circ q & (m \text{ é um monomorfismo}) \\
& \Rightarrow & j \circ u \circ e = k \circ l \circ e & \\
& \Rightarrow & j \circ (u \circ e) = k \circ (l \circ e) & \\
& \Rightarrow & j \circ u = k \circ l. & (e \text{ é um epimorfismo})
\end{array}$$

Logo o quadrado mais pequeno é comutativo.

3.9. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ morfismos em $\mathbf{C}$. Mostre que:

(a) Se f e g são invertíveis à esquerda (respetivamente, direita), então $g \circ f$ é invertível à esquerda (respetivamente, direita).

Admitamos que f e g são invertíveis à esquerda. Então existem $i : B \to A$ e $j : C \to B$ tais que $i \circ f = id_A$ e $j \circ g = id_B$. Pretendemos mostrar que $g \circ f : A \to C$ é invertível à esquerda, ou seja, pretendemos mostrar que existe um $\mathbf{C}$-morfismo $h : C \to A$ tal que $h \circ (g \circ f) = id_A$.

Seja $h = i \circ j$. Considerando que $i \circ j \in \hom(C, A)$ e

$$(i \circ j) \circ (g \circ f) = i \circ (j \circ g) \circ f = i \circ id_B \circ f = i \circ f = id_A,$$

concluímos que $g \circ f$ é invertível à esquerda.

Por dualidade segue que se f e g são invertíveis à direita, então $g \circ f$ também é invertível à direita.

(b) Se $g \circ f$ é invertível à esquerda (respetivamente, direita), então f é invertível à esquerda (respetivamente, g é invertivel à direita).

Admitamos que $g \circ f : A \to C$ é invertível à esquerda. Então existe um morfismo $i : C \to A$ tal que $i \circ (g \circ f) = id_A$. Então $(i \circ g) \circ f = id_A$. Logo f é invertível à esquerda, pois existe $h = i \circ g : B \to A$ tal que $h \circ f = id_A$.

Por dualidade segue que se $g \circ f$ é invertível à direita, então g é invertivel à direita.

3.10. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ um morfismo em $\mathbf{C}$. Mostre que:

(a) Se f é invertível à esquerda, então f é um monomorfismo.

Admitamos que f é invertível à esquerda. Então existe $h : B \to A$ tal que $h \circ f = id_A$. Então, para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $i, j : C \to A$,

$$\begin{array}{rcl}
f \circ i = f \circ j & \Rightarrow & h \circ (f \circ i) = h \circ (f \circ j) \\
& \Rightarrow & (h \circ f) \circ i = (h \circ f) \circ j \\
& \Rightarrow & id_A \circ j = id_A \circ i \\
& \Rightarrow & i = j.
\end{array}$$

(b) Se f é invertível à direita, então f é um epimorfismo.

Segue por dualidade da prova anterior.

3.11. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ morfismos em $\mathbf{C}$. Mostre que se $g \circ f$ é um monomorfismo e f é invertível à direita, então g é um monomorfismo.

Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ morfismos em $\mathbf{C}$ tais que $g \circ f$ é um monomorfismo e f é invertível à direita. Uma vez que f é invertível à direita existe $f' : B \to A$ tal que $f \circ f' = id_B$. Então, para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $i : D \to B$ e $j : D \to B$,

$$\begin{array}{lll}
g \circ i = g \circ j & \Rightarrow \; g \circ id_B \circ i = g \circ id_B \circ j & (id_B \circ h = h, \text{ para qualquer morfismo } h : D \to B) \\
& \Rightarrow \; g \circ (f \circ f') \circ i = g \circ (f \circ f') \circ j & (f' \text{ é o inverso direito de } f) \\
& \Rightarrow \; (g \circ f) \circ f' \circ i = (g \circ f) \circ f' \circ j & (\text{associatividade}) \\
& \Rightarrow \; f' \circ i = f' \circ j & (g \circ f \text{ é um monomorfismo}) \\
& \Rightarrow \; f \circ f' \circ i = f \circ f' \circ j & (\circ \text{ é uma função}) \\
& \Rightarrow \; id_B \circ i = id_B \circ j & (f' \text{ é o inverso direito de } f) \\
& \Rightarrow \; i = j & (id_B \circ h = h, \text{ para qualquer morfismo } h : D \to B).
\end{array}$$

3.12. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ morfismos em $\mathbf{C}$. Mostre que se f e g são isomorfismos, então $g \circ f$ é um isomorfismo e o seu inverso é $f^{-1} \circ g^{-1}$.

Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ morfismos em $\mathbf{C}$ tais que f e g são isomorfismos. Então existem $f^{-1} : B \to A$ e $g^{-1} : C \to B$ tais que $f \circ f^{-1} = id_B$, $f^{-1} \circ f = id_A$, $g \circ g^{-1} = id_C$, $g^{-1} \circ g = id_B$. Pretendemos mostrar que $g \circ f : A \to C$ é um isomorfismo, ou seja, temos de mostrar que existe $h : C \to A$ tal que $h \circ (g \circ f) = id_A$ e $(g \circ f) \circ h = id_C$.

Seja $h = f^{-1} \circ g^{-1}$. Então $h \in \hom(C, A)$ e

$$\begin{array}{l}
h \circ (g \circ f) = (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ id_B \circ f = f^{-1} \circ f = id_A, \\
(g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ id_B \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = id_C
\end{array}$$

Logo $g \circ f$ é invertível à direita e à esquerda, ou seja, $g \circ f$ é um isomorfismo.

3.13. Mostre que as seguintes condições sobre uma categoria $\mathbf{C}$ são equivalentes:

(I1) Todo o morfismo em $\mathbf{C}$ é invertível à direita;

(I2) Todo o morfismo em $\mathbf{C}$ é invertível à esquerda;

(I3) Todo o morfismo em $\mathbf{C}$ é invertível.

(I1) $\Rightarrow$ (I2) Admitamos que todo o morfismo de $\mathbf{C}$ é invertível à direita. Seja $f : A \to B$ um $\mathbf{C}$-morfismo. Mostremos que f é invertível à esquerda. Por hipótese, existe um $\mathbf{C}$-morfismo $f' : B \to A$ tal que $f \circ f' = id_B$. Considerando que f' também é invertível à direita existe um $\mathbf{C}$-morfismo $f'' : A \to B$ tal que $f' \circ f'' = id_A$. Logo de $f \circ f' = id_B$ segue que $f' \circ f \circ f' \circ f'' = f' \circ id_B \circ f''$, ou seja, $f' \circ f = id_A$. Portanto, f é invertível à esquerda.

(I2) $\Rightarrow$ (I3) Admitamos que todo o morfismo de $\mathbf{C}$ é invertível à esquerda. Por dualidade da prova anterior segue que todo o morfismo de $\mathbf{C}$ também é invertível à direita. Logo todo o morfismo é invertível.

(I3) $\Rightarrow$ (I1) Imediato, pois todo o morfismo invertível é um morfismo invertível à direita (e à esquerda).

3.14. Seja $f : A \to B$ um isomorfismo numa categoria $\mathbf{C}$. Para cada objeto $C \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$, mostre que a função $f_C : \hom(B, C) \to \hom(A, C)$ definida por $f_C(g) = g \circ f$ é uma bijeção.

Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ um isomorfismo em $\mathbf{C}$. Considerando que f é um isomorfismo, existe $f^{-1} : B \to A \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ tal que $f \circ f^{-1} = id_B$ e $f^{-1} \circ f = id_A$. Pretendemos mostrar que, para cada objeto $C \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$, a função $f_C : \hom(B, C) \to \hom(A, C)$ definida por $f_C(g) = g \circ f$ é injetiva e sobrejetiva.

- f_C injetiva

Para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $g_1 : B \to C$ e $g_2 : B \to C$,

$$\begin{array}{rcl}
f_C(g_1) = f_C(g_2) & \Rightarrow & g_1 \circ f = g_2 \circ f \\
& \Rightarrow & (g_1 \circ f) \circ f^{-1} = (g_2 \circ f) \circ f^{-1} \\
& \Rightarrow & g_1 \circ (f \circ f^{-1}) = g_2 \circ (f \circ f^{-1}) \\
& \Rightarrow & g_1 \circ id_B = g_2 \circ id_B \\
& \Rightarrow & g_1 = g_2.
\end{array}$$

Logo f_C é injetiva.

- f_C sobrejetiva

Também é simples verificar que f_C é sobrejetiva. De facto, para qualquer $h \in \hom(A, C)$, existe $g = h \circ f^{-1} \in \hom(B, C)$ tal que

$$f_C(g) = f_C(h \circ f^{-1}) = (h \circ f^{-1}) \circ f = h \circ (f \circ f^{-1}) = h \circ id_B = h.$$

Portanto, f_C é sobrejetiva.

3.15. Mostre que se $\mathbf{C}_1$ e $\mathbf{C}_2$ são duas categorias com objetos terminais (iniciais), então $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$ também tem objetos terminais (iniciais).

Sejam $\mathbf{C}_1$ e $\mathbf{C}_2$ categorias e T_1 e T_2 são objetos terminais de $\mathbf{C}_1$ e $\mathbf{C}_2$, respetivamente. Mostremos que (T_1, T_2) é um objeto terminal de $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$.

Uma vez que T_1 é um objeto terminal de $\mathbf{C}_1$, então $T_1 \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C}_1)$ e, para cada $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C}_1)$, existe um e um só $\mathbf{C}_1$-morfismo $f : X \to T_1$. Como T_2 é um objeto terminal de $\mathbf{C}_2$, então $T_2 \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C}_2)$, para cada $Y \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C}_2)$, existe um e um só $\mathbf{C}_2$-morfismo $g : Y \to T_2$.

Como $T_1 \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C}_1)$ e $T_2 \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C}_2)$, então $(T_1, T_2) \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2)$. Mostremos que para $(X, Y) \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2)$ existe um e um só $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$-morfismo de (X, Y) em (T_1, T_2). Então X é um objeto de $\mathbf{C}_1$ e Y é um objeto de $\mathbf{C}_2$. Logo existe um $\mathbf{C}_1$-morfismo $f : X \to T_1$ e existe um $\mathbf{C}_2$-morfismo $g : Y \to T_2$. Assim, (f, g) é um $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$-morfismo de (X, Y) em (T_1, T_2). Além disso, é simples verificar que (f, g) é o único $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$-morfismo de (X, Y) em (T_1, T_2). De facto, se (f', g') é um $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$-morfismo de (X, Y) em (T_1, T_2), então f' é um $\mathbf{C}_1$-morfismo de X em T_1 e g' é um $\mathbf{C}_2$-morfismo de Y em T_2. Logo, atendendo a que f é o único morfismo de X em T_1 e g é o único morfismo de Y em T_2, segue que $f' = f$ e $g' = g$. Portanto, $(f', g') = (f, g)$. Desta forma, provámos que (T_1, T_2) é um objeto terminal de $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$.

3.16. Mostre que se uma categoria $\mathbf{C}$ tem objeto zero, então todo o objeto inicial (terminal) de $\mathbf{C}$ é objeto zero. Deduza que a categoria **Set** não tem objetos zero.

Seja 0 um objeto zero de $\mathbf{C}$. Por definição de objeto zero, 0 é um objeto inicial e terminal. Seja I um objeto inicial de $\mathbf{C}$. Pretendemos mostrar que I é um objeto zero, ou seja, pretendemos mostrar que é um objeto inicial e terminal. Uma vez que I é um objeto inicial, resta provar que I é um objeto terminal, ou seja, temos de provar que, para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$, existe um e um só $\mathbf{C}$-morfismo $X \to I$.
Seja X um objeto de $\mathbf{C}$. Uma vez que 0 é um objeto terminal, existe um e um só morfismo $f : X \to 0$. Considerando que 0 é um objeto inicial, existe um e um só morfismo $g : 0 \to I$. Logo $g \circ f : X \to I$ é um $\mathbf{C}$-morfismo

$$X \xrightarrow{f} O \xrightarrow{g} I$$

e, portanto, existe um $\mathbf{C}$-morfismo de X em I.
Mostremos, agora, que $g \circ f$ é o único $\mathbf{C}$-morfismo de X em I. Seja $h : X \to I$ um morfismo de $\mathbf{C}$. Pretendemos mostar que $h = g \circ f$. Uma vez que I é um objeto inicial, existe um e um só morfismo $g' : I \to O$. Assim, temos o diagrama seguinte na categoria $\mathbf{C}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "h"] & O \arrow[r, "g"] & I \arrow[l, bend left, "g'"] \end{tikzcd}$$

e $g \circ g' : I \to I$ é um $\mathbf{C}$-morfismo. Uma vez que $g \circ g' : I \to I$ e $id_I : I \to I$ são $\mathbf{C}$-morfismos com domínio I, com o mesmo codomínio e I é um objeto inicial, tem-se $g \circ g' = id_I$. Por outro lado, como $f : X \to 0$ e $g' \circ h : X \to 0$ são $\mathbf{C}$-morfismos com o mesmo domínio, com codomínio 0 e 0 é um objeto terminal, temos $g' \circ h = f$. Desta igualdade segue que $g \circ (g' \circ h) = g \circ f$, donde resulta $(g \circ g') \circ h = g \circ f$ e, portanto, $id_I \circ h = g \circ f$. Logo $h = g \circ f$. Desta forma, provámos que existe um único morfismo de X em I.
Por conseguinte, I é também um objeto terminal. Logo I é um objeto zero.

Por dualidade conclui-se que se uma categoria $\mathbf{C}$ tem objeto zero, então todo o objeto terminal de $\mathbf{C}$ é um objeto zero.

Na categoria **Set**, o conjunto $\emptyset$ é um objeto inicial mas não é um objeto terminal (por exemplo, não existe qualquer morfismo de $\{1\}$ em $\emptyset$). Logo a categoria **Set** não tem objetos zero (caso contrário, $\emptyset$ também seria um objeto zero).

3.17. Seja $\mathbf{C}$ uma categoria com objeto inicial I e com objeto terminal T. Mostre que se $f : T \to I$ é um morfismo em $\mathbf{C}$, então f é um isomorfismo. Conclua que I e T são objetos zero.

Seja $\mathbf{C}$ uma categoria com objeto inicial I e com objeto terminal T. Seja $f : T \to I$ um $\mathbf{C}$-morfismo. Uma vez que I é um objeto inicial, existe um e um só $\mathbf{C}$-morfismo $f' : I \to T$.

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, bend left, "f"] & I \arrow[l, bend left, "f'"] \end{tikzcd}$$

Logo $f \circ f' : I \to I$ e $f' \circ f : T \to T$ são $\mathbf{C}$-morfismos. Considerando que $f \circ f' : I \to I$ e $id_I : I \to I$ são $\mathbf{C}$-morfismos com domínio I, com o mesmo codomínio e I é um objeto inicial, segue que $f \circ f' = id_I$. Por outro lado, como $f' \circ f : T \to T$ e $id_T : T \to T$ são $\mathbf{C}$-morfismos com o mesmo domínio, com codomínio T e T é um objeto terminal, temos $f' \circ f = id_T$. Logo f é um isomorfismo.

Uma vez que T é um objeto terminal e $I \cong T$, então I também é um objeto terminal. Logo I é um objeto zero. Como I é um objeto inicial e $T \cong I$, então T também é um objeto inicial e, portanto, T é um objeto zero.

3.18. Seja $\mathbf{C}$ a categoria definida pelo diagrama seguinte

$$\mathbf{C} \qquad \begin{tikzcd} & R \arrow[loop above, "\mathrm{id}_R"] & \\ P \arrow[loop left, "\mathrm{id}_P"] \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & Q \arrow[loop right, "\mathrm{id}_Q"] \arrow[ul, "i"'] \arrow[dl, "j"] \arrow[ll, shift right, "v"'] \arrow[ll, shift left, "u"] \\ & S \arrow[loop below, "\mathrm{id}_S"] & \end{tikzcd}$$

onde $i = f \circ u = f \circ v$
e $j = g \circ u = g \circ v$.

Diga, justificando, se:

(a) A categoria $\mathbf{C}$ tem objetos iniciais e objetos terminais.

Nenhum dos objetos de $\mathbf{C}$ é um objeto inicial ou terminal.

O objeto R não é inicial, pois não existe morfismo de R em S. O objeto S não é inicial, pois não existe morfismo de S em R. O objeto P não é inicial, pois não existe morfismo de P em Q. O objeto Q não é inicial, pois existe mais do que um morfismo de Q em P.

O objeto R não é terminal, pois não existe morfismo de S em R. O objeto S não é terminal, pois não existe morfismo de R em S. O objeto P não é terminal, pois existe mais do que um morfismo de Q em P. O objeto Q não é inicial, pois não existe morfismo de P em Q.

(b) $(P, (f, g))$ é um produto de R e S.

O par $(P, (f, g)$ é um produto de R e S se:

i. $f \in \hom_{\mathbf{C}}(P, R)$, $g \in \hom_{\mathbf{C}}(P, S)$;

ii. para cada $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $f_1 : X \to R$ e $f_2 : X \to S$, existe um único $\mathbf{C}$-morfismo $u : X \to P$ tal que $f \circ u = f_1$ e $g \circ u = f_2$.

Por definição de $\mathbf{C}$, a condição i. verifica-se. Porém, a condição ii. não é satisfeita, pois $i : Q \to R$, $j : Q \to S$ são $\mathbf{C}$-morfismos e existem $u : Q \to P, v : Q \to P \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ tais que $u \neq v$, $f \circ u = i$, $g \circ u = j$, $f \circ v = i$ e $g \circ v = j$.

Logo o par $(P, (f, g))$ não é um produto de R e S.

(c) $(S, (g, j))$ é um coproduto de P e Q.

O par $(S, (g, j)$ é um coproduto de P e Q se:

i. $g \in \hom_{\mathbf{C}}(P, S)$ e $j \in \hom_{\mathbf{C}}(Q, S)$;

ii. para cada $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $f_1 : P \to X$ e $f_2 : Q \to X$, existe um único $\mathbf{C}$-morfismo $k : S \to X$ tal que $k \circ g = f_1$ e $k \circ j = f_2$.

Por definição de $\mathbf{C}$, a condição i. é imediata. No entanto, existem $P \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e $\mathbf{C}$-morfismos $id_P : P \to P$ e $u : Q \to P$ para os quais não existe qualquer $\mathbf{C}$-morfismo $k : S \to P$ tal que $k \circ g = id_P$ e $k \circ j = u$.

3.19. Dados objetos A e B da categoria **Set**, seja $A \times B = \{(a,b) \,|\, a \in A, b \in B\}$ e sejam p_A e p_B as funções definidas por

$$\begin{array}{rcl} p_A : A \times B & \to & A \\ (a,b) & \mapsto & a \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} p_B : A \times B & \to & B \\ (a,b) & \mapsto & b \end{array}.$$

Mostre que $(A \times B, (p_A, p_B))$ é um produto dos objetos A e B.

O par $(A \times B, (p_A, p_B))$ é um produto de A e B se:

(i) p_A é um **Set**-morfismo de $A \times B$ em A, p_B é um **Set**-morfismo de $A \times B$ em B;

(ii) para qualquer $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Set})$ e para quaisquer **Set**-morfismos $f_A : X \to A$ e $f_B : X \to B$, existe um e um só morfismo $u : X \to A \times B$ tal que $p_A \circ u = f_A$ e $p_B \circ u = f_B$.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f_A"'] \arrow[d, "u"] \arrow[dr, "f_B"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "p_A"] \arrow[r, "p_B"'] & B \end{tikzcd}$$

Mostremos as condições (i) e (ii).

(i) Considerando que p_A é uma função de $A \times B$ em A e p_B é uma função de $A \times B$ em B, então, pela definição da categoria **Set**, $p_A \in \hom_{\mathbf{Set}}(A \times B, A)$ e $p_B \in \hom_{\mathbf{Set}}(A \times B, B)$.

(ii) Admitamos que existem $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Set})$ e **Set**-morfismos f_A e f_B tais que $f_A \in \hom_{\mathbf{Set}}(X, A)$ e $f_B \in \hom_{\mathbf{Set}}(X, B)$.

Por definição da categoria **Set**, f_A e f_B são funções e, por conseguinte, a correspondência u de X em $A \times B$ definida por $u(x) = (f_A(x), f_B(x))$ é uma função de X em $A \times B$. De facto, como f_A e f_B são funções, para todo $x \in X$, temos $f_A(x) \in A$ e $f_B(x) \in B$ e, portanto, $(f_A(x), f_B(x)) \in A \times B$. Além disso, para quaisquer $x, y \in X$,

$$\begin{array}{rll} x = y & \Rightarrow & f_A(x) = f_A(y) \text{ e } f_B(x) = f_B(y) \quad (f_A \text{ e } f_B \text{ são funções}) \\ & \Rightarrow & (f_A(x), f_B(x)) = (f_A(y), f_B(y)) \\ & \Rightarrow & u(x) = u(y). \end{array}$$

É simples verificar que, considerando a função u definida desta forma, o diagrama anterior é comutativo. Com efeito, como $p_A \circ u$ e f_A são funções com o mesmo domínio e o mesmo conjunto de chegada e, para todo $x \in X$, $(p_A \circ u)(x) = p_A(f_A(x), f_B(x)) = f_A(x)$, temos $p_A \circ u = f_A$. De modo anólogo, prova-se que $p_B \circ u = f_B$.
O morfismo u é o único morfismo de X em $A \times B$ tal que $p_A \circ u = f_A$ e $p_B \circ u = f_B$. De facto, se admitirmos que $v : X \to A \times B$ é um morfismo tal que $p_A \circ v = f_A$ e $p_B \circ v = f_B$, segue que, para todo $x \in X$, $p_A(v(x)) = f_A(x)$ e $p_B(v(x)) = f_B(x)$, pelo que $v(x) = (f_A(x), f_B(x)) = u(x)$. Então, considerando que u e v são funções com o mesmo domínio e conjunto de chegada, concluímos que $u = v$.

De (i) e (ii) conclui-se que $A \times B$ é um produto de A e B.

3.20. Seja $\mathbf{C}$ uma categoria com objeto terminal T. Para qualquer objeto A de $\mathbf{C}$, mostre que:

(a) o par $(A, (\xi^A, id_A))$, onde ξ^A é o único morfismo $A \to T$, é um produto de T e A.

O par $(A, (\xi^A, id_A))$ é um produto de T e A se:

(i) ξ^A é um morfismo de A em T, id_A é um morfismo de A em A;

(ii) para qualquer $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $f : X \to T$ e $g : X \to A$, existe um e um só morfismo $u : X \to A$ tal que $\xi^A \circ u = f$ e $id_A \circ u = g$.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "u"] \arrow[dr, "g"] & \\ T & A \arrow[l, "\xi^A"] \arrow[r, "id_A"'] & A \end{tikzcd}$$

Provemos as condições (i) e (ii).

(i) Imediato pela definição de ξ^A e de id_A.

(ii) Considerando $u = g$, é imediato que $id_A \circ u = g$. Também se tem $\xi^A \circ u = f$. De facto, como $\xi^A \circ u$ e f são morfismos com o mesmo domínio, com codomínio T e T é objeto terminal, segue que $\xi^A \circ u = f$.
O morfismo u é o único morfismo tal que $id_A \circ u = g$ e $\xi^A \circ u = f$; se assumirmos que $v : X \to A$ é um morfismo tal que $id_A \circ v = g$ e $\xi^A \circ v = f$, então temos $v = g = u$.

De (i) e (ii) concluímos que $(A, (\xi^A, \mathrm{id}_A))$ é um produto de T e A.

(b) o par $(A, (\mathrm{id}_A, \xi^A))$, onde ξ^A é o único morfismo $A \to T$, é um produto de A e T.

A prova é similar à da alínea anterior.

(c) Se $(T \times A, (p_1, p_2))$ é um produto de T e A e $(A \times T, ({p'}_1, {p'}_2))$ é um produto de A e T, então $T \times A \cong A \cong A \times T$.

Consideremos que $(T \times A, (p_1, p_2))$ é um produto de T e A. Então

(1) p_1 é um morfismo de $T \times A$ em T, p_2 é um morfismo de $T \times A$ em A;
(2) para qualquer objeto Y de $\mathbf{C}$ e para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $f : Y \to T$ e $g : Y \to A$, existe um e um só morfismo $u : Y \to T \times A$ tal que $p_1 \circ u = f$ e $p_2 \circ u = g$.

Da alínea (a) também sabemos que $(A, (\xi^A, \mathrm{id}_A))$ é um produto de T e A, pelo que são satisfeitas as condições seguintes:

(i) ξ^A é um morfismo de A em T, id_A é um morfismo de A em A;
(ii) para qualquer objeto X de $\mathbf{C}$ e para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $f : X \to T$ e $g : X \to A$, existe um e um só morfismo $v : X \to A$ tal que $\xi^A \circ v = f$ e $id_A \circ v = g$.

De (ii), e considerando $X = T \times A$, $f = p_1$ e $g = p_2$, sabe-se que existe um e um só morfismo $v : T \times A \to A$ tal que $\xi^A \circ v = p_1$ e $id_A \circ v = p_2$. De (2), e considerando $Y = A$, $f = \xi^A$ e $g = id_A$, sabe-se que existe um e um só morfismo $u : A \to T \times A$ tal que $p_1 \circ u = \xi^A$ e $p_2 \circ u = id_A$.

Das igualdades anteriores resulta que $p_1 \circ u \circ v = p_1$ e $p_2 \circ u \circ v = p_2$.

$$\begin{tikzcd}
& T \times A \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[d, "v"] \arrow[dr, "p_2"] & \\
T & A \arrow[l, "\xi^A"'] \arrow[r, "id_A"] \arrow[d, "u"] & A \\
& T \times A \arrow[ul, "p_1"] \arrow[ur, "p_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Então, considerando que também temos $p_1 \circ id_{A \times T} = p_1$ e $p_2 \circ id_{A \times T} = p_2$, segue que $u \circ v = id_{A \times T}$, pois $(T \times A, (p_1, p_2))$ é um produto de T e A, .

Das igualdades $\xi^A \circ v = p_1$, $id_A \circ v = p_2$, $p_1 \circ u = \xi^A$ e $p_2 \circ u = id_A$ também resulta que $id_A \circ v \circ u = id_A$ e $\xi^A \circ v \circ u = \xi^A$.

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "\xi^A"'] \arrow[d, "u"] \arrow[dr, "id_A"] & \\
T & T \times A \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d, "v"] & A \\
& A \arrow[ul, "\xi^A"] \arrow[ur, "id_A"'] &
\end{tikzcd}$$

Então, considerando que também temos $id_A \circ id_A = id_A$, $\xi^A \circ id_A = \xi^A$ e $(A, (\xi^A, \mathrm{id}_A))$ é um produto de T e A, segue que $v \circ u = id_A$.

Como $u \circ v = id_{T \times A}$ e $v \circ u = id_A$, então $u : A \to T \times A$ é um isomorfismo e, portanto, $A \cong T \times A$.

3.21. Sejam A e B dois objetos de uma categoria $\mathbf{C}$, admitindo coproduto $(A + B, (i_A, i_B))$ e tais que $\hom_{\mathbf{C}}(B, A) \neq \emptyset$. Mostre que i_A é invertível à esquerda e, portanto, é um monomorfismo.

Admitamos que A e B são objetos de uma categoria $\mathbf{C}$ tais que $(A+B,(i_A,i_B))$ é um coproduto de A e B e $\hom_{\mathbf{C}}(B,A)\neq\emptyset$.

Considerando que $\hom_{\mathbf{C}}(B,A)\neq\emptyset$, existe um $\mathbf{C}$-morfismo $f:B\to A$. Atendendo a que $A\in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e $\mathbf{C}$ é uma categoria, $id_A:A\to A$ também é um morfismo de $\mathbf{C}$. Então, atendendo a que $(A+B,(i_A,i_B))$ é um coproduto de A e B, existe um e um só morfismo $u:A+B\to A$ tal que $u\circ i_A=id_A$ e $u\circ i_B=f$.

$$\begin{tikzcd}
 & A & \\
A \arrow[ur, "id_A"] \arrow[r, "i_A"'] & A+B \arrow[u, "u"] & B \arrow[l, "i_B"] \arrow[ul, "f"']
\end{tikzcd}$$

Uma vez que $u\circ i_A=id_A$, concluímos que i_A é invertível à esquerda. Todo o morfismo invertível à esquerda é um monomorfismo e, portanto, i_A é um monomorfismo.

3.22. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f:A\to B$ e $g:A\to B$ morfismos em $\mathbf{C}$. Mostre que se (I,i) e (I',i') são igualizadores de f e g, então $I\cong I'$.

Sejam $f:A\to B$ e $g:A\to B$ morfismos de $\mathbf{C}$ e (I,i), (I',i') igualizadores de f e g.

Considerando que (I,i) é um igualizador de f e g, então:

(i) i é um $\mathbf{C}$-morfismo de I em A tal que $f\circ i=g\circ i$;

(ii) para qualquer $\mathbf{C}$-morfismo $j:J\to A$ tal que $f\circ j=g\circ j$, existe um único $\mathbf{C}$-morfismo $u:J\to I$ tal que $i\circ u=j$.

Atendendo a que (I',i') é um igualizador de f e g, então:

(1) i' é um $\mathbf{C}$-morfismo de I' em A tal que $f\circ i'=g\circ i'$;

(2) para qualquer $\mathbf{C}$-morfismo $k:K\to A$ tal que $f\circ k=g\circ k$, existe um único $\mathbf{C}$-morfismo $v:K\to I'$ tal que $i'\circ v=k$.

De (ii), e considerando $J=I'$ e $j=i'$, resulta que existe um e um só $\mathbf{C}$-morfismo $u:I'\to I$ tal que $i\circ u=i'$. De (2), considerando $K=I$ e $k=i$, segue que existe um e um só morfismo $v:I\to I'$ tal que $i'\circ v=i$. Das igualdades $i\circ u=i'$ e $i'\circ v=i$, temos

$$i\circ u\circ v=i \text{ e } i'\circ v\circ u=i'.$$

Por outro lado, de (ii), considerando $J=I$ e $j=i$, sabe-se que existe um e um só morfismo $s:I\to I$ tal que $i\circ s=i$. Então, como $i\circ id_I=i$ e $i\circ u\circ v=i$, tem-se $id_I=s=u\circ v$.
De (2), considerando $K=I'$ e $k=i'$, conclui-se que existe um e um só morfismo $t:I'\to I'$ tal que $i'\circ t=i'$. Assim, atendendo a que $i'\circ id_{I'}=i'$ e $i'\circ v\circ u=i'$, temos $v\circ u=t=id_{I'}$.
Uma vez que $u\circ v=id_I$ e $v\circ u=id_{I'}$, conclui-se que v é um isomorfismo e, portanto, $I\cong I'$.

3.23. Seja $\mathbf{C}$ uma categoria com objeto zero 0. Mostre que se $f:A\to B$ é um monomorfismo (respetivamente, epimorfismo), então o igualizador (respetivamente, co-igualizador) de f e do morfismo nulo de A em B é o par $(0,0_{0,A})$ (respetivamente, o par $(0,0_{B,0})$).

Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria com objeto zero 0 e $f:A\to B$ um monomorfismo de $\mathbf{C}$. Pretendemos provar que $(0,0_{0,A})$ é um igualizador de f e $0_{A,B}$, ou seja, temos de mostrar que

(i) $0_{0,A}$ é um $\mathbf{C}$-morfismo de 0 em A tal que $f\circ 0_{0,A}=0_{A,B}\circ 0_{0,A}$;

(ii) para qualquer $C\in\mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e para qualquer $\mathbf{C}$-morfismo $g:C\to A$ tal que $f\circ g=0_{A,B}\circ g$, existe um e um só morfismo $u:C\to 0$ tal que $i\circ u=g$.

Mostremos as condições (i) e (ii).

(i) Por definição dos morfismos $0_{0,A}$ e $0_{A,B}$, temos $0_{0,A}\in\hom_{\mathbf{C}}(0,A)$ e $0_{A,B}\in\hom_{\mathbf{C}}(A,B)$. Logo

$$f\circ 0_{0,A}:0\to B \quad \text{e} \quad 0_{A,B}\circ 0_{0,A}:0\to B$$

são $\mathbf{C}$-morfismos. Considerando que $f\circ 0_{0,A}$ e $0_{A,B}\circ 0_{0,A}$ são morfismos com domínio 0, com o mesmo codomínio e que 0 é um objeto inicial, segue que

$$f\circ 0_{0,A}=0_{A,B}\circ 0_{0,A}.$$

(ii) Sejam $C \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e $g : C \to A$ um $\mathbf{C}$-morfismo tal que $f \circ g = 0_{A,B} \circ g$. Nestas condições prova-se que existe um e um só morfismo $u : C \to 0$ tal que $0_{0,A} \circ u = g$. De facto, como 0 é um objeto terminal, existe um e um só morfismo de C em 0; esse morfismo é o morfismo $0_{C,0}$. Além disso, tem-se $0_{0,A} \circ 0_{C,0} = g$. Com efeito, como

$$f \circ g = 0_{A,B} \circ g = 0_{C,B} = f \circ (0_{0,A} \circ 0_{C,0})$$

e f é monomorfismo, segue que

$$g = 0_{0,A} \circ 0_{C,0}.$$

Assim, de (i) e (ii) resulta que $(0, 0_{0,A})$ é um igualizador de f e $0_{A,B}$.

3.24. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria, $f, g : A \to B$ morfismos em $\mathbf{C}$ e (I, i) um igualizador de f e g. Mostre que se $\alpha : B \to C$ é um monomorfismo, então (I, i) é um igualizador de $\alpha \circ f$ e $\alpha \circ g$.

Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria, $f, g : A \to B$ morfismos em $\mathbf{C}$ e (I, i) um igualizador de f e g. Admitamos que $\alpha : B \to C$ é um monomorfismo de $\mathbf{C}$.

Uma vez que (I, i) é um igualizador de f e g, sabe-se que:

(1) i é um $\mathbf{C}$-morfismo de I em A tal que $f \circ i = g \circ i$;

(2) para qualquer $K \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e para qualquer $\mathbf{C}$-morfismo $k : K \to A$ tal que $f \circ k = g \circ k$, existe um e um só morfismo $u : K \to I$ tal que $i \circ u = k$.

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
K \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "k"'] & &
\end{tikzcd}$$

Pretendemos mostar que (I, i) é um igualizador de $\alpha \circ f$ e $\alpha \circ g$, ou seja, pretende-se provar que:

(i) i é um $\mathbf{C}$-morfismo de I em A tal que $(\alpha \circ f) \circ i = (\alpha \circ g) \circ i$;

(ii) para qualquer $Z \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e para qualquer $\mathbf{C}$-morfismo $z : Z \to A$ tal que $(\alpha \circ f) \circ z = (\alpha \circ g) \circ z$, existe um e um só morfismo $v : Z \to I$ tal que $i \circ v = z$.

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, shift left, "\alpha \circ f"] \arrow[r, shift right, "\alpha \circ g"'] & C \\
Z \arrow[u, "v"] \arrow[ur, "z"'] & &
\end{tikzcd}$$

Mostremos as condições (i) e (ii).

(i) Esta condição é imediata a partir de (1), pois i é um $\mathbf{C}$-morfismo de I em A e

$$(\alpha \circ f) \circ i = \alpha \circ (f \circ i) = \alpha \circ (g \circ i) = (\alpha \circ g) \circ i.$$

(ii) Sejam $Z \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e $z : Z \to A$ um $\mathbf{C}$-morfismo tal que $(\alpha \circ f) \circ z = (\alpha \circ g) \circ z$. Então, como $\alpha \circ (f \circ z) = \alpha \circ (g \circ z)$ e α é um monomorfismo, temos $f \circ z = g \circ z$. Então, por (2), existe um e um só morfismo $v : Z \to I$ tal que $i \circ v = z$.

De (i) e (ii) conclui-se que (I, i) é um igualizador de $\alpha \circ f$ e $\alpha \circ g$.

3.25. Mostre que na subcategoria plena de **Set** constituída pelos conjuntos não vazios há pares de morfismos que não têm igualizador.

Seja $\mathbf{C}$ a subcategoria plena de **Set** constituída pelos conjuntos não vazios.

As funções

$$\begin{array}{rcl} f : \{1\} & \to & \{2,3\} \\ 1 & \mapsto & 2 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} g : \{1\} & \to & \{2,3\} \\ 1 & \mapsto & 3 \end{array}$$

são morfismos de $\mathbf{C}$ e não admitem igualizador, pois, para qualquer $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e para qualquer $i : X \to \{1\}$, tem-se $f \circ i \neq g \circ i$. Note-se que se $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$, então $X \neq \emptyset$, pelo que existe $x \in X$ e, para qualquer $i : X \to \{1\}$, $(f \circ i)(x) = 2 \neq 3 = (g \circ i)(x)$, pelo que $f \circ i \neq g \circ i$.

3.26. Sejam $f, g : A \to B$ e $i : I \to A$ morfismos numa categoria $\mathbf{C}$. Mostre que se $(I, (i, i))$ é um produto fibrado de (f, g), então (I, i) é um igualizador de f e g .

Admitamos que $(I, (i, i))$ é um produto fibrado de (f, g). Então:

(i) i é um $\mathbf{C}$-morfismo de I em A tal que $f \circ i = g \circ i$;

(ii) para qualquer $K \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $f' : K \to A$, $g' : K \to A$ tais que $f \circ f' = g \circ g'$, existe um e um só morfismo $k : K \to I$ tal que $i \circ k = f'$ e $i \circ k = g'$.

$$
\begin{tikzcd}
K \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, "g'"] \arrow[ddr, "f'"'] & & \\
& I \arrow[r, "i"'] \arrow[d, "i"] & A \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
$$

Pretendemos mostrar que (I, i) é um igualizador de f e g, ou seja, pretendemos provar que:

(1) i é um $\mathbf{C}$-morfismo de I em A tal que $f \circ i = g \circ i$;

(2) para qualquer $Z \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e para qualquer $\mathbf{C}$-morfismo $z : Z \to A$ tal que $f \circ z = g \circ z$, existe um e um só morfismo $u : Z \to I$ tal que $i \circ u = z$.

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
Z \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "z"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Mostremos as condições (1) e (2).

(1) Imediato a partir (i).

(2) Sejam $Z \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e $z : Z \to A$ um $\mathbf{C}$-morfismo tal que $f \circ z = g \circ z$. Então, a partir de (ii), considerando $K = Z$, $f' = z$ e $g' = z$, concluímos que existe um e um só morfismo $u : Z \to I$ tal que $i \circ u = f' = z$ e $i \circ u = g' = z$.

Portanto (I, i) é um igualizador de f e g.

3.27. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ um morfismo em $\mathbf{C}$. Mostre que as afirmações seguintes são equivalentes:

(A1) f é um monomorfismo.

(A2) $(A, (id_A, id_A))$ é um produto fibrado de (f, f).

(A1) $\Rightarrow$ (A2) Admitamos que f é um monomorfismo. Pretendemos mostrar que $(A, (\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_A))$ é um produto fibrado de (f, f), ou seja, temos de provar que:

(i) id_A é um $\mathbf{C}$-morfismo de A em A tal que $f \circ id_A = f \circ id_A$;

(ii) para qualquer $K \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $p : K \to A$, $q : K \to A$ tais que $f \circ p = f \circ q$, existe um e um só morfismo $k : K \to A$ tal que $id_A \circ k = p$ e $id_A \circ k = q$.

$$
\begin{tikzcd}
K \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, "q"] \arrow[ddr, "p"'] & & \\
& A \arrow[r, "id_A"'] \arrow[d, "id_A"] & A \arrow[d, "f"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
$$

A prova das condições (i) e (ii) é simples.

(i) Imediato.

(ii) Sejam $K \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e $p : K \to A$ e $q : K \to A$ morfismos de $\mathbf{C}$ tais que $f \circ p = f \circ q$. Então, como f é monomorfismo segue que $p = q$. Logo existe $k = p = q \in \hom_{\mathbf{C}}(K, A)$ tal que $id_A \circ k = p$ e $id_A \circ k = q$.

(A2) $\Rightarrow$ (A1) Admitamos que $(A, (\text{id}_A, \text{id}_A))$ é um produto fibrado de (f, f). Então

(i) id_A é um $\mathbf{C}$-morfismo de A em A tal que $f \circ id_A = f \circ id_A$;

(ii) para qualquer $K \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $p : K \to A$, $q : K \to A$ tais que $f \circ p = f \circ q$, existe um e um só morfismo $k : K \to A$ tal que $id_A \circ k = p$ e $id_A \circ k = q$.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, "q"] \arrow[ddr, "p"'] & & \\
& A \arrow[r, "id_A"'] \arrow[d, "id_A"] & A \arrow[d, "f"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

Pretendemos provar f é um monomorfismo. Sejam $i : X \to A$ e $j : X \to A$ $\mathbf{C}$-morfismos tais que $f \circ i = f \circ j$. Então de (ii), considerando $K = X$, $p = i$ e $q = j$, segue que existe um e um só morfismo $k : X \to A$ tal que $id_A \circ k = p = i$ e $id_A \circ k = q = j$. Logo $i = k = j$ e, portanto, f é um mononomorfismo.

3.28. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria com objeto terminal T e A e B objetos de $\mathbf{C}$. Mostre que

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "p_B"] \arrow[d, "p_A"'] & B \arrow[d, "f_B"] \\
A \arrow[r, "f_A"'] & T
\end{tikzcd}$$

é um quadrado cartesiano se e só se $(P, (p_A, p_B))$ é um produto de A e B.

Admitamos que

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "p_B"] \arrow[d, "p_A"'] & B \arrow[d, "f_B"] \\
A \arrow[r, "f_A"'] & T
\end{tikzcd}$$

é um quadrado cartesiano. Então

(i) p_A e p_B são $\mathbf{C}$-morfismos tais que $p_A \in \hom_{\mathbf{C}}(P, A)$, $p_B \in \hom_{\mathbf{C}}(P, B)$ e $f_A \circ p_A = f_B \circ p_B$;

(ii) para qualquer $K \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $q_A : K \to A$, $q_B : K \to B$ tais que $f_A \circ q_A = f_B \circ q_B$, existe um e um só $\mathbf{C}$-morfismo $k : K \to P$ tal que $p_A \circ k = q_A$ e $p_B \circ k = q_B$.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, "q_B"] \arrow[ddr, "q_A"'] & & \\
& P \arrow[r, "p_B"'] \arrow[d, "p_A"] & B \arrow[d, "f_B"] \\
& A \arrow[r, "f_A"'] & T
\end{tikzcd}$$

Pretendemos provar que $(P, (p_A, p_B))$ é um produto de A e B, ou seja, pretende-se provar que

(1) $p_A \in \hom_{\mathbf{C}}(P, A)$, $p_B \in \hom_{\mathbf{C}}(P, B)$;

(2) para qualquer $Z \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $g_A : Z \to A$, $g_B : Z \to B$, existe um e um só $\mathbf{C}$-morfismo $u : Z \to P$ tal que $p_A \circ u = g_A$ e $p_B \circ u = g_B$.

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "g_A"'] \arrow[d, "u"] \arrow[dr, "g_B"] & \\
A & P \arrow[l, "p_A"] \arrow[r, "p_B"'] & B
\end{tikzcd}$$

A condição (1) é imediata pela definição de p_A e p_B.

Mostremos a condição (2). Sejam $Z \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e $g_A : Z \to A$, $g_B : Z \to B$ morfismos de $\mathbf{C}$. Considerando que $f_A \circ g_A$ e $f_B \circ g_B$ são morfimos com o mesmo domínio, com codomínio T e T é um objeto terminal, temos $f_A \circ g_A = f_B \circ g_B$. Então, atendendo a (ii), existe um e um só $\mathbf{C}$-morfismo $u : Z \to A$ tal que $p_A \circ u = g_A$ e $p_B \circ u = g_B$.

Reciprocamente, admitindo que $(P, (p_A, p_B))$ é um produto de A e B, prova-se que $(P, (p_A, p_B))$ é um produto fibrado de (f_A, f_B). De facto, se $(P, (p_A, p_B))$ é um produto de A e B, então:

(c.1) $p_A \in \hom_{\mathbf{C}}(P, A)$, $p_B \in \hom_{\mathbf{C}}(P, B)$;

(c.2) para qualquer $Z \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $g_A : Z \to A$, $g_B : Z \to B$, existe um e um só $\mathbf{C}$-morfismo $u : Z \to P$ tal que $p_A \circ u = g_A$ e $p_B \circ u = g_B$.

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "g_A"'] \arrow[d, "u"] \arrow[dr, "g_B"] & \\
A & P \arrow[l, "p_A"] \arrow[r, "p_B"'] & B
\end{tikzcd}$$

Pretendemos mostrar que $(P, (p_A, p_B))$ é um produto fibrado de (f_A, f_B), ou seja, temos de mostrar que

(c.i) p_A e p_B são $\mathbf{C}$-morfismos tais que $p_A \in \hom_{\mathbf{C}}(P, A)$, $p_B \in \hom_{\mathbf{C}}(P, B)$ e $f_A \circ p_A = f_B \circ p_B$;

(c.ii) para qualquer $K \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $q_A : K \to A$, $q_B : K \to B$ tais que $f_A \circ q_A = f_B \circ q_B$, existe um e um só $\mathbf{C}$-morfismo $k : K \to P$ tal que $p_A \circ k = q_A$ e $p_B \circ k = q_B$.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, "q_B"] \arrow[ddr, "q_A"'] & & \\
& P \arrow[r, "p_B"] \arrow[d, "p_A"] & B \arrow[d, "f_B"] \\
& A \arrow[r, "f_A"'] & T
\end{tikzcd}$$

Considerando que T é um objeto terminal e $(P, (p_A, p_B))$ é um produto de A e B, as condições (c.i) e (c.ii) provam-se facilmente.

(c.i) Por definição de p_A e de p_B, tem-se $p_A \in \hom_{\mathbf{C}}(P, A)$ e $p_B \in \hom_{\mathbf{C}}(P, B)$. Além disso, como $f_A \circ p_A$ e $f_B \circ p_B$ são $\mathbf{C}$-morfismos com o mesmo domínio, com codomínio T e T é um objeto terminal, tem-se $f_A \circ p_A = f_B \circ p_B$.

(c.ii) Sejam $K \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e $q_A : K \to A$, $q_B : K \to B$ mofismos de $\mathbf{C}$ tais que $f_A \circ q_A = f_B \circ q_B$. Então, por (c.2), existe um e um só $\mathbf{C}$-morfismo $u : K \to P$ tal que $p_A \circ u = q_A$ e $p_B \circ u = q_B$.

De (c.i) e (c.ii) resulta que $(P, (p_A, p_B))$ é um produto fibrado de (f_A, f_B).

3.29. Se, numa categoria $\mathbf{C}$, o quadrado

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "f'"] \\
Z \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

é uma soma amalgamada e f é um epimorfismo (isomorfismo), mostre que f' é também um epimorfismo (isomorfismo).

Admitamos que o quadrado

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "f'"] \\
Z \arrow[r, "g"'] & Y
\end{tikzcd}$$

é uma soma amalgamada e f é um epimorfismo.

Considerando que o quadrado anterior é uma soma amalgamada, então:

(i) existem $\mathbf{C}$-morfismos $g : Z \to Y$ e $f' : X \to Y$ tais que $g \circ f = f' \circ g'$;

(ii) para qualquer $S \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $f_Z : Z \to S$, $f_X : X \to S$ tais que $f_Z \circ f = f_X \circ g'$, existe um e um só $\mathbf{C}$-morfismo $s : Y \to S$ tal que $s \circ g = f_Z$ e $s \circ f' = f_X$.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "f'"] \arrow[ddr, "f_X"] & \\
Z \arrow[r, "g"] \arrow[drr, "f_Z"'] & Y \arrow[dr, "s"] & \\
& & S
\end{tikzcd}$$

Atendendo a que f é um epimorfismo, então, para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $i : Z \to A$ e $j : Z \to A$,

$$i \circ f = j \circ f \Rightarrow i = j.$$

Das hipóteses anteriores resulta que f' é um epimorfismo. De facto, se $p : Y \to S$ e $q : Y \to S$ são $\mathbf{C}$-morfismos tais que $p \circ f' = q \circ f'$, então $p \circ f' \circ g' = q \circ f' \circ g'$, donde resulta $p \circ g \circ f = q \circ g \circ f$. Desta última igualdade, e considerando que f é um epimorfismo, segue que $p \circ g = q \circ g$. Por outro lado, atendendo a que $(p \circ g) \circ f = (p \circ f') \circ g'$ e $(Y, (g, f'))$ é uma soma amalgamada de (f, g'), sabe-se que existe um e um só $\mathbf{C}$-morfismo $s : Y \to S$ tal que $s \circ g = p \circ g$ e $s \circ f' = p \circ f'$.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "f'"] \arrow[ddr, "p \circ f'"] & \\
Z \arrow[r, "g"] \arrow[drr, "p \circ g"'] & Y \arrow[dr, "s"] & \\
& & S
\end{tikzcd}$$

Então, atendendo a que

$$p \circ g = p \circ g, p \circ f' = p \circ f',$$

$$q \circ g = p \circ g, q \circ f' = p \circ f',$$

temos

$$p = s = q.$$

Desta forma, provou-se que, para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $p : Y \to S$ e $q : Y \to S$,

$$p \circ f' = q \circ f' \Rightarrow p = q$$

e, portanto, f' é um epimorfismo.

Mostremos, agora, que se o quadrado

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "f'"] \\
Z \arrow[r, "g"'] & Y
\end{tikzcd}$$

é uma soma amalgamada e f é um isomorfismo, então f' também é um isomorfismo.

Considerando que o quadrado anterior é uma soma amalgamada, então:

(i) existem $\mathbf{C}$-morfismos $g : Z \to Y$ e $f' : X \to Y$ tais que $g \circ f = f' \circ g'$;

(ii) para qualquer $S \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $f_Z : Z \to S$, $f_X : X \to S$ tais que $f_Z \circ f = f_X \circ g'$, existe um e um só $\mathbf{C}$-morfismo $s : Y \to S$ tal que $s \circ g = f_Z$ e $s \circ f' = f_X$.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "f'"'] \arrow[ddr, "f_X"] & \\
Z \arrow[r, "g"] \arrow[drr, "f_Z"'] & Y \arrow[dr, "s"] & \\
 & & S
\end{tikzcd}$$

Admitindo que f é um isomorfismo, existe um $\mathbf{C}$-morfismo $i : Z \to T$ tal que $f \circ i = id_Z$ e $i \circ f = id_T$. Então

$$g' = g' \circ id_T = g' \circ (i \circ f) = (g' \circ i) \circ f,$$

donde $(g' \circ i) \circ f = id_X \circ g'$. Atendendo a que $(Y, (g, f'))$ é uma soma amalgamada de (f, g'), existe um e um só $\mathbf{C}$-morfismo $u : Y \to X$ tal que $u \circ g = g' \circ i$ e $u \circ f' = id_X$.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "f'"'] \arrow[ddr, "id_X"] & \\
Z \arrow[r, "g"] \arrow[drr, "g' \circ i"'] & Y \arrow[dr, "u"] & \\
 & & X
\end{tikzcd}$$

Uma vez que $u \circ f' = id_X$, u é o inverso esquerdo de f. Para concluir que f é um isomorfismo, falta, então, verificar que u é o inverso direito de f.

Ora, considerando que

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "f'"'] \arrow[ddr, "f'"] & \\
Z \arrow[r, "g"] \arrow[drr, "g"'] & Y & \\
 & & Y
\end{tikzcd}$$

é um diagrama em $\mathbf{C}$ e $(Y,(g,f'))$ é uma soma amalgamada de (f,g'), existe um e um só morfismo $v: Y \to Y$ tal que $v \circ g = g$ e $v \circ f' = f'$. Então, como

$$\begin{aligned}
&id_Y \circ g = g, \quad id_Y \circ f' = f', \\
&(f' \circ u) \circ g = f' \circ (u \circ g) = f' \circ (g' \circ i) = (f' \circ g') \circ i = (g \circ f) \circ i = g \circ (f \circ i) = g \circ id_Z = g, \\
&(f' \circ u) \circ f' = f' \circ (u \circ f') = f' \circ id_X = f'
\end{aligned}$$

conclui-se que $f' \circ u = id_Y$.

Como $u \circ f' = id_X$ e $f' \circ u = id_Y$, então f' é um isomorfismo.

3.30. Na categoria $\mathbf{Set}$, sejam A, B, C conjuntos e $f: A \to C$ e $g: B \to C$ funções. Mostre que o produto fibrado de (f,g) é o par $(P,(f',g'))$, onde

$$P = \{(a,b) \,|\, a \in A, b \in B, f(a) = g(b)\}$$

e $f': P \to A$ e $g': P \to B$ são as funções definidas por

$$f'(a,b) = a \text{ e } g'(a,b) = b,$$

para todo $(a,b) \in P$.

Pretendemos mostrar que $(P,(f',g'))$ é um produto fibrado de (f,g), ou seja, pretende-se provar que

(i) f' e g' são **Set**-morfismos tais que $f' \in \hom_{\mathbf{Set}}(P,A)$, $g' \in \hom_{\mathbf{Set}}(P,B)$ e $f \circ f' = g \circ g'$;

(ii) para qualquer $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Set})$ e para quaisquer **Set**-morfismos $f'': X \to A$, $g'': X \to B$ tais que $f \circ f'' = g \circ g''$, existe um e um só **Set**-morfismo $u: X \to P$ tal que $f' \circ u = f''$ e $g' \circ u = g''$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "u"] \arrow[drr, "g''"] \arrow[ddr, "f''"'] & & \\
& P \arrow[r, "g'"'] \arrow[d, "f'"] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

Mostremos as condições (i) e (ii)

(i) Considerando que $\mathrm{Mor}(\mathbf{Set})$ é a classe de todas as funções, então, pela definição de f' e de g', é imediato que $f' \in \hom_{\mathbf{Set}}(P,A)$ e $g' \in \hom_{\mathbf{Set}}(P,B)$. Além disso, as funções $f \circ f'$ e $g \circ g'$ são iguais, pois têm o mesmo domínio, o mesmo conjunto de chegada e, para todo $(x,y) \in P$,

$$(f \circ f')(x,y) = f(f'(x,y)) = f(x) = g(y) = g(g'(x,y)) = (g \circ g')(x,y).$$

(ii) Sejam $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Set})$ e $f'': X \to A$, $g'': X \to B$ morfismos de **Set** tais que $f \circ f'' = g \circ g''$. Então existe um e um só **Set**-morfismo $u: X \to P$ tal que $f' \circ u = f''$ e $g' \circ u = g''$. De facto, se consideraramos a correspondência $u: X \to P$ definida por $u(x) = (f''(x), g''(x))$, prova-se que:

- u é uma função de X em P e, portanto, u é um **Set**-morfismo de X em P;
- $f' \circ u = f''$ e $g' \circ u = g''$;
- se $v: X \to P$ é um **Set**-morfismo tal que $f' \circ v = f''$ e $g' \circ v = g''$, então $v = u$.

De (i) e (ii) conclui-se que $(P,(f',g'))$ é um produto fibrado de (f,g).

3.31. Considere o seguinte diagrama comutativo numa categoria $\mathbf{C}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"'] & Z \arrow[d, "w"'] \\
X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r, "g'"'] & Z'
\end{tikzcd}$$

Mostre que:

(a) Se $[XYY'X']$ e $[YZZ'Y']$ são quadrados cartesianos, então $[XZZ'X']$ é um quadrado cartesiano.

Admitamos que $[XYY'X']$ e $[YZZ'Y']$ são quadrados cartesianos e que o diagrama é comutativo.

Mostremos que $[XZZ'X']$ é um quadrado cartesiano, ou seja, mostremos que:

(i) $(g' \circ f') \circ u = w \circ (g \circ f)$;

(ii) para qualquer $K \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $i : K \to X'$ e $j : K \to Z$ tais que $(g' \circ f') \circ i = w \circ j$, existe um e um só $\mathbf{C}$-morfismo $k : K \to X$ tal que $u \circ k = i$ e $(g \circ f) \circ k = j$.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[dr, "k"] \arrow[drrr, "j"] \arrow[ddr, "i"'] & & & \\
& X \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "u"] & Y \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "v"'] & Z \arrow[d, "w"'] \\
& X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r, "g'"'] & Z'
\end{tikzcd}$$

A condição (i) é imediata, pois, como o diagrama é comutativo e $(f' \circ g') \circ u$ e $w \circ (g \circ f)$ são morfismos com o mesmo domínio e codomínio, tem-se $(f' \circ g') \circ u = w \circ (g \circ f)$.

A prova de (ii) também é simples. De facto, se $K \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e $i : K \to X'$ e $j : K \to Z$ são $\mathbf{C}$-morfismos tais que $(g' \circ f') \circ i = w \circ j$, tem-se

$$g' \circ (f' \circ i) = w \circ j.$$

Então, como o quadrado $[YZZ'Y']$ é cartesiano, existe um e e um só morfismo $k' : K \to Y$ tal que $v \circ k' = f' \circ i$ e $g \circ k' = j$

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[dr, "k'"] \arrow[drr, "j"] \arrow[ddr, "f' \circ i"'] & & \\
& Y \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "v"'] & Z \arrow[d, "w"'] \\
& Y' \arrow[r, "g'"'] & Z'
\end{tikzcd}$$

Agora, como $v \circ k' = f' \circ i$ e $[XYY'X']$ é um quadrado cartesiano, existe um e um só $\mathbf{C}$-morfismo $k : K \to X$ tal que $u \circ k = i$ e $f \circ k = k'$.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, "k'"] \arrow[ddr, "i"'] & & \\
& X \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "u"] & Y \arrow[d, "v"'] \\
& X' \arrow[r, "f'"'] & Y'
\end{tikzcd}$$

De $f \circ k = k'$ vem $g \circ f \circ k = g \circ k' = j$.

Assim, $u \circ k = i$ e $(g \circ f) \circ k = j$. Desta forma, fica provada a condição (ii).

(b) Se $[XZZ'X']$ e $[YZZ'Y']$ são quadrados cartesianos, então $[XYY'X']$ é um quadrado cartesiano.

Admitamos que $[XZZ'X']$ e $[YZZ'Y']$ são quadrados cartesianos. Pretendemos mostrar que $[XYY'X']$ é um quadrado cartesiano, ou seja, queremos provar que:

(i) $f' \circ u = v \circ f$;

(ii) para qualquer $K \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $i : K \to X'$ e $j : K \to Y$ tais que $f' \circ i = v \circ j$, existe um e um só $\mathbf{C}$-morfismo $k : K \to X$ tal que $u \circ k = i$ e $f \circ k = j$.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, "j"] \arrow[ddr, "i"'] & & \\
& X \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "u"] & Y \arrow[d, "v"'] \\
& X' \arrow[r, "f'"'] & Y'
\end{tikzcd}$$

A condição (i) é imediata, pois $f' \circ u$ e $v \circ f$ são morfismos com o mesmo domínio e com o mesmo codomínio e o diagrama é comutativo; portanto $f' \circ u = v \circ f$.

Verifiquemos, agora, a condição (ii). Sejam $K \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e $i : K \to X'$ e $j : K \to Y$ morfismos de $\mathbf{C}$ tais que $f' \circ i = v \circ j$. Então

$$\begin{array}{rcll}
g' \circ (f' \circ i) & = & g' \circ (v \circ j) & \\
& = & (g' \circ v) \circ j & \\
& = & (w \circ g) \circ j & ([YZZ'Y'] \text{ é um quadrado cartesiano}) \\
& = & w \circ (g \circ j). &
\end{array}$$

Considerando que o quadrado $[YZZ'Y']$ é cartesiano, existe um e um só morfismo $k' : K \to Y$ tal que $v \circ k' = f' \circ i$ e $g \circ k' = g \circ j$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, shift left, "k'"] \arrow[dr, shift right, "j"'] \arrow[drr, "g \circ j"] \arrow[ddr, "f' \circ i"'] & & \\
& Y \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "v"'] & Z \arrow[d, "w"'] \\
& Y' \arrow[r, "g'"'] & Z'
\end{tikzcd}$$

Então, como também temos $v \circ j = f' \circ i$ e $g \circ j = g \circ j$, resulta que $j = k'$.

Agora, considerando que $(g' \circ f') \circ i = w \circ (g \circ j)$ e $[XZZ'X']$ é um quadrado cartesiano, existe um e um só $\mathbf{C}$-morfismo $k : A \to X$ tal que $u \circ k = i$ e $(g \circ f) \circ k = g \circ j$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "k"] \arrow[drrr, "g \circ j"] \arrow[ddr, "i"'] & & & \\
& X \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "u"] & Y \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "v"'] & Z \arrow[d, "w"'] \\
& X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r, "g'"'] & Z'
\end{tikzcd}$$

Então, atendendo a que

$$g \circ (f \circ k) = g \circ j, \quad g \circ j = g \circ j,$$

$$v \circ j = f' \circ i, \quad v \circ (f \circ k) = (v \circ f) \circ k = (f' \circ u) \circ k = f' \circ (u \circ k) = f' \circ i,$$

segue que $f \circ k = j$.

Portanto, $[XYY'X']$ é um quadrado cartesiano,

3.32. Seja $\mathbf{D}$ a subcategoria da categoria **Grp** em que os morfismos são os isomorfismos de grupo. Sejam $F_{Ob} : \mathrm{Obj}(\mathbf{D}) \to \mathrm{Obj}(\mathbf{D})$ a função que a cada grupo G de **D** associa o grupo

$$F(G) = \{x \in G \,|\, (\forall y \in G)\ xy = yx\}$$

e $F_{hom} : \mathrm{Mor}(\mathbf{D}) \to \mathrm{Mor}(\mathbf{D})$ a função que a cada **D**-morfismo $f : G_1 \to G_2$ associa a correspondência

$$\begin{array}{rccc} F_{\mathrm{hom}}(f): & F(G_1) & \to & F(G_2) \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

Mostre que o par de funções (F_{Ob}, F_{hom}) define um funtor de **D** em **D**.

O par (F_{Ob}, F_{hom}) é um funtor de $\mathbf{D}$ em $\mathbf{D}$ se:

(1) F_{Ob} é uma função de $\mathrm{Obj}(\mathbf{D})$ em $\mathrm{Obj}(\mathbf{D})$;

(2) F_{hom} é uma função de $\mathrm{Mor}(\mathbf{D})$ em $\mathrm{Mor}(\mathbf{D})$ que a cada $\mathbf{D}$-morfismo $f : A \to B$ associa um $\mathbf{D}$-morfismo $F_{hom}(f) : F_{Ob}(A) \to F_{Ob}(B)$;

(3) para cada $A \in \mathrm{Obj}(\mathbf{D})$, $F_{hom}(id_A) = id_{F_{Ob}(A)}$;

(4) para quaisquer $\mathbf{D}$-morfismos $f : A \to B$, $g : B \to C$, $F_{hom}(g \circ f) = F_{hom}(g) \circ F_{hom}(f)$.

De acordo com o enunciado, F_{Ob} e F_{hom} são funções nas condições indicadas em (1) e (2), pelo que resta verificar (3) e (4). Na prova de (3) e (4) as funções F_{Ob} e F_{hom} são representadas pelo mesmo símbolo F.

(3) Para cada $A \in \mathrm{Obj}(\mathbf{D})$, as funções $F(id_A)$ e $id_{F(A)}$ são iguais. De facto, id_A é a função definida por

$$\begin{array}{rcl} id_A : A & \to & A \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

pelo que, por definição de F, tem-se

$$\begin{array}{rcl} F(id_A) : F(A) & \to & F(A) \\ x & \mapsto & id_A(x) = x \end{array}.$$

Por outro lado, temos

$$\begin{array}{rcl} id_{F(A)} : F(A) & \to & F(A) \\ x & \mapsto & x \end{array}.$$

Logo as funções $F(id_A)$ e $id_{F(A)}$ são iguais, pois têm o mesmo domínio, o mesmo conjunto de chegada e, para todo $x \in F(A)$,

$$F(id_A)(x) = id_A(x) = x = id_{F(A)}(x).$$

(4) Sejam $f : A \to B$, $g : B \to C$ morfismos de $\mathbf{D}$. Então $g \circ f$ é o morfismo definido por

$$\begin{array}{rcl} g \circ f : A & \to & C \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

donde segue que $F(g \circ f)$ é o morfismo

$$\begin{array}{rcl} F(g \circ f) : F(A) & \to & F(C) \\ x & \mapsto & (g \circ f)(x). \end{array}$$

Por outro lado, tem-se

$$\begin{array}{rcl} F(f) : F(A) & \to & F(B) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}, \qquad \begin{array}{rcl} F(g) : F(B) & \to & F(C) \\ x & \mapsto & g(x) \end{array}$$

donde, por definição, de composição de funções, segue que

$$\begin{array}{rcl} F(g) \circ F(f) : F(A) & \to & F(C) \\ x & \mapsto & (F(g) \circ F(f))(x). \end{array}$$

Uma vez que as funções $F(g \circ f)$ e $F(g) \circ F(f)$ têm o mesmo domínio, o mesmo conjunto de chegada e, para cada $x \in F(A)$,

$$(F(g) \circ F(f))(x) = F(g)(F(f)(x)) = F(g)(f(x)) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = F(g \circ f)(x),$$

tem-se $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

De (1), (2), (3) e (4) conclui-se que F é um funtor de $\mathbf{D}$ em $\mathbf{D}$.

3.33. Considere um c.p.o. $(P, \leq)$ visto como uma categoria $\mathbf{P}$. Sejam $F_{Ob} : \mathrm{Obj}(\mathbf{P}) \to \mathrm{Obj}(\mathbf{Set})$ a função que a cada objeto a de $\mathbf{P}$ associa o conjunto $\{a\}$ e $F_{hom} : \mathrm{Mor}(\mathbf{P}) \to \mathrm{Mor}(\mathbf{Set})$ a função que a cada $\mathbf{P}$-morfismo $f : a \to b$ associa a função

$$\begin{array}{rccc} F_{hom}(f): & \{a\} & \to & \{b\} \\ & a & \mapsto & b \end{array}.$$

Mostre que o par de funções (F_{Ob}, F_{hom}) é um funtor de $\mathbf{P}$ em $\mathbf{Set}$.

Comecemos por recordar que $\mathrm{Obj}(\mathbf{Set})$ é a classe formada por todos os conjuntos e que, dados conjuntos $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Set})$, $\hom_{\mathbf{Set}}(A, B)$ é o conjunto de todas as funções de A em B.
Relativamente à categoria $\mathbf{P}$, tem-se $\mathrm{Obj}(\mathbf{P}) = P$ e, dados $a, b \in \mathrm{Obj}(\mathbf{P})$, $\hom_{\mathbf{P}}(a, b) = \{(a, b)\} \cap \leq$.

O par (F_{Ob}, F_{hom}) é um funtor de $\mathbf{P}$ em $\mathbf{Set}$ se:

(1) F_{Ob} é uma função de $\mathrm{Obj}(\mathbf{P})$ em $\mathrm{Obj}(\mathbf{Set})$;
(2) F_{hom} é uma função de $\mathrm{Mor}(\mathbf{P})$ em $\mathrm{Mor}(\mathbf{Set})$ que a cada $\mathbf{P}$-morfismo $f : a \to b$ associa um $\mathbf{Set}$-morfismo $F_{hom}(f) : F_{Ob}(a) \to F_{Ob}(b)$;
(3) para cada $a \in \mathrm{Obj}(\mathbf{P})$, $F_{hom}(id_a) = id_{F_{Ob}(a)}$;
(4) para quaisquer $\mathbf{P}$-morfismos $f : A \to B$, $g : B \to C$, $F_{hom}(g \circ f) = F_{hom}(g) \circ F_{hom}(f)$.

De acordo com o enunciado, F_{Ob} e F_{hom} são funções nas condições indicadas em (1) e (2), pelo que resta verificar (3) e (4). Na prova de (3) e (4) as funções F_{Ob} e F_{hom} são representadas pelo mesmo símbolo F.

(3) Para cada $a \in \mathrm{Obj}(\mathbf{P})$, tem-se $id_a : a \to a \in \mathrm{Mor}(\mathbf{P})$ e, por definição de F, $F(id_a)$ é a função

$$\begin{array}{rccc} F(id_a): & \{a\} & \to & \{a\} \\ & a & \to & a \end{array}.$$

Por outro lado, a função $id_F(a)$ é a função definida por

$$\begin{array}{rccc} id_{F(a)}: & F(a) & \to & F(a) \\ & a & \to & a \end{array}.$$

Considerando que as funções $F(id_a)$ e $id_{F(a)}$ têm o mesmo domínio ($F(a) = \{a\}$), o mesmo conjunto de chegada ($F(a) = \{a\}$) e $F(id_a)(a) = id_{F(a)}(a)$, temos $F(id_a) = id_{F(a)}$.

(4) Sejam $f : a \to b$ e $g : b \to c$ morfismos de $\mathbf{P}$. Então $g \circ f : a \to c$ é um morfismo de $\mathbf{P}$ e, por definição de F, $F(g \circ f)$ é a função

$$\begin{array}{rccc} F(g \circ f): & \{a\} & \to & \{c\} \\ & a & \mapsto & c \end{array}.$$

Por outro lado, tem-se

$$\begin{array}{rccc} F(f): & \{a\} & \to & \{b\} \\ & a & \mapsto & b \end{array}, \qquad \begin{array}{rccc} F(g): & \{b\} & \to & \{c\} \\ & b & \mapsto & c \end{array}$$

donde, por definição de composição de funções, segue que

$$\begin{array}{rccc} F(g) \circ F(f): & \{a\} & \to & \{c\} \\ & a & \mapsto & (F(g) \circ F(f))(a), \end{array}$$

onde $(F(g) \circ F(f))(a) = F(g)(F(f)(a)) = F(g)(b) = c$.

Uma vez que as funções $F(g \circ f)$ e $F(g) \circ F(f)$ têm o mesmo domínio, o mesmo conjunto de chegada e

$$(F(g) \circ F(f))(a) = c = F(g \circ f)(a),$$

tem-se $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

De (1), (2), (3) e (4) conclui-se que F é um funtor de $\mathbf{P}$ em $\mathbf{Set}$.

3.34. Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ categorias e A um objeto de $\mathbf{D}$. Sejam $F_{Ob} : \mathrm{Obj}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Obj}(\mathbf{D})$ a função que a cada objeto X de $\mathbf{C}$ associa o objeto A e $F_{hom} : \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathbf{D})$ a função que a cada C-morfismo $f : X \to Y$ associa o morfismo $F(f) = \mathrm{id}_A$. Mostre que o par de funções (F_{Ob}, F_{hom}) é um funtor de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{D}$.

O par (F_{Ob}, F_{hom}) é um funtor de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{D}$ se:

(1) F_{Ob} é uma função de $\mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ em $\mathrm{Obj}(\mathbf{D})$;

(2) F_{hom} é uma função de $\mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ em $\mathrm{Mor}(\mathbf{D})$ que a cada $\mathbf{C}$-morfismo $f : X \to Y$ associa um $\mathbf{D}$-morfismo $F_{hom}(f) : F_{Ob}(X) \to F_{Ob}(Y)$;

(3) para cada $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$, $F_{hom}(id_X) = id_{F_{Ob}(X)}$;

(4) para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $F_{hom}(g \circ f) = F_{hom}(g) \circ F_{hom}(f)$.

De acordo com o enunciado, F_{Ob} e F_{hom} são funções nas condições indicadas em (1) e (2), pelo que resta verificar (3) e (4). Na prova de (3) e (4) as funções F_{Ob} e F_{hom} são representadas pelo mesmo símbolo F.

(3) Por definição de F, tem-se $F(id_X) = id_A$, para cada $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$. Por outro lado, considerando que, para cada $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$, $F(X) = A$, temos $id_{F(X)} = id_A$. Logo $F(id_X) = id_{F(X)}$.

(4) Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ morfismos de $\mathbf{C}$. Então $g \circ f : X \to Z$ é um $\mathbf{C}$-morfismo e, por definição de F, $F(g \circ f) = id_A$. Por outro lado, tem-se $F(f) = id_A$ e $F(g) = id_A$, donde $F(f) \circ F(g) = id_A \circ id_A = id_A$. Portanto, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

De (1), (2), (3) e (4) conclui-se que F é um funtor de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{D}$.

3.35. Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ categorias. Defina os funtores projeção $\mathbf{C} \times \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ e $\mathbf{C} \times \mathbf{D} \to \mathbf{D}$.

Seja $F = (F_{Ob}, F_{hom})$ onde

- F_{Ob} é a correspondência de $\mathrm{Obj}(\mathbf{C} \times \mathbf{D})$ em $\mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ que a cada $(X, Y) \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C} \times \mathbf{D})$ associa o objeto X;
- F_{hom} é a correspondência de $\mathrm{Mor}(\mathbf{C} \times \mathbf{D})$ em $\mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ que a cada $(f, g) \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C} \times \mathbf{D})$ associa o morfismo f.

O par $F = (F_{Ob}, F_{hom})$ é um funtor de $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ em $\mathbf{C}$, ficando ao cuidado do leitor fazer esta verificação.

De forma análoga define-se o funtor projeção $\mathbf{C} \times \mathbf{D} \to \mathbf{D}$.

3.36. Dos funtores estudados nos exercícios 3.33. a 3.35., indique quais são fiéis e quais são plenos.

Consideremos o funtor F definido no exercício 3.33.

- O funtor F é fiel se, para quaisquer $f, g : a \to b$,

$$F(f) = F(g) \Rightarrow f = g.$$

Considerando que, para quaisquer $a, b \in \mathrm{Obj}(\mathbf{P})$, existe no máximo um morfismo de a em b, o funtor F é fiel.

- O funtor F é pleno se, para quaisquer $a, b \in P$ e para qualquer **Set**-morfismo $g : F(a) \to F(b)$, existe um $\mathbf{P}$-morfismo $f : a \to b$, tal que $F(f) = g$.

Considerando que, para quaisquer $a, b \in P$,

$$\begin{array}{rcl} g : \{a\} & \to & \{b\} \\ a & \to & b \end{array}$$

é um **Set**-morfismo e $F(a) = \{a\}$, $F(b) = \{b\}$, então, para quaisquer $a, b \in P$,

$$\begin{array}{rcl} g : F(a) & \to & F(b) \\ a & \to & b \end{array}$$

é um **Set**-morfismo. Logo, o funtor F é pleno se e só se, para quaisquer $a, b \in P$, existe um $\mathbf{P}$-morfismo $f : a \to b$, isto é, se e só se $(a, b) \in \leq$. Assim, F é pleno se e só se, para quaisquer $x, y \in P$, $(x, y), (y, x) \in \leq$. Considerando que $\leq$ é uma ordem parcial, então F é pleno se e só se, para quasiquer $x, y \in P$, tem-se $x = y$.

Consideremos o funtor F definido no exercício 3.34.

- O funtor F é fiel se, para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $f, g : X \to Y$,

$$F(f) = F(g) \Rightarrow f = g.$$

Considerando que, para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $f, g : X \to Y$, tem-se $F(f) = id_A = F(g)$, o funtor é fiel se e só se, para quaisquer $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$, existe no máximo um morfismo de X em Y.

- O funtor F é pleno se, para quaisquer $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e para qualquer $\mathbf{D}$-morfismo $g : F(X) \to F(Y)$, existe um $\mathbf{C}$-morfismo $f : X \to Y$, tal que $F(f) = g$.

Atendendo a que $A \in \mathrm{Obj}(\mathbf{D})$, então $id_A : A \to A$ é um $\mathbf{D}$-morfismo. Logo, considerando que, para quaisquer $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$, temos $F(X) = F(Y) = A$, $id_A : F(X) \to F(Y)$ é um $\mathbf{D}$-morfismo. Assim, F é pleno se e só se, para quaisquer $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$, existe um $\mathbf{C}$-morfismo de X em Y e id_A é o único $\mathbf{D}$-morfismo de A em A.

Consideremos o funtor projeção $F : \mathbf{C} \times \mathbf{D} \to \mathbf{C}$.

- O funtor F é fiel se, para quaisquer $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$-morfismos $(f, g), (f', g') : (X, Y) \to (Z, W)$,

$$F((f, g)) = F((f', g')) \Rightarrow (f, g) = (f', g').$$

Se uma das categorias $\mathbf{C}$ ou $\mathbf{D}$ é a categoria zero, o funtor F é fiel. Se $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ não são a categoria zero, o funtor F é fiel se e só se, para quaisquer $Y, W \in \mathrm{Obj}(\mathbf{D})$, existe no máximo um $\mathbf{D}$-mofismo de $Y \to W$.

- O funtor F é pleno se, para quaisquer $(X, Y), (Z, W) \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C} \times \mathbf{D})$ e para qualquer $\mathbf{C}$-morfismo $h : F(X, Y) \to F(Z, W)$, existe um $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$-morfismo $(f, g) : (X, Y) \to (Z, W)$, tal que $F((f, g)) = h$. Considerando que, para quaisquer $(X, Y), (Z, W) \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C} \times \mathbf{D})$, $F(X, Y) = X$ e $F(Z, W) = Z$, o funtor F é pleno se, para qualquer $\mathbf{C}$-morfismo $h : X \to Y$, existe um $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$-morfismo $(f, g) : (X, Y) \to (Z, W)$, tal que $F((f, g)) = h$.

Se $\mathbf{C}$ é a categoria zero, então o funtor F é pleno. Se $\mathbf{C}$ não é a categoria zero, então o funtor F é pleno se e só se a categoria $\mathbf{D}$ não é a categoria zero.

3.37. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e F : **Set** $\to \mathbf{C}$ um functor. Mostre que:

(a) Se f é um monomorfismo com domínio não vazio em **Set**, então $F(f)$ é um monomorfismo em $\mathbf{C}$.

Seja $f : X \to Y$ um morfismo de **Set** com domínio não vazio. Pretende-se mostrar que $F(f)$ é um monomorfismo.

Como f é um morfismo de **Set** com domínio não vazio, então f é invertível à esquerda. Atendendo a que todo o funtor preserva morfismos invertíveis à esquerda, então $F(f)$ é inverível à esquerda. Uma vez que todo o morfismo invertível à esquerda é um monomorfismo, concluimos que $F(f)$ é um monomorfismo.

(b) Se f é um epimorfismo em **Set**, então $F(f)$ é um epimorfismo em $\mathbf{C}$.

Seja f um epimorfismo de **Set**. Então, considerando que todo o epimorfismo de **Set** é invertível à direita e que todo o funtor preserva morfismos invertíveis à direita, $F(f)$ é invertível à direita. Uma vez que todo o morfismo invertível à direita é um epimorfismo, concluímos que $F(f)$ é um epimorfismo.

3.38. Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{C}'$ categorias, $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ um funtor fiel e f um morfismo de $\mathbf{C}$. Mostre que:

(a) Se $F(f)$ é um monomorfismo (epimorfismo), então f é um monomorfismo (epimorfismo).

Seja $f : A \to B$ um $\mathbf{C}$-morfismo e suponhamos que $F(f)$ é um monomorfismo. Sejam $g, h : C \to A$ morfismos de $\mathbf{C}$ tais que $f \circ g = f \circ h$. Então $F(f \circ g) = F(f \circ h)$, donde $F(f) \circ F(g) = F(f) \circ F(h)$. Uma vez que $F(f)$ é um monomorfismo, tem-se $F(g) = F(h)$ e, atendendo a que F é fiel, resulta que $g = h$.

Por dualidade, é imediato que se $F(f)$ é um epimorfismo, então f é um epimorfismo.

(b) Um diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[dr] & & B \arrow[dl] \\ & C & \end{tikzcd}$$

em $\mathbf{C}$ é comutativo se e só se o diagrama correspondente em $\mathbf{C}'$ é comutativo.

Admitamos que o diagrama em $\mathbf{C}$ a seguir indicado é comutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Pretendemos mostrar que o diagrama anterior é comutativo se e só se o diagrama seguinte é comutativo

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[rr, "F(f)"] \arrow[dr, "F(h)"'] & & F(B) \arrow[dl, "F(g)"] \\ & F(C) & \end{tikzcd}$$

Considerando que F é um funtor e é fiel, a prova é imediata. De facto,

$$\begin{array}{rcll} g \circ f = h & \Rightarrow & F(g \circ f) = F(h) & \\ & \Rightarrow & F(g) \circ F(f) = F(h) & (F \text{ é funtor}). \end{array}$$

Reciprocamente, temos

$$\begin{array}{rcll} F(g) \circ F(f) = F(h) & \Rightarrow & F(g \circ f) = F(h) & (F \text{ é funtor}) \\ & \Rightarrow & g \circ f = h & (F \text{ é fiel}). \end{array}$$

3.39. Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ categorias, $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ um funtor e $f : A \to B$ e $g : B \to A$ morfismos em $\mathbf{C}$. Mostre que:

(a) Se F é fiel, então $F(f)$ é um inverso direito (esquerdo) de $F(g)$ se e só se f é um inverso direito (esquerdo) de g.

Admitamos que $F(f)$ é um inverso direito de $F(g)$. Então $F(g) \circ F(f) = id_{F(A)}$. Como F é um funtor, segue que $F(g \circ f) = F(id_A)$. Dado que F é fiel, tem-se $g \circ f = id_A$. Portanto, f é um inverso difeito de g.

(b) Se F é fiel e pleno, então f tem um inverso direito (esquerdo) se e só se $F(f)$ tem um inverso direito (esquerdo).

Seja F um funtor fiel e pleno.

Admitamos que f tem um inverso direito. Então existe um $\mathbf{C}$-morfismo $h : B \to A$ tal que $f \circ h = id_B$. Logo $F(f \circ h) = F(id_B)$ e, considerando que F é um funtor, tem-se $F(f) \circ F(h) = id_{F(B)}$. Assim, $F(h)$ é um inverso direito de $F(f)$.
Reciprocamente, admitamos que $F(f) : F(A) \to F(B)$ tem um inverso direito. Então existe um $\mathbf{C}'$-morfismo $h' : F(B) \to F(A)$ tal que $F(f) \circ h' = id_{F(B)}$. Como F é pleno, existe um $\mathbf{C}$-morfismo $h : B \to A$ tal que $F(h) = h'$. Logo $F(f) \circ F(h) = id_{F(B)}$ e, atendendo a que F é funtor, temos $F(f \circ h) = F(id_B)$. Como F é fiel, resulta que $f \circ h = id_B$ e, portanto, f tem um inverso direito.

3.40. Sejam $F_{Ob} : \mathrm{Obj}(\textbf{Set}) \to \mathrm{Obj}(\textbf{Set})$ a função que a cada conjunto A da categoria **Set** associa o conjunto potência $\mathcal{P}(A)$ ($F_{Ob}(A) = \mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$) e $F_{hom} : \mathrm{Mor}(\textbf{Set}) \to \mathrm{Mor}(\textbf{Set})$ a função que a cada função $f : A \to B$ associa a função

$$F_{hom}(f) : \begin{array}{ccc} F_{Ob}(A) & \to & F_{Ob}(B) \\ U & \mapsto & f(U) \end{array}.$$

(a) Mostre que o par $F = (F_{Ob}, F_{hom})$ é um funtor da categoria **Set** na categoria **Set**.

O par (F_{Ob}, F_{hom}) é um funtor **Set** na categoria **Set** se:

(1) F_{Ob} é uma função de $\mathrm{Obj}(\textbf{Set})$ em $\mathrm{Obj}(\textbf{Set})$;

(2) F_{hom} é uma função de $\mathrm{Mor}(\textbf{Set})$ em $\mathrm{Mor}(\textbf{Set})$ que a cada **Set**-morfismo $f : A \to B$ associa um **Set**-morfismo $F_{hom}(f) : F_{Ob}(A) \to F_{Ob}(B)$;

(3) para cada $A \in \mathrm{Obj}(\textbf{Set})$, $F_{hom}(id_A) = id_{F_{Ob}(A)}$;
(4) para quaisquer **Set**-morfismos $f : A \to B$, $g : B \to C$, $F_{hom}(g \circ f) = F_{hom}(g) \circ F_{hom}(f)$.

De acordo com o enunciado, F_{Ob} e F_{hom} são funções nas condições indicadas em (1) e (2), pelo que resta verificar (3) e (4). Na prova de (3) e (4) as funções F_{Ob} e F_{hom} são representadas pelo mesmo símbolo F.

(3) Para qualquer objeto A de **Set**, o morfismo id_A é definido por

$$\begin{array}{rcl} id_A : A & \to & A \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

pelo que $F(id_A)$ é definido por

$$\begin{array}{rcl} F(id_A) : \mathcal{P}(A) & \to & \mathcal{P}(A) \\ U & \mapsto & id_A(U) \end{array}.$$

Por outro lado, por definição de função identidade associada a um conjunto, tem-se

$$\begin{array}{rcl} id_{F(A)} : F(A) & \to & F(A) \\ U & \mapsto & U \end{array}.$$

As funções $F(id_A)$ e $id_{F(A)}$ têm o mesmo domínio, o mesmo conjunto de chegada ($F(A) = \mathcal{P}(A)$) e, para todo $U \in \mathcal{P}(A)$, $F(id_A)(U) = U = id_{F(A)}(U)$. Logo $F(id_A) = id_{F(A)}$.

(4) Para quaisquer **Set**-morfismos $f : A \to B$ e $g : B \to C$, tem-se

$$\begin{array}{rcl} g \circ f : A & \to & C \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}.$$

Então, por definição de F, tem-se

$$\begin{array}{rcl} F(g \circ f) : \mathcal{P}(A) & \to & \mathcal{P}(C) \\ U & \mapsto & (g \circ f)(U) \end{array}.$$

Por outro lado, por definição de F, tem-se

$$\begin{array}{rcl} F(f) : \mathcal{P}(A) & \to & \mathcal{P}(B) \\ U & \mapsto & f(U) \end{array}, \qquad \begin{array}{rcl} F(g) : \mathcal{P}(B) & \to & \mathcal{P}(C) \\ U & \mapsto & g(U) \end{array}$$

e, por definição de composição de funções, temos

$$\begin{array}{rcl} F(g) \circ F(f) : \mathcal{P}(A) & \to & \mathcal{P}(C) \\ U & \mapsto & (F(g) \circ F(f))(U) \end{array}.$$

Assim, as funções $F(g \circ f)$ e $F(g) \circ F(f)$ têm o mesmo dominio ($\mathcal{P}(A)$) e o mesmo conjunto de chegada ($\mathcal{P}(C)$). Além disso, para qualquer $U \in \mathcal{P}(A)$,

$$F(g \circ f)(U) = (g \circ f)(U) = g(f(U)) = F(g)(F(f)(U)) = (F(g) \circ F(f))(U).$$

Logo $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

(b) Diga, justificando, se:

i. F preserva objetos terminais.

O funtor F preserva objetos terminais se, para qualquer $X \in \mathrm{Obj}(\textbf{Set})$,

$$X \text{ é objeto terminal} \Rightarrow F(X) \text{ é objeto terminal.}$$

Na categoria **Set**, os objetos terminais são os conjuntos singulares. Então F não preserva objetos terminais pois $X = \{a\}$ é um objeto terminal e $F(X) = \mathcal{P}(\{a\} = \{\emptyset, \{a\}\}$ não é um objeto terminal.

ii. F é um funtor fiel.

O funtor F é fiel se, para quaisquer **Set**-morfismos $f, g : A \to B$,

$$F(f) = F(g) \Rightarrow f = g.$$

Sejam $f, g : A \to B$ funções tais que $F(f) = F(g)$. Então, como $F(f)$ e $F(g)$ são as funções definidas por

$$\begin{array}{rcl} F(f) : \mathcal{P}(A) & \to & \mathcal{P}(B) \\ U & \mapsto & f(U) \end{array}, \qquad \begin{array}{rcl} F(g) : \mathcal{P}(B) & \to & \mathcal{P}(C) \\ U & \mapsto & g(U) \end{array}$$

segue que, para todo $U \in \mathcal{P}(A)$, temos $f(U) = g(U)$. Em particular, para todo $a \in A$, temos $f(\{a\}) = g(\{a\})$, donde resulta que, para todo $a \in A$, $f(a) = g(a)$. Logo as funções f e g são iguais. Assim, F é um funtor fiel.