Espaços Vetoriais $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

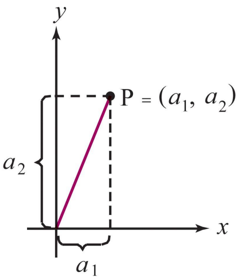
Revisão de alguns conceitos preliminares para o cálculo com funções de várias variáveis:

- vetores em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$;
- produto escalar, norma e distância;
- matrizes, determinantes e produto vetorial.

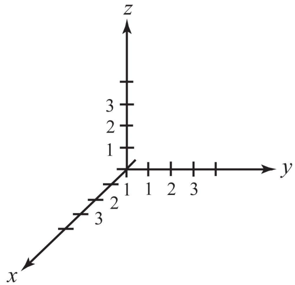
Vetores em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$

1. Pontos no plano são representados por pares ordenados de números reais (a_1, a_2). Os números a_1 e a_2 designam-se as coordenadas cartesianas.

   Pontos no espaço são representados como triplos ordenados de números reais (a_1, a_2, a_3).



(a) Coordenadas cartesianas no plano



(b) Coordenadas cartesianas no espaço

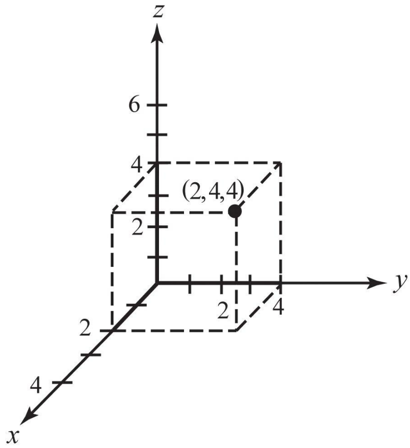


Figura 1: Representação geométrica do ponto $(2, 4, 4)$ em coordenadas cartesianas.

2. Adição e multiplicação escalar são definidas por

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$
$$\lambda(a_1, a_2) = (\lambda a_1, \lambda a_2)$$

e

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$
$$\lambda(a_1, a_2, a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$

3. Um vetor é um segmento de reta orientado com uma extremidade inicial (por defeito, a origem do referencial) e uma extremidade final (indicada por uma seta).

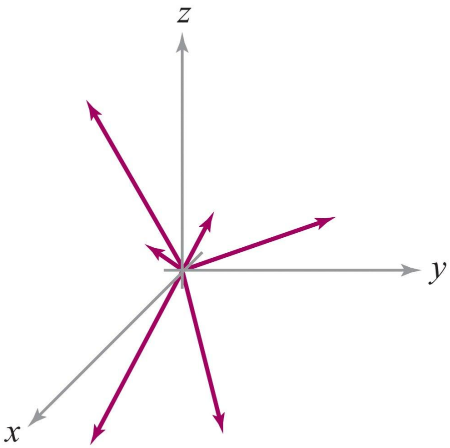


Figura 2: Geometricamente, pensamos em vetores com a base na origem do referencial.

4. Os vetores são adicionadas usando a *regra do paralelogramo* e a multiplicação pelo escalar λ *estende* o comprimento do vetor por λ (na direção oposta se $\lambda < 0$).
5. A adição e multiplicação escalar de vetores (geométrica) correspondem às mesmas operações nas coordenadas (algébricas).

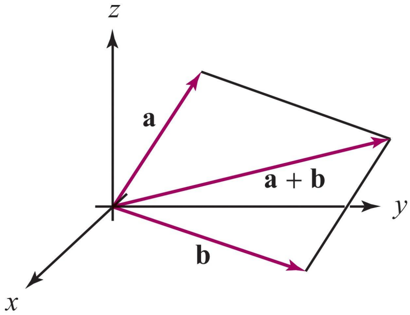


Figura 3: Geometria da adição de vetores.

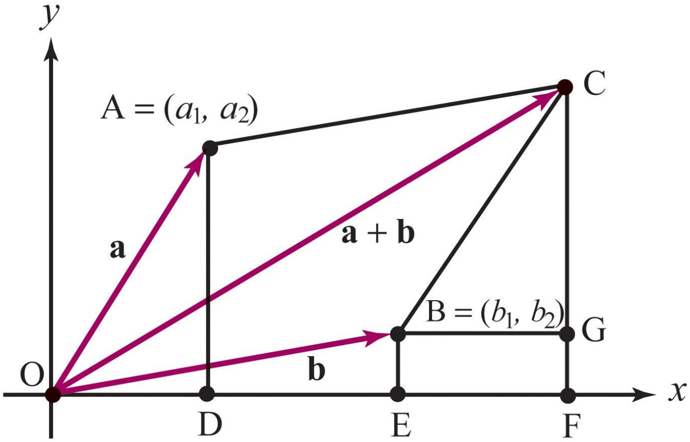


Figura 4: Construção geométrica que mostra que a regra do parelelogramo (definição geométrica) coincide com a definição algébrica $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$.

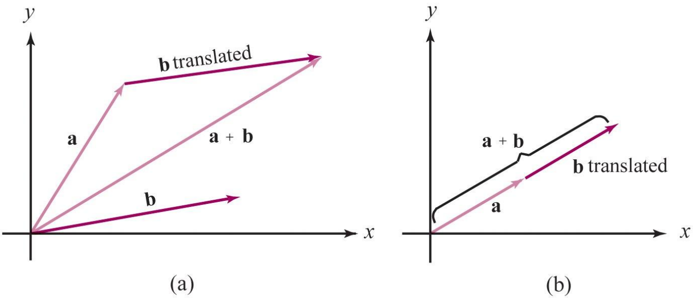


Figura 5: A adição pode ser vista não só em termos de paralelogramos como também em termos de triângulos.

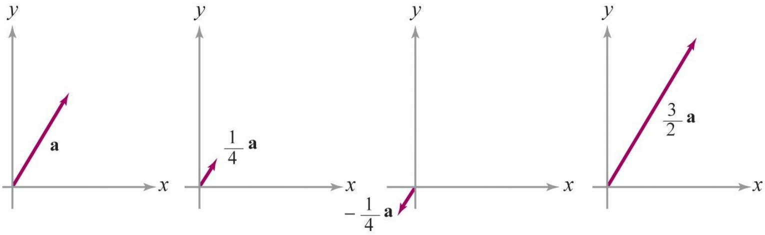


Figura 6: Alguns múltiplos escalares do vetor $\overrightarrow{a}$.

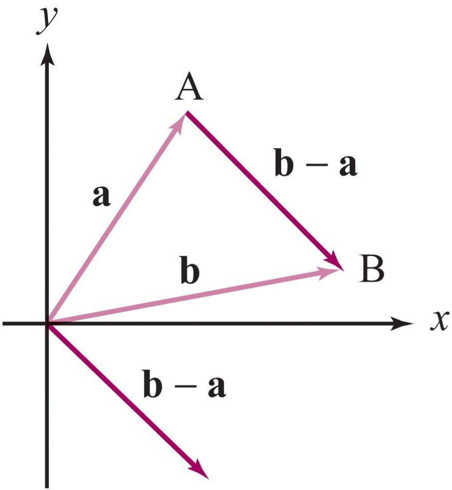


Figura 7: Geometria da subtração de vetores.

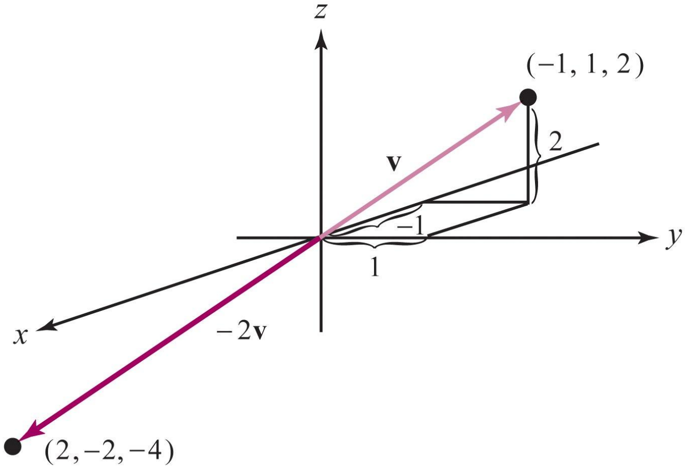


Figura 8: Multiplicação de $(-1, 1, 2)$ por -2.

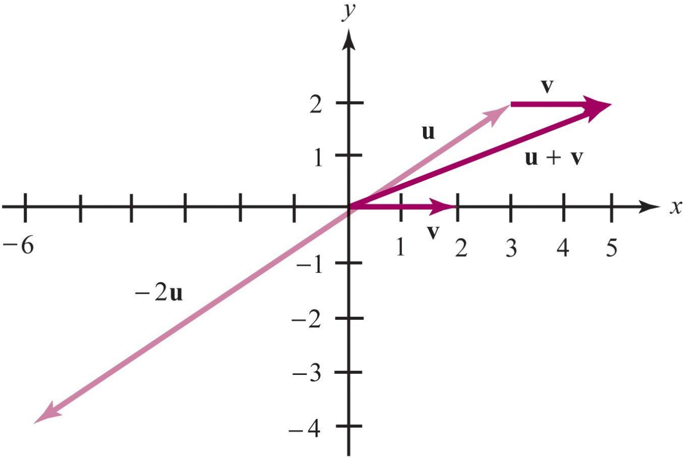


Figura 9: Determinação de $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ e de $-2\overrightarrow{u}$.

6. Base canónica de $\mathbb{R}^2$:

vetores unitários $\vec{i} = (1, 0)$, $\vec{j} = (0, 1)$

$\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$ escreve-se

$$\overrightarrow{a} = a_1\,\vec{i} + a_2\,\vec{j}$$

Base canónica de $\mathbb{R}^3$:

vetores unitários $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$

$\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ escreve-se

$$\overrightarrow{a} = a_1\,\vec{i} + a_2\,\vec{j} + a_3\,\vec{k}$$

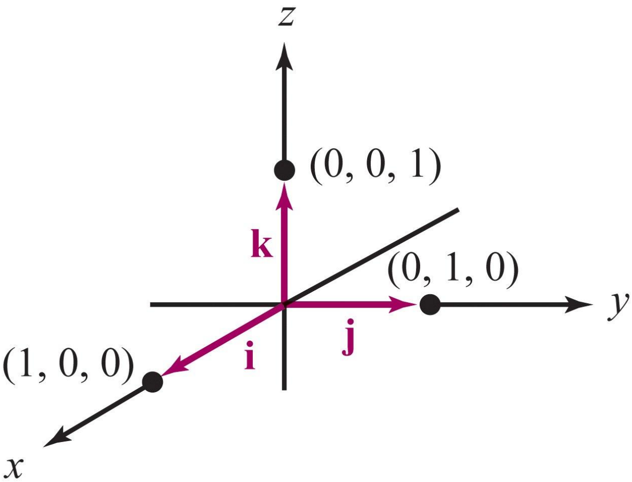


Figura 10: Base canónica de $\mathbb{R}^3$.

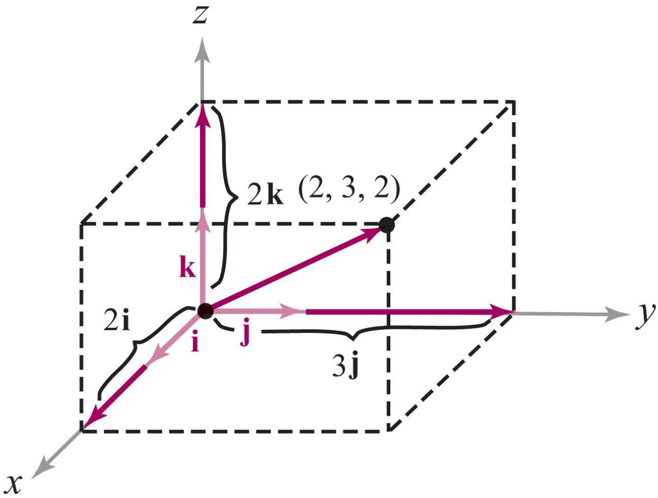


Figura 11: Representação de $(2, 3, 2)$ em termos da base canónica.

7. O vetor que une dois pontos $P = (x, y)$ e $P' = (x', y')$ é o vetor $\overrightarrow{PP'}$, vetor de P para P', e tem coordenadas

$$\overrightarrow{PP'} = (x' - x, y' - y).$$

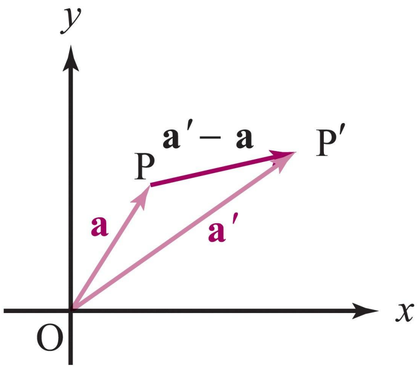


Figura 12: $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{a'} - \overrightarrow{a}$.

8. A equação da reta que passa pelo ponto a (visto como um vetor com base na origem) e com direção do vetor $\overrightarrow{v}$ (visto como um vetor com base em a) é

$$\ell(t) = a + t\overrightarrow{v}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Em $\mathbb{R}^3$, para $a = (a_1, a_2, a_3)$ e $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$, as equações paramétricas da reta ℓ são

$$\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2, \qquad t \in \mathbb{R}, \\ z = a_3 + tv_3 \end{cases}$$

onde (x, y, z) é um ponto genérico da reta.

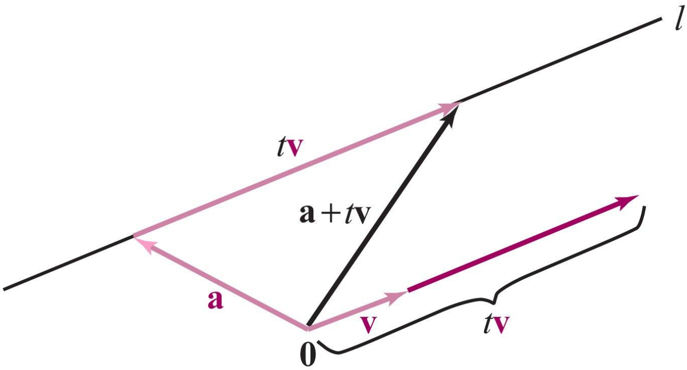


Figura 13: A reta ℓ tem a direção de $\overrightarrow{v}$ e passa por a.

9. Em $\mathbb{R}^3$, as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ são

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1), \qquad t \in \mathbb{R}, \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases}$$

onde (x, y, z) é um ponto genérico da reta.

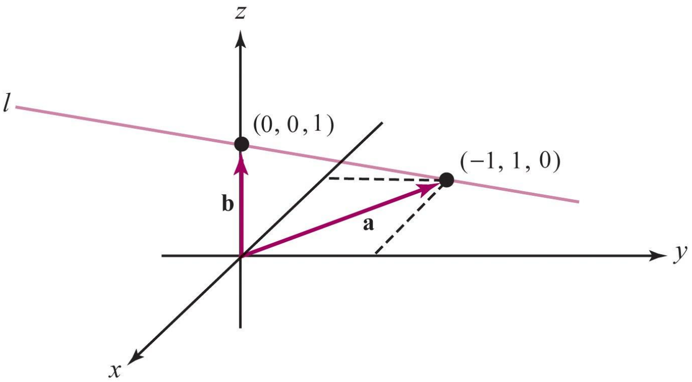


Figura 14: Reta que contém os pontos $(0, 0, 1)$ e $(-1, 1, 0)$.

10. O plano que passa pela origem e contém os vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ consiste em todos os pontos da forma

$$s\overrightarrow{v} + t\overrightarrow{w}, \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

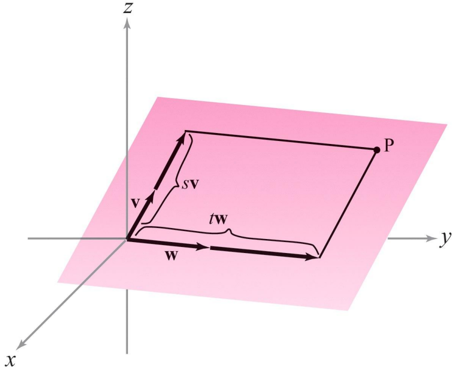


Figura 15: Plano gerado pelos vetores $\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{v}$ e que contém a origem.

O plano paralelo que passa pelo ponto a tem equação

$$a + s\overrightarrow{v} + t\overrightarrow{w}, \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

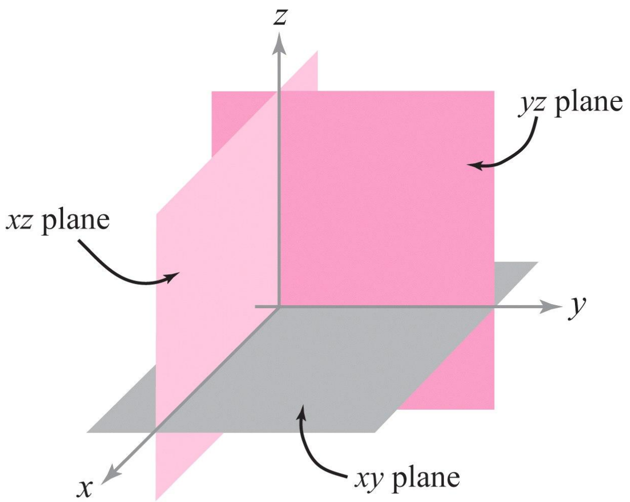


Figura 16: Os três planos coordenados.

Produto escalar, norma e distância

1. O produto escalar (ou interno) entre os vetores $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$ é definido por

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

A notação $\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle$ é também usual.

Permite-nos calcular o ângulo θ entre os vetores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$.

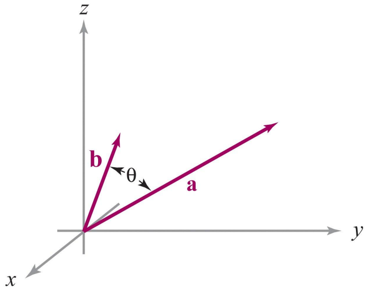


Figura 17: θ é o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$

2. A norma ou comprimento de $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ é definida por

$$\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

3. Para normalizar um vetor não nulo $\overrightarrow{a}$, formamos o vetor unitário (ou versor)

$$\frac{\overrightarrow{a}}{\|\overrightarrow{a}\|}.$$

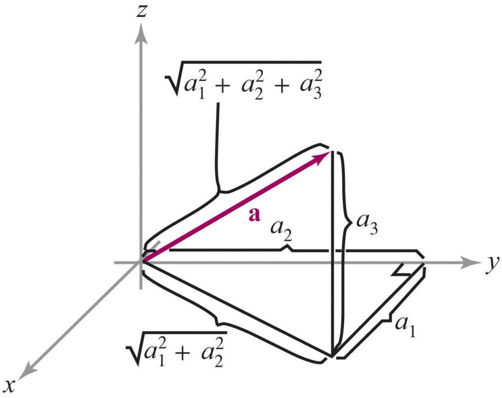


Figura 18: Comprimento do vetor $\overrightarrow{a}$ é dado por $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

7. Propriedades algébricas

Se $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$ são vetores em $\mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

a. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = \|\overrightarrow{a}\|^2$

b. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$

c. $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}$

d. $(\lambda \overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b} = \lambda(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{a} \cdot (\lambda \overrightarrow{b})$

e. $\|\lambda \overrightarrow{a}\| = |\lambda| \|\overrightarrow{a}\|$

Facilmente se provam estas propriedades usando a definição de produto escalar e norma.

4. A distância entre dois pontos P e Q é dada por $\|\overrightarrow{PQ}\|$.

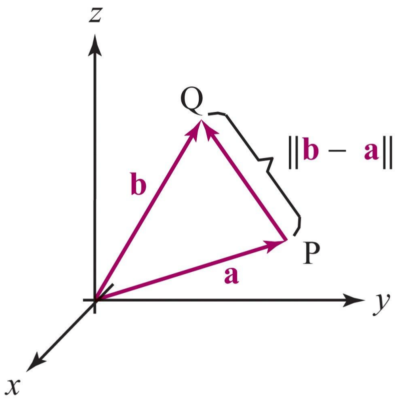


Figura 19: Distância entre os pontos P e Q.

5. No plano definimos o vetor $\overrightarrow{\mathbf{i}_\theta} = (\cos\theta)\,\vec{i} + (\operatorname{sen}\theta)\,\vec{j}$, vetor unitário formando um ângulo θ com o eixo do xx.

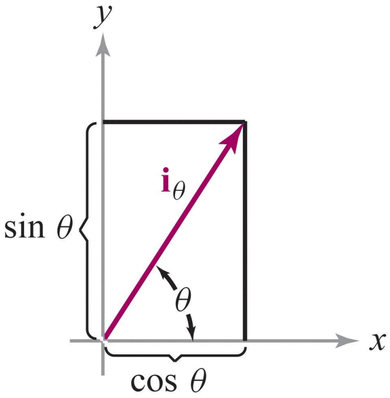


Figura 20: Vetor unitário porque $\|\mathbf{i}_\theta\| = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$.

6. O ângulo $0 \leq \theta \leq \pi$ entre entre os vetores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ satisfaz

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\| \cos\theta.$$

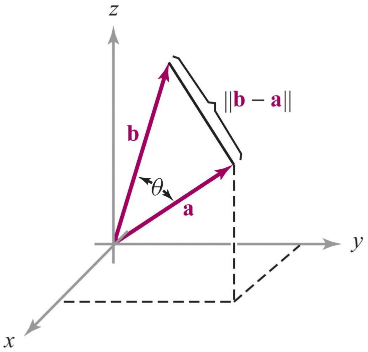


Figura 21: Ângulo entre os vetores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$.

Segue que se $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ são não nulos, $\theta = \arccos\left(\dfrac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\|}\right)$.

7. Desigualdade de Cauchy-Schwarz

   Para quaisquer vetores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ temos

   $$\left|\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right| \leq \|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\|,$$

   verificando-se a igualdade se $\overrightarrow{a}$ é um múltiplo escalar de $\overrightarrow{b}$ ou um dos vetores é nulo.

8. Dizemos que dois vetores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ são ortogonais quando $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$.

9. Desigualdade triangular

Para vetores $\overrightarrow{a}$ em $\overrightarrow{b}$ tem-se

$$\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\| \leq \|\overrightarrow{a}\| + \|\overrightarrow{b}\|.$$

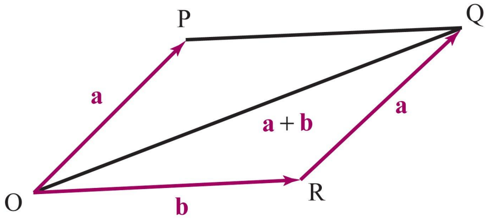


Figura 22: Desigualdade triangular.

Matrizes, determinantes e produto vetorial

1. Chama-se matriz do tipo $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$ a um quadro que se obtém dispondo mn números segundo m linhas e n colunas,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Por exemplo, matrizes do tipo 2×2 e 3×3 têm, respetivamente, a forma geral

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

2. O determinante de uma matrix 2×2 é o número real dado por

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

   e de uma matriz 3×3,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

3. Trocar linhas ou colunas resulta numa troca de sinal no determinante; se multiplicarmos uma linha (ou coluna) por um escalar, o determinante é também multiplicado por esse escalar; substituir uma linha (ou coluna) pela soma com um múltiplo escalar de outra linha (ou coluna) não altera o determinante.

4. Produto vetorial (ou produto externo)

Dados $\overrightarrow{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$ e $\overrightarrow{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$ dois vetores de $\mathbb{R}^3$, o produto vetorial de $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$, denotado por $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$, é definido como sendo o vetor

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\,\vec{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\,\vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\vec{k} \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}\end{aligned}$$

ou, simbolicamente (mnemónica),

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

5. O vetor $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ é ortogonal a qualquer vetor do plano gerado por $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$, em particular a $\overrightarrow{a}$ e a $\overrightarrow{b}$.

   Ou seja, se $\overrightarrow{c}$ é combinação linear de $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$, temos

$$\overrightarrow{c} \cdot \left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) = 0$$

   Chamamos a um produto destes um produto misto.

6. O comprimento de $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ é

$$\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\| = \|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\| \operatorname{sen}\theta,$$

onde $0 \leq \theta \leq \pi$ é o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$, e é igual à área do paralelogramo definido por $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$.

Como consequência, podemos concluir que os vetores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ são paralelos se e somente se $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$.

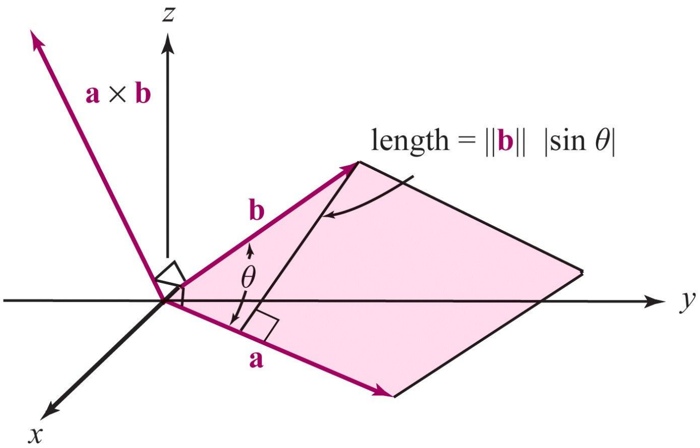


Figura 23: $\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\|$ é a área do paralelogramo gerado por $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$.

7. Propriedades algébricas

a. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ se e só se $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ são paralelos ou um dos vetores é o vetor nulo.

b. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$

c. $\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}$

d. $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$

e. $(\alpha\overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \alpha(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$

8.

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\overrightarrow{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\overrightarrow{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\overrightarrow{0}$

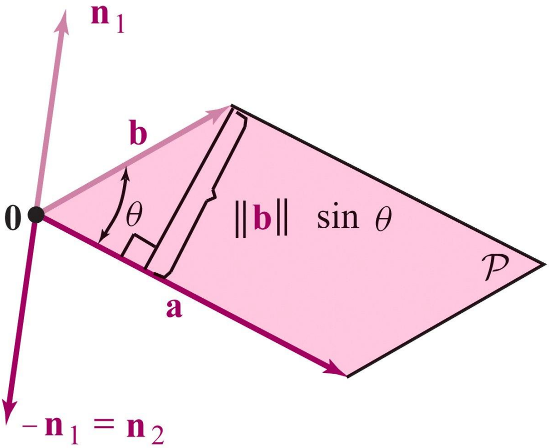


Figura 24: $\overrightarrow{n_1}$ e $\overrightarrow{n_2}$ são dois possíveis vetores ortogonais a $\overrightarrow{a}$ e a $\overrightarrow{b}$ e com norma $\|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\|\,\text{sen}\,\theta$.

O triplo $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right)$ obedece à regra de mão direita

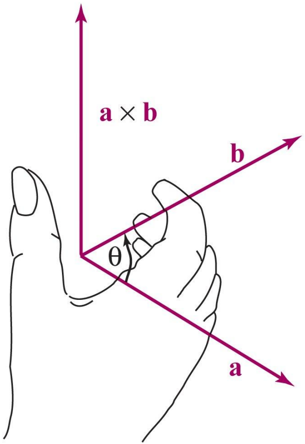


Figura 25: *Regra da mão direita* para determinar em que direção aponta o vetor $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$.

9. A equação do plano que passa no ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{n} = A\,\vec{i} + B\,\vec{j} + C\,\vec{k}$ é dada por

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

ou seja,

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

onde $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$.

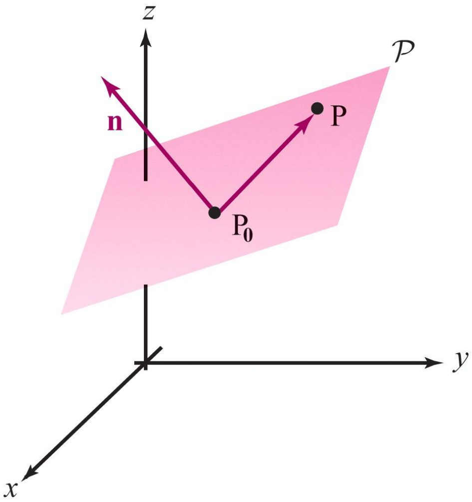


Figura 26: $\overrightarrow{P_0P}$ e $\overrightarrow{n}$ são perpendiculares e satisfazem $\overrightarrow{P_0P} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.