8ªaula

26 de abril de 2021 15:00

1. Seja $\mathcal{G} = (\{\mathcal{S}, \mathcal{B}\}, \{a, b\}, \mathcal{S}, P)$ a gramática com produções

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\rightarrow a\mathcal{S}b \mid \mathcal{B} \\ \mathcal{B} &\rightarrow b\mathcal{B} \mid b \end{aligned}$$

Prove que $L(\mathcal{G}) = \{a^n b^m : 0 \leq n < m\}$.

$$L(\mathcal{G}) = L(\mathcal{S}) = aL(\mathcal{S})b \cup L(\mathcal{B})$$
$$= a\left(aL(\mathcal{S})b \cup L(\mathcal{B})\right)b \cup L(\mathcal{B}) = a^2 L(\mathcal{S})b^2 \cup aL(\mathcal{B})b \cup L(\mathcal{B})$$
$$= a^2(aL(\mathcal{S})b \cup L(\mathcal{B}))b^2 \cup aL(\mathcal{B})b \cup L(\mathcal{B})$$
$$= a^3 L(\mathcal{S})b^3 \cup \underbrace{a^2 L(\mathcal{B})b^2 \cup aL(\mathcal{B})b \cup L(\mathcal{B})}$$
$$= a^3 L(\mathcal{S})b^3 \cup \left(\bigcup_{k=0,1,2} a^k L(\mathcal{B})b^k\right)$$
$$= a^4 L(\mathcal{S})b^4 \cup \underbrace{a^3 L(\mathcal{B})b^3} \cup \left(\bigcup_{k=0,1,2} a^k L(\mathcal{B})b^k\right)$$
$$= a^4 L(\mathcal{S})b^4 \cup \bigcup_{k=0,\dots,3} (a^k L(\mathcal{B})b^k)$$

Iterando este processo, é natural pensar que

$$L(\mathcal{S}) = a^n L(\mathcal{S})b^n \cup \bigcup_{k=0,\dots,n-1} (a^k L(\mathcal{B})b^k) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

A prova formal desta igualdade obtém-se por indução matemática sobre n.

Interessa também conhecer $L(\mathcal{B})$.

$$L(\mathcal{B}) = bL(\mathcal{B}) \cup \{b\}$$
$$= b(bL(\mathcal{B}) \cup \{b\}) \cup \{b\} = b^2 L(\mathcal{B}) \cup \{b^2\} \cup \{b\}$$
$$= b^2 L(\mathcal{B}) \cup \{b^2, b\}$$
$$= \quad = b^3 L(\mathcal{B}) \cup \{b^3, b^2, b\}$$

Iterando chega-se a uma igualdade da forma:

$$L(\mathcal{B}) = b^n L(\mathcal{B}) \cup \{b^n, \dots, b\} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Seja $w \in L(\mathcal{B})$. Se $|w| = m$, então $w \in \{b^m, \dots, b\}$, porque se $w \in b^m L(\mathcal{B})$ então $|w| > m$ dado que $\varepsilon \notin L(\mathcal{B})$. Logo $w = b^m$. Assim,

$$L(\mathcal{B}) = \{b^n : n \in \mathbb{N}\} = b^+$$

$$L(\mathcal{S}) = a^n L(\mathcal{S}) b^n \cup \left(\bigcup_{k=0,\dots,n-1} a^k b^+ b^k \right)$$

Seja $w \in L(\mathcal{S})$ e seja m o maior nº natural tal que a prefixo de w. Então $w \in \bigcup_{k=0,\dots,m} a^m b^+ b^m$ porque as palavras de $a^{m+1} L(\mathcal{S}) b^{m+1}$ tem prefixo a^{m+1}. Logo

$$L(\mathcal{S}) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} a^k b^+ b^k = \{ a^k b^j b^k : k \in \mathbb{N}_0, j \in \mathbb{N} \}$$

$$= \{ a^k b^{j+k} : k \in \mathbb{N}_0, j \in \mathbb{N} \}$$

$$= \{ a^k b^{k'} : 0 \leq k < k' \} \,/\!/.$$

2. Considere a gramática $\mathcal{G} = (\{\mathcal{S}\}, \{a,b\}, \mathcal{S}, P)$ com produções

$$\mathcal{S} \to a\mathcal{S}b \mid \underline{\mathcal{S}\mathcal{S}} \mid \underline{ab} \mid ba$$

Mostre que

(a) $(ab)^2a^2b^2, a^3b^2a^3bab^4 \in L(\mathcal{G})$;

(b) se $u \in L(\mathcal{G})$, então $|u|_a = |u|_b$;

a) $(ab)^2 a^2 b^2 = \underbrace{\overbrace{ab}^{S}\overbrace{ab}^{S}}_{S} \underbrace{a\,a\,b\,b}_{S}$

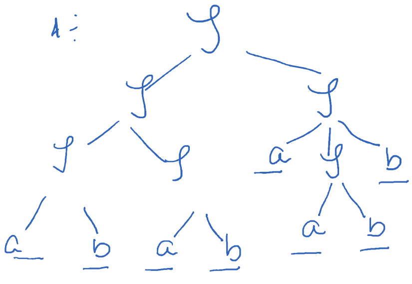
1º caso: $\mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{S}\mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{S}a\mathcal{S}b \Rightarrow \mathcal{S}aabb \Rightarrow \mathcal{S}\mathcal{S}aabb \Rightarrow ab\mathcal{S}aabb \Rightarrow ababaabb$

ou

2º caso: $\Rightarrow a\mathcal{S}b\,aabb \Rightarrow ababaabb$

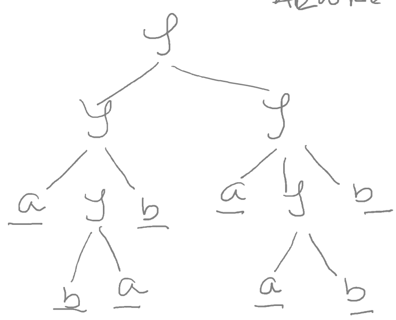
Árvore de derivação

1:



2: caso

Árvore de derivação



$a^3b^2a^3bab^4 = aaabb\,aaababbbb$

$\mathcal{S} \Rightarrow a\mathcal{S}b \Rightarrow a\mathcal{S}\mathcal{S}b \Rightarrow aa\mathcal{S}b\,\mathcal{S}b \Rightarrow aaabb\mathcal{S}b \stackrel{3}{\Rightarrow} aaabba^3\mathcal{S}b^3b$

$\Rightarrow a^3b^2a^3bab^4 /\!/$ Logo $a^3b^2a^3bab^4 \in L(\mathcal{G})$

b) Se $u \in L(G)$, então existe uma derivação $S \overset{n}{\Rightarrow} u$ onde $n \in \mathbb{N}$.

Vamos fazer a demonstração por indução matemática sobre o comprimento da derivação.

Seja $n=1$. $S \overset{(1)}{\Rightarrow} u$ implica que $u=ab$ ou $u=ba$. Em ambos os casos, temos que $|u|_a = 1 = |u|_b$.

Suponhamos agora que $S \overset{(k)}{\Rightarrow} u$ com $k \geq 1$.

Por hipótese de indução admitimos que se $w \in L(G)$ e existe uma derivação $S \overset{(j)}{\Rightarrow} w$, com $1 < j < k$, então $|w|_a = |w|_b$.

Queremos mostrar que $|u|_a = |u|_b$.

Temos várias hipóteses para a 1ª etapa:

- $S \Rightarrow ab$ e neste caso $k=1$ e já analisamos
- $S \Rightarrow ba$ " " " " " " "
- $S \Rightarrow aSb \overset{(k-1)}{\Rightarrow} u$

  Neste caso $u = awb$ em que existe uma derivação $S \overset{(k-1)}{\Rightarrow} w$.

  $$\boxed{S \Rightarrow aSb \Rightarrow a\_b \Rightarrow \dots \Rightarrow awb}$$

  Então w está nas condições da hipótese de indução. Logo

  $$|w|_a = |w|_b.$$

  Assim $|u|_a = |awb|_a = 1 + |w|_a = 1 + |w|_b = |w|_b + 1 = |awb|_b = |u|_b$

- $S \Rightarrow SS \overset{(k-1)}{\Rightarrow} u$

  Neste caso $u = u_1 u_2$ em que $S \overset{k_1}{\Rightarrow} u_1$ e $S \overset{k_2}{\Rightarrow} u_2$ e $k_1 + k_2 = k-1$.

  Logo u_1 e u_2 estão nas condições da hipótese de indução, pelo que

  $$|u_1|_a = |u_1|_b \quad \text{e} \quad |u_2|_a = |u_2|_b.$$

  Assim, $|u|_a = |u_1 u_2|_a = |u_1|_a + |u_2|_a = |u_1|_b + |u_2|_b = |u_1 u_2|_b = |u|_b$

Em qualquer caso $|u|_a = |u|_b$.

Pelo princípio de indução matemática, se $u \in L(G)$, então $|u|_a = |u|_b$. //

3. Considere o alfabeto $\{a, b\}$.

(a) Construa gramáticas que gerem as linguagens:

$i)L_1 = \{a^n b^{2n} \mid n > 0\}$ ii)$L_2 = (abb \cup b)^*(ab)^*$

iii)$L_3 = \{a^i b^j a \mid i > j > 0\}$ iv)$L_4 = \{a^i b^j a^k \mid j \geq (i + k),\ i, j, k \in \mathbb{N}\}$

(b) Justifique que as linguagens dadas são independentes de contexto.

a) i) $G_1 = (\{S\}, \{a, b\}, S, P)$ em que P é constituído por

$$S \longrightarrow aSbb \mid ab^2$$

a bb

aa bb bb

iv) $G_4 = (\{S, B, C, D\}, \{a, b\}, S, P)$ em que

P é constituído por:

$$S \longrightarrow BCD$$
$$B \longrightarrow aBb \mid ab$$
$$D \longrightarrow bDa \mid ba$$
$$C \longrightarrow bC \mid \varepsilon$$

$aab^5b^2\ aaa$

$aabb\ b^2\ bbbaaa$