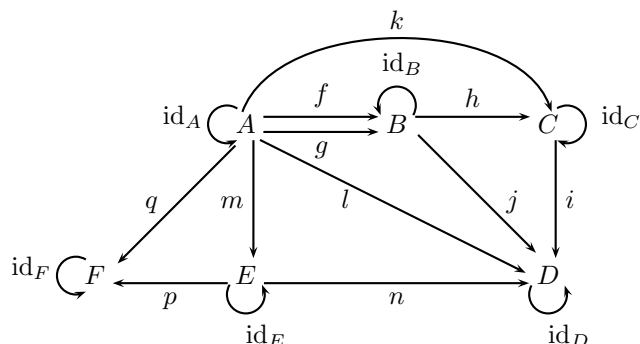


Álgebra Universal e Categorias

2º teste (31 de maio de 2016) duração: 2 horas

1. Seja \mathbf{C} a categoria definida pelo diagrama



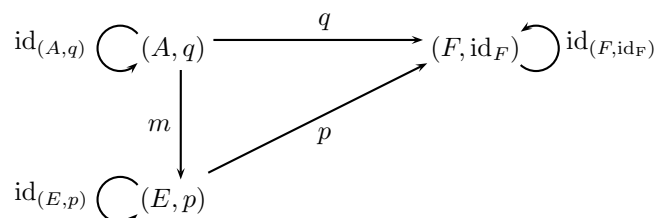
onde $j = i \circ h$, $k = h \circ f = h \circ g$, $l = j \circ f = j \circ g = i \circ k = n \circ m$ e $q = p \circ m$.

(a) Construa a categoria dos objetos sobre F .

A categoria dos objetos sobre F , representada por \mathbf{C}/\mathbf{F} , é a categoria tal que:

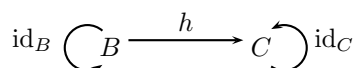
- os objetos de \mathbf{C}/\mathbf{F} são todos os pares (X, s) , onde A é um objeto de \mathbf{C} e $s : X \rightarrow F$ é um morfismo de \mathbf{C} ;
- dados objetos (X, s) e (Y, t) de \mathbf{C}/\mathbf{F} , um \mathbf{C}/\mathbf{F} -morfismo de (X, s) em (Y, t) é um \mathbf{C} -morfismo $v : X \rightarrow Y$ tal que $t \circ v = s$;
- para cada objeto (X, s) de \mathbf{C}/\mathbf{F} , o morfismo identidade $\text{id}_{(X, s)}$ é o \mathbf{C} -morfismo $\text{id}_X : X \rightarrow X$;
- dados morfismos $w : (X, s) \rightarrow (Y, t)$ e $z : (Y, t) \rightarrow (Z, v)$ a sua composição $z \circ w : (X, s) \rightarrow (Z, v)$ é o \mathbf{C} -morfismo $z \circ w : X \rightarrow Z$.

Assim, a categoria \mathbf{C}/\mathbf{F} é a categoria representada pelo diagrama



(b) Dê exemplo, caso existam, de um \mathbf{C} -morfismo s e de uma subcategoria \mathbf{C}' de \mathbf{C} tais que s não seja monomorfismo em \mathbf{C} e seja monomorfismo em \mathbf{C}' .

Seja \mathbf{C}' a categoria representada pelo diagrama



Claramente, \mathbf{C}' é uma subcategoria de \mathbf{C} , pois

- $\text{Obj}(\mathbf{C}') \subseteq \text{Obj}(\mathbf{C})$,
- $\text{Mor}(\mathbf{C}') \subseteq \text{Mor}(\mathbf{C})$,
- para cada $X \in \text{Obj}(\mathbf{C}')$, o morfismo id_X em \mathbf{C}' é o morfismo id_X em \mathbf{C} ;
- a composição de morfismos em \mathbf{C}' é a induzida pela composição de morfismos em \mathbf{C} .

Considerando o morfismo h , verifica-se que h é um monomorfismo em \mathbf{C}' , mas não é um monomorfismo em \mathbf{C} (pois $h \circ f = h \circ g$ e $f \neq g$).

(c) Diga, justificando, se (C, h) é um co-igualizador de f e g .

O par (C, h) é um co-igualizador de f e g , pois:

- $h \circ f = h \circ g$;
- se $r : B \rightarrow X$ é um \mathbf{C} -morfismo tal que $r \circ f = r \circ g$, então existe um, e um só, \mathbf{C} -morfismo $u : C \rightarrow X$ tal que $u \circ h = r$. De facto, se r é um morfismo nas condições anteriores, temos dois casos a considerar: $r = h$ ou $r = j$. Se $r = h$, existe um, e um só morfismo $u : C \rightarrow C$ tal que $h = u \circ h$; tal morfismo é o morfismo id_C . Se $r = j$, existe um, e um só, morfismo $u : C \rightarrow D$ tal que $u \circ h = j$, tal morfismo é o morfismo $i : C \rightarrow D$.

2. Sejam \mathbf{C} uma categoria e $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ morfismos em \mathbf{C} . Mostre que:

(a) Se f e g são epimorfismos, então $g \circ f$ é um epimorfismo.

Sejam f e g epimorfismos da categoria \mathbf{C} . Então $g \circ f$ é um epimorfismo, isto é, para quaisquer morfismos $i, j : C \rightarrow D$,

$$i \circ (g \circ f) = j \circ (g \circ f) \Rightarrow i = j.$$

De facto, como f e g são epimorfismos, tem-se

$$\begin{aligned} i \circ (g \circ f) = j \circ (g \circ f) &\Rightarrow (i \circ g) \circ f = (j \circ g) \circ f \\ &\Rightarrow i \circ g = j \circ g && \text{(pois } f \text{ é um epimorfismo)} \\ &\Rightarrow i = j && \text{(pois } g \text{ é um epimorfismo).} \end{aligned}$$

(b) Se f é um epimorfismo e invertível à esquerda, então f é um isomorfismo.

Admitamos que f é um epimorfismo e invertível à esquerda. Uma vez que f é invertível à esquerda, existe $f' : B \rightarrow A$ tal que $f' \circ f = \text{id}_A$. Então $f \circ (f' \circ f) = f$, donde $(f \circ f') \circ f = \text{id}_B \circ f$. Por conseguinte, como f é um epimorfismo, tem-se $f \circ f' = \text{id}_B$. Logo f é invertível à direita. Uma vez que f é invertível à direita e à esquerda, concluímos que f é um isomorfismo.

3. Seja \mathbf{C} uma categoria com objeto inicial I e com objeto terminal T e seja $f : T \rightarrow I$ um morfismo de \mathbf{C} . Mostre que f é um isomorfismo. Conclua que I e T são objetos zero.

Admitamos que I é um objeto inicial, T é um objeto terminal e que $f : T \rightarrow I$ é um \mathbf{C} -morfismo. Uma vez que T é um objeto terminal, existe um \mathbf{C} -morfismo $u : I \rightarrow T$. Logo $u \circ f : T \rightarrow T$ é um \mathbf{C} -morfismo e tem-se $u \circ f = \text{id}_T$. De facto, como $u \circ f : T \rightarrow T$ e $\text{id}_T : T \rightarrow T$ são morfismos de \mathbf{C} e existe um único \mathbf{C} -morfismo de T em T (uma vez que T é um objeto terminal), tem-se $u \circ f = \text{id}_T$. De modo análogo conclui-se que $f \circ u = \text{id}_I$, pois $f \circ u : I \rightarrow I$ e $\text{id}_I : I \rightarrow I$ são morfismos em \mathbf{C} e existe um único morfismo de I em I (uma vez que I é um objeto inicial). Assim, f é invertível à direita e à esquerda e, portanto, f é um isomorfismo.

Um objeto que seja isomorfo a um objeto inicial (respetivamente, terminal) também é um objeto inicial (respetivamente, terminal). Logo, como I e T são isomorfos, concluímos que I e T são objetos simultaneamente iniciais e terminais, isto é, são objetos zero.

4. Sejam $f, g : A \rightarrow B$ e $i : I \rightarrow A$ morfismos numa categoria \mathbf{C} . Mostre que se $(I, (i, i))$ é um produto fibrado de (f, g) , então (I, i) é um igualizador de f e g .

Admitamos que $(I, (i, i))$ é um produto fibrado de (f, g) , i.e., admitamos que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{i} & A \\ i \downarrow & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

é um quadrado cartesiano. Então:

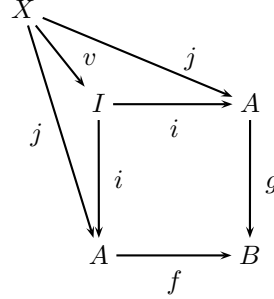
- (1) $f \circ i = g \circ i$;
- (2) para quaisquer \mathbf{C} -morfismos $f' : X \rightarrow A$ e $g' : X \rightarrow B$ tais que $f \circ f' = g \circ g'$, existe um, e um só, \mathbf{C} -morfismo $u : X \rightarrow I$ tal que $i \circ u = f'$ e $i \circ u = g'$.

Pretendemos provar que (I, i) é um igualizador de f e g , isto é, temos de provar que:

- (i) $f \circ i = g \circ i$;
- (ii) para todo o \mathbf{C} -morfismo $j : X \rightarrow A$ tal que $f \circ j = g \circ j$, existe um, e um só, \mathbf{C} -morfismo $v : X \rightarrow I$ tal que $i \circ v = j$.

Considerando (1) e (2) a prova de (i) e (ii) é imediata. De facto,

- (i) De (1) é imediato que $f \circ i = g \circ i$.
- (ii) se $j : X \rightarrow A$ é um \mathbf{C} -morfismo tal que $f \circ j = g \circ j$, então de (2) (considerando $f' = j$ e $g' = j$) resulta que existe um, e um só morfismo $v : X \rightarrow I$ tal que $i \circ v = j$.



5. Sejam \mathbf{C} uma categoria, A_1, A_2 e P objetos de \mathbf{C} e $p_1 : P \rightarrow A_1$ e $p_2 : P \rightarrow A_2$ morfismos de \mathbf{C} tais que $(P, (p_1, p_2))$ é um produto de A_1 e A_2 . Mostre que se $f : Q \rightarrow P$ é um isomorfismo em \mathbf{C} , então $(Q, (p_1 \circ f, p_2 \circ f))$ é um produto de A_1 e A_2 .

Sejam $(P, (p_1, p_2))$ um produto de A_1 e A_2 e $f : Q \rightarrow P$ um isomorfismo.

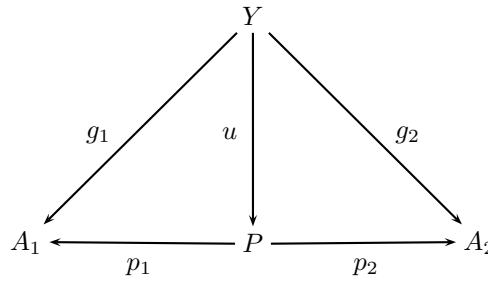
Uma vez que $(P, (p_1, p_2))$ é um produto de A_1 e A_2 , então, para quaisquer morfismos $f_1 : X \rightarrow A_1$ e $f_2 : X \rightarrow A_2$, existe um, e um só morfismo, $u : X \rightarrow P$ tal que $p_1 \circ u = f_1$ e $p_2 \circ u = f_2$.

Atendendo a que f é um isomorfismo, sabe-se que existe um morfismo $f^{-1} : P \rightarrow Q$ tal que $f \circ f^{-1} = \text{id}_P$ e $f^{-1} \circ f = \text{id}_Q$.

Pretendemos mostrar que $(Q, (p_1 \circ f, p_2 \circ f))$ é um produto de A_1 e A_2 , i.e., temos de mostrar que:

- (1) $p_1 \circ f$ é um morfismo de Q em A_1 e $p_2 \circ f$ é um morfismo de Q em A_2 ;
- (2) para quaisquer \mathbf{C} -morfismos $g_1 : Y \rightarrow A_1$ e $g_2 : Y \rightarrow A_2$, existe um, e um só, morfismo $v : Y \rightarrow Q$ tal que $(p_1 \circ f) \circ v = g_1$ e $(p_2 \circ f) \circ v = g_2$.

A prova de (1) é imediata, atendendo à definição de composição de morfismos. A prova de (2) também é simples. De facto, se $g_1 : Y \rightarrow A_1$ e $g_2 : Y \rightarrow A_2$ são \mathbf{C} -morfismos, então, uma vez que $(P, (p_1, p_2))$ é um produto de A_1 e A_2 , existe um, e um só morfismo $u : Y \rightarrow P$ tal que $p_1 \circ u = g_1$ e $p_2 \circ u = g_2$.



Assim, $v = f^{-1} \circ u$ é um \mathbf{C} -morfismo e tem-se

$$\begin{aligned} (p_1 \circ f) \circ v &= (p_1 \circ f) \circ (f^{-1} \circ u) = p_1 \circ u = g_1, \\ (p_2 \circ f) \circ v &= (p_2 \circ f) \circ (f^{-1} \circ u) = p_2 \circ u = g_2. \end{aligned}$$

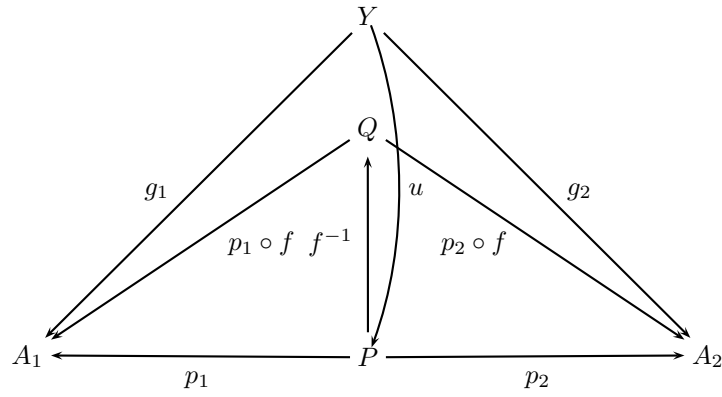
Além disso, $v = f^{-1} \circ u$ é o único \mathbf{C} -morfismo de Y em Q tal que $(p_1 \circ f) \circ v = g_1$ e $(p_2 \circ f) \circ v = g_2$. Com efeito, se $v' : Y \rightarrow Q$ é um \mathbf{C} -morfismo tal que

$$(p_1 \circ f) \circ v' = g_1 \text{ e } (p_2 \circ f) \circ v' = g_2,$$

tem-se

$$p_1 \circ (f \circ v') = g_1 \text{ e } p_2 \circ (f \circ v') = g_2$$

e atendendo à unicidade de u segue que $f \circ v' = u$. Logo $v' = f^{-1} \circ u = v$.



6. Sejam \mathbf{C} e \mathbf{D} categorias e T um objeto terminal da categoria \mathbf{D} . Seja F a correspondência que a cada objeto A de \mathbf{C} associa o objeto (A, T) e que a cada \mathbf{C} -morfismo $f : A \rightarrow B$ associa o par (f, id_T) , onde id_T é o \mathbf{D} -morfismo identidade associado a T .

(a) Mostre que F é um funtor da categoria \mathbf{C} na categoria $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$.

Da definição de F segue que:

(i) Para cada objeto X de \mathbf{C} , $F(X) = (X, T)$ é um objeto de $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ (pois X é um objeto de \mathbf{C} e T é um objeto de \mathbf{D});

(ii) Para cada \mathbf{C} -morfismo $f : X \rightarrow Y$, $F(f) = (f, \text{id}_T)$ é um morfismo de $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ (uma vez que f é um \mathbf{C} -morfismo e id_T é um \mathbf{D} -morfismo).

(iii) Para cada objeto X de \mathbf{C} ,

$$F(\text{id}_X) = (\text{id}_X, \text{id}_T) = \text{id}_{(X, T)} = \text{id}_{F(X)}.$$

(iv) Para quaisquer \mathbf{C} -morfismos $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$,

$$F(g \circ f) = (g \circ f, \text{id}_T) = (g \circ f, \text{id}_T \circ \text{id}_T) = (g, \text{id}_T) \circ (f, \text{id}_T) = F(g) \circ F(f).$$

De (i), (ii), (iii) e (iv) conclui-se que F é um funtor de \mathbf{C} em $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$.

(b) Diga, justificando, se F é um funtor:

i. **fiel**.

O funtor F é fiel se, para quaisquer \mathbf{C} -morfismos $f, g : X \rightarrow Y$,

$$F(f) = F(g) \Rightarrow f = g.$$

Atendendo a que, para quaisquer \mathbf{C} -morfismos $f, g : X \rightarrow Y$,

$$\begin{aligned} F(f) = F(g) &\Rightarrow (f, \text{id}_T) = (g, \text{id}_T) \\ &\Rightarrow f = g, \end{aligned}$$

concluimos que F é fiel.

ii. **pleno**.

O funtor F é pleno pois, para quaisquer objetos X e Y de \mathbf{C} e para qualquer $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ -morfismo $(g, h) : F(X) \rightarrow F(Y)$, existe um \mathbf{C} -morfismo $f : X \rightarrow Y$ tal que $F(f) = (g, h)$.

De facto, se X e Y são objetos de \mathbf{C} e $(g, h) : F(X) \rightarrow F(Y)$ é um morfismo de $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$, então g é um \mathbf{C} -morfismo de X em Y , h é um \mathbf{D} -morfismo de T em T e, uma vez que T é um objeto terminal, tem-se $h = \text{id}_T$. Logo, atendendo a que $g : X \rightarrow Y$ é um \mathbf{C} -morfismo tal que

$$F(g) = (g, \text{id}_T) = (g, h),$$

conclui-se que F é pleno.