18. Seja $p \in \mathbb{P}$ e $p > 3$. Mostre que o resto da divisão de p por 6 é igual a 1 ou a 5.

19. Prove que, se $p \in \mathbb{P}$ e $p > 3$, então $p^2 + 2$ é um número composto. (Sugestão: use o resultado do exercício 18.)

20. Mostre, que se $p, p+2 \in \mathbb{P}$ e $p > 3$, então $6 \mid (p+1)$.

21. Fatorize como produto de primos os números: 36300, 5661, 529, 677.

22. Sejam $a = 86625$ e $b = 38220$.

    (a) Fatorize a e b em primos.

    (b) Escreva a fatorização em primos de m.d.c.(a, b).

    (c) Escreva a fatorização em primos de m.m.c.(a, b).

23. Sejam $a = 4918793$ e $b = 35302597$. Calcule m.d.c.(a, b), sabendo que $a \times 9514662 - b \times 1325700 = 66$.

24. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Mostre que m.d.c.$(a^n, b^n) =$ m.d.c.$(a, b)^n$.

25. Determine os números primos p tais que $17p + 1$ é um quadrado perfeito.

26. Mostre que o único primo p da forma $p = n^3 - 1$, com $n \in \mathbb{N}$, é $p = 7$. (Sugestão: note que 1 é raiz do polinómio $n^3 - 1$ de incógnita n.)

27. Determine um fator primo do número $2^{30} + 1$.

28. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Mostre que se $n = a^4 - b^4$, então n não é um número primo.

29. Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ e $p \in \mathbb{P}$. Diga quais das seguintes afirmações são verdadeiras:

    (a) Se m.d.c.$(a, b) =$ m.d.c.(b, c), então m.d.c.$(a, b) =$ m.d.c.(a, c).

    (b) Se m.d.c.$(a, b) =$ m.d.c.(b, c), então m.m.c.$(a, b) =$ m.m.c.(b, c).

    (c) Se m.d.c.$(a, b) =$ m.d.c.(b, c), então m.d.c.$(a^2, b^2) =$ m.d.c.(b^2, c^2).

    (d) Se $p \mid a$ e $p \mid (ab + b^2)$, então $p \mid b$.

    (e) Se $b \mid (a^2 + 1)$, então $b \mid (a^4 + 1)$.

    (f) Se $b \mid (a^2 - 1)$, então $b \mid (a^4 + 1)$.

30. Prove que o conjunto dos números primos da forma $6n + 5$ é infinito.