Probabilidades e Aplicações
LCC
Transformadas

Emilia Athayde
DMAT, Universidade do Minho

2021/22

Resumo

1. Transformada de Laplace (de uma v.a.)
2. Propriedades
3. Exemplos
4. Mais propriedades e aplicações
5. Outras transformadas

Definição e propriedades elementares

Dada uma *v.a.* X, consideremos o valor médio $E(e^{-tX})$, para valores de t reais. Se este valor médio existir numa vizinhança do ponto $t = 0$, a função L_X definida nessa vizinhança por

$$L_X(t) = E(e^{-tX})$$

chama-se transformada de Laplace de X (ou da sua distribuição).

PROPRIEDADES ELEMENTARES:

1. $L_X(0) = 1$
2. A transformada de Laplace de $Y = a + bX$ $(a, b \in \mathbb{R})$ é dada por

$$L_Y(t) = e^{-at} L_X(bt).$$

Mais propriedades

3 A transformada de Laplace identifica a distribuição da *v.a.*, i.e., a cada *f.d.* (com transformada de Laplace) corresponde uma única transformada de Laplace, e reciprocamente, a cada transformada de Laplace corresponde uma única *f.d.*.

4 A *convergência em distribuição*[a] é equivalente à convergência das transformadas de Laplace para uma função contínua na origem.

[a] i.e., a convergência das *f.d.* nos pontos de continuidade da função limite, também chamada *convergência fraca* ou *convergência em lei*.

Fórmula para cálculo dos momentos

5 A transformada de Laplace L_X está ainda relacionada com os momentos de X. De facto, se tal transformada existir, esta terá derivadas (de qualquer ordem) na origem, existirão todos os momentos de X (de qualquer ordem), e é válida a seguinte relação (que em muitos casos simplifica o cálculo dos momentos):

$$E(X^n) = (-1)^n L_X^{(n)}(0).$$

No entanto, note-se que podem existir os momentos de todas as ordens de uma *v.a.* X e não existir transformada de Laplace, tal como acontece no caso da distribuição lognormal[a] ou no caso da *f.d.p.* dada por $f(x) = c\, e^{-|x|^\alpha}$, para $0 < \alpha < 1$.

[a] Diz-se que Y tem distribuição lognormal se $Y = e^X$, sendo $X \frown N(\mu, \sigma)$.

Exemplo

TRANSFORMADA DE LAPLACE DA $Exp(\lambda)$ E MOMENTOS:

No caso $X \frown Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$, a t. de Laplace existe e é dada por

$$
\begin{aligned}
L(t) &= E(e^{-tX}) = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-tx} e^{-\lambda x} dx = \\
&= -\frac{\lambda}{\lambda + t}\, e^{-(\lambda+t)x} \Big|_0^{+\infty} \underset{t+\lambda>0}{=} \frac{\lambda}{\lambda + t}, \text{ se } \ t > -\lambda
\end{aligned}
$$

(note-se que para $t \leq -\lambda$ o integral não converge; porquê?). Logo

$$L^{(n)}(t) = (-1)^n n! \frac{\lambda}{(\lambda + t)^{n+1}}$$

donde

$$E(X^n) = (-1)^n L^{(n)}(0) = \frac{n!}{\lambda^n}$$

Mais exemplos

TRANSFORMADA DE LAPLACE DA $Poisson(\lambda)$:

$$L(t) = E(e^{-tX}) = \sum_{j\geq 0} e^{-tj} e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^j}{j!} = e^{-\lambda}\sum_{j\geq 0}\frac{1}{j!}(\lambda e^{-t})^j$$
$$= e^{-\lambda}e^{\lambda e^{-t}} = e^{-\lambda(1-e^{-t})}, \quad t \in \mathbb{R}$$

TRANSFORMADA DE LAPLACE DA $bi(1,p)$:

$$L(t) = E(e^{-tX}) = e^{-t\times 0}(1-p) + e^{-t\times 1}p = 1 - p + pe^{-t}, t \in \mathbb{R}$$

T. LAPLACE DA $geom(p)$: $L(t) = \dfrac{pe^{-t}}{1-(1-p)e^{-t}}$, $t > \log(1-p)$

Transformada de Laplace da normal

Transformada de Laplace da $N(0,1)$:

$$
\begin{aligned}
L_Z(t) &= E(e^{-tZ}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}(x+t)^2+\frac{1}{2}t^2} dx \\
&= e^{\frac{1}{2}t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}(x+t)^2} dx = e^{\frac{1}{2}t^2}, \quad t \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Transformada de Laplace da $N(\mu,\sigma)$:

$$
L_X(t) = E(e^{-t(\mu+\sigma Z)}) = e^{-t\mu} L_Z(\sigma t) = e^{-t\mu+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}, \quad t \in \mathbb{R}
$$

Somas de v.a. independentes

Dadas X e Y, com *f.d.* F e G, respectivamente, chama-se *convolução* destas duas distribuições à *f.d.* (ou à correspondente *f.d.p./f.m.p.* no caso contínuo/discreto) de $X+Y$, com notação $F*G$. No caso de X e Y serem independentes e absolutamente contínuas, com *f.d.p.* f e g, respectivamente, reduz-se à fórmula (que é uma versão generalizada do TPT)

$$F*G\ (s) = P(X+Y\leq s) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(X\leq s-y \mid Y=y)\ g(y)dy$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} F(s-y)\ g(y)dy$$

ou seja, a $\int_{-\infty}^{+\infty} F(s-y)\ g(y)dy$ ou $\int_{-\infty}^{+\infty} G(s-x)\ f(x)dx$

Estes integrais podem ser trabalhosos (as fórmulas para o caso discreto são semelhantes, com somatórios em vez de integrais).

Transf. de Laplace da soma de v.a. independentes

No entanto, a transformada de Laplace de $X+Y$ vai ser o produto das transformadas de Laplace de X e de Y. De facto (recorde-se que o valor médio do produto de *v.a.* independentes é igual ao produto dos valores médios, e que funções de *v.a.* indep são ainda *v.a.* indep), temos

$$L_{X+Y}(t) = E\left(e^{-t(X+Y)}\right) = E\left(e^{-tX}e^{-tY}\right) = E\left(e^{-tX}\right)E\left(e^{-tY}\right) =$$

$$= L_X(t)L_Y(t).$$

Generalizando este resultado à soma de n *v.a.* independentes, temos

6 Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$, independentes, com respectivas transf. de Laplace $L_1(t), L_2(t), \ldots, L_n(t)$, e seja $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Então

$$L_{S_n}(t) = L_1(t)L_2(t)\ldots L_n(t).$$

Em particular, se X_i forem *i.i.d.*, então $L_{S_n}(t) = (L(t))^n$

Aplicação a algumas distribuições comuns

Recorrendo às propriedades 3 e 6 das transf. de Laplace conclui-se que
(i) a transf. Laplace da $bi(n, p)$ é $L(t) = (1 - p + pe^{-t})^n, t \in \mathbb{R}$
(ii) a soma de n *v.a.* indep X_i com lei $Poisson(\lambda_i)$, $bi(n_i, p)$, $N(\mu_i, \sigma_i)$, tem distribuição resp. $Poisson(\sum \lambda_i)$, $bi(\sum n_i, p)$, $N(\sum \mu_i, \sqrt{\sum \sigma_i^2})$.

Soma de v.a. normais independentes

Dadas n *v.a.* $X_i \frown N(\mu_i, \sigma_i)$ e $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, temos

$$L_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^n e^{-t\mu_i + \frac{1}{2}\sigma_i^2 t^2} = e^{-t\sum \mu_i + \frac{1}{2}t^2 \sum \sigma_i^2}$$

donde (pelas prop. 3 e 6) $S_n \frown N\left(\sum \mu_i, \sqrt{\sum \sigma_i^2}\right)$. No caso particular de *v.a. i.i.d.*, i.e., $X_i \frown N(\mu, \sigma)$ independentes, temos $S_n \frown N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$.

Mais uma aplicação: lei de $Laplace$ e simulação

Seja T uma v.a. com distribuição $Laplace(0,1)$, dada pela *f.d.p.*

$$f(x) = \frac{1}{2}\, e^{-|x|}, \; x \in \mathbb{R}.$$

(a) Prove que a transf. de Laplace de T é $L_T(t) = \frac{1}{1-t^2}$, $|t| < 1$.

(b) Deduza a transf. Laplace de $X - Y$, se X e Y *i.i.d.* $Exp(1)$.

(c) Conclua (justificando) que $X - Y \stackrel{d}{=} T$.

(d) Prove que $|T| \frown Exp(1)$.

(e) Simule NPAs da *v.a.* T usando

   i. o resultado da alínea (c).

   ii. o resultado da alínea (d) e o facto de T ser simétrica em torno de 0.

<u>Nota</u>: Esta distribuição é um caso particular da lei $Laplace(\mu, \delta)$ correspondente à v.a. $Y = \mu + \delta T$, também chamada *exponencial bilateral*.

A $Laplace(0,1)$ como diferença de duas *v.a. i.i.d.* $Exp(1)$

Dadas X e Y *i.i.d.* com distribuição $Exp(1)$ temos, para $|t|<1$,

$$L_{X-Y}(t) = L_X(t)L_{-Y}(t) = L_X(t)L_Y(-t) = \tfrac{1}{1+t}\tfrac{1}{1-t} = \tfrac{1}{1-t^2}.$$

A distribuição de $Laplace(\mu,\delta)$, também chamada *exponencial bilateral*, é definida pela *f.d.p.* $f(x) = \frac{1}{2\delta}e^{-\left|\frac{x-\mu}{\delta}\right|}$, $x \in \mathbb{R}$. No caso $\mu = 0$ e $\delta = 1$ a sua transformada de Laplace é

$$L(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{-tx}\ e^{x}dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} e^{-tx}\ e^{-x}dx$$

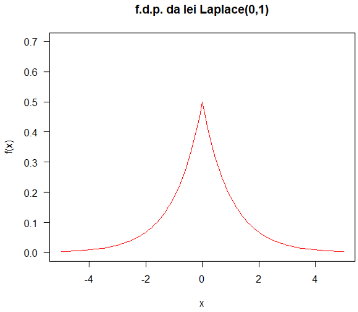
donde, notando que $\int_{-\infty}^{0} e^{-tx}\ e^{x}dx = \int_0^{\infty} e^{ty}\ e^{-y}dy = L_X(-t)$, temos

$$L(t) = \frac{1}{2}\ \frac{1}{1-t} + \frac{1}{2}\ \frac{1}{1+t} = \frac{1}{2}\ \frac{2}{1-t^2} = \frac{1}{1-t^2},\ \ |t|<1,$$

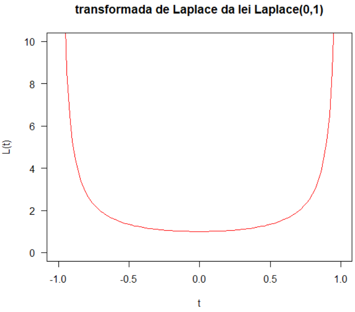
que coincide com $L_{X-Y}(t)$ obtida acima. Logo $X - Y \frown Laplace(0,1)$.

A distribuição $Laplace(0, 1)$: gráficos

Gráficos da densidade e da transformada de Laplace de $T \frown Laplace(0, 1)$



(a) *f.d.p.* de T



(b) transf. Laplace de T

Nota: A f.d. da $Laplace(0, 1)$ é dada por $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x}, & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$

Transformada de Laplace de um par aleatório

Define-se a transformada de Laplace de um par aleatório (X, Y) por

$$L(t, u) = E(e^{-tX-uY})$$

desde que este valor médio exista numa vizinhança de $(t, u) = (0, 0)$.

Propriedades

- Esta transformada (caso exista) identifica a lei conjunta do par.
- Se existir a transformada de Laplace do par (X, Y), existem os momentos conjuntos de qualquer ordem, que são dados por

$$E(X^m Y^n) = (-1)^{m+n} \left. \frac{\partial^{m+n} L(t, u)}{\partial t^m \partial u^n} \right|_{(t,u)=(0,0)}$$

- X e Y independentes $\iff L(t, u) = L(t, 0)L(0, u)$

Outras transformadas: *f.g.m.* e *f.g.p.*

função geradora de momentos

A *função geradora de momentos* (*f.g.m.*) de X é definida por $M(t) = E(e^{tX})$, caso este valor médio exista numa vizinhança da origem $(|t| < a)$. Temos assim $M(t) = L(-t)$, para $|t| < a$.
O nome desta transformada deriva do facto de o momento de ordem n ser obtido à sua custa pela fórmula $E(X^n) = M^{(n)}(0)$.

função geradora de probabilidades

A *função geradora de probabilidades* (*f.g.p.*), utilizada sobretudo para *v.a.* discretas com suporte $\{0, 1, 2, \ldots\}$, é definida por $G(z) = E(z^X)$, convergindo pelo menos para $|z| \leq 1$. Então, as probabilidades $p_n = P(X = n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, satisfazem à relação $p_n = \frac{1}{n!} G^{(n)}(0)$, justificando o seu nome. Gera também os *momentos factoriais* de ordem r, $E(X(X-1)\ldots(X-r+1)) = G^{(r)}(1)$.

Outras transformadas: função característica

função característica

A *função característica* (*f.c.*), $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ é definida por $\phi(t) = E(e^{itX})$ para $t \in \mathbb{R}$ ou seja, é a transformada de Fourier de f (*f.m.p./f.d.p.* de X).

Note-se que a *f.c.* tem a vantagem (em relação à transformada de Laplace e à *f.g.m.*) de existir sempre (para qualquer t real e para qualquer *v.a.* X). De facto, como $|e^{itx}| \leq 1$, $\forall x, t \in \mathbb{R}$, então

$$\left|E(e^{itX})\right| = \left| \int e^{itx} dF(x) \right| \leq \int \mid e^{itx} \mid dF(x) \leq \int dF(x) = 1$$

Notas: 1) A notação genérica $\int \ldots\ dF(x)$ engloba a versão $\int \ldots\ f(x)dx$ para v.a. contínuas com *f.d.p.* f, e a versão $\sum_i \ldots\ f(x_i)$ para v.a. discretas com *f.m.p.* f (o integral relativo a uma medida discreta reduz-se a uma soma). 2) A teoria da medida leva a uma teoria do integral, que no caso da medida de Lebesgue (volume n-dimensional) supera o integral de Riemann.