1. Seja $\mathcal{G} = (\{\mathcal{S}, \mathcal{B}\}, \{a, b\}, \mathcal{S}, P)$ a gramática com produções

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\rightarrow a\mathcal{S}b \mid \mathcal{B} \\ \mathcal{B} &\rightarrow b\mathcal{B} \mid b \end{aligned}$$

Prove que $L(\mathcal{G}) = \{a^n b^m : 0 \leq n < m\}$.

$$L(\mathcal{G}) = L(\mathcal{S}) = aL(\mathcal{S})b \cup L(\mathcal{B})$$

$$= a(aL(\mathcal{S})b \cup L(\mathcal{B}))b \cup L(\mathcal{B}) = a^2 L(\mathcal{S}) b^2 \cup a L(\mathcal{B}) b \cup a^0 L(\mathcal{B}) b^0$$

$$= a^2 L(\mathcal{S}) b^2 \cup \Big(\bigcup_{k=0,1} a^k L(\mathcal{B}) b^k \Big)$$

$$= a^2 (a L(\mathcal{S}) b \cup L(\mathcal{B})) b^2 \cup \Big(\bigcup_{k=0,1} a^k L(\mathcal{B}) b^k \Big) =$$

$$= a^3 L(\mathcal{S}) b^3 \cup a^2 L(\mathcal{B}) b^2 \cup \Big(\bigcup_{k=0,1} a^k L(\mathcal{B}) b^k \Big)$$

$$= a^3 L(\mathcal{S}) b^3 \cup \Big(\bigcup_{k=0,1,2} a^k L(\mathcal{B}) b^k \Big)$$

$$= a^3 (a L(\mathcal{S}) b \cup L(\mathcal{B})) b^3 \cup \ldots$$

$$= a^4 L(\mathcal{S}) b^4 \cup \Big(\bigcup_{k=0,1,2,3} a^k L(\mathcal{B}) b^k \Big)$$

Iterando este processo, obter-se-ia que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

$$L(\mathcal{S}) = a^n L(\mathcal{S}) b^n \cup \Big(\bigcup_{k=0,\ldots,n-1} a^k L(\mathcal{B}) b^k \Big)$$

As palavras de $a^n L(\mathcal{S}) b^n$ tem comprimento maior ou igual a $2n+1$.

$$L(\mathcal{B}) = bL(\mathcal{B}) \cup \{b\}$$

$$= b(bL(\mathcal{B}) \cup \{b\}) \cup \{b\} = b^2 L(\mathcal{B}) \cup \{b^2\} \cup \{b\} = b^2 L(\mathcal{B}) \cup \{b^2, b\}$$

$$= b^2 (b L(\mathcal{B}) \cup \{b\}) \cup \{b^2, b\} = b^3 L(\mathcal{B}) \cup \{b^3\} \cup \{b^2, b\}$$

$$= b^3 L(\mathcal{B}) \cup \{b^3, b^2, b\}$$

Iterando este processo, obter-se-ia que para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$L(\mathcal{B}) = b^n L(\mathcal{B}) \cup \{b^n, \ldots, b\}.$$

(A prova formal desta igualdade é feita por indução matemática sobre n).

Se $w \in L(\mathcal{B})$ e $|w| > n$, então $w \in b^n L(\mathcal{B})$. De facto os elementos de $b^n L(\mathcal{B})$ são palavras de comprimento maior do que n.

Então sendo $w \in L(\mathcal{B})$ e se $|w| = n$, então $w \in \{b^n, \ldots, b\}$, nomeadamente $w = b^n$. Logo

$$L(\mathcal{B}) = \{b^n : n \in \mathbb{N}\} = b^+$$

mente $w = b^n$. Logo $L(B) = \{ b^n : n \in \mathbb{N} \} = b^+$

Assim, $L(S) = a^n L(S) b^n \cup \left(\bigcup_{k=0,\dots,n-1} a^k b^+ b^k \right)$

Se $w \in L(S)$ e $|w| = m < 2n+1$, então existe j tal que $w = a^j b^i b^j$ com $j \in \{0, \dots, n-1\}$ e $i \geq 1$.

Assim,
$$L(S) = \{ a^j b^i b^j : \text{com } j \geq 0, i \geq 1 \}$$
$$= \{ a^j b^{i+j} : \text{com } j \geq 0 \; i \geq 1 \}$$
$$= \{ a^j b^{k'} : j \in \mathbb{N}_0 \text{ e } k' > j \}.$$

Como $i \geq 1$
$k' = i + j > j$

c.q.d. //.

2. Considere a gramática $\mathcal{G} = (\{\mathcal{S}\}, \{a, b\}, \mathcal{S}, P)$ com produções
$$\mathcal{S} \to a\mathcal{S}b \mid \mathcal{S}\mathcal{S} \mid ab \mid ba$$

Mostre que

(a) $(ab)^2a^2b^2, a^3b^2a^3bab^4 \in L(\mathcal{G})$;

(b) se $u \in L(\mathcal{G})$, então $|u|_a = |u|_b$; — TP1

(c) se $u \in L(\mathcal{G})$, então b^2 não é prefixo de u.

a) $\cancel{a}\cancel{b}\cancel{a}b\,a\,a\,b\,\cancel{b}$ S

$S \Rightarrow aSb \Rightarrow a\,SS\,b \Rightarrow a\,ba\,S\,b \Rightarrow aba\,SS\,b \Rightarrow ababa\,S\,b$
$\Rightarrow ababa\,ab\,b = (ab)^2 a^2 b^2$. Logo $(ab)^2a^2b^2 \in L(\mathcal{G})$

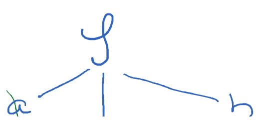
$\cancel{a}\cancel{a}\cancel{a}\,bb\,aaa\,ba\,b\cancel{b}\cancel{b}\cancel{b}$ $\longrightarrow$ ñ conduz a uma derivação com sucesso.

$a\,a\,a\,bb\,aaa\,ba\,bbbb$ S S S

$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aa\,SS\,bb \Rightarrow aa\,SSS\,bb \Rightarrow aaab\,SS\,bb \Rightarrow$
$\Rightarrow aaab\,ba\,S\,bb \overset{(2)}{\Rightarrow} aaabba(aa\,S\,bb)bb \Rightarrow aaa\,bb\,aaababbbb$

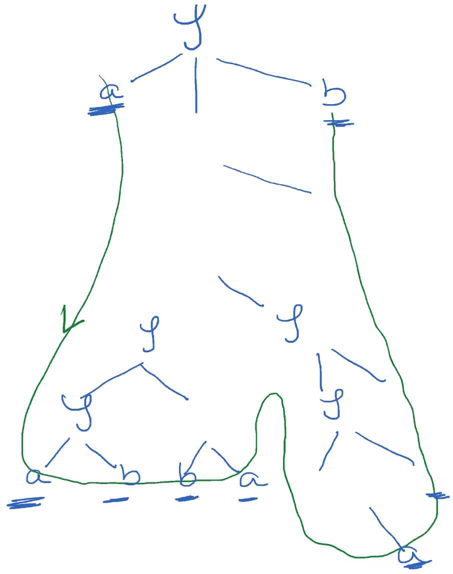
Logo $a^3b^2a^3bab^4 \in L(\mathcal{G})$.

Árvore de derivação



Árvore de derivação

aaabbaaababbbb



c) Seja $u \in L(G)$. Então existe uma derivação em n passos do tipo:

$$S \overset{(n)}{\Longrightarrow} u$$

Se $n=1$, então $S \Rightarrow u \in \{a,b\}^*$ e $u = ab$ ou $u = ba$. Em ambos os casos b^2 não é prefixo de u.

Por hipótese de indução suponhamos que para certo $k \in \mathbb{N}$ se $u \in L(G)$ e existe $S \overset{(j)}{\Longrightarrow} u$ onde $1 \le j \le k$, então b^2 não é prefixo de u.

Suponhamos agora que temos uma palavra $u \in L(G)$ e que existe uma derivação $S \overset{k+1}{\Longrightarrow} u$.

$$S \Rightarrow aSb \qquad \text{ou} \qquad S \Rightarrow SS$$

é a 1ª etapa da derivação de u.

Caso: $\boxed{S \Rightarrow aSb}$

$$S \Rightarrow aSb \underbrace{\Rightarrow \cdots \Rightarrow}_{k} awb = u$$

Então $u = awb$ onde w é uma palavra tal que existe uma

$$S \overset{(k)}{\Longrightarrow} w$$

Assim, w está nas da hipótese de indução pelo que b^2 não é prefixo de w. Como $u = awb$, b^2 não é prefixo de u.

Caso $\boxed{S \Rightarrow SS}$

$$S \Rightarrow SS \Rightarrow \_\_ \cdot \_\_ \Rightarrow \cdots \Rightarrow u_1 u_2 = u$$

$$\mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{S}\mathcal{S} \Rightarrow \_\_ \cdot \_\_ \Rightarrow \dots \Rightarrow u_1 u_2 = u$$

Então existem derivações $\mathcal{S} \overset{k_1}{\Longrightarrow} u_1$ e $\mathcal{S} \overset{k_2}{\Longrightarrow} u_2$ onde $k_1 + k_2 = k$, e $k_1, k_2 > 0$. Então $k_1 < k$ e $k_2 < k$. Logo u_1 e u_2 estão nas condições da hipótese de indução. Consequentemente, b^2 não é prefixo de u_1, nem de u_2. Como $u_1 \in L(\mathcal{G})$, então $|u_1| \geq 2$. Logo b^2 é prefixo de $u_1 u_2$ sse b^2 é prefixo de u_1. Como b^2 não é prefixo de u_1, então b^2 não é prefixo de u.

Assim, b^2 não é prefixo de u se u é derivável em k passos a partir de $\mathcal{S}$.

A conclusão final é que, para qualquer palavra $u \in L(\mathcal{G})$, b^2 não é prefixo de u.

3. Considere o alfabeto $\{a, b\}$.

(a) Construa gramáticas que gerem as linguagens:

i) $L_1 = \{a^n b^{2n} \mid n > 0\}$ ii) $L_2 = (abb \cup b)^*(ab)^*$
iii) $L_3 = \{a^i b^j a \mid i > j > 0\}$ iv) $L_4 = \{a^i b^j a^k \mid j \geq (i + k),\ i, j, k \in \mathbb{N}\}$

(b) Justifique que as linguagens dadas são independentes de contexto.

(c) Elabore derivações e respetivas árvores de derivação de modo a provar que: $a^3b^6,\ a^4b^8 \in L_1$, $ab^4ab,\ ab^4ab^2ab^2 \in L_2$, $a^6b^5a,\ a^7b^2a \in L_3$ e $a^3b^7a^2 \in L_4$.

3a) ii) $L_2 = \{abb, b\}^* (ab)^* = \{uv : u \in \{abb, b\}^*, v \in (ab)^*\}$

$\mathcal{G}_2 = (\{\mathcal{S}, \mathcal{E}, \mathcal{D}\}, \{a, b\}, \mathcal{S}, P)$

$\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{E}\mathcal{D}$

$\mathcal{E} \longrightarrow abb\mathcal{E} \mid b\mathcal{E} \mid \varepsilon$

$\mathcal{D} \longrightarrow ab\mathcal{D} \mid \varepsilon$

$L(\mathcal{G}_2) = L(\mathcal{E})\, L(\mathcal{D})$

$L(\mathcal{E}) = \{abb, b\}^*$

$L(\mathcal{D}) = (ab)^*$

iii) $L_3 = \{a^i b^j a \mid i > j > 0\} = \{a^k a^j b^j a \mid j > 0, k > 0\}$

$\underbrace{a^k}\ \underbrace{a^j b^j}\ \underbrace{a}$

$\mathcal{G}_3 = (\{\mathcal{S}, \mathcal{C}, \mathcal{E}, \mathcal{D}\}, \{a, b\}, \mathcal{S}, P)$

$\mathcal{S} \to \mathcal{C}a$
$\mathcal{C} \to \mathcal{E}\mathcal{D}$

$\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{E}\mathcal{D}a$ $V = \{\mathcal{S}, \mathcal{E}, \mathcal{D}\}$

$\mathcal{E} \to a\mathcal{E} \mid a$

$\mathcal{D} \to a\mathcal{D}b \mid ab$