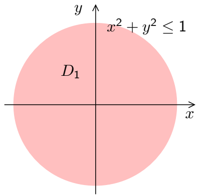
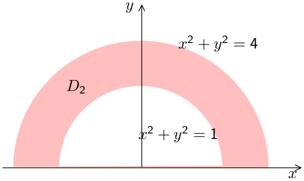
Cap 3 – Integrais múltiplos

3.3 Integração em coordenadas não cartesianas

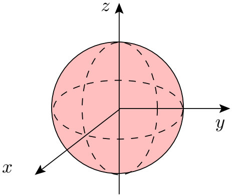
Problema

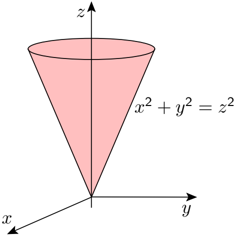
Estudar integração dupla em regiões da forma





ou integração tripla em regiões como





A descrição destas regiões em termos de coordenadas cartesianas (ou retangulares) é bastante complicada, mas torna-se simples se usarmos coordenadas polares, no primeiro caso, e coordenadas cilíndricas ou esféficas, no segundo caso.

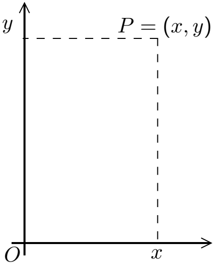
3.3.1 Coordenadas polares e integração dupla

Coordenadas polares

Integração dupla em coordenadas polares

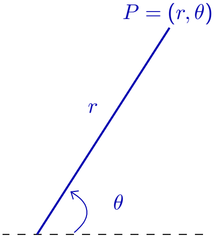
Coordenadas cartesianas vs Coordenadas polares

Coordenadas cartesianas



- origem do referencial O e dois eixos
- x distância na horizontal a O
- y distância na vertical a O

Coordenadas polares

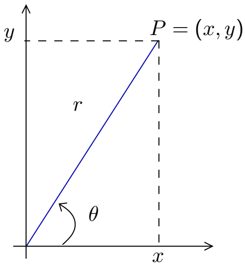


- origem do referencial O, um eixo e um ângulo
- r é a distância a O
- θ ângulo entre o eixo polar e a horizontal

Coordenadas cartesianas vs Coordenadas polares

Coordenadas cartesianas

$$P = (x, y)$$



Coordenadas polares

$$P = (r, \theta)$$

- Da trigonometria do retângulo vem

$$\begin{cases} x = r \cos\theta & \qquad r \in [0 + \infty[\\ y = r \operatorname{sen}\theta & \qquad \theta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- Logo

$$x^2 + y^2 = (r \cos\theta)^2 + (r \operatorname{sen}\theta)^2 = r^2 \Longrightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e para $x \neq 0$

$$\frac{y}{x} = \tan\theta$$

- Para passar de coordenadas polares a cartesianas

$$\begin{cases} x = r\,\cos\theta \\ \\ y = r\,\operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} r \in [0, +\infty[\\ \theta \in [0, 2\pi[\end{array}$$

- Para passar de coordenadas cartesianas a polares

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x}, \quad x \neq 0 \end{cases}$$

Observação

- Como as funções seno e cosseno são periódicas, a descrição de um ponto em coordenadas polares não é única.

  Podemos, por exemplo, tomar $\theta \in [\,0, 2\pi\,[$.

- As coordenadas polares são indicadas para descrever regiões circulares (no plano).

Exemplo

- As coordenadas cartesianas de $(r, \theta) = \left(7, \frac{\pi}{3}\right)$ são

$$(x, y) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta) = \left(7\cos\frac{\pi}{3}, 7\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{7\sqrt{3}}{2}\right).$$

- As coordenadas cartesianas de $(r, \theta) = (5, \pi)$ são $(x, y) = (-5, 0)$.

- As coordenadas polares de $(x, y) = (3, 3)$ são $(r, \theta) = \left(3\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$, pois

$$\begin{cases} r = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \\[2ex] \theta = \arctan\dfrac{3}{3} = \arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}, \quad \text{para } \theta \in [0, 2\pi[. \end{cases}$$

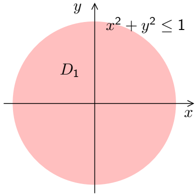
- As coordenadas polares de $(x, y) = (0, 2)$ são $(r, \theta) = \left(2, \frac{\pi}{2}\right)$.

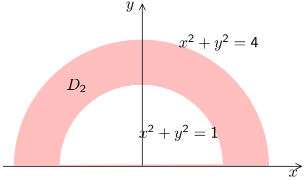
Exemplo

- A circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$ é descrita em coordenadas polares pelas equações

$$r = 2, \qquad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

- Em coordenadas polares as regiões





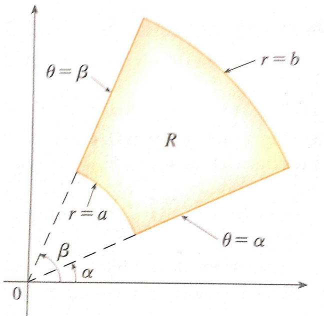
são descritas por

$$D_1 = \{(r, \theta) : \ 0 \leq r \leq 1, \ \ 0 \leq \theta < 2\pi\}$$
$$D_2 = \{(r, \theta) : \ 1 \leq r \leq 2, \ \ 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

Retângulo polar

Estas regiões são casos particulares de "retângulos polares"

$$R = \{(r, \theta) :\ a \le r \le b,\ \ \alpha \le \theta \le \beta\}.$$



As coordenadas cartesianas dos pontos $(x, y) \in R$ são

$$(x, y) = (r \cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta), \quad \text{com} \quad a \le r \le b,\ \ \alpha \le \theta \le \beta.$$

Integração dupla em coordenadas polares

Suponhamos que se pretende calcular o integral (dado em coordenadas retangulares)

$$\iint_R f(x,y)\, dA,$$

onde $f : R \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ com $f(x,y) \geq 0$ e R é um retângulo polar

$$R = \{(r,\theta) : \ a \leq r \leq b, \ \ \alpha \leq \theta \leq \beta\}.$$

- Subdividimos $[a, b]$ em n subintervalos e $[\alpha, \beta]$ em k subintervalos:

$$a = r_0 < r_1 < \cdots < r_{n-1} < r_n = b \quad \text{e} \quad \alpha = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{k-1} < \theta_k = \beta.$$

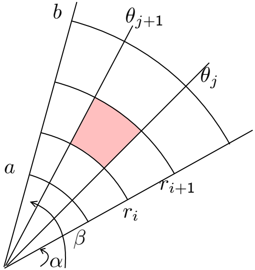
- À subdivisão anterior associamos uma subdivisão do retângulo polar R em $n \times k$ sub-retângulos polares

$$R_{ij} = [r_i, r_{i+1}] \times [\theta_j, \theta_{j+1}].$$

- O "centro" de R_{ij} é, em coordenadas polares, $r_i^* = \dfrac{1}{2}(r_i + r_{i+1})$, $\quad \theta_j^* = \dfrac{1}{2}(\theta_i + \theta_{i+1})$.
- A área do retângulo polar R_{ij} é

$$\Delta A_{ij} = \frac{1}{2} r_{i+1}^2 \Delta\theta_j - \frac{1}{2} r_i^2 \Delta\theta_j = r_i^* \Delta r_i \Delta\theta_j,$$

onde $\Delta\theta_j = \theta_{j+1} - \theta_j$ e $\Delta r_j = r_{j+1} - r_j$.



- Para cada retângulo R_{ij} escolhemos o ponto $(x_i^*, y_j^*) = (r_i^* \cos\theta_j^*, r_i^* \operatorname{sen}\theta_j^*)$.

- O volume do sólido cuja base é o retângulo R_{ij} e altura é $f(x_i^*, y_j^*)$ é dada por

$$f(x_i^*, y_j^*)\Delta A_{ij} = f(r_i^* \cos\theta_j^*, r_i^* \operatorname{sen}\theta_j^*) r_i^* \Delta r_i \Delta\theta_j.$$

- O volume do sólido limitado por R e o gráfico de f pode ser aproximado pela soma de Riemann típica

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1} f(x_i^*, y_j^*)\Delta A_{ij} = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1} f(r_i^* \cos\theta_j^*, r_i^* \operatorname{sen}\theta_j^*) r_i^* \Delta r_i \Delta\theta_j.$$

(obtemos a mesma reposta usando partições polares).

- Denotando $g(r,\theta) = r f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$, a soma

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1} f(r_i^* \cos\theta_j^*, r_i^* \operatorname{sen}\theta_j^*) r_i^* \Delta r_i \Delta\theta_j = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1} g(r^*, \theta^*)\, \Delta r_i \Delta\theta_j$$

é uma soma de Riemann de g relativa à subdivisão anterior de R.

- Quando $n, k \longrightarrow \infty$ o valor da soma de Riemann de g é o integral definido de g em R e

$$\iint_R g(r,\theta)\,dr\,d\theta = \int_\alpha^\beta \int_a^b g(r,\theta)\,dr\,d\theta.$$

- Voltando a f, como $g(r,\theta) = rf(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)$

$$\begin{aligned}\iint_R g(r,\theta)\,dr\,d\theta &= \int_\alpha^\beta \int_a^b g(r,\theta)\,dr\,d\theta \\ &= \int_\alpha^\beta \int_a^b r\,f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\,dr\,d\theta.\end{aligned}$$

[Mudança para coordenadas polares num integral duplo]

Se f é contínua no retângulo polar R dado por $0 \le a \le r \le b$, $\alpha \le \theta \le \beta$, onde $0 \le \beta - \alpha \le 2\pi$, então

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\,r\,dr\,d\theta.}$$

Observação

- A integração dupla em coordenadas polares goza das mesmas propriedades que a integração dupla em coordenadas retangulares.

- Tal como se definem regiões elementares do plano xy também se definem regiões elementares no plano $r\theta$:
  - D^* diz-se uma região do tipo I se existe um intervalo $[a, b]$ e duas funções de classe $\mathcal{C}^1$, $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \longrightarrow [0, 2\pi[$ tais que
  $$D^* = \{(r, \theta) : a \leq r \leq b,\ \varphi_1(r) \leq \theta \leq \varphi_2(r)\}.$$
  - D^* diz-se uma região do tipo II se existe um intervalo $[\alpha, \beta]$ e duas funções de classe $\mathcal{C}^1$, $\mu_1, \mu_2 : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que
  $$D^* = \{(r, \theta) : \alpha \leq \theta \leq \beta,\ \mu_1(\theta) \leq r \leq \mu_2(\theta)\}.$$
  - D^* diz-se uma região do tipo III se for, simultaneamente, uma região do tipo I e do tipo II.

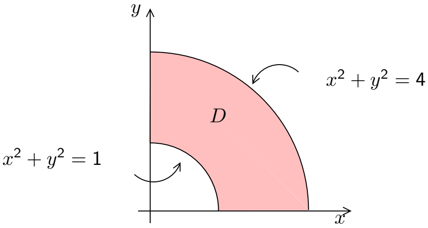
Exercício

Calcular

$$\iint_D \left(x^2+y^2\right)\, dx\, dy$$

onde

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}.$$



Descrição de D em coordenadas cartesianas:

$$0\le x\le 1,\quad \sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2}$$

$$1\le x\le 2,\quad 0\le y\le\sqrt{4-x^2}$$

Resolução.

$$\iint_D \left(x^2+y^2\right) dx\, dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2\left[(r\cos\theta)^2+(r\,\mathrm{sen}\,\theta)^2\right] r\, dr\, d\theta$$

Resolução (cont.).

$$
\begin{aligned}
\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \left[(r\cos\theta)^2 + (r\,\mathrm{sen}\,\theta)^2\right] r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 r^2 \left[\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta\right] r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 r^3\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=1}^{r=2} d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4 - \frac{1}{4}\right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{15}{4}\,d\theta \\
&= \left[\frac{15}{4}\theta\right]_{\theta=0}^{r=\frac{\pi}{2}} = \frac{15\pi}{8}.
\end{aligned}
$$

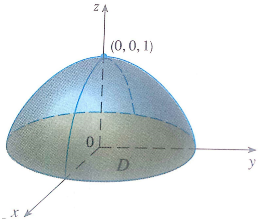
Oberve-se que estamos a fazer a mudança de variáveis

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

e temos sempre $x^2+y^2=r^2$.

Exercício

Determinar o volume do sólido limitado pelo plano $z = 0$ e o pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$.



Resolução.

Primeiro observe-se que a projeção do parabolóide com o plano $z = 0$ é a círculo D de equação $x^2 + y^2 \leq 1$.

O volume do sólido é dado por

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2)\, dA = \iint_D [1 - (x^2 + y^2)]\, dx\, dy$$

Resolução (cont.).

Usando coordenadas polares para o cálculo do integral, vem

$$\begin{aligned}
V &= \iint_D \left[1-(x^2+y^2)\right] dx\,dy \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(1-r^2\right) r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(r-r^3\right) dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=1} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\,d\theta = \left[\frac{1}{4}\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Se tivéssemos usado coordenadas retangulares em vez de polares, teríamos obtido o integral

$$\iint_D \left(1-x^2-y^2\right) dA = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(1-x^2-y^2\right) dy\,dx$$

que não é fácil de calcular.

Exercício

Calcular $\iint_D (3x+y)\, dA$ *onde*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y \leq 4,\ y \geq 0\}.$$

Resolução.

$$\begin{aligned}
\iint_D (3x+y)\, dx\, dy &= \int_0^{\pi} \int_1^2 \big(3r\cos\theta + r\,\text{sen}\,\theta\big)\, r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \int_1^2 \big(3r^2\cos\theta + r^2\,\text{sen}\,\theta\big)\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \left[r^3\cos\theta + \frac{r^3}{3}\,\text{sen}\,\theta\right]_{r=1}^{r=2} d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \left(7\cos\theta + \frac{7}{3}\,\text{sen}\,\theta\right) d\theta \\
&= \left[7\,\text{sen}\,\theta + \frac{7}{3}(-\cos\theta)\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} = \frac{14}{3}.
\end{aligned}$$

3.3.2 Coordenadas cilíndricas e integração tripla

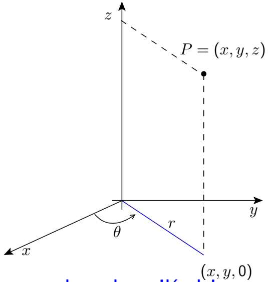
Coordenadas cilíndricas

Integração tripla em coordenadas cilíndricas

Coordenadas cartesianas vs Coordenadas cilíndricas

Coordenadas cartesianas

$P = (x, y, z)$



Coordenadas cilíndricas

$P = (r, \theta, z)$

- Para passar de coordenadas cilíndricas a cartesianas

$$\begin{cases} x = r\ \cos\theta & \qquad r \in [0, +\infty[\\ y = r\ \operatorname{sen}\theta & \qquad \theta \in [0, 2\pi[\\ z = z & \qquad z \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- Para passar de coordenadas cartesianas a cilíndricas

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \dfrac{y}{x} \\ z = z. \end{cases}$$

Observação

- As coordenadas r e θ das coordenadas cilíndricas são as coordenadas polares da projeção de P no plano horizontal: $(x, y, 0)$.

- Tal como no caso das coordenadas polares, a descrição de um ponto em coordenadas cilíndricas não é única.

- As coordenadas cilíndricas são indicadas para descrever regiões do espaço simétricas relativamente ao eixo dos zz.

- Tal como alguns integrais duplos são mais fáceis de calcular usando coordenadas polares, alguns integrais triplos são mais fáceis de calcular usando coordenadas cilíndricas (ou esféricas).

Exemplo

- As coordenadas cartesianas de $(r, \theta, z) = \left(7, \frac{\pi}{3}, 5\right)$ são $(x, y, z) = \left(\frac{7}{2}, \frac{7\sqrt{3}}{2}, 5\right)$.

- As coordenadas cilíndricas de $(x, y, z) = (3, 3, 1)$ são $(r, \theta, z) = \left(3\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, 1\right)$.

- O cilindro de equações $x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leq z \leq 3$ é descrito em coordenadas cilíndricas pelas equações

$$0 \leq r \leq 2, \qquad 0 \leq \theta < 2\pi, \qquad 0 \leq z \leq 3.$$

Exemplo

O cone (metade) definido por

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 2 \right\}$$

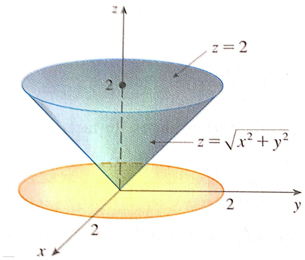
(limitado inferiormente pela superfície cónica $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e superiormente pelo plano $z = 2$) é descrito em coordenadas cilíndricas da forma

$$0 \le r \le 2, \qquad 0 \le \theta < 2\pi, \qquad r \le z \le 2.$$

Note-se que $z = \sqrt{x^2 + y^2} \Longrightarrow z^2 = x^2 + y^2$.

Para $z = 2$ temos a circunferência $x^2 + y^2 = 4$ e a projeção do cone no plano xy é o círculo $x^2 + y^2 \le 4$.

Note-se também que podemos escrever $z \ge \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r^2} = r$.

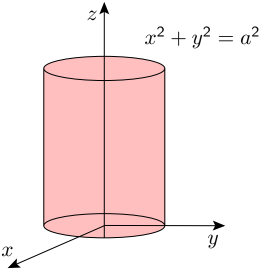


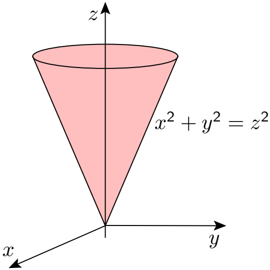
Integração tripla em coordenadas cilíndricas

Suponhamos que se pretende calcular o integral da função f contínua em $U \subset \mathbb{R}^3$ (dado em coordenadas retangulares)

$$\iiint_U f(x,y,z)\,dV,$$

onde U é uma região da forma

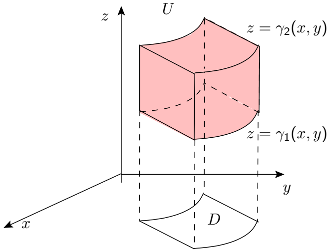




Em coordenadas cilíndricas

$$U_1 = \{(r,\theta,z) \,:\, 0 \le r \le a,\ \ 0 \le \theta < 2\pi,\ \ 0 \le z \le h\}$$
$$U_2 = \{(r,\theta,z) \,:\, 0 \le r \le h,\ \ 0 \le \theta < 2\pi,\ \ r \le z \le h\}$$

- Consideremos o caso geral de f estar definida em U, uma região do tipo I de $\mathbb{R}^3$



$$U = \{(x, y, z) \,:\, (x, y) \in D,\ \gamma_1(x, y) \le z \le \gamma_2(x, y)\}$$

- Suponhamos que D pode ser descrito em coordenadas polares por

$$D^* = \{(r, \theta) : \alpha \le \theta \le \beta,\ \mu_1(\theta) \le r \le \mu_2(\theta)\}$$

- Da teoria de integração sobre uma região do tipo I de $\mathbb{R}^3$ sabe-se que

$$\iiint_U f(x,y,z)\,dV = \iint_D \left[\int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dA$$

- Da integração dupla em coordenadas polares vem

$$\iiint_U f(x,y,z)\,dV =$$

$$= \int_\alpha^\beta \int_{\mu_1(\theta)}^{\mu_2(\theta)} \left[\int_{\gamma_1(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)}^{\gamma_2(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z)\,dz\right] r\,dr\,d\theta$$

[Mudança para coordenadas cilíndricas num integral triplo]

Se f é contínua numa região $U \subset \mathbb{R}^3$ que pode ser descrita em coordenadas cilíndricas por

$$\begin{aligned} \alpha \leq & \quad \theta \quad \leq \beta \\ \mu_1(\theta) \leq & \quad r \quad \leq \mu_2(\theta) \\ \gamma_1(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta) \leq & \quad z \quad \leq \gamma_2(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta) \end{aligned}$$

então

$$\iiint_U f(x,y,z)\,dV =$$
$$= \int_\alpha^\beta \int_{\mu_1(\theta)}^{\mu_2(\theta)} \int_{\gamma_1(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)}^{\gamma_2(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, z)\, r\,dz\,dr\,d\theta.$$

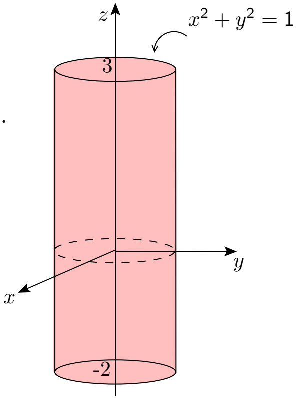
Exemplo

Calcular

$$\iiint_U (x^2 + y^2)\, dV$$

sendo

$$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2 + y^2 \leq 1, \, -2 \leq z \leq 3\right\}.$$



Resolução.

Fazendo a mudança para coordenadas cilíndricas,

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad z = z,$$

temos

$$\begin{aligned}
\iiint_U (x^2+y^2)\,dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-2}^3 \left[(r\cos\theta)^2 + (r\,\mathrm{sen}\,\theta)^2\right] r\,dz\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-2}^3 r^2\,r\,dz\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-2}^3 r^3\,dz\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[r^3 z\right]_{z=-2}^{z=3} dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 5r^3\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{5}{4}r^4\right]_{r=0}^{r=1} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{5}{4}\,d\theta = \left[\frac{5}{4}\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{5}{2}\pi.
\end{aligned}$$

3.3.3 Coordenadas esféricas e integração tripla

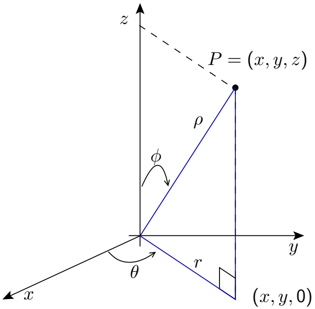
Coordenadas esféricas

Integração tripla em coordenadas esféricas

Coordenadas cartesianas vs Coordenadas esféricas

Coordenadas cartesianas

$P = (x, y, z)$



Coordenadas esféricas

$P = (\rho, \theta, \phi)$

$\rho = \|\overrightarrow{OP}\|$

Da trigonometria do retângulo vem $r = \rho \operatorname{sen} \phi$ e

$$\left\{\begin{array}{l} x = r \cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} x = \rho \operatorname{sen}\phi\cos\theta \\ y = \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{array}\right. , \qquad r \in [0, +\infty[$$

- Para passar de coordenadas esféricas a cartesianas

$$\left\{\begin{array}{l} x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{array}\right. , \qquad \begin{array}{l} \rho \in [0, +\infty[\\ \theta \in [0, 2\pi[\\ \phi \in [0, \pi] \end{array}$$

- Para passar de coordenadas cartesianas a esféricas

$$\left\{\begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \\ \\ \cos\phi = \dfrac{z}{\rho} \end{array}\right.$$

desde que $x \neq 0$ e $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

Observação

- As coordenadas esféricas são indicadas para descrever regiões do espaço simétricas relativamente a um ponto.

- A designação dos ângulos θ e ϕ bem como a sua definição não é consensual.
  - Neste curso definimos θ como o ângulo da projecção de $\overrightarrow{OP}$ com a parte positiva do eixo dos x e ϕ como o ângulo entre $\overrightarrow{OP}$ e a parte positiva do eixo dos z.
  - Em geografia, por exemplo, a latitude, isto é, o ângulo ϕ é o ângulo entre $\overrightarrow{OP}$ e o plano horizontal.

Exemplo

1. As coordenadas esféricas do ponto $(x, y, z) = (4, 0, 0)$ são $(\rho, \theta, \phi) = \left(4, 0, \frac{\pi}{2}\right)$, obtidas da forma

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{4^2 + 0 + 0} = 4 \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{0}{4} = 0 \Longrightarrow \theta = 0 \\ \cos\phi = \dfrac{z}{\rho} = \dfrac{0}{4} = 0 \Longrightarrow \phi = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

2. As coordenadas cartesianas do ponto $(\rho, \theta, \phi) = \left(4, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$ são $(x, y, z) = (\sqrt{6}, \sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, obtidas fazendo

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta = 4 \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4} \cos\dfrac{\pi}{6} = 4 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6} \\ y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta = 4 \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4} \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6} = 4 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \\ z = \rho\cos\phi = 4\cos\dfrac{\pi}{4} = 4\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

3. As coordenadas esféricas do ponto $(x, y, z) = (0, 1, 1)$ são $(\rho, \theta, \phi) = \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$.

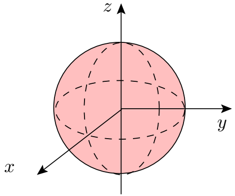
Exemplo

1. Uma superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, com $a > 0$, em coordenadas esféricas descreve-se simplesmente por

$$\rho = a, \qquad \theta \in [0, 2\pi[\,, \qquad \phi \in [0, \pi],$$

e a esfera de inequação $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ por

$$\rho \leq a, \qquad \theta \in [0, 2\pi[\,, \qquad \phi \in [0, \pi].$$



2. Para descrever a semi-esfera inferior $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ com $z \leq 0$ temos

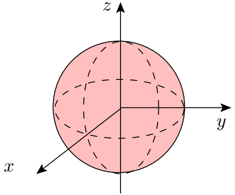
$$\rho \leq a, \qquad \theta \in [0, 2\pi[\,, \qquad \phi \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

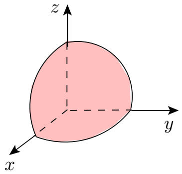
Integração tripla em coordenadas esféricas

Suponhamos que se pretende calcular o integral (dado em coordenadas retangulares) da função f contínua em $U \subset \mathbb{R}^3$

$$\iiint_U f(x,y,z)\,dV,$$

onde U é uma região da forma





Em coordenadas esféricas definimos uma cunha esférica[1] como

$$E = \{(\rho,\theta,\phi) \,:\, a \le \rho \le b,\;\; \alpha \le \theta \le \beta,\;\; c \le \phi \le d\},$$

onde $a \ge 0$, $\beta - \alpha \le 2\pi$ e $d - c \le \pi$.

[1] Uma cunha esférica é a um "paralelipípedo" em coordenadas esféricas

Seja $P = \{(\rho,\theta,\phi) : a \le \rho \le b, \ \alpha \le \theta \le \beta, \ c \le \phi \le d\}$ e $f : P \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

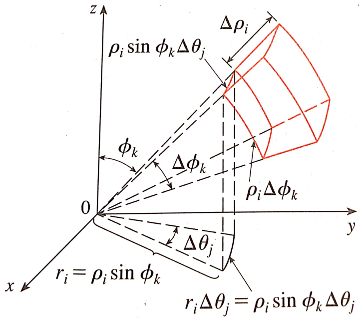
- A uma subdivisão do intervalo $[a,b]$ em n subintervalos, de $[\alpha,\beta]$ em m subintervalos e de $[c,d]$ em l subintervalos, associamos uma subdivisão da cunha esférica E em $n \times m \times l$ cunhas esféricas

$$E_{ijk} = [\rho_i, \rho_{i+1}] \times [\theta_j, \theta_{j+1}] \times [\phi_k, \phi_{k+1}].$$

- Uma aproximação para o volume de E_{ijk} é dada por

$$\begin{aligned}\Delta V_{ijk} &\approx \Delta\rho_i(\rho_i \operatorname{sen}\phi_k \Delta\theta_j)\rho_i \Delta\phi_k \\ &= \rho_i^2 \operatorname{sen}\phi_k \Delta\rho_i \Delta\theta_j \Delta\phi_k\end{aligned}$$

com $\Delta\rho_i = \rho_{i+1} - \rho_i$, $\Delta\theta_j = \theta_{j+1} - \theta_j$ e $\Delta\phi_k = \phi_{k+1} - \phi_k$.



- Podemos mostrar que o volume de E_{ijk} é exatamente

$$\Delta V_{ijk} = \widetilde{\rho}_i^2 \operatorname{sen}\widetilde{\phi}_k \Delta\rho_i \Delta\theta_j \Delta\phi_k$$

onde $(\widetilde{\rho}_i, \widetilde{\theta}_j, \widetilde{\rho}_k)$ é um ponto em E_{ijk}.

- Para este ponto considerem-se as suas coordenadas retangulares

$$(x_i^*, y_j^*, z_k^*) = (\widetilde{\rho}_i \operatorname{sen}\widetilde{\phi}_j \cos\widetilde{\theta}_k, \ \widetilde{\rho}_i \operatorname{sen}\widetilde{\phi}_j \operatorname{sen}\widetilde{\theta}_k, \ \widetilde{\rho}_i \cos\widetilde{\phi}_k).$$

- Consideremos a soma

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{l-1} f(\widetilde{\rho}_i \operatorname{sen}\widetilde{\phi}_j \cos\widetilde{\theta}_k,\ \widetilde{\rho}_i \operatorname{sen}\widetilde{\phi}_j \operatorname{sen}\widetilde{\theta}_k,\ \widetilde{\rho}_i \cos\widetilde{\phi}_k)\, \widetilde{\rho}_i^2 \operatorname{sen}\widetilde{\phi}_k \Delta\rho_i \Delta\theta_j \Delta\phi_k$$

- Denotando $g(\rho,\theta,\phi) = f(\rho \operatorname{sen}\phi\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \rho\cos\phi)\,\rho^2 \operatorname{sen}\phi$, a soma anterior toma a forma [2]

$$\sum_{i,j,k} F(\widetilde{\rho}_i, \widetilde{\theta}_j, \widetilde{\phi}_k)\Delta\rho_i\Delta\theta_j\Delta\phi_k$$

  e é uma soma de Riemann de g para a subdivisão de E considerada.

- Quando $n, m, l \longrightarrow \infty$ o valor da soma de Riemann de P é o integral triplo de g em E

$$\iiint_E g(\rho,\theta,\phi)\, d\rho\, d\theta\, d\phi.$$

[2] Por simplicidade, escrevemos $\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{l-1} = \sum_{i,j,k}$

- Retomando $g(\rho,\theta,\phi) = f(\rho \,\text{sen}\, \phi \cos\theta, \rho \,\text{sen}\, \phi \,\text{sen}\, \theta, \rho\cos\phi)\, \rho^2 \;\text{sen}\, \phi$, temos

$$\iiint_E g(\rho,\theta,\phi)\, d\rho\, d\theta\, d\phi =$$

$$= \iiint_E f(\rho \,\text{sen}\, \phi \cos\theta, \rho \,\text{sen}\, \phi \,\text{sen}\, \theta, \rho\cos\phi)\, \rho^2 \;\text{sen}\, \phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

- retomando $g(\rho,\theta,\phi) = f(\rho \,\text{sen}\, \phi \cos\theta, \rho \,\text{sen}\, \phi \,\text{sen}\, \theta, \rho\cos\phi)\, \rho^2 \;\text{sen}\, \phi$ temos

[Mudança para coordenadas esféricas num integral triplo]

Se f é uma função contínua numa região U do espaço que é descrita em coordenadas esféricas por

$$a \leq \rho \leq b, \qquad \alpha \leq \theta \leq \beta, \qquad c \leq \phi \leq d$$

sendo $a \geq 0$, $\beta - \alpha \in [0, 2\pi]$ e $d - c \in [0, \pi]$, então

$$\boxed{\iiint_U f(x,y,z)\, dV = \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho \,\text{sen}\, \phi \cos\theta, \rho \,\text{sen}\, \phi \,\text{sen}\, \theta, \rho\cos\phi)\, \rho^2 \;\text{sen}\, \phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi}$$

Observação

1. A integração tripla em coordenadas esféricas goza das mesmas propriedades que a integração tripla em coordenadas retangulares.

2. Tal como se definem regiões elementares do plano xyz também se definem regiões elementares no plano $\rho\theta\phi$.

Exemplo

Calcular

$$\iiint_U \mathrm{e}^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dV$$

onde U é a esfera unitária,

$$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}.$$

Resolução.

Vamos usar coordenadas esféricas:

$$U = \{(\rho, \theta, \phi) : 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \phi \leq \pi\}.$$

Nestas coordenadas temos $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e, assim,

$$\iiint_U \mathrm{e}^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dV = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \mathrm{e}^{(\rho^2)^{3/2}} \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

Resolução (cont.).

$$\iiint_U e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dV = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \mathrm{e}^{(\rho^2)^{3/2}}\rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^2\mathrm{e}^{\rho^3} \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\phi \left[\frac{\mathrm{e}^{\rho^3}}{3}\right]_{\rho=0}^{\rho=1} d\theta\, d\phi$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \tfrac{\mathrm{e}-1}{3} \operatorname{sen}\phi\, d\theta\, d\phi$$

$$= \int_0^{\pi} \tfrac{\mathrm{e}-1}{3} \operatorname{sen}\phi \Big[\theta\Big]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\phi$$

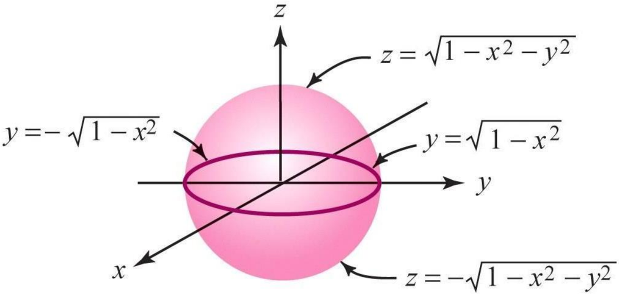
$$= \int_0^{\pi} \frac{2\pi(\mathrm{e}-1)}{3} \operatorname{sen}\phi\, d\phi$$

$$= \frac{2\pi(\mathrm{e}-1)}{3}\Big[-\cos\phi\Big]_{\phi=0}^{\phi=\pi} = \frac{4\pi(\mathrm{e}-1)}{3}$$

Resolução (cont.).

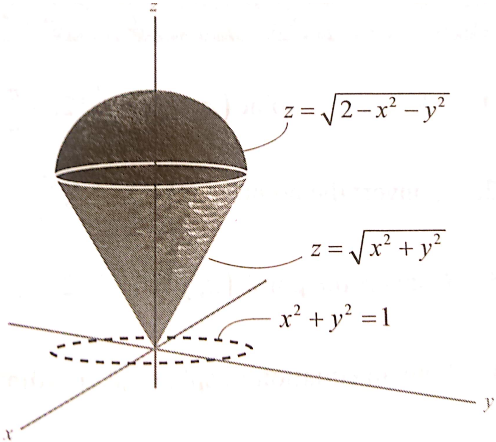
Observe-se que teria sido muito difícil avaliar o integral deste exemplo sem coordenadas esféricas. Em coordenadas retangulares o integral teria ficado

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \mathrm{e}^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dz\,dy\,dx.$$



Exemplo

Determinar o volume de um cone de gelado limitado superiormente pela parte superior da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ e inferiormente pela superfície cónica $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.



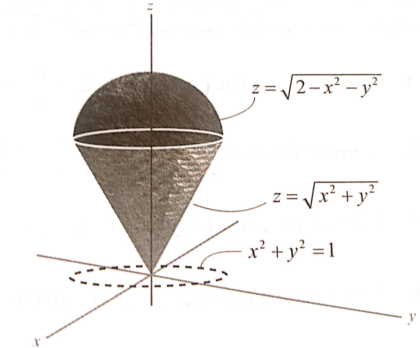
Resolução.

Interseção das superfícies:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$



Usando coordenadas esféricas:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2 \Longrightarrow \rho^2 = 2 \Longrightarrow \rho = \sqrt{2}$$

$$z = 1 \Longrightarrow \rho \cos\phi = 1 \Longrightarrow \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$$

E temos $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

O cone de gelado é dado por (cunha esférica):

$$U = \left\{(\rho, \theta, \phi) : \, 0 \leq \rho \leq \sqrt{2}, \; 0 \leq \theta \leq 2\pi, \; 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}\right\}$$

Resolução (cont.).

Volume do cone de gelado:

$$\begin{aligned}
\iiint_U 1\, dV &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} 1 \cdot \rho^2 \,\text{sen}\, \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 \,\text{sen}\, \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \text{sen}\, \phi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{2}} d\theta \, d\phi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \frac{2\sqrt{2}}{3} \,\text{sen}\, \phi \, d\theta \, d\phi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sqrt{2}}{3} \,\text{sen}\, \phi \Big[\theta \Big]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\phi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4\sqrt{2}\pi}{3} \,\text{sen}\, \phi \, d\phi \\
&= \frac{4\sqrt{2}\pi}{3} \Big[-\cos \phi \Big]_{\phi=0}^{\phi=\frac{\pi}{4}} = \frac{4\pi}{3}(\sqrt{2}-1)
\end{aligned}$$