Álgebra Linear

Universidade do Minho
Departamento de Matemática

2019/2020 LCC

Espaços vetoriais, aplicações lineares, valores e vetores próprios
Exercícios resolvidos

4. Espaços vetoriais

1. Considere, em $\mathbb{R}^3$, o conjunto

$$S = \{(1,0,1),(0,1,1),(2,-1,1)\}.$$

   (a) Verifique se $(1,-1,2)$ é combinação linear dos vetores de S.

   (b) Mostre que é possível escrever de duas formas diferentes o vetor $(1,-1,0)$ como combinação linear dos vetores de S.

Resolução.

(a) Vejamos se existem constantes α, β e γ tais que

$$(1,-1,2) = \alpha(1,0,1) + \beta(0,1,1) + \gamma(2,-1,1).$$

Temos, então, o sistema

$$\begin{cases} 1 = \alpha + 2\gamma \\ -1 = \beta - \gamma \\ 2 = \alpha + \beta + \gamma \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Usando o método de eliminação de Gauss para resolver o sistema, vem

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \longleftarrow l_3 - l_1]{} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow[l_3 \longleftarrow l_3 - l_2]{} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

O sistema é impossível (a última equação equivale à condição impossível $0 = 2$) o que significa, portanto, que $(1,-1,2)$ não é combinação linear dos vetores de S.

(b) Consideremos o mesmo sistema da alínea anterior mas agora com o vetor dos termos independentes $(1,-1,0)$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Neste caso temos um sistema possível e indeterminado,

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \longleftarrow l_3 - l_1]{} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow[l_3 \longleftarrow l_3 - l_2]{} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

e o conjunto solução é o conjunto

$$C.S. = \{(1-2\gamma, \gamma - 1, \gamma) \colon \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Por exemplo, escolhendo $\gamma = 0$, vem $\alpha = 1$ e $\beta = -1$, e temos

$$(1, -1, 0) = (1, 0, 1) - (0, 1, 1) + 0 \cdot (2, -1, 1).$$

Para $\gamma = 1$, vem $\alpha = -1$ e $\beta = 0$, sendo

$$(1, -1, 0) = -(1, 0, 1) + 0 \cdot (0, 1, 1) + (2, -1, 1).$$

2. (a) Seja
$$P = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ 2x + y - z = 0\right\}.$$
Justifique que P, com as operações usuais em $\mathbb{R}^3$, é um subespaço vetorial.

   (b) Seja
$$Q = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ 2x + y - z = \alpha\right\}, \quad \text{com } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$
Q é um subespaço vetorial?

Resolução.

(a) Note-se que P pode ser descrito da forma

$$P = \left\{(x, y, 2x + y) \in \mathbb{R}^3 \colon\ x, y \in \mathbb{R}\right\}.$$

P é uma subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ uma vez que as seguintes condições estão satisfeitas:

i. $(0, 0, 0) \in P$;

ii. sendo $(x_1, y_1, 2x_1 + y_1)$ e $(x_2, y_2, 2x_2 + y_2)$ pertencentes a P, então também

$$(x_1, y_1, 2x_1 + y_1) + (x_2, y_2, 2x_2 + y_2) = \big(x_1 + x_2, y_1 + y_2, 2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\big)$$

pertence a P;

iii. se $(x_1, y_1, 2x_1 + y_1) \in P$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então também

$$\alpha(x_1, y_1, 2x_1 + y_1) = \big(\alpha x_1, \alpha y_1, 2\alpha x_1 + \alpha y_1\big)$$

pertence a P.

(b) Consideremos, então, o conjunto

$$Q = \left\{(x, y, 2x + y - \alpha) \in \mathbb{R}^3 \colon\; x, y \in \mathbb{R}\right\}, \qquad \text{com } \alpha \neq 0.$$

Q não é um subespaço vetorial uma vez que, sendo $\alpha \neq 0$, não poderemos ter $(0, 0, 0) \in Q$. De facto, teria de ser

$$\begin{cases} 0 &= x \\ 0 &= y \\ 0 &= 2x + y - \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} 0 &= x \\ 0 &= y \\ 0 &= \alpha \end{cases},$$

o que contraria a condição de $\alpha \neq 0$.

3. Considere, em $\mathbb{R}^5$, o subespaço vetorial

$$U = \left\{(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5 \colon\; b - c = 0 \quad \text{e} \quad a = b + d\right\}.$$

(a) Indique, se possível, um vetor $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ que não pertença a U e tal que $x_2 = x_3$.

(b) Determine um conjunto gerador de U.

Resolução.

(a) Por exemplo,

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 2, 2, 1, 0).$$

Temos $x_2 = x_3$ mas, como $x_1 = 0 \neq x_2 + x_4 = 2 + 1$, o vetor não pertence a U.

(b)

$$\begin{aligned} U &= \left\{(c + d, c, c, d, e) \in \mathbb{R}^3 \colon\; c, d, e \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \{c(1, 1, 1, 0, 0) + d(1, 0, 0, 1, 0) + e(0, 0, 0, 0, 1) \colon\; c, d, e \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Logo,

$$U = \langle (1, 1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1) \rangle,$$

ou seja,

$$\{(1, 1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$$

constitui um conjunto gerador de U.

4. Considere, em $\mathbb{R}^3$, os vetores

$$u_1 = (1, 1, 0), \quad u_2 = (2, 0, 0), \quad u_3 = (0, 1, 0)$$

e seja $S = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$.

(a) Verifique se os vetores u_1, u_2 e u_3 são linearmente independentes.

(b) Verifique se $(1, 1, 0) \in S$.

(c) Determine o conjunto dos valores reais de k para os quais o vetor $(1, 1, 2k) \notin S$.

Resolução.

(a) Os vetores u_1, u_2 e u_3 são linearmente independentes se a única solução do sistema, nas incógnitas α, β e γ,

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = \mathbf{0}$$

é a solução nula $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

De

$$\alpha(1,1,0) + \beta(2,0,0) + \gamma(0,1,0) = (0,0,0)$$

temos, então,

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta &= 0 \\ \alpha + \gamma &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta &= -\dfrac{\alpha}{2} \\ \gamma &= -\alpha \\ 0 &= 0 \end{cases}.$$

Trata-se de um sistema possível e indeterminado com conjunto-solução

$$C.S. = \{(\alpha, -\alpha/2, -\alpha) \colon \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Logo, não temos apenas a solução nula e, portanto, os vetores u_1, u_2 e u_3 não são linearmente independentes.

(b) $(1,1,0) \in S = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ pois $(1,1,0) = u_1$ e, pode, portanto, escrever-se, de forma trivial, como combinação linear de u_1, u_2 e u_3. Temos

$$(1,1,0) = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$$

(c) $(1,1,2k) \notin S$ se o sistema

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta &= 1 \\ \alpha + \gamma &= 1 \\ 0 &= 2k \end{cases} \iff \begin{cases} \beta &= \dfrac{1-\alpha}{2} \\ \gamma &= 1-\alpha \\ 0 &= k \end{cases}$$

é impossível, o que acontece quando $k \neq 0$.

5. Considere, em $\mathbb{R}^4$, o subconjunto

$$U = \left\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \colon \ a = b \quad \text{e} \quad d = a + c\right\}.$$

(a) Verifique que U é um subespaço vetorial.

(b) Diga se o conjunto $\{(2,2,0,2), (0,0,1,1)\}$ é um conjunto gerador de U.

Resolução.

(a) O conjunto U pode escrever-se na forma $U = \{(a,a,c,a+c) : \ a, c \in \mathbb{R}\}$ e é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ uma vez que as seguintes condições estão satisfeitas:

i. $(0,0,0) \in U$;

ii. sendo $(a_1, a_1, c_1, a_1 + c_1)$ e $(a_2, a_2, c_2, a_2 + c_2)$ pertencentes a U, então também

$$(a_1, a_1, c_1, a_1+c_1) + (a_2, a_2, c_2, a_2+c_2) = \big(a_1+a_2, a_1+a_2, c_1+c_2, (a_1+a_2)+(c_1+c_2)\big)$$

pertence a U;

iii. se $(a, a, c, a + c) \in U$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então também

$$\alpha(a, a, c, a + c) = \big(\alpha a, \alpha a, \alpha c, \alpha a + \alpha c\big)$$

pertence a U.

(b)

$$\begin{aligned} U &= \{(a, a, c, a + c) : \ a, c \in \mathbb{R}\} = \{a(1, 1, 0, 1) + c(0, 0, 1, 1) : \ a, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{\frac{a}{2}(2, 2, 0, 2) + c(0, 0, 1, 1) : \ a, c \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \{d(2, 2, 0, 2) + c(0, 0, 1, 1) : \ d, c \in \mathbb{R}\} = \langle (2, 2, 0, 2), (0, 0, 1, 1)\rangle \end{aligned}$$

6. Indique, justificando, caso seja possível, um vetor u tal que
   (a) $S = \{(0, 0, 3), (-1, 0, 2), u\}$ seja uma base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) $S = \{(1, 1), (2, 2), u\}$ seja um conjunto gerador de $\mathbb{R}^2$.

Resolução.

(a) Seja $u = (0, 1, 0)$. Como $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, o conjunto $S = \{(0, 0, 3), (-1, 0, 2), (0, 1, 0)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ se for linearmente independente uma vez que contém 3 elementos. De facto, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[l_1 \longleftrightarrow l_2]{} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[l_2 \longleftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

como se tem $\mathrm{car}(A) = 3$, os vetores linha são linearmente independentes, ou seja, S é um conjunto linearmente independente e, portanto, contitui uma base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Seja $u = (1, 0)$. Qualquer vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, se pode exprimir como combinação linear dos elementos de $S = \{(1, 1), (2, 2), (1, 0)\}$, ou seja, S é um conjunto gerador de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. De facto, o sistema nas incógnitas α, β e γ,

$$(x, y) = \alpha(1, 1) + \beta(2, 2) + \gamma(1, 0) \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = x \\ \alpha + 2\beta = y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \gamma = x - y \\ \alpha = y - 2\beta \end{cases}$$

é sempre possível (possível e indeterminado, sendo $(y - 2\beta, \beta, x - y), \beta \in \mathbb{R}$, a solução geral do sistema).

7. Considere no espaço vectorial $\mathbb{R}^5$ o um subespaço

$$V = \big\{(x, y, z, w, r) \in \mathbb{R}^5 : \ x = 2z \quad \text{e} \quad y = w - z\big\}.$$

Mostre que a dimensão de V é 3, apresentando uma base deste espaço.

Resolução.

$$\begin{aligned} V &= \{(2z, w - z, z, w, r) : \ z, w, r \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z(2, -1, 1, 0, 0) + w(0, 1, 0, 1, 0) + r(0, 0, 0, 0, 1) : \ z, w, r \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (2, -1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\rangle \end{aligned}$$

Como a característica da matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é igual a 3, os vetores linha são linearmente independentes e o conjunto $\{(2,-1,1,0,0),(0,1,0,1,0),(0,0,0,0,1)\}$, sendo gerador de V, é, portanto, uma base de V. Logo, a dimensão de V é 3.

8. Apresente uma base do subespaços vetorial

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \colon \ a = b = -c \quad \text{e} \quad d = e + f \right\}.$$

<u>Resolução.</u>

$$\begin{aligned} G &= \left\{ \begin{bmatrix} -c & -c & c \\ e+f & e & f \end{bmatrix} \colon \ c, e, f \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ c \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + f \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \colon \ c, e, f \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

O conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é, portanto, gerador de G e, como é linearmente independente, constitui uma base de G. De facto,

$$\alpha \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

5. Aplicações lineares

1. Considere a aplicação $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(a,b,c) = (a, b+c, 0).$$

   (a) Mostre que T é uma aplicação linear.

   (b) Seja $v = (0, \alpha, 1)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Verifique que $v \in \mathsf{Nuc}(T)$ se e só se $\alpha = -1$.

Resolução.

   (a) Sejam $(a_1, b_1, c_1) \in \mathbb{R}^3$, $(a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Temos

      i.

$$\begin{aligned} T\big((a_1,b_1,c_1)+(a_2,b_2,c_2)\big) &= T(a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2) \\ &= (a_1+a_2, b_1+b_2+c_1+c_2, 0) \\ &= (a_1, b_1+c_1, 0) + (a_2, b_2+c_2, 0) \\ &= T(a_1,b_1,c_1) + T(a_2,b_2,c_2); \end{aligned}$$

      ii.

$$\begin{aligned} T\big(\alpha(a_1,b_1,c_1)\big) &= T(\alpha a_1, \alpha b_1, \alpha c_1) \\ &= (\alpha a_1, \alpha b_1 + \alpha c_1, 0) \\ &= \alpha(a_1, b_1+c_1, 0) \\ &= \alpha T(a_1,b_1,c_1). \end{aligned}$$

   Logo, por i. e ii., T é um aplicação linear.

   (b) Seja $v = (0, \alpha, 1)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} v \in \mathsf{Nuc}(T) &\Longleftrightarrow T(v) = (0,0,0) \\ &\Longleftrightarrow T(0,\alpha,1) = (0,0,0) \\ &\Longleftrightarrow (0, \alpha+1, 0) = (0,0,0) \\ &\Longleftrightarrow \alpha + 1 = 0. \end{aligned}$$

2. Seja $G\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear tal que

$$G(1,0,1) = (1,1) \quad \text{e} \quad \mathsf{Nuc}(G) = \langle (0,0,1), (0,-1,0) \rangle.$$

Determine $G(x,y,z)$ para qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Resolução.

Observe-se que $G(0,0,1) = (0,0)$, $G(0,-1,0) = (0,0)$ e que o conjunto

$$\{(1,0,1), (0,0,1), (0,-1,0)\}$$

constitui uma base de $\mathbb{R}^3$ já que a dimensão de $\mathbb{R}^3$ é igual a 3 e temos um conjunto com três vetores linearmente independentes.

Então, para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ o sistema

$$(x, y, z) = \alpha(1, 0, 1) + \beta(0, 0, 1) + \gamma(0, -1, 0)$$

é sempre possível e determinado. Temos

$$\begin{cases} x &= \alpha \\ y &= -\gamma \\ z &= \alpha + \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha &= x \\ \gamma &= -y \\ \beta &= z - x \end{cases}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} G(x, y, z) &= G\big(x(1, 0, 1) + (z - x)(0, 0, 1) - y(0, -1, 0)\big) \\ &= xG(1, 0, 1) + (z - x)G(0, 0, 1) - yG(0, -1, 0) \\ &= x(1, 1) + (z - x)(0, 0) - y(0, 0) \\ &= (x, x). \end{aligned}$$

3. Considere a aplicação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(a, b, c) = (a + b, b + c).$$

(a) Determine a matriz da aplicação T relativamente às bases canónicas.

(b) Verifique que $\mathsf{Im}(T) = \mathbb{R}^2$. Qual a dimensão de $\mathsf{Nuc}(T)$?

Resolução.

(a) Sendo $T(1, 0, 0) = (1, 0)$, $T(0, 1, 0) = (1, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (0, 1)$, a matriz da aplicação linear relativamente às bases canónicas é

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) $\mathsf{Im}(T) = \langle (1, 0), (1, 1), (0, 1) \rangle = \langle (1, 0), (0, 1) \rangle = \mathbb{R}^2$
$\dim(\mathsf{Nuc}(T)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathsf{Im}(T)) = 3 - 2 = 1$ (Teorema das dimensões)

4. Seja $G\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ a aplicação linear tal que

$$G(1, 0, 1) = 2, \quad G(1, 1, 0) = 3 \quad \text{e} \quad G(0, 1, 1) = 0.$$

Determine $G(x, y, z)$ para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Resolução. O conjunto $\{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ constitui uma base de $\mathbb{R}^3$. De facto, a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[l_2 \longleftrightarrow l_2 - l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[l_3 \longleftrightarrow l_3 - l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

tem característica 3, o que significa que os vetores linha são linearmente independentes e, como $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

Assim, dado $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ o sistema

$$(x,y,z) = \alpha(1,0,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(0,1,1)$$

tem solução única.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 1 & 0 & 1 & z \end{array}\right] \xleftrightarrow[l_3 \longleftrightarrow l_3 - l_1]{} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & -1 & 1 & z-x \end{array}\right] \xleftrightarrow[l_3 \longleftarrow l_3 + l_2]{} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 2 & z-x+y \end{array}\right]$$

A solução é dada por

$$\begin{cases} \alpha = x - \beta \\ \beta = y - \gamma \\ \gamma = (z-x+y)/2 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = (x-y+z)/2 \\ \beta = (y-z+x)/2 \\ \gamma = (z-x+y)/2 \end{cases}$$

Podemos agora definir a aplicação G. Para qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, temos

$$\begin{aligned} G(x,y,z) &= G\left(\frac{x-y+z}{2}(1,0,1) + \frac{y-z+x}{2}(1,1,0) + \frac{z-x+y}{2}(0,1,1)\right) \\ &= \frac{x-y+z}{2}G(1,0,1) + \frac{y-z+x}{2}G(1,1,0) + \frac{z-x+y}{2}G(0,1,1) \\ &= \frac{x-y+z}{2} \times 2 + \frac{y-z+x}{2} \times 3 + \frac{z-x+y}{2} \times 0 \\ &= \frac{5x+y-z}{2}. \end{aligned}$$

5. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a aplicação linear definida por

$$T(a,b,c) = (a+c, 2b+c-a, b+c, a-b).$$

   (a) Determine a matriz da aplicação T relativamente às bases canónicas.
   (b) Determine $\mathsf{Im}(T)$ e a respetiva dimensão.

Resolução.

(a) Temos $T(1,0,0) = (1,-1,0,1)$, $T(0,1,0) = (0,2,1,-1)$ e $T(0,0,1) = (1,1,1,0)$. A matriz da aplicação linear relativamente às bases canónicas é

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$\begin{aligned} \mathsf{Im}(T)) &= \big\{(a+c, 2b+c-a, b+c, a) \in \mathbb{R}^3 \colon a,b,c \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \{a(1,-1,0,1) + b(0,2,1,-1) + c(1,1,1,0) \colon a,b,c \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1,-1,0,1), (0,2,1,-1), (1,1,1,0) \rangle \end{aligned}$$

Observe-se que

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[l_3 \longleftrightarrow l_3 - l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[l_3 \longleftrightarrow l_3 - l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Concluímos que o conjunto $\{(1,-1,0,1),(0,2,1,-1),(1,1,1,0)\}$ não é linearmente independente e que, portanto, não constiui uma base de $\mathsf{Im}(T))$. Temos

$$\mathsf{Im}(T)) = \langle (1,-1,0,1),(0,2,1,-1) \rangle$$

e a dimensão de $\mathsf{Im}(T))$ é igual a 2.

6. Seja $G\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$G(1,0) = (1,1,2) \quad \text{e} \quad \mathsf{Nuc}(G) = \langle (1,2) \rangle.$$

Determine $G(x,y)$ para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

<u>Resolução:</u> Dado que o conjunto $\{(1,0),(1,2)\}$ constitui uma base de $\mathbb{R}^2$, temos

$$\begin{aligned} G(x,y) &= G\left(\left(x - \frac{y}{2}\right)(1,0) + \frac{y}{2}(1,2)\right) \\ &= \left(x - \frac{y}{2}\right) G(1,0) + \frac{y}{2} G(1,2) \\ &= \left(x - \frac{y}{2}\right)(1,1,2) + \frac{y}{2}(0,0,0) \\ &= \left(x - \frac{y}{2}, x - \frac{y}{2}, 2x - y\right). \end{aligned}$$

7. Considere a aplicação $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por

$$T(a,b,c) = \begin{bmatrix} b & 2a \\ 2a & b \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que T é uma aplicação linear.

(b) Determine uma base de $\mathsf{Nuc}(T)$.

<u>Resolução</u>.

(a) Sejam $(a_1,b_1,c_1) \in \mathbb{R}^3$, $(a_2,b_2,c_2) \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Temos

i.

$$\begin{aligned} T\big((a_1,b_1,c_1) + (a_2,b_2,c_2)\big) = T(a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2) &= \begin{bmatrix} b_1+b_2 & 2a_1+2a_2 \\ 2a_1+2a_2 & b_1+b_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b_1 & 2a_1 \\ 2a_1 & b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_2 & 2a_2 \\ 2a_2 & b_2 \end{bmatrix} \\ &= T(a_1,b_1,c_1) + T(a_2,b_2,c_2); \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned} T\big(\alpha(a_1,b_1,c_1)\big) &= T(\alpha a_1, \alpha b_1, \alpha c_1) \\ &= \begin{bmatrix} \alpha b_1 & 2\alpha a_1 \\ 2\alpha a_1 & \alpha b_1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} b_1 & 2a_1 \\ 2a_1 & b_1 \end{bmatrix} = \alpha T(a_1,b_1,c_1). \end{aligned}$$

Logo, por i. e ii., T é um aplicação linear.

(b)

$$\begin{aligned}
\mathsf{Nuc}(T) &= \left\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\colon T(a,b,c)=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\right\}\\
&= \left\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\colon \begin{bmatrix}b&2a\\2a&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\right\}\\
&= \{(0,0,c)\colon c\in\mathbb{R}\} = \langle(0,0,1)\rangle
\end{aligned}$$

Base de $\mathsf{Nuc}(T)$: $\big((0,0,1)\big)$

8. Considere a aplicação linear $T\colon \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\right) = (2a+b, c+2d).$$

(a) Determine a matriz da aplicação T relativamente às bases canónicas.

(b) Determine $\mathsf{Im}(T)$ e a respetiva dimensão. Qual a dimensão de $\mathsf{Nuc}(T)$?

Resolução.

(a) Consideremos a base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$,

$$\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}.$$

Temos

$$T\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\right)=(2,0),\qquad T\left(\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\right)=(1,0),$$

$$T\left(\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\right)=(0,1),\qquad T\left(\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right)=(0,2).$$

Assim, a matriz da aplicação T relativamente às bases canónicas é a matriz

$$A_T=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&0&1&2\end{bmatrix}.$$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathsf{Im}(T)) &= \big\{(2a+b,c+2d)\in\mathbb{R}^3\colon a,b,c,d\in\mathbb{R}\big\}\\
&= \{a(2,0)+b(1,0)+c(0,1)+d(0,2)\colon a,b,c,d\in\mathbb{R}\}\\
&= \langle(2,0),(1,0),(0,1),(0,2)\rangle = \langle(2,0),(0,1)\rangle = \mathbb{R}^2.
\end{aligned}$$

Logo, $\mathsf{dim}\big(\mathsf{Im}(T)\big)=\mathsf{dim}(\mathbb{R}^2)=2$ e, usando o teorema das dimensões, obtemos que

$$\mathsf{dim}\big(\mathsf{Nuc}(T)\big)=\mathsf{dim}\big(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})\big)-\mathsf{dim}\big(\mathsf{Im}(T)\big)=4-2=2.$$

6. Valores e vetores próprios

1. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Verifique que $\lambda(A) = \{-1, 1, 3\}$ é o conjunto de valores próprios de A.

(b) Diga se A é uma matriz invertível. Em caso afirmativo, quais os valores próprios de A^{-1}?

<u>Resolução.</u>

(a) Os valores próprios de A são as soluções da equação, na variável λ,

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Temos

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3 & -\lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= (1-\lambda)[(2-\lambda)(-\lambda) - 3] = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = 0 &\iff (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = 0 \\ &\iff 1 - \lambda = 0 \ \vee \ \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \\ &\iff \lambda = 1 \ \vee \ \lambda = 3 \ \vee \ \lambda = -1. \end{aligned}$$

(b) Sim, A é uma matriz invertível uma vez que $0 \notin \lambda(A)$ e

$$\lambda(A^{-1}) = \left\{-1, 1, \frac{1}{3}\right\}.$$

2. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Verifique que $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$ é um vetor próprio de A correspondente ao valor próprio $\lambda = 1$. Calcule o subespaço próprio associado a este valor próprio.

(b) Calcule os restantes valores próprios da matriz A e conclua que a matriz não é invertível.

(c) Justifique que $\lambda = -3$ é um valor próprio da matriz $A^T - 3I$.

Resolução.

(a) Temos

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou seja, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$ é um vetor próprio de A correspondente ao valor próprio $\lambda = 1$. O subespaço próprio associado a este valor próprio, E_1, é o conjunto-solução do sistema $(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, com $\lambda = 1$ e $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$, ou seja, o sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Usando o método de eliminação de Gauss para a resolução do sistema, vem

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[l_3 \longleftrightarrow l_1]{} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[l_2 \longleftarrow l_2 - l_1]{} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Assim, $x_3 = 0$ e $x_1 = -x_2$, sendo x_2 uma variável livre. O conjunto-solução do sistema é, então, dado por

$$C.S. = \{(-x_2, x_2, 0) \colon x_2 \in \mathbb{R}\} = \{x_2(-1, 1, 0) \colon x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Logo, o subespaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = 1$ é $E_1 = \langle(-1, 1, 0)\rangle$.

(b) Os valores próprios de A são as soluções da equação, na variável λ,

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Temos

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= (1-\lambda)\big[(2-\lambda)(1-\lambda) - 2\big] = (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = 0 &\iff (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda) = 0 \\ &\iff 1 - \lambda = 0 \ \vee \ \lambda(\lambda - 3) = 0 \\ &\iff \lambda = 1 \ \vee \ \lambda = 0 \ \vee \ \lambda = 3. \end{aligned}$$

Dado que $0 \in \lambda(A)$, A não é uma matriz invertível.

(c) Sabemos que os valores próprios de uma matriz e da sua transposta são os mesmos e que se λ é valor próprio de A, então $\lambda - \alpha$ é valor próprio de $A - \alpha I$, para $\alpha \in \mathbb{R}$. De facto, $\det(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I)^T = \det(A^T - \lambda I)$ e se $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, então, $(A - \alpha I)\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} - \alpha\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} - \alpha\boldsymbol{x} = (\lambda - \alpha)\boldsymbol{x}$.

Assim, sendo $\lambda = 0$ valor próprio de A, então $\lambda - 3 = 0 - 3 = -3$ é valor próprio de $A - 3I$ e, portanto, também valor próprio de $A^T - 3I$.

3. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que o polinómio característico de A, na variável λ, é o polinómio

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda - 2$$

(b) Verifique que $\lambda = 2$ é um valor próprio de A e determine o subespaço próprio associado a este valor próprio.

(c) Diga se A é uma matriz invertível. Em caso afirmativo, qual a relação entre os valores próprios de A e os valores próprios de A^{-1}?

Resolução.

(a) Temos

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= (2-\lambda)[(2-\lambda)(-\lambda) - 1] \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 1) \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda - 2 = p(\lambda). \end{aligned}$$

(b) Como $p(2) = 0$, 2 é um valor próprio de A e o subespaço próprio associado a este valor próprio, E_2, é o conjunto-solução do sistema $(A - 2I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, com $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$. Usando o método de eliminação de Gauss para a resolução do sistema, vem

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[l_3 \longleftarrow l_3 - l_1]{} \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[l_3 \longleftarrow l_3 + 3l_2]{} \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Assim, $x_3 = 0$, $x_2 = 0$ e x_1 é uma variável livre. O conjunto-solução do sistema é, então, dado por

$$C.S. = \{(x_1, 0, 0) \colon x_1 \in \mathbb{R}\} = \{x_1(1, 0, 0) \colon x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Logo, o subespaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = 2$ é $E_2 = \langle(1, 0, 0)\rangle$.

(c) Uma vez que $p(0) = -2 \neq 0$, 0 não é um valor próprio de A e, sendo assim, a matriz é invertível. Se $\lambda \neq 0$ é valor próprio de A, então $\dfrac{1}{\lambda}$ é valor de A^{-1}.

4. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que
$$A + A^T = I_n.$$
Mostre que se $\boldsymbol{x}$ é um vetor próprio de A associado ao valor próprio λ, então $\boldsymbol{x}$ é também um vetor próprio de A^T associado ao valor próprio $1-\lambda$.

Resolução.

Seja $\boldsymbol{x}$ um vetor próprio de A associado ao valor próprio λ, ou seja,
$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}.$$
Então, dado que $A = I_n - A^T$, vem
$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} &\iff (I_n - A^T)\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \\ &\iff I_n\boldsymbol{x} - A^T\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \\ &\iff \boldsymbol{x} - A^T\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \\ &\iff A^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \lambda\boldsymbol{x} \\ &\iff A^T\boldsymbol{x} = (1-\lambda)\boldsymbol{x}. \end{aligned}$$
Ou seja, $\boldsymbol{x}$ é um vetor próprio de A^T associado ao valor próprio $1-\lambda$.

5. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que
$$A^3 = A^2.$$
Mostre que se λ é valor próprio de A, então $\lambda \in \{0, 1\}$.

Resolução.

Seja $\boldsymbol{x}$ um vetor próprio de A associado a um valor próprio λ, ou seja,
$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}.$$
Então, λ^2 é valor próprio de A^2 associado ao mesmo vetor próprio $\boldsymbol{x}$, uma vez que
$$A^2\boldsymbol{x} = AA\boldsymbol{x} = A\lambda\boldsymbol{x} = \lambda A\boldsymbol{x} = \lambda\lambda\boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x},$$
e λ^3 é valor próprio de A^3 associado também ao vetor próprio $\boldsymbol{x}$, pois, de forma análoga,
$$A^3\boldsymbol{x} = AA^2\boldsymbol{x} = \lambda^2 A\boldsymbol{x} = \lambda^3\boldsymbol{x}.$$
Dado que $A^3 = A^2$, temos $A^2\boldsymbol{x} = A^3\boldsymbol{x}$, ou seja,
$$\begin{aligned} \lambda^3\boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x} &\iff (\lambda^3 - \lambda^2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \\ &\iff \lambda^2(\lambda - 1)\boldsymbol{x} = 0 \\ &\iff \lambda = 0 \ \vee \ \lambda = 1, \qquad \text{uma vez que } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

6. Seja $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ uma base de $\mathbb{R}^n$ tal que $\boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{u}_j = 0$, para $i \neq j$, e $\boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{u}_i = 1$, para cada i. Para escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, defina a matriz quadrada

$$A = \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{u}_1^T + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 \boldsymbol{u}_2^T + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{u}_n \boldsymbol{u}_n^T.$$

Mostre que A é uma matriz simétrica e que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são valores próprios de A cujos vetores próprios associados são os vetores $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$, respetivamente.

Resolução. A matriz A é uma matriz simétrica pois

$$\begin{aligned} A^T &= \left(\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{u}_1^T + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 \boldsymbol{u}_2^T + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{u}_n \boldsymbol{u}_n^T\right)^T \\ &= \lambda_1 \left(\boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{u}_1^T\right)^T + \lambda_2 \left(\boldsymbol{u}_2 \boldsymbol{u}_2^T\right)^T + \ldots + \lambda_n \left(\boldsymbol{u}_n \boldsymbol{u}_n^T\right)^T \\ &= \lambda_1 \left(\boldsymbol{u}_1^T\right)^T \boldsymbol{u}_1^T + \lambda_2 \left(\boldsymbol{u}_2^T\right)^T \boldsymbol{u}_2^T + \ldots + \lambda_n \left(\boldsymbol{u}_n^T\right)^T \boldsymbol{u}_n^T \\ &= \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{u}_1^T + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 \boldsymbol{u}_2^T + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{u}_n \boldsymbol{u}_n^T \\ &= A. \end{aligned}$$

Temos também, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{u}_i &= \left(\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{u}_1^T + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 \boldsymbol{u}_2^T + \ldots + \lambda_i \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i^T + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{u}_n \boldsymbol{u}_n^T\right) \boldsymbol{u}_i \\ &= \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 \left(\boldsymbol{u}_1^T \boldsymbol{u}_i\right) + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 \left(\boldsymbol{u}_2^T \boldsymbol{u}_i\right) + \ldots + \lambda_i \boldsymbol{u}_i \left(\boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{u}_i\right) + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{u}_n \left(\boldsymbol{u}_n^T \boldsymbol{u}_i\right) \\ &= \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 \cdot 0 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 \cdot 0 + \ldots + \lambda_i \boldsymbol{u}_i \cdot 1 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{u}_n \cdot 0 \\ &= \lambda_i \boldsymbol{u}_i, \end{aligned}$$

uma vez que $\boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{u}_j = 0$, para $i \neq j$, e $\boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{u}_i = 1$. Temos, então, que λ_i é um valor próprio de A com vetor próprio $\boldsymbol{u}_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.