TP1 4ª aula

15 de março de 2021 15:00

29. Seja A um alfabeto.

(b) Mostre que, para quaisquer $r, r_1, r_2, s, s_1, s_2 \in ER(A)$, se tem:

iii. $r \leq s \Rightarrow r^* \leq s^*$;
iv. $(r^+s)^* \leq (r^*s^*)^*$;

iii) $r \leq s \Leftrightarrow \mathcal{L}(r) \subseteq \mathcal{L}(s) \Rightarrow \mathcal{L}(r)^n \subseteq \mathcal{L}(s)^n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$

$r^* \leq s^* \Leftrightarrow \mathcal{L}(r^*) \subseteq \mathcal{L}(s^*) \Leftrightarrow \mathcal{L}(r)^* \subseteq \mathcal{L}(s)^* \Leftrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{L}(r)^n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{L}(s)^n$

Logo se $r \leq s$, então $\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{L}(r)^n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{L}(s)^n$ que é equivalente a ter $r^* \leq s^*$, c.q.d.

iv) $r^* = r^+ + \varepsilon$ porque $\mathcal{L}(r)^* = \mathcal{L}(r)^+ \cup \{\varepsilon\}$. Então $r^+ \leq r^*$.
Por i) $s \leq s^*$. Então $r^+s \leq r^*s^*$ por vi) (a provar) e de seguida por iii) vem que $(r^+s)^* \leq (r^*s^*)^*$

vi) ...

(c) Verifique se, para quaisquer $r, s \in ER(A)$, $(r^+s)^* = (r^*s^*)^*$.

Depois de 29b iv) a questão que aqui se coloca é equivalente a questionar se $(r^*s^*)^* \leq (r^+s)^*$.

$\mathcal{L}(s) \subseteq \mathcal{L}(r^*)\mathcal{L}(s^*)$ porque $\varepsilon \in \mathcal{L}(r^*)$ e $\varepsilon \cdot \mathcal{L}(s^*) = \mathcal{L}(s^*)$ e $\mathcal{L}(s) \subseteq \mathcal{L}(s)^*$.

$\underbrace{\mathcal{L}(r)^+}_{\varepsilon\,?}\mathcal{L}(s)$ $\longrightarrow$ $\varepsilon \in \mathcal{L}(r)^+$ sse $\varepsilon \in \mathcal{L}(r)$.

Seja $A = \{a, b\}$. Se $r = b$, então $\mathcal{L}(r) = \{b\}$. Se $s = a$, então $\mathcal{L}(s) = \{a\}$. Neste caso

$a \in \mathcal{L}(r^*s^*)^*$ porque $a = (\varepsilon \cdot a)^1 \in \mathcal{L}(r^0 s^1)^1$.

$a \notin \mathcal{L}(r^+s)^* = \{\varepsilon, b^1a, b^1ab^1a, b^2ab^3aba, \ldots\}$

porque $a \neq \varepsilon$ e b não é prefixo de a. Logo $(r^*s^*)^* \nleq (r^+s)^*$.

30. Seja A um alfabeto e sejam $r, s \in ER(A)$. Mostre que:

(b) $r^* = (r^*)^*$;

Vamos mostrar que $r^* \leq (r^*)^*$ e que $(r^*)^* \leq r^*$.

Por 29b i) vem que $r^* \leq (r^*)^*$.

i) $r \leq r^*$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$r^* \leq (r^*)^*$

$$\boxed{\mathcal{L}((r^*)^*)} = (\mathcal{L}(r)^*)^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} (\mathcal{L}(r)^*)^n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \mathcal{L}(r)^k\right)^n =$$

$$= \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \mathcal{L}(r)^{kn} = \mathcal{L}(r)^0 \cup \mathcal{L}(r)^1 \cup \mathcal{L}(r)^2 \cup \ldots$$

$$= \bigcup_{m \in \mathbb{N}_0} \mathcal{L}(r)^m = \boxed{\mathcal{L}(r)^*}$$

Logo $(r^*)^* = r^*$ ✓.

(e) $(r^*s)^* = \varepsilon + (r+s)^*s$;

(f) $(rs^*)^* = \varepsilon + r(r+s)^*$;

e) Sugestão: 30 d)

30d) $(r+s)^* = (r^*s)^* r^*$

$$\varepsilon + (r+s)^* s = \varepsilon + (r^*s)^* r^* \cdot s$$
$$= \varepsilon + (r^*s)^+$$
$$= (r^*s)^*$$

o que completa a prova de e).

$e^* e = e^+$

$e^+ + \varepsilon = e^*$

f) ...

31. Seja $A = \{a, b, c\}$. Verifique se são válidas as seguintes igualdades entre expressões regulares:

(a) $a(b^* + a^*b) = a(b^* + a^+b)$,

$$a(b^* + a^* b) = a b^* + a a^* b = a b^* + a^+ b$$

$$a(b^* + a^+ b) = a b^* + a a^+ b \underset{(1)}{=} \underbrace{a b^* + ab}_{a b^*} + a a^+ b \underset{(2)}{=} a b^* + a^+ b$$

$a^+ b \rightarrow \boxed{ab}$, $a^2 b$, $a^3 b$, ...

$a a^+ b \rightarrow a^2 b$, $a^3 b$, ...

(1) porque $ab \leq ab^*$ e então $ab^* = ab^* + ab$

(2) porque $ab + aa^+b = a^+b$

logo $a(b^* + a^* b) = a(b^* + a^+ b)$.

32. Seja $A = \{a, b, c\}$. Considere a expressão regular $r = ((ab)^*(a + c))^* \in ER(A)$.
Diga qual das seguintes igualdades entre expressões regulares sobre o alfabeto A é verdadeira.

(a) $r = (ab + c)^*(a + c) + \varepsilon$.
(b) $r = (ab + a + c)^*(a + c) + \varepsilon$.
(c) $r = ab(ab + a + c)^* + \varepsilon$.
(d) $r = (ab + a + c)^*$.

$((ab)^* \ (a+c) \ )^*$

Palavras de $\mathcal{L}(r)$: c, a, $\cancel{ab}$, $\cancel{(ab)^2}$, aba, abc
$\varepsilon c \varepsilon c = c^2$, $a^2 = \varepsilon a \varepsilon a$,

~~a)~~ $a^2 \notin \mathcal{L}((ab+c)^*(a+c)+\varepsilon)$ e $a^2 \in \mathcal{L}(r)$

b) É a afirmação verdadeira.

~~c)~~ $a^2 \in \mathcal{L}(((ab)^*(a+c))^*$ e a^2 não tem prefixo ab, logo $a^2 \notin \mathcal{L}(ab(ab+a+c)^*+\varepsilon)$

~~d)~~ $ab \in \mathcal{L}(ab+a+c)^*$ e $ab \notin \mathcal{L}(((ab)^*(a+c))^*$

34. Sejam A um alfabeto e $r, s, t \in ER(A)$ tais que $s \leq t$ e $\varepsilon \leq r$. Verifique que r^*t é solução da equação $X = rX + s$.

r^*t é solução de $X = rX+s$ sse $r^*t = r.r^*t + s$.

$\left.\begin{array}{l}\varepsilon \leq r \\ r^*t \leq r^*t\end{array}\right\} 29b\,vi) \Rightarrow \varepsilon r^*t \leq r \cdot r^*t$

29b vi)
$\left.\begin{array}{l}r_1 \leq s_1 \\ r_2 \leq s_2\end{array}\right\} r_1 r_2 \leq s_1 s_2$

Por outro lado $r.r^*t \leq r.r^*t + s$

Por transitividade de $\leq$, resulta que $r^*t \leq r.r^*t + s$. (1)

$r \cdot r^*t + s = r^+t + s = r^*t + s \underset{29b\,vii)}{\leq} r^*t + t =$

$= r^*t + \varepsilon t = (\underbrace{r^* + \varepsilon}_{= r^* \text{ porque } \varepsilon \leq r^*})t = r^*t$

$r^* = r^+ + \varepsilon = r^+$
pq $\varepsilon \leq r \leq r^+$.

Logo, temos que $r.r^*t + s \leq r^*t$. (2)

Finalmente, por (1) e (2) conclui-se que $r^*t = r.r^*t + s$, como queríamos mostrar.

$X = rX + S \longrightarrow r^*s$ é solução mínima
Se $\varepsilon \leq r$ e $s \leq t \longrightarrow r^*t$ também é solução

37. Seja (t_1, t_2) uma solução do seguinte sistema de equações lineares à direita sobre expressões regulares:

$$\begin{cases} X_1 = bX_1 + aX_2 + \varepsilon \\ X_2 = aX_1 + bX_2 \end{cases}.$$

De entre as quatro opções abaixo, diga qual é uma afirmação verdadeira:

~~(a) O sistema tem mais do que uma solução e um resultado possível para t_2 é $t_2 = b^*a(b + ab^*a)^*$.~~
~~(b) A solução do sistema é única e $t_1 = (b + ba)^*(b + \varepsilon)^*$.~~
(c) A solução do sistema é $((b + ab^*a)^*, b^*a(b + ab^*a)^*)$.
~~(d) Uma solução do sistema é $((b + ab^*a)^*, b^*a)$.~~

NOTA: $\varepsilon \notin a$, $\varepsilon \notin b$ $(\{\varepsilon\} \not\subseteq \{a\}$ e $\{\varepsilon\} \not\subseteq \{b\})$
Logo a solução do sistema é única.

Resolvendo o sistema:

$\begin{cases} X_1 = bX_1 + aX_2 + \varepsilon \\ X_2 = aX_1 + bX_2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = b^*(aX_2 + \varepsilon) \\ X_2 = ab^*(aX_2 + \varepsilon) + bX_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_2 = ab^*a\,X_2 + ab^*\varepsilon + bX_2 \\ X_1 = b^*(a(ab^*a+b)^*ab^* + \varepsilon) \end{cases}$

$$\left| X_2 = ab^*(aX_2 + \varepsilon) + bX_2 \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \overline{X_2} = (ab^*a + b)X_2 + ab^* \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = b^*(a(ab^*a+b)^*ab^* + \varepsilon) \\ X_2 = (ab^*a + b)^* ab^* \end{array} \right.$$

- $\mathcal{L}(b^*a)$ é constituída por palavras de sufixo a e $\mathcal{L}(X_2) = \mathcal{L}(ab^*a+b)^* \mathcal{L}(ab^*)$ contém palavras que terminam com a letra b. Logo d) é falsa
- $\mathcal{L}((b+ba)^*(b+\varepsilon)^*)$ é constituída por palavras de sufixo b ou ε e $\mathcal{L}(X_1) = \mathcal{L}(b^*(a(ab^*a+b)^* ab^* + \varepsilon))$ contém palavras de sufixo a. Logo b) é falso.

Alternativa: Resolver o sistema, iniciando por: $\left\{ \overline{X_2} = b^*(aX_1) \right.$

...