Geometria

Resolução do primeiro teste 20/10/2017

1 $\mathcal{R} = \{O, (\vec{v_1}, \vec{v_2})\}$, $\mathcal{R}' = \{O', (\vec{v_1'}, \vec{v_2'})\}$

$O = (1,-1)_{\mathcal{R}'}$

$$\begin{cases} \vec{v_1'} = \vec{v_1} - \vec{v_2} \\ \vec{v_2'} = 2\vec{v_2} \end{cases}$$

a. Supondo que $(x_1\ x_2)$ são coordenadas em $\mathcal{R}$ e $(x_1'\ x_2')$ são coordenadas em $\mathcal{R}'$

Sendo $O' = (w_1, w_2)_{\mathcal{R}}$ temos

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

Como $O = (1,-1)_{\mathcal{R}'}$ e $O = (0,0)_{\mathcal{R}}$ vem

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Portanto, $O' = (-1, 3)_{\mathcal{R}}$

b.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

c. $M = (-1, 2)_{\mathcal{R}}$

Se $M = (w_1', w_2')_{\mathcal{R}'}$ temos

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1' \\ w_2' \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w_1' = 0 \\ -w_1' + 2w_2' = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_1' = 0 \\ w_2' = -1/2 \end{cases}$$

Portanto $M = (0, -1/2)_{\mathcal{R}'}$.

NOTA: Esta é apenas uma proposta de resolução.
Existem várias respostas válidas para cada pergunta.

2 $A = (1, 1) \quad B = (1, -1)$

a. Se $R = \{ O, (\vec{v_1}, \vec{v_2}) \}$ é o referencial ortonormado dado então $\vec{OA} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$ e $\vec{OB} = \vec{v_1} - \vec{v_2}$ logo a matriz de mudança de base é dada por: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix}$

O determinante desta matriz é $-2 < 0$, pelo que se pode concluir que o referencial $\{ O, (\vec{OA}, \vec{OB}) \}$ está orientado negativamente.

b. Como $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 1 - 1 = 0$ temos

$$\cos \measuredangle (\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{\|\vec{OA}\| \cdot \|\vec{OB}\|} = 0$$

$$\operatorname{sen} \measuredangle (\vec{OA}, \vec{OB}) = \varepsilon \sqrt{1 - c^2} = -\sqrt{1} = -1$$

($\varepsilon = -1$ pq o ref. é negativo)

c. Sim, o triângulo ΔAOB é rectângulo em O uma vez que os vectores $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$ são ortogonais.

3. $A = (1, 0, 1) \quad B = (2, 3, -1)$

vector director de r: $\vec{AB} = B - A = (1, 3, -2)$

equação vectorial de r: $r = (1, 0, 1) + \langle (1, 3, -2) \rangle$

equações paramétricas de r: $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

equações cartesianas $\begin{cases} x = 1 + y/3 \\ z = 1 - 2/3\, y \end{cases}$

4 $x - 2y + 3z + 1 = 0$

Equações parametricas: fazendo $y = \lambda$ e $z = \mu$

$$\begin{cases} x = 2\lambda - 3\mu - 1 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Equação vectorial: $\pi = (-1, 0, 0) + \langle (2, 1, 0), (-3, 0, 1) \rangle$