Determinantes

É possível associar a cada matriz quadrada um número real chamado *determinante* da matriz. Este número diz-nos se a matriz é ou não invertível, tal como a sua característica.

Vamos ver como usar determinantes para calcular a inversa de uma matriz e para resolver sistemas de equações lineares $n \times n$.

Determinantes de ordem 2

Considere-se o sistema de equações lineares $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases},$$

com matriz simples e vetor dos termos independentes

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema usando substituição inversa, obtém-se

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, \qquad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

As duas frações têm o mesmo denominador, $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.
Existe, portanto, uma forte relação entre este número e a solução do sistema sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Determinante de ordem 2

O número $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ é chamado o *determinante da matriz A* e denota-se por $\det(A)$ ou $|A|$. Temos, então,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Note-se que se este número for igual a zero, as expressões para x_1 e x_2 não têm significado - de facto, neste caso, o sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ não tem solução ou então tem um número infinito de soluções.

Observe-se também que os numeradores das expressões para x_1 e x_2 podem igualmente ser escritos como determinantes. Se, $|A| \neq 0$, temos

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{|A|}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{|A|}.$$

Este é um caso particular de um resultado referido como a *Regra de Cramer.*

Determinante de ordem 2

Exemplo

Use determinantes para encontrar a solução do sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 7 \\ 2x_1 - 2x_2 = -2 \end{cases} .$$

Resolução.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{7 \times (-2) - (-2) \times 4}{2 \times (-2) - 2 \times 4} = \frac{-6}{-12} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{2 \times (-2) - 2 \times 7}{2 \times (-2) - 2 \times 4} = \frac{-18}{-12} = \frac{3}{2}$$

Verifique, por substituição, que $x_1 = 1/2$ e $x_2 = 3/2$ é realmente uma solução do sistema.

Interpretação geométrica

O determinante de ordem 2 tem uma interpretação geométrica interessante.

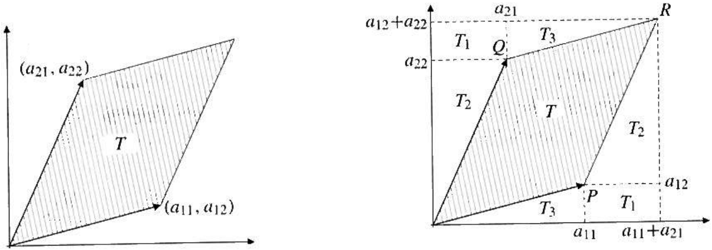

Figura: Área=$\pm \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Se considerarmos os vetores (a_{11}, a_{12}) e (a_{21}, a_{22}), o determinante de A (em valor absoluto) é igual à área do parelelogramo definido por estes dois vetores.

Note-se que $2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + T = (a_{11} + a_{21})(a_{12} + a_{22})$, onde $T_1 = a_{21}a_{12}$, $T_2 = \frac{1}{2}a_{21}a_{22}$ e $T_3 = \frac{1}{2}a_{11}a_{12}$. Assim, $T = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Determinante de ordem 3

Podemos obter uma regra semelhante para o caso de um sistema com três equações e três incógnitas.

Considere-se o sistema de equações lineares $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ com três equações e três incógnitas,

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{array} \right. ,$$

com matriz simples e vetor dos termos independentes

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o método de substituição inversa, com alguma manipulação algébrica algo pesada, este sistema pode ser resolvido para x_1, x_2 e x_3. A expressão que se obtém para x_1 é

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}a_{33} - b_1a_{32}a_{23} - b_2a_{12}a_{33} + b_2a_{32}a_{13} + b_3a_{12}a_{23} - b_3a_{22}a_{13}}{a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}}.$$

Determinante de ordem 3

As expressões para x_2 e x_3 partilham o mesmo denominador,

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}.$$

Este denominador comum é chamado o ***determinante da matriz A***, denotado por $\det(A)$ ou $|A|$.

O determinante de uma matriz quadrada A de ordem 3 é, então, definido como sendo

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22} \end{aligned}$$

Determinante de ordem 3. Expansão em cofatores

A soma dos seis termos anterior parece algo confusa, mas o método de expansão usando *cofatores* torna fácil escrever esses termos.

De facto, podemos escrever

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}),$$

o que é igual a

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ou seja, o cálculo de determinantes de ordem 3 pode ser reduzido ao cálculo de determinantes de ordem 2.

Repare-se que o elemento a_{11} é multiplicado pelo determinante da submatriz que se obtém de A eliminando a primeira linha e a primeira coluna.
De forma análoga, a_{12}, afetado de um sinal de menos, é multiplicado pelo determinante da submatriz obtida de A eliminando a primeira linha e a segunda coluna.
Finalmente, a_{13} é multiplicado pelo determinante obtido eliminando a primeira linha e a terceira coluna de A.

Exemplo

Use a expansão em cofatores para calcular

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Resolução.

$$\begin{aligned} |A| &= 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3(1 \times 3 - 2 \times 0) - 4(-1 \times 3 - 5 \times 0) + 2(-1 \times 2 - 5 \times 1) \\ &= 3 \times 3 - 4 \times (-3) + 2 \times (-7) = 7. \end{aligned}$$

Regra de Sarrus - cálculo de determinantes de ordem 3

Mnemónica para calcular o determinante de matrizes 3×3, apenas.

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \color{blue}{a_{11}} & \color{blue}{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \color{blue}{a_{21}} & \color{blue}{a_{22}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \color{blue}{a_{31}} & \color{blue}{a_{32}} \end{array}$$

O determinante é calculado da forma

$$|A| = \color{red}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}} \color{blue}{- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}}$$

Exemplo

Se usarmos a regra de Sarrus para calcular o determinante do exemplo anterior, temos

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 4 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 5 & 2 \end{array}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \times 1 \times 3 + 4 \times 0 \times 5 + 2 \times (-1) \times 2 - 5 \times 1 \times 2 - 2 \times 0 \times 3 - 3 \times (-1) \times 4$$
$$= 7.$$

Interpretação geométrica

Tal como o determinante de ordem 2, o determinante de ordem 3 tem uma interpretação geométrica que é mostrada na figura.

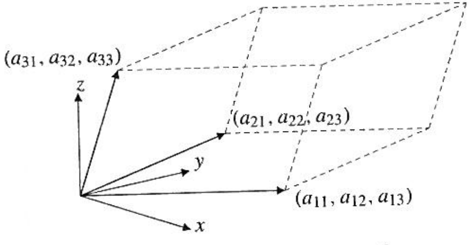

Figura: Volume=$\pm \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

O determinante (em valor absoluto) é igual ao volume do paralelepípedo gerado pelos vetores (a_{11}, a_{12}, a_{13}), (a_{21}, a_{22}, a_{23}) e (a_{31}, a_{32}, a_{33}).

Determinante de ordem n. Definição

O determinante de uma matriz de ordem n pode ser definido de várias maneiras. Optámos por fazê-lo através de uma fórmula recursiva.

Definição

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem n. O determinante de A denota-se por det(A) ou $|A|$ e é o número definido por

- *se $n = 1$, isto é, $A = [a_{11}]$, det(A)$= a_{11}$;*
- *se $n > 1$,*

$$\det(A) = a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}) + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det(M_{1n}),$$

onde, para cada $j = 1, \ldots, n$, M_{1j} denota a matriz de ordem $n-1$ obtida de A retirando-lhe a linha 1 e a coluna j.

Exemplos

1. *Se* $A = [2]$, *det* $(A) = 2$.

2. *O determinante da matriz* $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ *é*

$$\textit{det}(B) = 2 \times \textit{det}\,(2) - 1 \times \textit{det}\,(1) = 2 \times 2 - 1 \times 1 = 3.$$

3. *Para* $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, *temos*

$$\begin{aligned} \textit{det}(C) &= 2 \times \textit{det}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 1 \times \textit{det}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 0 \times \textit{det}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 2 \times (1 \times 1 - 1 \times 3) - 1 \times (0 \times 1 - 1 \times 1) \\ &= -3 \end{aligned}$$

Fórmula de Laplace

A definição de determinante de uma matriz $n \times n$ apresentada exprime o determinante como um desenvolvimento (soma de n parcelas) envolvendo os elementos da primeira linha da matriz.

O determinante pode ser obtido através de um desenvolvimento semelhante envolvendo os elementos de qualquer linha ou qualquer coluna da matriz.

Teorema (Fórmula de Laplace)

Seja $A = [a_{ij}]$ *uma matriz de ordem* n. *Então*

$$\mathit{det}(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \mathit{det}(M_{kj}), \qquad \textit{para } 1 \leq k \leq n$$

ou

$$\mathit{det}(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+\ell} a_{i\ell} \mathit{det}(M_{i\ell}), \qquad \textit{para } 1 \leq \ell \leq n,$$

onde M_{ij} *denota a matriz que se obtém de* A *retirando-lhe a linha* i *e a coluna* j.

Fórmula de Laplace

Exemplo

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

tem-se, fazendo o desenvolvimento segundo a 1ª coluna,

$$\begin{aligned} \mathit{det}(A) &= (-1)^{1+1} \times 1 \times \mathit{det}(M_{11}) + 0 + 0 + (-1)^{4+1} \times 1 \times \mathit{det}(M_{41}) \\ &= 1 \times \mathit{det}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} - 1 \times \mathit{det}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \ldots \\ &= 18 \end{aligned}$$

Propriedades do determinante

Propriedade 1 Se $D = (d_{ij})$ é uma matriz diagonal de ordem n, então

$$\det(D) = d_{11} \times d_{22} \times \ldots \times d_{nn}.$$

Consequentemente, $\det(I_n) = 1$.

Propriedade 2 Se $A = (a_{ij})$ é uma matriz triangular de ordem n, então

$$\det(A) = a_{11} \times a_{22} \times \ldots \times a_{nn}.$$

Propriedade 3 Se A é uma matriz de ordem n, então

$$\det(A^T) = \det(A).$$

Propriedades do determinante

Propriedade 4 Se a matriz A de ordem n tem uma linha ou uma coluna com elementos todos nulos, então

$$\text{det}(A) = 0.$$

Propriedade 5 Se a matriz B resulta da matriz A de ordem n por multiplicação dos elementos de uma linha ou de uma coluna de A por um número $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\text{det}(B) = \alpha \text{det}(A).$$

Propriedade 6 Se a matriz A é uma matriz de ordem n e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\text{det}(\alpha A) = \alpha^n \text{det}(A).$$

Propriedades do determinante

Propriedade 7 Se a matriz B resulta da matriz A de ordem n por troca de duas linhas ou de duas colunas, então

$$\det(B) = -\det(A).$$

Propriedade 8 Se a matriz A de ordem n tem duas linhas ou duas colunas iguais, então

$$\det(A) = 0.$$

Propriedade 9 Se a matriz B resulta da matriz A de ordem n adicionando a uma linha (coluna) um múltiplo de outra linha (coluna), então

$$\det(B) = \det(A).$$

Propriedades do determinante

Propriedade 10 Sejam A e B duas matrizes de ordem n. Então

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Consequentente:

- $\det(A^k) = \big(\det(A)\big)^k, \;\; k \in \mathbb{N}$;
- Uma matriz A é invertível se e só se $\det(A) \neq 0$ e

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Determinantes e operações elementares

O determinante de uma matriz pode ser calculado de forma eficiente usando o processo de eliminação de Gauss.

Já vimos que:

- [Oper. Elem. Tipo I] se forem trocadas duas linhas (ou duas colunas) de uma matriz, o valor do determinante muda de sinal (Propriedade 7).
- [Oper. Elem. Tipo II] se os elementos de uma linha (ou de uma coluna) de uma matriz forem multiplicados por um número $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$, o valor do determinante é multiplicado por α (Propriedade 5);
- [Oper. Elem. Tipo III] se sobre uma matriz for efetuada a operação elementar que consiste na substituição de uma linha (ou coluna) pela sua soma com outra linha (ou coluna) multiplicada por um número qualquer, o valor do determinante não se altera (Propriedade 9).

Determinantes e operações elementares

Assim, se sobre uma matriz A de ordem n efetuarmos uma sequência finita destas operações elementares podemos transformar a matriz A numa matriz triangular superior $U = [u_{ij}]$ e teremos

$$\text{det}(A) = (-1)^s \frac{1}{\alpha_1 \cdots \alpha_k} \det U$$

em que s é o número de troca de linhas efetuadas e $\alpha_1 \cdots \alpha_k$ são os números associados às operações elementares do tipo II (digamos k operações).

Assim, se se realizarem apenas operações elementares do tipo I e III, teremos

$$\det(A) = \pm \det(U) = \pm u_{11} \times u_{22} \times \cdots \times u_{nn},$$

ou seja, os determinante das matrizes A e U são iguais em valor absoluto.

Determinantes e operações elementares

Exemplo

$$
\begin{aligned}
det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} &= det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\
&= det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\
&= det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 9/2 \end{pmatrix} \\
&= 1 \times 1 \times 4 \times \frac{9}{2} \\
&= 18.
\end{aligned}
$$

Sistemas de equações lineares $n \times n$

Apesar de não ser eficiente para resolver resolver sistemas de equações lineares $n \times n$ com mais de três incógnitas, a regra de Cramer é muitas vezes usada em estudos teóricos.

Teorema (Regra de Cramer)

O sistema de equações lineares $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ com n equações e n incógnitas tem uma única solução se $\det(A) \neq 0$. A solução $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é dada por

$$x_i = \frac{\det(B_i)}{\det(A)}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

onde B_i é a matriz A com a coluna i substituída pelo vetor $\boldsymbol{b}$.

Regra de Cramer para sistemas 3×3

Exemplo

Vamos usar a regra de Cramer para resolver o sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ com

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como $\det(A) = -15 \neq 0$, a matriz A é invertível e o sistema tem uma única solução,

$$x_1 = \frac{\det(B_1)}{\det(A)}, \qquad x_2 = \frac{\det(B_2)}{\det(A)}, \qquad x_3 = \frac{\det(B_3)}{\det(A)},$$

onde

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, $x_1 = \dfrac{-5}{-15} = \dfrac{1}{3}$, $\quad x_2 = \dfrac{-15}{-15} = 1 \quad$ *e* $\quad x_3 = \dfrac{-20}{-15} = \dfrac{4}{3}$.

Exemplo

Podemos usar a regra de Cramer para calcular x_3 *para o sistema*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 12 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

O determinante da matriz simples A *é* 35 *e o determinante da matriz*

$$B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 12 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

é também 35. *Assim,*

$$x_3 = \frac{\det(B_3)}{\det(A)} = \frac{35}{35} = 1.$$

Matriz adjunta

Definição

Seja $A = [a_{ij}]$ *uma matriz de ordem* n *e, para cada* $i = 1, \ldots, n$, *e* $j = 1, \ldots, n$, *seja* M_{ij} *a matriz que se obtém de* A *retirando-lhe a linha* i *e a coluna* j.

- *Ao determinante* $\det(M_{ij})$ *chama-se menor do elemento* a_{ij} *de* A.
- *O complemento algébrico ou cofator do elemento* a_{ij} *de* A *denota-se por* C_{ij} *e é definido por*

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}),$$

ou seja, é igual ao menor do elemento a_{ij} *se* $(i + j)$ *é par e igual ao simétrico se* $(i + j)$ *é ímpar.*

Observaçao: Usando o desenvolvimento de Laplace segundo a primeira linha da matriz A, temos

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1n}C_{1n},$$

Exemplo

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$*, o complemento algébrico do elemento* $a_{23} = 6$ *é*

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \mathit{det}(M_{23}) = (-1)^{2+3} \mathit{det} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = -(8 - 14) = 6.$$

Matriz adjunta

Definição

Chama-se matriz adjunta de A, e denota-se por $\mathrm{adj}(A)$, à transposta da matriz de ordem n cujo elemento na posição (i,j) é o complemento algébrico C_{ij}, isto é,

$$\mathrm{adj}(A) = [C_{ij}]^T.$$

Exemplo

Calculemos a matriz adjunta da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

Matriz adjunta

Exemplo

Calculemos todos os complementos algébricos:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \textit{det} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 4;$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \textit{det} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0; \end{pmatrix} = 1;$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \textit{det} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = -1;$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \textit{det} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 0;$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \textit{det} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0;$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \textit{det} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = -9;$$

Exemplo

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \mathit{det} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = -1;$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \mathit{det} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2;$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \mathit{det} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -2.$$

Assim,

$$\mathit{adj(A)} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -9 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -9 & -2 \end{bmatrix}.$$

Forma geral para a inversa de uma matriz

O resultado seguinte estabelece uma relação entre cada matriz quadrada A e a sua adjunta e permite determinar, quando A é invertível, A^{-1} a partir de $\mathrm{adj}(A)$.

Teorema

Qualquer matriz quadrada A com det$(A) \neq 0$ é invertível e a sua inversa A^{-1} é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \, \mathrm{adj}(A).$$

Demonstração.

Seja A uma matriz de ordm $n \geq 2$. Mostrando que

$$A \, \mathrm{adj}(A) = \det(A) I_n.$$

o resultado segue de imediato.

De facto, temos

$$A\,\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det(A) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A)I_n$$

Elemento na posição (i,i): $a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} = \det(A)$

Elemento na posição $(i,j), j \neq i$: $a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn} = 0$,
uma vez que é igual ao determinante da matriz que se obtém de A substituindo a linha j por uma linha igual à linha i e, como tal, a matriz resultante tem duas linhas iguais (linha i e linha j) sendo o seu determinante nulo.

Forma geral para a inversa de uma matriz

Exemplo

Vejamos que a matriz do exemplo anterior é invertível e calculemos a sua inversa.

A matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ *é invertível uma vez que*

$$\mathit{det}(A) = 9 \neq 0,$$

tendo-se

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{adj}(A) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -9 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/9 & 0 & -1/9 \\ 1/9 & 0 & 2/9 \\ -1/9 & -1 & -2/9 \end{pmatrix}.$$

Exercício

Considere a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Mostre que C é invertível.

(b) Sem calcular $\operatorname{adj}(C)$ nem C^{-1}, determine o elemento na posição $(4,4)$ e o elemento na posição $(2,3)$ de cada uma dessas matrizes.

Solução.

(a) C é invertível uma vez que $\det(C) = -4 \neq 0$.

(b) $(\operatorname{adj}(C))_{4,4} = -2$; $(C^{-1})_{4,4} = \frac{1}{2}$; $(\operatorname{adj}(C))_{2,3} = -4$; $(C^{-1})_{2,3} = 1$;

Caracterização de matrizes invertíveis

Utilizando apenas a definição não é, em geral, imediato reconhecer, na prática, se uma dada matriz é ou não invertível. O seguinte resultado permite, em particular, decidir se uma dada matriz quadrada é ou não invertível recorrendo a outros conceitos.

Teorema

Seja A uma matriz quadrada real. As afirmações seguintes são equivalentes:

- A *é invertível.*
- $\det(A) \neq 0$.
- I_n *é a forma em escada reduzida de* A.
- *A característica de* A *é igual a* n.
- *O sistema* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *é possível e determinado.*
- *O sistema* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ *não tem soluções além da nula.*