Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Álgebra Linear LCC Teste 2 Duração: 1h45 [Teste modelo B]

Proposta de resolução

Grupo I

Em cada questão deste grupo deve ser assinalada apenas uma das opções de resposta. A uma resposta correta é atribuída uma cotação de 1.25 valores (apenas uma resposta está correta) e a uma resposta errada é atribuída uma cotação de -0.25 valores. A cotação mínima total deste grupo é de 0 valores.

1. Sejam V um espaço vetorial real de dimensão 3 e $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}$ e $\boldsymbol{v_3}$ três vetores de V linearmente independentes. Então

   - [ ] $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}\}$ é um conjunto linearmente dependente.
   - [ ] $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_1}+\boldsymbol{v_3}\}$ é um conjunto linearmente dependente.
   - [X] $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$ é um conjunto gerador de V.
   - [ ] $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, 2\boldsymbol{v_1}+\boldsymbol{v_3}\}$ é um conjunto linearmente independente.

2. Os seguintes vetores formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

   - [ ] $(1,1,-1),(2,3,4),(1,-2,3),(2,1,1)$.
   - [X] $(1,1,0),(0,2,3),(-2,0,1)$.
   - [ ] $(1,2,0),(0,1,-1)$.
   - [ ] $(-1,2,1),(3,2,2),(2,4,3)$.

3. Seja $S = \langle (1,1,0),(0,2,0),(4,3,0)\rangle$. Então

   - [ ] $\dim(S) = 3$.
   - [X] $(2,3,0) \in S$.
   - [ ] $(0,0,0) \notin S$.
   - [ ] $S = \mathbb{R}^3$.

4. Seja $T\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear tal que $\dim\big(\mathsf{Im}(T)\big) = 2$. Então

   - [ ] $\mathsf{Nuc}(T) = \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^4}\}$.
   - [ ] $(0,0,0,0) \notin \mathsf{Nuc}(T)$.
   - [X] $\mathsf{Nuc}(T)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^4$ com dimensão 2.
   - [ ] $\mathsf{Nuc}(T)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ com dimensão 1.

5. Seja G uma aplicação linear cuja representação matricial é $A_G = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$.

   - [ ] $G(x,y,z) = (x-y, y, -y+z)$, para qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
   - [X] Tem-se $H(1,1,1) = (-1,1,-3)$ para $H = G \circ G$.
   - [ ] $(0,0,3) \notin \mathsf{Im}(G)$.
   - [ ] $(1,1,1) \in \mathsf{Nuc}(G)$.

6. Seja A uma matriz de ordem 3 cujo polinómio característico é $p(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2-4)$. Então

- [ ] $\det(A - 2I_3) \neq 0$.
- [X] Os valores próprios da matriz $A^T + 2I_3$ são 0, 3 e 4.
- [ ] o sistema $(A - 2I_3)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ é possível e determinado.
- [ ] $A^T - I_3$ é invertível.

Grupo II

Neste grupo as respostas a todos as questões devem ser devidamente justificadas.

1. [1 valor] Considere, no espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, o conjunto de vetores

$$W = \{(1,0,2), (-1,2,-3), (1,4,k)\}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Determine os valores de k para os quais W é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Resolução.

Como $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, para que W seja uma base de $\mathbb{R}^3$, os vetores $(1,0,2), (-1,2,-3)$ e $(1,4,k)$ têm de ser linearmente independentes, ou seja, a característica da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & k \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\substack{l_2 \longleftarrow l_2 + l_1 \\ l_3 \longleftarrow l_3 - l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & k-2 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[l_3 \longleftarrow l_3 - 2l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

deve ser 3. Para tal terá de ser $k \neq 0$.

2. [2 valores] Determine uma base e a dimensão dos seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$:

(a) $U = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}$;

(b) $V = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 = x_2 = x_3\} \cap \{(x_1,0,x_1,0) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 \in \mathbb{R}\}$.

Resolução.

(a)

$$\begin{aligned} U &= \{(-x_2 + x_3 + x_4, x_2, x_3, x_4) : x_2, x_3 + x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(-x_2, x_2, 0, 0) + (x_3, 0, x_3, 0) + (x_4, 0, 0, x_4) : x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_2(-1,1,0,0) + x_3(1,0,1,0) + x_4(1,0,0,1) : x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (-1,1,0,0), (1,0,1,0), (1,0,0,1) \rangle \end{aligned}$$

Uma vez que a característica da matriz

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\substack{l_2 \longleftarrow l_2 + l_1 \\ l_3 \longleftarrow l_3 + l_1}]{} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[l_3 \longleftarrow l_3 - l_2]{} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

é igual a 3, os vetores $(-1,1,0,0)$, $(1,0,1,0)$ e $(1,0,0,1)$ são linearmente independentes e, sendo assim, $\dim(U) = 3$.

(b) Como

$$\begin{aligned} V &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \colon x_1=x_2=x_3\}\cap\{(x_1,0,x_1,0)\in\mathbb{R}^4\colon x_1\in\mathbb{R}\}\\ &= \{(x_1,x_1,x_1,x_4) : x_1,x_4\in\mathbb{R}\}\cap\{(x_1,0,x_1,0)\in\mathbb{R}^4\colon x_1\in\mathbb{R}\}\\ &= \{(0,0,0,0)\}\end{aligned}$$

temos que $\dim(V)=0$.

3. [3 valores] Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a aplicação linear definida por

$$T(x,y,z)=(x+2y-z,y+2z,2x+5y,x+3y+z).$$

(a) Determine a representação matricial de T relativamente às bases canónicas.
(b) Calcule, de duas formas distintas, $T(1,2,3)$.
(c) Determine $\mathsf{Nuc}(T)$ e uma sua base.
(d) Indique uma base para $\mathsf{Im}(T)$.

Resolução.

(a) Como $T(1,0,0)=(1,0,2,1)$, $T(0,1,0)=(2,1,5,3)$ e $T(0,0,1)=(-1,2,0,1)$, a matriz da aplicação linear relativamente às bases canónicas é

$$A_T=\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&2\\2&5&0\\1&3&1\end{bmatrix}.$$

(b) $T(1,2,3)=(1+2\times2-3,2+2\times3,2\times1+5\times2,1+3\times2+3)=(2,8,12,10)$

ou

$$T(1,2,3)=\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&2\\2&5&0\\1&3&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\8\\12\\10\end{bmatrix}.$$

(c) Da definição de $\mathsf{Nuc}(T)$,

$$\mathsf{Nuc}(T)=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon T(x,y,z)=(0,0,0,0)\big\},$$

obtemos o sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&0\\0&1&2&0\\2&5&0&0\\1&3&1&0\end{array}\right]\xleftrightarrow[\substack{l_3\longleftarrow l_3-2l_1\\ l_4\longleftarrow l_4-l_1}]{}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&0\\0&1&2&0\\0&1&2&0\\0&1&2&0\end{array}\right]\xleftrightarrow[\substack{l_3\longleftarrow l_3-l_2\\ l_4\longleftarrow l_4-l_2}]{}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&0\\0&1&2&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

Resolvendo o sistema, obtemos

$$\mathsf{Nuc}(T)=\{(5\alpha,-2\alpha,\alpha)\colon \alpha\in\mathbb{R}\}=\langle(5,-2,1)\rangle$$

e, portanto, $\dim(\mathsf{Nuc}(T))=1$, uma vez que $\big((5,-2,1)\big)$ é uma base de $\mathsf{Nuc}(T)$.

(d)

$$\begin{aligned}
\mathsf{Im}(T)) &= \big\{(x+2y-z, y+2z, 2x+5y, x+3y+z) \in \mathbb{R}^4 \colon\ x, y, z \in \mathbb{R}\big\} \\
&= \{x(1,0,2,1) + y(2,1,5,3) + z(-1,2,0,1) \colon\ x, y, z \in \mathbb{R}\} \\
&= \langle (1,0,2,1), (2,1,5,3), (-1,2,0,1) \rangle
\end{aligned}$$

Observe-se que os vetores $(1,0,2,1), (2,1,5,3)$ e $(-1,2,0,1)$ não são linearmente independentes e, portanto, não constituem uma base de $\mathsf{Im}(T))$.
De facto,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[l_3 \longleftarrow l_3 + l_1]{l_2 \longleftarrow l_2 - 2l_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[l_3 \longleftarrow l_3 - l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como a característica desta matriz é 2, temos apenas dois vetores linearmente independentes. Assim,

$$\mathsf{Im}(T)) = \langle (1,0,2,1), (2,1,5,3) \rangle$$

e $\dim\left(\mathsf{Im}(T))\right) = 2$.

4. [2 valores] Seja $G \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$G(2,1) = (1,-1,3) \quad \text{e} \quad G(1,1) = (1,1,2).$$

Determine $G(x,y)$ para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Resolução:

Dado que o conjunto $\{(2,1),(1,1)\}$ constitui uma base de $\mathbb{R}^2$, pois contém dois vetores linearmente independentes e $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, o sistema, nas variáveis α e β,

$$(x,y) = \alpha(2,1) + \beta(1,1)$$

tem solução única para qualquer vetor $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Temos, então,

$$\left[\begin{array}{cc:c} 2 & 1 & x \\ 1 & 1 & y \end{array}\right] \xleftrightarrow[l_2 \longleftrightarrow l_1]{} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & y \\ 2 & 1 & x \end{array}\right] \xleftrightarrow[l_2 \longleftarrow l_2 - 2l_1]{} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & y \\ 0 & -1 & x-2y \end{array}\right] \xleftrightarrow[l_3 \longleftarrow l_3 - l_2]{} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & 2y-x \end{array}\right].$$

A solução é dada por

$$\begin{cases} \alpha = y - \beta \\ \beta = 2y - x \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = x - y \\ \beta = 2y - x \end{cases}.$$

Assim, para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, a aplicação linear G fica definida por

$$\begin{aligned}
G(x,y) &= G\big((x-y)(2,1) + (2y-x)(1,1)\big) \\
&= (x-y)G(1,2) + (2y-x)G(1,1) \\
&= (x-y)\cdot(1,-1,3) + (2y-x)\cdot(1,1,2) \\
&= (x, 3x-2y, x+y).
\end{aligned}$$

5. [2.5 valores] Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Determine os valores próprios de A.

(b) Determine o subespaço próprio associado ao maior valor próprio de A.

Resolução.

(a) Os valores próprios de A são as soluções da equação $\det(A - \lambda I) = 0$. Temos

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)(2-\lambda)\big[(2-\lambda)(2-\lambda) - 4\big] \\ &= (2-\lambda)^2(\lambda^2 - 4\lambda) = \lambda(2-\lambda)^2(\lambda - 4). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = 0 &\iff \lambda(2-\lambda)^2(\lambda-4) = 0 \\ &\iff \lambda = 0 \ \vee \ 2 - \lambda = 0 \ \vee \ \lambda - 4 = 0 \\ &\iff \lambda = 0 \ \vee \ \lambda = 2 \ \vee \ \lambda = 4. \end{aligned}$$

(b) O subespaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = 4$, E_4, é o conjunto-solução do sistema $(A - 4I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, com $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T$. Usando o método de eliminação de Gauss para a resolução do sistema, vem

$$\left[\begin{array}{cccc:c} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[l_4 \longleftarrow l_4 + 2l_3]{} \left[\begin{array}{cccc:c} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Assim, x_4 é uma variável livre e, por substituição inversa, obtemos $x_3 = \frac{1}{2}x_4$, $x_2 = \frac{3}{4}x_4$ e $x_1 = 0$. O conjunto-solução do sistema é, então, dado por

$$\left\{ \left(0, \frac{3}{4}x_4, \frac{1}{2}x_4, x_4\right) : x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_4 \left(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 1\right) : x_3 \in \mathbb{R} \right\} = E_4.$$

Logo, o subespaço próprio associado ao maior valor próprio de A, $\lambda = 4$, é $E_4 = \langle (0, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 1) \rangle = \langle (0, 3, 2, 4) \rangle$.

6. [2 valores] Sejam A uma matriz real quadrada de ordem n tal que $A^2 = I_n$ e $\boldsymbol{u}$ um vetor não nulo que não é vetor próprio de A.

(a) Mostre que se λ é um valor próprio de A, então $\lambda \in \{-1, 1\}$.

(b) Mostre que os vetores $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + A\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} - A\boldsymbol{u}$ são vetores próprios de A e diga a que valores próprios estão associados.

Resolução.

(a) Seja λ um valor próprio de A. Então, por definição, $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, com $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$. Sendo λ um valor próprio de A, λ^2 é uma valor próprio de A^2, uma vez que

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \Longrightarrow AA\boldsymbol{x} = A\lambda\boldsymbol{x} \Longrightarrow A^2\boldsymbol{x} = \lambda A\boldsymbol{x} \Longrightarrow A^2\boldsymbol{x} = \lambda\lambda\boldsymbol{x} \Longrightarrow A^2\boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x}.$$

Como $A^2 = I_n$, segue que $\boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x}$, ou seja, $\lambda^2 = 1$, ou ainda, $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.

(b) Observe-se que $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ não são vetores nulos. De facto, se se tivesse, por exemplo, $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ obteríamos

$$\boldsymbol{u} + A\boldsymbol{u} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow A\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u},$$

ou seja, $\boldsymbol{u}$ seria um vetor próprio de A associado ao valor próprio -1, o que contraria a hipótese de $\boldsymbol{u}$ não ser um vetor próprio de A.

Analogamente, $\boldsymbol{w} = \mathbf{0}$ implicaria que $\boldsymbol{u}$ seria um vetor próprio de A associado ao valor próprio 1, o que não é possível, por hipótese.

Repare-se, agora, que

$$A\boldsymbol{v} = A(\boldsymbol{u} + A\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{u} + A^2\boldsymbol{u} = A\boldsymbol{u} + I_n\boldsymbol{u} = A\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$$

e

$$A\boldsymbol{w} = A(\boldsymbol{u} - A\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{u} - A^2\boldsymbol{u} = A\boldsymbol{u} - I_n\boldsymbol{u} = A\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} = -(\boldsymbol{u} - A\boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{w}.$$

Ou seja, $\boldsymbol{v}$ é um vetor próprio associado ao valor próprio 1 e $\boldsymbol{w}$ é um vetor próprio associado ao valor próprio -1.