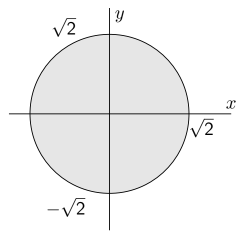
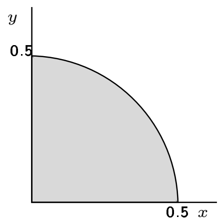
Universidade do Minho
Departamento de Matemática

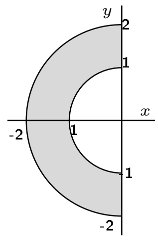
LCC **Análise**

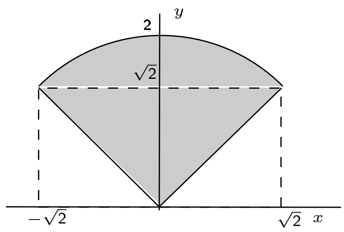
Ficha de exercícios 7 — 2019/2020

1. Para cada uma das figuras escreva, usando coordenadas polares, $\iint_D f\, dA$ como um integral iterado.

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

2. Seja D o disco unitário: $x^2 + y^2 \leq 1$. Calcule

$$\iint_D e^{x^2+y^2}\, dx\, dy$$

recorrendo a uma mudança para coordenadas polares.

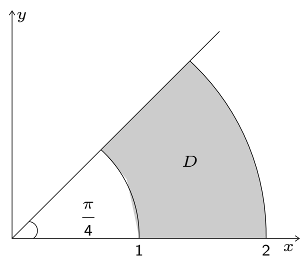
3. Esboce a região de integração de cada um dos seguintes integrais iterados.

(a) $\displaystyle\int_0^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(r,\theta)\, r\, d\theta\, dr;$ (b) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^1 f(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta;$ (c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_1^2 f(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta$

4. Usando coordenadas polares, calcule o integral da função $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

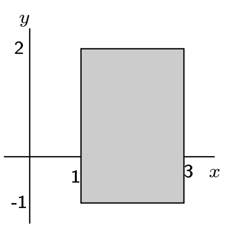
sobre a região indicada na figura.

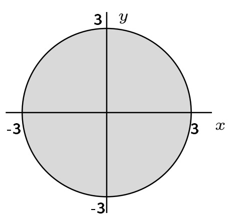


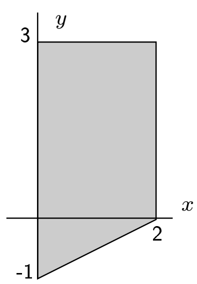
5. Converta os seguintes integrais para coordenadas polares e determine o seu valor.

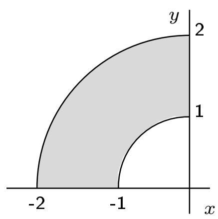
(a) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x\, dy\, dx;$ (b) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{6}} \int_{-x}^{x} dy\, dx;$ (c) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} dx\, dy\ .$

6. Cada uma das seguintes figuras representa um domínio de integração dupla. Para cada uma delas, indique o tipo de coordenadas (cartesianas ou polares) mais indicado a usar na integração. Escreva o respetivo integral para uma função arbitrária $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

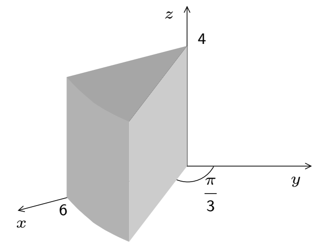
(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

7. Recorrendo a coordenadas cilíndricas, descreva a região indicada na figura.



8. Usando coordenadas cilíndricas, calcule $\iiint_U f\, dV$ onde $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

e a descrição de U em coordenadas cilíndricas, U^*, é $0 \leq r \leq 4$, $\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$ e $-1 \leq z \leq 1$.

9. Esboce a região de integração do seguinte integral triplo

$$\int_0^{\pi/2} \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^1 f(\rho, \phi, \theta)\rho^2 \operatorname{sen} \phi \;\; d\rho\, d\phi\, d\theta$$

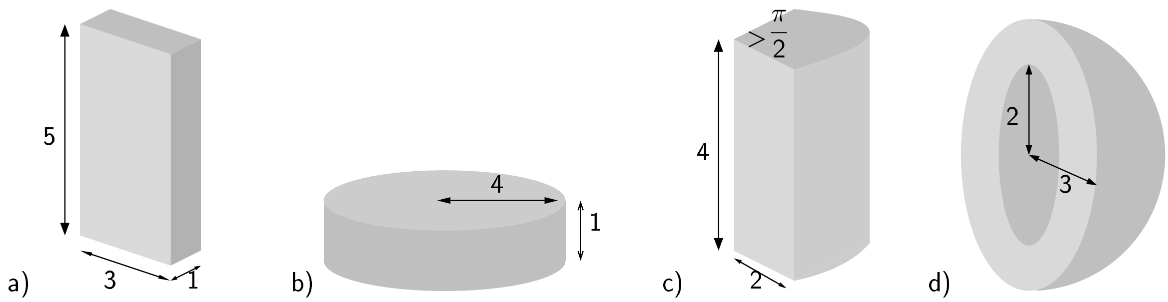
10. Usando coordenadas esféricas, calcule $\iiint_U f\, dV$ sendo $f : \mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

e U a região inferior da esfera de centro na origem e raio 5.

11. Calcule o volume de um cone de gelado compreendido entre a superfície definida por $z = \sqrt{8 - x^2 - y^2}$ e o cone definido por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

12. Para cada figura, indique qual o tipo de coordenada mais indicada para descrever a região U. Escreva um integral triplo iterado sobre U para uma função arbitrária f.



13. Recorrendo a uma mudança de variáveis adequada, calcule cada um dos seguintes integrais

(a) $\iint_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy$ onde D é o disco $x^2 + y^2 \leq 4$;

(b) $\iiint_B ze^{x^2+y^2}\, dx\, dy\, dz$ onde $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4,\ 2 \leq z \leq 3\}$;

(c) $\iiint_E \dfrac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{2 + (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}}$ onde E é a esfera unitária.