Cálculo de Programas Algebra of Programming

UNIVERSIDADE DO MINHO Lic. em Engenharia Informática (3º ano) Lic. Ciências da Computação (2º ano)

2022/23 - Ficha (Exercise sheet) nr. 3

1. Recorde a propriedade universal do combinador [f,g],

Recall the universal property of the [f,g] combinator,

$$k = [f, g] \equiv \begin{cases} k \cdot i_1 = f \\ k \cdot i_2 = g \end{cases}$$

da qual, como sabe, podem ser derivadas todas as outras que aparecem no respectivo grupo, no formulário.

Use esta lei para demonstrar a lei

from which, as you know, all the others appearing in the corresponding group of the reference sheet can be derived.

Use this property to prove the law

$$[i_1, i_2] = id$$

conhecida por reflexão-+.

known as +-reflexion.

2. Seja dada a função coswap = $[i_2, i_1]$. Faça um diagrama que explique o tipo de coswap e mostre, usando o cálculo de programas, que coswap · coswap = id.

Let function coswap = $[i_2, i_1]$ be given. Draw a diagram explaining the type of coswap and show, using the algebra of programming, that $coswap \cdot coswap = id$ holds.

3. Demonstre a igualdade

Prove the equality

$$[\underline{k},\underline{k}] = \underline{k} \tag{F1}$$

recorrendo à propriedade universal acima e a uma lei que qualquer função constante \underline{k} satisfaz. (Ver no formulário.)

using the universal property given above and a law that any constant function \underline{k} satisfies. (Check the reference sheet.)

4. Considere a função

Let function

$$\alpha = \left[\left\langle \underline{\text{FALSE}}, id \right\rangle, \left\langle \underline{\text{TRUE}}, id \right\rangle \right] \tag{F2}$$

Determine o tipo de α e mostre, usando a propriedade *universal*-+, que α se pode escrever em Haskell da forma seguinte:

be given. Infer the type of α and show, using the +-universal law, that α can be written in pointwise Haskell as follows:

$$\alpha$$
 (Left a) = (FALSE, a)
 α (Right a) = (TRUE, a)

5. Recorra às leis dos coprodutos para mostrar que a definição que conhece da função factorial,

Use the coproduct laws to show that the usual definition of the factorial function,

$$fac \ 0 = 1$$

 $fac \ (n+1) = (n+1) * fac \ n$

é equivalente à equação seguinte

is equivalent the following equation,

$$fac \cdot [\underline{0}, \mathsf{succ}] = [\underline{1}, \mathsf{mul} \cdot \langle \mathsf{succ}, fac \rangle]$$

onde

where

$$\operatorname{succ} n = n + 1$$
$$\operatorname{mul} (a, b) = a * b$$

6. O combinador funcional *soma* define-se por: $f+g=[i_1\cdot f,i_2\cdot g]$. Identifique no formulário os nomes das propriedades que se seguem e demonstre-as usando o cálculo de programas.

The sum of two functions f and g is defined by $f + g = [i_1 \cdot f, i_2 \cdot g]$. Check the names of the three laws that are given below in the reference sheet and prove them using the algebra of programming.

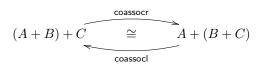
$$id + id = id (F3)$$

$$(f+g) \cdot i_1 = i_1 \cdot f \tag{F4}$$

$$(f+g) \cdot i_2 = i_2 \cdot g \tag{F5}$$

7. Considere o isomorfismo

Consider the isomorphism



onde coassocr = $[id + i_1, i_2 \cdot i_2]$. Calcule a sua conversa resolvendo em ordem a coassocl a equação,

where coassocr = $[id + i_1, i_2 \cdot i_2]$. Find its converse coassocl by solving the equation,

$$coassocl \cdot coassocr = id$$

isto é, a equação

that is, the equation

$$\operatorname{coassocl} \cdot \underbrace{[id+i_1\,,i_2\cdot i_2]}_{\operatorname{coassocr}} = id$$

Finalmente, exprima coassocl sob a forma de um programa em Haskell *não recorra* ao combinador "either".

Finally express coassocl in pointwise Haskell code not using the "either" combinator.

8. A *lei da troca* (identifique-a no formulário) permite-nos exprimir determinadas funções sob duas formas alternativas, conforme desenhado no respectivo diagrama:

The exchange law (check this in the reference sheet) allows one to express certain functions in two alternative forms, as pictured in the following diagram:

$$\left[\left\langle f,g\right\rangle ,\left\langle h,k\right\rangle \right]=\left\langle \left[f,h\right],\left[g,k\right]\right\rangle$$

Demonstre esta lei recorrendo às propriedades (e.g. universais) dos produtos e dos coprodutos. Prove this law using the (e.g. universal) properties of products and co-products.

9. Use a lei da troca (F6) para exprimir o isomorfismo

Use (F6) to express the isomorphism

$$\mathsf{undistl} = [i_1 \times id, i_2 \times id]$$

sob a forma de um 'split' de alternativas.

in the form of a 'split' of alternatives.