Formulário – Probabilidades e Aplicações – 2021/22

Espaço de resultados: Ω ; espaço de acontecimentos: $(\Omega, \mathcal{A})$, sendo $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de partes de Ω
(i.e., inclui $\emptyset$ e é fechada para a complementação e para a união numerável de acontecimentos)

Medida de probabilidade em $(\Omega, \mathcal{A})$:
(I) $P(A) \geq 0$ (*não negatividade*)
(II) $P(\Omega) = 1$
(III) $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots,$
para $A_1, A_2, \ldots$ disjuntos 2 a 2 (*aditividade*)

Fórmulas:
$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; $P(\emptyset) = 0$; $P(A) \leq 1$
$A \subset B \Longrightarrow P(B - A) = P(B) - P(A)$
$A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$ (*monotonia*)
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (*regra da adição*)

Probabilidade condicional: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Independência: $P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$

Regra da multiplicação: $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\ldots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_{n-1})$

Teorema da Probabilidade Total: $P(A) = \sum\limits_{j \geq 1} P(A \mid B_j)P(B_j)$, em que $\{B_j\}_{j \geq 1}$ é partição de Ω

Teorema de Bayes: $P(B_i \mid A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{j \geq 1} P(A|B_j)P(B_j)}$, com $\{B_j\}_{j \geq 1}$ partição de Ω

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

distribuição	*parâm.*	$P(X=i)$ ou $f(x)$	μ	σ^2	*moda*	$\chi_{\frac{1}{2}}$	β_1	β_2
$U\{1,2,\ldots,N\}$	$N \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{N},\quad i = 1,2,\ldots,N$	$\frac{N+1}{2}$	$\frac{N^2-1}{12}$	plurimodal	$\left[\frac{N+1}{2}\right]$	0	†
$HG(n,N,p)$	$N \in \mathbb{N}$, $n \in \{1,\ldots,N\}$, $0 < p < 1$	$\binom{Np}{i}\binom{N-Np}{n-i}/\binom{N}{n}$, $0 \leq i \leq n, i \leq Np$, $0 \leq n-i \leq N-Np$	np	*	...	...	...	...
$bi(n,p)$	$n \in \mathbb{N}$, $0 < p < 1$	$\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$, $i = 0,1,2,\ldots,n$	np	$np(1-p)$	$[p(n+1)]$ ‡	...	$\frac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}}$	††
$geom(p)$	$0 < p < 1$	$(1-p)^{i-1}p$, $i = 1,2,3,\ldots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	1	...	$\frac{2-p}{\sqrt{1-p}}$	$9 + \frac{p^2}{1-p}$
$Poisson(\lambda)$	$\lambda > 0$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$, $i = 0,1,2,3,\ldots$	λ	λ	$[\lambda]$ **	...	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$	$3 + \frac{1}{\lambda}$
$U[a,b]$	$a < b$	$\begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{c.contrário} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	plurimodal	$\frac{a+b}{2}$	0	$\frac{9}{5}$
$Exp(\lambda)$	$\lambda > 0$	$\begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	0	$\frac{\log 2}{\lambda}$	2	9
$N(\mu,\sigma)$	$\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	μ	σ^2	μ	μ	0	3

* $np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$ ** modas λ e $\lambda-1$, se $\lambda \in \mathbb{N}$ † $3 - \frac{6}{5}\frac{N^2+1}{N^2-1}$ †† $3 + \frac{1-6p(1-p)}{np(1-p)}$ ‡ bimodal se $(n+1)p \in \{1,\ldots,n\}$

`sample(x, size, replace = FALSE, prob = ...)` ; `dhyper, dbinom, dgeom, dpois; dunif, dexp, dnorm;`

`d,p,q,r` (prefixos para cada distribuição implementada) ; `dmultinom` ; `rmultinom`

`plot ; abline ; hist ; table ; cumsum ; colSums ; rowSums ;`

`apply(`*`matriz`*`, 2, `*`função`*`)` aplica a função especificada a uma das dimensões da matriz (1-linhas, 2-colunas).

```
nomedafunçao <- function(arg1, arg2, ...) {instruçao1; instruçao2; ...}
for (variável in sequência) {instruçao1; instruçao2; ...}
```

$\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i} \longrightarrow e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$, quando $n\to\infty$ e $p=\frac{\lambda}{n}\to 0$; Processo de Poisson: $N_t \frown Poisson(\lambda t)$, $N_0=0$

$\binom{Np}{i}\binom{N-np}{n-i}/\binom{N}{n} \longrightarrow \binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$, quando $N\to\infty$ (n e p fixos)

Distribuição multinomial $M(n;p_1,p_2,\ldots,p_{r-1})$, sendo $p_i>0$ e $p_1+p_2+\ldots+p_{r-1}<1$; fmp conjunta:

$$\boxed{P(X_1=n_1,\ldots,X_{r-1}=n_{r-1}) = \frac{n!}{n_1!\ldots n_{r-1}!n_r!}\,p_1^{n_1}p_2^{n_2}\ldots p_{r-1}^{n_{r-1}}q^{n_r},\ \text{com} \begin{cases} 0\le n_i\le n,\ 0\le n_1+\ldots+n_{r-1}\le n\\ n_r=n-(n_1+\ldots+n_{r-1})\\ q=1-(p_1+\ldots+p_{r-1})\end{cases}}$$

`dmultinom` ; `rmultinom` ; $X_i \frown bi(n_i,p_i)$, $i=1,2,\ldots,r-1$; $cov(X_i,X_j)=-np_ip_j$, para $i\neq j$

$$X:\ \begin{array}{l}\Omega \longrightarrow \mathbb{R}\\ \omega \longmapsto X(\omega)\end{array} \quad \begin{cases} \text{fmp} \quad p_i=P(X=x_i) & p_i\ge 0\ ,\ \sum p_i=1\\ \text{fdp} \quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \text{tal que}\ F(x)=\int_{-\infty}^x f(t)dt & f(x)\ge 0\ ,\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt=1\end{cases}$$

Função de distribuição (fd): $F(x)=P(X\le x)$, $x\in\mathbb{R}$; $P(a<X\le b)=F(b)-F(a)$;

caso discreto: $F(x)=\sum_{i:x_i\le x} p_i$; caso contínuo: $F(x)=\int_{-\infty}^x f(t)dt$

$E(h(X))=\sum h(x_i)p_i$, se $\sum |h(x_i)|p_i<+\infty$; $E(h(X))=\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)f(x)dx$, se $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(x)|f(x)dx<+\infty$

$\mu=E(X)$; $\sigma^2=var(X)=E\left((X-\mu)^2\right)=E(X^2)-\mu^2$; $\mu_r'=E(X^r)$; $\mu_r=E\left((X-\mu)^r\right)$

$\beta_1=E\left(\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right)$; $\beta_2=E\left(\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4\right)$; $\chi_p=\inf\{x:F(x)\ge p\}$; F contínua estrita/ cresc: $\Longrightarrow \chi_p=F^{-1}(p)$

$$(X,Y):\quad \begin{array}{l}\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2\\ \omega \longmapsto (X(\omega),Y(\omega))\end{array} \quad \begin{cases} \text{fmp conjunta} \quad p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j).\\ \qquad p_{ij}\ge 0 \quad \text{e} \quad \sum\limits_i\sum\limits_j p_{ij}=1\\ \text{fdp conjunta} \quad f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ \text{tal que}\ F(x,y)=\int_{-\infty}^x\left(\int_{-\infty}^y f(u,v)dv\right)du.\\ \qquad f(x,y)\ge 0 \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dudv=1\end{cases}$$

marginais (c. discreto): $p_{i\bullet}=P(X=x_i)=\sum_j p_{ij}$; $p_{\bullet j}=P(Y=y_j)=\sum_i p_{ij}$

marginais (c. contínuo): $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$; $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$

$E(h(X,Y))=\sum h(x_i,y_j)p_{ij}$, se ... ; $E(h(X,Y))=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y)f(x,y)dxdy$, se ...

$cov(X,Y)=E((X-\mu_X)(Y-\mu_Y))=E(XY)-\mu_X\mu_Y$; $\rho=\frac{cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$; $|\rho|\le 1$; $\rho=\pm 1$ sse $P(Y=aX+b)=1$

Propriedades: $E(a+bX)=a+bE(X)$; $var(a+bX)=b^2var(X)$; $E(X_1+...+X_n)=E(X_1)+...+E(X_n)$;

$X_1,\ldots,X_n$ (mutuamente) independentes $\Longrightarrow h_1(X_1),\ldots,h_n(X_n)$ independentes;

$X_1,...,X_n$ independentes $\Longrightarrow var(X_1+...+X_n)=var(X_1)+...+var(X_n)$, $cov(X_i,X_j)=0$ e $\rho=0$;

$var(X_1+...+X_n)=\sum\limits_i var(X_i)+2\sum\limits_{i<j} cov(X_i,X_j)$. X_i i.i.d. $\Longrightarrow E(\overline{X})=\mu$ e $var(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$.

$X_i \frown N(\mu_i,\sigma_i)$ independentes $\Longrightarrow a_1X_1+...+a_nX_n \frown N(\mu,\sigma)$, com $\mu=\sum a_i\mu_i$ e $\sigma^2=\sum a_i^2\sigma_i^2$

Se $\epsilon>0$ e h função não negativa, então $P(h(X)\ge\epsilon)\le E(h(X))/\epsilon$;

desig. Markov: $P(|X|\ge a)\le E(|X|^r)/a^r$, $a>0, r>0$; desig. Chebyshev: $P(|X-\mu|\ge t\sigma)\le\frac{1}{t^2}$, $t>0$

Teorema Limite Central: $\dfrac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\left(\text{ou } \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{d} Z \frown N(0,1)$ $\left[\text{de Moivre-Laplace: } \dfrac{S_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right]$

Lei dos grandes números: $\overline{X}\xrightarrow{P}\mu$ (ou seja, para qualquer $\varepsilon>0$, $P(|\overline{X}-\mu|<\epsilon)\xrightarrow[n\to\infty]{} 1$).

A convergência em probabilidade implica a convergência em lei.

$F(x;\theta)$; θ ($\theta\in\mathbb{R}$) − localização: $Y=X-\theta$ não depende de θ ; θ ($\theta>0$) − escala: $Y=\frac{X}{\theta}$ não depende de θ

Em famílias com f.d.p. $f(x,\theta)$: (i) localização ($\theta\in\mathbb{R}$): $f(x;\theta)=g(x-\theta)$;
(ii) escala ($\theta>0$): $f(x;\theta)=\frac{1}{\theta}\,g(\frac{x}{\theta})$;
(iii) $\theta=(\lambda,\delta)$, $\lambda\in\mathbb{R},\delta>0$ − localização-escala: $f(x;\lambda,\delta)=\frac{1}{\delta}\,g(\frac{x-\lambda}{\delta})$

Se X tem fd contínua F, então $Y = F(X) \frown U[0,1]$;   se $Y \frown U[0,1]$, então a v.a. $X = F^{-1}(Y)$ tem fd F

$L_X(t) = E(e^{-tX})$, se este valor médio existir numa viz. de $t = 0$; $L_{a+bX}(t) = e^{-at} L_X(bt)$

$L_{X_1+\ldots+X_n}(t) = \prod_{i=1}^n L_{X_i}(t)$, se $X_1, \ldots, X_n$ mutuamente indep. ; $E(X^r) = (-1)^r L_X^{(r)}(0)$

lei	$U\{1,2,\ldots,N\}$	$bi(n,p)$	$Geom(p)$	$Poisson(\lambda)$	$U[a,b]$	$Exp(\lambda)$	$N(\mu,\sigma)$
$L(t)$	$\frac{1-e^{-Nt}}{N(e^{-t}-1)}$	$(q+p\,e^{-t})^n$	$\frac{pe^{-t}}{1-qe^{-t}}$	$e^{-\lambda(1-e^{-t})}$	$\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t(b-a)}$	$\frac{\lambda}{\lambda+t}$	$e^{-\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$
domínio	$t \in \mathbb{R}$	$t \in \mathbb{R}$	$t > \log(q)$	$t \in \mathbb{R}$	$t \in \mathbb{R}$	$t > -\lambda$	$t \in \mathbb{R}$

$Nota : q = 1 - p$

distribuição	*parâm.*	$f(x)$	μ	σ^2	*moda*	$\chi_{\frac{1}{2}}$	β_1	β_2	$L(t)$
$Cauchy(\beta,\delta)$	$\beta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$	$\frac{1}{\delta\pi}\frac{1}{1+(\frac{x-\beta}{\delta})^2}$	$\nexists$	$\nexists$	β	β	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$
$Gama(\alpha,\lambda)$	$\alpha > 0$, $\lambda > 0$	$\frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} I_{]0,+\infty[}(x)$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	*	...	$\frac{2}{\sqrt{\alpha}}$	$3+\frac{6}{\alpha}$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda+t}\right)^\alpha$, $t > -\lambda$
$Laplace(\mu,\delta)$	$\mu \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$	$\frac{1}{2\delta}\,e^{-\frac{\lvert x-\mu\rvert}{\delta}}$	μ	$2\delta^2$	μ	μ	0	6	$\frac{e^{-\mu t}}{1-\delta^2 t^2}$, $\lvert t\rvert < \lambda$

* $\frac{\alpha-1}{\lambda}$, se $\alpha \geq 1$; c.c. é amodal $Gama(1,\lambda) \equiv Exp(\lambda)$

Função *Gama* de Euler: $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \alpha > 0$; $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha)$; $\Gamma(n+1) = n!$; $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$; `gamma`

Passeio aleatório (simétrico):
$S_0 = 0$ (fortuna inicial), S_n (fortuna ao fim do n-ésimo passo) $= X_1 + \ldots + X_n$, X_i i.i.d. $U\{-1,1\}$

Processo de Poisson de taxa (ou intensidade) λ:

Processo $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ de chegadas ao longo do tempo ($t > 0$), com incrementos independentes e estacionários, tal que $N(0) = 0$ e $N(t)$ representa o nº de chegadas no intervalo $]0,t]$; $N(t) \frown Poisson(\lambda t)$; os intervalos de tempo até à 1ª chegada e entre chegadas consecutivas são v.a. i.i.d. $Exp(\lambda)$

$\sum_{j=1}^{n} j = 1+2+3+\ldots+n = n\frac{n+1}{2}$; $\sum_{j=0}^{n} x^j = 1+x+x^2+\ldots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$; $\sum_{j=0}^{+\infty} x^j = \frac{1}{1-x}$, se $|x| < 1$;

$e^x = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!}\, x^j,\ x \in \mathbb{R}$; $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x,\ x \in \mathbb{R}$; $(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\, a^j\, b^{n-j}$; Stirling: $n! \sim \sqrt{2\pi}\, n^{n+1}\, e^{-n}$

$\sum_{j=1}^{n} j^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $f(x) = \sum a_n\, x^n, |x| < r \implies f'(x) = \sum n\, a_n\, x^{n-1},\ |x| < r.$

$\int(f'g) = fg - \int(fg')$; $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty$ sse $\alpha > 1$; $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx < +\infty$ sse $\alpha > 1$