# Cap 2 – Funções vetoriais

# Funções vetoriais de uma variável real

# Motivação

- As funções vetoriais são indicadas para descrever
  - curvas e superfícies no espaço
  - o movimento de corpos no espaço

- Até agora
  - $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

  Funções cujos valores são escalares.

- Neste capítulo
  - $\mathbf{r} : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

  Funções cujos valores são pontos em $\mathbb{R}^n$ (vetores).

# Definição

- Chamamos função vetorial de variável real a dois subconjuntos não vazios, $D \subset \mathbb{R}$ e $E \subset \mathbb{R}^n$, munidos de uma lei de formação ou regra de correspondência, $\mathbf{r}$, que a cada elemento $t$ de $D$ associa um único elemento $\mathbf{r}(t)$ de $E$.

- Para cada $t \in D \subset \mathbb{R}$, $\mathbf{r}(t)$ é um vetor de $\mathbb{R}^n$ em que cada coordenada depende de $t$, ou seja,

$$\mathbf{r}(t) = \big(f_1(t), \ldots, f_n(t)\big)$$

  onde $f_i$ é uma função real de domínio $D$ chamada i-ésima função componente de $\mathbf{r}$.

# Notação

- $\mathbf{r} : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

- $\mathbf{r}(t)$ vetor de $\mathbb{R}^n$

- as funções vetoriais também se denotam por $\overrightarrow{\mathbf{r}}$

- Usamos a letra $t$ para denotar a variável independente porque em muitas aplicações representa o tempo.

# Limite e continuidade

Seja $\mathbf{r} : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função vetorial.

- Existe o limite da função vetorial $\mathbf{r}$ quando $t$ tende para $a$ se e só se existe o limite de cada uma das funções componentes de $\mathbf{r}$ quando $t$ tende para $a$ e escrevemos

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \left( \lim_{t \to a} f_1(t), \ldots, \lim_{t \to a} f_n(t) \right).$$

  O cálculo de limites obedece às mesmas regras que temos para funções escalares.

- A função vetorial $\mathbf{r}$ é contínua em $a \in D$ se e só se cada uma das funções componentes de $\mathbf{r}$ for contínua em $a$, ou seja, se e só se

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a).$$

# Exemplo

- Seja $\mathbf{r}(t) = 3t^2\,\vec{i} + 2t^3\,\vec{j} + (t-2)\,\vec{k}$.

  Temos

  - $\mathbf{r} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{r}(t) = (3t^2, 2t^3, t-2)$;
  - As funções componentes de $\mathbf{r}$ são

    $$f_1(t) = 3t^2, \quad f_2(t) = 2t^3, \quad f_3(t) = t - 2;$$

  - Por exemplo,

    $$\begin{aligned} \mathbf{r}(0) &= (0,0,-2) \\ \mathbf{r}(1) &= (3,2,-1) \\ \mathbf{r}(2) &= (12,16,0) \end{aligned}$$

  - $$\lim_{t\to 0} \mathbf{r}(t) = \left(\lim_{t\to 0} 3t^2, \lim_{t\to 0} 2t^3, \lim_{t\to 0}(t-2)\right) = (0,0,-2).$$

# Exemplo

- Seja $\mathbf{r}(t) = \left(t^3, \ln(3-t), \sqrt{t}\right)$.

  Temos

  - $\mathbf{r} : [0,3[ \longrightarrow \mathbb{R}^3$;
  - As funções componentes de $\mathbf{r}$ são

  $$f_1(t) = t^3, \quad f_2(t) = \ln(3-t), \quad f_3(t) = \sqrt{t};$$

  - Por exemplo,

  $$\begin{aligned} \mathbf{r}(0) &= (0, \ln 3, 0) \\ \mathbf{r}(1) &= (1, \ln 2, 1) \\ \mathbf{r}(2) &= (8, 0, \sqrt{2}) \end{aligned}$$

  -

  $$\lim_{t \to 3^-} \mathbf{r}(t) = \left( \lim_{t \to 3^-} t^3, \lim_{t \to 3^-} \ln(3-t), \lim_{t \to 3^-} \sqrt{t} \right) = (27, -\infty, \sqrt{3}).$$

# Curvas em $\mathbb{R}^2$

Há uma ligação estreita entre funções vetoriais contínuas e curvas.

- Uma curva $\mathcal{C}$ no plano é um conjunto de pontos da forma

$$\big(f(t),\, g(t)\big)$$

  onde as funções $f$ e $g$ são contínuas num intervalo $I$.

- As equações

$$x = f(t), \quad y = g(t), \qquad t \in I$$

  são as equações paramétricas da curva $\mathcal{C}$ e $t$ é chamado o parâmetro.

- Usaremos, indistintamente, as expressões *curva*, *gráfico de uma curva* ou *traço de uma curva*.

# Exemplo

Descreva a curva

$$\mathcal{C} = \{(\cos t, \operatorname{sen} t) \,:\, 0 \leq t \leq 2\pi\}.$$

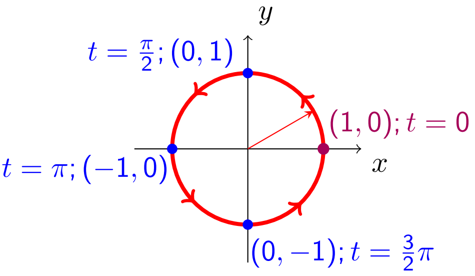
- As equações paramétricas de $\mathcal{C}$ são

$$x = \cos t, \qquad y = \operatorname{sen} t, \qquad \text{onde} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

- Temos

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$

Assim, a curva $\mathcal{C}$ é a circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1, percorrida uma única vez a partir do ponto $(0,0)$, no sentido direto (ou anti-horário).

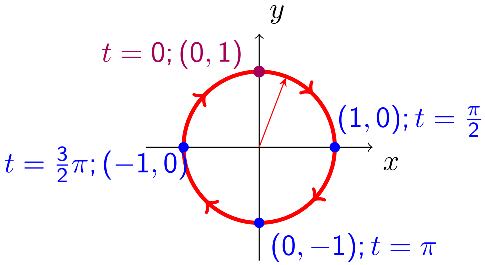


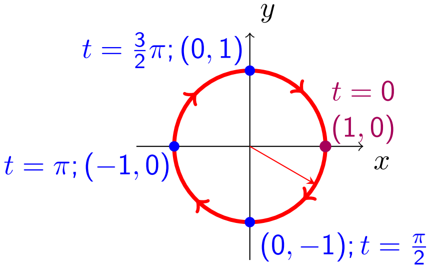
# Observação

As equações paramétricas de uma curva não são únicas.

Por exemplo, a curva $\mathcal{C} = \{(\cos t, \operatorname{sen} t) \, : \, 0 \leq t \leq 2\pi\}$ também pode ser dada por

$$\mathcal{C} = \{(\operatorname{sen} t, \cos t) \, : \, 0 \leq t \leq 2\pi\} \text{ ou } \mathcal{C} = \{(\cos t, -\operatorname{sen} t) \, : \, 0 \leq t \leq 2\pi\}$$



# Exemplo

Descreva a curva

$$\mathcal{C} = \{(2\cos t, \operatorname{sen} t) \,:\, 0 \le t \le 2\pi\}.$$

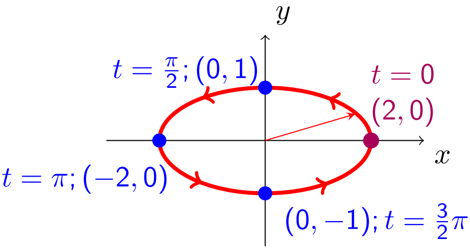
- As equações paramétricas de $\mathcal{C}$ são

$$x = 2\cos t, \qquad y = \operatorname{sen} t, \qquad \text{onde} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

- Temos

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$

A curva $\mathcal{C}$ é a elipse de equação $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, percorrida uma única vez a partir do ponto $(2, 0)$, no sentido direto.



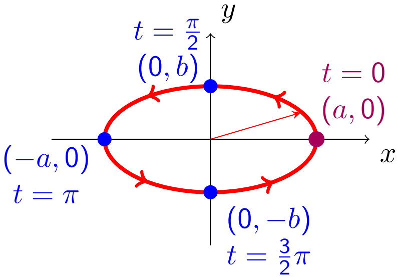
# Exemplo

A função $\mathbf{r} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t, b \operatorname{sen} t),$$

onde $a, b > 0$, parametriza uma elipse de equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

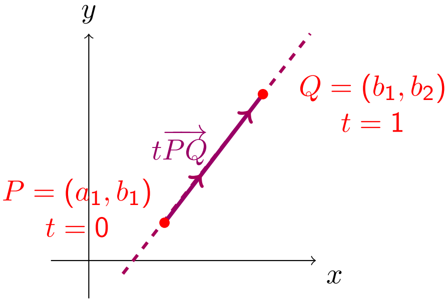
Se $a = b$, temos a curva de equação $x^2 + y^2 = a^2$, ou seja, a circunferência de centro $(0, 0)$ e raio $a$.



# Exemplo

O segmento de reta em $\mathbb{R}^2$ do ponto $P = (a_1, b_1)$ ao ponto $Q = (a_2, b_2)$ é a imagem da função

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= P + t\overrightarrow{PQ} \\ &= (a_1, b_1) + t(a_2 - a_1, b_2 - b_1), \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$



# Curvas em $\mathbb{R}^3$

- Uma curva $\mathcal{C}$ no espaço é um conjunto de pontos da forma

$$\big(f(t),\, g(t),\, h(t)\big)$$

onde as funções $f$, $g$ e $h$ são contínuas num intervalo $I$.

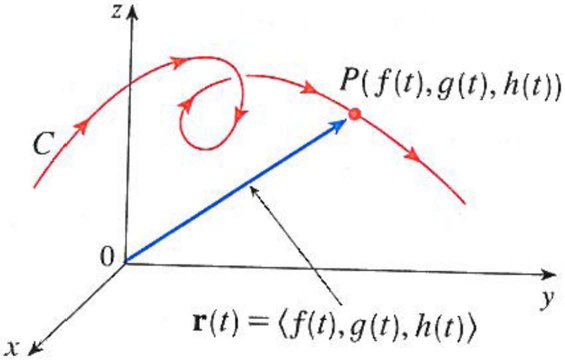
- As equações

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t), \qquad t \in I$$

são as equações paramétricas da curva $\mathcal{C}$.

# Funções vetoriais contínuas e curvas no espaço

Estamos particularmente interessados em funções vetoriais contínuas cujos valores são vetores em $\mathbb{R}^3$.




Podemos pensar na curva como sendo desenhada por uma partícula em movimento cuja posição no tempo $t$ é dada por $\big(f(t), g(t), h(t)\big)$, ou seja, a curva desenhada pela extremidade do vetor $\mathbf{r}(t)$ em movimento.

# Exemplo

Descreva a curva definida pela função vetorial

$$\mathbf{r}(t) = (1 + t, 2 + 5t, -1 + 6t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

As equações paramétricas para esta curva são

$$x = 1 + t, \quad y = 2 + 5t, \quad z = -1 + 6t.$$

Escrevendo

$$\mathbf{r}(t) = (1, 2, -1) + t(1, 5, 6), \quad t \in \mathbb{R},$$

reconhecemos serem as equações paramétricas da reta que passa por $(1, 2, -1)$ e que é paralela ao vetor $(1, 5, 6)$.

# Exemplo

Descreva a curva definida pela função vetorial

$$\mathbf{r}(t) = (2\cos t, \operatorname{sen} t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

As equações paramétricas para esta curva são

$$x = 2\cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad z = t.$$

Uma vez que

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1,$$

a curva encontra-se numa superfície cilíndrica elíptica. Dado que $z = t$, obtemos uma curva em espiral à volta da superfície cilíndrica à medida que $t$ aumenta.

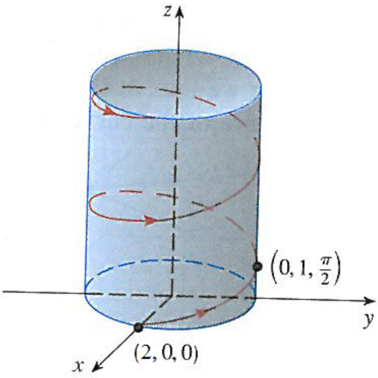



Figura 1: Hélice

# Exemplo

A curva definida pela função vetorial

$$\mathbf{r}(t) = \big((4 + \text{sen}\,20t)\cos t,\ (4 + \text{sen}\,20t)\,\text{sen}\,t,\ \cos 20t\big), \quad t \in \mathbb{R},$$

é chamada uma espiral toroidal uma vez que se encontra num toro.

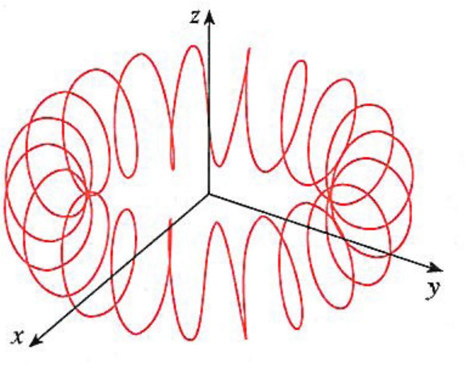



Figura 2: Espiral toroidal

# Caminhos e curvas em $\mathbb{R}^n$

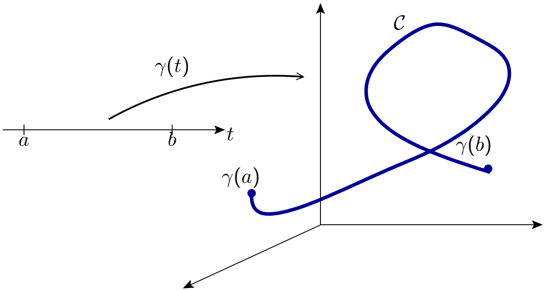
- Um caminho em $\mathbb{R}^n$ é uma função vetorial de uma variável real, contínua, cujo domínio é um intervalo, isto é,

$$\mathbf{v} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

- O conjunto $\mathcal{C}$ de pontos $\mathbf{v}(t), t \in [a, b]$, diz-se uma curva em $\mathbb{R}^n$.
- Os pontos $\mathbf{v}(a)$ e $\mathbf{v}(b)$ são os extremos da curva $\mathcal{C}$.
- Se $\mathbf{v}(a) = \mathbf{v}(b)$ diz-se que $\mathcal{C}$ é uma curva fechada.
- A curva $\mathcal{C}$ diz-se uma curva simples se $\mathcal{C}$ não se interseta em nenhum ponto.

# Observação

- Diz-se que o caminho $\mathbf{v}$ parametriza a curva $\mathcal{C}$.




- A curva $\mathcal{C}$ representada é uma curva que não é fechada e não é simples.

- Se $n = 2$ diz-se que $\mathbf{v}$ é um caminho no plano e escreve-se

$$\mathbf{v}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$$

- Se $n = 3$ diz-se que $\mathbf{v}$ é um caminho no espaço e escreve-se

$$\mathbf{v}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$$

- Se $\mathbf{v}$ for um caminho em $\mathbb{R}^n$ escreve-se

$$\mathbf{v}(t) = \big(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\big).$$

# Derivada de uma função vetorial

A derivada $\mathbf{r}'$ de uma função vetorial $\mathbf{r}$ é definida por

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h},$$

se este limite existe.

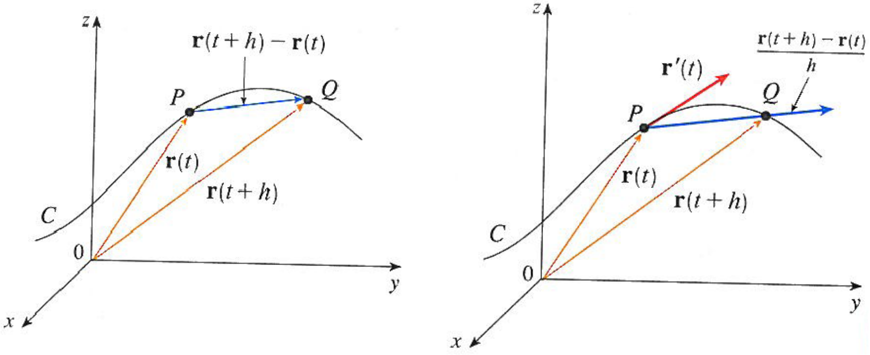



Figura 3: Significado geométrico da derivada

# Significado geométrico

Se $P$ e $Q$ têm vetores posição $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}(t+h)$, então $\overrightarrow{PQ}$ representa o vetor $\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)$, que pode, portanto, ser visto como um vetor secante.

Se $h > 0$, o múltiplo escalar $\dfrac{1}{h}\big[\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)\big]$ tem a mesma direção de $\overrightarrow{PQ}$.

Quando $h \to 0$, este vetor parece aproximar-se de um vetor que fica na reta tangente em $P$.

Por esta razão, $\mathbf{r}'(t)$ é chamado o vetor tangente à curva definida por $\mathbf{r}$ no ponto $P$, desde que $\mathbf{r}'(t)$ exista e que $\mathbf{r}'(t) \neq 0$.

Se $\mathbf{r}(t) = \big(f(t),\, g(t),\, h(t)\big)$, onde $f$, $g$ e $h$ são funções diferenciáveis, então, usando a definição de limite de uma função vetorial, facilmente se prova que

$$\mathbf{r}'(t) = \big(f'(t),\, g'(t),\, h'(t)\big).$$

# Derivada de uma função vetorial

Seja $\mathbf{r} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, onde $I$ é um intervalo aberto e $a \in I$.

- A função vetorial $\mathbf{r}$ é derivável em $a$ se e só se cada uma das funções componentes de $\mathbf{r}$ for derivável em $a$.

- Tem-se
$$\mathbf{r}'(a) = \big(f_1'(a), \ldots, f_n'(a)\big)$$

- O vetor $\mathbf{r}'(a)$ ou $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}(a)$ é chamado derivada de $\mathbf{r}$ em $a$ ou, vetor tangente de $\mathbf{r}$ em $a$, ou ainda, vetor velocidade de $\mathbf{r}$ em $a$, desde que não nulo.

Se $\mathbf{r}$ e $\mathbf{u}$ são funções vetoriais deriváveis, $\beta$ é uma função escalar de uma variável e $\alpha$ é um número real, então

- $[\mathbf{r}(t) + \mathbf{u}(t)]' = \mathbf{r}'(t) + \mathbf{u}'(t)$
- $[\alpha\, \mathbf{r}(t)]' = \alpha\, \mathbf{r}'(t)$
- $[\beta(t)\, \mathbf{r}(t)]' = \beta'(t)\mathbf{r}(t) + \beta(t)\mathbf{r}'(t)$
- $[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)]' = \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{u}(t) + \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}'(t)$,

  onde $\cdot$ representa o produto escalar de vetores.

### Exercício

*Demonstre estes resultados no caso de funções deriváveis* $\mathbf{r}, \mathbf{u} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *e* $\beta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *com* $\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$, $\mathbf{u}(t) = (l(t), m(t), n(t))$ *e* $\beta = \beta(t)$, *para um dado intervalo aberto* $I$.

# Exemplo

- Considere-se função vetorial $\mathbf{r} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t).$$

  - Para cada $t \in [0, 2\pi]$ temos

$$\mathbf{r}'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$$

- Para a função vetorial $\mathbf{r} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbf{r}(t) = (1 + t, 2 + 5t, -1 + 6t),$$

temos

$$\mathbf{r}'(t) = (1, 5, 6).$$

## Exercício

*Para a curva dada por* $\mathbf{r}(t) = (\sqrt{t}, 2-t)$, $t \geq 0$,

a) *determine* $\mathbf{r}'(t)$;

b) *esboce o vetor posição* $\mathbf{r}(1)$ *e o vetor tangente* $\mathbf{r}'(1)$.

## Resolução.

a) $\mathbf{r}'(t) = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{t}}, -1\right)$;

b) $\mathbf{r}(1) = (1,1)$;
$\mathbf{r}'(t) = (1/2, -1)$.

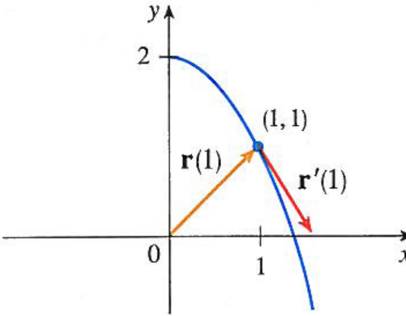
Equações paramétricas da curva:

$$x = \sqrt{t}, \quad y = 2-t, \qquad t \geq 0$$

Temos, portanto,

$$y = 2 - x^2, \qquad t \geq 0.$$

Ou seja, a curva descrita por $\mathbf{r}$ é o ramo da parábola $y = 2 - x^2$ em que $x \geq 0$.



## Exercício

*Considere a função vetorial* $\mathbf{r}(t) = (1 + t^3, te^{-t}, \operatorname{sen} 2t)$, $t \in \mathbb{R}$.

a) *Encontre a derivada* $\mathbf{r}'(t)$.

b) *Determine o vetor tangente unitário no ponto* $t = 0$.

## Resolução.

a) $\mathbf{r}'(t) = (3t^2, e^{-t} - te^{-t}, 2\cos t),\ t \in \mathbb{R}$.

b) $\dfrac{\mathbf{r}'(0)}{\|\mathbf{r}'(0)\|} = \dfrac{(0, 1, 2)}{\|(0, 1, 2)\|} = \dfrac{(0, 1, 2)}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 1, 2) = \frac{\sqrt{5}}{5}(0, 1, 2)$.

# Derivada da função composta

Sejam $\mathbf{r} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $g : J \longrightarrow I$, onde $J, I \subset \mathbb{R}$ são intervalos abertos.

- A função composta de $\mathbf{r}$ com $g$ é a função vetorial de uma variável real
$$\mathbf{r} \circ g : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
dada por
$$(\mathbf{r} \circ g)(t) = \mathbf{r}(g(t)) = (f_1(g(t)), \dots, f_n(g(t))).$$

- Se $g$ é derivável em $a \in J$ e $\mathbf{r}$ é derivável em $g(a)$ então
$$\begin{aligned}(\mathbf{r} \circ g)'(a) = [\mathbf{r}(g(a))]' &= \big(f_1'(g(a))\, g'(a), \dots, f_n'(g(a))\, g'(a)\big)\\ &= \big(f_1'(g(a))\, g'(a), \dots, f_n'(g(a))\, g'(a)\big)\\ &= g'(a)\, \mathbf{r}'(g(a)).\end{aligned}$$

# Exemplo

- Sejam $\mathbf{r} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\mathbf{r}(t) = (e^t, \cos t)$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$.

- $f_1(t) = e^t$, $\qquad f_2(t) = \cos t$;
- $\mathbf{r}(g(x)) = \mathbf{r}(x^2) = (e^{x^2}, \cos x^2)$;
- Então

$$[\mathbf{r}(g(x))]' = ([e^{x^2}]', [\cos x^2]') = (2xe^{x^2}, -2x \operatorname{sen} x^2) = 2x\,(e^{x^2}, -\operatorname{sen} x^2)$$

OU

- $\mathbf{r}'(t) = (e^t, -\operatorname{sen} t)$ $\qquad$ e $\qquad$ $g(x) = 2x$;
- Então

$$[\mathbf{r}(g(x))]' = g'(x)\,\mathbf{r}'(g(x)) = 2x\,(e^{x^2}, -\operatorname{sen} x^2)$$

# Vetor velocidade

Seja $\mathbf{v} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho. Se $\mathbf{v}$ é diferenciável diz-se que

- $\mathbf{v}$ é um caminho diferenciável;
- $\mathbf{v}'(t_0)$ é o vetor velocidade de $\mathbf{v}$ no instante $t_0$;
- $\|\mathbf{v}'(t_0)\|$ é a velocidade (escalar) de $\mathbf{v}$ em $t_0$;
- o vetor unitário $\dfrac{\mathbf{v}'(t_0)}{\|\mathbf{v}'(t_0)\|}$ é o versor tangente a $\mathbf{v}$ em $t_0$;
- o caminho $\mathbf{v}$ é de classe $C^1$ se for diferenciável e a sua derivada $\mathbf{v}'$ for contínua.

# Caminhos regulares

Seja $\mathbf{v} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho diferenciável.

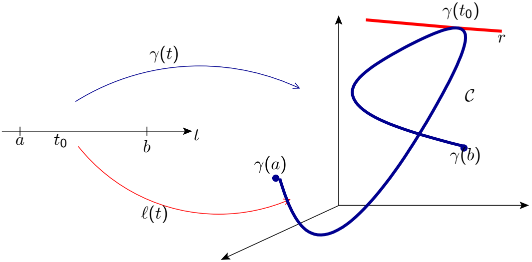
- Já vimos que $\mathbf{v}'(t_0)$ é o vetor velocidade de $\mathbf{v}$ no instante $t_0$.
- Se $\mathbf{v}'$ é ainda diferenciável o vetor aceleração de $\mathbf{v}$ no instante $t_0$ é dado por $\mathbf{v}''(t_0)$.
- Um caminho $\mathbf{v}$ diz-se regular, ou suave, em $t_0 \in [a, b]$ se $\mathbf{v}'$ é contínua em $t_0$ e $\mathbf{v}'(t_0) \neq \vec{0}$.
- Um caminho $\mathbf{v}$ diz-se regular se for regular para todo o $t \in [a, b]$.

# Reta tangente

- O vetor velocidade $\mathbf{v}'(t_0) \neq \vec{0}$ é um vetor tangente ao caminho $\mathbf{v}$ em $t_0$.

- Se $\mathbf{v}'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$, a reta tangente à curva $\mathcal{C}$ em $\mathbf{v}(t_0)$ é parametrizada por

$$\boldsymbol{\ell}(t) = \mathbf{v}(t_0) + t\mathbf{v}'(t_0).$$



# Exercício

Dado o caminho $\mathbf{v} : [-2\pi, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definido por

$$\mathbf{v}(t) = \big(\operatorname{sen} 3t, \cos 3t, t^{4/3}\big)$$

determine:

a) o vetor velocidade de $\mathbf{v}$ em $t = 0$;

b) a velocidade de $\mathbf{v}$ em $t = 0$;

c) o versor tangente de $\mathbf{v}$ em $t = 0$;

d) uma parametrização da reta tangente a $\mathbf{v}$ em $t = 0$.

Resolução.

a) $\mathbf{v}'(t) = \big(3\cos 3t, -3\operatorname{sen} 3t, \frac{4}{3}t^{1/3}\big)$; $\quad \mathbf{v}'(0) = (3, 0, 0)$

b) $\|\mathbf{v}'(0)\| = \|(3, 0, 0)\| = 3$

c) $\dfrac{\mathbf{v}'(0)}{\|\mathbf{v}'(0)\|} = (1, 0, 0)$

d) $\boldsymbol{\ell}(t) = \mathbf{v}(0) + t\mathbf{v}'(0) = (0, 1, 0) + t(3, 0, 0) = (3t, 1, 0),\ t \in \mathbb{R}$

# Integral definido

O integral definido de uma função vetorial contínua $\mathbf{r}$ pode ser definido de forma análoga ao integral de funções reais escalares sendo que o integral é um vetor. Assim, podemos expressar o integral de $\mathbf{r}$ em termos dos integrais das suas funções componentes.

Se $\mathbf{r} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ com

$$\mathbf{r}(t) = \big(f(t),\, g(t),\, h(t)\big),$$

então

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left(\int_a^b f(t)\,dt,\, \int_a^b g(t)\,dt,\, \int_a^b h(t)\,dt\right).$$

Ou seja, podemos calcular o integral de uma função vetorial integrando cada uma das suas funções componentes.

# Integral definido

O Teorema Fundamental do Cálculo para funções contínuas diz-nos que

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \big[\mathbf{R}\big]_a^b = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a)$$

onde $\mathbf{R}$ é uma primitiva de $\mathbf{r}$, isto é, $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$.

Usamos a notação $\displaystyle\int \mathbf{r}(t)\,dt$ para integrais indefinidos.

# Exemplo

Se $\mathbf{r}(t) = (2\cos t, \operatorname{sen} t, 2t)$, então

$$\int \mathbf{r}(t)\,dt = \left(\int 2\cos t\,dt, \int \operatorname{sen} t\,dt, \int 2t\,dt\right)$$
$$= \left(2\operatorname{sen} t, -\cos t\,, t^2\right) + \mathbf{C},$$

onde $\mathbf{C}$ é um vetor que representa a constante de integração, e

$$\int_0^{\pi/2} \mathbf{r}(t) = \left[\,\left(2\operatorname{sen} t, -\cos t\,, t^2\right)\,\right]_0^{\pi/2}$$
$$= (2, 0, \frac{\pi^2}{4}) - (0, -1, 0)$$
$$= (2, 1, \frac{\pi^2}{4}).$$

# Exercício

Determine uma função diferenciável $\mathbf{v}$ tal que $\mathbf{v}(0) = (0, -5, 1)$ e $\mathbf{v}'(t)) = (t, e^t, t^2)$.

Resolução.

$$\mathbf{v}(t) = \int \mathbf{v}'(t)\,dt = \int (t, e^t, t^2)\,dt = \left(\int t\,dt, \int e^t\,dt, \int t^2\,dt\right)$$
$$= \left(\frac{t^2}{2} + C_1, e^t + C_2, \frac{t^3}{3} + C_3\right), \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

$\mathbf{v}(0) = (0, -5, 1) \Longrightarrow C_1 = 0,\ \ C_2 = -6,\ \ C_3 = 1$

Assim,

$$\mathbf{v}(t) = \left(\frac{t^2}{2}, e^t - 6, \frac{t^3}{3} + 1\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

# Comprimento de arco e curvatura

Recorde-se que definimos o comprimento $L$ de uma curva plana simples $\mathcal{C}$ descrita na forma $y = F(x)$, $x_0 \leq x \leq x_1$, como o limite de uma soma dos comprimento de *linhas poligonais inscritas* e, quando $F'$ é contínua, temos a fórmula

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left[F'(x)\right]^2}\, dx.$$

Supondo que $\mathcal{C}$ também pode ser descrita pela função vetorial $\mathbf{r}(t) = \big(f(t), g(t)\big)$, ou seja, pelas equações paramétricas

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad a \leq t \leq b,$$

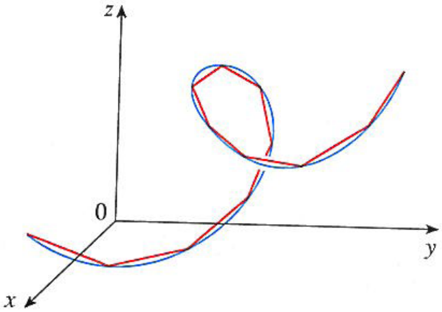
no caso em que $f'$ e $g'$ são contínuas, chegamos à fórmula

$$L = \int_a^b \sqrt{\left[f'(t)\right]^2 + \left[g'(t)\right]^2}\, dt$$

# Comprimento de uma curva no espaço

Se $\mathbf{r} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, com $\mathbf{r}(t) = \big(f(t), g(t), h(t)\big)$ é uma parametrização de uma curva simples [1] $\mathcal{C}$ no espaço, onde $f'$, $g'$ e $h'$ são contínuas, pode mostrar-se que o comprimento de $\mathcal{C}$ entre $\mathbf{r}(a)$ e $\mathbf{r}(b)$ é dado por

$$L = \int_a^b \sqrt{\big[f'(t)\big]^2 + \big[g'(t)\big]^2 + \big[h'(t)\big]^2}\, dt.$$




[1] Curva percorrida exatamente uma vez quando $t$ aumenta de $a$ para $b$.

# Comprimento de arco

Observe-se que em ambos os casos as fórmulas para o comprimento da curva $\mathcal{C}$ podem ser dadas na forma

$$L = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt.$$

De facto, para uma curva plana definida por $\mathbf{r}(t) = \big(f(t), g(t)\big)$,

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{\big[f'(t)\big]^2 + \big[g'(t)\big]^2}$$

e, para uma curva no espaço definida por $\mathbf{r}(t) = \big(f(t), g(t), h(t)\big)$,

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{\big[f'(t)\big]^2 + \big[g'(t)\big]^2 + \big[h'(t)\big]^2}.$$

# Exemplo

Se usarmos a parametrização da circunferência unitária centrada na origem

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \qquad 0 \le t \le 2\pi,$$

então $x'(t) = -\operatorname{sen} t$ e $y'(t) = \cos t$, e temos

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\big[x'(t)\big]^2 + \big[y'(t)\big]^2}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\big[-\operatorname{sen} t\big]^2 + \big[\cos t\big]^2}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi, \end{aligned}$$

como esperado.

# Exemplo

Se, por outro lado, usarmos a parametrização,

$$x = \cos(2t), \quad y = \operatorname{sen}(2t), \qquad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

então $x'(t) = -2\operatorname{sen}(2t)$ e $y'(t) = 2\cos(2t)$, e temos

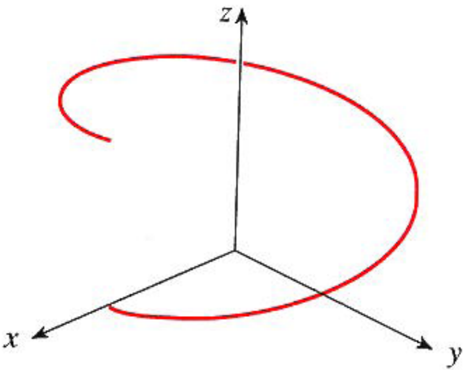
$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sqrt{\big[x'(t)\big]^2 + \big[y'(t)\big]^2}\, dt &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\big[-2\operatorname{sen}(2t)\big]^2 + \big[2\cos(2t)\big]^2}\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\big[\operatorname{sen}^2(2t) + \cos^2(2t)\big]}\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} 2\, dt = 4\pi.
\end{aligned}$$

Note-se que este integral dá-nos o dobro do comprimento de arco da circunferência, uma vez que quando $t$ aumenta de 0 até $2\pi$, o ponto $\big(\cos(2t), \operatorname{sen}(2t)\big)$ percorre a circunferência duas vezes.

Em geral, ao calcularmos o comprimento de uma curva $\mathcal{C}$ a partir de uma representação paramétrica, temos de verificar que $\mathcal{C}$ é percorrida apenas uma única vez.

## Exercício

*Determine o comprimento de arco da curva parametrizada por* $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ *do ponto* $(1, 0, 0)$ *ao ponto* $(1, 0, 2\pi)$.




Solução. $L = 2\sqrt{2}\pi$.

# O comprimento de arco é independente da parametrização

Podemos mostrar que se uma curva suave $\mathcal{C}$ é dada por $\mathbf{r}_1(t)$, com $a \leq t \leq b$, e também por $\mathbf{r}_2(u)$, com $\alpha \leq u \leq \beta$, onde $t = g(u)$ e $g'(u) > 0$, então

$$\int_a^b \|\mathbf{r}_1'(t)\|\, dt = \int_\alpha^\beta \|\mathbf{r}_2'(u)\|\, du.$$

De facto,

$$\begin{aligned}
\int_a^b \|\mathbf{r}_1'(t)\|\, dt &= \int_\alpha^\beta \|\mathbf{r}_1'(g(u))\|\, g'(u)\, du \\
&= \int_\alpha^\beta \|\mathbf{r}_1'(g(u)) \cdot g'(u)\|\, du \\
&= \int_\alpha^\beta \left\| \left[\mathbf{r}_1(g(u))\right]' \right\| du = \int_\alpha^\beta \|\mathbf{r}_2'(u)\|\, du.
\end{aligned}$$

Por exemplo, a curva $\mathcal{C}$ representada por

$$\mathbf{r}_1(t) = (t, t^2, t^3), \quad 1 \leq t \leq 2,$$

pode também ser representada pela função

$$\mathbf{r}_2(u) = (e^u, e^{2u}, e^{3u}), \quad 0 \leq u \leq \ln 2,$$

onde a relação entre os parâmetros $t$ e $u$ é dada por $t = e^u$.

Podemos verificar que

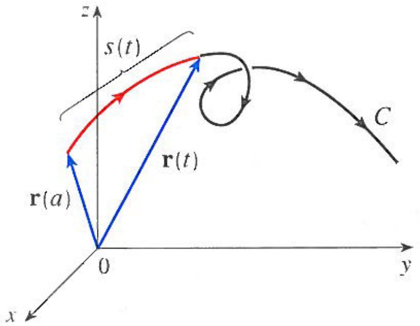
$$\int_1^2 \|(1, 2t, 3t^2)\| \, dt = \int_0^{\ln 2} \|(e^u, 2e^{2u}, 3e^{3u})\| \, du$$

# Função comprimento de arco

Para uma curva suave $\mathcal{C}$ dada por $\mathbf{r}(t) = \big(f(t), g(t), h(t)\big)$, com $a \leq t \leq b$, onde pelo menos uma das funções $f, g, h$ é injetiva, a função comprimento de arco $s$ é definida por

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(u)\|\, du = \int_a^t \sqrt{\big[f'(u)\big]^2 + \big[g'(u)\big]^2 + \big[h'(u)\big]^2}\, du,$$

ou seja, $s(t)$ é o comprimento da curva $\mathcal{C}$ entre $\mathbf{r}(a)$ e $\mathbf{r}(t)$.



# Reparametrização por comprimento de arco

Como já observámos, o comprimento de arco é independente da parametrização usada.

Derivando ambos os membros da equação

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(u)\|\, du$$

e aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}'(t)\|.$$

É muitas vezes útil reparametrizar a curva com respeito ao comprimento de arco uma vez que, assim, o comprimento de arco surge de forma natural.

Se a curva $\mathbf{r}$ é dada com respeito ao parâmetro $t$ e $s = s(t)$ é o comprimento de arco, admitindo que é possível obter-se $t$ como função de $s$, $t = t(s)$, a curva pode reparametrizar-se com respeito a $s$ fazendo a composição $\mathbf{r}\big(t(s)\big)$.

## Exemplo

*Vamos obter uma reparametrização da hélice dada por* $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$*, com respeito ao comprimento de arco medido a partir do ponto* $(1, 0, 0)$ *na direção de* $t$ *crescente.*

O ponto inicial $(1, 0, 0)$ corresponde ao valor do parâmetro $t = 0$. Temos

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \|(-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)\| = \sqrt{2}$$

e, portanto,

$$s = s(t) = \int_0^t \|\mathbf{r}'(u)\| \, du = \int_0^t \sqrt{2} \, du = \sqrt{2}t.$$

Assim, $t = t(s) = s/\sqrt{2}$ e a reparametrização é obtida fazendo

$$\mathbf{r}\big(t(s)\big) = \mathbf{r}\big(s/\sqrt{2}\big) = \big(\cos(s/\sqrt{2}), \operatorname{sen}(s/\sqrt{2}), (s/\sqrt{2})\big).$$

Seja, então,

$$\mathbf{r}_1(s) = \left(\cos(s/\sqrt{2}), \operatorname{sen}(s/\sqrt{2}), (s/\sqrt{2})\right)$$

a reparametrização da hélice por comprimento de arco.

Note-se que

$$\left\|\mathbf{r}_1'(s)\right\| = 1$$

e o comprimento de arco para $s_0 \leq s \leq s_1$ é dado por

$$\int_{s_0}^{s_1} \left\|\mathbf{r}_1'(s)\right\| \, ds = \int_{s_0}^{s_1} \, ds = s_1 - s_0.$$

De facto, tem-se sempre

$$\left\|[\mathbf{r}(t(s))]'\right\| = \left\|\mathbf{r}'(t(s)) \cdot t'(s)\right\| = \frac{\|\mathbf{r}'(t(s))\|}{\|\mathbf{r}'(t(s))\|} = 1.$$

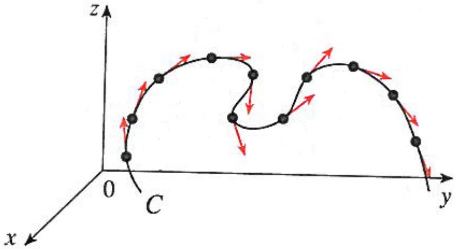
# Curvatura

Se $\mathcal{C}$ é uma curva suave definida pelo vetor $\mathbf{r}$, o vetor tangente unitário $\mathbf{T}$ em $t$ é dado por

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

e indica a direção da curva.

Da figura podemos observar que $\mathbf{T}$ muda de direção lentamente quando $\mathcal{C}$ é *mais direita* e muda mais rapidamente quando $\mathcal{C}$ *dobra mais*.



# Curvatura

A curvatura de $\mathcal{C}$ num dado ponto é uma medida de quão rapidamente a curva muda de direção nesse ponto e é definida por

$$\kappa = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\|$$

(taxa de variação do vetor tangente unitário $\mathbf{T}$ com respeito ao comprimento de arco).

A curvatura é mais fácil de calcular se estiver expressa em termos do parâmetro $t$ em vez do parâmetro $s$. Assim, usando a regra da derivação da cadeia, temos

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt} \quad e \quad \kappa = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\| = \left\| \frac{\frac{d\mathbf{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right\|.$$

Mas $\dfrac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}'(t)\|$ e, assim,

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}.$$

## Exercício

*Mostre que a curvatura de uma circunferência de raio $a > 0$ é $\dfrac{1}{a}$.*

Resolução. Podemos supor que o centro da circunferência é a origem $(0, 0)$ e considerar a parametrização

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t), \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Assim,

$$\mathbf{r}'(t) = (-a \operatorname{sen} t, a \cos t) \quad \text{e} \quad \|\mathbf{r}'(t)\| = a.$$

Logo,

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$$

e, portanto,

$$\mathbf{T}'(t) = (-\cos t, -\operatorname{sen} t).$$

Temos então $\|\mathbf{T}'(t)\| = 1$ e

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{1}{a}.$$

Este exemplo mostra que circunferências pequenas têm curvatura grande e circunferências grandes têm curvatura pequena.

Podemos observar diretamente da definição de curvatura que a curvatura de uma reta é sempre zero, uma vez que o vetor tangente é constante.

Apesar da fórmula apresentada poder ser aplicada em todos os casos para calcular a curvatura, a fórmula dada pelo teorema seguinte é, em geral, de aplicação mais conveniente.

### Teorema

*A curvatura* $\kappa$ *de uma dada curva definida pela função vetorial* $\mathbf{r}$ *é*

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}.$$

Demonstração. Como $\mathbf{T} = \dfrac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|}$ e $\|\mathbf{r}'\| = \dfrac{ds}{dt}$, temos

$$\mathbf{r}' = \|\mathbf{r}'\|\mathbf{T} = \frac{ds}{dt}\mathbf{T} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{r}'' = \frac{d^2 s}{dt^2}\mathbf{T} + \frac{ds}{dt}\mathbf{T}'$$

(usamos a regra de derivação do produto para obter $\mathbf{r}''$).
Uma vez que $\mathbf{T} \times \mathbf{T} = \mathbf{0}$, vem

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 (\mathbf{T} \times \mathbf{T}').$$

Como $\|\mathbf{T}\| = 1$, para todo o $t$, e $\mathbf{T}$ e $\mathbf{T}'$ são ortogonais,

$$\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \|\mathbf{T} \times \mathbf{T}'\| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \|\mathbf{T}\|\|\mathbf{T}'\| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \|\mathbf{T}'\| = \|\mathbf{r}'\|^2 |\mathbf{T}'\|.$$

Assim,

$$\|\mathbf{T}'\| = \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\|\mathbf{r}'\|^2} \qquad \text{e} \qquad \kappa = \frac{\|\mathbf{T}'\|}{\|\mathbf{r}'\|} = \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\|\mathbf{r}'\|^3}.$$

Exercício

*Determine a curvatura da curva parametrizada por*

$$\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3), \quad t \in \mathbb{R},$$

*num ponto genérico e em* $(0, 0, 0)$*.*

Solução. $\kappa(t) = \frac{2\sqrt{1+9t^2+9t^4}}{(1+4t^2+9t^4)^{3/2}}$; $\kappa(0) = 2$.

Para o caso particular de uma curva plana de equação $y = f(x)$, podemos escolher $x$ como o parâmetro e escrever

$$\mathbf{r}(x) = (x, f(x), 0),$$

considerando a mesma curva no espaço, no plano $z = 0$.

Assim, $\mathbf{r}'(x) = \big(1, f'(x), 0\big)$, $\mathbf{r}''(x) = \big(0, f''(x), 0\big)$ e

$$\mathbf{r}'(x) \times \mathbf{r}''(x) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & f'(x) & 0 \\ 0 & f''(x) & 0 \end{vmatrix} = \big(0, 0, f''(x)\big).$$

Temos também $\|\mathbf{r}'(x)\| = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$. Assim,

$$\kappa = \frac{|f''(x)|}{\big[1 + [f'(x)]^2\big]^{3/2}}.$$

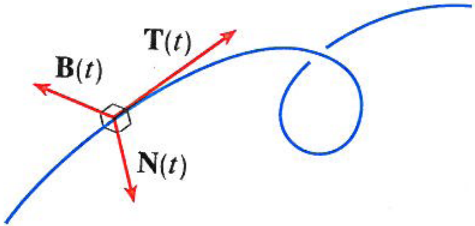
# Vetores normal e binormal

Para uma curva suave $\mathbf{r}$, há muitos vetores que são ortogonais ao vetor tangente unitário $\mathbf{T}$. Observando que $\|\mathbf{T}(t)\| = 1$, para todo o $t$, $\mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}'(t) = 0$. Assim, $\mathbf{T}'$ é ortogonal a $\mathbf{T}$.

Se $\mathbf{r}'$ é também suave, podemos definir o vetor normal $\mathbf{N}$ (principal) como sendo o vetor

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}.$$

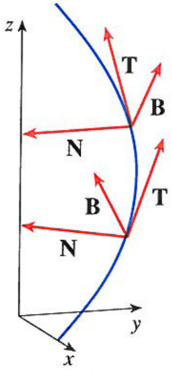
O vetor $\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$ é chamado o vetor binormal. É perpendicular a $\mathbf{T}$ e a $\mathbf{N}$ e também é unitário.



## Exercício

*Determine os vetores unitários tangente, normal e binormal da hélice parametrizada por*

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$




Solução. $\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)$; $\mathbf{N}(t) = (-\cos t, -\operatorname{sen} t, 0)$; $\mathbf{B}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{sen} t, -\cos t, 1)$

# Plano normal e plano osculador

O plano determinado pelos vetores $\mathbf{N}$ e $\mathbf{B}$ num ponto $P$ de uma curva $\mathcal{C}$ é chamado o plano normal de $\mathcal{C}$ em $P$. Consiste no plano ortogonal ao vetor tangente $\mathbf{T}$.

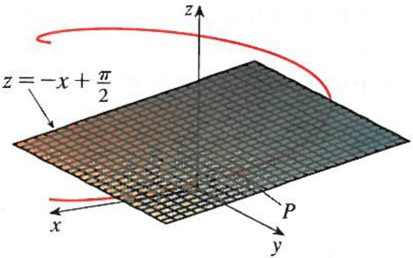
O plano determinado pelo vetores $\mathbf{T}$ e $\mathbf{N}$ num ponto $P$ de uma curva $\mathcal{C}$ é chamado o plano osculador de $\mathcal{C}$ em $P$. Consiste no plano que está mais perto do conter a parte da curva próxima de $P$. (Para uma curva plana, o plano osculador é simplesmente o plano que contém a curva.)

## Exercício

*Determine as equações do plano normal e do plano osculador da hélice*

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \text{sen}\, t, t), \quad t \in \mathbb{R},$$

*no ponto* $(0, 1, \frac{\pi}{2})$




Solução. Plano osculador: $z = -x + \frac{\pi}{2}$; Plano normal: $z = x + \frac{\pi}{2}$.

Em resumo, as fórmulas para os vetores unitários tangente, normal e binormal, e curvatura são:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}, \qquad \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}, \qquad \mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t),$$

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}.$$

À base $(T, N, B)$ chamamos *Triedro de Frenet-Serret*.