5ª aula

22 de março de 2021 17:00

Q A i F conjunto dos estados finais

1. Considere o autómato finito $\mathcal{A} = (\{1,2\}, \{a,b\}, \delta, 1, \{2\})$ onde δ é a função definida pela tabela abaixo.

δ	1	2
a	$\{2\}$	$\{2\}$
b	$\{1\}$	$\{1\}$

a) Represente o autómato $\mathcal{A}$ através de um grafo.
b) Dê exemplos de palavras aceites por $\mathcal{A}$ e de palavras rejeitadas por $\mathcal{A}$.
c) Descreva a linguagem reconhecida pelo autómato $\mathcal{A}$.

a) $Q = \{1,2\}$

$A = \{a,b\}$

estado inicial $\to 1$

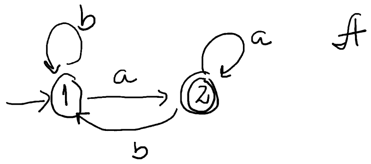
$F = \{2\}$

$\delta(1,a) = \{2\}$

$\delta(1,b) = \{1\}$

$\delta(2,a) = \{2\}$

$\delta(2,b) = \{1\}$



Classificação do autómato ?

— é completo

— é determinista

— é acessível

$1 \xrightarrow{a} 2$

— é co-acessível

$1 \xrightarrow{a} 2$

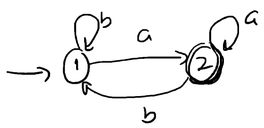
b) $1 \xrightarrow{b} 1 \xrightarrow{b} 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{a} 2$

$bbabaa \in L(\mathcal{A})$, ou seja, bbabaa é aceite por $\mathcal{A}$.

Outros exemplos são a, a^2, aba, ba

Exemplos de palavras não reconhecidas por $\mathcal{A}$: $b, bab, a^5b, \ldots$.

c)



$$L(\mathcal{A}) = b^* \cdot a^+ \cdot (b^+a^+)^* =$$

$$= (\{\varepsilon\} \cup b^+)\, a^+ (b^+a^+)^*$$

$$= a^+ (b^+a^+)^* \cup b^+a^+ (b^+a^+)^*$$

$$= \underbrace{a^+(b^+a^+)^*}_{\text{palavras que terminam em } a \text{ e começam em } a} \cup \underbrace{(b^+a^+)^+}_{\text{palavras que terminam em } a \text{ e começam em } b} =$$

$$= \{ua : u \in A^*\}$$

3. Seja L a linguagem sobre o alfabeto $\{a, b\}$ constituída pelas palavras que não têm aaa como prefixo.

   (a) Mostre que L é uma linguagem reconhecível.

   (b) Para cada uma das expressões regulares seguintes, diga, justificando, se a expressão representa L ou não:

      i. $b^*ab^*ab^+(a+b)^*$;

      ii. $(\varepsilon+a+a^2)(\varepsilon+b)(a+b)^*$;

      iii. $\varepsilon+a+a^2+(b+ab+a^2b)(a+b)^*$;

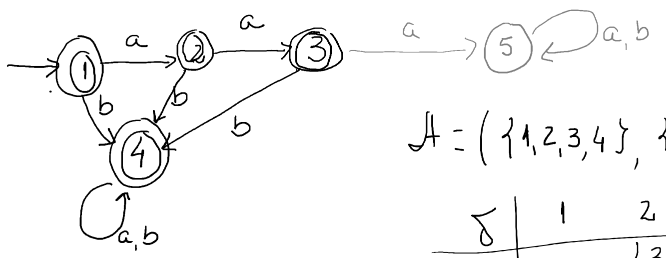
      iv. $(b+ab+a^2b)^*$.

a) $L = \{ u \in A^* \ : \ aaa$ não é prefixo de $u \}$

$= \{ u \in A^* \ : \ \nexists u' \in A^* \quad u = aaa\,u' \}$

$= A^* \setminus aaa A^*$

$= \{ uv \ : \ |u| = 3 \ , \ |u|_b \geq 1 \ , \ v \in A^* \} \cup \{ u \in A^* : \ |u| \leq 2 \}$



(não é necessário)

$\mathcal{A} = (\{1,2,3,4\}, \{a,b\}, \delta, 1, \{1,2,3,4\})$

δ	1	2	3	4
a		$\{3\}$	$\emptyset$	$\{4\}$
b	$\{4\}$	$\{4\}$	$\{4\}$	$\{4\}$

$L(\mathcal{A}) = \mathcal{L}\big((b+ab+a^2b).(a+b)^* + \varepsilon + a + a^2\big)$.

b) ii) $u = \underbrace{a^2}_{\varepsilon+a+a^2}\ \underbrace{\varepsilon}_{(\varepsilon+b)}\ \underbrace{a}_{(a+b)^*} = a^3 \in \mathcal{L}\big((\varepsilon+a+a^2)(\varepsilon+b)(a+b)^*\big)$

e $a^3 \notin L$. Logo ii) não representa L.

i) $u = \underbrace{u_1}_{\substack{L_1 \\ b^*ab^*ab^+}}\ \underbrace{u_2}_{(a+b)^*}$ $\quad |u_1| \geq 3$ e então $a^2 \in L$ e

$a^2 \notin \mathcal{L}(b^*ab^*ab^+(a+b)^*)$

Logo a expressão dada em i) não é a expressão correspondente

$a \in L$ (pq a^3 não é prefixo de a) e $a \notin \mathcal{L}(b+ab+a^2b)^*$.

babab . . . .
ababab . . .
$a^2b\ a^4 \in L$

Logo, iv também não é a opção correta.

A opção correta é iii). De facto $L(\mathcal{A})$ onde $\mathcal{A}$ foi determinado na alínea a) é igual à linguagem correspondente à expressão

A opção correta é iii). De facto $L(A)$ onde A foi determinado na alínea a), é igual à linguagem correspondente à expressão regular iii).

5. Considere o autómato finito $\mathcal{A} = (\{1,2,3,4\}, \{a,b\}, \delta, 1, \{3\})$ em que a função de transição δ é definida pela tabela abaixo.

δ	1	2	3	4
a	$\{4\}$	$\{3\}$	$\varnothing$	$\{4\}$
b	$\{2\}$	$\{2\}$	$\{2\}$	$\{1\}$

De entre as seguintes opções escolha a que completa a frase corretamente:

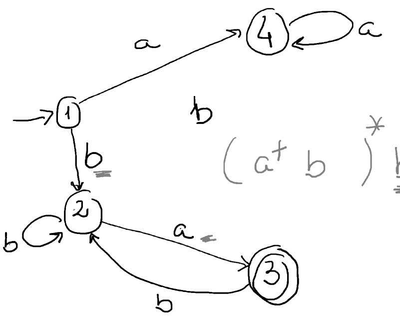
A linguagem reconhecida pelo autómato $\mathcal{A}$ é ___i)___.

(i) $L(\mathcal{A}) = \mathcal{L}((a^+b)^*b(ab+b)^*a)$

~~(ii)~~ $L(\mathcal{A}) = \{u \in \{a,b\}^* : aa$ ou bb são fatores de u$\}$

~~(iii)~~ $L(\mathcal{A}) = \mathcal{L}((a^+b)^* + (b^+a)(ba)^*)$

~~(iv)~~ $L(\mathcal{A}) = \{u \in \{a,b\}^* : ba$ é fator de $u\}$



$(a^+b)^* \, b(b+ab)^* a$

iii) $ab \in \mathcal{L}((a^+b)^* + (b^+a)(ba)^*)$ e $ab \notin L(A)$

iv) $bab \in \{u \in \{a,b\}^* : ba$ é fator de $u\}$ e $bab \notin L(A)$ porque bab é etiqueta de um único caminho com origem em 1:

$$1 \xrightarrow{b} 2 \xrightarrow{a} 3 \xrightarrow{b} 2$$

e $2 \notin F$.

ii) É análogo ao caso iv, no sentido em que $bb \notin L(A)$.

{2

Logo a opção correta é 1.

6. Use o Lema da Iteração para provar que não são reconhecíveis as seguintes linguagens sobre o alfabeto $A = \{a,b\}$.

(c) $\{w \in A^* \mid w^I = w\}$.

(e) $\{a^n b^{f(n)} \mid n \in \mathbb{N}\}$ em que $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é uma função injetiva.

(c) $\{w \in A^* \mid w^I = w\}$.

(e) $\{a^n b^{f(n)} \mid n \in \mathbb{N}\}$ em que $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é uma função injetiva.

Exemplo: aba, bab, a, b, ε, $abba$, a^2ba^2, $\ldots \in L$.

c) $L = \{w \in A^* : w^I = w\}$

Seja $n \in \mathbb{N}$. Escolhendo $u = a^n b a^n \in L$, então $|u| \geq n$ e $u = xyz$ com $|xy| \leq n$, $y = a^r \neq \varepsilon$, $x = a^t$ e $z = a^l b a^n$, em que $t + r + l = n$.

$u = |\ x\ |\ y\ |\ z\ |$

$u^I = z^I y^I x^I = |\ a^n\ |\ b\ |\ a^n\ |$

$x y^k z = a^t (a^r)^k a^l b a^n = \boxed{a^{t+rk+l} b a^n}$

$x y^k z \in L$ sse $x y^k z = (x y^k z)^I = \boxed{a^n b a^{t+rk+l}}$, ou seja,

sse $\cancel{t} + rk + \cancel{l} = n = \cancel{t} + r + \cancel{l}$.

Assim, $x y^k z \in L$ sse $k = 1$. Se $k \neq 1$, $x y^k z \notin L$, pelo que, pelo Lema da Iteração L não é reconhecível.

e) $L = \{a^n b^{f(n)} : f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é uma função injetiva, $n \in \mathbb{N}\}$.

Seja $n \in \mathbb{N}$. Então $u = a^n b^{f(n)} \in L$, $|u| > |a^n| = n$. Sendo x, y, z palavras tais que $|xy| \leq n$ e $|y| \neq 0$, então $x = a^r$, $y = a^t$ e $z = a^l b^{f(n)}$, em que $t > 0$, $r + t + l = n$.

$u = |\ a^n\ |\ b^{f(n)}\ |$

xy

$x y^k z = a^r (a^t)^k a^l b^{f(n)} = a^{r+tk+l} b^{f(n)}$

Se $k \neq 1$, $r + tk + l \neq n$. Então $f(r + tk + l) \neq f(n)$ se $k \neq 1$.

Logo $x y^k z = a^{r+tk+l} b^{f(n)} \notin L$ se $k \neq 1$, pelo que L não é reconhecível.

8. Considere-se $A = \{a, b\}$ e $L = \{a^n b^m : m \geq n \geq 0\}$. Sejam $n \in \mathbb{N}$, e $u = a^n b^n$ uma palavra de L. Qualquer que seja o prefixo xy de u tal que $|xy| \leq n$ e $y \neq \varepsilon$, tem-se que $x = a^i$, $y = a^j$ com $i + j \leq n$, $i \geq 0$ e $j \geq 1$. Então $|u| \geq n$, $u = xyz$ com $z = a^{n-i-j} b^n$. Se $k = 2$, então $xy^k z = a^{n+j} b^n$ pelo que $xy^k z$ não é uma palavra de L.

De entre as afirmações abaixo diga qual é a afirmação verdadeira.

(i) Com base no Lema da Iteração, a argumentação apresentada não permite concluir que a linguagem L não é regular.

(ii) Com base no Lema da Iteração, a argumentação apresentada prova que L é uma linguagem regular.

(iii) Com base no Lema da Iteração, a argumentação apresentada prova que L não é uma linguagem regular.

(iv) Com base no Lema da Iteração, só poderíamos concluir que L não é uma linguagem regular se, para qualquer $k \geq 0$, $xy^k z$ não fosse uma palavra de L.