

1. Preliminares: definições indutivas e linguagens

1.1 Seja S o subconjunto de $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ definido indutivamente pelas 3 regras apresentadas de seguida: (1) $1 \in S$; (2) $2 \in S$; (3) $q \in S \Rightarrow \frac{1}{q} \in S$.

- Dê exemplos de elementos de S .
- Mostre que o conjunto $\{\frac{1}{2}, 2\}$ é fechado para a operação $f : \mathbb{Q} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ tal que $f(q) = \frac{1}{q}$, para qualquer $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.
- Determine o conjunto S .

1.2 Sejam $A = \{a, b, c, d\}$ e $f : A \times A \rightarrow A$ a operação em A definida pela tabela que se segue.

f	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	c	b	c
c	a	c	b	b
d	a	c	b	a

- Calcule os conjuntos indutivos, sobre A , de base $\{b\}$ e conjunto de operações $\{f\}$.
- Prove que c é um dos elementos do conjunto gerado pela definição indutiva $(\{b\}, \{f\})$.
- Indique qual é o conjunto gerado pela definição indutiva $(\{b\}, \{f\})$.

1.3 Apresente definições indutivas de cada um dos conjuntos que se seguem, explicitando a respetiva base e respetivo conjunto de operações.

- Conjunto dos naturais múltiplos de 5.
- Conjunto dos números inteiros.
- Conjunto das palavras sobre o alfabeto $A = \{0, 1\}$ cujo comprimento é par.

1.4 Considere o alfabeto $A = \{0, 1\}$ e a linguagem L sobre A definida indutivamente por:

- $1 \in L$;
- se $x \in L$, então $x0 \in L$ e $x1 \in L$, para todo $x \in A^*$.

Considere ainda a função $i : L \rightarrow \mathbb{N}$ definida, por recursão estrutural, do seguinte modo:

- $i(1) = 1$;
- para todo $x \in L$, $i(x0) = 2i(x)$;
- para todo $x \in L$, $i(x1) = 2i(x) + 1$.

- Indique as palavras de L que admitem sequências de formação de comprimento inferior a 4.
- Defina por recursão estrutural a função $h : L \rightarrow L$ tal que, para todo $x \in L$, $h(x) = 1x$.
- Determine $i(11)$ e $i(101)$.
- Enuncie um princípio de indução estrutural para L .
- Mostre que, para todo $x \in L$, $i(h(x)) = 2^{|x|} + i(x)$ (recorde que $|x|$ denota o comprimento da palavra x).

2. Sintaxe do Cálculo Proposicional

2.1 De entre as seguintes palavras sobre o alfabeto do Cálculo Proposicional, indique, justificando, aquelas que pertencem ao conjunto \mathcal{F}^{CP} .

- a) $(\neg(p_1 \vee p_2))$
- b) $((\neg p_5) \rightarrow (\neg p_{100}))$
- c) $((p_3 \wedge p_1) \vee ($
- d) $((p_0 \wedge (\neg p_0)) \rightarrow \perp)$
- e) (\perp)
- f) $((p_9 \rightarrow ((p_3 \vee (\neg p_8)) \wedge p_{12})) \leftrightarrow (\neg p_4)) \rightarrow (p_7 \vee \perp))$

2.2 Represente as seguintes frases através de fórmulas do Cálculo Proposicional, utilizando variáveis proposicionais para representar *frases atômicas*:

- a) Se o Sr. João é feliz, a sua mulher é infeliz e se o Sr. João é infeliz, a sua mulher também o é.
- b) Vou de comboio e perco o avião ou vou de camioneta e não perco o avião.
- c) Se o Pedro não jogar, então o Miguel joga, mas a equipa perde o jogo.
- d) Não é verdade que neve sempre que está frio.
- e) Uma condição necessária para que uma sucessão seja convergente é que seja limitada.
- f) Uma condição suficiente para um número ser ímpar é que seja primo e não seja 2.

2.3 Encontre exemplos de frases que possam ser representadas através das fórmulas seguintes.

- a) $(p_1 \rightarrow ((\neg p_2) \vee p_3))$
- b) $((\neg(p_1 \wedge p_2)) \vee p_3)$
- c) $(p_1 \leftrightarrow (\neg p_2))$
- d) $((p_1 \rightarrow p_2) \wedge p_1) \rightarrow p_2$

2.4 Para cada uma das seguintes fórmulas do Cálculo Proposicional

- i) $p_0 \wedge p_1$
- ii) p_1
- iii) $\neg \perp \vee \perp$
- iv) $p_0 \rightarrow (\neg p_0 \rightarrow \neg p_1)$

- a) construa sequências de formação;
 - b) indique o número mínimo de elementos numa sequência de formação;
 - c) indique quantas sequências de formação de comprimento mínimo existem.
-

2.5 Para cada fórmula φ do exercício anterior, calcule:

- a) $\varphi[p_2/p_0]$;
- b) $\varphi[p_0 \wedge p_1/p_1]$;
- c) $\varphi[\neg p_1/p_1]$.

2.6 Defina por recursão estrutural as seguintes funções:

- a) $v : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \mathbb{N}_0$ tal que $v(\varphi)$ é o número de ocorrências de variáveis proposicionais em φ ;
- b) $c : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \mathcal{P}(BIN)$ tal que $c(\varphi) = \{\square \in BIN : \square \text{ ocorre em } \varphi\}$, onde $BIN = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$;
- c) $[\perp / p_7] : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \mathcal{F}^{CP}$ tal que $\varphi[\perp / p_7]$ é o resultado de substituir em φ todas as ocorrências de p_7 por \perp .

2.7 Considere de novo as funções definidas no exercício anterior. Prove, por indução estrutural, que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$:

- a) para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $v(\varphi) \geq \#var(\varphi)$;
- b) para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $c(\varphi) = c(\varphi[\perp / p_7])$;
- c) para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, se $var(\varphi) = \{p_7\}$ então $v(\varphi[\perp / p_7]) = 0$.

2.8 Para cada fórmula φ do exercício 2.4, indique o conjunto das suas subfórmulas.

2.9 Mostre que:

- a) se S é uma sequência de formação de ψ e φ é uma subfórmula de ψ , então φ é um dos elementos de S ;
- b) toda a fórmula ψ admite uma sequência de formação que contém apenas subfórmulas de ψ e não tem fórmulas repetidas;
- c) uma fórmula ψ tem n subfórmulas se e só se as sequências de formação de ψ mais curtas têm n elementos.

2.10 Seja $\mathcal{F}^{\vee, \wedge}$ o conjunto das fórmulas cujos conectivos estão no conjunto $\{\vee, \wedge\}$, ou seja, $\mathcal{F}^{\vee, \wedge}$ é o subconjunto de \mathcal{F}^{CP} definido indutivamente pelas seguintes regras:

1. $p_i \in \mathcal{F}^{\vee, \wedge}$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$;
2. se $\varphi \in \mathcal{F}^{\vee, \wedge}$ e $\psi \in \mathcal{F}^{\vee, \wedge}$, então $(\varphi \vee \psi) \in \mathcal{F}^{\vee, \wedge}$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;
3. se $\varphi \in \mathcal{F}^{\vee, \wedge}$ e $\psi \in \mathcal{F}^{\vee, \wedge}$, então $(\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{F}^{\vee, \wedge}$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

- a) Indique, justificando, fórmulas em $\mathcal{F}^{\vee, \wedge}$.
- b) Defina por recursão as funções $v, c : \mathcal{F}^{\vee, \wedge} \rightarrow \mathbb{N}_0$ tais que $v(\varphi)$ é o número de ocorrências de variáveis proposicionais em φ e $c(\varphi)$ é o número de ocorrências de conectivos em φ .
- c) Enuncie um princípio de indução estrutural para $\mathcal{F}^{\vee, \wedge}$.
- d) Prove que: para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{\vee, \wedge}$, $v(\varphi) = c(\varphi) + 1$.

3. Semântica do Cálculo Proposicional

3.1 Sejam v_1 e v_2 as únicas valorações tais que

$$v_1(p) = \begin{cases} 0 & \text{se } p \in \{p_0, p_1\} \\ 1 & \text{se } p \in \mathcal{V}^{CP} - \{p_0, p_1\} \end{cases} \quad \text{e} \quad v_2(p) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \in \{p_1, p_3\} \\ 0 & \text{se } p \in \mathcal{V}^{CP} - \{p_1, p_3\} \end{cases}.$$

Considere as fórmulas $\varphi_1 = (p_2 \vee p_0) \wedge \neg(p_2 \wedge p_0)$ e $\varphi_2 = p_1 \rightarrow ((p_5 \leftrightarrow p_3) \vee \perp)$. Calcule os valores lógicos das fórmulas φ_1 e φ_2 para as valorações v_1 e v_2 .

3.2 Seja v uma valoração. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- a) $v((p_3 \rightarrow p_2) \rightarrow p_1) = 0$ e $v(p_2) = 0$ é uma condição suficiente para $v(p_3) = 0$.
- b) Uma condição necessária para $v(p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_3)) = 0$ é $v(p_1) = 1$ e $v(p_3) = 0$.
- c) Uma condição necessária e suficiente para $v(p_1 \wedge \neg p_3) = 1$ é $v((p_3 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_3)) = 1$.

3.3 De entre as seguintes fórmulas, indique as tautologias e as contradições.

- a) $(p_1 \rightarrow \perp) \vee p_1$
- b) $(p_1 \rightarrow p_2) \leftrightarrow (\neg p_2 \rightarrow \neg p_1)$
- c) $\neg(p_1 \wedge p_2) \rightarrow (p_1 \vee p_2)$
- d) $(p_1 \vee \neg p_1) \rightarrow (p_1 \wedge \neg p_1)$

3.4 Considere, de novo, o conjunto $\mathcal{F}^{\vee, \wedge}$, definido no Exercício 2.10.

- a) Seja v a valoração que a cada variável proposicional atribui o valor lógico 0. Mostre que $v(\varphi) = 0$, para qualquer $\mathcal{F}^{\vee, \wedge}$.
- b) Existem tautologias no conjunto $\mathcal{F}^{\vee, \wedge}$? Justifique.

3.5 Das seguintes afirmações, indique as verdadeiras. Justifique.

- a) $\models \varphi \wedge \psi$ se e só se $\models \varphi$ e $\models \psi$.
- b) Se $\models \varphi \vee \psi$, então $\models \varphi$ ou $\models \psi$.
- c) Se $\models \varphi$ ou $\models \psi$, então $\models \varphi \vee \psi$.
- d) Se $\models \varphi \leftrightarrow \psi$ e $\not\models \psi$, então $\not\models \varphi$.

3.6 Para cada uma das seguintes fórmulas, encontre uma fórmula que lhe seja logicamente equivalente e que envolva apenas conetivos no conjunto $\{\neg, \vee\}$.

- a) $(p_0 \wedge p_2) \rightarrow p_3$.
- b) $p_1 \vee (p_2 \rightarrow \perp)$.
- c) $\neg p_4 \leftrightarrow p_2$.
- d) $(p_1 \vee p_2) \rightarrow \neg(p_1 \wedge \perp)$.

3.7 Investigue se os conjuntos de conetivos $\{\vee, \wedge\}$ e $\{\neg, \vee, \wedge\}$ são ou não completos.

3.8 Calcule formas normais conjuntivas e disjuntivas logicamente equivalentes a cada uma das seguintes fórmulas:

- a) $\neg p_0$.
- b) $p_1 \wedge (p_2 \wedge p_3)$.
- c) $(p_1 \vee p_0) \vee \neg(p_2 \vee p_0)$.
- d) $(p_1 \rightarrow \perp)$.
- e) $(p_1 \vee p_0) \wedge (p_2 \vee (p_1 \wedge p_0))$.
- f) $(p_1 \rightarrow p_2) \leftrightarrow (\neg p_2 \rightarrow \neg p_1)$.

Lógica CC
Exercícios

- 3.9** Considere que φ e ψ são fórmulas cujo conjunto de variáveis é $\{p_1, p_2\}$ e $\{p_1, p_2, p_3\}$, respetivamente, e que têm as seguintes tabelas de verdade:

p_1	p_2	φ		p_1	p_2	p_3	ψ
1	1	0		1	1	1	0
1	0	1	e	1	1	0	1
0	1	1		1	0	1	1
0	0	0		1	0	0	0
				0	1	1	0
				0	1	0	1
				0	0	1	1
				0	0	0	1

Determine FND's e FNC's logicamente equivalentes a cada uma das fórmulas.

- 3.10** Será que existem outros conectivos binários para além de \wedge , \vee , \rightarrow , e \leftrightarrow ? Para responder a esta questão, adotemos esta definição: um conectivo binário é uma função de tipo $\{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$.

- Quantos conectivos binários existem?
- Para cada conectivo binário $f : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$, escreva f como uma tabela de verdade, e “traduza” essa tabela de verdade como uma FND.
- Conclua que $\{\neg, \wedge, \vee\}$ permaneceria um conjunto completo de conectivos, mesmo se tivéssemos adoptado no Cálculo Proposicional outros conectivos binários.

- 3.11** Nenhum dos conectivos $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ é completo (i.e. constitui, por si só, um conjunto completo de conectivos). No entanto, existem conectivos binários completos.

Considere-se a extensão do conjunto das fórmulas proposicionais \mathcal{F}^{CP} com o conectivo binário \uparrow (conhecido como *seta de Sheffer* ou *nand*), determinado pela função booleana f_{\uparrow} t.q. $f_{\uparrow}(1, 1) = 0$, $f_{\uparrow}(1, 0) = 1$, $f_{\uparrow}(0, 1) = 1$ e $f_{\uparrow}(0, 0) = 1$. Mais precisamente:

- acrescente-se ao alfabeto do Cálculo Proposicional a letra \uparrow ;
 - considere-se a definição indutiva de \mathcal{F}^{CP} (sobre este alfabeto estendido) com uma nova regra: se $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, então $(\varphi \uparrow \psi) \in \mathcal{F}^{CP}$;
 - à definição de valoração v , acrescente-se a condição $v(\varphi \uparrow \psi) = f_{\uparrow}(v(\varphi), v(\psi))$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.
- Encontre fórmulas φ, ψ logicamente equivalentes a $p_0 \uparrow p_1$ e tais que i) φ é FND; ii) ψ é FNC.
 - Mostre que, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$: i) $\varphi \uparrow \psi \Leftrightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$; ii) $\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi \uparrow \varphi$.
 - Dê exemplo de tautologias e de contradições onde o único conectivo usado seja \uparrow .
 - O conjunto $\{\uparrow\}$ é completo? Justifique.

- 3.12** De entre os seguintes conjuntos de fórmulas, indique os que são consistentes e os que são inconsistentes.

- $\{p_0 \wedge p_2, p_1 \rightarrow \neg p_3, p_1 \vee p_2\}$.
- $\{p_0 \vee \neg p_1, p_1, p_0 \leftrightarrow (p_2 \vee p_3)\}$.
- \mathcal{F}^{CP} .
- O conjunto $\mathcal{F}^{\vee, \wedge}$ do Exercício 2.10.

3.13 Sejam $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.

- a) Se $\Gamma \cup \Delta$ é consistente, então Γ e Δ são conjuntos consistentes.
- b) Se Γ e Δ são conjuntos consistentes, então $\Gamma \cup \Delta$ é consistente.
- c) Se Γ é consistente e $\varphi \in \Gamma$, então $\neg\varphi \notin \Gamma$.
- d) Se Γ contém uma contradição, então Γ é inconsistente.

3.14 Este exercício ilustra um método para decidir se uma fórmula do Cálculo Proposicional é uma tautologia (que está na base do chamado método da *resolução*), assente em formas normais conjuntivas e na análise da consistência de conjuntos de fórmulas.

Considere as fórmulas

$$\varphi = (p_3 \rightarrow (p_1 \vee p_2)) \vee \neg(\neg p_1 \rightarrow p_2),$$

$$\psi = \neg p_2 \wedge p_3 \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_1 \vee p_2) \wedge (p_2 \vee p_1).$$

- a) Observe que ψ é uma FNC e mostre que ψ é logicamente equivalente a $\neg\varphi$.
- b) Observe que para toda a valoração v , $v(\psi) = 1$ sse v satisfaz $\{\neg p_2, p_3, \neg p_3 \vee \neg p_1 \vee p_2, p_2 \vee p_1\}$.
- c) Mostre que $\{\neg p_2, p_3, \neg p_3 \vee \neg p_1 \vee p_2, p_2 \vee p_1\}$ é inconsistente e diga se ψ é uma contradição.
- d) Diga se φ é uma tautologia.
- e) Aplique a sequência de passos anterior, considerando

$$\varphi = (p_2 \rightarrow p_1) \rightarrow (\neg p_2 \wedge p_3), \quad \psi = (p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee \neg p_3).$$

3.15 Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

- a) $p_3 \vee p_0, \neg p_0 \models p_3$.
- b) $p_0 \vee p_1, \neg p_1 \vee p_2 \models p_0 \vee p_2$.
- c) $\neg p_2 \rightarrow (p_1 \vee p_3), \neg p_2 \models p_1$.
- d) para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\psi \rightarrow \varphi \models \psi \vee \varphi$.

3.16 Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e Γ um conjunto de fórmulas. Demonstre que:

- a) $\Gamma \models \varphi \wedge \psi$ se e só se $\Gamma \models \varphi$ e $\Gamma \models \psi$.
- b) $\models \varphi \rightarrow \psi$ se e só se $\varphi \models \psi$.
- c) $\Gamma \models \varphi \vee \psi$ se e só se $\Gamma, \neg\varphi \models \psi$.
- d) Γ é inconsistente se e só se $\Gamma \models \perp$.

3.17 O Carlos, o João e o Manuel, suspeitos de um crime, fizeram os seguintes depoimentos, respetivamente:

- O João é culpado, mas o Manuel é inocente.
- Se o Carlos é culpado, o Manuel também o é.
- Eu estou inocente, mas um dos outros dois é culpado.

- a) Os três depoimentos são consistentes?
- b) Algum dos depoimentos é consequência dos outros dois?
- c) Supondo os três réus inocentes, quem mentiu?
- d) Supondo que todos disseram a verdade, quem é culpado?
- e) Supondo que os inocentes disseram a verdade e que os culpados mentiram, quem é culpado?

4. Dedução Natural para o Cálculo Proposicional

- 4.1** a) Indique uma derivação em DNP cuja conclusão seja $p_0 \wedge p_1$ e cuja única hipótese não cancelada seja $p_1 \wedge p_0$.
b) Indique duas derivações distintas em DNP de conclusão $p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow (p_0 \vee p_1))$ e sem hipóteses por cancelar.
c) Indique as subderivações de cada uma das derivações que apresentou em **a)** e em **b)**.
- 4.2** Sejam $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$. Encontre demonstrações em DNP das fórmulas abaixo indicadas.
- a) $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\varphi \vee \psi)$. b) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma))$.
c) $\varphi \rightarrow \varphi$. d) $(\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$.
e) $\varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$. f) $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)) \leftrightarrow (\varphi \leftrightarrow \psi)$.
g) $(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\psi \vee \varphi)$. h) $(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$.
- 4.3** Mostre que:
- a) $p_0 \rightarrow p_1, \neg p_1 \vdash \neg p_0$.
b) $p_0 \rightarrow p_1, p_1 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow p_0 \vdash ((p_0 \leftrightarrow p_1) \wedge (p_1 \leftrightarrow p_2)) \wedge (p_0 \leftrightarrow p_2)$.
- 4.4** Represente o raciocínio que se segue através de uma consequência sintática e prove que essa consequência sintática é válida: O Tiago disse: “Vou almoçar ao McDonald’s ou à Pizza Hut”. E, acrescentou: “Se comer no McDonald’s, fico mal disposto e não vou ao cinema”. Nesse dia, a Joana encontrou o Tiago no cinema e conclui: “O Tiago foi almoçar à Pizza Hut”.
- 4.5** Sejam $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Mostre que:
- a) $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$ sse $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \psi$. b) $\Gamma \vdash \varphi$ sse $\Gamma, \neg\varphi \vdash \perp$. c) Se $\Gamma, \neg\varphi \vdash \varphi$, então $\Gamma \vdash \varphi$.
- 4.6** Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ fórmulas. A fórmula $((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$ é chamada a *Lei de Peirce*. Mostre que a Lei de Peirce é um teorema de DNP. (Sugestão: tenha em atenção a resolução da alínea **c)** do exercício anterior.)
- 4.7** Mostre que os conjuntos $\{p_1 \leftrightarrow p_2, p_1, \neg p_2\}$ e $\{p_0 \vee p_1, \neg p_0 \wedge \neg p_1\}$ são sintaticamente inconsistentes.
- 4.8** Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Mostre que:
- a) $(p_0 \vee p_1) \rightarrow (p_0 \wedge p_1)$ não é um teorema de DNP.
b) $p_0 \vee p_1 \not\vdash p_0 \wedge p_1$.
c) $\{p_0 \vee p_1, \neg p_0 \wedge p_1\}$ é sintaticamente consistente.
d) Se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ e φ é uma tautologia, então $\Gamma \vdash \psi$.
- (Sugestão: aplique o Teorema da Correção e/ou o Teorema da Completude.)
- 4.9** Seja v uma valoração. Mostre que $\Gamma = \{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} : v(\varphi) = 1\}$ é maximalmente consistente.
- 4.10** Dê exemplo de dois conjuntos de fórmulas distintos que contenham $\{p_1 \vee p_2, p_1 \leftrightarrow p_2\}$ e que sejam maximalmente consistentes.
- 4.11** Seja Γ um conjunto maximalmente consistente e sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$. Mostre que: se $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ e $\varphi \notin \Gamma$, então $\psi \in \Gamma$.
- 4.12** Sejam $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Mostre que: $\Gamma \models \varphi$ sse existe um subconjunto Γ_0 de Γ , finito, tal que $\Gamma_0 \models \varphi$.

5. Sintaxe do Cálculo de Predicados

5.1 Seja $L = (\{0, f, g\}, \{R\}, \mathcal{N})$ o tipo de linguagem tal que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(f) = 1$, $\mathcal{N}(g) = 2$, $\mathcal{N}(R) = 2$.

- a) Explícite a definição indutiva do conjunto dos L -termos.
- b) Indique quais das seguintes sequências de símbolos constituem L -termos:
 - i) 0 . ii) $f(0)$. iii) $f(1)$.
 - iv) $g(f(x_1, x_0), x_0)$. v) $g(x_0, f(x_1))$. vi) $R(x_0, x_1)$.
- c) Para cada um dos L -termos t que se segue, calcule $\text{VAR}(t)$ e $\text{subt}(t)$.
 - i) 0 . ii) $g(x_1, f(x_1))$. iii) $g(x_1, g(x_2, x_3))$.
- d) Para cada um dos L -termos t da alínea c), calcule $t[g(x_0, 0)/x_1]$.

5.2 Seja L o tipo de linguagem definido no exercício 5.1.

- a) Enuncie o teorema de indução estrutural para o conjunto dos L -termos.
- b) Defina, por recursão estrutural em L -termos, funções $r : \mathcal{T}_L \rightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada L -termo t faz corresponder o número de ocorrências de variáveis em t .
- c) Dê exemplos de L -termos t_1 e t_2 tais que $\#\text{VAR}(t_1) = r(t_1)$ e $\#\text{VAR}(t_2) < r(t_2)$.
- d) Demonstre que, para todo o L -termo t , $\#\text{VAR}(t) \leq r(t)$.

5.3 Seja $L = (\{0, -\}, \{P, <\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(P) = 1$ e $\mathcal{N}(-) = \mathcal{N}(<) = 2$.

- a) Dê exemplos de L -termos e indique sequências de formação desses termos.
- b) Dê exemplos de L -fórmulas atômicas.
- c) Indique sequências de formação de cada uma das seguintes L -fórmulas.
 - i) $x_2 - 0 < x_1$.
 - ii) $\exists x_0 \forall x_1 (x_1 - x_0 < 0)$.
 - iii) $\forall x_2 (\exists x_0 (x_0 < x_1) \rightarrow \exists x_1 (x_2 < x_1 - x_0)) \wedge P(x_2)$.

5.4 Escreva as seguintes afirmações como fórmulas para um tipo de linguagem apropriado.

- a) Todo aquele que é persistente aprende Lógica.
- b) Nem todos os pássaros voam.
- c) Se toda a gente consegue, também o João consegue.
- d) Para todo o número natural que é maior do que 6, o seu dobro é maior do que 12.
- e) Existe um inteiro positivo menor do que qualquer inteiro positivo.
- f) Todo o inteiro positivo é menor do que algum inteiro positivo.
- g) Não há barbeiro que barbeie precisamente aqueles homens que não se barbeiam a si próprios.

5.5 Para cada uma das fórmulas φ do exercício **5.3 c)**,

- Calcule o conjunto das subfórmulas de φ .
- Calcule os conjuntos de variáveis livres e de variáveis ligadas de φ .
- Calcule $\varphi[x_2 - x_0/x_1]$.

5.6 Para cada uma das fórmulas φ do exercício **5.3 c)**, indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras. Justifique.

- A variável x_1 é substituível pelo L -termo 0 em φ .
- A variável x_1 é substituível pelo L -termo x_2 em φ .
- A variável x_2 é substituível por qualquer L -termo em φ .

6. Semântica do Cálculo de Predicados

6.1 Considere o tipo de linguagem L_{Arit} e a estrutura *standard* para este tipo de linguagem E_{Arit} . Sejam a_1 e a_2 as atribuições em E_{Arit} tais que $a_1(x_i) = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, e $a_2(x_i) = i$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

Para cada um dos L_{Arit} -termos t que se seguem, calcule $t[a_1]_{E_{Arit}}$ e $t[a_2]_{E_{Arit}}$.

- 0 .
- x_5 .
- $s(x_2)$.
- $+(s(0), x_3)$.
- $s(0 + (x_2 \times x_3))$.

6.2 Considere de novo o tipo de linguagem L_{Arit} .

- Defina uma L_{Arit} -estrutura normal E_0 cujo domínio seja o conjunto $\{0, 1\}$ e, para essa estrutura, defina uma atribuição a_0 .
- Para a estrutura E_0 e atribuição a_0 definidas na alínea anterior, calcule $t[a_0]_{E_0}$ para cada um dos termos t do exercício anterior.

6.3 Seja $L = (\{f_1, f_2, f_3, f_4\}, \{R_1, R_2\}, \mathcal{N})$ o tipo de linguagem em que $\mathcal{N}(f_1) = \mathcal{N}(f_2) = 0$, $\mathcal{N}(f_3) = 1$, $\mathcal{N}(f_4) = 2$, $\mathcal{N}(R_1) = 1$ e $\mathcal{N}(R_2) = 2$ e seja D o conjunto $\{d_1, d_2\}$.

- Indique uma L -estrutura de domínio D .
- Quantas L -estruturas de domínio D existem?

6.4 Seja $L = (\{0, -\}, \{<, P\}, \mathcal{N})$ o tipo de linguagem em que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(-) = 2$, $\mathcal{N}(<) = 2$ e $\mathcal{N}(P) = 1$. Seja $E = (\mathbb{Z}, \bar{-})$ a L -estrutura tal que:

- $\bar{0}$ é o número inteiro *zero*;
- $\bar{-}$ é a função *subtração* em inteiros;
- $\bar{<}$ de $<$ é a relação *menor do que* em inteiros;
- $\bar{P} = \{z \in \mathbb{Z} : z = 2z' \text{ para algum } z' \in \mathbb{Z}\}$.

Seja $a : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{Z}$ a atribuição, em E , tal que: $a(x_i) = i$ se i é par e $a(x_i) = -2i$ se i é ímpar.

- Para cada um dos seguintes L -termos t , calcule $t[a]_E$.
 - $0 - x_2$.
 - $0 - (x_2 - x_1)$.
- Prove, por indução em L -termos, que, para todo o L -termo t , existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $t[a]_E = 2z$.

6.5 Considere o tipo de linguagem L_{Arit} e a estrutura *standard* para este tipo de linguagem E_{Arit} . Sejam a_1 e a_2 as atribuições em E_{Arit} tais que $a_1(x_i) = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, e $a_2(x_i) = i$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

a) Para cada uma das L_{Arit} -fórmulas φ que se seguem, calcule $\varphi[a_1]_{E_{Arit}}$ e $\varphi[a_2]_{E_{Arit}}$.

- i) $\neg \perp$. iii) $\neg(x_1 = x_1)$.
ii) $x_1 = x_2$. iv) $(x_1 < x_2) \rightarrow (s(x_1) < s(x_2))$.

b) Para cada uma das fórmulas φ da alínea anterior, indique, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, o valor de $\varphi[a_1(\frac{x_1}{n})]_{E_{Arit}}$ e $\varphi[a_2(\frac{x_1}{n})]_{E_{Arit}}$.

c) Para cada uma das fórmulas φ da alínea a), indique $(\forall x_1 \varphi)[a_1]_{E_{Arit}}$, $(\forall x_1 \varphi)[a_2]_{E_{Arit}}$, $(\exists x_1 \varphi)[a_1]_{E_{Arit}}$ e $(\exists x_1 \varphi)[a_2]_{E_{Arit}}$.

d) Indique se alguma das fórmulas da alínea a) é válida na estrutura E_{Arit} .

e) Indique se alguma das fórmulas da alínea a) é universalmente válida.

6.6 Sejam L , E e a a linguagem, a estrutura e a atribuição, respetivamente, definidas no Exercício 6.4. Para cada uma das seguintes L -fórmulas

- i) $x_1 - x_2 < 0$ iv) $x_0 < 0 \vee \neg(x_0 < 0)$
ii) $P(x_2)$ v) $\exists x_0 (P(x_0) \wedge \neg P(0 - x_0))$
iii) $\forall x_2 P(x_2)$ vi) $\forall x_1 \forall x_2 ((x_1 < x_2) \rightarrow (0 < x_2 - x_1))$

diga se a fórmula: **a)** é satisfeita na estrutura E para a atribuição a ; **b)** é válida em E ; **c)** é universalmente válida.

6.7 Seja φ a seguinte L_{Arit} -fórmula:

$$\neg(\exists x_1(x_1 = 0) \vee (x_2 = 0)) \rightarrow (\neg \exists x_1(x_1 = 0) \wedge \neg(x_2 = 0)).$$

- a) φ é instância de alguma tautologia?
b) φ é válida em todas as L_{Arit} -estruturas?

6.8 Diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira para quaisquer tipo de linguagem L , L -fórmulas φ e ψ e variável x .

- a) $\exists x \varphi \Leftrightarrow \forall x \varphi$. b) $\models \exists x(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\exists x \varphi \wedge \exists x \psi)$.
c) $\models (\exists x \varphi \wedge \exists x \psi) \rightarrow \exists x(\varphi \wedge \psi)$. d) $\models (\forall x \varphi \vee \forall x \psi) \rightarrow \forall x(\varphi \vee \psi)$.
e) $\models \forall x(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\forall x \varphi \vee \forall x \psi)$. f) $\models \exists x \forall y \varphi \rightarrow \forall y \exists x \varphi$.
g) $\models \forall x \exists y \varphi \rightarrow \exists y \forall x \varphi$. h) $\exists x \varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \forall x(\varphi \rightarrow \psi)$, se $x \notin \text{LIV}(\psi)$.

6.9 Encontre formas normais prenexas logicamente equivalentes a cada uma das seguintes L_{Arit} -fórmulas.

- i) $(x_0 = 0) \vee \perp$. iii) $\neg \exists x_0 \forall x_1 (x_0 = x_1)$. v) $\exists x_0 (x_0 = x_0) \wedge \neg \exists x_0 (x_0 = s(x_0))$.
ii) $\exists x_0 (x_0 = x_0)$. iv) $(x_0 = 0) \wedge \exists x_0 (0 < x_0)$. vi) $\forall x_0 (\forall x_1 \neg (s(x_1) = x_0) \rightarrow x_0 = 0)$.

Lógica CC
Exercícios

Universidade do Minho

Folha 11

6.10 Considere o tipo de linguagem $L = (\{0, f\}, \{P, =\}, \mathcal{N})$, em que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(f) = 1$, $\mathcal{N}(P) = 1$ e $\mathcal{N}(=) = 2$, e considere a L -estrutura normal $E = (\mathbb{N}_0, \bar{\cdot})$, onde $\bar{0} = 0$, $\bar{f} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ é a função dada por $\bar{f}(n) = n + 3$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$ e $\bar{P} = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \text{ é múltiplo de } 3\}$.

- a) Seja a a atribuição em E tal que, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, $a(x_i) = i$. Calcule:
- $f(f(x_4))[a]$.
 - $(\exists x_1 f(x_1) = 0) \vee \neg P(f(x_2))[a]$.
- b) Seja φ a L -fórmula $(f(x_1) = x_2 \wedge P(x_1)) \rightarrow P(x_2)$. Prove que:
- φ é válida em E .
 - φ não é universalmente válida.
- c) Represente as afirmações seguintes através de L -fórmulas válidas em E .
- Existe um número que é múltiplo de 3 mas não é zero.
 - Para todo o número que seja múltiplo de 3, esse número mais 3 é múltiplo de 3.

6.11 Seja $L = (\{f\}, \{=\}, \mathcal{N})$ o tipo de linguagem, em que $\mathcal{N}(f) = 1$, $\mathcal{N}(=) = 2$ e seja $E = (D, \bar{\cdot})$ uma L -estrutura normal.

- a) Indique uma L -fórmula que seja válida em E sse \bar{f} é injetiva.
- b) Indique uma L -fórmula que seja válida em E sse D tem dois elementos.

6.12 Seja $L = (\{c_1, c_2\}, \{R\}, \mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}(c_1) = \mathcal{N}(c_2) = 0$ e $\mathcal{N}(R) = 2$, um tipo de linguagem. Seja $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$, onde:

- $\varphi_1 = \forall x_0 R(x_0, x_0)$;
- $\varphi_2 = \forall x_0 \forall x_1 (R(x_0, x_1) \rightarrow R(x_1, x_0))$;
- $\varphi_3 = \forall x_0 \forall x_1 \forall x_2 ((R(x_0, x_1) \wedge R(x_1, x_2)) \rightarrow R(x_0, x_2))$.

- a) Indique modelos de:
- Γ .
 - $\Gamma \cup \{R(c_1, c_2)\}$.
 - $\Gamma \cup \{\neg R(c_1, c_2)\}$.
- b) Mostre que:
- $\Gamma \models R(c_1, c_1)$.
 - $\Gamma, R(c_1, c_2) \models R(c_2, c_1)$.

6.13 Sejam L um tipo de linguagem, φ uma L -fórmula e x uma variável. Mostre que:

- $\{\exists x \neg \varphi, \forall x \varphi\}$ é semanticamente inconsistente.
- $\neg \exists x \varphi, \varphi \models \perp$.
- $\forall x \varphi, \forall x \psi \models \forall x (\varphi \wedge \psi)$.
- $\exists x \varphi, \forall x (\varphi \rightarrow \psi) \models \exists x \psi$.

6.14 Considere as três afirmações:

- “Todos os homens são mortais”;
- “Camões é um homem”;
- “Camões é mortal”.

- a) Represente (i), (ii) e (iii) por L -fórmulas φ_1 , φ_2 e φ_3 respetivamente. Explícite L .
- b) Mostre que $\varphi_1, \varphi_2 \models \varphi_3$.