36. Seja $G$ um grupo. Para cada $a \in G$, considere a aplicação $\theta_a : G \to G$ definida por $\theta_a(x) = axa^{-1}$. Mostre que:

(a) Para cada $a \in G$ a aplicação $\theta_a$ é um automorfismo de $G$. Para cada $a \in G$, o automorfismo $\theta_a$ designa-se por *automorfismo interno de* $G$;

(b) Para cada $\alpha \in \mathrm{Aut}\,(G)$ e cada $a \in G$, $\alpha\theta_a\alpha^{-1} = \theta_{\alpha(a)}$;

(c) $\{\theta_a : a \in G\}$ é um subgrupo normal do grupo $\mathrm{Aut}\,(G)$. Este subgrupo representa-se por Inn$(G)$;

(d) A correspondência $\phi$ definida por $a \mapsto \theta_a$, com $a \in G$, é um morfismo de $G$ em $\mathrm{Aut}\,(G)$;

(e) $\mathrm{Nuc}\ \phi = Z(G)$.

Resolução

(a) *Consideremos um elemento qualquer* $a \in G$ *e* $\theta_a$ *a aplicação definida conforme o enunciado. Observemos primeiro que* $\theta_a$ *é um morfismo. De facto, para quaisquer* $x, y \in G$, *temos*

$$\theta_a(xy) = a(xy)a^{-1} = (ax)(a^{-1}a)(ya^{-1}) = (axa^{-1})(aya^{-1}) = \theta_a(x)\theta_a(y).$$

*Vejamos de seguida que* $\theta_a$ *é sobrejetiva. Seja* $y$ *um elemento qualquer de* $G$. *Procuramos* $x \in G$ *tal que* $\theta_a(x) = y$, *i.e., tal que* $axa^{-1} = y$. *Por* $G$ *ser grupo, sabemos que esta equação tem, exatamente, uma solução. Calculemo-la:*

$$\begin{aligned} axa^{-1} = y \quad &\Leftrightarrow a^{-1}(axa^{-1})a = a^{-1}ya \\ &\Leftrightarrow (a^{-1}a)x(a^{-1})a = a^{-1}ya \\ &\Leftrightarrow 1_G x 1_G = a^{-1}ya \\ &\Leftrightarrow x = a^{-1}ya. \end{aligned}$$

*Assim, o elemento* $x \in G$ *tal que* $\theta_a(x) = y$ *é* $x = a^{-1}ya$. *Finalmente, mostremos que* $\theta_a$ *é injetiva. Sejam* $x, y \in G$ *tais que* $\theta_a(x) = \theta_a(y)$. *Então* $axa^{-1} = aya^{-1}$ *e*

$$\begin{aligned} axa^{-1} = aya^{-1} \quad &\Leftrightarrow a^{-1}(axa^{-1})a = a^{-1}(aya^{-1})a \\ &\Leftrightarrow (a^{-1}a)x(a^{-1}a) = (a^{-1}a)y(a^{-1}a) \\ &\Leftrightarrow 1_G x 1_G = 1_G y 1_G \Leftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

*Portanto,* $\theta_a$ *é um automorfismo.*

(b) *Sejam* $\alpha \in \mathrm{Aut}\,(G)$ *e* $a \in G$. *Claramente* $\theta_{\alpha(a)}$ *e* $\alpha\theta_a\alpha^{-1}$ *são morfismos de* $G$ *em* $G$. *Para qualquer* $b \in G$, *temos*

$$\begin{aligned} (\alpha\theta_a\alpha^{-1})(b) \quad &= \alpha[\theta_a[\alpha^{-1}(b)]] = \alpha[a\,\alpha^{-1}\,(b)a^{-1}] \\ &= \alpha(a)\,\alpha(\alpha^{-1}(b))\,\alpha(a^{-1}) \\ &= \alpha(a)b(\alpha(a))^{-1} = \theta_{\alpha(a)}(b). \end{aligned}$$

*Assim,* $\alpha\theta_a\alpha^{-1} = \theta_{\alpha(a)}$.

(c) *Seja* $A = \{\theta_a : a \in G\}$. *Pela alínea (a),* $A$ *está contido no grupo* $\mathrm{Aut}\,(G)$. *Além disso,* $\theta_{1_G} \in A$ *e, portanto,* $A \neq \emptyset$. *Sejam* $\theta_a, \theta_b$ *elementos arbitrários de* $A$. *Vejamos que* $\theta_a\theta_b$ *é ainda um elemento de* $A$. *Como* $a, b \in G$ *e* $G$ *é grupo,* $ab \in G$ *e, portanto, o candidato natural de* $A$ *a ser a aplicação* $\theta_a\theta_b$ *é* $\theta_{ab}$. *Verifiquemos que, de facto,* $\theta_a\theta_b = \theta_{ab}$. *Ambas as aplicações têm o mesmo domínio e o mesmo conjunto de chegada, pelo que resta ver que cada elemento de* $G$ *tem a mesma imagem por ambas as aplicações. Seja* $x \in G$. *Temos:*

$$\begin{aligned} (\theta_a\theta_b)(x) = \theta_a(\theta_b(x)) = \theta_a\left(bxb^{-1}\right) = a\left(bxb^{-1}\right)a^{-1} \\ = (ab)x(b^{-1}a^{-1}) = (ab)x(ab)^{-1} = \theta_{ab}(x). \end{aligned}$$

*Portanto,* $\theta_a\theta_b = \theta_{ab} \in A$. *Seja* $\theta_a \in A$. *Começamos por observar que, como* $a \in G$ *e* $G$ *é grupo,* $a^{-1} \in G$, *pelo que* $\theta_{a^{-1}} \in A$. *Mostremos que* $(\theta_a)^{-1} = \theta_{a^{-1}}$. *Dado* $x \in G$, *tem-se*

$$\begin{aligned} (\theta_a\theta_{a^{-1}})(x) \quad &= \theta_a(\theta_{a^{-1}}(x)) = \theta_a(a^{-1}xa) \\ &= a(a^{-1}xa)a^{-1} \\ &= (aa^{-1})x(aa^{-1}) \\ &= x \end{aligned}$$

*e, analogamente,* $(\theta_a\theta_{a^{-1}})(x) = x$. *Portanto,* $\theta_a\theta_{a^{-1}} = \theta_{a^{-1}}\theta_a = \mathrm{id}_G$, *pelo que* $\theta_{a^{-1}} = (\theta_a)^{-1}$. *Por uma das caracterizações de subgrupo, concluimos que* $A < \mathrm{Aut}(G)$.

*Finalmente, seja* $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$. *Por (b),* $\alpha\theta_a\alpha^{-1} = \theta_{\alpha(a)}$ *e, portanto,* $\alpha A \alpha^{-1} \subseteq A$. *Logo,* $A \triangleleft \mathrm{Aut}(G)$.

(d) *Por* (a)*, para cada* $a \in G$, $\theta_a \in \mathrm{Aut}(G)$. *Além disso, é claro que, dados* $a, b \in G$,

$$a = b \Rightarrow \theta_a = \theta_b,$$

*uma vez que, para qualquer* $x \in G$*, se tem*

$$\theta_a(x) = axa^{-1} = bxb^{-1} = \theta_b(x).$$

*Assim,* $\phi$ *é uma aplicação de* $G$ *em* $\mathrm{Aut}(G)$. *Mostremos, de seguida, que* $\phi$ *respeita as operações dos grupos* $G$ *e* $\mathrm{Aut}(G)$. *Sejam* $g_1, g_2$ *elementos quaisquer de* $G$. *Temos, por* (c)*, que*

$$\phi(g_1g_2) = \theta_{g_1g_2} = \theta_{g_1}\theta_{g_2} = \phi(g_1)\phi(g_2).$$

*Portanto,* $\phi$ *é um morfismo.*

(e) *Por definição de núcleo de um morfismo, sabemos que*

$$\mathrm{Nuc}\ \phi = \{g \in G : \phi(g) = \mathrm{id}_G\}.$$

*Assim,*

$$\begin{aligned}\mathrm{Nuc}\ \phi &= \left\{g \in G : \theta_g = 1_{\mathrm{Aut}(G)}\right\}\\ &= \{g \in G : \theta_g(x) = \mathrm{id}_G(x),\ \textit{para todo}\ x \in G\}\\ &= \left\{g \in G : gxg^{-1} = x,\ \textit{para todo}\ x \in G\right\}\\ &= \{g \in G : gx = xg,\ \textit{para todo}\ x \in G\}\\ &= Z(G).\end{aligned}$$