1ªaula

24 de fevereiro de 2021 11:00

1 c) Rascunho:

abb $= a^1 b^2$
abbb $= a^1 b^3$
$a\,bb \ldots b$

aa bbb $= a^2 b^3$
$aab.bb.\ldots b$

$a\,a\,\underbrace{a.bb}\,b\,b \ldots b$

$\{a^i b^j : 0 < i < j\}$, $a, b \in A$

Seja L o conjunto das palavras sobre o alfabeto A definido indutivamente por:

1. $ab^2 \in L$
2. Se $u \in L$, então $ub \in L$
3. Se $u \in L$, então $aub \in L$.

Agora, pretendemos provar que $L = L'$.

I. $L \subseteq L'$ Princípio de Indução Estrutural de L

Seja P uma propriedade relacionada com os elementos de L.
Se i) ab^2 tem a propriedade P, i.e., $P(ab^2)$ é verdadeira;
ii) Se $P(u)$ é verdadeira, então $P(ub)$ é verdadeira;
iii) Se $P(u)$ é verdadeira, então $P(aub)$ é verdadeira.
então toda a palavra $u \in L$, verifica a propriedade P, ou seja, $P(u)$ é verdadeira $\forall u \in L$.

Seja P a propriedade relativa a elementos de L dada por
$P(u)$ significa $u \in L'$.

Queremos mostrar que $\forall u \in L \; P(u)$.

i) $P(ab^2)$ é verdadeira, pq $ab^2 = a^1 b^2$ em que $0 < 1 < 2$.

ii) Seja $u \in L$ e suponhamos por hipótese de indução que $P(u)$ é verdadeira, ou seja, que $u = a^i b^j$ com $0 < i < j$.
Então $ub = a^i b^j b = a^i b^{j+1}$ e $0 < i < j < j+1$.
Logo $ub \in L'$, ou seja, $P(ub)$ é verdadeira.

iii) Seja $u \in L$ e suponhamos por hipótese de indução que $P(u)$ é verdadeira, ou seja, que $u = a^i b^j$ com $0 < i < j$.

Então $aub = a \cdot a^i b^j b = a^{i+1} b^{j+1}$

e $0 < i < i+1 < j+1$. Logo $0 < i+1 < j+1$.

Assim $aub \in L'$, i.e., $P(aub)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução Estrutural sobre L, podemos afirmar que $\forall u \in L$, $P(u)$ é verdadeira, ou seja, $\forall u \in L$ $u \in L'$.

Fica assim provado que $L \subseteq L'$.

II – $L' \subseteq L$

Seja $u \in L'$. Então $u = a^i b^j$ em que $0 < i < j$, pelo que $u = a^{i-1} \underbrace{a b^2}\, b^{j-i-1}$ em que $i-1 \geq 0$, $j-i-1 \geq 0$.

Vamos verificar como obter a palavra u, usando as regras da definição indutiva de L.

1.º Usar a regra básica 1 e obter ab^2

2.º Usar $i-1$ vezes a regra indutiva 3 e obter $a^{i-1} a b^2 b^{i-1}$

a^{i-1} $= u$.

Logo $u \in L$. A conclusão final é de que $L' \subseteq L$.

f) $T = \{ u \in \{0,1\}^* : 00 \text{ é fator de } u \}$

Rascunho

$00 \in T$ $\varepsilon \notin T$ $0 \notin T$ $1 \notin T$

$10 \notin T$ $100 \in T$ 000 $100\,1101010\,0\,111 \in T$

Seja L a linguagem definida indutivamente pelas regras:

1. $00 \in L$
2. Se $u \in L$, então $1u, u1, 0u, u0 \in L$

Falta provar que $L = T$.

...

g) $U = \{u \in \{0,1\}^* : 001$ não é fator de $u\}$.

Rascunho

$\varepsilon \in U$ se $|u| \leq 2$, então $u \in U$

$101 \in U$ $010 \in U$ ....

$\rightarrow$ $\boxed{0\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,.0000}$ ✗

$0\,1\,0\,1\,0\,1\,1\,1$
$.0$
$.00$
$1\,0...0$

Seja $L \subseteq \{0,1\}^*$ uma linguagem definida indutivamente pelas regras:

1. $\varepsilon \in L$
2. Se $u \in L$, então $u0 \in L$.
3. Se $u \in L$, então $1u \in L$.
4. Se $u \in L$, então $01u \in L$.

ε
$\varepsilon 0 = 0$
$\varepsilon.0.0 = 00$
$1\varepsilon 0 = 10$
$01\varepsilon = 01$
$11\varepsilon = 11$
$1\varepsilon = 1$

Falta provar que $L = U$.

...

$$U = \{1^{e_n}0 \dots 0\,1^{e_2}\,0\,1^{e_1}\,0^k : k \geq 0, e_1, \dots, e_{n-1} \geq 1, e_n \geq 0, n \geq 0\}$$

3- ~~Rascunho~~

$c \in L$ $L = \{c, abcb, (ab)^2cb^2, \dots,$

$\varepsilon \notin L$

$cc \in L$ $abcb \in L$ $c.abcb \in L$ $abcbc \in L$

$n \geq 1$ $c^n \in L$ $(ab)^2 c\, b^2 \in L$ $cabcb\,c \in L$

$(ab)^n c\, b^n \in L$

a) Princípio de Indução Estrutural de L.

Seja P uma propriedade relativa às palavras u de L.

Se
i) $P(c)$ é verdadeira
ii) Se $u \in L$ e $P(u)$ é verdadeira, então $P(abub)$ é verdadeira
iii) Se $u \in L$ e $P(u)$ é verdadeira, então $P(cu)$ é verdadeira
iv) Se $u \in L$ e $P(u)$ é verdadeira, então $P(uc)$ é verdadeira

então $P(u)$ é verdadeira para todo o $u \in L$.

Nesta alínea $P(u) \iff 2|u|_a = |u|_b$.

i) $2|c|_a = 2 \cdot 0 = 0$, $|c|_b = 0$ } Logo $2|c|_a = |c|_b$, ou seja, $P(c)$ é verdadeira.

Seja $u \in L$ tal que $P(u)$ é verdadeira, ou seja, tal que $2|u|_a = |u|_b$.

ii) $2|abub|_a = 2(1 + |u|_a) = 2 + 2|u|_a = 2 + |u|_b$

$|abub|_b = 2 + |u|_b$

Logo $2|abub|_a = |abub|_b$, pelo que $P(abub)$ é verdadeira.

iii) $2|cu|_a = 2|u|_a = |u|_b = |cu|_b$

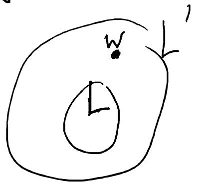
Logo $P(cu)$ é verdadeira.

iv) $2|uc|_a = 2|u|_a = |u|_b = |uc|_b$

Logo $P(uc)$ é verdadeira.

A conclusão final é de que, pelo Princípio de Indução Estrutural, $P(u)$ é verdadeira qualquer que seja $u \in L$.

b) $L' = \{u \in \{a,b,c\}^* : 2|u|_a = |u|_b\}$



Em a) provamos que $L \subseteq L'$.

Agora em b) queremos provar que $L' \not\subseteq L$. Para isso basta encontrar $w \in L'$, tal que $w \notin L$.

Seja $w = abb \in L'$. Então $2|w|_a = |w|_b$ e $w \notin L$ porque c não ocorre em w.

Outros exemplos: $a^n b^{2n}$

bab

bcab

baabbb ...

ε.