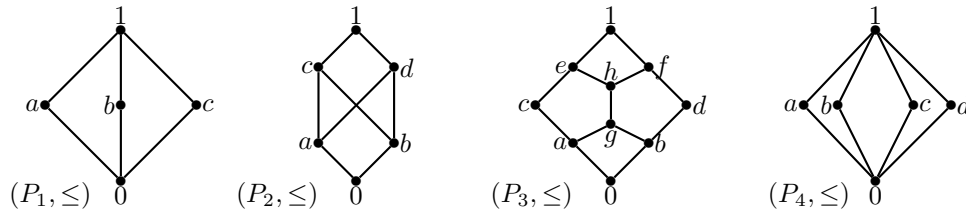


Álgebra Universal e Categorias Exercícios

1. Reticulados

1.1. Diga, justificando, quais dos c.p.o.s a seguir representados são reticulados:



Um c.p.o. (P, \leq) diz-se um reticulado se, para quaisquer $x, y \in P$, existem $\sup\{x, y\}$ e $\inf\{x, y\}$.

O c.p.o. (P_1, \leq) é um reticulado, pois, para quaisquer $x, y \in P_1$, existem $\sup\{x, y\}$ e $\inf\{x, y\}$:

- se $x, y \in \{0, a, b, c, 1\}$ e $x \leq y$, tem-se $\sup\{x, y\} = y$ e $\inf\{x, y\} = x$;
- se $x, y \in \{a, b, c\}$ e $x \neq y$, tem-se $\sup\{x, y\} = 1$ e $\inf\{x, y\} = 0$.

O c.p.o. (P_2, \leq) não é um reticulado, pois existem $a, b \in P_2$ tais que não existe $\sup\{a, b\}$ (tem-se $\text{Maj}\{a, b\} = \{c, d, 1\}$ e o conjunto $\{c, d, 1\}$ não tem elemento mínimo).

O c.p.o. (P_3, \leq) é um reticulado, pois, para quaisquer $x, y \in P_3$, existem $\sup\{x, y\}$ e $\inf\{x, y\}$:

- se $x, y \in \{0, a, b, c, d, e, f, g, h, 1\}$ e $x \leq y$, tem-se $\sup\{x, y\} = y$ e $\inf\{x, y\} = x$;
- se $x, y \in \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ e x e y não são comparáveis, também existem $\sup\{x, y\}$ e $\inf\{x, y\}$, tendo-se:

- $\sup\{a, b\} = g$ e $\inf\{a, b\} = 0$;	- $\sup\{a, d\} = f$ e $\inf\{a, d\} = 0$;	- $\sup\{b, c\} = e$ e $\inf\{b, c\} = 0$;
- $\sup\{c, d\} = 1$ e $\inf\{c, d\} = 0$;	- $\sup\{c, f\} = 1$ e $\inf\{c, f\} = a$;	- $\sup\{c, h\} = e$ e $\inf\{c, h\} = a$;
- $\sup\{d, e\} = 1$ e $\inf\{d, e\} = b$;	- $\sup\{d, h\} = f$ e $\inf\{d, h\} = b$;	- $\sup\{e, f\} = 1$ e $\inf\{e, f\} = h$.

O c.p.o. (P_4, \leq) é um reticulado, pois, para quaisquer $x, y \in P_4$, existem $\sup\{x, y\}$ e $\inf\{x, y\}$:

- se $x, y \in \{0, a, b, c, d, 1\}$ e $x \leq y$, tem-se $\sup\{x, y\} = y$ e $\inf\{x, y\} = x$;
- se $x, y \in \{a, b, c, d\}$ e $x \neq y$, tem-se $\sup\{x, y\} = 1$ e $\inf\{x, y\} = 0$.

1.2. Mostre que cada um dos c.p.o.s a seguir indicados é um reticulado.

(a) $(\mathbb{N}, |)$, onde $|$ é a relação *divide* definida em \mathbb{N} .

Um c.p.o. (P, \leq) diz-se um reticulado se, para quaisquer $x, y \in P$, existem $\sup\{x, y\}$ e $\inf\{x, y\}$.

O c.p.o. $(\mathbb{N}, |)$ é um reticulado, pois, para quaisquer $x, y \in \mathbb{N}$, existem $\sup\{x, y\}$ e $\inf\{x, y\}$, tendo-se $\inf\{x, y\} = \text{m.d.c.}(x, y)$ e $\sup\{x, y\} = \text{m.m.c.}(x, y)$.

É simples verificar que $\inf\{x, y\} = \text{m.d.c.}(x, y)$. De facto,

- para quaisquer $x, y \in \mathbb{N}$, $\text{m.d.c.}(x, y) \in \mathbb{N}$;
- para quaisquer $x, y \in \mathbb{N}$, $\text{m.d.c.}(x, y) | x$ e $\text{m.d.c.}(x, y) | y$ e, portanto, $\text{m.d.c.}(x, y)$ é um minorante de $\{x, y\}$;
- para todo $z \in \mathbb{N}$, se $z | x$ e $z | y$, então $z | \text{m.d.c.}(x, y)$, pelo que $\text{m.d.c.}(x, y)$ é o maior minorante de $\{x, y\}$.

De modo análogo, conclui-se que $\sup\{x, y\} = \text{m.m.c.}(x, y)$, pois:

- para quaisquer $x, y \in \mathbb{N}$, $\text{m.m.c.}(x, y) \in \mathbb{N}$;
- para quaisquer $x, y \in \mathbb{N}$, $x | \text{m.m.c.}(x, y)$ e $y | \text{m.m.c.}(x, y)$ e, portanto, $\text{m.m.c.}(x, y)$ é um majorante de $\{x, y\}$;
- para todo $z \in \mathbb{N}$, se $x | z$ e $y | z$, então $\text{m.m.c.}(x, y) | z$, pelo que $\text{m.m.c.}(x, y)$ é o menor majorante de $\{x, y\}$.

(b) $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, onde $\mathcal{P}(A)$ é o conjunto das partes de um conjunto A e \subseteq é a relação de inclusão usual.

Um c.p.o. (P, \leq) diz-se um reticulado se, para quaisquer $x, y \in P$, existem $\sup\{x, y\}$ e $\inf\{x, y\}$.

Para quaisquer $X, Y \in \mathcal{P}(A)$, existe $\sup\{X, Y\}$. Tem-se $\sup\{X, Y\} = X \cup Y$, pois:

- para quaisquer $X, Y \in \mathcal{P}(A)$, $X \cup Y \in \mathcal{P}(A)$;
- para quaisquer $X, Y \in \mathcal{P}(A)$, $X \subseteq X \cup Y$ e $Y \subseteq X \cup Y$ e, portanto, $X \cup Y$ é um majorante de $\{X, Y\}$;
- para todo $Z \in \mathcal{P}(A)$, se $X \subseteq Z$ e $Y \subseteq Z$, então $X \cup Y \subseteq Z$, pelo que $X \cup Y$ é o menor dos minorantes de $\{X, Y\}$.

Para quaisquer $X, Y \in \mathcal{P}(A)$, também existe $\inf\{X, Y\}$, tendo-se $\inf\{X, Y\} = X \cap Y$. De facto,

- para quaisquer $X, Y \in \mathcal{P}(A)$, $X \cap Y \in \mathcal{P}(A)$;
- para quaisquer $X, Y \in \mathcal{P}(A)$, $X \cap Y \subseteq X$ e $X \cap Y \subseteq Y$ e, portanto, $X \cap Y$ é um minorante de $\{X, Y\}$;
- para todo $Z \in \mathcal{P}(A)$, se $Z \subseteq X$ e $Z \subseteq Y$, então $Z \subseteq X \cap Y$, pelo que $X \cap Y$ é o maior dos minorantes de $\{X, Y\}$.

Portanto, $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ é um reticulado.

(c) $(\text{Subg}(G), \subseteq)$, onde $\text{Subg}(G)$ representa o conjunto dos subgrupos de um grupo G e \subseteq é a relação de inclusão usual.

Um c.p.o. (P, \leq) diz-se um reticulado se, para quaisquer $x, y \in P$, existem $\sup\{x, y\}$ e $\inf\{x, y\}$.

Para quaisquer $G_1, G_2 \in \text{Subg}(G)$, existem $\sup\{G_1, G_2\}$ e $\inf\{G_1, G_2\}$. É simples verificar que $\inf\{G_1, G_2\} = G_1 \cap G_2$ e $\sup\{G_1, G_2\} = \langle G_1 \cup G_2 \rangle$, onde $\langle G_1 \cup G_2 \rangle$ representa o subgrupo de G gerado por $G_1 \cup G_2$.

É imediato que $\inf\{G_1, G_2\} = G_1 \cap G_2$, pois:

- para quaisquer $G_1, G_2 \in \text{Subg}(G)$, $G_1 \cap G_2 \in \text{Subg}(G)$;
- para quaisquer $G_1, G_2 \in \text{Subg}(G)$, tem-se $G_1 \cap G_2 \subseteq G_1$ e $G_1 \cap G_2 \subseteq G_2$ e, portanto, $G_1 \cap G_2$ é um minorante de $\{G_1, G_2\}$;
- para todo $Z \in \text{Subg}(G)$, se $Z \subseteq G_1$ e $Z \subseteq G_2$, tem-se $Z \subseteq G_1 \cap G_2$, pelo que $G_1 \cap G_2$ é o maior minorante de $\{G_1, G_2\}$.

Também é simples provar que $\sup\{G_1, G_2\} = \langle G_1 \cup G_2 \rangle$, uma vez que

- para quaisquer $G_1, G_2 \in \text{Subg}(G)$, $\langle G_1 \cup G_2 \rangle \in \text{Subg}(G)$;
- para quaisquer $G_1, G_2 \in \text{Subg}(G)$, temos $G_1 \subseteq \langle G_1 \cup G_2 \rangle$ e $G_2 \subseteq \langle G_1 \cup G_2 \rangle$ e, portanto, $\langle G_1 \cup G_2 \rangle$ é um majorante de $\{G_1, G_2\}$;
- para todo $Z \in \text{Subg}(G)$, se $G_1 \subseteq Z$ e $G_2 \subseteq Z$, tem-se $G_1 \cup G_2 \subseteq Z$ e, portanto, $\langle G_1 \cup G_2 \rangle \subseteq Z$ (uma vez que $\langle G_1 \cup G_2 \rangle$ é o menor subgrupo de G que contém $G_1 \cup G_2$). Assim, $\langle G_1 \cup G_2 \rangle$ é o menor dos majorantes de $G_1 \cup G_2$.

Portanto, $(\text{Subg}(G), \subseteq)$ é um reticulado.

1.3. Prove que toda a cadeia é um reticulado.

Um c.p.o. (P, \leq) diz-se um reticulado se, para quaisquer $x, y \in P$, existem $\sup\{x, y\}$ e $\inf\{x, y\}$.

Seja (R, \leq) uma cadeia. Então, para quaisquer $x, y \in R$, temos $x \leq y$ ou $y \leq x$. Se $x \leq y$, tem-se $\sup\{x, y\} = y$ e $\inf\{x, y\} = x$; se $y \leq x$, temos $\sup\{x, y\} = x$ e $\inf\{x, y\} = y$. Logo, para quaisquer $x, y \in R$, existem $\sup\{x, y\}$ e $\inf\{x, y\}$ e, portanto, (R, \leq) é um reticulado.

1.4. Seja $(R; \wedge, \vee)$ o reticulado cujas operações \wedge e \vee são as descritas através das tabelas seguintes

\wedge	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	0	a	0	a
b	0	0	b	b	b	b
c	0	a	b	c	b	c
d	0	0	b	b	d	d
1	0	a	b	c	d	1

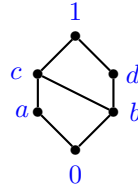
\vee	0	a	b	c	d	1
0	0	a	b	c	d	1
a	a	a	c	c	1	1
b	b	c	b	c	d	1
c	c	c	c	c	1	1
d	d	1	d	1	d	1
1	1	1	1	1	1	1

Considere o reticulado interpretado como um conjunto parcialmente ordenado e represente-o através de um diagrama de Hasse.

O reticulado $(R; \wedge, \vee)$, interpretado como um conjunto parcialmente ordenado, corresponde ao reticulado (R, \leq) , onde \leq é a relação de ordem parcial definida por

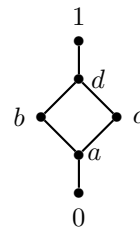
$$x \leq y \Leftrightarrow x = x \wedge y, \quad \forall x, y \in R.$$

O reticulado $(R; \leq)$ pode ser representado pelo diagrama de Hasse seguinte



1.5. Seja (R, \leq) o reticulado representado ao lado.

Considere este reticulado interpretado como uma estrutura algébrica $(R; \wedge, \vee)$ e indique as tabelas das operações \wedge e \vee .



O reticulado (R, \leq) , interpretado como uma estrutura algébrica, corresponde ao reticulado $(R; \wedge, \vee)$ onde \wedge e \vee são as operações definidas por

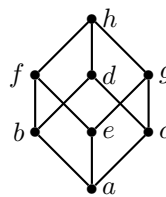
$$x \wedge y = \inf\{x, y\}, \quad x \vee y = \sup\{x, y\}, \quad \forall x, y \in R.$$

As operações do reticulado $(R; \wedge, \vee)$ podem ser descritas pelas tabelas seguintes

\wedge	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	a	a	a	a
b	0	a	b	a	b	b
c	0	a	a	c	c	c
d	0	a	b	c	d	d
1	0	a	b	c	d	1

\vee	0	a	b	c	d	1
0	0	a	b	c	d	1
a	a	a	b	c	d	1
b	b	b	b	d	d	1
c	c	c	d	c	d	1
d	d	d	d	d	d	1
1	1	1	1	1	1	1

1.6. Considere o reticulado (R, \leq) a seguir representado.



Para cada um dos conjuntos R' a seguir indicados, diga se $(R', \leq|_{R'})$ é um sub-reticulado de (R, \leq) .

(a) $R' = \{a, b, c, d\}$.

Seja S um subconjunto não vazio de R . Um c.p.o. (S, \leq') diz-se um sub-reticulado de (R, \leq) se $\leq' = \leq|_S$ e, para quaisquer $x, y \in S$, $\inf\{x, y\} \in S$ e $\sup\{x, y\} \in S$.

O c.p.o. $(R', \leq|_{R'})$ é um sub-reticulado de (R, \leq) , pois:

- para quaisquer $x, y \in R'$ tais que $x \leq y$, $\inf\{x, y\} = x \in R'$ e $\sup\{x, y\} = y \in R'$;
- $\inf\{b, c\} = a \in R'$ e $\sup\{b, c\} = d \in R'$.

(b) $R' = \{b, c, f, g\}$.

Seja S um subconjunto não vazio de R . Um c.p.o. (S, \leq') diz-se um sub-reticulado de (R, \leq) se $\leq' = \leq|_S$ e, para quaisquer $x, y \in S$, $\inf\{x, y\} \in S$ e $\sup\{x, y\} \in S$.

O c.p.o. $(R', \leq|_{R'})$ não é um sub-reticulado de (R, \leq) , pois $\sup\{b, c\} = d$ e $d \notin R'$.

(c) $R' = \{a, b, f, g, h\}$.

Seja S um subconjunto não vazio de R . Um c.p.o. (S, \leq') diz-se um sub-reticulado de (R, \leq) se $\leq' = \leq|_S$ e, para quaisquer $x, y \in S$, $\inf\{x, y\} \in S$ e $\sup\{x, y\} \in S$.

O c.p.o. $(R', \leq|_{R'})$ não é um sub-reticulado de (R, \leq) , pois $\inf\{f, g\} = e$ e $e \notin R'$.

1.7. Seja $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ um reticulado. Um subconjunto não vazio I de R diz-se um *ideal* de \mathcal{R} se

1. $(\forall x, y \in R) \ x, y \in I \Rightarrow x \vee y \in I$;
2. $(\forall x \in I)(\forall y \in R) \ y \wedge x = y \Rightarrow y \in I$.

Mostre que $\mathcal{I} = (I; \wedge_{\mathcal{I}}, \vee_{\mathcal{I}})$, onde I é um ideal de \mathcal{R} e $\wedge_{\mathcal{I}}$ e $\vee_{\mathcal{I}}$ são as correspondências de I^2 em R definidas por

$$x \wedge_{\mathcal{I}} y = x \wedge y, \quad x \vee_{\mathcal{I}} y = x \vee y, \quad \forall x, y \in I,$$

é um sub-reticulado de \mathcal{R} .

Seja R' um subconjunto de R . Um triplo $(R'; \wedge', \vee')$ diz-se um sub-reticulado de $(R; \wedge, \vee)$ se:

- i) $R' \neq \emptyset$;
- ii) para quaisquer $x, y \in R'$, $x \wedge' y = x \wedge y \in R'$ e $x \vee' y = x \vee y \in R'$;
- iii) \wedge' e \vee' são operações binárias em R' ,

Mostremos que $\mathcal{I} = (I; \wedge_{\mathcal{I}}, \vee_{\mathcal{I}})$ satisfaz as três condições indicadas.

i) Uma vez que I é um ideal de \mathcal{R} , tem-se $I \neq \emptyset$.

ii) Pela definição de $\wedge_{\mathcal{I}}$ e $\vee_{\mathcal{I}}$ é imediato que, para quaisquer $x, y \in I$,

$$x \wedge_{\mathcal{I}} y = x \wedge y, \quad x \vee_{\mathcal{I}} y = x \vee y.$$

Resta provar que I é fechado para as operações \wedge e \vee . Por 1., é imediato que, para quaisquer $x, y \in I$, $x \vee y \in I$. Por outro lado, considerando que, para quaisquer $x, y \in I$, $x \wedge y \in R$ e $(x \wedge y) \wedge x = x \wedge y$, de 2. resulta que $x \wedge y \in I$.

iii) Atendendo a ii) e considerando que \wedge e \vee são operações binárias em R , resulta que $\wedge_{\mathcal{I}}$ e $\vee_{\mathcal{I}}$ são operações binárias em I .

Logo \mathcal{I} é um sub-reticulado de \mathcal{R} .

1.8. (a) Sejam (R_1, \leq_1) e (R_2, \leq_2) reticulados. Mostre que o par $(R_1 \times R_2, \leq)$, onde \leq é a relação binária em $R_1 \times R_2$ definida por

$$(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2) \text{ sse } a_1 \leq_1 b_1 \text{ e } a_2 \leq_2 b_2,$$

é um reticulado.

Começemos por mostrar que a relação \leq é uma relação de ordem parcial.

i) Para qualquer $(x, y) \in R_1 \times R_2$, tem-se $x \leq_1 x$ e $y \leq_2 y$, pois \leq_1 e \leq_2 são relações reflexivas. Logo, para qualquer $(x, y) \in R_1 \times R_2$, $(x, y) \leq (x, y)$. Portanto, \leq é reflexiva.

ii) Sejam $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in R_1 \times R_2$ tais que $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$ e $(y_1, y_2) \leq (x_1, x_2)$. Então $x_1 \leq_1 y_1$, $x_2 \leq_2 y_2$, $y_1 \leq_1 x_1$ e $y_2 \leq_2 x_2$. Considerando que \leq_1 e \leq_2 são relações antissimétricas, segue que $x_1 = y_1$ e $x_2 = y_2$. Logo $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$. Portanto, a relação \leq é antissimétrica.

iii) Sejam $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in R_1 \times R_2$ tais que $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$ e $(y_1, y_2) \leq (z_1, z_2)$. Então $x_1 \leq_1 y_1$, $x_2 \leq_2 y_2$, $y_1 \leq_1 z_1$ e $y_2 \leq_2 z_2$. Considerando que \leq_1 e \leq_2 são relações transitivas, segue que $x_1 \leq_1 z_1$ e $x_2 \leq_2 z_2$. Logo $(x_1, x_2) \leq (z_1, z_2)$. Portanto, a relação \leq é transitiva.

De i), ii) e iii) conclui-se que a relação \leq é uma ordem parcial.

Resta mostrar que, para quaisquer $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in R_1 \times R_2$, existem $\sup\{(x_1, x_2), (y_1, y_2)\}$ e $\inf\{(x_1, x_2), (y_1, y_2)\}$.

Sejam $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in R_1 \times R_2$. Uma vez que (R_1, \leq_1) é um reticulado e $x_1, y_1 \in R_1$, existe $\sup\{x_1, y_1\}$. Como (R_2, \leq_2) é um reticulado e $x_2, y_2 \in R_2$, também existe $\sup\{x_2, y_2\}$. Sejam $s_1 = \sup\{x_1, y_1\}$ e $s_2 = \sup\{x_2, y_2\}$. É simples verificar que $\sup\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} = (s_1, s_2)$, pois:

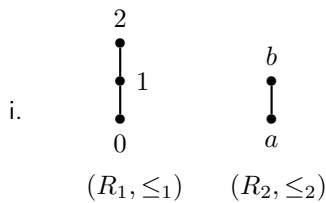
- $(s_1, s_2) \in R_1 \times R_2$;
- $x_1, y_1 \leq_1 s_1$ e $x_2, y_2 \leq_2 s_2$, pelo que $(x_1, x_2) \leq (s_1, s_2)$ e $(y_1, y_2) \leq (s_1, s_2)$;
- para qualquer $(z_1, z_2) \in R_1 \times R_2$, se $(x_1, x_2) \leq (z_1, z_2)$ e $(y_1, y_2) \leq (z_1, z_2)$, tem-se $x_1, y_1 \leq_1 z_1$ e $x_2, y_2 \leq_2 z_2$, donde segue que $s_1 \leq_1 z_1$ e $s_2 \leq_2 z_2$. Portanto, $(s_1, s_2) \leq (z_1, z_2)$.

De forma análoga prova-se que, para quaisquer $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in R_1 \times R_2$, existe $\inf\{(x_1, x_2), (y_1, y_2)\}$. De facto, como (R_1, \leq_1) é um reticulado e $x_1, y_1 \in R_1$, existe $\inf\{x_1, y_1\}$. Como (R_2, \leq_2) é um reticulado e $x_2, y_2 \in R_2$, também existe $\inf\{x_2, y_2\}$. Sejam $i_1 = \inf\{x_1, y_1\}$ e $i_2 = \inf\{x_2, y_2\}$. Daqui segue que $\inf\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} = (i_1, i_2)$, pois:

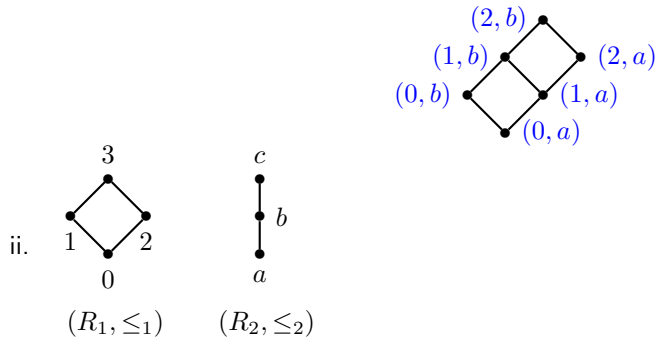
- $(i_1, i_2) \in R_1 \times R_2$;
- $i_1 \leq_1 x_1, y_1$ e $i_2 \leq_2 x_2, y_2$, pelo que $(i_1, i_2) \leq (x_1, x_2)$ e $(i_1, i_2) \leq (y_1, y_2)$;
- para qualquer $(z_1, z_2) \in R_1 \times R_2$, se $(z_1, z_2) \leq (x_1, x_2)$ e $(z_1, z_2) \leq (y_1, y_2)$, tem-se $z_1 \leq_1 x_1, y_1$ e $z_2 \leq_2 x_2, y_2$, donde resulta $z_1 \leq_1 i_1$ e $i_2 \leq_2 z_2$. Portanto, $(z_1, z_2) \leq (i_1, i_2)$.

Desta forma, provámos que $(R_1 \times R_2, \leq)$ é um reticulado.

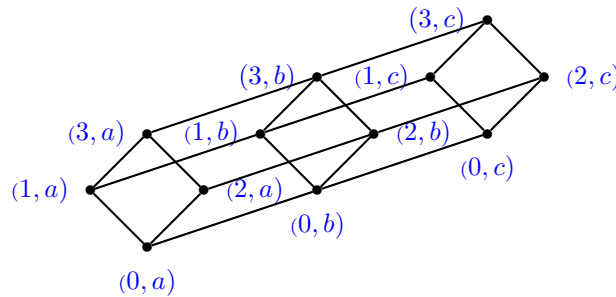
- (b) Considerando que (R_1, \leq_1) e (R_2, \leq_2) representam os reticulados a seguir indicados, desenhe o diagrama de Hasse do reticulado $(R_1 \times R_2, \leq)$:



O reticulado $(R_1 \times R_2, \leq)$ é o reticulado representado pelo diagrama de Hasse seguinte



O reticulado $(R_1 \times R_2, \leq)$ é o reticulado representado pelo diagrama de Hasse seguinte



- 1.9. Considerando os reticulados $(\mathbb{N}, m.d.c., m.m.c.)$ e $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cap, \cup)$, diga se cada uma das aplicações a seguir definidas é um homomorfismo.

- (a) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(x) = nx$, para todo $x \in \mathbb{N}$ (com $n \in \mathbb{N}$ fixo).

Sejam $\mathcal{R}_1 = (R_1; \wedge_{\mathcal{R}_1}, \vee_{\mathcal{R}_1})$ e $\mathcal{R}_2 = (R_2; \wedge_{\mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_2})$ reticulados e $\alpha : R_1 \rightarrow R_2$ uma aplicação. Diz-se que α é um homomorfismo de \mathcal{R}_1 em \mathcal{R}_2 se, para quaisquer $a, b \in R_1$,

$$\alpha(a \wedge_{\mathcal{R}_1} b) = \alpha(a) \wedge_{\mathcal{R}_2} \alpha(b) \text{ e } \alpha(a \vee_{\mathcal{R}_1} b) = \alpha(a) \vee_{\mathcal{R}_2} \alpha(b).$$

Para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$, tem-se

- $f(m.d.c.(a, b)) = n \times m.d.c.(a, b) = m.d.c.(na, nb) = m.d.c.(f(a), f(b))$,
- $f(m.m.c.(a, b)) = n \times m.m.c.(a, b) = m.m.c.(na, nb) = m.m.c.(f(a), f(b))$.

Logo f é um homomorfismo de $(\mathbb{N}, m.d.c, m.m.c)$ em $(\mathbb{N}, m.d.c, m.m.c)$.

(b) $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $g(x) = x + 2$, para todo $x \in \mathbb{N}$.

Sejam $\mathcal{R}_1 = (R_1; \wedge_{\mathcal{R}_1}, \vee_{\mathcal{R}_1})$ e $\mathcal{R}_2 = (R_2; \wedge_{\mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_2})$ reticulados e $\alpha : R_1 \rightarrow R_2$ uma aplicação. Diz-se que α é um homomorfismo de \mathcal{R}_1 em \mathcal{R}_2 se, para quaisquer $a, b \in R_1$,

$$\alpha(a \wedge_{\mathcal{R}_1} b) = \alpha(a) \wedge_{\mathcal{R}_2} \alpha(b) \text{ e } \alpha(a \vee_{\mathcal{R}_1} b) = \alpha(a) \vee_{\mathcal{R}_2} \alpha(b).$$

A aplicação g não é um homomorfismo de $(\mathbb{N}, m.d.c, m.m.c)$ em $(\mathbb{N}, m.d.c, m.m.c)$, pois existem $2, 4 \in \mathbb{N}$ tais que

$$g(m.m.c.(2, 4)) = m.m.c.(2, 4) + 2 = 6 \neq 12 = m.m.c.(2 + 2, 4 + 2) = m.m.c.(g(2), g(4)).$$

(c) $h : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ definida por $h(\emptyset) = \emptyset$ e $h(A) = \mathbb{N}$, para todo $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$.

Sejam $\mathcal{R}_1 = (R_1; \wedge_{\mathcal{R}_1}, \vee_{\mathcal{R}_1})$ e $\mathcal{R}_2 = (R_2; \wedge_{\mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_2})$ reticulados e $\alpha : R_1 \rightarrow R_2$ uma aplicação. Diz-se que α é um homomorfismo de \mathcal{R}_1 em \mathcal{R}_2 se, para quaisquer $a, b \in R_1$,

$$\alpha(a \wedge_{\mathcal{R}_1} b) = \alpha(a) \wedge_{\mathcal{R}_2} \alpha(b) \text{ e } \alpha(a \vee_{\mathcal{R}_1} b) = \alpha(a) \vee_{\mathcal{R}_2} \alpha(b).$$

A aplicação h não é um homomorfismo de $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cap, \cup)$ em $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cap, \cup)$, pois existem $A = \{1\}$ e $B = \{2\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tais que

$$h(A \cap B) = h(\emptyset) = \emptyset \neq \mathbb{N} = \mathbb{N} \cap \mathbb{N} = h(A) \cap h(B).$$

(d) $k : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ definida por $k(A) = A \cap \{1, 2\}$, para todo $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Sejam $\mathcal{R}_1 = (R_1; \wedge_{\mathcal{R}_1}, \vee_{\mathcal{R}_1})$ e $\mathcal{R}_2 = (R_2; \wedge_{\mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_2})$ reticulados e $\alpha : R_1 \rightarrow R_2$ uma aplicação. Diz-se que α é um homomorfismo de \mathcal{R}_1 em \mathcal{R}_2 se, para quaisquer $a, b \in R_1$,

$$\alpha(a \wedge_{\mathcal{R}_1} b) = \alpha(a) \wedge_{\mathcal{R}_2} \alpha(b) \text{ e } \alpha(a \vee_{\mathcal{R}_1} b) = \alpha(a) \vee_{\mathcal{R}_2} \alpha(b).$$

A aplicação k é um homomorfismo de $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cap, \cup)$ em $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cap, \cup)$, pois:

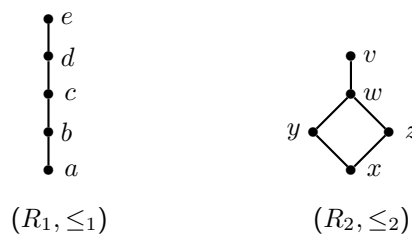
- para quaisquer $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$,

$$\begin{aligned} h(A \cap B) &= (A \cap B) \\ &= (A \cap B) \cap \{1, 2\} \\ &= (A \cap \{1, 2\}) \cap (B \cap \{1, 2\}) \quad (\text{associatividade, comutatividade, idempotência da } \cap) \\ &= h(A) \cap h(B). \end{aligned}$$

- para quaisquer $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$,

$$\begin{aligned} h(A \cup B) &= (A \cup B) \\ &= (A \cup B) \cap \{1, 2\} \\ &= (A \cap \{1, 2\}) \cup (B \cap \{1, 2\}) \quad (\text{distributividade}) \\ &= h(A) \cup h(B). \end{aligned}$$

1.10. Considere os reticulados (R_1, \leq_1) e (R_2, \leq_2) a seguir representados



Para cada uma das aplicações h seguintes, diga se: i. h é isótona; ii. h é um isomorfismo.

(a) $h : R_1 \rightarrow R_1$, definida por $h(a) = a$, $h(b) = c$, $h(c) = d$, $h(d) = e$, $h(e) = e$.

Sejam (P_1, \leq_1) e (P_2, \leq_2) dois conjuntos parcialmente ordenados e $\alpha : P_1 \rightarrow P_2$ uma aplicação. Diz-se que:

- a aplicação α preserva a ordem ou que α é isótona se, para quaisquer $a, b \in P_1$,

$$a \leq_1 b \Rightarrow \alpha(a) \leq_2 \alpha(b).$$

- α é um mergulho de ordem se, para quaisquer $a, b \in P_1$,

$$a \leq_1 b \Leftrightarrow \alpha(a) \leq_2 \alpha(b).$$

- α é um isomorfismo de c.p.o.s se α é um mergulho de ordem e é uma aplicação sobrejetiva.

A aplicação h é uma aplicação isótona de (R_1, \leq_1) em (R_1, \leq_1) , pois, para quaisquer $s, t \in P_1$,

$$s \leq_1 t \Rightarrow h(s) \leq_1 h(t).$$

A aplicação h não é um isomorfismo de (R_1, \leq_1) em (R_1, \leq_1) , uma vez que h não é sobrejetiva ($b \in R_1$ e $b \neq h(s)$, para todo $s \in R_1$).

- (b) $h : R_1 \rightarrow R_2$, definida por $h(a) = x$, $h(b) = y$, $h(c) = z$, $h(d) = w$, $h(e) = v$.

Sejam (P_1, \leq_1) e (P_2, \leq_2) dois conjuntos parcialmente ordenados e $\alpha : P_1 \rightarrow P_2$ uma aplicação. Diz-se que:

- a aplicação α preserva a ordem ou que α é isótona se, para quaisquer $a, b \in P_1$,

$$a \leq_1 b \Rightarrow \alpha(a) \leq_2 \alpha(b).$$

- α é um mergulho de ordem se, para quaisquer $a, b \in P_1$,

$$a \leq_1 b \Leftrightarrow \alpha(a) \leq_2 \alpha(b).$$

- α é um isomorfismo de c.p.o.s se α é um mergulho de ordem e é uma aplicação sobrejetiva.

A aplicação h não é uma aplicação isótona de (R_1, \leq_1) em (R_2, \leq_2) , pois, $b, c \in R_1$, $b \leq_1 c$ e $h(b) = y \not\leq_2 z = h(c)$.

Todo o isomorfismo é uma aplicação isótona. Uma vez que h não é isótona, então h não é um isomorfismo de (R_1, \leq_1) em (R_2, \leq_2) .

- (c) $h : R_2 \rightarrow R_1$, definida por $h(x) = a$, $h(y) = b$, $h(z) = c$, $h(w) = d$, $h(v) = e$.

Sejam (P_1, \leq_1) e (P_2, \leq_2) dois conjuntos parcialmente ordenados e $\alpha : P_1 \rightarrow P_2$ uma aplicação. Diz-se que:

- a aplicação α preserva a ordem ou que α é isótona se, para quaisquer $a, b \in P_1$,

$$a \leq_1 b \Rightarrow \alpha(a) \leq_2 \alpha(b).$$

- α é um mergulho de ordem se, para quaisquer $a, b \in P_1$,

$$a \leq_1 b \Leftrightarrow \alpha(a) \leq_2 \alpha(b).$$

- α é um isomorfismo de c.p.o.s se α é um mergulho de ordem e é uma aplicação sobrejetiva.

A aplicação h é uma aplicação isótona de (R_2, \leq_2) em (R_1, \leq_1) , pois, para quaisquer $s, t \in R_2$,

$$s \leq_2 t \Rightarrow h(s) \leq_1 h(t).$$

(Note-se que:

- $y \leq_2 z \Rightarrow h(y) \leq_1 h(z)$ é verdadeiro, pois $y \leq_2 z$ é falso;
- $z \leq_2 y \Rightarrow h(z) \leq_1 h(y)$ é verdadeiro, pois $z \leq_2 y$ é falso.)

A aplicação h não é um isomorfismo de (R_2, \leq_2) em (R_1, \leq_1) , uma vez que h não é um mergulho de ordem: tem-se $y, z \in R_2$, $h(y) = b \leq_1 c = h(z)$ e $y \not\leq_2 z$.

- (d) $h : R_2 \rightarrow R_2$, definida por $h(x) = x$, $h(y) = z$, $h(z) = y$, $h(w) = w$, $h(v) = v$.

Sejam (P_1, \leq_1) e (P_2, \leq_2) dois conjuntos parcialmente ordenados e $\alpha : P_1 \rightarrow P_2$ uma aplicação. Diz-se que:

- a aplicação α preserva a ordem ou que α é isótona se, para quaisquer $a, b \in P_1$,

$$a \leq_1 b \Rightarrow \alpha(a) \leq_2 \alpha(b).$$

- α é um mergulho de ordem se, para quaisquer $a, b \in P_1$,

$$a \leq_1 b \Leftrightarrow \alpha(a) \leq_2 \alpha(b).$$

- α é um isomorfismo de c.p.o.s se α é um mergulho de ordem e é uma aplicação sobrejetiva.

A aplicação h é uma aplicação isótona de (R_2, \leq_2) em (R_2, \leq_2) , pois, para quaisquer $s, t \in R_2$,

$$s \leq_2 t \Rightarrow h(s) \leq_2 h(t).$$

(Note-se que:

- $y \leq_2 z \Rightarrow h(y) \leq_2 h(z)$ é verdadeiro, pois $y \leq_2 z$ é falso;
- $z \leq_2 y \Rightarrow h(z) \leq_2 h(y)$ é verdadeiro, pois $z \leq_2 y$ é falso.)

A aplicação h é um mergulho de ordem de (R_2, \leq_2) em (R_2, \leq_2) , uma vez que, para quaisquer $s, t \in R_2$,

$$h(s) \leq_2 h(t) \Rightarrow s \leq_2 t.$$

Além disso, a aplicação h é subjetiva, pois, $h(R_2) = R_2$. Logo, h é um isomorfismo de (R_2, \leq_2) em (R_2, \leq_2) .

1.11. Mostre que se (P, \leq) é um c.p.o. tal que, para todo $H \subseteq P$, existe $\inf H$, então (P, \leq) é um reticulado completo.

Seja (P, \leq) um c.p.o. tal que, para todo $H \subseteq P$, existe $\inf H$. Para mostrar que (P, \leq) é um reticulado completo, resta mostrar que, para qualquer $H \subseteq P$, existe $\sup H$. Sejam $H \subseteq P$ e $M = \text{Maj}H$. Por hipótese, existe $\inf M$; seja $s = \inf M$. Prova-se que $s = \sup H$. De facto, como $M = \text{Maj}H$, para quaisquer $h \in H$ e $m \in M$, temos $h \leq m$. Logo, para todo $h \in H$, h é um minorante de M . Mas s é o maior dos minorantes de M , pelo que, para todo $h \in H$, $h \leq s$. Assim, s é um majorante de H . Além disso, prova-se que s é o menor dos majorantes de H . De facto, se admitirmos que s' é um majorante de H , tem-se $s' \in M$ donde segue que $s \leq s'$, pois s é minorante de M . Portanto $s = \sup H$.

Provámos que, para qualquer $H \subseteq P$, existem $\inf H$ e $\sup H$. Portanto, (P, \leq) é um reticulado completo.

1.12. Justifique que cada um dos reticulados a seguir indicados é um reticulado algébrico:

- (a) $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \subseteq)$, onde $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ é o conjunto das partes de um conjunto A e \subseteq é a relação de inclusão usual (os elementos compactos de $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \subseteq)$ são os subconjuntos finitos de A).

Seja (P, \leq) um reticulado.

Um elemento a de P diz-se compacto se sempre que existe $\bigvee S$ e $a \leq \bigvee S$, para algum $S \subseteq P$, tem-se $a \leq \bigvee S'$ para algum conjunto finito S' tal que $S' \subseteq S$.

O reticulado (P, \leq) diz-se:

- um reticulado completo sse, para qualquer $S \subseteq P$, existe $\bigvee S$.
- compactamente gerado se, para todo $a \in P$, $a = \bigvee S$, onde S é um conjunto de elementos compactos de P .
- um reticulado algébrico se é um reticulado completo e compactamente gerado.

Seja A um conjunto. O reticulado $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \subseteq)$ é completo, pois, para qualquer $S \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{A})$, existe $\bigvee S$. De facto, se $S = \{A_i\}_{i \in I}$ é uma família de subconjuntos de A , então:

- $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$;
- $A_j \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$, para todo $j \in I$;
- se Z é um subconjunto de A tal que, para todo $i \in I$, $A_i \subseteq Z$, tem-se $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq Z$.

Logo existe $\bigvee S$ e $\bigvee S = \bigcup_{i \in I} A_i$.

No sentido de mostrar que o reticulado $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \subseteq)$ é compactamente gerado, comecemos por mostrar que os elementos compactos de $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \subseteq)$ são os conjuntos finitos.

Seja X um subconjunto finito de A e admitamos que $X \subseteq \bigvee S$, para algum $S \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{A})$. Então $X \subseteq \bigcup_{Y \in S} Y$. Como X é finito, existe $S' \subseteq S$ tal que S' é finito e $X \subseteq \bigcup_{Y \in S'} Y = \bigvee S'$. Portanto, X é compacto. Reciprocamente, admitamos que X é compacto e mostremos que X é finito. Uma vez que $X \subseteq \bigcup_{x \in X} \{x\}$ e X é compacto, existe $Y \subseteq X$ tal que Y é finito e $X \subseteq \bigcup_{x \in Y} \{x\}$; portanto, X é finito. Por conseguinte, os elementos compactos de $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \subseteq)$ são os conjuntos finitos.

Consequentemente, $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \subseteq)$ é compactamente gerado, pois, para todo $X \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$, tem-se $X = \bigcup_{x \in X} \{x\} = \bigvee_{x \in X} \{x\}$ e, para todo $x \in X$, $\{x\}$ é um elemento compacto.

- (b) $(\text{Subg}(G), \subseteq)$, onde $\text{Subg}(G)$ representa o conjunto dos subgrupos de um grupo G e \subseteq é a relação de inclusão usual (os elementos compactos de $(\text{Subg}(G), \subseteq)$ são os subgrupos de G finitamente gerados).

Seja (P, \leq) um reticulado.

Um elemento a de P diz-se compacto se sempre que existe $\bigvee S$ e $a \leq \bigvee S$, para algum $S \subseteq P$, tem-se $a \leq \bigvee S'$ para algum conjunto finito S' tal que $S' \subseteq S$.

O reticulado (P, \leq) diz-se:

- um reticulado completo sse, para qualquer $S \subseteq P$, existe $\bigvee S$.
- compactamente gerado se, para todo $a \in P$, $a = \bigvee S$, onde S é um conjunto de elementos compactos de P .
- um reticulado algébrico se é um reticulado completo e compactamente gerado.

Seja G um grupo. O reticulado $(\text{Subg}(G), \subseteq)$ é completo, pois, para qualquer $S \subseteq \text{Subg}(G)$, existe $\bigvee S$. De facto, se $S = \{G_i\}_{i \in I}$ é uma família de subgrupos de G , então:

- $\langle \bigcup_{i \in I} G_i \rangle \in \text{Subg}(G)$;
- $G_j \subseteq \langle \bigcup_{i \in I} G_i \rangle$, para todo $j \in I$;
- se Z é um elemento de $\text{Subg}(G)$ tal que, para todo $i \in I$, $G_i \subseteq Z$, tem-se $\langle \bigcup_{i \in I} G_i \rangle \subseteq Z$.

Logo existe $\bigvee S$ e $\bigvee S = \langle \bigcup_{i \in I} G_i \rangle$.

No sentido de mostrar que o reticulado $(\text{Subg}(G), \subseteq)$ é compactamente gerado, comecemos por mostrar que os elementos compactos de $(\text{Subg}(G), \subseteq)$ são os subgrupos de G finitamente gerados.

Seja H um subgrupo de G finitamente gerado e admitamos que $H \subseteq \bigvee S$, para algum $S \subseteq \text{Subg}(G)$. Como $H \subseteq \bigvee S$, para algum $S \subseteq \text{Subg}(G)$, temos $H \subseteq \bigvee_{i \in I} S_i = \langle \bigcup_{i \in I} S_i \rangle$ para alguma família $\{S_i\}_{i \in I}$ de subgrupos de G . Como H é finitamente gerado, temos $H = \langle h_1, \dots, h_n \rangle$, para alguns $n \in \mathbb{N}$ e $h_1, \dots, h_n \in G$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, $h_k \in H$, pelo que $h_k \in \langle \bigcup_{i \in I} S_i \rangle$. Daqui segue que $h_k \in \langle F_k \rangle$, para algum conjunto finito F_k tal que $F_k \subseteq \bigcup_{i \in I} S_i$, ou seja, $h_k \in \langle \bigcup_{i \in I_k} S_i \rangle$, para algum conjunto finito $I_k \subseteq I$. Então $h_1, \dots, h_n \in \langle \bigcup_{k=1}^n \bigcup_{i \in I_k} S_i \rangle$, onde, para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, I_k é finito. Sendo H o menor subgrupo de G que contém $\{h_1, \dots, h_n\}$ segue que $H \subseteq \langle \bigcup_{k=1}^n \bigcup_{i \in I_k} S_i \rangle$. Logo $H \subseteq \bigvee S'$, para algum conjunto finito $S' \subseteq S$. Portanto, H é compacto.

Reciprocamente, admitamos que H é compacto e mostremos que H é finitamente gerado. Uma vez que

$$H \subseteq \bigcup_{h \in H} \langle h \rangle = \bigvee_{h \in H} \langle h \rangle$$

e H é compacto, existe $H' \subseteq H$ tal que H' é finito e

$$H \subseteq \bigvee_{h \in H'} \langle h \rangle = \langle \bigcup_{h \in H'} \langle h \rangle \rangle.$$

Considerando que $\langle \bigcup_{h \in H'} \langle h \rangle \rangle = \langle H' \rangle$, conclui-se que H é finitamente gerado.

Assim, os elementos compactos de $(\text{Subg}(G), \subseteq)$ são os subgrupos de G finitamente gerados.

Consequentemente, $(\text{Subg}(G), \subseteq)$ é compactamente gerado, pois, para todo $H \in \text{Subg}(G)$, tem-se $H = \bigvee_{h \in H} \langle h \rangle$ e, para todo $h \in H$, $\langle h \rangle$ é um elemento compacto.

1.13. Sejam \mathcal{R} e \mathcal{S} reticulados. Mostre que:

- (a) Se \mathcal{R} é distributivo (modular), então qualquer sub-reticulado de \mathcal{R} é distributivo (modular).

Sejam $\mathcal{R} = (R; \wedge_{\mathcal{R}}, \vee_{\mathcal{R}})$ um reticulado distributivo e $\mathcal{S} = (S; \wedge_{\mathcal{S}}, \vee_{\mathcal{S}})$ um sub-reticulado de \mathcal{R} .

Então $S \subseteq R$ e, para quaisquer $x, y \in S$,

$$x \wedge_{\mathcal{S}} y = x \wedge_{\mathcal{R}} y,$$

$$x \vee_{\mathcal{S}} y = x \vee_{\mathcal{R}} y.$$

Logo, para quaisquer $x, y, z \in S$, tem-se,

$$\begin{aligned} x \wedge_{\mathcal{S}} (y \vee_{\mathcal{S}} z) &= x \wedge_{\mathcal{R}} (y \vee_{\mathcal{R}} z) \\ &= (x \wedge_{\mathcal{R}} y) \vee_{\mathcal{R}} (x \wedge_{\mathcal{R}} z) \quad (\mathcal{R} \text{ é distributivo}) \\ &= (x \wedge_{\mathcal{S}} y) \vee_{\mathcal{S}} (x \wedge_{\mathcal{S}} z). \end{aligned}$$

Logo \mathcal{S} é distributivo.

De modo análogo prova-se que todo o sub-reticulado de um reticulado modular também é um reticulado modular.

(b) Se \mathcal{R} e \mathcal{S} são distributivos (modulares), então $\mathcal{R} \times \mathcal{S}$ é distributivo (modular).

Sejam $\mathcal{R} = (R; \wedge_{\mathcal{R}}, \vee_{\mathcal{R}})$ e $\mathcal{S} = (S; \wedge_{\mathcal{S}}, \vee_{\mathcal{S}})$ reticulados distributivos. Então

$$\mathcal{R} \times \mathcal{S} = (R \times S; \wedge_{\mathcal{R} \times \mathcal{S}}, \vee_{\mathcal{R} \times \mathcal{S}}),$$

onde $\wedge_{\mathcal{R} \times \mathcal{S}}$ e $\vee_{\mathcal{R} \times \mathcal{S}}$ são as operações binárias em $R \times S$ definidas por

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) \wedge_{\mathcal{R} \times \mathcal{S}} (b_1, b_2) &= (a_1 \wedge_{\mathcal{R}} b_1, a_2 \wedge_{\mathcal{S}} b_2), \\ (a_1, a_2) \vee_{\mathcal{R} \times \mathcal{S}} (b_1, b_2) &= (a_1 \vee_{\mathcal{R}} b_1, a_2 \vee_{\mathcal{S}} b_2),\end{aligned}$$

é um reticulado.

Considerando, que \mathcal{R} e \mathcal{S} são distributivos, para quaisquer $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) \in R \times S$, tem-se

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) \wedge_{\mathcal{R} \times \mathcal{S}} ((b_1, b_2) \vee_{\mathcal{R} \times \mathcal{S}} (c_1, c_2)) &= (a_1, a_2) \wedge_{\mathcal{R} \times \mathcal{S}} (b_1 \vee_{\mathcal{R}} c_1, b_2 \vee_{\mathcal{S}} c_2) \\ &= (a_1 \wedge_{\mathcal{R}} (b_1 \vee_{\mathcal{R}} c_1), a_2 \wedge_{\mathcal{S}} (b_2 \vee_{\mathcal{S}} c_2)) \\ &= ((a_1 \wedge_{\mathcal{R}} b_1) \vee_{\mathcal{R}} (a_1 \wedge_{\mathcal{R}} c_1), (a_2 \wedge_{\mathcal{S}} b_2) \vee_{\mathcal{S}} (a_2 \wedge_{\mathcal{S}} c_2)) \quad (1) \\ &= (a_1 \wedge_{\mathcal{R}} b_1, a_2 \wedge_{\mathcal{S}} b_2) \vee_{\mathcal{R} \times \mathcal{S}} (a_1 \wedge_{\mathcal{R}} c_1, a_2 \wedge_{\mathcal{S}} c_2) \\ &= ((a_1, a_2) \wedge_{\mathcal{R} \times \mathcal{S}} (b_1, b_2)) \vee_{\mathcal{R} \times \mathcal{S}} ((a_1, a_2) \wedge_{\mathcal{R} \times \mathcal{S}} (c_1, c_2))\end{aligned}$$

(1) \mathcal{R} e \mathcal{S} são distributivos

Logo $\mathcal{R} \times \mathcal{S}$ é distributivo.

De modo similar prova-se que se \mathcal{R} e \mathcal{S} são modulares, então $\mathcal{R} \times \mathcal{S}$ é modular.

(c) Se \mathcal{R} é distributivo (modular) e \mathcal{S} é uma imagem homomorfa de \mathcal{R} , então \mathcal{S} é distributivo (modular).

Sejam $\mathcal{R} = (R; \wedge_{\mathcal{R}}, \vee_{\mathcal{R}})$ e $\mathcal{S} = (S; \wedge_{\mathcal{S}}, \vee_{\mathcal{S}})$ reticulados tais que \mathcal{S} é uma imagem homomorfa de \mathcal{R} . Então existe um homomorfismo $h: R \rightarrow S$ tal que h é sobrejetivo.

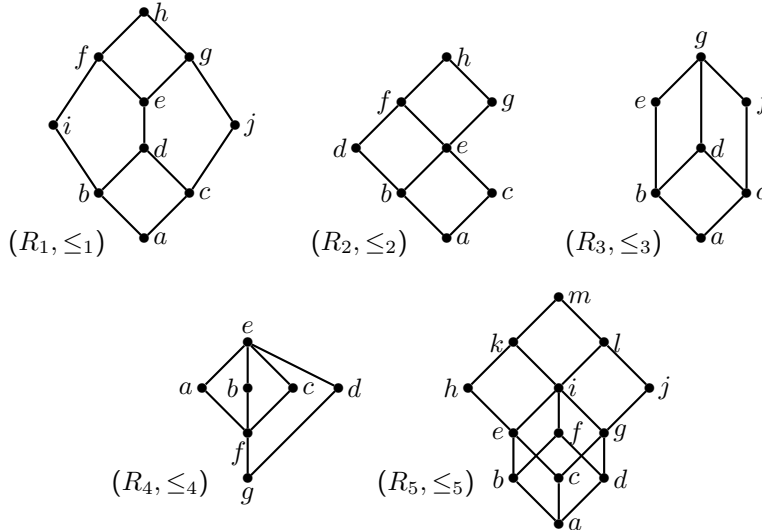
Sendo \mathcal{R} um reticulado distributivo (modular), prova-se que $\mathcal{S} = h(\mathcal{R})$ também é um reticulado distributivo (modular), uma vez que, para qualquer $y \in S$, existe $x \in R$ tal que $y = h(x)$ e, para quaisquer $a, b \in R$,

$$h(a \wedge_{\mathcal{R}} b) = h(a) \wedge_{\mathcal{S}} h(b),$$

$$h(a \vee_{\mathcal{R}} b) = h(a) \vee_{\mathcal{S}} h(b).$$

Fica ao cuidado do aluno a verificação de que \mathcal{S} é um reticulado distributivo (modular).

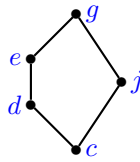
1.14. Diga, justificando, quais dos seguintes reticulados são distributivos e quais são modulares.



Um reticulado (R, \leq) é distributivo se e só se não tem qualquer sub-reticulado isomorfo a N_5 ou a M_3 . Um reticulado (R, \leq) é modular se e só se não tem qualquer sub-reticulado isomorfo a N_5 .

- (R_1, \leq_1)

O reticulado (R_1, \leq_1) não é modular, pois tem um sub-reticulado isomorfo a N_5 . O reticulado a seguir indicado é um sub-reticulado de (R_1, \leq_1) e é isomorfo a N_5 .



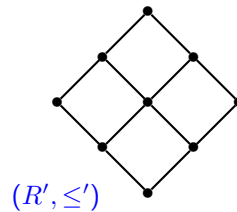
Todo o reticulado distributivo é um reticulado modular. Por conseguinte, (R_1, \leq_1) não é distributivo.

- (R_2, \leq_2)

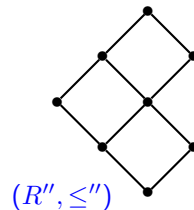
Seja \mathcal{R} a cadeia com 3 elementos a seguir representada



Então o reticulado $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ é isomorfo ao reticulado seguinte



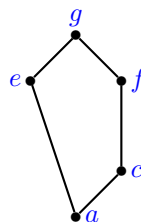
Todas as cadeias são reticulados distributivos. O produto de reticulados distributivos é ainda um reticulado distributivo e toda a imagem homomorfa de um reticulado distributivo é também um reticulado distributivo. Logo (R', \leq') é um reticulado distributivo. Todo o sub-reticulado de um reticulado distributivo é também um reticulado distributivo. Então o reticulado seguinte (o qual é um sub-reticulado de (R', \leq'))



é um reticulado distributivo. O reticulado (R_2, \leq_2) é uma imagem homomorfa do reticulado (R'', \leq'') . Considerando que toda a imagem homomorfa de um reticulado distributivo é um reticulado distributivo, conclui-se que (R_2, \leq_2) é um reticulado distributivo.

- (R_3, \leq_3)

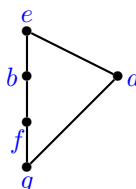
O reticulado a seguir representado



é um sub-reticulado de (R_3, \leq_3) e é isomorfo a N_5 . Logo (R_3, \leq_3) não é modular. Como todo o reticulado distributivo é um reticulado modular, então (R_3, \leq_3) não é distributivo.

- (R_4, \leq_4)

O reticulado seguinte



é um subreticulado de (R_4, \leq_4) e é isomorfo a N_5 , logo (R_4, \leq_4) não é modular e, por conseguinte, também

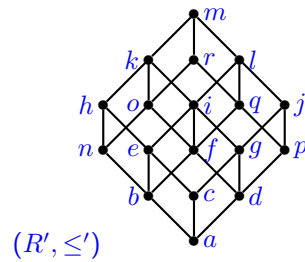
não é distributivo.

- (R_5, \leq_5)

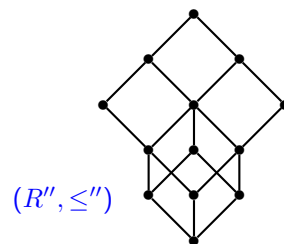
O reticulado $(\mathcal{R} \times \mathcal{R}) \times S$, onde \mathcal{R} e S são, respetivamente, as cadeias com 3 e 2 elementos a seguir representadas



é isomorfo ao reticulado seguinte



Todas as cadeias são reticulados distributivos. O produto de reticulados distributivos é ainda um reticulado distributivo e toda a imagem homomorfa de um reticulado distributivo é também um reticulado distributivo. Logo (R', \leq') é um reticulado distributivo. Todo o sub-reticulado de um reticulado distributivo é um reticulado distributivo. Então o reticulado seguinte (o qual é um sub-reticulado de (R', \leq'))



é um reticulado distributivo. O reticulado (R_5, \leq_5) é uma imagem homomorfa do reticulado (R'', \leq'') . Considerando que toda a imagem homomorfa de um reticulado distributivo é também um reticulado distributivo, conclui-se que (R_5, \leq_5) é um reticulado distributivo.