Definição

Um grafo platónico é um grafo conexo, planar, no qual todos os vértices têm o mesmo grau e o número de arestas que tocam cada face é constante.

EXEMPLO 26

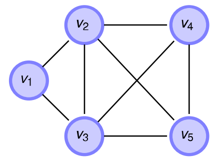
São grafos platónicos

- o grafo trivial, em que o único vértice tem grau 0,
- K_2, em que os dois vértices têm grau 1,
- C_n, com $n \geq 3$, em que os vértices têm grau 2,
- os grafos resultantes da planificação dos sólidos platónicos, ou seja,
  - do tetraedro, em que os quatro vértices têm grau 3,
  - do octaedro, em que os seis vértices têm grau 4,
  - do cubo, em que os oito vértices têm grau 3,
  - do dodecaedro, em que os vinte vértices têm grau 3,
  - do icosaedro, em que os doze vértices têm grau 5.

Definição

Um caminho num grafo diz-se um caminho euleriano se é um caminho simples e percorre todas as arestas do grafo.

EXEMPLO 27

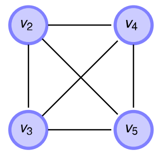


O caminho

$$(v_5, v_3, v_1, v_2, v_4, v_5, v_2, v_3, v_4)$$

é euleriano.

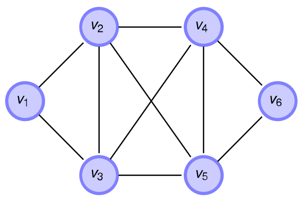
No grafo seguinte não existem caminhos eulerianos.



Definição

Um circuito num grafo diz-se um circuito euleriano se é um circuito simples e percorre todas as arestas do grafo.

EXEMPLO 28



O caminho

$$(v_3, v_1, v_2, v_4, v_6, v_5, v_4, v_3, v_2, v_5, v_3)$$

é um circuito euleriano.

Definição

Um grafo G diz-se euleriano se existir em G um circuito euleriano.

Definição

Um grafo G diz-se semi-euleriano se existir em G um caminho euleriano mas não existe um circuito euleriano.

Notas

- Se G é euleriano, então G tem pelo menos 3 vértices.
- Qualquer grafo euleriano ou semi-euleriano é conexo.
- Se $G = (V, E)$ é um grafo euleriano e $\{u, w\} \in E$, então existe um circuito euleriano
$$(v_1, v_2, \ldots, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n, v_1)$$
em que $\{u, w\} = \{v_n, v_1\}$ ou $\{u, w\} = \{v_i, v_{i+1}\}$ para algum $i < n$. Consequentemente,
$$(v_n, v_1, v_2, \ldots, v_n) \text{ e } (v_1, v_n, v_{n-1}, \ldots, v_1)$$
ou $(v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n, v_1, v_2, \ldots, v_i)$ e $(v_{i+1}, v_i, \ldots, v_2, v_1, v_n, \ldots, v_{i+1})$ são circuitos eulerianos de G em que a primeira aresta é $\{u, w\}$.
- Sejam G um grafo semi-euleriano e $(v_1, \ldots, v_n)$ um caminho euleriano. Então, acrescentando $\{v_n, v_1\}$ ao conjunto das arestas obtém-se um grafo euleriano, porque $(v_1, \ldots, v_n, v_1)$ é um circuito euleriano.

Proposição

Num grafo G em que todos os vértices têm grau par, qualquer caminho simples pode ser estendido a um circuito simples.

PROVA
Seja $C_0 = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ um caminho simples de G. Seja m o número de arestas de C_0 que incidem em v_n.

- Se $v_1 = v_n$, então C_0 é um circuito simples (notar que, neste caso, m é par).
- Senão, m é ímpar e, como $gr\ v_n$ é par, há pelo menos uma aresta que incide v_n, digamos $\{v_n, v_{n+1}\}$, que não faz parte de C_0. Então

$$C_1 = (v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1})$$

é um caminho simples.

Repetindo, sucessivamente, este processo, como G é finito, ao fim de um número finito k ($k \geq 1$) de etapas teremos que

$$C_k = (v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n, \ldots, v_{n+k})$$

é um caminho simples e $v_1 = v_{n+k}$.

Teorema

Se $G = (V, E)$ é um grafo conexo, então verifica-se que G é euleriano se e só se todos os vértices têm grau par.

PROVA
Suponhamos que G é euleriano. Seja $v_i \in V$. Então existe $C = (v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n, v_1)$ um circuito euleriano. Seja m o número de ocorrências do vértice v_i em C. Então,

$$gr\ v_i = \begin{cases} 2m & \text{se } v_i \neq v_1 \\ 2(m-1) & \text{se } v_i = v_1 \end{cases}$$

Logo, $gr\ v_i$ é par.

Reciprocamente, se todos os vértices de V têm grau par, então G tem circuitos simples. Seja $C = (v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n, v_1)$ um circuito simples de comprimento máximo. Se C não é euleriano, como G é conexo, existe $w \in V$ e v_i um vértice do caminho C tal que $\{v_i, w\} \in E$. Assim,

$$(w, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n, v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i)$$

é um caminho simples, que pode ser estendido a um circuito simples C', cujo comprimento é maior do que o comprimento de C. Então C é um circuito euleriano.

Corolário

Se $G = (V, E)$ é um grafo conexo, então verifica-se que G é semi-euleriano se e só se existem exatamente dois vértices com grau ímpar.

PROVA
Suponhamos que G é semi-euleriano. Então existe um caminho euleriano que não é um circuito:

$$C = (v_1, \ldots v_i, \ldots, v_n).$$

Seja G' um grafo que resulta de G por se acrescentar $\{v_n, v_1\}$ ao conjunto das arestas. Então, $(v_1, \ldots v_i, \ldots, v_n, v_1)$ é um circuito euleriano em G', pelo que todos os vértices de G' têm grau par. Logo, em G, v_1 e v_n têm grau ímpar e todos os outros vértices têm grau par.
Reciprocamente, se em G existem exatamente dois vértices com grau ímpar, digamos v e w, acrescentemos a G a aresta $\{v, w\}$ obtendo assim um grafo G' em que todos os vértices têm grau par. Logo G' é um grafo euleriano e existe um circuito euleriano do tipo

$$(v, w, \ldots, v).$$

Assim,

$$(w, \ldots, v)$$

é um caminho simples em G que passa por todos os vértices de G. Logo G é semi-euleriano.

EXEMPLOS 29 São grafos eulerianos os grafos:

- C_n ($n \in \mathbb{N}$);
- K_n com n ímpar;
- $K_{m,n}$ onde m e n são pares;
- o octaedro.

Algoritmo para calcular um circuito euleriano

1. Selecionar um vértice v qualquer e construir o caminho trivial $C = (v)$;
2. se não há nenhuma aresta de extremidade v, o algoritmo termina;
3.
   1. caso exista, selecionar uma aresta $\{v, w\}$ que não é uma ponte;
   2. se não existir, selecionar uma aresta ponte $\{v, w\}$;
4. 'remover' a aresta escolhida $\{v, w\}$;
5. prolongar o caminho C acrescentando w no final da sequência;
6. fazer $v = w$ e regressar ao passo 2.

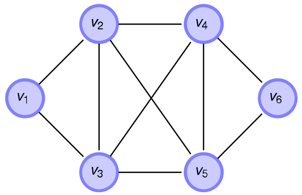
No final se o grafo resultante não tem arestas, o grafo é euleriano e o caminho encontrado é um circuito euleriano.

Para calcular um caminho euleriano, num grafo semi-euleriano, no passo 2 deve-se iniciar o processo selecionando um vértice v de grau ímpar.

Definição

Um caminho num grafo diz-se caminho hamiltoniano se é um caminho elementar e passa em todos os vértices do grafo. Um ciclo que é um caminho hamiltoniano diz-se um ciclo hamiltoniano

EXEMPLO 30



O caminho $(v_3, v_1, v_2, v_4, v_6, v_5)$ é um caminho hamiltoniano.

O ciclo $(v_5, v_3, v_1, v_2, v_4, v_6, v_5)$ é um ciclo hamiltoniano.

Definição

Um grafo G diz-se hamiltoniano se existir um ciclo hamiltoniano em G.

EXEMPLOS 31

São exemplos de grafos hamiltonianos

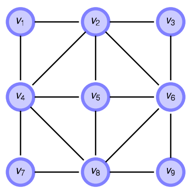
- os grafos ciclos C_n com $n \geq 3$;
- os grafos completos K_n com $n \geq 3$;
- os grafos bipartidos completos da forma $K_{n,n}$ com $n \geq 2$;
- os grafos platónicos.

Notas

Um grafo hamiltoniano é conexo e

- não existem vértices de grau 1;
- se um vértice v tem grau 2, as duas arestas que incidem em v fazem parte de qualquer ciclo hamiltoniano;
- se um vértice v tem grau maior do que 2, em cada ciclo hamiltoniano, apenas duas das arestas que incidem em v fazem parte desse ciclo.

EXEMPLO 32



Como $gr\, v_1 = gr\, v_3 = gr\, v_7 = gr\, v_9 = 2$, então as arestas $\{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_4\}$, $\{v_3, v_2\}$, $\{v_3, v_6\}$, $\{v_7, v_4\}$, $\{v_7, v_8\}$, $\{v_9, v_8\}$ e $\{v_9, v_6\}$ teriam de fazer parte de um qualquer ciclo hamiltoniano de G, caso existisse.

Notar que estas arestas formam o ciclo

$$(v_1, v_2, v_3, v_6, v_9, v_8, v_7, v_4, v_1)$$

que não passa no vértice v_5, pelo que este ciclo não é hamiltoniano.

A inclusão de mais arestas para 'expandir' este ciclo conduzia a um caminho que teria três ou mais arestas incidentes num mesmo vértice.

Logo, não há nenhum ciclo hamiltoniano neste grafo, embora existam caminhos hamiltonianos.

Definição

Sejam $G = (V, E)$ um grafo e $\mathcal{C}$ um conjunto finito a cujos elementos chamaremos cores. Uma coloração de G é uma função $c : V \to \mathcal{C}$ tal que $c(v) \neq c(w)$ se v e w são vértices adjacentes.

c diz-se uma k-coloração se é uma coloração tal que $\sharp c(V) = k$.

Designa-se por número cromático de G ao menor número natural k tal que existe uma k-coloração de G.
Tal número representa-se por $\chi(G)$.

EXEMPLOS 33

- Se G é um grafo bipartido então $\chi(G) = 2$.
- $\chi(C_n) \leq 3$ para qualquer $n \geq 3$.
- $\chi(K_n) = n$ para $n \in \mathbb{N}$.
- Se G é um grafo nulo, então $\chi(G) = 1$

$$1 \leq \chi(G) \leq \sharp V \quad \text{e} \quad \chi(G) = \text{máx}\,\{\chi(G') \mid G' \leq G \text{ e } G' \text{ é conexo}\}.$$

Proposição

Seja $G = (V, E)$ um grafo tal que $\chi(G) = k$. Então, G tem pelo menos k vértices de grau maior ou igual a $k - 1$.

PROVA

Seja G' um subgrafo de G que resulta de G por se retirar um conjunto maximal de arestas sem alterar o número cromático k e eliminar os vértices isolados. É claro que G' é conexo e tem pelo menos k vértices.
Sejam v um vértice qualquer de G' e G'' o grafo que resulta de G' por se eliminar o vértice v e as arestas incidentes em v. Então $\chi(G'') \leq k - 1$.
Se $gr\, v \leq k - 2$, então, em G', v deverá ter uma cor diferente dos vértices adjacentes (no máximo $k - 2$). Assim, o número cromático de G' seria não superior a $k - 1$ o que é contraditório com a forma de construção de G'. Logo, os vértices de G' têm grau superior a $k - 2$.

$$\chi(G) \leq 1 + \text{máx}\,\{gr\, v \mid v \in V\}.$$

A primeira conjetura sobre coloração de grafos dizia respeito à coloração de vértices de grafos planares. Francis Guthrie em 1852 conjeturou que todo o grafo planar poderia ser colorido com no máximo 4 cores.

Teorema das cinco cores - Headwood (1890)

Se G é um grafo planar, então $\chi(G) \leq 5$.

Teorema das quatro cores - Kenneth Appel e Wolfgang Haken (1976)

Se G é um grafo planar, então $\chi(G) \leq 4$.

Se G é um grafo com n vértices e $\sharp C = k$, existem k^n funções de $V \to \mathcal{C}$. Analisar por exaustão quais dessas funções são colorações não é um método adequado para determinar o número cromático de G.

No entanto existem vários algoritmos para colorir os vértices de um grafo tentando não usar muitas cores sem ser necessário.

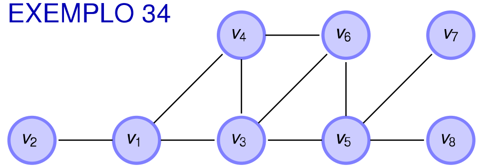
Algoritmo de coloração de vértices de Welch-Powell

1. Colocar os vértices de G em sequência S por ordem decrescente dos seus graus e escolher uma cor c;
2. Atribuir c ao primeiro vértice de S e, percorrendo S por ordem, atribuir a mesma cor a cada vértice que não é adjacente a um vértice de S já colorido com c;
3. Eliminar em S os vértices que foram coloridos com c e retirar c do conjunto das cores.
4. Escolher um novo valor para c e voltar ao passo 2. com a nova sequência, também designada S, enquanto não é vazia.

No final todos os vértices estão coloridos.

Este método nem sempre conduz ao número cromático e é um algoritmo de complexidade $\mathcal{O}(n^2)$. O problema número cromático é um dos 21 problemas NP-completos de Karp, de 1972. Vários algoritmos de tempo exponencial foram desenvolvidos com base no método de Zykov (1949).

EXEMPLO 34



grau	vértices
1	$v_2,\ v_7,\ v_8$
3	$v_1,\ v_4,\ v_6$
4	$v_3,\ v_5$

$$\chi(G) \leq 1 + 4 = 5$$

$\chi(G) \neq 5$ porque não existem 5 vértices de grau maior ou igual a 4. No entanto, existem 4 vértices de grau maior ou igual a 3. Logo, $\chi(G) \leq 4$.

Fazendo $S = (v_3, v_5, v_4, v_6, v_1, v_2, v_7, v_8)$, seguindo o algoritmo, obter-se-ia

$$\begin{array}{cccccccc} v_3 & v_5 & v_1 & v_6 & v_4 & v_2 & v_7 & v_8 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ c_1 & c_2 & c_2 & c_3 & c_4 & c_1 & c_1 & c_1 \end{array}$$

Fazendo $S = (v_3, v_5, v_4, v_6, v_1, v_2, v_7, v_8)$, seguindo o algoritmo, obter-se-ia

$$\begin{array}{cccccccc} v_3 & v_5 & v_4 & v_6 & v_1 & v_2 & v_7 & v_8 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ c_1 & c_2 & c_2 & c_3 & c_3 & c_1 & c_1 & c_1 \end{array}$$

Como o grafo não é bipartido, então $\chi(G) > 2$ e, consequentemente, $\chi(G) = 3$.