Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Lic. em Ciências da Computação
Lic. em Matemática
2019/2020

Álgebra Universal e Categorias

1º teste (17 de abril) — duração: 2 horas

1. Seja $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}}, 2^{\mathcal{A}})$ a álgebra de tipo $(1, 0)$, onde $A = \{n \in \mathbb{N}_0 : n \leq 10\}$, $2^{\mathcal{A}} = 2$ e $f^{\mathcal{A}} : A \to A$ é a operação definida por
$$f^{\mathcal{A}}(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se} \quad x \in \{0,1,2,\ldots,8\} \\ 1 & \text{se} \quad x = 9 \\ 0 & \text{se} \quad x = 10 \end{cases}$$
Determine $Sg^{\mathcal{A}}(\{3\})$ e $Sg^{\mathcal{A}}(\{4\})$. Indique todos os subuniversos de $\mathcal{A}$.

2. Seja $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra. Mostre que, para quaisquer conjuntos $X, Y, Z \subseteq A$,
$$Sg^{\mathcal{A}}(Sg^{\mathcal{A}}(X \cup Y) \cup Z) \subseteq Sg^{\mathcal{A}}((X \cup Y) \cup Z).$$

3. Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ e $\mathcal{B} = (B; G)$ álgebras do mesmo tipo, $\alpha : A \to B$ uma função e
$$S = \{(a, \alpha(a)) \mid a \in A\}.$$
Mostre que se S é um subuniverso de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, então α é um homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$.

4. Sejam $\mathcal{C} = (\mathbb{C}; +^{\mathcal{C}})$ e $\mathcal{R}_4 = (\mathbb{R}_4; +^{\mathcal{R}_4})$ as álgebras de tipo (2), onde $+^{\mathcal{C}}$ é a adição usual em $\mathbb{C}$ e $+^{\mathcal{R}_4}$ é a adição usual em $\mathbb{R}_4$. Para cada $k \in \mathbb{R}$, seja $\alpha_k : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_4$ a aplicação definida por
$$\alpha_k(a + bi) = (a, b, -b, k^2 - 4).$$
   (a) Justifique que α_k é um homomorfismo de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{R}_4$ se e só se $k \in \{-2, 2\}$.
   (b) Considere $k = 2$.
      i. Diga, justificando, se α_2 é um monomorfismo e se é um epimorfismo.
      ii. Justifique que $\mathcal{C} \cong \alpha_2(\mathcal{C})$ e que $\mathcal{C} \cong \mathcal{C}/\ker \alpha_2$.

5. Uma álgebra $\mathcal{G} = (G; \cdot, ^{-1}, 1_G)$ de tipo $(2, 1, 0)$ diz-se um *grupo abeliano* se são satisfeitas as seguintes condições
   (1) $\forall x, y, z \in G$, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
   (2) $\forall x, y \in G$, $x \cdot y = y \cdot x$.
   (3) $\forall x \in G$, $x \cdot 1_G = x = 1_G \cdot x$.
   (4) $\forall x \in G$, $x \cdot x^{-1} = 1_G = x^{-1} \cdot x$.

   Dado um subuniverso S de um grupo abeliano $\mathcal{G} = (G; \cdot, ^{-1}, 1_G)$, seja θ_S a relação de equivalência em G definida por
$$x \,\theta_S\, y \text{ se e só se } x \cdot y^{-1} \in S.$$
   Mostre que, para qualquer subuniverso S de um grupo abeliano $\mathcal{G}$, θ_S é uma congruência em $\mathcal{G}$.

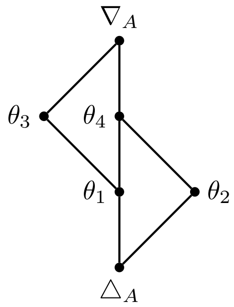
$\overrightarrow{(v.s.f.f.)}$

6. Seja $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}})$ a álgebra de tipo $(1,1)$ tal que $A = \{0,1,2,3\}$ e $f^{\mathcal{A}}$ e $g^{\mathcal{A}}$ são as operações definidas por

x	0	1	2	3
$f^{\mathcal{A}}(x)$	1	3	3	1

x	0	1	2	3
$g^{\mathcal{A}}(x)$	1	1	2	3

Sabendo que o reticulado de congruências de $\mathcal{A}$ pode ser representado por



onde $\theta_2 = \triangle_A \cup \{(1,2),(2,1)\}$ e $\theta_3 = \Theta(0,3)$.

(a) Diga, justificando, se (θ_2, θ_3) é um par de congruências fator.

(b) Indique as tabelas das operações da álgebra $\mathcal{A}/\theta_2 = (A/\theta_2; f^{\mathcal{A}/\theta_2}, g^{\mathcal{A}/\theta_2})$. Diga, justificando, se a álgebra $\mathcal{A}/\theta_2$ é congruente-distributiva.

(c) Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: A álgebra $\mathcal{A}$ não é subdiretamente irredutível e para quaisquer álgebras $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ tais que $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \times \mathcal{C}$, tem-se $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ ou $\mathcal{A} \cong \mathcal{C}$.

7. Considere os operadores de classes de álgebras H, S e P. Mostre que $HSPH = HSP$. Conclua que, para para qualquer classe de álgebras $\mathbf{K}$, tem-se $V(\mathbf{K}) = V(H(\mathbf{K}))$.

Cotação: 1.(1.75); 2.(1.75); 3.(2.25); 4.(2.0+1.5+1.5); 5.(2.0); 6.(1.75+2.0+1.75); 7.(1.75).