Proposta de resolução

Grupo I

Em cada questão deste grupo deve ser assinalada apenas uma das opções de resposta. A uma resposta correta é atribuída uma cotação de 1.25 valores (apenas uma resposta está correta) e a uma resposta errada é atribuída uma cotação de -0.25 valores. A cotação mínima total deste grupo é de 0 valores.

1. As matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ c & 0 \end{bmatrix}$

   - [ ] são comutáveis para qualquer $c \in \mathbb{R}$.
   - [ ] são comutáveis se $c = -1$.
   - [X] nunca são comutáveis.
   - [ ] são ambas elementares quando $c = 0$.

2. Para as matrizes $A \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathcal{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$,

   - [ ] AB e BA estão bem definidas.
   - [ ] $A^T B^T$ está bem definida.
   - [ ] $A + B^T$ pode ser calculada.
   - [X] $AB \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$.

3. Se A é um matriz quadrada tal que $A^2 = I_n$, então

   - [ ] A é invertível e $A^{-1} = -A$.
   - [ ] A não é invertível.
   - [X] A é invertível e $A^{-1} = A$.
   - [ ] $\det(A) = 1$.

4. Se A é uma matriz de ordem 4 tal que $\det(A) = 2$, então

   - [ ] $\det(-A) = -2$.
   - [ ] $\det\left(\left(A^T\right)^{-1}\right) = 2$
   - [ ] $\det(2A^T) = 4$.
   - [X] $\det(A^{-1}A^T) = 1$.

5. Se $[A|\boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 5 & -5 & b_1 \\ 0 & 2 & 4 & b_2 \\ -1 & -2 & 1 & b_3 \end{array}\right]$ é a matriz ampliada de um sistema de equações lineares tal que $(1,1,1)$ é solução desse sistema, então

   - [ ] $\text{car}(A) = 2$ e $\text{car}(A|\boldsymbol{b}) = 3$.
   - [ ] $(b_1, b_2, b_3) = (1,1,1)$.
   - [X] $b_1 = 1$, $b_2 = 6$ e $b_3 = -2$.
   - [ ] $\text{car}(A) > \text{car}(A|\boldsymbol{b})$.

6. Se $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & \alpha-2 & \beta \end{array}\right]$ é a matriz ampliada de um sistema de equações lineares, com α e β parâmetros reais, então

   - [X] o sistema é possível determinado se e só se $\alpha \neq 3$.
   - [ ] o sistema é possível e indeterminado se $\alpha = 2$ e $\beta = 0$.
   - [ ] o sistema é sempre possível.
   - [ ] o sistema é impossível se $\alpha = 3$.

Grupo II

Neste grupo as respostas a todas as questões devem ser devidamente justificadas.

1. [1.5 valores] Sendo A uma matriz quadrada de ordem n invertível, verifique que a equação matricial na variável X

$$A + AX = 3I_n$$

tem solução $X = 3A^{-1} - I_n$.

Resolução.

Temos

$$A + AX = A + A(3A^{-1} - I_n) = A + 3AA^{-1} - AI_n = A + 3I_n - A = 3I_n,$$

ou seja, $X = 3A^{-1} - I_n$ é solução da equação $A + AX = 3I_n$.

2. [3.5 valores] Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares nas incógnitas x, y, z e w com a seguinte matriz simples e vetor dos termos independentes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ \beta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \beta \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha\beta \end{bmatrix}.$$

(a) Use o método de eliminação de Gauss para resolver o sistema no caso em que $\alpha = \beta = 1$.

(b) Considere o caso em que $\beta = 0$ e $\alpha = 2$. Verifique que o sistema é um sistema possível e indeterminado. Apresente a solução geral do sistema e duas soluções particulares.

Resolução.

(a)

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \longleftarrow l_2 - l_1]{} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_3 \longleftarrow l_3 - l_2 \\ l_4 \longleftarrow l_4 - l_2}]{} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

O sistema inicial é equivalente ao sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x & & & +w & = 1 \\ & y & & -w & = -1 \\ & & z & +w & = 1 \\ & & & 2w & = 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ w = 1 \end{array}\right. .$$

(b) Nesta caso ficamos com a matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Como $\mathrm{car}(A) = \mathrm{car}(A|b) = 3 < n = 4$, o sistema é possível e indeterminado. A solução geral é dada por

$$(x, y, z, w) = (1 - 2\alpha, 0, 0, \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Duas soluções particulares obtêm-se, por exemplo, quando $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$,

$$(x, y, z, w) = (1, 0, 0, 0) \quad \text{e} \quad (x, y, z, w) = (-1, 0, 0, 1).$$

3. [3 valores] Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) Verifique que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   (b) Use A^{-1} para resolver o sistema de equações lineares

      i. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ com $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$.

      ii. $2A^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ com $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}^T$.

Resolução.

(a) Basta observar que

$$A \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2+2 \\ 1-1 & 1 & 1+1-2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3.$$

(b) i.

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \iff \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ii.

$$\begin{aligned} 2A^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} &\iff A^T\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{x} = \left(A^T\right)^{-1}\frac{1}{2}\boldsymbol{b} \\ &\iff \boldsymbol{x} = \left(A^{-1}\right)^T\frac{1}{2}\boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\iff \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4. [3 valores] Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) Calcule o determinante de A e conclua que A é invertível.

   (b) Use a regra de Cramer para resolver o sistema $A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, calculando assim a terceira coluna de A^{-1}.

   (c) Determine a terceira coluna da matriz $\mathrm{adj}(A)$ usando o resultado da alínea (b).

Resolução.

(a) Se escolhermos a primeira coluna da matriz para fazermos o desenvolvimento de Laplace, vem

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 4 & 3\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix} = (-1)^2 \times 1 \times \det\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix} + (-1)^4 \times 1 \times \det\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix} = 2 + 2 = 4.$$

Como $\det(A) \neq 0$, a matriz A é uma matriz invertível.

(b)

$$x_1 = \frac{1}{4}\det\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 0 & 4 & 3\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\left[1 \times \det\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{1}{4}\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 3\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\left[-1 \times \det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\right] = -\frac{3}{4}$$

$$x_3 = \frac{1}{4}\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\left[1 \times \det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 4\end{pmatrix}\right] = \frac{4}{4} = 1$$

Logo, a terceira coluna de A^{-1} é $\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 1\end{bmatrix}^T$.

(c) Dado que $\operatorname{adj}(A) = \det(A)A^{-1}$, a terceira coluna da matriz $\operatorname{adj}(A)$ é

$$4\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}2 & -3 & 4\end{bmatrix}^T.$$

5. [1.5 valores] Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, com $n \geq 2$, matrizes invertíveis. Mostre que

$$\operatorname{adj}(AB) = \operatorname{adj}(B)\cdot\operatorname{adj}(A).$$

Resolução.

Uma vez que A e B são matrizes invertíveis, também AB é uma matriz invertível e tem-se

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{\det(AB)}\operatorname{adj}(AB),$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\operatorname{adj}(AB) &= \det(AB)(AB)^{-1} = \det(A)\det(B)B^{-1}A^{-1}\\ &= \big(\det(B)B^{-1}\big)\big(\det(A)A^{-1}\big)\\ &= \operatorname{adj}(B)\operatorname{adj}(A).\end{aligned}$$