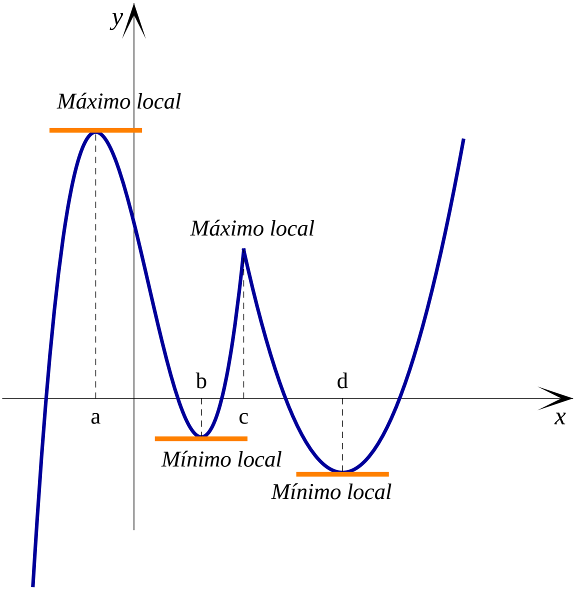
1.4 Extremos de funções

- Extremos livres
  - Funções de uma variável
  - Critério do discriminante (funções de duas variáveis)
- Extremos condicionados
  - Redução de dimensão
  - Método dos multiplicadores de Lagrange

O objetivo desta secção é o de determinar os pontos do domínio de uma dada função real onde a função atinge valores máximos e/ou valores mínimos (valores extremos). Trata-se de um tópico de grande interesse.

Em estudos anteriores, para funções reais de uma variável, aprendemos como usar as derivadas da função para encontrar o maior e o menor valor de f. Começamos por rever estes métodos para depois os estender a funções de duas variáveis.

Extremos locais (ou relativos) de funções de uma variável



Pontos críticos ($n = 1$)

Teremos particular interesse na determinação de máximos e mínimos locais (extremos locais). Será importante saber como distinguir entre estes pontos.

Para que a função tenha um extremo local em $x = a$, a função não deverá ser crescente nem decrescente em $x = a$.

Condição necessária para a existência de um extremo local (máximo ou mínimo) em $x = a$:

$$f'(a) = 0 \quad \text{ou} \quad f'(a) \text{ não está definida}$$

Um ponto nestas condições diz-se um ponto crítico (ou estacionário) de f.

Teste da primeira derivada

Seja $x = a$ um ponto crítico da função f. Então, f

- tem um máximo local em $x = a$ se $f'(x) > 0$ à esquerda de a e $f'(x) < 0$ à direita de a;
- tem um mínimo local em $x = a$ se $f'(x) < 0$ à esquerda de a e $f'(x) > 0$ à direita de a;
- não tem um extremo local se $f'(x)$ tem o mesmo sinal de ambos os lados de a.

Teste da segunda derivada

Seja $x = a$ um ponto crítico da função tal que $f'(a) = 0.$ Então,

- se $f''(a) > 0,$ a função tem um mínimo local em $x = a$;
- se $f''(a) < 0,$ a função tem um máximo local em $x = a$;
- se $f''(a) = 0$, nada se pode concluir quanto à natureza do ponto crítico. Outro teste é necessário.

Exemplo

Determine os pontos críticos da função

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3$$

e estude a sua natureza.

- Pontos críticos:

$$f'(x) = 0 \iff x^2 - 2x = 0 \iff x(x-2) = 0 \iff x = 0 \ \vee \ x = 2$$

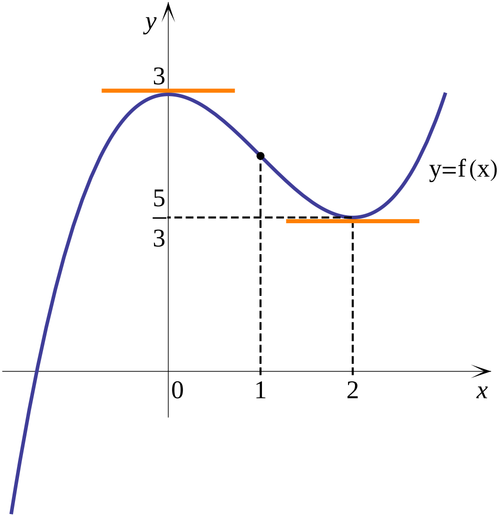
- Teste da segunda derivada:

$$f''(x) = 2x - 2$$

Como $f''(0) = -2 < 0$, então f tem um máximo local em $x = 0$ que é igual a $f(0) = 3$.

Como $f''(2) = 2 > 0$, então f tem um mínimo local em $x = 2$ que é igual a $f(2) = \frac{5}{3}$.

Exemplo



O ponto $x = 1$ é um *ponto de inflexão* (mudança do sentido da concavidade).

Extremos locais de funções de duas variáveis

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto, $(a,b) \in D$ e $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Diz-se que

- o ponto (a,b) é um minimizante local de f se existir uma vizinhança V de (a,b) [1] no domínio de f tal que

$$f(x,y) \geq f(a,b), \qquad \forall (x,y) \in V,$$

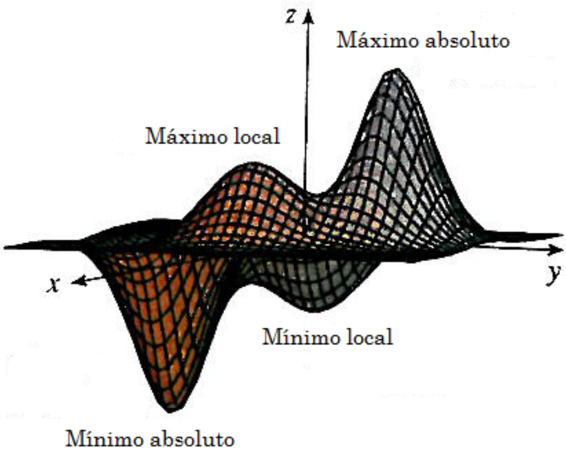
  e $f(a,b)$ é chamado um mínimo local de f;
- o ponto (a,b) é um maximizante local de f se existir uma vizinhança V de (a,b) no domínio de f tal que

$$f(x,y) \leq f(a,b), \qquad \forall (x,y) \in V,$$

  e $f(a,b)$ é chamado um máximo local de f;
- o ponto (a,b) é um extremante local de f se for um minimizante local ou um maximizante local de f.

[1] Bola aberta de centro em (a,b) e raio $\delta > 0$

Extremos locais de funções de duas variáveis



Pontos críticos ($n = 2$)

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$. Diz-se que o ponto $(a, b) \in D$ é

- ponto crítico (ou estacionário) de f se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0 \quad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0,$$

  isto é, se

$$\overrightarrow{\nabla} f(a, b) = \vec{0};$$

  ou se as derivadas parciais não existirem.

- ponto de sela de f se (a, b) é ponto crítico mas não é extremo local de f.

Pontos críticos e pontos extremantes ($n = 2$)

Teorema

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$. Se $(a, b) \in D$ é um extremante local de f, então (a, b) é um ponto crítico de f.

Ou seja, os pontos críticos são os únicos candidatos a pontos extremantes.

Geometricamente este resultado significa que se a superfície $z = f(x, y)$ tem um plano tangente num extremo local, então o plano tangente tem de ser horizontal. Recorde que a equação do plano tangente de f em $(a, b, f(a, b))$ é dada por

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot (y - b)$$

e, quando $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$, obtém-se o plano horizontal

$$z = f(a, b).$$

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$. *Vamos verificar que no ponto* $(1,3)$ *a função tem um mínimo local (e absoluto),* $f(1,3) = 4$.

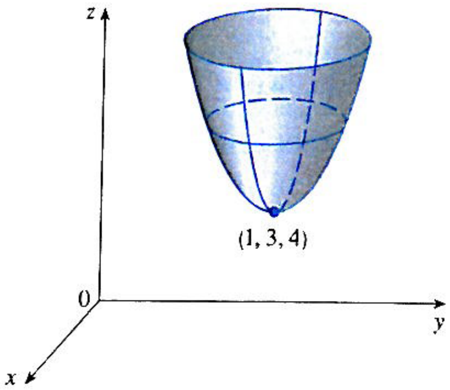


Figura 1: $z = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$

Exemplo (cont.)

Determinemos os pontos críticos de f.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ \\ 2y - 6 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ \\ y = 3 \end{cases}$$

O único ponto crítico de f é o ponto $(1,3)$.

Completando os quadrados na expresssão que define f, encontramos

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) + 14 - 1 - 9 \\ &= (x-1)^2 + (y-3)^2 + 4. \end{aligned}$$

Como $(x-1)^2 \geq 0$ e $(y-3)^2 \geq 0$, temos que

$$f(x,y) \geq 4 = f(1,3).$$

Ou seja, $4 = f(1,3)$ é um mínimo (absoluto) de f.

Exercício

Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x, y) = y^2 - x^2$.

(a) *Determine os pontos críticos de* f.

(b) *Verifique que* $(0, 0)$ *é um ponto de sela de* f.

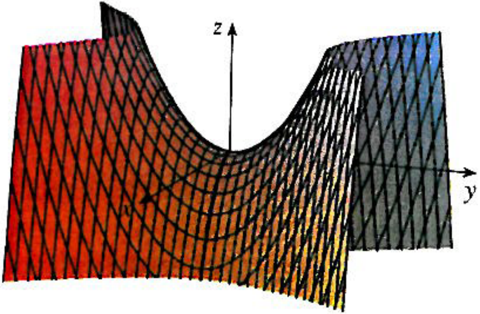


Figura 2: $z = y^2 - x^2$

Resolução.

(a) O único ponto crítico é o ponto $(0, 0)$.

(b) Para pontos no eixo dos xx, ou seja, quando $y = 0$, temos

$$f(x, y) = f(x, 0) = -x^2 < 0 \quad (x \neq 0).$$

Para pontos no eixo dos yy, ou seja, quando $x = 0$, temos

$$f(x, y) = f(0, y) = y^2 > 0 \quad (y \neq 0).$$

Isto significa que a superfície $z = y^2 - x^2$ tem um máximo quando vista na direção do eixo dos xx e tem um mínimo quando vista na direção do eixo dos yy.
Assim, qualquer vizinhança de $(0, 0)$ contém pontos onde f assume valores positivos e pontos onde f assume valores negativos. Logo, $f(0, 0)$ não pode ser um valor extremo de f.

Este exemplo ilustra o facto de que uma função não tem que ter um máximo ou um mínimo num ponto crítico.

Critério do discriminante ($n = 2$)

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ numa vizinhança de (a, b) e suponha-se que $(a, b) \in D$ é um ponto crítico de f. Defina-se

$$\Delta_f(a, b) = f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - \left[f_{xy}(a, b)\right]^2.$$

Chamamos a $\Delta_f(a, b)$ o *discriminante* de f em (a, b).

- Se $\Delta_f(a, b) > 0$ e
  - $f_{xx}(a, b) > 0$, então (a, b) é um minimizante local de f;
  - $f_{xx}(a, b) < 0$, então (a, b) é um maximizante local de f;
- se $\Delta_f(a, b) < 0$ então (a, b) é um ponto de sela de f;
- se $\Delta_f(a, b) = 0$ nada se pode concluir. O ponto (a, b) pode ser maximizante, minimizante ou ponto de sela.

Critério do discriminante $(n = 2)$

Dem. Calculemos a derivada direcional de segunda ordem de f em (a, b) na direcção de um qualquer vetor unitário $\vec{u} = (h, k)$.
A derivada de primeira ordem é dada por

$$D_{\vec{u}}f = f_x h + f_y k.$$

Aplicando este resultado mais uma vez, temos

$$\begin{aligned} D^2_{\vec{u}}f &= \big(f_x h + f_y k\big)_x h + \big(f_x h + f_y k\big)_y k \\ &= \big(f_{xx} h + f_{xy} k\big) h + \big(f_{xy} h + f_{yy} k\big) k \\ &= f_{xx} h^2 + 2 f_{xy} hk + f_{yy} k^2 \\ &= f_{xx} \left(h + \frac{f_{xy}}{f_{xx}} k\right)^2 + \frac{k^2}{f_{xx}} \left(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2\right) \end{aligned}$$

Se $\Delta_f(a, b) > 0$ e $f_{xx}(a, b) > 0$, dado que as derivadas de segunda ordem são contínuas, podemos concluir que $D^2_{\vec{u}}f(x, y) > 0$ para (x, y) numa vizinhança de (a, b). Assim, o gráfico de f fica acima do plano horizontal tangente em $(a, b, f(a, b))$ nesta vizinhança.

Critério do discriminante ($n = 2$)

$\Delta_f(a,b)$	$f_{xx}(a,b)$	(a,b)	
$+$	$+$	Minimizante local	Superfície acima do plano tangente
$+$	$-$	Maximizante local	Superfície abaixo do plano tangente
$-$		Ponto de sela	Plano tangente atravessa a superfície

Para relembrar a fórmula para o discriminante $\Delta_f(a,b)$ é útil escrevê-lo como um determinante:

$$\Delta_f(a,b) = \begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix}$$

Exercício

Classificar os pontos críticos da função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = 8y^3 + 12x^2 - 24xy$.

Resolução.

(a) *Determinar os pontos críticos de f.*

(b) *Estudar o sinal de $\Delta_f(x,y)$ nos pontos críticos.*

- *Pontos críticos*

  $$\begin{cases} f_x &= 0 \\ f_y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 24x - 24y &= 0 \\ 24y^2 - 24x &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= y \\ x^2 - x &= 0 \end{cases}$$

  Soluções do sistema: $(0,0)$ *e* $(1,1)$

- *Discriminante*

  $f_{xx}(x,y) = 24,\quad f_{yy}(x,y) = 48y \quad$ *e* $\quad f_{xy}(x,y) = -24.$

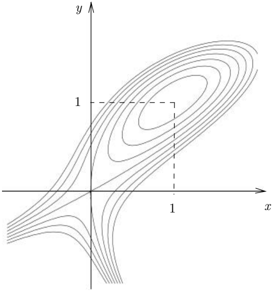
  Assim,

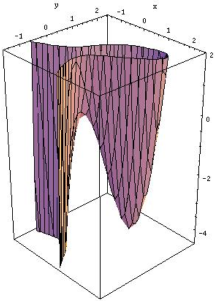
  $$\Delta_f(x,y) = f_{xx}(x,y).f_{yy}(x,y) - \left[f_{xy}(x,y)\right]^2 = 1152y - 576$$

- *Classificação dos pontos críticos*

  $(0,0)$ *é ponto de sela uma vez que* $\Delta_f(0,0) < 0.$

  Como $\Delta_f(1,1) > 0$ *e* $f_{xx}(1,1) > 0$*, o ponto* $(1,1)$ *é um minimizante local e o mínimo local é* $f(1,1) = -4.$

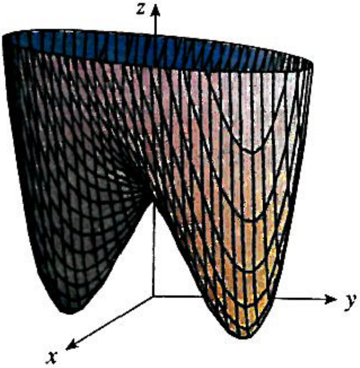




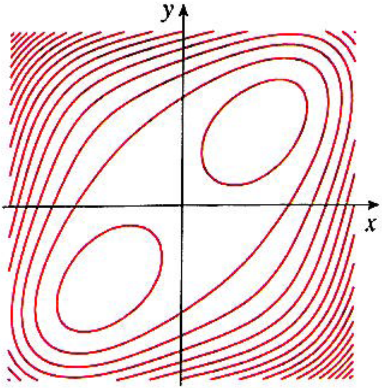
- O ponto $(0, 0)$ é ponto de sela.
- O ponto $(1, 1)$ é ponto minimizante local.

Exercício

Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.
Classifique os pontos críticos de f.



(a) $z = x^4 + y^4 - 4xy + 1$



(b) Curvas de nível de $z = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

Soluçao. $(0, 0)$ *é ponto de sela;* $(1, 1)$ e $(-1, -1)$ *são minimizantes locais.*

Extremos condicionados

- Pretende-se determinar os extremos da função

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

  quando as variáveis independentes estão sujeitas a algumas restrições.

  Estes extremos dizem-se extremos condicionados.

Métodos:

- Redução de dimensão
- Multiplicadores de Lagrange

Redução de dimensão: exemplo

- Determinar os extremos de $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeita à condição $y = x + 1$.

Seja

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x + 1\}.$$

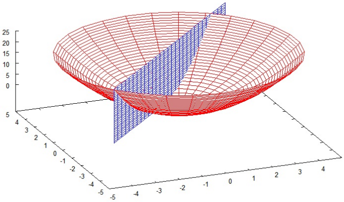
Então,[2]

$$f\Big|_S(x, y) = f(x, x+1) = x^2 + (x+1)^2 = 2x^2 + 2x + 1 = h(x).$$

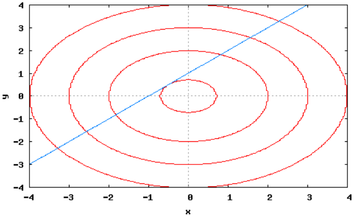
$$\ldots$$

[2] $f\big|_S$ lê-se "f restrita à condição S".

- $x = -\frac{1}{2}$ é ponto crítico de h.
- $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ é ponto crítico de f.



Gráficos de $z = x^2 + y^2$ e $y = x + 1$.



Algumas curvas de nível de f e restrição $y = x + 1$.

Extremos condicionados: caso geral

Sejam $B, D \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abertos, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$. Considere-se a estrutura de nível k da função g:

$$\mathcal{E}_k = \{\mathbf{x} \in B \,:\, g(\mathbf{x}) = k\}.$$

Suponha-se que $\mathcal{E}_k \subset D$.

Definição

Os extremos da restrição de f ao conjunto $\mathcal{E}_k$ são chamados extremos de f sujeita à condição

$$g(\mathbf{x}) = k.$$

Podemos resolver o problema da determinação dos extremos de f sujeita à condição $g(\mathbf{x}) = k$, resolvendo esta equação em ordem a uma das variáveis e substituir a expressão resultante na função a otimizar f, como no exemplo apresentado anteriormente. O sucesso desta técnica depende da equação da condição, $g(\mathbf{x}) = k$, e é uma técnica normalmente difícil ou mesmo impossível.

O método dos multiplicadores de Lagrange pemite encontrar a solução para o problema sem resolver a equação $g(\mathbf{x}) = k$, através da introdução de um nova variável, a variável λ, a que chamamos multiplicador de Lagrange. Usualmente, não é necessário o valor de λ.

À função f chamamos *função objetivo* e á condição $g(\mathbf{x}) = k$ também chamamos de *restrição*.

Multiplicadores de Lagrange ($n = 2$)

Procuramos encontrar os valores extremos de $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ quando os pontos (x, y) estão restritos a pertencer à curva $g(x, y) = k$.

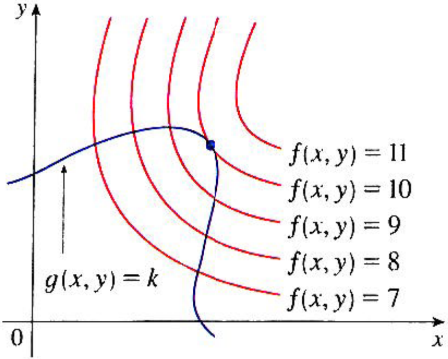


Figura 3: Vetores gradiente paralelos: $\vec{\nabla} f(a, b) = \lambda \vec{\nabla} g(a, b)$

Multiplicadores de Lagrange ($n = 2$)

Maximizar $f(x, y)$ restrita à condição $g(x, y) = k$ é encontrar o maior valor de c tal que a curva de nível $f(x, y) = c$ interseta a curva $g(x, y) = k$. Quando isto acontece as curvas tocam-se, isto é, têm uma reta tangente comum. Isto significa que as retas normais no ponto (a, b) onde as curvas se tocam são iguais. Logo, os vetores gradientes são paralelos, ou seja, existe um número λ tal que

$$\overrightarrow{\nabla} f(a, b) = \lambda \overrightarrow{\nabla} g(a, b).$$

Este número λ é chamado um multiplicador de Lagrange.

Método dos Multiplicadores de Lagrange (caso $n = 2$)

Para determinar os extremos da função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sujeita à condição $g(x, y) = k$ (assumindo que estes extremos existem e que $\vec{\nabla} g \neq 0$ quando $g(x, y) = k$),

1. determinar (x, y) (e $\lambda \in \mathbb{R}$) tal que

$$\begin{cases} \vec{\nabla} f(x, y) & = \lambda \vec{\nabla} g(x, y) \\ g(x, y) & = k \end{cases}$$

2. e calcular o valor de f em todos os pontos encontrados no passo anterior. O maior desses valores será o máximo de f e o menor será o mínimo de f sujeita a $g(x, y) = k$.

Usualmente não é necessário calcular o valor de λ.

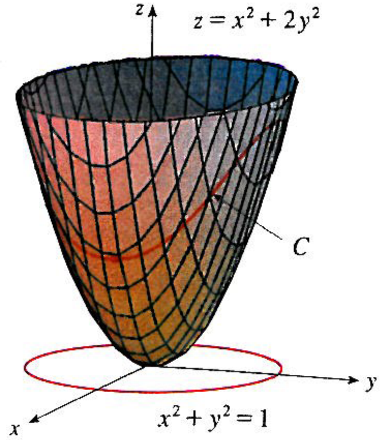
Havendo duas restrições: $g(x,y)=k$ e $h(x,y)=c$, escrevemos

$$\begin{cases} \overrightarrow{\nabla} f(x,y) & = \lambda \, \overrightarrow{\nabla} g(x,y) + \mu \, \overrightarrow{\nabla} h(x,y) \\ g(x,y) & = k \\ h(x,y) & = c \end{cases}$$

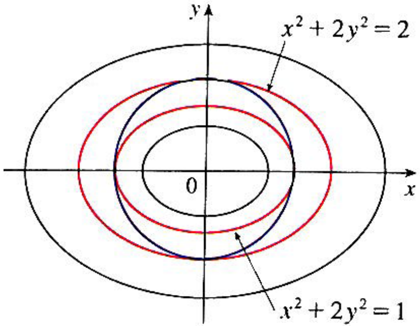
Os escalares λ e μ designam-se "multiplicadores de Lagrange".

Exemplo

Determine os valores extremos de $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ restrita à circunferência $x^2 + y^2 = 1$.



(a) $z = x^2 + 2y^2$



(b) Curvas de nível e a restrição

Solução. Valor máximo: $f(0, \pm 1) = 2$; valor mínimo: $f(\pm 1, 0) = 1$

Resolução.

1. Seja $g(x,y) = x^2 + y^2$.

$$\left\{\begin{array}{ll} \overrightarrow{\nabla} f(x,y) & = \lambda \overrightarrow{\nabla} g(x,y) \\ g(x,y) & = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} (2x, 4y) & = \lambda(2x, 2y) \\ x^2+y^2 & = 1 \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{ll} 2x & = 2\lambda x \\ 4y & = 2\lambda y \\ x^2+y^2 & = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} x(1-\lambda) & = 0 \\ y(2-\lambda) & = 0 \\ x^2+y^2 & = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=0 \ \vee \ \lambda=1 \\ y=0 \ \vee \ \lambda=2 \\ x^2+y^2=1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ 0=1 \text{ (imp.)} \end{array}\right. \vee \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ \lambda=2 \\ y=\pm 1 \end{array}\right. \vee \left\{\begin{array}{l} \lambda=1 \\ y=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$$

Pontos extremantes: $(0,-1)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(1,0)$

2. Valor de f nos pontos encontrados:

$$f(0,-1) = 2 = f(0,1), \qquad f(-1,0) = f(1,0) = 1$$

Assim, o máximo de f restrita à circunferência $x^2+y^2=1$ é $f(0,\pm 1) = 2$ e o mínimo é $f(\pm 1, 0) = 1$.

Exercício

Determine os valores extremos de $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ *no círculo* $x^2 + y^2 \leq 1$.

Resolução. Temos que comparar o valor de f na fronteira da região, circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$, com o valor de f nos pontos críticos no interior da região, círculo aberto $x^2 + y^2 < 1$.

O único ponto crítico de f é o ponto $(0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$. Assim, o valor máximo é $f(0, \pm 1) = 2$ e o valor mínimo é $f(0, 0) = 0$.

Exemplo

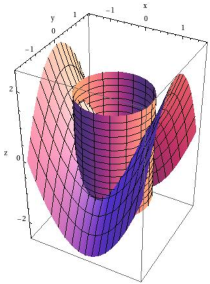
Determinar os extremos de $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

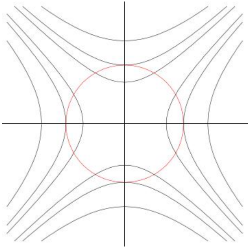
$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

sujeita à condição $x^2 + y^2 = 1$.

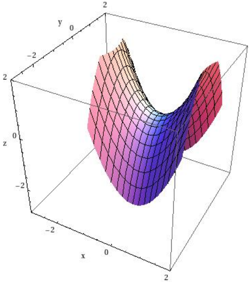
A função f sujeita à condição dada admite

- 2 minimizantes: $(0,1)$, $(0,-1)$
- 2 maximizantes: $(1,0)$, $(-1,0)$





Curvas de nível de $f(x,y) = x^2 - y^2$ e a restrição $x^2 + y^2 = 1$



Esboço do gráfico de $f(x,y) = x^2 - y^2$ (parabolóide hiperbólico)

Método dos Multiplicadores de Lagrange (caso geral)

Para determinar os extremos da função $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ quando as variáveis independentes estão sujeitas à restrição $g(\mathbf{x}) = k$ (supondo que esses extremos existem e que $\overrightarrow{\nabla} g \neq 0$ quando $g(\mathbf{x}) = k$),

1. determinar $\mathbf{x}$ (e $\lambda \in \mathbb{R}$) tal que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\nabla} f(\mathbf{x}) &= \lambda \, \overrightarrow{\nabla} g(\mathbf{x}) \qquad \text{e} \\ g(\mathbf{x}) &= k \end{aligned}$$

2. calcular o valor de f em todos os pontos encontrados no passo anterior. O maior desses valores será o máximo de f e o menor será o mínimo de f sujeita a $g(\mathbf{x}) = k$.

Observação

- A condição $\overrightarrow{\nabla} f(\mathbf{x}) = \lambda \overrightarrow{\nabla} g(\mathbf{x})$ significa que os vetores gradiente são paralelos.

- Havendo mais do que uma restrição: $g(\mathbf{x}) = k$ e $h(\mathbf{x}) = c$ escrevemos

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\nabla} f(\mathbf{x}) &= \lambda \overrightarrow{\nabla} g(\mathbf{x}) + \mu \overrightarrow{\nabla} h(\mathbf{x}) \\
g(\mathbf{x}) &= k \\
h(\mathbf{x}) &= c
\end{aligned}
$$

- Os escalares λ e μ designam-se “multiplicadores de Lagrange”.

- O nome do Método dos multiplicadores de Lagrange deve o seu nome ao matemático franco-italiano Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).