9ª aula

3 de maio de 2021 17:00

4. Indique, justificando, qual é a linguagem gerada pela gramática:

(e) $\mathcal{G}_5 = (V,\ A,\ \mathcal{S},\ P)$ definida por:

$$V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\} \qquad A = \{b, c, d\}$$

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{S} & \to & \mathcal{B}\mathcal{C} \\ \mathcal{B} & \to & b\mathcal{B} \mid \varepsilon \\ \mathcal{C} & \to & c\mathcal{C}d \mid \mathcal{D} \\ \mathcal{D} & \to & \mathcal{D}d \mid d \end{array}$$

$L(\mathcal{G}_5) = L(\mathcal{S}) = L(\mathcal{B}) \cdot L(\mathcal{C})$

$L(\mathcal{B}) = b \cdot L(\mathcal{B}) \cup \{\varepsilon\}$ ← 1.ª etapa

$= b(b\,L(\mathcal{B}) \cup \{\varepsilon\}) \cup \{\varepsilon\} = b^2 L(\mathcal{B}) \cup \{b\varepsilon, \varepsilon\}$ ← 2.ª etapa

$= b^2(b\,L(\mathcal{B}) \cup \{\varepsilon\}) \cup \{b, \varepsilon\} = b^3 L(\mathcal{B}) \cup \{b^2\varepsilon, b, \varepsilon\}$ ← 3.ª etapa

Iterando $\quad L(\mathcal{B}) = b^n L(\mathcal{B}) \cup \{b^{n-1}, \dots, \varepsilon\} \qquad n \in \mathbb{N}$

As palavras do conjunto $b^n(L(\mathcal{B}))$ têm um prefixo b^n e, por isso, têm comprimento maior ou igual a n.
Seja $u \in L(\mathcal{B})$. Suponhamos que $|u| = m$. Então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $m < n$ e então $u \in \{b^{n-1}, \dots, \varepsilon\}$ pelo que $u = b^m$ com $m \in \mathbb{N}_0$.

Logo $\quad L(\mathcal{B}) = \{b^m : m \in \mathbb{N}_0\}$.

$L(\mathcal{C}) = c\,L(\mathcal{C})\,d \cup L(\mathcal{D})$

$= c(c\,L(\mathcal{C})\,d \cup L(\mathcal{D}))\,d \cup L(\mathcal{D}) = c^2 L(\mathcal{C})\,d^2 \cup c\,L(\mathcal{D})\,d \cup L(\mathcal{D})$

$= c^2(c\,L(\mathcal{C})\,d \cup L(\mathcal{D}))\,d^2 \cup c\,L(\mathcal{D})\,d \cup L(\mathcal{D}) =$

$= c^3 L(\mathcal{C})\,d^3 \cup c^2 L(\mathcal{D})\,d^2 \cup c\,L(\mathcal{D})\,d \cup L(\mathcal{D})) =$

$= c^3 L(\mathcal{C})\,d^3 \cup \left(\bigcup_{k=0,1,2} c^k L(\mathcal{D})\,d^k\right)$

Iterando.

$$L(\mathcal{C}) = c^n L(\mathcal{C})\,d^n \cup \left(\bigcup_{k=0,\dots,n-1} c^k L(\mathcal{D})\,d^k\right)$$

Seja $u \in L(\mathcal{C})$. Então ou $|u| \geq 2n$ e é possível que $u \in c^n L(\mathcal{C})\,d^n$, ou $|u| < 2n$ e $u \in \bigcup_{k=0,\dots,n-1} c^k L(\mathcal{D})\,d^k$.

Podemos então dizer que toda a palavra $u \in L(\mathcal{C})$, verifica: $u \in c^k L(\mathcal{D})\,d^k$ para algum $k \in \mathbb{N}_0$ e $|u| < 2n$. Então $L(\mathcal{C}) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} c^k L(\mathcal{D})\,d^k$.

$L(\mathcal{D}) = L(\mathcal{D})\,d \cup \{d\}$

$= (L(\mathcal{D})d \cup \{d\})d \cup \{d\} = L(\mathcal{D})d^2 \cup \{d^2, d\}$

$= (L(\mathcal{D})d \cup \{d\})d^2 \cup \{d^2, d\} = L(\mathcal{D})d^3 \cup \{d^3, d^2, d\}$.

Iterando

$$L(\mathcal{D}) = L(\mathcal{D}) \cdot d^n \cup \{d^{n-1}, \dots, d\}.$$

Seja $u \in L(\mathcal{D})$ tal que $|u| < n$, então $u \in \{d^{n-1}, \dots, d\}$, ou seja, $u = d^k$ com $1 \le k \le n-1$ $(k = |u|)$. Logo

$$L(\mathcal{D}) = \{d^k : k \in \mathbb{N}\}$$

$$L(\mathcal{C}) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} c^k \{d^\ell : \ell \in \mathbb{N}\} d^k = \{c^k d^\ell d^k : k \in \mathbb{N}_0, \ell \in \mathbb{N}\}$$

$$= \{c^k d^{k+\ell} : k \in \mathbb{N}_0, \ell \in \mathbb{N}\} = \{c^k d^{k'} : k \in \mathbb{N}_0, k < k'\} \quad (k' = k + \ell)$$

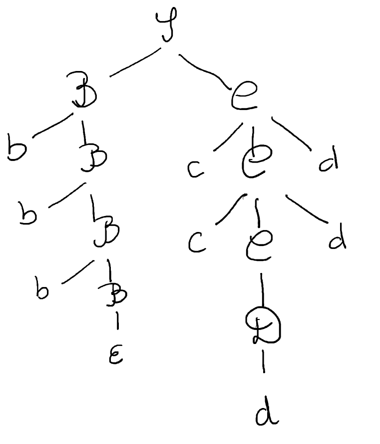
$$L(\mathcal{G}_5) = L(\mathcal{B})\,L(\mathcal{C}) = \{b^m : m \in \mathbb{N}_0\} \cdot \{c^k d^{k'} : k \in \mathbb{N}_0, k < k'\}$$

$$= \{b^m c^k d^{k'} : m, k \in \mathbb{N}_0, k < k'\} \quad //$$

5. Considerando as gramáticas definidas no exercício 4, elabore derivações que justifiquem que:

   (e) $b^3c^2d^3,\ b^2c^3d^5 \ \in L(\mathcal{G}_5)$.

$\mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{B}\mathcal{C} \overset{3}{\Rightarrow} b^3\mathcal{B}\mathcal{C} \Rightarrow b^3\varepsilon\mathcal{C} \overset{3}{\Rightarrow} b^3c^2\mathcal{D}d^2 \Rightarrow b^3c^2d\,d^2 = b^3c^2d^3$

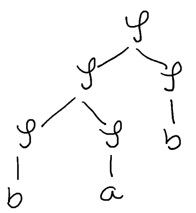


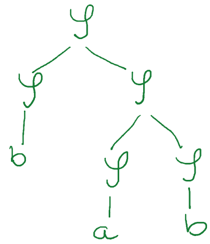
8. Mostre que as gramáticas independentes de contexto, sobre o alfabeto $\{a, b\}$, cujas produções se apresentam a seguir são ambíguas e, em cada caso, encontre uma gramática independente de contexto equivalente e que não seja ambígua.

(a) $\mathcal{S} \to \mathcal{SS} \mid a \mid b$ (b) $\mathcal{S} \to a\mathcal{S}b \mid aa\mathcal{S}b \mid \varepsilon$

(c) $\mathcal{S} \to \mathcal{A} \mid \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \to a\mathcal{A}b \mid ab$, $\mathcal{B} \to ab\mathcal{B} \mid \varepsilon$ (d) $\mathcal{S} \to \mathcal{ABA}$, $\mathcal{A} \to a\mathcal{A} \mid \varepsilon$, $\mathcal{B} \to b\mathcal{B} \mid \varepsilon$

a) $\mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{S}\mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{S}\mathcal{S}\,\mathcal{S} \overset{3}{\Rightarrow} bab$





Estas são duas árvores de derivação distintas.

$L(\mathcal{S}) = L(\mathcal{S})^2 = L(\mathcal{S})^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

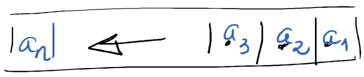
$a, b \in L(\mathcal{S})$ logo $\{a,b\} \subseteq L(\mathcal{S})$ pelo que $\{a,b\}^n \subseteq L(\mathcal{S}) \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{a,b\}^n = \{a,b\}^+ = A^+ \subseteq L(\mathcal{S}).$$

Naturalmente, como $\varepsilon \notin L(\mathcal{S})$, então $L(\mathcal{S}) \subseteq A^+$. Logo $L(\mathcal{S}) = A^+$

Uma gramática não ambígua e independente do contexto que gera A^+ é $(\{\mathcal{S}\}, A, \mathcal{S}, P)$ onde P é

$$\mathcal{S} \to \mathcal{S}a \mid \mathcal{S}b \mid a \mid b$$



Exemplo de aplic.: ~~abbbab~~

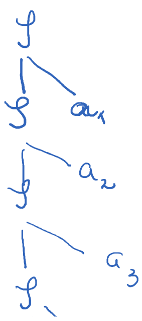
$\mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{S}b \Rightarrow \mathcal{S}a\ b \Rightarrow \mathcal{S}b\ ab \Rightarrow \mathcal{S}b\ bab \Rightarrow \mathcal{S}b\,bbab \Rightarrow abbbab.$

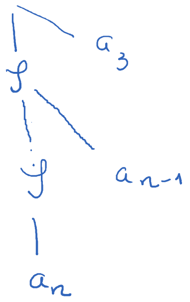
Esta nova gramática gera a linguagem

$$L(\mathcal{S}) = L(\mathcal{S})a \cup L(\mathcal{S})b \cup \{a,b\}$$

Iterando conclui-se $L(\mathcal{S}) = A^+$, pelo que é equivalente à gramática inicial e permite gerar um qualquer palavra uma vez, colocando as letras da direita para a esquerda.

NOTA: Uma árvore de derivação nesta gramática é da forma





$u = a_n a_{n-1} \cdots a_3 a_2 a_1$. Fixado uma palavra u, a ordem das folhas na árvore está fixa e é a única árvore de derivação de palavra u.

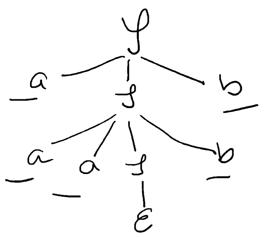
b) $L(\mathcal{G}) = L(\mathcal{S}) = a\,L(\mathcal{S})\,b \cup aa\,L(\mathcal{S})\,b \cup \{\varepsilon\}$

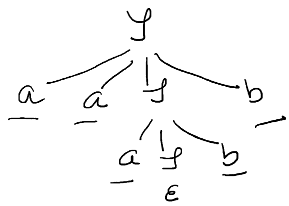
$$= \{ a^n b^m : n, m \in \mathbb{N}_0,\ 2m \geq n \geq m \}$$

$a^3 b^2$
$\shortparallel$
$\cancel{a}aab\cancel{b}$

$\mathcal{S} \Rightarrow a\mathcal{S}b \Rightarrow a\,aa\mathcal{S}b\,b \Rightarrow a^3 \varepsilon\, b^2 = a^3 b^2$

$\mathcal{S} \Rightarrow aa\mathcal{S}b \Rightarrow aa\ a\mathcal{S}b\ b \Rightarrow aaa\,\varepsilon\,bb = a^3 b^2$





São duas árvores essencialmente distintas, pelo que a gramática é ambígua

Uma gramática equivalente e não ambígua é $(\{\mathcal{S}, \mathcal{B}\}, A, \mathcal{S}, P)$ onde P é:

$$\mathcal{S} \longrightarrow a\mathcal{S}b \mid \mathcal{B}$$
$$\mathcal{B} \longrightarrow aa\mathcal{B}b \mid \varepsilon$$

$$L(\mathcal{S}) = a\,L(\mathcal{S})\,b \cup L(\mathcal{B})$$

$$L(\mathcal{B}) = a^2 L(\mathcal{B}) b \cup \{\varepsilon\} = \ldots$$
$$= \bigcup \{ a^{2n} L(\mathcal{B}) b^n : n \in \mathbb{N}_0 \}$$
$$= \{ a^{2n} b^n : n \in \mathbb{N}_0 \}$$

$$L(\mathcal{S}) = a\,(a L(\mathcal{S}) b \cup L(\mathcal{B})\,)b \cup \{a^{2n} b^n : n \in \mathbb{N}_0\}$$
$$= a^2 L(\mathcal{S})\, b^2 \cup a\,L(\mathcal{B})\,b \cup \{a^{2n} b^n : n \in \mathbb{N}_0\}$$
$$= \ldots$$