Universidade do Minho
Escola de Ciências
DMat

Cálculo
LCC
2019/2020

Folha 1 - **Tópicos sobre o corpo dos números reais**

Exercício 1 Mostre que o número

a) $x = 3.2777\ldots = 3.2\overline{7}$
b) $x = 1.3333\ldots = 1.\overline{3}$
c) $x = 0.3405405405\ldots = 0.3\overline{405}$

é um número racional, exprimindo-o como um quociente de dois números inteiros.

Exercício 2 Apresente um exemplo de:

a) um número irracional pertencente ao intervalo $\left[\frac{3}{100}, \frac{4}{100}\right]$;
b) um número racional pertencente ao intervalo $\left[\frac{\pi}{11}, \frac{\pi}{10}\right]$.

Exercício 3 Resolva as inequações (ou sistemas de inequações) seguintes. Exprima os conjuntos solução sob a forma de intervalo ou de reunião de intervalos e represente-os graficamente.

a) $2x - 1 > x + 3$;
b) $-\frac{x}{3} \geq 2x - 1$;
c) $\frac{2}{x-1} \geq 5$;
d) $\frac{1}{2-x} < 3$;
e) $\frac{x+1}{x} \geq 2$;
f) $\frac{x}{2} \geq 1 + \frac{4}{x}$;
g) $\frac{6-x}{4} \geq \frac{3x-4}{2}$;
h) $x^3 > 4x$;
i) $3(2 - x) < 2(3 + x)$;
j) $3 \leq 2x + 1 \leq 5$;
k) $3x - 1 \leq 5x + 3 \leq 2x + 15$;
l) $9 < x^2 < 16$;
m) $x^2 - 2x \leq 0$;
n) $2x^2 + 1 > 4x$;
o) $-x^2 + 5x - 6 < 0$.

Exercício 4 Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfazem as condições seguintes.

a) $|2x + 5| = 3$;
b) $\left|\frac{x}{2} - 1\right| = 1$;
c) $|x - 1| \leq 3$;
d) $|5x - 3| > 1$;
e) $|3x - 7| < 2$;
f) $\left|\frac{x}{2} - 1\right| \geq 1$;
g) $\left|5 - \frac{2}{x}\right| < 3$;
h) $\left|\frac{2}{x} - 2\right| > \frac{1}{2}$.

Exercício 5 Sejam x e y dois números reais tais que $x < y$. Diga, justificando, se cada uma das seguintes proposições é verdadeira ou falsa:

a) $|x| < |y|$;

b) $x^2 < y^2$;

c) $\frac{1}{x} < \frac{1}{y} \quad (x, y \neq 0)$;

d) $y - x > 0$;

e) $\frac{x}{|y|} < 1 \quad (y \neq 0)$;

f) $\frac{1}{|x|} < \frac{1}{|y|} \quad (x, y \neq 0)$.

Exercício 6 Exprima os seguintes conjuntos na forma de intervalo ou de reunião de intervalos:

a) $\{x \in \mathbb{R} : \, x^2 \leq 10\}$;

b) $\{x \in \mathbb{R} : \, |x^2 - 17| \leq 8\}$;

c) $\{x \in \mathbb{R} : \, |x| > 0\}$;

d) $\{x \in \mathbb{R} : \, |-x| = x\}$;

e) $\{x \in \mathbb{R} : \, x - |x| = |x| + 3\}$;

f) $\{x \in \mathbb{R} : \, x + |x| < 4\}$;

g) $\{x \in \mathbb{R} : \, |x - 1| = 1 - x\}$;

h) $\{x \in \mathbb{R} : \, |x^2 - 1| \geq 3\}$.

Exercício 7 Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfazem as condições seguintes, interpretando-as em termos de distâncias entre números reais.

a) $|x - 5| < 1$;

b) $|x - 1| = |x - 5|$;

c) $|x + 1| > |x - 3|$;

d) $|x - 3| < |x|$;

e) $|x - 1| > |x + 1|$;

f) $|2x + 2| = |2x + 1|$.

Exercício 8 Determine o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes e, se existirem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de cada um dos seguintes conjuntos

a) $A = [1, \pi[\cup \{5\}$;

b) $B =]-3, +\infty[\setminus \{2\}$;

c) $C = \left\{x \in \mathbb{R} : \, |x + 1| > 2 \, \vee \, x^2 > \frac{1}{4}\right\}$;

d) $D = \{x \in \mathbb{R} : \, x^2 < 25\}$;

e) $E = \{x \in \mathbb{R} : \, |x - 5| < 3\}$;

f) $F = \{x \in \mathbb{R} : \, |x^2 - 5| > 4 \, \wedge \, x + 5 > 0\}$;

g) $G = \{x \in \mathbb{R} : \, 5 - x^2 < 1\}$;

h) $H = \left\{x \in \mathbb{Z} : \, x^2 < \frac{25}{16}\right\}$.

Exercício 9 Determine o interior, o fecho, a fronteira, o derivado e o conjunto dos pontos isolados de cada um dos seguintes conjuntos e indique os que são abertos e os que são fechados:

a) $A =]0, 1]$;

b) $B = \{1, 2, 3, 4\}$;

c) $C =]5, 10[$;

d) $D = [0, 2]$;

e) $E =]0,5[\,\setminus\{3\} \cup \{7,8\}$;

f) $F = [-5,0[\cup\{4,5,8\}$;

g) $G = [0,2]\cup]6,9[$;

h) $H = \{1/n:\ n\in\mathbb{N}\}$;

i) $I = \{1/n:\ n\in\mathbb{Z}\}$.

Exercício 10 Seja $R = P\cup Q$, onde $P = \{x\in\mathbb{R}:\ |3x-2| = 7\}$ e $Q = \{x\in\mathbb{R}^+:\ |x-3|\le 5\}$.

a) Verifique que $R = \left\{-\frac{5}{3}\right\}\cup]0,8]$.

b) Determine o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes, o supremo e o ínfimo do conjunto R.

c) Indique pontos a e b tais que $a\in R$ mas $a\notin R'$ e $b\in R'$ mas $b\notin R$.

Exercício 11 Considere o conjunto

$$A = \left\{x\in\mathbb{R}:\ x^2\le 9 \ \wedge\ |x-1|>1\right\}.$$

a) Verifique que $A = [-3,0[\,\cup\,]2,3]$.

b) Determine o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes, e, se existirem, o supremo, o ínfimo, o mínimo e o máximo do conjunto A.

c) Apresente um subconjunto não vazio $B\subset A$ tal que

   i. B seja aberto.

   ii. B coincida com o seu derivado.

Exercício 12 Considere o conjunto

$$A = \left\{x\in\mathbb{R}:\ \frac{5x}{2} > 3x+2 \ \vee\ |x^2-1| = 3\right\}.$$

a) Verifique que $A =]-\infty,-4[\ \cup\ \{-2,2\}$.

b) Determine o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes, e, se existirem, o supremo, o ínfimo, o mínimo e o máximo do conjunto A.

c) Indique os pontos de acumulação de A.

Exercício 13 Considere o conjunto

$$A = \left\{x\in\mathbb{R}:\ |x-2| = x^2 \ \vee\ x^2-1>3\right\}.$$

a) Verifique que $A =]-\infty,-2]\cup]2,+\infty[\cup\{1\}$.

b) Determine o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes e o conjunto dos pontos de acumulação de A.

Exercício 14 Considere o conjunto

$$A = \left\{x\in\mathbb{R}:\ |x-2|\ge 1 \ \wedge\ x^2-6\le 3\right\}.$$

a) Verifique que $A = [-3,1]\ \cup\ \{3\}$.

b) Determine o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes e o conjunto dos pontos de acumulação de A.