



Folha 8 - Cálculo diferencial em \mathbb{R}

Exercício 1 Seja f a função definida por $f(x) = x^2$.

- a) Calcule $f'(-1)$ e interprete geometricamente o resultado obtido.
- b) Escreva uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa -1 .

Exercício 2 Indique, justificando, se cada uma das funções definidas a seguir é derivável no respetivo domínio. Nos pontos onde não existir derivada, averigue se existem as derivadas laterais.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 3, \\ 3x & \text{se } x \geq 3; \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0, \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$

Exercício 3 Determine a função derivada de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2 + 1} & \text{se } x < 3, \\ -3x & \text{se } x \geq 3; \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } x \leq 1, \\ 2x^3 & \text{se } 1 < x < 2, \\ 16 & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$

Exercício 4 Sejam f e g as funções definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

- a) Mostre que f e g são contínuas em 0.
- b) Mostre que f não é derivável em 0.
- c) Mostre que g é derivável em 0 e calcule $g'(0)$.

Exercício 5 Determine a expressão das derivadas das funções definidas por:

- a) $f(x) = 3 - \frac{1}{3}x$;
- b) $f(x) = (x - 3) \cdot (4 - 5x)$;
- c) $f(x) = x^{100} \cdot (1 + 4x)$;
- d) $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}$;
- e) $f(x) = \frac{1}{x}$;
- f) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 3}$;
- g) $f(x) = \frac{3x - 1}{3 - x^2}$;
- h) $f(x) = x^{-10}$;
- i) $f(x) = \sqrt{x} + x^4$;
- j) $f(x) = \sqrt[3]{x}$;
- k) $f(x) = \frac{-x}{\sqrt{x}}$;
- l) $f(x) = \frac{1}{x^2}$;
- m) $f(x) = e^{2x} - x$;
- n) $f(x) = \operatorname{sen} x + 3 \cos x^2$;
- o) $f(x) = \ln(x + 2)$;
- p) $f(x) = xe^x$;

q) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$;

r) $f(x) = \frac{\sin x}{x^2 - 4}$;

s) $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$;

t) $f(x) = x^3 e^{2x}$;

u) $f(x) = x \ln x$;

v) $f(x) = x \ln(x^2 + x + 1)$;

w) $f(x) = \sin(\cos(x^2))$;

x) $f(x) = \operatorname{tg} x$;

y) $f(x) = e^{\sin x} + (\sin x)^2$.

Exercício 6 Determine a expressão das derivadas das funções definidas por:

a) $f(x) = 3x \arcsin(\sqrt{x^2 - 1})$;

d) $i(t) = \operatorname{arctg}^2(7t)$;

b) $g(x) = \frac{1}{\cos x} - \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$;

e) $j(y) = \sqrt{\sin y} + \arccos \frac{1}{y}$;

c) $h(t) = t \arcsin(4t)$;

f) $k(y) = \cos(\operatorname{arctg}(3y))$;

Exercício 7 Determine a expressão das derivadas das funções definidas por:

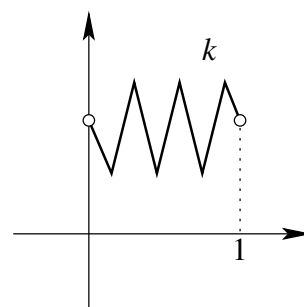
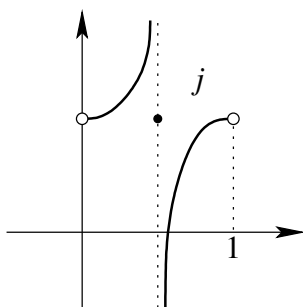
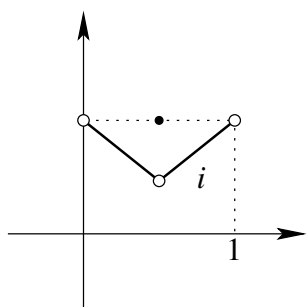
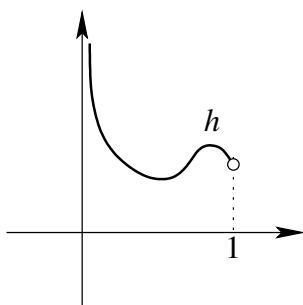
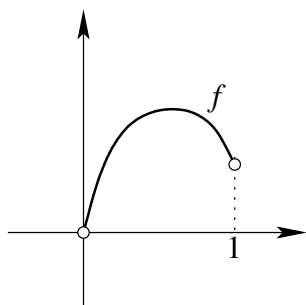
a) $f(x) = \operatorname{ch}(3x)$;

c) $h(t) = t^2 \operatorname{sh}^3 t$;

b) $g(x) = \operatorname{sh}(x^2 + 1)$;

d) $i(t) = \ln(\operatorname{ch}(t + 1))$.

Exercício 8 Considere as funções $f, h, i, j, k :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ dadas a seguir pelos seus gráficos.



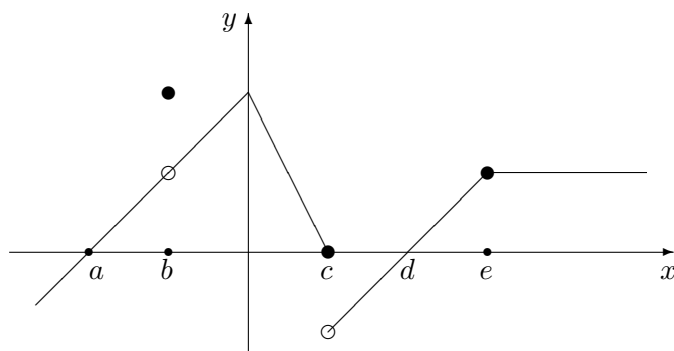
Indique as funções que:

a) são deriváveis;

b) não são deriváveis em mais do que um ponto;

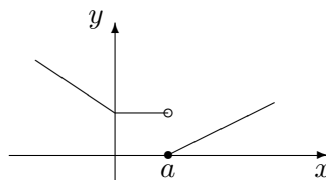
c) não são deriváveis apenas num ponto.

Exercício 9 Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ representada graficamente na figura seguinte.



Indique os pontos onde f não é derivável, especificando se existem as derivadas laterais e indicando o seu sinal.

Exercício 10 Esboce o gráfico da derivada da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ representada na figura ao lado.



Exercício 11 Sejam $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis e considere a seguinte tabela que mostra alguns dos seus valores e das correspondentes derivadas. Determine $h'(2)$ para:

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
2	5	5	e	$\sqrt{2}$
5	2	8	π	7

a) $h = f \circ g$;

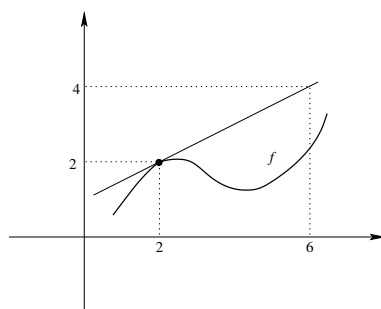
b) $h = g \circ f$;

c) $h = f \circ f$.

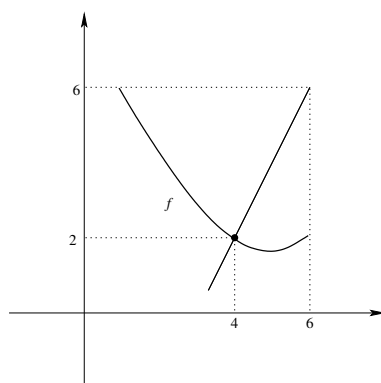
Exercício 12 Seja $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $k'(1) = 2$. Determine a derivada de:

a) $k(2x)$, para $x = 1/2$; b) $k(x+1)$, para $x = 0$; c) $k\left(\frac{x}{4}\right)$, para $x = 4$.

Exercício 13 A figura em baixo representa o gráfico de uma função f e da reta tangente a esse gráfico no ponto $(2, 2)$. Sendo $g(x) = f(x^2 - 2)$, determine $g'(2)$.



Exercício 14 A figura em baixo representa o gráfico de uma função f e da reta perpendicular a esse gráfico no ponto $(4, 2)$. Sendo $g(x) = f(5x - x^2)$, determine $g'(1)$.



Exercício 15 Diga, justificando devidamente, se existe alguma função $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ derivável, tal que $f'(x) = 0$ para $x \in [0, 1]$ e $f'(x) = 1$ para $x \in]1, 2]$.

Exercício 16 Usando o teorema de Rolle, mostre que a equação $x^2 = x \sin x + \cos x$ possui exatamente duas raízes reais.

Exercício 17 Mostre que o polinómio $p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ possui exatamente um zero no intervalo $]1, 3[$.

Exercício 18 Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 1 - x^{2/3}$.

- a) Verifique que $f(-1) = f(1) = 0$.
- b) Mostre que $f'(x)$ nunca se anula em $] - 1, 1[$.
- c) Explique porque não há qualquer contradição com o teorema de Rolle.

Exercício 19 Seja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = x - e^{x-1}$.

- a) Verifique que $g(1) = g'(1) = 0$.
- b) Mostre que $z = 1$ é o único zero de g .

Exercício 20 Diga, justificando devidamente, se existe alguma função derivável $g: [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(0) = -3$, $g(5) = 5$ e $g'(x) \leq 1$ para todo $x \in]0, 5[$.
