3.3 Continuidade

Vamos agora tratar a noção de continuidade que, como sabemos, está extremamente relacionada com o conceito de limite. Faremos primeiro uma abordagem sobre a continuidade pontual, isto é sobre a continuidade do ponto de vista local , e passaremos depois a um tratamento global , onde nos interessaremos pelas propriedades das funções contínuas em intervalos.

- Definições e exemplos
- Descontinuidades
- Continuidade lateral
- Propriedades sobre a continuidade pontual
- Resultados sobre funções contínuas

Definições e exemplos

Seja $f\colon D\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função e $a\in D$ um ponto do seu domínio. Diz-se que f é contínua em a quando

$$a \text{ é ponto isolado de } D \qquad \text{ou} \qquad a\in D' \text{ e } \lim_{x\to a} f(x)=f(a).$$

Simbolicamente, traduz-se a continuidade de f em a escrevendo

$$\forall\delta>0,\ \exists\varepsilon>0:\ (x\in D\ \wedge\ |x-a|<\varepsilon)\implies |f(x)-f(a)|<\delta.$$

Diz-se ainda que:

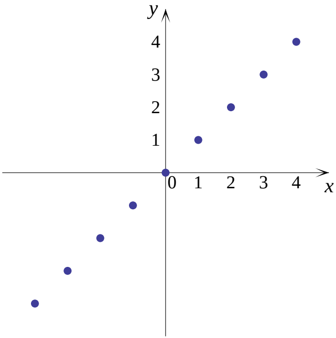
- f é contínua em A, com $A\subset D$, quando f é contínua em todo o ponto $a\in A$;
- f é contínua quando f é contínua em todo o domínio D.

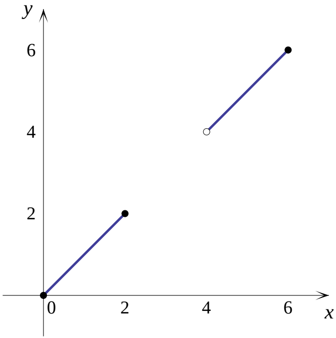
Definições e exemplos

Exemplos

1. *As funções f e g definidas a seguir são contínuas.*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g : [0,2] \cup]4,6] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$





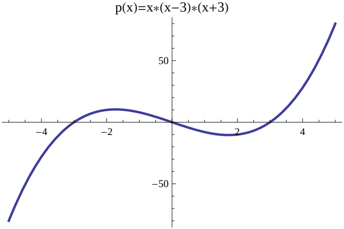
Definições e exemplos

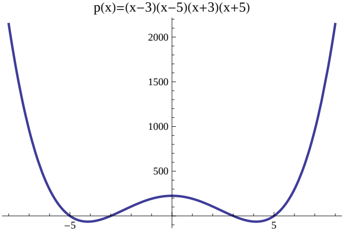
2. Toda a função polinomial, $p\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida como segue, é contínua

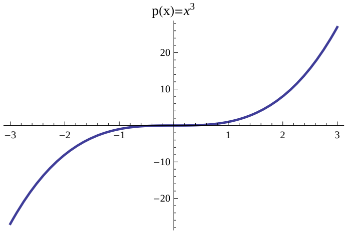
$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \ , \quad n \in \mathbb{N}.$$

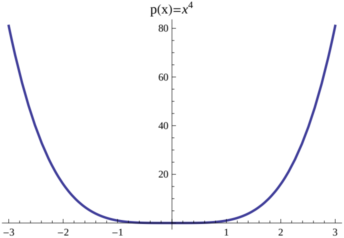
Em particular, toda a função constante é contínua.

Definições e exemplos



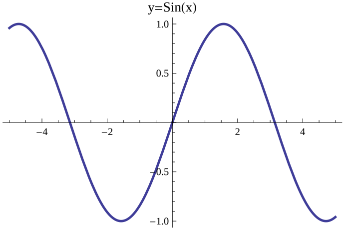


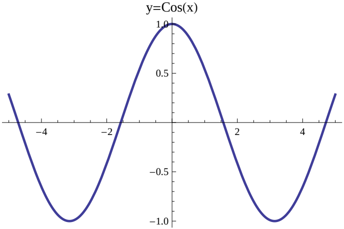




Definições e exemplos

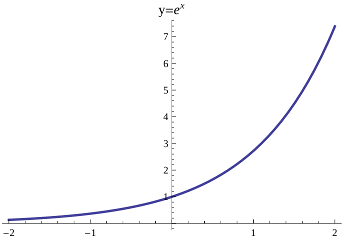
3. As funções seno e cosseno são contínuas.

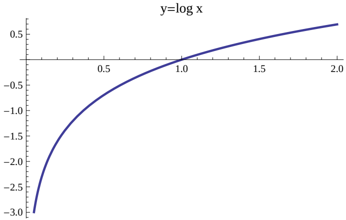




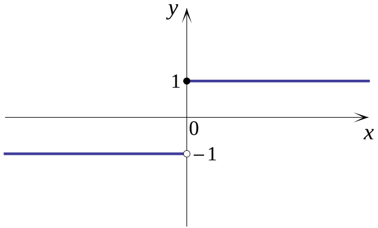
Definições e exemplos

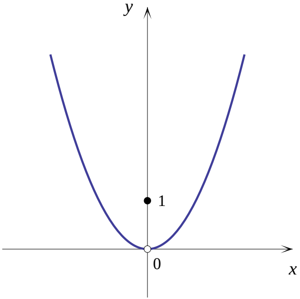
4. As funções definidas por $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, e $g(x) = \ln x$, $x \in \mathbb{R}^+$, são contínuas.





5. A função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
6. A função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.





Descontinuidades

Da definição de continuidade, uma função $f\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ possui uma descontinuidade no ponto $a \in D$ quando se verificar uma das duas condições seguintes:

- $a \in D'$ e não existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$;
- $a \in D'$, existe $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ mas $\ell \neq f(a)$.

Diz-se, em particular, que f possui uma descontinuidade removível , quando

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \quad \wedge \quad \ell \neq f(a),$$

caso em que, modificando o valor da função no ponto a, seria possível remover a descontinuidade, e que possui uma descontinuidade de salto , quando

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell_1 \quad \wedge \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \ell_2 \quad \wedge \quad \ell_1 \neq \ell_2.$$

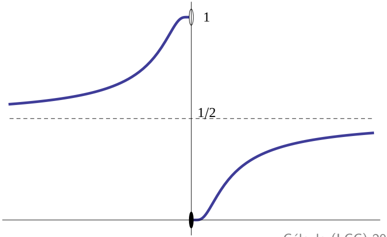
Descontinuidades

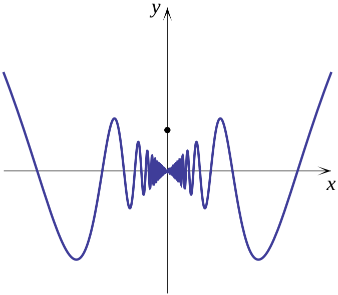
As funções apresentadas a seguir possuem uma descontinuidade na origem. Trata-se de uma descontinuidade removível no caso da função ℓ e de uma descontinuidade de salto no caso da função j.

Exemplos

1. $j(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{1/x}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

2. $\ell(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 1/10 & \text{se } x = 0 \end{cases}$





Continuidade lateral

A continuidade lateral é uma noção que assume algum interesse quando estão em causa pontos de acumulação do domínio da função, já que no caso de pontos isolados, a função é trivialmente contínua, pela própria definição. Assim, diz-se que uma função $f\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é

- contínua à direita no ponto $a \in D \cap D'$ quando

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a);$$

- contínua à esquerda no ponto $a \in D \cap D'$ quando

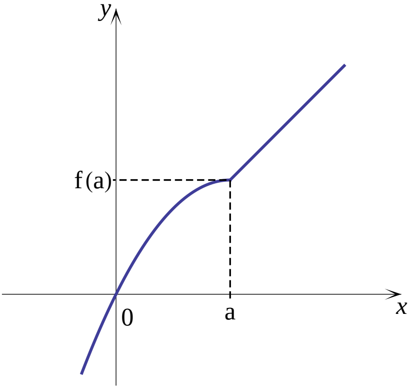
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a).$$

Observação

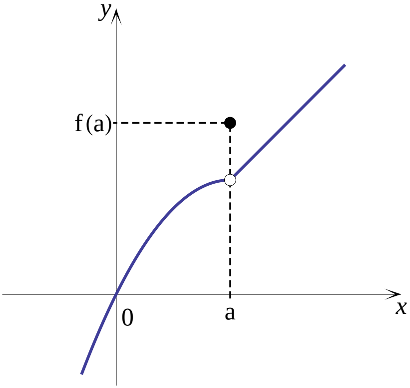
É óbvio que uma função f é contínua em $a \in D \cap D'$ se e só se f é contínua à direita e à esquerda no ponto a.

Continuidade lateral

Exemplos



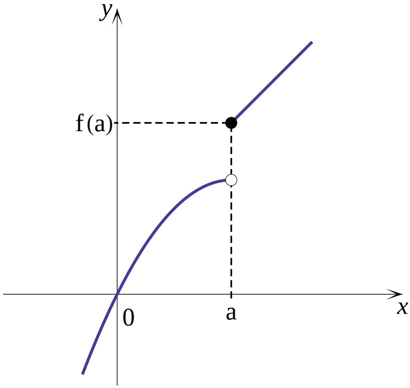
(a) f é contínua em a



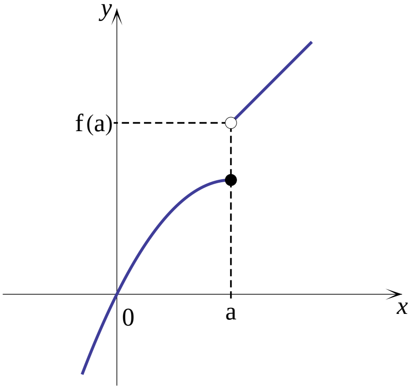
(b) f é descontínua bilateral em a

Continuidade lateral

Exemplos



(c) f é contínua à direita de a



(d) f é contínua à esquerda de a

Propriedades sobre a continuidade pontual

A partir da definição de função contínua num ponto e dos resultados apresentados sobre o limite de funções, extraem-se os resultados seguintes.

Teorema

[Continuidade de restrições]

Se $f\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é contínua em* $a \in D$, *então qualquer restrição de* f *a um subconjunto do domínio que contenha* a *é também contínua em* a.

Teorema

[Limitação de funções contínuas]

Se $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é contínua em* a, *então* f *é limitada em alguma vizinhança de* a, *i.e.*

$$\exists \varepsilon > 0\,,\ \ \exists M > 0 : \ \ |f(x)| \le M\,,\ \ \forall x \in D \cap \,]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\,.$$

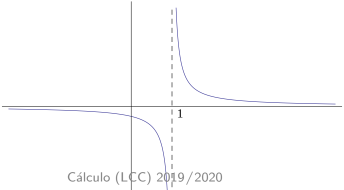
Propriedades sobre a continuidade pontual

Observação

Do último resultado sai que se uma função f se torna ilimitada em qualquer vizinhança de certo ponto a então f não pode ser contínua em a. É o caso da função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & se \;\; x \neq 1 \\ \\ k & se \;\; x = 1 \end{cases}$$

onde k é uma constante arbitrária. Independentemente do valor de k, f não é contínua na origem, pelo facto se se tornar ilimitada em qualquer vizinhança de $a = 1$.



Propriedades sobre a continuidade pontual

Teorema

[Aritmética de funções contínuas]

Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *contínuas no ponto* $a \in D$. *Então as funções* $f+g,\ f-g,\ f \cdot g$ *são contínuas em* a *e a função* $\dfrac{f}{g}$ *é contínua em* a, *desde que* $g(a) \neq 0$.

Observação

Deste teorema segue, em particular, que se f *é contínua em* a, *então também são contínuas em* a *as funções* kf, *com* k *uma constante real, e ainda* $\dfrac{1}{f}$, *desde que* $f(a) \neq 0$.

Propriedades sobre a continuidade pontual

Teorema

[Continuidade da função composta]

Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $g : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tais que* $f(D) \subset B$.

Se f *é contínua em* $a \in D$ *e* g *é contínua em* $f(a)$ *então* $g \circ f$ *é contínua em* a*.*

Observação

O Teorema anterior estabelece que a composta de duas funções contínuas é uma função contínua. No entanto, ainda que f *ou* g *não sejam contínuas, pode acontecer que a composta seja contínua.*

Resultados sobre funções contínuas

As funções contínuas em conjuntos “especiais” possuem propriedades fortes, que passamos agora a apresentar.

Teorema

[Teorema de Cantor]
Seja $f\colon D\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *uma função contínua. Se* D *é fechado e limitado então* $f(D)$ *é fechado e limitado.*

Exemplos

1. *A função definida por* $f(x)=1$, $\forall x\in[0,4]$, *é contínua. Tem-se* $D=[0,4]$ *e* $f(D)=\{1\}$.

2. *A função*

$$g(x)=\begin{cases} x & se\;\; x\in[0,2] \\ 2 & se\;\; x\in[4,6] \end{cases}$$

é contínua em $D=[0,2]\cup[4,6]$. *Tem-se* $f(D)=[0,2]$.

Resultados sobre funções contínuas

Teorema

[Teorema de Weierstrass]
Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então f é limitada e atinge os seus extremos em $[a, b]$, isto é,

$$\exists\, \alpha, \beta \in [a, b] : \quad f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)\,, \quad \forall x \in [a, b].$$

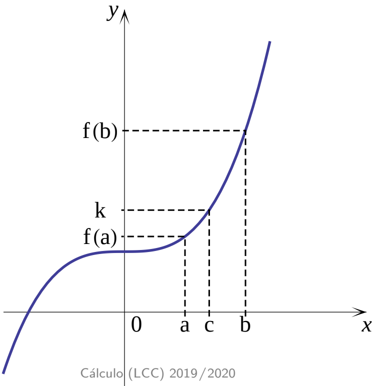
Observações

- *Consideremos a função $f(x) = x,\ x \in]0, 5],$ que não atinge mínimo. Isto acontece porque $]0, 5]$ não é fechado.*
- *Consideremos a função $g(x) = x,\ x \in [0, +\infty[,$ que não atinge máximo. Isto acontece porque $[0, +\infty[$ não é limitado.*

Resultados sobre funções contínuas

Teorema

[Teorema do valor intermédio (Bolzano-Cauchy)]
Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua tal que* $f(a) \neq f(b)$. *Se* k *é um número real estritamente compreendido entre* $f(a)$ *e* $f(b)$, *então existe* $c \in]a, b[$ *tal que* $f(c) = k$.



Resultados sobre funções contínuas

Corolário

[Teorema de Bolzano]

Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é contínua e tal que* $f(a)f(b) < 0$ *então existe* $c \in]a, b[$ *para o qual* $f(c) = 0$.

Corolário

Se $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é contínua e* I *é um intervalo de* $\mathbb{R}$ *, então* $f(I)$ *é um intervalo.*

Observações

1. *O primeiro corolário estabelece que uma função contínua num intervalo fechado e limitado não muda de sinal sem se anular (não diz qual é o ponto onde a função se anula nem quantas vezes se anula).*

2. *É fundamental que o domínio de f seja um intervalo. Consideremos a função*

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [-2, 0] \\ 1 & \text{se } x \in [1, 3], \end{cases}$$

que é contínua mas que muda de sinal sem se anular.
Isto acontece precisamente porque o seu domínio não é um intervalo.

Resultados sobre funções contínuas

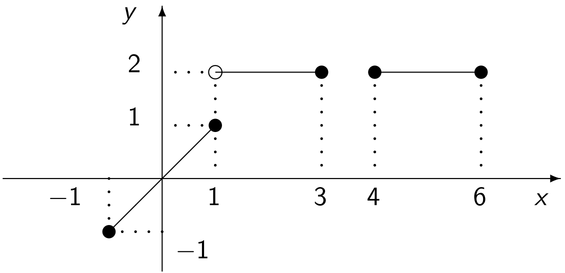
3. É fundamental que f seja contínua.
   Consideremos a função

$$g(x) = \begin{cases} 1/x & \text{se } x \in [-2, 0[\cup]0, 2] \\ \\ 1 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

   que está definida num intervalo e que muda de sinal sem se anular.
   Isto acontece porque g não é contínua.

4. Claro que a função pode não ser contínua nem estar definida num intervalo e, no entanto, anular-se sempre que muda de sinal. É o que acontece, por exemplo, com

$$k(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [-1, 1] \\ 2 & \text{se } x \in]1, 3] \cup [4, 6] \end{cases}$$



mas o primeiro corolário não se refere a estes casos.

Resultados sobre funções contínuas

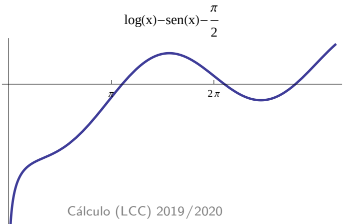
Exemplo

Vejamos que a equação $\ln x = \operatorname{sen} x + \dfrac{\pi}{2}$ *possui uma raíz no intervalo* $]\pi, 2\pi[$.

De facto, considerando a função contínua definida por

$$f(x) = \ln x - \operatorname{sen} x - \frac{\pi}{2}, \; x \in [\pi, 2\pi],$$

tem-se $f(\pi) < 0$ *e* $f(2\pi) > 0$. *Logo (teorema do valor intermédio) existe* $c \in]\pi, 2\pi[$ *tal que* $f(c) = 0$, *ou seja tal que* $\ln c = \operatorname{sen} c + \dfrac{\pi}{2}$.

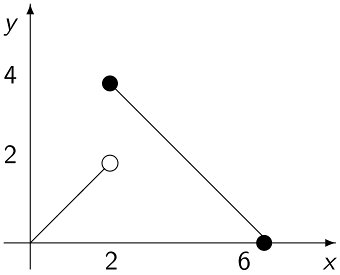


Resultados sobre funções contínuas

Do segundo corolário sai que uma função contínua transforma um intervalo I noutro intervalo $f(I)$.

Esta propriedade não é exclusiva das funções contínuas. De facto, por exemplo, para a função

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 6 - x & \text{se } 2 \leq x \leq 6 \end{cases}$$



tem-se $I = [0, 6]$, $f(I) = [0, 4]$ e, no entanto, f não é contínua.

Resultados sobre funções contínuas

Vejamos agora o que acontece, quanto à continuidade, à inversa de uma função contínua.

Seja $f\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow f(D)$ contínua e bijetiva.
Define-se a inversa, $f^{-1}\colon f(D) \longrightarrow D$, que pode não ser contínua.

É o caso da função g e da sua inversa,

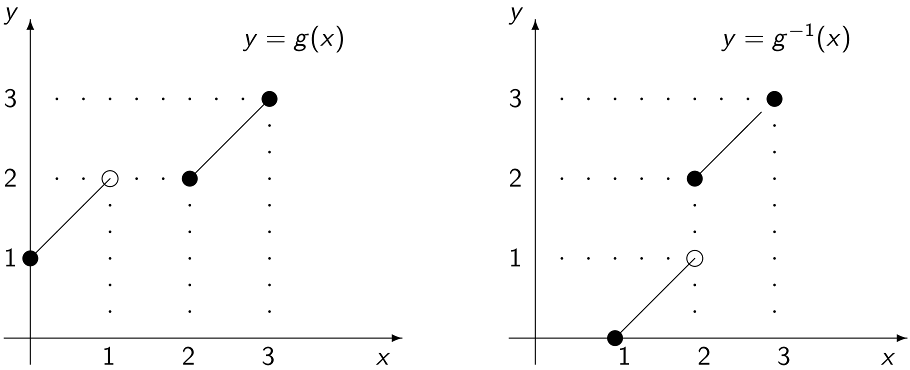
$$g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ x & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

e

$$g^{-1}(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ x & \text{se } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

A função g é contínua e bijetiva e a g^{-1} não é contínua.

Resultados sobre funções contínuas



No entanto, se f for bijetiva e contínua num intervalo, então a inversa também é contínua.

Teorema

[Continuidade da função inversa]

Seja $f : I \longrightarrow J$ uma função contínua e bijetiva no intervalo I. Então a sua inversa, $f^{-1} : J \longrightarrow I$, é contínua.