

- Funções escalares - extremos livres e extremos condicionados

- Critério do discriminante

Sendo $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(a, b) \in D$ um ponto crítico de f e

$$\Delta_f(a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2,$$

- * se $\Delta_f > 0$ e

- $f_{xx}(a, b) > 0$, então (a, b) é um minimizante local de f ;

- $f_{xx}(a, b) < 0$, então (a, b) é um maximizante local de f ;

- * se $\Delta_f(a, b) < 0$, então (a, b) é um ponto de sela de f ;

- * se $\Delta_f(a, b) = 0$, nada se pode concluir.

- Método dos multiplicadores de Lagrange

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função objetivo e $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = k$ uma equação de restrição.

Determinar (x_1, x_2, \dots, x_n) (e $\lambda \in \mathbb{R}$) tal que

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \lambda \vec{\nabla} g(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g(x_1, x_2, \dots, x_n) &= k\end{aligned}$$

e calcular o valor de f em todos os pontos encontrados.

- Funções vetoriais

Seja \mathcal{C} a curva parametrizada por $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $P = \mathbf{r}(t_0) = (a, b, c)$ um ponto pertencente a \mathcal{C} .

- Comprimento de arco

$$L(\mathcal{C}) = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt$$

- Triedro de Frenet-Serret

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}, \quad \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}, \quad \mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$

- Curvatura

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$$

- Plano osculador a \mathcal{C} em P

$$\mathbf{B}(t_0) \cdot (x - a, y - b, z - c) = 0$$

- Plano normal a \mathcal{C} em P

$$\mathbf{r}'(t_0) \cdot (x - a, y - b, z - c) = 0$$

- Reta tangente a \mathcal{C} em P

$$(x, y, z) = \mathbf{r}(t_0) + t \mathbf{r}'(t_0), \quad t \in \mathbb{R}$$

Regras de primitivação

Na lista de primitivas que se segue, $u: I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável no intervalo I e \mathcal{C} denota uma constante real arbitrária. Escreve-se u no lugar de $u(x)$.

$$1. \int a \, dx = ax + \mathcal{C} \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$2. \int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C} \quad (n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$$

$$3. \int u' u^n \, dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C} \quad (n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$$

$$4. \int \frac{u'}{u} \, dx = \ln |u| + \mathcal{C}$$

$$5. \int u' e^u \, dx = e^u + \mathcal{C}$$

$$6. \int u' a^u \, dx = \frac{a^u}{\ln a} + \mathcal{C} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$7. \int u' \cos u \, dx = \sin u + \mathcal{C}$$

$$11. \int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \, dx = \arcsen u + \mathcal{C}$$

$$15. \int u' \operatorname{ch} u \, dx = \operatorname{sh} u + \mathcal{C}$$

$$8. \int u' \sin u \, dx = -\cos u + \mathcal{C}$$

$$12. \int \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}} \, dx = \arccos u + \mathcal{C}$$

$$16. \int u' \operatorname{sh} u \, dx = \operatorname{ch} u + \mathcal{C}$$

$$9. \int \frac{u'}{\cos^2 u} \, dx = \operatorname{tg} u + \mathcal{C}$$

$$13. \int \frac{u'}{1+u^2} \, dx = \operatorname{arctg} u + \mathcal{C}$$

$$17. \int \frac{u'}{\operatorname{ch}^2 u} \, dx = \operatorname{th} u + \mathcal{C}$$

$$10. \int \frac{u'}{\sin^2 u} \, dx = -\operatorname{cotg} u + \mathcal{C}$$

$$14. \int \frac{-u'}{1+u^2} \, dx = \operatorname{arccotg} u + \mathcal{C}$$

$$18. \int \frac{u'}{\operatorname{sh}^2 u} \, dx = -\operatorname{coth} u + \mathcal{C}$$

• Integrais múltiplos

– Integral duplo

Seja $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $U \subset D$ uma região descrita em coordenadas cartesianas.

* *Mudança para coordenadas polares*

$$\iint_U f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{U^*} r f(r \cos \theta, r \sin \theta) \, dr \, d\theta$$

– Integral triplo

Seja $f: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e $U \subset D$ uma região descrita em coordenadas cartesianas.

* *Mudança para coordenadas cilíndricas*

$$\iiint_U f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{U^*} r f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \, dr \, d\theta \, dz$$

* *Mudança para coordenadas esféricas*

$$\iiint_U f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{U^*} f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$