Cap 1 – Funções reais de n variáveis reais

1.1 Generalidades

O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$

- O termo vetor Ã© usado para indicar quantidades que tenham em simultâneo grandeza, direção e sentido (velocidade, força, deslocamento, ...);

- Um vetor é, geometricamente, representado por um segmento de reta orientado;

- O comprimento do segmento representa a grandeza enquanto a seta indica o sentido.

O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$

Seja $n \geq 1$ um número natural.

- $\mathbb{R}^n$ é o conjunto dos n-uplos ordenados $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ onde $x_1, x_2, \dots, x_n$ são números reais.
- Os elementos de $\mathbb{R}^n$ são chamados pontos ou vetores de $\mathbb{R}^n$.
- Os números reais $x_1, \dots, x_n$ são as coordenadas de $\mathbf{x}$.
- Sendo $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ em $\mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos:
  - a soma de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$
    $$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n);$$
  - o produto de λ por $\mathbf{x}$
    $$\lambda\, \mathbf{x} = (\lambda\, x_1, \dots, \lambda\, x_n);$$

Observação

- Os elementos de $\mathbb{R}^n$ podem ser representados geometricamente de duas formas

  - como pontos do espaço;
  - como direções.

- É, por isso, também usual designar os elementos de $\mathbb{R}^n$ por maiúsculas $X, Y, Z, P, Q, A, B, C, \ldots$ ou pelos símbolos $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{a}, \vec{b}, \ldots$.

- A única diferença entre o elemento $\mathbf{x} = (1, 2, 3)$, o ponto $X = (1, 2, 3)$ e o vetor $\vec{x} = (1, 2, 3)$ é a denominação; o objeto designado é sempre o mesmo: o triplo $(1, 2, 3)$.

- Os vetores $\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0, 0), \ldots, \vec{e}_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ são a base canónica de $\mathbb{R}^n$.
  - No caso particular de $n = 3$ denota-se

$$\vec{e}_1 = \vec{i}, \qquad \vec{e}_2 = \vec{j}, \qquad \vec{e}_3 = \vec{k}.$$

Produto escalar e norma em $\mathbb{R}^n$

Sejam $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n), \vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ em $\mathbb{R}^n$.

- O produto escalar[1] de $\vec{x}$ e $\vec{y}$ é definido por

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n;$$

- a norma do vetor $\vec{x}$ é definida por

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

- Se θ for o ângulo formado por $\vec{x}$ e $\vec{y}$ então

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\| \cos \theta.$$

- Os vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ dizem-se vetores ortogonais se $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$.

[1] ou produto interno. Também se denota por $< \vec{x}, \vec{y} >$.

Produto vetorial em $\mathbb{R}^3$

Sejam $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ em $\mathbb{R}^3$.

- O produto vetorial[2] de $\vec{x}$ e $\vec{y}$ é o vetor definido por

$$\vec{x} \times \vec{y} = (x_2y_3 - x_3y_2, -x_1y_3 + x_3y_1, x_1y_2 - x_2y_1).$$

- Se $\theta \in [0, \pi]$ for o ângulo formado por $\vec{x}$ e $\vec{y}$ então

$$\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\| \operatorname{sen} \theta.$$

- [Mnemónica]

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

[2] ou produto externo. Também se denota $\vec{x} \wedge \vec{y}$

Função real de n variáveis reais: definição

- Uma função real de n variáveis reais é uma função

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

em que o domínio U é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

- A função associa a cada elemento $(x_1, \dots, x_n) \in U$ um (e um só) número real $f(x_1, \dots, x_n)$.

Exemplo

1. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$f(x, y) = 2\,x\,y;$$
2. $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2;$$
3. $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$h(x, y) = \operatorname{sen}(xy);$$
4. $m : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$m(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z^2}.$$

Notação

$$
\begin{array}{rccl}
f\colon & U \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & f(x_1, \ldots, x_n).
\end{array}
$$

- Quando
  - $U \subset \mathbb{R}^n$ escrevemos $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$;
  - $U \subset \mathbb{R}^2$ escrevemos $\mathbf{x} = (x, y)$;
  - $U \subset \mathbb{R}^3$ escrevemos $\mathbf{x} = (x, y, z)$.
- Usando a notação $(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{x}$, as definições de contra-domínio e gráfico de f são formalmente iguais aos conceitos análogos para funções reais de uma variável real.

Contradomínio, gráfico e estruturas de nível

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

- O contradomínio de f é o conjunto $CD_f \subset \mathbb{R}$ constituído por todas as imagens de f:
$$CD_f = \{f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R} \,|\, \mathbf{x} \in U\}.$$

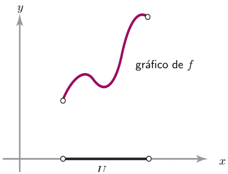
- O gráfico de f é o conjunto $\mathsf{G}_f \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de todos os $n+1-$uplos $(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))$ com $\mathbf{x} \in U$
$$\mathsf{G}_f = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \,|\, \mathbf{x} \in U\}.$$

- A estrutura de nível $k \in \mathbb{R}$ é o conjunto $f^{-1}(\{k\}) \subset \mathbb{R}^n$ de todos os pontos $\mathbf{x} \in U$ cuja imagem por f é k
$$f^{-1}(\{k\}) = \{\mathbf{x} \in U \,|\, f(\mathbf{x}) = k\}.$$

Gráfico

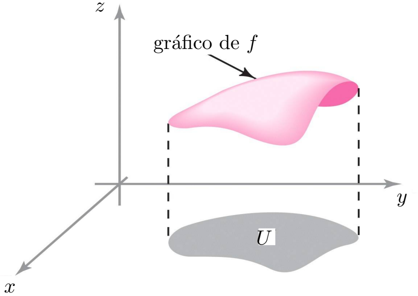
$f : U \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\mathsf{G}_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in U\}$



$f : U \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$\mathsf{G}_f = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U\}$



- Só é possível fazer o esboço do gráfico se o domínio da função estiver contido em $\mathbb{R}^2$, isto é, se o gráfico for um subconjunto de $\mathbb{R}^3$.

Exercício

Considere a função f definida por

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}.$$

(a) *Determine e esboce o domínio de f. Calcule $f(0, 0)$, $f(-3, 0)$, $f(1, 1)$ e $f(2, -1)$*

(b) *Determine o contradomínio de f.*

(c) *Determine o valor de f para os pontos da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$.*

(d) *Determine os pontos do domínio com imagem 2.*

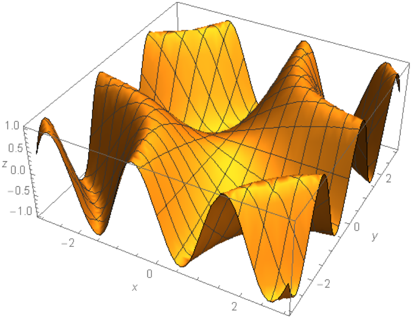
(e) *Esboce o gráfico de f.*

(f) *Esboce também o gráfico da função $g(x, y) = f(x, y) + 1$.*

Exemplo: gráficos

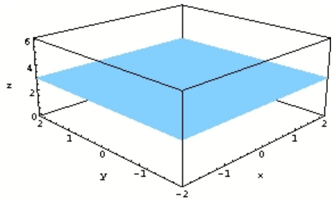
- Gráfico da função

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \text{sen}(xy)$$

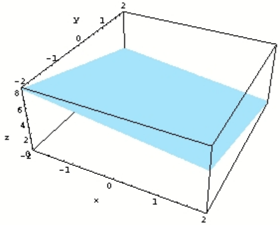


Plano

- $f(x, y) = 3$

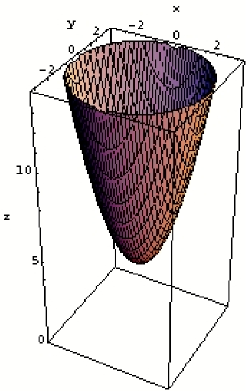


- $2x + 4y + 3z = 12$

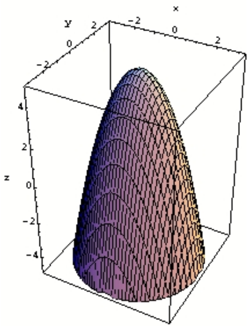


Parabolóide

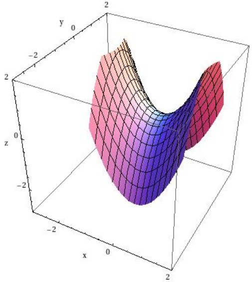
- $f(x, y) = 4 + x^2 + y^2$



- $f(x, y) = 5 - x^2 - y^2$

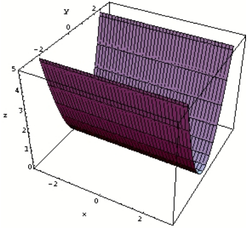


- Parabolóide hiperbólico
  $f(x, y) = x^2 - y^2$



- Cilindro parabólico

  $f(x, y) = y^2$



Superfícies

De entre as superfícies usaremos frequentemente as superfícies quádricas - gráficos de uma equação de segundo grau em 3 variáveis da forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0.$$

Por translação ou rotação da equação geral chegamos a uma das duas formas standard:

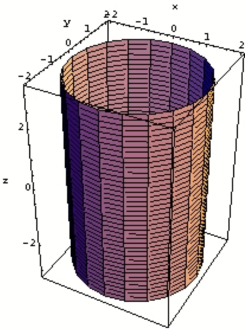
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0 \quad \text{ou} \quad Ax^2 + By^2 + Iz = 0.$$

Quando na equação de uma superfície quádrica não figura uma das variáveis x, y ou z estamos perante uma superfície cilíndrica.

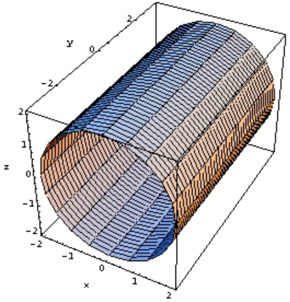
Superfícies

Superfícies cilíndricas

- $x^2 + y^2 = 4$

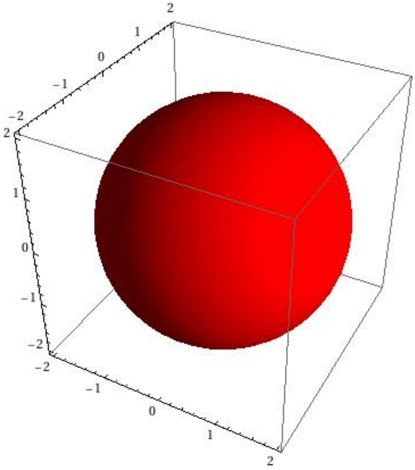


- $x^2 + z^2 = 4$



Superfície esférica

- $x^2 + y^2 + z^2 = 4$



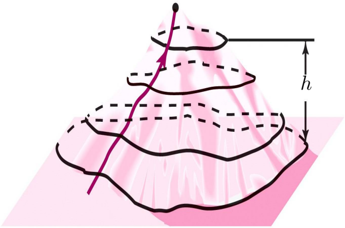
Observação

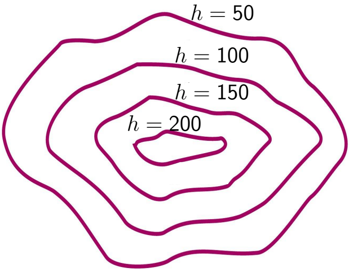
- Todos os gráficos de funções reais de 2 variáveis são superfícies.

- Nem todas as superfícies são gráficos de funções reais de duas variáveis.

Estruturas de nível

- curvas de nível se $U \subset \mathbb{R}^2$;
- superfícies de nível se $U \subset \mathbb{R}^3$





Exemplo

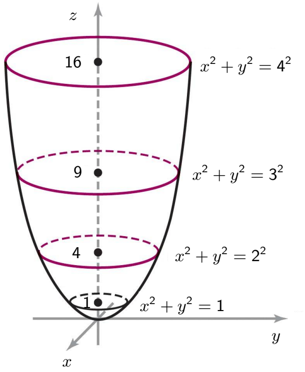
- isotérmicas: linhas que unem pontos com igual temperatura.

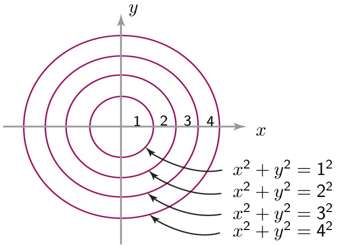
Exemplo

- Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 + y^2$.

A curva de nível k de f é

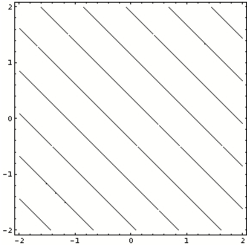
$$\begin{aligned} C_k = f^{-1}(\{k\}) &= \{(x, y) \in U : f(x, y) = k\} \\ &= \{(x, y) \in U : x^2 + y^2 = k\}, \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

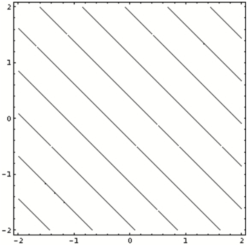




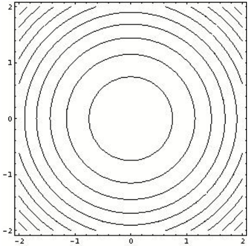
Exemplo: curvas de nível

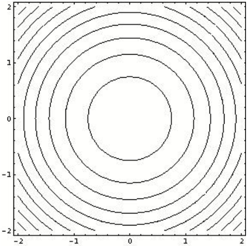
- curvas de nível de $f(x, y) = x + y$ e de $g(x, y) = 3x + 3y$



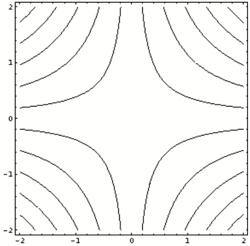


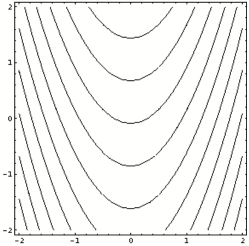
- curvas de nível de $f(x, y) = x^2 + y^2$ e de $g(x, y) = 1 - x^2 - y^2$





- curvas de nível de $f(x, y) = -xy$ e de $g(x, y) = y - x^2$





Exemplo: superfícies de nível

- Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

  A superfície de nível $k \geq 0$ de f é

  $$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 + z^2 = k\},$$

  isto é, é a superfície esféricas de centro $(0, 0, 0)$ e raio $\sqrt{k}$.