Cap 3 – Integrais múltiplos

3.1 – Integração dupla e volumes

Integrais duplos e volume

Definição de integral duplo

Propriedades dos integrais duplos

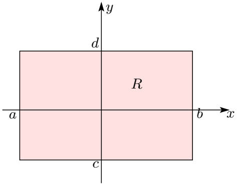
Integração em regiões gerais

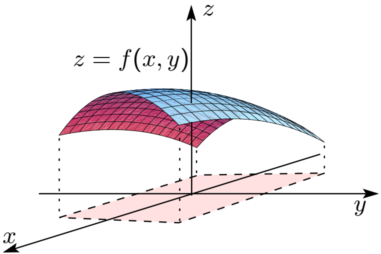
Volume e área

Motivação

Seja R o retângulo $[a, b] \times [c, d]$ e $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x, y) \geq 0 \qquad \text{em} \quad R.$$



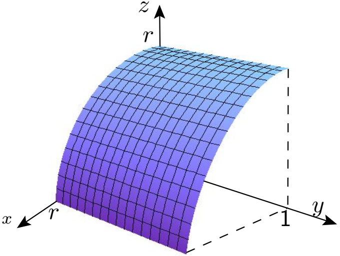


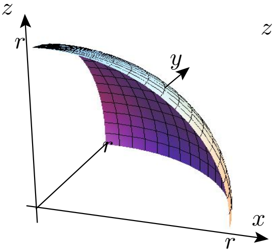
A superfície definida por $z = f(x, y)$ e os planos

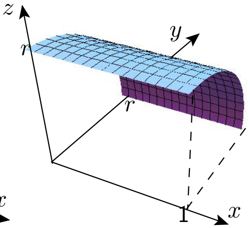
$$x = a, \quad x = b, \quad y = c, \quad y = d$$

formam a fronteira de uma região de $\mathbb{R}^3$,

- [Problema] Determinar o volume da região do espaço compreendida entre o retângulo R e o gráfico da função f.


z
r
x
r
y
1

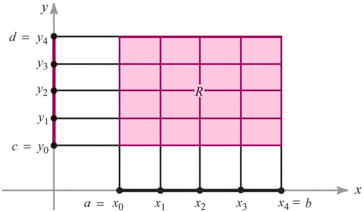

z
r
y
r
x
r


z
y
r
r
1
x

Integral duplo

Seja $R = [a,b] \times [c,d]$ e $f : R \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

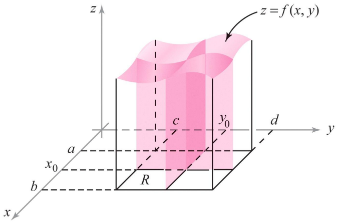
- Subdividimos $[a,b]$ em n subintervalos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$;
- Subdividimos $[c,d]$ em k subintervalos $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{k-1} < y_k = d$;
- Às divisões anteriores associamos uma subdivisão do retângulo R em $n \times k$ retângulos $R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$;



- Denotamos $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ e $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$;
- A área do retângulo R_{ij} é então $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \, \Delta y_j$.
- Para cada retângulo R_{ij} escolhemos um ponto $(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j)$;

- O volume do paralelipípedo de base R_{ij} e altura $f(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j)$ é $f(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j)\Delta A_{ij}$;
- O volume do sólido limitado por R e pelo gráfico de f pode ser aproximado por

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1} f(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j)\Delta A_{ij}.$$



- Chamamos soma de Riemann de f relativa à subdivisão anterior de R ao número

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1} f(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j)\,\Delta A_{ij}$$

- Quando $n, k \longrightarrow \infty$ o valor da soma de Riemann de f designa-se por integral definido de f em R e denota-se

$$\iint_R f(x,y)\,dA \qquad \text{ou} \qquad \iint_R f(x,y)\,dx\,dy.$$

Propriedades dos integrais duplos

Sejam $f,\, g : R \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções contínuas. Então:

1. $\displaystyle\iint_R [f(x,y) + g(x,y)]\; dA = \iint_R f(x,y)\, dA + \iint_R g(x,y)\, dA$;

2. $\displaystyle\iint_R \lambda\; f(x,y)\, dA = \lambda\; \iint_R f(x,y)\, dA, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$;

3. $\displaystyle f \geq g \Longrightarrow \iint_R f(x,y)\, dA \geq \iint_R g(x,y)\, dA$;

4. $\displaystyle f \geq 0 \Longrightarrow \iint_R f(x,y)\, dA \geq 0$.

5. [Teorema de Fubini] Sendo R o retângulo $R = [a,b] \times [c,d]$ então

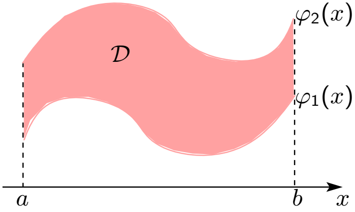
$$\iint_R f(x,y)\, dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\, dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\, dx\right] dy.$$

Exemplo

- Calcular o integral, onde R é o retângulo $[0,2] \times [-1,0]$,

$$\iint_R (x^2y^2 + x)\, dA.$$

Integração em regiões gerais



Região do tipo I

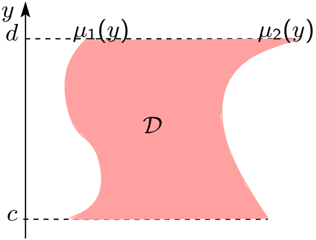
$$a \leq x \leq b$$

$$\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$$

Região do tipo II

$$c \leq y \leq d$$

$$\mu_1(y) \leq x \leq \mu_2(y)$$



- $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ diz-se uma região do tipo I de $\mathbb{R}^2$, ou verticalmente simples, se existe um intervalo $[a, b]$ e duas funções

$$\varphi_1 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \varphi_2 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^1(]a, b[)$$

tais que $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$. Então

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right] dx.$$

- $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ diz-se uma região do tipo II de $\mathbb{R}^2$, ou horizontalmente simples, se existe um intervalo $[c, d]$ e duas funções

$$\mu_1 : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \mu_2 : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{C}^1(]c, d[)$$

tais que $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d,\ \mu_1(y) \leq x \leq \mu_2(y)\}$. Então

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_{\mu_1(y)}^{\mu_2(y)} f(x, y)\, dx \right] dy.$$

- $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ diz-se uma região do tipo III de $\mathbb{R}^2$ se for, simultaneamente, uma região do tipo I e do tipo II.

Exemplo

- Calcular
$$\iint_{\mathcal{D}} xy\, dA$$
quando $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ \ 0 \leq y \leq x\}$.
    1. Usando uma região verticalmente simples.
    2. Usando uma região horizontalmente simples.

Volume e área

- Se $f : B \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é não negativa e integrável em B, e S é a região do espaço definida por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x, y) \in B, \ 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

define-se o volume de S por

$$\mathrm{vol}(S) = \iint_B f(x, y)\, dA.$$

- Se $f : B \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função constante $f(x, y) = 1$, a área de B é dada por

$$\text{área}(B) = \iint_B 1\, dA$$