5ª aula

24 de março de 2021 11:00

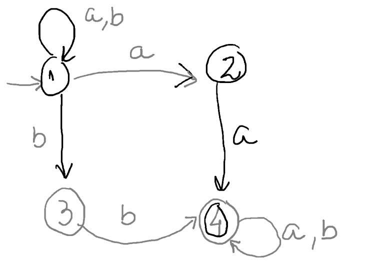
2. Considere o autómato $\mathcal{A} = (Q, A, \delta, i, F)$ onde $Q = \{1,2,3,4\}$, $A = \{a,b\}$, $i = 1$, $F = \{4\}$ e o conjunto de transições é definido pela função de transição δ definida pela tabela seguinte:

δ	1	2	3	4
a	$\{1,2\}$	$\{4\}$	$\varnothing$	$\{4\}$
b	$\{1,3\}$	$\varnothing$	$\{4\}$	$\{4\}$

(a) Represente o autómato $\mathcal{A}$ através de um grafo.
(b) Dê exemplos de palavras aceites por $\mathcal{A}$ e de palavras rejeitadas por $\mathcal{A}$.
(c) Descreva a linguagem reconhecida pelo autómato $\mathcal{A}$.
(d) Classifique o autómato.

$\delta : Q \times A \longrightarrow \mathcal{P}(Q)$
$(1, a) \longmapsto \{1,2\}$
$(2, b) \longmapsto \varnothing$
$(3, b) \longmapsto \{4\}$
$\vdots$

a)



b) Exemplos de palavras aceites por $\mathcal{A}$:
aa, a^n com $n \geq 2$, b^n com $n \geq 2$,
ba^2, a^2b, ...
Exemplos de palavras não aceites por $\mathcal{A}$
a, b, ab, ba, $ababab$

c) $L(\mathcal{A}) = A^* a^2 A^* \cup A^* b^2 A^* = A^* \{a^2, b^2\} A^*$

(NOTA: $\mathcal{L}((a+b)^*(a^2+b^2)(a+b)^*)$ $L(\mathcal{A})$)

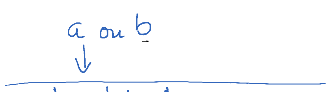
d) · autómato não é completo porque, por exemplo, $\delta(3, a) = \varnothing$, ou seja, não existe uma transição a partir de 3 com etiqueta a.
· $\mathcal{A}$ não é determinista porque, por exemplo, $\# \delta(1,a) > 1$.
· $\mathcal{A}$ é acessível porque existem caminhos de 1 para 2, de 1 para 3 e de 1 para 4: $1 \xrightarrow{a} 2$; $1 \xrightarrow{b} 3$, $1 \xrightarrow{b} 3 \xrightarrow{b} 4$.
· $\mathcal{A}$ é co-acessível porque existem caminhos de vértice inicial 1, 2 ou 3 e vértice final 4: $2 \xrightarrow{a} 4$; $3 \xrightarrow{b} 4$; $1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{a} 4$.

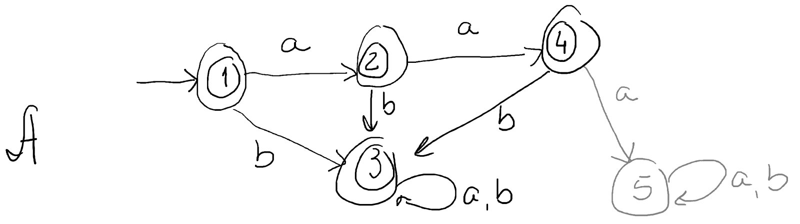
3. Seja L a linguagem sobre o alfabeto $\{a,b\}$ constituída pelas palavras que não têm aaa como prefixo.

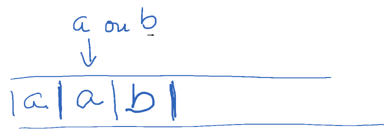
(a) Mostre que L é uma linguagem reconhecível.
(b) Para cada uma das expressões regulares seguintes, diga, justificando, se a expressão representa L ou não:
~~i.~~ $b^*ab^*ab^+(a+b)^*$;
~~ii.~~ $(\varepsilon + a + a^2)(\varepsilon + b)(a+b)^*$;
iii. $\varepsilon + a + a^2 + (b + ab + a^2b)(a+b)^*$; ✓
~~iv.~~ $(b + ab + a^2b)^*$.

$L = \{u \in A^* : aaa \text{ não é prefixo de } u\} = A^* \setminus aaaA^*$

a) Queremos saber se existe um autómato cuja linguagem é L.







NOTA: o estado 5 não é acessível.
aaab não aceite pelo autómato

Representando de outra forma o autómato, temos que

$$\mathcal{A} = (\{1,2,3,4\}, \{a,b\}, \delta, 1, \{1,2,3,4\})$$

onde δ é definida pela tabela:

δ	1	2	3	4
a	$\{2\}$	$\{4\}$	$\{3\}$	$\emptyset$
b	$\{3\}$	$\{3\}$	$\{3\}$	$\{3\}$

b) $aab \in \mathcal{L}(b^* a b^* a b^+ (a+b)^*)$ e aab é a palavra de menor comprimento nestas condições.
$a^2 \notin \mathcal{L}(b^* a b^* a b^+ (a+b)^*)$ e $a^2 \in L$. Logo i) não é uma opção correta.

$a^3 = a^2 \cdot \varepsilon \cdot a \in \mathcal{L}(\varepsilon + a + a^2(\varepsilon + b)(a+b)^*)$. Logo a opção ii não é a opção correta.

As palavras de menor comprimento de $\mathcal{L}(b + ab + a^2b)^*$ são ε, b, bb, ab, bab, abb, a^2b, b^3. Logo esta linguagem não contém a, nem a^2. Como $a, a^2 \in L$, então iv não é a opção correta.

$L = \{u \in A^* : aaa \text{ não é prefixo}\} =$
$= \{u_1 u_2 \in A^* : |u_1| = 3 \text{ e } |u_1|_b \geq 1, u_2 \in A^*\} \cup \{u \in A^* : |u| \leq 2\}$

Então $L = \mathcal{L}((baa, bab, bbb, bba, \ldots\ldots)(a+b)^* + aa + bb + ba + ab + b + a + \varepsilon)$

$= \mathcal{L}(\underbrace{(b + ab + aab)(a+b)^*}_{\text{palavras de prefixo } b,\ ab \text{ ou } aab} + \underbrace{aa + a + \varepsilon}_{\text{restantes que não têm } aaa \text{ como prefixo}})$

A opção iii) é a correta.

A opção iii) é a correta. em cada uma página.

4. Considere o alfabeto $A = \{a, b, c\}$.

(a) Indique um autómato finito que reconheça o conjunto de todas as palavras sobre A que verificam:

i. ab é um fator; ii. ab não é fator; iii. existe uma única ocorrência de ab.

(b) Identifique a tabela das transições de cada um dos autómatos que desenhou.

(c) Classifique os autómatos que desenhou.

(d) Para cada linguagem da alínea anterior, indique uma expressão regular que a represente.

6. Use o Lema da Iteração para provar que não são reconhecíveis as seguintes linguagens sobre o alfabeto $A = \{a, b\}$.

(c) $\{w \in A^* \mid w^I = w\}$. (d) $\{a^p \mid p \in \mathbb{N}$ e p é primo$\}$. $= L$

. Recordar: Se A e B são proposições então

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

Se A significar "L é reconhecível", então ¬A significa "L não é reconhecível". Vamos usar o Lema da Iteração para provar que L não é reconhecível. Por isso vamos verificar que ¬B é verdadeira.

d) Para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

seja $u = a^p$ em que p é o menor primo maior ou igual a n.

Então $|u| = |a^p| = p \geq n$.

Fazendo $u = xyz$ em que $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq n$, vem que

$y = a^t$ em que $t \geq 1$.

$u = |a|a| \dots |a| |a| = a^p$
$| \; x \; | \; y \; | \; z \; |$

Assim $xyz = a^{l_1} a^t a^{l_2}$ com $l_1 + t + l_2 = p$

$xy^k z = a^{l_1} (a^t)^k a^{l_2} = a^{l_1 + tk + l_2}$

Então $xy^k z \in L$ se e só se $l_1 + tk + l_2$ for primo.

Por exemplo, se $k = p+1$, então

$$l_1 + tk + l_2 = l_1 + t + l_2 + (k-1)t = p + pt = p(t+1)$$

≥ 2 ≥ 2

pelo que $l_1 + tk + l_2$ não é primo.

Logo, $x y^k z \notin L$.

Pelo Lema da Iteração, conclui-se que L não é reconhecível.

8. Considere-se $A = \{a, b\}$ e $L = \{a^n b^m : m \geq n \geq 0\}$. Sejam $n \in \mathbb{N}$, e $u = a^n b^n$ uma palavra de L. Qualquer que seja o prefixo xy de u tal que $|xy| \leq n$ e $y \neq \varepsilon$, tem-se que $x = a^i$, $y = a^j$ com $i + j \leq n$, $i \geq 0$ e $j \geq 1$. Então $|u| \geq n$, $u = xyz$ com $z = a^{n-i-j} b^n$. Se $k = 2$, então $xy^k z = a^{n+j} b^n$ pelo que $xy^k z$ não é uma palavra de L.

   De entre as afirmações abaixo diga qual é a afirmação verdadeira.

   (i) Com base no Lema da Iteração, a argumentação apresentada não permite concluir que a linguagem L não é regular.

   (ii) Com base no Lema da Iteração, a argumentação apresentada prova que L é uma linguagem regular.

   (iii) Com base no Lema da Iteração, a argumentação apresentada prova que L não é uma linguagem regular.

   (iv) Com base no Lema da Iteração, só poderíamos concluir que L não é uma linguagem regular se, para qualquer $k \geq 0$, $xy^k z$ não fosse uma palavra de L.