# Proposta de resolução

## Grupo I

Em cada questão deste grupo deve ser assinalada apenas uma das opções de resposta. A uma resposta correta é atribuída uma cotação de $1.25$ valores (apenas uma resposta está correta) e a uma resposta errada é atribuída uma cotação de $-0.25$ valores. A cotação mínima total deste grupo é de $0$ valores.

1. As matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

   - [ ] são comutáveis para qualquer $a \in \mathbb{R}$.
   - [ ] $B$ é a inversa de $A$ se $a = 0$.
   - [ ] são ambas invertíveis.
   - [X] são comutáveis se $a = 2$.

2. Para uma matriz quadrada de ordem $n$ tal que $A^3 = O$ e $A^p \neq O$ para $p < 3$, a inversa da matriz $I_n - A$ é a matriz

   - [X] $I_n + A + A^2$.
   - [ ] $A^3 + 2I_n$.
   - [ ] $I_n + A$.
   - [ ] $A + A^2 + A^3$.

3. Se $A$ e $B$ são matrizes de ordem $n > 1$ tais que $AB = 2I_n$, então

   - [ ] $A$ e $B$ não são matrizes invertíveis.
   - [ ] $\det(AB) = 2$.
   - [ ] $A$ é invertível e $A^{-1} = 2B$.
   - [X] $A$ é invertível e $A^{-1} = \frac{1}{2}B$.

4. Se $A$ e $B$ são matrizes de ordem $4$ tais que $\det(A) = 2$ e $\det(B) = 3$, então

   - [ ] $\det\left(AB^{-1}\right) = \frac{2}{3}$ e $\det\left(B^{-1}A\right) = -\frac{3}{2}$.
   - [ ] $\det(-B) = -3$.
   - [ ] $\det(AA^T) = 2^4$.
   - [X] $\det(AB^T) = 6$.

5. Se $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & \beta-2 \end{array}\right]$ é a matriz ampliada de um sistema de equações lineares, com $\alpha$ e $\beta$ parâmetros reais, então

   - [ ] o sistema é sempre possível.
   - [X] o sistema é possível e indeterminado se e só se $\alpha = -1$ e $\beta = 2$.
   - [ ] o sistema é possível e determinado se $\alpha = -1$ e $\beta \neq 2$.
   - [ ] o sistema é impossível se $\alpha \neq -1$.

6. A característica da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b-a \end{bmatrix}$, com $a, b \in \mathbb{R}$, é igual a

   - [ ] $2$ se $a = b$.
   - [ ] $3$ se $a \neq b$.
   - [ ] $2$ para quaisquer valores de $a$ e $b$.
   - [X] $3$ se $a \neq 0$ e $a \neq b$.

## Grupo II

Neste grupo as respostas a todos as questões devem ser devidamente justificadas.

1. [1.5 valores] Sejam $A$ e $B$ matrizes reais de ordem $n$ invertíveis, tais que $B$ é simétrica e $A+B=I_n$. Mostre que
$$A\left(B-B^{-1}B\right)^T=-A^2.$$
(Recorde que uma matriz quadrada se diz simétrica se for igual à sua transposta).

<u>Resolução</u>. Temos
$$\begin{aligned}A\left(B-B^{-1}B\right)^T&=A(B-I_n)^T=A(B^T-I_n^T)\\&=A(B-I_n)=A(I_n-A-I_n)=A(-A)=-A^2,\end{aligned}$$
dado que $I_n$ e $B$ são matrizes simétricas, ou seja, $B^T=B$ e $I_n^T=I_n$, e se tem $B=I_n-A$.

2. [2.5 valores] Considere o sistema de equações lineares nas incógnitas $x,y,z$ e $w$ com a seguinte matriz ampliada:
$$\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&1\\-1&0&1&0&-1\\-2&0&3&0&1\\0&1&3&1&3\\1&2&4&2&4\end{array}\right]$$
   (a) Verifique que $(4,-6,3,0)$ é solução do sistema.

   (b) Use o método de eliminação de Gauss para verificar que se trata de um sistema possível e indeterminado. Obtenha a solução geral do sistema.

<u>Resolução</u>.

(a) A matriz ampliada corresponde ao sistema de equações lineares $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ com
$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\-1&0&1&0\\-2&0&3&0\\0&1&3&1\\1&2&4&2\end{bmatrix}\qquad\text{e}\qquad\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\3\\4\end{bmatrix}.$$
Assim, para $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}4&-6&3&0\end{bmatrix}^T$ temos
$$A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\-1&0&1&0\\-2&0&3&0\\0&1&3&1\\1&2&4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\-6\\3\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4-6+3\\-4+3\\-8+9\\-6+9\\4-12+12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\3\\4\end{bmatrix}=\boldsymbol{b},$$
ou seja, $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}4&-6&3&0\end{bmatrix}^T$ é solução do sistema.

(b)

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \longleftarrow l_2 + l_1 \\ l_3 \longleftarrow l_3 + l_1 \\ l_5 \longleftarrow l_5 - l_1}]{} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_3 \longleftarrow l_3 - 2l_2 \\ l_4 \longleftarrow l_4 - l_2 \\ l_5 \longleftarrow l_5 - l_2}]{}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_4 \longleftarrow l_4 - l_3 \\ l_5 \longleftarrow l_5 - l_3}]{} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Temos o sistema equivalente

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & +y & +z & +w & =1 \\ & y & +2z & +w & =0 \\ & & z & & =3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = 1 - y - z - w \\ y = -2z - w \\ z = 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = 4 \\ y = -6 - w \\ z = 3 \end{array}\right. ,$$

onde $w$ uma variável livre, podendo, portanto, tomar qualquer valor real. O sistema é possível e indeterminado e

$$(x, y, z, w) = (4, -6 - \alpha, 3, \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

é a solução geral do sistema.

3. [4 valores] Considere a matriz invertível $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Use o método de eliminação de Gauss-Jordan para determinar $A^{-1}$.

(b) Use $A^{-1}$ para resolver o sistema de equações lineares $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ com $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$.
Nota: Caso não tenho respondido à alínea a), resolva o sistema usando o método de eliminação de Gauss.

(c) A partir de $A^{-1}$ obtenha a inversa da matriz $2A$ e da matriz $A^T$.

Resolução.

(a)

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \longleftarrow l_2 - 3l_1 \\ l_3 \longleftarrow l_3 - l_1}]{} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_2 \longleftarrow -l_2]{} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_3 \longleftarrow l_3 - l_2]{} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_1 \longleftarrow l_1 - l_3]{} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_1 \longleftarrow l_1 - l_2]{} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Assim,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \iff \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

(c) Uma vez que $A$ é invertível, $2A$ e $A^T$ são também invertíveis e tem-se

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2A)^{-1} = 2^{-1}A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

4. [3 valores] Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Mostre que $A$ é invertível.

(b) Sem calcular $\operatorname{adj}(A)$ nem $A^{-1}$, determine o elemento na posição $(2,1)$ de cada uma destas matrizes.

(c) Use a regra de Cramer para obter o valor da incógnita $x_3$ do sistema $A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ (sem resolver completamente o sistema).

Resolução.

(a) Se escolhermos a terceira coluna da matriz para fazermos o desenvolvimento de Laplace, vem

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (-1)^6 \times 2 \times \det\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \times (-2) = -4.$$

Como $\det(A) \neq 0$, a matriz $A$ é uma matriz invertível.

(b)

$$\big(\operatorname{adj}(A)\big)_{2,1} = C_{1,2} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -2$$

$$\left(A^{-1}\right)_{1,2} = \frac{1}{\det(A)}\big(\operatorname{adj}(A)\big)_{2,1} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

(c)

$$x_3 = -\frac{1}{4}\det\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\left[2 \times \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \times \det\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= -\frac{1}{4}\big(2 \times 1 + 1 \times (-2)\big) = 0$$

5. [1.5 valores] Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz ortogonal, isto é, tal que $AA^T = A^TA = I_n$. Justifique que se $n \geq 2$, então

$$\operatorname{adj}(A) = A^T \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{adj}(A) = -A^T.$$

Resolução. Uma vez que $A$ é ortogonal, tem-se

$$\det(AA^T) = \det(I_n) = 1.$$

Mas como $\det(AA^T) = \det(A^T)\det(A) = \det(A)\det(A) = \det(A)^2$, tem-se

$$\det(A)^2 = 1 \Longleftrightarrow \det(A) = 1 \;\text{ ou }\; \det(A) = -1.$$

Sabemos também que, se $A$ é ortogonal, $A^{-1} = A^T$, por definição de matriz inversa. Assim, do resultado

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A) \Longleftrightarrow \operatorname{adj}(A) = \det(A)A^{-1},$$

segue que

$$\operatorname{adj}(A) = A^{-1} = A^T \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{adj}(A) = -A^{-1} = -A^T,$$

quando $A$ é uma matriz ortogonal.