

## Tópicos de Matemática

Lic. Ciências da Computação  
2019/2020



## 5. Relações binárias

No dia a dia é usual definirmos relações entre objetos, tais como a relação de *igualdade* entre objetos, a relação *menor do que* entre inteiros, a relação de *inclusão* entre conjuntos. Neste capítulo formaliza-se a noção de relação binária entre objetos e estudam-se algumas propriedades a respeito deste tipo de relações.

### 5.1 Noções básicas

A noção de relação entre dois objetos baseia-se na ideia de que esses objetos estão associados de alguma forma. Assim sendo, define-se relação binária como um conjunto de pares ordenados e os seus elementos são os pares ordenados  $(a, b)$  tais que  $a$  está associado a  $b$ .

**Definição 5.1.** *Dados conjuntos  $A$  e  $B$ , chamamos **relação binária de  $A$  em  $B$**  a qualquer subconjunto  $R$  de  $A \times B$ . Quando  $A = B$ , diz-se que  $R$  é uma relação binária em  $A$ .*

*Se  $(a, b) \in R$ , diz-se que  $a$  **está relacionado com  $b$  por  $R$**  e escreve-se  $aRb$ . Se  $(a, b) \notin R$ , diz-se que  $a$  **não está relacionado com  $b$  por  $R$**  e escreve-se  $a \not R b$ .*

#### Exemplo 5.1.

(1) *Sendo  $A$  o conjunto de alunos da Licenciatura em Ciências da Computação e  $D$  o conjunto de disciplinas do plano de estudos deste curso, podemos definir uma relação  $R$  de  $A$  em  $D$  da seguinte forma: dados  $a \in A$  e  $d \in D$ ,  $(a, d) \in R$  se  $d$  é uma disciplina do 1º ano do curso e o aluno  $a$  está inscrito na disciplina  $d$ .*

(2) *Sejam  $A = \{2, 3\}$  e  $B = \{3, 4, 5, 6\}$ .*

( $\alpha$ ) *São exemplos de relações binárias de  $A$  em  $B$  as que a seguir se listam:*

(i)  $R = \{(2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6)\}$ ;

(ii)  $S = \{(2, 5)\}$ ;

(iii)  $\emptyset$ ;

(iv)  $A \times B$ .

## relações binárias

A respeito da relação  $R$  verifica-se que esta pode ser definida por

$a R b$  se e só se  $a$  divide  $b$ , para quaisquer  $a \in A$  e  $b \in B$ .

No caso da relação  $S$ , o par  $(5, 2)$  não é elemento de  $S$ , pelo que  $5 \not S 2$ .

( $\beta$ )  $T = \{(2, 3), (3, 2), (3, 4)\}$  não é uma relação binária de  $A$  em  $B$ , visto que  $(3, 2) \notin A \times B$ .

(3) Sejam  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  e  $R$  a relação binária de  $A$  em  $B$  definida por

$a R b$  se e só se  $b = 2a$ .

Então

$$R = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)\}.$$

Note-se que  $1 R 3$ , pois  $3 \neq 2 \times 1$ .

(4) Dados conjuntos  $A$  e  $B$ , uma função  $f : A \rightarrow B$  é uma relação binária de  $A$  em  $B$ .

Dados conjuntos  $A$  e  $B$ , o conjunto de todas as relações binárias de  $A$  em  $B$  é o conjunto  $\mathcal{P}(A \times B)$ . Se os conjuntos  $A$  e  $B$  forem finitos, com  $n$  e  $m$  elementos, respetivamente, então  $A \times B$  tem  $nm$  elementos, pelo que  $\mathcal{P}(A \times B)$  tem  $2^{nm}$  elementos. Assim, existem  $2^{nm}$  relações binárias de  $A$  em  $B$ . Em particular, os conjuntos  $\emptyset$  e  $A \times B$  são relações binárias de  $A$  em  $B$ , designadas, respetivamente, por **relação vazia** e **relação universal**.

Dado um conjunto não vazio  $A$ ,

$$id_A = \{(a, a) \mid a \in A\} \quad \text{e} \quad \omega_A = A^2 = \{(x, y) \mid x, y \in A\}$$

são relações binárias em  $A$  designadas, respetivamente, por **relação identidade em  $A$**  e **relação universal em  $A$** .

**Definição 5.2.** Dados conjuntos  $A$  e  $B$  e uma relação binária  $R$  de  $A$  em  $B$ , chamamos:

- **domínio de  $R$  ao conjunto**

$$\text{Dom}(R) = \{a \mid \exists_{b \in B} (a, b) \in R\};$$

- **imagem ou contradomínio de  $R$  ao conjunto**

$$\text{Im}(R) = \{b \mid \exists_{a \in A} (a, b) \in R\}.$$

**Exemplo 5.2.** Consideremos os conjuntos  $A = \{2, 4, 5\}$ ,  $B = \{2, 3, 4, 5\}$  e a relação  $R$  de  $A$  em  $B$  definida por  $(a, b) \in R$  se e só se  $a < b$ . Então temos:

-  $R = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 5)\};$

-  $\text{Dom}(R) = \{2, 4\}$  e  $\text{Im}(R) = \{3, 4, 5\}.$

Duas relações binárias  $R$  e  $S$  de um conjunto  $A$  num conjunto  $B$  são iguais se os conjuntos  $R$  e  $S$  são iguais. Assim, se  $R = S$ , tem-se  $\text{Dom}(R) = \text{Dom}(S)$  e  $\text{Im}(R) = \text{Im}(S)$ . Note-se, no entanto, que não é necessariamente verdade que  $R = S$  sempre que  $\text{Dom}(R) = \text{Dom}(S)$  e  $\text{Im}(R) = \text{Im}(S)$ .

Seguidamente apresentam-se alguns processos que permitem obter novas relações a partir de relações dadas.

Uma vez que uma relação binária é um conjunto, podemos construir novas relações recorrendo aos processos estudados anteriormente para obter novos conjuntos a partir de conjuntos dados. Assim, se  $R$  e  $S$  são relações binárias de  $A$  em  $B$ , o mesmo acontece com  $R \cup S$ ,  $R \cap S$ ,  $R \setminus S$ .

**Exemplo 5.3.** Sejam  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{2, 4, 5, 6\}$  e consideremos as relações  $R = \{(1, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 5)\}$  e  $S = \{(2, 4), (2, 6), (3, 5)\}$ . Então são relações binárias de  $A$  em  $B$ :

- $R \cap S = \{(2, 4), (3, 5)\}$ ;
- $R \cup S = \{(1, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 2), (3, 5)\}$ ;
- $R \setminus S = \{(1, 2), (3, 2)\}$ .

Além destes processos para obter novas relações, existem outros que são específicos das relações binárias.

**Definição 5.3.** Sejam  $A$ ,  $B$  conjuntos e  $R$  uma relação binária de  $A$  em  $B$ . Chama-se **relação inversa de  $R$** , e representa-se por  $R^{-1}$ , a relação de  $B$  em  $A$  definida por

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}.$$

**Exemplo 5.4.** Consideremos os conjuntos  $A = \{2, 4, 5\}$ ,  $B = \{2, 3, 4, 5\}$  e a relação  $R$  de  $A$  em  $B$  definida por  $(a, b) \in R$  se e só se  $a < b$ . Uma vez que  $R = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 5)\}$  tem-se

$$R^{-1} = \{(3, 2), (4, 2), (5, 2), (5, 4)\}.$$

**Proposição 5.4.** Sejam  $A$ ,  $B$  conjuntos e  $R$  e  $S$  relações binárias de  $A$  em  $B$ . Então

- (1)  $\text{Dom}(R^{-1}) = \text{Im}(R)$  e  $\text{Im}(R^{-1}) = \text{Dom}(R)$ .
- (2)  $(R^{-1})^{-1} = R$ .
- (3) Se  $R \subseteq S$ , então  $R^{-1} \subseteq S^{-1}$ .

## relações binárias

*Demonstração.* Apresenta-se a prova das propriedades (1) e (2), ficando a prova de (3) como exercício.

(1) Facilmente prova-se que  $\text{Dom}(R^{-1}) = \text{Im}(R)$ . De facto, para qualquer objeto  $y$ ,

$$\begin{aligned} y \in \text{Dom}(R^{-1}) &\Leftrightarrow \exists_{x \in A} (y, x) \in R^{-1} \\ &\Leftrightarrow \exists_{x \in A} (x, y) \in R \\ &\Leftrightarrow y \in \text{Im}(R). \end{aligned}$$

A prova de  $\text{Im}(R^{-1}) = \text{Dom}(R)$  é análoga.

(2) Uma vez que  $R \subseteq A \times B$  e  $(R^{-1})^{-1} \subseteq A \times B$  e, para qualquer  $(x, y) \in A \times B$ ,

$$\begin{aligned} (x, y) \in R &\Leftrightarrow (y, x) \in R^{-1} \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (R^{-1})^{-1}, \end{aligned}$$

concluimos que  $R = (R^{-1})^{-1}$ . □

**Definição 5.5.** *Sejam  $A, B, C$  e  $D$  conjuntos,  $R$  uma relação binária de  $A$  em  $B$  e  $S$  uma relação binária de  $C$  em  $D$ . Chama-se **relação composta de  $S$  com  $R$** , e representa-se por  $S \circ R$ , a relação binária de  $A$  em  $D$  definida por*

$$S \circ R = \{(x, y) \mid \exists z \in B \cap C : (x, z) \in R \wedge (z, y) \in S\}.$$

Note-se que, nas condições da definição anterior, se  $B \cap C = \emptyset$ , tem-se  $S \circ R = \emptyset$ .

**Exemplo 5.5.** *Sejam  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $C = \{0, 2, 3, 4\}$  e  $D = \{0, 1, 3, 5\}$  e consideremos as relações binárias*

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 4)\} \subseteq A \times B,$$

$$S = \{(0, 1), (3, 0), (3, 3), (3, 5), (4, 0)\} \subseteq C \times D.$$

*Então*

$$(1) \ S \circ R = \{(1, 0), (1, 3), (1, 5), (2, 0)\};$$

$$(2) \ R \circ S = \{(0, 2), (0, 3)\}.$$

Do exemplo anterior podemos concluir que a composição de relações binárias não é, em geral, comutativa.

**Proposição 5.6.** *Sejam  $R, S$  e  $T$  relações binárias. Então*

$$(1) \ \text{Dom}(S \circ R) \subseteq \text{Dom}(R) \text{ e } \text{Im}(S \circ R) \subseteq \text{Im}(S).$$

$$(2) \ (T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R).$$

$$(3) \ (S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}.$$

*Demonstração.* (1) Resulta facilmente da definição de relação composta. Com efeito, se  $x \in \text{Dom}(S \circ R)$ , então existe  $y$  tal que  $(x, y) \in S \circ R$ . Logo existe  $z$  tal que  $(x, z) \in R$  e  $(z, y) \in S$ . Portanto,  $x \in \text{Dom}R$ . Desta forma, provámos que  $\text{Dom}(S \circ R) \subseteq \text{Dom}R$ . De forma semelhante prova-se que  $\text{Im}(S \circ R) \subseteq \text{Im}S$ .

(2) Seja  $(x, y) \in (T \circ S) \circ R$ . Então existe  $z$  tal que  $(x, z) \in R$  e  $(z, y) \in T \circ S$ . De  $(z, y) \in T \circ S$  segue que existe  $w$  tal que  $(z, w) \in S$  e  $(w, y) \in T$ . Dado que  $(x, z) \in R$  e  $(z, w) \in S$ , então  $(x, w) \in S \circ R$ . Agora, de  $(x, w) \in S \circ R$  e de  $(w, y) \in T$ , tem-se  $(x, y) \in T \circ (S \circ R)$ . Logo  $(T \circ S) \circ R \subseteq T \circ (S \circ R)$ . De modo análogo, prova-se que  $T \circ (S \circ R) \subseteq (T \circ S) \circ R$ .

(3) Para todo o objeto  $(x, y)$ ,

$$\begin{aligned} (x, y) \in (S \circ R)^{-1} &\Leftrightarrow (y, x) \in S \circ R \\ &\Leftrightarrow \exists_z (y, z) \in R \wedge (z, x) \in S \\ &\Leftrightarrow \exists_z (z, y) \in R^{-1} \wedge (x, z) \in S^{-1} \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in R^{-1} \circ S^{-1}. \end{aligned}$$

□

Seguidamente referem-se algumas propriedades que permitem definir classes especiais de relações binárias.

**Definição 5.7.** *Sejam  $A$  um conjunto e  $R$  uma relação binária em  $A$ . Diz-se que:*

-  $R$  é **reflexiva** se

$$\forall_{a \in A} (a, a) \in R;$$

-  $R$  é **simétrica** se

$$\forall_{a, b \in A} (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R;$$

-  $R$  é **antissimétrica** se

$$\forall_{a, b \in A} ((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R) \rightarrow a = b;$$

-  $R$  é **transitiva** se

$$\forall_{a, b, c \in A} ((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R) \rightarrow (a, c) \in R.$$

Note-se que uma relação binária  $R$  de  $A$  em  $B$  é antissimétrica se e só se

$$\forall_{a, b \in A} ((a, b) \in R \wedge a \neq b) \rightarrow (b, a) \notin R.$$

## relações binárias

**Exemplo 5.6.** (1) Sejam  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e

$$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 4)\},$$

$$R_2 = \{(1, 4), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\},$$

$$R_3 = \{(2, 3)\}.$$

Uma vez que  $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) \in R_1$ , a relação  $R_1$  é reflexiva. O par  $(1, 2)$  é elemento de  $R_1$ , mas  $(2, 1) \notin R_1$ , logo  $R_1$  não é simétrica. Atendendo a que não existem elementos distintos  $a, b \in A$  tais que  $(a, b) \in R_1$  e  $(b, a) \in R_1$ , podemos afirmar que a relação  $R_1$  é antissimétrica. Além disso,

$$\begin{aligned} &((1, 1) \in R_1 \wedge (1, 1) \in R_1) \wedge (1, 1) \in R_1 \\ &((1, 1) \in R_1 \wedge (1, 2) \in R_1) \wedge (1, 2) \in R_1 \\ &((1, 1) \in R_1 \wedge (1, 3) \in R_1) \wedge (1, 3) \in R_1 \\ &((1, 2) \in R_1 \wedge (2, 2) \in R_1) \wedge (1, 2) \in R_1 \\ &((1, 2) \in R_1 \wedge (2, 3) \in R_1) \wedge (1, 3) \in R_1 \\ &((1, 3) \in R_1 \wedge (3, 3) \in R_1) \wedge (1, 3) \in R_1 \\ &((2, 2) \in R_1 \wedge (2, 2) \in R_1) \wedge (2, 2) \in R_1 \\ &((2, 2) \in R_1 \wedge (2, 3) \in R_1) \wedge (2, 3) \in R_1 \\ &((3, 3) \in R_1 \wedge (3, 3) \in R_1) \wedge (3, 3) \in R_1 \\ &((4, 4) \in R_1 \wedge (4, 4) \in R_1) \wedge (4, 4) \in R_1 \end{aligned}$$

e, portanto,  $R_1$  é transitiva.

Uma vez que  $1 \in A$  e o par  $(1, 1)$  não é elemento de  $R_2$ , então  $R_2$  não é reflexiva. Esta mesma relação é simétrica, pois, para quaisquer  $a, b \in A$ ,

$$(a, b) \in R_2 \Rightarrow (b, a) \in R_2;$$

de facto,

$$\begin{aligned} &(1, 4) \in R_2 \wedge (4, 1) \in R_2 \\ &(2, 2) \in R_2 \wedge (2, 2) \in R_2 \\ &(2, 3) \in R_2 \wedge (3, 2) \in R_2 \\ &(3, 2) \in R_2 \wedge (2, 3) \in R_2 \\ &(4, 1) \in R_2 \wedge (1, 4) \in R_2. \end{aligned}$$

Facilmente verificamos que  $R_2$  não é antissimétrica, pois  $1 \neq 4$ ,  $(1, 4) \in R_2$  e  $(4, 1) \in R_2$ . Esta mesma relação também não é transitiva:  $(1, 4) \in R_2 \wedge (4, 1) \in R_2$ , mas  $(1, 1) \notin R_2$ .

No que diz respeito à relação  $R_3$ , é simples verificar que esta é uma relação transitiva, antissimétrica, não reflexiva e não simétrica.

(2) Seja  $A$  um conjunto não vazio. A relação  $id_A$  e a relação universal  $\omega_A$  são relações simultaneamente reflexivas, simétricas e transitivas.



**Proposição 5.8.** *Sejam  $A$  um conjunto e  $R$  uma relação binária em  $A$ . Então*

- (1)  *$R$  é reflexiva se e só se  $id_A \subseteq R$ ;*
- (2)  *$R$  é simétrica se e só se  $R^{-1} = R$ ;*
- (3)  *$R$  é transitiva se e só se  $R \circ R \subseteq R$ ;*
- (4)  *$R$  é antissimétrica se e só se  $R \cap R^{-1} \subseteq id_A$ .*

*Demonstração.* Exercício. □

## 5.2 Relações de equivalência

Na secção anterior vimos que a relação identidade  $id_A$  e a relação universal  $\omega_A$  definidas num conjunto  $A$  são relações reflexivas, simétricas e transitivas. Relações que verifiquem simultaneamente estas propriedades são designadas por *relações de equivalência*.

**Definição 5.9.** *Seja  $A$  um conjunto. Uma relação binária  $R$  em  $A$  diz-se uma **relação de equivalência** se  $R$  é reflexiva, simétrica e transitiva.*

**Exemplo 5.7.** *Seja  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e consideremos a relação*

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (2, 4), (4, 2)\}.$$

*A relação  $R$  é reflexiva, pois*

$$id_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\} \subseteq R.$$

*A relação é simétrica, uma vez que*

$$R^{-1} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (3, 2), (2, 3), (4, 3), (3, 4), (4, 2), (2, 4)\} = R.$$

*A relação  $R$  também é transitiva, pois*

$$R \circ R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (2, 4), (4, 2)\} \subseteq R.$$

*Logo  $R$  é uma relação de equivalência.*

**Exemplo 5.8.** *A relação  $R$  definida no conjunto  $A = \{x \mid x \text{ é aluno da L.C.C.}\}$  por*

$$x R y \text{ se e só se } x \text{ e } y \text{ nasceram no mesmo ano}$$

*é uma relação de equivalência em  $A$ .*

## relações binárias

**Exemplo 5.9.** Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos e  $f : A \rightarrow B$  uma função. A relação binária definida em  $A$  por

$$x R_f y \text{ se e só se } f(x) = f(y)$$

é uma relação de equivalência em  $A$ . De facto,

-  $R_f$  é reflexiva, pois, para todo  $x \in A$ ,  $f(x) = f(x)$  e, portanto,  $x R_f x$ ;

-  $R_f$  é simétrica, uma vez que para quaisquer  $x, y \in A$ ,

$$x R_f y \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow f(y) = f(x) \Rightarrow y R_f x;$$

-  $R_f$  é transitiva, pois para quaisquer  $x, y, z \in A$ ,

$$(x R_f y \wedge y R_f z) \Rightarrow (f(x) = f(y) \wedge f(y) = f(z)) \Rightarrow f(x) = f(z) \Rightarrow x R_f z.$$

**Exemplo 5.10.** Seja  $R$  a relação binária em  $\mathbb{Z}$  definida por

$$a R b \text{ se e só se } a - b \text{ é divisível por } 3.$$

É simples verificar que  $R$  é uma relação de equivalência. Com efeito, para todo  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $a - a = 0$  é divisível por 3, logo  $a R a$ . Portanto,  $R$  é reflexiva. Por outro lado, para quaisquer  $a, b \in \mathbb{Z}$ , se  $a R b$ , então  $a - b = 3k$ , para algum  $k \in \mathbb{Z}$ . Logo  $b - a = 3(-k)$ , com  $-k \in \mathbb{Z}$  e, por conseguinte,  $b R a$ . Assim,  $R$  é simétrica. Além disso, para quaisquer  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , se  $a R b$  e  $b R c$ , então  $a - b = 3k$ , para algum  $k \in \mathbb{Z}$  e  $b - c = 3k'$ , para algum  $k' \in \mathbb{Z}$ . Logo  $a - c = (a - b) + (b - c) = 3(k + k')$ , com  $k + k' \in \mathbb{Z}$ , pelo que  $a R c$ . Logo  $R$  é transitiva.

Note-se que, dado  $a \in \mathbb{Z}$ , tem-se

$$\begin{aligned} 1 R a &\Leftrightarrow 1 - a = 3k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow a = 3k + 1, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow a \text{ tem resto } 1 \text{ na divisão inteira por } 3. \end{aligned}$$

De modo análogo, prova-se que  $2 R a$  se e só se  $a$  tem resto 2 na divisão inteira por 3 e que  $0 R a$  se e só se  $a$  tem resto 0 na divisão inteira por 3. Assim, uma vez que os únicos restos possíveis na divisão inteira por 3 são 0, 1, 2 e atendendo a que  $R$  é uma relação de equivalência, os elementos de  $\mathbb{Z}$  podem ser agrupados nos seguintes três subconjuntos de  $\mathbb{Z}$ :

$$\begin{aligned} X_0 &= \{a \mid a \in \mathbb{Z} \wedge 0 R a\} = \{a \mid a \in \mathbb{Z} \wedge \exists k \in \mathbb{Z} a = 3k\} \\ X_1 &= \{a \mid a \in \mathbb{Z} \wedge 1 R a\} = \{a \mid a \in \mathbb{Z} \wedge \exists k \in \mathbb{Z} a = 3k + 1\} \\ X_2 &= \{a \mid a \in \mathbb{Z} \wedge 2 R a\} = \{a \mid a \in \mathbb{Z} \wedge \exists k \in \mathbb{Z} a = 3k + 2\} \end{aligned}$$

**Definição 5.10.** Sejam  $R$  uma relação de equivalência num conjunto  $A$  e  $x \in A$ . Chama-se **classe de equivalência de  $x$  módulo  $R$**  ou, caso não haja ambiguidade, **classe de equivalência de  $x$ , ao conjunto**

$$[x]_R = \{y \mid y \in A \wedge x R y\}.$$

Ao conjunto de todas as classes de equivalência dos elementos de  $A$  chamamos **conjunto quociente de  $A$  módulo  $R$**  e representamo-lo por  $A/R$ , i.e.,

$$A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}.$$

**Exemplo 5.11.** Considerando a relação de equivalência  $R$  definida no exemplo anterior, tem-se

$$\begin{aligned}[0]_R &= \{a \mid a \in \mathbb{Z} \wedge \exists_{k \in \mathbb{Z}} a = 3k\}, \\ [1]_R &= \{a \mid a \in \mathbb{Z} \wedge \exists_{k \in \mathbb{Z}} a = 3k + 1\} \\ [2]_R &= \{a \mid a \in \mathbb{Z} \wedge \exists_{k \in \mathbb{Z}} a = 3k + 2\},\end{aligned}$$

$$\text{e } \mathbb{Z}/R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R\}.$$

**Exemplo 5.12.** Seja  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e consideremos a relação de equivalência em  $A$  definida por

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (2, 4), (4, 2)\}.$$

Então

$$[1]_R = \{1\} \text{ e } [2]_R = [3]_R = [4]_R = \{2, 3, 4\}$$

e

$$A/R = \{[1]_R, [2]_R\}.$$

**Exemplo 5.13.** Seja  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  a função definida por  $f(n) = |n|$ , para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ , e seja  $R_f$  a relação de equivalência associada a  $f$ , isto é, seja  $R_f$  a relação binária em  $\mathbb{Z}$  definida por

$$x R_f y \text{ se e só se } f(x) = f(y).$$

Então, para cada  $x \in \mathbb{Z}$ ,

$$[x]_{R_f} = \{y \mid y \in \mathbb{Z} \wedge x R_f y\} = \{y \mid y \in \mathbb{Z} \wedge f(x) = f(y)\} = \{x, -x\}$$

e

$$\mathbb{Z}/R_f = \{\{x, -x\} \mid x \in \mathbb{Z}\}.$$

A respeito do conjunto quociente indicado em cada um dos exemplos anteriores verifica-se o seguinte: os seus elementos são conjuntos não vazios, são disjuntos dois a dois e a união dos seus elementos é o conjunto no qual está definida a relação binária. Estes conjuntos quociente satisfazem as condições do conceito a seguir definido.

**Definição 5.11.** Sejam  $A$  um conjunto e  $\Pi \subseteq \mathcal{P}(A)$ . Diz-se que  $\Pi$  é uma **partição do conjunto**  $A$  se satisfaz simultaneamente as seguintes condições:

- (1) para todo  $X \in \Pi$ ,  $X \neq \emptyset$ ;
- (2) para todo  $X, Y \in \Pi$ ,  $(X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = \emptyset)$ ;
- (3) para todo  $a \in A$ , existe  $X \in \Pi$  tal que  $a \in X$ .

## relações binárias

**Exemplo 5.14.** Sejam  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  e

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= \{\{1, 2\}, \{\}, \{3, 4, 5\}\}, & \Pi_2 &= \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}, \\ \Pi_3 &= \{\{1, 2\}, \{4, 5\}\}, & \Pi_4 &= \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\}.\end{aligned}$$

Nenhum dos conjuntos  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  é uma partição de  $A$ . Com efeito:

- $\emptyset \in \Pi_1$  e, portanto, o conjunto  $\Pi_1$  não verifica a condição (1) da definição anterior;
- o conjunto  $\Pi_2$  não satisfaz a condição (2), pois  $X = \{1, 2\} \in \Pi_2$ ,  $Y = \{2, 3\} \in \Pi_2$ ,  $X \neq Y$  e  $X \cap Y \neq \emptyset$ ;
- no caso do conjunto  $\Pi_3$  falha a condição (3), uma vez que  $3 \in A$  e não existe  $X \in \Pi_3$  tal que  $3 \in X$ .

No que diz respeito ao conjunto  $\Pi_4$ , é simples verificar que qualquer uma das condições (1) a (3) da definição anterior é satisfeita e, portanto,  $\Pi_4$  é uma partição de  $A$ .

A cada relação de equivalência definida num conjunto  $A$  está sempre associada uma partição de  $A$ , como se pode verificar pelo resultado que a seguir se prova.

**Proposição 5.12.** Seja  $R$  uma relação de equivalência num conjunto  $A$ . Então  $A/R$  é uma partição de  $A$ .

*Demonstração.* Sendo  $R$  uma relação de equivalência em  $A$ , prova-se facilmente que  $A/R$  é uma partição de  $A$ . De facto:

- (1) Uma vez que  $R$  é reflexiva, tem-se  $xRx$ , para todo  $x \in A$ , e, portanto,  $x \in [x]_R$ . Logo, para todo  $[x]_R \in A/R$ ,  $[x]_R \neq \emptyset$ .
- (2) Dadas duas classes de equivalência  $[x]_R, [y]_R \in A/R$ , se  $[x]_R \neq [y]_R$ , então  $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$ . Com efeito, se admitirmos que  $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$ , existe  $z \in A$  tal que  $z \in [x]_R$  e  $z \in [y]_R$ . Assim  $xRz$  e  $yRz$  e, uma vez que  $R$  é simétrica, temos também  $zRy$ . Daqui segue que, para todo  $a \in A$ ,

$$\begin{aligned}a \in [x]_R &\Rightarrow xRa \\ &\Rightarrow aRx && (R \text{ é simétrica}) \\ &\Rightarrow aRz && (xRz \text{ e } R \text{ é transitiva}) \\ &\Rightarrow aRy && (zRy \text{ e } R \text{ é transitiva}) \\ &\Rightarrow yRa && (R \text{ é simétrica}) \\ &\Rightarrow a \in [y]_R.\end{aligned}$$

e, portanto,  $[x]_R \subseteq [y]_R$ . De forma análoga prova-se que  $[y]_R \subseteq [x]_R$ . Logo  $[x]_R = [y]_R$ .

- (3) Para todo  $x \in A$ , tem-se  $xRx$  e, portanto, existe  $[x]_R \in A/R$  tal que  $x \in [x]_R$ .

Assim, por (1), (2) e (3), temos que  $A/R$  é uma partição de  $A$ . □

O recíproco do resultado anterior também é válido, ou seja, cada partição de um conjunto define uma relação de equivalência nesse conjunto.

**Proposição 5.13.** *Sejam  $A$  um conjunto,  $\Pi$  uma partição de  $A$  e  $R_\Pi$  a relação binária em  $A$  definida por*

$$x R_\Pi y \text{ se e só se existe } X \in \Pi \text{ tal que } x, y \in X.$$

*Então  $R_\Pi$  é uma relação de equivalência em  $A$ .*

*Demonstração.* (1) Uma vez que  $\Pi$  é uma partição de  $A$ , então, para todo  $x \in A$ , existe  $X \in \Pi$  tal que  $x \in X$ . Logo  $x R_\Pi x$  e, portanto,  $R_\Pi$  é reflexiva.

(2) Dados  $x, y \in A$ , se  $x R_\Pi y$ , é óbvio que também temos  $y R_\Pi x$ ; logo  $R_\Pi$  é simétrica.

(3) Dados  $x, y, z \in A$ , se  $x R_\Pi y$  e  $y R_\Pi z$ , existem  $X, Y \in \Pi$  tais que  $x, y \in X$  e  $y, z \in Y$ . Dado que  $y \in X \cap Y$ , tem-se  $X \cap Y \neq \emptyset$  e, como  $\Pi$  é uma partição de  $A$ , segue que  $X = Y$ . Assim, existe  $X \in \Pi$  tal que  $x, z \in X$  e, portanto,  $x R_\Pi z$ . Logo  $R_\Pi$  é transitiva.

De (1), (2) e (3) concluímos que  $R_\Pi$  é uma relação de equivalência em  $A$ .  $\square$

**Exemplo 5.15.**

(1) *Sejam  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  e  $\Pi_1 = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}\}$ ,  $\Pi_2 = \{\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}, \{5\}\}$  partições de  $A$ . Então*

$$\begin{aligned} R_{\Pi_1} &= \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (2, 1), \\ &\quad (3, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 3), (4, 5), (5, 4)\}, \\ R_{\Pi_2} &= \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 3), (3, 1)\}. \end{aligned}$$

(2) *Seja  $\Pi = \{X_0, X_1, X_2\}$  a partição de  $\mathbb{Z}$  onde*

$$X_0 = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \quad X_1 = \{3k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}, \quad X_2 = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

*Então, para quaisquer  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,*

$$a R_\Pi b \text{ se e só se } a - b \text{ é divisível } 3.$$

### 5.3 Relações de ordem

A noção de ordem pode ser encontrada nas mais diversas situações do dia a dia, e sob variadas formas, quando fazemos referência a expressões tais como: primeiro, segundo, terceiro; maior versus menor; melhor versus pior; precedência, preferência, ... Nesta secção formalizamos o que se entende por relação de ordem e apresentamos algumas noções relacionadas com este conceito.

## relações binárias

### 5.3.1 Noções básicas

**Definição 5.14.** *Sejam  $A$  um conjunto e  $R$  uma relação binária em  $A$ . Diz-se que  $R$  é uma relação de **ordem parcial** em  $A$  se  $R$  é reflexiva, antissimétrica e transitiva. Se  $R$  é uma ordem parcial em  $A$ , ao par  $(A, R)$  dá-se a designação de **conjunto parcialmente ordenado (c.p.o.)**.*

**Exemplo 5.16.** *São exemplos de c.p.o.'s os seguintes pares:*

- (1)  $(A, id_A)$ , onde  $A$  é um conjunto e  $id_A = \{(a, a) : a \in A\}$ .
- (2)  $(\mathbb{N}, \leq)$ , onde  $\leq$  é a relação “menor ou igual” usual em  $\mathbb{N}$  (para todo  $x \in \mathbb{N}$ ,  $x \leq x$ , logo  $\leq$  é reflexiva; para quaisquer  $x, y \in \mathbb{N}$ , se  $x \leq y$  e  $y \leq x$ , então  $x = y$  e, portanto,  $\leq$  é antissimétrica; para quaisquer  $x, y, z \in \mathbb{N}$ , se  $x \leq y$  e  $y \leq z$ , tem-se  $x \leq z$ , assim  $\leq$  é transitiva. Então  $\leq$  é uma relação de ordem parcial em  $\mathbb{N}$ ).
- (3)  $(\mathbb{N}, |)$ , onde  $|$  é a relação “divide” em  $\mathbb{N}$ .
- (4)  $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ , onde  $A$  é um conjunto qualquer e  $\subseteq$  é a relação de inclusão usual.

Em geral, sempre que tal não cause confusão, representamos uma ordem parcial num conjunto  $A$  por  $\leq$  e o respectivo c.p.o. por  $(A, \leq)$ . Formalmente, um conjunto parcialmente ordenado é um par  $(A; \leq)$ , onde  $A$  é um conjunto não vazio e  $\leq$  é uma relação de ordem parcial. Porém, caso seja claro a partir do contexto qual é a relação  $\leq$ , é usual dizer apenas “seja  $A$  um conjunto parcialmente ordenado”.

Dado um c.p.o.  $(A, \leq)$  e dados  $a, b \in A$ , escrevemos:

- $a \leq b$  e lemos “ $a$  é menor ou igual a  $b$ ” ou “ $a$  precede  $b$ ” para representar  $(a, b) \in \leq$ ;
- $a \not\leq b$  e lemos “ $a$  não é menor ou igual a  $b$ ” se  $(a, b) \notin \leq$ ;
- $a < b$  e lemos “ $a$  é menor do que  $b$ ” (ou  $a$  “precede propriamente  $b$ ”) se  $a \leq b$  e  $a \neq b$ ;
- $a << b$  e lemos “ $b$  é sucessor de  $a$ ” (ou “ $b$  cobre  $a$ ” ou “ $a$  é coberto por  $b$ ”) se  $a < b$  e  $\neg(\exists_{c \in A} a < c < b)$ .

Diz-se que  $a, b$  são elementos **comparáveis** se  $a \leq b$  ou  $b \leq a$ ; caso contrário, ou seja, se  $a \not\leq b$  e  $b \not\leq a$ ,  $a$  e  $b$  dizem-se **incomparáveis** e escrevemos  $a \parallel b$ .

Um c.p.o.  $(A, \leq)$ , em que  $A$  é um conjunto finito, pode ser representado por meio de um **diagrama de Hasse** da seguinte forma:

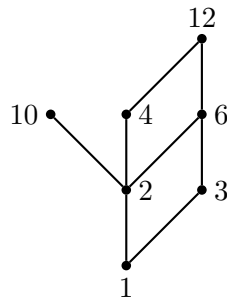
- cada elemento é representado por um ponto;
- se  $a, b$  são dois elementos de  $A$  tais que  $a \leq b$ , representa-se  $b$  acima de  $a$ ; além disso se  $a << b$  unem-se estes dois pontos por um segmento de reta.

**Exemplo 5.17.**

(1) Sejam  $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 10, 12\}$  e a ordem parcial definida por

$$x \mid y \Leftrightarrow \exists_{k \in \mathbb{N}} y = kx.$$

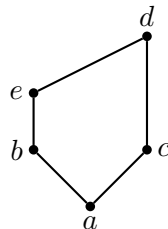
O c.p.o.  $(A, \mid)$  pode ser representado pelo seguinte diagrama de Hasse



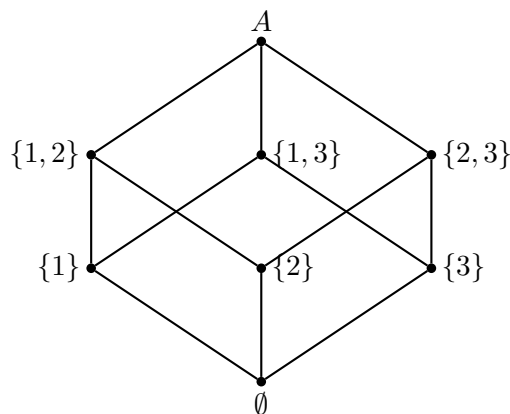
(2) Consideremos o conjunto  $A = \{a, b, c, d, e\}$  e a relação binária  $R$  definida em  $A$  por

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, b), (a, c), (b, e), (c, d), (e, d)\}.$$

É simples verificar que  $R$  é uma relação de ordem e que  $a \ll b$ ,  $a \ll c$ ,  $b \ll e$ ,  $c \ll d$  e  $e \ll d$ . Assim, a relação  $R$  pode ser representada pelo diagrama de Hasse seguinte



(3) Seja  $A = \{1, 2, 3\}$ . O c.p.o.  $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$  pode ser representado pelo diagrama de Hasse que se segue



## relações binárias

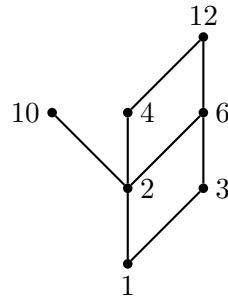
Dados um c.p.o.  $(A, \leq)$  e  $X$  um subconjunto de  $A$  podem existir elementos com propriedades especiais relativamente a  $X$ .

**Definição 5.15.** *Sejam  $(A, \leq)$  um c.p.o.,  $X$  um subconjunto de  $A$  e  $m \in A$ . Dizemos que  $m$  é:*

- um **elemento maximal de  $X$**  se  $m \in X$  e  $\neg(\exists_{x \in X} m < x)$ ;
- um **elemento minimal de  $X$**  se  $m \in X$  e  $\neg(\exists_{x \in X} x < m)$ ;
- **majorante de  $X$**  se  $\forall_{x \in X} x \leq m$ ;
- **minorante de  $x$**  se  $\forall_{x \in X} m \leq x$ ;
- **supremo de  $X$**  se  $m$  é majorante de  $X$  e  $m \leq m'$ , para qualquer  $m'$  majorante de  $X$ ;
- **ínfimo de  $X$**  se  $m$  é minorante de  $X$  e  $m' \leq m$ , para qualquer  $m'$  minorante de  $X$ ;
- **máximo de  $X$**  se  $m$  é majorante de  $X$  e  $m \in X$ ;
- **mínimo de  $X$**  se  $m$  é minorante de  $X$  e  $m \in X$ .

O conjunto dos majorantes de  $X$  e o conjunto dos minorantes de  $X$  são representados por  $\text{Maj}(X)$  e  $\text{Min}(X)$ , respetivamente. Caso exista, o supremo (ínfimo, máximo, mínimo) de um subconjunto  $X$  de  $A$  é único e representa-se por  $\sup(X)$  ( $\inf(X)$ ,  $\max(X)$ ,  $\min(X)$ ).

**Exemplo 5.18.** *Consideremos novamente o c.p.o.  $(A, |)$  representado por*



e sejam  $X = \{1, 2, 3\}$  e  $Y = \{2, 4, 6, 10\}$ . Então:

- 2 e 3 são os elementos maximais de  $X$ ; 1 é o único elemento minimal de  $X$ ;
- $\text{Maj}(X) = \{6, 12\}$ ;  $\sup(X) = 6$ ; não existe máximo de  $X$ ;
- $\text{Min}(X) = \{1\}$ ;  $\inf(X) = 1$ ;  $\min(X) = 1$ ;
- 4, 6 e 10 são os elementos maximais de  $Y$ ; 2 é o único elemento minimal de  $Y$ ;
- $\text{Maj}(Y) = \emptyset$ ; não existe supremo de  $Y$ ; não existe máximo de  $Y$ ;
- $\text{Min}(Y) = \{1, 2\}$ ;  $\inf(Y) = 2$ ;  $\min(Y) = 2$ .



Relativamente ao conjunto  $A$  tem-se o seguinte:

- 10 e 12 são os elementos maximais de  $A$ ; 1 é o único elemento minimal de  $A$ ;
- $\text{Maj}(A) = \emptyset$ ;  $A$  não tem supremo;  $A$  não tem máximo;
- $\text{Min}(A) = \{1\}$ ;  $\inf(A) = 1$ ;  $\min(A) = 1$ .

**Proposição 5.16.** Num conjunto parcialmente ordenado  $(A, \leq)$  são equivalentes as seguintes proposições, para quaisquer  $a, b \in A$ :

- (1)  $a \leq b$ ;
- (2)  $\sup(\{a, b\}) = b$ ;
- (3)  $\inf(\{a, b\}) = a$ .

*Demonstração.* (1)  $\Rightarrow$  (2) Admitamos que  $a \leq b$ . Então, uma vez que também temos  $b \leq b$  (pois  $\leq$  é reflexiva), segue que  $b$  é um majorante de  $\{a, b\}$ . Além disso, se  $x$  é um majorante de  $\{a, b\}$ , temos  $b \leq x$ . Logo  $b$  é o menor dos majorantes de  $\{a, b\}$  e, portanto,  $\sup(\{a, b\}) = b$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3) Admitamos que  $\sup(\{a, b\}) = b$ . Então  $b$  é um majorante de  $\{a, b\}$ , pelo que  $a \leq b$ . Assim, como  $a \leq a$  e  $a \leq b$ ,  $a$  é um minorante de  $\{a, b\}$ . Além disso, se  $x$  é um minorante de  $\{a, b\}$ , tem-se, em particular,  $x \leq a$  e, portanto,  $a$  é o maior dos minorantes de  $\{a, b\}$ . Logo  $\inf(\{a, b\}) = a$ .

(3)  $\Rightarrow$  (2) Se  $\inf(\{a, b\}) = a$ , então  $a$  é um minorante de  $\{a, b\}$  e, por conseguinte,  $a \leq b$ . Logo as três proposições são equivalentes.  $\square$

Seguidamente estudam-se alguns processos de construção de novos c.p.o.'s a partir de c.p.o.'s dados.

Se  $(P, \leq)$  é um conjunto parcialmente ordenado e  $A$  é um subconjunto não vazio de  $P$ , a relação  $\leq|_A$  definida, para quaisquer  $a, b \in A$ , por

$$a \leq|_A b \text{ se e só se } a \leq b$$

é uma relação de ordem parcial em  $A$ . A relação  $\leq|_A$  designa-se por **ordem parcial induzida por  $\leq$**  em  $A$ .

Sendo  $(P, \leq)$  um conjunto parcialmente ordenado, define-se a partir da relação  $\leq$  uma outra relação de ordem parcial em  $P$ . A relação  $\leq_d$  definida em  $P$  por

$$a \leq_d b \text{ se e só se } b \leq a$$

é também uma relação de ordem parcial em  $P$ . A relação  $\leq_d$  designa-se por **relação de ordem dual de  $\leq$**  e o conjunto parcialmente ordenado  $(P, \leq_d)$  designa-se por **conjunto parcialmente ordenado dual de  $(P, \leq)$** . É simples perceber que  $(\leq_d)_d = \leq$  e que o c.p.o.

## relações binárias

dual de  $(P, \leq_d)$  é  $(P, \leq)$ . Os c.p.o.s  $(P, \leq)$  e  $(P, \leq_d)$  dizem-se **conjuntos parcialmente ordenados duais**.

Se  $\Phi$  é uma afirmação sobre conjuntos parcialmente ordenados, a afirmação  $\Phi_d$ , obtida de  $\Phi$  substituindo toda a ocorrência de  $\leq$  por  $\leq_d$ , designa-se por **afirmação dual de  $\Phi$** . Note-se que se  $\Phi$  é uma afirmação verdadeira em  $(P, \leq)$ , então  $\Phi_d$  é verdadeira em  $(P, \leq_d)$ , pelo que é válido o seguinte princípio.

**Princípio de dualidade para c.p.o.'s** Uma afirmação é verdadeira em qualquer conjunto parcialmente ordenado se e só se o mesmo acontece com a respetiva afirmação dual.

Observe-se que os conceitos de majorante, supremo, elemento máximo, elemento maximal são duais dos conceitos de minorante, ínfimo, elemento mínimo, elemento minimal, respetivamente. Assim, se  $\Phi$  é uma afirmação sobre c.p.o.s envolvendo algum destes conceitos, a afirmação  $\Phi_d$  é obtida substituindo cada um destes conceitos pelo conceito dual e substituindo toda a ocorrência de  $\leq$  por  $\leq_d$ .

### 5.3.2 Homomorfismos

No estudo de aplicações entre conjuntos parcialmente ordenados têm particular interesse aquelas que preservam a ordem.

**Definição 5.17.** Sejam  $(P_1, \leq_1)$  e  $(P_2, \leq_2)$  dois conjuntos parcialmente ordenados e  $\alpha : P_1 \rightarrow P_2$  uma aplicação. Diz-se que:

- a aplicação  $\alpha$  é **isótona** ou que é um **homomorfismo** (alternativamente, também se diz que  $\alpha$  **preserva a ordem**) se, para quaisquer  $a, b \in P_1$ ,

$$a \leq_1 b \Rightarrow \alpha(a) \leq_2 \alpha(b).$$

- a aplicação  $\alpha$  é **antítona** se, para quaisquer  $a, b \in P_1$ ,

$$a \leq_1 b \Rightarrow \alpha(b) \leq_2 \alpha(a).$$

- $\alpha$  é um **mergulho de ordem** se, para quaisquer  $a, b \in P_1$ ,

$$a \leq_1 b \Leftrightarrow \alpha(a) \leq_2 \alpha(b).$$

- $\alpha$  é um **isomorfismo de c.p.o.s** se  $\alpha$  é um mergulho de ordem e é uma aplicação sobrejetiva.

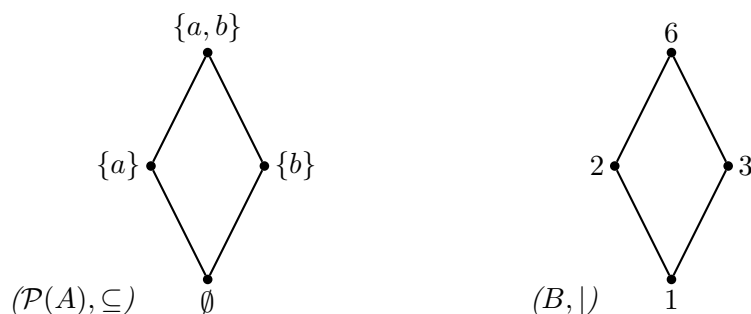
Caso exista um isomorfismo de c.p.o.s de  $(P_1, \leq_1)$  em  $(P_2, \leq_2)$ , diz-se que o c.p.o.  $(P_1, \leq_1)$  é isomorfo ao c.p.o.  $(P_2, \leq_2)$ .

**Exemplo 5.19.** (1) Seja  $\mathcal{P}_F(\mathbb{N})$  a família dos subconjuntos finitos de  $\mathbb{N}$ . Então  $(\mathcal{P}_F(\mathbb{N}), \subseteq)$  é um c.p.o.. Consideremos, também, o c.p.o.  $(\mathbb{N}_0, \leq)$ . Seja  $s : \mathcal{P}_F(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}_0$  a aplicação definida por  $s(X) = |X|$ , para todo  $X \in \mathcal{P}_F(\mathbb{N})$  (por  $|X|$  representa-se o número de elementos de  $X$ ). A aplicação  $s$  é um homomorfismo de c.p.o.'s. Esta aplicação não é, no entanto, um isomorfismo de c.p.o.'s, pois não é bijetiva.

(2) Sejam  $A = \{a, b\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 6\}$  e  $\leq$  a relação de ordem definida em  $B$  por

$$x R y \text{ se e só se } x \mid y.$$

Claramente, os conjuntos parcialmente ordenados  $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$  e  $(B, \leq)$ , representados pelos diagramas de Hasse seguintes, são isomorfos.



Fica ao cuidado do leitor a verificação de que a aplicação  $f : B \rightarrow \mathcal{P}(A)$ , definida por  $f(1) = \emptyset$ ,  $f(2) = \{a\}$ ,  $f(3) = \{b\}$  e  $f(6) = \{a, b\}$ , é um isomorfismo de c.p.o.'s.

Um isomorfismo de c.p.o.s é uma aplicação bijetiva. Assim, se  $\alpha$  é um isomorfismo de um c.p.o.  $(P_1, \leq_1)$  num c.p.o.  $(P_2, \leq_2)$ , então  $\alpha^{-1} : P_2 \rightarrow P_1$  também é um isomorfismo de  $(P_2, \leq_2)$  em  $(P_1, \leq_1)$ . Caso exista um isomorfismo entre os c.p.o.s  $(P_1, \leq_1)$  e  $(P_2, \leq_2)$  diz-se que os c.p.o.s são **isomorfos** e escreve-se  $(P_1, \leq_1) \cong (P_2, \leq_2)$ .

Note-se que, embora um isomorfismo de c.p.o.s seja uma aplicação isótona e bijetiva, uma aplicação bijetiva e isótona não é necessariamente um isomorfismo de c.p.o.s. Por exemplo, sendo  $(P_1, \leq_1)$  e  $(P_2, \leq_2)$  os c.p.o.s com os diagramas de Hasse a seguir apresentados

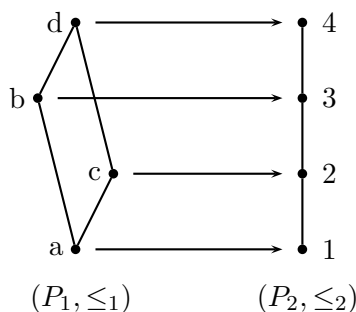


Figura 5.1

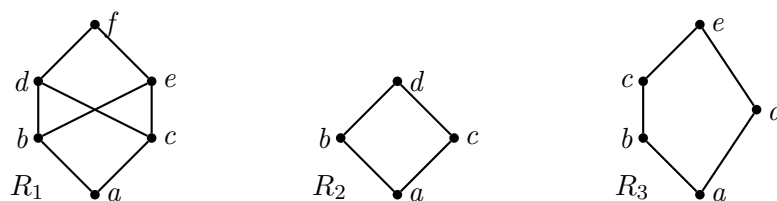
a aplicação  $\alpha$  de  $P_1$  em  $P_2$  definida por  $\alpha(a) = 1$ ,  $\alpha(b) = 3$ ,  $\alpha(c) = 2$  e  $\alpha(d) = 4$  é isótona e bijetiva, mas não é um isomorfismo de c.p.o.s.

### 5.3.3 Reticulados, cadeias, conjuntos bem ordenados

Nesta secção referem-se algumas classes especiais de conjuntos parcialmente ordenados.

**Definição 5.18.** Um conjunto parcialmente ordenado  $(A, \leq)$  diz-se um **reticulado** se, para quaisquer  $x, y \in A$ , existem o supremo e o ínfimo do conjunto  $\{x, y\}$ .

**Exemplo 5.20.** (1) Dos c.p.o.'s a seguir representados são reticulados os c.p.o.'s  $R_2$  e  $R_3$ ;  $R_1$  não é reticulado, pois, por exemplo, não existe supremo de  $\{b, c\}$ .



(2) Dado um conjunto  $A$ , o c.p.o.  $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$  é um reticulado.

(3) O c.p.o.  $(\mathbb{N}, |)$  é um reticulado.

**Definição 5.19.** Seja  $(A, \leq)$  um conjunto parcialmente ordenado. A ordem parcial  $\leq$  diz-se uma **ordem total** ou **ordem linear** se quaisquer elementos  $a$  e  $b$  de  $A$  são comparáveis. Neste caso,  $(A, \leq)$  diz-se uma **cadeia** ou um **conjunto totalmente ordenado**. Um subconjunto  $X$  de  $A$  diz-se uma **cadeia em**  $(A, \leq)$  ou um **subconjunto totalmente ordenado de**  $(A, \leq)$  se, para quaisquer  $x, y \in X$ ,  $x$  e  $y$  são comparáveis.

**Exemplo 5.21.**

(1)  $\{3, 6, 12\}$  e  $\{2, 4\}$  são cadeias em  $(\{1, 2, 3, 4, 6, 10, 12\}, |)$ , mas este c.p.o. não é uma cadeia, pois 4 e 10 não são comparáveis.

(2)  $(\mathbb{N}, \leq)$ ,  $(\mathbb{R}, \leq)$ ,  $(\mathbb{Z}, \leq)$  são cadeias.

**Proposição 5.20.** Se  $(A, \leq)$  é uma cadeia, então  $(A, \leq)$  é um reticulado.

*Demonstração.* Se  $(A, \leq)$  é uma cadeia, então, para quaisquer  $a, b \in A$ , tem-se  $a \leq b$  ou  $b \leq a$ . Caso  $a \leq b$  segue que  $\sup(\{a, b\}) = b$  e  $\inf(\{a, b\}) = a$ ; caso  $b \leq a$ , então  $\sup(\{a, b\}) = a$  e  $\inf(\{a, b\}) = b$ . Assim, para quaisquer  $a, b \in A$ , existem  $\sup(\{a, b\})$  e  $\inf(\{a, b\})$  e, portanto,  $(A, \leq)$  é um reticulado.  $\square$

Conjuntos parcialmente ordenados nos quais toda a cadeia admita um majorante têm garantidamente um elemento maximal. Este resultado, conhecido por Lema de Zorn, é fundamental no estudo de conjuntos parcialmente ordenados e tem aplicações nas mais diversas áreas, tais como Álgebra Linear, Álgebra Universal e Análise.

**Teorema 5.21** (Lema de Zorn). *Seja  $(A, \leq)$  um conjunto parcialmente ordenado no qual qualquer cadeia admite um majorante. Então,  $A$  tem um elemento maximal.*

O Lema de Zorn, equivalente ao Axioma da Escolha, é geralmente utilizado para estabelecer a existência de um objeto que não pode ser construído diretamente (como, por exemplo, uma base num espaço vetorial não trivial ou um ideal maximal num anel).

**Definição 5.22.** *Seja  $(A, \leq)$  um conjunto parcialmente ordenado. Diz-se que  $\leq$  é uma boa ordem em  $A$  se cada subconjunto não vazio de  $A$  tem elemento mínimo. Neste caso, diz-se que  $(A, \leq)$  é um conjunto bem ordenado (c.b.o.).*

**Exemplo 5.22.** *Todo o conjunto totalmente ordenado finito é um conjunto bem ordenado.*

**Proposição 5.23.** *Se  $(A, \leq)$  é um conjunto bem ordenado, então  $(A, \leq)$  é uma cadeia.*

*Demonstração.* Sejam  $(A, \leq)$  um conjunto bem ordenado e  $a, b \in A$ . Uma vez que  $(A, \leq)$  é um conjunto bem ordenado, o subconjunto  $\{a, b\}$  tem elemento mínimo; então  $\min\{a, b\} = a$  e tem-se  $a \leq b$ , ou  $\min\{a, b\} = b$  e tem-se  $b \leq a$ . Assim, quaisquer dois elementos de  $A$  são comparáveis e, portanto,  $(A, \leq)$  é uma cadeia.  $\square$

Embora todo o conjunto bem ordenado seja uma cadeia, existem cadeias que não são conjuntos bem ordenados.

**Exemplo 5.23.**  $(\mathbb{R}, \leq)$  é uma cadeia, mas não é um conjunto bem ordenado; de facto,  $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$  é um subconjunto não vazio de  $\mathbb{R}$  e não tem elemento mínimo.

**Proposição 5.24.** *Um conjunto totalmente ordenado é bem ordenado se e só se não contém qualquer cadeia descendente infinita*

$$x_1 > x_2 > \dots > x_n > \dots$$

*Demonstração.* A prova que se apresenta seguidamente é uma prova informal; uma prova formal deste resultado requer a aplicação do Axioma da Escolha e poderá ser consultada em bibliografia adequada.

Se  $(P, \leq)$  é um conjunto totalmente ordenado que contém uma cadeia descendente infinita

$$x_1 > x_2 > \dots > x_n > \dots,$$

então  $(P, \leq)$  não é bem ordenado.

Reciprocamente, suponhamos que  $(P, \leq)$  é um conjunto totalmente ordenado que não contém qualquer cadeia descendente infinita. Pretendemos mostrar que se  $A$  é um subconjunto não vazio de  $P$ , então  $A$  tem elemento mínimo. Uma vez que  $A \neq \emptyset$ , existe  $a_1 \in A$ . Se  $a_1$  é o elemento mínimo de  $A$ , a prova está completa. Caso  $a_1$  não seja um elemento mínimo, então existe  $a_2 \in A$  tal que  $a_1 \not\leq a_2$ . Uma vez que a ordem é total, segue que  $a_2 < a_1$ . Se  $a_2$  é o elemento mínimo de  $A$ , a prova termina. Caso contrário, existe  $a_3 \in A$  tal que  $a_2 \not\leq a_3$ , donde  $a_3 < a_2$ . Ora, uma vez que  $(P, \leq)$  não tem cadeias descentes infinitas, este processo termina num número finito de passos, digamos  $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n$ . Logo  $a_n$  é o elemento mínimo de  $A$ .  $\square$

## relações binárias

**Corolário 5.25.** (*Princípio da Boa Ordenação de  $\mathbb{N}$* ) O conjunto parcialmente ordenado  $(\mathbb{N}, \leq)$  é bem ordenado.