Licenciatura em Ciências da Computação

# Computabilidade e Complexidade

# 0. Revisões

José Carlos Costa

Dep. Matemática
Universidade do Minho
Braga, Portugal
email: jcosta@math.uminho.pt

6 de outubro de 2021

# Cardinal de um conjunto

**Definição**

Sejam $A$ e $B$ dois conjuntos. Diz-se que:

1. $A$ e $B$ têm o **mesmo cardinal** ou que são **equipotentes**, e escreve-se $\#(A) = \#(B)$ ou $A \sim B$, se existe uma aplicação bijetiva de $A$ para $B$.
2. $A$ tem **cardinal menor ou igual** que $B$ se existe uma aplicação injetiva de $A$ para $B$ e escreve-se $\#(A) \leq \#(B)$.

**Teorema (Schröder-Bernstein)**

Sejam $A$ e $B$ dois conjuntos. Se $\#(A) \leq \#(B)$ e $\#(B) \leq \#(A)$, então $\#(A) = \#(B)$.

O cardinal do conjunto $\mathbb{N}$, dos números naturais, é representado por $\aleph_0$.

**Definição**

Um conjunto $A$ diz-se **numerável** se tem o mesmo cardinal que $\mathbb{N}$, e diz-se **enumerável** se é finito ou numerável.

Exemplos de conjuntos numeráveis:

$$\mathbb{N},\ 2\mathbb{N},\ \mathbb{Z}, \mathbb{N}\times\mathbb{N},\ \mathbb{Q}.$$

Note-se que um conjunto $A$ é numerável se existe uma bijeção $f$ de $\mathbb{N}$ para $A$, o que significa que os elementos de $A$ podem ser "listados" como

$$f(1), f(2), f(3), \ldots$$

de tal forma que cada elemento de $A$ aparece exatamente uma vez na lista.

Por exemplo, para mostrar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é numerável começa-se por representar os seus elementos na forma de tabela, conforme sugerido na seguinte figura.

$$
\begin{tikzcd}
(1,1) \arrow[d] & (1,2) \arrow[r] & (1,3) \arrow[dl] & (1,4) & \cdots\cdots \\
(2,1) \arrow[ur] & (2,2) \arrow[dl] & (2,3) \arrow[ur] & (2,4) & \cdots\cdots \\
(3,1) \arrow[d] & (3,2) \arrow[ur] & (3,3) & (3,4) & \cdots\cdots \\
(4,1) \arrow[ur] & (4,2) & (4,3) & (4,4) & \cdots\cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

As setas sugerem uma maneira de escrever $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ na forma de lista:

$$(1,1),(2,1),(1,2),(1,3),(2,2),(3,1),(4,1),(3,2),(2,3),(1,4),\ldots .$$

Portanto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é um conjunto numerável.

### Observação

O cardinal $\aleph_0$ dos conjuntos numeráveis é o menor cardinal infinito, pois cada conjunto infinito $A$ tem uma parte numerável.
Logo, pelo Teorema de Schröder-Bernstein, toda a parte de um conjunto numerável é finita ou é numerável (ou seja, é enumerável).

Eis algumas propriedades dos conjuntos enumeráveis.

### Teorema

Sejam $A, B, A_1, A_2, \ldots$ conjuntos.

1. Se $A$ e $B$ são enumeráveis, então $A \times B$ é enumerável.
2. Se $A$ e $B$ são enumeráveis, então $A \cup B$ é enumerável.
3. Se $A_1, A_2, \ldots$ são numeráveis, então $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ é numerável.
4. Se $A$ é numerável, então $\mathcal{P}_{fin}(A) = \{X \subseteq A \mid X \text{ é finito}\}$ é numerável.
5. Se $A$ não é enumerável e $B \subseteq A$ é enumerável, então $A \setminus B$ não é enumerável.

**Teorema**

Seja $A$ um conjunto qualquer e seja $\mathcal{P}(A)$ o conjunto das partes de $A$. Tem-se

$$\#(A) < \#\big(\mathcal{P}(A)\big).$$

Este teorema mostra, em particular, que não existe um cardinal maximal: dado um conjunto qualquer, existe um outro com um cardinal superior.

O cardinal de $\mathbb{R}$ é chamado o **cardinal do contínuo**. Como se pode mostrar (admitindo a **hipótese do contínuo**), o conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ tem o cardinal do contínuo. Mais geralmente, tem-se o seguinte resultado.

**Teorema**

Se $A$ é um conjunto numerável, então o conjunto $\mathcal{P}(A)$ tem o cardinal do contínuo.

# Princípio de Indução

O resultado seguinte é essencial quando se pretende provar propriedades que envolvem os números naturais.

### Princípio de indução

Seja $P(n)$ uma propriedade enunciada para cada número natural $n$.
Suponhamos que:

1. $P(1)$ é verdadeira;
2. para cada $k \in \mathbb{N}$, se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1)$ é verdadeira.

Então $P(n)$ é verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

O Princípio de indução admite a seguinte generalização.

**Princípio de indução com base $n_0$**

Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ e seja $P(n)$ uma propriedade relativa aos números naturais $n \geq n_0$. Suponhamos que:

1. $P(n_0)$ é verdadeira;
2. para cada $k \in \mathbb{N}$ com $k \geq n_0$, se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1)$ é verdadeira.

Então $P(n)$ é verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$.

- Uma demonstração que utilize o Princípio de indução diz-se uma **demonstração por indução**.
- A verificação de que a condição 1 é satisfeita designa-se por **base de indução** (ou **passo base**) e a verificação de que a condição 2 é satisfeita designa-se por **passo de indução** (ou **passo indutivo**).
- A hipótese da condição 2 é chamada a **hipótese de indução**, e a conclusão de 2 é chamada a **tese de indução**.

# Conjuntos definidos indutivamente

Uma **definição indutiva** de um conjunto $A$ é uma colecção de regras que descrevem $A$ e que são de dois tipos:

REGRA BÁSICA é toda aquela que indica, incondicionalmente, que um determinado elemento pertence ao conjunto $A$;

REGRA INDUTIVA é toda aquela que indica que um certo elemento pertence a $A$, desde que outros determinados elementos pertençam a $A$.

O conjunto $A$ é formado por todos os elementos que se podem obter por aplicação das regras básicas e das regras indutivas um número finito de vezes.

O conjunto $\mathbb{N}$, dos números naturais, admite uma definição indutiva com apenas uma regra básica e uma regra indutiva.

### Exemplo

Mostra-se que $\mathbb{N}$ é o conjunto $A$ definido indutivamente pelas regras:

1. $1 \in A$;
2. Se $k \in A$, então $k+1 \in A$.

Um conjunto pode admitir mais do que uma definição indutiva, como se verifica no próximo exemplo onde é apresentada uma outra definição indutiva de $\mathbb{N}$.

### Exemplo

Mostra-se que $\mathbb{N}$ é o conjunto $A$ definido indutivamente pelas regras:

1. $1 \in A$;
2. $2 \in A$;
3. Se $k \in A$ e $k+1 \in A$, então $k+2 \in A$.

Tendo em conta a primeira definição indutiva de $\mathbb{N}$ apresentada anteriormente, o Princípio de indução é um caso particular do seguinte resultado genérico que é válido para qualquer conjunto $A$ definido indutivamente.

### Teorema (Princípio de indução estrutural)

Considere-se uma definição indutiva de um conjunto $A$ e uma propriedade $P(a)$ relativa a cada elemento $a$ de $A$. Suponhamos que:

1. para cada regra básica "$x \in A$", $P(x)$ é verdadeira;
2. para cada regra indutiva "$x_1, \ldots, x_r \in A \Rightarrow x \in A$", se $P(x_1), \ldots, P(x_r)$ são verdadeiras, então $P(x)$ é verdadeira.

Então $P(a)$ é verdadeira para qualquer $a \in A$.

Portanto, a definição indutiva de um conjunto, para além de constituir um processo de descrição do conjunto, pode ser também utilizada para provar que todos os elementos do conjunto têm certa propriedade.

Consideremos, por exemplo, o conjunto $A$ definido indutivamente pelas regras:

1. $0 \in A$;
2. Se $k \in A$, então $k+5 \in A$.

Mostremos, por indução estrutural sobre $A$, que

$$\forall a \in A\ \exists n \in \mathbb{N}_0,\ a = 5n.$$

Para cada $a \in A$, seja $P(a)$ a propriedade

$$\exists n \in \mathbb{N}_0,\ a = 5n.$$

Note-se que, pelo Princípio de indução estrutural, basta provar que $P(a)$ é válida para cada elemento $a \in A$ tal que

- $a$ é obtido por uma regra básica (neste exemplo só existe uma, a regra 1, que indica $a = 0$) ou
- $a$ é obtido por uma regra indutiva (neste exemplo só existe uma, a regra 2, que indica $a = k+5$ com $k \in A$). Neste caso tem que se supôr que se verifica a chamada **hipótese de indução**, ou seja, que $P(x_i)$ é válida para cada elemento $x_i \in A$ na hipótese da regra (neste exemplo, a hipótese de indução associada à regra 2 é: $P(k)$ é verdadeira).

1. Caso $a = 0$.
   Neste caso a propriedade $P(a)$ é
   $$\exists n \in \mathbb{N}_0,\ 0 = 5n.$$
   Dado que $0 = 5 \cdot 0$ e $0 \in \mathbb{N}_0$ deduz-se que a condição $P(a)$ é verdadeira.
2. Caso $a = k + 5$ em que $k \in A$.
   Suponhamos, por hipótese de indução, que $P(k)$ é verdadeira. Ou seja, suponhamos que existe um $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $k = 5n$. Então
   $$a = k + 5 = 5n + 5 = 5(n + 1).$$
   Dado que $n + 1 \in \mathbb{N}_0$, deduz-se que $P(a)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de indução estrutural, deduz-se de 1 e 2 que $P(a)$ é válida para todo o $a \in A$, como se queria provar.

# Linguagens (Formais)

- **alfabeto** - conjunto finito não vazio $A$.
- **letra** - elemento de $A$.
- **palavra** - sequência finita $a_1 a_2 \cdots a_n$ de elementos de $A$.
  Por exemplo,
  $$a, \;\; c, \;\; ab, \;\; aabbca, \;\; cacbccacaaaa$$
  são palavras sobre o alfabeto $\{a, b, c\}$.
- $A^+ = \{a_1 a_2 \cdots a_n \mid n \in \mathbb{N}, a_1, a_2, \ldots, a_n \in A\}$ - conjunto das palavras sobre o alfabeto $A$.

- **produto (de concatenação)** - operação binária $\cdot$ definida, para quaisquer $a_1 a_2 \cdots a_n, b_1 b_2 \cdots b_m \in A^+$, por

$$a_1 a_2 \cdots a_n \cdot b_1 b_2 \cdots b_m = a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \cdots b_m.$$

Note-se que a operação $\cdot$ é associativa, donde o par

$$(A^+, \cdot) \text{ é um semigrupo,}$$

chamado o **semigrupo livre gerado por $A$**.

- $A^* = A^+ \cup \{\epsilon\}$ onde $\epsilon$ representa a sequência vazia, chamada a **palavra vazia**.

Definindo $\epsilon u = u \epsilon = u$ para todo o $u \in A^*$,

$$(A^*, \cdot) \text{ é um monóide,}$$

chamado o **monóide livre gerado por $A$**.

- $|u|$ - **comprimento** de uma palavra $u$.
  Por exemplo,

$$|\epsilon| = 0, \ |a| = 1, \ |bacbbc| = 6, \ |bbbb| = 4.$$

- $|u|_a$ - número de ocorrências da letra $a$ em $u$.
  Por exemplo,

$$|bab|_c = 0, \ |acaba|_a = 3, \ |acaba|_b = 1.$$

Sendo $A$ um alfabeto qualquer, $u, v \in A^*$ e $a \in A$ tem-se

$$|uv| = |u| + |v|, \quad |uv|_a = |u|_a + |v|_a, \quad |u| = \sum_{b \in A} |u|_b.$$

**Definição**

Sejam $u$ e $v$ duas palavras de $A^*$. Diz-se que

- $u$ é um **fator** de $v$ se existem $x, y \in A^*$ tais que $xuy = v$;
- $u$ é um **prefixo** de $v$ se existe $y \in A^*$ tal que $uy = v$;
- $u$ é um **sufixo** de $v$ se existe $x \in A^*$ tal que $xu = v$.

Por exemplo, sendo $v = abab$:

- os fatores de $v$ são $\epsilon$, $a$, $b$, $ab$, $ba$, $aba$, $bab$, $v$;
- os prefixos de $v$ são $\epsilon$, $a$, $ab$, $aba$, $v$;
- os sufixos de $v$ são $\epsilon$, $b$, $ab$, $bab$, $v$.

- **Linguagem** sobre um alfabeto $A$ - subconjunto de $A^*$.
  Por exemplo,

  $$\emptyset,\ \{\epsilon\},\ \{a\},\ A,\ \{aa, aba, bbb, ababa\},\ \{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N}\},\ A^+,\ A^*$$

  são linguagens sobre $A = \{a, b\}$.
- $\mathcal{P}(A^*) = \{L \mid L \subseteq A^*\}$ - conjunto de todas as linguagens sobre $A$.
- $LK = \{uv \mid u \in L \text{ e } v \in K\}$ - **produto** das linguagens $L$ e $K$.
  Por exemplo,

  $$\begin{aligned}&\{a, ba, abb\}\{\epsilon, ba\} = \{a, ba, abb, aba, baba, abbba\}\\ &\neq \{a, ba, abb, baa, baba, baabb\} = \{\epsilon, ba\}\{a, ba, abb\}\end{aligned}$$

Note-se que, sendo $u \in A^+$,

$$\begin{aligned} uA^* &= \{ux \mid x \in A^*\}, \\ A^*u &= \{xu \mid x \in A^*\}, \\ A^*uA^* &= \{xuy \mid x, y \in A^*\} \end{aligned}$$

são os conjuntos das palavras sobre $A$ que têm, respetivamente, $u$ como prefixo, como sufixo e como fator.

**Exemplo**

Para $A = \{a, b, c\}$,

$$(babA^* \cap A^*acA^*) \setminus A^*c$$

representa a linguagem $L$ das palavras que começam por $bab$, que têm $ac$ como fator e cuja última letra não é um $c$. Por exemplo,

$$babbaca \in L, \quad babcabca \notin L.$$

Seja $L$ uma linguagem. Define-se:

$$L^0 = \{\epsilon\}$$

$$L^k = L^{k-1}L \quad (k \geq 1)$$

$$L^+ = \bigcup_{n\geq 1} L^n = \{u_1 \cdots u_n \mid n \in \mathbb{N}, u_1, \ldots, u_n \in L\}$$ [**fecho positivo** de $L$]

$$L^* = \bigcup_{n\geq 0} L^n = L^+ \cup \{\epsilon\}.$$ [**estrela** ou **fecho (de Kleene)** de $L$]

### Proposição

Seja $L$ uma linguagem. Então,

1. $\emptyset^* = \{\epsilon\}$, $\emptyset^+ = \emptyset$, $\{\epsilon\}^* = \{\epsilon\} = \{\epsilon\}^+$;
2. $L = L^1 \subseteq L^+ \subseteq L^+ \cup \{\epsilon\} = L^*$;
3. $\epsilon \in L^+$ se e só se $\epsilon \in L$;
4. $L^+ = LL^* = L^*L$.

### Definição

O conjunto $\mathrm{Reg}(A)$ das **linguagens regulares** sobre um alfabeto $A$, é o menor conjunto de linguagens sobre $A$ tal que:

**(i)** $\emptyset, \{\epsilon\} \in \mathrm{Reg}(A)$;

**(ii)** $\{a\} \in \mathrm{Reg}(A)$ para todo o $a \in A$;

**(iii)** $\mathrm{Reg}(A)$ é fechado para as operações de união, produto e fecho de Kleene. Ou seja, se $L, K \in \mathrm{Reg}(A)$ então $L \cup K,\ LK,\ L^* \in \mathrm{Reg}(A)$.

Note-se que, se $L$ é uma linguagem regular sobre um alfabeto $A$, então $L^+ = L^*L$ também é uma linguagem regular sobre $A$.

## Exemplo

Seja $A$ um alfabeto.

1. A linguagem $A$ é regular pois
$$A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$$
e, portanto, $A^*$ também é regular.

2. Sendo $u \in A^+$, $\{u\}$ é uma linguagem regular. De facto, $u = a_1 a_2 \cdots a_n$ com $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ e, portanto,
$$\{u\} = \{a_1\}\{a_2\} \cdots \{a_n\}$$
é regular.

3. Toda a linguagem finita $L$ é regular. De facto, se $L = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ com $u_i \in A^*$, tem-se
$$L = \{u_1\} \cup \{u_2\} \cup \cdots \cup \{u_k\}.$$

## Exemplo

1. Supondo que $A = \{a, b\}$, a linguagem

$$L = (aA^* \cap A^*b) \setminus (A^*aaA^* \cup A^*bbA^*)$$

das palavras sobre $A$ que começam por $a$, acabam por $b$ e que não têm $aa$ nem $bb$ como fatores, é regular. De facto, $L$ é descrita pela seguinte expressão regular

$$L = (ab)^+.$$

2. Prova-se que as linguagens
   - $\{a^p \mid p > 0 \text{ primo}\}$
   - $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$
   - $\{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N}_0, m \leq n\}$
   - $\{u \in A^* \mid u^I = u\}$

   sobre o alfabeto $\{a, b\}$ **não** são regulares.

# Autómatos Finitos

**Definição**

Um **autómato (finito)** é um quíntuplo $\mathcal{A} = (Q, A, \delta, i, F)$ onde

**(i)** $Q$ é um conjunto finito não vazio, chamado o **conjunto de estados** de $\mathcal{A}$;

**(ii)** $A$ é um alfabeto, chamado o **alfabeto (de entrada)** de $\mathcal{A}$;

**(iii)** $\delta : Q \times A \to \mathcal{P}(Q)$ é uma função, designada a **função transição** de $\mathcal{A}$. Cada triplo $(p, a, q)$, em que $p, q \in Q$ e $a \in A$ são tais que $q \in \delta(p, a)$, diz-se uma **transição** de $\mathcal{A}$;

**(iv)** $i \in Q$ é dito o **estado inicial** de $\mathcal{A}$;

**(v)** $F \subseteq Q$ é dito o **conjunto de estados finais** de $\mathcal{A}$.

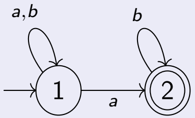
Um autómato é habitualmente representado por um grafo orientado.

## Exemplo

Seja $\mathcal{A} = (\{1,2\},\{a,b\},\delta,1,\{2\})$ onde $\delta$ é a função definida pela tabela seguinte:

| $\delta$ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| $a$ | $\{1,2\}$ | $\emptyset$ |
| $b$ | $\{1\}$ | $\{2\}$ |

O autómato $\mathcal{A}$ é representado pelo diagrama seguinte:



- **caminho** em $\mathcal{A}$ - sequência finita
$$(q_0, a_1, q_1), (q_1, a_2, q_2), \ldots, (q_{n-1}, a_n, q_n)$$
de transições consecutivas de $\mathcal{A}$, também notado
$$q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \cdots q_{n-1} \xrightarrow{a_n} q_n.$$
- **origem** do caminho - o estado $q_0$.
- **término** do caminho - o estado $q_n$.
- a palavra $a_1 a_2 \cdots a_n$ - diz-se a **etiqueta** do caminho.
- caminho **bem sucedido** - aquele que sai do estado inicial e chega a um estado final do autómato.
Por exemplo, sendo $\mathcal{A}$ o autómato do exemplo anterior, o caminho
$$1 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 2$$
é um caminho bem sucedido em $\mathcal{A}$, enquanto que o caminho
$$1 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{b} 1$$
não é bem sucedido pois não acaba num estado final.

- palavra **aceite** ou **reconhecida** pelo autómato $\mathcal{A}$ - palavra $u \in A^*$ que é etiqueta de pelo menos um caminho bem sucedido em $\mathcal{A}$.
- $L(\mathcal{A})$ - conjunto das palavras aceites por $\mathcal{A}$, chamada a **linguagem aceite** ou **reconhecida** pelo autómato $\mathcal{A}$.

### Exemplo

Retomemos o autómato $\mathcal{A}$ do exemplo da página 25. Como vimos acima, a palavra $aab$ é reconhecida por $\mathcal{A}$. A palavra $aabab$ também é aceite pois

$$1 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{b} 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 2$$

é um caminho bem sucedido em $\mathcal{A}$ cuja etiqueta é $aabab$.
Pelo contrário, a palavra $bb$ não é reconhecida por $\mathcal{A}$ pois todo o caminho bem sucedido em $\mathcal{A}$ tem que usar a transição $1 \xrightarrow{a} 2$ para passar do estado 1 para o estado 2. Assim, toda a palavra reconhecida por $\mathcal{A}$ tem pelo menos uma ocorrência de $a$. Note-se que a linguagem reconhecida por $\mathcal{A}$ é $L(\mathcal{A}) = (a+b)^*ab^* = (a+b)^*a(a+b)^*$.

Uma linguagem $L$ diz-se **reconhecível** se existe um autómato $\mathcal{A}$ que reconhece $L$, ou seja, tal que $L = L(\mathcal{A})$.

O mais importante resultado da teoria de autómatos, que é considerado como o fundador da teoria das linguagens regulares e dos autómatos finitos é o seguinte.

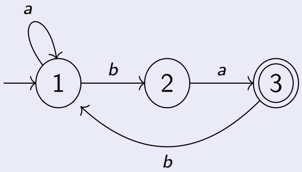
**Teorema[Kleene'1954]**

Uma linguagem é regular se e só se é reconhecível.

Um autómato $\mathcal{A} = (Q, A, \delta, i, F)$ diz-se **determinista** ou **determinístico** se, para cada estado $q \in Q$ e cada letra $a \in A$, existe *no máximo* uma transição $q \xrightarrow{a} p$ de origem $q$ e etiqueta $a$.

### Exemplo

O seguinte autómato é determinista




Tem-se, por exemplo, $\delta(1, a) = 1$, $\delta(1, b) = 2$, $\delta(2, aba) = 1$ e $\delta(2, b)$ não está definido.

O próximo resultado mostra que todas as linguagens reconhecíveis são reconhecidas por autómatos deterministas. Ou seja, cada autómato finito admite um autómato determinista equivalente. O processo que permite passar de um dado autómato a um autómato determinista equivalente é uma das construções clássicas da teoria de autómatos.

**Teorema**

Uma linguagem $L \subseteq A^*$ é reconhecível se e só se $L$ é reconhecida por um autómato determinista.

# Gramáticas

**Definição**

Uma **gramática** é um quádruplo

$$\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$$

onde

**(i)** $V$ é um alfabeto, dito não terminal, cujos elementos são chamados **variáveis** (ou **símbolos não terminais**);

**(ii)** $A$ é um alfabeto, dito terminal, cujos elementos são chamados **letras** (ou **símbolos terminais**), tal que $V \cap A = \emptyset$;

**(iii)** $\mathcal{S}$ é um elemento de $V$, chamado o **símbolo inicial**;

**(iv)** $P$ é um subconjunto finito de $\big((V \cup A)^* V (V \cup A)^*\big) \times (V \cup A)^*$. Os elementos $(\alpha, \beta)$ de P são chamados **produções** (ou **regras gramaticais**) e representam-se por $\alpha \to \beta$.

### Definição

Uma gramática $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ diz-se:

1. **dependente de contexto** se cada produção é da forma
   - $\alpha\mathcal{X}\beta \to \alpha\sigma\beta$, onde $\mathcal{X} \in V$ e $\alpha, \beta, \sigma \in (V \cup A)^*$ com $\sigma \neq \epsilon$, ou
   - $\mathcal{S} \to \epsilon$, se $\mathcal{S}$ não ocorre no membro direito de outra produção.
2. **independente de contexto** se cada produção é da forma
   - $\mathcal{X} \to \alpha$, onde $\mathcal{X} \in V$ e $\alpha \in (V \cup A)^*$.
3. **regular** se é

   **linear à direita**, ou seja, se cada produção é da forma
   - $\mathcal{X} \to u\mathcal{Y}$, onde $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in V$ e $u \in A^*$, ou
   - $\mathcal{X} \to u$, onde $\mathcal{X} \in V$ e $u \in A^*$;

   ou **linear à esquerda**, isto é, se cada produção é da forma
   - $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}u$, onde $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in V$ e $u \in A^*$, ou
   - $\mathcal{X} \to u$, onde $\mathcal{X} \in V$ e $u \in A^*$.

| Hierarquia de Chomsky | Gerador | Linguagem | Reconhecedor |
|---|---|---|---|
| Tipo 0 | Gramática (irrestrita) | Recursivamente enumerável | Máquina de Turing |
| Tipo 1 | GDC | Dependente de contexto | Autómato linear limitado |
| Tipo 2 | GIC | Independente de contexto | Autómato de pilha |
| Tipo 3 | GR | Regular | Autómato finito |