1ª aula

22 de fevereiro de 2021 16:50

$L' = \{ a^i b^j \mid 0 < i < j \}$ $a, b \in A$

$i = 1$ $j = 2, 3, \ldots$ $a^1 b^2 = abb$

abb.b

abb.b.b ... b

$i = 2$ $j = 3, 4, \ldots$ aabbb

aabbbb

...

~~babb~~

aaaa bbbbbbb

Definimos indutivamente o conjunto L de palavras de A^* por:

1. $abb \in L$
2. Se $u \in L$, então $ub \in L$.
3. Se $u \in L$, então $aub \in L$

Para verificar que esta definição indutiva é a correta, devemos verificar que $L = L'$.

I. $L \subseteq L'$

Queremos provar que toda a palavra u de L verifica a seguinte propriedade: $u = a^i b^j$ em que $0 < i < j$.

Princípio de Indução Estrutural para L:

Seja P uma propriedade relativa às palavras de L.

Se

1) ab^2 satisfaz a propriedade P (i.e. $P(ab^2)$ é verdadeira)
2) Se $u \in L$ é tal que $P(u)$ é verdadeira, então $P(ub)$ é verdadeira;
3) se $u \in L$ é tal que $P(u)$ é verdadeira, então $P(aub)$ é verdadeira,

então a propriedade P é satisfeita por todas as palavras $u \in L$.

... $ab^2 = a^1 b^2$ verifica-se

- $P(ab^2)$ é válida pois a igualdade $ab^2 = a^i b^j$ verifica-se se e só se $i=1$ e $j=2$, pelo que $0<i<j$.
- Se $u \in L$ e $P(u)$ é verdadeira (hipótese de indução) então existem $i, j \in \mathbb{N}$, tais que $0<i<j$ e $u = a^i b^j$.

$$ub = a^i b^{j+1}$$ pelo que $P(ub)$ é verdadeira pois $0 < i < j < j+1$.

- se $u \in L$ e $P(u)$ é verdadeira, ou seja $u = a^i b^j$ para $i, j \in \mathbb{N}$ tais que $0<i<j$, então

$$aub = a \cdot a^i b^j b = a^{i+1} b^{j+1}$$

e $0 < i < i+1 < j+1$.

Logo $P(aub)$ é verdadeira.

Logo para toda a palavra $u \in L$, verifica-se que $u = a^i b^j$ com $0<i<j$, ou seja, $u \in L'$.

Fica assim completa a prova de que $L \subseteq L'$.

II - $L' \subseteq L$.

Seja $u \in L'$. Então $u = a^i b^j$ com $0<i<j$. Logo

$$u = a^i b^j = \underbrace{a^{i-1}\,\underbrace{ab^2}\,b^{i-1}} \cdot \underbrace{b^{j-i-1}}$$

$ab^2 \in L$ porque é obtida pela regra 1.

Se aplicarmos a ab^2 $i-1$ vezes a regra 3, obtém-se $a^{i-1}ab^2b^{i-1}$

Se aplicarmos a $a^{i-1}ab^2b^{i-1}$ a regra 2, $j-i-1$ vezes, obtém-se $a^i b^{i+1} \cdot b^{j-i+1}$, ou seja, obtém-se $a^i b^j$

Logo $u \in L$. Assim $L' \subseteq L$.

Finalmente podemos afirmar que $L = L'$.

ex: $a^3 b^6$

$a^2 ab^2 b^2 b^2$

1. $ab^2 \in L$
3. $a\,ab^2 b \in L$
3. $aaab^2bb \in L$
2. $aaab^2bbb$
2. $aaab^2bbbb \in L$

1e) $L' = \{ w \in \{a,b,c\}^* : w = w^I \}$

Rascunho

$w =$ $\varepsilon^I = \varepsilon$ $\varepsilon \in L'$

$w = a$ $a^I = a$ $a \in L'$

$w = ab$ $(ab)^I = ba$ $ab \notin L'$

• aba • abεba

1. $\varepsilon \in L$
2. $a, b, c \in L$
3. Se $u \in L$, então $aua \in L$ e $bub \in L$ e $cuc \in L$.

Falta provar que $L = L'$.

...

1f) $T = \{ u \in \{0,1\}^* : 00$ é fator de $u \}$

Rascunho

00

000 0000 00011001

0 1 0 0 1 1 0 0 0 1 0 0 ...

Definimos indutivamente o conjunto L de palavras de $\{0,1\}^*$ por:

1. $00 \in L$
2. Se $u \in L$, então $u0$, $u1 \in L$.
3. Se $u \in L$, então $0u$, $1u \in L$.

Falta provar $L = L'$. ...

3 Rascunho

$w =$

c

$\downarrow$ ii

ab cb

$\downarrow$ iii

iii

$w = c$

$w = cc$

iii

w

$\downarrow$ iii

wc

$\downarrow$ iii

$w =$ $abcb$ $\downarrow iii$ $w = cc$ iii $\downarrow iii$ cwc

$w =$ $abcbc$ $ccc = w$

$\downarrow ii$ $\downarrow ii$ $iii^1)$ $wc \in L$

$ab\, abcbc\, b$ $ab\, ccc\, b$ $iii^2)$ $w \in L \Rightarrow cw \in L$

a) Vamos fazer uma prova por indução estrutural.

- $|c|_a = 0$ e $|c|_b = 0$. Como $2 \cdot 0 = 0$, então c verifica a propriedade P ($P(w) \Leftrightarrow 2|w|_a = |w|_b$)

- Se $w \in L$ e $P(w)$ é verdadeira, ou seja, $\boxed{2|w|_a = |w|_b}$

então
$$\begin{cases} 2 \cdot |ab\,w\,b|_a = 2 \cdot (1 + |bwb|_a) = 2(1 + |w|_a) = \\ \qquad = 2(1 + |w|_b/2) = 2 + |w|_b, \\ |abwb|_b = |bwb|_b = 2 + |w|_b, \end{cases}$$

Logo $2|abwb|_a = |abwb|_b$, pelo que $P(abwb)$ é Ver.

- Se $w \in L$ e $P(w)$ é verdadeira, ou seja, $2|w|_a = |w|_b$,

então
$$\begin{cases} 2|cw|_a = 2|w|_a \\ |cw|_b = |w|_b = 2|w|_a \end{cases}$$

Logo $2|cw|_a = |cw|_b$ pelo que $P(cw)$ é verdadeira.

$$\begin{cases} 2|wc|_a = 2|w|_a \\ |wc|_b = |w|_b = 2|w|_a \end{cases}$$

Logo, de forma análoga $P(wc)$ é verdadeira.

Finalmente, pelo Princípio de indução estrutural sobre L, temos que para toda a palavra $u \in L$ se verifica

$2|u|_a = |u|_b$.

b) Seja $u = abb \in A^*$.

Então $2|u|_a = |u|_b$ e $u \notin L$. porque $|u|_c = 0$

e as palavras de L têm pelo menos uma ocorrência da letra c.

$$L \subseteq \{w \in A^* : 2|w|_a = |w|_b\}$$

mas $\{w \in A^* : 2|w|_a = |w|_b\} \not\subseteq L$.

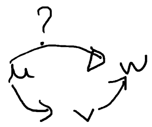
4 - a) Uma relação de ordem parcial é uma relação reflexiva, transitiva e anti-simétrica.

i) Reflexiva

Seja $u \in A^*$. Então $\underline{u} = \varepsilon \cdot u = \underline{u \cdot \varepsilon}$. Logo u é prefixo de u, pelo que a relação é reflexiva

ii) Transitiva

Sejam u, v e w tais que u é prefixo de v e v é prefixo de w. Então existe $x \in A^*$ tal que $v = u \cdot x$ e existe $y \in A^*$ tal que $w = vy$.



Assim $w = vy = u \cdot xy$

pelo que u é prefixo de w.

iii) Anti-simétrica

Se u é prefixo de v e v é prefixo de u, com $u, v \in A^*$, então existem $x, y \in A^*$ tais que $\boxed{u = vx}$ e $\boxed{v = u \cdot y}$.

Então $u = vx = u \cdot yx$, pelo que $\cancel{u}\varepsilon = \cancel{u}yx$.

Usando a lei do corte, $\varepsilon = yx$

Assim, $y = x = \varepsilon$, e, consequentemente $u = v$.

Logo pref é uma relação de ordem parcial.

b) (b1) ✓ ...

(b2) Por hipótese temos que u é prefixo de v e w é prefixo de v, ou seja, existem $x, y \in A^*$ tais que

$$v = u \cdot x = w \cdot y$$

Então, se $|u| \leq |w|$, ______

Então, se $|u| \leq |w|$,

$v = u \mid x$

$v = w \mid y$

pelo que u é prefixo de w.

- se $|u| > |w|$

$v = u \mid x$

$v = w \mid y$

então w é um prefixo de u.

O que completa a prova.