4. Espaços vetoriais $\mathbb{R}^n$

Seja n um número natural. Recorde-se que

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

é o conjunto das sequências ordenadas de n números reais.
As sequências $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ serão chamadas *vetores* do "espaço" $\mathbb{R}^n$ e representam-se frequentemente na forma de matrizes:

$$x = [x_1 \; x_2 \; \cdots \; x_n] \quad \text{“vetor” linha}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{“vetor” coluna.}$$

O vetor $(0, 0, \ldots, 0)$ é designado o *zero* ou *vetor nulo* de $\mathbb{R}^n$, e é representado por $0_{\mathbb{R}^n}$ (ou simplesmente por 0).
O vetor $-x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ é o *simétrico* de $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Define-se uma operação $+$ de *adição de vetores de* $\mathbb{R}^n$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

e uma operação $\cdot$ de *multiplicação de números reais (chamados escalares) por vetores de* $\mathbb{R}^n$,

$$\alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

Note-se que o símbolo $\cdot$, que denota a operação de multiplicação por escalares, é habitualmente omitido, denotando-se assim por simples justaposição, $\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em vez de $\alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Por exemplo, em $\mathbb{R}^4$, tem-se

$$\begin{aligned} (0, \pi, \tfrac{3}{2}, -1) + 5(\sqrt{2}, -1, 1, 0) &= (0, \pi, \tfrac{3}{2}, -1) + (5\sqrt{2}, -5, 5, 0) \\ &= (5\sqrt{2}, \pi - 5, \tfrac{13}{2}, -1). \end{aligned}$$

Propriedades

Sejam x, y, z elementos quaisquer de $\mathbb{R}^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então,

(i) $x+y = y+x$; [comutatividade de $+$]

(ii) $x+(y+z) = (x+y)+z$; [associatividade de $+$]

(iii) $x+0_{\mathbb{R}^n} = x$; [$0_{\mathbb{R}^n}$ é elemento neutro para $+$]

(iv) $x+(-x) = 0_{\mathbb{R}^n}$; [$-x$ é elemento simétrico de x]

(v) $\alpha\cdot(x+y) = \alpha\cdot x+\alpha\cdot y$; [distributividade de $\cdot$ em relação a $+$ em $\mathbb{R}^n$]

(vi) $(\alpha+\beta)\cdot x = \alpha\cdot x+\beta\cdot x$; [distributividade de $\cdot$ em relação a $+$ em $\mathbb{R}$]

(vii) $\alpha\cdot(\beta\cdot x) = (\alpha\beta)\cdot x$; [associatividade de $\cdot$]

(viii) $1\cdot x = x$. [o real 1 é elemento neutro para $\cdot$]

Demonstração: Demonstraremos apenas **(v)**. Denotando $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, deduz-se

$$\begin{aligned}
\alpha\cdot(x+y) &= \alpha\cdot(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \\
&= \big(\alpha(x_1 + y_1), \alpha(x_2 + y_2), \ldots, \alpha(x_n + y_n)\big) \\
&= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2, \ldots, \alpha x_n + \alpha y_n) \\
&= (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)+(\alpha y_1, \alpha y_2, \ldots, \alpha y_n) \\
&= \alpha\cdot(x_1, x_2, \ldots, x_n)+\alpha\cdot(y_1, y_2, \ldots, y_n) \\
&= \alpha\cdot x+\alpha\cdot y. \qquad \square
\end{aligned}$$

Devido a estas propriedades diz-se que $\mathbb{R}^n$ (algebrizado com as operações $+$ e $\cdot$ definidas acima) é um espaço vetorial.

Definição

Um subconjunto F de $\mathbb{R}^n$ diz-se um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ (ou simplesmente um subespaço de $\mathbb{R}^n$), e escreve-se $F \leq \mathbb{R}^n$, se são satisfeitas as seguintes condições:

(s_1) $0_{\mathbb{R}^n} \in F$; [F contém o vetor nulo de $\mathbb{R}^n$]

(s_2) $x, y \in F \;\Rightarrow\; x + y \in F$; [$F$ é fechado para $+$]

(s_3) $\alpha \in \mathbb{R},\; x \in F \;\Rightarrow\; \alpha \cdot x \in F$. [$F$ é fechado para $\cdot$]

Exemplos

1. $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$ e $\mathbb{R}^n$ são subespaços de $\mathbb{R}^n$ (os chamados subespaços triviais).
2. O conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 1\}$ **não** é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ pois não contém o vetor nulo de $\mathbb{R}^3$.
3. O conjunto $\left\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a = 0\right\} = \{(0, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

Teorema

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz de ordem $m \times n$. O núcleo de A,

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\},$$

é um subespaço vetorial do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$.

Demonstração: Comecemos por notar que $N(A)$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Basta agora provar as condições $(s_1) - (s_3)$ da definição de subespaço vetorial.

(s_1) Como já referimos, e é evidente, o sistema homogéneo $Ax = 0$ admite a solução nula. Ou seja, o vetor nulo de $\mathbb{R}^n$ é um elemento de $N(A)$ e, portanto, a condição (s_1) é verificada.

(s_2) Sejam $x, y \in N(A)$. Então $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $Ax = 0 = Ay$. Logo $A(x + y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$, donde se conclui que $x + y \in N(A)$.

(s_3) Sejam $x \in N(A)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $x \in \mathbb{R}^n$ e $Ax = 0$. Logo $A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha 0 = 0$ e, portanto, $\alpha x \in N(A)$.

De (s_1) a (s_3) resulta que $N(A)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$. $\square$

Exercício

Determine quais dos seguintes conjuntos são subespaços do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$

$$E = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : c = 0\},$$

$$F = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + b = 0\},$$

$$G = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + b = 1\}.$$

O resultado seguinte mostra que a interseção de subespaços do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ ainda é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Teorema

Sejam E_1 e E_2 subespaços de $\mathbb{R}^n$. Então $E_1 \cap E_2$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Demonstração: Como é evidente, $E_1 \cap E_2 \subseteq \mathbb{R}^n$.

(s_1) Dado que E_1 e E_2 são subespaços vetorais de $\mathbb{R}^n$, $0_{\mathbb{R}^n} \in E_1$ e $0_{\mathbb{R}^n} \in E_2$. Logo $0_{\mathbb{R}^n} \in E_1 \cap E_2$.

(s_2) Sejam $x, y \in E_1 \cap E_2$. Então $x, y \in E_1$ e $x, y \in E_2$, pelo que $x + y \in E_1$ e $x + y \in E_2$ pois E_1 e E_2 são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$. Logo $x + y \in E_1 \cap E_2$.

(s_3) Sejam $x \in E_1 \cap E_2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $x \in E_1$ e $x \in E_2$, pelo que $\alpha \cdot x \in E_1$ e $\alpha \cdot x \in E_2$, atendendo a que E_1 e E_2 são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$. Logo $\alpha \cdot x \in E_1 \cap E_2$.

Conclui-se assim que $E_1 \cap E_2$ é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. $\square$

Exemplo

Considere os subespaços

$$E = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : c = 0\}, \quad F = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a + b = 0\}$$

do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$. Tem-se que

$$\begin{aligned} E \cap F &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : c = 0, a + b = 0\} \\ &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : c = 0, a = -b\} \\ &= \{(-b,b,0) : b \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

é um subespaço de $\mathbb{R}^3$, como se pode verificar.

E quanto a $E \cup F$? Tem-se que

$$x = (1,1,0) \in E \subseteq E \cup F \text{ e } y = (2,-2,5) \in F \subseteq E \cup F.$$

No entanto, $x + y = (3,-1,5) \notin E \cup F$, pelo que $E \cup F$ não verifica a condição (s_2) da definição de subespaço vetorial. Logo $E \cup F$ **não** é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Em $\mathbb{R}^3$ tem-se

$$(5,7,-2) = 5(1,0,0) + 7(0,1,0) - 2(0,0,1).$$

Diz-se então que o vetor $(5,7,-2)$ é uma "combinação linear" dos vetores $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$.

Definição

Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_k$ elementos de $\mathbb{R}^n$. Um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ diz-se uma *combinação linear* dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ se existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ (não necessariamente únicos) tais que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k.$$

Os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ dizem-se os *coeficientes* da combinação linear ou, mais precisamente, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ é a *sequência dos coeficientes* da combinação linear.

Exemplos

1. Considere os vetores $v = (3,4)$, $f_1 = (2,2)$ e $f_2 = (-1,2)$ de $\mathbb{R}^2$. Tem-se
$$v = \frac{5}{3} f_1 + \frac{1}{3} f_2$$
donde v é uma combinação linear dos vetores f_1, f_2.

2. Em $\mathbb{R}^3$ o vetor $(3,3,0)$ é combinação linear dos vetores $(1,1,0)$ e $(2,2,0)$. Os coeficientes da combinação linear não são únicos pois de
$$(3,3,0) = \alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(2,2,0)$$
resulta
$$(3,3,0) = (\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, 0).$$
Assim, quaisquer escalares $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha_1 + 2\alpha_2 = 3$ estão nas condições pretendidas. Por exemplo, para ($\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = 1$) ou ($\alpha_1 = 3$ e $\alpha_2 = 0$) ou ($\alpha_1 = 5$ e $\alpha_2 = -1$) obtém-se,
$$\begin{aligned}(3,3,0) &= 1(1,1,0) + 1(2,2,0)\\ &= 3(1,1,0) + 0(2,2,0)\\ &= 5(1,1,0) + (-1)(2,2,0).\end{aligned}$$

Exemplos (continuação)

3. Para cada vetor $v = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ tem-se
$$v = a_1(1, 0, \ldots, 0) + a_2(0, 1, 0, \ldots, 0) + \cdots + a_n(0, \ldots, 0, 1).$$

   Conclui-se assim que qualquer vetor v de $\mathbb{R}^n$ é combinação linear dos vetores
$$\begin{array}{rcl} \mathbf{e}_1 & = & (1, 0, 0, ..., 0) \\ \mathbf{e}_2 & = & (0, 1, 0, ..., 0) \\ & \vdots & \\ \mathbf{e}_n & = & (0, 0, ..., 0, 1). \end{array}$$

4. Se $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são elementos do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, então cada vetor v_i $(i \in \{1, \ldots, k\})$ é combinação de $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Basta atender a que
$$v_i = 0v_1 + \cdots + 0v_{i-1} + 1v_i + 0v_{i+1} + \cdots + 0v_k.$$

Exemplos (continuação)

5. Consideremos o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$.
   - O vetor nulo $0_{\mathbb{R}^n}$ é combinação linear de quaisquer vetores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ de $\mathbb{R}^n$.

   De facto tem-se
   $$0_{\mathbb{R}^n} = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_k.$$
   - No entanto, pode haver outras formas de escrever $0_{\mathbb{R}^n}$ como combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_k$.

   Por exemplo, em $\mathbb{R}^3$, para os vetores $(1,1,0)$ e $(2,2,0)$ do Exemplo 2 tem-se
   $$\begin{aligned}(0,0,0) &= 0(1,1,0) + 0(2,2,0) \\ &= -2(1,1,0) + 1(2,2,0) \\ &= 8(1,1,0) + (-4)(2,2,0).\end{aligned}$$

Exemplos (continuação)

6. Sejam $v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_\ell \in \mathbb{R}^n$.
   - Se w é combinação de $v_1, v_2, \ldots, v_k$, então w é combinação de $v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_\ell$.

   De facto, se w é combinação de $v_1, v_2, \ldots, v_k$, então existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tais que

   $$w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k.$$

   Basta então notar que

   $$w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k + 0u_1 + 0u_2 + \cdots + 0u_\ell.$$

Exercício

Em $\mathbb{R}^3$, considere os seguintes vetores

$$v_1 = (-1, 2, 4), \quad v_2 = (0, 4, 5),$$
$$v_3 = (1, 2, 1), \quad v_4 = (0, 8, 10).$$

Justifique que:

a) Existe mais do que uma forma de escrever o vetor $(0, 4, 5)$ e o vetor $(0, 0, 0)$ como combinação linear dos vetores v_1, v_2, v_3, v_4.

b) Existem elementos de $\mathbb{R}^3$ que não são combinação linear dos vetores v_1, v_2, v_3, v_4 e indique dois elementos nessas condições.

Teorema

Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vetores do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ e seja

$$\mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k : \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}$$

o conjunto de todas as combinações lineares de $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Então,

(i) $\mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$;

(ii) $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$;

(iii) se E é um subespaço de $\mathbb{R}^n$ tal que $v_1, v_2, \ldots, v_k \in E$, então $\mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq E$.

Definição

Este teorema mostra que $\mathcal{L}\{v_1, \ldots, v_k\}$ é o menor subespaço de $\mathbb{R}^n$ que contém os vetores $v_1, \ldots, v_k$. Diz-se então que é o *subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado* pelos vetores $v_1, \ldots, v_k$, ou pelo conjunto $\{v_1, \ldots, v_k\}$, ou ainda pela sequência $(v_1, \ldots, v_k)$, e denota-se por $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$.

Demonstração (do Teorema):

(i) Denotemos $\mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ simplesmente por L. É claro que $L \subseteq \mathbb{R}^n$. Por outro lado,

(s_1) O vetor nulo de $\mathbb{R}^n$ pertence a L pois

$$0_{\mathbb{R}^n} = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_k.$$

(s_2) Sejam $x, y \in L$. Então

$$x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k \quad \text{e} \quad y = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_k v_k,$$

com $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{R}$. Logo

$$x + y = (\alpha_1 + \beta_1)v_1 + \cdots + (\alpha_k + \beta_k)v_k,$$

donde se deduz que $x + y \in L$.

(s_3) Sejam $x \in L$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$ com $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ e

$$\alpha x = (\alpha\alpha_1)v_1 + \cdots + (\alpha\alpha_k)v_k,$$

donde $\alpha x \in L$.

Conclui-se assim que $\mathcal{L}\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \leq \mathbb{R}^n$.

(ii), **(iii)** Exercício. $\square$

Exemplos

1. O subespaço de $\mathbb{R}^2$ gerado pelo vetor $\mathbf{e}_2 = (0,1)$ é o conjunto

$$\langle \mathbf{e}_2 \rangle = \{a(0,1) : a \in \mathbb{R}\} = \{(0,a) : a \in \mathbb{R}\},$$

dos vetores de $\mathbb{R}^2$ cuja primeira componente é nula.

2. Consideremos $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y = 0,\ y = 4z\}$. Tem-se

$$\begin{aligned} E &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y,\ z = \tfrac{1}{4}y\} \\ &= \{(2y, y, \tfrac{1}{4}y) : y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(2,1,\tfrac{1}{4}) : y \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (2,1,\tfrac{1}{4}) \rangle. \end{aligned}$$

Isto prova, em particular, que E é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

3. O exemplo 3 da página 18 permite-nos afirmar que

$$\mathbb{R}^n = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle.$$

Teorema

Sejam $v_1, v_2, \dots, v_k$ vetores de $\mathbb{R}^n$ e seja $w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k$ uma combinação linear de $v_1, v_2, \dots, v_k$. Então,

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle = \langle v_1, v_2, \dots, v_k, w \rangle.$$

Demonstração: Sejam $E = \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ e $F = \langle v_1, v_2, \dots, v_k, w \rangle$. Para provar que $E = F$ mostraremos que $E \subseteq F$ e que $F \subseteq E$.

- Para mostrar $E \subseteq F$ basta notar que o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ que gera E está contido no conjunto gerador de F, $\{v_1, v_2, \dots, v_k, w\}$. Alternativamente, poderia deduzir-se

$$\begin{aligned} u \in E \quad &\Rightarrow \quad u = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_k v_k \qquad \text{com os } \beta_i \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \quad u = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_k v_k + 0w \\ &\Rightarrow \quad u \in F. \end{aligned}$$

- Para a inclusão $F \subseteq E$ note-se que

$$\begin{aligned} u \in F \quad &\Rightarrow \quad u = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_k v_k + \beta_{k+1} w \\ &\Rightarrow \quad u = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_k v_k + \beta_{k+1}(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k) \\ &\Rightarrow \quad u = (\beta_1 + \beta_{k+1}\alpha_1) v_1 + \cdots + (\beta_k + \beta_{k+1}\alpha_k) v_k \\ &\Rightarrow \quad u \in E. \end{aligned}$$

$\square$

Teorema

Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vetores de $\mathbb{R}^n$ e seja $i \in \{1, \ldots, k\}$. Se $w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k$ é uma combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_k$ com $\alpha_i \neq 0$, então

$$\langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k \rangle = \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \ldots, v_k \rangle.$$

Demonstração: Exercício.

Exercício

Sejam $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^n$. Justifique que:

a) $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle = \langle u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3 \rangle$.

b) $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle = \langle -u_3, -u_1 + u_2, 2u_1 + u_3 \rangle$.

DEFINIÇÃO

Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_k$, ou a sequência $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$, dizem-se:

- linearmente independentes se, para $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$,
$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = 0_{\mathbb{R}^n} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0.$$
- linearmente dependentes se não são linearmente independentes, ou seja, se existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ **não** todos nulos tais que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Exemplos

1. Os vetores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ de $\mathbb{R}^3$ são linearmente independentes. De facto, tem-se para $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad & \alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1) = (0,0,0) \\ \Rightarrow \quad & (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0,0,0) \\ \Rightarrow \quad & \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0. \end{aligned}$$

2. Os vetores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, f = (2,-5,0)$ de $\mathbb{R}^3$ são linearmente dependentes. De facto, consegue-se escrever o vetor nulo de $\mathbb{R}^3$ como combinação linear dos três vectores apresentados utilizando escalares não nulos, da seguinte forma

$$2\mathbf{e}_1 + (-5)\mathbf{e}_2 + (-1)f = (0,0,0).$$

Exercício

Mostre que:

a) Em $\mathbb{R}^3$, os vetores

$$(1,2,3),(0,-1,1),(0,0,2)$$

são linearmente independentes.

b) Em $\mathbb{R}^4$, os vetores

$$(1,0,0,1),(4,2,0,3),(2,2,0,1)$$

são linearmente dependentes.

Teorema

Vetores $v_1, \dots, v_k$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ são linearmente dependentes se e só se algum deles é combinação linear dos restantes.

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponhamos que $v_1, \dots, v_k$ são linearmente dependentes. Então, $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = 0_{\mathbb{R}^n}$ para alguns $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ não todos nulos. Seja $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $\alpha_i \neq 0$. Logo,

$$v_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} v_1 - \cdots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} v_{i-1} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} v_{i+1} - \cdots - \frac{\alpha_k}{\alpha_i} v_k,$$

Ou seja, v_i é uma combinação linear dos restantes vetores.

($\Leftarrow$) Suponhamos agora que existe um $i \in \{1, \dots, k\}$ e que existem $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ tais que

$$v_i = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \alpha_k v_k.$$

Então existe uma combinação linear nula dos vetores $v_1, v_2, \dots, v_k$,

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + (-1) v_i + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \alpha_k v_k = 0_{\mathbb{R}^n},$$

em que pelo menos um dos coeficientes é não nulo. Os vetores $v_1, v_2, \dots, v_k$ são portanto linearmente dependentes. $\square$

Observações

Num espaço vetorial $\mathbb{R}^n$:

1. Qualquer conjunto de vetores $\{0_{\mathbb{R}^n}, v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, que contenha o vetor nulo, é linearmente dependente pois
$$0_{\mathbb{R}^n} = 1 \cdot 0_{\mathbb{R}^n} + 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_k.$$
2. Um vetor v é linearmente independente se e só se $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.
3. Se $X = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ é um conjunto de vetores linearmente independentes, então qualquer subconjunto de X é também linearmente independente.
4. Se $X = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ é um conjunto de vetores linearmente dependentes, então qualquer conjunto contendo X é também linearmente dependente.
5. Se $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são vetores linearmente independentes e w é um outro vetor tal que $v_1, v_2, \ldots, v_k, w$ são linearmente dependentes, então w é combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_k$.

Definição

Seja E um subespaço de $\mathbb{R}^n$ e seja $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_k\}$ um conjunto de vetores de E. Diz-se que $\mathcal{B}$ é uma *base* de E se:

- **i)** $\mathcal{B}$ é um conjunto gerador de E (ou seja, $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle = E$).
- **ii)** $\mathcal{B}$ é um conjunto de vetores linearmente independentes.

Se $E = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, então convenciona-se que E tem por *base* o conjunto vazio e diz-se que E tem *dimensão nula*.

Observação

1. $\{(1,0),(0,1)\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^2$ e é linearmente independente.
2. $\{(1,0),(0,1),(2,-1)\}$ gera $\mathbb{R}^2$ mas não é linearmente independente.
3. $\{(1,0),(2,0)\}$ não gera $\mathbb{R}^2$ e não é linearmente independente.
4. $\{(1,1)\}$ não gera $\mathbb{R}^2$ mas é linearmente independente.

Exemplos

1. O conjunto $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de vetores de $\mathbb{R}^3$ forma uma base de $\mathbb{R}^3$ (chamado a *base canónica de* $\mathbb{R}^3$). Com efeito, vimos já que:
   - $\mathbb{R}^3 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$, no exemplo 3 da página 24.
   - $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ são vetores linearmente independentes, no exemplo 1 da página 30.
2. Mais geralmente, o conjunto
   $$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} = \{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)\}$$
   forma uma base de $\mathbb{R}^n$, chamada a *base canónica de* $\mathbb{R}^n$, e representada por $bc_{\mathbb{R}^n}$.
3. Um subespaço vetorial pode ter mais do que uma base. Assim, para além da base canónica $bc_{\mathbb{R}^2} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, $\mathbb{R}^2$ admite também, por exemplo, a base $\{(-1, 2), (1, 1)\}$.

Teorema

Seja $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ uma base de um subespaço vetorial E. Cada vetor $w \in E$ pode ser escrito de uma única forma

$$w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k$$

como combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Diz-se então que os coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ são as *coordenadas* de w na base $\mathcal{B}$.

Demonstração: Seja $w \in E$. Como $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ é uma base de E, tem-se $\langle v_1, v_2, \ldots, v_k\rangle = E$ e, consequentemente, $w \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_k\rangle$. Suponhamos que $w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_k v_k$. Então

$$(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \cdots + (\alpha_k - \beta_k)v_k = 0$$

e, dado que $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são linearmente independentes, conclui-se que $\alpha_i - \beta_i = 0$, donde $\alpha_i = \beta_i$, para todo o $i = 1, \ldots, k$. $\square$

Exemplos

1. Em $\mathbb{R}^2$, as coordenadas do vetor $v = (-2, 7)$ relativamente à base:
   - $bc_{\mathbb{R}^2} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ são $-2, 7$.
   - $\{(-1, 2), (1, 1)\}$ são $3, 1$.
2. As coordenadas do vetor $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ relativamente à base canónica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ são $a_1, a_2, \dots, a_n$.
3. Note-se que dada uma base de um subespaço E, qualquer vetor de E fica bem determinado se conhecermos as coordenadas relativamente a essa base.

   Por exemplo, se $\mathcal{B} = \{(1, -2, 3), (2, 0, 1)\}$ é uma base de um subespaço E de $\mathbb{R}^3$, então o vetor que em relação à base $\mathcal{B}$ tem as coordenadas $6, -2$ é o vetor

$$6(1, -2, 3) + (-2)(2, 0, 1) = (2, -12, 16).$$

Exercício

Em $\mathbb{R}^4$, considere a base

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$$

e a base canónica

$$\begin{aligned} bc_{\mathbb{R}^4} &= \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\} \\ &= \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}. \end{aligned}$$

a) Determine as coordenadas do vetor $(4,3,2,1)$ em cada uma das bases $\mathcal{B}$ e $bc_{\mathbb{R}^4}$.

b) Determine as coordenadas de um vetor arbitrário $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ em cada uma das bases $\mathcal{B}$ e $bc_{\mathbb{R}^4}$.

c) Determine o vetor que tem as coordenadas $2,-1,-2,3$ relativamente:

- **i)** à base $\mathcal{B}$.
- **ii)** à base $bc_{\mathbb{R}^4}$.

Teorema

Seja E um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Se $\{u_1, \ldots, u_k\}$ é um conjunto de vetores linearmente independentes de E e $\{v_1, \ldots, v_\ell\}$ é um conjunto gerador de E, então $k \leq \ell$.

Corolário

Seja E um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Se E tem uma base com k vetores, então todas as bases de E têm k vetores. Diz-se então que E tem *dimensão* k, e escreve-se $dim(E) = k$.

Demonstração: Sejam $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_k\}$ e $\mathcal{B}' = \{v_1, \ldots, v_\ell\}$ bases de E.

- Como $\mathcal{B}$ é um conjunto de vetores linearmente independentes e $\mathcal{B}'$ é um conjunto gerador, deduz-se do teorema anterior que $k \leq \ell$.
- Reciprocamente, dado que $\mathcal{B}'$ é um conjunto independente e $\mathcal{B}$ é um conjunto gerador, $\ell \leq k$.

Conclui-se assim que $k = \ell$, como queríamos provar. □

Exemplo

Tem-se o seguinte:

1. $dim(\mathbb{R}^n) = n$.
2. Se $E = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, então $dim(E) = 0$.
3. Em $\mathbb{R}^2$, as retas que passam pela origem têm dimensão 1.
4. O conjunto $\{(1,0,0),(0,1,2)\}$ é uma base do subespaço $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2y\}$ de $\mathbb{R}^3$. Portanto, $dim(E) = 2$.

Exercício

Mostre que o subespaço

$$F = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a - b = c - d\}$$

de $\mathbb{R}^4$, tem dimensão 3.

Proposição

Seja E um subespaço vetorial e sejam $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vetores linearmente independentes de E. Se w é um vetor de E que não é combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_k$, então

- $v_1, v_2, \ldots, v_k, w$ são vetores linearmente independentes,
- $\langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle \subsetneqq \langle v_1, v_2, \ldots, v_k, w \rangle \subseteq E$.

Exemplo

Os vetores de $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (1, 2, 0).$$

são linearmente independentes. O vetor $w = (1, 0, 1)$ não é combinação linear de v_1, v_2 (ou seja, $w \notin \langle v_1, v_2 \rangle$) e, portanto, os vetores v_1, v_2, w são linearmente independentes. Como geram $\mathbb{R}^3$ (verifique) conclui-se que $\{v_1, v_2, w\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Teorema

Seja E um subespaço de dimensão k. Então

1. Dado um conjunto de vetores linearmente independentes de E, se esse conjunto não é uma base de E (ou seja, não é gerador) então é possível acrescentar-lhe vetores de E para obter uma base de E.
2. Qualquer conjunto de k vetores linearmente independentes de E é uma base de E.
3. Dado um conjunto finito de vetores que geram E, se esse conjunto não é uma base de E (ou seja, não é linearmente independente) então é possível retirar-lhe vetores de forma a obter uma base de E.
4. Qualquer conjunto de k vetores que geram E é uma base de E.

Corolário

Seja E um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Então

(i) $dim(E) \leq n$.

(ii) $dim(E) = n$ se e só se $E = \mathbb{R}^n$.

Exemplo

No espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, consideremos os vetores

$$v_1 = (-1, 0, 0), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (0, 0, 2), v_4 = (1, -1, 1), v_5 = (1, 1, 0).$$

Como se pode verificar, $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ é um conjunto de vetores linearmente dependentes que gera $\mathbb{R}^3$.

- Observe-se que $v_3 = 2v_1 + 2v_2 + 0v_4 + 0v_5$, donde, pelo teorema da página 27, $\mathbb{R}^3 = \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle = \langle v_1, v_2, v_4, v_5 \rangle$.
- Por outro lado, $dim(\mathbb{R}^3) = 3$ e portanto os vetores v_1, v_2, v_4, v_5 são linearmente dependentes. Por exemplo, tem-se $v_2 = v_1 + v_4 + v_5$ pelo que $\mathbb{R}^3 = \langle v_1, v_2, v_4, v_5 \rangle = \langle v_1, v_4, v_5 \rangle$.

Os vetores v_1, v_4, v_5 são linearmente independentes (pois são 3 e geram um subespaço de dimensão 3). Logo $\{v_1, v_4, v_5\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Exercício

1. Em $\mathbb{R}^3$, considere os vetores

$$v_1 = (1, 2, 1), \ v_2 = (2, -1, -3), \ v_3 = (0, 1, 1)$$

e o subespaço

$$E = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle.$$

a) Verifique que o conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ não é uma base de E.

b) Determine um subconjunto de $\{v_1, v_2, v_3\}$ que seja uma base de E.

2. Em $\mathbb{R}^3$, considere o conjunto

$$X = \{(1, 0, 1), (2, 0, -1)\}.$$

a) Verifique que o conjunto X é linearmente independente.

b) Indique uma base de $\mathbb{R}^3$ que contenha X.