Aula: 18 de maio

29. Determine a expressão analítica da rotação de ângulo $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ no eixo dirigido pelo vector $\vec{e}_2 = (0,1,0)$.

Seja ρ a rotação pretendida. Sabemos que ρ tem expressão matricial:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\pi/4 & 0 & \operatorname{sen}\pi/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\pi/4 & 0 & \cos\pi/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Logo $\rho(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} x_3,\ x_2,\ -\frac{\sqrt{2}}{2} x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} x_3 \right)$

30. Determine a expressão analítica da rotação de ângulo $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ no eixo dirigido pelo vector $\vec{e}_2 = (0,1,0)$ que passa pelo ponto $A = (2,1,0)$.

Seja σ a rotação pretendida e seja ρ a rotação do exercício 29. Fazendo $\vec{v} = \vec{OA}$, sabemos que $\sigma = t_{\vec{v}} \circ \rho \circ t_{-\vec{v}}$, ou seja, $\sigma(x) = \vec{v} + \rho(x - \vec{v})$. Em coordenadas:

$$\sigma(x_1, x_2, x_3) = (2,1,0) + \rho(x_1 - 2, x_2 - 1, x_3) =$$

$$= \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 - 2) + \frac{\sqrt{2}}{2} x_3,\ x_2,\ -\frac{\sqrt{2}}{2} x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} x_3 \right).$$

31. Determine a expressão analítica da rotação de ângulo $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ no eixo dirigido pelo vector $\vec{u} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$.

Começamos por observar que $\|\vec{u}\| = 1$, pelo que podemos escrever

$\rho(M) = O + (\vec{OM}\cdot\vec{u})\vec{u} + \cos\theta\,(\vec{OM} - (\vec{OM}\cdot\vec{u})\vec{u}) + \operatorname{sen}\theta\,(\vec{u}\times\vec{OM})$

Como $\theta = \pi/2$ então:

$\rho(M) = O + (\vec{OM}\cdot\vec{u})\vec{u} + (\vec{u}\times\vec{OM})$.

Fazendo $M = (x_1, x_2, x_3)$, ponto genérico do espaço euclidiano, temos

$$\vec{OM}\cdot\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1+x_2) \Rightarrow (\vec{OM}\cdot\vec{u})\vec{u} = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}, 0\right).$$

$$\vec{u}\times\vec{OM} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_3, -\frac{\sqrt{2}}{2}x_3, \frac{\sqrt{2}}{2}(x_2-x_1)\right)$$

Logo: $\rho(x_1,x_2,x_3) = \left(\frac{x_1+x_2+\sqrt{2}x_3}{2}, \frac{x_1+x_2-\sqrt{2}x_3}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}(x_2-x_1)\right)$.

33. Determine a representação matricial das aplicações seguintes:

(a) A rotação de ângulo $\pi/4$ em torno ao eixo definido pelo vector $v = (1,1,1)$;

(b) O "twist" definido pela rotação anterior e o vector v;

(c) O "twist" definido pela rotação anterior e o vector $-3v$.

Qual a imagem da recta dirigida pelo vector $(0,0,2)$ e que passa pelo ponto $(1,0,1)$ através destas aplicações?

a Observamos que $\vec{v}$ não é unitário pelo que consideramos $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} =$

$= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Seja ρ a rotação pretendida.

Fazemos $M = (x,y,z)$:

$$(\vec{OM}\cdot\vec{u})\vec{u} = \frac{x+y+z}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{x+y+z}{3}(1,1,1).$$

$$\vec{OM} - (\vec{OM}\cdot\vec{u})\vec{u} = (x,y,z) - \frac{x+y+z}{3}(1,1,1) =$$

$$= \frac{1}{3}(2x-y-z, -x+2y-z, -x-y+2z).$$

$$\vec{u} \times \vec{OM} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(z-y,\ x-z,\ y-x\right).$$

$\theta = \pi/4 \Rightarrow \cos\theta = \sqrt{2}/2$ e $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{2}/2$

$$\rho(x,y,z) = \frac{x+y+z}{3}(1,1,1) + \frac{\sqrt{2}}{6}(2x-y-z,\ -x+2y-z,\ -x-y+2z)$$
$$+ \frac{\sqrt{2}}{6}(z-y,\ x-z,\ y-x) =$$
$$= \frac{x+y+z}{3}(1,1,1) + \frac{\sqrt{2}}{3}\left(x-y,\ y-z,\ z-x\right) =$$
$$= \frac{1}{3}\left((1+\sqrt{2})x + (1-\sqrt{2})y + z,\ x + (1+\sqrt{2})y + (1-\sqrt{2})z,\ (1-\sqrt{2})x + y + (1+\sqrt{2})z\right)$$

b. Seja σ_1 o twist pretendido.

$\sigma_1(M) = \vec{v} + \rho(M) = (1,1,1) + \rho(x,y,z).$

c. Seja σ_2 o twist pretendido.

$\sigma_2(M) = -3\vec{v} + \rho(M) = (-3,-3,-3) + \rho(x,y,z).$

- Seja $r = (1,0,1) + \langle (0,0,2) \rangle$

Apresentamos $\sigma_1(r)$ (os outros casos são análogos).

Temos $\sigma_1(r) = \sigma_1(1,0,1) + \langle \vec{\sigma_1}(0,0,2) \rangle$.

$$\sigma_1(1,0,1) = (1,1,1) + \frac{1}{3}(2+\sqrt{2},\ 2-\sqrt{2},\ 2) = \left(5+\sqrt{2},\ 5-\sqrt{2},\ 5\right).$$

$$\vec{\sigma_1}(0,0,2) = \frac{2}{3}\left(1,\ 1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}\right).$$

Logo: $\sigma_1(r) = \left(5+\sqrt{2},\ 5-\sqrt{2},\ 5\right) + \left\langle \left(1,\ 1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}\right) \right\rangle.$

36. Determine a expressão matricial ~~da~~ de uma reflexão rotatória no plano $x - 2z + 1 = 0$ de ângulo $\pi/2$.

Uma reflexão rotatória é a composta de uma reflexão num plano com uma rotação em torno de um eixo perpendicular a esse plano

$\pi: \ x - 2z + 1 = 0 \iff \pi = (-1,0,0) + \langle (1,0,-2) \rangle^{\perp} = A + \langle \vec{n} \rangle^{\perp}.$

Seja σ a reflexão no plano π e ρ a rotação de ângulo $\theta = \pi/2$ em torno do eixo que incide na origem e está dirigido por $\vec{n}$.

Vamos determinar $\sigma \circ \rho$. [sabe-se que $\sigma \circ \rho = \rho \circ \sigma$. Verifique!]

$$\sigma(M) = M - 2 \frac{\vec{AM} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}$$

$$\begin{aligned}
\sigma(x,y,z) &= (x,y,z) - \frac{2}{5}\Big[(x+1,y,z)\cdot(1,0,-2)\Big](1,0,-2) = \\
&= (x,y,z) - \frac{2}{5}(x+1-2z)(1,0,-2) = \\
&= \frac{1}{5}\Big(5x - 2(x+1-2z),\ 5y,\ 5z + 4(x+1-2z)\Big) = \\
&= \frac{1}{5}\big(3x+4z-2,\ 5y,\ 4x-3z+4\big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho(M) &= O + (\vec{OM}\cdot\vec{u})\vec{u} + \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\left(\vec{OM} - (\vec{OM}\cdot\vec{u})\vec{u}\right) + \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)(\vec{u}\times\vec{OM}) \\
&= O + (\vec{OM}\cdot\vec{u})\vec{u} + (\vec{u}\times\vec{OM}), \quad \text{onde } \vec{u} = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,-2)
\end{aligned}$$

$$(\vec{OM}\cdot\vec{u})\vec{u} = \frac{x-2z}{5}(1,0,-2)$$

$$\vec{u}\times\vec{OM} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 1/\sqrt{5} & 0 & -2/\sqrt{5} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\big(2y,\ -(z+2x),\ y\big)$$

$$\begin{aligned}
\rho(x,y,z) &= \frac{x-2z}{5}(1,0,-2) + \frac{\sqrt{5}}{5}\big(2y,\ -(z+2x),\ y\big) = \\
&= \frac{1}{5}\big(x + 2\sqrt{5}\,y - 2z,\ -2\sqrt{5}\,x - \sqrt{5}\,z,\ -2x + \sqrt{5}\,y + 4z\big).
\end{aligned}$$

Para determinar $\sigma \circ \rho$ usamos coordenadas homogéneas:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & 0 & 4/5 & -2/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4/5 & 0 & -3/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/5 & 2\sqrt{5}/5 & -2/5 & 0 \\ -2\sqrt{5}/5 & 0 & -\sqrt{5}/5 & 0 \\ -2/5 & \sqrt{5}/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

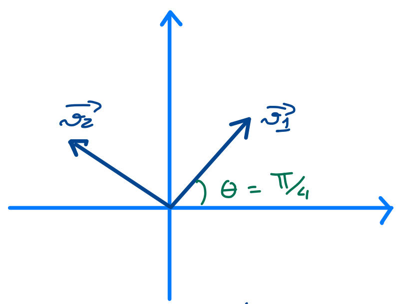
$$= \begin{bmatrix} -1/5 & 2\sqrt{5}/5 & 2/5 & -2/5 \\ -2\sqrt{5}/5 & 0 & -\sqrt{5}/5 & 0 \\ 2/5 & \sqrt{5}/5 & -4/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(\sigma \circ \rho)(x, y, z) = \frac{1}{5}\left(-x + 2\sqrt{5}y + 2z - 2,\ -2\sqrt{5}x - \sqrt{5}z,\ 2x + \sqrt{5}y - 4z + 4\right).$$

Aula: 25 de maio

19. Determine a representação matricial do re-dimensionamento centrado na origem e parâmetros 2 e 4 nas direcções definidas pelas bissectrizes do primeiro e segundo quadrante.

No referencial $\mathcal{R} = \{O, (\vec{v_1}, \vec{v_2})\}$, o redimensionamento pretendido é dado pela matriz $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$



No referencial original, o redimensionamento pedido é dado por:

$$\begin{bmatrix} \cos(\pi/4) & -\text{sen}(\pi/4) \\ \text{sen}(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(-\pi/4) & -\text{sen}(-\pi/4) \\ \text{sen}(-\pi/4) & \cos(-\pi/4) \end{bmatrix}$$

$\parallel$ Rotação $\theta = \pi/4$ $\qquad$ $\parallel$ Rotação $\theta = -\pi/4$

uma vez que a Rotação centrada na origem e de ângulo $-\pi/4$ envia $\vec{v_1}$ em $\vec{e_1}$ e $\vec{v_2}$ em $\vec{e_2}$. Assim:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

20. Determine a representação matricial do re-dimensionamento centrado no ponto $O' = (1,1)$ e parâmetros 2 e 4 nas direcções definidas pelas bissectrizes do primeiro e segundo quadrante.

Sejam: $\bar{\rho}$ o redimensionamento pretendido

ρ o redimensionamento do exercício 19

$\vec{v} = \overrightarrow{OO'} = (1,1)$

Então $\bar{\rho}(x,y) = (t_{\vec{v}} \circ \rho \circ t_{-\vec{v}})(x,y) = (1,1) + \rho(x-1, y-1) =$

$= (1,1) + (3(x-1) - (y-1), -(x-1) + 3(y-1)) =$

$= (3x - y - 1, -x + 3y - 1).$

21. Determine a transvecção na origem de parâmetro 5 na direcção de $\vec{v} = (0,1)$.

A rotação que envia $\vec{v}$ em $\vec{e_1}$ é a rotação de ângulo $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

Logo:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

22. Determine a transvecção na origem de parâmetro 2 na direcção do vector $(\sqrt{3}/2, 1/2)$.

A rotação que envia $\vec{v}$ em $\vec{e_1}$ é a rotação de ângulo $\theta = -\frac{\pi}{6}$.

Logo:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\sqrt{3}/2 & 3/2 \\ -1/2 & 1+\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

23. Determine a transvecção no ponto $O' = (1, 1)$ de factor 2 na direcção do vector $(\sqrt{3}/2, 1/2)$.

Sejam: $\bar{\sigma}$ a transvecção pretendida.

σ a transvecção do exercício 22.

$\vec{v} = \overrightarrow{OO'} = (1,1)$.

Então $\bar{\sigma}(x,y) = (t_{\vec{v}} \circ \sigma \circ t_{-\vec{v}})(x,y) =$

$$= (1,1) + \sigma(x-1, y-1) =$$

$$= \left(1 + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x-1) + \frac{3}{2}(y-1),\ 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(y-1)\right)$$

$$= \left(\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x + \frac{3}{2}y + \frac{\sqrt{3}-3}{2},\ -\frac{1}{2}x + \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right).$$

[Em alternativa, pode fazer esta composta em coordenadas homogéneas.]

Aula: 28 de maio

Exercícios

1. Determine a expressão analítica da projeção perspectiva desde o ponto $\Omega = (-3, 0)$ na reta $x = 0$. Indique a reta excecional.

2. Determine a expressão analítica da projeção perspectiva desde o ponto $\Omega = (1, 1, 3)$ no plano $x + z = 0$. Indique o plano excecional.

1. Seja $M = (x, y)$ e $p(M)$ a projeção do ponto M desde $\Omega = (-3,0)$ na reta $r: x = 0$.

Sabemos que $p(M) = \Omega + \lambda \overrightarrow{\Omega M}$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

$p(x,y) = (-3,0) + \lambda (x+3, y) = (-3 + \lambda(x+3), \lambda y)$.

Como $p(M) \in r$ então $-3 + \lambda(x+3) = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{3}{x+3}$

Logo $p(x,y) = \left(0, \dfrac{3y}{x+3}\right)$.

A reta excecional é a reta paralela a r e incidente em Ω, ou seja, a reta de equação $x+3=0$.

2. Seja $M = (x,y,z)$ e $p(M)$ a projeção do ponto M desde $\Omega = (1,1,3)$ no plano $\pi: x + z = 0$.

Sabemos que $p(M) = \Omega + \lambda \overrightarrow{\Omega M}$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

$p(x,y,z) = (1,1,3) + \lambda (x-1, y-1, z-3)$

Como $p(M) \in \pi$ então $1 + \lambda(x-1) + 3 + \lambda(z-3) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{-4}{x+z-4}$.

Logo, $p(x,y,z) = (1,1,3) - \dfrac{4}{x+z-4}(x-1, y-1, z-3) =$

$$= \left(\frac{-3x+z}{x+z-4}, \frac{x-4y+z}{x+z-4}, \frac{3x-z}{x+z-4} \right).$$

O plano excecional é o plano paralelo a π e incidente em Ω, ou seja, o plano de equação $x+z-4=0$.