3ª aula

8 de março de 2021 17:00

17. Sejam $A = \{a, b\}$ e L uma linguagem sobre A definida indutivamente por:
(i) $\varepsilon \in L$;
(ii) se $x \in L$, então $xba, xaa \in L$.
De entre as seguintes afirmações, selecione a afirmação verdadeira.
a) $(ba)^{-1}L \neq L$; b) $a^{-1}L = aL$; c) $L \neq L^*$; d) $(bb)^{-1}L^* \neq \emptyset$.

$L = \{ \varepsilon, ba, aa, baba, baaa, aaba, a^4, \dots \}$
$= \mathcal{L}(\varepsilon \cdot (ba + aa)^*)$

A expressão regular correspondente é $(ba + aa)^*$.

~~c)~~ $L = \mathcal{L}(ba+aa)^* = \mathcal{L}(((ba+aa)^*)^*) = L^*$

~~d)~~ $(bb)^{-1}L = \emptyset$ porque b^2 não é prefixo de nenhuma palavra de L

~~a)~~ $(ba)^{-1}L = a^{-1}b^{-1}L = \{ u \in A^* : bau \in L \} = L$

$\varepsilon \rightarrow \varepsilon ba \rightarrow \dots \rightarrow bau \in L$
$\varepsilon \rightarrow \dots \rightarrow u \in L$

$\cancel{(ba)}$ $\cancel{ba}u \rightarrow u$

A opção verdadeira é b), ou seja, $a^{-1}L = aL$

Se $u \in L$, então ou u tem prefixo b e $a^{-1}\{u\} = \emptyset$,
ou u tem prefixo a e então aa é prefixo.

Neste 2.º caso $u = aaw$, em que $w \in L$ e $a^{-1}\{u\} = \{aw\}$ e $aw \in L$.

Logo $\boxed{a^{-1}L \subseteq aL}$. Reciprocamente, se $w \in L$, $aw \in aL$ e a palavra $aaw \in L$

$\varepsilon \rightarrow \dots \rightarrow w$
$\varepsilon \rightarrow \varepsilon aa \rightarrow \dots \rightarrow aaw$

$a^{-1}\{aaw\} = \{aw\}$ e $aw \in aL$, Então $\boxed{aL \subseteq a^{-1}L}$.

Logo $a^{-1}L = aL$.

Alternativa: $L = \{aa, ba\}^*$. Então
$a^{-1}L = a^{-1}\{aa, ba\}^* = (a^{-1}\{aa, ba\}) \cdot \{aa, ba\}^* = \{a\}\{aa, ba\}^* = aL$.

22. Sejam $A = \{a, b\}$ um alfabeto e $K \subseteq A^*$ uma linguagem definida por:
(i) $\varepsilon \in K$;
(ii) se $u \in K$ então abu, $ub^2 \in K$.

(a) Verifique se ab^2a é fator de alguma palavra de K.
(b) Escreva uma expressão regular $r \in ER(A)$ tal que a linguagem correspondente verifique $\mathcal{L}(r) = K$.

$K = \{ \varepsilon, ab\varepsilon, b^2, abb^2, ababb^2, \dots, (ab)^n(b^2)^m, \dots \}$

Vamos verificar que não existe uma palavra de K nas condições acima, ou seja, vamos mostrar que, para qualquer palavra u de K, ab^2a não é fator de u.
A prova é feita por indução estrutural sobre as palavras de K.

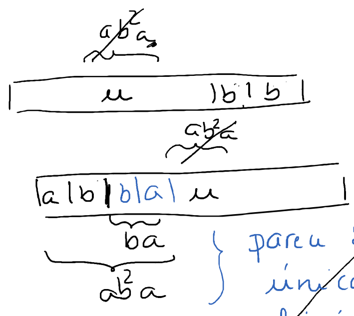
(i) ab^2a não é fator de ε.

$\cancel{ab^2a}$

(i) ab^2a não é fator de ε.

(ii) Se ab^2a não é fator de u, então:

- ub^2 também não admite o fator ab^2a
- abu admite ab^2a como fator se e só se ba for prefixo de u.



~~para ser a única hipótese~~

Analisando a definição indutiva de K (eventualmente, fazendo nova demonstração por indução estrutural para comprovar) ba não é prefixo de nenhuma palavra de K. Logo, também neste caso, abu não tem como fator ab^2a.

Logo para toda a palavra $u \in L$, ab^2a não é fator de u.

$K \overset{?}{=} \{u \in A^* : ab^2a$ não é fator de $u\}$ NÃO

b^3a não tem o fator ab^2a

$b^3a \notin K$

b) $ab\ ab\ \varepsilon\ b^2\ b^2 \ldots$

$r = (ab)^*(b^2)^*$

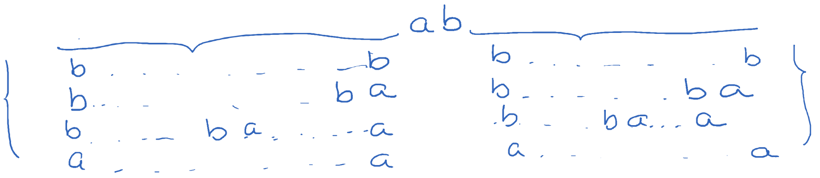
$\mathcal{L}(r) = \mathcal{L}(ab)^* \cdot \mathcal{L}(b^2)^* = \{ab\}^* \{b^2\}^* = \{(ab)^m (b^2)^n : m, n \in \mathbb{N}_0\} = K.$

24. Indique uma expressão regular representando o conjunto das palavras sobre o alfabeto $\{a, b\}$:

(e) que têm uma e uma só ocorrência do fator ab.

$L = A^* ab A^* \setminus A^* ab A^* ab A^*$

$b^n a^m$



$b^n a^m \quad n, m \in \mathbb{N}_0$.

$b^* a^* \, ab \, b^* a^*$ // $= b^* a^+ b^+ a^*$ //

25. Indique uma expressão regular representando o conjunto das palavras sobre o alfabeto $\{a, b, c\}$:

(b) que não têm aba como fator;

(c) cujas palavras inversas são elementos de $(ac)^*(a^2 + ba)^*c$.

b) $u = \underbrace{\ldots bb.c.b.c\ldots}$ a | $\underbrace{c. \mid . c \; \{b}$

1ª ocorrência de a

$b \; \{ b, c$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{direita repete}}$

$+$ ou $*$?

$$(b+c)^* a\, a^* \left(c\, \cancel{c^*} (b+c)^* a^* + b\,(b+c)^+ a^* \right)^* a^* \,(c+b)^*$$

Simplificando

$$= (b+c)^* a\, a^* \left(c\,(b+c)^* a^* + b\,(b+c)^+ a^* \right)^* (c+b)^*$$

$$= (b+c)^* a\, a^* \left(\left(c\,(b+c)^* + b\,(b+c)^+ \right) a^* \right)^* (b+c)^*$$

$$= (b+c)^* a\, a^* \left(\left(c\,(b+c)^* + b(b+c)\,(b+c)^* \right) a^* \right)^* (b+c)^*$$

$$= (b+c)^* a \left(a^* \,(c+bb+bc)\,(b+c)^* \right)^* a^* \,(b+c)^* .$$

c) $e = (ac)^* (a^2+ba)^+ c \longrightarrow u \in \mathcal{L}(e)$ exemplo: $u = acac\, a^2 ba\, a^2 ba\, c$

$u^I = c\; ab\, a^2\, ab\, a^2\, ca\, ca$

$c^I = c \qquad (ba)^I = ab \qquad (a^2)^I = a^2 \qquad (ac)^I = ca$

Qual é a expressão regular que corresponde às palavras inversas das palavras de $\mathcal{L}(e)$? A expressão regular é:

$$c \cdot (a^2 + ab)^* \cdot (ca)^* \qquad (1)$$

Como para qualquer palavra $w \in A^*$, $(w^I)^I = w$, então a expressão regular pedida é a expressão (1).

27. Seja $A = \{a, b, c\}$. Preencha os espaços entre as seguintes expressões regulares sobre A com um dos símbolos $=$, $\leq$ ou $\not\leq$:

(c) aa^*a $=$ a^*aaa^*;

(d) $a(a+b)^*a$ $\not\leq$ $(a+b)^*aa(a+b)^*$;

(g) $c^*(ab+a)^*$ $\leq$ $(a+ba+c)^*(b+\varepsilon)$;

c) $\mathcal{L}(a\,a^*\,a) = \{a u a : u \in \mathcal{L}(a^*)\} = \{a\, a^n a : n \in \mathbb{N}_0\} = \{a^{n+2} : n \in \mathbb{N}_0\} = \{a^{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$

$\mathcal{L}(a^* aa\, a^*) = \{u\, aa\, v : u, v \in \mathcal{L}(a^*)\} = \{a^n aa\, a^m : n, m \in \mathbb{N}_0\} = \{a^n a^m : n, m \in \mathbb{N}\}$

$= \{a^{n+m} : n, m \in \mathbb{N}\}$

$= \{a^k : k \in \mathbb{N} \wedge k \geq 2\}$

$= \{a^{k+1} : k \in \mathbb{N}\}$

Nº da forma $n+m$ com $n, m \in \mathbb{N}$: 2, 3, 4, ...

Logo $\mathcal{L}(a\,a^*a) = \mathcal{L}(a^*\, aa\, a^*)$.

d) $\mathcal{L}(a(a+b)^*a) = \{a u a : u \in \mathcal{L}(a+b)^*\} = \{aua : u \in \{a,b\}^*\} = L_1$

$\mathcal{L}((a+b)^* aa (a+b)^*) = \{u\,aa\,v : u,v \in \mathcal{L}(a+b)^*\} = \{uaav : u,v \in \{a,b\}^*\} = L_2$

$aba \in L_1$ e $aba \notin L_2$, logo $L_1 \not\subseteq L_2$.

$baa \in L_2$ e $baa \notin L_1$, logo $L_2 \not\subseteq L_1$.

g) $\mathcal{L}(c^* (ab+a)^*) = \mathcal{L}(c^*) \cdot \mathcal{L}(ab+a)^* = \{c^n : n \in \mathbb{N}_0\} \cdot \{ab, a\}^* =$

$= \{c^n u : n \in \mathbb{N}_0, u \in \{ab, a\}^*\} = \{c^n u : n \in \mathbb{N}_0, u \in \{a,b\}^*$ e b^2 não é fator de $u\}$
$\quad = L_1$

$\mathcal{L}((a+ba+c)^*(b+\varepsilon)) = \{a, ba, c\}^* \{b, \varepsilon\} = L_2$

→ $ac \in L_2$ e $ac \notin L_1$. Logo $L_2 \not\subseteq L_1$, pelo que $L_2 \neq L_1$.
$(a \cdot c \cdot \varepsilon)$
→ ba ... (outros exemplos).

Se $u \in L_1$, $u = |c| \ldots |c|a|a| \ldots |a|b|a|ab| \ldots |a|b/\varepsilon|$

$\{b, \varepsilon\}$

$\{-,-,c\}^*$ $\{a,-,-\}^*$ $\{-,ba,-\}^*$ $\{a,-,-\}^*$ então $u \in L_2$

$L_1 \subseteq L_2$.

29. Seja A um alfabeto.

(b) Mostre que, para quaisquer $r, r_1, r_2, s, s_1, s_2 \in ER(A)$, se tem:

viii. se $r_1 \leq s^*$ e $r_2 \leq s^*$, então $r_1 r_2 \leq s^*$.

(c) Verifique se, para quaisquer $r, s \in ER(A)$, $(r^+ s)^* = (r^* s^*)^*$.

30. Seja A um alfabeto e sejam $r, s \in ER(A)$. Mostre que:

(c) $r(sr)^* = (rs)^* r$;

(d) $(r+s)^* = (r^* + s^*)^* = (r^* s)^* r^* = r^*(sr^*)^*$;