Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Lic. em Ciências da Computação
Lic. em Matemática
2022/2023

Álgebra Universal e Categorias

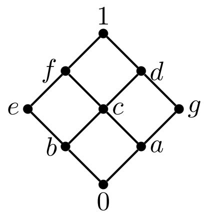
2. Álgebra Universal

2.1. Sejam $A = \{0, a, b, c, d, e, f, g, 1\}$, $B = \{0, a, b, c, f, d, 1\}$ e $(A, \leq)$ o c.p.o. correspondente ao diagrama de Hasse a seguir representado. Considere as álgebras $\mathcal{A} = (A; (f^{\mathcal{A}})_{f \in \{\wedge, \vee, \delta, 0, 1\}})$ e $\mathcal{B} = (B; (f^{\mathcal{B}})_{f \in \{\wedge, \vee, \delta, 0, 1\}})$ de tipo $(2, 2, 1, 0, 0)$, onde as operações binárias de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são definidas por

$$x \wedge^{\mathcal{A}} y = \inf\{x, y\} \text{ e } x \vee^{\mathcal{A}} y = \sup\{x, y\}, \forall x, y \in A,$$

$$x \wedge^{\mathcal{B}} y = \inf\{x, y\} \text{ e } x \vee^{\mathcal{B}} y = \sup\{x, y\}, \forall x, y \in B,$$

as operações unárias são definidas pelas tabelas a seguir indicadas e $0^{\mathcal{A}} = 0^{\mathcal{B}} = 0$ e $1^{\mathcal{A}} = 1^{\mathcal{B}} = 1$.



x	0	a	b	c	d	e	f	g	1
$\delta^{\mathcal{A}}(x)$	1	b	a	c	f	g	d	e	0

x	0	a	b	c	d	f	1
$\delta^{\mathcal{B}}(x)$	1	b	a	c	f	b	0

(a) Dê exemplo de um reduto de $\mathcal{A}$ que seja:

i. um semigrupo.

A álgebra $\mathcal{A}$ é do tipo (O_1, τ_1), onde $O_1 = \{\wedge, \vee, \delta, 0, 1\}$ e $\tau_1 : O_1 \to \mathbb{N}_0$ é a aplicação definida por $\tau_1(\wedge) = \tau_1(\vee) = 2$, $\tau_1(\delta) = 1$ e $\tau_1(0) = \tau_1(1) = 0$. Uma álgebra $\mathcal{C} = (C; F)$ de tipo (O_2, τ_2) diz-se um reduto de $\mathcal{A}$ se $C = A$, $O_2 \subseteq O_1$ e, para qualquer $f \in O_2$, $\tau_1(f) = \tau_2(f)$ e $f^{\mathcal{C}} = f^{\mathcal{A}}$.

A álgebra $\mathcal{C} = (C; \{\wedge_{\mathcal{C}}\})$ do tipo $(\{\wedge\}; \tau_2)$, onde $C = A$, $\tau_2 : \{\wedge\} \to \mathbb{N}_0$ é a função definida por $\tau_2(\wedge) = 2$ e $\wedge_{\mathcal{C}}$ é a operação binária em C definida por

$$x \wedge_{\mathcal{C}} y = x \wedge_{\mathcal{A}} y, \ \forall_{x,y \in C},$$

é um reduto de $\mathcal{A}$, uma vez que respeita as condições indicadas anteriormente. A álgebra $\mathcal{C}$ é um semigrupo, pois a operação $\wedge_{\mathcal{A}}$ é associativa e, portanto, a operação $\wedge_{\mathcal{C}}$ também é associativa.

ii. um reticulado.

A álgebra $\mathcal{A}$ é do tipo (O_1, τ_1), onde $O_1 = \{\wedge, \vee, \delta, 0, 1\}$ e $\tau_1 : O_1 \to \mathbb{N}_0$ é a aplicação definida por $\tau_1(\wedge) = \tau_1(\vee) = 2$, $\tau_1(\delta) = 1$ e $\tau_1(0) = \tau_1(1) = 0$. Uma álgebra $\mathcal{C} = (C; F)$ de tipo (O_2, τ_2) diz-se um reduto de $\mathcal{A}$ se $C = A$, $O_2 \subseteq O_1$ e, para qualquer $f \in O_2$, $\tau_1(f) = \tau_2(f)$ e $f^{\mathcal{C}} = f^{\mathcal{A}}$.

A álgebra $\mathcal{C} = (C; \{\wedge_{\mathcal{C}}, \vee_{\mathcal{C}}\})$ de tipo $(\{\wedge, \vee\}; \tau_2)$, onde $C = A$, $\tau_2 : \{\wedge, \vee\} \to \mathbb{N}_0$ é a função definida por $\tau_2(\wedge) = \tau_2(\vee) = 2$ e $\wedge_{\mathcal{C}}$, $\vee_{\mathcal{C}}$ são as operações binárias em C definidas por

$$x \wedge_{\mathcal{C}} y = x \wedge_{\mathcal{A}} y \quad \text{e} \quad x \vee_{\mathcal{C}} y = x \vee_{\mathcal{A}} y, \ \forall_{x,y \in C},$$

é um reduto de $\mathcal{A}$, pois respeita as condições indicadas anteriormente. A álgebra $\mathcal{C}$ é um reticulado, pois as operações $\wedge_{\mathcal{A}}$ e $\vee_{\mathcal{A}}$ são associativas, comutativas, idempotentes e satisfazem a lei da absorção e, portanto, as operações $\wedge_{\mathcal{C}}$ e $\vee_{\mathcal{C}}$ satisfazem as mesmas propriedades.

(b) Para cada um dos conjuntos C a seguir indicados, diga se C é um subuniverso de $\mathcal{A}$:

i. $C = \emptyset$.

Um subconjunto S de A diz-se um subuniverso de $\mathcal{A}$ se, para todo o símbolo de operação $h \in \{\wedge, \vee, \delta, 0, 1\}$ de aridade n, $n \in \{0, 1, 2\}$, e para todo $(a_1, \ldots, a_n) \in S^n$, temos

$$h^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \in S.$$

O conjunto $\emptyset$ não é um subuniverso de $\mathcal{A}$, pois $0^{\mathcal{A}}$ é uma operação nulária de $\mathcal{A}$ e $0^{\mathcal{A}} = 0 \notin \emptyset$.

ii. $C = \{0, f, d, 1\}$.

Um subconjunto S de A diz-se um subuniverso de $\mathcal{A}$ se, para todo o símbolo de operação $h \in \{\wedge, \vee, \delta, 0, 1\}$ de aridade n, $n \in \{0, 1, 2\}$, e para todo $(a_1, \ldots, a_n) \in S^n$, temos

$$h^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \in S.$$

O conjunto $C = \{0, f, d, 1\}$ não é um subuniverso de $\mathcal{A}$, pois $f, d \in C$ e $f \wedge_{\mathcal{A}} d = c \notin C$.

iii. $C = \{0, a, b, c, f, d, 1\}$.

Um subconjunto S de A diz-se um subuniverso de $\mathcal{A}$ se, para todo o símbolo de operação $h \in \{\wedge, \vee, \delta, 0, 1\}$ de aridade n, $n \in \{0, 1, 2\}$, e para todo $(a_1, \ldots, a_n) \in S^n$, temos

$$h^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \in S.$$

O conjunto $C = \{0, a, b, c, f, d, 1\}$ é um subuniverso de $\mathcal{A}$, pois:
- $0^{\mathcal{A}} = 0, 1^{\mathcal{A}} = 1 \in C$;
- para quaisquer $x, y \in C$, $x \wedge_{\mathcal{A}} y, x \vee_{\mathcal{A}} y \in C$;
- para qualquer $x \in C$, $\delta^{\mathcal{A}}(x) \in C$.

(c) Diga se $\mathcal{B}$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$.

A álgebra $\mathcal{A}$ é do tipo (O, τ), onde $O = \{\wedge, \vee, \delta, 0, 1\}$ e $\tau : O \to \mathbb{N}_0$ é a aplicação definida por $\tau(\wedge) = \tau(\vee) = 2$, $\tau(\delta) = 1$ e $\tau(0) = \tau(1) = 0$. Uma álgebra $\mathcal{C} = (C; F)$ de tipo (O, τ) diz-se uma subálgebra de $\mathcal{A}$ se C é um subuniverso de $\mathcal{A}$ e, para qualquer $h \in O$ de aridade n, $n \in \{0, 1, 2\}$,

$$h^{\mathcal{C}}(a_1, \ldots, a_n) = h^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n), \ \forall (a_1, \ldots, a_n) \in C^n.$$

A álgebra $\mathcal{B}$ não é uma subálgebra $\mathcal{A}$, pois, embora $\mathcal{B}$ seja do mesmo tipo da álgebra $\mathcal{A}$ e B seja um subuniverso de $\mathcal{A}$, tem-se $\delta^{\mathcal{B}}(f) \neq \delta^{\mathcal{A}}(f)$.

2.2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\mathcal{A}_n = (A_n; (f^{\mathcal{A}_n}, 0^{\mathcal{A}_n}))$ a álgebra de tipo $(1, 0)$, onde $A_n = \{0, 1, 2, \ldots, 2n\}$, $0^{\mathcal{A}_n} = 0$ e $f^{\mathcal{A}_n} : A_n \to A_n$ é a operação definida por

$$f^{\mathcal{A}_n}(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se} \quad x \in \{0, 1, 2, \ldots, 2n - 2\} \\ 1 & \text{se} \quad x = 2n - 1 \\ 0 & \text{se} \quad x = 2n \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, determine todos os subuniversos de $\mathcal{A}_n$.

Seja S um subuniverso de $\mathcal{A}_n$. Então $S \subseteq A_n$ e S é fechado para todas as operações de $\mathcal{A}_n$. Como S é fechado para a operação $0^{\mathcal{A}_n}$, segue que $0 \in S$. O conjunto S também é fechado para a operação $f^{\mathcal{A}_n}$, donde resulta que

$$f^{\mathcal{A}_n}(0) = 2 \in S, f^{\mathcal{A}_n}(2) = 4 \in S, \ldots, f^{\mathcal{A}_n}(2n - 2) = 2n \in S.$$

Se o conjunto S não tem inteiros ímpares, temos $S = \{0, 2, 4, \ldots, 2n\}$. Caso S tenha um número ímpar, então, atendendo a que S é fechado para a operação $f^{\mathcal{A}_n}$, segue que $\{1, 3, 5, \ldots, 2n - 1\} \subseteq S$, pelo que $S = A$.

Assim, os únicos subuniversos de $\mathcal{A}_n$ são $\{0, 2, 4, \ldots, 2n\}$ e A_n.

2.3. Sejam $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ um reticulado e $a \in R$. Mostre que $I_a = \{x \in R : x \vee a = a\}$ é um subuniverso de $\mathcal{R}$.

Sejam $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ um reticulado e, para cada $a \in R$, seja $I_a = \{x \in R : x \vee a = a\}$.

O conjunto $I_a = \{x \in R : x \vee a = a\}$ é um subuniverso de $\mathcal{R}$ se $I_a \subseteq R$ e I_a é fechado para as duas operações de $\mathcal{R}$.

Por definição de I_a, tem-se $I_a \subseteq R$.

Além disso, para quaisquer $x, y \in I_a$, tem-se $x, y \in R$, $x \vee a = a$ e $y \vee a = a$, donde segue que $x \vee y \in I_a$, pois:

- $x \vee y \in R$ ($x, y \in R$ e R é fechado para a operação $\vee$);
- $(x \vee y) \vee a = x \vee (y \vee a) = x \vee a = a$.

Considerando que $x = x \wedge a$ e $y = y \wedge a$, também temos $x \wedge y \in I_a$, uma vez que:

- $x \wedge y \in R$ ($x, y \in R$ e R é fechado para a operação $\wedge$);
- $(x \wedge y) \vee a = ((x \wedge a) \wedge (y \wedge a)) \vee a = ((x \wedge y) \wedge a) \vee a = a$.

O conjunto I_a é fechado para as operações $\wedge$ e $\vee$ e, portanto, S é um subuniverso de $\mathcal{R}$.

2.4. (a) Considere o grupo $(\mathbb{Z}, +)$ visto como uma álgebra de tipo (2). Dê um exemplo de uma subálgebra de $(\mathbb{Z}, +)$ que não seja um grupo.

A álgebra $(\mathbb{N}, +)$ é uma subálgebra de $(\mathbb{Z}, +)$, mas $(\mathbb{N}, +)$ não é um grupo, pois $(\mathbb{N}, +)$ não tem elemento neutro.

(b) Mostre que toda a subálgebra de um grupo finito visto como uma álgebra de tipo (2), é ainda um grupo.

Sejam $\mathcal{G} = (G; \cdot^{\mathcal{G}})$ uma álgebra do tipo (2) tal que $\mathcal{G}$ é um grupo finito e $\mathcal{S} = (S, \cdot^{\mathcal{S}})$ uma subálgebra de $\mathcal{G}$.

Como $\mathcal{S}$ é uma subálgebra de $\mathcal{G}$, então $\mathcal{S}$ é uma álgebra do tipo (2), tem-se $S \subseteq G$, $S \neq \emptyset$, S é fechado para a operação $\cdot^{\mathcal{G}}$ e $\cdot^{\mathcal{S}}$ é uma operação binária em S tal que, para quaisquer $x, y \in S$, $x \cdot^{\mathcal{S}} y = x \cdot^{\mathcal{G}} y$.

A álgebra $\mathcal{S}$ é um grupo se:

(i) a operação $\cdot^{\mathcal{S}}$ é associativa;

(ii) $\exists_{u \in S} \forall_{s \in S}\ s \cdot^{\mathcal{S}} u = s = u \cdot^{\mathcal{S}} s$;

(iii) $\forall_{s \in S} \exists_{s' \in S}\ s \cdot^{\mathcal{S}} s' = u = s' \cdot^{\mathcal{S}} s$.

(i) Uma vez que $\cdot^{\mathcal{G}}$ é uma operação associativa, então, atendendo a que $S \subseteq G$ e à definição de $\cdot^{\mathcal{S}}$, é imediato que a operação $\cdot^{\mathcal{S}}$ também é associativa.

(ii) Mostremos que existe $u \in S$ tal que, para todo $s \in S$, $s \cdot^{\mathcal{S}} u = s = u \cdot^{\mathcal{S}} s$. Seja $s \in S$. Como S é fechado para a operação $\cdot^{\mathcal{G}}$, então, para todo $n \in \mathbb{N}$, $s^n \in S$. Uma vez que S é finito, existem $i, j \in \mathbb{N}$ tais que $i \neq j$ e $s^i = s^j$. Admitamos, sem perda de generalidade que $i < j$. Uma vez que $j - i \in \mathbb{N}$, então $s^{j-i} = 1_G \in S$. Então existe $u = 1_G \in S$ tal que, para todo $s \in S$, $s \cdot^{\mathcal{S}} u = s \cdot^{\mathcal{G}} u = s = u \cdot^{\mathcal{G}} s = u \cdot^{\mathcal{S}} s$.

(iii) Resta mostrar que, para todo $s \in S$, existe $s' \in S$ tal que $s \cdot^{\mathcal{S}} s' = 1_G = s' \cdot^{\mathcal{S}} s$. Ora, em (ii) foi provado que, dado $s \in G$, existem $i, j \in \mathbb{N}$ tais que $i < j$ e $s^{j-i} \in S$. Além disso, também ficou provado que, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, $s^n \in S$. Então, considerando que $s^{j-i-1} \in S$ (pois $j - i - 1 \in \mathbb{N}_0$) e

$$s \cdot^{\mathcal{S}} s^{j-i-1} = s \cdot^{\mathcal{G}} s^{j-i-1} = s^{j-i} = 1_G = s^{j-i} = s^{j-i-1} \cdot^{\mathcal{G}} s = s^{j-i-1} \cdot^{\mathcal{S}} s,$$

conclui-se que todo o elemento de S admite inverso em S.

Portanto, $\mathcal{S} = (S; \cdot^{\mathcal{S}})$ é um grupo.

2.5. Uma álgebra $\mathcal{A} = (A; F)$ diz-se *mono-unária* se F é formado por uma única operação e essa operação é unária. Uma subálgebra $\mathcal{B} = (B; G)$ de $\mathcal{A}$ diz-se uma *subálgebra própria* se $B \subsetneq A$.

(a) Para cada inteiro $n > 0$, dê exemplo de uma álgebra mono-unária $\mathcal{A}_n = (\{0, 1, ..., n-1\}; f)$ que não admita subálgebras próprias.

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $\mathcal{A}_n = (A_n; f^{\mathcal{A}})$ a álgebra de tipo (1), onde $f^{\mathcal{A}_n} : A_n \to A_n$ é a operação unária definida por

$$f^{\mathcal{A}_n}(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \in \{0, 1, \ldots, n-2\} \\ 0 & \text{se } x = n-1 \end{cases}$$

Seja $\mathcal{S} = (S; f^{\mathcal{S}})$ uma subálgebra de $\mathcal{A}_n$. Então $\mathcal{S}$ é uma álgebra do mesmo tipo de $\mathcal{A}_n$, $\emptyset \neq S \subseteq A_n$, S é fechado para a operação $f^{\mathcal{A}_n}$ e, para todo $x \in S$, $f^{\mathcal{S}}(x) = f^{\mathcal{A}_n}(x)$.
Como $S \neq \emptyset$, consideremos $s \in S$. Uma vez que S é fechado para a operação $f^{\mathcal{A}_n}$, segue que, para todo $k \in \mathbb{N}_0$, $(f^{\mathcal{A}_n})^k(s) \in S$ e, portanto, $\{0, 1, ..., n-1\} \subseteq S$. Logo $S = A_n$ e, portanto, $\mathcal{A}_n$ não admite subálgebras próprias.

(b) Mostre que qualquer álgebra mono-unária infinita tem subálgebras próprias.

Seja $\mathcal{A} = (A; f)$ uma álgebra mono-unária infinita. No sentido de se fazer a prova por redução ao absurdo, admitamos que $\mathcal{A}$ não admite subálgebras próprias. Como $A \neq \emptyset$, consideremos $a \in A$ e a subálgebra de $\mathcal{A}$ gerada por $\{f(a)\}$. Uma vez que $\mathcal{A}$ não admite subálgebras próprias, então $A = \mathrm{Sg}^{\mathcal{A}}(\{f(a)\})$. Logo, para todo $x \in A$, tem-se $x = f^k(a)$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Em particular, tem-se $a = f^r(a)$, para algum $r \in \mathbb{N}$. Logo $A = \{a, f(a), \ldots, f^{r-1}(a)\}$ e, portanto, A é finito (contradição). Por conseguinte, toda a álgebra mono-unária infinita tem subálgebras próprias.

2.6. Considere a álgebra $\mathcal{A}$ definida no exercício 2.1.

(a) Dê exemplo de conjuntos $X, Y \subseteq A$ tais que:

i. $X \neq Y$ e $Sg^{\mathcal{A}}(X) = Sg^{\mathcal{A}}(Y)$.

Sejam $X = \emptyset$ e $Y = \{0\}$. Tem-se $X \neq Y$ e $Sg^{\mathcal{A}}(\emptyset) = \{0, 1\} = Sg^{\mathcal{A}}(\{0\})$.

ii. $|X| = 2$ e $Sg^{\mathcal{A}}(X) = A$.

Dado $X \subseteq A$, tem-se $Sg^{\mathcal{A}}(X) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} X_k$, onde

- $X_0 = X$;
- $X_{i+1} = X_i \cup \{h^{\mathcal{A}}(x) \,|\, h^{\mathcal{A}}$ é operação n-ária em $\mathcal{A}$ e $x \in (X_i)^n, n \in \{0, 1, 2\}\}$.

Sendo $X = \{f, g\}$, tem-se

- $X_0 = \{f, g\}$;
- $X_1 = \{f, g\} \cup \{0, f \wedge^{\mathcal{A}} g = a, f \vee^{\mathcal{A}} g = 1, \delta^{\mathcal{A}}(f) = d, \delta^{\mathcal{A}}(g) = e\}$;
- $X_2 = \{0, a, d, e, f, g, 1\} \cup \{d \wedge^{\mathcal{A}} f = c, d \wedge^{\mathcal{A}} e = b\}$;
- $X_3 = X_2 = \{0, a, b, c, d, e, f, g, 1\}$,

e, portanto, $Sg^{\mathcal{A}}(X) = A$.

(b) Determine $\mathcal{S}g^{\mathcal{A}}(\{e\})$ e $\mathcal{S}g^{\mathcal{A}}(\{f, g\})$.

- $Sg^{\mathcal{A}}(\{e\})$

Dado $X \subseteq A$, tem-se $Sg^{\mathcal{A}}(X) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} X_k$, onde

- $X_0 = X$;
- $X_{i+1} = X_i \cup \{h^{\mathcal{A}}(x) \,|\, h^{\mathcal{A}}$ é operação n-ária em $\mathcal{A}$ e $x \in (X_i)^n, n \in \{0, 1, 2\}\}$.

Sendo $X = \{e\}$, tem-se

- $X_0 = \{e\}$;
- $X_1 = \{e\} \cup \{0, \delta^{\mathcal{A}}(e) = g, 1\}$;
- $X_2 = X_1 = \{0, e, g, 1\}$.

e, portanto, $Sg^{\mathcal{A}}(\{e\}) = \{0, e, g, 1\}$.

Logo

$$\mathcal{S}g^{\mathcal{A}}(\{e\}) = (\{0, e, g, 1\}, (f^{\mathcal{S}g^{\mathcal{A}}(\{e\})})_{f \in \{\wedge, \vee, \delta, 0, 1\}}),$$

onde, para toda o símbolo de operação n-ário $f \in \{\wedge, \vee, \delta, 0, 1\}$, $n \in \{0, 1, 2\}$, tem-se

$$f^{\mathcal{S}g^{\mathcal{A}}(\{e\})}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n), \ \forall (a_1, \ldots, a_n) \in Sg^{\mathcal{A}}(\{e\}))^n.$$

- $Sg^{\mathcal{A}}(\{f, g\})$

Da alínea anterior, sabe-se que $Sg^{\mathcal{A}}(\{f, g\}) = A$. Logo $\mathcal{S}g^{\mathcal{A}}(\{f, g\}) = \mathcal{A}$.

2.7. Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra e $X, Y \subseteq A$. Mostre que:

(a) $X \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(X)$.

Imediato, uma vez que $Sg^{\mathcal{A}}(X)$ é o menor subuniverso de $\mathcal{A}$ que contém X.

(b) $X \subseteq Y \Rightarrow Sg^{\mathcal{A}}(X) \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(Y)$.

Admitamos que $X \subseteq Y$. Considerando que $Y \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(Y)$, segue que $X \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(Y)$. Então, atendendo a que $Sg^{\mathcal{A}}(X)$ é o menor subuniverso de $\mathcal{A}$ que contém X, conclui-se que $Sg^{\mathcal{A}}(X) \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(Y)$.

(c) $Sg^{\mathcal{A}}(Sg^{\mathcal{A}}(X)) = Sg^{\mathcal{A}}(X)$.

Por (a), temos $Sg^{\mathcal{A}}(X) \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(Sg^{\mathcal{A}}(X))$. Por outro lado, $Sg^{\mathcal{A}}(X)$ é um subuniverso de $\mathcal{A}$ e $Sg^{\mathcal{A}}(X) \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(X)$. Então, considerando que $Sg^{\mathcal{A}}(Sg^{\mathcal{A}}(X))$ é o menor subuniverso de $\mathcal{A}$ que contém $Sg^{\mathcal{A}}(X)$, concluímos que $Sg^{\mathcal{A}}(Sg^{\mathcal{A}}(X)) \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(X)$. Portanto $Sg^{\mathcal{A}}(Sg^{\mathcal{A}}(X)) = Sg^{\mathcal{A}}(X)$.

(d) $Sg^{\mathcal{A}}(X) = \bigcup\{Sg^{\mathcal{A}}(Z) \mid Z \text{ é subconjunto finito de } X\}$.

Para cada conjunto finito Z tal que $Z \subseteq X$, tem-se $Sg^{\mathcal{A}}(Z) \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(X)$. Por conseguinte,

$$\bigcup\{Sg^{\mathcal{A}}(Z) \mid Z \text{ é subconjunto finito de } X\} \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(X).$$

A inclusão contária também é válida. De facto, para cada $x \in A$, se $x \in Sg^{\mathcal{A}}(X)$, tem-se $x \in Sg^{\mathcal{A}}(Z)$, para algum conjunto finito $Z \subseteq X$. Logo $x \in \bigcup\{Sg^{\mathcal{A}}(Z) \mid Z \text{ é subconjunto finito de } X\}$. Portanto,

$$Sg^{\mathcal{A}}(X) \subseteq \bigcup\{Sg^{\mathcal{A}}(Z) \mid Z \text{ é subconjunto finito de } X\}.$$

Desta forma, provámos que $Sg^{\mathcal{A}}(X) = \bigcup\{Sg^{\mathcal{A}}(Z) \mid Z \text{ é subconjunto finito de } X\}$.

2.8. (a) Seja $\mathcal{A} = (\{e, a, b, c, d\}; *^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$ a álgebra de tipo $(2, 0)$, onde $A = \{e, a, b, c, d\}$, $c^{\mathcal{A}} = d$ e $*^{\mathcal{A}}$ é a operação definida por

$f^{\mathcal{A}}$	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	d	e	c	b
b	b	e	d	e	e
c	c	e	a	e	c
d	d	b	e	c	e

Sejam $X = \{b\}$ e $Y = \{c\}$. Diga, justificando, se $Sg^{\mathcal{A}}(X) \cup Sg^{\mathcal{A}}(Y) = Sg^{\mathcal{A}}(X \cup Y)$.

Dado $Z \subseteq A$, tem-se $Sg^{\mathcal{A}}(Z) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} Z_k$, onde

- $Z_0 = Z$;
- $Z_{i+1} = Z_i \cup \{h^{\mathcal{A}}(z) \mid h^{\mathcal{A}} \text{ é operação } n\text{-ária em } \mathcal{A} \text{ e } z \in (Z_i)^n, n \in \{0, 2\}\}$.

Sendo $X = \{b\}$, tem-se:

$X_0 = \{b\}$; $X_1 = \{b\} \cup \{d\}$; $X_2 = \{b, d\} \cup \{e\}$; $X_3 = X_2 = \{b, d, e\}$.

Logo, $Sg^{\mathcal{A}}(\{b\}) = \{b, d, e\}$.

Sendo $Y = \{c\}$, tem-se:

$Y_0 = \{c\}$; $Y_1 = \{c\} \cup \{d, e\}$; $Y_2 = Y_1 = \{c, d, e\}$.

Logo, $Sg^{\mathcal{A}}(\{b\}) = \{c, d, e\}$.

Sendo $X \cup Y = \{b, c\}$, tem-se

$(X \cup Y)_0 = \{b, c\}$; $(X \cup Y)_1 = \{b, c\} \cup \{a, d, e\}$; $(X \cup Y)_2 = X_1$.

Logo, $Sg^{\mathcal{A}}(\{b, c\}) = \{a, b, c, d, e\}$.

Portanto, $Sg^{\mathcal{A}}(X) \cup Sg^{\mathcal{A}}(Y) = \{b, c, d, e\} \neq \{a, b, c, d, e\} = Sg^{\mathcal{A}}(X \cup Y)$.

(b) Seja $\mathcal{B} = (B; F)$ uma álgebra unária. Mostre que, para quaisquer $X, Y \subseteq B$,

$$Sg^{\mathcal{B}}(X) \cup Sg^{\mathcal{B}}(Y) = Sg^{\mathcal{B}}(X \cup Y).$$

Seja $\mathcal{B} = (B; F)$ uma álgebra unária.

Para quaisquer $X, Y \subseteq B$, tem-se $X \subseteq Sg^{\mathcal{B}}(X \cup Y)$ e $Y \subseteq Sg^{\mathcal{B}}(X \cup Y)$, donde segue que

$$Sg^{\mathcal{B}}(X) \subseteq Sg^{\mathcal{B}}(X \cup Y) \text{ e } Sg^{\mathcal{B}}(Y) \subseteq Sg^{\mathcal{B}}(X \cup Y)$$

e, portanto, $Sg^{\mathcal{B}}(X) \cup Sg^{\mathcal{B}}(Y) \subseteq Sg^{\mathcal{B}}(X \cup Y)$.

No sentido de provar a inclusão contrária, comecemos por mostrar que sendo $\mathcal{B}$ uma álgebra unária, o conjunto $Sg^{\mathcal{B}}(X) \cup Sg^{\mathcal{B}}(Y)$ é um subuniverso de $\mathcal{B}$. De facto, como $Sg^{\mathcal{B}}(X)$ e $Sg^{\mathcal{B}}(Y)$ são subuniversos de B, tem-se $Sg^{\mathcal{B}}(X) \subseteq B$ e $Sg^{\mathcal{B}}(Y) \subseteq B$, pelo que $Sg^{\mathcal{B}}(X) \cup Sg^{\mathcal{B}}(Y) \subseteq B$. Além disso, para qualquer $x \in B$ e para qualquer operação unária $f^{\mathcal{B}}$ de $\mathcal{B}$, temos

$$\begin{array}{ll} & x \in Sg^{\mathcal{B}}(X) \cup Sg^{\mathcal{B}}(Y) \\ \Rightarrow & x \in Sg^{\mathcal{B}}(X) \text{ ou } x \in Sg^{\mathcal{B}}(Y) \\ \Rightarrow & f^{\mathcal{B}}(x) \in Sg^{\mathcal{B}}(X) \text{ ou } f^{\mathcal{B}}(x) \in Sg^{\mathcal{B}}(Y) \quad (Sg^{\mathcal{B}}(X) \text{ e } Sg^{\mathcal{B}}(X) \text{ são subuniversos de } \mathcal{B}) \\ \Rightarrow & f^{\mathcal{B}}(x) \in Sg^{\mathcal{B}}(X) \cup Sg^{\mathcal{B}}(Y). \end{array}$$

Para concluir que $Sg^{\mathcal{B}}(X \cup Y) \subseteq Sg^{\mathcal{B}}(X) \cup Sg^{\mathcal{B}}(Y)$, basta ter em conta que, para quaisquer $X, Y \subseteq B$, temos $X \subseteq Sg^{\mathcal{B}}(X)$ e $Y \subseteq Sg^{\mathcal{B}}(Y)$, pelo que

$$X \cup Y \subseteq Sg^{\mathcal{B}}(X) \cup Sg^{\mathcal{B}}(Y)$$

e, portanto, $Sg^{\mathcal{B}}(X) \cup Sg^{\mathcal{B}}(Y)$ é um subuniverso de $\mathcal{B}$ que contém $X \cup Y$. Então, considerando que $Sg^{\mathcal{B}}(X \cup Y)$ é o menor subuniverso de $\mathcal{B}$ que contém $X \cup Y$, segue que

$$Sg^{\mathcal{B}}(X \cup Y) \subseteq Sg^{\mathcal{B}}(X) \cup Sg^{\mathcal{B}}(Y).$$

Assim, $Sg^{\mathcal{B}}(X) \cup Sg^{\mathcal{B}}(Y) = Sg^{\mathcal{B}}(X \cup Y)$.

2.9. Seja $\mathcal{A} = (\{a, b, c, d\}, f)$ a álgebra de tipo (1) onde f é a operação definida por

x	a	b	c	d
$f(x)$	c	b	a	d

(a) Determine todas as relações de congruência em $\mathcal{A}$.

Para toda a congruência Θ de uma álgebra $\mathcal{A}$, tem-se $\Theta = \bigvee\{\Theta(x,y) \mid (x,y) \in \Theta\}$. Assim, no sentido de determinarmos todas as congruências de $\mathcal{A}$, começamos por determinar as congruências principais de $\mathcal{A}$, obtendo-se:

- $\theta(x,x) = \triangle_A$, para qualquer $x \in A$.
- $\Theta(a,b) = \Theta(b,a) = \triangle_A \cup \{(a,b),(b,a),(c,b),(b,c),(a,c),(c,a)\}$.
- $\Theta(a,c) = \Theta(c,a) = \triangle_A \cup \{(a,c),(c,a)\}$;
- $\Theta(a,d) = \Theta(d,a) = \triangle_A \cup \{(a,d),(d,a),(c,d),(d,c),(a,c),(c,a)\}$;
- $\Theta(b,c) = \Theta(c,b) = \triangle_A \cup \{(c,b),(b,c),(a,b),(b,a),(a,c),(c,a)\} = \Theta(a,b)$;
- $\Theta(b,d) = \Theta(d,b) = \triangle_A \cup \{(b,d),(d,b)\}$;
- $\Theta(c,d) = \Theta(d,c) = \triangle_A \cup \{(c,d),(d,c),(a,d),(d,a),(a,c),(c,a)\} = \Theta(a,d)$.

Apresentamos a justificação de que $\Theta(a,b) = \triangle_A \cup \{(a,b),(b,a),(c,b),(b,c),(a,c),(c,a)\}$, sendo as restantes justificações semelhantes.

Por definição de $\Theta(a,b)$, $\Theta(a,b)$ é a menor congruência em $\mathcal{A}$ que contém $\{(a,b)\}$. Então $(a,b) \in \Theta(a,b)$, $\Theta(a,b)$ é uma relação de equivalência (é reflexiva, simétrica e transitiva) e satisfaz a propriedade de substituição (ou seja, para quaisquer $x, y \in A$, $(x,y) \in \Theta(a,b) \Rightarrow (f^{\mathcal{A}}(x), f^{\mathcal{A}}(y)) \in \Theta(a,b)$.) Uma vez que $\Theta(a,b)$ é reflexiva, temos $\triangle_A \subseteq \Theta(a,b)$. Como $(a,b) \in \Theta(a,b)$ e $\Theta(a,b)$ é simétrica, também temos $(b,a) \in \Theta(a,b)$. Atendendo a que $(a,b),(b,a) \in \Theta(a,b)$ e $\Theta(a,b)$ satisfaz a propriedade de substituição, $(f^{\mathcal{A}}(a), f^{\mathcal{A}}(b)) = (c,b) \in \Theta(a,b)$ e $(f^{\mathcal{A}}(b), f^{\mathcal{A}}(a)) = (b,c) \in \Theta(a,b)$. Dado que $(c,b),(b,c) \in \Theta(a,b)$, então, novamente pela propriedade de substituição, $(f^{\mathcal{A}}(b), f^{\mathcal{A}}(c)) = (b,a) \in \Theta(a,b)$ e $(f^{\mathcal{A}}(c), f^{\mathcal{A}}(b)) = (a,b) \in \Theta(a,b)$. Considerando que $(a,b),(b,c) \in \Theta(a,b)$ e $(c,b),(b,a) \in \Theta(a,b)$, então, por transitividade, $(a,c),(c,a) \in \Theta(a,b)$. Pela propriedade de substituição segue que $(f^{\mathcal{A}}(a), f^{\mathcal{A}}(c)) = (c,a) \in \Theta(a,b)$ e $(f^{\mathcal{A}}(c), f^{\mathcal{A}}(a)) = (a,c) \in \Theta(a,b)$. A relação $\Theta = \triangle_A \cup \{(a,b),(b,a),(c,b),(b,c),(a,c),(c,a)\}$ é uma relação de equivalência e satisfaz a propriedade de substituição, logo Θ é uma congruência em $\mathcal{A}$ que contém $\{(a,b)\}$; além disso Θ é a menor congruência em $\mathcal{A}$ que contém $\{(a,b)\}$. Por conseguinte, $\Theta(a,b) = \Theta$. Uma relação de congruência é simétrica, pelo que também se tem $\Theta(b,a) = \Theta$.

No sentido de determinarmos as restantes congruências, calculamos o supremo das congruências principais duas a duas:

- $\Theta(x,x) \vee \theta = \theta$, para qualquer $\theta \in \mathrm{Con}(\mathcal{A})$.

  Imediato, pois $\Theta(x,x) \subseteq \theta$.
- $\Theta(a,b) \vee \Theta(a,c) = \Theta(a,b)$.

  Imediato, pois $\Theta(a,c) \subseteq \Theta(a,b)$.

- $\Theta(a,b) \vee \Theta(a,d) = \Theta(a,b) \cup \Theta(a,d) \cup \{(b,d),(d,b)\} = \nabla_A$.

  A relação $\Theta(a,b) \vee \Theta(a,d)$ é a menor congruência em $\mathcal{A}$ que contem $\Theta(a,b)$ e $\Theta(a,d)$; logo $\Theta(a,b) \cup \Theta(a,d) \subseteq \Theta(a,b) \vee \Theta(a,d)$. Uma vez que $(b,a),(a,d) \in \Theta(a,b) \cup \Theta(a,d)$ e a relação $\Theta(a,b) \vee \Theta(a,d)$ é transitiva, então $(b,d) \in \Theta(a,b) \vee \Theta(a,d)$. Considerando que a relação é simétrica também se tem $(d,b) \in \Theta(a,b) \cup \Theta(a,d)$. A relação $\Theta(a,b) \cup \Theta(a,d) \cup \{(b,d),(d,b)\}$ é uma relação de equivalência e satisfaz a propriedade de substituição; esta relação é a menor congruência em $\mathcal{A}$ que contem $\Theta(a,b)$ e $\Theta(a,d)$.

- $\Theta(a,b) \vee \Theta(b,d) = \Theta(a,b) \cup \Theta(b,d) \cup \{(a,d),(d,a),(c,d),(c,d)\} = \nabla_A$.

  A relação $\Theta(a,b) \vee \Theta(b,d)$ é a menor congruência em $\mathcal{A}$ que contem $\Theta(a,b)$ e $\Theta(b,d)$; logo $\Theta(a,b) \cup \Theta(b,d) \subseteq \Theta(a,b) \vee \Theta(b,d)$. Uma vez que $(a,b),(b,d),(c,b),(b,d) \in \Theta(a,b) \cup \Theta(b,d)$ e a relação $\Theta(a,b) \vee \Theta(b,d)$ é transitiva, tem-se $(a,d),(c,d) \in \Theta(a,b) \cup \Theta(b,d)$. Considerando que a relação é simétrica também se tem $(d,a),(d,c) \in \Theta(a,b) \cup \Theta(b,d)$. A relação $\Theta(a,b) \cup \Theta(b,d) \cup \{(a,d),(d,a),(c,d),(c,d)\}$ é uma relação de equivalência e satisfaz a propriedade de substituição; esta relação é a menor congruência em $\mathcal{A}$ que contem $\Theta(a,b)$ e $\Theta(b,d)$.

- $\Theta(a,c) \vee \Theta(a,d) = \Theta(a,d)$.

  Imediato, pois $\Theta(a,c) \subseteq \Theta(a,d)$.

- $\Theta(a,c) \vee \Theta(b,d) = \Theta(a,c) \cup \Theta(b,d)$.

- $\Theta(a,d) \vee \Theta(b,d) = \Theta(a,d) \cup \Theta(b,d) \cup \{(a,d),(d,a),(b,c),(c,b)\} = \nabla_A$.

  A relação $\Theta(a,d) \vee \Theta(b,d)$ é a menor congruência em $\mathcal{A}$ que contem $\Theta(a,d)$ e $\Theta(b,d)$; logo $\Theta(a,d) \cup \Theta(b,d) \subseteq \Theta(a,d) \vee \Theta(b,d)$. Uma vez que $(a,d),(d,b),(c,d),(d,b) \in \Theta(a,b) \cup \Theta(b,d)$ e a relação $\Theta(a,d) \vee \Theta(b,d)$ é transitiva, tem-se $(a,b),(c,b) \in \Theta(a,b) \cup \Theta(b,d)$. Considerando que a relação é simétrica também se tem $(b,a),(b,c) \in \Theta(a,b) \cup \Theta(b,d)$. A relação $\Theta(a,d) \cup \Theta(b,d) \cup \{(a,d),(d,a),(b,c),(c,b)\}$ é uma relação de equivalência e satisfaz a propriedade de substituição; esta relação é a menor congruência em $\mathcal{A}$ que contem $\Theta(a,d)$ e $\Theta(b,d)$.

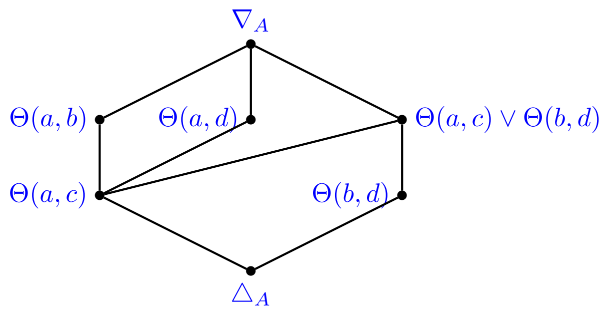
Considerando que $\Theta(a,c) \vee \Theta(b,d)$ e ∇_A são distintas das congruências principais, calculemos o supremo de cada uma destas congruências com as congruências já determinadas:

- $\nabla_A \vee \theta = \nabla_A$, para qualquer $\theta \in \mathrm{Con}(\mathcal{A})$;
- $(\Theta(a,c) \vee \Theta(b,d)) \vee \triangle_A = \Theta(a,c) \vee \Theta(b,d)$;
- $(\Theta(a,c) \vee \Theta(b,d)) \vee \Theta(a,b) = \nabla_A$;
- $(\Theta(a,c) \vee \Theta(b,d)) \vee \Theta(a,c) = \Theta(a,c) \vee \Theta(b,d)$;
- $(\Theta(a,c) \vee \Theta(b,d)) \vee \Theta(a,d) = \Theta(a,c) \cup \Theta(b,d) \cup \Theta(a,d) \cup \{(a,b),(b,a),(b,c),(c,b)\} = \nabla_A$;
- $(\Theta(a,c) \vee \Theta(b,d)) \vee \Theta(b,d) = \Theta(a,c) \vee \Theta(b,d)$.

Considerando os cálculos anteriores, temos

$$\mathrm{Con}(\mathcal{A}) = \{\triangle_A, \Theta(a,b), \Theta(a,c), \Theta(a,d), \Theta(b,d), \Theta(a,c) \vee \Theta(b,d), \nabla_A\}.$$

O reticulado $(\mathrm{Con}(\mathcal{A}, \subseteq)$ pode ser representado pelo diagrama de Hasse seguinte



(b) Para cada $\theta \in \mathrm{Con}(\mathcal{A})$, determine a álgebra quociente $\mathcal{A}/\theta$.

Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra do tipo (O,τ) e θ uma congruência em $\mathcal{A}$. A álgebra quociente $\mathcal{A}$ módulo θ é a álgebra $\mathcal{A}/\theta = (A/\theta, F)$ do tipo (O,τ) tal que, para cada $n \in \mathbb{N}_0$ e $f \in O_n$,

$$f^{\mathcal{A}/\theta}([a_1]_\theta, \ldots, [a_n]_\theta) = [f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)]_\theta.$$

Assim,

- sendo $\theta = \triangle_A$, temos $\mathcal{A}/\theta = (A/\theta, f^{\mathcal{A}/\theta})$ onde

$$A/\theta = \{[a]_\theta, [b]_\theta, [c]_\theta, [d]_\theta\}, \text{ com } [a]_\theta = \{a\}, [b]_\theta = \{b\}, [c]_\theta = \{c\}, [d]_\theta = \{d\},$$

e

$$\begin{array}{rcl} f^{\mathcal{A}/\theta} : A/\theta & \to & A/\theta \\ [a]_\theta & \mapsto & [f^{\mathcal{A}}(a)]_\theta = [c]_\theta \\ [b]_\theta & \mapsto & [f^{\mathcal{A}}(b)]_\theta = [b]_\theta \\ [c]_\theta & \mapsto & [f^{\mathcal{A}}(c)]_\theta = [a]_\theta \\ [d]_\theta & \mapsto & [f^{\mathcal{A}}(d)]_\theta = [d]_\theta \end{array}$$

- sendo $\theta = \Theta(a, b)$, temos $\mathcal{A}/\theta = (A/\theta, f^{\mathcal{A}/\theta})$ onde

$$A/\theta = \{[a]_\theta, [d]_\theta\}, \text{ com } [a]_\theta = [b]_\theta = [c]_\theta = \{a, b, c\}, [d]_\theta = \{d\},$$

e

$$\begin{array}{rcl} f^{\mathcal{A}/\theta} : A/\theta & \to & A/\theta \\ [a]_\theta & \mapsto & [f^{\mathcal{A}}(a)]_\theta = [c]_\theta = [a]_\theta \\ [d]_\theta & \mapsto & [f^{\mathcal{A}}(d)]_\theta = [d]_\theta \end{array}$$

- sendo $\theta = \Theta(a, c)$, temos $\mathcal{A}/\theta = (A/\theta, f^{\mathcal{A}/\theta})$ onde

$$A/\theta = \{[a]_\theta, [b]_\theta, [d]_\theta\}, \text{ com } [a]_\theta = [c]_\theta = \{a, c\}, [b]_\theta = \{b\}, [d]_\theta = \{d\},$$

e

$$\begin{array}{rcl} f^{\mathcal{A}/\theta} : A/\theta & \to & A/\theta \\ [a]_\theta & \mapsto & [f^{\mathcal{A}}(a)]_\theta = [c]_\theta = [a]_\theta \\ [b]_\theta & \mapsto & [f^{\mathcal{A}}(b)]_\theta = [b]_\theta \\ [d]_\theta & \mapsto & [f^{\mathcal{A}}(d)]_\theta = [d]_\theta \end{array}$$

- sendo $\theta = \Theta(b, d)$, temos $\mathcal{A}/\theta = (A/\theta, f^{\mathcal{A}/\theta})$ onde

$$A/\theta = \{[a]_\theta, [b]_\theta, [c]_\theta\}, \text{ com } [a]_\theta = \{a\}, [b]_\theta = \{b, d\}, [c]_\theta = \{c\},$$

e

$$\begin{array}{rcl} f^{\mathcal{A}/\theta} : A/\theta & \to & A/\theta \\ [a]_\theta & \mapsto & [f^{\mathcal{A}}(a)]_\theta = [c]_\theta \\ [b]_\theta & \mapsto & [f^{\mathcal{A}}(b)]_\theta = [b]_\theta \\ [c]_\theta & \mapsto & [f^{\mathcal{A}}(c)]_\theta = [a]_\theta \end{array}$$

- sendo $\theta = \Theta(a, d)$, temos $\mathcal{A}/\theta = (A/\theta, f^{\mathcal{A}/\theta})$ onde

$$A/\theta = \{[a]_\theta, [b]_\theta\}, \text{ com } [a]_\theta = \{a, c, d\} = [c]_\theta = [d]_\theta, [b]_\theta = \{b\},$$

e

$$\begin{array}{rcl} f^{\mathcal{A}/\theta} : A/\theta & \to & A/\theta \\ [a]_\theta & \mapsto & [f^{\mathcal{A}}(a)]_\theta = [c]_\theta = [a]_\theta \\ [b]_\theta & \mapsto & [f^{\mathcal{A}}(b)]_\theta = [b]_\theta \end{array}$$

- sendo $\theta = \Theta(a, c) \vee \Theta(b, d)$, temos $\mathcal{A}/\theta = (A/\theta, f^{\mathcal{A}/\theta})$ onde

$$A/\theta = \{[a]_\theta, [b]_\theta\}, \text{ com } [a]_\theta = \{a, c\} = [c]_\theta, [b]_\theta = \{b, d\} = [d]_\theta,$$

e

$$\begin{array}{rcl} f^{\mathcal{A}/\theta} : A/\theta & \to & A/\theta \\ [a]_\theta & \mapsto & [f^{\mathcal{A}}(a)]_\theta = [c]_\theta = [a]_\theta \\ [b]_\theta & \mapsto & [f^{\mathcal{A}}(b)]_\theta = [b]_\theta \end{array}$$

- sendo $\theta = \nabla_A$, temos $\mathcal{A}/\theta = (A/\theta, f^{\mathcal{A}/\theta})$ onde

$$A/\theta = \{[a]_\theta\}, \text{ com } [a]_\theta = \{a, b, c, d\} = [b]_\theta = [c]_\theta = [d]_\theta,$$

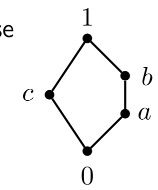
e

$$\begin{array}{rcl} f^{\mathcal{A}/\theta} : A/\theta & \to & A/\theta \\ [a]_\theta & \mapsto & [f^{\mathcal{A}}(a)]_\theta = [c]_\theta = [a]_\theta \end{array}$$

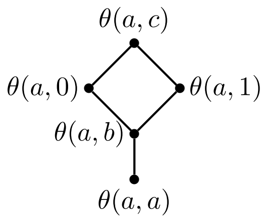
2.10. Sejam $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ um reticulado e $\theta \in \mathrm{Con}\mathcal{R}$. Mostre que, para quaisquer $a, b, c \in R$, se $a \leq c \leq b$ e $(a, b) \in \theta$, então $(a, c) \in \theta$ e $(b, c) \in \theta$.

Sejam $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ um reticulado, $\theta \in \mathrm{Con}\mathcal{R}$ e $a, b, c \in R$ tais que $a \leq c \leq b$ e $(a, b) \in \theta$. Como $\theta \in \mathrm{Con}\mathcal{R}$, então θ é uma relação de equivalência e satisfaz a propriedade de substituição. Uma vez que θ é reflexiva, tem-se $(c, c) \in \theta$. Considerando que $(a, b), (c, c) \in \theta$ e θ satisfaz a propriedade de substituição segue que $(a \wedge c, b \wedge c) \in \theta$ e $(a \vee c, b \vee c) \in \theta$, ou seja, $(a, c) \in \theta$ e $(c, b) \in \theta$. Atendendo a que θ é simétrica e $(c, b) \in \theta$, também se tem $(b, c) \in \theta$. Portanto, $(a, c) \in \theta$ e $(b, c) \in \theta$.

2.11. Considere o reticulado $\mathcal{N}_5 = (N_5; \wedge, \vee)$ representado pelo diagrama de Hasse



Mostre que o reticulado das congruências de $\mathcal{N}_5$ pode ser representado pelo diagrama de Hasse seguinte



Dada uma álgebra $\mathcal{A} = (A; F)$ e $\theta \in \mathrm{Con}(\mathcal{A})$, tem-se $\theta = \bigvee\{\Theta(A, b) \,|\, (a, b) \in \theta\}$. Assim sendo, no sentido de determinarmos o reticulado de congruências de $\mathcal{N}_5$, comecemos por determinar as congruências principais de $\mathcal{N}_5$. Para a determinação de congruências num reticulado recorremos à seguinte caracterização - se $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ é um reticulado, então $\theta \in \mathrm{Eq}(R)$ é uma congruência em $\mathcal{R}$ se e só se são satisfeitas as condições seguintes:

(1) cada classe de θ é um sub-reticulado de $\mathcal{R}$;

(2) cada classe de θ é um subconjunto convexo de R;

(3) as classes de equivalência de θ são fechadas para quadriláteros
(i.e. sempre que a, b, c, d são elementos de R distintos tais que $a < b$, $c < d$ e

$$(a \vee d = b \text{ e } a \wedge d = c) \text{ ou } (b \vee c = d \text{ e } b \wedge c = a),$$

então $a\,\theta\,b$ sse $c\,\theta\,d$).

Recorrendo à caracterização anterior, concluímos que:

- $\theta(a, a) = \triangle_{N_5}$ uma vez que a menor congruência que identifica um elemento com ele mesmo é a relação identidade.
- $\Theta(a, 1)$ é a conguência tal que $N_5/\Theta(a, 1) = \{\{a, b, 1\}, \{0, c\}\}$. Como $(a, 1) \in \Theta(a, 1)$ e as classes de equivalência de uma congruência são conjuntos convexos, segue que $(a, b), (1, b) \in \Theta(a, 1)$. Considerando que $(1, b) \in \Theta(a, 1)$ e as classes de equivalência de $\Theta(a, 1)$ são fechadas para quadriláteros, temos $(c, 0) \in \Theta(a, 1)$. Na partição {{a,b,1},{0,c}}, as classes são fechadas para quadriláteros, são sub-reticulados de $\mathcal{N}_5$ e são conjuntos convexos, logo a relação de equivalência associada a esta partição é uma congruência. Esta é a menor congruência que contem $\{(a, 1)\}$, portanto $\Theta(a, 1)$ é a conguência que define o conjunto quociente indicado.
- $\Theta(a, 0)$ é a conguência tal que $N_5/\Theta(a, 0) = \{\{a, b, 0\}, \{c, 1\}\}$. De facto, como $(a, 0) \in \Theta(a, 0)$ e as classes são fechadas para quadriláteros, segue que $(c, 1) \in \Theta(a, 0)$. Como $(c, 1) \in \Theta(a, 0)$, e novamente porque as classes são fechadas para quadriláteros, temos $(b, 0) \in \Theta(a, 0)$. Na partição {{a,b,0},{c,1}}, as classes são fechadas para quadriláteros, são sub-reticulados de $\mathcal{N}_5$ e são conjuntos convexos, logo a relação de equivalência associada a esta partição é uma congruência. Esta é a menor congruência que contem $\{(a, 0)\}$, portanto $\Theta(a, 0)$ é a conguência que define o conjunto quociente indicado.
- $\Theta(a, b)$ é a conguência tal que $N_5/\Theta(a, b) = \{\{a, b\}, \{c\}, \{0\}, \{1\}\}$. Na partição $\{\{a, b\}, \{c\}, \{0\}, \{1\}\}$, as classes são fechadas para quadriláteros, são sub-reticulados de $\mathcal{N}_5$ e são conjuntos convexos, logo a relação de equivalência associada a esta partição é uma congruência. Esta é a menor congruência que contem $\{(a, b)\}$, portanto $\Theta(a, b)$ é a conguência que define o conjunto quociente indicado.

- $\Theta(a,c)=\nabla_{N_5}$. Considerando que $(a,c)\in\Theta(a,c)$, tem-se $\{a,c\}\subseteq[c]_{\Theta(a,c)}$. Então, considerando que as classes de uma congruência em $\mathcal{N}_5$ são sub-reticulados de $\mathcal{N}_5$, segue que $0,1\in[c]_{\Theta(a,c)}$. Atendendo a que $0,1\in[c]_{\Theta(a,c)}$ e as classes são conjuntos convexos, conclui-se que todos os elementos de N_5 pertencem à classe $[c]_{\Theta(a,c)}$. Portanto, $\Theta(a,c)=\nabla_{N_5}$.
- $\Theta(0,b)=\Theta(a,0)$. Tem-se $(0,b)\in\Theta(0,b)$, pelo que $0,b\in[b]_{\Theta(0,b)}$. Então, considerando que as classes de equivalência de $\Theta(0,b)$ são conjuntos convexos, segue que $a\in[b]_{\Theta(0,b)}$. Logo $(a,0)\in\Theta(b,0)$, donde resulta que $\Theta(a,0)\subseteq\Theta(b,0)$. Como $(0,b)\in\Theta(a,0)$, também temos $\Theta(0,b)\subseteq\Theta(a,0)$.
- $\Theta(0,c)=\Theta(a,1)$. Como $(0,c)\in\Theta(0,c)$ e as classes são fechadas para quadriláteros, tem-se $(a,1)\in\Theta(0,c)$. Logo $\Theta(a,1)\subseteq\Theta(0,c)$. Também se tem $(0,c)\in\Theta(a,1)$, pelo que $\Theta(0,c)\subseteq\Theta(a,1)$.
- $\Theta(0,1)=\nabla_{N_5}$. Como $(0,1)\in\Theta(0,1)$, tem-se $0,1\in[1]_{\Theta(0,1)}$. Considerando que as classes são conjuntos convexos, resulta que $[1]_{\Theta(0,1)}=\{0,a,b,c,1\}$. Portanto, $\Theta(0,1)=\nabla_{N_5}$.
- $\Theta(b,c)=\nabla_{N_5}$. Considerando que $(b,c)\in\Theta(b,c)$, tem-se $\{b,c\}\subseteq[b]_{\Theta(b,c)}$. Então, considerando que as classes de uma congruência em $\mathcal{N}_5$ são sub-reticulados de $\mathcal{N}_5$, segue que $0,1\in[b]_{\Theta(b,c)}$. Atendendo a que $0,1\in[b]_{\Theta(b,c)}$ e que as classes são conjuntos convexos, conclui-se que todos os elementos de N_5 pertencem à classe $[b]_{\Theta(b,c)}$. Portanto, $\Theta(b,c)=\nabla_{N_5}$.
- $\Theta(b,1)=\Theta(a,1)$. Tem-se $(b,1)\in\Theta(b,1)$. Logo, como as classes são fechadas para quadriláteros, também se tem $(0,c)\in\Theta(b,1)$. Por conseguinte, $\Theta(a,1)=\Theta(0,c)\subseteq\Theta(b,1)$. Como $(b,1)\in\Theta(a,1)$, também temos $\Theta(b,1)\subseteq\Theta(a,1)$.
- $\Theta(c,1)=\Theta(a,0)$. Tem-se $(c,1)\in\Theta(c,1)$. Então, como as classes são fechadas para quadriláteros, $(a,0)\in\Theta(c,1)$. Assim, $\Theta(a,0)\subseteq\Theta(c,1)$. Atendendo a que $(c,1)\in\Theta(a,0)$, segue que $\Theta(c,1)\subseteq\Theta(a,0)$.
- $\theta(x,x)=\triangle_{N_5}$, para todo $x\in N_5$. Uma vez que a menor congruência que identifica um elemento com ele mesmo é a identidade.
- $\Theta(x,y)=\Theta(y,x)$, para todos $x,y\in N_5$. As congruências são relações de equivalência e, portanto, são simétricas.

Considerando que:

- todas as congruências principais são iguais a alguma das congruências de
$$\{\Theta(a,0),\Theta(a,a),\Theta(a,b),\Theta(a,c),\Theta(a,1)\},$$
- qualquer congruência é supremo de congruências principais,
- qualquer supremo de duas congruências de $\{\Theta(a,0),\Theta(a,a),\Theta(a,b),\Theta(a,c),\Theta(a,1)\}$ é uma destas 5 congruências,

concluímos que $\mathrm{Con}\mathcal{N}_5=\{\Theta(a,0),\Theta(a,a),\Theta(a,b),\Theta(a,c),\Theta(a,1)\}$. O diagrama de Hasse indicado resulta da comparação entre as classes de congruência.

Nota: As congruências podem ser determinadas por um processo alternativo, considerando o facto de se tratarem de relações de equivalência que satisfazem a propriedade de substituição.
A título de exemplo, calculemos $\Theta(a,0)$ seguindo esse outro processo. Atendendo a que $\Theta(a,0)$ é a menor congruência que contém $\{a,0)\}$, tem-se $(a,0)\in\Theta(a,0)$. Como $\Theta(a,0)$ é reflexiva, $\triangle_{N_5}\subseteq\Theta(a,0)$. Uma vez que $(a,0)\in\Theta(a,0)$ e $\Theta(a,0)$ é simétrica, também se tem $(0,a)\in\Theta(a,0)$. Como $(a,0),(c,c)\in\Theta(a,0)$ e $\Theta(a,0)$ satisfaz a propriedade de subsituição, segue que
$$(a\wedge c,0\wedge c)=(0,0)\in\Theta(a,0)\text{ e }(a\vee c,0\vee c)=(1,c)\in\Theta(a,0).$$
Como $(1,c)\in\Theta(a,0)$ e $\Theta(a,0)$ é simétrica, tem-se $(c,1)\in\Theta(a,0)$. Dado que $(c,1),(b,b)\in\Theta(a,0)$, então, pela propriedade de substituição, temos
$$(c\wedge b,1\wedge b)=(0,b)\in\Theta(a,0)\text{ e }(c\vee b,1\vee b)=(1,1)\in\Theta(a,0).$$
Dado que $(0,b)\in\Theta(a,0)$, também temos $(b,0)\in\Theta(a,0)$, uma vez que a relação é simétrica. Considerando que
$$(a,0),(0,b),(b,0),(0,a)\in\Theta(a,0),$$
então, por transitividade, temos $(a,b),(b,a)\in\Theta(a,0)$. A relação
$$\Theta=\triangle_{N_5}\cup\{(a,0),(0,a),(c,1),(1,c),(0,b),(b,0),(a,b),(b,a)\}$$
é uma relação de equivalência e satisfaz a propriedade de substituição (verificar), logo é uma congruência em N_5 que contém $\{(a,0)\}$; além disso Θ é a menor congruência em N_5 que contém $\{(a,0)\}$. Assim, $\Theta(a,0)=\Theta$ e, portanto, $N_5/\Theta(a,0)=\{\{0,a,b\},\{c,1\}\}$.

2.12. Considere o anel $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}; +, \cdot, -, 0)$. Para cada $q \in \mathbb{Z}$, seja $\equiv_q$ a relação de equivalência definida em $\mathbb{Z}$ por

$$r \equiv_q s \text{ sse } r - s = qk, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}.$$

Mostre que, para cada $q \in \mathbb{Z}$, a relação $\equiv_q$ é uma congruência em $\mathcal{Z}$.

A relação $\equiv_q$ é uma congruência em $\mathcal{Z}$ se é uma relação de equivalência e satisfaz a propriedade de substituição. Considerando que já é referido que $\equiv_q$ é uma relação de equivalência, resta provar que a relação $\equiv_q$ satisfaz a propriedade de substituição, ou seja, temos de provar que, para qualquer operação n-ária $f \in \{+, \cdot, -, 0\}$, $n \in \{0, 1, 2\}$, é satisfeita a seguinte propriedade

$$(\forall_{i \in \{1,\ldots,n\}}\, a_i \equiv_q b_i) \Rightarrow f(a_1, \ldots, a_n) \equiv_q f(b_1, \ldots, b_n).$$

(1) A relação $\equiv_q$ é uma relação reflexiva e $0 \in \mathbb{Z}$, pelo que $0 \equiv_q 0$.

(2) Para quaisquer $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} a_1 \equiv_q b_1 \quad &\Rightarrow \quad a_1 - b_1 = qk, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow \quad -a_1 - (-b_1) = q(-k), \text{ com } -k \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow \quad -a_1 \equiv_q -b_1. \end{aligned}$$

(3) Para quaisquer $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} (a_1 \equiv_q b_1 \text{ e } a_2 \equiv_q b_2) \quad &\Rightarrow \quad a_1 - b_1 = qk \text{ e } a_2 - b_2 = qk', \text{ para alguns } k, k' \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow \quad (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) = q(k + k'), \text{ com } k + k' \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow \quad (a_1 + a_2) \equiv_q (b_1 + b_2). \end{aligned}$$

(4) Para quaisquer $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} (a_1 \equiv_q b_1 \text{ e } a_2 \equiv_q b_2) \quad &\Rightarrow \quad a_1 - b_1 = qk \text{ e } a_2 - b_2 = qk', \text{ para alguns } k, k' \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow \quad a_1 = b_1 + qk \text{ e } a_2 = b_2 + qk', \text{ para alguns } k, k' \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow \quad (a_1 a_2) = b_1 b_2 + q(b_1 k' + b_2 k + qkk'), \text{ com } b_1 k' + b_2 k + qkk' \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow \quad a_1 a_2 - b_1 b_2 = q(b_1 k' + b_2 k + qkk'), \text{ com } b_1 k' + b_2 k + qkk' \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow \quad (a_1 a_2) \equiv_q (b_1 b_2). \end{aligned}$$

De (1), (2), (3) e (4) conclui-se que $\equiv_q$ satisfaz a propriedade de subsituição. Logo $\equiv_q$ é uma congruência em $\mathcal{Z}$.

2.13. Seja $\mathcal{S} = (S; \cdot)$ um semigrupo. Um subconjunto não vazio I de S diz-se um *ideal* de $\mathcal{S}$ se, para quaisquer $s \in S$ e $i \in I$, tem-se $is \in I$ e $si \in I$. Mostre que, para qualquer ideal I, $I^2 \cup \triangle_S$ é uma congruência em $\mathcal{S}$, designada a *congruência de Rees induzida por I*.

Representemos $I^2 \cup \triangle_S$ por θ. Pretende-se provar que θ é uma congruência em $\mathcal{S}$, ou seja, que θ é uma relação de equivalência em S que satisfaz a propriedade de substituição.

(i) θ é reflexiva

Uma vez que $\triangle_S \subseteq \theta$, é imediato que θ é reflexiva.

(ii) θ é simétrica

Para quaisquer $x, y \in S$,

$$\begin{aligned} (x, y) \in \theta \quad &\Rightarrow \quad (x, y) \in I^2 \text{ ou } (x, y) \in \triangle_S \\ &\Rightarrow \quad (x \in I \text{ e } y \in I) \text{ ou } (x = y) \\ &\Rightarrow \quad (y \in I \text{ e } x \in I) \text{ ou } (y, x) \in \triangle_S \\ &\Rightarrow \quad (y, x) \in I^2 \text{ ou } (y, x) \in \triangle_S \\ &\Rightarrow \quad (y, x) \in \theta \end{aligned}$$

(iii) θ é transitiva

Para quaisquer $x, y, z \in S$

$$\begin{aligned}
(x,y) \in \theta \wedge (y,z) \in \theta \quad &\Rightarrow \quad ((x,y) \in I^2 \text{ ou } (x,y) \in \triangle_S) \text{ e } ((y,z) \in I^2 \text{ ou } (y,z) \in \triangle_S) \\
&\Rightarrow \quad ((x,y) \in I^2 \text{ e } (y,z) \in I^2) \text{ ou } ((x,y) \in I^2 \text{ e } (y,z) \in \triangle_S) \\
&\qquad \text{ou } ((x,y) \in \triangle_S \text{ e } (y,z) \in I^2) \text{ ou } ((x,y) \in \triangle_S \text{ e } (y,z) \in \triangle_S) \\
&\Rightarrow \quad (x,y,z \in I) \text{ ou } (x,y \in I \text{ e } y = z) \text{ ou } (x = y \text{ e } y,z \in I) \\
&\qquad \text{ou } (x = y \text{ e } y = z) \\
&\Rightarrow \quad (x,z \in I) \text{ ou } (x,z \in I) \text{ ou } (x,z \in I) \text{ ou } (x = z) \\
&\Rightarrow \quad (x,z) \in I^2 \text{ ou } (x,z) \in \triangle_S \\
&\Rightarrow \quad (x,z) \in \theta.
\end{aligned}$$

(iv) θ satisfaz a propriedade de substituição

Para quaisquer $x, y, z, w \in S$,

$$\begin{aligned}
(x,y) \in \theta \text{ e } (z,w) \in \theta \quad &\Rightarrow \quad ((x,y) \in I^2 \text{ ou } (x,y) \in \triangle_S) \text{ e } ((z,w) \in I^2 \vee (z,w) \in \triangle_S) \\
&\Rightarrow \quad ((x,y) \in I^2 \text{ e } (z,w) \in I^2) \text{ ou } ((x,y) \in I^2 \text{ e } (z,w) \in \triangle_S) \\
&\qquad \vee ((x,y) \in \triangle_S \wedge (z,w) \in I^2) \vee ((x,y) \in \triangle_S \text{ e } (z,w) \in \triangle_S) \\
&\Rightarrow \quad (x,y,z,w \in I) \text{ ou } (x,y \in I \text{ e } z = w) \text{ ou } (x = y \text{ e } z,w \in I) \\
&\qquad \text{ou } (x = y \text{ e } z = w) \\
&\Rightarrow \quad (x \cdot z \in I \text{ e } y \cdot w \in I) \text{ ou } (x \cdot z \in I \text{ e } y \cdot w \in I) \text{ ou } (x \cdot z \in I \text{ e } y \cdot w \in I) \\
&\qquad \text{ou } (x \cdot z = y \cdot w) \\
&\Rightarrow \quad (x \cdot z, y \cdot w) \in I^2 \text{ ou } (x \cdot z, y \cdot w) \in \triangle_S \\
&\Rightarrow \quad (x \cdot z, y \cdot w) \in \theta.
\end{aligned}$$

De (i), (ii), (iii), (iv) conclui-se que θ é uma congruência em S.

2.14. Seja $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra de tipo $(O; \tau)$. Mostre que $\triangle_A = \{(a,a) \,|\, a \in A\}$ e $\nabla_A = \{(a,b) \,|\, a, b \in A\}$ são congruências em $\mathcal{A}$.

A relação $\triangle_A$ é uma relação de equivalência. Assim sendo, resta provar que $\triangle_A$ satisfaz a propriedade de substituição.

Seja $f \in O_n$. Para quaisquer $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in A$,

$$\begin{aligned}
(a_1,b_1) \in \triangle_A \text{ e } \ldots \text{ e } (a_n,b_n) \in \triangle_A \quad &\Rightarrow \quad a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in A \text{ e } a_1 = b_1 \text{ e } \ldots \text{ e } a_n = b_n \\
&\Rightarrow \quad f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n),\ f^{\mathcal{A}}(b_1, \ldots, b_n) \in A \\
&\qquad \text{e } f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathcal{A}}(b_1, \ldots, b_n) \ (f^{\mathcal{A}} \text{ é uma operação em } A) \\
&\Rightarrow \quad (f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n), f^{\mathcal{A}}(b_1, \ldots, b_n)) \in \triangle_A.
\end{aligned}$$

Logo $\triangle_A$ satisfaz a propriedade de substituição e, portanto, $\triangle_A$ é uma congruência em $\mathcal{A}$.

A relação ∇_A é uma relação de equivalência. Resta provar que ∇_A satisfaz a propriedade de substituição.

Seja $f \in O_n$. Para quaisquer $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in A$,

$$\begin{aligned}
(a_1,b_1) \in \nabla_A \text{ e } \ldots \text{ e } (a_n,b_n) \in \nabla_A \quad &\Rightarrow \quad a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in A \\
&\Rightarrow \quad f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n), f^{\mathcal{A}}(b_1, \ldots, b_n) \in A \ (f^{\mathcal{A}} \text{ é uma operação em } A) \\
&\Rightarrow \quad (f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n), f^{\mathcal{A}}(b_1, \ldots, b_n)) \in \nabla_A \ (\text{ definição de } \nabla_A).
\end{aligned}$$

Logo ∇_A satisfaz a propriedade de substituição e, portanto, ∇_A é uma congruência em $\mathcal{A}$.

2.15. Sejam $\mathcal{A} = (\{1,2,3,4,5\}; *^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$ e $\mathcal{B} = (\{1,2\}; *^{\mathcal{B}}, c^{\mathcal{B}})$ as álgebras de tipo $(2,0)$ cujas operações nulárias são dadas por $c^{\mathcal{A}} = 2$, $c^{\mathcal{B}} = 1$ e cujas operações binárias são definidas por

$*^{\mathcal{A}}$	1	2	3	4	5
1	2	2	2	5	2
2	2	3	3	2	2
3	2	3	2	2	2
4	5	2	2	4	2
5	2	2	2	2	2

$*^{\mathcal{B}}$	1	2
1	2	2
2	2	1

Seja $\alpha : \{1,2\} \to \{1,2,3,4,5\}$ a aplicação definida por $\alpha(1) = 2$ e $\alpha(2) = 3$. Mostre que a aplicação α é um monomorfismo de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{A}$. Justifique que $\mathcal{B}$ é isomorfa a uma subálgebra de $\mathcal{A}$.

A aplicação α é:

- um monomorfismo de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{A}$ se α é um homomorfismo e se é injetiva;
- um homomorfismo de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{A}$ se é compatível com todos os símbolos de operação, ou seja, se para todo o símbolo de operação $f \in \{0, *\}$, $n \in \{0,2\}$,
$$\alpha(f^{\mathcal{B}}(a_1, \ldots, a_n)) = (f^{\mathcal{A}}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n));$$
- injetiva se, para quaisquer $a, b \in \{1,2\}$,
$$\alpha(a) = \alpha(b) \Rightarrow a = b.$$

Facilmente verificamos que α é um homomorfismo de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{A}$, pois:

- $\alpha(c^{\mathcal{B}}) = \alpha(1) = 2 = c^{\mathcal{A}}$;
- $\alpha(1 *^{\mathcal{B}} 1) = \alpha(2) = 3 = 2 *^{\mathcal{A}} 2 = \alpha(1) *^{\mathcal{A}} \alpha(1)$;
- $\alpha(1 *^{\mathcal{B}} 2) = \alpha(2) = 3 = 2 *^{\mathcal{A}} 3 = \alpha(1) *^{\mathcal{A}} \alpha(2)$;
- $\alpha(2 *^{\mathcal{B}} 2) = \alpha(1) = 2 = 3 *^{\mathcal{A}} 3 = \alpha(2) *^{\mathcal{A}} \alpha(2)$;
- $\alpha(2 *^{\mathcal{B}} 1) = \alpha(2) = 3 = 3 *^{\mathcal{A}} 2 = \alpha(2) *^{\mathcal{A}} \alpha(1)$.

A aplicação também é injetiva, uma vez que, para quaisquer $x, y \in B$, tem-se $\alpha(x) \neq \alpha(y)$ sempre que $x \neq y$ ($1 \neq 2$ e $\alpha(1) \neq \alpha(2)$).

Uma vez que α é um monomorfismo de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{A}$, tem-se $\mathcal{B} \cong \alpha(\mathcal{B})$; de facto, como α é um monomorfismo de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{A}$, a aplicação $\beta : B \to \alpha(B)$ definida por $\beta(x) = \alpha(x)$, para todo $x \in B$, é um isomorfismo de $\mathcal{B}$ em $\alpha(\mathcal{B})$. Por outro lado, como a álgebra $\mathcal{B}$ é uma subálgebra de si mesma e α é um homomorfismo de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{A}$, $\alpha(\mathcal{B})$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$. Portanto, a álgebra $\mathcal{B}$ é isomorfa a uma subálgebra de $\mathcal{A}$.

2.16. Sejam $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ álgebras do mesmo tipo. Mostre que se $\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ e $\beta \in \mathrm{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$, então $\beta \circ \alpha \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$.

Sejam $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ álgebras de tipo (O, τ), $\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ e $\beta \in \mathrm{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$. Pretendemos mostrar que $\beta \circ \alpha$ é um homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{C}$.

Uma vez que α é uma função de A em B e β é uma função de B em C, então, por definição de composição de funções, $\beta \circ \alpha$ é uma função de A em C. Além disso, prova-se que $\beta \circ \alpha$ é compatível com todos os símbolos de operação. De facto, para quaisquer $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in O_n$ e $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$,

$$\begin{array}{rcll} (\beta \circ \alpha)(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) & = & \beta(\alpha(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n))) & \\ & = & \beta(f^{\mathcal{B}}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n))) & (\alpha \text{ é homomorfismo de } \mathcal{A} \text{ em } \mathcal{B}) \\ & = & f^{\mathcal{C}}(\beta(\alpha(a_1)), \ldots, \beta(\alpha(a_n))) & (\beta \text{ é homomorfismo de } \mathcal{B} \text{ em } \mathcal{C}) \\ & = & f^{\mathcal{C}}((\beta \circ \alpha)(a_1), \ldots, (\beta \circ \alpha)(a_n)). & \end{array}$$

Logo $\beta \circ \alpha$ é um homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{C}$.

2.17. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ álgebras do mesmo tipo. Mostre que se $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um isomorfismo, então α^{-1} é um isomorfismo de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{A}$.

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ álgebras de tipo (O, τ) e $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um isomorfismo.

Como α é um isomorfismo, então α é uma aplicação bijetiva e, portanto, admite inversa $\alpha^{-1} : B \to A$. A função α^{-1} também é bijetiva, pelo que, para provar que α^{-1} é um isomorfismo, resta mostrar que α^{-1} é um homomorfismo de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{A}$.

Para quaisquer $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in O_n$ e $(b_1, \ldots, b_n) \in B^n$, tem-se

$$\begin{array}{rcll} \alpha^{-1}(f^{\mathcal{B}}(b_1, \ldots, b_n)) & = & \alpha^{-1}(f^{\mathcal{B}}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n))) & (\alpha \text{ é sobrejetiva, logo } \forall b_i \in B\ \exists a_i \in A,\ b_i = \alpha(a_i)) \\ & = & \alpha^{-1}(\alpha(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n))) & (\alpha \text{ é um homomorfismo de } \mathcal{A} \text{ em } \mathcal{B}) \\ & = & (\alpha^{-1} \circ \alpha)(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) & \\ & = & f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) & \\ & = & f^{\mathcal{A}}(\alpha^{-1}(b_1), \ldots, \alpha^{-1}(b_n))). & \end{array}$$

Logo α^{-1} é um homomorfismo de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{A}$.

Uma vez que α^{-1} é um homomorfismo e bijetiva, então α^{-1} é um isomorfismo de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{A}$.

2.18. Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$, $\mathcal{B} = (B; G)$ álgebras do mesmo tipo e $\alpha \in \operatorname{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Mostre que:

(a) Se A_1 é um subuniverso de $\mathcal{A}$, então $\alpha(A_1)$ é um subuniverso de $\mathcal{B}$.

Seja A_1 um subuniverso de $\mathcal{A}$. Então

(1) $A_1 \subseteq A$;

(2) para qualquer símbolo de operação f de aridade n, $n \in \mathbb{N}_0$, e para qualquer $(a_1, \ldots, a_n) \in (A_1)^n$, $f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \in A_1$.

Pretende-se provar que $\alpha(A_1)$ é um subuniverso de $\mathcal{B}$, ou seja, pretende-se mostrar que as seguintes condições são satisfeitas:

(i) $\alpha(A_1) \subseteq B$;

(ii) para qualquer símbolo de operação f de aridade n, $n \in \mathbb{N}_0$, e para qualquer $(b_1, \ldots, b_n) \in \alpha(A_1)^n$, $f^{\mathcal{B}}(b_1, \ldots, b_n) \in \alpha(A_1)$.

Prova de (i): uma vez que $A_1 \subseteq A$ e α é uma função de A em B, é imediato que $\alpha(A_1) \subseteq B$.

Prova de (ii): Sejam f um símbolo de operação de aridade n e $(b_1, \ldots, b_n) \in \alpha(A_1)^n$.

Como $b_1, \ldots, b_n \in \alpha(A_1)$, tem-se

$$b_1 = \alpha(a_1), \ldots, b_n = \alpha(a_n), \text{ para alguns } a_1, \ldots, a_n \in A_1.$$

Então

$$\begin{array}{rcl} f^{\mathcal{B}}(b_1, \ldots, b_n) & = & f^{\mathcal{B}}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)) \\ & = & \alpha(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)).\ (\alpha \in \operatorname{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})) \end{array}$$

Atendendo a que $a_1, \ldots, a_n \in A_1$, $f^{\mathcal{A}}$ é uma operação n-ária em A e A_1 é um subuniverso de $\mathcal{A}$, tem-se $f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \in A_1$; logo $\alpha(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) \in \alpha(A_1)$; portanto, $f^{\mathcal{B}}(b_1, \ldots, b_n) \in \alpha(A_1)$.

Da prova de (i) e de (ii), conclui-se que $\alpha(A_1)$ é um subuniverso de $\mathcal{B}$.

(b) Se B_1 é um subuniverso de $\mathcal{B}$, então $\alpha^{\leftarrow}(B_1)$ é um subuniverso de $\mathcal{A}$.

Seja B_1 um subuniverso de $\mathcal{B}$. Então

(1) $B_1 \subseteq B$;

(2) para qualquer símbolo de operação f de aridade n, $n \in \mathbb{N}_0$, e para qualquer $(b_1, \ldots, b_n) \in (B_1)^n$, $f^{\mathcal{B}}(b_1, \ldots, b_n) \in (B_1)$.

Pretendemos mostrar que $\alpha^{\leftarrow}(B_1)$ é um subuniverso de $\mathcal{A}$, ou seja, temos de provar que

(i) $\alpha^{\leftarrow}(B_1) \subseteq A$;

(ii) para qualquer símbolo de operação f de aridade n, $n \in \mathbb{N}_0$, e para qualquer $(a_1, \ldots, a_n) \in (\alpha^{\leftarrow}(B_1))^n$, $f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \in \alpha^{\leftarrow}(B_1)$.

Prova de (i): Por definição de $\alpha^{\leftarrow}(B_1)$, tem-se $\alpha^{\leftarrow}(B_1) = \{a \in A \,|\, \alpha(a) \in B_1\}$. Logo $\alpha^{\leftarrow}(B_1) \subseteq A$.

Prova de (ii): Para qualquer símbolo de operação f de operação de aridade n, $n \in \mathbb{N}_0$, e qualquer $(a_1, \ldots, a_n) \in (\alpha^{\leftarrow}(B_1))^n$, tem-se

$$\alpha(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)) \quad \text{e} \quad (\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)) \in (B_1)^n.$$

Então, como B_1 é subuniverso de $\mathcal{B}$, temos $f^{\mathcal{B}}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)) \in B_1$.
Logo $\alpha(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) \in B_1$ e, portanto, $f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \in \alpha^{\leftarrow}(B_1)$.

De (i) e (i) conclui-se que $\alpha^{\leftarrow}(B_1)$ é um subuniverso de $\mathcal{A}$.

2.19. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ álgebras do mesmo tipo e $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Mostre que

$$\mathrm{Eq}(\alpha, \beta) = \{a \in A \mid \alpha(a) = \beta(a)\}$$

é um subuniverso de $\mathcal{A}$. A este subuniverso chama-se *equalizador de* α *e* β.

O conjunto $\mathrm{Eq}(\alpha, \beta) = \{a \in A \mid \alpha(a) = \beta(a)\}$ é um subuniverso de $\mathcal{A}$ se:

(i) $\mathrm{Eq}(\alpha, \beta) \subseteq A$;

(ii) para qualquer símbolo de operação f de aridade n, $n \in \mathbb{N}_0$, e para qualquer $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{Eq}(\alpha, \beta)^n$, $f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{Eq}(\alpha, \beta)$.

Prova de (i): Imediato, pela definição de $\mathrm{Eq}(\alpha, \beta)$.

Prova de (ii): para qualquer símbolo de operação f de aridade n, $n \in \mathbb{N}_0$, e para qualquer $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{Eq}(\alpha, \beta)^n$, tem-se $f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \in A$. Além disso,

$$\begin{array}{rcll} \alpha(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) & = & f^{\mathcal{B}}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)) & (\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})) \\ & = & f^{\mathcal{B}}(\beta(a_1), \ldots, \beta(a_n)) & (a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{Eq}(\alpha, \beta)) \\ & = & \beta(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) & (\beta \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})) \end{array}$$

Logo $f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{Eq}(\alpha, \beta)$.

2.20. Sejam $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ álgebras do mesmo tipo e $\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Mostre que α é injetiva se e só se $\ker \alpha = \triangle_A$.

$\Rightarrow$) Admitamos que α é injetiva.

A relação $\ker \alpha$ é uma relação de equivalência em A, logo $\triangle_A \subseteq \ker \alpha$. Por outro lado, para quaisquer $x, y \in A$,

$$\begin{array}{rcll} (x, y) \in \ker \alpha & \Rightarrow & \alpha(x) = \alpha(y) & \\ & \Rightarrow & x = y & (\alpha \text{ é injetiva}) \\ & \Rightarrow & (x, y) \in \triangle_A. & \end{array}$$

Assim, $\ker \alpha \subseteq \triangle_A$. Portanto, $\ker \alpha = \triangle_A$.

$\Leftarrow$) Consideremos, por hipótese, que $\ker \alpha = \triangle_A$. Então, para quaisquer $x, y \in A$,

$$\alpha(x) = \alpha(y) \Rightarrow (x, y) \in \ker \alpha \Rightarrow (x, y) \in \triangle_A \Rightarrow x = y.$$

Logo α é injetiva.

2.21. Sejam $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ álgebras do mesmo tipo. Mostre que:

(a) $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \simeq \mathcal{B} \times \mathcal{A}$.

Seja $\alpha : A \times B \to B \times A$ a aplicação definida por $\alpha(a, b) = (b, a)$, para qualquer $(a, b) \in A \times B$. Mostremos que α é um isomorfismo.

1) A aplicação α está bem definida. De facto, para qualquer $(a, b) \in A \times B$, tem-se $a \in A$ e $b \in B$, pelo que $\alpha(a, b) = (b, a) \in B \times A$. Além disso, para quaisquer $(a, b), (a', b') \in A \times B$,

$$(a, b) = (a', b') \Rightarrow a = a' \text{ e } b = b' \Rightarrow (b, a) = (b', a') \Rightarrow \alpha(a, b) = \alpha(a', b').$$

2) A aplicação α é injetiva, pois, para quaisquer $(a, b), (a', b') \in A \times B$,

$$\alpha(a, b) = \alpha(a', b') \Rightarrow (b, a) = (b', a') \Rightarrow a = a' \text{ e } b = b' \Rightarrow (a, b) = (a', b').$$

3) Claramente, a aplicação α também é sobrejetiva, pois, para todo $(b, a) \in B \times A$, existe $(a, b) \in A \times B$ tal que $\alpha(a, b) = (b, a)$.

4) A aplicação α é compativel com todos os símbolos de operação, pois, para qualquer símbolo de operação f de aridade n, $n \in \mathbb{N}_0$, e para qualquer $((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) \in (A \times B)^n$,

$$\begin{array}{rcl} \alpha(f^{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}((a_1, b_1) \ldots, (a_n, b_n))) & = & \alpha(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n), f^{\mathcal{B}}(b_1, \ldots, b_n)) \\ & = & (f^{\mathcal{B}}(b_1, \ldots, b_n), f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) \\ & = & f^{\mathcal{B} \times \mathcal{A}}((b_1, a_1), \ldots, (b_n, a_n))) \\ & = & f^{\mathcal{B} \times \mathcal{A}}(\alpha(a_1, b_1) \ldots, \alpha(a_n, b_n)). \end{array}$$

De 1), 2), 3) e 4) conclui-se que α é um isomorfismo de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ em $\mathcal{B} \times \mathcal{A}$ e, portanto, $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \simeq \mathcal{B} \times \mathcal{A}$.

(b) $\mathcal{A} \times (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) \simeq (\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \times \mathcal{C}$.

Seja $\alpha : A \times (B \times C) \to (A \times B) \times C$ a aplicação definida por $\alpha(a,(b,c)) = ((a,b),c)$, para qualquer $(a,(b,c)) \in A \times (B \times C)$. Mostremos que α é um isomorfismo.

1) A aplicação α está bem definida. De facto, para qualquer $(a,(b,c)) \in A \times (B \times C)$, tem-se $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, pelo que $\alpha(a,(b,c)) = ((a,b),c) \in (A \times B) \times C$. Além disso, para quaisquer $(a,(b,c)), (a',(b',c')) \in A \times (B \times C)$,

$$\begin{aligned}
(a,(b,c)) = (a',(b',c')) &\Rightarrow a = a', (b,c) = (b',c') \\
&\Rightarrow a = a', b = b', c = c' \\
&\Rightarrow (a,b) = (a',b'), c = c' \\
&\Rightarrow ((a,b),c) = ((a',b'),c') \\
&\Rightarrow \alpha(a,(b,c)) = \alpha(a',(b',c')).
\end{aligned}$$

2) A aplicação α é injetiva, pois, para quaisquer $(a,(b,c)), (a',(b',c')) \in A \times (B \times C)$,

$$\begin{aligned}
\alpha(a,(b,c)) = \alpha(a',(b',c')) &\Rightarrow ((a,b),c) = ((a',b'),c') \\
&\Rightarrow (a,b) = (a',b'), c = c' \\
&\Rightarrow a = a', b = b', c = c' \\
&\Rightarrow a = a', (b,c) = (b',c') \\
&\Rightarrow (a,(b,c)) = (a',(b',c')).
\end{aligned}$$

3) Claramente, a aplicação também é sobrejetiva, pois, para todo $((a,b),c) \in (A \times B) \times C$, existe $(a,(b,c)) \in A \times (B \times C)$ tal que $\alpha(a,(b,c)) = ((a,b),c)$.

4) A aplicação é compativel com todos os símbolos de operação, pois, para qualquer símbolo de operação f de aridade n, $n \in \mathbb{N}_0$, e para qualquer $((a_1,(b_1,c_1)),\ldots,(a_n,(b_n,c_n))) \in (A \times (B \times C))^n$,

$$\begin{aligned}
&\alpha(f^{\mathcal{A}\times(\mathcal{B}\times\mathcal{C})}((a_1,(b_1,c_1))\ldots,(a_n,(b_n,c_n)))) \\
= \;&\alpha(f^{\mathcal{A}}(a_1,\ldots,a_n), f^{\mathcal{B}\times\mathcal{C}}((b_1,c_1),\ldots,(b_n,c_n))) \\
= \;&\alpha(f^{\mathcal{A}}(a_1,\ldots,a_n), (f^{\mathcal{B}}(b_1,\ldots,b_n), f^{\mathcal{C}}(c_1,\ldots,c_n))) \\
= \;&((f^{\mathcal{A}}(a_1,\ldots,a_n), f^{\mathcal{B}}(b_1,\ldots,b_n)), f^{\mathcal{C}}(c_1,\ldots,c_n)) \\
= \;&(f^{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}((a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n)), f^{\mathcal{C}}(c_1,\ldots,c_n)) \\
= \;&f^{(\mathcal{A}\times\mathcal{B})\times\mathcal{C}}(((a_1,b_1),c_1),\ldots,((a_n,b_n),c_n)) \\
= \;&f^{(\mathcal{A}\times\mathcal{B})\times\mathcal{C}}(\alpha(a_1,(b_1,c_1)),\ldots,\alpha(a_n,(b_n,c_n))).
\end{aligned}$$

De 1), 2), 3) e 4) conclui-se que α é um isomorfismo de $\mathcal{A} \times (\mathcal{B} \times \mathcal{C})$ em $(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \times \mathcal{C}$ e, portanto, $\mathcal{A} \times (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) \simeq (\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \times \mathcal{C}$.

2.22. Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra e $\theta, \rho \in \mathrm{Con}\mathcal{A}$.

(a) Mostre que a aplicação $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\theta \times \mathcal{A}/\rho$ definida por $\alpha(a) = ([a]_\theta, [a]_\rho)$ é um homomorfismo.

Para qualquer símbolo de operação f de aridade n, $n \in \mathbb{N}_0$, e para quaisquer $a_1,\ldots,a_n \in A$,

$$\begin{aligned}
\alpha(f^{\mathcal{A}}(a_1,\ldots,a_n)) &= ([f^{\mathcal{A}}(a_1,\ldots,a_n)]_\theta, [f^{\mathcal{A}}(a_1,\ldots,a_n)]_\rho) \\
&= (f^{\mathcal{A}/\theta}([a_1]_\theta,\ldots,[a_n]_\theta), f^{\mathcal{A}/\rho}([a_1]_\rho,\ldots,[a_n]_\rho)) \\
&= f^{\mathcal{A}/\theta\times\mathcal{A}/\rho}(([a_1]_\theta,[a_1]_\rho),\ldots,([a_n]_\theta,[a_n]_\rho)) \\
&= f^{\mathcal{A}/\theta\times\mathcal{A}/\rho}(\alpha(a_1),\ldots,\alpha(a_n)).
\end{aligned}$$

Logo α é compatível com qualquer operação e, portanto, α é um homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}/\theta \times \mathcal{A}/\rho$.

(b) Mostre que $\ker\alpha = \theta \cap \rho$. Conclua que α é injetiva se e só se $\theta \cap \rho = \triangle_A$.

Para quaisquer $a, b \in A$,

$$\begin{aligned}
(a,b) \in \ker\alpha &\Leftrightarrow \alpha(a) = \alpha(b) \\
&\Leftrightarrow ([a]_\theta,[a]_\rho) = ([b]_\theta,[b]_\rho) \\
&\Leftrightarrow [a]_\theta = [b]_\rho \text{ e } [a]_\theta = [b]_\rho \\
&\Leftrightarrow (a,b) \in \theta \text{ e } (a,b) \in \rho \\
&\Leftrightarrow (a,b) \in \theta \cap \rho.
\end{aligned}$$

Logo $\ker\alpha = \theta \cap \rho$.

A função α é injetiva se e só se $\ker\alpha = \triangle_A$. Considerando o que foi provado em 2.20 segue que α é injetiva se e só se $\theta \cap \rho = \triangle_A$.

(c) Mostre que α é sobrejetiva se e só se $\theta \circ \rho = \nabla_A$.

$\Rightarrow$) Admitamos que α é sobrejetiva. Pretendemos provar que $\theta \circ \rho = \nabla_A$.

Uma vez que que θ e ρ são relações binárias em A, $\theta \circ \rho$ é uma relação binária em A e, portanto, $\theta \circ \rho \subseteq \nabla_A$.

Sejam $a, b \in A$. Então $([a]_\theta, [b]_\rho) \in A/\theta \times A/\rho$. Considerando que α é sobrejetiva, existe $c \in A$ tal que $\alpha(c) = ([a]_\theta, [b]_\rho)$, donde segue que $([c]_\theta, [c]_\rho) = ([a]_\theta, [b]_\rho)$ e, por conseguinte, $[c]_\theta = [a]_\theta$ e $[c]_\rho = [b]_\rho$. Assim, $(c, a) \in \theta$ e $(b, c) \in \rho$, pelo que $(b, a) \in \theta \circ \rho$. Assim, para quaisquer $a, b \in A$, $(b, a) \in \theta \circ \rho$, ou seja, $\nabla_A \subseteq \theta \circ \rho$.

Considerando que $\theta \circ \rho \subseteq \nabla_A$ e $\nabla_A \subseteq \theta \circ \rho$, tem-se $\nabla_A = \theta \circ \rho$.

$\Leftarrow$) Admitamos que $\nabla_A = \theta \circ \rho$.

Pretende-se provar que α é sobrejetiva.

Seja $([a]_\theta, [b]_\rho) \in A/\theta \times A/\rho$. Para quaisquer $a, b \in A$, tem-se $(b, a) \in \nabla_A$ e, uma vez que $\nabla_A = \theta \circ \rho$, $(b, a) \in \theta \circ \rho$. Então existe $c \in A$ tal que $(b, c) \in \rho$ e $(c, a) \in \theta$. Assim, $[a]_\theta = [c]_\theta$, $[b]_\rho = [c]_\rho$ e, portanto, $([a]_\theta, [b]_\rho) = ([c]_\theta, [c]_\rho)$. Logo, para qualquer $([a]_\theta, [b]_\rho) \in A/\theta \times A/\rho$, existe $c \in A$ tal que $([a]_\theta, [b]_\rho) = \alpha(c)$, ou seja, α é sobrejetiva.

2.23. Sejam $\mathcal{A} = (A; (f^\mathcal{A})_{f \in O})$, $\mathcal{B} = (B; (f^\mathcal{B})_{f \in O})$ e $\mathcal{C} = (C; (f^\mathcal{C})_{f \in O})$ álgebras de tipo (O, τ), $\alpha_1 \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ e $\alpha_2 \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$. Seja $\alpha : A \to B \times C$ a aplicação definida por $\alpha(a) = (\alpha_1(a), \alpha_2(a))$, para todo $a \in A$.

(a) Mostre que α é um homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$.

Para qualquer símbolo de operação f de aridade n e para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$,

$$\begin{array}{rcl} \alpha(f^\mathcal{A}(a_1, \ldots, a_n)) & = & (\alpha_1(f^\mathcal{A}(a_1, \ldots, a_n)), \alpha_2(f^\mathcal{A}(a_1, \ldots, a_n))) \\ & \overset{*}{=} & (f^\mathcal{B}(\alpha_1(a_1), \ldots, \alpha_1(a_n)), f^\mathcal{C}(\alpha_2(a_1), \ldots, \alpha_2(a_n))) \\ & = & f^{\mathcal{B}\times\mathcal{C}}((\alpha_1(a_1), \alpha_2(a_1)), \ldots, (\alpha_1(a_n), \alpha_2(a_n))) \\ & = & f^{\mathcal{B}\times\mathcal{C}}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)). \end{array}$$

A aplicação α é compatível com todos os símbolos de operação, logo α é um homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$.

(*) $\alpha_1 \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ e $\alpha_2 \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$.

(b) Mostre que $\ker \alpha = \ker \alpha_1 \cap \ker \alpha_2$.

Para quaisquer x, y,

$$\begin{array}{rcl} (x, y) \in \ker \alpha & \Leftrightarrow & x, y \in A \text{ e } \alpha(x) = \alpha(y) \\ & \Leftrightarrow & x, y \in A \text{ e } (\alpha_1(x), \alpha_2(x)) = (\alpha_1(y), \alpha_2(y)) \\ & \Leftrightarrow & x, y \in A \text{ e } \alpha_1(x) = \alpha_1(y) \text{ e } \alpha_2(x) = \alpha_2(y) \\ & \Leftrightarrow & (x, y) \in \ker \alpha_1 \text{ e } (x, y) \in \ker \alpha_2 \\ & \Leftrightarrow & (x, y) \in \ker \alpha_1 \cap \ker \alpha_2. \end{array}$$

Logo $\ker \alpha = \ker \alpha_1 \cap \ker \alpha_2$.

(c) Mostre que se α é um epimorfismo, então α_1 e α_2 são epimorfismos e

$$\mathcal{A}/(\ker \alpha_1 \cap \ker \alpha_2) \cong \mathcal{A}/\ker \alpha_1 \times \mathcal{A}/\ker \alpha_2.$$

Comecemos por mostrar que se α é um epimorfismo, então α_1 e α_2 são epimorfismos. Uma vez que α_1 e α_2 são homomorfismos, resta provar que α_1 e α_2 são funções sobrejetivas.
Seja $b \in B$. Como $C \neq \emptyset$, existe $c \in C$. Logo $(b, c) \in B \times C$. Considerando que α é um epimorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$, existe $a \in A$ tal que $\alpha(a) = (b, c)$, i.e., existe $a \in A$ tal que $(\alpha_1(a), \alpha_2(a)) = (b, c)$. Logo, para todo $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $\alpha_1(a) = b$. Assim, α_1 é sobrejetiva.
De modo análogo, prova-se que α_2 é sobrejetiva.

Pelo 1º Teorema do Isomorfismo, tem-se

$$\mathcal{A}/\ker \alpha \cong \alpha(\mathcal{A}),\ \mathcal{A}/\ker \alpha_1 \cong \alpha_1(\mathcal{A}) \text{ e } \mathcal{A}/\ker \alpha_2 \cong \alpha_2(\mathcal{A}).$$

Uma vez que α, α_1 e α_2 são sobrejetivas, vem que

$$\mathcal{A}/(\ker\alpha) \cong \mathcal{B}\times\mathcal{C},\ \mathcal{A}/(\ker\alpha_1) \cong \mathcal{B} \text{ e } \mathcal{A}/(\ker\alpha_2) \cong \mathcal{C}.$$

Assim,

$$\mathcal{A}/(\ker\alpha) \cong \mathcal{A}/(\ker\alpha_1)\times\mathcal{A}/(\ker\alpha_2).$$

Considerando o que foi provado na alínea anterior segue que

$$\mathcal{A}/(\ker\alpha_1\cap\ker\alpha_2) \cong \mathcal{A}/(\ker\alpha_1)\times\mathcal{A}/(\ker\alpha_2).$$

2.24. Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra e $\theta,\theta^*\in\mathrm{Con}\mathcal{A}$. Mostre que (θ,θ^*) é um par de congruências fator em $\mathcal{A}$ se e só se $\theta\cap\theta^*=\triangle_A$ e $\theta\circ\theta^*=\nabla_A$.

$\Rightarrow$) Sejam $\theta,\theta^*\in\mathrm{Con}\mathcal{A}$ tais que (θ,θ^*) é um par de congruências fator em $\mathcal{A}$. Então:

(1) $\theta\cap\theta^*=\triangle_A$; (2) $\theta\vee\theta^*=\nabla_A$; (3) $\theta\circ\theta^*=\theta^*\circ\theta$.

Pretende-se provar que:

(i) $\theta\cap\theta^*=\triangle_A$; (ii) $\theta\circ\theta^*=\nabla_A$.

De (1) é imediato (i). De (3) segue que $\theta\circ\theta^*=\theta\vee\theta^*$ (Teorema 2.3.14). Então, por (2), tem-se (ii).

$\Leftarrow$) Reciprocamente, admitamos que θ e θ^* são congruências em $\mathcal{A}$ tais que:

(i) $\theta\cap\theta^*=\triangle_A$; (ii) $\theta\circ\theta^*=\nabla_A$.

Pretende-se mostrar que:

(1) $\theta\cap\theta^*=\triangle_A$; (2) $\theta\vee\theta^*=\nabla_A$; (3) $\theta\circ\theta^*=\theta^*\circ\theta$.

De (i) é imediato (1). Uma vez que $\theta\circ\theta^*=\nabla_A$, tem-se $\theta^*\circ\theta\subseteq\theta\circ\theta^*$, pelo que $\theta\circ\theta^*=\theta^*\circ\theta$ e $\theta\circ\theta^*=\theta\vee\theta^*$ (Teorema 2.3.14). Assim, tem-se (3). De $\theta\circ\theta^*=\theta\vee\theta^*$ e de (ii) segue (2).

2.25. Seja $\mathcal{A}=(\{a,b,c,d\};f^{\mathcal{A}})$ a álgebra de tipo (1) onde $f^{\mathcal{A}}:\{a,b,c,d\}\to\{a,b,c,d\}$ é a operação definida por

x	a	b	c	d
$f^{\mathcal{A}}(x)$	c	d	a	b

(a) Determine $\Theta(a,b)$ e $\Theta(a,d)$. Justifique que $(\Theta(a,b),\Theta(a,d))$ é um par de congruências fator.

Comecemos por determinar $\Theta(a,b)$ e $\Theta(a,d)$.

A relação $\Theta(a,b)$ é a menor congruência em $\mathcal{A}$ que contém $\{(a,b)\}$. Então $(a,b)\in\Theta(a,b)$, $\Theta(a,b)$ é uma relação de equivalência (i.e., é reflexiva, simétrica e transitiva) e satisfaz a propriedade de substituição. Considerando que $\Theta(a,b)$ é reflexiva, tem-se $\triangle_A\subseteq\Theta(a,b)$. Uma vez que $(a,b)\in\Theta(a,b)$ e $\Theta(a,b)$ é simétrica segue que $(b,a)\in\Theta(a,b)$. Como $(a,b),(b,a)\in\Theta(a,b)$ e $\Theta(a,b)$ satisfaz a propriedade de substituição, tem-se

$$(f^{\mathcal{A}}(a),f^{\mathcal{A}}(b))=(c,d)\in\Theta(a,b),(f^{\mathcal{A}}(b),f^{\mathcal{A}}(a))=(d,c)\in\Theta(a,b).$$

Considerando que $(c,d),(d,c)\in\Theta(a,b)$, então, novamente pela propriedade de substituição, temos

$$(f^{\mathcal{A}}(c),f^{\mathcal{A}}(d))=(a,b)\in\Theta(a,b),(f^{\mathcal{A}}(d),f^{\mathcal{A}}(c))=(b,a)\in\Theta(a,b).$$

Então, $\triangle_A\cup\{(a,b),(b,a),(c,d),(d,c)\}\subseteq\Theta(a,b)$. A relação $\triangle_A\cup\{(a,b),(b,a),(c,d),(d,c)\}$ é uma congruência em $\mathcal{A}$ que contém $\{(a,b)\}$ e é a menor congruência nestas condições. Assim, $\Theta(a,b)=\triangle_A\cup\{(a,b),(b,a),(c,d),(d,c)\}$.

De modo análogo, obtem-se $\Theta(a,d)=\triangle_A\cup\{(a,d),(d,a),(c,b),(b,c)\}$.

Uma par (θ_1,θ_2) de congruências em $\mathcal{A}$ diz-se um par de congruências factor se satisfaz as seguintes condições:

(i) $\theta_1\cap\theta_2=\triangle_A$; (ii) $\theta_1\vee\theta_2=\nabla_A$; (iii) $\theta_1\circ\theta_2=\theta_2\circ\theta_1$.

Então, atendendo a que;

- $\Theta(a,b) \cap \Theta(a,d) = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\} = \triangle_A$;
- $\Theta(a,b) \vee \Theta(a,d) = \Theta(a,b) \cup \Theta(a,d) \cup \{(a,c),(c,a),(b,d),(d,b)\} = \nabla_A$;
- $\Theta(a,b) \circ \Theta(a,d) = \Theta(a,b) \cup \Theta(a,d) \cup \{(a,c),(d,b),(c,a),(b,d)\} = \Theta(a,d) \circ \Theta(a,b)$,

conclui-se que $(\Theta(a,b), \Theta(a,d))$ é um par de congruências fator.

(Em alternativa pode-se mostrar que $(\Theta(a,b), \Theta(a,d))$ é um par de congruências fator recorrendo à caracterização referida no exercício 2.24.)

(b) Justifique que existem álgebras $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ não triviais tais que $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Dê exemplo de álgebras $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ nas condições indicadas e determine a álgebra $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$.

Sejam $\theta_1 = \Theta(a,b)$, $\theta_2 = \Theta(a,d)$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}/\theta_1$ e $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}/\theta_2$. Uma vez que $\mathcal{A}$ é não trivial e $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Con} \setminus \{\nabla_A\}$, então $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ são álgebras não trivias. Como (θ_1, θ_2) é um par de congruências fator, tem-se $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ (Teorema 2.5.5).

Tem-se $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}/\theta_1 = (A/\theta_1; f^{\mathcal{A}/\theta_1})$, onde $A/\theta_1 = \{[a]_{\theta_1}, [c]_{\theta_1}\}$ (pois $\theta_1 = \Theta(a,b) = \triangle_A \cup \{(a,b),(b,a),(c,d),(d,c)\}$ e, portanto, $[a]_{\theta_1} = [b]_{\theta_1}$ e $[c]_{\theta_1} = [d]_{\theta_1}$), e $f^{\mathcal{A}/\theta_1} : A/\theta_1 \to A/\theta_1$ é a operação definida por

$$f^{\mathcal{A}/\theta_1}([a]_{\theta_1}) = [f^{\mathcal{A}}(a)]_{\theta_1} = [c]_{\theta_1},$$
$$f^{\mathcal{A}/\theta_1}([c]_{\theta_1}) = [f^{\mathcal{A}}(c)]_{\theta_1} = [a]_{\theta_1}.$$

No caso da álgebra $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}/\theta_2 = (A/\theta_2; f^{\mathcal{A}/\theta_2})$, tem-se $A/\theta_2 = \{[a]_{\theta_2}, [c]_{\theta_2}\}$ (pois $\theta_2 = \Theta(a,d) = \triangle_A \cup \{(a,d),(d,a),(c,b),(b,c)\}$ e, portanto, $[a]_{\theta_1} = [d]_{\theta_1}$ e $[c]_{\theta_1} = [b]_{\theta_1}$), e $f^{\mathcal{A}/\theta_2} : A/\theta_2 \to A/\theta_2$ é a operação definida por

$$f^{\mathcal{A}/\theta_2}([a]_{\theta_2}) = [f^{\mathcal{A}}(a)]_{\theta_2} = [c]_{\theta_2},$$
$$f^{\mathcal{A}/\theta_2}([c]_{\theta_1}) = [f^{\mathcal{A}}(c)]_{\theta_2} = [a]_{\theta_2}.$$

Assim, $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = (A/\theta_1 \times A/\theta_2; f^{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2})$, onde

$$A/\theta_1 \times A/\theta_2 = \{([a]_{\theta_1}, [a]_{\theta_2}), ([a]_{\theta_1}, [c]_{\theta_2}), ([c]_{\theta_1}, [a]_{\theta_2}), ([c]_{\theta_1}, [c]_{\theta_2})\}$$

e $f^{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2} : (A/\theta_1 \times A/\theta_2) \to (A/\theta_1 \times A/\theta_2)$ é a operação definida por

$$f^{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2}([a]_{\theta_1}, [a]_{\theta_2}) = (f^{\mathcal{A}_1}([a]_{\theta_1}), f^{\mathcal{A}_2}([a]_{\theta_2})) = (f^{\mathcal{A}/\theta_1}([a]_{\theta_1}), f^{\mathcal{A}/\theta_2}([a]_{\theta_2})) = ([c]_{\theta_1}, [c]_{\theta_2}),$$
$$f^{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2}([a]_{\theta_1}, [c]_{\theta_2}) = (f^{\mathcal{A}_1}([a]_{\theta_1}), f^{\mathcal{A}_2}([c]_{\theta_2})) = (f^{\mathcal{A}/\theta_1}([a]_{\theta_1}), f^{\mathcal{A}/\theta_2}([c]_{\theta_2})) = ([c]_{\theta_1}, [a]_{\theta_2}),$$
$$f^{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2}([c]_{\theta_1}, [a]_{\theta_2}) = (f^{\mathcal{A}_1}([c]_{\theta_1}), f^{\mathcal{A}_2}([a]_{\theta_2})) = (f^{\mathcal{A}/\theta_1}([c]_{\theta_1}), f^{\mathcal{A}/\theta_2}([a]_{\theta_2})) = ([a]_{\theta_1}, [c]_{\theta_2}),$$
$$f^{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2}([c]_{\theta_1}, [c]_{\theta_2}) = (f^{\mathcal{A}_1}([c]_{\theta_1}), f^{\mathcal{A}_2}([c]_{\theta_2})) = (f^{\mathcal{A}/\theta_1}([c]_{\theta_1}), f^{\mathcal{A}/\theta_2}([c]_{\theta_2})) = ([a]_{\theta_1}, [a]_{\theta_2}).$$

2.26. (a) Mostre que toda a álgebra finita com um número primo de elementos é diretamente indecomponível.

Seja $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra de tipo (O, τ), onde $|A| = n$, com $n \in \mathbb{N}$ e n primo. Sejam $\mathcal{A}_1 = (A_1; G)$ e $\mathcal{A}_2 = (A_2; H)$ álgebras de tipo (O, τ) tais que $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Como $\mathcal{A}$ é finita, então $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ são finitas e tem-se $|A| = |A_1 \times A_2| = |A_1| \times |A_2|$. Como $|A| = n$ e n é primo, segue que $|A_1| = 1$ ou $|A_2| = 1$; logo $\mathcal{A}_1$ é a álgebra trivial ou $\mathcal{A}_2$ é a álgebra trivial. Portanto, a álgebra $\mathcal{A}$ é diretamente indecomponível.

(b) Seja $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}})$ a álgebra tal que $A = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \leq 5\}$ e $f^{\mathcal{A}}$ é a operação unária em A definida por

$$f^{\mathcal{A}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in \{2,4\} \\ 2 & \text{se} \quad x \in \{1,3,5\} \end{cases}$$

i. Sejam θ_1 e θ_2 as congruências de $\mathcal{A}$ definidas por $\theta_1 = \Theta(1,2)$ e $\theta_2 = \Theta(3,5)$. Determine θ_1 e θ_2. Verifique que $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Con}\mathcal{A} \setminus \{\triangle_A\}$ e $\theta_1 \cap \theta_2 = \triangle_A$.

A relação $\theta_1 = \Theta(1,2)$ é a menor congruência em $\mathcal{A}$ que contém $\{(1,2)\}$. Então $(1,2) \in \Theta(1,2)$, $\Theta(1,2)$ é uma relação de equivalência (i.e. $\Theta(1,2)$ é reflexiva, simétrica e transitiva) e satistfaz a propriedade de substituição. Considerando que $\Theta(1,2)$ é reflexiva, tem-se $\triangle_A \subseteq \Theta(1,2)$. Como $(1,2) \in \Theta(1,2)$ e $\Theta(1,2)$ é simétrica, também se tem $(2,1) \in \Theta(1,2)$. Uma vez que $(1,2),(2,1) \in \Theta(1,2)$ e $\Theta(1,2)$ satisfaz a propriedade de subsituição, segue que

$$(f^{\mathcal{A}}(1), f^{\mathcal{A}}(2)) = (2,1), (f^{\mathcal{A}}(2), f^{\mathcal{A}}(1)) = (1,2) \in \Theta(1,2).$$

Assim, $\triangle_A \cup \{(1,2),(2,1)\} \subseteq \Theta(1,2)$. A relação $\triangle_A \cup \{(1,2),(2,1)\}$ é uma congruência em $\mathcal{A}$ e é a menor congruência em $\mathcal{A}$ que contém $\{(1,2)\}$; portanto $\theta_1 = \Theta(1,2) = \triangle_A \cup \{(1,2),(2,1)\}$.

De modo análogo, determina-se $\theta_2 = \Theta(3,5)$ e obtem-se $\theta_2 = \Theta(3,5) = \triangle_A \cup \{(3,5),(5,3)\}$.

Claramente, tem-se $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Con}\mathcal{A} \setminus \{\triangle_A\}$, pois $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Con}\mathcal{A}$, $\theta_1 \neq \triangle_A$ ($(1,2) \in \theta_1$ e $(1,2) \notin \triangle_A$) e $\theta_2 \neq \triangle_A$ ($(3,5) \in \theta_2$ e $(3,5) \notin \triangle_A$). Também é imediato que

$$\theta_1 \cap \theta_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\} = \triangle_A.$$

ii. Justifique que se θ e ϕ são congruências de $\mathcal{A}$ tais que $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}/\theta \times \mathcal{A}/\phi$, então $\theta = \nabla_A$ ou $\phi = \nabla_A$.

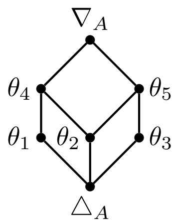
A álgebra $\mathcal{A}$ tem um número primo de elementos ($|A| = 5$). Logo, por (a), conclui-se que $\mathcal{A}$ é diretamente indecomponível. Então, se θ e ϕ são congruências de $\mathcal{A}$ tais que $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}/\theta \times \mathcal{A}/\phi$, $\mathcal{A}/\theta$ é a álgebra trivial ou $\mathcal{A}/\phi$ é a álgebra trivial. No primeiro caso, tem-se $\theta = \nabla_A$; no segundo caso tem-se $\phi = \nabla_A$.

iii. Diga, justificando, se a álgebra $\mathcal{A}$ é subdiretamente irredutível.

A álgebra $\mathcal{A}$ é subdiretamente irredutível se e só se $\mathcal{A}$ é a álgebra trivial ou $\mathrm{Con}\mathcal{A} \setminus \{\triangle_A\}$ tem elemento mínimo.

A álgebra $\mathcal{A}$ não é trivial ($|A| = 5$). Por outro lado, da alínea (b) i., sabe-se que existem $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Con}\mathcal{A} \setminus \{\triangle_A\}$ tais que $\theta_1 \cap \theta_2 = \triangle_A$ e, portanto, $\mathrm{Con}\mathcal{A} \setminus \{\triangle_A\}$ não tem elemento mínimo. Logo $\mathcal{A}$ não é subdiretamente irredutível.

2.27. Seja $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra cujo reticulado das congruências é representado pelo diagrama de Hasse seguinte

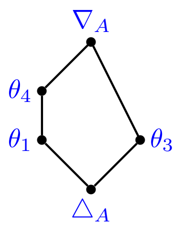


Justifique que:

(a) A álgebra $\mathcal{A}$ não é congruente-distributiva.

A álgebra $\mathcal{A}$ é congruente-distributiva se e só se $\mathrm{Con}\mathcal{A}$ é um reticulado distributivo. Um reticulado é distributivo se e só se não tem qualquer sub-reticulado isomorfo a M_3 ou a N_5.

O reticulado

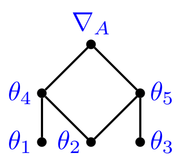


é um sub-reticulado de $\mathrm{Con}\mathcal{A}$ e é isomorfo a N_5. Logo a álgebra $\mathcal{A}$ não é congruente-distributiva.

(b) A álgebra $\mathcal{A}$ não é subdiretamente irredutível.

A álgebra $\mathcal{A}$ é subdiretamente irredutível se e só se $\mathcal{A}$ é a álgebra trivial ou $\mathrm{Con}\mathcal{A} \setminus \{\triangle_A\}$ tem elemento mínimo.

A álgebra $\mathcal{A}$ não é trivial, pois $\mathrm{Con}\mathcal{A} \setminus \{\triangle_A\} \neq \emptyset$. Além disso, o c.p.o. $\mathrm{Con}\mathcal{A} \setminus \{\triangle_A\}$

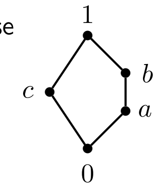


não tem elemento mínimo. Logo, a álgebra $\mathcal{A}$ não é subdiretamente irredutível.

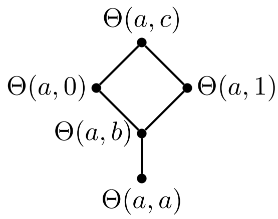
(c) Os reticulados $\mathcal{C}on\mathcal{A}/\theta_1$ e $\mathcal{C}on\mathcal{A}/\theta_3$ são isomorfos.

Pelo Teorema da Correspondência, tem-se $\mathcal{C}on\mathcal{A}/\theta_1 \cong [\theta_1, \nabla_A]$ e $\mathcal{C}on\mathcal{A}/\theta_3 \cong [\theta_3, \nabla_A]$. Como $[\theta_1, \nabla_A] \cong [\theta_3, \nabla_A]$ (pois a aplicação $\varphi : [\theta_1, \nabla_A] \to [\theta_3, \nabla_A]$, definida por $\varphi(\theta_1) = \theta_3$, $\varphi(\theta_4) = \theta_5$ e $\varphi(\nabla_A) = \nabla_A$, é um isomorfismo de c.p.o.'s), então $\mathcal{C}on\mathcal{A}/\theta_1 \cong \mathcal{C}on\mathcal{A}/\theta_3$.

2.28. Considere o reticulado $\mathcal{N}_5 = (N_5; \wedge, \vee)$ representado pelo diagrama de Hasse



Sabendo que o reticulado das congruências de $\mathcal{N}_5$ pode ser representado pelo diagrama de Hasse seguinte



diga, justificando, se a álgebra $\mathcal{N}_5$ é:

(a) Congruente-modular.

Uma álgebra $\mathcal{A}$ diz-se congruente-modular se o reticulado $\mathrm{Con}\mathcal{A}$ é modular.

O reticulado $\mathrm{Con}\mathcal{N}_5$ é modular. De facto, um reticulado é modular se e só se não tem qualquer sub-reticulado isomorfo a N_5. Então, como o único sub-reticulado de $\mathrm{Con}\mathcal{N}_5$ com 5 elementos é o próprio reticulado e este não é isomorfo a N_5, concluímos que $\mathrm{Con}\mathcal{N}_5$ é modular.

(b) Diretamente indecomponível.

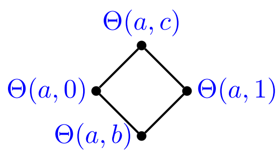
Uma álgebra $\mathcal{A} = (A; F)$ é diretamente indecomponível se e só se as únicas conguências fator de $\mathcal{A}$ são $\triangle_A$ e ∇_A. Uma congruência $\theta \in \mathrm{Con}\mathcal{A}$ diz-se uma congruência fator se existe $\theta' \in \mathrm{Con}\mathcal{A}$ tal que $\theta \circ \theta' = \theta' \circ \theta$, $\theta \vee \theta' = \nabla_A$ e $\theta \cap \theta' = \triangle_A$.

Considerando o reticulado de congruências de $\mathcal{N}_5$, conclui-se que $\triangle_{\mathcal{N}_5}$ e $\nabla_{\mathcal{N}_5}$ são as únicas congruências fator de $\mathcal{N}_5$. De facto, se $\theta_1 \in \mathrm{Con}\mathcal{N}_5$ é uma congruência fator, então existe $\theta_2 \in \mathrm{Con}\mathcal{N}_5$ tal que: $\theta_1 \cap \theta_2 = \triangle_{\mathcal{N}_5}$; $\theta_1 \vee \theta_2 = \nabla_{\mathcal{N}_5}$; $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$. Então de $\theta_1 \cap \theta_2 = \triangle_{\mathcal{N}_5}$ segue que $\theta_1 = \triangle_{\mathcal{N}_5}$ ou $\theta_2 = \triangle_{\mathcal{N}_5}$. Se $\theta_1 = \triangle_{\mathcal{N}_5}$, de $\theta_1 \vee \theta_2 = \nabla_{\mathcal{N}_5}$ resulta que $\theta_2 = \nabla_{\mathcal{N}_5}$; se $\theta_2 = \triangle_{\mathcal{N}_5}$, conclui-se de modo análogo que $\theta_2 = \nabla_{\mathcal{N}_5}$.
Logo a álgebra $\mathcal{A}$ é diretamente indecomponível.

(c) Subdiretamente irredutível.

Uma álgebra $\mathcal{A} = (A; F)$ é subdiretamente irredutível se e só se $\mathrm{Con}\mathcal{A} \setminus \{\triangle_A\}$ tem elemento mínimo.

Considerando que $\mathrm{Con}\mathcal{N}_5 \setminus \{\triangle_A\}$ é o c.p.o. a seguir representado



conclui-se que $\mathrm{Con}\mathcal{N}_5 \setminus \{\triangle_A\}$ tem elemento mínimo (sendo esse elemento mínimo a congruência $\Theta(a, b)$. Logo o reticulado $\mathcal{N}_5$ é subdiretamente irredutível.

2.29. Mostre que toda a cadeia é um reticulado diretamente indecomponível.

Uma $\mathcal{A}$ uma álgebra diz-se diretamente indecomponível se sempre que $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$, então uma das álgebras $\mathcal{A}_1$ ou $\mathcal{A}_2$ é uma álgebra trivial.

Sejam $\mathcal{R} = (R; \wedge^{\mathcal{R}}, \vee^{\mathcal{R}})$ uma cadeia e $\mathcal{A}_1 = (A_1; \wedge^{\mathcal{A}_1}, \vee^{\mathcal{A}_1})$, $\mathcal{A}_2 = (A_2; \wedge^{\mathcal{A}_2}, \vee^{\mathcal{A}_2})$ álgebras do tipo $(2, 2)$ tais que $\mathcal{R} \cong \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Então existe um isomorfismo $\alpha : \mathcal{R} \to \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Uma vez que $\mathcal{R}$ é um reticulado e $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ é uma imagem homomorfa de $\mathcal{R}$, a álgebra $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ é um reticulado. Para cada $i \in \{1, 2\}$, tem-se

$\mathcal{A}_i = p_i(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$, onde $p_i : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_i$ é o homomorfismo projeção. Logo as álgebras $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ também são reticulados. No sentido de provarmos, por redução ao absurdo, que $\mathcal{R}$ é subdiretamente irredutível, admitamos que nenhuma das álgebras $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ é uma álgebra trivial. Então $|A_1|, |A_2| \geq 2$ e, portanto, existem $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in A_1 \times A_2$ tais que (a_1, a_2) e (b_1, b_2) são incomparáveis em $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Logo $(a_1, a_2) \wedge_{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2} (b_1, b_2) \notin \{(a_1, a_2), (b_1, b_2)\}$. Considerando que α é um epimorfismo, existem $x_1, x_2 \in R$ tais que $\alpha(x_1) = (a_1, a_2)$ e $\alpha(x_2) = (b_1, b_2)$. Como $\mathcal{R}$ é uma cadeia, os elementos x_1, x_2 são comparáveis. Admitamos, sem perda de generalidade, que $x_1 \leq x_2$. Então $x_1 \wedge^{\mathcal{R}} x_2 = x_1$, donde segue que

$$\alpha(x_1 \wedge^{\mathcal{R}} x_2) = \alpha(x_1) = (a_1, a_2) \neq (a_1, a_2) \wedge_{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2} (b_1, b_2),$$

o que contradiz a hipótese de que α é um homomorfismo. Por conseguinte, uma das álgebras $\mathcal{A}_1$ ou $\mathcal{A}_2$ tem de ser uma álgebra trivial, ficando provado que $\mathcal{R}$ é diretamente indecomponível.

2.30. Mostre que, para cada operador $O \in \{H, S\}$, $IO = OI$.

$[SI = IS]$

Pretende-se provar que, para qualquer classe de álgebras $\mathbf{K}$, $SI(\mathbf{K}) = IS(\mathbf{K})$.

Seja $\mathbf{K}$ uma classe de álgebras.

Comecemos por mostrar $SI(\mathbf{K}) \subseteq IS(\mathbf{K})$. Seja $\mathcal{A} \in SI(\mathbf{K})$. Então $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$, para alguma álgebra $\mathcal{B} \in \mathbf{I}(K)$. Uma vez que $\mathcal{B} \in I(\mathbf{K})$, tem-se $\mathcal{B} = \alpha(\mathcal{C})$, para alguma álgebra $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$ e algum isomorfismo $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$. Atendendo a que $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ é um isomorfismo, $\alpha^{-1} : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ é também um isomorfismo. Como $\mathcal{A}$ é uma subálgebra de $\mathcal{B}$, $\alpha^{-1}(\mathcal{A})$ é uma subálgebra de $\mathcal{C}$. Então, como $\alpha(\alpha^{-1}(\mathcal{A})) = \mathcal{A}$, tem-se $\mathcal{A} \in IS(\mathbf{K})$.

Mostremos que também temos $IS(\mathbf{K}) \subseteq SI(\mathbf{K})$. Seja $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra de tipo (O, τ) tal que $\mathcal{A} \in IS(\mathbf{K})$. Então $\mathcal{A} = \alpha(\mathcal{B})$, para alguma álgebra $\mathcal{B} \in S(K)$ e algum isomorfismo $\alpha : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Como $\mathcal{B} \in S(\mathbf{K})$, tem-se $\mathcal{B} \leq \mathcal{C}$, para alguma álgebra $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$. Pretendemos mostrar que $\mathcal{A} \in SI(\mathbf{K})$. Admitamos, sem perda de generalidade, que $A \cap C = \emptyset$ (se $A \cap C \neq \emptyset$, considera-se uma álgebra $\mathcal{C}' = (C'; G)$ isomorfa a $\mathcal{C}$ e tal que $C' \cap A = \emptyset$). Consideremos $D = A \cup (C \setminus B)$ e a aplicação $\delta : C \to D$ defnida por

$$\delta(c) = \begin{cases} \alpha(c) & \text{se } c \in B \\ c & \text{se } c \in C \setminus B \end{cases}$$

A aplicação δ é uma bijeção. Seja $\mathcal{D} = (D; (f^{\mathcal{D}})_{f \in O})$ a álgebra de tipo (O, τ) onde, para cada cada símbolo $f \in O_n$, $f^{\mathcal{D}} : D^n \to D$ é a função definida por

$$f^{\mathcal{D}}(d_1, \ldots, d_n) = \delta(f^{\mathcal{C}}(\delta^{-1}(d_1), \ldots, \delta^{-1}(d_n)).$$

A aplicação δ é um isomorfismo de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{D}$. Além disso, a álgebra $\alpha(\mathcal{B})$ é uma subálgebra de $\mathcal{D}$. Assim, uma vez que $\mathcal{A} = \alpha(\mathcal{B})$, $\alpha(\mathcal{B}) \leq \mathcal{D}$, $\mathcal{D} \cong \mathcal{C}$ e $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$, concluímos que $\mathcal{A} \in SI(\mathbf{K})$. Logo, $IS(\mathbf{K}) \subseteq SI(\mathbf{K})$.

Desta forma, provámos que $SI = IS$.

$[HI = IH]$

Seja $\mathcal{A} \in IH(\mathbf{K})$. Então $\mathcal{A} = \alpha(\mathcal{B})$, para alguma álgebra $\mathcal{B} \in H(\mathbf{K})$ e algum isomorfismo $\alpha : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Como $\mathcal{B} \in H(K)$, então $\mathcal{B} = \delta(\mathcal{C})$, para alguma álgebra $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$ e algum epimorfismo $\delta : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$. Assim, $\mathcal{A} = \alpha(\delta(\mathcal{C})) = (\alpha \circ \delta)(\mathcal{C})$. Como $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$ e $\alpha \circ \delta$ é um homomorfismo, então $\mathcal{A} \in H(\mathbf{K})$. Uma vez que $id_C(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, segue que $\mathcal{A} = (\alpha \circ \delta)(id_C(\mathcal{C}))$. Assim, considerando que $id_C : C \to C$ é um isomorfismo de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}$, tem-se $\mathcal{A} \in HI(\mathbf{K})$). Logo $IH(\mathbf{K}) \subseteq HI(\mathbf{K})$.

Mostremos que também temos $HI(\mathbf{K}) \subseteq IH(\mathbf{K})$. Seja $\mathcal{A} \in HI(\mathbf{K})$. Então $\mathcal{A} = \alpha(\mathcal{B})$, para alguma álgebra $\mathcal{B} \in I(\mathbf{K})$ e algum epimorfismo $\alpha : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Como $\mathcal{B} \in I(K)$, então $\mathcal{B} = \delta(\mathcal{C})$, para alguma álgebra $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$ e algum isomorfismo $\delta : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$. Assim, $\mathcal{A} = \alpha(\delta(\mathcal{C})) = (\alpha \circ \delta)(\mathcal{C})$. Como $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$ e $\alpha \circ \delta$ é um homomorfismo, tem-se $\mathcal{A} \in H(\mathbf{K})$. Como $id_A(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, segue que $\mathcal{A} = id_A((\alpha \circ \delta)(\mathcal{C}))$. Então, considerando que $id_A : A \to A$ é um isomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}$, conclui-se que $\mathcal{A} \in IH(\mathbf{K})$). Logo $HI(\mathbf{K}) \subseteq IH(\mathbf{K})$.

2.31. Mostre que os operadores S, I, H e IP são idempotentes.

$[S^2 = S]$

Pretendemos provar que $S^2 = S$, ou seja, pretende-se mostrar que, para toda a classe de álgebras $\mathbf{K}$, $SS(\mathbf{K}) = S(\mathbf{K})$.

Seja $\mathbf{K}$ uma classe de álgebras. Uma vez que, para qualquer operador $O \in \{S, H, I, P, P_s\}$ e para qualquer classe de álgebras $\mathbf{K}'$, tem-se $\mathbf{K}' \subseteq O(\mathbf{K}')$, vem que $S(\mathbf{K}) \subseteq S(S(\mathbf{K})) = SS(\mathbf{K})$.
Resta provar que $SS(\mathbf{K}) \subseteq S(\mathbf{K})$. Seja $\mathcal{A} \in SS(\mathbf{K}) = S(S(\mathbf{K}))$. Então $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$, para alguma álgebra $\mathcal{B} \in S(\mathbf{K})$. Como $B \in S(\mathbf{K})$, tem-se $B \leq \mathcal{C}$, para alguma álgebra $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$. Por conseguinte, $\mathcal{A} \leq \mathcal{C}$, para alguma álgebra $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$. Assim, $\mathcal{A} \in S(\mathbf{K})$.
Desta forma, provámos que $SS(\mathbf{K}) = S(\mathbf{K})$.

$[I^2 = I]$

Pretendemos provar que $I^2 = I$, ou seja, pretende-se mostrar que, para toda a classe de álgebras $\mathbf{K}$, $II(\mathbf{K}) = I(\mathbf{K})$.
Seja $\mathbf{K}$ uma classe de álgebras. Uma vez que, para qualquer operador $O \in \{S, H, I, P, P_s\}$ e para qualquer classe de álgebras $\mathbf{K}'$, tem-se $\mathbf{K}' \subseteq O(\mathbf{K}')$, vem que $I(\mathbf{K}) \subseteq I(I(\mathbf{K})) = II(\mathbf{K})$.
Resta provar que $II(\mathbf{K}) \subseteq I(\mathbf{K})$. Seja $\mathcal{A} \in II(\mathbf{K}) = I(I(\mathbf{K}))$. Então $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, para alguma álgebra $\mathcal{B} \in I(\mathbf{K})$. Logo $\mathcal{A} = \alpha(\mathcal{B})$ para algum isomorfismo $\alpha : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Como $\mathcal{B} \in I(\mathbf{K})$, tem-se $B \cong \mathcal{C}$, para alguma álgebra $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$. Por conseguinte, $\mathcal{B} = \beta(\mathcal{C})$ para algum isomorfismo $\beta : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$. A composição de isomorfismos, desde que esteja definida, é um isomorfismo. Assim, $\alpha \circ \beta : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ é um isomorfismo. Logo, como $\mathcal{A} = (\alpha \circ \beta)(\mathcal{C})$, tem-se $\mathcal{A} \cong \mathcal{C}$ e, portanto, $\mathcal{A} \in I(\mathbf{K})$.
Desta forma, provámos que $II(\mathbf{K}) = I(\mathbf{K})$.

$[H^2 = H]$

Pretendemos provar que $H^2 = H$, ou seja, pretende-se mostrar que, para toda a classe de álgebras $\mathbf{K}$, $HH(\mathbf{K}) = H(\mathbf{K})$.
Seja $\mathbf{K}$ uma classe de álgebras. Uma vez que, para qualquer operador $O \in \{S, H, I, P, P_s\}$ e para qualquer classe de álgebras $\mathbf{K}'$, tem-se $\mathbf{K}' \subseteq O(\mathbf{K}')$, vem que $H(\mathbf{K}) \subseteq H(H(\mathbf{K})) = HH(\mathbf{K})$.
Resta provar que $HH(\mathbf{K}) \subseteq H(\mathbf{K})$. Seja $\mathcal{A} \in HH(\mathbf{K}) = H(H(\mathbf{K}))$. Então $\mathcal{A} = \alpha(\mathcal{B})$ para algum epimorfismo $\alpha : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ e para alguma álgebra $\mathcal{B} \in H(\mathbf{K})$. Como $\mathcal{B} \in H(\mathbf{K})$, tem-se $\mathcal{B} = \beta(\mathcal{C})$ para algum epimorfismo $\beta : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ e para alguma álgebra $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$. A composição de epimorfismos, desde que esteja definida, é um epimorfismo. Assim, $\alpha \circ \beta : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ é um epimorfismo. Logo, como $\mathcal{A} = (\alpha \circ \beta)(\mathcal{C})$, tem-se $\mathcal{A} \in H(\mathbf{K})$.
Desta forma, provámos que $HH(\mathbf{K}) = H(\mathbf{K})$.

$[(IP)^2 = IP]$

Pretendemos mostrar que, para qualquer classe de álgebras $\mathbf{K}$, $IPIP(\mathbf{K}) = IP(\mathbf{K})$.

Seja $\mathbf{K}$ uma classe de álgebras. Uma vez que, para qualquer operador $O \in \{S, H, I, P, P_s\}$ e para qualquer classe de álgebras $\mathbf{K}'$, tem-se $\mathbf{K}' \subseteq O(\mathbf{K}')$, vem que $IP(\mathbf{K}) \subseteq IPIP(\mathbf{K})$.

Resta mostrar que $IPIP(\mathbf{K}) \subseteq IP(\mathbf{K})$. Considerando que $PI \leq IP$, tem-se $IPIP \leq IIPP$. Então, como I é idempotente, segue que $IPIP \leq IPP$. Assim, para provar que $IPIP(\mathbf{K}) \subseteq IP(\mathbf{K})$, basta mostrar que $IPP(\mathbf{K}) \subseteq IP(\mathbf{K})$.

Seja $\mathbf{K}$ uma classe de álgebras. Se $\mathcal{A} \in IPP(\mathbf{K})$, tem-se $\mathcal{A} = \alpha(\mathcal{B})$ para alguma álgebra $\mathcal{B} \in PP(\mathbf{K})$ e algum isomorfismo $\alpha : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Como $\mathcal{B} \in PP(\mathbf{K})$, tem-se $\mathcal{B} = \prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$ onde, para todo $i \in I$, $\mathcal{C}_i \in P(\mathbf{K})$. Considerando que $\mathcal{C}_i \in P(\mathbf{K})$, tem-se $\mathcal{C}_i = \prod_{j \in J_i} \mathcal{D}_{i,j}$ onde, para todo $i \in I$ e $j \in J_i$, $\mathcal{D}_{i,j} \in \mathbf{K}$. Assim,

$$\mathcal{B} = \prod_{i \in I} \Big(\prod_{j \in J_i} \mathcal{D}_{i,j} \Big).$$

A correspondência

$$\delta : \prod_{s \in \bigcup_{i \in I} (\bigcup_{j \in J_i} \{(i,j)\})} D_s \to \prod_{i \in I} \Big(\prod_{j \in J_i} D_{i,j} \Big)$$

definida por

$$\delta(d) = ((d(i,j) \,|\, j \in J_i) \,|\, i \in I)$$

é um isomorfismo de $\prod_{s \in \bigcup_{i \in I} (\bigcup_{j \in J_i} \{(i,j)\})} D_s$ em $\prod_{i \in I} \Big(\prod_{j \in J_i} \mathcal{D}_{(i,j)} \Big)$.

Assim, $\mathcal{A} = (\alpha \circ \delta)(\prod_{s \in \bigcup_{i \in I} (\bigcup_{j \in J_i} \{(i,j)\})})$. Como α e δ são isomorfismos, $\alpha \circ \delta$ é um isomorfismo. Então, como $\prod_{s \in \bigcup_{i \in I} (\bigcup_{j \in J_i} \{(i,j)\})} \in P(\mathbf{K})$, tem-se $\mathcal{A} \in IP(\mathbf{K})$.

Logo, $IPP \leq IP$. Portanto, $IPIP \leq IP$.

2.32. Mostre que HS, HIP e SIP são operadores de fecho em classes de álgebras do mesmo tipo.

Mostremos que HIP é um operador de fecho. Pretendemos mostrar que, para quaisquer classes de álgebras $\mathbf{K}_1$ e $\mathbf{K}_2$:

(1) $\mathbf{K}_1 \subseteq HIP(\mathbf{K}_1)$;

(2) $(HIP)^2(\mathbf{K}_1) \subseteq HIP(\mathbf{K}_1)$;

(3) $\mathbf{K}_1 \subseteq \mathbf{K}_2 \Rightarrow HIP(\mathbf{K}_1) \subseteq HIP(\mathbf{K}_2)$.

Prova de (1): Para qualquer operador $O \in \{S, H, I, P, P_s\}$ e para qualquer classe de álgebras $\mathbf{K}'$, tem-se $\mathbf{K}' \subseteq O(\mathbf{K}')$. Logo, para qualquer classe de álgebras $\mathbf{K}_1$, tem-se $\mathbf{K}_1 \subseteq P(\mathbf{K}_1)$, $P(\mathbf{K}_1) \subseteq IP(\mathbf{K}_1)$ e $IP(\mathbf{K}_1) \subseteq HIP(\mathbf{K}_1)$. Assim, $\mathbf{K}_1 \subseteq HIP(\mathbf{K}_1)$.

Prova de (2): Para qualquer classe de álgebras $\mathbf{K}_1$, tem-se

$$HIPHIP(\mathbf{K}_1) \overset{(i)}{\subseteq} HIHPIP(\mathbf{K}_1) \overset{(ii)}{=} HHIPIP(\mathbf{K}_1) \overset{(iii)}{=} HIPIP(\mathbf{K}_1) \overset{(iv)}{=} HIP(\mathbf{K}_1).$$

(i) $PH \leq HP$; (ii) $HI = IH$; (iii) $H^2 = H$; (iv) $(IP)^2 = IP$.

Prova de (3): Para qualquer operador $O \in \{S, H, I, P, P_s\}$ e para quaisquer classes de álgebras $\mathbf{K}$ e $\mathbf{K}'$,

$$\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}' \Rightarrow O(\mathbf{K}) \subseteq O(\mathbf{K}').$$

Assim, para quaisquer classes de álgebras $\mathbf{K}_1$ e $\mathbf{K}_2$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 \subseteq \mathbf{K}_2 \quad &\Rightarrow \quad P(\mathbf{K}_1) \subseteq P(\mathbf{K}_2) \\ &\Rightarrow \quad IP(\mathbf{K}_1) \subseteq IP(\mathbf{K}_2) \\ &\Rightarrow \quad HIP(\mathbf{K}_1) \subseteq HIP(\mathbf{K}_2). \end{aligned}$$

De (1), (2) e (3), conclui-se que HIP é um operador de fecho.

De modo semelhante prova-se que HS e SIP são operadores de fecho.

2.33. Mostre que $SH \neq HS$, $PS \neq SP$, $PH \neq HP$.

$[SH \neq HS]$

Como $SH \leq HS$, temos de provar que $HS \not\leq SH$. Sendo assim, tem de se provar que existe uma classe de álgebras $\mathbf{K}$ tal que $HS(\mathbf{K}) \not\subseteq SH(\mathbf{K})$.

Seja $\mathbf{K} = \{\mathcal{Q}\}$ com $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}; +^{\mathcal{Q}}, \cdot^{\mathcal{Q}}, -^{\mathcal{Q}}, 0^{\mathcal{Q}}, 1^{\mathcal{Q}})$, onde $+^{\mathcal{Q}}$, $\cdot^{\mathcal{Q}}$, $-^{\mathcal{Q}}$ são as operações usuais em $\mathbb{Q}$, $0^{\mathcal{Q}} = 0$ e $1^{\mathcal{Q}} = 1$. Se $\mathcal{B}$ é uma álgebra homomorfa de $\mathcal{Q}$, então $\mathcal{B}$ é uma álgebra isomorfa a $\mathcal{Q}$ ou é uma álgebra trivial. Assim,

$$H(\{\mathcal{Q}\}) = I(\{\mathcal{Q}\}) \cup \{\mathcal{B} = (B; F) \,|\, \mathcal{B} \text{ é uma álgebra do mesmo tipo da álgebra } \mathcal{Q} \text{ e } |B| = 1\}.$$

Consideremos as álgebras

$\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}; +^{\mathcal{Z}}, \cdot^{\mathcal{Z}}, -^{\mathcal{Z}}, 0^{\mathcal{Z}}, 1^{\mathcal{Z}})$, onde $+^{\mathcal{Z}}$, $\cdot^{\mathcal{Z}}$, $-^{\mathcal{Z}}$ são as operações usuais em $\mathbb{Z}$, $0^{\mathcal{Z}} = 0$ e $1^{\mathcal{Z}} = 1$

e

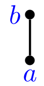
$\mathcal{Z}_2 = (\mathbb{Z}_2; +^{\mathcal{Z}_2}, \cdot^{\mathcal{Z}_2}, -^{\mathcal{Z}_2}, 0^{\mathcal{Z}_2}, 1^{\mathcal{Z}_2})$, onde $+^{\mathcal{Z}_2}$, $\cdot^{\mathcal{Z}_2}$, $-^{\mathcal{Z}_2}$ são as operações usuais em $\mathbb{Z}_2$, $0^{\mathcal{Z}_2} = \overline{0}$ e $1^{\mathcal{Z}_2} = \overline{1}$.

Uma vez que $\mathcal{Z} \in S(\{\mathcal{Q}\})$ e $\mathcal{Z}_2 \in H(\{\mathcal{Z}\})$, tem-se $\mathcal{Z}_2 \in HS(\{\mathcal{Q}\})$. No entanto, $\mathcal{Z}_2 \notin SH(\{\mathcal{Q}\})$ (se $\mathcal{C} \in SH(\{\mathcal{Q}\})$, então $\mathcal{C}$ é uma álgebra trivial ou é uma álgebra infinita).

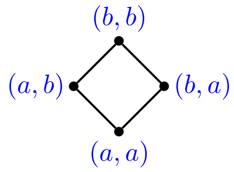
Logo $HS(\mathbf{K}) \not\subseteq SH(\mathbf{K})$.

$[PS \neq SP]$

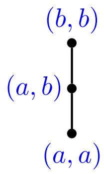
Uma vez que $PS \leq SP$, temos de provar que $SP \not\leq PS$, ou seja, é necessário mostrar que existe uma classe de álgebras $\mathbf{K}$ tal que $SP(\mathbf{K}) \not\subseteq PS(\mathbf{K})$.

Seja $\mathbf{K} = \{\mathbf{2}\}$ onde $\mathbf{2} = (\{a, b\}; \wedge, \vee)$ é o reticulado representado por 

O reticulado $R_1 = \mathbf{2} \times \mathbf{2}$ a seguir representado



é um elemento de $P(\mathbf{K})$. Assim, o reticulado R_2 representado por



é um elemento de $SP(\mathbf{K})$.

O reticulado R_2 não é um elemento de $PS(\mathbf{K})$. De facto, se $R' = (R'; \wedge^{R'}, \vee^{R'})$ é um elemento de $S(\mathbf{K})$, então $|R'| \in \{1, 2\}$. Logo, para todo $R'' = (R''; \wedge^{R''}, \vee^{R''}) \in PS(\mathbf{K})$, tem-se $|R''| \neq 3$.

Portanto, $SP(\mathbf{K}) \nsubseteq PS(\mathbf{K})$.

$[PH \neq HP]$

Uma vez que $PH \leq HP$, temos de provar que $HP \nleq PH$, ou seja, é necessário mostrar que existe uma classe de álgebras $\mathbf{K}$ tal que $HP(\mathbf{K}) \nsubseteq PH(\mathbf{K})$.

Consideremos as álgebras

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_2 &= (\mathbb{Z}_2; +^{\mathcal{Z}_2}, -^{\mathcal{Z}_2}, 0^{\mathcal{Z}_2}), \\ \mathcal{Z}_3 &= (\mathbb{Z}_3; +^{\mathcal{Z}_3}, -^{\mathcal{Z}_3}, 0^{\mathcal{Z}_3}), \\ \mathcal{Z}_6 &= (\mathbb{Z}_6; +^{\mathcal{Z}_6}, -^{\mathcal{Z}_6}, 0^{\mathcal{Z}_6}) \end{aligned}$$

do tipo $(2, 1, 0)$, onde, para cada $p \in \{2, 3, 6\}$, $+^{\mathcal{Z}_p}, -^{\mathcal{Z}_p}, 0^{\mathcal{Z}_p}$ representam as operações usuais em $\mathbb{Z}_p$.

Seja $\mathbf{K} = \{\mathcal{Z}_2, \mathcal{Z}_3\}$. Tem-se

$$H(\mathbf{K}) = I(\mathbf{K}) \cup \{\mathcal{A} = (A; F) \,|\, \mathcal{A} \text{ é uma álgebra do mesmo tipo da álgebra } \mathcal{A} \text{ e } |A| = 1\}.$$

Como $\mathcal{Z}_2 \times \mathcal{Z}_3 \in P(\mathbf{K})$ e $\mathcal{Z}_6 \cong \mathcal{Z}_2 \times \mathcal{Z}_3$, $\mathcal{Z}_6 \in HP(\mathbf{K})$. No entanto, $\mathcal{Z}_6 \notin PH(\mathbf{K})$.

Logo $HP(\mathbf{K}) \nsubseteq PH(\mathbf{K})$.

2.34. Mostre que, se $\mathbf{G}$ é a classe dos grupos abelianos, então $HS(\mathbf{G}) = SH(\mathbf{G})$.

Todo o sugbrupo de um grupo abeliano é um grupo abeliano e todo o grupo é um subgrupo de si mesmo. Assim, $S(\mathbf{G}) = \mathbf{G}$.

Todo o grupo abeliano é imagem epimorfa de si mesmo e toda a imagem epimorfa de um grupo abeliano é um grupo abeliano. Logo $H(\mathbf{G}) = \mathbf{G}$.

Portanto,

$$HS(\mathbf{G}) = H(S(\mathbf{G})) = H(\mathbf{G}) = \mathbf{G} = S(\mathbf{G}) = (S(H(\mathbf{G})) = SH(\mathbf{G}).$$

2.35. Sejam A_1, A_2, ..., A_n álgebras do mesmo tipo. Prove que $V(A_1, A_2, ..., A_n) = V(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n)$.

Sejam $V_1 = V(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, ..., \mathcal{A}_n)$ e $V_2 = V(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \cdots \times \mathcal{A}_n)$.

Por definição, V_1 é a menor variedade que contém $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n\}$. Então, como $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n \in V_1$ e V_1 é fechada para a formação de produtos diretos, tem-se $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \ldots \times \mathcal{A}_n \in V_1$. Mas V_2 é a menor variedade que contém $\{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \cdots \times \mathcal{A}_n\}$, pelo que $V_2 \subseteq V_1$.

Por outro lado, V_2 é a menor variedade que contém $\{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \ldots \times \mathcal{A}_n\}$. Então, como V_2 é fechada para a formação de imagens homomorfas vem que, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $p_i(\mathcal{A}_2 \times \mathcal{A}_2 \times \cdots \times \mathcal{A}_n) = \mathcal{A}_i \in V_2$. Como $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n\} \subseteq V_2$ e V_1 é a menor variedade que contém $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n\}$, conclui-se que $V_1 \subseteq V_2$.

Logo $V_1 = V_2$.