Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Álgebra Linear LCC Teste 1 Duração: 1h45 [Teste modelo B]

Universidade do Minho
Escola de Ciências

Nome: ______________________ **Número:** ________

Grupo I

Em cada questão deste grupo deve ser assinalada apenas uma das opções de resposta. A uma resposta correta é atribuída uma cotação de 1.25 valores (apenas uma resposta está correta) e a uma resposta errada é atribuída uma cotação de -0.25 valores. A cotação mínima total deste grupo é de 0 valores.

1. As matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ c & 0 \end{bmatrix}$

   - ☐ são comutáveis para qualquer $c \in \mathbb{R}$.
   - ☐ são comutáveis se $c = -1$.
   - ☐ nunca são comutáveis.
   - ☐ são ambas elementares quando $c = 0$.

2. Para as matrizes $A \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathcal{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$,

   - ☐ AB e BA estão bem definidas.
   - ☐ $A^T B^T$ está bem definida.
   - ☐ $A + B^T$ pode ser calculada.
   - ☐ $AB \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$.

3. Se A é um matriz quadrada tal que $A^2 = I_n$, então

   - ☐ A é invertível e $A^{-1} = -A$.
   - ☐ A não é invertível.
   - ☐ A é invertível e $A^{-1} = A$.
   - ☐ $\det(A) = 1$.

4. Se A é uma matriz de ordem 4 tal que $\det(A) = 2$, então

   - ☐ $\det(-A) = -2$.
   - ☐ $\det\left(\left(A^T\right)^{-1}\right) = 2$
   - ☐ $\det(2A^T) = 4$.
   - ☐ $\det(A^{-1}A^T) = 1$.

5. Se $[A|\boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -5 & b_1 \\ 0 & 2 & 4 & b_2 \\ -1 & -2 & 1 & b_3 \end{array}\right]$ é a matriz ampliada de um sistema de equações lineares tal que $(1, 1, 1)$ é solução desse sistema, então

   - ☐ $\text{car}(A) = 2$ e $\text{car}(A|\boldsymbol{b}) = 3$.
   - ☐ $(b_1, b_2, b_3) = (1, 1, 1)$.
   - ☐ $b_1 = 1$, $b_2 = 6$ e $b_3 = -2$.
   - ☐ $\text{car}(A) > \text{car}(A|\boldsymbol{b})$.

6. Se $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & \alpha - 2 & \beta \end{array}\right]$ é a matriz ampliada de um sistema de equações lineares, com α e β parâmetros reais, então

   - ☐ o sistema é possível determinado se e só se $\alpha \neq 3$.
   - ☐ o sistema é possível e indeterminado se $\alpha = 2$ e $\beta = 0$.
   - ☐ o sistema é sempre possível.
   - ☐ o sistema é impossível se $\alpha = 3$.

Grupo II

Neste grupo as respostas a todos as questões devem ser devidamente justificadas.

1. [1.5 valores] Sendo A uma matriz quadrada de ordem n invertível, verifique que a equação matricial na variável X
$$A + AX = 3I_n$$
tem solução $X = 3A^{-1} - I_n$.

2. [3.5 valores] Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares nas incógnitas x, y, z e w com a seguinte matriz simples e vetor dos termos independentes:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ \beta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \beta \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha\beta \end{bmatrix}.$$
   (a) Use o método de eliminação de Gauss para resolver o sistema no caso em que $\alpha = \beta = 1$.
   (b) Considere o caso em que $\beta = 0$ e $\alpha = 2$. Verifique que o sistema é um sistema possível e indeterminado. Apresente a solução geral do sistema e duas soluções particulares.

3. [3 valores] Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.
   (a) Verifique que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
   (b) Use A^{-1} para resolver o sistema de equações lineares
      i. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ com $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$.
      ii. $2A^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ com $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}^T$.

4. [3 valores] Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.
   (a) Calcule o determinante de A e conclua que A é invertível.
   (b) Use a regra de Cramer para resolver o sistema $A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, calculando assim a terceira coluna de A^{-1}.
   (c) Determine a terceira coluna da matriz $\operatorname{adj}(A)$ usando o resultado da alínea (b).

5. [1.5 valores] Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, com $n \geq 2$, matrizes invertíveis. Mostre que
$$\operatorname{adj}(AB) = \operatorname{adj}(B) \cdot \operatorname{adj}(A).$$