10ª aula

5 de maio de 2021 11:00

4. Indique, justificando, qual é a linguagem gerada pela gramática:

(e) $\mathcal{G}_5 = (V,\ A,\ \mathcal{S},\ P)$ definida por:

$$V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\} \qquad A = \{b, c, d\}$$

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{S} & \to & \mathcal{BC} \\ \mathcal{B} & \to & b\mathcal{B} \mid \varepsilon \\ \mathcal{C} & \to & c\mathcal{C}d \mid \mathcal{D} \\ \mathcal{D} & \to & \mathcal{D}d \mid d \end{array}$$

$L(\mathcal{G}_5) = L(\mathcal{S}) = L(\mathcal{B}) \cdot L(\mathcal{C})$

$L(\mathcal{B}) = b\,L(\mathcal{B}) \cup \{\varepsilon\}$
$= b(b\,L(\mathcal{B}) \cup \{\varepsilon\}) \cup \{\varepsilon\} = b^2 L(\mathcal{B}) \cup \{b\} \cup \{\varepsilon\} = b^2 L(\mathcal{B}) \cup \{b, \varepsilon\}$
$= b^2(b\,L(\mathcal{B}) \cup \{\varepsilon\}) \cup \{b, \varepsilon\} = b^3 L(\mathcal{B}) \cup \{b^2\} \cup \{b, \varepsilon\} = b^3 L(\mathcal{B}) \cup \{b^2, b, \varepsilon\}$

Iterando $L(\mathcal{B}) = b^n L(\mathcal{B}) \cup \{b^{n-1}, \dots, \varepsilon\}$

Então, se $u \in L(\mathcal{B})$ e $|u| = k$, $u \in \{b^k, \dots, \varepsilon\}$ pois
$L(\mathcal{B}) = b^{k+1} L(\mathcal{B}) \cup \{b^k, \dots, \varepsilon\}$ e se $w \in b^{k+1} L(\mathcal{B})$ então $|w| \geq k+1$.
Logo $u = b^k$. Assim, conclui-se que qualquer palavra de $L(\mathcal{B})$ é da forma b^k com $k \in \mathbb{N}_0$. Logo $L(\mathcal{B}) = b^*$.

$L(\mathcal{C}) = c\,L(\mathcal{C})\,d \cup L(\mathcal{D})$
$= c(c\,L(\mathcal{C})d \cup L(\mathcal{D}))d \cup L(\mathcal{D}) = c^2 L(\mathcal{C}) d^2 \cup c\,L(\mathcal{D})d \cup L(\mathcal{D})$
$= c^2(c\,L(\mathcal{C})d \cup L(\mathcal{D}))d^2 \cup c\,L(\mathcal{D})d \cup L(\mathcal{D})$
$= c^3 L(\mathcal{C}) d^3 \cup c^2 L(\mathcal{D}) d^2 \cup c\,L(\mathcal{D})d \cup L(\mathcal{D})$

Iterando, na etapa n ($n \in \mathbb{N}$), obtém-se
$$L(\mathcal{C}) = c^n L(\mathcal{C}) d^n \cup \left(\bigcup_{0 \leq k < n} c^k L(\mathcal{D}) d^k \right)$$
$$= \underbrace{c^n L(\mathcal{C}) d^n} \cup \left(\bigcup \{ c^k L(\mathcal{D}) d^k : 0 \leq k < n \} \right)$$

Se $w \in c^n L(\mathcal{C}) d^n$, então $|w| \geq 2n$. Assim, se $u \in L(\mathcal{C})$ e em que $|u| < 2n$, $u \in \bigcup_{0 \leq k < n} c^k L(\mathcal{D}) d^k$.

Logo $L(\mathcal{C}) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} c^k L(\mathcal{D}) d^k$.

Fazendo um estudo análogo ao efetuado para a variável $\mathcal{B}$, po_ demos concluir que $L(\mathcal{D}) = \{d^n : n \in \mathbb{N}\} = d^+$

Finalmente,

$$L(\mathcal{S}) = b^* \cdot \{c^k d^n d^k : k \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}\} =$$
$$= b^* \{c^k d^{n+k} : k \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}\} =$$
$$= b^* \{c^k d^{k'} \quad k \in \mathbb{N}_0, k < k', k' \in \mathbb{N}$$
$$= \{b^m c^k d^{k'} : m, k \in \mathbb{N}_0, k' \in \mathbb{N}, k < k'$$

5. Considerando as gramáticas definidas no exercício 4, elabore derivações que justifiquem que:

   (a) $a(ba)^3 \in L(\mathcal{G}_1)$;
   (b) $(b^2a)^2bab^5 \in L(\mathcal{G}_2)$;
   (c) $(ab)^2c^3d^3c^2 \in L(\mathcal{G}_3)$;
   (d) $a^2b^2c^3,\ a^3b^2c^2 \in L(\mathcal{G}_4)$;
   (e) $b^3c^2d^3,\ b^2c^3d^5 \in L(\mathcal{G}_5)$.

(a) $\mathcal{G}_1 = (\{\mathcal{S}, \mathcal{A}\}, \{a, b\}, \mathcal{S}, P)$ com produções

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\to a\mathcal{A}bab\mathcal{A}a \\ \mathcal{A} &\to \mathcal{A}a \mid \mathcal{A}b \mid \varepsilon \end{aligned}$$

$\cancel{a}\ b\cancel{a}\ b\cancel{a}\ b\cancel{a}$

$\mathcal{S} \Rightarrow a\mathcal{A}bab\mathcal{A}a \Rightarrow a\varepsilon bab\mathcal{A}a \Rightarrow abab\mathcal{A}ba \Rightarrow abab\mathcal{A}a\,ba \Rightarrow ababε aba = a(ba)^3$

logo $\mathcal{S} \overset{*}{\Rightarrow} a(ba)^3$ pelo que $a(ba)^3 \in L(\mathcal{G}_1)$.

e) $\mathcal{G}_5 = (V,\ A,\ \mathcal{S},\ P)$ definida por:

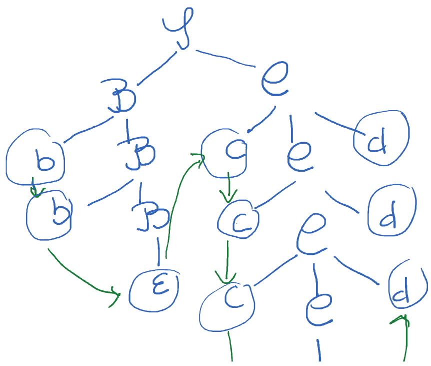
$V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$ $\qquad A = \{b,\ c,\ d\}$

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\to \mathcal{BC} \\ \mathcal{B} &\to b\mathcal{B} \mid \varepsilon \\ \mathcal{C} &\to c\mathcal{C}d \mid \mathcal{D} \\ \mathcal{D} &\to \mathcal{D}d \mid d \end{aligned}$$

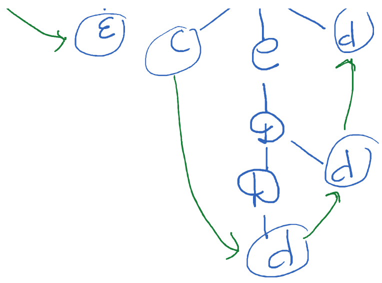
$\mathcal{S} \Rightarrow \quad \ldots \qquad \Rightarrow b^3c^2d^3$

$\mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{BC} \Rightarrow b\mathcal{BC} \Rightarrow bb\mathcal{BC} \Rightarrow bb\varepsilon\mathcal{C} \overset{3}{\Rightarrow} bb\,c^3\mathcal{C}d^3 \Rightarrow b^2c^3\mathcal{D}d^3 \Rightarrow b^2c^3\mathcal{D}dd^3 \Rightarrow b^2c^3dd\,d^3 =$
$= b^2c^3d^5$

logo $b^2c^3d^5 \in L(\mathcal{G}_5)$.



bbεcccddddd



bbεcccddddd

$= b^2 c^3 d^5$

8. Mostre que as gramáticas independentes de contexto, sobre o alfabeto $\{a, b\}$, cujas produções se apresentam a seguir são ambíguas e, em cada caso, encontre uma gramática independente de contexto equivalente e que não seja ambígua.

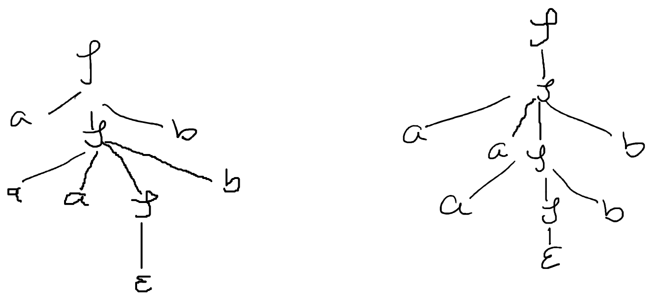
(a) $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}\mathcal{S} \mid a \mid b$ (b) $\mathcal{S} \rightarrow a\mathcal{S}b \mid aa\mathcal{S}b \mid \varepsilon$

(c) $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{A} \mid \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \rightarrow a\mathcal{A}b \mid ab$, $\mathcal{B} \rightarrow ab\mathcal{B} \mid \varepsilon$ (d) $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \rightarrow a\mathcal{A} \mid \varepsilon$, $\mathcal{B} \rightarrow b\mathcal{B} \mid \varepsilon$

b) $L(\mathcal{S}) = \{ a^n b^m : n, m \in \mathbb{N}_0,\ m \leq n \leq 2m \}$

$\mathcal{S} \Rightarrow a\mathcal{S}b \Rightarrow a\,aa\mathcal{S}bb \Rightarrow aaa\varepsilon bb = a^3 b^2 = u$

$\mathcal{S} \Rightarrow aa\mathcal{S}b \Rightarrow aa\ a\mathcal{S}b\ b \Rightarrow aaa\varepsilon bb = a^3 b^2 = u$



a^2abb

Logo a gramática é ambígua.

Uma gramática equivalente e não ambígua seria, por ex., a gramática $(\{\mathcal{S}, \mathcal{B}\}, \{a, b\}, \mathcal{S}, P)$ onde P é

$$\mathcal{S} \longrightarrow a\mathcal{S}b \mid \mathcal{B}$$
$$\mathcal{B} \longrightarrow aa\mathcal{B}b \mid \varepsilon$$

A ambiguidade que resultava de poder fazer alternadamente aplicações das regras $\mathcal{S} \to a\mathcal{S}b$ e $\mathcal{S} \to aa\mathcal{S}b$, foi eliminada.

(c) $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{A} \mid \mathcal{B}$

$\mathcal{A} \rightarrow a\mathcal{A}b \mid ab$

$\mathcal{B} \rightarrow ab\mathcal{B} \mid \varepsilon$

$L(\mathcal{S}) = L(\mathcal{A}) \cup L(\mathcal{B})$.

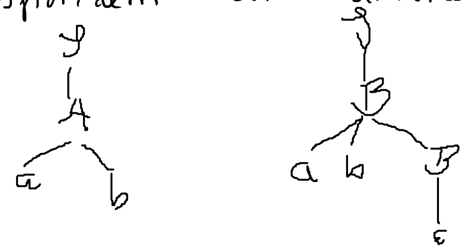
$L(A) = \{a^n b^n : n \in \mathbb{N}\}$
$L(B) = \{(ab)^n : n \in \mathbb{N}_0\}$

A ambiguidade resulta do facto de $ab \in L(A)$ e $ab \in L(B)$: de facto ab admite duas derivações essencialmente distintas

$S \Rightarrow A \Rightarrow ab$

$S \Rightarrow B \Rightarrow abB \Rightarrow ab\varepsilon = ab$

que correspondem às árvores de derivação:



Uma gramática equivalente e não ambígua será:

$S \to A \mid B$
$A \to aAb \mid a^2b^2$
$B \to abB \mid \varepsilon$

$L(S) = L(A) \cup L(B)$
$L(A) = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$
$L(B) = \{(ab)^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$

$$\begin{cases} S \to A \mid B \mid \varepsilon \\ A \to aAb \mid ab. \\ B \to abB \mid (ab)^2 \end{cases}$$

$S \to A \mid B$
$A \to aAb \mid \varepsilon$
$B \to abB \mid (ab)^2$

9. Justifique detalhadamente a seguinte afirmação: 'Dada uma gramática regular ambígua existe uma gramática regular não ambígua equivalente'.

(NOTA: Está em particular implícito nesta afirmação, que uma gramática regular ambígua é sempre equivalente a uma gramática não ambígua, o que não acontece com todas as gramáticas. Resulta então que qualquer linguagem regular é uma linguagem não ambígua.)

- Seja G uma gramática regular ambígua. Então $L(G)$ é uma linguagem regular.
- $L(G)$ é reconhecida por um autómato finito, digamos A.
- O autómato A é equivalente a um autómato DCA.

- Logo $L(\mathcal{G})$ é reconhecida por um autómato $\mathcal{A}'$ que é DCA.
- A partir do autómato $\mathcal{A}'$ podemos construir uma gramática $\mathcal{G}'$ linear à direita (portanto regular) que gera $L(\mathcal{A}')$.

<u>Falta verificar</u> que, como $\mathcal{A}'$ é DCA, então $\mathcal{G}'$ é não ambígua.

...