TP1- 2ª aula

1 de março de 2021 15:00

6. Em cada uma das alíneas seguintes define-se indutivamente um conjunto L de palavras sobre $A = \{a, b\}$. Em cada caso dê uma definição explícita para L.

(a) (i) $a \in L$; (ii) se $x \in L$, então xa, $xb \in L$.

$L' = \{a, aa, aaa, \dots, a^n, \dots, ab, aab, aaab, \dots, aba, abb, \dots\}$

$L' = \{u \in A^* : u = a \cdot a^{n_1} b^{k_1} a^{n_2} b^{k_2} \dots a^{n_r} b^{k_r},\ n_1 \geq 0,\ k_r \geq 0,\ n_2, \dots, n_r, k_1, \dots, k_{r-1} \geq 1,\ r \geq 0\}$

$= \{u \in A^+ : u = au',\ u' \in \{a,b\}^*\} = a \cdot \{a,b\}^*$

$= aA^*$

Numa 2ª fase deveríamos mostrar que $L \subseteq L'$ e que $L' \subseteq L$.

...

(g) (i) $\varepsilon \in L$, $b \in L$, $bb \in L$; (ii) se $x \in L$, então $xa, xab, xabb \in L$.

$L = \{\varepsilon, b, bb, a, ab, abb, ababb, ababbabb, abbaaa\dots aabb, aaa\dots a, \}$

$L = \{u \in A^* :$ bbb não é fator de $u\}$

...

7. Sejam $k, n \in \mathbb{N}$ e A um alfabeto com k letras. $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$

(b) Determine o número de palavras sobre A de comprimento não superior a 4.

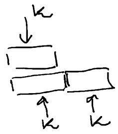
comprimento 0 — ε → 1

comprimento 1 — $a_1, a_2, \dots, a_k$ → k

comprimento 2 — $a_1a_2, a_1a_3, \dots$ → $k \times k = k^2$

comprimento 3 — → k^3

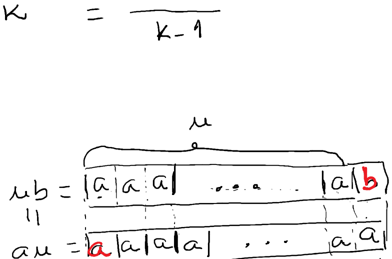
comprimento 4 — → k^4



O nº de palavras sobre um alfabeto, de cardinal k, com comprimento menor ou igual a 4 é

$k^0 + k^1 + k^2 + k^3 + k^4 = \sum_{t=0}^{4} k^t = \frac{k^5 - 1}{k - 1}$

8. Sejam A um alfabeto, $a, b \in A$ e $u \in A^*$. Mostre que se $au = ub$ então $a = b$ e $u \in \{a\}^*$.



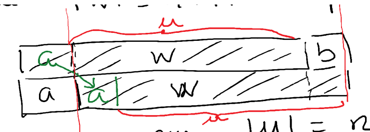
Vamos fazer a prova por indução sobre o comprimento de u.

Se $|u| = 0$. Então $u = \varepsilon = a^0$ e $au = ub \Leftrightarrow a = b$.

Logo se $|u| = 0$ então $u \in \{a\}^*$ e $a = b$.

Por hipótese de indução suponhamos que u é uma palavra de A^*, de comprimento n e que qualquer palavra nestas condições verifica se $au = ub$ então $a = b$ e $u \in \{a\}^*$

Seja $w \in A^*$ tal que $|w| = n+1$. Suponhamos que $aw = wb$. Então



$w = a \cdot u$ em que $|u| = n$.

Logo $ub = au$. Pela hipótese de indução $a = b$ e $u \in \{a\}^*$. Consequentemente, $w = au \in a^+$. Está completa a prova do passo indutivo.

Pelo Princípio de Indução Matemática, está provado que se $u \in A^*$ e $au = ub$, então $a = b$ e $u \in \{a\}^*$.

10. Sejam $A = \{a, b\}$, $X = \{a, ab\}$ e $Y = \{\varepsilon, bab, ab\}$.

(a) Dê exemplos de palavras dos conjuntos Y^+ e Y^* e constate que $Y^+ = Y^*$.

(b) Determine X^0 e X^3.

(c) Calcule X^+ e X^*.

(d) Determine $L = abb(Y^2 \cup X)$.

(e) Determine $(ab)^{-1}L$ e $(ab)^{-1}Y^2$.

10a) $Y^* = Y^+ \cup \{\varepsilon\}$.

Como $\varepsilon \in Y$, logo $Y^+ = Y^1 \cup Y^2 \cup \ldots = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y^n$ e $\varepsilon \in Y^+$.

Então $\underbrace{Y^+ \cup \{\varepsilon\}} = Y^+$, ou seja, $Y^* = Y^+$.

b) $X^0 = \{\varepsilon\}$.

$X^3 = X^2 \cdot X = (X \cdot X) \cdot X = \{aa, aab, aba, abab\} \cdot X = \{aaa, aaba, abaa, ababa, aaab, aabab, abaab, ababab\}$

c) $X^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} X^n = X^0 \cup X^1 \cup X^2 \cup X^3 \cup \ldots = \{\varepsilon, a, ab, aa, aab, aba, abab, aaa, aaba, \ldots\}$

$= \{u \in A^* :$ bb não é fator de u e $\underbrace{\text{b não é prefixo de } u}_{u = \varepsilon \text{ ou a é prefixo de } u}\}$

$X^+ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n = X^1 \cup X^2 \cup X^3 \cup \ldots = \{u \in A^+ :$ bb não é fator de u e a é prefixo de $u\}$

d) $L = abb(Y^2 \cup X) = abb\{\varepsilon, \varepsilon bab, \varepsilon ab, babbab, babab, abbab, abab, a\}$

$= \{abb, abbbab, abbab, abbbabbab, abbbabab, abbabbab, abbabab, abba\}$

e) $(ab)^{-1}L = \{b, bbab, bab, bbabbab, bbabab, babbab, babab, ba\}$

ou

$(ab)^{-1}L = (ab)^{-1}(abb(Y^2 \cup X)) = b^{-1}(a^{-1}(abb(Y^2 \cup X))) =$

$= b^{-1}(\cancel{a^{-1}}\cancel{a}bb \cdot (Y^2 \cup X)) = b^{-1}(bb(Y^2 \cup X))$

$= \cancel{b^{-1}}\cancel{b}b \cdot (Y^2 \cup X) = b(Y^2 \cup X)$.

$(ab)^{-1}Y^2 = (ab)^{-1}Y \cdot Y = b^{-1}(a^{-1}(Y \cdot Y)) = b^{-1}((a^{-1}Y) \cdot Y \cup \underbrace{a^{-1}Y}_{\text{porque } \varepsilon \in Y}) =$

$= b^{-1}(\{b\} \cdot Y \cup \{b\}) = b^{-1}(bY \cup \{b\})$

$= \cancel{b^{-1}}bY \cup b^{-1}\{b\} = Y \cup \{\varepsilon\} = Y$ (pq $\varepsilon \in Y$).

Se $Y = \{bab, ab\}$

$(ab)^{-1}Y^2 = ((ab)^{-1}Y) \cdot Y = b^{-1}(a^{-1}Y) \cdot Y$

- $a^{-1}\{bab\} = \emptyset$
- $a^{-1}\{a\} = \{\varepsilon\}$

11. Sejam $A = \{a, b\}$ e $L = A^*abaA^*$.

(a) Determine L^2 e L^*.

(b) Calcule $a^{-1}L$, $b^{-1}L$, $(aa)^{-1}L$, $(ba)^{-1}L$, $(ab)^{-1}L$ e $(abab)^{-1}L$.

11 a) L é conjunto de todas as palavras u que têm aba como fator, ou seja, $u =$ ___ aba ___

11 a) L é conjunto de todas as palavras $u = \_\_\_ aba \_\_\_$
u que têm aba como fator, ou seja,

$L = \{ u \in A^+ : u = u_1 aba u_2 ,\ u_1, u_2 \in A^* \}$

$L^2 = L \cdot L = A^* aba \underbrace{A^* A^*}_{A^*} aba\ A^* = A^* aba\ A^* aba\ A^*$ $\quad$ $\_b\_ aba \_aa\_ aba \_\varepsilon\_$

L^2 é, então, a linguagem constituída por todas as palavras que têm duas ocorrências de aba que não se sobrepõem ($ababa \notin L^2$)

$L^2 \subseteq L$

$\varepsilon\, aba\, a \in L$? Sim

$abaa \in L^2$? Não

$b\ aba\ aa\ aba\ bb \in L^2$? Sim

$b\ aba\ aa\ aba\ bb \in L$? Sim

Genericamente, se $m \geq n \geq 1$, então $L^m \subseteq L^n$. Assim, $L^m \cup L^n = L^n$ e

$L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup \ldots \cup L^n \cup \ldots$

$= \{\varepsilon\} \cup L = A^* aba\ A^* \cup \{\varepsilon\}$.

b) $a^{-1} L = a^{-1} \cdot A^* aba\ A^* = (a^{-1} A^*) . aba\ A^* \cup a^{-1}\ aba\ A^* =$

$= A^* aba\ A^* \cup ba\ A^* = L \cup ba\ A^*$

$a^{-1} A^*$?
$u \in A^*$
$au \in A^*$
$a^{-1} a u = u$
$\therefore a^{-1} A^* = A^*$

$b^{-1} L = b^{-1} \cdot A^* aba\ A^* = b^{-1} A^* . aba\ A^* \cup b^{-1}\ aba\ A^* =$

$= A^* aba\ A^* \cup \emptyset$

$= A^* aba\ A^* = L$

$(aa)^{-1} L = a^{-1}(a^{-1} L) = a^{-1}(L \cup ba\ A^*) = a^{-1} L \cup a^{-1} ba A^* = (L \cup ba A^*) \cup \emptyset$

$= L \cup ba\ A^*$

Logo $a^{-1} L = (aa)^{-1} L$.

14. Sejam A um alfabeto, L uma linguagem sobre A e $u, v, w \in A^*$. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(a) $uv = uw \Rightarrow v = w$; (b) $vu = wu \Rightarrow v = w$.

(c) $\varepsilon L = L\varepsilon = L$; (d) $\emptyset L = \emptyset$;

(e) $L\emptyset = L$; (f) $L = L^1$;

(g) $L^+ = L^* L$; (h) $\emptyset^+ = \emptyset$;

(i) $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$; (j) $\varepsilon \in L^+, \forall L$;

(k) $L^+ \cup \{\varepsilon\} = L^*$; (l) $L^+ \neq L^*, \forall L$;

(m) $L^+ \subseteq L^*$; (n) $L^* \subseteq L^+$.