Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Álgebra Linear LCC   Teste 2   Duração: 1h45   [Teste modelo A]

Nome: ______________________ **Número:** __________

Grupo I

Em cada questão deste grupo deve ser assinalada apenas uma das opções de resposta. A uma resposta correta é atribuída uma cotação de 1.25 valores (apenas uma resposta está correta) e a uma resposta errada é atribuída uma cotação de -0.25 valores. A cotação mínima total neste grupo é de 0 valores.

1. Os seguintes vetores formam um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$.

   - ☐ $(1,2,0),(0,1,-1)$.
   - ☐ $(1,2,0),(3,6,0),(0,1,-1),(0,2,-2)$.
   - ☐ $(1,2,-1),(1,-1,3),(2,1,2)$.
   - ☐ $(1,2,0),(1,0,0),(0,0,2)$.

2. Sejam V um espaço vetorial real, $X=\{\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\boldsymbol{v_3}\}$ um subconjunto de V e $\{\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2}\}$ uma base de V.

   - ☐ $\{3\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2}\}$ também é uma base de V.
   - ☐ X é um conjunto linearmente independente.
   - ☐ $\{\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\boldsymbol{v_1}+\boldsymbol{v_2}\}$ não é um conjunto gerador de V.
   - ☐ $\{\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_1}+\boldsymbol{v_2}\}$ é um conjunto linearmente dependente.

3. Se $\boldsymbol{u_1}$, $\boldsymbol{u_2}$ e $\boldsymbol{u_3}$ são três vetores linearmente independentes do espaço vetorial $\mathbb{R}^4$, então

   - ☐ $\dim(\langle \boldsymbol{u_1},\boldsymbol{u_2},\boldsymbol{u_3},\boldsymbol{u_1}+\boldsymbol{u_2}\rangle)=4$.
   - ☐ o vetor nulo não pode escrever-se como combinação linear de $\boldsymbol{u_1}$, $\boldsymbol{u_2}$ e $\boldsymbol{u_3}$.
   - ☐ os vetores $\boldsymbol{u_1}$, $\boldsymbol{u_2}$ e $\boldsymbol{u_3}$ geram um subespaço de $\mathbb{R}^4$ de dimensão 3.
   - ☐ qualquer vetor de $\mathbb{R}^4$ é combinação linear de $\boldsymbol{u_1}$, $\boldsymbol{u_2}$ e $\boldsymbol{u_3}$.

4. Seja $T\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear e A_T a matriz de T.

   - ☐ A_T é uma matriz 4×3.
   - ☐ Pode ter-se $\mathsf{Nuc}(T)=\{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^4}\}$.
   - ☐ Se $\dim(\mathsf{Im}(T))=3$, então $\dim\big(\mathsf{Nuc}(T)\big)=1$.
   - ☐ Se $\dim\big(\mathsf{Nuc}(T)\big)=2$, então $\dim(\mathsf{Im}(T))=1$.

5. Seja T uma aplicação linear cuja representação matricial é $A_T=\begin{bmatrix}2&-1&1\\2&1&3\\3&0&3\end{bmatrix}$.

   - ☐ A matriz da aplicação $T\circ T$ é $\begin{bmatrix}4&1&1\\4&1&9\\9&0&9\end{bmatrix}$.
   - ☐ A matriz da aplicação $3T$ é $\begin{bmatrix}6&-3&3\\6&3&9\\9&0&9\end{bmatrix}$.
   - ☐ $(1,1,-1)\in\mathsf{Nuc}(T)$ e $(2,2,3)\notin\mathsf{Im}(T)$.
   - ☐ $T(x,x,x)=(2,6,6)$, para qualquer $x\in\mathbb{R}$.

6. Seja A uma matriz de ordem 3 com valores próprios 0, 1 e 2. Então

- [ ] o sistema $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ é possível e determinado.
- [ ] Os valores próprios da matriz $2A - I_3$ são -1, 1 e 3.
- [ ] $\det(A^T) \neq 0$.
- [ ] A é uma matriz invertível.

Grupo II

Neste grupo as respostas a todos as questões devem ser devidamente justificadas.

1. [2.5 valores] Considere, no espaço vetorial $\mathbb{R}^4$, o subespaço

$$U = \langle (1,0,1,2), (0,1,1,0), (3,-3,0,6) \rangle.$$

   (a) Determine uma base de U.

   (b) Determine $k \in \mathbb{R}$ tal que $(1,2,3,k) \in U$.

2. [3 valores] Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear definida por

$$T(x,y,z) = (3x - y, 4z, 6x - 2y).$$

   (a) Determine a matriz da aplicação T relativamente às bases canónicas.

   (b) Determine $\mathsf{Im}(T)$ e $\mathsf{Nuc}(T)$ e as respetivas dimensões.

3. [3 valores] Seja $G\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$G(1,0,1) = (1,1,2), \quad G(0,1,1) = (0,1,3) \quad \text{e} \quad \mathsf{Nuc}(G) = \langle (1,0,0) \rangle.$$

   Determine $G(x,y,z)$ para qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

4. [2.5 valores] Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

   (a) Verifique que $\lambda = 2$ é um valor próprio duplo da matriz A.

   (b) Determine o subespaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = 2$.

5. [1.5 valores] Seja A uma matriz que tem $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T$ como vetor próprio associado ao valor próprio 2 e $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$ como vetor próprio associado ao valor próprio 3. Calcule $A^2\boldsymbol{w}$ onde $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}^T$.