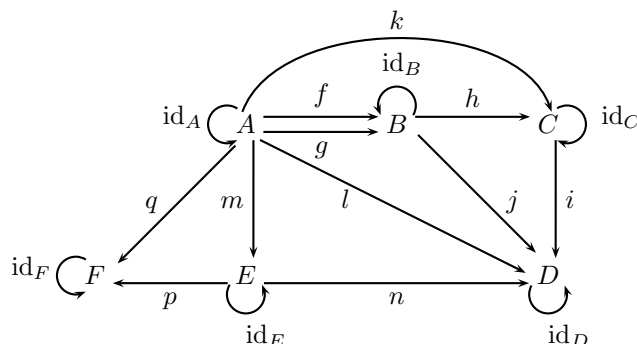


Álgebra Universal e Categorias

2º teste (31 de maio de 2016) duração: 2 horas

1. Seja \mathbf{C} a categoria definida pelo diagrama



onde $j = i \circ h$, $k = h \circ f = h \circ g$, $l = j \circ f = j \circ g = i \circ k = n \circ m$ e $q = p \circ m$.

- Construa a categoria dos objetos sobre F .
 - Dê exemplo, caso existam, de um \mathbf{C} -morfismo s e de uma subcategoria \mathbf{C}' de \mathbf{C} tais que s não seja monomorfismo em \mathbf{C} e seja monomorfismo em \mathbf{C}' .
 - Diga, justificando, se (C, h) é um co-igualizador de f e g .
2. Sejam \mathbf{C} uma categoria e $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ morfismos em \mathbf{C} . Mostre que:
- Se f e g são epimorfismos, então $g \circ f$ é um epimorfismo.
 - Se f é um epimorfismo e invertível à esquerda, então f é um isomorfismo.
3. Seja \mathbf{C} uma categoria com objeto inicial I e com objeto terminal T . Mostre que se $f : T \rightarrow I$ é um morfismo em \mathbf{C} , então f é um isomorfismo. Conclua que I e T são objetos zero.
4. Sejam $f, g : A \rightarrow B$ e $i : I \rightarrow A$ morfismos numa categoria \mathbf{C} . Mostre que se $(I, (i, i))$ é um produto fibrado de (f, g) , então (I, i) é um igualizador de f e g .
5. Sejam \mathbf{C} uma categoria, A_1, A_2 e P objetos de \mathbf{C} e $p_1 : P \rightarrow A_1$ e $p_2 : P \rightarrow A_2$ morfismos em \mathbf{C} tais que $(P, (p_1, p_2))$ é um produto de A_1 e A_2 . Mostre que se $f : Q \rightarrow P$ é um isomorfismo em \mathbf{C} , então $(Q, (p_1 \circ f, p_2 \circ f))$ é um produto de A_1 e A_2 .
6. Sejam \mathbf{C} e \mathbf{D} categorias e T um objeto terminal da categoria \mathbf{D} . Seja F a correspondência que a cada objeto A de \mathbf{C} associa o objeto (A, T) e que a cada \mathbf{C} -morfismo $f : A \rightarrow B$ associa o par (f, id_T) , onde id_T é o \mathbf{D} -morfismo identidade associado a T .
- Mostre que F é um functor da categoria \mathbf{C} na categoria $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$.
 - Diga, justificando, se F é um functor: i. fiel. ii. pleno.