1. Gramáticas Independentes de Contexto
   - Gramáticas
   - Classificação de gramáticas
   - Ambiguidade em GIC
   - Gramaticas Regulares

Definição

Uma gramática $\mathcal{G}$ é um quádruplo

$$\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$$

em que:

1. V é um alfabeto, dito não terminal, constituído por elementos designados variáveis;
2. A é um alfabeto, dito terminal, constituído por elementos designados letras ou símbolos terminais, tal que $V \cap A = \emptyset$;
3. $\mathcal{S}$ é um elemento de V designado símbolo inicial;
4. P é um conjunto de produções, ou regras gramaticais, que é um subconjunto de $\big((V \cup A)^* V (V \cup A)^*\big) \times (V \cup A)^*$.

De acordo com a notação usual, cada elemento $(\alpha, \beta) \in P$ representa-se por

$$\alpha \to \beta$$

EXEMPLO 1

Seja $A = \{a,\ b\}$ e L a linguagem definida indutivamente por:

1. $\varepsilon \in L$
2. $a,\ b \in L$
3. se $x \in L$, então $axa,\ bxb \in L$

Considere-se a gramática: $\mathcal{G}_L = (V, \{a,\ b\}, \mathcal{S}, P)$ em que:

- $V = \{\mathcal{S}\}$;
- P é constituído por:

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{S} & \to & \varepsilon \\ \mathcal{S} & \to & a \\ \mathcal{S} & \to & b \\ \mathcal{S} & \to & a\mathcal{S}a \\ \mathcal{S} & \to & b\mathcal{S}b \end{array}$$

De modo equivalente, por simplicidade, escreve-se $\mathcal{S} \to \varepsilon \mid a \mid b \mid a\mathcal{S}a \mid b\mathcal{S}b$.

Partindo de $\mathcal{S}$, a seguinte sequência de passos:

$$\begin{array}{rlcl} \text{(i)} & \text{utilizando} & \mathcal{S} \to a\mathcal{S}a & \text{obtém-se } a\mathcal{S}a \\ \text{(ii)} & \text{utilizando} & \mathcal{S} \to b\mathcal{S}b & \text{obtém-se } ab\mathcal{S}ba \\ \text{(iii)} & \text{utilizando} & \mathcal{S} \to a & \text{obtém-se } ababa \end{array}$$

conduz à palavra *ababa* e diremos que $\mathcal{G}_L$ gera a palavra *ababa*.

Genericamente, aplicando produções podemos transformar expressões da linguagem $(V \cup A)^* V (V \cup A)^*$ em expressões da linguagem $(V \cup A)^*$.

Definição

Sejam $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ e $\sigma_1 \in (V \cup A)^* V (V \cup A)^*$ e $\sigma_2 \in (V \cup A)^*$. Diz-se que σ_2 deriva diretamente de σ_1 se $\sigma_1 = \gamma\alpha\gamma'$, $\sigma_2 = \gamma\beta\gamma'$ e existe $\alpha \to \beta \in P$, com $\gamma, \gamma' \in (V \cup A)^*$. Em tal caso escreve-se

$$\sigma_1 \underset{\mathcal{G}}{\Rightarrow} \sigma_2$$

EXEMPLO 1-continuação

Recorde-se que $\mathcal{G}_L = (\{\mathcal{S}\}, \{a,\ b\}, \mathcal{S}, P)$ definida por $\mathcal{S} \to \varepsilon \,|\, a \,|\, b \,|\, a\mathcal{S}a \,|\, b\mathcal{S}b$.

$$\begin{array}{lcrcl}
\mathcal{S} \to a\mathcal{S}a & \text{logo} & \mathcal{S} & \underset{\mathcal{G}_L}{\Rightarrow} & a\mathcal{S}a \\
\mathcal{S} \to a\mathcal{S}a & \text{logo} & a^2b\mathcal{S}ba^2 & \underset{\mathcal{G}_L}{\Rightarrow} & a^2ba\mathcal{S}aba^2 \\
\mathcal{S} \to b & \text{logo} & a^2ba\mathcal{S}aba^2 & \underset{\mathcal{G}_L}{\Rightarrow} & a^2bababa^2
\end{array}$$

Definição

Sendo $k \in \mathbb{N}$, se $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in (V \cup A)^* V (V \cup A)^*$ e $\sigma_{k+1} \in (V \cup A)^*$ forem tais que

$$\sigma_1 \underset{\mathcal{G}}{\Rightarrow} \sigma_2 \underset{\mathcal{G}}{\Rightarrow} \cdots \sigma_k \underset{\mathcal{G}}{\Rightarrow} \sigma_{k+1},$$

então diz-se que σ_{k+1} deriva em k passos de σ_1 e escreve-se

$$\sigma_1 \overset{k}{\underset{\mathcal{G}}{\Rightarrow}} \sigma_{k+1}$$

EXEMPLO 1-continuação

$$\left.\begin{array}{llrcl} \mathcal{S} \to a\mathcal{S}a & \text{logo} & a^2bSba^2 & \underset{\mathcal{G}_L}{\Rightarrow} & a^2ba\mathcal{S}aba^2 \\ \mathcal{S} \to b & \text{logo} & a^2ba\mathcal{S}aba^2 & \underset{\mathcal{G}_L}{\Rightarrow} & a^2bababa^2 \end{array}\right\} \quad a^2b\mathcal{S}ba^2 \overset{2}{\underset{\mathcal{G}_L}{\Rightarrow}} a^2bababa^2$$

Definição

Dados $\sigma \in (V \cup A)^* V (V \cup A)^*$ e $\sigma' \in (V \cup A)^*$, diz-se que σ' deriva de σ se $\sigma = \sigma'$ ou existir $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma \overset{k}{\underset{\mathcal{G}}{\Rightarrow}} \sigma'$, e escreve-se $\sigma \overset{*}{\underset{\mathcal{G}}{\Rightarrow}} \sigma'$.

À sequência de passos elementares que permite concluir que $\sigma \overset{*}{\underset{\mathcal{G}}{\Rightarrow}} \sigma'$ chama-se derivação de σ' a partir de σ.

Definição

Seja $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$. A linguagem gerada por $\mathcal{G}$ é

$$L(\mathcal{G}) = \{u \in A^* \mid \mathcal{S} \overset{*}{\underset{\mathcal{G}}{\Rightarrow}} u\}.$$

Definição

Duas gramáticas $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ dizem-se equivalentes se $L(\mathcal{G}_1) = L(\mathcal{G}_2)$.

EXEMPLO 1 - continuação

$A = \{a, b\}$ e L é a linguagem definida indutivamente por:

1. $\varepsilon \in L$
2. $a, b \in L$
3. se $x \in L$, então axa, $bxb \in L$

$\mathcal{G}_L = (\{\mathcal{S}\}, \{a, b\}, \mathcal{S}, P)$ em que $P : \mathcal{S} \to \varepsilon \mid a \mid b \mid a\mathcal{S}a \mid b\mathcal{S}b$.

Pode verificar-se que $\mathcal{G}_L$ gera todas as palavras de L usando indução estrutural.

- $\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_L}{\Rightarrow} \varepsilon$ é uma derivação da palavra ε
- $\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_L}{\Rightarrow} a$ é uma derivação da palavra a
- $\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_L}{\Rightarrow} b$ é uma derivação da palavra b
- se $x \in L$, assumindo que $\mathcal{S} \overset{*}{\underset{\mathcal{G}_L}{\Rightarrow}} x$, então existe $\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_L}{\Rightarrow} a\mathcal{S}a \overset{*}{\underset{\mathcal{G}_L}{\Rightarrow}} axa$ uma derivação de axa
- se $x \in L$, assumindo que $\mathcal{S} \overset{*}{\underset{\mathcal{G}_L}{\Rightarrow}} x$, então existe $\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_L}{\Rightarrow} b\mathcal{S}b \overset{*}{\underset{\mathcal{G}_L}{\Rightarrow}} bxb$ uma derivação de bxb

Definição

Se $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$, para $\alpha \in (V \cup A)^*$, definem-se os seguintes conjuntos:

$$D(\alpha) = \{\beta \in (V \cup A)^* \mid \alpha \underset{\mathcal{G}}{\overset{*}{\Rightarrow}} \beta\}$$

$$L(\alpha) = \{u \in A^* \mid \alpha \underset{\mathcal{G}}{\overset{*}{\Rightarrow}} u\}$$

Assim, $L(\alpha) = D(\alpha) \cap A^*$ e $L(\mathcal{G}) = L(\mathcal{S})$.

EXEMPLO 2

Considere-se a gramática $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ em que $V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\}$, $A = \{a, b, c\}$ e P é o seguinte conjunto de produções:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{S} & \to \mathcal{B}\mathcal{C} \\ \mathcal{B} & \to a\mathcal{B}b \mid \varepsilon \\ \mathcal{C} & \to b\mathcal{C}c \mid \varepsilon \end{array}$$

Será que $a^2b^3c \in L(\mathcal{G})$?

$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}}{\Rightarrow} \mathcal{B}\mathcal{C} \underset{\mathcal{G}}{\Rightarrow} a\mathcal{B}b\mathcal{C} \underset{\mathcal{G}}{\Rightarrow} aa\mathcal{B}bb\mathcal{C} \underset{\mathcal{G}}{\Rightarrow} aa\varepsilon bb\mathcal{C} \underset{\mathcal{G}}{\Rightarrow} aabbb\mathcal{C}c \underset{\mathcal{G}}{\Rightarrow} aabbb\varepsilon c$$

E $ab^3c \in L(\mathcal{G})$? Não.

EXEMPLO 2 - continuação

$$L(\mathcal{G}) = L(\mathcal{S}) = L(\mathcal{BC}) = L(\mathcal{B})L(\mathcal{C}) \qquad \mathcal{S} \to \mathcal{BC}$$

$$\begin{aligned}
L(\mathcal{B}) &= aL(\mathcal{B})b \cup \{\varepsilon\} \qquad \mathcal{B} \to a\mathcal{B}b \mid \varepsilon \\
&= a\Big(aL(\mathcal{B})b \cup \{\varepsilon\}\Big)b \cup \{\varepsilon\} = a^2L(\mathcal{B})b^2 \cup \{ab,\, \varepsilon\} \\
&\vdots \\
&= a^{k+1}L(\mathcal{B})b^{k+1} \cup \{a^kb^k, \ldots, ab, \varepsilon\}, \ (\forall k \in \mathbb{N}) \\
L(\mathcal{B}) &= \{a^nb^n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \\
L(\mathcal{C}) &= \cdots = \{b^mc^m \mid m \in \mathbb{N}_0\} \qquad \mathcal{C} \to b\mathcal{C}c \mid \varepsilon
\end{aligned}$$

Logo,

$$L(\mathcal{G}) = \{a^nb^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}\{b^mc^m \mid m \in \mathbb{N}_0\} = \{a^nb^{n+m}c^m \mid n, m \in \mathbb{N}_0\}$$

EXEMPLO 3

Seja $\mathcal{G}_r = (V, A, \mathcal{S}, P)$ em que $V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\}$, $A = \{a, b, c\}$ e P é o seguinte conjunto de produções:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &\to a\mathcal{S}\mathcal{B}\mathcal{C} \mid a\mathcal{B}\mathcal{C} \\
\mathcal{C}\mathcal{B} &\to \mathcal{B}\mathcal{C} \\
a\mathcal{B} &\to ab \\
b\mathcal{B} &\to bb \\
b\mathcal{C} &\to bc \\
c\mathcal{C} &\to cc
\end{aligned}$$

$a^2b^2c^2 \in L(\mathcal{G}_r)$? Sim.

$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_r}{\Rightarrow} a\mathcal{S}\mathcal{B}\mathcal{C} \underset{\mathcal{G}_r}{\Rightarrow} aa\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{B}\mathcal{C} \underset{\mathcal{G}_r}{\Rightarrow} aa\mathcal{B}\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{C} \underset{\mathcal{G}_r}{\Rightarrow} aab\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{C} \underset{\mathcal{G}_r}{\Rightarrow} aabb\mathcal{C}\mathcal{C} \underset{\mathcal{G}_r}{\Rightarrow} aabbc\mathcal{C} \underset{\mathcal{G}_r}{\Rightarrow} a^2b^2c^2$$

$a^nb^nc^n \in L(\mathcal{G}_r)$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$? Por generalização do processo anterior, conclui--se que sim.

$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_r}{\Rightarrow} a\mathcal{S}\mathcal{B}\mathcal{C} \underset{\mathcal{G}_r}{\Rightarrow} aa\mathcal{S}\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{B}\mathcal{C} \overset{n-2}{\underset{\mathcal{G}_r}{\Rightarrow}} a^n(\mathcal{B}\mathcal{C})^n \overset{*}{\underset{\mathcal{G}_r}{\Rightarrow}} a^n\mathcal{B}^n\mathcal{C}^n \overset{2n}{\underset{\mathcal{G}_r}{\Rightarrow}} a^nb^nc^n$$

Para uma derivação conduzir a uma palavra de A^* é necessário ‘colocar’ todas as ocorrências de $\mathcal{B}$ antes de qualquer ocorrência de $\mathcal{C}$.

$$L(\mathcal{G}_r) = ?\ \{a^nb^nc^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

EXEMPLO 4

Seja $\mathcal{G}_d = (V, A, \mathcal{S}, P)$ em que $V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}\}$, $A = \{a,\ b\}$ e P é o seguinte conjunto de produções:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\to a\mathcal{S} \mid ba\mathcal{B} \\ \mathcal{B} &\to ab\mathcal{B} \mid \varepsilon. \end{aligned}$$

Vamos verificar que $L(\mathcal{G}_d) = a^*ba(ab)^*$.

$$\begin{aligned} L(\mathcal{B}) &= abL(\mathcal{B}) \cup \{\varepsilon\} \\ &= ab(abL(\mathcal{B}) \cup \{\varepsilon\}) \cup \{\varepsilon\} = (ab)^2 L(\mathcal{B}) \cup \{ab, \varepsilon\} \\ &\ \vdots \\ &= (ab)^n L(\mathcal{B}) \cup \{(ab)^{n-1}, \ldots, ab, \varepsilon\} (\forall n \in \mathbb{N}) \\ L(\mathcal{B}) &= (ab)^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(\mathcal{S}) &= aL(\mathcal{S}) \cup ba\, L(\mathcal{B}) \\ &= a\big(aL(\mathcal{S}) \cup ba\, L(\mathcal{B})\big) \cup ba\, L(\mathcal{B}) = a^2 L(\mathcal{S}) \cup \{aba,\ ba\} L(\mathcal{B}) \\ &\ \vdots \\ &= a^k L(\mathcal{S}) \cup \{a^{k-1}ba,\ \ldots, aba,\ ba\} L(\mathcal{B}) \\ &= a^* ba\, L(\mathcal{B}) \\ &= a^* ba(ab)^* \end{aligned}$$

EXEMPLO 5

Seja $\mathcal{G}_e = (V, A, \mathcal{S}, P)$ em que $V = \{\mathcal{S}, \mathcal{C}\}$, $A = \{a, b\}$ e P é o seguinte conjunto de produções:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\to \mathcal{S}ab \mid \mathcal{C}ba \\ \mathcal{C} &\to \mathcal{C}a \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Vamos verificar que $L(\mathcal{G}_e) = a^*ba(ab)^*$ e que, consequentemente, $\mathcal{G}_e$ é equivalente a $\mathcal{G}_d$.

$$\begin{aligned} L(\mathcal{C}) &= L(\mathcal{C})a \cup \{\varepsilon\} \\ &= (L(\mathcal{C})a \cup \{\varepsilon\})a \cup \{\varepsilon\} = L(\mathcal{C})a^2 \cup \{a, \varepsilon\} \\ &\ \ \vdots \\ &= L(\mathcal{C})a^n \cup \{a^{n-1}, \ldots, a, \varepsilon\} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

$$L(\mathcal{C}) = a^*$$

$$\begin{aligned} L(\mathcal{S}) &= L(\mathcal{S})ab \cup L(\mathcal{C})ba \\ &= (L(\mathcal{S})ab \cup L(\mathcal{C})ba)ab \cup L(\mathcal{C})ba = L(\mathcal{S})(ab)^2 \cup L(\mathcal{C})\{baab, ba\} \\ &\ \ \vdots \\ &= L(\mathcal{S})(ab)^n \cup L(\mathcal{C})\{ba(ab)^{n-1}, \cdots, ba\} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

$$L(\mathcal{S}) = L(\mathcal{C})\, ba(ab)^* = a^*ba(ab)^*$$

Uma gramática $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ diz-se:

1. dependente de contexto se cada produção é da forma:
   $\alpha\mathcal{B}\gamma \to \alpha\beta\gamma$, onde $\alpha, \gamma \in (V \cup A)^*$, $\mathcal{B} \in V$, $\beta \in (V \cup A)^+$ ou

   $\mathcal{S} \to \varepsilon$ se $\mathcal{S}$ não aparece no membro direito de outra produção;
2. independente de contexto se cada produção é da forma:
   $\mathcal{B} \to \beta$ onde $\mathcal{B} \in V$ e $\beta \in (V \cup A)^*$;
3. linear à direita se cada produção é da forma:
   $\mathcal{B} \to u$ ou $\mathcal{B} \to u\mathcal{C}$, onde $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in V$ e $u \in A^*$;
4. linear à esquerda se cada produção é da forma:
   $\mathcal{B} \to u$ ou $\mathcal{B} \to \mathcal{C}u$, onde $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in V$ e $u \in A^*$;
5. regular se é linear à direita ou linear à esquerda.

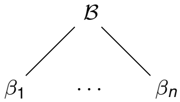
Hierarquia de Chomsky

Gramática	⇢	Linguagem recursivamente enumerável	⇢	Máquina de Turing
Gramática dependente de contexto	⇢	Linguagem dependente de contexto	⇢	Autómato linear limitado
(GIC) Gramática independente de contexto	⇢	Linguagem independente de contexto	⇢	Autómato de pilha
Gramática regular	⇢	Linguagem regular	⇢	Autómato finito

Representação gráfica de uma derivação

Derivação numa GIC	$\dashrightarrow$	Grafo orientado
elementos de $V \cup A \cup \{\varepsilon\}$	$\dashrightarrow$	vértices
ligação entre a variável que ocorre no membro esquerdo de uma produção com cada um dos símbolos resultantes da aplicação dessa produção	$\dashrightarrow$	arestas

$\mathcal{B} \to \beta_1 \cdots \beta_n \in P \quad \dashrightarrow$



O grafo correspondente a uma derivação é uma árvore.

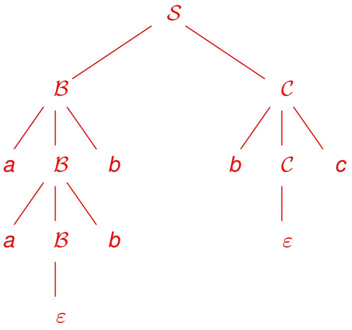
O grafo correspondente à derivação de $u \in A^*$ designa-se árvore de derivação de u.

EXEMPLO 6

Seja $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ em que $V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\}$, $A = \{a,\ b, c\}$ e P é constituído por:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S} &\to \mathcal{B}\mathcal{C} \\
\mathcal{B} &\to a\mathcal{B}b \mid \varepsilon \\
\mathcal{C} &\to b\mathcal{C}c \mid \varepsilon
\end{aligned}
$$

$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}}{\Rightarrow} \mathcal{B}\mathcal{C} \underset{\mathcal{G}}{\Rightarrow} a\mathcal{B}b\mathcal{C} \underset{\mathcal{G}}{\Rightarrow} aa\mathcal{B}bb\mathcal{C} \underset{\mathcal{G}}{\Rightarrow} aa\varepsilon bb\mathcal{C} \underset{\mathcal{G}}{\Rightarrow} aabbb\mathcal{C}c \underset{\mathcal{G}}{\Rightarrow} aabbb\varepsilon c$$

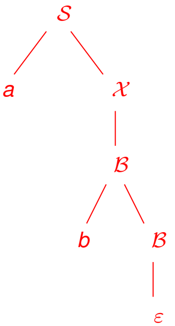


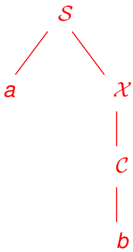
EXEMPLO 7

$\mathcal{G}_a = (V, A, \mathcal{S}, P)$ em que $V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{X}\}$, $A = \{a,\ b\}$ e P é constituído por:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\to a\mathcal{X} \\ \mathcal{X} &\to \mathcal{B} \mid \mathcal{C} \\ \mathcal{B} &\to b\mathcal{B} \mid \varepsilon \\ \mathcal{C} &\to a\mathcal{C} \mid b \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_a}{\Rightarrow} a\mathcal{X} \underset{\mathcal{G}_a}{\Rightarrow} a\mathcal{B} \underset{\mathcal{G}_a}{\Rightarrow} ab\mathcal{B} \underset{\mathcal{G}_a}{\Rightarrow} ab\varepsilon \qquad \mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_a}{\Rightarrow} a\mathcal{X} \underset{\mathcal{G}_a}{\Rightarrow} a\mathcal{C} \underset{\mathcal{G}_a}{\Rightarrow} ab$$





Definição

Dada uma GIC, derivações a que corresponde a mesma árvore dizem-se derivações essencialmente iguais.

Definição

Uma GIC $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ diz-se ambígua se existir pelo menos uma palavra $u \in L(\mathcal{G})$ que admite duas árvores de derivação distintas.

Definição

Uma linguagem L independente de contexto diz-se ambígua se qualquer gramática que gere L for uma GIC ambígua .

EXEMPLO 8

A gramática $\mathcal{G}_a = (V, A, \mathcal{S}, P)$ em que $V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{X}\}$, $A = \{a, b\}$ e P é constituído por:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{S} & \to a\mathcal{X} \\ \mathcal{X} & \to \mathcal{B} \mid \mathcal{C} \\ \mathcal{B} & \to b\mathcal{B} \mid \varepsilon \\ \mathcal{C} & \to a\mathcal{C} \mid b \end{array}$$

é ambígua. Notar que:

$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_a}{\Rightarrow} a\mathcal{X} \underset{\mathcal{G}_a}{\Rightarrow} a\mathcal{B} \underset{\mathcal{G}_a}{\Rightarrow} ab\mathcal{B} \underset{\mathcal{G}_a}{\Rightarrow} ab$$
$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_a}{\Rightarrow} a\mathcal{X} \underset{\mathcal{G}_a}{\Rightarrow} a\mathcal{C} \underset{\mathcal{G}_a}{\Rightarrow} ab$$

$$L(\mathcal{G}_a) = L(\mathcal{S}) = aL(\mathcal{X}) = a\big(L(\mathcal{B}) \cup L(\mathcal{C})\big) = a(b^* \cup a^* b)$$

Será $a(b^* \cup a^* b)$ uma linguagem ambígua?

EXEMPLO 9

Seja $\mathcal{G}_{na} = (V, A, \mathcal{S}, P_{na})$ em que $V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{X}\}$, $A = \{a, b\}$ e P_{na} é o seguinte conjunto de produções:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{S} & \to a\mathcal{X} \\ \mathcal{X} & \to \mathcal{B} \mid a\mathcal{C}b \\ \mathcal{B} & \to b\mathcal{B} \mid \varepsilon \\ \mathcal{C} & \to a\mathcal{C} \mid \varepsilon \end{array}$$

Verifica-se que $\mathcal{G}_{na}$ não é ambígua.

$$L(\mathcal{G}_{na}) = L(\mathcal{S}) = aL(\mathcal{X}) = a\big(L(\mathcal{B}) \cup aL(\mathcal{C})b\big) = a(b^* \cup aa^*b)$$

e

$$a(b^* \cup a^*b) = ab^* \cup a^+b = ab^* \cup \{ab\} \cup aa^+b = ab^* \cup a^2a^*b = a(b^* \cup aa^*b).$$

Logo $a(b^* \cup a^*b)$ não é uma linguagem ambígua.

O objectivo desta secção é obter uma prova construtiva para o seguinte teorema.

Teorema

1. Se L é uma linguagem regular, então existe uma gramática regular $\mathcal{G}$, tal que $L = L(\mathcal{G})$.
2. Se $\mathcal{G}$ é uma gramática regular, então $L(\mathcal{G})$ é uma linguagem regular.

Proposição

Se $\mathcal{G}$ é uma gramática linear à direita, então existe uma gramática $\mathcal{G}'$ equivalente a $\mathcal{G}$ que é tal que as produções são da forma

$$\mathcal{B} \to \varepsilon \quad \text{ou} \quad \mathcal{B} \to a\mathcal{C}$$

com a uma letra.

Prova

Cada produção $\alpha \to \beta$ de $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ é de uma das formas: $\mathcal{B} \to u$ ou $\mathcal{B} \to u\mathcal{C}$, onde $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in V$ e $u \in A^*$.

1. $\mathcal{B} \to a_1 \cdots a_n \rightsquigarrow \begin{cases} \mathcal{B} & \to a_1\mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_1 & \to a_2\mathcal{A}_2 \\ & \vdots \\ \mathcal{A}_{n-1} & \to a_n\mathcal{A}_n \\ \mathcal{A}_n & \to \varepsilon \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ são n novas variáveis;

2. $\mathcal{B} \to a_1 \cdots a_n\mathcal{C} \rightsquigarrow \begin{cases} \mathcal{B} & \to a_1\mathcal{B}_1 \\ \mathcal{B}_1 & \to a_2\mathcal{B}_2 \\ & \vdots \\ \mathcal{B}_{n-2} & \to a_{n-1}\mathcal{B}_{n-1} \\ \mathcal{B}_{n-1} & \to a_n\mathcal{C} \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_{n-1}$ são $n-1$ novas variáveis;

Prova - continuação

3. $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ e a variável $\mathcal{C}$ não ocorre no membro esquerdo de nenhuma produção de $\mathcal{G}$, então elimina-se a produção;

4. $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ e $\mathcal{C} \rightarrow \gamma_i$ são produções de $\mathcal{G}$, para $i = 1, \ldots, n$, então

$$\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C} \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{B} \rightarrow \gamma_1 | \cdots | \gamma_n$$

e a cada uma das novas produções aplica-se o processo descrito nos pontos anteriores.

Assim, define-se $\mathcal{G}' = (V', A, \mathcal{S}, P')$ uma gramática tal que:

- V' é igual à união de V com o conjunto das novas variáveis introduzidas;
- P' é o conjunto de produções que foram obtidas a partir de P pelas substituições descritas.

A nova gramática $\mathcal{G}'$ é equivalente a $\mathcal{G}$ e as produções são da forma pretendida.

Proposição

Se L é uma linguagem regular, então existe uma gramática linear à direita que gera L.

Prova

Seja $L \subseteq A^*$ uma linguagem regular. Então existe um autómato $\mathcal{A} = (Q, A, \delta, q_0, F)$ determinista que reconhece L.

Considere-se a gramática linear à direita $\mathcal{G}_{\mathcal{A}} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ definida por:

- $V = Q$,
- $\mathcal{S} = q_0$,
- P é constituído por todas as produções do tipo: $\begin{cases} q \to \varepsilon & \text{se } q \in F \\ p \to aq & \text{se } \delta(p, a) = q \end{cases}$.

Então,

$u = a_1 \cdots a_n \in L \;\; sse \;\; \delta^*(q_0, u) = q_n \in F$

$sse \; \exists q_1, \ldots, q_{n-1} \in Q$ e transições da forma $q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \cdots\cdots q_{n-1} \xrightarrow{a_n} q_n$

$sse \;\; \exists q_1, \ldots, q_{n-1} \in Q, \quad q_0 \underset{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}{\Rightarrow} a_1 q_1 \underset{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}{\Rightarrow} a_1 a_2 q_2 \underset{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}{\Rightarrow} \cdots \underset{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}{\Rightarrow} a_1 \cdots a_n q_n \underset{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}{\Rightarrow} a_1 \cdots a_n \varepsilon$

$sse \; u \in L(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$.

Proposição

Se $\mathcal{G}$ é uma gramática linear à direita, então $L(\mathcal{G})$ é uma linguagem regular.

Prova

Admita-se que em $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ as produções são do tipo $\mathcal{B} \to a\mathcal{C}$ ou $\mathcal{B} \to \varepsilon$, com $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in V$ e $a \in A$. Define-se $\mathcal{A}_{\mathcal{G}} = (Q, A, \delta, q_0, F)$ tal que

- $Q = V$,
- $q_0 = \mathcal{S}$,
- $F = \{q \in V \mid q \to \varepsilon \in P\}$,
- $\delta(p, a) = q$ se $p \to aq \in P$ com $p, q \in V$ e $a \in A$.

$\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$ é um autómato finito que reconhece $L(\mathcal{G})$, pois

$$
\begin{aligned}
L(\mathcal{G}) &= \{x \in A^* \mid \mathcal{S} \overset{*}{\underset{\mathcal{G}}{\Rightarrow}} x\} \\
&= \{x \in A^* \mid \exists n \in \mathbb{N}_0 \ \exists a_1, \ldots, a_n \in A \ \exists \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \in V, \\
&\qquad \mathcal{S} \underset{\mathcal{G}}{\Rightarrow} a_1 \mathcal{A}_1 \underset{\mathcal{G}}{\Rightarrow} \cdots \underset{\mathcal{G}}{\Rightarrow} a_1 \cdots a_n \mathcal{A}_n \underset{\mathcal{G}}{\Rightarrow} a_1 \cdots a_n = x\} \\
&= \{x \in A^* \mid \exists n \in \mathbb{N}_0 \ \exists a_1, \ldots, a_n \in A, \ x = a_1 \cdots a_n, \ \delta^*(\mathcal{S}, x) \in F\} \\
&= \{x \in A^* \mid \delta^*(\mathcal{S}, x) \in F\} \\
&= L(\mathcal{A}_{\mathcal{G}})
\end{aligned}
$$

Estamos então em condições de fazer as conclusões finais.

Proposição

Uma linguagem L sobre um alfabeto A é regular se e só se é gerada por uma gramática linear à direita.

De modo análogo se concluiu que:

Proposição

Uma linguagem L sobre um alfabeto A é regular se e só se é gerada por uma gramática linear à esquerda.

Conclusão: a classe das linguagens lineares à direita coincide com a classe das linguagens lineares à esquerda,e ambas coincidem com a classe das linguagens regulares.

Logo,

Uma linguagem L sobre um alfabeto A é regular
se e só se é gerada por uma gramática regular.