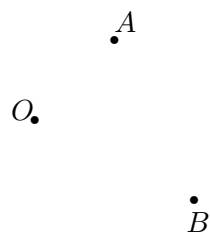


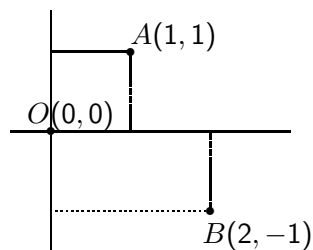
PARTE I - Conceitos básicos.

1 Introdução.

A ideia de introduzir coordenadas para aplicar de modo sistemático a álgebra aos problemas geométricos foi desenvolvida no século XVIII nos trabalhos de Descartes e Fermat. Actualmente, se imaginarmos uma folha de papel com vários pontos assinalados:



parece-nos natural escolher uma **origem** e uns **eixos** e identificar cada um desses pontos com um par de números reais (a, b) a que chamamos **coordenadas** dos pontos.



Assim, a escolha de uma origem O e de uns eixos perpendiculares determina uma aplicação bijectiva:

$$\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{R}^2$$

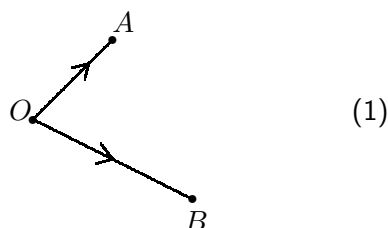
entre a folha de papel \mathcal{A} (bom, uma folha infinita...) e \mathbf{R}^2 . Os objectos geométricos (rectas, circunferências...) podem então descrever-se através de equações algébricas envolvendo as coordenadas.

Poder-se-ia definir um **espaço afim** (real, de dimensão n) simplesmente como um conjunto \mathcal{A} onde os pontos podem descrever-se mediante n coordenadas, isto é, um conjunto \mathcal{A} munido de uma bijecção

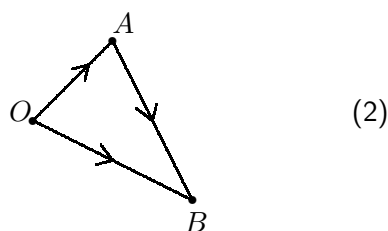
$$\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{R}^n.$$

No entanto, vamos apresentar uma outra definição (aparentemente mais complicada mas matematicamente equivalente) que reforça a ideia de poder escolher diferentes origens de coordenadas (qualquer ponto de \mathcal{A} poderá servir como origem de coordenadas), diferentes eixos ...

Para compreender essa outra definição, vamos esquecer as coordenadas e pensar nos movimentos. A partir de um ponto O , podemos atingir qualquer outro ponto de \mathcal{A} efectuando uma translação¹:



Obviamente, deslocar-nos de O para A e depois de A para B é o mesmo que deslocar-nos directamente de O para B :



Em resumo, considere-se a aplicação que a cada par de pontos A e B de \mathcal{A} associa a translação $t_{\overrightarrow{AB}}$ que leva o ponto A ao ponto B . Tem-se

1. se fixarmos um ponto O , todo o ponto A corresponde univocamente a uma translação $t_{\overrightarrow{OA}}$;
2. dados O , A e B pontos quaisquer de \mathcal{A} , tem-se $t_{\overrightarrow{OA}} + t_{\overrightarrow{AB}} = t_{\overrightarrow{OB}}$.

(Note-se que o conjunto de translações de \mathcal{A} é um espaço vectorial²)

Estas duas propriedades são as escolhidas para definir matematicamente o conceito de espaço afim.

¹Nos livros do ensino secundário aparece frequentemente a noção de **vector livre** \overrightarrow{AB} entre A e B . Independentemente da definição "formal" ou "informal" que se proporcionar de vector livre, podem ser visualizados como translações.

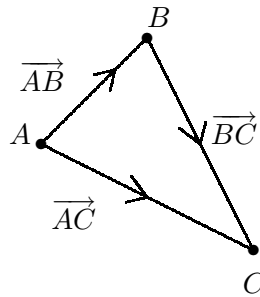
²A composta de translações é uma translação, a composição é comutativa, associativa ...

2 Espaços afins.

Definição 2.1 Sejam \mathcal{A} um conjunto não vazio e E um espaço vectorial real. Uma **estrutura afim (real) em \mathcal{A} sobre E** é uma aplicação $\Phi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow E$ que a cada par (A, B) de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ faz corresponder um vector de E , designado por \overrightarrow{AB} , verificando duas condições:

1. para cada $A \in \mathcal{A}$ a aplicação $\Phi_A : \mathcal{A} \longrightarrow E$ definida por $\Phi_A(M) := \overrightarrow{AM}$ é uma aplicação bijectiva;
2. **(relação de Chasles)** para todos os $A, B, C \in \mathcal{A}$ tem-se

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$



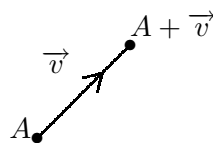
Um conjunto não vazio \mathcal{A} munido de um estrutura afim sobre um espaço vectorial E diz-se **espaço afim associado ao espaço vectorial E** ou **espaço afim sobre E** .

Se o espaço vectorial E for de dimensão finita n , dizemos que o espaço afim tem **dimensão n** . Os espaços afins de dimensão 1 dizem-se **rectas afins**, os espaços afins de dimensão 2 dizem-se **planos afins**.

Os elementos de \mathcal{A} são chamados **pontos do espaço afim** e são denotados, em geral, por maiúsculas. Os elementos de E são chamados **vectores do espaço afim** e são denotados, em geral, por minúsculas.

Dados um ponto A e um vector \vec{v} , o único ponto B que verifica $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ é designado por $A + \vec{v}$, ou seja,

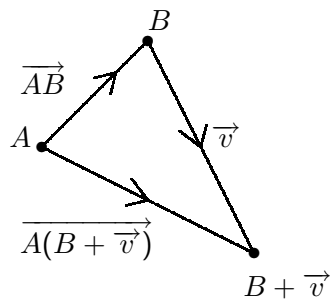
$$A + \vec{v} := \Phi_A^{-1}(\vec{v}).$$



Proposição 2.2 *Propriedades elementares*

Seja \mathcal{A} um espaço afim associado a um espaço vectorial E . Para todos os pontos A, B, C e D de \mathcal{A} e todo o vector \vec{v} de E tem-se:

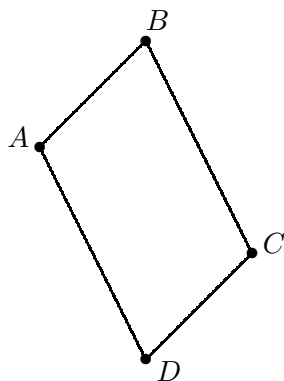
1. $A = B$ se e só se $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$;
2. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$;
3. $\overrightarrow{A(B + \vec{v})} = \overrightarrow{AB} + \vec{v}$;



4. $\overrightarrow{(A + \vec{u})(B + \vec{v})} = \overrightarrow{AB} + (\vec{v} - \vec{u})$;

5. (regra do paralelogramo)

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \text{ se e só se } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.$$

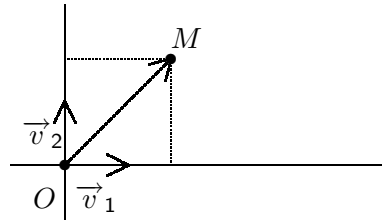


Exercício 2.3 *Prove as propriedades elementares.*

3 Referenciais e coordenadas.

Definição 3.1 Seja \mathcal{A} um espaço afim sobre um espaço vectorial E . Um **referencial** \mathcal{R} em \mathcal{A} é um par $\mathcal{R} = \{O; \mathcal{B}\}$ com O um ponto de \mathcal{A} , chamado **origem do referencial**, e \mathcal{B} uma base de E .

Se \mathcal{R} é um referencial em \mathcal{A} e M um ponto de \mathcal{A} , chamamos **coordenadas** do ponto M no referencial \mathcal{R} às coordenadas do vector \overrightarrow{OM} na base \mathcal{B} .



$$\mathcal{R} = \{O, \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}\}$$

$$\overrightarrow{OM} = 2\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$$

$$M \equiv (2, 2)_{\mathcal{R}}$$

Se (x_1, x_2, \dots, x_n) são as coordenadas de um ponto M num referencial \mathcal{R} escrevemos

$$M \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)_{\mathcal{R}}$$

ou simplesmente, se não houver ambiguidade, $M \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Usar-se-á também essas notações para as coordenadas de vectores numa dada base, assim:

$$M \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)_{\mathcal{R}} \iff \overrightarrow{OM} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)_{\mathcal{B}}$$

Notas 3.2

Seja $\mathcal{R} = \{O; \mathcal{B}\}$ um referencial num espaço afim \mathcal{A} de dimensão n . Tem-se que:

1. o ponto O tem coordenadas $(0, 0, \dots, 0)$;
2. se um ponto A tem coordenadas (a_1, a_2, \dots, a_n) e um ponto B tem coordenadas (b_1, b_2, \dots, b_n) então, na base \mathcal{B} , $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n)$;
3. se um ponto A tem coordenadas (a_1, a_2, \dots, a_n) e um vector \vec{v} tem, na base \mathcal{B} , coordenadas (v_1, v_2, \dots, v_n) então o ponto $B = A + \vec{v}$ tem coordenadas

$$(a_1 + v_1, \dots, a_n + v_n).$$

Repetimos, se fixarmos um referencial num espaço afim \mathcal{A} de dimensão n ,

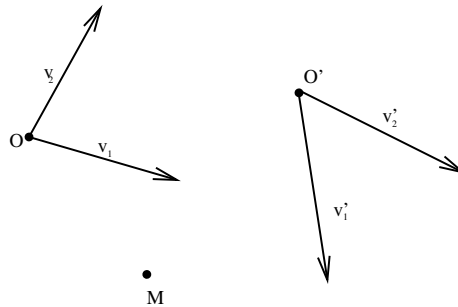
- cada ponto do espaço \mathcal{A} identifica-se com n coordenadas reais;
- o vector \overrightarrow{AB} que une dois pontos A e B do espaço \mathcal{A} é determinado pela diferença das coordenadas de B e A .

E agora ...

o que acontece se mudarmos o referencial?

Exemplo 3.3 *Mudança de coordenadas num plano afim real.*

Sejam $\mathcal{R} = \{O, (\vec{v}_1, \vec{v}_2)\}$ e $\mathcal{R}' = \{O', (\vec{v}'_1, \vec{v}'_2)\}$ dois referenciais de um plano afim real \mathcal{A} associado a um plano vectorial E .

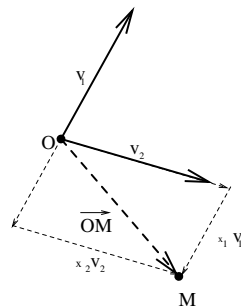


Seja M um ponto de \mathcal{A} tal que

$$M \equiv (x_1, x_2)_{\mathcal{R}} \quad \text{e} \quad M \equiv (x'_1, x'_2)_{\mathcal{R}'}$$

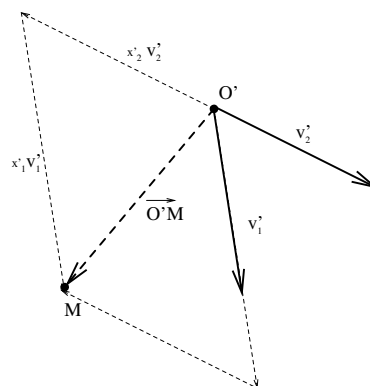
Isto é

$$\overrightarrow{OM} = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2$$



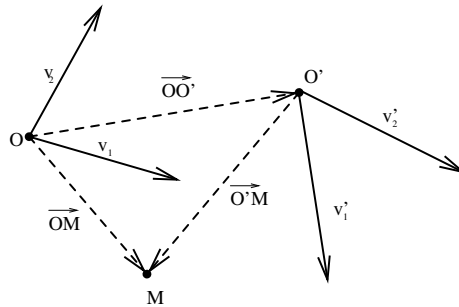
e

$$\overrightarrow{O'M} = x'_1 \vec{v}'_1 + x'_2 \vec{v}'_2$$



Precisamos de obter a relação entre (x_1, x_2) e (x'_1, x'_2) . A observação chave é que

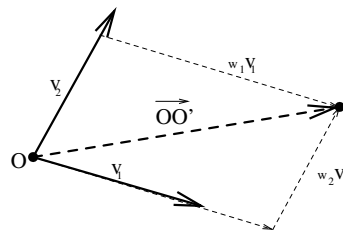
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \quad (*)$$



Vamos supor que conseguimos expressar os elementos do referencial \mathcal{R}' em função dos elementos do referencial \mathcal{R} , ou seja ...

- conhecemos as coordenadas de O' no referencial \mathcal{R} :

$$O' \equiv (\omega_1, \omega_2)_{\mathcal{R}}, \quad \text{isto é} \quad \overrightarrow{OO'} = \omega_1 \vec{v}_1 + \omega_2 \vec{v}_2;$$



- podemos expressar os vectores da base (\vec{v}'_1, \vec{v}'_2) em função dos vectores da base (\vec{v}_1, \vec{v}_2) :

$$\left. \begin{aligned} \vec{v}'_1 &= \alpha_{11} \vec{v}_1 + \alpha_{21} \vec{v}_2 \\ \vec{v}'_2 &= \alpha_{12} \vec{v}_1 + \alpha_{22} \vec{v}_2 \end{aligned} \right\}$$

Para simplificar, vamos usar a notação matricial:

$$(\vec{v}'_1, \vec{v}'_2) = (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \quad (**)$$

A partir de $(*)$ obtemos

$$(x'_1 \vec{v}'_1 + x'_2 \vec{v}'_2) = -(\omega_1 \vec{v}_1 + \omega_2 \vec{v}_2) + (x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2) = (-\omega_1 + x_1) \vec{v}_1 + (-\omega_2 + x_2) \vec{v}_2$$

Matricialmente:

$$(\vec{v}'_1, \vec{v}'_2) \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \begin{pmatrix} -\omega_1 + x_1 \\ -\omega_2 + x_2 \end{pmatrix}$$

E usando (**)

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \begin{pmatrix} -\omega_1 + x_1 \\ -\omega_2 + x_2 \end{pmatrix}$$

Como (\vec{v}_1, \vec{v}_2) são linearmente independentes tem-se

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_1 + x_1 \\ -\omega_2 + x_2 \end{pmatrix}$$

logo

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Nota 3.4 *Expressão matricial usando coordenadas homogêneas*

A igualdade anterior pode também ser expressa através da equação matricial:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \omega_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \omega_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(As coordenadas $(x_1, x_2, 1)$ costumam chamar-se *coordenadas homogêneas*³ do ponto M)

Exemplo 3.5 *Mudança de coordenadas num espaço afim tridimensional.*

Seguindo **exactamente** o mesmo raciocínio, obtemos a seguinte expressão para a mudança de coordenadas num espaço afim tridimensional⁴:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Onde (x_1, x_2, x_3) e (x'_1, x'_2, x'_3) são as coordenadas de um ponto M nos referenciais $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$ e $\mathcal{R}' = \{O', \mathcal{B}'\}$, respectivamente; $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ são as coordenadas de O' no referencial \mathcal{R} e as colunas da matriz (α_{ij}) são as coordenadas na base \mathcal{B} dos vectores da base \mathcal{B}' .

³A importância e utilidade desta notação aparecerão mais tarde.

⁴Existe uma expressão análoga à da nota 3.4 para coordenadas “homogêneas” de pontos num espaço tridimensional.

Definição 3.6 *Orientação num espaço vectorial, orientação num espaço afim*

Seja \mathcal{A} um espaço afim associado a um espaço vectorial E .

- Se $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ e $\mathcal{B}' = (\vec{v}'_1, \dots, \vec{v}'_n)$ são duas bases de E , dizemos que \mathcal{B} e \mathcal{B}' têm a **mesma orientação** se o determinante da matriz de mudança de coordenadas é positivo. Se o determinante for negativo dizemos que têm **orientação oposta**.
- Se considerarmos uma base \mathcal{B} de E , as bases com a mesma orientação de \mathcal{B} dizem-se com **orientação positiva** e as restantes, com **orientação negativa**.
- Um espaço vectorial E munido de uma base fixada \mathcal{B} diz-se um **espaço vectorial orientado**.
- Se \mathcal{A} é um espaço afim, dizemos que dois referenciais têm a **mesma orientação** se a bases associadas aos referenciais têm a mesma orientação.
- Um espaço afim \mathcal{A} munido de um referencial fixado \mathcal{R} diz-se um **espaço afim orientado**.

Exemplos 3.7

1. Em \mathbf{R}^n , se nada for dito em contrário, considera-se como base fixada a base canónica. Assim, as bases orientadas positivamente são aquelas em que o determinante da matriz das coordenadas é positivo e as bases orientadas negativamente aquelas em que o determinante é negativo.
2. Em \mathbf{R}^2 , uma base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ tem *orientação positiva* se

$$\det \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} > 0$$

onde $\vec{v}_1 = (v_{11}, v_{21})$ e $\vec{v}_2 = (v_{12}, v_{22})$.

As bases orientadas positivamente correspondem a bases seguindo uma *rotação contrária aos ponteiros do relógio*

3. Em \mathbf{R}^3 , uma base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ tem *orientação positiva* se

$$\det \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix} > 0$$

onde $\vec{v}_1 = (v_{11}, v_{21}, v_{31})$, $\vec{v}_2 = (v_{12}, v_{22}, v_{32})$ e $\vec{v}_3 = (v_{13}, v_{23}, v_{33})$.

As bases orientadas positivamente em \mathbf{R}^3 obedecem à *regra do saca-rolhas*.

4 Espaços euclidianos.

Definição 4.1 Um espaço euclidiano é um espaço afim \mathcal{A} cujo espaço vectorial associado E está munido de um produto escalar.

O produto escalar em E permitirá definir em \mathcal{A} conceitos métricos, isto é, distância entre pontos, perpendicularidade ...

Recorde-se que um produto escalar num espaço vectorial real E é uma aplicação $E \times E \rightarrow \mathbf{R}$ que a cada par (\vec{u}, \vec{v}) associa um real $\vec{u} \cdot \vec{v}$ verificando certas propriedades que recordamos de seguida:

Nota 4.2 Propriedades de um produto escalar definido em E

Dados \vec{u}, \vec{v} , e \vec{w} vectores de E e $\lambda \in \mathbf{R}$ tem-se:

1. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$;
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$;
3. $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{w}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{w}) = (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{w}$;
4. $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$;
5. $\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$;
6. se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0, \forall \vec{v} \in E$, então $\vec{u} = 0$.

O exemplo básico é o *produto escalar usual* ou *produto interno usual* de \mathbf{R}^n :

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) \cdot (w_1, w_2, \dots, w_n) = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n$$

Usando o produto escalar define-se a noção de **comprimento** ou **norma** de um vector \vec{v} de E através de:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

As normas assim definidas costumam chamar-se **normas euclidianas** e verificam certas propriedades⁵ que recordamos de seguida:

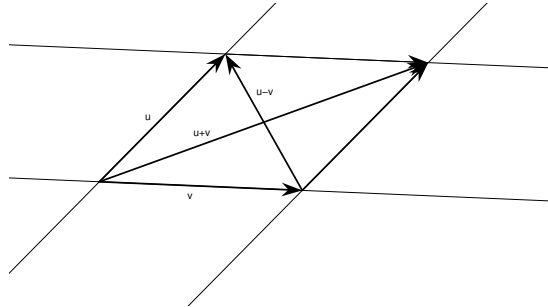
Nota 4.3 Propriedades das normas euclidianas

Sejam $\vec{v}, \vec{w} \in E$ e $\lambda \in \mathbf{R}$.

1. $\|\vec{v}\| \geq 0$ e $\|\vec{v}\| = 0$ se e só se $\vec{v} = 0$;
2. $\|\lambda \vec{v}\| = |\lambda| \|\vec{v}\|$;

⁵Em geral, uma norma é uma aplicação $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbf{R}^+$ verificando simplesmente as três primeiras propriedades que indicamos na nota 4.3. As normas euclidianas, pelo facto de serem definidas através de um produto escalar, verificam várias propriedades extra.

3. $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$ (*desigualdade triangular*).
4. $|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|$ (*desigualdade de Cauchy-Schwarz*) e verifica-se a igualdade se e só se \vec{v} e \vec{w} são proporcionais;
5. $\|\vec{v} + \vec{w}\| = \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$ se e só se $\vec{v} = \lambda \vec{w}$ ou $\vec{w} = \lambda \vec{v}$, com $\lambda \geq 0$;
6. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$ (*lei do paralelogramo*).



A norma euclidiana em \mathbf{R}^n induzida pelo produto escalar usual é dada por:

$$\|(v_1, v_2, \dots, v_n)\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

e diz-se a *norma euclidiana* ou *norma usual*.

Mais algumas definições a lembrar ...

- Dois vectores $\vec{v}, \vec{w} \in E$ dizem-se **ortogonais** e escreve-se $\vec{v} \perp \vec{w}$ se o seu produto escalar é nulo.
- Um vector $\vec{v} \in E$ diz-se **vector unitário** ou **versor** se $\|\vec{v}\| = 1$.
- Uma base de E diz-se **base ortogonal** se os vectores da base são ortogonais dois a dois.
- Uma base ortogonal de E diz-se **base ortonormada** se os vectores da base são unitários.

Dada uma base ortonormada \mathcal{B} de E , se $\vec{v} \equiv (v_1, v_2, \dots, v_n)_{\mathcal{B}}$ e $\vec{w} \equiv (w_1, w_2, \dots, w_n)_{\mathcal{B}}$, tem-se:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n$$

e

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

Ou seja, para uma base ortonormada, o produto escalar e a norma correspondem ao produto escalar e à norma usual nas coordenadas. Por isso é interessante o seguinte teorema:

Teorema 4.4 *Para todo o espaço vectorial real de dimensão finita munido de um produto escalar existe uma base ortonormada.*

Definição 4.5 Seja \mathcal{A} um espaço euclidiano. Dados $A, B \in \mathcal{A}$ definimos a **distância euclidiana** entre A e B , que designamos por $d(A, B)$ ou por AB como

$$d(A, B) = \|\vec{AB}\|$$

Definimos ainda o **segmento** de extremos A e B como o conjunto:

$$\overline{AB} = \{A + t\vec{AB} : t \in [0, 1]\}$$

e **medida** do segmento \overline{AB} , que designamos por AB , como a **distância** $d(A, B)$ ou, equivalentemente, a **norma** $\|\vec{AB}\|$.

Note-se que, se \mathcal{A} está munido de um referencial $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$, com \mathcal{B} uma base ortonormada de E , tem-se

$$d(A, B) = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}$$

onde $A \equiv (a_1, a_2, \dots, a_n)_{\mathcal{R}}$ e $B \equiv (b_1, b_2, \dots, b_n)_{\mathcal{R}}$.

Os referenciais $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$ com \mathcal{B} uma base ortonormada de E serão chamados **referenciais ortonormados** do espaço euclidiano \mathcal{A} .

IMPORTANTE : É possível provar (usando a propriedade 5 da nota 4.3) que um ponto C pertence ao segmento \overline{AB} se e só se

$$d(A, B) = d(A, C) + d(C, B)$$

Nota 4.6 Mudanças de coordenadas entre referenciais ortonormados.

Em espaços vectoriais munidos de um produto escalar, as mudanças entre bases ortonormadas representam-se matricialmente através de **matrizes ortogonais** (matrizes cuja inversa é igual à matriz transposta). Isto é, A é uma matriz de mudança de base entre duas bases ortonormais se e só se

$$AA^t = Id$$

Assim, as mudanças de coordenadas entre referenciais ortonormados possuem uma propriedade muito especial que facilita bastante as contas. Por exemplo, se \mathcal{R} e \mathcal{R}' são referenciais ortonormados de um espaço euclidiano, de modo que a expressão seguinte define a mudança de coordenadas:

$$AX' + W = X$$

então, para obter a expressão correspondente à mudança de coordenadas inversa, basta fazer

$$A^t X + (-A^t W) = X'$$

Observe-se ainda que, como $AA^t = Id$ e $\det A = \det A^{-1}$, se tem $\det A = \pm 1$.

Passamos de seguida a um problema nada trivial:

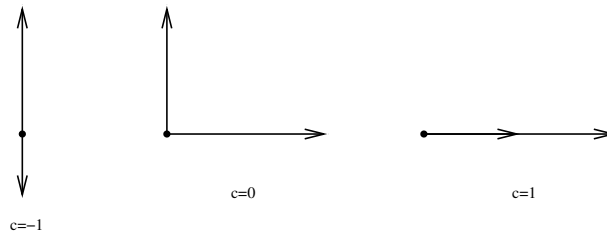
como definir matematicamente a noção de ângulo?

Definir-se-á o ângulo entre dois vectores através do produto escalar. De modo mais preciso, dados dois vectores \vec{u} e \vec{v} de um plano vectorial, definir-se-á o ângulo (orientado e não orientado) por eles formado usando a quantidade:

$$c = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{v}\| \|\vec{u}\|}$$

Observe-se que essa quantidade verifica $-1 \leq \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{v}\| \|\vec{u}\|} \leq 1$ e, de facto:

- $c = -1$ se os vectores \vec{u} e \vec{v} são proporcionais mas *apontam* em sentidos contrários;
- $c = 1$ se os vectores \vec{u} e \vec{v} são proporcionais e *apontam* no mesmo sentido;
- $c = 0$ se os vectores \vec{u} e \vec{v} são ortogonais.



Por outras palavras, esse quociente parece ser uma boa medida da *abertura* entre \vec{u} e \vec{v} . De facto, a escolha de um produto escalar (para além de proporcionar uma noção de comprimento ...), permite medir a *abertura* entre vectores.

Definição 4.7 Ângulos não orientados, cosseno de um ângulo não orientado.

Seja E um espaço vectorial munido de um produto escalar.

- Dizemos que dois pares (não ordenados) de vectores não nulos $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ e $\{\vec{u}', \vec{v}'\}$ formam o mesmo **ângulo não orientado** se

$$\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{v}\| \|\vec{u}\|} = \frac{\vec{v}' \cdot \vec{u}'}{\|\vec{v}'\| \|\vec{u}'\|}$$

- A relação anterior é uma relação de equivalência entre os pares de vectores. Cada classe de equivalência diz-se um **ângulo não orientado**. A classe de equivalência do par (\vec{u}, \vec{v}) designa-se por $\angle\{\vec{u}, \vec{v}\}$.
- Sejam $\vec{v}, \vec{u} \in E$, vectores não nulos. Define-se o **cosseno** do ângulo (não orientado) formado por \vec{v} e \vec{u} como o real:

$$\cos \angle\{\vec{v}, \vec{u}\} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{v}\| \|\vec{u}\|}$$

(Note-se que o produto escalar é simétrico, assim o quociente $\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{v}\| \|\vec{u}\|}$ associado ao conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ está bem definido.)

Observe-se que o cosseno definido em 4.7 é simplesmente uma aplicação que associa a um par de vectores um número real. Esta aplicação cosseno está obviamente relacionada com a função cosseno usual (função real, de variável real, periódica de período $2\pi \dots$). De facto, a partir das desigualdades

$$-1 \leq \cos \angle\{\vec{u}, \vec{v}\} \leq 1$$

(consequência directa da desigualdade de Cauchy-Schwarz) podemos associar a cada par de vectores (\vec{u}, \vec{v}) o único real $\theta \in [0, \pi]$ que verifica:

$$\cos \angle\{\vec{u}, \vec{v}\} = \cos \theta$$

(o segundo cos é a função cosseno usual). O real θ costuma chamar-se *medida do ângulo não orientado* formado por \vec{v} e \vec{u} .

Proposição 4.8 Propriedades

Seja E um espaço vectorial real munido de um produto escalar.

$$1. \forall \vec{v}, \vec{w} \in E \text{ e } \forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \lambda, \mu > 0, \angle\{\vec{v}, \vec{w}\} = \angle\{\lambda \vec{v}, \mu \vec{w}\}.$$

2. Teorema de Carnot

$$\forall \vec{v}, \vec{w} \in E, \|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 + 2\vec{v} \cdot \vec{w}$$

ou, equivalentemente,

$$\forall \vec{v}, \vec{w} \in E, \|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 + 2\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\cos \angle\{\vec{v}, \vec{w}\}.$$

3. Teorema de Pitágoras

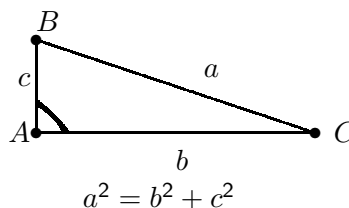
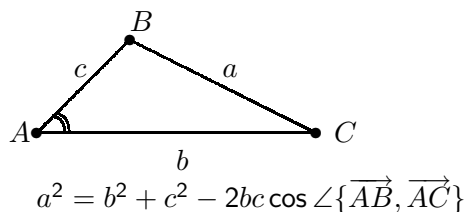
Sejam $\vec{v}, \vec{w} \in E$. Se \vec{v} e \vec{w} são ortogonais, tem-se

$$\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2$$

Corolário 4.9 Teorema do cosseno

Sejam A, B e C três pontos distintos de um espaço afim euclidiano. Verifica-se

$$d(B, C)^2 = d(A, C)^2 + d(A, B)^2 - 2d(A, B)d(A, C)\cos \angle\{\vec{AB}, \vec{AC}\}$$



Corolário 4.10 O Teorema de Pitágoras

Sejam A, B e C três pontos distintos de um espaço afim euclidiano. Tem-se que \vec{AB} e \vec{AC} são ortogonais se e só se

$$d(B, C)^2 = d(A, B)^2 + d(A, C)^2$$

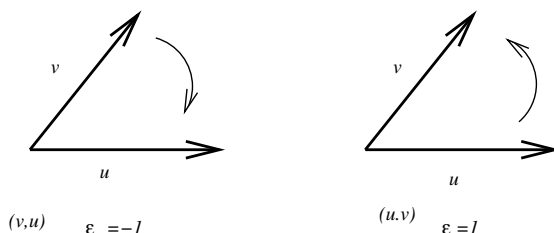
Definição 4.11 Ângulos orientados, cosseno e seno de um ângulo orientado.

Seja E um plano vectorial orientado munido de um produto escalar.

- Dizemos que dois pares de vectores linearmente independentes (\vec{u}, \vec{v}) e (\vec{u}', \vec{v}') formam o mesmo **ângulo orientado** se

$$\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}'}{\|\vec{u}'\| \|\vec{v}'\|}$$

e se (\vec{u}, \vec{v}) e (\vec{u}', \vec{v}') definem bases de E com a mesma orientação.



- A relação anterior é uma relação de equivalência entre os pares de vectores. Cada classe de equivalência diz-se um **ângulo orientado**. A classe de equivalência do par (\vec{u}, \vec{v}) designa-se por $\angle(\vec{u}, \vec{v})$.
- Define-se o **cosseno** do ângulo orientado formado por \vec{u} e \vec{v} como o real:

$$\cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

- Define-se o **seno** do ângulo orientado $\angle(\vec{u}, \vec{v})$, e designamos por $\sin \angle(\vec{u}, \vec{v})$, como

$$\sin \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \varepsilon \sqrt{1 - c^2}$$

com $c = \cos \angle(\vec{u}, \vec{v})$, $\varepsilon = 1$ se (\vec{u}, \vec{v}) é uma base com orientação positiva e $\varepsilon = -1$ se (\vec{u}, \vec{v}) é uma base com orientação negativa.

- O único real $\theta \in [0, 2\pi[$ verificando

$$\cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \cos \theta \quad \text{e} \quad \sin \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \sin \theta$$

chama-se **medida do ângulo orientado** formado pelos vectores \vec{u} e \vec{v} , nesta ordem.

- Os ângulos orientados $\angle(\vec{u}, \vec{v})$ e $\angle(\vec{v}, \vec{u})$ dizem-se **ângulos orientados opostos**.

A definição introduzida de ângulo orientado pode estender-se a pares de vectores proporcionais. Note-se que, se \vec{u} e \vec{v} são proporcionais, então:

$$\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \pm 1$$

Se o valor deste quociente é 1, o par (\vec{u}, \vec{v}) diz-se o **ângulo nulo**, se for -1 , diz-se o **ângulo raso**. Em qualquer um dos dois casos, podemos definir o seno como anteriormente e obtemos:

$$\sin \angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$$

Saliente-se que, se dois pares de vectores formam o mesmo ângulo orientado, então formam o mesmo ângulo não orientado.

Proposição 4.12 Sejam \vec{u} e \vec{v} vectores de um plano vectorial orientado.

1. $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \lambda, \mu > 0$, tem-se $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \angle(\lambda \vec{u}, \mu \vec{v})$; em particular

$$\cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \cos \angle(\lambda \vec{u}, \mu \vec{v}) \quad \text{e} \quad \sin \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \sin \angle(\lambda \vec{u}, \mu \vec{v});$$

2. $\sin \angle(\vec{u}, \vec{v}) = -\sin \angle(\vec{v}, \vec{u})$;

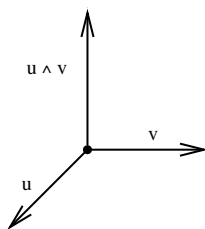
3. $\sin \angle(\vec{u}, \vec{v}) = -\sin \angle(\vec{u}, -\vec{v})$.

Nota 4.13 Produto vectorial num espaço tridimensional

Sejam \vec{u} e \vec{v} dois vectores linearmente independentes num espaço vectorial tridimensional orientado E munido de um produto escalar. Existe um único vector, que se designará por $\vec{u} \wedge \vec{v}$, tal que:

- $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é ortogonal a \vec{u} e \vec{v} ;
- a base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}\}$ tem orientação positiva;
- $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\sin \angle(\vec{u}, \vec{v})|$.

Se \vec{u} e \vec{v} são linearmente dependentes definimos $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.



Este vector $\vec{u} \wedge \vec{v}$ diz-se **produto vectorial** dos vectores \vec{u} e \vec{v} . Se, numa base ortonormada com orientação positiva, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, então pode provar-se que

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

Simbolicamente, escrevemos:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

onde $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ são os vectores de uma base ortonormada de E com orientação positiva.

Saliente-se que o produto vectorial também é chamado *produto externo* e designado por $\vec{u} \times \vec{v}$.

Proposição 4.14 *Propriedades do produto vectorial*

Sejam \vec{u}, \vec{v} e \vec{w} três vectores de um espaço vectorial tridimensional orientado e munido de um produto escalar.

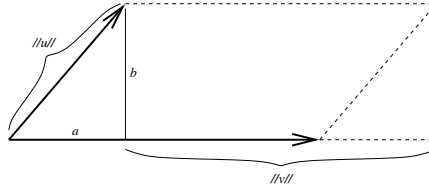
1. $\vec{w} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w});$
2. $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u};$
3. $(\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v});$
4. $(\vec{u} + \vec{u}') \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u}' \wedge \vec{v};$
5. $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ se e só se \vec{u} e \vec{v} são linearmente dependentes;
6. $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u};$
7. (*Identidade de Jacobi*)
 $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} + (\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{u} + (\vec{w} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{0};$
8. $(\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2) \cdot (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) = (\vec{u}_1 \cdot \vec{v}_1)(\vec{u}_2 \cdot \vec{v}_2) - (\vec{u}_1 \cdot \vec{v}_2)(\vec{u}_2 \cdot \vec{v}_1);$
9. $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2.$

Nota 4.15 Seja E um espaço vectorial tridimensional orientado, munido de um produto escalar.

- Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in E$, não nulos. Recorde-se que $\vec{u} \wedge \vec{v}$ verifica:

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\sin \angle(\vec{u}, \vec{v})|.$$

A norma do produto vectorial $\vec{u} \wedge \vec{v}$ representa a área do paralelogramo definido pelos vectores \vec{u} e \vec{v} .



Pelo teorema de Pitágoras $b^2 = \|\vec{u}\|^2 - a^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 (\cos \angle(\vec{u}, \vec{v}))^2$ donde $b = \|\vec{u}\| |\sin \angle(\vec{u}, \vec{v})|$ e

$$\|\vec{v}\| b = \|\vec{v}\| \|\vec{u}\| |\sin \angle(\vec{u}, \vec{v})| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$$

- Sejam \vec{v}, \vec{w} e \vec{u} três vectores linearmente independentes de E . Se calcularmos o produto escalar $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$ obtemos:

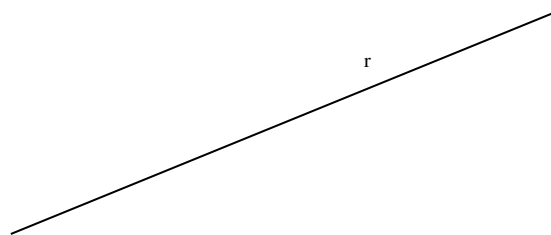
$$V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v} \wedge \vec{w}\| |\cos \angle(\vec{u}, \vec{v} \wedge \vec{w})|$$

O real positivo V representa o volume do paralelepípedo definido pelos vectores \vec{u}, \vec{v} e \vec{w} .

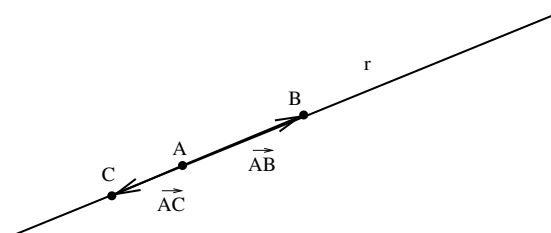
(O produto escalar $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$ costuma chamar-se *produto misto* dos vectores \vec{u}, \vec{v} e \vec{w} .)

5 Rectas, planos e outros subespaços afins.

Considere-se uma linha recta num plano ...



Se fixarmos um qualquer dos seus pontos, as translações a qualquer outro ponto da recta são feitas seguindo vectores proporcionais:



Por outras palavras,

$$\{\vec{AB} : B \text{ percorre a recta}\}$$

é uma recta vectorial. De modo análogo, se escolhermos um ponto num plano qualquer do espaço, as translações desse ponto a um outro ponto qualquer do plano formam um plano vectorial.

Definição 5.1 *Sejam \mathcal{A} um espaço afim sobre um espaço vectorial E munido de uma estrutura afim Φ e \mathcal{U} um subconjunto não vazio de \mathcal{A} . O conjunto \mathcal{U} diz-se **subespaço afim** de \mathcal{A} se existir um ponto A de \mathcal{U} tal que $\Phi_A(\mathcal{U})$ é um subespaço vectorial de E .*

(Recorde-se que $\Phi_A(\mathcal{U}) = \{\vec{AB} : B \in \mathcal{U}\}$.)

Exemplos 5.2 Seja \mathcal{A} um espaço afim associado a um espaço vectorial real E .

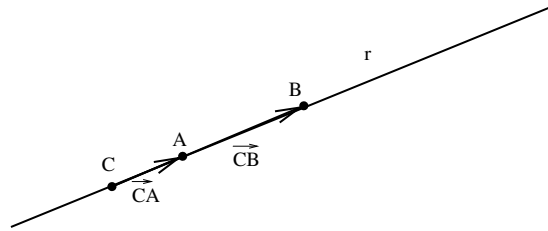
1. Seja $A \in \mathcal{A}$. O conjunto $\{A\}$ é um subespaço afim já que, ao considerar a aplicação Φ_A , tem-se $\Phi_A(\{A\}) = \{\vec{0}\}$.
2. O espaço afim total \mathcal{A} é um subespaço afim. Para todo o ponto A de \mathcal{A} obtém-se $\Phi_A(\mathcal{A}) = E$.
3. Dados A e B pontos distintos de \mathcal{A} , o subconjunto

$$\mathcal{U} = \{A, B\}$$

não é um subespaço afim.

Nota 5.3 *Subespaço vectorial associado a um subespaço afim.*

Note-se que, no exemplo inicial da recta, se escolhermos um outro ponto qualquer, obtemos o mesmo tipo de translações:



Por outras palavras, o facto de ser ou não subespaço afim não depende do ponto A escolhido primeiramente. De facto, se \mathcal{U} é um subespaço afim, então, para todos os pontos $A, A' \in \mathcal{U}$ tem-se

$$\Phi_A(\mathcal{U}) = \Phi_{A'}(\mathcal{U})$$

Assim, o subespaço vectorial $\Phi_A(\mathcal{U})$ não depende do ponto A considerado e costuma chamar-se **subespaço vectorial associado** ao subespaço afim \mathcal{U} . A dimensão de $\Phi_A(\mathcal{U})$ diz-se **dimensão** do subespaço afim \mathcal{U} .

- Os subespaços de dimensão 0 são os pontos do espaço afim.
- Os subespaços de dimensão 1 são chamados **rectas** afins.
- Os subespaços de dimensão 2 são chamados **planos** afins.
- Se $\dim \mathcal{A} = n$, os subespaços de dimensão $n - 1$ são chamados **hiperplanos** afins.

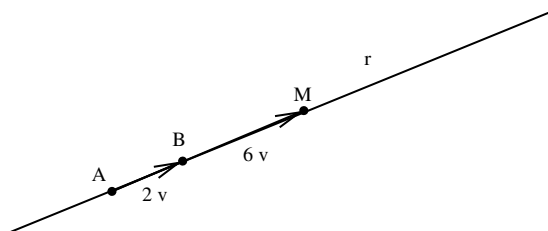
Exemplo 5.4 *Rectas num espaço afim.*

Seja \mathcal{A} um espaço afim sobre E . Um subconjunto $r \subset \mathcal{A}$ é uma recta se existir um ponto $A \in r$ tal que

$$\{\overrightarrow{AM} : M \in r\}$$

é uma recta vectorial de E . Se \vec{v} é um vector gerador desta recta vectorial, tem-se

$$r = \{A + \overrightarrow{AM} : M \in r\} = \{A + \lambda \vec{v} : \lambda \in \mathbf{R}\}$$



O vector \vec{v} diz-se um **vector director** da recta r e a expressão:

$$r = A + \langle \vec{v} \rangle$$

diz-se uma **equação vectorial** da recta r .

Rectas e coordenadas.

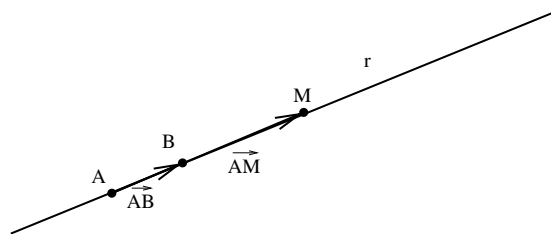
- Suponha-se que \mathcal{A} é um plano afim munido de um referencial $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$. Se $A \equiv (a_1, a_2)_{\mathcal{R}}$ e $\vec{v} \equiv (v_1, v_2)_{\mathcal{B}}$ então, um ponto $M \equiv (x_1, x_2)_{\mathcal{R}}$ pertence à recta r se e só se existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tal que:

$$\begin{cases} x_1 &= a_1 + \lambda v_1 \\ x_2 &= a_2 + \lambda v_2 \end{cases}$$

- Suponha-se que \mathcal{A} é um espaço afim tridimensional munido de um referencial $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$. Se $A \equiv (a_1, a_2, a_3)_{\mathcal{R}}$ e $\vec{v} \equiv (v_1, v_2, v_3)_{\mathcal{B}}$ então, um ponto $M \equiv (x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{R}}$ pertence à recta r se e só se existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tal que:

$$\begin{cases} x_1 &= a_1 + \lambda v_1 \\ x_2 &= a_2 + \lambda v_2 \\ x_3 &= a_3 + \lambda v_3 \end{cases}$$

As expressões anteriores costumam chamar-se **equações paramétricas** da recta r no referencial \mathcal{R} porque os pontos da recta ficam definidos em função do parâmetro λ . No caso de espaços afins de dimensão n as equações paramétricas são análogas.



Note-se que, se B é um ponto da recta r distinto de A , o vector não nulo \vec{AB} é um vector director de r e então:

$$r = A + \langle \vec{AB} \rangle$$

é uma equação vectorial de r . A partir desta equação vectorial, usando as coordenadas de A e B num determinado referencial, podemos obter umas equações paramétricas de r .

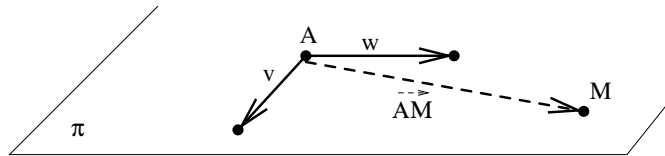
Exemplo 5.5 Planos num espaço afim.

Seja \mathcal{A} um espaço afim sobre E . Um subconjunto $\pi \subset \mathcal{A}$ é um plano se existir um ponto $A \in \pi$ tal que

$$\{\overrightarrow{AM} : M \in \pi\}$$

é um plano vectorial de E . Se (\vec{v}, \vec{w}) é uma base deste plano vectorial, tem-se

$$\pi = \{A + \overrightarrow{AM} : M \in \pi\} = \{A + (\lambda \vec{v} + \mu \vec{w}) : \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}$$



Os vectores \vec{v} e \vec{w} dizem-se **vectores directores** do plano π e a expressão:

$$\pi = A + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

diz-se uma **equação vectorial** do plano π .

Planos e coordenadas.

Suponha-se que \mathcal{A} é um espaço afim tridimensional munido de um referencial $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$. Se $A \equiv (a_1, a_2, a_3)_{\mathcal{R}}$, $\vec{v} \equiv (v_1, v_2, v_3)_{\mathcal{B}}$ e $\vec{w} \equiv (w_1, w_2, w_3)_{\mathcal{B}}$, então, um ponto $M \equiv (x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{R}}$ pertence à recta r se e só se existem $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tais que:

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda v_1 + \mu w_1 \\ x_2 = a_2 + \lambda v_2 + \mu w_2 \\ x_3 = a_3 + \lambda v_3 + \mu w_3 \end{cases}$$

A expressões anteriores costumam chamar-se **equações paramétricas** do plano π no referencial \mathcal{R} (os pontos do plano ficam definidos em função dos parâmetros λ e μ).

Note-se que, se A , B e C são três pontos do plano tais que \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} são linearmente independentes⁶, tem-se que \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} são dois vectores directores do plano e assim :

$$\pi = A + \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$$

é uma equação vectorial do plano π . A partir desta equação vectorial, usando as coordenadas de A , B e C num determinado referencial, obtemos umas equações paramétricas de π .

⁶Diz-se, neste caso, que os pontos A , B e C formam um triângulo ou são vértices de um triângulo.

Nota 5.6 Equação vectorial e equações paramétricas de um subespaço afim

Sejam \mathcal{A} um espaço afim sobre um espaço vectorial E e \mathcal{U} um subespaço afim de \mathcal{A} associado a um subespaço vectorial U de E . Como acontece com rectas e planos, se A é um ponto qualquer de \mathcal{U} , tem-se que

$$U = \Phi_A(\mathcal{U})$$

ou seja

$$\mathcal{U} = \{A + \vec{u} : \vec{u} \in U\}$$

Por isso costuma-se escrever

$$\mathcal{U} = A + U$$

(salienta-se que esta notação é coerente com o uso de coordenadas num referencial.)

Se $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ é uma base do subespaço vectorial U a expressão:

$$A + \langle \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k \rangle$$

ou, equivalentemente,

$$A + (\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_k \vec{u}_k), \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{R}$$

diz-se uma **equação vectorial** do subespaço afim \mathcal{U} . Se considerarmos um referencial $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$ em \mathcal{A} , as equações paramétricas de \mathcal{U} são dadas por:

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda_1 u_{11} + \dots + \lambda_k u_{1k} \\ x_2 = a_2 + \lambda_1 u_{21} + \dots + \lambda_k u_{2k} \\ \vdots \\ x_n = a_n + \lambda_1 u_{n1} + \dots + \lambda_k u_{nk} \end{cases}$$

onde $A \equiv (a_1, a_2, \dots, a_n)_{\mathcal{R}}$, e $\vec{u}_j \equiv (u_{1j}, \dots, u_{nj})_{\mathcal{B}}$, para $j = 1, \dots, k$.

Estas equações são chamadas **equações paramétricas** do subespaço afim \mathcal{U} no referencial \mathcal{R} . Salienta-se que **um subespaço afim de dimensão k é dado por n equações dependendo de k parâmetros.**

Exemplo 5.7 Conjuntos definidos por equações cartesianas.

Em todos os casos indicados de seguida considerar-se-á um espaço afim \mathcal{A} munido de um referencial \mathcal{R} . Para simplificar a escrita, identificar-se-á cada ponto A de \mathcal{A} com a suas coordenadas no referencial \mathcal{R} .

- Seja \mathcal{A} um plano afim munido de um referencial \mathcal{R} . Considere-se o seguinte subconjunto de \mathcal{A} :

$$\mathcal{U} = \{(x_1, x_2) \in \mathcal{A} : ax_1 + bx_2 + c = 0\}$$

com a e b não simultaneamente nulos. Suponha-se $a \neq 0$ (o caso $b \neq 0$ é análogo) e note-se que $(x_1, x_2) \in \mathcal{U}$ se e só

$$x_1 = -c - \frac{b}{a}x_2$$

Introduzindo um parâmetro auxiliar λ , obtemos que $(x_1, x_2) \in \mathcal{U}$ se e só se existe λ tal que:

$$\begin{cases} x_1 &= -c - \lambda \frac{b}{a} \\ x_2 &= \lambda \end{cases}$$

Assim, \mathcal{U} é a recta r que passa pelo ponto $(-c, 0)$ e é dirigida pelo vector $(-\frac{b}{a}, 1)$.

A equação inicial

$$ax_1 + bx_2 + c = 0$$

diz-se **equação cartesiana** ou **equação linear** da recta.

- Seja \mathcal{A} um espaço afim tridimensional munido de um referencial \mathcal{R} . Considere-se o seguinte subconjunto de \mathcal{A} :

$$\mathcal{U} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{A} : ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0\}$$

com a , b e c não simultaneamente nulos. Suponha-se $a \neq 0$ (os outros casos são análogos) e note-se que $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{U}$ se e só se

$$x_1 = -d - \frac{b}{a}x_2 - \frac{c}{a}x_3$$

Podemos introduzir os parâmetros auxiliares λ e μ e obtemos que $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{U}$ se e só se existem λ e μ tais que

$$\begin{cases} x_1 &= -d - \lambda \frac{b}{a} - \mu \frac{c}{a} \\ x_2 &= \lambda \\ x_3 &= \mu \end{cases}$$

Assim, \mathcal{U} é o plano que passa pelo ponto $(-d, 0, 0)$ e é dirigido pelos vectores $(-\frac{b}{a}, 1, 0)$ e $(-\frac{c}{a}, 0, 1)$.

A equação inicial

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$$

diz-se **equação cartesiana** ou **equação linear** do plano.

- Seja \mathcal{A} um espaço afim de dimensão n associado a um espaço vectorial E munido de um referencial \mathcal{R} . Sejam $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$, não todos nulos, e $b \in \mathbf{R}$. O conjunto

$$\mathcal{H} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{A} : a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b\}$$

é um hiperplano afim de \mathcal{A} associado ao hiperplano vectorial:

$$H = \{(v_1, \dots, v_n) \in E : a_1v_1 + \dots + a_nv_n = 0\}$$

A verificação é análoga aos casos anteriores. A equação inicial

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$$

diz-se **equação cartesiana** ou **equação linear** do hiperplano.

Proposição 5.8 A intersecção não vazia de subespaços afins é um subespaço afim associado à intersecção dos respectivos subespaços vectoriais.

Corolário 5.9 Seja \mathcal{A} um espaço afim, de dimensão n , munido de um referencial \mathcal{R} . O conjunto de pontos de \mathcal{A} que verificam um sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (*)$$

se for não vazio, é um subespaço afim de \mathcal{A} de dimensão $n - r$, sendo r a característica do sistema.

Nota 5.10 Equações cartesianas de subespaços afins.

Reciprocamente, todo o subespaço afim de \mathcal{A} de dimensão k pode obter-se como um conjunto de soluções de um sistema de $n - k$ equações lineares (não necessariamente homogêneas). O sistema diz-se um sistema de **equações cartesianas** do subespaço.

• *Passagem de equações cartesianas a equações paramétricas:*

Trata-se simplesmente de resolver o sistema, expressando o conjunto de soluções dependendo de $n - r$ parâmetros, com r a característica do sistema.

• *Passagem de equações paramétricas a equações cartesianas:*

Se um subespaço afim, de um espaço afim de dimensão n , tem dimensão k , então está definido por n equações paramétricas dependendo de k parâmetros, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Usando k das equações paramétricas podemos por os parâmetros em função das coordenadas x_1, \dots, x_n e substituí-los nas outras $n - k$ equações. No caso de hiperplanos afins podemos usar o determinante para obter directamente a equação cartesiana (exemplos 5.11, alínea 2).

Exemplos 5.11

Seja \mathcal{A} um espaço afim munido de um referencial \mathcal{R} . Para simplificar, identificar-se-ão os pontos de \mathcal{A} com as suas coordenadas no referencial \mathcal{R} .

1. Recta afim.

Seja \mathcal{U} uma recta afim de \mathcal{A} , $\mathcal{U} = A + \langle \vec{v} \rangle$. Se $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \neq \vec{0}$ e $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ tem-se

$$\mathcal{U} = (a_1, a_2, \dots, a_n) + \langle (v_1, v_2, \dots, v_n) \rangle$$

As equações paramétricas de \mathcal{U} são:

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda v_1 \\ x_2 = a_2 + \lambda v_2 \\ \vdots \\ x_n = a_n + \lambda v_n \end{cases}$$

Como $\vec{v} \neq \vec{0}$, alguma das coordenadas de \vec{v} é não nula. Suponha-se $v_1 \neq 0$ (os outros casos são análogos). Tem-se $\lambda = \frac{x_1 - a_1}{v_1}$ e substituindo nas equações paramétricas obtemos $n - 1$ equações cartesianas:

$$\begin{cases} x_2 - \left(\frac{x_1 - a_1}{v_1}\right)v_2 - a_2 = 0 \\ \vdots \\ x_n - \left(\frac{x_1 - a_1}{v_1}\right)v_n - a_n = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 - \left(\frac{v_2}{v_1}\right)x_1 = a_2 - \frac{a_1 v_2}{v_1} \\ \vdots \\ x_n - \left(\frac{v_n}{v_1}\right)x_1 = a_n - \frac{a_1 v_n}{v_1} \end{cases}$$

2. Hiperplano afim.

Seja \mathcal{H} um hiperplano afim de \mathcal{A} definido pela equação vectorial:

$$\mathcal{H} = A + \langle \vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_{n-1} \rangle$$

com $H = \langle \vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_{n-1} \rangle$ um hiperplano vectorial de \mathbf{R}^n .

Recorde-se que um ponto M pertence a \mathcal{H} se e só se o vector \overrightarrow{AM} pertence ao hiperplano vectorial H . O vector \overrightarrow{AM} pertence a H se e só se o sistema de n vectores

$$\{\overrightarrow{AM}, \vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_{n-1}\}$$

é **linearmente dependente**. Se $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $M = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ tem-se que

$$\overrightarrow{AM} = (x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n)$$

Suponha-se que $\vec{w}_j = (w_{1j}, w_{2j}, \dots, w_{nj})$ para $j = 1, \dots, n - 1$

O sistema

$$\{\overrightarrow{AM}, \vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_{n-1}\}$$

é linearmente dependente se e só se

$$\det \begin{pmatrix} x_1 - a_1 & x_2 - a_2 & \dots & x_n - a_n \\ w_{11} & w_{21} & \dots & w_{n1} \\ w_{12} & w_{22} & \dots & w_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{1n-1} & w_{2n-1} & \dots & w_{nn-1} \end{pmatrix} = 0$$

Se desenvolvermos o determinante anterior, obtemos uma equação

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n + b = 0$$

ou seja, uma equação cartesiana ou equação reduzida do hiperplano afim \mathcal{H} .

ATENÇÃO: Em geral, a reunião de dois subespaços afins não é um subespaço afim.

Proposição 5.12 *Sejam $\mathcal{U} = A + U$ e $\mathcal{V} = B + V$ dois subespaços afins de um espaço afim \mathcal{A} associado a um espaço vectorial E . O menor subespaço afim que contém \mathcal{U} e \mathcal{V} , designado por $\mathcal{U} + \mathcal{V}$, verifica:*

$$\mathcal{U} + \mathcal{V} = A + (U + V + \langle \overrightarrow{AB} \rangle)$$

Exemplos 5.13 Seja \mathcal{A} um espaço afim.

1. Sejam A um ponto e $r = B + \langle \overrightarrow{v} \rangle$ uma recta de \mathcal{A} , tal que $B \notin r$. O menor subespaço afim \mathcal{U} que contém A e r é o plano afim:

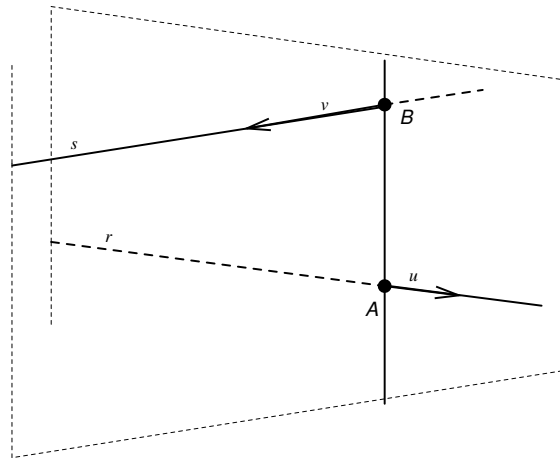
$$\mathcal{U} = A + \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{v} \rangle$$

2. *Rectas complanares e rectas enviesadas*

Sejam $r = A + \langle \overrightarrow{u} \rangle$ e $r' = B + \langle \overrightarrow{v} \rangle$ duas rectas afins de \mathcal{A} . O menor subespaço afim $r + r'$ que contém r e r' verifica:

$$r + r' = A + \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$$

- (a) Se $\dim(r + r') = 1$, isto é, $\dim \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 1$, as rectas são coincidentes (iguais) $r = r'$.
- (b) Se $\dim(r + r') = 2$, isto é, $\dim \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 2$, as rectas são distintas e complanares (contidas no plano afim $r + r'$).
- (c) Se $\dim(r + r') = 3$, isto é, $\dim \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 3$, as rectas **NÃO** estão contidas num plano, são rectas chamadas *enviesadas*.



6 Paralelismo e perpendicularidade

Definição 6.1 Sejam \mathcal{U} e \mathcal{V} dois subespaços afins de um espaço afim \mathcal{A} associados respectivamente aos subespaços vectoriais U e V . Dizemos que \mathcal{U} e \mathcal{V} são **incidentes** se $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ ou $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. Dizemos que \mathcal{U} e \mathcal{V} são **paralelos**⁷ e escrevemos $\mathcal{U} \parallel \mathcal{V}$, se $U \subseteq V$ ou $V \subseteq U$.

Exemplos 6.2 Seja \mathcal{A} um espaço afim.

1. Duas rectas de \mathcal{A}

$$r = A + \langle \vec{v} \rangle \quad \text{e} \quad r' = A' + \langle \vec{v}' \rangle$$

são paralelas se e só se os vectores \vec{v} e \vec{v}' são proporcionais.

2. Considere-se o espaço afim \mathcal{A} munido de um referencial $\mathcal{R} = \{O; \mathcal{B}\}$. Para simplificar as notações, identificam-se cada ponto com a suas coordenadas no referencial.

Dois hiperplanos afins

$$\mathcal{H} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{A} : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b\}$$

$$\mathcal{H}' = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{A} : a'_1 x_1 + \dots + a'_n x_n = b'\}$$

são paralelos se e só se (a_1, \dots, a_n) e (a'_1, \dots, a'_n) são proporcionais.

Proposição 6.3 Se \mathcal{U} e \mathcal{V} são paralelos, então são disjuntos ou um deles está contido no outro, isto é:

$$\mathcal{U} \parallel \mathcal{V} \implies (\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}) \vee (\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}) \vee (\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset)$$

Em particular, se \mathcal{U} e \mathcal{V} são paralelos com $\dim \mathcal{U} = \dim \mathcal{V}$ então $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ ou $\mathcal{U} = \mathcal{V}$.

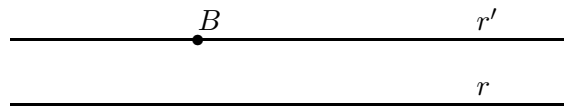
Corolário 6.4 O V Postulado de Euclides

Seja \mathcal{A} um espaço afim. Se \mathcal{U} é um subespaço afim associado ao subespaço vectorial U , e P é um ponto qualquer de \mathcal{A} , o subespaço afim

$$\mathcal{U}' = P + U$$

é o único subespaço paralelo a \mathcal{U} , com $\dim \mathcal{U} = \dim \mathcal{U}'$ e incidente em P .

Em particular, dados uma recta r e um ponto B existe uma única recta r' paralela a r incidente no ponto B .



⁷Alguns autores chamam subespaços paralelos só àqueles que estão associados ao mesmo subespaço ($U = V$). Outros, falam de *paralelismo fraco* (a nossa definição, $U \subseteq V$) e *paralelismo estrito* (quando $U = V$).

Nota 6.5 Recorda-se que dois subespaços vectoriais U e V dizem-se **ortogonais** se e só se

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \forall \vec{u} \in U, \vec{v} \in V$$

De facto, para verificar que dois subespaços são ortogonais, como o produto escalar é linear, basta verificar que os vectores de uma base de V são ortogonais aos vectores de uma base de U .

Definição 6.6 Seja W um subespaço vectorial de um espaço vectorial E munido de um produto escalar. Chamamos **complemento ortogonal de W** e designamos por W^\perp a

$$W^\perp = \{ \vec{v} \in \mathbf{R}^n : \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \quad \forall \vec{w} \in W \}$$

Exemplos 6.7 Considerar-se-á um espaço vectorial E munido de um produto escalar e de uma **base ortonormada**.

1. Se W é uma recta vectorial gerada por um vector \vec{w} tal que $\vec{w} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, então o complemento ortogonal de W é o hiperplano vectorial:

$$W^\perp = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0 \}$$

2. Reciprocamente, se W é um hiperplano vectorial definido pela equação cartesiana:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$$

então o complemento ortogonal W^\perp é a recta vectorial gerada pelo vector $\vec{w} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

3. Em geral, se W é um subespaço vectorial com base $\{ \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k \}$ então o complemento ortogonal W^\perp é o subespaço vectorial de dimensão $n - k$:

$$W^\perp = \{ \vec{v} : \vec{v} \cdot \vec{w}_1 = \dots = \vec{v} \cdot \vec{w}_k = 0 \}$$

Observe-se que cada um dos produtos escalares $\vec{v} \cdot \vec{w}_i$, define uma equação cartesiana. Assim, obtemos o espaço W^\perp definido através de k equações cartesianas. Reciprocamente, se W está definido por r equações cartesianas **independentes**, W^\perp é o subespaço gerado pelos vectores cujas coordenadas são os coeficientes das equações cartesianas.

Proposição 6.8 *Propriedades do complemento ortogonal*

Seja W um subespaço vectorial de um espaço vectorial E de dimensão finita munido de um produto escalar.

1. W^\perp é um subespaço vectorial de E ;
2. $W \subseteq (W^\perp)^\perp$;
3. $W^\perp \cap W = \{ \vec{0} \}$;
4. $W^\perp + W = E$.

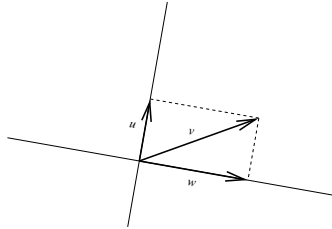
Em particular, $\dim W^\perp + \dim W = n$ e $W = (W^\perp)^\perp$. Se H é um hiperplano, a recta vectorial H^\perp diz-se recta normal ao hiperplano H .

Definição 6.9 *Projectção ortogonal de um vector num subespaço*

Sejam E um espaço vectorial munido de um produto escalar e W um subespaço vectorial de E não nulo. Chama-se **projectção ortogonal** de \vec{v} em W ao vector \vec{w} tal que

$$\vec{v} = \vec{w} + \vec{u}$$

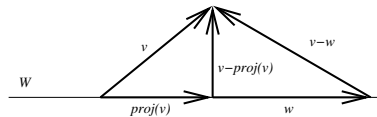
com $\vec{w} \in W$ e $\vec{u} \in W^\perp$. A projectção ortogonal de \vec{v} em W designa-se por $\text{proj}_W(\vec{v})$.



Note-se que as alíneas 3 e 4 da proposição anterior justificam que projectção ortogonal está bem definida e que $\vec{v} = \text{proj}_W(\vec{v}) + \text{proj}_{W^\perp}(\vec{v})$. A projectção ortogonal de um vector num subespaço vectorial obtém-se com um método à la Gram-Schmidt.

Proposição 6.10 *Sejam E um espaço vectorial munido de um produto escalar, W um subespaço vectorial de E , $\vec{v} \in E$ e $\text{proj}_W(\vec{v})$ a projectção ortogonal de \vec{v} em W . Tem-se*

$$\|\vec{v} - \text{proj}_W(\vec{v})\| \leq \|\vec{v} - \vec{w}\| \quad \forall \vec{w} \in W$$

**Exemplo 6.11** *Projectção ortogonal numa recta*

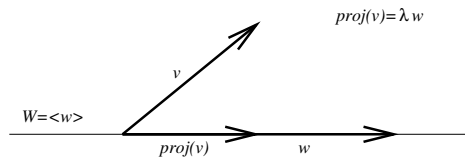
Sejam E um espaço vectorial munido de um produto escalar e $\langle \vec{w} \rangle$ uma recta vectorial ($\vec{w} \neq \vec{0}$) de E . Dado um vector $\vec{v} \in E$, escrevemos

$$\vec{v} = \lambda \vec{w} + \vec{u}$$

com $\vec{u} \in \langle \vec{w} \rangle^\perp$. Como $\vec{w} \perp \vec{u}$ tem-se $\vec{w} \cdot \vec{v} = \lambda \vec{w} \cdot \vec{w} + 0$ donde $\lambda = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{w}\|^2}$ e portanto a projectção ortogonal de \vec{v} na recta vectorial $\langle \vec{w} \rangle$, que designamos $\text{proj}(\vec{v})$, é

$$\text{proj}(\vec{v}) = \lambda \vec{w} = \left(\frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{w}\|^2} \right) \vec{w}$$

No caso particular em que \vec{w} é um vector unitário, a projectção de \vec{v} na recta vectorial $\langle \vec{w} \rangle$ é o vector $(\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{w}$, isto é, $\lambda = \vec{v} \cdot \vec{w}$.

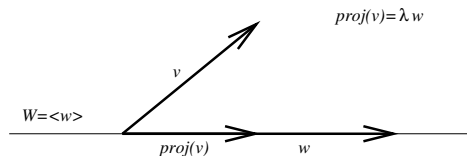


Note-se que não é necessária informação sobre o complemento ortogonal $\langle \vec{w} \rangle^\perp$ para obter esta projecção. Observe-se também que o comprimento da projecção ortogonal é

$$a = \|\text{proj}(\vec{v})\| = \left\| \left(\frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{w}\|^2} \right) \vec{w} \right\| = \frac{|\vec{w} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{w}\|}.$$

Se designarmos $h = \|\vec{v}\|$ obtemos

$$|\cos \angle(\vec{w}, \vec{v})| = \frac{|\vec{w} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|} = \frac{a}{h}$$



Proposição 6.12 *Seja \mathcal{U} um subespaço afim de um espaço afim euclidiano \mathcal{A} . Fixado um ponto $P \in \mathcal{A}$ existe um único subespaço afim \mathcal{V} passando pelo ponto P e tal que o subespaço vectorial associado a \mathcal{V} é o complemento ortogonal do subespaço associado a \mathcal{U} . Verifica-se ainda $\mathcal{V} \cap \mathcal{U} = \{P\}$ e $\mathcal{V} + \mathcal{U} = \mathcal{A}$.*

(Este subespaço afim é chamado **complemento ortogonal** de \mathcal{U} incidente em P)

(Demonstração)

Seja U o subespaço vectorial associado a \mathcal{U} . O subespaço afim $\mathcal{V} = P + U^\perp$ é o único subespaço afim que verifica as condições indicadas. \square

Definição 6.13 *Seja \mathcal{A} um espaço euclidiano munido de um referencial ortonormado.*

1. Duas rectas de \mathcal{A}

$$r = A + \langle \vec{v} \rangle \quad \text{e} \quad r' = A' + \langle \vec{v}' \rangle$$

dizem-se **perpendiculares** se os vectores \vec{v} e \vec{v}' são ortogonais.

2. Se \mathcal{H} é um hiperplano afim definido pela equação cartesiana:

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b = 0$$

o complemento ortogonal de \mathcal{H} passando pelo ponto $P(p_1, \dots, p_n)$ é a recta afim

$$r_P = (p_1, \dots, p_n) + \langle (a_1, a_2, \dots, a_n) \rangle$$

O vector $\vec{n} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ chama-se um **vector normal** do hiperplano e a recta vectorial $\langle \vec{n} \rangle$ diz-se direcção **normal** ou **perpendicular** ao hiperplano. Toda a recta associada a $\langle \vec{n} \rangle$ diz-se recta **perpendicular** ao hiperplano.

3. Dois hiperplanos afins \mathcal{H} e \mathcal{H}' dizem-se **perpendiculares** se as rectas normais são perpendiculares.

Exemplo 6.14 Num plano afim euclidiano, dada uma recta r e um ponto P existe uma única recta r' perpendicular a r e que incide em P . Suponha-se o plano munido de um referencial ortonormado. Se a recta r é definida por uma equação cartesiana:

$$ax + by + c = 0$$

então, a recta r' perpendicular a r e que incide no ponto $P(p_1, p_2)$ pode definir-se pela equação vectorial

$$r' = (p_1, p_2) + \langle (a, b) \rangle$$

Exemplo 6.15 Recta perpendicular a um plano

Seja \mathcal{A} um espaço afim euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado. Toda a recta definida por uma equação vectorial do tipo

$$r = P + \langle (a, b, c) \rangle$$

é perpendicular a todo o plano definido por uma equação cartesiana

$$ax + by + cz + k = 0$$

O vector (a, b, c) é o **vector normal** ao plano.

Exemplo 6.16 Perpendicular comum a duas rectas enviesadas

Sejam r e s duas rectas enviesadas de um espaço afim euclidiano tridimensional \mathcal{A} , com

$$r = A + \langle \vec{w} \rangle \quad \text{e} \quad s = B + \langle \vec{v} \rangle$$

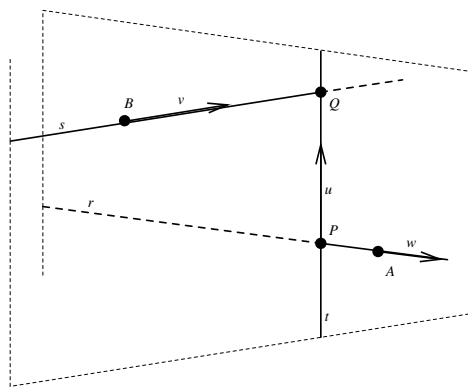
Considere-se $\vec{u} = \vec{w} \wedge \vec{v}$ e recorde-se que $\langle \vec{u} \rangle$ é uma recta vectorial ortogonal às rectas $\langle \vec{w} \rangle$ e $\langle \vec{v} \rangle$. Os planos afins

$$\pi_r = A + \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle \quad \text{e} \quad \pi_s = B + \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$$

não são paralelos e incidem portanto numa recta afim t chamada *perpendicular comum* às rectas r e s .

$$t = \pi_r \cap \pi_s$$

Note-se que t está associada à recta vectorial $\langle \vec{u} \rangle$. As rectas t e s são complanares e não paralelas, podemos então definir Q como o ponto de incidência de t e s . De modo análogo, podemos definir P , o ponto de incidência das rectas t e r . Os pontos P e Q são chamados *pés da perpendicular comum* às rectas r e s .



Proposição 6.17 *projecção ortogonal de um ponto num subespaço afim*

Seja \mathcal{U} um subespaço afim de um espaço afim euclidiano \mathcal{A} . Dado um ponto P , seja \mathcal{V}_P o complemento ortogonal de \mathcal{U} incidindo em P . O ponto Q tal que

$$\{Q\} := \mathcal{U} \cap \mathcal{V}_P$$

diz-se projecção ortogonal do ponto P no subespaço \mathcal{U} .

Exemplos 6.18 *Seja \mathcal{A} um espaço afim euclidiano.*

1. *projecção ortogonal de um ponto numa recta.*

Sejam r uma recta de \mathcal{A} definida pela equação vectorial

$$r = M + \langle \vec{w} \rangle,$$

P um ponto de \mathcal{A} e \mathcal{H}_P o hiperplano perpendicular a r e que incide em P (recorde-se que \mathcal{H}_P está associado ao hiperplano vectorial $\langle \vec{w} \rangle^\perp$). Seja Q a projecção ortogonal de P em r , isto é, $Q = r \cap \mathcal{H}_P$. Tem-se

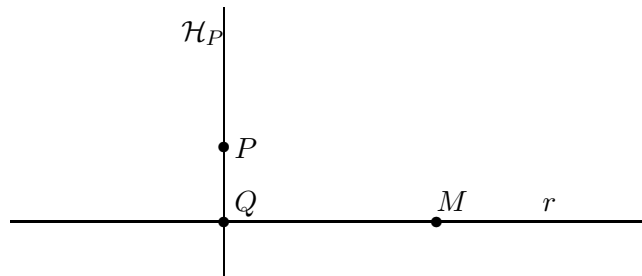
$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QP} = \lambda \vec{w} + \overrightarrow{QP}$$

com $\overrightarrow{QP} \in \langle \vec{w} \rangle^\perp$. Por outras palavras, \overrightarrow{MQ} é a projecção ortogonal em $\langle \vec{w} \rangle$ do vector \overrightarrow{MP} e portanto $\lambda = \frac{\overrightarrow{MP} \cdot \vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}$ donde

$$\overrightarrow{MQ} = \lambda \vec{w} = \left(\frac{\overrightarrow{MP} \cdot \vec{w}}{\|\vec{w}\|^2} \right) \vec{w}$$

e então

$$Q = M + \frac{\overrightarrow{MP} \cdot \vec{w}}{\|\vec{w}\|^2} \vec{w}$$



2. Projecção ortogonal de um ponto num hiperplano

Sejam \mathcal{H} um hiperplano afim de um espaço afim \mathcal{A} , \vec{n} um vector normal a \mathcal{H} , e P um ponto de \mathcal{A} . Seja Q a projecção ortogonal de P em \mathcal{H} , se M é um ponto qualquer de \mathcal{H} tem-se

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{MQ} + \mu \vec{n}$$

O vector \vec{n} é ortogonal a \overrightarrow{MQ} portanto

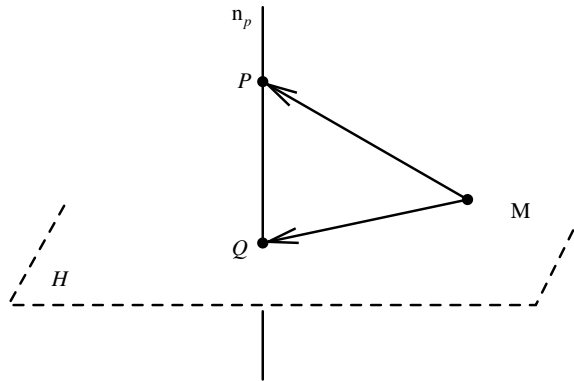
$$\overrightarrow{MP} \cdot \vec{n} = \mu(\vec{n} \cdot \vec{n})$$

donde $\mu = \frac{\overrightarrow{MP} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}$ e então

$$\overrightarrow{QP} = \mu \vec{n} = \left(\frac{\overrightarrow{MP} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \right) \vec{n}$$

Como $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$ obtemos

$$Q = P - \left(\frac{\overrightarrow{MP} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \right) \vec{n}$$



7 Problemas métricos

Sejam X e Y subconjuntos de um espaço euclidiano \mathcal{A} , munido de uma distância euclidiana d . Define-se $d(X, Y)$ como

$$d(X, Y) = \inf\{d(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\}$$

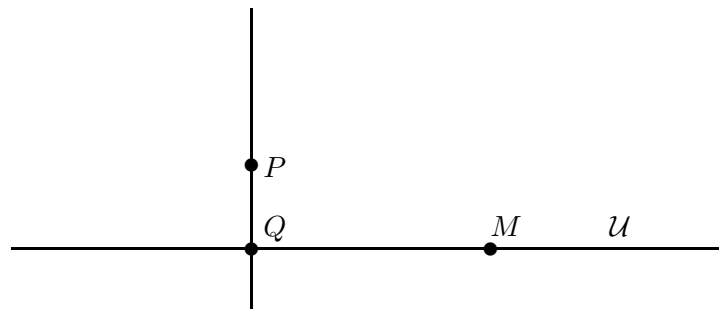
Teorema 7.1 Distância entre um ponto e um subespaço afim

Sejam \mathcal{A} um espaço afim euclidiano, \mathcal{U} um subespaço afim de \mathcal{A} , P um ponto de \mathcal{A} e Q a projecção ortogonal de P em \mathcal{U} . Então, para todo o $M \in \mathcal{U}$, verifica-se $d(P, Q) \leq d(P, M)$. Em particular

$$d(P, \mathcal{U}) = d(P, Q)$$

(Demonstração)

Se $P \in \mathcal{U}$ então $P = Q$ e $d(P, \mathcal{U}) = d(P, P) = 0$.



Se $P \notin \mathcal{U}$, então $P \neq Q$. Para todo o $M \in \mathcal{U}$, $M \neq Q$, tem-se que os pontos M , P e Q não são colineares e $\cos(\overrightarrow{QM}, \overrightarrow{QP}) = 0$. Aplicando o teorema de Pitágoras obtemos

$$d(M, P)^2 = d(M, Q)^2 + d(Q, P)^2$$

Como $M \neq Q$, tem-se $d(M, P) > d(Q, P)$ e portanto

$$d(Q, P) \leq \inf\{d(M, P) : M \in \mathcal{U}\}$$

Como $Q \in \mathcal{U}$ deduz-se

$$d(Q, P) = \min\{d(M, P) : M \in \mathcal{U}\}$$

□

Exemplos 7.2

Seja \mathcal{A} um espaço afim euclidiano.

1. Distância de um ponto a uma recta

Sejam P um ponto de \mathcal{A} e r uma recta definida pela equação vectorial

$$r = M + \langle \vec{w} \rangle$$

Pela alínea 1 dos exemplos 6.18, a projecção ortogonal Q de P em r verifica:

$$Q = M + \frac{\overrightarrow{MP} \cdot \vec{w}}{\|\vec{w}\|^2} \vec{w}$$

Assim

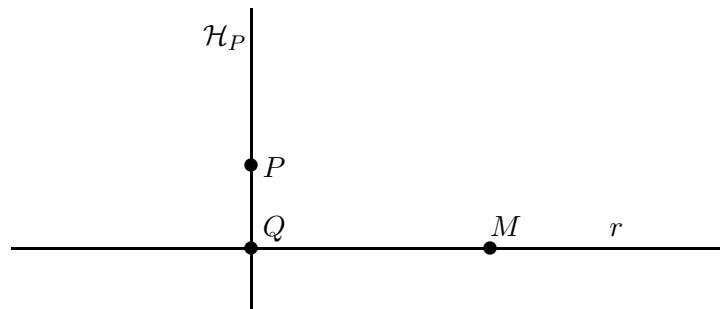
$$\|\overrightarrow{MQ}\| = \frac{|\overrightarrow{MP} \cdot \vec{w}|}{\|\vec{w}\|} = \|\overrightarrow{MP}\| |\cos(\overrightarrow{MP}, \vec{w})|$$

Usando Pitágoras,

$$d(P, Q)^2 = \|\overrightarrow{MP}\|^2 - \|\overrightarrow{MQ}\|^2 = \|\overrightarrow{MP}\|^2 (1 - |\cos(\overrightarrow{MP}, \vec{w})|^2)$$

donde

$$d(P, r) = d(P, Q) = \|\overrightarrow{MP}\| |\sin(\overrightarrow{MP}, \vec{w})|$$



2. Distância de um ponto a um hiperplano

Sejam \mathcal{H} um hiperplano afim de \mathcal{A} , \vec{n} um vector normal a \mathcal{H} , e P um ponto de \mathcal{A} . Seja Q a projecção ortogonal de P em \mathcal{H} . Pela alínea 2 dos exemplos 6.18, tem-se

$$d(P, \mathcal{H}) = d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \frac{|\overrightarrow{MP} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

Note-se que, se \mathcal{A} está munido de um referencial ortonormado, \mathcal{H} está definido, nesse referencial, pela equação cartesiana

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0$$

e se $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, nesse referencial, então

$$d(P, \mathcal{H}) = \frac{|a_1p_1 + a_2p_2 + \cdots + a_np_n + b|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}}$$

Teorema 7.3 *Distâncias entre subespaços paralelos.*

Sejam \mathcal{U} e \mathcal{U}' dois subespaços paralelos de \mathcal{A} , com $\dim \mathcal{U} \leq \dim \mathcal{U}'$, associados respectivamente, aos subespaços vectoriais U e U' (note-se que $U \subseteq U'$). Considerem-se P_1 e P_2 pontos de \mathcal{U} e Q_1 e Q_2 as projecções ortogonais desses pontos em \mathcal{U}' . Tem-se

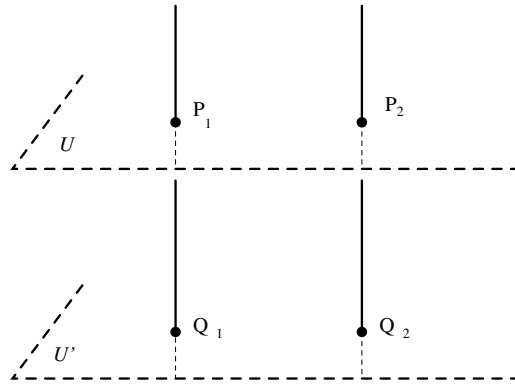
$$\overrightarrow{P_1 Q_1} = \overrightarrow{P_1 P_2} + \overrightarrow{P_2 Q_2} + \overrightarrow{Q_2 Q_1}$$

como $\overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, \overrightarrow{Q_2}, \overrightarrow{Q_1} \in U'$ e $\overrightarrow{P_1 Q_1}, \overrightarrow{P_2 Q_2} \in (U')^\perp$ vem que

$$\overrightarrow{P_1 Q_1} = \overrightarrow{P_2 Q_2}$$

Seja $d = d(P_1, Q_1)$. Note-se que, para todo o $P \in \mathcal{U}$, se Q_P é a projecção ortogonal de P em \mathcal{U}' , verifica-se $d(P, Q_P) = d$. Se $P \in \mathcal{U}$ e $M \in \mathcal{U}'$, pela proposição 7.1, $d(P, M) \geq d(P, Q_P) = d$ e assim

$$d(\mathcal{U}, \mathcal{U}') = d$$



Teorema 7.4 *Distâncias entre duas rectas enviesadas num espaço tridimensional*

Suponha-se \mathcal{A} espaço afim euclidiano tridimensional. Sejam r e s duas rectas enviesadas de \mathcal{A} , definidas, respectivamente, pelas equações cartesianas:

$$r = A + \langle \vec{w} \rangle \quad \text{e} \quad s = B + \langle \vec{v} \rangle$$

Os planos

$$\mathcal{U} = A + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle \quad \text{e} \quad \mathcal{U}' = B + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$$

são paralelos e verificam $r \subset \mathcal{U}$ e $s \subset \mathcal{U}'$. Em particular, $d(\mathcal{U}, \mathcal{U}') \leq d(r, s)$. Mas, se P e Q são os pés da perpendicular comum (exemplo 6.16), tem-se que $d(\mathcal{U}, \mathcal{U}') = d(P, Q)$, logo

$$d(r, s) = d(P, Q)$$

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{BQ} + \lambda \overrightarrow{u} + \overrightarrow{PA}$$
$$\lambda = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$$
$$d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|\lambda \vec{u}\| = \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot \vec{u}|}{\|\vec{u}\|} = \frac{|\det(\overrightarrow{BA}, \vec{w}, \vec{v})|}{\|\vec{w} \wedge \vec{v}\|}$$

Distâncias no plano

1. *Distância de um ponto a uma recta.*

$$Ax + By + K = 0$$
$$d(P, r) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + K|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Considere-se um ponto numa delas e aplique-se a fórmula anterior.

Distâncias no espaço tridimensional

Seja \mathcal{A} um espaço afim euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado.

1. *Distância de um ponto a um plano*

Seja π um plano de \mathcal{A} definido pela equação cartesiana $Ax + By + Cz + K = 0$. Se $P = (p_1, p_2, p_3)$ verifica-se

$$d(P, \pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + K|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

2. *Distância entre uma recta e um plano paralelos*

Considere-se um ponto na recta e aplique-se a fórmula anterior.

3. *Distância entre dois planos paralelos.*

Considere-se um ponto num deles e aplique-se a fórmula anterior.

4. *Distância entre um ponto e uma recta no espaço.*

Seja r uma recta definida pela equação vectorial $r = M + \langle \vec{w} \rangle$. Tem-se

$$d(P, r) = \|\overrightarrow{MP}\| |\sin(\overrightarrow{MP}, \vec{w})|$$

5. *Distância entre duas rectas paralelas.*

Considere-se um ponto numa das duas rectas e aplique-se a fórmula anterior.

6. *Distância entre duas rectas enviesadas*

Se $r = A + \langle \vec{w} \rangle$ e $s = B + \langle \vec{v} \rangle$ são duas rectas enviesadas

$$d(r, s) = \frac{|\det(\overrightarrow{BA}, \vec{w}, \vec{v})|}{\|\vec{w} \wedge \vec{v}\|}$$

Definição 7.5 *Ângulo entre rectas, entre rectas e hiperplanos, entre hiperplanos.*

Seja \mathcal{A} um espaço afim euclidiano.

- Sejam r e s duas rectas afins de \mathcal{A} dirigidas, respectivamente, pelos vectores **unitários** \vec{v} e \vec{w} . Define-se a *medida do ângulo* (não orientado) formado pelas rectas r e s como o único $\theta \in [0, \pi/2]$ tal que

$$\cos \theta = |\vec{v} \cdot \vec{w}|.$$

- Sejam r uma recta afim de \mathcal{A} dirigida por um vector \vec{v} , \mathcal{H} um hiperplano afim de \mathcal{A} e \vec{n} um vector normal a \mathcal{H} . Define-se a *medida do ângulo* formado pela recta r e o hiperplano \mathcal{H} como o único $\theta \in [0, \pi/2]$ tal que

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \cos(\vec{v}, \vec{n})^2}$$

- Sejam \mathcal{H} e \mathcal{H}' dois hiperplanos afins de \mathcal{A} , \vec{n} e \vec{n}' vectores normais **unitários** a \mathcal{H} e \mathcal{H}' , respectivamente. Define-se a *medida do ângulo* formado pelos hiperplanos \mathcal{H} e \mathcal{H}' como o único $\theta \in [0, \pi/2]$ tal que

$$\cos \theta = |\vec{n} \cdot \vec{n}'|.$$

8 Exercícios resolvidos

Para simplificar os enunciados, quando não houver ambiguidade, num espaço afim \mathcal{A} de dimensão n munido de um referencial \mathcal{R} , se $A \equiv (a_1, \dots, a_n)_{\mathcal{R}}$, escrever-se-á $A = (a_1, \dots, a_n)$.

Espaços afins, referenciais, espaços euclidianos.

1. Sejam $\mathcal{R} = \{O, (\vec{v}_1, \vec{v}_2)\}$ e $\mathcal{R}' = \{O', (\vec{v}'_1, \vec{v}'_2)\}$ dois referenciais de um plano afim real \mathcal{A} . Determine as coordenadas, no referencial \mathcal{R} , do ponto $M \equiv (0, -2)_{\mathcal{R}'}$ e as coordenadas, no referencial \mathcal{R}' , do ponto $N \equiv (1, 0)_{\mathcal{R}}$ sabendo que:

(a) $O' \equiv (1, 1)_{\mathcal{R}}$;

(b)
$$\begin{cases} \vec{v}'_1 = -\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 \\ \vec{v}'_2 = 2\vec{v}_2 \end{cases}$$

Quais as coordenadas de O no referencial \mathcal{R}' ? Definem \mathcal{R} e \mathcal{R}' a mesma orientação?

(Resolução)

Se (x_1, x_2) e (x'_1, x'_2) designam as coordenadas de um ponto nos referenciais \mathcal{R} e \mathcal{R}' , respectivamente, tem-se que:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Como $M \equiv (0, -2)_{\mathcal{R}'}$, então

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

donde $M \equiv (1, -3)_{\mathcal{R}}$. Para calcular $N \equiv (1, 0)_{\mathcal{R}}$, vamos determinar a expressão matricial⁸ da mudança de coordenadas oposta. Tem-se

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

e, multiplicando pela matriz inversa da matriz a esquerda, obtemos:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \left[- \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right]$$

donde

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Substituindo nesta expressão, como $N \equiv (1, 0)_{\mathcal{R}}$, obtemos

$$N \equiv (0, -1/2)_{\mathcal{R}'}$$

As coordenadas de O no referencial \mathcal{R}' são $(1, -2)$.

Note-se que

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} = -1/2$$

portanto \mathcal{R} e \mathcal{R}' definem orientações opostas.

⁸Equivalentemente, basta resolver um sistema de equações de modo a obter (x_1, x_2) em função de (x'_1, x'_2) . Apresenta-se este tipo de resolução para desenvolver o uso da linguagem matricial.

2. Sejam $\mathcal{R} = \{O, (\vec{v}_1, \vec{v}_2)\}$ e $\mathcal{R}' = \{O', (\vec{v}'_1, \vec{v}'_2)\}$ dois referenciais de um plano afim real \mathcal{A} . Determine as coordenadas, no referencial \mathcal{R} , do ponto $M \equiv (-1, 0)_{\mathcal{R}'}$ e as coordenadas, no referencial \mathcal{R}' , do ponto $N \equiv (-1, 0)_{\mathcal{R}}$ sabendo que:

(a) $O \equiv (-2, 0)_{\mathcal{R}'}$;

(b)
$$\begin{cases} \vec{v}'_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \\ \vec{v}'_2 = -\vec{v}_2 \end{cases}$$

Definem \mathcal{R} e \mathcal{R}' a mesma orientação?

(Resolução)

Para obter directamente a expressão matricial de uma das mudanças de coordenadas precisamos de todos os dados de um referencial em função do outro, o que não é o caso no enunciado. Podemos determinar a base (\vec{v}'_1, \vec{v}'_2) em função da base (\vec{v}_1, \vec{v}_2) ou calcular as coordenadas de O' no referencial \mathcal{R} .

Se $O' \equiv (\omega_1, \omega_2)_{\mathcal{R}}$, tem-se

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

onde (x_1, x_2) e (x'_1, x'_2) designam as coordenadas de um ponto nos referenciais \mathcal{R} e \mathcal{R}' , respectivamente. Como $O \equiv (-2, 0)_{\mathcal{R}'}$ verifica-se

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde $(\omega_1, \omega_2) = (2, 2)$ e o resto do exercício resolve-se de modo análogo ao exercício anterior, obtendo-se:

$$M \equiv (1, 1)_{\mathcal{R}}, \quad N \equiv (-3, -1)_{\mathcal{R}'}$$

Note-se que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

portanto \mathcal{R} e \mathcal{R}' definem orientações opostas.

3. Sejam $\mathcal{R} = \{O, (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)\}$ e $\mathcal{R}' = \{O', (\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \vec{v}'_3)\}$ dois referenciais de um espaço afim tridimensional \mathcal{A} . Determine a expressão matricial para a mudança de coordenadas entre estes dois referenciais sabendo que:

(a) $O \equiv (0, 0, -2)_{\mathcal{R}'}$;

(b)
$$\begin{cases} \vec{v}'_1 = 2\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3 \\ \vec{v}'_2 = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 \\ \vec{v}'_3 = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_3 \end{cases}$$

Definem \mathcal{R} e \mathcal{R}' a mesma orientação?

(Resolução)

O exercício é análogo ao anterior, desta vez, determinar-se-á a base $(\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \vec{v}'_3)$ em função da base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$. Usando a notação matricial:

$$(\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \vec{v}'_3) = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

multiplicando pela matriz inversa da matriz à direita

$$(\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \vec{v}'_3) \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$$

A expressão matricial da mudança de referencial é então (recorde-se que temos os elementos do referencial \mathcal{R} em função dos elementos do referencial \mathcal{R}'):

$$\begin{pmatrix} -1 & 1/2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

O determinante da mudança de base é positivo portanto os referenciais definem a mesma orientação.

4. Sejam A , B e C três pontos de um plano afim \mathcal{A} tais que os vectores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} são linearmente independentes. Sejam $\mathcal{R} = \{O, (\vec{v}_1, \vec{v}_2)\}$ e $\mathcal{R}' = \{O', (\vec{v}'_1, \vec{v}'_2)\}$ referenciais de \mathcal{A} . Determine a relação entre as coordenadas, nos referenciais \mathcal{R} e \mathcal{R}' , de um ponto genérico de \mathcal{A} sabendo que

$$\begin{aligned} A &\equiv (a_1, a_2)_{\mathcal{R}} & A &\equiv (a'_1, a'_2)_{\mathcal{R}'} \\ B &\equiv (b_1, b_2)_{\mathcal{R}} & B &\equiv (b'_1, b'_2)_{\mathcal{R}'} \\ C &\equiv (c_1, c_2)_{\mathcal{R}} & C &\equiv (c'_1, c'_2)_{\mathcal{R}'} \end{aligned}$$

(Resolução) É preciso encontrar uma expressão matricial do tipo

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Assim, se avaliarmos os pontos A , B e C , obtemos um sistema de seis equações com seis incógnitas. Vamos a usar a linguagem matricial para apresentar a solução de modo conveniente. Introduzimos um novo referencial $\mathcal{R}'' = \{A, (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\}$. Tem-se:

(a) $A \equiv (a_1, a_2)_{\mathcal{R}};$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} &= (b_1 - a_1)\vec{v}_1 + (b_2 - a_2)\vec{v}_2 \\ \overrightarrow{AC} &= (c_1 - a_1)\vec{v}_1 + (c_2 - a_2)\vec{v}_2 \end{cases}$$

(b) $A \equiv (a'_1, a'_2)_{\mathcal{R}'};$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} &= (b'_1 - a'_1)\vec{v}'_1 + (b'_2 - a'_2)\vec{v}'_2 \\ \overrightarrow{AC} &= (c'_1 - a'_1)\vec{v}'_1 + (c'_2 - a'_2)\vec{v}'_2 \end{cases}$$

Obtemos então a relação entre as coordenadas (x''_1, x''_2) no referencial \mathcal{R}'' e as coordenadas nos referenciais \mathcal{R} e \mathcal{R}' :

$$\begin{pmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b'_1 - a'_1 & c'_1 - a'_1 \\ b'_2 - a'_2 & c'_2 - a'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$$

Consideremos as matrizes:

$$M = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \end{pmatrix}, \quad M' = \begin{pmatrix} b'_1 - a'_1 & c'_1 - a'_1 \\ b'_2 - a'_2 & c'_2 - a'_2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Lambda' = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix}$$

Para simplificar, escrevemos as igualdades matriciais anteriores como:

$$MX'' + \Lambda = X \quad \text{e} \quad M'X'' + \Lambda' = X'$$

Assim, usando a primeira igualdade:

$$X'' = -M^{-1}\Lambda + M^{-1}X$$

e substituindo na segunda igualdade

$$M'(-M^{-1}\Lambda + M^{-1}X) + \Lambda' = X'$$

donde

$$M'M^{-1}X + (\Lambda' - M'M^{-1}\Lambda) = X'$$

que é a expressão matricial da mudança de coordenadas.

5. Seja \mathcal{A} um plano euclidiano. Seja $\mathcal{R} = \{O, (\vec{e}_1, \vec{e}_2)\}$ um referencial ortonormado de \mathcal{A} . Considere-se o referencial $\mathcal{R}' = \{O', (\vec{v}_1, \vec{v}_2)\}$ definido por:

(a) $O \equiv (0, -2)_{\mathcal{R}'}$;

(b)
$$\begin{cases} \vec{v}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{v}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \end{cases}$$

A base (\vec{v}_1, \vec{v}_2) é uma base ortogonal? O referencial \mathcal{R}' é um referencial ortonormado? Os referenciais \mathcal{R} e \mathcal{R}' definem a mesma orientação?

(Resolução)

Tem-se

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \cdot (\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 - \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 - \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 0$$

portanto $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$ e a base é uma base ortogonal.

O vector \vec{v}_1 verifica:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = (\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \cdot (\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 + \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 2$$

portanto $\|\vec{v}_1\| = \sqrt{2}$ e \vec{v}_1 não é um vector unitário. A base (\vec{v}_1, \vec{v}_2) não é uma base ortonormada e portanto o referencial \mathcal{R}' não é um referencial ortonormado.

Note-se que o determinante da matriz de mudança de base é negativo, portanto \mathcal{R} e \mathcal{R}' definem orientações opostas.

Nota 1: Como \mathcal{R} é um referencial ortonormado, em particular a base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) é uma base ortonormada e então, poder-se-ia trabalhar em coordenadas, usando o produto escalar usual:

$$\vec{v}_1 = (1, 1) \quad \vec{v}_2 = (1, -1)$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (1, 1) \cdot (1, -1) = 0 \quad \|\vec{v}_1\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Nota 2: Alternativamente, podemos resolver o exercício considerando a matriz da mudança de base:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e observando que $AA^t \neq Id$, portanto A não é uma matriz que defina uma mudança entre duas bases ortonormadas.

6. Prove que uma matriz real A quadrada de ordem 2 é ortogonal (i.e. verifica $AA^t = Id$) se e só se

$$A = \begin{pmatrix} a & -\epsilon b \\ b & \epsilon a \end{pmatrix}$$

com $\epsilon = \pm 1$ e $a^2 + b^2 = 1$.

(Resolução)

Seja

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Como A é ortogonal, $\det A = \pm 1$, logo $\epsilon = ad - bc = \pm 1$. Assim,

$$A^{-1} = \epsilon^{-1} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Se $A^t A = Id$, então $A^t = A^{-1}$ e portanto

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \epsilon^{-1} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

donde $d = \epsilon a$ e $c = -\epsilon b$. Também, como $\det A = \pm 1$, tem-se $\pm 1 = ad - bc = \epsilon(a^2 + b^2)$, logo $a^2 + b^2 = 1$.

7. Seja \mathcal{A} um plano euclidiano munido de um referencial $\mathcal{R} = \{O, (\vec{v}_1, \vec{v}_2)\}$ tais que os vectores da base associada são unitários mas $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 1/2$.

Determine a distância entre os pontos $A \equiv (1, 1)_{\mathcal{R}}$ e $B \equiv (3, 0)_{\mathcal{R}}$. Qual seria o valor de $d(A, B)$ se o referencial \mathcal{R} fosse ortonormado?

(Resolução)

Por definição $d(A, B) = \|\vec{AB}\|$. Tem-se

$$\vec{AB} = (3 - 1)\vec{v}_1 + (0 - 1)\vec{v}_2 = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

logo

$$\vec{AB} \cdot \vec{AB} = (2\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \cdot (2\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = 4\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 - 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 - 2\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = 4 - 1 - 1 + 1 = 3$$

e então $d(A, B) = 3$.

Se o referencial fosse ortonormado ter-se-ia:

$$d(A, B) = \sqrt{(3 - 1)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{5}$$

8. Seja \mathcal{A} um plano euclidiano munido de um referencial ortonormado. Considerem-se os pontos $A = (2, 1)$ e $B = (0, -1)$. Calcule a distância $d(A, B)$. Determine se o ponto $M = (-2, -3)$ pertence ao segmento \overline{AB} .

(Resolução)

$$d(A, B) = \sqrt{(2 - 0)^2 + (1 - (-1))^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

O segmento \overline{AB} é o conjunto

$$\overline{AB} = \{A + t\vec{AB} : t \in [0, 1]\}$$

Assim, $M \in \overline{AB}$ se e só se $\vec{AM} = t\vec{AB}$ com $t \in [0, 1]$. Tem-se $\vec{AB} = (-2, -2)$ e

$$\vec{AM} = (-4, -4) = 2(-2, -2) = 2\vec{AB}$$

Portanto, M não pertence ao segmento \overline{AB} .

9. Sejam A , B e C pontos de um espaço afim euclidiano. Sabe-se que $d(A, C) = 2$, $d(A, B) = 1$ e $\cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = 1/2$. Calcule $d(B, C)$.

(Resolução)

Aplicando o teorema dos cossenos:

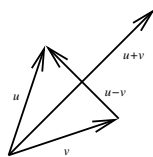
$$d(B, C)^2 = d(A, B)^2 + d(A, C)^2 - 2d(A, B)d(A, C)\cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = 1 + 4 - 2 = 3$$

onde $d(B, C) = \sqrt{3}$.

10. Prove que, se $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ então

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0$$

(As diagonais de um losango são perpendiculares.)



(Resolução)

Usando as propriedades do produto escalar obtemos

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 0$$

11. Determine o produto escalar dos vectores \vec{v} e \vec{w} . Calcule o cosseno do ângulo que formam e indique se os vectores são ortogonais.

- (a) $\vec{v} = (2, 1)$, $\vec{w} = (2, -2)$;
 (b) $\vec{v} = (1, -1, 1)$, $\vec{w} = (2, 0, -2)$;
 (c) $\vec{v} = (1, -2, 3)$, $\vec{w} = (3, -5, 0)$;
 (d) $\vec{v} = (4, -1, 0, 1)$, $\vec{w} = (7, 1, 1, -2)$.

(Resolução)

- (a) $\vec{v} = (2, 1)$, $\vec{w} = (2, -2)$.

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (2, 1) \cdot (2, -2) = 4 - 2 = 2.$$

Tem-se que $\|\vec{v}\| = \sqrt{5}$ e $\|\vec{w}\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ donde

$$\cos(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{2}{\sqrt{5}(2\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

Os vectores \vec{v} e \vec{w} não são ortogonais.

- (b) $\vec{v} = (1, -1, 1)$, $\vec{w} = (2, 0, -2)$.

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (1, -1, 1) \cdot (2, 0, -2) = 2 - 2 = 0.$$

Assim $\cos(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ e os vectores \vec{v} e \vec{w} são ortogonais.

- (c) $\vec{v} = (1, -2, 3)$, $\vec{w} = (3, -5, 0)$.

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (1, -2, 3) \cdot (3, -5, 0) = 3 + 10 = 13.$$

Tem-se que $\|\vec{v}\| = \sqrt{14}$ e $\|\vec{w}\| = \sqrt{34}$ donde

$$\cos(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{13}{\sqrt{14}\sqrt{34}} = \frac{13\sqrt{119}}{238}$$

Os vectores \vec{v} e \vec{w} não são ortogonais.

- (d) $\vec{v} = (4, -1, 0, 1)$, $\vec{w} = (7, 1, 1, -2)$.

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (4, -1, 0, 1) \cdot (7, 1, 1, -2) = 28 - 1 - 2 = 25$$

Tem-se que $\|\vec{v}\| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ e $\|\vec{w}\| = \sqrt{55}$ donde

$$\cos(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{25}{3\sqrt{2}\sqrt{55}} = \frac{25\sqrt{110}}{3}$$

Os vectores \vec{v} e \vec{w} não são ortogonais.

12. Determine o produto vectorial dos vectores \vec{v} e \vec{w} de \mathbf{R}^3

$$\vec{v} = (1, 0, -3) \quad \vec{w} = (2, 2, 0)$$

(Resolução)

Simbolicamente:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 6\vec{e}_1 + (-6)\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 = (6, -6, 2)$$

13. Calcule a área do paralelogramo definido pelos vectores de \mathbf{R}^3 $\vec{v} = (1, 0, -3)$ e $\vec{w} = (2, 2, 0)$.

(Resolução)

Recorde-se que a área A de tal paralelogramo é dada pela norma $\|\vec{v} \wedge \vec{w}\|$. usando o exercicio anterior tem-se

$$A = \|(6, -6, 2)\| = \sqrt{74}$$

14. Calcule o volume do paralelepípedo formado pelos vectores de \mathbf{R}^3 $\vec{u} = (4, 0, 0)$, $\vec{v} = (1, 0, -3)$ e $\vec{w} = (2, 2, 0)$.

(Resolução)

Recorde-se que o volume V de dito paralelepípedo é dado pelo valor absoluto $|\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})|$. Como $\vec{v} \wedge \vec{w} = (6, -6, 2)$ tem-se

$$V = |(4, 0, 0) \cdot (6, -6, 2)| = 24$$

Rectas, planos, paralelismo.

15. Seja \mathcal{A} um espaço afim tridimensional munido de um referencial $\{O; \mathcal{B}\}$. Indique os subespaços vectoriais associados aos seguintes subespaços afins de \mathcal{A} e a dimensão de tais subespaços afins:

- (a) $\mathcal{U} = \{(x, y, z) \in \mathcal{A} / x + y + z + 3 = 0\}$;
- (b) $\mathcal{U} = \{(x, y, z) \in \mathcal{A} / y = 3 - 3x \wedge z = x\}$;
- (c) $\mathcal{U} = \{(x, y, z) \in \mathcal{A} / y = 3 - 3x \wedge z = x \wedge 2x - 4 = 0\}$.

(Resolução)

- (a) $\mathcal{U} = \{(x, y, z) \in \mathcal{A} / x + y + z + 3 = 0\}$.

O subespaço vectorial associado é

$$U = \{(x, y, z) \in \mathcal{A} / x + y + z = 0\} = \langle (1, -1, 0), (1, 0, -1) \rangle$$

Trata-se de um plano vectorial, portanto \mathcal{U} é um plano afim (dimensão 2).

- (b) $\mathcal{U} = \{(x, y, z) \in \mathcal{A} / y = 3 - 3x \wedge z = x\}$.

O subespaço vectorial associado é

$$U = \{(x, y, z) \in \mathcal{A} / y + 3x = 0 \wedge z - x = 0\} = \langle (1, -3, 1) \rangle$$

Trata-se de uma recta vectorial, portanto \mathcal{U} é uma recta afim (dimensão 1).

- (c) $\mathcal{U} = \{(x, y, z) \in \mathcal{A} / y = 3 - 3x \wedge z = x \wedge 2x - 4 = 0\}$.

O subespaço vectorial associado é

$$U = \{(x, y, z) \in \mathcal{A} / y + 3x = 0 \wedge z - x = 0 \wedge 2x = 0\}.$$

Resolvendo o sistema obtemos que $U = \{\vec{0}\}$, a dimensão de \mathcal{U} é 0. Trata-se de um ponto do espaço afim \mathcal{A} . De facto, resolvendo o sistema de equações obtemos

$$\mathcal{U} = \{(2, -3, 2)\}$$

16. Num plano afim real \mathcal{A} munido de um referencial \mathcal{R} calcule as equações paramétricas e a equação cartesiana da recta afim r que passa pelo ponto $A = (0, -5)$ e tem como vector director $\vec{v} = (-1, -3)$. Indique três pontos distintos que pertençam à recta r . Represente graficamente.

(Resolução)

Uma equação vectorial de r é

$$r = (0, -5) + \langle (-1, -3) \rangle$$

Uma equações paramétricas de r são:

$$\begin{cases} x &= & -\lambda \\ y &= & -5 - 3\lambda \end{cases}$$

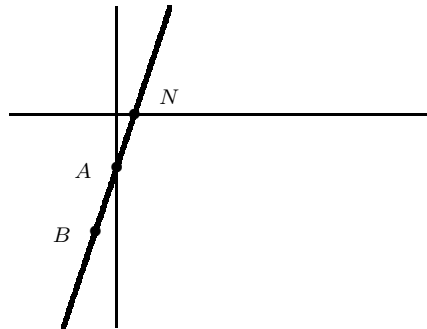
A partir da igualdade:

$$\frac{x}{-1} = \frac{y+5}{-3}$$

obtemos a equação cartesiana de r :

$$-3x + y + 5 = 0$$

Os pontos $A = (0, -5)$, $B = (-2, -11)$ e $N = (5/3, 0)$ pertencem a r .



17. Num plano afim real \mathcal{A} munido de um referencial \mathcal{R} calcule as equações paramétricas e a equação cartesiana da recta afim r que passa pelos pontos $A = (1, -2)$ e $B = (-3, 0)$. Indique três pontos distintos que pertençam à recta r . Represente graficamente.

(Resolução)

Uma equação vectorial de r é

$$r = (1, -2) + \langle (-4, 2) \rangle$$

Uma equações paramétricas de r são:

$$\begin{cases} x = 1 - 4\lambda \\ y = -2 + 2\lambda \end{cases}$$

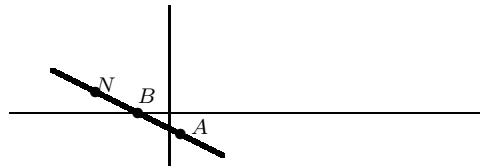
A partir da igualdade:

$$\frac{x-1}{-4} = \frac{y+2}{2}$$

obtemos a equação cartesiana de r :

$$2x + 4y + 6 = 0$$

Os pontos $A = (1, -2)$, $B = (-3, 0)$ e $N = (-7, 2)$ pertencem a r .



18. Num plano afim real \mathcal{A} munido de um referencial \mathcal{R} calcule a equação vectorial e as equações paramétricas da recta afim definida pela equação cartesiana

$$2x - y + 2 = 0$$

Determine dois pontos distintos que incidam nesta recta.

(Resolução)

Note-se que $2x - y + 2 = 0$ se e só se $y = 2x + 2$. Considere-se $x = \lambda$ para obter as equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda + 2 \end{cases}$$

Uma equação vectorial de r é então

$$r = (0, 2) + \langle (1, 2) \rangle.$$

Os pontos $A = (0, 2)$ e $B = (2, 6)$ pertencem à recta r .

19. Num espaço afim tridimensional \mathcal{A} munido de um referencial \mathcal{R} calcule as equações paramétricas e o sistema de equações cartesianas que definem a recta afim que passa pelo ponto $A = (-2, 0, 1)$ e tem como vector director $\vec{v} = (3, -1, -3)$.
(Resolução)

A recta r pode definir-se mediante a equação vectorial:

$$r = (-2, 0, 1) + \langle (3, -1, -3) \rangle$$

A recta r pode definir-se então pelas equações paramétricas:

$$\begin{cases} x &= -2 + 3\lambda \\ y &= -\lambda \\ z &= 1 - 3\lambda \end{cases}$$

O sistema de 2 equações cartesianas pode obter-se a partir das igualdades

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-3}$$

Por exemplo, um sistema de equações cartesianas para r é:

$$\begin{cases} -x - 3y - 2 &= 0 \\ -3x - 3z - 3 &= 0 \end{cases}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} x + 3y + 2 &= 0 \\ x + z + 1 &= 0 \end{cases}$$

20. Num espaço afim tridimensional \mathcal{A} munido de um referencial \mathcal{R} calcule as equações paramétricas e o sistema de equações cartesianas que definem a recta afim que passa pelos pontos $A = (2, 2, 2)$ e $B = (3, 3, 3)$.
(Resolução)

A recta r pode definir-se mediante a equação vectorial:

$$r = (2, 2, 2) + \langle (1, 1, 1) \rangle$$

A recta r pode definir-se então pelas equações paramétricas:

$$\begin{cases} x &= 2 + \lambda \\ y &= 2 + \lambda \\ z &= 2 + \lambda \end{cases}$$

O sistema de 2 equações cartesianas pode obter-se a partir das igualdades

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{1}$$

Por exemplo, um sistema de equações cartesianas para r é:

$$\begin{cases} x - y &= 0 \\ x - z &= 0 \end{cases}$$

21. Num espaço afim tridimensional \mathcal{A} munido de um referencial \mathcal{R} calcule a equação vectorial e as equações paramétricas da recta afim definida pelas equações cartesianas

$$\begin{cases} x - 3y - 2 = 0 \\ 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

Determine dois pontos distintos que incidam nesta recta.

(Resolução)

Note-se que

$$c \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

portanto o sistema tem solução (não única) e o conjunto de soluções é um subespaço afim de dimensão 1 (uma recta afim como é bem referido no enunciado).

Resolvemos o sistema, em função de y , por exemplo,

$$\begin{cases} x - 3y - 2 = 0 \\ 2y - z - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3y + 2 \\ z = 2y - 1 \end{cases}$$

Se $\lambda = y$ obtemos as equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$$

donde deduzimos a equação vectorial

$$(2, 0, -1) + \langle (3, 1, 2) \rangle.$$

Os pontos $A = (2, 0, -1)$ (corresponde a $\lambda = 0$) e $N = (-1, -1, -3)$ (corresponde a $\lambda = -1$) incidem na recta.

22. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial considere o ponto $A = (0, 0, 0)$. Determine as equações paramétricas e a equação cartesiana do plano π que passa pelo ponto A e está associado ao plano vectorial $\langle (1, 1, 0), (-1, 0, -2) \rangle$.

(Resolução)

O plano π tem a equação vectorial

$$\pi = (0, 0, 0) + \langle (1, 1, 0), (-1, 0, -2) \rangle.$$

Um as equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x = \lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = -2\mu \end{cases}$$

Recorde-se que um ponto (x, y, z) incide no plano π se e só se

$$\det \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 0$$

Assim, a equação cartesiana de π é:

$$-2x + 2y + z = 0$$

23. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial considere os pontos:

$$A = (1, 0, 1) \quad B = (1, -2, 0) \quad C = (1, 0, 0)$$

Justifique que $\{A, B, C\}$ são vértices de um triângulo. Indique uma equação vectorial e uma equação cartesiana do plano afim π definido por A , B e C .

(Resolução)

Os vectores $\overrightarrow{AB} = (0, -2, -1)$ e $\overrightarrow{AC} = (0, 0, -1)$ são linearmente independentes, portanto A , B e C formam um triângulo.

Uma equação vectorial de plano π é

$$\pi = (1, 0, 1) + \langle (0, -2, -1), (0, 0, -1) \rangle$$

A partir de

$$\det \begin{pmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

obtemos a equação cartesiana de π

$$2x - 2 = 0$$

ou, equivalentemente

$$x - 1 = 0.$$

24. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial considere o subespaço afim \mathcal{U} definido pelo sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x - y &= -1 \\ y + z &= 0 \\ 3x - 2y + z &= -3 \end{cases}$$

Calcule as equações paramétricas de \mathcal{U} .

(Resolução)

Resolve-se o sistema indicado:

$$\begin{cases} x & -y & & = & -1 \\ & y & +z & = & 0 \\ 3x & -2y & +z & = & -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & -y & & = & -1 \\ & y & +z & = & 0 \\ & y & +z & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & = & -1 + y \\ & z & = & -y \end{cases}$$

Tomando $y = \lambda$ obtêm-se as equações paramétricas:

$$\begin{cases} x & = & -1 + \lambda \\ y & = & \lambda \\ z & = & -\lambda \end{cases}$$

donde deduzimos a equação vectorial

$$\mathcal{U} = (-1, 0, 0) + \langle (1, 1, -1) \rangle,$$

logo \mathcal{U} é uma recta afim. Note-se que o estudo da característica das matrizes associadas ao sistema confirmaria o resultado.

25. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial considere o subespaço afim \mathcal{U} definido pelo sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x & -y & & = & -1 \\ & y & +z & = & 0 \\ 2x & -2y & +z & = & -3 \end{cases}$$

Calcule as equações paramétricas de \mathcal{U} .

(Resolução)

Resolve-se o sistema indicado:

$$\begin{cases} x & -y & & = & -1 \\ & y & +z & = & 0 \\ 2x & -2y & +z & = & -3 \end{cases} \iff \begin{cases} x & -y & & = & -1 \\ & y & +z & = & 0 \\ & & z & = & -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = & 0 \\ y & = & 1 \\ z & = & -1 \end{cases}$$

Assim, $\mathcal{U} = \{(0, 1, -1)\}$. Trata-se de um ponto (subespaço afim de dimensão 0).

Note-se que o estudo da característica das matrizes associadas ao sistema confirmaria o resultado.

26. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial calcule a intersecção do plano afim π definido pela equação cartesiana

$$3x + 3y - 1 = 0$$

e a recta r incidente no ponto $A = (1, 1, 1)$ e dirigida pelo vector $\vec{v} = (0, 1, 0)$.

(Resolução)

Uma equação vectorial da recta r é

$$r = (1, 1, 1) + \langle (0, 1, 0) \rangle$$

Assim, um ponto $M = (x, y, z)$ incide em r se e só se existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tal que

$$(x, y, z) = (1, 1 + \lambda, 1)$$

M pertence ao plano π se verificar

$$0 = 3x + 3y - 1 = 3(1) + 3(1 + \lambda) - 1 = 3 + 3 + 3\lambda - 1 = 3\lambda + 5$$

donde $\lambda = -5/3$ e então

$$r \cap \pi = \{(1, -2/3, 1)\}.$$

27. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial calcule a intersecção do plano afim definido pela equação cartesiana

$$3x + 3y - 1 = 0$$

e a recta r incidente no ponto $A = (-1/3, 0, 1)$ e dirigida pelo vector $\vec{v} = (0, 0, 1)$.

(Resolução)

Uma equação vectorial da recta r é

$$r = (-1/3, 0, 1) + \langle (0, 0, 1) \rangle$$

Assim, um ponto $M = (x, y, z)$ incide em r se e só se existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tal que

$$(x, y, z) = (-1/3, 0, 1 + \lambda)$$

M pertence ao plano π se se verificar

$$0 = 3x + 3y - 1 = 3(-1/3) - 1 = -2$$

A igualdade anterior é impossível, portanto $r \cap \pi = \emptyset$

28. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial calcule a intersecção do plano afim π definido equação vectorial

$$\pi = (1, 2, 1) + \langle (0, 3, 0), (0, -2, -2) \rangle$$

e da recta r definida pelas equações cartesianas:

$$\begin{cases} x & -2z & = & 1 \\ x & +y & +z & = & 4 \end{cases}$$

(Resolução)

Um ponto $M = (x, y, z)$ pertence ao plano π se e só se existem $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tais que

$$(x, y, z) = (1, 2 + 3\lambda - 2\mu, 1 - 2\mu)$$

Este ponto verifica o sistema de equações cartesianas que definem r se e só se

$$\begin{cases} 1 & -2(1 - 2\mu) & = & 1 \\ 1 & +(2 + 3\lambda - 2\mu) & +(1 - 2\mu) & = & 4 \end{cases} \iff \begin{cases} & +4\mu & = & 2 \\ 3\lambda & -4\mu & = & 0 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema obtemos $\lambda = 2/3$ e $\mu = 1/2$ donde

$$r \cap \pi = \{(1, 3, 0)\}.$$

29. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial calcule a interseção do plano afim π definido equação vectorial

$$\pi = (1, 2, 1) + \langle (0, 3, 0), (0, -2, -2) \rangle$$

e da recta definida pela equação vectorial

$$r = (0, 1, 0) + \langle (2, 1, 0) \rangle$$

(Resolução)

Para facilitar a resolução podemos calcular uma equação cartesiana do plano π :

$$\det \begin{pmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 0 \iff x-1=0$$

Um ponto $M = (x, y, z)$ incide em r se e só se existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tal que

$$(x, y, z) = (2\lambda, 1 + \lambda, 0)$$

M pertence ao plano π se se verificar

$$0 = x - 1 = 2\lambda - 1$$

donde $\lambda = 1/2$ e

$$\pi \cap r = \{(1, 3/2, 0)\}$$

Resolução alternativa:

Um ponto $M = (x, y, z)$ pertence ao plano π se existem $\mu, \nu \in \mathbf{R}$ tais que

$$(x, y, z) = (1, 2 + 3\mu - 2\nu, 1 - 2\nu)$$

Assim, se $M \in r \cap \pi$, existem $\lambda, \mu, \nu \in \mathbf{R}$ tais que

$$(2\lambda, 1 + \lambda, 0) = (1, 2 + 3\mu - 2\nu, 1 - 2\nu)$$

Obtem-se um sistema de equações:

$$\begin{cases} 2\lambda = 1 \\ 1 + \lambda = 2 + 3\mu - 2\nu \\ 0 = 1 - 2\nu \end{cases} \iff \begin{cases} 2\lambda = 1 \\ \lambda - 3\mu + 2\nu = 1 \\ 2\nu = 1 \end{cases}$$

que admite solução.

30. Seja \mathcal{A} um espaço afim tridimensional munido de um referencial $\{O; \mathcal{B}\}$. Sejam r_1 e r_2 as rectas definidas por:

$$r_1 = (1, 2, 0) + \langle (1, 0, 1) \rangle$$

$$r_2 = (0, 2, -1) + \langle (1, 0, -1) \rangle$$

Calcule $r_1 + r_2$. São r_1 e r_2 rectas coplanares ou enviesadas? isto é, existe ou não um plano afim de \mathcal{A} que contém tais rectas? Se existir, calcule a equação cartesiana.

(Resolução)

Pelo exemplo ??

$$r_1 + r_2 = (1, 2, 0) + \langle (1, 0, 1), (1, 0, -1), (-1, 0, -1) \rangle$$

Como os vectores $\{(1, 0, 1), (1, 0, -1), (-1, 0, -1)\}$ são linearmente dependentes, uma equação vectorial de $r_1 + r_2$ é

$$r_1 + r_2 = (1, 2, 0) + \langle (1, 0, 1), (1, 0, -1) \rangle$$

Este subespaço afim é um plano, portanto as rectas são coplanares e não enviesadas. A equação cartesiana é dada por

$$\det \begin{pmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0 \iff y-2=0$$

31. Seja \mathcal{A} um espaço afim tridimensional munido de um referencial $\{O; \mathcal{B}\}$. Calcule a equação cartesiana do plano afim de \mathcal{A} que contém o ponto $B = (1, 0, 2)$ e a recta

$$r = (1, 2, 3) + \langle (0, 1, 1) \rangle.$$

Qual a equação cartesiana do plano vectorial associado?

(Resolução)

Uma equação vectorial de r é $r = (1, 2, 3) + \langle (0, 1, 1) \rangle$. Se $A = (1, 2, 3)$ o menor subespaço afim \mathcal{U} que contém r e $B = (1, 0, 2)$ pode definir-se por

$$\mathcal{U} = A + \langle (0, 1, 1), \overrightarrow{AB} \rangle = (1, 2, 3) + \langle (0, 1, 1), (0, -2, -1) \rangle$$

Trata-se de um plano cuja equação cartesiana é dada por:

$$\det \begin{pmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} = 0 \iff x-1=0$$

A equação cartesiana do plano vectorial associado é $x=0$.

32. Seja \mathcal{A} um espaço afim tridimensional munido de um referencial $\{O; \mathcal{B}\}$. Calcule a equação cartesiana do plano afim de \mathcal{A} que contém o ponto $B = (2, 0, 1)$ e a recta $r = \langle (1, 1, 1) \rangle$. Qual a equação cartesiana do plano vectorial associado?

(Resolução)

Uma equação vectorial de r é $r = (0, 0, 0) + \langle (1, 1, 1) \rangle$. De modo análogo ao exercício anterior, o menor subespaço afim \mathcal{U} que contém r e B pode definir-se por

$$\mathcal{U} = (0, 0, 0) + \langle (1, 1, 1), (2, 0, 1) \rangle$$

Trata-se de um plano cuja equação cartesiana é dada por:

$$\det \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \iff -x - y + 2z = 0$$

A equação vectorial do plano vectorial associado também é $-x - y + 2z = 0$.

33. Seja \mathcal{A} um espaço afim de dimensão 4 munido de um referencial $\{O; \mathcal{B}\}$. Calcule as equações paramétricas da recta r de \mathcal{A} que incide nos pontos $A = (1, 1, 0, 0)$ e $B = (0, -3, 0, -2)$.

(Resolução)

Uma equação vectorial é

$$r = (1, 1, 0, 0) + \langle (-1, -4, 0, -2) \rangle$$

E uma equações paramétricas são

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 - 4\lambda \\ z = 0 \\ t = -2\lambda \end{cases}$$

34. Considere, num espaço afim \mathcal{A} de dimensão 4 munido de um referencial, o conjunto \mathcal{U} definido por

$$\mathcal{U} = \{(x, y, z, t) \in \mathcal{A} : x - z = 2\}$$

É um subespaço afim? Qual a dimensão? Determine uma equação vectorial e umas equações paramétricas.

(Resolução)

É um subespaço afim de dimensão 3 (um hiperplano afim). Uma equações paramétricas podem ser:

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \mu \\ z = \lambda \\ t = \nu \end{cases}$$

Uma equação vectorial é $(2, 0, 0, 0) + \langle (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$

35. Num espaço afim de dimensão 4 munido de um referencial determine a equação cartesiana do hiperplano afim associado ao hiperplano vectorial

$$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 : x + y - z = 0\}$$

que incide no ponto $A = (1, 4, 1, 0)$. Determine também uma equação vectorial de tal hiperplano.

(Resolução)

Um hiperplano afim \mathcal{H} associado ao hiperplano H admite uma equação cartesiana

$$x + y - z + k = 0$$

Se o ponto $A = (1, 4, 1, 0)$ pertence a \mathcal{H} é preciso que

$$1 + 4 - 1 + k = 0$$

donde $k = -4$ e o hiperplano \mathcal{H} está definido pela equação cartesiana

$$x + y - z - 4 = 0$$

Tomando x , y e t , por exemplo, como parâmetros, com $\lambda = x$, $\mu = y$ e $\nu = t$, obtemos:

$$\begin{cases} x = & \lambda \\ y = & \mu \\ z = & -4 + \lambda + \mu \\ t = & \nu \end{cases}$$

donde deduzimos uma equação vectorial de \mathcal{H} :

$$\mathcal{H} = (0, 0, -4, 0) + \langle (1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$$

36. Num espaço afim de dimensão n munido de um referencial determine a equação cartesiana do hiperplano associado ao hiperplano vectorial

$$H = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n : x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$$

que incide no ponto $A = (1, 1, \dots, 1)$.

(Resolução)

Um hiperplano afim \mathcal{H} associado ao hiperplano H admite uma equação cartesiana

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + k = 0$$

Se o ponto $A = (1, 1, \dots, 1)$ pertence a \mathcal{H} é preciso que

$$1 + \dots + 1 + k = 0$$

donde $k = -n$ e o hiperplano \mathcal{H} está definido pela equação cartesiana

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n - n = 0$$

37. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial:

- Calcule uma equação vectorial e uma equação cartesiana do plano afim paralelo a $\pi = (0, 0, 0) + \langle (1, 0, 1), (0, 1, -1) \rangle$ incidente no ponto $A = (0, 0, 3)$.
- Calcule a equação cartesiana do plano afim paralelo ao plano de equação $x - 2y + 4 = 0$ que incide no ponto $B = (1, 1, 1)$. Quais as equações paramétricas deste plano?
- Calcule uma equação vectorial da recta afim paralela à recta $\langle A, B \rangle$ que incide no ponto $C = (1, 0, 0)$.
- Considere as rectas afins $r_1 = (0, 0, 2) + \langle (1, 1, 1) \rangle$ e $r_2 = \langle (1, 2, 0) \rangle$. Calcule uma equação vectorial do plano paralelo às rectas r_1 e r_2 que incide no ponto $M = (1, 2, -1)$.

(Resolução)

(a) O plano π' paralelo a π e incidente em $A = (0, 0, 3)$ tem a equação vectorial:

$$\pi' = (0, 0, 3) + \langle (1, 0, 1), (0, 1, -1) \rangle$$

A equação cartesiana é então:

$$\det \begin{pmatrix} x & y & z-3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0 \iff -x + y + z - 3 = 0$$

(b) O plano π'' paralelo ao plano indicado admite uma equação cartesiana do tipo

$$x - 2y + k = 0$$

Como $B = (1, 1, 1) \in \pi'$, é preciso

$$1 - 2 + k = 0$$

donde $k = 1$ e a equação requerida é

$$x - 2y + 1 = 0$$

Um conjunto de equações paramétricas deste plano são:

$$\begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

(c) A recta vectorial associada à recta afim $\langle A, B \rangle$ é $\overrightarrow{AB} = \langle (1, 1, -2) \rangle$. A recta s paralela à recta $\langle A, B \rangle$ incidente em C define-se pela equação vectorial:

$$s = (1, 0, 0) + \langle (1, 1, -2) \rangle.$$

(d) Um plano paralelo às rectas r_1 e r_2 deve estar associado ao plano vectorial

$$U = \langle (1, 1, 1), (1, 2, 0) \rangle$$

Portanto, uma equação vectorial do plano requerido é

$$(1, 2, -1) + \langle (1, 1, 1), (1, 2, 0) \rangle.$$

38. Estude posição relativa das rectas r_1 e r_2 de um espaço afim tridimensional munido de um referencial, se

$$r_1 \equiv (1, 2, 1) + \langle (1, 1, 2) \rangle \quad r_2 \equiv (0, 0, 1) + \langle (1, 1, 2) \rangle$$

(Resolução)

As rectas r_1 e r_2 são paralelas (estão associadas à mesma recta vectorial). Note-se que

$$r_1 + r_2 = (1, 2, 1) + \langle (1, 1, 2), (-1, -2, 0) \rangle$$

Como $\dim r_1 + r_2 = 2$ as rectas são distintas.

39. Seja \mathcal{A} um espaço afim de dimensão quatro munido de um referencial. Considere o subespaço afim \mathcal{U} de \mathcal{A} definido por

$$\mathcal{U} = \{(x, y, z, t) \in \mathcal{A} : x + y - t = 0 \wedge y + z - 2t + 1 = 0\}$$

Determine o subespaço vectorial associado a \mathcal{U} . Determine o subespaço afim \mathcal{U}' paralelo a \mathcal{U} , da mesma dimensão, que incide no ponto $(0, 2, 1, 0)$.

(Resolução)

O subespaço vectorial U associado a \mathcal{U} é (na base associada ao referencial):

$$U = \{(x, y, z, t) \in E : x + y - t = 0 \wedge y + z - 2t = 0\}$$

Um subespaço \mathcal{U}' paralelo a \mathcal{U} pode definir-se por

$$\mathcal{U}' = \{(x, y, z, t) \in E : x + y - t + k = 0 \wedge y + z - 2t + m = 0\}$$

Se \mathcal{U}' incide em $(0, 2, 1, 0)$ é preciso que $k = -2$ e $m = -3$ donde

$$\mathcal{U}' = \{(x, y, z, t) \in E : x + y - t - 2 = 0 \wedge y + z - 2t - 3 = 0\}$$

40. Posições relativas de duas rectas no plano

Sejam r e r' duas rectas afins de um plano euclidiano (munido de um referencial) definidas, respectivamente, pelas equações cartesianas

$$ax + by = c \quad a'x + b'y = c'$$

Determine as posições relativas das rectas em função dos coeficientes das equações cartesianas.

(Resolução)

Considerem-se A e A' as matrizes associadas a esse sistema de equações:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

Então:

(a) as rectas r e r' são coincidentes (iguais) se e só se

$$c(A) = c(A') = 1$$

ou seja, se e só se as filas (a, b, c) e (a', b', c') são proporcionais;

(b) as rectas r e r' concorrem num único ponto M (solução do sistema) se e só se

$$c(A) = c(A') = 2$$

ou seja, se e só se (a, b) e (a', b') não são proporcionais;

(c) as rectas r e r' são paralelas (o sistema não possui solução) se e só se

$$c(A) = 1 \quad c(A') = 2$$

ou seja, se e só se (a, b) e (a', b') são proporcionais mas (a, b, c) e (a', b', c') não são.

41. Posições relativas de dois planos num espaço afim tridimensional

Sejam π e π' dois planos afins de um espaço afim tridimensional (munido de um referencial) definidos, respectivamente, pelas equações cartesianas

$$ax + by + cz = d \quad a'x + b'y + c'z = d'$$

Determine as posições relativas dos planos em função dos coeficientes das equações cartesianas.

(Resolução)

Considerem-se A e A' as matrizes associadas a esse sistema de equações:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$$

Então:

(a) os planos π e π' são coincidentes (iguais) se e só se

$$c(A) = c(A') = 1$$

ou seja, se e só se as filas (a, b, c, d) e (a', b', c', d') são proporcionais;

(b) os planos π e π' concorrem numa recta (solução do sistema) se e só se

$$c(A) = c(A') = 2$$

ou seja, se e só se (a, b, c) e (a', b', c') não são proporcionais.

(c) os planos π e π' são paralelos (o sistema não possui solução) se e só se

$$c(A) = 1 \quad c(A') = 2$$

ou seja, se e só se (a, b, c) e (a', b', c') são proporcionais mas (a, b, c, d) e (a', b', c', d') não são.

42. Posições relativas de três planos no espaço

Sejam π , π' e π'' três planos afins distintos de um espaço afim tridimensional (munido de um referencial) definidos, respectivamente, pelas equações cartesianas

$$ax + by + cz = d \quad a'x + b'y + c'z = d' \quad a''x + b''y + c''z = d''$$

Determine as posições relativas dos planos em função dos coeficientes das equações cartesianas.

(Resolução)

Considerem-se A e A' as matrizes associadas a esse sistema de equações:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$$

Então:

(a) os planos π e π' são coincidentes (iguais) se e só se

$$c(A) = c(A') = 1$$

ou seja, se e só se as filas (a, b, c, d) , (a', b', c', d') e (a'', b'', c'', d'') são proporcionais;

(b) os planos π , π' e π'' concorrem numa recta (solução do sistema) se e só se

$$c(A) = c(A') = 2;$$

Nota: Se r é uma recta do espaço definida por duas equações cartesianas

$$ax + by + cz = d \quad a'x + b'y + c'z = d',$$

os planos do espaço que contêm r admitem uma equação do tipo

$$\lambda(ax + by + cz - d) + \mu(a'x + b'y + c'z - d') = 0, \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R}$$

Esta família de planos costuma chamar-se o feixe de planos definido por r .

(c) os planos π , π' e π'' concorrem num ponto (solução única do sistema) se e só se

$$c(A) = c(A') = 3$$

ou seja, se e só se os vectores $\{(a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c'')\}$ são linearmente independentes;

(d) Se $c(A) = 1$ e $c(A') = 2$ a intersecção dos três planos é vazia (o sistema não possui solução). Há duas configurações possíveis:

- Os três planos são paralelos e distintos.
- Dois dos planos são coincidentes e o terceiro é paralelo aos anteriores e distinto deles:

(e) Se $c(A) = 2$ e $c(A') = 3$, a intersecção dos três planos também é vazia. As configurações possíveis neste caso são

- Dois dos planos são paralelos e o terceiro incide numa recta com cada de aqueles;
- os planos formam um prisma triangular, isto é, são dois a dois incidentes numa recta:

ATENÇÃO: Recorde-se que o caso $c(A) = 1$ e $c(A') = 3$ não é possível, em geral $c(A') \leq c(A) + 1$.

43. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial, determine as posições relativas dos planos π , π' e π'' definidos respectivamente pelas equações cartesianas:

$$x + y + z = 1, \quad 2x + 2y + 2z = 2, \quad -3x - 3y - 3z = -3$$

(Resolução)

Os três planos são coincidentes.

44. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial, determine as posições relativas dos planos π , π' e π'' definidos respectivamente pelas equações cartesianas:

$$x + y + z = 1, \quad x + y + z = 2, \quad x + y + z = 5;$$

(Resolução)

Os três planos são paralelos e distintos.

45. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial, determine as posições relativas dos planos π , π' e π'' definidos respectivamente pelas equações cartesianas:

$$x + y + z = 1, \quad 2x + 2y + 2z = 2, \quad x + y + z = 5;$$

(Resolução)

Os planos π_1 e π_2 são coincidentes e o plano π_3 é paralelo (e distinto) aos anteriores.

46. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial, determine as posições relativas dos planos π , π' e π'' definidos respectivamente pelas equações cartesianas:

$$x + y = 1, \quad x - 2y = 2, \quad 2x - y = 3$$

(Resolução)

As matrizes associadas ao sistema são:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

As duas matrizes têm característica 2, portanto o sistema define um subespaço afim de dimensão 1 (uma recta afim). Escolhendo, por exemplo, as duas primeiras equações, obtemos essa recta afim pode definir-se pela equação vectorial:

$$r = (4/3, -1/3, 0) + \langle (0, 0, 1) \rangle$$

(Os três planos são incidentes numa recta, formam parte do feixe de planos definido pela recta)

47. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial, determine as posições relativas dos planos π , π' e π'' definidos respectivamente pelas equações cartesianas:

$$x + y = 1, \quad x - 2y = 2, \quad z = 5$$

(Resolução)

As matrizes associadas ao sistema são:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

As duas matrizes têm característica 3, portanto o sistema define um subespaço afim de dimensão 0 (um ponto). Resolvendo o sistema obtemos as coordenadas desse ponto: $(4/3, -1/3, 5)$.

48. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial, determine as posições relativas dos planos π , π' e π'' definidos respectivamente pelas equações cartesianas:

$$x + y + z = 1, \quad x + y + z = 2, \quad x - 2y + z = 5;$$

(Resolução)

A intersecção dos três planos é vazia (o sistema não tem solução). Os dois primeiros planos são paralelos e distintos e o terceiro plano incide numa recta com cada um deles.

49. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial, determine as posições relativas dos planos π , π' e π'' definidos respectivamente pelas equações cartesianas:

$$x + y + z = 1, \quad x + y - z = 1, \quad 2x + 2z = 5.$$

(Resolução)

As matrizes associadas ao sistema são:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

A primeira matriz tem característica 2 e a segunda característica 3, portanto o sistema não possui solução: a intersecção dos três planos é vazia. Não há nenhuma relação de paralelismo entre esses planos, isto é, os planos intersectam-se dois a dois numa recta: formam um prisma triangular.

Ortogonalidade, problemas métricos.

50. Determine o complemento ortogonal da recta vectorial gerada pelo vector \vec{v} .

- (a) $\vec{v} = (2, 1)$;
- (b) $\vec{v} = (2, -2)$;
- (c) $\vec{v} = (1, -1, 1)$;
- (d) $\vec{v} = (1, -2, 3)$;
- (e) $\vec{v} = (7, 1, 1, -2)$;
- (f) $\vec{v} = (1, 1, 1, \dots, 1)$.

(Resolução)

- (a) $\vec{v} = (2, 1)$.

O complemento ortogonal de $\langle \vec{v} \rangle$ é a recta vectorial de \mathbf{R}^2 definida pela equação cartesiana:

$$2x + y = 0$$

- (b) $\vec{v} = (2, -2)$.

O complemento ortogonal de $\langle \vec{v} \rangle$ é a recta vectorial de \mathbf{R}^2 definida pela equação cartesiana:

$$2x - 2y = 0$$

- (c) $\vec{v} = (1, -1, 1)$.

O complemento ortogonal de $\langle \vec{v} \rangle$ é o plano vectorial de \mathbf{R}^3 definido pela equação cartesiana:

$$x - y + z = 0$$

- (d) $\vec{v} = (1, -2, 3)$.

O complemento ortogonal de $\langle \vec{v} \rangle$ é o plano vectorial de \mathbf{R}^3 definido pela equação cartesiana:

$$x - 2y + 3z = 0$$

- (e) $\vec{v} = (7, 1, 1, -2)$.

O complemento ortogonal de $\langle \vec{v} \rangle$ é o hiperplano vectorial de \mathbf{R}^4 definido pela equação cartesiana:

$$7x + y + z - 2t = 0$$

(f) $\vec{v} = (1, 1, \dots, 1)$.

O complemento ortogonal de $\langle \vec{v} \rangle$ é o hiperplano vectorial de \mathbf{R}^n definido pela equação cartesiana:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$$

51. Determine o complemento ortogonal do plano vectorial gerado pelos vectores \vec{v} e \vec{w} .

(a) $\vec{v} = (1, -1, 1)$, $\vec{w} = (2, 0, -2)$;

(b) $\vec{v} = (1, -2, 3)$, $\vec{w} = (3, -5, 0)$;

(c) $\vec{v} = (0, -1, 0, 1)$, $\vec{w} = (0, 1, 1, -2)$.

(Resolução)

(a) $\vec{v} = (1, -1, 1)$, $\vec{w} = (2, 0, -2)$.

O complemento ortogonal $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^\perp$ está definido pelas equações cartesianas:

$$\left. \begin{array}{rrcr} x & -y & +z & = & 0 \\ 2x & & -2z & = & 0 \end{array} \right\}$$

Resolvendo o sistema obtemos que $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^\perp$ é a recta vectorial $\langle (1, 2, 1) \rangle$.

(b) $\vec{v} = (1, -2, 3)$, $\vec{w} = (3, -5, 0)$;

O complemento ortogonal $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^\perp$ está definido pelas equações cartesianas:

$$\left. \begin{array}{rrcr} x & -2y & +3z & = & 0 \\ 3x & -5y & & = & 0 \end{array} \right\}$$

Resolvendo o sistema obtemos que $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^\perp$ é a recta vectorial $\langle (5, 3, 1/3) \rangle$.

(c) $\vec{v} = (0, -1, 0, 1)$, $\vec{w} = (0, 1, 1, -2)$.

O complemento ortogonal $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^\perp$ está definido pelas equações cartesianas:

$$\left. \begin{array}{rrcr} -y & & +t & = & 0 \\ +y & +z & -2t & = & 0 \end{array} \right\}$$

Resolvendo o sistema obtemos que $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^\perp$ é o plano vectorial $\langle (1, 0, 0, 0)(0, 1, 1, 1) \rangle$.

52. Determine duas rectas vectoriais V e W de \mathbf{R}^2 tais que $V \cap W = \{ \vec{0} \}$ mas V e W não são ortogonais.

(Resolução)

As rectas $V = \langle (2, 2) \rangle$ e $W = \langle (0, -1) \rangle$ verificam $\langle (2, 2) \rangle \cap \langle (0, -1) \rangle = \{ \vec{0} \}$ mas

$$(2, 2) \cdot (0, -1) = -2 \neq 0$$

53. Sejam \vec{v} e \vec{w} vectores de \mathbf{R}^n não nulos e λ, μ números reais estritamente positivos. Prove que

$$\cos(\vec{v}, \vec{w}) = \cos(\lambda \vec{v}, \mu \vec{w})$$

(Resolução)

$$\cos(\lambda \vec{v}, \mu \vec{w}) = \frac{(\lambda \vec{v}) \cdot (\mu \vec{w})}{\|\lambda \vec{v}\| \|\mu \vec{w}\|} = \lambda \mu \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\lambda| \|\vec{v}\| |\mu| \|\vec{w}\|} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|}$$

já que $|\lambda| = \lambda$ e $|\mu| = \mu$.

54. No plano \mathbf{R}^2 , determine a projecção ortogonal do vector $\vec{v} = (1, 1)$ na recta vectorial $< (0, 3) >$.

(Resolução)

Tem-se que $(1, 1) = \lambda(0, 3) + \vec{u}$, com $\vec{u} \perp (0, 3)$. Assim,

$$(0, 3) \cdot (1, 1) = \lambda(0, 3) \cdot (0, 3) + 0$$

donde $\lambda = \frac{3}{9} = 1/3$ e portanto, a projecção de $(1, 1)$ na recta $< (0, 3) >$ é

$$\frac{1}{3}(0, 3) = (0, 1).$$

55. No plano \mathbf{R}^2 , determine a projecção ortogonal do vector $\vec{v} = (x, y)$ na recta vectorial $< (0, 3) >$.

(Resolução)

Tem-se que $(x, y) = \lambda(0, 3) + \vec{u}$, com $\vec{u} \perp (0, 3)$. Assim,

$$(0, 3) \cdot (x, y) = \lambda(0, 3) \cdot (0, 3) + 0$$

donde $\lambda = \frac{3y}{9} = y/3$ e portanto, a projecção de (x, y) na recta $< (0, 3) >$ é

$$\frac{y}{3}(0, 3) = (0, y).$$

56. Em \mathbf{R}^3 , determine a projecção ortogonal do vector $\vec{v} = (1, 1, 1)$ na recta vectorial $< (-1, 0, 2) >$.

(Resolução)

Tem-se que $(1, 1, 1) = \lambda(-1, 0, 2) + \vec{u}$, com $\vec{u} \perp (-1, 0, 2)$. Assim,

$$(-1, 0, 2) \cdot (1, 1, 1) = \lambda(-1, 0, 2) \cdot (-1, 0, 2) + 0$$

donde $\lambda = \frac{1}{5}$ e portanto, a projecção de $(1, 1, 1)$ na recta $< (-1, 0, 2) >$ é

$$\frac{1}{5}(-1, 0, 2) = \left(-\frac{1}{5}, 0, \frac{2}{5}\right).$$

57. Em \mathbf{R}^3 , determine a projecção ortogonal do vector $\vec{v} = (x, y, z)$ na recta vectorial $< (-1, 0, 2) >$.

(Resolução)

Tem-se que $(x, y, z) = \lambda(-1, 0, 2) + \vec{u}$, com $\vec{u} \perp (-1, 0, 2)$. Assim,

$$(-1, 0, 2) \cdot (x, y, z) = \lambda(-1, 0, 2) \cdot (-1, 0, 2) + 0$$

donde $\lambda = \frac{-x + 2z}{5}$ e portanto, a projecção de (x, y, z) na recta $< (-1, 0, 2) >$ é

$$\frac{-x + 2z}{5}(-1, 0, 2) = \left(\frac{x - 2z}{5}, 0, \frac{-2x + 4z}{5}\right).$$

58. Em \mathbf{R}^3 , determine a projeção ortogonal do vector $\vec{v} = (1, 0, 2)$ no plano vectorial $\langle (1, 1, 1), (2, 0, 0) \rangle$.

(Resolução)

Tem-se que $(1, 0, 2) = \lambda(1, 1, 1) + \mu(2, 0, 0) + \vec{u}$, com $\vec{u} \in \langle (1, 1, 1), (2, 0, 0) \rangle^\perp$. Em particular

$$\vec{u} \cdot (1, 1, 1) = 0 \quad \text{e} \quad \vec{u} \cdot (2, 0, 0) = 0$$

Assim

$$(1, 1, 1) \cdot (1, 0, 2) = \lambda(1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1) + \mu(1, 1, 1) \cdot (2, 0, 0) + 0$$

e

$$(2, 0, 0) \cdot (1, 0, 2) = \lambda(2, 0, 0) \cdot (1, 1, 1) + \mu(2, 0, 0) \cdot (2, 0, 0) + 0$$

Obtém-se então um sistema:

$$\begin{cases} 3 &= 3\lambda + 2\mu \\ 2 &= 2\lambda + 4\mu \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos $\lambda = 1$ e $\mu = 0$. A projeção ortogonal de $(1, 0, 2)$ no plano vectorial indicado é o vector

$$\lambda(1, 1, 1) + \mu(2, 0, 0) = 1(1, 1, 1) + 0(2, 0, 0) = (1, 1, 1)$$

59. Em \mathbf{R}^3 , determine a projeção ortogonal do vector $\vec{v} = (x, y, z)$ no plano vectorial $\langle (1, 1, 1), (2, 0, 0) \rangle$.

(Resolução)

Tem-se que $(x, y, z) = \lambda(1, 1, 1) + \mu(2, 0, 0) + \vec{u}$, com $\vec{u} \in \langle (1, 1, 1), (2, 0, 0) \rangle^\perp$. Em particular

$$\vec{u} \cdot (1, 1, 1) = 0 \quad \text{e} \quad \vec{u} \cdot (2, 0, 0) = 0$$

Assim

$$(1, 1, 1) \cdot (x, y, z) = \lambda(1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1) + \mu(1, 1, 1) \cdot (2, 0, 0) + 0$$

e

$$(2, 0, 0) \cdot (x, y, z) = \lambda(2, 0, 0) \cdot (1, 1, 1) + \mu(2, 0, 0) \cdot (2, 0, 0) + 0$$

Obtém-se então um sistema:

$$\begin{cases} x + y + z &= 3\lambda + 2\mu \\ 2x &= 2\lambda + 4\mu \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos $\lambda = \frac{y+z}{2}$ e $\mu = \frac{2x-y-z}{4}$. A projeção ortogonal de (x, y, z) no plano vectorial indicado é o vector

$$\lambda(1, 1, 1) + \mu(2, 0, 0) = \frac{y+z}{2}(1, 1, 1) + \frac{2x-y-z}{4}(2, 0, 0) = \frac{1}{2}(2x, y+z, y+z)$$

60. Determine uma base ortonormada do subespaço vectorial W de \mathbf{R}^3 definido pela equação cartesiana

$$2x - y + z = 0$$

(Resolução)

Calculamos, em primeiro lugar, uma base de W . Como $2x = y - z$, considerando y e z como parâmetros obtemos as equações paramétricas:

$$\begin{cases} x &= \lambda - \mu \\ y &= \lambda \\ z &= \mu \end{cases}$$

donde $W = \langle (1, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle$.

Seja $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$. Definimos \vec{v}_2 como $\vec{v}_2 = \lambda \vec{v}_1 + (-1, 0, 1)$. É preciso que $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$ portanto

$$0 = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \lambda \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \cdot (-1, 0, 1)$$

donde

$$0 = \lambda(1, 1, 0) \cdot (1, 1, 0) + (1, 1, 0) \cdot (-1, 0, 1)$$

logo $\lambda = 1/2$ e $\vec{u}_2 = 1/2(1, 1, 0) + (-1, 0, 1) = (-1/2, 1/2, 1)$.

A base $\{(1, 1, 0), (-1/2, 1/2, 1)\}$ é uma base ortogonal de W . Para obter uma base ortonormal $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ do plano W precisa-se só de normalizar os vectores \vec{v}_1 e \vec{v}_2 . Obtemos então:

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$$

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} = (-\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/6, \sqrt{6}/3)$$

61. Seja \mathcal{A} um plano euclidiano munido de um referencial ortonormado.

(a) Determine a recta s_1 perpendicular à recta r_1 definida pela equação vectorial:

$$r_1 = (0, 1) + \langle (3, -2) \rangle$$

e que incide no ponto $P_1 = (2, 4)$.

(b) Determine a recta s_2 perpendicular à recta r_2 definida pela equação cartesiana:

$$2x + 5y - 1 = 0$$

e que incide no ponto $P_2 = (-1, 5)$.

(Resolução)

(a) A recta vectorial ortogonal à recta $\langle (3, -2) \rangle$ é a recta $\langle (2, 3) \rangle$. Assim

$$s_1 = (2, 4) + \langle (2, 3) \rangle$$

(b) A recta vectorial normal à recta afim r_2 está dirigida pelo vector $(2, 5)$. Assim

$$s_2 = (-1, 5) + \langle (2, 5) \rangle$$

62. Seja \mathcal{A} um espaço euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado.

(a) Calcule a recta r perpendicular ao plano π definido pela equação cartesiana:

$$x + 2y + 4 = 0$$

e que incide no ponto $P = (1, 1, 1)$.

(b) Calcule a recta r' perpendicular ao plano π' definido pela equação vectorial:

$$\pi'' = (0, 1, 1) + \langle (2, 0, 0), (-1, -1, 3) \rangle$$

e que incide no ponto $P = (1, 1, 1)$.

(Resolução)

(a) A recta vectorial normal ao plano π é $\langle (1, 2, 0) \rangle$. Assim, a recta r pode definir-se pela equação vectorial:

$$r = (1, 1, 1) + \langle (1, 2, 0) \rangle$$

(b) O vector director \vec{u} da recta r' deve ser perpendicular aos vectores $(2, 0, 0)$ e $(-1, -1, 3)$, podemos então considerar:

$$\vec{u} = (2, 0, 0) \wedge (-1, -1, 3) = (0, -6, -2)$$

e definir r' pela equação vectorial

$$r' = (1, 1, 1) + \langle (0, -6, -2) \rangle$$

63. Seja \mathcal{A} um espaço euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado.

- (a) Calcule o plano π perpendicular à recta s definida pela equação vectorial:

$$s = (0, 0, -2) + \langle (0, 2, -1) \rangle$$

e que incide no ponto $P = (1, 1, 1)$.

- (b) Calcule o plano π' perpendicular à recta s' definida pelas equações cartesianas:

$$\left. \begin{aligned} 2x - 3y + z - 4 &= 0 \\ 2x + 2y + z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

e que incide no ponto $P = (1, 1, 1)$.

(Resolução)

- (a) A recta s está dirigida pelo vector $(0, 2, -1)$. Os planos afins perpendiculares a s são então definidos por uma equação cartesiana do tipo

$$2y - z + k = 0$$

Se π incide no ponto P , tem-se $k = -1$ donde π é o plano definido pela equação cartesiana:

$$2y - z - 1 = 0$$

- (b) A recta s' está definida como a intersecção dos planos afins π_1 e π_2 definidos respectivamente pelas equações cartesianas:

$$2x - 3y + z - 4 = 0 \quad \text{e} \quad 2x + 2y + z = 0$$

Se \vec{u} é um vector director de s' tem-se que \vec{u} é ortogonal aos vectores $(2, -3, 1)$ e $(2, 2, 1)$ ou, equivalentemente, \vec{u} é proporcional ao produto vectorial de $(2, -3, 1)$ e $(2, 2, 1)$. Podemos então considerar

$$\vec{u} = (2, -3, 1) \wedge (2, 2, 1) = (-5, 0, 10)$$

O plano π' , perpendicular à recta s' dirigida por \vec{u} , admite então uma equação cartesiana do tipo

$$-5x + 10z + k = 0$$

Como $P(1, 1, 1) \in \pi'$ tem-se $k = -5$.

64. Num espaço euclidiano tridimensional \mathcal{A} munido de um referencial ortonormado, considere as rectas afins:

$$r = (1, 2, 3) + \langle (2, -3, 1) \rangle$$

$$s = \langle (2, 2, 1) \rangle$$

Calcule a recta t perpendicular a r e a s que incide no ponto $M = (5, 0, 0)$.

(Resolução)

A recta perpendicular a r e a s está dirigida pelo vector \vec{u} , com

$$\vec{u} = (2, -3, 1) \wedge (2, 2, 1) = (-5, 0, 10)$$

donde

$$t = (5, 0, 0) + \langle (-5, 0, 10) \rangle$$

65. Seja \mathcal{A} um espaço afim de dimensão quatro munido de um referencial ortonormado.

- (a) Calcule a recta r perpendicular ao hiperplano \mathcal{H} definido pela equação cartesiana:

$$x + 2y + 4z - 1 = 0$$

e que incide no ponto $P = (10, 0, 0, 0)$.

- (b) Calcule o hiperplano \mathcal{H}' perpendicular à recta s definida pela equação vectorial:

$$s = (1, 0, -1, 1) + \langle (0, -2, -3, 5) \rangle$$

e que incide no ponto $P = (10, 0, 0, 0)$.

(Resolução)

- (a) A recta normal ao hiperplano \mathcal{H} está dirigida pelo vector

$$\vec{n} = (1, 2, 0, 4)$$

Assim, a recta r perpendicular a \mathcal{H} e que incide no ponto P pode definir-se pela equação vectorial

$$r = (10, 0, 0, 0) + \langle (1, 2, 0, 4) \rangle$$

- (b) O hiperplano \mathcal{H}' é definido por uma equação cartesiana do tipo

$$-2y - 3z + 5t + k = 0$$

Como $P \in \mathcal{H}'$, tem-se $k = 0$ donde \mathcal{H}' é o hiperplano

$$-2y - 3z + 5t = 0$$

66. Seja \mathcal{A} um espaço afim euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado. Calcule a perpendicular comum às rectas enviesadas:

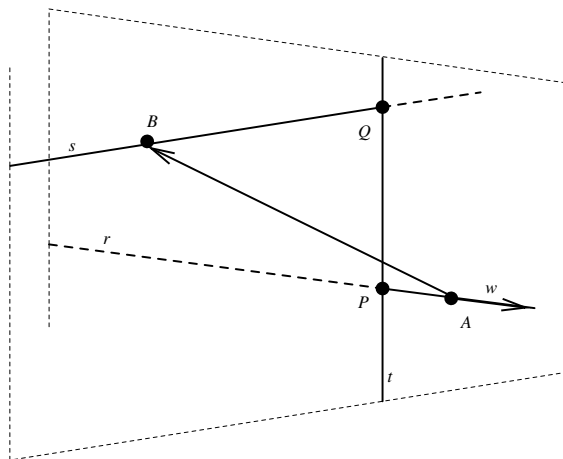
$$r = (1, 2, 3) + \langle (0, 0, 1) \rangle$$

$$s = (2, 0, 0) + \langle (0, 1, -1) \rangle$$

(Resolução 1)

O vector director da perpendicular comum é $\vec{u} = (0, 0, 1) \wedge (0, 1, -1) = (-1, 0, 0)$. Se $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, 0, 0)$ e P e Q são os pés da perpendicular comum, com $P \in r$ e $Q \in s$, tem-se

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QB}$$



Note-se que $\overrightarrow{AP} \in \langle (0, 0, 1) \rangle$, $\overrightarrow{PQ} \in \langle (-1, 0, 0) \rangle$ e $\overrightarrow{QB} \in \langle (0, 1, -1) \rangle$ donde

$$\overrightarrow{AB} = \lambda(0, 0, 1) + \mu(-1, 0, 0) + \nu(0, 1, -1)$$

Os vectores $(0, 0, 1)$ e $(0, 1, -1)$ são ortogonais ao vector $(-1, 0, 0)$, portanto

$$\overrightarrow{AB} \cdot (0, 0, 1) = \lambda - \nu \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AB} \cdot (0, 1, -1) = -\lambda + 2\nu$$

Como $\overrightarrow{AB} = (1, -2, -3)$ obtemos o sistema:

$$\left. \begin{array}{rcl} -3 & = & \lambda - \nu \\ 1 & = & -\lambda + 2\nu \end{array} \right\}$$

donde $\lambda = -5$ e $\nu = -2$. Em particular, $\overrightarrow{AP} = -5(0, 0, 1)$ donde

$$P = A + \overrightarrow{AP} = (1, 2, 3) - 5(0, 0, 1) = (1, 2, -2).$$

A perpendicular comum t pode então definir-se pela equação vectorial

$$t = P + \langle \overrightarrow{u} \rangle = (1, 2, -2) + \langle (1, 0, 0) \rangle$$

(Resolução 2)

Seja $\overrightarrow{u} = (0, 0, 1) \wedge (0, 1, -1) = (-1, 0, 0)$. A perpendicular comum é a intersecção dos planos afins:

$$\pi_r = (1, 2, 3) + \langle (0, 0, 1), (-1, 0, 0) \rangle \quad \text{e} \quad \pi_s = (2, 0, 0) + \langle (0, 1, -1), (-1, 0, 0) \rangle$$

Os planos π_r e π_s podem definir-se, respectivamente, pelas equações cartesianas:

$$y - 2 = 0 \quad y + z = 0$$

Assim t é a recta definida pelo sistema de equações cartesianas,

$$\left. \begin{array}{rcl} y - 2 & = & 0 \\ y + z & = & 0 \end{array} \right\}$$

ou, equivalentemente, a recta definida pela equação vectorial:

$$t = (0, 2, -2) + \langle (1, 0, 0) \rangle$$

67. Seja \mathcal{A} um espaço afim euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado. Calcule os pés da perpendicular comum às rectas enviesadas:

$$r = (1, 2, 1) + \langle (1, 0, -1) \rangle \quad s = (1, 0, 0) + \langle (0, 2, 2) \rangle$$

(Resolução)

Sejam t a perpendicular comum, P e Q os pés da perpendicular, com $P \in r$ e $Q \in s$. Considerem-se ainda os pontos $A = (1, 2, 1) \in r$ e $B = (1, 0, 0) \in s$. Tem-se

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QB}$$

A perpendicular comum está dirigida pelo vector

$$\overrightarrow{u} = (1, 0, -1) \wedge (0, 2, 2) = (2, -2, 2)$$

Portanto, como, $\overrightarrow{AP} \in \langle (1, 0, -1) \rangle$, $\overrightarrow{PQ} \in \langle \overrightarrow{u} \rangle$ e $\overrightarrow{QB} \in \langle (0, 2, 2) \rangle$, tem-se

$$\overrightarrow{AB} = \lambda(1, 0, -1) + \mu(2, -2, 2) + \nu(0, 2, 2)$$

Os vectores $(1, 0, -1)$ e $(2, -2, 2)$ são ortogonais logo:

$$\overrightarrow{AB} \cdot (1, 0, -1) = \lambda(1, 0, -1) \cdot (1, 0, -1) + \nu(0, 2, 2) \cdot (1, 0, -1)$$

Como $\overrightarrow{AB} = (0, -2, -1)$ obtemos $1 = 2\lambda - 2\nu$.

Os vectores $(0, 2, 2)$ e $(2, -2, 2)$ são ortogonais logo:

$$\overrightarrow{AB} \cdot (0, 2, 2) = \lambda(1, 0, -1) \cdot (0, 2, 2) + \nu(0, 2, 2) \cdot (0, 2, 2)$$

Como $\overrightarrow{AB} = (0, -2, -1)$ tem-se $-6 = -2\lambda + 8\nu$.

Resolvendo o sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 1 = 2\lambda - 2\nu \\ -6 = -2\lambda + 8\nu \end{array} \right\}$$

obtemos $\lambda = -1/3$ e $\nu = -5/6$. Em particular

$$\overrightarrow{AP} = \lambda(1, 0, -1) = -1/3(1, 0, -1) = (-1/3, 0, 1/3)$$

logo

$$P = A + \overrightarrow{AP} = (1, 2, 1) + (-1/3, 0, 1/3) = (2/3, 2, 4/3)$$

E também

$$\overrightarrow{QB} = \nu(0, 2, 2) = -5/6(0, 2, 2) = (0, -5/3, -5/3)$$

donde

$$Q = B + \overrightarrow{QB} = B - \overrightarrow{QB} = (1, 0, 0) - (0, -5/3, -5/3) = (1, 5/3, 5/3)$$

68. Num plano euclidiano \mathcal{A} munido de um referencial ortonormado,, seja r a recta afim definida pela equação vectorial

$$r = (0, -5) + \langle (1, 1) \rangle$$

(a) Calcule a projecção ortogonal do ponto $P = (2, 2)$ na recta r .

(b) Calcule a projecção ortogonal do ponto $P = (x, y)$ na recta r

(Resolução)

(a) Seja Q a projecção ortogonal de $P = (2, 2)$. Se $A = (0, -5)$ tem-se $\overrightarrow{AP} = (2, 7)$ e

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QP} = \lambda(1, 1) + \overrightarrow{QP}$$

Como \overrightarrow{QP} e $(1, 1)$ são ortogonais, tem-se

$$\overrightarrow{AP} \cdot (1, 1) = \lambda(1, 1) \cdot (1, 1)$$

donde $\lambda = 9/2$. Em particular

$$Q = A + \overrightarrow{AQ} = A + \lambda(1, 1) = (0, -5) + (9/2)(1, 1) = (9/2, -1/2)$$

(b) Seja Q a projecção ortogonal de $P = (x, y)$. Se $A = (0, -5)$ tem-se $\overrightarrow{AP} = (x, y + 5)$ e

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QP} = \lambda(1, 1) + \overrightarrow{QP}$$

Como \overrightarrow{QP} e $(1, 1)$ são ortogonais, tem-se

$$\overrightarrow{AP} \cdot (1, 1) = \lambda(1, 1) \cdot (1, 1)$$

donde

$$x + y + 5 = 2\lambda$$

Em particular

$$Q = A + \overrightarrow{AQ} = A + \lambda(1, 1) = (0, -5) + \frac{x + y + 5}{2}(1, 1) = \left(\frac{x + y + 5}{2}, \frac{x + y - 5}{2}\right)$$

69. Num espaço euclidiano tridimensional \mathcal{A} munido de um referencial ortonormado, considere-se π o plano afim definido pela equação vectorial

$$\pi = (-1, 1, 0) + \langle (1, 1, 1), (1, 0, 1) \rangle$$

- (a) Calcule a projecção ortogonal do ponto $P = (3, 2, -1)$ no plano afim π .
 (b) Calcule a projecção ortogonal do ponto $P = (x, y, z)$ no plano afim π .

(Resolução)

- (a) A equação cartesiana de π é

$$x - z + 1 = 0$$

Um vector director da recta normal a π é então $(1, 0, -1)$. Sejam $A = (-1, 1, 0) \in \pi$, $P = (3, 2, -1)$ e Q a projecção ortogonal de P em π . Tem-se

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{AQ} + \lambda(1, 0, -1)$$

Como \overrightarrow{AQ} e $(1, 0, -1)$ são ortogonais obtemos

$$\overrightarrow{AP} \cdot (1, 0, -1) = \lambda(1, 0, -1) \cdot (1, 0, -1)$$

donde $\lambda = 5/2$. Assim

$$Q = P + \overrightarrow{PQ} = (3, 2, -1) - \lambda(1, 0, -1) = (3, 2, -1) - (5/2, 0, -5/2) = (1/2, 2, 3/2)$$

Resolução alternativa

A partir da equação vectorial de π , como $\overrightarrow{AQ} \in \langle (1, 1, 1), (1, 0, 1) \rangle$, existem $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tais que

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QP} = (\lambda(1, 1, 1) + \mu(1, 0, 1)) + \overrightarrow{QP}$$

O vector \overrightarrow{QP} é ortogonal aos vectores $(1, 1, 1)$ e $(1, 0, 1)$ portanto:

$$\overrightarrow{AP} \cdot (1, 1, 1) = \lambda(1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1) + \mu(1, 0, 1) \cdot (1, 1, 1)$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot (1, 0, 1) = \lambda(1, 1, 1) \cdot (1, 0, 1) + \mu(1, 0, 1) \cdot (1, 0, 1)$$

Tem-se que $\overrightarrow{AP} = (4, 1, -1)$ donde

$$\left. \begin{array}{l} 4 = 3\lambda + 2\mu \\ 3 = 2\lambda + 2\mu \end{array} \right\}$$

Resolve-se o sistema e obtém-se $\lambda = 1$ e $\mu = 1/2$. Assim

$$Q = A + \overrightarrow{AQ} = A + (\lambda(1, 1, 1) + \mu(1, 0, 1)) = A + (3/2, 1, 3/2) = (1/2, 2, 3/2)$$

- (b) De modo análogo à primeira alínea, como a equação cartesiana de π é

$$x - z + 1 = 0$$

um vector director da recta normal a π é então $(1, 0, -1)$. Sejam $A = (-1, 1, 0) \in \pi$, $P = (x, y, z)$ e Q a projecção ortogonal de P em π . Tem-se

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{AQ} + \lambda(1, 0, -1)$$

Como \overrightarrow{AQ} e $(1, 0, -1)$ são ortogonais obtemos

$$\overrightarrow{AP} \cdot (1, 0, -1) = \lambda(1, 0, -1) \cdot (1, 0, -1)$$

Verifica-se que $\overrightarrow{AP} = (x + 1, y - 1, z)$ e portanto

$$x + 1 - z = 2\lambda$$

Assim

$$Q = P + \overrightarrow{PQ} = (x, y, z) - \lambda(1, 0, -1) = (x, y, z) - \frac{x - z + 1}{2}(1, 0, -1)$$

logo

$$Q = \left(\frac{x + z - 1}{2}, y, \frac{x + z + 1}{2} \right)$$

70. Num espaço euclidiano tridimensional \mathcal{A} munido de um referencial ortonormado, considere-se r a recta afim definida pela equação vectorial

$$r = (0, 0, -2) + \langle (1, 1, 1) \rangle$$

- (a) Calcule a projecção ortogonal do ponto $P = (3, 2, -1)$ na recta r .
 (b) Calcule a projecção ortogonal do ponto $P = (x, y, z)$ na recta r .

(Resolução)

- (a) Sejam $A = (0, 0, -2)$, $P = (3, 2, -1)$ e Q a projecção ortogonal de P na recta r . Tem-se

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QP} = \lambda(1, 1, 1) + \overrightarrow{QP}$$

Como \overrightarrow{QP} é ortogonal ao vector $(1, 1, 1)$, tem-se

$$\overrightarrow{AP} \cdot (1, 1, 1) = \lambda(1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1)$$

donde $\lambda = 2$, já que $\overrightarrow{AP} = (3, 2, 1)$. Assim

$$Q = A + \overrightarrow{AQ} = A + \lambda(1, 1, 1) = (0, 0, -2) + 2(1, 1, 1) = (2, 2, 0)$$

- (b) Sejam $A = (0, 0, -2)$, $P = (x, y, z)$ e Q a projecção ortogonal de P na recta r . Tem-se

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QP} = \lambda(1, 1, 1) + \overrightarrow{QP}$$

Como \overrightarrow{QP} é ortogonal ao vector $(1, 1, 1)$, tem-se

$$\overrightarrow{AP} \cdot (1, 1, 1) = \lambda(1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1)$$

Note-se que $\overrightarrow{AP} = (x, y, z + 2)$ e portanto

$$x + y + z + 2 = 3\lambda$$

Assim

$$Q = A + \overrightarrow{AQ} = A + \lambda(1, 1, 1) = (0, 0, -2) + \frac{x + y + z + 2}{3}(1, 1, 1)$$

donde

$$Q = \left(\frac{x + y + z + 2}{3}, \frac{x + y + z + 2}{3}, \frac{x + y + z - 4}{3} \right)$$

71. Num espaço euclidiano \mathcal{A} de dimensão 4 munido de um referencial ortonormado,, seja \mathcal{U} o subespaço afim definido pela equação vectorial:

$$\mathcal{U} = (0, 0, -1, 1) + \langle (1, 0, 2, 0), (1, 1, 0, 0) \rangle .$$

Calcule a projecção ortogonal do ponto $P = (x, y, z, t)$ em \mathcal{U} . Calcule a distância entre $O = (0, 0, 0, 0)$ e \mathcal{U} .

(Resolução)

Seja $U = \langle (1, 0, 2, 0), (1, 1, 0, 0) \rangle$. Sejam $A = (0, 0, -1, 1)$, $P = (x, y, z, t)$ e Q a projecção ortogonal de P em \mathcal{U} . Tem-se

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QP}$$

com $\overrightarrow{AQ} \in U$ e $\overrightarrow{QP} \in U^\perp$. Note-se que $\overrightarrow{AQ} = \lambda(1, 0, 2, 0) + \mu(1, 1, 0, 0)$ para algum $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ e, como $\overrightarrow{AP} = (x, y, z + 1, t - 1)$, então

$$\begin{aligned} (x, y, z + 1, t - 1) \cdot (1, 0, 2, 0) &= \lambda(1, 0, 2, 0) \cdot (1, 0, 2, 0) + \mu(1, 1, 0, 0) \cdot (1, 0, 2, 0) \\ (x, y, z + 1, t - 1) \cdot (1, 1, 0, 0) &= \lambda(1, 0, 2, 0) \cdot (1, 1, 0, 0) + \mu(1, 1, 0, 0) \cdot (1, 1, 0, 0) \end{aligned}$$

Resolve-se o sistema:

$$\begin{aligned} x + 2z + 2 &= 5\lambda + \mu \\ x + y &= \lambda + 2\mu \end{aligned}$$

e obtém-se $\lambda = \frac{x - y + 4z + 4}{9}$ e $\mu = \frac{4x + 5y - 2z - 2}{9}$ Assim

$$Q = A + \overrightarrow{AQ} = (0, 0, -1, 1) + \frac{x - y + 4z + 4}{9}(1, 0, 2, 0) + \frac{4x + 5y - 2z - 2}{9}(1, 1, 0, 0)$$

donde

$$Q = \left(\frac{5x - 4y + 2z + 2}{9}, \frac{4x + 5y - 2z - 2}{9}, \frac{2x - 2y + 8z - 1}{9}, 1 \right)$$

A projecção ortogonal do ponto $O = (0, 0, 0, 0)$ é

$$Q_O = (2/9, -2/9, -1/9, 1)$$

e então

$$d(O, U) = d(O, Q_O) = \|\overrightarrow{OQ_O}\| = \|(2/9, -2/9, -1/9, 1)\| = \frac{\sqrt{90}}{9}$$

72. Num plano euclidiano munido de um referencial ortonormado calcule:

(a) A distância do ponto $P = (1, 1)$ à recta afim s definida pela equação cartesiana:

$$x + y - 4 = 0$$

(b) A distância do ponto $P = (1, 1)$ à recta fim t definida pela equação vectorial:

$$t = (1, 0) + \langle (0, -3) \rangle$$

(c) A distância entre as rectas paralelas r e r' definidas pelas equações cartesianas:

$$2x - 3y + 1 = 0 \quad 2x - 3y = 0$$

(Resolução)

(a) Aplica-se a fórmula:

$$d(P, s) = \frac{|1 + 1 - 4|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

(b) Sejam $M = (1, 0)$, $\vec{w} = (0, -3)$ e $P = (1, 1)$. Tem-se

$$d(P, r) = \|\overrightarrow{MP}\| |\sin(\vec{w}, \overrightarrow{MP})|$$

Como $\overrightarrow{MP} = (0, 1)$ vem que $\|\overrightarrow{MP}\| = 1$, $\|\vec{w}\| = 3$ e

$$\cos(\overrightarrow{MP}, \vec{w}) = \frac{-3}{3} = -1$$

Assim

$$d(P, r) = \|\overrightarrow{MP}\| \sqrt{1 - \cos^2(\overrightarrow{MP}, \vec{w})} = 0$$

Resolução alternativa: A equação cartesiana de t é

$$x - 1 = 0$$

Assim,

$$d(P, t) = \frac{1 - 1}{\sqrt{1}} = 0$$

(c) Considere-se o ponto $Q = (3, 2) \in r'$. Tem-se

$$d(r, r') = d(r, Q) = \frac{1}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}/13$$

73. Num espaço euclidiano tridimensional \mathcal{A} munido de um referencial ortonormado, calcule:

- (a) a distância do ponto $P = (1, 1, -1)$ ao plano afim π definido pela equação cartesiana:

$$x + 3y - z + 1 = 0$$

- (b) a distância entre os planos paralelos π_1 e π_2 definidos pelas equações cartesianas:

$$y - 2z + 1 = 0 \quad y - 2z + 3 = 0$$

- (c) a distância do ponto $P = (1, 1, -1)$ à recta afim r definida pela equação vectorial:

$$r = (0, 0, 2) + \langle (0, 1, 1) \rangle$$

- (d) a distância entre as rectas paralelas r_1 e r_2 definidas pelas equações vectoriais:

$$r_1 = (0, 0, 2) + \langle (0, 1, 1) \rangle \quad r_2 = (3, 3, 3) + \langle (0, 1, 1) \rangle$$

- (e) a distância entre as rectas enviesadas s_1 e s_2 definidas pelas equações vectoriais:

$$s_1 = (0, 0, 2) + \langle (0, 1, 1) \rangle \quad s_2 = (3, 3, 3) + \langle (0, -1, 1) \rangle$$

(Resolução)

- (a) Aplica-se a fórmula:

$$d(P, \pi) = \frac{1 + 3 + 1 + 1}{\sqrt{1 + 3^2 + 1}} = \frac{6}{\sqrt{11}} = \frac{6\sqrt{11}}{11}$$

- (b) Seja $Q = (0, -3, 0)$. Tem-se que $Q \in \pi_2$ e como π_1 e π_2 são paralelos

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(\pi_1, Q) = \frac{| -3 + 1 |}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

- (c) Sejam $A = (0, 0, 2)$ e $\vec{w} = (0, 1, 1)$. Como $A \in r$ e \vec{w} é um vector director de r tem-se

$$d(P, r) = \|\vec{AP}\| |\sin(\vec{AP}, \vec{w})|$$

Note-se que $\vec{AP} = (1, 1 - 3)$, logo $\|\vec{AP}\| = \|(1, 1, -3)\| = \sqrt{11}$ e assim

$$\cos(\vec{AP}, \vec{w}) = \frac{\vec{AP} \cdot \vec{w}}{\|\vec{AP}\| \|\vec{w}\|} = \frac{-2}{(\sqrt{11})(\sqrt{2})} = -\frac{\sqrt{22}}{11}$$

Finalmente,

$$d(P, r) = (\sqrt{11}) \sqrt{1 - \cos^2(\vec{AP}, \vec{w})} = \sqrt{11 - 2} = 3$$

- (d) Sejam $A = (0, 0, 2)$, $B = (3, 3, 3)$ e $\vec{w} = (0, 1, 1)$. Como r_1 e r_2 são rectas paralelas e $B \in r_2$ tem-se

$$d(r_1, r_2) = d(r_1, B) = \|\vec{AB}\| |\sin(\vec{AB}, \vec{w})|$$

Note-se que $\vec{AB} = (3, 3, 1)$, logo $\|\vec{AB}\| = \|(3, 3, 1)\| = \sqrt{19}$ e assim

$$\cos(\vec{AB}, \vec{w}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{w}}{\|\vec{AB}\| \|\vec{w}\|} = \frac{4}{(\sqrt{19})(\sqrt{2})} = 2\frac{\sqrt{38}}{19}$$

Obtemos então

$$d(P, r) = (\sqrt{19}) \sqrt{1 - \cos^2(\vec{AB}, \vec{w})} = (\sqrt{19}) \sqrt{1 - 4\frac{38}{19^2}} = \sqrt{19 - 8} = \sqrt{11}$$

- (e) Sejam $R_1 = (0, 0, 2)$, $R_2 = (3, 3, 3)$, $\vec{v} = (0, 1, 1)$ e $\vec{w} = (0, -1, 1)$. Verifica-se que

$$d(s_1, s_2) = \frac{|\det(\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{v}, \vec{w})|}{\|\vec{v} \wedge \vec{w}\|}$$

Como

$$\det(\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{v}, \vec{w}) = \det \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 6$$

e

$$\|\vec{v} \wedge \vec{w}\| = \|(0, 1, 1) \wedge (0, -1, 1)\| = \|(2, 0, 0)\| = 2$$

obtem-se

$$d(s_1, s_2) = \frac{6}{2} = 3$$

9 Exercícios propostos

Para simplificar os enunciados, quando não houver ambiguidade, num espaço afim \mathcal{A} de dimensão n munido de um referencial \mathcal{R} , se $A \equiv (a_1, \dots, a_n)_{\mathcal{R}}$, escrever-se-á $A = (a_1, \dots, a_n)$.

Espaços afins, referenciais, espaços euclidianos.

- Sejam A , B e C três pontos de um plano afim real tais que $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ são linearmente independentes.
 - Se considerarmos o referencial afim $\mathcal{R} = \{A; (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\}$, quais as coordenadas de A , B e C em \mathcal{R} ?
 - Justifique que os vectores $\{1/3\overrightarrow{AB}, -2\overrightarrow{AC}\}$ também são linearmente independentes. Quais as coordenadas de A , B e C no referencial $\mathcal{R}' = \{A; (1/3\overrightarrow{AB}, -2\overrightarrow{AC})\}$?
 - Seja $D = A + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})$. Quais as coordenadas de D nos referenciais \mathcal{R} e \mathcal{R}' ?
- Sejam A , B e C três pontos de um plano afim real tais que $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ são linearmente independentes.
 - Se considerarmos o referencial afim $\mathcal{R} = \{B; (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\}$, quais as coordenadas de A , B e C em \mathcal{R} ?
 - Se considerarmos o referencial afim $\mathcal{R}' = \{A; (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})\}$, quais as coordenadas de A , B e C em \mathcal{R}' ?
(São \overrightarrow{BC} e \overrightarrow{AC} linearmente independentes?)
- Sejam $\mathcal{R} = \{O, (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)\}$ e $\mathcal{R}' = \{O', (\overrightarrow{v}'_1, \overrightarrow{v}'_2)\}$ dois referenciais de um plano afim real \mathcal{A} . Determine as coordenadas, no referencial \mathcal{R} , do ponto $M \equiv (2, -2)_{\mathcal{R}'}$ sabendo que:
 - $O' \equiv (2, -1)_{\mathcal{R}}$;
 - $$\begin{cases} \overrightarrow{v}'_1 = 2\overrightarrow{v}_1 - 3\overrightarrow{v}_2 \\ \overrightarrow{v}'_2 = \phantom{2\overrightarrow{v}_1 - } 3\overrightarrow{v}_2 \end{cases}$$
- Sejam $\mathcal{R} = \{O, (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)\}$ e $\mathcal{R}' = \{O', (\overrightarrow{v}'_1, \overrightarrow{v}'_2)\}$ dois referenciais de um plano afim real \mathcal{A} . Determine as coordenadas, no referencial \mathcal{R}' , do ponto $M \equiv (2, -2)_{\mathcal{R}}$ sabendo que:
 - $O' \equiv (2, -1)_{\mathcal{R}}$;
 - $$\begin{cases} \overrightarrow{v}'_1 = 2\overrightarrow{v}_1 - 3\overrightarrow{v}_2 \\ \overrightarrow{v}'_2 = \phantom{2\overrightarrow{v}_1 - } 3\overrightarrow{v}_2 \end{cases}$$
- Sejam $\mathcal{R} = \{O, (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)\}$ e $\mathcal{R}' = \{O', (\overrightarrow{v}'_1, \overrightarrow{v}'_2)\}$ dois referenciais de um plano afim real \mathcal{A} . Determine as coordenadas, no referencial \mathcal{R}' , do ponto $M \equiv (1, 3)_{\mathcal{R}}$ sabendo que:
 - $O' \equiv (0, -2)_{\mathcal{R}}$;

$$\bullet \begin{cases} \vec{v}'_1 = -\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 \\ \vec{v}'_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \end{cases}$$

6. Sejam $\mathcal{R} = \{O, (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)\}$ e $\mathcal{R}' = \{O', (\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \vec{v}'_3)\}$ dois referenciais de um espaço afim tridimensional \mathcal{A} . Determine as coordenadas, no referencial \mathcal{R}' , do ponto $M \equiv (1, 0, -1)_{\mathcal{R}'}$ sabendo que:

$$\bullet O' \equiv (0, 0, -2)_{\mathcal{R}};$$

$$\bullet \begin{cases} \vec{v}'_1 = -\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 \\ \vec{v}'_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \\ \vec{v}'_3 = \vec{v}_1 - 2\vec{v}_3 \end{cases}$$

7. Sejam $\mathcal{R} = \{O, (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)\}$ e $\mathcal{R}' = \{O', (\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \vec{v}'_3)\}$ dois referenciais de um espaço afim tridimensional \mathcal{A} . Determine as coordenadas, no referencial \mathcal{R}' , do ponto $M \equiv (1, 0, -1)_{\mathcal{R}}$ sabendo que:

$$\bullet O' \equiv (0, 0, -2)_{\mathcal{R}};$$

$$\bullet \begin{cases} \vec{v}'_1 = -\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 \\ \vec{v}'_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \\ \vec{v}'_3 = \vec{v}_1 - 2\vec{v}_3 \end{cases}$$

8. Sejam $\mathcal{R} = \{O, (\vec{v}_1, \vec{v}_2)\}$ e $\mathcal{R}' = \{O', (\vec{v}'_1, \vec{v}'_2)\}$ dois referenciais de um plano afim real \mathcal{A} . Determine as coordenadas, no referencial \mathcal{R} , do ponto $M \equiv (2, -2)_{\mathcal{R}'}$ sabendo que:

$$\bullet O \equiv (1, -1)_{\mathcal{R}'};$$

$$\bullet \begin{cases} \vec{v}'_1 = 2\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2 \\ \vec{v}'_2 = 3\vec{v}_2 \end{cases}$$

9. Sejam $\mathcal{R} = \{O, (\vec{v}_1, \vec{v}_2)\}$ e $\mathcal{R}' = \{O', (\vec{v}'_1, \vec{v}'_2)\}$ dois referenciais de um plano afim real \mathcal{A} . Determine as coordenadas, no referencial \mathcal{R} , do ponto $M \equiv (2, -2)_{\mathcal{R}'}$ sabendo que:

$$\bullet O' \equiv (1, -1)_{\mathcal{R}};$$

$$\bullet \begin{cases} \vec{v}_1 = \vec{v}'_1 - 3\vec{v}'_2 \\ \vec{v}_2 = 2\vec{v}'_2 \end{cases}$$

10. Sejam $\mathcal{R} = \{O, (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)\}$ e $\mathcal{R}' = \{O', (\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \vec{v}'_3)\}$ dois referenciais de um espaço afim tridimensional \mathcal{A} . Determine as coordenadas, no referencial \mathcal{R}' , do ponto $M \equiv (1, 0, -1)_{\mathcal{R}}$ sabendo que:

$$\bullet O' \equiv (0, 0, -2)_{\mathcal{R}};$$

$$\bullet \begin{cases} \vec{v}_1 = 2\vec{v}'_1 + 2\vec{v}'_2 - \vec{v}'_3 \\ \vec{v}_2 = \vec{v}'_1 + 2\vec{v}'_2 \\ \vec{v}_3 = 2\vec{v}'_1 - \vec{v}'_3 \end{cases}$$

11. Sejam $\mathcal{R} = \{O, (\vec{v}_1, \vec{v}_2)\}$ e $\mathcal{R}' = \{O', (\vec{v}'_1, \vec{v}'_2)\}$ dois referenciais de um plano afim real \mathcal{A} . Determine as coordenadas, no referencial \mathcal{R} , do ponto $M \equiv (x'_1, x'_2)_{\mathcal{R}'}$ sabendo que existem três pontos A , B e C verificando:

$$\begin{array}{ll} A \equiv (1, 1)_{\mathcal{R}} & A \equiv (0, -1)_{\mathcal{R}'} \\ B \equiv (0, -2)_{\mathcal{R}} & B \equiv (1, -1)_{\mathcal{R}'} \\ C \equiv (1, 0)_{\mathcal{R}} & C \equiv (0, 2)_{\mathcal{R}'} \end{array}$$

12. Determine se é possível resolver o exercício anterior no caso em que

$$\begin{array}{ll} A \equiv (0, 1)_{\mathcal{R}} & A \equiv (1, -1)_{\mathcal{R}'} \\ B \equiv (0, -2)_{\mathcal{R}} & B \equiv (1, -1)_{\mathcal{R}'} \\ C \equiv (0, 3)_{\mathcal{R}} & C \equiv (2, -1)_{\mathcal{R}'} \end{array}$$

13. *O cruel general Bum-Bum*⁹

Era uma vez uma guerra terrível entre os Bonzinhos e os Mauzinhos. O cruel general Bum-Bum dirigia os exércitos dos Mauzinhos, escondido num local desconhecido dos Bonzinhos. Um dia histórico, os serviços de espionagem dos Bonzinhos interceptaram a seguinte mensagem, enviada pelo general Bum-Bum ..

“como a Infantaria está colocada no ponto (2,0), a Cavalaria no ponto (0,1), vamos situar a Artilharia no ponto (1,1) ...”

Um pouco mais tarde, o piloto mais audaz dos Bonzinhos chega ao quartel geral e diz ..

“Venho de sobrevoar o terreno inimigo. Descobri que a Infantaria inimiga está no ponto (2, 3), a Cavalaria no ponto (4, 2) e Artilharia acaba de chegar ao ponto (3, 2)!”

Estes dados bastavam para um estudante de CC, do exército dos Bonzinhos, evidentemente, calcular a posição do mais mauzinho dos Mauzinhos: o general Bum-Bum.

14. Escreva a expressão matricial da mudança de coordenadas num espaço afim de dimensão n .
15. Seja \mathcal{A} um plano euclidiano. Seja $\mathcal{R} = \{O, (\vec{e}_1, \vec{e}_2)\}$ um referencial ortonormado de \mathcal{A} . Considere-se o referencial $\mathcal{R}' = \{O', (\vec{v}_1, \vec{v}_2)\}$ definido por:

$$\bullet \begin{cases} O \equiv (1, -1)_{\mathcal{R}'}; \\ \vec{v}_1 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{v}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \end{cases}$$

⁹Tradução livre de um exercício do livro *Álgebra Lineal y Geometría Analítica*, de M. Castellet e I. Llerena, Editorial Reverté, Barcelona (1992)

A base (\vec{v}_1, \vec{v}_2) é uma base ortogonal? O referencial \mathcal{R}' é um referencial ortonormado? Os referenciais \mathcal{R} e \mathcal{R}' definem a mesma orientação?

16. Seja \mathcal{A} um plano euclidiano. Seja $\mathcal{R} = \{O, (\vec{e}_1, \vec{e}_2)\}$ um referencial ortonormado de \mathcal{A} . Considere-se o referencial $\mathcal{R}' = \{O', (\vec{v}_1, \vec{v}_2)\}$ definido por:

$$\begin{aligned} &\bullet O \equiv (1, -1)_{\mathcal{R}'}; \\ &\bullet \begin{cases} \vec{v}_1 = \sqrt{2}/2 \vec{e}_1 + \sqrt{2}/2 \vec{e}_2 \\ \vec{v}_2 = -\sqrt{2}/2 \vec{e}_1 + \sqrt{2}/2 \vec{e}_2 \end{cases} \end{aligned}$$

A base (\vec{v}_1, \vec{v}_2) é uma base ortogonal? O referencial \mathcal{R}' é um referencial ortonormado? Os referenciais \mathcal{R} e \mathcal{R}' definem a mesma orientação? Determine as coordenadas, no referencial \mathcal{R} , do ponto $M \equiv (2, -2)_{\mathcal{R}'}$ e, no referencial \mathcal{R}' , do ponto $N \equiv (2, -2)_{\mathcal{R}}$.

17. Seja \mathcal{A} um plano euclidiano munido de um referencial $\mathcal{R} = \{O, (\vec{v}_1, \vec{v}_2)\}$ tais que os vectores da base associada são unitários mas $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 1/4$.

Determine a distância entre os pontos $A \equiv (0, 1)_{\mathcal{R}}$ e $B \equiv (-2, 0)_{\mathcal{R}}$. Qual seria o valor de $d(A, B)$ se o referencial \mathcal{R} fosse ortonormado?

18. Seja \mathcal{A} um plano euclidiano munido de um referencial ortonormado. Considerem-se os pontos $A = (-1, 1)$ e $B = (0, 1)$. Calcule a distância $d(A, B)$. Determine se o ponto $M = (-1, -3)$ pertence ao segmento \overline{AB} .

19. Sejam A, B e C pontos de um espaço afim euclidiano. Sabe-se que $d(A, C) = 3$, $d(A, B) = 1$ e $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 1/3$. Calcule $d(B, C)$.

20. Seja \mathcal{A} um plano euclidiano munido de um referencial ortonormado com origem O . Determine o $\cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ se

- $A = (1, 1)$, $B = (1, -2)$;
- $A = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $B = (1, -1)$.

Indique se o triângulo $\triangle AOB$ é rectângulo.

21. Seja \mathcal{A} um espaço euclidiano munido de um referencial ortonormado com origem O . Determine o $\cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ se

- $A = (0, -1, 1)$, $B = (1, 0, -2)$;
- $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, 2, 1)$;
- $A = (1, -1, 0, 0)$, $B = (-3, 1, 1, -2)$.

22. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial ortonormado com origem O , determine a área do paralelogramo e a área do triângulo com vértices O , $A = (2, 0, -1)$ e $B = (1, 1, 0)$.

23. Num espaço afim tridimensional orientado munido de um referencial ortonormado com origem O , determine a área do paralelogramo e a área do triângulo com vértices $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 0, 1)$ e $C = (1, 3, 2)$.

24. Seja \mathcal{A} um espaço afim tridimensional munido de um referencial $\{O; \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, com \vec{v}_i vectores unitários para $i = 1, 2, 3$ tais que

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0, \quad \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 1/4, \quad \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 1/2$$

Determine a área do paralelogramo e a área do triângulo com vértices O , $A = (2, 0, -1)$ e $B = (1, 1, 0)$.

25. No plano afim orientado munido de um referencial ortonormado directo com origem O , determine o seno e o cosseno do ângulo orientado formado pelos vectores \vec{OA} e \vec{OB} , nesta ordem. Represente geometricamente.

(a) $A = (0, 2)$, $B = (1, -1)$;

(b) $A = (1, 1)$, $B = (1, -1)$.

26. Num espaço afim tridimensional orientado munido de um referencial ortonormado directo com origem O , calcule o volume do paralelepípedo com vértices $O, A = (1, 0, -1)$, $B = (1, 0, -3)$ e $C = (0, 2, 0)$.

27. Seja \mathcal{A} um espaço afim tridimensional munido de um referencial $\{O; \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, com \vec{v}_i vectores unitários para $i = 1, 2, 3$ tais que

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0, \quad \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 1/4, \quad \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 1/2$$

Determine o volume do paralelepípedo com vértices $O, A = (1, 0, -1)$, $B = (1, 0, -3)$ e $C = (0, 2, 0)$.

28. Num espaço afim tridimensional orientado munido de um referencial ortonormado directo com origem O , determine um vector perpendicular aos vectores \vec{OA} e \vec{OB} .

(a) $A = (1, 0, 2)$, $B = (1, 2, -1)$;

(b) $A = (3, 1, 1)$, $B = (1, 0, -1)$.

Calcule a área do paralelogramo formado por esses vectores. Calcule ainda o volume do paralelepípedo formado por esses vectores e o vector \vec{OC} , com $C = (0, 0, -4)$.

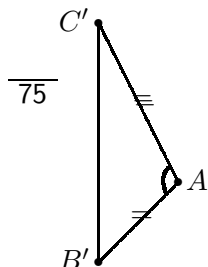
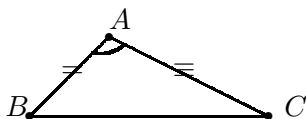
29. Seja \mathcal{A} um plano afim euclidiano munido de um referencial ortonormado. Considerem-se os pontos $A = (3, 1)$ e $B = (0, 0)$. Calcule a distância $d(A, B)$. Determine se o ponto $M = (6, 2)$ pertence ao segmento \overline{AB} .

30. Sejam A, B e C pontos de um espaço afim euclidiano. Sabe-se que $d(A, C) = 3$, $d(A, B) = 4$ e $\cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = 1/4$. Calcule $d(B, C)$.

31. *Cr terio LAL de congr  ncia de tri ngulos*

Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ dois tri ngulos de um plano afim euclidiano. Se $d(A, B) = d(A', B')$, $d(B, C) = d(B', C')$ e $\angle ABC = \angle A'B'C'$ ent o

$$d(B, C) = d(B', C'), \quad \angle BCA = \angle B'C'A', \quad \text{e} \quad \angle CAB = \angle C'A'B'.$$



32. *Cr terio ALA de congr ncia de tri ngulos*

Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ dois triângulos de um plano afim euclidiano. Prove que, se $d(A, B) = d(A', B')$, $\angle ABC = \angle A'B'C'$ e $\angle CAB = \angle C'A'B'$ então

$$d(B, C) = d(B', C'), \quad d(C, A) = d(C', A'), \quad \text{e} \quad \angle BCA = \angle B'C'A'.$$

Rectas, planos, paralelismo.

33. Seja \mathcal{A} um espaço afim tridimensional munido de um referencial. Considere os seguintes subespaços afins de \mathcal{A} :

$$\mathcal{U}_1 = (-2, -1, 0) + \langle (1, 0, -1), (1, -1, 0) \rangle;$$

$$\mathcal{U}_2 = \{(x, y, z) \in \mathcal{A} \mid x + y + z + 3 = 0\};$$

$$\mathcal{U}_3 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid y = 3 - 3x, z = x\};$$

$$\mathcal{U}_4 = (1, 0, 0) + \langle (2, -2, 0) \rangle;$$

$$\mathcal{U}_5 = (3, -2, 0) + \langle (1, -1, 0), (-2, 2, 0) \rangle$$

Indique os subespaços vectoriais associados. Calcule as equações vectoriais e indique a dimensão do subespaço. Calcule as equações cartesianas dos planos. Determine $\mathcal{U}_4 \cap \mathcal{U}_1$.

34. Num plano afim real \mathcal{A} munido de um referencial \mathcal{R} calcule as equações paramétricas e a equação cartesiana da recta afim que passa pelo ponto $A = (2, 2)$ e tem como vector director $\vec{v} = (3, -1)$. Determine dois pontos distintos que incidam nesta recta. Represente graficamente.35. Num plano afim real \mathcal{A} munido de um referencial \mathcal{R} calcule as equações paramétricas e a equação cartesiana da recta afim que passa pelos pontos $A = (10, -2)$ e $B = (0, 3)$. Represente graficamente.36. Num plano afim real \mathcal{A} munido de um referencial \mathcal{R} calcule a equação vectorial e as equações paramétricas da recta afim definida pela equação cartesiana

$$x - 3y - 1 = 0$$

Determine dois pontos distintos que incidam nesta recta.

37. Num espaço afim tridimensional \mathcal{A} munido de um referencial \mathcal{R} calcule as equações paramétricas e o sistema de equações cartesianas que definem a recta afim que passa pelo ponto $A = (1, 2, 3)$ e tem como vector director $\vec{v} = (3, -1, 4)$.

38. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial calcule as equações paramétricas dos planos pelas equações cartesianas indicadas de seguida:

(a) $2x - 3z - 1 = 0$;

(b) $3y - 2z = 0$;

(c) $x + y + z - 4 = 0$.

39. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial calcule as equações cartesianas dos planos pelas equações vectoriais indicadas de seguida:

(a) $(0, 1, 1) + \langle (1, 0, -1), (0, 2, 0) \rangle$;

(b) $(0, 0, 0) + \langle (2, 1, 0), (1, 0, 0) \rangle$.

40. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial considere os planos π_1 e π_2 definidos pelas equações vectoriais:

$$\pi_1 = (-1, 0, 1) + \langle (1, 0, -1), (0, 2, 0) \rangle$$

$$\pi_2 = (0, 0, 0) + \langle (-2, 1, 2), (3, 1, -3) \rangle$$

São π_1 e π_2 planos coincidentes? Justifique.

41. Num espaço afim tridimensional \mathcal{A} munido de um referencial \mathcal{R} calcule as equações paramétricas e o sistema de equações cartesianas que definem a recta afim que passa pelos pontos $A = (0, 2, 2)$ e $B = (0, 0, 0)$.
42. Num espaço afim tridimensional \mathcal{A} munido de um referencial \mathcal{R} calcule a equação vectorial e as equações paramétricas da recta afim definida pelas equações cartesianas

$$\begin{cases} 1/3y - 2z - 1 = 0 \\ 1/2x + z = 0 \end{cases}$$

Determine dois pontos distintos que incidam nesta recta.

43. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial considere o ponto $A = (0, -1, 0)$. Determine as equações paramétricas e a equação cartesiana do plano que passa pelo ponto A e está associado ao plano vectorial $\langle (1, 1, 1), (-2, 1, 2) \rangle$.
44. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial considere os pontos:

$$A = (2, 0, 2) \quad B = (2, -2, 0) \quad C = (-2, 0, 0)$$

Justifique que $\{A, B, C\}$ são vértices de um triângulo. Indique uma equação vectorial e uma equação cartesiana do plano afim π definido por A , B e C .

45. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial, considere o subespaço afim definido pelo sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2y - z + 1 = 0 \\ 3y - 9 = 0 \end{cases}$$

Calcule as equações paramétricas do subespaço.

46. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial, considere o subespaço afim definido pelo sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2y - z + 1 = 0 \\ 3y - 9 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases}$$

Calcule as equações paramétricas do subespaço.

47. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial, calcule a intersecção do plano afim definido pela equação cartesiana

$$y - 5 = 0$$

e a recta incidente no ponto $A = (1, 0, 1)$ e dirigida pelo vector $\vec{v} = (0, 1, 1)$.

48. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial, calcule a intersecção do plano afim definido pela equação cartesiana

$$x + y + z - 1 = 0$$

e a recta incidente no ponto $A = (0, 0, 1)$ e dirigida pelo vector $\vec{v} = (0, 0, 1)$.

49. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial, calcule a intersecção do plano afim definido pela equação vectorial

$$\pi = (0, -2, 1) + \langle (3, 0, 0), (0, 3, 3) \rangle$$

e da recta r definida pelas equações cartesianas

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + 3z = 0 \end{cases}$$

50. Seja \mathcal{A} um espaço afim tridimensional munido de um referencial. Sejam r_1 e r_2 as rectas definidas por:

$$r_1 = (1, 2, 3) + \langle (2, 1, 0) \rangle$$

$$r_2 = (0, 2, -1) + \langle (1, -1, 0) \rangle$$

Calcule $r_1 + r_2$. São r_1 e r_2 rectas complanares ou enviesadas? isto é, existe ou não um plano afim de \mathcal{A} que contem tais rectas? Se existir, calcule a equação cartesiana.

51. Seja \mathcal{A} um espaço afim tridimensional munido de um referencial. Sejam r_1 e r_2 as rectas definidas por:

$$r_1 = (1, 2, 3) + \langle (2, 1, 0) \rangle$$

$$r_2 = (0, 2, 3) + \langle (1, -1, 0) \rangle$$

Calcule $r_1 + r_2$. São r_1 e r_2 rectas complanares ou enviesadas? isto é, existe ou não um plano afim de \mathcal{A} que contem tais rectas? Se existir, calcule a equação cartesiana.

52. Seja \mathcal{A} um espaço afim tridimensional munido de um referencial. Calcule a equação cartesiana do plano afim de \mathcal{A} que contém o ponto $B = (1, 1, 1)$ e a recta $r = \langle (1, 0, 1) \rangle$. Qual a equação cartesiana do plano vectorial associado?

53. Seja \mathcal{A} um espaço afim de dimensão 7 munido de um referencial. Calcule as equações paramétricas da recta de \mathcal{A} que incide nos pontos

$$A = (1, -1, 0, 0, 0, 2, -2) \quad \text{e} \quad B = (0, 3, 0, 4, 3, 4, 0).$$

54. Considere, num espaço afim tridimensional \mathcal{A} munido de um referencial, o conjunto \mathcal{U} definido por

$$\mathcal{U} = \{(x, y, z, t) \in \mathcal{A} : x + y - 2t = 1\}$$

É um subespaço afim? Qual a dimensão? Determine uma equação vectorial e umas equações paramétricas.

55. Num espaço afim de \mathcal{A} associado a um espaço vectorial E de dimensão 4, munido de um referencial, determine a equação cartesiana do hiperplano afim associado ao hiperplano vectorial

$$H = \{(x, y, z, t) \in E : 2z - 3t = 0\}$$

que incide no ponto $A = (1, 4, 1, 0)$. Determine também uma equação vectorial de tal hiperplano.

56. Num espaço afim \mathcal{A} associado a um espaço vectorial E de dimensão n , munido de um referencial, determine a equação cartesiana do hiperplano associado ao hiperplano vectorial

$$H = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E : x_1 + 2x_2 = 0\}$$

que incide no ponto $A = (1, 1, \dots, 1)$.

57. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial:

- Calcule uma equação vectorial e uma equação cartesiana do plano afim paralelo a $\pi = (1, 0, 1) + \langle (2, 0, 1), (0, 1, -1) \rangle$ incidente no ponto $A = (-1, 0, 5)$.
- Calcule a equação cartesiana do plano afim paralelo ao plano de equação $3x - y + 4z = 0$ que incide no ponto $B = (1, 0, 1)$. Quais as equações paramétricas deste plano?
- Calcule uma equação vectorial e as equações paramétricas da recta afim paralela à recta $\langle A, B \rangle$ que incide no ponto $C = (1, -1, -1)$.

58. Num espaço afim tridimensional \mathcal{A} munido de um referencial, considere o conjunto \mathcal{U} definido como

$$\mathcal{U} = \{(x, y, z) \in \mathcal{A} : x + y = 0 \wedge y - 2z + 1 = 0\}$$

Calcule uma equação vectorial de \mathcal{U} e indique a dimensão. Determine o subespaço afim paralelo a \mathcal{U} e incidente em $(0, 0, 0)$.

59. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial, considere as rectas afins $r_1 = (0, 0, 2) + \langle (1, 2, 0) \rangle$ e $r_2 = \langle (1, -2, 0) \rangle$. Calcule uma equação vectorial e uma equação cartesiana do plano paralelo às rectas r_1 e r_2 que incide no ponto $M = (0, 0, -3)$.

60. Seja \mathcal{A} um espaço afim de dimensão 5 associado a um espaço vectorial E e munido de um referencial. Considere o subespaço afim \mathcal{U} de \mathcal{A} definido por

$$\mathcal{U} = \{(x, y, z, t, u) \in \mathcal{A} : x - 2u = 0 \wedge 2y + z - 2t + 3 = 0\}$$

Determine o subespaço vectorial associado a \mathcal{U} . Determine o subespaço afim \mathcal{U}' paralelo a \mathcal{U} , da mesma dimensão, que incide no ponto $(-2, 0, 0, 1, 0)$.

61. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial, considere as rectas afins r_1 e r_2 definidas por:

$$r_1 \equiv (0, 0, 2) + \langle (1, 1, 0) \rangle \quad r_2 \equiv (0, 0, 3) + \langle (1, -1, 0) \rangle$$

- (a) qual a dimensão de $r_1 + r_2$? são rectas enviesadas?
 - (b) indique a equação vectorial e a equação cartesiana do plano afim paralelo às rectas r_1 e r_2 e incidente no ponto $(0, 0, 5)$;
 - (c) indique a equação da recta s paralela à recta r_1 incidente no ponto $(1, 1, -1)$;
 - (d) são as rectas r_1 e s coplanares? Se forem, indique a equação cartesiana do plano que definem.
62. Num espaço afim tridimensional \mathcal{A} munido de um referencial, consideramos as rectas afins \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 definidas por:

$$\mathcal{L}_1 \equiv (1, 2, 4) + \langle (1, 1, 0) \rangle$$

$$\mathcal{L}_2 = \{(x, y, z) \in \mathcal{A} : z = 0 \wedge x + y = 2\}$$

Calcule uma equação vectorial de \mathcal{L}_2 . Justifique que \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 são rectas enviesadas. Calcule a equação vectorial e a equação cartesiana do plano afim incidente no ponto $P = (0, 0, -1)$ e paralelo a \mathcal{L}_1 e a \mathcal{L}_2 .

63. Num espaço afim tridimensional \mathcal{A} munido de um referencial, considere a recta afim definida por:

$$\mathcal{L} = \{(x, y, z) \in \mathcal{A} : x + y = 1 \text{ e } x - y = 1\}$$

Calcule a equação vectorial desta recta. Seja π o plano afim que contém \mathcal{L} e incide no ponto $(2, 0, 0)$. Indique a equação vectorial e a equação cartesiana de π . Dê um exemplo de recta \mathcal{L}' tal que \mathcal{L} e \mathcal{L}' são enviesadas.

64. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial,
- (a) Indique a equação vectorial e a equação cartesiana do plano π paralelo à recta $r \equiv (0, 0, 1) + \langle (-1, 1, 0) \rangle$ e incidente com a recta s definida pelos pontos $A = (0, 0, 2)$ e $B = (0, 0, 3)$.
 - (b) Considere um plano de equação cartesiana $2x + y - z + 1 = 0$ e indique a equação cartesiana do plano paralelo ao anterior e incidente em $(0, 0, 0)$.
 - (c) Justifique sucintamente se os planos afins $\pi = (0, 0, 1) + \langle (1, 1, 1), (1, -1, 0) \rangle$ e $\pi' = (2, 2, 3) + \langle (0, 2, 1), (1, 1, 1) \rangle$ são ou não iguais;
 - (d) Indique duas rectas afins enviesadas r' e r'' tais que r' esté contida no plano afim $z - 4 = 0$.
65. Seja \mathcal{A} um espaço afim de dimensão 4 munido de um referencial. Sejam A , B e C os pontos de \mathcal{A} :

$$A = (1, 1, 0, -2) \quad B = (2, 1, 0, -3) \quad C = (0, 1, 0, +1)$$

Indique a equação vectorial do plano afim \mathcal{U} de \mathcal{A} que contem A , B e C . Considere também o subespaço afim \mathcal{V} :

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z, t) \in \mathcal{A} : x + y + t = 0\}$$

Indique uma equação vectorial de \mathcal{V} . Qual a dimensão de \mathcal{V} ? São \mathcal{V} e \mathcal{U} paralelos? são iguais? Justifique sucintamente.

66. Sejam \mathcal{H} , \mathcal{H}' e \mathcal{H}'' os hiperplanos de um espaço afim \mathcal{A} de dimensão 4 (munido de um referencial) definidos pelas equações:

$$\mathcal{H} \equiv x + 2y + z - t = 0$$

$$\mathcal{H}' \equiv 2x + 4y + 2z - 2t + 1 = 0$$

$$\mathcal{H}'' \equiv -3x - 6y - 3z + 3t - 1 = 0$$

São hiperplanos paralelos? São disjuntos? Justifique.

Ortogonalidade, problemas métricos.

67. No espaço vectorial \mathbf{R}^n , munido do produto escalar usual, determine o produto escalar dos vectores \vec{v} e \vec{w} .

(a) $\vec{v} = (-1, 0)$, $\vec{w} = (2, -5)$;

(b) $\vec{v} = (3, -1, 1/2)$, $\vec{w} = (4, 0, -8)$;

(c) $\vec{v} = (1, -2, 3)$, $\vec{w} = (6, -6, 8)$;

(d) $\vec{v} = (1, -2, 2, -1)$, $\vec{w} = (-3, 0, 1, -6)$.

68. No espaço vectorial \mathbf{R}^n , munido do produto escalar usual, determine o complemento ortogonal da recta vectorial gerada pelo vector \vec{v} .

(a) $\vec{v} = (0, 4)$;

(b) $\vec{v} = (3, -2)$;

(c) $\vec{v} = (4, -1, 2/3)$;

(d) $\vec{v} = (1/8, -1/4, 2)$;

(e) $\vec{v} = (-5, -3, 1, -3)$.

69. No espaço vectorial \mathbf{R}^n , munido do produto escalar usual, determine o complemento ortogonal do plano vectorial gerado pelos vectores \vec{v} e \vec{w} .

(a) $\vec{v} = (2, -1, 0)$, $\vec{w} = (1, 0, -2)$;

(b) $\vec{v} = (1, -2, 3)$, $\vec{w} = (3, 3, 3)$;

(c) $\vec{v} = (1/3, -1/3, 0, 1/3)$, $\vec{w} = (0, 1, 1, -2)$.

70. No espaço vectorial \mathbf{R}^2 , munido do produto escalar usual, determine a projecção ortogonal do vector \vec{v} na recta vectorial $\langle \vec{w} \rangle$, se $\vec{v} = (2, -3)$ e $\vec{w} = (5, 1)$.

71. No espaço vectorial \mathbf{R}^2 , munido do produto escalar usual, determine a projecção ortogonal do vector \vec{v} na recta vectorial $\langle \vec{w} \rangle$, se $\vec{v} = (x, y)$ e $\vec{w} = (5, 1)$.

72. No espaço vectorial \mathbf{R}^3 , munido do produto escalar usual, determine a projecção ortogonal do vector \vec{v} na recta vectorial $\langle \vec{w} \rangle$, se $\vec{v} = (1, 0, 3)$ e $\vec{w} = (2, 2, 2)$.

73. No espaço vectorial \mathbf{R}^2 , munido do produto escalar usual, determine a projecção ortogonal do vector \vec{v} na recta vectorial $\langle \vec{w} \rangle$, se $\vec{v} = (x, y, z)$ e $\vec{w} = (2, 2, 2)$.

74. No espaço vectorial \mathbf{R}^3 , munido do produto escalar usual, determine a projecção ortogonal do vector \vec{v} no subespaço vectorial W , se $\vec{v} = (1, -1, 0)$ e W está definido pela equação vectorial

$$W = \langle (4, 1, 2) \rangle$$

75. No espaço vectorial \mathbf{R}^3 , munido do produto escalar usual, determine a projecção ortogonal do vector \vec{v} no subespaço vectorial W , se $\vec{v} = (x, y, z)$ e W está definido pela equação vectorial

$$W = \langle (4, 1, 2) \rangle$$

76. No espaço vectorial \mathbf{R}^3 , munido do produto escalar usual, determine a projecção ortogonal do vector \vec{v} no subespaço vectorial W , se $\vec{v} = (0, 0, 4)$ e W está definido pela equação vectorial

$$W = \langle (0, 1, 2), (1, 1, -1) \rangle$$

77. No espaço vectorial \mathbf{R}^3 , munido do produto escalar usual, determine a projecção ortogonal do vector \vec{v} no subespaço vectorial W , se $\vec{v} = (x, y, z)$ e W está definido pela equação vectorial

$$W = \langle (0, 1, 2), (1, 1, -1) \rangle$$

78. No espaço vectorial \mathbf{R}^4 , munido do produto escalar usual, determine a projecção ortogonal do vector $\vec{v} = (x, y, z, t)$ na recta vectorial gerada pelo vector $\vec{w} = \langle (1, 0, -1, 0) \rangle$.

79. No espaço vectorial \mathbf{R}^3 , munido do produto escalar usual, determine a projecção ortogonal do vector \vec{v} no subespaço vectorial W , se $\vec{v} = (1, -1, 0)$ e W está definido pela equação cartesiana

$$x - z = 0$$

80. No espaço vectorial \mathbf{R}^3 , munido do produto escalar usual, determine a projecção ortogonal do vector \vec{v} no subespaço vectorial W , se $\vec{v} = (a, b, c)$ e W está definido pela equação cartesiana

$$x - z = 0$$

81. No espaço vectorial \mathbf{R}^2 , munido do produto escalar usual, determine uma base ortonormada do subespaço vectorial W definido pela equação cartesiana

$$2x + y = 0$$

82. Seja \mathcal{A} um plano afim euclidiano munido de um referencial ortonormado.

- (a) Determine a recta s_1 perpendicular à recta r_1 definida pela equação vectorial:

$$r_1 = (2, 0) + \langle (2, -2) \rangle$$

e que incide no ponto $P_1 = (1, 4)$.

- (b) Determine a recta s_2 perpendicular à recta r_2 definida pela equação cartesiana:

$$-2x + 3y - 1 = 0$$

e que incide no ponto $P_2 = (-1, 5)$.

83. Seja \mathcal{A} um espaço afim euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado.

- (a) Calcule a recta r perpendicular ao plano π definido pela equação cartesiana:

$$2x + y - z + 4 = 0$$

e que incide no ponto $P = (-1, 1, 1)$.

- (b) Calcule a recta r' perpendicular ao plano π' definido pela equação vectorial:

$$\pi' = (1, 0, 1) + \langle (2, 0, 0), (-1, -1, 3) \rangle$$

e que incide no ponto $P' = (1, -1, 0)$.

84. Seja \mathcal{A} um espaço afim euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado.

- (a) Calcule o plano π perpendicular à recta s definida pela equação vectorial:

$$s = (1, 1, 0) + \langle (1, 1, -1) \rangle$$

e que incide no ponto $P = (2, 0, -1)$.

- (b) Calcule o plano π' perpendicular à recta s' definida pelas equações cartesianas:

$$\begin{cases} x - y + 2z - 2 = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

e que incide no ponto $P = (5, 0, -1)$.

85. Num espaço euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado considere as rectas afins:

$$r = (1, 0, -2) + \langle (2, -2, 1) \rangle$$

$$s = \langle (0, 2, 1) \rangle$$

Calcule a recta t perpendicular a r e a s que incide no ponto $M = (0, 3, 0)$.

86. Seja \mathcal{A} um espaço afim de dimensão quatro munido de um referencial ortonormado.

- (a) Calcule a recta r perpendicular ao hiperplano \mathcal{H} definido pela equação cartesiana:

$$x + y + 3z - 1 = 0$$

e que incide no ponto $P = (0, 1, -2, 0)$.

- (b) Calcule o hiperplano \mathcal{H}' perpendicular à recta s definida pela equação vectorial:

$$s = (1, 5, -1, 1) + \langle (1, -2, -2, 0) \rangle$$

e que incide no ponto $P' = (0, 1, -2, 0)$.

87. Seja \mathcal{A} um espaço afim euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado. Calcule a perpendicular comum às rectas enviesadas:

$$r = (0, -1, -2) + \langle (1, 0, 1) \rangle \quad s = (2, 0, 0) + \langle (2, 0, -1) \rangle$$

88. Seja \mathcal{A} um espaço afim euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado. Calcule os pés da perpendicular comum às rectas enviesadas:

$$r = \langle (2, 1, -1) \rangle \quad s = (0, 1, 0) + \langle (1, 0, 1) \rangle$$

89. Num plano euclidiano munido de um referencial ortonormado, seja r a recta afim definida pela equação vectorial

$$r = (4, -1) + \langle (2, -1) \rangle$$

- (a) Calcule a projecção ortogonal do ponto $P = (-3, 0)$ na recta r .

- (b) Calcule a projecção ortogonal do ponto $P = (x, y)$ na recta r .

90. Num plano euclidiano munido de um referencial ortonormado, seja r a recta afim definida pela equação cartesiana

$$y - 5 = 0$$

- (a) Calcule a projecção ortogonal do ponto $P = (2, 2)$ na recta r .

- (b) Calcule a projecção ortogonal do ponto $P = (x, y)$ na recta r .

91. Num espaço euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado, seja π o plano afim definido pela equação vectorial

$$\pi = (0, 0, 5) + \langle (-1, 2, 0), (1, 0, -1) \rangle$$

- (a) Calcule a projecção ortogonal do ponto $P = (0, 2 - 1)$ no plano afim π .

- (b) Calcule a projecção ortogonal do ponto $P = (x, y, z)$ no plano afim π .

92. Num espaço euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado, seja π o plano afim definido pela equação cartesiana

$$x + y + z + 1 = 0$$

- (a) Calcule a projecção ortogonal do ponto $P = (3, 2 - 1)$ no plano afim π .

(b) Calcule a projecção ortogonal do ponto $P = (x, y, z)$ no plano afim π .

93. Num espaço euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado, seja r a recta afim definida pela equação vectorial

$$r = (1, 0, -2) + \langle (2, 0, 0) \rangle$$

(a) Calcule a projecção ortogonal do ponto $P = (-1, 2, -1)$ na recta r .

(b) Calcule a projecção ortogonal do ponto $P = (x, y, z)$ na recta r .

94. Num espaço euclidiano de dimensão 4 munido de um referencial ortonormado, seja \mathcal{U} o subespaço afim definido pela equação vectorial:

$$\mathcal{U} = (2, 0, 0, 1) + \langle (0, 1, -1, 0), (-1, -1, 0, 0) \rangle.$$

Calcule a projecção ortogonal do ponto $P = (x, y, z, t)$ em \mathcal{U} .

95. Num plano euclidiano munido de um referencial ortonormado, calcule:

(a) A distância do ponto $P = (1, 1)$ à recta afim s definida pela equação cartesiana:

$$3x + y + 5 = 0$$

(b) A distância do ponto $P = (1, 1)$ à recta fim t definida pela equação vectorial:

$$t = (1, -2) + \langle (1, -3) \rangle$$

(c) A distância entre as rectas paralelas r e r' definidas pelas equações cartesianas:

$$x - 4y + 1 = 0 \quad x - 4y = 0$$

96. Num espaço euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado, calcule:

(a) a distância do ponto $P = (2, 0, -1)$ ao plano afim π definido pela equação cartesiana:

$$5x + y - 4z + 2 = 0$$

(b) a distância entre os planos paralelos π_1 e π_2 definidos pelas equações cartesianas:

$$x + 3z - 2 = 0 \quad 2x + 6z + 1 = 0$$

(c) a distância do ponto $P = (2, 0, -1)$ à recta afim r definida pela equação vectorial:

$$r = (1, 1, 0) + \langle (0, -2, 1) \rangle$$

(d) a distância entre as rectas paralelas r_1 e r_2 definidas pelas equações vectoriais:

$$r_1 = (-1, 0, 3) + \langle (1, -1, 1) \rangle \quad r_2 = (0, 0, 4) + \langle (1, -1, 1) \rangle$$

(e) a distância entre as rectas enviesadas s_1 e s_2 definidas pelas equações vectoriais:

$$s_1 = (-1, 0, 2) + \langle (1, -1, 1) \rangle \quad s_2 = (0, 0, 4) + \langle (2, 0, 0) \rangle$$

97. Num espaço euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado, calcule

(a) o ângulo formado pelas rectas r e s definidas pelas equações vectoriais:

$$r = (-2, 1, 0) + \langle (4, 1, -4) \rangle \quad s = (2, 0, 1) + \langle (-3, 0, -2) \rangle$$

(b) o ângulo formado pela recta t e o plano π , se

$$t = (6, 0, -3) + \langle (2, 0, -2) \rangle$$

e π está definido pela equação cartesiana:

$$z - 5 = 0$$

(c) o ângulo formado pelos planos π_1 e π_2 definidos, respectivamente, pelas equações cartesianas:

$$2x - z - 1 = 0 \quad 3x + y + z - 1 = 0$$

98. Seja \mathcal{A} um espaço afim euclidiano de dimensão 4 munido de um referencial ortonormado. Seja \mathcal{U} o subespaço afim definido pelo sistema de equações cartesianas:

$$x + y - z + 2 = 0 \quad x + z - 2t - 1 = 0$$

(a) Determine a dimensão de \mathcal{U} , o subespaço perpendicular a \mathcal{U} que incide em $P = (0, 2, 0, 0)$.

(b) Determine a distância entre P e \mathcal{U} .

99. Considere duas rectas r_1 e r_2 de um plano euclidiano definidas, num referencial ortonormado, pelas equações

$$r_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$r_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Seja θ o ângulo formado pelas rectas. Verifique que:

$$\cos \theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Deduz que duas rectas são perpendiculares se e só se $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

100. *Primeira Chamada 2006/2007*

Sejam $\mathcal{R} = \{O, (\vec{v}_1, \vec{v}_2)\}$ e $\mathcal{R}' = \{O', (\vec{v}'_1, \vec{v}'_2)\}$ dois referenciais de um plano afim real \mathcal{A} verificando:

- $O' \equiv (0, 2)_{\mathcal{R}}$;

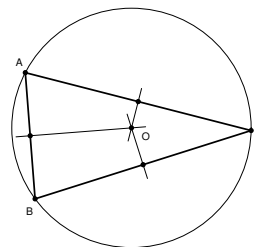
$$\bullet \begin{cases} \vec{v}'_1 = 3\vec{v}_1 \\ \vec{v}'_2 = -2\vec{v}_2 \end{cases}$$

- (a) Determine a expressão matricial da mudança de coordenadas entre os referenciais \mathcal{R} e \mathcal{R}' . Calcule as coordenadas no referencial \mathcal{R}' dos pontos $A \equiv (1, 2)_{\mathcal{R}}$ e $B \equiv (-1, 3)_{\mathcal{R}}$.
- (b) Determine, no referencial \mathcal{R} , as equações paramétricas e a equação cartesiana da recta r definida pelos pontos A e B . Seja s a recta paralela a r que passa pelo origem de coordenadas O . Qual a equação cartesiana de s no referencial \mathcal{R}' ?
- (c) Suponha o referencial \mathcal{R} ortonormado. Qual a distância $d(A, B)$? O referencial \mathcal{R}' é um referencial ortonormado?
- (d) Suponha o referencial \mathcal{R} ortonormado. Indique uma equação vectorial e uma equação cartesiana (no referencial \mathcal{R}) da recta perpendicular a r que passa pelo ponto $E \equiv (4, 1)_{\mathcal{R}}$.

101. *Primeira Chamada 2006/2007*

Sejam A , B e C os vértices de um triângulo de um plano euclidiano. Considere A' , B' e C' os pontos médios dos lados \overline{BC} , \overline{CA} e \overline{AB} , respectivamente e $m_{A'}$, $m_{B'}$ e $m_{C'}$ as mediatrizes do triângulo, isto é,

- a recta $m_{A'}$ perpendicular a \overline{BC} e que passa por A' ;
- a recta $m_{B'}$ perpendicular a \overline{CA} e que passa por B' ;
- a recta $m_{C'}$ perpendicular a \overline{AB} e que passa por C' .



Suponha que as mediatrizes $m_{A'}$ e $m_{B'}$ intersectam-se num ponto O .

- (a) Prove, usando o Teorema de Pitágoras, que

$$d(O, A) = d(O, C) \quad \text{e} \quad d(O, B) = d(O, C)$$

Prove ainda que o ponto O também pertence à mediatriz $m_{C'}$. O ponto O diz-se *circuncentro* do triângulo de vértices A , B e C .

- (b) Justifique o seguinte enunciado:

"Dado um triângulo de um plano euclidiano, existe uma única circunferência que passa pelos vértices do triângulo (chamada a circunferência circunscrita) cujo centro é o circuncentro do triângulo".

- (c) Num plano euclidiano munido de um referencial ortonormado, determine o centro e o raio da circunferência que passa pelos pontos:

$$A = (1, 0), \quad B = (1, 1) \quad \text{e} \quad C = (2, 0)$$

102. Segunda Chamada 2006/2007

Sejam $\mathcal{R} = \{O, (\vec{v}_1, \vec{v}_2)\}$ e $\mathcal{R}' = \{O', (\vec{v}'_1, \vec{v}'_2)\}$ dois referenciais de um plano afim real \mathcal{A} verificando:

- $O' \equiv (1, 1)_{\mathcal{R}}$;
- $\begin{cases} \vec{v}'_1 = 2\vec{v}_2 \\ \vec{v}'_2 = -\vec{v}_1 \end{cases}$

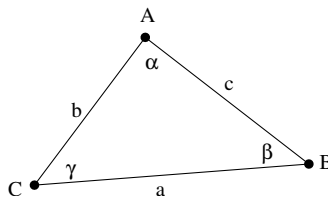
- (a) Determine a expressão matricial da mudança de coordenadas entre os referenciais \mathcal{R} e \mathcal{R}' . Calcule as coordenadas no referencial \mathcal{R}' dos pontos $A \equiv (1, 0)_{\mathcal{R}}$ e $B \equiv (-1, -1)_{\mathcal{R}}$.
- (b) Determine, no referencial \mathcal{R} , as equações paramétricas e a equação cartesiana da recta r definida pelos pontos A e B . Seja s a recta paralela a r que passa pelo origem de coordenadas O . Qual a equação cartesiana de s no referencial \mathcal{R}' ?
- (c) Suponha o referencial \mathcal{R} ortonormado. Qual a distância $d(A, B)$? O referencial \mathcal{R}' é um referencial ortonormado?
- (d) Suponha o referencial \mathcal{R} ortonormado. Indique uma equação vectorial e uma equação cartesiana (no referencial \mathcal{R}) da recta perpendicular a r que passa pelo ponto $E \equiv (0, 3)_{\mathcal{R}}$.

103. Segunda Chamada 2006/2007

Sejam A, B e C os vértices de um triângulo do plano euclidiano. Considere:

$$a = d(B, C), \quad b = d(C, A), \quad c = d(A, B)$$

$$\alpha = \angle\{\vec{AB}, \vec{AC}\}, \quad \beta = \angle\{\vec{BC}, \vec{BA}\} \quad \text{e} \quad \gamma = \angle\{\vec{CA}, \vec{CB}\}$$



- (a) Prove o teorema dos Cossenos, isto é, prove que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

- (b) Verifique que se o triângulo é isósceles, isto é, se $b = c$ então $\cos \beta = \cos \gamma$.
- (c) Prove uma das seguintes igualdades:

$$c = a \cos \beta + b \cos \alpha, \quad b = a \cos \gamma + c \cos \alpha, \quad a = b \cos \gamma + c \cos \beta.$$

Deduz a que se $\cos \beta = \cos \gamma$ então $b = c$ (isto é, o triângulo é isósceles).

(Sugestão: use as igualdades anteriores para obter $c - b = (b - c) \cos \alpha + a(\cos \beta - \cos \gamma)$)

- (d) Sejam B e C dois pontos não diametralmente opostos de uma circunferência com centro A . Se M é o ponto médio entre B e C , prove que a recta que passa por M e A é perpendicular ao segmento \overline{BC} .

104. Testes 2007/2008 (Exercícios relativos à Parte I)

- (a) Num espaço afim de dimensão 4 munido de um referencial \mathcal{R} considere a recta r que passa pelo ponto $A = (1, 0, 0, 1)_{\mathcal{R}}$ e está dirigida pelo vector $\vec{v} = (0, 1, 1, 2)$ e o hiperplano afim \mathcal{U} definido, no referencial \mathcal{R} , pela equação cartesiana:

$$x + z + 2t - 1 = 0$$

Determine as equações cartesianas de r neste referencial. Calcule a intersecção $r \cap \mathcal{U}$.

- (b) Sejam $\mathcal{R} = \{O, (\vec{v}_1, \vec{v}_2)\}$ e $\mathcal{R}' = \{O', (\vec{v}'_1, \vec{v}'_2)\}$ dois referenciais de um plano afim real verificando:

- $O' \equiv (1, -1)_{\mathcal{R}}$;
- $\begin{cases} \vec{v}'_1 = & + 3\vec{v}_2 \\ \vec{v}'_2 = -\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \end{cases}$

Considere a recta r definida, no referencial \mathcal{R} , pela equação cartesiana:

$$r : x - 2y + 3 = 0$$

Determine a equação cartesiana de r no referencial \mathcal{R}' . Supondo o referencial \mathcal{R} ortonormado, determine, **no referencial \mathcal{R}'** , a equação cartesiana da recta perpendicular a r que passa pelo ponto O' .

- (c) Sejam π um plano afim de um espaço euclidiano tridimensional \mathcal{A} , A um ponto de π e \vec{n} um vector normal a π . Seja P um ponto de \mathcal{A} e $q(P)$ a projecção ortogonal de P em π . Mostre que

$$q(P) = P - \left(\frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \right) \vec{n}$$

Deduz a fórmula da distância entre um ponto e um plano num espaço tridimensional, num referencial ortonormado.

- (d) Sejam A , B e C três pontos formando um triângulo de um espaço afim \mathcal{A} . Verifique que os planos π_1 e π_2 definidos de seguida são iguais:

$$\pi_1 = A + \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$$

$$\pi_2 = C + \langle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC} \rangle$$

I. Conceitos básicos.	1
1 Introdução.	1
2 Espaços afins.	3
3 Referenciais e coordenadas.	5
4 Espaços euclidianos.	10
5 Rectas, planos e outros subespaços afins.	18
6 Paralelismo e perpendicularidade	27
7 Problemas métricos	34
8 Exercícios resolvidos	39
Espaços afins, referenciais, espaços euclidianos.	39
Rectas, planos, paralelismo.	45
Ortogonalidade, problemas métricos.	58
9 Exercícios propostos	71
Espaços afins, referenciais, espaços euclidianos.	71
Rectas, planos, paralelismo.	76
Ortogonalidade, problemas métricos	81