Parte Quântica

Como sabe, a partir de qualquer operador unitário U pode ser definido um outro operador C_U sobre dois qubits em que a aplicação de U ao segundo qubit é condicionada pelo valor do primeiro qubit. Recorde como exemplo a porta $CNOT$ que estudou. Na base computacional, C_U pode ser escrito como

$$C_Q|x\rangle|y\rangle \;=\; |x\rangle \otimes Q^x|y\rangle$$

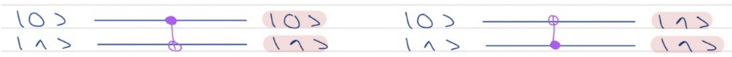
com $x \in \{0, 1\}$:

1. Calcule a representação matricial de C_Z onde Z é uma das portas de Pauli definida por $Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$.

2-qubits CNOT

→ Negação condicional

Atua na base padrão para um sistema de 2 qubits, invertendo o segundo bit se o primeiro bit for 1 e deixando-o inalterado caso contrário.



$$\begin{aligned} CNOT &= |0\rangle\langle 0| \otimes I \;+\; |1\rangle\langle 1| \otimes X \\ &= |0\rangle\langle 0| \otimes (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \;+\; |1\rangle\langle 1| \otimes (|1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|) \\ &= |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |11\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 11| \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

→ A importância do CNOT é sua capacidade de alterar o emaranhamento entre dois qubits, por ex.

$$CNOT\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle\right) \;=\; CNOT\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle)\right) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

conhecida também como CX

Pauli gates

X , Y , Z especificam uma rotação de π radianos em torno dos eixos correspondentes na esfera de Bloch.

$$I = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Y = i(-|1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|) = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

Representação de Z:

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C_Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Multi-qubit gates

Gate Name	Syntax	Matrix
Controlled-X or controlled-Not	qc.cx(qr[control],qr[target])	$CX = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Controlled-Y	qc.cy(qr[control],qr[target])	$CY = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Controlled-Z or controlled-Phase	qc.cz(qr[control],qr[target])	$CZ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
Controlled-Hadamard	qc.ch(qr[control],qr[target])	$CH = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$
SWAP	qc.swap(qr[control],qr[target])	$SWAP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Mostre que $CNOT$ pode ser implementado com recurso a C_Z, i.e.

$$CNOT\,|x\rangle|y\rangle = (I\otimes H)\cdot C_Z\cdot(I\otimes H)\,|x\rangle|y\rangle$$

e desenhe o circuito correspondente à expressão $(I\otimes H)\cdot C_Z\cdot(I\otimes H)$.

Estado do 1º qubit

Estado do 2º qubit

$CNOT\,|x\rangle|y\rangle$

{Definição de CNOT}

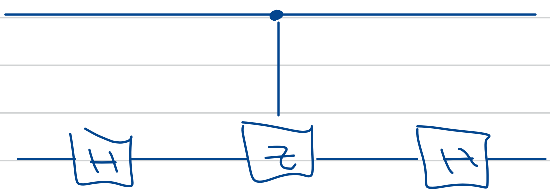
$= |x\rangle \otimes X^x |y\rangle$

{$X = HZH$}

$= |x\rangle \otimes (HZH)^x |y\rangle$

$= I \otimes H \cdot C_Z \cdot I \otimes H$

Circuito:



Ou exclusivo

p	q	$p \oplus q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	F

Um dos portões de qubit mais importantes é o **portão Hadamard**, responsável por criar um estado de superposição uniforme.

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \qquad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

The H gate:

$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$

esta gate serve para criar uma sobreposição

50% $|0\rangle$ 50% $|1\rangle$

usualmente escrito como $|+\rangle$

→ **Gates** são operadores que alteram o estado de um qubit.

$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ → Estado $|+\rangle$

Similar para $H|1\rangle$ → Estado $|-\rangle$

`Hadamard * Hadamard` (será que está certo?⚠️)

HH

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ → Obtemos o estado I (estado identidade)

Produto Interno $< x|y >$ (Hilbert)

→ Mede o quanto dois vetores se sobrepõem.

- Multiplica 2 vetores e retorna o um número que determina o grau de sobreposição.

PI = 0

0 → vetor nulo que é elem neutro na +.

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$
$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

$\langle + | - \rangle$ → Produto Interno

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \, , \, \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \, , \, \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \right) , \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \right) \right)$$

$$= \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} , \frac{1}{\sqrt{2}}}_{\text{Multiplicar}} \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \right)$$

Produto Escalar

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}}_{\langle u|} \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{u}_j v_j$$

$$= \frac{1}{2}((1 \times 1) + (1 \times (-1)))$$

$$= \frac{1}{2}(1 + (-1))$$

$$= 0$$

Norma:

$$\| |+\rangle \| = \sqrt{\langle + | + \rangle} = \sqrt{\frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle, |0\rangle + |1\rangle)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2}(1 \cdot 1 + 1 \cdot 1) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

Produto externo

... é calculado diretamente pela multiplicação de matrizes.

$$|0\rangle\langle 0| = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$
$$|1\rangle\langle 0| = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}$$

→ Em geral ficamos com 1 na posição (i,j) e 0 nas demais.

Como operador, |i⟩⟨j| mapeia |j⟩ em |i⟩ porque:

$$|i\rangle\langle j|\,|j\rangle = |i\rangle\langle j|j\rangle = |i\rangle$$

Portas de rotação como matrizes na base computacional

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{bmatrix}$$

A Base de Bell

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$
$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$$
$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$$
$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

Prepare o estado de Bell:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|00\rangle + |11\rangle\Big)$$

Trace o circuito. Execute o circuito usando qasm_simulator.

```
qc = QuantumCircuit(2)
qc.h(0)
qc.cx(0,1)

qc.measure_all()

qc.draw(output="mpl")

# esta barreira permite separar o bloco de circ
```