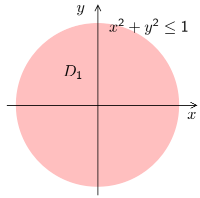
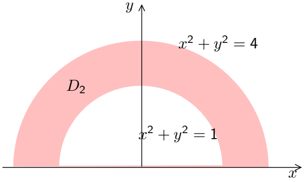
Cap 3 – Integrais múltiplos

3.3 – Integração em coordenadas não cartesianas

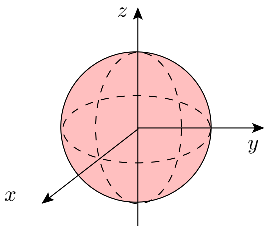
Problema

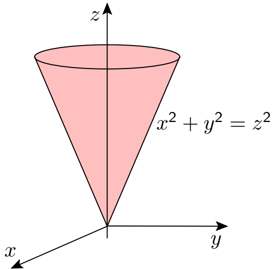
Estudar integração dupla em domínios do género





ou integração tripla





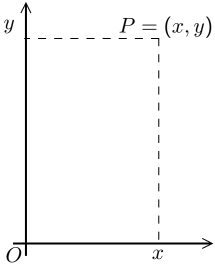
3.3.1– Coordenadas polares e integração dupla

Coordenadas polares

Integração dupla em coordenadas polares

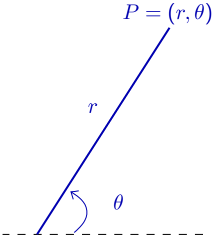
Coordenadas cartesianas vs Coordenadas polares

Coordenadas cartesianas



- origem do referencial O e dois eixos;
- x distância na horizontal a O;
- y distância na vertical a O.

Coordenadas polares

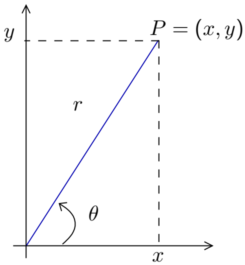


- origem do referencial O, um eixo e um ângulo;
- r é a distância a O;
- θ ângulo entre o eixo polar e a horizontal.

Coordenadas cartesianas vs Coordenadas polares

Coordenadas cartesianas

$P = (x, y)$



Coordenadas polares

$P = (r, \theta)$

- Da trigonometria do retângulo vem

$$\begin{cases} x = r\ \cos\theta & \qquad r \in [0 + \infty[\\ y = r\ \text{sen}\,\theta & \qquad \theta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- Logo

$$x^2 + y^2 = (r\ \cos\theta)^2 + (r\ \text{sen}\,\theta)^2 = r^2 \Longrightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e para $x \neq 0$

$$\frac{y}{x} = \tan\theta$$

- Para passar de coordenadas polares a cartesianas

$$\begin{cases} x = r \cos\theta \\ \\ y = r \operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} r \in [0, +\infty[\\ \theta \in [0, 2\pi[\,. \end{array}$$

- Para passar de coordenadas cartesianas a polares

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x}, \quad x \neq 0 \end{cases}$$

Observação

- Como as funções seno e cosseno são periódicas, a descrição de um ponto em coordenadas polares não é única. Por isso toma-se $\theta \in [\,0, 2\pi\,[$.

- As coordenadas polares são indicadas para descrever regiões circulares (no plano).

Exemplo

- As coordenadas cartesianas de $(7, \frac{\pi}{3})$ são $(\frac{7}{2}, \frac{7\sqrt{3}}{2})$;
- As coordenadas cartesianas de $(5, \pi)$ são $(-5, 0)$;
- As coordenadas polares de $(3, 3)$ são $(3\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$;
- As coordenadas polares de $(2, \frac{\pi}{2})$ são $(0, 2)$;
- A circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$ é descrita em coordenadas polares pelas equações

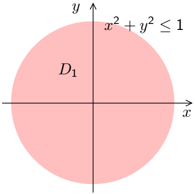
$$r = 2, \qquad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

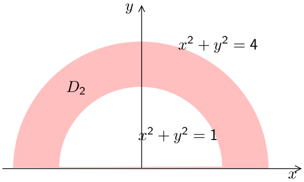
Integração dupla em coordenadas polares

Suponha-se que se pretende calcular o integral (dado em coordenadas retangulares)

$$\iint_D f(x,y)\,dA,$$

f uma função contínua em D, onde D é uma região da forma





Em coordenadas polares

$$D_1 = \{(r,\theta)\,:\,0 \le r \le 1,\ \ 0 \le \theta \le 2\pi\}$$
$$D_2 = \{(r,\theta)\,:\,1 \le r \le 2,\ \ 0 \le \theta \le \pi\}$$

Estas regiões são casos particulares de "retângulos polares"

$$R = \{(r,\theta)\,:\,a \le r \le b,\ \ \alpha \le \theta \le \beta\}.$$

Seja $R = \{(r,\theta) \,:\, a \leq r \leq b, \;\; \alpha \leq \theta \leq \beta\}$ e $f : R \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ com $f(x,y) \geq 0$.

- Subdividimos $[a,b]$ em n subintervalos e $[\alpha,\beta]$ em k subintervalos:

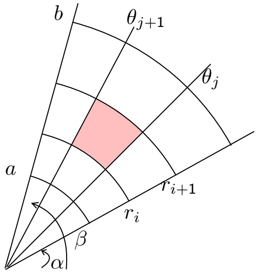
$$a = r_0 < r_1 < \cdots < r_{n-1} < r_n = b \qquad \text{e} \qquad \alpha = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{k-1} < \theta_k = \beta;$$

- À subdivisão anterior associamos uma subdivisão do retângulo polar R em $n \times k$ sub-retângulos polares

$$R_{ij} = [r_i, r_{i+1}] \times [\theta_j, \theta_{j+1}].$$

- Sendo $\Delta\theta_j = \theta_{j+1} - \theta_j$ e $r_i^* = \dfrac{1}{2}(r_i + r_{i+1})$, a área do retângulo polar R_{ij} é

$$\frac{1}{2} r_{i+1}^2 \Delta\theta_j - \frac{1}{2} r_i^2 \Delta\theta_j = r_i^* \Delta r_i \Delta\theta_j$$



- Para cada retângulo R_{ij} escolhemos um ponto $(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j)$. As coordenadas polares deste ponto são $(\widetilde{r}_i \cos\widetilde{\theta}_j, \widetilde{r}_i \,\text{sen}\, \widetilde{\theta}_j)$.

- O volume do sólido cuja base é o retângulo R_{ij} e altura é $f(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j)$ é dada por

$$f(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j)\Delta A_{ij} = f(\widetilde{r}_i \cos\widetilde{\theta}_j, \widetilde{r}_i \operatorname{sen}\widetilde{\theta}_j) r_i^* \Delta r_i \Delta\theta_j.$$

- O volume do sólido limitado por R e o gráfico de f pode ser aproximado por

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1} f(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j)\Delta A_{ij} = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1} f(\widetilde{r}_i \cos\widetilde{\theta}_j, \widetilde{r}_i \operatorname{sen}\widetilde{\theta}_j) r_i^* \Delta r_i \Delta\theta_j.$$

- Denotando $g(r,\theta) = r f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$, a soma

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1} f(\widetilde{r}_i \cos\widetilde{\theta}_j, \widetilde{r}_i \operatorname{sen}\widetilde{\theta}_j) r_i^* \Delta r_i \Delta\theta_j = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1} g(\widetilde{r}, \widetilde{\theta})\, \Delta r_i \Delta\theta_j$$

é uma soma de Riemann de g relativa à subdivisão anterior de R;

- Quando $n, k \longrightarrow \infty$ o valor da soma de Riemann de g é o integral definido de g em R e

$$\iint_R g(r,\theta)\,dr\,d\theta = \int_\alpha^\beta \left[\int_a^b g(r,\theta)\,dr\right] d\theta.$$

- Voltando a f, como $g(r,\theta) = r f(r\cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)$

$$\begin{aligned}\iint_R g(r,\theta)\,dr\,d\theta &= \int_\alpha^\beta \left[\int_a^b g(r,\theta)\,dr\right] d\theta \\ &= \int_\alpha^\beta \left[\int_a^b r\, f(r\cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)\,dr\right] d\theta.\end{aligned}$$

[Mudança para coordenadas polares num integral duplo]

Se f é contínua no retângulo polar R dado por $a \leq r \leq b$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, onde $a \geq 0$ e $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$ então

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta \left[\int_a^b r\, f(r\cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)\,dr\right] d\theta.$$

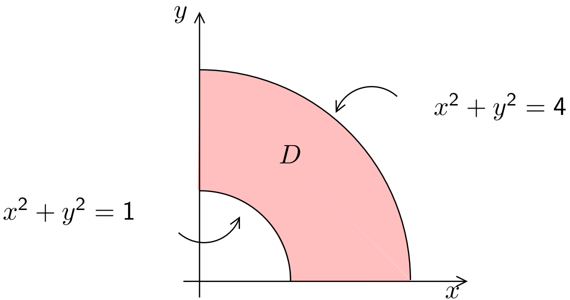
Observação

1. A integração dupla em coordenadas polares goza das mesmas propriedades que a integração dupla em coordenadas retangulares.

2. Tal como se definem regiões elementares do plano xy também se definem regiões elementares no plano $r\theta$:
   - D^* diz-se uma região do tipo I se existe um intervalo $[a, b]$ e duas funções de classe $\mathcal{C}^1$, $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \longrightarrow [0, 2\pi]$ tais que
   $$D^* = \{(r, \theta) : a \leq r \leq b,\ \varphi_1(r) \leq \theta \leq \varphi_2(r)\}.$$
   - D^* diz-se uma região do tipo II se existe um intervalo $[\alpha, \beta]$ e duas funções de classe $\mathcal{C}^1$, $\mu_1, \mu_2 : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que
   $$D^* = \{(r, \theta) : \alpha \leq \theta \leq \beta,\ \mu_1(\theta) \leq r \leq \mu_2(\theta)\}.$$
   - D^* diz-se uma região do tipo III se for, simultaneamente, uma região do tipo I e do tipo II.

Exemplo

- Calcular
$$\iint_D (x^2 + y^2)\, dA$$
onde
$$D = \{(x, y)\,:\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}.$$



3.3.2– Coordenadas cilíndricas e integração tripla

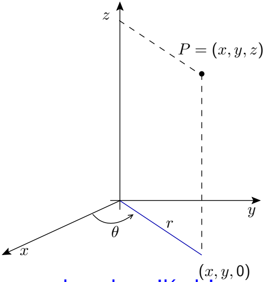
Coordenadas cilíndricas

Integração tripla em coordenadas cilíndricas

Coordenadas cartesianas vs Coordenadas cilíndricas

Coordenadas cartesianas

$P = (x, y, z)$



Coordenadas cilíndricas

$P = (r, \theta, z)$

- Para passar de coordenadas cilíndricas a cartesianas

$$\begin{cases} x = r\,\cos\theta & \qquad r \in [0, +\infty[\\ y = r\,\operatorname{sen}\theta & \qquad \theta \in [0, 2\pi[\\ z = z & \qquad z \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- Para passar de coordenadas cartesianas a cilíndricas

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \\ z = z. \end{cases}$$

Observação

- As coordenadas r e θ das coordenadas cilíndricas são as coordenadas polares da projeção de P no plano horizontal: $P' = (x, y, 0)$.

- Tal como no caso das coordenadas polares, a descrição de um ponto em coordenadas cilíndricas não é única.

- As coordenadas cilíndricas são indicadas para descrever regiões do espaço simétricas relativamente ao eixo dos zz.

Exemplo

- As coordenadas cartesianas de $(7, \frac{\pi}{3}, 5)$ são $(\frac{7}{2}, \frac{7\sqrt{3}}{2}, 5)$;

- As coordenadas cilíndricas de $(3, 3, 1)$ são $(3\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, 1)$;

- O cilindro de equações $x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3$ é descrito em coordenadas cilíndricas pelas equações

$$0 \leq r \leq 2, \qquad 0 \leq \theta < 2\pi, \qquad 0 \leq z \leq 3.$$

- O cone de equações $x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 5$ é descrito em coordenadas cilíndricas pelas equações

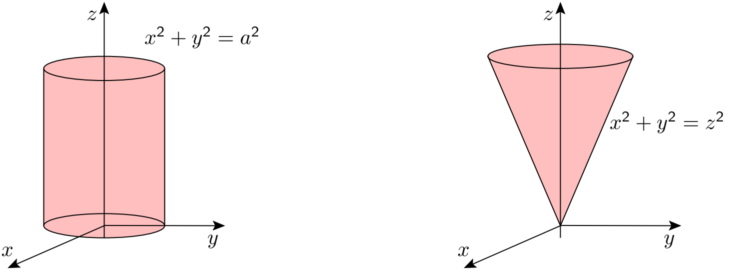
$$0 \leq r \leq 5, \qquad 0 \leq \theta < 2\pi, \qquad r \leq z \leq 5.$$

Integração tripla em coordenadas cilíndricas

Suponhamos que se pretende calcular o integral da função f contínua em $U \subset \mathbb{R}^3$ (dado em coordenadas retangulares)

$$\iiint_U f(x,y,z)\,dV,$$

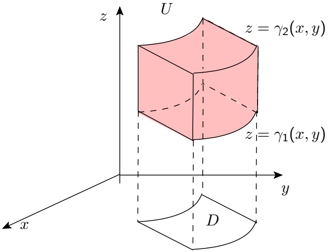
onde U é uma região da forma



Em coordenadas cilíndricas

$$U_1 = \{(r,\theta,z) : 0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le z \le h\}$$
$$U_2 = \{(r,\theta,z) : 0 \le r \le h,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ r \le z \le h\}$$

- Consideremos o caso geral de f estar definida em U, uma região do tipo I de $\mathbb{R}^3$



$$U = \{(x, y, z) : (x, y) \in D,\ \gamma_1(x, y) \le z \le \gamma_2(x, y)\}$$

- Suponhamos que D pode ser descrito em coordenadas polares por

$$D^* = \{(r, \theta) : \alpha \le \theta \le \beta,\ \mu_1(\theta) \le r \le \mu_2(\theta)\}$$

- Da teoria de integração sobre uma região do tipo I de $\mathbb{R}^3$ sabe-se que

$$\iiint_U f(x,y,z)\,dV = \iint_D \left[\int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dA$$

- Da integração dupla em coordenadas polares vem

$$\iiint_U f(x,y,z)\,dV$$
$$= \int_\alpha^\beta \int_{\mu_1(\theta)}^{\mu_2(\theta)} \left[\int_{\gamma_1(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)}^{\gamma_2(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z)\,dz\right] r\,dr\,d\theta$$

[Mudança para coordenadas cilíndricas num integral triplo]

Se f é contínua numa região $U \subset \mathbb{R}^3$ que pode ser descrita em coordenadas cilíndricas por

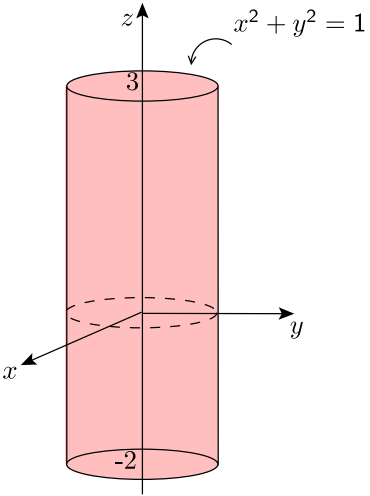
$$U^* : \quad \begin{array}{rcl} \alpha \leq & \theta & \leq \beta \\ \mu_1(\theta) \leq & r & \leq \mu_2(\theta) \\ \widetilde{\gamma}_1(r,\theta) \leq & z & \leq \widetilde{\gamma}_2(r,\theta) \end{array}$$

então

$$\iiint_U f(x,y,z)\, dV = \int_\alpha^\beta \int_{\mu_1(\theta)}^{\mu_2(\theta)} \int_{\widetilde{\gamma}_1(r,\theta)}^{\widetilde{\gamma}_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z) r\, dz\, dr\, d\theta.$$

Exemplo

- Calcular
$$\iiint_U (x^2 + y^2)\, dV$$
sendo
$$U : x^2 + y^2 \leq 1, \qquad -2 \leq z \leq 3.$$



3.3.3– Coordenadas esféricas e integração tripla

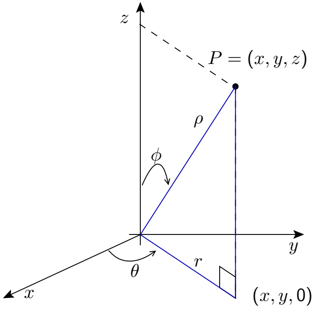
Coordenadas esféricas

Integração tripla em coordenadas esféricas

Coordenadas cartesianas vs Coordenadas esféricas

Coordenadas cartesianas

$P = (x, y, z)$



Coordenadas esféricas

$P = (\rho, \theta, \phi)$

$\rho = |OP|$

- Da trigonometria do retângulo vem $r = \rho \operatorname{sen} \phi$ e

$$\begin{cases} x = r \cos\theta = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases} \qquad \begin{array}{l} r \in [0, +\infty[\\ \theta \in \mathbb{R}. \end{array}$$

- Para passar de coordenadas esféricas a cartesianas

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta & \rho \in [0, +\infty[\\ y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta & \theta \in [0, 2\pi[\\ z = \rho \cos\phi & \phi \in [0, \pi]. \end{cases}$$

- Para passar de coordenadas cartesianas a esféricas

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \\ \cos\phi = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases}$$

desde que $x \neq 0$ e $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

Observação

- As coordenadas esféricas são indicadas para descrever regiões do espaço simétricas relativamente a um ponto.

- A designação dos ângulos θ e ϕ bem como a sua definição não é consensual
  - Neste curso definimos θ como o ângulo da projecção de $\overrightarrow{OP}$ com a parte positiva do eixo dos x e ϕ como o ângulo entre $\overrightarrow{OP}$ e a parte positiva do eixo dos z;
  - Em geografia, por exemplo, a latitude, isto é, o ângulo ϕ é o ângulo entre $\overrightarrow{OP}$ e o plano horizontal.

Exemplo

1. As coordenadas esféricas do ponto $(0, 2\sqrt{3}, -2)$ são $(4, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{2\pi}{3})$.

2. As equações de uma esfera de raio $a > 0$ em coordenadas esféricas são

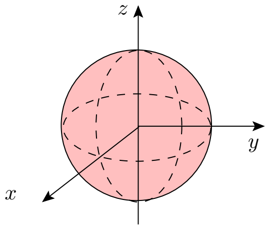
$$\rho \leq a, \qquad \theta \in [0, 2\pi[\,, \qquad \phi \in [0, \pi].$$

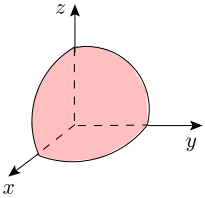
Integração tripla em coordenadas esféricas

Suponhamos que se pretende calcular o integral (dado em coordenadas retangulares) da função f contínua em $U \subset \mathbb{R}^3$

$$\iiint_U f(x, y, z)\, dV,$$

onde U é uma região da forma





Em coordenadas esféricas definimos uma cunha esférica[1] como

$$P = \{(\rho, \theta, \phi) : a \leq \rho \leq b, \ \ \alpha \leq \theta \leq \beta, \ \ c \leq \phi \leq d\}.$$

[1] Uma cunha esférica é a um "paralelipípedo" em coordenadas esféricas

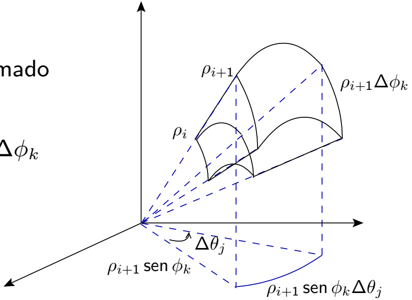
Seja $P = \{(\rho,\theta,\phi) : a \leq \rho \leq b,\ \ \alpha \leq \theta \leq \beta,\ \ c \leq \phi \leq d\}$ e $f : P \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

- A uma subdivisão do intervalo $[a,b]$ em n subintervalos, de $[\alpha,\beta]$ em m subintervalos e de $[c,d]$ em l subintervalos, associamos uma subdivisão da cunha esférica P em $n \times m \times l$ cunhas esféricas

$$P_{ijk} = [\rho_i, \rho_{i+1}] \times [\theta_j, \theta_{j+1}] \times [\phi_k, \phi_{k+1}].$$

- O volume de P_{ijk} pode ser aproximado por

$$\begin{aligned} VP_{ijk} &= \Delta\rho_i(\rho_i \operatorname{sen}\phi_k \Delta\theta_j)\rho_i\Delta\phi_k \\ &= \rho_i^2 \operatorname{sen}\phi_k \Delta\rho_i\Delta\theta_j\Delta\phi_k \\ &= \Delta V_{ijk} \end{aligned}$$



- Em cada P_{ijk} escolhemos um ponto $(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j, \widetilde{z}_k)$. As coordenadas esféricas deste ponto são

$$(\widetilde{\rho}_i \operatorname{sen}\widetilde{\phi}_j \cos\widetilde{\theta}_k,\ \ \widetilde{\rho}_i \operatorname{sen}\widetilde{\phi}_j \operatorname{sen}\widetilde{\theta}_k,\ \ \widetilde{\rho}_i \cos\widetilde{\phi}_k).$$

- Consideremos[2] a soma

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{l-1} f(\widetilde{\rho}_i \,\mathsf{sen}\, \widetilde{\phi}_j \cos \widetilde{\theta}_k,\; \widetilde{\rho}_i \,\mathsf{sen}\, \widetilde{\phi}_j \,\mathsf{sen}\, \widetilde{\theta}_k,\; \widetilde{\rho}_i \cos \widetilde{\phi}_k)\, \rho_i^2 \,\mathsf{sen}\, \phi_k \Delta\rho_i \Delta\theta_j \Delta\phi_k$$
$$= \sum_{i,j,k} f(\widetilde{\rho}_i \,\mathsf{sen}\, \widetilde{\phi}_j \cos \widetilde{\theta}_k,\; \widetilde{\rho}_i \,\mathsf{sen}\, \widetilde{\phi}_j \,\mathsf{sen}\, \widetilde{\theta}_k,\; \widetilde{\rho}_i \cos \widetilde{\phi}_k)\, \rho_i^2 \,\mathsf{sen}\, \phi_k \Delta\rho_i \Delta\theta_j \Delta\phi_k$$

- Denotando $F(\rho,\theta,\phi) = f(\rho \,\mathsf{sen}\, \phi \cos\theta, \rho \,\mathsf{sen}\, \phi \,\mathsf{sen}\, \theta, \rho \cos\phi)\, \rho^2 \,\mathsf{sen}\, \phi$, a soma anterior toma a forma

$$\sum_{i,j,k} F(\widetilde{\rho}, \widetilde{\theta}, \widetilde{\phi}) \Delta\rho_i \Delta\theta_j \Delta\phi_k$$

  e é uma soma de Riemann de F para a subdivisão de P considerada.

- Quando $n, m, l \longrightarrow \infty$ o valor da soma de Riemann de P é o integral triplo de F em P

$$\iiint_P F(\rho,\theta,\phi)\, d\rho\, d\theta\, d\phi.$$

[2] Por simplicidade, escrevemos $\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{l-1} = \sum_{i,j,k}$

- Ou, ainda,

$$\iiint_P F(\rho,\theta,\phi)\,d\rho\,d\theta\,d\phi = \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b F(\rho,\theta,\phi)\,d\rho\,d\theta\,d\phi.$$

- Retomando $F(\rho,\theta,\phi) = f(\rho\,\text{sen}\,\phi\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta, \rho\cos\phi)\,\rho^2\,\text{sen}\,\phi$ temos

$$\int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b F(\rho,\theta,\phi)\,d\rho\,d\theta\,d\phi = \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho\,\text{sen}\,\phi\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta, \rho\cos\phi)\,\rho^2\,\text{sen}\,\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

[Mudança para coordenadas esféricas num integral triplo]

Se f é uma função contínua numa região U do espaço que é descrita em coordenadas esféricas por

$$U^* : a \le \rho \le b, \qquad \alpha \le \theta \le \beta, \qquad c \le \phi \le d$$

sendo $a \ge 0$, $\beta - \alpha \in [0, 2\pi[$ e $d - c \in [0, \pi]$ então

$$\iiint_U f(x,y,z)\,dV = \iiint_{U^*} f(\rho\,\text{sen}\,\phi\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta, \rho\cos\phi)\,\rho^2\,\text{sen}\,\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi.$$

Observação

1. A integração tripla em coordenadas esféricas goza das mesmas propriedades que a integração tripla em coordenadas retangulares.

2. Tal como se definem regiões elementares do plano xyz também se definem regiões elementares no plano $\rho\theta\phi$.

Exemplo

- Calcular
$$\iiint_U e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dV$$
onde U é a esfera unitária:
$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$$