

**Espaços Vetoriais****Exercícios**

1. Verifique que $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} , onde $\oplus : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ são as aplicações definidas, respetivamente, por

$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2 - 3)$$
$$\alpha \odot (x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha(x_2 - 3) + 3)$$

para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

2. Seja $V = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$. Defina-se uma adição em V e uma multiplicação externa de $\mathbb{R} \times V$ em V por, respetivamente,

$$(x, x^2) + (y, y^2) = (x + y, (x + y)^2)$$
$$\alpha \cdot (x, x^2) = (\alpha x, (\alpha x)^2)$$

para quaisquer $\alpha, x, y \in \mathbb{R}$. Mostre que $(V, +, \cdot)$ é uma espaço vetorial real.

3. Seja $\mathbb{R}_1[x] = \{a_1x + a_0 : a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$ o conjunto dos polinómios de grau menor ou igual a 1 e de coeficientes reais. Considerando a adição de polinómios e a multiplicação de um real por um polinómio, prove que $\mathbb{R}_1[x]$ é um espaço vetorial.
4. Indique o elemento simétrico, para a adição, de cada um dos elementos do espaço vetorial indicado.

(a) $(1, -2, 3, 0) \in \mathbb{R}^4$.

(c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

(b) $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$.

(d) $x^3 - 2x^2 + 3x \in \mathbb{R}_3[x]$.

5. Verifique que

(a) $F = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + b + c = 1\}$ não é uma subespaço de \mathbb{R}^3 .

(b) $G = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : ab = 1\}$ não é um subespaço de \mathbb{R}^2 .

(c) $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ não é um subespaço de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

(d) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = 0\}$ é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 .

(e) $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R}) : d = -a, e = b, f = 2c \right\}$ é um subespaço de $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$.

6. Seja $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$. Mostre que o conjunto N das soluções do sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$,

$$N = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\},$$

é um subespaço de \mathbb{R}^n .

7. Justifique que não é um subespaço de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes

- (a) invertíveis.
- (b) não invertíveis.
- (c) com a diagonal principal não nula.

8. Determine quais dos seguintes conjuntos são subespaços do espaço vetorial indicado.

- (a) $F_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0\}$ em \mathbb{R}^2 .
- (b) $F_2 = \{(0, a, b, -1) : a, b \in \mathbb{R}\}$ em \mathbb{R}^4 .
- (c) $F_3 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 2a = b\}$ em \mathbb{R}^3 .
- (d) $F_4 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 2a = b, c = 0\}$ em \mathbb{R}^3 .
- (e) $F_5 = \{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, -1, 0)\}$ em \mathbb{R}^3 .

9. Em \mathbb{R}^4 , considere os subespaços

$$F = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a - b = 0, a - b - d = 0\}$$

e

$$G = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : b - c = 0, d = 0\}.$$

Mostre que $F \cap G = \{(c, c, c, 0) : c \in \mathbb{R}\}$.

10. Considere os seguintes subespaços do espaço vetorial \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}, \\ V_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0, y - z = 0\}, \\ V_3 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y = 0, z = 0\}. \end{aligned}$$

(a) Mostre que

- i. $V_2 = \{(b, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : b \in \mathbb{R}\}$.
- ii. $V_3 = \{(2a, a, 0) \in \mathbb{R}^3 : a \in \mathbb{R}\}$.

(b) Diga, justificando, se:

- i. $V_1 \subseteq V_2, V_2 \subseteq V_3, V_3 \subseteq V_2$;
- ii. $V_1 \cap V_3, V_1 \cup V_2, V_2 \cup V_3$ são subespaços de \mathbb{R}^3 .

11. Mostre que qualquer vetor (a, b) do espaço vetorial \mathbb{R}^2 se pode escrever como combinação linear dos vetores $(1, 0)$ e $(-3, 4)$.

12. Considere, no espaço vetorial \mathbb{R}^3 , os vetores

$$v_1 = (1, -1, 1), \quad v_2 = (2, 1, -2), \quad u_1 = (-1, 0, 1), \quad u_2 = (1, 0, 0), \quad u_3 = (1, 0, 1).$$

Verifique se

- (a) $(1, -4, 5)$ é combinação linear de v_1 e v_2 .
- (b) $(1, 2, 4)$ é combinação linear de v_1 e v_2 .
- (c) $(3, 0, 2)$ é combinação linear de u_1, u_2 e u_3 .
- (d) $(0, 2, 1)$ é combinação linear de u_1, u_2 e u_3 .

13. Considere o conjunto

$$F = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + 2c = 0, b = -c\}.$$

Mostre que $F = \langle (-2, -1, 1) \rangle$.

14. Em \mathbb{R}^3 , considere o subespaço $F = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1) \rangle$.

Mostre que $F = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : c - b = 0\}$.

15. Determine os subespaços vetoriais de \mathbb{R}^3 gerados por

- (a) $\{(1, 1, 1)\}$ (b) $\{(0, 0, 0)\}$
(c) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ (d) $\{(1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3), (2, 3, 4)\}$
(e) $\{(1, 2, 3), (-2, -4, -6), (4, 8, 12)\}$ (f) $\{(1, 2, 3), (-2, -4, -6), (3, 6, 9)\}$

16. Determine dois conjuntos distintos de geradores de cada um dos seguintes subespaços vetoriais de \mathbb{R}^4 :

- (a) \mathbb{R}^4 ;
(b) $\{(a, c - a, c, 2c) \in \mathbb{R}^4 : a, c \in \mathbb{R}\}$;
(c) $\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a + c = 0, 2b + d + c = 0\}$.

17. No espaço vetorial \mathbb{R}^4 , sejam $v_1 = (1, 0, 0, -1)$, $v_2 = (1, -2, 0, 1)$, $v_3 = (0, 1, 0, -1)$ e $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Indique, caso exista,

- (a) um conjunto gerador de W que tenha exactamente 4 vetores.
(b) um conjunto $\{w_1, w_2, w_3\}$ que gere W e tal que $w_j \neq v_1, \forall j \in \{1, 2, 3\}$.
(c) um conjunto gerador de W que tenha exactamente 2 vetores.

18. Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^3 . Mostre que

- (a) $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ é um conjunto gerador de \mathbb{R}^3 .
(b) $\{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$ é um conjunto gerador de \mathbb{R}^3 .
(c) $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ não é um conjunto gerador de \mathbb{R}^3 .

19. Considere o espaço vetorial $\mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ e os seus elementos

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 6 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escreva, se possível, C como combinação linear de A e B .

20. Determine o subespaço do espaço vetorial $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ gerado por

- (a) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ (b) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ (c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

21. Nos espaços vetoriais indicados, diga se são linearmente independentes os vetores que se apresentam a seguir:

- (a) $(1, 1), (2, 2)$ em \mathbb{R}^2 .
- (b) $(1, 1), (-1, 1)$ em \mathbb{R}^2 .
- (c) $(1, 1), (-1, 1), (0, 1)$ em \mathbb{R}^2 .
- (d) $(0, 1, 1), (1, 1, 0), (2, 1, 0)$ em \mathbb{R}^3 .
- (e) $(0, 1, 1, 0), (-1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, -1)$ em \mathbb{R}^4 .

22. Verifique se os seguintes vetores do espaço vetorial $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ são linearmente independentes:

- (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$.
- (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

23. Sejam V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} tal que $\dim V = n$ e v_1, \dots, v_n, v_{n+1} elementos de V tais que $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$.

Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes.

- (a) (v_1, v_2, \dots, v_n) é uma base de V .
- (b) Os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}$ são linearmente dependentes.
- (c) Os vetores $v_1, v_2, \dots, \alpha v_i, \dots, v_n$ são linearmente independentes.
- (d) Os vetores $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_i + \alpha v_j, v_{i+1}, \dots, v_n$ são linearmente independentes.

24. Considere, no espaço vetorial real \mathbb{R}^4 , os subespaços

$$U = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 : a_1 - a_4 = 0, a_4 - a_3 = 0\},$$

$$W_1 = \{(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4 : b_2 + 2b_3 = 0, b_1 + 2b_3 - b_4 = 0\},$$

$$W_2 = \langle (1, 1, 1, 0), (-1, 1, 0, 1), (1, 3, 2, 1), (-3, 1, -1, 2) \rangle.$$

- (a) Diga, justificando, se $((1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1))$ é uma base de U .
- (b) Determine uma base de i. W_1 . ii. W_2 .

25. Considere os seguintes vetores do espaço vetorial real \mathbb{R}^3 :

$$v_1 = (\alpha, 6, -1), v_2 = (1, \alpha, -1), v_3 = (2, \alpha, -3).$$

- (a) Determine os valores do parâmetro real α para os quais (v_1, v_2, v_3) é uma base de \mathbb{R}^3 .
- (b) Para um dos valores de α determinados na alínea anterior, calcule as coordenadas do vector $v = (-1, 1, 2)$ em relação à base (v_1, v_2, v_3) .

26. Indique, se existir, uma base do espaço vetorial \mathbb{R}^3 da qual façam parte os vetores:

- (a) $(1, 0, -1), (1, 0, 1)$.
- (b) $(0, 1, 1), (0, 1, 0)$.
- (c) $(1, -1, -1), (-2, 2, 2)$.
- (d) $(1, -1, -1), (0, 1, 2), (1, 0, 1)$.

27. Seja $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0\}$.
- Determine um conjunto gerador de F .
 - Averigue se o conjunto encontrado na alínea anterior é linearmente independente.
 - Indique a dimensão e uma base de F .
 - Determine $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que $F = \langle (1, 0, -1), (-1, 1, \alpha) \rangle$.
28. Considere o espaço vetorial real \mathbb{R}^4 e $F = \{(a, a, 2a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$.
- Verifique que F é um subespaço de \mathbb{R}^4 .
 - Calcule $\dim F$.
 - Seja H um subespaço de \mathbb{R}^4 tal que $H = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ e $u_1 + 2u_2 = u_1 + u_2 - u_3 = 0_{\mathbb{R}^4}$.
O que pode afirmar sobre $\dim H$?
 - Supondo que $u_1 = (-4, -2, 0, 2)$, $u_2 = (2, 1, 0, -1)$ e $u_3 = (-2, -1, 0, 1)$, calcule uma base de $H \cap F$.
29. Sejam V um espaço vetorial e $\{v_1, v_2, v_3\}$ um conjunto de vetores de V linearmente independente. Mostre que os seguintes conjuntos também são linearmente independentes:
- $\{v_1, v_2\}$
 - $\{v_1, v_1 + v_2\}$
 - $\{2v_1, v_1 + v_2, -v_1 + v_3\}$
 - $\{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3\}$
30. Indique para que valores de α o conjunto $\{(\alpha, 6), (1, \alpha)\}$ é uma base de \mathbb{R}^2 .
31. Determine uma base e a dimensão do subespaço de \mathbb{R}^4 definido por
- $$F = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + 3z = 0, z - 2w = 0\}.$$
32. Considere o conjunto $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$ e os vetores $u_1 = (0, 2, 0)$, $u_2 = (1, 0, 0)$ e $u_3 = (-1, 6, 0)$.
- Verifique que $F = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$.
 - O conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base de F ?
 - Diga qual é a dimensão de F .
33. Sejam V um espaço vetorial e $u_1, u_2, u_3, u_4 \in V$ tais que $V = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, $\{u_1, u_2\}$ é um conjunto linearmente independente, $u_3 = 2u_1$ e $u_4 = u_1 + u_2$. Diga quais das afirmações seguintes são verdadeiras.
- $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ é um conjunto gerador de V .
 - $\{u_1, u_2, u_3\}$ é um conjunto linearmente independente.
 - $\{u_3, u_2\}$ é um conjunto linearmente independente.
 - $V = \langle u_2, u_3, u_4 \rangle$.
 - $\{u_2, u_4\}$ é uma base de V .
 - $\dim(V) = 3$.

Soluções

4. (a) $(-1, 2, -3, 0)$ (c) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

(b) $(0, 0, 0)$ (d) $-x^3 + 2x^2 - 3x$

5. (a) $(0, 0, 0) \notin F$ (b) $(0, 0) \notin G$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin H$

7. (a) A matriz nula não pertence ao conjunto das matrizes invertíveis.

(b) A soma de duas matrizes não invertíveis pode não ser uma matriz não invertível. Por exemplo, para $n = 3$, as matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são não invertíveis e a sua soma é a matriz I_n que é uma matriz invertível.

(c) As matrizes I_n e $-I_n$ têm diagonal principal não nula e, no entanto, a sua soma é a matriz nula (a matriz nula não pertence ao conjunto das matrizes com diagonal principal não nula).

8. São subespaços vetoriais apenas os conjuntos F_3 e F_4 .

9. $F \cap G = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a - b = 0, a - b - d = 0, b - c = 0, d = 0\}$.

Precisamos resolver um sistema nas incógnias a, b, c e d com matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\dots} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{forma em escada reduzida}).$$

Solução do sistema: $d = 0$, $b = c$, $a = c$, $c \in \mathbb{R}$. Ou seja, $F \cap G = \{(c, c, c, 0) : c \in \mathbb{R}\}$

11. Dado, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, resolvendo o sistema $(a, b) = \alpha(1, 0) + \beta(-3, 4)$, na incógnitas α e β , obtemos a solução $\alpha = a + \frac{3}{4}b$ e $\beta = \frac{b}{4}$. Ou seja, qualquer vetor $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ se decompõe na forma

$$(a, b) = \left(a + \frac{3}{4}b\right) \cdot (1, 0) + \frac{b}{4} \cdot (-3, 4).$$

13. $F = \{(-2c, -c, c) : c \in \mathbb{R}\} = \{c(-2, -1, 1) : c \in \mathbb{R}\} = \langle(-2, -1, 1)\rangle$.

14. $F = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : (a, b, c) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 1) + \gamma(1, 1, 1), \text{ com } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$

Pretende-se, portanto, determinar os vetores $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tais que o sistema nas variáveis α, β e γ com matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \end{array} \right] \xrightarrow{l_3 \rightarrow l_3 - l_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & c - b \end{array} \right]$$

tem solução. O sistema é possível se e só se $c - b = 0$.

15. (a) $\{(a, a, a) : a \in \mathbb{R}\}$ (c) \mathbb{R}^3 (e) $\{(a, 2a, 3a) : a \in \mathbb{R}\}$
 (b) $\{(0, 0, 0)\}$ (d) \mathbb{R}^3 (f) $\{(a, 2a, 3a) : a \in \mathbb{R}\}$

16. (a) Por exemplo,
 $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ e $\{(2, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 3)\}$.
- (b) Por exemplo, $\{(1, -1, 0, 0), (0, 1, 1, 2)\}$ e $\{(2, -2, 0, 0), (0, 3, 3, 6)\}$.
- (c) Por exemplo, $\{(-1, 0, 1, -1), (0, 1, 0, -2)\}$ e $\{(-1, 0, 1, -1), (-1, 1, 1, -3)\}$.
17. (a) Por exemplo, $\{v_1, v_2, v_3, 2v_1\}$.
- (b) Por exemplo, $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} = \{v_1 + v_2, v_2, v_3\}$.
- (c) Por exemplo, $\{v_1, v_2\}$. Note-se que $v_3 = \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2$.
18. (a) Basta verificar que os três vetores são linearmente independentes. Com $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, qualquer conjunto com três vetores de \mathbb{R}^3 linearmente independentes é um conjunto gerador de \mathbb{R}^3 .
- (b) Existem no conjunto três vetores de \mathbb{R}^3 linearmente independentes.
- (c) Para que um conjunto seja gerador de \mathbb{R}^3 tem de conter três vetores linearmente independentes.
19. Não é possível.
20. (a) $\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$
- (b) $\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$
- (c) $\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$
21. (a) lin. dependentes. (c) lin. dependentes. (e) lin. dependentes.
 (b) lin. independentes. (d) lin. independentes.
22. (a) lin. dependentes.
 Verifique o sistema de quatro equações nas incógnitas α, β, γ e δ definido por
- $$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
- não tem apenas a solução nula $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.
- (b) lin. independentes.
23. (a) Verdadeiro. Dado que $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ e $\dim(V) = n$, então os vetores v_1, v_2, \dots, v_n são linearmente independentes e, portanto, (v_1, v_2, \dots, v_n) é uma base de V . Qualquer conjunto gerador de V com n vetores é uma base de V .
- (b) Verdadeiro. Como $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ e $v_{n+1} \in V$, v_{n+1} é combinação linear dos vetores v_1, v_2, \dots, v_n .
- (c) Verdadeiro.
- (d) Verdadeiro.
24. (a) Não. $U = \langle (1, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 0) \rangle = \langle (1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 0) \rangle \subseteq \langle (1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1) \rangle$
 Repare-se que $(1, 0, 0, 1) \notin U$ e, portanto, $U \subset \langle (1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1) \rangle$.
- (b) i. Base de $W_1 : ((1, 0, 0, 1), (-2, -2, 1, 0))$ ii. Base de $W_2 : ((1, 1, 1, 0), (-1, 1, 0, 1))$

25. (a) $\alpha \neq 2$ e $\alpha \neq -\frac{3}{2}$. Sugestão: discuta a característica da matriz $\begin{bmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ 2 & \alpha & -3 \\ \alpha & 6 & -1 \end{bmatrix}$.
- (b) Para, por exemplo, $\alpha = 1$, as coordenadas de v na base (v, v_2, v_3) são $(1/5, 4/5, -1)$.

26. Por exemplo,

- (a) $((1, 0, -1), (1, 0, 1), (0, 1, 0))$ (c) Não existe.
 (b) $((0, 1, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0))$ (d) Não existe.

27. (a) $F = \langle (-2, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle$
 (b) Sim.
 (c) $\dim(F) = 2$
 (d) Determinar α de forma que $(-1, 1, \alpha) \in F$. Obtém-se $\alpha = -1$.
 Repare-se que $F = \langle (-2, 1, 0), (1, 0, -1) \rangle = \langle (-2, 1, 0) + (1, 0, -1), (1, 0, -1) \rangle$

28. (a) $F = \langle (1, 1, 2, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$
 (b) $\dim(F) = 2$
 (c) $H = \langle u_2 \rangle$. Se $u_2 \neq 0_{\mathbb{R}^4}$, $\dim(H) = 1$.
 (d) $H \cap F = \{(0, 0, 0, 0)\}$. Diz-se que H tem por base o conjunto vazio.

29. (d) Sabemos que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_V \implies \alpha = \beta = \gamma = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \alpha(v_1 + v_2) + \beta(v_1 + v_3) + \gamma(v_2 + v_3) = 0_V &\implies (\alpha + \beta)v_1 + (\alpha + \gamma)v_2 + (\beta + \gamma)v_3 = 0_V \\ &\implies \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = 0 \\ \gamma = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

30. $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}$.

31. Base de $F : ((1, 1, 0, 0), (-6, 0, 2, 1))$, por exemplo; $\dim(F) = 2$.

32. (a) Observe-se que qualquer vetor $(x, y, 0) \in F$ se pode escrever da forma

$$(x, y, 0) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) = x(1, 0, 0) + \frac{y}{2}(0, 2, 0) = x(1, 0, 0) + \frac{y}{2}(0, 2, 0) + 0 \cdot (-1, 6, 0).$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} F = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle &= \langle (1, 0, 0), (0, 2, 0) \rangle = \langle (1, 0, 0), (0, 2, 0), (-1, 6, 0) \rangle \\ &= \langle u_2, u_1, u_3 \rangle = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \end{aligned}$$

- (b) Não. O conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$ é gerador de F mas não é linearmente independente.
 (c) $\dim(F) = 2$.

33. (a) V (b) F (c) V (d) V (e) V (f) F