Universidade do Minho
Dep. Matemática e Aplicações

Geometria

Lic. Ciências da Computação & Lic. em Matemática
23/03/2019
Primeiro Teste

Todas as respostas devem ser justificadas e os cálculos devem ser apresentados.

GRUPO I

(Responda aos grupos I e II em **folhas separadas**)

1. Seja $\mathcal{A}$ um plano euclidiano munido de referencial $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)\}$, verificando
$$\vec{v}_1.\vec{v}_1 = 2, \quad \vec{v}_1.\vec{v}_2 = -1, \quad \vec{v}_2.\vec{v}_2 = 1.$$
   (a) Determine o cosseno do ângulo (não orientado) formado pelos vetores
$$\vec{u}_1 = (2,-1)_{\mathcal{B}} \quad \text{e} \quad \vec{u}_2 = (1,1)_{\mathcal{B}}.$$
   (b) Sejam $O' = (1,0)_{\mathcal{R}}$, $\mathcal{B}' = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$. Considere o referencial $\mathcal{R}' = \{O', \mathcal{B}'\}$.
      i. Apresente a matriz de mudança de referencial de $\mathcal{R}$ para $\mathcal{R}'$.
      ii. O referencial $\mathcal{R}'$ é ortonormado? Quais são as coordenadas de O em $\mathcal{R}'$?

2. Seja $\mathcal{A}$ um plano euclidiano munido de referencial ortonormado. Considere a reta r definida pela equação vetorial
$$r = (1,0,1) + \langle (2,0,1) \rangle.$$
   (a) Apresente um sistema de equações cartesianas de r.
   (b) Apresenta a equação cartesiana do plano π perpendicular a r e incidente em $P = (1,-3,0)$.

GRUPO II

(Responda aos grupos I e II em **folhas separadas**)

3. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim tridimensional munido de referencial ortonormado. Considere as retas r e s dadas na forma cartesiana por
$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y - z = -1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s: \begin{cases} x + z = 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$$
   (a) Determine equações vetoriais para r e para s.
   (b) Verique que r e s são complanares e determine a equação cartesiana do plano $r + s$.
   (c) As retas r e s são paralelas? Qual é a distância entre r e s?

4. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim de dimensão n munido de referencial ortonormado. Seja $\mathcal{H}$ o hiperplano de $\mathcal{A}$ que incide no ponto A e é perpendicular ao vetor $\vec{n}$.
   (a) Dado $P \in \mathcal{A}$, mostre que o ponto Q definido pela equação
$$Q = P - \frac{\overrightarrow{AP}.\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$
   é a projeção ortogonal de P em $\mathcal{H}$.
   (b) Suponha que $n = 4$. Seja $\mathcal{H}$ o hiperplano de $\mathcal{A}$ definido pela equação cartesiana
$$\mathcal{H}: \quad 2x - y + 3z + t = 1.$$
   Determine a projeção ortogonal de $P = (1,-1,0,2)$ em $\mathcal{H}$.

Cotações: Todas as questões estão cotadas para 2 valores.