TP2 6ª aula

12 de abril de 2021 17:00

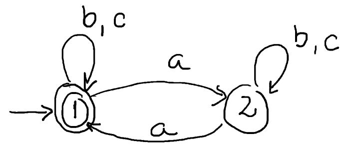
11. Prove que é reconhecível a linguagem sobre o alfabeto $A = \{a, b, c\}$ formada por todas as palavras que se caraterizam por:

    (a) ter um número par de ocorrências de a;

    (b) ter comprimento par;

    (c) ter pelo menos uma ocorrência de a e toda a ocorrência de b é seguida de uma ocorrência de c.

a) $L_1 = \{ u \in A^* : |u|_a = 2k , k \in \mathbb{N}_0 \}$

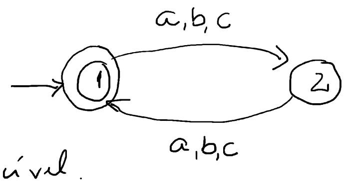


$\mathcal{A}_1$

estado 1 → nº par de ocorrências de "a"
estado 2 → nº ímpar " " " "

$\mathcal{A}_1$ reconhece L_1. Logo L_1 é reconhecível.

b) $L_2 = \{ u \in A^* : |u| = 2k , k \in \mathbb{N}_0 \}$

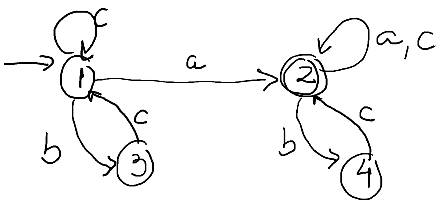


$\mathcal{A}_2$

$\mathcal{A}_2$ reconhece L_2. Logo L_2 é reconhecível.

c) $L_3 = \{ u \in A^* : u \in A^* a A^* \setminus (A^* b \cup A^* ba A^* \cup A^* bb A^*) \}$

$\mathcal{A}_3$



$L(\mathcal{A}_3) = L_3$, pelo que L_3 é reconhecível.

Alternativa: $L_3 = \underbrace{\{c, bc\}^*}\, a\, \underbrace{\{a, c, bc\}^*}$ corresponde à expressão regular $(c + bc)^* a (a + c + bc)^*$

Vamos calcular o conjunto dos resíduos de L_3.

$\varepsilon^{-1} L_3 = L_3 = (L_3)_1$

$a^{-1} L_3 = (a^{-1} \{c, bc\}^*) a \{a, c, bc\}^* \cup a^{-1} a \{a, c, bc\}^* =$

$= a^{-1} \{c, bc\} \{c, bc\}^* a \{a, c, bc\}^* \cup \{a, c, bc\}^*$

$= \underbrace{\emptyset \{c, bc\}^* a \{a, c, bc\}^*}_{\emptyset} \cup \{a, c, bc\}^* = \{a, c, bc\}^* = (L_3)_2$

$b^{-1} L_3 = (b^{-1} \{c, bc\}^*) a \{a, c, bc\}^* \cup b^{-1} a \{a, c, bc\}^* =$

$= b^{-1} \{c, bc\} \{c, bc\}^* a \{a, c, bc\}^* \cup \emptyset$

$= c \{c, bc\}^* a \{a, c, bc\}^* = c L_3 = (L_3)_3$

$c^{-1} L_3 = (c^{-1} \{c, bc\}^*) a \{a, c, bc\}^* \cup c^{-1} a \{a, c, bc\}^*$

$= c^{-1}\{c,bc\}\ \{c,bc\}^* a\ \{a,c,bc\}^* \cup \emptyset$

$= \varepsilon\ \{c,bc\}^* a\ \{a,c,bc\}^* = L_3$

$a^{-1}(L_3)_2 = a^{-1}\{a,c,bc\}^* = (a^{-1}\{a,c,bc\})\{a,c,bc\}^* = \varepsilon\{a,c,bc\}^* = (L_3)_2$

$b^{-1}(L_3)_2 = b^{-1}\{a,c,bc\}^* = (b^{-1}\{a,c,bc\})\{a,c,bc\}^* = c\{a,c,bc\}^* = (L_3)_4$

$c^{-1}(L_3)_2 = c^{-1}\{a,c,bc\}^* = \varepsilon\{a,c,bc\}^* = (L_3)_2$.

$a^{-1}(L_3)_3 = a^{-1}cL_3 = \emptyset = (L_3)_5$

$b^{-1}(L_3)_3 = b^{-1}cL_3 = \emptyset = (L_3)_5$

$c^{-1}(L_3)_3 = c^{-1}cL_3 = L_3$

$a^{-1}(L_3)_4 = a^{-1}c\{a,c,bc\}^* = \emptyset$

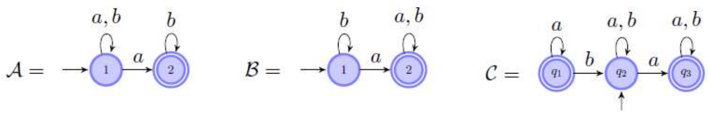
$b^{-1}(L_3)_4 = b^{-1}c\{a,c,bc\}^* = \emptyset$

$c^{-1}(L_3)_4 = c^{-1}c\{a,c,bc\}^* = \varepsilon\{a,c,bc\}^* = \{a,c,bc\}^* = (L_3)_2$

$Q_{L_3} = \{L_3, (L_3)_2, (L_3)_3, (L_3)_4, (L_3)_5\}$ é finito.

Logo L_3 é reconhecível.

12. Considere os seguintes autómatos de alfabeto $\{a, b\}$.



$L(A) = \{a,b\}^* a\, b^*$

$L(B) = b^* a\, \{a,b\}^*$

$L(C) = \{a,b\}^* a\, \{a,b\}^*$

(a) Escreva a tabela da função de transição de cada um dos autómatos.

(b) Classifique cada um dos autómatos quanto à completude, acessibilidade, co-acessibilidade e determinismo.

(c) Verifique que os três autómatos são equivalentes.

a)

δ_A	1	2
a	$\{1,2\}$	$\emptyset$
b	$\{1\}$	$\{2\}$

δ_B	1	2
a	$\{2\}$	$\{2\}$
b	$\{1\}$	$\{2\}$

δ_C	q_1	q_2	q_3
a		$\{q_2,q_3\}$	$\{q_3\}$
b	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$

b) A — não determinista, porque $\delta(1,a) = \{1,2\}$ e então $\# \delta(1,a) > 1$.

— não é completo porque $\delta(2,a) = \emptyset$.

— é acessível porque 1 é o estado inicial e $1 \xrightarrow{a} 2$ é um caminho, que faz com que 2 também seja um estado acessível. (todos os estados são acessíveis).

— é co-acessível porque a partir de qualquer estado não final existe um caminho com origem q e fim num vértice final, nomeadamente $1 \xrightarrow{a} 2$.

B — ...

$\mathcal{C}$ – Não determinista, porque ...
– Completo porque
– não acessível porque o estado q_1 não é acessível, dado que não existe um caminho com origem q_2 e término q_1.
– é co-acessível, pois só há um único estado não final e esse é um estado co-acessível porque existe o caminho $q_2 \xrightarrow{a} (q_2)$.

c) $L(\mathcal{A}) = \{a,b\}^* a b^* = \{u a b^n : u \in A^*, n \geq 0\} = \{w \in A^* : |w|_a \geq 1\}$
$L(\mathcal{B}) = b^* a \{a,b\}^* = \{b^n a u : u \in A^*, n \geq 0\} = \{w \in A^* : |w|_a \geq 1\}$
$L(\mathcal{C}) = \{a,b\}^* a \{a,b\}^* = \{u_1 a u_2 : u_1, u_2 \in A^*\} = \{w \in A^* : |w|_a \geq 1\}$

Como $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B}) = L(\mathcal{C})$, os três autómatos são equivalentes.

22. Sejam $A = \{a, b\}$ um alfabeto e $L = A^*(ab)^+$.

(a) Determine todos os resíduos da linguagem L.

(b) Deduza que L é reconhecível.

a) $\varepsilon^{-1}L = L = L_1$
$a^{-1}L = a^{-1}(A^*(ab)^+) = (a^{-1}A^*)(ab)^+ \cup a^{-1}(ab)^+ = A^*(ab)^+ \cup a^{-1}ab(ab)^* =$
$= L \cup b(ab)^* = (*)$

$b(ab)^* = \{b, bab, b(ab)^2, \ldots\} = \{b\} \cup \{b(ab)^n : n \geq 1\}$
$= \{b\} \cup b \cdot \{(ab)^n : n \geq 1\}$
$= \{b\} \cup b(ab)^+$

$b(ab)^+ \subseteq A^*(ab)^+ = L$

$$\circledast = L \cup \{b\} \cup b(ab)^+ = L \cup \{b\} = L_2$$

$$b^{-1}L = b^{-1}\left(A^*(ab)^+\right) = (b^{-1}A^*)(ab)^+ \cup b^{-1}(ab)^+ = A^*(ab)^+ \cup \emptyset = L$$

$$a^{-1}L_2 = a^{-1}(L \cup \{b\}) = a^{-1}L \cup a^{-1}\{b\} = a^{-1}L \cup \emptyset = L_2$$

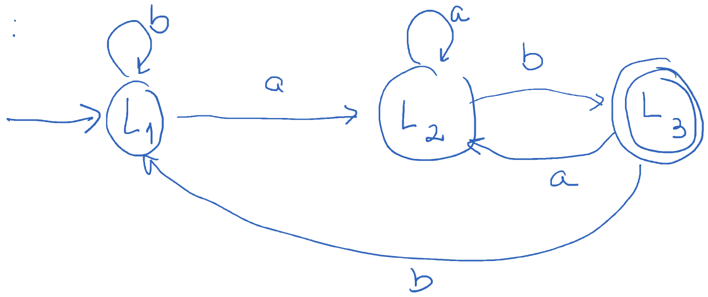
$$b^{-1}L_2 = b^{-1}(L \cup \{b\}) = b^{-1}L \cup b^{-1}\{b\} = L \cup \{\varepsilon\} = L_3 \quad (\text{pq } \varepsilon \notin L)$$

$$a^{-1}L_3 = a^{-1}(L \cup \{\varepsilon\}) = a^{-1}L \cup a^{-1}\{\varepsilon\} = a^{-1}L \cup \emptyset = a^{-1}L = L_2$$

$$b^{-1}L_3 = b^{-1}(L \cup \{\varepsilon\}) = b^{-1}L \cup b^{-1}\{\varepsilon\} = b^{-1}L \cup \emptyset = b^{-1}L = L.$$

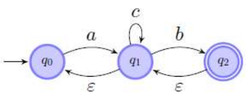
b) Q_L tem 3 elementos ($Q_L = \{L, L \cup \{b\}, L \cup \{\varepsilon\}\}$), logo L é reconhecível.

Não fazia parte da questão mas ... o autómato minimal que reconhece L é:

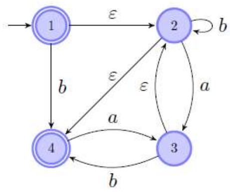


18. Determine autómatos síncronos equivalentes a cada um dos seguintes autómatos assíncronos.

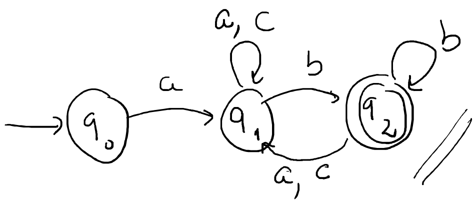
(a)



(b)



a)



$$\begin{tikzcd} q_1 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[rr, bend right, "a"'] & q_0 \arrow[r, "a"] & q_1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} q_2 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[rr, bend right, "c"'] & q_1 \arrow[r, "c"] & q_1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} q_2 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[rr, bend right] & q_1 \arrow[r, "b"] & q_2 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} q_2 \arrow[r, "\varepsilon"'] \arrow[rrr, bend right, "a"'] & q_1 \arrow[r, "\varepsilon"'] & q_0 \arrow[r, "a"'] & q_1 \end{tikzcd}$$

ε ε ε

1 letra