4ª aula

17 de março de 2021 09:32

30. Seja A um alfabeto e sejam $r, s \in ER(A)$. Mostre que:

b) ~~(a)~~ $r^* = r^* r^*$;

$\varepsilon \leq r^*$ porque $\{\varepsilon\} \subseteq \mathcal{L}(r^*) = \{\varepsilon, \dots\}$

$r^* \leq r^*$

Daqui resulta que $\varepsilon\, r^* \leq r^* r^*$ por 29 b) VI

Como $\varepsilon \cdot r^* = r^*$ (porque $\mathcal{L}(\varepsilon) \cdot \mathcal{L}(r^*) = \{\varepsilon\}\, \mathcal{L}(r^*) = \mathcal{L}(r^*)$)

Então $r^* \leq r^* r^*$ (1)

Por outro lado

$\left.\begin{array}{l} r^* \leq r^* \\ r^* \leq r^* \end{array}\right\}$ Então $r^* . r^* \leq (r^*)^*$ por 29 b VIII).

Por 30 a), $(r^*)^* = r^*$. Portanto $r^* r^* \leq r^*$ (2).

De (1) e (2) resulta que $r^* = r^* r^*$.

(f) $(rs^*)^* = \varepsilon + r(r+s)^*$;

(g) $(r^* + s^*)^* = (r^* s^*)^*$.

f) $r(r+s)^* = r \cdot (s^* (r\, s^*)^*)$ por 30 d)

$= r s^* (r\, s^*)^*$

$= (r s^*)^+$

$\varepsilon + r(r+s)^* = \varepsilon + (r s^*)^+$

$= (r s^*)^*$ c.q.d.

d) $(r+s)^* = (r^* + s^*)^*$

$(r^* s)^* r^*$

$= r^* (s\, r^*)^*$

$(r+s)^* = (s+r)^* = s^* (r\, s^*)^*$

- $e\, e^* = e^*\, e = e^+$
- $e^* = e^+ + \varepsilon$

g) $(r^* + s^*)^* = (r^*)^* \left(s^* (r^*)^*\right)^*$ por 30 d)

$= r^* (s^* r^*)^*$ por 30 a)

$= (r^* s^*)^* r^*$ por 30 d)

$(r^* s^*)^* \leq (r^* s^*)^*$

$r^* \leq (r^* s^*)^* = \varepsilon + (r^* s^*)^+ = \varepsilon + \underbrace{r^* s^*}_{(1)} + (r^* s^*)^+$ e $\mathcal{L}(r^* s^*) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{L}(r^* s^*)$

$= \varepsilon + \underbrace{r^* \varepsilon + r^* s^+}_{=(1)}$

$(r^* s^*)^* . r^* \leq (r^* s^*)^* . (r^* s^*)^* = (r^* s^*)^*$

29b VI, por 30 b)

Até aqui concluímos que $(r^* + s^*)^* = (r^* s^*)^* r^* \leq (r^* s^*)^*$ (1)

$\left.\begin{array}{l} (r^* s^*)^* \leq (r^* s^*)^* \\ \varepsilon \leq r^* \end{array}\right\}$ $(r^* s^*)^* . \varepsilon \leq (r^* s^*)^* r^*$

Assim, $(r^* + s^*)^* = (r^* s^*)^* r^* \supseteq (r^* s^*)^*$ (2)

Logo, de (1) e (2) vem que $(r^* + s^*)^* = (r^* s^*)^*$.

31. Seja $A = \{a, b, c\}$. Verifique se são válidas as seguintes igualdades entre expressões regulares:
(e) $(ac(abc)^* + b)^* = ((a(cab)^*c)^* + b^*)^*$.

$$(ac(abc)^* + b)^* = (\underbrace{a(cab)^*c}_{r} + \underbrace{b}_{s})^*$$

$$= (a(cab)^*c + b^*)^*$$

$(r+s)^* = (r^* + s^*)^*$

$(r^* + s)^* = (r + s^*)^*$

32. Seja $A = \{a, b, c\}$. Considere a expressão regular $r = ((ab)^*(a + c))^* \in ER(A)$.
Diga qual das seguintes igualdades entre expressões regulares sobre o alfabeto A é verdadeira.

~~(a)~~ $r = (ab + c)^*(a + c) + \varepsilon$.
(b) $r = (ab + a + c)^*(a + c) + \varepsilon$.
~~(c)~~ $r = ab(ab + a + c)^* + \varepsilon$.
~~(d)~~ $r = (ab + a + c)^*$.

$$((ab)^* (a+c))^*$$

$a^2 = ((ab)^0 a)((ab)^0 a) = \varepsilon a \varepsilon a \in \mathcal{L}(((ab)^*(a+c))^*)$

$ab \notin \mathcal{L}((ab)^*(a+c))^*$. As palavras de $\mathcal{L}(((ab)^*(a+c))^*)$ são a palavra vazia ou palavras de sufixo a ou c, mas nunca palavras de sufixo b.

a) é falsa porque $a^2 \notin \mathcal{L}((ab+c)^*(a+c) + \varepsilon) = \mathcal{L}(ab+c)^* \{a, c\} + \{\varepsilon\}$.

$ab \in \mathcal{L}(ab + a + c)^*$ pelo que d) é falsa.

Se $u \in \mathcal{L}(ab(ab+a+c)^* + \varepsilon)$ então $u = \varepsilon$ ou ab é prefixo de u.

Então $a^2 \notin \mathcal{L}(ab(ab+a+c)^* + \varepsilon)$, logo c) é falsa.

Por exclusão de partes b) é verdadeira.

<u>Alternativa</u>: $(\underbrace{(ab)^*}_{r^*} \underbrace{(a+c)}_{s})^* = \varepsilon + (\underbrace{ab}_{r} + \underbrace{a+c}_{s})^* \underbrace{(a+c)}_{s}$

34. Sejam A um alfabeto e $r, s, t \in ER(A)$ tais que $s \leq t$ e $\varepsilon \leq r$. Verifique que r^*t é solução da equação $X = rX + s$.

r^*t é solução de $X = rX + s$ se e só se

$$r^*t = r \cdot r^*t + s$$

$r \cdot r^*t + s = r^+t + s$ (1)

Prop.:
$r, s \in ER(A)$
$X = rX + s$
então r^*s é a solução mínima e é a única solução se

$r \cdot r^* t + s = r^+ t + s$. (1)

Como $\varepsilon \leqslant r$, então $\varepsilon \leq r^+$, pelo que

$r^* = r^+ + \varepsilon = r^+$. Assim,

$r^+ t + s = r^* t + s$ (2)

solução mínima ... é a única solução se $\varepsilon \not\leq r$.

Como $s \leq t$ e $r^* = \varepsilon + r^*$, então $s \leq r^* t$

Logo $r^* t + s = r^* t$ (3).

De (1), (2) e (3) resulta que $r\, r^* t + s = r^* t$.

Efetivamente, $r^* t$ é uma solução da equação.

36. Em cada caso, indique a solução mínima do sistema equações lineares à direita sobre expressões regulares:

(b) $\begin{cases} X_1 = \overset{r}{a^*} X_1 + \overset{s}{\overbrace{aX_2 + \varepsilon}} \\ X_2 = aX_1 + aaX_2 + \varepsilon \end{cases}$

NOTA: $\varepsilon \leq a^*$, pelo que o sistema não tem necessariamente solução única.

$X_1 = r X_1 + s \longrightarrow r^* s$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = (a^*)^* (a X_2 + \varepsilon) \\ \_\_\_ \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = a^* (a X_2 + \varepsilon) \\ X_2 = a\left(a^* (a X_2 + \varepsilon)\right) + aa X_2 + \varepsilon \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X_2 = a^+ a X_2 + a^+ \varepsilon + aa X_2 + \varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_2 = (a a^+ + aa) X_2 + \underbrace{a^+ + \varepsilon}_{= a^*} \end{cases}$

$aa \leq a a^+$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X_2 = a a^+ X_2 + a^* \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_2 = (a a^+)^* . a^* \underset{(1)}{=} a^* \end{cases}$

(1) $\mathcal{L}\left((a a^+)^* a^*\right) = \mathcal{L}(a a^+)^* . \mathcal{L}(a)^* = \left(\{\varepsilon\} \cup \{a^n : n \geq 2\}\right) . \left(\{a^m : m \geq 0\}\right)$

$= \{a^k : k \geq 0\} = \mathcal{L}(a^*)$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = a^* (a a^* + \varepsilon) \\ X_2 = a^* \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = a^* (a^+ + \varepsilon) = a^* a^* = a^* \\ X_2 = a^* \end{cases}$

Uma solução do sistema é (a^*, a^*) e é a solução mínima

37. Seja (t_1, t_2) uma solução do seguinte sistema de equações lineares à direita sobre expressões regulares:

$$\begin{cases} X_1 = bX_1 + aX_2 + \varepsilon \\ X_2 = aX_1 + bX_2 \end{cases}.$$

De entre as quatro opções abaixo, diga qual é uma afirmação verdadeira:

~~(a)~~ O sistema tem mais do que uma solução e um resultado possível para t_2 é $t_2 = b^*a(b+ab^*a)^*$.

~~(b)~~ A solução do sistema é única e $t_1 = (b+ba)^*(b+\varepsilon)^*$.

(c) A solução do sistema é $((b+ab^*a)^*, b^*a(b+ab^*a)^*)$.

~~(d)~~ Uma solução do sistema é $((b+ab^*a)^*, b^*a)$.

$\varepsilon \in \mathcal{L}(X_1)$
$a \cdot \varepsilon \in \mathcal{L}(X_2)$
$aa \in \mathcal{L}(X_1)$
$a^3 \in \mathcal{L}(X_2)$
...

$X_2 = b^*a \quad \therefore a^3 \notin \mathcal{L}(X_2)$

$\varepsilon \not\leq a$ e $\varepsilon \not\leq b$ porque $\{\varepsilon\} \subseteq \{a\}$ e $\{\varepsilon\} \subseteq \{b\}$.
Logo este sistema tem uma solução única.
Então a) é falsa
Em b), $\mathcal{L}(t_1)$ é uma linguagem composta por ε e por palavras que têm prefixo b. O que é falso. Logo b) é falsa
Analisando iterativamente as equações do sistema, conclui-se que $a^3 \in \mathcal{L}(X_2)$ e $a^3 \notin \mathcal{L}(b^*a)$. Logo d) é falsa

Alternativa: Resolver o sistema:

Nota: Se resolverem iniciando pela 2.ª equação obtêm diretamente a opção correta.
Se resolverem iniciando pela 1.ª equação a solução do sistema não será "diretamente" a opção c) mas terão de efetuar simplificações das expressões regulares.

39. Considere a equação linear à esquerda sobre expressões regulares $X = Xr + s$ em que $r, s \in \mathcal{R}eg(A)$. Verifique sr^* é solução da equação.

sr^* é solução de $X = Xr + s$ se e só se

$$sr^* = sr^*r + s.$$

...

$$sr^*r + s = sr^+ + s = s(r^+ + \varepsilon) = sr^* \; ✓$$