MATEMÁTICA DISCRETA

Lic. Ciências da Computação

Soluções dos exercícios de Teoria de Números - Divisibilidade

---

1. (b) $a \mid 1 \Leftrightarrow (\exists_{k\in\mathbb{Z}})\ 1 = a\,k \Leftrightarrow (\exists_{k\in\mathbb{Z}})\ a = k = 1 \vee a = k = -1 \Leftrightarrow a = \pm 1$;

   (d) $a \mid b \Leftrightarrow (\exists_{k\in\mathbb{Z}})\ b = a\,k \Leftrightarrow_* (\exists_{k\in\mathbb{Z}})\ c\,b = c\,a\,k \Leftrightarrow a\,c \mid b\,c$ (* porque $c \neq 0$);

   (e)
$$\begin{array}{rcl} (a|b \wedge a|b+c) & \Leftrightarrow & (\exists_{k_1\in\mathbb{Z}})\ b = ak_1 \wedge (\exists_{k_2\in\mathbb{Z}})\ b+c = ak_2 \\ & \Leftrightarrow & (\exists_{k_1\in\mathbb{Z}})\ b = ak_1 \wedge (\exists_{k_2\in\mathbb{Z}}) c = ak_2 - b \\ & \Leftrightarrow & (\exists_{k_1\in\mathbb{Z}})(\exists_{k_2\in\mathbb{Z}})\ (b = ak_1 \wedge c = ak_2 - ak_1) \\ & \Rightarrow & (\exists_{k\in\mathbb{Z}})\ c = ak \\ & \Leftrightarrow & a \mid c. \end{array}$$

2. Sugestão: $y = 2 \times (2x + 3y) - (4x + 5y)$.

3. Sugestão: na demostração do passo indutivo, notar que $5^{n+1} - 1 = 4 \times 5^n + 5^n - 1$.

4. (a) $q = 7$ e $r = 1$;
   (b) $q = -8$ e $r = 3$;
   (c) $q = 8$ e $r = 3$;
   (d) $q = -7$ e $r = 1$;
   (e) $q = -30$ e $r = 0$;
   (f) $q = -31$ e $r = 44$;
   (g) $q = 31$ e $r = 44$;
   (h) $q = 0$ e $r = 0$.

5. (a) Basta provar que o conjunto dos divisores comuns de a e b é igual ao conjunto dos divisores comuns de b e a, que por sua vez, é igual ao conjunto dos divisores comuns de $|a|$ e $|b|$.
   (b) Sugestão: comece por mostrar que $b \mid$ m.d.c.(a, b).
   (c) Consequência imediata da alínea anterior.

6. Sugestão: ver Exemplo 2. Notar que para cada alínea há várias respostas possíveis quanto aos coeficientes da combinação linear.

   (a) m.d.c.$(a, b) = 2 = a \times (-4) + b \times 17$;
   (b) m.d.c.$(a, b) = 2 = a \times 17 + b \times (-4)$; (prestar atenção ao que acontece no primeiro passo do algoritmo de Euclides);
   (c) m.d.c.$(a, b) = 3 = a \times 4 + b \times (-3)$;
   (d) m.d.c.$(a, b) = 3 = a \times (-4) + b \times 3$;
   (e) m.d.c.$(a, b) = 1 = a \times (-10) + b \times 17$;
   (f) m.d.c.$(a, b) = 1 = a \times (-10) + b \times (-17)$.

7. Sugestão: ver Exemplo 3 e usar resultados do exercício anterior sempre que possível.

(a) $x = -40 + 170k, \quad y = 170 - 720, \quad \text{com } k \in \mathbb{Z};$ (notar que $20 = 2 \times 10$)
(b) Não tem soluções; (notar que $3 \nmid 7$)
(c) $x = 30 + 111k, \quad y = 51 + 189k, \quad \text{com } k \in \mathbb{Z};$
(d) $x = 30 + 111k, \quad y = -51 - 189k, \quad \text{com } k \in \mathbb{Z};$
(e) $x = 80 - 232k, \quad y = 328 - 952k, \quad \text{com } k \in \mathbb{Z}.$

8. Sugestão: comece por mostrar a igualdade entre od dois conjuntos (o conjunto S e o conjunto dos múltiplos de m.d.c.(a,b)), o que pode ser efetuado mostrando duas inclusões, e use a igualdade de Bezout.

9. Sugestão: comece por pensar que um número inteiro ou é par (*i.e.* é da forma $2k$) ou é ímpar (*i.e.* é da forma $2k+1$).

10. Sugestão: comece por pensar que um número inteiro a é da forma $3k$, ou $3k+1$, ou $3k+2$.

11. Sugestão: recorde que um quadrado perfeito é um número da forma n^2 e que n é da forma $3k$, ou $3k+1$, ou $3k+2$.

12. (a) Ver slides pág. 14 e 15.
    (b) Ver slides pág. 16.
    (c) Sugestão: veja que é possível escrever c na forma $cax + cby$.

13. Ver alínea 9 no teorema da pág. 5.

14. Sugestão: comece por verificar que $2 \mid a(a+1)(2a+1)$ e $3 \mid a(a+1)(2a+1)$.

15. Sugestão: comece por escrever $n^3 - n$ como produto de três fatores.

    Alternativa: use método de indução matemática.

17. Sugestão: primeiro calcule o m.d.c.(a,b) (ver exercício 6) e escreva m.d.c.(a,b) como combinação linear de a e b. Use o teorema da página 29., obtenha m.m.c.(a,b) e escreva-o como combinação linear de a e b.