Geometria | Primeiro teste
Lic. Ciências da Computação | 07 abril 2016

Proposta de resolução

1 Se $(x_1,x_2)_R$ são coordenadas em R e $(x_1',x_2')_{R'}$ são coordenadas em R' sabemos que:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

onde (w_1,w_2) são as coordenadas de O' no referencial R.

Como $O=(-1,0)_{R'}$ e $O=(0,0)_R$ temos:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Portanto a expressão matricial pretendida é

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

Como $M=(2,1)_R$ obtemos que

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

Cálculos: $\begin{cases} x_1'+x_2'+1=2 \\ -x_1'+2x_2'-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1'+x_2'+1=2 \\ 3x_2'=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1'=0 \\ x_2'=1 \end{cases}$

Logo $M=(0,1)_{R'}$

2

a $r=(1,1,1)+\langle(1,1,0)\rangle$ reta de A

Eq. paramétricas $(x,y,z)=(1,1,1)+\alpha(1,1,0)$; $\alpha\in\mathbb{R}$

Cálculos $\begin{cases} x=1+\alpha \\ y=1+\alpha \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ z=1 \end{cases}$

Sistema de eq. cartesianas de r: $\begin{cases} x-y=0 \\ z=1 \end{cases}$

b Π: $x-y+2z-2=0$ plano de A

Eq. paramétricas $\begin{cases} x=\alpha \\ y=\alpha+2\beta-2 \\ z=\beta \end{cases}$; $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$(x,y,z) = (0,-2,0) + \alpha(1,1,0) + \beta(0,2,1)$

Eq. vetorial: $\Pi = (0,-2,0) + \langle (1,1,0), (0,2,1) \rangle$

c. O subespaço vetorial associado a r é $\langle (1,1,0) \rangle$

o subespaço vetorial associado a Π é $\langle (1,1,0), (0,2,1) \rangle$

Como $\langle (1,1,0) \rangle$ está claramente contido em $\langle (1,1,0), (0,2,1) \rangle$ podemos concluir que $r \parallel \Pi$

O ponto $A = (1,1,1)$ é tal que $A \in r$, como $1-1+2-2=0$ então $A \in \Pi$, além disso, como $r \parallel \Pi$, podemos concluir que $r \subset \Pi$.

3

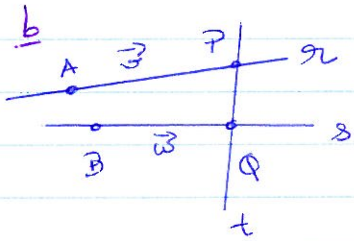
a. Temos que $r+s = A + \langle \vec{AB}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ e que as retas r e s são enviesadas sse $\dim(\langle \vec{AB}, \vec{v}, \vec{w} \rangle) = 3$

$\vec{AB} = B - A = (0,-2,0)$

$$\det(\vec{AB}, \vec{v}, \vec{w}) = \det \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -6$$

Como $\det(\vec{AB}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$, os três vetores são linearmente independentes logo $\dim(\langle \vec{AB}, \vec{v}, \vec{w} \rangle) = 3$ e, portanto, r e s são enviesadas

b.



Seja t a perpendicular comum de r e s e sejam P e Q os pés da perpendicular em r e s, respetivamente.

Temos: $\vec{AB} = \vec{AP} + \vec{PQ} + \vec{QB}$

Como $A, P \in r$ então $\vec{AP} = \alpha \vec{v}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$Q, B \in s$ então $\vec{QB} = \beta \vec{w}$, $\beta \in \mathbb{R}$

Além disso como $t \perp r$ temos $\vec{PQ} \cdot \vec{v} = 0$

e $t \perp s$ implica $\vec{PQ} \cdot \vec{w} = 0$

Assim, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} \vec{AB} \cdot \vec{v} = \alpha\, \vec{v} \cdot \vec{v} + \beta\, \vec{w}\, \vec{v} \\ \vec{AB} \cdot \vec{w} = \alpha\, \vec{v} \cdot \vec{w} + \beta\, \vec{w}\, \vec{w} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = 3\alpha \\ 2 = 6\beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2/3 \\ \beta = 1/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{AP} = -\frac{2}{3}(1,1,1) \\ \vec{QB} = \frac{1}{3}(2,-1,-1) \end{cases}$$

Portanto $P = (1,1,0) - \frac{2}{3}(1,1,1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

$Q = (1,-1,0) - \frac{1}{3}(2,-1,-1) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

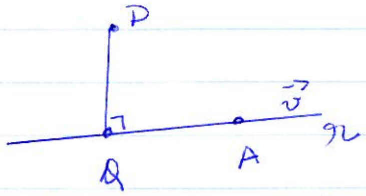
$\vec{PQ} = Q - P = (0,-1,1)$

Eq. vetorial de t: $t = P + \langle \vec{PQ} \rangle$

$t = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) + \langle (0,-1,1) \rangle$

4

a



$r = A + \langle \vec{v} \rangle$

$P \in A$

$Q = proj_r(P)$

Temos que: $\vec{PA} = \vec{PQ} + \vec{QA}$

Por definição de projeção ortogonal $\vec{PQ} \perp r$ logo $\vec{PQ} \cdot \vec{v} = 0$

Como A e Q são pontos de r, então $\vec{AQ} = \alpha \vec{v}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$

Assim $\vec{PA} = \vec{PQ} + \vec{QA} \Rightarrow \vec{PA} \cdot \vec{v} = (\vec{PQ} + \vec{QA}) \cdot \vec{v}$

$\Rightarrow \vec{PA} \cdot \vec{v} = -\alpha\, \vec{v} \cdot \vec{v} \Rightarrow \alpha = -\frac{\vec{PA} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}$

De $\vec{AQ} = \alpha \vec{v}$ vem $Q = A + \alpha \vec{v} = A - \frac{\vec{PA} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}$

ou seja, $Q = A + \frac{\vec{AP} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}$.

b Usando a fórmula da alínea anterior e fazendo $P = (1,2,-1)$, $A = (3,0,1)$ e $\vec{v} = (1,-1,1)$ temos

$\vec{AP} = P - A = (-2,2,-2)$ logo $\vec{AP} \cdot \vec{v} = -2-2-2 = -6$

e, assim, $Q = (3,0,1) - \frac{6}{3}(1,-1,1) = (1,2,-1)$