Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Lic. em Ciências da Computação
Lic. em Matemática
2019/2020

Álgebra Universal e Categorias

2º teste (2 de junho)

1. Considere o monóide $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}; \times, 1)$ visto como uma categoria $\mathbf{Z}$, i.e., $\mathbf{Z}$ é a categoria $(\{\mathcal{Z}\}, \mathrm{hom}, \mathrm{id}, \circ)$, onde $\mathrm{hom}_{\mathbf{Z}}(\mathcal{Z}, \mathcal{Z}) = \mathbb{Z}$, $\mathrm{id}_{\mathcal{Z}} = 1$ e a lei de composição $\circ$ é definida por $p \circ q = p \times q$, para quaisquer $p, q \in \mathbb{Z}$.
Na categoria **Set**, considere as funções f, g e i definidas por

$$f, g : \begin{array}{ccc} \{3\} & \to & \{4\} \\ 3 & \mapsto & 4 \end{array}, \qquad i : \begin{array}{ccc} \{1,2\} & \to & \{3\} \\ 1 & \mapsto & 3 \\ 2 & \mapsto & 3 \end{array}.$$

Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes:

   (a) Para qualquer categoria $\mathbf{C}$, se I é um objeto inicial de $\mathbf{C}$, então I é um objeto inicial em qualquer subcategoria de $\mathbf{C}$.

   (b) Na categoria $\mathbf{Z}$, todo o monomorfismo é um morfismo invertível à esquerda.

   (c) Na categoria **Set**, o par $(\{1,2\}, i)$ é um igualizador de f e g.

2. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ morfismos em $\mathbf{C}$. Mostre que se $g \circ f$ é um isomorfismo, então f é um monomorfismo e g é um epimorfismo.

3. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e A, T objetos de $\mathbf{C}$ tais que T é um objeto terminal. Mostre que se na categoria $\mathbf{C}$ existe um monomorfismo $f : A \to T$, então, para qualquer objeto B de $\mathbf{C}$, existe no máximo um morfismo de B em A. Conclua que todo o morfismo de $\mathbf{C}$ com domínio A é um monomorfismo.

4. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria, A, B, C objetos de $\mathbf{C}$ e $i_A : A \to C$, $i_B : B \to C$ morfismos de $\mathbf{C}$ tais que $(C; (i_A, i_B))$ é um coproduto de A e B. Mostre que se existe um $\mathbf{C}$-morfismo $h : C \to C$ tal que $h \circ i_A = i_A$ e $h \circ i_B = i_B$, então $h = id_C$.

5. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria, $f, g : A \to B$ e $i : I \to A$ morfismos de $\mathbf{C}$ tais que (I, i) é um igualizador de f e g. Mostre que i é um epimorfismo se e só se (A, id_A) é um igualizador de f e g.

6. Sejam A, B, C conjuntos e $f : A \to C$, $g : B \to C$ funções. Sejam $P = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B, f(a) = g(b)\}$ e p_A, p_B as funções definidas por

$$p_A : \begin{array}{ccc} P & \to & A \\ (a,b) & \mapsto & a \end{array}, \qquad p_B : \begin{array}{ccc} P & \to & B \\ (a,b) & \mapsto & b \end{array}.$$

Mostre que na categoria **Set** o par $(P, (p_A, p_B))$ é um produto fibrado de (f, g).

7. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e U um objeto (fixo) de $\mathbf{C}$. Seja F_U o funtor de $\mathbf{C}$ na categoria **Set** tal que:

   - a cada objeto A de $\mathbf{C}$ associa o conjunto $\mathrm{hom}_{\mathbf{C}}(U, A)$ dos $\mathbf{C}$-morfismos de U em A;
   - a cada $\mathbf{C}$-morfismo $f : A \to B$, associa a função

$$F_U(f) : \begin{array}{ccc} F_U(A) & \to & F_U(B) \\ p & \mapsto & f \circ p \end{array}.$$

Identifique os monomorfismos da categoria **Set**. Diga se, para toda a categoria $\mathbf{C}$ e para todo o objeto U de $\mathbf{C}$, o funtor F_U: i. preserva monomorfismos; ii. é fiel.

Cotação: 1.(1,75+1,75+1,75); 2.(1,75); 3.(2,25); 4.(2,25); 5.(2,75); 6.(2,75); 7.(3,0).