2ªaula

3 de março de 2021 11:00

6. Em cada uma das alíneas seguintes define-se indutivamente um conjunto L de palavras sobre $A = \{a, b\}$. Em cada caso dê uma definição explícita para L.

(c) (i) $a \in L$; (ii) se $x \in L$, então $\underset{\sim}{a}x$, $x\underset{\sim}{b} \in L$.

Exemplos de palavras de L : a, aa, ab, aab, $aabb$, $aabbb$, $aabbbb$, ...

Exemplos de palavras que não pertencem a L : ε, b, ba, bba, $\underline{bab}$, $\underline{aba}$

$$\cdots \underbrace{\boxed{a}\boxed{a}\boxed{a}\boxed{a}}\boxed{b}\boxed{b}\boxed{b} \cdots = a^n b^m \quad n \geqslant 1,\ m \geqslant 0$$

$$L' = \{ a^n b^m : n \geqslant 1,\ m \geqslant 0 \}$$

Para completar o exercício com toda a formalidade, teríamos de provar que $L = L'$.

(h) (i) $\varepsilon \in L$; (ii) se $x \in L$, então, caso $x = yb$, para $y \in A^*$, $xa \in L$, senão $xb \in L$.

Exemplos de palavras de L : ε, b, ba, bab, $baba$, ...

Exemplos de palavras que não pertencem a L : a, b^2, a^2, aba,

$x = \varepsilon \longrightarrow xb = b$

$x = b \longrightarrow xa = ba$

$x = ba \longrightarrow xb = bab$

$$L' = \{\varepsilon\} \cup \{(ba)^n b^m : n \geqslant 0,\ m \in \{0,1\}\} =$$

$$= \{(ba)^n b^m : n \geqslant 0,\ m \in \{0,1\}\} /\!/ \quad = \{ba\}^* \cdot \{b, \varepsilon\} /\!/$$

...

$L = L'$

7. Sejam $k, n \in \mathbb{N}$ e A um alfabeto com k letras.

(a) Determine o número de palavras sobre A de comprimento 4.

$A = \{a_1, \ldots, a_k\}$

$$\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{} \longrightarrow k \times k \times k \times k = k^4$$

$k \quad k \quad k \quad k$

$$\# \{u \in A^* : |u| = 4\} = k^4 /\!/$$

(c) Indique, mais geralmente, o número de palavras sobre A de comprimento não superior a n.

$$\# \{u \in A^* : |u| \leq n\} = \underset{|u|=0}{1} + \underset{|u|=1}{k^1} + \underset{|u|=2}{k^2} + \underset{|u|=3}{k} + \underset{|u|=4}{k^4} + \cdots + \underset{|u|=n}{k^n} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} k^i \qquad \frac{\quad -1}{k-1} .$$

10. Sejam $A = \{a, b\}$, $X = \{a, ab\}$ e $Y = \{\varepsilon, bab, ab\}$.

(a) Dê exemplos de palavras dos conjuntos Y^+ e Y^* e constate que $Y^+ = Y^*$.

(b) Determine X^0 e X^3.

(c) Calcule X^+ e X^*.

(d) Determine $L = abb(Y^2 \cup X)$.

(e) Determine $(ab)^{-1}L$ e $(ab)^{-1}Y^2$.

$$Y^+ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y^n = Y^1 \cup Y^2 \cup \ldots \cup Y^n \cup \ldots$$

$$= \{\varepsilon, bab, ab\} \cup \{\varepsilon, bab, ab, bab^2ab, (ba)^2b, ab^2ab, (ab)^2\} \cup \ldots$$

$$Y^2 = \{ \underbrace{\varepsilon\varepsilon}_{3 \times 3}, \underbrace{\varepsilon bab}, \varepsilon ab, \cancel{bab}\,\varepsilon, babbab, babab, \ldots \} = \{\varepsilon, bab, ab, bab^2ab, babab, abbab, abab\}$$

$$Y^3 = Y^2 \cdot Y = \{\varepsilon, bab, ab, bab^2ab, (ba)^2b, ab^2ab, (ab)^2\} \cdot \{\varepsilon, bab, ab\} = \{$$

$$= \{uv : u \in Y^2, v \in Y\} = \underline{\{u\varepsilon : u \in Y^2\}} \cup \{uv : u \in Y^2, v \in \{bab, ab\}\}$$

NOTA: $Y \subsetneq Y^2$; $Y^2 \subsetneq Y^3$, ... Genericamente, $Y^n \subset Y^{n+1}$.

$Y^* = Y^+ \cup \{\varepsilon\} = Y^+$ porque $\varepsilon \in Y^+$, ou seja, porque $\varepsilon \in Y$.

$Y^* = Y^+ \cup \{\varepsilon\} = Y^+$ porque $\varepsilon \in Y^+$, ou seja, porque $\underline{\varepsilon \in Y}$.

b) $X^0 = \{a, ab\}^0 = \{\varepsilon\}$

$X^3 = X^2 \cdot X = \{a^2, (ab)^2, a^2b, aba\} \cdot \{a, ab\} =$

$X^2 = X \cdot X = \{a, ab\} \cdot \{a, ab\} = \{uv : u, v \in X\} = \{a^2, (ab)^2, a^2b, aba\}$

c) $X^+ = \bigcup X^n = \{a, ab, a^2, (ab)^2, a^2b, aba, a^3, (ab)^2a, a^2ba, aba^2, a^3b, (ab)^3, a^2bab, abaab, \dots\}$

$= \{u \in A^* : a \text{ é prefixo de } u, \ b^2 \text{ não é fator de } u\}$

$X^* = X^+ \cup \{\varepsilon\}$

d) $= abb\,(Y^2 \cup X) = abb\,(\{\varepsilon, bab, ab, (bab)^2, (ab)^2, babab, ab^2ab\} \cup \{a, ab\})$

$= abb \cdot \{\varepsilon, a, ab, bab, (bab)^2, (ab)^2, (ba)^2b, ab^2ab\}$

$= \{ab^2, ab^2a, ab^2ab, ab^3ab, ab^2(bab)^2, ab^2(ab)^2, ab^2(ba)^2b, (ab^2)$

e) $(ab)^{-1}L = \{b, ba, bab, b^2ab, b(bab)^2, b(ab)^2, b(ba)^2b, bab^2ab\}$.

Alternativa:

$(ab)^{-1}L = (ab)^{-1}\left(abb(Y^2 \cup X)\right) = \cancel{(ab)^{-1}}\,\cancel{ab}b \quad \cup X) = b\,(Y^2 \cup X)$.

$(ab)^{-1}$ ε, bab, ab, babab, babbab, abab, abbab$\}$

$= \{ab^0, bab\} = Y$

Alternativa 1:

$(ab)^{-1}Y^2 = b^{-1}(a^{-1}Y^2) = b^{-1}\{b, bab, b^2ab\} = \{\varepsilon, ab, bab\} = Y$

Alternativa 2

$\rightarrow (ab)^{-1}Y^2 = b^{-1}(a^{-1}Y^2) = b^{-1}\left(\underline{(a^{-1}Y)} \cdot Y \cup \underline{a^{-1}Y}\right) = b^{-1}(\{b\}Y \cup \{b\}) =$

$= b^{-1}\underbrace{\{b\}Y} \cup b^{-1}\{b\} = Y \cup \{\varepsilon\} = Y$.

16. Seja A um alfabeto e sejam $L, L_1, L_2 \subseteq A^*$. Mostre que:

(a) se $L_1 \subseteq L_2$, então $LL_1 \subseteq LL_2$ e $L_1L \subseteq L_2L$.

(b) pode ter-se $LL_1 \subseteq LL_2$, $L_1L \subseteq L_2L$ e $L_1 \not\subseteq L_2$.

$L_1 \subseteq L_2 \Rightarrow LL_1 \subseteq LL_2 \wedge L_1L \subseteq L_2L$ — a)

$LL_1 \subseteq LL_2 \wedge L_1L \subseteq L_2L \not\Rightarrow L_1 \subseteq L_2$. — b)

a) Suponhamos que $L_1 \subseteq L_2$, o que quer dizer que, se $\underline{u \in L_1}$, então $\underline{u \in L_2}$; onde $u \in A^*$.

Vamos mostrar que $LL_1 \subseteq LL_2$.

$LL_1 = \{vu_1 \in A^* : v \in L, u_1 \in L_1\}$

Seja $w \in LL_1$. Então existem $v \in L$ e $\underline{u_1 \in L_1}$ tais que $w = vu_1$.

Como $u_1 \in L_1$, então $u_1 \in L_2$ por hipótese. Logo $vu_1 \in LL_2$; ou seja $w \in LL_2$. Logo $LL_1 \subseteq LL_2$.

Falta provar que $L_1L \subseteq L_2L$. A demonstração é similar à anterior a menos da ordem das palavras envolvidas na concatenação.

• • •

b) Queremos mostrar que $LL_1 \subseteq LL_2$ e $L_1L \subseteq L_2L$ não implica que $L_1 \subseteq L_2$. Basta neste caso, encontrar um exemplo (um alfabeto A e linguagens L, L_1 e L_2) em que se verifique $\underbrace{LL_1 \subseteq LL_2 \text{ e } L_1L \subseteq L_2L}_{\text{depende da escolha de } L}$ mas em que $\underbrace{L_1 \nsubseteq L_2}_{L \text{ não influência}}$.

<u>Exemplo 1</u>: $A = \{a, b\}$

$L_1 = \{a\}$, , $L = \emptyset$

$$\begin{cases} LL_1 = \emptyset\{a\} = \emptyset = \emptyset\{b\} = LL_2 \\ L_1L = \{a\}\emptyset = \emptyset = \{b\}\emptyset = L_2L \end{cases} \quad \text{e} \quad L_1 \nsubseteq L_2 .$$

14. Sejam A um alfabeto, L uma linguagem sobre A e $u, v, w \in A^*$. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(a) $uv = uw \Rightarrow v = w$; (b) $vu = wu \Rightarrow v = w$.

(c) $\varepsilon L = L\varepsilon = L$; (d) $\varnothing L = \varnothing$;

(e) $L\varnothing = L$; (f) $L = L^1$;

(g) $L^+ = L^*L$; (h) $\varnothing^+ = \varnothing$;

(i) $\varnothing^* = \{\varepsilon\}$; (j) $\varepsilon \in L^+, \forall L$;

(k) $L^+ \cup \{\varepsilon\} = L^*$; (l) $L^+ \neq L^*, \forall L$;

(m) $L^+ \subseteq L^*$; (n) $L^* \subseteq L^+$.