4ª aula

15 de março de 2021 17:00

29. Seja A um alfabeto.

(b) Mostre que, para quaisquer $r, r_1, r_2, s, s_1, s_2 \in ER(A)$, se tem:

viii. se $r_1 \leq s^*$ e $r_2 \leq s^*$, então $r_1 r_2 \leq s^*$.

(c) Verifique se, para quaisquer $r, s \in ER(A)$, $(r^+s)^* = (r^*s^*)^*$.

b) viii) Por hipótese $r_1 \leq s^*$ e $r_2 \leq s^*$

$\mathcal{L}(r_1) \subseteq \mathcal{L}(s^*)$ e $\mathcal{L}(r_2) \subseteq \mathcal{L}(s^*)$. Logo $\mathcal{L}(r_1 r_2) = \mathcal{L}(r_1) \cdot \mathcal{L}(r_2) \subseteq \mathcal{L}(s^*)\mathcal{L}(s^*)$

ou seja, $r_1 r_2 \leq s^* \cdot s^*$. (1)

$$\mathcal{L}(s^*) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{L}(s)^n \quad \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \mathcal{L}(s)^k = \bigcup_{k_1 \in \mathbb{N}_0} \bigcup_{k_2 \in \mathbb{N}_0} \mathcal{L}(s)^{k_1} \mathcal{L}(s)^{k_2} = \bigcup_{k_1 \in \mathbb{N}_0} \bigcup_{k_2 \in \mathbb{N}_0} \mathcal{L}(s)^{k_1+k_2} =$$

$$= \mathcal{L}(s)^0 \cup \mathcal{L}(s)^1 \cup \mathcal{L}(s)^2 \cup \mathcal{L}(s)^3 \cup \ldots\ldots$$

$$= \bigcup_{m \in \mathbb{N}_0} \mathcal{L}(s)^m = \mathcal{L}(s)^* = \mathcal{L}(s^*)$$

Logo $s^* s^* = s^*$, e de (1) vem então que $r_1 r_2 \leq s^*$.

c) Queremos saber se $(r^+s)^* = (r^*s^*)^*$.

De 29b iv) Temos que $(r^+s)^* \leq (r^*s^*)^*$. Falta apenas estudar a desigualdade $(r^*s^*)^* \leq (r^+s)^*$ para saber se é válida.

$$\mathcal{L}(r^*s^*)^* = \left(\mathcal{L}(r)^* \mathcal{L}(s)^*\right)^* = \Big(\underbrace{\mathcal{L}(r)^0 \mathcal{L}(s)^1}_{\{\varepsilon\}\mathcal{L}(s) = \mathcal{L}(s)}\Big)^1 \cup \ldots$$

Então $\mathcal{L}(s) \subseteq \mathcal{L}(r^*s^*)^*$.

$$\mathcal{L}(r^+s)^* = \left(\mathcal{L}(r^+) \cdot \mathcal{L}(s)\right)^* = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{L}(r)^n \cdot \mathcal{L}(s)\right)^* = \{\varepsilon\} \cup \underline{\mathcal{L}(r)}^1 \cdot \mathcal{L}(s) \cup \ldots\ldots$$

Vamos tentar construir um contra-exemplo em que $\varepsilon \notin \mathcal{L}(r)$.

(pois nesse caso $\mathcal{L}(s) \subseteq \mathcal{L}(r^+s)^*$)

Sejam $A = \{a, b\}$, $r = a$ e $s = b$.

Então $\varepsilon \notin \mathcal{L}(r) = \{a\}$ e $\mathcal{L}(s) = \{b\}$.

Neste exemplo, $b \in \mathcal{L}(r^*s)^* = \mathcal{L}(a^*b)^* = \{\varepsilon, b, b^2, \ldots, ab, a^2b, \ldots\ldots\}$

e $b \notin \mathcal{L}(r^+s)^* = \mathcal{L}(a^+b)^* = \{\varepsilon, ab, a^2b, abab, a^2ba^3b, \ldots\ldots\}$

Então $\mathcal{L}(a^*b)^* \neq \mathcal{L}(a^+b)^*$.

Logo $(r^+s)^* = (r^*s)^*$ não é válida para toda a expressão regular r e s.

30. Seja A um alfabeto e sejam $r, s \in ER(A)$. Mostre que:

30. Seja A um alfabeto e sejam $r, s \in ER(A)$. Mostre que:

(c) $r(sr)^* = (rs)^*r$;

(d) $(r+s)^* = (r^*+s^*)^* = (r^*s)^*r^* = r^*(sr^*)^*$;

c) $= \quad \cdot\, \mathcal{L}(sr)^* = \mathcal{L}(r)\cdot \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{L}(sr)^n = \mathcal{L}(r)\cdot \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} (\mathcal{L}(s)\mathcal{L}(r))^n$

$= \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{L}(r)\cdot(\mathcal{L}(s)\cdot\mathcal{L}(r))^n = \mathcal{L}(r)\{\varepsilon\} \cup \mathcal{L}(r)\mathcal{L}(s)\mathcal{L}(r) \cup$
$\cup\ \mathcal{L}(r)\mathcal{L}(s)\mathcal{L}(r)\mathcal{L}(s)\mathcal{L}(r) \cup \dots$

$= \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} (\mathcal{L}(r)\cdot\mathcal{L}(s))^n\, \mathcal{L}(r)$

$= \underbrace{\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} (\mathcal{L}(r)\cdot\mathcal{L}(s))^n\right)}\cdot \mathcal{L}(r) = (\mathcal{L}(r)\mathcal{L}(s))^*\mathcal{L}(r)$

$= \mathcal{L}(rs)^*\mathcal{L}(r) = \mathcal{L}((rs)^*r)$

Então $r(sr)^* = (rs)^*r$.

d) $r \leq r^*$ por 29 b i)
$s \leq s^*$

Logo $r+s \leq r^*+s^*$ por 29 b v).
Então $(r+s)^* \leq (r^*+s^*)^*$ (1) por 29 b iii).

Temos que $\begin{cases} r \leq r+s \\ s \leq r+s \end{cases}$ por 29 b ii)

Novamente por 29 b iii) $\begin{cases} r^* \leq (r+s)^* \\ s^* \leq (r+s)^* \end{cases}$

Então, por 29 b vii) $r^*+s^* \leq (r+s)^*$ e, consequentemente, $(r^*+s^*)^* \leq ((r+s)^*)^*$ por 29 b iii).

Por 30 a) $((r+s)^*)^* = (r+s)^*$. Logo $(r^*+s^*)^* \leq (r+s)^*$ (2).

De (1) e (2) conclui-se que $(r^*+s^*)^* = (r+s)^*$

$\begin{cases} r^* \leq r^*+s^* \\ s \leq s^* \leq r^*+s^* \end{cases}$

Daqui resulta que $(r^*s) \leq (r^*+s^*)^*$ e então

$(r^*s)^* \leq ((r^*+s^*)^*)^* = (r^*+s^*)^*$ e

$(r^*s)^*r^* \leq (r^*+s^*)^* r^* \leq (r^*+s^*)^*(r^*+s^*)^* = (r^*+s^*)^*$

Logo $(r^*s)^*r^* \leq (r^*+s^*)^*$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\leq}$

Logo $(r^*s)^* r^* \leq (r^* + s^*)^*$

$r \leq r^* = \varepsilon r^* \leq (r^*s)^* r^*$

$s = \varepsilon \cdot s \leq r^* s \cdot \varepsilon \leq (r^* s)^* \cdot r^*$

Então $(r+s) \leq (r^*s)^* r^*$ e, consequentemente, $\boxed{(r+s)^* \leq (\underbrace{(r^*s)^* r^*}_{?})^*}$

$\mathcal{L}\left(((r^*s)^* r^*)^0\right) = \{\varepsilon\}$

$\mathcal{L}\left(((r^*s)^* r^*)^1\right) = \mathcal{L}\left(((r^*s)^* r^*)^1\right)$

$\mathcal{L}\left(((r^*s)^* r^*)^2\right) = \mathcal{L}\left((r^*s)^* r^* (r^*s)^* r^*\right) = \mathcal{L}\left((r^*s)^* r^* r^* (s r^*)^*\right) =$

$= \mathcal{L}\left((r^*s)^* r^* (s r^*)^*\right) = \mathcal{L}\left(r^* \underline{(s r^*)^*} \underline{(s r^*)^*}\right) =$

$(s r^*)^*)$

$\vdots$

Daqui resulta que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{L}\left(((r^*s)^* r^*)^n\right) = \{\varepsilon\} \cup \mathcal{L}\left((r^*s)^* r^*\right)$

$= \mathcal{L}\left((r^*s)^* r^*\right)$

Então $\boxed{\left((r^*s)^* r^*\right)^* = (r^*s)^* r^*.}$

Finalmente obtém-se $(r+s)^* \leq (r^*s)^* r^*.$

31. Seja $A = \{a, b, c\}$. Verifique se são válidas as seguintes igualdades entre expressões regulares:

(a) $a(b^* + a^*b) = a(b^* + a^+b)$,

(b) $((ab)^*a)^* = (ab + a)^+ab + \varepsilon$,

(c) $(ac(abc)^* + b)^* = ((a(cab)^*c)^* + b^*)^*$.

31b) $r = ab$, $s = a$ $\quad ((ab)^*a)^* = (r^*s)^*$

30f)

$(rs^*)^* = \varepsilon + r(r+s)^*$

$\boxed{(r^*s)^* = \varepsilon + (r+s)^* s}$

Então $((ab)^*a)^* = \varepsilon + (ab+a)^* a$

Agora pretende-se comparar as expressões $\varepsilon + (ab+a)^* a$ e $(ab+a)^+ ab + \varepsilon$

$a \in \mathcal{L}\left(\underbrace{\varepsilon + (ab+a)^*}_{\varepsilon} \underbrace{a}_{a}\right)$ porque $a = \varepsilon \cdot a$

$a \notin \mathcal{L}\left(\varepsilon + \underbrace{(ab+a)^+}_{} \underbrace{ab}_{ab}\right)$ porque ab não é sufixo de a.

Logo a igualdade da alínea b) é falsa.

33. Sejam $A = \{a, b, c\}$ e L a linguagem sobre A constituída por todas as palavras w tais que acc e cca são fatores de w. Seja r uma expressão regular tal que a linguagem associada a r é $L(r) = L$. Qual das seguintes expressões é uma solução para r?

(a) $r = (a+b+c)^*acc(a+b+c)^*cca(a+b+c)^* + (a+b+c)^*cca(a+b+c)^*acc(a+b+c)^*$.

(b) $r = (a+b+c)^*acc(a+b+c)^*cca(a+b+c)^* + (a+b+c)^*acca(a+b+c)^* + (a+b+c)^*cca(a+b+c)^*acc(a+b+c)^* + (a+b+c)^*ccacc(a+b+c)^*$.

(c) $r = acc(a+b+c)^*cca + (a+b+c)^*accca(a+b+c)^* + (a+b+c)^*acca(a+b+c)^* + cca(a+b+c)^*acc + (a+b+c)^*ccacc(a+b+c)^*$.

(d) $r = (a+b+c)^*acc(a+b+c)^*cca(a+b+c)^* + (a+b+c)^*accca(a+b+c)^* + (a+b+c)^*acca(a+b+c)^* + (a+b+c)^*cca(a+b+c)*acc(a+b+c)^* + (a+b+c)^*ccacc(a+b+c)^*$.

1) acc cca

2) acc
cca

3) acc
cca

4) cca acc

5) cca
acc

38. Seja (t_1, t_2, t_3) uma solução do seguinte sistema de equações lineares à direita sobre expressões regulares:

$$\begin{cases} X_1 = bX_2 \\ X_2 = aX_3 \\ X_3 = aX_1 + bX_2 + b \end{cases}$$

b é prefixo das palavras de $\mathcal{L}(t_1)$

a é prefixo das palavras de $\mathcal{L}(t_2)$

$\not\ni$ (a)

De entre as quatro opções abaixo, diga qual é uma afirmação verdadeira:

~~(a)~~ Existem várias soluções e na solução mínima o resultado para t_1 é $t_1 = \varepsilon$.

(b) Um expressão possível para t_1 é $t_1 = ba(aba + ba)^*b$.

(c) A solução do sistema é única e $t_1 = ba(a + b)^+bab + bab$.

~~(d)~~ A solução do sistema é única e $t_2 = ((ab)^+a)^*(ba)^+b$.

$bab \in \mathcal{L}(t_2)$

$\varepsilon \notin \{a\}$ e $\varepsilon \notin \{b\}$, logo o sistema tem solução única.

$$\begin{cases} X_1 = bX_2 \\ X_2 = aX_3 \\ X_3 = aX_1 + bX_2 + b \end{cases} \iff \begin{cases} X_1 = ba\,X_3 \\ X_2 = a\,X_3 \\ X_3 = aba\,X_3 + ba\,X_3 + b \end{cases} \iff \begin{cases} = \\ = \\ X_3 = (aba + ba)X_3 + b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} X_1 = ba(aba + ba)^*b \\ X_3 = (aba + ba)^*b \end{cases} \Longrightarrow \text{(b) está correta}$$

Ex. em como c) falha $\to ba\,a^6\,bab \in \mathcal{L}(ba(a+b)^+bab + bab)$

$ba\,\underline{a^6}\,bab \notin \mathcal{L}(\cancel{ba}(aba + ba)^*\cancel{b})$ porque não é possível uma palavra desta linguagem ter um fator a^n com $n \geq 3$.

39. Considere a equação linear à esquerda sobre expressões regulares $X = Xr + s$ em que $r, s \in \mathcal{R}eg(A)$. Verifique sr^* é solução da equação.