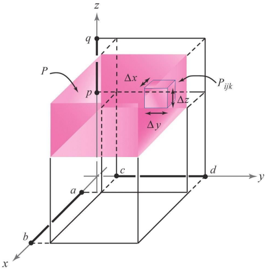
Cap 3 – Integrais múltiplos

3.2 – Integração tripla

Definição de integral triplo

Seja $P = [a,b] \times [c,d] \times [p,q]$ e $f : P \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.



- Subdividimos P em $n \times m \times l$ paralelepípedos

$$P_{ijk} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}].$$

- O volume de P_{ijk} é

$$\Delta V_{ijk} = (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)(z_{k+1} - z_k).$$

- Para cada P_{ijk} escolhemos um ponto $(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j, \widetilde{z}_k)$;

- Chamamos soma de Riemann de f relativa à subdivisão anterior de P a

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{l-1} f(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j, \widetilde{z}_k)\, \Delta V_{ijk}.$$

- Quando $n, m, l \longrightarrow \infty$ o valor da soma de Riemann de f designa-se por integral definido de f em P e denota-se

$$\iiint_P f(x,y,z)\, dV \qquad \text{ou} \qquad \iiint_P f(x,y)\, dx\, dy\, dz.$$

Propriedades dos integrais triplos

Sejam $f,\, g : P \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções contínuas. Então:

1. $\displaystyle\iiint_P f(x,y,z) + g(x,y,z)\, dV = \iiint_P f(x,y,z)\, dV + \iiint_P g(x,y,z)\, dV$

2. $\displaystyle\iiint_P \lambda\; f(x,y,z)\, dV = \lambda\; \iiint_P f(x,y,z)\, dV, \qquad \lambda \in \mathbb{R};$

3. $\displaystyle f \geq g \Longrightarrow \iiint_P f(x,y,z)\, dV \geq \iiint_P g(x,y,z)\, dV.$

4. [Teorema de Fubini] Sendo P o paralelipípedo $[a,b] \times [c,d] \times [p,q]$ então

$$\iiint_P f(x,y,z)\, dV = \int_a^b \left[\int_c^d \left[\int_p^q f(x,y,z)\, dz \right] dy \right] dx$$

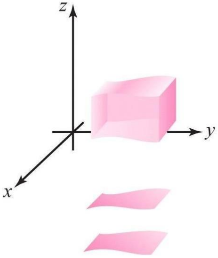
e é igual aos outros 5 integrais iterados que se obtêm invertendo a ordem de integração.

Exemplo

- Seja $P = [-1, 0] \times [-\frac{1}{2}, 0] \times [0, \frac{1}{3}]$. Calcule

$$\iiint_P (x + 2y + 3z)\, dV.$$

Regiões elementares de $\mathbb{R}^3$



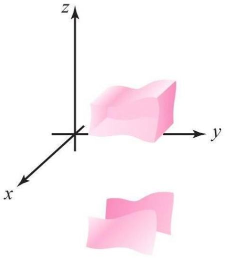
topo e base são superfícies
$z = \gamma(x, y)$

Região do tipo I

$$\gamma_1(x,y) \leq z \leq \gamma_2(x,y) \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

com

$$\begin{array}{rcl} a & \leq x \leq & b \\ \varphi_1(x) & \leq y \leq & \varphi_2(x) \\ \gamma_1(x,y) & \leq z \leq & \gamma_2(x,y) \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{rcl} c & \leq y \leq & d \\ \mu_1(y) & \leq x \leq & \mu_2(y) \\ \gamma_1(x,y) & \leq z \leq & \gamma_2(x,y) \end{array}$$



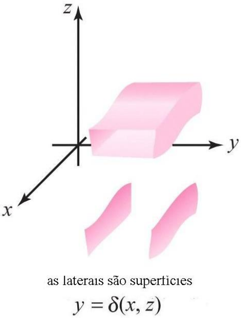
frente e trás são superfícies
$x = \rho(y, z)$

Região do tipo II

$$\rho_1(y,z) \le x \le \rho_2(y,z), \qquad (y,z) \in \mathbb{R}^2$$

com

$$\begin{array}{rcl} p & \le z \le & q \\ \varphi_1(z) & \le y \le & \varphi_2(z) \\ \rho_1(y,z) & \le x \le & \rho_2(y,z) \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{rcl} c & \le y \le & d \\ \mu_1(y) & \le z \le & \mu_2(y) \\ \rho_1(y,z) & \le x \le & \rho_2(y,z) \end{array}$$



Região do tipo III

$$\delta_1(x,z) \leq y \leq \delta_2(x,z), \qquad (x,z) \in \mathbb{R}^2$$

com

$$\begin{array}{rcl} a & \leq x \leq & b \\ \varphi_1(x) & \leq z \leq & \varphi_2(x) \\ \delta_1(x,z) & \leq y \leq & \delta_2(x,z) \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{rcl} p & \leq z \leq & q \\ \varphi_1(z) & \leq x \leq & \varphi_2(z) \\ \delta_1(x,z) & \leq y \leq & \delta_2(x,z) \end{array}$$

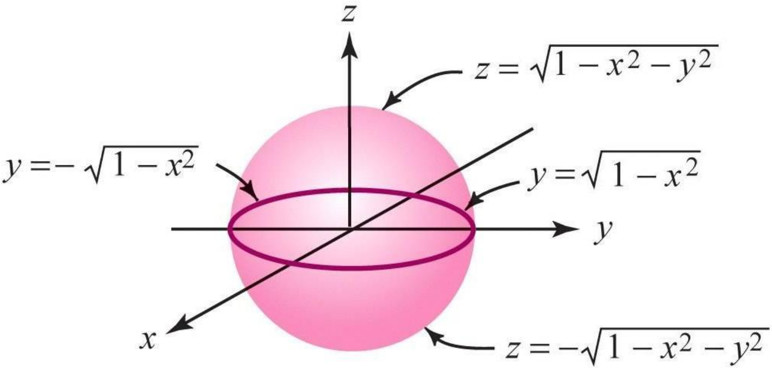
- $U \subset \mathbb{R}^3$ diz-se uma região do tipo IV de $\mathbb{R}^3$ se for, simultaneamente, uma região do tipo I, do tipo II e do tipo III.

Exemplo: a esfera como região elementar de $\mathbb{R}^3$

1. Descreva a esfera unitária

$$\mathcal{E} : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$$

em termos de regiões elementares de $\mathbb{R}^3$.



- A intersecção $\mathcal{E}$ com o plano XoY é o disco unitário

$$x^2 + y^2 \leq 1, \qquad \text{pois} \qquad z = 0.$$

- Nesta região, tem-se $-1 \leq x \leq 1$ e, então,

$$-\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}.$$

- Seja

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}.$$

- A esfera $\mathcal{E}$, pode, então ser descrita, como o conjunto de pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $(x, y) \in D$ e

$$-\sqrt{1 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Há diversos processos para o fazer, basta trocar os papéis de x, y, z...

Integração em regiões elementares de $\mathbb{R}^3$

Seja $U \subset \mathbb{R}^3$ uma região elementar e $\mathbb{R}^3$ e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real contínua.

I) Se $D \subset \mathbb{R}^2$ uma região elementar de $\mathbb{R}^2$ nas variáveis x e y e

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D,\ \gamma_1(x, y) \leq z \leq \gamma_2(x, y)\}$$

então

$$\iiint_U f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right] dA$$

II) Se $D \subset \mathbb{R}^2$ uma região elementar de $\mathbb{R}^2$ nas variáveis y e z e

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in D,\ \rho_1(y, z) \leq x \leq \rho_2(y, z)\}$$

então

$$\iiint_U f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{\rho_1(y,z)}^{\rho_2(y,z)} f(x, y, z)\, dx \right] dA.$$

III) Se $D \subset \mathbb{R}^2$ uma região elementar de $\mathbb{R}^2$ nas variáveis x e z e

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, z) \in D, \delta_1(x, z) \leq y \leq \delta_2(x, z)\}$$

então

$$\iiint_U f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{\delta_1(x,z)}^{\delta_2(x,z)} f(x, y, z)\, dy \right] dA.$$

Integração tripla e volume

- Se a função $f : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x, y, z) = 1$ for integrável em U, o volume de U é dado por

$$\text{vol}(U) = \iiint_U 1\, dV.$$

- Para uma função arbitrária $f : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\iiint_U f(x, y, z)\, dV$$

não tem nenhuma interpretação geométrica relevante, mas tem diversas interpretações, por exemplo, na física.

Integração tripla: aplicações à física

- Se $\rho(x, y, z)$ é a função densidade em qualquer ponto (x, y, z), em massa por unidade de volume, de um objeto sólido que ocupa a região $U \subset \mathbb{R}^3$ então a massa do sólido é

$$m = \iiint_U \rho(x, y, z)\, dV.$$

- Se a carga elétrica está distribuída sobre uma região $U \subset \mathbb{R}^3$ e a densidade de carga, em unidades de carga por área, é dada por $\sigma(x, y, z)$ em qualquer ponto (x, y, z), então a carga total Q é

$$Q = \iiint_U \sigma(x, y, z)\, dV.$$

Exemplo: volume de uma esfera

- Recorrendo a integrais iterados, escreva um integral que permita calcular o volume da esfera unitária
$$\mathcal{E}:\ x^2+y^2+z^2\leq 1.$$

O volume de $\mathcal{E}$ é dado por
$$\mathrm{vol}(\mathcal{E})=\iiint_{\mathcal{E}} dV.$$

- A esfera $\mathcal{E}$ pode ser descrita como sendo o conjunto de pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$\begin{aligned} -1 \leq & x \leq 1, \\ -\sqrt{1-x^2} \leq & y \leq \sqrt{1-x^2}, \\ -\sqrt{1-x^2-y^2} \leq & z \leq \sqrt{1-x^2-y^2} \end{aligned}$$

- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$
- Assim,

$$\text{vol}(\mathcal{E}) = \iiint_{\mathcal{E}} dV = \iint_D \left[\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz\right] dA$$

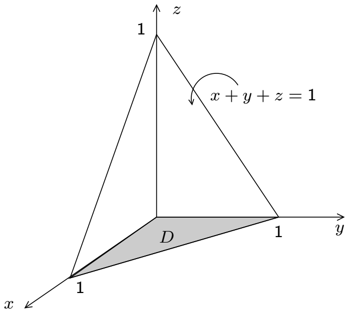
$$= \int_{-1}^{1} \left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left[\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz\right] dy\right] dx$$

Sugestão: Calcule o integral anterior!

Exemplo: volume de um tetraedro

- Recorrendo a um integral triplo, calcule o volume do tetraedro T de vértices

$$(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0) \ \text{ e } (0,0,1).$$



- A equação geral de um plano é

$$Ax + By + Cz = E, \qquad A, B, C, E \in \mathbb{R}.$$

- A equação do plano que passa nos pontos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ deve satisfazer

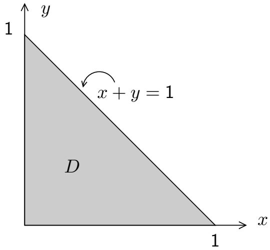
$$\left\{ \begin{array}{l} A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 0 = E \\ A \cdot 0 + B \cdot 1 + C \cdot 0 = E \\ A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 1 = E \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = E \\ B = E \\ C = E \end{array} \right.$$

- Escolhendo $E = 1$ obtém-se a equação do plano

$$\pi : \; x + y + z = 1.$$

- A intersecção do tetraedro com (por exemplo) o plano horizontal é o triângulo equilátero D tal que

$$\begin{aligned} 0 \leq & x \leq 1 \\ 0 \leq & y \leq 1 - x. \end{aligned}$$



- Assim, o tetraedro pode ser descrito como o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^3$ tais que

$$\begin{aligned} 0 \leq & x \leq 1 \\ 0 \leq & y \leq 1 - x \\ 0 \leq & z \leq 1 - x - y. \end{aligned}$$

- Finalmente,

$$\operatorname{vol}(T) = \iiint_T 1\, dV = \iint_D \left[\int_0^{1-x-y} 1\, dz \right] dA = \cdots = \frac{1}{6}.$$