Resolução explicada dos exercícios 1, 2 e 3 da folha 3 (resolvidos nas aulas PL dos dias 24, 25, 26 e 27 de novembro)

exercício 1) O código seguinte está disponível na área "Matlab"da Blackboard

```
function [raiz, funevals] = bisec(f, a, b, tol)
% function [raiz, funevals]=bisec(fun, a, b, tol)
% Dados:
%       uma função continua fun
%       os extremos a e b de um intervalo que contém pelo menos um zero de
%       fun
%       a tolerância tol,
% esta função implementa o método da bisecção para aproximar um zero de f;
% termina quando obtem um intervalo de amplitude menor que tol e toma como
% aproximação raiz o valor médio desse intervalo; funevals é o número de
% vezes que a função é calculada.

fa=f(a), fb=f(b);
if fa==0
    raiz=a;
    funevals= 'Não foram feitas iterações';
elseif fb==0
    raiz=b;
    funevals= 'Não foram feitas iterações';
elseif fa*fb >0
    raiz=' fa*fb >0: não há garantia de existir uma raíz entre a e b';
    funevals= 'Não foram feitas iterações';
else
    funevals=0;                    % numero de vezes que se calcula f
    while b-a > tol
            med = (a + b)/2;    % o ponto médio do intervalo [a,b] que contem o zero
            fmed=f(med);
            funevals=funevals+1;
            if fmed*fa < 0                          % há um zero de f em [a, med]
                b=med;
                fb=fmed;
            elseif fmed*fb < 0                  % há um zero de f em [med, b]
                a=med;
                fa=fmed;
            else                                            % med é zero de p
                a=med;
                b=med;
            end
    end
    raiz=(a+b)/2;
end
```

exercício 2.a) Começamos por definir a função com

```
f=inline('x*log(x)-1')
```

ou, com

```
f=@(x) x*log(x)-1
```

(nota: esta alternativa é preferível nas versões mais recentes do Matlab).
De

```
>> f(1), f(2)

ans =

    -1


ans =

    0.3863
```

conclui-se (por ser f contínua no intervalo [1,2]) que existe uma raiz da equação entre 1 e 2.

exercício 2.b) Uma vez que em cada iteração o método da bisseção reduz a metade a amplitude do intervalo que contem a raiz, ao fim de k iterações a amplitude é, neste caso (a amplitude do intervalo inicial é igual a 1) dada por $1/2^k$. De

$$\frac{1}{2^k} < 10^{-10}$$

resulta

$$k > log_2(10^{10})$$

e, tendo em conta

```
>> log2(10^10)

ans =

   33.2193
```

concluímos que $k = 34$.

exercício 2.c)

```
>> [raiz, funevals] = bisec(f, 1, 2, 1e-10)

raiz =

    1.7632


funevals =

    34
```

exercício 2.d) A execução não termina. Interrompemos a execução pressionando em simultâneo as teclas Ctrl e C.

```
>> [raiz, funevals] = bisec(f, 1, 2, 1e-20)
Operation terminated by user during bisec (line 39)
```

O critério de paragem nunca é cumprido porque o valor de $tol = 10^{-10}$ é demasidamente pequeno. Isto acontece porque a raiz está entre 1 e 2, e neste intervalo a distância entre um número de $\mathcal{F}$ e o seu sucessor é $2^{-52} \approx 2.2 \times 10^{-16}$. Assim, o mais pequeno valor de tol que pode ser usado é 2^{-52} (o critério de paragem será cumprido com $tol = 10^{-15}$ mas não com $tol = 10^{-16}$).

exercício 3.a) Está resolvido nas páginas 67 e 68 do ficheiro apresenta.pdf que serve de suporte às aulas TP on-line.

exercício 3.b)

```
>> fi3=@(x) (x+exp(-x))/2

fi3 =

    @(x)(x+exp(-x))/2

>> x(1)=0.5; x(2)=fi3(x(1)); k=2; while abs(x(k)-x(k-1))>0.5*1e-3, k=k+1;...
x(k)=fi3(x(k-1)); end, x'

ans =

    0.5000
    0.5533
    0.5642
    0.5665
    0.5670
    0.5671
```

A expressão (ver p. 70 das notas)

$$r - x^{(k)} = \frac{1}{1-\phi'(\theta)}(x^{(k+1)} - x^{(k)})$$

permite-nos fazer a estimativa do erro $|r - x^{(5)}|$ a partir da diferença entre $x^{(6)}$ e $x^{(5)}$.
Com $\phi'(x) = (1 - e^{-x})/2$ e θ próximo de $x^{(5)}$, será

$$|r - x^{(5)}| \approx \frac{1}{|1-\phi'(x^{(5)})|}|x^{(6)} - x^{(5)}|$$

```
>> (1-exp(-x(5)))/2

ans =

    0.2164

>> 1/(1-ans)*(x(6)-x(5))
```

```
ans =

   1.3907e-04
```

Resolução explicada dos exercícios 5, 6, 7 e 8 da folha 3 (resolvidos nas aulas PL dos dias 2, 3 e 4 de dezembro)

exercício 5) Uma vez que

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f\left(x^{(k)}\right)}{f'\left(x^{(k)}\right)},$$

de (1) resulta

$$r - x^{(k+1)} = -\frac{f''(\theta)}{2f'\left(x^{(k)}\right)}\left(r - x^{(k)}\right)^2$$

que relaciona o erro numa iteração com o quadrado do erro na iteração anterior. Por exemplo, se $|r - x^{(k)}| \approx 10^{-3}$ e $\left|\frac{f''(\theta)}{2f'\left(x^{(k)}\right)}\right|$ (este valor varia de iteração para iteração uma vez que o ponto θ não é sempre o mesmo) não for muito maior do que 1, então será $|r - x^{(k+1)}| \approx 10^{-6}$, isto é, o número de algarimos corretos praticamente duplica de uma iteração para a seguinte. Em termos mais formais, um método iterativo tem convergência quadrática (ver p. 55 das notas das aulas) se

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left|r - x^{(k+1)}\right|}{\left|r - x^{(k)}\right|^2} = C > 0$$

Ora, no caso do método de Newton-Raphson tem-se

$$\frac{\left|r - x^{(k+1)}\right|}{\left|r - x^{(k)}\right|^2} = \left|\frac{f''(\theta)}{2f'\left(x^{(k)}\right)}\right|,$$

donde, tomando limites, resulta

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left|r - x^{(k+1)}\right|}{\left|r - x^{(k)}\right|^2} = \left|\frac{f''(r)}{2f'(r)}\right|.$$

exercício 6.a) Com

$$f(x) = b - \frac{1}{x}$$

a fórmula iterativa

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f\left(x^{(k)}\right)}{f'\left(x^{(k)}\right)}$$

dá

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{b - 1/x^{(k)}}{1/\left(x^{(k)}\right)^2} = x^{(k)} - \left(x^{(k)}\right)^2\left(b - 1/x^{(k)}\right) = x^{(k)}\left(2 - bx^{(k)}\right)$$

exercício 6.b) Partindo da aproximação inicial, repetimos o comando $x = x * (2 - 7 * x)$ até que duas iteradas sucessivas coincidam em todos os algarismos no format long.

```
>> format long, x=0.1;

>> x=x*(2-7*x)

x =
```

```
   0.130000000000000

>> x=x*(2-7*x)

x =

   0.141700000000000

>> x=x*(2-7*x)

x =

   0.142847770000000

>> x=x*(2-7*x)

x =

   0.142857142242190

>> x=x*(2-7*x)

x =

   0.142857142857143

>> x=x*(2-7*x)

x =

   0.142857142857143
```

exercício 6.c) Com $e^{(k)} = r - x^{(k)}$ e $x^{(k)}$ próximo de r a expressão

$$r - x^{(k+1)} = -\frac{f''(\theta)}{2f'\left(x^{(k)}\right)}\left(r - x^{(k)}\right)^2$$

dá

$$e^{(k+1)} = -\frac{f''(r)}{2f'(r)}\left(e^{(k)}\right)^2$$

e para $f(x) = b - 1/x$ é

$$-\frac{f''(r)}{2f'(r)} = 1/r = b.$$

exercício 6.d) O método diverge como se pode concluir de

```
>> x=0.3;
>> x=x*(2-7*x)

x =
```

```
  -0.030000000000000

>> x=x*(2-7*x)

x =

  -0.066300000000000

>> x=x*(2-7*x)

x =

  -0.163369830000000

>> x=x*(2-7*x)

x =

  -0.513567569479603

>> x=x*(2-7*x)

x =

  -2.873396677907512
....
```

exercício 7.a) Tem-se

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{\left(x^{(k)} - a\right)^m}{m\left(x^{(k)} - a\right)^{m-1}} = x^{(k)} - \frac{\left(x^{(k)} - a\right)}{m}$$

e subtraindo a em ambos os membros

$$x^{(k+1)} - a = x^{(k)} - a - \frac{\left(x^{(k)} - a\right)}{m} = \left(x^{(k)} - a\right)\left(1 - \frac{1}{m}\right).$$

Isto mostra que a ordem de convergência do método é $p = 1$ (veja-se de novo a definição), isto é, a convergência é linear.

exercício 7.b) Em cada iteração do método da bisseção, a amplitude do intervalo que contem a raiz é reduzida para metade. Por outro lado, para $m = 2$ tem-se $e^{(k+1)} = e^{(k)}/2$ e é neste sentido que podemos dizer, neste caso, que o método de Newton-Raphson não converge mais rapidamente do que o método da bisseção. Para $m > 2$ a convergência é mais lenta uma vez que $1 - 1/m > 1/2$. Observe-se que $1 - 1/m$ aproxima-se de 1 quando m cresce e a convergência é, portanto, tanto mais lenta quanto maior for a multiplicidade m da raiz a. Em conclusão, é preferível usar o método da bisseção que converge mais rapidamente e não requer o cálculo de derivadas.

exercício 8) A função poly dá os coeficientes do polinómio mónico cujos zeros são dados. Por exemplo,

```
>> p=poly([1 2])

p =

     1    -3     2
```

uma vez que $(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$.

A função roots calcula os zeros de um polinómio a partir dos respetivos coeficientes:

```
>> roots(p)

ans =

     2
     1
```

Neste caso, a função roots dá exatamente as raizes iniciais. Mas isto nem sempre acontece.

```
>> p=poly([2 2 2 2 2 2 2 2 2])

p =

           1         -18         144        -672        2016       -4032        5376

>> r= roots(p)

r=

   2.0689 + 0.0000i
   2.0518 + 0.0449i
   2.0518 - 0.0449i
   2.0100 + 0.0668i
   2.0100 - 0.0668i
   1.9655 + 0.0566i
   1.9655 - 0.0566i
   1.9383 + 0.0218i
   1.9383 - 0.0218i
```

Neste caso, as raízes têm erros importantes e a razão é o mau condicionamento da raiz igual a 2 que tem multiplicidade nove. Com efeito, as raizes múltiplas são sempre mal-condicionadas e quanto maior for a multiplicidade de uma raiz mais mal condicionada ela é.