9ª aula

28 de abril de 2021 11:00

2. Considere a gramática $\mathcal{G} = (\{\mathcal{S}\}, \{a, b\}, \mathcal{S}, P)$ com produções

$$\mathcal{S} \to a\mathcal{S}b \mid \mathcal{S}\mathcal{S} \mid ab \mid ba$$

Mostre que

(a) $(ab)^2a^2b^2, a^3b^2a^3bab^4 \in L(\mathcal{G})$;

(b) se $u \in L(\mathcal{G})$, então $|u|_a = |u|_b$;

NOTA: $\mathcal{S} \overset{+}{\Rightarrow} u \in A^*$ então $|u| \geq 2$.

a) $\cancel{a}\cancel{b}\cancel{a}\cancel{b}\cancel{a}\,a\,b\,\cancel{b}$

$\mathcal{S} \Rightarrow a\mathcal{S}b \Rightarrow a\mathcal{S}\mathcal{S}b \Rightarrow aba\mathcal{S}b \Rightarrow aba\mathcal{S}\mathcal{S}b \Rightarrow ababa\mathcal{S}b \Rightarrow ababaabb$

Como $\mathcal{S} \overset{*}{\Rightarrow} (ab)^2a^2b^2$, então $(ab)^2a^2b^2 \in L(\mathcal{G})$

$\mathcal{S} \overset{(6)}{\Longrightarrow} (ab)^2a^2b^2$

$aaabbaaababbbb$

$\mathcal{S} \Rightarrow a\mathcal{S}b \Rightarrow aa\mathcal{S}bb \Rightarrow aa\mathcal{S}\mathcal{S}bb \Rightarrow aaab\mathcal{S}bb \Rightarrow aaab\mathcal{S}\mathcal{S}bb$
$\Rightarrow aaabba\mathcal{S}bb \Rightarrow aaabbaa\mathcal{S}bbb \Rightarrow aaabbaa\mathcal{S}\mathcal{S}bbb$
$aaabbaaab\mathcal{S}bbb \Rightarrow aaabbaaababbbb = a^3b^2a^3bab^4$.

Logo $a^3b^2a^3bab^4 \in L(\mathcal{G})$. $\left(\mathcal{S} \overset{10}{\Longrightarrow} a^3b^2a^3bab^4\right)$

b) $\mathcal{S} \to a\mathcal{S}b \mid \mathcal{S}\mathcal{S} \mid ab \mid ba$

Seja $u \in L(\mathcal{G})$. Então existe uma derivação do tipo

$$\mathcal{S} \overset{(n)}{\Longrightarrow} u. \qquad n \in \mathbb{N}$$

Vamos fazer a demonstração por indução matemática sobre n.

Se $n=1$, então $\mathcal{S} \Rightarrow u$ e $u = ab$ ou $u = ba$.
Em ambos os casos $|u|_a = 1 = |u|_b$.

Por hipótese de indução suponhamos que, para certo $k \in \mathbb{N}$, se
$\mathcal{S} \overset{j}{\Longrightarrow} u$ com $1 \leq j \leq k$, então $|u|_a = |u|_b$

Consideremos que $u \in L(\mathcal{G})$ e $\mathcal{S} \overset{k+1}{\Longrightarrow} u$. Neste caso temos duas possibilidades: o primeiro passo é $\mathcal{S} \Rightarrow a\mathcal{S}b$ ou $\mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{S}\mathcal{S}$.

- $\mathcal{S} \Rightarrow a\mathcal{S}b \overset{k}{\Longrightarrow} u = au'b$ em que $\mathcal{S} \overset{k}{\Longrightarrow} u'$

  Então u' está nas condições da hipótese de indução, logo $|u'|_a = |u'|_b$

  Assim, $|u|_a = |au'b|_a = 1 + |u'|_a = 1 + |u'|_b = |u'|_b + 1 = |u|_b$

ou seja, $|u|_a = |u|_b$.

- $S \Rightarrow SS \xRightarrow{k} u = u_1 u_2$ com $u_1, u_2 \in L(G)$ e

$S \xRightarrow{k_1} u_1$ e $S \xRightarrow{k_2} u_2$ $1 \leq k_1, k_2 < k$ porque $k_1 + k_2 = k$

Então u_1 e u_2 estão nas condições da hipótese de indução

pelo que $|u_1|_a = |u_1|_b$ e $|u_2|_a = |u_2|_b$.

$$|u|_a = |u_1 u_2|_a = |u_1|_a + |u_2|_a = |u_1|_b + |u_2|_b = |u_1 u_2|_b = |u|_b$$

Isto completa a prova do passo indutivo.

Assim, pelo Princípio de Indução Matemática (forte), provamos que

$\forall u \in L(G) \quad |u|_a = |u|_b$.

NOTA: $L(G) \subseteq L = \{u \in A^* : |u|_a = |u|_b\}$.

3. Considere o alfabeto $\{a, b\}$.

(a) Construa gramáticas que gerem as linguagens:

ii) $L_2 = (abb \cup b)^*(ab)^*$
iv) $L_4 = \{a^i b^j a^k \mid j \geq (i + k),\ i, j, k \in \mathbb{N}\}$

a) ii) $L_2 = \{abb, b\}^* (ab)^* = \{uv : u \in \{abb, b\}^*, v \in (ab)^*\}$

$G_2 = (\{S, E, D\}, \{a, b\}, S, P)$ onde P é:

$S \to ED$

$E \to abbE \mid bE \mid \varepsilon$

$D \to abD \mid \varepsilon$

$L(S) = L(E)L(D)$

$L(E) = \{abb, b\}^*$

$L(D) = \{ab\}^*$

Alternativa: $G' \quad \}, \{a,b\}, S, P')$ em que P' é:

$S \to abbS \mid bS \mid Sab \mid \varepsilon$

$u \cdot v$

abb, b $\leftarrow u$; $v \rightarrow ab$

NOTA: G_2 e G_2' são equivalentes.

iv) $L_4 = \{a^i b^j a^k : j \geq i + k,\ i, j, k \in \mathbb{N}\} =$

$= \{\underbrace{a^i b^i}_{u_1} \underbrace{b^l}_{u_2} \underbrace{b^k a^k}_{u_3} : i, k \in \mathbb{N},\ l \geq 0\}$

$j = i + l + k \geq i + k$, $l \geq 0$

$u \in L_2 \qquad u = u_1 u_2 u_3$

$G_4 = (\{S, E, C, D\}, \{a, b\}, S, P_4)$ onde P_4 é:

$\mathcal{G}_4 = (\{\mathcal{S}, \mathcal{E}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}, \{a,b\}, \mathcal{S}, P_4)$ onde P_4 é:

$$\mathcal{S} \to \mathcal{E}\mathcal{C}\mathcal{D}$$
$$\mathcal{E} \to a\mathcal{E}b \mid ab$$
$$\mathcal{D} \to b\mathcal{D}a \mid ba$$
$$\mathcal{C} \to b\mathcal{C} \mid \varepsilon$$

$L(\mathcal{S}) = L(\mathcal{E})L(\mathcal{C})L(\mathcal{D})$

$L(\mathcal{E}) = \{a^i b^i : i \in \mathbb{N}\}$

$L(\mathcal{D}) = \{b^k a^k : k \in \mathbb{N}\}$

$L(\mathcal{C}) = b^*$

$a^2b^2 = aa \cdot bb$

$a^3b^3 = aaa \cdot bbb$

4. Indique, justificando, qual é a linguagem gerada pela gramática:

(a) $\mathcal{G}_1 = (\{\mathcal{S}, \mathcal{A}\}, \{a,b\}, \mathcal{S}, P)$ com produções

$$\mathcal{S} \to a\mathcal{A}bab\mathcal{A}a$$
$$\mathcal{A} \to \mathcal{A}a \mid \mathcal{A}b \mid \varepsilon$$

(b) $\mathcal{G}_2 = (\{\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathcal{B}\}, \{a,b\}, \mathcal{S}, P)$ com produções

$$\mathcal{S} \to a\mathcal{S}a \mid b\mathcal{S}b \mid \mathcal{A}$$
$$\mathcal{A} \to a\mathcal{B}b \mid b\mathcal{B}a$$
$$\mathcal{B} \to a\mathcal{B}a \mid b\mathcal{B}b \mid a \mid b \mid \varepsilon$$

a) $L(\mathcal{G}) = L(\mathcal{S}) = a\,L(\mathcal{A})\,bab\,L(\mathcal{A})\,a$

$L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A})a \cup L(\mathcal{A})b \cup \{\varepsilon\} = L(\mathcal{A})\{a,b\} \cup \{\varepsilon\}$

$= (L(\mathcal{A})\{a,b\} \cup \{\varepsilon\})\{a,b\} \cup \{\varepsilon\}$

$= L(\mathcal{A})\{a,b\}^2 \cup \{a,b\} \cup \{\varepsilon\} = L(\mathcal{A})\{a,b\}^2 \cup \underbrace{\{\varepsilon, a, b\}}_{\bigcup_{k=0,1}\{a,b\}^k}$

$= (L(\mathcal{A})\{a,b\} \cup \{\varepsilon\})\{a,b\}^2 \cup \{\varepsilon, a, b\}$

$= L(\mathcal{A})\{a,b\}^3 \cup \{a,b\}^2 \cup \{\varepsilon, a, b\}$

$= L(\mathcal{A})\{a,b\}^3 \cup \left(\bigcup_{k=0,1,2}\{a,b\}^k\right)$

Iterando obtém-se que

$$L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A})\{a,b\}^n \cup \left(\bigcup_{k=0,\dots,n-1}\{a,b\}^k\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

A prova formal desta igualdade faz-se por indução matemática sobre n.

Seja $u \in L(\mathcal{A})$. Se $|u| < n$, então $u \in \bigcup_{k=0,\dots,n-1}\{a,b\}^k$ porque as palavras de $L(\mathcal{A})\{a,b\}^n$ são palavras de comprimento maior ou igual a n. Então para qualquer $u \in L(\mathcal{A})$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|u| = n-1$ e $u \in \bigcup \{a,b\}^k$, nomeadamente

$k = 0, \ldots, n-1$

damente, $u \in \{a,b\}^{n-1}$. Logo, qualquer ~~que~~ seja a palavra u

dizer que $u \in L(\mathcal{A})$ é equivalente a dizer que $u \in \{a,b\}^*$.

Assim $L(\mathcal{A}) = \{a,b\}^*$.

Finalmente, conclui-se que $L(\mathcal{G}) = L(\mathcal{T}) = a\{a,b\}^* bab \{a,b\}^* a$ //

$= \{a u bab v a : u, v \in \{a,b\}^*\}$ //

5. Considerando as gramáticas definidas no exercício 4, elabore derivações que justifiquem que:

   (a) $a(ba)^3 \in L(\mathcal{G}_1)$;

   (b) $(b^2a)^2bab^5 \in L(\mathcal{G}_2)$;