

Cap 4 – Cálculo vetorial

Campos vetoriais

Motivação

Definição

Campos vetoriais conservativos

Integral de linha (campo escalar)

Trabalho realizado por uma força

Integral de linha (campo vetorial)

Teorema de Green

Divergência

Rotacional

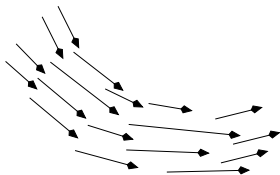
Neste capítulo iremos estudar o cálculo de **campos vetoriais** (funções que associam vetores a pontos).

Em particular, definimos **integral de linha**, que pode ser usado para determinar o trabalho realizado por um campo de forças agindo sobre um objeto que se move ao longo de uma curva, e **integral de superfície**, que pode ser usado para determinar a taxa de vazão de um fluido através de uma superfície.

As ligações entre estes tipos de novos integrais e os integrais de funções de uma variável, duplos e triplos, vistos no capítulo anterior, são estabelecidas por versões de maior dimensão do Teorema Fundamental do Cálculo - **Teorema de Green**, **Teorema de Stokes** e **Teorema da Divergência**.

Campos vetoriais: motivação

- ▶ Em muitas aplicações, associa-se a cada ponto a do espaço um vetor (único) com origem em a . A totalidade desses vetores constitui um **campo vetorial**.
- ▶ Um exemplo de campo vetorial é o campo determinado pelo fluxo de água ou do vento. Um campo deste tipo chama-se um **campo de velocidades**.



- ▶ Outros exemplos de campos de vetores são os **campo de forças** que surgem no estudo da eletricidade ou da mecânica.

Definição

- Um **campo vetorial em \mathbb{R}^n** é uma função vetorial de n variáveis reais

$$\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

que a cada elemento $\mathbf{x} \in D$ associa um elemento de \mathbb{R}^n ,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \dots, F_n(\mathbf{x})),$$

sendo $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $F_i : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$.

- Um campo vetorial é um caso particular de uma função vetorial: a dimensão do conjunto de partida é igual à dimensão do conjunto de chegada.

Exemplo

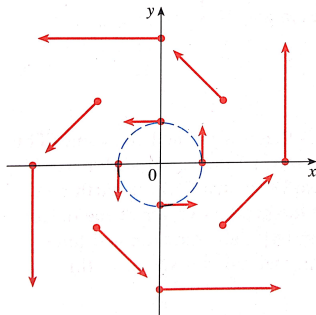
Consideremos o campo vetorial em \mathbb{R}^2 , $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dado por

$$\mathbf{F}(x, y) = (-y, x) = -y\vec{i} + x\vec{j}.$$

Vamos descrever \mathbf{F} desenhando alguns dos seus vetores $\mathbf{F}(x, y)$.

Por exemplo,

- $\mathbf{F}(0, 0) = \vec{0}$
- $\mathbf{F}(1, 0) = (0, 1) = \vec{j}$
- $\mathbf{F}(0, 1) = (-1, 0) = -\vec{i}$
- $\mathbf{F}(2, 2) = (-2, 2) = -2\vec{i} + 2\vec{j}$
- $\mathbf{F}(-2, 2) = (-2, -2) = -2\vec{i} - 2\vec{j}$
- $\mathbf{F}(3, 0) = (0, 3) = 3\vec{j}$

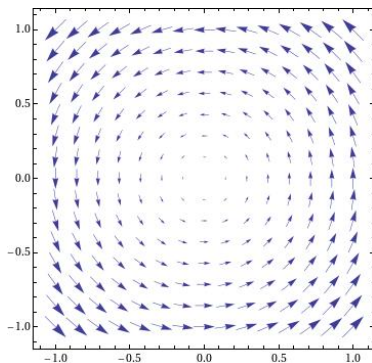


Observe-se que $(x, y) \cdot \mathbf{F}(x, y) = -xy + yx = 0$ o que mostra que $\mathbf{F}(x, y)$ é perpendicular ao vetor posição (x, y) e, portanto, tangente à circunferência de centro na origem e raio $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exemplo (cont.)

$$\mathbf{F}(x, y) = (-y, x) = -y\vec{i} + x\vec{j}.$$

Há sistemas computacionais que desenham campos de vetores em duas ou três dimensões, fornecendo uma melhor visualização do que aquela que é possível à mão. É comum fazer-se uma mudança de escala no comprimento dos vetores, mantendo-se, no entanto, proporcionalidade com o seu verdadeiro comprimento.



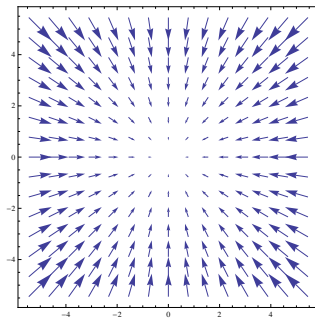
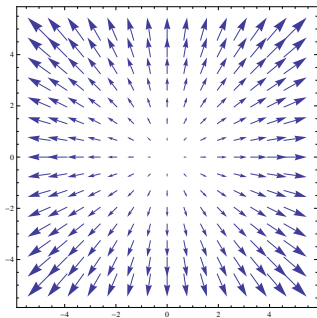
Campo vetorial de rotação.

Este exemplo pode ser usado como o **campo de velocidades** que descreve a rotação no sentido horário de uma roda. A rapidez em qualquer ponto é indicada pelo comprimento da seta.

Exemplo

Consideremos os campos vetoriais $\mathbf{F}, \mathbf{G} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definidos por

$$\mathbf{F}(x, y) = (x, y) \quad \text{e} \quad \mathbf{G}(x, y) = (-x, -y).$$

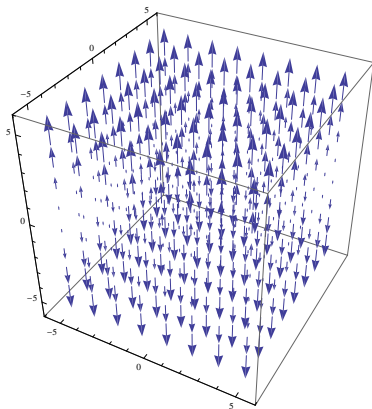


Campos vetoriais radiais.

(vetores estão na direção de retas que passam pela origem).

Exemplo

Esboçemos um número suficiente de vetores que ilustre o padrão do campo vetorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, z)$.



Todos os vetores são verticais apontando para cima, quando o ponto (x, y, z) está acima do plano xy , e para baixo, quando está abaixo do plano xy . O comprimento aumenta à medida que nos distanciamos do plano xy .

Exemplo - campos gradientes

Se f é uma função escalar de duas variáveis, o seu gradiente,

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right),$$

é um campo de vetores em \mathbb{R}^2 chamado *campo gradiente*.

De forma análoga, se f é uma função de 3 variáveis, o seu campo gradiente é o campo de vetores em \mathbb{R}^3 dado por

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right).$$

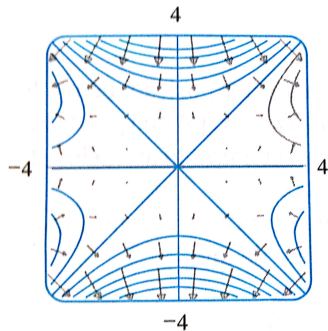
Exemplo

Se $f(x, y) = x^2y - y^3$, o seu campo gradiente é

$$\vec{\nabla} f(x, y) = (2xy, x^2 - 3y^2).$$

Na figura representam-se algumas curvas de nível de f juntamente com o campo gradiente.

Os vetores gradientes são perpendiculares às curvas de nível e são mais longos onde as curvas de nível estão mais próximas umas das outras, pois o comprimento do vetor gradiente é o valor da derivada direcional na direção do vetor gradiente e a proximidade das curvas indica uma mais rápida variação dos valores de f .



Campos vetoriais conservativos

- ▶ O campo vetorial $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ diz-se um **campo vetorial conservativo** ou **campo gradiente** se existir uma função real diferenciável $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\mathbf{F} = \vec{\nabla} f$$

isto é,

$$\mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \vec{e}_n.$$

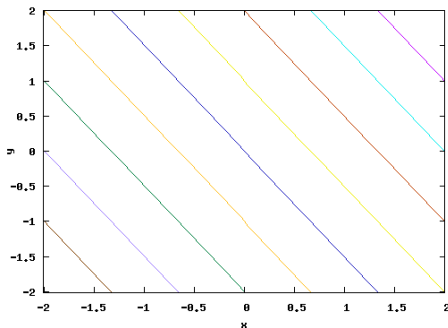
- ▶ A função f diz-se uma **função potencial** de \mathbf{F} .
- ▶ As curvas de nível de f dizem-se **curvas equipotenciais**.
- ▶ Nem todos os campos são conservativos, mas estes campos aparecem frequentemente em aplicações da física.

Exemplo

O campo $\mathbf{F}(x, y) = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ definido em \mathbb{R}^2 é conservativo e uma sua função potencial é

$$f(x, y) = 3x + 2y.$$

Na figura estão representadas algumas curvas equipotenciais de $\mathbf{F} = \vec{\nabla} f$.

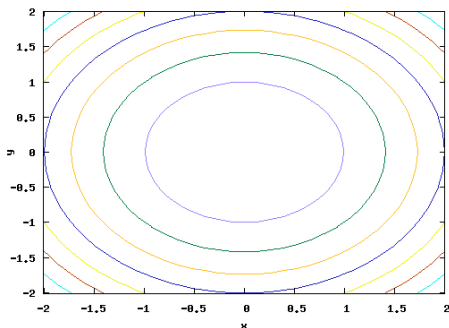


Exemplo

O campo $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$ definido em \mathbb{R}^2 é conservativo; uma sua função potencial é

$$f(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}.$$

Na figura estão representadas algumas curvas equipotenciais de $\mathbf{F} = \vec{\nabla} f$.



Campos conservativos em \mathbb{R}^2

Como podemos saber se um campo de vetores é conservativo ou não?

O seguinte resultado aplica-se a campos vetoriais em \mathbb{R}^2 e mais à frente veremos outros resultados que se aplicam a campos vetoriais em \mathbb{R}^3 .

Seja

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$$

um campo vetorial contínuo e com derivadas parciais de primeira ordem contínuas definido em $D \subset \mathbb{R}^2$, D sendo um domínio aberto e simplesmente conexo¹.

Então \mathbf{F} é um **campo conservativo** se e só se

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (x, y) \in D.$$

¹Intuitivamente falando, uma região simplesmente conexa não contém buracos nem é constituída por dois pedaços separados.

Exemplo

O campo $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$, definido em \mathbb{R}^2 , não é conservativo pois, aqui

$$P(x, y) = -y, \quad Q(x, y) = x,$$

e

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 1.$$

Já o campo de vetores $\mathbf{F}(x, y) = (3 + 2xy, x^2 - 2y^2)$, definido em \mathbb{R}^2 , é conservativo uma vez que, sendo

$$P(x, y) = 3 + 2xy, \quad Q(x, y) = x^2 - 2y^2,$$

temos

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y).$$

Integral de linha (campo escalar em \mathbb{R}^2)

Vamos definir um integral que é semelhante a um integral de uma função de uma variável real, exepcto que, em vez de integrarmos sobre um intervalo $[a, b]$, **integramos sobre uma curva \mathcal{C}** .

Sejam $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\mathbf{r} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ com $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, um caminho de classe C^1 , suave (\mathbf{r}' contínua e $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$), que parametriza a curva \mathcal{C} , tais que a função composta

$$f(\mathbf{r}(t)) = f(x(t), y(t))$$

é contínua em $[a, b]$.

- O **integral de linha de f ao longo da curva \mathcal{C}** (ou integral de caminho de f ao longo de \mathcal{C}), é o integral dado por

$$\int_{\mathcal{C}} f \, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt,$$

ou seja,

$$\int_{\mathcal{C}} f \, ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \, dt.$$

Exemplo

Sejam \mathcal{C} a curva parametrizada por $\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\mathbf{r}(t) = (1 + t, 3t) \quad \text{e} \quad f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Calcule

$$\int_{\mathcal{C}} f \, ds.$$

Resolução.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} f \, ds &= \int_0^1 f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt \\ &= \int_0^1 f(1 + t, 3t) \|(1, 3)\| \, dt \\ &= \int_0^1 \left[(1 + t)^2 + (3t)^2 \right] \sqrt{10} \, dt \\ &= \sqrt{10} \int_0^1 (1 + 2t + 10t^2) \, dt = \sqrt{10} \left[t + t^2 + 10\frac{t^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{16}{3} \sqrt{10}. \end{aligned}$$

Integral de linha (campo escalar em \mathbb{R}^3)

Para uma função escalar de 3 variáveis, $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, e $\mathbf{r} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ com $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, um caminho de classe C^1 , suave, que parametriza a curva \mathcal{C} , sendo a função composta

$$f(\mathbf{r}(t)) = f(x(t), y(t), z(t))$$

contínua em $[a, b]$, o integral de linha de f ao longo da curva \mathcal{C} é o integral dado por

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} f \, ds &= \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} \, dt.\end{aligned}$$

Observe-se que formalmente podemos escrever $ds = \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt$.

Exemplo

Sejam $\mathbf{r} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t) \quad \text{e} \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Calcule

$$\int_{\mathcal{C}} f \, ds$$

onde \mathcal{C} é a curva parametrizada por \mathbf{r} .

Resolução.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} f \, ds &= \int_0^{2\pi} f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t + t^2) \|(-\sin t, \cos t, 1)\| \, dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1 + t^2) \, dt \\ &= \sqrt{2} \left[t + \frac{t^3}{3} \right]_0^{2\pi} = 2\sqrt{2}\pi \left(1 + \frac{4\pi^2}{3} \right). \end{aligned}$$

Observação

- ▶ Caso \mathbf{r} seja só seccionalmente C^1 , suave, define-se

$$\int_{\mathcal{C}} f \, ds$$

partindo o intervalo $[a, b]$ em subintervalos nos quais a função $f(\mathbf{r}(t))$ é contínua.

- ▶ Quando $f \equiv 1$, obtém-se a definição de **comprimento de arco**.
- ▶ São também notações comuns para o integral de caminho

$$\int_{\mathbf{r}} f \, ds, \quad \int_{\mathcal{C}} f(x, y) \, ds \quad \int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) \, ds$$

Exemplo

Determine

$$\int_{\mathcal{C}} 2x \, ds,$$

onde \mathcal{C} é o arco \mathcal{C}_1 da parábola $y = x^2$ de $(0,0)$ a $(1,1)$, seguido pelo segmento de reta \mathcal{C}_2 de $(1,1)$ a $(1,2)$.

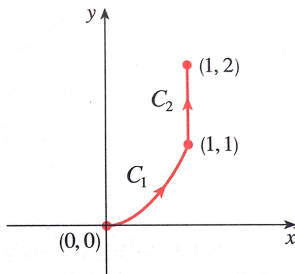
$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$$

Parametrização de \mathcal{C}_1 :

$$(x, y) = (t, t^2), \quad t \in [0, 1]$$

Parametrização de \mathcal{C}_2 :

$$(x, y) = (1, t), \quad t \in [1, 2]$$



Resolução.

$$\begin{aligned}\int_C 2x \, ds &= \int_{C_1} 2x \, ds + \int_{C_2} 2x \, ds \\&= \int_0^1 2t \|(1, 2t)\| \, dt + \int_1^2 2 \|(0, 1)\| \, dt \\&= \int_0^1 2t (1 + 4t^2)^{1/2} \, dt + \int_1^2 2 \, dt \\&= \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} (1 + 4t^2)^{3/2} \right]_0^1 + \left[2t \right]_1^2 \\&= \frac{1}{6} (5^{3/2} - 1) + (4 - 2) \\&= \frac{5\sqrt{5} + 11}{6}\end{aligned}$$

Integral de linha no plano: interpretação geométrica

Sejam $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ um caminho de classe \mathcal{C}^1 , suave, no plano com

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$$

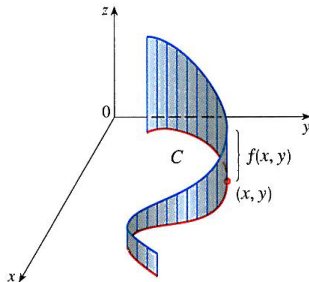
que parametriza a curva C e $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tais que a função composta

$$f(\mathbf{r}(t)) = f(x(t), y(t))$$

é contínua em $[a, b]$. Então

$$\int_C f \, ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \, dt.$$

Quando $f \geq 0$ o integral pode ser interpretado geometricamente como a **área da fita (um dos lados)** cuja base é a curva C , imagem de \mathbf{r} , e cuja altura é dada por $f(x(t), y(t))$:

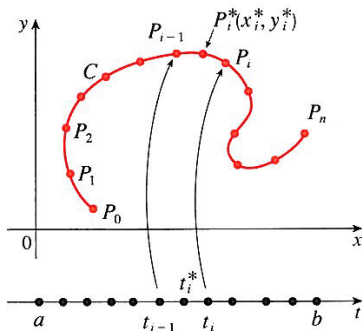


Justificação

- Considere-se uma subdivisão de $[a, b]$ em N subintervalos

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b.$$

- A subdivisão anterior, induz uma decomposição de \mathbf{r} em caminhos \mathbf{r}_i definidos em $[t_{i-1}, t_i]$ com $1 \leq i \leq N$.



- ▶ Para cada sub-arco \mathbf{r}_i escolhemos um ponto (x_i^*, y_i^*) , correspondente a $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$, avaliamos f nesse ponto, multiplicamos pelo comprimento do subarco \mathbf{r}_i , que denotamos por Δs_i , e formamos a soma

$$S_N = \sum_{i=1}^N f(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i$$

- ▶ Denotando o comprimento do subarco \mathbf{r}_i por Δs_i , tem-se

$$\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\mathbf{r}'(t)\| dt$$

e pelo Teorema do Valor Médio para integrais existe $t_i^{**} \in [t_{i-1}, t_i]$ tal que

$$\Delta s_i = \|\mathbf{r}'(t_i^{**})\| \Delta t_i, \quad \Delta t_i = t_i - t_{i-1}.$$

- ▶ Quando N é suficientemente grande, o comprimento de arco Δs_i é pequeno e f pode ser tomada como constante em $[t_{i-1}, t_i]$.

► As somas

$$S_N = \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i = \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i^*, y_i^*) \|\mathbf{r}'(t_i^{**})\| \Delta t_i$$

aproximam a área da figura de base Δs_i e altura $f(x_i^*, y_i^*)$ onde $(x_i^*, y_i^*) = \mathbf{r}(t_i^*)$ para algum $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$.

► Esta é uma soma de Riemann, para a função real contínua

$$g(t) = f(x(t), y(t)) \|\mathbf{r}'(t)\|.$$

► Quando $N \rightarrow \infty$ o valor da soma de Riemann de g designa-se por **integral de linha de f ao longo de \mathcal{C}** e denota-se

$$\int_a^b f(x(t), y(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_{\mathcal{C}} f ds.$$

Como já vimos, chamamos ao integral

$$\int_C f \, ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \, dt$$

o integral de linha (ou integral de caminho) de f ao longo de C com respeito ao comprimento de arco.

Dois outros integrais são obtidos substituindo Δs_i por $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ou $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ na definição anterior.

São chamados os integrais de linha de f ao longo de C com respeito a x e a y :

$$\int_C f \, dx \quad \text{e} \quad \int_C f \, dy$$

Usamos as seguintes fórmulas para calcular integrais de linha com respeito a x e a y ao longo de C :

$$\int_C f(x, y) dx = \int_a^b f(x(t), y(t)) x'(t) dt$$

$$\int_C f(x, y) dy = \int_a^b f(x(t), y(t)) y'(t) dt$$

Observe-se que podemos escrever $dx = x'(t) dt$ e $dy = y'(t) dt$.

Acontece frequentemente que estes integrais aparecem juntos e, neste caso, usa-se a abreviatura

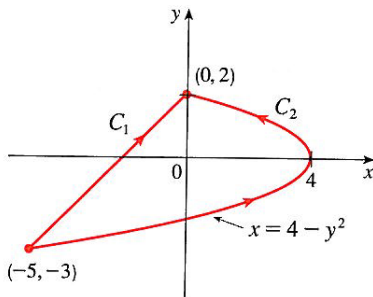
$$\int_C P(x, y) dx + \int_C Q(x, y) dy = \int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

Exemplo

Vamos avaliar $\int_C y^2 dx + \int_C x dy = \int_C y^2 dx + x dy$ onde

(a) $C = C_1$ é o segmento de reta de $(-5, -3)$ a $(0, 2)$ e

(b) $C = C_2$ é o arco da parábola $x = 4 - y^2$ de $(-5, -3)$ a $(0, 2)$.



Solução. (a) $-\frac{5}{6}$; (b) $\frac{245}{6}$

Resolução.

(a) Equações paramétricas para o segmento de reta:

$$\begin{aligned}(x, y) &= (-5, -3) + t((0, 2) - (-5, -3)) \\&= (-5, -3) + t(5, 5) \\&= (-5 + 5t, -3 + 5t), \quad t \in [0, 1]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_C y^2 dx + x dy &= \int_0^1 (-3 + 5t)^2 (-5 + 5t)' dt + (-5 + 5t)(-3 + 5t)' dt \\&= 5 \int_0^1 (9 - 30t + 25t^2 - 5 + 5t) dt \\&= 5 \int_0^1 (4 - 25t + 25t^2) dt \\&= 5 \left[4t - \frac{25}{2}t^2 + \frac{25}{3}t^3 \right]_0^1 = -\frac{5}{6}\end{aligned}$$

Resolução (cont.).

(b) Equações paramétricas para o arco da parábola:

$$(x, y) = (4 - t^2, t), \quad t \in [-3, 2]$$

$$\begin{aligned} \int_C y^2 dx + x dy &= \int_{-3}^2 t^2(4 - t^2)' dt + (4 - t^2)(t)' dt \\ &= \int_{-3}^2 (-2t^3 + 4 - t^2) dt \\ &= \left[-\frac{1}{2}t^4 + 4t - \frac{t^3}{3} \right]_{-3}^2 = \frac{245}{6} \end{aligned}$$

Exemplo

Note-se que as respostas obtidas dependem da **direção, ou orientação, da curva \mathcal{C}** .

Se $-\mathcal{C}_1$ denota o segmento de reta de $(0, 2)$ para $(-5, -3)$, podemos verificar que

$$\int_{-\mathcal{C}_1} y^2 dx + x dy = \frac{5}{6}.$$

Em geral, uma dada parametrização $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$, determina uma **orientação** da curva \mathcal{C} , com a direção positiva correspondendo aos valores do parâmetro t crescentes.

Se $-\mathcal{C}$ denota uma curva consistindo dos mesmos pontos de \mathcal{C} mas com uma orientação contrária, então tem-se

$$\begin{aligned}\int_{-\mathcal{C}} f(x, y) dx &= - \int_{\mathcal{C}} f(x, y) dx \\ \int_{-\mathcal{C}} f(x, y) dy &= - \int_{\mathcal{C}} f(x, y) dy.\end{aligned}$$

Mas se integrarmos com respeito ao comprimento de arco, o valor do integral não muda quando se troca a orientação da curva:

$$\int_{-\mathcal{C}} f(x, y) ds = \int_{\mathcal{C}} f(x, y) ds.$$

Isto é assim porque Δs_i é sempre positivo, enquanto que Δx_i e Δy_i mudam de sinal quando mudamos a orientação de \mathcal{C} .

Massa e centro de massa

Qualquer interpretação física do integral de linha $\int_C f(x, y) ds$ depende da interpretação física da função f .

Suponha que $\rho(x, y)$ representa a densidade linear num ponto (x, y) de um arame fino com formato de uma curva C . A massa da parte do arame de P_{i-1} até P_i na figura atrás é aproximadamente igual a $\rho(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i$, e então a massa total do arame terá valor aproximado de $\sum_{i=1}^n \rho(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i$. Tomando mais pontos sobre a curva, obtemos o valor da massa m do arame como o valor limite dessas aproximações

$$m = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \rho(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i = \int_C \rho(x, y) ds$$

O centro de massa do arame está localizado no ponto (\bar{x}, \bar{y}) , onde

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \int_C x \rho(x, y) ds \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \int_C y \rho(x, y) ds.$$

Exemplo

Por exemplo, se $f(x, y) = 2 + x^2 y$ representa a densidade de um arame com um formato semicircular, então o integral

$$\begin{aligned}\int_C f(x, y) \, ds &= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \sin t) \sqrt{(-\sin^2 t) + \cos^2 t} \, dt \\ &= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \sin t) \, dt \\ &= \left[2t - \frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^\pi = 2\pi + \frac{2}{3}\end{aligned}$$

representa a massa do arame.

Tal como para integrais de linha no plano, podemos calcular integrais de linha ao longo de uma curva \mathcal{C} no espaço com respeito a x , y e z :

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) dx = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt$$

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) dy = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) y'(t) dt$$

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) dz = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) z'(t) dt$$

e usa-se a abreviatura

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} P(x, y, z) dx + \int_{\mathcal{C}} Q(x, y, z) dy + \int_{\mathcal{C}} R(x, y, z) dz &= \\ &= \int_{\mathcal{C}} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \end{aligned}$$

Exemplo

Seja \mathcal{C} a curva que consiste no segmento de reta \mathcal{C}_1 de $(2, 0, 0)$ a $(3, 4, 5)$ seguido pelo segmento de reta vertical \mathcal{C}_2 de $(3, 4, 5)$ a $(3, 4, 0)$, como mostra a figura. Determine

$$\int_{\mathcal{C}} y \, dx + z \, dy + x \, dz.$$

Resolução.

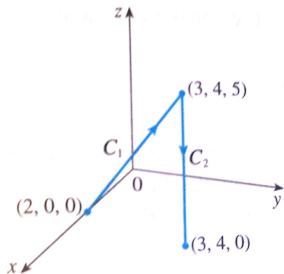
$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$$

Parametrização de \mathcal{C}_1 :

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (2, 0, 0) + t(1, 4, 5) \\ &= (2 + t, 4t, 5t), \quad t \in [0, 1]\end{aligned}$$

Parametrização de \mathcal{C}_2 :

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (3, 4, 5) + t(0, 0, -5) \\ &= (3, 4, 5 - 5t), \quad t \in [0, 1]\end{aligned}$$



Resolução (cont.).

$$\int_C y \, dx + z \, dy + x \, dz = \int_{C_1} y \, dx + z \, dy + x \, dz + \int_{C_2} y \, dx + z \, dy + x \, dz$$

$$\begin{aligned} \int_{C_1} y \, dx + z \, dy + x \, dz &= \int_0^1 4t(2+t)' \, dt + 5t(4t)' \, dt + (2+t)(5t)' \, dt \\ &= \int_0^1 (4t + 20t + 10 + 5t) \, dt = \int_0^1 (29t + 10) \, dt \\ &= \left[\frac{29}{2}t^2 + 10t \right]_0^1 = \frac{49}{2} = 24.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{C_2} y \, dx + z \, dy + x \, dz &= \int_0^1 4 \cdot (3)' \, dt + (5-5t)(4)' \, dt + 3(5-5t)' \, dt \\ &= \int_0^1 -15 \, dt = [-15t]_0^1 = -15 \end{aligned}$$

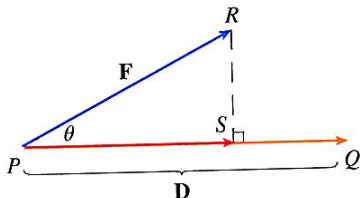
Assim,

$$\int_C y \, dx + z \, dy + x \, dz = 24.5 - 15 = 9.5$$

Mais à frente veremos que este integral pode ser calculado como o integral de linha do campo escalar $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, z, x)$ ao longo de C .

Trabalho realizado por uma força

- Suponha-se que um corpo rígido, sob ação de uma força \mathbf{F} , se desloca ao longo um segmento de reta e que o deslocamento é dado por $\overrightarrow{PQ} = (\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$.



- Se $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ for uma força constante, então o **trabalho realizado pela força \mathbf{F}** no deslocamento da partícula do ponto P ao ponto Q é definido como o produto da componente escalar da força \mathbf{F} ao longo de D pela distância percorrida, ou seja,

$$\begin{aligned} W &= (\|\mathbf{F}\| \cos \theta) \|\overrightarrow{PQ}\| \quad (\|\overrightarrow{PS}\| \|\overrightarrow{PQ}\|, \text{ se } 0 \leq \theta \leq \pi/2) \\ &= \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{PQ} = (F_1, F_2, F_3) \cdot (\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z) \\ &= F_1 \Delta_x + F_2 \Delta_y + F_2 \Delta_z \end{aligned}$$

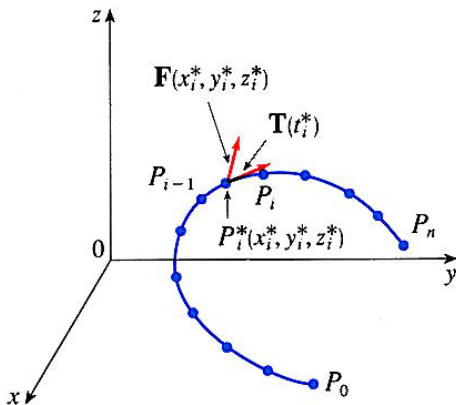
Trabalho realizado por uma força

- ▶ Seja \mathbf{F} um campo (vetorial) de forças no espaço que atua sobre um corpo rígido.
- ▶ Suponha-se que o corpo, sob ação de \mathbf{F} , se desloca ao longo uma curva \mathcal{C} parametrizada por $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$.
- ▶ Neste caso o **trabalho realizado por \mathbf{F}** movimentando o corpo ao longo da curva \mathcal{C} é dado por

$$W = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

Trabalho realizado por uma força

O trabalho é o integral com respeito ao comprimento de arco da componente tangencial (escalar) da força.



$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \int_a^b \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \right] \|\mathbf{r}'(t)\| dt$$

Trabalho realizado por uma força

- ▶ Dividimos \mathcal{C} em subarcos $P_{i-1}P_i$ com comprimentos Δs_i , dividindo o intervalo do parâmetro $[a, b]$ em subintervalos, e escolhemos $P_i^* = (x_i^*, y_i^*, z_i^*)$ correspondente ao valor do parâmetro t_i^* .
- ▶ Se Δs_i é pequeno, o movimento do corpo de P_{i-1} para P_i na curva processa-se aproximadamente na direção de $\mathbf{T}(t_i^*)$, vetor tangente em P_i^* .
- ▶ Então o trabalho feito pela força \mathbf{F} para mover o corpo de P_{i-1} para P_i é aproximadamente

$$\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot [\mathbf{T}(t_i^*) \Delta s_i] = [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(t_i^*)] \Delta s_i$$

Trabalho realizado por uma força

- O trabalho total para mover o corpo ao longo de \mathcal{C} é aproximadamente

$$\sum_{i=1}^n [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)] \Delta s_i$$

onde $\mathbf{T}(x, y, z)$ é o versor tangente no ponto (x, y, z) de \mathcal{C} .

- Intuitivamente podemos ver que essas aproximações devem ficar melhores quando n aumenta muito. Portanto, definimos o **trabalho W realizado por um campo de forças \mathbf{F}** como o limite da soma de Riemann anterior

$$\begin{aligned} W &= \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{T}(x, y, z) ds = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds \\ &= \int_a^b \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \right] \|\mathbf{r}'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt. \end{aligned}$$

Integral de linha (campo vetorial em \mathbb{R}^3)

- Sendo $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vetorial contínuo definido numa curva suave \mathcal{C} parametrizada por $\mathbf{r} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^1 , o **integral de linha de \mathbf{F} ao longo de \mathcal{C}** é definido como

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

Note que podemos formalmente escrever $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t) dt$.

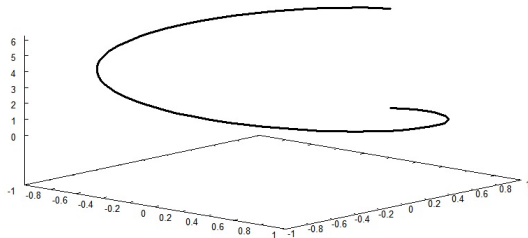
- Outras notações para o integral de linha (ou de caminho) de $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ ao longo de \mathcal{C} são

$$\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{ou} \quad \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds \quad \text{ou} \quad \int_{\mathcal{C}} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

Exemplo

Calcular $\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ quando $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ e

$$\mathbf{r}(t) = (\sin t, \cos t, t), \quad t \in [0, 2\pi].$$



$$\mathbf{r}(t) = (\sin t, \cos t, t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

Resolução.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\&= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\sin t, \cos t, t) \cdot (\sin t, \cos t, t)' dt \\&= \int_0^{2\pi} (\sin t, \cos t, t) \cdot (\cos t, -\sin t, 1) dt \\&= \int_0^{2\pi} (\sin t \cos t - \cos t \sin t + t) dt \\&= \int_0^{2\pi} t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{2\pi} = 2\pi^2\end{aligned}$$

Exemplo

Determinar o trabalho realizado pelo campo de forças $\mathbf{F}(x, y) = (x^2, -xy)$ para mover uma partícula ao longo de um quarto de circunferência $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Resolução.

O trabalho realizado é dado por

$$\begin{aligned} W &= \int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t, -\cos t \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (-2 \cos^2 t \sin t) dt = \left[2 \frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

O trabalho é negativo o que significa que o campo impede o movimento ao longo da curva.

Observação

Note-se a ligação entre integrais de linha de campos vetoriais e integrais de linha de campos escalares.

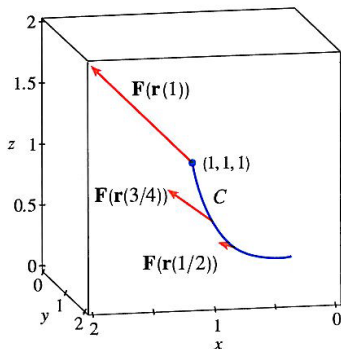
Para $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ e $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, com F_1 , F_2 e F_3 funções escalares, temos

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\&= \int_a^b (F_1(\mathbf{r}(t)), F_2(\mathbf{r}(t)), F_3(\mathbf{r}(t))) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) dt \\&= \int_a^b [F_1(\mathbf{r}(t)) x'(t) + F_2(\mathbf{r}(t)) y'(t) + F_3(\mathbf{r}(t)) z'(t)] dt \\&= \int_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz\end{aligned}$$

Exemplo

$$\int_C xy \, dx + yz \, dy + zx \, dz$$

quando C é a curva parametrizada por $\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ com $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$, $0 \leq t \leq 1$.



Solução. $\frac{27}{28}$

Resolução.

Fazendo $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, yz, zx)$, podemos escrever

$$\int_C xy \, dx + yz \, dy + zx \, dz = \int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_C xy \, dx + yz \, dy + zx \, dz &= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt \\ &= \int_0^1 \mathbf{F}(t, t^2, t^3) \cdot (t, t^2, t^3)' \, dt \\ &= \int_0^1 (t^3, t^5, t^4) \cdot (1, 2t, 3t^2) \, dt \\ &= \int_0^1 (t^3 + 5t^6) \, dt \\ &= \left[\frac{t^4}{4} + \frac{5}{7}t^7 \right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{5}{7} = \frac{27}{28} \end{aligned}$$

Teorema de Green

- ▶ O Teorema de Green relaciona integrais de linha com integrais duplos - o integral de linha ao longo de uma curva simples fechada \mathcal{C} e o integral duplo sobre a região D do plano cuja fronteira é \mathcal{C} .
- ▶ Recorde-se que sendo \mathcal{C} uma curva parametrizada pelo caminho $\mathbf{r} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ seccionalmente de classe C^1 , diz-se que
 - \mathcal{C} é uma curva fechada se $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$;
 - a curva fechada \mathcal{C} é uma curva simples se

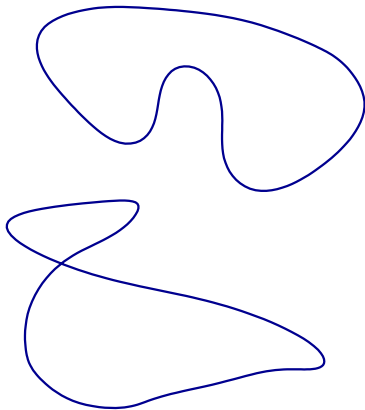
$$t_1 \neq t_2 \implies \mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2), \quad \forall t_1, t_2 \in]a, b[.$$

- ▶ Seja \mathcal{C} uma curva fechada simples no plano parametrizada pelo caminho $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ seccionalmente de classe C^1 .
- ▶ A curva \mathcal{C} constitui a fronteira de uma região D do plano.
- ▶ Dizemos que \mathcal{C} está positivamente orientada se D está à esquerda de $\mathbf{r}(t)$ quando \mathbf{r} descreve \mathcal{C} .
- ▶ Dizemos que \mathcal{C} está negativamente orientada caso contrário.

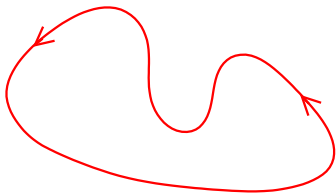
curva não fechada



curva fechada e simples



curva orientada positivamente



curva fechada e não simples

Teorema de Green

Seja D uma região do plano e \mathbf{r} uma parametrização seccionalmente de classe C^1 da fronteira \mathcal{C} de D percorrida no sentido positivo.

Seja ainda $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{F} = (P, Q)$ um campo vetorial de classe C^1 .

Então

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

ou ainda

$$\int_{\mathcal{C}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Com frequência escreve-se

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

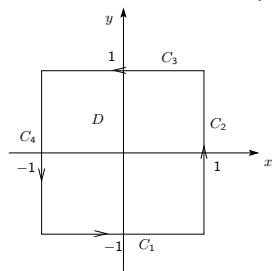
onde ∂D denota a fronteira de D .

Exemplo

Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças definido por $\mathbf{F}(x, y) = (y, -x)$ no deslocamento de uma partícula ao longo da fronteira do quadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$ orientada no sentido anti-horário.

Resolução.

1. Usando a definição de integral de linha.



Seja C a fronteira do quadrado:

$$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$$

Temos que parametrizar cada uma das curvas C_i

$$C_1 : \mathbf{r}_1(t) = (t, -1), \quad t \in [-1, 1]$$

$$C_2 : \mathbf{r}_2(t) = (1, t), \quad t \in [-1, 1]$$

$$C_3 : \mathbf{r}_3(t) = (1 - 2t, 1), \quad t \in [0, 1]$$

$$C_4 : \mathbf{r}_4(t) = (-1, 1 - 2t), \quad t \in [0, 1]$$

Assim,

$$\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2 + \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_3 + \int_{C_4} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_4 = \dots$$

Resolução (cont.).

2. Usando o teorema de Green.

Temos $\mathbf{F}(x, y) = (y, -x)$ e, portanto, $P(x, y) = y$ e $Q(x, y) = -x$.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 -2 dy dx \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 -2 dy dx = -8\end{aligned}$$

Cálculo de áreas

Uma aplicação do Teorema de Green está no cálculo de áreas. Como a área de uma região D é

$$\text{Area}(D) = \iint_D 1 \, dA,$$

desejamos escolher P e Q tais que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$.

Existem várias possibilidades:

$$\begin{array}{lll} P(x, y) = 0 & P(x, y) = -y & P(x, y) = -\frac{1}{2}y \\ Q(x, y) = x & Q(x, y) = 0 & Q(x, y) = \frac{1}{2}x \end{array}$$

Se \mathbf{r} é uma parametrização de uma curva simples que limita uma região D do plano à qual se aplica o Teorema de Green, então a área de D pode ser calculada por

$$\text{Area}(D) = \frac{1}{2} \int_{\partial D} -y \, dx + x \, dy = \int_{\partial D} x \, dy = - \int_{\partial D} y \, dx$$

Exercícios

1. Considere o integral de caminho $I = \frac{1}{2} \int_C -y \, dx + x \, dy$ onde \mathcal{C} é a fronteira do quadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$ orientada no sentido anti-horário.
 - (a) Usando o Teorema de Green, calcule o valor de I .
 - (b) Compare o valor de I com o valor da área da região do plano limitada por \mathcal{C} . Justifique.
2. Seja \mathcal{C} a fronteira do quadrado em \mathbb{R}^2 de lado 1 orientada positivamente. Calcule o integral

$$\int_{\mathcal{C}} x^2 \, dx + xy \, dy.$$

3. Seja D o triângulo em \mathbb{R}^2 de vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$ e $(0, 4)$, com a fronteira orientada no sentido direto. Utilizando o Teorema de Green calcule o integral

$$\int_{\partial D} 2xy^2 \, dx + 4x \, dy$$

Matriz Jacobiana

Vamos definir duas operações que podem ser realizadas com campos vetoriais que são operações básicas nas aplicações de cálculo vetorial à mecânica de fluidos e à eletricidade e magnetismo. Cada operação lembra uma diferenciação, mas uma produz um campo vetorial enquanto outra gera um campo escalar.

Seja $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial dado por

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), \dots, F_n(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

e $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in D$.

► A **matriz Jacobiana** de \mathbf{F} em \mathbf{a}

$$J_{\mathbf{F}}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{bmatrix}$$

► A matriz Jacobiana de um campo vetorial é sempre uma matriz quadrada $n \times n$.

Divergência

- A **divergência do campo \mathbf{F}** em $\mathbf{a} \in D$ é o traço da matriz Jacobiana de \mathbf{F} em \mathbf{a} , isto é,

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{a}) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\mathbf{a}) + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(\mathbf{a})$$

- Usando o operador de diferenciação $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ a divergência de \mathbf{F} passa a ser escrita simbolicamente como

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F}$$

- **[Interpretação física]** Se \mathbf{F} representa o campo de velocidades de um fluido então $\operatorname{div} \mathbf{F}$ representa a taxa de expansão do fluido por unidade de volume:
- se $\operatorname{div} \mathbf{F} > 0$ o fluido está em expansão;
 - se $\operatorname{div} \mathbf{F} < 0$ o fluido está em compressão.
 - se $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ o fluido diz-se incompressível.

Rotacional $[n = 3]$

- ▶ Se $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ for um campo vetorial em \mathbb{R}^3 , o **rotacional de \mathbf{F}** é dado por

$$\vec{\text{rot}} \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

- ▶ Usando o operador $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$, o rotacional de \mathbf{F} pode ser escrito como

$$\vec{\text{rot}} \mathbf{F} = \vec{\nabla} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

- ▶ **[Interpretação física]** Se \mathbf{F} representa o campo de velocidades de um fluido então $\vec{\text{rot}} \mathbf{F}$ é o dobro da velocidade angular de um corpo rígido imerso no fluido que roda com o fluido. Se $\vec{\text{rot}} \mathbf{F} = \vec{0}$ significa que o fluido não roda e \mathbf{F} é chamado irrotacional.

Exemplo

Determine a matriz Jacobiana, a divergência e o rotacional do campo vetorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definido por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2, xy, z).$$

- Matriz Jacobiana:

$$J_{\mathbf{F}}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) & \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2) & \frac{\partial}{\partial z}(x^2 + y^2) \\ \frac{\partial}{\partial x}(xy) & \frac{\partial}{\partial y}(xy) & \frac{\partial}{\partial z}(xy) \\ \frac{\partial}{\partial x}z & \frac{\partial}{\partial y}z & \frac{\partial}{\partial z}z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 \\ y & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Divergência: $\operatorname{div} \mathbf{F} = \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \frac{\partial}{\partial z}z = 3x + 1$

- Rotacional:

$$\begin{aligned} \vec{\operatorname{rot}} \mathbf{F} = \vec{\nabla} \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + y^2 & xy & z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y}z - \frac{\partial}{\partial z}(xy), \frac{\partial}{\partial z}(x^2 + y^2) - \frac{\partial}{\partial x}z, \frac{\partial}{\partial x}(xy) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2) \right) \\ &= (0, 0, y - 2y) = (0, 0, -y) \end{aligned}$$

Observação

- ▶ Se $f : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função real de 3 variáveis reais, o gradiente de f , $\vec{\nabla} f$, é um campo vetorial.

- ▶ De facto,

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

- ▶ Aqui, as funções componentes são

$$P = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

- Se f for de classe C^2 temos, da definição de rotacional

$$\begin{aligned}\vec{\text{rot}}(\vec{\nabla} f) &= \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) \\&= \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \right) \vec{k} \\&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \vec{k}\end{aligned}$$

- Como f é de classe C^2 , pelo Teorema de Schwarz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

- Assim,

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\nabla} f) = \vec{0}.$$

Observação

- Se $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ for um campo vetorial em \mathbb{R}^3 , o rotacional de \mathbf{F} é um campo vetorial

$$\vec{\text{rot}} \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

- Se \mathbf{F} for de classe C^2 , a divergência do campo $\vec{\text{rot}} \mathbf{F}$ é

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{\text{rot}} \mathbf{F}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Propriedades

- ▶ Se $f : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função escalar de classe C^2 , então

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\nabla} f) = \vec{0}.$$

- ▶ O recíproco do resultado anterior é verdadeiro quando \mathbf{F} está definido em \mathbb{R}^3 (ou mais geralmente quando \mathbf{F} está definido num conjunto simplesmente conexo) e é de classe C^1 . Neste caso, temos que se $\overrightarrow{\text{rot}} \mathbf{F} = \vec{0}$, então \mathbf{F} é um campo vetorial conservativo.

- ▶ Se $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é um campo vetorial em \mathbb{R}^3 de classe C^2 , então

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \mathbf{F}) = 0.$$

Campos vetoriais conservativos em \mathbb{R}^3

- O campo vetorial $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ diz-se um **campo vetorial conservativo** ou **campo gradiente** se existir uma função real diferenciável $f : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\mathbf{F} = \vec{\nabla} f$$

isto é,

$$\mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}.$$

- A função f diz-se uma **função potencial** de \mathbf{F} .

Campos vetoriais conservativos em \mathbb{R}^3 : propriedades

- Seja $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é um campo vetorial de classe C^1 .

As seguintes afirmações são equivalentes

- \mathbf{F} é um campo conservativo.
- para toda a curva $\mathbf{r} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ seccionalmente C^1 e $\mathbf{F} = \vec{\nabla} f$

$$\int_{\mathbf{r}} \vec{\nabla} f = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)).$$

(c.f. Teorema Fundamental do Cálculo)

- para toda a curva $\mathbf{r} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ seccionalmente C^1 e fechada

$$\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} = 0.$$

- $\overrightarrow{\text{rot}} \mathbf{F} = \vec{0}$.

Exercícios

- (a) Mostre que $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 z^3, 2xyz^3, 3xy^2 z^2)$ é um campo vetorial conservativo.
 - (b) Determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \vec{\nabla} f$.
- Mostre que o campo de vetores $\mathbf{F}(x, y, z) = (xz, xyz, -y^2)$ não é conservativo.
- Existe algum campo vetorial \mathbf{F} em \mathbb{R}^3 tal que
$$\vec{\text{rot}} \mathbf{F} = (xy^2, yz^2, zx^2)?$$

Justifique.