Geometria
LMat & LCC

Primeiro teste
23 março 2019

Proposta de Resolução
Grupo I

1. $\mathcal{R} = \{ O, \mathcal{B} = (\vec{v_1}, \vec{v_2}) \}$, $\vec{v_1} \cdot \vec{v_1} = 2$ $\quad \vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = -1$ $\quad \vec{v_2} \cdot \vec{v_2} = 1$

a $\vec{u_1} = (2,-1)_{\mathcal{B}} = 2\vec{v_1} - \vec{v_2}$ $\quad \vec{u_2} = (1,1)_{\mathcal{B}} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$

$$\cos \measuredangle \{\vec{u_1}, \vec{u_2}\} = \frac{\vec{u_1} \cdot \vec{u_2}}{\|\vec{u_1}\| \, \|\vec{u_2}\|}$$

$$\vec{u_1} \cdot \vec{u_2} = (2\vec{v_1} - \vec{v_2}) \cdot (\vec{v_1} + \vec{v_2}) = 2\,\vec{v_1} \cdot \vec{v_1} + 2\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} - \vec{v_2} \cdot \vec{v_1} - \vec{v_2} \cdot \vec{v_2}$$
$$= 4 - 2 + 1 - 1 = 2$$

$$\|\vec{u_1}\|^2 = \vec{u_1} \cdot \vec{u_1} = (2\vec{v_1} - \vec{v_2}) \cdot (2\,\vec{v_1} - \vec{v_2}) =$$
$$= 4\,\vec{v_1} \cdot \vec{v_1} - 2\,\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} - 2\,\vec{v_2} \cdot \vec{v_1} + \vec{v_2} \cdot \vec{v_2} = 8 + 2 + 2 + 1 = 13$$

$$\|\vec{u_1}\| = \sqrt{13}$$

$$\|\vec{u_2}\|^2 = \vec{u_2} \cdot \vec{u_2} = (\vec{v_1} + \vec{v_2}) \cdot (\vec{v_1} + \vec{v_2}) =$$
$$= \vec{v_1} \cdot \vec{v_1} + \vec{v_1} \cdot \vec{v_2} + \vec{v_2} \cdot \vec{v_1} + \vec{v_2} \cdot \vec{v_2} = 2 - 1 - 1 + 1 = 1$$

$$\|\vec{u_2}\| = 1$$

$$\cos \measuredangle \{\vec{u_1}, \vec{u_2}\} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

b. $\mathcal{R}' = \{ O', \mathcal{B}' \}$, $O' = (1,0)_{\mathcal{R}}$, $\mathcal{B}' = (\vec{u_1}, \vec{u_2})$

i Se (x_1, x_2) são coordenadas em $\mathcal{R}$ e (x_1', x_2') são coordenadas em $\mathcal{R}'$, temos imediatamente que:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

Como pretendemos escrever (x_1', x_2') em função de (x_1, x_2) é necessário "inverter o sistema". Temos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Calculando a inversa da matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Logo:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

é a expressão para a mudança de referencial de $\mathcal{R}$ para $\mathcal{R}'$.

ii Como foi visto na alínea a), $\mathcal{R}'$ não é ortonormado nem ortogonal pois $\vec{e_1}\cdot\vec{e_2} = 2 \neq 0$ ($\vec{e_1}\cdot\vec{e_1} = 13 \neq 1$).
Da alínea b i) conclui-se imediatamente que $O = (-1/3, -1/3)_{\mathcal{R}'}$.

2. $r = (1,0,1) + \langle (2,0,1) \rangle$

a $r: (x,y,z) = (1,0,1) + \lambda(2,0,1) \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = 0 \\ z = 1+\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+2(z-1) \\ y = 0 \\ \lambda = z-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1+2z \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2z + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$ sistema de equações cartesianas de r.

b Como π é perpendicular a r então $\vec{r} = (2,0,1)$ é vetor normal a π. Logo, a equação de π é do tipo:
$2x + z + k = 0 \quad (k \in \mathbb{R})$
Como $P = (1,-3,0) \in \pi$ então $2+k=0 \Rightarrow k = -2$
Logo: $2x + z - 2 = 0$ é a equação cartesiana de π.

Grupo II

3 $r: \begin{cases} x = 1 \\ y - z = -1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x + z = 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$

a Equação vetorial de r

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = \lambda + 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y,z) = (1,0,1) + \lambda(0,1,1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$r = (1,0,1) + \langle (0,1,1) \rangle$

Equação vetorial de s

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3-\lambda \end{cases} \Leftrightarrow (x,y,z) = (0,0,3) + \lambda(1,1,-1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$s = (0,0,3) + \langle (1,1,-1) \rangle$

$\underline{b}$ Fazendo $r = A + \langle \vec{v} \rangle = (1,0,1) + \langle (0,1,1) \rangle$

$s = B + \langle \vec{w} \rangle = (0,0,3) + \langle (1,1,-1) \rangle$

$r+s = A + \langle \vec{AB}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = (1,0,1) + \langle (-1,0,2), (0,1,1), (1,1,-1) \rangle$

r e s são complanares (e distintas) se e só se $\dim(r+s) = 2$

$$\det(\vec{AB}, \vec{v}, \vec{w}) = \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2 - 2 = 0$$

Logo $\langle \vec{AB}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ é um sistema de vetores linearmente dependente. De facto $\vec{AB} = -\vec{w} + \vec{v}$. Portanto, $\langle \vec{AB}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$. Como $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não são proporcionais, $\dim(r+s) = \dim\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 2$.

Equação cartesiana do plano $r+s$:

$$\det\begin{pmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (x-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - y\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

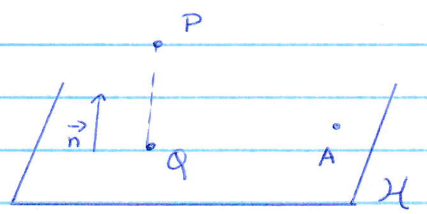
$$+ (z-1)\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -2(x-1) + y - (z-1) = -2x + y - z + 3$$

Logo $r+s$ tem equação cartesiana: $-2x + y - z + 3 = 0$

$\underline{c}$ As retas r e s não são paralelas pois $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não são proporcionais, isto é, não existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = \lambda\vec{w}$ ou $\vec{w} = \lambda\vec{v}$. Como r e s são complanares e não paralelas então r e s intersetam-se num ponto P (pode verificar que $P = (1,1,2)$). Logo $d(r,s) = \text{ínfimo}\{d(X,Y) : X \in r, Y \in s\} = d(P,P) = 0$.

$\underline{\underline{4}}$

$\underline{a}$ $\mathcal{H} = A + \langle \vec{n} \rangle^{\perp}$, $Q = \mathrm{Proj}_{\mathcal{H}}(P)$.



Por definição de projeção ortogonal, temos que $Q \in \mathcal{H}$ e $\vec{PQ}$ é perpendicular a $\mathcal{H}$.

Logo $\vec{PQ} = \lambda\vec{n}$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, e como $A \in \mathcal{H}$ então $\vec{AQ} \cdot \vec{n} = 0$ ($\vec{n}$ é vetor normal a $\mathcal{H}$).

Temos que $\vec{AP} = \vec{AQ} + \vec{QP} = \vec{AQ} - \lambda\vec{n}$.

Fazendo o produto escalar com o vetor $\vec{n}$, vem:

$$\vec{AP} \cdot \vec{n} = (\vec{AQ} - \lambda\vec{n})\vec{n} = \vec{AQ} \cdot \vec{n} - \lambda\, \vec{n} \cdot \vec{n}$$

Logo $\lambda = -\dfrac{\vec{AP} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} = -\dfrac{\vec{AP} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}$.

De $\overrightarrow{PQ} = \lambda \vec{n}$, vem $Q = P + \lambda \vec{n} = P - \dfrac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}$

b. $\mathcal{H}: 2x - y + 3z + t = 1$, $P = (1, -1, 0, 2)$

Pela alínea anterior, $proj_{\mathcal{H}}(P) = P - \dfrac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}$

onde A é um ponto (qualquer) de $\mathcal{H}$ e $\vec{n}$ é vetor normal a $\mathcal{H}$.

Tomamos $\vec{n} = (2, -1, 3, 1)$ e escolhemos $A = (0, 0, 0, 1) \in \mathcal{H}$

$\overrightarrow{AP} = P - A = (1, -1, 0, 1)$

$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 2 + 1 + 1 = 4$

$\|\vec{n}\|^2 = \vec{n} \cdot \vec{n} = 4 + 1 + 9 + 1 = 15$

Logo, $proj_{\mathcal{H}}(P) = (1, -1, 0, 2) - \dfrac{4}{15}(2, -1, 3, 1) =$

$= \left(\dfrac{7}{15}, \dfrac{-11}{15}, \dfrac{-4}{5}, \dfrac{26}{15} \right).$