Universidade do Minho
Departamento de Matemática

LCC **Análise**

Ficha de exercícios 1 — 2019/2020

- **Curvas e superfícies de nível. Gráficos de funções de duas variáveis**

1. Para cada função f definida nas alíneas seguintes, determine o domínio e o valor de f nos pontos indicados. Faça um esboço gráfico do domínio de f.

(a) $f(x,y)=2x-y^2,\quad (-2,5),\ (0,-2);$

(b) $f(x,y)=\dfrac{1}{2x-y^2},\quad (-2,1),\ (-1,0);$

(c) $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2},\quad (2,1),\ (-1,-1);$

(d) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x-2y},\quad (2,3),\ (-1,4);$

(e) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2-y^2},\quad (2,0),\ (-1,2);$

(f) $f(x,y)=\ln(x^2+y),\quad (1,0),\ (0,1);$

(g) $f(x,y)=\dfrac{y}{\ln(x^2-y)},\quad (0,-e),\ (e,0);$

(h) $f(x,y)=\sqrt{4-x^2}-\sqrt{y^2-4},\quad (1,2),\ (-1,3);$

(i) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-4},\quad (3,1),\ (-1,-3);$

(j) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}},\quad (2,1),\ (2,-1).$

2. Considere a função definida por $f(x,y)=\dfrac{x^4+2x^2y^2+y^4}{1-x^2-y^2}$.

(a) Determine o domínio de f.

(b) Calcule o valor que f assume nos pontos da circunferência de equação $x^2+y^2=4$.

3. Esboce pelo menos 4 curvas de nível, para cada uma das funções $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definidas por:

(a) $f(x,y)=x+y;$

(b) $f(x,y)=3x+3y;$

(c) $f(x,y)=x^2+y^2;$

(d) $f(x,y)=1-x^2-y^2;$

(e) $f(x,y)=xy;$

(f) $f(x,y)=y-x^2.$

4. Esboce algumas curvas de nível e os gráficos das funções $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ dadas por:

(a) $f(x,y)=x-y+2;$

(b) $f(x,y)=x^2+4y^2;$

(c) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2};$

(d) $f(x,y)=-\sqrt{4-x^2-y^2}.$

5. Esboce o gráfico das superfícies seguintes:

(a) $z=3;$

(b) $x^2+y^2+z^2=9;$

(c) $z=x^2+y^2+4;$

(d) $z=5-x^2-y^2;$

(e) $z=y^2;$

(f) $2x+4y+3z=12;$

(g) $x^2+y^2=4;$

(h) $x^2+z^2=4.$

6. Considere o gráfico da função $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por $f(x,y)=x^2+y^2$. Descreva, por palavras, os gráficos das funções definidas por:

(a) $g(x,y)=x^2+y^2+3;$

(b) $h(x,y)=5-x^2-y^2;$

(c) $k(x,y)=x^2+(y-1)^2.$

7. Faça um esboço gráfico do domínio de cada uma das seguintes funções:

(a) $f(x,y,z)=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2};$

(b) $f(x,y,z)=-\sqrt{x^2+y^2+z^2-25}.$

8. Descreva as superfícies de nível associadas a cada uma das funções:

(a) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2;$

(b) $f(x,y,z)=z-x^2-y^2;$

(c) $f(x,y,z)=x+2y+3z;$

(d) $f(x,y,z)=x^2+y^2.$

- **Limite e continuidade**

9. Calcule o limite das seguintes funções quando (x,y) tende para $(0,0)$ segundo as rectas $y=0$, $x=0$ e $y=mx$, com $m\neq 0$.

(a) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$

(b) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

(c) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

(d) $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$

(e) $f(x,y)=\dfrac{x}{x+y}$

(f) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^4}{(x^2+y^4)^2}$

Diga, justificando, se existe limite destas funções quando (x,y) tende para $(0,0)$.

10. Determine, caso existam, os limites seguintes.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,3)}(2x-y^2)$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)} y\sin\left(\frac{x}{y}\right)$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-2}{3+xy}$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3-x^2y+xy^2-y^3}{x^2+y^2}$

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2-y^2}{x^2+2y^2}$

(f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-2xy+5y^2}{3x^2+4y^2}$

(g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{4x^2y}{x^3+y^3}$

(h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{x-y}{x^2-y^2}$

(j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{3xy}{(x-1)^2+(y-2)^2}$

(k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{yx^4}{1+x^4}$

(l) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^3+y)\,\text{sen}\,\frac{1}{y+x}$

11. Determine o valor da constante k de modo que a função

$$g(x,y)=\begin{cases}\cos(x^2+y^2) & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ k & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

seja contínua em $(x,y)=(0,0)$.

12. Estude a continuidade na origem das funções seguintes.

(a) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(b) $f(x,y)=\begin{cases}1 & \text{se } y\neq x\\ 0 & \text{se } y=x\end{cases}$

(c) $f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\,\text{sen}\,\dfrac{1}{x} & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$

13. Discuta a continuidade das funções apresentadas a seguir.

(a) $f(x,y,z)=x^2y+x^3y^2+z$

(b) $f(x,y)=\ln(x+y-1)$

(c) $f(x,y,z)=\dfrac{1}{x^2+y^2-z^2}$

(d) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{5x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(e) $f(x,y)=\begin{cases}2 & \text{se } x^2+y^2\leq 1\\ 0 & \text{se } x^2+y^2>1\end{cases}$

(f) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{2x^2+3y^4} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$