Aula 30 de março

79. No espaço vectorial $\mathbf{R}^3$, munido do produto escalar usual,determine a projeção ortogonal do vector $\overrightarrow{v}$ no subespaço vectorial W, se $\overrightarrow{v} = (1,-1,0)$ e W está definido pela equação cartesiana

$$x - z = 0$$

O vetor $\vec{w} = (1,0,-1)$ é ortogonal ao plano W, ou seja, $W^{\perp} = <\vec{w}>$.

Temos $\vec{v} = \vec{p} + \vec{q}$ onde $\vec{p} \in W$ e $\vec{q} \in W^{\perp}$.

Como $\vec{q} \in W^{\perp}$ então $\vec{q} = \lambda \vec{w}$ e como $\vec{p} \in W$ então $\vec{p} \cdot \vec{w} = 0$.

$\vec{v} = \vec{p} + \vec{q} \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{p} \cdot \vec{w} + \vec{q} \cdot \vec{w} \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = \lambda \vec{w} \cdot \vec{w} \Rightarrow \lambda = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}}$

$\vec{p} = \vec{v} - \lambda \vec{w} = (1,-1,0) - \frac{1}{2}(1,0,-1) = \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)$.

82. Seja $\mathcal{A}$ um plano afim euclidiano munido de um referencial ortonormado.

(a) Determine a recta s_1 perpendicular à recta r_1 definida pela equação vectorial:

$$r_1 = (2,0) + < (2,-2) >$$

e que incide no ponto $P_1 = (1,4)$.

(b) Determine a recta s_2 perpendicular à recta r_2 definida pela equação cartesiana:

$$-2x + 3y - 1 = 0$$

e que incide no ponto $P_2 = (-1,5)$.

a. $s_1 = (1,4) + < (1,1) >$

Note que $(1,1) \cdot (2,-2) = 0$.

b. $R_2 = (-1,5) + < (-2,3) >$.

83. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado.

(a) Calcule a recta r perpendicular ao plano π definido pela equação cartesiana:

$$2x + y - z + 4 = 0$$

e que incide no ponto $P = (-1, 1, 1)$.

(b) Calcule a recta r' perpendicular ao plano π' definido pela equação vectorial:

$$\pi' = (1, 0, 1) + < (2, 0, 0), (-1, -1, 3) >$$

e que incide no ponto $P' = (1, -1, 0)$.

a $r = (-1,1,1) + \langle (2,1,-1) \rangle.$

b. $\pi' : \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2(3y+z-1) = 0 \Leftrightarrow 3y+z = 1$

$r' = (1,-1,0) + \langle (0,3,1) \rangle.$

85. Num espaço euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado considere as rectas afins:

$$r = (1, 0, -2) + < (2, -2, 1) >$$

$$s =< (0, 2, 1) >$$

Calcule a recta t perpendicular a r e a s que incide no ponto $M = (0, 3, 0)$.

$r = (1,0,-2) + \langle (2,-2,1) \rangle = A + \langle \vec{u} \rangle, \quad s = \langle (0,2,1) \rangle = \langle \vec{v} \rangle.$

$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4\vec{e_1} - 2\vec{e_2} + 4\vec{e_3} = (-4,-2,4).$

$t = M + \langle \vec{w} \rangle = (0,3,0) + \langle (-4,-2,4) \rangle = (0,3,0) + \langle (2,1,-2) \rangle.$

Aula 2 de abril

87. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado. Calcule a perpendicular comum às rectas enviesadas:

$$r = (0,-1,-2) + < (1,0,1) > \qquad\qquad s = (2,0,0) + < (2,0,-1) >$$

Resolução 1:

$r = (0,-1,-2) + < (1,0,1) > = A + < \vec{u} >$

$s = (2,0,0) + < (2,0,-1) > = B + < \vec{v} >$

O produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ tem a direção de $\vec{w} = (0,1,0)$.

Consideramos os planos: $\Pi_r = A + < \vec{u}, \vec{w} >$ e $\Pi_s = B + < \vec{v} >$.

A perpendicular comum t é então dada pela intersecção $\Pi_r \cap \Pi_s$.

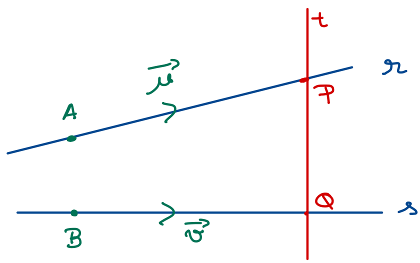
$$\Pi_r : \begin{vmatrix} x & y+1 & z+2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff x - (z+2) = 0 \iff x - z = 2 .$$

$$\Pi_s : \begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff -(x-2) - 2z = 0 \iff x + 2z = 2 .$$

$$t = \Pi_r \cap \Pi_s : \begin{cases} x - 2z = 2 \\ x - z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

sistema de equações cartesianas de t.

Resolução 2:



Seja t a perpendicular comum de r e s.

Sejam $P = r \cap t$ e $Q = s \cap t$ os pés da perpendicular comum. Temos:

$\overrightarrow{AP} = \alpha \vec{u}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ $\qquad\qquad \overrightarrow{PQ} \perp r$

$\overrightarrow{QB} = \beta \vec{v}$, $\beta \in \mathbb{R}$ $\qquad\qquad \overrightarrow{PQ} \perp s$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QB}$ e fazendo o produto escalar com $\vec{u}$ e $\vec{v}$

obtemos o sistema: $\begin{cases} \overrightarrow{AB}\cdot\vec{u} = \alpha\,\vec{u}\cdot\vec{u} + \beta\,\vec{v}\cdot\vec{u} \\ \overrightarrow{AB}\cdot\vec{v} = \alpha\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \beta\,\vec{v}\cdot\vec{v} \end{cases}$

$\overrightarrow{AB} = (2,1,2)$ $\qquad \overrightarrow{AB}\cdot\vec{u} = 4$ $\qquad \vec{u}\cdot\vec{u} = 2$ $\qquad \vec{u}\cdot\vec{v} = 1$

$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v} = 2$ $\qquad \vec{v}\cdot\vec{v} = 5$

$$\begin{cases} 4 = 2\alpha + \beta \\ 2 = \alpha + 5\beta \end{cases} \iff \begin{cases} 4 = 4 - 10\beta + \beta \\ \alpha = 2 - 5\beta \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

$\overrightarrow{AP} = \alpha\vec{u} \Rightarrow P = A + \alpha\vec{u} = (0,-1,-2) + 2(1,0,1) = (2,-1,0)$

$\overrightarrow{QB} = \beta\vec{v} \Rightarrow Q = B - \beta\vec{v} = B = (2,0,0)$.

$t = P + \langle \overrightarrow{PQ} \rangle = (2,-1,0) + \langle (0,1,0) \rangle$.

88. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado. Calcule os pés da perpendicular comum às rectas enviesadas:

$$r = < (2,1,-1) > \qquad\qquad s = (0,1,0) + < (1,0,1) >$$

Resolução 1:

$R = \langle (2,1,-1) \rangle = O + \langle \vec{u} \rangle$

$s = (0,1,0) + \langle (1,0,1) \rangle = B + \langle \vec{v} \rangle$

Calculamos o produto vetorial $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$.

$$\vec{\omega} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{e_1} - 3\vec{e_2} - \vec{e_3} = (1,-3,-1).$$

$$\widetilde{\pi}_r = O + \langle \vec{u}, \vec{\omega} \rangle : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -4x + y - 7z = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x - y + 7z = 0$$

$$\widetilde{\pi}_s = B + \langle \vec{v}, \vec{\omega} \rangle : \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3x + 2(y-1) - 3z = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + 2y - 3z = 2$$

$$t = \widetilde{\pi}_r \cap \widetilde{\pi}_s : \begin{cases} 4x - y + 7z = 0 \\ 3x + 2y - 3z = 2 \end{cases}$$

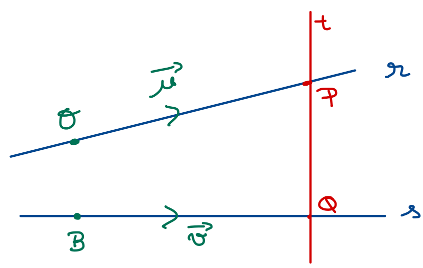
$P = t \cap r \qquad r : (x,y,z) = \lambda(2,1,-1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

Substituindo em t : $\begin{cases} 8\lambda - \lambda - 7\lambda = 0 \\ 6\lambda + 2\lambda + 3\lambda = 2 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \dfrac{2}{11} \Rightarrow P = \dfrac{2}{11}(2,1,-1)$

$Q = t \cap s \qquad s : (x,y,z) = (0,1,0) + \lambda(1,0,1) = (\lambda, 1, \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

Substituindo em t : $\begin{cases} 4\lambda - 1 + 7\lambda = 0 \\ 3\lambda + 2 - \lambda = 2 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \dfrac{1}{11} \Rightarrow Q = \left(\dfrac{1}{11}, 1, \dfrac{1}{11}\right).$

<u>Resolução 2</u>:



Seja t a perpendicular comum de r e s.

Sejam $P = r \cap t$ e $Q = s \cap t$ os pés da perpendicular comum. Temos:

$\vec{OP} = \alpha \vec{u}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \qquad \vec{PQ} \perp r$

$\vec{QB} = \beta \vec{v}, \quad \beta \in \mathbb{R} \qquad \vec{PQ} \perp s$

$\vec{OB} = \vec{OP} + \vec{PQ} + \vec{QB}$ e fazendo o produto escalar com $\vec{u}$ e $\vec{v}$

obtemos o sistema: $\begin{cases} \vec{OB}\cdot\vec{u} = \alpha\, \vec{u}\cdot\vec{u} + \beta\, \vec{v}\cdot\vec{u} \\ \vec{OB}\cdot\vec{v} = \alpha\, \vec{u}\cdot\vec{v} + \beta\, \vec{v}\cdot\vec{v} \end{cases}$

$\vec{OB} = (0,1,0) \qquad \vec{OB}\cdot\vec{u} = 1 \qquad \vec{u}\cdot\vec{u} = 6 \qquad \vec{u}\cdot\vec{v} = 1$

$\vec{OB}\cdot\vec{v} = 0 \qquad \vec{v}\cdot\vec{v} = 2$

$$\begin{cases} 1 = 6\alpha + \beta \\ 0 = \alpha + 2\beta \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = -\frac{1}{11} \\ \alpha = -2\beta \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = -1/11 \\ \alpha = 2/11 \end{cases}$$

$\vec{OP} = \alpha\vec{u} \Rightarrow P = O + \alpha\vec{u} = \frac{2}{11}(2,1,-1)$

$\vec{QB} = \beta\vec{v} \Rightarrow Q = B - \beta\vec{v} = (0,1,0) + \frac{1}{11}(1,0,1) = \left(\frac{1}{11}, 1, \frac{1}{11}\right).$

Aula 16 de abril

95. Num plano euclidiano munido de um referencial ortonormado, calcule:

(a) A distância do ponto $P = (1,1)$ à recta afim s definida pela equação cartesiana:

$$3x + y + 5 = 0$$

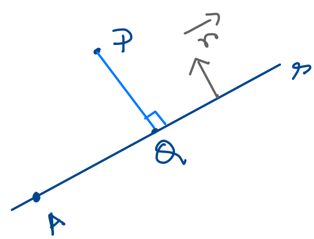
(b) A distância do ponto $P = (1,1)$ à recta fim t definida pela equação vectorial:

$(-1,-2)$

$$t = (\cancel{1,-2}) + < (1,-3) >$$

(c) A distância entre as rectas paralelas r e r' definidas pelas equações cartesianas:

$$x - 4y + 1 = 0 \qquad x - 4y = 0$$



a. Temos: $A = (0,-5) \in s$ e

$\vec{n} = (3,1)$ é vetor normal a s.

Seja Q a projeção ortogonal de P em s.

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QP} \qquad (*)$$

$$\overrightarrow{QP} \perp s \Rightarrow \overrightarrow{QP} = \lambda \vec{n}, \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$A, Q \in s \Rightarrow \overrightarrow{AQ} \cdot \vec{n} = 0$$

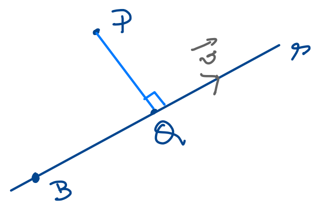
Fazendo o produto escalar de $(*)$ com $\vec{n}$:

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{AQ} \cdot \vec{n} + \overrightarrow{QP} \cdot \vec{n}$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = \lambda\, \vec{n} \cdot \vec{n} \Rightarrow \lambda = \frac{(1,6) \cdot (3,1)}{(3,1) \cdot (3,1)} \Rightarrow \lambda = \frac{9}{10}.$$

Assim $d(P,s) = d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|\lambda \vec{n}\| = \frac{9}{10}\sqrt{10}.$

b. Note que com a correção sugerida $t = s$.



$$t = (-1,-2) + \langle (1,-3) \rangle = B + \langle \vec{v} \rangle$$

Seja Q a projeção ortogonal de P em t.

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{QP} \qquad (*)$$

$$\overrightarrow{QP} \perp t \Rightarrow \overrightarrow{QP} \cdot \vec{v} = 0$$

$$B, Q \in t \Rightarrow \overrightarrow{BQ} = \alpha \vec{v}, \text{ para algum } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Fazendo o produto escalar de $(*)$ com $\vec{v}$:

$$\overrightarrow{BP} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{BQ} \cdot \vec{v} + \overrightarrow{QP} \cdot \vec{v}$$

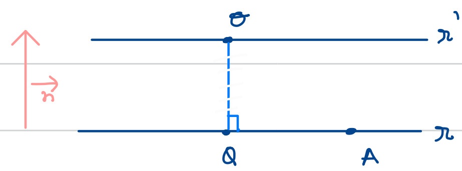
$$\overrightarrow{BP} \cdot \vec{v} = \alpha\, \vec{v} \cdot \vec{v} \Rightarrow (2,3) \cdot (1,-3) = \lambda (1,-3) \cdot (1,-3) \Rightarrow \lambda = -\frac{7}{10}.$$

Assim $Q = B + \overrightarrow{BQ} = B + \lambda \vec{v} = (-1,-2) - \frac{7}{10}(1,-3) = \left(-\frac{17}{10}, \frac{1}{10}\right)$ e $d(P,Q) = \frac{9}{10}\sqrt{10}.$

c. $r': x-4y=0$ $\qquad O=(0,0)\in r'$

$\vec{n}=(1,-4)$

$r: x-4y+1=0$ $\qquad A=(-1,0)\in r.$



Como $r /\!/ r'$ então

$d(r,r') = d(O,Q)$ onde Q é a

projecção ortogonal de O em r

Temos $\vec{OA} = \vec{OQ} + \vec{QA}$. Fazendo o produto escalar com $\vec{n}$ vem:

$$\vec{OA}\cdot\vec{n} = \vec{OQ}\cdot\vec{n} + \vec{QA}\cdot\vec{n} \Rightarrow (-1,0)\cdot(1,-4) = \lambda(1,-4)(1,-4) \Rightarrow \lambda = \frac{-1}{9}$$

Assim, $d(r,r') = d(O,Q) = \|\vec{OQ}\| = \|\lambda\vec{n}\| = 1/3$.

97. Num espaço euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado, calcule

(a) o ângulo formado pelas rectas r e s definidas pelas equações vectoriais:

$$r = (-2,1,0) + <(4,1,-4)> \qquad s = (2,0,1) + <(-3,0,-2)>$$

(b) o ângulo formado pela recta t e o plano π, se

$$t = (6,0,-3) + <(2,0,-2)>$$

e π está definido pela equação cartesiana:

$$z - 5 = 0$$

(c) o ângulo formado pelos planos π_1 e π_2 definidos, respectivamente, pelas equações cartesianas:

$$2x - z - 1 = 0 \qquad 3x + \quad y + z - 1 = 0$$

a $r = A + <\vec{v}>$, $s = B + <\vec{w}>$

Se $\theta = \measuredangle(r,s)$ então $\cos\theta = |\cos\measuredangle(\vec{v},\vec{w})|$

$$\cos\measuredangle(\vec{v},\vec{w}) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|} = \frac{-12+8}{\sqrt{33}\sqrt{13}} = \frac{-4}{\sqrt{33}\sqrt{13}}.$$

Portanto $\theta = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{33}\sqrt{13}}\right)$.

b. $t = A + \langle \vec{v} \rangle$ $\quad A = (6,0,-3)$, $\vec{v} = (2,0,-2)$

$\pi = B + \langle \vec{n} \rangle^{\perp}$ onde $B = (0,0,5)$ e $\vec{n} = (0,0,1)$

Se $\theta = \measuredangle(t, \pi)$ então $\cos\theta = |\operatorname{sen} \measuredangle(\vec{v}, \vec{n})|$

$$\cos \measuredangle(\vec{v}, \vec{n}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{\|\vec{v}\| \|\vec{u}\|} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{sen} \measuredangle(\vec{v}, \vec{n}) = \sqrt{1 - \cos^2 \measuredangle(\vec{v}, \vec{n})} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Portanto $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$.

c. $\vec{n_1} = (2,0,-1)$ $\quad \vec{n_1} \perp \pi_1$

$\vec{n_2} = (3,1,1)$ $\quad \vec{n_2} \perp \pi_2$

Se $\theta = \measuredangle(\pi_1, \pi_2)$ então $\cos\theta = |\cos \measuredangle(\vec{n_1}, \vec{n_2})|$

$$\cos \measuredangle(\vec{n_1}, \vec{n_2}) = \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{\|\vec{n_1}\| \|\vec{n_2}\|} = \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{11}} = \sqrt{\frac{5}{11}}$$

Logo $\theta = \arccos\left(\sqrt{\frac{5}{11}}\right)$.