Probabilidades e Aplicações **2020/2021 (1º semestre)**
CC + MAT

UNIVERSIDADE DO MINHO EXERCÍCIOS
Departamento de Matemática TP+PL

Simulação, LGN e método de Monte Carlo

1. Explore a função `sample` do `R` para simulação de amostras com ou sem reposição. Simule
   (a) um totoloto vulgar de 49 bolas (6 extracções sem reposição; bolas numeradas de 1 a 49)
   (b) amostras aleatórias de meses de nascimento (equiprováveis) de n indivíduos ($n = 100, 10^3$) e correspondente género (F/M, na proporção 5:4)
   (c) n lançamentos de um dado equilibrado; analise o comportamento da tabela de frequências relativas dos resultados (nº de pintas, de 1 a 6) à medida que n aumenta e comente.
   (d) n resultados da soma de pintas no lançamento de um par de dados equilibrados; compare a distribuição de frequências relativas com o modelo probabilístico.
   (e) sequências aleatórias de DNA (bases A, G, T, C) de comprimento fixo, n, com probabilidades dadas, p_A, p_G, p_T, p_C (de soma unitária).

2. Considere um totoloto vulgar (6 extracções sem reposição de uma urna com 49 bolas numeradas de 1 a 49). Por meio de simulação (com 10^6 réplicas), estime a probabilidade de que a soma dos 6 números extraídos seja inferior a 50. Estime a probabilidade dessa soma ser j ($j = 21, \dots, 279$) e represente graficamente as probabilidades estimadas em função de j.

3. Explore as funções `rbinom` e `runif` do `R`. Estabeleça uma conjectura sobre a distribuição da soma de dois valores ao acaso no intervalo (0,1), recorrendo a simulação. Relacione com o caso de uma das alíneas do exercício nº 1.

4. Simule a fortuna de um jogador ao longo de n jogos de moeda sucessivos ($n = 10$, 10^2, 10^3, 10^4), em que em cada passo (jogo) o jogador ganha 1€ se sai cara ou perde 1€ se sai coroa, partindo de uma fortuna inicial nula (este processo é conhecido pelo nome de *passeio aleatório*; este diz-se *simétrico* se a moeda for equilibrada). Represente graficamente a fortuna em função do passo, ou seja, a *trajectória* do processo.

5. Num passeio aleatório simétrico, representando a fortuna do jogador ao longo dos jogos por $S_1, S_2, S_3, \dots$, partindo de uma fortuna inicial $S_0 = 0$, estime, para $n = 10$, 20, 50, por meio de simulação (com 10^5 réplicas) a probabilidade de
   (i) retorno à origem (i.e., empate) no instante $2n$
   (ii) não haver retorno à origem durante os primeiros $2n$ passos[1]
   (iii) o último empate ocorrer na primeira [segunda] metade do jogo, ou seja, estritamente antes do instante $\frac{n}{2}$ [estritamente depois do instante $\frac{n}{2}$].

   Elabore um gráfico com a probabilidade (estimada) de o último empate ocorrer na jogada $2k$, no caso $n = 20$ (i.e, em 40 jogos), em função de k ($k = 0, 1, 2, \dots, 20$).

6. Num passeio aleatório simétrico em n passos, estime a probabilidade $\xi_{r,n}$ de haver r mudanças de sinal na sucessão $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ (ou seja, de haver r mudanças de liderança num jogo de moeda entre dois jogadores; note-se que o total das duas fortunas é sempre 0 em qualquer instante do jogo), para o caso $n = 25$ e $n = 100$, usando pelo menos 10^4 réplicas. Parece-lhe que, em média, o número de mudanças de liderança cresce proporcionalmente à duração n do jogo?

[1] Note que "não haver retornos nos primeiros n passos" equivale a ter $S_1 S_2 \dots S_n \neq 0$.

Probabilidade. Condicionamento e independência

7. Para as experiências aleatórias indicadas, indique o espaço amostral Ω e o seu nº de elementos
   (a) extrair n cartas de um baralho usual; e qual a probabilidade de sair o ás de espadas?
   (b) extrair uma carta de cada um de n baralhos; e qual a probabilidade de sair pelo menos um ás de espadas? E de saírem j ases de espadas?
   (c) lançar um dado equilibrado até sair um ás; e qual a probabilidade de cada resultado?

8. (i) Mostre que qualquer σ-álgebra de partes de Ω é fechada para a intersecção de acontecimentos.
   (ii) Dê exemplo de um espaço de acontecimentos que tenha apenas 6 elementos (caso exista).

9. Dado um espaço de resultados Ω com n elementos e o espaço de acontecimentos $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, mostre que a regra clássica de Laplace é uma medida de probabilidade.

10. Seja $\Omega = \mathbb{Z}$ e $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Verifique se $(\Omega, \mathcal{A}, Q)$ é um espaço de probabilidade, sendo

$$Q(A) = \begin{cases} 1, & \text{se } A \text{ tem um número infinito de elementos} \\ 0, & \text{se } A \text{ tem um número finito de elementos} \end{cases}$$

11. Generalize a regra da adição, dada por $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ a três ou mais acontecimentos, obtendo a chamada *regra de inclusão-exclusão.*

12. Considere uma urna com n bolas idênticas, numeradas de 1 a n, da qual se fazem extracções sucessivas até esvaziar a urna. Se a bola número i sair na i-ésima extração, dizemos que temos um "encontro". Calcule a probabilidade p_n de ocorrer pelo menos um encontro (equivale ao problema dos chapéus ou da troca de presentes). Calcule o limite de p_n quando $n \to \infty$. Compare os valores de p_n com o referido limite para $n = 2, 3, \ldots, 12$.

13. Num espaço de probabilidade, (i) quais os acontecimentos que são independentes de si mesmos? (ii) dê exemplo de um acontecimento que seja independente de qualquer outro acontecimento.

14. Prove que se A e B são acontecimentos indpendentes, também o são $\overline{A}$ e B, A e $\overline{B}$, $\overline{A}$ e $\overline{B}$.

15. Mostre que $P(A) + P(B) - 1 \leq P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ e mais geralmente, as seguintes *desigualdades de Bonferroni*

$$P(A_1) + \ldots + P(A_n) - (n-1) \leq P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \leq P(A_1) + \ldots + P(A_n)$$

16. Dado um espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e $B \in \mathcal{A}$ tal que $P(B) > 0$, considere $P_B : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ definida por $P_B(A) = P(A|B)$. Mostre que $(\Omega, \mathcal{A}, P_B)$ é um espaço de probabilidades.

17. Em 3 lançamentos de um dado equilibrado, calcule (pelo TPT) a probabilidade de que a soma dos resultados dos dois primeiros seja igual ao resultado do terceiro.

18. Alfa tem 3 moedas equilibradas, das quais uma é viciada, tendo "cara" de ambos os lados. Beto escolhe ao acaso uma das 3 moedas com a qual efectua 4 lançamentos. Sabendo que lhe saíram 4 caras, qual a probabilidade *a posteriori* de ter escolhido a moeda viciada?

19. Numa transmissão em código binário (F e V; ou 0 e 1) enviam-se V's e F's na proporção 1:3. No entanto, a transmissão está sujeita a erros aleatórios: quando é enviado um V, há uma probabilidade $\frac{1}{10}$ de este ser recebido como um F; quando é enviado um F, há uma probabilidade $\frac{1}{5}$ de este ser recebido como um V. Os erros ocorrem independentemente uns dos outros.
    (a) Se foi recebido um F, qual a probabilidade de ter sido enviado um F?
    (b) Num texto em que foram recebidos 200 F's, qual a probabilidade de 10 (e só 10) desses terem sido enviados como V's?

20. Pretende-se treinar um rato a virar à direita num labirinto. O treino consiste em colocar o rato num compartimento com duas saídas, uma à esquerda e outra à direita. O rato é recompensado se sair pela direita e castigado se sair pela esquerda. Supõe-se que na 1ª tentativa o rato escolhe ao acaso a saída, e que a seguir a uma recompensa [castigo] sai pela direita na tentativa seguinte com probabilidade 0.6 [0.8]. Seja A_n o acontecimento "o rato sai pela direita na n-ésima tentativa" e $p_n = P(A_n)$. Esquematize por meio de uma árvore de probabilidades. Calcule

    (i) p_2 e p_3

    (ii) p_{n+1} em função de p_n

    (iii) $\lim_{n\to\infty} p_n$

21. Alfa, Beto e Gama disputam um duelo triangular à pistola, jogando à vez, ciclicamente, por ordem alfabética. Cada um, na sua vez de jogar, escolhe um dos restantes para alvo e dispara um tiro (supõe-se que os tiros são mortais, caso acertem no alvo). A probabilidade de Alfa, Beto e Gama acertarem no alvo é 0.3, 1 e 0.5, repectivamente. O primeiro a jogar (Alfa) tem 3 estratégias à escolha: escolher Beto para alvo, escolher Gama, ou passar a vez a Beto. Qual a melhor estratégia para Alfa sobreviver ao duelo (pressupondo que Beto é inteligente)? Calcule a probabilidade de sobrevivência para cada uma das estratégias, recorrendo a árvores de probabilidades.

22. Em n lançamentos de um dado equilibrado, qual a probabilidade de que a face "5" ocorra um número par de vezes (inclua o zero nos pares)? *Sugestão*: desenvolva $(1-x)^n + (1+x)^n$

Distribuições discretas

23. Num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ com resultados equiprováveis e $\Omega = \{a, b, c\}$, considere as v.a.'s X e Y definidas por $X(a) = 1, X(b) = 2, X(c) = 3, Y(a) = 2, Y(b) = 3, Y(c) = 1$. Estas v.a.'s têm a mesma distribuição (i.e., são identicamente distribuídas)? Justifique.

24. Considere a experiência aleatória que consiste no lançamento de 2 dados equilibrados. Determine a lei de probabilidade da v.a. que representa

    (a) a soma das pintas num lançamento

    (b) o maior número de pintas num lançamento

    (c) o valor absoluto da diferença de pintas num lançamento

    (d) o número de experiências necessárias até se observar pela primeira vez um ás (uma pinta)

25. Um lote de 50 peças é inspeccionado retirando ao acaso uma amostra de 10 peças (de uma vez) e testando-as. Se o nº de peças defeituosas for inferior a 2, aceita-se o lote; caso contrário, rejeita-se. Suponha que um certo lote tem 5 peças defeituosas. Seja X o número de peças defeituosas encontradas na amostra retirada desse lote. Determine

    (a) a fmp de X e represente-a graficamente

    (b) a probabilidade de rejeitar o lote

    (c) $P(1 \leq X \leq 2)$

26. Suponha que 0.2% dos indivíduos de uma certa população são canhotos.

    (a) Sendo X o número de canhotos numa amostra (com reposição) de 1000 indivíduos dessa população, calcule $P(X = 1)$ e $P(X \geq 3)$. (compare valores exactos e aproximados à Poisson)

    (b) Qual a dimensão da amostra a recolher (com reposição) de modo a estarmos pelo menos 95% seguros de que ela contenha algum canhoto?

27. Seja p $(0 < p < 1)$ a probabilidade de ocorrer "sucesso" numa experiência aleatória e X a v.a. que representa o nº de repetições (indep.) da experiência até que ocorra o primeiro sucesso.
    (a) Qual a distribuição de X?
    (b) Calcule $P(X > n)$, para $n = 1, 2, \ldots$
    (c) Prove que $P(X > n + m \mid X > n) = P(X > m)$, para $m, n \in \mathbb{N}$.
    (d) Calcule $P(X \in \{1, 3, 5, 7, \ldots\})$.
    (e) Particularize para $p = 0.5$ (moeda equilibrada).

28. Numa lotaria com 10^6 bilhetes (numerados de 000000 a 999999), qual a probabilidade de que o número premiado (i) seja formado totalmente por setes e noves? (ii) contenha exactamente dois noves? (iii) contenha no máximo dois noves? (*resolva por meio de v.a.'s adequadas*)

29. Suponha que o número de partículas radioativas emitidas por certa fonte numa unidade de tempo segue uma distribuição Poisson.
    (a) Se a probabilidade de não ser emitida qualquer partícula numa unidade de tempo for $\frac{1}{3}$, qual a probabilidade de serem emitidas pelo menos duas numa unidade de tempo?
    (b) Suponha que a probabilidade de qualquer dessas partículas ser registada por um contador Geiger é p $(0 < p < 1)$, independentemente das outras serem ou não registadas. Calcule a fmp do número de partículas registadas numa unidade de tempo.
    (c) Aplique ao caso descrito na alínea (a) com $p = 0.9$ e calcule então a probabilidade de numa unidade de tempo serem registadas pelo menos duas partículas.

30. Calcule o valor médio e a variância da lei (i) $U\{1, 2, \ldots, n\}$ (ii) $geom(p)$ (iii) $Poisson(\lambda)$
    Nota: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)/6$; sobre séries de potências com raio de convergência r: $f(x) = \sum a_n\, x^n, |x| < r \implies f'(x) = \sum n\, a_n\, x^{n-1},\ |x| < r$.

31. Dada uma v.a. X discreta com distribuição uniforme $U\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, determine o suporte e a distribuição de probabilidade das seguintes v.a.'s: $X - 1$, X^2 e $X^2 + X - 1$. Calcule também o valor médio, moda(s), variância, desvio padrão e coeficiente de assimetria destas v.a.'s.

32. Supondo X discreta, mostre que (i) $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$ (ii) $E(a + bX) = a + bE(X)$ (iii) $\mathrm{Var}(a + bX) = b^2\mathrm{Var}(X)$ e estabeleça a fórmula para o desvio padrão de $a + bX$.

33. Em 3 lançamentos de uma moeda equilibrada considere as v.a.'s $X =$"nº caras"e $Y =$"nº de vezes que ocorreu cara seguido de coroa". Determine a fmp conjunta do par (X, Y) e esboce o seu gráfico. X e Y são independentes? Identifique as marginais. Calcule $P(X > Y)$.

34. Dois jogadores, Alfa e Beto, lançam um dado até observarem um ás. Qual a probabilidade de ser coincidente o número de lançamentos necessário a cada um? Resolva para um dado qualquer, sendo p $(0 < p < 1)$ a probabilidade de sair um ás ("sucesso") nesse dado.

35. Calcule (i) o valor médio e o desvio padrão do nº total de pintas, T, em 100 lançamentos de um dado equilibrado; estime a lei de T por simulação (ii) o valor médio e a variância da $bi(n, p)$.

36. Calcule $\mathrm{cov}(X, X^2)$, no caso de $X \frown U\{-2, -1, 1, 2\}$. O que pode concluir?

37. Calcule o coeficiente de assimetria da v.a. $X : \begin{cases} -3 & -1 & 2 \\ 1/10 & 1/2 & 2/5 \end{cases}$. O que conclui?

38. (a) Calcule $P(X = 2, Y = 2)$, no caso $(X, Y) \frown M(4; \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Prove que X e Y são dependentes.
    (b) Em 12 lançamentos de um dado equilibrado, calcule a probabilidade de (i) sair duas vezes cada uma das faces; (ii) as faces 2 a 6 saírem em igual quantidade.

39. Dê exemplo de um par aleatório concreto com a lei de probabilidade dada no exercício 38 (a). Calcule as distribuições marginais e condicionais para esse par aleatório.

40. Considere uma lotaria com bilhetes numerados de 0000 a 9999 e o par (X, Y), em que X e Y representam respetivamente o total de dígitos "ímpares"e o total de "zeros"do 1^o prémio.

    (a) Identifique a distribuição deste par e apresente a sua fmp conjunta.
    (b) Verifique que as distribuições marginais são binomiais e identifique os parâmetros.
    (c) Qual a distribuição de $X + Y$? Justifique.
    (d) Calcule a distribuição de XY.
    (e) Calcule (i) $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ e confira com a teoria (ii) a correlação.

41. Prove que os seguintes coeficientes são invariantes para transformações lineares da(s) v.a.'s subjacente(s), a menos do sinal: (i) coeficiente de assimetria β_1 (ii) coeficiente de correlação ρ.

42. Determine a distribuição da soma de duas de v.a.'s independentes, X e Y, nos casos

    (a) $X \frown bi(m, p)$ e $Y \frown bi(n, p)$
    (b) $X \frown Poisson(\lambda)$ e $Y \frown Poisson(\mu)$

    Generalize para a soma de k v.a.'s independentes $bi(n_i, p)$ e também $Poisson(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

43. Dada uma v.a. $X \frown Poisson(\lambda)$, calcule $E\left(\frac{1}{1+X}\right)$. Particularize para $\lambda = 1$. Comente.

Distribuições contínuas

44. Verifique se são fdp's e calcule a fd correspondente, em caso afirmativo.

    (a) $f(x) = \begin{cases} 10, & -0.1 < x < 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

    (b) $f(x) = \begin{cases} x^{-2}, & x > 1 \\ 0, & x \leq 1 \end{cases}$

    (c) $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$

    (d) $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$

45. Verifique se são fd's e calcule a fdp correspondente, em caso afirmativo.

    (a) $F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x}, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$

    (b) $F(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

    (c) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \log(x), & x \geq 1 \end{cases}$

    (d) $F(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

46. Considere $f(x) = \max\{0, 1- \mid x \mid\}, x \in \mathbb{R}$. Mostre que se trata de uma fdp e calcule (i) a correspondente fd (ii) o valor médio, a mediana e a moda (iii) $P(|X| < 0.5)$

47. Determine os quartis e a moda de uma v.a. com fdp $f(x) = 2\,x\,e^{-x^2}, x \geq 0$.

48. Identifique a distribuição de $Y = -\log X$, no caso $X \frown U[0,1]$.

49. Seja X uma v.a. com fdp $f(x) = c\,x^2\; I_{[0,1]}(x)$, onde c é uma constante.

    (a) Determine c e a fd de X.

    (b) Considere a experiência aleatória associada a X. Qual a probabiliade de em 4 repetições independentes da experiência se observar exactamente 3 vezes o acontecimento $\{X > \frac{1}{2}\}$?

50. Dada uma v.a. $X \frown Exp(\lambda)$, representando a duração de vida (em horas) de uma bactéria,

    (a) prove que o valor médio e o desvio padrão de X são ambos iguais a $\frac{1}{\lambda}$.

    (b) prove que $P(X > t + y \mid X > t) = P(X > y)$, para quaisquer $t > 0$ e $y > 0$ e interprete.

    (c) calcule $P(1 < X < 2)$ e particularize ao caso $\lambda = 0.5$.

    (d) determine a mediana da duração de vida de uma bactéria.

    (e) apostaria que a duração de vida X é superior ao seu valor médio $\frac{1}{\lambda}$?

    (f) qual a probabilidade de 7 (de 10 durações de vida independentes) serem inferiores a $\frac{1}{\lambda}$?

51. Sendo X uma v.a. contínua com fdp $f_X(x)$ e $b > 0$, mostre que a fdp de $Y = a + bX$ é dada por $f_Y(y) = \frac{1}{b} f_X(\frac{x-a}{b})$. Usando este resultado, calcule o valor médio e a variância de $X \frown N(\mu, \sigma)$, recorrendo à fórmula $X = \sigma Z + \mu$, sendo $Z \frown N(0,1)$.

52. (a) Se $X \frown N(\mu, \sigma)$, calcule (i) $P(\mu - \frac{\sigma}{2} < X < \mu + \frac{\sigma}{2})$ (ii) $P(X < \mu - \sigma \mid X < \mu + \sigma)$.

    (b) Exprima o quantil-p da $N(\mu, \sigma)$ à custa do quantil-p da $N(0,1)$.

53. Suponha que a distribuição das notas de um exame é $N(10.7, \sigma)$ e que 24.2% dos alunos obtêm nota superior a 13.5. Se um certo aluno teve nota superior a 10.7, qual a probabilidade de ter menos que 13.5? Qual o desvio padrão da distribuição?

54. Considere um par aleatório (X, Y) com fdp conjunta $f(x, y) = c, 0 < x < 1, x < y < 2$.

    (a) Determine o valor de c.

    (b) X e Y são independentes? Justifique.

    (c) Calcule $P(X + Y < 2)$, $P(X + Y < 2 \mid Y > 1)$ e $P(X^2 + Y^2 < 2)$.

    (d) Calcule as marginais de X e Y, bem como $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$ e $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

55. Considere um par aleatório (X, Y) com fdp conjunta $f(x, y) = 3x, 0 < 2x < y < 2$.

    (a) Estude a dependência entre X e Y.

    (b) Determine as distribuições marginais de X e Y e calcule $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

56. Suponha que os pesos (em Kg) de homens e mulheres são v.a.'s $N(75, 10)$ e $N(60, 7)$, respetivamente. Se dois homens e três mulheres, com pesos independentes, entram num elevador com limite de carga $320Kg$, qual a probabilidade de poderem seguir juntos?

57. Dado um par aleatório (X, Y) com distribuição normal bivariada, qual a distribuição de $X - Y$?

58. Supondo X e Y com igual variância, calcule a covariância e a correlação entre $U = X + Y$ e $V = X - Y$. O que conclui quanto à independência entre U e V? E se (X, Y) for binormal?

59. O número de horas de sono, S, e o número de horas de trabalho, T, gastos por Alfa na preparação para o exame de Probabilidades são v.a.'s com fdp conjunta uniforme no conjunto $A = \{(s,t) : s > 0,\ t > 0,\ 10 < s + t < 20\}$. Mas Alfa está tão extenuado que a sua classificação no exame será dada pela fórmula $C = 10 + \frac{S-T}{2}$. Qual a probabilidade de Alfa ter uma nota superior a 15 no exame? E qual o valor médio da sua classificação?

60. (i) Simule um processo de chegadas com intervalos de tempo (entre chegadas consecutivas) $Exp(1/5)$, independentes, no intervalo [0,100]. Represente graficamente a trajectória.
    (ii) No mesmo processo, estime a distribuição de $N(t) =$ "nº de chegadas até ao instante t", para $t = 25$, por meio de simulação (com 100 mil réplicas). Compare com a distribuição de Poisson teórica, i.e., $Poisson(\lambda t)$.

61. (i) Calcule fdp de $T = Z^2$, sendo $Z \frown N(0,1)$.
    (ii) Por meio de simulação, tente descobrir qual a distribuição da soma de duas v.a.'s independentes T_1 e T_2 identicamente distribuídas com T.

62. (*transformação uniformizante*) Dada uma v.a. X com fd contínua F, prove que a transformação $Y = F(X)$ tem distribuição $U[0,1]$. Reciprocamente, prove que se $Y \frown U(0,1)$ então $F^{-1}(Y)$ tem fd F. Este resultado está na base do método da inversão da fd para geração de NPA's com dada fd, a partir de NPA's uniformes. Aplique ao caso $X \frown Exp(\lambda)$, simulando uma amostra de dados $Exp(2)$ a partir dos dados `u <- runif(`10^5`)`. Repita para a v.a. do exercício nº 47.

Momentos, desigualdades, convergências, transformadas, teoremas limite, etc.

63. Calcule os momentos de ordem n, i.e., $\mu'_n = E(X^n)$, $n = 1, 2, ...$, de uma v.a. $X \frown Gama(\alpha, \lambda)$, a partir da sua transformada de Laplace, $L(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+t}\right)^\alpha$, $t > -\lambda$.

64. Mostre que a distribuição de $T = Z^2$ obtida no problema nº 61 é uma $Gama(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. A partir deste resultado prove que a soma considerada no mesmo problema segue de facto a lei $Exp(\frac{1}{2})$

65. Calcule os momentos da distribuição $N(0,1)$. Conclua que os coeficientes de assimetria e curtose da $N(\mu, \sigma)$ são 0 e 3, respectivamente.

    Sugestão: Para o cálculo dos momentos de ordem par, efectue a mudança de variável $t = \frac{1}{2}x^2$ no integral, de forma a fazer aparecer a função gama, dada por $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt$.

66. Mostre que em n lançamentos de um dado equilibrado, a probabilidade de o nº de ases estar compreendido entre $\frac{n}{6} - \sqrt{n}$ e $\frac{n}{6} + \sqrt{n}$ é não inferior a $\frac{31}{36}$.

67. Dada uma v.a. X tal que $E(2X - 1) = 9$ e $E((X - 5)^2) = \frac{5}{2}$, calcule um limite inferior para $P(0 < X < 10)$.

68. Supondo que o peso de um homem adulto é uma v.a. X com valor médio $70Kg$ e desvio padrão $10Kg$, e dados 9 homens com pesos independentes, determine
    (a) o valor médio e o desvio padrão do peso total dos 9 homens
    (b) um limite superior para a probabilidade desse peso exceder 700Kg
    (c) o valor dessa probabilidade caso a distribuição de X seja normal.

69. Considere um jogo em que a probabilidade de ganhar ou perder 1€ é $\frac{1}{2}$. Calcule a probabilidade de que um jogador (com fortuna inicial 0) tenha uma fortuna compreendida entre 0€ e 50€ (inclusive) ao fim de 100 jogos (independentes). Compare o resultado exacto (recorde que o ganho num jogo é uma v.a. Y tal que $Y = 2X - 1$, com $X \frown bi(1, 0.5)$) com o valor aproximado de $P(0 \leq Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{100} \leq 50)$ obtido por aplicação do TLC, com correcção de continuidade.

70. Considere uma v.a. X absolutamente contínua, com fdp par, i.e., tal que $f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}$. O que pode concluir sobre a sua transformadas de Laplace (pressupondo que esta existe)?

71. Em cada dia (útil), uma acção da empresa E pode descer 1€, manter-se, ou subir 1€, com probabilidades 0.39, 0.2 e 0.41, respectivamente. Admita que as alterações diárias são mutuamente independentes. Calcule a probabilidade (aproximada) de ao fim de 700 dias a acção ter subido mais do que 10€ acima do seu valor inicial. Identifique a distribuição (aproximada) da alteração ao fim de 700 dias. Resolva também por meio de simulação e compare resultados.

72. O tempo de atendimento de cada cliente num certo balcão tem valor médio 15 *min* e desvio padrão 4.5 *min*. Numa amostra de 50 clientes (supondo que os tempos de atendimento destes são mutuamente independentes), calcule a probabilidade (aproximada) de que a média dos 50 tempos de atendimento (i) exceda 16 *min* (ii) esteja compreendida entre 14.5 e 15.5 *min*.

73. Considere a lei $Laplace(\mu, \delta)$ dada pela fdp $f(x) = \frac{1}{2\delta}\, e^{-\left|\frac{x-\mu}{\delta}\right|}$, $x \in \mathbb{R}$, onde $\mu \in \mathbb{R}, \delta > 0$. Considere uma v.a. $T \frown Laplace(0, 1)$ e ainda duas v.a. X e Y i.i.d. $Exp(1)$.

    (a) Mostre que a lei $Laplace(\mu, \delta)$ é uma família de localização-escala.
    (b) Determine a transformada de Laplace de T.
    (c) Determine a transformada de Laplace de $X - Y$ e conclua que $X - Y \overset{d}{=} T$.
    (d) Determine a fd de T e a correspondente fd inversa (função quantil).
    (e) Prove que $|T| \frown Exp(1)$.
    (f) Simule amostras da v.a. T utilizando
        i. o método de inversão da função de distribuição
        ii. o resultado referido em 73c
        iii. o resultado referido em 73e
    (g) Explique como pode simular uma amostra da lei $Laplace(\mu, \delta)$, para determinados μ e δ, a partir de uma amostra simulada da v.a. T.
    (h) Calcule o valor médio e a variância da lei $Laplace(\mu, \delta)$.

Soluções

1. (a) `sample(1:49,6)`

   (b) `sample(1:12,100,rep=T);` `sample(c("F","M"),100,rep=T,prob=c(5,4))`

   (c) `n <- 60; table(sample(1:6,n,rep=T))/n` (repetir para $n = 600, 6000, 60000$)

   (d) `n <- 100; table(sample(1:6,n,rep=T)+sample(1:6,n,rep=T))/n`

   `d.teor <- c(1:6/36,5:1/36); names(d.teor) <- 2:12; d.teor`

   (repetir para $n = 1000, 10000$ e comparar com a distribuição teórica acima, `d.teor`)

   (e) `sample(c("A","G","T","C"),100,rep=T,prob=c(1,3,2,1))`

2. Ver slide P 27
3. `hist(runif(1000)+runif(1000))`; distribuição "triangular"; cf. ex^o 1.(d) e slide T 47
4. Ver slide P 22
5. Ver a resolução do Trabalho 1
7. (a) $\Omega = \{A \subseteq C : \#A = n\}$, onde C é o conjunto das 52 cartas e $1 \leq n \leq 52$; $p = \frac{n}{52}$

   (b) $\Omega = \{(c_1, c_2, \ldots, c_n) : c_i \in C\}$; $p = 1 - \frac{51^n}{52^n}$; $P(N = j) = \binom{n}{j}(\frac{1}{52})^j(\frac{51}{52})^{n-j}$, $j = 0, 1, ..., n$

   (c) $\Omega = \{A_1, \overline{A}_1A_2, \overline{A}_1\overline{A}_2A_3, \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4, \ldots\}$; $P(\overline{A}_1 \ldots, \overline{A}_{j-1}A_j) = (1-p)^{j-1}p$, $j = 1, 2, \ldots$

8. (i) Decorre da fórmula $\overline{\cap A_i} = \cup \overline{A_i}$ (ii) não existe
10. Não é um espaço de probabilidades (axioma III não é satisfeito)
11. Ver slides T 21 a 23
12. Ver slides T 24 e 25
13. (i) Os acontecimentos de probabilidade nula ou unitária (ii) Ω ou $\emptyset$
14. Ver slide P 28
15. 1ª parte: $0 \leq P(A \cap B) \leq 1 \implies -1 \leq -P(A \cap B) \leq 0 \implies$

    $\implies P(A) + P(B) - 1 \leq P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$

    $\implies P(A) + P(B) - 1 \leq P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

    2ª parte: indução; ou (2ª desig) escrever $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ como união de disjuntos 2 a 2

16. Ver slide T 42
17. Ver slide T 43
18. $\frac{8}{9}$ (aplicando o teorema de Bayes)
19. (a) $\frac{24}{25}$ (b) $\binom{200}{10}p^{10}(1-p)^{190}$ com $p = \frac{1}{25}$; resultado 0.10078
20. Ver slides P 29 e 30
21. Ver slides P 31 a 34; 0.2792, 0.21, 0.3
22. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$; porque $(1+x)^n + (1-x)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}x^j + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}(-x)^j = 2\sum_{j \text{ par}} \binom{n}{j}x^j$

    donde $\sum_{i \text{ par}} \binom{n}{i}\left(\frac{1}{6}\right)^i\left(\frac{5}{6}\right)^{n-i} = \left(\frac{5}{6}\right)^n \sum_{i \text{ par}} \binom{n}{i}\left(\frac{1}{5}\right)^i = \left(\frac{5}{6}\right)^n \frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{1}{5}\right)^n + \left(1-\frac{1}{5}\right)^n\right]$

23. Sim
24. (a) $X : \begin{cases} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1/36 & 2/36 & 3/36 & 4/36 & 5/36 & 6/36 & 5/36 & 4/36 & 3/36 & 2/36 & 1/36 \end{cases}$

    ou $P(X = j) = \frac{6-|j-7|}{36}$, $j = 2, 3, 4, \ldots, 12$

    (b) $Y : \begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/36 & 3/36 & 5/36 & 7/36 & 9/36 & 11/36 \end{cases}$

(c) $W : \begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6/36 & 10/36 & 8/36 & 6/36 & 4/36 & 2/36 \end{cases}$

(d) $P(T=n) = \frac{11}{36}\left(\frac{25}{36}\right)^{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

25. (a) $X \frown HG(10, 50, \frac{1}{10})$; $P(X=j) = \binom{5}{j}\binom{45}{10-j}/\binom{50}{10}$, $j = 0, 1, ..., 5$ (b) 0.2581 (c) 0.6412

26. (a) $P(X=2) = 0.20706704 \approx 2e^{-2} = 0.2706706$ (Poisson);
$P(X \geq 3) = 0.3233235 \approx 1 - 5e^{-2} = 0.3233236$ (Poisson) (b) $n \geq 1497$

27. (b) $(1-p)^n$ (d) $\frac{1}{2-p}$ (note que $\frac{1}{2} < \frac{1}{2-p} < 1$) (e) $\frac{2}{3}$

28. (i) 0.000064 (ii) 0.098415 (iii) 0.98415

29. (a) 0.30046 ($\lambda = \log 3$) (b) $Poisson(\lambda p)$ (c) 0.26010

30. (i) (iii) Ver slides T 78 e 80

31. (i) $\text{supp}(X-1) = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$; $U\{-3, -2, -1, 0, 1\}$; $E(X-1) = -1$
(ii) $\text{supp}(X^2) = \{0, 1, 4\}$; probabilidades $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}$; $E(X^2) = 2$
(iii) $T = X^2 + X - 1$; $T : \begin{cases} -1 & 1 & 5 \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{cases}$; $E(T) = 1$; $\text{var}(T) = 4.8$; $\beta_1 \approx 0.9129$;
modas$= -1$ e 1;

32. (ii) e (iii) Ver slides T 79

33. fmp de (X, Y):

	0	1
0	1/8	0
1	1/8	2/8
2	1/8	2/8
3	1/8	0

; $X \frown bi(3, \frac{1}{2})$; $Y \frown bi(1, \frac{1}{2}) \equiv U\{0, 1\}$; $P(X > Y) = \frac{5}{8}$

34. $\frac{p}{2-p}$; $\frac{1}{11}$ (caso $p = \frac{1}{6}$)

35. (i) $\mu = E(T) = 350$; $\sigma = 10\sqrt{\frac{35}{12}} = 17.07825$ (ii) Ver slides T 96

36. (Ver slide T 100) 0 ; X e X^2 são dependentes; $\therefore$ $\text{cov}(X, Y) = 0 \not\Longrightarrow X$ e Y independentes

37. 0 ; X não é simétrica; $\therefore$ $\beta_1 = 0 \not\Longrightarrow X$ simétrica. Ver slide T 183

38. (a) $\frac{2}{27} = 0.07407407$ (b) (i) 0.003438286 (ii) 0.003481947

39. $X =$"nº de vezes que sai face ≥ 5" e $Y =$"nº de vezes que sai face ≤ 2" em 4 lançamentos de um dado equil.; as leis marginais são ambas $bi(4, \frac{1}{3})$ e as condicionais são
$X|\{Y=j\} \frown bi(4-j, \frac{1}{2})$ e $Y|\{X=i\} \frown bi(4-i, \frac{1}{2})$

40. (a) $M(4; 0.5, 0.1)$ (b)(c)(d)(e) Ver slides T 114 a 118

41. (ii) Ver slide T 103

42. (a) $bi(m+n, p)$ pois representa o nº sucessos em $n+m$ provas de Bernoulli(p) indep.
(b) Ver slides P 35
Caso generalizado: (a) $bi\left(\sum n_i, p\right)$ (b) $Poisson\left(\sum \lambda_i\right)$.

43. Ver a resolução do Trabalho 1

44. (a)(b)(d) Sim (c) Não

45. (a)(b) Sim (c)(d) Não

46. (i) $F(x) = \begin{cases} 0, \ x < -1 \\ \frac{1}{2}(1+x)^2, \ -1 \leq x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}(1-x)^2, \ 0 \leq x < 1 \\ 1, \ x \geq 1 \end{cases}$ (ii) 0 (iii) $\frac{3}{4}$

47. moda: $\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\chi_{1/4} = \sqrt{\log\frac{4}{3}} = 0.53636$; $\chi_{1/2} = \sqrt{\log 2} = 0.83256$; $\chi_{3/4} = \sqrt{\log 4} = 1.17741$
48. $Exp(1)$
49. (a) $c = 3$; $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^3, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$ (b) $P(N = 3) = 0.3350$, $N \frown bi\left(4, P(X > \frac{1}{2})\right)$
50. (a) ver slide T 137 (c) $e^{-\lambda} - e^{-2\lambda}$; 0.23865 (d) $\chi_{1/2} = \frac{1}{\lambda}\log 2$; ver slide T 141
    (e) Não; $P(X > \frac{1}{\lambda}) = e^{-1} = 0.3679$ (f) 0.2409
51. Ver slides T 151
52. (a) (i) 0.3829249 (ii) 0.1885734 (b) $\mu + \sigma\chi_p$
53. `q <- qnorm(1-0.242); sigma <- (13.5-10.7)/q` , com resultado $\sigma \approx 4$;
    `2*(pnorm(q)-pnorm(0))` , com resultado 0.516 (ou $2 \times (1 - 0.242 - 0.5) = 0.516$)
54. (a) $\frac{2}{3}$ (b) Não (c) $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{\pi}{6}$ (d) $f_X(x) = \frac{2}{3}(2-x)I_{[0,1]}(x)$; $f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \notin [0,2] \\ \frac{2}{3}y, & 0 < y < 1 \\ \frac{2}{3}, & 1 < y < 2 \end{cases}$
    $E(X) = \frac{4}{9}$; $E(Y) = \frac{11}{9}$; $E(XY) = \frac{7}{12}$; $\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{7}{12} - \frac{4}{9}\,\frac{11}{9} = 0.0401$
55. (a) dependentes (b) $f_X(x) = 6x(1-x), 0 < x < 1$; $f_Y(y) = \frac{3}{8}y^2, 0 < y < 2$; $\frac{1}{20}$
56. 0.29569
57. Ver slide T 169
58. $\mathrm{Cov}(U,V) = 0$
59. $\frac{1}{6}$; 10
60. Ver slides T 171 a 173
61. Ver slides T 174 e 175
62. Ver slides T 177 e 178
63. $E(X^r) = \dfrac{\Gamma(\alpha + r)}{\Gamma(\alpha)\lambda^r}$, $r = 0, 1, 2, \ldots$ (ver slide 19 - Transformadas)
64. A soma de duas v.a. i.i.d. $Gama(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ tem distribuição $Gama(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \equiv Exp(\frac{1}{2})$
65. $E(Z^n) = 0$, se n ímpar; $E(Z^n) = 2^{\frac{n}{2}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$, se n par. Logo $\beta_2 = E(Z^4) = 3$
66. Ver slides T 188
67. 0.9
68. 630, 30; $\frac{9}{49}$; 0.009815
69. exata: 0.5397945 ; TLC (com correcção): 0.5398277 (ver slides T 212 a 214)
70. L é par (ver slides T 210)
71. 0.5588 (ver slides T 206 a 209)
72. 0.0581; 0.5679 (ver slides T 215)
73. Ver slides T 216 a 225
    (b) $\dfrac{1}{1-t^2}, |t| < 1$; (d) $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x, & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, & x \ge 0 \end{cases}$; $F^{-1}(p) = \begin{cases} \log(2p), & p < \frac{1}{2} \\ -\log(2(1-p)), & p \ge \frac{1}{2} \end{cases}$
    (f) i. simular $U \frown U[0,1]$ e calcular $T = F^{-1}(U)$; executar no `R`
    (f) iii. simular $W \frown Exp(1)$; simular $U \frown U\{-1,1\}$; calcular WU ; executar no `R`
    (g) $\mu + \delta T$ (cf. exercício nº 51)