Capítulo 4 - Primitivas

O problema central deste capítulo é o de, dada uma função real f, definida num intervalo I, encontrar uma nova função $F\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I.$$

Trata-se do chamado problema da primitivação da função f no intervalo I.

4. Primitivas

Definição e consequências

Como já se disse, o problema da primitivação de uma dada função $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, consiste em determinar uma nova função $F: I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I.$$

Existindo solução do problema, dizemos que f é primitivável em I e cada função F é chamada uma primitiva ou antiderivada de f em I.

Da definição, é imediato que

$$F \text{ é uma primitiva de } f \quad \text{sse} \quad f \text{ é a derivada de } F.$$

Fica assim claro que a primitivação é o processo inverso da derivação.

Exemplos

1. $F(x) = \operatorname{sen} x$, $x \in \mathbb{R}$, *é uma primitiva de* $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.
De facto, basta atender a que $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

2. $F(x) = \ln x$, $x \in \mathbb{R}^+$, *é uma primitiva de* $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^+$.

Basta recordar que $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^+$.

Definição e consequências

Da definição de primitiva, extraem-se algumas consequências que passamos a enunciar.

Consequência 1

Se F é uma primitiva de f no intervalo I então toda a função

$$F(x) + \mathcal{C}, \quad x \in I,$$

com $\mathcal{C}$ uma constante real arbitrária, é também uma primitiva de f.

Basta notar que

$$[F(x) + \mathcal{C}]' = F'(x) = f(x), \; x \in I.$$

Definição e consequências

Consequência 2

Se F_1 e F_2 são duas primitivas de f em I então

$$F_2(x) = F_1(x) + \mathcal{C},\ x \in I.$$

Basta atender a que

$$F_1'(x) = F_2'(x) = f(x),\ x \in I,$$

e usar o teorema do valor médio de Lagrange.

Definição e consequências

Das Consequências 1 e 2 sai que, quando o problema da primitivação de uma função num intervalo é possível, ele admite uma infinidade de soluções - todas as que se obtêm de uma primitiva conhecida adicionando uma constante real arbitrária. Logo a expressão geral das primitivas de f é

$$F(x) + \mathcal{C}, \ \ \mathcal{C} \text{ constante,}$$

onde F é uma primitiva conhecida.

Escrevemos

$$\int f(x)\, dx = F(x) + \mathcal{C}$$

onde:

- o símbolo $\int$ é um "S" alongado;
- "dx" é uma partícula formal usada para denotar a variável independente em relação à qual se está a primitivar;
- $\int f(x)\, dx$ diz-se integral indefinido da função f .

Exemplos

1. $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + \mathcal{C}$;

2. $\int \frac{1}{x} \, dx \; = \; \ln|x| + \mathcal{C}$.

Observações

1. *O problema da primitivação de uma função num intervalo pode não possuir solução. É o que se passa, por exemplo, com a função*

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \; 0 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{se } \; 2 < x \leq 4, \end{cases}$$

definida no intervalo $[0, 4]$. *A justificação é dada pelo teorema de Darboux que estabelece que a derivada de uma função num intervalo possui a propriedade do valor intermédio e, portanto, não pode apresentar descontinuidades de salto.*

Definição e consequências

Observações

2. *Mais adiante vamos abordar algumas regras de primitivação muito úteis. Convém, no entanto, registar que estas regras não permitem determinar as primitivas de todas as funções primitiváveis. Um exemplo bem conhecido é o da função definida por*

$$e^{-x^2},\ x \in \mathbb{R},$$

que é primitivável em qualquer intervalo I e, no entanto, as regras que iremos abordar não permitem determinar as primitivas desta função.

Primitivas imediatas

Chamamos primitivas imediatas àquelas primitivas que se obtêm por simples reversão das regras de derivação, recorrendo, eventualmente, a alguns artifícios de cálculo.

A partir de um quadro de derivadas do tipo

Função	*Derivada*
e^x	e^x
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
ax	a
x^a	$a\,x^{a-1}$

facilmente construimos um quadro de primitivas imediatas. Para tal, basta fazer uma troca de colunas, adicionar uma constante arbitrária aos elementos da coluna da direita e, eventualmente, ajustar constantes.

Do quadro

Função	*Derivada*
e^x	e^x
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$a\,x$	a
x^a	$a\,x^{a-1}$

resulta, então,

Função	*Primitiva*
e^x	$e^x + \mathcal{C}$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x + \mathcal{C}$
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x + \mathcal{C}$
a	$ax + \mathcal{C}$
x^{a-1}	$\dfrac{x^a}{a} + \mathcal{C}$

Primitivas imediatas

Mais em geral, sendo $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável num intervalo I e a constante real, alguns exemplos de primitivas imediatas são:

1. $\displaystyle\int a\,dx = ax + \mathcal{C} \qquad (a \in \mathbb{R})$

2. $\displaystyle\int f'(x)f^a(x)\,dx = \frac{f^{a+1}(x)}{a+1} + \mathcal{C} \qquad (a \neq -1)$

3. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + \mathcal{C}$

4. $\displaystyle\int f'(x)e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + \mathcal{C}$

5. $\displaystyle\int f'(x)\cos(f(x))\,dx = \operatorname{sen}(f(x)) + \mathcal{C}$

6. $\displaystyle\int f'(x)\operatorname{sh}(f(x))\,dx = \operatorname{ch}(f(x)) + \mathcal{C}$

7. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx = \operatorname{arctg}(f(x)) + \mathcal{C}$

Primitivas imediatas

Observação

Relativamente à regra 3 ,

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + \mathcal{C},$$

observe-se que

- *se* $f(x) > 0$,

$$\big(\ln|f(x)|\big)' = \big(\ln f(x)\big)' = \frac{f'(x)}{f(x)};$$

- *se* $f(x) < 0$,

$$\big(\ln|f(x)|\big)' = \big(\ln(-f(x))\big)' = \frac{-f'(x)}{-f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Ou seja, em qualquer dos casos, tem-se

$$\big(\ln|f(x)|\big)' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Primitivas imediatas

É assim possível construir uma tabela de primitivas imediatas que mais não é do que uma lista de regras obtidas por leitura revertida de regras de derivação.

Em cada caso, põe-se dentro do sinal $\int \cdots dx$ uma "expressão" na forma de "derivada de alguma função". A tabela diz-nos, no segundo membro, qual é essa função.

Por exemplo, a regra 6 afirma que a primitiva de uma "expressão" do tipo

$$f'(x)\,\mathrm{sh}(f(x))$$

é igual a $\mathrm{ch}(f(x)) + \mathcal{C}$. Isto acontece porque a derivada de $\mathrm{ch}(f(x)) + \mathcal{C}$ é precisamente igual a $f'(x)\,\mathrm{sh}(f(x))$.

Para que a tabela seja útil, devemos ser capazes de traduzir a "expressão" a primitivar numa das formas contempladas na tabela dentro do símbolo $\int \cdots dx$. Este passo representa a única dificuldade do processo de primitivação imediata e requer um conhecimento razoável das regras de derivação.

Exemplos

1. $\displaystyle\int 3\,dx = 3x + \mathcal{C}.$ *[Regra 1]*

$$\int a\,dx = a\,x + \mathcal{C} \qquad (a \in \mathbb{R})$$

2. $\displaystyle\int x^4\,dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + \mathcal{C} = \frac{x^5}{5} + \mathcal{C}.$ *[Regra 2]*

$$\int f'(x) f^a(x)\,dx = \frac{f^{a+1}(x)}{a+1} + \mathcal{C} \qquad (a \neq -1)$$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + \mathcal{C} = -\frac{1}{2}x^{-2} + \mathcal{C} = -\frac{1}{2x^2} + \mathcal{C}.$ *[Regra 2]*

4. $\displaystyle\int (-\operatorname{sen} x)(\cos x)^5\,dx = \frac{(\cos x)^6}{6} + \mathcal{C}.$ *[Regra 2]*

Primitivas imediatas

Exemplos

5. $\displaystyle\int e^x \, dx = e^x + \mathcal{C}.$ *[Regra 4]*

$$\int f'(x)e^{f(x)} \, dx = e^{f(x)} + \mathcal{C}$$

6. $\displaystyle\int 2x \, e^{x^2} \, dx = e^{x^2} + \mathcal{C}.$ *[Regra 4]*

7. $\displaystyle\int \frac{3x^2}{x^3+2} \, dx = \ln\left(|x^3+2|\right) + \mathcal{C}.$ *[Regra 3]*

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)| + \mathcal{C}$$

8. $\displaystyle\int \frac{e^x}{7+e^x} \, dx = \ln(7+e^x) + \mathcal{C}.$ *[Regra 3]*

Exemplos

9. $$\int 3x^2 \cos(x^3)\, dx = \text{sen}(x^3) + \mathcal{C}.$$

[Regra 5]

$$\int f'(x) \cos(f(x))\, dx = \text{sen}(f(x)) + \mathcal{C}$$

10. $$\int (2x+1) \cos(x^2 + x)\, dx = \text{sen}(x^2 + x) + \mathcal{C}.$$

[Regra 5]

11 $$\int \frac{2x}{1+x^4}\, dx = \int \frac{2x}{1+(x^2)^2}\, dx = \text{arctg}(x^2) + \mathcal{C}.$$

[Regra 7]

$$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\, dx = \text{arctg}(f(x)) + \mathcal{C}$$

12. $$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx = \int \frac{e^x}{1+(e^x)^2}\, dx = \text{arctg}(e^x) + \mathcal{C}.$$

[Regra 7]

Primitivas imediatas

Exemplos

13.

$$\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \mathcal{C}$$

$$= \tfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \mathcal{C} = \tfrac{2}{3}\sqrt{x^3} + \mathcal{C}.$$

[Regra 2]

$$\int f'(x) f^a(x)\, dx = \frac{f^{a+1}(x)}{a+1} + \mathcal{C} \qquad (a \neq -1)$$

14. $\displaystyle \int \sqrt{(x+1)}\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + \mathcal{C}.$

[Regra 2]

15. $\displaystyle \int \frac{e^x}{\sqrt{5+e^x}}\, dx = \int e^x (5+e^x)^{-1/2}\, dx = \frac{(5+e^x)^{-1/2+1}}{-1/2+1} + \mathcal{C}$

$$= 2\sqrt{5+e^x} + \mathcal{C}.$$

[Regra 2]

Regras de primitivação

O cálculo das primitivas de uma função baseia-se num conjunto de regras, as chamadas regras de primitivação, que se obtêm a partir das regras de derivação.

A. Primitivação por decomposição

Resulta da regra da derivação da soma de funções e da regra de derivação do produto de uma função por uma constante.

[Primitivação por decomposição]

Sejam f e g funções primitiváveis num intervalo I e α, β duas constantes reais. Então $\alpha\, f + \beta\, g$ é primitivável em I, tendo-se

$$\int \big[\alpha f(x) + \beta g(x)\big]\, dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx\,.$$

A. Primitivação por decomposição

Exemplo

$$\int \left(5\cos x - \frac{2}{5} e^x + \frac{3\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x} \right) dx =$$

$$= 5\int \cos x \, dx - \frac{2}{5}\int e^x \, dx + 3\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x} \, dx$$

$$= 5 \operatorname{sen} x - \frac{2}{5} e^x + 3 \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x) + \mathcal{C}$$

B. Primitivação por partes

Resulta da regra de derivação de um produto de funções.

[Primitivação por partes]
Sejam $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ primitivável, $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma primitiva de f e $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável, tais que o produto Fg' é primitivável em I. Então $f\,g$ é primitivável em I, tendo-se

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx.$$

A regra de primitivação expressa nesta fórmula evidencia que a primitiva de um produto pode ser calculada em duas partes: na primeira, primitiva-se apenas o primeiro fator, que depois é multiplicado pelo segundo; na segunda parte, primitiva-se o produto da função que já está primitivada pela derivada do segundo fator.

B. Primitivação por partes

Observações

1. *Para que o método de primitivação por partes tenha sucesso, pelo menos um dos fatores deve ter primitiva imediata; o método resulta quando se sabe primitivar o produto que aparece na segunda parte.*

2. *Em geral, conhecendo a primitiva de ambos os fatores, escolhe-se para segundo aquele que mais se simplifica a derivar.*

B. Primitivação por partes

Observações

3. *O método de primitivação por partes pode ser aplicado com suceso para primitivar uma função que não tem primitiva imediata, digamos* $f(x)$, *interpretando-a como o produto* $1f(x)$ *e começando por primitivar o fator* 1,

$$\int f(x)dx = \int 1f(x)dx = x\,f(x) - \int x\,f'(x)dx = \cdots$$

Este é o processo habitualmente utilizado para primitivar, por exemplo, logarítmos, arcos trigonométricos e argumentos hiperbólicos.

4. *Ao aplicar o método de primitivação por partes duas ou mais vezes sucessivas, é frequente reencontrarmos a primitiva inicial afetada de um certo coeficiente (diferente de* 1*). A primitiva proposta pode ser obtida como solução de uma equação cuja incógnita é precisamente essa primitiva.*

B. Primitivação por partes

Exemplos

$$1. \int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + \mathcal{C}.$$

Repare-se que o fator $\ln x$ *não possui primitiva imediata. Devemos, portanto, primitivar primeiro o fator* x.

$$2. \int x\, e^x dx = x\, e^x - \int e^x dx = x\, e^x - e^x + \mathcal{C}.$$

Aqui conhecemos a primitiva de ambos os fatores. Mas o polinómio "complica-se" quando primitivado, porque aumenta de grau, e simplifica-se quando derivado. É então conveniente guardá-lo para segundo fator.

B. Primitivação por partes

Exemplos

$$\begin{aligned} 3.\ \int \operatorname{arctg} x\, dx &= \int 1 \operatorname{arctg} x\, dx = x \operatorname{arctg} x - \int x\, \frac{1}{1+x^2}\, dx \\ &= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2}\, dx \\ &= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\, \ln(1+x^2) + \mathcal{C}. \end{aligned}$$

O arco-tangente não tem primitiva imediata, mas foi muito simples usar o método de primitivação por partes para o primitivar.

Exemplos

$$\begin{aligned} 4.\ \int e^x \operatorname{sen} x dx &= e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x dx \\ &= e^x \operatorname{sen} x - \left(e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x\, dx \right) \\ &= e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx. \end{aligned}$$

Então podemos escrever

$$\int e^x \operatorname{sen} x dx = e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) - \int e^x \operatorname{sen} x dx$$

e resolvendo esta última equação a respeito da incógnita $\int e^x \operatorname{sen} x dx$*, resulta*

$$\int e^x \operatorname{sen} x dx = \frac{e^x}{2} (\operatorname{sen} x - \cos x) + \mathcal{C}.$$

C. Primitivação por substituição

Resulta da regra de derivação de uma função composta.

[Primitivação por substituição]
Sejam $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função primitivável no intervalo I, F uma primitiva de f em I, e $g\colon J \longrightarrow I$ uma função bijetiva com derivada não nula em cada ponto de J. Então $F \circ g$ é uma primitiva de $(f \circ g)\, g'$ em J, tendo-se

$$\int f(x)\, dx = \left[\int f\left(g(t)\right) g'(t)\, dt\right]_{t=g^{-1}(x)}.$$

Esta expressão exprime a regra de primitivação por substituição de variável. Mais concretamente, ela indica que o cálculo da primitiva de $f(x)$ pode ser efetuado da seguinte forma:

- faz-se a substituição $x = g(t)$;
- calcula-se depois a nova primitiva $\displaystyle\int f(g(t))\, g'(t)\, dt$;
- desfaz-se a substituição, regressando à variável inicial x, através de $t = g^{-1}(x)$.

C. Primitivação por substituição

Observação

Em geral, aplica-se o método de primitivação por substituição quando não se sabe primitivar a função dada por outro processo ou ainda quando o cálculo da primitiva dada se simplifica significativamente.

O sucesso do método depende, obviamente, da substituição adotada. A dificuldade está em intuir uma substituição adequada para a primitiva que nos é proposta. Para a escolha da substituição, podemos recorrer a uma tabela onde se listam substituições de sucesso para os casos mais importantes.

O método pode ser usado sempre que se queira, claro, mas a sua verdadeira utilidade revela-se nos casos em que não conseguimos calcular a primitiva que nos é proposta. O seu sucesso depende grandemente da experiência.

C. Primitivação por substituição

Exemplos

1. *Para calcular* $\int x\sqrt{x-1}\,dx$, *faça-se a substituição definida por* $x = t^2+1,\ t \geq 0.$

   No âmbito da fórmula apresentada, tem-se $g(t) = 1+t^2$. *Então* $g'(t) = 2t$ *e somos conduzidos ao cálculo da nova primitiva,*

$$\int (1+t^2)\sqrt{t^2}\,2t\,dt = 2\int (t^2+t^4)\,dt = \frac{2}{3}\,t^3 + \frac{2}{5}\,t^5 + \mathcal{C}.$$

   Para regressar à variável x, *desfaz-se a substituição, notando que* $t = \sqrt{x-1}$ *com* $x \geq 1$, *uma vez que* $t \geq 0$. *Resulta finalmente*

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + \frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5} + \mathcal{C}.$$

C. Primitivação por substituição

Exemplos

2. *Para calcular* $\int x \sqrt[4]{1+x}\, dx$, *faça-se* $1+x=t^4$, $t \geq 0$. *Vem*

$$\int x \sqrt[4]{1+x}\, dx = \frac{4}{9}\sqrt[4]{(1+x)^9} - \frac{4}{5}\sqrt[4]{(1+x)^5} + \mathcal{C}.$$

Primitivação de funções racionais

A primitivação de funções definidas como quociente de polinómios (funções racionais),

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}\,, \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{x\in\mathbb{R}:\ Q(x)=0\}\,,$$

é feita com uma técnica muito própria que se baseia na decomposição da fração $P(x)/Q(x)$ em frações mais simples, ditas elementares . Para obter uma tal decomposição, é crucial a determinação dos zeros do polinómio Q, bem como a especificação da natureza e da multiplicidade de cada zero. Omitindo aqui alguns resultados sobre polinómios, passemos à descrição desta técnica.

Primitivação de funções racionais

Passo 1: Divisão dos polinómios (nem sempre é necessário).

Se grau $P \geq$ grau Q então efetua-se a divisão dos dois polinómios. Resulta

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \,,$$

onde S e R são polinómios e grau $R <$ grau Q. A fração $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ deve agora ser decomposta, como virá explicado nos passos seguintes.

Primitivação de funções racionais

Passo 2: Decomposição de $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ em frações simples.

a) Determinam-se os zeros de Q, atendendo a que:

- se Q é um polinómio de grau n então Q possui exatamente n zeros, que podem ser reais ou complexos;
- os zeros complexos ocorrem sempre aos pares de conjugados, isto é, se $a + bi$ é um zero de Q então $a - bi$ também é um zero de Q;
- cada zero de Q pode ser *simples* ou de *multiplicidade um*, quando anula Q mas não anula a sua derivada Q', e pode ser *múltiplo* com *multiplicidade* $k > 1$, quando anula Q e todas as suas derivadas até à ordem $k - 1$ mas não anula a derivada de ordem k;
- o polinómio Q possui o zero real $x = a$ com multiplicidade $k \geq 1$ se, na fatorização de Q, o fator $(x - a)$ ocorre exatamente k vezes;
- o polinómio Q possui o par de zeros complexos $x = a \pm b\imath$ com multiplicidade $k \geq 1$ se, na fatorização de Q, o fator $[(x - a)^2 + b^2]^k$ ocorre exatamente k vezes.

Primitivação de funções racionais

Passo 2: Decomposição de $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ em frações simples.

b) Decompõe-se $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ numa soma de frações simples, com base nos zeros de Q encontrados em a), atendendo a que:

- cada zero real $x = a$, com multiplicidade k, contribui com k frações simples da forma

$$\frac{A_1}{(x-a)^k}\,,\quad \frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}\,,\quad \dots\,,\quad \frac{A_k}{x-a}\,,$$

  onde $A_1, A_2, \dots, A_k$ são constantes reais a determinar;

- cada par de zeros complexos conjugados $x = a \pm b\imath$, com multiplicidade k, contribui com k frações simples da forma

$$\frac{P_1x+Q_1}{[(x-a)^2+b^2]^k}\,,\quad \frac{P_2x+Q_2}{[(x-a)^2+b^2]^{k-1}}\,,\quad \dots\,,\frac{P_kx+Q_k}{(x-a)^2+b^2}$$

  onde $P_1, Q_1, P_2, Q_2, \dots, P_k, Q_k$ são constantes reais a determinar.

Primitivação de funções racionais

Passo 2: Decomposição de $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ em frações simples.

c) Calculam-se as constantes A_i, P_i, Q_i que figuram nos numeradores das frações simples, recorrendo ao chamado método dos coeficientes indeterminados . Na prática, recorre-se muitas vezes a outras regras bastante simples que, conjugadas com o método anterior, simpificam significativamente os cálculos a efetuar.

Primitivação de funções racionais

Passo 3: Cálculo das primitivas.

O cálculo da primitiva inicial é efetuado a partir do que se viu nos passos anteriores. Temos

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = \int S(x)\, dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\, dx\,,$$

onde a primeira primitiva no segundo membro é imediata, por se tratar de um polinómio, e a segunda primitiva é a soma das primitivas das frações simples envolvidas na decomposição.