



Folha 9 - Aplicações do cálculo diferencial

Exercício 1 Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x e^x & \text{se } x < 0, \\ \arctg x & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

- a) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$;
- b) Verifique que f é uma função derivável.
- c) Indique, justificando, os intervalos de monotonia de f .
- d) Determine o contradomínio de f .

Exercício 2 Calcule os seguintes limites, indicando, quando for o caso, o tipo de indeterminação presente:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sen x}{x}$;
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$;
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$;
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sen x - x}{x \sen x}$;
- e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$;
- f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x + \sen x}$;
- g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sen x}}{x^2}$;
- h) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sen(5x))}{\ln(\sen(6x))}$;
- i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ch x - \cos x}{x^2}$.

Exercício 3 Determine o polinómio de Taylor de ordem n da função f apresentada a seguir, em torno do ponto a indicado:

- a) $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, $n = 50$, $a = 0$;
- b) $f(x) = \sen x$, $x \in \mathbb{R}$, $n = 7$, $a = 0$;
- c) $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, $n = 8$, $a = 0$;
- d) $f(x) = \ln x$, $x \in \mathbb{R}^+$, $n = 5$, $a = 1$.

Exercício 4 Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que o seu polinómio de Taylor de ordem 6 em torno de 0 (polinómio de MacLaurin) é

$$P_{6,0}(x) = 3x - 4x^3 + 5x^6.$$

Determine $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, $f^{(4)}(0)$, $f^{(5)}(0)$ e $f^{(6)}(0)$.

Exercício 5 Sejam $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$. Sabendo que $P(x) = 2x + 1$ coincide simultaneamente com o polinômio de Taylor de primeira ordem de f em torno do ponto 0 (polinômio de MacLaurin) e com o polinômio de Taylor de segunda ordem de g em torno do ponto 1, determine $f(0)$, $f'(0)$, $g(1)$, $g'(1)$ e $g''(1)$.

Exercício 6 Seja $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$ o polinômio de Taylor de terceira ordem em torno do ponto 1 de $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Determine o correspondente polinômio de Taylor de segunda ordem.

Exercício 7 Seja $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $f(3) = 1$, $f'(3) = -2$, $f''(3) = 3$ e $f'''(3) = -5$. Determine os polinômios de Taylor de ordens 2 e 3 da função f em torno do ponto 3. Use os dois polinômios para aproximar o valor de $f(2.9)$.

Exercício 8 Escreva o polinômio $x^3 - 15x^2 + 75x - 120$ em potências de $x - 5$.

Exercício 9 Determine o polinômio do terceiro grau cujas derivadas de ordens 0, 1, 2 e 3 no ponto 3 são todas iguais a 3.

Exercício 10 Apresente uma estimativa para o erro cometido ao usar o polinômio $P_{7,0}(x)$ para aproximar o valor de $\sin x$ no intervalo $]0, \frac{\pi}{4}[$.
