Matrizes **Exercícios**

1. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, escreva a matriz $B = [b_{ij}]$ tal que $b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} - \lambda & \text{se } i = j \\ a_{ij} & \text{se } i \neq j \end{cases}$, onde λ representa um número real.

2. Simplifique as seguintes expressões matriciais:

   (a) $3(8A - 5B) + 4(4B - 6A)$;

   (b) $3(5A - 3B) + 6(B - 4A) + 3(2A + B)$.

3. (a) Determine a matriz A sabendo que
$$4A - \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \end{bmatrix} - 10A.$$

   (b) Encontre $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ quando se tem

   i. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b - c & c \\ d & 1 \end{bmatrix}$;

   ii. $3\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

4. Calcule os seguintes produtos de matrizes:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 7 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 9 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Diga quais das expressões a seguir indicadas estão definidas e, em caso afirmativo, calcule-as.

(a) $A + D$ e $B + C$

(b) $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$

(c) BC e CB

(d) $CA + 2C$ e C^2

(e) $AF + F$, $2AF$ e $A2F$

(f) $(D - 2I_3)F$, I_3F e FI_4

(g) AD e DA
(Observe que D comuta com A.)

(h) AG e GA

(i) EA e AE
(Observe que E se obtém de I_3 trocando entre si a segunda e a terceira linhas (ou colunas). Note o “efeito”em A que corresponde à multiplicação à esquerda (ou à direita) por E.)

(j) $B - \lambda I_2$ e $A - \lambda I_3$ onde λ representa um número real

(k) $B\mathbf{u}$

(l) $C\mathbf{x}$
(Observe que se tem $C\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sem que $C = O$ ou $\mathbf{x} = \mathbf{0}$)

(m) $3\mathbf{y} + \mathbf{x}$

(n) $\mathbf{yx}$ e $\mathbf{xy}$

6. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Verifique que

(a) $A^2 - 3A + 2I_3 = O$;

(b) $AO + I_3A = A$.

7. Verifique que $A^2 - 5A + 4I_2 = O$ para

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$;

(b) $A = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -9 & 10 \end{bmatrix}$.

8. Considere a matriz diagonal $D = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}$, $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Calcule os produtos D^2, D^3 e D^4. Qual a expressão para D^n?

9. Sejam A e E as matrizes dadas no exercício 5. Resolva a seguinte equação matricial na variável X:
$$X + A = 2(X - AE).$$

10. Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n. Verifique que se $AB = BA$ então
$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \quad \text{e} \quad A^2 - B^2 = (A-B)(A+B).$$
Observe que, em geral, estas igualdades não são válidas.

11. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.
    (a) Determine uma matriz B quadrada de ordem 2, não nula, tal que $AB = O$. (Observe que não existe uma lei do cancelamento do produto.)
    (b) Dê exemplo de matrizes não nulas X e Y tais que $AX = AY$ mas $X \neq Y$. (Observe que $AX = AY$ não implica $X = Y$ ou $A = O$; uma consequência de não se verificar uma lei de cancelamento do produto.)

12. Calcule as transpostas das matrizes
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \\ 4 & 17 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

13. Determine a matriz A sabendo que:
    (a) $\left(A^T + 2\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}\right)^T = 5\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$;
    (b) $2A - \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 7 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$;
    (c) $\left(3A^T - 2\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\right)^T = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

14. A respeito das matrizes apresentadas no Exercício 5 calcule
    (a) AC^T b) C^TB c) $\mathbf{v}^T\mathbf{u}$ d) $\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ e) $\mathbf{y}\mathbf{y}^T$ f) $\mathbf{y}^T\mathbf{y}$ g) $\mathbf{u}^TB\mathbf{u}$ e $\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$.

15. Verifique que as matrizes inversas de
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
são, respectivamente,
$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

16. Seja A uma matriz diagonal com elementos não nulos na diagonal,

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}, \qquad \text{com } a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \text{ não nulos.}$$

Mostre que A é invertível escrevendo a sua inversa.

17. Verifique que as matrizes seguintes são ortogonais.

(a) $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $D = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ (c) $E = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -6 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & 6 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ (d) $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Quais as inversas destas matrizes?

18. (a) Considere a matriz D do exercício 17. Verifique que a matrix D^2 é também uma matriz ortogonal.
    (b) Mostre que o produto de quaisquer duas matrizes ortogonais é também uma matriz ortogonal.

19. Prove que se A é uma matriz invertível então
    (a) $AB = O \implies B = O$;
    (b) $AX = AY \implies X = Y$.
    (Compare este resultado com o Exercício 11.)

20. Sendo A uma matriz quadrada de ordem n invertível, verifique que a equação matricial na variável X

$$A + AX = 2I_n$$

tem solução igual a $2A^{-1} - I_n$.

21. Dê exemplos de matrizes triangulares superiores de ordem 3 e de ordem 4.

22. Dê exemplos de uma matriz simétrica de ordem 2 e de uma matriz simétrica de ordem 4.

23. Dê um exemplo de uma matriz de ordem 4 simétrica e triangular inferior.

24. Mostre que, para qualquer matriz quadrada A, a matriz $A + A^T$ é uma matriz simétrica.

25. Sendo $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, encontre todas as matrizes de ordem 2×2 que comutam com a matrix B.

26. Exprima a seguinte equação matricial como um sistema de equações lineares

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

27. Escreva as matrizes A, B, C e D de ordem $m \times n$ tais que

(a) $m = 3$, $n = 4$ e $a_{ij} = 2i + j$

(b) $m = 4$, $n = 2$ e $b_{ij} = |i - j|$

(c) $m = 2$, $n = 4$ e $c_{ij} = i^2 + j^2$

(d) $m = 5$, $n = 1$ e $d_{ij} = \max\{i, 3j\}$

28. (a) Sejam A e B duas matrizes comutáveis e invertíveis. Mostre que $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

(b) Sejam A e B duas matrizes comutáveis e B uma matriz invertível. Mostre que A e B^{-1} também são comutáveis.

(c) Seja A uma matriz quadrada tal que $A^p = O$ para algum $p \in \mathbb{N}$. Mostre que

$$(I - A)^{-1} = I + \sum_{k=1}^{p-1} A^k.$$

29. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Mostre que $X^2 = (a + d)X - (ad - bc)I_2$.

30. Sabendo que as matrizes A, B e C são matrizes de ordem n invertíveis, resolva em ordem a X a equação matricial $C^{-1}(A + X)B^{-1} = I_n$.

31. Sejam A e B matrizes de ordem n invertíveis. Resolva em ordem a X a equação matricial $\left[\left(A^T\right)^{-1}X\right]^T + (AB)^{-1} = A$.

32. Uma matriz quadrada A diz-se antissimétrica se $A^T = -A$.

Mostre que, para qualquer matriz quadrada B, a matriz $B - B^T$ é antissimétrica.

33. Considere que no ano de 1990 (ano inicial) a população de uma certa cidade era r_0 e a população dos subúrbios s_0; e seja $\mathbf{x}_0$ o vetor da população inicial,

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} r_0 \\ s_0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{população da cidade em 1990} \\ \text{população dos subúrbios em 1990} \end{array}$$

Para 1991 e anos seguintes os vetores da população são denotados por

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} r_1 \\ s_1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} r_2 \\ s_2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} r_3 \\ s_3 \end{bmatrix}, \qquad \dots$$

Suponha que estudos demográficos para esta cidade mostram que, a cada ano, cerca de 5% da população da cidade se muda para os subúrbios (e 95% permanece na cidade), enquanto que 3% da população dos subúrbios se muda para a cidade (e 97% permanece nos subúrbios).

(a) Mostre que o vetor da população um ano depois, em 1991, é dado por

$$\mathbf{x}_1 = M\mathbf{x}_0, \qquad \text{com } M = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{bmatrix}.$$

Em geral, se as percentagens de migração permanecerem constantes, a sequência

$$\mathbf{x}_{k+1} = M\mathbf{x}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

descreve a população da cidade e subúrbios ao longo de um certo período de anos. À matriz M chama-se *matriz de migração.*

(b) Calcule a população da cidade e subúrbios para os anos 1991 e 1992, dado que a população em 1990 era de 600 000 habitantes na cidade e de 400 000 habitantes nos subúrbios.

Soluções

1. $B = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

2. (a) B

   (b) $-3A$

3. (a) $A = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 1 \\ 23 \end{bmatrix}$ (b)i. $a = 0,\ b = c = d = 1$ (b)ii. $a = \frac{11}{9},\ b = \frac{4}{3}$

4.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 6 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 7 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 21 \\ -14 & 14 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & -30 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} 2 & 7 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} = -20;$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 9 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 27 & -9 \\ -25 & -45 & 15 \\ 10 & 18 & -6 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 22 \\ -2 & 11 & -31 \\ 1 & -13 & 28 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

5. (a) $A + D = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \\ 7 & 8 & 12 \end{bmatrix}$; $B + C$ não está definida uma vez que as matrizes não são da mesma ordem.

   (b) $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

   (c) $BC = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$; CB não está definido.

   (d) $CA + 2C = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 8 \\ 6 & 3 & 8 \end{bmatrix}$; C^2 não está definido.

   (e) $AF + F = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 19 & -13 \\ -4 & 6 & 46 & -28 \\ -7 & 8 & 69 & -44 \end{bmatrix}$; $2AF = A2F = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 36 & -30 \\ -8 & 10 & 84 & -54 \\ -14 & 16 & 132 & -78 \end{bmatrix}$

   (f) $(D - 2I_3)F = I_3F = FI_4 = F$

(g) $AD = DA = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \\ 21 & 24 & 27 \end{bmatrix}$

(h) $GA = \begin{bmatrix} \alpha & 2\alpha & 3\alpha \\ 4\beta & 5\beta & 6\beta \\ 7\gamma & 8\gamma & 9\gamma \end{bmatrix}$; e $AG = \begin{bmatrix} \alpha & 2\beta & 3\gamma \\ 4\alpha & 5\beta & 6\gamma \\ 7\alpha & 8\beta & 9\gamma \end{bmatrix}$

(i) $EA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$; $AE = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$

(j) $B - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$; $A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 4 & 5-\lambda & 6 \\ 7 & 8 & 9-\lambda \end{bmatrix}$;

(k) $B\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(l) $C\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(m) $3\mathbf{y} + \mathbf{x}$ não está definido.

(n) $\mathbf{yx} = 4\sqrt{3}$; $\mathbf{xy} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

8. $D^2 = \begin{bmatrix} a_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3^2 \end{bmatrix}$; $D^3 = \begin{bmatrix} a_1^3 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^3 & 0 \\ 0 & 0 & a_3^3 \end{bmatrix}$; $D^4 = \begin{bmatrix} a_1^4 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^4 & 0 \\ 0 & 0 & a_3^4 \end{bmatrix}$; $D^n = \begin{bmatrix} a_1^n & 0 & 0 \\ 0 & a_2^n & 0 \\ 0 & 0 & a_3^n \end{bmatrix}$

9. $X = A + 2AE = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 7 \\ 12 & 17 & 16 \\ 21 & 26 & 25 \end{bmatrix}$

10. Uma vez que $AB = BA$, temos
$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$ e
$(A-B)(A+B) = A^2 + AB - BA - B^2 = A^2 - B^2$.

11. (a) Por exemplo, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$, por exemplo.

12. $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 17 \end{bmatrix}$; $B^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$; $C^T = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$; $D^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

13. (a) $A = \begin{bmatrix} 13 & -15 \\ 9 & 35 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 3/2 & 2 \\ -3/2 & 11/2 \\ -1 & 11/2 \end{bmatrix}$; (c) $A = \begin{bmatrix} 7/3 & -10/3 & 1/3 \\ 2 & 5/3 & 11/3 \end{bmatrix}$.

14. (a) $AC^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$; b) $C^T B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; c) $\mathbf{v}^T\mathbf{u} = 2/3$; d) $\mathbf{u}\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 \\ -1/3 & 0 \end{bmatrix}$;

e) $\mathbf{y}\mathbf{y}^T = 9$; f) $\mathbf{y}^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$; g) $\mathbf{u}^T B\mathbf{u} = 2/3$; $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 80$.

15. $AA^{-1} = A^{-1}A = I_4$ e $BB^{-1} = B^{-1}B = I_3$

16. Uma vez que $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ são não nulos, A é invertível e

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a_1 & & & \\ & 1/a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/a_n \end{bmatrix}.$$

17. Todas as matrizes são ortogonais:

$CC^T = C^TC = I_2$, $DD^T = D^TD = I_2$, $EE^T = E^TE = I_3$ e $FF^T = F^TF = I_3$.

A inversa de uma matriz ortogonal é a sua transposta, por definição.

Temos, então, $C^{-1} = C^T$, $D^{-1} = D^T$, $E^{-1} = E^T$ e $F^{-1} = F^T$.

18. (a) $D^2\left(D^2\right)^T = \left(D^2\right)^T D^2 = I_2$.

    (b) Sejam A e B duas matrizes ortogonais de ordem n, ou seja, matrizes A e B tais que $AA^T = A^TA = I_n$ e $BB^T = B^TB = I_n$. Pretende-se mostrar que AB é também uma matriz ortogonal.
    De facto, $(AB)(AB)^T = (AB)(B^TA^T) = A(BB^T)A^T = AI_nA^T = AA^T = I_n$. De forma análoga se verifica que $(AB)^T(AB) = I_n$. Ou seja, AB é uma matriz ortogonal.

19. Sendo A uma matriz invertível de ordem n, existe A^{-1} tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Assim,

    (a) $AB = O \Longrightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}O \Longrightarrow (A^{-1}A)B = O \Longrightarrow I_nB = O \Longrightarrow B = O$.

    (b) $AX = AY \Longrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}(AY) \Longrightarrow (A^{-1}A)X = (A^{-1}A)Y \Longrightarrow X = Y$.

20. $A + AX = A + A(2A^{-1} - I_n) = A + 2AA^{-1} - AI_n = A + 2I_n - A = 2I_n$

21. Por exemplo, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

22. Por exemplo, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -4 & -1 \\ 3 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

23. Terá de ser uma matriz diagonal.

24. Temos $\left(A + A^T\right)^T = A^T + \left(A^T\right)^T = A^T + A = A + A^T$, ou seja, $A + A^T$ é uma matriz simétrica.

25. As matrizes que comutam com $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ são da forma $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$ com $b + d = a$.

26. $\left\{ \begin{array}{llll} 2x_1 & +x_2 & -3x_3 & = -2 \\ 4x_1 & & +x_3 & = 3 \end{array} \right.$

27. (a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}$

(b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $C = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 10 & 17 \\ 5 & 8 & 13 & 20 \end{bmatrix}$

(d) $D = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

28. (a) $(AB)(A^{-1}B^{-1}) = (BA)(A^{-1}B^{-1}) = B(AA^{-1})B^{-1} = BIB^{-1} = BB^{-1} = I$
$(A^{-1}B^{-1})(AB) = (A^{-1}B^{-1})(BA)\ldots = I$

(b) $AB^{-1} = (B^{-1}B)(AB^{-1}) = B^{-1}(BA)B^{-1} = B^{-1}(AB)B^{-1} = (B^{-1}A)(BB^{-1}) = (B^{-1}A)I = B^{-1}A$.

(c)

$$\begin{aligned} (I - A)\left(I + \sum_{k=1}^{p-1} A^k\right) &= (I - A)(I + A + A^2 + A^3 \cdots + A^{p-1}) \\ &= I + A + A^2 + A^3 \cdots + A^{p-1} - (A + A^2 + A^3 \cdots + A^p) \\ &= I - A^p = I - O = I \end{aligned}$$

29. $A^2 = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + cd & cb + d^2 \end{bmatrix} = (a + d)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - (ad - bc)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

30. $X = CB - A$.

31. $X^T = A^2 - B^{-1}$.

32. $(B - B^T)^T = B^T - (B^T)^T = B^T - B = -(B - B^T)$.

33. (a) $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} r_1 \\ s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.95r_0 + 0.03s_0 \\ 0.05r_0 + 0.97s_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_0 \\ s_0 \end{bmatrix} = M\mathbf{x}_0$.

(b) $\mathbf{x}_1 = M\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 582\,000 \\ 418\,000 \end{bmatrix}$; $\quad \mathbf{x}_2 = M\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 565\,440 \\ 434\,560 \end{bmatrix}$.