Aplicações lineares — Exercícios

1. Diga quais das aplicações seguintes, entre espaços vetoriais reais, são aplicações lineares:

   (a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (2x + y, x, y - x)$, para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

   (b) $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $g(x, y, z) = (y^2, y)$, para $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

   (c) $h : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $h(ax^2 + bx + c) = (1, a + b)$, para $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$.

   (d) $t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $t(a, b) = 5a - 2b$, para $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

2. Para cada $k \in \mathbb{R}$, seja $g_k : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação definida por

$$g_k(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_4 - k, 0, 2a_1 + a_3), \quad \text{para } (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4.$$

   Determine os valores de k para os quais g_k é uma aplicação linear.

3. Diga, justificando, se existe uma aplicação linear

   (a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(1, 0, 0) = (0, 0, 1)$, $f(0, 0, 1) = (1, 0, 0)$, $f(7, 0, 14) = (0, 0, 7)$.

   (b) $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $g(-1, 2) = (0, 1, 2, 3)$, $g(2, -1) = (0, -1, -2, -3)$.

4. Seja F uma aplicação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x, y, z) = (2x - y - z, 2y - x - z, 2z - x - y), \quad \text{para } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

   (a) Determine a matriz A_f da aplicação f relativamente às bases canónicas.

   (b) Use a matriz A_f para determinar a imagem dos vetores $u = (1, -1, 1)$, $v = (2, 1, 0)$ e $w = (2, 3, 1)$.

5. Considere as seguintes aplicações lineares:

$$\begin{aligned} &t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ definida por } t(x, y, z) = (x + y + z, y - 2z), \\ &s : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ definida por } s(x, y) = (x, x + y, x - y), \\ &u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ definida por } u(x, y) = (2x + y, -y). \end{aligned}$$

   (a) Determine as matrizes das aplicações lineares apresentadas.

   (b) Para as seguintes operações, indique as que estão bem definidas e determine, para esses casos, a respetiva matriz da aplicação linear:

   i. $\alpha s, \alpha \in \mathbb{R}$
   ii. $t + \alpha s, \alpha \in \mathbb{R}$
   iii. $u \circ u$
   iv. $s \circ t$
   v. $t \circ s$
   vi. $u \circ u + \alpha(t \circ s), \alpha \in \mathbb{R}$

6. Considere as aplicações lineares

   $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z, w) = (x - y, x + w, y + z)$, para $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$;

   $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definida por $g(x, y, z, w) = (x, x + z, -w, 2y + z)$, para $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$;

   $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $h(1, 1, 1) = (2, 0, 1)$, $h(1, 1, 0) = (1, 0, -1)$, $h(1, 0, 0) = (0, 0, 2)$;

   $t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definida por $t(x, y, z) = (x - y, 0, 0, x + y + z)$, para $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

   Determine a matriz de cada uma das aplicações apresentadas relativamente às bases canónicas.

7. Determine a imagem e o núcleo das seguintes aplicações lineares de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$:

   $t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $t(x, y, z) = (z, y, x)$,

   $s : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $s(x, y, z) = (x, y, 0)$,

   $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $u(x, y, z) = (x, x, x)$.

8. Seja $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a aplicação linear definida por

   $$g(1, 0, 0) = (1, 0, 1, 0), \quad g(0, 1, 0) = (0, 1, -2, 0), \quad g(0, 0, 1) = (1, 1, 0, 0).$$

   (a) Determine i) $g(2, 3, 1)$. ii) $g(-1, 2, 0)$.

   (b) Determine uma base de $\mathrm{Im}(g)$ e indique a característica de g.

   (c) Diga, justificando, se g é injetiva.

9. Seja $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear tal que a matriz de g relativamente às bases canónicas é a matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine $g(0, 1, 2)$ e $g(1, 1, 0)$.

   (b) Mostre que i) $\dim(\mathrm{Im}(g)) = 2$. ii) $\mathrm{Nuc}(g) = \langle (0, 1, 2) \rangle$.

   (c) Indique um vector $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $v \neq (1, 1, 0)$ e $g(v) = (0, 0, 1)$. Justifique.

10. Determine a expresssão analítica da aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(1, 2) = (3, -1, 5)$ e $f(0, 1) = (2, 1, -1)$.

11. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear tal que $f(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$ e $\mathrm{Nuc}(f) = \langle (1, 1, 1), (0, 1, 1) \rangle$. Determine a expressão analítica de f.

12. Determine a imagem, a característica, o núcleo e a nulidade de cada uma das seguintes aplicações lineares:

    $t_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $t_1(x, y, z) = (x + y + z, 2x + 2y + 2z)$,

    $t_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $t_2(x, y, z) = (x - z, 0, y - z)$,

    $t_3 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $t_3(x, y, z, w) = (x - y, z - w, x - 3w)$.

13. Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear e considere um conjunto $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\} \subset \mathbb{R}^n$ linearmente independente. Mostre que se f é injetiva então o conjunto $\{f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_k)\}$ também é linearmente independente.

14. Justifique que não existe nenhum aplicação linear $f : \mathbb{R}^7 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cujo núcleo tenha dimensão inferior ou igual a 3.

15. Seja $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear com nulidade $\mathrm{nul}(f)$ e característica $\mathrm{car}(f)$. Indique todos os pares possíveis $\big(\mathrm{nul}(f), \mathrm{car}(f)\big)$.

16. Indique se cada uma das aplicações lineares seguintes é injetiva, determinando o seu núcleo.

$$(a)\ f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (0, y+x, y-z) \end{array} \qquad (b)\ g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (a,b,c) & \mapsto & (2a, b+c, 0, a+b-c) \end{array}$$

17. Determine uma base da imagem de cada uma das aplicações lineares seguintes.

$$(a)\ f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (y,z) \end{array} \qquad (b)\ g: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & \mapsto & (2a, c+d, 0). \end{array}$$

$$(c)\ h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[x] & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \\ ax^3+bx^2+cx+d & \mapsto & \begin{bmatrix} a-c & 0 \\ 0 & b+d \end{bmatrix} \end{array} \qquad (d)\ t: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[x] \\ (a,b,c) & \mapsto & (a+b)x^2+c \end{array}$$

18. Determine a nulidade de cada uma das aplicações lineares seguintes:
   (a) $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^8$ com $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 4$.
   (b) $g : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ com $\dim(\mathrm{Im}(g)) = 1$.
   (c) $h : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ com h sobrejetiva.
   (d) $t : \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ com t sobrejetiva.

19. Seja $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear com E e E' ambos de dimensão finita. Justifique que
   (a) se $\dim E < \dim E'$ então f não é sobrejetiva, ou equivalentemente, se f é sobrejetiva então $\dim E \geq \dim E'$.
   (b) se $\dim E > \dim E'$ então f não é injetiva, ou equivalentemente, se f é injetiva então $\dim E \leq \dim E'$.
   (c) se f é bijetiva então $\dim E = \dim E'$.

20. Determine se é bijetiva cada uma das aplicações lineares seguintes.

$$(a)\ f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (a,b,c) & \mapsto & (2a, b+c, b-c) \end{array}$$

$$(b)\ t: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[x] \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & \mapsto & (a+d)x^3 + 2ax^2 + (b-c)x + (a+c) \end{array}$$

21. Diga se existe alguma aplicação linear $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\mathrm{Nuc}(f) = \langle (0,1,1,0), (1,1,1,1) \rangle \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(f) = \langle (2,3,4), (0,-1,3) \rangle.$$

22. Justifique que existe uma aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ nas condições abaixo referidas, indicando um exemplo.
   (a) $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.
   (b) $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$.
   (c) $\mathrm{Nuc}(f) = \langle (0,1,1), (1,0,1) \rangle$ e $(1,1,1) \in \mathrm{Im}(f)$.

23. Justifique que não existe uma aplicação linear $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que

$$\mathrm{Im}(f) = \langle (1,0,0,1), (0,1,1,0), (0,1,2,0) \rangle \quad \text{e} \quad \dim(\mathrm{Nuc}(f)) = 2.$$

Soluções

1. f e t são aplicações lineares; g e h não são aplicações lineares.

2. $k = 0$

3. (a) Não.
   Se f fosse uma aplicação linear teríamos $f(7,0,14) = 7f(1,0,0) + 14f(0,0,1) = (14,0,7)$ e não $f(7,0,14) = (0,0,7)$.
   (b) Sim, dado que $\big((-1,2),(2,-1)\big)$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

4. (a) $A_f = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$
   (b) $g(u) = (2,-4,2)$; $g(v) = (3,0,-3)$; $g(w) = (0,3,-3)$

5. (a) $A_t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$; $A_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$; $A_u = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.
   (b) i. $A_{\alpha s} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha \\ \alpha & -\alpha \end{bmatrix}$
   ii. O operação não está bem definida.
   iii. $A_{u \circ u} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
   iv. $A_{s \circ t} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$
   v. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
   vi. $A = \begin{bmatrix} 4+3\alpha & 1 \\ -\alpha & 1+3\alpha \end{bmatrix}$

6. $A_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; $A_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; $A_h = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$; $A_t = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

7. $\mathrm{Im}(t) = \langle (0,0,1),(0,1,0),(1,0,0) \rangle = \mathbb{R}^3$; $\quad \mathrm{Nuc}(t) = \{(0,0,0)\}$
   $\mathrm{Im}(s) = \langle (1,0,0),(0,1,0) \rangle$; $\quad \mathrm{Nuc}(s) = \langle (0,0,1) \rangle$
   $\mathrm{Im}(u) = \langle (1,1,1) \rangle$; $\quad \mathrm{Nuc}(u) = \langle (0,1,0),(0,0,1) \rangle$

8. (a) $g(2,3,1) = (3,4,-4,0)$; $\quad g(-1,2,0) = (-1,2,-5,0)$
   (b) Base de $\mathrm{Im}(g)$: $\big((1,0,1,0),(0,1,-2,0),(1,1,0,0)\big)$; car(g) = 3.
   (c) Sim, g é injetiva pois $\mathrm{Nuc}(g) = \{(0,0,0)\}$.

9. (a) $g(0,1,2) = (0,0,0)$; $\quad g(1,1,0) = (0,0,1)$
   (b) i. $\mathrm{Im}(g) = \langle (2,0,-1),(-2,0,2),(1,0,-1) \rangle = \langle (2,0,-1),(-2,0,2) \rangle$;
   Base de $\mathrm{Im}(g)$: $\big((2,0,-1),(-2,0,2)\big)$; $\quad \dim(\mathrm{Im}(g)) = 2$.
   ii. $\mathrm{Nuc}(g) = \{(0,b,2b) : b \in \mathbb{R}\} = \langle (0,1,2) \rangle$
   (c) Por exemplo, $v = (1,0,-2)$.

10. Observe-se que $\big((1,2),(0,1)\big)$ é uma base de $\mathbb{R}^2$. Para qualquer vetor $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, podemos escrever $(a,b) = a(1,2) + (b-2a)(0,1)$. Assim,

$$f(a,b) = af(1,2) + (b-2a)f(0,1) = (2b-a, b-3a, 7a-b).$$

11. Observe-se que $\big((1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\big)$ é uma base de $\mathbb{R}^3$. Para qualquer vetor $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, podemos escrever $(a,b,c)=a(1,1,1)+(b-a)(0,1,1)+(c-b)(0,0,1)$. Assim,

$$\begin{aligned} f(a,b,c) &= af(1,1,1)+(b-a)f(0,1,1)+(c-b)f(0,0,1)\\ &= a(0,0,0)+(b-a)(0,0,0)+(c-b)(0,0,1)=(0,0,c-b). \end{aligned}$$

12. $\mathrm{Im}(t_1)=\langle(1,2),(1,2),(1,2)\rangle=\langle(1,2)\rangle$; $\mathrm{car}(t_1)=1$;
$\mathrm{Nuc}(t_1)=\langle(1,0,-1),(0,1,-1)\rangle$; $\mathrm{nul}(t_1)=2$.

$\mathrm{Im}(t_2)=\langle(1,0,0),(0,0,1),(-1,0,-1)\rangle=\langle(1,0,0),(0,0,1)\rangle$; $\mathrm{car}(t_2)=2$;
$\mathrm{Nuc}(t_2)=\langle(1,1,1)\rangle$; $\mathrm{nul}(t_2)=1$.

$\mathrm{Im}(t_3)=\langle(1,0,1),(-1,0,0),(0,1,0),(0,-1,-3)\rangle=\langle(1,0,1),(0,1,0),(0,0,-3)\rangle=\mathbb{R}^3$;
$\mathrm{car}(t_3)=3$;
$\mathrm{Nuc}(t_3)=\langle(3,3,1,1)\rangle$; $\mathrm{nul}(t_3)=1$.

14. Uma vez que $\mathrm{Im}(f)\subseteq\mathbb{R}^3$, temos $\mathrm{car}(f)\leq 3$ e, pelo Teorema da dimensão, $\mathrm{nul}(f)=7-\mathrm{car}(f)\geq 7-3=4$.

15. $(5,0)$, $(4,1)$, $(3,2)$, $(2,3)$

16. (a) f não é injetiva pois $\mathrm{Nuc}(f)=\langle(-1,1,1)\rangle\neq\{(0,0,0)\}$.
    (b) g é injetiva pois $\mathrm{Nuc}(g)=\{(0,0,0)\}$.

17. (a) Por exemplo, $\big((1,0),(0,1)\big)$.
    (b) Por exemplo, $\big((2,0,0),(0,1,0)\big)$.
    (c) Por exemplo, $\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right)$.
    (d) Por exemplo, $\big(x^2,1\big)$.

18. (a) $\mathrm{nul}(f)=1$. (b) $\mathrm{nul}(g)=3$. (c) $\mathrm{nul}(h)=3$ (d) $\mathrm{nul}(t)=0$.

20. (a) Sim. (b) Sim.

21. Sim. Por exemplo, a aplicação $f:\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{aligned} &f(1,1,1,1)=(0,0,0), &&f(0,1,1,0)=(0,0,0)\\ &f(0,0,1,0)=(2,3,4), &&f(0,0,0,1)=(0,-1,3). \end{aligned}$$

22. (a) Por exemplo, a aplicação $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ tal que

$$f(1,0,0)=(1,0,0),\qquad f(0,1,0)=(0,1,0),\qquad f(0,0,1)=(0,0,0).$$

(b) Por exemplo, a aplicação $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ tal que

$$f(1,0,0)=(1,0,0),\qquad f(0,1,0)=(0,0,0),\qquad f(0,0,1)=(0,0,0).$$

(c) Por exemplo, a aplicação $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ tal que

$$f(0,1,1)=(0,0,0),\qquad f(1,0,1)=(0,0,0),\qquad f(0,0,1)=(1,1,1).$$

23. Se existisse tal aplicação, teríamos $\dim(\mathrm{Im}(f))=3$ e, como $\dim(\mathrm{Nuc}(f))=2$, viria $\dim(\mathrm{Im}(f))+\dim(\mathrm{Nuc}(f))=5\neq\dim(\mathbb{R}^4)=4$.