Parte 2B

Distribuições contínuas

Distribuições contínuas

Variáveis aleatórias e leis de probabilidade.
Medidas de localização, dispersão e forma.
Distribuições univariadas mais comuns.
Pares aleatórios e vectores aleatórios.
Distribuição normal bivariada.
Transformação uniformizante e mais simulação.

Variável aleatória e função de distribuição (revisão)

Seja $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidades.

Variável aleatória é uma função $X : \Omega \to \mathbb{R}$

tal que $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, $\forall\, B \in \mathcal{B}$; então $P(X \in B) = P(\, X^{-1}(B)\,)$

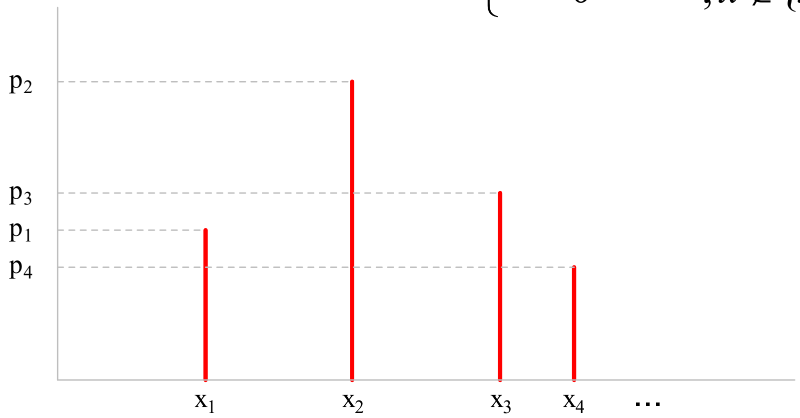
A função de distribuição (fd) de uma v.a. X é definida por

$$F(x) = P(X \leq x),\ \ x \in \mathbb{R}$$

Se o contradomínio de X for um conjunto infinito não numerável (e.g., um intervalo, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}$, …), a v.a. X é não discreta. Neste caso, se existir uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que desempenhe um papel análogo ao da fmp (chamada função densidade de probabilidade), a v.a. diz-se absolutamente contínua.

caso discreto

$$f(x)=\begin{cases} P(X=x) & ,x\in\{x_1,x_2,\dots\} \\ 0 & ,x\notin\{x_1,x_2,\dots\}\end{cases}$$



$$(i)\quad p_i \geq 0$$

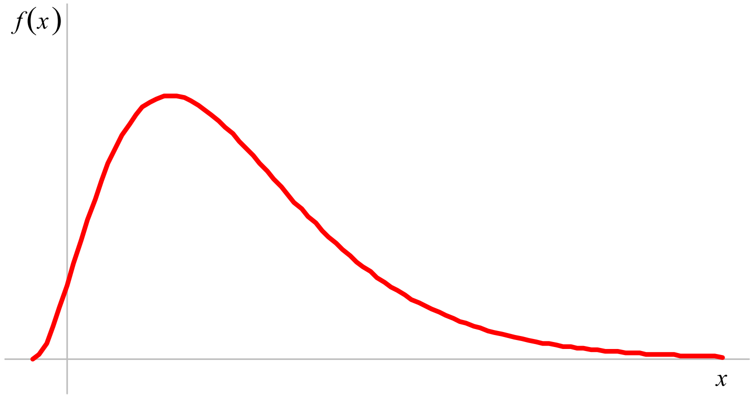
$$(ii)\ \sum_i p_i = 1$$

soma unitária

$$(iii)\quad P(X\in B)=\sum_{i:\,x_i\in B} P(X=x_i)$$

caso absol. contínuo

$f(x)=0$, se $x\notin \mathrm{supp}(X)$



$$(i)\quad f(x)\geq 0$$

$$(ii)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

área unitária

$$(iii)\quad P(X\in B)=\int_B f(x)\,dx$$

probabilidades são integrais (áreas)

fmp / fdp (massa de probabilidade / densidade de probabilidade)

As v.a. discretas são as que têm suporte contável, $\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\}$. Ficam identificadas pela fmp (função massa de probabilidade).

As v.a. absolutamente contínuas têm suporte infinito não numerável. Ficam identificadas por uma fdp (função densidade de probabilidade).

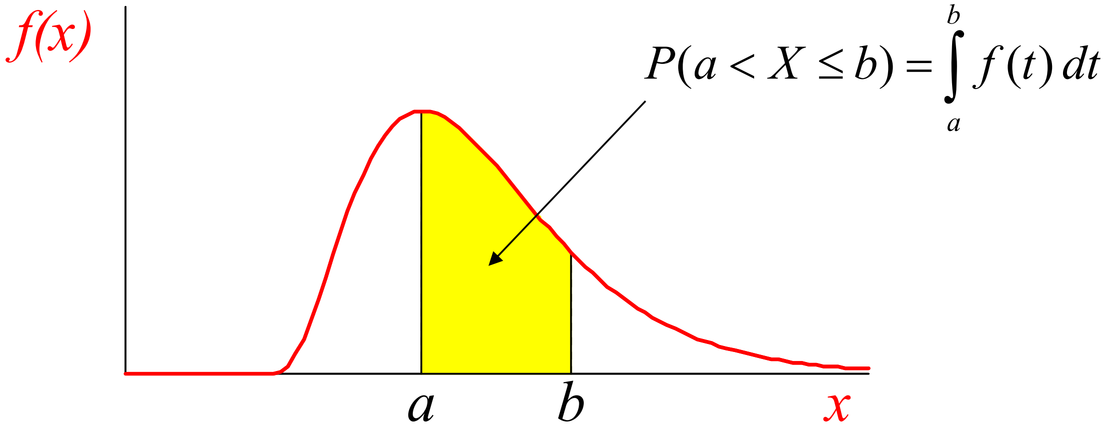
fmp	fdp
$p_i = f(x_i) = P(X = x_i)$	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$
tal que	tal que
$p_i \geq 0\ ;\ \sum_i p_i = 1$	$f(x) \geq 0\ ;\ \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 1$

Distribuições (absolutamente) contínuas

Uma v.a. X diz-se absolutamente contínua se existir uma fdp $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

Então $\boxed{F'(x) = f(x)}$ e $\boxed{P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$



Recorde-se que uma v.a. X (discreta, contínua, ou outra) fica identificada pela função de distribuição (fd), $F(x) = P(X \leq x),\ x \in \mathbb{R}$

As fd têm as seguintes propriedades, que as caracterizam:

são não decrescentes, contínuas à direita e $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0,\ \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

- No caso discreto,

$$F(x) = \sum_{i:\, x_i \leq x} p_i$$

$\downarrow$

função em escada (saltos p_i nos pontos x_i)

- No caso contínuo,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy$$

$\downarrow$

função contínua, $F'(x) = f(x)$, nos pontos de continuidade de f

Em qualquer caso
(discreto, contínuo, ou outro)

$$\boxed{P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)}$$

Variáveis aleatórias (absol.) contínuas

- Têm suporte infinito não numerável
- Ficam identificadas pela fdp $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaz a

$$(i) \quad f(x) \geq 0$$

$$(ii) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$$

$$(iii) \quad P(X \in B) = \int_{B} f(x)\, dx$$

O conhecimento da fdp equivale ao da fd pois dada uma fdp f temos $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy$ e dada uma fd F temos $f(x) = F'(x)$ nos pontos de continuidade de f.

Notas:

1. O valor $f(x)$ da fdp num determinado ponto x não representa uma probabilidade (as probabilidades são integrais = áreas). De facto, $P(X=x)=\int_{\{x\}} f(t)\,dt=0$

2. As fdp podem ter valores superiores a 1, e.g., fdp $f(x)=2\,\mathrm{I}_{[0,\,0.5]}(x)$* e não têm que ser contínuas para todo o x (podem até não estar definidas em alguns pontos)

3. No caso contínuo (contrariamente ao caso discreto), tem-se
$$P(a<X\leq b)=P(a\leq X\leq b)=P(a\leq X<b)=P(a<X<b)=\int_a^b f(x)\,dx$$

---

* A função indicatriz do conjunto A é dada por $I_A(x)=\begin{cases}1 & ,se\ \ x\in A\\ 0 & ,se\ \ x\notin A\end{cases}$

Distribuições (absolutamente) contínuas

- distribuição uniforme num intervalo

- distribuição exponencial de parâmetro λ

  durações de vida, intervalos de tempo entre ocorrências de fenómenos consecutivos (está relacionada com a Poisson)

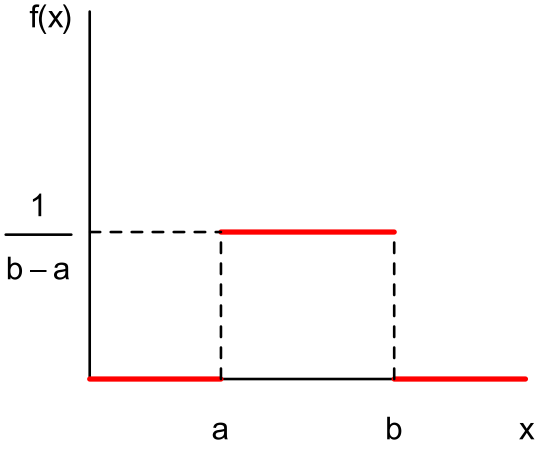
- distribuição normal (ou gaussiana)

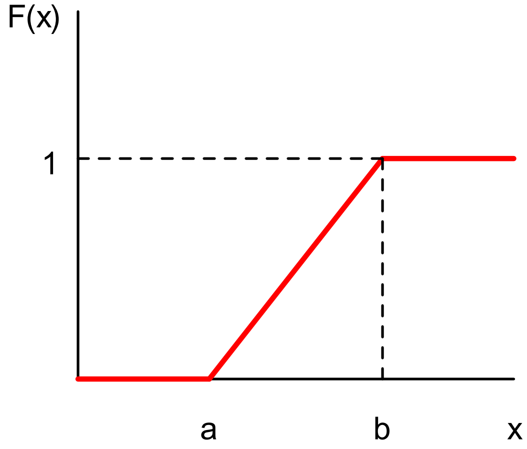
  fenómenos que resultam de causas aditivas

Distribuição uniforme (contínua) – $U[a,b]$

`dunif, punif, …`

$$\mu = \frac{a+b}{2},\ \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

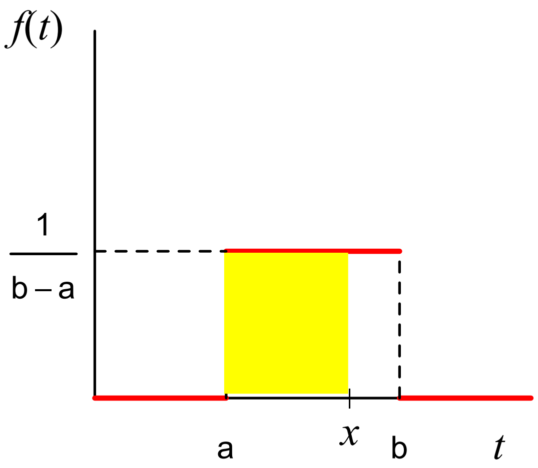




$$f(x) = \frac{1}{b-a},\quad a < x < b$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & , \quad a \le x < b \\ 1 & , \quad x \ge b \end{cases}$$

Dedução da f.d. da $U[a,b]$ a partir da densidade:



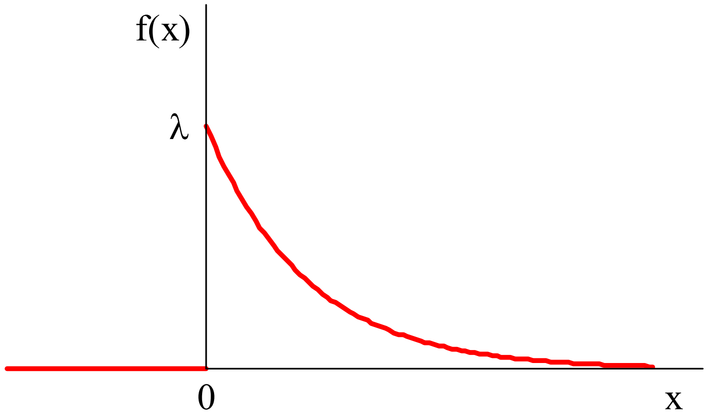
$$a \le x < b \;\Rightarrow\; F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{x-a}{b-a}$$ (área do rectângulo a amarelo)

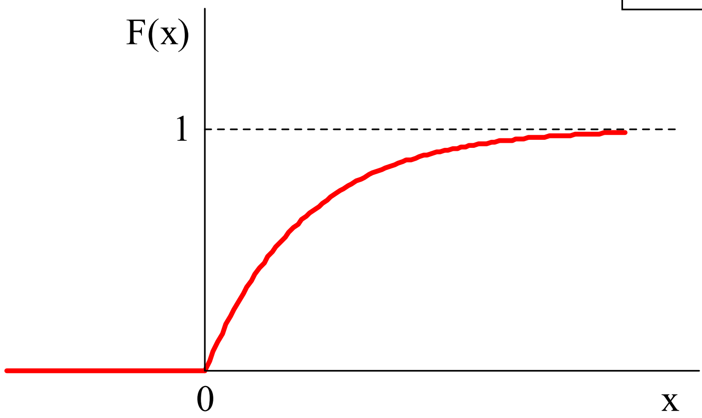
$$x < a \;\Rightarrow\; F(x) = \int_{-\infty}^x 0\,dt = 0\,; \quad x > b \;\Rightarrow\; F(x) = F(b) = 1$$

Distribuição exponencial – $Exp(\lambda)$

`dexp, pexp, …`

$$\mu = \frac{1}{\lambda}, \ \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$





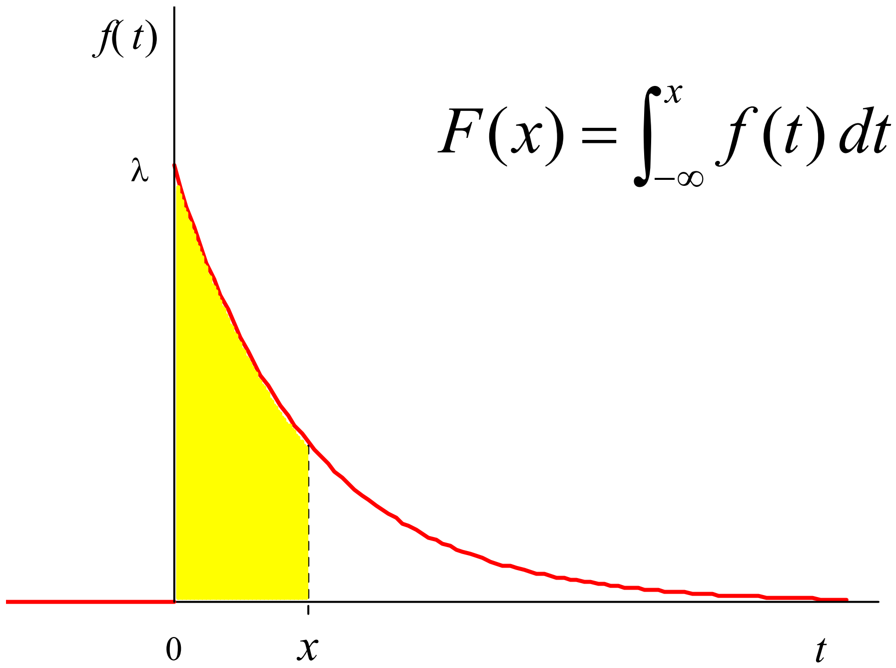
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Nota: Esta distribuição "não tem memória", i.e.,

$$P(X > t + y \mid X > t) = P(X > y), \text{ para } t > 0, \ y > 0$$

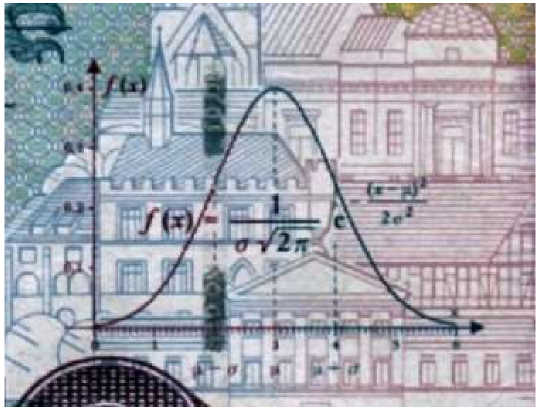
Dedução da f.d. da $Exp(\lambda)$ a partir da densidade:



$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0 & ,\ x<0 \\ \int_{0}^{x} \lambda\, e^{-\lambda t} dt = -\,e^{-\lambda t}\Big|_{0}^{x} = 1-e^{-\lambda x} & ,\ x \geq 0 \end{cases}$$

Distribuição normal (ou gaussiana)

`dnorm, pnorm, …`



Carl Friedrich Gauss
1777-1855

valor médio   desvio padrão

$$X \frown N(\mu\,,\,\sigma\,)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

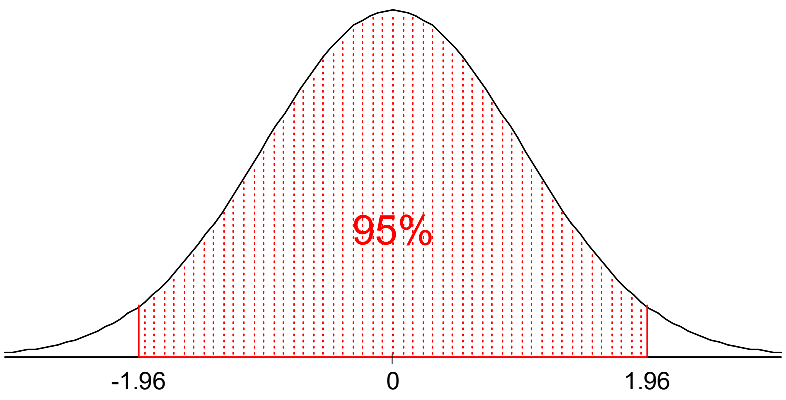
$$\boxed{X = \sigma Z + \mu}$$

$$Z \frown N(0,1)$$

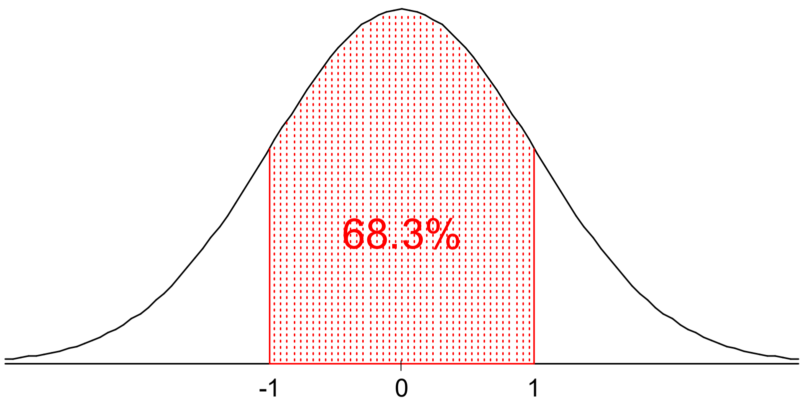
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$\boxed{Z = (X-\mu)\,/\,\sigma}$$

$$P(-1.96 < Z < 1.96) = 0.9500042 \cong 0.95$$



$$P(-1 < Z < 1) = 0.6826895 \cong 0.683$$



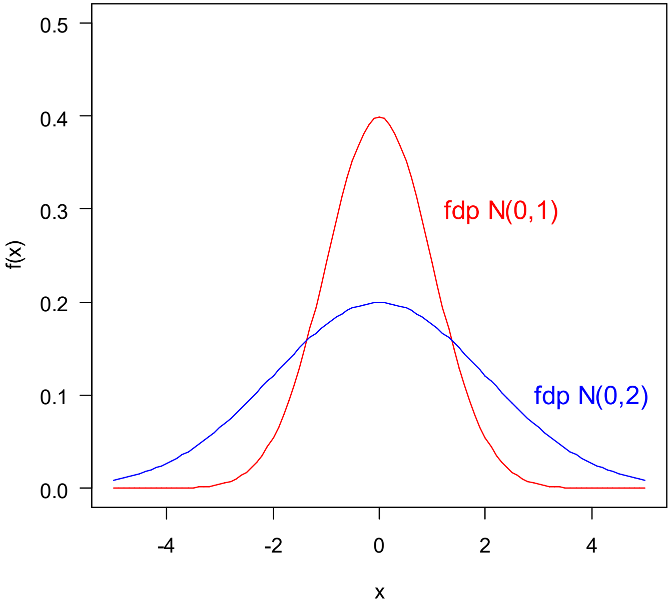
Exercício:

(a) Calcule $P(-2 < Z < 2)$, sendo $Z \frown N(0,1)$.

```
pnorm(2)-pnorm(-2)
[1] 0.9544997
```

(b) Calcule $P(\mu - 2\,\sigma < X < \mu + 2\,\sigma)$, sendo $X \frown N(\mu\,,\,\sigma)$.

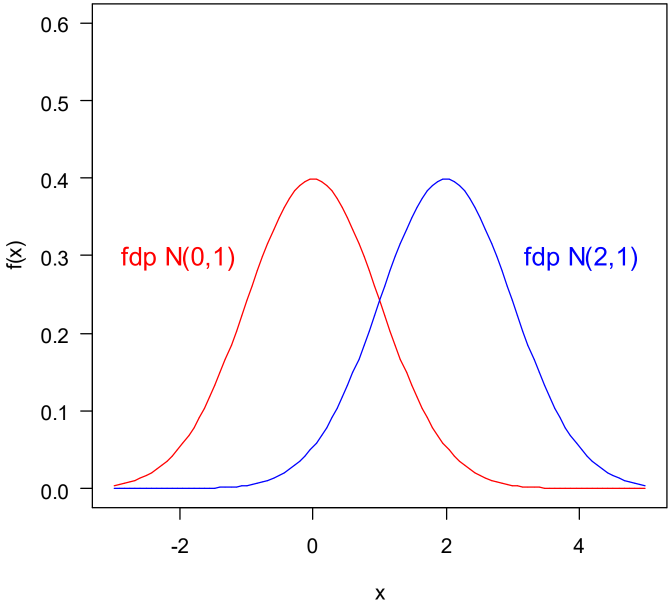
Densidades normais com o mesmo valor médio e diferentes variâncias:



$\sigma = 1$ $\quad \sigma = 2$

σ é um parâmetro de dispersão/escala

Densidades normais com diferentes valores médios e a mesma variância:



$\mu = 0$ $\quad \mu = 2$

μ é um parâmetro de localização

Valor médio de uma v.a. X (contínua)

Valor médio (ou valor esperado) de uma v.a. X, contínua, é uma "média pesada" dos valores x que a v.a. pode assumir (os pesos são os valores $f(x)$ da fdp) e representa-se por $E(X)$, μ ou μ_X .
É dado por

$$\boxed{\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx}$$

desde que este integral convirja absolutamente, i.e., desde que $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\, f(x)\, dx < +\infty$

Nota: Há v.a. que não têm valor médio. Por exemplo, a v.a. $X \frown Cauchy(0,1)$, com fdp

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}, -\infty < x < +\infty$$

pois

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{1+x^2}\, dx = +\infty$$

Exemplo 21: Cálculo do valor médio de uma v.a. $X \frown U[a,b]$

$$\mu = E(X) = \int_a^b x \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a} \left. \frac{x^2}{2} \right|_a^b = \frac{1}{b-a} \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{b+a}{2}$$

(μ é o ponto médio do intervalo [*a*,*b*] e o ponto de simetria da fdp)

Valor médio de $h(X)$, sendo X contínua

Dada uma função h, definimos analogamente o valor médio da v.a. $Y = h(X)$ por

$$\boxed{E(h(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\, f(x)\, dx}$$

desde que este integral convirja absolutamente

Variância e desvio padrão de X

variância

$$\boxed{\sigma^2 = \operatorname{var}(X) = E\left((X-\mu)^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx}$$

desvio padrão

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\operatorname{var}(X)}}$$

A moda, no caso contínuo, é o valor x tal que $f(x)$ é máximo; há distribuições unimodais, bimodais, plurimodais e amodais.

O coeficiente de assimetria é definido do mesmo modo que no caso discreto, i.e.,

$$\beta_1 = E((X-\mu)^3/\sigma^3) = \frac{1}{\sigma^3}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^3 f(x)\,dx$$

As fórmulas e propriedades dadas sobre valores médios, variâncias, etc. para o caso discreto mantêm-se válidas para o caso contínuo. As demonstrações são análogas, substituindo os somatórios por integrais. Assim, temos por exemplo

$$\operatorname{var}(X) \geq 0 \qquad E(a+bX) = a+bE(X)$$

$$\operatorname{var}(X) = E(X^2)-\mu^2 \qquad \operatorname{var}(a+bX) = b^2\operatorname{var}(X) \qquad \sigma_{a+bX} = |b|\,\sigma_X$$

Exemplo 21 (cont.): Cálculo de $E(X^2)$ e da variância de $X \frown U[a, b]$

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a} \left.\frac{x^3}{3}\right|_a^b = \frac{1}{b-a} \frac{b^3-a^3}{3} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$$\mathrm{var}(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(b+a)^2}{4} =$$

$$= \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{b^2+2ab+a^2}{4} = \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Exemplo 22: Cálculo do valor médio e variância de $X \frown Exp(\lambda)$

Integração por partes:

$$\int h' g = h\, g - \int h\, g'$$

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x \underbrace{\lambda\, e^{-\lambda x}}_{h'(x)}\, dx = -x\, e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-\lambda x}\, dx = 0 - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2\, \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx = -x^2\, e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -2x\, e^{-\lambda x}\, dx = 0 + \frac{2}{\lambda} \int_0^{+\infty} \lambda\, x\, e^{-\lambda x}\, dx = \frac{2}{\lambda} E(X) = \frac{2}{\lambda^2};$$

$$\mathrm{var}(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Características teóricas (medidas de localização, dispersão e forma)

nome	símbolo	caso discreto	caso contínuo
valor médio* $E(X)$	μ	$\sum_i x_i p_i$	$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx$
variância* $\mathrm{var}(X)=E((X-\mu)^2)$	σ^2	$\sum_i (x_i-\mu)^2 p_i$	$\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$
coef. assim.* $E((X-\mu)^3/\sigma^3)$	β_1	$\frac{1}{\sigma^3}\sum_i (x_i-\mu)^3 p_i$	$\frac{1}{\sigma^3}\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^3 f(x)\,dx$
mediana	$\chi_{1/2}$	$\inf\{x : F(x) \geq 1/2\}$	
⋮			

*existem somente se as séries/integrais convergirem absolutamente

Exemplo 23: Cálculo do valor médio e variância de $Z \frown N(0,1)$

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, x\, e^{-x^2/2}\, dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

$$\text{var}(Z) = E(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, x^2\, e^{-x^2/2}\, dx =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, x\, e^{-x^2/2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}\, dx = 0 + 1 = 1$$

Integração por partes:

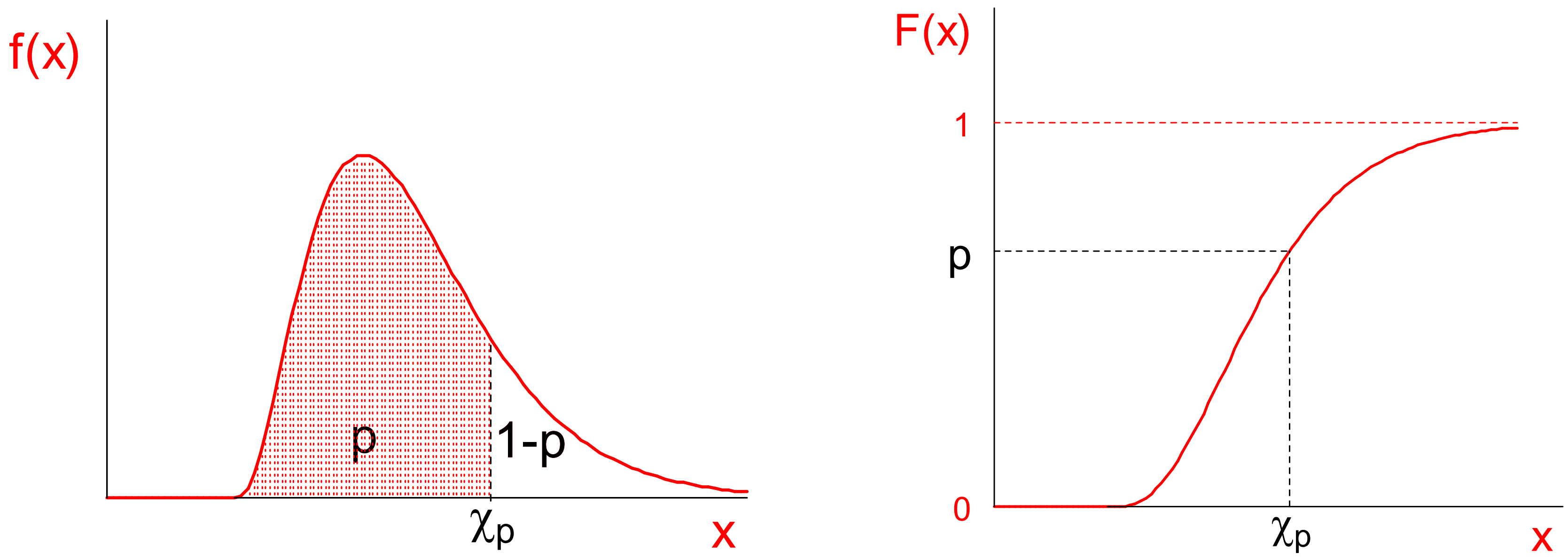
$$\int h'g = h\,g - \int h\,g'$$

$$h'(x) = x\, e^{-x^2/2}, g(x) = x$$

$$h(x) = -e^{-x^2/2}, g'(x) = 1$$

Quantil–p (caso de v.a. contínua)

É o valor de x que corresponde à área acumulada p (à esquerda de x no gráfico da fdp) e representa-se por χ_p. No caso $p = 0.5$ temos a mediana

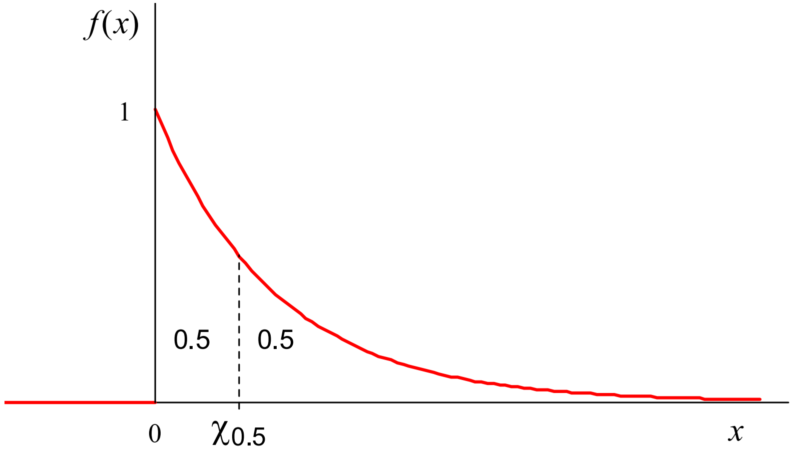


Exercício: Calcule a mediana da distribuição $Exp(1)$.

```
qexp(1/2,1)
[1] 0.6931472

log(2)
[1] 0.6931472
```

$$\chi_{0.5} = F^{-1}(0.5)$$



Exemplo 22 (cont.): Cálculo da mediana de $X \frown Exp(\lambda)$, que é a solução da equação $F(x)=1/2$, sendo $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x > 0$.

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} = \tfrac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-\lambda x} = \tfrac{1}{2} \Leftrightarrow -\lambda x = -\log(2) \Leftrightarrow x = \frac{\log(2)}{\lambda}$$

Note-se que nesta distribuição temos $\boxed{\chi_{0.5} = \frac{\log(2)}{\lambda} < \frac{1}{\lambda} = \mu}$ (mediana < valor médio)

quantil-p de uma v.a. X

Mais geralmente, o quantil-p de uma v.a. X contínua (ou da sua distribuição) é o valor x que corresponde a uma probabilidade p acumulada à sua esquerda. Se a fd F for estritamente crescente, coincide com a inversa da fd no ponto p, i.e., com $F^{-1}(p)$.

Inclui os casos particulares da

mediana, se $p = ½$

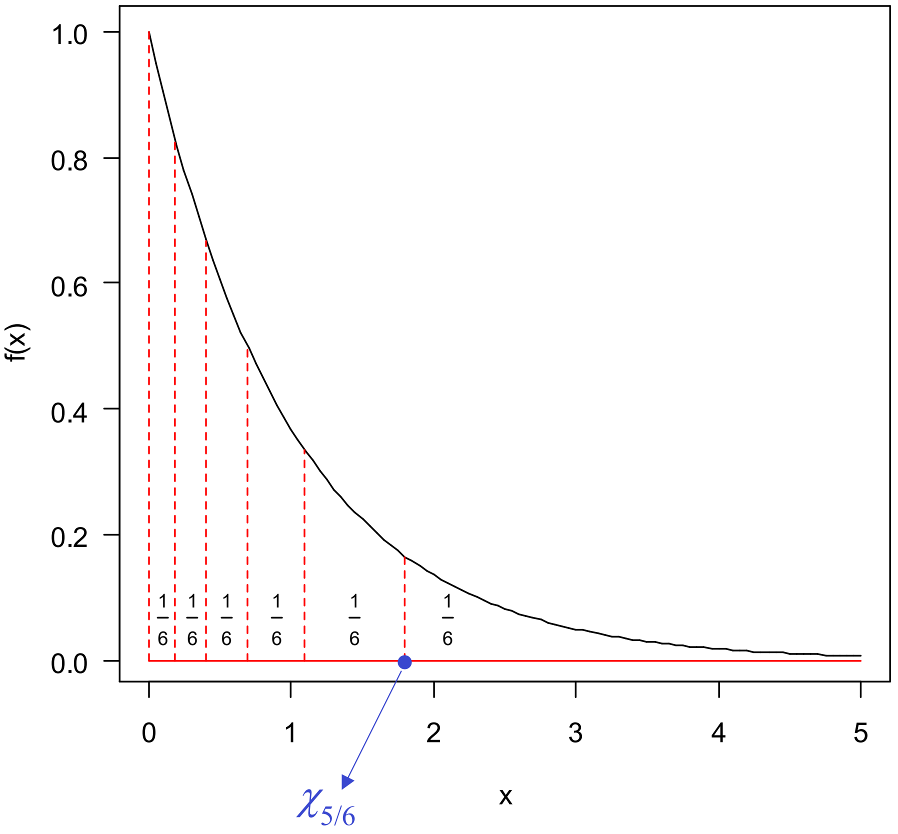
quartis, se $p = ¼\,,\, ½\,,\, ¾$ (1º, 2º e 3º quartil)

decis, se $p = i/10$, com $i = 1, 2, \ldots, 9$ (1º, 2º, ..., 9º decil)

percentis, se $p = i/100$, com $i = 1, 2, \ldots, 99$ (1º, 2º, …, 99º percentil)

Exercício: Calcule os quartis, o 3º decil e os quantis de probabilidade $i/6$, da distribuição $Exp(1)$

```
qexp(1:3/4,1)
[1] 0.2876821 0.6931472 1.3862944
qexp(3/10,1)
[1] 0.3566749
qexp(1:5/6,1)
[1] 0.1823216 0.4054651 0.6931472
[4] 1.0986123 1.7917595
```



Exemplo 22 (cont.): Cálculo do quantil-p de $X \frown Exp(\lambda)$, que é a solução da equação $F(x) = p$, com $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x > 0$.

$$p = F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \Leftrightarrow e^{-\lambda x} = 1 - p \Leftrightarrow -\lambda x = \log(1-p) \Leftrightarrow x = -\frac{\log(1-p)}{\lambda}$$

Logo $\boxed{\chi_p = -\frac{\log(1-p)}{\lambda}}$

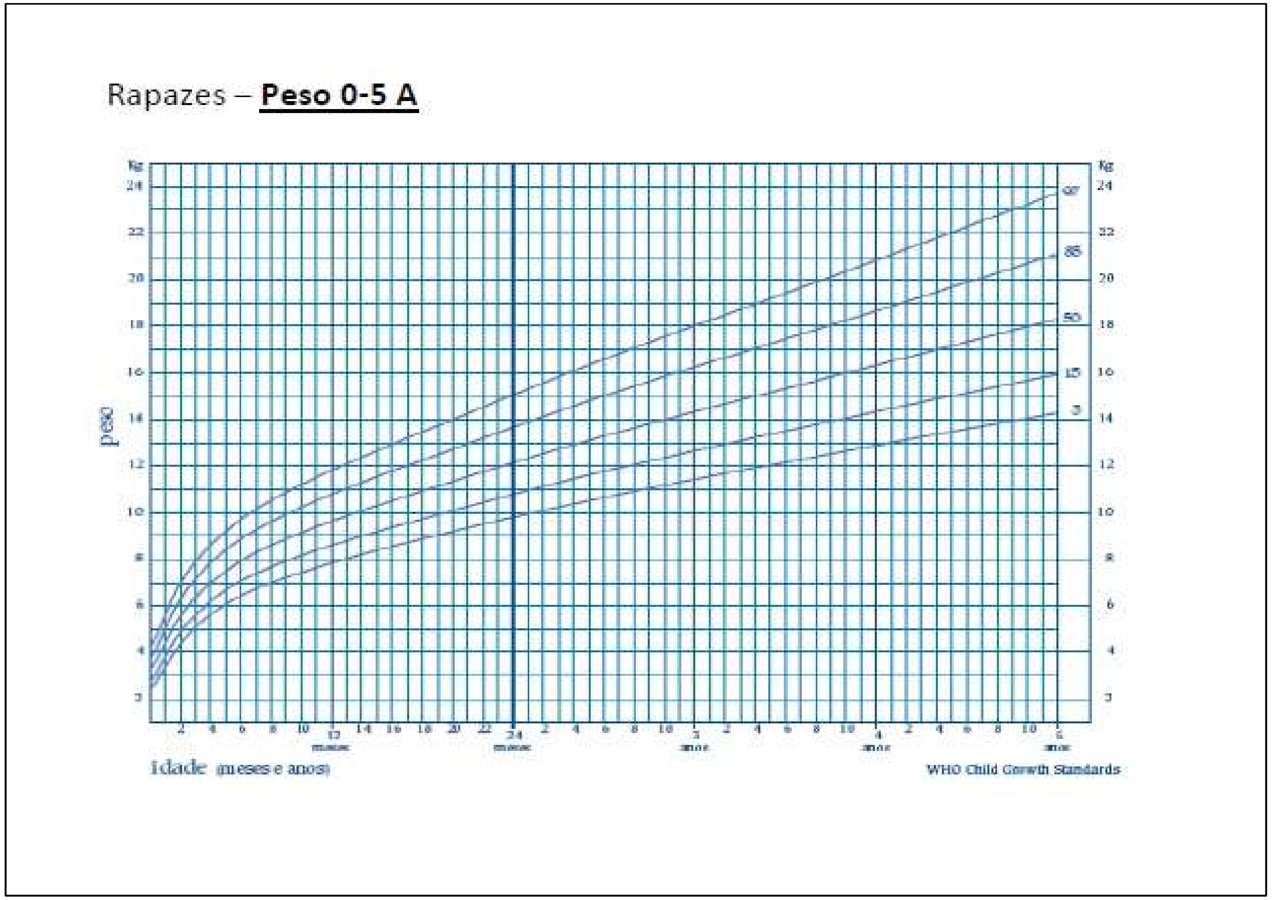
Exercício: Calcule os decis da distribuição $N(0,1)$

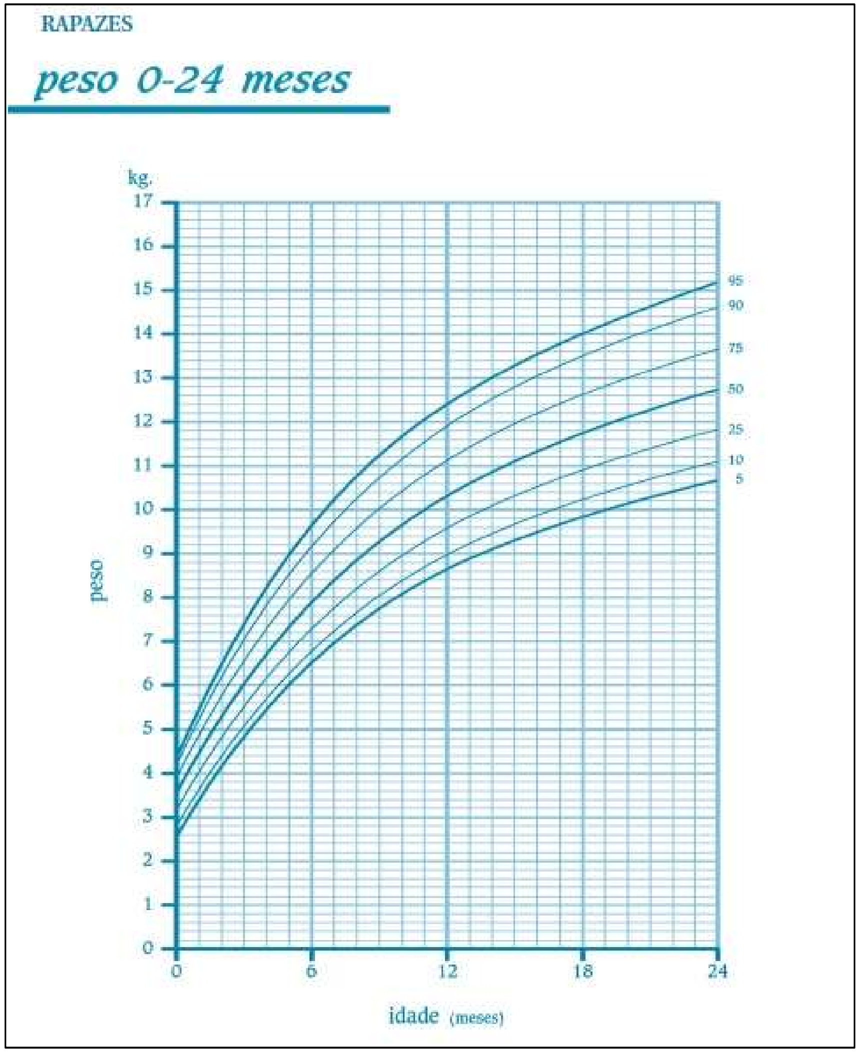
```
qnorm(1:9/10)
[1] -1.2815516 -0.8416212 -0.5244005 -0.2533471  0.0000000  0.2533471
[7] 0.5244005 0.8416212  1.2815516
```

São simétricos porque a distribuição $N(0,1)$ é simétrica (em torno de 0).

se	$p = 1/2$	o quantil chama-se	mediana
	$p = 1/4,\ 2/4,\ 3/4$		quartil
	$p = 1/10,\ \ldots,\ 9/10$		decil
	$p = 1/100,\ \ldots,\ 99/100$		percentil

Exemplos de curvas de percentis de peso de rapazes dos 0 aos 5 anos (OMS) e dos 0 aos 2 anos (DGS, Min. Saúde).





Fonte: DGS, Circular normativa nº 05/DSMIA

Quantil de probabilidade p

No caso geral, dada uma fd $F(.)$ qualquer (discreta, contínua ou outra), o quantil de probabilidade p, representado por χ_p, é definido por

$$\boxed{\chi_p = \inf\{x : F(x) \geq p\}}$$

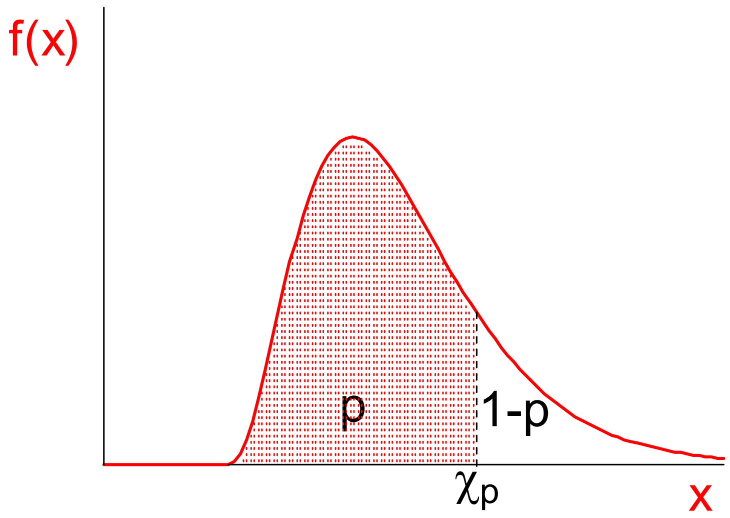
Esta "função quantil" definida para uma fd qualquer F é também conhecida por "inversa generalizada" de F (e denotada por $F^{\leftarrow}$).

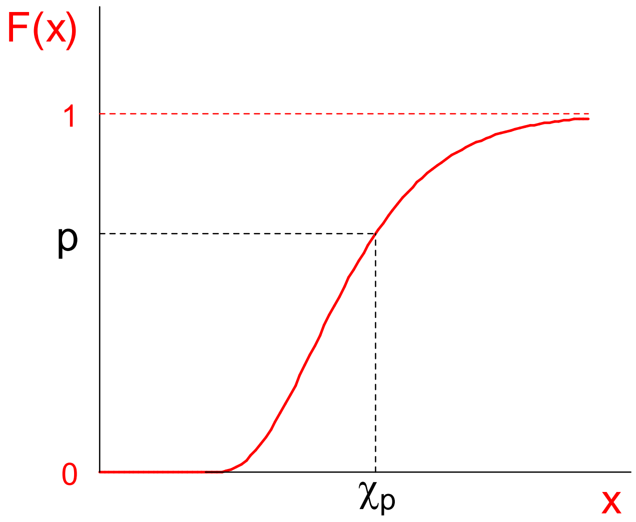
Quantil de probabilidade p

$$\boxed{\chi_p = \inf\{x : F(x) \geq p\}}$$

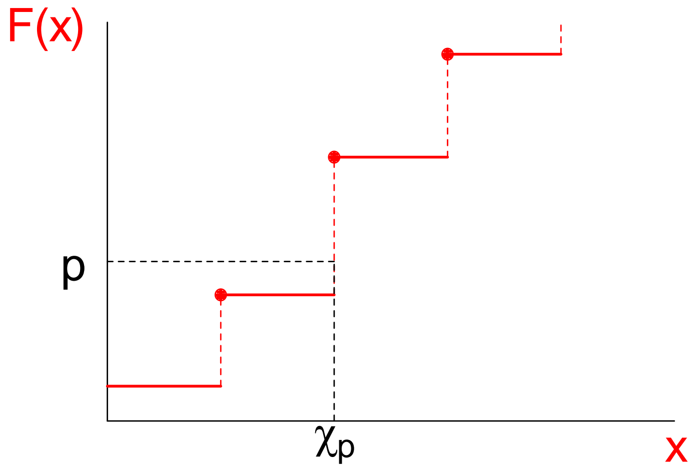
Caso contínuo (com f.d. F crescente):

$$\chi_p = F^{-1}(p)$$





Caso discreto (fd F):

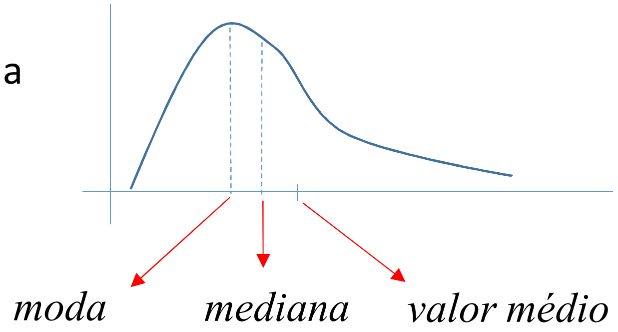


Notas:

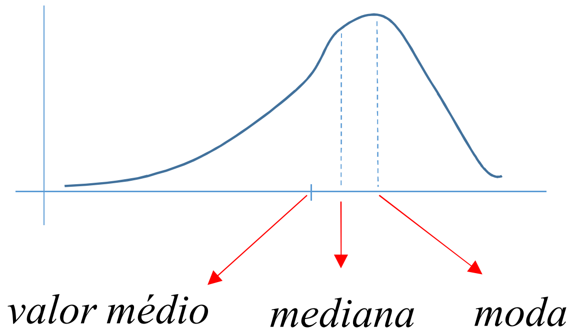
1. Se X (com valor médio μ) for simétrica* em torno do ponto a, e unimodal, então $\mu = \chi_{0.5} = moda = a$

2. A assimetria de uma distribuição unimodal está relacionada com a posição relativa das seguintes 3 medidas de localização: valor médio (μ), mediana ($\chi_{0.5}$) e moda. Em geral uma assimetria positiva ($\beta_1 > 0$) corresponde à relação $moda < \chi_{0.5} < \mu$; e uma assimetria negativa, a $\mu < \chi_{0.5} < moda$

Assimetria positiva



Assimetria negativa



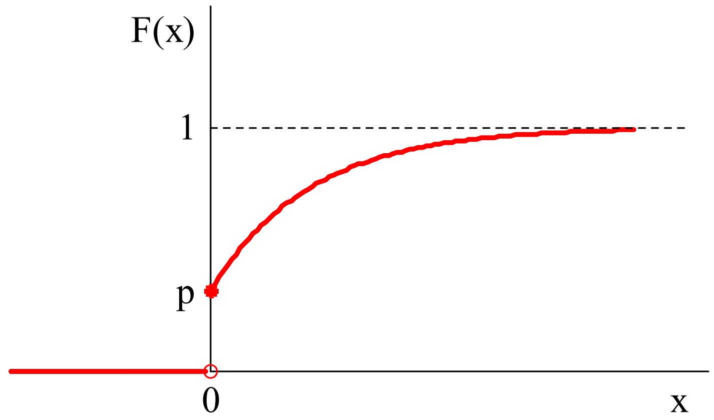
---

* uma v.a. com fd F diz-se simétrica em torno do ponto a se $F(a-x) = 1 - F(a+x)$, $x \in \mathbb{R}$.

- no caso contínuo, equivale a ter simetria da fdp em torno de a, i.e., $f(a\text{-}x) = f(a+x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Nota: Há v.a. X que não são discretas nem contínuas e que têm interesse na prática, por exemplo, para modelar o tempo de espera num semáforo, a duração de uma anestesia, a quantidade de precipitação em dado local em certo mês do ano, etc.. A f.d. de X nestes 3 exemplos é uma <u>mistura</u> de uma v.a. discreta com suporte {0} (pois o "tempo de espera no semáforo", a "duração da anestesia" ou a "precipitação" pode ser 0, com certa probabilidade p) com uma v.a. contínua positiva (pois com probabilidade $1-p$ esse "tempo de espera no semáforo", etc., será positivo). Assim, a f.d. de X tem um salto de amplitude p no ponto 0 e é contínua em $\mathbb{R}-\{0\}$. Um exemplo concreto é a seguinte f.d.:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & ,x<0 \\ 1-(1-p)e^{-\lambda x} & ,x\geq 0 \end{cases}$$



Uma mistura de uma v.a. discreta com uma contínua (com f.d. F_d e F_c , respectivamente) tem f.d. da forma $F(x)=p\,F_d(x)+(1-p)\,F_c(x)$

Distribuições contínuas – formulário

modelo	parâmetros	v. médio μ	variância σ^2	mediana $\chi_{1/2}$	assimetria β_1
$U[a\,,\,b]$	$a < b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{a+b}{2}$	0
$Exp(\lambda)$	$\lambda > 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\frac{\log 2}{\lambda}$	2
$N(\mu, \sigma)$	$\mu \in \mathbb{R}$ $\sigma > 0$	μ	σ^2	μ	0

Recorde-se que

$$\mathrm{var}(X) \geq 0 \qquad E(a+bX) = a + bE(X)$$

$$\mathrm{var}(X) = E(X^2) - \mu^2 \qquad \mathrm{var}(a+bX) = b^2\,\mathrm{var}(X)$$

Exercício: (nº 50)

a) Deduza a fórmula da densidade de $Y = a + b\,X$ à custa da densidade de X.

b) Recorde que o valor médio e o desvio padrão de $Z \frown N(0,1)$ são 0 e 1 (vd. exemplo 23, slide 173). Prove que $E(X) = \mu$ e $\mathrm{var}(X) = \sigma^2$, no caso $X \frown N(\mu,\sigma)$.

c) Dada uma v.a. X com valor médio μ e desvio padrão σ, calcule o valor médio e o desvio padrão da v.a. padrão (ou *standard*), $Y = (X - \mu) / \sigma$

Resolução:

a) Dedução da fórmula da fdp de $Y = a + b\,X$ à custa da fdp de X:

$$F_Y(y) = P(a+bX \le y) = P(bX \le y-a) = \begin{cases} P(X \le \frac{y-a}{b}) = F_X(\frac{y-a}{b}) & ,b>0 \\ P(X \ge \frac{y-a}{b}) = 1 - F_X(\frac{y-a}{b}) & ,b<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{d}{dy} F_X(\frac{y-a}{b}) = f_X(\frac{y-a}{b})\frac{1}{b} & ,b>0 \\ -\frac{d}{dy} F_X(\frac{y-a}{b}) = f_X(\frac{y-a}{b})\frac{1}{-b} & ,b<0 \end{cases}$$

Logo $\boxed{f_Y(y) = \frac{1}{|b|} f_X(\frac{y-a}{b})}$

b) $E(Z) = 0$ e $\mathrm{var}(Z) = 1$. Prova-se que $E(X) = \mu$ e $\mathrm{var}(X) = \sigma^2$, no caso $X \frown N(\mu,\sigma)$:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sigma} f_Z(\frac{x-\mu}{\sigma})$$

portanto $X = \mu + \sigma Z$

Logo $E(X) = E(\mu + \sigma Z) = \mu + \sigma E(Z) = \mu$ e

$$\mathrm{var}(X) = \mathrm{var}\,(\mu + \sigma Z) = \sigma^2\,\mathrm{var}(Z) = \sigma^2$$

Vector aleatório

É uma função $(X_1, \ldots, X_k) : \Omega \to \mathbb{R}^k$, que a cada $\omega \in \Omega$ faz corresponder ($X_1(\omega), \ldots, X_k(\omega)$) tal que …

Fica identificado por uma qualquer das seguintes funções

- fmp conjunta (c. discreto) / fdp conjunta (c. contínuo);
- fd conjunta (c. geral): $F(x_1, \ldots, x_k) = P(X_1 \le x_1, \ldots, X_k \le x_k)$

$X_1, \ldots, X_k$ dizem-se mutuamente independentes se

$\forall B_1 \subset \mathbb{R}, \ldots, B_k \subset \mathbb{R}$ borelianos de $\mathbb{R}$

$$P(X_1 \in B_1, \ldots, X_k \in B_k) = P(X_1 \in B_1) \ldots P(X_k \in B_k)$$

$$\Updownarrow$$

as fmp/fdp conjuntas factorizam-se no produto das fmp/fdp marginais

Par aleatório

É uma função $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$, que a cada $\omega \in \Omega$ faz corresponder um par $(X(\omega), Y(\omega))$ tal que …

O par aleatório diz-se absolutamente contínuo se existir uma função não negativa $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (chamada fdp conjunta) e com integral (em $\mathbb{R}^2$) unitário, tal que

$$\boxed{F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\, dv \right) du}$$

Recorde-se que as v.a. X e Y se dizem independentes se para quaisquer borelianos A e B de $\mathbb{R}$, $\boxed{P(X \in A,\ Y \in B) = P(X \in A)\ P(Y \in B)}$

No caso contínuo, equivale a ter $\boxed{f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)}$

Pares aleatórios contínuos

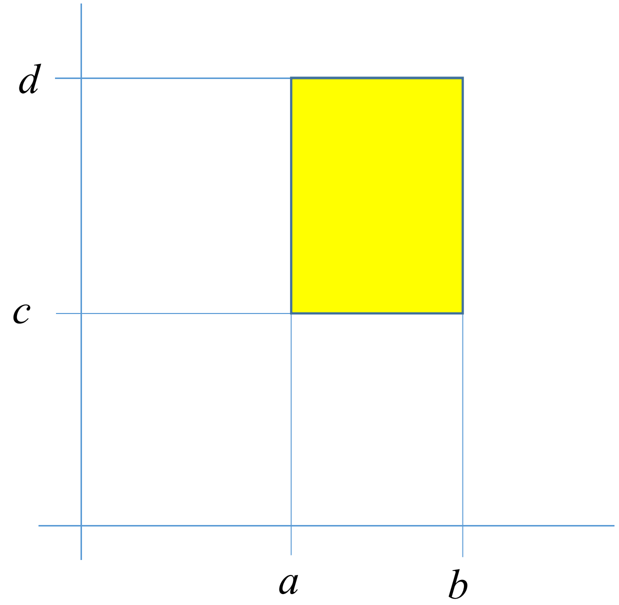
fdp conjunta: $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) \geq 0$ e $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$

fd conjunta: $F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dv\right)du$

$$\boxed{\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y} = f(x,y)}$$

$$\boxed{P((X,Y) \in B) = \iint_B f(x,y)\,dxdy}$$

$$\boxed{\begin{aligned} P(a < X \leq b,\ c < Y \leq d) &= \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dx\,dy = \\ &= F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c) \end{aligned}}$$



Distribuições marginais e condicionais

Analogamente ao caso discreto, as fdp marginais de X e de Y e as fdp condicionais de X e de Y são as seguintes

fdp marginais: (i) de X :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

(ii) de Y :

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

fdp condicionais: (i) de X, dado $\{Y=y\}$:

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

(ii) de Y, dado $\{X=x\}$:

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

A independência entre X e Y equivale a ter $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$

Nota:

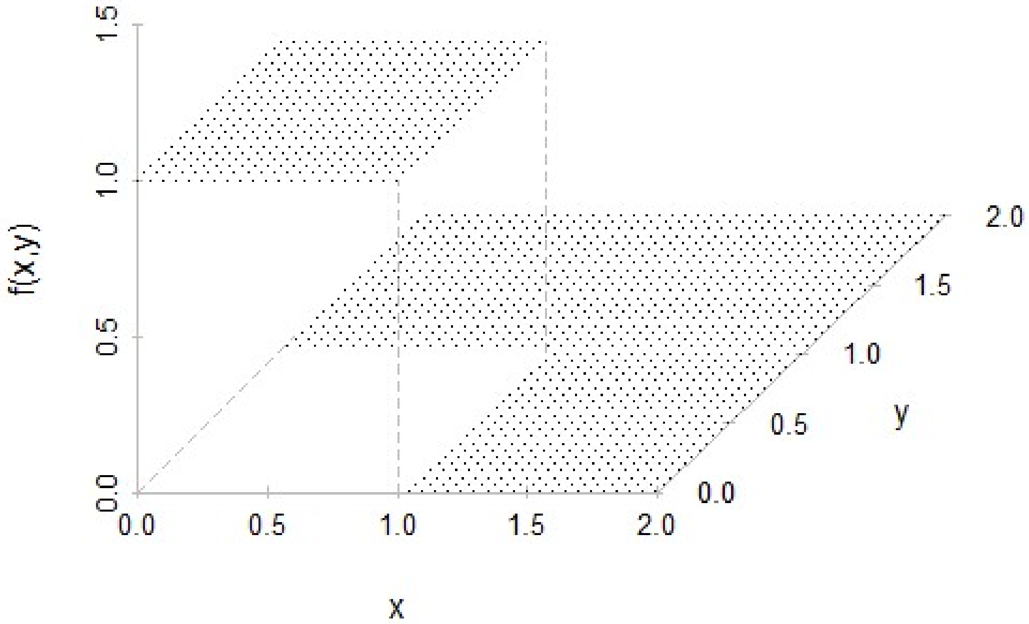
Se for possível factorizar a fdp conjunta $f(x,y)$ na forma $f(x,y) = g(x)\, h(y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ então temos que g e h, a menos de constantes multiplicativas, são as fdp marginais de X e Y. De facto,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)h(y)dy = g(x)\int_{-\infty}^{+\infty} h(y)dy = c_1\, g(x)$$

e analogamente

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)h(y)dx = h(y)\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = c_2\, h(y)$$

Exemplo 24: fdp conjunta de um par aleatório (X,Y) com distribuição uniforme no quadrado [0,1] × [0,1], i.e., com fdp conjunta



$$f(x,y) = I_{[0,1]\times[0,1]}(x,y)$$

ou

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & , \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1 \\ 0 & , \ c.c. \end{cases}$$

X e Y são independentes pois a fdp conjunta é o produto de duas fdp U[0,1], dadas por $g(x) = I_{[0,1]}(x)$. De facto, para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ temos $f(x,y) = g(x)g(y)$

Valores médios* (caso contínuo)

v.a. X : $$E(h(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\, f(x)\, dx$$

par (X,Y) : $$E(h(X,Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y)\, f(x,y)\, dx\, dy$$

Tal como no caso discreto, a covariância entre X e Y é definida por

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E\big((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)(y-\mu_Y)\, f(x,y)\, dx\, dy$$

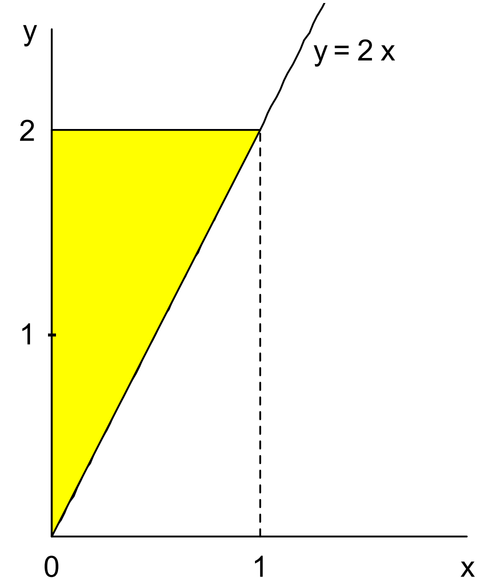
e prova-se que $\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

---

* existem somente se os integrais convergirem absolutamente

Exemplo 25: (nº 54) (X,Y) com fdp conjunta

$$f(x,y)=\begin{cases}3x & , 0\le 2x\le y\le 2\\ 0 & , c.c.\end{cases}$$



X e Y não são independentes pois $P(X>0.5,\ Y<1)=0$ mas $P(X>0.5)$ e $P(Y<1)$ são positivas.

Cálculo das fdp marginais:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_{2x}^{2} 3x dy = 3xy\ \Big|_{2x}^{2}=3x(2-2x)=6x(1-x),\ 0<x<1$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_{0}^{y/2} 3x dx=\tfrac{3}{2}x^2\ \Big|_{0}^{y/2}=\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{4}y^2=\tfrac{3}{8}y^2,\ 0<y<2$$

Exemplo 25 (cont.): Cálculo de valores médios e covariância:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)dx=\int_0^1 6x^2(1-x)dx=\int_0^1 6x^2-6x^3dx=(2x^3-\tfrac{6}{4}x^4)\Big|_0^1=\tfrac{1}{2}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)dy=\int_0^2 \tfrac{3}{8}y^3dy=\frac{3}{8}\frac{1}{4}y^4\Big|_0^2=\frac{3}{8}\frac{16}{4}=\frac{3}{2}$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f(x,y)\,dxdy=\int_0^1(\int_{2x}^{2} 3x^2y\,dy)\,dx=3\int_0^1 \tfrac{1}{2}x^2y^2\Big|_{2x}^{2}dx=$$

$$=3\int_0^1 \tfrac{1}{2}x^2(4-4x^2)\,dx=3\int_0^1 2x^2-2x^4dx=\tfrac{6}{3}x^3-\tfrac{6}{5}x^5\Big|_0^1=2-\tfrac{6}{5}=\tfrac{4}{5}$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{4}{5}-\frac{1}{2}\frac{3}{2}=\frac{1}{20}$$

Valores médios, variâncias, etc. (resumo) *

v.a. X

$$E(h(X)) = \begin{cases} \sum_i h(x_i)\, p_i & \text{no c. discreto} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) f(x) dx & \text{no c. contínuo} \end{cases}$$

par (X,Y)

$$E(h(X,Y)) = \begin{cases} \sum_i \sum_j h(x_i, y_j)\, p_{ij} & \text{no c. discreto} \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y) f(x,y) dxdy & \text{no c. contínuo} \end{cases}$$

Em particular – valores médios, variâncias, covariância e correlação:

$$\mu_X = E(X), \quad \mu_Y = E(Y), \quad \sigma_X^2 = \operatorname{var}(X), \quad \sigma_Y^2 = \operatorname{var}(Y)$$

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E\big((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\big) \ ; \ \rho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X \ \sigma_Y}$$

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

---

* existem somente se as séries/integrais convergirem absolutamente

Propriedades (v.a. quaisquer)

São válidas as propriedades 1.1 a 4.6 (slides 115 a 121). Em particular,

- $E(a+bX) = a + bE(X)$
- $\text{var}(a+bX) = b^2\,\text{var}(X)$
- $E(X_1 + \ldots + X_n) = E(X_1) + \ldots + E(X_n)$
- $\text{var}(X_1 + \ldots + X_n) = \sum_i \text{var}(X_i) + 2\sum_{i<j} \text{cov}(X_i, X_j)$

  Se $X_1,\ldots,X_n$ independentes, então $\text{cov}(X_i, X_j) = 0$ e
  - $\text{var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{var}(X_i)$
  - $E(X_1 \ldots X_n) = E(X_1) \ldots E(X_n)$

- $\text{cov}(aX+bY\,,\, cU+dV) = ac\,\text{cov}(X,U) + ad\,\text{cov}(X,V) + bc\,\text{cov}(Y,U) + bd\,\text{cov}(Y,V)$

  (bilinearidade)

Coeficiente de correlação entre duas v.a. (revisão)

Recorde-se que a correlação entre X e Y se define por

$$\boxed{\rho = \rho(X,Y) = E\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\,\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)} \quad \text{ou seja} \quad \boxed{\rho = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}}$$

(caso exista este valor médio) e satisfaz a

- $-1 \leq \rho \leq 1$
- X e Y independentes $\Rightarrow \rho = 0$ (a recíproca não é verdadeira)
- $\rho = \pm 1 \Leftrightarrow P(Y = a + bX) = 1$ para algum $a \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$
- é invariante para transformações lineares de X e de Y (a menos do sinal)

ρ mede a relação de linearidade entre X e Y

Propriedades (v.a. normais independentes)

Propriedades a demonstrar adiante usando transformadas de Laplace

Se $X_i \frown N(\mu_i, \sigma_i)$ independentes, $i = 1, 2, \ldots, n$, então

$$S_n \frown N\left(\sum \mu_i, \sqrt{\sum \sigma_i^{\,2}}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \frown N\left(\sum a_i \mu_i, \sqrt{\sum a_i^2 \sigma_i^{\,2}}\right)$$

Soma de v.a.

$$\boxed{S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i}$$

Média de v.a.

$$\boxed{\overline{X} = \tfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i}$$

Em particular, se $X_i \frown N(\mu, \sigma)$ independentes, então

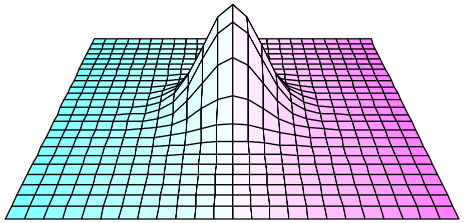
$$S_n \frown N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$$

$$\overline{X} \frown N\left(\mu, \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

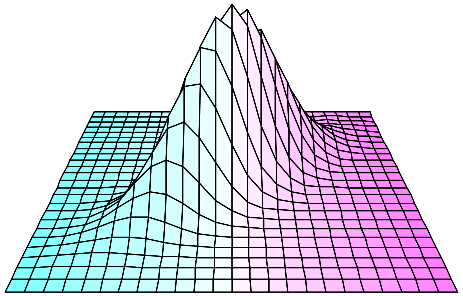
Distribuição normal bivariada (ou gaussiana bivariada ou binormal)

com parâmetros $\mu, \mu', \sigma, \sigma', \rho$

gráficos das fdp's conjuntas
$(\mu = \mu' = 0,\ \sigma = \sigma' = 1)$

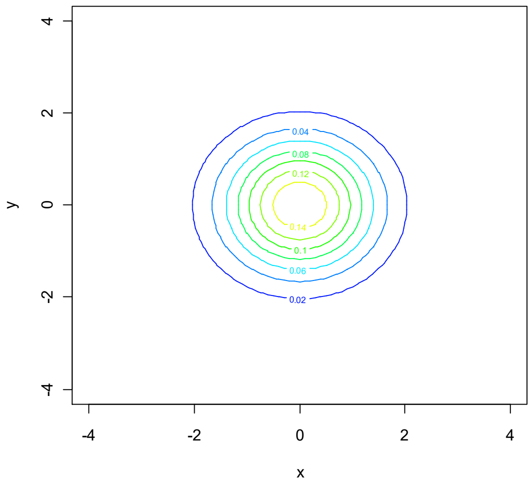


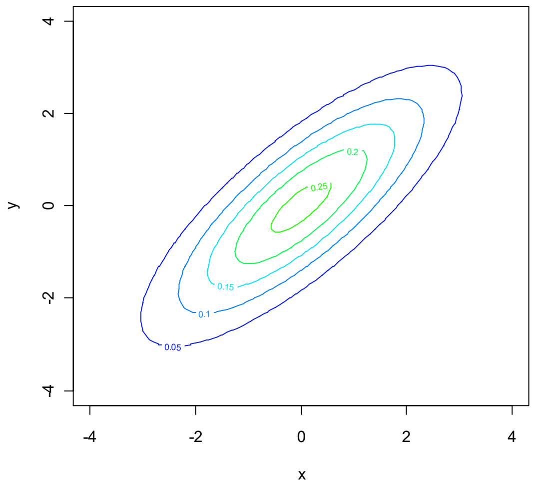
$\rho = 0$



$\rho = 0.8$

e curvas de nível
$(\mu = \mu' = 0,\ \sigma = \sigma' = 1)$





A fdp conjunta de um par (X,Y) binormal com parâmetros μ, μ', σ, σ', ρ (que representam os valores médios e desvios padrões de X e Y e a correlação entre X e Y) é dada por

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma\sigma'\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\tfrac{1}{2(1-\rho^2)}\left(x'^2-2\rho\, x'\, y'+y'^2\right)\right\},\ \text{com}\ \begin{cases} x'=\frac{x-\mu}{\sigma} \\ y'=\frac{y-\mu'}{\sigma'} \end{cases}$$

Neste modelo temos:

(i) $X \frown N(\mu,\sigma)$ e $Y \frown N(\mu',\sigma')$

(ii) $\rho=0 \Leftrightarrow$ X e Y independentes

(iii) Qualquer transformação linear do par é também binormal

Nota: o caso $\rho^2=1$ corresponde a uma distribuição concentrada numa recta, $y=a+b\,x$ (com $b\neq 0$), pelo que o suporte do par é uma recta (subconjunto unidimensional de $\mathbb{R}^2$, dito degenerado a duas dimensões). A distribuição diz-se bivariada singular ou degenerada a duas dimensões.

(i) Cálculo da fdp marginal de X, no caso (X,Y) binormal com parâmetros μ, μ', σ, σ', ρ

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma\sigma'\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\tfrac{1}{2(1-\rho^2)}\underbrace{\left(x'^2-2\rho\,x'\,y'+y'^2\right)}\right\}$$

$$(1-\rho^2+\rho^2)x'^2-2\rho\,x'\,y'+y'^2$$

$$(1-\rho^2)x'^2+\rho^2x'^2-2\rho\,x'\,y'+y'^2$$

$$(1-\rho^2)x'^2+\left(y'-\rho\,x'\right)^2$$

$$(1-\rho^2)x'^2+\left(y-[\mu'+\rho\tfrac{\sigma'}{\sigma}(x-\mu)]\right)^2/\sigma'^2$$

$$\begin{cases} x'=\frac{x-\mu}{\sigma} \\ y'=\frac{y-\mu'}{\sigma'} \end{cases}$$

$$f(x,y)=\underbrace{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\;e^{-x'^2/2}}_{\text{fdp } N(\mu,\sigma)}\;\underbrace{\frac{1}{\sigma'\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}\;e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma'^2}\left(y-[\mu'+\rho\frac{\sigma'}{\sigma}(x-\mu)]\right)^2}}_{\text{fdp } N\left(\mu'+\rho\frac{\sigma'}{\sigma}(x-\mu),\ \sigma'\sqrt{1-\rho^2}\right)}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\;e^{-x'^2/2}\end{aligned}}$$

$$\therefore\ X \frown N(\mu,\sigma)$$

Simulação de par aleatório binormal ($\mu = 1$, $\mu' = 2$, $\sigma = 2$, $\sigma' = 3$, $\rho = 0.8$)

package `mvtnorm`

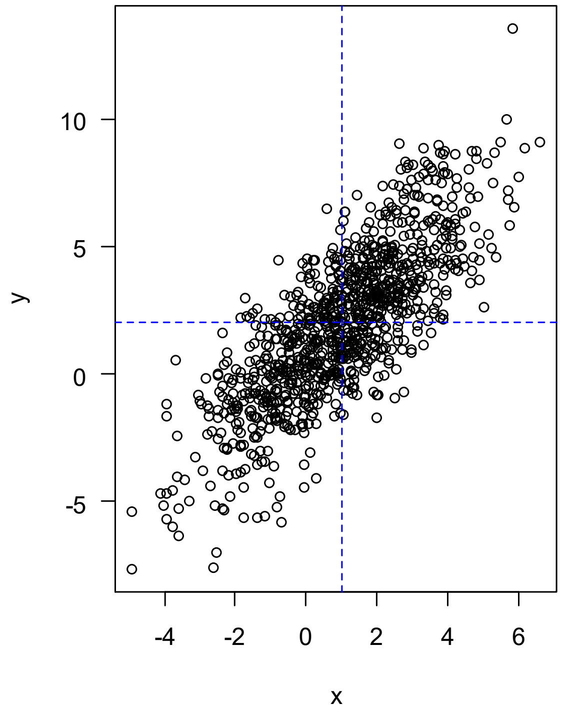
função `rmvnorm(n=..., mean=c(...,...), sigma=...)`

nº simulações — μ μ' — matriz de covariâncias

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \text{cov} \\ \text{cov} & \sigma'^2 \end{pmatrix}$$

Por exemplo,

```
library(mvtnorm)
sig <- matrix(c(4,4.8,4.8,9), ncol=2)
x <- rmvnorm(1000, c(1,2), sig)
colMeans(x)
[1] 0.9991239 1.9673403
var(x)
 3.797903 4.600176
 4.600176 8.823428
cor(x)
 1.0000000 0.7946646
 0.7946646 1.0000000
plot(x, xlab="x",ylab="y",las=1)
abline(h=2,col=4,lty=2)
abline(v=1,col=4,lty=2)
```



$$\begin{pmatrix} 4 & 4.8 \\ 4.8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\rho = \frac{4.8}{2 \times 3} = 0.8$$

Exercícios resolvidos

Exercício: (nº 57) Qual a distribuição de $X - Y$ no caso (X, Y) binormal?

Resolução: Como qualquer transformação linear de um par binormal é também binormal, temos (atendendo a que as marginais de um par binormal são normais) que $X - Y$ é normal.

Falta apenas identificar os parâmetros, ou seja, calcular o valor médio e a variância de $X - Y$.

$$E(X - Y) = E(X) - E(Y) = \mu - \mu'$$

$$\text{var}(X - Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y) - 2\,\text{cov}(X, Y) = \sigma^2 + \sigma'^2 - 2\rho\sigma\sigma'$$

Conclui-se que $X - Y$ tem distribuição $N(\mu - \mu', \tau)$, $\tau^2 = \sigma^2 + \sigma'^2 - 2\rho\sigma\sigma'$

Exercício: (nº 58) (i) Calcule a distribuição de $Y = Z^2$ no caso $Z \frown N(0,1)$.
(ii) Por meio de simulação, tente descobrir qual a distribuição da soma de duas v.a. independentes Y_1 e Y_2 (sendo $Y_i = Z_i^{\,2}$).

Resolução: (i) Representa-se usualmente a fd [fdp] de Z pela letra Φ [ϕ].
Para $y > 0$ temos

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(Z^2 \le y) = P(-\sqrt{y} \le Z \le \sqrt{y}) = \Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y})$$

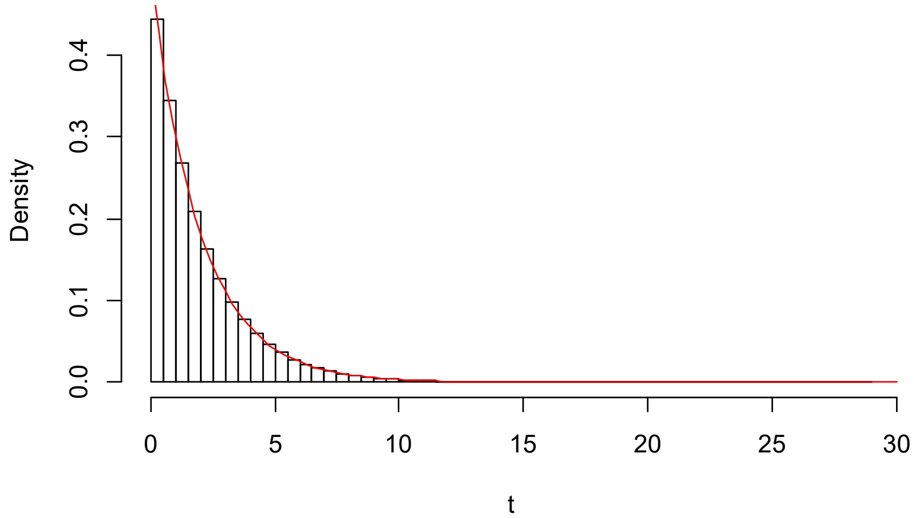
donde

$$f_Y(y) = \tfrac{d}{dy} F_Y(y) = \tfrac{d}{dy}\Phi(\sqrt{y}) - \tfrac{d}{dy}\Phi(-\sqrt{y}) = \phi(\sqrt{y})\tfrac{1}{2\sqrt{y}} + \phi(-\sqrt{y})\tfrac{1}{2\sqrt{y}} =$$

$$= \phi(\sqrt{y})\frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-y/2}, \quad y > 0$$

Exercício: (ii) Por meio de simulação, tente descobrir qual a distribuição da soma de duas v.a. independentes Y_1 e Y_2 , com a mesma distribuição de $Y = Z^2$ (diz-se que Y_1 e Y_2 são independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com Y).

Resolução: (ii)




```
# simular 2 amostras de 10^6 n°s N(0,1):
x <- rnorm(10^6)
y <- rnorm(10^6)
# amostra da soma dos seus quadrados:
t <- x^2 + y^2
# histograma de área unitária:
hist(t,50,freq=F, main="")
# parece uma fdp exponencial com f(0)≈0.5;
# sobrepor gráfico da fdp Exp(1/2):
curve(dexp(x,1/2),0,30,add=T,col=2)
# ou o histograma num único comando, etc.:
hist(rnorm(10^6)^2+rnorm(10^6)^2,50,freq=F,main="",xlab="t",ylab="freq / fdp")
# A estimativa λ=1/2 também decorre de ser mean(t)≈2, que estima E(X)=1/λ
```

Transformação uniformizante

Dada uma v.a. X com fd contínua $F(.)$, então $Y = F(X) \frown U[0,1]$, i.e., $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , y < 0 \\ y & , 0 \leq y < 1 \\ 1 & , y \geq 1 \end{cases}$

Reciprocamente, se $Y \frown U[0,1]$, então $X = F^{-1}(Y)$ tem fd $F(.)$.

Demonstração: Note-se que sendo F contínua, o seu contradomínio é o intervalo de 0 a 1, donde temos $F_Y(y) = 0$, para $y < 0$ e $F_Y(y) = 1$ para $y > 1$. Determina-se então $F_Y(y)$, para $0 < y < 1$:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(F(X) \leq y) = P(X \leq F^{-1}(y)) = F(F^{-1}(y)) = y$$

Logo $Y = F(X) \frown U[0,1]$.

F é não decrescente

Reciprocamente, $P(X \leq x) = P(F^{-1}(Y) \leq x) = P(Y \leq F(x)) = F(x)$

Nota: Este resultado está na origem do método de "inversão da fd" para geração de NPAs com dada distribuição contínua, a partir de NPAs uniformes.

Exercício: **(nº 59)** Aplique a transformação uniformizante ao caso $X \frown Exp(\lambda)$, simulando uma amostra de dados $Exp(2)$, a partir de dados $U[0,1]$.

Resolução: Neste caso $F(x) = (1 - e^{-\lambda x})\, I_{[0,+\infty[}(x)$ é uma função contínua, donde $F(X) \frown U(0,1)$. Temos ainda $F^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda}\log(1-y),\ 0 < y < 1,$ pois

$$y = 1 - e^{-\lambda x} \Leftrightarrow e^{-\lambda x} = 1 - y \Leftrightarrow -\lambda x = \log(1-y) \Leftrightarrow x = -\tfrac{1}{\lambda}\log(1-y)$$

Logo, a partir de uma amostra de dados `y` com distribuição $U(0,1)$ obtemos uma amostra $Exp(\lambda)$ fazendo `x <- -log(1-y)/`λ

```
y <- runif(10000)
x <- -log(1-y)/2
hist(x,50,freq=F,main="",las=1)
curve(dexp(x,2),0,col=2,add=T)
```