

Cálculo do Tipo mais geral

① $\alpha = \text{swap} \cdot (\text{id} \times \text{swap})$

$$\frac{E \times D \xleftarrow{\text{swap}} D \times E, \quad A \times (E \times B) \xleftarrow{\text{id} \times \text{swap}} A \times (B \times E)}{\{ D \times E = A \times (E \times B) \} \quad E \times D \xleftarrow{\alpha} A \times (B \times E) \quad \{ \} \quad A \xleftarrow{\text{id}} A, \quad E \times B \xleftarrow{\text{swap}} B \times E}$$

$$\{ D \times E = A \times (E \times B) \} \quad E \times D \xleftarrow{\alpha} A \times (B \times E) \quad \{ \} \quad A \times (E \times B) \xleftarrow{\text{id} \times \text{swap}} A \times (B \times E)$$

↳ Para empacarmos 2 funções, o codomínio de uma tem de ser igual ao domínio da outra.

↳ Não existe nenhuma condição que seja preciso respeitar para fazer o produto de 2 funções

$$D \times E = A \times (E \times B) \Rightarrow \begin{cases} D = A \\ E = E \times B \end{cases}$$

Logo, o tipo mais geral de α é:

$$\boxed{(E \times B) \times A \xleftarrow{\alpha} A \times (B \times E)}$$

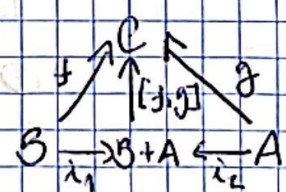
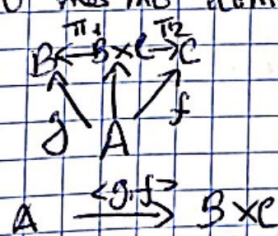
② $\alpha = \text{dup} \cdot \text{join} = \langle \text{id}, \text{id} \rangle \cdot [\text{id}, \text{id}]$

$$\frac{B \xleftarrow{\text{id}} B, \quad A \xleftarrow{\text{id}} A}{\{ A = B \} \quad B \times A \xleftarrow{\langle \text{id}, \text{id} \rangle} A}$$

$$\frac{D \xleftarrow{\text{id}} D, \quad e \xleftarrow{\text{id}} e}{\{ D = e \} \quad D \xleftarrow{[\text{id}, \text{id}]} D + e}$$

↳ Para se poder juntar 2 funções num split, ambas têm de ter o mesmo domínio

↳ Para se poder juntar 2 funções num either, ambas as funções têm de ter o mesmo codomínio



$$\frac{A \times A \xleftarrow{\langle \text{id}, \text{id} \rangle} A, \quad e \xleftarrow{[\text{id}, \text{id}]} e + e}{A \times A \xleftarrow{\alpha} e + e \quad \{ A = e \}}$$

Logo, o tipo mais geral de α é:

$$\boxed{A \times A \xleftarrow{\alpha} A + A}$$

③

$iso = \langle !+, join \rangle$

$1 \xrightarrow{!} B, 1 \xrightarrow{!} A$

$\{ \} \quad 1+1 \xrightarrow{!+} B+A$

$1+1 \xrightarrow{!+} B+A, e \xrightarrow{join} e+e$
 $(1+1) \times e \xrightarrow{iso} e+e \quad \{ B+A = e+e \}$

Logo, o tipo mais geral de iso é:

$(1+1) \times A \xrightarrow{iso} A+A$

7.

$$\begin{aligned} \text{comb } f &= [id, f] \cdot (i_1 + i_2) \cdot f \\ &= [i_1, f \cdot i_2] \cdot f \end{aligned} \quad \{(22), (1)\}$$

Ou seja, comb é uma função que recebe uma função f e que devolve uma outra função $[i_1, f \cdot i_2] \cdot f$

Para obter o tipo mais geral de comb , vamos tentar obter o tipo mais geral de $[i_1, f \cdot i_2] \cdot f$

$$B \leftarrow^f A, \quad D + E \leftarrow^{i_2} E$$

$$B \leftarrow^{f \cdot i_2} C \quad \{A = D + E\}$$

$$E + F \leftarrow^{i_1} E, \quad B \leftarrow^{f \cdot i_2} C$$

$$E + F \leftarrow^{[i_1, f \cdot i_2]} E + E \quad \{B = E + F\}$$

$$E + F \leftarrow^{[i_1, f \cdot i_2]} E + E, \quad B \leftarrow^f A$$

$$E + F \leftarrow^{\text{comb } f} A \quad \{B = E + E\}$$

Assim, temos um sistema de 3 equações:

$$\begin{cases} A = D + E \\ B = E + F \\ B = E + E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = D + E \\ F = E \\ B = E + E \end{cases}$$

Assim, f que era do tipo $B \leftarrow A$, passa para:

$$E + E \leftarrow^f D + E$$

$\text{comb } f$, que era do tipo $E + F \leftarrow A$, passa para:

$$E + E \leftarrow^{\text{comb } f} D + E$$

Assim:

$$(E + E) \xrightarrow{\text{comb}} (E + E)^{D+E}$$

Tipo que contém todas as funções em assíntese:

$$E + E \leftarrow^f D + E$$