Capítulo 5 - Integral de Riemann

Neste capítulo vamos apresentar a noção de integral segundo Riemann , estudar algumas das suas propriedades e referir algumas das suas aplicações .

Começamos com uma motivação intuitiva clássica, baseada na noção de área de uma região plana e no chamado “método da exaustão”.

Introdução e motivação

Classicamente, o conceito de integral aparece associado à noção intuitiva de área de uma região plana. Vamos seguir a via clássica para motivar a nossa exposição.

Considere-se uma função limitada $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e sejam

$$m = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \qquad \text{e} \qquad M = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

Introdução e motivação

Suponhamos que $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, e consideremos a região plana

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x \leq b \ \wedge \ 0 \leq y \leq f(x)\right\}$$

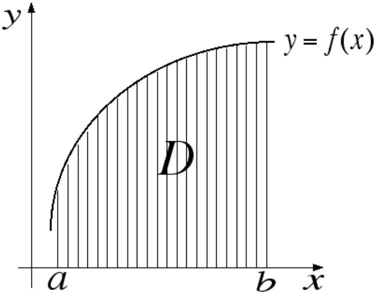


Figura 1: Região $\mathcal{D}$ limitada pelo gráfico de f, pelo eixo OX e pelas retas $x = a$ e $x = b$.

Introdução e motivação

Admitamos que é possível atribuir uma área ao conjunto $\mathcal{D}$, que representamos por

$$\text{área}(\mathcal{D}),$$

e que pretendemos determinar o valor desta área.

Em geral, a forma geométrica de $\mathcal{D}$ é pouco "regular" , pelo que as fórmulas da geometria elementar não são aplicáveis.

Podemos pensar então em recorrer ao chamado "método da exaustão", aproximando sucessivamente a área de $\mathcal{D}$ pela área de figuras simples, quer inscritas em $\mathcal{D}$, quer circunscritas a $\mathcal{D}$, e considerar depois as melhores aproximações.

Consideraremos apenas regiões retangulares. Com as regiões inscritas em $\mathcal{D}$ formaremos aproximações por defeito , e com as regiões circunscritas a $\mathcal{D}$ formaremos aproximações por excesso .

Primeiras aproximações para a área de $\mathcal{D}$

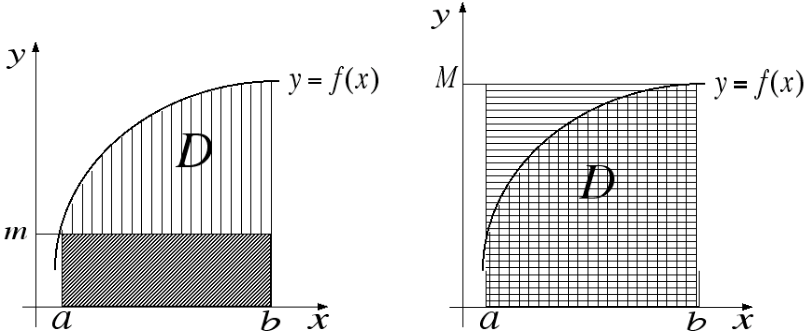


Figura 2: Aproximações para a área de $\mathcal{D}$; por defeito (esquerda) e por excesso (direita).

Introdução e motivação

É fácil reconhecer que

$$m(b-a) \leq \text{área}(\mathcal{D}) \leq M(b-a)$$

já que $m(b-a)$ dá a área da região retangular de base $b-a$ e altura m, inscrita em $\mathcal{D}$, enquanto que $M(b-a)$ dá a área da região retangular de base $b-a$ e altura M, circunscrita a $\mathcal{D}$.

Então poderíamos encarar os números $m(b-a)$ e $M(b-a)$ como aproximações do valor da área de $\mathcal{D}$, por defeito e por excesso, respetivamente.

É claro que, em geral, o erro cometido nestas aproximações é bastante grande, sendo também possível melhorá-las significativamente.

Introdução e motivação

Para melhorar estas aproximações, podemos proceder da seguinte forma:

- decompomos o intervalo $[a, b]$ num número finito de subintervalos determinados pelos pontos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$, tais que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

  a que chamamos *partição* $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ nos subintervalos

$$[x_0, x_1]\,, \;\; [x_1, x_2]\,, \;\; \ldots\,, \;\; [x_{n-2}, x_{n-1}]\,, \;\; [x_{n-1}, x_n];$$

- em cada subintervalo genérico, $J_i = [x_{i-1}, x_i]$, repetimos o procedimento adotado anteriormente, isto é definimos

$$m_i = \inf_{x \in J_i} f(x)\,, \qquad M_i = \sup_{x \in J_i} f(x)$$

  e consideramos as regiões retangulares de base $x_i - x_{i-1}$ e alturas m_i e M_i, respetivamente;

- com as regiões de alturas $m_i, i = 1, \ldots, n$, construimos uma região poligonal inscrita em $\mathcal{D}$, cuja área é dada por

$$s(\mathcal{P}) = m_1(x_1 - a) + m_2(x_2 - x_1) + \cdots + m_n(b - x_{n-1}),$$

e com as regiões de alturas $M_i, i = 1, \ldots, n$, construimos uma região poligonal circunscrita a $\mathcal{D}$, cuja área é dada por

$$S(\mathcal{P}) = M_1(x_1 - a) + M_2(x_2 - x_1) + \cdots + M_n(b - x_{n-1});$$

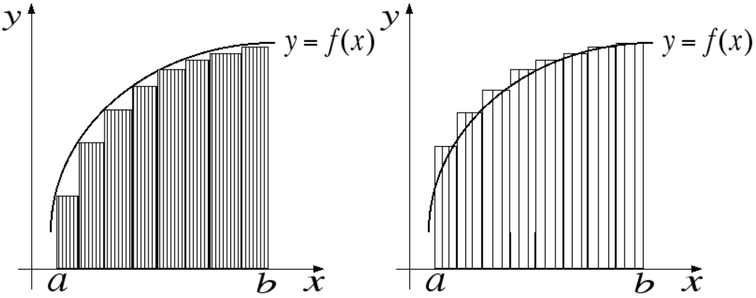


Figura 3: Aproximações por defeito (esquerda) e por excesso (direita) da área de $\mathcal{D}$.

Introdução e motivação

- aproximamos a área de $\mathcal{D}$, por defeito com a quantidade $s(\mathcal{P})$ e por excesso com a quantidade $S(\mathcal{P})$, tendo-se para qualquer partição $\mathcal{P}$ de $[a, b]$,

$$m(b-a) \leq s(\mathcal{P}) \leq S(\mathcal{P}) \leq M(b-a);$$

- melhoramos as aproximações $s(\mathcal{P})$ e $S(\mathcal{P})$, aumentando o número de subintervalos em $[a, b]$, ou seja, introduzindo uma partição mais fina do que $\mathcal{P}$, digamos $\mathcal{Q}$; se chamarmos $s(\mathcal{Q})$ e $S(\mathcal{Q})$ às aproximações correspondentes, por defeito e por excesso, respetivamente, não é difícil reconhecer que

$$m(b-a) \leq s(\mathcal{P}) \leq s(\mathcal{Q}) \leq S(\mathcal{Q}) \leq S(\mathcal{P}) \leq M(b-a),$$

  uma vez que, aumentando o número de pontos em $[a, b]$, as aproximações por defeito e por excesso não podem piorar e, portanto, a primeira não pode diminuir nem a última pode aumentar;

Introdução e motivação

- no caso em que, de facto, é possível atribuir uma área à região $\mathcal{D}$, as quantidades $s(\mathcal{P})$ e $S(\mathcal{P})$ tenderão ambas a "confundir-se" uma com a outra, quando se consideram partições cada vez mais finas.

  Mostra-se que, naquele caso, existe um único número real α tal que

  $$s(\mathcal{P}) \leq \alpha \leq S(\mathcal{P}),$$

  para toda a partição $\mathcal{P}$.

Definição de integral segundo Riemann

Passemos agora à exposição rigorosa deste assunto.

A área da região $\mathcal{D}$ vai dar lugar ao integral de f em $[a, b]$. Também se diz integral definido de f em $[a, b]$.

Apresentaremos a definição de integral segundo Riemann, recorrendo às chamadas somas de Riemann .

Definição de integral segundo Riemann

Se f for uma função não negativa, para cada partição $\mathcal{P}$ de $[a, b]$, vamos aproximar a área da região $\mathcal{D}$ por uma soma do tipo

$$\Sigma(f;\mathcal{P}) = f(c_1)(x_1 - a) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(c_n)(b - x_{n-1}),$$

onde cada c_i é um ponto escolhido arbitrariamente no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ determinado por $\mathcal{P}$.

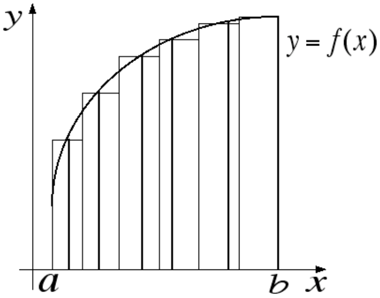


Figura 4: Representação geométrica de uma soma de Riemann.

Definição de integral segundo Riemann

Definição

Dada uma partição $\mathcal{P}$ de $[a, b]$, chamamos amplitude de $\mathcal{P}$ ao maior dos comprimentos dos subintervalos determinados por $\mathcal{P}$ em $[a, b]$. Representámo-la por $|\mathcal{P}|$.

A qualquer soma do tipo $\Sigma(f; \mathcal{P})$ chamamos soma de Riemann de f em $[a, b]$ para a partição $\mathcal{P}$.

Definição de integral segundo Riemann

Segundo Riemann, dizemos que uma função $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitada é integrável no intervalo $[a, b]$ quando

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \Sigma(f; \mathcal{P}) = \mathcal{I},$$

no sentido de que

$$\forall \delta > 0,\ \exists \varepsilon > 0 :\ |\mathcal{P}| < \varepsilon \Longrightarrow |\Sigma(f; \mathcal{P}) - \mathcal{I}| < \delta,$$

independentemente da escolha dos pontos $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Ao valor $\mathcal{I}$ chama-se integral de f em $[a, b]$ e representa-se por

$$\int_a^b f(x)\, dx = \mathcal{I},$$

onde f é a função integranda , a é o limite inferior do integral , b é o limite superior do integral , $[a, b]$ é o intervalo de integração e x é a variável de integração . O símbolo dx representa uma partícula formal que fixa a variável de integração.

Observações

- *[Significado geométrico atribuído ao integral]*

  No caso de uma função limitada e não negativa, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *com* $f(x) \geq 0, \ \forall x \in \ [a, b],$ *ser integrável, a existência de integral traduz a possibilidade de medir a região* $\mathcal{D}$ *definida. Por essa razão, pomos, por definição,*

$$\acute{a}rea(\mathcal{D}) = \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

- *Só se define integral de uma função limitada, mas nem toda a função limitada é integrável. Mais adiante, identificaremos algumas classes de funções limitadas que são integráveis.*

Propriedades do integral

Nesta secção vamos apresentar algumas propriedades do integral que se revelarão extremamente úteis.

Propriedade 1

[Aditividade do integral a respeito do intervalo de integração]

Sejam f limitada em $[a, b]$ e $c \in]a, b[$. Então f é integrável em $[a, b]$ se e só se f é integrável separadamente em $[a, c]$ e $[c, b]$, tendo-se

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

No sentido de estender esta propriedade a todos os reais a, b, c, adotamos as seguintes convenções clássicas

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \quad \text{para todo } a \in \mathbb{R},$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx, \quad \text{para todos } a, b \in \mathbb{R}.$$

Propriedade 2
[Linearidade do integral]

Sejam f e g funções integráveis em $[a, b]$. Então:

a) a soma $f + g$ é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx\,;$$

b) o produto fg é integrável em $[a, b]$; em particular, se α é uma constante real arbitrária, o produto αf é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b \alpha f(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx.$$

Propriedades do integral

Propriedade 3
[Monotonia do integral]

Se f e g são integráveis em $[a, b]$ e $g(x) \leq f(x), \ \forall x \in [a, b],$ então

$$\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx;$$

em particular, se $f(x) \geq 0, \ \forall x \in [a, b],$ então $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$

Propriedades do integral

Propriedade 4

Se f é integrável em $[a, b]$, então a função $|f|$ é integrável em $[a, b]$ e

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx .$$

Propriedade 5

a) Se f é limitada em $[a, b]$, anulando-se em todos os pontos de $[a, b]$ excepto, eventualmente, num número finito de pontos de $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\, dx = 0;$$

b) se f é integrável em $[a, b]$ e g é uma função que difere de f apenas num número finito de pontos $[a, b]$, então

$$\int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Condições suficientes de integrabilidade

Nesta secção enunciaremos alguns resultados que estabelecem condições suficientes para a integrabilidade de uma função num intervalo, a partir dos quais identificaremos três classes de funções integráveis .

Teorema

[Integrabilidade das funções contínuas]

Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é contínua , então* f *é integrável em* $[a, b]$.

Observação

Este teorema estabelece que a continuidade de uma função garante a sua integrabilidade. No entanto, é conveniente reter que existem funções descontínuas que são integráveis.

Condições suficientes de integrabilidade

Teorema

[Integrabilidade das funções monótonas]

Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é monótona , então* f *é integrável em* $[a, b]$.

Observação

Deste teorema, podemos concluir que, ainda que uma função não seja contínua, se for monótona, então é também integrável. Mais uma vez, chama-se a atenção para o facto de existirem funções que não são monótonas (nem contínuas) e, mesmo assim, são integráveis.

Teorema

[Integrabilidade das funções com um número finito de descontinuidades]

Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é limitada possuindo um número finito de descontinuidades , então* f *é integrável em* $[a, b]$.

Condições suficientes de integrabilidade

Exemplo

A função

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \in [0,1] \\ 2 & se\ x \in [2,4] \end{cases}$$

é integrável por ser contínua.

Exemplo

A função

$$g(x) = \begin{cases} 2x & se\ x \in [0,1] \\ -x & se\ x \in]1,3] \\ x^2 & se\ x \in]3,5] \end{cases}$$

é integrável por possuir um número finito de descontinuidades.

Teorema fundamental do cálculo

Um dos resultados mais notáveis do Cálculo está patente no teorema que agora iremos apresentar. Nele estabelece-se uma ligação crucial entre os conceitos de derivada e de integral, a partir da qual é possível obter um processo extremamente eficaz para o cálculo do integral, dispensando o recurso à definição apresentada anteriormente.

Consideremos uma função limitada $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ que é integrável. Para cada $x \in [a, b]$, f é integrável em $[a, x]$, pelo que podemos definir uma nova função, $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, a partir da função f, pondo

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt, \quad x \in [a, b].$$

Vejamos que a passagem ao integral conduz a uma função que possui, em geral, melhores propriedades do que a função inicial.

Teorema fundamental do cálculo

De facto, valem as seguintes propriedades.

Propriedade

A função F é contínua (ainda que f não o seja).

Agora vamos ver que, se f for contínua (além de limitada), então F será derivável (além de contínua).

Teorema fundamental do cálculo

Teorema

[Teorema Fundamental do Cálculo]

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua. Então a função* $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é derivável em* $[a, b]$*, tendo-se*

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Corolário

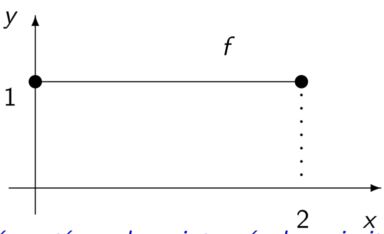
Toda a função contínua $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *possui primitiva em* $[a, b]$.

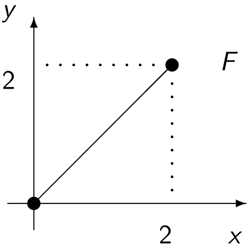
Teorema fundamental do cálculo

Observação

Quando f não é contínua, mantendo-se integrável, define-se na mesma a função F como anteriormente. Contudo, F pode não ser derivável, ou então, até ser derivável mas a sua derivada não coincidir com f nos pontos de descontinuidade de f.

Exemplo

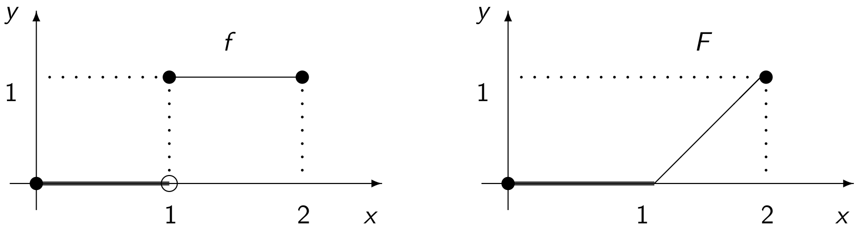




f é contínua, logo integrável e primitivável.
Define-se a função F, que é derivável. Além disso,

$$f(x) = 1 \implies F(x) = \int_0^x 1\,dt = x,\ \forall x \in [0,2].$$

Exemplo



f é limitada mas possui uma descontinuidade de salto no ponto 1.

Logo f é integrável mas não é primitivável. Define-se novamente a função F, tendo-se

$$x \in [0,1[\implies f(x) = 0 \implies F(x) = \int_0^x 0\,dt = 0,$$

$$x \in [1,2] \implies f(x) = 1 \implies F(x) = \int_1^x 1\,dt = x - 1,$$

atestando a continuidade de F. No entanto F não é derivável em 1.

Teorema fundamental do cálculo

Do ponto de vista do cálculo do integral de uma função, a consequência mais relevante que se extrai do Teorema Fundamental do Cálculo é a que se apresenta a seguir.

Teorema
[Fórmula de Barrow]

Sejam $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *contínua e* F *uma primitiva de* f *em* $[a, b]$. *Então*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Teorema fundamental do cálculo

Notação

Usamos a notação

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b.$$

O Teorema fornece um processo extremamente útil para o cálculo do integral de uma função num intervalo, onde ela possua primitiva. Basta fazer a diferença entre os valores da primitiva nos extremos de integração.

Exemplos

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 2\,.$

2. *Se*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se \;\; x \in [0,1] \\ 3 & se \;\; x \in \,]1,2] \end{cases}$$

então

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x)\, dx &= \int_0^1 1\, dx + \int_1^2 3\, dx \\ &= \Big[x\Big]_0^1 + \Big[3x\Big]_1^2 = (1-0) + (6-3) = 4\,. \end{aligned}$$

3.

$$\int_{-5}^{3} |x|\, dx = \int_{-5}^{0} (-x)\, dx + \int_0^3 x\, dx \qquad \begin{aligned} &= -\tfrac{1}{2}\Big[x^2\Big]_{-5}^{0} + \tfrac{1}{2}\Big[x^2\Big]_0^3 \\ &= \tfrac{25}{2} + \tfrac{9}{2} = 17 \end{aligned}$$

Exemplos

4. $$\int_0^5 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\Big[\ln(x^2+1)\Big]_0^5 = \frac{1}{2}\left(\ln 26 - \ln 1\right) \;=\; \ln\sqrt{26}\,.$$

5. *Se*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ 2 & \text{se } 1 < x \le 3 \\ x-3 & \text{se } 3 < x \le 6 \end{cases}$$

então, vem

$$\begin{aligned} \int_0^6 f(x)\,dx &= \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^3 2\,dx + \int_3^6 (x-3)\,dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \Big[2x\Big]_1^3 + \left[\frac{x^2}{2} - 3x\right]_3^6 \\ &= \frac{1}{3} + (6-2) + \left(0 + \frac{9}{2}\right) \;=\; \frac{53}{6}\,. \end{aligned}$$

Teoremas clássicos do cálculo do integral

Do Teorema Fundamental do Cálculo saem outras consequências que passamos a apresentar.

Consequência

[Fórmula do valor médio para integrais]
Se $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é contínua então existe* $c \in \,]a,b[$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c)\,.$$

Exemplo

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$. *Vejamos que, se* f *é contínua, então* f *possui pelo menos um zero em* $]a, b[$.

Pela Fórmula do valor médio,

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a),$$

para algum $c \in]a, b[$. *Como este integral é nulo, vem*

$$f(c)(b-a) = 0,$$

para algum $c \in]a, b[$, *ou seja,*

$$f(c) = 0,$$

para algum $c \in]a, b[$.

Teoremas clássicos do cálculo do integral

Consequência

[Integração por partes]
Sejam $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ com f contínua, F uma primitiva de f e g de classe $C^1\big([a, b]\big)$. Então

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \Big[F(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx\,.$$

Exemplos

1. $\displaystyle\int_0^2 xe^x\,dx = \Big[e^x x\Big]_0^2 - \int_0^2 e^x\,dx = 2e^2 - \Big[e^x\Big]_0^2 = e^2 + 1\,.$

2. $\displaystyle\int_1^e \ln\sqrt{x}\,dx = \Big[x\,\ln\sqrt{x}\Big]_1^e - \int_1^e x\,\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{e}{2} - \int_1^e \frac{1}{2}\,dx = \frac{e}{2} - \frac{1}{2}\Big[x\Big]_1^e = \frac{1}{2}\,.$

Consequência

[Integração por substituição]
Sejam $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *contínua e* $g : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ *de classe* $C^1\big([c,d]\big)$ *tal que* $g(c) = a$ *e* $g(d) = b$. *Então*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f\big(g(t)\big)g'(t)\,dt\,.$$

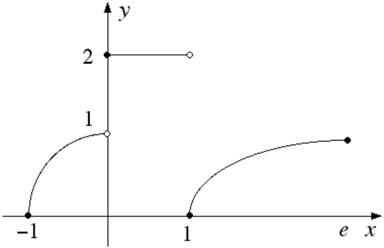
Exemplos

1. *Calculemos agora* $\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx$, *efetuando a mudança de variável* $x-1=t^2$.
   Pondo $g(t)=t^2+1$, *vem* $g'(t)=2t$.
   Atendendo a que $g(0)=1$ *e* $g(1)=2$, *resulta*

$$\begin{aligned}\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx &= \int_0^1 (1+t^2)\sqrt{t^2}\,2t\,dt = 2\int_0^1 \left(t^2+t^4\right)\,dt\\ &= \frac{2}{3}\left[t^3\right]_0^1+\frac{2}{5}\left[t^5\right]_0^1 = \frac{2}{3}+\frac{2}{5} = \frac{16}{15}\,.\end{aligned}$$

2. Calculemos $\displaystyle\int_{-1}^{e} f(x)\,dx$ para

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{se } \; -1 \le x < 0, \\ 2 & \text{se } \; 0 \le x < 1, \\ \ln x & \text{se } \; 1 \le x \le e\,. \end{cases}$$



Vem

$$\int_{-1}^{e} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \sqrt{1-x^2}\,dx + \int_{0}^{1} 2\,dx + \int_{1}^{e} \ln x\,dx = \frac{\pi}{4} + 2 + 1$$

onde o primeiro integral se calcula por substituição fazendo, por exemplo, $x = \operatorname{sen} t$, o segundo é imediato e o terceiro calcula-se por partes.

Exemplos

Sejam $a \in \mathbb{R}^+$ *e* $f\colon [-a,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua. Vejamos que:*

a) se f é par , então $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx;$

Sendo f par, tem-se $f(x) = f(-x),\ \forall x \in [-a,a],$ *e então*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-a}^{0} f(-x)\,dx}_{J} + \int_0^a f(x)\,dx.$$

Fazendo a mudança de variável $x = -t$ *no integral J, vem*

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_a^0 f(t)(-1)\,dt + \int_0^a f(x)\,dx \\ &= \int_0^a f(t)\,dt + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Teoremas clássicos do cálculo do integral

Exemplos

b) *se f é ímpar , então* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

Sendo f ímpar, tem-se $f(x) = -f(-x),\ \forall x \in [-a, a],$ *e então*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = -\underbrace{\int_{-a}^{0} f(-x)\,dx}_{J} + \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Fazendo a mudança de variável $x = -t$ *no integral J, vem*

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= -\int_{a}^{0} f(t)(-1)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= -\int_{0}^{a} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0.\end{aligned}$$

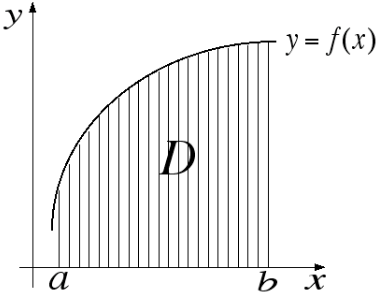
Aplicações do integral

Algumas aplicações geométricas do integral estão relacionadas com a área de um domínio plano e o comprimento de uma curva .

A. Área de um domínio plano

Vamos retomar o problema que nos serviu de motivação à definição de integral. Em particular, no caso em que $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a, b]$, definimos a área do domínio

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ a \leq x \leq b \ \wedge\ 0 \leq y \leq f(x)\right\}$$



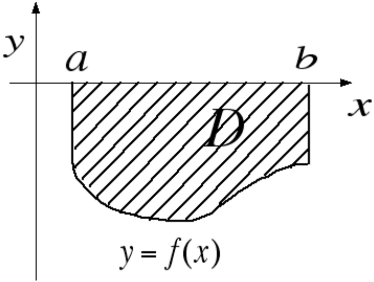
pela fórmula

$$\text{área}(\mathcal{D}) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Consequências

1. *Por um lado, se* $f(x) \leq 0, \forall x \in [a, b]$ *então, por simetria em relação a* OX, *a área da região plana*

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x \leq b \ \wedge \ f(x) \leq y \leq 0\right\}$$



A. Área de um domínio plano

coincide com a área de

$$\mathcal{D}^* = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ a \le x \le b \ \wedge\ 0 \le y \le -f(x)\}$$

e, portanto,

$$\text{área}(\mathcal{D}) = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

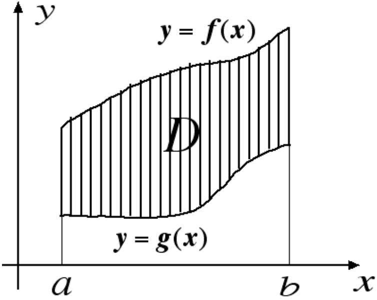
Neste caso 1. , mas também no caso em que f é não negativa, temos

$$\text{área}(\mathcal{D}) = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

A. Área de um domínio plano

2. Por outro lado, se $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ são contínuas e tais que $0 \leq g(x) \leq f(x), \forall x \in [a, b]$, então, a área da região plana

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x \leq b \ \wedge \ g(x) \leq y \leq f(x)\right\}$$



A. Área de um domínio plano

pode ser calculada como área$(\mathcal{D})$ =área$(\mathcal{D}_1)-$área$(\mathcal{D}_2)$, onde $\mathcal{D}_1$ é a região plana sob o gráfico de f e $\mathcal{D}_2$ é a região plana sob o gráfico de g.

Então

$$\text{área}(\mathcal{D}) = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

ou seja,

$$\text{área}(\mathcal{D}) = \int_a^b \Big[f(x) - g(x)\Big]\,dx.$$

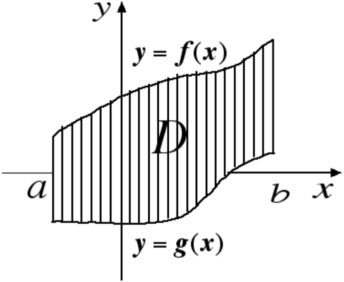
Repare-se que, também neste caso 2. , poderíamos escrever

$$\text{área}(\mathcal{D}) = \int_a^b \Big|f(x) - g(x)\Big|\,dx.$$

A. Área de um domínio plano

3. Por translação segundo um vetor oportuno orientado no sentido posito de OY, seria fácil concluir que, dadas $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínuas e tais que $g(x) \leq f(x), \forall x \in [a, b]$, independentemente do sinal de f ou de g, a área da região plana

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; a \leq x \leq b \;\wedge\; g(x) \leq y \leq f(x)\right\}$$

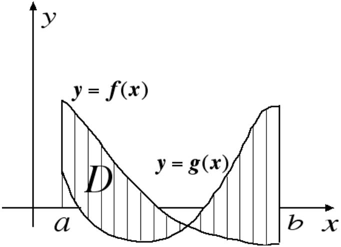


poderia ser dada também pelo integral

$$\text{área}(\mathcal{D}) = \int_a^b \Big[f(x) - g(x)\Big]\, dx.$$

A. Área de um domínio plano

4. Mais em geral, se $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ são contínuas, a área da região plana $\mathcal{D}$ limitada pelos gráficos de f e de g e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$



seria dada por

$$\text{área}(\mathcal{D}) = \int_a^c \Big[f(x) - g(x)\Big]\,dx + \int_c^b \Big[g(x) - f(x)\Big]\,dx,$$

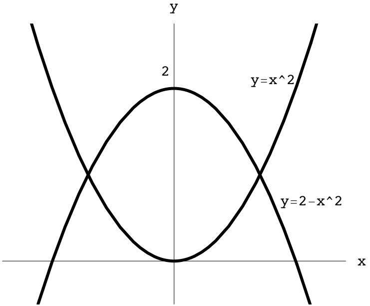
onde c é a abcissa do ponto de intersecção das duas curvas. Consequentemente, também neste caso, poderíamos exprimir a área de $\mathcal{D}$ pelo integral

$$\text{área}(\mathcal{D}) = \int_a^b \Big|f(x) - g(x)\Big|\,dx.$$

A. Área de um domínio plano

Exemplos

1. *A área do domínio plano D limitado pelas curvas de equações* $y = x^2$ *e* $y = 2 - x^2$, *que se intersetam para* $x = -1$ *e para* $x = 1$,



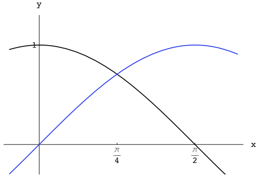
é dada por

$$\text{área}\,\mathcal{D} = \int_{-1}^{1} (2 - 2x^2)\,dx = \left[2x - \frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = 2 - \frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3} = \frac{8}{3}\,.$$

A. Área de um domínio plano

Exemplos

2. *A área do domínio plano D limitado pelas curvas de equações* $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $x = 0$ *e* $x = \pi/2$,



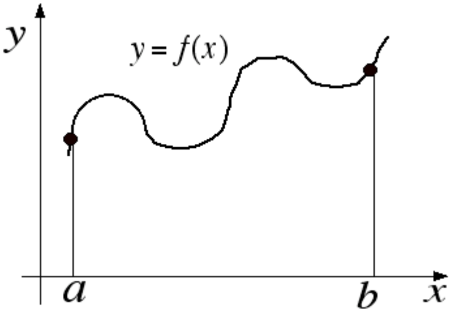
é dada por

$$\begin{aligned} \text{área}\,\mathcal{D} &= \int_0^{\pi/2} \Big| \cos x - \operatorname{sen} x \Big| \, dx \\ &= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\operatorname{sen} x - \cos x)\, dx \\ &= \Big[\operatorname{sen} x + \cos x \Big]_0^{\pi/4} + \Big[-\cos x - \operatorname{sen} x \Big]_{\pi/4}^{\pi/2} = 2\sqrt{2} - 2. \end{aligned}$$

B. Comprimento de uma curva

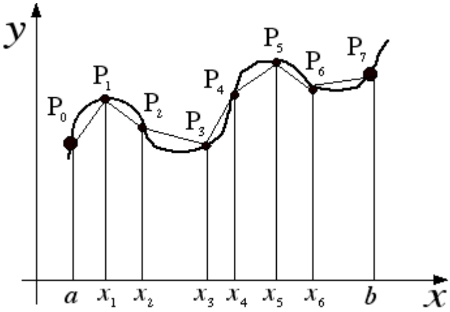
Seja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $C^1([a,b])$. Designemos por $\mathcal{C}$ o arco de curva $y = f(x)$, com $x \in [a,b]$.

Vamos dar uma definição para o comprimento do arco $\mathcal{C}$, recorrendo à definição de integral em termos das somas de Riemann.



B. Comprimento de uma curva

Para tal, consideremos uma partição $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ definida por pontos $x_0 = a,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n = b$. Sejam $P_0,\ P_1,\ \ldots,\ P_n$ os pontos correspondentes sobre a curva $\mathcal{C}$ e consideremos a linha poligonal $L_{\mathcal{P}}$, , definida pelos segmentos de reta $P_{i-1}P_i$, com $i = 1, 2, \ldots, n$.



Quando os pontos P_i são considerados cada vez mais próximos uns dos outro, ou seja, quando o diâmetro $|\mathcal{P}|$ da partição tende para zero, a linha poligonal $L_{\mathcal{P}}$ tende a confundir-se com o arco $\mathcal{C}$.

B. Comprimento de uma curva

Então, por definição,

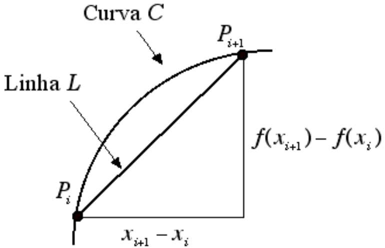
$$\operatorname{comp} \mathcal{C} = \lim_{|\mathcal{P}| \to 0} \operatorname{comp} L_{\mathcal{P}}.$$

Por outro lado,

$$\operatorname{comp} L_{\mathcal{P}} = \overline{P_0 P_1} + \overline{P_1 P_2} + \cdots + \overline{P_{n-1} P_n}$$

e, para cada segmento de reta $P_{i-1}P_i$, tem-se

$$\overline{P_i P_{i+1}} = \sqrt{\left(x_{i+1} - x_i\right)^2 + \left(f(x_{i+1}) - f(x_i)\right)^2}\,.$$



B. Comprimento de uma curva

No entanto, como f é derivável, o teorema do valor médio de Lagrange dá

$$\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = f'(c_{i+1})$$

para algum $c_{i+1} \in]x_i, x_{i+1}[$, resultando

$$\begin{aligned}\overline{P_i P_{i+1}} &= \sqrt{\left(x_{i+1} - x_i\right)^2 + \left(f'(c_{i+1})\right)^2 \left(x_{i+1} - x_i\right)^2} \\ &= \sqrt{1 + \left(f'(c_{i+1})\right)^2}\left(x_{i+1} - x_i\right).\end{aligned}$$

Consequentemente, o comprimento da linha poligonal $L_{\mathcal{P}}$ é dado por

$$\text{comp}(L_{\mathcal{P}}) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + \left(f'(c_{i+1})\right)^2}\left(x_{i+1} - x_i\right).$$

B. Comprimento de uma curva

No segundo membro da igualdade anterior, mais não temos do que uma soma de Riemann para a função $g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2},$$

que é integrável.

Logo, tomando o limite quando $|\mathcal{P}| \to 0$ vem

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \operatorname{comp}(L_{\mathcal{P}}) = \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Da definição apresentada para comprimento do arco $\mathcal{C}$ sai

$$\operatorname{comp}(\mathcal{C}) = \int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,dx\,.$$

Exemplo

O comprimento do arco da curva de equação $y = \operatorname{ch} x$, *entre os pontos* $(-1, \operatorname{ch}(-1))$ *e* $(2, \operatorname{ch} 2)$ *é dado por*

$$comp(C) = \int_{-1}^{2} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}\, dx = \int_{-1}^{2} \operatorname{ch} x\, dx = \Big[\operatorname{sh} x \Big]_{-1}^{2} = \operatorname{sh} 2 + \operatorname{sh} 1\,.$$