Lógica CC
Licenciatura em Ciências da Computação

Luís Pinto

Departamento de Matemática
Universidade do Minho

1º. semestre, 2020/2021

2. Cálculo Proposicional da Lógica Clássica

Notação 21:

Normalmente, usaremos CP para abreviar Cálculo Proposicional da Lógica Clássica.

2.1 Sintaxe do Cálculo Proposicional

Definição 22: O *alfabeto do CP* é notado por $\mathcal{A}^{CP}$ e é constituído pelos seguintes símbolos (letras):

a) $p_0, p_1, ..., p_n, ...$ (com $n \in \mathbb{N}_0$), chamados *variáveis proposicionais*, formando um conjunto numerável, denotado por $\mathcal{V}^{CP}$;

b) $\perp$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, chamados *conetivos proposicionais* (respetivamente, *absurdo*, *negação*, *conjunção*, *disjunção*, *implicação* e *equivalência*);

c) (,) (abrir e fechar parênteses), chamados *símbolos auxiliares*.

Exemplo 23:

As sequências de símbolos

$$\perp p_{20}) \text{ e } (p_1)$$

são palavras sobre $\mathcal{A}^{CP}$, ambas de comprimento 3.

A sequência de símbolos

$$p_1$$

(de comprimento 1) é também uma palavra sobre $\mathcal{A}^{CP}$, sendo diferente da palavra (p_1).

Definição 24: O conjunto das *fórmulas do CP* é notado por $\mathcal{F}^{CP}$ e é a linguagem sobre $\mathcal{A}^{CP}$ definida indutivamente pelas seguintes regras:

a) $\perp \in \mathcal{F}^{CP}$;

b) $p \in \mathcal{F}^{CP}$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$;

c) $\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \implies (\neg\varphi) \in \mathcal{F}^{CP}$, para todo $\varphi \in \left(\mathcal{A}^{CP}\right)^*$;

d) $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP} \implies (\varphi \square \psi) \in \mathcal{F}^{CP}$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in \left(\mathcal{A}^{CP}\right)^*$.

Exemplo 25:

A palavra $((\neg \perp) \wedge (p_6 \to p_0))$ é uma fórmula do CP.

Por exemplo,

$$\perp, (\neg \perp), p_6, p_0, (p_6 \to p_0), ((\neg \perp) \wedge (p_6 \to p_0))$$

é uma sua sequência de formação (de comprimento 6).

As palavras $\perp p_{20})$ e (p_1) não são fórmulas do CP.

De facto, nenhuma palavra sobre $\mathcal{A}^{CP}$ de comprimento 3 é uma fórmula do CP.

Exercício 26:

Particularize o conceito de sequência de formação, apresentado na Definição 9, ao caso da definição indutiva do conjunto $\mathcal{F}^{CP}$.

Notação 27:

Os parênteses extremos e os parênteses à volta de negações são muitas vezes omitidos.

Por exemplo, a palavra

$$(p_5 \wedge \neg p_0) \vee \perp$$

será utilizada como uma representação da fórmula

$$((p_5 \wedge (\neg p_0)) \vee \perp).$$

Por abuso de linguagem, chamaremos fórmulas a tais representações de fórmulas.

Teorema 28 (Princípio de indução estrutural para fórmulas do CP):

Seja $P(\varphi)$ uma condição sobre fórmulas $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Se:

a) $P(\perp)$;

b) $P(p)$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$;

c) $P(\psi) \implies P(\neg\psi)$, para todo $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$;

d) $P(\psi_1)$ e $P(\psi_2) \implies P(\psi_1 \square \psi_2)$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$;

então $P(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Dem.: Basta particularizar o Princípio de indução estrutural associado a uma definição indutiva ao caso da definição indutiva de $\mathcal{F}^{CP}$. $\square$

Observação 29:

Uma aplicação do resultado anterior para demonstrar uma proposição é chamada uma *demonstração por indução estrutural em fórmulas do CP*.

Exemplo 30:

Podemos recorrer a uma demonstração por indução estrutural em fórmulas do CP para provar que:

para toda a fórmula, o número de ocorrências de "(" é igual ao número de ocorrências de ")".

Consideremos a propriedade sobre fórmulas $P(\varphi)$, dada por

$$\text{"}npe(\varphi) = npd(\varphi)\text{,"}$$

onde $npe(\varphi)$ e $npd(\varphi)$ denotam o número de ocorrências em φ de "(" e de ")", respetivamente.

Exemplo 30 (cont.):

a) $npe(\perp) = 0 = npd(\perp)$, pelo que $P(\perp)$.

b) Para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$, $npe(p) = 0 = npd(p)$ e, portanto, $P(p)$.

c) Seja $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e (como hipótese de indução) suponhamos $P(\psi)$. Então,

$$npe((\neg\psi)) = 1 + npe(\psi) = 1 + npd(\psi) = npd((\neg\psi)),$$

onde a segunda igualdade segue da hipótese de indução. Assim, $npe((\neg\psi)) = npd((\neg\psi))$, provando $P(\neg\psi)$.

Exemplo 30 (cont.):

d) Para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$, $P(\psi_1)$ e $P(\psi_2) \implies P(\psi_1 \Box \psi_2)$. (Exercício.)

De **a)** a **d)**, pelo Princípio de indução estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$, segue que, para toda a fórmula φ, $P(\varphi)$ é verdadeira, ou seja, o número de ocorrências de "(" em φ é igual ao número de ocorrências de ")" em φ.

Observação 31:

A definição indutiva de $\mathcal{F}^{CP}$ é determinista.

Por esta razão, $\mathcal{F}^{CP}$ admite um princípio de recursão estrutural.

Uma aplicação deste princípio para definir uma função é chamada uma *definição por recursão estrutural em fórmulas do CP*.

Definição 32: A função *var* : $\mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V}^{CP})$, que a cada fórmula faz corresponder o conjunto das variáveis proposicionais que nela ocorrem, é definida, por recursão estrutural em fórmulas do CP, do seguinte modo:

a) $var(\perp) = \emptyset$;

b) $var(p) = \{p\}$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$;

c) $var(\neg\varphi) = var(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

d) $var(\varphi \Box \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Exemplo 33:

$$
\begin{array}{rl}
& var(p_1 \to (\neg p_2 \vee \bot)) \\
= & var(p_1) \cup var(\neg p_2 \vee \bot) \\
= & \{p_1\} \cup var(\neg p_2) \cup var(\bot) \\
= & \{p_1\} \cup var(p_2) \cup \emptyset \\
= & \{p_1\} \cup \{p_2\} \\
= & \{p_1, p_2\}.
\end{array}
$$

Definição 34: Sejam ψ uma fórmula e p uma variável proposicional. A função $[\psi/p] : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}^{CP}$, que a cada fórmula φ faz corresponder a fórmula notada por $\varphi[\psi/p]$, que resulta de φ por *substituição* das ocorrências de p por ψ, é definida, por recursão estrutural em fórmulas do CP, como a única função t.q.:

a) $\perp [\psi/p] = \perp$;

b) $p_i[\psi/p] = \begin{cases} \psi & \text{se } p_i = p \\ p_i & \text{se } p_i \neq p \end{cases}$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$;

c) $(\neg\varphi_1)[\psi/p] = \neg\varphi_1[\psi/p]$, para todo $\varphi_1 \in \mathcal{F}^{CP}$;

d) $(\varphi_1 \square \varphi_2)[\psi/p] = \varphi_1[\psi/p] \square \varphi_2[\psi/p]$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$.

Exemplo 35:

a)

$$
\begin{aligned}
& (\neg p_1 \to (p_2 \wedge \perp))[p_0 \vee p_1/p_2] \\
= \; & (\neg p_1)[p_0 \vee p_1/p_2] \to (p_2 \wedge \perp)[p_0 \vee p_1/p_2] \\
= \; & \neg p_1[p_0 \vee p_1/p_2] \to (p_2[p_0 \vee p_1/p_2] \wedge \perp [p_0 \vee p_1/p_2]) \\
= \; & \neg p_1 \to ((p_0 \vee p_1) \wedge \perp)
\end{aligned}
$$

Exemplo 35 (cont.):

b) Verifique que

$$(\neg p_1 \rightarrow (p_2 \wedge \perp))[p_0 \vee p_1 / p_0] = (\neg p_1 \rightarrow (p_2 \wedge \perp)).$$

Esta igualdade corresponde a um caso particular da proposição que se segue.

(Observe que $p_0 \notin var(\neg p_1 \rightarrow (p_2 \wedge \perp))$.)

Proposição 36: Para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $p \in \mathcal{V}^{CP}$, se $p \notin var(\varphi)$, então $\varphi[\psi/p] = \varphi$.

Dem.: Por indução estrutural em φ. (Exercício.) $\square$

Definição 37: A função *subf* : $\mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{F}^{CP})$ é definida, por recursão estrutural em fórmulas do CP, do seguinte modo:

a) *subf*$(\varphi) = \{\varphi\}$, para todo $\varphi \in \mathcal{V}^{CP} \cup \{\bot\}$;

b) *subf*$(\neg\varphi) = \{\neg\varphi\} \cup$ *subf*(φ), para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

c) *subf*$(\varphi\Box\psi) = \{\varphi\Box\psi\} \cup$ *subf*$(\varphi) \cup$ *subf*(ψ), para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Dadas fórmulas φ e ψ, diremos que φ é uma *subfórmula* de ψ quando $\varphi \in$ *subf*(ψ).

Exemplo 38:

$$
\begin{array}{rl}
 & subf(\neg p_1 \to p_2) \\
= & \{\neg p_1 \to p_2\} \cup subf(\neg p_1) \cup subf(p_2) \\
= & \{\neg p_1 \to p_2\} \cup \{\neg p_1\} \cup subf(p_1) \cup \{p_2\} \\
= & \{\neg p_1 \to p_2\} \cup \{\neg p_1\} \cup \{p_1\} \cup \{p_2\} \\
= & \{\neg p_1 \to p_2, \neg p_1, p_1, p_2\}.
\end{array}
$$

Proposição 39: Para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, φ é uma subfórmula de ψ se e só se uma das seguintes condições é satisfeita:

a) $\psi = \varphi$;

b) existe $\psi_1 \in \mathcal{F}^{CP}$ t.q. $\psi = \neg\psi_1$ e φ é uma subfórmula de ψ_1;

c) existe um conetivo $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e existem fórmulas $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$ t.q. $\psi = \psi_1 \Box \psi_2$ e φ é uma subfórmula de ψ_1 ou de ψ_2.

Dem. (Prop. 39): Por análise de casos em ψ.

Caso $\psi \in \mathcal{V}^{CP} \cup \{\bot\}$. Então,

$$
\begin{array}{ll}
 & \varphi \text{ subfórmula de } \psi \\
\text{sse} & \varphi \in \mathit{subf}(\psi) \\
\text{sse} & \varphi \in \{\psi\} \\
\text{sse} & \varphi = \psi.
\end{array}
$$

Assim, supondo que φ é uma subfórmula de ψ, temos $\varphi = \psi$, pelo que a condição **a)** é satisfeita.

Reciprocamente, uma vez que $\psi \in \mathcal{V}^{CP} \cup \{\bot\}$, as condições **b)** e **c)** não são satisfeitas, pelo que teremos que ter $\varphi = \psi$. Logo, pela sequência de equivalências anterior, segue que φ é uma subfórmula de ψ.

Restantes casos (caso $\psi = \neg\psi_1$, para algum $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$, e caso $\psi = \psi_1 \Box \psi_2$, para algum $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para alguns $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$): exercício. $\Box$