MATEMÁTICA DISCRETA

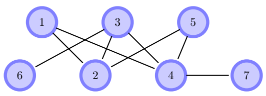
Lic. Ciências da Computação

Soluções de exercícios não resolvidos nas aulas - Grafos planares

---

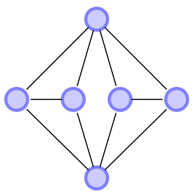
26. Pela fórmula de Euler resulta que $F = 14$ mas $14 \not\leq \frac{2}{6}\sharp E = 10$ (Lema 1).

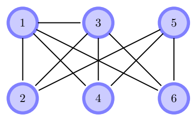
27.



28. Qualquer subgrafo de um grafo da forma $K_{m,n}$ em que $m \geq 2$,$n \geq 3$, $m + n = 10$ e $mn \geq 18$ obtido por eliminação de arestas de modo a ficar com 18 arestas.

29.

(a) 

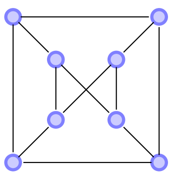
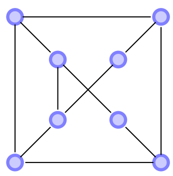
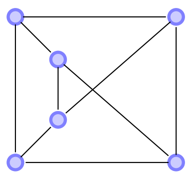
(b) 

30. Se $G = (V, E)$ é um grafo com 11 vértices, a desigualdade $3\sharp V - \sharp E = 33 - \sharp E \geq 6$ implica que $\sharp E \leq 27$. Como o número de arestas de K_{11} é 55 ($= 2 \times 27 + 1$), então G ou o seu complementar tem mais do que 27 arestas, pelo que não é planar pelo Lema 2.

31. $n < 7$, porque $G_n \leq G_{n+1}$, $K_5 \leq G_7$ e G_6 é planar.

32. (a) Não, porque não há vértices de grau 4, logo qualquer subgrafo não tem vértices de grau 4, e a adição ou a remoção de vértices de grau 2 não aumenta o grau dos restantes vértices.

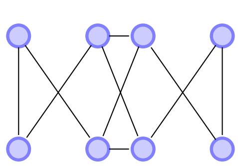
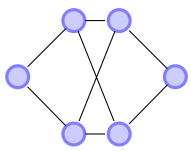
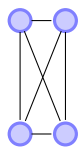
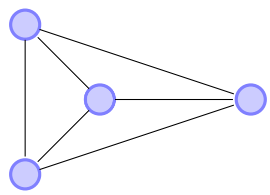
    (b) Sim.

 $\longrightarrow_{subgrafo}$  $\longrightarrow_{homeomorfo}$  $= K_{3,3}$

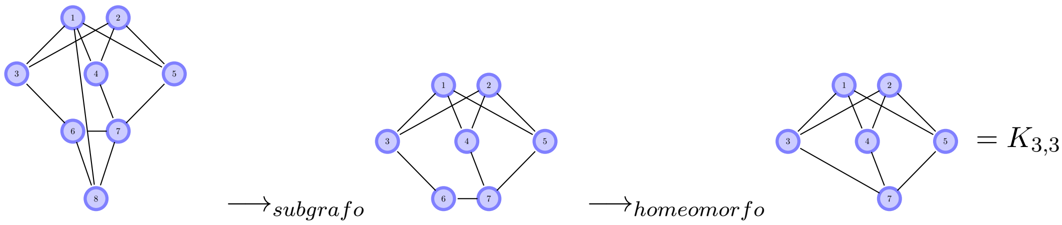
    (c) $n = 4, 5, 6, 7, 8$.

    (d) $n \leq 8$.

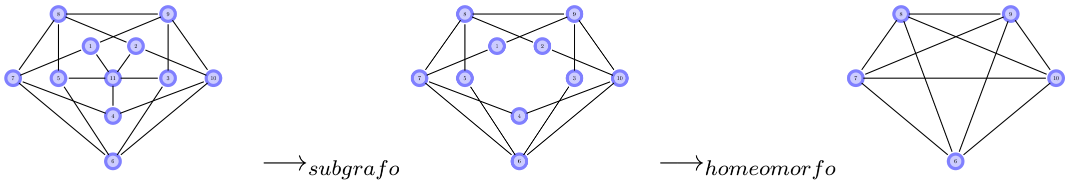
33.

 $\longrightarrow_{homeomorfo}$  $\longrightarrow_{homeomorfo}$  $=$ 

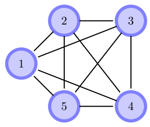
34. (a)



(b)

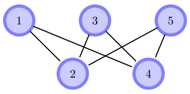


35. (a) É euleriano o grafo indicado em i., *i.e.* o grafo

$K_5 =$ 

porque todos os vértices têm grau par . (Justificação alternativa: porque existe o caminho $(1, 2, 3, 4, 5, 1, 3, 5, 2, 4, 1)$ que é circuito euleriano.)

(b) É semi-euleriano o grafo indicado em ii., *i.e.* o grafo



$K_{2,3}$

porque tem exatamente dois vértices de grau ímpar. (Justificação alternativa: porque existe o caminho $(2, 5, 4, 3, 2, 1, 4)$ que é caminho euleriano mas não existe nenhum circuito euleriano.)

(c) São hamiltonianos os grafos indicados em i., iv. e v. porque, em cada caso, existem circuitos hamiltonianos.

Justificação: por exemplo, no caso iv. $(1, 2, 4, 6, 5, 3, 1)$ é um ciclo hamiltoniano e no caso ii. não há um ciclo hamiltoniano porque as sequências $(2, 1, 4)$ ou $(4, 1, 2)$, $(2, 3, 4)$ ou $(4, 3, 2)$, e $(4, 5, 2)$ ou $(2, 5, 4)$, teriam de ser três subsequências de um tal ciclo, o que é uma impossível.

36. Exemplos: K_{2n+1} com $n \geq 2$ e $K_{m,n}$ com m e n pares e $m \geq 3$ porque não são planares e todos os vértices têm grau par.

38. Exemplo: $K_{3,4}$

40. $K_{m,n}$, com m e n pares e $m \geq 2$, porque todos os vértices têm grau par.

41. $K_{m,n}$ com $m = n$ porque, se $V = V_1 \uplus V_2$ com $V_1 = \{u_1, \ldots, u_m\}$ e $V_2 = \{w_1, \ldots, w_n\}$, então $(u_1, w_1, \ldots, u_m, w_m, u_1)$ é um ciclo hamiltoniano, e se $m \neq n$ é impossível construir um ciclo alternando u's e w's sem repetições e contendo todos os elementos de V_2.

42. Notar que quando se faz a remoção ou a adição de um vértice de grau 2, elimina-se ou acrescenta-se um vértice de grau par e o grau dos restantes vértices não se altera.

45. Se $\chi(G) = 4$, então todos os vértices têm grau inferior a 4 e há pelo menos 4 vértices de grau maior ou igual a 3. Exemplo: K_4.

46. $\chi(C_n) = 2$ se n é par e $\chi(C_n) = 3$ se n é ímpar.