

6. Aplicações lineares de \mathbb{R}^n para \mathbb{R}^m

DEFINIÇÃO

Sejam n e m números naturais. Uma **aplicação linear** (ou **transformação linear**) de \mathbb{R}^n para \mathbb{R}^m é uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ que verifica, para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$(i) \quad f(u + v) = f(u) + f(v), \quad [f \text{ preserva } +]$$

$$(ii) \quad f(\alpha u) = \alpha f(u). \quad [f \text{ preserva } \cdot]$$

EXEMPLO

- ▶ A **aplicação identidade** $id : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação linear.

$$u \mapsto u$$

- ▶ A **aplicação nula** $0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma aplicação linear.

$$u \mapsto 0_{\mathbb{R}^m}$$

EXEMPLOS

1. A aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação linear,

$$x \mapsto 2x$$

enquanto que a aplicação $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **não** o é.

$$x \mapsto 2x + 1$$

2. Considere as aplicações $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definidas, para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, por

$$f(a, b) = (3a + b, 0, b - a)$$

$$g(a, b) = (a^2, 0, a + b).$$

A aplicação f é linear mas g **não** o é.

3. Seja A uma matriz de ordem $m \times n$ sobre \mathbb{R} . A aplicação

$$f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ é uma aplicação linear.}$$

$$x \mapsto Ax$$

[Note-se que este exemplo mostra que, dada uma matriz, existe uma aplicação linear que lhe está associada.]

EXERCÍCIO

Determine se é linear a aplicação

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

definida, para cada $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, por:

- a)** $f(a, b, c) = (b, 0)$.
- b)** $f(a, b, c) = (a + 1, b)$.
- c)** $f(a, b, c) = (ab, 0)$.
- d)** $f(a, b, c) = (|c|, 0)$.

TEOREMA

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear. Então, para quaisquer $v, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$,

- (i) $f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^m}$. [f preserva o vetor nulo]
- (ii) $f(-v) = -f(v)$. [f preserva os simétricos]
- (iii) $f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) = \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_k f(v_k)$. [f preserva as combinações lineares]

EXERCÍCIO

Verifique, usando o teorema anterior, que as aplicações seguintes não são lineares.

- a) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(a, b, c) = (3b, a + 2)$, para cada $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
- b) $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $g(a, b, c) = (b, a - c, 1, c)$, para qualquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

DEFINIÇÃO

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear e seja $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ a base canónica de \mathbb{R}^n . Como cada $f(e_j)$ pertence a \mathbb{R}^m , pode-se escrever

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}) \\ f(e_2) &= (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}) \\ &\vdots \\ f(e_n) &= (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn}) \end{aligned}$$

A matriz de ordem $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

cujas colunas j é $f(e_j)$, é chamada a matriz da aplicação linear f .

EXEMPLO

Consideremos a aplicação linear

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (a, b, c) &\mapsto (2a - b + 3c, a + 2c) \end{aligned}$$

A base canónica de \mathbb{R}^3 é $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ e tem-se

$$\begin{aligned} f(1, 0, 0) &= (2, 1) \\ f(0, 1, 0) &= (-1, 0) \\ f(0, 0, 1) &= (3, 2). \end{aligned}$$

Deduz-se assim que a matriz da aplicação linear f é a seguinte matriz de ordem 2×3

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

Note-se que, para cada $\mathbf{x} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$,

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a - b + 3c \\ a + 2c \end{bmatrix} = f(\mathbf{x}).$$

Ou seja, a matriz A define a aplicação f . Assim, A pode ser usada para determinar a imagem por f de qualquer elemento de \mathbb{R}^3 . Por exemplo,

$$f(2, 3, -1) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = (-2, 0).$$

TEOREMA

Dada uma aplicação linear $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, seja $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ a matriz de f . Então $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ para todo o $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e A é a única matriz que permite definir f desta forma.

EXEMPLO

Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma aplicação linear e suponhamos que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é a matriz de f . Pelo teorema anterior, A determina f . Tem-se, então,

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 3a + b \\ -a + 2b \\ b \end{bmatrix}$$

donde se conclui que

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (a, b) &\mapsto (a, 3a + b, -a + 2b, b) \end{aligned}$$

EXERCÍCIO

1. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear determinada pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

- a) Calcule $f(1, -2, 3)$.
 - b) Determine $f(a, b, c)$ para qualquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
2. Considere a aplicação linear

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (a, b, c) &\mapsto (a + b, b + c) \end{aligned}$$

- a) Calcule $f(1, 2, 3)$.
- b) Determine a matriz que representa f .

TEOREMA

Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ aplicações lineares.

(i) A aplicação composta de g com f

$$\begin{aligned} g \circ f : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^p \\ u &\mapsto (g \circ f)(u) = g(f(u)) \end{aligned}$$

ainda é uma aplicação linear.

- (ii)
- ▶ Se F é a matriz que representa a aplicação linear f e
 - ▶ G é a matriz que representa a aplicação linear g , então
 - ▶ GF é a matriz que define a aplicação linear $g \circ f$.

TEOREMA

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear e seja F a matriz de f .

- (i) A aplicação linear f é bijetiva se e só se a matriz F é invertível.
- (ii) Se f é bijetiva, então

- ▶ existe a aplicação inversa de f

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ u' &\mapsto f^{-1}(u') = u \end{aligned}$$

onde u é o (único) elemento de \mathbb{R}^n tal que $f(u) = u'$, e

- ▶ f^{-1} é uma aplicação linear bijetiva.

- (iii) Se f é bijetiva, então

- ▶ F^{-1} é a matriz que define a aplicação linear f^{-1} .

TEOREMA

Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ aplicações lineares.

(i) A aplicação soma de f e g

$$\begin{aligned} f + g : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ u &\mapsto (f + g)(u) = f(u) + g(u) \end{aligned}$$

também é uma aplicação linear.

- (ii)
- ▶ Se F é a matriz que representa a aplicação linear f e
 - ▶ G é a matriz que representa a aplicação linear g , então
 - ▶ $F + G$ é a matriz que define a aplicação linear $f + g$.

TEOREMA

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear e seja $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) A aplicação produto de α por f

$$\begin{aligned}\alpha f : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ u &\mapsto (\alpha f)(u) = \alpha f(u)\end{aligned}$$

ainda é uma aplicação linear.

- (ii)
- ▶ Se F é a matriz que representa a aplicação linear f , então
 - ▶ αF é a matriz que define a aplicação linear αf .

EXERCÍCIO

Considere as aplicações lineares

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (2x - y, 3z, x + 2z) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g : \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (x, x + y, y + z) . \end{aligned}$$

Sem determinar a expressão analítica de h , indique a matriz da aplicação linear h para

- a) $h = g + 4f$.
- b) $h = g \circ f$.
- c) $h = f \circ g$.
- d) $h = g^{-1}$.

DEFINIÇÃO

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear.

- ▶ O **núcleo** de f é o conjunto $Nuc(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0_{\mathbb{R}^m}\}$, também denotado por $Ker(f)$.
- ▶ A **imagem** de f é o conjunto $Im(f) = \{f(x) \in \mathbb{R}^m \mid x \in \mathbb{R}^n\}$. Ou seja, $Im(f)$ é o contradomínio de f .

EXEMPLO

Consideremos a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(a, b, c) \mapsto (a, 2b)$.

Então,

$$\begin{aligned}
 Nuc(f) &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid f(a, b, c) = (0, 0)\} \\
 &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid (a, 2b) = (0, 0)\} \\
 &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = b = 0\} \\
 &= \{(0, 0, c) \mid c \in \mathbb{R}\},
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 Im(f) &= \{f(a, b, c) \in \mathbb{R}^2 \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\} \\
 &= \{(a, 2b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2.
 \end{aligned}$$

TEOREMA

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear. Então,

- (i) $\text{Nuc}(f)$ é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^n .
- (ii) $\text{Im}(f)$ é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^m .

Demonstração: Para mostrar (i) consideremos a matriz A da aplicação linear f . Tem-se

$$\text{Nuc}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0_{\mathbb{R}^m}\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0_{\mathbb{R}^m}\} = N(A).$$

Ou seja, $\text{Nuc}(f)$ é o *núcleo* ou *espaço nulo* da matriz A e, portanto (ver p. 8 do cap. 4), é um subespaço de \mathbb{R}^n .

(ii) Exercício.



DEFINIÇÃO

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear. Define-se

- ▶ a nulidade de f como sendo $nul(f) = \dim(Nuc(f))$.
- ▶ a característica de f como sendo $car(f) = \dim(Im(f))$.

TEOREMA

Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma aplicação linear, então

$$nul(f) + car(f) = n.$$

TEOREMA

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear. Então,

- (i) f é uma aplicação **injetiva** se e só se $Nuc(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$;
- (ii) f é uma aplicação **sobrejetiva** se e só se $Im(f) = \mathbb{R}^m$.

Demonstração: É claro que a afirmação (ii) é verdadeira. Provemos (i). Começamos por supor que f é uma aplicação **injetiva**. Seja u um elemento arbitrário de $Nuc(f)$. Então $f(u) = 0_{\mathbb{R}^m} = f(0_{\mathbb{R}^n})$ e como f é injetiva deduz-se que $u = 0_{\mathbb{R}^n}$. Conclui-se assim que $Nuc(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Reciprocamente, suponhamos que $Nuc(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$ tais que $f(u) = f(v)$. Então

$$f(u - v) = f(u) - f(v) = 0_{\mathbb{R}^m},$$

o que prova que $u - v \in Nuc(f)$. Como $Nuc(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, deduz-se que $u - v = 0_{\mathbb{R}^n}$, e consequentemente que $u = v$. Conclui-se assim que f é uma aplicação **injetiva**. □

EXERCÍCIO

Indique se cada uma das aplicações lineares seguintes é injetiva, determinando o seu núcleo.

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (2x, y + z, y - z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (a, b, c) &\mapsto (2a, b + c, 0, a + b - c). \end{aligned}$$