

## Tópicos de Matemática

Lic. Ciências da Computação  
2019/2020



## 6. Cardinalidade de conjuntos

O “tamanho” de um conjunto finito pode ser facilmente “medido”. Intuitivamente, diremos que o “tamanho” do conjunto  $A = \{1, 2, 3, \dots, 50\}$  é 50, uma vez que  $A$  tem 50 elementos, e que os conjuntos  $B = \{a, b, c, d\}$  e  $C = \{3, 6, 9, 12\}$  têm “tamanho” 4. Comparamos estes conjuntos, dizendo que os conjuntos  $B$  e  $C$  têm o mesmo “tamanho” e que o conjunto  $A$  é “maior” do que os conjuntos  $B$  e  $C$ . Mas o que dizer a respeito de conjuntos infinitos? Será que faz sentido falar no “tamanho” de conjuntos infinitos? Se sim, será que os conjuntos infinitos têm todos o mesmo “tamanho”? Georg Cantor foi o primeiro matemático a desenvolver um estudo mais aprofundado sobre esta questão e estabeleceu uma forma de “medir” os conjuntos, começando por observar que dois conjuntos têm o mesmo “tamanho” caso exista uma bijeção entre os mesmos. Depois de encontrar um processo para determinar se dois conjuntos infinitos têm o mesmo “tamanho”, Georg Cantor mostrou que o conjunto  $\mathbb{Q}$  dos números racionais tem o mesmo “tamanho” que o conjunto  $\mathbb{N}$  dos números naturais. Na sequência desta descoberta, Georg Cantor conjecturou que o conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais também teria o mesmo “tamanho” que o conjunto dos números naturais. Porém, esta conjectura não se confirmou, tendo Georg Cantor provado que o conjunto dos números reais é “maior” que o conjunto dos números naturais.

Neste capítulo apresentam-se alguns dos conceitos e dos resultados estabelecidos por Georg Cantor e que permitem comparar o “tamanho” dos conjuntos.

### 6.1 Conjuntos equipotentes

**Definição 6.1.** *Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos. Diz-se que  $A$  é equipotente a  $B$ , e escreve-se  $A \sim B$ , se existe uma aplicação bijetiva  $f : A \rightarrow B$ . Caso  $A$  não seja equiptotente a  $B$ , escreve-se  $A \not\sim B$ .*

#### Exemplo 6.1.

- (1) *Os conjuntos  $A = \{1, 2, \dots, n\}$  e  $B = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , com  $a_i \neq a_j$  se  $i \neq j$ , são equipotentes, uma vez que a aplicação  $f : A \rightarrow B$  tal que  $f(i) = a_i$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , é uma bijeção.*
- (2) *Seja  $2\mathbb{N}$  o conjunto dos números naturais pares. A aplicação  $h : \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N}$  tal que  $h(n) = 2n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , é uma bijeção. Logo  $\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N}$ .*

## cardinalidade de conjuntos

(3) Os conjuntos  $\mathbb{N}$  e  $\mathbb{Z}$  são equipotentes, pois a aplicação  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  definida por

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{-n+1}{2}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases},$$

é uma bijeção.

(4) As funções  $f : [0, 1] \rightarrow ]0, 1[$ ,  $g : [0, 1[ \rightarrow ]0, 1[$  e  $h : ]0, 1] \rightarrow ]0, 1[$  definidas por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{n+2}, & \text{se } x = \frac{1}{n}, \text{ para algum } n \in \mathbb{N} \\ x & \text{se } x \neq 0 \text{ e } x \neq \frac{1}{n}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{n+1}, & \text{se } x = \frac{1}{n}, \text{ para algum } n \in \mathbb{N} \\ x, & \text{se } x \neq 0 \text{ e } x \neq \frac{1}{n}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

e

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \text{se } x = \frac{1}{n}, \text{ para algum } n \in \mathbb{N} \\ x, & \text{se } x \neq \frac{1}{n}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

são bijetivas, pelo que  $[0, 1] \sim ]0, 1[$ ,  $[0, 1[ \sim ]0, 1[$  e  $]0, 1] \sim ]0, 1[$ .

(5) Sejam  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tais que  $a < b$  e  $c < d$ . A aplicação  $g : [a, b] \rightarrow [c, d]$  definida, para todo  $x \in [a, b]$ , por

$$g(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c,$$

é uma bijeção. Assim,  $[a, b] \sim [c, d]$ . De forma similar prova-se que  $]a, b[ \sim ]c, d[$ ,  $]a, b[ \sim ]c, d]$  e  $[a, b[ \sim [c, d[$ .

(6) Dados  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $a < b$ , tem-se  $\mathbb{R} \sim ]a, b[$ . De facto, da alínea (5) sabe-se que  $]a, b[ \sim ]-1, 1[$  e, além disso,  $\mathbb{R} \sim ]-1, 1[$ , pois a aplicação  $f : \mathbb{R} \rightarrow ]-1, 1[$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{1+x^2}, & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{-x^2}{1+x^2}, & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

é bijetiva.

(7) O único conjunto equipotente ao conjunto vazio é o conjunto vazio.

(8) Para cada conjunto  $A$ , o conjunto  $\mathcal{P}(A)$  das partes de  $A$  é equipotente ao conjunto  $\{0, 1\}^A$  das aplicações de  $A$  em  $\{0, 1\}$ . De facto, a aplicação  $\chi : \mathcal{P}(A) \rightarrow \{0, 1\}^A$  definida por  $\chi(B) = \chi_B$ , onde  $\chi_B : A \rightarrow \{0, 1\}$  é a aplicação definida por

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in B \\ 0 & \text{se } x \in A \setminus B \end{cases},$$

é bijetiva.

Nos resultados seguintes estabelecem-se algumas propriedades básicas a respeito da equipotência de conjuntos.

**Lema 6.2.** *Sejam  $A, B, C$  conjuntos. Então*

- (1)  $A \sim A$ .
- (2) Se  $A \sim B$ , então  $B \sim A$ .
- (3) Se  $A \sim B$  e  $B \sim C$ , então  $A \sim C$ .

*Demonstração.* Exercício. □

Observe-se que, para quaisquer conjuntos  $A$  e  $B$ , se  $A \sim B$ , também se tem  $B \sim A$ , pelo que se pode dizer apenas que os conjuntos  $A$  e  $B$  são equipotentes.

No resultado anterior podemos também observar que são estabelecidas para a equipotência propriedades análogas às de uma relação de equivalência. Porém, não podemos afirmar que  $\sim$  é uma relação de equivalência, pois uma relação de equivalência está definida num conjunto e a coleção de todos os conjuntos não é um conjunto.

**Lema 6.3.** *Sejam  $A, B, C, D$  conjuntos tais que  $A \sim B$  e  $C \sim D$ . Então*

- (1)  $A \times C \sim B \times D$ .
- (2) Se  $A$  e  $C$  são disjuntos e  $B$  e  $D$  são disjuntos, então  $A \cup C \sim B \cup D$ .

*Demonstração.* Uma vez que  $A \sim B$  e  $C \sim D$  podemos escolher funções bijetivas  $f : A \rightarrow B$  e  $g : C \rightarrow D$ .

(1) No sentido de provar que  $A \times C \sim B \times D$ , consideremos a função

$$\begin{aligned} h : A \times C &\rightarrow B \times D \\ (a, c) &\mapsto (f(a), g(c)) \end{aligned}$$

Facilmente se verifica que  $h$  é bijetiva. De facto, para quaisquer  $(a_1, c_1), (a_2, c_2) \in A \times C$ , se  $h(a_1, c_1) = h(a_2, c_2)$ , tem-se  $(f(a_1), g(c_1)) = (f(a_2), g(c_2))$ , donde  $f(a_1) = f(a_2)$  e  $g(c_1) = g(c_2)$ . Então, uma vez que  $f$  e  $g$  são injetivas, segue que  $a_1 = a_2$  e  $c_1 = c_2$  e, portanto,  $(a_1, c_1) = (a_2, c_2)$ . Logo  $h$  é injetiva. No sentido de provar que  $h$  é sobrejetiva, consideremos  $(b, d) \in B \times D$ . Então, uma vez que  $f$  e  $g$  são sobrejetivas, existem  $a \in A$  e  $c \in C$  tais que  $f(a) = b$  e  $g(c) = d$ . Por conseguinte, existe  $(a, c) \in A \times C$  tal que  $h(a, c) = (f(a), g(c)) = (b, d)$ . Logo  $h$  é sobrejetiva.

(2) Fica ao cuidado do leitor a verificação de que a aplicação  $h : A \cup C \rightarrow B \cup D$ , definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \\ g(x) & \text{se } x \in C \end{cases},$$

é bijetiva. □

## cardinalidade de conjuntos

**Teorema 6.4.** (Cantor) Para qualquer conjunto  $A$ ,  $A \approx \mathcal{P}(A)$ .

*Demonstração.* Pretendemos mostrar que qualquer que seja a função  $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ ,  $f$  não é uma bijeção. Nesse sentido, vamos mostrar que, para qualquer função  $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ ,  $f$  não é sobrejetiva, isto é, mostramos que, para toda a função  $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ , existe um conjunto  $D \in \mathcal{P}(A)$  tal que  $D \notin \text{Im} f$ . Com efeito, dada uma função  $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ , podemos considerar o conjunto

$$D = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}.$$

É óbvio que  $D \in \mathcal{P}(A)$  e que, por definição de  $D$ ,

$$\forall x \in A, (x \in D \leftrightarrow x \notin f(x)),$$

donde

$$\forall x \in A, D \neq f(x),$$

o que mostra que  $D \notin \text{Im} f$ . □

### 6.2 Conjuntos finitos e infinitos

**Definição 6.5.** Um conjunto  $A$  diz-se **infinito** se é equipotente a uma sua parte própria, i.e., se existe  $A' \subsetneq A$  tal que  $A \sim A'$ . Um conjunto  $A$  diz-se **finito** se  $A$  não é infinito.

**Exemplo 6.2.**

- (1) O conjunto  $\mathbb{N}$  é infinito, pois é equipotente à sua parte própria  $2\mathbb{N}$ .
- (2) O conjunto  $\mathbb{R}$  é infinito, pois é equipotente ao intervalo  $] - 1, 1[ \subsetneq \mathbb{R}$ .
- (3) O conjunto  $\{a, b\}$ , com  $a \neq b$ , é finito, pois os seus subconjuntos próprios são  $\emptyset$ ,  $\{a\}$  e  $\{b\}$  e nenhum deles é equipotente a  $\{a, b\}$ .
- (4)  $\emptyset$  é finito, pois  $\emptyset$  não tem subconjuntos próprios.

**Teorema 6.6.** Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos.

- (1) Se  $A$  é infinito e  $B \sim A$ , então  $B$  é infinito.
- (2) Se  $A$  é finito e  $B \sim A$ , então  $B$  é finito.

*Demonstração.* (1) Uma vez que  $A$  é infinito, existe um subconjunto próprio  $A'$  de  $A$  tal que  $A \sim A'$ . Sejam  $f : A \rightarrow A'$  e  $g : B \rightarrow A$  bijeções. Seja  $B' = g^{-1}(A')$ . Como  $g^{-1} : A \rightarrow B$  é uma bijeção, então  $B'$  é um subconjunto próprio de  $B$ . Além disso, a aplicação  $h : B \rightarrow B'$ , definida por  $h(b) = g^{-1}(f(g(b)))$ , para todo  $b \in B$ , é uma bijeção. Logo  $B$  é infinito.

(2) Consequência imediata de (1). □

**Teorema 6.7.** Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos.

- (1) Se  $A$  é infinito e  $A \subseteq B$ , então  $B$  é infinito.
- (2) Se  $B$  é finito e  $A \subseteq B$ , então  $A$  é finito.

*Demonstração.* (1) Admitamos que  $A$  é infinito. Então existe  $A' \subsetneq A$  tal que  $A' \sim A$ . Seja  $f : A \rightarrow A'$  uma bijeção. Assim, a aplicação  $g : B \rightarrow A' \cup (B \setminus A)$ , definida por

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in A \\ x, & \text{se } x \in (B \setminus A) \end{cases},$$

é bijetiva. Então, como  $A' \cup (B \setminus A)$  é uma parte própria de  $B$ ,  $B$  é infinito.

(2) Imediato a partir de (1). □

Um conjunto é finito se não é equipotente a nenhuma das suas partes próprias. Vejamos, agora, uma descrição efetiva dos conjuntos finitos.

Dado  $n \in \mathbb{N}$ , representamos por  $I_n$  o conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

**Lema 6.8.** *Sejam  $A$  um conjunto e  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Se  $A$  é equipotente a  $I_{n+1}$ , então, para qualquer  $x \in X$ ,  $A \setminus \{x\}$  é equipotente a  $I_n$ .*

*Demonstração.* Admitamos que  $A \sim I_{n+1}$  e seja  $f : A \rightarrow I_{n+1}$  uma bijeção. Sejam  $x \in A$  e  $A' = A \setminus \{x\}$ . Relativamente ao elemento  $x$  temos dois casos a considerar:

$$(i) \ f(x) = n + 1, \quad (ii) \ f(x) \in I_n.$$

(i) Se  $f(x) = n + 1$ , a correspondência  $g$  de  $A'$  em  $I_n$ , definida por  $g(a) = f(a)$ , para todo  $a \in A'$ , é uma aplicação e é bijetiva.

(ii) Se  $f(x) \in I_n$ , existe um elemento  $y \in A'$  tal que  $f(y) = n + 1$ . Por conseguinte, a correspondência de  $A'$  em  $I_n$ , definida por  $h(y) = f(x)$  e  $h(a) = f(a)$  se  $a \neq y$ , é uma aplicação; esta aplicação é uma bijeção.

Em ambos os casos tem-se  $A' \sim I_n$ . □

**Teorema 6.9.** (1) *Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , o conjunto  $I_n$  é finito.*

(2) *Um conjunto  $A$  é finito se e só se  $A$  é vazio ou, para algum  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A$  é equipotente a  $I_n$ .*

*Demonstração.* (1) A prova é feita por indução sobre  $n$ .

(i) Base de indução ( $n = 1$ ): Para  $n = 1$ , temos  $I_1 = \{1\}$ . O único subconjunto próprio de  $I_1$  é o conjunto vazio e  $I_1 \sim \emptyset$ . Logo, para  $n = 1$ ,  $I_n$  é finito.

(ii) Passo de indução: Seja  $k \in \mathbb{N}$ . Admitamos que  $I_k = \{0, 1, 2, \dots, k\}$  é finito. Pretendemos mostrar que  $I_{k+1} = \{0, 1, 2, \dots, k, k+1\}$  é finito. No sentido de fazer a prova por redução ao absurdo, admitamos que  $I_{k+1}$  é infinito. Então existe  $X \subsetneq I_{k+1}$  tal que  $I_{k+1} \sim X$ . Relativamente ao conjunto  $X$  temos dois casos a considerar:

$$\alpha) \ k + 1 \in X;$$

$$\beta) \ k + 1 \notin X.$$

## cardinalidade de conjuntos

Caso  $\alpha$ ): Se  $k + 1 \in X$ , então  $X \setminus \{k + 1\} \subsetneq I_k$ . Mas, uma vez que  $X \sim I_{k+1}$ , pelo lema anterior tem-se  $X \setminus \{k + 1\} \sim I_k$ , o que contradiz a hipótese de que  $I_k$  é finito.

Caso  $\beta$ ): Se  $k + 1 \notin X$ , então  $X \subseteq I_k$ . Logo, para todo  $x \in X$ ,  $X \setminus \{x\} \subsetneq I_k$ . Uma vez que  $X \sim I_{k+1}$ , pelo lema anterior segue que  $X \setminus \{x\} \sim I_k$ , contradizendo a hipótese de que  $I_k$  é finito.

Logo, para todo  $k \in \mathbb{N}$ , se  $I_k$  é finito,  $I_{k+1}$  também é finito.

Por (i), (ii) e pelo Princípio de Indução para  $\mathbb{N}$ , concluímos que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n$  é finito.

(2)  $\Rightarrow$ ) No sentido de fazer a prova por redução ao absurdo, admitamos que  $A$  é finito,  $A \neq \emptyset$  e que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A \sim I_n$ . Uma vez que  $A \neq \emptyset$ , existe  $a_1$  tal que  $a_1 \in A$ . Então  $\{a_1\} \subseteq A$ , mas  $\{a_1\} \neq A$ , pois  $A \sim I_1$ . Seja  $a_2 \in A \setminus \{a_1\}$ . Então  $\{a_1, a_2\} \subseteq A$ , mas  $\{a_1, a_2\} \neq A$ , pois  $A \sim I_2$ . De um modo geral, sejam  $a_1, a_2, \dots, a_k$  elementos distintos de  $A$ . Então  $\{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subsetneq A$ , pois  $A \sim I_k$ . Assim,  $A' = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq A$ . Então, como  $A' \sim \mathbb{N}$  e  $\mathbb{N}$  é infinito, o conjunto  $A'$  é infinito e, conseqüentemente,  $A$  também é infinito.

$\Leftarrow$ ) Admitamos que  $A = \emptyset$  ou  $A \sim I_n$ , para algum  $n \in \mathbb{N}$ . Se  $A = \emptyset$ ,  $A$  é finito. Se  $A \sim I_n$ , para algum  $n \in \mathbb{N}$ , então da alínea anterior segue que  $A$  é finito.  $\square$

### 6.3 Conjuntos contáveis

**Definição 6.10.** Um conjunto  $A$  diz-se **numerável** se  $A$  é equipotente a  $\mathbb{N}$ . Um conjunto  $A$  diz-se **contável** se é finito ou numerável.

**Exemplo 6.3.**

(1) Os conjuntos  $\mathbb{N}$ ,  $2\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{N}_0$ ,  $\mathbb{Z}$  são numeráveis.

(2) O conjunto  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  também é numerável. Dispondo os elementos de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  conforme sugerido no quadro seguinte

$$\begin{array}{ccccccc}
 (1, 1) & \rightarrow & (1, 2) & & (1, 3) & \rightarrow & (1, 4) \quad \dots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
 (2, 1) & & (2, 2) & & (2, 3) & & (2, 4) \quad \dots \\
 & \downarrow \nearrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
 (3, 1) & & (3, 2) & & (3, 3) & & (3, 4) \quad \dots \\
 & & \swarrow & & & & \\
 (4, 1) & & (4, 2) & & (4, 3) & & (4, 4) \quad \dots \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \quad \ddots
 \end{array}$$

as setas indicadas sugerem uma maneira de estabelecer uma bijeção entre  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  e  $\mathbb{N}$ ;

$$f(1, 1) = 1, f(1, 2) = 2, f(2, 1) = 3, \dots$$

A aplicação  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , definida por

$$f(m, n) = \frac{1}{2}(m + n - 2)(m + n - 1) + m,$$

é bijetiva. Logo  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ .



(3) Os conjuntos  $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ ,  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  são numeráveis.

(4) O conjunto  $\mathbb{Q}$  é numerável. De facto,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, m.d.c.(p, q) = 1 \right\}$$

e é simples verificar que a função  $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ , definida por

$$f(p, q) = \frac{p}{q}, \text{ para todo } (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N},$$

é bijetiva. Logo, como  $\mathbb{Q} \sim \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  e  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  é numerável, segue que  $\mathbb{Q}$  é numerável.

**Teorema 6.11.** (Cantor) O conjunto  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  não é contável.

*Demonstração.* Imediato, atendendo ao Teorema 6.4 e tendo em conta que  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  é infinito.  $\square$

**Teorema 6.12.** Seja  $A$  um conjunto contável. Se  $A' \subseteq A$ , então  $A'$  é um conjunto contável.

*Demonstração.* Seja  $A' \subseteq A$ . Se  $A'$  é finito, então  $A'$  é contável. Consideremos, agora, o caso em que  $A'$  é infinito. Uma vez que  $A' \subseteq A$ , o conjunto  $A$  também é infinito, pelo que  $A \sim \mathbb{N}$ . Pondo  $A = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ , seja  $k_1$  o menor dos naturais  $k$  tais que  $a_k \in A'$  (note-se que tal natural existe pelo Princípio da Boa Ordenação em  $\mathbb{N}$ ). Assim,  $\{a_{k_1}\} \subseteq A'$ , mas  $A' \neq \{a_{k_1}\}$ , pois  $A'$  é infinito. Seja  $k_2$  o menor dos naturais  $k > k_1$  tais que  $a_k \in A'$ . Tem-se  $\{a_{k_1}, a_{k_2}\} \subseteq A'$ , mas  $A' \neq \{a_{k_1}, a_{k_2}\}$ . De modo geral, seja  $k_{r+1}$  o menor dos naturais  $k > k_r$  tais que  $a_k \in A'$ .

Seja  $A'' = \{a_{k_r} \mid r \in \mathbb{N}\}$ . Então  $A''$  é numerável e  $A'' \subseteq A'$ . Seja  $a \in A'$ . Então  $a \in A$  e, portanto,  $a = a_s$ , para algum  $s \in \mathbb{N}$ . Se  $k_r \leq s$ , para todo  $r \in \mathbb{N}$ , ter-se-ia,  $A'' \subseteq \{a_1, \dots, a_s\}$  e  $A''$  seria finito, absurdo. Portanto  $\{k_r \mid k_r > s\} \neq \emptyset$ . Seja  $k_m$  o elemento mínimo deste conjunto. Tem-se  $k_{m-1} \leq s < k_m$ . Se fosse  $k_{m-1} < s$ , obtinha-se uma contradição com o facto de  $k_m$  ser o menor dos naturais  $k > k_{m-1}$  tais que  $a_k \in A'$ , pois  $s < k_{m-1}$  e  $a_s = a \in A'$ . Logo  $k_{m-1} = s$  e, portanto,  $a = a_{k_{m-1}} \in A''$ . Assim,  $A' \subseteq A''$ , e, por conseguinte,  $A' = A''$  é numerável.  $\square$

**Teorema 6.13.** Para qualquer conjunto  $A$ , as afirmações seguintes são equivalentes:

- (1)  $A$  é contável.
- (2)  $A = \emptyset$  ou existe uma função sobrejetiva  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ .
- (3) Existe uma função injetiva  $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* (1)  $\Rightarrow$  (2) Suponhamos que  $A$  é contável. Caso  $A = \emptyset$ , não há nada a provar. Se  $A \neq \emptyset$ , temos dois casos a considerar:  $A$  é finito ou  $A$  é infinito. Se  $A$  é infinito, então  $A \sim \mathbb{N}$  e, portanto, existe uma função sobrejetiva  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ . Se  $A$  é finito, então existe uma função bijetiva  $f$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$  em  $A$ , para algum  $n \in \mathbb{N}$ , e, por conseguinte, existe

## cardinalidade de conjuntos

uma função sobrejetiva de  $\mathbb{N}$  em  $A$ , uma vez que  $\{1, 2, \dots, n\} \subseteq \mathbb{N}$ ; de facto, fixando  $a \in A$ , podemos considerar a função  $h : \mathbb{N} \rightarrow A$  definida por

$$h(i) = \begin{cases} f(i) & \text{se } i \leq n \\ a & \text{se } i > n \end{cases}.$$

É simples verificar que  $h$  é sobrejetiva.

(2)  $\Rightarrow$  (3) Se  $A = \emptyset$ , a função  $\emptyset : \emptyset \rightarrow \mathbb{N}$  é injetiva. Consideremos, agora, o caso em que existe uma função sobrejetiva  $g : \mathbb{N} \rightarrow A$ . Então, para cada  $a \in A$ , o conjunto  $g^{\leftarrow}(\{a\}) = \{n \in \mathbb{N} \mid g(n) = a\}$  é não vazio. Logo, pelo Princípio da Boa Ordenação em  $\mathbb{N}$ , o conjunto  $g^{\leftarrow}(\{a\})$  tem um elemento mínimo. Assim, podemos definir a função  $f : A \rightarrow \mathbb{N}$  por

$$f(a) = \min(g^{\leftarrow}(\{a\})), \text{ para cada } a \in A.$$

Para cada  $a \in A$ ,  $g(f(a)) = a$ , pelo que  $g \circ f = id_A$ . Logo, pela Proposição 4.12.,  $f$  é injetiva.

(3)  $\Rightarrow$  (1) Suponha-se que existe uma função injetiva  $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ . Então  $A \sim f(A)$ . Como  $f(A) \subseteq \mathbb{N}$  e  $\mathbb{N}$  é contável, pelo teorema anterior segue que  $f(A)$  é contável. Consequentemente,  $A$  também é contável. □

**Teorema 6.14.** *Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos tais que  $B$  é contável. Se existe uma função injetiva de  $A$  em  $B$ , então  $A$  é contável.*

*Demonstração.* Sejam  $B$  um conjunto contável e  $f : A \rightarrow B$  uma função injetiva. Uma vez que  $B$  é contável, existe uma função injetiva  $g : B \rightarrow \mathbb{N}$ . Atendendo a  $f$  e  $g$  são funções injetivas, a função  $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{N}$  também é injetiva e, pelo teorema anterior,  $A$  é contável. □

**Teorema 6.15.** *Sejam  $A$  e  $B$ .*

(1) *Se  $A$  ou  $B$  são contáveis, então  $A \cap B$  é contável.*

(2) *Se  $A$  e  $B$  são contáveis, então  $A \cup B$  é contável.*

(3) *Se  $A$  e  $B$  são contáveis, então  $A \times B$  é contável.*

*Demonstração.* (1) Admitamos que  $A$  é um conjunto contável ou que  $B$  é um conjunto contável. Caso  $A$  seja contável, então, pelo Teorema 6.12,  $A \cap B$  é contável, pois  $A \cap B \subseteq A$ . Se  $B$  é contável conclui-se de forma análoga que  $A \cap B$  contável.

(2) Admitamos que  $A$  e  $B$  são conjuntos contáveis.

Se  $A = \emptyset$ , tem-se  $A \cup B = B$  e, portanto  $A \cup B$  é contável. Se  $B = \emptyset$ , tem-se  $A \cup B = A$ , pelo que  $A \cup B$  é contável.

Consideremos, agora, que  $A \neq \emptyset$  e  $B \neq \emptyset$  e definam-se os conjuntos  $C_1 = \{1\} \times A$  e  $C_2 = \{2\} \times B$ . Atendendo a que  $A$  e  $B$  são conjuntos contáveis, existem funções injetivas  $f_1 : A \rightarrow \mathbb{N}$  e  $f_2 : B \rightarrow \mathbb{N}$ . Assim, pode-se definir a função  $h : C_1 \cup C_2 \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  dada por

$$h(i, x) = (i, f_i(x)).$$

A função  $h$  está bem definida e é simples verificar que esta função é injetiva.

A função  $k : A \cup B \rightarrow C_1 \cup C_2$  definida por

$$k(x) = \begin{cases} (1, x) & \text{se } x \in A \\ (2, x) & \text{se } x \in B \setminus A \end{cases}$$

também é injetiva.

Uma vez que  $h$  e  $k$  são funções injetivas, a função  $h \circ k : A \cup B \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  também é injetiva. Então, atendendo a que  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  é contável e considerando o Teorema 6.14,  $A \cup B$  é contável.

(3) Admitamos que  $A$  e  $B$  são conjuntos contáveis. Então existem funções injetivas  $f : A \rightarrow \mathbb{N}$  e  $g : B \rightarrow \mathbb{N}$ . A partir destas funções define-se a função  $h : A \times B \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  por

$$h(x, y) = (f(x), g(y)).$$

É um exercício simples verificar que a função  $h$  é injetiva.

Atendendo a que  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  é numerável, pelo teorema anterior conclui-se que  $A \times B$  é contável.  $\square$

O resultado anterior pode ser generalizado a famílias de conjuntos com mais de dois conjuntos.

**Teorema 6.16.** *Seja  $I$  um conjunto contável e  $\{A_i\}_{i \in I}$  uma família de conjuntos contáveis.*

(1) *Se  $I \neq \emptyset$ , então  $\bigcap_{i \in I} A_i$  é contável.*

(2) *O conjunto  $\bigcup_{i \in I} A_i$  é contável.*

*Demonstração.* Sejam  $I$  um conjunto contável e  $\{A_i\}_{i \in I}$  uma família de conjuntos contáveis.

(1) Admitamos que  $I \neq \emptyset$  e seja  $A_k \in \{A_i\}_{i \in I}$ . Como  $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_k$  e  $A_k$  é contável, então, pelo Teorema 6.12,  $\bigcap_{i \in I} A_i$  é contável.

(2) Seja  $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ . Pretende-se mostrar que  $A$  é contável.

Se  $I = \emptyset$ , tem-se  $A = \emptyset$  e  $\emptyset$  é contável.

Admitamos, agora, que  $I \neq \emptyset$ . Uma vez que  $I$  é contável, existe uma função injetiva de  $I$  em  $\mathbb{N}$ ; seja  $f : I \rightarrow \mathbb{N}$  uma dessas funções. Atendendo a que, para cada  $i \in I$ , o conjunto  $A_i$  é contável, também existe uma função injetiva  $f_i : A_i \rightarrow \mathbb{N}$ . Para cada  $i \in I$ , defina-se  $B_i = \{i\} \times A_i$  e seja  $B = \bigcup_{i \in I} B_i$ . Se  $i, j \in I$  e  $i \neq j$ , tem-se  $B_i \cap B_j = \emptyset$ . Logo, dado  $b \in B$ , existe um e um só  $i \in I$  tal que  $b \in B_i$ , e tem-se  $b = (i, x)$ , para alguns  $i \in I$  e  $x \in A_i$ . Assim, pode-se definir a função  $g : B \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  por

$$g(i, x) = (f(i), f_i(x)),$$

a qual é injetiva.

Para cada  $x \in A$ , escolhamos  $i \in I$  tal que  $x \in A_i$  e considere-se a função  $h : A \rightarrow B$  definida por  $h(x) = (i, x)$ . A função  $h$  é, claramente, injetiva.

Uma vez que  $g$  e  $h$  são funções injetivas, a função  $g \circ h : A \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  também é injetiva. Assim, atendendo a que  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  é contável, o conjunto  $A$  também é contável.  $\square$

**Teorema 6.17.** *Sejam  $n \in \mathbb{N}$  e  $C_1, \dots, C_n$  conjuntos contáveis. Então  $C_1 \times \dots \times C_n$  é contável.*

*Demonstração.* A prova pode ser feita por indução matemática.  $\square$

## cardinalidade de conjuntos

**Teorema 6.18.** *O intervalo real  $]0, 1[$  não é contável.*

*Demonstração.* No sentido de fazer a prova por redução ao absurdo, admitamos que  $]0, 1[$  é contável. Então, existe uma função injetiva  $g : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{N}$ . Além disso, é simples verificar que também existem funções injetivas de  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  em  $]0, 1[$ , como, por exemplo, a função  $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow ]0, 1[$  definida por

$$f(A) = 0.d_1d_2 \dots d_i \dots$$

onde, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$d_n = \begin{cases} 3 & \text{se } n \in A \\ 7 & \text{se } n \notin A \end{cases},$$

i.e.,  $f(A)$  é um número real entre 0 e 1 dado pela sua representação decimal e tal que o seu  $n$ -ésimo dígito  $d_n$  é dado pela regra anterior. Para provar que  $f$  é injetiva, consideremos  $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$  tais que  $A \neq B$ . Então, existe algum  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n \in A$  e  $n \notin B$  ou  $n \notin A$  e  $n \in B$ . Consequentemente,  $f(A)$  e  $f(B)$  não são iguais, uma vez que a sua expansão decimal difere no  $n$ -ésimo dígito. Logo,  $f$  é injetiva.

Atendendo a que  $f$  e  $g$  são funções injetivas, a função  $g \circ f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}$  também é injetiva e, portanto,  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  seria contável, o que contradiz o Teorema 6.11.  $\square$

**Teorema 6.19.** *O conjunto  $\mathbb{R}$  não é contável.*

*Demonstração.* Consequência imediata dos teoremas 6.12 e 6.18.  $\square$

### 6.4 Cardinal de um conjunto

Na primeira secção deste capítulo foi definido o formalismo que permite comparar o “tamanho” de dois conjuntos, pelo que já é possível definir o que se entende por conjuntos com o mesmo “tamanho”.

**Definição 6.20.** *Sejam  $A, B$  conjuntos. Se os conjuntos  $A$  e  $B$  são equipotentes diz-se que  $A$  e  $B$  têm o mesmo cardinal, e escreve-se  $\#A = \#B$  ou  $|A| = |B|$ .*

Não definimos de forma precisa o cardinal de um conjunto. Convencionamos que o cardinal de um conjunto designa a propriedade que  $A$  tem em comum com todos os conjuntos equipotentes a  $A$ . O cardinal de um conjunto é, em geral, designado por uma letra grega:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , ... Para indicar que  $\alpha$  designa o cardinal de um conjunto  $A$ , escreve-se  $\alpha = |A|$ .

Como já observámos anteriormente, o único conjunto equipotente ao conjunto vazio é o conjunto vazio, e escreve-se  $|\emptyset| = 0$ . No caso de um conjunto finito, identifica-se o cardinal de  $A$  com o número de elementos de  $A$ . No caso dos conjuntos  $\mathbb{N}$  e  $\mathbb{R}$ , escreve-se  $|\mathbb{N}| = \aleph_0$  ( $\aleph$ , “alef”, é a primeira letra do alfabeto hebraico) e  $|\mathbb{R}| = c$  ( $c$  designa a *potência do contínuo*).

Da alínea (3) do exemplo 6.1 e da alínea (4) do exemplo 6.3 é imediato o resultado seguinte.

**Teorema 6.21.**  $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$  e  $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$ .

Dado um conjunto  $A$ , representa-se por  $2^{|A|}$  o cardinal do conjunto  $\{0, 1\}^A$  das aplicações de um conjunto  $A$  em  $\{0, 1\}$ . Assim, pela alínea (8) do exemplo 6.1 tem-se

**Teorema 6.22.** Para qualquer conjunto  $A$ ,  $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$ .

Seguidamente define-se o que se entende por um cardinal ser menor do que outro.

**Definição 6.23.** Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos. Diz-se que o **cardinal de  $A$  é menor ou igual do que o cardinal de  $B$** , e escreve-se  $|A| \leq |B|$ , se  $A$  é equipotente a um subconjunto de  $B$ . Se  $|A| \leq |B|$  e  $|A| \neq |B|$ , escreve-se  $|A| < |B|$  e diz-se que **cardinal de  $A$  é menor do que o cardinal de  $B$** .

A partir da definição anterior é simples a prova do resultado seguinte.

**Teorema 6.24.** Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos. Então

1.  $|A| \leq |A|$ .
2. Se  $|A| \leq |B|$  e  $|B| \leq |C|$ , então  $|A| \leq |C|$ .

*Demonstração.* Exercício. □

**Teorema 6.25.** (Teorema de Cantor) Para qualquer conjunto  $A$ , tem-se  $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ .

*Demonstração.* Se  $A = \emptyset$ , tem-se  $|A| = 0$  e  $|\mathcal{P}(A)| = 1$ .

Se  $A \neq \emptyset$ , a aplicação

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \mathcal{P}(A) \\ x &\mapsto \{x\} \end{aligned}$$

é injetiva e, portanto,  $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$ . Pelo Teorema 6.4 conclui-se, então, que  $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ . □

Se  $A$  e  $B$  são conjuntos tais que  $|A| \leq |B|$  e  $|B| \leq |A|$ , então  $A$  e  $B$  não têm que ser necessariamente iguais, mas será que têm de ter o mesmo cardinal? Georg Cantor começou por dar uma resposta menos geral a esta questão, mas trabalhos desenvolvidos posteriormente, de forma independente, por Ernst Schröder (1841-1902) e Felix Bernstein (1878-1956) permitiram dar uma resposta afirmativa a esta questão.

**Teorema 6.26.** (Teorema de Schröder-Bernstein) Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos. Se  $|A| \leq |B|$  e  $|B| \leq |A|$ , então  $|A| = |B|$ .

Com base neste resultado é possível estabelecer a igualdade entre o cardinal de  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  e o cardinal de  $\mathbb{R}$ .

## cardinalidade de conjuntos

**Teorema 6.27.**  $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$ , i.e.,  $2^{\aleph_0} = c$ .

*Demonstração.* Uma vez que  $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$ , também se tem  $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ .

A aplicação

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \\ a &\mapsto \{x \in \mathbb{Q} \mid x < a\} \end{aligned}$$

é injetiva. Logo  $c = |\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{Q})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}$ .

A aplicação

$$\begin{aligned} g : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} &\rightarrow [0, 1] \\ h &\mapsto 0.h(1)h(2)h(3)\dots \end{aligned}$$

também é injetiva. Logo  $2^{\aleph_0} = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\{0, 1\}^{\mathbb{N}}| \leq |[0, 1]| = |\mathbb{R}| = c$ .

Então, pelo Teorema de Schröder-Bernstein,  $2^{\aleph_0} = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}| = c$ . □

A respeito de cardinais, vale ainda o resultado seguinte

**Teorema 6.28.** *Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos. Tem-se um e um só dos casos seguintes:  $|A| < |B|$ ,  $|A| = |B|$ ,  $|B| < |A|$ .*

É consequência do Teorema 6.12 que não existe qualquer conjunto infinito com cardinal inferior a  $\aleph_0$ . A partir de resultados estabelecidos anteriormente também se prova a existência de cardinais superiores a  $\aleph_0$ : de facto,  $\mathbb{R} \approx \mathbb{N}$  e, além disso, a função  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(n) = n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , é injetiva, pelo que  $\mathbb{N} \sim f(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{R}$ ; assim,  $\aleph_0 \neq c$  e  $\aleph_0 \leq c$  e, portanto,  $\aleph_0 < c$ . A existência de cardinais superiores a  $c$  é consequência do Teorema 6.25. Quanto a cardinais entre  $\aleph_0$  e  $c$ , Georg Cantor não conseguiu apresentar uma prova da existência ou da inexistência de tais cardinais, pelo que avançou com a hipótese conhecida por *Hipótese do Contínuo*.

**Hipótese do Contínuo** Não existe nenhum cardinal  $\beta$  tal que  $\aleph_0 < \beta < c$ .