

Álgebra Universal e Categorias

3. Teoria de Categorias

3.1. Justifique que cada uma das estruturas seguintes define uma categoria.

- (a) $\mathbf{M} = (\{M\}, M, \text{dom}, \text{cod}, \circ)$, onde $\mathcal{M} = (M; \cdot, 1_M)$ é um monóide; $\text{dom} : M \rightarrow \{M\}$ é a função que a cada elemento de M associa M ; $\text{cod} : M \rightarrow \{M\}$ é a função que a cada elemento de M associa M , \circ é a operação binária do monóide.

Da definição de \mathbf{M} segue que:

- dom e cod são funções de M em $\{M\}$;
- \circ é uma função de $\{(s, r) \in M \times M \mid \text{cod}(s) = \text{dom}(r)\}$ em M , pois \cdot é uma função de $M \times M$ em M ;
- a classe de morfismos de M em M é M e M é um conjunto;
- para quaisquer $r, s \in M$, tem-se $r \cdot s \in M$ (pois \cdot é uma operação binária em M), logo

$$\text{dom}(r \circ s) = \text{dom}(r \cdot s) = M = \text{dom}(s) \text{ e } \text{cod}(r \circ s) = \text{cod}(r \cdot s) = M = \text{cod}(r);$$

- para o único elemento de $\{M\}$, existe $\text{id}_M = 1_M \in M$ tal que $\text{dom}_{\mathbf{M}}(\text{id}_M) = M = \text{cod}_{\mathbf{M}}(\text{id}_M)$ e, para quaisquer $r, s \in M$,

$$\text{id}_M \circ r = 1_M \cdot r = r \quad \text{e} \quad s \circ \text{id}_M = s \cdot 1_M = s,$$

pois 1_M é o elemento neutro de \mathcal{M} ;

- para quaisquer $r, s, t \in M$, tem-se

$$(r \circ s) \circ t = (r \cdot s) \cdot t = r \cdot (s \cdot t) = r \circ (s \circ t),$$

pois a operação binária \cdot é associativa.

Logo, por definição de categoria, a estrutura \mathbf{M} é uma categoria.

- (b) $\mathbf{P} = (P, \leq, \text{dom}, \text{cod}, \circ)$, onde (P, \leq) é um conjunto parcialmente ordenado; $\text{dom} : \leq \rightarrow P$ é a função que a cada par $(a, b) \in \leq$ associa o elemento a ; $\text{cod} : \leq \rightarrow P$ é a função que a cada par $(a, b) \in \leq$ associa o elemento b ; $\circ : \{((b, c), (a, b)) \mid (a, b), (b, c) \in \leq\} \rightarrow \leq$ é a função definida por $(b, c) \circ (a, b) = (a, c)$, para quaisquer $(a, b), (b, c) \in \leq$.

Da definição de \mathbf{P} segue que:

- dom e cod são funções de \leq em P ;
- \circ é uma função de $\{((b, c), (a, b)) \mid (a, b), (b, c) \in \leq\}$ em \leq (esta função está bem definida, pois a relação \leq é transitiva);
- para quaisquer $a, b \in P$, a classe de morfismos de a em b é $\{(a, b)\} \cap \leq$ e $\{(a, b)\} \cap \leq$ é um conjunto;
- para quaisquer $(a, b), (b, c) \in \leq$,

$$\text{dom}((b, c) \circ (a, b)) = \text{dom}((a, c)) = a = \text{dom}((a, b))$$

e

$$\text{cod}((b, c) \circ (a, b)) = \text{cod}((a, c)) = c = \text{cod}((b, c));$$

- para qualquer $a \in P$, existe $\text{id}_a = (a, a) \in \leq$ (pois \leq é reflexiva) tal que $\text{dom}(\text{id}_a) = a = \text{cod}(\text{id}_a)$ e, para quaisquer $(a, b), (c, a) \in \leq$,

$$\text{id}_a \circ (c, a) = (a, a) \circ (c, a) = (c, a) \quad \text{e} \quad (a, b) \circ \text{id}_a = (a, b) \circ (a, a) = (a, b);$$

- para quaisquer $(a, b), (b, c), (c, d) \in \leq$, tem-se

$$((c, d) \circ (b, c)) \circ (a, b) = (b, d) \circ (a, b) = (a, d) = (c, d) \circ (a, c) = (c, d) \circ ((b, c) \circ (a, b)).$$

Logo, por definição de categoria, a estrutura \mathbf{P} é uma categoria.

- (c) $\mathbf{N} = (\mathbb{N}, \bigcup_{m,n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}), \text{dom}, \text{cod}, \circ)$, onde, para cada $m, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ é a coleção de todas as matrizes reais do tipo $n \times m$; $\text{dom} : \bigcup_{m,n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{N}$ é a função que a cada $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ associa o natural n , $\text{cod} : \bigcup_{m,n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{N}$ é a função que a cada $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ associa o natural m ; $\circ : \{(A, B) \in \mathcal{M}_{p \times q}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{q \times r}(\mathbb{R}) \mid p, q, r \in \mathbb{N}\} \rightarrow \bigcup_{m,n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ é a função definida por $A \circ B = A \cdot B$, onde \cdot é a multiplicação usual de matrizes.

Da definição de \mathbf{N} segue que:

- dom e cod são funções de $\bigcup_{m,n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ em \mathbb{N} ;
- \circ é uma função de $\{(A, B) \in \mathcal{M}_{p \times q}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{q \times r}(\mathbb{R}) \mid p, q, r \in \mathbb{N}\}$ em $\bigcup_{m,n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ (esta função está bem definida, pois, para quaisquer $(A, B) \in \mathcal{M}_{p \times q}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{q \times r}(\mathbb{R})$, a multiplicação $A \cdot B$ está definida);
- para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, a classe de morfismos de n em m é $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ é um conjunto;
- para quaisquer $(A, B) \in \mathcal{M}_{p \times q}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{q \times r}(\mathbb{R})$,

$$\text{dom}(A \circ B) = \text{dom}(A \cdot B) = r = \text{dom}(B), \text{ pois } A \cdot B \in \mathcal{M}_{p \times r}(\mathbb{R})$$

e

$$\text{cod}(A \circ B) = \text{cod}(A \cdot B) = p = \text{cod}(A), \text{ pois } A \cdot B \in \mathcal{M}_{p \times r}(\mathbb{R});$$

- para qualquer $n \in \mathbb{N}$, existe $\text{id}_n = I_n \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tal que $\text{dom}(\text{id}_n) = n = \text{cod}(\text{id}_n)$ e, para quaisquer $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathcal{M}_{p \times n}(\mathbb{R})$,

$$\text{id}_n \circ A = I_n \cdot A = A \quad \text{e} \quad B \circ \text{id}_n = B \cdot I_n = B;$$

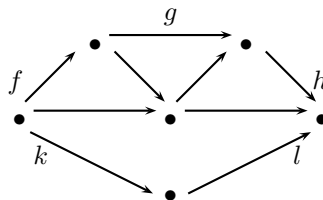
- para quaisquer $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{R})$ e $C \in \mathcal{M}_{p \times q}(\mathbb{R})$, tem-se

$$(A \circ B) \circ C = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \circ (B \circ C),$$

pois a multiplicação usual de matrizes é comutativa.

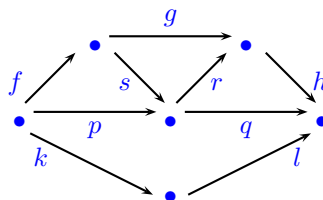
Logo, por definição de categoria, a estrutura \mathbf{N} é uma categoria.

3.2. Numa categoria \mathbf{C} , considere o diagrama a seguir representado



Mostre que se os quatro triângulos internos do diagrama comutam, então $h \circ g \circ f = l \circ k$.

Consideremos o diagrama



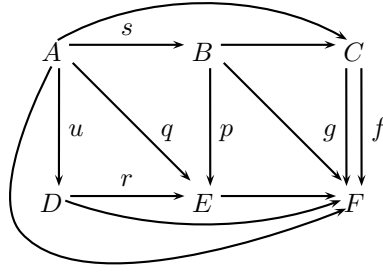
e admitamos que os quatro triângulos internos do diagrama comutam. Então tem-se:

$$p = s \circ f, \quad q = h \circ r, \quad g = r \circ s, \quad l \circ k = q \circ p.$$

Logo

$$\begin{aligned}
 h \circ g \circ f &= h \circ (r \circ s) \circ f \\
 &= (h \circ r) \circ (s \circ f) \\
 &= q \circ p \\
 &= l \circ k.
 \end{aligned}$$

3.3. Seja \mathbf{C} a categoria definida pelo diagrama



Construa:

- (a) A subcategoria plena \mathbf{C}' de \mathbf{C} tal que $\text{Obj}(\mathbf{C}') = \{A, B, C, F\}$.

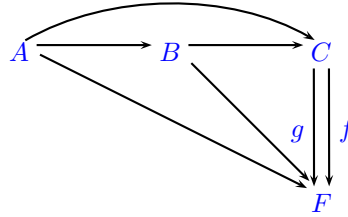
A categoria $\mathbf{C}' = (\text{Obj}(\mathbf{C}'), \text{Mor}(\mathbf{C}'), \text{dom}_{\mathbf{C}'}, \text{cod}_{\mathbf{C}'}, \circ_{\mathbf{C}'})$ diz-se uma subcategoria plena de \mathbf{C} se:

- (1) \mathbf{C}' é uma subcategoria de \mathbf{C} , ou seja, se:

- $\text{Obj}(\mathbf{C}') \subseteq \text{Obj}(\mathbf{C})$;
- $\text{Mor}(\mathbf{C}') \subseteq \text{Mor}(\mathbf{C})$ e $\{id_A^{\mathbf{C}} | A \in \text{Obj}(\mathbf{C}')\} \subseteq \text{Mor}(\mathbf{C}')$;
- para qualquer $f \in \text{Mor}(\mathbf{C}')$, $\text{dom}_{\mathbf{C}'}(f) = \text{dom}_{\mathbf{C}}(f)$ e $\text{cod}_{\mathbf{C}'}(f) = \text{cod}_{\mathbf{C}}(f)$;
- para qualquer $A \in \text{Obj}(\mathbf{C}')$, o morfismo $id_A^{\mathbf{C}'}$ é o mesmo que o morfismo $id_A^{\mathbf{C}}$;
- para quaisquer \mathbf{C}' -morfismos $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow D$, o morfismo $g \circ_{\mathbf{C}'} f$ é o mesmo que o morfismo $g \circ_{\mathbf{C}} f$.

- (2) para quaisquer $A, B \in \text{Obj}(\mathbf{C}')$, $\text{hom}_{\mathbf{C}'}(A, B) = \text{hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$.

Assim, a subcategoria plena \mathbf{C}' de \mathbf{C} tal que $\text{Obj}(\mathbf{C}') = \{A, B, C, F\}$ é a categoria representada pelo diagrama seguinte



- (b) A categoria dos objetos sobre E .

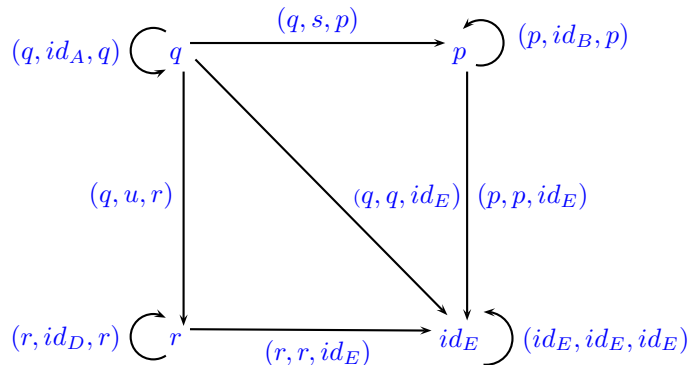
A categoria dos objetos sobre E , é a categoria

$$\mathbf{C}/\mathbf{E} = (\text{Obj}(\mathbf{C}/\mathbf{E}), \text{Mor}(\mathbf{C}/\mathbf{E}), \text{dom}_{\mathbf{C}/\mathbf{E}}, \text{cod}^{\mathbf{C}/\mathbf{E}}, \circ_{\mathbf{C}/\mathbf{E}})$$

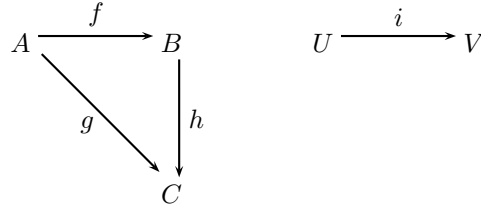
definida do seguinte modo:

- os objetos de \mathbf{C}/\mathbf{E} são todos os morfismos de \mathbf{C} com codomínio E ;
- dados objetos f e g de \mathbf{C}/\mathbf{E} (isto é, dados \mathbf{C} -morfismos $f : X \rightarrow E$ e $g : Y \rightarrow E$), um \mathbf{C}/\mathbf{E} -morfismo de f em g é um triplo de morfismos (f, j, g) , onde j é um \mathbf{C} -morfismo de X em Y tal que $g \circ_{\mathbf{C}} j = f$;
- para cada objeto $f : X \rightarrow E$ de \mathbf{C}/\mathbf{E} , o morfismo identidade $id_f^{\mathbf{C}/\mathbf{E}}$ é o triplo de \mathbf{C} -morfismos (f, id_X, f) ;
- a composição $(f_2, h, f_3) \circ_{\mathbf{C}/\mathbf{E}} (f_1, g, f_2)$ dos morfismos $(f_1, g, f_2) : f_1 \rightarrow f_2$ e $(f_2, h, f_3) : f_2 \rightarrow f_3$ de \mathbf{C}/\mathbf{E} é o morfismo $(f_1, h \circ_{\mathbf{C}} g, f_3) : f_1 \rightarrow f_3$.

Assim, a categoria dos objetos sobre E é a categoria representada por



3.4. (a) Sejam \mathbf{C} e \mathbf{D} as categorias definidas, respetivamente, pelos diagramas seguintes



Defina por meio de um diagrama a categoria produto $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$.

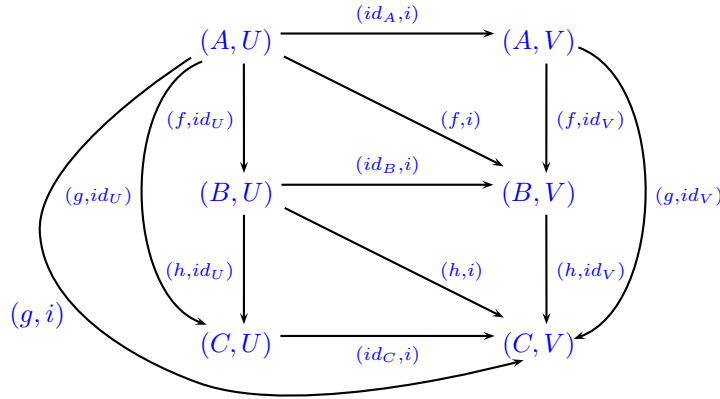
Dadas categorias

$$\mathbf{C} = (\text{Obj}(\mathbf{C}), \text{Mor}(\mathbf{C}), \text{dom}_{\mathbf{C}}, \text{cod}_{\mathbf{C}}, \circ_{\mathbf{C}}) \text{ e } \mathbf{D} = (\text{Obj}(\mathbf{D}), \text{Mor}(\mathbf{D}), \text{dom}_{\mathbf{D}}, \text{cod}_{\mathbf{D}}, \circ_{\mathbf{D}}),$$

designa-se por categoria produto de \mathbf{C} por \mathbf{D} , e representa-se por $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$, a categoria definida do seguinte modo:

- os objetos de $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ são todos os pares (A, B) , onde A é um objeto de \mathbf{C} e B é um objecto de \mathbf{D} ;
- os morfismos de $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ são todos os pares (f, g) , onde f é um morfismo de \mathbf{C} e g é um morfismo de \mathbf{D} ;
- para qualquer $(f, g) \in \text{Mor}(\mathbf{C} \times \mathbf{D})$, $\text{dom}_{\mathbf{C} \times \mathbf{D}}(f, g) = (\text{dom}_{\mathbf{C}}(f), \text{dom}_{\mathbf{D}}(g))$ e $\text{cod}_{\mathbf{C} \times \mathbf{D}}(f, g) = (\text{cod}_{\mathbf{C}}(f), \text{cod}_{\mathbf{D}}(g))$;
- para cada objeto (A, B) de $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$, o morfismo identidade $\text{id}_{(A, B)}$ é o par $(\text{id}_A^{\mathbf{C}}, \text{id}_B^{\mathbf{D}})$;
- a composição $(f, g) \circ (f', g')$ dos morfismos (f, g) e (f', g') de $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ é definida componente a componente, isto é, $(f, g) \circ_{\mathbf{C} \times \mathbf{D}} (f', g') = (f \circ_{\mathbf{C}} f', g \circ_{\mathbf{D}} g')$.

A categoria $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ é a categoria definida pelo diagrama



3.5. Sejam $\mathcal{R} = (R; \cdot^{\mathcal{R}}, 1^{\mathcal{R}})$ e $\mathcal{S} = (S; \cdot^{\mathcal{S}}, 1^{\mathcal{S}})$ monóides vistos como categorias \mathbf{R} e \mathbf{S} . O que é a categoria produto $\mathbf{R} \times \mathbf{S}$?

Consideremos os monóides $\mathcal{R} = (R; \cdot^{\mathcal{R}}, 1^{\mathcal{R}})$ e $\mathcal{S} = (S; \cdot^{\mathcal{S}}, 1^{\mathcal{S}})$ vistos como categorias

$$\mathbf{R} = (\text{Obj}(\mathbf{R}), \text{Mor}(\mathbf{R}), \text{dom}_{\mathbf{R}}, \text{cod}_{\mathbf{R}}, \circ_{\mathbf{R}}) \text{ e } \mathbf{S} = (\text{Obj}(\mathbf{S}), \text{Mor}(\mathbf{S}), \text{dom}_{\mathbf{S}}, \text{cod}_{\mathbf{S}}, \circ_{\mathbf{S}}),$$

respetivamente.

Então, considerando as categorias \mathbf{R} e \mathbf{S} definidas de acordo com o indicado em 3.1.(a), a categoria produto de \mathbf{R} e \mathbf{S} é a categoria $\mathbf{R} \times \mathbf{S} = (\text{Obj}(\mathbf{R} \times \mathbf{S}), \text{Mor}(\mathbf{R} \times \mathbf{S}), \text{dom}_{\mathbf{R} \times \mathbf{S}}, \text{cod}_{\mathbf{R} \times \mathbf{S}}, \circ_{\mathbf{R} \times \mathbf{S}})$, onde

- $\text{Obj}(\mathbf{R} \times \mathbf{S}) = \{(A, B) \mid A \in \text{Obj}(\mathbf{R}) \text{ e } B \in \text{Obj}(\mathbf{S})\} = \{(R, S)\}$;
- $\text{Mor}(\mathbf{R} \times \mathbf{S}) = \{(f, g) \mid f \in \text{Mor}(\mathbf{R}) \text{ e } g \in \text{Mor}(\mathbf{S})\} = R \times S$;
- para qualquer $(r, s) \in \text{Mor}(\mathbf{R} \times \mathbf{S})$, $\text{dom}_{\mathbf{R} \times \mathbf{S}}(r, s) = (R, S)$ e $\text{cod}_{\mathbf{R} \times \mathbf{S}}(r, s) = (R, S)$;
- $\text{id}_{(R, S)}^{\mathbf{R} \times \mathbf{S}} = (\text{id}_R^{\mathbf{R}}, \text{id}_S^{\mathbf{S}}) = (1_R, 1_S)$;
- para quaisquer $(r_1, s_1), (r_2, s_2) \in R \times S$, $(r_1, s_1) \circ_{\mathbf{R} \times \mathbf{S}} (r_2, s_2) = (r_1 \circ_{\mathbf{R}} s_1, r_2 \circ_{\mathbf{S}} s_2) = (r_1 \cdot^{\mathcal{R}} s_1, r_2 \cdot^{\mathcal{S}} s_2)$.

Logo $\mathbf{R} \times \mathbf{S}$ é a categoria correspondente ao produto direto dos monóides \mathcal{R} e \mathcal{S} .

- 3.6. (a) Seja (P, \leq) um conjunto parcialmente ordenado visto como uma categoria \mathbf{P} . O que é a categoria dual \mathbf{P}^{op} ?

Sejam (P, \leq) um conjunto parcialmente ordenado e $\mathbf{P} = (\text{Obj}(\mathbf{P}), \text{Mor}(\mathbf{P}), \text{dom}_{\mathbf{P}}, \text{cod}_{\mathbf{P}}, \circ_{\mathbf{P}})$ a categoria correspondente ao c.p.o. (P, \leq) .

Então, considerando a categoria \mathbf{P} definida de acordo com o indicado em 3.1.(b), a categorial dual de \mathbf{P} é a categoria $\mathbf{P}^{op} = (\text{Obj}(\mathbf{P}^{op}), \text{Mor}(\mathbf{P}^{op}), \text{dom}_{\mathbf{P}^{op}}, \text{cod}_{\mathbf{P}^{op}}, \circ_{\mathbf{P}^{op}})$, onde:

- $\text{Obj}(\mathbf{P}^{op}) = \text{Obj}(\mathbf{P}) = P$;
- $\text{Mor}(\mathbf{P}^{op}) = \text{Mor}(\mathbf{P}) = \leq$;
- $\text{dom}_{\mathbf{P}^{op}} : \text{Mor}(\mathbf{P}^{op}) \rightarrow \text{Obj}(\mathbf{P}^{op})$ e $\text{cod}_{\mathbf{P}^{op}} : \text{Mor}(\mathbf{P}^{op}) \rightarrow \text{Obj}(\mathbf{P}^{op})$ são as funções definidas por $\text{dom}_{\mathbf{P}^{op}}(f) = \text{cod}_{\mathbf{P}}(f)$ e $\text{cod}_{\mathbf{P}^{op}}(f) = \text{dom}_{\mathbf{P}}(f)$, para qualquer $f \in \text{Mor}(\mathbf{P}^{op}) = \text{Mor}(\mathbf{P})$;
- $\circ_{\mathbf{P}^{op}}$ é a função de $\{(g, f) \in \text{Mor}(\mathbf{P}^{op}) \times \text{Mor}(\mathbf{P}^{op}) \mid \text{cod}(f) = \text{dom}(g)\}$ em $\text{Mor}(\mathbf{P}^{op})$ definida por $g \circ_{\mathbf{P}^{op}} f = f \circ_{\mathbf{P}} g$, para quaisquer $f, g \in \text{Mor}(\mathbf{P}^{op})$ tais que $\text{cod}(f) = \text{dom}(g)$;
- para qualquer $a \in \text{Obj}(\mathbf{P}^{op}) = \text{Obj}(\mathbf{P})$, $\text{id}_a^{\mathbf{P}^{op}} = \text{id}_a^{\mathbf{P}} = (a, a)$.

Na sequência da definição anterior segue que, para quaisquer $a, b \in \text{Obj}(\mathbf{P}^{op}) = \text{Obj}(\mathbf{P})$,

$$\text{hom}_{\mathbf{P}^{op}}(a, b) = \text{hom}_{\mathbf{P}}(b, a) = \{(b, a)\} \cap \leq.$$

Logo, a categoria \mathbf{P}^{op} é a categoria correspondente ao c.p.o dual de (P, \leq) , ou seja, é a categoria referente ao c.p.o. (P, \leq^d) , onde \leq^d é a relação de ordem dual da relação \leq .

- (b) Seja \mathcal{R} um monóide visto como uma categoria \mathbf{R} . O que é a categoria dual \mathbf{R}^{op} ?

Consideremos o monóide $\mathcal{R} = (R; \cdot, 1_{\mathcal{R}})$ visto como uma categoria

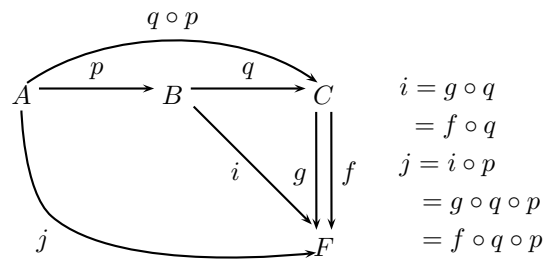
$$\mathbf{R} = (\text{Obj}(\mathbf{R}), \text{Mor}(\mathbf{R}), \text{dom}_{\mathbf{R}}, \text{cod}_{\mathbf{R}}, \circ_{\mathbf{R}}).$$

Considerando a categoria \mathbf{R} definida de acordo com o indicado em 3.1.(a), a categorial dual de \mathbf{R} é a categoria $\mathbf{R}^{op} = (\text{Obj}(\mathbf{R}^{op}), \text{Mor}(\mathbf{R}^{op}), \text{dom}_{\mathbf{R}^{op}}, \text{cod}_{\mathbf{R}^{op}}, \circ_{\mathbf{R}^{op}})$, onde:

- $\text{Obj}(\mathbf{R}^{op}) = \text{Obj}(\mathbf{R}) = \{R\}$;
- $\text{Mor}(\mathbf{R}^{op}) = \text{Mor}(\mathbf{R}) = R$;
- $\text{dom}_{\mathbf{R}^{op}} : \text{Mor}(\mathbf{R}^{op}) \rightarrow \text{Obj}(\mathbf{R}^{op})$ e $\text{cod}_{\mathbf{R}^{op}} : \text{Mor}(\mathbf{R}^{op}) \rightarrow \text{Obj}(\mathbf{R}^{op})$ são as funções definidas por $\text{dom}_{\mathbf{R}^{op}}(r) = \text{cod}_{\mathbf{R}}(r)$ e $\text{cod}_{\mathbf{R}^{op}}(r) = \text{dom}_{\mathbf{R}}(r)$, para qualquer $r \in \text{Mor}(\mathbf{R}^{op}) = \text{Mor}(\mathbf{R})$;
- $\circ_{\mathbf{R}^{op}}$ é a função de $\{(s, r) \in \text{Mor}(\mathbf{R}^{op}) \times \text{Mor}(\mathbf{R}^{op}) \mid \text{cod}(r) = \text{dom}(s)\}$ em $\text{Mor}(\mathbf{R}^{op})$ definida por $s \circ_{\mathbf{R}^{op}} r = r \circ_{\mathbf{R}} s = r \cdot_{\mathcal{R}} s$, para quaisquer $r, s \in \text{Mor}(\mathbf{R}^{op})$ tais que $\text{cod}(r) = \text{dom}(s)$;
- $\text{id}_R^{\mathbf{R}^{op}} = \text{id}_R^{\mathbf{R}} = 1_{\mathcal{R}}$.

Por conseguinte, a categoria \mathbf{R}^{op} é a categoria correspondente ao monóide $\mathcal{R}' = (R; *, 1^{\mathcal{R}'})$ onde, $1^{\mathcal{R}'} = 1^{\mathcal{R}}$ e, para quaisquer $r, s \in R$, $s * r = r \cdot s$.

- 3.7. Considere a categoria \mathbf{C} representada ao lado.



Indique, caso exista:

- (a) Um monomorfismo de \mathbf{C} .

Um \mathbf{C} -morfismo $h : X \rightarrow Y$ diz-se um monomorfismo se, para quaisquer \mathbf{C} -morfismos $s, t : Z \rightarrow X$,

$$h \circ s = h \circ t \Rightarrow s = t.$$

O morfismo $p : A \rightarrow B$ é um monomorfismo, pois, para quaisquer \mathbf{C} -morfismos $s, t : Z \rightarrow A$,

$$p \circ s = p \circ t \Rightarrow s = t.$$

Note-se que o único \mathbf{C} -morfismo com domínio A é o morfismo id_A . Logo, sendo s e t morfismos com codomínio A , tem-se $s = \text{id}_A$ e $t = \text{id}_A$.

- (b) Um morfismo que não seja um epimorfismo de \mathbf{C} .

Um \mathbf{C} -morfismo $h : X \rightarrow Y$ diz-se um epimorfismo se, para quaisquer \mathbf{C} -morfismos $s, t : Y \rightarrow Z$,

$$s \circ h = t \circ h \Rightarrow s = t.$$

O morfismo q não é um epimorfismo, pois existem $f, g \in \text{Mor}(\mathbf{C})$ tais que $f \neq g$ e $f \circ q = g \circ q$.

- (c) Um bimorfismo de \mathbf{C} .

O morfismo j é um bimorfismo, pois é simultaneamente um monomorfismo e um epimorfismo.

O morfismo j é um monomorfismo, uma vez que, para quaisquer morfismos $s, t : Z \rightarrow A$

$$j \circ s = j \circ t \Rightarrow s = t.$$

De facto, se s e t são morfismos com codomínio A , tem-se $s = id_A = t$, pois id_A é o único morfismo com codomínio A .

O morfismo j também é um epimorfismo, uma vez que, para quaisquer morfismos $s, t : F \rightarrow Z$,

$$s \circ j = t \circ j \Rightarrow s = t.$$

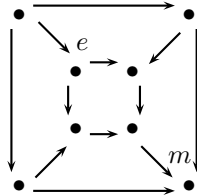
Com efeito, se s e t são morfismos com domínio F , então $s = id_F = t$, pois id_F é o único morfismo com domínio F .

- (d) Um isomorfismo de \mathbf{C} .

Um morfismo $h : X \rightarrow Y$ diz-se um isomorfismo se existe um morfismo $h' : Y \rightarrow X$ tal que $h \circ h' = id_Y$ e $h' \circ h = id_X$.

Para todo $X \in \text{Obj}(\mathbf{C})$, id_X é um isomorfismo, uma vez que $id_X \circ id_X = id_X$.

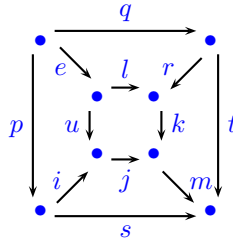
3.8. Numa categoria \mathbf{C} , considere o diagrama seguinte



Sabendo que os quatro trapézios deste diagrama são comutativos, mostre que:

- (a) Se o quadrado mais pequeno é comutativo, então o quadrado maior também é comutativo.

Admitamos que no diagrama seguinte os quatro trapézios e o quadrado pequeno são comutativos.



Então tem-se $r \circ q = l \circ e$, $m \circ k \circ r = t$, $m \circ j \circ i = s$, $u \circ e = i \circ p$, $j \circ u = k \circ l$.

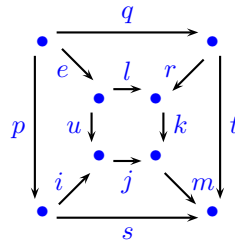
Logo

$$\begin{aligned} s \circ p &= (m \circ j \circ i) \circ p = m \circ j \circ (i \circ p) = m \circ j \circ (u \circ e) \\ &= m \circ (j \circ u) \circ e = m \circ (k \circ l) \circ e = m \circ k \circ (l \circ e) \\ &= m \circ k \circ (r \circ q) = (m \circ k \circ r) \circ q = t \circ q \end{aligned}$$

e, portanto, o quadrado maior é comutativo.

- (b) Se e é um epimorfismo, m é um monomorfismo e o quadrado maior é comutativo, então o quadrado pequeno também é comutativo.

Admitamos que no diagrama seguinte os quatro trapézios e o quadrado maior são comutativos.



Então tem-se $r \circ q = l \circ e$, $m \circ k \circ r = t$, $m \circ j \circ i = s$, $u \circ e = i \circ p$, $s \circ p = t \circ q$.

Admitamos também que e é um epimorfismo e m é um monomorfismo.

Considerando as igualdades anteriores e atendendo a que m é um monomorfismo e e é um epimorfismo, segue que

$$\begin{aligned}
 s \circ p = t \circ q &\Rightarrow (m \circ j \circ i) \circ p = (m \circ k \circ r) \circ q \\
 &\Rightarrow m \circ (j \circ i \circ p) = m \circ (k \circ r \circ q) \\
 &\Rightarrow j \circ i \circ p = k \circ r \circ q && (m \text{ é um monomorfismo}) \\
 &\Rightarrow j \circ u \circ e = k \circ l \circ e \\
 &\Rightarrow j \circ (u \circ e) = k \circ (l \circ e) \\
 &\Rightarrow j \circ u = k \circ l. && (e \text{ é um epimorfismo})
 \end{aligned}$$

Logo o quadrado mais pequeno é comutativo.

3.9. Sejam \mathbf{C} uma categoria e $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ morfismos em \mathbf{C} . Mostre que:

- (a) Se f e g são invertíveis à esquerda (respetivamente, direita), então $g \circ f$ é invertível à esquerda (respetivamente, direita).

Admitamos que f e g são invertíveis à esquerda. Então existem $i : B \rightarrow A$ e $j : C \rightarrow B$ tais que $i \circ f = id_A$ e $j \circ g = id_B$. Pretendemos mostrar que $g \circ f : A \rightarrow C$ é invertível à esquerda, ou seja, pretendemos mostrar que existe um \mathbf{C} -morfismo $h : C \rightarrow A$ tal que $h \circ (g \circ f) = id_A$.

Seja $h = i \circ j$. Considerando que $i \circ j \in \text{hom}(C, A)$ e

$$(i \circ j) \circ (g \circ f) = i \circ (j \circ g) \circ f = i \circ id_B \circ f = i \circ f = id_A,$$

concluimos que $g \circ f$ é invertível à esquerda.

Por dualidade segue que se f e g são invertíveis à direita, então $g \circ f$ também é invertível à direita.

- (b) Se $g \circ f$ é invertível à esquerda (respetivamente, direita), então f é invertível à esquerda (respetivamente, g é invertível à direita).

Admitamos que $g \circ f : A \rightarrow C$ é invertível à esquerda. Então existe um morfismo $i : C \rightarrow A$ tal que $i \circ (g \circ f) = id_A$. Então $(i \circ g) \circ f = id_A$. Logo f é invertível à esquerda, pois existe $h = i \circ g : B \rightarrow A$ tal que $h \circ f = id_A$.

Por dualidade segue que se $g \circ f$ é invertível à direita, então g é invertível à direita.

3.10. Sejam \mathbf{C} uma categoria e $f : A \rightarrow B$ um morfismo em \mathbf{C} . Mostre que:

- (a) Se f é invertível à esquerda, então f é um monomorfismo.

Admitamos que f é invertível à esquerda. Então existe $h : B \rightarrow A$ tal que $h \circ f = id_A$. Então, para quaisquer \mathbf{C} -morfismos $i, j : C \rightarrow A$,

$$\begin{aligned}
 f \circ i = f \circ j &\Rightarrow h \circ (f \circ i) = h \circ (f \circ j) \\
 &\Rightarrow (h \circ f) \circ i = (h \circ f) \circ j \\
 &\Rightarrow id_A \circ i = id_A \circ j \\
 &\Rightarrow i = j.
 \end{aligned}$$

(b) Se f é invertível à direita, então f é um epimorfismo.

Segue por dualidade da prova anterior.

3.11. Sejam \mathbf{C} uma categoria e $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ morfismos em \mathbf{C} . Mostre que se $g \circ f$ é um monomorfismo e f é invertível à direita, então g é um monomorfismo.

Sejam $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ morfismos em \mathbf{C} tais que $g \circ f$ é um monomorfismo e f é invertível à direita. Uma vez que f é invertível à direita existe $f' : B \rightarrow A$ tal que $f \circ f' = id_B$. Então, para quaisquer \mathbf{C} -morfismos $i : D \rightarrow B$ e $j : D \rightarrow B$,

$$\begin{aligned} g \circ i = g \circ j &\Rightarrow g \circ id_B \circ i = g \circ id_B \circ j && (id_B \circ h = h, \text{ para qualquer morfismo } h : D \rightarrow B) \\ &\Rightarrow g \circ (f \circ f') \circ i = g \circ (f \circ f') \circ j && (f' \text{ é o inverso direito de } f) \\ &\Rightarrow (g \circ f) \circ f' \circ i = (g \circ f) \circ f' \circ j && (\text{associatividade}) \\ &\Rightarrow f' \circ i = f' \circ j && (g \circ f \text{ é um monomorfismo}) \\ &\Rightarrow f \circ f' \circ i = f \circ f' \circ j && (\circ \text{ é uma função}) \\ &\Rightarrow id_B \circ i = id_B \circ j && (f' \text{ é o inverso direito de } f) \\ &\Rightarrow i = j && (id_B \circ h = h, \text{ para qualquer morfismo } h : D \rightarrow B). \end{aligned}$$

3.12. Sejam \mathbf{C} uma categoria e $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ morfismos em \mathbf{C} . Mostre que se f e g são isomorfismos, então $g \circ f$ é um isomorfismo e o seu inverso é $f^{-1} \circ g^{-1}$.

Sejam $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ morfismos em \mathbf{C} tais que f e g são isomorfismos. Então existem $f^{-1} : B \rightarrow A$ e $g^{-1} : C \rightarrow B$ tais que $f \circ f^{-1} = id_B$, $f^{-1} \circ f = id_A$, $g \circ g^{-1} = id_C$, $g^{-1} \circ g = id_B$. Pretendemos mostrar que $g \circ f : A \rightarrow C$ é um isomorfismo, ou seja, temos de mostrar que existe $h : C \rightarrow A$ tal que $h \circ (g \circ f) = id_A$ e $(g \circ f) \circ h = id_C$.

Seja $h = f^{-1} \circ g^{-1}$. Então $h \in \text{hom}(C, A)$ e

$$\begin{aligned} h \circ (g \circ f) &= (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ id_B \circ f = f^{-1} \circ f = id_A, \\ (g \circ f) \circ h &= (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ id_B \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = id_C \end{aligned}$$

Logo $g \circ f$ é invertível à direita e à esquerda, ou seja, $g \circ f$ é um isomorfismo.

3.13. Mostre que as seguintes condições sobre uma categoria \mathbf{C} são equivalentes:

- (I1) Todo o morfismo em \mathbf{C} é invertível à direita;
- (I2) Todo o morfismo em \mathbf{C} é invertível à esquerda;
- (I3) Todo o morfismo em \mathbf{C} é invertível.

(I1) \Rightarrow (I2) Admitamos que todo o morfismo de \mathbf{C} é invertível à direita. Seja $f : A \rightarrow B$ um \mathbf{C} -morfismo. Mostremos que f é invertível à esquerda. Por hipótese, existe um \mathbf{C} -morfismo $f' : B \rightarrow A$ tal que $f \circ f' = id_B$. Considerando que f' também é invertível à direita existe um \mathbf{C} -morfismo $f'' : A \rightarrow B$ tal que $f' \circ f'' = id_A$. Logo de $f \circ f' = id_B$ segue que $f' \circ f \circ f' \circ f'' = f' \circ id_B \circ f''$, ou seja, $f' \circ f = id_A$. Portanto, f é invertível à esquerda.

(I2) \Rightarrow (I3) Admitamos que todo o morfismo de \mathbf{C} é invertível à esquerda. Por dualidade da prova anterior segue que todo o morfismo de \mathbf{C} também é invertível à direita. Logo todo o morfismo é invertível.

(I3) \Rightarrow (I1) Imediato, pois todo o morfismo invertível é um morfismo invertível à direita (e à esquerda).

3.14. Seja $f : A \rightarrow B$ um isomorfismo numa categoria \mathbf{C} . Para cada objeto $C \in \text{Obj}(\mathbf{C})$, mostre que a função $f_C : \text{hom}(B, C) \rightarrow \text{hom}(A, C)$ definida por $f_C(g) = g \circ f$ é uma bijeção.

Sejam \mathbf{C} uma categoria e $f : A \rightarrow B$ um isomorfismo em \mathbf{C} . Considerando que f é um isomorfismo, existe $f^{-1} : B \rightarrow A \in \text{Mor}(\mathbf{C})$ tal que $f \circ f^{-1} = id_B$ e $f^{-1} \circ f = id_A$. Pretendemos mostrar que, para cada objeto $C \in \text{Obj}(\mathbf{C})$, a função $f_C : \text{hom}(B, C) \rightarrow \text{hom}(A, C)$ definida por $f_C(g) = g \circ f$ é injetiva e sobrejetiva.

- f_C injetiva

Para quaisquer \mathbf{C} -morfismos $g_1 : B \rightarrow C$ e $g_2 : B \rightarrow C$,

$$\begin{aligned} f_C(g_1) = f_C(g_2) &\Rightarrow g_1 \circ f = g_2 \circ f \\ &\Rightarrow (g_1 \circ f) \circ f^{-1} = (g_2 \circ f) \circ f^{-1} \\ &\Rightarrow g_1 \circ (f \circ f^{-1}) = g_2 \circ (f \circ f^{-1}) \\ &\Rightarrow g_1 \circ id_B = g_2 \circ id_B \\ &\Rightarrow g_1 = g_2. \end{aligned}$$

Logo f_C é injetiva.

- f_C sobrejetiva

Também é simples verificar que f_C é sobrejetiva. De facto, para qualquer $h \in \text{hom}(A, C)$, existe $g = h \circ f^{-1} \in \text{hom}(B, C)$ tal que

$$f_C(g) = f_C(h \circ f^{-1}) = (h \circ f^{-1}) \circ f = h \circ (f \circ f^{-1}) = h \circ \text{id}_B = h.$$

Portanto, f_C é sobrejetiva.

- 3.15. Mostre que se \mathbf{C}_1 e \mathbf{C}_2 são duas categorias com objetos terminais (iniciais), então $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$ também tem objetos terminais (iniciais).

Sejam \mathbf{C}_1 e \mathbf{C}_2 categorias e T_1 e T_2 são objetos terminais de \mathbf{C}_1 e \mathbf{C}_2 , respetivamente. Mostremos que (T_1, T_2) é um objeto terminal de $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$.

Uma vez que T_1 é um objeto terminal de \mathbf{C}_1 , então $T_1 \in \text{Obj}(\mathbf{C}_1)$ e, para cada $X \in \text{Obj}(\mathbf{C}_1)$, existe um e um só \mathbf{C}_1 -morfismo $f : X \rightarrow T_1$. Como T_2 é um objeto terminal de \mathbf{C}_2 , então $T_2 \in \text{Obj}(\mathbf{C}_2)$, para cada $Y \in \text{Obj}(\mathbf{C}_2)$, existe um e um só \mathbf{C}_2 -morfismo $g : Y \rightarrow T_2$.

Como $T_1 \in \text{Obj}(\mathbf{C}_1)$ e $T_2 \in \text{Obj}(\mathbf{C}_2)$, então $(T_1, T_2) \in \text{Obj}(\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2)$. Mostremos que para $(X, Y) \in \text{Obj}(\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2)$ existe um e um só $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$ -morfismo de (X, Y) em (T_1, T_2) . Então X é um objeto de \mathbf{C}_1 e Y é um objeto de \mathbf{C}_2 . Logo existe um \mathbf{C}_1 -morfismo $f : X \rightarrow T_1$ e existe um \mathbf{C}_2 -morfismo $g : Y \rightarrow T_2$. Assim, (f, g) é um $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$ -morfismo de (X, Y) em (T_1, T_2) . Além disso, é simples verificar que (f, g) é o único $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$ -morfismo de (X, Y) em (T_1, T_2) . De facto, se (f', g') é um $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$ -morfismo de (X, Y) em (T_1, T_2) , então f' é um \mathbf{C}_1 -morfismo de X em T_1 e g' é um \mathbf{C}_2 -morfismo de Y em T_2 . Logo, atendendo a que f é o único morfismo de X em T_1 e g é o único morfismo de Y em T_2 , segue que $f' = f$ e $g' = g$. Portanto, $(f', g') = (f, g)$. Desta forma, provámos que (T_1, T_2) é um objeto terminal de $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$.

- 3.16. Mostre que se uma categoria \mathbf{C} tem objeto zero, então todo o objeto inicial (terminal) de \mathbf{C} é objeto zero. Deduza que a categoria **Set** não tem objetos zero.

Seja 0 um objeto zero de \mathbf{C} . Por definição de objeto zero, 0 é um objeto inicial e terminal. Seja I um objeto inicial de \mathbf{C} . Pretendemos mostrar que I é um objeto zero, ou seja, pretendemos mostrar que é um objeto inicial e terminal. Uma vez que I é um objeto inicial, resta provar que I é um objeto terminal, ou seja, temos de provar que, para todo $X \in \text{Obj}(\mathbf{C})$, existe um e um só \mathbf{C} -morfismo $X \rightarrow I$.

Seja X um objeto de \mathbf{C} . Uma vez que 0 é um objeto terminal, existe um e um só morfismo $f : X \rightarrow 0$. Considerando que 0 é um objeto inicial, existe um e um só morfismo $g : 0 \rightarrow I$. Logo $g \circ f : X \rightarrow I$ é um \mathbf{C} -morfismo

$$X \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{g} I$$

e, portanto, existe um \mathbf{C} -morfismo de X em I .

Mostremos, agora, que $g \circ f$ é o único \mathbf{C} -morfismo de X em I . Seja $h : X \rightarrow I$ um morfismo de \mathbf{C} . Pretendemos mostrar que $h = g \circ f$. Uma vez que I é um objeto inicial, existe um e um só morfismo $g' : I \rightarrow 0$. Assim, temos o diagrama seguinte na categoria \mathbf{C}

$$\begin{array}{ccccc} & & h & & \\ & \nearrow f & & \searrow g & \\ X & \xrightarrow{\quad} & 0 & \xrightarrow{\quad} & I \\ & & & \nearrow g' & \end{array}$$

e $g \circ g' : I \rightarrow I$ é um \mathbf{C} -morfismo. Uma vez que $g \circ g' : I \rightarrow I$ e $\text{id}_I : I \rightarrow I$ são \mathbf{C} -morfismos com domínio I , com o mesmo codomínio e I é um objeto inicial, tem-se $g \circ g' = \text{id}_I$. Por outro lado, como $f : X \rightarrow 0$ e $g' \circ h : X \rightarrow 0$ são \mathbf{C} -morfismos com o mesmo domínio, com codomínio 0 e 0 é um objeto terminal, temos $g' \circ h = f$. Desta igualdade segue que $g \circ (g' \circ h) = g \circ f$, donde resulta $(g \circ g') \circ h = g \circ f$ e, portanto, $\text{id}_I \circ h = g \circ f$. Logo $h = g \circ f$. Desta forma, provámos que existe um único morfismo de X em I .

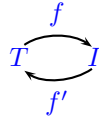
Por conseguinte, I é também um objeto terminal. Logo I é um objeto zero.

Por dualidade conclui-se que se uma categoria \mathbf{C} tem objeto zero, então todo o objeto terminal de \mathbf{C} é um objeto zero.

Na categoria **Set**, o conjunto \emptyset é um objeto inicial mas não é um objeto terminal (por exemplo, não existe qualquer morfismo de $\{1\}$ em \emptyset). Logo a categoria **Set** não tem objetos zero (caso contrário, \emptyset também seria um objeto zero).

3.17. Seja \mathbf{C} uma categoria com objeto inicial I e com objeto terminal T . Mostre que se $f : T \rightarrow I$ é um morfismo em \mathbf{C} , então f é um isomorfismo. Conclua que I e T são objetos zero.

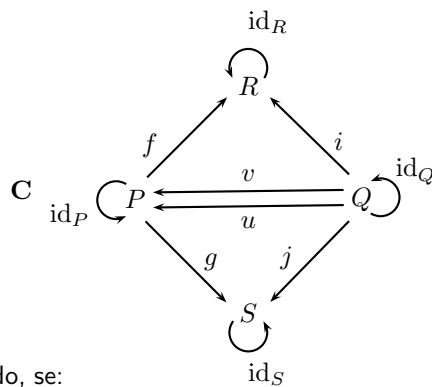
Seja \mathbf{C} uma categoria com objeto inicial I e com objeto terminal T . Seja $f : T \rightarrow I$ um \mathbf{C} -morfismo. Uma vez que I é um objeto inicial, existe um e um só \mathbf{C} -morfismo $f' : I \rightarrow T$.



Logo $f \circ f' : I \rightarrow I$ e $f' \circ f : T \rightarrow T$ são \mathbf{C} -morfismos. Considerando que $f \circ f' : I \rightarrow I$ e $id_I : I \rightarrow I$ são \mathbf{C} -morfismos com domínio I , com o mesmo codomínio e I é um objeto inicial, segue que $f \circ f' = id_I$. Por outro lado, como $f' \circ f : T \rightarrow T$ e $id_T : T \rightarrow T$ são \mathbf{C} -morfismos com o mesmo domínio, com codomínio T e T é um objeto terminal, temos $f' \circ f = id_T$. Logo f é um isomorfismo.

Uma vez que T é um objeto terminal e $I \cong T$, então I também é um objeto terminal. Logo I é um objeto zero. Como I é um objeto inicial e $T \cong I$, então T também é um objeto inicial e, portanto, T é um objeto zero.

3.18. Seja \mathbf{C} a categoria definida pelo diagrama seguinte



onde $i = f \circ u = f \circ v$
e $j = g \circ u = g \circ v$.

Diga, justificando, se:

(a) A categoria \mathbf{C} tem objetos iniciais e objetos finais.

Nenhum dos objetos de \mathbf{C} é um objeto inicial ou terminal.

O objeto R não é inicial, pois não existe morfismo de R em S . O objeto S não é inicial, pois não existe morfismo de S em R . O objeto P não é inicial, pois não existe morfismo de P em Q . O objeto Q não é inicial, pois existe mais do que um morfismo de Q em P .

O objeto R não é terminal, pois não existe morfismo de S em R . O objeto S não é terminal, pois não existe morfismo de R em S . O objeto P não é terminal, pois existe mais do que um morfismo de Q em P . O objeto Q não é inicial, pois não existe morfismo de P em Q .

(b) $(P, (f, g))$ é um produto de R e S .

O par $(P, (f, g))$ é um produto de R e S se:

- $f \in \text{hom}_{\mathbf{C}}(P, R)$, $g \in \text{hom}_{\mathbf{C}}(P, S)$;
- para cada $X \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e para quaisquer \mathbf{C} -morfismos $f_1 : X \rightarrow R$ e $f_2 : X \rightarrow S$, existe um único \mathbf{C} -morfismo $u : X \rightarrow P$ tal que $f \circ u = f_1$ e $g \circ u = f_2$.

Por definição de \mathbf{C} , a condição i. verifica-se. Porém, a condição ii. não é satisfeita, pois $i : Q \rightarrow R$, $j : Q \rightarrow S$ são \mathbf{C} -morfismos e existem $u : Q \rightarrow P, v : Q \rightarrow P \in \text{Mor}(\mathbf{C})$ tais que $u \neq v$, $f \circ u = i$, $g \circ u = j$, $f \circ v = i$ e $g \circ v = j$.

Logo o par $(P, (f, g))$ não é um produto de R e S .

(c) $(S, (g, j))$ é um coproduto de P e Q .

O par $(S, (g, j))$ é um coproduto de P e Q se:

- $g \in \text{hom}_{\mathbf{C}}(P, S)$ e $j \in \text{hom}_{\mathbf{C}}(Q, S)$;
- para cada $X \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e para quaisquer \mathbf{C} -morfismos $f_1 : P \rightarrow X$ e $f_2 : Q \rightarrow X$, existe um único \mathbf{C} -morfismo $k : S \rightarrow X$ tal que $k \circ g = f_1$ e $k \circ j = f_2$.

Por definição de \mathbf{C} , a condição i. é imediata. No entanto, existem $P \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e \mathbf{C} -morfismos $\text{id}_P : P \rightarrow P$ e $u : Q \rightarrow P$ para os quais não existe qualquer \mathbf{C} -morfismo $k : S \rightarrow P$ tal que $k \circ g = \text{id}_P$ e $k \circ j = u$.

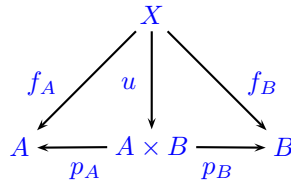
3.19. Dados objetos A e B da categoria **Set**, seja $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ e sejam p_A e p_B as funções definidas por

$$\begin{array}{ccc} p_A : A \times B & \rightarrow & A \\ (a, b) & \mapsto & a \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} p_B : A \times B & \rightarrow & B \\ (a, b) & \mapsto & b \end{array}.$$

Mostre que $(A \times B, (p_A, p_B))$ é um produto dos objetos A e B .

O par $(A \times B, (p_A, p_B))$ é um produto de A e B se:

- (i) p_A é um **Set**-morfismo de $A \times B$ em A , p_B é um **Set**-morfismo de $A \times B$ em B ;
- (ii) para qualquer $X \in \text{Obj}(\mathbf{Set})$ e para quaisquer **Set**-morfismos $f_A : X \rightarrow A$ e $f_B : X \rightarrow B$, existe um e um só morfismo $u : X \rightarrow A \times B$ tal que $p_A \circ u = f_A$ e $p_B \circ u = f_B$.



Mostremos as condições (i) e (ii).

(i) Considerando que p_A é uma função de $A \times B$ em A e p_B é uma função de $A \times B$ em B , então, pela definição da categoria **Set**, $p_A \in \text{hom}_{\mathbf{Set}}(A \times B, A)$ e $p_B \in \text{hom}_{\mathbf{Set}}(A \times B, B)$.

(ii) Admitamos que existem $X \in \text{Obj}(\mathbf{Set})$ e **Set**-morfismos f_A e f_B tais que $f_A \in \text{hom}_{\mathbf{Set}}(X, A)$ e $f_B \in \text{hom}_{\mathbf{Set}}(X, B)$.

Por definição da categoria **Set**, f_A e f_B são funções e, por conseguinte, a correspondência u de X em $A \times B$ definida por $u(x) = (f_A(x), f_B(x))$ é uma função de X em $A \times B$. De facto, como f_A e f_B são funções, para todo $x \in X$, temos $f_A(x) \in A$ e $f_B(x) \in B$ e, portanto, $(f_A(x), f_B(x)) \in A \times B$. Além disso, para quaisquer $x, y \in X$,

$$\begin{aligned} x = y &\Rightarrow f_A(x) = f_A(y) \text{ e } f_B(x) = f_B(y) \quad (f_A \text{ e } f_B \text{ são funções}) \\ &\Rightarrow (f_A(x), f_B(x)) = (f_A(y), f_B(y)) \\ &\Rightarrow u(x) = u(y). \end{aligned}$$

É simples verificar que, considerando a função u definida desta forma, o diagrama anterior é comutativo. Com efeito, como $p_A \circ u$ e f_A são funções com o mesmo domínio e o mesmo conjunto de chegada e, para todo $x \in X$, $(p_A \circ u)(x) = p_A(f_A(x), f_B(x)) = f_A(x)$, temos $p_A \circ u = f_A$. De modo análogo, prova-se que $p_B \circ u = f_B$.

O morfismo u é o único morfismo de X em $A \times B$ tal que $p_A \circ u = f_A$ e $p_B \circ u = f_B$. De facto, se admitirmos que $v : X \rightarrow A \times B$ é um morfismo tal que $p_A \circ v = f_A$ e $p_B \circ v = f_B$, segue que, para todo $x \in X$, $p_A(v(x)) = f_A(x)$ e $p_B(v(x)) = f_B(x)$, pelo que $v(x) = (f_A(x), f_B(x)) = u(x)$. Então, considerando que u e v são funções com o mesmo domínio e conjunto de chegada, concluímos que $u = v$.

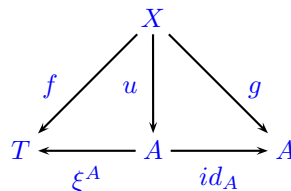
De (i) e (ii) conclui-se que $A \times B$ é um produto de A e B .

3.20. Seja \mathbf{C} uma categoria com objeto terminal T . Para qualquer objeto A de \mathbf{C} , mostre que:

- (a) o par $(A, (\xi^A, \text{id}_A))$, onde ξ^A é o único morfismo $A \rightarrow T$, é um produto de T e A .

O par $(A, (\xi^A, \text{id}_A))$ é um produto de T e A se:

- (i) ξ^A é um morfismo de A em T , id_A é um morfismo de A em A ;
- (ii) para qualquer $X \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e para quaisquer \mathbf{C} -morfismos $f : X \rightarrow T$ e $g : X \rightarrow A$, existe um e um só morfismo $u : X \rightarrow A$ tal que $\xi^A \circ u = f$ e $\text{id}_A \circ u = g$.



Provemos as condições (i) e (ii).

(i) Imediato pela definição de ξ^A e de id_A .

(ii) Considerando $u = g$, é imediato que $id_A \circ u = g$. Também se tem $\xi^A \circ u = f$. De facto, como $\xi^A \circ u$ e f são morfismos com o mesmo domínio, com codomínio T e T é objeto terminal, segue que $\xi^A \circ u = f$.

O morfismo u é o único morfismo tal que $id_A \circ u = g$ e $\xi^A \circ u = f$; se assumirmos que $v : X \rightarrow A$ é um morfismo tal que $id_A \circ v = g$ e $\xi^A \circ v = f$, então temos $v = g = u$.

De (i) e (ii) concluímos que $(A, (\xi^A, id_A))$ é um produto de T e A .

(b) o par $(A, (id_A, \xi^A))$, onde ξ^A é o único morfismo $A \rightarrow T$, é um produto de A e T .

A prova é similar à da alínea anterior.

(c) Se $(T \times A, (p_1, p_2))$ é um produto de T e A e $(A \times T, (p'_1, p'_2))$ é um produto de A e T , então $T \times A \cong A \times T$.

Consideremos que $(T \times A, (p_1, p_2))$ é um produto de T e A . Então

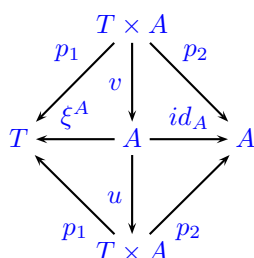
- (1) p_1 é um morfismo de $T \times A$ em T , p_2 é um morfismo de $T \times A$ em A ;
- (2) para qualquer objeto Y de \mathbf{C} e para quaisquer \mathbf{C} -morfismos $f : Y \rightarrow T$ e $g : Y \rightarrow A$, existe um e um só morfismo $u : Y \rightarrow T \times A$ tal que $p_1 \circ u = f$ e $p_2 \circ u = g$.

Da alínea (a) também sabemos que $(A, (\xi^A, id_A))$ é um produto de T e A , pelo que são satisfeitas as condições seguintes:

- (i) ξ^A é um morfismo de A em T , id_A é um morfismo de A em A ;
- (ii) para qualquer objeto X de \mathbf{C} e para quaisquer \mathbf{C} -morfismos $f : X \rightarrow T$ e $g : X \rightarrow A$, existe um e um só morfismo $v : X \rightarrow A$ tal que $\xi^A \circ v = f$ e $id_A \circ v = g$.

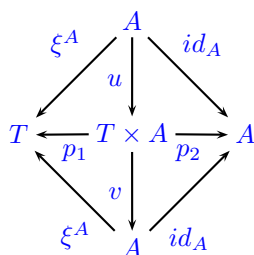
De (ii), e considerando $X = T \times A$, $f = p_1$ e $g = p_2$, sabe-se que existe um e um só morfismo $v : T \times A \rightarrow A$ tal que $\xi^A \circ v = p_1$ e $id_A \circ v = p_2$. De (2), e considerando $Y = A$, $f = \xi^A$ e $g = id_A$, sabe-se que existe um e um só morfismo $u : A \rightarrow T \times A$ tal que $p_1 \circ u = \xi^A$ e $p_2 \circ u = id_A$.

Das igualdades anteriores resulta que $p_1 \circ u \circ v = p_1$ e $p_2 \circ u \circ v = p_2$.



Então, considerando que também temos $p_1 \circ id_{A \times T} = p_1$ e $p_2 \circ id_{A \times T} = p_2$, segue que $u \circ v = id_{A \times T}$, pois $(T \times A, (p_1, p_2))$ é um produto de T e A .

Das igualdades $\xi^A \circ v = p_1$, $id_A \circ v = p_2$, $p_1 \circ u = \xi^A$ e $p_2 \circ u = id_A$ também resulta que $id_A \circ v \circ u = id_A$ e $\xi^A \circ v \circ u = \xi^A$.

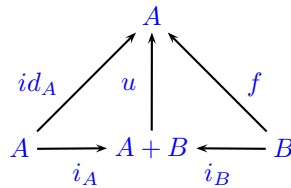


Então, considerando que também temos $id_A \circ id_A = id_A$, $\xi^A \circ id_A = \xi^A$ e $(A, (\xi^A, id_A))$ é um produto de T e A , segue que $v \circ u = id_A$.

Como $u \circ v = id_{T \times A}$ e $v \circ u = id_A$, então $u : A \rightarrow T \times A$ é um isomorfismo e, portanto, $A \cong T \times A$.

3.21. Sejam A e B dois objetos de uma categoria \mathbf{C} , admitindo coproduto $(A + B, (i_A, i_B))$ e tais que $\text{hom}_{\mathbf{C}}(B, A) \neq \emptyset$. Mostre que i_A é invertível à esquerda e, portanto, é um monomorfismo.

Considerando que $\text{hom}_{\mathbf{C}}(B, A) \neq \emptyset$, existe um \mathbf{C} -morfismo $f : B \rightarrow A$. Atendendo a que $A \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e \mathbf{C} é uma categoria, $\text{id}_A : A \rightarrow A$ também é um morfismo de \mathbf{C} . Então, atendendo a que $(A + B, (i_A, i_B))$ é um coproduto de A e B , existe um e um só morfismo $u : A + B \rightarrow A$ tal que $u \circ i_A = \text{id}_A$ e $u \circ i_B = f$.



3.22. Sejam \mathbf{C} uma categoria e $f : A \rightarrow B$ e $g : A \rightarrow B$ morfismos em \mathbf{C} . Mostre que se (I, i) e (I', i') são igualizadores de f e g , então $I \cong I'$.

Considerando que (I, i) é um igualizador de f e g , então:

- Atendendo a que (I', i') é um igualizador de f e g , então:

- De (ii), e considerando $J = I'$ e $j = i'$, resulta que existe um e um só \mathbf{C} -morfismo $u : I' \rightarrow I$ tal que $i \circ u = i'$. De (2), considerando $K = I$ e $k = i$, segue que existe um e um só morfismo $v : I \rightarrow I'$ tal que $i' \circ v = i$. Das igualdades $i \circ u = i'$ e $i' \circ v = i$, temos

$$i \circ u \circ v = i \text{ e } i' \circ v \circ u = i'.$$

De (2), considerando $K = I'$ e $k = i'$, conclui-se que existe um e um só morfismo $t : I' \rightarrow I'$ tal que $i' \circ t = i'$. Assim, atendendo a que $i' \circ id_{I'} = i'$ e $i' \circ v \circ u = i'$, temos $v \circ u = t = id_{I'}$.

Uma vez que $u \circ v = id_I$ e $v \circ u = id_{I'}$, conclui-se que v é um isomorfismo e, portanto, $I \cong I'$.

Sejam \mathbf{C} uma categoria com objeto zero 0 e $f : A \rightarrow B$ um monomorfismo de \mathbf{C} . Pretendemos provar que $(0, 0_{0,A})$ é um igualizador de f e $0_{A,B}$, ou seja, temos de mostrar que

- (i) $0_{0,A}$ é um \mathbf{C} -morfismo de 0 em A tal que $f \circ 0_{0,A} = 0_{A,B} \circ 0_{0,A}$;
- (ii) para qualquer $C \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e para qualquer \mathbf{C} -morfismo $g : C \rightarrow A$ tal que $f \circ g = 0_{A,B} \circ g$, existe um e um só morfismo $u : C \rightarrow 0$ tal que $i \circ u = g$.

(i) Por definição dos morfismos $0_{0,A}$ e $0_{A,B}$, temos $0_{0,A} \in \text{hom}_{\mathbf{C}}(0, A)$ e $0_{A,B} \in \text{hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$. Logo

$$f \circ 0_{0,A} : 0 \rightarrow B \quad \text{e} \quad 0_{A,B} \circ 0_{0,A} : 0 \rightarrow B$$

$$f \circ 0_{0,A} = 0_{A,B} \circ 0_{0,A}.$$

(ii) Sejam $C \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e $g : C \rightarrow A$ um \mathbf{C} -morfismo tal que $f \circ g = 0_{A,B} \circ g$. Nestas condições prova-se que existe um e um só morfismo $u : C \rightarrow 0$ tal que $0_{0,A} \circ u = g$. De facto, como 0 é um objeto terminal, existe um e um só morfismo de C em 0 ; esse morfismo é o morfismo $0_{C,0}$. Além disso, tem-se $0_{0,A} \circ 0_{C,0} = g$. Com efeito, como

$$f \circ g = 0_{A,B} \circ g = 0_{C,B} = f \circ (0_{0,A} \circ 0_{C,0})$$

e f é monomorfismo, segue que

$$g = 0_{0,A} \circ 0_{C,0}.$$

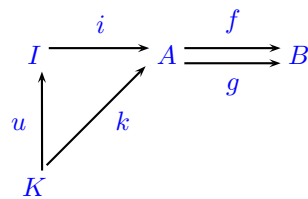
Assim, de (i) e (ii) resulta que $(0, 0_{0,A})$ é um igualizador de f e $0_{A,B}$.

3.24. Sejam \mathbf{C} uma categoria, $f, g : A \rightarrow B$ morfismos em \mathbf{C} e (I, i) um igualizador de f e g . Mostre que se $\alpha : B \rightarrow C$ é um monomorfismo, então (I, i) é um igualizador de $\alpha \circ f$ e $\alpha \circ g$.

Sejam \mathbf{C} uma categoria, $f, g : A \rightarrow B$ morfismos em \mathbf{C} e (I, i) um igualizador de f e g . Admitamos que $\alpha : B \rightarrow C$ é um monomorfismo de \mathbf{C} .

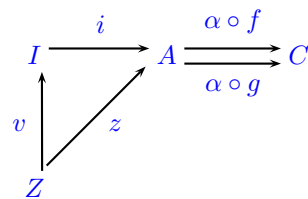
Uma vez que (I, i) é um igualizador de f e g , sabe-se que:

- (1) i é um \mathbf{C} -morfismo de I em A tal que $f \circ i = g \circ i$;
- (2) para qualquer $K \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e para qualquer \mathbf{C} -morfismo $k : K \rightarrow A$ tal que $f \circ k = g \circ k$, existe um e um só morfismo $u : K \rightarrow I$ tal que $i \circ u = k$.



Pretendemos mostrar que (I, i) é um igualizador de $\alpha \circ f$ e $\alpha \circ g$, ou seja, pretende-se provar que:

- (i) i é um \mathbf{C} -morfismo de I em A tal que $(\alpha \circ f) \circ i = (\alpha \circ g) \circ i$;
- (ii) para qualquer $Z \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e para qualquer \mathbf{C} -morfismo $z : Z \rightarrow A$ tal que $(\alpha \circ f) \circ z = (\alpha \circ g) \circ z$, existe um e um só morfismo $v : Z \rightarrow I$ tal que $i \circ v = z$.



Mostremos as condições (i) e (ii).

(i) Esta condição é imediata a partir de (1), pois i é um \mathbf{C} -morfismo de I em A e

$$(\alpha \circ f) \circ i = \alpha \circ (f \circ i) = \alpha \circ (g \circ i) = (\alpha \circ g) \circ i.$$

(ii) Sejam $Z \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e $z : Z \rightarrow A$ um \mathbf{C} -morfismo tal que $(\alpha \circ f) \circ z = (\alpha \circ g) \circ z$. Então, como $\alpha \circ (f \circ z) = \alpha \circ (g \circ z)$ e α é um monomorfismo, temos $f \circ z = g \circ z$. Então, por (2), existe um e um só morfismo $v : Z \rightarrow I$ tal que $i \circ v = z$.

De (i) e (ii) conclui-se que (I, i) é um igualizador de $\alpha \circ f$ e $\alpha \circ g$.

3.25. Mostre que na subcategoria plena de **Set** constituída pelos conjuntos não vazios há pares de morfismos que não têm igualizador.

Seja \mathbf{C} a subcategoria plena de **Set** constituída pelos conjuntos não vazios.

As funções

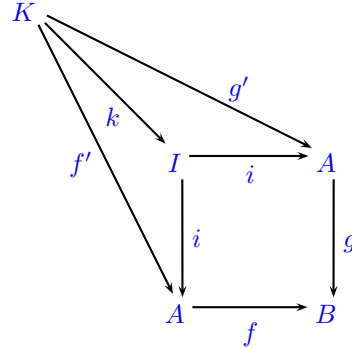
$$\begin{array}{ccc} f : \{1\} & \rightarrow & \{2, 3\} \\ 1 & \mapsto & 2 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} g : \{1\} & \rightarrow & \{2, 3\} \\ 1 & \mapsto & 3 \end{array}$$

são morfismos de \mathbf{C} e não admitem igualizador, pois, para qualquer $X \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e para qualquer $i : X \rightarrow \{1\}$, tem-se $f \circ i \neq g \circ i$. Note-se que se $X \in \text{Obj}(\mathbf{C})$, então $X \neq \emptyset$, pelo que existe $x \in X$ e, para qualquer $i : X \rightarrow \{1\}$, $(f \circ i)(x) = 2 \neq 3 = (g \circ i)(x)$, pelo que $f \circ i \neq g \circ i$.

3.26. Sejam $f, g : A \rightarrow B$ e $i : I \rightarrow A$ morfismos numa categoria \mathbf{C} . Mostre que se $(I, (i, i))$ é um produto fibrado de (f, g) , então (I, i) é um igualizador de f e g .

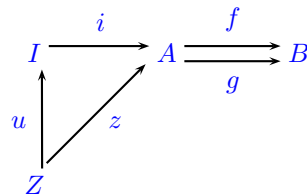
Admitamos que $(I, (i, i))$ é um produto fibrado de (f, g) . Então:

- (i) i é um \mathbf{C} -morfismo de I em A tal que $f \circ i = g \circ i$;
- (ii) para qualquer $K \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e para quaisquer \mathbf{C} -morfismos $f' : K \rightarrow A$, $g' : K \rightarrow A$ tais que $f \circ f' = g \circ g'$, existe um e um só morfismo $k : K \rightarrow I$ tal que $i \circ k = f'$ e $i \circ k = g'$.



Pretendemos mostrar que (I, i) é um igualizador de f e g , ou seja, pretendemos provar que:

- (1) i é um \mathbf{C} -morfismo de I em A tal que $f \circ i = g \circ i$;
- (2) para qualquer $Z \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e para qualquer \mathbf{C} -morfismo $z : Z \rightarrow A$ tal que $f \circ z = g \circ z$, existe um e um só morfismo $u : Z \rightarrow I$ tal que $i \circ u = z$.



Mostremos as condições (1) e (2).

(1) Imediato a partir (i).

(2) Sejam $Z \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e $z : Z \rightarrow A$ um \mathbf{C} -morfismo tal que $f \circ z = g \circ z$. Então, a partir de (ii), considerando $K = Z$, $f' = z$ e $g' = z$, concluímos que existe um e um só morfismo $u : Z \rightarrow I$ tal que $i \circ u = f' = z$ e $i \circ u = g' = z$.

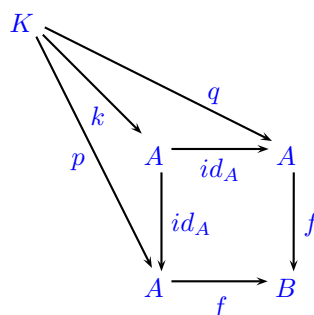
Portanto (I, i) é um igualizador de f e g .

3.27. Sejam \mathbf{C} uma categoria e $f : A \rightarrow B$ um morfismo em \mathbf{C} . Mostre que as afirmações seguintes são equivalentes:

- (A1) f é um monomorfismo.
- (A2) $(A, (id_A, id_A))$ é um produto fibrado de (f, f) .

(A1) \Rightarrow (A2) Admitamos que f é um monomorfismo. Pretendemos mostrar que $(A, (id_A, id_A))$ é um produto fibrado de (f, f) , ou seja, temos de provar que:

- (i) id_A é um \mathbf{C} -morfismo de A em A tal que $f \circ id_A = f \circ id_A$;
- (ii) para qualquer $K \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e para quaisquer \mathbf{C} -morfismos $p : K \rightarrow A$, $q : K \rightarrow A$ tais que $f \circ p = f \circ q$, existe um e um só morfismo $k : K \rightarrow A$ tal que $id_A \circ k = p$ e $id_A \circ k = q$.



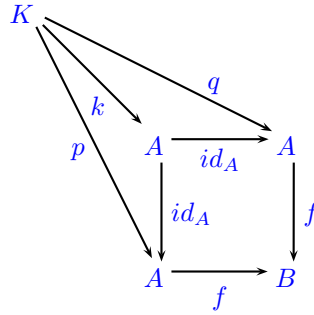
A prova das condições (i) e (ii) é simples.

(i) Imediato.

(ii) Sejam $K \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e $p : K \rightarrow A$ e $q : K \rightarrow A$ morfismos de \mathbf{C} tais que $f \circ p = f \circ q$. Então, como f é monomorfismo segue que $p = q$. Logo existe $k = p = q \in \text{hom}_{\mathbf{C}}(K, A)$ tal que $\text{id}_A \circ k = p$ e $\text{id}_A \circ k = q$.

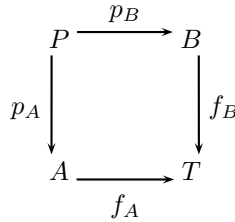
(A2) \Rightarrow (A1) Admitamos que $(A, (\text{id}_A, \text{id}_A))$ é um produto fibrado de (f, f) . Então

- (i) id_A é um \mathbf{C} -morfismo de A em A tal que $f \circ \text{id}_A = f \circ \text{id}_A$;
- (ii) para qualquer $K \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e para quaisquer \mathbf{C} -morfismos $p : K \rightarrow A$, $q : K \rightarrow A$ tais que $f \circ p = f \circ q$, existe um e um só morfismo $k : K \rightarrow A$ tal que $\text{id}_A \circ k = p$ e $\text{id}_A \circ k = q$.



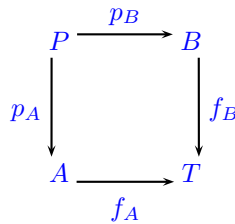
Pretendemos provar f é um monomorfismo. Sejam $i : X \rightarrow A$ e $j : X \rightarrow A$ \mathbf{C} -morfismos tais que $f \circ i = f \circ j$. Então de (ii), considerando $K = X$, $p = i$ e $q = j$, segue que existe um e um só morfismo $k : X \rightarrow A$ tal que $\text{id}_A \circ k = p = i$ e $\text{id}_A \circ k = q = j$. Logo $i = k = j$ e, portanto, f é um monomorfismo.

3.28. Sejam \mathbf{C} uma categoria com objeto terminal T e A e B objetos de \mathbf{C} . Mostre que



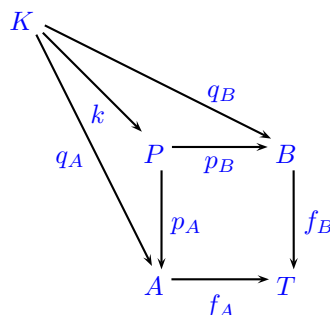
é um quadrado cartesiano se e só se $(P, (p_A, p_B))$ é um produto de A e B .

Admitamos que



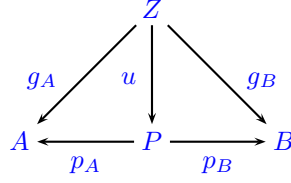
é um quadrado cartesiano. Então

- (i) p_A e p_B são \mathbf{C} -morfismos tais que $p_A \in \text{hom}_{\mathbf{C}}(P, A)$, $p_B \in \text{hom}_{\mathbf{C}}(P, B)$ e $f_A \circ p_A = f_B \circ p_B$;
- (ii) para qualquer $K \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e para quaisquer \mathbf{C} -morfismos $q_A : K \rightarrow A$, $q_B : K \rightarrow B$ tais que $f_A \circ q_A = f_B \circ q_B$, existe um e um só \mathbf{C} -morfismo $k : K \rightarrow P$ tal que $p_A \circ k = q_A$ e $p_B \circ k = q_B$.



Pretendemos provar que $(P, (p_A, p_B))$ é um produto de A e B , ou seja, pretende-se provar que

- (1) $p_A \in \text{hom}_{\mathbf{C}}(P, A)$, $p_B \in \text{hom}_{\mathbf{C}}(P, B)$;
- (2) para qualquer $Z \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e para quaisquer \mathbf{C} -morfismos $g_A : Z \rightarrow A$, $g_B : Z \rightarrow B$, existe um e um só \mathbf{C} -morfismo $u : Z \rightarrow P$ tal que $p_A \circ u = g_A$ e $p_B \circ u = g_B$.

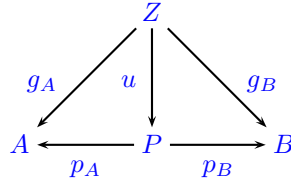


A condição (1) é imediata pela definição de p_A e p_B .

Mostremos a condição (2). Sejam $Z \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e $g_A : Z \rightarrow A$, $g_B : Z \rightarrow B$ morfismos de \mathbf{C} . Considerando que $f_A \circ g_A$ e $f_B \circ g_B$ são morfismos com o mesmo domínio, com codomínio T e T é um objeto terminal, temos $f_A \circ g_A = f_B \circ g_B$. Então, atendendo a (ii), existe um e um só \mathbf{C} -morfismo $u : Z \rightarrow A$ tal que $p_A \circ u = g_A$ e $p_B \circ u = g_B$.

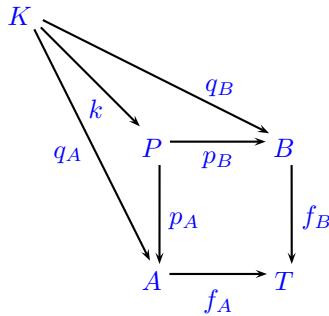
Reciprocamente, admitindo que $(P, (p_A, p_B))$ é um produto de A e B , prova-se que $(P, (p_A, p_B))$ é um produto fibrado de (f_A, f_B) . De facto, se $(P, (p_A, p_B))$ é um produto de A e B , então:

- (c.1) $p_A \in \text{hom}_{\mathbf{C}}(P, A)$, $p_B \in \text{hom}_{\mathbf{C}}(P, B)$;
- (c.2) para qualquer $Z \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e para quaisquer \mathbf{C} -morfismos $g_A : Z \rightarrow A$, $g_B : Z \rightarrow B$, existe um e um só \mathbf{C} -morfismo $u : Z \rightarrow P$ tal que $p_A \circ u = g_A$ e $p_B \circ u = g_B$.



Pretendemos mostrar que $(P, (p_A, p_B))$ é um produto fibrado de (f_A, f_B) , ou seja, temos de mostrar que

- (c.i) p_A e p_B são \mathbf{C} -morfismos tais que $p_A \in \text{hom}_{\mathbf{C}}(P, A)$, $p_B \in \text{hom}_{\mathbf{C}}(P, B)$ e $f_A \circ p_A = f_B \circ p_B$;
- (c.ii) para qualquer $K \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e para quaisquer \mathbf{C} -morfismos $q_A : K \rightarrow A$, $q_B : K \rightarrow B$ tais que $f_A \circ q_A = f_B \circ q_B$, existe um e um só \mathbf{C} -morfismo $k : K \rightarrow P$ tal que $p_A \circ k = q_A$ e $p_B \circ k = q_B$.

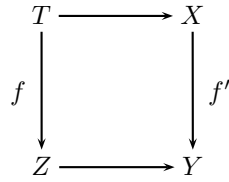


Considerando que T é um objeto terminal e $(P, (p_A, p_B))$ é um produto de A e B , as condições (c.i) e (c.ii) provam-se facilmente.

(c.i) Por definição de p_A e de p_B , tem-se $p_A \in \text{hom}_{\mathbf{C}}(P, A)$ e $p_B \in \text{hom}_{\mathbf{C}}(P, B)$. Além disso, como $f_A \circ p_A$ e $f_B \circ p_B$ são \mathbf{C} -morfismos com o mesmo domínio, com codomínio T e T é um objeto terminal, tem-se $f_A \circ p_A = f_B \circ p_B$.

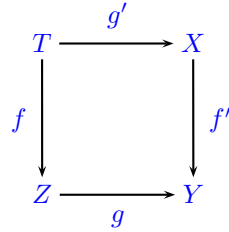
(c.ii) Sejam $K \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e $q_A : K \rightarrow A$, $q_B : K \rightarrow B$ morfismos de \mathbf{C} tais que $f_A \circ q_A = f_B \circ q_B$. Então, por (c.2), existe um e um só \mathbf{C} -morfismo $u : K \rightarrow P$ tal que $p_A \circ u = q_A$ e $p_B \circ u = q_B$.

De (c.i) e (c.ii) resulta que $(P, (p_A, p_B))$ é um produto fibrado de (f_A, f_B) .



é uma soma amalgamada e f é um epimorfismo (isomorfismo), mostre que f' é também um epimorfismo (isomorfismo).

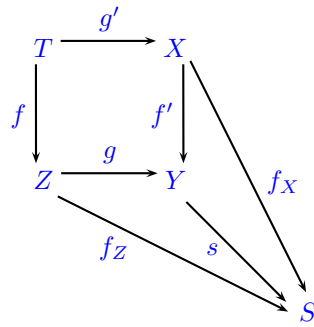
Admitamos que o quadrado



é uma soma amalgamada e f é um epimorfismo.

Considerando que o quadrado anterior é uma soma amalgamada, então:

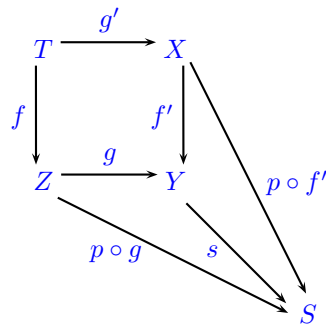
- (i) existem \mathbf{C} -morfismos $g : Z \rightarrow Y$ e $f' : X \rightarrow Y$ tais que $g \circ f = f' \circ g'$;
- (ii) para qualquer $S \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e para quaisquer \mathbf{C} -morfismos $f_Z : Z \rightarrow S$, $f_X : X \rightarrow S$ tais que $f_Z \circ f = f_X \circ g'$, existe um e um só \mathbf{C} -morfismo $s : Y \rightarrow S$ tal que $s \circ g = f_Z$ e $s \circ f' = f_X$.



Atendendo a que f é um epimorfismo, então, para quaisquer \mathbf{C} -morfismos $i : Z \rightarrow A$ e $j : Z \rightarrow A$,

$$i \circ f = j \circ f \Rightarrow i = j.$$

Das hipóteses anteriores resulta que f' é um epimorfismo. De facto, se $p : Y \rightarrow S$ e $q : Y \rightarrow S$ são \mathbf{C} -morfismos tais que $p \circ f' = q \circ f'$, então $p \circ f' \circ g' = q \circ f' \circ g'$, donde resulta $p \circ g \circ f = q \circ g \circ f$. Desta última igualdade, e considerando que f é um epimorfismo, segue que $p \circ g = q \circ g$. Por outro lado, atendendo a que $(p \circ g) \circ f = (p \circ f') \circ g'$ e $(Y, (g, f'))$ é uma soma amalgamada de (f, g') , sabe-se que existe um e um só \mathbf{C} -morfismo $s : Y \rightarrow S$ tal que $s \circ g = p \circ g$ e $s \circ f' = p \circ f'$.



Então, atendendo a que

$$\begin{aligned}
 p \circ g &= p \circ g, p \circ f' = p \circ f', \\
 q \circ g &= p \circ g, q \circ f' = p \circ f',
 \end{aligned}$$

temos

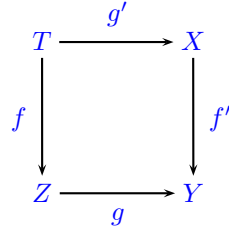
$$p = s = q.$$

Desta forma, provou-se que, para quaisquer \mathbf{C} -morfismos $p : Y \rightarrow S$ e $q : Y \rightarrow S$,

$$p \circ f' = q \circ f' \Rightarrow p = q$$

e, portanto, f' é um epimorfismo.

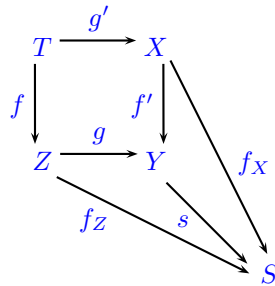
Mostremos, agora, que se o quadrado



é uma soma amalgamada e f é um isomorfismo, então f' também é um isomorfismo.

Considerando que o quadrado anterior é uma soma amalgamada, então:

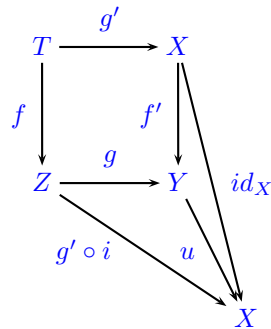
- (i) existem \mathbf{C} -morfismos $g : Z \rightarrow Y$ e $f' : X \rightarrow Y$ tais que $g \circ f = f' \circ g'$;
- (ii) para qualquer $S \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e para quaisquer \mathbf{C} -morfismos $f_Z : Z \rightarrow S$, $f_X : X \rightarrow S$ tais que $f_Z \circ f = f_X \circ g'$, existe um e um só \mathbf{C} -morfismo $s : Y \rightarrow S$ tal que $s \circ g = f_Z$ e $s \circ f' = f_X$.



Admitindo que f é um isomorfismo, existe um \mathbf{C} -morfismo $i : Z \rightarrow T$ tal que $f \circ i = id_Z$ e $i \circ f = id_T$. Então

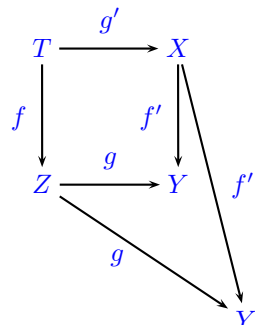
$$g' = g' \circ id_T = g' \circ (i \circ f) = (g' \circ i) \circ f,$$

donde $(g' \circ i) \circ f = id_X \circ g'$. Atendendo a que $(Y, (g, f'))$ é uma soma amalgamada de (f, g') , existe um e um só \mathbf{C} -morfismo $u : Y \rightarrow X$ tal que $u \circ g = g' \circ i$ e $u \circ f' = id_X$.



Uma vez que $u \circ f' = id_X$, u é o inverso esquerdo de f' . Para concluir que f é um isomorfismo, falta, então, verificar que u é o inverso direito de f .

Ora, considerando que



é um diagrama em \mathbf{C} e $(Y, (g, f'))$ é uma soma amalgamada de (f, g') , existe um e um só morfismo $v : Y \rightarrow Y$ tal que $v \circ g = g$ e $v \circ f' = f'$. Então, como

$$\begin{aligned} id_Y \circ g &= g, \quad id_Y \circ f' = f', \\ (f' \circ u) \circ g &= f' \circ (u \circ g) = f' \circ (g' \circ i) = (f' \circ g') \circ i = (g \circ f) \circ i = g \circ (f \circ i) = g \circ id_Z = g, \\ (f' \circ u) \circ f' &= f' \circ (u \circ f') = f' \circ id_X = f' \end{aligned}$$

conclui-se que $f' \circ u = id_Y$.

Como $u \circ f' = id_X$ e $f' \circ u = id_Y$, então f' é um isomorfismo.

3.30. Na categoria **Set**, sejam A, B, C conjuntos e $f : A \rightarrow C$ e $g : B \rightarrow C$ funções. Mostre que o produto fibrado de (f, g) é o par $(P, (f', g'))$, onde

$$P = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, f(a) = g(b)\}$$

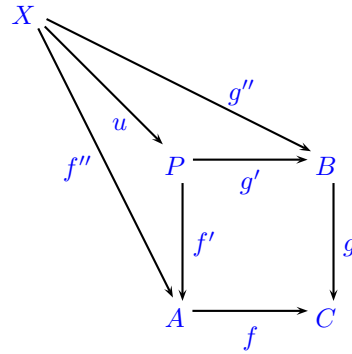
e $f' : P \rightarrow A$ e $g' : P \rightarrow B$ são as funções definidas por

$$f'(a, b) = a \text{ e } g'(a, b) = b,$$

para todo $(a, b) \in P$.

Pretendemos mostrar que $(P, (f', g'))$ é um produto fibrado de (f, g) , ou seja, pretende-se provar que

- (i) f' e g' são **Set**-morfismos tais que $f' \in \text{hom}_{\mathbf{Set}}(P, A)$, $g' \in \text{hom}_{\mathbf{Set}}(P, B)$ e $f \circ f' = g \circ g'$;
- (ii) para qualquer $X \in \text{Obj}(\mathbf{Set})$ e para quaisquer **Set**-morfismos $f'' : X \rightarrow A$, $g'' : X \rightarrow B$ tais que $f \circ f'' = g \circ g''$, existe um e um só **Set**-morfismo $u : X \rightarrow P$ tal que $f' \circ u = f''$ e $g' \circ u = g''$.



Mostremos as condições (i) e (ii)

(i) Considerando que $\text{Mor}(\mathbf{Set})$ é a classe de todas as funções, então, pela definição de f' e de g' , é imediato que $f' \in \text{hom}_{\mathbf{Set}}(P, A)$ e $g' \in \text{hom}_{\mathbf{Set}}(P, B)$. Além disso, as funções $f \circ f'$ e $g \circ g'$ são iguais, pois têm o mesmo domínio, o mesmo conjunto de chegada e, para todo $(x, y) \in P$,

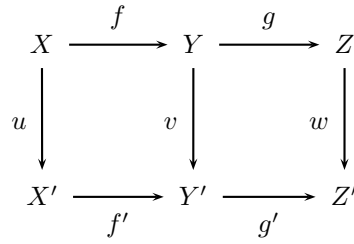
$$(f \circ f')(x, y) = f(f'(x, y)) = f(x) = g(y) = g(g'(x, y)) = (g \circ g')(x, y).$$

(ii) Sejam $X \in \text{Obj}(\mathbf{Set})$ e $f'' : X \rightarrow A$, $g'' : X \rightarrow B$ morfismos de **Set** tais que $f \circ f'' = g \circ g''$. Então existe um e um só **Set**-morfismo $u : X \rightarrow P$ tal que $f' \circ u = f''$ e $g' \circ u = g''$. De facto, se considerarmos a correspondência $u : X \rightarrow P$ definida por $u(x) = (f''(x), g''(x))$, prova-se que:

- u é uma função de X em P e, portanto, u é um **Set**-morfismo de X em P ;
- $f' \circ u = f''$ e $g' \circ u = g''$;
- se $v : X \rightarrow P$ é um **Set**-morfismo tal que $f' \circ v = f''$ e $g' \circ v = g''$, então $v = u$.

De (i) e (ii) conclui-se que $(P, (f', g'))$ é um produto fibrado de (f, g) .

3.31. Considere o seguinte diagrama comutativo numa categoria \mathbf{C}



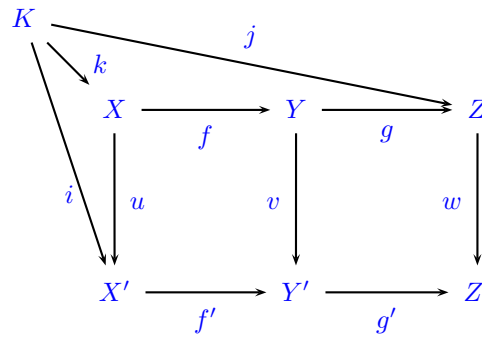
Mostre que:

(a) Se $[XY Y' X']$ e $[YZZ' Y']$ são quadrados cartesianos, então $[XZZ' X']$ é um quadrado cartesiano.

Admitamos que $[XY Y' X']$ e $[YZZ' Y']$ são quadrados cartesianos e que o diagrama é comutativo.

Mostremos que $[XZZ' X']$ é um quadrado cartesiano, ou seja, mostremos que:

- (i) $(g' \circ f') \circ u = w \circ (g \circ f)$;
- (ii) para qualquer $K \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e para quaisquer \mathbf{C} -morfismos $i : K \rightarrow X'$ e $j : K \rightarrow Z$ tais que $(g' \circ f') \circ i = w \circ j$, existe um e um só \mathbf{C} -morfismo $k : K \rightarrow X$ tal que $u \circ k = i$ e $(g \circ f) \circ k = j$.

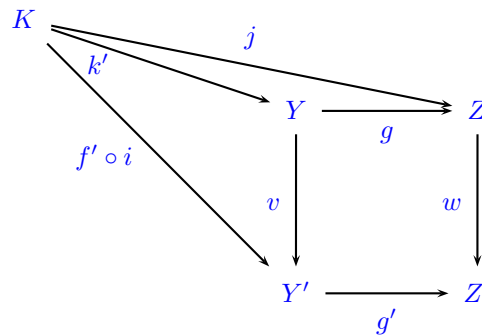


A condição (i) é imediata, pois, como o diagrama é comutativo e $(f' \circ g') \circ u$ e $w \circ (g \circ f)$ são morfismos com o mesmo domínio e codomínio, tem-se $(f' \circ g') \circ u = w \circ (g \circ f)$.

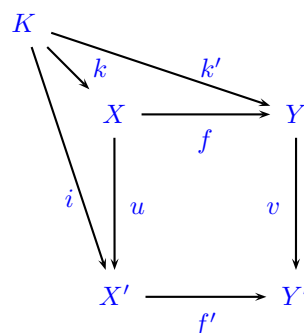
A prova de (ii) também é simples. De facto, se $K \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e $i : K \rightarrow X'$ e $j : K \rightarrow Z$ são \mathbf{C} -morfismos tais que $(g' \circ f') \circ i = w \circ j$, tem-se

$$g' \circ (f' \circ i) = w \circ j.$$

Então, como o quadrado $[YZZ' Y']$ é cartesiano, existe um e um só morfismo $k' : K \rightarrow Y$ tal que $v \circ k' = f' \circ i$ e $g \circ k' = j$



Agora, como $v \circ k' = f' \circ i$ e $[XY Y' X']$ é um quadrado cartesiano, existe um e um só \mathbf{C} -morfismo $k : K \rightarrow X$ tal que $u \circ k = i$ e $f \circ k = k'$.



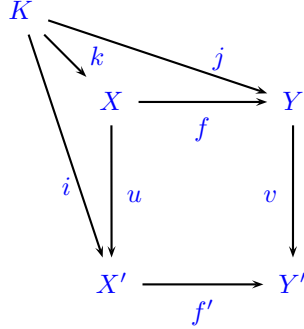
De $f \circ k = k'$ vem $g \circ f \circ k = g \circ k' = j$.

Assim, $u \circ k = i$ e $(g \circ f) \circ k = j$. Desta forma, fica provada a condição (ii).

(b) Se $[XZZ'X']$ e $[YZZ'Y']$ são quadrados cartesianos, então $[XY Y'X']$ é um quadrado cartesiano.

Admitamos que $[XZZ'X']$ e $[YZZ'Y']$ são quadrados cartesianos. Pretendemos mostrar que $[XY Y'X']$ é um quadrado cartesiano, ou seja, queremos provar que:

- (i) $f' \circ u = v \circ f$;
- (ii) para qualquer $K \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e para quaisquer \mathbf{C} -morfismos $i : K \rightarrow X'$ e $j : K \rightarrow Y$ tais que $f' \circ i = v \circ j$, existe um e um só \mathbf{C} -morfismo $k : K \rightarrow X$ tal que $u \circ k = i$ e $f \circ k = j$.

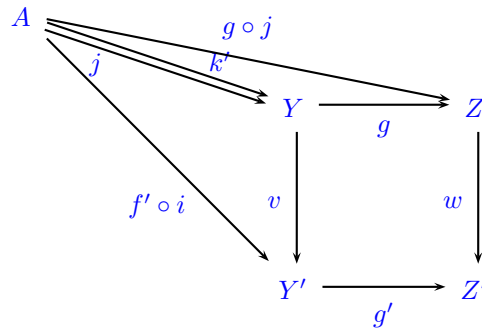


A condição (i) é imediata, pois $f' \circ u$ e $v \circ f$ são morfismos com o mesmo domínio e com o mesmo codomínio e o diagrama é comutativo; portanto $f' \circ u = v \circ f$.

Verifiquemos, agora, a condição (ii). Sejam $K \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e $i : K \rightarrow X'$ e $j : K \rightarrow Y$ morfismos de \mathbf{C} tais que $f' \circ i = v \circ j$. Então

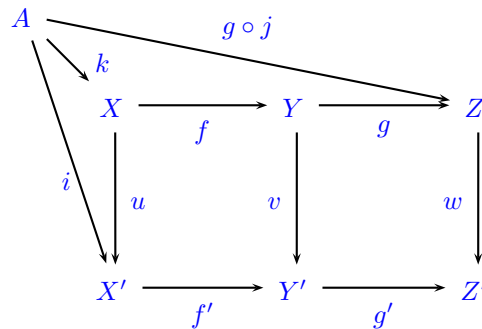
$$\begin{aligned}
 g' \circ (f' \circ i) &= g' \circ (v \circ j) \\
 &= (g' \circ v) \circ j \\
 &= (w \circ g) \circ j \quad ([YZZ'Y'] \text{ é um quadrado cartesiano}) \\
 &= w \circ (g \circ j).
 \end{aligned}$$

Considerando que o quadrado $[YZZ'Y']$ é cartesiano, existe um e um só morfismo $k' : K \rightarrow Y$ tal que $v \circ k' = f' \circ i$ e $g \circ k' = g \circ j$.



Então, como também temos $v \circ j = f' \circ i$ e $g \circ j = g \circ j$, resulta que $j = k'$.

Agora, considerando que $(g' \circ f') \circ i = w \circ (g \circ j)$ e $[XZZ'X']$ é um quadrado cartesiano, existe um e um só \mathbf{C} -morfismo $k : A \rightarrow X$ tal que $u \circ k = i$ e $(g \circ f) \circ k = g \circ j$.



Então, atendendo a que

$$g \circ (f \circ k) = g \circ j, \quad g \circ j = g \circ j,$$

$$v \circ j = f' \circ i, \quad v \circ (f \circ k) = (v \circ f) \circ k = (f' \circ u) \circ k = f' \circ (u \circ k) = f' \circ i,$$

segue que $f \circ k = j$.

Portanto, $[XYY'X']$ é um quadrado cartesiano,

3.32. Seja \mathbf{D} a subcategoria da categoria **Grp** em que os morfismos são os isomorfismos de grupo. Sejam $F_{Ob} : \text{Obj}(\mathbf{D}) \rightarrow \text{Obj}(\mathbf{D})$ a função que a cada grupo G de \mathbf{D} associa o grupo

$$F(G) = \{x \in G \mid (\forall y \in G) \, xy = yx\}$$

e $F_{hom} : \text{Mor}(\mathbf{D}) \rightarrow \text{Mor}(\mathbf{D})$ a função que a cada \mathbf{D} -morfismo $f : G_1 \rightarrow G_2$ associa a correspondência

$$F_{hom}(f) : \begin{array}{ccc} F(G_1) & \rightarrow & F(G_2) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

Mostre que o par de funções (F_{Ob}, F_{hom}) define um funtor de \mathbf{D} em \mathbf{D} .

O par (F_{Ob}, F_{hom}) é um funtor de \mathbf{D} em \mathbf{D} se:

- (1) F_{Ob} é uma função de $\text{Obj}(\mathbf{D})$ em $\text{Obj}(\mathbf{D})$;
- (2) F_{hom} é uma função de $\text{Mor}(\mathbf{D})$ em $\text{Mor}(\mathbf{D})$ que a cada \mathbf{D} -morfismo $f : A \rightarrow B$ associa um \mathbf{D} -morfismo $F_{hom}(f) : F_{Ob}(A) \rightarrow F_{Ob}(B)$;
- (3) para cada $A \in \text{Obj}(\mathbf{D})$, $F_{hom}(id_A) = id_{F_{Ob}(A)}$;
- (4) para quaisquer \mathbf{D} -morfismos $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$, $F_{hom}(g \circ f) = F_{hom}(g) \circ F_{hom}(f)$.

De acordo com o enunciado, F_{Ob} e F_{hom} são funções nas condições indicadas em (1) e (2), pelo que resta verificar (3) e (4). Na prova de (3) e (4) as funções F_{Ob} e F_{hom} são representadas pelo mesmo símbolo F .

(3) Para cada $A \in \text{Obj}(\mathbf{D})$, as funções $F(id_A)$ e $id_{F(A)}$ são iguais. De facto, id_A é a função definida por

$$id_A : \begin{array}{ccc} A & \rightarrow & A \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

pelo que, por definição de F , tem-se

$$F(id_A) : \begin{array}{ccc} F(A) & \rightarrow & F(A) \\ x & \mapsto & id_A(x) = x \end{array}.$$

Por outro lado, temos

$$id_{F(A)} : \begin{array}{ccc} F(A) & \rightarrow & F(A) \\ x & \mapsto & x \end{array}.$$

Logo as funções $F(id_A)$ e $id_{F(A)}$ são iguais, pois têm o mesmo domínio, o mesmo conjunto de chegada e, para todo $x \in F(A)$,

$$F(id_A)(x) = id_A(x) = x = id_{F(A)}(x).$$

(4) Sejam $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ morfismos de \mathbf{D} . Então $g \circ f$ é o morfismo definido por

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} A & \rightarrow & C \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

donde segue que $F(g \circ f)$ é o morfismo

$$F(g \circ f) : \begin{array}{ccc} F(A) & \rightarrow & F(C) \\ x & \mapsto & (g \circ f)(x). \end{array}$$

Por outro lado, tem-se

$$F(f) : \begin{array}{ccc} F(A) & \rightarrow & F(B) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}, \quad F(g) : \begin{array}{ccc} F(B) & \rightarrow & F(C) \\ x & \mapsto & g(x) \end{array}$$

donde, por definição, de composição de funções, segue que

$$F(g) \circ F(f) : \begin{array}{ccc} F(A) & \rightarrow & F(C) \\ x & \mapsto & (F(g) \circ F(f))(x). \end{array}$$

Uma vez que as funções $F(g \circ f)$ e $F(g) \circ F(f)$ têm o mesmo domínio, o mesmo conjunto de chegada e, para cada $x \in F(A)$,

$$(F(g) \circ F(f))(x) = F(g)(F(f)(x)) = F(g)(f(x)) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = F(g \circ f)(x),$$

tem-se $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

De (1), (2), (3) e (4) conclui-se que F é um funtor de \mathbf{D} em \mathbf{D} .

- 3.33. Considere um c.p.o. (P, \leq) visto como uma categoria \mathbf{P} . Sejam $F_{Ob} : \text{Obj}(\mathbf{P}) \rightarrow \text{Obj}(\mathbf{Set})$ a função que a cada objeto a de \mathbf{P} associa o conjunto $\{a\}$ e $F_{hom} : \text{Mor}(\mathbf{P}) \rightarrow \text{Mor}(\mathbf{Set})$ a função que a cada \mathbf{P} -morfismo $f : a \rightarrow b$ associa a função

$$F_{hom}(f) : \begin{array}{ccc} \{a\} & \rightarrow & \{b\} \\ a & \mapsto & b \end{array}.$$

Mostre que o par de funções (F_{Ob}, F_{hom}) é um funtor de \mathbf{P} em \mathbf{Set} .

Começemos por recordar que $\text{Obj}(\mathbf{Set})$ é a classe formada por todos os conjuntos e que, dados conjuntos $A, B \in \text{Obj}(\mathbf{Set})$, $\text{hom}_{\mathbf{Set}}(A, B)$ é o conjunto de todas as funções de A em B .

Relativamente à categoria \mathbf{P} , tem-se $\text{Obj}(\mathbf{P}) = P$ e, dados $a, b \in \text{Obj}(\mathbf{P})$, $\text{hom}_{\mathbf{P}}(a, b) = \{(a, b)\} \cap \leq$.

O par (F_{Ob}, F_{hom}) é um funtor de \mathbf{P} em \mathbf{Set} se:

- (1) F_{Ob} é uma função de $\text{Obj}(\mathbf{P})$ em $\text{Obj}(\mathbf{Set})$;
- (2) F_{hom} é uma função de $\text{Mor}(\mathbf{P})$ em $\text{Mor}(\mathbf{Set})$ que a cada \mathbf{P} -morfismo $f : a \rightarrow b$ associa um \mathbf{Set} -morfismo $F_{hom}(f) : F_{Ob}(a) \rightarrow F_{Ob}(b)$;
- (3) para cada $a \in \text{Obj}(\mathbf{P})$, $F_{hom}(id_a) = id_{F_{Ob}(a)}$;
- (4) para quaisquer \mathbf{P} -morfismos $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$, $F_{hom}(g \circ f) = F_{hom}(g) \circ F_{hom}(f)$.

De acordo com o enunciado, F_{Ob} e F_{hom} são funções nas condições indicadas em (1) e (2), pelo que resta verificar (3) e (4). Na prova de (3) e (4) as funções F_{Ob} e F_{hom} são representadas pelo mesmo símbolo F .

(3) Para cada $a \in \text{Obj}(\mathbf{P})$, tem-se $id_a : a \rightarrow a \in \text{Mor}(\mathbf{P})$ e, por definição de F , $F(id_a)$ é a função

$$F(id_a) : \begin{array}{ccc} \{a\} & \rightarrow & \{a\} \\ a & \rightarrow & a \end{array}.$$

Por outro lado, a função $id_{F(a)}$ é a função definida por

$$id_{F(a)} : \begin{array}{ccc} F(a) & \rightarrow & F(a) \\ a & \rightarrow & a \end{array}.$$

Considerando que as funções $F(id_a)$ e $id_{F(a)}$ têm o mesmo domínio ($F(a) = \{a\}$), o mesmo conjunto de chegada ($F(a) = \{a\}$) e $F(id_a)(a) = id_{F(a)}(a)$, temos $F(id_a) = id_{F(a)}$.

(4) Sejam $f : a \rightarrow b$ e $g : b \rightarrow c$ morfismos de \mathbf{P} . Então $g \circ f : a \rightarrow c$ é um morfismo de \mathbf{P} e, por definição de F , $F(g \circ f)$ é a função

$$F(g \circ f) : \begin{array}{ccc} \{a\} & \rightarrow & \{c\} \\ a & \mapsto & c \end{array}.$$

Por outro lado, tem-se

$$F(f) : \begin{array}{ccc} \{a\} & \rightarrow & \{b\} \\ a & \mapsto & b \end{array}, \quad F(g) : \begin{array}{ccc} \{b\} & \rightarrow & \{c\} \\ b & \mapsto & c \end{array}$$

donde, por definição de composição de funções, segue que

$$F(g) \circ F(f) : \begin{array}{ccc} \{a\} & \rightarrow & \{c\} \\ a & \mapsto & (F(g) \circ F(f))(a), \end{array}$$

onde $(F(g) \circ F(f))(a) = F(g)(F(f)(a)) = F(g)(b) = c$.

Uma vez que as funções $F(g \circ f)$ e $F(g) \circ F(f)$ têm o mesmo domínio, o mesmo conjunto de chegada e

$$(F(g) \circ F(f))(a) = c = F(g \circ f)(a),$$

tem-se $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

De (1), (2), (3) e (4) conclui-se que F é um funtor de \mathbf{P} em \mathbf{Set} .

3.34. Sejam \mathbf{C} e \mathbf{D} categorias e A um objeto de \mathbf{D} . Sejam $F_{Ob} : \text{Obj}(\mathbf{C}) \rightarrow \text{Obj}(\mathbf{D})$ a função que a cada objeto X de \mathbf{C} associa o objeto A e $F_{hom} : \text{Mor}(\mathbf{C}) \rightarrow \text{Mor}(\mathbf{D})$ a função que a cada \mathbf{C} -morfismo $f : X \rightarrow Y$ associa o morfismo $F(f) = \text{id}_A$. Mostre que o par de funções (F_{Ob}, F_{hom}) é um funtor de \mathbf{C} em \mathbf{D} .

O par (F_{Ob}, F_{hom}) é um funtor de \mathbf{C} em \mathbf{D} se:

- (1) F_{Ob} é uma função de $\text{Obj}(\mathbf{C})$ em $\text{Obj}(\mathbf{D})$;
- (2) F_{hom} é uma função de $\text{Mor}(\mathbf{C})$ em $\text{Mor}(\mathbf{D})$ que a cada \mathbf{C} -morfismo $f : X \rightarrow Y$ associa um \mathbf{D} -morfismo $F_{hom}(f) : F_{Ob}(X) \rightarrow F_{Ob}(Y)$;
- (3) para cada $X \in \text{Obj}(\mathbf{C})$, $F_{hom}(\text{id}_X) = \text{id}_{F_{Ob}(X)}$;
- (4) para quaisquer \mathbf{C} -morfismos $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$, $F_{hom}(g \circ f) = F_{hom}(g) \circ F_{hom}(f)$.

De acordo com o enunciado, F_{Ob} e F_{hom} são funções nas condições indicadas em (1) e (2), pelo que resta verificar (3) e (4). Na prova de (3) e (4) as funções F_{Ob} e F_{hom} são representadas pelo mesmo símbolo F .

(3) Por definição de F , tem-se $F(\text{id}_X) = \text{id}_A$, para cada $X \in \text{Obj}(\mathbf{C})$. Por outro lado, considerando que, para cada $X \in \text{Obj}(\mathbf{C})$, $F(X) = A$, temos $\text{id}_{F(X)} = \text{id}_A$. Logo $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$.

(4) Sejam $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ morfismos de \mathbf{C} . Então $g \circ f : X \rightarrow Z$ é um \mathbf{C} -morfismo e, por definição de F , $F(g \circ f) = \text{id}_A$. Por outro lado, tem-se $F(f) = \text{id}_A$ e $F(g) = \text{id}_A$, donde $F(f) \circ F(g) = \text{id}_A \circ \text{id}_A = \text{id}_A$. Portanto, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

De (1), (2), (3) e (4) conclui-se que F é um funtor de \mathbf{C} em \mathbf{D} .

3.35. Sejam \mathbf{C} e \mathbf{D} categorias. Defina os funtores projeção $\mathbf{C} \times \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ e $\mathbf{C} \times \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$.

Seja $F = (F_{Ob}, F_{hom})$ onde

- F_{Ob} é a correspondência de $\text{Obj}(\mathbf{C} \times \mathbf{D})$ em $\text{Obj}(\mathbf{C})$ que a cada $(X, Y) \in \text{Obj}(\mathbf{C} \times \mathbf{D})$ associa o objeto X ;
- F_{hom} é a correspondência de $\text{Mor}(\mathbf{C} \times \mathbf{D})$ em $\text{Mor}(\mathbf{C})$ que a cada $(f, g) \in \text{Mor}(\mathbf{C} \times \mathbf{D})$ associa o morfismo f .

O par $F = (F_{Ob}, F_{hom})$ é um funtor de $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ em \mathbf{C} , ficando ao cuidado do leitor fazer esta verificação.

De forma análoga define-se o funtor projeção $\mathbf{C} \times \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$.

3.36. Dos funtores estudados nos exercícios 3.33. a 3.35., indique quais são fiéis e quais são plenos.

Consideremos o funtor F definido no exercício 3.33.

- O funtor F é fiel se, para quaisquer $f, g : a \rightarrow b$,

$$F(f) = F(g) \Rightarrow f = g.$$

Considerando que, para quaisquer $a, b \in \text{Obj}(\mathbf{P})$, existe no máximo um morfismo de a em b , o funtor F é fiel.

- O funtor F é pleno se, para quaisquer $a, b \in P$ e para qualquer **Set**-morfismo $g : F(a) \rightarrow F(b)$, existe um \mathbf{P} -morfismo $f : a \rightarrow b$, tal que $F(f) = g$.

Considerando que, para quaisquer $a, b \in P$,

$$\begin{array}{ccc} g : \{a\} & \rightarrow & \{b\} \\ a & \rightarrow & b \end{array}$$

é um **Set**-morfismo e $F(a) = \{a\}$, $F(b) = \{b\}$, então, para quaisquer $a, b \in P$,

$$\begin{array}{ccc} g : F(a) & \rightarrow & F(b) \\ a & \rightarrow & b \end{array}$$

é um **Set**-morfismo. Logo, o funtor F é pleno se e só se, para quaisquer $a, b \in P$, existe um \mathbf{P} -morfismo $f : a \rightarrow b$, isto é, se e só se $(a, b) \in \leq$. Assim, F é pleno se e só se, para quaisquer $x, y \in P$, $(x, y), (y, x) \in \leq$. Considerando que \leq é uma ordem parcial, então F é pleno se e só se, para quaisquer $x, y \in P$, tem-se $x = y$.

Consideremos o funtor F definido no exercício 3.34.

- O funtor F é fiel se, para quaisquer \mathbf{C} -morfismos $f, g : X \rightarrow Y$,

$$F(f) = F(g) \Rightarrow f = g.$$

Considerando que, para quaisquer \mathbf{C} -morfismos $f, g : X \rightarrow Y$, tem-se $F(f) = id_A = F(g)$, o funtor é fiel se e só se, para quaisquer $X, Y \in \text{Obj}(\mathbf{C})$, existe no máximo um morfismo de X em Y .

- O funtor F é pleno se, para quaisquer $X, Y \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e para qualquer \mathbf{D} -morfismo $g : F(X) \rightarrow F(Y)$, existe um \mathbf{C} -morfismo $f : X \rightarrow Y$, tal que $F(f) = g$.

Atendendo a que $A \in \text{Obj}(\mathbf{D})$, então $id_A : A \rightarrow A$ é um \mathbf{D} -morfismo. Logo, considerando que, para quaisquer $X, Y \in \text{Obj}(\mathbf{C})$, temos $F(X) = F(Y) = A$, $id_A : F(X) \rightarrow F(Y)$ é um \mathbf{D} -morfismo. Assim, F é pleno se e só se, para quaisquer $X, Y \in \text{Obj}(\mathbf{C})$, existe um \mathbf{C} -morfismo de X em Y e id_A é o único \mathbf{D} -morfismo de A em A .

Consideremos o funtor projeção $F : \mathbf{C} \times \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$.

- O funtor F é fiel se, para quaisquer $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ -morfismos $(f, g), (f', g') : (X, Y) \rightarrow (Z, W)$,

$$F((f, g)) = F((f', g')) \Rightarrow (f, g) = (f', g').$$

Se uma das categorias \mathbf{C} ou \mathbf{D} é a categoria zero, o funtor F é fiel. Se \mathbf{C} e \mathbf{D} não são a categoria zero, o funtor F é fiel se e só se, para quaisquer $Y, W \in \text{Obj}(\mathbf{D})$, existe no máximo um \mathbf{D} -morfismo de $Y \rightarrow W$.

- O funtor F é pleno se, para quaisquer $(X, Y), (Z, W) \in \text{Obj}(\mathbf{C} \times \mathbf{D})$ e para qualquer \mathbf{C} -morfismo $h : F(X, Y) \rightarrow F(Z, W)$, existe um $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ -morfismo $(f, g) : (X, Y) \rightarrow (Z, W)$, tal que $F((f, g)) = h$. Considerando que, para quaisquer $(X, Y), (Z, W) \in \text{Obj}(\mathbf{C} \times \mathbf{D})$, $F(X, Y) = X$ e $F(Z, W) = Z$, o funtor F é pleno se, para qualquer \mathbf{C} -morfismo $h : X \rightarrow Y$, existe um $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ -morfismo $(f, g) : (X, Y) \rightarrow (Z, W)$, tal que $F((f, g)) = h$.

Se \mathbf{C} é a categoria zero, então o funtor F é pleno. Se \mathbf{C} não é a categoria zero, então o funtor F é pleno se e só se a categoria \mathbf{D} não é a categoria zero.

3.37. Sejam \mathbf{C} uma categoria e $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{C}$ um funtor. Mostre que:

(a) Se f é um monomorfismo com domínio não vazio em \mathbf{Set} , então $F(f)$ é um monomorfismo em \mathbf{C} .

Seja $f : X \rightarrow Y$ um morfismo de \mathbf{Set} com domínio não vazio. Pretende-se mostrar que $F(f)$ é um monomorfismo.

Como f é um morfismo de \mathbf{Set} com domínio não vazio, então f é invertível à esquerda. Atendendo a que todo o funtor preserva morfismos invertíveis à esquerda, então $F(f)$ é invertível à esquerda. Uma vez que todo o morfismo invertível à esquerda é um monomorfismo, concluímos que $F(f)$ é um monomorfismo.

(b) Se f é um epimorfismo em \mathbf{Set} , então $F(f)$ é um epimorfismo em \mathbf{C} .

Seja f um epimorfismo de \mathbf{Set} . Então, considerando que todo o epimorfismo de \mathbf{Set} é invertível à direita e que todo o funtor preserva morfismos invertíveis à direita, $F(f)$ é invertível à direita. Uma vez que todo o morfismo invertível à direita é um epimorfismo, concluímos que $F(f)$ é um epimorfismo.

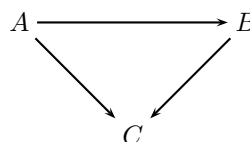
3.38. Sejam \mathbf{C} e \mathbf{C}' categorias, $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}'$ um funtor fiel e f um morfismo de \mathbf{C} . Mostre que:

(a) Se $F(f)$ é um monomorfismo (epimorfismo), então f é um monomorfismo (epimorfismo).

Seja $f : A \rightarrow B$ um \mathbf{C} -morfismo e suponhamos que $F(f)$ é um monomorfismo. Sejam $g, h : C \rightarrow A$ morfismos de \mathbf{C} tais que $f \circ g = f \circ h$. Então $F(f \circ g) = F(f \circ h)$, donde $F(f) \circ F(g) = F(f) \circ F(h)$. Uma vez que $F(f)$ é um monomorfismo, tem-se $F(g) = F(h)$ e, atendendo a que F é fiel, resulta que $g = h$.

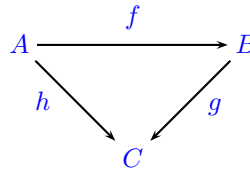
Por dualidade, é imediato que se $F(f)$ é um epimorfismo, então f é um epimorfismo.

(b) Um diagrama

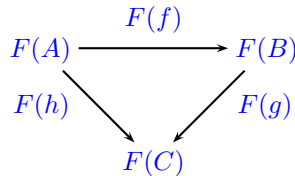


em \mathbf{C} é comutativo se e só se o diagrama correspondente em \mathbf{C}' é comutativo.

Admitamos que o diagrama em \mathbf{C} a seguir indicado é comutativo



Pretendemos mostrar que o diagrama anterior é comutativo se e só se o diagrama seguinte é comutativo



Considerando que F é um funtor e é fiel, a prova é imediata. De facto,

$$\begin{aligned} g \circ f = h &\Rightarrow F(g \circ f) = F(h) \\ &\Rightarrow F(g) \circ F(f) = F(h) \quad (F \text{ é funtor}). \end{aligned}$$

Reciprocamente, temos

$$\begin{aligned} F(g) \circ F(f) = F(h) &\Rightarrow F(g \circ f) = F(h) \quad (F \text{ é funtor}) \\ &\Rightarrow g \circ f = h \quad (F \text{ é fiel}). \end{aligned}$$

3.39. Sejam \mathbf{C} e \mathbf{D} categorias, $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ um funtor e $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow A$ morfismos em \mathbf{C} . Mostre que:

- (a) Se F é fiel, então $F(f)$ é um inverso direito (esquerdo) de $F(g)$ se e só se f é um inverso direito (esquerdo) de g .

Admitamos que $F(f)$ é um inverso direito de $F(g)$. Então $F(g) \circ F(f) = id_{F(A)}$. Como F é um funtor, segue que $F(g \circ f) = F(id_A)$. Dado que F é fiel, tem-se $g \circ f = id_A$. Portanto, f é um inverso difeito de g .

- (b) Se F é fiel e pleno, então f tem um inverso direito (esquerdo) se e só se $F(f)$ tem um inverso direito (esquerdo).

Seja F um funtor fiel e pleno.

Admitamos que f tem um inverso direito. Então existe um \mathbf{C} -morfismo $h : B \rightarrow A$ tal que $f \circ h = id_B$. Logo $F(f \circ h) = F(id_B)$ e, considerando que F é um funtor, tem-se $F(f) \circ F(h) = id_{F(B)}$. Assim, $F(h)$ é um inverso direito de $F(f)$.

Reciprocamente, admitamos que $F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$ tem um inverso direito. Então existe um \mathbf{C}' -morfismo $h' : F(B) \rightarrow F(A)$ tal que $F(f) \circ h' = id_{F(B)}$. Como F é pleno, existe um \mathbf{C} -morfismo $h : B \rightarrow A$ tal que $F(h) = h'$. Logo $F(f) \circ F(h) = id_{F(B)}$ e, atendendo a que F é funtor, temos $F(f \circ h) = F(id_B)$. Como F é fiel, resulta que $f \circ h = id_B$ e, portanto, f tem um inverso direito.

3.40. Sejam $F_{Ob} : \text{Obj}(\mathbf{Set}) \rightarrow \text{Obj}(\mathbf{Set})$ a função que a cada conjunto A da categoria \mathbf{Set} associa o conjunto potência $\mathcal{P}(A)$ ($F_{Ob}(A) = \mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$) e $F_{hom} : \text{Mor}(\mathbf{Set}) \rightarrow \text{Mor}(\mathbf{Set})$ a função que a cada função $f : A \rightarrow B$ associa a função

$$F_{hom}(f) : \begin{array}{ccc} F_{Ob}(A) & \rightarrow & F_{Ob}(B) \\ U & \mapsto & f(U) \end{array}.$$

- (a) Mostre que o par $F = (F_{Ob}, F_{hom})$ é um funtor da categoria \mathbf{Set} na categoria \mathbf{Set} .

O par (F_{Ob}, F_{hom}) é um funtor \mathbf{Set} na categoria \mathbf{Set} se:

- (1) F_{Ob} é uma função de $\text{Obj}(\mathbf{Set})$ em $\text{Obj}(\mathbf{Set})$;
- (2) F_{hom} é uma função de $\text{Mor}(\mathbf{Set})$ em $\text{Mor}(\mathbf{Set})$ que a cada \mathbf{Set} -morfismo $f : A \rightarrow B$ associa um \mathbf{Set} -morfismo $F_{hom}(f) : F_{Ob}(A) \rightarrow F_{Ob}(B)$;

(3) para cada $A \in \text{Obj}(\mathbf{Set})$, $F_{hom}(id_A) = id_{F_{Ob}(A)}$;

(4) para quaisquer **Set**-morfismos $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$, $F_{hom}(g \circ f) = F_{hom}(g) \circ F_{hom}(f)$.

De acordo com o enunciado, F_{Ob} e F_{hom} são funções nas condições indicadas em (1) e (2), pelo que resta verificar (3) e (4). Na prova de (3) e (4) as funções F_{Ob} e F_{hom} são representadas pelo mesmo símbolo F .

(3) Para qualquer objeto A de **Set**, o morfismo id_A é definido por

$$\begin{aligned} id_A : A &\rightarrow A \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

pelo que $F(id_A)$ é definido por

$$\begin{aligned} F(id_A) : \mathcal{P}(A) &\rightarrow \mathcal{P}(A) \\ U &\mapsto id_A(U) \end{aligned} \cdot$$

Por outro lado, por definição de função identidade associada a um conjunto, tem-se

$$\begin{aligned} id_{F(A)} : F(A) &\rightarrow F(A) \\ U &\mapsto U \end{aligned} \cdot$$

As funções $F(id_A)$ e $id_{F(A)}$ têm o mesmo domínio, o mesmo conjunto de chegada ($F(A) = \mathcal{P}(A)$) e, para todo $U \in \mathcal{P}(A)$, $F(id_A)(U) = U = id_{F(A)}(U)$. Logo $F(id_A) = id_{F(A)}$.

(4) Para quaisquer **Set**-morfismos $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$, tem-se

$$\begin{aligned} g \circ f : A &\rightarrow C \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned} \cdot$$

Então, por definição de F , tem-se

$$\begin{aligned} F(g \circ f) : \mathcal{P}(A) &\rightarrow \mathcal{P}(C) \\ U &\mapsto (g \circ f)(U) \end{aligned} \cdot$$

Por outro lado, por definição de F , tem-se

$$\begin{aligned} F(f) : \mathcal{P}(A) &\rightarrow \mathcal{P}(B) & F(g) : \mathcal{P}(B) &\rightarrow \mathcal{P}(C) \\ U &\mapsto f(U) & U &\mapsto g(U) \end{aligned} \cdot$$

e, por definição de composição de funções, temos

$$\begin{aligned} F(g) \circ F(f) : \mathcal{P}(A) &\rightarrow \mathcal{P}(C) \\ U &\mapsto (F(g) \circ F(f))(U) \end{aligned} \cdot$$

Assim, as funções $F(g \circ f)$ e $F(g) \circ F(f)$ têm o mesmo domínio ($\mathcal{P}(A)$) e o mesmo conjunto de chegada ($\mathcal{P}(C)$). Além disso, para qualquer $U \in \mathcal{P}(A)$,

$$F(g \circ f)(U) = (g \circ f)(U) = g(f(U)) = F(g)(F(f)(U)) = (F(g) \circ F(f))(U).$$

Logo $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

(b) Diga, justificando, se:

i. F preserva objetos terminais.

O functor F preserva objetos terminais se, para qualquer $X \in \text{Obj}(\mathbf{Set})$,

$$X \text{ é objeto terminal} \Rightarrow F(X) \text{ é objeto terminal}.$$

Na categoria **Set**, os objetos terminais são os conjuntos singulares. Então F não preserva objetos terminais pois $X = \{a\}$ é um objeto terminal e $F(X) = \mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$ não é um objeto terminal.

ii. F é um functor fiel.

O functor F é fiel se, para quaisquer **Set**-morfismos $f, g : A \rightarrow B$,

$$F(f) = F(g) \Rightarrow f = g.$$

Sejam $f, g : A \rightarrow B$ funções tais que $F(f) = F(g)$. Então, como $F(f)$ e $F(g)$ são as funções definidas por

$$\begin{aligned} F(f) : \mathcal{P}(A) &\rightarrow \mathcal{P}(B) & F(g) : \mathcal{P}(B) &\rightarrow \mathcal{P}(C) \\ U &\mapsto f(U) & U &\mapsto g(U) \end{aligned} \cdot$$

segue que, para todo $U \in \mathcal{P}(A)$, temos $f(U) = g(U)$. Em particular, para todo $a \in A$, temos $f(\{a\}) = g(\{a\})$, donde resulta que, para todo $a \in A$, $f(a) = g(a)$. Logo as funções f e g são iguais. Assim, F é um functor fiel.