Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Álgebra Linear LCC Teste 2 Duração: 1h45 [Teste modelo A]

Proposta de resolução

Grupo I

Em cada questão deste grupo deve ser assinalada apenas uma das opções de resposta. A uma resposta correta é atribuída uma cotação de 1.25 valores (apenas uma resposta está correta) e a uma resposta errada é atribuída uma cotação de −0.25 valores. A cotação mínima total neste grupo é de 0 valores.

1. Os seguintes vetores formam um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$.

- [ ] $(1, 2, 0), (0, 1, -1)$.
- [ ] $(1, 2, 0), (3, 6, 0), (0, 1, -1), (0, 2, -2)$.
- [ ] $(1, 2, -1), (1, -1, 3), (2, 1, 2)$.
- [X] $(1, 2, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 2)$.

2. Sejam V um espaço vetorial real, $X = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$ um subconjunto de V e $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}\}$ uma base de V.

- [X] $\{3\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}\}$ também é uma base de V.
- [ ] X é um conjunto linearmente independente.
- [ ] $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2}\}$ não é um conjunto gerador de V.
- [ ] $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_1}+\boldsymbol{v_2}\}$ é um conjunto linearmente dependente.

3. Se $\boldsymbol{u_1}$, $\boldsymbol{u_2}$ e $\boldsymbol{u_3}$ são três vetores linearmente independentes do espaço vetorial $\mathbb{R}^4$, então

- [ ] $\dim(\langle \boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_3}, \boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2}\rangle) = 4$.
- [ ] o vetor nulo não pode escrever-se como combinação linear de $\boldsymbol{u_1}$, $\boldsymbol{u_2}$ e $\boldsymbol{u_3}$.
- [X] os vetores $\boldsymbol{u_1}$, $\boldsymbol{u_2}$ e $\boldsymbol{u_3}$ geram um subespaço de $\mathbb{R}^4$ de dimensão 3.
- [ ] qualquer vetor de $\mathbb{R}^4$ é combinação linear de $\boldsymbol{u_1}$, $\boldsymbol{u_2}$ e $\boldsymbol{u_3}$.

4. Seja $T\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear e A_T a matriz de T.

- [ ] A_T é uma matriz 4×3.
- [ ] Pode ter-se $\mathsf{Nuc}(T) = \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^4}\}$.
- [X] Se $\dim(\mathsf{Im}(T)) = 3$, então $\dim\big(\mathsf{Nuc}(T)\big) = 1$.
- [ ] Se $\dim\big(\mathsf{Nuc}(T)\big) = 2$, então $\dim(\mathsf{Im}(T)) = 1$.

5. Seja T uma aplicação linear cuja representação matricial é $A_T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

- [ ] A matriz da aplicação $T \circ T$ é $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 9 \\ 9 & 0 & 9 \end{bmatrix}$.
- [X] A matriz da aplicação $3T$ é $\begin{bmatrix} 6 & -3 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \\ 9 & 0 & 9 \end{bmatrix}$.
- [ ] $(1, 1, -1) \in \mathsf{Nuc}(T)$ e $(2, 2, 3) \notin \mathsf{Im}(T)$.
- [ ] $T(x, x, x) = (2, 6, 6)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

6. Seja A uma matriz de ordem 3 com valores próprios 0, 1 e 2. Então

- [ ] o sistema $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ é possível e determinado.
- [X] Os valores próprios da matriz $2A - I_3$ são -1, 1 e 3.
- [ ] $\det(A^T) \neq 0$.
- [ ] A é uma matriz invertível.

Grupo II

Neste grupo as respostas a todos as questões devem ser devidamente justificadas.

1. [2.5 valores] Considere, no espaço vetorial $\mathbb{R}^4$, o subespaço

$$U = \langle (1,0,1,2), (0,1,1,0), (3,-3,0,6) \rangle.$$

(a) Determine uma base de U.

(b) Determine $k \in \mathbb{R}$ tal que $(1,2,3,k) \in U$.

Resolução.

(a) Vejamos se o os vetores $(1,0,1,2)$,$(0,1,1,0)$ e $(3,-3,0,6)$ são linearmente independentes. Temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 6 \end{bmatrix} \underset{l_3 \longleftarrow l_3 - 3l_1}{\longleftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \underset{l_3 \longleftarrow l_3 - 3l_1}{\longleftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como a característica desta matriz é 2, temos apenas dois vetores linearmente independentes. Observe-se que $(3,-3,0,6) = 3(1,0,1,2) - 3(0,1,1,0)$. Assim,

$$U = \langle (1,0,1,2), (0,1,1,0), (3,-3,0,6) \rangle = \langle (1,0,1,2), (0,1,1,0) \rangle.$$

Uma vez que o conjunto $\{(1,0,1,2), (0,1,1,0)\}$ é linearmente independente, constitui, portanto, uma base de U.

(b) Devemos discutir a existência de solução do sistema, nas incógnitas α e β,

$$\alpha(1,0,1,2) + \beta(0,1,1,0) = (1,2,3,k),$$

em função do parâmetro k. Temos, então,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & k \end{array}\right] \underset{\substack{l_3 \longleftarrow l_3 - l_1 \\ l_3 \longleftarrow l_4 - 2l_1}}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & k-2 \end{array}\right].$$

Se $k - 2 \neq 0$, o sistema é impossível; caso contrário, tem solução única. Assim, apenas quando $k = 2$ temos $(1,2,3,k) \in U$.

2. [3 valores] Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear definida por

$$T(x, y, z) = (3x - y, 4z, 6x - 2y).$$

(a) Determine a matriz da aplicação T relativamente às bases canónicas.

(b) Determine $\mathsf{Im}(T)$ e $\mathsf{Nuc}(T)$ e as respetivas dimensões.

Resolução.

(a) Sendo $T(1, 0, 0) = (3, 0, 6)$, $T(0, 1, 0) = (-1, 0, -2)$ e $T(0, 0, 1) = (0, 4, 0)$, a matriz da aplicação linear relativamente às bases canónicas é

$$A_T = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 6 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$\begin{aligned} \mathsf{Im}(T)) &= \left\{(3x - y, 4z, 6x - 2y) \in \mathbb{R}^3 \colon x, y, z \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \{x(3, 0, 6) + y(-1, 0, -2) + z(0, 4, 0) \colon x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (3, 0, 6), (-1, 0, -2), (0, 4, 0)\rangle \\ &= \langle (3, 0, 6), (0, 4, 0)\rangle \end{aligned}$$

Observe-se que $(-1, 0, -2) = -\frac{1}{3}(3, 0, 6)$.
Como os vetores $(3, 0, 6)$ e $(0, 4, 0)$ são linearmente independentes (um não é múltiplo escalar do outro), constituem uma base de $\mathsf{Im}(T)$ e, portanto, $\dim(\mathsf{Im}(T)) = 2$.

Da definição de $\mathsf{Nuc}(T)$,

$$\mathsf{Nuc}(T) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon T(x, y, z) = (0, 0, 0)\right\},$$

obtemos o sistema

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[l_3 \longleftarrow l_3 - 2l_1]{} \left[\begin{array}{ccc:c} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Resolvendo o sistema, obtemos

$$\mathsf{Nuc}(T) = \{(1/3\alpha, \alpha, 0) \colon \alpha \in \mathbb{R}\} = \langle (1/3, 1, 0)\rangle$$

e, portanto, $\dim(\mathsf{Nuc}(T)) = 1$, uma vez que $\big((1/3, 1, 0)\big)$ é uma base de $\mathsf{Nuc}(T)$.

3. [3 valores] Seja $G\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$G(1, 0, 1) = (1, 1, 2), \quad G(0, 1, 1) = (0, 1, 3) \quad \text{e} \quad \mathsf{Nuc}(G) = \langle (1, 0, 0)\rangle.$$

Determine $G(x, y, z)$ para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Resolução.

O conjunto $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 0)\}$ constitui uma base de $\mathbb{R}^3$. De facto, a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[l_3 \longleftrightarrow l_3 - l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

tem característica 3, o que significa que os vetores linha são linearmente independentes e, como $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

Assim, dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ o sistema

$$(x, y, z) = \alpha(1, 0, 1) + \beta(0, 1, 1) + \gamma(1, 0, 0)$$

tem solução única. Temos

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 1 & 1 & 0 & z \end{array}\right] \xleftrightarrow[l_3 \longleftrightarrow l_3 - l_1]{} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & -1 & z - x \end{array}\right] \xleftrightarrow[l_3 \longleftarrow l_3 - l_2]{} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & -1 & z - x - y \end{array}\right]$$

A solução é dada por

$$\begin{cases} \alpha = x - \gamma \\ \beta = y \\ \gamma = -z + x + y \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = z - y \\ \beta = y \\ \gamma = x + y - z \end{cases}$$

Podemos agora definir a aplicação G. Para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos

$$\begin{aligned} G(x, y, z) &= G\big((z - y)(1, 0, 1) + y(0, 1, 1) + (x + y - z)(1, 0, 0)\big) \\ &= (z - y)G(1, 0, 1) + yG(0, 1, 1) + (x + y - z)G(1, 0, 0) \\ &= (z - y) \cdot (1, 1, 2) + y \cdot (0, 1, 3) + (x + y - z) \cdot (0, 0, 0) \\ &= (z - y, z, 2z + y). \end{aligned}$$

4. [2.5 valores] Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Verifique que $\lambda = 2$ é um valor próprio duplo da matriz A.

(b) Determine o subespaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = 2$.

Resolução.

(a) Temos

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det\left(\begin{bmatrix} 1 - \lambda & 3 & 0 \\ 1 & -1 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2 - \lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= (2 - \lambda)[(1 - \lambda)(-1 - \lambda) - 3] \\ &= (2 - \lambda)(\lambda^2 - 4) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = 0 &\iff (2 - \lambda)(\lambda^2 - 4) = 0 \\ &\iff 2 - \lambda = 0 \ \vee \ \lambda^2 - 4 = 0 \\ &\iff \lambda = 2 \ \vee \ \lambda = 2 \ \vee \ \lambda = -2. \end{aligned}$$

O valor próprio $\lambda = 2$ aparece como raíz dupla do polinómio característico e, portanto, tem multiplicidade algébrica 2.

(b) O subespaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = 2$, E_2, é o conjunto-solução do sistema $(A - 2I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, com $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$. Usando o método de eliminação de Gauss para a resolução do sistema, vem

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[l_3 \longleftarrow l_3 + l_1]{l_2 \longleftarrow l_2 + l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow{l_2 \longleftrightarrow l_3} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Assim, $x_2 = 0$, $x_1 = 0$ e x_3 é uma variável livre. O conjunto-solução do sistema é, então, dado por

$$\{(0, 0, x_3) \colon x_3 \in \mathbb{R}\} = \{x_3(0, 0, 1) \colon x_3 \in \mathbb{R}\} = E_2.$$

Logo, o subespaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = 2$ é $E_2 = \langle (0, 0, 1) \rangle$.

5. [1.5 valores] Seja A uma matriz que tem $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T$ como vetor próprio associado ao valor próprio 2 e $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$ como vetor próprio associado ao valor próprio 3. Calcule $A^2\boldsymbol{w}$ onde $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}^T$.

Resolução.

Dado que $A\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{u}$ e $A\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{v}$, temos

$$A^2\boldsymbol{u} = A(A\boldsymbol{u}) = A(2\boldsymbol{u}) = 2(A\boldsymbol{u}) = 2(2\boldsymbol{u}) = 2^2\boldsymbol{u} = 4\boldsymbol{u}$$

e, analogamente,

$$A^2\boldsymbol{v} = 3^2\boldsymbol{v} = 9\boldsymbol{v}.$$

Se $\boldsymbol{w}$ se puder escrever como combinação linear de $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$, ou seja, se

$$\boldsymbol{w} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}, \quad \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

teremos,

$$A^2\boldsymbol{w} = A^2(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}) = \alpha A^2\boldsymbol{u} + \beta A^2\boldsymbol{v} = 4\alpha\boldsymbol{u} + 9\beta\boldsymbol{v}.$$

De facto, o sistema $\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$, nas incógnitas α e β, tem matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\substack{l_3 \longleftarrow l_3 - l_1 \\ l_4 \longleftarrow l_3 - 3l_1}]{l_2 \longleftarrow l_2 - 2l_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & -4 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\substack{l_3 \longleftarrow l_3/3 \\ l_4 \longleftarrow l_4/4}]{l_2 \longleftarrow l_2/4} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

e é, portanto, um sistema possível. Temos,

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 3 \\ \beta = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -1 \end{cases}.$$

Assim,

$$A^2\boldsymbol{w} = 8\boldsymbol{w} - 9\boldsymbol{v} = 8\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T - 9\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -17 & -2 & -10 & 15 \end{bmatrix}^T.$$