

**Matrizes****Exercícios (continuação)**

34. Mostre que as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

são comutáveis.

35. Mostre que  $\text{tr}(AB - BA) = 0$  para o caso em que  $A$  e  $B$  são matrizes de ordem 2.

36. Sejam  $A$  e  $B$  matrizes quadradas de ordem  $n$ . Mostre que  $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B$ , admitindo que todas as inversas existem.

37. Seja  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  uma matriz real. Mostre  $A$  é invertível e

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

quando  $ad - cb \neq 0$ .

38. Considere as matrizes  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  e  $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ . Resolva a equação matricial

$$\left( (XA^{-1})^{-1} + ACB \right)^T = A^T,$$

em ordem à variável  $X$ , sabendo que  $A$  é uma matriz invertível de ordem 2.

39. Mostre que, para  $A$  e  $B$  matrizes de ordem  $n$ , se  $\left( (A^{-1})^T B \right)^{-1} = I_n$ , então  $B = A^T$ .

40. Seja  $\mathbf{x}$  uma matriz de ordem  $n \times 1$  (vetor coluna) tal que  $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = 1$ . Mostre que  $I_n - 2\mathbf{x}\mathbf{x}^T$  é uma matriz simétrica e ortogonal.

41. Justifique que a matriz

$$V_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

é invertível e que a sua inversa é  $V_{-\alpha}$ .

42. Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ . Justifique que

- (a) se  $A$  tem uma linha (ou coluna) nula, então  $A$  não é invertível.
- (b) se  $A$  tem as linhas  $i$  e  $j$  iguais, com  $i \neq j$ , então  $A$  não é invertível.

43. Dê exemplo de matrizes quadradas  $A$  e  $B$  tais que

- (a)  $A$  e  $B$  são invertíveis e  $A + B$  não é invertível.
- (b)  $A + B$  é invertível e nem  $A$  nem  $B$  são invertíveis.

44. Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$  tal que  $A^2 = I_n$ . Mostre que  $A$  é invertível e indique a sua inversa.

45. Seja  $A$  uma matriz invertível com  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ . Mostre que

- (a) existe uma, e uma só, matriz  $B$  tal que  $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$  e determine-a.
- (b) existe uma, e uma só, matriz  $C$  tal que  $AC = A^2 + A$  e determine-a.

46. Mostre que para quaisquer duas matrizes quadradas  $A$  e  $B$  se tem que

- (a) se  $A$  e  $B$  são simétricas, então  $A + B$  é simétrica.
- (b) se  $A$  e  $B$  são simétricas, então  $AB$  é simétrica se e só se  $A$  e  $B$  comutam.
- (c) se  $A$  é invertível e simétrica, então  $A^{-1}$  é simétrica.

47. Indique quais das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

- (a) são simétricas;
- (b) são anti-simétricas.

48. Seja  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Verifique que

- (a) para qualquer matriz da forma  $B = \begin{bmatrix} a & 0 & 1-a \\ d & -1 & d \end{bmatrix}$ , com  $a, d \in \mathbb{R}$ , se tem  $BA = I_2$ .
- (b) qualquer que seja  $B = [b_{ij}]_{2 \times 3}$  se tem  $AB \neq I_3$ .

49. Verifique, usando a definição, que

- (a)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ -\beta & 0 & 1 \end{bmatrix}$  é a inversa de  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .
- (b)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ -\beta & -\gamma & 1 \end{bmatrix}$  não é a inversa de  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & \gamma & 1 \end{bmatrix}$ .

50. Indique, se existir, uma matriz  $A$  de ordem 3, sob a forma de um produto de matrizes elementares, tal que, quaisquer que sejam  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , se verifique

$$(a) \ A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 2a \\ c \end{bmatrix}. \quad (b) \ A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ c \\ -b \end{bmatrix}. \quad (c) \ A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ b+3c \\ -a \end{bmatrix}.$$

51. Para cada uma das alíneas do exercício anterior, calcule a inversa da matriz  $A$ , observando que esta se pode escrever como produto de matrizes elementares.

52. Considere as matrizes elementares

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Indique as respetivas matrizes inversas.

(b) Considere a matriz

$$S = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ com } \alpha \neq 0.$$

Represente  $S$  através de um produto de matrizes elementares, conclua que  $S$  é invertível e determine  $S^{-1}$ .

53. Uma **matriz de permutação** de ordem  $n$  é qualquer matriz que resulta de  $I_n$  efetuando uma sequência finita com  $k \in \mathbb{N}_0$  transformações elementares do tipo I.

Justifique que se  $P$  é uma matriz de permutação de ordem  $n$  então

$$PP^T = I_n.$$

Sugestão: Atenda a que se  $E$  é uma matriz elementar de tipo I então  $E^T = E$ .

54. Indique uma matriz em forma de escada equivalente por linhas à matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 6 & 0 \\ 4 & 8 & -4 & 7 & 5 \\ -2 & -4 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

55. Para cada das seguintes matrizes obtenha uma matriz equivalente por linhas em forma de escada (não reduzida) e a matriz equivalente por linhas em forma de escada reduzida:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I_n.$$

56. Considere as matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine a característica de  $A_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

57. Discuta, segundo o valor de  $\alpha \in \mathbb{R}$ , a característica da matriz

$$B_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ \alpha & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \end{bmatrix}.$$

58. Seja  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ .

- (a) Mostre que  $A$  é invertível e determine  $A^{-1}$ .  
 (b) Exprima  $A$  e  $A^{-1}$  como produto de matrizes elementares.

59. Determine se cada uma das matrizes seguintes é invertível e, em caso afirmativo, determine a sua inversa.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{(c)} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \text{(e)} \quad E = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\ \text{(b)} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} & \text{(d)} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} & \text{(f)} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

60. Seja

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & \dots & b_2 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_n & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}),$$

com  $b_1 b_2 \cdots b_n \neq 0$ . Justifique que  $B$  é invertível e indique  $B^{-1}$ .

61. Seja  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - \beta \end{bmatrix}$  com  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Para que valores de  $\alpha$  e  $\beta$  é a matriz  $A$  invertível?

62. Justifique que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é invertível para qualquer valor de  $a \in \mathbb{R}$  e determine  $A^{-1}$ .

63. Um matriz  $A$  de ordem  $n$  diz-se **involutiva** se  $A^2 = I_n$  e **idempotente** se  $A^2 = A$ . Mostre que

$$\text{(a)} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & -1 & 0 \\ c & d & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ é involutiva, quaisquer que sejam } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

(b) se  $N$  é involutiva, então

$$\frac{1}{2}(I_n + N) \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}(I_n - N)$$

são idempotentes e

$$(I_n + N)(I_n - N) = O.$$

(c) toda a matriz involutiva se pode escrever como a diferença de duas matrizes idempotentes, cujo produto é a matriz nula.

---



---

## Soluções

36. Usando a definição de inversa,

$$\begin{aligned} (A^{-1} + B^{-1}) (A(A+B)^{-1}B) &= ((A^{-1} + B^{-1})A) (A+B)^{-1}B \\ &= (I_n + B^{-1}A)(A+B)^{-1}B = (B^{-1}B + B^{-1}A)(A+B)^{-1}B \\ &= B^{-1}(B+A)(A+B)^{-1}B = B^{-1}I_nB = I_n \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (A(A+B)^{-1}B) (A^{-1} + B^{-1}) &= A(A+B)^{-1} (B(A^{-1} + B^{-1})) \\ &= A(A+B)^{-1}(BA^{-1} + I_n) = A(A+B)^{-1}(BA^{-1} + AA^{-1}) \\ &= A(A+B)^{-1}(B+A)A^{-1} = AI_nA^{-1} = I_n. \end{aligned}$$

38.  $X = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

39.  $((A^{-1})^T B)^{-1} = I_n \implies ((A^T)^{-1} B)^{-1} = I_n \implies B^{-1}A^T = I_n \implies A^T = B$

40.  $(I_n - 2\mathbf{x}\mathbf{x}^T)^T = I_n - (2\mathbf{x}\mathbf{x}^T)^T = I_n - 2(\mathbf{x}^T)^T \mathbf{x}^T = I_n - 2\mathbf{x}\mathbf{x}^T$ , logo é simétrica.

$$(I_n - 2\mathbf{x}\mathbf{x}^T)(I_n - 2\mathbf{x}\mathbf{x}^T)^T = (I_n - 2\mathbf{x}\mathbf{x}^T)(I_n - 2\mathbf{x}\mathbf{x}^T) = I_n - 4\mathbf{x}\mathbf{x}^T + 4\mathbf{x}\mathbf{x}^T = I_n \text{ e}$$

$$(I_n - 2\mathbf{x}\mathbf{x}^T)^T(I_n - 2\mathbf{x}\mathbf{x}^T) = I_n, \text{ logo é ortogonal.}$$

41. Comece por observar que  $V_{-\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$  e verifique que  $V_\alpha V_{-\alpha} = V_{-\alpha} V_\alpha = I_2$ .

43. (a) Por exemplo,  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

(b) Por exemplo,  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

44.  $A^{-1} = A$

45. (a)  $B = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 12 & 4 \\ 8 & 11 \end{bmatrix}$  (b)  $C = A + I_3$

47. (a)  $A$  e  $C$  (b)  $A$  e  $E$

50. Por exemplo,

(a)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$(c) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$51. (a) A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (b) A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (c) A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

52. (a)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(b) S = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; S^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\alpha & -\beta/\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

54.

$$A \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ por exemplo}$$

55.

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (f.e.r.); } A \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (f.e), por exemplo} \\ B &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (f.e.r.); } B \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (f.e), por exemplo} \\ C &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (f.e.r.); } C \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (f.e), por exemplo} \\ D &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (f.e.r.); } D \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (f.e), por exemplo} \\ &\quad I_n \text{ (f.e.r); } 5I_n \text{ (f.e), por exemplo} \end{aligned}$$

$$56. \text{car}(A_1) = 3, \text{car}(A_2) = 3, \text{car}(A_3) = 2, \text{car}(A_4) = 3.$$

$$57. \text{car}(B_\alpha) = \begin{cases} 3 & \text{se } \alpha = 2 \\ 4 & \text{se } \alpha \neq 2 \end{cases}$$

$$58. (a) A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$59. (a) A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$(b) \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} (d) \text{ Não existe.} \\ (e) \text{ Não existe.} \\ (f) \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/4 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$(c) \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ -1 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$60. \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & b_1^{-1} \\ 0 & \dots & b_2^{-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_n^{-1} & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$61. \quad \alpha \neq 0 \text{ e } \beta \neq \alpha.$$

$$62. \quad \text{car}(A) = n = 4 \text{ para qualquer valor de } a \in \mathbb{R}, \text{ logo } A \text{ é invertível.}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$