Matrizes - conceitos básicos

A um quadro de m vezes n números dispostos em m linhas e n colunas dá-se o nome de **matriz**. Os números contidos na matriz são chamados **elementos** da matriz.

- Usualmente representamos os elementos da matriz entre parênteses retos (ou curvos)
- Usaremos letras maiúsculas para denotar matrizes
- O elemento da matriz A que se encontra na linha i e coluna j diz-se o **elemento** $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ e será denotado por $\boldsymbol{a_{ij}}$
- Uma matriz com m linhas e n colunas diz-se uma matriz de **ordem** $m \times n$

Assim,

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

representa uma matriz de ordem $m \times n$.

Uma **matriz** diz-se **real** se todos os seus elementos são números reais. O conjunto das matrizes reais representa-se, muitas vezes, por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, escrevendo-se,

$$A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$$

quando A é uma matriz real.

Se $m \neq n$, A diz-se **retangular**. Se $m = n$, A diz-se **quadrada**.

Uma matriz de ordem $m \times 1$ tem a forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix},$$

e designa-se por **matriz (ou vetor) coluna**.

Uma matriz de ordem $1 \times n$ tem a forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix},$$

e chama-se **matriz (ou vetor) linha**.

- representação com letras minúsculas a carregado e os seus elementos apenas com um índice. Por exemplo,

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{bmatrix}.$$

Definição

sejam $A = [a_{ij}]$ *e* $B = [b_{ij}]$ *matrizes da mesma ordem. Diz-se que* A *é igual a* B *e escreve-se* $A = B$ *se e só se*

$$a_{ij} = b_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n.$$

Definição

Seja $A = [a_{ij}]$ *uma matriz de ordem* n*. Diz-se que os elementos*

$$a_{11},\ a_{22},\ \ldots,\ a_{nn}$$

se dispõem na ***diagonal*** *de* A *ou que são os* ***elementos diagonais*** *de* A*.*

Definição

Dada uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ *de ordem* n *chamamos* ***traço*** *de* A *e denotamos por* $\mathrm{tr}(A)$ *à soma dos elementos diagonais de* A*, ou seja,*

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}.$$

Definição

*Uma matriz cujos elementos são todos iguais a zero chama-se **matriz nula**. Representaremos, em geral, a matriz nula de ordem $m \times n$ por $\boldsymbol{O_{m\times n}}$ ou simplesmente por $\boldsymbol{O}$.*

Definição

*À matriz quadrada de ordem n cujos elementos são todos nulos excepto os da diagonal que são todos iguais a um, dá-se o nome de **matriz identidade** de ordem n e representa-se por $\boldsymbol{I_n}$.*

$$O_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}, \qquad I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Adição de matrizes

Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ duas matrizes de ordem $m \times n$.

Definição

A soma de A e B é uma matriz $C = [c_{ij}]$ cujos elementos são dados por

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n,$$

e escreve-se

$$C = A + B.$$

Note-se que a adição de matrizes só está definida para matrizes com a mesma ordem.

Multiplicação de uma matriz por um escalar

Definição

Seja $A = [a_{ij}]$ *uma matriz de ordem* $m \times n$ *e* α *um número. O produto de* α *por* A *é a matriz* $C = [c_{ij}]$ *cujos elementos são dados por*

$$c_{ij} = \alpha\, a_{ij} \qquad i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n,$$

e escreve-se

$$C = \alpha A.$$

A multiplicação de uma matriz por um escalar está sempre definida.

Definição

Sendo $-B = [-b_{ij}]$,

$$A - B \quad \textit{significa} \quad A + (-B).$$

Exemplo (soma de matrizes e multiplicação por um escalar)

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Então

$$\tfrac{1}{2}A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \qquad 3A = \begin{bmatrix} 12 & 24 & 6 \\ 18 & 24 & 30 \end{bmatrix},$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 4 \\ 7 & 10 & 13 \end{bmatrix},$$

$$B - 3A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & 24 & 6 \\ 18 & 24 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -22 & -4 \\ -17 & -22 & -27 \end{bmatrix},$$

$$C - 2D = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -8 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Propriedades da adição matricial

No teorema seguinte são enunciadas propriedade de adição de matrizes que seguem da álgebra usual em $\mathbb{R}$.

Teorema

Sejam A, B *e* C *matrizes de ordem* $m \times n$. *Então,*

(i) $A + B = B + A$,

(ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$,

(iii) $A + O = A$, *em que* O *designa a matriz nula de ordem* $m \times n$,

(iv) $A + (-A) = O$, *onde* $-A = [-a_{ij}]$.

Regras úteis para a aritmética matricial.

Propriedades da multiplicação de uma matriz por um escalar

A operação de multiplicação de uma matriz por um número goza das propriedades seguintes.

Teorema

sejam A *e* B *matrizes de ordem* $m \times n$ *e* α *e* β *números. Então,*

(i) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$,

(ii) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,

(iii) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$,

(iv) $1\,A = A$.

Multiplicação de matrizes

Não se define multiplicando os elementos homólogos!

A multiplicação de matrizes dá significado à notação simples e abreviada,

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

para representar um sistema de m equações em n incógnitas, quaisquer que sejam os valores de m e n.

Por exemplo, o sistema de 3 equações lineares em 3 incógnitas

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x - 2y - z = 4 \\ -2x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

poderá ser representado por $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Definição

Seja A uma matriz de ordem $m \times p$ e B uma matriz de ordem $p \times n$. O produto de A e B é a matriz AB de ordem $m \times n$ cujos elementos são dados por

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}, \qquad i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n,$$

e escreve-se $C = AB$.

$$c_{ij} = \overbrace{\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ip} \end{bmatrix}}^{\text{linha } i \text{ de } A} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{bmatrix}}^{\text{coluna } j \text{ de } B}$$

$$= a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{ip} b_{pj}$$

Exemplo (produto de matrizes)

Se

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

então

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2\times 3 + 1\times 2 + 3\times 1 & -2\times(-2) + 1\times 4 + 3\times(-3) \\ 4\times 3 + 1\times 2 + 6\times 1 & 4\times(-2) + 1\times 4 + 6\times(-3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 20 & -22 \end{bmatrix}_{2\times 2} \end{aligned}$$

Exemplo (produto de matrizes)

e

$$
\begin{aligned}
BA &= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 \times (-2) + (-2) \times 4 & 3 \times 1 + (-2) \times 1 & 3 \times 3 + (-2) \times 6 \\ 2 \times (-2) + 4 \times 4 & 2 \times 1 + 4 \times 1 & 2 \times 3 + 4 \times 6 \\ 1 \times (-2) + (-3) \times 4 & 1 \times 1 + (-3) \times 1 & 1 \times 3 + (-3) \times 6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -14 & 1 & -3 \\ 12 & 6 & 30 \\ -14 & -2 & -15 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Exemplo (produto de matrizes)

Se

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix},$$

então é impossível multiplicar A por B, já que o número de colunas de A não é igual ao número de linhas de B. No entanto, é possível multiplicar B por A:

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 3 + 2 \times 1 & 1 \times 4 + 2 \times 2 \\ 4 \times 3 + 5 \times 1 & 4 \times 4 + 5 \times 2 \\ 3 \times 3 + 6 \times 1 & 3 \times 4 + 6 \times 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 17 & 26 \\ 15 & 24 \end{bmatrix}.$$

Multiplicação matricial não é comutativa

Com efeito, se A é de ordem $m \times p$ e B de ordem $p \times n$ o produto AB está definido e, neste caso, AB tem ordem $m \times n$. O produto BA apenas está definido quando $m = n$ mas a matriz BA será de ordem $p \times p$. Mas mesmo quando $m = n = p$ (matrizes quadradas da mesma ordem), em geral, $AB \neq BA$.

Definição

Sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem n. Quando se tem $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, as matrizes A e B dizem-se ***comutáveis****.*

Exemplo (matrizes comutáveis e não comutáveis)

1. Se
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$
então
$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
e
$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$
e, portanto, $AB \neq BA$.
2. A matriz A é comutável com a matriz $C = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, já que, $AC = CA = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Propriedades da multiplicação matricial

Teorema

Seja α um número e A, B e C matrizes cujas ordens permitem as operações indicadas a seguir. Então,

(i) $(AB)C = A(BC)$,

(ii) $A(B + C) = AB + AC$,

(iii) $(A + B)C = AC + BC$,

(iv) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$,

(v) $I_m A = A$ *e* $AI_n = A$, *se* A *for de ordem* $m \times n$,

(vi) $OA = OA = O$.

Note que a matrizes especiais I_m e I_n atuam como a identidade multiplicativa à esquerda e à direita, respetivamente.

Regras de notação

Como na álgebra usual, se uma expressão envolve multiplicações e somas e não existem parênteses para indicar a ordem das operações, as multiplicações são efetuadas antes das somas.
Isso é válido tanto para a multiplicação por escalar quanto para a multiplicação matricial. Por exemplo, se

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},$$

então

$$A + BC = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 11 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

e

$$3A + B = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Potência de uma matriz

Como $(AB)C = A(BC)$, podemos, simplesmente, omitir os parênteses e escrever ABC. O mesmo é verdade para um produto de quatro ou mais matrizes. No caso em que uma matriz de ordem $n \times n$ é multiplicada por si mesma um certo número de vezes, é conveniente usar a notação exponencial.

Então, se k é um número inteiro positivo,

$$A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k \text{ vezes}}$$

representa a potência de expoente k de A.

Definimos $A^0 = I_n$.

Exemplo (potência de uma matriz)

Se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

então

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = AAA = AA^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

e, em geral,

$$A^n = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Transposta de uma matriz

Dada uma matriz A de ordem $m \times n$, é muitas vezes útil formar uma nova matriz de ordem $n \times m$ cujas colunas são as linhas de A pela ordem correspondente (A é "refletida"sobre a sua diagonal principal, no caso em que A é uma matriz quadrada).

Definição

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem $m \times n$. À matrix $B = [b_{ij}]$ de ordem $n \times m$ cujos elementos são dados por

$$b_{ij} = a_{ji}, \qquad i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m,$$

*chamamos **transposta** de A e designamos $B = A^T$.*

Exemplo (transposta de uma matriz)

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, então $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

Se $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, então $B^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

A matriz B é igual à sua transposta (matriz simétrica).

Se $C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, então $C + C^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$

Propriedades da transposição de matrizes

O teorema a seguir apresenta quatro regras algébricas envolvendo a transposição de matrizes.

Teorema

Sejam A e B e α um número. Assumindo que as operações indicadas estão definidas, temos

(i) $\left(A^T\right)^T = A$,

(ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$,

(iii) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$,

(iv) $(AB)^T = B^T A^T$.

Inversa de uma matriz

Não se define a operação “divisão de matrizes”. No entanto, define-se um conceito semelhante ao de “número inverso”.

Definição

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Se existir uma matriz X de ordem n tal que

$$XA = I_n \quad \text{e} \quad AX = I_n,$$

*diz-se que A é **invertível**, **regular** ou **não singular**. Uma matriz X que verifique a condição anterior diz-se **matriz inversa** de A.*

Teorema

*Se A for invertível a sua **inversa é única**.*

Quando existe, a matriz inversa de A é representada por A^{-1}.

Uma matriz quadrada, não nula, pode não ter inversa. Neste caso, diz-se uma matriz **singular** ou **não invertível**.

Exemplo (inversa de uma matriz)

As matrizes

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

são inversas uma da outra, já que

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo (matriz não invertível)

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

não tem inversa.

De facto, se B é uma qualquer matriz de ordem 2×2, então

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, BA não pode ser igual à identidade $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e, portanto, A não é uma matriz invertível.

Exercício (Cálculo da inversa de uma matriz)

Use a definição para calcular a inversa de cada uma das matrizes seguintes.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

(d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Solução:

(a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$

(b) $B^{-1} = B$;

(c) $C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 \end{bmatrix}$;

(d) $D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Propriedades da inversão de matrizes

Teorema

Sejam A e B matrizes de ordem n, invertíveis. Então,

(i) A^{-1} *é invertível, sendo* $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$,

(ii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,

(iii) $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$.

Uma vez que o uso da definição não é um processo computacionalmente eficiente para calcular a inversa de uma matriz, estudaremos mais à frente um método numérico para determinar a inversa.

Matrizes invertíveis

Mais à frente estudaremos outras formas para justificar que uma matriz quadrada é invertível, sem ser através da definição.

O resultado seguinte estabelece que se uma matriz quadrada A é uma matriz invertível, para demonstrarmos que a sua inversa é B temos de demonstrar apenas que um dos produtos AB ou BA é I_n.

Teorema

Seja A uma matriz de ordem n invertível.

1. *Se B, de ordem n, é tal que $AB = I_n$ então $B = A^{-1}$ e, portanto, $BA = I_n$.*
2. *Se B, de ordem n, é tal que $BA = I_n$ então $B = A^{-1}$ e, portanto, $AB = I_n$.*

Algumas matrizes especiais

Definição

*Uma matriz $A = [a_{ij}]$ quadrada diz-se uma matriz **diagonal** se todos os elementos fora da diagonal são nulos, isto é,*

$$i \neq j \implies a_{ij} = 0.$$

Definição

*Uma matriz $A = [a_{ij}]$ quadrada diz-se **triangular superior** (ou **inferior**) se todos os elementos abaixo (respetivamente acima) da diagonal são nulos, isto é,*

$$i > j \implies a_{ij} = 0 \qquad (\textit{ou} \quad i < j \implies a_{ij} = 0).$$

Exemplo (matrizes diagonais e triangulares)

As matrizes

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

são ambas triangulares. A primeira é triangular superior e a segunda triangular inferior.

As matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

são todas diagonais.

Uma matriz diagonal é, ao mesmo tempo, triangular superior e inferior.

Definição

*Uma matriz $A = [a_{ij}]$ quadrada diz-se uma matriz **banda**, de largura de banda $2k+1$, se*

$$|i-j| > k \implies a_{ij} = 0.$$

*Se $k = 1$ a matriz diz-se **tridiagonal** (matriz de largura de banda 3).*

Definição

*Uma matriz diz-se **densa** se a maior parte dos seus elementos são diferentes de zero.*

Definição

*Uma matriz diz-se **dispersa** se uma grande percentagem dos seus elementos são nulos.*

Definição

*Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ de ordem n diz-se uma matriz **simétrica** se $A^T = A$, ou seja, se*

$$a_{ij} = a_{ji}, \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

Pode-se verificar que se A é simétrica e invertível então A^{-1} é também simétrica.

Definição

*Seja A uma matriz real de ordem n. A matriz A diz-se **ortogonal** se*

$$AA^T = I_n \quad \textit{e} \quad A^TA = I_n.$$

Podemos concluir que se uma matriz A é ortogonal, então é invertível e a sua transposta é a sua inversa, ou seja, $A^{-1} = A^T$.

Operações elementares

Definição

Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. Um ***operação elementar sobre uma linha de*** *A é uma operação de um dos seguintes tipos:*

- **I** *troca de duas linhas;*
- **II** *multiplicação de uma linha por um número diferente de zero;*
- **III** *substituição de uma linha pela sua soma com um múltiplo de outra linha.*

Notação:

- **I** Troca da linha i com a linha j, com $i \neq j$:

$$l_i \longleftrightarrow l_j$$

- **II** Linha i multiplicada por $\alpha \neq 0$:

$$l_i \longleftarrow \alpha l_i$$

- **III** Substituição da linha i pela sua soma com a linha j multiplicada por β, com $i \neq j$:

$$l_i \longleftarrow l_i + \beta l_j$$

Matrizes equivalentes

Substituindo na definição anterior ”linha“ por ”coluna“ obtemos as correspondentes definições de **operações elementares sobre as colunas de** A dos tipos I, II e III.

Para as correspondentes operações elementares sobre colunas substituímos l_i e l_j por c_i e c_j, respetivamente.

Definição

*Diz-se que A é uma **matriz equivalente por linhas** (por colunas) a uma matriz B, se esta matriz se pode obter a partir de A através de um número finito de operações elementares sobre as linhas (colunas) de A. Neste caso, usa-se a notacão*

$$A \xrightarrow[\text{(linhas)}]{} B \qquad \left(A \xrightarrow[\text{(colunas)}]{} B\right)$$

Matriz elementar

Definição

*A toda a matriz que se obtém de I_n por aplicação de uma única operação elementar nas suas linhas, de tipo I, II ou II, chamamos **matriz elementar** do Tipo I, II ou III, respetivamente.*

Substituindo na definição anterior ”linhas“ por ”colunas“, obtemos a correspondente definição de matriz elementar sobre colunas.

Proposição

Toda a matriz elementar sobre linhas é também uma matriz elementar sobre colunas.

1. *Se* $I_m \xrightarrow[l_i \longleftrightarrow l_j]{} E$, *então* $I_m \xrightarrow[c_i \longleftrightarrow c_j]{} E$.
2. *Se* $I_m \xrightarrow[l_i \longleftarrow \alpha l_i]{} E$, *então* $I_m \xrightarrow[c_i \longleftarrow \alpha c_i]{} E$.
3. *Se* $I_m \xrightarrow[l_i \longleftarrow l_i + \beta l_j]{} E$, *então* $I_m \xrightarrow[c_j \longleftarrow c_j + \beta c_i]{} E$.

Operações e matrizes elementares

O resultado seguinte evidencia que podemos efetuar qualquer operação elementar sobre as linhas de uma matriz A de ordem $m \times n$ **premultiplicando** por A (isto é, multiplicando por A à esquerda) por uma matriz elementar adequada: a que resulta de I_m afetuando nas suas linhas a mesma operação elementar que pretendemos efetuar nas linhas de A.

Resultado análogo é válido substituindo "linhas" por "colunas", "I_m" por "I_n" e a multiplicação "à esquerda" (premultiplicação) pela multiplicação "à direita" (posmultiplicação).

Operações e matrizes elementares

Teorema

Seja A uma matriz de ordem $m \times n$.

1. *Se*

$$I_m \xrightarrow[\textit{opElem}]{} E$$

sendo $opElem$ uma operação elementar sobre linhas, então

$$A \xrightarrow[\textit{opElem}]{} EA$$

2. *Se*

$$I_m \xrightarrow[\textit{opElem'}]{} E'$$

sendo $opElem'$ uma operação elementar sobre colunas, então

$$A \xrightarrow[\textit{opElem'}]{} AE'.$$

Exercício

Seja A uma matriz de ordem 3×5. Determine as matrizes elementares que, premultiplicando por A, produzem em A cada uma das seguintes transformações:

(a) *troca da primeira com a terceira linhas;*

(b) *multiplicação da primeira linha por 6;*

(c) *adição de $\frac{1}{5}$ da segunda linha à terceira linha.*

Exercício

Sem efetuar multiplicações de matrizes, indique o resultado de

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix}.$

(b) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix}.$

Teorema

Sejam A e B matrizes de ordem $m \times n$ equivalentes por linhas, abreviadamente $A \xrightarrow[\text{(linhas)}]{} B$.

Então existe um número finito $k \in \mathbb{N}$ de matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_k$, tais que

$$B = E_k \ldots E_2 E_1 A.$$

Vamos ver a seguir que as matrizes elementares são invertíveis e, sendo assim, podemos também escrever

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_k^{-1} B.$$

Matrizes elementares são invertíveis

Teorema

Toda a matriz elementar E de ordem n é invertível e tem-se, quaisquer que sejam $i, j \in \{1, \ldots, n\}$:

1. *se $i \neq j$ e*

$$I_m \xrightarrow[l_i \longleftrightarrow l_j]{} E, \quad \text{então} \quad I_m \xrightarrow[l_i \longleftrightarrow l_j]{} E^{-1};$$

2. *se $\alpha \neq 0$ e*

$$I_m \xrightarrow[l_i \longleftarrow \alpha l_i]{} E, \quad \text{então} \quad I_m \xrightarrow[l_i \longleftarrow \frac{1}{\alpha} l_i]{} E^{-1};$$

3. *se $i \neq j$, $\beta \in \mathbb{R}$ e*

$$I_m \xrightarrow[l_i \longleftarrow l_i + \beta l_j]{} E, \quad \text{então} \quad I_m \xrightarrow[l_i \longleftarrow l_i + (-\beta) l_j]{} E^{-1}.$$

As matrizes elementares são invertíveis e as suas inversas são matrizes elementares do mesmo tipo.

Exercício (inversas de matrizes elementares)

1. Determine a inversa de cada uma das seguintes matrizes elementares:

   1.1 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 1.2 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 1.3 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Sabendo que
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$
   justifique que A é invertível e exprima a sua inversa como produto de matrizes elementares.

Pivô de uma linha

Definição

*O elemento a_{ik} de uma matriz $A = [a_{ij}]$ diz-se um **pivô** da linha i se é o primeiro elemento não nulo mais à esquerda da sua linha, i. e.,*

$$a_{ik \neq 0} \quad \text{e} \quad a_{ij} = 0, \quad j = 1, \ldots, k-1.$$

Consideramos que uma linha nula não tem pivô.

*Chamamos **pivôs** de uma matriz não nula aos pivôs de todas as suas linhas não nulas.*

Matriz em escada

Definição

Diz-se que uma matriz A de ordem $m \times n$ é uma ***matriz em escada****, ou tem a* ***forma em escada*** *(abreviadamente, denotado por f.e.), se satisfaz as duas condições seguintes:*

- *se A tem uma linha nula então as linhas seguintes, se existirem, também são nulas;*
- *se o pivô da linha i estiver na coluna k, então todos os elementos abaixo da linha i, nas colunas $1, \ldots, k$ são nulos.*

Ou seja, uma matriz A é uma matriz em escada se o número de elementos nulos à esquerda do pivô aumenta de linha para linha até que, possivelmente, sobrem apenas linhas nulas.

Exemplo (matriz em escada)

1. Qualquer matriz nula tem a forma em escada.

2. Representando por $\bullet$ os pivôs e por $*$ as entradas da matriz que podem ter qualquer valor, estão em forma de escada, as matrizes

$$\begin{bmatrix} 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \bullet & * & * & * \\ 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & * \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \bullet & * & * \\ 0 & \bullet & * \\ 0 & 0 & \bullet \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \bullet \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} \bullet & * & * \end{bmatrix}.$$

3. As matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -4 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

não estão em forma de escada.

Matriz em escada reduzida

Definição

Diz-se que uma matriz A de ordem $m \times n$ é uma ***matriz em escada reduzida****, ou que tem a* ***forma em escada reduzida*** *(abreviadamente, denotado por f.e.r.), se satisfaz as seguintes condições:*

- *A é uma matriz em escada;*
- *os pivôs são todos 1;*
- *os pivôs são os únicos elementos não nulos das suas colunas.*

Exemplo (matriz em escada reduzida)

1. A matriz nula $O_{m\times n}$ e a matriz identidade I_n têm a forma em escada reduzida.
2. A matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ não está em forma de escada reduzida.
3. A matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ tem a forma em escada reduzida.
4. A matriz $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ não está em forma de escada reduzida.
5. As matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

estão em forma de escada reduzida.

Exercício (matriz em escada e em escada reduzida)

1. Indique se estão em forma de escada cada uma das seguintes matrizes:

   1.1 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

   1.2 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   1.3 $\begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. Indique se estão em forma de escada reduzida cada uma das seguintes matrizes em forma de escada:

   2.1 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   2.2 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   2.3 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

Equivalência (por linhas) à forma de escada

Teorema

Toda a matriz A de ordem $m \times n$ é equivalente por linhas a uma matriz em forma de escada. Abreviadamente,

$$A \xrightarrow[\text{(linhas)}]{} A' \ (f.e).$$

Processo de redução de A de ordem $m \times n$ à forma de escada

1. Se $A = O_{m \times n}$ ou A é uma matriz linha, então A está em forma de escada e o processo termina.
2. Por troca de linhas (isto é, realizando uma operação elementar do tipo I), se necessário, obtenha-se uma matriz B cuja linha 1 tem, entre todas as linhas não nulas da matriz A, um pivô com índice de coluna mínimo. Suponhamos que tal elemento está na posição $(1, t)$. Tem-se

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{1t} & b_{1,t+1} & \cdots b_{1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{2t} & b_{2,t+1} & \cdots b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & b_{mt} & b_{m,t+1} & \cdots b_{m,n} \end{bmatrix},$$

onde $b_{1t} \neq 0$ (note-se que existem $t-1$ colunas nulas à esquerda da coluna t).

3. Para cada linha i de B, $i = 2, \ldots, m$, substitua-se a linha i pela sua soma com o produto de $-\frac{b_{it}}{b_{1t}}$ pela linha 1 (operações elementares do tipo III). Obtém-se uma matriz da forma

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{1t} & b_{1,t+1} & \cdots b_{1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{2,t+1} & \cdots c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{m,t+1} & \cdots c_{m,n} \end{bmatrix}.$$

4. 'Despreze-se" a linha 1 de C e repita-se o processo à matriz resultante.

Exemplo (Redução à forma em escada)

1º passo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \longleftrightarrow l_2]{} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -4 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_3 \longleftarrow l_3 - 3l_1 \\ l_4 \longleftarrow l_4 - l_1}]{}$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo (Redução à forma em escada)

2º passo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 4 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \longleftarrow l_2/2]{} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_3 \longleftarrow l_3 - 4l_2 \\ l_4 \longleftarrow l_4 - 3l_2}]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -9 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

3º passo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{-9} & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \longleftarrow l_3/(-9)]{} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_4 \longleftarrow l_4 + 3l_3]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{(f.e.)}$$

Exemplo (Redução à forma em escada)

4º passo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} \end{bmatrix} \xrightarrow[l_4 \longleftarrow l_4/3]{} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

(todos os pivôs são iguais a 1)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(f.e.)}$$

Exercício

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Determine uma matriz equivalente por linhas a A *e em forma de escada.*

Equivalência (por linhas) à forma de escada reduzida

Teorema

Toda a matriz A de ordem $m \times n$ é equivalente por linhas a uma única matriz em forma de escada reduzida. Abreviadamente,

$$A \xrightarrow[\text{(linhas)}]{} A'' \ (f.e.r), \text{ com } A'' \text{ única.}$$

Processo de redução de A de ordem $m \times n$, não nula e em forma de escada, à forma de escada reduzida

1. Seja a_{sk} o pivô com maior índice de linha. Para que o pivô da linha s possa ser 1, multiplica-se a linha s por $\dfrac{1}{a_{sk}}$ (transformação elementar do tipo II).

   Seja B a matriz obtida. Se $s = 1$, a matriz B está em forma de escada reduzida e o processo termina.

2. Para cada linha i de B, com $i = 1, \ldots, s-1$, substitua-se a linha i pela sua soma com o produto de $-b_{ik}$ pela linha s (transformação elementar do tipo III).

   Note-se que tal corresponde a anular os elementos da coluna k, coluna do pivô da linha s, $b_{sk} = 1$, com índice de linha inferior a s.

   Obtém-se uma nova matriz C que continua em forma de escada e em que as entradas da coluna k são todas nulas à exceção do pivô c_{sk} que é igual a 1 .

3. "Desprezam-se" as linhas de C de índice superior ou igual a s e repete-se o processo à matriz resultante.

Exemplo (Redução à forma em escada reduzida)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_3 \longleftarrow l_3 + l_4 \\ l_2 \longleftarrow l_2 + 2l_4}]{} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{l_2 \longleftarrow l_2 - 2l_3 \\ l_1 \longleftarrow l_1 - l_3}]{} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \longleftarrow l_1 + 2l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(f.e.r.)}$$

Exercício

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Determine uma matriz equivalente por linhas a A e em forma de escada reduzida.

Comece com a forma em escada equivalente a A obtida no exercício anterior.

Formas de escada e característica de uma matriz

Teorema

Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. Quaisquer matrizes equivalentes por linhas a A e em forma de escada têm o mesmo número de linhas não nulas.

Definição

*Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. Ao número de linhas não nulas de qualquer matriz em forma de escada, equivalente por linhas a A, chamamos **característica de** A e denotamos por $\mathrm{car}(A)$.*

As transformações elementares sobre linhas não alteram a característica de uma matriz, isto é, se

$$\text{se} \quad A \xrightarrow[\text{(linhas)}]{} B, \quad \text{então } \mathrm{car}(A) = \mathrm{car}(B).$$

Exercício

Discuta, segundo os valores de α e de β, a característica das matrizes de elementos reais

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \beta & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$C_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & -1 & \beta \\ 1 & 0 & \beta & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Caracterização de matrizes invertíveis

Utilizando apenas a definição não é, em geral, imediato reconhecer, na prática, se uma dada matriz é ou não invertível.
O resultado seguinte permite, em particular, decidir se uma dada matriz quadrada é ou não invertível através da sua característica.

Teorema

Seja A uma matriz de ordem n. As afirmações seguintes são equivalentes:

1. A *é invertível.*
2. $\mathrm{car}(A) = n$.
3. I_n *é a forma em escada reduzida de* A.
4. A *é igual a um produto de matrizes elementares.*

Cálculo da inversa de uma matriz

Seja A uma matriz de ordem n invertível. De acordo com o teorema anterior, I_n é a forma em escada reduzida de A e existem, portanto, $k \in \mathbb{N}$ matrizes elementares tais que

$$I_n = E_k \ldots E_2 E_1 A = (E_k \ldots E_2 E_1)A,$$

pelo que

$$A^{-1} = E_k \ldots E_2 E_1 = E_k \ldots E_2 E_1 I_n,$$

isto é, A^{-1} pode obter-se aplicando a I_n as mesmas operações elementares que transformam A em I_n.

Exemplo (cálculo da inversa)

Calculemos a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Temos

$$\left[\, A \;\vdots\; I_4 \,\right] = \left[\begin{array}{cccc:cccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_3 \longleftarrow l_3 + l_1 \\ l_4 \longleftarrow l_4 - l_1}]{}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \longleftrightarrow l_4]{}$$

Exemplo

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_3 \longleftarrow -l_3 \\ l_4 \longleftarrow -l_4}]{}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_3 \longleftarrow l_3 + l_4 \\ l_2 \longleftarrow l_2 - l_4}]{}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 \longleftarrow l_1 - l_3]{}$$

Exemplo

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} I_4 & A^{-1} \end{array}\right]$$

Assim, A é invertível e a inversa é

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercício

Considere a matriz invertível

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) *Determine* A^{-1}.

(b) *Use a alínea anterior para resolver o sistema de equações lineares* $A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Resolução.

(a)

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \longleftarrow l_3 - l_1]{} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_3 \longleftarrow l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_2 \longleftarrow (-1)\cdot l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{l_2 \longleftarrow l_2 + l_3 \\ l_1 \longleftarrow l_1 - l_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_1 \longleftarrow l_1 - l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Temos, então,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Uma vez que A é uma matriz invertível, vem

$$A\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\iff\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\iff\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-2&1\\1&1&-1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\iff\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}.$$