- **Derivadas direcionais e vetor gradiente**

1. Determine o vetor gradiente para cada uma das funções $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por:

(a) $f(x,y) = x^2 + xy$;

(b) $f(x,y) = e^x \tan y + 2x^2 y$;

(c) $f(x,y) = x^3 y^2$;

(d) $f(x,y) = x^2 - 5xy + 3y^2$;

(e) $f(x,y,z) = 3x^3 y + 2yz$;

(f) $f(x,y,z) = x^2 z + y e^{xz}$.

2. Para cada uma das funções do exercício 1, calcule a derivada direccional no ponto P segundo a direção do vetor $\vec{v}$.

(a) $P = (0,1)$ e $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$;

(b) $P = \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ e $\vec{v} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$;

(c) $P = (2,-1)$ e $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$;

(d) $P = (3,-1)$ e $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$;

(e) $P = (-1,0,4)$ e $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$;

(f) $P = (1,-2,3)$ e $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

3. O potencial eléctrico V num dado ponto (x,y) é dado por $V = \ln\sqrt{x^2+y^2}$. Determine a taxa de variação de V no ponto $P = (1,1)$ segundo a direção definida por $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

4. Determine a derivada direccional de $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ no ponto P, segundo a direção indicada:

(a) $f(x,y) = x^2 - xy - 2y^2$, $\quad P = (1,2)$, $\quad \theta = \dfrac{\pi}{3}$;

(b) $f(x,y) = (x^2 - y)^3$, $\quad P = (3,1)$, $\quad \theta = \dfrac{3\pi}{4}$;

(c) $f(x,y,z) = xy + yz^2 + xz^3$, $\quad P = (2,0,3)$, $\quad \vec{v} = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$;

(d) $f(x,y,z) = xy^3 z^2$, $\quad P = (2,-1,4)$, $\quad \vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$;

(e) $f(x,y,z) = z^2 e^{xy}$, $\quad P = (-1,2,3)$, $\quad$ direção de P para $Q = (1,0,1)$;

(f) $f(x,y,z) = xy + yz + zx$, $\quad P = (2,1,3)$, direção de P para $Q = (1,5,5)$.

5. Para as funções apresentadas nas alíneas (b) e (f) do exercício 1, indique a direção de maior crescimento da função a partir do ponto $P = \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ e $P = (1,-2,3)$, respetivamente.

6. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = xe^y$. Determine a taxa de variação de f no ponto $P = (2,0)$, na direção de P para $Q = (5,4)$. Em que direção tem f, no ponto P, uma taxa de variação máxima? Qual é esse valor?

7. O potencial eléctrico V em (x,y,x) é dado por $V = x^2 + 4y^2 + 9z^2$. Determine a taxa de variação de V em $P = (2,-1,3)$ na direção de P para a origem do sistema de coordenadas. Indique ainda a direção que produz a taxa máxima de variação de V em P. Qual o valor dessa taxa?

8. Sabendo que $D_{\vec{v}} f(a,b) = 3\sqrt{2}$ e $D_{\vec{u}} f(a,b) = 5$ sendo $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\vec{u} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$, determine $\nabla f(a,b)$. Qual a taxa máxima de variação em (a,b)?

9. Em que direção a partir do ponto (2,0) a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = xy$ tem uma taxa de variação igual a -1?

10. A temperatura T num dado ponto (x,y) do plano é dada por $T(x,y) = x^2 e^{-y}$. Em que direção a partir do ponto (2,1) a temperatura aumenta mais rapidamente? Qual a taxa de crescimento nessa direção?

11. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{xz}{x^2+y^2}\right)$. Determine $\vec{\nabla} f(2,1,0)$. Qual a taxa de variação de f no ponto $(2,1,0)$ segundo a direção do vetor $\vec{u} = (1,1,1)$? Qual a taxa máxima de variação no mesmo ponto?

12. Considere $f(x,y) = 100 - x^2 - y^2$. Em que direção nos devemos afastar de P para que os valores de f aumentem o mais rapidamente possível? Esboce o gráfico de f e interprete o resultado.

- **Plano tangente e reta normal a uma superfície. Reta tangente a uma curva de nível**

13. Determine a equação do plano tangente à superfície $x^2 + y^2 - xyz = 7$ no ponto $(2, 3, 1)$ por dois processos diferentes:

(a) considerando a superfície como a superfície de nível de uma função de 3 variáveis $f(x, y, z)$;

(b) considerando a superfície como o gráfico de uma função de 2 variáveis $g(x, y)$.

14. Determine uma equação do plano tangente à superfície S de equação

(a) $x^2 - 2y^2 + z^2 = 3$, no ponto $P = (-1, 1, 2)$.

(b) $z = 4x^2 + y^2$, no ponto $P = (1, 1, 5)$.

15. Seja S uma superfície de equação $F(x, y, z) = 0$ e P um ponto pertencente a S tal que o vetor $\overrightarrow{\nabla} F|_P$ é não nulo. A reta que passa em P e tem a direção de $\overrightarrow{\nabla} F|_P$ é chamada a *reta normal a S em P*.

Determine as equações paramétricas da reta normal à superfície de equação

(a) $x^2 - y^2 - 2z^2 = 2$ no ponto $(\sqrt{10}, 0, -2)$.

(b) $4x^2 + 9y^2 + z^2 - 49 = 0$ no ponto $(1, -2, 3)$.

(c) $z = 3x^2 + 2y^2$ no ponto $(1, 1, 5)$.

16. Considere a equação de uma superfície esférica S de centro em (a, b, c) e raio $r > 0$,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2,$$

e um ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ pertencente a S. Prove que a reta normal a S em P_0 passa pelo centro de S.

17. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 y^3$. Indique, para o ponto $(-1, 2)$, um vetor

(a) com a direção e sentido de maior crescimento de f;

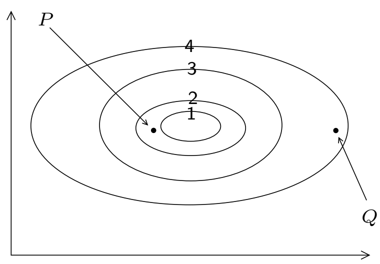
(b) com a direção e sentido de maior decrescimento de f;

(c) com a direção em que a variação de f é nula.

18. Atendendo à figura ao lado, indique, justificando, qual é maior:

(a) $||\nabla f||$ em P

(b) $||\nabla f||$ em Q.



19. Determine uma equação do plano tangente e uma equação da reta normal a cada uma das seguintes superfícies, no ponto P indicado:

(a) $z = x^2 + y^2$ sendo $P = (1, -2, 5)$;

(b) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 3$ e $P = (0, 1, -1)$;

(c) $xyz = 1$ sendo $P = (1, 1, 1)$;

(d) $z = e^{x+y}$ sendo $P = (1, 2, e^3)$.

20. Determine a direção segundo a qual a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definda por $f(x, y) = x^4 y - x^2 y^3$ tem o maior decrescimento a partir do ponto $P = (2, -3)$.

21. Determine um vetor normal e uma equação da reta tangente a cada uma das seguintes curvas no ponto $(2, 3)$:

(a) $x^2 + y^2 = 13$;

(b) $y = x^2 - 1$;

(c) $(y - x)^2 + 2 = xy - 3$.

22. Para $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 + 4y^2$, determine o vetor gradiente $\overrightarrow{\nabla} f(2, 1)$ e use este vetor para encontrar a reta tangente à curva de nível $f(x, y) = 8$ no ponto $(2, 1)$. Esboce a curva de nível, o vetor tangente e o vetor gradiente.