# Aula: 04 de maio

6. Seja $\mathcal{A}$ um espaço euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado. Determine a expressão analítica de:

   (a) a simetria central no ponto $\Omega = (1,1,1)$;

   (b) a homotetia com razão -5 e centro $\Omega = (0,2,1)$;

   (c) a projecção ortogonal no plano definido pela equação cartesiana
   $$2x - y + z + 1 = 0;$$

   (d) a reflexão ortogonal no plano anterior;

   (e) a projecção ortogonal na recta definida pela equação vectorial:
   $$s = (1,0,0) + < (1,0,-1) >$$

   (f) a simetria ortogonal na recta definida na alinha anterior.

c. Seja $\pi: 2x - y + z + 1 = 0$.

A projecção ortogonal $p: \mathcal{A}_3 \longrightarrow \mathcal{A}_3$ é definida por:

$$p(M) = M - \frac{\vec{AM}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\,\vec{n}$$

onde $A$ é um ponto de $\pi$ e $\vec{n}$ é vetor normal a $\pi$.

Temos $\pi = (0,1,0) + \langle (2,-1,1) \rangle^{\perp}$, logo para $M = (x,y,z)$

$$p(M) = (x,y,z) - \frac{(x,y-1,z)\cdot(2,-1,1)}{6}\,(2,-1,1) =$$

$$= (x,y,z) - \frac{(2x-y+z+1)}{6}\,(2,-1,1) =$$

$$= \frac{1}{6}\big(6x - 2(2x-y+z+1),\ 6y + (2x-y+z+1),\ 6z - (2x-y+z+1)\big)$$

$$= \frac{1}{6}\big(2x+2y-2z-2,\ 2x+5y+z+1,\ -2x+y+5z-1\big)$$

d. Dada uma projeção ortogonal $p: \mathcal{A}_0 \longrightarrow \mathcal{A}$, a simetria ortogonal associada $s: \mathcal{A}_0 \longrightarrow \mathcal{A}$ define-se por $s(M) = M + 2\overrightarrow{MP(M)}$

No caso de se tratar de um hiperplano, a simetria ortogonal chama-se reflexão e temos a fórmula:

$$s(M) = M - 2\frac{\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$$

Neste exercício:

$$s(x,y,z) = (x,y,z) - \left(\frac{2x-y+z+1}{3}\right)(2,-1,1) =$$

$$= \frac{1}{3}(-x+2y-2z-2,\ 2x+2y+z+1,\ -2x+y+2z-1)$$

e. Seja $r = (1,0,0) + \langle (1,0,-1) \rangle = A + \langle \vec{v} \rangle$.

A projecção ortogonal $p: \mathcal{A}_0 \longrightarrow \mathcal{A}$ é definida por:

$$p(M) = A + \frac{\overrightarrow{AM}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$$

onde $A$ é um ponto de $r$ e $\vec{v}$ é vetor director de $r$.

Dado $M = (x,y,z)$, temos

$$p(x,y,z) = (1,0,0) + \frac{(x-1,y,z)\cdot(1,0,-1)}{2}(1,0,-1) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(2,0,0) + (x-1-z)(1,0,-1)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(x-z+1,\ 0,\ -x+z-1).$$

d. $s(M) = M + 2\overrightarrow{MP(M)} = M + 2(P(M) - M) = 2P(M) - M$

Neste exercício:

$$s(x,y,z) = (x-z+1, 0, -x+z-1) - (x,y,z) = (1-z, -y, -1-x)$$

14. Num plano euclidiano munido de um referencial ortonormado, determine a reflexão deslizante com base a recta $r$ pelo vector $\overrightarrow{v}$ se $r$ está definida pela equação $x - 3y = 1$ e $\overrightarrow{v} = (3,1)$.

Seja $\rho$ a reflexão deslizante, $s$ a reflexão na reta $r$ e $t$ a translação segundo o vetor $\vec{v}$.

Temos: $\rho(M) = (t \circ s)(M) = s(M) + \vec{v}$

$r: x - 3y = 1 \Rightarrow r = (1,0) + \langle (1,-3) \rangle^{\perp} = A + \langle \vec{n} \rangle^{\perp}$

$s(M) = M - 2\dfrac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$. Fazendo $M = (x,y)$, vem:

$$s(x,y) = (x,y) - 2\frac{(x-1,y)\cdot(1,-3)}{10}(1,-3) = (x,y) - \frac{1}{5}(x-3y-1)(1,-3) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(5x-(x-3y-1), 5y+3(x-3y-1)\right) = \frac{1}{5}(4x+3y+1, 3x-4y-3)$$

$$\rho(x,y) = s(x,y) + (3,1) = \frac{1}{5}(4x+3y+16, 3x-4y+2)$$

Nota: as reflexões deslizantes têm a seguinte propriedade:

$$\rho = t \circ s = s \circ t.$$

Sugestão: Verifique que tal acontece no caso deste exercício.

# Aula: 07 de maio

37. Determine a representação matricial da projecção paralela ao vector $\vec{v} = (0, 1, 3)$ no plano definido pela equação cartesiana: e simetria

$$x - y + z = 0$$

A projeção paralela segundo o vetor $\vec{v}$ no plano $\pi : A + \langle \vec{n} \rangle^{\perp}$

é dada pela expressão: $p(M) = M - \dfrac{\vec{AM} \cdot \vec{n}}{\vec{v} \cdot \vec{n}} \vec{v}$

Neste exercício

$A = (0,0,0)$, $\vec{n} = (1,-1,1)$ e $\vec{v} = (0,1,3)$.

Portanto, para $M = (x,y,z)$ temos

$$p(x,y,z) = (x,y,z) - \frac{(x-y+z)}{2}(0,1,3).$$

$$= \frac{1}{2}\left(2x,\ 2y-(x-y+z),\ 2z-3(x-y+z)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2x,\ -x+3y-z,\ -3x+3y-z\right)$$

Expressão matricial de $p$:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ -3/2 & 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Suponhamos que o exercício pedia também a expressão da simetria paralela no plano $\pi$ segundo o vetor $\vec{v}$.

Temos $s(M) = M + 2\vec{MP(M)} = M - 2\dfrac{\vec{AM} \cdot \vec{n}}{\vec{v} \cdot \vec{n}} \vec{v}$

Para $M = (x,y,z)$ vem:

$$s(x,y,z) = (x,y,z) - (x-y+z)(0,1,3) = (x, -x+2y-z, -3x+3y-2z)$$

Expressão matricial de $s$:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

38. Determine a representação matricial da projecção paralela ao vector $\overrightarrow{v} = (1,2,0)$ no plano definido pela equação cartesiana $x - y + z - 2 = 0$. Calcule a imagem através desta projecção paralela de:

   (a) a recta que passa pelos pontos $A(1,1,0)$ e $B(2,1,0)$;

   (b) a recta que passa pelo ponto $(2,0,0)$ e está dirigida pelo vector $(1,2,0)$;

   (c) o plano definido pela equação $y = 0$;

$\pi: x - y + z - 2 = 0 \Rightarrow \pi = (2,0,0) + \langle (1,-1,1) \rangle^{\perp} = A + \langle \vec{n} \rangle^{\perp}$

$$p(M) = M - \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}}{\vec{v} \cdot \vec{n}} \vec{v}$$

$$p(x,y,z) = (x,y,z) - \frac{(x-2,y,z)\cdot(1,-1,1)}{-1}(1,2,0)$$

$$= (x,y,z) + (x-y+z-2)(1,2,0) =$$

$$= (2x-y+z-2,\ 2x-y+2z-4,\ z)$$

A aplicação linear associada a $p$ é dada por:

$$\vec{p}(x,y,z) = (2x-y+z,\ 2x-y+2z,\ z)$$

Nas alíneas que se seguem vamos usar o seguinte resultado:

Se $f$ é uma aplicação afim (não necessariamente bijetiva) e $\vec{f}$ é a aplicação linear associada a $f$ então, dado um subespaço afim $\mathcal{U} = A + \langle \vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_k} \rangle$ temos que:

$$f(\mathcal{U}) = f(A) + \langle \vec{f}(\vec{v_1}), \vec{f}(\vec{v_2}), \dots, \vec{f}(\vec{v_k}) \rangle$$

a $r = A + \langle \vec{AB} \rangle = (1,1,0) + \langle (1,0,0) \rangle$

$p(A) = (-1,-3,0)$ $\qquad$ $\vec{p}(1,0,0) = (2,2,0)$

Logo $p(r) = (-1,-3,0) + \langle (2,2,0) \rangle = (-1,-3,0) + \langle (1,1,0) \rangle$

b $t = (2,0,0) + \langle (1,2,0) \rangle$

$p(2,0,0) = (2,0,0)$ $\qquad$ $\vec{p}(1,2,0) = (0,0,0)$

Logo $p(t) = (2,0,0) + \langle (0,0,0) \rangle = (2,0,0)$

Note que este resultado era expectável uma vez que o ponto $(2,0,0)$ pertence ao plano de projeção e $(1,2,0)$ é a direção de projeção.

c. $\sigma: y = 0 \Rightarrow (x,y,z) = (\alpha, 0, \beta),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \sigma = (0,0,0) + \langle (1,0,0), (0,0,1) \rangle$

$p(0,0,0) = (-2,-4,0)$, $\vec{p}(1,0,0) = (2,2,0)$, $\vec{p}(0,0,1) = (1,2,1)$

$p(\sigma) = (-2,-4,0) + \langle (2,2,0), (1,2,1) \rangle =$

$= (-2,-4,0) + \langle (1,1,0), (1,2,1) \rangle$

Equação cartesiana de $p(\sigma)$:

$$\begin{vmatrix} x+2 & y+4 & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x+2)-(y+4)+z=0$$

$$\Leftrightarrow x-y+z-2=0$$

Logo $p(\sigma)=\pi$.

Este resultado também era expectável uma vez que o contra-domínio de $p$ é $\pi$ e $\sigma$ não é paralelo a $\vec{v}$.

## Aula: 11 de maio

12. Determine as representações matriciais das isometrias seguintes:

(a) $f(x_1, x_2) = (2 + x_1, 3 - x_2)$;

(b) $f(x_1, x_2) = (\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2, \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2)$;

(c) $f(x_1, x_2) = (3 - x_1, 2 - x_2)$;

(d) $f(x_1, x_2) = (\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2, \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2)$;

(e) $f(x_1, x_2) = (1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2)$.

Determine quais as rotações, as translações e as reflexões.

a $$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$\det(\vec{f}) = -1 < 0 \Rightarrow f$ inverte a orientação

Pontos fixos de $f$:

$$f(x_1,x_2)=(x_1,x_2) \iff \begin{cases} 2+x_1 = x_1 \\ 3-x_2 = x_2 \end{cases} \quad \text{impossível}$$

$f$ não tem pontos fixos

Como $f$ inverte a orientação e não tem pontos fixos, então $f$ é uma reflexão deslizante.

b. $$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\vec{f}) = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2} = -1 < 0$$

Como $f$ inverte a orientação então $f$ ou é uma reflexão ou $f$ é uma reflexão deslizante.

Claramente, $(0,0)$ é ponto fixo de $f$, logo $f$ é uma reflexão

Para determinar a reta de reflexão calculamos o conjunto dos pontos fixos:

$$f(x_1,x_2)=(x_1,x_2) \iff \begin{cases} \sqrt{2}/2\, x_1 + \sqrt{2}/2\, x_2 = x_1 \\ \sqrt{2}/2\, x_1 - \sqrt{2}/2\, x_2 = x \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2}\, x_1 = x_1 + x_2$$

Logo $f$ é a reflexão na reta de equação $(1-\sqrt{2})x_1 + x_2 = 0$.

c. $$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\vec{f}) = 1 \Rightarrow f \text{ preserva a orientação}$$

$$f(x_1,x_2)=(x_1,x_2) \iff \begin{cases} 3-x_1 = x_1 \\ 2-x_2 = x_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 3/2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$f$ é a rotação de centro $\Omega = (3/2, 1)$ e ângulo $\theta = \pi$.

Note também que $f$ é a simetria central de centro $\Omega$.

d. $$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\vec{f}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 > 0$$

Como $f$ preserva a orientação então $f$ ou é uma translação ou é uma rotação.

Claramente, $f$ não é uma translação pois $\vec{f} \neq Id$.

Além disso, $(0,0)$ é ponto fixo de $f$, logo $f$ é uma rotação de centro $(0,0)$.

Para determinar o ângulo de rotação, observamos que a matriz de $\vec{f}$ é da forma $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ com $\theta = \pi/4$

Logo $f$ é a rotação de centro na origem e ângulo orientado $\pi/4$

e. $$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\vec{f}) = -\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = -1 < 0$$

$$f(x_1, x_2) = (x_1, x_2) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2 = x_1 \\ \frac{1}{2} x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} x_2 = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2+\sqrt{3}x_1+x_2 = 2x_1 \\ x_1-\sqrt{3}x_2 = 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{3}-2)(2+\sqrt{3})x_2+x_2 = -2 \\ x_1 = (2+\sqrt{3})x_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_2+x_2 = -2 \quad \text{impossível} \\ \end{cases}$$

Como $f$ inverte a orientação e não tem pontos fixos então $f$ é uma reflexão deslizante.

15. Num plano euclidiano munido de um referencial ortonormado, determine a expressão analítica

(a) da rotação centrada na origem de ângulo orientado de medida $\pi/2$;

(b) da rotação centrada no ponto $(1,2)$ de ângulo orientado de medida $-\pi/3$.

Qual a imagem da recta de equação $y-2x=1$ através destas rotações?

a) A rotação centrada na origem e de ângulo $\theta$ tem expressão matricial dada por: $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Neste caso $\theta = \pi/2$ logo: $f(x_1,x_2) = (-x_2, x_1)$.

$r: y-2x=1 \Rightarrow (x,y) = (1+2\lambda, \lambda),\ \lambda\in\mathbb{R}$.

$f(r) = f(1+2\lambda, \lambda) = (-\lambda, 1+2\lambda),\ \lambda\in\mathbb{R}$

$(x,y) = (-\lambda, 1+2\lambda) \Leftrightarrow (x,y) = (0,1)+\lambda(-1,2)$

$f(r): \begin{vmatrix} x & y-1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x+y-1=0$

Observe que $f(r) \perp r$ como seria expectável pois $\theta = \pi/2$.

b. Seja $a = (1,2)$ e $\rho_0$ a rotação centrada na origem de ângulo $\theta = -\pi/3$.

Se $\rho$ é a rotação pretendida então $\rho = t_{\vec{oa}} \circ \rho_0 \circ t_{-\vec{oa}}$

Usando coordenadas homogéneas, a expressão matricial de $\rho$ é:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(-\pi/3) & -\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) & 0 \\ \operatorname{sen}(-\pi/3) & \cos(-\pi/3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & -1/2-\sqrt{3} \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & \sqrt{3}/2 - 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 1/2 - \sqrt{3} \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & \sqrt{3}/2 + 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto $\rho(x_1, x_2) = \left( \frac{1}{2} - \sqrt{3} + \frac{1}{2} x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} x_2,\ \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2 \right).$

$r : y - 2x = 1 \Rightarrow r = (0,1) + \langle (1,2) \rangle$

$\rho(r) = \rho(0,1) + \langle \vec{\rho}(1,2) \rangle = \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \right) + \left\langle \left( \frac{1}{2} + \sqrt{3}, 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\rangle.$

# Aula: 14 de maio

16. Determine o centro e a medida do ângulo orientado $\theta \in [0, 2\pi]$ das rotações definidas, num referencial ortonormado de um plano euclidiano, pelas expressões matriciais:

(a)
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

(b)
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Qual a imagem da recta de equação $y - 2x = 1$ através destas rotações? E da circunferência de equação $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$?

a) Seja $\rho$ a rotação apresentada.

Claramente $\rho$ é rotação de ângulo $\theta = \pi/4$.

Para determinar o centro de $\rho$ determinamos o ponto fixo.

$$\rho(x_1, x_2) = (x_1, x_2) \iff \begin{cases} \sqrt{2}/2\, x_1 - \sqrt{2}/2\, x_2 = x_1 \\ 1 + \sqrt{2}/2\, x_1 + \sqrt{2}/2\, x_2 = x_2 \end{cases}$$

Cálculos compridos mostram que $\Omega = \left(-\frac{1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$r: \; y - 2x = 1 \implies r = (0,1) + \langle (1,2) \rangle$

$\rho(0,1) = \left(-\sqrt{2}/2,\; 1 + \sqrt{2}/2\right) \qquad \vec{\rho}(1,2) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$

$$\rho(r) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left\langle \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right) \right\rangle =$$
$$= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \langle (-1, 3) \rangle$$

$$\rho(r): \begin{vmatrix} x + \sqrt{2}/2 & y - (1 + \sqrt{2}/2) \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \iff 3x + y - 1 + \sqrt{2} = 0$$

$\rho(\mathcal{C})$: Circunferência de raio 4 e centro $\rho(2,-1) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.