- **Extremos de funções**

1. Para cada uma das funções $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ seguintes, calcule os pontos críticos e determine se esses pontos são minimizantes ou maximizantes da função. Em caso afirmativo, indique o máximo ou mínimo local da função.

(a) $f(x,y) = 3x^2 + y^2$
(b) $f(x,y) = x^2 - 4y^2 + 3$
(c) $f(x,y) = xy$
(d) $f(x,y) = 5 - x^2 - y^2$
(e) $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$
(f) $f(x,y) = x^3 - y^3 + 6xy$

2. Encontre os pontos críticos das funções $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ seguintes e classifique-os como pontos de máximo local, mínimo local ou pontos de sela.

(a) $f(x,y) = (x-4)\ln y$
(b) $f(x,y) = xy\,\mathrm{e}^x + x$
(c) $f(x,y) = 2x^3 - y^3 - 24x + 75y + 7$
(d) $f(x,y) = 2x^3 - 4y^2 - 216x + 24y + 7$
(e) $f(x,y) = 4x^3 + 6y^2 - 48xy + 9$
(f) $f(x,y) = 2x^3 - 6x^2 + y^3 + 3y^2 - 48x - 45y$

3. O lucro na produção de x unidades de um produto A e y unidades de um produto B é aproximado pelo modelo

$$P(x,y) = 8x + 10y - 0.001(x^2 + xy + y^2) - 10\,000.$$

Encontre as quantidades de produção dos produtos A e B que conduzem a um lucro máximo.

4. Pretende-se delimitar um terreno retangular ao longo da margem de um rio. A área do terreno deverá ser de $1250m^2$ e não será necessária vedação no lado da margem do rio. Encontre as dimensões do terreno que requerem a menor vedação possível.

5. Suponha que se pretende construir uma caixa rectangular com um volume igual a $32\,m^3$. Três materiais diferentes serão usados na construção da caixa. O material para os lados custa 1€ por m^2, o material para o fundo custa 3€ por m^2 e o material para o topo custa 5€ por m^2. Quais são as dimensões da caixa menos dispendiosa?

6. Utilize o método dos multiplicadores de Lagrange para calcular os extremos de $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = xy$ sujeita à condição $x^2 + y^2 = 8$.

7. Use o método dos multiplicadores de Lagrange para resolver os problemas de optimização condicionada seguintes:

(a) Maximizar $f(x,y) = xy$ sujeita a $x + y = 1$
(b) Minimizar $f(x,y) = x^2 + y^2$ sujeita a $xy = 1$
(c) Minimizar $f(x,y) = x^2 - y^2$ sujeita a $x^2 + y^2 = 4$

8. Encontre o máximo e o mínimo valores da função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sujeita à restrição $x^2 + y^2 = 4$ para

(a) $f(x,y) = xy$;
(b) $f(x,y) = \mathrm{e}^{xy}$.

9. Determine o ponto do plano de equação $x + y + 2z = 1$ que está mais perto do ponto $M = (1,2,3)$.

10. Pretende-se vedar um espaço retangular de $800m^2$. Três dos lados deverão ter uma vedação de arame e o outro lado um muro de pedra. A vedação de arame custa 8€ por m e a de pedra 24€. Quais as dimensões desse retângulo que minimizarão o custo da vedação? Resolva este problema de duas formas diferentes.