3ª aula

10 de março de 2021 11:00

15. Seja L uma linguagem sobre o alfabeto $A = \{a, b\}$ tal que $\varepsilon \notin L$. Para cada uma das afirmações seguintes, diga se a afirmação é verdadeira ou falsa.

(a) $L \setminus aA^* = L \cap bA^*$.

(b) $L^*A^* \subseteq (LA)^*$.

a) $L \setminus aA^* = \{u \in L : u \notin aA^*\} = \{u \in L : a$ não é prefixo de $u\}$

$L \cap bA^* = \{u \in L : u \in bA^*\} = \{u \in L : b$ é prefixo de $u\}$

Dizer que a não é prefixo é dizer $u = \varepsilon$ ou $u = xu'$ em que $x \in A \setminus \{a\}$ e $u' \in A^*$. Neste caso, como $\varepsilon \notin L$, então $u \neq \varepsilon$ e $A \setminus \{a\} = \{b\}$.

Logo, se $u \in L \setminus aA^*$, então $u = bu'$ com $u' \in A^*$. Consequentemente $u \in L \cap bA^*$. Isto prova $L \setminus aA^* \subseteq L \cap bA^*$.

Reciprocamente, se $u \in L \cap bA^*$, então o prefixo de comprimento 1 de u é b ($b \neq a$). Logo $u \in L \setminus aA^*$, pelo que $L \cap bA^* \subseteq L \setminus aA^*$.

Podemos então concluir que a afirmação de a) é verdadeira.

b) $L^*A^* = \{uv : u \in L^*, v \in A^*\} = \{uv : u \in L^+, v \in A^*\} \cup \underbrace{\{v : v \in A^*\}}_{A^*}$

$L^* = L^+ \cup \{\varepsilon\}$

$= A^*$ (porque $\{uv : u \in L^+, v \in A^*\} \subseteq A^*$)

$(LA)^* = \{u_1x_1u_2x_2 \cdots u_nx_n : n \geq 0, u_i \in L, x_i \in A$ para $i = 1, \ldots, n\}$

Verificar se $L^*A^* \subseteq (LA)^*$, significa verificar se $\boxed{A^* \subseteq (LA)^*}$, ou seja se $A^* = (LA)^*$ (pq $(LA)^* \subseteq A^*$).

Será que existe uma linguagem L tal que $A^* \nsubseteq (LA)^*$?

Contra-exemplo $\begin{cases} L = \{a\} \\ u = b \in A^* \end{cases}$

$\underset{\in L}{a}\,a\,\underset{\in L}{a}\,b\,\underset{\in L}{a}\,a\,a\,b\,a\,b \in (LA)^*$

e $u \notin (LA)^*$ porque a não é prefixo de u.

Logo $A^* \nsubseteq (LA)^*$. A afirmação b) é falsa.

17. Sejam $A = \{a, b\}$ e L uma linguagem sobre A definida indutivamente por:

(i) $\varepsilon \in L$;

(ii) se $x \in L$, então $xba, xaa \in L$.

De entre as seguintes afirmações, selecione a afirmação verdadeira.

a) ~~$(ba)^{-1}L \neq L$~~; b) $a^{-1}L = aL$; ~~c) $L \neq L^*$~~; d) ~~$(bb)^{-1}L^* \neq \emptyset$~~.

$L = \{\varepsilon, \varepsilon ba, \varepsilon aa, baba, baaa, aaba, aaaa, \ldots\}$

$= \{ u \in A^* : u = \varepsilon \vee u = (ba)^{n_1}(aa)^{n_2}(ba)^{n_3}\dots(aa)^k ;\ n_i \geq 0,\ k \geq 1 \}$

$= \{aa, ba\}^*$

- Como $L = \{aa, ba\}^*$, então:

$L^* = (\{aa, ba\}^*)^* = \{aa, ba\}^* = L$, logo c) é falsa.

- $(bb)^{-1}L^* = (bb)^{-1}L = (bb)^{-1}\{aa, ba\}^* = ((bb)^{-1}\{aa, ba\}) \cdot \{aa, ba\}^*$

$= \emptyset \cdot \{aa, ba\}^* = \emptyset$, logo d) é falsa. $(bb)^{-1}\underbrace{ba\varepsilon}_{\text{imp.}}$

- $(ba)^{-1}L = (ba)^{-1}\{aa, ba\}^* = ((ba)^{-1}\{aa, ba\})\{aa, ba\}^*$

$= \{\varepsilon\}\{aa, ba\}^* = \{aa, ba\}^* = L$ $\quad \cancel{ba}\varepsilon$

Logo a) é falsa.

$u \in L$ $\quad \varepsilon \to u' \to . \quad \to u \in L.$ usando regras ii)

$\varepsilon \to \varepsilon ba \to bau' \to \dots \to \underbrace{bau}_{} \in L$

$(\cancel{ba})^{-1}\cancel{ba}u$ — u

$(ba)^{-1}L = L$

Por exclusão de partes, b) é a afirmação verdadeira.

De facto

$a^{-1}L = a^{-1}\{aa, ba\}^* = (a^{-1}\{aa, ba\}) \cdot \{aa, ba\}^* = \{a\} \cdot \{aa, ba\}^*$

$= aL.$

25. Indique uma expressão regular representando o conjunto das palavras sobre o alfabeto $\{a, b, c\}$:

(a) que admitem como fator as palavras abc e cbb;

___ abc ___ cbb ___

___ cbb ___ abc ___

___ abcbb ___

$\underbrace{\begin{matrix} abc \\ \ \ \ \ cbb \end{matrix}}_{}$
abcbb.

$L = A^*abcA^*cbbA^* \cup A^*cbbA^*abcA^* \cup A^*abcbbA^*$

A expressão regular correspondente é

$(a+b+c)^*abc(a+b+c)^*cbb(a+b+c)^* + (a+b+c)^*cbb(a+b+c)^*abc(a+b+c)^*$

$+ (a+b+c)^*abcbb(a+b+c)^*$ //

Simplificando a expressão:

$(a+b+c)^*(abc((a+b+c)^*c + \varepsilon)bb + cbb(a+b+c)^*abc)(a+b+c)^*$ //

(b) que não têm *aba* como fator;

$L = A^* \setminus A^* aba\, A^*$

$\varepsilon \in L$

$u \in \{b,c\}^+ \subseteq L$

$u = \underbrace{bb.cb \ldots c}_{\{b,c\}^*}\ a \ldots a$ c…bc…b…a / bb … a / bc … a — repetir $\rightarrow *$

b….c a….a a…..ac… a….ab — termina

A expressão regular correspondente é:

$$(b+c)^* \left(a\,a^* \,(c + bb + bc)\,(b+c)^* \right)^* \cdot a^* (b+c)^*$$

26. Sejam A um alfabeto, $L \subseteq A^*$ e $L^I = \{x^I \mid x \in L\}$.

(a) Defina uma função que a cada expressão regular $e \in ER(A)$ faça corresponder uma expressão $e' \in ER(A)$, tal que $\mathcal{L}(e') = \mathcal{L}(e)^I$.

(b) Conclua que se L é uma linguagem regular, então L^I também é regular.

a) $u = abbcaac$ $\qquad u^I = caacbba$

$u^I = (aac)^I (bbc)^I a^I = caacbba$

Como ER(A) foi definido indutivamente, vamos definir a função por recursão estrutural

$$\mathrm{Inv} : ER(A) \longrightarrow ER(A)$$

$a \in I$:

$$a \longmapsto a$$
$$\emptyset \longmapsto \emptyset$$
$$\varepsilon \longmapsto \varepsilon$$
$$e_1 + e_2 \longmapsto \mathrm{Inv}(e_1) + \mathrm{Inv}(e_2) \qquad e_1, e_2, e \in ER(A).$$
$$e_1 \cdot e_2 \longmapsto \mathrm{Inv}(e_2) \cdot \mathrm{Inv}(e_1)$$
$$e^* \longmapsto (\mathrm{Inv}\, e)^*$$

Exemplo: $e = (aa+ab)^* bc\, (ba+cc)^* + \varepsilon$

$$e' = \mathrm{Inv}(\qquad\qquad) =$$
$$= \mathrm{Inv}((ba+cc)^*)\ \mathrm{Inv}(bc)\ \mathrm{Inv}((aa+ab)^*) + \mathrm{Inv}(\varepsilon)$$
$$= (\mathrm{Inv}(ba+cc))^*\ cb\ (\mathrm{Inv}(aa+ab)^*) + \varepsilon$$
$$= (ab + cc)^*\, cb\, (aa + ba)^* + \varepsilon$$

b) A função Inv é uma função cuja imagem está contida em

$ER(A)$. Logo se L é uma linguagem regular e $L = \mathcal{L}(e)$, então $Inv(e) \in ER(A)$ e $L^I = \mathcal{L}(Inv(e))$. Logo L^I é uma linguagem regular.

27. Seja $A = \{a, b, c\}$. Preencha os espaços entre as seguintes expressões regulares sobre A com um dos símbolos $=$, $\leq$ ou $\not\leq$:

(a) $a^* + b^*$ $\underline{\leq}$ $(a+b)^*$;

(b) $a(a+b)^*$_____$a(a^*+b)^*$;

a) $\mathcal{L}(a^* + b^*) = \mathcal{L}(a^*) \cup \mathcal{L}(b^*) = \{a^n : n \geq 0\} \cup \{b^n : n \geq 0\} = L_1$

$\mathcal{L}((a+b)^*) = (\mathcal{L}(a+b))^* = (\{a\} \cup \{b\})^* = \{a,b\}^* = L_2$

$\left.\begin{array}{l} \{a^n : n \geq 0\} \subseteq \{a,b\}^* \\ \{b^n : n \geq 0\} \subseteq \{a,b\}^* \end{array}\right\}$ Logo $L_1 \subseteq L_2$

$\left.\begin{array}{l} ab \notin \{a^n : n \geq 0\} \text{ e } ab \notin \{b^n : n \geq 0\} \\ ab \in L_2 \text{ e } ab \notin L_1 \end{array}\right\}$ Logo $L_2 \not\subseteq L_1$

Então $L_1 \subsetneq L_2$.

...

(h) $(b^*ab^*ab^*)^*c(b^*ab^*ab^*)^*$_____$b^*(ab^*a)^*b^*cb^*(ab^*a)^*b^*$.

30. Seja A um alfabeto e sejam $r, s \in ER(A)$. Mostre que:

(a) $r^* = r^*r^*$;

(f) $(rs^*)^* = \varepsilon + r(r+s)^*$;

(g) $(r^* + s^*)^* = (r^*s^*)^*$.