Universidade do Minho
Departamento de Matemática

LCC **Análise**

Ficha de exercícios 2 — 2019/2020

- **Derivadas parciais**

1. Sejam $g(t) = \dfrac{f(x+t,y)-f(x,y)}{t}$ e $h(t) = \dfrac{f(x,y+t)-f(x,y)}{t}$, com $t \neq 0$.
Determine g e h para f definida por

(a) $f(x,y) = xy^2 + 3x$

(b) $f(x,y) = xy^3 + 4x^2 - 2$

e calcule $\lim\limits_{t\to 0} g(t)$ e $\lim\limits_{t\to 0} h(t)$.

2. Determine as derivadas parciais de primeira ordem de $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por:

(a) $f(x,y) = x^3y + 7x^2 - 2y^3 - 1$;

(b) $f(x,y) = \dfrac{3x+y^2}{7x+y}$;

(c) $f(x,y) = \sin\left(1+e^{xy}\right)$;

(d) $f(x,y) = (x^3-y^2)^2$;

(e) $f(x,y) = xe^y + y \,\mathrm{sen}\, x$;

(f) $f(s,t) = e^s \ln(st)$;

(g) $f(x,y) = e^x \ln\left(y^2+3x\right)$;

(h) $f(x,y) = x\cos\dfrac{x}{y}$;

(i) $f(x,y) = x^4 + y^3 + 6xy$;

(j) $f(x,y) = e^{2xy^3}$;

(k) $f(x,y) = xe^{\sqrt{xy}}$;

(l) $f(x,y) = x^y$;

(m) $f(r,T) = \dfrac{2\pi r}{T}$.

(n) $f(x,y,z) = xe^{xy}\,\mathrm{sen}(yz)$;

(o) $f(s,t,u) = s^2\cos(2tu)$;

(p) $f(x,y,z) = 2xz + z^2$;

(q) $f(x,y,z) = xyze^{xyz}$;

(r) $f(x,y,z) = \ln(1+x+y^2+z^3)$;

(s) $f(r,u,v) = 1+u+v-\mathrm{sen}(r^2)$;

(t) $f(x,y,z) = e^x\,\mathrm{sen}(x+y) + \cos(z-3y)$;

(u) $f(m,v,r) = \dfrac{mv^2}{r}$;

(v) $f(x,y,z) = \ln(e^z + x^y)$.

3. Verifique que $w_{xy} = w_{yx}$ para:

(a) $w = xy^4 - 2x^2y^3 + 4x^2 - 3y$; (b) $w = x^3e^{-2y} + y^{-2}\cos x$; (c) $w = x^2\cos\dfrac{z}{y}$.

4. Calcule w_{xyz} quando $w = 3x^2y^3z + 2xy^4z^2 - yz$.

5. Calcule $\dfrac{\partial^3 w}{\partial x\partial y\partial z}$ quando $w = xyz$.

6. Se $w = r^4s^3t - 3s^2e^{rt}$, verifique que $w_{rrs} = w_{rsr} = w_{srr}$.

7. Mostre que a função $v(x,t) = t^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$ satisfaz a equação $\dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$.

8. Uma função f de x e y diz-se *harmónica* se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. Prove que as funções seguintes são harmónicas.

(a) $f(x,y) = e^{kx}\cos(ky)$, $k \in \mathbb{R}$

(b) $f(x,y) = 3x^2y - y^3$

(c) $f(x,y) = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}\cos x + \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}\,\mathrm{sen}\, x$

9. Determine para que valores da constante real λ a função $f(x,y) = x^2 + \lambda y^2$, definida em $\mathbb{R}^2$, é harmónica.

10. Considere $w = \cos(x-y) + \ln(x+y)$. Mostre que $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$.

11. Uma placa de metal aquecida está situada num plano xy de modo tal que a temperatura no ponto (x, y) é dada por

$$T = 10(x^2 + y^2)^2.$$

Determine a taxa de variação de T no ponto $P = (1, 2)$ na direção

(a) do eixo dos xx;

(b) do eixo dos yy.

12. Seja $V = \dfrac{100}{x^2 + y^2 + z^2}$ o potencial elétrico no ponto (x, y, z). Determine a taxa de variação de V no ponto $P = (2, -1, 1)$ na direção

(a) do eixo dos xx;

(b) do eixo dos yy;

(c) do eixo dos zz.

- **Planos tangentes e diferenciais**

13. Para cada uma das funções $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ apresentadas, determine uma equação do plano tangente ao gráfico de f, no ponto indicado.

(a) $f(x, y) = x^2 + 4y^2$, $(2, 1, 8)$.

(b) $f(x, y) = x^2 - y^2$, $(3, -2, 5)$.

(c) $f(x, y) = \mathrm{e}^x \ln y$, $(3, 1, 0)$.

(d) $f(x, y) = \operatorname{sen}(x + y)$ $(1, -1, 0)$.

(e) $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$, $(1, 2, \frac{5}{2})$.

(f) $f(x, y) = \mathrm{e}^x\, y$, $(0, 1, 1)$.

14. Sendo $z = f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$,

(a) determine o diferencial dz;

(b) compare os valores de Δz e dz se x varia de 2 para 2.05 e y de 3 para 2.96.

15. Se $z = 5x^2 + y^2$ e (x, y) varia de $(1, 2)$ para $(1.05, 2.1)$, compare os valores de Δz e dz.

16. Utilize diferenciais para calcular um valor aproximado de

(a) $\sqrt{9(1.95)^2 + (8.1)^2}$.

(b) $\sqrt{99}\,\mathrm{e}^{0.02}$.

(c) $(0.98)^2 - 1.01 \ln \dfrac{1.01}{0.98}$.

(d) $26.98^{1/3} \times 36.04^{1/2}$.

17. Determine dw para

(a) $w = x^3 - x^2 y + 3y^2$;

(b) $w = x^2 e^{xy} + \dfrac{1}{y^2}$;

(c) $z = \mathrm{e}^x \cos(xy)$.

(d) $w = x^2 \ln(y^2 + z^2)$;

(e) $w = \dfrac{xyz}{x + y + z}$;

(f) $w = x^2 z + 4yt^3 - xz^2 t$.

18. Use diferenciais para obter uma aproximação para a variação de

(a) $z = \ln(x - 3y)$ quando (x, y) varia de $(7, 2)$ para $(6.9, 2.06)$.

(b) $w = xy^2 \operatorname{sen} \pi z$ quando (x, y, z) varia de $(4, 5, 4)$ para $(3.99, 4.98, 4.03)$.

(c) $w = \sqrt{20 - x^2 - 7y^2}$ quando (x, y) varia de $(2, 1)$ para $(1.95, 1.08)$.

19. Use diferenciais para determinar o erro máximo cometido no cálculo da área de um retângulo de 10cm de comprimento e 5cm de largura, sabendo que o erro cometido em cada uma das medições não ultrapassa 0.1cm.

20. Se as dimensões de uma caixa retangular são x, y e z, então o seu volume V é dado por $V = xyz$. Use diferenciais para estimar o erro máximo cometido no cálculo do volume de uma caixa com dimensões 75cm, 60cm e 40cm, quando cada uma destas medidas foi obtida com um erro não superior a 0.2cm.

- **Derivadas de funções compostas**

21. Determine $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ sabendo que $z = \cos\left(x^2 y\right)$, onde $x = s^3 t^2$ e $y = s^2 + \dfrac{1}{t}$.

22. Determine $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial y}$ para $w = u^2 \operatorname{sen} v$, onde $u = x^3 - 2y^3$ e $v = xy^2$.

23. Determine $\dfrac{\partial w}{\partial r}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial s}$ sabendo que $w = \sqrt{u^2 + v^2}$, onde $u = re^{-s}$ e $v = s^2 e^{-r}$.

24. Determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ sabendo que $z = \dfrac{r+s}{v}$ onde $r = x\cos y$, $s = y \operatorname{sen} x$ e $v = x^2 e^{-y}$.

25. Determine $\dfrac{dw}{dt}$ para

(a) $w = x^3 - y^3$, $x = \dfrac{1}{1+t}$ e $y = \dfrac{t}{t+1}$;

(b) $w = \ln(u+v)$, $u = e^{2t}$ e $v = t^3 - t^2$;

(c) $w = r^2 - sv$, $r = \operatorname{sen} t$, $s = \cos t$ e $v = 4t$;

(d) $w = x^2 y^3 z^4$, $x = 2t+1$, $y = 3t-2$ e $z = 5t+4$.

26. Sendo $z = txy^2$ em que $x = t + \ln\left(y + t^2\right)$ e $y = e^t$, determine $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ e $\dfrac{dz}{dt}$.

27. Determine $\dfrac{d^2 u}{dt^2}$ para $u = e^{x-2y}$ onde $x = \operatorname{sen} t$ e $y = t^3$.

28. Se $u = x^4 y + y^2 z^3$, com $x = rs\,\mathrm{e}^t$, $y = rs^2\,\mathrm{e}^{-t}$ e $z = s\,r^2 \operatorname{sen} t$, determine o valor de $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ quando $r = 2$, $s = 1$ e $t = 0$.

29. A pressão p, o volume V e a temperatura T de um gás confinado relacionam-se pela equação $pV = cT$, onde c é uma constante. Se as taxas de variação de p e V são $\dfrac{dp}{dt}$ e $\dfrac{dV}{dt}$, respectivamente, utilize a regra de derivação em cadeia para estabelecer uma fórmula para $\dfrac{dT}{dt}$. Verifique o resultado aplicando a regra de derivação do produto para funções de uma variável.

30. Se $w = f(x^2 + y^2)$ e f é uma função diferenciável, mostre que $y\dfrac{\partial w}{\partial x} - x\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0$.

(sugestão: faça $u = x^2 + y^2$).

31. Se $w = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$ e f é diferenciável, mostre que w satisfaz a equação $t\dfrac{\partial w}{\partial s} + s\dfrac{\partial w}{\partial t} = 0$.

(sugestão: faça $u = s^2 - t^2$ e $v = t^2 - s^2$).

32. Se $z = f(x - y)$ e f é diferenciável, mostre que $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

- **Derivada da função implícita**

33. Determine $\dfrac{dy}{dx}$ admitindo que $y = f(x)$ verifica

(a) $2x^3 + x^2 y + y^3 = 1$; (b) $6x + \sqrt{xy} = 3y - 4$; (c) $x^3 + y^3 = 6xy$; (d) $x^2 y^2 + x - 2y^3 = 0$.

34. Sabendo que a equação

$$1 + y = x^2 - \ln y$$

define implicitamente y como função de x no ponto $(\sqrt{2}, 1)$, determine $\dfrac{dy}{dx}(\sqrt{2})$.

35. Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ admitindo que $z = f(x, y)$ verifica

(a) $2xz^3 - 3yz^2 + x^2 y^2 + 4z = 0$;

(b) $xe^{yz} - 2ye^{xz} + 3ze^{xy} = 1$;

(c) $yx^2 + z^2 + \cos(xyz) = 4$;

(d) $xz^2 + 2x^2 y - 4y^2 z + 3y - 2 = 0$.