

## 3. Funções reais de variável real

### 3.5 Cálculo diferencial em $\mathbb{R}$

Esta seção é dedicada ao estudo das **derivadas de funções reais de variável real**. A derivada e as suas aplicações desempenham um papel fundamental, tanto na própria Matemática, como noutros domínios aplicados, como a Física, a Economia, a Otimização, etc. Trata-se, portanto, de um tópico fundamental da Matemática.

Definição de derivada num ponto

Derivadas laterais

Interpretação geométrica da derivada num ponto

Função derivada

Resultados sobre derivação pontual

Funções deriváveis num intervalo

Derivadas de ordem superior

# Definição de derivada num ponto

Sejam  $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a \in D$  um ponto de acumulação de  $D$ , quer à esquerda quer à direita.

- Diz-se que a função  $f$  é derivável no ponto  $a$  quando existe (é finito) o limite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a),$$

a que se chama derivada de  $f$  no ponto  $a$ .

- Fazendo  $x = a + h$ , pode-se dizer que  $x \rightarrow a$  se e só se  $h \rightarrow 0$ , resultando

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

que constitui uma definição alternativa para a derivada de  $f$  em  $a$ .

# Derivadas laterais

Quando o limite que define  $f'(a)$  é estudado de um só lado somos conduzidos à noção de **derivada lateral**:

- ▶ **derivada à esquerda de  $f$  em  $a$**  (para  $a$  ponto de acumulação à esquerda)

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a + h) - f(a)}{h};$$

- ▶ **derivada à direita de  $f$  em  $a$**  (para  $a$  ponto de acumulação à direita)

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

## Teorema

Sejam  $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a \in D \cap D'$ . Então  $f$  é derivável em  $a$  se e só se existem e são iguais as derivadas laterais  $f'_-(a)$  e  $f'_+(a)$ .

# Interpretação geométrica da derivada num ponto

Consideremos a curva  $\mathcal{C}$  de equação  $y = f(x)$  que passa pelo ponto  $A = (a, f(a))$ . Seja  $X = (x, f(x))$  um ponto genérico da curva. A razão

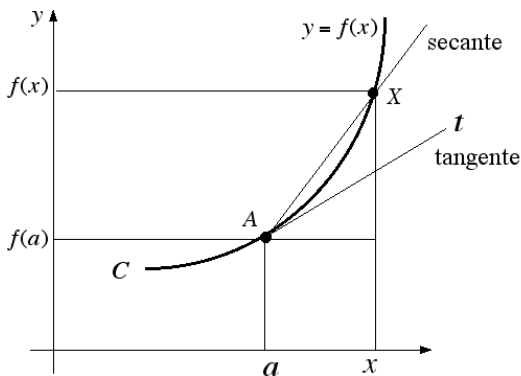
incremental

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

dá o declive da reta que passa por  $A$  e  $X$ , que é secante à curva  $\mathcal{C}$ .

# Interpretação geométrica da derivada num ponto

À medida que  $X$  se aproxima de  $A$ , a reta secante dá origem à **reta  $t$** , que é **tangente a  $C$  no ponto  $A$** . Tal reta  $t$  pode ser obtida como o limite, quando  $X$  se aproxima de  $A$ , das retas secantes passando por  $A$  e  $X$ . Então, o **declive  $m$  da reta tangente pode ser obtido como o limite dos declives das retas secantes**, à medida que  $X$  se aproxima de  $A$ .



# Interpretação geométrica da derivada num ponto

Isto é,

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

onde, no segundo membro, o limite define  $f'(a)$ .

Isto justifica as seguintes conclusões.

1. Quando  $f$  é derivável em  $a$ , a derivada  $f'(a)$  dá o declive da reta tangente à curva de equação  $y = f(x)$  no ponto de abcissa  $a$ .
2. Uma equação da reta tangente à curva  $y = f(x)$  no ponto de abcissa  $a$  é

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

3. Se  $f'(a) \neq 0$ , uma equação da reta normal à curva  $y = f(x)$  no ponto de abcissa  $a$  é

$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a).$$

# Interpretação geométrica da derivada num ponto

Para  $x$  próximo de  $a$ , a função  $f$  pode ser aproximada pelo polinómio  $f(a) + f'(a)(x - a)$ , de grau não superior a 1.

Em torno do ponto  $a$ , a curva  $y = f(x)$  confunde-se com a reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abcissa  $a$ , ou seja, é uma curva "suave" em torno do ponto  $a$ , ou localmente linearizável, e não apresenta um bico em  $x = a$ .

## Observação

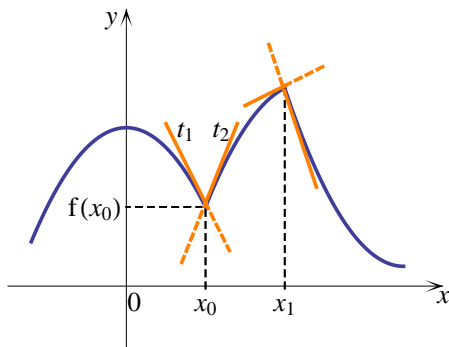
*Se a razão incremental tender para infinito, não existindo  $f'(a)$ , isto é, se*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty,$$

*então a reta tangente à curva  $y = f(x)$  no ponto de abcissa  $a$  é a reta vertical de equação  $x = a$ .*

# Interpretação geométrica da derivada num ponto

De um modo geral, se uma função tem um gráfico como o da figura,



a função **não é derivável nem em  $x_0$  nem em  $x_1$** . Por exemplo, no ponto  $(x_0, f(x_0))$  a curva descrita não tem uma reta tangente mas duas retas semitangentes, a semi-reta  $t_1$  e a semi-reta  $t_2$ . Estas semi-retas não estão no prolongamento uma da outra. **O declive da semi-reta  $t_1$  é a derivada de  $f$  à esquerda em  $x_0$  e o declive da semi-reta  $t_2$  é a derivada de  $f$  à direita em  $x_0$ .**



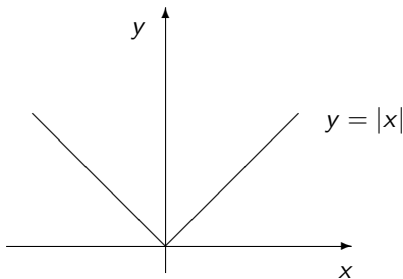
# Interpretação geométrica da derivada num ponto

## Exemplos

*Do ponto de vista geométrico, estudemos a existência de derivada das seguintes funções no ponto indicado.*

1.  $f(x) = |x|$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , *ponto*  $a = 0$ .

*A curva  $y = |x|$  apresenta um bico na origem, pelo que a função não é linearizável em torno da origem. Logo  $f$  não é derivável em  $x = 0$ .*

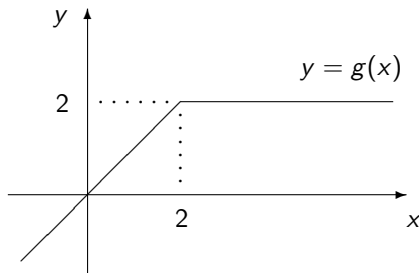


# Interpretação geométrica da derivada num ponto

## Exemplos

$$2. \ g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 2, \\ 2 & \text{se } x > 2, \end{cases} \quad \text{ponto } a = 2.$$

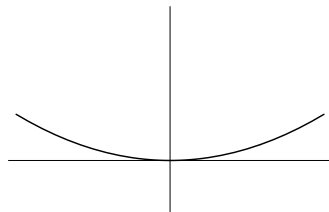
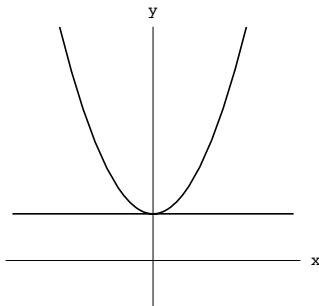
A curva  $y = g(x)$  apresenta um bico no ponto  $(2, g(2))$ , pelo que a função não é linearizável em torno desse ponto, ou seja, *g não é derivável em  $a = 2$ .*



# Interpretação geométrica da derivada num ponto

## Exemplos

3.  $k(x) = 1 + x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , ponto  $a = 0$ .



*Ampliação em torno de  $(0, 1)$ .*

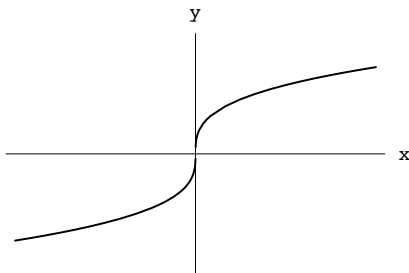
A função  $k$  é **derivável em  $a = 0$** . A curva não apresenta bico no ponto  $(0, 1)$  e em torno de  $(0, 1)$  a **reta tangente à curva confunde-se com a própria curva**.

# Interpretação geométrica da derivada num ponto

## Exemplos

4.  $j(x) = x^{1/3}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , ponto  $a = 0$ .

A função não é derivável em  $a = 0$ , pois a tangente ao gráfico de  $j$  em  $a = 0$  é vertical, com a correspondente razão incremental a tender para  $+\infty$ .



# Função derivada

Sejam  $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $A \subset D$ .

Diz-se que:

- ▶  $f$  é derivável em  $A$  quando  $f$  é derivável em todo  $a \in A$ ;
- ▶  $f$  é *derivável* se  $f$  é derivável em todo o domínio  $D$ .

Se  $f$  é derivável em  $D$ , diz-se que a função

$$\begin{array}{rcl} f' : & D & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto f'(x) \end{array}$$

é a *função derivada* de  $f$ .

# Resultados sobre derivação pontual

## Teorema

[Continuidade de funções deriváveis]

Sejam  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a \in D \cap D'$ . Se  $f$  é derivável em  $a$  então  $f$  é contínua em  $a$ .

## Observações

1. O recíproco deste teorema é falso, isto é:

$f$  é contínua em  $a \not\Rightarrow f$  é derivável em  $a$ .

Basta pensar em  $f(x) = |x|$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , e no ponto  $a = 0$ .

# Resultados sobre derivação pontual

## Observações

2. Deste teorema sai, equivalentemente, que:

$f$  é descontínua em  $a \implies f$  não é derivável em  $a$ .

De facto, se  $f$  fosse derivável em  $a$ , pelo teorema,  $f$  seria também contínua em  $a$ .

3. Temos ainda que:

$\text{existe } f'_+(a) \implies f \text{ é contínua à direita em } a;$

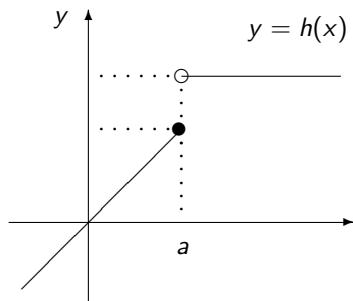
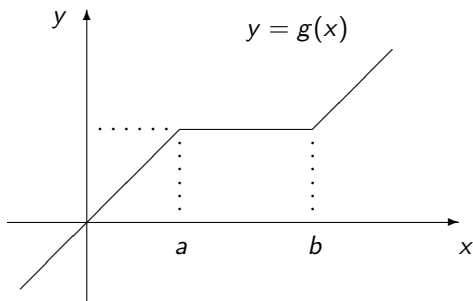
$\text{existe } f'_-(a) \implies f \text{ é contínua à esquerda em } a.$

# Resultados sobre derivação pontual

## Exemplo

Consideremos as funções  $g, h: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  representadas na figura a seguir.

É simples constatar que  $g$  é contínua em  $D$  e derivável, apenas, em  $D \setminus \{a, b\}$ , enquanto que  $h$  é contínua em  $D \setminus \{a\}$  e derivável em  $D \setminus \{a\}$ .





# Resultados sobre derivação pontual

## Teorema

[Aritmética da derivação pontual]

Sejam  $f, g: D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  funções *deriváveis* no ponto  $a \in D \cap D'$ . Então:

$$a) \quad (f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a);$$

$$b) \quad (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a);$$

$$c) \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}, \text{ desde que } g(a) \neq 0.$$

# Resultados sobre derivação pontual

## Consequências

1. Da regra b) do teorema sai, em particular, que se  $k$  for uma constante então

$$(kf(x))' = k f'(x).$$

2. Da regra b), para  $n \in \mathbb{N}$ , sai também que

$$(f(x)^n)' = n(f(x))^{n-1} f'(x).$$

3. Da regra c), desde que  $f(x) \neq 0$ , sai que

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}.$$

# Resultados sobre derivação pontual

## Exemplos

$$1. (kx)' = k(x)' = k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

$$2. (x^n)' = nx^{n-1}(x)' = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$3. \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{(x)'}{x^2} = -\frac{1}{x^2}.$$

$$4. \left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{(x^2)'}{(x^2)^2} = -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}.$$

$$5. \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{(x^n)'}{(x^n)^2} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{n-1-2n} = -nx^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}.$$

$$6. (x^{-n})' = -nx^{-n-1}.$$

Logo, fazendo  $m = -n$ , podemos escrever  $(x^m)' = mx^{m-1}$ , para  $m$  inteiro negativo. Ou seja, a fórmula em 2. é válida para  $n \in \mathbb{Z}$ .

# Resultados sobre derivação pontual

## Derivadas das funções trigonométricas

Usando a definição de derivada e o facto de que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} = 0.$$

podemos mostrar que:

$$(\sin x)' = \cos x, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Usando a regra de derivação do quociente podemos mostrar que:

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\};$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

## Exemplos

$$1. (x^2 + \operatorname{sen} x)' = (x^2)' + (\operatorname{sen} x)' = 2x + \cos x;$$

$$2. (x^3 \cos x)' = (x^3)' \cos x + x^3 (\cos x)' = 3x^2 \cos x - x^3 \operatorname{sen} x.$$

3.

$$\begin{aligned} \left( \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x} \right)' &= \frac{(\cos x)'(1 - \operatorname{sen} x) - \cos x(1 - \operatorname{sen} x)'}{(1 - \operatorname{sen} x)^2} \\ &= \frac{-\operatorname{sen} x(1 - \operatorname{sen} x) - \cos x(-\cos x)}{(1 - \operatorname{sen} x)^2} \\ &= \frac{-\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{(1 - \operatorname{sen} x)^2} \\ &= \frac{1 - \operatorname{sen} x}{(1 - \operatorname{sen} x)^2} \\ &= \frac{1}{1 - \operatorname{sen} x} \end{aligned}$$

$$4. (\operatorname{sen} x \cos x)' = (\operatorname{sen} x)' \cos x + \operatorname{sen} x (\cos x)' = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x.$$

# Resultados sobre derivação pontual

## Derivada da função composta

### Teorema

[Derivada da função composta / Regra da Cadeia]

Sejam  $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: B \longrightarrow \mathbb{R}$ , com  $f(D) \subset B \subset \mathbb{R}$ , e  $a \in D \cap D'$ ,  $b = f(a) \in B \cap B'$ .

Se  $f$  é derivável em  $a$  e  $g$  é derivável em  $b$  então  $g \circ f$  é derivável em  $a$  e

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) f'(a).$$

Esta fórmula significa que a **derivada da composta é o produto das derivadas**, com cada uma delas calculada num ponto adequado. Com alguma ligeireza matemática, podemos dizer que a derivada da composta é o produto da derivada da função de fora calculada na de dentro pela derivada da função de dentro.

# Resultados sobre derivação pontual

## Exemplos

1.  $(\sin(3x^2))' = \sin'(3x^2) \cdot (3x^2)' = \cos(3x^2) \cdot (6x) = 6x \cos(3x^2).$

2.

$$\begin{aligned}((1 + \cos x)^4)' &= 4(1 + \cos x)^3(1 + \cos x)' \\&= 4(1 + \cos x)^3(0 - \sin x) \\&= -4 \sin x(1 + \cos x)^3.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}(\sin^3(9x + 1))' &= 3 \sin^2(9x + 1) \cdot (\sin(9x + 1))' \\&= 3 \sin^2(9x + 1) \cdot (\sin'(9x + 1) \cdot (9x + 1)') \\&= 3 \sin^2(9x + 1) \cdot \cos(9x + 1) \cdot 9 \\&= 27 \sin^2(9x + 1) \cdot \cos(9x + 1).\end{aligned}$$

# Resultados sobre derivação pontual

## Exemplo

Supondo que  $f$  é uma função derivável, vamos exprimir as derivadas de

a)  $f(3x)$ ,

b)  $f(x^2)$  e

c)  $f(5f(x))$

em função de  $f'$ .

Temos

a)  $(f(3x))' = f'(3x) \cdot (3x)' = 3f'(3x)$ ,

b)  $(f(x^2))' = f'(x^2) \cdot (x^2)' = 2xf'(x^2)$ ,

c)

$$\begin{aligned}(f(5f(x)))' &= f'(5f(x)) \cdot (5f(x))' \\ &= f'(5f(x)) \cdot (5f'(x)) \\ &= 5f'(x) \cdot f'(5f(x)).\end{aligned}$$



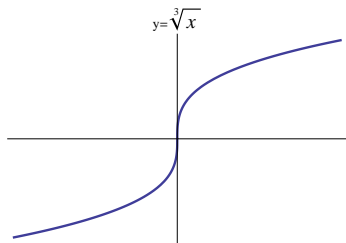
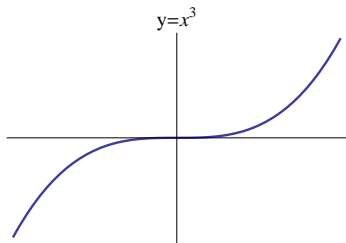
# Resultados sobre derivação pontual

## Derivada da função inversa

Quanto à derivação da função inversa, repare-se que:

- Se  $f: A \rightarrow B$  for bijetiva e derivável em  $a \in A$ , a sua inversa,  $f^{-1}: B \rightarrow A$ , pode não ser derivável em  $b = f(a)$ .

Veja-se o caso de  $f(x) = x^3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , que é claramente derivável e, no entanto, a sua inversa,  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , não é derivável em  $0 = f(0)$ .



# Resultados sobre derivação pontual

## Derivada da função inversa

- Nos casos em que a inversa é derivável, de

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall x \in A,$$

a regra da cadeia dá

$$(f^{-1})' \cdot (f(x)) \cdot f'(x) = 1, \quad \forall x \in A,$$

donde  $f'(x) \neq 0$  e

$$(f^{-1})' \cdot (f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

O problema surge quando se tem precisamente  $f'(x)=0$ , que é o que acontece no caso citado anteriormente.

# Resultados sobre derivação pontual

## Derivada da função inversa

O resultado fundamental sobre a derivação da função inversa é o seguinte. Dá-nos a **relação entre as derivadas de  $f$  e  $f^{-1}$**  em pontos correspondentes.

### Teorema

[Derivada da função inversa]

*Seja  $f: D \rightarrow B$ , com  $D, B \subset \mathbb{R}$ , uma função bijetiva e  $a \in D \cap D'$ . Se  $f$  é derivável em  $a$ ,  $f'(a) \neq 0$  e  $f^{-1}$  é contínua em  $b = f(a)$ , então  $f^{-1}$  é derivável em  $b$ , tendo-se*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

# Resultados sobre derivação pontual

## Derivada da função inversa

### Exemplo

Seja  $f(x) = x^3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Temos  $f'(x) = 3x^2$  e  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Para  $x \neq 0$ , vem

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{x})' &= (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(\sqrt[3]{x})} \\ &= \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}. \end{aligned}$$

# Resultados sobre derivação pontual

## Derivadas das funções trigonométricas inversas

Usando o teorema da derivada da função inversa, podemos mostrar que:

$$(\arcsen x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in ]-1, 1[;$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in ]-1, 1[;$$

$$(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

# Resultados sobre derivação pontual

## Derivadas das funções exponenciais e de logaritmos

Considere-se  $f(x) = e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Prova-se, usando a definição de derivada e o resultado

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1,$$

que

$$f'(x) = (e^x)' = e^x.$$

Sendo  $f^{-1}(x) = \ln x$ ,  $x > 0$ , usando a regra da derivação da função inversa, temos

$$(\ln x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

Usando a regra da cadeia, obtemos, para  $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ ,

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \quad \text{e} \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

# Resultados sobre derivação pontual

## Derivadas das funções hiperbólicas

Usando a definição das funções hiperbólicas, vamos verificar que

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (\operatorname{coth} x)' = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Temos

$$\begin{aligned} (\operatorname{ch} x)' &= \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})' \\ &= \frac{1}{2} ((e^x)' + (e^{-x})') = \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \operatorname{sh} x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\operatorname{sh} x)' &= \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})' \\ &= \frac{1}{2} ((e^x)' - (e^{-x})') = \left( \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} \right) = \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = \operatorname{ch} x, \end{aligned}$$

# Resultados sobre derivação pontual

## Derivadas das funções hiperbólicas

$$\begin{aligned}(\operatorname{th} x)' &= \left( \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x (\operatorname{ch} x)'}{(\operatorname{ch} x)^2} \\ &= \frac{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} x}{(\operatorname{ch} x)^2} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(\operatorname{coth} x)' &= \left( \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \right)' = \frac{(\operatorname{ch} x)' \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x (\operatorname{sh} x)'}{(\operatorname{sh} x)^2} \\ &= \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x \operatorname{ch} x}{(\operatorname{sh} x)^2} = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.\end{aligned}$$



# Resultados sobre derivação pontual

## Derivadas das funções hiperbólicas inversas

Pode-se ainda mostrar que:

$$(\operatorname{argsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$(\operatorname{argch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x \in ]1, +\infty[;$$

$$(\operatorname{argth} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad x \in ]-1, 1[;$$

$$(\operatorname{argcoth} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1].$$

# Funções deriváveis num intervalo

Abordaremos em seguida resultados fundamentais sobre o comportamento de uma função que possui derivada num intervalo.

## Teorema do valor intermédio para a derivada

Vamos agora apresentar um dos resultados mais notáveis deste curso. Trata-se do resultado que estabelece que, embora não tenha de ser contínua, uma **função que tem derivada num intervalo possui sempre a propriedade do valor intermédio**, tal como uma função contínua, isto é, não passa de um valor a outro sem passar por todos os valores intermédios.

## Teorema

### [Valor intermédio para a derivada (Darboux)]

Seja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  derivável e tal que  $f'(a) \neq f'(b)$ . Então, dado  $k \in \mathbb{R}$  estritamente compreendido entre  $f'(a)$  e  $f'(b)$ , existe

$$c \in ]a, b[ \quad \text{tal que} \quad f'(c) = k.$$

# Funções deriváveis num intervalo

Portanto, dada uma função  $g$  definida num intervalo  $I$ , a pergunta "É  $g$  necessariamente a derivada de uma outra função  $f$  definida em  $I$ ?" tem resposta "Não". Algumas funções são derivadas, outras não.

## Exemplo

Considere-se a função definida por

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \leq x < 0, \\ 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Esta função *não possui a propriedade do valor intermédio*. Então  $g$  não pode ser a derivada de função alguma  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Em particular,  $g$  não pode ser a derivada, em  $[-1, 1]$ , de

$$h(x) = \begin{cases} -x & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

Em particular,  $h'(x) = g(x)$  para todo  $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ , mas  $h$  não é derivável em  $x = 0$ .

# Funções deriváveis num intervalo

Veremos agora mais dois resultados importantes sobre funções deriváveis em intervalos, bem como algumas consequências que deles se extraem.

## Teorema

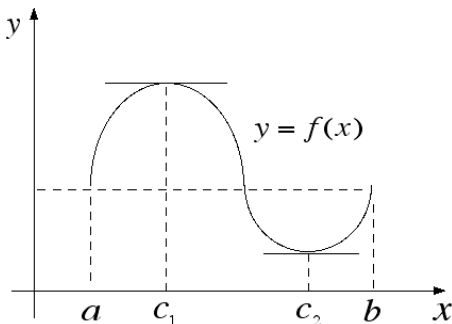
[Teorema de Rolle]

Seja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função *contínua* que é *derivável em*  $]a, b[$ . Se  $f(a) = f(b)$  então existe  $c \in ]a, b[$  tal que  $f'(c) = 0$ .

# Funções deriváveis num intervalo

## Interpretação geométrica do teorema de Rolle

Geometricamente, o teorema de Rolle estabelece que, estando  $f$  nas condições indicadas no enunciado do teorema, existe algum ponto  $c \in ]a, b[$  tal que a **tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa  $c$  é horizontal** e, portanto, **paralela à reta que passa pelos pontos  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$** . A figura mostra a reta horizontal que passa por  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$  e dois pontos  $c_1$  e  $c_2$  em  $]a, b[$  para os quais a tangente à curva é horizontal.



# Funções deriváveis num intervalo

Do teorema de Rolle extraem-se as seguintes consequências muito úteis no tratamento numérico de equações algébricas.

## Corolários

[do teorema de Rolle]

Seja  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua que é derivável em  $]a, b[$ .

1. Entre *dois zeros de  $f$*  existe, pelo menos, *um zero de  $f'$* .
2. Entre *dois zeros consecutivos de  $f'$*  existe, quando muito, *um zero de  $f$* .
3. Não há mais do que *um zero de  $f$  inferior ao menor zero de  $f'$* , nem mais do que *um zero de  $f$  superior ao maior zero de  $f'$* .

# Funções deriváveis num intervalo

## Exemplo

Mostremos que a equação

$$x^3 + x + 1 = 0$$

*não pode ter mais do que uma raiz real.*

Seja  $f$  a função definida em  $\mathbb{R}$  por

$$f(x) = x^3 + x + 1.$$

*Trata-se de uma função derivável em  $\mathbb{R}$ . Se a equação dada tivesse duas raízes reais então a função  $f$  possuiria dois zeros reais, pelo que  $f'$  possuiria, pelo menos, um zero real. Mas*

$$f'(x) = 3x^2 + 1, x \in \mathbb{R},$$

*que nunca se anula em  $\mathbb{R}$ . Portanto, a equação dada possui, quando muito, uma raiz real.*

# Funções deriváveis num intervalo

Um dos resultados mais importantes do cálculo diferencial é o que se exprime no seguinte teorema e que constitui uma **extensão do Teorema de Rolle**.

## Teorema

[do valor médio de Lagrange]

Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função *contínua* que é *derivável em*  $]a, b[$ .  
Então existe  $c \in ]a, b[$  tal que

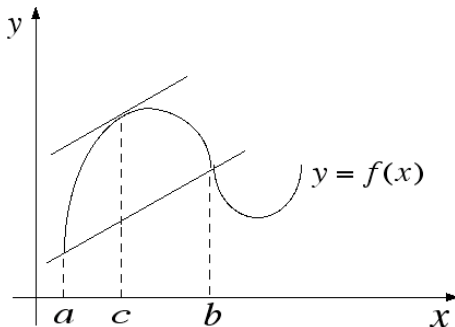
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



# Funções deriváveis num intervalo

## Interpretação geométrica do teorema de Lagrange

O Teorema de Lagrange estabelece que, estando  $f$  nas condições indicadas no enunciado, existe algum ponto  $c \in ]a, b[$  tal que a **tangente** à curva de equação  $y = f(x)$  no ponto de abscissa  $c$  é paralela à reta que passa por  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$ , secante à curva  $y = f(x)$ .



# Funções deriváveis num intervalo

## Exemplo

Seja

$$f(x) = x^3 + 1 \quad \text{e} \quad [a, b] = [1, 2].$$

Uma vez que  $f$ , sendo um polinómio, é contínua e derivável para todo o  $x \in \mathbb{R}$ , satisfaz as condições do Teorema de Lagrange. Neste caso tem-se

$$f(a) = f(1) = 2, \quad f(b) = f(2) = 9 \quad \text{e} \quad f'(x) = 3x^2.$$

Então, o *ponto  $c$*  é tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \iff 3c^2 = \frac{9 - 2}{2 - 1} \iff 3c^2 = 7,$$

e as soluções são

$$c = \sqrt{7/3} \quad \text{e} \quad c = -\sqrt{7/3}.$$

Destes dois valores apenas o primeiro está em  $]1, 2[$ . Portanto,  $c = \sqrt{7/3}$  é o ponto cuja existência o Teorema do valor médio de Lagrange garante.

# Funções deriváveis num intervalo

Vejamos agora algumas consequências importantes do teorema de Lagrange.

## Corolários

[do teorema de Lagrange]

1. Se  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua e  $f'(x) = 0$ ,  $\forall x \in ]a, b[$ , então  $f$  é constante.
2. Se  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas e tais que  $f'(x) = g'(x)$ ,  $\forall x \in ]a, b[$ , então existe uma constante  $C \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = g(x) + C$  para todo  $x \in ]a, b[$ .
3. Seja  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  derivável no intervalo  $I$ . Tem-se
  - a)  $f'(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in I$ , se e só se  $f$  é crescente em  $I$ ;
  - b)  $f'(x) \leq 0$ ,  $\forall x \in I$ , se e só se  $f$  é decrescente em  $I$ ;
  - c) se  $f'(x) > 0$ ,  $\forall x \in I$ , então  $f$  é estritamente crescente em  $I$ ;
  - d) se  $f'(x) < 0$ ,  $\forall x \in I$ , então  $f$  é estritamente decrescente em  $I$ .

# Funções deriváveis num intervalo

## Observação

*Repare-se que o Corolário 3 c) do Teorema de Lagrange não é uma condição necessária e suficiente. De facto, basta pensar, por exemplo, em  $f(x) = x^3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , que é *estritamente crescente* e, no entanto,  $f'(x) = 3x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , tendo-se  $f'(0) = 0$ .*

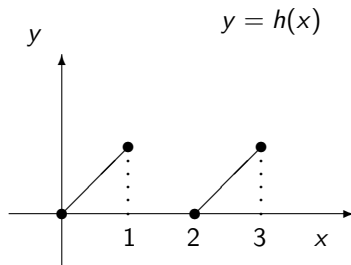
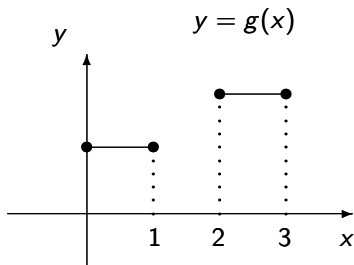
## Observação

*Mantendo as hipóteses do Teorema de Lagrange, à excepção de considerar um domínio  $D$  que não seja necessariamente um intervalo, a conclusão do teorema ou dos seus corolários deixa de ser válida.*

# Funções deriváveis num intervalo

## Exemplos

Consideremos as funções seguintes



Tem-se  $g'(x) = 0$ ,  $\forall x \in [0, 1] \cup [2, 3]$ , e ainda  $h'(x) > 0$ ,  $\forall x \in [2, 3]$ . No entanto, *nem  $g$  é constante nem  $h$  é crescente*. Isto acontece precisamente porque o domínio destas funções não é um intervalo.

# Derivadas de ordem superior

Sejam  $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in D \cap D'$  e  $n \in \mathbb{N}$ . A *derivada de ordem  $n$*  da função  $f$  no *ponto  $a$*  define-se indutivamente por

$$\begin{aligned} f^{(2)}(a) &= f''(a) = (f')'(a) \\ f^{(3)}(a) &= f'''(a) = (f'')'(a) \\ &\dots \qquad \qquad \dots \qquad \dots \\ f^{(n)}(a) &= (f^{(n-1)})'(a). \end{aligned}$$

Convencionamos que a *derivada de ordem 0* coincide com a própria função,

$$f^{(0)}(a) = f(a).$$

# Derivadas de ordem superior

Sendo  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo contendo o ponto  $a$ , dizemos que a função  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  é:

- ▶  $n$  vezes derivável no intervalo  $I$  se existe  $f^{(n)}(x)$  para todo  $x \in I$ ;
- ▶  $n$  vezes derivável em  $a$  quando existe um intervalo  $J$  contendo  $a$  tal que  $f$  é  $n - 1$  vezes derivável em  $I \cap J$  e, além disso, existe  $f^{(n)}(a)$ .