



#### Folha 4 - Noções elementares sobre funções reais de variável real

---

Exercício 1 Determine o domínio das funções definidas por:

a)  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$  ;

c)  $h(x) = \sqrt{1 - \cos(3x^3 + x)}$ ;

b)  $g(x) = \sqrt{2 - 3x} + \sqrt{x}$ ;

d)  $i(x) = \frac{\sqrt{4x - 3}}{x^2 - 4}$ .

Exercício 2 Determine o contradomínio das seguintes funções:

a)  $f : [-1, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$   
 $x \longmapsto 2 - 3x$

b)  $g : ] - 4, 2[ \longrightarrow \mathbb{R}$   
 $x \longmapsto |2x - 1|$

Exercício 3 Considere a função  $f$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \leq 1 \\ 0 & \text{se } 1 < x < 2 \\ -1 & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

Determine  $f^{-1}(]-1, 3])$ ,  $f^{-1}([-1, 0])$  e  $f^{-1}(\{2\})$ .

Exercício 4 Indique o domínio e o contradomínio das funções definidas por:

a)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ;

c)  $h(x) = \frac{|x|}{x}$ ;

b)  $g(x) = 1 + \frac{1}{x - 2}$ ;

d)  $i(x) = \sqrt{x^2} - 1$ .

Verifique ainda se as funções dadas são limitadas ou monótonas.

Exercício 5 Em cada um dos casos seguintes, esboce o gráfico da função dada e diga se a afirmação é verdadeira ou falsa justificando da sua resposta.

a) A função  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^2$  é crescente.

b) A função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x) = x^2$  é crescente.

c) A função  $h$  definida em  $\mathbb{R}$  por  $h(x) = -4x + 3$  é estritamente decrescente.

d) A função  $i$  definida em  $\mathbb{R}$  por  $i(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{se } x < 1 \\ 2 & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$  é estritamente crescente.

Exercício 6 Estude a paridade das seguintes funções definidas em  $\mathbb{R}$ :

- a)  $f(x) = 3x - x^3$ ; d)  $i(x) = \cos(3x - x^3)$ ;  
 b)  $g(x) = |x + 1| + |x - 1|$ ; e)  $j(x) = \sin(3x - x^3)$ ;  
 c)  $h(x) = x^3 - x^2$ ; f)  $k(x) = \sqrt{3x^4 + 2x^2 - 5}$ .

Exercício 7 Considere as funções definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \in [-2, 2] \\ |x| & \text{se } x \in [-4, -2[ \cup ]2, 4] \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x} & \text{se } x \in [-2, 0[ \\ x - 1 & \text{se } x \in ]2, 3] \end{cases}$$

- a) Indique o domínio e esboce os gráficos de cada uma das funções dadas;  
 b) Indique o contradomínio de cada uma das funções e verifique se algumas das funções é injetiva.

Exercício 8 Classifique quanto à injetividade e à sobrejetividade as funções definidas por:

- a)  $f(x) = x^2$ ; c)  $h(x) = 0$ ;  
 b)  $g(x) = -x$ ; d)  $i(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in ]-1, 2] \\ 2 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus ]-1, 2] \end{cases}$ .

Exercício 9 Descreva, caso seja possível, as funções  $f \circ g$  e  $g \circ f$  e, em cada caso, indique o seu domínio.

- a)  $f(x) = x^2 - 3x$ ,  $g(x) = \sqrt{x + 2}$ ;  
 b)  $f(x) = \sqrt{x - 15}$ ,  $g(x) = x^2 + 2x$ ;  
 c)  $f(x) = \sqrt{x - 2}$ ,  $g(x) = \sqrt{x + 5}$ ;  
 d)  $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ ,  $g(x) = \sqrt{x - 3}$ .

Exercício 10 Descreva a função composta  $g \circ f$  para:

- a)  $g(x) = \sin 2x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , e  $f(x) = x^2 + \pi/4$ , para  $x \in \mathbb{R}$ ;  
 b)  $g(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x \neq 1, \\ 0 & \text{se } x = 1, \end{cases}$  e  $f(x) = x - 2$ , para  $x \in \mathbb{R}$ .

Exercício 11 Considere as funções

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} & g: \mathbb{R}_0^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2, & x &\longmapsto \sqrt{x}, \\ \\ k: \mathbb{R}_0^- &\longrightarrow \mathbb{R} & h: \mathbb{R}_0^- &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2, & x &\longmapsto \sqrt{-x}. \end{aligned}$$

- a) Determine o contradomínio de cada uma das funções.  
 b) Verifique que não é possível definir cada uma das funções  
 $k \circ g$ ,  $h \circ f$ ,  $k \circ h$ ,  $h \circ k$ .  
 c) Defina as funções compostas

$$f \circ g, \quad f \circ h, \quad g \circ k, \quad g \circ f.$$

Exercício 12 Para a função  $h$  dada indique duas funções  $f$  e  $g$ , diferentes da identidade, tais que  $h = f \circ g$ .

a)  $h(x) = \sqrt{9x - x^2}$ ;

b)  $h(x) = \frac{2}{(x^2 - 1)^3}$ .

Indique qual é o domínio de  $h$ .

Exercício 13 Considere as funções reais de variável real definidas por

$$f(x) = \frac{1}{x-1}, \quad x > 1, \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1+x}{x}, \quad x > 0.$$

- Determine o contradomínio de  $f$  e o contradomínio de  $g$ .
- Verifique que  $f$  e  $g$  são inversas uma da outra.
- Justifique que as funções  $f \circ g$  e  $g \circ f$  não são iguais.

Exercício 14 Descreva a função inversa das seguintes funções:

a)  $f(x) = -\frac{3x-1}{2}$ ;

c)  $h(x) = \frac{1}{x+2}$ ;

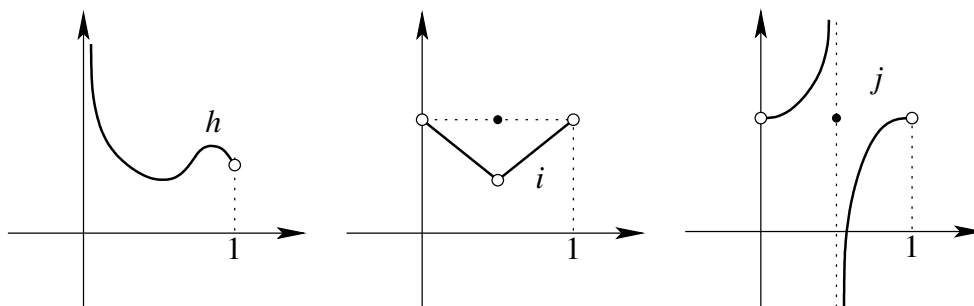
b)  $g(x) = x^3 - 1$ ;

d)  $i(x) = \sqrt{x}$ .

Exercício 15 Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2 + 2x + 3$ .

- Defina uma restrição de  $f$  que admita inversa.
- Defina a função inversa da função da alínea a).
- Esboce os gráficos da função e da sua inversa.

Exercício 16 Relativamente a cada uma das seguintes funções  $h, i, j : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$ , diga se:



- possui extremos locais ou globais;
- é limitada (se não, especifique se é minorada ou majorada).