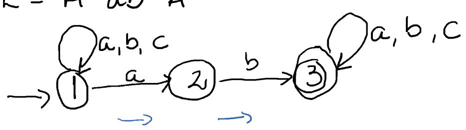
6ª aula

7 de abril de 2021 11:00

4. Considere o alfabeto $A = \{a, b, c\}$.
   (a) Indique um autómato finito que reconheça o conjunto de todas as palavras sobre A que verificam:
   i. ab é um fator; ii. ab não é fator; iii. existe uma única ocorrência de ab.
   (b) Identifique a tabela das transições de cada um dos autómatos que desenhou.
   (c) Classifique os autómatos que desenhou.
   (d) Para cada linguagem da alínea anterior, indique uma expressão regular que a represente.

a) i) $L = A^* ab\, A^*$

$\mathcal{A}_1$

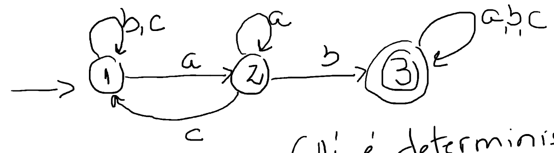


· bcabc ab b

· bc ab cabb

$|a|b|$

$\mathcal{A}_1'$



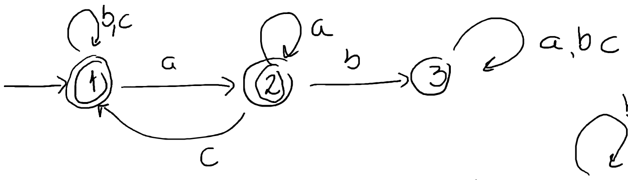
bccbaa ab

($\mathcal{A}_1'$ é determinista e completo)

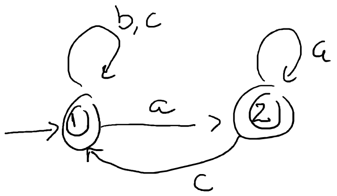
ii) A linguagem é $A^* \setminus L$ é reconhecida por $\mathcal{A}_2$

$\mathcal{A}_2$

($\mathcal{A}_2$ é determinista e é completo)

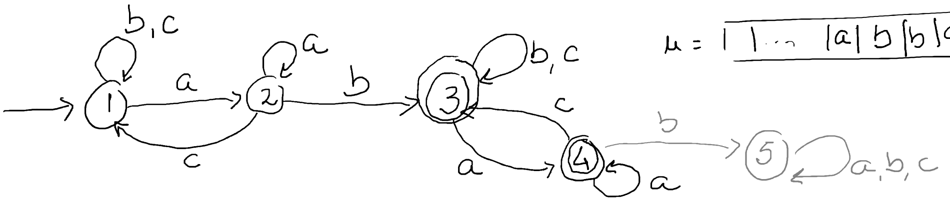


$\mathcal{A}_2'$



iii)

$\mathcal{A}_3$



$\mathcal{A}_3'$

$u = |\ |\ \dots\ |a|b|b|c|\ .\ \ |a|a|c|$

b) i)

δ_1	1	2	3
a	{1,2}	$\emptyset$	{3}
b	{1}	{3}	{3}
c	{1}	$\emptyset$	{3}

δ_1'	1	2	3
a	{2}	{2}	{3}
b	{1}	{3}	{3}
c	{1}	{1}	{3}

ii)

	1	2	3
a	{2}	{2}	{3}
b	{1}	{3}	{3}
c	{1}	{1}	{3}

NOTA: $\delta_1' = \delta_2$

δ_2'	1	2

a	[illegible]	[illegible]	[illegible]
b	$\{1\}$	$\{3\}$	$\{3\}$
c	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{3\}$

δ_2'	1	2
a	$\{2\}$	$\{2\}$
b	$\{1\}$	$\emptyset$
c	$\{1\}$	$\{1\}$

iii) —

c) ...

d) i) $L = A^* ab A^*$ $e_1 = (a+b+c)^* ab (a+b+c)^*$

ii) $A^* \setminus L$

$$e_2 = \underbrace{(b+c)^*}_{\substack{\text{origem 1} \\ \text{término 1} \\ \text{sem passar} \\ \text{por 2}}} + \underbrace{(b+c)^* a^+}_{\substack{\text{origem 1} \\ \text{término 2} \\ \text{sem percorrer} \\ 2 \xrightarrow{c} 1}} + \underbrace{(b+c)^* a^+ (c(b+c)a^+)^+}_{\substack{\text{origem 1} \\ \text{término 2 percorrendo} \\ 2 \xrightarrow{c} 1}} + \underbrace{(b+c)^* (a^+c + a^+c(b+c)^*)^+}_{\substack{\text{origem 1} \\ \text{término 1} \\ \text{passando por 2.}}}$$

$$= \underbrace{(b+c)^* (a^+c + a^+c(b+c)^*)^*}_{\substack{\text{origem 1} \\ \text{término 1}}} + \underbrace{(b+c)^* a^+ (c(b+c)^* a^+)^*}_{\substack{\text{origem 1} \\ \text{término 2}}}$$

(pq $a^+c \leq a^+c(\ldots)^*$) $= (b+c)^* (a^+c(b+c)^*)^* + (b+c)^* a^+ (c(b+c)^* a^+)^*$

$$= (b+c)^* (a^+c(b+c)^*)^* \underset{\uparrow a^0}{+} (b+c)^* (a^+c(b+c)^*)^* a^+$$

NOTAS: $a^0 = \varepsilon$
$a^0 + a^+ = a^*$
$r^*(sr^*) = (r+s)^*$

$$= \underbrace{(b+c)^*}_{r^*} (\underbrace{a^+c}_{s} \underbrace{(b+c)^*}_{r^*})^* a^* .$$

$$= (b \underset{\uparrow a^0}{+} c + a^+c)^* a^* = (b + a^*c)^* a^*$$

6. Use o Lema da Iteração para provar que não são reconhecíveis as seguintes linguagens sobre o alfabeto $A = \{a, b\}$.

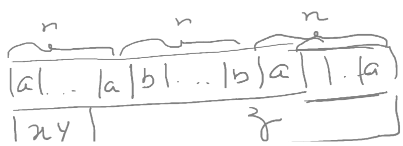
(c) $\{w \in A^* \mid w^I = w\}$. (d) $\{a^p \mid p \in \mathbb{N} \text{ e } p \text{ é primo}\}$. ✓

c) $L = \{w \in A^* \mid w^I = w\}$

$(abbaa)^I = aabba$

$w = uv$ $w^I = v^I u^I$

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $u = \underbrace{a^n b^n a^n}_{x \quad y \quad z}$.



Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $u = \underbrace{a \quad b \quad a}_{x \quad y \quad z}$.

|a| .. |a|b| .. |b|a| | . |a|
|xy| z

Então $u \in L$, $|u| > n$ e, se $u = xyz$ em que $|xy| \le n$ e $y \neq \varepsilon$, então $x = a^{r_1}$, $y = a^{r_2}$ em que $r_1 \geq 0$, $0 < r_2$ e $r_1 + r_2 \le n$.

Consequentemente,

$$xy^kz = a^{r_1}\left(a^{r_2}\right)^k a^{r_3} b^n a^n$$

em que $r_1 + r_2 + r_3 = n$ e $k \geq 0$.

Então $xy^kz = a^{r_1 + kr_2 + r_3} b^n a^n$

Se $k = 1$, $xy^1z = u \in L$.

Se $k \neq 1$, $\underline{a^{r_1+kr_2+r_3}}\, b^n \underline{a^n} \notin L$ porque $r_1 + kr_2 + r_3 \neq n$ e

$$(xy^kz)^I = \left(a^{r_1+kr_2+r_3} b^n a^n\right) = a^n b^n a^{r_1+kr_2+r_3}$$
$$\neq a^{r_1+kr_2+r_3} b^n a^n = xy^kz.$$

Logo $xy^kz \notin L$. O Lema da iteração garante-nos então que L não é reconhecível.

7. Use o Lema da Iteração para provar que não são reconhecíveis as seguintes linguagens sobre o alfabeto $A = \{a, b, c\}$.

   (a) $\{a^n b^2 c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. ✓ (b) $\{a^i b^j c^k \mid j = i + k \ \wedge \ i, j, k \in \mathbb{N}_0\}$. $= L$

b)

Seja $n \in \mathbb{N}$. Fazendo $u = a^n b^{2n} c^n$ (escolha de $u \in L$ tal que $|u| \geq n$)

Então $|u| > n$ e $u \in L$.

$u = |\ a^n \ |\ b^{2n} \ |\ c^n \ |$

xyz $|\ xy \ |\ z \ |$

Fazendo $u = xyz$ em que $|xy| \le n$ e $y \neq \varepsilon$, resulta que $x = a^{r_1}$ e $y = a^{r_2}$ em que $r_1 \geq 0$ e $0 < r_2$.

...

$xy^kz =$

8. Considere-se $A = \{a, b\}$ e $L = \{a^n b^m : m \geq n \geq 0\}$. Sejam $n \in \mathbb{N}$, e $u = a^n b^n$ uma palavra de L. Qualquer que seja o prefixo xy de u tal que $|xy| \le n$ e $y \neq \varepsilon$, tem-se que $x = a^i$, $y = a^j$ com $i + j \le n$, $i \geq 0$ e $j \geq 1$. Então $|u| \geq n$, $u = xyz$ com $z = a^{n-i-j} b^n$. Se $\underline{k = 2}$, então $xy^kz = a^{n+j} b^n$ pelo que xy^kz não é uma palavra de L.

De entre as afirmações abaixo diga qual é a afirmação verdadeira.

~~(i)~~ Com base no Lema da Iteração, a argumentação apresentada não permite concluir que a linguagem L não é regular.

~~(ii)~~ Com base no Lema da Iteração, a argumentação apresentada prova que L é uma linguagem regular.

(iii) Com base no Lema da Iteração, a argumentação apresentada prova que L não é uma linguagem regular. ✓

~~(iv)~~ Com base no Lema da Iteração, ~~só~~ poderíamos concluir que L não é uma linguagem regular se, para ~~qualquer $k \geq 0$~~, xy^kz não fosse uma palavra de L.

basta um valor de k

Temos que decidir entre i) e iii)