AUTÓMATOS E LINGUAGENS FORMAIS

Lic. Ciências da Computação
Lic. Matemática

Exercícios - Autómatos finitos

---

1. Considere o autómato finito $\mathcal{A} = (\{1,2\}, \{a,b\}, \delta, 1, \{2\})$ onde δ é a função definida pela tabela abaixo.

δ	1	2
a	$\{2\}$	$\{2\}$
b	$\{1\}$	$\{1\}$

   a) Represente o autómato $\mathcal{A}$ através de um grafo.
   b) Dê exemplos de palavras aceites por $\mathcal{A}$ e de palavras rejeitadas por $\mathcal{A}$.
   c) Descreva a linguagem reconhecida pelo autómato $\mathcal{A}$.

2. Considere o autómato $\mathcal{A} = (Q, A, \delta, i, F)$ onde $Q = \{1,2,3,4\}$, $A = \{a,b\}$, $i = 1$, $F = \{4\}$ e o conjunto de transições é definido pela função de transição δ definida pela tabela seguinte:

δ	1	2	3	4
a	$\{1,2\}$	$\{4\}$	$\varnothing$	$\{4\}$
b	$\{1,3\}$	$\varnothing$	$\{4\}$	$\{4\}$

   (a) Represente o autómato $\mathcal{A}$ através de um grafo.
   (b) Dê exemplos de palavras aceites por $\mathcal{A}$ e de palavras rejeitadas por $\mathcal{A}$.
   (c) Descreva a linguagem reconhecida pelo autómato $\mathcal{A}$.
   (d) Classifique o autómato.

3. Seja L a linguagem sobre o alfabeto $\{a,b\}$ constituída pelas palavras que não têm aaa como prefixo.

   (a) Mostre que L é uma linguagem reconhecível.
   (b) Para cada uma das expressões regulares seguintes, diga, justificando, se a expressão representa L ou não:
      i. $b^*ab^*ab^+(a+b)^*$;
      ii. $(\varepsilon + a + a^2)(\varepsilon + b)(a+b)^*$;
      iii. $\varepsilon + a + a^2 + (b + ab + a^2b)(a+b)^*$;
      iv. $(b + ab + a^2b)^*$.

4. Considere o alfabeto $A = \{a, b, c\}$.
   (a) Indique um autómato finito que reconheça o conjunto de todas as palavras sobre A que verificam:
      i. ab é um fator; ii. ab não é fator; iii. existe uma única ocorrência de ab.
   (b) Identifique a tabela das transições de cada um dos autómatos que desenhou.
   (c) Classifique os autómatos que desenhou.
   (d) Para cada linguagem da alínea anterior, indique uma expressão regular que a represente.

5. Considere o autómato finito $\mathcal{A} = (\{1, 2, 3, 4\}, \{a, b\}, \delta, 1, \{3\})$ em que a função de transição δ é definida pela tabela abaixo.

δ	1	2	3	4
a	$\{4\}$	$\{3\}$	$\varnothing$	$\{4\}$
b	$\{2\}$	$\{2\}$	$\{2\}$	$\{1\}$

De entre as seguintes opções escolha a que completa a frase corretamente:

A linguagem reconhecida pelo autómato $\mathcal{A}$ é __________.

(i) $L(\mathcal{A}) = \mathcal{L}((a^+b)^*b(ab+b)^*a)$ (ii) $L(\mathcal{A}) = \{u \in \{a, b\}^* : aa$ ou bb são fatores de u$\}$

(iii) $L(\mathcal{A}) = \mathcal{L}((a^+b)^* + (b^+a)(ba)^*)$ (iv) $L(\mathcal{A}) = \{u \in \{a, b\}^* : ba$ é fator de $u\}$

6. Use o Lema da Iteração para provar que não são reconhecíveis as seguintes linguagens sobre o alfabeto $A = \{a, b\}$.
   (a) $\{a^m b^{2m} \mid m \in \mathbb{N}\}$. (b) $\{w^2 \mid w \in A^*\}$.
   (c) $\{w \in A^* \mid w^I = w\}$. (d) $\{a^p \mid p \in \mathbb{N}$ e p é primo$\}$.
   (e) $\{a^n b^{f(n)} \mid n \in \mathbb{N}\}$ em que $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é uma função injetiva.

7. Use o Lema da Iteração para provar que não são reconhecíveis as seguintes linguagens sobre o alfabeto $A = \{a, b, c\}$.
   (a) $\{a^n b^2 c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. (b) $\{a^i b^j c^k \mid j = i + k \ \wedge \ i, j, k \in \mathbb{N}_0\}$.

8. Considere-se $A = \{a, b\}$ e $L = \{a^n b^m : m \geq n \geq 0\}$. Sejam $n \in \mathbb{N}$, e $u = a^n b^n$ uma palavra de L. Qualquer que seja o prefixo xy de u tal que $|xy| \leq n$ e $y \neq \varepsilon$, tem-se que $x = a^i$, $y = a^j$ com $i + j \leq n$, $i \geq 0$ e $j \geq 1$. Então $|u| \geq n$, $u = xyz$ com $z = a^{n-i-j}b^n$. Se $k = 2$, então $xy^kz = a^{n+j}b^n$ pelo que xy^kz não é uma palavra de L.

   De entre as afirmações abaixo diga qual é a afirmação verdadeira.

   (i) Com base no Lema da Iteração, a argumentação apresentada não permite concluir que a linguagem L não é regular.
   (ii) Com base no Lema da Iteração, a argumentação apresentada prova que L é uma linguagem regular.
   (iii) Com base no Lema da Iteração, a argumentação apresentada prova que L não é uma linguagem regular.
   (iv) Com base no Lema da Iteração, só poderíamos concluir que L não é uma linguagem regular se, para qualquer $k \geq 0$, xy^kz não fosse uma palavra de L.

9. Considere-se $A = \{a, b\}$ e $L = \{a^n b^m : 0 \leq n \leq m\}$. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $m = 2n$, e $u = a^n b^{2n}$. Qualquer que seja o prefixo xy de u tal que $|xy| \leq n$ e $y \neq \varepsilon$, tem-se que $x = a^i$, $y = a^j$ com $i + j \leq n$, $i \geq 0$ e $j \geq 1$. Se $z = a^{n-i-j} b^{2n}$, vem que $u = xyz$. Então, existem inteiros não negativos k tais que

$$xy^k z = a^i a^{kj} a^{n-i-j} b^{2n} = a^{n+(k-1)j} b^{2n}$$

e $n + (k-1)j \leq m = 2n$. Em tais casos $xy^k z \in L$.

De entre as afirmações abaixo diga qual é a afirmação verdadeira.

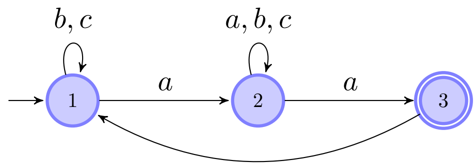
(i) Com base no Lema da Iteração, a argumentação apresentada não permite concluir que a linguagem L não é regular.

(ii) Com base no Lema da Iteração, a argumentação apresentada prova que L é uma linguagem regular.

(iii) Com base no Lema da Iteração, a argumentação apresentada prova que L não é uma linguagem regular.

(iv) Com base no Lema da Iteração, só poderíamos concluir que L não é uma linguagem regular se, para qualquer $k \geq 0$, $xy^k z$ não fosse uma palavra de L.

10. Considere o autómato $\mathcal{A}$ representado abaixo. por



(a) Mostre que $acba$ é uma palavra aceite por $\mathcal{A}$ e que $acbab$ é uma palavra rejeitada por este autómato.

(b) Escreva a tabela da função de transição δ do autómato $\mathcal{A}$.

(c) Descreva a linguagem $L(\mathcal{A})$.

(d) Classifique $\mathcal{A}$.

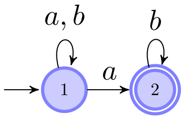
11. Prove que é reconhecível a linguagem sobre o alfabeto $A = \{a, b, c\}$ formada por todas as palavras que se caraterizam por:

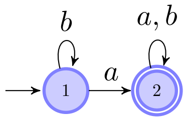
(a) ter um número par de ocorrências de a;

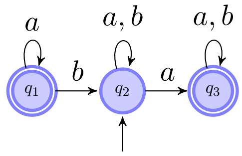
(b) ter comprimento par;

(c) ter pelo menos uma ocorrência de a e toda a ocorrência de b é seguida de uma ocorrência de c.

12. Considere os seguintes autómatos de alfabeto $\{a, b\}$.

$\mathcal{A} =$ 

$\mathcal{B} =$ 

$\mathcal{C} =$ 

(a) Escreva a tabela da função de transição de cada um dos autómatos.

(b) Classifique cada um dos autómatos quanto à completude, acessibilidade, co-acessibilidade e determinismo.

(c) Verifique que os três autómatos são equivalentes.

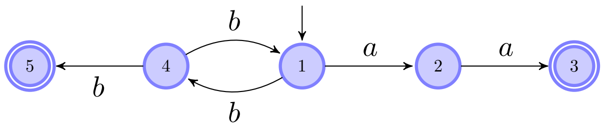
13. Modele, através de um autómato finito, o funcionamento de uma máquina de venda de café. Suponha que a máquina apenas aceita moedas de 5, 10, e 20 cêntimos e que o café custa 30 cêntimos. Quando o valor das moedas depositadas atinge ou excede os 30 cêntimos a máquina fornece um café, mas não devolve troco nem o guarda para uma próxima compra.

14. Para cada uma das linguagens dos exercícios 4 e 11, indique um autómato determinista, acessível e completo que a reconheça.

15. Determine um autómato determinista, acessível e completo equivalente ao autómato do exercício 10.

16. Considere o autómato $\mathcal{A}$ representado pelo seguinte grafo.

$\mathcal{A} =$



(a) Descreva a linguagem $L(\mathcal{A})$.

(b) Determine um autómato determinista, completo e acessível equivalente a $\mathcal{A}$.

(c) Determine um autómato determinista, acessível e co-acessível equivalente a $\mathcal{A}$.

17. Sejam $A = \{a, b\}$ e $m \in \mathbb{N}$. Recorde que, dados $x, y \in \mathbb{N}_0$, diz-se que x é congruente com y módulo m, e escreve-se $x \equiv_m y$, se x e y têm o mesmo resto na divisão inteira por m (ou seja, se $x - y$ é um múltiplo de m).

(a) Mostre que a linguagem $L = \left\{ u \in A^* \mid \ |u|_a = |u|_b \right\}$ não é reconhecível.

(b) Mostre que a linguagem $L_m = \left\{ u \in A^* \mid \ |u|_a \equiv_m |u|_b \right\}$ é reconhecível.