

# 中国科学技术大学

# 博士学位论文



## 电磁逆散射重建 的超分辨方法研究

作者姓名： 尹凡

学科专业： 电子科学与技术

导师姓名： 陈卫东 教授

完成时间： 2022 年 05 月 21 日

University of Science and Technology of China  
A dissertation for doctor's degree



**Research on Superresolution  
Methods of Electromagnetic  
Inverse Scattering  
Reconstruction**

Author: Fan Yin  
Speciality: Electronic Science and Technology  
Supervisors: Prof. Weidong Chen  
Finished time: May, 2022

## 中国科学技术大学学位论文原创性声明

本人声明所呈交的学位论文,是本人在导师指导下进行研究工作所取得的成果。除已特别加以标注和致谢的地方外,论文中不包含任何他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中作了明确的说明。

作者签名: 严凡

签字日期: 2022年5月23日

## 中国科学技术大学学位论文授权使用声明

作为申请学位的条件之一,学位论文著作权拥有者授权中国科学技术大学拥有学位论文的部分使用权,即:学校有权按有关规定向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版,允许论文被查阅和借阅,可以将学位论文编入《中国学位论文全文数据库》等有关数据库进行检索,可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。本人提交的电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。

控阅的学位论文在解除后也遵守此规定。

公开 控阅(\_\_\_\_年)

作者签名: 严凡

导师签名: 严凡

签字日期: 2022年5月23日

签字日期: 2022.5.25

## 摘要

电磁逆散射方法建立在全波电磁计算的基础上，故相比于其它微波成像方法，逆散射重建有着更精确且普适的物理模型，和更广泛的应用前景。当前逆散射重建方法大多应用于石油勘探、建筑物内部透视和乳腺癌诊断成像等需要低频电磁波穿透障碍物的场景，故需要对亚波长量级的精细目标进行重建，构成了巨大的挑战。此外，成像区域内金属和非金属材料混杂的情况下，后者的重建极易受前者扰动，给定量重建带来不确定性。最后，在这些复杂场景下，重建方法还要能在非均匀背景下稳定运行，更考验重建方法的鲁棒性。

因此，本文主要围绕逆散射重建应用中的三个挑战开展研究：第一，针对混合边界条件问题，本文提出了一种交替参数更新法，实现导体和介质目标的同时精确重建；第二，针对超分辨问题，本文分别从物理超分辨和数学超分辨角度出发，提出了基于超振荡效应和基于材料稀疏先验的逆散射超分辨重建方法；第三，针对非均匀背景扰动情况，本文给出了分区优化的重建的策略。接下来具体介绍针对这三个问题的四个研究内容：

### 1. 混合边界条件的逆散射重建方法

当散射目标由导体和介质目标混合构成时，导体的趋肤效应导致内部零场，造成阻抗矩阵的秩的缺失。由于导体的存在加剧了逆问题的病态性，介质的逆散射重建严重受到影响。针对该问题，本文首次提出了混合参数模型，将定性划分边界条件的传输系数和定量重建的对比度函数统一在同一个模型中。为了在介质重建时消除导体的病态性影响，本文提出了交替参数更新的方法，分别定量重建介质对比度函数和定性重建导体传输系数，交替迭代更新。从而在单次更新中实现了对阻抗矩阵的降维，缓解了混合问题的病态性，实现了导体和介质混合目标的准确重建。在仿真和实测数据上验证了所提方法，得到了优于分别重建各自参数的重建结果。

### 2. 基于物理模型的超分辨重建方法

通常基于远场模型的超分辨微波成像方法难以超越衍射极限，即半个波长，而基于精确物理模型的非线性逆散射方法被多次验证能获得亚波长量级的重建精度。虽然大多数学者定性地将其归结于模型中包含了倏逝波转换为传输波的过程，然而缺乏定量推断，因此对这种超分辨能力的理论解释存在众多争议。本文首次从超振荡理论出发，给出了非线性逆散射超分辨重建的

解释，并根据超振荡效应和信噪比的关系推出了非线性逆散射重建的极限分辨率。由于超振荡总场能通过非线性作用将目标高频信息混频至格林函数通带，实现信息的压缩。故本文基于该理论提出了两种入射场优化方法，能在给定信噪比下获得小于半波长的重建分辨率。进一步，本文证明了这种基于超振荡效应的超分辨重建方法等价于引入预条件算子的正则化过程，由此说明合适的正则化方法能提高非线性逆散射重建分辨率。所提方法在仿真和实测数据上进行了验证，均取得了优于无超振荡设计的重建效果。

### 3. 基于数学先验的超分辨重建方法

病态性是逆散射重建中的核心问题，而本文对物理超分辨理论的研究阐明了非线性效应下的正则化过程能获得超分辨的结果。然而，现有的稀疏正则化方法大多基于线性逆问题提出，其要么不适用于复杂的重建目标，要么无法适用于非线性问题的求解。由于大多数重建目标由有限种类材料构成，故本文提出了两种基于材料稀疏性的非线性正则化方法。一种方法是通过选值函数约束非线性解的取值稀疏性，并等效转换为对中间变量的线性正则化项，实现非线性重构中的材料稀疏性约束。另一种方法则是设计多层次 Bayes 模型促进解的取值稀疏性，并通过非线性推断的方式实现重构。所提方法在仿真和实测数据上均得到验证，在相同条件下，所提方法能得到比现有非线性逆散射方法更好的重建结果。

### 4. 非均匀背景扰动下的超分辨方法应用

非线性逆散射重建的模型建立在体等效原理的基础上，其将重建区域的散射体等效为自由空间的体电流。而在穿墙或是医疗成像等穿透性成像问题中，非均匀背景需要被同时重建，由此扩大了重建区域，并弱化了超振荡效应。本文提出一种分区重建策略，在重建子区的同时将其它分区的影响转入背景格林函数中，由此简化计算量的同时可以进一步在子区内优化超振荡效应，提高重建分辨率，仿真结果验证了所提方法的有效性。

综上可见，三类工程问题最终由逆散射问题的数学性质决定，即病态逆问题。因此，本文的所有方法的落脚点均为正则化理论，为逆散射重建问题的进一步深入研究提供了参考。

**关键词：**电磁逆散射，超分辨重建，超振荡，混合边界条件，稀疏正则化

## ABSTRACT

Electromagnetic inverse scattering method is based on full wave electromagnetic calculation. Therefore, compared with other microwave imaging methods, inverse scattering reconstruction has a more accurate and universal physical model and a wider application prospect. Most of the current inverse scattering methods are applied to oil exploration, building interior perspective and breast cancer diagnosis imaging, which require low-frequency waves to penetrate obstacles. Therefore, the reconstruction target scale is mostly in the order of wavelength, which pose enormous challenges to imaging and reconstruction. In addition, when metallic and non-metallic materials are mixed in the imaging area, the reconstruction of the latter is easily disturbed by the former, which brings uncertainty to the quantitative reconstruction. Finally, in these complex scenes, the reconstruction method should be able to operate stably under the non-uniform background, which tests the robustness of the reconstruction method.

Therefore, this dissertation mainly focuses on three challenges in the application of inverse scattering reconstruction: first, for the problem with mixed boundary conditions, an alternating parameter updating method is proposed to realize the accurate reconstruction of conductor and dielectric targets at the same time; Secondly, aiming at super-resolution, an super-resolution method based on superoscillation effect and material sparse *a priori* from the perspective of physical super-resolution and mathematical super-resolution is presented respectively; Thirdly, for the case of non-uniform background disturbance, the reconstruction strategy of partition optimization is given. Next, the four research contents for these three problems are introduced in detail:

### 1. Inverse Scattering Method with Mixed Boundary Problem

When the scattering target is composed of conductor and dielectric objects, the skin effect of the conductor leads to an internal zero field, which results in the defects in the rank of the impedance matrix. Because the existence of conductor aggravates the ill-posedness of the inverse problem, the inverse scattering reconstruction of medium is seriously affected. To settle this problem, a mixed parameter model is proposed for the first time, which unifies the transmission coefficient of qualitatively boundary conditions and the contrast function of quantitative reconstruction in the same model. In order to deal with the ill-posedness influence of conductor in dielectric reconstruction, this dissertation innovatively proposes an alternating parameter updating method,

which quantitatively reconstructs the dielectric contrast function and qualitatively reconstructs the conductor transmission coefficient alternately. Thus, in a single update, the dimension of the impedance matrix is reduced, the ill-posedness of the mixing boundary problem is alleviated, and the accurate reconstruction of the mixed target of conductor and medium is realized. The proposed method is verified on the simulation and measured data, and the reconstruction results are better than the reconstruction of their respective parameters.

## 2. Super-Resolution Method based on Physical Model

Usually, the super-resolution imaging method based on the far-field model is difficult to exceed the limit resolution of the full aperture, that is, half a wavelength. However, the nonlinear inverse scattering method based on the accurate physical model has been verified many times to obtain the reconstruction accuracy of sub-wavelength order. Although most scholars qualitatively attribute it to the process of transforming evanescent wave into transmission wave in the model, there is a lack of quantitative inference, so there are many disputes about the theoretical interpretation of this super-resolution ability. Based on the superoscillation theory, this dissertation gives the interpretation of nonlinear inverse scattering super-resolution reconstruction for the first time, and deduces the limit resolution of nonlinear inverse scattering reconstruction according to the relationship between superoscillation effect and signal-to-noise ratio. Because the total field of superoscillation can mix the high-frequency information of the target to the Green's function passband through nonlinear procedure, the information can be compressed. Therefore, based on this theory, two incident field optimization methods are proposed, which can obtain reconstruction resolution less than half wavelength under a given signal-to-noise ratio. Furthermore, it is proved that this super-resolution reconstruction method based on super oscillation effect is equivalent to the regularization process with preconditioner, which shows that the appropriate regularization method can improve the resolution of nonlinear inverse scattering reconstruction. The proposed method is verified by simulation and measured data, and the reconstruction effect is better than that of no superoscillation design.

## 3. Super-Resolution Method based on *A Priori*

Ill-posedness is the core of the inverse scattering problem, this paper reveals that the regularization with nonlinear effects can acquire super-resolution results. However, most of the existing sparse regularization methods are based on linear inverse problems, which are either not able to handle complex reconstruction targets or not able to solve

nonlinear problems. Because most reconstruction targets consist of a limited variety of materials, two nonlinear regularization methods based on material sparsity are proposed in this dissertation. One method is to constrain the value sparsity of the solution through the value piking function. Another method is to design a multi-layer Bayes model to promote the sparsity of the solution, and realize the reconstruction by means of nonlinear inference. The proposed method is verified by simulation and measured data. Under the same conditions, the proposed method can obtain better reconstruction results than the existing nonlinear inverse scattering methods.

#### 4. Application of Super-resolution Methods with Nonuniform Background Disturbance

The model of nonlinear inverse scattering reconstruction is based on the principle of volume equivalence, which equates the scatterer in the region of interest with the volume current in free space. In penetrating imaging problems such as through wall imaging or biomedical imaging, the non-uniform background needs to be reconstructed at the same time, which expands the reconstruction area and weakens the superoscillation effect. In this dissertation, a partition reconstruction strategy is proposed, which transforms the influence of other partitions into the background Green's function while reconstructing the sub region, so as to simplify the amount of calculation, further optimize the superoscillation effect in the sub region and improve the reconstruction resolution. Simulation results verify the effectiveness of the proposed method.

In conclusion, the three kinds of engineering problems are finally determined by the mathematical properties of the inverse scattering problem, that is, ill-posedness. Therefore, the foothold of all methods in this paper is the regularization theory, which provides a reference for the further study of inverse scattering reconstruction.

**Key Words:** Electromagnetic Inverse Scattering, Super-resolution Reconstruction, Superoscillation, Mixed Boundary Condition, Sparse Regularization

## 目 录

目 录.....	IX
第 1 章 绪 论.....	1
1.1 研究背景及意义.....	1
1.2 国内外研究现状.....	3
1.2.1 逆散射重建方法.....	3
1.2.2 逆散射的超分辨问题.....	6
1.3 本文的主要内容以及创新.....	9
1.4 论文结构及内容安排.....	11
第 2 章 逆散射问题的理论基础.....	12
2.1 散射问题的基本理论.....	12
2.1.1 体等效原理.....	12
2.1.2 散射问题的离散化方法.....	13
2.1.3 散射问题的求解方法.....	18
2.2 逆散射问题的基本理论.....	20
2.3 逆散射问题的数学理论.....	24
2.3.1 逆问题概述.....	24
2.3.2 病态逆问题的正则化理论.....	28
2.3.3 基于 Bayes 的统计反演理论.....	37
2.4 本章小结.....	41
第 3 章 混合边界问题中的定量逆散射重建方法.....	43
3.1 混合参数模型.....	43
3.2 混合边界条件模型.....	44
3.3 基于 Krylov 子空间的交替参数更新法.....	46
3.3.1 初始化传输系数.....	47
3.3.2 定量重建介质对比度函数.....	48
3.3.3 定性重建导体传输系数.....	49
3.3.4 算法流程和加速方法.....	50
3.4 数值仿真.....	53
3.4.1 仿真数据验证一.....	53
3.4.2 仿真数据验证二.....	56
3.4.3 仿真数据验证三.....	57

---

3.4.4	实测数据验证.....	59
3.5	本章小结 .....	62
<b>第 4 章 基于超振荡效应的逆散射超分辨方法 .....</b>		<b>64</b>
4.1	超分辨基础理论 .....	64
4.1.1	衍射极限与非线性效应.....	64
4.1.2	物理超分辨成像方法.....	67
4.2	超振荡原理 .....	69
4.2.1	超振荡与病态逆问题.....	69
4.2.2	超振荡与信噪比的关系.....	72
4.3	基于逆散射模型的超振荡效应设计 .....	73
4.3.1	直接综合法.....	75
4.3.2	间接综合法.....	77
4.3.3	超分辨和正则化关系.....	81
4.4	数值仿真 .....	83
4.4.1	仿真数据验证一.....	83
4.4.2	仿真数据验证二.....	86
4.4.3	实测数据验证.....	88
4.5	本章小结 .....	90
<b>第 5 章 基于材料稀疏先验的逆散射超分辨方法 .....</b>		<b>91</b>
5.1	基于选值正则化的非线性逆散射重建方法 .....	93
5.1.1	定量重建介质对比度函数.....	95
5.1.2	定性重建导体传输系数.....	97
5.2	基于多层 Bayes 的非线性逆散射重建方法 .....	98
5.2.1	基于先验拟合网络的非线性贝叶斯推断.....	100
5.2.2	基于对比度源法的非线性贝叶斯推断.....	101
5.3	数值仿真 .....	113
5.3.1	仿真数据验证一.....	113
5.3.2	仿真数据验证二.....	114
5.3.3	实测数据验证——FoamDielInt .....	116
5.3.4	实测数据验证——FoamDielExt .....	117
5.3.5	实测数据验证——FoamTwinDiel .....	119
5.3.6	实测数据验证——FoamMetExt .....	121
5.4	本章小结 .....	122

第 6 章 非均匀背景扰动下的超分辨方法应用 .....	124
6.1 非自由空间的重建策略 .....	124
6.2 非均匀背景下的入射场优化 .....	128
6.2.1 直接综合法 .....	129
6.2.2 间接综合法 .....	131
6.3 数值仿真 .....	132
6.4 本章小结 .....	133
7 第 7 章 总结与展望 .....	135
参 考 文 献 .....	138
致 谢 .....	151
在读期间发表的学术论文与取得的其他研究成果 .....	152

## 图 目 录

图 1.1 逆散射成像应用示意图.....	1
图 1.2 定性逆散射成像.....	3
图 1.3 完美透镜.....	7
图 1.4 光学变换原理图及浸没透镜示意图.....	7
图 1.5 光学超振荡构造示意图.....	8
图 1.6 研究内容关系图.....	9
图 2.1 体等效原理示意图.....	12
图 2.2 矩形脉冲基离散化的二维问题.....	14
图 2.3 二维多极展开的离散化示意图.....	16
图 2.4 矩量法、多极子和解析解对比.....	19
图 3.1 导体背景下的体等效原理.....	45
图 3.2 成像场景示意图.....	54
图 3.3 重建结果.....	55
图 3.4 成像场景示意图.....	56
图 3.5 重建结果.....	57
图 3.6 成像场景示意图.....	58
图 3.7 人体可视化剖面数据.....	58
图 3.8 重建结果.....	59
图 3.9 成像场景示意图.....	60
图 3.10 双脊喇叭天线.....	60
图 3.11 多极展开拟合入射场测量数据.....	61
图 3.12 实测数据重建结果.....	62
图 4.1 线源生成的倏逝波示意图.....	65
图 4.2 成像构型示意图.....	65
图 4.3 二维格林函数的空间谱.....	66
图 4.4 观测构型示意图.....	67
图 4.5 超振荡波形和局部空间谱.....	76
图 4.6 入射场局部空间谱.....	78
图 4.7 入射场局部空间谱对比.....	80
图 4.8 混频后的对比度源空间谱.....	80
图 4.9 成像场景示意图.....	83
图 4.10 重建结果.....	84
图 4.11 原始对比度源的空间谱.....	84

---

图 4.12 $\mathbf{G}_C \cdot diag(\mathbf{e})$ 的奇异值分解 .....	85
图 4.13 误差收敛曲线.....	85
图 4.14 成像场景示意图.....	86
图 4.15 重建结果.....	87
图 4.16 $\mathbf{G}_C \cdot diag(\mathbf{e})$ 的奇异值分解 .....	87
图 4.17 成像场景示意图.....	88
图 4.18 收发关系示意图.....	89
图 4.19 实测数据重建结果.....	89
图 5.1 二维选值函数分布.....	94
图 5.2 选值正则化解空间示意图.....	94
图 5.3 解空间搜索示意图.....	98
图 5.4 后验推断网络训练流程.....	101
图 5.5 多层贝叶斯模型.....	102
图 5.6 成像场景示意图.....	113
图 5.7 原始对比度源的空间谱.....	114
图 5.8 成像场景示意图.....	115
图 5.9 重建结果.....	115
图 5.10 成像场景示意图.....	116
图 5.11 实测数据重建结果.....	117
图 5.12 其它方法重建结果参考.....	117
图 5.13 成像场景示意图.....	118
图 5.14 实测数据重建结果.....	118
图 5.15 其它方法重建结果参考.....	119
图 5.16 成像场景示意图.....	119
图 5.17 实测数据重建结果.....	120
图 5.18 其它方法重建结果参考.....	120
图 5.19 成像场景示意图.....	121
图 5.20 实测数据重建结果.....	122
图 5.21 基于逆 T 矩阵法重建结果 .....	122
图 6.1 非均匀背景问题示意图.....	125
图 6.2 分区重建的体等效示意图.....	126
图 6.3 聚类分区的体等效示意图.....	128
图 6.4 成像构型示意图.....	132
图 6.5 重建结果.....	132

图 6.6 重建结果剖面图.....133

## 表 目 录

表格 2-1 CG-FFT 方法流程 .....	18
表格 3-1 交替参数更新法流程 .....	50
表格 5-1 PFN 网络拟合先验数据流程 .....	100
表格 5-2 GAMP 流程 .....	103
表格 5-3 介质非线性逆散射的 Bayes 推断 .....	109
表格 5-4 导体非线性逆散射的 Bayes 推断 .....	110
表格 5-5 混合边界的材料稀疏重建流程 .....	112
表格 6-1 分区重建流程 .....	127
表格 6-2 聚类流程 .....	128

## 缩略词表

AMP	Approximate Message Passing	近似消息传播
BA	Born Approximation	Born 近似
BIM	Born Iteration Method	Born 迭代法
BP	Backpropagation	反向传播
CG	Conjugate Gradient	共轭梯度法
CG-FFT	Conjugate Gradient Fast Fourier Transform	共轭梯度-快速傅里叶变换
CSI	Contrast Source Inversion	逆对比度源
DBIM	Distorted Born Iteration Method	变形 Born 迭代法
EBA	Extended Born Approximation	扩展 Born 近似
EFIE	Electric Filed Integral Equation	电场积分方程
EM	Expectation Maximum	期望最大化
FAFFA	Fast Far-Field Approximation	快速远场近似
GAMP	General Approximate Message Passing	广义近似消息传播
ISAR	Inverse Synthetic Aperture Radar	逆合成孔径雷达
LSM	Linear Sampling Method	线性采样方法
MLFMA	Multi-Level Fast Multipole Algorithm	多层快速多极子
MoM	Method of Moments	矩量法
MR	Multiplication Regularization	乘法正则化
NA	Numerical Aperture	数值孔径
PEC	Perfect Electric Conductor	理想电导体
PDF	Prior-Data Fitted Networks	先验拟合网络
RA	Rytov Approximation	Rytov 近似
ROI	Region of Interest	关注区
SAR	Synthetic Aperture Radar	合成孔径雷达
SNR	Signal Noise Ratio	信噪比
SOM	Subspace Optimization Method	子空间优化法
TV	Total Variation	全变分
VBIM	Variational Born Iteration Method	变分 Born 迭代法
VP	Value Piking	选值

# 第1章 绪论

## 1.1 研究背景及意义

电磁逆散射是指当一个或者多个源照射未知目标，通过测量目标的散射场，利用测量得到的数据重构出未知目标的位置、形状大小、数目、边界、介电常数分布、电导率分布等物理、几何特性的过程。不同于常见的微波成像方法，电磁逆散射方法建立在严格遵循 Maxwell 方程的物理散射模型上，故常见的层析衍射和雷达成像方法都可以视为逆散射方法的线性近似。因此，逆散射方法被广泛应用于存在多次散射的复杂成像问题中，包括：无损探测<sup>[1][2]</sup>、医疗成像<sup>[3]</sup>、地球探测<sup>[4]</sup>、穿墙成像<sup>[5]</sup>以及探地雷达<sup>[6]</sup>等领域。所有的这些应用都需要入射场穿透被观测物体，而有耗媒质的趋肤效应限制了照射场的穿透深度。为了提高穿透深度减弱趋肤效应，大多数逆散射的应用中不得不依靠低频来探测目标结构，导致目标尺寸和工作波长相比拟。常见的穿墙成像系统工作频率在 0.7GHz 到 3GHz 之间<sup>[7]</sup>，波长在 10cm 到 42cm 之间，而一把手枪的尺寸仅在 20cm 左右。在探地雷达系统中，常见的工作频率在 0.3GHz-4.2GHz 之间<sup>[8]</sup>，而常见的塑胶反步兵地雷尺寸仅为 5cm 左右。因此，要在诸如穿墙成像、探地雷达等穿透成像场合重建波长尺度甚至更小的目标，就需要在逆散射重建中实现高分辨甚至是超分辨成像。



图 1.1 逆散射成像应用示意图

从物理角度出发，衍射极限源于场的空间谱宽。自由空间点源的辐射场由并矢格林函数描述，而格林函数本身是一个以自由空间波数  $k_0$  为特征频率的低通滤波函数，故任意散射场的空间谱总是带宽受限于  $k_0$ <sup>[9]</sup>。而散射场为散射体上的等效电流与格林函数的卷积<sup>[10]</sup>，根据散射场所能反演的等效电流的高频分量同样被约束在  $[0, k_0]$  以内，因此等效电流的空间分辨率不超过  $\pi/k_0$ ，即半波长的瑞利极限<sup>[11]</sup>。而从数学角度出发，分辨极限则源于逆问题的病态性。格林函数为核函数的积分算子是一个无限维空间上的紧算子，将完备空间映射为一个紧空间。由于

紧算子是不可逆算子，导致任何求等效电流的逆运算都是病态问题<sup>[13]</sup>。此外，实际问题中的测量数量有限，故对散射场的有限测量进一步加剧的问题的病态性。因此，逆散射问题的病态性一方面来源于物理过程的病态性，另一方面来源于工程应用中阵列孔径大小的局限。前者带来波长约束，后者带来了数值孔径约束，二者共同构成了 Rayleigh 衍射极限。因此，从物理的角度出发，高分辨率或是超分辨率成像需要设计能激发高频波函数的构型；从数学的角度出发，超分辨成像则需要将病态逆问题转化为良态问题。物理超分辨是通过修改成像目标函数或是构造特定的成像构型来改变散射模型，也就是增加对场景或是物理过程的先验信息从而约束解空间。而数学超分辨则是通过引入先验信息来约束解空间，以弥补缺失信息。本文最终将阐明，物理超分辨还是数学超分辨方法殊途同归，二者均属于在非线性效应下构建的正则化过程，构造合适的物理正则化和数学正则化方法是实现高分辨逆散射成像的关键<sup>[14]</sup>。

在常见的成像和重建方法中，目标被等价为强散射点的集合或是相对介电常数的集合。而在实际成像场景中，金属目标和介质目标同时存在，且需要明确区分。例如在安检成像中需要区分枪支和爆炸物<sup>[12]</sup>，而在穿墙成像中需要区分人体和枪支，在探地雷达中则需要分出塑料制反人员地雷和金属制反载具地雷。若按传统方法采用单一的目标函数则无法实现对目标的分辨，更难以实现波长量级的成像。低频照射下，金属趋近于导体，其边界条件也就不同于有耗介质。当不同的边界条件同时存在时，无法简单的用目标的某一项本构参数来表示目标<sup>[15]</sup>。因此在波长量级或是亚波长量级的成像中，需要进一步区分目标边界条件，且明确目标函数的分类有助于进一步确定相应的先验信息来约束解空间。因此，对多种边界条件的散射问题进行建模既符合逆散射成像的应用背景，也符合对病态问题正则化的需求。

逆散射模型建立在体等效原理的基础上，将关注区的目标等效为自由空间的体电流和体磁流分布。然而，在逆散射方法的应用中，大部分场景并不仅关注区内是非自由空间，在关注区外也存在着非均匀的背景媒质<sup>[21-23]</sup>。若不做进一步处理，这些非均匀背景带来的扰动将造成模型的偏差，进而使正则化约束偏离正确的解空间，不仅无法得到高质量重建结果，重建过程还会随着噪声而严重恶化<sup>[13]</sup>。由非均匀背景带来的扰动通常被笼统的归类为杂波<sup>[7]</sup>，并被表示为特定分布的随机变量<sup>[16]</sup>。从该角度出发，非均匀背景扰动问题被转换为滤波问题<sup>[17]</sup>。然而这类杂波抑制方法都建立在线性散射模型上，并未考虑因多次散射带来的目标和背景之间的互耦<sup>[18-20]</sup>，而将含有目标信息的多次散射能量归于杂波，减少了可用信息。因此，考虑目标和背景耦合的基础上，提高重建分辨率对高分辨逆散射重建的应用有着重要意义。

## 1.2 国内外研究现状

### 1.2.1 逆散射重建方法

电磁散射问题和电磁逆散射问题是同一个问题的正过程和反过程，电磁散射问题是已知散射体和入射场求散射场，电磁逆散射问题则是根据测量的散射场和已知的入射场反推散射体。电磁散射问题中处理的算子是第二类 Fredholm 算子，根据 Fredholm 二择一定理，该算子是可逆算子<sup>[10][24]</sup>。故电磁散射问题是一个良态问题。而逆散射问题中处理的是第一类 Fredholm 算子，具有天然的病态性，因此对逆散射问题的研究要远晚于散射问题。随着数值计算科学的发展和软硬件的进步，求解散射问题的电磁场数值计算方法已经十分成熟<sup>[25-29]</sup>，有限差分法、有限元法和矩量法也被沿用到逆散射成像方法中。而对逆散射问题的病态性处理则需要额外构造一系列的正则算子来逼近原算子，用正则算子的逆逼近逆算子，即正则化过程<sup>[13]</sup>。因此逆散射问题和散射问题的研究区别在于前者需要引入正则化方法。

逆散射成像方法分为定性逆散射和定量逆散射，定性方法着重于恢复目标的轮廓<sup>[30-33]</sup>，而定量方法着重于恢复目标的相对介电常数<sup>[34]</sup>、电导率<sup>[35]</sup>或是边界条件<sup>[15]</sup>等。

在定性成像过程中，所求解的目标函数通常是散射体的散射截面、等效电流或是等效电流的指示函数，这些参数均可以由等效电流线性表示。故定性成像通常写为线性方程形式，形式较为简便。然而定性成像的方程病态性较强，且分辨率受限于 Rayleigh 极限。因此，在定性成像过程中要提高成像分辨率，则需要引入强先验信息的方式进行求解，如贝叶斯先验<sup>[36]</sup>、等效电流的联合稀疏性<sup>[37]</sup>以及依靠机器学习<sup>[38]</sup>。然而，这些方法受限于信噪比、目标的稀疏性以及初值的准确性等，在实际成像场景的应用上仍需要改进。

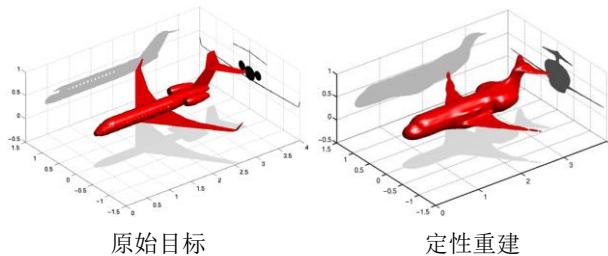


图 1.2 定性逆散射成像

在定量成像过程中，目标函数是散射体的本构参数，这些本构参数与散射场之间是非线性关系。对于一个相对介电常数为  $\epsilon_r$  的介质散射体，其散射场与相对介电常数的关系为

$$\mathbf{E}^{sca}(\mathbf{r}) = -j\omega_0\mu_0 \int_D \overline{\overline{\mathbf{G}}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') [\epsilon_r(\mathbf{r}') - 1] d\mathbf{r}' \quad (1.1)$$

其中  $\mathbf{E}(\mathbf{r}') = \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}') + \mathbf{E}_{\text{sca}}(\mathbf{r}')$  为总场， $\bar{\mathbf{G}}_0$  为并矢格林函数。易见  $\varepsilon_r$  与  $\mathbf{E}_{\text{sca}}$  之间非线性关系，且随着  $\varepsilon_r$  增加，非线性度增加。对非线性问题的处理被分为两类：一类是在近似条件下将问题线性化，直接求解线性逆问题；另一类是将病态非线性问题拆分为一个病态线性问题和一个良态非线性问题，通过迭代更新的方式求解。

### 1. 一阶近似方法

线性近似方法以 Born 近似和 Rytov 近似为典型<sup>[39][40]</sup>。其中 Born 近似直接用入射场近似等于总场，由此将(1.1)线性化。为满足近似条件，物体尺寸与对比度  $\chi = \varepsilon_r - 1$  的乘积不能太大，即需要保证入射场穿过整个物体后的相移不能超过 180 度。而 Rytov 近似则是将总场相位看成入射场相位与散射场相位之和，通过对散射场相位的近似，得到总场的近似表达式。Rytov 近似成立的条件是入射场相移在单位长度上变化不能太大而与散射体的具体尺寸无关。文献<sup>[39]</sup>对两种方法进行了详细论述，指出 Born 近似对于尺寸较小但对比度较大的物体具有较高的幅度估计精度，而 Rytov 近似对于尺寸较大但对比度较小的物体具有较高的相位估计精度。故这两类线性化近似方法只适用于弱散射目标，并不适合低频穿透成像。

### 2. 非线性方法

相比于线性近似方法受限于弱散射条件，另一类非线性求解方法应用更为广泛。大多数非线性求解中，逆散射问题被散射场的测量方程和根据体等效原理推出的成像区域内的状态方程所描述。

早期的非线性求解方法将 Born 近似的阶数增加，将一阶近似下求得的散射场与入射场之和作为新的近似总场，代入方程求解后更新散射场，该方法被称为 Born 迭代法 (BIM)<sup>[34]</sup>。BIM 的迭代递推框架是典型的 Neumann 迭代，其收敛性仍然受限于对比度函数的大小<sup>[26]</sup>。在 BIM 的基础上，衍生出了失真 Born 迭代 (DBIM) 和变分 Born 迭代 (VBIM)。DBIM 在每一次迭代中将重建的对比度函数视为非均匀背景归入下一次迭代的格林函数，这样的增量迭代过程使得一阶迭代过程转为二阶迭代，加快了求解速度<sup>[41]</sup>。而 VBIM 则直接利用散射场的增量重构对比度函数的增量，免去了格林函数的更新，减少了计算量<sup>[42]</sup>。然而这两种二阶迭代方法均面临噪声下鲁棒性差的问题，也受限于 Neumann 迭代的收敛条件。为了改善方法对高对比度目标的效果，扩展 Born 近似 (EBA) 被提出<sup>[43]</sup>。在目标内部场点与源点相近时，格林函数对积分的贡献大于总场，故将总场提出积分算子并用 Born 序列展开表示。该形式将 Born 近似扩展为高阶近似来逼近原始的非线性问题，且与对比度源方法结合得到广泛应用。

由 BIM 启发，另一种非线性求解方法——定量线性采样法 (QLSM) 同样是将线性成像方法推广到非线性成像。早期的 LSM 方法是对散射体的轮廓做定性

成像<sup>[44]</sup>, 该方法假设存在某个指示函数  $\xi(\mathbf{r}_s)$  将散射场  $\mathbf{E}_{\text{sca}}(\mathbf{r})$  投映为采样点  $\mathbf{r}_s$  处点源的辐射场  $-j\omega_0\mu_0\mathbf{G}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s)$ 。可以证明采样点  $\mathbf{r}_s$  在散射体内时  $\xi(\mathbf{r}_s)$  有解, 而采样点在散射体外部时  $\xi(\mathbf{r}_s)$  趋于无穷, 故可以通过  $\xi(\mathbf{r}_s)$  作为目标轮廓的表征。由于 LSM 方法中, 散射场和指示函数内积得到格林函数, 故构成问题的算子核函数是散射场。由于散射场带宽由格林函数决定, 故指示函数同样是一个带限为  $k_0$  的低通函数, 即反演轮廓的精度受限于 Rayleigh 极限。在 LSM 方法的基础上, QLSM 被提出用于定量求解散射体的相对介电常数<sup>[45][46]</sup>。由于散射场已经被指示函数映射为已知位置  $\mathbf{r}_s$  的点源的辐射场, 再加上映射后的入射场就可以得到映射后的总场。等价于将方程左右同时与  $\xi(\mathbf{r}_s)$  内积, 且内积后的总场和散射场均已知, 故可以直接线性求解对比度函数。然而在定量求解对比度函数的过程中依旧面临积分算子求逆的问题, 需要引入 Tikhonov 正则化求解。QLSM 通过中间变量  $\xi(\mathbf{r}_s)$  将非线性逆散射问题拆解为两个线性问题求解, 没有 BIM 的迭代过程, 求解更加简练。但是重构的对比度信息完全依赖于低通的  $\xi(\mathbf{r}_s)$ , 导致其分辨率低于 Rayleigh 极限。为此该团队提出可以将散射场映射对象由点源辐射场改为多极子, 以充分利用  $\xi(\mathbf{r}_s)$  内信息。此外,  $\xi(\mathbf{r}_s)$  在散射体外发散难以用数值计算准确逼近, 导致在第二步逆问题求解中数值准确度下降。且 LSM 和 QLSM 的推导是基于入射场为平面波的前提, 限制了其应用的普适性。

类似 QLSM, 对比度源法(CSI)通过等效电流对非线性问题进行拆分<sup>[36][47]</sup>。不同于指示函数, 等效电流具有实际物理意义, 且没有发散点。Peter M van den Berg 等人定义对比度函数  $\chi$  相对应的对比度源  $\mathbf{w} = \mathbf{E}\chi = -j\mathbf{J}_{\text{eq}}/\omega_0\epsilon_0$ , 代入测量和状态方程, 并分别构造了关于对比度源和对比度函数的代价函数  $F(\mathbf{w}, \chi)$ 、 $F_D(\chi)$ 。其中,  $F(\mathbf{w}, \chi)$  为归一化的测量方程余差加归一化的状态方程余差。引入共轭梯度法(CG)交替更新对比度源和对比度函数, 从而完成非线性问题的求解。CG 属于 Krylov 子空间法的特例, 由于在原空间收敛的序列在共轭空间强收敛, 故 CG 能确保迭代的收敛性, 且误差随扰动收敛速率强于 Tikhonov 正则化<sup>[13]</sup>。而 Krylov 子空间法的迭代框架中选择固定步长和余差迭代方向, 则方法退化为 Neumann 迭代, 即 BIM<sup>[26]</sup>。CSI 方法由于其明确的物理含义和稳定的收敛性被广泛应用于非线性逆散射问题, 并以加速计算和提高成像质量为目标分别产生了两类变种。第一类 CSI 的变形试图简化迭代流程以加速 CSI 求解<sup>[48-52]</sup>。第二类变种试图通过修该正则化项, 用更强的约束提高成像质量<sup>[53-62]</sup>。

在 CSI 方法中, 有耗目标用复介电常数表示  $\epsilon(\mathbf{r}) = \epsilon_0\epsilon_r(\mathbf{r}) - j\sigma(\mathbf{r})/\omega_0$ , 而金属目标也同样用高电导率有耗媒质逼近。在低频成像条件下, 金属近似于理想导体(PEC), 其介电常数虚部趋于负无穷, 严重干扰成像结果。且金属目标的介电常数成像准确度较低, 难以与有耗媒质区分。为了解决该问题, X. Chen 基于散射

场的多极展开模型<sup>[63]</sup>提出基于重建目标边界条件的逆 T 矩阵方法<sup>[15]</sup>，通过重构 T 矩阵元素虚部的正负区分目标边界属于 Dirichlet 边界还是传输边界。逆 T 矩阵法可以被进一步推广到 Neumann 和 Robin 边界条件，从而实现对理想导体、理想磁体、有耗媒质和介质目标的区分<sup>[64]</sup>。然而逆 T 矩阵法仅区分边界条件，在定量重构相对介电常数和磁导率存在较大的近似误差。且 T 矩阵法基于多极展开推导，导致其位置变量个数是成像区域离散化的网格数上乘以多极展开阶数，病态性远高于基于体等效模型的 CSI 方法。故逆 T 矩阵法重构效果不够理想。

### 1.2.2 逆散射的超分辨问题

非线性成像方法的研究是逆散射成像的核心，一方面是其适用场景更广泛，另一方面是其成像分辨率远高于线性定量成像和定性成像。相比线性成像方法，非线性定量逆散射大多有着亚波长分辨率<sup>[11][65]</sup>，即超 Rayleigh 极限分辨率。一种被广泛接受的解释是非线性物理建模过程中，使用了被转化为传输波的倏逝波分量，因此在重构的过程中能获得亚波长分辨率<sup>[66][67]</sup>。然而也有一部分观点认为：并没有一个明确的定量方法从测量的传输波中包含被转化的倏逝波分量，所以超分辨是否源于非线性模型中的倏逝波转化成传输波有待商榷<sup>[14]</sup>。近年的文章<sup>[68]</sup>则对比了一阶 Born 近似的解空间和非线性模型的解空间，并给出后者并没有比前者性质更好的结论。作者认为，非线性定量逆散射模型的病态性并没有比线性近似定量逆散射的病态性更弱，非线性逆散射的超分辨能力源于正则化手段的应用。然而 Rayleigh 极限仅在定性成像中有明确约束，在定量成像模型中没有明确定义。故基于非线性逆散射成像算法的超分辨能力有待进一步分析。

由于信息量的缺失无法通过数学技巧弥补<sup>[13]</sup>，故需要通过物理手段补充额外的信息。大量物理超分辨方法通过获取倏逝波分量的方式，实现成像反演中保留目标的高频信息的能力。由于格林函数的低通效应，倏逝波在传播过程中快速衰减<sup>[69]</sup>。物理超分辨方法可以归为三类：倏逝波放大<sup>[70][71][72]</sup>、倏逝波转化为传输波<sup>[73-78]</sup>以及超振荡效应<sup>[79-88]</sup>。

第一类利用了近场条件下倏逝波未完全衰减的特点，通过近场成像或是超材料来获取或者放大倏逝波，并利用这部分倏逝波来恢复更多精细信息。如图 1.3 设计的完美透镜<sup>[70]</sup>在不改变传输波相位的条件下对倏逝波进行了指数放大。实际上获得倏逝波的过程本身就是在拓宽测量场的空间谱，从而得到更高的带宽和更精细的分辨率。但是这种方法仍然改变不了倏逝波衰减的本质，无法在远场仅能测量传输波的情况下获得同样的超分辨效果。

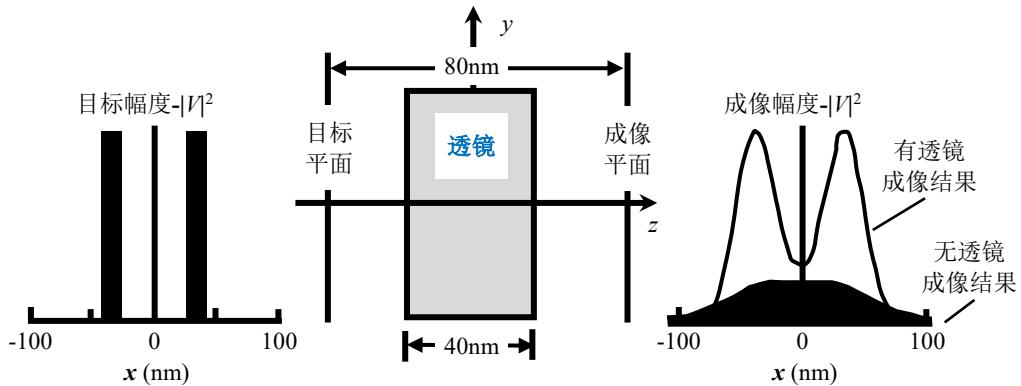


图 1.3 完美透镜

第二类借助场和目标或是已知材料的复杂耦合作用将倏逝波转为传输波，以实现远场超分辨。一种方法通过变换光学方法设计出非均匀浸没式透镜，从而使图 1.4 (b)的两个点源经过透镜的方向图和图 1.4 (a)的点源具有等价的场分布<sup>[75]</sup>。由于浸没式透镜是经过坐标变换设计得到，等效于设计非自由空间的格林函数，得到更高的传播带宽。有学者定量分析该等效作用，作者使用 Veselago 透镜将自由空间格林函数替换为聚焦格林函数，将病态成像方程转为良态方程直接求解，实现可控分辨率的超分辨成像<sup>[75]</sup>。随着超材料和超表面的兴起，在成像目标周围布置已知媒质或是透镜提高格林函数带宽的思想同样被沿用到超材料成像上<sup>[77][78]</sup>。然而，这类方法本质上都需要在目标近处或者表面布置相应的介质材料，仅适用于显微、医学成像等合作目标的情况。

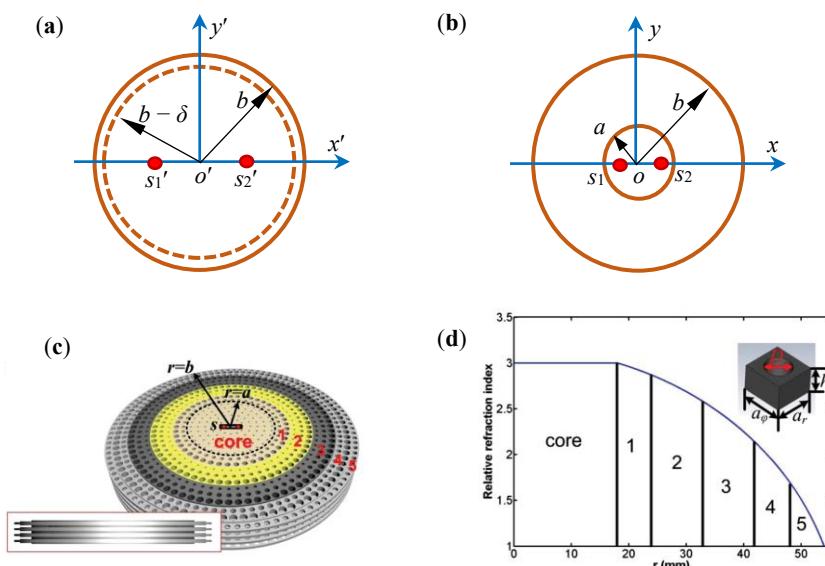


图 1.4 光学变换原理图及浸没透镜示意图

由于大多数成像应用都是非合作目标，故第三类方法则利用超振荡效应，试图在不改变成像背景环境的前提下以最小的代价实现超分辨。常识上，一段频带上限  $\omega_0$  的信号，不会存在振荡频率超过  $\omega_0$  的成分，或者说存在低于  $1/\omega_0$  秒的跳变。实际上这些说法是错误的，一段频带有限信号在局部上可以拟合任意给定

的点集，即使这些点的跳变速率可以超过了给定的信号带宽  $\omega_0$ 。这种现象被称为：超级振荡。Achim Kempf于2000年给出了超级振荡的存在性证明，并通过时域和频域的不确定性关系说明：信号的频带上限仅仅描述信号在时域上的总体特性，而不能反映局部特性。也就是信号的频带上限并不能限制信号的局域跳变速率<sup>[89]</sup>。因此，在不改变目标环境的情况下，通过直接构造含有超级振荡效应的入射场实现超分辨就成为了研究热点，并在光学成像中被广泛应用。由于发射源的波长恒定，相应的场在整个空间的空间带宽同样受限于波长。但是根据超级振荡理论，场在局部空间的跳变则是任意的且不受限于其空间带宽的。故可以合成一个在成像区域以远高于空间带宽频率快速跳变的脉冲，通过这样的窄脉冲可以分辨出远小于波长的两个目标的间距。一种典型例子是设计光学掩膜使得同一频率的光束等长干涉后形成局部任意小于波长的聚焦区，如图 1.5 所示<sup>[79]</sup>。

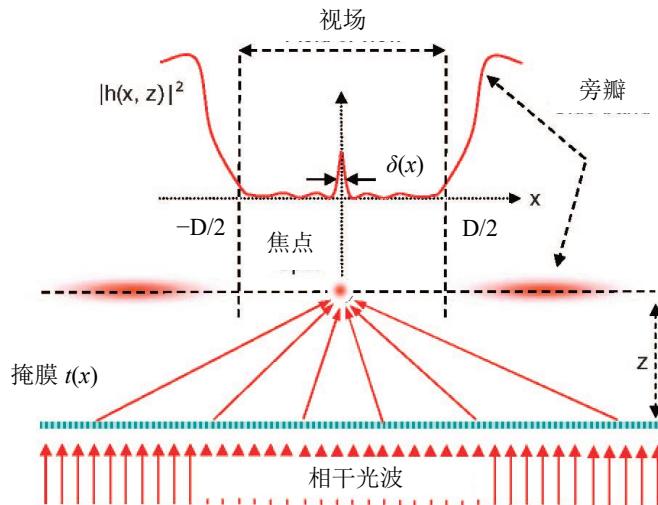


图 1.5 光学超振荡构造示意图

这是一种借助二维阵列进行一维超级振荡的构造方式。通过设计光学掩膜使得光束等长干涉后形成局部任意小于波长的聚焦区，大量实验证明了<sup>[80-83]</sup>利用超振荡效应来获得小于衍射极限的特征的可行性。以上均为将超级振荡应用于干涉中形成聚焦波束，进行超分辨光学成像的方式。虽然超级振荡信号在信息压缩、超分辨成像等受 Nyquist 采样率限制的领域有极大的优势。相应带来的劣势在于：随着超振荡拟合的离散点的跳变速率的提高，所需的信号能量将呈指数级增长。超振荡这种在  $\omega_{\max}$  带宽内压缩  $2\omega_{\max}$  的过程，实际上是以信噪比为代价的，并不违背香农定律<sup>[90]</sup>。Alex M. H. Wong 等人将以信噪比为代价突破带宽上限的超振荡效应和以能量为代价突破口径极限的 Schelkunoff 超方向性天线阵联系起来，并提出了超振荡信号的设计方法<sup>[87][88]</sup>。在此基础上，Alex 等人将超振荡函数引入雷达成像系统的点扩散函数（PSF）设计中<sup>[84-86]</sup>，在微波波段实现超振荡效应。然而，以上超振荡设计中，均需要多频函数叠加，故仅用于微波波段的 PSF 设

计。由于多频叠加的场分布为时变场，难以运用到逆散射的成像反演中。李廉林等人发现单频的涡旋电磁波（OAM）天然具有超振荡效应，并指出超振荡波束在层析衍射成像有超分辨潜力<sup>[86]</sup>。然而 OAM 在线性反演方法中的超分辨成像效果存在质疑，有学者论证 OAM 的成像性能并没有超越 MIMO 的理论极限<sup>[91]</sup>。因此，超振荡效应在微波成像领域的作用仍有待进一步发掘。

从以上示例中可以看出，这三种超分辨手段中：倏逝波放大仅适用于近场成像，而倏逝波转为传输波和超振荡效应则不受传播距离的限制。但是第二种方法需要设计并在目标周围布置合适的介质材料，从而达到精确已知目标周围环境的目的，从本质上限制了其在远场的应用条件。故利用超振荡效应则是真正不依靠强先验信息也不受限与传播距离的超分辨手段。实际上，入射场的超振荡效应本质上是谱域和空域测不准的表现，故超振荡所利用的先验是成像区域的大小。在逆散射成像中，由于入射场和散射场是线性关系，故入射场的线性组合可以等价为散射场的线性组合。对入射场的超振荡设计可以直接等价为对成像方程的线性组合，从而将物理超分辨手段转为方程的正则化。由此，物理超分辨和数学超分辨方法在逆散射成像问题中可以统一。

### 1.3 本文的主要内容以及创新

逆散射成像应用中存在两大主要问题，即：混合边界条件问题和低频穿透的分辨率问题。本文针对性的研究了混合边界条件下的成像模型和成像框架、基于物理手段的超分辨成像方法和基于数学先验的超分辨成像方法，并在非均匀背景扰动下讨论了相应的成像策略。本文研究内容的关系如下图所示

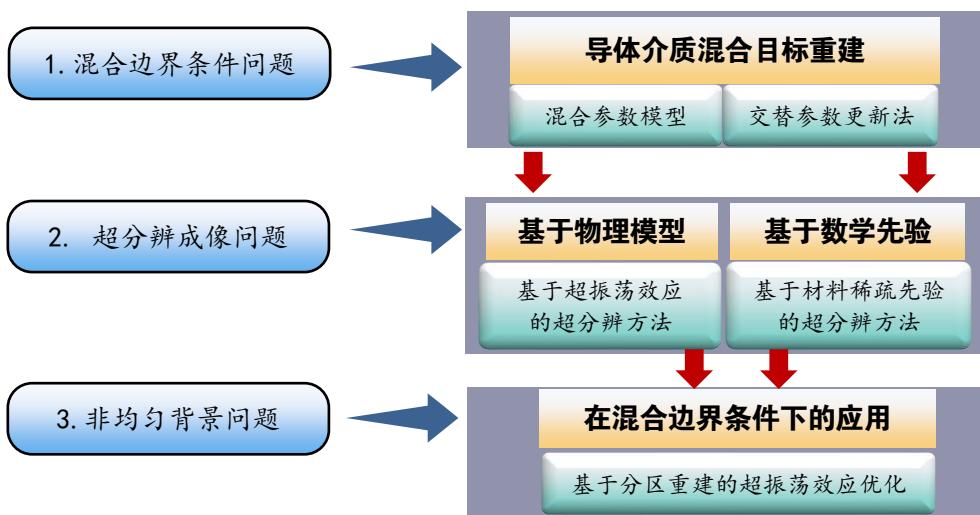


图 1.6 研究内容关系图

在混合边界问题的框架下，本文研究了对金属和非金属目标的重建方法。由于现有的定量重建模型在不区分导体和介质目标情况下，导致重建的介质受导体影响，无法精确定量恢复。故需要在区分导体和介质的前提下完成定量重建，本

文首次建立了混合参数模型，包含有定性区分导体和介质的传输系数以及定量重建的对比度函数。其次，通过体等效原理，将混合参数模型拆解为仅关于导体的定性重建参数和仅关于介质的定量重建参数的两组方程中。由于介质定量重建时，阻抗矩阵中不包含导体零场部分的网络，故重建的病态性被弱化，实现了导体扰动下的介质精确定量重建。而导体仅做定性重建规避了导体内零场的影响，病态性同样弱于定量重建。最后，提出了交替参数更新法（APUM）完成导体和介质的交替重建框架。在电磁仿真和实测数据上验证了该方案，所提方法能在已有算法无法实现重建的导体和介质混杂的情况下准确重建二者。

针对低频分辨率受限问题，在混合参数模型的基础上，本文继续研究了该问题的成像分辨率，并挖掘其超分辨成像潜力。绝大多数成像体制的分辨率并不会超过半工作波长，然而基于全波模型的非线性逆散射方法被多次验证存在超越极限分辨率的结果。长期以来，关于该类方法超分辨能力的解释存在争议。本文首次从超振荡效应的角度出发，给出了超振荡效应在非线性混频作用下保留目标高频信息的解释。并从 Shannon 信道容量的角度建立了极限分辨率和信噪比与带宽之间的联系。由于超振荡效应的广泛存在性，非线性逆散射成像天然的具有超半波长极限分辨率的潜力。根据该非线性混频效应，本文首次提出了基于入射场优化的非线性超分辨成像方法。传统的物理超分辨手段试图修改成像场景从而绕过自由空间极限分辨率，获得非自由空间的极限分辨率。而本文所提方法在不修改成像构型的前提下，仅对激励进行重加权即可充分挖掘可获取信息。电磁仿真和实测数据验证了理论的可行性和所提方法的有效性，所提方法得到了比已有的超分辨重建算法更好的重建效果。更进一步，本文首次说明了基于超振荡效应的物理超分辨成像方法和数学上的非线性正则化措施之间的等价性，证明了非线性问题的正则化约束可以将高维信息压缩至低维。换而言之，本文从物理超分辨方法得到了其等价的数学措施。

根据本文所提的物理超分辨方法和数学措施的等价性，本文进一步研究了基于数学先验的非线性超分辨成像方法。现有的正则化措施要么仅适用于线性逆问题，要么其先验和低频重建问题不相符合。由于现有重建问题的目标大多由有限种类材料构成，故本文首次提出了非线性重建框架下的材料种类稀疏性约束。本文创新性的在促进材料种类稀疏性的多层 Bayes 网络和求解非线性问题的 Krylov 子空间法之间建立联系，给出了基于材料种类稀疏正则化的非线性逆散射成像方法。电磁仿真和实测数据均验证了所提方法的有效性，所提方法能得到比已有超分辨重建算法更好的效果。

由于本文研究背景建立在低频穿透性成像问题上，故大部分重建问题是在非均匀背景下进行的。由于超振荡效应仅存在于局部区域，故本文首次提出了一种

分区重建策略交替更新目标和背景，以便于对每一个子区优化超振荡入射场。当重建第  $n$  个子区时，其它区域的影响被背景格林函数所替代。由此将重建维度从全空间降维到被重建子区，降低存储复杂度。本文进一步说明了，将自由空间格林函数替换为背景格林函数后，可实现的超振荡波形的空间频率会随着背景的对比度增强而增强，以及重建区域的收缩而增强。由此，子区重建策略将全空间的弱超振荡效应替换为局部的强超振荡效应，并实现各个子区的超分辨成像。电磁仿真数据验证了所提方法的有效性。

## 1.4 论文结构及内容安排

论文共七章，每章的内容结构安排如下：

第一章为绪论，首先概述了本文研究问题的应用背景和存在的工程问题，并介绍该问题上国内外学者的当前研究现状。第二章介绍散射问题和逆散射问题的理论基础，并介绍了逆散射问题的数学理论。第三章为混合边界问题的定量重建方法研究。第四章为基于超振荡效应的逆散射超分辨方法研究。第五章为基于材料稀疏先验的逆散射超分辨方法研究。第六章讨论了非均匀背景下的重建策略。第七章对本文工作进行了细致全面的总结并对未来工作提出了展望。

## 第2章 逆散射问题的理论基础

### 2.1 散射问题的基本理论

在本节中，首先基于体等效原理给出散射问题的物理模型。由于该模型建立在无限维函数空间，无法直接数值计算。故本节进一步交代散射模型的常见离散化方法，并在散射问题的连续和离散化模型上分析正散射问题和逆散射问题的异同点。由于电场和磁场的对偶性，磁性媒质的散射模型可以根据对偶关系从电性媒质写出，故本节只考虑非磁性媒质。

#### 2.1.1 体等效原理

一个典型的散射问题如图 2.1(a)所示，密度  $\mathbf{J}^{inc}$  的电流源激发入射场  $\mathbf{E}^{inc}$  和  $\mathbf{H}^{inc}$  照射到介电常数分布为  $\epsilon(r)$  的空间内会激发散射场  $\mathbf{E}^{sca}$  和  $\mathbf{H}^{sca}$ ，全空间的总电场和总磁场分别为  $\mathbf{E}(r) = \mathbf{E}^{inc}(r) + \mathbf{E}^{sca}(r)$  和  $\mathbf{H}(r) = \mathbf{H}^{inc}(r) + \mathbf{H}^{sca}(r)$ 。因此，模型中不对一次散射或是二次散射作区分，而全部归为稳态散射场  $\mathbf{E}^{sca}$ 、 $\mathbf{H}^{sca}$ 。而图 2.1(b)中为自由空间问题，其中密度  $\mathbf{J}^{inc}$  的电流源激发  $\mathbf{E}^{inc}$  和  $\mathbf{H}^{inc}$  照射到介电常数为  $\epsilon_0$  的无目标自由空间中，故全空间的总电场和总磁场仅为  $\mathbf{E}^{inc}$  和  $\mathbf{H}^{inc}$ 。图 2.1(c)中同样为介电常数为  $\epsilon_0$  的自由空间，但是该空间中仅含有密度  $\mathbf{J}^{eq}$  的体等效电流，没有激发入射场的电流源  $\mathbf{J}^{inc}$ 。我们令体等效电流产生的辐射场等于原始散射问题中的散射场  $\mathbf{E}^{sca}$  和  $\mathbf{H}^{sca}$ 。

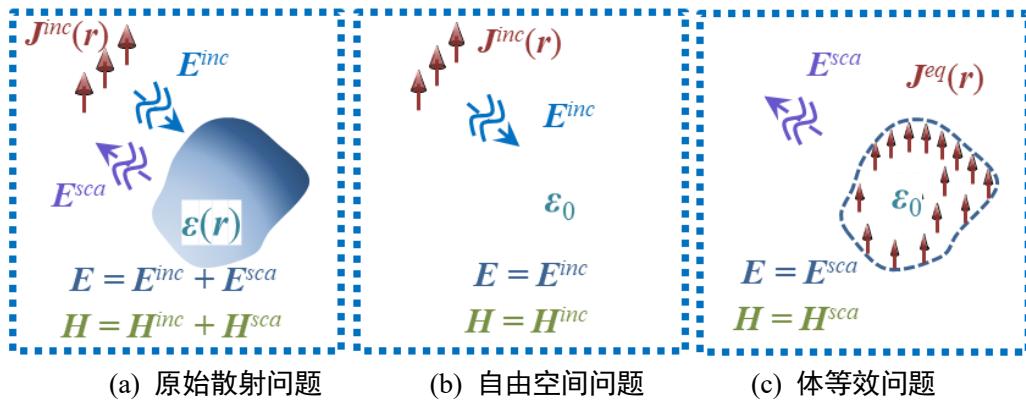


图 2.1 体等效原理示意图

原始散射问题、自由空间问题和体等效问题中满足的 Maxwell 方程分别如下

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}^{inc} + j\omega\epsilon\mathbf{E} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0\mathbf{H} \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H}^{inc} = \mathbf{J}^{inc} + j\omega\epsilon_0\mathbf{E}^{inc} \\ \nabla \times \mathbf{E}^{inc} = -j\omega\mu_0\mathbf{H}^{inc} \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H}^{sca} = \mathbf{J}^{eq} + j\omega\epsilon_0\mathbf{E}^{sca} \\ \nabla \times \mathbf{E}^{sca} = -j\omega\mu_0\mathbf{H}^{sca} \end{cases} \quad (2.3)$$

其中,  $\omega$  为角频率。令原始问题的方程(2.1)减去自由空间问题的方程(2.2)得到

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H}^{sca} = j\omega(\epsilon - \epsilon_0)\mathbf{E} + j\omega\epsilon_0\mathbf{E}^{sca} \\ \nabla \times \mathbf{E}^{sca} = -j\omega\mu_0\mathbf{H}^{sca} \end{cases} \quad (2.4)$$

易见, (2.4)式右侧与体等效问题等价, 故联立(2.1)和(2.4)得到

$$\mathbf{J}^{eq} = j\omega(\epsilon - \epsilon_0)\mathbf{E} \quad (2.5)$$

密度分布为  $\mathbf{J}^{eq} = j\omega(\epsilon - \epsilon_0)\mathbf{E}$  的电流在自由空间的辐射场等于原始问题的散射场。

根据电场积分方程

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\int_{\infty} \left[ j\omega\mu_0 G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') - \frac{\rho}{\epsilon_0} \nabla' G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' \quad (2.6)$$

由电流连续性原理  $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\rho/\epsilon_0$ , 自由空间的谐振电荷最终构成电流的散度源, 因此不存在独立电荷, 进一步写为经典的并矢格林函数形式

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -j\omega\mu_0 \int_V \left( 1 + \frac{1}{k_0^2} \nabla' \nabla' \right) G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\ &= -j\omega\mu_0 \int_V \overline{\overline{G}_0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \bullet \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \end{aligned} \quad (2.7)$$

从(2.7)可以看出, 当电流密度函数是  $\delta(\mathbf{r}')\mathbf{u}$  时, 产生的电场就是格林函数。将(2.5)代入自由空间矢量波动方程的解(2.7), 得到散射场和散射体本构参数的关系

$$\mathbf{E}^{sca}(\mathbf{r}) = k_0^2 \int_V \overline{\overline{G}_0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \bullet [\tilde{\epsilon}_r(\mathbf{r}') - 1] \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.8)$$

其中,  $\tilde{\epsilon}_r$  是复相对介电常数, 展开写为

$$\tilde{\epsilon}_r(\mathbf{r}) = \epsilon_r(\mathbf{r}) - j \frac{\sigma(\mathbf{r})}{\omega\epsilon_0} \quad (2.9)$$

其中,  $\epsilon_r$  为相对介电常数,  $\sigma$  为电导率, 该参数均属于散射体的本构特性。因此(2.8)中的  $(\tilde{\epsilon}_r - 1)$  即为成像的目标函数, 通常称为对比度函数  $\chi = \tilde{\epsilon}_r - 1$ 。

综上, 完成散射问题的建模, 散射体和散射场之间构成(2.8)的积分关系。

## 2.1.2 散射问题的离散化方法

在 2.1.1 中给出了非磁性散射体的复相对介电常数和散射场之间的关系(2.8), 该方程是一个不可数维的积分方程。而要能在计算机中实现数值计算, 则需要离散化方程(2.8)。方程的离散化并不能简单通过插值完成, 而需要保证离散化误差随着离散化阶数的增加而一致收敛。

(1) 矩量法

给定基函数  $\xi_n$  和权函数  $\zeta_n$ , 且二者张成的子空间  $\text{span}\{\cup_n \xi_n\} = \text{span}\{\cup_{n'} \zeta_{n'}\}$ 。则可以写出(2.8)中的场量在基函数子空间上的投影

$$e_{n'} = \int \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \xi_{n'}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (2.10)$$

当基函数相互正交, 且张成的子空间是场量所在函数空间的完备化空间时, 有

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n'} e_{n'} \xi_{n'}(\mathbf{r}) \quad (2.11)$$

由此可以保证离散化误差随展开阶数收敛, 将散射场和总场进行(2.10)式基展开, 在误差小到可以忽略的前提下, 可以将(2.8)写为

$$\sum_{n'} e_n^{\text{sca}} \xi_{n'}(\mathbf{r}) = k_0^2 \int_V \mathbf{G}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sum_{n'} \chi_{n'} e_{n'} \xi_{n'}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.12)$$

由此完成方程各个函数的基函数展开。为了检验(2.12)的等式关系在子空间  $\text{span}\{\cup_n \xi_n\}$  上始终成立, 则要求(2.12)的残差在子空间上的投影为零。故有

$$\int \left[ \sum_{n'} e_n^{\text{sca}} \xi_{n'}(\mathbf{r}) - k_0^2 \int_V \overline{\mathbf{G}_0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \sum_{n'} \chi_{n'} e_{n'} \xi_{n'}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right] \zeta_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 0 \quad (2.13)$$

对任意  $n$  都成立。由此将(2.8)离散化为

$$\sum_{n'} e_n^{\text{sca}} \int \xi_{n'}(\mathbf{r}) \cdot \zeta(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = k_0^2 \sum_{n'} \chi_{n'} e_{n'} \iint_V \zeta_n(\mathbf{r}) \cdot \overline{\mathbf{G}_0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \xi_{n'}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' d\mathbf{r} \quad (2.14)$$

当权函数和基函数具有相同的正交性时,

$$\int \xi_{n'}(\mathbf{r}) \cdot \zeta_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \begin{cases} 1 & n = n' \\ 0 & n \neq n' \end{cases} \quad (2.15)$$

(2.14)写为

$$\begin{aligned} e_n^{\text{sca}} &= k_0^2 \sum_{n'} G_{nn'} \chi_{n'} e_{n'} \\ G_{nn'} &= \iint_V \zeta_n(\mathbf{r}) \cdot \overline{\mathbf{G}_0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \xi_{n'}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (2.16)$$

由此将(2.8)积分方程离散化为矩阵方程  $\mathbf{e}^{\text{sca}} = \mathbf{G} \cdot \text{diag}(\mathbf{e}) \cdot \boldsymbol{\chi}$ 。其中,  $\mathbf{G}$  称为阻抗矩阵, 选择不同的基函数有不同的阻抗矩阵。

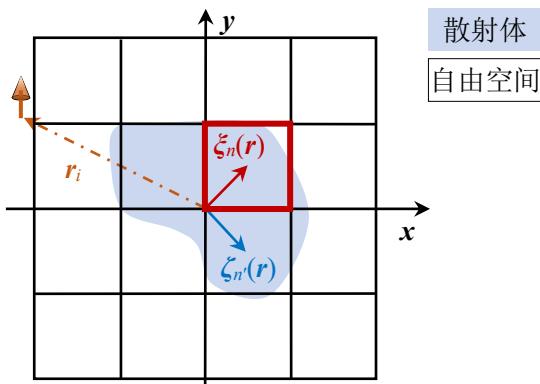


图 2.2 矩形脉冲基离散化的二维问题

如图 2.2 以二维 TM 问题为例, 电场方向为  $z$  方向, 而散射体为沿着  $z$  轴无限长的柱体。等效电流  $\mathbf{J}_{eq}$  指向  $z$  仅为  $x$ 、 $y$  的变量, 故  $\nabla \cdot \mathbf{J}_{eq} = \nabla \cdot \mathbf{J}_{eq}(x, y) = 0$ 。则 (2.8) 中的并矢格林函数简化为二维标量格林函数  $\mathbf{G}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = H_0^{(2)}(k_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)$ 。选择面积为  $\pi a^2$  的矩形脉冲基作为基函数和点匹配作为权函数时, 阻抗矩阵中的元素为

$$G_{nn'} = \frac{k_0^2}{4j} \int_0^{2\pi} \int_0^a H_0^{(2)}(k_0|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}'_{n'}|) d\rho' d\varphi'$$

$$= \begin{cases} \frac{-j\pi a k_0 H_1^{(2)}(k_0 a)}{2} & n = n' \\ \frac{-j\pi a k_0 J_1(k_0 a) H_1^{(2)}(k_0 |\mathbf{r}_n - \mathbf{r}'_{n'}|)}{2} & n \neq n' \end{cases} \quad (2.17)$$

由此得到离散化的散射模型

$$\mathbf{e}^{sca} = \mathbf{G} \cdot \text{diag}(\mathbf{e}^{inc} + \mathbf{e}^{sca}) \cdot \boldsymbol{\chi} \quad (2.18)$$

在正散射问题中, 已知散射体  $\boldsymbol{\chi}$  和照射源  $\mathbf{e}^{inc}$  求总场  $\mathbf{e}$ , 上式可以写为

$$\mathbf{e} - \mathbf{G} \cdot \text{diag}(\boldsymbol{\chi}) \mathbf{e} = \mathbf{e}^{inc} \quad (2.19)$$

构成第二类 Fredholm 积分方程。

而在逆散射问题中, 由于在测量过程中不能获得完整的散射场, 仅能得到测量区域  $C$  上的离散采样点, 故格林函数写为

$$G_0(\mathbf{r}_c, \mathbf{r}') = H_0^{(2)}(k_0|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_c|) \quad (2.20)$$

其离散化后记为  $\mathbf{G}_C$ 。已知散射场的测量  $\mathbf{e}^{sca}$  和照射源  $\mathbf{e}^{inc}$  求散射体  $\boldsymbol{\chi}$ , (2.18) 式可以写为

$$\mathbf{e}^{sca} = \mathbf{G}_C \cdot [\mathbf{I} - \mathbf{G} \cdot \text{diag}(\boldsymbol{\chi})]^{-1} \text{diag}(\mathbf{e}^{inc}) \cdot \boldsymbol{\chi} \quad (2.21)$$

构成第一类 Fredholm 积分方程, 且(2.21)是关于  $\boldsymbol{\chi}$  的非线性函数。

## (2) 多极子展开

类似于矩量法, 多极子展开同样是一组加权的正交波函数来逼近连续维的场量, 通常一维问题用多阶平面波展开、二维问题用多阶柱面波展开、三维问题用多阶球面波展开。在矩量法中, 场量被波函数展开后先被代入电场积分方程 (2.8), 再通过权函数检验离散化误差。而此处与之相反, 波函数展开的场量先被代入权函数离散化后的网格边界, 再根据离散网格的边界条件方程来检验离散化误差。前者是先代入散射模型, 后离散化检验模型误差; 后者是先离散化, 后代入模型检验误差。此外, 多极子展开模型中, 考察的方程是边界条件方程, 而非电场积分方程。因此, 由波函数描述的散射关系反映了散射体的边界条件, 是一个定性区分散射体的逆散射模型。

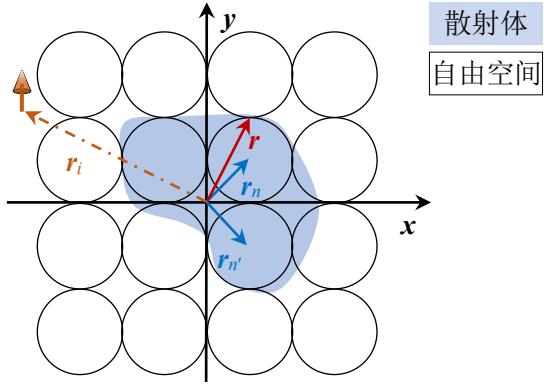


图 2.3 二维多极展开的离散化示意图

如图 2.3 以二维 TM 波问题为例, 场的多极展开写为各阶柱面波函数。则任意场可以用柱面波函数展开表示

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_z \sum_{\gamma=-\tau}^{+\tau} a_\gamma \Psi_\gamma(k_0 |\mathbf{r}|) \quad (2.22)$$

其中,  $\gamma$  是展开阶数。将关注区域离散化为  $\mathbf{r}_n$  为圆心、 $R$  为半径的任意小的圆形, 则其边界上  $\mathbf{r}$  处有相应的入射场、传输场和散射场

$$\mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_z \sum_{i=1}^I \sum_{\gamma=-\tau}^{+\tau} a_{\gamma i}(q) H_\gamma^{(2)}(k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|) e^{j\gamma\varphi(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)} \quad (2.23)$$

$$\mathbf{E}^{tran}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_z \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_{np}(q) J_p(k_n |\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|) e^{-jp\varphi(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n)} \quad (2.24)$$

$$\mathbf{E}^{sca}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_z \sum_{p=-P}^{+P} \sum_{n=1}^N c_{np} H_p^{(2)}(k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|) e^{-jp\varphi(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n)} \quad (2.25)$$

则(2.23)、(2.24)和(2.25)需要满足介质边界条件

$$\begin{cases} [\mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^{sca}(\mathbf{r})]_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_n|=R} = \mathbf{E}^{trans}(\mathbf{r})_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_n|=R} \\ [\mathbf{H}^{inc}(\mathbf{r}) + \mathbf{H}^{sca}(\mathbf{r})]_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_n|=R} = \mathbf{H}^{trans}(\mathbf{r})_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_n|=R} \end{cases} \quad (2.26)$$

或是导体边界条件

$$\begin{cases} [\mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^{sca}(\mathbf{r})]_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_n|=R} = 0 \\ [\mathbf{H}^{inc}(\mathbf{r}) + \mathbf{H}^{sca}(\mathbf{r})]_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_n|=R} = 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

然而, (2.23)和(2.25)的波函数并不在  $\mathbf{r}_n$  处展开。故需要用 Graf 加法定理处理波函数的平移得到

$$\mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_z \sum_{i=1}^I \sum_{\gamma=-\tau}^{+\tau} a_{\gamma i}(q) e^{j\gamma\pi} \left[ \sum_{p=-\infty}^{+\infty} H_{\gamma+p}^{(2)}(k_0 |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_n|) e^{j(\gamma+p)\varphi(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_n)} \right] e^{-jp\varphi(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n)} \quad (2.28)$$

$$\mathbf{E}^{sca}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_z \left\{ \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left[ c_{np}(q) H_p^{(2)}(k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|) e^{-jp\varphi(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n)} \right] + \sum_{\substack{n'=1 \\ n' \neq n}}^N \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left[ c_{n'p}(q) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_l(k_0 |\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n'}|) e^{-j(p+l)\varphi(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n'})} e^{-jl\varphi(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n)} \right] \right\} \quad (2.29)$$

其中, (2.29)的第一项是(2.25)在  $\mathbf{r}_n$  处展开, (2.29)的第二项是其余网格  $\mathbf{r}_{n'}$  处的场对  $\mathbf{r}_n$  处的贡献。将(2.24)、(2.28)和(2.29)代入边界条件(2.26)或是(2.27), 并将两个边界条件联立得到

$$c_{np} = t_n^p \left[ i_n^p + \sum_{n'=1}^N \sum_{p'=-\infty}^{+\infty} s_{n,n'}^{p,p'} (1 - \delta_{n,n'}) c_{n'p'} \right] \quad (2.30)$$

其中,

$$\delta_{n,n'} = \begin{cases} 0 & n \neq n' \\ 1 & n = n' \end{cases} \quad (2.31)$$

$$s_{n,n'}^{p,p'} = e^{j(p-p')\pi} H_{p'-p}^{(2)}(k_0 |\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n'}|) e^{j(p-p')\varphi(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n'})} \quad (2.32)$$

构成源点的  $p$  阶波函数对场点的  $p$  阶波函数的贡献。

$$i_n^p(q) = \sum_{i=1}^I \sum_{\gamma=-\tau}^{+\tau} \alpha_{\gamma i}(q) e^{j\gamma\pi} e^{j(\gamma+p)\varphi(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_n)} H_{\gamma+p}^{(2)}(k_0 |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_n|) \quad (2.33)$$

为入射场在  $\mathbf{r}_n$  处的多极展开系数。故(2.30)括号内为总场在  $\mathbf{r}_n$  处的多极展开。此外, 当离散化小圆柱为介质时, 其传输系数满足传输边界;

$$t_n^p = \frac{k_n J_p(k_0 R) J_{p+1}(k_n R) - k_0 J_p(k_n R) J_{p+1}(k_0 R)}{k_0 J_p(k_n R) H_{p+1}^{(2)}(k_0 R) - k_n H_p^{(2)}(k_0 R) J_{p+1}(k_n R)} \quad \text{Transmission} \quad (2.34)$$

而当离散化小圆柱为导体时, 其传输系数满足 Dirichlet 边界条件

$$t_n^p = -\frac{J_p(k_0 R)}{H_p^{(2)}(k_0 R)} \quad \text{Dirichlet} \quad (2.35)$$

分别是介质和导体边界条件下的传输系数, 可以用作唯一确定散射体的函数。此外, 传输系数还可以扩展到理想磁体和有耗媒质边界

$$t_n^p = \begin{cases} -\frac{j\eta J_p(k_0 R) + J'_p(k_0 R)}{j\eta H_p^{(2)}(k_0 R) + H'^{(2)}_p(k_0 R)} & \text{Robin} \\ -\frac{J'_p(k_0 R)}{H'^{(2)}_p(k_0 R)} & \text{Neumann} \end{cases} \quad (2.36)$$

综上, (2.30)描述了多极子展开下的等效体电流  $\mathbf{J}^{eq} = j\omega(\epsilon - \epsilon_0)\mathbf{E}$ 。将(2.30)代入(2.25)得到离散化的散射问题模型

$$\mathbf{e}^{sca} = \mathbf{G}_{multi} \cdot \text{diag}(\mathbf{i} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{c}) \cdot \mathbf{t} \quad (2.37)$$

其中,  $\mathbf{e}^{sca} = \mathbf{G}_{multi} \cdot \mathbf{c}$ 。

在正散射问题中, 已知散射体  $\mathbf{t}$  和照射源  $\mathbf{i}$  求散射场  $\mathbf{c}$ , 上式可以写为

$$[\mathbf{I} - \mathbf{S} \cdot \text{diag}(\mathbf{t})] \mathbf{c} = \text{diag}(\mathbf{i}) \cdot \mathbf{t} \quad (2.38)$$

构成第二类 Fredholm 积分方程。

而在逆散射问题中, 已知散射场的测量  $\mathbf{e}^{sca}$  和照射源  $\mathbf{i}$  求散射体  $\mathbf{t}$ , 上式可以写为

$$\mathbf{e}^{sca} = \mathbf{G}_{multi} \cdot [\mathbf{I} - \mathbf{S} \cdot \text{diag}(\mathbf{t})] \text{diag}(\mathbf{i}) \cdot \mathbf{t} \quad (2.39)$$

构成第一类 Fredholm 积分方程, 且(2.21)是关于  $\mathbf{t}$  的非线性函数。

### 2.1.3 散射问题的求解方法

本节中, 我们通过体等效原理给出了散射问题的物理模型, 通过矩量法、多极展开以及混合方法将该连续维的物理问题投影到有限维度的离散问题上。通常这类离散化方法常见于电磁仿真中 RCS 的计算等问题中, 在这类问题中, 入射场  $\mathbf{e}^{inc}$  和散射体  $\{\chi, \mathbf{t}\}$  是已知的, 而散射场  $\mathbf{e}^{sca}$  为待求变量, 根据 2.1.2 节中的离散化方法得到正问题为

$$\begin{aligned} \mathbf{G} \cdot \text{diag}(\chi) \cdot \mathbf{e}^{inc} &= [\mathbf{I} - \mathbf{G} \cdot \text{diag}(\chi)] \cdot \mathbf{e}^{sca} \\ \text{diag}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{i} &= [\mathbf{I} - \mathbf{S} \cdot \text{diag}(\mathbf{t})] \cdot \mathbf{c} \end{aligned} \quad (2.40)$$

该方程是一个典型的第二类 Fredholm 积分方程, 后面我们将说明该方程良态可解。易见, 当固定散射体构型时, 散射场和入射场之间线性相关。因此正问题的求解是一个简单的线性逆问题, 通常通过共轭梯度快速傅里叶方法 (CG-FFT) 方法求解<sup>[92]</sup>。

由于阻抗矩阵  $\mathbf{G}$  和坐标转移矩阵  $\mathbf{S}$  均为 Toeplitz 矩阵, 故该矩阵和向量的乘积可以用快速傅里叶变换加速, 由此将(2.40)写为

$$\begin{aligned} \mathbf{G} \cdot \text{diag}(\chi) \mathbf{e}^{inc} &= \mathbf{e}^{sca} - \text{IFFT} [\text{FFT}(\mathbf{g}) \odot \text{FFT}(\chi \odot \mathbf{e}^{sca})] \\ \text{diag}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{i} &= \mathbf{c} - \text{IFFT} [\text{FFT}(\mathbf{S}) \odot \text{FFT}(\mathbf{t} \odot \mathbf{c})] \end{aligned} \quad (2.41)$$

由此将  $N \times N$  维矩阵乘法简化为  $N \times 1$  维向量点乘。由于(2.41)两式形式相近, 故不失一般性的用如下表示代替

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \text{IFFT} [\text{FFT}(\mathbf{g}) \odot \text{FFT}(\mathbf{x})] = \mathbf{Lx} \quad (2.42)$$

其中  $\mathbf{L}$  为简化表示的算子。求解(2.42)的共轭梯度法计算流程如表格 2-1 所示。

表格 2-1 CG-FFT 方法流程

输入: 测量 $\mathbf{y}$ , 误差容忍门限 $t$ ;
初始化 $\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0 = \mathbf{0}, \mathbf{g}_0 = \mathbf{I}$ ;

For  $i = 1: I_{max}$

更新余差  $\mathbf{r}_i = \mathbf{y} - \mathbf{Lx}_i$ ;

更新共轭梯度  $\mathbf{g}_i = \mathbf{L}^* \mathbf{r}_i / \|\mathbf{y}\|^2$ ;

更新迭代方向  $\mathbf{v}_i = \mathbf{g}_i + \mathbf{v}_{i-1} \|\mathbf{g}_i\|^2 / \|\mathbf{g}_{i-1}\|^2$ ;

更新步长  $\alpha_i = \|\mathbf{g}_i\|^2 / \|\mathbf{L}\mathbf{v}_i\|^2$ ;

更新目标函数  $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1} + \alpha_i \mathbf{v}_i$ ;

更新代价函数  $F_i = \|\mathbf{r}_i\|^2 / \|\mathbf{y}\|^2$ ;

IF  $F_i < t$ :

    终止迭代

END

END

输出：目标函数  $\mathbf{x}_i$

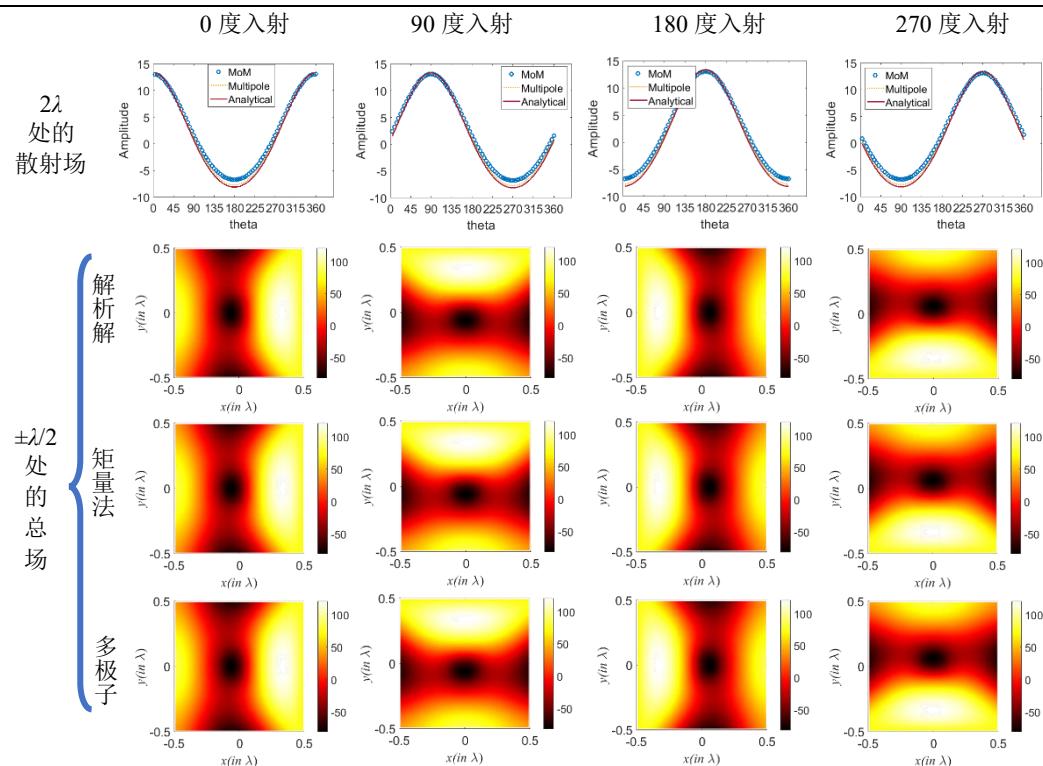


图 2.4 矩量法、多极子和解析解对比

由于共轭梯度法是一种正交搜索解空间的方法，故对良态的凸问题能保证最多  $N$  步收敛。计算半径  $\lambda/8$ ，相对介电常数为 5 的单个介质圆柱的散射场，计算域大小为  $\lambda/2 \times \lambda/2$ 。分别将离散化网格数  $30 \times 30$  的矩量法结果、 $50 \times 50$  网格的零阶多极子展开结果和解析解<sup>[10]</sup>进行对比。其中，解析解的总场写为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} -\frac{\omega\mu_0}{4} a_i \sum_{l=-L}^{+L} H_l^{(2)}(k_0 r_i) e^{jl(\varphi_i - \varphi)} \left[ J_l(k_0 r) + r_l H_l^{(2)}(k_0 r) \right] & r \geq R \\ -\frac{\omega\mu_0}{4} a_i \sum_{l=-L}^{+L} t_l H_l^{(2)}(k_0 r_i) e^{jl(\varphi_i - \varphi)} J_l(k_r r) & r \leq R \end{cases} \quad (2.43)$$

$$r_l = \frac{k_t J_l(k_0 R) J_{l+1}(k_t R) - k_0 J_l(k_t R) J_{l+1}(k_0 R)}{k_0 J_l(k_t R) H_{l+1}^{(2)}(k_0 R) - k_t J_{l+1}(k_t R) H_l^{(2)}(k_0 R)}$$

$$t_l = \frac{k_0 J_{l+1}(k_0 R) H_l^{(2)}(k_0 R) - k_0 J_l(k_0 R) H_{l+1}^{(2)}(k_0 R)}{k_t J_{l+1}(k_t R) H_l^{(2)}(k_0 R) - k_0 J_l(k_t R) H_{l+1}^{(2)}(k_0 R)}$$

其中,  $R$  为介质柱半径,  $k_t$  为柱内波数,  $\alpha_i$  为位置  $r_i$  处激励线源的权重,  $r_l$  和  $t_l$  分别为介质柱表明反射系数和透射系数。

不同角度的距离原点  $3\lambda$  的线源照射下, 距离圆柱中心  $2\lambda$  的散射场幅度和计算区内的总场分布如图 2.4 所示。易见, 即使是计算离散化仅有  $4 \times 4$  个网格的散射体, 也能得到和解析解基本一致的结果, 验证了该方法的准确性。

## 2.2 逆散射问题的基本理论

在逆散射重建问题中, 散射体  $\{\chi, \mathbf{t}\}$  是待求的未知变量, 因此需要根据入射场  $\mathbf{e}^{inc}$  和散射场  $\mathbf{e}^{sca}$  的测量值反推散射体。相应的离散方程分别为

$$\mathbf{e}^{sca} = \mathbf{G}_C \cdot [\mathbf{I} - diag(\chi) \cdot \mathbf{G}]^{-1} diag(\mathbf{e}^{inc}) \cdot \chi$$

$$\mathbf{e}^{sca} = \mathbf{G}_{multi} \cdot [\mathbf{I} - diag(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{S}]^{-1} diag(\mathbf{i}) \cdot \mathbf{t}$$

其中,  $[\mathbf{I} - diag(\chi) \cdot \mathbf{G}_D]^{-1} diag(\mathbf{e}^{inc})$ 、 $[\mathbf{I} - diag(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{G}_D]^{-1} diag(\mathbf{e}^{inc})$  分别为总场和总场的多极展开权重。可见, 逆散射问题中的散射体的对比度和散射场之间构成非线性关系, 况且该逆问题是一个病态问题。因此, 大多数逆散射算法设计有两大重心: 第一是非线性问题的线性化方法, 第二是病态问题的正则化方法。前者是由散射过程的物理性质决定, 后者则由逆问题的数学性质决定, 因此本小节主要介绍非线性问题的线性化方法。

### (1) 逆源方法

一种典型的线性重建方法是通过变量替换的方式将非线性因素归于变量本身, 即用等效源  $diag(\mathbf{e}) \chi$  作为目标函数进行定性重建, 由此产生了逆源重建方法。逆源问题的连续和离散方程分别为

$$\mathbf{E}^{sca}(\mathbf{r}) = k_0^2 \int_V \overline{\overline{\mathbf{G}}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{w}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

$$\mathbf{e}^{sca} = \mathbf{G}_C \cdot \mathbf{w}$$

通常逆源方法在处理大尺寸散射体时, 计算复杂度和未知量个数随着网格数的增加而增加, 故基于逆快速多极子 (IFMM) 方法被提出。该方法将远组的影响转

换为平面波，并通过后向传播解（BP）求得，从而降低计算复杂度<sup>[93]</sup>。然而，由于对比度源本身是关于入射场的函数，故不同次测量的结果无法做相干处理。另一种线性化方法则参考 Taylor 展开的思路，通过一个线性问题逼近原始的非线性问题，以 Born 和 Rytov 近似为典型<sup>[94]</sup>。

### (2) Born 近似和 Rytov 近似

一阶 Born 近似（BA）做出了弱散射假设，而 Rytov 近似（RA）则做了电大尺寸线性相位假设，二者均使得  $[\mathbf{I} - \text{diag}(\chi) \cdot \mathbf{G}_D] \approx \mathbf{I}$ ，得到的连续和离散方程分别为

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{sca}(\mathbf{r}) &= k_0^2 \int_V \overline{\overline{\mathbf{G}}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}') \chi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\ \mathbf{e}^{sca} &= \mathbf{G}_C \cdot \text{diag}(\mathbf{e}^{inc}) \cdot \chi\end{aligned}\quad (2.44)$$

由此得到一阶近似下的线性逆散射模型。如果进一步做远场假设，则测量的散射场和入射场均为写为平面波

$$\mathbf{E}^{sca}(\mathbf{r}_m) \approx k_0^2 \sum_i \alpha_i \int_V \frac{\exp(-jk_0 |\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'|} \chi(\mathbf{r}') e^{-jk_0 |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'$$

上式构成了常见的雷达回波的谱域表达式。可见，常见远场条件下的电大尺寸逆散射问题就是经典的雷达成像问题。然而实际问题中，大多数目标为强散射体，这导致弱散射近似存在较大的局限性<sup>[39]</sup>。因此，做高阶线性展开，通过迭代的方式拟合非线性过程成为了逆散射重建的主流方法。

### (3) Born 迭代类方法

经典的迭代方法则从 Born 近似发展而来，首先求解 BA 问题获得目标函数初值，根据该初值求解正问题更新总场，并将更新的总场代入下一次迭代中作为 BA 的入射场，由此循环迭代直到收敛。其迭代流程如下

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_0 &= \mathbf{e}^{inc} \\ \chi_n &= \arg \min_{\chi} \left\| \mathbf{e}^{sca} - \mathbf{G}_C \cdot \text{diag}(\mathbf{e}_{n-1}) \cdot \chi \right\| \\ \mathbf{e}_n &= \mathbf{e}^{inc} + \mathbf{G}_D \cdot \text{diag}(\mathbf{e}_{n-1}) \cdot \chi_n\end{aligned}$$

由此得到 Born 迭代法（BIM）<sup>[41]</sup>。易见 BIM 的迭代余差关系为

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_{n-1} - \mathbf{L} \mathbf{r}_{n-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{L})^n \mathbf{r}_0$$

其中， $\mathbf{L}$  为(2.42)中的正过程算子，可见上式的余差收敛性建立在算子范数  $\|\mathbf{I} - \mathbf{L}\|$  小于 1 的前提下。而满足该收敛性则需要  $\mathbf{L}$  中  $\mathbf{G} \cdot \text{diag}(\chi)$  足够小，即弱散射条件成立，因此 BIM 方法并没有脱离受限于弱散射假设的局限性<sup>[26]</sup>。在此基础上衍生了变形 Born 迭代（DBIM）和变分 Born 迭代（VBIM），前者将上一步迭代出的散射体影响归入下一步的格林函数内，后者则将上一步的迭代余差作为下一步

的测量更新散射体对比度的残差<sup>[95][96]</sup>。这两类方法均为二阶迭代，等价于求解非线性方程的 Newton–Kantorovich 方法，故收敛速度高于 BIM 方法，但是并没有改变其受限于弱散射条件的问题<sup>[97]</sup>。

#### (4) 对比度源-扩展 Born 近似法

对该问题的改进则建立在扩展 Born 近似（EBA）上，考虑格林函数随着场点和源点接近时指数增大的性质，在 EBA 中对(2.8)做出如下近似

$$k_0^2 \int_V \overline{\overline{G}_0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \chi(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \approx k_0^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \int_V \overline{\overline{G}_0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \chi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

由此得到

$$\mathbf{e} = [\mathbf{I} - \text{diag}(\mathbf{G}_0 \chi)]^{-1} \mathbf{e}^{inc}$$

由于总场乘以目标函数  $\chi$  即构成等效电流，因此参考逆源方法打包目标函数的非线性，并在此基础上抛去入射场的影响以便于相干处理<sup>[98]</sup>，定义中间变量为

$$\mathbf{w} = [\mathbf{I} - \text{diag}(\mathbf{G}_0 \chi)]^{-1} \chi$$

由此将非线性方程的求解拆分为两步，首先求解中间变量  $\mathbf{w}$ ，再根据  $\mathbf{w}$  求  $\chi$ ：

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \arg \min_{\mathbf{w}} \|\mathbf{e}^{sca} - \mathbf{G}_C \cdot \text{diag}(\mathbf{e}^{inc}) \cdot \mathbf{w}\| \\ \chi &= \arg \min_{\chi} \|[\mathbf{I} - \text{diag}(\mathbf{G}_D \chi)] \mathbf{w} - \chi\| \end{aligned}$$

由此得到了逆源-扩展 Born 方法（CS-EB）<sup>[99]</sup>。可以证明，基于 EBA 的非线性求解方法 CS-EB 能有效处理高对比度的强散射体<sup>[100]</sup>。

#### (5) 逆对比度源法

逆对比度源（CSI）方法虽然早于 CS-EB 被提出，却在非线性问题上有着更为有效而广泛的应用<sup>[37][47-50][52-58]</sup>。不同于 CS-EB 方法仅做两步求解，CSI 通过交替迭代中间变量  $\mathbf{w}$  和目标函数  $\chi$  完成非线性拟合。CSI 定义对比度源为中间变量

$$\mathbf{w}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \chi(\mathbf{r})$$

由此将非线性问题拆分为关于对比度源的测量方程和关于对比度函数的状态方程

$$\begin{cases} \mathbf{e}^{sca} = \mathbf{G}_C \cdot \mathbf{w} \\ \mathbf{w} = \text{diag}(\mathbf{e}^{inc} + \mathbf{G}_D \mathbf{w}) \cdot \chi \end{cases}$$

通过最小化测量方程和状态方程的余差来交替更新对比度源和对比度函数。其中，CSI 第  $n$  步的更新表达式为：

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_n &= \arg \min_{\mathbf{w}} \frac{\|\mathbf{e}^{sca} - \mathbf{G}_C \cdot \mathbf{w}\|}{\|\mathbf{e}^{sca}\|} + \frac{\|\mathbf{w} - diag(\mathbf{e}^{inc} + \mathbf{G}_D \mathbf{w}) \cdot \chi_{n-1}\|}{\|diag(\mathbf{e}^{inc}) \cdot \chi_{n-1}\|} \\ \chi_n &= \arg \min_{\chi} \|\mathbf{w}_n - diag(\mathbf{e}^{inc} + \mathbf{G}_D \mathbf{w}_n) \cdot \chi\| \end{aligned}$$

可见，不同于逆源方法和 CS-EB，CSI 在更新对比度源  $\mathbf{w}$  时额外引入了状态方程的余差约束解空间，故能获取更准确的结果。因此，CSI 方法适用于 Born 类方法无法处理的高对比度强散射目标<sup>[124]</sup>。

#### (6) 定量线性采样法

易见 CS-EB 和 CSI 方法均通过引入中间变量对非线性问题进行拆解，且该中间变量往往是定性重建的目标函数。参考这一思路，基于指示函数的线性采样方法（LSM）被提出。其中，指数函数定义为

$$\int_C \xi(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{E}^{sca}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}_i = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) \cdot \mathbf{u}_z$$

其中， $\mathbf{r}_i$  和 C 分别为激励源的位置和所在区域， $\mathbf{u}_z$  为散射场矢量方向， $\mathbf{r}_s$  称为采样点。指示函数将散射场映射为采样点处的冲激源辐射场，从定义可得，指示函数  $\xi$  和打包总场非线性效应的对比度源  $\mathbf{w}$  互补：

$$\int_C \xi(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{w}_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r}_i = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) \cdot \mathbf{u}_z \quad (2.45)$$

故当采样点在等效源处时  $\xi(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i)$  有值，而采样点在等效源外时  $\xi(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i)$  发散<sup>[102]</sup>。因此， $\xi(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i)$  是等效电流的指示函数，被用于定性重建。在(2.8)两侧同时与该函数内积得到

$$\begin{aligned} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) \mathbf{u}_z &= k_0^2 \int_V \overline{\mathbf{G}_0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \chi(\mathbf{r}') \left[ \int_C \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}') \xi(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) d\mathbf{r}_i \right] d\mathbf{r}' \\ &= k_0^2 \int_V \overline{\mathbf{G}_0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \chi(\mathbf{r}') \Psi^{inc}(\mathbf{r}', \mathbf{r}_s) d\mathbf{r}' \end{aligned}$$

由此得到关于目标函数  $\chi$  的定量重建方程。对上式离散化后可以得到定量线性采样方法（QLSM）的两个问题

$$\begin{aligned} \xi &= \arg \min_{\xi} \|\xi \cdot \mathbf{e}^{sca} - \mathbf{g}_0\| \\ \chi &= \arg \min_{\chi} \|\mathbf{g}_0 - \mathbf{G}_D diag(\xi \cdot \mathbf{e}^{inc} + \mathbf{g}_0) \chi\| \end{aligned}$$

其中  $\mathbf{g}_0$  离散化后格林函数的向量，由此将非线性逆散射问题拆分为两个线性问题求解。由于 QLSM 经过指示函数映射后的散射场精确已知，故可以任意增加虚拟测量点来扩充定量重建方程的测量数据<sup>[103]</sup>。由于总场和散射场的线性关系，这种虚拟测量等价于在测量方程两侧同乘以预条件矩阵<sup>[104]</sup>。由于指示函数在目标外发散，故指示函数不存在可逼近的真值。而虚拟实验建立在对指示函数的精

确求解上，因此 QLSM 的定量重建精度并不高。

随着重建目标的对比度增大，当算子  $[I - \text{diag}(\chi) \cdot G_D]$  中单位算子远小于  $\chi$  的取值时，该矩阵的条件数增大从而提高非线性逆散射的病态性。虽然以上 BIM、CS-EB、CSI 和 QLSM 均能实现非线性定量逆散射重建的任务，但是随着方程病态性的增加，仅依靠非线性重建算法也无法处理更高对比度的强散射目标。因此，逆散射重建的另一个研究重点在于病态问题的正则化理论。

## 2.3 逆散射问题的数学理论

在《自然哲学的数学原理》中，牛顿打下了现代科学的研究基础，即用严谨的数学语言来解析自然界的物理问题，确保自洽的逻辑完全主导理论的论述、推演和检验过程。由此将经验和归纳为主的自然认识拔高到了公理和定理体系构建的现代物理学，减少了对自然科学探索中因个人经验和粗糙逻辑带来的弯路。

现实世界的物理问题在宏观上总是无限或不可数维的，无限维空间和有限维空间有着质的区别，故不能简单诉求于矩阵类方法的结论。数学分析中有大量违背直觉的反例来说明：有限维的结论无法通过归纳而扩展到无限维。而在抽象函数空间得到的结论更具有普适性，也更能严谨的反映物理问题的本源。因此，在给出散射问题的物理模型后，本节将从数学分析的角度来论述散射问题所属的一大类问题的数学原理。

### 2.3.1 逆问题概述

给定散射问题的模型后，首先需要研究该类问题是否可逆，即方程是否可解。在此基础上，我们会说明为什么逆散射问题的求解比正散射问题的求解更困难。其次，我们将给出对该类问题可逆性的评价标准。

由于散射是一个真实的物理问题，因此对方程可逆性的研究需要回溯到离散化前的不可数维积分方程上。为了方便表示这类问题，我们将在抽象空间上定义该方程的映射关系。对定义在复数域  $\Omega$  上的函数  $f(t) \in X$ ，有范数

$$\|f(t)\| = \left( \int |f(t)|^p d\mu \right)^{1/p} \quad (2.46)$$

其中， $\mu$  为  $\Omega$  上的 Lebesgue 测度， $p$  为正数。则  $(\Omega, X, \mu)$  依范数(2.46)构成赋范空间  $L^p(\Omega, X, \mu)$ ，且可以证明该空间是完备的 Banach 空间。通常场量和散射体均为能量有限函数，故可以定义在在平方可积函数空间  $L^2$  上。对于任意  $L^2(\Omega, X, \mu)$  上的函数  $f(t)$  和  $g(t)$ ，可以在其上定义内积

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int f(t) \overline{g(t)} d\mu \quad (2.47)$$

可以证明该内积可以诱导出范数(2.46)，且  $L^2(\Omega, X, \mu)$  依内积(2.47)构成 Hilbert 空

间。由此确定讨论函数所在的抽象空间，在该空间上有 Banach 逆算子定理<sup>[105]</sup>：

**定理 2.3.1：**

给定 Banach 空间  $X, Y$ ,  $K$  是  $X$  到  $Y$  的映射。若  $K$  是有界线性算子，且实现了  $X \rightarrow Y$  的一一映射，则  $K^{-1}$  是有界算子，即算子  $K$  可逆。

可逆算子又称为正则算子，该算子对应由 Hadamard 在 1923 年提出的良态问题的定义：如果算子方程  $Kx = y$  是良态的，则如下三个条件必须均成立

- 存在性：对任意  $y \in Y$ , 存在  $x \in X$  使得  $Kx = y$ ;
- 唯一性：对任意  $y \in Y$ , 有且仅有唯一的  $x \in X$  使得  $Kx = y$ ;
- 稳定性：解连续依赖于数据，对任意  $Kx_n \rightarrow Kx$  总有  $x_n \rightarrow x$ 。

易见，定理中定义 Banach 空间上的映射保证了解的存在性；而限制  $X \rightarrow Y$  上的一一映射确保了解的唯一性；最后约束  $K$  是有界线性算子保证了解的稳定性。当算子  $K$  不满足以上任意条件，就构成了不可逆算子，相应的  $Kx = y$  称为病态问题。即

- 无解：对任意  $y \in Y$ , 不存在  $x \in X$  使得  $Kx = y$ ，例如超定问题；
- 无唯一解：对任意  $y \in Y$ , 有非唯一的  $x \in X$  使得  $Kx = y$ ，例如欠定问题；
- 无收敛解：解不连续依赖于数据，任意微小扰动会导致解发散，例如有噪问题。

综上，Banach 逆算子定理对当前函数空间上算子的可逆与否提供了明确的界定。根据该界定，可以证明该空间上一大类算子——紧算子不符合可逆算子的定义。在说明之前，先直接给出如下引理<sup>[105]</sup>：

### Riesz 引理：

设  $M$  是线性赋范空间  $X$  的一个真闭子空间，那么对于任意  $\varepsilon \in (0, 1)$ , 存在  $x \in X$  且  $\|x\| = 1$  使得  $\rho(x, M) \geq \varepsilon$ 。其中  $\rho(x, M) = \inf\{\rho(x, y) | y \in M\}$ 。

根据 Riesz 引理，可以证明如下定理：

### 定理 2.3.2：

给定 Banach 空间  $X, Y$ , 线性紧算子  $K$  是  $X$  到  $Y$  的映射。则算子  $K$  的值域  $R(K)$  是闭的，当且仅当  $K$  是有限秩算子。

由  $K$  是有限秩算子可以推知  $R(K)$  是有限维，故可以通过假设  $R(K)$  是无限维空间反证，证明过程如下：

由  $R(K)$  是 Banach 空间  $Y$  的闭的子空间可知  $R(K)$  是完备的子空间。进而由 Baire 纲定理可知  $R(K)$  是第二纲集，即  $R(K)$  存在内点（或者说  $R(K)$  包含某个开球）。令内点为  $x_0$ , 必存在关于  $x_0$  的邻域  $S(x_0, \varepsilon) \subset R(K)$ , 其中  $\varepsilon > 0$ 。则可以通过构造出邻域内一组不收敛的子列来说明  $S(x_0, \varepsilon)$  不是致密集，构造方法如下。

任意取  $S(x_0, \varepsilon)$  内的单位向量  $x_1$ ,  $\|x_1\|=1$ , 构造由  $x_1$  在  $S(x_0, \varepsilon)$  内张成的一维子空间

$S_1 = \{x | x = \alpha x_1, x \in S\}$ 。由于任意线性赋范空间的有限维空间是闭子空间，故  $S_1$  是  $S(x_0, \varepsilon)$  内的闭子空间[105]。根据 Riesz 引理，存在  $x_2 \in S$ ,  $\|x_2\|=1$ , 使得  $\rho(x_2, S_1) > 1/\varepsilon$  (若  $\varepsilon < 1$ , 则设为  $1/2$ )。进而构造由  $x_1$  和  $x_2$  张成的二维子空间  $S_2$ 。同理  $S_2$  是  $S$  上的闭子空间，并可以根据 Riesz 引理找到  $x_3$  使得  $\rho(x_3, S_2) > 1/\varepsilon$ 。重复搜下去就可以构造出一列单位向量  $\{x_k | k=1,2,3,\dots\}$  和一列闭子空间  $\{S_k\}$ 。满足  $\{S_k\} \subset \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ , 且  $\rho(x_{k+1}, S_k) > 1/\varepsilon$ 。故对  $\mu > v$  有

$$\|x_\mu - x_v\| \geq \rho(x_\mu, R_v) \geq \rho(x_\mu, R_{\mu-1}) \geq \frac{1}{\varepsilon} \quad (2.48)$$

可见在  $S(x_0, \varepsilon)$  内构造出的点列  $\{x_k\}$  并不收敛，即  $R(K)$  内存在不收敛的点列。由于紧算子的值域为致密集，而  $R(K)$  内存在不收敛的点列与  $K$  是紧算子的条件相互矛盾。故假设不成立，值域  $R(K)$  是闭的当且仅当  $R(K)$  是有限维的。

根据该定理，可以得到如下推论：

### 推论 1

无限维 Banach 空间  $X$ 、 $Y$  上的紧算子  $K: X \rightarrow Y$  一定不是线性有界算子。

假设紧算子  $K$  是线性有界算子，由定理 2.3.2 可知  $R(K)$  一定是开集。则令定义域内的单位开球为  $O(0,1) \in X$ , 有  $KO(0,1) \in Y$  是开集且致密。类似定理 2.3.2 的证明过程，我们可以通过 Riesz 引理进行构造证明无限维 Banach 空间的开球不致密。故假设不成立，紧算子  $K$  不是线性有界算子。

根据定理 2.3.1 可知， $L^2(\Omega, X, \mu)$  上的紧算子不可逆。接下来说明  $L^2(\Omega, X, \mu)$  上的第一类 Fredholm 积分算子是紧算子。

给定  $K(s, t) \in L^2(R)$ , 其中  $R_{[a, b]}$  是  $[a, b] \times [a, b]$ ,  $-\infty < a < b < +\infty$ 。在  $L^2[a, b]$  上，作算子

$$(K\varphi)(s) = \int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt, \quad \varphi \in L^2[a, b] \quad (2.49)$$

证明平面上的阶梯函数全体  $J$  在  $L^2[a, b]$  中稠密，就能找到某些矩形集  $R_v = (a_v, b_v) \times (c_v, d_v) \subset R_{[a, b]}$  的特征函数  $\chi_{R_v}(s, t) = \chi_{(av, bv)}(s) \chi_{(cv, dv)}(t)$  的线性组合  $K_n(s, t) = \sum_{v=1}^m \alpha_v \chi_{R_v}(s, t)$ , 满足  $\|K(s, t) - K_n(s, t)\| \rightarrow 0$

$$\iint_{R_{[a,b]}} |K(s, t) - K_n(s, t)|^2 ds dt \rightarrow 0 \quad (2.50)$$

首先，任意给定有理数  $1/n \in \mathbb{Q}$ , 且  $1/n < (b-a)$ 。构造一组可列个互不相交的开矩形  $\{(a+p/n, a+(p+1)/n) \times (a+q/n, a+(q+1)/n)\} \supset R_{[a, b]}$ 。由于有理数集合在实数集中稠密，则对任意  $(s, t) \in R_{[a, b]}$ , 其在邻域  $S(s, \delta) \times S(t, \delta)$  内，对任意  $\delta > 0$ , 总存在  $n$  使得  $(a+p/n, a+(p+1)/n) \in S(s, \delta)$  和  $(a+q/n, a+(q+1)/n) \in S(t, \delta)$ 。则任意给定  $f(s, t) \in L^2[a, b]$ , 可以构造阶梯函数

$$f_n(s, t) \equiv f(a+p/n, a+q/n) \begin{cases} a+p/n < s < a+(p+1)/n, \\ a+q/n < t < a+(q+1)/n \end{cases} \quad (2.51)$$

故有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{R_{[a,b]}} |f_n(s,t) - f(s,t)|^2 ds dt \rightarrow 0 \quad (2.52)$$

故平面上的阶梯函数全体  $J$  在  $L^2[a, b]$  中稠密。由(2.50)可知,  $\|K_n - K\| \rightarrow 0$ 。故只要证明  $K_n$  是  $L^2[a, b] \rightarrow L^2[a, b]$  上的紧算子, 就可以证明  $K$  是  $L^2[a, b] \rightarrow L^2[a, b]$  上的紧算子。对任意  $\varphi \in L^2[a, b]$  有

$$\begin{aligned} (K_n \varphi)(s) &= \int_a^b K_n(s, t) \varphi(t) dt \\ &= \sum_{v=1}^m \alpha_v \chi_{(av, bv)}(s) \int_a^b \chi_{(cv, dv)}(t) \varphi(t) dt \end{aligned} \quad (2.53)$$

可见,  $K_n$  的值落在  $\{\chi_{(av, bv)}(s)\}$  ( $v=1, 2, \dots, m$ ) 张成的线性子空间内, 该子空间是可数维的 ( $m \rightarrow \infty$ )。故  $K_n$  是紧算子, 进而推知  $K$  是紧算子。

综上, 第一类 Fredholm 积分算子将不可数维空间  $L^2[a, b]$  映射为可数维空间  $\{\chi_{(av, bv)}(s)\}$ , 从而导致了病态性。而第二类 Fredholm 积分算子的可逆性则可以由 Fredholm 二择一定理证明<sup>[24]</sup>:

### 定理 2.3.3:

给定线性赋范空间  $X$  及其上的紧算子  $K: X \rightarrow X$ , 则以下两种可能有且只有一个发生:

1. 存在  $x \in X$  且  $x \neq 0$ , 使得  $x - Kx = 0$ ;
2. 对任意  $y \in X$ , 存在唯一的  $x \in X$ , 使得  $x - Kx = y$ 。

易见, 当  $K$  是第一类 Fredholm 积分算子时, 第二类 Fredholm 积分算子( $I - K$ )是有界线性算子。因此, 正散射问题(2.19)和(2.38)均为良态问题, 而逆散射问题(2.21)和(2.39)均为病态问题。

为了衡量病态问题对方程求解的影响, 也为了方便后续对逆问题算法的评价, 定义在观测量受到扰动时, 解可以偏离的最大误差称为“最坏条件误差”。

考虑线性有界算子  $K: X \rightarrow Y$  是 Banach 空间之间的映射, 且有子空间  $X_1 \subset X$ 。令范数  $\|\cdot\|_1$  是子空间  $X_1$  上比  $\|\cdot\|$  的更强的范数 (即: 对任意  $x \in X_1$ , 存在  $k \in (0, 1)$  使得  $\|x\| \leq k\|x\|_1$ )。由此可以定义如下最坏条件误差:

$$F(\delta, E, \|\cdot\|_1) := \sup \left\{ \|x\| : x \in X_1, \|Kx\| \leq \delta, \|x\|_1 \leq E \right\} \quad (2.54)$$

以上就是给定数据误差在  $\delta$  以内和先验信息  $\|x\|_1 \leq E$  时的最坏条件误差, 其中先验信息  $\|x\|_1 \leq E$  表示将解空间  $x$  限制在  $X_1$  上。

易见, 当方程  $y = Kx$  良态时, 逆算子是有界算子, 由算子范数定义可知  $\|x\| \leq \|K^{-1}\| \cdot \|Kx\| \leq \delta \|K^{-1}\|$ 。故当数据误差  $\delta$  收敛到 0 时, 最坏条件误差同样收敛到 0。即使是良态问题, 也不存在消除误差的情况, 仅是保证解的偏差和数据偏差一致。而对于  $K$  是紧算子的情况, 当令  $\|\cdot\|_1$  和  $\|\cdot\|$  等价时, 有如下引理<sup>[13]</sup>:

**引理 2:**

对线性紧算子  $K: X \rightarrow Y$ , 假设  $X/N(K)$  为无限维。则对任意  $E > 0$ , 总存在  $c > 0, \delta_0 > 0$  使得  $F(\delta, E, \|\cdot\|) \geq c$  对任意  $\delta \in (0, \delta_0)$  成立。

其中,  $N(K)$  为算子的零空间,  $X/N(K)$  表示  $X$  中零空间的补空间。

对于病态逆问题, 在不约束解空间的情况下, 不论测量误差有多小, 最坏条件误差都可以达到任意大。该结论对应于病态问题的不稳定性, 即任意小的扰动都会让解发散。而根据定理 2.3.2 的证明可以得知其根源在于紧算子的值域  $R(K)$  不构成完备的子空间, 故无法获得有界的逆算子。然而任意线性赋范空间的共轭空间是完备的, 因此可以在  $R(K)$  的共轭空间找到其对应的完备化。通过约束共轭算子的定义域  $\|y^*\|_{Y^*} \leq E$  来使用对其值域  $\|x^*\|$  的约束, 在保范同构统一化下等价于约束算子的解空间  $\|x\|$ 。因此, 有如下定理<sup>[13]</sup>

**定理 2.3.4:**

令  $X, Y$  是 Hilbert 空间, 并有线性紧算子  $K: X \rightarrow Y$  且算子的值域  $R(K)$  为稠密集。令其共轭算子为:  $K^*: X \rightarrow Y$

- 1) 令子空间  $X_1 := R(K^*)$ , 且对任意  $x \in X_1$  有  $\|x\|_1 := \|(K^*)^{-1}x\|_Y$ 。则:

$$F(\delta, E, \|\cdot\|_1) \leq \sqrt{\delta E} \quad (2.55)$$

且对任意  $E > 0$ , 存在  $\delta_n \rightarrow 0$  使得  $F(\delta_n, E, \|\cdot\|_1) = \delta_n^{1/2} E^{1/2}$ 。

- 2) 令子空间  $X_2 := R(K^*K)$ , 对任意  $x \in X_2$  有  $\|x\|_2 := \|(K^*K)^{-1}x\|_X$ 。则:

$$F(\delta, E, \|\cdot\|_2) \leq \delta^{2/3} E^{1/3} \quad (2.56)$$

且对任意  $E > 0$ , 存在  $\delta_n \rightarrow 0$  使得  $F(\delta_n, E, \|\cdot\|_2) = \delta_n^{2/3} E^{1/3}$ 。

令  $x^* = K^*y^* \in X_1$  则  $\|x^*\|_1 = \|(K^*)^{-1}K^*y^*\|_{Y^*} = \|y^*\|_{Y^*} \leq E$ , 则有

$$\|x^*\|^2 = \langle x^*, K^*y^* \rangle = \langle Kx^*, y^* \rangle \leq \|Kx^*\| \|y^*\| = \delta E \quad (2.57)$$

由于 Hilbert 空间是自伴的, 故可以在保范同构统一化的前提下得到(2.55)。同理可以证明(2.56)。

根据定理 2.3.4 可见, 当数据受到扰动时, 对解空间的约束能避免解的发散。由此保证了稳定性, 从而将不可逆的病态问题转化为可逆的良态问题。因此, 需要进一步讨论将病态问题转化为良态问题的数学框架, 即正则化。

### 2.3.2 病态逆问题的正则化理论

在 2.3.1 中说明了逆散射问题的病态性, 并将其与良态的正散射问题区分开。此外, 最坏条件误差的定义给逆问题的病态性提供了一个的衡量标准。在无解空间约束下的最坏条件误差可以任意大。而解空间的约束越强, 误差随数据误差收

敛阶数越高。由于抽象空间的结论具有普适性，故我们可以将大多数的方程求解方法放到统一的框架下来进行论述，即病态问题的正则化。

将病态问题转换为良态问题等价于用可逆算子来逼近原始的不可逆算子。因此，当给定 Banach 空间  $X, Y$  及其上的线性紧算子  $K: X \rightarrow Y$ 。一个正则化策略是构造一族线性有界算子  $R_\alpha: Y \rightarrow X, \lambda > 0$  对任意  $x \in X$  满足：

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha Kx = x \quad (2.58)$$

即  $R_\alpha K$  逐点收敛于单位算子。其中， $\alpha$  称为正则化参数。易见，(2.58)是对  $x$  的渐进无偏估计。

当数据有扰动时  $y^\delta = y + \delta$ ，则根据正则化策略的定义，有  $x^{\alpha, \delta} = R_\alpha y^\delta$  的误差

$$\begin{aligned} \|x^{\alpha, \delta} - x\| &\leq R_\alpha \|y^\delta - y\| + \|R_\alpha Kx - x\| \\ &= \delta \|R_\alpha\| + \|(R_\alpha - K^{-1})y\| \end{aligned} \quad (2.59)$$

易见，解的偏差由数据扰动  $\delta \|R_\alpha\|$  和逆算子逼近程度  $\|(R_\alpha - K^{-1})y\|$  共同决定。当  $\lambda \rightarrow 0$  时， $\|R_\alpha\| \rightarrow \|K^{-1}\|$  并不收敛，从而放大数据扰动。而当  $\alpha$  增大时，(2.59)后项误差则随之增大，因此需要合适的正则化策略  $\alpha(\delta)$  以保证误差是可以接受的。

一个  $\alpha = \alpha(\delta)$  的正则化策略被称为“可接受的策略”必须满足对任意  $x \in X$ ，有：

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta) = 0 \quad (2.60)$$

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \|R_{\alpha(\delta)} y^\delta - x\| : y^\delta \in Y, \|Kx - y^\delta\| \leq \delta \right\} = 0 \quad (2.61)$$

而当(2.61)收敛速率和最坏条件误差(2.55)和(2.56)一致或是更高时，则被称为“最优的策略”。据此来评价正则化策略的优劣。为了在紧算子中检验该正则化策略，首先给出紧算子的奇异系展开。算子的特征值定义为存在  $x \in X$ ，满足  $(\lambda I - K)x = 0$  的  $\lambda$ 。由于可数维空间在紧算子的值域中稠密，紧算子最多只有可数个不同的特征值，且无 0 以外的聚点。因此可以定义紧算子的奇异系分解为：

给定线性紧算子  $K$  及其共轭算子  $K^*: Y^* \rightarrow X^*$ ，有自伴算子  $K^* K: X \rightarrow X$  的特征值  $\lambda_j$  ( $j \in J$ )，令  $\mu_j = \lambda_j^{-1/2}$  为算子  $K$  的奇异值。则存在一组标准直交系  $\{x_j\} \in X$  和  $\{y_j\} \in Y$  满足

$$\begin{aligned} Kx_j &= \mu_j y_j & \forall j \in J \\ K^* y_j &= \mu_j x_j \end{aligned} \quad (2.62)$$

则称直交系  $(\mu_j, x_j, y_j)$  为算子  $K$  的奇异系。由于标准直交系满足  $x = x_0 + \sum_j \langle x, x_j \rangle x_j$  和  $y = y_0 + \sum_j \langle y, y_j \rangle y_j$ ，故有

$$Kx = \sum_j \mu_j \langle x, x_j \rangle y_j \quad (2.63)$$

假设算子可逆时，则有

$$x = \sum_j \frac{\langle y, y_j \rangle}{\mu_j} x_j \quad (2.64)$$

然而，紧算子的特征值聚点为 0，故其奇异值由大到小排序收敛到 0，(2.64)的分母会导致解发散，故需要正则化因子限制该项。

给定将二元域  $(\alpha, \mu)$  映射到实数域  $R$  的泛函  $q$ ，其中  $\alpha \in (0, \infty)$ ,  $\mu \in (0, \|K\|]$ 。泛函  $q$  符合算子  $K$  的正则化因子，当且仅当<sup>[13]</sup>:

- 1) 任意  $\alpha \in (0, \infty)$ ,  $\mu \in (0, \|K\|]$ , 有  $|q(\alpha, \mu)| \leq 1$ ;
- 2) 任意  $\alpha \in (0, \infty)$ ,  $\mu \in (0, \|K\|]$ , 存在  $c(\alpha)$  满足  $|q(\alpha, \mu)| \leq c(\alpha) \mu$ ;
- 3) 任意  $\mu \in (0, \|K\|]$ ,  $\alpha \rightarrow 0$ , 有  $q(\alpha, \mu) \rightarrow 1$ 。

若  $\alpha$  又满足  $\delta \rightarrow 0$  时  $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ ，则算子

$$R_\alpha y := \sum_j \frac{q(\alpha, \mu_j)}{\mu_j} \langle y, y_j \rangle x_j \quad (2.65)$$

构成满足  $\|R_\alpha\| \leq c(\alpha)$  的可接受的正则化策略。可见，正则化因子起到了对逆算子的谱做滤波的作用。

### (1) Tikhonov 正则化

给定 Banach 空间上的紧算子  $K: X \rightarrow Y$ ，则  $\|Kx - y\| \leq \|Kx - y\|$  对任意  $x \in X$  成立的前提是  $K^* K \dot{x} = K^* y$ 。由于紧算子不可逆，故这样的最优解  $\dot{x}$  不存在。根据 Fredholm 二择一定理可知，当前前提式被改写为  $(\alpha I + K^* K)\dot{x} = K^* y$  时，构成了可解的良态问题。当我们根据这样的前提式重写不等式关系就得到 Tikhonov 函数，如下定理所示

#### 定理 2.3.5:

给定 Hilbert 空间上的映射  $K: X \rightarrow Y$  以及  $\alpha > 0$ ，则 Tikhonov 函数  $J_\alpha = \|Kx - y\|^2 + \alpha \|x\|^2$  可以取到唯一的极小值  $x^\alpha \in X$  满足

$$\alpha x^\alpha + K^* K x^\alpha = K^* y \quad (2.66)$$

如果将其写为正则化策略，则有  $x^\alpha = (\alpha I + K^* K)^{-1} = R_\alpha y$  满足

$$R_\alpha y = \sum_j \frac{\mu_j^2}{\mu_j^2 + \alpha} \frac{\langle y, y_j \rangle}{\mu_j} x_j \quad (2.67)$$

故 Tikhonov 正则化的正则化因子为  $q(\alpha, \mu) = \mu^2 / (\mu^2 + \alpha)$ 。易证

$$\|R_\alpha\| = \frac{\mu^2}{\mu^2 + \alpha} \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \quad (2.68)$$

故对  $\delta \rightarrow 0$ ，任意满足  $\delta^2/\alpha(\delta) \rightarrow 0$  的  $\alpha(\delta)$  均为可接受的正则化策略。将(2.68)代入定理 2.3.4 可以得到相应先验下的条件误差

1) 令  $x = K^*z \in R(K^*)$  且  $\|z\| \leq E, c > 0$ 。选择  $\alpha(\delta) = c\delta/E$ , 有

$$\|x^{\alpha(\delta), \delta} - x\| \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{c}} + \sqrt{c} \right) \sqrt{\delta E} \quad (2.69)$$

2) 令  $x = K^*Kz \in R(K^*K)$  且  $\|z\| \leq E, c > 0$ 。选择  $\alpha(\delta) = c(\delta/E)^{2/3}$ , 有

$$\|x^{\alpha(\delta), \delta} - x\| \leq \left( \frac{1}{2\sqrt{c}} + \sqrt{c} \right) E^{1/3} \delta^{2/3} \quad (2.70)$$

可见, 在有子空间约束  $x \in R(K^*)$  和  $x \in R(K^*K)$  时, Tikhonov 正则化可以得到与 (2.55) 和 (2.56) 一致的收敛速率, 故构成一个较优的正则化策略。

然而, 给出更紧的约束  $x \in (K^*K)^r X$  并不能提高 Tikhonov 正则化的误差收敛速率, 这里不加证明的给出如下定理<sup>[13]</sup>

### 定理 2.3.6:

假设存在连续函数  $\alpha: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , 对任意满足  $\|y^\delta - Kx\| \leq \delta$  的  $y^\delta \in Y$ , 为  $x^{\alpha(\delta), \delta} \in X$  相应  $y^\delta$  的解, 若有关系

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|x^{\alpha(\delta), \delta} - x\| \delta^{-2/3} = 0 \quad (2.71)$$

则必有  $x = 0$

故对解  $x$  给出更强的光滑度假设估计并不能使得 Tikhonov 正则方法达到更优 ( $x \in (K^*K)^r(X), r \geq 2$ )。Tikhonov 正则化在逆散射重建中往往被用于对状态方程的约束, 并不被单独作为正则化项提出。

## (2) 稀疏正则化方法

然而, 将定理 2.3.5 的 Tikhonov 函数推广为更一般的形式, 可以通过更强的范数约束提高误差收敛速率。广义的 Tikhonov 函数为

$$J_\alpha^{p,q} = \|Kx - y\|^p + \alpha R_q(x) \quad (2.72)$$

其中,  $R_q(x) = \sum_i \omega_i |\langle \phi_i, x \rangle|^q$ ,  $q \geq 1$ 。易见,  $R_q: X \rightarrow C \cup \{\infty\}$  是弱凸且下半连续的泛函<sup>[106]</sup>。对于比二范数更强的约束条件  $1 \leq q < 2$ , 现做如下假设

### 假设 1:

方程  $Kx = y$  有  $R_q$  最小化解  $x^\dagger$  满足  $R_q(x^\dagger) = \min\{R_q(x): Kx = y\}$ , 且存在

$\beta_1, \beta_2 > 0$ ,  $r > 0$ ,  $\sigma > 0$  和  $\rho > 0$  使得

$$R_q(x) - R_q(x^\dagger) \geq \beta_1 \|x - x^\dagger\|^r - \beta_2 \|Kx - Kx^\dagger\| \quad (2.73)$$

对任意满足  $R_q(x) < \rho$  且  $\|Kx - Kx^\dagger\| < \sigma$  的  $x \in X$  成立。

易见, 假设成立前提是方程的解满足稀疏性, 且(2.73)是典型的 Bregman 度量形式, 而在该假设下有如下定理成立<sup>[106]</sup>:

**定理 2.3.7:**

给定  $y^\delta \in Y$  使得  $\|y^\delta - y\| \leq \delta$  且  $x^{\alpha(\delta), \delta} \in \arg \min \{J_\alpha^{p,q}: x \in X\}$ , 当  $\alpha, \delta$  足够小时有

令  $p = 1$  且  $\alpha\beta_2 < 1$ , 则

$$\|x^{\alpha(\delta), \delta} - x^\dagger\|^r \leq \frac{(1+\alpha\beta_2)\delta}{\alpha\beta_1}, \quad \|Kx^{\alpha(\delta), \delta} - y^\delta\| \leq \frac{(1+\alpha\beta_2)\delta}{1-\alpha\beta_2} \quad (2.74)$$

令  $p > 1$ , 则

$$\begin{aligned} \|x^{\alpha(\delta), \delta} - x^\dagger\|^r &\leq \frac{\delta^p + \alpha\beta_2\delta + (\alpha\beta_2)^{p^*}/p^*}{\alpha\beta_1} \\ \|Kx^{\alpha(\delta), \delta} - y^\delta\| &\leq p * \delta^p + p * \alpha\beta_2\delta + (\alpha\beta_2)^{p^*} \end{aligned} \quad (2.75)$$

其中,  $1/p^* + 1/p = 1$ 。故给定正则化策略  $\alpha \sim \delta^{p-1}$ , 则  $\|x^{\alpha(\delta), \delta} - x^\dagger\|$  的误差收敛速率在  $O(\delta^{1/r})$  量级<sup>[106]</sup>。

故在稀疏假设成立的前提下, 广义 Tikhonov 正则化的误差收敛速率随着更强的范数约束而更快, 理想情况下可以和扰动收敛速率一致  $O(\delta)$ , 即实现无噪声情况下的精确恢复。然而在大多数紧算子问题中, 合适的稀疏表示难以获取, 否则可以直接通过离散化投影的过程将无限维紧算子转换为有限维的正则算子。因此需要考虑稀疏假设不严格成立时的误差收敛速率, 首先给出两个更弱一些的假设:

**假设 2:**

- 1) 存在  $x^\dagger \in \ell^1(\mathbb{N})$  使得方程  $Kx = y$  成立;
- 2) 有  $\ell^q(\mathbb{N})$  空间 ( $1 \leq q \leq \infty$ ) 上的 Schauder 基函数  $\{e_k := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)\}$  满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{k=1}^n x_k e_k \right\|_{\ell^q(\mathbb{N})} = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|Ke_k\|_Y = 0 \quad (2.76)$$

- 3) 对任意  $k \in \mathbb{N}$ , 存在  $f_k \in Y^*$ , 且  $f_k \neq 0$  使得  $e_k = A^*f_k$  成立。

**假设 3:**

令  $x^\dagger \in \ell^1(\mathbb{N})$  非稀疏, 即  $x^\dagger \notin \ell^0(\mathbb{N})$ , 存在  $x^\dagger$  非零的无限长子列  $\{x_{kn}^\dagger \neq 0\}_{n=1}^\infty$ 。

在假设 2 和假设 3 下, 选择正则化策略  $\alpha = \alpha(\delta, y^\delta) > 0$  满足如下强差异性准则

$$c_1\delta \leq \|Kx^{\alpha(\delta), \delta} - y^\delta\|_Y \leq c_2\delta \quad (2.77)$$

对  $1 \leq c_1 \leq c_2 \leq \infty$ 。则可以证明如下结论<sup>[107]</sup>:

**定理 2.3.8:**

给定  $y^\delta \in Y$  使得  $\|y^\delta - y\| \leq \delta$  且  $x^{\alpha(\delta), \delta} \in \arg \min \{J_\alpha^{p,q}: x \in X\}$ , 若有  $K_1, K_2 > 0$  满足

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k^\dagger| \leq K_1 n^{-\mu}, \quad \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{Y^*} \leq K_2 n^\nu \quad (2.78)$$

则有 Hölder 收敛速率

$$\|x^{\alpha(\delta), \delta} - x^\dagger\|_{l^1(\mathbb{N})} = O(\delta^{\mu/(\mu+\nu)}) \quad (2.79)$$

故在非稀疏条件下，1 范数约束的条件误差收敛速率(2.79)并不一定优于 2 范数约束的误差收敛速率(2.70)。

另一种稀疏 Tikhonov 函数的推广是 Total-Variation 正则化，其 Tikhonov 函数写为

$$J_\alpha = \|Kx - y\|^2 + \alpha \|Dx\|_1 \quad (2.80)$$

其中， $D$  是微分算子。对于  $x \in R^n$ ,  $D := x^i - x^{i+1}$ ; 对于  $x \in L^2$ ,  $D := \nabla x$ 。由于微分算符  $D$  有非平凡的零空间，故  $D$  同样是病态的。因此，要证明误差收敛性需要稳定性假设

**假设 4:**

对算子  $K: X \rightarrow Y$  和  $D: X \rightarrow X/N(D)$ , 存在常数  $c_1, c_2 > 0$  使得

$$c_1 \|Kx\|_2 + c_2 \|Dx\|_1 \geq \|x\|_1 \quad (2.81)$$

对任意  $x \in X$  成立。

在该假设下，给定有扰动数据  $y^\delta$ 、正则化策略  $\alpha > 0$  和最小化  $J_\alpha$  的解  $x^\delta(\alpha_n)$ ，当  $\alpha_n \rightarrow \alpha$  时有  $Kx^\delta(\alpha_n) \rightarrow Kx^\delta(\alpha)$ 。故保证了正则化本身的稳定性，基于该假设可以证明存在可接受的正则化策略<sup>[108]</sup>。

**定理 2.3.9:**

当  $K$  和  $D$  满足假设 5，令正则化策略

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^2 / \alpha(\delta) = 0 \quad (2.82)$$

则有  $\{x^\delta(\alpha_n)\} \rightarrow x^\dagger$ 。

在该策略的基础上，有如下关于误差收敛性的结论

**定理 2.3.10:**

若  $x^\dagger$  满足源条件：存在  $\omega$  满足

$$K^* \omega \in D^* \partial \|Kx^\dagger\|_1 \quad (2.83)$$

则有

$$\|Kx_\alpha^\delta - y^\delta\|_2 \leq 2\alpha \|\omega\|_2 + \delta \quad (2.84)$$

且当算子  $K$  是单射时，存在  $\gamma > 0$  使得

$$\|x_\alpha^\delta - x^\dagger\|_2 \leq 2\gamma\alpha \|\omega\|_2 + 2\gamma\delta \quad (2.85)$$

因此，在满足稀疏先验的前提下，全变分正则化的收敛速率同样可以和扰动收敛速率一致  $O(\delta)$ ，即实现无噪声情况下的精确恢复。

而当稀疏条件不成立时，即：对所有  $k \in \mathbb{N}$ ，存在  $f_k \in Y$  使得  $D^* e_k = K^* f_k$ ，且当  $k \rightarrow +\infty$  时  $\|f_k\|_2 \rightarrow +\infty$ 。则有如下结论<sup>[108]</sup>：

**定理 2.3.11：**

令正则化策略为  $\alpha(\delta) = O(\delta^2/\varphi(\delta))$  或是满足强差异性准则，其中

$$\varphi(\delta) := 2 \inf_n \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| (Dx^\dagger)_k \right| + \delta \sum_{k=1}^n \|f_k\| \right\} \quad (2.86)$$

则有误差收敛速率

$$\|x_\alpha^\delta - x^\dagger\|_2 = O(\varphi(\delta)) \quad (2.87)$$

易见，(2.86)并不是一个仅关于  $\delta$  的显式形式，且由于  $f_k$  的发散特性，只能定性的表明非稀疏条件下 TV 正则化的误差收敛速率远低于(2.85)。

### (3) Landweber 迭代

Landweber、Fredman 和 Bialy 等人将问题重写为  $x = (I - aK^*K)x + aK^*y$  形式，并以如下形式迭代求解：

$$\begin{aligned} x^0 &:= 0 \\ x^m &:= (I - aK^*K)x^{m-1} + aK^*y \end{aligned} \quad (2.88)$$

易证，(2.88)等价最小二乘问题的最速下降法。定义泛函  $\Psi: X \rightarrow \mathbb{R}$  为形式  $\Psi(x) = \|Kx - y\|^2/2$ 。则  $\Psi$  对任意  $z \in X$  是 Fréchet 可微的且

$$\begin{aligned} \Psi'(z)x &= \operatorname{Re} \langle Kz - y, Kx \rangle \\ &= \operatorname{Re} \langle K^*(Kz - y), x \rangle \end{aligned} \quad (2.89)$$

故， $x^m = x^{m-1} + aK^*(y - Kx^{m-1})$  是步长为  $a$  的最速下降法。同 Tikhonov 正则化，Landweber 迭代同样可以写出其正则化策略  $R_m: Y \rightarrow X$  为

$$R_m := a \sum_{k=0}^{m-1} (I - aK^*K)^k K^* \quad (2.90)$$

以及算子的奇异系

$$R_m y = \sum_j \frac{1 - (1 - a\mu_j^2)^m}{\mu_j} \langle y, y_j \rangle x_j \quad (2.91)$$

故有正则化因子  $q(m, \mu) = 1 - (1 - a\mu^2)^m$ 。由 Bernoulli 不等式可得

$$1 - (1 - a\mu^2)^m \leq 1 - (1 - am\mu^2) = am\mu^2 \quad (2.92)$$

当取步长  $0 < a < 1/\|K\|^2$  时, 有  $am\mu^2 < 1$ 。故正则化算子范数

$$\|R_m\| < \sqrt{\|R_m\|} \leq \sqrt{am} \quad (2.93)$$

故对  $\delta \rightarrow 0$ , 任意满足  $\delta^2 m(\delta) \rightarrow 0$  的  $m(\delta)$  均为可接受的正则化策略。将(2.93)代入定理 2.3.4 可以得到相应先验下的条件误差<sup>[13]</sup>

1) 令  $x = K^*z \in R(K^*)$  且  $\|z\| \leq E$ ,  $c_1 > c_2 > 0$ 。选择  $c_1 E/\delta \leq m(\delta) \leq c_2 E/\delta$ , 有

$$\|x^{m(\delta),\delta} - x\| \leq f(c_1, c_2, a) \sqrt{\delta E} \quad (2.94)$$

2) 令  $x = K^*Kz \in R(K^*K)$  且  $\|z\| \leq E$ ,  $c_1 > c_2 > 0$ 。选择  $c_1(E/\delta)^{2/3} \leq m(\delta) \leq c_2(E/\delta)^{2/3}$ , 有

$$\|x^{m(\delta),\delta} - x\| \leq f(c_1, c_2, a) E^{1/3} \delta^{2/3} \quad (2.95)$$

可见, 在有子空间约束  $x \in R(K^*)$  和  $x \in R(K^*K)$  时, Landweber 迭代可以得到(2.55)和(2.56)的收敛速率, 故构成一个较优的正则化策略。

不同于 Tikhonov 正则化, 在更紧的子空间假设  $\|(K^*K)x\| \leq E$  下, Landweber 迭代有更强的误差收敛性

$$\|x^{m(\delta),\delta} - x\| \leq c E^{1/(2r+1)} \delta^{2r/(2r+1)} \quad (2.96)$$

可见, 当  $r \rightarrow \infty$  时, Landweber 迭代的误差趋于稀疏条件下的 1 范数 Tikhonov 正则化的误差。

#### (4) Krylov 子空间法

以上分析的 Tikhonov 方法和 Landweber 方法均是建立在赋范空间上, 而扩展到内积空间后, 则可以引入正交的概念。任意给定一个迭代框架

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + \alpha_n v_n \\ r_n &= y - Kx_n \\ e_n &= x - x_n \end{aligned} \quad (2.97)$$

则理想的迭代结果应该是对任意  $w \in \text{span}\{x_i: i = 1, \dots, n\}$  均有

$$\begin{aligned} \|x - x_n\|^2 &\leq \|x - x_n + w\|^2 \\ \|w\|^2 - 2 \operatorname{Re}\{\langle x - x_n, w \rangle\} &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.98)$$

即  $x_n$  是当前搜索过的子空间中最逼近真值  $x$  的结果。显然其等价形式为

$$\langle x - x_n, w \rangle = 0 \quad (2.99)$$

即当前迭代解的误差  $e_n$  正交于搜索过的子空间。故理想的搜索方向应正交于前  $n-1$  步的迭代方向

$$\begin{aligned} v_n &= e_{n-1} - \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_{ni} v_i \\ \gamma_{ni} &= \langle e_{n-1}, v_i \rangle / \|v_i\| \end{aligned} \quad (2.100)$$

将(2.97)和(2.100)代入(2.99)得到理想的搜索步长

$$\alpha_n = \frac{\langle x - x_{n-1}, v_n \rangle}{\langle v_n, v_n \rangle} = \frac{\langle e_{n-1}, v_n \rangle}{\langle v_n, v_n \rangle} \quad (2.101)$$

易见, 若用(2.100)作为搜索方向, (2.101)作为搜索步长, 则(2.97)的迭代只需要一步。而实际中  $r_{n-1} = y - Kx_{n-1} = Ke_{n-1}$ ,  $K$  不可逆, 无法获得与  $e_{n-1}$  一致的搜索方向。故将  $e_{n-1}$  替换为其共轭方向  $K^*r_{n-1}$ , 得到

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + \alpha_n v_n \\ v_n &= K^*r_{n-1} - \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_{ni} v_i \quad \gamma_{ni} = \langle K^*r_{n-1}, v_i \rangle / \|v_i\| \\ \alpha_n &= \frac{\langle K^{-1}r_{n-1}, K^*r_{n-1} \rangle}{\langle v_n, v_n \rangle} = \frac{\langle r_{n-1}, r_{n-1} \rangle}{\langle v_n, v_n \rangle} \end{aligned} \quad (2.102)$$

由此得到 Krylov 方法。典型的 Krylov 类方法就是共轭梯度法, 在仅要求搜索方向与前一方向正交的前提下, (2.100)写为

$$v_n = L^*r_{n-1} - \frac{\langle L^*r_{n-1}, v_{n-1} \rangle}{\|v_{n-1}\|_i^2} v_{n-1} = L^*r_{n-1} + \frac{\|L^*r_{n-1}\|^2}{\|L^*r_{n-2}\|^2} v_{n-1} \quad (2.103)$$

根据该方向有最优步长得到如下共轭梯度更新形式

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + \alpha_n v_n \\ v_n &= K^*r_{n-1} + \frac{\|K^*r_{n-1}\|^2}{\|K^*r_{n-2}\|^2} v_{n-1} / \|K^*r_{n-2}\|^2 \\ \alpha_n &= \frac{\|K^*r_{n-1}\|^2}{\|K^*r_{n-1}\|^2} / \|Kv_n\|^2 \end{aligned} \quad (2.104)$$

易见, 共轭梯度法的更新方向是方程

$$\Psi(x) = \|K^*Kx - K^*y\|^2 \quad (2.105)$$

的 Fréchet 微分, 故该方法是 Landweber 迭代的扩展。通过递归, 可将(2.102)的迭代方向  $v_n$  写为如下多项式形式

$$v_n = \sum_{m=1}^n d_{nm} (K^*K)^{m-1} K^*r_0 \quad (2.106)$$

其中,  $d_{nm}$  是多项式系数。可见  $n$  步的迭代搜索方向张成了子空间  $\text{span}\{K^*r_0, \dots, (K^*K)^{n-1}K^*r_0\} = \text{span}\{v_0, \dots, (K^*K)^{n-1}v_0\}$ , 称为 Krylov 子空间<sup>[26]</sup>。因为迭代方向相互正交, 在  $N$  维离散问题中, 算法最多执行  $N$  步结束迭代。任意迭代解  $x_m$  可以用 Krylov 空间的基底表达为

$$x_m = P_{m-1}(K^*K)K^*y \quad (2.107)$$

其中,  $P_{m-1}$  为良定的  $m-1$  阶多项式。令算子  $K$  的奇异系统为  $(\mu_j, x_j, y_j)$ , 满足

$$y = \sum_{j=1}^N \alpha_j y_j \in \text{span}\{y_1, \dots, y_N\} \quad (2.108)$$

则有

$$x_m = \sum_{j=1}^N \alpha_j P_{m-1}(\mu_j^2) \mu_j x_j \quad (2.109)$$

令子空间  $X^\sigma \subset X$ , 且  $\sigma \geq 0$ , 为

$$X^\sigma := R\left(\left(K^* K\right)^{\sigma/2}\right) := \left\{x \in X : \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^{-2\sigma} \langle x, x_j \rangle^2 < \infty\right\} \quad (2.110)$$

且在该空间上定义范数

$$\|x\|_\sigma := \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^{-2\sigma} \langle x, x_j \rangle^2} \quad (2.111)$$

可以证明, 空间  $X^\sigma$  依(2.111)范数定义构成一个 Hilbert 空间, 且当  $\sigma_1 < \sigma_2$  时, 有  $X^{\sigma_1} \subset X^{\sigma_2}$ 。假设  $\|x\|_\sigma \leq E$ , 则有如下关于条件误差的结论<sup>[13]</sup>

**定理 2.3.12:**

假设  $y, y^\delta$  不属于可数个  $y_j$  张成的线性空间。序列  $x^{m(\delta), \delta}$  由满足(2.112)的停止准则的共轭梯度法得到, 其中固定参数  $\tau > 1$ 。

$$\|Kx^{m(\delta), \delta} - y^\delta\| \leq \tau \delta \leq \|Kx^{m(\delta)-1, \delta} - y^\delta\| \quad (2.112)$$

令  $x \in X^\sigma, \sigma > 0$  且  $\|x\|_\sigma \leq E$ , 则存在  $c > 0$  满足

$$\|x - x^{m(\delta), \delta}\| \leq c \delta^{\sigma/(\sigma+1)} E^{1/(\sigma+1)} \quad (2.113)$$

易证, 当  $\sigma = 1$  和  $\sigma = 2$  时对应的就是 Landweber 最优估计的收敛阶数, 而对任意  $\sigma > 0$  的先验信息  $\|(K^* K)^{\sigma/2}\| \leq E$  时共轭梯度法同样是最优估计。

### 2.3.3 基于 Bayes 的统计反演理论

从统计的角度来看, 每种参量的取值都是一个状态, 这些状态全体构成一个非空集合  $\Omega$ 。而特定状态的排列组合则构成一个事件, 所有事件构成对有限差以及可列并运算封闭的集合  $X$  就是  $\Omega$  上的一个  $\sigma$ -代数。而在这样的  $\sigma$ -代数  $X$  上定义一个满足  $P(\Omega) = 1$  的测度, 则构成概率空间  $(X, \mathcal{F}, P)$ ,  $P$  称为概率。而概率空间  $(X, \mathcal{F}, P)$  上的一个可测函数就是该空间上的一个随机变量。而概率测度的 Radon-Nikodym 导数就是概率密度函数, Radon-Nikodym 定理如下:

**定理 2.3.13:**

令  $\mu$  和  $\nu$  是同一个测度空间  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的两个测度。假设  $\mu \ll \nu$  且  $\nu$  是  $\sigma$  有限测度, 则存在  $\nu$  可测函数  $f: \Omega \rightarrow [0, \infty]$  使得对所有  $\nu$  可测集  $A \in \mathcal{F}$  有

$$\mu(A) = \int_A f(x) d\nu(x) \quad (2.114)$$

其中,  $f(x)$  就是测度  $\mu$  关于  $\nu$  的 Radon-Nikodym 微分, 记为  $f = d\mu/d\nu$ , 也称  $f$  就是  $\mu$  关于  $\nu$  的密度函数。因此概率密度同样能构成连续测度。因此从抽象空间的

角度来看，依靠概率密度函数约束随机性的统计反演与依靠范数约束的正则化并无不同。因此可以较为自由的通过 Bayes 公式引入先验信息，以便对特定问题定制合适的解空间约束形式<sup>[109]</sup>。

在统计逆问题中，所有参数都被视为随机变量。由于模型的不确定度和观测噪声  $e \in Y^M$ ，观测数据被视为一个可观测随机变量的采样值  $y \in Y^M$ 。而待求变量为不可观测的随机变量  $x$ 。二者通过已知的映射算子  $K: X \rightarrow Y^M$  联系。假设随机变量  $X$  的先验概率密度函数为  $p(x)$ ，而随机变量  $Y$  具有概率密度  $p(y)$ ，则  $X$  在给定观测数据  $y$  下的后验概率密度函数由如下 Bayes 公式描述

$$p(x|y) = \frac{p(y|x)p(x)}{p(y)} = \frac{p(y|x)p(x)}{\int p(y|x)p(x)dy} \quad (2.115)$$

其中， $p(y|x)$  为似然函数。

在 2.3.2 节中所论述的正则化方法得到的是关于随机变量  $X$  的点估计，即  $p(x|y)$  最大时对应的  $x$  取值，基于此，有两种流行的点估计方法。第一种是最大后验，即

$$\begin{aligned} x_{MAP} &= \arg \min_{x \in R^n} \{-\ln p(x|y)\} \\ &= \arg \min_{x \in R^n} \{-\ln p(y|x) - \ln p(x)\} \end{aligned} \quad (2.116)$$

后面将说明，(2.116)的点估计和经典正则化过程一致。第二种是条件均值，即

$$x_{CM} = \mathbb{E}_{p(x|y)} \{x\} = \int xp(x|y)dx \quad (2.117)$$

$x_{CM}$  的估计避免了  $x_{MAP}$  估计中对后验函数光滑性的需求。

在绝大多数的统计数学研究中，这些逆问题是离散化为多维随机变量后的形式。虽然所有的算法实施都使用有限维近似，但这些近似通常是在非常高维的空间中进行的。因此一旦修改离散化方法，问题就会呈现不同的性质。为了保证结论的一致性，逆问题的分析中更倾向于不做离散化。此外，许多常见的分布在高维会出现非常混乱的结构，这也给将统计反演理论和函数分析的统一带来挑战。目前为止，无限维 Bayesian 逆问题的分析仍然是应用数学类方向的研究问题之一。

### (1) 正则化的等价先验信息

假设噪声分量  $e$  为独立同分布的均值 0 方差  $\sigma$  的 Gaussian 分布，则负对数似然函数为

$$-\ln p(y|x) = \frac{1}{2\sigma^2} \|y - Kx\|_2^2 + \sum_m \frac{\ln(2\pi\sigma^2)}{2} \quad (2.118)$$

### ① Gauss 分布

若考虑如下独立同 Gauss 分布作为先验分布

$$p(x) = \prod_i N(x_i | \mu_i, \alpha^2) = \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha^2}} \exp\left[-\frac{(x_i - \mu_i)^2}{2\alpha^2}\right] \quad (2.119)$$

则将其代入(2.116)得到

$$\begin{aligned} x_{MAP} &= \arg \min_{x \in R^n} \left\{ -\ln p(y|x) + \frac{1}{2\alpha^2} \sum_i [(x_i - \mu_i)^2] \right\} \\ &= \arg \min_{x \in R^n} \left\{ \|y - Kx\|_2^2 + \frac{\sigma^2}{\alpha^2} \|x - \mu\|_2^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.120)$$

由此得到 2 范数 Tikhonov 方法的形式。

### ② Laplace 分布

若考虑如下独立同 Laplace 分布作为先验分布

$$p(x) = \prod_i \mathcal{L}(x_i | \mu_i, b) = \prod_i \frac{1}{2b} \exp\left[-\frac{|x_i - \mu_i|}{b}\right] \quad (2.121)$$

则代入(2.116)得到

$$\begin{aligned} x_{MAP} &= \arg \min_{x \in R^n} \left\{ -\ln p(y|x) + \frac{1}{b} \sum_i |x_i - \mu_i| \right\} \\ &= \arg \min_{x \in R^n} \left\{ \|y - Kx\|_2^2 + \frac{\sigma^2}{b} \|x - \mu\|_1 \right\} \end{aligned} \quad (2.122)$$

由此得到 1 范数 Tikhonov 方法的形式。

### ③ Gibbs 分布

若考虑 Markov 随机场作为先验分布, 即  $x$  的相邻元素相关。易证明 Markov 随机场等价 Gibbs 分布, 故有

$$p(x) = \mathcal{G}(x|T) = \frac{1}{Z} \exp\left[-\frac{\Phi(x)}{T}\right] \quad (2.123)$$

假设能量函数为

$$\Phi(x) = \int |\nabla x| dx \quad (2.124)$$

则代入(2.116)得到 TV 正则化的形式。

$$\begin{aligned} x_{MAP} &= \arg \min_{x \in R^n} \left\{ -\ln p(y|x) + \frac{1}{T} \Phi(x) \right\} \\ &= \arg \min_{x \in R^n} \left\{ \|y - Kx\|_2^2 + \|Dx\|_1 \right\} \end{aligned} \quad (2.125)$$

可见有限维的 MAP 估计的 Bayes 方法和经典 Tikhonov 正则化有着等价的形式, 而不同于经典正则化需要设计正则因子, Bayes 类方法通过设计先验分布来获得

解空间约束。后面将说明, Bayes 方法引入先验等价引入一个预条件算子<sup>[11]</sup>。

## (2) Bayes 框架下的 Krylov 子空间法

考虑有噪声扰动的问题

$$y = Kx + \varepsilon \quad (2.126)$$

其中  $x \in \mathbb{C}^n$ ,  $y \in \mathbb{C}^m$ 。在 0 和 0 的讨论中, 虽然 Tikhonov 正则化并不能随着解空间的收紧而提高误差收敛阶数, 但是在共轭梯度法中, 更紧的子空间约束能带来高的误差收敛阶数。通常在共轭梯度法中, 完整的空间被划分为算子的零空间和共轭空间, 二者互为正交补  $\mathbb{C}^n = \mathcal{M}(K) \oplus \mathcal{R}(K^H)$ 。因此一种自然的做法是借助 Bayes 方法约束正交于 Krylov 子空间的零空间, 从而得到更高维的解。本节统一将子空间约束表示为  $\|Bx\|^2$ , 故有共轭梯度的代价函数

$$f(x) = \|Kx - y\|^2 + \lambda^2 \|Bx\|^2 \quad (2.127)$$

而在 Bayes 公式表述下, 有后验概率密度

$$p(x|y) \propto p_{prior}(x) p_{noise}(y - Kx) \quad (2.128)$$

当  $x$  和噪声  $\varepsilon$  均服从高斯分布

$$x \sim \mathcal{N}(\mu, C) \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \Sigma) \quad (2.129)$$

则

$$\begin{aligned} p_{prior}(x) &\propto \exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu)^H C^{-1}(x-\mu)\right] \\ p_{noise}(\varepsilon) &\propto \exp\left(-\frac{1}{2}\varepsilon^H \Sigma^{-1}\varepsilon\right) \end{aligned} \quad (2.130)$$

将(2.130)代入(2.128)得到

$$p(x|y) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu)^H C^{-1}(x-\mu) - \frac{1}{2}(y-Kx)^H \Sigma^{-1}(y-Kx)\right] \quad (2.131)$$

对精度矩阵  $C^{-1}$  和  $\Sigma^{-1}$  分别对称分解,  $C^{-1} = B^H B$ ,  $\Sigma^{-1} = S^H S$ , 得到

$$p(x|y) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}\|B(x-\mu)\|^2 - \frac{1}{2}\|S(y-Kx)\|^2\right] \quad (2.132)$$

易见, (2.132)的 MAP 估计等价下式的解

$$\begin{aligned} w &= A\omega \\ \omega &= B(x-\mu), \quad w = y - K\mu, \quad A = KB^{-1} \end{aligned} \quad (2.133)$$

即引入先验等价经过预条件算子  $B$  处理后的映射关系。故(2.133)在迭代  $j$  步后的

Krylov 子空间解为

$$\omega_j = \arg \min \left\{ \|A\omega - w\|_2 \mid \omega \in \mathcal{K}_j [A^H w, A^H A] \right\} \quad (2.134)$$

其中,  $\mathcal{K}_j [A^H \omega, A^H A] = \text{span}\{A^H \omega, \dots, (A^H A)^{j-1} A^H \omega\}$ 。故预条件后的解  $x_j = B^{-1} \omega + \mu$

$$x_j \in \text{span} \left\{ B^{-1} (A^H A)^l A^H w \mid 0 \leq l \leq j-1 \right\} \quad (2.135)$$

由于  $B^{-1} (A^H A)^l A^H = (CK^H K)^l CK^H$ , 可见  $x_j \in C(\mathcal{N}(K)^\perp) = C(\mathcal{R}(K^H))$ , 不一定与  $\mathcal{N}(K)$  正交。若要保证先验信息能约束零空间, 则  $\mathcal{N}(K)$  必须与  $C(\mathcal{R}(K^H))$  不正交。故定义子空间的相关性为

$$\Phi(K, C) = \sup \left\{ \frac{|a^H b|}{\|a\| \|b\|} \mid a \in \mathcal{N}(K), b \in C(\mathcal{R}(K^H)) \right\} \quad (2.136)$$

令  $K = [K_1 \ K_2]$ ,  $\text{span}(K_1) = \mathcal{N}(K)$  且  $\text{span}(K_2) = C(\mathcal{R}(K^H))$ 。则有

$$a = K_1 \alpha, \quad b = K_2 \beta \quad (2.137)$$

令  $K_1^H K_1$  和  $K_2^H K_2$  的对称因子  $R_1$ 、 $R_2$  满足

$$\|a\|^2 = \|R_1 \alpha\|^2, \quad \|b\|^2 = \|R_2 \beta\|^2 \quad (2.138)$$

则有

$$\Phi(K, C) = \sup \left\{ p^H (R_1^H)^{-1} K_1^H K_2 (R_2^H)^{-1} q \mid \|p\| = \|q\| = 1 \right\} \quad (2.139)$$

故两空间的相关性由  $(R_1^H)^{-1} K_1^H K_2 (R_2^H)^{-1}$  的最大特征值决定, 只要该矩阵非零矩阵, 就能保证 Bayes 框架下引入的先验信息能约束到正交于 Krylov 子空间的零空间。

## 2.4 本章小结

本节通过体等效原理给出了散射问题的物理模型, 通过矩量法、多极展开以及混合方法将该连续维的物理问题投影到有限维度的离散问题上

从分析中可以发现, 虽然离散化的对象都是同一个散射问题, 但是正散射问题和逆散射问题有着截然不同的数学形式, 甚至同一个问题采用不同的离散化策略也得到不同维数的矩阵问题。而从不可数维空间的病态性到可数维空间的病条件性, 逆问题理论说明离散化本身就是降低病态性的一种手段, 这也是为什么在逆问题的离散化上会出现种类繁多的方法。在连续维和离散维模型的基础上, 本章对比了正散射问题和逆散射问题的异同, 正散射问题可以写为线性第二类 Fredholm 积分方程, 而逆散射问题则构成非线性的第一类 Fredholm 积分方程, 因此后者的求解远比前者困难。

而在数学原理的介绍中，逆散射问题是一个典型的病态逆问题。其病态性源于第一类 Fredholm 积分算子将无限维空间映射为可数维空间并通过测量的方式将维数截断，因此逆散射问题的衍射极限总是伴随着波长和孔径的约束。而第二类 Fredholm 积分算子则由于单位算子的存在，其算子零空间仅有 0 元素，故构成良态问题，因此正问题求解远比逆问题的求解简单。由于逆算子不存在，故无法获取精确解。正则化策略则是通过一系列的正则算子逼近原始病态算子，从而借助正则算子的逆获取精确解的近似解。其等价于对解空间施加约束条件，以避免解的发散。

在原始测量数据受到扰动的条件下，即使是一个较优的正则化策略也仅能保证解的扰动和测量数据的扰动成比例，而不能获取精确解。因此，逆散射重建的精度由正则化策略、信噪比和工作波长决定。同时，本节介绍了一些常见的正则化策略以及等价的统计反演策略。其中，稀疏正则化和 Krylov 子空间类方法均有较好的误差收敛性能。但是稀疏类约束的误差收敛性建立在稀疏假设成立的前提下，而 Krylov 类方法则更为普适。而在统计反演理论中，基于 Bayes 先验的最大后验估计可以和预条件的 Krylov 子空间方法等价，这给我们在第五章的非线性 Bayes 方法的提出铺设了条件。

## 第3章 混合边界问题中的定量逆散射重建方法

从2.1节中建立散射模型的过程可以发现，不论是用局域基函数还是多极子展开的波函数，散射场均源于总电场乘以散射体的电本构参数生成的等效体电流。相应的总等效电流就等于总场乘以散射体电参数。

另一方面，当散射体是有耗媒质或是导体时，入射场难以传达到散射体内部，进而导致散射体内为零场。以(2.16)为例，当目标区域存在总场为零时

$$\mathbf{e}^{sca} = \mathbf{G} \cdot \text{diag} [\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_m \ 0 \cdots 0] \cdot \chi \quad (3.1)$$

观测函数的  $\mathbf{G} \cdot \text{diag}(\mathbf{e})$  的秩缺失，造成后续逆问题求解的病态性。以常见的金属铜为例，其电导率为  $\sigma = 6 \times 10^7 \text{ S/m}$ ，相应的对比度函数  $\chi = -j\sigma/\omega\epsilon_0 = -j \cdot 6.8 \times 10^{18}/\omega$  近似无穷大。当介质和导体混合存在时，导体区域的奇异性严重扰动其它区域的重建。然而，在多极子展开模型中，(2.35)将导体这类有着显著趋肤效应的散射体的目标函数建模为一个边界传播常数，其大小在  $10^{-1}$  数量级，有效的避免了奇异性。

参考多层快速多极子方法，基函数的近组用矩量法、远组用多极子展开来剖分阻抗矩阵。该思路同样可以应用于导体和介质混合的散射问题，对介质采用矩量法，而对导体采用多极子展开，从而规避导体区域场的奇异性对介质重建的影响。然而，对比(2.18)和(2.37)可以发现由于基函数和波函数不同，故除了散射场测量量  $\mathbf{e}^{sca}$ ，其它场量并不共享，故需要处理该问题。

本文在3.1节中提出基于对比度函数和传输系数的混合参数模型，其中传输系数用于实现介质和导体的定性区分，而对比度函数则用于实现定量重建。在3.2节中，为了将导体和介质的重建过程划分开以降低阻抗矩阵的病态性，本文基于体等效原理将模型拆分为介质的定量重建方程和导体的定性重建方程。随后，基于这两个非线性方程，在3.3节中推导了介质的对比度函数和导体的传输系数交替更新的算法，并给出了背景格林函数的计算方法。同时，用快速傅里叶变换对算法中的 Toeplitz 矩阵乘积进行了加速。最后，所提算法在电磁仿真和实测数据上和现有方法对比，验证了该算法的有效性。

### 3.1 混合参数模型

分别对(2.21)和(2.39)定义中间变量，将方程拆分为测量方程和状态方程，基函数展开的方程和波函数展开的方程如下所示

$$\begin{cases} \mathbf{e}^{sca} = \mathbf{G}_C \cdot \mathbf{w} \\ \mathbf{w} = \text{diag} (\mathbf{e}^{inc} + \mathbf{G}_D \cdot \mathbf{w}) \cdot \chi \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} \mathbf{e}^{sca} = \mathbf{G}_{multi} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{c} = diag(\mathbf{i} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{c}) \cdot \mathbf{t} \end{cases} \quad (3.3)$$

其中， $\mathbf{w} = diag(\mathbf{e}) \cdot \chi$  正比于等效电流，也称为对比度源。而  $\mathbf{c}$  为散射场的多极子展开系数。对比(3.2)和(3.3)的测量方程可以得到

$$\mathbf{G}_{multi} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{G}_C \cdot \mathbf{w} \quad (3.4)$$

且

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_C &= \left[ \frac{k_0^2 \pi R^2}{4j} H_0^{(2)}(k_0 |\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n|) \right]_{M \times N} \\ \mathbf{G}_{multi} &= \left[ H_p^{(2)}(k_0 |\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n|) e^{-jp\phi(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n)} \right]_{M \times N(2P+1)} \end{aligned} \quad (3.5)$$

其中， $\mathbf{G}_{multi}$  的多极子展开阶数  $p$  越高，离散化误差越小；多极展开所在网格的尺寸越小，离散化误差越小。因此，在给定离散化误差的前提下，可以通过缩小离散化网格换取有限的多极子展开阶数。而  $\mathbf{G}_C$  的局域基函数则需要足够小的离散化网格以保证误差较低，故当给定  $\mathbf{G}_{multi}$  的网格尺寸与  $\mathbf{G}_C$  一致时，可以令前者多极展开的截断阶数为 0。由此得到

$$\mathbf{G}_C = \frac{k_0^2 \pi R^2}{4j} \mathbf{G}_{multi} \Big|_{p=0}, \quad \mathbf{c} = \frac{k_0^2 \pi R^2}{4j} \mathbf{w} \quad (3.6)$$

说明散射场的零阶波函数等价于体等效的等效电流。故有(3.2)和(3.3)的联立结果

$$\begin{cases} \mathbf{e}^{sca} = \mathbf{G}_C \cdot \mathbf{w} \\ \mathbf{w} = diag(\mathbf{e}^{inc} + \mathbf{G}_D \cdot \mathbf{w}) \cdot \chi \\ \mathbf{w} = diag\left(\frac{4j}{k_0^2 \pi R^2} \mathbf{i} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{w}\right) \cdot \mathbf{t} \end{cases} \quad (3.7)$$

构成一个测量方程和两个状态方程。从而建立边界传输系数和对比度函数混合的散射模型。

## 3.2 混合边界条件模型

可见，(3.7)虽然统一了基函数展开和多极子展开模型之间的关系，但目标函数  $\chi$ 、 $\mathbf{t}$  和  $\mathbf{w}$  仍然建立在整个感兴趣区域，并没有根据导体散射体和介质散射体进行区分。为了对这两种边界条件分别独立处理，先建立给定导体背景下的介质矩量法模型和介质背景下的导体多极展开模型。

从体等效原理出发，如图 3.1. (a)所示，原始散射问题中同时含有介质和导体，有如下 Maxwell 方程

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega \epsilon \mathbf{E} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mu_0 \mathbf{H} \end{cases} \quad (3.8)$$

其中

$$\epsilon(\mathbf{r}) = \begin{cases} \epsilon_r \epsilon_0 & \mathbf{r} \in \text{dielectric} \\ \epsilon_0 & \mathbf{r} \in \text{free space} \\ \epsilon_0 - j\sigma/\omega & \mathbf{r} \in \text{PEC} \end{cases} \quad (3.9)$$

图 3.1. (a)中，蓝色为介质，红色为导体。

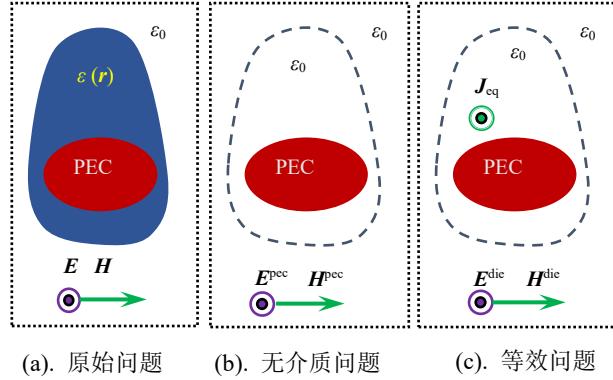


图 3.1 含有导体条件下的体等效原理

而不包含介质的背景问题则如图 3.1. (b)所示，由如下 Maxwell 方程描述

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H}^{pec} = \mathbf{J} + j\omega \epsilon^{pec} \mathbf{E}^{pec} \\ \nabla \times \mathbf{E}^{pec} = -j\omega \mu_0 \mathbf{H}^{pec} \end{cases} \quad (3.10)$$

其中

$$\epsilon^{pec}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \epsilon_0 - j\sigma/\omega & \mathbf{r} \in \text{PEC} \\ \epsilon_0 & \mathbf{r} \in \text{free space} \end{cases} \quad (3.11)$$

故有原始问题减去背景问题得到

$$\begin{cases} \nabla \times (\mathbf{H} - \mathbf{H}^{pec}) = j\omega (\epsilon \mathbf{E} - \epsilon^{pec} \mathbf{E}^{pec}) \\ \nabla \times (\mathbf{E} - \mathbf{E}^{pec}) = -j\omega \mu_0 (\mathbf{H} - \mathbf{H}^{pec}) \end{cases} \quad (3.12)$$

令  $\mathbf{H}^{die} = \mathbf{H} - \mathbf{H}^{pec}$  且  $\mathbf{E}^{die} = \mathbf{E} - \mathbf{E}^{pec}$ ，构成等效问题的场量，则等效问题写为

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H}^{die} = \mathbf{J}^{die} + j\omega \epsilon^{pec} \mathbf{E}^{die} \\ \nabla \times \mathbf{E}^{die} = -j\omega \mu_0 \mathbf{H}^{die} \end{cases} \quad (3.13)$$

将(3.13)代入(3.12)可以得到

$$\mathbf{J}^{die} = j\omega \epsilon_0 \mathbf{E} \chi^{die} \quad (3.14)$$

即等效电流等于总场乘以介质对比度函数。故(3.14)对应的介质散射场可以写为

$$\mathbf{E}^{die}(\mathbf{r}) = k_0^2 \int_D G^{pec}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \chi^{die}(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (3.15)$$

其中,  $G^{pec}$  为有导体背景的格林函数, 由于格林函数为 Dirac 源的辐射场, 故导体背景下的格林函数可以写为

$$G^{pec}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{E_0^{pec}(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_{n'})}{-j\omega\mu_0} \quad (3.16)$$

其中,  $E_0^{pec}(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_{n'})$  为导体背景下 Dirac 源  $J(\mathbf{r}_{n'}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{n'})$  在  $\mathbf{r}_n$  处产生的总场。在给定导体传播系数  $\mathbf{t}^{pec}$  的前提下有

$$\mathbf{E}_0^{pec}(\mathbf{r}_{n'}) = \mathbf{e}_{n'}^{inc} + \mathbf{G} \cdot [\mathbf{I} - \text{diag}(\mathbf{t}^{pec}) \cdot \mathbf{S}]^{-1} \text{diag}\left(\frac{4j}{k_0^2 \pi R^2} \mathbf{i}_{n'}\right) \cdot \mathbf{t}^{pec} \quad (3.17)$$

$\mathbf{e}_{n'}^{inc}$  为  $\mathbf{r}_{n'}$  处 Dirac 源产生的辐射场,  $\mathbf{i}_{n'}$  为该辐射场的多极展开系数。(3.15) 矩量法离散化后则写为测量方程和状态方程

$$\begin{cases} \mathbf{e}^{die} = \mathbf{G}_C^{pec} \cdot \mathbf{w}^{die} \\ \mathbf{w}^{die} = \text{diag}(\mathbf{e}^{pec} + \mathbf{G}_D^{pec} \cdot \mathbf{w}^{die}) \cdot \boldsymbol{\chi}^{die} \end{cases} \quad (3.18)$$

其中

$$\mathbf{G}^{pec} = j \frac{\pi R^2}{\omega\mu_0} [\mathbf{E}_0^{pec}]_{N \times N} \quad (3.19)$$

由此得到导体背景下介质的散射场, 由于(3.18)不包含导体分量, 故对比度源  $\mathbf{w}^{die} = \text{diag}(\mathbf{e}) \cdot \boldsymbol{\chi}^{die}$  不存在奇异性。

同理, 可以写出介质背景下的导体散射场

$$\begin{cases} \mathbf{e}^{pec} = \mathbf{G}_C^{die} \cdot \mathbf{w}^{pec} \\ \mathbf{w}^{pec} = \text{diag}(c\mathbf{i}^{pec} + \mathbf{S}^{die} \cdot \mathbf{w}^{pec}) \cdot \mathbf{t}^{pec} \end{cases} \quad (3.20)$$

其中,  $c = 4j / (k_0^2 \pi R^2)$ 。

由此将(3.7)拆分为导体的传输系数和介质对比度函数构成的混合边界条件方程。在导体部分采用多极展开, 而在介质部分采用矩量法, 将阻抗矩阵维数从全离散空间降维到各自边界条件覆盖的空间, 同时消除了导体带来的零场奇异性。

### 3.3 基于 Krylov 子空间的交替参数更新法

在未明确给定目标函数先验的前提下, Krylov 子空间法依旧是目前最适合处理大规模数值计算的正则化方法。故本节采用该方法交替更新导体的传输系数和介质的对比度函数, 完成定量的目标重建任务。

分别定义方程(3.7)、(3.18)和(3.20)的余差为

$$\begin{cases} \mathbf{r}_q = \mathbf{e}_q^{sca} - \mathbf{G}_C \cdot \mathbf{w}_q \\ \mathbf{r}_q^{die} = \mathbf{e}_q^{die} - \mathbf{G}_C^{pec} \cdot \mathbf{w}_q^{die} \\ \mathbf{r}_q^{pec} = \mathbf{e}_q^{pec} - \mathbf{G}_C^{die} \cdot \mathbf{w}_q^{pec} \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_q = \mathbf{w}_q - \text{diag}(\mathbf{c}\mathbf{i}_q + \mathbf{S} \cdot \mathbf{w}_q) \cdot \mathbf{t} \\ \gamma_q^{die} = \mathbf{w}_q^{die} - \text{diag}(\mathbf{e}^{pec} + \mathbf{G}_D^{pec} \cdot \mathbf{w}_q^{die}) \cdot \chi^{die} \\ \gamma_q^{pec} = \mathbf{w}_q^{pec} - \text{diag}(\mathbf{c}_q^{pec} + \mathbf{S}^{die} \cdot \mathbf{w}_q^{pec}) \cdot \mathbf{t}^{pec} \end{cases} \quad (3.21)$$

其中,  $q$  表示第  $q$  次照射。整个交替参数更新的一步迭代分为三个步骤: 首先求得传输系数初值以定性区分导体与介质; 其次将导体作为背景, 定量求解介质对比度函数; 再根据介质对比度更新导体和介质传输系数, 进一步定性区分。

### 3.3.1 初始化传输系数

首先重建传输系数  $\mathbf{t}$  的初值, 作为导体和介质的预分类。由于非线性作用, 对传输系数初值的计算被拆解为对中间变量  $\mathbf{w}_q$  和  $\mathbf{t}$  的重建。对比度源初值由如下后向投影法 (Back Projection-BP) 确定:

$$\mathbf{w}_{q,0} = \frac{\|\mathbf{G}_C^H \mathbf{e}_q^{sca}\|^2}{\|\mathbf{G}_C \mathbf{G}_C^H \mathbf{e}_q^{sca}\|^2} \mathbf{G}_C^H \mathbf{e}_q^{sca} \quad (3.22)$$

给定对比度源初值后, 传输系数  $\mathbf{t}$  的初值为

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_0 &= \arg \min_{\mathbf{t}} \sum_q \left\| \mathbf{w}_{q,0} - \text{diag}(\mathbf{c}_q + \mathbf{S} \cdot \mathbf{w}_{q,0}) \cdot \mathbf{t} \right\|_2^2 \\ &= \arg \min_{\mathbf{t}} \sum_q \left\| \mathbf{w}_{q,0} - \text{diag}(\mathbf{c}_q) \cdot \mathbf{t} \right\|_2^2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

将(3.23)的代价函数展开

$$F = \sum_q \left[ \begin{array}{l} \mathbf{w}_{q,0}^H \mathbf{w}_{q,0} - \mathbf{c}_q^H \text{diag}(\text{Re}(\mathbf{t})) \mathbf{w}_{q,0} + j \mathbf{c}_q^H \text{diag}(\text{Im}(\mathbf{t})) \mathbf{w}_{q,0} \\ - \mathbf{w}_{q,0}^H \text{diag}(\text{Re}(\mathbf{t})) \mathbf{c}_q - j \mathbf{w}_{q,0}^H \text{diag}(\text{Im}(\mathbf{t})) \mathbf{c}_q \\ + \mathbf{c}_q^H \text{diag}(\text{Re}(\mathbf{t}))^2 \mathbf{c}_q + \mathbf{c}_q^H \text{diag}(\text{Im}(\mathbf{t}))^2 \mathbf{c}_q \end{array} \right] \quad (3.24)$$

其中, (3.24)关于  $\text{Re}(\mathbf{t})$  和  $\text{Im}(\mathbf{t})$  的部分分别为

$$\begin{aligned} F &= \left[ \text{diag}(\text{Re}(\mathbf{t})) \left| \sum \|\mathbf{c}_q\|^2 \right|^{1/2} - \frac{\sum \text{Re}(\mathbf{c}_q^H \mathbf{w}_{q,0})}{\left| \sum \|\mathbf{c}_q\|^2 \right|^{1/2}} \right]^2 - \frac{\left| \sum \text{Re}(\mathbf{c}_q^H \mathbf{w}_{q,0}) \right|^2}{\sum \|\mathbf{c}_q\|^2} \\ &\quad + \left[ \text{diag}(\text{Im}(\mathbf{t})) \left| \sum \|\mathbf{c}_q\|^2 \right|^{1/2} - \frac{\sum \text{Im}(\mathbf{c}_q^H \mathbf{w}_{q,0})}{\left| \sum \|\mathbf{c}_q\|^2 \right|^{1/2}} \right]^2 - \frac{\left| \sum \text{Im}(\mathbf{c}_q^H \mathbf{w}_{q,0}) \right|^2}{\sum \|\mathbf{c}_q\|^2} \end{aligned} \quad (3.25)$$

上式中, 除法表示向量元素点除。由(3.25)易见最小化代价函数的传输系数为

$$t_0 = \frac{\sum_q \text{diag}(\mathbf{c}_{q,0})^H \mathbf{w}_{q,0}}{\sum_q \|\mathbf{c}_{q,0}\|_2^2} \quad (3.26)$$

根据传输系数定义

$$t_n^0 \approx \begin{cases} -j \frac{\pi (k_0 R)^2}{4} [1 - \varepsilon_r(r_n)] & \text{dielectric} \\ -\left[ \frac{\pi}{2 \ln(2/\alpha k_0 R)} \right]^2 + j \frac{\pi}{2 \ln(2/\alpha k_0 R)} & \text{PEC} \end{cases} \quad \alpha \approx 1.78 \quad (3.27)$$

易见，当传输系数实部非零且虚部为正时，表明该处网格为导体目标。而当传输系数实部为零且虚部小于零时，该处网格为介质，由此实现导体和介质的划分。

### 3.3.2 定量重建介质对比度函数

定性区分导体和介质目标后，定量求解介质的对比度函数。首先根据(3.16)和(3.17)计算正过程，更新导体背景下的无介质时的总场  $\mathbf{e}_q^{pec}$  和导体背景下的格林函数  $\mathbf{G}_D^{pec}, \mathbf{G}_C^{pec}$ 。其次由于逆散射的非线性，需要先更新介质对比度源  $\mathbf{w}_q^{die}$ ，再根据对比度源求对比度函数  $\chi^{die}$ ，依次交替迭代。其中介质对比度源的初值由对比度源初值决定

$$\mathbf{w}_{q,0}^{die}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mathbf{w}_{q,0}(\mathbf{r}) & \text{Re}\{t(\mathbf{r})\} = 0 \\ 0 & \text{Re}\{t(\mathbf{r})\} < 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

给定  $\mathbf{w}_{q,0}^{die}$  后，介质对比度函数的初值则同传输系数  $t_0$  的计算一样，取最小化代价函数

$$\begin{aligned} \chi_0^{die} &= \arg \min_{\chi^{die}} \sum_q \left\| \mathbf{w}_{q,0}^{die} - \text{diag}(\mathbf{e}_q^{inc} + \mathbf{G}_D^{pec} \cdot \mathbf{w}_{q,0}^{die}) \cdot \chi^{die} \right\|_2 \\ &= \arg \min_{\chi^{die}} \sum_q \left\| \mathbf{w}_{q,0}^{die} - \text{diag}(\mathbf{e}_{q,0}) \cdot \chi^{die} \right\|_2 \end{aligned} \quad (3.29)$$

的对比度函数。由于介质无耗，故仅取实部

$$\chi_i^{die} = -\frac{\sum_q \text{Re} \left\{ \text{diag}(\mathbf{e}_{q,i})^H \cdot \mathbf{w}_{q,i}^{die} \right\}}{\sum_q \|\mathbf{e}_{q,i}\|^2} \quad (3.30)$$

由此确定迭代初值  $\mathbf{w}_{q,0}^{die}$  和  $\chi_0^{die}$ 。

最小化(3.18)状态方程和测量方程余差有如下代价函数

$$F^{die} = \frac{\sum_q \|\mathbf{r}_q^{die}\|^2}{\sum_q \|\mathbf{e}_q^{pec}\|^2} + \frac{\sum_q \|\mathbf{y}_q^{die}\|^2}{\sum_q \|\text{diag}(\mathbf{e}_q^{pec}) \cdot \chi^{die}\|^2} \quad (3.31)$$

最小化该代价函数，第*i*步更新介质对比度源  $\mathbf{w}_q^{die}$  为

$$\mathbf{w}_{q,i}^{die} = \mathbf{w}_{q,i-1}^{die} + \alpha_{q,i} \mathbf{v}_{q,i} \quad (3.32)$$

而  $\mathbf{v}_{q,i}$  为 Polak-Ribiere 共轭梯度方向

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{q,0} = 0 \\ \mathbf{v}_{q,i} = \mathbf{g}_{q,i} + \frac{\langle \mathbf{g}_{q,i}, \mathbf{g}_{q,i} - \mathbf{g}_{q,i-1} \rangle}{\langle \mathbf{g}_{q,i}, \mathbf{g}_{q,i} \rangle} \mathbf{v}_{q,i-1} \end{cases} \quad (3.33)$$

其中， $\mathbf{g}_{q,i}$  为如下代价函数  $F^{die}$  的关于  $\mathbf{w}_q^{die}$  共轭的微分。

$$\mathbf{g}_{q,i} = \frac{\partial F^{die}}{\partial \mathbf{w}_q} = -\frac{(\mathbf{G}_C^{pec})^H \mathbf{r}_{q,i-1}^{die}}{\sum_q \|\mathbf{e}_q^{die}\|^2} + \frac{\boldsymbol{\gamma}_q^{die} - diag(\boldsymbol{\chi}_{i-1}^{die})^H (\mathbf{G}_D^{pec})^H \boldsymbol{\gamma}_q^{die}}{\sum_p \|diag(\mathbf{e}_q^{pec}) \cdot \boldsymbol{\chi}_{i-1}^{die}\|^2} \quad (3.34)$$

由此确定  $\mathbf{w}_q^{die}$  的迭代方向。

由于代价函数是凸函数，故  $\mathbf{w}_q^{die}$  的迭代步长可以直接写精确值，无需搜索。将(3.32)代入(3.31)可得

$$\begin{aligned} F^{die} &= \frac{\sum_q \|\mathbf{r}_{q,i-1}^{die} - \alpha_i \mathbf{G}_C^{pec} \cdot \mathbf{v}_i\|^2}{\sum_q \|\mathbf{e}_q^{die}\|^2} \\ &\quad + \frac{\sum_q \|\boldsymbol{\gamma}_{q,i-1}^{die} + \alpha_i [\mathbf{v}_i - diag(\mathbf{G}_D^{pec} \cdot \mathbf{v}_i) \cdot \boldsymbol{\chi}_{i-1}^{die}]\|^2}{\sum_q \|diag(\mathbf{e}_q^{pec}) \cdot \boldsymbol{\chi}_{i-1}^{die}\|^2} \end{aligned} \quad (3.35)$$

令  $\partial F^{die}/\partial \alpha_{q,i} = 0$ ，则有迭代步长

$$\begin{aligned} a_{q,i} &= \left[ \frac{\mathbf{v}_{q,i}^H \cdot (\mathbf{G}_C^{pec})^H \mathbf{r}_{q,i-1}}{\sum_q \|\mathbf{e}_q^{die}\|_2^2} - \frac{[diag(\mathbf{G}_D^{pec} \cdot \mathbf{v}_i) \cdot \boldsymbol{\chi}_{i-1}^{die} - \mathbf{v}_{q,i}]^H \boldsymbol{\gamma}_{q,i-1}}{\sum_q \|diag(\mathbf{e}_q^{pec}) \cdot \boldsymbol{\chi}_{i-1}^{die}\|_2^2} \right] \\ &\quad \cdot \left[ \frac{\|\mathbf{G}_C^{pec} \cdot \mathbf{v}_i\|_2^2}{\sum_q \|\mathbf{e}_q^{die}\|_2^2} + \frac{\|diag(\mathbf{G}_D^{pec} \cdot \mathbf{v}_i) \cdot \boldsymbol{\chi}_{i-1}^{die} - \mathbf{v}_{q,i}\|_2^2}{\sum_q \|diag(\mathbf{e}_q^{pec}) \cdot \boldsymbol{\chi}_{i-1}^{die}\|_2^2} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (3.36)$$

将迭代步长(3.36)和迭代方向(3.33)代入(3.32)即完成介质对比度源  $\mathbf{w}_q^{die}$  的更新。将更新的对比度源代入(3.30)即可得到更新的对比度函数。

### 3.3.3 定性重建导体传输系数

定量重建介质目标后，再定性更新导体和介质的边界。同样由于非线性，需要先更新对比度源  $\mathbf{w}_q$ ，再根据对比度源求传输系数  $t$ ，交替迭代。首先给定传输系数初值

$$t_n^p = \begin{cases} \frac{k_n J_p(k_0 R) J_{p+1}(k_n R) - k_0 J_p(k_n R) J_{p+1}(k_0 R)}{k_0 J_p(k_n R) H_{p+1}^{(2)}(k_0 R) - k_n H_p^{(2)}(k_0 R) J_{p+1}(k_n R)} & \text{dielectric} \\ -\frac{J_p(k_0 R)}{H_p^{(2)}(k_0 R)} & \text{PEC} \end{cases} \quad (3.37)$$

其中,  $k_n = \omega[\epsilon(r_n)\mu_0]^{-1/2}$ , 由于给定对比度函数等价于介电常数已知, 故(3.37)可以直接计算。给定传输系数初值  $\mathbf{t}_0$ , 则可以直接通过正问题计算获得对比度源初值  $\mathbf{w}_{q,0}$ 。

对比度源的迭代过程同介质对比度源的更新, 代价函数如下

$$F = \frac{\sum_q \|\mathbf{r}_q\|^2}{\sum_q \|\mathbf{e}_q^{sca}\|^2} + \frac{\sum_q \|\boldsymbol{\gamma}_q\|^2}{\sum_q \|diag(c\mathbf{i}_q) \cdot \mathbf{t}\|^2} \quad (3.38)$$

第  $i$  步迭代的对比度源为

$$\mathbf{w}_{q,i} = \mathbf{w}_{q,i-1} + \alpha_{q,i} \mathbf{v}_{q,i} \quad (3.39)$$

相应的迭代方向为(3.33)的 Polak-Ribiere 共轭梯度方向, 其共轭导数为

$$\mathbf{g}_{q,i} = -\frac{\mathbf{G}_c^H \mathbf{r}_{q,i-1}}{\sum_q \|\mathbf{e}_q^{sca}\|_2^2} + \frac{\boldsymbol{\gamma}_{q,i-1} - diag(\mathbf{t}^H \cdot \mathbf{S}^H) \boldsymbol{\gamma}_{q,n-1}}{\sum_q \|diag(c\mathbf{i}_q) \cdot \mathbf{t}\|^2} \quad (3.40)$$

而相应的迭代步长为

$$\alpha_{q,i} = \left[ \frac{\mathbf{v}_{q,i}^H \cdot \mathbf{G}_c^H \mathbf{r}_{q,i-1}}{\sum_q \|\mathbf{e}_q^{sca}\|_2^2} - \frac{\left[ diag(\mathbf{S}\mathbf{v}_{q,i}) \cdot \mathbf{t}_{i-1} - \mathbf{v}_{q,i} \right]^H \boldsymbol{\gamma}_{q,i-1}}{\sum_q \|diag(c\mathbf{i}_q) \mathbf{t}_{i-1}\|_2^2} \right] \cdot \left[ \frac{\|\mathbf{G}_c \mathbf{v}_{q,i}\|_2^2}{\sum_q \|\mathbf{e}_q^{sca}\|_2^2} + \frac{\|diag(\mathbf{S}\mathbf{v}_{q,i}) \cdot \mathbf{t}_{i-1} - \mathbf{v}_{q,i}\|_2^2}{\sum_q \|diag(c\mathbf{i}_q) \mathbf{t}_{i-1}\|_2^2} \right]^{-1} \quad (3.41)$$

由此完成一步对比度源的更新。将更新的对比度源代入(3.26)得到更新后的传输系数, 并进一步根据传输系数划分导体和介质, 完成定性划分后再返回第二步定量更新介质对比度函数。

### 3.3.4 算法流程和加速方法

综上, 整个交替参数更新法可以视为介质的定量重建和边界的定性恢复交替进行。算法流程如下表所示

表格 3-1 交替参数更新法流程

初始化场景网格剖分;

初始化 传输系数  $\mathbf{t}$ , 介质对比度函数  $\chi^{die}$ , 对比度源  $\mathbf{w}_q$ , 介质对比度源  $\mathbf{w}_q^{die}$ ;

初始化 观测矩阵  $\mathbf{G}_C$ , 阻抗矩阵  $\mathbf{G}_D$ , 多极展开坐标转移矩阵  $\mathbf{S}$ ;

根据(3.22)BP 方法计算对比度源初值  $\mathbf{w}_{q,0}$ ;

根据(3.26)计算传输系数初值  $\mathbf{t}_0$ , 并根据实部和虚部正负定性确定导体网格;

For count = 1:  $C_{max}$

- 根据(3.17)计算导体背景下的无介质总场  $\mathbf{e}_q^{pec}$ ;
- 根据(3.16)计算导体背景下的非均匀背景阻抗矩阵  $\mathbf{G}_D^{pec}$  和观测矩阵  $\mathbf{G}_C^{pec}$ ;
- 根据(3.28)和(3.30)分别确定迭代初值  $\mathbf{w}_{q,0}^{die}$  和  $\chi_0^{die}$ ;
- For  $i = 1: I_{max}$ 
  - 根据(3.21)计算测量方程余差  $\mathbf{r}_q^{die}$  和状态方程余差  $\gamma_q^{die}$ ;
  - 根据(3.34)计算代价函数的共轭梯度  $\mathbf{g}_{q,i}$ ;
  - 根据(3.33)计算迭代方向  $\mathbf{v}_{q,i}$ ;
  - 根据(3.36)计算迭代步长  $\alpha_{q,i}$ ;
  - 更新  $\mathbf{w}_{q,i}^{die} = \mathbf{w}_{q,i-1}^{die} + \alpha_{q,i} \mathbf{v}_{q,i}$ ;
  - 计算总场  $\mathbf{e}_q = \mathbf{e}_q^{inc} + \mathbf{G}_D^{pec} \cdot \mathbf{w}_{q,i}^{die}$ ;
  - 根据(3.30)更新介质对比度函数  $\chi^{die}$ ;
- End
- 根据(3.37)更新传输系数初值  $\mathbf{t}_0$ ;
- CG-FFT 方法计算正过程更新对比度源初值  $\mathbf{w}_{q,0}$ ;
- For  $i = 1: I_{max}$ 
  - 根据(3.21)计算测量方程余差  $\mathbf{r}_q$  和状态方程余差  $\gamma_q$ ;
  - 根据(3.40)计算代价函数的共轭梯度  $\mathbf{g}_{q,i}$ ;
  - 根据(3.33)计算迭代方向  $\mathbf{v}_{q,i}$ ;
  - 根据(3.41)计算迭代步长  $\alpha_{q,i}$ ;
  - 更新  $\mathbf{w}_{q,i} = \mathbf{w}_{q,i-1} + \alpha_{q,i} \mathbf{v}_{q,i}$ ;
  - 计算总场  $c\mathbf{i}_q + \mathbf{S} \cdot \mathbf{w}_{q,i}$ ;
  - 根据(3.26)更新传输系数  $\mathbf{t}$ ;
- End
- 根据传输系数  $\mathbf{t}$  实部和虚部正负定性确定导体网格;

End

输出传输系数  $\mathbf{t}$  和介质对比度函数  $\chi^{die}$ 。

在以上传输系数  $\mathbf{t}$  和对比度函数  $\chi$  的交替更新中, 均存在阻抗矩阵  $\mathbf{G}_D$  或是坐标转移矩阵  $\mathbf{S}$  和向量乘积的过程。其中当多极展开阶数为零时, (2.32)中  $p = p' = 0$ , 故坐标转移矩阵  $\mathbf{S}$  为

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & s_{1,2} & \cdots & s_{1,N} \\ s_{2,1} & 0 & \cdots & s_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{N,1} & s_{N,2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

而根据(2.17), 格林函数构成的阻抗矩阵  $\mathbf{G}_D$  为类似形式

$$\mathbf{G}_D = \begin{bmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} & \cdots & g_{1,N} \\ g_{2,1} & g_{2,2} & \cdots & g_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N,1} & g_{N,2} & \cdots & g_{N,N} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

由于(3.42)和(3.43)形式相同, 故这里以  $g_{i,j}$  为例说明。

当计算区域从二维简化为一维时, 阻抗矩阵中的元素表示为

$$g_{i,j} = g_{i-j} = \frac{k_0^2}{4j} \int_0^{2\pi} \int_0^a H_0^{(2)}(k_0 |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_j|) d\rho' d\phi' \quad (3.44)$$

故(3.43)可以重写为

$$\mathbf{G}_D = \begin{bmatrix} g_0 & g_1 & \cdots & g_{N-1} \\ g_1 & g_0 & \cdots & g_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N-1} & g_{N-2} & \cdots & g_0 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

显然(3.45)为 Toeplitz 矩阵, 故可以用 FFT 加速矩阵乘法  $\mathbf{G}_D \cdot \mathbf{w}$ 。又由于 FFT 为圆周卷积, 故需要先将(3.45)补充为循环矩阵

$$\mathbf{G}_D = \begin{bmatrix} g_0 & g_1 & \cdots & g_{N-1} & g_{N-2} & g_{N-3} & \cdots & g_1 \\ g_1 & g_0 & \cdots & g_{N-2} & g_{N-1} & g_{N-2} & \cdots & g_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N-1} & g_{N-2} & \cdots & g_0 & g_1 & g_2 & \cdots & g_{N-1} \\ g_{N-2} & g_{N-1} & \cdots & g_1 & g_0 & g_1 & \cdots & g_{N-2} \\ g_{N-3} & g_{N-2} & \cdots & g_2 & g_1 & g_0 & \cdots & g_{N-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1 & g_2 & \cdots & g_{N-1} & g_{N-2} & g_{N-3} & \cdots & g_0 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

由此可以将  $N \times N$  维的矩阵乘法写为  $N(N-1) \times 1$  维的结果

$$\mathbf{G}_D \cdot \mathbf{w} = \text{IFFT} \left\{ \text{FFT} \begin{bmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_{N-1} \\ g_{N-2} \\ \vdots \\ g_1 \end{bmatrix} \odot \text{FFT} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (3.47)$$

其中,  $\odot$  表示对应元素相乘。

以上是一维场景的加速, 当计算区域为二维时 (总网格数  $N = L^2$ ), 上述阻

抗矩阵(3.43)的第一行按矩阵形式写为

$$\mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} g_0 & g_1 & \cdots & g_{L-1} \\ g_1 & g_{\sqrt{2}} & \cdots & g_{\sqrt{L^2+2-2L}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{L-1} & g_{\sqrt{L^2+2-2L}} & \cdots & g_{\sqrt{2(L-1)}} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

第二行按矩阵形式写为

$$\mathbf{g}_2 = \begin{bmatrix} g_1 & g_0 & \cdots & g_{L-2} \\ g_{\sqrt{2}} & g_1 & \cdots & g_{\sqrt{L^2+5-4L}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{\sqrt{L^2+2-2L}} & g_{L-1} & \cdots & g_{\sqrt{2L^2+5-6L}} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

第  $L+1$  行按矩阵形式写为

$$\mathbf{g}_{L+1} = \begin{bmatrix} g_1 & g_{\sqrt{2}} & \cdots & g_{\sqrt{L^2+2-2L}} \\ g_0 & g_1 & \cdots & g_{L-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{L-2} & g_{\sqrt{L^2+5-4L}} & \cdots & g_{\sqrt{2L^2+5-6L}} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

易见，阻抗矩阵各行又构成一个循环矩阵。因此对于二维情况，直接将一维快速傅里叶替换为二维快速傅里叶变换即可。相应的  $\mathbf{g}_1$  矩阵循环延拓为

$$\mathbf{G}_{\text{exp}} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1(1:L, 1:L) & \mathbf{g}_1(1:L, L-1:L) \\ \mathbf{g}_1(L-1:L, 1:L) & \mathbf{g}_1(L-1:L, L-1:L) \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

相应的快速计算为

$$\mathbf{G}_D \cdot \mathbf{w} = \text{IFFT2}\{\text{FFT2}(\mathbf{G}_{\text{exp}}) \odot \text{FFT2}(\mathbf{W})\} \quad (3.52)$$

同理，当计算区域为三维时，则改为三维傅里叶变换。由此完成阻抗矩阵  $\mathbf{G}_D$  或是坐标转移矩阵  $\mathbf{S}$  和向量乘积的加速计算。加速前的时间复杂度为  $O(n^3)$ ，存储复杂度为  $O(n^2)$ ，加速后的时间复杂度为  $O(n \log n)$ ，存储复杂度为  $O(n)$ 。

## 3.4 数值仿真

本节中分别用矩量法仿真数据和实测数据验证所提方法的有效性。在矩量法仿真中，生成测量数据的正过程计算由 CG-FFT 方法完成。而在实测数据验证中，数据来源于法国 Fresnel 研究院于 2005 年公开的一批数据集<sup>[11]</sup>。

### 3.4.1 仿真数据验证一

在第一个仿真重建场景中，照射源工作在单频 900MHz，波长  $\lambda_0 \approx 0.33m$ 。

设置成像区域  $D$  为大小  $\lambda_0 \times \lambda_0$  的矩形区域，测量区域  $C$  在包围成像区半径  $3\lambda_0$  的圆弧上。40个极化方向为 $+z$  方向的线电流源均匀分布在圆弧 $[0, 2\pi)$ 上，发射单频连续波，每个线电流源照射时都会有 $[-\pi, +\pi)$ 上均匀分布的 40 个接收天线测量该点处的场强。令  $P = 40$  个线电流源在位置  $\mathbf{r}_p$  处， $\mathbf{r}_p$  同样均匀分布在 $[-\pi, +\pi)$ 的圆弧上，第  $q$  次照射产生的辐射场为

$$\begin{aligned} E^{inc}(\mathbf{r}) &= -j\omega\mu_0 \sum_{p=1}^P a_{q,p} \int_V \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_p) d\mathbf{r}' \\ &= \frac{\omega\mu_0}{4j} \sum_{p=1}^P a_{q,p} H_0^{(2)}(k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_p|) \end{aligned} \quad (3.53)$$

其中

$$a_{q,p} = \begin{cases} 1 & p = q \\ 0 & p \neq q \end{cases} \quad (3.54)$$

在正过程计算中，成像区域被剖分为  $50 \times 50$  个网格，测量数据  $\mathbf{e}^{sca}$  上被加上零均值单位方差的高斯噪声，噪声强度定义为

$$\sum_{m=1}^M \|\mathbf{e}_q^{sca}(m)\|^2 / M \cdot SNR \quad (3.55)$$

其中，信噪比  $SNR = 10$ dB。

成像目标为边长  $\lambda_0/4$  的矩形金属铜柱和矩形介质柱。其中，介质柱的相对介电常数为 5，故其对比度函数幅度为 4。金属铜柱的电导率为  $6 \times 10^7$  S/m。两个方柱中心点距离  $3\lambda_0/8$ ，如图 3.2 所示。

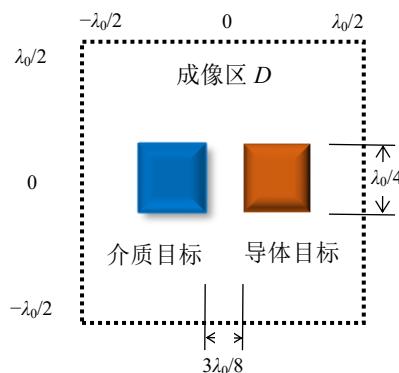


图 3.2 成像场景示意图

为了避免逆犯罪问题<sup>[13]</sup>，而在逆过程重建中，成像区域被剖分为  $30 \times 30$  个网格。分别用经典 CSI 方法、逆 T 矩阵方法和所提的交替参数更新法分别对目标进行重建，为了保证比较公平，三种方法均采用后向投影解作为对比度源的初值，且三种方法均迭代 512 次。重构结果如下图 3.3 所示。图中，(a)、(b)和(c)分别为介质的对比度函数、导体的对比度函数和目标的传输系数的真值。图 3.3. (d) 和(e) 分别为对比度源方法重建的介质对比度函数和导体对比度函数，而图 3.3. (f)

为逆 T 矩阵法重建的传输系数。图 3.3. (g)、(h)和(i)分别为交替参数更新法重建的介质对比度函数、导体对比度函数和传输系数。对比图 3.3. (b)和(e)可以发现，传统方法在重建导体时，受限于导体内总场为零，导致观测函数的  $\mathbf{G} \cdot \text{diag}(\mathbf{e})$  的秩缺失。而导体目标重建的病态性，造成图 3.3. (e)中的导体对比度函数内部为零。而导体区域的奇异性严重扰动其它区域的重建，也导致图 3.3. (d)的介质重建无法聚焦。图 3.3. (d)中重建的介质对比度峰值仅为 3.4，且空间分布明显扩散开。

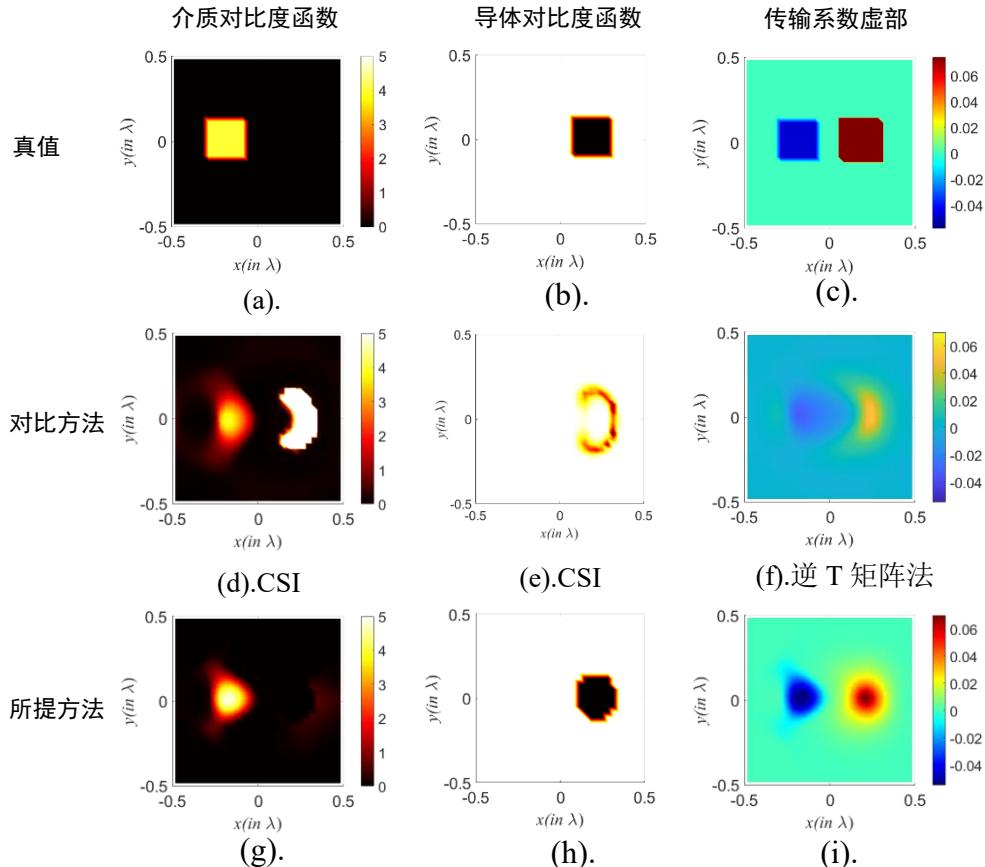


图 3.3 重建结果

而图 3.3. (f)中，传统的逆 T 矩阵法在重建导体和介质传输系数时，仅提供定性区分。由于多极展开阶数有限，故更高阶的场和目标之间的相互作用被忽略，导致其无法精确重建两个目标边界。

相比之下，本研究所提的交替参数更新法可以较为准确的定量重建介质对比度函数，如图 3.3. (g)所示，所提方法重建的介质对比度为 4.1，且在空间分布上更接近真实目标轮廓。由于交替参数更新时仅更新导体的边界传输系数，所提方法在重建导体目标时不需要导体内部的场，故规避了导体内零场带来的病态性。所提方法重建的导体如图 3.3. (h)所示，解决了传统方法重建的导体内部为零的问题，反过来也促进了介质的对比度的聚焦。在更准确的介质先验下，重建的传

输系数也更加准确, 如图 3.3. (i)所示, 其目标边界的清晰度优于图 3.3. (f)的传统方法。由此, 验证了本研究所提方法的有效性。

### 3.4.2 仿真数据验证二

在第二个仿真重建场景中, 成像构型同示例一。40 个极化方向为 $+z$  方向的线电流源均匀分布在圆弧 $[0, 2\pi)$ 上, 发射单频连续波, 每个线电流源照射时都会有 $[-\pi, +\pi)$ 上均匀分布的 40 个接收天线测量该点处的场强。在正过程计算中, 成像区域被剖分为  $50 \times 50$  个网格, 而在逆过程重建中, 成像区域被剖分为  $30 \times 30$  个网格。测量数据  $e^{sca}$  上被加上零均值单位方差的高斯噪声信噪比 SNR 为 10dB。

成像目标为介质和导体混合散射体: 一个边长  $\lambda_0/5$  的矩形铜柱被包裹在半径  $2\lambda_0/5$  的圆形介质柱内, 铜柱的电导率为  $6 \times 10^7$  S/m, 介质柱的相对介电常数为 5。成像目标的构型如图 3.4 所示。

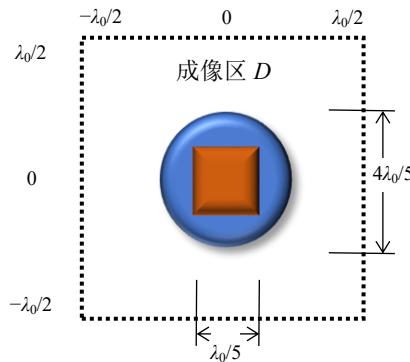


图 3.4 成像场景示意图

分别用经典 CSI 方法、逆 T 矩阵方法和所提的交替参数更新法分别对目标进行重建, 为了保证比较公平, 三种方法均采用后向投影解作为对比度源的初值, 且三种方法均迭代 512 次。重构结果如下图 3.5 所示。

图中, (a)、(b)和(c)分别为介质的对比度函数、导体的对比度函数和目标的传输系数的真值。图 3.5. (d)和(e)分别为对比度源方法重建的介质对比度函数和导体对比度函数, 而图 3.5. (f)为逆 T 矩阵法重建的传输系数。图 3.5. (g)、(h)和(i)分别为交替参数更新法重建的介质对比度函数、导体对比度函数和传输系数。

对比图 3.5. (b)和(e)可以发现, 传统方法在重建导体时, 受限于导体内总场为零, 导致观测函数的  $\mathbf{G} \cdot \text{diag}(e)$  的秩缺失。而导体目标重建的病态性, 造成图 3.5. (e)中的导体对比度函数内部为零。而导体区域的奇异性严重扰动其它区域的重建, 也导致图 3.5. (d)的介质重建无法聚焦。图 3.5. (d)中重建的介质对比度峰值仅为 3.4, 且空间分布明显扩散开。

而图 3.5. (f)中, 传统的逆 T 矩阵法在重建导体和介质传输系数时, 仅提供定性区分。由于多极展开阶数有限, 故更高阶的场和目标之间的相互作用被忽略,

导致其无法精确重建两个目标边界。

相比之下，本研究所提的交替参数更新法可以较为准确的定量重建介质对比度函数，如图 3.5.(g)所示，所提方法重建的介质对比度为 4.1，且在空间分布上更接近真实目标轮廓。由于交替参数更新时仅更新导体的边界传输系数，所提方法在重建导体目标时不需要导体内部的场，故规避了导体内零场带来的病态性。所提方法重建的导体如图 3.5. (h)所示，解决了传统方法重建的导体内部为零的问题，反过来也促进了介质的对比度的聚焦。在更准确的介质先验下，重建的传输系数也更加准确，如图 3.5. (i)所示，其目标边界的清晰度优于图 3.5. (f)的传统方法。由此，验证了本研究所提方法的有效性。

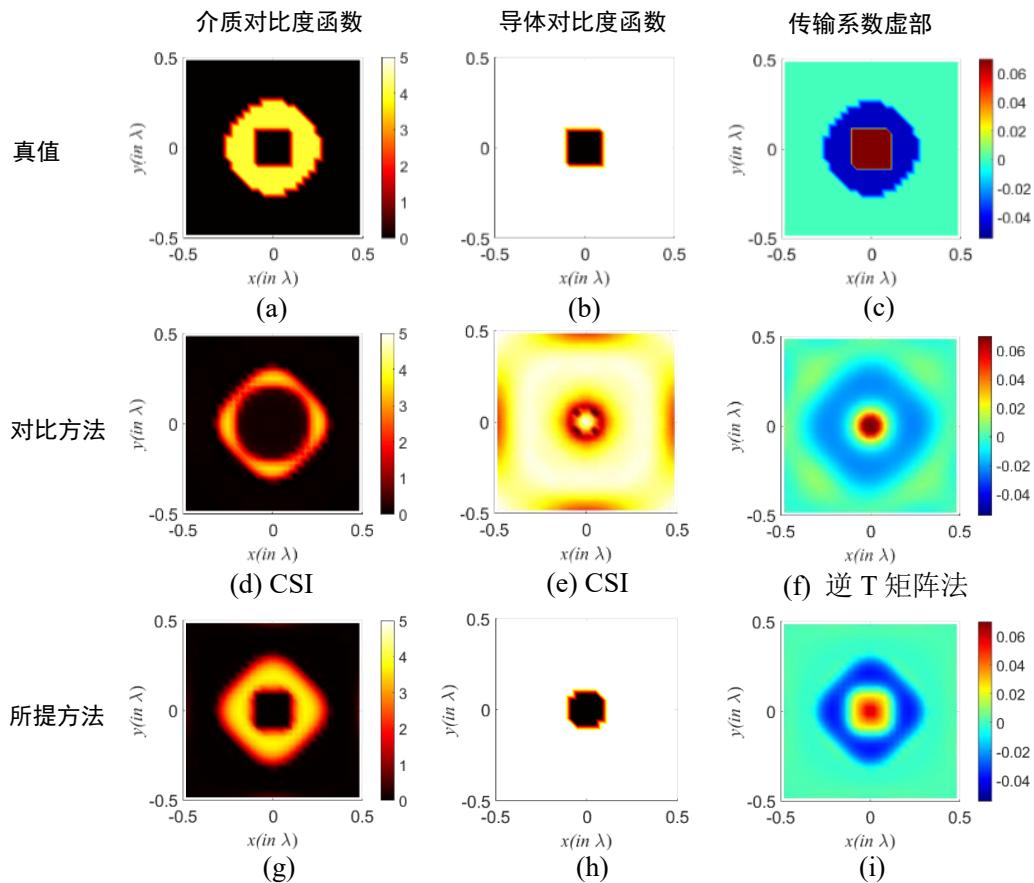


图 3.5 重建结果

### 3.4.3 仿真数据验证三

在第三个仿真重建场景中，为了说明所提方法对复杂场景的重建能力，设置为安检场景。成像区域设为  $0.64 \text{ m} \times 0.64 \text{ m}$  的矩形区域，40 个极化方向为 $+z$  方向的线电流源均匀分布在圆弧 $[0, 2\pi)$ 上，发射 900MHz 的单频连续波，每个线电流源照射时都会有 $[-\pi, +\pi)$ 上均匀分布的 40 个接收天线测量该点处的场强。在正过程计算中，成像区域被剖分为  $262 \times 262$  个网格，而在逆过程重建中，成像区域

被剖分为  $98 \times 98$  个网格。测量数据  $e^{\text{sca}}$  上被加上零均值单位方差的高斯噪声信噪比 SNR 为 10dB。

成像目标为一个持械人体如图 3.6 所示。本文根据美国国家医学图书馆中（NIH）人体可视化项目（Download Visible Human Project Data <https://www.nlm.nih.gov/databases/download/vhp.html>）数据集中的人体剖面图像构建人体介电常数分布图，其中 VHP Male Data 数据中的 70mm 分辨率的 1459 剖面图如下图 3.7 左侧所示：

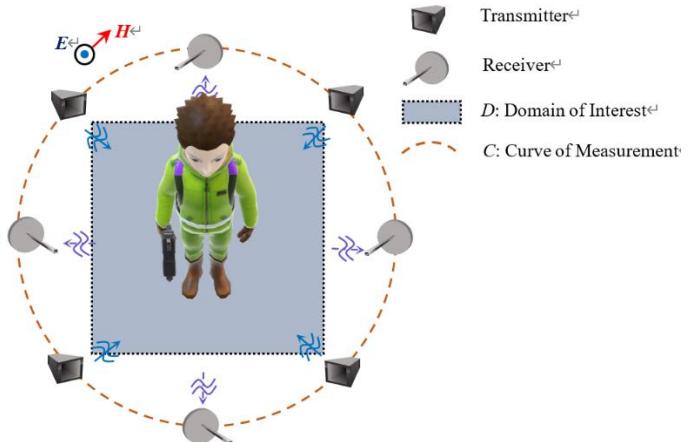
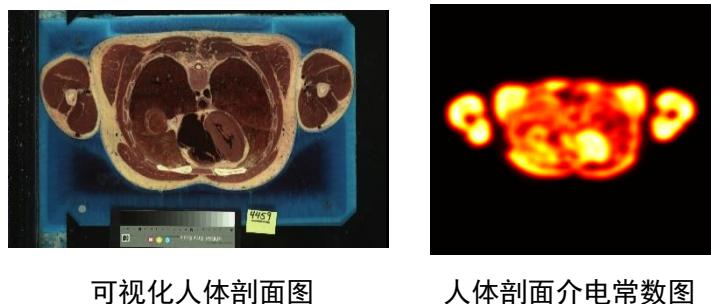


图 3.6 成像场景示意图



可视化人体剖面图

人体剖面介电常数图

图 3.7 人体可视化剖面数据

根据 900MHz 脂肪、肌肉和骨骼的介电常数构建的介电常数分布图如图 3.7 右侧所示。在人体目标边上设置  $12.4 \text{ cm} \times 3.6 \text{ cm}$  的矩形金属目标，取电导率为  $10^7 \text{ S/m}$ 。分别用经典 CSI 方法、逆 T 矩阵方法和所提的交替参数更新法分别对目标进行重建，为了保证比较公平，三种方法均采用后向投影解作为对比度源的初值，且三种方法均迭代 512 次。重构结果如下图 3.8 所示，横纵坐标相对于波长归一化，可见导体目标仅为波长的  $1/10$ ，而介质目标也仅占一个波长。

图中，(a)、(b)和(c)分别为介质的对比度函数、导体的对比度函数和目标的传输系数的真值。图 3.8. (d)和(e)分别为对比度源方法重建的介质对比度函数和导体对比度函数，而图 3.8. (f)为逆 T 矩阵法重建的传输系数。图 3.8. (g)、(h)和(i)分别为交替参数更新法重建的介质对比度函数、导体对比度函数和传输系数。

对比图 3.8. (b)和(e)可以发现，由于导体内总场为零，传统方法完全无法重

建低于分辨率的导体。而导体目标重建的病态性，造成图 3.8. (d)中的介质目标受到严重扰动，故介质重建无法聚焦。而图 3.5. (f)中，传统的逆 T 矩阵法在重建导体和介质传输系数时，仅提供定性区分。由于多极展开阶数有限，故更高阶的场和目标之间的相互作用被忽略，导致其无法精确重建两个目标边界。

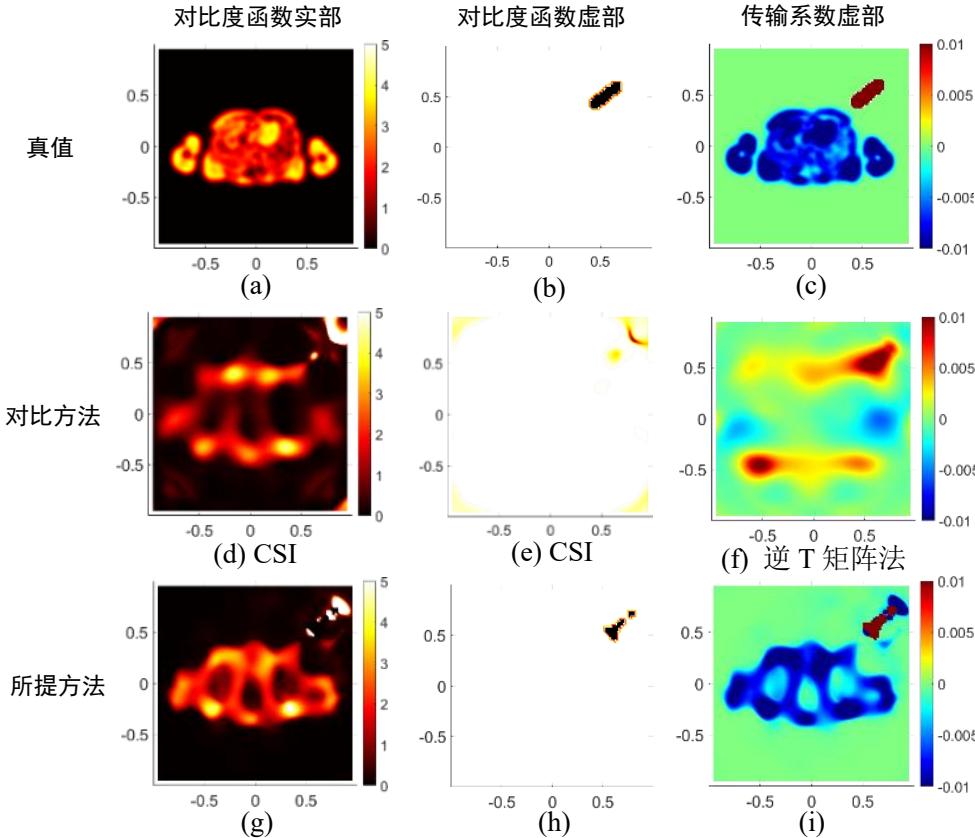


图 3.8 重建结果

相比之下，本研究所提的交替参数更新法可以较为准确的定量重建介质对比度函数，如图 3.8. (g)所示，所提方法重建的介质对比度空间分布上更接近真实目标轮廓。由于交替参数更新时仅更新导体的边界传输系数，所提方法在重建导体目标时不需要导体内部的场，故规避了导体内零场带来的病态性。所提方法重建的导体如图 3.8. (h)所示，解决了传统方法重建的导体内部为零的问题，反过来也促进了介质的对比度的聚焦。在更准确的介质先验下，重建的传输系数也更加准确，如图 3.8. (i)所示，其目标边界的清晰度优于图 3.8. (f)的传统方法。由此，验证了本研究所提方法的有效性。

### 3.4.4 实测数据验证

在 Fresnel 研究院 2005 年的数据集中，我们选择数据 “FoamMetExt”进行验证。该数据中，目标为一个直径 28.5mm 的金属铜柱贴着一个直径 80mm 的泡沫塑料柱放置，如下图 3.9.(a)所示。其中，泡沫塑料柱的相对介电常数为  $1.45 \pm 0.15$ 。

收发天线分别为布置在距离坐标中心半径 1.67m 的圆环上的两个双脊喇叭天线，如图 3.9.(b)所示。发射天线从 0 度到 340 度，以 20 度步进依次在圆环上向成像区域中心照射，共 18 次照射。每次照射时，有接收天线相对于发射天线方位 60 度到 300 度，以 1 度步进依次测量所在位置场强。数据集中，以 2GHz 为步进，提供 2-18GHz 下的有目标和无目标时的测量散射场，本实验取工作在 4GHz 的测量结果进行处理。

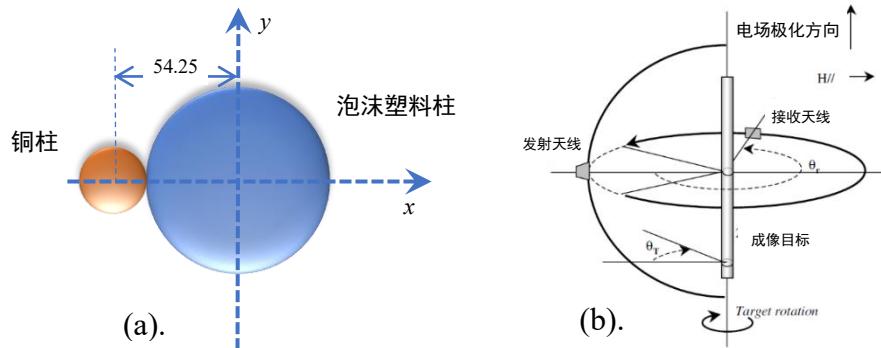


图 3.9 成像场景示意图

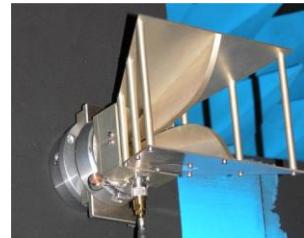


图 3.10 双脊喇叭天线

本文选择成像区域为大小 150 mm×150 mm 的矩形区，并将其离散化为 44×44 个网格。由于在重建中需要知道空间中的入射场分布，故首先根据空场景的测量数据反推照射天线口面电流源分布。实际喇叭天线尺寸未知，故无法得到精确的天线口面数据，根据 Graf 加法定理

$$B_m(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) e^{\pm jm\theta_{x-y}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_{m+n}(|\mathbf{x}|) e^{\pm j(m+n)\theta_x} J_n(|\mathbf{y}|) e^{\mp jn\theta_y} \quad |\mathbf{y}| < |\mathbf{x}| \quad (3.56)$$

任意位置的线电流源的辐射场可以等效为其它位置的多极子辐射场。反之，各个位置的线电流源的辐射场可以等效为同一个位置的多极子辐射场。由于照射天线的位置精确已知，故可以用源位置处的加权多极子辐射场拟合辐射天线的口面场。在第  $q$  次照射中  $P$  个天线产生的辐射场写为

$$E_{inc}(\mathbf{r}) = -\frac{\omega_0 \mu_0}{4} \sum_{p=1}^P \alpha_{q,p} \sum_{\gamma=-\Gamma}^{+\Gamma} c_{\gamma,p} H_\gamma^{(2)}(k_0 |\mathbf{r}_{q,p} - \mathbf{r}|) e^{j\gamma\varphi(\mathbf{r}_{q,p} - \mathbf{r})} \quad (3.57)$$

其中， $\alpha_{q,p}$  为第  $q$  次照射中第  $p$  个天线的激励权重，由于一次照射仅有一个天线工作，故取值同(3.54)。 $c_{\gamma,p}$  为第  $p$  个天线位置处的第  $\gamma$  阶多极子的权重， $\varphi(\mathbf{r}_{q,p} - \mathbf{r})$

$\mathbf{r}$ )为矢量  $\mathbf{r}_{q,p} - \mathbf{r}$  的角度。故给定一次照射的  $M$  个测量位置  $\mathbf{r}_{q,m}$  ( $m = 1, \dots, M$ )，则无目标的自由空间测量数据为

$$\mathbf{e}_q^{sca} = \mathbf{H}_q \mathbf{c} \quad (3.58)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \left[ c_{\gamma,p} \right]_{P(2\Gamma+1) \times 1} \\ \mathbf{H}_q &= \left[ -\frac{\omega_0 \mu_0}{4} \alpha_{q,p} H_\gamma^{(2)} \left( k_0 |\mathbf{r}_{q,p} - \mathbf{r}_{q,m}| \right) e^{j\gamma\varphi(\mathbf{r}_{q,p} - \mathbf{r}_{q,m})} \right]_{M \times P(2\Gamma+1)} \end{aligned}$$

解(3.58)方程即可得到拟合入射场的多极展开权重。对 4GHz 测量数据的第一个照射源的拟合结果如图 3.11 所示，其中红色点为测量数据，蓝色虚线为拟合出的辐射场分布。由于只采用 ± 3 阶拟合，且测量数据含有噪声，故对主瓣和靠近主瓣两侧的测量数据能较好的拟合，而对测量结果中远离主瓣的副瓣分量难以准确拟合，表明信噪比对(3.58)方程有较高的影响。

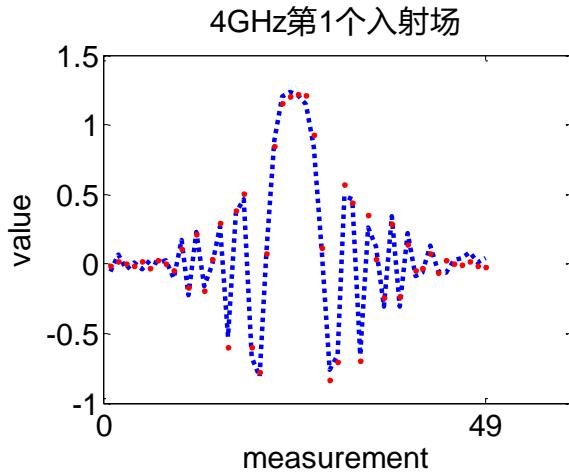


图 3.11 多极展开拟合入射场测量数据

同第一个验证过程，分别用经典 CSI 方法、逆 T 矩阵方法和所提的交替参数更新法分别迭代 512 次对目标进行重建，且三种方法均采用后向投影解作为对比度源的初值。重建结果如图 3.12 所示。其中，横纵坐标均相对于波长归一化，可见目标尺寸均在亚波长量级。

图中，(a)、(b)和(c)分别为介质的对比度函数、导体的对比度函数和目标的传输系数的真值。图 3.12.(d)和(e)分别为对比度源方法重建的介质对比度函数和导体对比度函数，而图 3.12.(f)为逆 T 矩阵法重建的传输系数。图 3.12.(g)、(h)和(i)分别为交替参数更新法重建的介质对比度函数、导体对比度函数和传输系数。同样图 3.12.(d)和(e)表明传统方法受限于导体内总场为零带来的病态性，造成导体重建误差较大，而导体区域的奇异性更加严重扰动介质的重建，图 3.12.(d)中介质的重建完全失败。而图 3.12.(f)中，传统的逆 T 矩阵法在重建导体和介质传

输系数时，仅提供定性区分，其无法提供两个目标的精确轮廓。

相比之下，本研究所提的交替参数更新法可以较为准确的定量重建介质对比度函数，如图 3.12.(g)所示，所提方法重建的介质对比度在 0.45 附近，且在空间分布上更接近真实目标轮廓。由于交替参数更新时仅更新导体的边界传输系数，所提方法在重建导体目标时不需要导体内部的场，故规避了导体内零场带来的病态性，如图 3.12.(h)所示，反过来也促进了介质的对比度的聚焦。在更准确的介质先验下，重建的传输系数也更加准确，如图 3.12.(i)所示，其目标边界的清晰度优于图 3.12.(f)的传统方法。由此，验证了本研究所提方法的有效性。

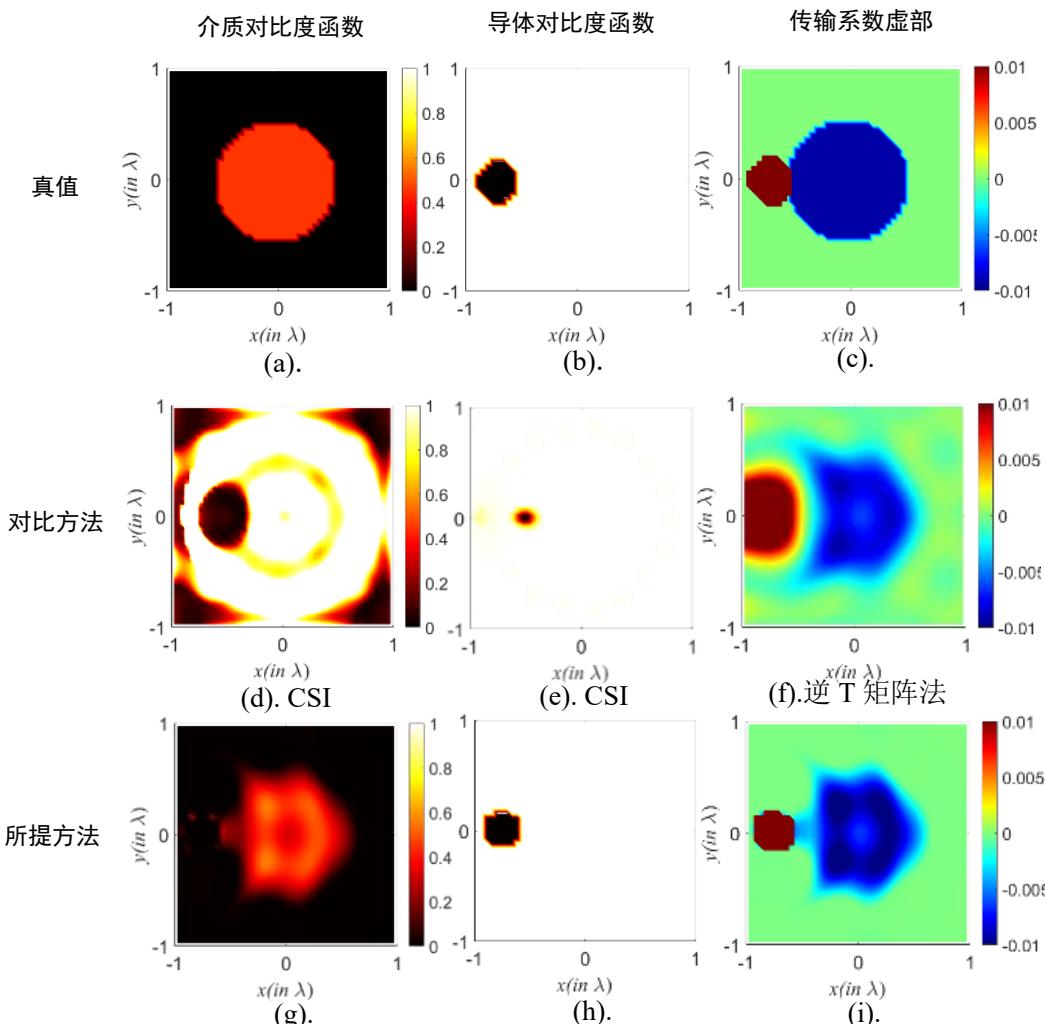


图 3.12 实测数据重建结果

### 3.5 本章小结

在常见的逆散射成像应用中，导体和介质并存的情况极其常见。而导体内部的零场造成测量信息的缺失，带来了观测矩阵有效秩的缺失，进而加重了逆散射成像问题的病态性。然而利用边界条件进行重建则不受该零场效应影响，但受限于展开阶数，只能定性重建。本章从正则化角度出发，尝试定性分割导体和介质

目标区域实现对观测矩阵的降维，变相完成了对逆问题的子空间约束，实现了病态问题的正则化。

首先，本章在统一了基于边界条件的多极展开模型和基于体等效原理的等效电流模型的基础上，进一步将定量重建问题划分为了介质的定量重建和导体边界的定性重建，得到了关于介质对比度和导体传输系数的模型。之后，利用 Krylov 子空间法对两个参数进行交替更新，实现了两个相关的方程的同时重建。在算法设计中，研究了高维矩阵乘法的加速方法，降低了计算和存储复杂度。最后，通过矩量法仿真和实测数据验证了所提方法的有效性。

## 第4章 基于超振荡效应的逆散射超分辨方法

由于趋肤效应，本文需要处理波长量级的成像问题，故需要接近甚至超越衍射极限的成像分辨率。为了处理超越衍射极限的问题，本章以超振荡效应为理论基础，构建逆散射成像框架下的超分辨方法。首先，我们将说明本研究中所面对的两大问题：第一个问题是非线性成像的超分辨理论存在争议，即在不引入强先验信息的前提下，非线性逆散射成像分辨率是否优于线性逆源成像；第二个问题是如何在不修改成像构型的前提下，在微波成像系统中的直接应用超振荡效应。

在4.1节中，本章首先从格林函数的角度分析了成像系统的衍射极限，得到了逆源成像系统均受限于 $\lambda/2$ 极限的结论，并指出在非线性问题中该结论存在争议。随后回顾了现有的物理超分辨成像方法，指出了超振荡效应在物理超分辨的优势和在微波成像上应用的挑战。在4.2节中，介绍了超振荡效应的数学原理以及其潜在的正则化效应，并说明其与Shannon信道容量理论的统一性。在4.3节中，基于超振荡效应给出了非线性逆散射的超分辨理论，并据此提出了直接法和间接法两套入射场优化策略。根据所提的入射场优化策略，本文进一步说明了超振荡效应和非线性问题正则化的等价性。最后，所提算法在电磁仿真和实测数据上和无入射场优化的结果进行对比，验证了该算法的有效性。

### 4.1 超分辨基础理论

#### 4.1.1 衍射极限与非线性效应

首先我们说明成像系统中经典的极限分辨率的定义。根据(2.7)直接写出二维问题中线源的辐射场

$$E(\mathbf{r}) = -\frac{\omega\mu_0}{4} H_0^{(2)}(k_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) \quad (4.1)$$

代入Hankel函数积分表达式

$$\begin{aligned} H_0^{(2)}(k_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\exp[-jk_0yM(k_x)]}{k_0M(k_x)} e^{-jk_xx} dk_x \\ M(k_x) &= \begin{cases} \sqrt{1-k_x^2/k_0^2} & |k_x| \leq k_0 \\ j\sqrt{k_x^2/k_0^2 - 1} & |k_x| \geq k_0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2)$$

得到

$$E(\mathbf{r}) = -\frac{\omega\mu_0}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{je^{-jk_y|y|}}{2k_y} e^{jk_xx} dk_x \quad (4.3)$$

由于 $k_x^2 + k_y^2 = k_0^2$ ，当 $k_x > k_0$ 时 $k_y$ 为虚数，(4.3)中被积分项在 $k_x \in (-\infty, -k_0) \cup (+k_0,$

$+\infty$ )区间内为一系列沿着 $\pm y$ 方向衰减的倏逝波, 如图 4.1 所示。二维情况下格林函数描述出的倏逝波沿着垂直于视线方向衰减, 且在远场趋于零。因此, 在远场条件下的波函数可以表示为

$$E(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} D\{\tilde{E}(k_x), k_0\} e^{jk_x x} dk_x \quad D\{\tilde{E}(k_x), k_0\} = \begin{cases} \tilde{E}(k_x) & k_x \leq k_0 \\ 0 & k_x > k_0 \end{cases} \quad (4.4)$$

根据测不准原理<sup>[112]</sup>, 函数在一个域中的宽度与其在变换域中的宽度大致呈倒数关系。Ernst Abbe 认为任意一个成像系统的空间谱支撑集为 $[-NAk_0, NAk_0]$ ,  $NA = \sin \theta$  为数值孔径, 其中  $\theta$  为成像系统有效孔径的半边视角<sup>[113]</sup>。假设孔径内的空间谱均匀填充, 则

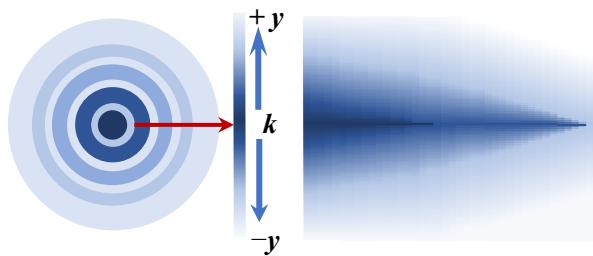


图 4.1 线源生成的倏逝波示意图

$$E(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-NAk_0}^{NAk_0} \exp(jk_x x) dk_x = \frac{NA \cdot k_0}{\pi} \sin c(NA \cdot k_0 x) \quad (4.5)$$

如果以 sinc 函数峰值到第一个零点的宽度作为其可分界限, 则有 Abbe 衍射极限

$$\Delta x_{Abbe} = \frac{\pi}{NAk_0} = \frac{\lambda_0}{2NA} \quad (4.6)$$

该式描述了成像系统一个像素的极限大小。而 Rayleigh 极限则定义为两个(4.5)中 sinc 函数可分的极限间距<sup>[114]</sup>

$$\Delta x_{Rayleigh} = \frac{0.61\lambda_0}{NA} \quad (4.7)$$

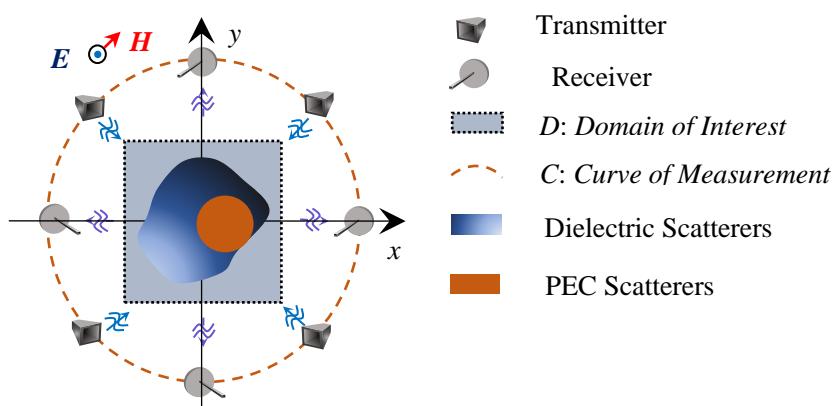


图 4.2 成像构型示意图

当成像系统孔径足够大时，有效孔径夹角  $\theta = \pi/2$ ，相应的  $NA = 1$ ，则极限分辨率为  $\lambda_0/2$ 。可见当成像系统孔径足够大时，例如图 4.2 中收发阵列包围成像区域的成像构型，成像系统的分辨率上限为  $\pi/k_0$ ，即波函数的谱  $k_0$  决定分辨率。

因此，一个成像系统内所能达到的分辨率由可观测的场的空间谱决定。体等效原理说明了回波的场由格林函数和等效电流密度函数的卷积决定，即

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{sca}(\mathbf{r}) &= -j\omega\mu_0 \overline{\overline{\mathbf{G}}}_0(\mathbf{r}) * \mathbf{J}_{eq}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{-j\omega\mu_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{G}}_0(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\mathbf{J}}_{eq}(\mathbf{k}) \cdot \exp(j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{k} \end{aligned} \quad (4.8)$$

故源的谱经过格林函数滤波后得到回波的谱。然而，格林函数是波动方程的解

$$(\nabla^2 + k_0^2) G_0(\mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4.9)$$

其中  $k_0$  是(4.9)波函数的特征值。以二维格林函数为例

$$\tilde{G}_0(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\mathbf{r}) e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} = -\frac{j\pi}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x r H_0^{(2)}(k_0 r) J_0(k_r r) dr \quad (4.10)$$

当  $k_r \neq k_0$  时，有

$$\tilde{G}_0(\mathbf{k}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{\sqrt{k_0/k_r} \cos(k_r x - \pi/4)}{j\sqrt{k_r/k_0} \sin(k_r x - \pi/4)} \right] e^{-j(k_0 x - \pi/4)} \leq \frac{1}{k_0^2 - k_r^2} \quad (4.11)$$

而当  $k_r = k_0$  时，有

$$\tilde{G}_0(\mathbf{k}) = \frac{-j}{2k_0} \lim_{x \rightarrow \infty} x \quad (4.12)$$

综合(4.11)和(4.12)可以得到结论

$$\tilde{G}_0(\mathbf{k}) \approx \frac{-j}{2k_0} \delta(k_r - k_0) \quad (4.13)$$

将空间谱画出如图 4.3 所示，可见二维格林函数为保留  $k_x^2 + k_y^2 = k_0^2$  空间谱分量的滤波函数。(4.8)中以格林函数为核的积分算子的点谱为  $k_0$ ，由于有可数点谱的算子是紧算子，故该格林算子构成紧算子。因此，根据回波  $\mathbf{E}^{sca}$  对源  $\mathbf{J}_{eq}$  成像本身就是一个病态问题，这个问题的病态性造成了成像系统的空间谱受限于病态算子的谱宽  $\pm k_0$ ，进而导致了成像极限分辨率低于  $\pi/k_0$  的结果。

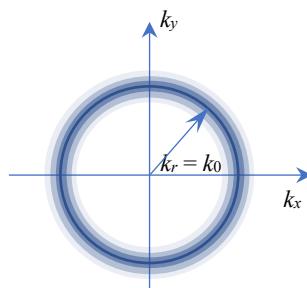


图 4.3 二维格林函数的空间谱

换而言之，即使假设有一个理想的成像系统的孔径填满了整个  $4\pi$  范围的立体角，即任意小的收发天线布满了包围成像区域  $D$  的球面  $S$ ，如图 4.4 所示。其所能达到的极限分辨率最终由回波的空间谱决定。而由于格林算子的病态性，可获得的回波空间谱始终不会超过  $k_0$  的。综上，成像系统的极限分辨率是由观测函数的病态性决定的。以上对成像系统的极限分辨率的说明是建立在源与场的关系上，根据(4.8)表述，二者由格林函数联系。在常见的光学成像或是逆源成像问题中，分辨的是两个点源的分布。换而言之，重建对象并非散射体本身，而是散射体上的等效电流密度函数  $\mathbf{J}_{eq}$ 。因此，其极限分辨率完全由格林函数决定，上限在  $\pi/k_0$ 。

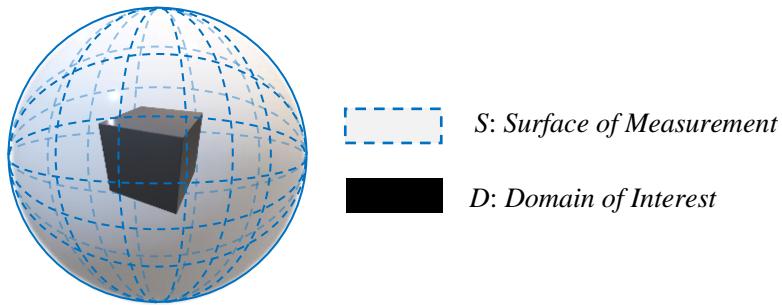


图 4.4 观测构型示意图

然而在非线性的逆散射成像中，重建对象并非等效电流源，而是散射体本身的本构参数，即对比度函数或是传输系数。等效电流等于后者乘以总场或是总场的多极展开系数，

$$\mathbf{J}_{eq}(\mathbf{r}) = j\omega\epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \chi(\mathbf{r}) = j\omega\epsilon_0 \mathbf{c}_E(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{r}) \quad (4.14)$$

这导致对源的分辨不同于对本构参数的分辨。因为中间还涉及对总场的重建，无法直接从傅里叶变换的角度分析本构参数的分辨率，故非线性逆散射重建是否存在超分辨的可能成为了一个研究热点<sup>[11][65-68]</sup>。一种常见的解释是非线性重建涉及到对总场的求解，而总场包含了目标区域中场的耦合关系，故能利用更多倏逝波分量进行重构<sup>[11]</sup>。然而，这种倏逝波被转化为传输波的过程并没有严格的数学描述<sup>[14]</sup>，因此是否存在该效应被部分学者质疑。另一方面，在不引入正则化效应的情况下，无法保证准确的总场重建，也就导致本构参数的解空间和等效电流源的解空间并无不同<sup>[68]</sup>。因此，有学者认为非线性逆散射能得到超分辨的结果完全是依靠正则化的效应，而非非线性本身的收益。

因此，在非线性逆散射的框架下，不依赖强先验信息的超分辨能力需要更明确的理论分析。

#### 4.1.2 物理超分辨成像方法

通常，成像系统为了提高分辨率的做法是加入透镜来改变成像系统的有效孔

径夹角  $\theta$ , 以约束成像区域范围为代价放大孔径得到更多的空间谱填充范围。在微波成像系统中, 就是在阵列前加超表面透镜<sup>[73]</sup>。然而当有效孔径提高到  $\pi/2$  后, 依然受到倏逝波衰减的影响, 其所能达到的极限分辨率为  $\lambda_0/2$ 。想要获得高于极限分辨率的成像效果, 一种方法是获取倏逝波分量。从(4.2)可见, 倏逝波分量就是成像系统空间谱带宽以外的高频分量。由于其衰减特性, 成像系统需要在近场工作以保证倏逝波能量高于噪声<sup>[11]</sup>。另一种方法则是通过物理手段修改成像构型, 例如将目标包裹在非均匀浸没式透镜内、在成像区域放置编码超表面等<sup>[75-78]</sup>, 将波束从自由空间传播转为已知媒质中传播, 导致成像系统的格林函数带宽展宽, 带来更高的空间谱填充。通常这类成像系统在成像时会考虑这些已知媒质, 而在分辨率比较时又忽略已知媒质, 和自由空间分辨率进行对比。这类方法将超分辨解释为“将倏逝波转化为传输波”, 实际上是借助了复杂化的成像构型的先验信息, 在一定程度上甚至将病态逆问题转为良态问题<sup>[74]</sup>。以上两种方法都在试图绕过极限分辨率的定义, 通过修改边界条件来拓宽空间谱, 带来了应用上的局限性。大多数情况下, 例如穿墙或是探地, 成像区域不可介入, 更无法利用近场效应或是导入特殊材料修改成像空间。

然而, 超振荡理论给了我们一个直面极限分辨率挑战的机会。在带宽有限函数集合构成的空间中, 傅里叶基函数成为了过完备基函数, 导致给定带宽限制的函数可以拟合局部任意跳变速率的离散点<sup>[90]</sup>。换而言之, 用带宽  $k_0$  的函数在局部去拟合分辨率高于  $k_0$  的波形。在成像系统的极限分辨率分析中, 空间谱宽度被认为是唯一决定空域波函数分辨率的因素, 而超振荡理论确认空域波函数的跳变速率不仅由带宽决定, 还由信号能量决定<sup>[90]</sup>。因此, 通过能量的累积来获得带宽以外的信息成为可能。近几年, 超振荡成为光学超分辨领域热点研究方向, 其常见做法是设计超表面掩膜、光瞳滤波器或是透镜, 将光衍射后形成超振荡聚焦点, 在扫描模式下完成超分辨成像<sup>[115]</sup>。可见, 这类做法与前面所提的“倏逝波转化为传输波”类修改成像构型的方法并无结构上的区别。虽然激励源为低频, 但是通过了宽带的器件调制, 修改了成像构型。此外, 大多数超振荡合成方法需要拟合函数有一定的带宽<sup>[116]</sup>, 由于光学成像中仅关注幅度信息, 故不同频率的波可以直接叠加。

而在微波波段, 不同频率的波函数叠加造成合成的超振荡聚焦点存在时变性, 难以在长时间内维持。故起初在微波成像系统中, 超振荡被用于设计点成像系统的扩散函数, 在时域构建聚焦点而非空域<sup>[84][85]</sup>。随后, 单频的涡旋电磁波被发现具有超分辨潜力, 并构建了分辨率和其携带的轨道角动量的关系<sup>[86]</sup>。虽然没有明确分析, 但是李廉林等人提出其可能具有超振荡效应。Kozawa 等人证明高阶径向 Laguerre-Gaussian 波束本身就具备超振荡效应<sup>[83]</sup>, 由于与涡旋波同属于柱坐

标系波动方程的解，故间接说明了涡旋电磁波的超振荡效应。

然而，基于轨道角动量的超分辨潜力被质疑仅仅是源于空间分集效应<sup>[91]</sup>。根据(4.8)结论，更高阶的涡旋波照射并不能激发高频的回波，回波依旧受到格林函数通带的限制。换而言之，没有明确结论说明超振荡效应直接将病态成像问题转化为良态问题。在不加入超材料或是透镜去修改成像构型的前提下（即光学做法），单纯依靠收发天线的单频波束能否将高频信息调制到低频并恢复，依旧存疑。

综上，在微波成像系统中，不改变成像构型的前提下，直接利用超振荡效应有待进一步研究。

## 4.2 超振荡原理

在对衍射极限的论述中，我们说明了成像系统的分辨率和空间谱的关系，根据该关系可以发现：成像系统的分辨率上限受到成像问题的病态性约束。而在子空间约束下，病态问题的稳定性能得到明显改善。因此，在本节，我们将说明超振荡能实现超分辨成像，本身就是一种子空间约束下的正则化方法。

### 4.2.1 超振荡与病态逆问题

一个典型的超振荡函数如

$$f(x) = (\cos x + ia \sin x)^N \quad a > 1, N \gg 1 \quad (4.15)$$

是一个频谱与  $a$  无关的有限带宽函数。而当  $x$  趋于 0 时，有  $f(x) \approx \exp(iaNx)$ ，该式的振荡频率却可以随着  $a$  任意增大而增大，也就是局部波形的振荡速率不受限于全局带宽。显然要解释这种违背直觉的效应，需要回到抽象空间分析这一类函数的采样定理。

给定采样函数所在的 Hilbert 空间  $H_{k0} = L^2[-k_0, k_0]$ ，即带宽  $k_0$  内的平方可积函数空间。那么真正严格的带宽有限函数  $f$  应当满足  $f \in H_{k0}$ ，且存在  $c(f) < k_0$  使得

$$\tilde{f}(k) = 0 \quad |k| > c(f) \quad (4.16)$$

并满足各阶偏导均在  $H_{k0}$  空间内。这样的严格带宽有限函数构成了  $H_{k0}$  的一个子空间  $B_{k0}$ 。由于各阶可导，故  $H_{k0}$  内的任意函数均可以被  $B_{k0}$  内的函数以 Taylor 展开逼近，故  $B_{k0}$  在  $H_{k0}$  中稠密。

由于傅里叶变换是函数在其所在不变子空间的投影，因此需要借助算子的谱分解来提供在该不变子空间投影的直交基，这里采用常见的乘法算子

$$T: f(r) \rightarrow Tf = rf(r) \quad (4.17)$$

乘法算子在傅里叶变换域则可以写为

$$T: \tilde{f}(k) \rightarrow Tf = -i d\tilde{f}(k)/dk \quad (4.18)$$

根据(4.16),  $Tf \in B_{k0}$  对  $f \in B_{k0}$  始终成立, 故乘法算子满足  $T: B_{k0} \rightarrow B_{k0}$  的映射关系。因此分析乘法算子在  $B_{k0}$  上的谱分解就可以得到该空间上投影的直交基。

令给定区间  $[n, n+1]$  上的特征函数  $f_n(x)$ , 则  $\|f_n\| = 1$ , 且满足

$$\|Tf_n\|^2 = \int_n^{n+1} r^2 dr = \frac{(n+1)^3 - n^3}{3} \quad (4.19)$$

故当  $n \rightarrow +\infty$ , 有  $\|Tf_n\| \rightarrow +\infty$ , 所以  $T$  是无界算子。由于  $B_{k0}$  在  $H_{k0}$  中稠密, 故定义在  $B_{k0}$  上算子  $T$  是一个稠定的无界算子, 且  $D(T) \subset D(T^*)$ 。根源在于严格带宽有限函数空间  $B_{k0}$  无法构成闭空间, 因而不是  $H_{k0}$  中的完备子空间。由于无法直接在非完备子空间上构造完备直交基, 故对该无界算子进行谱分解前需要先对该算子进行自伴扩张。自伴扩张通过约束其定义域实现

$$D_{T(\alpha)} = \left\{ f \in D_T \mid \tilde{f}(-k) = e^{i\alpha} \tilde{f}(k) \right\} \quad (4.20)$$

相应自伴扩张后的算子有谱分解

$$\begin{aligned} T(\alpha)t_n(\alpha) &= t_n^\alpha t_n(\alpha) \quad n \in \mathbb{Z} \\ t_n^\alpha &= \frac{n}{2k_0} - \frac{\alpha}{4\pi k_0} \quad \tilde{t}_n(\alpha) = \exp(2\pi t_n^\alpha k) / \sqrt{k_0} \end{aligned} \quad (4.21)$$

其中,  $t_n^\alpha$  是特征值,  $t_n(\alpha)$  是特征向量。可见, 对任意  $\alpha \in R$  和  $n \in \mathbb{Z}$ , 都有唯一的  $r \in R$  满足  $t_n^\alpha = r$ 。所有  $T(\alpha)$  ( $\alpha \in R$ ) 的定义域的直和就是  $T^*$  的定义域, 故又有  $T^* t_n(\alpha) = t_n^\alpha t_n(\alpha)$  对所有  $\alpha \in R$  成立。

由于  $\mathbf{t} = \{t_n(\alpha) | \alpha \in R, n \in \mathbb{Z}\}$  为 Fourier 直交基, 有  $L^2$ -Fourier 变换

$$\begin{aligned} f(r) &= \langle \tilde{f}, \mathbf{t} \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle \mathbf{t}, t_n(\alpha) \rangle f(t_n^\alpha) \\ &= \frac{1}{2k_0} \int_{-k_0}^{+k_0} \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t_n^\alpha) \exp(-i2\pi t_n^\alpha k) \right] e^{2\pi kr} dk \end{aligned} \quad (4.22)$$

易见, (4.22)就是采样定理的形式。由于  $t_n(\alpha)$  是同一个算子在不同定义域约束下的特征向量, 故当  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  时,  $t_n(\alpha_1)$  与  $t_n(\alpha_2)$  之间并不正交

$$\langle t_n(\alpha), t_m(\alpha') \rangle \neq 0 \quad \alpha \neq \alpha' \quad (4.23)$$

因此, 在  $H_{k0}$  上完备的 Fourier 基  $\mathbf{t}$  在子空间  $B_{k0}$  上构成了一套过完备基。换而言之, 在子空间  $B_{k0}$  上可以用低维的基函数拟合高维 Fourier 直交基。

故假如超振荡效应存在, 那么给定任意  $N$  个离散时间  $r_1, \dots, r_N$  和幅度  $a_1, \dots, a_N$ , 总有  $f \in B_{k0}$  满足

$$\begin{aligned} f(x_i) &= \langle t_i, \tilde{f} \rangle = a_i \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle t_i, t_n(\alpha) \rangle \langle f(t_n^\alpha), \tilde{f} \rangle &= a_i \quad \{t_i\} \in \{t\} \end{aligned} \quad (4.24)$$

若假设成立，当且仅当  $\langle t_i, t_n(\alpha) \rangle$  满秩。由于  $\{t_n(\alpha)\}$  过完备，故该矩阵满秩当且仅当  $\{t_i\}$  相互线性独立。假设  $\{t_i\}$  相互线性相关，则存在非零  $\lambda_i$  使得

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i t_i = 0 \quad (4.25)$$

对上式重新用  $T^*$  映射得到

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \lambda_i r_i^n t_i &= 0 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{N-1} & r_2^{N-1} & \dots & r_N^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 t_1 \\ \lambda_2 t_2 \\ \vdots \\ \lambda_N t_N \end{bmatrix} &= 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

可见，特征值矩阵为范德蒙德阵，其行列式为

$$\det = \prod_{1 \leq j < k \leq N} (r_k - r_j) \quad (4.27)$$

由于拟合的各离散点  $x_i$  互不相同，故该范德蒙德阵可逆。则对任意  $i = 1, \dots, N$  都存在  $\lambda_i t_i = 0$ ，故  $\lambda_i = 0$ 。故特征向量集  $\{t_i\}$  相互线性独立，即方程有解。故超振荡效应存在。

综上，超振荡效应源于 Fourier 基函数在严格带宽有限函数构成的子空间  $B_{k0}$  上构成一组过完备基，从而可以依靠有限带宽函数拟合任意跳变的离散点。而根据(2.53)的结论，在病态逆问题中，第一类 Fredholm 积分算子  $K: X \rightarrow Y$  将不可数维 Hilbert 空间  $X = L^2[a, b]$  映射为其中稠密的可数维空间  $Y = \{\chi(av, bv)(s)\}$ ，导致其不可逆。而在衍射极限的讨论中，我们说明了该空间  $Y$  上的元素均属于严格带宽有限函数，即  $Y \subset B_{k0}$ 。因此，若令  $X_n$  为  $X$  在可数基函数上的投影，则有投影算子  $P: X \rightarrow X_n$  使得

$$Px = \sum_n \langle x, \xi_n \rangle \xi_n = \sum_n x_n \xi_n \quad x \in X, x_n \in X_n \quad (4.28)$$

根据(4.24)结论，不论  $x$  的带宽多少，总存在  $y \in B_{k0}$  使得

$$y(r_i) = \langle \xi_i, \tilde{y} \rangle = x_i \quad i = 1, \dots, n \quad (4.29)$$

故存在算子  $K_n^{-1}: Y \rightarrow X_n$  构成离散化逆问题的解  $K_n: X_n \rightarrow Y$ 。换而言之，离散化过程  $P$  构成了对解空间  $X$  的约束，使得我们可以基于超振荡理论用有限带宽函数  $y \in Y$  拟合任意高频的跳变点  $\{x_n\}$ 。

## 4.2.2 超振荡与信噪比的关系

直觉上，超级振荡似乎为将任意信息编码进任意小的窄带信号并传输提供了可能，这是否与 Shannon 定理的  $B\log_2(1+S/N)$  相悖？此外，在以上分析中，病态逆问题的离散化过程约束了解空间，使得我们可以根据超振荡理论用低频函数拟合离散的任意高频跳变点。故基于超振荡效应解决逆问题的过程同样可以视为一个正则化过程，而作为一个正则化策略就需要分析其随噪声扰动的收敛性。

这里依旧在 Hilbert 空间  $L^2$  空间下分析，则对任意  $f \in B_{k_0}$  有 Parseval 等式

$$\|\tilde{f}\|_2 = \left( \int_{-k_0}^{k_0} |\tilde{f}(k)|^2 dk \right)^{1/2} \quad (4.30)$$

易见，(4.30) 隐含了对信号带宽  $[-k_0, k_0]$  的限制。对  $f(r)$  的微分求二范数

$$\begin{aligned} \|df(r)/dr\|_2^2 &= \left\| \int_{-k_0}^{k_0} [\tilde{f}(k)i2\pi k] e^{i2\pi kr} dk \right\|_2^2 \\ &= \int_{-k_0}^{k_0} |2\pi k \tilde{f}(k)|^2 dk \leq (2\pi k_0)^2 \|\tilde{f}\|_2^2 \end{aligned} \quad (4.31)$$

由此建立函数能量和微分能量的关系。根据 Schwarz 不等式，有

$$|f'(r)|^2 \leq \int_{-k_0}^{+k_0} |\tilde{f}(k)|^2 dk \cdot \int_{-k_0}^{+k_0} |e^{i2\pi kr}|^2 dk = 2k_0 \|\tilde{f}\|_2^2 \quad (4.32)$$

对上式两侧同时求导，结论同样成立

$$|f'|^2 \leq 2k_0 \|\tilde{f}'\|_2^2 \quad (4.33)$$

联立(4.31)和(4.33)得到

$$|f'| \leq 2\sqrt{2\pi k_0^{3/2}} \|\tilde{f}\|_2 \quad (4.34)$$

即有限带宽函数的跳变率由函数能量  $\|f\|_2$  和带宽  $k_0$  共同决定。假设以  $f(r)$  拟合 2 个插值点  $\{(r_0, 1), (r_1, -1)\}$ ，其中  $r_n = n\delta$ ,  $\delta = 1/k_0$ 。即插值点的频率为  $k_0$ 。则有

$$|f(r_0) - f(r_1)| = \left| \int_{-k_0}^{+k_0} \tilde{f}(k) (e^{i2\pi kr_0} - e^{i2\pi kr_1}) dk \right| \leq 2\sqrt{2/3}\pi \|\tilde{f}\|_2 k_0^{3/2} \delta \quad (4.35)$$

故两点插值所需函数能量为

$$\|f\|_2 \geq \sqrt{6} \frac{k_0^{-3/2} k_0}{\pi} \quad (4.36)$$

将该结论扩展到  $n$  个插值点  $\{(r_0, 1), (r_1, -1), \dots, (r_n, (-1)^n)\}$ ，则有<sup>[91]</sup>结论

$$\|f\|_2^2 \sim \|\alpha\|^2 \frac{2^{2N-3} (2N-1)}{\sqrt{\pi} (\pi k_0 \delta)^{2N-1} (N-1)^{3/2}} \quad (4.37)$$

其中， $\alpha$  是矩阵  $S$  最小特征值对应的特征向量

$$S_{ij} = k_0 \sin c \left[ k_0 (r_i - r_j) \right] \quad (4.38)$$

同理有信号的平均功率

$$\|f\|_2^2/(N-1)\delta \sim \|a\|^2 \frac{2^{2N-3}(2N-1)k_\delta}{\sqrt{\pi}(\pi k_0/k_\delta)^{2N-1}(N-1)^{5/2}} \quad (4.39)$$

要保证函数的超振荡分量有效，至少需要保证噪声幅度低于拟合的跳变信号幅度。而以上结论建立在拟合的跳变波形幅度归一化的前提下，即噪声平均功率  $\sigma_{noise} \leq 1$ ，故(4.39)的平均功率可以近似视为最低信噪比。易见，利用超级振荡来实现信息的压缩，需要能量随着拟合频率的增长而指数增长，是一种以信噪比为代价换取带宽的方法。因此，超振荡的现象并不与香农理论冲突。

从正则化的角度来看，用超振荡效应逼近高频函数的离散点，等价于构造逼近逆算子的正则算子  $K_n^{-1}: Y \rightarrow X_n$ 。在测量数据的信噪比给定的前提下，而拟合对象  $\{x_n\}$  和拟合函数  $K_n^{-1}y$  之间的偏差由可拟合的频带上限  $k_\delta$  决定。当采样率为  $k_s$  时，重构误差为

$$\|x_n - K_n^{-1}y\|_2^2 = 2 \int_{k_\delta}^{k_s} |\tilde{x}(k)|^2 dk \leq 2(k_s - k_\delta) |\tilde{x}(k_a)|^2 \quad (4.40)$$

其中， $k_a$  为  $x$  的频谱分量中功率最大的谱。根据(4.37)可得

$$k_\delta \sim \frac{\pi k_0}{2} \frac{\|K_n^{-1}y\|_2^{2/(2N-1)}}{\delta^{2/(2N-1)}} \left[ \frac{1}{\|a\|_2^2} \frac{4\sqrt{\pi}(N-1)^{3/2}}{(2N-1)} \right]^{1/(2N-1)} \quad (4.41)$$

其中， $\delta$  为测量数据扰动，故有误差收敛速率

$$\|x_n - K_n^{-1}y\|_2^2 \sim O\left(-\frac{1}{\delta^{2/(2N-1)}}\right) \quad (4.42)$$

可见，离散化未知数  $N$  增加会增加逆问题的病态性，降低误差收敛速率。而另一方面，在离散化过程本身  $P: X \rightarrow X_n$  中，阶数  $N$  越高越逼近无限维的真值。因此，基于超振荡效应的逆问题求解需要结合离散化过程设计。

### 4.3 基于逆散射模型的超振荡效应设计

将(3.7)的混合参数模型重写如下

$$\begin{cases} e^{sca} = \mathbf{G}_C \cdot \mathbf{w} \\ [\mathbf{I} - diag(\chi) \cdot \mathbf{G}_D] \mathbf{w} = diag(e^{inc}) \cdot \chi \\ [\mathbf{I} - diag(t) \cdot \mathbf{S}] \mathbf{w} = diag(ci) \cdot t \end{cases} \quad (4.43)$$

由于  $diag(\chi) \cdot \mathbf{G}_D$  和  $diag(t) \cdot \mathbf{S}$  均为紧算子，故  $[\mathbf{I} - diag(\chi) \cdot \mathbf{G}_D]$  和  $[\mathbf{I} - diag(t) \cdot \mathbf{S}]$  为第二类 Fredholm 算子。根据定理 2.3.3，只要(4.43)的两个状态方程右侧为非零，这两个算子均为可逆算子，故有

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= [\mathbf{I} - \text{diag}(\chi) \cdot \mathbf{G}_D]^{-1} \text{diag}(\mathbf{e}^{inc}) \cdot \chi \\ &= [\mathbf{I} - \text{diag}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{S}]^{-1} \text{diag}(\mathbf{c}\mathbf{i}) \cdot \mathbf{t}\end{aligned}\quad (4.44)$$

其中

$$\begin{cases} [\mathbf{I} - \text{diag}(\chi) \cdot \mathbf{G}_D]^{-1} \mathbf{e}^{inc} = \mathbf{e} \\ [\mathbf{I} - \text{diag}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{S}]^{-1} \mathbf{c}\mathbf{i} = \mathbf{c}^e \end{cases}\quad (4.45)$$

分别为总场和总场的多极子展开系数。将对比度源代入测量方程，就得到混合参数模型的非线性形式

$$\begin{cases} \mathbf{e}^{sca} = \mathbf{G}_C \cdot [\mathbf{I} - \text{diag}(\chi) \cdot \mathbf{G}_D]^{-1} \text{diag}(\mathbf{e}^{inc}) \cdot \chi \\ \mathbf{e}^{sca} = \mathbf{G}_C \cdot [\mathbf{I} - \text{diag}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{S}]^{-1} \text{diag}(\mathbf{c}\mathbf{i}) \cdot \mathbf{t} \end{cases}\quad (4.46)$$

根据4.1节分析的衍射极限中的结论(4.13)，观测的格林算子  $\mathbf{G}_C$  是一个通带为  $k_0$  的病态算子，导致可测量的散射场  $\mathbf{e}^{sca}$  仅含有低频分量。因此，可重构的对比度源  $\mathbf{w}$  的带宽不会超过  $k_0$ 。而算子  $[\mathbf{I} - \text{diag}(\chi) \cdot \mathbf{G}_D]^{-1}$  和  $[\mathbf{I} - \text{diag}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{S}]^{-1}$  为可逆算子，由于单射不改变带宽，故对比度源  $\mathbf{w}$  的带宽与  $\text{diag}(\mathbf{e}^{inc}) \cdot \chi$  和  $\text{diag}(\mathbf{c}\mathbf{i}) \cdot \mathbf{t}$  的带宽一致。而入射场的空间谱同样为  $k_0$ ，导致可重构目标函数  $\chi$  和  $\mathbf{t}$  的带宽被限制在  $k_0$ 。

然而，在实际成像问题设计中，重构的兴趣区域  $D$  (Domain of Interest) 不会无穷大。故等价的体等效形式为

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{sca}(\mathbf{r}) &= k_0^2 \int_D \overline{\mathbf{G}_0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') \chi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\ &= k_0^2 \int_{\infty} \overline{\mathbf{G}_0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') \chi(\mathbf{r}') \Gamma_D(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'\end{aligned}\quad (4.47)$$

其中， $\Gamma_D$  为区域  $D$  的示性函数。故相应的空间谱为

$$\tilde{\mathbf{E}}^{sca}(\mathbf{k}) = k_0^2 \overline{\tilde{\mathbf{G}}_0}(\mathbf{k}) \cdot [\tilde{\mathbf{E}}_D(\mathbf{k}) * \tilde{\chi}(\mathbf{k})] \quad (4.48)$$

其中

$$\tilde{\mathbf{E}}_D(\mathbf{k}) = \int_{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \Gamma_D(\mathbf{r}) e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (4.49)$$

为总场的局部空间谱。故对比度源的空间谱由区域  $D$  内的局部总场和目标函数卷积后得到。假设局部总场的空间谱带宽为  $nk_0$  ( $n > 1$ )，则可以将目标函数  $\chi$  带宽  $nk_0$  内的高频信息混到低频  $k_0$  的格林函数通带内，并实现传输。这里给出一个简单的混频例子，假设目标函数  $\chi$  的空间谱为单位均匀的常数，而局域总场  $\mathbf{E}_1$  的空间谱带宽是  $2k_0$ ，局域总场  $\mathbf{E}_2$  的空间谱带宽是  $k_0$ ，则有如下混频后再低通滤波的结果

$$\begin{aligned}
& \tilde{E}_1^{sca} = (\tilde{E}_1 * \tilde{\chi}) \cdot \tilde{G}_0 \\
&= \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& \tilde{E}_2^{sca} = (\tilde{E}_2 * \tilde{\chi}) \cdot \tilde{G}_0 \\
&= \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

可见，宽带总场  $\mathbf{E}_1$  在低频散射场中压缩了更多的信息。

用带宽为  $k_0$  的入射场在成像区域  $D$  内拟合高频的波形则是一种典型的超振荡函数，由于算子  $[\mathbf{I} - diag(\chi) \cdot \mathbf{G}]^{-1}$  和  $[\mathbf{I} - diag(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{S}]^{-1}$  不改变谱宽，故总场  $\mathbf{e}$  和  $\mathbf{c}^e$  在区域  $D$  的局部空间谱宽与入射场  $\mathbf{e}^{inc}$  和  $\mathbf{i}$  等价。故直接构造入射场在成像区域  $D$  的超振荡效应，即可实现宽带的总场局部空间谱。入射场的局部空间谱为

$$\begin{aligned}
F_2 \{ E^{inc}(\mathbf{r}) \} &= \int_D E^{inc}(\mathbf{r}) \exp(-jk \bullet \mathbf{r}) d\mathbf{r} \\
&= -\frac{\omega_0 \mu_0}{4} \sum_{n=0}^{N-1} c_n \int_D H_0^{(2)}[k_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n)] \exp(-jk \bullet \mathbf{r}) d\mathbf{r}
\end{aligned} \tag{4.50}$$

通常，直接构造混频的超振荡函数需要宽带信号，而入射场带宽仅为  $k_0$ ，无法用现有方法直接综合。此外，(4.42)表明了超振荡的设计必须在离散化的基础进行。

参考(4.5)中将分辨率的定义为：给定谱域带宽下，重建电流源（即对比度源）的空域分辨率。我们可以重新定义基于超振荡效应的本构参数的重建分辨率。根据(4.39)，可设计的超振荡局部空间谱和信噪比之间构成关系

$$\frac{SNR^{1/2N}(\pi k_0)}{(\pi k_0)^{1/2N}} \frac{8^{1/2N} \pi^{1/4N} (N-1)^{5/4N}}{2(2N-1)^{1/2N} \|\mathbf{a}\|^{1/N}} \geq k_\delta \tag{4.51}$$

而根据(4.48)的混频理论，带宽  $k_\delta$  的入射场最多可以压缩  $k_\delta + k_0$  的空间谱在格林函数通带  $[-k_0, k_0]$  内。因此，其相应的空间分辨率为  $r_\delta = \pi / (k_\delta + k_0)$ 。故最终的极限分辨率由原始带宽、信噪比和成像区离散网格数共同决定

$$r_\delta = \frac{\pi}{k_0 + k_\delta} \geq \left[ \frac{2 \|\mathbf{a}\|^{1/N} (2N-1)^{1/2N} k_0^{1/2N} \pi^{(1-4N)/4N}}{+ 8^{1/2N} SNR^{1/2N} \pi^{1/4N} (N-1)^{5/4N}} \right]^{-1} k_0^{-1} \tag{4.52}$$

可见，超振荡效应提供了一种以空间和信噪比换取分辨率的方式。

### 4.3.1 直接综合法

一种最直观的做法是直接优化入射场的局部空间谱为某一给定频率，将(4.50)离散化形式写为

$$\min \|\mathbf{Ac} - \mathbf{b}\|_2^2 \quad (4.53)$$

其中,  $\mathbf{A} = [FFT_2\{H_0^{(2)}[k_0(r - r_n)]\}]_{M \times N}$  是线源的二维傅里叶变换, 谱域  $\mathbf{k}$  和空域  $\mathbf{r}$  分别被离散化为  $k_m (m = 1, \dots, M)$  和  $r_n (n = 1, \dots, N)$ ; 而  $\mathbf{c} = [c(r_n)]_{N \times 1}$  为线源的复激励系数;  $\mathbf{b} = [b(k_m)]_{M \times 1}$  为离散化的目标空间谱。此处直接优化空间谱会空域波形不可控, 在成像区域产生较多零值范围。故为了避免大范围零值出现, 需要额外约束空域波形的动态范围。根据 Parseval 定理, 离散化入射场能量等于谱域的能量  $\|\mathbf{e}^{inc}\|^2 = \|\mathbf{b}\|^2$ 。故在给定谱域能量的约束下, 空域各个离散网格的幅度平方和为定值。增加某个网格点的幅度, 一定会导致其它网格的幅度降低。因此, 直接约束网格点的幅度平方上限, 就可以实现对动态范围的约束。考虑一种极端情况: 整个区域  $D$  内的波形仅由一个最大值和  $N-1$  个最小值组成, 即

$$\mathbf{e}^{inc}(r_m) = \begin{cases} \max(\mathbf{e}^{inc}) & r_m = r_0 \\ \min(\mathbf{e}^{inc}) & others \end{cases} \quad (4.54)$$

给定动态范围  $d$ , 在该情况下所取到的入射场峰值  $\max(\mathbf{e}^{inc}) = \|\mathbf{b}\|^2/[1+(M-1)/d]$  是同等能量约束下其它波形的上界。故完整的优化问题写为

$$\begin{aligned} & \min \|\mathbf{Ac} - \mathbf{b}\|_2^2 \\ s.t. \quad & \|\mathbf{e}^{inc}(r_n)\|_2^2 \leq \|\mathbf{b}\|_2^2 d^2 / (M-1+d^2) \quad r_n \in D \end{aligned} \quad (4.55)$$

该优化问题可以通过内点法求解。

该综合方法的有效性验证如下。关注区  $D$  为  $\lambda_0 \times \lambda_0$  大小的矩形区域, 离散化为  $30 \times 30$  个网格。40 个线源均匀布置在距离  $D$  中心  $3\lambda_0$  为半径的圆形边缘上, 线源辐射场的空间谱带宽为  $|k_0| = 2\pi f_0/c$ 。由于关注区  $D$  的空域尺寸为  $\lambda_0$ , 故其离散傅里叶变换的谱域分辨率为  $k_0$ 。令拟合的目标空间谱为  $[k_x, k_y]$ , 其中  $k_x \in \{-3k_0, -2k_0, \dots, 3k_0\}$ ,  $k_y \in \{-3k_0, -2k_0, \dots, 3k_0\}$ , 动态范围为  $d = 1 \times 10^3$ 。由此合成 49 个不同频段的频谱, 将各个权重  $\mathbf{c}$  依照谱域峰值归一化后叠加, 就得到带宽在  $[-3k_0, 3k_0]$  的宽带局域空间谱。合成后的波形和局域空间谱如下图 4.5 所示

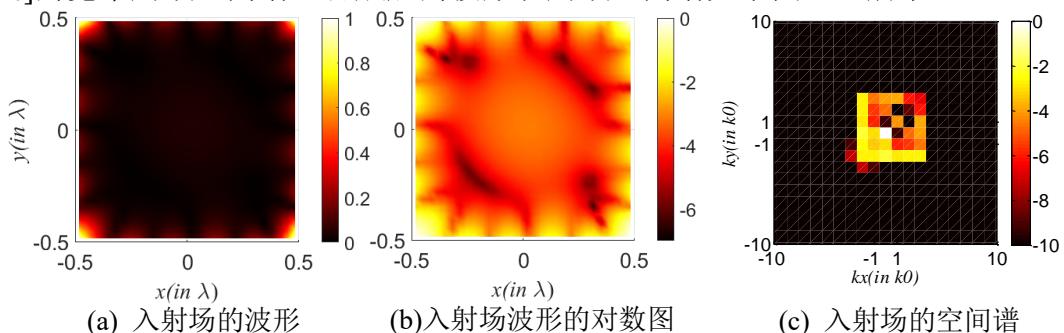


图 4.5 超振荡波形和局部空间谱

其中，图 4.5 (a)为合成入射场在成像区  $D$  内的波形，图 4.5 (b)为合成入射场归一化取对数的结果  $\lg(\mathbf{e}^{inc}/\max(\mathbf{e}^{inc}))$  以便于观看，图 4.5 (c)为成像区  $D$  内的合成入射场做离散傅里叶变换后归一化取  $20\lg(\cdot)$  的结果。由于设定动态范围为  $d = 1 \times 10^3$ ，即对数范围在  $[-7, 0]$  之间，在图 4.5 (b)可以看出设计波形符合动态范围约束。图 4.5 (c)中显示得到的局部空间谱带宽在  $[-3k_0, 3k_0]$ ，同样符合拟合需求。然而，直接拟合空间谱得到的谱域分布并不均匀，在混频过程中所搬移的目标空间谱会存在缺失。虽然得到宽带的总场局部空间谱，然而无法保证能将  $[-3k_0, 3k_0]$  的目标空间谱全部混至低频  $[-k_0, k_0]$  内。一个典型的非均匀混频的反例如下

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}_1^{sca} &= (\tilde{\mathbf{E}}_1 * \tilde{\chi}) \cdot \tilde{G}_0 \\ &= \left[ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right] \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

由于总场内带宽非均匀，故即使谱域带宽足够宽，混频后通带内依然为零。

### 4.3.2 间接综合法

因此，重新设计优化准则，则应当从保证局部宽带空间谱将目标各个频带内的信息均匀的混至低频的目标出发。首先考虑入射场的多极展开

$$\mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_z \sum_{i=1}^I \sum_{\gamma=-\tau}^{+\tau} a_{\gamma i}(q) H_{\gamma}^{(2)}(k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|) e^{j\gamma\varphi(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)} \quad (4.56)$$

其中， $\mathbf{r}_i$  为辐射源位置， $a_{\gamma i}$  为第  $i$  个辐射源的第  $\gamma$  阶多极展开系数， $q$  表示第  $q$  次照射。由于(4.56)中 Hankel 函数的特征值为  $k_0$ ，故其在全空间的傅里叶变换为  $\delta(k_r - k_0)$ ，而要计算在成像区  $D$  的局部空间谱，则根据 Graf 加法定理将柱面波在  $D$  的原点多极展开得到

$$\mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_z \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{i=1}^I \sum_{\gamma=-\tau}^{+\tau} a_{\gamma i}(q) H_{\gamma+p}^{(2)}(k_0 r_i) e^{j(\gamma+p)\varphi(\mathbf{r}_i)} e^{j\gamma\pi} \right] = \mathbf{u}_z \sum_{p=-\infty}^{+\infty} [J_p(k_0 r) e^{-jp\varphi(r)} F_p(q)] \quad (4.57)$$

这里为了后续推导方便起见，令  $D$  为半径  $R$  的圆形区域。则入射场的局部空间谱为

$$\int_D \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) e^{-jk \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} = \mathbf{u}_z \sum_{p=-\infty}^{+\infty} F_p(q) \int_D [J_p(k_0 r) e^{-jp\varphi(r)}] e^{-jk \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (4.58)$$

由于目标函数为圆周对称分布，故将变换转为柱坐标系，令  $x = r \cos\varphi$ 、 $y = r \sin\varphi$ 、 $k_x = k_r \cos(k_\varphi)$  和  $k_y = k_r \sin(k_\varphi)$ ，则有

$$\begin{aligned} & \int_D \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) e^{-jk \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \\ &= \mathbf{u}_z \sum_{p=-\infty}^{+\infty} F_p(q) e^{jp k_\varphi} \int_0^R J_p(k_0 r) r dr \int_0^{2\pi} e^{-j[k_r r \cos(\varphi - k_\varphi) + p(\varphi - k_\varphi)]} d\varphi \end{aligned} \quad (4.59)$$

根据 Bessel 函数积分形式可知

$$J_n(z) = \frac{j^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-j(z \cos \varphi + n\varphi)} d\varphi \quad (4.60)$$

将(4.60)代入(4.59)得到

$$\int_D \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) e^{-jk \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} = \mathbf{u}_z 2\pi \sum_{p=-\infty}^{+\infty} F_p(q) e^{jp(k_\varphi - \pi/2)} \int_0^R J_p(k_r r) J_p(k_0 r) r dr \quad (4.61)$$

根据 Lommel 积分公式, 当  $k_r \neq k_0$  时有

$$\int_D \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) e^{-jk \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} = \mathbf{u}_z \frac{2\pi R}{k_r^2 - k_0^2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} F_p(q) \left[ \frac{k_0 J_{p+1}(k_0 R) J_p(k_r R)}{-k_r J_{p+1}(k_r R) J_p(k_0 R)} \right] e^{jp(k_\varphi - \pi/2)} \quad (4.62)$$

而当  $k_r = k_0$  时有

$$\begin{aligned} & \int_D \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) e^{-jk \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \\ &= \mathbf{u}_z 2\pi \left[ \begin{aligned} & \frac{R^2}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} F_p(q) [J_{p+1}^2(k_0 R) + J_p^2(k_0 R)] e^{jp(k_\varphi - \pi/2)} \\ & - \frac{pR}{k_0} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} F_p(q) J_p(k_0 R) J_{p+1}(k_0 R) e^{jp(k_\varphi - \pi/2)} \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (4.63)$$

由此得到入射场的局部空间谱。

从(4.62)可以看到, 场的局部空间谱与当前柱面波展开阶数  $p$ 、区域  $D$  的半径  $R$  和波函数频率  $k_0$  相关, 这里我们用数值过程来说明该关系。令场源位于坐标原点, 故  $\mathbf{r}_i = 0$ , 均匀激励下多极展开项  $F_p(q)$  可以忽略。分别计算场的多极展开阶数  $p$  在 0、2、4、6 和 8 时的空间谱, 且令区域半径  $R$  为  $\lambda_0/2$ 、 $\lambda_0$  和  $2\lambda_0$ , 得到的空间谱随  $k_r$  的变化如下图 4.6 所示。

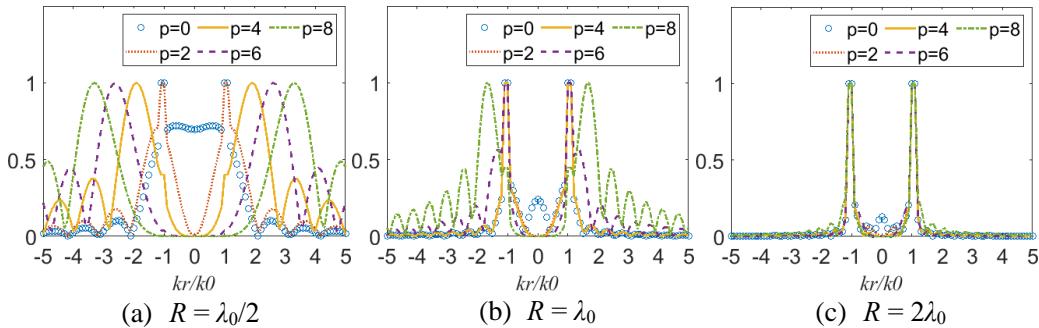


图 4.6 入射场局部空间谱

从图 4.6 可以看出, 场在零阶多极展开的局部空间谱为  $k_0$ , 而随着多极展开阶数的增加, 局部空间谱展宽。由此证明, 高阶柱面波本身即含有超振荡效应, 该结

论与高阶径向 Laguerre-Gaussian 波束的超振荡效应相符<sup>[83]</sup>。对比图 4.6 (a)、(b) 和(c)可以看出，随着计算区域  $D$  的增大，局部空间谱逐渐塌缩回  $k_0$ 。这与(4.37) 中超振荡效应的分析一致，即给定信号能量下，超振荡的跳变频率随拟合点数的增加而减少。当计算区域扩展到全空间时， $R \rightarrow \infty$ ，各阶柱面波的空间谱完全塌缩到  $k_0$ 。反之，当计算区域收缩到目标上时，柱面波的空间谱完全等于目标空间谱。因此，超振荡效应隐含有目标空间分布的弱先验信息。

基于此，进一步处理目标函数  $\chi$  和局部入射场  $\mathbf{E}^{inc}$   $\Gamma_D$  混频后的空间谱为

$$\begin{aligned} & \int_D \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) \chi(\mathbf{r}) e^{-jk \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \\ &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} F_p(q) \int_D J_p(k_0 r) e^{-jp\varphi} \chi(\mathbf{r}) e^{-jk \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (4.64)$$

给定待搬移的目标函数空间谱为

$$\chi(\mathbf{r}) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \exp(-jk_q \cdot \mathbf{r}) \quad (4.65)$$

则有

$$\begin{aligned} & \int_D \mathbf{E}_q^{inc}(\mathbf{r}) \chi(\mathbf{r}) e^{-jk \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \\ &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=1}^Q \left[ F_p(q) e^{-jp[\varphi(k_q) - \pi/2]} \int_0^R J_p(k_0 r) J_p(k_q r) r dr \right] \end{aligned} \quad (4.66)$$

当  $k_q \neq k_0$  时，(4.66)写为

$$\begin{aligned} & \int_D \mathbf{E}_q^{inc}(\mathbf{r}) \chi(\mathbf{r}) e^{-jk \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \\ &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=1}^Q \left\{ \frac{RF_p(q) e^{-jp[\varphi(k_q) - \pi/2]}}{k_0^2 - k_q^2} \begin{bmatrix} k_0 J_p(k_q R) J_{p+1}(k_0 R) \\ -k_q J_p(k_0 R) J_{p+1}(k_q R) \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (4.67)$$

当  $k_q = k_0$  时，(4.66)写为

$$\begin{aligned} & \int_D \mathbf{E}_q^{inc}(\mathbf{r}) \chi(\mathbf{r}) e^{-jk \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \\ &= \frac{R^2}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=1}^Q F_p(q) \left\{ \left[ J'_p(k_0 R) \right]^2 + \left( 1 - \frac{p^2}{k_0^2 R^2} \right) J_p^2(k_0 R) \right\} e^{-jp[\varphi(k_q) - \pi/2]} \end{aligned} \quad (4.68)$$

将(4.67)和(4.68)的多极展开阶数截断为  $P$ ，并根据  $a_{\gamma i}$  和  $F_P(q)$  之间的线性关系，将(4.66)写为矩阵方程

$$\int_D \mathbf{E}_q^{inc}(\mathbf{r}) \chi(\mathbf{r}) e^{-jk \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \approx \tilde{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\alpha} \quad (4.69)$$

其中， $\boldsymbol{\alpha} = [a_{\gamma i}]_{(2\tau+1) \times 1}$  为第  $i$  个辐射源的第  $\gamma$  阶多极展开权重。由此得到混频之后的对比度源的空间谱。要保证宽带函数  $\chi$  的全部信息被搬到格林函数通带内，则(4.69)混频空间谱等于格林函数离散傅里叶变换。得到目标函数

$$\min \quad \|\tilde{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\alpha} - \tilde{\mathbf{g}}_0\|_2^2 \quad (4.70)$$

为了缓解病态性，该优化问题可以用共轭梯度法求解。

该综合方法的有效性验证如下。关注区  $D$  为  $\lambda_0 \times \lambda_0$  大小的矩形区域，离散化为  $30 \times 30$  个网格。40 个多极子均匀布置在距离  $D$  中心  $3\lambda_0$  为半径的圆形边缘上，取多极展开阶数为 5 阶，辐射场的空间谱带宽为  $|k_0| = 2\pi f_0/c$ 。由于关注区  $D$  的空域尺寸为  $\lambda_0$ ，故其离散傅里叶变换的谱域分辨率为  $k_0$ 。令待搬移的目标函数  $\chi$  的空间谱为  $[k_x, k_y]$ ，其中  $k_x \in \{-6k_0, -4k_0, \dots, 6k_0\}$ ， $k_y \in \{-6k_0, -4k_0, \dots, 6k_0\}$ 。将均匀激励下的入射场空间谱和合成后的入射场局部空间谱进行对比，如下图 4.7 所示：

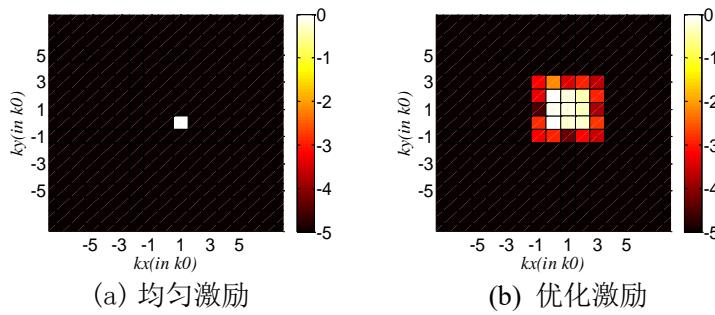


图 4.7 入射场局部空间谱对比

图中的空间谱做了归一化取  $20\log()$ ，故色条单位为 dB。从图中可见，均匀激励下的入射场空间谱仅为  $k_0$ ，而优化后的入射场空间谱在  $[-3k_0, 3k_0]$  的范围内均匀分布，优于图 4.6 中空间谱分布。分别计算均匀激励和优化激励下，入射场混频后的目标空间谱如图 4.8 所示：

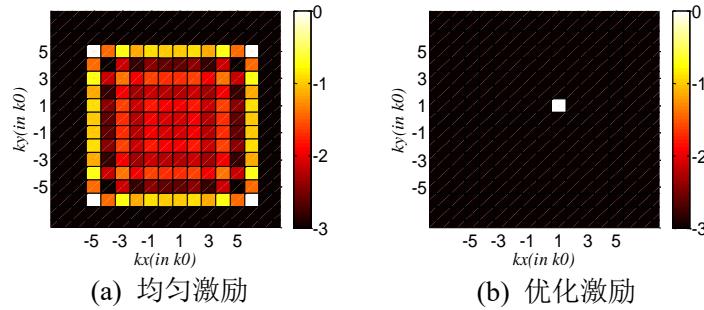


图 4.8 混频后的对比度源空间谱

图 4.8 (a) 中为均匀激励下的混频空间谱，宽带目标函数空间谱经过低频入射场混频后依旧为  $\pm 6k_0$  的宽带函数。易见，该空间谱经过带宽  $k_0$  的格林函数低通滤波后会丢失绝大多数信息。而图 4.8 (b) 中优化激励下的混频空间谱则仅有带宽  $k_0$  的空间谱分量，使其保留了绝大部分信息在低频通带内，通过传输波送到接收天线。

综上，本研究提出一种基于超振荡效应的逆散射成像超分辨原理，在不改变成像构型的前提下，依靠优化入射场激励来实现目标高频信息的低频压缩。不同

于现有的宽带波形的超振荡合成方法，该超振荡效应的设计是基于单频波实现的，故其超振荡效应并不随时间变化，拓宽了应用范围。

### 4.3.3 超分辨和正则化关系

在4.2节分析超振荡原理中，我们说明了在逆问题中应用超振荡效应本身起到了约束解空间的作用。离散化后的(4.56)入射场和激励权重的关系可以写为矩阵形式：

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{inc} &= \mathbf{H}^{inc} \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{H}^{inc} &= \left[ H_{\gamma}^{(2)} \left( k_0 |\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_i| \right) e^{j\gamma\phi(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_i)} \right]_{N \times (2\tau+1)I} \end{aligned} \quad (4.71)$$

其中， $\boldsymbol{\alpha} = [a_{\gamma i}]_{(2\tau+1) \times 1}$  为第  $i$  个辐射源的第  $\gamma$  阶多极展开权重。将入射场代入(4.46)，为了简化表示令  $\mathbf{K}(\chi) = [\mathbf{I} - diag(\chi) \cdot \mathbf{G}_D]$ ，则有

$$\mathbf{e}^{sca} = \mathbf{G}_C \cdot \mathbf{K}(\chi)^{-1} diag(\mathbf{H}^{inc} \boldsymbol{\alpha}) \cdot \chi \quad (4.72)$$

其中(4.62)表明：在有限观测域中，各阶 Hankel 函数频率不同，故矩阵  $\mathbf{H}^{inc}$  各列相互不相关。若令

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_0 &= [1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0] \\ \boldsymbol{\alpha}_1 &= [0, 1, \dots, 0, 0, 1, \dots, 0] \\ &\vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_{2\tau+1} &= [0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots, 1] \end{aligned}$$

则入射源均匀照射时，等价为令  $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_0$ ，故仅留有低频分量。而采用优化入射源照射，等价为构造宽带混频函数  $\boldsymbol{\alpha} = c_0 \boldsymbol{\alpha}_0 + \dots + c_{2\tau+1} \boldsymbol{\alpha}_{2\tau+1}$ 。因此，(4.72)可以拆写为

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{sca} &= \mathbf{G}_C \cdot \mathbf{K}(\chi)^{-1} diag(\mathbf{H}^{inc} c_0 \boldsymbol{\alpha}_0) \cdot \chi \\ &+ \sum_{\gamma=1}^{2\tau+1} \mathbf{G}_C \cdot \mathbf{K}(\chi)^{-1} diag(\mathbf{H}^{inc} c_{\gamma} \boldsymbol{\alpha}_{\gamma}) \cdot \chi \end{aligned} \quad (4.73)$$

其中，方程右侧第一项对应带宽为  $k_0$  的低频分量，方程右侧第二项则对应带宽高于  $k_0$  的高频分量。而由于格林函数的低通滤波效应，方程的第二项应当对应观测矩阵  $\mathbf{G}_C$  的零空间。根据范数次可加性可知

$$\begin{aligned} &\left\| \mathbf{e}^{sca} - \mathbf{G}_C \cdot \mathbf{K}(\chi)^{-1} diag(\mathbf{e}^{inc}) \cdot \chi \right\| \\ &\leq \left\| \mathbf{e}^{sca} - \mathbf{G}_C \cdot \mathbf{K}(\chi)^{-1} diag(\mathbf{H}^{inc} c_0 \boldsymbol{\alpha}_0) \chi \right\| \\ &\quad + \left\| \sum_{\gamma=1}^{2\tau+1} \mathbf{G}_C \cdot \mathbf{K}(\chi)^{-1} diag(\mathbf{H}^{inc} c_{\gamma} \boldsymbol{\alpha}_{\gamma}) \cdot \chi \right\| \end{aligned} \quad (4.74)$$

因此，求解目标函数  $\chi$  的优化过程可以视为高频通解加低频特解决定的目标

$$\begin{aligned}\hat{\chi} &= \arg \min_{\chi} \left\| \mathbf{e}^{sca} - \mathbf{G}_C \cdot \mathbf{K}(\chi)^{-1} \operatorname{diag}(\mathbf{e}^{inc}) \cdot \chi \right\| \\ &= \arg \min_{\chi} \left\{ \left\| \mathbf{e}^{sca} - \mathbf{G}_C \cdot \mathbf{K}(\chi)^{-1} \operatorname{diag}(\mathbf{H}^{inc} c_0 \boldsymbol{\alpha}_0) \chi \right\| \right. \\ &\quad \left. + \left\| \sum_{\gamma=1}^{2\tau+1} \mathbf{G}_C \cdot \mathbf{K}(\chi)^{-1} \operatorname{diag}(\mathbf{H}^{inc} c_\gamma \boldsymbol{\alpha}_\gamma) \cdot \chi \right\| \right\}\end{aligned}\quad (4.75)$$

等价于在方程的正则化项上乘以一个预条件矩阵  $\mathbf{A}_q = \operatorname{diag}(\mathbf{H}^{inc} c_\gamma \boldsymbol{\alpha}_\gamma)$ , 即(2.133)中先验的协方差矩阵构成的预条件形式。换而言之, 超振荡的构造等价于通过先验信息来约束格林函数的零空间。由于优化后的局部空间谱被展宽, 故预条件矩阵  $\mathbf{A}_q$  的奇异值分布宽于原始矩阵  $\mathbf{H}_q^{inc}$ 。因此, 入射场优化过程放大了算子  $[\mathbf{I} - \operatorname{diag}(\chi) \cdot \mathbf{G}_D]^{-1} \operatorname{diag}(\mathbf{e}^{inc})$  和  $[\mathbf{I} - \operatorname{diag}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{S}]^{-1} \operatorname{diag}(\mathbf{c}\mathbf{i})$  的奇异值, 进而降低了(4.72)的病态性。因此基于超振荡入射场的重建等价于对目标函数  $\chi$  和  $\mathbf{t}$  引入先验信息。

在经典的线性逆问题中, 正则化仅起到约束解空间的作用, 并不能从低维数据外推出高维的解空间。例如在逆源问题中:

$$\mathbf{e}^{sca} = \mathbf{G}_C \cdot \mathbf{w} \quad (4.76)$$

给定  $M$  维的独立测量  $\mathbf{e}^{sca}$ , 只能约束  $\mathbf{w}$  的解空间由  $M$  个正交基张成, 以保证数值稳定性。因此, 对  $\mathbf{w}$  引入先验信息的正则化并不能提供额外的信息或是超分辨能力。

然而在逆散射问题中, 非线性效应引入了混频过程, 即频谱的搬移:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{w}} = (\mathbf{H}_q^{inc} \boldsymbol{\alpha}_q + \mathbf{G}_D \mathbf{w})^* \tilde{\chi} \\ \tilde{\mathbf{w}} = (c \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_q + \mathbf{S} \mathbf{w})^* \tilde{\mathbf{t}} \end{cases} \quad (4.77)$$

其中, ‘~’表示变量的傅里叶变换。因此构造合适的正则化策略  $\boldsymbol{\alpha}_q$  约束非线性解  $\chi$  和  $\mathbf{t}$  的解空间, 即可将宽带信息压缩到窄带。在 3.3 节中, (4.72)的求解建立在用 Krylov 子空间法解代价函数(3.29)和(3.23)得到, 引入预条件矩阵后的代价函数写为

$$\begin{cases} \chi_i^{die} = \arg \min_{\chi^{die}} \sum_q \left\| \mathbf{w}_{q,i}^{die} - \operatorname{diag}(\mathbf{e}_{q,i}) \mathbf{A}_q \cdot \chi^{die} \right\|_2 \\ \mathbf{t}_i = \arg \min_{\mathbf{t}} \sum_q \left\| \mathbf{w}_{q,i} - \operatorname{diag}(\mathbf{c}_{q,i}) \mathbf{A}_q \cdot \mathbf{t} \right\|_2 \end{cases} \quad (4.78)$$

其中,  $\mathbf{e}_{q,i} = [\mathbf{I} - \operatorname{diag}(\chi) \cdot \mathbf{G}_D]^{-1} \operatorname{diag}(\mathbf{H}_q^{inc} \mathbf{i})$ ,  $\mathbf{c}_{q,i} = [\mathbf{I} - \operatorname{diag}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{S}]^{-1} \operatorname{diag}(\mathbf{c}\mathbf{i})$ 。在给定第  $i$  步迭代重建的低频对比度源后, 目标函数更新为

$$\chi_i^{die} = - \frac{\sum_q \operatorname{Re} \left\{ \operatorname{diag}(\mathbf{e}_{q,i}) \mathbf{A}_q \cdot \mathbf{w}_{q,i}^{die} \right\}}{\sum_q \left\| \mathbf{e}_{q,i} \right\|_2^2} \quad \mathbf{t}_i = \frac{\sum_q \operatorname{diag}(\mathbf{c}_{q,i}) \mathbf{A}_q \cdot \mathbf{w}_{q,i}}{\sum_q \left\| \mathbf{c}_{q,i} \right\|_2^2} \quad (4.79)$$

可见, 对比度源的窄带空间谱经过预条件矩阵  $\mathbf{A}_q$  后被拓宽。而根据(4.52), 可行

的正则化策略  $\alpha_q$  又是以信噪比为代价，因此非线性问题中的超分辨能力同时由信噪比、正则化策略和非线性混频作用决定。

## 4.4 数值仿真

本节中分别用矩量法仿真数据和实测数据验证所提方法的有效性。在矩量法仿真中，生成测量数据的正过程计算由 CG-FFT 方法完成。实测数据同样采用法国 Fresnel 研究院的 2001 年公开数据集<sup>[117]</sup>。

### 4.4.1 仿真数据验证一

在第一个仿真重建场景中，照射源工作在单频 900MHz，波长  $\lambda_0 \approx 0.33\text{m}$ 。设置成像区域  $D$  为大小  $\lambda_0 \times \lambda_0$  的矩形区域，测量区域  $C$  在包围成像区半径  $3\lambda_0$  的圆弧上。40 个极化方向为  $+z$  方向的线电流源均匀分布在圆弧  $[0, 2\pi)$  上，发射单频连续波，每个线电流源照射时都会有  $[-\pi, +\pi)$  上均匀分布的 40 个接收天线测量该点处的场强。令  $I=40$  个激励源布置在位置  $r_i$  处，分别用均匀激励和优化激励照射成像区域。在均匀照射中，40 个源以权重  $a_{yi} = 1$  依次激励，每次照射仅有一个激励源工作，共产生 40 次观测。而在优化激励中，40 个源以优化的权重  $\alpha_q$  同时激励，每次激励的权重  $\alpha_q$  对应待搬移的目标空间谱  $k_q$ 。由于  $k_{xq}, k_{yq} \in [-6k_0, 6k_0]$ ，且以  $2k_0$  为步进，故优化激励共产生 49 次观测。

在正过程计算中，成像区域被剖分为  $50 \times 50$  个网格，测量数据  $e^{sca}$  上被加上零均值单位方差的高斯噪声，噪声强度定义为

$$a_{noise} = \frac{\sum_{m=1}^M \|e_q^{sca}(m)\|^2}{M \cdot SNR} \quad (4.80)$$

其中，信噪比  $SNR$  为 10。给定成像区目标为“E”字形介质，相对介电常数为 5，字体长  $3\lambda_0/5$ 、宽  $\lambda_0/3$ 。目标如下图 4.9 所示。

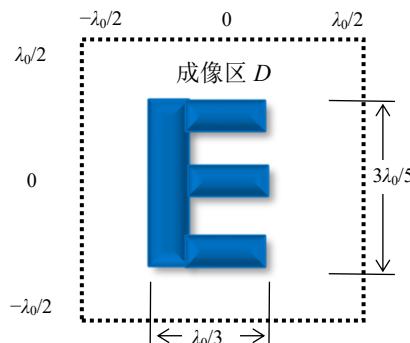


图 4.9 成像场景示意图

为了避免逆犯罪问题，而在逆过程重建中，成像区域被剖分为  $30 \times 30$  个网格。用 3.3 节中所提的交替参数更新法分别在两种入射场照射下对目标进行重建，迭代 512 次。重构结果如下图 4.10 所示：

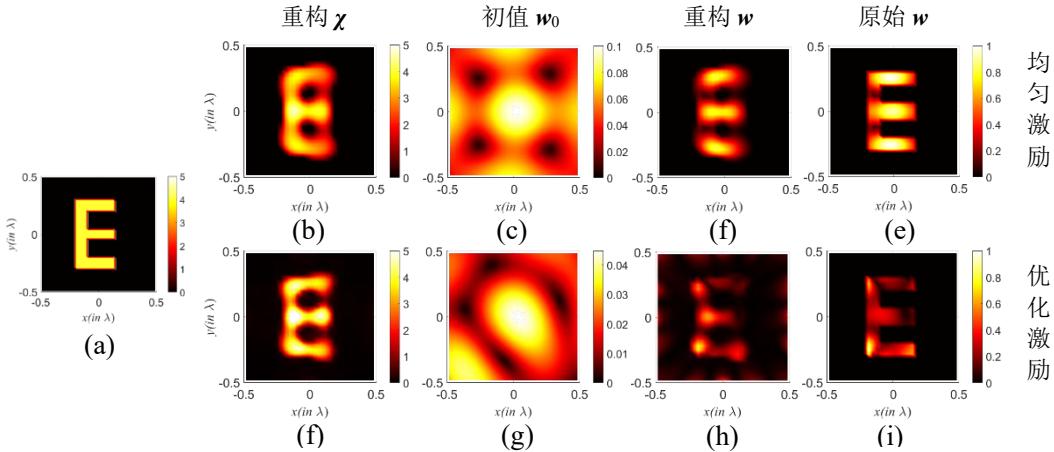
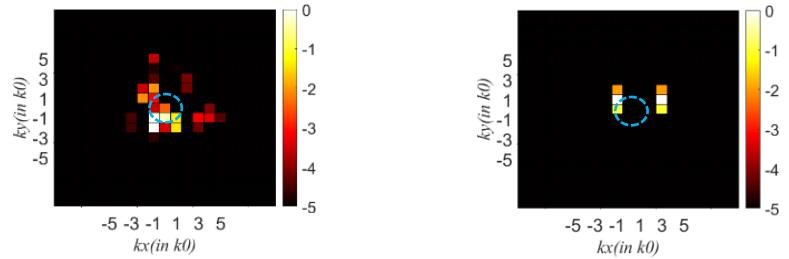


图 4.10 重建结果



(a) 优化后的对比度源空间谱 (b) 优化前的对比度源空间谱

图 4.11 原始对比度源的空间谱

其中, 图 4.10 (a)为原始目标的对比度函数  $\chi$  的真值。图 4.10 (b)、(c)、(f) 和(e)分别为均匀激励下重建的对比度函数、后向投影解的对比度源初值  $w_0$ 、重建的对比度源  $w$  和  $w$  的真值。图 4.10 (f)、(g)、(h)和(i)分别为优化后的激励下重建的对比度函数、后向投影解的对比度源初值  $w_0$ 、重建的对比度源  $w$  和  $w$  的真值。对比图 4.10 (b)和图 4.10 (f)可见后者重建出更尖锐的目标轮廓, 证明采用超振荡入射场可以保留更多的目标信息。

由于对比度源等于总场和目标函数的混频结果, 因此对比度源的带宽反映了混频后的空间谱搬移效果。这里计算的  $w$  是将多次照射的结果  $\{w_q\}$  叠加得到。由于入射场不同, 图 4.10 (e)和(i)的对比度源真值并不相同, 故均匀激励下对比度源初值(c)和重构结果(f)与优化激励的结果(f)和(h)不同。且和图 4.10 (i)均匀激励的对比度源相比, 图 4.10 (e)中优化激励下的对比度源的高频分量更少。因此, 在低通滤波效应下, 优化激励下的对比度源信息缺失更少。而均匀激励和优化激励下的对比度源空间谱如图 4.11 所示。其中, 图 4.11(a)中为优化激励下的对比度源空间谱, 图 4.11 (b)中为均匀激励下的对比度源空间谱。青蓝色圆形框出的范围为格林函数通带, 可见优化激励下的对比度源含有较多的低频分量, 而均匀激励下的对比度源低频分量缺失, 因此后者在格林函数的低通滤波下存在信息丢失。

为了验证超振荡效应的正则化作用, 我们分别对均匀激励和优化激励下的观测函数  $\mathbf{G}_C \text{ diag}(\mathbf{e})$  进行奇异值分解, 其中的总场  $\mathbf{e}$  为多次照射的结果  $\{\mathbf{e}_q\}$  迭代得到。奇异值分解结果如下图 4.12 所示

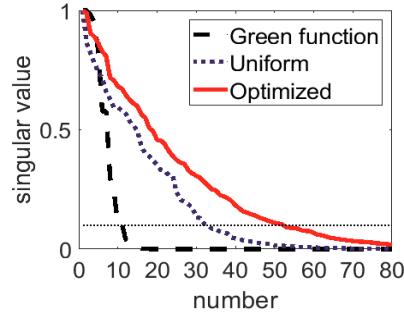


图 4.12  $\mathbf{G}_C \text{ diag}(\mathbf{e})$  的奇异值分解

其中, 黑色长虚线为格林函数  $\mathbf{G}_C$  的奇异值分布, 蓝色短虚线为均匀激励下  $\mathbf{G}_C \text{ diag}(\mathbf{e})$  的奇异值分布, 而红色实线为优化激励下  $\mathbf{G}_C \text{ diag}(\mathbf{e})$  的奇异值分布, 水平标记线为噪声幅度。易见, 优化激励下的奇异值分布高于均匀激励下的奇异值分布, 验证了(4.72)中预条件矩阵  $\mathbf{A}_q$  放大奇异值的结论。此外, 不论是均匀激励还是优化激励,  $\mathbf{G}_C \text{ diag}(\mathbf{e})$  的奇异值分布均优于格林函数  $\mathbf{G}_C$  的奇异值分布, 表明非线性成像的病态性远优于线性逆源成像。

为了说明引入先验的预条件矩阵  $\mathbf{A}_q$  对 Krylov 子空间法的迭代过程影响, 我们将对比重建误差随着每步迭代的变化情况。令第  $n$  步迭代结果和真值之间的误差为

$$\text{error}_n = \|\chi_n - \chi\|_2 / \|\chi\|_2 \quad (4.81)$$

分别在信噪比为 5dB、10dB 和 20dB 下, 对比均匀激励和优化激励后的迭代误差收敛曲线如图 4.13 所示:

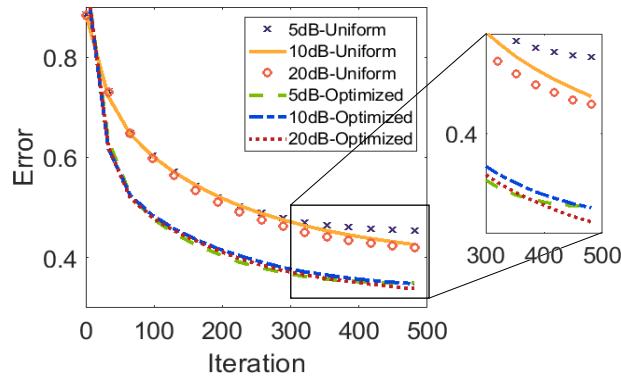


图 4.13 误差收敛曲线

其中, 有“x”标记的紫色线条、有“o”标记的橘色线条和黄色实线分别是均匀激励下信噪比为 5dB、10dB 和 20dB 时的重构误差。而绿色长虚线、蓝色点划线和红色短虚线分别是优化激励下信噪比为 5dB、10dB 和 20dB 时的重构误差。图中横坐标对应迭代次数, 纵坐标对应迭代误差。易见, 不论信噪比多少, 优化激

励下的误差收敛速率总是比均匀激励的误差收敛速率快。因此，所提超振荡效应的正则化过程有效改善了逆散射问题的病态性，从而获得更高质量的成像结果。

#### 4.4.2 仿真数据验证二

在第二个仿真重建场景中，成像构型同示例一。40个极化方向为 $+z$ 方向的线电流源均匀分布在圆弧 $[0, 2\pi)$ 上，发射单频连续波，每个线电流源照射时都会有 $[-\pi, +\pi)$ 上均匀分布的40个接收天线测量该点处的场强。令 $I=40$ 个激励源布置在位置 $\mathbf{r}_i$ 处，分别用均匀激励和优化激励照射成像区域。在均匀照射中，40个源以权重 $a_{yi}=1$ 依次激励，每次照射仅有一个激励源工作，共产生40次观测。而在优化激励中，40个源以优化的权重 $\alpha_q$ 同时激励，每次激励的权重 $\alpha_q$ 对应待搬移的目标空间谱 $\mathbf{k}_q$ 。由于 $\mathbf{k}_{xq}, \mathbf{k}_{yq} \in [-k_0, k_0]$ ，且以 $2k_0$ 为步进，故优化激励一共产生49次观测。在正过程计算中，成像区域被剖分为 $50 \times 50$ 个网格，而在逆过程重建中，成像区域被剖分为 $30 \times 30$ 个网格。测量数据 $\mathbf{e}^{\text{sca}}$ 上被加上零均值单位方差的高斯噪声信噪比SNR为10dB。

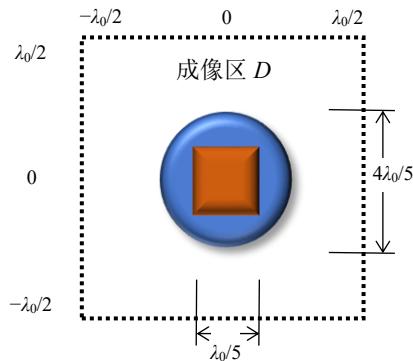


图 4.14 成像场景示意图

成像目标为介质和导体混合散射体：一个边长 $\lambda_0/5$ 的矩形铜柱被包裹在半径 $2\lambda_0/5$ 的圆形介质柱内，铜柱的电导率为 $6 \times 10^7 \text{ S/m}$ ，介质柱的相对介电常数为5。成像目标的构型如图 4.14 所示。用 3.3 节中所提的交替参数更新法分别在两种入射场照射下对目标进行重建，迭代 512 次。重构结果如下图 4.15 所示。图中，(a)、(b)和(c)分别为介质的对比度函数、导体的对比度函数和目标的传输系数的真值。图 4.15.(d)、(e)和(f)分别为均匀激励下重建的介质对比度函数、导体对比度函数和传输系数。图 4.15.(g)、(h)和(i)分别为优化激励下重建的介质对比度函数、导体对比度函数和传输系数。

对比图 4.15.(e)和(h)可以发现，引入超振荡效应的重构导体有更尖锐的轮廓，表明混频过程中有效的保留目标内的高频信息。而均匀激励下的重建结果轮廓则更为模糊。对比图 4.15.(d)和(g)，优化激励下，有高频信息的重建介质可以有效的聚焦在圆环上，而缺乏高频信息的重建介质则轮廓比真值更为扩散。因此，所

提基于超振荡效应的入射场优化能有效压缩目标高频信息至传播过程的低频通带内，提高成像质量。

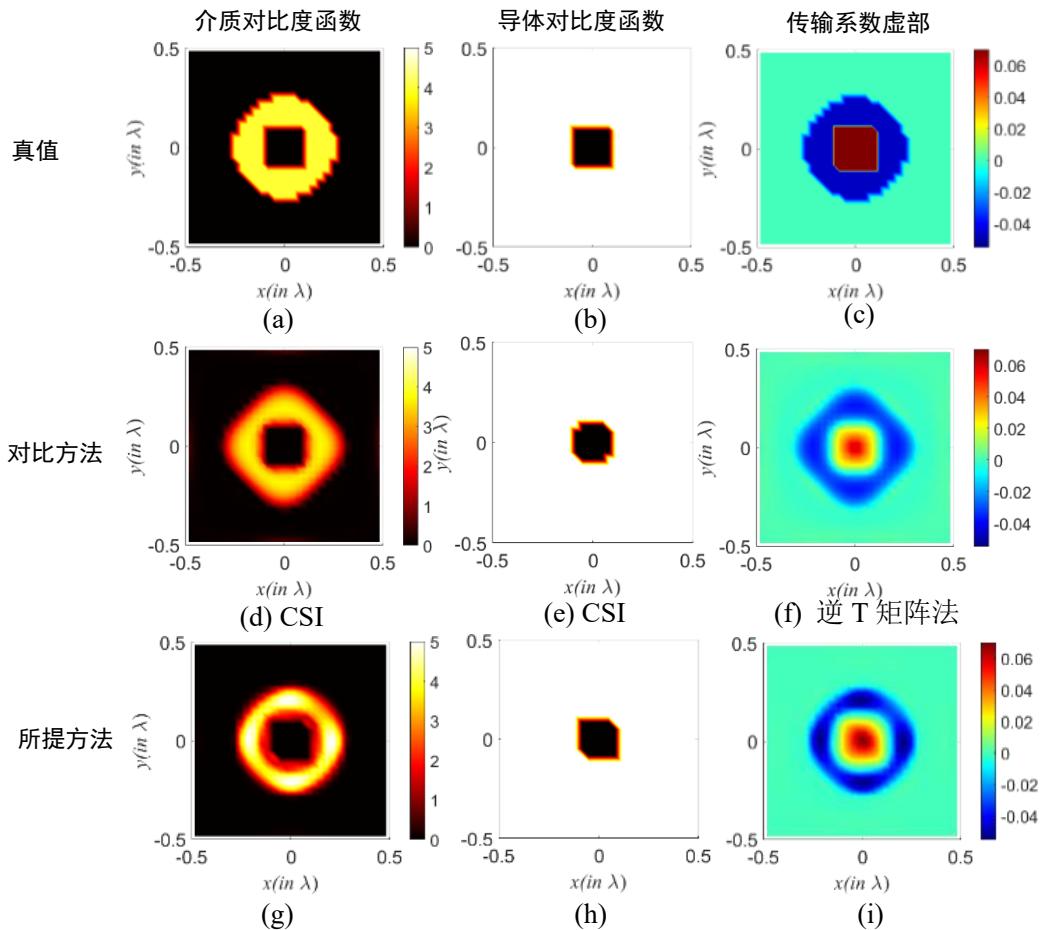


图 4.15 重建结果

为了验证超振荡效应的正则化作用，分别对均匀激励和优化激励下的观测函数  $\mathbf{G}_C \cdot \text{diag}(\mathbf{e})$  以及格林函数  $\mathbf{G}_C$  进行奇异值分解，其中的总场  $\mathbf{e}$  为多次照射的结果  $\{\mathbf{e}_q\}$  迭代得到。奇异值分解结果如下所示

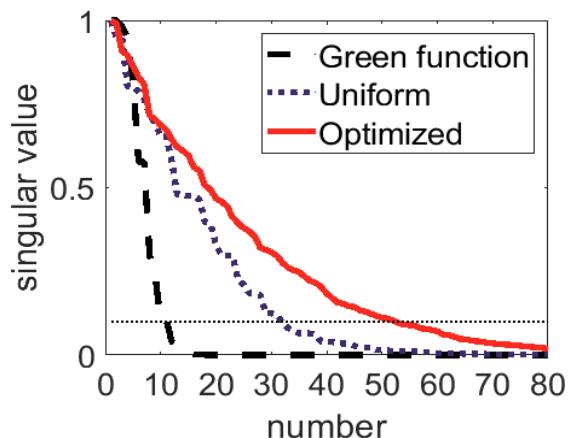


图 4.16  $\mathbf{G}_C \cdot \text{diag}(\mathbf{e})$  的奇异值分解

其中，黑色长虚线为格林函数  $\mathbf{G}_C$  的奇异值分布，蓝色短虚线为均匀激励下

$\mathbf{G}_C \cdot \text{diag}(\mathbf{e})$  的奇异值分布, 而红色实线为优化激励下  $\mathbf{G}_C \cdot \text{diag}(\mathbf{e})$  的奇异值分布, 水平标记线为噪声幅度。可见, 优化激励下的奇异值分布高于均匀激励下的奇异值分布, 验证了(4.72)中预条件矩阵  $A_q$  放大奇异值的结论。

#### 4.4.3 实测数据验证

在 Fresnel 研究院 2001 年的数据集中, 我们选择数据 “uTM shaped” 进行验证。该数据中, 目标为一个横截面为 “U” 形的金属铜柱, 其外侧宽 50mm、内侧宽 40mm、长 80mm, 形状如下图 4.17 所示。发射天线从 0 度到 360 度, 以 10 度步进依次在圆环上向成像区域中心照射, 共 36 次照射。每次照射时, 有接收天线相对于发射天线方位 60 度到 300 度, 以 5 度步进依次测量所在位置场强。因此 36 次发射中, 每次产生 48 个测量数据。数据集中, 以 2GHz 为步进, 提供 1-8GHz 下的有目标和无目标时的测量散射场, 本实验取工作在 4GHz 的测量结果进行处理。

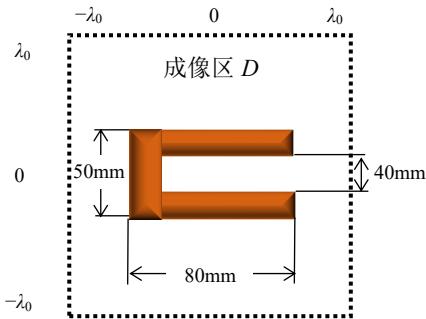


图 4.17 成像场景示意图

本文选择成像区域为大小  $150 \text{ mm} \times 150 \text{ mm}$  的矩形区, 并将其离散化为  $44 \times 44$  个网格。由于在重建中需要知道空间中的入射场分布, 故需要根据空场景的测量数据反推照射天线口面电流源分布。根据(3.56)Graf 加法定理, 用源位置处的加权多极子辐射场拟合辐射天线的口面场。在第  $i$  次照射中  $P$  个天线产生的辐射场写为

$$E_{inc}(\mathbf{r}) = -\frac{\omega_0 \mu_0}{4} \sum_{i=1}^I \alpha_{q,i} \sum_{\gamma=-\Gamma}^{+\Gamma} c_{\gamma,i} H_\gamma^{(2)}(k_0 |\mathbf{r}_{q,i} - \mathbf{r}|) e^{j\gamma\varphi(\mathbf{r}_{q,i} - \mathbf{r})} \quad (4.82)$$

其中,  $\alpha = [a_{\gamma i}]_{(2\Gamma+1) \times 1}$  为第  $i$  个辐射源的第  $\gamma$  阶多极展开权重, 由于一次照射仅有一个天线工作, 故取值同(3.54)。  $c_{\gamma, i}$  为第  $i$  个天线位置处的第  $\gamma$  阶多极子的权重,  $\varphi(\mathbf{r}_{q, i} - \mathbf{r})$  为矢量  $\mathbf{r}_{q, i} - \mathbf{r}$  的角度。故给定一次照射的  $M$  个测量位置  $\mathbf{r}_{q, m}$  ( $m = 1, \dots, M$ ), 则无目标的自由空间测量数据为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_q^{sca} &= \mathbf{H}_q \mathbf{c} \\
 \mathbf{c} &= \left[ c_{\gamma,i} \right]_{I(2\Gamma+1) \times 1} \\
 \mathbf{H}_q &= \left[ -\frac{\omega_0 \mu_0}{4} \alpha_{q,i} H_\gamma^{(2)} \left( k_0 |\mathbf{r}_{q,i} - \mathbf{r}_{q,m}| \right) e^{j\gamma\varphi(\mathbf{r}_{q,i} - \mathbf{r}_{q,m})} \right]_{M \times I(2\Gamma+1)}
 \end{aligned} \tag{4.83}$$

解(4.83)方程即可得到拟合入射场的多极展开权重。

虽然照射源为均匀激励，但是依旧可以设计超振荡效应。由于入射场和散射场之间是线性关系，因此通过对入射场  $\mathbf{e}^{inc}$  和散射场  $\mathbf{e}^{sca}$  进行同等的重加权就可以实现预条件矩阵的效果，即

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}^{sca} &= \mathbf{G}_C \cdot \text{diag}(\mathbf{e}) \cdot \chi \\
 &\Downarrow \\
 \mathbf{A}_q \mathbf{e}^{sca} &= \mathbf{G}_C \cdot \text{diag}(\mathbf{A}_q \mathbf{e}^{inc} + \mathbf{A}_q \mathbf{e}^{sca}) \cdot \chi
 \end{aligned} \tag{4.84}$$

然而，在每次照射中，仅在发射天线对面的 240 度范围内进行接收，如图 4.18 所示。

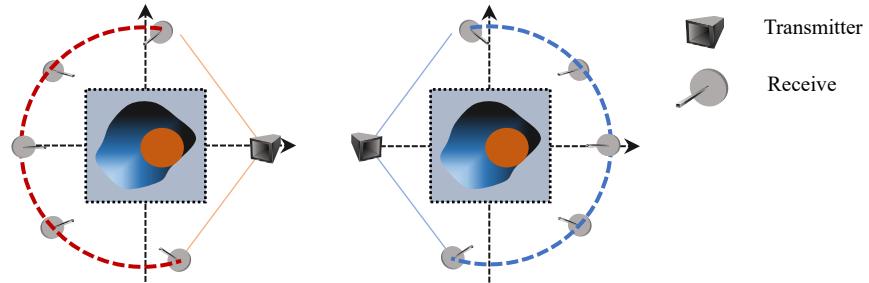


图 4.18 收发关系示意图

因此，每次照射的 48 个测量均和其它次照射存在 2 至 12 个测量在位置上不重合。因此，仅能依靠相邻的发射来线性组合得到超振荡测量数据。本实验选择每 6 次相邻照射合成一次测量，其中共有 16 次测量复用位置。由于可用综合超振荡波形的源数有限，拟合自由度不足，故仅令搬移的目标空间谱  $k_x \in \{-2k_0, -1k_0, \dots, 2k_0\}$ ,  $k_y \in \{-2k_0, -1k_0, \dots, 2k_0\}$ ，由此合成 25 个不同频段的频谱。

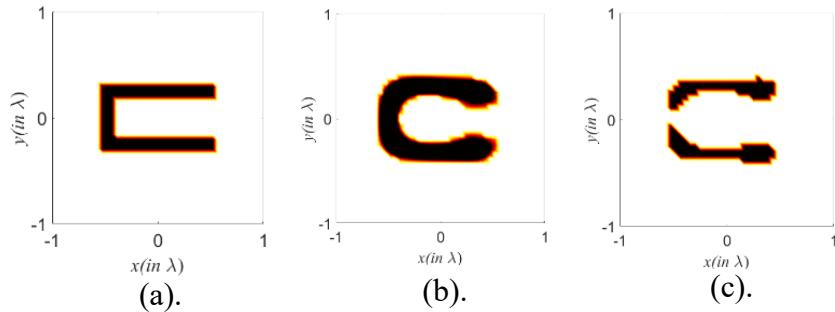


图 4.19 实测数据重建结果

同第一个验证过程，分别用均匀激励的入射场和优化后的入射场进行重建，重建结果如图 4.19 所示。其中，横纵坐标均相对于波长归一化，可见目标尺寸

均在亚波长量级。图 4.19 (a)中为导体分布的真值参考，而图 4.19 (b)中为均匀激励的重建结果，图 4.19 (c)为优化激励的重建结果。对比(b)和(c)可见，优化激励确实能提高重建目标的空间分辨率。然而受限于优化入射场时可复用的测量位置，每次照射的局部空间谱并不完整，因此图 4.19 (c)中重建的目标存在缺陷。

## 4.5 本章小结

常见的逆散射成像应用以穿透性的低频成像为主，由此带来了可用工作波长和极限分辨率之间的矛盾。为了解决该问题，本章提出一种基于入射场优化的分辨率增强方法，通过总场和目标的混频关系将高频目标信息保留在传输信道通带内，从而在不改变观测构型的前提下提高重建的目标空间谱带宽，进而实现超分辨成像。

在逆散射重建理论中，非线性重建与超分辨成像之间的关系争论已久。本章从一个独特的视角给出非线性与超分辨成像之间的关系的解释，即：目标和散射场之间的非线性提供了一种混频关系，我们分析算子的性质可以发现该混频关系等价于入射场和目标混频，而具备超振荡效应的入射场可以通过这样的混频作用将宽带目标信息搬到低频，从而实现信息的压缩。而超振荡效应广泛存在于各种波形中，例如随机辐射场或是高阶波函数<sup>[116-118]</sup>。因此，非线性成像的超分辨性能是建立在广泛存在的超振荡效应上的。

而在超分辨理论中，超振荡效应在光学成像有着广泛的应用，却鲜有基于微波频段的成像手段。前者对相位变化并不敏感，故可以通过宽带函数直接综合超振荡窄脉冲。而后者需要稳定的波束，无法直接进行综合。此外，常见的超振荡波形生成需要引入透镜或是超表面来修改成像构型，难以得到广泛应用。因此，本章所提方法建立在不改变源的构型，而只修改激励权重的情况下，对单频入射场的空间谱进行了间接优化，改善了超振荡效应在微波频段应用的局限性。

最后，我们从正则化的角度给出了超振荡效应在逆散射问题中的解释，证明基于超振荡的入射场优化等价于 Krylov 子空间法下引入预条件矩阵。而在 2.3.3 节中，我们说明了预条件矩阵等价于 Bayes 框架下引入先验信息，因此本研究所提的基于超振荡的成像方法等价于基于成像区域的弱先验的正则化策略。该结论也说明：非线性逆散射问题下的超分辨和病态逆问题的正则化殊途同归。所提方法在仿真和实测数据上得到了验证，对  $3\lambda_0/25$  间距的目标实现分辨，远低于  $\lambda_0/2$  的 Rayleigh 衍射极限。

## 第 5 章 基于材料稀疏先验的逆散射超分辨方法

在第 4 章中，我们给出了基于超振荡的超分辨成像方法，并验证该超分辨方法等价于引入弱先验信息作为预条件算子对病态逆问题进行正则化。在本章研究中，我们进一步延伸这种观点，即直接引入普适的先验信息对病态问题的解空间进行弱约束，以达到高分辨成像的效果。作为一个典型的病态逆问题，逆散射成像不仅受限于可工程实现的观测通道数量，也受制于空间电波传播的物理低通效应。

在大部分远场成像的应用中，例如：雷达成像，通常忽略了波的衍射效应而做远场假设：将格林函数简化为平面波函数。根据平面波和柱面波转换关系

$$e^{-jk_0 \cdot r} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-j)^n J_n(k_0 r) e^{-jn\varphi(r, k_0)} \quad (5.1)$$

其中， $\mathbf{k}_0$  为模值为  $k_0$  的波矢量。根据 Bessel 函数的积分关系式

$$\int_0^\infty J_n(k_0 r') dr' = \int_0^\infty [H_n^{(2)}(k_0 r') + H_n^{(1)}(k_0 r')] dr' = 1/k_0 \quad (5.2)$$

将(5.2)代入(5.1)，并利用 Graf 加法定理得到

$$\begin{aligned} e^{-jk_0 \cdot r} &= k_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_0^\infty [H_n^{(2)}(k_0 r') + H_n^{(1)}(k_0 r')] dr_q \right\} (-j)^n J_n(k_0 r) e^{-jn\varphi(r, k_0)} \\ &= k_0 \int_0^\infty \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [H_n^{(2)}(k_0 r') + H_n^{(1)}(k_0 r')] J_n(k_0 r) e^{jn[\varphi' - \varphi(r, k_0)]} \right\} dr_q \quad (5.3) \\ &= k_0 \int_0^\infty [H_0^{(2)}(k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) + H_0^{(1)}(k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)] dr' \end{aligned}$$

其中， $\varphi' = \pi/2$ 。可见， $\mathbf{r}$  处的平面波等价于垂直于  $\mathbf{k}_0$  方向上无穷个柱面波源的叠加合成。换而言之，平面波假设下的方位向孔径任意大。因此在一些波达方向估计或是反卷积问题中，当噪声扰动为零时，即使是最小二乘方法也能实现超分辨[119][120]。因此远场成像更关注信噪比对成像的影响，尤其是实际应用中远距离传播带来的衰减。其中的正则化措施通常是以牺牲分辨率换取成像稳定性为目的。这一结论可以从正则化因子的构造中得出。紧算子的小奇异值分量易受噪声扰动，且在反演过程中有放大效应，因此正则化因子的构造都以抑制小奇异值分量为目的。而成像目标的高频信息又由小奇异值分量表示，导致常见的正则化策略都会抛弃高频信息以换取低信噪比下的数值稳定性。从 2006 年陶哲轩等人提出压缩感知理论至今，基于稀疏约束的正则化方法被广泛用于高分辨信号处理算法。然而在远场成像问题中，相比于物理过程界定的极限分辨率，观测受限的影响更为明显。此时，正则化措施仅提供对解空间的约束，以保证逆算子从观测空间映射到解空间单射，因此得到的解依旧是低维的，并没有超分辨能力。因此稀疏类的

方法更多被视为一种基于先验信息对缺失观测孔径的弥补，而非对极限分辨率的挑战<sup>[121]</sup>。

而在近场成像的应用中，尤其是低频成像，观测孔径可以任意填充，且受信噪比制约较小。此时，格林函数的影响更明显，即：不论观测的采样率如何增加，可恢复的空间谱始终受限于衍射效应的带宽  $k_0$ 。此时的病态逆问题不仅存在解的不稳定性问题，还存在多解的问题。即使噪声扰动为零，最小二乘解也无法提供准确的成像结果。而在基于超振荡的非线性成像中，我们分析得到一个不同的结论：非线性混频的作用可以实现高维信息的压缩。因此，考虑信噪比充分的情况下，合适的正则化方法和极限分辨率是相关联的。在基于超振荡的超分辨成像算法设计中，(4.39)说明了极限分辨率同时由带宽  $k_0$ 、信噪比  $SNR$  以及正则化策略  $k_\delta$  决定。在给定了  $k_0$  和  $SNR$  的前提下，近场成像的极限分辨率由正则化策略决定，也就是拟合的超振荡局部空间谱带宽。因此，在本章中，我们不寻求物理角度的超分辨方法，而直接选择合适的数学先验来约束非线性解  $\chi$  和  $t$ ，从而构造超分辨算法。

实际逆散射重建问题中，大多数目标并非稀疏分布的，且缺乏结构化信息。早期对这类目标的先验设计围绕着目标分段均匀的角度出发，通过 Markov 随机场来描述局部目标之间的局部相关性，并建立先验信息<sup>[122]</sup>。其等价的正则化形式——全变分正则化，则在逆散射成像中得到广泛应用<sup>[123-126]</sup>。随着压缩感知理论的兴起，大量采用稀疏正则化的逆散射成像方法层见叠出<sup>[126-131]</sup>。然而这类先验信息并不适合用于实际的复杂目标，而稀疏约束不成立的前提下，如(2.79)所示，正则化的误差收敛性甚至可能弱于 Tikhonov 方法。为了将稀疏重建算法扩展到复杂目标的重建任务，有学者尝试用小波基构建非稀疏目标的稀疏表征<sup>[132]</sup>，然而该方法受限于合适的小波核函数选取。另一种做法是通过混合范数构建稀疏性，这类方法适用于具有简单结构的分段均匀目标<sup>[134]</sup>。还有一些方法直接构造非线性的正则化项，以保证函数的分段均匀性<sup>[59][134-137]</sup>。这些结构化先验信息均用于约束对比度源  $w$ ，或是在一阶线性近似下约束目标函数  $\chi$ 。导致重建过程无法像(4.75)借助非线性混频作用直接在零空间构造解函数。因此，本章寻求一种用结构化先验约束非线性解空间  $\chi$  和  $t$  的方法。

由于第四章说明了非线性问题下的正则化策略可以实现高频信息的压缩，故本章直接构造合适先验来提高成像性能。由于定量重建问题的目标大多由有限的材料构成，故本文在 5.1 节中提出一种基于选值正则化的非线性重建方法。然而由于选值约束非凸，故难以保证结果的收敛性，因此本文在 5.2 节中给出一种基于多层 Bayes 的幅度稀疏模型。然而现有的统计反演理论并不能处理非线性问题的推断，本文分别提出一种基于神经网络的推断方法和基于 Krylov 子空间法的

非线性 Bayes 推断方法。其中，前者受限于网络的黑盒特性无法确定学习的先验是否符合需要，而后者则可以在保证收敛的前提下准确重建目标。最后，所提算法在电磁仿真和实测数据上和无入射场优化的结果进行对比，验证了该算法的有效性。

## 5.1 基于选值正则化的非线性逆散射重建方法

常见的成像问题中，如乳腺癌成像、人体安检和探地成像中，虽然成像目标并不具有空间分布的稀疏性或是分段连续性，但是成像目标的材料类型是有限的，即  $\chi$  和  $t$  的取值是有限的。因此，本节采用一种选值先验作为对非线性目标函数的约束。

给定材料取值参数  $c_\chi = [c_1, c_2, \dots, c_K]$ ，即目标最多仅有  $K$  种材料，其对比度  $\chi$  或是传输系数  $t$  仅有  $K$  种取值。由于传输系数的状态方程和对比度的状态方程一致，这里只以对比度为例，其选值正则化项写为：

$$\kappa(\chi, c) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N V^K(|\chi_n - c_1|, \dots, |\chi_n - c_K|; 0) \quad (5.4)$$

其中，选值函数  $V^K$  有递推形式

$$V^K(u_1, \dots, u_K; x) = \begin{cases} (u_K + x) \times \frac{V^{K-1}(u_1, \dots, u_{K-1}; x)}{V^{K-1}(u_1, \dots, u_{K-1}; u_K + x)} & K \neq 1 \\ u_1 + x & K = 1 \end{cases} \quad (5.5)$$

其中， $u_k$  为变量和选值之间的偏差。分别以  $K = 1$  到  $K = 3$  举例，各阶的  $V^K$  为

$$\begin{aligned} V^1(u_1; 0) &= u_1 \\ V^2(u_1, u_2; 0) &= \frac{u_1 u_2}{u_1 + u_2} \\ V^3(u_1, u_2, u_3; 0) &= \frac{u_1 u_2 u_3 (u_1 + u_2 + u_3)}{(u_1 + u_3)(u_2 + u_3)(u_1 + u_2)} \end{aligned}$$

可见，选值函数有三点性质：1、只要有一个变量取值为零，则整个函数取值为零；2、选值函数关于变量对称，即任意变量交换次序不影响函数值；3、多项式阶数并不随变量数的增加而增加。假设变量  $u_K$  远小于  $\{u_1, \dots, u_{K-1}\}$ ，根据递推关系(5.5)有

$$\begin{aligned} &V^K(u_1, \dots, u_K; 0) \\ &= u_K \times \frac{V^{K-1}(u_1, \dots, u_{K-1}; 0) \times V^{K-2}(u_1, \dots, u_{K-2}; u_{K-1} + u_K)}{(u_{K-1} + u_K) V^{K-2}(u_1, \dots, u_{K-2}; u_K)} \\ &\approx u_K \times \frac{V^{K-2}(u_1, \dots, u_{K-2}; 0)}{V^{K-2}(u_1, \dots, u_{K-2}; u_K)} = V^K(u_1, \dots, u_{K-2}, u_K; 0) \end{aligned} \quad (5.6)$$

可见，根据(5.6)构成的递推关系归纳将得到

$$V^K(u_1, \dots, u_K; 0) \approx V^K(u_K; 0) \quad (5.7)$$

因此，选值函数  $V^K$  的取值由  $\{u_1, \dots, u_K\}$  中的最小值决定。以  $V^2\{u_1, u_2\}$  为例，其构成函数分布如图 5.1 所示

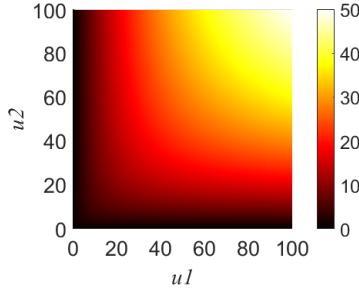


图 5.1 二维选值函数分布

可见，选值函数取值由最小的选值偏差决定，且分布接近稀疏范数约束。综上，(5.4)选值正则化项构成的解空间如图 5.2 所示

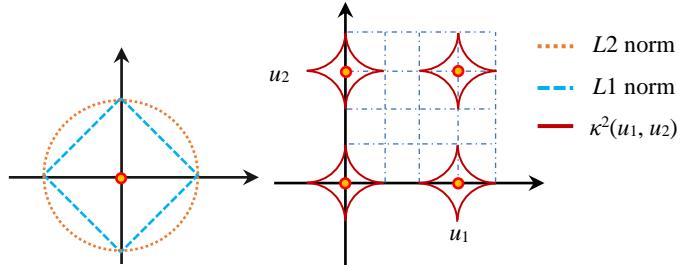


图 5.2 选值正则化解空间示意图

图左侧分别为二范数和一范数约束的解空间，而图右侧为选值函数约束的解空间。可见，选值函数约束的解空间由  $N \times K$  个离散的子空间约束构成，因此是一个非凸约束，难以直接处理。

对选值函数求导得到

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial u_K} V^K(u_1, \dots, u_K; 0) \\ &= V^K(u_1, \dots, u_K; 0) [G^K(u_1, \dots, u_K; 0) - G^{K-1}(u_1, \dots, u_{K-1}; 0)] \end{aligned} \quad (5.8)$$

其中， $G^K$  同样为递推式

$$G^K(u_1, \dots, u_K; x) = \begin{cases} \frac{1}{u_K + x} + G^{K-1}(u_1, \dots, u_{K-1}; x) & K \neq 1 \\ -G^{K-1}(u_1, \dots, u_{K-1}; x + u_K) & \\ \frac{1}{u_1 + x} & K = 1 \end{cases} \quad (5.9)$$

分别以  $K=1$  和  $K=2$  举例，各阶的  $G^K$  为

$$G^1(u_1; x) = \frac{1}{u_1 + x}$$

$$G^2(u_1, u_2; x) = \frac{1}{u_1 + x} + \frac{1}{u_2 + x} - \frac{1}{u_1 + u_2 + x}$$

可见，

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^K \left[ G^K(u_{\{K\}}; 0) - G^{K-1}(u_{\{K-1\}\setminus k}; 0) \right] u_k \\ &= \sum_{k=1}^K \left[ \frac{1}{u_k} - G^{K-1}(u_{\{K-1\}\setminus k}; u_k) \right] u_k \\ &= 1 \end{aligned} \quad (5.10)$$

因此令  $b_k^K$  为  $V^K$  对  $u_k$  求导的结果，固定  $\{u_1, \dots, u_K\}$  取值不变，有如下  $V^K$  的凸包络

$$Q^K(u_1, \dots, u_K; v_1, \dots, v_K) = \sum_{k=1}^K b_k^K(u_1, \dots, u_K) v_k \quad (5.11)$$

当且仅当  $\{v_1, \dots, v_K\} = \{u_1, \dots, u_K\}$  时， $Q^K$  的取值和偏导均与  $V^K$  相等。因此可以得到选值正则化项(5.4)的近似形式

$$\kappa(\chi, c) \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K b_k^K(|\chi_{n,i-1} - c_1|, \dots, |\chi_{n,i-1} - c_K|) |\chi_n - c_k| \quad (5.12)$$

其中， $\chi_{n,i-1}$  为第  $i-1$  步迭代的第  $n$  个网格的结果。由此构建了对非线性解的正则化约束，为了将该约束延申至(3.31)中 Krylov 子空间的求解中，需要做一步非线性替换。

### 5.1.1 定量重建介质对比度函数

根据对比度源和介质对比度之间的关系  $\mathbf{w}_q^{die} = diag(\mathbf{e}_q) \cdot \chi$ ，令正则化项为

$$\kappa_q(\mathbf{w}_q^{die}, \mathbf{c}^\chi) = \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^N b_n^K \left[ \mathbf{w}_q^{die}(n), \mathbf{c}^\chi \right] \left| g \left[ \mathbf{w}_q^{die}(n), c_k^\chi \right] \right|^2 \quad (5.13)$$

其中， $\mathbf{c}^\chi$  为介质对比度的选值向量， $g(\cdot)$  为选值偏差函数定义为

$$g \left[ \mathbf{w}_q^{die}(n), c_k^\chi \right] = \boldsymbol{\delta}_n^H \left[ c_k^\chi \cdot (\mathbf{e}_q^{pec} + \mathbf{G}_D^{\text{PEC}} \mathbf{w}_q^{die}) - \mathbf{w}_q^{die} \right]$$

$\boldsymbol{\delta}_n$  为仅有第  $n$  个值为非零的单位向量。由此将(3.31)的代价函数改为

$$F^{die} = \frac{\sum_q \|\mathbf{r}_q^{die}\|^2}{\sum_q \|\mathbf{e}_q^{pec}\|^2} + \frac{\sum_q \|\mathbf{y}_q^{die}\|^2 + \gamma \sum_q \kappa_q(\mathbf{w}_q^{die}, \mathbf{c}^\chi)}{\sum_q \|diag(\mathbf{e}_q^{pec}) \cdot \chi^{die}\|^2} \quad (5.14)$$

更新对比度源的过程依旧写为  $\mathbf{w}_{q,i} = \mathbf{w}_{q,i-1} + \alpha_{q,i} \mathbf{v}_{q,i}$ ，取 PRP 共轭梯度方向，

其中的共轭梯度为

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^{die}}{\partial \bar{w}_q} = & -\frac{\left(\mathbf{G}_C^{pec}\right)^H \mathbf{r}_{q,i-1}^{die}}{\sum_q \|\mathbf{e}_q^{die}\|^2} + \frac{\gamma_q^{die} - diag(\boldsymbol{\chi}_{i-1}^{die})^H \left(\mathbf{G}_D^{pec}\right)^H \boldsymbol{\gamma}_q^{die}}{\sum_p \|diag(\mathbf{e}_{q,i-1}^{pec}) \cdot \boldsymbol{\chi}_{i-1}^{die}\|^2} \\ & + \frac{\sum_{k,n} \left\{ b_k^K \left[ \mathbf{w}_{q,i-1}^{die}(n), \mathbf{c}_\chi \right] \left[ \left(\mathbf{G}_D^{PEC}\right)^H \cdot \mathbf{c}_k^\chi - \mathbf{I} \right] \right\}}{\sum_p \|diag(\mathbf{e}_{q,i-1}^{pec}) \cdot \boldsymbol{\chi}_{i-1}^{die}\|^2} \\ & + \frac{\sum_{k,n} \left\{ \delta_n \left[ \mathbf{c}_k^\chi \cdot (\mathbf{e}_{q,i-1}^{pec} + \mathbf{G}_D^{PEC} \mathbf{w}_{q,i-1}^{die}) - \mathbf{w}_{q,i-1}^{die} \right] \right\}}{\sum_p \|diag(\mathbf{e}_{q,i-1}^{pec}) \cdot \boldsymbol{\chi}_{i-1}^{die}\|^2} \end{aligned} \quad (5.15)$$

将(5.15)代入(3.33)即可得到更新方向  $\mathbf{v}_{q,i}$ 。而迭代步长则采用精确搜索步长, 即最小化代价函数(5.14)的  $\alpha_{q,i}$ , 故将迭代的更新表达式代入损失函数(5.14)中

$$\begin{aligned} F^{die} = & \frac{\sum_q \|\mathbf{r}_{q,i-1}^{die} - \alpha_i \mathbf{G}_C^{pec} \cdot \mathbf{v}_i\|^2}{\sum_q \|\mathbf{e}_q^{die}\|^2} + \frac{\sum_q \left\| \boldsymbol{\gamma}_{q,i-1}^{die} + \alpha_i \left[ \mathbf{v}_i - diag(\mathbf{G}_D^{pec} \cdot \mathbf{v}_i) \cdot \boldsymbol{\chi}_{i-1}^{die} \right] \right\|^2}{\sum_q \|diag(\mathbf{e}_q^{pec}) \cdot \boldsymbol{\chi}_{i-1}^{die}\|^2} \\ & + \frac{\gamma \sum_q \sum_{k,n} b_k^K \left[ \mathbf{w}_{q,i-1}^{die}(n), \mathbf{c}_\chi \right] \left| g(\mathbf{w}_{q,i-1}^{die}(n), \mathbf{c}_k^\chi) + \alpha_{q,i} \delta_n^H (\mathbf{G}_D^{PEC} \mathbf{c}_k^\chi - \mathbf{I}) \mathbf{v}_{q,i} \right|^2}{\sum_q \|diag(\mathbf{e}_q^{pec}) \cdot \boldsymbol{\chi}^{die}\|^2} \end{aligned} \quad (5.16)$$

令  $\partial F^{die}/\partial \alpha_{q,i} = 0$ , 则有精确步长

$$a_{q,i} = a_{1q,i} / a_{2q,i} \quad (5.17)$$

其中分子为

$$\begin{aligned} a_{1q,i} = & \frac{\mathbf{v}_{q,i}^H \cdot \left(\mathbf{G}_C^{pec}\right)^H \mathbf{r}_{q,i-1}}{\sum_q \|\mathbf{e}_q^{die}\|^2} - \frac{\left[ diag(\mathbf{G}_D^{pec} \mathbf{v}_{q,i}) \boldsymbol{\chi}_{i-1}^{die} - \mathbf{v}_{q,i} \right]^H \boldsymbol{\gamma}_{q,i-1}}{\sum_q \|diag(\mathbf{e}_q^{pec}) \boldsymbol{\chi}_{i-1}^{die}\|^2} \\ & + \frac{\gamma \sum_{k,n} \left[ b_k^K g(\mathbf{w}_{q,i-1}^{die}(n), \mathbf{c}_k^\chi)^H \delta_n^H (\mathbf{G}_D^{PEC} \mathbf{c}_k^\chi - \mathbf{I}) \mathbf{v}_{q,i} \right]}{\sum_q \|diag(\mathbf{e}_q^{pec}) \cdot \boldsymbol{\chi}^{die}\|^2} \end{aligned}$$

分母为

$$a_{2q,i} = \frac{\left\| \mathbf{G}_C^{pec} \mathbf{v}_{q,i} \right\|_2^2}{\sum_q \left\| \mathbf{e}_q^{die} \right\|_2^2} + \frac{\left\| diag(\mathbf{G}_D^{pec} \mathbf{v}_{q,i}) \boldsymbol{\chi}_{i-1}^{die} - \mathbf{v}_{q,i} \right\|_2^2}{\sum_q \left\| diag(\mathbf{e}_q^{pec}) \boldsymbol{\chi}_{i-1}^{die} \right\|_2^2} + \frac{\gamma \sum_{k,n} \left| \delta_n^H (\mathbf{G}_D^{PEC} \mathbf{c}_k^\chi - \mathbf{I}) \mathbf{v}_{q,i} \right|^2}{\sum_q \left\| diag(\mathbf{e}_q^{pec}) \cdot \boldsymbol{\chi}^{die} \right\|_2^2}$$

由此, 完成  $\mathbf{w}_{q,i}$  的更新, 而  $\boldsymbol{\chi}$  的更新同(3.30)。

完成对比度  $\boldsymbol{\chi}$  的更新后, 可以执行一步正过程得到总场。需要进一步更新选值向量  $\mathbf{c}^\chi$ 。其代价函数为

$$F_c(\mathbf{c}^\chi) = \sum_{q,k,n} b_k^K \left( \mathbf{w}_{q,i}^{eq}(n), \mathbf{c}_{i-1}^\chi \right) \left| \delta_k^H \left[ \mathbf{c}^\chi \cdot \mathbf{e}_{q,i}(n) - \mathbf{w}_{q,i}^{die}(n) \right] \right|^2 \quad (5.18)$$

更新选值函数  $\mathbf{c}^\chi = \mathbf{c}^\chi + \alpha_i \mathbf{v}_i$ , 有相应的共轭梯度和迭代步长:

$$\frac{\partial F_c(\mathbf{c}^\chi)}{\partial \mathbf{c}^\chi} = \sum_{q,k,n} \left\{ b_k^K (\mathbf{w}_{q,i}^{eq}(n), \mathbf{c}_{i-1}^\chi) \overline{\mathbf{e}_{q,i}(n)} \right\}$$

$$\bar{\alpha}_i = -\frac{\sum_{q,k,n} b_k^K (\mathbf{w}_{q,i}^{eq}(n), \mathbf{c}_{i-1}^\chi) g(\mathbf{w}_{q,i}^{die}(n), \mathbf{c}_{k,i-1}^\chi)^H \mathbf{e}_{q,i}(n) \cdot \boldsymbol{\delta}_k^H \mathbf{v}_n}{\sum_{q,k,n} b_k^K (\mathbf{w}_{q,i}^{eq}(n), \mathbf{c}_{i-1}^\chi) \|\mathbf{e}_{q,i}(n) \cdot \boldsymbol{\delta}_k^H \mathbf{v}_n\|_2^2}$$

由此完成介质对比度的定量重建。

### 5.1.2 定性重建导体传输系数

定量重建介质目标后, 再定性更新导体传输系数。不同于介质, 导体的传输系数仅有单个固定选值, 即

$$t_n^0 = -\frac{J_0(k_0 R)}{H_0^{(2)}(k_0 R)}$$

因此免去了导体的选值向量  $\mathbf{c}'$  更新的步骤。其余部分与介质更新规则相同, 代价函数为

$$F = \frac{\sum_q \|\mathbf{r}_q\|^2}{\sum_q \|\mathbf{e}_q^{sca}\|^2} + \frac{\sum_q \|\gamma_q\|^2 + \gamma \sum_q \kappa_q(\mathbf{w}_q, \mathbf{c}')}{\sum_q \|diag(c\mathbf{i}_q) \cdot \mathbf{t}\|^2} \quad (5.19)$$

第  $i$  步迭代的对比度源为  $\mathbf{w}_{q,i} = \mathbf{w}_{q,i-1} + \alpha_{q,i} \mathbf{v}_{q,i}$ , 相应的迭代方向为(3.33)的 Polak-Ribiere 共轭梯度方向, 其共轭导数为

$$\mathbf{g}_{q,i} = -\frac{\mathbf{G}_c^H \mathbf{r}_{q,i-1}}{\sum_q \|\mathbf{e}_q^{sca}\|_2^2} + \frac{\gamma_{q,i-1} - diag(\mathbf{t}^H \cdot \mathbf{S}^H) \gamma_{q,n-1}}{\sum_q \|diag(c\mathbf{i}_q) \cdot \mathbf{t}\|^2}$$

$$+ \frac{\sum_{k,n} \left\{ b_k^K [\mathbf{w}_{q,i-1}(n), \mathbf{c}^t] [\mathbf{S}^H \cdot \overline{\mathbf{c}_k^t} - \mathbf{I}] \right\}}{\sum_p \|diag(c\mathbf{i}_q) \cdot \mathbf{t}\|^2} \quad (5.20)$$

而相应的迭代步长为

$$\alpha_{q,i} = \alpha 1_{q,i} / \alpha 2_{q,i} \quad (5.21)$$

其中

$$\alpha 2_{q,i} = \frac{\|\mathbf{G}_c \mathbf{v}_{q,i}\|_2^2}{\sum_q \|\mathbf{e}_q^{sca}\|_2^2} + \frac{\|diag(S\mathbf{v}_{q,i}) \cdot \mathbf{t}_{i-1} - \mathbf{v}_{q,i}\|_2^2}{\sum_q \|diag(c\mathbf{i}_q) \cdot \mathbf{t}_{i-1}\|_2^2} + \frac{\gamma \sum_{k,n} |\boldsymbol{\delta}_n^H (\mathbf{S} \mathbf{c}_k^t - \mathbf{I}) \mathbf{v}_{q,i}|^2}{\sum_q \|diag(c\mathbf{i}_q) \cdot \mathbf{t}_{i-1}\|_2^2}$$

$$a1_{q,i} = \frac{\mathbf{v}_{q,i}^H \cdot \mathbf{G}_C^H \mathbf{r}_{q,i-1}}{\sum_q \|\mathbf{e}_q^{sca}\|_2^2} - \frac{\left[ diag(\mathbf{Sv}_{q,i}) \cdot \mathbf{t}_{i-1} - \mathbf{v}_{q,i} \right]^H \mathbf{v}_{q,i-1}}{\sum_q \|diag(c\mathbf{i}_q) \mathbf{t}_{i-1}\|_2^2} \\ + \frac{\gamma \sum_k \left[ b_k^K g(\mathbf{w}_{q,i-1}(n), \mathbf{c}_k^t)^H \delta_n^H (\mathbf{S} \mathbf{c}_k^t - \mathbf{I}) \mathbf{v}_{q,i} \right]}{\sum_q \|diag(c\mathbf{i}_q) \mathbf{t}_{i-1}\|_2^2}$$

由此完成导体的定性重建。

在整个迭代过程中，虽然我们选取了选值函数的凸包形式作为逼近，但是这种逼近方式仅在更新变量和选值接近时有效。否则会落入余差的代价函数和选值代价函数的鞍点之间，例如图 5.3 所示。图中红点为真值，黄点为选值。图(a)是无选值正则化下不同初值的搜索路径，即最小化代价函数的梯度方向；图(b)是有选值正则化下的搜索路径，可见采取初值 1 和初值 2 搜索时存在搜索过程落入解空间鞍点的情况，只有初值 3 能搜到真值。

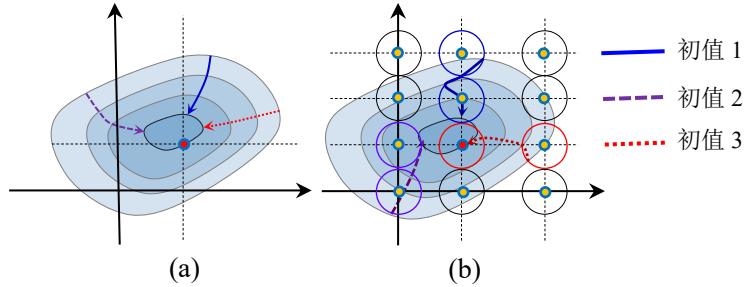


图 5.3 解空间搜索示意图

因此，选值正则化本身的非凸性质并不会随着凸包络逼近而缓解。选值函数的约束应当随着余差的降低而增强，以保证迭代过程的收敛性。故正则化参数  $\gamma$  定义为

$$\gamma = \left( \frac{\sum_q \kappa_q(\mathbf{w}_q, \mathbf{c}^t)}{\sum_q \|diag(c\mathbf{i}_q) \cdot \mathbf{t}\|^2} \right) \left( \frac{\sum_q \|\mathbf{r}_q\|^2}{\sum_q \|\mathbf{e}_q^{sca}\|^2} + \frac{\sum_q \|\mathbf{v}_q\|^2}{\sum_q \|diag(c\mathbf{i}_q) \cdot \mathbf{t}\|^2} \right)^{-1} - 1 \quad (5.22)$$

并在共轭梯度方向中引入动量平均项

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{p,0} = 0 \\ \mathbf{v}_{p,n} = \mathbf{g}_{p,n} + \frac{\langle \mathbf{g}_{p,n}, \mathbf{g}_{p,n} - \mathbf{g}_{p,n-1} \rangle}{\langle \mathbf{g}_{p,n-1}, \mathbf{g}_{p,n-1} \rangle} \mathbf{v}_{p,n-1} \\ \mathbf{v}_{p,n} = \beta \mathbf{v}_{p,n-1} + (1-\beta) \mathbf{v}_{p,n} \end{cases} \quad (5.23)$$

由此完成计算。

## 5.2 基于多层 Bayes 的非线性逆散射重建方法

在选值正则化的构造过程中可以看出，目标取值的先验信息构成的解空间是

非凸的，因此难以通过优化搜索的方法找到全局最优解。由于加入正则化项的 Krylov 子空间法等价于引入 Bayes 先验，因此本节考虑直接构造多层 Bayes 先验来约束目标取值的稀疏性。经典做法是将重构目标函数建模为混合高斯分布

$$p(\chi_n | \beta, c^\chi; l) = \prod_{k=1}^K \left[ \mathcal{N}(\chi_n | c_k^\chi, \beta_k^{-1}) \right]^{l_{n,k}} \quad (5.24)$$

其中， $c^\chi$  为均值， $\beta$  为精度。 $l_n$  为第  $n$  个网格标签向量，该向量为仅有第  $k$  个分量非零的单位向量，表示其材料为  $k$ 。由于标签向量  $l_n$  有  $K$  个离散状态，故其分布为多项式分布：

$$p(l_n | v) = \prod_{k=1}^K v_k^{l_{n,k}} \quad (5.25)$$

其中， $\sum_k v_k = 1$ 。可见，为了促进该标签稀疏，且和多项式分布共轭，参数  $v$  被赋予 Dirichlet 分布作为先验

$$p(v | \gamma) = \frac{\Gamma(\gamma_0)}{\Gamma(\gamma_1) \dots \Gamma(\gamma_K)} \prod_{k=1}^K v_k^{\gamma_k - 1} \quad (5.26)$$

由此构成取值稀疏的目标函数先验。而对于(5.24)中的精度  $\beta_k$ ，为了方便计算，选择其分布为 Gamma 分布以构成共轭。

$$p(\beta_k | a_1, b_1) = \text{Gam}(\beta_k | a_1, b_1) = b_1^{a_1} \beta_k^{a_1 - 1} e^{-b_1 \beta_k} / \Gamma(a_1) \quad (5.27)$$

由此完成取值稀疏先验的构造。传输稀疏  $t$  的先验构造同理。

相应的测量过程可以建模为噪声扰动下的观测

$$\mathbf{e}_q^{sca} = \mathbf{G}_C \cdot [\mathbf{I} - \text{diag}(\chi) \cdot \mathbf{G}_D]^{-1} \text{diag}(\mathbf{e}_q^{inc}) \cdot \chi + \mathbf{n}_q \quad (5.28)$$

在对噪声分布没有明确信息的前提下，可以通过大数定理推出噪声分布为 Gauss 分布，故不失一般性的假设观测噪声为 Gauss 分布：

$$p(\mathbf{e}_q^{sca} | \chi, \alpha) = \left( \frac{\alpha}{2\pi} \right)^{M/2} \exp \left( -\frac{\alpha}{2} \left\| \mathbf{e}_q^{sca} - \mathbf{G}_C \cdot [\mathbf{I} - \text{diag}(\chi) \cdot \mathbf{G}_D]^{-1} \cdot \text{diag}(\mathbf{e}_q^{inc}) \cdot \chi \right\|_2^2 \right) \quad (5.29)$$

从最大后验估计的角度出发，应当给定测量数据的前提下估计目标函数  $\chi$  和  $t$  概率最大的值  $c^\chi$  和  $c^t$ 。然而实际散射场的测量数据  $\mathbf{e}^{sca}$  和目标函数之间构成非线性关系，导致后验分布完全无法求解。因此对非线性问题的后验推断需要进一步处理，本文给出两种处理方案：一种是通过神经网络打包所有非线性过程进行贝叶斯推断，另一种是将非线性问题线性化，并对线性化后的过程进行推断。接下来分别说明这两种求解方法。

### 5.2.1 基于先验拟合网络的非线性贝叶斯推断

近些年，深度神经网络激起了基于深度学习的逆散射成像方法的热潮。由于完成训练后的网络运行速度较快，对需要反复迭代优化的逆散射问题具有较强的吸引力。这些基于网络的成像方法基本可以归为两大类：一类是端到端映射法，即将所有的非线性过程打包在网络内，仅通过测量数据和重建图像作为标签训练网络<sup>[138][139]</sup>，然而这类方法需要较深的网络和充足的训练数据，且泛化能力不足。另一类则试图在网络设计中遵从物理规程，例如：仅将网络用于测量数据到对比度源的映射，而用传统方法估计网络提供的对比度源求解出目标函数；或是在网络各层之间加入正问题计算过程等<sup>[140-144]</sup>。然而这些设计神经网络架构的方法均没有对损失函数进行处理，通常损失函数为正向传播得到的测量数据和标签的 Kullback-Leibler 散度，也就等价于无正则化项的最大似然解。故这类基于神经网络的方法并没有面对逆散射问题的症结——病态性，而仅是作为一个万能函数逼近器使用。我们在逆问题理论中的结论已经表明：不论是什么样的函数，无正则化过程的逆问题求解必然存在发散。因此，基于无正则化神经网络的逆散射方法只能依赖训练集的先验进行约束，自然导致网络的泛化能力不足。这也是端到端映射法存在局限性的原因。因此，在网络中引入贝叶斯先验是必不可少的过程，而难点在于如何进行贝叶斯推断。

为了解决贝叶斯推断中难以对后验分布求解的问题，有学者提出利用 Transformers 网络做贝叶斯推断<sup>[145]</sup>。给定数据集  $D = \{(y_i, x_i)\}^n$ ，其中  $y$  为网络输入的观测， $x$  为网络输出的数据。通常，我们需要根据先验知识  $D$  从观测  $y$  预测数据  $x$  的后验，即  $p(x|y; D)$ 。首先从先验中采样数据集用来训练先验拟合网络（PDFs）。PDF 的输入是采样的先验数据集  $D_{\text{train}}$  和查询观测  $y$ ，输出是对应观测  $y$  的数据  $x$  可能取值的概率分布。

表格 5-1 PFN 网络拟合先验数据流程

**输入：** 数据集的先验分布  $P(d)$ ，且可以从该分布做  $K$  次采样

**输出：** 逼近后验概率分布的模型  $q_\theta$

初始化网络  $q_\theta$ ；

For  $j = 1: K$  Do:

    采样  $D \cup \{(y_i, x_i)\}_{i=1}^m \sim p(D)$ ；

    计算近似的随机损失函数  $\bar{l}_\theta = \sum_{i=1}^m [-\log q_\theta(x_i|y_i, D)]$ ；

    通过梯度为  $\nabla_\theta \bar{l}_\theta$  的随机梯度下降更新参数  $\theta$ ；

End

这里计算的随机损失函数是为了近似如下先验负对数似然函数（Prior-Data NLL）

$$l_\theta = \mathbb{E}_{D \cup \{y, x\} \sim p(D)} \left[ -\log q_\theta(x|y, D) \right] \quad (5.30)$$

将(5.30)展开有

$$\begin{aligned} l_\theta &= - \int_{D \cup \{y, x\}} p(x, y, D) \log q_\theta(x|y, D) \\ &= - \int_{D \cup \{y\}} p(y, D) \int_x p(x|y, D) \log \frac{q_\theta(x|y, D)}{p(x|y, D)} \\ &\quad + \int_{D \cup \{y\}} p(y, D) \int_x p(x|y, D) \log p(x|y, D) \\ &= \mathbb{E}_{D \cup \{y\}} \left\{ D_{KL} \left[ p(\cdot|y, D) \| q_\theta(\cdot|y, D) \right] \right\} - \mathbb{E}_{D \cup \{y\}} \left\{ H[p(\cdot|y, D)] \right\} \\ &= \mathbb{E}_{D \cup \{y\}} \left\{ D_{KL} \left[ p(\cdot|y, D) \| q_\theta(\cdot|y, D) \right] \right\} + C \end{aligned} \quad (5.31)$$

由(5.31)可知, 最小化损失函数  $l_\theta$  等价于用模型  $q_\theta(\cdot|y, D)$  逼近后验分布  $p(\cdot|y, D)$ 。

易证明: 若函数  $p(\cdot)$  属于分布族  $q_\theta(\cdot)$ , 则存在  $q_\theta(\cdot|y, D) = p(\cdot|y, D)$  对所有使  $q_\theta(\cdot|y, D)$  存在定义的  $y, D$  成立。

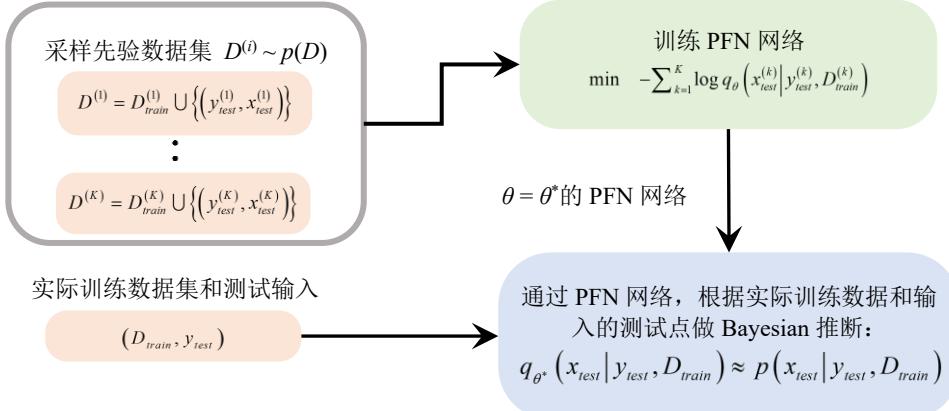


图 5.4 后验推断网络训练流程

故构造先验拟合网络直接学习数据集的联合分布, 再根据测试数据得到相应的后验分布。同时, 要得到泛化能力较好的先验, 就需要充足的数据集。

## 5.2.2 基于对比度源法的非线性贝叶斯推断

在第3章的混合参数模型中, 非线性逆散射问题被中间变量对比度源拆分为两个线性问题

$$\begin{cases} \mathbf{e}_q^{sca} = \mathbf{G}_c \cdot \mathbf{w}_q \\ \mathbf{w}_q = [\mathbf{I} - diag(\chi) \mathbf{G}_d]^{-1} diag(\mathbf{e}_q^{inc}) \chi \\ \mathbf{w}_q = [\mathbf{I} - diag(t) \cdot S]^{-1} diag(c_i) t \end{cases} \quad (5.32)$$

根据第4章对非线性效应在超分辨成像中作用的分析, 即使重建  $\mathbf{w}_q$  为带宽有限函数, 也能通过构造合适的先验并借助非线性混频效应重建  $\chi$  和  $t$  的高频信息。而对于目标函数的最大后验可以引入潜变量做拆分得到

$$\begin{aligned}\ln p(\chi | \mathbf{e}^{sca}) &= \ln p(\chi, \mathbf{w} | \mathbf{e}^{sca}) - \ln p(\mathbf{w} | \chi, \mathbf{e}^{sca}) \\ &= \ln p(\mathbf{w} | \mathbf{e}^{sca}) + \ln p(\chi | \mathbf{w}, \mathbf{e}^{sca}) - \ln p(\mathbf{w} | \chi, \mathbf{e}^{sca})\end{aligned}\quad (5.33)$$

考虑迭代最大化过程，第  $i$  步更新为

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_i &= \arg \max_{\mathbf{w}} \ln p(\mathbf{w} | \mathbf{e}^{sca}) + \ln p(\chi_{i-1} | \mathbf{w}, \mathbf{e}^{sca}) - \ln p(\mathbf{w} | \chi_{i-1}, \mathbf{e}^{sca}) \\ \chi_i &= \arg \max_{\mathbf{w}} \ln p(\chi | \mathbf{w}_i, \mathbf{e}^{sca}) - \ln p(\mathbf{w}_i | \chi, \mathbf{e}^{sca})\end{aligned}\quad (5.34)$$

给定对比度函数  $\chi_{i-1}$  和散射场  $\mathbf{e}^{sca}$ ，对比度源  $\mathbf{w}$  由良态的正过程唯一确定。故  $\mathbf{w}$  的更新不再包含最后一项。令观测过程由零均值加性 Gauss 噪声扰动，则有

$$\ln p(\mathbf{w} | \mathbf{e}^{sca}) \propto \ln \mathcal{N}(\mathbf{e}^{sca} - \mathbf{G}_C \mathbf{w} | 0, \sigma_1^2) + \ln \mathcal{N}(\mathbf{w} - \text{diag}(\mathbf{e}_{i-1}) \chi_{i-1} | 0, \sigma_2^2) \quad (5.35)$$

易见，(5.35)就是 Krylov 方法的代价函数，故对比度源的更新可以通过加入  $\ln p(\chi_{i-1} | \mathbf{w}, \mathbf{e}^{sca})$  正则化项约束的 Krylov 方法完成。由于正过程的良态性，(5.34)第二项更新的右侧似然函数  $\ln p(\mathbf{w}_i | \chi, \mathbf{e}^{sca})$  可以忽略， $\chi$  的更新则等价于最大后验  $p(\chi | \mathbf{w}_i, \mathbf{e}^{sca})$ 。由此将最大  $p(\chi | \mathbf{e}^{sca})$  转换为最大  $p(\chi | \mathbf{w})$ ，而  $\mathbf{w}$  的求解需要对病态算子  $\mathbf{G}_C$  求逆，则可以通过 Krylov 方法完成。而重构的  $\mathbf{w}_{q,0}$  可以视为有噪声扰动情况下对真值的采样，即：

$$\mathbf{w}_{q,0} = \mathbf{E}_q \cdot \chi + \mathbf{n}_q \quad (5.36)$$

其中  $\mathbf{E}_q = \text{diag}(\mathbf{e}_q) + \mathbf{G}_S$ ， $\mathbf{G}_S$  为零均值独立同分布的高斯矩阵。故有  $p(\mathbf{w}_0 | \chi)$  为

$$p(\mathbf{w}_0 | \chi, \alpha) = \prod_{q=1}^Q \mathcal{N} \left\{ \mathbf{w}_{q,0} \mid \mathbf{E}_q \cdot \chi, \alpha^{-1} \right\} \quad (5.37)$$

精度  $\alpha$  满足共轭分布

$$p(\alpha | a_2, b_2) = \frac{1}{\Gamma(a_2)} b_2^{a_2} \alpha^{a_2-1} e^{-b_2 \alpha} \quad (5.38)$$

一般认为，在给定对比度  $\chi$  的情况下，总场是已知的（正过程做 CGFFT 得到），因此  $\mathbf{E}_q$  已知。由此建立多层 Bayes 模型如图 5.5 的有向图所示：

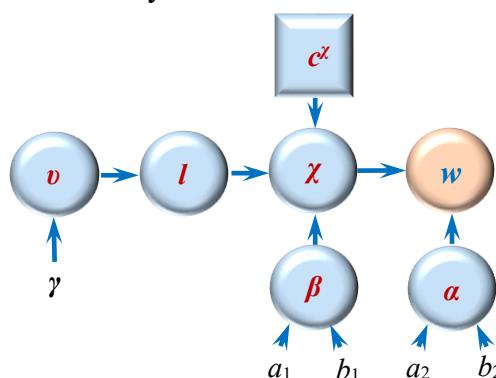


图 5.5 多层贝叶斯模型

由此得到模型的联合分布

$$\begin{aligned} & p(\chi, \mathbf{l}, \mathbf{v}, \alpha, \beta, \iota; \mathbf{w}_0, \mathbf{c}^\chi) \\ &= \prod_{k=1}^K p(\alpha | a_2, b_2) p(\mathbf{w}_0 | \chi, \alpha) \left[ \prod_{n=1}^N p(\chi_n | \beta, \mathbf{l}_n; \mathbf{c}^\chi) \right] p(\beta_k | a_1, b_1) \end{aligned} \quad (5.39)$$

然而, 似然函数(5.37)难以因式分解, 故这里参考置信传播的方法, 通过置信度函数逼近边缘概率密度函数。广义近似消息传播方法 (GAMP) 将似然函数近似为 Gauss 分布<sup>[148]</sup>

$$p(\mathbf{w}_0 | \chi, \alpha) \approx \prod_{n=1}^N \mathcal{N}(\chi_n | \hat{r}_n, \tau_n^r) \quad (5.40)$$

令  $\mathbf{z}_n = \mathbf{w}_{n,0} - \mathbf{E}_q \chi$ , 有 GAMP 近似的后验

$$p(z_{n,q} | \mathbf{w}_0, \hat{p}_{n,q}, \tau_{n,q}^p, \alpha) = \frac{p(w_{n,q,0} | z_{n,q}, \alpha)}{\int p(w_{n,q,0} | z_{n,q}, \alpha) \mathcal{N}(z_{n,q} | \hat{p}_{n,q}, \tau_{n,q}^p) dz_{n,q}} \quad (5.41)$$

其中

$$\begin{cases} \hat{z}_{n,q} = \frac{\alpha w_{n,q,0} + \hat{p}_{n,q}/\tau_{n,q}^p}{\alpha + 1/\tau_{n,q}^p} \\ \tau_{n,q}^z = \frac{1}{\alpha + 1/\tau_{n,q}^p} \end{cases} \quad (5.42)$$

整个 GAMP 的迭代过程为

表格 5-2 GAMP 流程

初始化:

$$\begin{aligned} \forall n, \forall q: \hat{w}_{n,q}(1) &= \int p(\hat{w}_{n,q}) \hat{w}_{n,q} d\hat{w}_{n,q} \\ \forall n: \tau_n^\chi &= \int (\chi_n - \hat{\chi}_n(1))^2 p(\chi_n) d\chi_n \\ \forall n, \forall q: \hat{s}_{n,q}(0) &= 0 \end{aligned}$$

For  $t = 1: T_{\max}$

$$\begin{aligned} \forall n, \forall q: \tau_{n,q}^p(t) &= \sum_{n=1}^N |E_{qnn}|^2 \tau_n^\chi(t) \\ \forall n, \forall q: \hat{p}_{n,q}(t) &= \sum_{n=1}^N E_{qnn} \hat{\chi}_n(t) - \tau_{n,q}^p(t) \hat{s}_{n,q}(t-1) \\ \forall n, \forall q: \tau_{n,q}^z(t) &= \text{var}_{\mathbf{z}|\mathbf{w}_0} \{z_{n,q} | \mathbf{w}_0; \hat{p}_{n,q}(t), \tau_{n,q}^p(t), \alpha\} \\ \forall n, \forall q: \hat{z}_{n,q}(t) &= \mathbb{E}_{\mathbf{z}|\mathbf{w}_0} \{z_{n,q} | \mathbf{w}_0; \hat{p}_{n,q}(t), \tau_{n,q}^p(t), \alpha\} \\ \forall n, \forall q: \tau_{n,q}^s &= [1 - \tau_{n,q}^z(t)/\tau_{n,q}^p(t)]/\tau_{n,q}^p(t) \\ \forall n, \forall q: \hat{s}_{n,q}(t) &= [\hat{z}_{n,q}(t) - \hat{p}_{n,q}(t)]/\tau_{n,q}^p(t) \\ \forall n: \tau_n^r(t) &= \left[ \sum_{q=1}^Q \sum_{n=1}^N |G_{qnn}|^2 \tau_{n,q}^s(t) \right]^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \forall n: \hat{r}_n(t) = \hat{\chi}_n(t) + \tau_n^r(t) \sum_{q=1}^Q \sum_{n=1}^N E_{q,n}^* \hat{s}_{n,q}(t) \\
& \forall n: \tau_n^\chi(t+1) = \text{var}_{\chi|\mathbf{w}_0} \left\{ \chi_n | \mathbf{w}_0; \hat{r}_n(t), \tau_n^r(t), \alpha \right\} \\
& \forall n: \hat{\chi}_n(t+1) = \mathbb{E}_{\chi|\mathbf{w}_0} \left\{ \hat{\chi}_n | \mathbf{w}_0; \hat{r}_n(t), \tau_n^r(t), \alpha \right\} \\
& \text{If } \sum_{n=1}^N |\hat{\chi}_n(t+1) - \hat{\chi}_n(t)|^2 < \tau_{\text{gap}} \sum_{n=1}^N |\hat{\chi}_n(t)|^2, \text{ break.} \\
& \text{End} \\
& \text{输出: } \left\{ \hat{z}_{n,q}(t), \tau_{n,q}^z(t) \right\}, \left\{ \hat{r}_n(t), \tau_n^r(t) \right\}, \left\{ \hat{\chi}_n(t+1), \tau_n^\chi(t+1) \right\}.
\end{aligned}$$

由此得到  $p(\mathbf{w}_0 | \chi)$  的近似因式分解形式。

Bayes 模型中, 令潜变量  $\boldsymbol{\Theta} = \{\chi, \mathbf{l}, \mathbf{v}, \alpha, \beta\}$  以简化表示, 而材料取值  $\mathbf{c}^\chi$  为参数。这样的统计逆问题有两种估计方法, 一种是最大后验估计 (MAP)

$$\mathbf{c}_{\text{MAP}}^\chi = \arg \max \ln p(\mathbf{c}^\chi | \mathbf{w}) \quad (5.43)$$

另一种是求条件均值 (CM)

$$\mathbf{c}_{\text{CM}}^\chi = \int p(\mathbf{c}^\chi | \mathbf{w}) \mathbf{c}^\chi d\mathbf{c}^\chi \quad (5.44)$$

在对无限维空间的 Bayes 反演问题研究中, 有学者将这两种方法在弱最大后验估计框架下进行了比较, 并给出 MAP 结果优于 CM 结果的结论<sup>[146]</sup>。因此, 本节基于 MAP 准则对变量进行变分 Bayes 期望最大化推断。在(5.43)中引入潜变量  $\boldsymbol{\Theta}$ , 满足

$$\begin{aligned}
& \ln p(\mathbf{c}^\chi | \mathbf{w}) \\
& = \int q(\boldsymbol{\Theta}) \ln \left[ \frac{p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Theta}; \mathbf{c}^\chi)}{q(\boldsymbol{\Theta})} \frac{q(\boldsymbol{\Theta})}{p(\boldsymbol{\Theta} | \mathbf{w}; \mathbf{c}^\chi)} \right] d\boldsymbol{\Theta} + \ln \frac{p(\mathbf{c}^\chi)}{p(\mathbf{w})} \\
& = \mathbb{E}_{q(\boldsymbol{\Theta})} \left[ p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Theta}; \mathbf{c}^\chi) \right] + H[q(\boldsymbol{\Theta})] + D_{KL} \left[ q(\cdot) \| p(\cdot | \mathbf{w}; \mathbf{c}^\chi) \right] + \ln \frac{p(\mathbf{c}^\chi)}{p(\mathbf{w})}
\end{aligned} \quad (5.45)$$

由于潜变量后验分布未知, 故通过变分分布  $q(\boldsymbol{\Theta})$  逼近潜变量实际后验分布  $p(\boldsymbol{\Theta})$ 。可见 MAP 的下界由

$$\mathcal{L}_q(\mathbf{w}; \mathbf{c}^\chi) = \mathbb{E}_{q(\boldsymbol{\Theta})} \left[ p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Theta}; \mathbf{c}^\chi) \right] + H[q(\boldsymbol{\Theta})] \quad (5.46)$$

决定, 也就是“Q 函数”。最大化  $\mathcal{L}_q(\mathbf{w}; \mathbf{c}^\chi)$  由两步迭代构成, 先 E 步计算期望, 再 M 步更新参数。对于第  $i$  步迭代:

**E 步的计算:** 固定参数  $\mathbf{c}^\chi = \mathbf{c}_{(i)}^\chi$ , 选择最大化下界(5.46)的分布  $q(\boldsymbol{\Theta})$ 。由于

$$\mathcal{L}_q(\mathbf{w}; \mathbf{c}_{(i)}^\chi) = \ln p(\mathbf{c}_{(i)}^\chi | \mathbf{w}) + \ln p(\mathbf{w}) - D_{KL} \left[ q(\cdot) \| p(\cdot | \mathbf{w}; \mathbf{c}_{(i)}^\chi) \right] \quad (5.47)$$

易见上式前两项与潜变量分布无关, 因此最大化  $\mathcal{L}_q(\mathbf{w}; \mathbf{c}_{(i)}^\chi)$  下界当且仅当 KL 散度为零, 故根据平均场假设

$$q^{(i+1)}(\boldsymbol{\Theta}) = \prod_{\tau=1}^T q_\tau^{(i+1)}(\boldsymbol{\theta}_\tau) \quad (5.48)$$

其中

$$q_\tau^{(i+1)}(\boldsymbol{\theta}_\tau) = \frac{\exp\left\{ \mathbb{E}_{q/\boldsymbol{\theta}_\tau} \left[ \ln p(\boldsymbol{\Theta}, \mathbf{w}; \mathbf{c}_{(i)}^\chi) \right] \right\}}{\int \exp\left\{ \mathbb{E}_{q/\boldsymbol{\theta}_\tau} \left[ \ln p(\boldsymbol{\Theta}, \mathbf{w}; \mathbf{c}_{(i)}^\chi) \right] \right\} d\boldsymbol{\theta}_\tau} \quad (5.49)$$

$\mathbb{E}_{q/k}$  表示对除第  $k$  个变量以外的变量求期望。 $(5.49)$  分母为归一化系数, 由于我们选择共轭分布构建模型, 因此不需要求该积分, 而是通过配分的方式直接写出  $q_k^{(i+1)}(\boldsymbol{\theta}_\tau)$  的分布。由此完成 E 步更新。

**M 步的计算:** 固定分布  $q = q_{(i+1)}$ , 选择最大化下界 $(5.46)$ 的参数  $\mathbf{c}^\chi$ , 即满足下式

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{c}_{(i+1)}^\chi} \left[ \int q_{(i+1)}(\boldsymbol{\Theta}) \ln p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Theta}; \mathbf{c}_{(i+1)}^\chi) d\boldsymbol{\Theta} \right] = 0 \quad (5.50)$$

由此完成 M 步的更新。

由此完成 EM 方法的迭代, 接下来分别说明潜变量  $\{\mathbf{w}, \chi, \mathbf{l}, \mathbf{v}, \alpha, \beta\}$  的 E 步后验更新过程和 M 步的参数更新过程。

### 1) E 步更新

根据 E 步更新表达式 $(5.49)$ , 我们可以得到关于潜变量  $\chi$  的近似对数后验

$$\begin{aligned} \ln q^{(i+1)}(\chi) &\propto \mathbb{E}_{q/\chi} \left[ \ln p(\boldsymbol{\Theta}, \mathbf{w}; \mathbf{c}_{(i)}^\chi) \right] \\ &= \mathbb{E}_{q/\chi} \left\{ \ln \left[ p(\mathbf{w} | \chi, \alpha) \prod_{n=1}^N p(\chi_n | \beta, \mathbf{l}_n; \mathbf{c}^\chi) \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.51)$$

由于我们不做目标在空间结构上的假设, 因此  $\chi$  各个分量之间相互独立, 将 $(5.24)$  和 $(5.37)$ 代入 $(5.51)$ 有

$$\ln q^{(i+1)}(\chi_n) \propto \mathbb{E}_{q/\chi} \left\{ \ln \left[ \mathcal{N}(\chi_n | \hat{r}_n, \tau_n^r) \prod_{k=1}^K \left[ \mathcal{N}(\chi_n | c_k^\chi, \beta_k^{-1}) \right]^{l_{n,k}} \right] \right\} \quad (5.52)$$

可以通过配分法将上式处理为 Gauss 分布形式。其中

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\chi_n | \hat{r}_{n,q}, \tau_{n,q}^r) \prod_{k=1}^K \left[ \mathcal{N}(\chi_n | c_k^\chi, \beta_k^{-1}) \right]^{l_{n,k}} \\ = \exp \left[ - \left( \frac{1}{2\tau_n^r} + \sum_{k=1}^K \frac{l_{n,k}\beta_k}{2} \right) \chi_n^2 + \left( \frac{\hat{r}_n}{\tau_n^r} + \sum_{k=1}^K l_{n,k}\beta_k c_k^\chi \right) \chi_n \right] \\ + const \end{aligned} \quad (5.53)$$

可见,  $(5.53)$ 的方差和均值分别为

$$\sigma_{\chi,n}^2 = \left( \sum_{k=1}^K l_{n,k} \beta_k + \frac{1}{\tau_n^r} \right)^{-1} \quad \hat{\mu}_{\chi,n} = \left( \sum_{k=1}^K l_{n,k} \beta_k c_k^\chi + \frac{\hat{r}_n}{\tau_n^r} \right) \sigma_{\chi,n}^2 \quad (5.54)$$

将(5.53)代入(5.52)得到

$$\begin{aligned} & \ln q^{(i+1)}(\chi_n) \\ &= \mathbb{E}_{q/\chi} \left\{ - \left( \frac{1}{\tau_n^r} + \sum_{k=1}^K l_{n,k} \beta_k \right) \frac{\chi_n^2}{2} + \left( \frac{\hat{r}_n}{\tau_n^r} + \sum_{k=1}^K l_{n,k} \beta_k c_k^\chi \right) \chi_n + const \right\} \\ &= - \left( \frac{1}{\tau_n^r} + \sum_{k=1}^K \langle l_{n,k} \rangle \langle \beta_k \rangle \right) \frac{\chi_n^2}{2} + \left( \frac{\hat{r}_n}{\tau_n^r} + \sum_{k=1}^K \langle l_{n,k} \rangle \langle \beta_k \rangle c_k^\chi \right) \chi_n + const \end{aligned} \quad (5.55)$$

此处符号” $\langle \rangle$ ”表示取均值而非内积。可见，在 E 步计算中并不需要直接求出潜变量后验分布的近似  $q(\cdot)$ ，而仅需要更新均值即可。

同理，将(5.39)代入 E 步更新表达式(5.49)，我们可以得到关于潜变量  $\beta$  的近似对数后验

$$\ln q^{(i+1)}(\beta) \propto \mathbb{E}_{q/\beta} \ln \left[ \prod_{n=1}^N p(\chi_n | \beta, l_n; \mathbf{c}^\chi) \prod_{k=1}^K p(\beta_k | a_1, b_1) \right] \quad (5.56)$$

根据(5.24)和(5.27)，得到

$$\ln q^{(i+1)}(\beta) \propto \mathbb{E}_{q/\beta} \left\{ \ln \left[ \prod_{n=1}^N \prod_{k=1}^K \left[ \mathcal{N}(\chi_n | c_k^\chi, \beta_k^{-1}) \right]^{l_{n,k}} \text{Gam}(\beta_k | a_1, b_1) \right] \right\} \quad (5.57)$$

上式 Gauss 分布和 Gamma 分布的乘积依旧是 Gamma 分布

$$\begin{aligned} & \prod_{n=1}^N \left[ \mathcal{N}(\chi_n | c_k^\chi, \beta_k^{-1}) \right]^{l_{n,k}} \text{Gam}(\beta_k | a_1, b_1) \\ &= \exp \left\{ -\beta_k \left\{ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left[ l_{n,k} (\chi_n - c_k^\chi)^2 \right] + b_1 \right\} \right. \\ & \quad \left. + \ln \beta_k \left[ (a_1 - 1) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N l_{n,k} \right] + const \right\} \end{aligned} \quad (5.58)$$

故将(5.58)代入(5.57)，得到

$$\begin{aligned} \ln q^{(i+1)}(\beta_k) &= -\beta_k \left\{ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left[ \langle l_{n,k} \rangle \langle (\chi_n - c_k^\chi)^2 \rangle \right] + b_1 \right\} \\ & \quad + \ln \beta_k \left[ (a_1 - 1) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \langle l_{n,k} \rangle \right] + const \end{aligned} \quad (5.59)$$

其中， $\langle (\chi_n - c_k^\chi)^2 \rangle = \sigma_{\chi,n}^2$ ，故后验分布  $q(\beta_k)$  为

$$\ln q^{(i+1)}(\beta_k) = \text{Gam}\left(\beta_k | \hat{a}_1, \hat{b}_1\right)$$

$$\begin{cases} \hat{a}_1 = a_1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \langle l_{n,k} \rangle \\ \hat{b}_1 = b_1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N [\langle l_{n,k} \rangle \hat{\sigma}_{\chi,n}^2] \end{cases} \quad (5.60)$$

由此得到  $\beta$  的后验。

关于  $\boldsymbol{l}$  的近似后验分布写为

$$\ln q^{(i+1)}(\boldsymbol{l}) \propto \mathbb{E}_{q/l} \ln \left[ \prod_{n=1}^N p(\chi_n | \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{l}_n; \mathbf{c}^\chi) p(\boldsymbol{l}_n | \boldsymbol{v}) \right] \quad (5.61)$$

以上对  $\chi$  和  $\beta_k$  的更新中，其实并不需要  $\boldsymbol{l}$  的后验分布，只需要  $l_{nk}$  的期望即可，故在此直接计算  $l_{n,k}=1$  的期望。对数项中为

$$p(\chi_n | \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{l}_n; \mathbf{c}^\chi) p(l_{n,k} = 1 | \boldsymbol{v}) = \prod_{k=1}^K \left[ \mathcal{N}(\chi_n | c_k^\chi, \beta_k^{-1}) \right]^{l_{n,k}} v_k \quad (5.62)$$

故

$$\langle l_{n,k} \rangle = q(l_{n,k} = 1) \approx \frac{\langle v_k \rangle \mathcal{N}(\langle \chi_n \rangle | \langle c_k^\chi \rangle, \langle \beta_k^{-1} \rangle)}{\sum_{k=1}^K \langle v_k \rangle \mathcal{N}(\langle \chi_n \rangle | \langle c_k^\chi \rangle, \langle \beta_k^{-1} \rangle)} \quad (5.63)$$

得到标签的近似更新。

关于  $\boldsymbol{v}$  的近似后验分布写为

$$\ln q^{(i+1)}(\boldsymbol{v}) \propto \mathbb{E}_{q/v} \ln \left[ \prod_{n=1}^N p(\boldsymbol{l}_n | \boldsymbol{v}) p(\boldsymbol{v} | \boldsymbol{\gamma}) \right] \quad (5.64)$$

其中，(5.25)和(5.26)代入对数项为

$$\ln \left[ \prod_{n=1}^N p(\boldsymbol{l}_n | \boldsymbol{v}) p(\boldsymbol{v} | \boldsymbol{\gamma}) \right] = \sum_{k=1}^K \left( \sum_{n=1}^N l_{n,k} + \gamma_k - 1 \right) \ln v_k + \text{const} \quad (5.65)$$

将上式代入后，通过配分法得到 Dirichlet 分布

$$\begin{aligned} q(\boldsymbol{v}) &= \text{Dir}(\boldsymbol{v} | \tilde{\boldsymbol{\gamma}}) \\ \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_k &= \sum_{n=1}^N \langle l_{n,k} \rangle + \langle \gamma_k \rangle \end{aligned} \quad (5.66)$$

最后是关于  $\alpha$  的后验分布

$$\ln q^{(i+1)}(\alpha) = \mathbb{E}_{q/\alpha} \ln \left[ p(\boldsymbol{w} | \boldsymbol{\chi}, \alpha) p(\alpha | a_2, b_2) \right] \quad (5.67)$$

其中

$$\begin{aligned}
 p(\mathbf{w}|\boldsymbol{\chi}, \alpha) p(\alpha|a_2, b_2) &= \prod_{q=1}^Q \mathcal{N}\left\{\mathbf{w}_{q,0} \mid \mathbf{E}_q \cdot \boldsymbol{\chi}, \alpha^{-1}\right\} \text{Gam}(\alpha|a_2, b_2) \\
 &= \exp \left[ - \left[ \frac{1}{2} \sum_{q=1}^Q \left\| \mathbf{w}_{q,0} - \mathbf{E}_q \cdot \boldsymbol{\chi} \right\|^2 + b_2 \right] \alpha \right. \\
 &\quad \left. + \left[ (a_2 - 1) + \frac{QN}{2} \right] \ln \alpha + \text{const} \right]
 \end{aligned} \tag{5.68}$$

配分后有后验分布

$$q^{(i+1)}(\alpha) = \text{Gam}(\alpha | \hat{a}_2, \hat{b}_2) \quad \begin{cases} \hat{a}_2 = a_2 + \frac{QN}{2} \\ \hat{b}_2 = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^Q \sum_{n=1}^N \tau_{n,q}^z + b_2 \end{cases} \tag{5.69}$$

## 2) M 步更新

根据 E 步估计的潜变量  $q^{(i+1)}(\boldsymbol{\Theta})$ , 选择合适的参数  $\mathbf{c}^\chi$  最大化  $\mathcal{L}_q(\mathbf{w}; \mathbf{c}^{(i)\chi})$  下界。由于

$$\begin{aligned}
 Q(\mathbf{c}^{(i+1)\chi}) &= \int q_{(i+1)}(\boldsymbol{\Theta}) \ln p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Theta}; \mathbf{c}^{(i+1)\chi}) d\boldsymbol{\Theta} \\
 &= \int q_{(i+1)}(\boldsymbol{\Theta}) \left[ \sum_{n=1}^N \ln p(\chi_n | \mathbf{c}^{(i+1)\chi}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{l}_n) + \text{const} \right] d\boldsymbol{\Theta}
 \end{aligned} \tag{5.70}$$

将(5.24)代入上式得到

$$Q(\mathbf{c}^{(i+1)\chi}) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \left[ -\frac{\langle l_{n,k} \rangle \langle \beta_k \rangle}{2} \int q^{(i+1)}(\chi_n) (\chi_n - c_{k,(i+1)\chi})^2 d\chi_n \right] + \text{const} \tag{5.71}$$

对上式求导得到

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Q(\mathbf{c}^\chi)}{\partial \mathbf{c}^\chi} &= \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \left[ \langle l_{n,k} \rangle \langle \beta_k \rangle \int q^{(i+1)}(\chi_n) (\chi_n - c_k^\chi)^2 d\chi_n \right] \\
 &= \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \left[ \langle l_{n,k} \rangle \langle \beta_k \rangle (\langle \chi_n \rangle - c_k^\chi) \right]
 \end{aligned} \tag{5.72}$$

若假设  $\mathbf{c}^\chi$  各项相互独立, 则有满足最大化 Q 函数的更新为

$$c_{k,(i+1)\chi}^\chi = \frac{\sum_{n=1}^N \langle l_{n,k} \rangle \langle \beta_k \rangle \langle \chi_n \rangle}{\sum_{n=1}^N \langle l_{n,k} \rangle \langle \beta_k \rangle} \tag{5.73}$$

易见, 参数更新时仅需要潜变量的均值, 而潜变量的各个均值在 E 步的更新中获得, 从而完成整个 EM 方法的迭代。可见整个 EM 算法的目的就是用期望代替分布来完成最大后验条件下的参数和变量的估计任务, 相应的在代码中只会更新各个变量的期望和参数值, 而不会求一个随机变量或是随机变量的分布。

算法流程如下表所示

表格 5-3 介质非线性逆散射的 Bayes 推断

初始化 对比度函数 $\chi$ , 对比度源 $w$ ; 初始化 观测矩阵 $G_C$ , 阻抗矩阵 $G_D$ ; Krylov 子空间法更新对比度源 $w_0$ ; Forward 求解器 $e_q(i) = G_D \cdot w_q(i)$ 初始化: $\forall n: \hat{w}_{n,q}(0) = 0, \hat{\chi}_n(0) = 0, \tau_n^\chi(0) = 1$ $K = 4, \alpha(0) = 100N/\ w_0\ ^2$ $\forall k: \beta_k(0) = 1, \nu_k(0) = 1/k, l_{n,k}(0) = 1/k$ $c^\chi = \{0, 1/K, \dots, 1-1/K\}$ 。 For $i = 1: I_{\max}$ <b>E 步更新</b> GAMP 迭代: 初始: $\forall n: \hat{\chi}_n(1) = \hat{\chi}_n(i-1)$ $\forall n: \tau_n^\chi(1) = \tau_n^\chi(i-1)$ $\forall n, \forall q: \hat{s}_{q,n}(0) = 0$ For $j = 1: J_{\max}$ $\forall n, \forall q: \tau_{q,n}^p(j) = \sum_{n=1}^N  E_{qnn} ^2 \tau_n^\chi(j)$ $\forall n, \forall q: \hat{p}_{q,n}(j) = \sum_{n=1}^N E_{qnn} \hat{w}_{q,n}(j) - \tau_{q,n}^p(j) \hat{s}_{q,n}(j-1)$ $\forall n, \forall q: \tau_{q,n}^z(j) = 1/\left[\alpha(i-1) + 1/\tau_{q,n}^p\right]$ $\forall n, \forall q: \hat{z}_{q,n}(j) = \frac{w_{0,n,q} \alpha(i-1) + \hat{p}_{q,n}/\tau_{q,n}^p}{\alpha(i-1) + 1/\tau_{q,n}^p}$ $\forall n, \forall q: \tau_{q,n}^s(j) = \left[1 - \tau_{q,n}^z(j)/\tau_{q,n}^p(j)\right]/\tau_{q,n}^p(j)$ $\forall n, \forall q: \hat{s}_{q,n}(j) = \left[\hat{z}_{q,n}(j) - \hat{p}_{q,n}(j)\right]/\tau_{q,n}^p(j)$ $\forall n: \tau_n^r(j) = \left[ \sum_{q=1}^Q \sum_{n=1}^N  E_{qnn} ^2 \tau_{q,n}^s(j) \right]^{-1}$ $\forall n: \hat{r}_n(j) = \hat{\chi}_n(j) + \tau_n^r(j) \sum_{q=1}^Q \sum_{n=1}^N E_{qnn}^* \hat{s}_{q,n}(j)$ $\forall n: \tau_n^\chi(j+1) = \left[ \sum_{k=1}^K l_{n,k}(i-1) \beta_k(i-1) + 1/\tau_n^r(j) \right]^{-1}$ $\forall n: \hat{\chi}_n(j+1) = \tau_n^\chi(j+1) \left[ \sum_{k=1}^K l_{n,k}(i-1) \beta_k(i-1) c_k^\chi(i-1) + \hat{r}_n/\tau_n^r(j) \right]$ If $\sum_{n=1}^N  \hat{\chi}_n(t+1) - \hat{\chi}_n(t) ^2 < \tau_{gamp} \sum_{n=1}^N  \hat{\chi}_n(t) ^2$ , break. End for GAMP $\forall n, \forall q: \hat{w}_{n,q}(i) = \hat{w}_{n,q}(J+1), \tau_{n,q}^w(i) = \tau_{n,q}^w(J+1).$ $\forall n, \forall q: \hat{z}_{n,q}(i) = \hat{z}_{n,q}(J), \tau_{n,q}^z(i) = \tau_{n,q}^z(J)$ $\forall n: \tau_n^\chi = \left[ \sum_{k=1}^K l_{n,k}(i-1) \beta_k(i-1) + 1/\tau_n^r \right]^{-1}$ $\forall n: \hat{\chi}_n(i) = \tau_n^\chi \left[ \sum_{k=1}^K l_{n,k}(i-1) \beta_k(i-1) c_k^\chi(i-1) + \hat{r}_n/\tau_n^r \right]$
---

$$\begin{aligned}\forall k : \beta_k(i) &= \frac{a_1 + \sum_{n=1}^N l_{n,k}(i-1)/2}{b_1 + \sum_{n=1}^N l_{n,k}(i-1)\tau_n^z(i)/2} \\ \forall n \forall k : l_{n,k}(i) &= \frac{\nu_k(i-1) \mathcal{N}(\hat{\chi}_n(i) | c_k^x(i-1), \beta_k^{-1}(i))}{\sum_{k=1}^K [\nu_k(i-1) \mathcal{N}(\hat{\chi}_n(i) | c_k^x(i-1), \beta_k^{-1}(i))]} \\ \forall k : \nu_k(i) &= \frac{\gamma_k + \sum_{n=1}^N l_{n,k}(i)}{\sum_{k=1}^K [\gamma_k + \sum_{n=1}^N l_{n,k}(i)]} \\ \alpha(i) &= \frac{a_2 + QN/2}{b_2 + \sum_{q=1}^Q \sum_{n=1}^N \tau_{n,q}^z(i)/2}\end{aligned}$$

**M步更新**

$$\forall k : c_k^x(i) = \frac{\sum_{n=1}^N l_{n,k}(i) \beta_k(i) \hat{\chi}_n(i)}{\sum_{n=1}^N l_{n,k}(i) \beta_k(i)}$$

根据  $l_{n,k}$  各行中  $K$  项的概率，选择其中最大的  $K_i$  个保留下来，并令  $K = K_i$

End

由此得到目标函数的选值  $c^x$  和标签  $l_{nk}$ ，由此更新目标函数为

$$\chi(n) = c^x(k) \quad k = \arg \max_k l_{n,k} \quad (5.74)$$

根据更新的目标函数得到总场更新，再回代入 Krylov 算法流程中更新对比度源  $\mathbf{w}$ 。

同理，有传输系数的 Bayes 推断流程如下

表格 5-4 导体非线性逆散射的 Bayes 推断

初始化 传输系数 $t$ , 对比度源 $\mathbf{w}$ ;
初始化 观测矩阵 $\mathbf{G}_C$ , 阻抗矩阵 $\mathbf{S}$ ;
Krylov 子空间法更新对比度源 $\mathbf{w}_0$ ;
Forward 求解器 $\mathbf{c}_q^e(i) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{w}_q(i)$
初始化: $\forall n : \hat{w}_{n,q}(0) = 0, \hat{t}_n(0) = 0, \tau_n^t(0) = 1$
$K = 4, \alpha(0) = 100N/\ \mathbf{w}_0\ ^2$
$\forall k : \beta_k(0) = 1, \nu_k(0) = 1/k, l_{n,k}(0) = 1/k$
$\mathbf{c}^x = \{-J_0(k_0 R)/H_0^{(2)}(k_0 R), 0, 1/K, \dots, 1-1/K\}$ 。

For  $i = 1: I_{\max}$

**E步更新**

GAMP 迭代:

初始化:

$$\begin{aligned}\forall n : \hat{t}_n(1) &= \hat{t}_n(i-1) \\ \forall n : \tau_n^t(1) &= \tau_n^t(i-1) \\ \forall n, \forall q : \hat{s}_{q,n}(0) &= 0\end{aligned}$$

For  $j = 1: J_{\max}$

$$\begin{aligned}
 & \forall n, \forall q : \tau_{q,n}^p(j) = \sum_{n=1}^N |C_{q,nn}^e|^2 \tau_n^t(j) \\
 & \forall n, \forall q : \hat{p}_{q,n}(j) = \sum_{n=1}^N C_{q,nn}^e \hat{w}_{q,n}(j) - \tau_{q,n}^p(j) \hat{s}_{q,n}(j-1) \\
 & \forall n, \forall q : \tau_{q,n}^z(j) = 1 / [\alpha(i-1) + 1 / \tau_{q,n}^p] \\
 & \forall n, \forall q : \hat{z}_{q,n}(j) = \frac{w_{0,n,q} \alpha(i-1) + \hat{p}_{q,n} / \tau_{q,n}^p}{\alpha(i-1) + 1 / \tau_{q,n}^p} \\
 & \forall n, \forall q : \tau_{q,n}^s(j) = [1 - \tau_{q,n}^z(j) / \tau_{q,n}^p(j)] / \tau_{q,n}^p(j) \\
 & \forall n, \forall q : \hat{s}_{q,n}(j) = [\hat{z}_{q,n}(j) - \hat{p}_{q,n}(j)] / \tau_{q,n}^p(j) \\
 & \forall n : \tau_n^r(j) = \left[ \sum_{q=1}^Q \sum_{n=1}^N |C_{q,nn}^e|^2 \tau_{q,n}^s(j) \right]^{-1} \\
 & \forall n : \hat{r}_n(j) = \hat{t}_n(j) + \tau_n^r(j) \sum_{q=1}^Q \sum_{n=1}^N C_{q,nn}^{e*} \hat{s}_{q,n}(j) \\
 & \forall n : \tau_n^t(j+1) = \left[ \sum_{k=1}^K l_{n,k}(i-1) \beta_k(i-1) + 1 / \tau_n^r(j) \right]^{-1} \\
 & \forall n : \hat{t}_n(j+1) = \tau_n^t(j+1) \left[ \sum_{k=1}^K l_{n,k}(i-1) \beta_k(i-1) c_k^t(i-1) + \hat{r}_n(j) / \tau_n^r(j) \right]
 \end{aligned}$$

If  $\sum_{n=1}^N |\hat{t}_n(t+1) - \hat{t}_n(t)|^2 < \tau_{gamp} \sum_{n=1}^N |\hat{t}_n(t)|^2$ , break.

End for GAMP

$$\forall n, \forall q : \hat{w}_{n,q}(i) = \hat{w}_{n,q}(J+1), \tau_{n,q}^w(i) = \tau_{n,q}^w(J+1).$$

$$\forall n, \forall q : \hat{z}_{n,q}(i) = \hat{z}_{n,q}(J), \tau_{n,q}^z(i) = \tau_{n,q}^z(J)$$

$$\forall k : \beta_k(i) = \frac{a_1 + \sum_{n=1}^N l_{n,k}(i-1)/2}{b_1 + \sum_{n=1}^N l_{n,k}(i-1) \tau_n^z(i)/2}$$

$$\forall n \forall k : l_{n,k}(i) = \frac{\nu_k(i-1) \mathcal{N}(\hat{t}_n(i) | c_k^t(i-1), \beta_k^{-1}(i))}{\sum_{k=1}^K [\nu_k(i-1) \mathcal{N}(\hat{t}_n(i) | c_k^t(i-1), \beta_k^{-1}(i))]}$$

$$\forall k : \nu_k(i) = \frac{\gamma_k + \sum_{n=1}^N l_{n,k}(i)}{\sum_{k=1}^K [\gamma_k + \sum_{n=1}^N l_{n,k}(i)]}$$

$$\alpha(i) = \frac{a_2 + QN/2}{b_2 + \sum_{q=1}^Q \sum_{n=1}^N \tau_{n,q}^z(i)/2}$$

**M步更新**

$$\forall k : c_k^t(i) = \frac{\sum_{n=1}^N l_{n,k}(i) \beta_k(i) \hat{t}_n(i)}{\sum_{n=1}^N l_{n,k}(i) \beta_k(i)}$$

根据  $l_{n,k}$  各行中  $K$  项的概率，选择其中最大的  $K_i$  个保留下来，并令  $K = K_i$

End

由此得到目标函数的选值  $c^t$  和标签  $l_{nk}$ ，由此更新目标函数为

$$t(n) = c^t(k) \quad k = \arg \max_k l_{n,k} \quad (5.75)$$

根据更新的目标函数得到总场更新，再回代入 Krylov 算法流程中更新对比度源  $\mathbf{w}$ 。由此完成整个参数更新的算法流程。

完整的混合边界材料稀疏的算法流程如下所示

表格 5-5 混合边界的材料稀疏重建流程

初始化场景网格剖分；

初始化 传输系数  $\mathbf{t}$ , 介质对比度函数  $\chi^{die}$ , 对比度源  $\mathbf{w}_q$ , 介质对比度源  $\mathbf{w}_q^{die}$ ;

初始化 观测矩阵  $\mathbf{G}_C$ , 阻抗矩阵  $\mathbf{G}_D$ , 多极展开坐标转移矩阵  $\mathbf{S}$ ;

根据(3.22)BP 方法计算对比度源初值  $\mathbf{w}_{q,0}$ ;

根据(3.26)计算传输系数初值  $\mathbf{t}_0$ , 并根据实部和虚部正负定性确定导体网格;

For count = 1:  $C_{max}$

    根据(3.17)计算导体背景下的无介质总场  $\mathbf{e}_q^{pec}$ ;

    根据(3.16)计算导体背景下的非均匀背景阻抗矩阵  $\mathbf{G}_D^{pec}$  和观测矩阵  $\mathbf{G}_C^{pec}$ ;

    根据(3.28)和(3.30)分别确定迭代初值  $\mathbf{w}_{q,0}^{die}$  和  $\chi_0^{die}$ ;

    For count\_inner = 1:  $J_{max}$

        For  $i = 1: I_{max}$

            Krylov 子空间法更新  $\mathbf{w}_{q,i}^{die} = \mathbf{w}_{q,i-1}^{die} + \alpha_{q,i} \mathbf{v}_{q,i}$ ;

            计算总场  $\mathbf{e}_q = \mathbf{e}_q^{inc} + \mathbf{G}_D^{pec} \cdot \mathbf{w}_{q,i}^{die}$ ;

            根据(3.30)更新介质对比度函数  $\chi^{die}$ ;

        End

        根据表格 5-3 的 EM-GAMP 算法更新介质对比度函数  $\chi^{die}$ ;

    End

    根据(3.37)更新传输系数初值  $\mathbf{t}_0$ ;

    CG-FFT 方法计算正过程更新对比度源初值  $\mathbf{w}_{q,0}$ ;

    For count\_inner = 1:  $J_{max}$

        For  $i = 1: I_{max}$

            Krylov 子空间法更新  $\mathbf{w}_{q,i} = \mathbf{w}_{q,i-1} + \alpha_{q,i} \mathbf{v}_{q,i}$ ;

            计算总场  $c\mathbf{i}_q + \mathbf{S} \cdot \mathbf{w}_{q,i}$ ;

            根据(3.26)更新传输系数  $\mathbf{t}$ ;

        End

        根据表格 5-3 的 EM-GAMP 算法更新传输系数  $\mathbf{t}$ ;

    End

    根据传输系数  $\mathbf{t}$  实部和虚部正负定性确定导体网格;

End

输出传输系数  $\mathbf{t}$  和介质对比度函数  $\chi^{die}$ 。

## 5.3 数值仿真

本节中分别用矩量法仿真数据和实测数据验证所提方法的有效性。在矩量法仿真中，生成测量数据的正过程计算由 CG-FFT 方法完成。实测数据同样采用法国 Fresnel 研究院的 2001 年公开数据集<sup>[117]</sup>。

### 5.3.1 仿真数据验证一

在第一个仿真重建场景中，照射源工作在单频 900MHz，波长  $\lambda_0 \approx 0.33\text{m}$ 。设置成像区域  $D$  为大小  $\lambda_0 \times \lambda_0$  的矩形区域，测量区域  $C$  在包围成像区半径  $3\lambda_0$  的圆弧上。40 个极化方向为  $+z$  方向的线电流源均匀分布在圆弧  $[0, 2\pi)$  上，发射单频连续波，每个线电流源照射时都会有  $[-\pi, +\pi)$  上均匀分布的 40 个接收天线测量该点处的场强。令  $I=40$  个激励源布置在位置  $\mathbf{r}_i$  处，分别用均匀激励和优化激励照射成像区域。在均匀照射中，40 个源以权重  $a_{yi} = 1$  依次激励，每次照射仅有一个激励源工作，共产生 40 次观测。而在优化激励中，40 个源以优化的权重  $\mathbf{a}_q$  同时激励，每次激励的权重  $\mathbf{a}_q$  对应待搬移的目标空间谱  $\mathbf{k}_q$ 。由于  $\mathbf{k}_{xq}, \mathbf{k}_{yq} \in [-6k_0, 6k_0]$ ，且以  $2k_0$  为步进，故优化激励共产生 49 次观测。

在正过程计算中，成像区域被剖分为  $50 \times 50$  个网格，测量数据  $\mathbf{e}^{\text{sca}}$  上被加上零均值单位方差的高斯噪声，噪声强度定义为

$$a_{noise} = \frac{\sum_{m=1}^M \|\mathbf{e}_q^{\text{sca}}(m)\|^2}{M \cdot SNR} \quad (5.76)$$

其中，信噪比  $SNR$  为 10。给定成像区目标为“E”字形介质，相对介电常数为 5，字体长  $3\lambda_0/5$ 、宽  $\lambda_0/3$ 。目标如下图 5.6 所示。

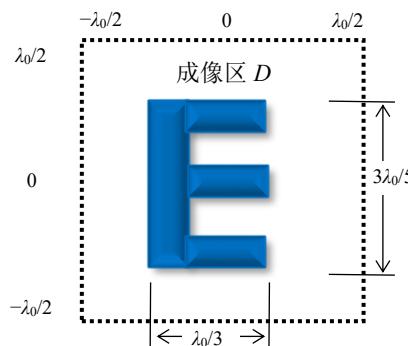


图 5.6 成像场景示意图

为了避免逆犯罪问题，而在逆过程重建中，成像区域被剖分为  $30 \times 30$  个网格。用 3.3 节中所提的交替参数更新法分别在两种入射场照射下对目标进行重建，迭代 512 次。重构结果如下图 5.7 所示：

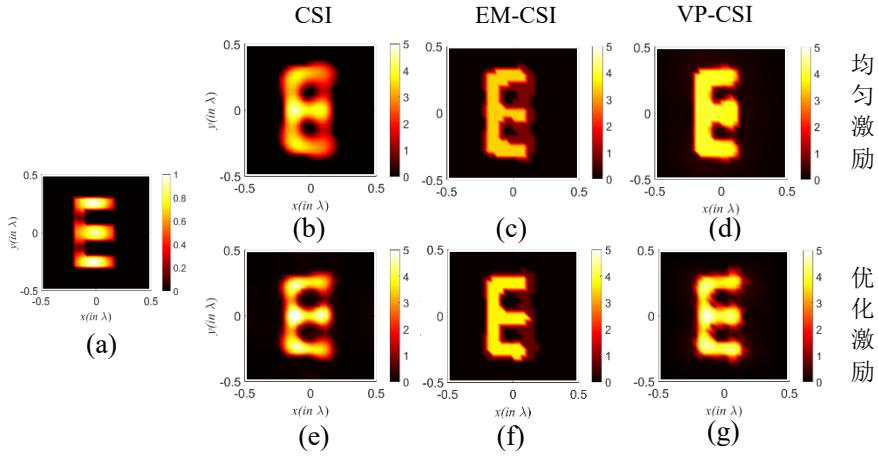


图 5.7 原始对比度源的空间谱

其中，图 5.7 (a)为原始目标的对比度函数  $\chi$  的真值。图 5.7 (b)、(c)和(d)分别为均匀激励下 CSI 重建结果 (CSI)、非线性 Bayes 重建结果 (EM-CSI) 和 VP 正则化重建结果 (VP-CSI)。图 5.7 (e)、(f)和(g)分别为优化后的激励下 CSI 重建结果 (CSI)、非线性 Bayes 重建结果 (EM-CSI) 和 VP 正则化重建结果 (VP-CSI)。

易见，不论是均匀激励还是优化激励，EM-CSI 和 VP-CSI 均有着比原始方法更陡峭的轮廓边缘，且幅度分布更接近真值，证明材料稀疏先验的有效性。此外，图 5.7 (b)中原始方法重建的字母”E”的三条横线粘连而无法分开，而图 5.7 (c)和(d)均可以将三条横线区分开，可见构造材料稀疏性先验有效提高了重建分辨能力。而对比图 5.7 第一行均匀激励结果和第二行优化激励结果可见后者重建出更准确的目标轮廓，证明采用超振荡入射场可以保留更多的目标信息。

### 5.3.2 仿真数据验证二

在第二个仿真重建场景中，成像构型同示例一。40 个极化方向为  $+z$  方向的线电流源均匀分布在圆弧  $[0, 2\pi]$  上，发射单频连续波，每个线电流源照射时都会有  $[-\pi, +\pi]$  上均匀分布的 40 个接收天线测量该点处的场强。令  $I = 40$  个激励源布置在位置  $r_i$  处，分别用均匀激励和优化激励照射成像区域。在均匀照射中，40 个源以权重  $a_{yi} = 1$  依次激励，每次照射仅有一个激励源工作，共产生 40 次观测。而在优化激励中，40 个源以优化的权重  $a_q$  同时激励，每次激励的权重  $a_q$  对应待搬移的目标空间谱  $k_q$ 。由于  $k_{xq}, k_{yq} \in [-3k_0, 3k_0]$ ，且以  $1k_0$  为步进，故优化激励一共产生 49 次观测。在正过程计算中，成像区域被剖分为  $50 \times 50$  个网格，而在逆过程重建中，成像区域被剖分为  $30 \times 30$  个网格。测量数据  $e^{\text{sca}}$  上被加上零均值单位方差的高斯噪声信噪比 SNR 为 10dB。

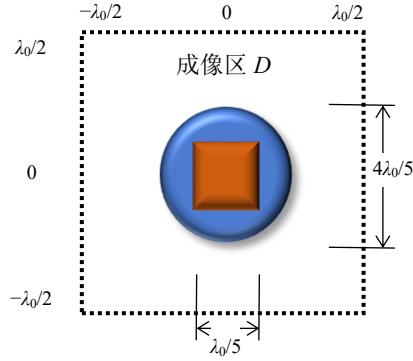


图 5.8 成像场景示意图

成像目标为介质和导体混合散射体：一个边长  $\lambda_0/5$  的矩形铜柱被包裹在半径  $2\lambda_0/5$  的圆形介质柱内，铜柱的电导率为  $6 \times 10^7$  S/m，介质柱的相对介电常数为 5。成像目标的构型如图 5.8 所示。分别用均匀激励下的交替参数更新法(APUM)、超振荡激励下的交替参数更新法(SO-APUM)、均匀激励下的非线性 Bayes 方法(EM-APUM)和均匀激励下的选值正则化(VP-APUM)的对目标进行重建，迭代 512 次。重构结果如下图 5.9 所示：

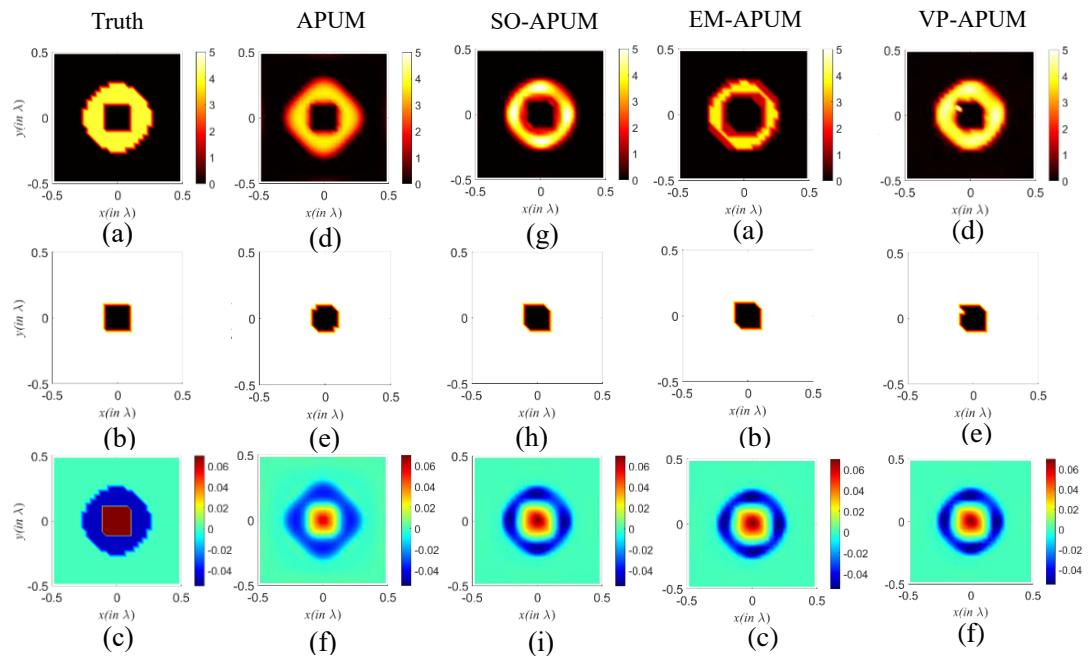


图 5.9 重建结果

图中，第一行到第三行分别为介质的对比度函数、导体的对比度函数和目标的传输系数，第一列到第五列分别为真值、APUM 结果、SO-APUM 结果、EM-APUM 结果和 VP-APUM 结果。

对比图 5.9.(h)、(k)和(n)可以发现，引入超振荡效应和引入材料稀疏先验的重构导体均有着更尖锐的轮廓，表明混频过程中有效的保留目标内的高频信息。而均匀激励下的重建结果轮廓则更为模糊。此外，VP-APUM 结果中导体部分缺

失，源于非凸优化的局部最优解，因此重建能力略微弱于 EM-APUM 方法。对比图 5.9.(g)、(j)和(m)，不论是优化激励还是材料稀疏约束，有高频信息的重建介质可以有效的聚焦在圆环上，而图 5.9. (d)中缺乏高频信息的重建介质则轮廓比真值更为扩散。因此，所提基于稀疏先验的约束能有效压缩目标高频信息至传播过程的低频通带内，提高成像质量。

### 5.3.3 实测数据验证——FoamDieInt

在 Fresnel 研究院 2005 年的数据集中，我们选择数据“FoamDieInt”进行验证。该数据中，目标由一个直径 80mm 的泡沫塑料柱内嵌一个直径 31mm 的尼龙塑料柱构成，泡沫塑料柱相对介电常数为  $1.45 \pm 0.15$ ，尼龙塑料柱相对介电常数为  $3 \pm 0.3$ 。其中，尼龙塑料柱中心距离泡沫塑料柱中心 5mm，目标构型如下图 5.10 所示

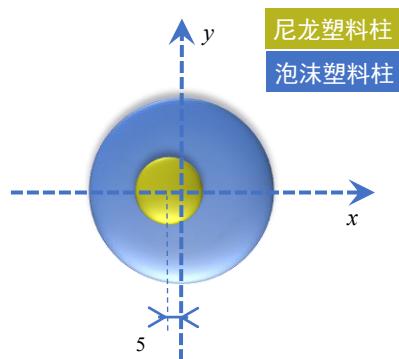


图 5.10 成像场景示意图

发射天线从 0 度到 340 度，以 20 度步进依次在圆环上向成像区域中心照射，共 18 次照射。每次照射时，有接收天线相对于发射天线方位 60 度到 300 度，以 1 度步进依次测量所在位置场强。数据集中，以 2GHz 为步进，提供 2-18GHz 下的有目标和无目标时的测量散射场，本实验取工作在 4GHz 的测量结果进行处理。

本文选择成像区域为大小  $150\text{ mm} \times 150\text{ mm}$  的矩形区，并将其离散化为  $44 \times 44$  个网格。由于在重建中需要知道空间中的入射场分布，故需要根据空场景的测量数据反推照射天线口面电流源分布。根据(3.56)Graf 加法定理，用源位置处的加权多极子辐射场拟合辐射天线的口面场。解(4.83)方程即可得到拟合入射场的多极展开权重。

分别用经典的对比度源法和所提的非线性多层 Bayes 方法进行重建，重建结果如图 5.11 所示。其中，横纵坐标均相对于波长归一化，可见目标尺寸均在亚波长量级。

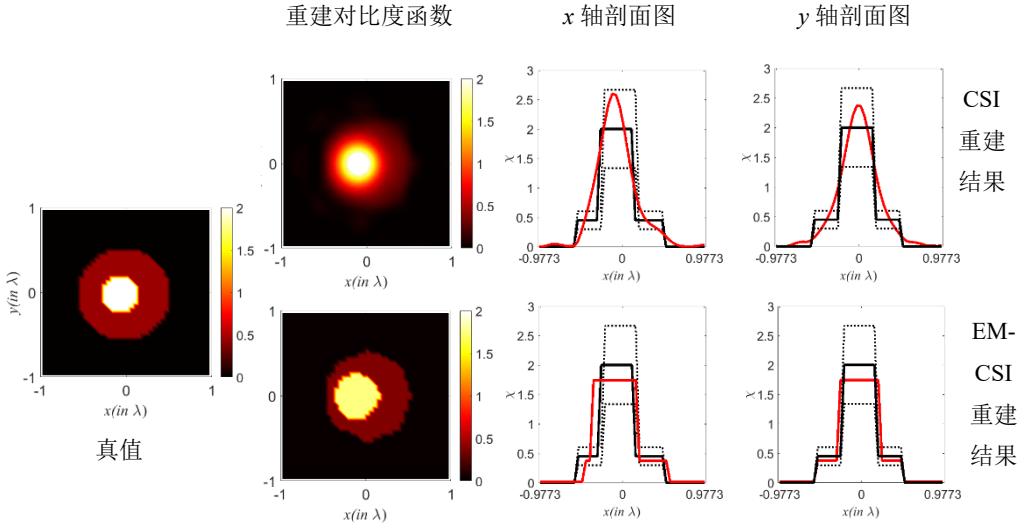


图 5.11 实测数据重建结果

图 5.11 左侧为目标分布的真值参考，而图 5.11 右侧第一行为 CSI 的重建结果，图 5.11 右侧第二行为所提方法的重建结果。图 5.11 从右往左第一列为沿着  $y$  轴的剖面图，从右往左第二列为沿着  $x$  轴的剖面图，其中黑色实线为对比度函数真值，黑色虚线为真值的误差范围，红色实线为重建目标的对比度函数。对比可见，所提方法能在准确估计目标材料取值的同时提高重建目标精度。

对同一实测数据，现有文献的重建结果如下图 5.12 所示。需要注意的是，为了说明超分辨成像性能，本文重建仅使用了 4GHz 的测量数据，而以下对比结果中则用了 2-8GHz 的测量数据。

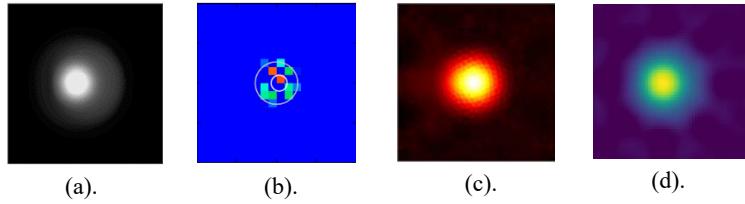


图 5.12 其它方法重建结果参考

其中，图 5.12 (a)为 2-8GHz 的测量数据基于 TV 正则化的重建结果<sup>[125]</sup>，图 5.12 (b)为 2-8GHz 的测量数据基于稀疏正则化的重建结果<sup>[129]</sup>，图 5.12 (c)为 2-6GHz 的测量数据基于 Born 迭代方法的重建结果<sup>[132]</sup>，图 5.12 (d)为 2-18GHz 的测量数据基于深度神经网络的重建结果<sup>[142]</sup>。可见，基于 TV 正则化的重建结果在所有对比方法中表现最佳，然而其用了超过一倍的带宽。而直接稀疏的重建结果完全无法保留目标轮廓，源于目标函数并不满足稀疏假设。而基于 Born 迭代和基于神经网络方法的重建结果，即使使用了宽带的测量数据，效果甚至不如 CSI 方法用单频测量数据的重建结果。由此可见本节所提方法的有效性。

#### 5.3.4 实测数据验证——FoamDielExt

在 Fresnel 研究院 2005 年的数据集中，我们选择数据“FoamDielInt”进行验

证。该数据中，目标由一个直径 80mm 的泡沫塑料柱邻接一个直径 31mm 的尼龙塑料柱构成，泡沫塑料柱相对介电常数为  $1.45 \pm 0.15$ ，尼龙塑料柱相对介电常数为  $3 \pm 0.3$ 。其中，尼龙塑料柱中心距离泡沫塑料柱中心 55.5mm，目标构型如下图 5.13 所示

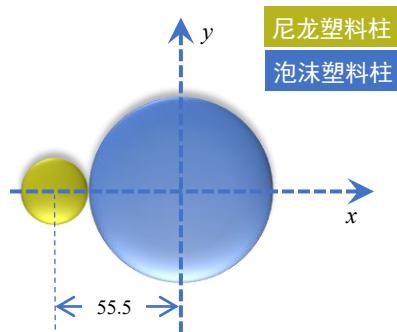


图 5.13 成像场景示意图

发射天线从 0 度到 340 度，以 20 度步进依次在圆环上向成像区域中心照射，共 18 次照射。每次照射时，有接收天线相对于发射天线方位 60 度到 300 度，以 1 度步进依次测量所在位置场强。数据集中，以 2GHz 为步进，提供 2-18GHz 下的有目标和无目标时的测量散射场，本实验选取工作在 4GHz 的测量结果进行处理。

本文选择成像区域为大小  $150 \text{ mm} \times 150 \text{ mm}$  的矩形区，并将其离散化为  $44 \times 44$  个网格。分别用 CSI 方法和所提非线性 Bayes 方法对目标进行重建，结果如图 5.14 所示。

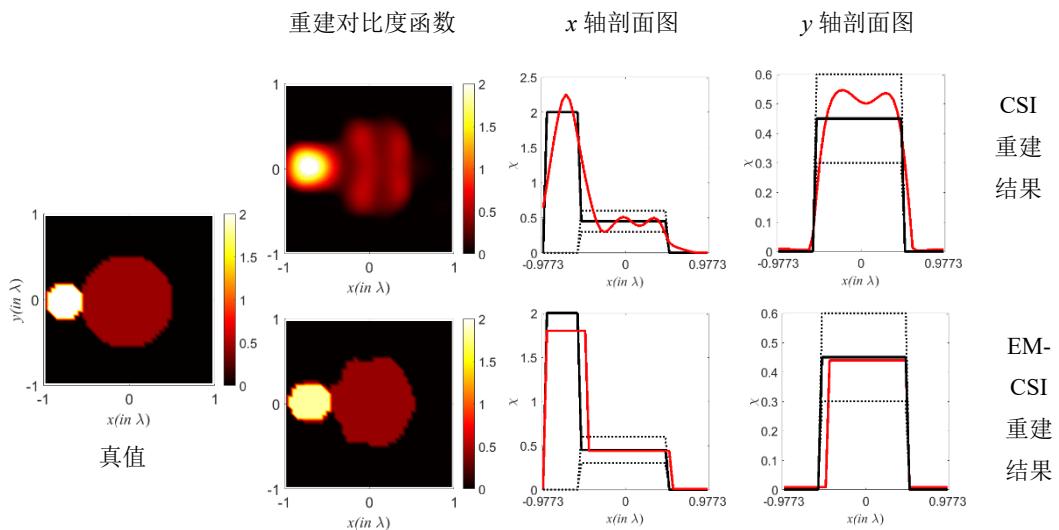


图 5.14 实测数据重建结果

图 5.14 左侧为目标分布的真值参考，而图 5.14 右侧第一行为 CSI 的重建结果，图 5.14 右侧第二行为所提方法的重建结果。图 5.14 从右往左第一列为沿着  $y$  轴的剖面图，从右往左第二列为沿着  $x$  轴的剖面图，其中黑色实线为对比度函数真值，黑色虚线为真值的误差范围，红色实线为重建目标的对比度函数。

对比可见，所提方法能在准确估计目标材料取值的同时提高重建目标精度。

对同一实测数据，近四年文献的重建结果如下图 5.15 所示。需要注意的是，为了说明超分辨成像性能，本文重建仅使用了 4GHz 的测量数据，而以下对比结果中则用了 2-8GHz 的测量数据。

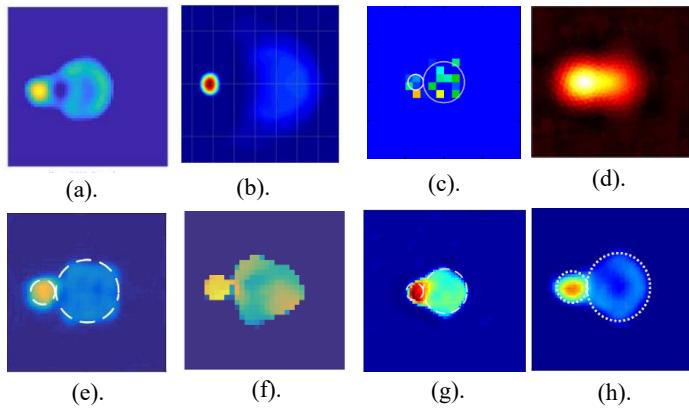


图 5.15 其它方法重建结果参考

其中，图 5.15 (a)、(e)、(f)、(g)和(h)均为基于深度神经网络的重建结果 [140][52][150][38][143]，易见其重建分辨能力并不优于仅用单频重建的CSI方法。图 5.15 (b)则是基于  $\ell_2$  和范数构建的对比度源稀疏重建结果，可见对比度源的非稀疏性会影响最终对比度函数的重建，最终效果并不如经典 CSI 方法<sup>[149]</sup>。而图 5.15 (c)对非稀疏目标函数进行稀疏重建会直接导致重建失败<sup>[129]</sup>。图 5.15 (d)基于 Born 迭代重建则劣于经典 CSI 方法<sup>[132]</sup>。

### 5.3.5 实测数据验证——FoamTwinDiel

在 Fresnel 研究院 2005 年的数据集中，我们选择数据“FoamDielInt”进行验证。该数据中，目标由一个直径 80mm 的泡沫塑料内嵌一个直径 31mm 的尼龙塑料柱，再柱邻接一个相同的尼龙塑料柱构成，泡沫塑料柱相对介电常数为  $1.45 \pm 0.15$ ，尼龙塑料柱相对介电常数为  $3 \pm 0.3$ 。其中，外接的尼龙塑料柱中心距离泡沫塑料柱中心 55.5mm，而内嵌的尼龙塑料柱中心距离泡沫塑料柱中心 5mm，目标构型如下图 5.16 所示

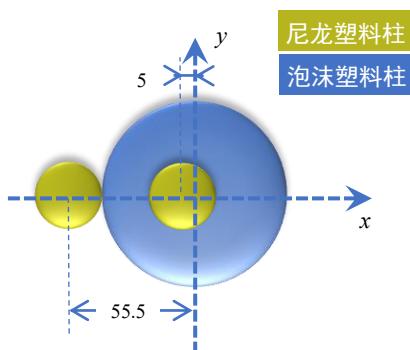


图 5.16 成像场景示意图

发射天线从0度到340度，以20度步进依次在圆环上向成像区域中心照射，共18次照射。每次照射时，有接收天线相对于发射天线方位60度到300度，以1度步进依次测量所在位置场强。数据集中，以2GHz为步进，提供2-18GHz下的有目标和无目标时的测量散射场，本实验取工作在4GHz的测量结果进行处理。

本文选择成像区域为大小 $150\text{ mm} \times 150\text{ mm}$ 的矩形区，并将其离散化为 $44 \times 44$ 个网格。分别用经典CSI方法和所提非线性Bayes方法进行重建，结果如图5.17所示。图5.17左侧为目标分布的真值参考，而图5.17右侧第一行为CSI的重建结果，图5.17右侧第二行为所提方法的重建结果。图5.17从右往左第一列为沿着y轴的剖面图，从右往左第二列为沿着x轴的剖面图，其中黑色实线为对比度函数真值，黑色虚线为真值的误差范围，红色实线为重建目标的对比度函数。对比可见，所提方法能在准确估计目标材料取值的同时提高重建目标精度。

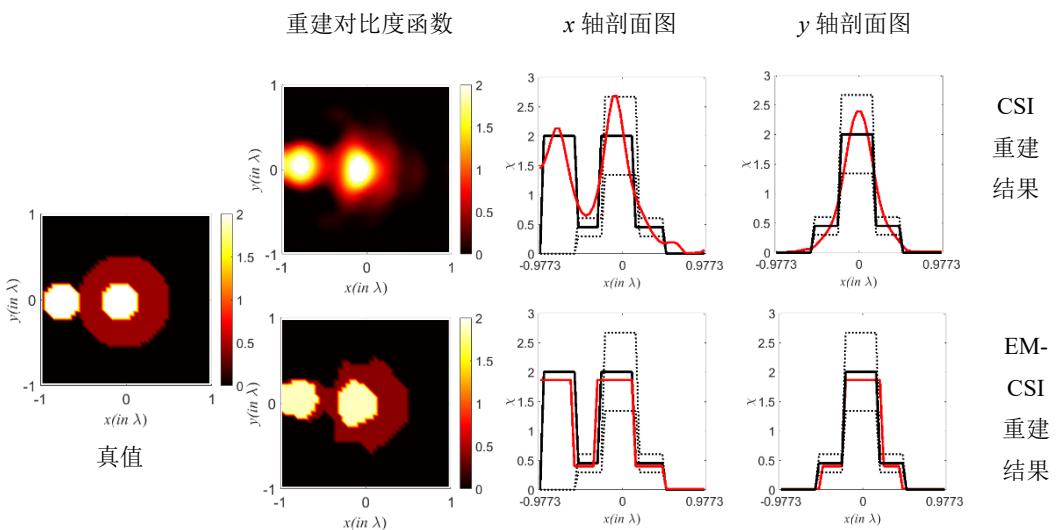


图 5.17 实测数据重建结果

对同一实测数据，近四年文献的重建结果如下图5.18所示。需要注意的是，为了说明超分辨成像性能，本文重建仅使用了4GHz的测量数据，而以下对比结果中则用了2-8GHz的测量数据。

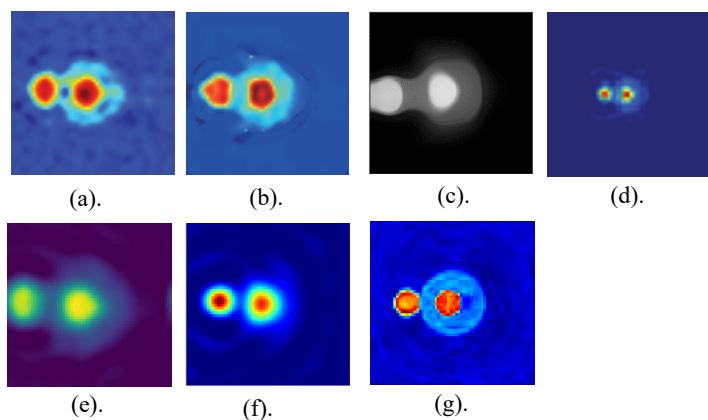


图 5.18 其它方法重建结果参考

其中，图 5.18 (a)和(b)均采用子空间优化的方式做正则化，等价于奇异值截断法<sup>[61][62]</sup>。图 5.18 (c)为 2-8GHz 的测量数据基于 TV 正则化的重建结果<sup>[125]</sup>，易见基于 TV 正则化的重建结果在所有对比方法中表现最佳，然而其用了超过一倍的带宽。图 5.18 (d)用了所有的宽带数据做多分辨率重建，其效果和经典 CSI 方法一致<sup>[151]</sup>。图 5.18 (e)、(f)和(g)均用了 2-18GHz 全带宽的数据做重建，其中(g)的重建效果最佳，然而同样用了超过一倍的带宽。

### 5.3.6 实测数据验证——FoamMetExt

在 Fresnel 研究院 2005 年的数据集中，我们选择数据 “FoamMetExt”进行验证。该数据中，目标为一个直径 28.5mm 的金属铜柱贴着一个直径 80mm 的泡沫塑料柱放置，如下图 5.19 所示。

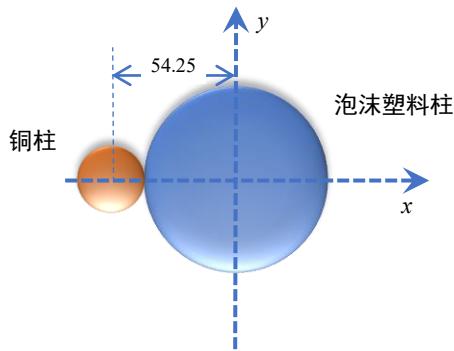


图 5.19 成像场景示意图

其中，泡沫塑料柱的相对介电常数为  $1.45 \pm 0.15$ 。收发天线为布置在距离坐标中心半径 1.67m 的圆环上的双脊喇叭天线。发射天线从 0 度到 340 度，以 20 度步进依次在圆环上向成像区域中心照射，共 18 次照射。每次照射时，有接收天线相对于发射天线方位 60 度到 300 度，以 1 度步进依次测量所在位置场强。数据集中，以 2GHz 为步进，提供 2-18GHz 下的有目标和无目标时的测量散射场，本实验取工作在 4GHz 的测量结果进行处理。

本文选择成像区域为大小  $150\text{ mm} \times 150\text{ mm}$  的矩形区，并将其离散化为  $44 \times 44$  个网格。分别用第 3 章所提的 APUM 方法和在 APUM 框架下加入本节所提的非线性 Bayes 方法进行重建，结果如图 5.20 所示。易见，APUM 和基于非线性 Bayes 的 APUM 均能良好重建目标，而引入选值稀疏约束后的 APUM 能保证目标内的材料均匀性，且重建轮廓更贴近真值。作为对比，对同一实测数据的同样频段内的重建，现有文献的重建结果如下图 5.21 所示。可见，虽然图 5.21 的方法能有效区分导体和介质目标，但是重建分辨率远弱于所提 APUM 方法，更难以和引入材料稀疏先验的重建结果相比<sup>[15]</sup>。

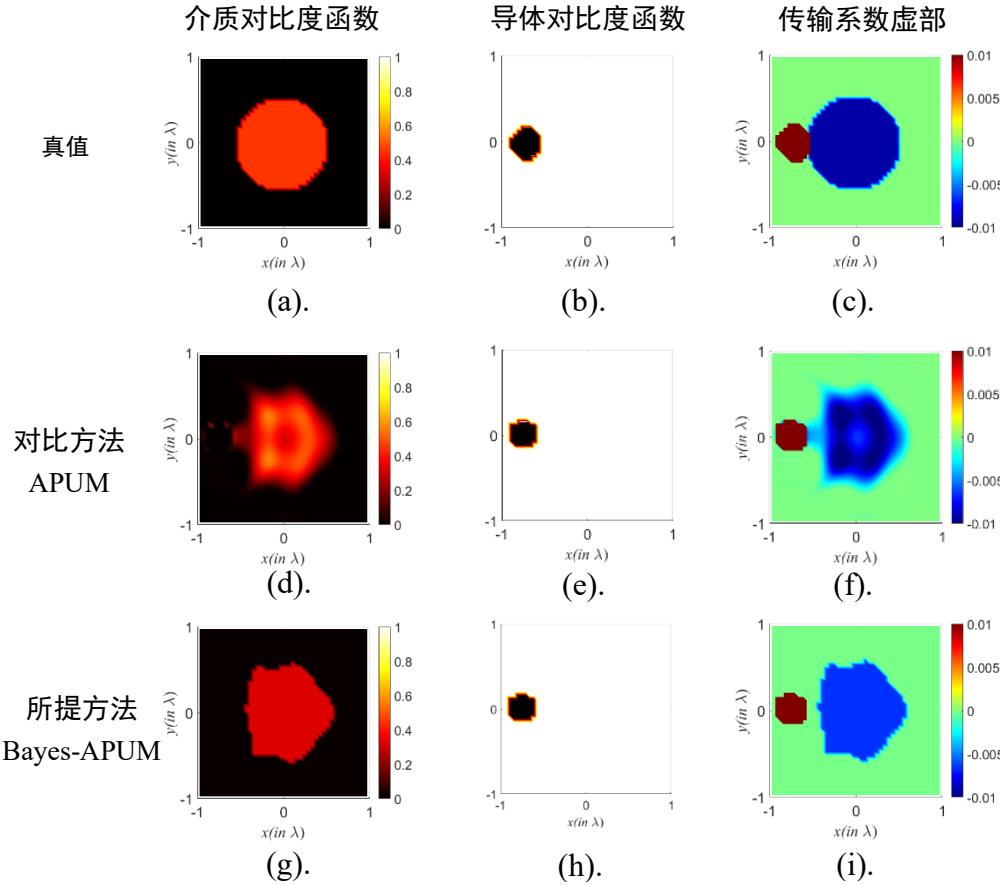


图 5.20 实测数据重建结果

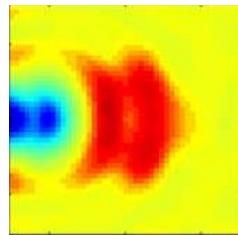


图 5.21 基于逆 T 矩阵法重建结果

## 5.4 本章小结

由于非线性逆散射中混频的作用可以实现高维信息的压缩，因此构建合理的解空间约束可以从有限信噪比中获取宽带的信息。本章分别从正则化角度和 Bayes 先验角度出发，给出了两种非线性逆散射重建中的数学超分辨方法。

常见的解空间约束通常建立在解的稀疏性上，而当稀疏先验不成立时容易导致解的误差收敛性崩塌。低频成像问题中的目标大多不具备空间上的结构稀疏性，导致基于压缩感知的稀疏约束无法直接加在成像目标上。此外，大多数压缩感知算法均建立在线性逆问题求解的基础上，而不适用于非线性逆散射模型。

为了解决稀疏性的问题，本节不对目标函数的空间分布进行约束，而从目标

的材料稀疏性入手。在定量逆散射重建中，目标函数的取值即对应成像物体的本构参数，而所有成像物体的组成材料是有限的，因此可以约束待解目标函数的取值有限。我们首先给出了基于选值函数的正则化方法，从解空间可以看出，选值正则化构成的约束比一范数约束更稀疏。通过将选值约束变换到对比度源的代价函数中来实现非线性问题的线性化约束。然而该约束同时在多个选值点附近出现，导致正则化项本身是非凸函数，难以获得全局最优解。

为了解决该问题，我们基于 Dirichlet 分布构造了目标的均值稀疏性，通过多层 Bayes 结构来促进目标的材料稀疏。虽然我们可以通过期望最大化方法迭代更新材料参数，但是非线性关系导致 Bayes 推断无法直接进行。因此，我们讨论了两种非线性问题下的 Bayes 推断方法。第一种方法是直接将整个模型打包到一个基于 Transformers 的先验拟合网络中，数据集本身提供观测值和重建变量的联合分布，而给定测试的观测数据，网络输出相应变量的后验取值。这种方法虽然回避了非线性推断的困难，但是抛弃了已有的物理模型，完全依赖于数据集，与我们构建材料稀疏先验的初衷相违背。另一种方法是根据 Krylov 子空间法中的正则化项等价于 Bayes 先验的理论，直接在对比度源一对比度函数的线性关系上做推断，由此将非线性重建拆分为两个线性步骤交替进行。仿真和实测结果验证了该方法的可行性。

# 第6章 非均匀背景扰动下的超分辨方法应用

依靠低频电磁波进行穿透成像是微波成像的挑战之一，然而该技术有着广泛的实用价值，在灾害救援、石油勘探、室内反恐和医疗成像中有着举足轻重的作用。其典型应用，如：穿墙成像、探地雷达和乳腺癌成像，成为了相关领域的研究重点。正是有耗背景的存在，导致低频探测的不可替代性。因此本文所提的超分辨成像方法不得不面对在非均匀有耗背景下的处理，本节以穿墙成像为例说明非均匀场景的重建策略。在 6.1 中给出了通用情况下背景格林函数的计算方法，并提出了基于背景格林函数的分区重建策略。在 6.2 节中，给出了该重建策略下直接和间接的入射场优化方法。最后，所提算法在电磁仿真数据上验证了有效性。

## 6.1 非自由空间的重建策略

在穿墙成像问题中，墙体包围成像区域，构成了扰动重建目标的非均匀背景。在大部分穿墙雷达成像问题中，墙体则是杂波的主要来源，为了应当该问题，主流做法是通过回波估计墙体参数，再结合墙体回波模型抵消墙体对传播路径的扰动<sup>[152][153]</sup>。然而，这些方法将墙体估计和目标重建作为两个问题分别优化，而忽视了二者之间存在多次散射带来的耦合效应，导致墙体估计和目标重建均存在残差。为了避免该问题，另一类求解思路则是联合求解墙体和目标，最终表现为在重建目标的同时直接对墙体产生的杂波进行滤波。例如根据墙体的空间均匀性构建滤波函数<sup>[154]</sup>。又或是划分墙体和目标的子空间，通过奇异值截断的方式完成滤波<sup>[155]</sup>。近年来，基于低秩稀疏先验的联合重建思路成为研究热点<sup>[156][157]</sup>。然而，这些基于雷达成像的方法都建立在线性散射模型上，多次散射问题并没有被包含于模型中。因此，不论是分立优化还是联合求解，墙体和目标的耦合作用均未被利用。导致携带目标信息的多次散射的能量在联合求解问题中被当作杂波抑制，抛弃了大量的信息。根据第二章介绍的正则化理论，在线性模型中做强先验约束不仅不一定能改善重建结果，反而会因为先验的偏差造成重建过程的恶化。而本文在第四章的结论表明，非线性过程中施加合理的弱先验约束才能提高重建性能。因此本节从非线性逆散射的角度出发，建模墙体和目标的耦合关系。

在逆散射重建理论中，对非均匀背景的处理有两大处理思路。第一种是构建非均匀背景的解析格林函数，例如分层格林函数，通过估计集总反射透射系数来消除非均匀背景的影响<sup>[159][160]</sup>。由于非均匀背景的扰动被引入格林函数内，因此目标和背景之间的多次散射关系可以通过格林函数来保留，而不需要刻意的联合优化。然而这类方法需要背景结构单一，例如探地问题中的土壤均匀分层。第二种是将背景当作目标的一部分，这样可以通过体等效原理将非均匀背景下的成像

转变为自由空间下的成像<sup>[161][162]</sup>。虽然这样处理可以适用更广泛的成像场景，但是增加了重建的变量个数，强化了问题的病态性。大多数对非均匀背景的估计介于这两种思路之间，即在粗略的解析构建非均匀格林函数的同时通过成像过程精细估计非均匀格林函数的参数<sup>[163]</sup>。理想情况下，通过对空场景成像来反推出非均匀格林函数，由此将所有因为背景扰动、辐射源不一致等的影响均放入格林函数内，这样就可以将有目标时的重建视为自由空间下的反演过程。

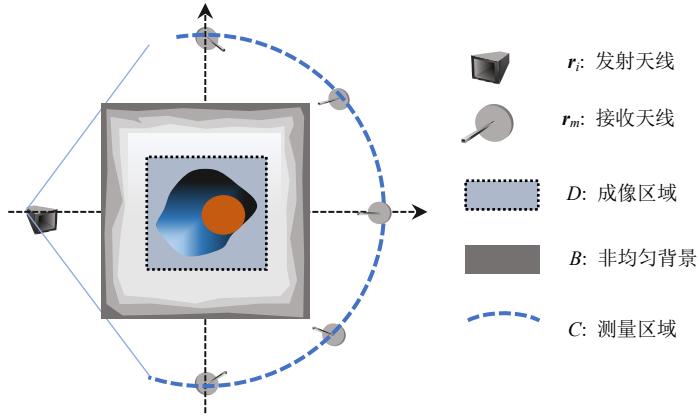


图 6.1 非均匀背景问题示意图

给定成像区域  $D$ ，则整个成像区域被包围在非均匀背景  $B$  下，即  $D \subset B$ ，故目标  $\chi$  和背景  $\chi_B$  同时存在。根据 3.2 节的结论(3.15)，则有

$$\mathbf{E}^{sca}(\mathbf{r}) = k_0^2 \int_D \overline{\mathbf{G}_B}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \chi(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \mathbf{E}_B(\mathbf{r}) \quad (6.1)$$

其中， $\mathbf{E}_B$  为无目标时空间内的场， $\mathbf{G}_B$  为非均匀背景格林函数，积分范围仅限于成像区域  $D$ ，且满足

$$\mathbf{E}_B(\mathbf{r}) = -j\omega\mu_0 \int_D \overline{\mathbf{G}_B}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_i(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (6.2)$$

显然，估计非均匀背景格林函数  $\mathbf{G}_B$  是(6.1)重建的前提。假设背景为各向同性，则(6.2)的傅里叶变换可以写为

$$\tilde{\mathbf{E}}_B(\mathbf{k}) = -j\omega\mu_0 \overline{\tilde{\mathbf{g}}_B}(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\mathbf{J}}_i(\mathbf{k}) \quad (6.3)$$

对上式离散化后得到非均匀格林函数的估计问题

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_B &= FFT(\tilde{\mathbf{g}}_B) \\ \tilde{\mathbf{g}}_B &= \arg \min \left\| \tilde{\mathbf{e}}_B - j\omega\mu_0 diag(\tilde{\mathbf{j}}_i) \tilde{\mathbf{g}}_B \right\|_2 \end{aligned} \quad (6.4)$$

考虑二维 TM 波问题，则有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} E_B(\mathbf{r}) \mathbf{u}_z e^{-jk \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} &= -j\omega\mu_0 \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} G_B(\mathbf{r}) e^{-jk \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \right] \int_D J_i(\mathbf{r}') e^{-jk \cdot \mathbf{r}'} \mathbf{u}_z d\mathbf{r}' \\ \tilde{\mathbf{E}}_B(\mathbf{k}) \mathbf{u}_z &= -j\omega\mu_0 \tilde{\mathbf{G}}_B(\mathbf{k}) \int_D J_i(\mathbf{r}') e^{-jk \cdot \mathbf{r}'} \mathbf{u}_z d\mathbf{r}' \end{aligned} \quad (6.5)$$

假设激励源为线电流源  $J_i(\mathbf{r}) = \alpha_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ , 则有

$$\tilde{G}_B(\mathbf{k}) = j \frac{\tilde{E}_B(\mathbf{k}) e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i}}{\omega \mu_0 \alpha_i} \quad (6.6)$$

由此建立非均匀背景下空场景区域  $D$  内的总场和背景格林函数的关系。

另一方面, 在实际成像问题中, 难以区分空场景和有目标场景。例如在穿墙成像问题中, 墙内静止人员和场景内的家具总是难以区分。在这种情况下, 需要对背景和目标同时成像, 并不断约束感兴趣区域的大小, 最终聚焦到目标上。而目标区域以外的范围则被归于背景格林函数。因此, 重建非均匀背景的格林函数是建立在对背景  $\chi_B$  进行成像的基础上<sup>[5]</sup>, 即

$$\mathbf{E}_B(\mathbf{r}) - \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) = k_0^2 \int_B \overline{\overline{\mathbf{G}}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \chi_B(\mathbf{r}') \mathbf{E}_B(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (6.7)$$

而非均匀背景格林函数等价于背景  $\chi_B$  下冲击激励源激发的总场

$$\mathbf{G}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n) = \mathbf{G}_B(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n) - k_0^2 \int_B \overline{\overline{\mathbf{G}}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \chi_B(\mathbf{r}') \mathbf{G}_B(\mathbf{r}', \mathbf{r}_n) d\mathbf{r}' \quad (6.8)$$

可见, 不同于(6.1)积分区域仅在成像区  $D$ , 背景的重建积分范围为  $B$ 。故成像背景范围比被成像区域广, 因此这样的重建病态性远高于重建问题本身。其次, 这种非均匀背景格林函数的解法建立在先求病态的逆散射问题, 再求良态的散射问题的基础上, 因此计算量可观。

本节提出一种分区重建策略, 即将重建区域  $B$  划分为  $N$  个子区, 当对第 1 个区域进行重建时, 第 2 至第  $N$  区域均划入背景格林函数, 以此对反演问题进行降维。等效过程如图 6.2 所示

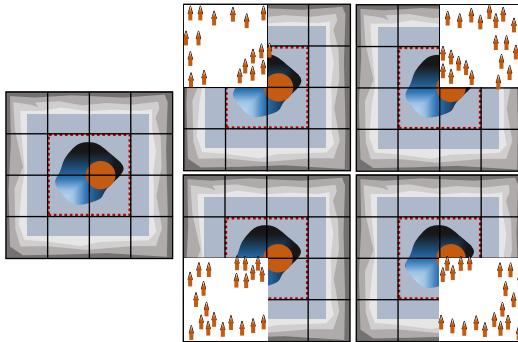


图 6.2 分区重建的体等效示意图

分区后的介电常数为

$$\varepsilon(r) = \sum_{n=1}^N \varepsilon_n(r) \xi_n(r) \quad (6.9)$$

其中,  $\xi_n$  是区域  $n$  的示性函数。相应区域  $B$  内的 Maxwell 方程写为

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = j\omega \left( \sum_{n=1}^N \varepsilon_n \xi_n \right) \mathbf{E} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mu_0 \mathbf{H} \end{cases} \quad (6.10)$$

则第  $n'$  子区域的等效体电流为

$$\mathbf{J}_{n'}^{eq} = j\omega \epsilon_{n'} \xi_n \mathbf{E} \quad (6.11)$$

相应的体等效问题的散射场写为

$$\begin{cases} \nabla \times (\mathbf{H} - \mathbf{H}_{n'}^B) = \mathbf{J}_{n'}^{eq} + j\omega \left( \sum_{N/n} \epsilon_n \xi_n \right) (\mathbf{E} - \mathbf{E}_{n'}^B) \\ \nabla \times (\mathbf{E} - \mathbf{E}_{n'}^B) = -j\omega \mu_0 (\mathbf{H} - \mathbf{H}_{n'}^B) \end{cases} \quad (6.12)$$

由此将第  $n'$  子区域的散射问题写为

$$\mathbf{E}_{n'}^{sca} = k_0^2 \int_{D_{n'}} G_{B_{n'}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \chi_{n'}(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (6.13)$$

其中,  $\mathbf{E}_{n'}^{sca} = \mathbf{E} - \mathbf{E}_n^B$ ,  $\chi_{n'}$  为第  $n'$  子区域的对比度函数。 $G_{B_{n'}}$  为除区域  $n'$  外设为背景的背景格林函数, 满足

$$G_{B_{n'}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = E_{n'}^B(\mathbf{r}, \mathbf{r}') / -j\omega \mu_0 \quad (6.14)$$

$E_{n'}^B(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  为  $\mathbf{r}'$  处的线源在背景  $\Sigma_{N/n}(\epsilon_n \xi_n)$  下产生的总场。将(6.13)离散化, 写出分区重建的逆散射方程

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{n'}^{sca} = \mathbf{G}_{B_{n'}} \cdot \mathbf{w}_{n'} \\ \mathbf{w}_{n'} = diag(\mathbf{e}_{n'}^B + \mathbf{G}_{B_{n'}} \cdot \mathbf{w}_{n'}) \chi_{n'} \end{cases} \quad (6.15)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{inc} &= \left[ \mathbf{I} - \mathbf{G}_0 \cdot diag \left( \sum_{N/n'} \chi \right) \right] \cdot \mathbf{e}_n^B \\ \mathbf{G}_0 &= \left[ \mathbf{I} - \mathbf{G}_0 \cdot diag \left( \sum_{N/n'} \chi \right) \right] \cdot \mathbf{G}_{B_{n'}} \end{aligned} \quad (6.16)$$

由此得到的重建框架为

表格 6-1 分区重建流程

初始化场景网格粗剖分; 低频照射, 重建区域 B 初值; 高频照射成像区域, 精细剖分场景网络, 划分为 $N$ 个子区; For $i = 1: I_{max}$ For $n = 1: N$ 根据(6.16), 更新区域 $n$ 的背景格林函数 $\mathbf{G}_{B_n}$ 和背景总场 $\mathbf{e}_n^B$ ; 求解(6.15)更新区域 $n$ 的对比度函数分布 $\chi_n$ ; End 判断是否收敛: 是, 结束循环; 否, 继续迭代。 End 输出对比度函数 $\chi$ 。
--

然而, 当我们划分子区时, 存在将同一个连续分布划分在不同子区的情况,

从而人为制造了重建目标的不连续性。虽然影响有限，但是减缓了收敛速度。因此本节在重建区域 B 初值后对区域 B 进行聚类，根据目标空域轮廓分布划分子区域。考虑到成像区域的大小，本节选择 K 均值聚类对重建区域进行初始划分。

假设总网格数为 M 个，则聚类流程为：

表格 6-2 聚类流程

初始化样本 $s_m = (x_m, y_m, \chi(x_m, y_m))$ , 其中 $m = 1, \dots, M$ ;										
初始化类数 $K$ , 和样本对应类别 $c = \{c_{m, k}\}$ ;										
初始化各类均值 $v_k$ , 随机取值;										
For $i = 1: I_{max}$										
For $m = 1: M$	For $k = 1: K$	计算样本和第 $k$ 类均值间的欧式距离: $d_{mk} = \ s_m - v_k\ ^2$ ;	End	对第 $m$ 个样本赋予最近的类别: $c_{m, k} = \text{index}(\min(d_{mk} (m, :)))$ ;	End	For $k = 1: K$	更新第 $k$ 类的均值: $v_k = [\Sigma_m c(:, k)]/M$ ;	End	End	输出样本类别 $c$ 。
For $k = 1: K$	计算样本和第 $k$ 类均值间的欧式距离: $d_{mk} = \ s_m - v_k\ ^2$ ;	End	对第 $m$ 个样本赋予最近的类别: $c_{m, k} = \text{index}(\min(d_{mk} (m, :)))$ ;	End	For $k = 1: K$	更新第 $k$ 类的均值: $v_k = [\Sigma_m c(:, k)]/M$ ;	End	End	输出样本类别 $c$ 。	
计算样本和第 $k$ 类均值间的欧式距离: $d_{mk} = \ s_m - v_k\ ^2$ ;										
End										
对第 $m$ 个样本赋予最近的类别: $c_{m, k} = \text{index}(\min(d_{mk} (m, :)))$ ;										
End										
For $k = 1: K$	更新第 $k$ 类的均值: $v_k = [\Sigma_m c(:, k)]/M$ ;	End	End	输出样本类别 $c$ 。						
更新第 $k$ 类的均值: $v_k = [\Sigma_m c(:, k)]/M$ ;										
End										
End										
输出样本类别 $c$ 。										

在穿墙成像问题中，这种聚类的结果大多是将背景墙体和关注区划分为两个独立子区域，如图 6.3 所示，因此整个重建过程转变为背景和目标的交替更新过程。

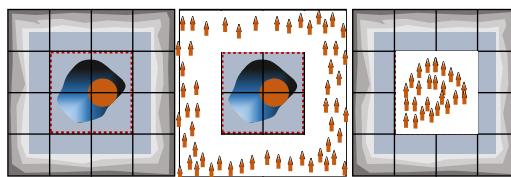


图 6.3 聚类分区的体等效示意图

由此将非均匀背景问题转换为背景子区和目标子区的交替更新过程。

## 6.2 非均匀背景下的入射场优化

在第 4 章中给出了基于超振荡效应的入射场优化设计，在给定信噪比下，该方法能显著提高成像质量，并增加测量独立性。然而，超振荡效应仅存在于局域区域，如图 4.6 所示，局部空间谱宽随着重建区域的收缩而展宽。当重建区域覆盖整个 B 区时，可实现的超振荡效应仅在极高阶波函数中存在，而可获取的高阶

波函数受限于信噪比，因此在全场景生成超振荡效应存在挑战。然而，根据上一节的策略，可以对场景进行剖分，并分区重建。由此可以在有限大小的区域中完成超振荡效应的构建，并通过背景格林函数的不断更新而更新入射场，获得更好成像性能。因此本节分别就4.3节中的直接综合法和间接综合法说明非均匀背景下的入射场优化方案。

### 6.2.1 直接综合法

在直接综合法中，各个激励源产生的场经过傅里叶变换得到矩阵  $\mathbf{A} = [FFT_2\{H_0^{(2)}[k_0(r - r_n)]\}]_{I \times N}$ 。综合方式通过优化(4.55)代价函数得到激励权重  $\mathbf{c}$ 。而在非均匀背景问题中，激励源产生的场分布为

$$E_i(\mathbf{r}) = -j\omega\mu_0 \int_D G_B(\mathbf{r}, \mathbf{r}') c_i \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) d\mathbf{r}' = -j\omega\mu_0 G_B(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) c_i \quad (6.17)$$

其中， $G_B$  为背景格林函数。上式离散化后则有关系

$$\mathbf{e}_i = -j\omega\mu_0 G_B(:, \mathbf{r}_i) c_i / S \quad (6.18)$$

其中， $S$  为离散网格面积。故傅里叶变换得到  $\mathbf{A}_B = [FFT_2\{\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_I\}\}]_{I \times N}$  构成直接综合法的变换矩阵。

$$\begin{aligned} & \min \quad \|\mathbf{A}_B \mathbf{c} - \mathbf{b}\|_2^2 \\ s.t. \quad & \|\mathbf{e}^{inc}(r_n)\|_2^2 \leq \|\mathbf{b}\|_2^2 d^2 / (M - 1 + d^2) \quad r_n \in D \end{aligned} \quad (6.19)$$

而方程(6.19)解的存在性由算子  $\mathbf{A}_B$  的病态性决定， $\mathbf{A}_B$  的空间谱决定了可拟合超振荡跳变率的上限。本节以单个介质圆柱背景为例说明背景对比度和可拟合的空间谱的关系，单个介质柱的总场即为背景扰动下的入射场。

给定半径为  $R$ ，介电常数为  $\epsilon$  的介质圆柱。则该圆柱的入射波、反射波和投射波可以写为

$$\begin{aligned} E_z^{inc}(\mathbf{r}) &= -\frac{\omega_0\mu_0}{4} \sum_{i=1}^I \left[ c_i \sum_{l=-\infty}^{\infty} H_l^{(2)}(k_0 r_i) J_l(k_0 r) e^{jl(\varphi_i - \varphi)} \right] \\ E_z^{sca}(\mathbf{r}) &= -\frac{\omega_0\mu_0}{4} \sum_{i=1}^I \left[ c_i \sum_{l=-\infty}^{\infty} R_n H_l^{(2)}(k_0 r_i) H_l^{(2)}(k_0 r) e^{jl(\varphi_i - \varphi)} \right] \\ E_z^{tra}(\mathbf{r}) &= -\frac{\omega_0\mu_0}{4} \sum_{i=1}^I \left[ c_i \sum_{l=-\infty}^{\infty} T_n H_l^{(2)}(k_0 r_i) J_l(k_i r) e^{jl(\varphi_i - \varphi)} \right] \end{aligned} \quad (6.20)$$

其中， $R_n$  和  $T_n$  分别为反射系数和透射系数， $k_i$  为柱内波数。同理可以根据广义法拉第定律  $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{E} / j\omega\mu_0$  得到磁场表达式，此处不再赘述。则根据介质边界条件

$$\begin{cases} [E_z^{inc}(\mathbf{r}) + E_z^{sca}(\mathbf{r})]_{r=R} = E_z^{tra}(\mathbf{r})|_{r=R} \\ [H_\varphi^{inc}(\mathbf{r}) + H_\varphi^{sca}(\mathbf{r})]_{r=R} = H_\varphi^{tra}(\mathbf{r})|_{r=R} \end{cases} \quad (6.21)$$

可得反射系数和透射系数

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{k_t J_n(k_0 R) J_{n+1}(k_t R) - k_0 J_n(k_t R) J_{n+1}(k_0 R)}{k_0 J_n(k_t R) H_{n+1}^{(2)}(k_0 R) - k_t H_n^{(2)}(k_0 R) J_{n+1}(k_t R)} \\ T_n &= k_0 \frac{J_{n+1}(k_0 R) H_n^{(2)}(k_0 R) - J_n(k_0 R) H_{n+1}^{(2)}(k_0 R)}{k_t J_{n+1}(k_t R) H_n^{(2)}(k_0 R) - k_0 J_n(k_t R) H_{n+1}^{(2)}(k_0 R)} \end{aligned} \quad (6.22)$$

由此可以写出单介质柱问题中总场分布

$$E(\mathbf{r}) = \begin{cases} -\frac{\omega_0 \mu_0}{4} \sum_{i=1}^I c_i \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(2)}(k_0 r_i) [J_n(k_0 r) + R_n H_n^{(2)}(k_0 r)] e^{jn(\varphi_i - \varphi)} \right] & r \geq R \\ -\frac{\omega_0 \mu_0}{4} \sum_{i=1}^I c_i \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n H_n^{(2)}(k_0 r_i) J_n(k_t r) e^{jn(\varphi_i - \varphi)} \right] & r < R \end{cases} \quad (6.23)$$

假设关注区域为半径  $R_s$  的圆形区域，则总场的局部傅里叶变换为

$$\begin{aligned} \tilde{E}(\mathbf{k}) &= \int_0^{R_s} r dr \int_0^{2\pi} E(\mathbf{r}) e^{-jk_r r \cos(\varphi - k_\varphi)} d\varphi \\ &= -\frac{\omega_0 \mu_0}{4} \sum_{i=1}^I c_i \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\varphi_i} \begin{bmatrix} H_n^{(2)}(k_0 r_m) \tilde{E}_{i,n}^{inc}(\mathbf{k}) \\ + R_n H_n^{(2)}(k_0 r_i) \tilde{E}_{i,n}^{sca}(\mathbf{k}) \\ + T_n H_n^{(2)}(k_0 r_i) \tilde{E}_{i,n}^{sca}(\mathbf{k}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.24)$$

其中，

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{i,n}^{inc}(\mathbf{k}) &= (-j)^n 2\pi e^{-jnk_\varphi} \int_R^{R_s} r J_n(k_0 r) J_n(k_r r) dr \\ \tilde{E}_{i,n}^{sca}(\mathbf{k}) &= (-j)^n 2\pi e^{-jnk_\varphi} \int_R^{R_s} r H_n^{(2)}(k_0 r) J_n(k_r r) dr \\ \tilde{E}_{i,n}^{tra}(\mathbf{k}) &= (-j)^n 2\pi e^{-jnk_\varphi} \int_0^R r J_n(k_t r) J_n(k_r r) dr \end{aligned} \quad (6.25)$$

由此得到总场空间谱

$$\begin{aligned} \tilde{E}(\mathbf{k}) &= -\frac{\pi \omega_0 \mu_0}{2} \sum_{i=1}^I c_i \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn(\varphi_i - \pi/2)} e^{-jnk_\varphi} H_n^{(2)}(k_0 r_i) \\ &\quad + \frac{T_n}{k_t^2 - k_r^2} \left\{ \begin{array}{l} \left[ R_n H_{n+1}^{(2)}(k_0 R_s) + J_{n+1}(k_0 R_s) \right] k_0 J_n(k_r R_s) \\ - \left[ R_n H_n^{(2)}(k_0 R_s) + J_n(k_0 R_s) \right] k_r J_{n+1}(k_r R_s) \end{array} \right\} \\ &\quad - \frac{R}{k_0^2 - k_r^2} \left\{ \begin{array}{l} \left[ R_n H_{n+1}^{(2)}(k_0 R) + J_{n+1}(k_0 R) \right] k_0 J_n(k_r R) \\ - \left[ R_n H_n^{(2)}(k_0 R) + J_n(k_0 R) \right] k_r J_{n+1}(k_r R) \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (6.26)$$

从上式可见，总场空间谱存在两个极值点，一个是当  $k_r = k_0$  时，另一个是当  $k_r = k_t$  时。由于  $k_t$  为背景媒质内的空间波数，因此第二个极值点由背景媒质决定。当

背景媒质介电常数越大，则总场空间越宽。因此，方程(6.19)的病态性不仅不会随着背景媒质的存在而恶化，反而会随着背景媒质的对比度增加而弱化。

## 6.2.2 间接综合法

在间接综合法中，入射场被写为多极展开的形式。因此本节将基于 2.1.2 节的多极展开模型说明背景扰动下的入射场优化设计。给定如下入射场和散射场

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) &= \mathbf{u}_z \sum_{i=1}^I \sum_{p=-P}^{+P} a_{pi}(q) H_p^{(2)}(k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|) e^{jp\varphi(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)} \\ \mathbf{E}^{sca}(\mathbf{r}) &= \mathbf{u}_z \sum_{n=1}^N \sum_{p=-P}^{+P} c_{pn} H_p^{(2)}(k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|) e^{jp\varphi(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n)}\end{aligned}\quad (6.27)$$

给定背景  $\mathbf{r}_n$  处的介电常数和材料，则可以写出相应的传输系数

$$t_n^p = \begin{cases} \frac{k_n J_p(k_0 R) J_{p+1}(k_n R) - k_0 J_p(k_n R) J_{p+1}(k_0 R)}{k_0 J_p(k_n R) H_{p+1}^{(2)}(k_0 R) - k_n H_p^{(2)}(k_0 R) J_{p+1}(k_n R)} & \text{dielectric} \\ -\frac{J_p(k_0 R)}{H_p^{(2)}(k_0 R)} & \text{PEC} \end{cases} \quad (6.28)$$

则有(2.30)关系

$$c_{np} = t_n^p \left[ i_n^p + \sum_{n'=1}^N \sum_{p'=-\infty}^{+\infty} s_{n,n'}^{p,p'} (1 - \delta_{n,n'}) c_{n'p'} \right] \quad (6.29)$$

在已知传输系数条件下，可求得  $c_{np}$ 。进而写出背景媒质下的总场

$$\mathbf{E}^B(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_z \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left\{ J_l(k_0 r) e^{-jl\varphi(r)} \sum_{p=-P}^{+P} e^{jp\pi} \left[ \sum_{i=1}^I a_{pi}(q) H_{p+l}^{(2)}(k_0 r_i) e^{j(p+l)\varphi(r_i)} + \sum_{n=1}^N c_{pn}(q) H_{p+l}^{(2)}(k_0 r_n) e^{j(p+l)\varphi(r_n)} \right] \right\} \quad (6.30)$$

令

$$F_l(q) = \sum_{p=-P}^{+P} e^{jp\pi} \left[ \sum_{i=1}^I a_{pi}(q) H_{p+l}^{(2)}(k_0 r_i) e^{j(p+l)\varphi(r_i)} + \sum_{n=1}^N c_{pn}(q) H_{p+l}^{(2)}(k_0 r_n) e^{j(p+l)\varphi(r_n)} \right] \quad (6.31)$$

则根据 4.3.2 节的结论(4.67)，含背景扰动的有限域入射场和目标函数卷积后 的空间谱为

$$\begin{aligned}& \int_D \mathbf{E}_q^B(\mathbf{r}) \chi(\mathbf{r}) e^{-jk \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \\ &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=1}^Q \left\{ \frac{RF_l(q) e^{-jl[\varphi(k_q) - \pi/2]}}{k_0^2 - k_q^2} \left[ k_0 J_l(k_q R) J_{l+1}(k_0 R) \right] \right\}\end{aligned}\quad (6.32)$$

可见，根据  $a_{pi}$  和  $F(q)$  之间的线性关系可以写出间接综合的优化问题

$$\min \quad \left\| \tilde{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{b} - \tilde{\mathbf{g}}_0 \right\|_2^2 \quad (6.33)$$

其中， $\mathbf{b}$  为背景产生的散射场  $\mathbf{E}^{sca}$  带来的扰动分量。由此完成背景扰动下的间接入射场优化过程。

### 6.3 数值仿真

本节中用矩量法仿真数据验证所提方法的有效性。在矩量法仿真中，生成测量数据的正过程计算由 CG-FFT 方法完成。

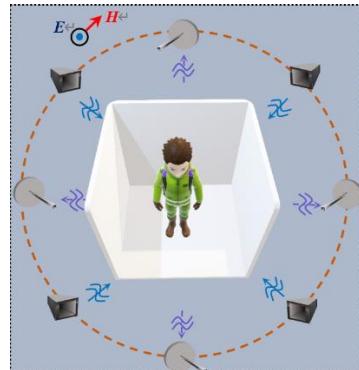


图 6.4 成像构型示意图

考虑成像场景如图 6.4 所示，宽度  $0.45m \times 0.2m$  的人体目标站在  $1m \times 1m$  矩形墙体内，墙体分为两层，每层厚度为  $10cm$ 。考虑混凝土的介电常数在  $4\sim 15$ ，仿真设置外侧墙体相对介电常数 5.5，内侧墙体相对介电常数 3.5。人体介电常数延用 3.4.3 节的模型。

收发天线在距离照射区中心半径  $0.7m$  的圆环上均匀布置，发射天线和接收天线分别为 40 个。先用  $300MHz$  频率进行测量，对关注区进去粗略重建，并根据结果划分墙体和成像区域。再优化入射场，用  $600MHz$  频率进行测量，根据测量数据进行精细重建。测量的散射场信噪比为  $10dB$ 。分别直接进行重建和用本章所提的分区优化入射场的重建结果如下所示

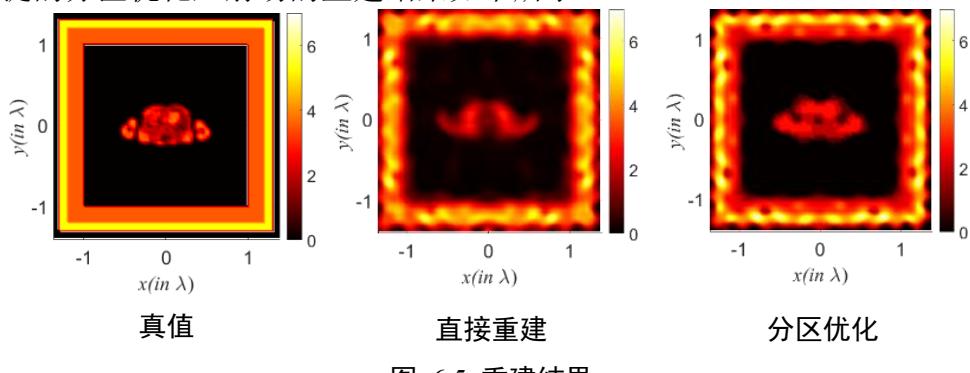


图 6.5 重建结果

图 6.5 左侧为目标分布的真值参考，而图 6.5 中间为均匀激励下直接对背景和目标同时重建的结果，图 6.5 右侧为分区重建并分区优化超振荡效应的重建

结果。对比图 6.5 的墙体目标可以发现，基于分区优化的重构墙体有更准确的分层，表明混频过程中有效的保留目标内的高频信息。而直接重构的墙体轮廓则更为模糊，相应的背景格林函数则更不准确。对比图 6.5 的人体目标，基于分区优化的重建介质可以有效的聚焦在人体轮廓，而缺乏高频信息的重建介质则轮廓比真值更为扩散。因此，所提基于分区优化的方法能有效在背景扰动时压缩目标高频信息至传播过程的低频通带内，提高成像质量。

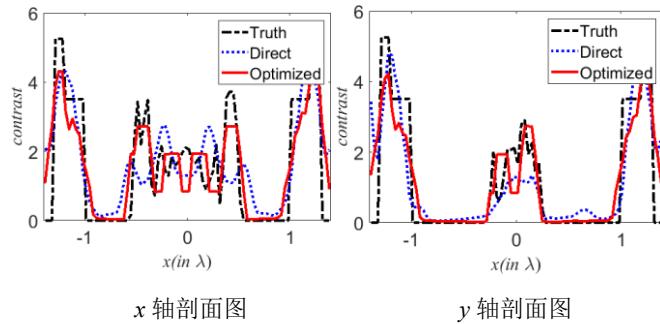


图 6.6 重建结果剖面图

重构结果的剖面图则如图 6.6 所示，从右往左第一列为沿着  $y$  轴的剖面图，从右往左第二列为沿着  $x$  轴的剖面图，其中黑色虚线为对比度函数真值，蓝色虚线为直接重建的对比函数，红色实线为分区优化下重建的对比度函数。对比可见，所提方法能在准确估计目标材料取值的同时提高重建目标精度，同样验证了所提方法的有效性。

## 6.4 本章小结

实际逆散射重建应用中广泛的存在非均匀背景扰动的问题，这些扰动将放大模型的偏差，从而使正则化方法失效。常见的成像方法将背景扰动作为杂波进行抑制，对墙体施加特定的先验信息的基础上通过联合求解的方式重建目标。然而这些方法忽略了背景和目标之间的耦合作用，因此效果不佳。本节引入非均匀格林函数来表征耦合作用的影响，通过交替更新背景的格林函数和目标的格林函数实现对耦合作用的利用。不同于已有的直接通过体等效打包目标和背景同时重建的方法，本节在低频粗重建的基础上对关注区和背景扰动区进行聚类划分，基于非均匀格林函数对各个类别分别进行重建，从有效降低重建变量个数，缓解病态性。

此外，由于背景本身通常具有较高的介电常数，例如墙体，故增大了透射波的折射率，其等价的拓宽了观测阵列的孔径，提高了重建区内的可获取的局部空间谱带宽。因此，在迭代提高对背景重建精度的同时，可以根据背景格林函数优化入射场，提高重建分辨率。本节提出了基于超振荡效应的非均匀背景优化方法，有效的将目标高频信息通过总场混频保留在传输通带内，从而提高重建精度。基

于矩量法的仿真结果验证了该方法的可行性。

## 第7章 总结与展望

自第二次世界大战诞生第一台雷达以来，电磁波一直以其长波低衰减的特性被用于弥补光学难以实现的远距离探测和多障碍物后探测，这得益于波动效应。而受限于波动效应，微波难以区分小于波长量级的目标。为了提高承载的信息量，微波系统从早年的甚高频发展到如今的太赫兹。然而，即使是接近光学频段，对穿透性的需求和对分辨率的追求依旧是不可调和的矛盾。

从该矛盾出发，本文围绕对该矛盾衍生的三大应用问题开展研究。第一个是混合边界问题：在混合边界问题中，不同边界条件的目标难以用统一的本构参数定量重建，从而恶化问题的病态性造成多解。因此需要构建多参量表征混合边界目标，并通过区分重建的方式对病态问题降维。第二个是超分辨问题：在超分辨问题中，已有的物理超分辨方法大多试图修改物理构型来绕过 Rayleigh 极限，且非线性重建的超分辨原理尚且存在争议。而已有的数学超分辨方法大多建立在不完整的线性模型上，使得先验信息约束存在偏差，无法得到广泛应用。因此，在不修改成像构型的基础上得到超越 Rayleigh 极限的分辨率对挖掘非线性重建的超分辨潜力有着重要的意义。而在该基础上设计的基于非线性模型的正则化方法则更有普适性。第三个是非均匀背景问题：即使构造了合适的先验信息并通过精确模型重建，当存在非均匀背景扰动时，依旧会带来模型的偏差使先验约束失效。因此针对非均匀背景设计合适的重建策略对所提方法的实际应用有着不可或缺的意义。主要工作包含以下四个方面

第一，本研究针对混合边界问题提出了混合参数模型，统一了定量重建的对比度函数和定性区分边界条件的传输系统。并基于体等效原理构建了介质对比度函数和导体传输系数的交替更新框架，避免了导体定量重建带来病态性。最后提出了基于 Krylov 子空间法的交替参数更新法，准确的实现了介质的定量重建和导体的定性重建，有效性在仿真和实测数据上取得了验证。

第二，本研究给出了基于超振荡理论的非线性逆散射重建的超分辨理论，并提出了基于该理论的极限分辨率。在此基础上，本文提出了基于超振荡效应的入射场优化方法，在仅修改激励源权重的条件下在仿真和实测数据验证的超分辨重建能力。最后，本文进一步论证了该方法等价于非线性问题中的正则化过程。

第三，本文分别提出了基于选值正则化和非线性 Bayes 两种手段，对非线性重建的目标函数的材料稀疏性进行约束。有效的利用了物理世界散射体材料有限的特性，拓宽了先验信息的普适性。仿真和实测数据验证了所提方法的有效性。

第四，本文提出了基于非均匀格林函数的分区重建策略，通过交替重建目标和背景格林函数实现对复杂场景中的目标重建。仅一步，本文在准确估计背景

格林函数的基础上进一步优化入射场的超振荡效应，获得了高精度的重建结果。所提方法在基于矩量法的仿真数据上得到验证。

总结全文可以发现，在围绕着重建和高分辨率的矛盾的研究中，病态问题的正则化贯穿始终。正如 Hadamard 观点，一切自发的物理过程都是良态的，正散射问题总能证明解的唯一性和稳定性。而根据热力学第二定律，系统的演化不可逆，故而对该过程的逆转，例如根据回波反推源，必然存在信息的丢失。因此，逆散射重建问题中，所有矛盾的根源在于逆问题的病态性，这种病态性源于天然伴随散射过程的降维效果。即使将成像系统的孔径全部填满，也只能获得半波长的分辨率。而任何对缺失信息的补全，都会带来计算复杂度的增加<sup>[164]</sup>。在逆问题上，这种计算复杂度的增加表现为对现有物理过程的仿真。计算电磁学方法兴起于上个世纪六十年代，成熟于本世纪初，而逆散射方法则兴起于上个世纪八十年代。可见病态逆问题的求解是建立在成熟的良态正问题方法的基础上。因此，对本文工作的进一步延续有如下几大问题需要解决。

1. 正问题的快速算法：任何新的正问题求解方法的提出都开辟新的逆散射重建领域，因此高效的正问题求解意义重大。由于问题的良态性，正问题的求解并不存在信息缺失，因此有更宽松的算法设计空间。从算法角度来说，正问题求解仅是一组线性满秩矩阵的求逆过程，其逆算子存在且唯一。因此，近年来基于数据驱动的方式获得逆算子在散射问题计算中兴起，由于训练完成后离线计算仅是一步正向传播，故计算效率远超过现有算法。然而随着场景的改变，逆算子也会随之而改变，故如何构建有较强泛化能力的正问题求解模型则成为首要问题。
2. 混合尺度的计算：在近场非线性作用较强时，需要精确的散射模型；而在稍远一些的区域，则可以参考多极子展开的方式将远区对近区的贡献打包；在更远尺度上，则可以参考射线追踪等方法，从而降低整体计算量。基于分区重建的思路，如何将各个尺度的模型整合在一起，并构建混合尺度的重建算法有待进一步研究。
3. 基于 S 参数的重建模型和算法：本文研究的重建方法均建立在获取电场的幅度和相位信息基础上，而实际完整的重建系统中只能得到收发天线的 S 参数。故和测量电场复振幅相比，实际测量的 S 参数等价于在本文模型的观测方程外再嵌套一层和接收天线口面场内积的算子。因此，对接收天线的设计同样会影响重建问题的病态性，故需要进一步研究。
4. 无相位重建方法：收发天线同步的前提下，可以通过矢量网络分析仪获得场的幅度和相位信息。而实际应用中，成像系统的小型化、便携化需求将削弱该同步性，这将导致相位信息的不准确。而相位信息的缺失将给超振荡效应的设计带来挑战，因此无相位重建将是逆散射重建研究不可避免的问题。



## 参 考 文 献

- [1] Hassen F B, Boukari Y and Haddar H. Application of the linear sampling method to identify cracks with impedance boundary conditions [J]. Inverse Problems in Science & Engineering, 2013, 21(2): 210-234.
- [2] Benedetti M, Donelli M, Martini A, *et al.* An innovative microwave imaging technique for non-destructive evaluation: applications to civil structures monitoring and biological bodies inspection[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2006, 55(6): 1878-1884.
- [3] Neira L M, Veen B, Hagness S C. High-resolution microwave breast imaging using a 3-D inverse scattering algorithm with a variable-strength spatial prior constraint[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2017, 65(11): 6002-6014.
- [4] Gürbüz T U, Aslanyürek B, Karabulut E P, *et al.* An efficient nonlinear imaging approach for dielectric objects buried under a rough surface[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2014, 52(5): 3013-3022.
- [5] Chu Yanqing, Xu Kuiwen, Zhong Yu, *et al.* Fast microwave through wall imaging method with inhomogeneous background based on Levenberg–Marquardt algorithm[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 2019, 67(3): 1138-1147.
- [6] Donato L D, Crocco L. Model-based quantitative cross-borehole GPR imaging via virtual experiments[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2015, 53(8): 4178-4185.
- [7] Nkwari P, Sinha S, Ferreira H C. Through-the-wall radar imaging: A Review[J]. IETE Technical Review, 2018, 35(6): 631-639.
- [8] Savelyev T G, Kempen L V, Sahli H, *et al.* Investigation of time–frequency features for GPR landmine discrimination[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2006, 45(1): 118-129.
- [9] 周永祖, 聂在平, 柳清伙. 非均匀介质中的场与波[M]. 北京: 电子工业出版社, 1992.
- [10] Harrington R F. Time-harmonic electromagnetic fields[M]. New York: Wiley-IEEE Press, 2001.
- [11] Cui T J, Chew W C, Yin X X, *et al.* Study of resolution and super resolution in electromagnetic imaging for half-space problems[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2004, 52(6): 1398-1411.

- [12] Wells K, Bradley D. A review of X-ray explosives detection techniques for checked baggage[J]. Applied Radiation and Isotopes, 2012, 70(8): 1729-1746.
- [13] Kirsch A. An introduction to the mathematical theory of inverse problems[M]. New York: Springer, 2011.
- [14] Chen X. Computational methods for electromagnetic inverse scattering[M]. New York: Wiley-IEEE Press, 2018.
- [15] Ye X, Chen X, Zhong Y, *et al.* Simultaneous reconstruction of dielectric and perfectly conducting scatterers Via T-Matrix method[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2013, 61(7): 3774-3781.
- [16] Gurbuz A C. Determination of Background Distribution for Ground-Penetrating Radar Data[J]. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 2012, 9(4): 544-548.
- [17] Verma P K, Gaikwad A N, et al. Analysis of clutter reduction techniques for through wall imaging in UWB range[J]. Progress in Electromagnetic Research B, 2009, 17: 29-48.
- [18] Xu X, Miller E L, Rappaport C M, *et al.* Statistical method to detect subsurface objects using array ground-penetrating radar data[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2002, 40(4): 963-976.
- [19] Kovalenko V, Yarovoy A G, Lighthart L P. A Novel Clutter Suppression Algorithm for Landmine Detection With GPR[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2007, 45(11): 3740-3751.
- [20] Liu L, Wu Z, et al. GPR clutter removal based on factor group-sparse regularization[J] IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 2022, 19: 3509305.
- [21] Zubal G, Harrell C R, Smith E O, *et al.* Computerized three-dimensional segmented human anatomy[J]. Medical Physics, 1994, 21(2): 299-302.
- [22] Hong R, Li S, Zhang J, *et al.* 3-D MRI-based electrical properties tomography using the volume integral equation method[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 2017, 65(12): 4802-4811.
- [23] Gurbuz T U, Aslanyurek B, Yapar A, *et al.* A nonlinear microwave breast cancer imaging approach through realistic body–breast modeling[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2014, 62(5): 2596-2605.
- [24] Conway J B. A course in functional analysis[M]. New York: Springer-Verlag, 1990.
- [25] Richmond J H. Scattering by a dielectric cylinder of arbitrary cross section shape[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1966, 13(4): 460-464.
- [26] Kleinman R E, van der Berg P M. Iterative methods for solving integral equations[J]. Radio Science, 1991, 26(1): 175-181.

- [27] Zwamborn A P M. Scattering by objects with electric contrast[D]. Delft University Press, 1991.
- [28] Elsherbeni A Z, Kishk A A. Modeling of cylindrical objects by circular dielectric and conducting cylinders[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2002, 40(1): 96-99.
- [29] Han K, Chen Y, Que X, *et al.* A domain decomposition scheme with curvilinear discretizations for solving large and complex PEC scattering problems[J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 2018, 17(2): 242–246.
- [30] Habashy T M, Chow E Y, Dudley D G. Profile inversion using the renormalized source-type integral equation approach[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1990, 38(5): 668-682.
- [31] Otto G P, Weng C C. Microwave inverse scattering-local shape function imaging for improved resolution of strong scatterers[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1994, 42(1): 137-141.
- [32] Dorn O, Miller E L, Rappaport C M. A shape reconstruction method for electromagnetic tomography using adjoint fields and level sets[J]. Inverse Problems, 2000, 16(5): 1119-1156.
- [33] Alvarez Y, Martinez-Lorenzo J A, Las-Heras F, *et al.* An Inverse fast multipole method for geometry reconstruction using scattered field information[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2012, 60(7): 3351-3360.
- [34] Wang Y M, Chew W C. An iterative solution of the two-dimensional electromagnetic inverse scattering problem[J]. International Journal of Imaging Systems and Technology, 1989, 1(1): 100-108.
- [35] Levy S, Adam D, Bresler Y. Electromagnetic impedance tomography (EMIT): a new method for impedance imaging[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2002, 21(6): 676-687.
- [36] Oliveri G, Rocca P, Massa A. A Bayesian compressive sampling-based inversion for imaging sparse scatterers[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2011, 49(10): 3993-4006.
- [37] Sun S, Kooij B J, Yarovoy A G. Linearized 3-D electromagnetic contrast source inversion and its applications to half-space configurations[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2017, 55(6): 3375-3487.
- [38] Wei Z, Chen X, Deep-learning schemes for full-wave nonlinear inverse scattering problems[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2019, 57(4): 1849–1860.

- [39] Slaney M, Kak A C, Larsen L E. Limitations of imaging with first-order diffraction tomography[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 2003, 32(8): 860-874.
- [40] Wang W, Jing L, Li Z, *et al.* Utilizing the Born and Rytov inverse scattering approximations for detecting soft faults in lossless transmission lines[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2017, 65(12): 7233-7243.
- [41] Chew W C, Wang Y M. Reconstruction of two-dimensional permittivity distribution using the distorted Born iterative method[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1990, 9(2): 218-225.
- [42] Nie Z, Yang F. Variational Born iteration method and its applications to hybrid inversion[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2000, 38(4): 1709-1715.
- [43] Habashy T M, Groom R W, Spies B R. Beyond the Born and Rytov approximations: A nonlinear approach to electromagnetic scattering[J]. Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 1993, 98(B2): 1775-1795.
- [44] Haddar H, Monk P. The linear sampling method for solving the electromagnetic inverse scattering problem[J]. Inverse Problems, 2002, 18(2): 891-906.
- [45] Crocco L, Catapano I, Donato L D, *et al.* The linear sampling method as a way to quantitative inverse scattering[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2012, 60(4): 1844-1853.
- [46] Crocco L, Donato L D, Catapano I, *et al.* An improved simple method for imaging the shape of complex targets[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2013, 61(2): 843-851.
- [47] Van den Berg P M, Kleinman R E. A contrast source inversion method[J]. Inverse Problems, 1997, 13(6): 1607-1620.
- [48] Isernia T, Crocco L, D'Urso M. New tools and series for forward and inverse scattering problems in lossy media[J]. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 2004, 1(4): 327-331.
- [49] Crocco L, D'Urso M, Isernia T. Testing the contrast source extended Born inversion method against real data: the TM case[J]. Inverse Problems, 2005, 21(6): 33-50.
- [50] Attardo E A, Vecchi G, Crocco L. Contrast source extended Born inversion in noncanonical scenarios via FEM modeling[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2014, 62(9): 4674-4685.
- [51] Chen X. Subspace-based optimization method for solving inverse-scattering problems[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2009, 48(1): 42-49.

- [52] Wei Z, Chen X. Physics-inspired convolutional neural network for solving full-wave inverse scattering problems[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2019, 67(9): 6138-6148.
- [53] Abubaker A, Van der Berg P M. Total variation as a multiplicative constraint for solving inverse problems[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2001, 10(9): 1384-92.
- [54] Van den Berg P M, Abubakar A. Contrast source inversion method: State of art[J]. Progress in Electromagnetics Research, 2001, 34: 189-218.
- [55] Abubakar A, Van den Berg P M, Mallorqui J J. Imaging of biomedical data using a multiplicative regularized contrast source inversion method[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 2002, 50(7): 1761-1771.
- [56] Abubakar A, Habashy T M. Application of the MR-CSI method for three-dimensional imaging of the triaxial induction measurements[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2010, 48(6): 2613-2619.
- [57] Wang X Y, Li M, Abubakar A. Acceleration of 2D multiplicative regularized contrast source inversion algorithm using paralleled computing architecture[J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 2017, 16: 441-444.
- [58] Bevacqua M T, Crocco L, Donato L D, *et al.* Non-linear inverse scattering via sparsity regularized contrast source inversion[J]. IEEE Transactions on Computational Imaging, 2017, 3(2): 296-304.
- [59] Zaeytijd J D, Franchois A, Geffrin J M. A new value picking regularization strategy—application to the 3-D electromagnetic inverse scattering problem[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2009, 57(4): 1133-1149.
- [60] Sara V, Franchois A, Zutter D D. Piecewise smoothed value picking regularization applied to 2-D TM and TE inverse scattering[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2013, 61(6): 3261-3269.
- [61] Yu Z, Lambert M, Lesselier D, *et al.* A new integral equation method to solve highly nonlinear inverse scattering problems[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2016, 64(5): 1788–1799.
- [62] Xu Kuiwen, Zhong Yu, *et al.* A hybrid regularization technique for solving highly nonlinear inverse scattering problems[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 2018, 66(1): 11-21.
- [63] Waterman P C. Matrix formulation of electromagnetic scattering[J]. Proceedings of the IEEE, 1965, 53(8): 805-812.

- [64] Song R, Ye X, Chen X. Reconstruction of scatterers with four different boundary conditions by T-matrix method[J]. Inverse Problems in Science and Engineering, 2015, 23(4): 1-16.
- [65] Simonetti F. Multiple scattering: The key to unravel the subwavelength world from the far-field pattern of a scattered wave[J]. Physical Review E, 2006, 73(3): 036619.
- [66] Belkebir K, Chaumet P C, Sentenac A. Influence of multiple scattering on three-dimensional imaging with optical diffraction tomography[J]. Journal of the Optical Society of America A Optics Image Science & Vision, 2006, 23(3): 586-595.
- [67] Testorf M E, Fiddy M A. Superresolution imaging—revisited[J]. Advances in Imaging and Electron Physics, 2010, 163(10): 165-218.
- [68] Markel V A. Investigation of the effect of super-resolution in nonlinear inverse scattering[J]. Physical Review E, 2020, 102(5): 053313.
- [69] Chew W C. Waves and fields in inhomogeneous media[M]. New York: Van Nostrand Reinhold, 1990.
- [70] Pendry J B. Negative refraction makes a perfect lens[J]. Physical Review Letter, 2000, 85(18): 3966-3969.
- [71] Wolf David A. Transmission of evanescent wave modes through a slab of DNG material[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2005, 53(1): 270-274.
- [72] Alu Andrea and Engheta Nader. Physical insight into the "Growing" evanescent fields of Double-Negative metamaterial lenses using their circuit equivalence[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2006, 54(1): 268-272.
- [73] Memarian M, Eleftheriades G V. Evanescent-to-propagating wave conversion in sub-wavelength metal-strip gratings[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 2012, 60(12): 3893-3907.
- [74] Okhmatovski V, Aronsson J, Shafai L. A well-conditioned non-iterative approach to solution of the inverse problem[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2012, 60(5): 2418-2430.
- [75] Jiang W X, Qiu C W, Han T C, *et al*. Broadband all-dielectric magnifying lens for far-field high-resolution imaging[J]. Advanced Material, 2013, 25(48): 6963–6968.
- [76] Hunt J, Driscoll T, Mrozack A, *et al*. Metamaterial apertures for computational imaging[J]. Science, 2013, 339(6117): 310-313.
- [77] Wang L, Li L, Li Y, *et al*. Single-shot and single-sensor high/super-resolution microwave imaging based on metasurface[J]. Scientific Reports, 2016, 6(1): 26959.

- [78] Anzan-Uz-Zaman M, Song K, Lee D G, *et al.* A novel approach to Fabry-Pérot-resonance-based lens and demonstrating deep-subwavelength imaging[J]. *Scientific Reports*, 2020, 10(1): 10769.
- [79] Huang F M, Zheludev N I. Super-resolution without evanescent waves[J]. *Nano Letters*, 2009, 9(3): 1249-54.
- [80] Rogers E T F, Lindberg J, Roy T, *et al.* A super-oscillatory lens optical microscope for subwavelength imaging[J]. *Nature Materials*, 2012, 11(5): 432-435.
- [81] Rogers E T F, Zheludev N I. Optical super-oscillations: sub-wavelength light focusing and super-resolution imaging[J]. *Journal of Optics*, 2013, 15(9): 094008.
- [82] Rogers K S, Bourdakos K N, Yuan G, *et al.* Optimising superoscillatory spots for far-field super-resolution imaging[J]. *Optics Express*, 2018, 26(7): 8095–8112.
- [83] Kozawa Y, Matsunaga D, Sato S. Superresolution imaging via superoscillation focusing of a radially polarized beam[J]. *Optica*, 2018, 5(2): 86-92.
- [84] Li L, Li F, Cui T J. Computational superoscillation imaging beyond the Rayleigh limit from far-Field measurements[J]. *Optics Express*, 2014, 22(5):5431-5441.
- [85] Wong A M H. Sub-diffraction imaging using superoscillatory electromagnetic waves[D]. Toronto University Press, 2014.
- [86] Li L, Li F. Beating the Rayleigh limit: Orbital-angular-momentum-based super-resolution diffraction tomography[J]. *Physical Review E*, 2013, 88(3): 033205.
- [87] Wong A M H, Eleftheriades G V. Adaptation of Schelkunoff's superdirective antenna theory for the realization of superoscillatory antenna arrays[J]. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2010, 9: 315-318.
- [88] Wong A M H, Eleftheriades G V. Temporal pulse compression beyond the Fourier transform limit[J]. 2011, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 2011, 59(9): 2173–2179.
- [89] Kempf Achim. Black holes, bandwidths and Beethoven[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 2000, 41(4): 2360-2374.
- [90] Ferreira P J S G, Kempf Achim. Superoscillations: Faster than the Nyquist rate[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, 54(10): 3732-3740.
- [91] Oldoni M, Spinello F, Mari E, *et al.* Space-division demultiplexing in Orbital-Angular-Momentum-Based MIMO radio systems[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2015, 63(10): 4582-4587.

- [92] Zwamborn P, Van den Berg P M. The three dimensional weak form of the conjugate gradient FFT method for solving scattering problems[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 1992, 40(9): 1757-1766.
- [93] Alvarez Y, Martinez-Lorenzo J A, Las-Heras F, *et al*. An inverse fast multipole method for geometry reconstruction using scattered field information[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2012, 60(7): 3351-3360.
- [94] Chen B, Stammes J J. Validity of diffraction tomography based on the first Born and the first Rytov approximations[J]. Applied Optics, 1998, 37(14): 2996-3006.
- [95] Chew W, Wang Y. Reconstruction of two-dimensional permittivity distribution using the distorted Born iterative method[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1990, 9(2): 218-225.
- [96] Nie Z, Yang F. Variational Born iteration method and its applications to hybrid inversion[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2000, 38(4): 1709-1715.
- [97] Remis R F, Van den Berg P M. On the equivalence of the Newton-Kantorovich and distorted Born methods[J]. Inverse Problems, 2000, 16(1): L1-L4(4).
- [98] Zhong Q Z, Liu Q H. Two nonlinear inverse methods for electromagnetic induction measurements[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2001, 39(6): 1331-1339.
- [99] Isernia T, Crocco L, D'Urso M. New tools and series for forward and inverse scattering problems in lossy media[J]. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 2004, 1(4): 327-331.
- [100] Catapano I, Crocco L, D'Urso M, *et al*. A novel effective model for solving 3-D nonlinear inverse scattering problems in lossy scenarios[J]. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 2006, 3(3): 302-306.
- [101] Colton D, Haddar H, Piana M. The linear sampling method in inverse electromagnetic scattering theory[J]. Inverse Problems, 2003, 19(6): S105-S137.
- [102] Catapano I, Crocco L, Isernia T. On simple methods for shape reconstruction of unknown scatterers[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2007, 55(5): 1431-1436.
- [103] Crocco L, Catapano I, Donato L D, *et al*. The linear sampling method as a way to quantitative inverse scattering[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2012, 60(4): 1844-1853.
- [104] Donato L D, Bevacqua M T, Crocco L, *et al*. Inverse scattering via virtual experiments and contrast source regularization[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2015, 63(4): 1669-1677.

- [105] 夏道行. 实变函数论与泛函分析(下册)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.
- [106] Grasmair M, Haltmeier M, Scherzer O. Sparse regularization with  $\ell^q$  penalty term[J]. Inverse Problems, 2008, 24(5): 055020.
- [107] Martin B, Flemming J, et al. Convergence rates in  $\ell^1$ -regularization if the sparsity assumption fails[J]. Inverse Problems, 2013, 29(2): 025013.
- [108] Li K, Huang C, Yuan Z. Error estimations for total variation type regularization[J]. 2021, Mathematics, 9(12): 1-14.
- [109] Stuart A M. Inverse problems: A Bayesian perspective[J]. Acta Numerica, 2010, 19(19): 451-559.
- [110] Calvetti D, Pitolli F, Somersalo E, et al. Bayes meets Krylov: preconditioning CGLS for underdetermined systems[J]. Mathematics, 2015, 60(2): 429-461.
- [111] Geffrin J M, Sabouroux P, Eyraud C. Free space experimental scattering database continuation: experimental set-up and measurement precision[J]. Inverse Problems, 2005, 21(6): 117–130.
- [112] Folland G B, Sitaram A. The uncertainty principle: A mathematical survey[J]. The Journal of Fourier Analysis and Applications, 2007, 3: 207–238.
- [113] Abbe E. Beiträge zur theorie des mikroskops und der mikroskopischen wahrnehmung[J]. Archiv für Mikroskopische Anatomie, 1873, 9(1): 413-418.
- [114] Lord R. On the theory of optical images, with special reference to the microscope[J]. Journal of the Royal Microscopical Society, 1903, 23(4): 447-473.
- [115] Gbur G. Using superoscillations for superresolved imaging and subwavelength focusing[J]. Nanophotonics, 2019, 8(2): 205–225.
- [116] Rogers K S, Rogers E. Realising superoscillations: A review of mathematical tools and their application[J]. Journal of Physics: Photonics, 2020, 2(4): 042004.
- [117] Belkebir K, Saillard M. Special section: Testing inversion algorithms against experimental data[J]. Inverse Problems, 2001, 36(17): 1565-1571.
- [118] Konrad T, Roux F S. Superoscillations: a scale physics perspective[J]. Journal of Physics A Mathematical and Theoretical, 2019, 52(46): 465202.
- [119] Blunt S D, Chan T, Gerlach K. Robust DOA estimation: The reiterative superresolution (RISR) algorithm[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2011, 47(1): 332-346.
- [120] Koulouri A, Heins P, Burger M. Adaptive Superresolution in Deconvolution of Sparse Peaks[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2021, 69: 165-178.

- [121] Potter L C, Ertin E, Parker J T, *et al.* Sparsity and compressed sensing in radar imaging[J]. Proceedings of the IEEE, 2010, 98(6): 1006-1020.
- [122] Féron O, Duchêne B, Mohammad-Djafari A. Microwave imaging of inhomogeneous objects made of a finite number of dielectric and conductive materials from experimental data[J]. Inverse Problems, 2005, 21(6): 95-115.
- [123] Zwamborn A P M, Van den Berg P M. A total variation enhanced modified gradient algorithm for profile reconstruction[J]. Inverse Problems, 1995, 11(3): L5-L10.
- [124] Gilmore C, Mojabi P, *et al.* Comparison of an enhanced distorted Born iterative method and the multiplicative-regularized contrast source Inversion method[J]. IEEE Transactions on Antennas & Propagation, 2009, 57(8): 2341-2351.
- [125] Liu H Y, Liu D, Mansour H, *et al.* SEAGLE: Sparsity-driven image reconstruction under multiple scattering[J]. IEEE Transactions on Computational Imaging, 2018, 4(1): 73-86.
- [126] Poli L, Oliveri G, Massa A. Microwave imaging within the first-order Born approximation by means of the contrast-field Bayesian compressive sensing[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2012, 60(6): 2865-2879.
- [127] Bevacqua M T, Crocco L, Donato L D, *et al.* Microwave imaging of nonweak targets via compressive sensing and virtual experiments[J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 2015, 14: 1035-1038.
- [128] Bevacqua M T, Crocco L, Donato L D, *et al.* Non-linear inverse scattering via sparsity regularized contrast source inversion[J]. IEEE Transactions on Computational Imaging, 2017, 3(2): 296-304.
- [129] Oliveri G, Poli L, Anselmi N, *et al.* Compressive sensing-based Born iterative method for tomographic imaging[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 2019, 67(5): 1753-1765.
- [130] Vojnovic N, Stevanovic M N, Crocco L, *et al.* High-order sparse shape imaging of PEC and dielectric targets using TE polarized fields[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2018, 66(4): 2035–2043.
- [131] Shah P, Chen G, Stang J, *et al.* 3-D level set method for joint contrast and shape recovery in microwave imaging[J]. Computational Imaging, IEEE Transactions on Computational Imaging, 2019, 5(1): 97-108.
- [132] Zhou H, Narayanan R M. Microwave imaging of nonsparse object using dual-mesh method and iterative method with adaptive thresholding[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2019, 67(1): 504-512.

- [133] Sun S, Kooij B J, Yarovoy A G, *et al.* A linear method for shape reconstruction based on the generalized multiple measurement vectors model[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2019, 66(4): 2016–2025.
- [134] Charbonnier P, Blanc-Feraud, *et al.* Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1996, 6(2): 298–311.
- [135] Litman A. Reconstruction by level sets of n-ary scattering obstacles[J]. Inverse Problems, 2005, 21(6): S131–S152.
- [136] Bai F, Pizurica A, Franchois A, *et al.* Weakly convex discontinuity adaptive regularization for microwave imaging[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2013, 61(12): 6242–6246.
- [137] Wang F F, Liu Q H. A hierarchical Bayesian inversion method for electromagnetic imaging of inhomogeneous objects with piecewise homogeneities[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2021, 69(5): 2903–2912.
- [138] Wei Z, Chen X. Deep-learning schemes for full-wave nonlinear inverse scattering problems[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2019, 57(4): 1849–1860.
- [139] Ran P, Qin Y, Lesselier D, *et al.* Subwavelength microstructure probing by binary-specialized methods: contrast source and convolutional neural networks[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2021, 69(2): 1030–1039.
- [140] Li L, Wang L G, Teixeira F L, *et al.* DeepNIS: deep neural network for nonlinear electromagnetic inverse scattering[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2018, 67(3): 1819–1825.
- [141] Wei Z, Chen X. Physics-inspired convolutional neural network for solving full-wave inverse scattering problems[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2019, 67(9): 6138–6148.
- [142] Sanghvi Y, Kalepu Y, Khankhoje U K. Embedding deep learning in inverse scattering problems[J]. IEEE Transactions on Computational Imaging, 2020, 6(1): 46–56.
- [143] Wei Z, Chen X. Uncertainty quantification in inverse scattering problems with Bayesian convolutional neural networks[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2020, 69(6): 3409–3418.
- [144] Guo R, Shan T, Song X, *et al.* Physics embedded deep neural network for solving volume integral equation: 2D case[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2021, 67(9): 6138–6148.

- [145] Muller S, Hollmann N, Pineda S, *et al.* Transformers can do Bayesian inference[C]. arXiv preprint arXiv: 2112.105, 2022.
- [146] Helin T, Burger M. Maximum a posteriori probability estimates in infinite-dimensional Bayesian inverse problems[J]. Inverse Problems, 2015, 31(8): 085009.
- [147] Tzikas D G, Likas A C, Galatsanos N P. The variational approximation for Bayesian inference[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(6): 131-146.
- [148] Vila J P, Schniter P. Expectation-maximization gaussian-mixture approximate message passing[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2013, 61(19): 4658-4672.
- [149] Sun S, Kooij B J, Yarovoy A G. Extension of the GMMV-based linear method to quantitative inverse scattering[J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 2018, 17(1): 94-97.
- [150] Xu K, Wu L, Ye X, *et al.* Deep learning-based inversion methods for solving inverse scattering problems with phaseless data[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2020, 68(11): 7457–7470.
- [151] Zhong Y, Salucci M, Xu K, *et al.* A multiresolution contraction integral equation method for solving highly nonlinear inverse scattering problems[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 2020, 68(4): 1234-1247.
- [152] Dehmollaian M, Sarabandi K. Refocusing through building walls using synthetic aperture radar[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2008, 46(6): 1589–1599.
- [153] Solimene R, Cuccaro A. Front wall clutter rejection methods in TWI[J]. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 2014, 11(6): 1158-1162.
- [154] Yoon Y S, Amin M G. Spatial filtering for wall-clutter mitigation in through-the-wall radar imaging[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2009, 47(9): 3192–3208.
- [155] Tivive F H C, Bouzerdoum A, *et al.* A subspace projection approach for wall clutter mitigation in Through-the-Wall radar imaging[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2014, 53(4): 2108-2122.
- [156] Tivive F, Bouzerdoum A. Through the wall scene reconstruction using low rank and total variation[J]. IEEE Transactions on Computational Imaging, 2020, 6: 221-234.
- [157] Tivive F H C, Bouzerdoum A, *et al.* Clutter removal in through-the-wall radar imaging using sparse autoencoder with low-rank projection[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2021, 59(2): 1118-1129.
- [158] Miao Z, Kosmas P. Multiple-frequency DBIM-TwIST algorithm for microwave breast imaging[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2017, 65(5): 2507-2516.

- [159] Liu H, Long Z, Han F, *et al.* Frequency-domain reverse-time migration of ground penetrating radar based on layered medium Green's functions[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing, 2018, 11(8): 2957-2965.
- [160] Lambot S, Slob E C, Bosch I, *et al.* Modeling of ground-penetrating Radar for accurate characterization of subsurface electric properties[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2004, 42(11): 2555-2568.
- [161] Cui T J, Weng C C, Aydiner A A, *et al.* Inverse scattering of two-dimensional dielectric objects buried in a lossy earth using the distorted Born iterative method[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2001, 39(2): 339-346.
- [162] Miao Z, Kosmas P. Multiple-frequency DBIM-TwIST algorithm for microwave breast imaging[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2017, 65(5): 2507-2516.
- [163] Arici E K, Yasar A. Numerical calculation of 2-D inhomogeneous media Green's function and some applications in electromagnetic scattering problems[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2018, 67(1): 369-377.
- [164] Pitowsky I. Laplace's demon consults an oracle: The computational complexity of prediction[J]. Studies in History & Philosophy of Science, 1996, 27(2): 161-180.

## 致 谢

自 2017 年 10 月到中国科学技术大学以来，已不知不觉度过了近 6 年时间。现在回顾起来，有太多的事情和太多的人物值得回忆和纪念。在此，谨向曾经关心和帮助过我的老师、同学、朋友和家人致以最真诚的谢意！感谢你们一路的陪伴与支持！在我硕士及博士研究生的求学生涯里，首先要衷心感谢自己的导师——陈卫东教授。您对我的教诲是那样的孜孜不倦和细致耐心，不论是科研上的严谨求真，还是生活中的细微关怀，我都将牢记在心！是您教会了我怎样去思考和解决问题，更是您教会了我做人做事做学问的道理！您那为人师表、躬亲示范、认真负责的人格魅力令我深深敬佩！

感谢实验室至亲至敬的王东进教授、刘发林教授、王卫东教授、陆广华副教授、周凌云副教授、陈畅副教授、郭圆月副教授、张倾远老师、王瑞老师、毛群老师、吴仁坤老师、章恒斌老师、毕经硕老师，谢谢您们为我在科研及生活中提供的热情指导和悉心关照。

感谢实验室已经毕业的陆新飞、张琦、田超、张健霖、关剑、蒋铮、袁博、孙劲松、张祥、李明康、李安然、夏洁、曹智慧、姜山、许崇健、周崇斌、王昊宇、李刚、李博等师兄师姐，谢谢您们曾经提供的帮助和支持，您们是我学习的榜样！同时，感谢实验室即将毕业或仍奋战在科研一线的王阳阳、陈亮、王安然、代育龙、裴世琪、程迪、王振、刘家琦、屈海友、蒋博文、蔡懋豪、李世源、李天乐、王健阳、倪欣、朱盈沛、袁心如、王晓青、黄思成、张杰、查道安、丁一凡、王若愚、汪勇、杨中傲等同学。正是因为您们的无私奉献、团结友爱，让实验室一直充满着温馨、友善、上进的氛围，也正是因为您们的一路陪伴和默默关心，让我平日的科研和生活变得丰富多彩！非常庆幸与您们一起度过这段美好单纯的校园时光！

最后，特别感谢我的家人和妻子乔稳，谢谢您们一直以来的理解、支持和无私付出！感谢您们精心营造出的温馨幸福的大家庭，让我不论走到哪里都可以感受到特别的温暖！

2022 年 3 月

## 在读期间发表的学术论文与取得的其他研究成果

已发表论文：

- [1] **Yin F**, Chen Chang, Chen Weidong, *et al.* Superresolution quantitative imaging based on superoscillatory field[J]. Optics Express, 2020, 28(5): 7707–7720.
- [2] **Yin F**, Chen Chang, Chen Weidong. Resolution enhancement for mixed boundary conditions in inverse scattering problems[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2021, 70(5): 3643–3655.

待发表论文：

- [1] **Yin F**, Chen Chang, Chen Weidong. Nonlinear bayesian inverse scattering method with material sparsity constrains[J]. IEEE Transactions on Computational Imaging, 2022 (Submitted).
- [2] **Yin F**, Chen Chang, Chen Weidong. A value piking method for mixed boundary conditions in inverse scattering problems[C]. Progress in Electromagnetics Research Symposium, 2021 (Accepted).