Notes for GTM82

FE enthusiast enthusiast

2025.06.23

1 (Co)Homology

1.1 同伦不变性

在拓扑空间范畴 Top 下称 $f, g : X \to Y$ 是**同伦**的如果存在 $F : X \times [0,1] \to Y$ 使得 $F(\cdot, 0) = f$ 而 $F(\cdot, 1) = g$，记作 $f \simeq g$. 进而，称空间 X, Y **同伦等价** 如果 $X \xrightarrow{f} Y$ 及 $Y \xrightarrow{g} X$ 满足 $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ 以及 $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$.

在同调论中，我们常利用函子 C_* 或 C^* 把拓扑空间 X 送到它对应的链复形 $C_\bullet(X)$ 或者上链复形 $C^\bullet(X)$，将拓扑空间之间的映射送到链映射 $f_\sharp$ 或上链映射 $f^\sharp$. 因此，我们也可以讨论链映射的同伦关系.

链同伦的定义

链同伦的定义至少要满足下面的直观：是链映射之间的等价关系，并且如果 $f, g : X \to Y$ 是同伦，那么它们诱导出的 $f_\sharp, g_\sharp : C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$ 是链同伦.

Definition 1.1.1 (一般定义). *称 P 是 $f, g : C_\bullet \to D_\bullet$ 之间的链同伦，如果 P 是一列*

$$P_n : C_n \to D_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ 或者说 } P : C_\bullet \to D_{\bullet+1}$$

满足

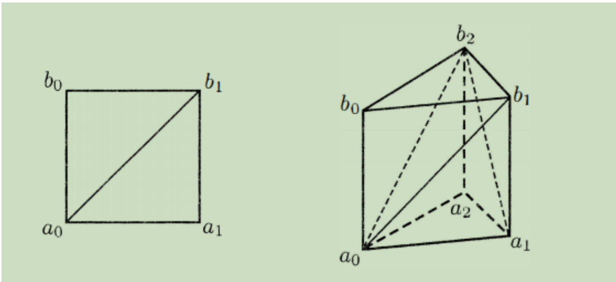
$$f_n - g_n = \partial^D \circ P_n + P_{n-1} \circ \partial^C.$$

上式也简写作 $f - g = \partial P + P\partial$.

上链同伦的定义是完全同理的，只不过改成 $P : C^\bullet \to D^{\bullet-1}$. 链同伦一般可辅以下述图表（不是交换图表）进行理解：

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_{n+1}-g_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, dashed, "f_n-g_n"] \arrow[dl, dashed, "P_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}-g_{n-1}"] \arrow[dl, dashed, "P_{n-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r, "\partial"] & D_n \arrow[r, "\partial"] & D_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

我们先直观理解一下为什么这里的 P 是同伦. 对一个单纯形 $\triangle_q$，考虑它生成的柱体 $\triangle_q \times [0,1]$，那么存在一个同伦把 $\triangle_q$ 从底面 $\triangle_q \times \{0\}$ 拉到顶面 $\triangle_q \times \{1\}$ 上. 我们把该同伦想象成连续的移动轨迹，那么先移动（得到整个柱形），再取边界就得到柱形的全表面；但是先取边界，再移动只能得到柱形的侧面. 它们之间正好差了底面和顶面，也即 $(f-g)\triangle_q$. 从而这里的 P 就类似充当了同伦的地位. 下图是 $n=2,3$ 时候的柱体.



上面的想法完全可以严格化，即具体找出一个“链同伦”P 使得 $(f-g)\triangle_q = (\partial P + P\partial)\triangle_q$. 但是如果这还不足以使人认为该定义是合理的，这里还有另一条进路：在 Top 中我们实际上对每个 X 寻找了一个对象 $X \times [0,1]$，并辅以两个嵌入 $\iota_0, \iota_1 : X \hookrightarrow X \times [0,1]$ 分别把 X 嵌入到 $X \times \{0\}$ 和 $X \times \{1\}$. 那么 f, g 同伦实际上就是说存在 F 使得图表交换：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\iota_0"] \arrow[dr, "f"'] & X \times [0,1] \arrow[d, "F"] & X \arrow[l, hook', "\iota_1"'] \arrow[dl, "g"] \\ & Y & \end{tikzcd} \tag{1}$$

对应到链复形范畴中，有没有角色充当 $X \times [0,1]$ 的位置？我们发现可以把 $[0,1]$ 本身视为一个单纯复形，它由两个 1-单形 $\{0\}, \{1\}$ 和一个 2-单形 $(0,1)$ 组成，且对 $[0,1]$ 求边界得到 $\{0\} - \{1\}$. 现在，把 X 和 Y 分别替换为链复形 $C_\bullet$ 和 $D_\bullet$，让 $[0,1] \otimes C_\bullet$ 作为乘积链复形充当上面交换图表中 $X \times [0,1]$ 的位置：

$$\begin{tikzcd} C_\bullet \arrow[r, hook, "\iota_0"] \arrow[dr, "f"'] & {[0,1] \otimes C_\bullet} \arrow[d, "F"] & C_\bullet \arrow[l, hook', "\iota_1"'] \arrow[dl, "g"] \\ & D_\bullet & \end{tikzcd}$$

下假定这样的 F 存在. 具体把乘积链复形写出来：

$$\big([0,1] \times C_\bullet\big)_n = \big(\{0\} \otimes C_n\big) \oplus \big(\{1\} \otimes C_n\big) \oplus \big((0,1) \otimes C_{n-1}\big).$$

ι_0, ι_1 作为嵌入的定义是显然的，从而 F 在 $\{0\} \otimes C_n$ 和 $\{1\} \otimes C_n$ 上的取值都是固定的. F 只额外确定了 $(0,1) \otimes C_{\bullet-1}$ 的像. 由于 F 是链映射，因此在乘积复形上有 $F\partial = \partial F$. 任取 $\alpha \in C_{\bullet-1}$，追踪 $(0,1) \otimes \alpha$ 的取值：

$$\begin{aligned} F\partial\big((0,1)\otimes\alpha\big) = F\big(\{0\}\otimes\alpha - \{1\}\otimes\alpha - (0,1)\otimes\partial\alpha\big) &= f\alpha - g\alpha - F\big((0,1)\otimes\partial\alpha\big) \\ &= \partial F\big((0,1)\otimes\alpha\big). \end{aligned}$$

记 $P: C_{\bullet-1} \to D_\bullet$, $\alpha \mapsto F\big((0,1)\otimes\alpha\big)$，则上式可化简为

$$f\alpha - g\alpha - P\partial\alpha = \partial P\alpha \Rightarrow f - g = P\partial + \partial P.$$

此即链同伦的定义式. 反过来，如果链同伦中的 P 存在，那么交换图表里的 F 也被唯一确定下来，所以两种定义是相容的. 这样来看，“同伦”这个概念本身是可以被抽象出来并推广到更一般的范畴上去的.

奇异同调里的同伦不变性

接下来的两节分别考虑奇异同调和 de Rham 上同调里的同伦不变性. 回忆在奇异同调中，全体从 q 阶标准单形到拓扑空间 X 的映射 $\sigma: \triangle_q \to X$ 生成的自由 Abel 群构成了 X 的 q 阶奇异链群 $S_q(X)$，取遍所有 q 之后给出了奇异链复形 $S_\bullet(X)$，边缘映射就是先对 $\triangle_q$ 取边缘，再复合上 σ 的作用，最后线性延拓到整个奇异链群上. 我们想要证明：

Proposition 1.1.2. *如果 $f, g: X \to Y$ 满足 $f \simeq g$，那么 $f_\sharp \simeq g_\sharp$.*

这样的话，对任意 $\alpha \in \ker\partial$，

$$(f_\sharp - g_\sharp)\alpha = (\partial P + P\partial)\alpha = \partial P\alpha \in \operatorname{im}\partial.$$

所以在同调层面上，我们有 $(f_* - g_*)[\alpha] = 0$，即 $f_* = g_*$. 这也就顺带说明了奇异同调群是同伦不变量.

证明的想法其实就是利用上一节中所说的单纯形 $\triangle_q$ 在柱体 $\triangle_q \times [0,1]$ 中的同伦提升. 模仿图中将下底面记为 $a_0a_1\ldots a_q$，上底面记为 $b_0b_1\ldots b_q$，构造 P 满足

$$P(\triangle_q) = \sum_{i=0}^{q}(-1)^i a_0\ldots a_i b_i \ldots b_q.$$

并且对 $\triangle_q$ 的每个子单形都类似定义这样的 P 把它提升到这个柱体上，线性延拓之后可以证明

$$b_0b_1\ldots b_q - a_0a_1\ldots a_q = \partial P\triangle_q + P\partial\triangle_q.$$

此处省略计算细节；关键是看出只要证完了这件事就完成了同伦不变性的证明，因为对每个奇异单形 $\sigma: \triangle_q \to X$，它被自动延拓为 $\sigma\times\mathrm{id}: \triangle_q\times[0,1] \to X\times[0,1]$. $P(\triangle_q)$ 作为 $\triangle_q\times[0,1]$ 上的 $q+1$ 维链，其在 $\sigma\times\mathrm{id}$ 下的像就成为 $X\times[0,1]$ 中的 $q+1$ 维奇异链，将这个链记为 $P\sigma$，这就得到了

$$P: S_\bullet(X) \to S_{\bullet+1}(X\times[0,1]), \quad \iota_{0\sharp} - \iota_{1\sharp} = \partial P + P\partial.$$

其中 ι_0, ι_1 的定义同前（$X \hookrightarrow X\times[0,1]$ 的嵌入）. 那么对任意同伦的 $f, g: X \to Y$，存在 $F: X\times[0,1] \to Y$ 使得 $f = F\circ\iota_0$ 以及 $g = F\circ\iota_1$，所以 $F_\sharp\circ\iota_{0\sharp} \simeq F_\sharp\circ\iota_{1\sharp}$. 这就完成了整个证明. 姜伯驹 P17 上给出了上面过程一个很好的总结：

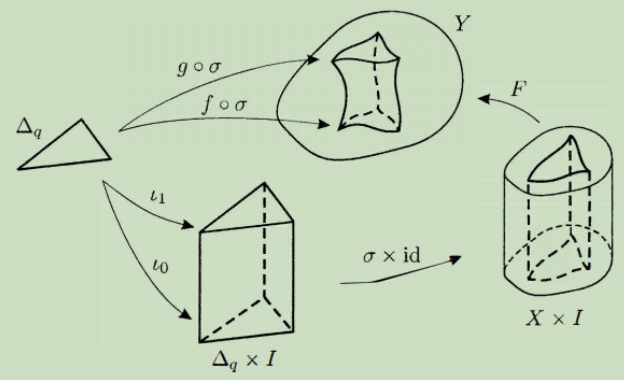


图 1.4 链同伦的作法

de Rham 上同调里的同伦不变性

de Rham 上同调定义在光滑流形 M 上，光滑流形上的全体 q-形式构成 $\Omega^q(M)$，通过外微分运算给出上链复形 $\Omega^\bullet(M)$. 我们接下来说明如果 $f, g : M \to N$ 满足 $f \simeq g$ 那么 $f_\sharp \simeq g_\sharp$. 第一个问题是：光滑流形中的态射 f, g 都是光滑的，所以在这里 $f \simeq g$ 指代所谓“光滑同伦”，而一般来说同伦的定义只依赖于空间的拓扑结构. 好在我们有下面的结论：

Theorem 1.1.3 (Whitney 逼近定理). *对任意连续映射 $g \in C^0(M, N)$，存在光滑映射 $f \in C^\infty(M, N)$ 使得 $f \simeq g$. 如果 g 在闭子集 $A \subset M$ 上光滑，则可以选取 f 使得 $f|_A = g|_A$.*

由于这个证明与主线无关，证明留至最后. 用它可以推出：对光滑映射 f, g，f 同伦于 g 等价于 f 光滑同伦于 g. 所以 de Rham 上同调理论的同伦不变性的确是完整的：上同调群只依赖于流形 M 本身的拓扑结构而不依赖于其光滑结构，比如说如果在同一个拓扑空间上能定义两种不同的光滑结构，那么它们所得的 $\Omega^\bullet(M)$ 不同，但是得到的同调群是同构的.

选取 $F : M \times [0,1] \to N$ 使得图表 (1) 交换. 由于 $M \times [0,1]$ 是带边的，通过在 $(-\infty, 0]$ 和 $[1, +\infty)$ 上的常值延拓让其成为 $M \times \mathbb{R} \to N$ 的连续映射 $\tilde{F}$. 然后再选取光滑映射 $\overline{F} : M \times \mathbb{R} \to N$ 在 $M \times (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$ 上和 $\tilde{F}$ 一致，就得到了 f 和 g 之间的光滑同伦. 于是，只需要证明嵌入 ι_0 和 ι_1 诱导出的 ι_0^* 和 ι_1^* 链同伦，就得到 $\iota_0^* \circ F^* \simeq \iota_1^* \circ F^*$，就得到了结论.

注意现在 $\iota_i^* : \Omega^\bullet(M \times \mathbb{R}) \to \Omega^\bullet(M)$ 作用是反向的，因此需要选择 $P : \Omega^{\bullet+1}(M \times \mathbb{R}) \to \Omega^\bullet(M)$. 想法是把 $\mathbb{R}$ 分量上的形式通过积分来缩并掉.

首先，在每点的切空间处根据是否有 $\mathbb{R}$ 切向的贡献，可以把一个 $T_p(M \times \mathbb{R})$ 上的 n 阶线性交错函数分解为 $f_1 + f_2 \wedge c\,\mathrm{d}t$，其中 f_1, f_2 分别是 T_pM 上的 n,$n-1$ 阶线性交错函数在投影映射 $T_p(M \times \mathbb{R}) \to T_p(M)$ 下的拉回. 因此如果全局地进行考虑，

则 $\Omega^\bullet(M)$ 中的元素 ω 可以被分解为

$$\omega = p^*\omega_1 \wedge g + p^*\omega_2 \wedge f\,\mathrm{d}t.$$

其中 $\omega_1 \in \Omega^\bullet(M)$ 而 $\omega_2 \in \Omega^{\bullet-1}(M)$，$f, g \in C^\infty(M \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.（注意这里局部上确实 $\Omega^\bullet(M\times\mathbb{R})$ 是 $\Omega^\bullet(M)\otimes\Omega^\bullet(\mathbb{R})$，但是整体上显然不对. 有趣的讨论应当是 $H^\bullet(M\times\mathbb{R})$ 和 $H^\bullet(M)\otimes H^\bullet(\mathbb{R})$ 之间的关系，即 Kunneth Formula） 这样一来，可以自然地规定

$$P : \Omega^\bullet(M \times \mathbb{R}) \to \Omega^{\bullet-1}(M), \quad \omega \mapsto \omega_2 \wedge \int_0^1 f\,\mathrm{d}t.$$

在闭区间上该积分不会存在定义上的问题. 接下来就是细节上的验证：

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}P)\omega = \mathrm{d}(\omega_2 \wedge \int_0^1 f\,\mathrm{d}t) &= \mathrm{d}\omega_2 \wedge \int_0^1 f\,\mathrm{d}t + (-1)^{n-1}\omega_2 \wedge \mathrm{d}_{\boldsymbol{x}}\left(\int_0^1 f\,\mathrm{d}t\right) \\ &+ (-1)^{n-1}\omega_2 \wedge (f(x,1) - f(x,0)).\end{aligned}$$

上面三项分别是对第一项微分，对第二项的前

$$\begin{aligned}(P\,\mathrm{d})\omega &= P\left((p^*\omega_1 \wedge \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{t}}\,\mathrm{d}t) + (\mathrm{d}_{\boldsymbol{x}} p^*\omega_2) \wedge f\,\mathrm{d}t + p^*\omega_2 \wedge \mathrm{d}_{\boldsymbol{x}} f \wedge \mathrm{d}t\right) \\ &=\end{aligned}$$

今天补完

王作勤老师的讲义中给出了上面命题的一个有趣的推广：

Proposition 1.1.4. 如果 M 上的向量场 X 给出流 ϕ_t，那么 $\phi_1^\sharp$ 和 $\phi_0^\sharp = \mathrm{id}$ 作为 $\Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(M)$ 的链映射是链同伦的.

若该命题成立，则在 $M \times \mathbb{R}$ 上选取向量场为沿 $\mathbb{R}$ 方向的单位向量场，该向量场形成的流就是在 $\mathbb{R}$ 分量上的平移，所以 $\iota_1 = \phi_1 \circ \iota_0$. 因此如果 $\phi_1^* \simeq \phi_0^* = \mathrm{id}$，那么

$$\iota_1^* = \iota_0^* \circ \phi_1^* \simeq \iota_0^*$$

这就证明了结论.

下面着手证明该命题，重要的观察是

$$(\phi_1^* - \phi_0^*)\omega = \int_0^1 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_t^*\omega\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathcal{L}_X(\phi_t^*\omega)\,\mathrm{d}t.$$

其中 $\mathcal{L}_X : \Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(M)$ 是所谓 **Lie 导数**，表达算子 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}\phi_t^*$ 在全体形式上的作用. 把它单独拿出来是因为 Lie 导数和 de Rham 上同调的适配性很高：

Proposition 1.1.5. $\mathcal{L}_X$ 是链映射.

Proof. 根据 Lie 导数的定义有

$$\mathcal{L}_X(\omega) = \lim_{t\to 0}\frac{\phi_t^*\omega - \omega}{t}.$$

所以 Lie 导数和外微分 d 的交换性完全由 ϕ_t^* 和 d 的交换性得到.

作为链映射，如果可以证明 $\mathcal{L}_X \simeq 0$，那么 $\mathcal{L}_X \circ \phi_t^* \simeq 0$，那么把它们对 t “求和”后仍然同伦于 0（实际上是积分，而积分后同伦关系仍然成立来自于积分和外微分运算的交换性，这可以追溯到形式的光滑性），这就得到 $\phi_1^* - \phi_0^* \simeq 0$. 实际上这已经被整理到 Cartan 公式之中：

Proposition 1.1.6 (Cartan's Magic Formula). $\mathcal{L}_X = \mathrm{d}\iota_X + \iota_X \mathrm{d}$，从而 $\mathcal{L}_X$ 和 0 链同伦. 其中 $\iota_X : \Omega^\bullet(M) \to \Omega^{\bullet-1}(M)$ 是向量场和微分形式之间的缩并运算，对 $\omega \in \Omega^n(M)$，每个 $\omega|_p$ 都是 n 阶交错线性函数，那么 $\omega|_p(X|_p, \cdot, \dots, \cdot)$ 就是 $n-1$ 阶交错线性函数，所以可定义 $\iota_X\omega := \omega(X, \cdot, \dots, \cdot) \in \Omega^{n-1}(M)$.

缩并运算其实很容易理解，ω 是 input n 个向量场得到一个数，所以固定第一个向量场为 X 就得到 input $n-1$ 个向量场得到一个数.

所以只需证明 Cartan Formula 成立. 证明的关键在于注意到下面的

Proposition 1.1.7 (Lie 导数的 Leibniz 法则). $\mathcal{L}_X(\omega \wedge \psi) = \mathcal{L}_X\omega \wedge \psi + \omega \wedge \mathcal{L}_X\psi$.

Proof. 完全模仿普通求导的 Leibniz 法则的证明.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X(\omega \wedge \psi) &= \lim_{t\to 0} \frac{\phi_t^*(\omega \wedge \psi) - \omega \wedge \psi}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\phi_t^*\omega \wedge \phi_t^*\psi - \omega \wedge \psi}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \phi_t^*\omega \wedge \frac{\phi_t^*\psi - \psi}{t} + \lim_{t\to 0} \frac{\phi_t^*\omega - \omega}{t} \wedge \psi \\
&= \omega \wedge \mathcal{L}_X\psi + \mathcal{L}_X\omega \wedge \psi.
\end{aligned}$$

Lemma 1.1.8. 对 0-form $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$，$\mathcal{L}_X f = Xf$，后者表示向量场在函数上的方向求导作用.

Proof. 直接利用定义：设曲线 $\gamma \subset M$ 满足 $\gamma(0) = a$ 而 $\gamma'(t) = X(t)$. 则

$$\mathcal{L}_X(f)(a) = \lim_{t\to 0} \frac{\phi_t^* f(a) - f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(0))}{t} = \mathrm{d}f|_a(\gamma'(0)) = Xf|_a.$$

最后来完成命题 1.1.6 的证明.

Proof. 归纳奠基：当 f 是 0-form 时 $\mathcal{L}_X(f) = Xf = \iota_X \mathrm{d}f = (\mathrm{d}\iota_X + \iota_X \mathrm{d})f$ 成立.

归纳步骤：今天补完