Problem 1

考虑映射函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，其中

$$f(x)=\begin{cases} x+x^2\sin(\frac{\pi}{x}), & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

证明 f 在 $\mathbb{R}$ 上可微分并且 $\mathrm{d}f(0)\neq 0$；但是在 0 的任意小邻域内 f 均不是单射. 请对比反函数定理的条件，说明有哪个条件没有被满足.

Proof. 根据定义可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}(1+x\sin(\frac{\pi}{x}))=1.$$

所以 f 在 0 处可微且 $\mathrm{d}f(0)\neq 0$. 此外 f 在非零处是 C^1 的，满足

$$\begin{aligned} f'(x)&=1+2x\sin(\frac{\pi}{x})+x^2\cos(\frac{\pi}{x})\cdot -\frac{\pi}{x^2}\\ &=1+2x\sin(\frac{\pi}{x})-\pi\cos(\frac{\pi}{x}).\end{aligned}$$

所以 $\lim_{x\to 0}f'(x)$ 不存在，因此 f 在 0 附近不是 C^1 的，所以不满足反函数定理：这是因为在 0 附近导函数总是有正有负（取 $\cos\frac{\pi}{x}=\pm 1$），所以 f 不单调，从而也不是单射.

Problem 2

如果 f,g 是区域 Ω 上 k 次连续可微的函数，证明 fg 也是 Ω 上的 k 次可微函数.

Proof. 当 $k=0$ 时，f,g 连续显然可推出 fg 是连续的. 对 k 归纳，假设 $k-1$ 时成立，考察 k 时情形.

由于 $f,g\in C^k$，所以对任意 i,j 均有

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x_i}},\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{x_i}}\in C^{k-1}\Rightarrow f\cdot\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{x_i}},g\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x_i}}\in C^{k-1}.$$

根据求导法则可知

$$\frac{\partial(fg)}{\partial \boldsymbol{x_i}}=f\cdot\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{x_i}}+g\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x_i}}\in C^{k-1}.$$

所以 fg 每个分量上均 C^{k-1}，故 fg 是 C^k 的.

Problem 3

考虑映射 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ (x,y)\mapsto(e^x\cos y,e^x\sin y)$. 证明 f 在 $(x,y)\neq(0,0)$ 处都满足反函数定理的要求但 f 不是单射也不是满射.

Proof. 计算偏导数：

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}|_{(x,y)} = (e^x\cos y, e^x\sin y) = f(x,y).$$
$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{y}}|_{(x,y)} = (-e^x\sin y, e^x\cos y) = f(x,y+\frac{\pi}{2}).$$

f 的偏导数均连续，所以 f 是 C^1 的. 而在 (x,y) 处 Jacobi 行列式为

$$e^{2x}\cos^2 y + e^{2x}\sin^2 y = e^{2x} \neq 0.$$

所以 f 满足反函数定理的要求. 但 f 不满，因为 $f^{-1}(0,0) = \varnothing$，$f$ 不单因为 $f(x,y) = f(x,y+2\pi)$.

Problem 4

我们考虑映射

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad (x,y)\mapsto(2x-y+x^2y-2y^5, x+3y-4x^2y^2)$$

证明：存在 0 的开邻域 U 和 V 使得 $f:U\to V$ 是微分同胚.

Proof. 由于 f 的每个分量为一些多项式，所以 f 的任意阶偏导均连续，故 f 光滑. 下面验证反函数定理条件：首先 $f(0,0)=(0,0)$，所以两个开邻域均含 0. 其次求偏导可知

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} = (2+2xy, 1-8xy^2),\quad \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{y}} = (-1+x^2-10y^4, 3-8x^2y).$$
$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}|_{(0,0)} = (2,1),\quad \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{y}}|_{(0,0)} = (-1,3).$$

因此 $\det J_f|_{(0,0)} \neq 0$，所以 $\mathrm{d}f|_{(0,0)}$ 可逆，因此由反函数定理存在 U,V 使得结论成立.

Problem 5

假设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是连续可微的. 如果存在 $a>0$ 使得对任意的 $x,y\in\mathbb{R}^n$，我们都有

$$|f(x)-f(y)| \geq a\,|x-y|\,,$$

那么 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是 C^1 的微分同胚.

Proof. 由于 f 是 C^1 的，那么只需证 f 是双射且 f^{-1} 也是 C^1 的. 首先证明 $\mathrm{d}f$ 处处非退化. 根据 $\mathrm{d}f$ 的定义，

$$f(x+\boldsymbol{v}) = f(x) + \mathrm{d}f|_x(\boldsymbol{v}) + o(\boldsymbol{v}).$$

代入条件可知对任意 $\boldsymbol{v}$ 均有

$$|\mathrm{d}f|_x(\boldsymbol{v}) + o(\boldsymbol{v})| \geq a\cdot|\boldsymbol{v}|\,.$$

假设存在 $\boldsymbol{v}$ 使得 $\mathrm{d}f|x(\boldsymbol{v})=0$，那么在上式中用 $\lambda\boldsymbol{v}$ 代替 $\boldsymbol{v}$ 可得

$$|o(\lambda\boldsymbol{v})|\geq a\cdot|\lambda\boldsymbol{v}|\,.$$

所以令 $\lambda\to0$ 就可知 $0\geq a$，矛盾.

所以 $\mathrm{d}f$ 处处非退化，那么由反函数定理，对任意 $f(x)\in\mathbb{R}^n$，存在开集 $V\ni x$ 及开集 $f(V)\ni f(x)$ 使得 f 在 V 上是双射，而 $f(V)\subset\operatorname{im}f$，所以 $\operatorname{im}f$ 是开集. 设有一列 $f(x_n)\to y$，根据条件可知 x_n 也是 $\mathbb{R}^n$ 上的 Cauchy 列，可设 $x_n\to x$. 由 f 连续可直接得到 $f(x)=y$，因此 $\operatorname{im}f$ 为闭集.

综上 $\operatorname{im}f$ 既开又闭，所以 $\operatorname{im}f$ 要么是全集要么是空集，显然它不是空集，故 f 为满射. 又由反函数定理可知 f^{-1} 在整个 $\mathbb{R}^2$ 上 C^1（因为 C^1 是局部性质），证毕.

Problem 6

假设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是 C^∞ 的并且存在 $0\leq\alpha<1$，使得 $|f'(x)|\leq\alpha$. 定义

$$F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad (x,y)\mapsto(x+f(y),y+f(x)).$$

Proof.

- 由 $f\in C^\infty$ 可知 F 的任意阶偏导均存在连续，所以 F 是光滑微分映射.
- 不妨设 $|y_2-y_1|\geq|x_1-x_2|$，计算得

  $$\begin{aligned}|F(x_1,y_1)-F(x_2,y_2)|&=|(x_1-x_2+f(y_1)-f(y_2),y_1-y_2+f(x_1)-f(x_2))|\\&\geq|y_1-y_2+f(x_1)-f(x_2)|\,.\end{aligned}$$

  根据 $|f'(x)|\leq\alpha$ 和微分中值定理可知

  $$|f(x_1)-f(x_2)|=|f'(\xi)|\cdot|x_1-x_2|\leq\alpha\,|x_1-x_2|\leq\alpha\,|y_1-y_2|\,.$$

  因此

  $$\begin{aligned}|F(x_1,y_1)-F(x_2,y_2)|&\geq|y_1-y_2|-|f(x_1)-f(x_2)|\geq(1-\alpha)\,|y_1-y_2|\\&\geq\frac{1-\alpha}{\sqrt{2}}\sqrt{(y_1-y_2)^2+(x_1-x_2)^2}.\end{aligned}$$

  因此 F 满足上一题的条件，因此 F 是 C^1 同胚，从而是双射且是开映射.
- 最后证明 F^{-1} 存在且 F^{-1} 是 C^∞ 的，因为 $\mathrm{d}F$ 作为矩阵函数每个分量均是 C^∞ 的，而 $\mathrm{d}F^{-1}|_{\boldsymbol{p}}=(\mathrm{d}|_{F^{-1}(\boldsymbol{p})})^{-1}$ 作为逆矩阵也是 C^∞ 的，所以 F^{-1} 是 C^∞ 的，从而 F 是微分同胚.

Problem 7

$f, g \in C^1(\mathbb{R})$ 是实值函数，假设对任意的 $x, y \in \mathbb{R}$，都有 $f'(x) \neq g'(y)$. 我们定义

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (x + y, f(x) + g(y)).$$

证明 $F(\mathbb{R}^2)$ 是开集且 $F : \mathbb{R}^2 \to F(\mathbb{R}^2)$ 是 C^1 微分同胚.

Proof. 计算偏导数得

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}}|_{(x,y)} = (1, f'(x)), \quad \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{y}}|_{(x,y)} = (1, g'(y)).$$

所以 $\det \mathrm{d}F|_{(x,y)} = g'(y) - f'(x)$，所以 $\mathrm{d}F$ 处处可逆，因此对任意 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$，存在 $\boldsymbol{p}$ 的开邻域 $U_{\boldsymbol{p}}$ 和 $F(\boldsymbol{p})$ 的开邻域 $V_{F(\boldsymbol{p})}$ 使得 $F : U_{\boldsymbol{p}} \to V_{F(\boldsymbol{p})}$ 是双射. 从而

$$F(\boldsymbol{p}) \in V_{F(\boldsymbol{p})} \subset F(\mathbb{R}^2) \Rightarrow F(\mathbb{R}^2) = \bigcup_{\boldsymbol{p}} V_{F(\boldsymbol{p})}$$

是开集. 接下来证明 F 在全局上是单射，这是因为如果有 $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ 使得 $F(x_1, y_1) = F(x_2, y_2)$，即

$$x_1 + y_1 = x_2 + y_2, \quad f(x_1) + g(y_1) = f(x_2) + g(y_2).$$

则 $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$，由 $f, g \in C^1(\mathbb{R})$，利用微分中值定理得

$$(x_1 - x_2) f'(\xi) = (y_2 - y_1) g'(\zeta) \to f'(\xi) = g'(\zeta).$$

这与条件矛盾，所以 F 是单射，因此可在 $F(\mathbb{R}^2)$ 上讨论 F^{-1}，由于 F^{-1} 在每个局部上是 C^1 的，因此整个 F^{-1} 是 C^1 的，所以 F 是 $\mathbb{R}^2$ 到其像集的微分同胚.

Problem 8

对 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$，定义

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|}.$$

其中 $|\cdot|$ 是欧氏空间上的标准距离，证明这是一个范数并且和范数

$$\|A\|_1 = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$$

等价.

Proof. 首先证明 $\|\cdot\|$ 是范数：显然 $\|A\| \geq 0$，当 $A \neq 0$ 时存在 x 使得 $Ax \neq 0$，从而 $\|A\| > 0$. 对 $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$，有

$$\|\lambda A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{|\lambda A x|}{|x|} = |\lambda| \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = |\lambda| \, \|A\| .$$

$$\|A + B\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{|Ax + Bx|}{|x|} \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} + \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{|Bx|}{|x|} = \|A\| + \|B\| .$$

再证明范数等价，设 $x=\sum_i x_ie_i$，那么就有

$$Ax=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)e_i.$$

所以

$$\begin{aligned}|Ax| &\le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)^2}\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\|A\|_1\cdot\sum_{j=1}^{n}|x_j|\right)^2}\\ &\le\sqrt{n}\,\|A\|_1\cdot\sum_{j=1}^{n}|x_j|\le n\sqrt{n}\,\|A\|_1\cdot|x|\,.\end{aligned}$$

所以 $\|A\|\le n\sqrt{n}\,\|A\|_1$. 另一方面，分别取 $x=e_i$ 可得

$$\|A\|\ge\max_{1\le i\le n}\frac{|Ae_i|}{|e_i|}=\max_{1\le i\le n}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2}\ge\max_{1\le i\le n}\max_{1\le j\le n}|a_{ij}|\ge\frac{1}{n^2}\|A\|_1\,.$$

所以两个范数等价.

Problem 9

证明 $GL_n(\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 中的开集，并且映射

$$\mathrm{inv}:\ GL_n(\mathbb{R})\to GL_n(\mathbb{R}),\quad A\mapsto A^{-1}.$$

是 C^1 的映射. 进一步地，对于 $X\in\mathbb{R}^{n\times n}$，

$$\mathrm{d}\,\mathrm{inv}\,|_A(X)=-A^{-1}XA^{-1}.$$

Proof. 由于 $\det:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}$, $A\mapsto\det A$ 是连续函数，因此 $\det^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})=GL_n(\mathbb{R})$ 是开集.

计算 $\mathrm{d}\,\mathrm{inv}\,|_A$ 可知

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\,\mathrm{inv}\,|_A(X)&=\lim_{\lambda\to0}\frac{(A+\lambda X)^{-1}-A^{-1}}{\lambda}=\lim_{\lambda\to0}A^{-1}\frac{(I+\lambda A^{-1}X)^{-1}-I}{\lambda}\\ &=\lim_{\lambda\to0}A^{-1}\frac{\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\lambda^i(A^{-1}X)^i-I}{\lambda}\\ &=\lim_{\lambda\to0}A^{-1}(-XA^{-1}+\sum_{i=2}^{\infty}\lambda^{i-1}(-1)^i(A^{-1}X)^i)=-A^{-1}XA^{-1}.\end{aligned}$$

因此 $\mathrm{d}\,\mathrm{inv}\,|_A$ 的确是关于 X 线性映射，并且关于 A 连续. 所以 inv 是 C^1 的.

Problem 10

定义平方运算 $\Theta:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n}$, $A\to A^2$. 证明 Θ 连续可微并计算其微分 $\mathrm{d}\Theta|_A$. 据此证明存在 $\varepsilon>0$，使得当 $\|B-I\|<\varepsilon$ 时存在 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $A^2=B$.

其中 $\|\cdot\|$ 为第 8 题中的范数.

Proof. 计算 $\mathrm{d}\Theta|_A$ 可知

$$\mathrm{d}\Theta|_A(X) = \lim_{\lambda\to 0}\frac{(A+\lambda X)^2 - A^2}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0}(AX + XA + \lambda X^2) = AX + XA.$$

所以 $\mathrm{d}\Theta|_A$ 是关于 X 的线性映射并且关于 A 是连续的，所以 Θ 是 C^1 的.

令 $A = I$，则 $\mathrm{d}\Theta|_I = 2\,\mathrm{id}$ 是可逆的. 由反函数定理，存在 I 的开邻域 U, V 使得 Θ 是 $U \to V$ 的双射. 特别地，V 中的每个点均存在原像. 这也就是说，存在 $\varepsilon > 0$ 使得当 $\|B - I\| < \varepsilon$ 时，存在 A 使得 $A^2 = B$.

Problem 11

假设 $n = 2$，$U = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 是否存在 I 的邻域 $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$，$U$ 的邻域 $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ 以及连续可微的映射 $\Psi : \mathcal{I} \to \mathcal{U}$ 使得 $\Psi(I) = U$ 且对任意的 $A \in \mathcal{I}$ 均有 $\Psi(A)^2 = A$?

Proof. 假设满足要求的 Ψ 存在，对条件式两边微分得

$$\mathrm{d}\Psi^2|_A = \mathrm{d}\,\mathrm{id}\,|_A \Rightarrow \mathrm{d}\Theta|_{\Psi(A)} \circ \mathrm{d}\Psi|_A = \mathrm{id}\,.$$

令 $A = I$，两边代入 X:

$$\mathrm{d}\Theta|_U(\mathrm{d}\Psi_I(X)) = X \Rightarrow U(\mathrm{d}\Psi_I(X)) + (\mathrm{d}\Psi_I(X))U = X.$$

设 $\mathrm{d}\Psi_I(X) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，那么上式可化为

$$\begin{pmatrix} -a & -b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a & 0 \\ 0 & 2d \end{pmatrix} = X.$$

但是如果取 X 为非对角阵，这就不可能成立，因此满足条件的 Ψ 不存在.

Problem 12

我们定义立方运算

$$\mathcal{C} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}, \quad A \mapsto A^3.$$

证明 $\mathcal{C}$ 是连续可微的，并计算它的微分 $\mathrm{d}\mathcal{C}|_A$. 进一步证明

$$\|\mathrm{d}\mathcal{C}|_A - 3\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n\times n}}\| \le 6\,\|A - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\| + 3\,\|A - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\|^2\,.$$

其中 $\|\cdot\|$ 是第 8 题中内积，它可以看作是对线性映射所定义的.

Proof. 计算微分可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathcal{C}|_A(X) &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{(A+\lambda X)^3 - A^3}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda\to 0}((A^2X + AXA + XA^2) + \lambda\cdot *) \\
&= A^2X + AXA + XA^2.
\end{aligned}$$

因此

$$\mathrm{LHS} = \sup_{X\in\mathbb{R}^{n\times n}, X\neq 0}\frac{|A^2X + AXA + XA^2 - 3X|}{|X|}.$$

这里的 $|X| = \sqrt{\sum_{i,j} x_{ij}^2}$. 令 $B = A - I$，则

$$\begin{aligned}
&A^2X + AXA + XA^2 - 3X \\
=&(B^2 + 2B + I)X + (B+I)X(B+I) + X(B^2 + 2B + I) - 3X \\
=&B^2X + BXB + XB^2 + 3BX + 3XB.
\end{aligned}$$

先考虑最简单的情形，对任意 $C\in\mathbb{R}^{n\times n}$，如果设 $X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_n\end{pmatrix}$，那么 $CX = \begin{pmatrix} CX_1 & CX_2 & \dots & CX_n\end{pmatrix}$. 所以

$$\frac{|CX|}{|X|} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n |CX_i|^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n |X_i|^2}} \leq \max_{1\leq i\leq n, X_i\neq 0}\frac{|CX_i|}{|X_i|} \leq \sup_{V\in\mathbb{R}^{n\times 1}, V\neq 0}\frac{|CV|}{|V|} = \|C\|.$$

同理有 $\dfrac{|XC|}{|X|} \leq \|C\|$，所以

$$\begin{aligned}
\frac{|B^2X|}{|X|} &= \frac{|B(BX)|}{|BX|}\cdot\frac{|BX|}{|X|} \leq \|B\|^2; \\
\frac{|BXB|}{|X|} &= \frac{|B(XB)|}{|XB|}\cdot\frac{|XB|}{|X|} \leq \|B\|^2; \\
\frac{|XB^2|}{|X|} &= \frac{|(XB)B|}{|XB|}\cdot\frac{|XB|}{|X|} \leq \|B\|^2.
\end{aligned}$$

综上，

$$\begin{aligned}
\mathrm{LHS} &\leq \sup_{X\in\mathbb{R}^{n\times n}, X\neq 0}\frac{|B^2X| + |BXB| + |XB^2| + 3|BX| + 3|XB|}{|X|} \\
&\leq 3\|B\|^2 + 6\|B\|.
\end{aligned}$$

证毕.

Problem 13

令

$$B_{1/3}(I_n) = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} : \|X - I_n\| < \frac{1}{3}\}.$$

证明：$\mathcal{C}(B_{1/3}(I_n))$ 是 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 中的开集并且

$$\mathcal{C} : B_{1/3}(I_n) \to \mathcal{C}(B_{1/3}(I_n))$$

是微分同胚.

Proof. 对 $X_1, X_2 \in B_{1/3}(I_n)$，设 $X_i = I_n + Y_i$，则 $\|Y_i\| < 1/3$. 计算范数得

$$\left\|X_1^3 - X_2^3\right\| = \left\|(I_n + Y_1)^3 - (I_n + Y_2)^3\right\| = \left\|3(Y_1 - Y_2) + 3(Y_1^2 - Y_2^2) + (Y_1^3 - Y_2^3)\right\|.$$

由于

$$\|AB\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^{n\times 1}, x\neq 0} \frac{|ABx|}{|x|} \leq \sup_{Bx\in\mathbb{R}^{n\times 1}, Bx\neq 0} \frac{|A(Bx)|}{|Bx|} \cdot \sup_{x\in\mathbb{R}^{n\times 1}, x\neq 0} \frac{|Bx|}{|x|} \leq \|A\|\,\|B\|,$$

所以

$$\begin{aligned} \left\|Y_1^2 - Y_2^2\right\| &\leq \|Y_1 - Y_2\|\,\|Y_1 + Y_2\| \leq \frac{2}{3}\,\|Y_1 - Y_2\|; \\ \left\|Y_1^3 - Y_2^3\right\| &\leq \|Y_1 - Y_2\|\,\left\|Y_1^2 + Y_1Y_2 + Y_2^2\right\| \leq \frac{1}{3}\,\|Y_1 - Y_2\|. \end{aligned}$$

这推出

$$\begin{aligned} \left\|X_1^3 - X_2^3\right\| &\geq 3\,\|Y_1 - Y_2\| - 3\,\left\|Y_1^2 - Y_2^2\right\| - \left\|Y_1^2 - Y_2^3\right\| \\ &\geq (3 - 2 - \frac{1}{3})\,\|Y_1 - Y_2\| = \frac{2}{3}\,\|X_1 - X_2\|. \end{aligned}$$

从而 $\mathcal{C}$ 在 $B_{1/3}(I_n)$ 上为单射，因此利用第 5 题的结论（范数使用 $\|\cdot\|$）可知 $\mathrm{d}\mathcal{C}$ 处处非退化，从而根据反函数定理 $\mathcal{C}$ 在 $B_{1/3}(I_n)$ 上是开映射，所以 $\mathcal{C}$ 是 $B_{1/3}(I_n) \to \mathcal{C}(B_{1/3}(I_n))$ 的微分同胚，证毕.

Problem 14

设 $a, b \in \mathbb{R}$. 定义映射

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (x + a\sin y, y + b\sin x).$$

证明 f 是 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 的微分同胚当且仅当 $ab \in (-1, 1)$.

Proof. 当 $|ab| \geq 1$ 时，我们证明 f 不是微分同胚. 计算 $\mathrm{d}f$：

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}|_{(x,y)} = (1, b\cos x), \quad \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{y}}|_{(x,y)} = (a\cos y, 1).$$

所以

$$\det \mathrm{d}f|_{(x,y)}| = 1 - ab\cos x\cos y.$$

如果 $|ab| \geq 1$，那么一定存在一组 (x, y) 使得 $\det \mathrm{d}f|_{(x,y)} = 0$. 但如果 f 为微分同胚，那么

$$\mathrm{d}f^{-1}|_{f(x,y)} \circ \mathrm{d}f|_{(x,y)} = \mathrm{id}$$

所以 $\mathrm{d}f$ 应当处处非退化，矛盾.

下证 $|ab| < 1$ 时 f 是微分同胚，显然 f 是 C^∞ 的，并且 $\mathrm{d}f$ 处处非退化.

首先证明 f 是单射，假设存在 $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ 使得

$$\begin{cases} x_1 + a\sin y_1 = x_2 + a\sin y_2; \\ y_1 + b\sin x_1 = y_2 + b\sin x_2. \end{cases}$$

对 $\sin x$ 使用微分中值定理可得

$$\begin{aligned} &|x_1 - x_2| = |a|\,|\sin y_1 - \sin y_2| = |a|\,|\cos\xi|\,|y_1 - y_2| \leq |a|\,|y_1 - y_2|\,; \\ &|y_1 - y_2| \leq |b|\,|x_1 - x_2|\,. \end{aligned}$$

两式结合可知 $|ab| \geq 1$，矛盾.

再证明 f 为满射. 首先注意到 $f(x + 2m\pi, y + 2n\pi) = f(x, y) + 2\pi(m, n)$，因此首先考虑 f 在闭集 $A = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ 上的像.

- $\mathrm{im}\, f$ 为开集，这是因为 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上为开映射，这由 $\mathrm{d}f$ 处处非退化得到.

- 下证 $\mathrm{im}\, f$ 为闭集，考虑一列 $\mathbb{R}^2$ 中的收敛子列 $\boldsymbol{p}_i \to \boldsymbol{p}$. 如果 $\boldsymbol{p}_i \in \mathrm{im}\, f$，我们证明 $\boldsymbol{p} \in \mathrm{im}\, f$. 设 $f(\boldsymbol{q}_i) = \boldsymbol{p}_i$，则存在 N 使得对任意 $i > N$ 均有 $|\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}| < 1$，因此不妨设所有 $\boldsymbol{p}_i$ 均在 $B_{\boldsymbol{p}}(1)$ 内，则 $|f(\boldsymbol{q}_1) - \boldsymbol{p}| < 1$.

- 注意到

  $$f(x + 2m\pi, y + 2n\pi) = f(x, y) + 2\pi(m, n).$$

  而 $A = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ 是紧集，所以 $f(A)$ 也是紧集，即有界闭集，因此可找到 $R > 0$ 使得 $f(A) \subset B_R(0)$.

  现在将 $\mathbb{R}^2$ 按以 2π 为大小的网格划分，每一块为 $[2m\pi, (2m+2)\pi) \times [2n\pi, (2n+2)\pi)$. 则对任意 $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^2$，存在唯一的 (m, n) 使得 $\boldsymbol{q} - 2\pi(m, n)$ 和 $\boldsymbol{q}_1$ 落在同一块内，满足

  $$\begin{aligned} &|\boldsymbol{q} - 2\pi(m, n) - \boldsymbol{q}_1| < 4\pi \\ \Rightarrow &2\pi\sqrt{m^2 + n^2} = |2\pi(m, n)| > |\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_1| - 4\pi. \end{aligned}$$

  则

  $$\begin{aligned} &|f(\boldsymbol{q} - 2\pi(m, n)) - f(\boldsymbol{q}_1)| < R \\ \Rightarrow &|f(\boldsymbol{q}) - f(\boldsymbol{q}_1)| > |2\pi(m, n)| - R = 2\pi\sqrt{m^2 + n^2} - R. \\ \Rightarrow &|f(\boldsymbol{q}) - \boldsymbol{p}| > 2\pi\sqrt{m^2 + n^2} - R - 1 > |\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_1| - 4\pi - R - 1. \end{aligned}$$

  因此只要 $|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_1| > 4\pi + R + 2$，那么就有 $|f(\boldsymbol{q}) - \boldsymbol{p}| > 1$，从而 $\boldsymbol{q} \notin \{\boldsymbol{q}_i\}$.

- 因此 $\{\boldsymbol{q}_i\} \subset \overline{B_{4\pi+R+2}(\boldsymbol{q}_1)}$，而这是一个紧集，所以一定存在 $\{\boldsymbol{q}_i\}$ 的收敛子列 $\boldsymbol{q}_{i_k} \to \boldsymbol{r}$. 由连续性可知

$$f(\boldsymbol{r}) = \lim_{k\to\infty} f(\boldsymbol{q}_{i_k}) = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{p}_{i_k} = \boldsymbol{p}.$$

从而 $\boldsymbol{p} \in \operatorname{im} f$，证毕.

所以 $\operatorname{im} f$ 既开又闭并且非空，故 $\operatorname{im} f = \mathbb{R}^2$，即 f 为满射. 所以 f^{-1} 是良定义的，根据反函数定理它在每个局部上都是 C^∞ 的，从而 f^{-1} 是 C^∞ 的，f 为 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 的微分同胚.

Problem 15

假设 $f(\lambda, x)$ 是 $\mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ 的连续可微映射，其中 $\lambda \in \mathbb{R}^m$，$x \in \mathbb{R}^n$. 假设存在常数 $k < 1$ 使得对任意 $\lambda \in R^m$，映射 $g_\lambda(x) = f(\lambda, x)$ 满足

$$\|\mathrm{d}g|_x\| < k.$$

证明对任意 $\lambda \in \mathbb{R}^m$，存在唯一的 $x_\lambda \in \mathbb{R}^n$ 使得 $f(\lambda, x_\lambda) = x_\lambda$. 特别地，这给出映射

$$\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad \lambda \mapsto x_\lambda.$$

Proof. 如果函数 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是 C^1 的且处处有 $\|\mathrm{d}F|_x\| < k < 1$，则对任意 $x, y \in \mathbb{R}^n$，

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &= \left| \int_0^1 \mathrm{d}F|_{tx+(1-t)y}(x-y)\,\mathrm{d}t \right| \\ &\leq \int_0^1 k\,|x-y|\,\mathrm{d}t = k\,|x-y|\,. \end{aligned}$$

由于 $\mathbb{R}^n$ 是完备度量空间，由压缩映像定理，F 存在唯一的不动点.

那么对任意 $\lambda \in \mathbb{R}^m$，由于 $f(\lambda, x)$ 是 C^1 的，因此它的所有偏导数连续，而 $g_\lambda(x)$ 的偏导数都是 f 的偏导数，故 g_λ 也是 C^1 的，通过上面的论证就可知 g_λ 存在唯一的不动点，就是 x_λ.

Problem 16

证明上题中的 φ 是 C^1 的，并计算其微分.

Proof. 考虑映射

$$F : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n, \quad (\lambda, x) \mapsto x - f(\lambda, x).$$

那么 F 是 C^1 的，并且

$$\mathrm{d}F_\lambda|_x = \mathrm{id} - \mathrm{d}f_\lambda|_x.$$

对任意 $|\boldsymbol{v}| \neq 0$ 有

$$|\mathrm{d}F_\lambda|_x(\boldsymbol{v})| = |\boldsymbol{v} - \mathrm{d}f_\lambda|_x(\boldsymbol{v})| \geq |\boldsymbol{v}| - k\,|\boldsymbol{v}| > 0.$$

所以 $\mathrm{d}F_\lambda|_x$ 处处非退化. 现在给定 $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$，由上一题结论，存在唯一的 $\varphi(\lambda_0)$ 使得

$$F(\lambda_0, \varphi(\lambda_0)) = \varphi(\lambda_0) - \varphi(\lambda_0) = 0.$$

由隐函数定理，存在 $U \ni \lambda_0$ 和 $V \ni \varphi(\lambda_0)$ 和 C^1 的 $\phi : U \to V$ 使得

$$f(\lambda, x) = 0 \Leftrightarrow x = \phi(\lambda), \quad \lambda \in U, \phi(\lambda) \in V.$$

由唯一性可知在 U 上有 $\phi = \varphi$，而 C^1 是局部性质，从而在 $\mathbb{R}^m$ 上有 φ 是 C^1 的并且

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\varphi|_\lambda &= -(\mathrm{d}_x F|_{(\lambda,x)})^{-1} \circ (\mathrm{d}_\lambda F|_{(\lambda,x)}) \\
&= -(\mathrm{id} - \mathrm{d}_x f|_{(\lambda,x)})^{-1} \circ (-\,\mathrm{d}_\lambda f_{(\lambda,x)}) \\
&= (\mathrm{id} - \mathrm{d}_x f|_{(\lambda,x)})^{-1} \circ \mathrm{d}_\lambda f|_{(\lambda,x)}.
\end{aligned}$$

证毕.

Problem 17

证明对任意 $t \in \mathbb{R}$，存在唯一的 C^1 映射 $t \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$，使得

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\sin(x+y) + t - 1; \\ y = \frac{1}{2}\cos(x-y) - t + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

进一步证明 $(x(t), y(t)) = (0,0)$ 当且仅当 $t = 1$ 并计算 $x'(1)$ 和 $y'(1)$.

Proof. 考虑

$$F_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto (\frac{1}{2}\sin(x+y) + t - 1, \frac{1}{2}\cos(x-y) - t + \frac{1}{2}).$$

计算其微分：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_t}{\partial \boldsymbol{x}} &= (\frac{1}{2}\cos(x+y), -\frac{1}{2}\sin(x-y)); \\
\frac{\partial F_t}{\partial \boldsymbol{y}} &= (\frac{1}{2}\cos(x+y), \frac{1}{2}\sin(x-y)).
\end{aligned}$$

因此

$$\left|\det F_t|_{(x,y)}\right| = \left|\frac{1}{2}\cos(x+y)\sin(x-y)\right| \leq \frac{1}{2} < 1.$$

由第 15 题结论，存在唯一的一组 (x_t, y_t) 使得 (x_t, y_t) 为 F_t 的不动点. 由于

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (t,x,y) \mapsto F_t(x,y)$$

显然是 C^1 的，所以 $t \mapsto (x(t), y(t))$ 也是 C^1 的.

下证明 $(x(t), y(t)) = (0,0)$ 当且仅当 $t = 1$. 把 $(0,0)$ 代入上式后得到

$$0 = 0 + t - 1, \quad 0 = \frac{1}{2} - t + \frac{1}{2} \Rightarrow t = 1.$$

根据 16 题结论，可以计算 $\varphi : t \mapsto (x(t), y(t))$ 的微分：

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}F|_{(t,x,y)} &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\cos(x+y) & \frac{1}{2}\cos(x+y) \\ -1 & -\frac{1}{2}\sin(x-y) & \frac{1}{2}\sin(x-y) \end{pmatrix}. \\
\mathrm{d}F|_{(1,0,0)} &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \\
\mathrm{d}\varphi|_1 &= (\mathrm{id} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix})^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

因此 $x'(1) = 1, y'(1) = -1$.