1.2 最高阶同调群

对一个拓扑空间来说，$H^0(M)$ 和 $H_0(M)$ 一般是很平凡的量，它一般指示了“M 的道路连通分支个数”. 最高阶同调群的概念在流形上才有，比如如果考虑 n 维流形 M，那么 $H^k_{dR}(M)$ 在 $k>n$ 时都是零，可以证明 $H^k_{sing}(M)$ 也在 $k>n$ 时取零. 接下来重点考察 $H^n_{dR}(M)$，非常好的是它能被唯一确定下来，自习分析之后会发现它的取值除了和连通性相关之外，还和流形的**紧性**和**可定向性**有关，这一点就十分神奇了. 作为 Poincare 对偶的一个非常好的体现，我们采用直接计算的手段而非把它作为对偶命题的一个推论，主要参考王作勤老师的讲义（de Rham 部分）和 Hatcher（singular 部分）. 还有一种未提及的是通过胞腔剖分/单纯剖分结合上胞腔同调/单纯同调的进路（姜伯驹老师的同调论中采取的进路）.

紧支 de Rham 上同调

流形上的最高阶微分形式具有一个特别的性质：**可定义积分**. 但是先不要太着急：在流形 M 上能对 ω 定义积分，需要 ω 紧支（定义积分利用单位分解，单位分解可能是可数个求和，有正有负就会出现问题，所以要利用紧性变成有限求和） 以及 M 可定向（利用拉回定义一个坐标卡上形式的积分时，不同定向的坐标变换给出相反的积分结果，所以我们得整体地确定一个定向，确定一族“符合定向的坐标卡”，并在“给定定向的流形”上进行积分）此时还可以利用 Stokes 公式. 所以，我们可以考虑“紧支微分形式”构成的分次代数（明显地，外微分和外积运算都把紧支形式送到紧支形式，紧支形式和一般形式外积也是紧支形式），记作 $\Omega_c^\bullet(M)$. 我们可以先尝试计算 $\Omega_c^\bullet(\mathbb{R}^n)$. $n=0$ 时 $\mathbb{R}^0=\{\mathrm{pt}\}$，$\Omega^\bullet(\mathrm{bt})\cong\Omega_c^\bullet(\{\mathrm{bt}\})$. 对于 $n\geq 1$，首先不同的就是 $\Omega_c^0(\mathbb{R}^n)$. 对满足 $\mathrm{d}f=0$ 的 $f\in C^0(\mathbb{R}^n)$，f 在 $\mathbb{R}^n$ 上应取常值，但是 f 又得紧支，所以 $f=0$，即 $H_c^0(\mathbb{R}^n)=0$.

接下来计算 $H_c^\bullet(\mathbb{R}^n)$. 我们首先指出 H_c^* **不满足同伦不变性**，比如 $H^0(\{\mathrm{pt}\})\ncong H^0(\mathbb{R}^n)$. Ω_c^* 甚至不是一个函子，因为拉回可能把紧支形式变成非紧支的. 有两种修复手段：

- 把逆紧光滑映射作为新的“态射”，在新的范畴下 Ω_c^* 成为反变函子. 由于在 Hausdorff 空间中紧集的闭子集也是紧集，所以比如闭集的嵌入一定是逆紧的，或者如果 X 紧，由于 Y Hausdorff，所以 $X\to Y$ 的映射也逆紧.

- 在包含映射 $X\hookrightarrow Y$ 下，X 中的紧支形式可以被扩展到 Y 中的紧支形式. 因为 $\operatorname{supp}\omega\subset X$，因此令 $\iota_*\omega$ 在 $Y\setminus X$ 上全取为零，最后得到的 $\iota_*\omega$ 是光滑且紧支的. 所以考虑包含映射作为态射，在新的范畴下 Ω_c^* 成为协变函子.

接下来可以计算 $H_c^\bullet(\mathbb{R}^n)$. 一种方法是考虑建立 $H_c^{\bullet+1}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})\leftrightarrow H_c^\bullet(\mathbb{R}^n)$ 之间的联系. 这不会成为自然的映射，要类似之前链同伦的构造. 我们选择

$$\pi^*: H_c^{k+1}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})\to H_c^k(\mathbb{R}^n),\quad \pi^*\omega_1\cdot f(x,t)+\pi^*\omega_2\cdot f(x,t)\,\mathrm{d}t\mapsto \omega_2\int_{-\infty}^{\infty}f(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

注意这里由于是紧支形式，所以这样子求积分是合法的. 如果是一般形式，那么没有办法典范地作这个操作. 与之对应的，如果想从 $\mathbb{R}^n$ 上的形式得到 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的形式，那么需要用到之前所说的推出映射 ι_*. 再得到 $n+1$ 阶形式，可以外积上一个 $\mathbb{R}$ 上的体积形式（记为 c），即

$$e^* : \omega \mapsto p^*\omega \wedge q^*c.$$

其中 $p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$；$q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

还有另一种方式：根据 MV-sequence 可以推得

$$H^k_{dR}(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0, n; \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

而通过球极投影可以把 $\mathbb{R}^n$ 等同为 $\mathbb{S}^n - \{p\}$，并且由于 $\mathbb{S}^n$ 是紧的，所以 $H^\bullet_c(\mathbb{S}^n) = H^\bullet(\mathbb{S}^n)$. 所以我们可以通过上同调群的信息来计算紧支上同调群的信息. 根据等同关系，$\mathbb{R}^n$ 上的紧支形式等同于 $\mathbb{S}^n$ 上支在 $\{p\}$ 外的形式（这里已经自然进行了一次零扩充，再次强调这只有在 ω 紧支时才能做到）. 首先证明当 $1 \leq k < n$ 时，$\mathbb{S}^n$ 上的所有支在 p 外的闭形式都是恰当的.

Proof. 将 ω 视为 $\mathbb{S}^n$ 上的闭形式，根据 $\mathbb{S}^n$ 同调群的信息，则存在 $\tau \in \Omega^{k-1}(\mathbb{S}^n)$ 使得 $\mathrm{d}\tau = \omega$. 但是 τ 不一定支在 $\mathbb{S}^n - \{p\}$ 上，为此考察 p 的邻域：由于 $\operatorname{supp}\omega$ 是个闭集，所以存在开集 $U \ni p$ 使得 $\omega|_U = 0$. 特别地，可以选取 U 是一个标准的开球，从而是同胚于 $\mathbb{R}^n$ 的. 上面的推理得到

$$\mathrm{d}\tau|_U = 0, \quad \tau|_U \in \Omega^{k-1}(U).$$

这提示我们运用**归纳法**得到 $H^{k-1}_{dR}(U) = 0$，从而 $[\tau|_U] = 0$，即存在 $\phi \in \Omega^{k-2}(U)$ 使得 $\mathrm{d}\phi = \tau|_U$.（注意即使 $k-2<0$ 这也是好的） 我们的目标是在 U 上调整 τ 使得它在 $\{p\}$ 附近为零，并且整体外微分结果仍是零. 为此只要操作 ϕ 即可：取支在 U 上的光滑函数 $\rho_U \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ 满足在更小的 p 的邻域 $p \in V \subset U$ 上恒为 1，那么 $\rho_U\phi \in \Omega^{k-2}_c(U)$，进而进行零扩张后可设 $\rho_U\phi \in \Omega^{k-2}_c(\mathbb{S}^n)$. 这样一来，就可以把 τ 和 $\mathrm{d}(\rho_U\phi)$ 进行相减，注意到

$$\tau|_V = (\mathrm{d}\phi)|_V = (\mathrm{d}\rho_U\phi)|_V.$$

所以 $\tau - \mathrm{d}(\rho_U\phi)$ 在 V 上恒为零，进而是支在 $\{p\}$ 外的 $k-1$ 阶形式，满足 $\mathrm{d}\big(\tau - \mathrm{d}(\rho_U\phi)\big) = \omega$，证毕.

当 $k = n$ 时需要适当改变思路. 对于最高阶微分形式可以求积分，所以我们选定一个 $\mathbb{R}^n$ 的定向，并考虑线性函数

$$f \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)^*, \quad \omega \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \omega.$$

根据 Stokes 公式易知如果 $\omega \in Z^n(\mathbb{R}^n)$，那么 $f(\omega)=0$；其次通过选取非负的鼓包函数，可以证明 f 是满映射，从而 f 成为同调层面上的满映射

$$f^* : H_c^n(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}.$$

如果能证明 f^* 是同构那么就证完了. 也就是说，我们证明：

Proposition 1.2.1. *若 $\omega \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0$，则存在 $\tau \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ 使得 $\omega = \mathrm{d}\tau$.*

Proof. 仍然拉到 $\mathbb{S}^n$ 上去看问题. 由于已利用 MV-sequence 的手段证明了 $H^n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$，并且也可以在 $\mathbb{S}^n$ 上考虑

$$\int_{\mathbb{S}^n} : H^n(\mathbb{S}^n) \to \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto \int_{\mathbb{S}^n} \omega.$$

由于这是满射，所以一定是同构. 因此将 ω 视为 $\mathbb{S}^n$ 上的形式后，可以选择 τ 使得 $\mathrm{d}\tau = \omega$. 剩下的事情和前面的证明一模一样，调整 τ 使得它在 $\{p\}$ 附近为零即可.

这就证明了 f^* 是同构，即 $H_c^n(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}$.

de Rham 上同调中的最高阶同调群

对一般的连通**可定向流形** M，积分映射 $\int_M : H_c^n(M) \to \mathbb{R}$ 仍然可以被定义. 由于 M 局部同胚于欧氏，取其中一个坐标卡 U 并考虑 U 上的非负鼓包函数，它的积分非零，从而 $\int_M$ 是满射. 令人惊讶的是 $\int_M$ 总是单射，也就是说总有 $H_c^n(M) \cong \mathbb{R}$ 成立. 证明方法需要用到标准的 MV-Argument，这需要用到 good cover 的存在性：

Theorem 1.2.2 (Good Cover). *设 M 为 n 维流形，称 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}$ 是 M 的* **good cover** *如果任意有限交 $U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_p}$ 要么为空，要么微分同胚于 $\mathbb{R}^n$. 则任何流形存在一个 good cover，并且紧流形存在有限 good cover.*

证明概要. 证明运用了**黎曼几何**中的手段，所以这里只会列出关键步骤.

Step 1. 为微分流形 M 赋予黎曼度量结构，即在每个点的切空间处引入一个内积结构，使得该内积作为双线性型在 M 上是光滑的. 我们可以在每个坐标卡 U_α 对欧氏度量作拉回得到 $\langle \cdot,\cdot \rangle_\alpha$. 为了把它扩充成 M 上的度量，只需利用从属于 $\mathscr{U}$ 的单位分解，并直接规定

$$\langle \cdot,\cdot \rangle = \sum_\alpha \rho_\alpha \langle \cdot,\cdot \rangle_\alpha$$

即可. 这在局部总是一个有限求和，且在每点处存在 α 使得 $\rho_\alpha > 0$，这导致该内积一定非退化，可证明这给出了一个黎曼度量.

Step 2. 在黎曼几何中，我们可以考虑**测地线**. 测地线使得 $\dot{\gamma}$ 是沿着 γ 的平行移动，它具有很重要的地位. 测地线在整体上给出了连接两点的最短线段（但未必存在），而在局部上，对每个点 $p \in M$ **指数映射** $\exp_p$ 把切空间 T_pM 映到 p 在 M 上的邻域上，相当于“沿着该切向量方向（沿测地线）走一段距离”. 根据反函数定理，存在 $0 \in T_pM$ 的邻域 V 使得 $\exp_p$ 是从 V 到 $\exp_p(V) := U$ 的微分同胚. 对 $B_r(0) \subset T_pM$，将它在 $\exp_p$ 下的像记为 $B_r(p)$，即“距离 p 长度小于等于 r 的点集”. 接下来将会证明每个点附近都存在一个好的 $B_r(p)$.

Step 3. 证明每个点附近存在一个**完全正规邻域**（totally convex neighborhood），即存在 $W \ni p$ 与 $\delta > 0$ 使得每个 $B_\delta(q), q \in W$ 都和 $B_\delta(0) \subset T_qM$ 的微分同胚，并且 $W \subset B_\delta(q)$. 这也就是说，任何 W 内两点之间距离都小于 δ，并且它们之间的最小长度测地线存在唯一（但不一定完全落在 W 内），其证明依然是对一个合适的函数利用反函数定理.

Step 4. 一个自然的问题是，是否能让该测地线完全落在 W 中？事实上，我们称 $S \subset M$ 是强凸（strongly convex）或测地凸（geodesically convex）的，如果 S 中任意两点间有一条唯一的最小长度测地线，并且该测地线完全落在 S 内. Whitehead Theorem 告诉我们每个点附近存在一个 $B_\delta(p)$ 是测地凸邻域. 其证明用到一个技术性的引理，即当半径 δ 较小时，如果一条测地线和 $B_\delta(p)$ 的边界相切，那么它在该点附近处于 $B_\delta(p)$ 的外部，其证明用到 Gauss 引理. 若已经完成该引理的证明，那么取一个半径很小的球落在包含 p 的完全正规邻域内，那么球内任意两点之间的最小长度测地线存在唯一且有小的上界. 如果它不完全处于球内部，那么考虑测地线上距离 p 最远的点 q，作一个以 p 为球心的球与经过 q，则球的半径能够小过引理中的界，且该测地线被完整包含在球中，从而引发矛盾.

Step 5. 证明了每点附近存在测地凸邻域后，它们构成 M 的一个开覆盖. 由于凸邻域的定义对其中任意两点地位相同，容易发现任意有限个测地凸邻域的交还是测地凸邻域，并且任取其中一点，它都成为关于这个点的星形邻域. 比较容易证明的是星形邻域可缩（从而它的同伦不变性质很简单），事实上可以证明星形邻域同胚于 $\mathbb{R}^n$，这一点并不平凡，曾经成为一个“folklore”（大家都声称其正确但找不到一个严格证明的出处）. 至此就证明完了 good cover 的存在性.

Remark. 一些参考资料：王作勤老师的黎曼几何讲义，nlab 上关于 good open cover 的讨论. It is said that 好覆盖在理解 Cech 上同调时会更加有用.

如果一个流形存在有限好覆盖，那么可以对“好覆盖中覆盖个数”进行归纳. 利用上 MV-sequence，主要是从 $U, V, U \cap V$ 的信息推得 $U \cup V$ 的信息. 如果一个命题对能被 $\leq p$ 个开集进行好覆盖的流形成立，考虑 $p+1$ 时情形. 对 $M = U_0 \cup \ldots U_p$，

考虑

$$U := U_0, \quad V := U_1 \cup \cdots \cup U_p.$$

那么 U, V 都满足归纳假设. 最头疼的是

$$U \cap V = U_0 \cap (U_1 \cup \cdots \cup U_p) = (U_0 \cap U_1) \cup \cdots \cup (U_0 \cap U_p).$$

而 $\{U_0 \cap U_1, \ldots, U_0 \cap U_p\}$ 构成了 $U \cap V$ 的好覆盖（如果只是一个简单的覆盖，那么 $U_i \cap U_j$ 可能是变态的，进而也不存在归纳结构） 并且开集个数至多为 p，所以可以利用归纳假设，进而能够比较容易地使用诸如五引理配合 MV sequence 的手段完成归纳过渡.x'z

现在可以回到代数拓扑，来证明下面关于最高阶同调群的命题.

Proposition 1.2.3. *若 M 是 n 维可定向光滑流形，则积分映射 $\int_M : H_c^n(M) \to \mathbb{R}$ 是同构.*

Proof. 只需证明如果 $\int_M \omega = 0$ 那么存在 $\tau \in \Omega_c^{n-1}(M)$ 使得 $\mathrm{d}\tau = \omega$. 由于 ω 紧支，那么由于 M 存在一个好覆盖，所以 $\operatorname{supp}\omega$ 存在一个有限好覆盖. 由于结论只对连通的 M 成立，但是在连通的 M 上可能 $\operatorname{supp}\omega$ 不是连通的. 为此，我们找一个连通紧集覆盖 $\operatorname{supp}\omega$（$\operatorname{supp}\omega$ 作为紧集只含有限个连通分支，将这些连通分支用有限条道路连接起来即可）记为 D_ω. 对“D_ω 的一个好覆盖所需的最少开集个数”k 进行归纳.

当 $k = 1$ 时，$D_\omega \subset U$，而 $U \cong \mathbb{R}^n$. 从而 $\phi^*\omega$ 成为 $\mathbb{R}^n$ 上的紧支形式. 但我们已知 $\int_{\mathbb{R}^n}$ 是同构，所以存在 $\tau \in H^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ 使得 $\mathrm{d}\tau = \phi^*\omega$，因此 $\mathrm{d}(\phi^{-1})^*\tau = \omega$，归纳奠基成立.

假设 $\leq k$ 时命题成立，考虑 $k+1$ 时情形. 设

$$D_\omega \subset U_0 \cup \cdots \cup U_k.$$

首先证明存在 i 使得 $\bigcup_{j \neq i} U_j$ 连通. 这是纯粹图论的：构造一个图，顶点集为 $\{0, 1, \ldots, k\}$，当 $U_i \cup U_j \neq \varnothing$ 时将 i 和 j 连边. 根据 D_ω 连通可知构造出的图是连通图，寻找其支撑树的一个叶子节点 i，将其删去后剩下的图仍然连通，即 $\bigcup_{j \neq i} U_j$ 连通.

考虑 $U = U_i, V = \bigcup_{j \neq i} U_j$ 两个区域. 将 ω 分解为两个支在 U, V 内的形式的和，这只需要利用从属于 U, V 的单位分解.

$$\omega = \rho_U \omega + \rho_V \omega, \quad \rho_U \omega \subset H_c^n(U), \, \rho_V \omega \subset H_c^n(V).$$

但要利用归纳假设，需要积分为零：只需要在 $U \cap V$ 内进行一些调整即可. 根据 $\int_M \omega = 0$ 可知

$$\int_U \rho_U \omega = \int_V -\rho_V \omega.$$

所以可选择支在 $U \cap V$ 上的形式 ω_1 积分为 $\int_U \rho_U \omega$（只需利用鼓包函数即可），那么就可以对 $\rho_U \omega - \omega_1$ 和 $\omega_1 + \rho_V \omega$ 利用归纳假设，得到 τ_1 和 τ_2 使得

$$\rho_U \omega - \omega_1 = \mathrm{d}\tau_1, \quad \omega_1 + \rho_V \omega = \mathrm{d}\tau_2.$$

所以 $\omega = \mathrm{d}(\tau_1 + \tau_2)$，归纳证毕.

Remark. 比较有趣的一点是似乎证明不用好覆盖改用一般的同胚于欧氏的坐标卡覆盖也对？不过在很多证明中好覆盖的结构是必要的，所以就这样吧.

由于对紧流形其紧支上同调就是一般的 de Rham 上同调，所以连通的可定向紧流形的最高阶上同调群为 $\mathbb{Z}$. 对于非紧流形，这个命题并不成立，事实上可以证明其最高阶上同调群一定为零.

Proposition 1.2.4. 若 M 为连通的 n 维可定向非紧流形，则 $H^n_{dR}(M) = 0$.

证明概要. 需要用到另一个不平凡的覆盖结论：对非紧连通流形 M，存在其局部有限可数覆盖 $\{V_k\}$，满足每个 V_k 都是连通预紧开集（闭包为紧集），且对于任意 k，存在 $i > k$ 使得 $V_k \cap V_i \neq \varnothing$. 有了该引理后，模仿上个命题的证明，先把 ω 关于 $\{V_k\}$ 进行单位分解，然后按顺序通过在 $V_k \cap V_i$ 内加入指定积分值的形式来使得 V_k 内的形式总积分值为 0，进而可使用紧空间上的结论得到 τ_k 外微分后能满足 V_k. 将这可数个 τ_k 求和后外微分就得到 ω.

Remark. 这个命题也可以由后续 Poincare 对偶 $H^q(M) \cong (H^{n-q}_c(M))^*$ 得到.

最后一个命题表明，$H^n_c(M)$ 可以作为判定流形是否可定向的工具.

Proposition 1.2.5. 若 M 为连通的不可定向流形，则 $H^n_c(M) = 0$.

Proof. 如果 M 为连通的不可定向流形，那么其存在一个可定向的二叶覆叠 $\widetilde{M}$. 根据命题 1.2.3 可知 $\int_{\widetilde{M}}$ 给出 $H^n_c(\widetilde{M}) \to \mathbb{R}$ 的同构映射. 考虑 $\omega \in \Omega^n_c(M)$，由于 $\widetilde{M}$ 有一个到自身的反定向覆叠同构 σ，因此 $p\sigma = p$，故 $\sigma^* p^* \omega = p^* \omega$. 从而

$$\int_{\widetilde{M}} p^*\omega = \int_{\widetilde{M}} \sigma^* p^* \omega = -\int_{\widetilde{M}} p^*\omega.$$

所以 $[p^*\omega] = 0$，因此存在 $\eta \in \Omega^{n-1}_c(\widetilde{M})$ 使得 $\mathrm{d}\eta = p^*\omega$. 为了把 η 打回到 M 上，只需构造 $\tilde{\mu} = \frac{1}{2}(\eta + \sigma^*\eta)$ 在 x 和 $\sigma^* x$ 附近形态相同，所以这可定义出 M 上的一个形式 $\eta^\star$，满足 $\mathrm{d}\eta^\star = \omega$. 这就证明了 $H^n_c(M) = 0$.

奇异上同调中的最高阶同调群

在奇异上同调的语境中讨论这个问题比较奇异，因为我们需要从头来定义类似于定向的概念，而且由于没有所谓积分映射，需要用另一种手段得到最高阶上同调群的信息. 最后，奇异上同调中常用的系数为 $\mathbb{Z}$，为了和 de Rham 上同调建立起某种对应关系，只需一同考虑系数取在 R 上的奇异同调理论.

在 Hatcher 的进路中，一个流形的**定向的定义**和它的最高阶同调群被联系在一起. 对每个 $x \in M$，用记号 $H_n(M|x)$ 代表 $H_n(M, M - \{x\})$，那么

$$H_n(M, M - \{x\}) \cong H_n(U, U - \{x\}) \cong H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{\phi^{-1}x\}) \cong H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \mathbb{Z}.$$

其中 U 是 x 附近的坐标卡，第一个同构来源于切除定理；第二个同构是通过 $U\cong\mathbb{R}^n$；第三个同构来源于 $\mathbb{R}^n-\{\phi^{-1}x\}\simeq\mathbb{S}^{n-1}$ 以及相对同调的长正合列. 我们将 $H_n(M|x)$ 的一个生成元 μ_x 视为 M **在 x 处的一个定向**（类似于在 x 的切空间上选取一个标架类）. 在 x 附近的定向相容由明显的定义：如果 x,y 处于同一个坐标卡 U 中，那么选取 U 上任意一个同时包含 x,y 的球 B，则包含映射

$$H_n(U|B)\hookrightarrow H_n(U|x) \text{ 及 } H_n(U|B)\hookrightarrow H_n(U|y)$$

都是同构，因此也诱导出 $H_n(M|x)$ 和 $H_n(M|y)$ 之间的同构，如果这些同构恰好建立了 μ_x,μ_y 之间的对应，那么就称它们是定向相容的. 在 x 附近定向相容指存在 x 的邻域使得邻域内任一点和 x 定向相容. 称 M 存在一个**定向**如果可在每点 x 处选择一个 μ_x 使得每点附近都是定向相容的.

具体来说，$\mathbb{Z}$ 的生成元就只有 ±1，那么可以明显地把“选择 $H_n(M|x)$ 的生成元”与“选择 x 处的标架类”对应起来，这是因为选取 $H_n(M|x)$ 的生成元相当于考虑 x 附近的一个球的正反两个方向，对应于标架的两个方向. 而 x,y 处两个球定向相同相当于把 x 处的球扩大到包含 x,y 两点，再缩小到 y 的邻域中，这和平移没有区别，所以也对应于标架的平移. 从而两种定向代表的意义是相同的.

再来讨论一下一般的 R 作为系数群与 $\mathbb{Z}$ 作为系数群的关系. $H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1};R)\cong R$. 选取每个 $H_n(M|x)$ 的一个生成元 μ_x，那么 $H_n(M|x;R)=R\mu_x$（这里先打住，一般来说未必有 $H_n(X;R)=H_n(X)\otimes R$，但是这里如果看胞腔结构的话，$H_{n-1}(M|x;R)$ 不会给出任何影响，进而 μ_x 也被打到某个生成元），这给出了一个从 $H_n(M|x;R)$ 到 R 的等同. 关键在于从一个 $H_n(M|x;R)$ 到另一个 $H_n(M|y;R)$ 的同构仍然只有 id 和 $r\mapsto -r$.（Hatcher Lemma 2.49，如果 $f_*:H_n(\mathbb{S}^n)\to H_n(\mathbb{S}^n)$ 诱导了 $g\mapsto rg$，那么在任意系数群上也诱导 $g\mapsto rg$）

因此，我们类似 $\mathbb{Z}$-定向来定义 R-定向和 R-section 的概念：对同一坐标卡上的 x 和 y，称 $\mu_x\in H_n(M|x;R)$ 和 $\mu_y\in H_n(M|y;R)$ **R-定向相容**如果它们在与上面类似的同构下等同. 如果在每个 x 处选取了某个生成元/任意的 $r\mu_x$ 使得每个 x 附近 R-定向相容，那么称其给出了一个 R-定向/R-section. 那么在已经选定 $r\mu_x$ 的基础上，它的邻域内只能选取 $\pm r\mu_y$ 才能和 x 定向相容（因为同构只有两种，所以只有 μ_y 或 $-\mu_y$ 会和 μ_x 定向相容），进而导致在每个点处都是选择 r 和 $-r$ 中的一个，然后看是否定向相容，如果 $r\neq -r$，那么这和 $\mathbb{Z}$ 时面对的情形完全相同. 否则如果 $r=-r$，那么选择 $r\mu_x$ 一定能给出一个 R-定向/R-section.

用代数拓扑的方法来定义定向有一个明显的好处，即 $H_n(M;R)$ 和 $H_n(M|x;R)$ 之间明显可诱导出一个同态. 并且只要选定 $\alpha\in H_n(M;R)$，它就能确定在每个点处的一个 $\mu_x\in H_n(M|x;R)$，并且它们显然能构成一个好的 R-section. 通过将全体 R-section 赋予 R-module 结构，给出一个 R-同态

$$\tau: H_n(M;R)\to\{R\text{-sections}\}.$$

τ 的地位相当于之前的积分映射.（并且把 M 的定向信息隐含在映射中了，而积分映射只能

对可定向流形定义）任意选取某个 $x \in M$，通过 $\{R\text{-sections}\} \to H_n(M|\,x;R) = R\mu_x$ 能够将 R-sections 嵌入 R（因为确定某个 μ_x 会诱导出至多一个 R-section），由此得到

$$\{R\text{-sections}\} \cong \begin{cases} R, & \text{如果 } M \text{ 可定向;} \\ \{r \in R : 2r = 0\}, & \text{如果 } M \text{ 不可定向.} \end{cases}$$

特别地，如果取 $R = \mathbb{R}$，那么对可定向流形 τ 就给出 $H_n(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 的同态.

Theorem 1.2.6 (Hatcher 3.26). 设 M 为 n 维连通**紧致**流形. 则

(a) $\tau : H_n(M;R) \to \{R\text{-sections}\}$ 是同构.

(b) 对任何 $k > n$ 均有 $H_k(M;R) = 0$.

这同时回答了关于“最高阶同调群”及“可定向”的判定问题：根据该定理，$H_n(M;R) \to H_n(M|\,x;R)$ 的像集中的每个 μ_x 都能给出一个 R-section，所以只要这个同态的像中含有 R 的一个生成元，那么 M 就是可定向的.

对于该命题的证明，我们需要为紧集寻找一个“归纳结构”，因此可以把命题加强为

Lemma 1.2.7 (Hatcher 3.27). 对任意 n 维连通流形 M（注意并不要求 M 紧致）和紧集 $A \subset M$，对每个 R-section $\{\mu_x\}$，存在唯一的 $\alpha \in H_n(M|\,A;R)$ 使得对任意 $x \in A$，α 在 $H_n(M|\,A;R) \to H_n(M|\,x;R)$ 下的像为 μ_x. 此外，对任意 $k > n$ 有 $H_k(M|\,A;R) = 0$.

Proof. 这个命题的证明非常具有启发性，它类似 good cover 的想法给出归纳结构：即如果结论对紧集 $A, B, A\cap B$ 均成立，那么对 $A\cup B$ 也成立. 这利用到 MV-Sequence

$$0 \to H_n(M|\,A\cup B) \xrightarrow{\Phi} H_n(M|\,A) \oplus H_n(M|\,B) \xrightarrow{\Psi} H_n(M|\,A\cap B) \to \dots.$$

（这里是所谓相对形式的 MV-sequence，在之前并不常见. 回忆一般的 MV-sequence 正合性证明的关键一步是证明 $H_\bullet(A+B)$ 和 $H_\bullet(A\cup B)$ 同构，其中 $C_\bullet(A+B)$ 指 A 中的链与 B 中链在 $C_\bullet(A\cup B)$ 中的和，所以它们同构的来源是从链到 $\mathcal{U}$-小链的映射是链同伦. 这个命题在 de Rham 上同调下由单位分解显然推出. 推出相对形式的 MV-sequence 是纯代数的，方法是把 MV 链正合关系和相对链正合关系摆在一起，利用后者给出的长正合列来验证相对 MV 链的正合性，细节见 Hatcher P152. 直观来看，上述的正合关系绝非显然，第一个零来源于 $H_{n+1}(M|\,A\cap B) \cong 0$.）

存在性：选取一个 R-section $\{\mu_x\}$，根据归纳选取一个 $\alpha_A \in H_n(M|\,A)$ 和 $\alpha_B \in H_n(M|\,B)$ 满足要求，则我们希望找到 α 使得 α 穿过 $H_n(M|\,A\cup B) \to H_n(M|\,A) \to H_n(M|\,x)$ 对应到 μ_x（$x \in A$，对 $x \in B$ 同理），因此只需要 α 在 Φ 下被打到 (α_A, α_B).（也可以这么理解：如果 α 是满足要求的链，那么 α 在 $H_n(M|\,A\cup B) \to H_n(M|\,A)$ 下的像一定是 $H_n(M|\,A)$ 上满足要求的链. 从而，根据唯一性可知 α 一定被打到 α_A） 又因为我们可以选取 $\alpha_{A\cap B}$ 满足要求，而唯一性告诉我们 $H_n(M|\,A) \to H_n(M)$ 把 α_A 送到 $\alpha_{A\cap B}$，对 B 的部分同理. 因此 Ψ 把 (α_A, α_B) 送到 $\alpha_{A\cap B} - \alpha_{A\cap B} = 0$. 因此根据正合性，存在 α 使得其像为 (α_A, α_B).

唯一性：这来源于前半段的正合性告诉我们 Φ 是单射，所以 (α_A, α_B) 存在至多一个原像 α. 而 $H_k(M|A \cup B; R) \cong 0$ 来源于在长正合列中其两端都是 0.

进而，由于一个 M 上的紧集 A 可被有限个坐标卡 $U_1, \ldots, U_m$ 的并包含，所以只需要证明每个坐标卡上的紧集满足要求即可. 把坐标卡拉回到 $\mathbb{R}^n$ 上，这相当于只需证明 $M = \mathbb{R}^n$ 时结论成立. 存在性显然，因为可以选取一个包含紧集 A 的开球 U，由于每个 μ_x 是定向相容的，所以 $H_n(M|U) \xrightarrow{\sim} H_n(M|x)$ 给出 μ_x 的一个原像 β. 由于该同构通过 $H_n(M|U) \to H_n(M|A) \to H_n(M|x)$ 穿过 $H_n(M|A)$，因此将 α 取为 β 的像就可证明它满足题目条件.

证明唯一性是重点. 只需证明：如果有一条闭链 $\alpha \in C_n(M|A)$ 满足对每个 $x \in A$ 都有 $C_n(M|A) \to H_n(M|A) \to H_n(M|x)$ 的像是零，那么 $[\alpha] = 0$. 首先条件告诉我们 $\partial\alpha \in C_{n-1}(M - A)$，所以 $\operatorname{im}\partial\alpha$ 作为紧集和紧集 A 分离. 这也就是说，我们可以适当扩大 A 使得 A 能分成有限个闭球的并. 具体来说，存在 $\delta > 0$ 使得 $\overline{B_\delta(A)}$ 和 $\operatorname{im}\partial\alpha$ 无交. 但 $B_\delta(A) = \bigcup_{x \in A} B_\delta(x)$，所以存在有限个 $B_\delta(x_i)$ 能覆盖整个 A. 设 B 为这些 $B_\delta(x_i)$ 的闭包的并集（这个 B 和 α 有关，相当于之前对某个给定的 $\operatorname{supp}\omega$ 做操作），那么 $A \subset B$ 并且 α 是 $C_n(M|B)$ 上的闭链. 并且对每个 $y \in B$，存在 x 使得 $y \in \overline{B_\delta(x)}$. 这就导致，如果 α 在 $H_n(M|x)$ 中像是零，那么它穿过 $H_n(M|B) \to H_n(M|\overline{B_\delta(x)}) \xrightarrow{\sim} H_n(M|x)$ 得到零，因此在 $H_n(M|\overline{B_\delta(x)})$ 上的像也是零，进而在 $H_n(M|y)$ 下的像是零. 因此只要证明 B 处的唯一性就证完了 A 处的唯一性. 但 B 是有限个闭球的并. 注意到如果空间 B 可缩那么显然同构 $H_n(M|B) \xrightarrow{\sim} H_n(M|x)$ 给出所需的命题，因此只需归纳证明能写成 m 个凸紧集并的空间 B 都满足题意即可，因为把 m 个覆盖的分解成 1 个和 $m-1$ 个的并之后，$U, V, U \cap V$ 都满足归纳假设.

最后关于 $H_k(M|A), k > n$ 的讨论也类似. 上面的归纳顺带也证明了 B 满足 $H_k(M|B) = 0$，从而 α 在 $H_k(M|B)$ 上的像为零，故在 $H_k(M|A)$ 上的像也是零. 至此，完成了整个定理的证明.

Remark. 这个引理才是 main theorem，因为在后续的 Poincare 对偶中，M 未必是紧的. 但是这里定向信息不是用上同调群确定的而是用同调群定义的，所以后续建立 Poincare 对偶时采用 cap product 而非 cup product. 而对一般非紧流形 M，一个 R-section 对每个紧集 A 确定了 $H_n(M|A;R)$ 中的一个元素，即 $\varprojlim_A H_n(M|A;R)$ 中的一个元素，它借助 cap product 给出 $\varinjlim_A H^k(M|A;R) \to H_{n-k}(M;R)$ 的同态，即 $H_c^k(M|A;R) \to H_{n-k}(M;R)$ 的同态. 所以，这里给出的东西就类似于“紧支上同调”的地位，而不仅仅是作为一个归纳的引理.

映射度

有了最高阶同调群的信息后，可以定义一般流形上的映射度. 回忆对两个 n 维球面 S_1 和 S_2，当我们分别选取 $H_n(S_i)$ 的一个生成元（即一种定向）后，$H_n(S_i)$ 被典范对应到 $\mathbb{Z}$；从而就可以定义映射 $f: S_1 \to S_2$ 的映射度为 $f^*: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ 中单位元

的像. 如果 $S_1 = S_2$，那么无论如何选取定向 $\deg f$ 不会发生改变. 注意如果这样定义的话，选取任意系数群 R 定义出的映射度仍然是整数，因为 r 的像只能是某个 nr.

接下来采用 de Rham 上同调的进路. 任意选好了定向的 n 维光滑流形 M, N 之间的逆紧映射 $f : M \to N$ 诱导出紧支上同调群之间的同态 $f^* : H_c^n(M) \to H_c^n(N)$. 积分映射（注意进行积分已经需要选好定向）给出了 $H_c^n(M) \to \mathbb{R}$ 的同构，从而 f^* 给出 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的同态，将单位元 1 的像记为 f 的映射度 $\deg f$. 如果把定义写开，会发现对任意 $\omega \in \Omega_c^n(N)$，均有

$$\int_M f^*\omega = \deg f \cdot \int_N \omega.$$

该定义可以完全不出现同调群. 并且我们注意到只要确定一个积分非零的 ω 就可以完全确定 $\deg f$，而满足这个要求的 ω 自由度很大，所以这个结论很强，并且可以容易地计算出映射度.

Proposition 1.2.8. 如果 f 非满射，则 $\deg f = 0$. 因此对任意 ω 均有 $\int_M f^*\omega = 0$.

Proof. 如果 f 非满射，设 $p \notin \operatorname{im} f$. 由于 f 逆紧，我们可以证明 $\operatorname{im} f$ 是闭集：设有一列 $x_i \in M$ 和 $f(x_i) \in \operatorname{im} f$ 使得 $f(x_i) \to y$，那么 $\{f(x_i)\}_{i\in\mathbb{N}} \cup \{y\}$ 为紧集，因此其原像为紧集，所以 $\{x_i\}$ 存在聚点 x，$f(x) = y$.

因此 p 存在一个开邻域 U 不落在 $\operatorname{im} f$ 内，适当缩小 U 使得它同胚于圆盘，从而可选取支在 U 上的 ω 使得 $\int_U \omega = 1$，并且 $f^*\omega = 0$，从而 $\deg f = 0$.

对于一般的 f，我们可以证明 $\deg f \in \mathbb{Z}$. 证明的关键在于下面的 Sard 定理.

Theorem 1.2.9 (Sard's Theorem). 设有光滑映射 $f : M \to N$.（并不要求它们维数相同.） 称 $x \in M$ 为 f 的**临界点**，如果 $f_* : T_xM \to T_{f(x)}N$ 非满射；称 $y \in N$ 为**临界值**如果 y 是某个临界点在 f 下的像. 那么临界值集合的测度为零.

注意在不同的坐标卡选取下测度的具体取值显然会有区别，但是零测集总是良定的. 此外，我们将非临界点称为正则点，非临界值称为正则值，显然临界点集合未必测度为零。

如果该命题成立，不妨设 $n \geq 1$ 并且 f 是满射（否则 $\deg = 0$），则此时存在正则值 y. 对任何 $x \in f^{-1}(y)$，x 都是正则点. 根据 $\dim M = \dim N$ 可知 $f_* : T_xM \to T_{f(x)}N$ 在正则点处是同构，因此可利用反函数定理得到 f 把 x 的某个邻域同胚到其像，所以 $f^{-1}(y)$ 是离散集. 又因为 $f^{-1}(y)$ 是紧集，故它为有限集. 现在，我们设 $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_m\}$，并且 x_i 的邻域 U_i 同胚到 y 的邻域 V_i，全体 V_i 的交记为 V，适当缩小 V 使其可缩. 取支在 V 上的形式 ω 满足 $\int_V \omega = 1$，则 $\int_N \omega = 1$，并且 $f^*\omega$ 支在 m 个两两不交的开集的并上，并且在每个开集处都给出微分同胚. 而如果 $U \to V$ 是微分同胚，则 $\int_U f^*\omega = \pm \int_V \omega$，取决于定向的选取. 因此在每个 x_i 附近，$\int_M f^*\omega$ 会贡献一个 1 或者 -1，记为 ϵ_i. 因此 $\int_M f^*\omega = \sum \epsilon_i \in \mathbb{Z}$.

接下来给出 Sard 定理的证明概要.