

Intervalos de confianza

Caterine Melissa Guerrero España

2022-09-13

Introducción

el objetivo mediante la **intervalos de confianza** o **estimación confidencial** es la determinación de dos valores θ_1^* y θ_2^* que verifiquen $\theta_1^* \leq \theta_2^*$, tales que, al constituirse en intervalo θ_1^*, θ_2^* contengan, con una probabilidad prefijada, el verdadero valor del parámetro que deseamos estimar. De forma gráfica, un intervalo de confianza puede representarse del siguiente modo:

Supuesto Práctico 1

Con el fin de estudiar el número medio de flexiones continuadas que pueden realizar los alumnos, un profesor de educación física somete a 75 de ellos, elegidos aleatoriamente, a una prueba. El número de flexiones realizado por cada alumno, así como su sexo y si realizan o no deporte se muestran en el fichero Flexiones.txt.

Se sabe que el número de flexiones se distribuye según una Normal de varianza poblacional 7.5. ¿Determinar el intervalo de confianza a un nivel de confianza del 95% para el número medio de flexiones?

Solución En primer lugar debemos importar, en R, los datos que contienen el número de flexiones realizadas por cada alumno. Para ello, utilizamos la orden read.table

```
datos<-read.table("Flexiones.txt", header=TRUE)
datos
```

##	Flexiones	Sexo	Deporte
## 1	60	H	0
## 2	41	H	0
## 3	53	M	1
## 4	53	M	0
## 5	41	H	0
## 6	56	H	0
## 7	50	H	0
## 8	53	M	1
## 9	50	M	1
## 10	48	M	0
## 11	50	M	1
## 12	48	M	1
## 13	56	H	0
## 14	52	M	1
## 15	54	M	0
## 16	50	H	1
## 17	50	H	0
## 18	54	H	0
## 19	52	H	1
## 20	48	H	0

## 21	48	H	1
## 22	35	M	1
## 23	50	M	1
## 24	41	M	1
## 25	56	M	1
## 26	52	M	1
## 27	56	M	0
## 28	54	H	1
## 29	53	H	0
## 30	53	M	0
## 31	53	H	0
## 32	41	M	1
## 33	48	M	0
## 34	50	H	1
## 35	50	M	1
## 36	52	H	0
## 37	53	M	0
## 38	35	H	0
## 39	35	H	0
## 40	54	M	0
## 41	46	M	1
## 42	48	H	0
## 43	50	M	0
## 44	48	H	0
## 45	41	M	0
## 46	48	M	1
## 47	60	H	1
## 48	53	M	0
## 49	54	M	1
## 50	56	H	1
## 51	50	H	1
## 52	41	H	0
## 53	60	M	1
## 54	60	M	1
## 55	54	H	0
## 56	54	H	0
## 57	53	H	0
## 58	35	M	0
## 59	54	H	0
## 60	48	M	0
## 61	50	H	0
## 62	54	H	0
## 63	54	H	0
## 64	53	H	0
## 65	52	H	0
## 66	50	H	0
## 67	52	H	0
## 68	48	H	1
## 69	46	H	1
## 70	53	H	0
## 71	50	H	0
## 72	35	H	0
## 73	50	H	1
## 74	60	M	1

```
## 75      50      H      0
```

A continuación, introducimos en R los datos relativos al nivel de significación y la varianza poblacional de la variable que proporciona el enunciado.

```
alpha<-0.05
varianza<-0.75
```

Calculamos por separado cada uno de los elementos restantes que necesitamos para obtener el intervalo de confianza.

```
n<-nrow(datos)
media<-mean(datos$Flexiones)
cuantil<-qnorm(1-alpha/2)
```

Por último, calculamos los extremos inferior y superior del intervalo de acuerdo a la expresión que se vio anteriormente:

Por tanto:

```
lim_inf<-media-cuantil*sqrt(varianza)/sqrt(n)
lim_inf
```

```
## [1] 49.91067
```

```
lim_sup<-media+cuantil*sqrt(varianza)/sqrt(n)
lim_sup
```

```
## [1] 50.30266
```

Por lo que el intervalo de confianza que buscamos es (49.91067, 50.30266)

Intervalo de confianza para la media en una población normal con varianza desconocida

Supongamos, en este caso, que la varianza poblacional de la variable de interés es desconocida. Nuestro objetivo sigue siendo el cálculo de un intervalo de confianza para la media de dicha variable.

Supuesto Práctico 2

Considerando nuevamente el conjunto de datos que se ha presentado en el supuesto práctico 1, relativo a las flexiones de los alumnos. Calcular un intervalo de confianza a un nivel de confianza del 98% para el número medio de flexiones. Suponer en este caso que el número de flexiones se distribuye según una distribución Normal de varianza desconocida.

```
t.test(datos$Flexiones, conf.level=0.98)
```

```
##
## One Sample t-test
##
## data:  datos$Flexiones
## t = 72.58, df = 74, p-value < 2.2e-16
## alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
## 98 percent confidence interval:
##  48.46512 51.74822
## sample estimates:
## mean of x
##  50.10667
```

De toda la información que devuelve la función `t.test`, sólo nos interesa la relativa al intervalo de confianza 98 percentconfidenceinterval: 48.46512 51.74822

Por lo tanto, el intervalo de confianza para el número medio de flexiones a un nivel de confianza del 98% es (48.46512, 51.74822).

Resolvamos el mismo ejemplo pero cuando el enunciado nos muestra la media (50.11), la cuasidesviación típica (5.98) y el tamaño muestral (75). Pero no proporciona los datos.

Solución Al no disponer de un vector numérico con los valores de la variable de interés, para resolver el ejemplo recurriremos a utilizar la expresión del intervalo de confianza para este caso

```
alpha<-0.2
n=75
cuasi<-5.98
media<-50.11
```

```
cuantil<-qt((1-alpha/2),8,lower.tail = T)
lim_inf<-media-cuantil*cuasi/sqrt(n)
lim_inf
```

```
## [1] 49.14548
```

```
lim_sup<-media+cuantil*cuasi/sqrt(n)
lim_sup
```

```
## [1] 51.07452
```

Por lo tanto, hay un 98% de confianza de que el intervalo [49.14548 , 51.07452] contenga el número medio de flexiones

Supuesto Práctico 3

A partir del conjunto de datos relativo al número de flexiones y el sexo de los alumnos, obtener un intervalo de confianza al 95% para la proporción de alumnos en la población. Del mismo modo, calcular un intervalo de confianza al 90% para la proporción de alumnas.

Solución Comenzaremos con el cálculo del intervalo de confianza para los chicos. Para realizar la llamada a la función `prop.test` necesitamos conocer, además del nivel de confianza, que viene indicado en el enunciado, el número de alumnos varones y el número total de estudiantes en la muestra. Para ello utilizamos la función, de R, `table`.

```
table(datos$Sexo)
```

```
##
##  H  M
## 43 32
```

e los 75 estudiantes que conforman la muestra, 43 son chicos. Por lo que la llamada a `prop.test` sería la siguiente:

```
prop.test(43,75)
```

```
##
##  1-sample proportions test with continuity correction
##
## data:  43 out of 75, null probability 0.5
## X-squared = 1.3333, df = 1, p-value = 0.2482
## alternative hypothesis: true p is not equal to 0.5
```

```
## 95 percent confidence interval:
## 0.4539882 0.6851173
## sample estimates:
## p
## 0.5733333
```

Como el nivel de confianza para este intervalo es el 95% no ha sido necesario incluir el argumento `conf.level` en la llamada a `prop.test`, puesto que este es el nivel de confianza por defecto.

De nuevo, los resultados de la función incluyen mucha más información aparte de la relativa al intervalo de confianza. Por ahora, nos centraremos únicamente en esta última.

Por lo que el intervalo de confianza, a un nivel de confianza del 95% para la proporción de alumnos varones en la población es (0.4539882, 0.6851173)

Repitamos el procedimiento para obtener ahora un intervalo de confianza para la proporción de chicas. En este caso, tenemos que tener en cuenta que el número de chicas en la muestra era 32.

```
prop.test(23,75,conf.level = 0.90)
```

```
##
## 1-sample proportions test with continuity correction
##
## data: 23 out of 75, null probability 0.5
## X-squared = 10.453, df = 1, p-value = 0.001224
## alternative hypothesis: true p is not equal to 0.5
## 90 percent confidence interval:
## 0.2211717 0.4066284
## sample estimates:
## p
## 0.3066667
```

Centrándonos en la parte de la salida que incluye el intervalo de confianza

90 percentconfidenceinterval: 0.2211717 0.4066284

Podemos concluir que el intervalo de confianza, considerando un nivel de confianza del 90%, para la proporción de chicas en la población es (0.2211717, 0.4066284).

Resolvamos este ejercicio utilizando la expresión del intervalo de confianza para la proporción

Solución Intervalo de confianza, a un nivel de confianza del 95% para la proporción de alumnos varones en la población

```
alpha<-0.02
n=75
p=32/75
cuantil<-qnorm(1-alpha/2)
lim_inf<-p-cuantil*sqrt(p*(1-p))/sqrt(n)
lim_inf
```

```
## [1] 0.2938074
```

```
lim_sup<-p+cuantil*sqrt(p*(1-p))/sqrt(n)
lim_sup
```

```
## [1] 0.559526
```

Por lo que el intervalo de confianza, a un nivel de confianza del 90%, para la proporción de chicas en la población es (0.3147318, 0.5386015).

Intervalo de confianza para la diferencia de medias en dos poblaciones normales independientes

falta texto

Intervalo de confianza para el cociente de varianzas en dos poblaciones normales independientes

falta texto

Supuesto Práctico 4

Continuando con los datos relativos a las flexiones realizadas por un grupo de estudiantes y asumiendo que el número de flexiones que realizan los chicos y las que realizan las chicas se distribuyen según sendas distribuciones normales con medias y varianzas desconocidas. Calcular un intervalo de confianza a un nivel de confianza del 95% para el cociente de varianzas en ambas poblaciones. ¿Puede asumirse que ambas varianzas son iguales?

Solución En primer lugar determinamos el intervalo de confianza para el cociente de varianzas, para ello utilizamos la función `var.test`. Lo primero que tenemos que hacer para aplicar la función `var.test` es separar en dos variables los datos relativos a las flexiones realizadas por los chicos y por las chicas.

```
Flexiones.chicos<-datos$Flexiones[datos$Sexo=="H"]
Flexiones.chicas<-datos$Flexiones[datos$Sexo=="M"]
Flexiones.chicas
```

```
## [1] 53 53 53 50 48 50 48 52 54 35 50 41 56 52 56 53 41 48 50 53 54 46 50 41 48
## [26] 53 54 60 60 35 48 60
```

```
Flexiones.chicos
```

```
## [1] 60 41 41 56 50 56 50 50 54 52 48 48 54 53 53 50 52 35 35 48 48 60 56 50 41
## [26] 54 54 53 54 50 54 54 53 52 50 52 48 46 53 50 35 50 50
```

A continuación, utilizamos la función `var.test` tal y como se indica a continuación:

```
var.test(Flexiones.chicos, Flexiones.chicas)
```

```
##
## F test to compare two variances
##
## data: Flexiones.chicos and Flexiones.chicas
## F = 0.87506, num df = 42, denom df = 31, p-value = 0.679
## alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
## 95 percent confidence interval:
## 0.4415454 1.6765483
## sample estimates:
## ratio of variances
## 0.8750585
```

Analizando la información relativa al intervalo de confianza que se incluye en la salida de `var.test`, podemos afirmar que el intervalo de confianza a un nivel de confianza del 95% para el cociente de las varianzas de las dos distribuciones es (0.4415, 1.6765). Este intervalo de confianza contiene al valor 1, por lo que se puede suponer que las varianzas de las dos distribuciones son idénticas.

Una vez se ha determinado la igualdad (o desigualdad) de las varianzas de ambas distribuciones, procedemos a calcular el intervalo de confianza para la diferencia de las medias propiamente dicho.

a) Intervalo de confianza para la diferencia de medias en dos poblaciones normales independientes cuando las varianzas poblacionales son desconocidas pero supuestas iguales

Si las varianzas poblacionales son desconocidas pero supuestas iguales, se parte de la variable aleatoria

b) Intervalo de confianza para la diferencia de medias en dos poblaciones normales independientes cuando las varianzas poblacionales son desconocidas, distintas y tamaños muestrales grandes

Si las varianzas de las poblaciones son desconocidas y, además, distintas y tamaños muestrales grandes, se sigue un procedimiento similar al que acabamos de describir en el caso de igualdad de varianzas para la obtención del intervalo de confianza, partiendo de una variable aleatoria.

#Supuesto Práctico 5 En vista de los resultados obtenidos en el supuesto práctico 4, y suponiendo que el número de flexiones que realizan los alumnos y las alumnas se distribuyen de acuerdo a variables normales de medias y varianzas desconocidas, obtener un intervalo de confianza al 95% para la diferencia del número medio de flexiones entre chicos y chicas. ¿Puede suponerse que el número medio de flexiones que realizan los chicos y las chicas es igual?

Solución Dado que en el supuesto práctico 4 se concluyó la igualdad de las varianzas del número de flexiones que hacen chicos y chicas, debemos establecer a TRUE el valor del parámetro var.equal cuando realicemos la llamada a la función t.test.

```
t.test(Flexiones.chicos, Flexiones.chicas, var.equal = TRUE)
```

```
##
## Two Sample t-test
##
## data: Flexiones.chicos and Flexiones.chicas
## t = -0.06154, df = 73, p-value = 0.9511
## alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
## -2.887271 2.714306
## sample estimates:
## mean of x mean of y
## 50.06977 50.15625
```

Atendiendo la información sobre el intervalo de confianza que se incluye entre los resultados

95 percent confidence interval: -2.887271 2.714306

Se puede afirmar que el intervalo de confianza a un 95% de confianza para la diferencia de las medias del número de flexiones que hacen chicos y chicas es (-2.8872, 2.7143). Como el 0 está dentro de este intervalo, se puede decir que ambas medias son idénticas.

Intervalo de confianza para la diferencia de medias en dos poblaciones normales relacionadas

Supuesto Práctico 6

Para estudiar los efectos de un programa de control de peso, el profesor de educación física selecciona aleatoriamente a 6 alumnos y se les toma nota de sus pesos antes y después de pasar por el programa.

falta tabla

Construir un intervalo de confianza a un 95% de confianza para la diferencia de medias de los pesos antes y después de seguir el programa.

Solución Como puede observarse, los datos vienen por parejas: peso antes y después, dos datos por individuo. Parece lógico que los datos se encuentren relacionados entre sí.

En primer lugar, vamos a introducir los datos en R. Para ello definimos dos vectores

```
Antes<-c(72.0, 73.5, 70.0, 71.5, 76.0, 80.5)
Despues<-c(73.0, 74.5, 74.0, 74.5, 75.0, 82.0)
```

A partir de estos datos, vamos a aplicar la función `t.test`, para obtener el intervalo de confianza que buscamos.

```
t.test(Antes,Despues,paired=TRUE)

##
## Paired t-test
##
## data: Antes and Despues
## t = -2.2238, df = 5, p-value = 0.07676
## alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
## -3.4135884 0.2469217
## sample estimates:
## mean of the differences
## -1.583333
```

Supuesto Práctico 7

Retomando el conjunto de datos relativo a las flexiones que realizan un grupo de estudiantes, calcular un intervalo de confianza al 92% para la diferencia entre la proporción de alumnos y de alumnas que practican deporte. ¿Puede considerarse que ambas proporciones son iguales?

Solución En primer lugar, sino tenemos importado el fichero de datos, debemos importarlo. Para ello, utilizamos la orden `read.table`

```
table(datos$Sexo,datos$Deporte)
```

```
##
##      0  1
##   H 32 11
##   M 13 19
```

En total, 11 de los 43 y 19 de las 32 chicas muestreados practican deporte. Vamos a crear dos vectores con esta información:

vector_Deporte: Total de chicos y chicas que practican deporte vector_Sexo: Total de chicos y chicas en la muestra.

```
vector_Deporte<-c(11,19)
vector_Deporte
```

```
## [1] 11 19
```

```
vector_Sexo<-c(43,32)
vector_Sexo
```

```
## [1] 43 32
```


Es muy importante que los valores se introduzcan en el mismo orden en los dos vectores. A continuación podemos utilizar la función `prop.test` con estos dos vectores como argumentos.

```
prop.test(vector_Deporte,vector_Sexo, conf.level = 0.92)
```

```
##
## 2-sample test for equality of proportions with continuity correction
##
## data: vector_Deporte out of vector_Sexo
## X-squared = 7.3787, df = 1, p-value = 0.0066
## alternative hypothesis: two.sided
## 92 percent confidence interval:
## -0.5566881 -0.1191840
## sample estimates:
## prop 1 prop 2
## 0.255814 0.593750
```

Según la salida de la función `prop.test`, el intervalo de confianza al 92% de confianza es (-0.5566, -0.1191). El 0 no está dentro de este intervalo, por lo que podemos concluir que las proporciones de chicos y chicas que hacen deporte no coinciden.

Ejercicios

Ejercicio 1

Un fabricante diseña un experimento para estimar la tensión de ruptura media de una fibra. Para ello, observa las tensiones de ruptura, en libras, de 16 hilos de dicha fibra seleccionados aleatoriamente. Las tensiones son 20.8, 20.6, 21.0, 20.9, 19.9, 20.2, 19.8, 19.6, 20.9, 21.1, 20.4, 20.6, 19.7, 19.6, 20.3, 20.7.

Construir un intervalo de confianza al 98% de confianza:

- a) Si la tensión de ruptura se distribuye según una normal de desviación típica $\sigma = 0.45$ libras
- b) Si la tensión de ruptura se distribuye según una normal de desviación típica desconocida.

solución

En primer lugar, introducimos, en un vector, los datos de las 16 tensiones observadas y en segundo lugar introducimos el dato relativo al nivel de significación

```
tensiones<- c(20.8, 20.6, 21.0, 20.9, 19.9, 20.2, 19.8, 19.6, 20.9, 21.1, 20.4, 20.6, + 19.7, 19.6, 20.3, 20.7)
alpha<-0.02
```

- a) Si la tensión de ruptura se distribuye según una normal de desviación típica

```
n<-length(tensiones)
media<-mean(tensiones)
cuantil<-qnorm(1-alpha/2)
```

Introducimos el dato de la desviación típica

```
desv_tipica<-0.45
```

A continuación calculamos el límite inferior y superior del intervalo pedido.

```
lim_inf<-media-cuantil*desv_tipica/sqrt(n)
lim_inf
```

```
## [1] 20.11954
```

```
lim_sup<-media+cuantil*desv_tipica/sqrt(n)
lim_sup
```

```
## [1] 20.64296
```

Por lo que el intervalo de confianza para la tensión media de la fibra que buscamos es (20.11954, 20.64296).

b) Si la tensión de ruptura se distribuye según una normal de desviación típica desconocida

Hay que obtener un intervalo de confianza cuando la desviación típica no se conoce. Para ello, usamos la función t.test

```
t.test(tensiones, conf.level = 0.98)
```

```
##
## One Sample t-test
##
## data: tensiones
## t = 155.85, df = 15, p-value < 2.2e-16
## alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
## 98 percent confidence interval:
## 20.04092 20.72158
## sample estimates:
## mean of x
## 20.38125
```

En este segundo caso, el intervalo de confianza para la tensión media de la fibra, al 98% de confianza, es (20.04092, 20.72158).

Ejercicio 2

En una muestra de 40 alumnos, 25 de ellos están conformes con las decisiones que ha tomado el profesor con respecto a las calificaciones. Calcular un intervalo de confianza, a un 95% de confianza para la proporción de alumnos conforme con el profesor.

Solución

```
prop.test(25,40)
```

```
##
## 1-sample proportions test with continuity correction
##
## data: 25 out of 40, null probability 0.5
## X-squared = 2.025, df = 1, p-value = 0.1547
## alternative hypothesis: true p is not equal to 0.5
## 95 percent confidence interval:
## 0.4580964 0.7682594
## sample estimates:
## p
## 0.625
```

El intervalo de confianza para la proporción poblacional de alumnos conforme al 95% de confianza es (0.4580964, 0.7682594)

Ejercicio 3

Una agencia estatal vigila la calidad del agua para la cría de peces. Esta agencia desea comparar la cantidad media de cierta sustancia tóxica en dos ríos contaminados por desperdicios industriales. Se seleccionaron 11 muestras en un río y 8 muestras en el otro.

Si las dos poblaciones son normales e independientes, calcular un intervalo de confianza con nivel de confianza del 90% para la diferencia de las medias poblacionales de cantidad de sustancia tóxica.

Solución

```
Rio1<-c(10,10,12,13,9,8,12,12,10,14,8)
Rio2<-c(11,8,9,7,10,8,8,10)
```

```
var.test(Rio1,Rio2,conf.level=0.90)
```

```
##
## F test to compare two variances
##
## data: Rio1 and Rio2
## F = 2.1846, num df = 10, denom df = 7, p-value = 0.3119
## alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
## 90 percent confidence interval:
## 0.6007504 6.8498698
## sample estimates:
## ratio of variances
## 2.184643
```

Según los resultados de var.test, el intervalo de confianza al 90% de confianza para el cociente de las varianzas de la variable en ambos ríos es (0.6007, 6.8498), que contiene al 1. Por tanto, podemos asumir que ambas varianzas son iguales en ambos ríos.

Por lo tanto, tenemos que obtener un intervalo de confianza para la diferencia de medias de dos poblaciones cuando las varianzas de ambas poblaciones son iguales. Para ello, utilizamos la función t.test.

```
t.test(Rio1,Rio2,var.equal = TRUE,conf.level = 0.90)
```

```
##
## Two Sample t-test
##
## data: Rio1 and Rio2
## t = 2.2564, df = 17, p-value = 0.0375
## alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
## 90 percent confidence interval:
## 0.424258 3.280287
## sample estimates:
## mean of x mean of y
## 10.72727 8.87500
```

Ejercicio 4

Una empresa farmacéutica está interesada en la investigación preliminar de un nuevo medicamento que parece tener propiedades reductoras del colesterol en la sangre. A tal fin se toma una muestra al azar de 6 personas, y se determina el contenido en colesterol antes y después del tratamiento.

Calcular un intervalo de confianza, al 96% de confianza para la diferencia del nivel de colesterol medio antes y después del tratamiento.

Solución

```
Antes<-c(217,252,229,200,209,213)
Despues<-c(8209,241,230,208,211)
```

```
#t.test(Antes, Despues, paired = TRUE, conf.level = 0.96)
```