

第2次课 幂的运算

板块一 幂的运算

幂的运算

概念：求 n 个相同因数的积的运算，叫做乘方，乘方的结果叫做幂，在 a^n 中， a 叫做底数， n 叫做指数.

含义： a^n 中， a 为底数， n 为指数，即表示 a 的个数， a^n 表示有 n 个 a 连续相乘.

例如： 3^5 表示 $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ ， $(-3)^5$ 表示 $(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$ ， -3^5 表示 $-(3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)$

$$\left(\frac{2}{7}\right)^5 \text{ 表示 } \frac{2}{7} \times \frac{2}{7} \times \frac{2}{7} \times \frac{2}{7} \times \frac{2}{7}, \quad \frac{2^5}{7} \text{ 表示 } \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{7}$$

特别注意负数及分数的乘方，应把底数加上括号.

(1) 同底数幂相乘.

同底数的幂相乘，底数不变，指数相加. 用式子表示为：

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (m, n \text{ 都是正整数}).$$

(2) 幂的乘方.

幂的乘方的运算性质：幂的乘方，底数不变，指数相乘. 用式子表示为：

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (m, n \text{ 都是正整数}).$$

(3) 积的乘方.

积的乘方的运算性质：积的乘方，等于把积的每一个因式分别乘方，再把所得的幂相乘. 用式子表示为：

$$(ab)^n = a^n b^n \quad (n \text{ 是正整数}).$$

(4) 同底数幂相除.

同底数的幂相除，底数不变，指数相减. 用式子表示为：

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0, m, n \text{ 都是正整数})$$

(5) 任何不等于零的数的零次幂都等于1. 规定 $a^0 = 1 (a \neq 0)$; $a^{-p} = \frac{1}{a^p} \quad (a \neq 0, p \text{ 是正整数}).$

任何不等于零的数的负 n (n 为正整数) 次幂，等于这个数的 n 次幂的倒数，即 $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (n \text{ 为正整数})$

【例1】 计算：(1) $\frac{1}{5} \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$

$$(2) \underbrace{(a+b)(a+b)(a+b) \cdots (a+b)}_{n \uparrow a+b}$$

$$(3) -6 \times 6 \times (-6) \times 6 \times (-6)$$

【答案】 (1) $\frac{1}{5} \times (-3)^5$; (2) $(a+b)^n$; (3) -6^5

【例2】 下列计算正确的是 ()

A. $a^3 \cdot a^5 = a^{15}$

B. $a^6 \div a^2 = a^3$

C. $a^3 + a^5 = a^8$

D. $(-a)^4 \div a = a^3$

【解析】 根据同底数幂相乘除的法则，应选 D

【答案】 D

【例3】 填空：

(1) $x^5 \div x \times x^4 =$ _____;

(2) $(-a)^3 \cdot (-a)^2 \cdot (-a)^4 =$ _____;

(3) $(a^2b)^2 \cdot (-2b)^3 =$ _____;

$$(4) (x^2)^3 - (-x)^2 \cdot x^3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

【答案】(1)原式 $= x^4 \cdot x^4 = x^8$

(2)原式 $= (-a)^9 = -a^9$

(3)原式 $= a^4 b^2 \cdot (-8b^3) = -8a^4 b^5$

【巩固】计算：

(1) $x^6 \div (x^2 \cdot x^3)$ ；

(2) $x^{12} \cdot (x^4 \div x^3)$

【答案】(1)原式 $= x$

(2)原式 $= x^{12} \cdot x = x^{13}$

【巩固】填空： $x^{4m} \div (\quad) = x^m$ ； $a^2 \cdot (\quad) = a^{2m+4}$ ； $(\quad)^n = 4^n a^{2n} b^{3n}$ ； $a^{8n} = (a^4)^{(\quad)} = [a^{(\quad)}]^2$

【解析】(1) x^{3m} ；(2) a^{2m+2} ；(3) $4a^2 b^3$ ；(4) $a^{8n} = a^{2 \cdot 4n} = [a^{(4n)}]^2$

【答案】见解析

【例 4】计算：(1) $-a^2 \cdot (-a^4) \cdot (-a^6) \cdot (-a)^5$ ；(2) $t^5 \cdot t^4 - t^{18} \div t^9$ ；(3) $(-a)^2 \cdot (-a^3) - (-a^2)^3$

(4) $(-x)^6 - (-3x^3)^2 + 8[(-x)^3]^2$ ；(5) $x^2 \cdot x^3 - (2x^2)^3 + x^9 \div x^4$

【答案】(1)原式 $= -a^2 \cdot (-a^4) \cdot a^6 \cdot (-a^5) = -a^{17}$ ；

(2)原式 $= t^9 - t^9 = 0$

(3)原式 $= -a^5 + a^6$

(4)原式 $= x^6 - 9x^6 + 8x^6 = 0$

(5)原式 $= 2x^5 - 8x^6$

【巩固】下列计算错误的是 ()

A. $(-3ab)^3 = -27a^3b^3$

B. $\left(-\frac{1}{4}a^3b^2\right)^2 = \frac{1}{16}a^6b^4$

C. $(-xy^2)^3 = -xy^6$

D. $(-a^4b^3)^2 = a^8b^6$

【解析】根据积的乘方运算法则，应选 C

【答案】C

【巩固】已知 $a+b=0$ ， n 为正数，则下列等式中一定成立的是 ()

A. $a^n + b^n = 0$

B. $a^{2n} + b^{2n} = 0$

C. $a^{2n+1} + b^{2n+1} = 0$

D. $a^{n+1} + b^{n+1} = 0$

【解析】因为 a, b 互为相反数，它们的偶次幂相等，而奇次幂互为相反数，指数中只有 $2n+1$ 一定是奇数，故选 C

【答案】C

【例 5】速算比赛：

A 组: (1) $a^{10} \cdot a^{20}$; (2) $(a^{100})^2$; (3) $(a^{10}b^{20})^2$; (4) $a^{100} \div a^2$, 其中 $a \neq 0$, $b \neq 0$.

B 组: (1) $(-x)^3 \cdot (-x)^2$; (2) $(-a^3)^2 \cdot (-a^2)^3$;
(3) $(-2a^2)^2 \cdot (-4a^4)$; (4) $(-2x^m y^n)^2 \cdot (-x^2 y^n)^3 \cdot (-3xy^2)$

【解析】A 组: (1) $a^{10} \cdot a^{20} = a^{30}$; (2) $(a^{100})^2 = a^{200}$; (3) $(a^{10}b^{20})^2 = a^{20}b^{40}$; (4) $a^{100} \div a^2 = a^{98}$;

B 组: (1)解法一: $(-x)^3 \cdot (-x)^2 = -x^3 \cdot x^2 = -x^5$; 解法二: $(-x)^3 \cdot (-x)^2 = (-x)^5 = -x^5$;

(2) $(-a^3)^2 \cdot (-a^2)^3 = a^6 \cdot (-a^6) = -a^{12}$; (3) $(-2a^2)^2 \cdot (-4a^4) = 4a^4 \cdot (-4a^4) = -16a^8$;

(4) $(-2x^m y^n)^2 \cdot (-x^2 y^n)^3 \cdot (-3xy^2) = 4x^{2m} y^{2n} \cdot (-x^6 y^{3n}) \cdot (-3xy^2) = 12x^{2m+7} y^{5n+2}$;

【答案】见解析

【巩固】计算: (1) $\left(-3\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{13} \times (6.5) + (-2)^4 \div (-6) =$ _____

(2) $(x+y)^4 (x+y)^3$

(3) $(3a-b)^5 (b-3a)^3$

(4) $(m-n)^4 (n-m)(n-m)^3$

【答案】(1) $\frac{94}{9}$; (2) $(x+y)^7$; (3) $-(3a-b)^8$; (4) $(n-m)^8$

【巩固】 n 为自然数, 那么 $(-1)^n =$ _____; $(-1)^{2n} =$ _____; $(-1)^{2n+1} =$ _____;

当 n 为 _____ 数时, $(-1)^n + (-1)^{2n} = 0$; 当 n 为 _____ 数时, $(-1)^n + (-1)^{2n} = 2$

【答案】 ± 1 ; 1; -1; 奇数; 偶数.

【巩固】计算: $2 - 2^2 - 2^3 - 2^4 - 2^5 - 2^6 - 2^7 - 2^8 - 2^9 + 2^{10} =$ _____.

【解析】可直接计算求出结果, 也可通过观察式子的特点, 注意到 2^{10} 前面为“+”号, 提取公因式, 再进行计算.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 2^{10} - 2^9 - 2^8 - 2^7 - 2^6 - 2^5 - 2^4 - 2^3 - 2^2 + 2 \\ &= 2^9(2-1) - 2^8 - 2^7 - 2^6 - 2^5 - 2^4 - 2^3 - 2^2 + 2 \dots\dots \\ &= 2^2(2-1) + 2 = 6 \end{aligned}$$

教师不防在此回忆巩固下面两个典型题目的计算:

$$\textcircled{1} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$\textcircled{2} \quad 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n = 2^0 + 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n - 2^0 = 2^{n+1} - 1$$

【答案】6

【巩固】化简 $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{99}$

【解析】因为 $2^n + 2^n = 2^{n+1}$, 所以原式 $= 2 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99} - 2 = 2^2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99} - 2$
 $= 2^{100} - 2$

【答案】 $2^{100} - 2$

【巩固】当 n 是正整数时, 求 $(-2)^{2n+1} + 2 \cdot (-2)^{2n}$ 的值

【解析】解法一: $\because n$ 为正整数, $\therefore (-2)^{2n+1} + 2 \cdot (-2)^{2n} = (-2)^{2n+1} + 2 \cdot 2^{2n} = -2^{2n+1} + 2^{2n+1} = 0$

解法二: $(-2)^{2n+1} + 2 \cdot (-2)^{2n} = (-2)^{2n} \cdot (-2) + 2 \cdot (-2)^{2n} = 2^{2n} \cdot (-2) + 2 \cdot 2^{2n} = 2^{2n} \cdot (-2+2) = 0$

【答案】0

【例 6】已知 $a^m = 2$ ， $a^n = 3$ ，求 a^{3m+2n} 的值.

【解析】 $a^{3m+2n} = a^{3m} \cdot a^{2n} = (a^m)^3 \cdot (a^n)^2 = 2^3 \cdot 3^2 = 8 \times 9 = 72$.

【答案】72

【例 7】若 $2x + 5y - 3 = 0$ ，求 $4^x \cdot 32^y$.

【解析】 $4^x \cdot 32^y = (2^2)^x \cdot (2^5)^y = 2^{2x} \cdot 2^{5y} = 2^{2x+5y}$ ， $2x + 5y - 3 = 0$ ， $2x + 5y = 3$ ， $4^x \cdot 32^y = 2^{2x+5y} = 2^3 = 8$.

【答案】8

【巩固】已知 $2^m = 3$ ， $2^n = 5$ ，求 2^{3m-2n} 的值.

【答案】 $\frac{27}{25}$

【例 8】已知 $a^{2n} = 2$ ，求 $(2a^{3n})^2 - 3(a^2)^{2n}$ 的值

【解析】 $(2a^{3n})^2 - 3(a^2)^{2n} = 4a^{6n} - 3a^{4n} = 4(a^{2n})^3 - 3(a^{2n})^2$

当 $a^{2n} = 2$ 时，原式 $= 4 \times 2^3 - 3 \times 2^2 = 4 \times 8 - 3 \times 4 = 32 - 12 = 20$

【答案】20

【例 9】已知： $a^n = 5$ ， $b^n = 3$ ，求 $(ab)^{2n}$.

【解析】法 1： $(ab)^{2n} = a^{2n} \cdot b^{2n} = (a^n)^2 \cdot (b^n)^2 = 5^2 \times 3^2 = 225$ ；法 2： $(ab)^{2n} = [(ab)^n]^2 = [a^n \cdot b^n]^2 = (5 \times 3)^2 = 225$.

【答案】225

【例 10】已知 $2^{2x+3} - 2^{2x+1} = 192$ ，求 x .

【考点】幂的运算

【难度】2 星

【题型】解答

【关键词】

【解析】 $4 \times 2^{2x+1} - 2^{2x+1} = 192$ ，即 $3 \times 2^{2x+1} = 192$ ， $2^{2x+1} = 2^6$ ， $x = \frac{5}{2}$.

【答案】 $\frac{5}{2}$

板块二 幂的大小比较

【例 11】比较大小：(1) $(-2)^4$ _____ $(-4)^2$ ；(2) -5^3 _____ $(-3)^5$ ；

【答案】(1) =；(2) >

【巩固】比较 2^{234} 和 5^{100} 的大小，并说明理由

【解析】逐次计算可得 $2^2 = 4$ ， $2^3 = 8$ ， $2^4 = 16$ ， $2^5 = 32$ ， $2^6 = 64$ ， $2^7 = 128$ ， $5^2 = 25$ ， $5^3 = 125$ ，可见

$128 = 2^7 > 5^3 = 125$ ，由此可得 $(2^7)^{33} > (5^3)^{33}$ ，最终可得 $2^{234} > 5^{100}$

【答案】 $2^{234} > 5^{100}$

【巩固】 比较 2^{55} 、 3^{44} 、 5^{33} 、 6^{22} 四个数的大小.

【解析】 根据幂的性质可知， $2^{55} = (2^5)^{11}$ 、 $3^{44} = (3^4)^{11}$ 、 $5^{33} = (5^3)^{11}$ 、 $6^{22} = (6^2)^{11}$

根据幂的定义可知， a^{11} 表示 11 个 a 相乘，故只要比较出 2^5 、 3^4 、 5^3 、 6^2 的大小即可.

$$2^5 = 2^2 \cdot 2^3 = 4 \times 8 = 32, \quad 3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81, \quad 5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125, \quad 6^2 = 36$$

$$\text{故 } 2^5 < 6^2 < 3^4 < 5^3, \quad 2^{55} < 6^{22} < 3^{44} < 5^{33}.$$

建议本题留给特别突出的学生，根据全体学生情况选讲.

【答案】 $2^{55} < 6^{22} < 3^{44} < 5^{33}$

【巩固】 比较 3^{555} 、 4^{444} 、 5^{333} 的大小关系

【解析】 因为 $3^{333} = (3^5)^{111} = 243^{111}$ ， $4^{444} = (4^4)^{111} = 256^{111}$ ， $5^{333} = (5^3)^{111} = 125^{111}$ ，因为

$$125 < 243 < 256, \quad \text{所以 } 5^{333} < 3^{555} < 4^{444}$$

【答案】 $5^{333} < 3^{555} < 4^{444}$

【巩固】 已知 $a = 3^{22}$ ， $b = 4^{14}$ ， $c = 9^{10}$ ， $d = 8^{10}$ ，则 a, b, c, d 的大小关系为_____

【解析】 因为 $a = 3^{22} > c = 3^{20} > d = 2^{30} > b = 2^{28}$ ，所以 $a > c > d > b$

【答案】 $a > c > d > b$

【巩固】 设 $a = 3^{50}$ ， $b = 4^{40}$ ， $c = 5^{30}$ ，比较 a, b, c 的大小.

【解析】 $\because a = 3^{50} = (3^5)^{10} = 243^{10}$ ， $b = 4^{40} = (4^4)^{10} = 256^{10}$ ， $c = 5^{30} = (5^3)^{10} = 125^{10}$ ， $\therefore c < a < b$.

【答案】 $c < a < b$

【巩固】 已知 $a = (2^3)^4$ ， $b = (2^4)^3$ ， $c = (3^2)^4$ ， $d = (4^3)^2$ ， $e = (4^2)^3$ ，则 a, b, c, d, e 的大小关系是.

【解析】 $a = b = d = e < c$.

【答案】 $a = b = d = e < c$