МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ЧАСТЬ 1

ШАПОШНИКОВ
СТАНИСЛАВ ВАЛЕРЬЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ОНУФРИЕНКО МАРИЮ ВИКТОРОВНУ

Содержание

Лекция 1

Основные определения математического анализа

Определение 1. *Множество* — это набор, совокупность, собрание объектов, которые называются элементами множества. Обычно множества обозначаются заглавными латинскими буквами.

Обозначение 1. Элемент a принадлежит множеству A: $a \in A$. Элемент a не принадлежит множеству A: $a \notin A$.

Вообще говоря, определение 1 формально не является определением. Множество — это неопределяемое понятие. Однако мы хотим уметь проверять, является ли какой–то объект элементом некоторого данного множества.

Способы «задания» множества:

- перечисление. Например, список студентов группы.
- указание свойства
$$\{x \mid x^2 = 1\}.$$
Этот способ может иногда приводить к противоречиям.

Парадокс Рассела

Пример 1 (Парадокс Рассела)**.** Пусть $\mathcal{K}$ — набор множеств $\mathcal{K}$, которые не содержат себя в качестве элемента. Является ли $\mathcal{K}$ своим собственным элементом, т.е. верно ли, что $\mathcal{K} \in \mathcal{K}$?

Предположим, что ответ «да», т.е. $\mathcal{K} \in \mathcal{K}$. Но это противоречит определению $\mathcal{K}$, т.к. $\mathcal{K}$ содержит себя в качестве элемента.

Допустим теперь, что $\mathcal{K} \notin \mathcal{K}$. Но тогда про множество $\mathcal{K}$ можно сказать, что оно не содержит себя в качестве элемента, то есть по определению оно должно было бы лежать в $\mathcal{K}$: $\mathcal{K} \in \mathcal{K}$.

В обоих случаях мы пришли к противоречию.

Парадокс Рассела можно изложить в более простой форме. Командир вызвал к себе брадобрея и приказал ему: «Ты должен брить только тех, кто не бреется сам». Брадобрей задумался, что же ему делать с самим собой. Если он побреется, то он тот, кто бреется сам, а таких брить нельзя. Но если он не будет себя брить, то он тот, кто сам не бреется, а таких как раз брить и нужно.

Почему возник этот парадокс? Потому что мы в множестве всех множеств выделяем его часть. Этого делать, вообще говоря, нельзя.

Список действий с множествами, которые разрешены и не приводят к парадоксам и противоречиям, называется *аксиоматикой Цермело–Френкеля.*

Пустое множество

Среди множеств выделяется важный пример: пустое множество $\varnothing$.

Определение 2. Пустое множество: про всякий объект можно утверждать, что он этому множеству не принадлежит.

Аксиоматика Френкеля–Цермело позволяет доказать, что пустое множество — единственно.

Свойства включения

Определение 3. Множество A является подмножеством B ($A \subset B$), если $a \in A \Longrightarrow a \in B$.

Принадлежность — элемент сам принадлежит этому множеству:

$$\{1, 2\} \in \{3, 4, \{1, 2\}\}.$$

Включение — все элементы одного из множеств являются элементами второго:

$$\{1, 2\} \subset \{3, 4, 1, 2\}.$$

- $A \subset A$
- $A \subset B$ и $B \subset C \Longrightarrow A \subset C$.

  Определение 4. Множества A и B равны ($A = B$), если $A \subset B$ и $B \subset A$.

- $\varnothing \subset A$ для всякого A. Т.е. пустое множество является подмножеством любого другого.

  Доказательство. Докажем от противного. Пусть не выполняется

  $$a \in \varnothing \Longrightarrow a \in A.$$

  Значит существует $a \in \varnothing$ такой, что $a \notin A$. А это невозможно, потому что в $\varnothing$ нет элементов. $\square$

Аксиомы Пеано

Множество натуральных чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. Определим это множество аксиоматически.

Аксиомы Пеано:

1) Для всякого n существует единственный элемент, который называется следующим и обозначается $n + 1$.

2) Существует единственный элемент, который ни за кем не следует. Называется он единицей и обозначается 1.

3) У всякого элемента, отличного от 1 существует единственный элемент, для которого он следующий (существует единственный предыдущий элемент).

   Эти свойства запрещают, например, такие ситуации:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[ll, bend right]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & & 4 \arrow[r] & 5 \arrow[r] & {} \\
1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
 & & & IV \arrow[r] & V \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

   На данном этапе построенное нами множество по нашим аксиомам может выглядеть так:

$$\left\{ \begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & {} \\
 & I \arrow[r, bend right] & II \arrow[l, bend right] &
\end{tikzcd} \right\}$$

   Поэтому, чтобы получить множество натуральных чисел, осталось потребовать минимальность множества.

4) Аксиома индукции. Если $M \subset \mathbb{N}$ таково, что $1 \in M$ и $n \in M \Longrightarrow n+1 \in M$, то $M = \mathbb{N}$.

Метод математической индукции

Метод математической индукции: задан набор утверждений, занумерованных натуральными числами $A_1, A_2, A_3, \ldots$. Хотим доказать, что все утверждения A_n истинны.

Проверим, что A_1 истинно (база). Надо проверить, что для всякого n $A_n \Longrightarrow A_{n+1}$ (шаг). Если это верно, то все A_n истинны.

Как это связанно с аксиомой индукции? Рассмотрим $M = \{n \mid A_n$ — истинно$\}$. База: $1 \in M$. Шаг: для всякого n $n \in M \Longrightarrow n+1 \in M$. Следовательно, по аксиоме индукции $M = \mathbb{N}$, т.е. все A_n истинны.

Мы показали, как из аксиомы индукции следует метод математической индукции. И наоборот: можно используя метод математической индукции, объяснить, почему верна аксиома индукции.

Пусть теперь выполняется метод математической индукции. Докажем утверждение аксиомы индукции. Пусть $M \subset \mathbb{N} : 1 \in M$, $n \in M \Longrightarrow (n+1) \in M$. Мы хотим доказать, что тогда $M = \mathbb{N}$. Введем утверждение A_n: $n \in M$. Знаем, что A_1 истинно, $A_n \Longrightarrow A_{n+1}$. Тогда метод математической индукции говорит, что все A_n истинны. Т.е. $M = \mathbb{N}$.

Неравенство Бернулли

Теорема 1 (Неравенство Бернулли)**.** *Для всякого* n *и* $x \geqslant -1$ *верно:*

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Доказательство. База: $n = 1$.

$$(1+x) \geqslant 1 + x.$$

Шаг: предположим, что для n верно, т.е. $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$. Докажем, что

$$(1+x)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)x.$$

Имеем:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geqslant (1+nx)(1+x) = 1 + x + nx + nx^2 \geqslant 1 + (n+1)x$$
$$(nx^2 \geqslant 0)$$

Условие $x \geqslant -1$ нужно для перехода

$$(1+x)^n(1+x) \geqslant (1+nx)(1+x).$$

На самом деле неравенство верно и при более мягком условии: $x \geqslant 2$, но такое утверждение не получится доказать с помощью индукции.

Теорема доказана. □

Бином Ньютона

Теорема 2 (Бином Ньютона)**.**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k},$$

где

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$
$$n! = n(n-1)\ldots 1, \quad 0! = 1,$$

Число C_n^k *— количество способов выбрать* k *объектов из* n *объектов или выбрать из* n*–элементного множества* k*–элементное.*

Как получается это число? Комбинаторный способ таков: допустим у нас есть n *объектов, из которых нужно выбрать* k *штук. Количество способов выбрать первый объект —* n*, второй (после выбора первого) —* $n-1$*, третий (после выбора первых двух) —* $n-2$*. И так далее до выбора* k*–го объекта —* $n-k+1$ *способов (на* i*–м шаге кол–во способов —* $n-(i-1)$*). Итак, общее количество способов выбрать* k *объектов:*

$$n(n-1)\ldots(n-k+1).$$

Однако в данном случае мы считаем наборы одинаковыми, если в них совпадают и элементы, и их порядок. Но для нас в данном случае порядок не важен. Поэтому нужно поделить общее количество на $k!$ *(кол–во перестановок* k *элементов):*

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Доказательство. **Способ 1**: Имеем

$$(a+n)^n = (a+b)(a+b)\dots(a+b).$$

После раскрытия скобок получим слагаемые вида $a^k b^{n-k}$. Сгруппируем те, у которых показатели степени одинаковы. Каждая пара показателей встречается столько раз, сколько способов выбрать k скобок из n скобок (из k скобок выбираем a, а из остальных — b). Теперь полученное нужно сложить:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

В этом доказательстве неявно присутствует индукция. Мы ей пользуемся, когда перемножаем n скобок, потому что изначально это действие определяется именно индуктивно.

Способ 2, по индукции:

База: $n = 1$:

$$(a+b)^1 = C_1^0 b + C_1^1 a = b + a. \text{ — верно.}$$

Шаг: предположим, что для n доказано. Докажем для $n+1$:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k+1}.$$

Второе равенство — по предположению индукции. Третье — раскрытие скобок. Заметим, что слагаемые имеют вид

$$a^m b^{n+1-m},$$
$$k+1 = m, \Longrightarrow k = m-1, \quad m = 0, \dots, n+1$$

Сгруппируем слагаемые с одинаковой буквенной частью. Общий вид каждого из них таков: $a^m b^{n+1-m}$. Его можно получить из

$$a(C_n^{m-1} a^{m-1} b^{n-m+1}) \quad \text{и} \quad b(C_n^m a^{m-1} b^{n-m}).$$

Сложим коэффициенты при $a^m b^{n+1-m}$:

$$C_n^{m-1} + C_n^m = \frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!} + \frac{n!}{m!(n-m)!} =$$
$$= \frac{n!m + n!(n-m+1)}{m!(n-m+1)!} = \frac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!} = C_{n+1}^m.$$

(Домножили первую дробь на m, а вторую — на $(n-m+1)$, тем самым привели к общему знаменателю. После раскрытия скобок в числителе получили стандартную формулу числа сочетаний C_{n+1}^m). Следовательно,

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{m=0}^{n+1} C_{n+1}^m a^m b^{n+1-m}$$

$\square$

Лекция 2

Бином Ньютона

На прошлой лекции была доказана формула бинома Ньютона. Запишем его в следующем виде:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\alpha} C_\alpha^k a^k b^{\alpha-k} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \\ + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \ldots + 0 + 0 + \ldots,$$

Эта сумма «закончится» как только в произведении в числителях у дробей будут появляться множители $(\alpha-\alpha)$. Поэтому на самом деле можно считать, что это бесконечная сумма, в которой, начиная с $(\alpha+1)$–го места, будут прибавляться нули.

Вообще говоря, эту формулу придумал не Ньютон. Она была известна до него, но только для натуральных. А Ньютон заметил, что в качестве α можно также брать целые числа или рациональные, но только сумму надо представлять бесконечной.

Пример 2. Пусть $\alpha = -1$. Рассмотрим бесконечную геометрическую прогрессию

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3$$

Теперь напишем тоже самое, но используя бином. Посмотрим на коэффициент при x^k:

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} = \frac{-1\cdot(-2)\cdot\ldots\cdot(-k)}{k!} = \pm 1$$

Если k четное, то получим 1, если нечетное — -1. То есть все коэффициенты совпадают.

Пример 3. Пусть $\alpha = 1/2$.

$$\sqrt{1+x} = 1 + c_1x + c_2x^2 + \ldots$$

Но почему мы уверены, что $\sqrt{1+x}$ представим в таком виде? Возведем обе части равенства в квадрат:

$$1 + x = (1 + c_1x + c_2x^2 + \ldots)(1 + c_1x + c_2x^2 + \ldots) = 1 + 2c_1x + (c_1^2 + 2c_2)x^2 + \ldots$$

Приравниваем коэффициенты левой и правой части:

$$2c_1 = 1 \Longrightarrow c_1 = \frac{1}{2},$$
$$c_1^2 + 2c_2 = 0 \Longrightarrow c_2 = -\frac{1}{8}.$$

Но по биному как раз и получается

$$\alpha = \frac{1}{2},$$
$$\frac{\alpha(\alpha-1)}{2} = \frac{1/2(1/2-1)}{2} = -\frac{1}{8}.$$

Можно проверить, что дальше тоже верно. Такие суммы называются *формулами Тейлора.*

Определение функции

Определение 5. *Функцией* f из множества X в множество Y $(f : X \longrightarrow Y)$ называется правило соответствия, сопоставления, сопоставляющее каждому $x \in X$ ровно один $y \in Y$. Далее обозначаем $y = f(x)$.

Пример 4. Такое сопостяавление не является функцией:

$$x \longrightarrow y : \quad y^2 = x;$$
$$1 \longrightarrow \{-1, 1\}.$$

Пример 5. Пример функции:

$$x \longrightarrow x^2;$$
$$1 \longrightarrow 1;$$
$$-1 \longrightarrow 1,$$

Декартово произведение

Определение 6. Множество $\{x, y\}$ называется неупорядоченной парой элементов x и y.

Определение 7. Множество $\{x, \{x, y\}$ называется упорядоченной парой, где x — это первый элемент пары, а пару обозначают (x, y).

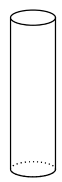
Определение 8. *Декартовым произведением* двух множеств $X \times Y$ называется множество упорядоченных пар (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$:

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X,\, y \in Y\}$$

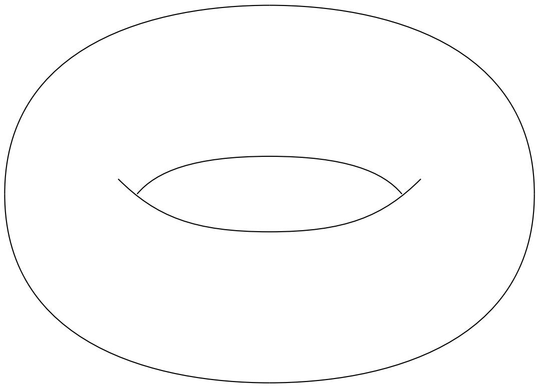
Пример 6. 1) Таблица, где на пересечении строки и столбца стоит элемент — упорядоченная пара.

2) Декартово произведение двух прямых — плоскость. Отсюда — декартова система координат.

3) Декартово произведение окружности и прямой — цилиндр.



4) Декартово произведение двух окружностей — тор.



Упражнение 1. Доказать, что декартово произведение диска и окружности — полнотория.

Упражнение 2. Предположим, что в поверхности тора есть «дырка». Что получится, если вывернуть тор наизнанку?

График функции

Определение 9 (Свойства существования графика)**.** 1) Если задана функция $f : X \longrightarrow Y$, то в $X \times Y$ определено подмножество

$$\Gamma_g = \{(x, y) \mid y = f(x)\}.$$

Это подмножество называется графиком функции. (Для каждого $x \in X$ существует пара $(x, y) \in \Gamma_f$ = каждому x сопоставляется y).

2) Если $(x, y) \in \Gamma_f$ и $(x, z) \in \Gamma_f \Longrightarrow y = z$. Это второе условие из определения функции f, а именно «единственность y».

На языке теории множеств говорят, что задана функция из X в Y, если задано подмножество $\Gamma \subset X \times Y$, удовлетворяющее свойствам 1) и 2). То есть мы не указываем способ сопоставления, а просто рисуем график, из которого уже можно получить «сопоставление».

Композиция функций

Определение 10. Говорят, что на множестве X задана операция $*$, если задана функция из $X \times X$ в X $((x_1, x_2) \to x_1 * x_2)$.

1) Операция коммутативна, если $x_1 * x_2 = x_2 * x_1$,

2) Операция ассоциативна $x_1 * (x_2 * x_3) = (x_1 * x_2) * x_3$.

Определение 11. На множестве функций определена операция композиции

$$f \circ g(x) = f(g(x)).$$

Пусть $F(X) = \{f \mid f : X \to X\}$. Тогда «композиция» — это операция на множестве F.

Но сама композиция $f \circ g(x) = f(g(x))$ определена для любых функций таких, что

$$g : X \longrightarrow Y, \quad f : Y \longrightarrow Z.$$

То есть имеет место следующее отображение:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[rr, dashed, bend right] \arrow[rrr, dashed, bend left, "\circ"] & Y & Y \arrow[r] \arrow[r, dashed, bend right] & Z \end{tikzcd}$$

Утверждение 1. *Операция композиции ассоциативна:*

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

Доказательство. Левая часть:

$$(f \circ g) \circ h(x) = f \circ g(h(x)) = f(g(h(x))).$$

Правая часть:

$$f \circ (g \circ h)(x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x))).$$

Следовательно, исходное равенство верно.

$\square$

Однако операция «композиция» не коммутативна.

Упражнение 3. Придумать пример, когда $f \circ g \neq g \circ f$.

Индуктивные определения на $\mathbb{N}$

Мы вводили натуральные числа посредством аксиом Пеано. Введем операции сложения и умножения на $\mathbb{N}$.

Как ввести сложение? Мы хотим определить $n + m$ для любых $n, m \in \mathbb{N}$. Одна из аксиом — $n + 1$ — следующее для n. Будем действовать индуктивно: если уже известно $n + m$ для некоторого m, то

$$n + (m + 1) = (n + m) + 1.$$

Однако операции «сложение» в явном виде так и не возникло. Поэтому вместо того, чтоб строить операцию индуктивно, нужно по индукции доказать, что она существует. То есть индукция в это случае уберет бесконечный процесс, который был в изложенной выше конструкции.

Утверждение 2. *Для всякого $n \in \mathbb{N}$ существует единственная функция $f_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ такая, что*

1) $f_n(1) = n + 1$,

2) $f_n(m + 1) = f_n(m) + 1$.

Определение 12. Функция, которая «объясняет», как к n добавить m:

$$f_n(m) = n + m.$$

Доказательство. 1) *Единственность.* Докажем, что такая функция f_n единственная. Пусть таких функций две: f_n и g:

$$f_n(1) = g(1) = n + 1,$$
$$f_n(m + 1) = f_n(m) + 1, \quad g(m + 1) = g(m) + 1.$$

Докажем по индукции, что $f_n(m) = g(m)$.

База: $m = 1$ — выполнено.

Шаг: Пусть $g(m) = f_n(m)$. Тогда по второму свойству введенной функции g

$$g(m + 1) = g(m) + 1 = f_n(m) + 1 = f_n(m + 1).$$

Следовательно, из данного рекуррентного соотношения получаем, что функции f_n и g совпадают для всех m.

2) *Существование.* Докажем индукцией по n.

База: $f_1(m) = m+1$. Проверим, что эта функция удовлетворяет всем условиям:

$$f_1(1) = 1 + 1 = 2 \quad (f_1(1) \text{ — следующий за единицей}).$$

$$f_1(m + 1) = (m + 1) + 1 = f_1(m) + 1.$$

База ($n = 1$) выполнена. Кроме того, в нашем определении–построении сложения получилось, что

$$m + 1 = 1 + m.$$

По определению

$$n + m = f_n(m),$$
$$1 + m = f_1(m) = m + 1.$$

Шаг: пусть для n существует f_n. Построим её для $n + 1$:

$$f_{n+1}(m) = f_n(m) + 1$$

Проверим, удовлетворяет ли f_{n+1} всем свойствам:

$$f_{n+1}(1) = f_n(1) + 1 = (n + 1) + 1.$$

$$f_{n+1}(m + 1) = f_n(m + 1) + 1 = (f_n(m) + 1) + 1 = f_{n+1}(m) + 1.$$

Шаг проверен. Следовательно, f_n существует для любого n.

□

Аналогично вводится умножение:

$$n \cdot 1 = n$$
$$n(m+1) = nm + n$$

Упражнение 4. Доказать, что

(i) $n + (m + k) = (n + m) + k$ (индукция по k)

(ii) $n + m = m + n$ (индукция по m)

Литература: Э.Ландау, «Основы анализа».

Целые числа

Определение 13. *Множество целых чисел* $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Операции «+» и «×» переносятся с $\mathbb{N}$.

Определение 14. Подмножество $R \subset X \times X$ называется *отношением эквивалентности*, если

- для всякого x $(x, x) \in R$ — рефлексивность,
- если $(x, y) \in R$, то $(y, x) \in R$ — симметричность,
- если $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$, то $(x, z) \in R$.

Далее пишем $x \sim y$ вместо $(x, y) \in R$.

Пример 7. Пусть $m > 1$. Тогда для любых $n, k \in \mathbb{Z}$

$$n \sim k \Longleftrightarrow m \mid n - k.$$

Пример 8. Множество четных и нечетных чисел. Их вводят, используя отношение эквивалентности.

Определение 15. Множество

$$R(a) = \{x \mid x \sim a\}$$

называется *классом эквивалентности* с представителем a.

Утверждение 3. $R(a) \cap R(b) \neq \varnothing \Longrightarrow R(a) = R(b)$

Доказательство. Рассмотрим $c \in R(a) \cap R(b)$. То есть $a \sim c$ и $b \sim c$. Тогда по свойству транзитивности $a \sim b$. То есть всякий x, эквивалентный b, эквивалентен и a, и наоборот. Это в точности означает, что $R(a) = R(b)$. $\square$

То есть все множество X может «расслаиваться» на непересекающиеся подмножества, которые называются классы эквивалентности:

$$X = \begin{array}{|c|} \hline \text{R(a)} \\ \hline \\ \hline \\ \hline \dots \end{array}$$

Элементы, которые лежат в одном «слое» эквивалентны друг другу. Но, вообще говоря, и наоборот: можно сначала разбить на некоторые подмножества, и потом задать отношение эквивалентности так: эквивалентны те элементы, которые лежат в одном подмножестве.

Вывод: любое отношение эквивалентности — это разбиение на подмножества. «Задать отношение эквивалентности» значит «разбить на множества». Фактически, мы каждый слой «воспринимаем» как один элемент. Набор классов эквивалентности называется фактор-множеством $X/\sim$.

Определение 16. $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$: $(m, n) \sim (p, q) \iff mq = np$. ($(m, n)$ можно представлять как дробь $\frac{m}{n}$).

Множество классов эквивалентности называется множеством рациональных чисел или дробей и обозначается $\mathbb{Q}$.

Лекция 3

Отношение порядка

Определение 17. Подмножество $R \subset X \times X$ называется *отношением частичного порядка* на X, если

1) $(x, x) \in R$ для каждого x
2) если $(x, y) \in R$ и $(y, x) \in R$, то $x = y$ — антисимметричность
3) если $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$, то $(x, z) \in R$.

Далее вместо $(x, y) \in R$ пишем $x \leq y$.

Определение 18. Пусть A — некоторое множество. Тогда множество всех подмножеств обозначаем 2^A.

Например, если $A = \{1, 2\}$, то все его подмножества:

$$\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{1, 2\}.$$

На множествах $A \leq B$, если $A \subset B$. Это отношение частичного порядка? Вообще говоря, бывает так, что не все пары подмножеств сравнимы (например, непересекающиеся подмножества), поэтому порядок и называется частичным.

Определение 19. *Лексико–графический порядок* — порядок слов в словаре. (При таком порядке любые два слова в словаре сравнимы по буквам, т.е. полностью сравнимы).

Определение 20. Если про всякие $x, y \in X$ можно утверждать, что $x \leq y$ или $y \leq x$, то порядок называется линейным, а множество — *линейно упорядоченным.*

На натуральных числах $\mathbb{N}$ можно ввести следующий порядок:

$$n \leq m \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = m, \\ m = n + k. \end{array}\right.$$

Но вообще говоря, тут надо проводить дополнительные проверки на корректность. Например, что не может быть, что $n = n + k$. И так далее. Подробнее в «Основах анализа» Э.Ландау.

А у нас будет только

Утверждение 4 (без доказательства)**.** *На $\mathbb{N}$ существует единственный порядок, при котором $n \leq n + 1$.*

Итак,

$$n < m, \text{ если } n \neq m \text{ и } n \leq m.$$

Полная математическая индукция

Теперь при наличии порядка на $\mathbb{N}$ можно улучшить метод математической индукции,

Пусть есть серия утверждений: $A_1, A_2, \ldots, A_n$, которые занумерованы натуральными числами.

База: A_1 — верно.

Шаг: $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \Longrightarrow A_{n+1}$. То есть можно пользоваться всеми предыдущими, а не только A_n, как было в обычной индукции.

Следовательно, все A_n истинны.

Упражнение 5. Доказать, что любой квадрат можно разрезать на n квадратов при $n \geq 6$.

Например, на 6 квадратов можно разрезать так: поделить сначала фигуру на 9 частей, а затем объединить 4 ($2{\times}2$) квадрата в одном из углов в один.

На 7 квадратов — поделить на 4 квадрата, и один из них поделить еще на 4.

На 8 квадратов — поделить на 16 квадратов и объединить 9 ($3{\times}3$) в один.

Теперь в общем случае. Пусть для $\leq n$ уже доказано. Теперь разрежем квадрат на 4 квадрата и один из них разрежем на $n-2$ части (это можно сделать по предположению индукции). Тогда всего частей будет $n-2+3=n+1$.

Без применения *полной* математической индукции такое доказательство было бы невозможно провести.

Основная теорема арифметики

Теорема 3. *Всякое натуральное число, которое больше 1, либо простое, либо раскладывается в произведение простых единственным образом с точностью до порядка.*

Доказательство. Докажем только существование разложения.

Пусть доказано для $\leq n$. Докажем для $n+1$.

Если $n+1$ простое, то все отлично. Если $n+1$ составное, то $n+1=n_1n_2$, где

$$1 < n_1 < n+1, \quad 1 < n_2 < n+1.$$

Следовательно,

$$n_1 \leq n, \quad n_2 \leq n.$$

И по предположению индукции n_1 и n_2 раскладываются на простые множители.

□

Замечание 1. Мы не можем считать, что n_1 или n_2 равно n. Поэтому обычной индукции в данном случае не хватит для доказательства.

Сведение полной индукции к «обычной»:

Пусть есть утверждения $A_1, \ldots, A_n, \ldots$.

Введем утверждение B_n: все $A_1, \ldots, A_n$ истинны.

$$A_1 \Longleftrightarrow B_1,$$
$$(A_1, \ldots, A_n \Longrightarrow) \Longleftrightarrow B_n \Longrightarrow B_{n+1}.$$

К B_n применяем обычную индукцию и получаем, что все B_n истинны. А следовательно, и все A_n истинны.

Таким образом, полная индукция равносильна «обычной».

Запись полной индукции на языке теории множеств:

Пусть $M \subset \mathbb{N}$. Если $1 \in M$ и из того, что $\{k \mid k \le n\} \subset M$, следует, что $n+1 \in M$, то $M = \mathbb{N}$. Далее используем это как аксиому индукции.

Существование минимального элемента и индукция

Теорема 4. *Пусть множество $\mathbb{N}$ удовлетворяет аксиомам Пеано 1)–3), и на $\mathbb{N}$ задано отношение линейного порядка, причем $n \le n+1$. Тогда аксиома индукции равносильна существованию в каждом непустом подмножестве наименьшего элемента.*

Доказательство. **Аксиома индукции $\Longrightarrow$ существование наименьшего эл–нта.**

Пусть $B \subset \mathbb{N}$, $B \ne \varnothing$. Предположим противное, т.е. в B нет наименьшего элемента.

Рассмотрим $M = \mathbb{N} \setminus B$. Понятно, что $1 \in M$, иначе бы в B был наименьший элемент. Теперь пусть $\{k \mid k \le n\} \subset M$. Тогда $n+1 \in M$, иначе оно было бы наименьшим в B, так как все меньшие уже лежат в дополнении.

По аксиоме индукции $M = \mathbb{N}$, что противоречит $B \ne \varnothing$.

Существование наименьшего элемента $\Longrightarrow$ аксиома индукции.

Пусть $M \subset \mathbb{N}$: $1 \in M$ и $\{k \mid k \le n\} \subset M \Longrightarrow n+1 \in M$. Хотим доказать, что $M = \mathbb{N}$.

Предположим, что $B = \mathbb{N} \setminus M \ne \varnothing$. Пусть $n \in B$ — наименьшее. Из условий на M мы знаем, что $n \ne 1$. Следовательно, по аксиомам Пеано $n = m+1$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\{k \mid k \le m\} \subset M,$$

т.к. n — наименьший в B. Следовательно, по условию на M: $m+1 \in M$ — противоречие с тем, что $n \in B \Longrightarrow M = \mathbb{N}$.

Теорема полностью доказана. □

Операции с множествами

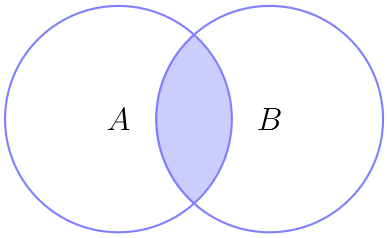
Определение 21. *Операция объединения*:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Кроме того, можно рассмотреть объединение произвольного набора

$$\bigcup_\alpha A_\alpha = \{x \mid \exists \alpha : \ x \in A_\alpha\}.$$

$A \cap B$



Определение 22. *Операция пересечения*:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Кроме того, можно рассмотреть объединение произвольного набора

$$\bigcap_{\alpha} A_{\alpha} = \{x \mid x \in A_{\alpha} \;\; \forall \alpha\}.$$

Определение 23. *Разность множеств*:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Упражнение 6. С помощью четырех кругов Эйлера нельзя построить диаграмму, которая иллюстрировала бы всевозможные комбинации. (Можно посмотреть, например, на сколько частей разбивают плоскость 4 круга в общем положении).

Свойства операций

1) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.

2) Ассоциативность

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

3) Дистрибутивность:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Доказательство. Докажем только $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Пусть $x \in A \cup (B \cap C) \iff x \in A$ или $x \in B \cap C \iff x \in A$ или $x \in B$ и $x \in C \iff x \in A$ или $x \in B$ и $x \in A$ или $x \in \iff x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C \iff x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

$\square$

4) Формулы Моргана.

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B),$$
$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B).$$

В общем случае:

$$C \setminus \bigcup_{\alpha} A_\alpha = \bigcap_{\alpha} (C \setminus A_\alpha),$$
$$C \setminus \bigcap_{\alpha} A_\alpha = \bigcup_{\alpha} (C \setminus A_\alpha).$$

Доказательство. Докажем в общем случае $C \setminus \bigcup_\alpha A_\alpha = \bigcap_\alpha (C \setminus A_\alpha)$.

Пусть $x \in C \setminus \bigcup_\alpha A_\alpha \iff x \in C$ и $x \notin \bigcup_\alpha A_\alpha \iff x \in C$ и $x \notin A_\alpha$ для всякого $\alpha \iff x \in C \setminus A_\alpha$ для всякого $\alpha \iff x \in \bigcap_\alpha (C \setminus A_\alpha)$.

$\square$

Лекция 4

Определение биективного отображения

Напомним, что мы рассматриваем функцию $f : X \longrightarrow Y$, которая каждому $x \in X$ сопоставляет ровно один $y = f(x) \in Y$. Множество X — область определения f, а

$$\{y \mid x : \ f(x) = y\}$$

— область значений.

Множество $\Gamma_f = \{(x, y) \mid y = f(x)\} \subset X \times Y$ — график функции.

Определение 24. Функция $f : X \longrightarrow Y$ называется *инъекцией*, если

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Т.е. точки «не склеиваются».

Пример 9. Функция $f(x) = x^2$ (на $\mathbb{R}$) — не инъекция.

Функция $f(x) = x^3$ — инъекция.

Определение 25. Функция $f : X \longrightarrow Y$ называется *сюръекцией*, если область значений f совпадает с Y, т.е. для всякого $y \in Y$ существует $x \in X$ такой, что $f(x) = y$. Т.е. значения функции f «накрывают» множество Y.

Вообще говоря, вопрос о том, является ли функция сюръекцией — это вопрос выбора множества Y.

Пример 10. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2$. Если $X = \mathbb{R}$, а $Y = \mathbb{R}$, то эта функция не будет сюръекцией. Однако если $Y = \mathbb{R}_+ = \{y \mid y \geq 0\}$, то $f(x)$ — сюръекция.

Определение 26. Функция $f : X \longrightarrow Y$ называется *биекцией*, если f — инъекция и сюръекция.

Еще говорят, что f задает взаимно однозначное соответствие.

Определение 27. Если существует биекция между множествами X и Y, то говорят, что X и Y *равномощны*.

Утверждение 5. *Композиция биекций — биекция. Т.е. если функции f и g — биекции:*

$$f : X \longrightarrow Y, \ g : Y \longrightarrow Z \Longrightarrow g \circ f : X \longrightarrow Z \text{ — биекция.}$$

Доказательство. Точки не склеиваются. Рассмотрим $x_1 \neq x_2$. Они перешли в две различных точки: $y_1 \neq y_2$ (в силу того, что f биекция). Далее под действием биекции g они перешли в две различных точки $z_1 \neq z_2$. Таким образом, две различных точки $x_1 \neq x_2$ перешли в две различных точки $z_1 \neq z_2$.

Почему сюръекция (т.е. почему все множество Z лежит в образе)? Так как f — биекция, то Y покрывается образом X, а из-за того, что g — биекция, все Z покрывается образом Y.

□

Утверждение 6 (существование обратной функции)**.** *Если $f : X \longrightarrow Y$ — биекция, то определена функция из Y в X, сопоставляющая каждому $y \in Y$ такой элемент $x \in X$, что $y = f(x)$. Эта функция называется* обратной к f, *обозначается f^{-1} и является биекцией.*

Доказательство. Т.к. функция f является биекцией, то по определению f — сюръекция. Т.е. каждому $y \in Y$ сопоставляется какой–то $x \in X$.

Кроме того, функция f — инъекция, поэтому каждому $y \in Y$ сопоставляется ровно один $x \in X$.

Следовательно, заданное сопоставление $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ является функцией.

Далее, f^{-1} — сюръекция, т.к. каждому x функция f сопоставляет y.

К тому же f^{-1} — инъекция, т.к. каждому x функция f сопоставляет ровно один y. Иными словами, разные y соответствуют разным x.

Итак, сопоставление $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ является биекцией.

□

Пример 11. Рассмотрим функцию $y = x^2$. Это не биекция, если $X = \mathbb{R}$. Следовательно, надо разделить множества. Например

$$[0; 1] \longrightarrow [0; 1]$$
$$(-\infty; -1) \longrightarrow (1; \infty).$$

Тогда эта функция будет биекцией.

Можно сделать следующее: рассмотрим функцию $y = x^2$:

$$\{x \geq 0\} \longrightarrow \{y \geq 0\}.$$

Это будет биекция. Следовательно, определена обратная функция $x = \sqrt{y}$.

Вообще говоря, то, что эта функция сюръекция — не очевидно. Но для этого надо будет определить множество действительных чисел, что мы сделаем далее.

Группа биекций

Пусть $X \neq \varnothing$. Множество

$$G(X) = \{\text{ все биекции } f : X \longrightarrow X\} \text{ — группа.}$$

На $G(X)$ определена операция композиции

1) $f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h$.

2) $e(x) = x$, $e \cdot f = f \cdot e = f$ (тождественное отображение).

3) для всякого f существует f^{-1}: $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = e$.

Группа $G(X)$ не абелева. (см. пример 3).

Пример 12. Рассмотрим множество $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$:

$$
\begin{gathered}
(ab)c = a(bc), \\
1 : \ 1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \\
a^{-1} : \ a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1, \\
ab = ba \text{ — абелева группа.}
\end{gathered}
$$

Это группа рациональных чисел.

Определение 28. Если на множестве задана операция, удовлетворяющая 1—3 свойствам, то говорят, что *задана группа.*

Пример 13. Доказать, что $G(X)$ коммутативная (абелева) группа $\Longleftrightarrow$ в X не более двух элементов.

Утверждение 7. *Пусть* $\{a, b\} \subset A$. *Тогда* $A \setminus \{a\}$ *равномощно* $A \setminus \{b\}$.

Доказательство. Рассмотрим множество $D = A \setminus \{a, b\}$. Тогда

$$
\begin{gathered}
A \setminus \{a\} = D \cup \{b\}, \\
A \setminus \{b\} = D \cup \{a\}
\end{gathered}
$$

Как установить биекцию? Рассмотрим отображение

$$
f : \ A \setminus \{a\} = D \cup \{b\} \longrightarrow D \cup \{a\} = A \setminus \{b\}.
$$

Функция действует так:

$$
f(x) = \begin{cases} x, \ x \in D \\ a, \ x = b \end{cases}
$$

Это и есть искомая биекция.

Проверим, что это так (т.е., что это отображение инъекция и сюръекция). «Все ли y покрыты»? Все элементы из D и a есть в качестве образов. Кроме того, точки не склеиваются, так как $b \notin D$.

□

Свойства равномощных множеств

Обозначение: A равномощно B — $A \sim B$.

1) $A \sim A$,

2) $A \sim B \Longrightarrow B \sim A$ (так как обратная к f является биекцией),

3) $A \sim B$, $B \sim C \Longrightarrow A \sim C$. Это следует из того, что композиция биекций — биекция.

Казалось бы, что можно было бы ввести отношение эквивалентности (два множества эквивалентны, если они равномощны). Но мы так не делаем, потому что это отношение пришлось бы вводить на множестве всех множеств, что, как мы поняли ранее, делать не следует (это приводит к парадоксам). Поэтому мы будем говорить о равномощности двух данных множеств.

Утверждение 8.

$$\{k \in \mathbb{N} \mid k \leq n\} \sim \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq m\} \Longrightarrow n = m.$$

Это утверждение нужно для того, чтобы определить, что значит, что «множество содержит n элементов». А именно, если $M \sim \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq n\}$, то $|M| = n$, т.е. M содержит n элементов.

Доказательство. Докажем индукцией по n.

Рассмотрим биекцию

$$f : \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq n\} \longrightarrow \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq m\}.$$

База: $n = 1$. Предположим, что $m \neq 1$. Тогда $f(1) \neq m$ или $f(1) \neq 1$. Тогда f — не сюръекция, что противоречит тому, что f — биекция. Следовательно, $m = 1$.

Предположим, что для n доказано. Докажем для $n+1$. Рассмотрим биекцию

$$f : \{1, 2, \ldots, n, n+1\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Если $m = 1$, то все доказано (см. базу): мы возьмем обратную функцию. Она будет биекцией и по утверждению из базы $n + 1 = 1$, чего быть не может. Значит, $m \neq 1$.

Далее, рассмотрим

$$f : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, m\} \setminus \{f(n+1)\} \sim \{1, 2, \ldots, m-1\}\,(*).$$

(*) — см. утверждение выше. По предположению индукции $n = m - 1 \Longrightarrow n + 1 = m$. ☐

Определение 29. *Пустое множество* является конечным и состоит из 0 элементов. Множество A является *конечным и состоит из n элементов*, если $A \sim \{1, 2, \ldots, n\}$.

Бесконечное множество — это то, которое не является конечным.

Пример 14. Множество $\mathbb{N}$ — бесконечное множество.

Доказательство. Пусть оно конечно, т.е. существует биекция

$$f : \{1, \ldots, m\} \longrightarrow \mathbb{N}.$$

Рассмотрим натурадьное число

$$f(1) + \ldots + f(m) + 1.$$

Оно $> f(k)$, следовательно, f — не сюръекция.

Значит, множество натуральных чисел бесконечно.

☐

Утверждение 9. *Множество простых чисел бесконечно.*

Доказательство. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_m$ — все простые числа. Т.е. есть биекция

$$f : \{1, \ldots, m\} \longrightarrow \mathbb{P}$$

Запишем новое число:

$$p_1 p_2 p_3 \ldots p_m + 1.$$

Оно больше любого из выписанных, а значит не просто. Следовательно, оно составное, т.е. делится на какое-то простое. Но такого не может быть, потому что в данной сумме первое слагаемое делится на любое простое из нашего набора, а второе (т.е. единица) не делится (свойство делимости).

Следовательно, построенное число — простое.

□

Однако неверно думать, что так можно получить простое число:

Упражнение 7. Придумать контпример.

Определение 30. Множество A *счетное*, если $A \sim \mathbb{N}$. (элементы множества A можно пересчитать).

Иными словами, существует биекция

$$f : A \longrightarrow \mathbb{N}.$$

Пример 15 (Про гостиницу)**.** На некоторой планете решили провести конференцию. Для этого построили огромную гостиницу на бесконечное число номеров.

В назначенный день со всех концов вселенной приехали постояльцы и заняли все комнаты.

На следующий день выяснилось, что один участник опоздал. Тогда было объявлено: все жильцы должны переехать в номер на единицу больше. То есть из первого — во второй, из второго — в третий и т.д.

Таким образом, первый номер освободился.

То есть для каждого номера можно указать тот, в который постоялец переехал.

Теперь пускай такую же гостиницу пришлось закрыть, и все клиенты приехали в наш отель. И в этом случае можно всех поселить. Можно попросить переехать всех постояльцев в те комнаты, номера которых в два раза больше, чем были. у них первоначально.

Таким образом можно доселить несколько таких же гостиниц. Это позволяет сделать факт бесконечности числа номеров.

Пример 16 (Про Деда Мороза)**.** Дед Мороз за минуту до Нового года дает конфету ребенку. За полминуты до Нового года забирает и дает конфету №2. За четверть минуты забирает и дает конфету №3. За восьмую часть минуты забирает и дает конфету №4. И так далее.

Вопрос: когда куранты пробили 12 часов, с каким номером у ребенка была конфета?

Ответ: никакой конфеты не было в принципе. Какой бы мы номер не назвали, мы можем указать время, когда ее забрали.

Пример 17 (Счетные множества). 1) Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$.

2) Множество $\mathbb{N} \setminus \{1\}$. Биекцию будет задавать отображение

$$n \mapsto n + 1.$$

3) Множество целых чисел $\mathbb{Z}$.

Это можно написать как

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3, \ldots$$

$$1 \longrightarrow 0,$$
$$2 \longrightarrow 1$$

Далее положительные числа — на четные места. Отрицательные — на нечетные места. Таким образом задана биекция.

Утверждение 10. *Если A счетно и $B \subset A$, то B конечно или счетно (не более, чем счетно).*

Доказательство. Если $B = \varnothing$, то все доказано.

Пусть $B \neq \varnothing$, и положим

$$k_1 = \min\{k :\ a_k \in B\}.$$

Такой элемент есть по аксиоме индукции: в каждом непустом подмножестве есть наименьший элемент. Тогда положим $b_1 = a_{k_1}$.

Если $B \setminus \{b_1\} = \varnothing$, то B конечно и утверждение доказано.

Если $B \setminus \{b_1\} \neq \varnothing$, то

$$k_2 = \min\{k : a_k \in B \setminus \{b_1\}\}.$$

Тогда положим $b_2 = a_{k_2}$. И так далее.

Если уже построено множество $\{b_1, \ldots, b_n\}$, то либо

$$B \setminus \{b_1, \ldots, b_n\} = \varnothing.$$

и построение закончено. Либо

$$B \setminus \{b_1, \ldots, b_n\} \neq \varnothing$$

Тогда определим

$$k_{n+1} = \min\{k :\ a_k \in B \setminus \{b_1, \ldots, b_n\}\}$$
$$b_{n+1} = a_{k_{n+1}}$$

и т. д. Либо на каком–то шаге построение будет закончено, и мы получим конечное подмножество B, либо построение продолжится бесконечно долго, и мы получим набор $\{b_n\}$. Верно ли, что $B = \{b_n\}$?

Покажем, что $k_n \geq n$. Для $n = 1$: $k_1 \geq 1$ верно. К тому же, $k_{n+1} > k_n$, так как каждый раз берем минимальный номер. По предположению индукции $k_n \geq n \Longrightarrow k_n + 1 \geq n + 1$. Так как все $k_i \in \mathbb{N}$, то из $k_{n+1} > k_n$ следует, что $k_{n+1} \geq k_n + 1$. Следовательно, $k_{n+1} \geq n + 1$.

Предположим, что построение не прервалось на конечном шаге, и некоторый элемент $a_m \in B$ не получил номера. Следовательно, $k_n < m$ для всех n, но $k_{m+1} \geq m + 1 > m$ — противоречие.

$\square$

Лекция 5

Счетные множества

Определение 31. Множество A *счетное*, если $A \sim \mathbb{N}$.

Утверждение 11. *1) Если A счетно, и существует инъекция $f : B \longrightarrow A$, то B не более, чем счетно.*

2) Если A счетно, и существует сюръекция $f : A \longrightarrow B$, то B не более, чем счетно.

Доказательство. 1) Рассмотрим функцию $f : B \longrightarrow f(B)$.

Это биекция и $f(B) \subset A$ — счетно $\Longrightarrow f(B)$ не более, чем счетно $\Longrightarrow B$ не более, чем счетно.

2) Определим функцию $g : B \longrightarrow A$ следующим образом: $g(B) =$«какой–то элемент непустого множества» $\{a : f(a) = b\}$. Так как f — функция, то g — инъекция. По первому пункту B не более, чем счетно.

□

Утверждение 12. *Если A счетно и B счетно, то $A \times B$ — счетно.*

Доказательство. Построим биекцию в явном виде, где пару (k, l) можно представлять себе в качестве ячейки в таблице:

$$(k, l) \longmapsto \frac{(k + l - 1)(k + l)}{2} - (l - 1)$$

Итак, задали биекцию:

$$A \times B \longrightarrow \mathbb{N}.$$

□

Следствие 1. *Если $A_1, \ldots, A_n$ счетные множества, то $A_1 \times \ldots \times A_n$ счетно.*

Доказательство. Докажем индукцией по n.

База очевидна.

Предположим, что для n выполнено. Проверим для $n+1$. Пусть $A_1 \times \ldots \times A_n = B$. Тогда $(A_1 \times \ldots \times A_n) \times A_{n+1} = B \times A_{n+1}$ — произведение двух счетных множеств счетно. □

Утверждение 13. *Объединение не более, чем счетного набора не более,чем счетных множеств не более, чем счетно.*

Доказательство. Рассмотрим набор множеств A_α, где $\alpha \in I$ — не более, чем счетное множество.

Множество A_α состоит из элементов $a_{\alpha\beta}$, где $\beta \in J_\alpha$ — не более, чем счетное множество.

Если множество M не более, чем счетно, то существует сюръекция

$$\mathbb{N} \longrightarrow M.$$

Таким образом, у нас есть два отображения

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow I \text{ — сюръекция,}$$
$$g_\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow J_\alpha \text{ — сюръекция}$$

Теперь установим такую сюръекцию:

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \bigcup_\alpha A_\alpha,$$
$$(n, m) \longrightarrow a_{f(n) g_{f(n)}(m)}$$

Получается, что $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha$ не более, чем счетно.

$\square$

Пример 18. Множество $\mathbb{Q}$ счетно:

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \Longrightarrow \mathbb{Q} \text{ н.б.ч.с.}$$

Но $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \Longrightarrow \mathbb{Q}$ — счетно.

Утверждение 14. *Если A — бесконечное множество, то существует счетное множество B: $B \subset A$.*

Доказательство. Рассмотрим множество $A \neq \varnothing$ и его элемент $a_1 \in A$. Далее

$$A \setminus \{a_1\} \neq \varnothing, \quad a_2 \in A \setminus \{a_1\}.$$

И так далее до момента

$$a_{n+1} \in A \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$$

и т.д.

Таким образом, набор $\{a_n\} \subset A$ — искомое подмножество.

$\square$

Упражнение 8. Если множество A бесконечно и C счетно, то $A \cup C \sim A$.

Пример Кантора

Рассмотрим множество всех бесконечных последовательностей из нулей и единиц:

$$\{0, 1\}^\infty.$$

Утверждение 15. *Множество $\{0, 1\}^\infty$ не является счетным.*

Доказательство. Допустим, что можно занумеровать эти последовательности натуральными числами:

$$\boxed{0}\,1\,1\,0\ldots$$
$$1\,\boxed{1}\,1\,1\ldots$$
$$0\,1\,\boxed{0}\,1,\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Теперь рассмотрим последовательность, составленную из элементов диагонали (они выделены):

$$0\,1\,0\ldots$$

То есть тут на n–ом месте стоит n–ый элемент из n–ой последовательности.

Теперь заменим в этой последовательности все нули на единицы и все единицы на нули:

$$1\,0\,1\ldots$$

На первом месте у полученной последовательности стоит не то, что у первой, на втором — не то, что у второй. На n–ом месте — не то, что у n–ой. И так далее.

Может ли она быть какой–то k–ой последовательностью из списка? Нет, так как у нее на k–ом месте стоит не то, что у k–ой последовательности.

Выходит, что эту последовательность мы не посчитали — противоречие.

□

Теорема Кантора–Бернштейна

Теорема 5 (Кантор–Бернштейн)**.** *Если $A \sim B' \subset B$ и $B \sim A' \subset A$, то $A \sim B$.*

Доказательство. Пусть $f : A \longrightarrow B'$, $g : B \longrightarrow A'$. Рассмотрим композицию $g \circ f$. Тогда

$$B' \longrightarrow A_2 \subset A'.$$

Так как $g \circ f$ — тоже биекция, то $A \sim A_2$.

Пусть $A = A_0$, $A' = A_1$.

Итак, хотим доказать, что

$$A_0 \sim A_2 \Longrightarrow A_0 \sim A_1.$$

(Если докажем, что $A \sim A_1$, где $A_1 \sim B$, то $A \sim B$.)

Так как $A_0 \sim A_2$, то существует биекция

$$h : A_0 \longrightarrow A_2,$$

которая в свою очередь переводит A_1 как подмножество A_0 в некоторое множество $A_3 \subset A_2$. Т.е. $A_3 = h(A_1)$.

Но $A_2 \subset A_1 \Longrightarrow$ оно под действием этой биекции h перешло в некоторое множество $A_4 \subset A_3$:

$$A_4 = h(A_2) \subset A_3.$$

И далее строим A_5, A_6, ... Возможно, что в итоге останется какой-то центр. Обозначим его D. Вообще говоря, его наличие или отсутствие не будет влиять на доказательство.

Получилась цепочка множеств:

$$A_{2n+1} = h(A_{2n-1}),$$
$$A_{2n} = h(A_{2n-2}).$$

Введем обозначения:

$$C_0 = A_0 \setminus A_1,$$
$$C_1 = A_2 \setminus A_3,$$
$$\dots\dots\dots$$

И так далее.

Теперь пусть

$$D_0 = A_1 \setminus A_2,$$
$$D_1 = A_3 \setminus A_4,$$
$$\dots\dots\dots$$

И так далее. Проверим, что $C_0 \sim C_1$. Имеем

$$h : A_0 \longrightarrow A_2,$$
$$h : A_0 \supset A_1 \longrightarrow A_3 \subset A_2,$$
$$h : A_0 \setminus A_1 \longrightarrow A_2 \setminus A_3.$$

Следовательно, $C_0 \sim C_1$.

Проверим, что $C_1 \sim C_2$. Имеем

$$h : A_2 \longrightarrow A_5,$$
$$h : A_2 \supset A_3 \longrightarrow A_5 \subset A_4,$$
$$h : A_2 \setminus A_4 \longrightarrow A_4 \setminus A_5.$$

И так далее. В итоге получили, что

$$C_1 \xrightarrow{h} C_2 \xrightarrow{h} C_3 \xrightarrow{h} \dots$$

Итак, укажем явно биекцию между A_0 и A_1, учитывая, что

$$A_0 = C_0 \cup D_0 \cup C_1 \cup D_1 \cup \ldots \cup D,$$
$$A_1 = D_0 \cup C_1 \cup D_1 \cup \ldots \cup D,$$
$$h : C_i \longrightarrow C_{i+1},$$
$$D_j \longrightarrow D_j.$$

Теорема доказана.

□

Упражнение 9. Круг равномощен квадрату.

В квадрате выделяем круг, далее гомотетией и сдвигом показываем, что есть биекция между двумя кругами (первым и тем, который в квадрате). Аналогично в круге выделяем квадрат.

Теорема Кантора

Множество не равномощно множеству своих подмножеств: $A \not\sim 2^A$.

Доказательство. Предположим противное: существует отображение

$$f : A \longrightarrow 2^A, \quad a \longrightarrow f(a).$$

Рассмотрим множество

$$C = \{a \mid a \notin f(a)\} \subset A.$$

Существует $b \in A$: $f(b) = C$ (так как f — биекция).

Верно ли, что $b \in f(b)$? Если принадлежит, то $f \notin f(b)$ — противоречие.

Пусть тогда $b \notin f(b)$. Тогда $b \in C = f(b)$.

Получили противоречие. Следовательно, биекции f нет, и $A \not\sim 2^A$. □

Замечание 2. В множестве 2^A набор подмножеств вида $\{a\}$, где $a \in A$. Этот набор отождествляется с A или равномощен A.

То есть $A \sim C \subset 2^A$. Это и означает, что A меньше по мощности, чем 2^A.

Замечание 3. Множество $2^{\mathbb{N}} \not\sim \mathbb{N}$, т.е. несчетно.

Можем построить соответствие между любым подмножеством B и последовательностью из 0 и 1.

Будем ставить 1 напротив элемента, если он принадлежит B, и 0, если не принадлежит.

Упражнение 10. Сравнить доказательство теоремы Кантора и примера Кантора.

Лекция 6

Определение поля

Определение 32. Множество F с операциями $+$ и $\cdot$ называется *полем*, если выполняются следующие условия:

1) $(F, +)$ — абелева группа
   - ассоциативность (для сложения)
   - существование нулевого элемента (для сложения)
   - существование обратного элемента (для сложения)
   - коммутативность (для сложения)

$$a + b = b + a$$

2) $(F \setminus \{0\}, \cdot)$ — абелева группа
   - $a(bc) = (ab)c$ (для всех из F),
   - $1 \neq 0$, $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$,
   - $a \neq 0$, $\exists a$:
   $$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$$
   - $ab = ba$.

3) дистрибутивность
$$a(b + c) = ab + ac.$$

Пример 19. 1) Поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

$$1, 1 + 1, \ldots, 1 + 1 + 1 + \ldots \neq 0$$

$\Longrightarrow$ поле характеристики 0.

2) Поле $\mathbb{Z}_p$, (p — простое).
$$m \sim n \Longleftrightarrow p \mid m - n.$$
Классы эквивалентности: $1, \ldots, p - 1$.

Поле характеристики p:
$$\underbrace{1 + \ldots + 1}_{p} = 0$$

Определение 33. Поле F называется *упорядоченным*, если на F задан линейный порядок такой, что

1) $a \leq b \Longleftrightarrow a + c \leq b + c$

2) $a \leq b$, $c \geq 0 \Longrightarrow ac \leq bc$.

Пример 20. Поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$ — упорядоченное поле.

$$1 > 0, \quad 1 + 1 > 1 > 0,$$
$$1 + \ldots + 1 > 0$$

— упорядоченное поле всегда имеет характеристику 0.

То есть на $\mathbb{Z}_p$ нельзя ввести порядок, согласованный с операцией.

Упражнение 11. Доказать, что $1 > 0$.

Доказательство. Предположим противное: $1 < 0$.

$$1 < 0 \mid \text{ вычитаем } 1,$$
$$0 < -1 \mid \cdot(-1),$$
$$(*) 0 < 1 \text{ — противоречие.}$$

$(*)$ — знак не меняется по второму свойству. □

Замечание 4.

1) Элементы упорядоченного поля $1, 1{+}1, \ldots, \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n}, \ldots$ отождествляются с множеством натуральных чисел и обозначаются $\mathbb{N}$. (доказательство содержится в «Математическом анализе» Зорича).

2) Элементы вида $\frac{m}{n} = m \cdot n^{-1}$, где

$$m \in \mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n\},$$

называем дробями, а их множество — множеством рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Множество действительных чисел

Определение 34. Множество $\mathbb{R}$ называется множеством действительных или вещественных чисел, если $\mathbb{R}$ — упорядоченное поле, на котором выполняется аксиома полноты.

Аксиома полноты

Если $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, $B \subset \mathbb{R}$, $B \neq \varnothing$ и «$A \leq B$», т.е. $a \leq b$ *для всякого* $a \in A$ *и всякого* $b \in B$, то $\exists c \in \mathbb{R}$, которое *разделяет* A *и* B, т.е. $a \leq c \leq b$ для всех $a \in A$ и всех $b \in B$.

Утверждение 16. *В* $\mathbb{Q}$ *есть «дырки». Например,*

$$\{x \mid x > 0 \text{ и } x^2 < 2\},$$
$$\{x \mid x > 0 \text{ и } x^2 > 2\}$$

— между ними нет элементов $\mathbb{Q}$*. Аксиома полноты не выполнена.*

Доказательство. $A \le B$

$$x^2 < 2, \quad y^{>}2,$$
$$y^2 \ge x^2, \quad (y-x)(y+x) > 0 \Longrightarrow (y-x) > 0 \Longrightarrow y > x.$$

Таким образом, A действительно «левее» B.
Предположим существует c: $A \le c \le B$.

1) $c^2 > 2$,

2) $c^2 < 2$,

3) $c^2 = 2$.

Покажем, что ни один из вариантов невозможен. □

3) $c^2 = 2$, где $c = p/q$ — не сократимая дробь: НОД(p,q)$=$1.

$$p^2 = 2q^2,$$
$$\Longrightarrow p = 2k,$$
$$4k^2 = 2q^2,$$
$$2k^2 = q^2 \Longrightarrow q = 2m.$$

Следовательно, p и q делятся на 2 — противоречие с тем, что НОД(p,q)$=$1.

2) $c^2 < 2$.

Найдем $\varepsilon > 0$:

$$(c+\varepsilon)^2 < 2, \quad \varepsilon \in \mathbb{Q},$$
$$c^2 + 2c\varepsilon + \varepsilon^2 < 2,$$
$$2c\varepsilon + \varepsilon^2 < 2 - c^2,$$
$$\varepsilon(2c+\varepsilon) < 2 - c^2,$$

Будем рассматривать ε: $0 < \varepsilon < 1$. Достаточно найти ε такое, что

$$\varepsilon(2c+1) < 2 - c^2, \text{ т.к. } \varepsilon(2c+\varepsilon) < \varepsilon(2c+1).$$

Положим
$$\varepsilon = \frac{2-c^2}{(2c+1)\cdot 2020}$$

Следовательно, $c+\varepsilon \in A$ и $c + \varepsilon > c$ — противоречие с тем, что $A \le c$.

1) $c^2 > 2$ Найдем $\varepsilon > 0$:

$$(c-\varepsilon)^2 > 2, \quad \varepsilon \in \mathbb{Q},$$
$$c^2 - 2c\varepsilon + \varepsilon^2 > 2,$$
$$-2c\varepsilon + \varepsilon^2 > 2 - c^2,$$
$$c^2 - 2 > 2c\varepsilon - \varepsilon^2,$$
$$c^2 - 2 > (2c-\varepsilon)\varepsilon.$$

Будем рассматривать ε: $0 < \varepsilon < 1$. Достаточно найти ε такое, что

$$c^2 - 2 > (2c-1)\varepsilon, \text{ т.к. } (2c-\varepsilon) > (2c-1)$$

— вычитаем большее число. Положим

$$\varepsilon = \frac{c^2-2}{(2c-1)\cdot 2020}$$

Следовательно, $c - \varepsilon \in B$ и $c - \varepsilon < c$ — противоречие с тем, что $B \geq c$.

Утверждение 17. *В $\mathbb{R}$ существует $x > 0$: $x^2 = 2$. Это $x = \sqrt{2}$.*

Доказательство. Доказательство выше. Мы проверили, что рассматриваемые выше множества связаны так:

$$A < B.$$

По аксиоме полноты между ними есть некоторое c. Оно не может быть ни больше, ни меньше 2. Следовательно, $c = 2$.

□

Бесконечные десятичные дроби

$$a_0, a_1 \dots a_m,$$

где $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$, $k \geq 1$.

Последовательности с $999\dots9$, начиная с некоторого номера запрещены.

$$10 \cdot 0,999\dots = 9,999\dots = 9 + 0,9999$$

Однако

$$10x = 9 + x \Longrightarrow 0,9999 = 1,0000$$

Отношение порядка:

$$a_0, a_1a_2 \dots b_0, b_1b_2 \dots,$$
$$a_0, b_0 \geq 0, \quad a_0 < b_0 \text{ или } a_0 = b_0 \text{ и } a_1 < b_1 \dots$$

Мы не будем доказывать, что на этом множестве можно ввести сложение и умножение. Это сделать можно: «Архипов, Садовничий, Чубариков».

Теорема 6. *1) На множестве бесконечных десятичных дробей выполняется аксиома полноты.*

2) (без д–ва) Множество бесконечных десятичных дробей является моделью $\mathbb{R}$.

Доказательство. Проведем доказательство только в случае, когда A и B состоят только из неотрицательных чисел. Мы хотим построить «разделитель» этих множеств. По условию $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ и $A \leq B$.

Строим разделитель $c = c_0, c_1 c_2 \ldots$.

Пусть c_0 — минимальное b_0, которое встречается в B. Теперь смотрим только на те дроби в B, которые начинаются с c_0.

Пусть c_1 — минимальный b_1, который встречается в B среди дробей $c_0, b_1 \ldots$.

Пусть c_2 — минимальный b_2, который встречается в B среди дробей $c_0, c_1 c_2 \ldots$. И так далее.

Докажем, что построенная дробь $c = c_0, c_1 c_2 \ldots$ разделяет A и B.

Ясно, что $c \leq b$ для всех $b \in B$.

Почему $c \geq a$, $a \in A$? Рассмотрим $a_0, a_2 a_2 \ldots \in A$.

Верно ли, что $a_0 > c_0$? Нет, так как тогда $a_0, a_1 a_2 \ldots >$ дроби из B, начиная с $c_0, c_1 c_2 \ldots$.

Может ли быть так, что

$$a_0 = c_0,$$
$$a_1 > c_1?$$

Нет, т.к. тогда $a_0, a_1 a_2 \ldots >$дроби из B, начиная с $c_0, c_1 c_2 \ldots$. И так далее.

Осталось проверить, что $c_0, c_1 c_2 \ldots$ — допустимая запись (не содержит $99\ldots$, начиная с некоторого момента). Но каждый раз мы брали наименьшую, а значит, что в B есть дробь, в которой, начиная с некоторого момента есть $99\ldots$, чего быть не может.

□

Переформулировка аксиомы полноты

Определение 35. Если $c \geq a$ для всякого $a \in A$, то c называется *верхней гранью* A. Если у A есть хотя бы одна верхняя грань, то A называется *ограниченным сверху множеством.*

Наименьшая из верхних граней называется *точной верхней гранью* и обозначается $\sup A$.

Определение 36. Если $c \leq a$ для всякого $a \in A$, то c называется *нижней гранью* A. Если у A есть хотя бы одна точная грань, то A называется *ограниченным снизу множеством.*

Наибольшая нижняя грань A называется *точной нижней гранью* — $\inf A$.

Однако в некоторых случаях может так быть, что в множестве верхних граней нет наименьшей. И так же со множеством нижних граней. Это связано с аксиомой полноты.

Теорема 7 (Принцип полноты Вейерштрасса)**.** *Если $A \neq \varnothing$ и ограничено сверху, то существует* $\sup A$*.*

Если $A \neq \varnothing$ и ограничено снизу, то существует $\inf A$*.*

Доказательство. Применяем аксиому полноты. В качетсве множества B возьмем множество верхних граней. Очевидно, что $A \leq B$. По аксиоме полноты существует разделитель c. Но $c \geq A \Longrightarrow c \in B$, т.е. это верхняя грань. С другой стороны, $c \leq B$ $\Longrightarrow c$ — наименьшая верхняя грань, т.е. $c = \sup A$ по определению.

Случай точной нижней грани доказывается аналогично.

$\square$

Лекция 7

Аксиома Архимеда

Теорема 8 (Аксиома Архимеда)**.** *Множество* $\mathbb{N}$ *не ограничено сверху в* $\mathbb{R}$.
(Следует из аксиомы полноты $\longrightarrow$ *теорема).*

Доказательство. Предположим противное, т.е. $\mathbb{N}$ ограничено сверху, и по принципу полноты Вейерштрасса существует $a = \sup \mathbb{N}$.

$$a - 1 < \sup \mathbb{N} \Longrightarrow a - 1$$

следовательно, не является верхней гранью $\Longrightarrow$ существует $n \in \mathbb{N}$ такой, что $a-1 < n$. Добавляем 1: $\longrightarrow a < n+1$ — это противоречит $a = \sup \mathbb{N}$. □

Верхняя грань — $c : c \geq a \ \forall a \in A$.
Нижняя грань — $c : c \leq a \ \forall a \in A$.

Следствие 2. *Если* $0 < a < b \Longrightarrow$*, то существует* $n \in \mathbb{N}$*:* $an > b$.

Доказательство.

$$n > \frac{b}{a} \text{ — см. аксиому Архимеда.}$$

□

Зачастую, говоря о вещественных числах, мы используем геометрическую модель — прямую.

Определение 37. *Прямая* — геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных.

Допустим мы отметили на прямой 0 и 1. Далее отмечаем некоторое a. Как объяснить, чему оно соответствует? Посмотрим сколько раз умещается в отрезке $[0, a]$ единичный отрезок. То есть существует n: $n \leq a < n+1$.

Далее делим единичный отрезок на 10 частей и найдем m:

$$\frac{m}{10} \leq n - a < \frac{m+1}{10}.$$

И так далее.

Определение 38. *Отрезок* $[a, b]$ — множество вещественных чисел:

$$a \leq x \leq b, \quad \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

Аналогично определяются (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$.

Определение 39. Величина $|x - y|$ называется *расстоянием от* x *до* y. Для отрезка, интервала, полуинтервала $\{a, b\}$ число $b - a$ называется *длиной интервала.*

$$|x| = \max\{x, -x\}.$$

$$|x - y| = \begin{cases} x - y, \ x \geq y \\ y - x, \ y \geq x \end{cases}$$

Утверждение 18 (Неравенство треугольника)**.**

$$||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$$

Доказательство. Упражнение.

□

Определение 40. *Последовательность элементов множества* A — это $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$. Только вместо записи $f(n)$ пишем a_n. Далее пишем $\{a_n\}$.

Теорема о вложенных отрезках

Теорема 9 (принцип полноты Кантора, теорема о вложенных отрезках)**.** *Пусть* $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \supset \ldots$ — *последовательность вложенных отрезков. Тогда:*

1) $\bigcap\limits_n [a_n, b_n] \neq \varnothing$.

2) Если для всякого $\varepsilon > 0$ *существует* n*:*

$$b_n - a_n < \varepsilon,$$

то $\bigcap\limits_n [a_n, b_n]$ *состоит ровно из* 1 *точки.*

Доказательство. Выводим из принципа Вейерштрасса

1) Рассмотрим множество $A = \{a_n\}$ — множество всех левых концов. Любой правый конец b_m является верхней гранью A. Иначе соответствующие отрезки не пересекались бы, что противоречит вложенности.

   По принципу полноты Вейерштрасса существует $c = \sup A$. По определению

$$a_n \leq c \leq b_m, \quad \forall n, m.$$

   Следовательно, $c \in [a_n, b_n]$ для всякого n, т.е. пересечение не пусто.

2) Пусть пересечение состоит из двух точек c_1 и c_2. Эти две точки лежат в каждом отрезке $[a_n, b_n]$. Следовательно,

$$b_n - a_n \geq c_2 - c_1$$

   Поэтому для

$$\varepsilon = \frac{c_2 - c_1}{2}$$

   нет отрезка (в условии было любое ε).

   Следовательно, пересечение состоит из одной точки.

□

Следствие 3. *Пусть $a < b$. Отрезок $[a, b]$ не является счетным множеством.*

Доказательство. Предположим, что $[a, b]$ счетный, и $x_1, \ldots, x_n$ — все его точки.

Делим отрезок на три части. Берем ту часть, где нет x_1. Делим эту часть снова на три отрезка. Берем тот, в котором нет x_2. И так далее. Получили систему вложенных отрезков. По доказанному выше их пересечение состоит из одной точки. Какой у нее номер?

Может ли $c = x_n$? Нет. На n–ом шаге мы взяли отрезок, который не содержит x_n. Следовательно, точка c не была посчитана.

□

Упражнение 12. Доказать, что

$$[a, b] \sim [a, b) \sim (a, b) \sim \mathbb{R}.$$

Определение 41. Множества, равномощные отрезку $[a, b]$ с $a < b$ или $\mathbb{R}$, называют *континуальными.*

Доказанные нами принципы полноты равносильны аксиоме полноты. А именно, верен следующий факт: из принципа полноты Кантора и аксиомы Архимеда следует аксиома полноты.

Предел последовательности

Пусть $\{a_n\}$ — последовательность всех чисел.

Определение 42. Число a называется пределом последовательности $\{a_n\}$ (при $n \longrightarrow \infty$), если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

То есть для всякого $\varepsilon > 0$ найдется (существует) такое $N \in \mathbb{N}$, что для всякого $n > N$ выполнено $|a_n - a| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, $a_n \longrightarrow a$.

Пример 21.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Надо проверить, что $\forall \varepsilon > 0$ существует N: $\forall n > N$

$$|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon, \quad \frac{1}{n} < \varepsilon, \quad n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Тогда $N > 1/\varepsilon$ (такое есть — см. аксиому Архимеда).

Пример 22.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Надо проверить, что $\forall \varepsilon > 0$ существует N: $\forall n > N$

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon, \quad \frac{1}{\varepsilon} < 2^n.$$

По неравенству Бернулли $2^n = (1+1)^n \geq 1+n$. Годится $N > 1/\varepsilon$. Тогда при $n > N$:

$$2^n \geq n+1 > N > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Такое N существует по аксиоме Архимеда.

Число a не является пределом последовательности $\{a_n\}$.

$$\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall N \in \mathbb{N} : \exists n > N \quad |a_n - a| \geq \varepsilon.$$

Утверждение 19. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,

2) *Для всякого интервала, содержащего «a» в нем лежат все члены последовательности, начиная с некоторого номера N.*

$$\forall\,(\alpha, \beta) \ni a \ \ \exists N : \ \forall n > N \ \ a_n \in (\alpha, \beta).$$

3) *Во всяком интервале, содержащем «a», лежат все члены последовательности, кроме, быть может, конечного числа.*

$$\forall(\alpha, \beta) \ni a \ \exists \text{ номера } n_1, \ldots, n_N : \quad a_n \in (\alpha, \beta) \quad \forall n \notin \{n_1, \ldots, n_N\}.$$

Доказательство. $\boxed{(1) \Longrightarrow (2)}$

Для любого $\varepsilon > 0$ существует N: $\forall n > N$ $|a_n - a| < \varepsilon$. Но $|a_n - a| < \varepsilon \iff a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Рассмотрим произвольный интервал $a \in (\alpha, \beta)$. Он не обязательно симметричный относительно a. Возьмем

$$\varepsilon = \min\{a - \alpha, \beta - a\}.$$

По 1) найдется N: $\forall n > N$: $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset (\alpha, \beta)$.

$\boxed{(2) \Longrightarrow (3)}$

Для любого интервала $(\alpha, \beta) \ni a$ существует N: $\forall n > N$ $a_n \in (\alpha, \beta)$.

Это означает, что $a_n \notin (\alpha, \beta)$ возможно только для $n \in \{1, \ldots, N\}$.

$\boxed{(3) \Longrightarrow (1)}$

Для всякого $\varepsilon > 0$ рассмотрим интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. По 3) существуют такие номера $n_1, \ldots, n_N$:

$$\forall n \notin \{n_1, \ldots, n_N\} \ \ a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$

Положим $\widetilde{N} = \max\{n_1, \ldots, n_N\}$. Тогда для всякого $n > \widetilde{N}$ $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, т.е. $|a_n - a| < \varepsilon$.

□

Следствие 4. *Отбрасывание и добавление конечного числа элементов не влияет на сходимость и значение предела последовательности. (см. свойство 3): в любом интервале лежат все, кроме конечного числа. Эти добавленные или удаленные и будут составлять это конечное множество элементов).*

Теорема 10 (Единственность предела)**.** *У последовательности число пределов* ≤ 1.

Доказательство. Предположим, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = b,$$
$$a \neq b, \quad (a < b)$$

Тогда рассмотрим два не пересекающихся интервала с центрами в a и b:

$$0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2},$$
$$I_a = (a-\varepsilon, a+\varepsilon); \quad I_b = (b-\varepsilon, b+\varepsilon);$$

Тогда

$$\exists N_1 : \ \forall n > N_1, \ a_n \in I_a,$$
$$\exists N_2 : \ \forall n > N_2, \ a_n \in I_b,$$

Тогда пусть $n > \max\{N_1, N_2\}$. Значит, $a_n \in I_a \cap I_b = \varnothing$. Противоречие. $\square$

Лекция 8

Напоминание:

Определение 43. Число a называется пределом последовательности $\{a_n\}$ (при $n \longrightarrow \infty$), если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

То есть для всякого $\varepsilon > 0$ найдется (существует) такое $N \in \mathbb{N}$, что для всякого $n > N$ выполнено $|a_n - a| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a_n \longrightarrow a$.

Пример, когда у последовательности нет предела

Пример 23. Рассмотрим последовательность $a_n = (-1)^n$.

Всегда можно выбрать такую окрестность вокруг любой точки числовой прямой, что в ней не будут лежать все точки данной последовательности за исключением конечного числа.

Теоремы–свойства сходящихся последовательностей

Теорема 11 (об ограниченности)**.** *Если последовательность сходится, то она ограничена, т.е. существует отрезок, который содержит все члены последовательности.*

Доказательство. Пусть $a_n \longrightarrow a$. Возьмем любой интервал (α, β), который содержит предел a. По утверждению в нем содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера. Таких элементов конечное число.

Положим:

$$m = \min\{a_1, \dots, a_N\},$$
$$M = \max\{a_1, \dots, a_N\}.$$

Тогда искомый отрезок —

$$[\min\{\alpha, m\}; \max\{\beta, M\}]$$

□

Замечание 5. В качестве такого отрезка всегда можно выбрать $[-c; c]$, т.е. $|a_n| \le c$.

Теорема 12 (об отделимости)**.** *Если $a_n \longrightarrow a$ и $a > 0$, то найдется $N : \forall n > N$*

$$a_n > \frac{a}{2} > 0.$$

Говорят, что все члены последовательности отделены от нуля.

Доказательство. Рассмотрим интервал

$$(\frac{a}{2}; \frac{3a}{2})$$

По определению найдется N: $\forall n > N\ a_n \in (a/2; 3a/2)$.

□

Теорема 13 (переход к пределу в неравенствах)**.** *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ *и* $\exists N$*:* $\forall n > N\ a_n \leq b_n$*, то* $a \leq b$*.*

Доказательство. Докажем от противного. Пусть $b < a$.

Берем два не пересекающихся интервала, содержащих a и b. Обозначим первый — I_a, второй — I_b.

По определению $\exists N_a$: $\forall n > N_a\ a_n \in I_a$.

Аналогично, $\exists N_b$: $\forall n > N_b\ b_n \in I_b$.

Пусть $n > N, N_a, N_b$. Тогда по условию $a_n \leq b_n$, но по построению I_a, I_b

$$a_n > b_n$$

— противоречие.

□

Теорема 14 (о сходимости зажатой последовательности)**.** *Пусть*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ и } \lim_{n\to\infty} b_n = a$$

и $\exists N$*:* $\forall n > N\ a_n \leq c_n \leq b_n$*. Тогда* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$*.*

Доказательство. Для всякого $(\alpha, \beta) \ni a\ \exists N_a : \forall n > N_a\ a_n \in (\alpha, \beta)$

Аналогично, $\exists N_b$: $\forall n > N_b\ b_n \in (\alpha, \beta)$. Положим $\widetilde{N} = \max\{N, N_a, N_b\}$. Тогда $\forall n > \widetilde{N}$

$$\alpha < a_n \leq c_n \leq b_n < \beta.$$

Следовательно, $c \in (\alpha, \beta)$. Теорема доказана.

□

Пример 24.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1.$$

Доказательство. Так как 2=1+1, то

$$1 < \sqrt[n]{2}.$$

Кроме того по неравенству Бернулли

$$(1 + x)^n > 1 + nx = 1 + y.$$

Получаем

$$1 + \frac{y}{n} \geq \sqrt[n]{1 + y}.$$

Следовательно,

$$1 < \sqrt[n]{2} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

$$|1 + \frac{1}{n} - 1| < \varepsilon, \quad \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Итак, по теореме о сходимости зажатой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$.

□

Теорема 15 (арифметика пределов)**.** *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. *Тогда*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$.

3) Если $b_n \neq 0$ *и* $b \neq 0$, *то*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Доказательство. 1) По условию $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists N_a : \ \forall n > N_a \ \ |a_n - a| < \varepsilon,$$
$$\exists N_b : \ \forall n > N_b \ \ |b_n - b| < \varepsilon.$$

Пусть $N = \max\{N_a, N_b\}$. Тогда

$$\forall n > N \ \ |(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Вообще говоря, в силу произвольности ε константа не влияет на оценку (можно взять, например $\varepsilon/2$).

2) Проанализируем нужное нам неравенство:

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leq |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b|$$

По условию $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists N_a : \ \forall n > N_a \ \ |a_n - a| < \varepsilon,$$
$$\exists N_b : \ \forall n > N_b \ \ |b_n - b| < \varepsilon.$$

Кроме того, так как b_n сходится, то она ограничена.

$$|b_n| \leq C, \quad \forall n, \quad C > 0.$$

Итак,
$$|a_n b_n - ab| \leq C\varepsilon + |a|\varepsilon = (C + |a|)\varepsilon$$
Утверждение доказано.

3) Достаточно проверить, что
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{b},$$
а далее применяем второе утверждение.

По условию $b\neq 0$. Пусть $b>0$ (в обратном случае нужно умножить на константу -1).

По теореме об отделимости
$$\exists N_0:\ \ \forall n>N_0\ \ b_n>\frac{b}{2}>0$$
По условию $\forall\varepsilon>0$
$$\exists N_b:\ \forall n>N_b\ \ |b_n-b|<\varepsilon.$$
Пусть $\widetilde{N}=\max\{N_0,N_b\}$. Теперь для всякого $n>\widetilde{N}$:
$$|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}|=\frac{|b_n-b|}{b_nb}\leq\frac{|b_n-b|}{b^2/2}<\frac{2\varepsilon}{b^2}.$$

Утверждение доказано.

□

Пример 25. Найти предел:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2018}+n^{2017}+1}{n^{2018}+n^{2015}+2}.$$

Доказательство.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^{2018}}}{1+\frac{1}{n^3}+2\frac{1}{n^{2018}}}=1$$

Числитель и знаменатель стремятся к единице. Значит, по арифметике пределов, и вся дробь стремится к 1. □

Теорема 16 (Вейерштрасс)**.** *Если последовательность a_n не убывает и ограничена сверху, то существует предел при $n\longrightarrow\infty$ и этот предел равен точной верхней грани* $\sup\{a_n\}$.

Если последовательность a_n не возрастает и ограничена снизу, то существует предел при $n\longrightarrow\infty$ и этот предел равен точной нижней грани $\inf\{a_n\}$.

Доказательство. Докажем первую часть теоремы.

Так как множество значений $\{a_n\}$ ограничено сверху, то по принципу полноты Вейерштрасса существует $\sup\{a_n\}=A$.

Для любого ε число $(A-\varepsilon)$ не является верхней гранью. Следовательно, существует $a_N>A-\varepsilon$.

Из–за монотонности a_n верно, что
$$A-\varepsilon\leq a_N\leq a_n\quad\forall n>N.$$

Таким образом,
$$\forall n > N \quad A - \varepsilon < a_n \leq A$$
(т.к. A — верхняя грань):
$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

Докажем вторую часть теоремы.

Так как множество значений $\{a_n\}$ ограничено снизу, то по принципу полноты Вейерштрасса существует $\inf\{a_n\} = A$.

Для любого ε число $(A + \varepsilon)$ не является нижней гранью. Следовательно, существует $a_N < A + \varepsilon$.

Из–за монотонности a_n верно, что
$$a_n \leq a_N \leq A + \varepsilon \quad \forall n > N.$$

Таким образом,
$$\forall n > N \quad A \leq a_n < A + \varepsilon$$
(т.к. A — нижняя грань):
$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

Теорема полностью доказана.

□

Пример 26. Рассмотрим последовательность
$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Проверим, что она возрастает и ограничена сверху. Распишем последовательность по биному Ньютона:
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{k!n^k} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{1\cdot(1-1/n)\dots(1-(k-1)/n)}{k!} = A.$$

Когда n увеличивается, дробь $(1 - \frac{m}{n})$ тоже увеличивается, так как вычитается меньшее число.

В разложении каждое слагаемое растет, и их число увеличивается. Следовательно, что наша исходная последовательность возрастает.

Кроме того, все каждый множитель в числителе ≤ 1. Следовательно, каждое слагаемое $\leq 1/k!$. Значит,
$$A \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots < 1 + 1 + 1 < 3$$

В данном доказательстве использовалось следующее упражнение:

Упражнение 13. Доказать, что $k! \geq 2^{k-1}$ (по индукции).

Определение 44. Число e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

$$e = 2,7182818284\ldots$$

Упражнение 14 (на число e)**.** В банк на некоторый срок положили 1 рубль под 100%. А потом предложили другую схему выплат: этот срок делится на 100 частей, и в каждый промежуток времени будет выплачиваться 1% от накопленной к этому моменту суммы.

У какой схемы прибыль будет больше и какова ее величина?

Из этой задачи можно получить число e (так его получал Бернулли).

Лекция 9

Подпоследовательности

Определение 45. Если задана последовательность a_n и последовательность возрастающих номеров

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots$$

(это натуральные числа), то последовательность $\{a_{n_k}\}$ называется *подпоследовательностью последовательности* $\{a_n\}$.

Теорема 17. *Если последовательности сходится к a, то всякая её подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$ сходится к a.*

Доказательство. 1) Докажем, что $n_k \geq k$.

По индукции: $k = 1$, $n_1 \geq 1$ — верно, так как n_1 — натуральное число.

Предположим, что для k верно. Докажем для $k+1$.

$$n_{k+1} > n_k \geq k$$

$$n_{k+1} \geq n_k + 1 \geq k + 1.$$

Неравенство доказано.

2) По определению предела

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \ \forall n > N \ |a_n - a| < \varepsilon.$$

Пусть $k > N$. Тогда $n_k \geq k > N$ и

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon.$$

Определение предела (с пределом a) для любой последовательности (подпоследовательности) $\{a_{n_k}\}$ выполнено.

□

Теорема Больцано

Теорема 18 (Больцано)**.** *Если последовательность ограничена, то в ней есть сходящаяся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть $a_n \in [\alpha_1, \beta_1]$, $l = \beta_1 - \alpha_1$, т.к. $\{a_n\}$ ограничена. Делим этот отрезок пополам. В какой–то из частей лежит бесконечное количество членов последовательности. Иначе их было бы конечное число. Если в обеих частей бесконечно много членов последовательности, то берем любую. Пусть выбрали отрезок $[\alpha_2, \beta_2]$.

Заметим, что

$$\beta_2 - \alpha_2 = \frac{l}{2}$$

Продолжаем построение аналогичным способом. Получаем последовательность вложенных отрезков

$$[\alpha_1, \beta_1] \supset [\alpha_2, \beta_2] \supset \ldots \supset [\alpha_k, \beta_k] \supset \ldots$$

таких, что

1) в каждом $[\alpha_k, \beta_k]$ бесконечно много членов последовательности a_n

2)
$$\beta_k - \alpha_k = \frac{l}{2^{k-1}} \longrightarrow 0$$

Для каждого k находим $a_{n_k} \in [\alpha_k, \beta_k]$ так, что

$$n_1 < n_2 < \ldots$$

Это возможно по (1) свойству отрезков (бесконечное число элементов $\Longrightarrow$ можно выбрать сколь угодно большой номер).

По теореме о вложенных отрезках существует точка

$$c \in \bigcap_k [\alpha_k, \beta_k].$$

Так как a_{n_k} и $c \in [\alpha_k, \beta_k]$, то

$$|a_{n_k} - c| \leq \frac{l}{2^{k-1}} \longrightarrow 0,$$

т.е.

$$a_{n_k} \longrightarrow c.$$

□

Частичные пределы

Определение 46. Предел подпоследовательности называется *частичным пределом.*

Теорема 19. *Пусть a_n — ограниченная последовательность. Тогда*

1) *последовательность $M_n = \sup\limits_{k>n} a_k$ не возрастает, ограничена и сходится к некоторому числу M.*

2) *последовательность $m_n = \inf\limits_{k>n} a_k$ не убывает, ограничена и сходится к некоторому числу m.*

3) *M и m — частичные пределы последовательности a_n, и всякий частичный предел лежит в $[m, M]$.*

Доказательство. 1) Почему $M_n \geq M_{n+1}$?

$$M_n = \sup\{a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$$
$$M_{n+1} = \sup\{a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots\}$$
$$M_{n+1} \subset M_n.$$

Т.к. M_n верхняя грань для $\{a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$, то M_n — верхняя грань для

$$\{a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots\}$$

(если сужаем множество, то верхняя грань не может увеличиться — не возрастает).

Т.к. a_n ограничена, то M_n ограничена. по теореме Вейерштрасса существует предел

$$\lim_{n\to\infty} M_n = M.$$

2) Почему $m_n \leq m_{n+1}$?

$$m_n = \inf\{a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$$
$$m_{n+1} = \inf\{a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots\}.$$

Т.к. m_n нижняя грань для $\{a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$, то m_n — нижняя грань для

$$\{a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots\}$$

(если сужаем множество, то нижняя грань не может уменьшится — не убывает).

Т.к. a_n ограничена, то m_n ограничена. по теореме Вейерштрасса существует предел

$$\lim_{n\to\infty} m_n = m.$$

3) – Докажем, что M — частичный предел. Т.е. нужно найти подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$:

$$a_{n_k} \longrightarrow M.$$

Рассмотрим номер n_1: $0 \leq M_1 - a_{n_1} < 1$. Почему такой номер есть?

Мы знаем, что $M_1 - 1$ — не верхняя грань для $a_2, a_3, \ldots \Longrightarrow \exists\, a_{n_1}$ из них:

$$M_1 \geq a_{n_1} > M_1 - 1.$$

Строим номер n_2:

$$0 \leq M_{n_1} - a_{n_2} < \frac{1}{2},$$
$$n_2 > n_1$$

($M_{n_1} - 1/2$ не является верхней гранью для $a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, \ldots \Longrightarrow \exists\ a_{n_2}$ из них ($n_2 \geq n_1 + 1$):

$$M_{n_1} - \frac{1}{2} < a_{n_2} \leq M_{n_1}.)$$

Если уже построено n_k, то n_{k+1}:

$$0 \leq M_{n_k} - a_{n_{k+1}} < \frac{1}{k+1}$$

и $n_{k+1} > n_k$. Получаем подпоследовательность a_{n_k}

$$M_{n_{k-1}} - \frac{1}{k} \leq a_{n_k} \leq M_{n_{k-1}},$$

где $M_{n_{k-1}}$ — это подпоследовательность в M_n.

$$M_{n_{k-1}} \longrightarrow M,$$

так как $M_n \longrightarrow M$. По теореме о сходимости зажатой последовательности получаем, что $a_{n_k} \longrightarrow M$.

- Доказательство для m — упражнение.
- Покажем теперь, что если $a_{n_k} \longrightarrow a$, то $a \in [m, M]$, где a_{n_k} — произвольная подпоследовательность.

$$m_{n_{k-1}} \leq a_{n_k} \leq M_{n_{k-1}}$$

По переходу к пределу в неравенствах получаем

$$m \leq a \leq M.$$

Теорема полностью доказана.

□

Определение 47. 1) число $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k>n} a_k$ называется верхним пределом последовательности a_n. Это «наибольший» из частичных пределов.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_k.$$

2) число $\lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k>n} a_k$ называется нижним пределом последовательности a_n. Это «наименьший» из частичных пределов.

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_k.$$

Следствие 5. *Пусть a_n — ограниченная последовательность. Последовательность a_n сходится $\Longleftrightarrow$*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_k = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_k.$$

В случае сходимости верхний предел и нижний пределы равны пределу последовательности.

Доказательство. $\boxed{\Longrightarrow}$ очевидно, потому что верхний и нижний пределы — это частичные пределы, а если последовательность сходится, то все они равны пределу последовательности.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Имеем

$$\inf_{k>n-1} a_k \le a_n \le \sup_{k>n-1} a_k,$$

но

$$\inf_{k>n-1} a_k \to \underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n \longleftarrow \sup_{k>n-1} a_k$$

Следовательно, по теореме о сходимости зажатой последовательности a_n сходится.

□

Упражнение 15. Построить последовательность, множество частичных пределов которой — $[0,1]$.

Определение 48. Последовательность $\{a_n\}$ — *фундаментальная или удовлетворяет условию Коши*, если

$$\forall \varepsilon \ \exists N: \ \ \forall n, m > N \ \ |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Лекция 10

Фундаментальные последовательности

Определение 49. Последовательность $\{a_n\}$ — *фундаментальная или удовлетворяет условию Коши*, если

$$\forall \varepsilon \ \exists N: \ \forall n, m > N \ \ |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Утверждение 20. *Если $\{a_n\}$ сходится, то она фундаментальна.*

Доказательство. По условию $a_n \longrightarrow a$

$$\forall \varepsilon \ \exists N: \ \forall n > N \ \ |a_n - a| < \varepsilon.$$

Пусть теперь $m > N$ и $n > N$. Тогда

$$|a_m - a_n| < |a_m - a| + |a_n - a| < 2\varepsilon.$$

(добавили и вычли a, а затем воспользовались неравенством треугольника).

Константа не влияет на неравенство в силу произвольности ε. Утверждение доказано.

□

Утверждение 21. *Если a_n фундаментальна, то она ограничена.*

Доказательство. Возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда по определению найдется N: $\forall n, m > N$

$$|a_n - a_m| < 1.$$

Рассмотрим a_{N+1} и интервал радиуса 1 с центром в этой точке. Все элементы с номерами $n, m > N$ лежат в этом интервале.

Теперь положим

$$m = \min\{a_1, \ldots, a_N\},$$
$$M = \max\{a_1, \ldots, a_N\}.$$

Тогда отрезок

$$[\min\{m, a_{N+1} - 1\}, \max\{M, a_{N+1} + 1\}]$$

будет искомым.

□

Теорема 20. *Если a_n фундаментальна и существует подпоследовательность a_{n_k}:*

$$a_{n_k} \longrightarrow a,$$

то

$$a_n \longrightarrow a.$$

Доказательство. По условию

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \ \forall n, m > N \ \ |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Рассмотрим $k > N \Longrightarrow$

$$|a_n - a_{n_k}| < \varepsilon \quad \forall k, n > N.$$

Фиксируем n, и $k \longrightarrow \infty$.

$$-\varepsilon < a_n - a_{n_k} < \varepsilon$$

По теореме о переходе к пределу в неравенствах

$$-\varepsilon \le a_n - a \le \varepsilon.$$

Итак, $\forall n > N \ |a_n - a| \le \varepsilon \Longrightarrow a_n \longrightarrow a$. ($\le$ и $<$ также, как и константа не влияет на верность факта сходимости). □

Теорема 21 (Критерий Коши)**.** *Последовательность a_n сходится к конечному пределу $\Longleftrightarrow$ когда a_n фундаментальна.*

Доказательство. $\boxed{\Longrightarrow}$ см. утверждение 20

$\boxed{\Longleftarrow}$ см. утверждения 21 и 20. А именно:

так как последовательность фундаментальна, то она ограничена (утв. 21). Следовательно, по теореме Больцано можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Но если у последовательности Коши есть сходящаяся подпоследовательность, то она сама сходится к пределу этой подпоследовательности (утв. 20). □

Пример 27. Рассмотрим последовательность $a_n = (-1)^n$. В ней

$$|a_{n+1} - a_n| = 2.$$

Это не фундаментальная последовательность $\Longrightarrow a_n$ не сходится.

Определение 50. Говорим, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,$$

если

$$\forall A > 0 \ \exists N: \ \forall n > N \ \ a_n > A.$$

Для таких последовательностей критерий Коши не выполняется.

Пример 28. Последовательность $a_n = n$

Определение 51. Говорим, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty,$$

если $(a_n) \longrightarrow +\infty$

$$\forall A > 0 \ \exists N: \ \forall n > N \ \ a_n < -A.$$

Если разрешить в качестве частичных пределов $+\infty$ и $-\infty$, то у всякой последовательности есть частичный предел.

Если последовательность не ограничена сверху, то есть подпоследовательность, которая сходится к $+\infty$. Если последовательность не ограничена снизу, то есть подпоследовательность, которая сходится к $-\infty$.

- a_n не ограничена сверху
$$\overline{\lim}\sup a_k = +\infty$$

- a_n не ограничена снизу
$$\underline{\lim}\inf a_k = -\infty$$

Вывод: множество частичных пределов всегда не пусто.

Ряды

Пусть задана числовая последовательность $\{a_n\}$. Выражение

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется *числовым рядом.* Слагаемое a_n — член ряда или слагаемое ряда.

Пример 29.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n$$

Определение 52. Выражение

$$S_n = a_1 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

называется *частичной суммой ряда.*

Определение 53. Число A называется *суммой ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, если

$$\lim_{n\to\infty} S_n = A.$$

Пишут

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A.$$

Если $\lim S_n$ конечен, то говорят, что ряд сходится. Если $\lim S_n$ бесконечен или не существует, то говорят, что ряд расходится.

Пример 30. Сумма бесконечной геометрической прогрессии.

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}.$$

Частичная сумма:

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \begin{cases} n, & q = 1 \\ \frac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1. \end{cases}$$

$\lim S_n =?$

1) $q = 1$, ряд расходится

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty,$$

2) $|q| < 1$, $|q|^n \to 0$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$$

3) $q > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = +\infty$$

4) $q < -1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \infty$$

5) $q = -1$ предела нет (ни по определению, ни в принципе)

Необходимое условие сходимости ряда

Теорема 22 (необходимое условие сходимости ряда)**.** *Если ряд сходится, то его слагаемые стремятся к* 0. *(обратное неверно!)*

Доказательство. По условию существования конечного предела

$$\lim_{n\to\infty} S_n = A.$$

Посмотрим на один из элементов

$$a_n = S_n - S_{n-1} \longrightarrow A - A = 0.$$

□

Пример 31. Гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Заметим, что

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Далее посмотрим на частичную сумму

$$S_{2^m}: \ \underbrace{1 + \frac{1}{2}}_{\geq 1/2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq 1/2} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq 1/2} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2^{m-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^m}}_{\geq 1/2} \Longrightarrow S_{2^m} \geq \frac{m}{2}.$$

Теорема 23. *Если $a_n \geq 0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\Longleftrightarrow$ последовательность S_n ограничена.*

Доказательство. $\boxed{\Longrightarrow}$ Ряд сходится. По определению это означает, что последовательность его частичных сумм сходится к конечному числу. Первое свойство сходящихся последовательностей: если последовательность сходится, то она ограничена. Таким образом, получаем, что S_n ограничена.

$\boxed{\Longleftarrow}$ В обратную сторону. Если последовательность частичных сумм ограничена, то она не убывает (при условии, что $a_n \geq 0$). Если последовательность не убывает и ограничена, то по теореме Вейерштрасса у нее есть предел. Следовательно, ряд сходится, так как у последовательности его частичных сумм есть предел.

□

Следствие 6. *Пусть $0 \leq a_n \leq b_n$. Тогда*

1) $\sum b_n$ сходится $\Longrightarrow \sum a_n$ сходится

2) $\sum a_n$ расходится $\Longrightarrow \sum b_n$ расходится

Доказательство. Как уже было сказано, факт сходимости ряда с неотрицательными слагаемыми равносилен факту ограниченности его частичных сумм.

Установим связь между частичными суммами рядов. По условию имеем

$$S_n^a = a_1 + \ldots + a_n \leq b_1 + \ldots + b_n = S_n^b$$

В силу неравенства: если S_n^b ограничена, то S_n^a ограничена.

Аналогично, если S_n^a не ограничена, то S_n^b не ограничена.

Следовательно, утверждения из следствия верны.

□

Это утверждение представляет собой отличный способ для установления факта сходимости и расходимости рядов: достаточно оценить частичную сумму ряда той суммой, про ряд которой уже известно, сходится он или расходится. Например, мы уже знаем про гармонический ряд и геометрическую прогрессию.

Пример 32.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = ?$$

Мы уже доказывали, что гармонический ряд расходится. Так как

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n},$$

то исходный ряд тоже **расходится**.

Пример 33. Если a_n таковы, что

$$0 \leq a_n \leq cq^n, \quad 0 < q < 1,$$

то $\sum a_n$ сходится, т.к. cq^n сходится.

Можно сформулировать еще один признак сходимости:

Теорема 24. *Пусть $a_n \geq 0$ и a_n не возрастает.*

$$\sum a_n \textit{ сходится } \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \textit{ сходится }.$$

Доказательство. Т.к. слагаемые не отрицательные, то для доказательства сходимости достаточно доказать ограниченность частичных сумм. Надо некоторым способом связать последовательности частичных сумм первого и второго рядов.

Пусть $2^m \leq n < 2^{m+1}$

$$a_2+2a_4+4a_8+\ldots+2^{m-1}a_{2^m} \leq a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_n \leq a_1+2a_2+4a_4+8a_8+\ldots+2^m a_{2^m}.$$

Левую часть неравенства можно переписать следующим образом:

$$a_2 + 2a_4 + 4a_8 + 2^{m-1}a_{2^m} = 2^{-1}(2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots + 2^m a_{2^m}) = 2^{-1}S_2$$

Таким образом, записали соотношения для связи частичных сумм:

$$2^{-1}S_2 \leq S_1 \leq S_2,$$

где S_1 — частичная сумма первого ряда, а S_2 — второго.

Частичные суммы этих рядов ограничены и неограниченны одновременно. Следовательно, эти ряды сходятся и расходятся одновременно.

□

Пример 34. По теореме 24

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} \text{ сх–ся } \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p} \text{ сх–ся }.$$

Имеем
$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n.$$
Ряд, стоящий справа от знака равенства — это геометрическая прогрессия, где
$$q = \frac{1}{2^{p-1}}.$$
Как мы уже доказывали, такой ряд сходится только при $q < 1$. Таким образом,
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ сходится } \iff p > 1.$$

Лекция 11

Критерий Коши для рядов

Теорема 25. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится* $\iff \forall\varepsilon > 0$*:* $\exists N$*:* $\forall n, m > N$ $|S_n - S_m| < \varepsilon$ $n \geq m$*, что можно записать как*

$$|\sum_{k=m+1}^{n} a_k| < \varepsilon$$

Следствие 7. *Если ряд* $\sum |a_n|$ *сходится, то ряд* $\sum a_n$ *сходится. Обратное неверно.*

Доказательство. Для $\sum |a_n|$ выполняется условие Коши, т.е. $\forall\varepsilon$ $\exists N$ $\forall n, m > N$

$$|\sum_{k=m+1}^{n} |a_k|| < \varepsilon \Longrightarrow \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon?$$

По неравенству треугольника

$$|\sum_{k=m+1}^{n} a_k| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon.$$

Следовательно, для ряда $\sum a_n$ выполняется условие Коши.

$\square$

Пример 35. Пример, когда обратное неверно. *Ряд Лейбница.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Ряд с модулем не сходится, так как это будет гармонический ряд.

Проверим сходимость с помощью критерию Коши. В следующей сумме может быть четное и нечетное число слагаемых. Но каждое следующее по модулю меньше, чем предыдущее. Значит, если мы разобьём всю сумму на пары соседних слагаемых, то знак пар будут определять «первые» из них, т.е. слагаемые на нечетных местах. Таким образом, у всех пар знак один и тот же (зависит от знака первого слагаемого):

$$\left|\frac{(-1)^{m+1}}{m+1} + \frac{(-1)^{m+2}}{m+2} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n}\right| \leq \left|\frac{(-1)^{m+1}}{m+1} + \frac{(-1)^{m+2}}{m+2}\right| + \\ + \left|\frac{(-1)^{m+3}}{m+3} + \frac{(-1)^{m+4}}{m+4}\right| + \ldots + \left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+3} - \frac{1}{m+4} + \ldots \\ \ldots\left(\pm\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{m+1} \leq \varepsilon$$

Последний переход: убрали отрицательные слагаемые вида

$$-\frac{1}{m+i}+\frac{1}{m+i+1}\geq 0, \quad i>1.$$

Итак, имеем

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists N\left(N>\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \forall n,m>N$$

$$\left|\frac{(-1)^m}{m+1}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n}\right|<\varepsilon.$$

Замечание 6.

$$x_n=(x_n-x_{n-1})+(x_{n-1}-x_{n-2})+\ldots(x_2-x_1)+x_1$$

$$a_i=x_i-x_{i-1}$$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

Пример 36.

$$|x_n-x_{n-1}|\leq\frac{1}{2^n}\Longrightarrow\exists\lim_{n\to\infty}x_n$$

$$x_n=a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1$$

$$|a_n|\leq\frac{1}{2^n}\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n \text{ сходится по признаку сравнения}$$

Следовательно, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, а значит, по замечанию существует предел последовательности $\{x_n\}$.

Топология вещественной прямой

Определение 54. *Окрестность точки a* — это произвольный интервал, содержащий a. Обозначается $U(a)$.

Проколотая окрестность — $U'(a)=U(a)\setminus\{a\}$.

Симметричные окрестности:

$$U_\varepsilon(a)=(a-\varepsilon;a+\varepsilon), \quad U'_\varepsilon(a)=U_\varepsilon(a)\setminus\{a\}$$

Определение 55. Множество $V\subseteq\mathbb{R}$ называется *открытым*, если $\forall a\in V$ существует $U(a)\subset V$.

Пример 37. 1) Интервал

2) $\mathbb{R}$

3) $\varnothing$ (поскольку там нет элементов, то про них можно сказать «что угодно»)

Определение 56. Множество $F \subseteq \mathbb{R}$ называется *замкнутым*, если $\mathbb{R} \setminus F$ открыто.

Пример 38.

1) Отрезок
2) $\mathbb{R}$ (дополнение к $\varnothing$)
3) $\varnothing$
4) точка

Замечание 7. Множество $[a, b)$ (полуинтервал) не является ни открытым, ни замкнутым.

Теорема 26.

1) *Объединение всякого набора открытых множеств и пересечение конечного набора открытых множеств является открытым множеством.*
2) *Объединение конечного набора замкнутых множеств и пересечение всякого набора замкнутых множеств является замкнутым множеством.*

Доказательство.

1) Докажем первое утверждение
   - Пусть $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — набор открытых множеств. Рассмотрим объединение $\cup V_\alpha$. Пусть $a \in \cup V_\alpha \Longrightarrow \exists \alpha$: $a \in V_\alpha$. По условию V_α открыто и существует окрестность $U(a)$: $U(a) \subset V_\alpha \Longrightarrow U(a) \subset \cup V_\alpha$.
   - Пусть $V_1, \dots V_N$ — открытые множества. Пусть $a \in \cap V_n \Longrightarrow a \in V_n$ $\forall n = 1, \dots, N \Longrightarrow$ существуют окрестности $U_{\varepsilon_1}(a) \subset V_1$, $U_{\varepsilon_2}(a) \subset V_2$, $\dots$, $U_{\varepsilon_N}(a) \subset V_N$. Тогда положим

     $$\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N\}, \quad U_\varepsilon(a) \subset U_{\varepsilon_n}(a)\ \forall n = 1, \dots, N.$$

     Следовательно, $U_\varepsilon(a) \subset V_n\ \forall n = 1, \dots, N \Longrightarrow U_\varepsilon(a) \subset \cap V_n$.

     Нам важно, что во втором случае мы работаем с конечным набором, потому что могло так случится, что из бесконечного числа ε_i нельзя выбрать минимум.

2) Пусть F_α, F_n — замкнутые множества.

   Из формул Моргана:

- $\mathbb{R} \setminus F_\alpha$ — открытое множество. Следовательно, множество

  $$\mathbb{R} \setminus (\bigcap_\alpha F_\alpha) = \bigcup_\alpha (\mathbb{R} \setminus F_\alpha)$$

  открыто. Тогда $\cap F_\alpha$ замкнуто.

- Множество

  $$\mathbb{R} \setminus (\bigcup_{n=1}^N F_n) = \bigcap_{n=1}^N (\mathbb{R} \setminus F_n)$$

  открыто. Тогда $\cup F_n$ замкнуто.

□

Замечание 8. Если в некотором непустом множестве X выделен набор подмножеств τ:

1) $X, \varnothing \in \tau$.
2) $V_\alpha \in \tau \Longrightarrow \cup V_\alpha \in \tau$
3) $V_1, \ldots, V_N \in \tau$, $\cap V_n \in \tau$,

то говорят, что на X задана топология, а элементы этого набора называют открытыми множествами.

Теорема 27. *Непустое открытое множество в $\mathbb{R}$ является объединением не более, чем счетного набора попарно непересекающихся интервалов (возможно с бесконечными концами).*

Доказательство. 1) Пусть V открыто, $V \neq \varnothing$. Пусть $a \in V$. Введем множество

$$E^+ = \{x > a : (a, x) \subset V\}.$$

Вообще говоря, $E^+ \neq \varnothing$, т.к. существует $(\alpha, \beta) \subset V$: $a \in (\alpha, \beta)$, так что по крайней мере $\beta \in E^+$.

Есть несколько вариантов

(i) множество E^+ не ограничено сверху $\Longrightarrow (a, +\infty) \subset V$

(ii) множество E^+ ограничено сверху. $B = \sup E^+ \Longrightarrow (a, B) \subset V$ и $B \notin V$.

Доказательство. Для всякого $\varepsilon > 0$ число $B - \varepsilon$ не является верхней гранью E^+, т.е. существует $x \in E^+$: $x > B - \varepsilon$. Значит, $B - \varepsilon \in (a, x) \subset V$, если $B - \varepsilon > a$. Но все элементы вида $B - \varepsilon$ — это в точности интервал (a, B).

Если $B \in V$, то для всякого $\varepsilon > 0$ $(B - \varepsilon, B + \varepsilon) \subset V$. Но тогда $(a; B + \varepsilon) \subset V$. Следовательно, $B + \varepsilon \in E^+$, что противоречит тому, что $B = \sup E^+$. □

Итак, $(a, B) \subset V$, где $B = +\infty$ или $B \notin V$.

Аналогично строим интервал $(C, a) \subset V$, где $C = -\infty$ или $C \notin V$.

Таким образом, для всякой точки a построен интервал $a \in (C, B) \subset V$, где $B, C \notin V$ или равны $\pm\infty$.

2) Пусть (C_1, B_1) и (C_2, B_2) два таких построенных интервала. Предположим, что они не совпадают, но пересекаются. Т.е. по крайней мере один конец одного из них принадлежит другому.

Пусть $C_1 \in (C_2, B_2)$. Тогда $C_1 \in V$, но по построению C_1 не принадлежит V. Аналогично разбираются другие случаи.

Итог: эти интервалы либо не пересекаются, либо совпадают. Мы построили систему попарно не пересекающихся интервалов

3) Покажем, что на $\mathbb{R}$ можно расположить не более, чем счетный набор попарно не пересекающихся интервалов.

Пусть есть набор $\{I_\alpha\}$: $I_\alpha \cap I_\beta = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$. Для каждого α $\exists r_\alpha \in \mathbb{Q}$: $r_\alpha \in I_\alpha$. Заметим, что при $r_\alpha \neq r_\beta$, т.к. $I_\alpha \cap I_\beta = \varnothing$.

Иными словами, есть отображение $I_\alpha \longrightarrow r_\alpha \in \mathbb{Q}$, которое является инъекцией. А мы уже доказывали, что если нам удалось установить инъекцию между некоторым множеством и счетным множеством, то первое множество не более чем счетно.

Итак, набор $\{I_\alpha\}$ не более чем счетен.

□

Лекция 12

Утверждение о связности числовой прямой

Следствие 8 (связанность прямой). *1) Числовую прямую нельзя представить в виде объединения непересекающихся непустых открытых множеств.*

2) Числовую прямую нельзя представить в виде объединения непересекающихся непустых замкнутых множеств.

3) Если множество одновременно замкнуто и открыто, то это либо $\mathbb{R}$, либо $\varnothing$.

Доказательство. 1) Пусть $\mathbb{R} = U \cup V$, и пусть $U, V \neq \varnothing$. Существует интервал $(\alpha, \beta) \subset U$, $\alpha \notin U$ или $\beta \notin U$, и хотя бы одно из них является числом (т.е. $\neq \infty$), т.к. иначе V пусто, а U совпадает с $\mathbb{R}$. Пусть это α, $\alpha \notin U \Longrightarrow \alpha \in V$ $\Longrightarrow$ существует $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \subset V$ (V открыто). Тогда $(\alpha, \alpha + \varepsilon) \subset (U \cap V)$. Но $(U \cap V) = \varnothing$ — противоречие.

Для β аналогично.

2) Пусть можно представить в виде объединения двух замкнутых $\mathbb{R} = F_1 \cup F_2$, где F_1, F_2 замкнуты и $F_1 \cap F_2 = \varnothing$. Тогда $F_1 = \mathbb{R} \setminus F_2$ и $F_2 = \mathbb{R} \setminus F_1 \Longrightarrow F_1$ и F_2 открыты. (см. пункт (1)).

3) Пусть $E \neq \varnothing$ и открыто, и замкнуто. Тогда $\mathbb{R} \setminus E$ и открыто, и замкнуто. Тогда

$$\mathbb{R} = E \bigcup (\mathbb{R} \setminus E),$$

т.е. $\mathbb{R}$ представляется в виде двух открытых множеств, что невозможно. Следовательно, $\mathbb{R} \setminus E = \varnothing \Longrightarrow E$ и $\mathbb{R}$ совпадают.

□

Классификация точек множества

Определение 57. Точка a — *внутренняя точка* множества $E \subset \mathbb{R}$, если существует окрестность $U(a) \subset E$. (Множество E открыто $\Longleftrightarrow$ все его точки внутренние).

Определение 58. Точка a называется *граничной точкой* множества E, если для любой окрестности $U(a)$ верно, что

$$U(a) \cap \neq \varnothing, \quad U(a) \cap (\mathbb{R} \setminus E) \neq \varnothing.$$

Граничная точка множества может как принадлежать, так и не принадлежать этому множеству.

Пример 39. Рассмотрим множество $E = [0, 1) \cup \{2\}$. Внутренние точки — интервал $(0, 1)$. Граничные точки — $\{0\} \cup \{1\} \cup \{2\}$. Предельные точки — отрезок $[0, 1]$.

Определение 59. Точка a — *предельная точка* множества E, если для любой окрестности $U(a)$ множество $E \cap U(a)$ содержит бесконечное множество точек множества E. Внутренняя точка всегда предельная.

Теорема о предельной точке множества

Теорема 28. *Точка a —* предельная точка E $\Longleftrightarrow$ *для любой проколотой окрестности $U'(a)$ верно, что $U'(a) \cap E \neq \varnothing$.*

Доказательство. 1) Если a — предельная точка, то $\forall$ окрестности $U(a)$ множество $E \cap U(a)$ бесконечно $\Longrightarrow$ $(E \cap U(a)) \setminus \{a\} = E \cap U'(a)$ — бесконечное множество, в частности, непустое.

2) Предположим, что a не является предельной точкой множества E. Тогда существует окрестность $U(a)$ такая, что $E \cap U(a)$ — конечное множество.

Если $E \cap U(a) = \varnothing$, то $E \cap U'(a) = \varnothing$, что невозможно.

Если $E \cap U(a) \neq \varnothing$, то пусть $x_1, \ldots, x_n$ — элементы этого пересечения, $x_k \neq a$. Если таких x_k нет, то $(E \cap U(a)) \setminus \{a\} = \varnothing \Longrightarrow E \cap U'(a) = \varnothing$, что невозможно. Пусть такие x_k есть. Положим

$$\varepsilon = \min_{1 \le k \le n} \{|x_k - a|\}, \quad U'_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \setminus \{a\}.$$

Таким образом, $x_k \notin U'_\varepsilon(a)$, $a \notin U'_\varepsilon(a) \Longrightarrow E \cap U'_\varepsilon(a) = \varnothing$ — противоречие.

□

Теорема Больцано

Теорема 29 (Больцано)**.** *Если множество E бесконечно и ограничено, то у множества E есть хотя бы одна предельная точка (множество ограничено, если оно лежит в некотором отрезке).*

Доказательство. Так как E бесконечно, то существует последовательность $\{a_n\}$ элементов множества E такая, что $a_n \neq a_m$, $n \neq m$.

Так как E ограничено, то последовательность $\{a_n\}$ ограничена. По теореме Больцано для последовательностей существует подпоследовательность $a_{n_k} \to a$.

Проверим, что точка a — предельная точка E. По определению предела:

$$\forall\, U(a) \;\; \exists\, N: \;\; \forall k > N \quad a_{n_k} \in U(a)$$

$\Longrightarrow$ множество $U(a) \cap E$ бесконечно.

□

Пример 40. Рассмотрим последовательность

$$1 \;\; 2 \;\; 1 \;\; 2 \;\; \ldots$$

Множество значений — $\{1, 2\}$. 1 — частичный предел, но предельной точки нет, так как последовательность не бесконечна (множество значений последовательности).

Упражнение 16. Если множество E не является счетным или конечным, то у него есть предельная точка (не предполагается, что множество ограничено).

Теорема 30. *Следующие утверждения равносильны:*

1) *Множество E замкнуто.*

2) *Множество E содержит все свои граничные точки.*

3) *Множество E содержит все свои предельные точки.*

4) *Если $a_n \in E$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то $a \in E$ (содержит все пределы).*

Доказательство. $\boxed{(1) \Longrightarrow (2)}$ Если a — граничная точка и $a \notin E$, то $a \in \mathbb{R} \setminus E$ и $\exists U(a) \subset \mathbb{R} \setminus E$, что противоречит определению граничной точки.

$\boxed{(2) \Longrightarrow (3)}$ Предположим, что a — предельная точка, но $a \notin E$. Тогда $\forall U(a)$ множество $U(a) \cap E$ непустое (по определению предельной точки), и $U(a) \cap (\mathbb{R} \setminus E) \neq \varnothing$, т.к. там лежит сама точка a. Следовательно, a — граничная, но по пункту (2) $a \in E$ — противоречие.

$\boxed{(3) \Longrightarrow (4)}$ Пусть $a_n \longrightarrow a$, $a_n \in E$. Если существует номер n такой, что $a_n = a$, то все доказано. Если для любого n $a_n \neq a$, то во всякой окрестности точки a бесконечно много элементов E, или, что эквивалентно, в каждой проколотой окрестности есть элемент E: $a_n \in U'(a) \Longrightarrow a$ — предельная точка $E \Longrightarrow a \in E$.

$\boxed{(4) \Longrightarrow (1)}$ Пусть $a \in \mathbb{R} \setminus E$. Если во всякой окрестности $(a - \frac{1}{n}; a + \frac{1}{n})$ есть элемент из множества E, то есть последовательность a_n, которая сходится к a ($a_n \to a$). По (4) $a \in E$, что невозможно.

Следовательно, существует n: $(a - \frac{1}{n}; a + \frac{1}{n}) \subset \mathbb{R} \setminus E \Longrightarrow \mathbb{R} \setminus E$ открыто. □

Утверждение 22. *Множество частичных пределов замкнуто.*

Доказательство. Пусть множество S — множество частичных пределов последовательности $\{a_n\}$.

Если $S = \varnothing$, то все доказано.

Пусть $S \neq \varnothing$.

Рассмотрим последовательность элементов $s_n \in S$, которая сходится к s: $s_n \longrightarrow s$. Проверим, что $s \in S$, тем самым докажем замкнутость множества S.

Можно найти такой a_{n_1}, что $|s_1 - a_{n_1}| < 1$. Далее можно найти

$$n_2 > n_1: \quad |s_2 - a_{n_2}| < \frac{1}{2},$$
$$\ldots$$
$$n_k > n_{k-1}: \quad |s_k - a_{n_k}| < \frac{1}{k}.$$

Почему мы можем выбирать все большие и большие номера? Частичный предел — это число, к которому сходится некоторая подпоследовательность. И в этой подпоследовательности будут встречаться сколь угодно большие номера, и значения будут подходить к этому пределу сколь угодно близко.

По неравенству треугольника

$$|s - a_{n_k}| \leq |s - s_k| + |s_k - a_{n_k}| \leq |s - s_k| + \frac{1}{k} \longrightarrow 0.$$

Итак, построили подпоследовательность, которая сходится к s: $a_{n_k} \to s$. Следовательно, $s \in S \Longrightarrow S$ замкнуто.

□

Лекция 13

Теорема Бэра

Теорема 31 (Бэр). *Пусть F — непустое замкнутое подмножество $\mathbb{R}$ и $F = \cup F_n$, где F_n — замкнутые множества. Тогда существует номер N и интервал (α, β)такие, что $F \cap (\alpha, \beta) \neq \varnothing$ и $F \cap (\alpha, \beta) \subset F_N$.*

В частности, если $\mathbb{R} = \cup F_n$, то хотя бы одно множество из F_n содержит интервал.

Пример 41. Отрезок $[a, b]$, $a < b$ не является счетным.

Доказательство. Пусть отрезок счетный. Тогда $[a, b] = \cup\{x_n\}$. По теореме существует интервал (α, β), что $[a, b] \cap (\alpha, \beta) \subset \{x_n\} \neq \varnothing$. Но пересечение интервала и отрезка — всегда не одноточечное множество. Противоречие.

□

Пример 42. Множество иррациональных чисел нельзя представить в виде объединения не более, чем счетного набора замкнутых множеств.

Доказательство. Допустим, что можно так представить. Помимо иррациональных чисел на числовой прямой есть рациональные числа, коих счетное число. Значит, если рассмотреть все рациональные точки, то получим объединение счетного набора замкнутых множеств.

Следовательно, мы всю числовую прямую представили в виде объединения счетного набора замкнутых множеств: в нем содержатся либо рациональные точки, либо те замкнутые множества, с помощью которых мы представили множество иррациональных чисел.

Тогда, согласно теореме, так как мы смогли представить числовую прямую в таком виде, то одно из замкнутых множеств в объединении содержит интервал. Точки не могут содержать интервал, следовательно, его содержит множество из объединения, с помощью которого мы представили множество иррациональных чисел. Но на числовой прямой не существует интервала, в котором содержатся только иррациональные числа (в любом интервале есть рациональная точка). Противоречие.

□

Замечание 9. Доказательство теоремы Бэра будет почти идентично доказательству теоремы о вложенных отрезках 9.

Доказательство теоремы. Докажем «от противного».

Рассмотрим дополнение F_1. Имеем $(\mathbb{R} \setminus F_1) \cap F \neq \varnothing$, иначе $F = F_1$ и, следовательно, для всякой $a \in F$

$$U_\varepsilon(a) \cap F \subset F_1.$$

Итак, $(\mathbb{R} \setminus F_1) \cap F \neq \varnothing$.

(I) Рассмотрим $a_1 \in F \cap (\mathbb{R} \setminus F_1)$. Существует (α_1, β_1):

$$a_1 \in (\alpha_1, \beta_1) \text{ и } [\alpha_1, \beta_1] \subset (\mathbb{R} \setminus F_1),$$

и, кроме того,

$$\beta_1 - \alpha_1 < 1.$$

Итог первого шага: построен отрезок $[\alpha_1, \beta_1]$:

1) $\beta_1 - \alpha_1 < 1$.
2) $(\alpha_1, \beta_1) \cap F \neq \varnothing$ (там есть a_1).
3) $[\alpha_1, \beta_1] \subset \mathbb{R} \setminus F_1$.

(II) Имеем: $(\alpha_1, \beta_1) \cap F \neq \varnothing \Longrightarrow (\alpha_1, \beta_1) \cap F \not\subset F_2$ (если бы это было не так, то наше предположение при доказательстве «от противного» было бы неверно).

Это означает, что существует $a_2 \in (\alpha_1, \beta_1) \cap F$ и $a_2 \notin F_2$. Существует (α_2, β_2):

1) $\beta_2 - \alpha_2 < \frac{1}{2}$.
2) $(\alpha_2, \beta_2) \cap F \neq \varnothing$ (там есть a_2).
3) $[\alpha_2, \beta_2] \subset \mathbb{R} \setminus F_2$.
4) $[\alpha_2, \beta_2] \subset [\alpha_1, \beta_1]$.

(III) Имеем: $(\alpha_2, \beta_2) \cap F \neq \varnothing \Longrightarrow (\alpha_2, \beta_2) \cap F \not\subset F_3$ (иначе нет предположения «противного»)

Существует $a_3 \in (\alpha_2, \beta_2) \cap F$ и $a_3 \notin F_3$. Существует (α_3, β_3):

1) $\beta_3 - \alpha_3 < 1/3$.
2) $(\alpha_3, \beta_3) \cap F \neq \varnothing$
3) $[\alpha_3, \beta_3] \subset \mathbb{R} \setminus F_3$.
4) $[\alpha_3, \beta_3] \subset [\alpha_2, \beta_2]$.

и так далее.

Получаем систему вложенных отрезков

$$[\alpha, \beta] \supset [\alpha_2, \beta_2] \supset \ldots : \quad [\alpha_n, \beta_n] \cap F_n \neq \varnothing$$

$$\beta_n - \alpha_n < \frac{1}{n} \text{ и } [\alpha_n, \beta_n] \cap F_n = \varnothing.$$

По теореме о вложенных отрезках существует точка $c \in \bigcap\limits_n [\alpha_n, \beta_n]$.

Очевидно, что точка $c \notin F_n$ для всякого n (по построению). Однако не очевидно, что $c \in F$. Допустим, что $c \notin F$. Тогда в силу замкнутости F существует интервал (α, β) такой, что $c \in (\alpha, \beta)$ и $(\alpha, \beta) \cap F = \varnothing$. Как только станет так, что

$$\beta_n - \alpha_n < \min\{\beta - c; c - \alpha\},$$

то $[\alpha_n; \beta_n] \subset (\alpha; \beta)$, а это невозможно, так как в каждом $[\alpha_i; \beta_i]$ была точка из F, а в $(\alpha; \beta)$ их нет.

Таким образом, $c \in F = \cup F_n$, но $c \notin F_n$ $\forall n$ — противоречие.

$\square$

Компакты

Определение 60. Множество $K \subset \mathbb{R}$ называется *компактом*, если для всякого набора открытых множеств $\{U_\alpha\}$ таких, что $\bigcup_\alpha U_\alpha \supset K$ найдется конечный поднабор $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_N}$: $\bigcup_{k=1}^N U_{\alpha_k} \supset K$, т.е. из всякого покрытия K открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

Пример 43. Интервал — не компакт.

$$(0,1) = \bigcup_n (\frac{1}{n}; 1).$$

Доказательство. Допустим, что можно выбрать конечное число интервалов. Но тогда среди них будет тот, в котором содержится точка с наибольшим знаменателем — $\max\{n_k\}$. Но тогда точки от нуля до $\frac{1}{\max\{n_k\}}$ не войдут в наше конечное объединение интервалов.

□

Пример 44. Точка — компакт.

Доказательство. Допустим, что покрыли точку a открытыми множествами: $a \in \bigcup U_\alpha$. Но это означает, что существует U_α: $a \in U_\alpha$. Получили конечное подпокрытие из одного множества.

□

Теорема 32 (Лемма Бореля–Гейне–Лебега)**.** *Отрезок — компакт.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. у отрезка $[a, b]$ $(a < b)$ существует покрытие $\{U_\alpha\}$, из которого нельзя выбрать конечное подпокрытие. Делим отрезок $[a, b]$ пополам и выбираем в качестве отрезка $[a_1, b_1]$ ту половину, у которой нет конечного подпокрытия в покрытии $\{U_\alpha\}$. Такая половина есть, т.к. иначе у исходного отрезка было бы конечное подпокрытие. Делим $[a_1, b_1]$ пополам и выбираем ту его половину $[a_2, b_2]$, у которой нет конечного подпокрытия и т.д.

Получаем систему вложенных отрезков $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots$, где каждый обладает таким свойством: из исходного покрытия нельзя выбрать конечное подпокрытие. Кроме того,

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \longrightarrow 0.$$

По теореме о вложенных отрезках существует точка $c \in \cap[a_n, b_n]$. Поскольку весь отрезок $[a; b]$ покрыт открытыми множествами, то и точка c покрыта каким-то открытым множеством. Т.е. существует α: $c \in U_\alpha$. Так как множество U_α открыто, то найдется интервал $U(c) = (s, t) \subset U_\alpha$. Существует номер n:

$$b_n - a_n < \min\{c - s, t - c\} \Longrightarrow [a_n, b_n] \subset U(c) \subset U_\alpha,$$

т.е. отрезок $[a_n, b_n]$ покрыт одним множеством U_α. Это противоречит построению: мы на каждом шаге выбирали ту часть, у которой нет конечного подпокрытия.

□

Свойства компактов

Утверждение 23 (Свойства компактов). *1) Компакт — ограниченное множество (т.е. лежит в некотором отрезке).*

Доказательство. Покроем компакт множествами вида $(-n;n)$:

$$K \subset \bigcup_n (-n;n).$$

В объединении это, конечно, вся числовая ось. Так как K — компакт, то из любого его покрытия можно выбрать конечное подпокрытие. Т.е. существуют $n_1, \ldots, n_N$:

$$K \subset \bigcup_{s=1}^{N} (-n_s;n_s).$$

Но все эти интервалы последовательно вложены друг в друга. Положим

$$C = \max_{1 \le s \le N} n_s.$$

Следовательно, $K \subset (-C;C) \Longrightarrow K \subset [-C;C]$.

□

2) Компакт — замкнутое множество.

Доказательство. Чтобы доказать, что некоторое множество замкнуто, нужно доказать, что дополнение к нему открыто.

Рассмотрим точку $a \in \mathbb{R} \backslash K$. Нужно доказать, что любая точка из дополнения входит в него с некоторым интервалом. Возьмем отрезок

$$[a - \frac{1}{n}; a + \frac{1}{n}].$$

Рассмотрим дополнения к этому отрезку: получим два луча. Обозначим дополнение так

$$U_n = \mathbb{R} \setminus [a - \frac{1}{n}; a + \frac{1}{n}].$$

$$\bigcup_n U_n = \mathbb{R} \setminus \{a\} \supset K.$$

По определению существует конечное подпокрытие $U_{n_1}, \ldots, U_{n_N}$. Возьмем в качестве

$$M = \max_{1 \le s \le N} \{n_s\}.$$

Тогда $\mathbb{R} \setminus [a - \frac{1}{M}; a + \frac{1}{M}] \supset K$. Следовательно,

$$(a - \frac{1}{M}; a + \frac{1}{M}) \subset \mathbb{R} \setminus K.$$

Следовательно, $\mathbb{R} \setminus K$ открыто и K замкнуто.

□

3) *Если замкнутое множество F является подмножеством компакта K, то F — компакт.*

Доказательство. Пусть

$$F \subset \bigcup_\alpha U_\alpha \Longrightarrow K \subset \bigcup_\alpha U_\alpha \cup (\mathbb{R} \setminus F).$$

По определению существует конечное подпокрытие K

$$U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_N} \text{ и может быть } (\mathbb{R} \setminus F).$$

Эти множества будут покрывать $K \Longrightarrow$ они будут покрывать F. Следовательно,

$$F \subset U_{\alpha_1} \ldots \cup U_{\alpha_N} \cup (?)(\mathbb{R} \setminus F).$$

Последнее множество можно не учитывать, потому что там нет ни одной точки F. Итак, нашли конечное подпокрытие для F

$$F \subset U_{\alpha_1} \ldots \cup U_{\alpha_N}.$$

□

Критерий компактности

Следствие 9 (критерий компактности)**.** *Множество $K \subset \mathbb{R}$ — компакт $\Longleftrightarrow$ K ограничено и замкнуто.*

Доказательство. $\boxed{\Longrightarrow}$ очевидно (следует из свойств).

$\boxed{\Longleftarrow}$ Множество K ограничено $\Longrightarrow$ существует отрезок $[a, b] \supset K$. Отрезок $[a, b]$ — компакт, K замкнуто и по третьему свойству получаем, что K — компакт.

□

Лекция 14

Определение 61. Множество $K \subset \mathbb{R}$ называется *компактом*, если для всякого набора открытых множеств $\{U_\alpha\}$ таких, что $\bigcup_\alpha U_\alpha \supset K$ найдется конечный поднабор $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_N}$: $\bigcup_{k=1}^{N} U_{\alpha_k} \supset K$, т.е. из всякого покрытия K открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

Утверждение 24 (критерий компактности)**.** *Множество $K \subset \mathbb{R}$ — компакт $\Longleftrightarrow$ K ограничено и замкнуто.*

Обобщение теоремы Больцано

Теорема 33. *Множество K — компакт $\Longleftrightarrow \forall\ \{x_n\}^\infty \in K$ существует подпоследовательность x_{n_k}:*

$$x_{n_k} \longrightarrow x \in K.$$

Доказательство. 1) Пусть K — компакт. Следовательно, K — ограниченное множество (по следствию) $\Longrightarrow$ существует $[a, b] \supset K$.

Пусть $\{x_n\} \in K$. Тогда $x_n \in [a; b]$. По теореме 18 (по теореме Больцано) существует последовательность

$$\{x_{n_k}\} \longrightarrow x.$$

Так как K — замкнутое множество, то $x \in K$.

2) Пусть теперь $\forall \{x_n\} \in K$ существует $x_{n_k} \longrightarrow x \in K$. Докажем, что K — компакт.

Если K не ограничено сверху, то существует последовательность $x_n \in K$: $x_n \to +\infty$. Из этой последовательности нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность. Если K не ограничено снизу, то существует последовательность $x_n \in K$: $x_n \to -\infty$, и из нее не выбрать сходящуюся подпоследовательность. Следовательно, K ограничено.

Проверим, что K замкнуто. Пусть $x_n \in K$, $x_n \longrightarrow x$. Покажем, что $x \in K$. По условию существует подпоследовательность $x_{n_k} \longrightarrow x_0 \in K$, но $x_0 = x$, потому что предел последовательности обязательно совпадает с пределом подпоследовательности $\Longrightarrow$ по критерию компактности K — компакт.

□

Множество Кантора

Пример 45. *Множество Кантора* — еще один пример компакта.

Возьмем отрезок $[0, 1]$. Делим его на три части, «выбрасываем» середину, берем объединение оставшихся. Получаем множество

$$F_1 = [0; \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}; 1]$$

И так далее:

$$F_2 = [0; \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}; \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}; \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}; 1]$$

$$\dots$$

Итак, все множества F_n — конечное объединение отрезков $\Longrightarrow F_n$ замкнуто. Кроме того,

$$F_1 \supset F_2 \supset \dots F_n \supset \dots$$

Имеем, (сумма длин отрезков)

$$|F_1| = \frac{2}{3}, \ \ |F_2| = \frac{4}{9}, \dots$$

$$|F_n| = \left(\frac{2}{3}\right)^n \longrightarrow 0.$$

Следовательно, сумма длин выбрасываемых интервалов стремится к 1.

Определение 62. Множество Кантора

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

Утверждение 25. *1) C замкнуто и ограничено (компакт)*

Доказательство. Всякое пересечение замкнутых множеств замкнуто. В нашем случае F_n замкнуты $\Longrightarrow C$ замкнуто.

Ограниченность: по построению $C \subset [0; 1]$.

□

2) C континуальное

Доказательство. Рассмотрим отрезок $[0, 1]$ и будем проводить построения, описанные в 45. А именно, делить отрезок на три части и «выбрасывать» середину.

Закодируем числа отрезка $[0, 1]$ так: если число попало в правый отрезок, то ставим 2, если в левой — 0 (если бы мы далее рассматривали середину, то точкам оттуда сопоставляли бы 1).

И так далее: делим каждый из отрезков на три части, смотрим, куда попали точки и ставим соответствующие номера — 0 или 2. Получается, что каждый раз остаются числа, которые в троичной записи можно записать, используя только 0 и 2.

Итак, всякая точка $x \in C$ записывается однозначно с помощью 0 и 2, и всякой последовательности из 0 и 2 можно сопоставить $x \in C$ (теорема о вложенных отрезках: если будем «идти» такой записи числа и брать соответствующие отрезки, получим систему вложенных отрезков. Их общая точка — это и есть точка, которая соответствует записи, и она единственная).

Мы знаем, что последовательностей, составленных из 0 и 2, континуально. Следовательно, $C \sim \{0, 2\}^\infty \sim \{0, 1\}^\infty \Longrightarrow C$ континуально.

$\square$

3) C «по длине» $(n \to \infty) = 0$ (так получается по построению F_n).

Упражнение 17. 1) Доказать, что

$$\frac{1}{4} \in C.$$

2) Доказать, что множество предельных точек C — это в точности C.

Определение 63. Множество, которое совпадает с множеством своих предельных точек, называется *совершенным.*

Отрезок и множество Кантора — совершенные множества.

Точка — не совершенное множество. Множество предельных точек в данном случае — это пустое множество.

3) Доказать, что

$$C + C = [0; 2].$$

Здесь $C + C$ — это все возможные суммы чисел из множества Кантора.

Предел функции по Гейне

Пусть $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ — функция. Предположим, что a — предельная точка множества D.

Последнее условие, вообще говоря, накладывает ограничение на множество D. Например, в качестве D теперь нельзя взять множество натуральных чисел. Кроме того, заметим, что a может не принадлежать D.

Определение 64 (по Гейне)**.** Число b называется пределом функции $f(x)$ при $x \longrightarrow a$ (по множеству D), если

$$\forall \{x_n\} \in D \;\; x_n \longrightarrow a \text{ и } x_n \neq a \text{ верно, что } f(x_n) \longrightarrow b.$$

Обозначаем

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Замечание 10. Условие $x_n \neq a$ нужно, чтобы, например, у функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1 \text{ иначе} \end{cases}$$

был предел при $x \longrightarrow 0$. Если убрать запрет $x_n \neq a$, то у такой функции не будет предела.

А именно, можно будет взять последовательность

$$1,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{3},\ 0\ldots$$

Получается, что $x_n \longrightarrow 0$, а $f(x_n)$ будет чередовать значения 0 и 1. Т.е. предела нет.

Замечание 11. Если не предполагать, что a — предельная точка D, то последовательностей из определения может вообще не быть. ()

Замечание 12. Как доказать, что у функции предела нет? Можно, например, предъявить последовательность $\{x_n\}$, которая сходится к a, а $f(x_n)$ не сходится.

Другой способ: рассмотреть две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, которые сходятся к a. Но при этом $f(x_n) \longrightarrow b$, $f(y_n) \longrightarrow c$, и $b \neq c$.

Замечание 13. Если D не ограничено сверху, то в качестве a можно взять $+\infty$.

Если D не ограничено снизу, то в качестве a можно взять $-\infty$.

Свойства предела функции

Теорема 34 (единственность предела)**.** *Предел функции определен однозначно. (количество пределов функции при $x \longrightarrow a$ не превосходит 1).*

Доказательство. Предположим, что

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \text{ и } \lim_{x\to a} f(x) = c.$$

По определению для любых последовательностей $\{x_n\}$, $x_n \longrightarrow a$, $x_n \neq a$ верно, что

1) $f(x_n) \longrightarrow b$,

2) $f(x_n) \longrightarrow c$.

Пределов последовательности не больше 1 $\Longrightarrow b = c$.

Тут важно, что есть хоть одна последовательность x_n, которая сходится к a: это обеспечивает условие, что a — предельная точка.

□

Пример 46 (когда не существует предела)**.** Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}.$$

Предела у данной функции не существует, потому что можно рассмотреть последовательность

$$x_n = \frac{1}{n} \Longrightarrow f(x_n) \longrightarrow 1.$$

Но можно еще рассмотреть последовательность

$$x_n = -\frac{1}{n} \Longrightarrow f(x_n) \longrightarrow -1.$$

Но предел функции, если бы он был, должен был бы совпадать в этих со значениями в этих двух случаях, что невозможно.

Теорема 35 (переход к пределу в неравенствах)**.** *Пусть* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *и* a *— предельная точка* D*. Предположим, что*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \quad \lim_{x\to a} g(x) = c$$

и $\exists U'(a)$*:* $f(x) \leq g(x)$ *для любых* $U'(a) \cap D$*. Тогда* $b \leq c$*.*

Доказательство. Пусть $x_n \longrightarrow a$ и $x_n \neq a$. По определению предела f: $f(x_n) \longrightarrow b$ и $g(x_n) \longrightarrow c$. По определению предела последовательности $\exists N$: $\forall n > N$

$$x_n \in U' \cap D.$$

Следовательно, $f(x_n) \leq g(x_n)$ $\forall n > N$. По свойству предела последовательности

$$b \leq c.$$

□

Теорема 36 (о сходимости «зажатой» функции)**.** *Пусть* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $h : D \longrightarrow \mathbb{R}$*, и* a *— предельная точка* D*.*

Предположим, что

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = b$$

и $\exists U'(a)$*:* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ $\forall x \in U'(a) \cap D$*. Тогда*

$$\exists \lim_{x\to a} h(x) = b.$$

Доказательство. Для всяких последовательностей $\{x_n\} \in D$: $x_n \longrightarrow a$, $x_n \neq a$ верно, что

$$f(x_n) \longrightarrow b, \quad g(x_n) \longrightarrow b$$

и $\exists N$: $\forall n > N$ $x_n \in U'(a) \cap D$ и $f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n)$. По теореме «о 2–х полицейских» для последовательностей имеем

$$h(x_n) \longrightarrow b.$$

□

Теорема 37 (арифметика пределов)**.** *Пусть* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$*, и* a *— предельная точка* D*. Предположим, что* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ *и* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$*. Тогда*

1) $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x)) = b + c$

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = bc$

3) если $g \neq 0$ *(на* D*) и* $c \neq 0$*, то*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}.$$

Доказательство. Докажем третий пункт.

Для всякой последовательности $\{x_n\} \in D$: $x_n \longrightarrow a$, $x_n \neq a$ верно, что $f(x_n) \longrightarrow b$ и $g(x_n) \longrightarrow c$, и $g(x_n) \neq 0$, $c \neq 0$. По арифметике пределов последовательностей

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \longrightarrow \frac{b}{c}.$$

$\square$

Замечание 14. В третьем пункте теоремы 37 функция g, вообще говоря, может равняться нулю вне множества D.

Пример:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

В данном случае $0 \notin D$.

Теорема 38 (предел сложной функции)**.** *Пусть* $D \subset \mathbb{R}$ *и* $E \subset \mathbb{R}$.

Пусть $f : D \longrightarrow E$ *и* $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$*. Пусть* a *— предельная точка* D *и* b *— предельная точка* E*. Предположим, что*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \text{ и } \lim_{y\to b} g(y) = c,$$

и $\exists U'(a)$*:* $\forall x \in U'(a) \cap D \ f(x) \neq b$*. Тогда*

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = c.$$

Пример 47. От условия «$\exists U'(a)$: $\forall x \in U'(a) \cap D \ f(x) \neq b$» нельзя отказаться.

Рассмотрим функции

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1 \text{ иначе} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0. \end{cases}$$

Имеем $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. Однако у композиции $g(f(x))$ предела нет.

Рассмотрим последовательности

$$x_n = \frac{1}{\pi n} \Longrightarrow f(x_n) = 0 \Longrightarrow g(f(x_n)) = 0$$

$$x_n = \frac{1}{\pi/2 + 2\pi n} \Longrightarrow g(f(x_n)) = 1.$$

Получается, что для разных последовательностей получили различные результаты. Следовательно, предела у композиции данных функций нет.

Доказательство. Для всякой последовательности $x_n \longrightarrow a$, $x_n \neq a$ верно, что $f(x_n) \longrightarrow b$ и $\exists N \ \forall n > N \ f(x_n) \neq b$. Последовательность

$$f(x_{N+1}),\ f(x_{N+2}),\ \ldots\ f(x_n),\ \ldots \longrightarrow b \text{ и } \neq b.$$

Следовательно, последовательность

$$g(f(x_{N+1})),\ g(f(x_{N+2})),\ \ldots\ g(f(x_n)),\ \ldots \longrightarrow c.$$

Но добавление и выбрасывание конечного набора элементов не влияет на сходимость последовательности. Следовательно,

$$g(f(x_n)) \longrightarrow c.$$

□

Лекция 15

Определение предела по Коши

Определение 65 (по Коши)**.** Пусть $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, и a — предельная точка множества D. Число b называется пределом f при $x \longrightarrow a$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $\forall x \in D$

$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Замечание 15. Если D не ограничено сверху, то в качестве a можно взять $+\infty$ и определение по Коши переписать так

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M : \ \forall x \in D \ x > M \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Аналогично можно поступить, если множество D не ограничено снизу.

Теорема 39 (равносильность определений по Гейне и Коши)**.** *Определения предела по Коши и по Гейне равносильны.*

Доказательство. 1) Коши $\Longrightarrow$ Гейне.

Дано: $\underline{\forall \varepsilon > 0}$ $\exists \delta > 0$ $\forall x \in D$ $0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

Пусть последовательность $x_n \in D$: $x_n \longrightarrow a$ и $x_n \neq a$. По определению предела последовательности $\exists N$ $\underline{\forall n > N}$ $0 < |x_n - a| < \delta \Longrightarrow \underline{|f(x_n) - b| < \varepsilon}$.

Из всего подчеркнутого следует, что $f(x_n) \longrightarrow b$ и выполнено определение по Гейне.

2) Гейне $\Longrightarrow$ Коши.

Дано: $\forall \{x_n\} \in D$, $x_n \longrightarrow a$, $x_n \neq a$ верно, что $f(x_n) \longrightarrow b$.

Предположим противное (т.е. определение Коши не выполняется). Т.е.

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in D \ 0 < |x - a| < \delta \text{ и } |f(x) - b| \geq \varepsilon.$$

Рассмотрим $\delta = \frac{1}{n}$:

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \quad |f(x) - b| \geq \varepsilon.$$

Последовательность $x_n \longrightarrow a$, $x_n \neq a$, но $|f(x_n) - b| \geq \varepsilon$, т.е. $f(x_n)$ не стремится к b — противоречие с «дано» $\Longrightarrow$ «Гейне $\Longrightarrow$ Коши» и «Гейне $\Longleftrightarrow$ Коши».

□

Свойства предела функции

Теорема 40 (ограниченность)**.** *Пусть* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$. *Тогда* $\exists U'(a)$ *и* $c > 0$*:*

$$|f(x)| \leq c \ \ \forall x \in U'(a) \cap D.$$

Доказательство. Для доказательства будем использовать определение Коши.

Пусть $\varepsilon = 1$. Существует $\delta > 0$: $\forall x \in D$

$$0 < |x - a| < \delta \ \ (x \in U'_\delta(a) \cap D) \Longrightarrow |f(x) - b| < 1.$$

Итого по неравенству треугольника

$$|f(x)| \leq |f(x) - b| + |b| < 1 + |b| = c.$$

□

Теорема 41 (отделимости)**.** *Пусть* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b > 0$. *Тогда* $\exists U'(a)$: $\forall x \in U'(a) \cap D$

$$f(x) \geq \frac{b}{2} > 0$$

Доказательство. Положим $\varepsilon = b/2$. Существует $\delta > 0$ $\forall x \in D$

$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < b/2.$$

Итак, для всяких $x \in U'_\delta(a) \cap D$

$$f(x) = f(x) - b + b > -\frac{b}{2} + b = \frac{b}{2}.$$

□

Замечательные пределы

Теорема 42 (1–ый замечательный предел)**.**

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

В качестве D будет множество $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Будем считать, что $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\}$.

Доказательство. Так как $\frac{\sin x}{x}$ — четная, то достаточно рассмотреть $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Знаем, что

$$\sin x \leq x \Longrightarrow \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$

Так как $|\sin x| \leq |x|$, то $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$ (по теореме о 2–х полицейских).

$$\lim_{x\to 0} \cos x = \lim_{x\to 0}(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}) = 1.$$

Кроме того,

$$x \leq \operatorname{tg} x \Longrightarrow \frac{\sin x}{x} \leq \cos x.$$

Итак,

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 \Longrightarrow \frac{\sin x}{x} \longrightarrow 1.$$

□

Замечание 16. Однако это доказательство не совсем правильно, так как при доказательстве неравенства $|\sin x| \leq |x|$, в котором фигурирует длина дуги, на самом деле используется первый замечательный предел.

Теорема 43 (2–ой замечательный предел)**.**

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

Доказательство. Пусть $n \leq x < n+1$. Тогда

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = e,$$

то $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\colon \forall n > N$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < e+\varepsilon \text{ и } \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n > e-\varepsilon.$$

Пусть $x > N+1$. Получаем

$$e-\varepsilon < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < e+\varepsilon$$

$$\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right| < \varepsilon.$$

□

Упражнение 18. 1) Доказать, что

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

2) Доказать, что

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Определение предела справа и слева

Определение 66. Пусть $D^- = (-\infty; a) \cap D$ и $D^+ = (a; +\infty) \cap D$. Если a — предельная точка D^-, то предел f по D^- при $x \longrightarrow a$ называется *пределом слева* и обозначается

$$\lim_{x\to a-} f(x) \text{ или } f(a-0).$$

Если a предельная точка D^+, то предел f по D^+ при $x \longrightarrow a$ называется *пределом справа* и обозначается

$$\lim_{x\to a+} f(x) \text{ или } f(a+0).$$

Распишем по Гейне и по Коши $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = b$:

$$\text{По Гейне: } \forall \{x_n\} \in D: \quad x_n \longrightarrow a \quad \text{и } x_n < a \text{ верно } f(x_n) \longrightarrow b.$$

$$\text{По Коши}: \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in D \ \ x < a \text{ и } x > a - \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Утверждение 26. *Пусть a — предельная точка D^- и D^+. Тогда* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a-} f(x) = b$ *и* $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = b$.

Доказательство. $\boxed{\Longrightarrow}$ Если существует предел, что неравенства из определения Коши верны не только для точек из δ–окрестности, но из в принципе для всех x справа и слева от a.

$\boxed{\Longleftarrow}$ По определению Коши $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_1 > 0$: $\forall x \in D$ $x < a$ и $a - \delta_1 < x \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

Существует $\delta_2 > 0$: $\forall x \in D$ $a < x < a + \delta_2 \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$,

$$a - \delta < x < a + \delta, \ \ x \neq a \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

□

Теорема Вейерштрасса

Теорема 44 (Вейерштрасс)**.** *Пусть $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ не убывает и ограничена сверху. Пусть a — предельная точка D^-. Тогда существует* $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \sup\limits_{x\in D^-} f(x)$.

Доказательство. Для всяких $\varepsilon > 0$ число $(\sup f - \varepsilon)$ не является верхней гранью значений f на множестве D^-. Следовательно, существует $x_0 \in D^-$:

$$f(x_0) > \sup f - \varepsilon.$$

Из–за монотонности f для всяких $x \in (x_0, a) \cap D$ верно, что $f(x) \geq f(x_0)$. Следовательно,

$$f(x) > \sup_{D^-} f - \varepsilon, \quad f(x) \leq \sup_{D^-} f$$

для всяких $x \in (x_0, a) \cap D$ $(\delta = a - x_0)$.

□

Замечание 17. Аналогично доказываются следующие:

1) если f не убывает на D, ограничена снизу и a — предельная точка D^+, то

$$\lim_{x\to a+} f = \inf_{D^+} f.$$

2) если f не возрастает на D и ограничена снизу, и a — предельная точка D^-, то

$$\lim_{x\to a-} f = \inf_{D^-} f.$$

Следствие 10. *Если f — монотонная функция на интервале (α, β), то в каждой точке интервала существуют пределы f слева и справа.*

Лекция 16

Критерий Коши

Теорема 45 (Критерий Коши)**.** *Пусть $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, a — предельная точка D, тогда существует конечный предел $f(x)$ при $x \longrightarrow a \Longleftrightarrow$ выполнено условие Коши:*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \Delta > 0 : \;\; \forall x_1, x_2 \in D \;\; 0 < |x_1 - a| < \Delta \text{ и } 0 < |x_2 - a| < \Delta \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 0 < |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Пример 48. Не существует конечного предела $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$: $\exists x_1, x_2 \in U'_\Delta(0)$

$$|\sin \frac{1}{x_1} - \sin \frac{1}{x_2}| = 1.$$

Доказательство. $\boxed{\Longrightarrow}$ пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, тогда $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \Delta > 0$: $0 < |x - a| < \Delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

Пусть $x_1, x_2 \in U'_\Delta(a)$. Тогда $|f(x_1) - b| < \varepsilon$ и $|f(x_2) - b| < \varepsilon$.

Следовательно,

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - f(x_2) - b + b| \leq |f(x_1) - b| + |f(x_2) - b| < 2\varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Пусть условия Коши выполнены. Проверим определение по Гейне. Пусть $x_n \longrightarrow a$, $x_n \neq a$, $y_n \longrightarrow a$, $y_n \neq a$.

Составим новую последовательность:

$$z_n : \;\; x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \quad z_n \longrightarrow a, \; z_n = a.$$

Тогда по доказанному $f(z_n)$ сходится. $f(x_n)$ и $f(y_n)$ — подпоследовательности $\Longrightarrow$ они сходятся к тому же самому.

$\square$

Замечание 18. Следующие записи эквивалентны:

1) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

2) $\forall x_n \longrightarrow a$, $x_n \neq a$ верно, что $f(x_n) \longrightarrow +\infty$ (по Гейне)

3) $\forall M > 0 \; \exists \delta > 0$ такая, что $\forall x \in D \;\; 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow f(x) > M$.

Предел по базе

Пусть $X \neq \varnothing$.

Определение 67. Набор $\mathcal{B}$ подмножеств X называется *базой*, если

1) $\varnothing \notin \mathcal{B}$,

2) $\forall U, V \in \mathcal{B}\ \exists W \subset U \cap V,\ W \in \mathcal{B}$.

Пример 49. 1) $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{B} = \{\{n : n > N\}\}$ для условия 2:

$$\{n : n > N_1\} \cap \{n : n > N_2\} = \{n : n > \max\{N_1, N_2\}\}.$$

2) $X = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ и $\mathcal{B} = \{U'_\delta(a)\}$, $\delta > 0$

$$U'_{\delta_1}(a) \cap U'_{\delta_2}(a) = U'_{\min\{\delta_1, \delta_2\}}(a)$$

3) $X \neq \varnothing$, $a \in X$, $\mathcal{B} = \{A \subset X \mid a \in A\}$.

Определение 68 (предел по базе)**.** Пусть $X \neq \varnothing$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{B}$ — база подмножеств X. Число называется пределом f по базе $\mathcal{B}$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists U \in \mathcal{B}$: $x \in U \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$:

$$\lim_{\mathcal{B}} f = b.$$

Утверждение 27 (единственность предела по базе)**.** *Если* $\lim\limits_{\mathcal{B}} f = A$ *и* $\lim\limits_{\mathcal{B}} f = B$, *то* $A = B$.

Доказательство. По определению $\forall \varepsilon > 0\ \exists U \in \mathcal{B}\ |f(x) - b| < \varepsilon\ \forall x \in U\ \exists V \in \mathcal{B}\ |f(x) - c| < \varepsilon\ \forall x \in V$.

По определению базы: $\exists W \in \mathcal{B}$: $W \subset U \cap V$. Для всяких $x \in W$ $(W \neq \varnothing)$

$$|f(x) - b| < \varepsilon,$$
$$|f(x) - c| < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$|b - c| \leq |b - f(x)| + |f(x) - c| < 2\varepsilon,$$
$$\varepsilon = \frac{|b - c|}{2},$$

Итого, $|b - c| < |b - c|$ — противоречие. □

Определение 69 (линейность)**.** Если $\lim\limits_{\mathcal{B}} f = b$ и $\lim\limits_{\mathcal{B}} g = c$, то $\forall x \in W\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\mathcal{B}} (\alpha f + \beta g) = \alpha b + \beta c.$$

Доказательство. Для всякого $\varepsilon > 0$

$$\exists U \in \mathcal{B} : |f(x) - b| < \varepsilon \quad \forall x \in U,$$
$$\exists V \in \mathcal{B} : |g(x) - c| < \varepsilon \quad \forall x \in V.$$
$$|\alpha f(x) + \beta g(x) - (\alpha b + \beta c)| \leq |\alpha||f(x) - b| + |\beta||g(x) - c|,$$
$$\exists W \in \mathcal{B} : \quad W \subset U \cap V \quad \forall x \in W \quad |\alpha f(x) + \beta g(x) - (\alpha b + \beta c)| \leq (|\alpha| + |\beta|)\varepsilon.$$

□

Теорема 46 (монотонность). *Пусть* $\lim\limits_{\mathcal{B}} f = b$ *и* $\lim\limits_{\mathcal{B}} g = c$. *Если* $\exists U \in \mathcal{B}$: $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in U$, *то* $b \leq c$.

Доказательство. Для всяких $\varepsilon > 0$

$$\exists U_1 \in \mathcal{B} : |f(x) - b| < \varepsilon \quad \forall x \in U_1,$$
$$\exists U_2 \in \mathcal{B} : |g(x) - c| < \varepsilon \quad \forall x \in U_2.$$

По свойству базы существует $W \in \mathcal{B}$: $\mathcal{B} \subset U \cap U_1 \cap U_2$, $x \in W$

$$b - \varepsilon < f(x) \leq g(x) < c + \varepsilon \Longrightarrow,$$

Для всякого $\varepsilon > 0$ и $b < 2\varepsilon + c$ — доказано (т.к. $b \leq c$). Иначе $b > c$: положим $\varepsilon = \frac{b-c}{2}$

$$b < 2(\frac{b-c}{2}) + c = b \Longrightarrow b < b.$$

□

Непрерывные функции

Определение 70. Пусть $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ и f определена в точке $a \in D$. Функция f непрерывна в точке a по множеству D, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall x \in D$ (в том числе для $x = a$) $|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a) < \varepsilon|$.

Отличия от предела:

1) a — не обязательно предельная точка

2) x может быть равно a ($x = a$.)

Замечание 19. Если a — изолированная точка D, и f определена в a, то f непрерывна в точке a.

Теорема 47. *Следующие утверждения равносильны*

1) f *непрерывна в точке* a *по множеству* D.

2) $\forall \{x_n\} \in D$ $x_m \longrightarrow a$ *верно, что* $f(x_n) \longrightarrow g(a)$

3) a *— изолированная или предельная точка и* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Доказательство. $\boxed{1 \Longrightarrow 2}$ $x_n \longrightarrow a$

$$\underbrace{\forall \varepsilon > 0} \quad \exists \delta > 0 \quad |x - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$
$$\underbrace{\exists N : \ \forall n > N} \quad |x_n - a| < \delta \Longrightarrow \underbrace{|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon} \Longrightarrow$$
$$f(x_n) \longrightarrow f(a)$$

$\boxed{2 \Longrightarrow 3}$ Если a — изолированная точка, то все доказано. Если a — предельная точка, то в силу (2) для f выполняется определение Гейне предела $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

$\boxed{3 \Longrightarrow 1}$ Если a — изолированная точка, то f непрерывна. Если a — предельная точка D, то запишем определение предела $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ по Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Нам нужно: $|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Надо проверить для $x = a$.

$\square$

Лекция 17

Свойства непрерывных функций

Утверждение 28. *Если f и g непрерывны в точке a на множестве D, то $f+g$, fg, и, если $g \neq 0$ на D, то $\frac{f}{g}$ непрерывны в точке a по множеству D.*

Доказательство. Пусть $x_n \longrightarrow a$, тогда по условию $f(x) \longrightarrow f(a)$, $g(x) \longrightarrow g(a)$.

По свойству пределов последовательности

$$f(x_n) + g(x_n) \longrightarrow f(a) + g(a)$$

$$f(x_n)g(x_n) \longrightarrow f(a)g(a)$$

Если $g = 0$, то оно не равно нулю в точке a:

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \longrightarrow \frac{f(a)}{g(a)}.$$

□

Утверждение 29. *Пусть $f : D \longrightarrow E$, $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in D$, f — непрерывная функция в точке a на множестве D, g — непрерывная функция в точке $f(a)$ на множестве E, тогда $g(f(x))$ непрерывна.*

Доказательство. По условию $x_n \longrightarrow a \Longrightarrow f(x_n)$ (непрерывна) $\longrightarrow f(a)$, $\Longrightarrow g(f(x_n)) \longrightarrow g(f(a))$.

□

Утверждение 30. *1) Если f непрерывна в точке a на множестве D, то существует $U(a)$ и $c > 0$, что $|f(x)| \leq c \ \forall x \in U(a) \cap D$*

2) Если f непрерывна в точке a на множестве D и $f(a) > 0$, то существует $U(a)$: $\forall x \in U(a) \cap D$

$$f(x) \geq \frac{f(a)}{2} > 0.$$

Доказательство. 1) Пусть $\varepsilon = 1$, $\exists \delta > 0 \ \forall x \in D \ |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \Longrightarrow$

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a)| \leq 1 + f(a) = c, \quad x \in U_\varepsilon(a) \cap D$$

2) Пусть $\varepsilon = f(a)/2$, $\exists \delta > 0 \ \forall x \in U_\delta(a) \cap D$

$$|f(x) - f(a)| < \frac{f(a)}{2} \Longrightarrow f(x) > \frac{f(a)}{2}.$$

□

Классификация точек разрыва

Определение 71. Функция $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *разрывна* в точке $a \in D$, если f не является непрерывной в точке a.

Если функция f разрывна в точке a, то a — предельная точка D. Функция f разрывна в точке $a \iff \lim\limits_{x\to a} f(x)$ или не существует, или не равен $f(a)$.

Если в точке разрыва a $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, то такую точку называют *точкой устранимого разрыва.*

Пусть теперь известно, что a — предельная точка $D^- = (-\infty; a) \cap D$, и $D^+ = (a; +\infty) \cap D$.

Если существуют пределы при $x \longrightarrow a$ слева и справа, и эти пределы различны, то говорят, что a — точка разрыва первого рода.

Если хотя бы одного из односторонних пределов не существует или предел равен $\pm\infty$, то a называется *точкой разрыва второго рода.*

Теорема 48. *Пусть f определена на интервале (α, β) и монотонна. Тогда у f могут быть разрывы только первого рода и множество точек разрыва не более, чем счетно.*

Доказательство. 1) Пусть функция f не убывает (умножив на -1, получим, что она не возрастает). Пусть $a \in (\alpha, \beta)$. ПО теореме Вейерштрасса существует предел

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \sup_{x<a} f = A, \quad B = \inf_{x>a} f = \lim_{x\to a} f(x),$$

$$A \leq f(a) \leq B.$$

Если $A = f(a) = B$, то f непрерывна в точке a. Если a — точка разрыва, то $A < f(a)$ или $f(a) < B$ (могут и оба) $\Longrightarrow$ предел слева не равен пределу справа, в частности, $A \neq B$ и a — точка разрыва первого рода.

2) Почему множество разрывов не более, чем счетно?

Сопоставим каждой точке разрыва интервала (A, B) — он не пустой $A \neq B$. Разным точкам сопоставляются разные интервалы, т.к.:

Пусть $a < c$ — точки разрыва и (A, B) и (C, D) — соответствующие интервалы. Пусть $a < x_0 < c$

$$B \leq f(x_0) \leq C$$

Так как на прямой можно расположить не более, чем счетное количество попарно не пересекающихся интервалов, то точек разрыва не более, чем счетно.

□

Пример 50 (Примеры разрывных функций)**.**

1) функция Дирихле

$$\begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \notin Q \end{cases}$$

Эта функция всюду разрывна, так как с любой точкой прямой содержит сколь угодно много иррациональных точек.

2) Функция Римана

$$\begin{cases} \frac{1}{n}, \ x = \frac{m}{n} \\ 0, \ x \notin Q, 1, \ x = 1. \end{cases}$$

Разрывна в рациональных точках, непрерывна в иррациональных точках (нельзя приблизиться сколь угодно близко, не увеличив знаменатель дроби)

Структура множества точек разрыва

Пусть $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ограничена для E: $E \subset \mathbb{R}$.
Множество колебаний f на E, $x, y \in E$

$$\omega(f, E) = \sup |f(x) - f(y)|.$$

Утверждение 31. *На множестве* E

$$\omega(f, E) = \sup f - \inf f$$

Доказательство. 1) $f(\alpha) - f(y) \leq \sup f - \inf f \ \forall x, y \in E$; $f(y) - f(\alpha) \leq \sup f - \inf f \ \forall x, y \in E$. Следовательно,

$$|f(x) - f(y)| \leq \sup f - \inf f \quad \forall x, y \in E \Longrightarrow \omega(f, E) \leq \sup f - \inf f.$$

2) $\varepsilon > 0$ Мы знаем, что $(\sup f - \varepsilon)$ — не верхняя грань $\Longrightarrow \exists x$:

$$\sup f - \varepsilon < f(x). \tag{1}$$

Кроме того, знаем, что $(\inf f + \varepsilon)$ — не точная нижняя грань $\Longrightarrow \exists y : \inf f + \varepsilon > f(y)$.

Далее получаем, что

$$-\inf f - \varepsilon < -f(y) \tag{2}$$

Итого имеем:

$$1 + 2 = \sup f + \inf f - 2\varepsilon < f(x) - f(x) \leq \omega(f, E)$$

Получили

$$\sup f + \inf f < 2\varepsilon + \omega(f, E) \longrightarrow \omega(f, E) \text{ при } \varepsilon \longrightarrow 0.$$

$\square$

Определение 72. Пусть $a \in \mathbb{R}$. Рассмотрим отображение

$$\sigma \mapsto \omega(f, U_\sigma(a))$$

(амплитуда на $(a - \sigma; a + \sigma)$). Эта функция не убывает, $\omega(f, U_\sigma(a)) \geq 0$. Существует предел

$$\lim_{\sigma \to 0+} \omega(f, U_\sigma(a)) = \omega(f, a)$$

Называем предел $\omega(f, a)$ колебанием в точке a.

Утверждение 32. *Функция f непрерывна в точке $a \Longrightarrow \omega(f, a) = 0$.*

Доказательство. $\boxed{\Longrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists U_\sigma(a)$: $\forall x \in U_\sigma(a)\ |f(\alpha) - f(a)| < \varepsilon \Longrightarrow \omega(f, U_\sigma(a)) \leq 2\varepsilon$. Когда $\sigma \longrightarrow 0$ убывает, следовательно, $\omega(f, a) < \varepsilon \Longrightarrow \omega(f, a) = 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Равенство $\omega(f, a) = 0$ означает, что $\lim\limits_{\sigma \to 0+} \omega(f, U_\sigma(a)) = 0$. Следовательно, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \sigma > 0\ \omega(f, U_\sigma(a)) < \varepsilon \Longrightarrow$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \forall x \in U_\sigma(a),$$

что и требовалось доказать.

$\square$

Следствие 11. *Множество точек разрыва — это*

$$\bigcup_n \{a : \omega(f, a) \geq \frac{1}{n}\}$$

Утверждение 33. *Множество $\{a : \omega(f, a) \geq \frac{1}{n}\}$ замкнуто.*

Лекция 18

Напоминание прошлой лекции

Утверждение 34. *Множество* $\{a : \omega(f,a) \geq \frac{1}{n}\}$ *замкнуто.*

Доказательство. Покажем, что дополнение открыто. Пусть

$$B \in \mathbb{R} \setminus \{a : \omega(f,a) \geq \frac{1}{n}\} = \{a : \omega(f,a) \leq \frac{1}{n}\}.$$

$$\omega(f,b) < \frac{1}{n} = \lim_{\delta\to a+} \omega(f, U_\delta(b)) < \frac{1}{n}.$$

$$\exists \delta : \omega(f, U_\delta(b)) < \frac{1}{n}.$$

Рассмотрим $U_\gamma(c) \subset U_\delta(b)$

$$\omega(f, U_\gamma(c)) < \frac{1}{n} \Longrightarrow \lim_{\gamma\to 0+} \omega(f, U_\gamma(c)) = \omega(f,c) < \frac{1}{n}.$$

Следовательно, интервал $(b-\delta, b+\delta) \subset \mathbb{R} \setminus \{a : \omega(f,a) > \frac{1}{n}\}$

$\square$

Итак, множество точек разрыва функции — это объединение не более, чем счетного набора замкнутых множеств (верно и обратное).

Пример: множество иррациональных чисел не является множеством точек разрыва.

Непрерывность на множестве

Определение 73. Функция f *непрерывна* на множестве D, если f непрерывна в каждой точке D по множеству D.

Теорема 49 (Вейерштрасс (1))**.** *Если f непрерывна на компакте K, то f ограничена на K, т.е. $\exists c > 0$: $|f(x)| \leq c \; \forall x \in K$.*

Доказательство. Докажем теорему двумя способами.

(1) Предположим противное, т.е. $\forall n \; \exists x_n \in K$: $|f(x_n)| > n$ (верно для любого c, т.е. можно взять, например, натуральные)

Так как K — компакт, то $\exists x_{n_k} \colon x_{n_k} \longleftarrow x_0 \in K$. Из–за непрерывности $f(x_{n_k}) \longleftarrow f(x_0)$. Но $|f(x_{n_k})| > n_k \longrightarrow \infty$. С одной стороны последовательность сходится, с другой стороны она не ограничена — противоречие.

(2) Для всякого $a \in K$ функция f непрерывна в точке $a \Longrightarrow \exists C_a > 0$ и $U(a)$:

$$|f(x)| \leq C_a, \quad \forall x \in U(a)$$

Множество K лежит в объединении отрытых $K \subset \bigcup_{a \in K} U(a)$. Так как K — компакт, то существуют $U(a_1), \ldots, U(a_n)$:

$$K \subset U(a_1) \cup \ldots \cup U(a_n).$$

Положим $c = \max\{C_{a_1}, \ldots, C_{a_n}\}$. Тогда $|f(x)| \le C\ \forall x \in K$.

□

Пример 51 (когда нельзя отказаться от компактности)**.** Пример — функция

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ на } (0; 1).$$

Пример 52 (когда нельзя отказаться от непрерывности)**.** Пример — функция

$$f(x) = \frac{1}{x},\ \ f(0) = 0 \text{ на } [0; 1].$$

Теорема 50 (Вейерштрасс (2))**.** *Если f непрерывна на компакте K, то существует последовательность x_m, $x_m \in K$: $f(x_m) = \inf f(x)$, $f(x_M) = \sup f(x)$.*

Доказательство. Докажем двумя способами.

(1) Для всяких n $\inf\limits_{x \in K} f(x) + \frac{1}{n}$ — не нижняя грань. Существует последовательность $x_n \in K$:

$$f(x_n) < \inf_{x \in K} f(x) + \frac{1}{n}.$$

Так как K — компакт, то существует $x_{n_k} \longrightarrow x_0 \in K$.

$$\inf_{x \in K} f(x) \le f(x_{n_k}) < \inf f(x) + \frac{1}{n_k}.$$

Итак, $f(x_0) = \inf\limits_{K} f(x)$.

(2) Предположим противное. Для всяких $x \in K$ $f(x) > \inf f(x)$ (ни в какой точке нет равенства).

$$g(x): \quad g(x) = \frac{1}{f(x) - \inf f(x)}.$$

Знаменатель — непрерывная функция, не обращающаяся в ноль. Тогда $g(x)$ — непрерывная функция на K. Значит $g(x)$ ограничена: $\exists c > 0$: $g(x) < c\ \forall x \in K$.

$$\frac{1}{f(x) - \inf f(x)} < c$$

$$\frac{1}{c} < f(x) - \inf f(x)$$

$$f(x) > \inf f(x) + \frac{1}{c}, \quad \forall x \in K.$$

— противоречие.

□

Теорема Коши о промежуточном значении

Теорема 51 (Коши о промежуточном значении)**.** *Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $f(a)f(b) < 0$ (на концах значения разных знаков), то $\exists c \in [a,b]$: $f(c) = 0$.*

Доказательство. Будем доказывать двумя способами.

1) Делим отрезок $[a,b]$ пополам.

   Если $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, то $c = \frac{a+b}{2}$. Если $f(\frac{a+b}{2}) \neq 0$, то

$$\left[\begin{array}{l} f(\frac{a+b}{2})f(a) < 0, \\ f(\frac{a+b}{2})f(b) < 0. \end{array}\right.$$

   Пусть $[a_1, b_1]$ — та половина, на концах которой разные знаки.

$$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$$

   Повторяем рассуждения для $[a_1, b_1]$. Либо $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = 0$ и $c = \frac{a_1+b_1}{2}$, либо $\neq 0$ и так далее. Пусть $[a_n; b_n]$ — та комбинация $[a,b]$, на концах которой разные знаки и т.д.

   Итак, либо на некотором шаге найдется точка c, либо построена система вложенных отрезков

$$[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \ldots \supset [a_n; b_n] \supset \ldots,$$

   такая, что

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \longrightarrow 0, \quad f(a_n)f(b_n) < 0.$$

   По теореме о вложенных отрезках существует c: $c \in \bigcap\limits_n [a_n; b_n]$

$$|c - a_n| \leq \frac{b-a}{2^n}, \quad |c - b_n| \leq \frac{b-a}{2^n} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow a_n \longrightarrow c \text{ и } b_n \longrightarrow c.$$

   Так как f непрерывна, то $f(a_n) \longrightarrow f(c)$ и $f(b_n) \longrightarrow f(c) \Longrightarrow$

$$f^2(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)f(b_n) \leq 0 \Longrightarrow f(c) = 0.$$

2) Пусть $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Будем доказывать от противного. Пусть $f(x) \neq 0$ на $[a,b]$.

$$F^- = \{x \in [a,b] : \; f(x) \leq 0\}.$$

$$F^+ = \{x \in [a,b] : F(x) \geq 0\}$$

1) $F^- \cap F^+ = \varnothing$, $F^- \cup F^+ = [a, b]$.
2) $F^- \ni a$, $F^+ \ni b$, т.е. эти множества непустые
3) F^- и F^+ замкнуты.

Пусть $x_n \in F^-$ и $x_n \longrightarrow x_0$ и $f(x_n) \leq 0$. Из–за непрерывности

$$f(x_n) \longrightarrow f(x_0) \Longrightarrow f(x_0) \leq 0 \text{ и } x_0 \in F$$

$$\mathbb{R} = ((-\infty; a] \cup F^-) \bigcup (F^+ \cup [b; +\infty))$$

Множества не пересекаются, что невозможно.

□

Следствие 12. *Пусть f непрерывна на $[a, b]$ и $A = f(a)$, $B = f(b)$. Тогда для всяких C между A и B $\exists c \in [a, b]$ $f(c) = C$.*

Доказательство. Пусть $g(x)$: $g(x) = f(x) - C$. Если $C \neq A$, $C \neq B$, то $g(a)g(b) = (A - C)(B - C) \neq 0$. Существует $c \in [a, b]$: $g(c) = 0 \Longleftrightarrow f(c) = C$.

□

Пример 53. Рассмотрим уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Существует корень $\in \mathbb{R}$.

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = x^3 \left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}\right).$$

При больших x то, что стоит в скобках $> \frac{1}{2}$. Значит знак определяется по x^3. Значит, если рассмотреть отрезок $[-C; C]$ так, что $f(-C) < 0$ и $f(C) > 0$, то корень лежит в этом отрезке.

Лекция 19

Промежутки

Определение 74. Множество $I \subset \mathbb{R}$ называется *промежутком*, если $x_1, x_2 \in I \Longrightarrow [x_1, x_2] \subset I$.

Примеры: $\mathbb{R}$, $\varnothing$, отрезок, точка.

Утверждение 35. *Если I — промежуток, то I — это или интервал, или отрезок, или полуинтервал. (допускаются бесконечные концы).*

Доказательство. Пусть $I \neq \varnothing$ и ограничено. По принципу полноты Вейерштрасса существует $B = \sup I$ и $A = \inf I$. Тогда очевидно, что $I \supset [A, B]$. Покажем, что интервал с концами A и B лежит в I ($(A, B) \subset I$).

Пусть $x \in (A, B)$ (если $(A, B) = \varnothing \Longrightarrow I = \{A\}$), $A < x < B$. Так как $x > A$, то x — не нижняя грань $I \Longrightarrow \exists x_1 \in I$: $x_1 < x$. Так как $x < B$, то x — не верхняя грань $\Longrightarrow x_2 > x \in I$.

Итак, $x \in [x_1, x_2] \subset I \Longrightarrow x \in I \Longrightarrow (A, B) \subset I$.

□

Следствие 13 (из теоремы о промежуточном значении)**.** *Если $I \neq \varnothing$ и $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, то $f(I) = \{y \mid \exists x \in I \ f(x) = y\}$ является промежутком.*

Доказательство. Если I — точка, то все очевидно.

Пусть в I содержит более одной точки. Надо проверить, что для всяких $y_1, y_2 \in f(I)$ верно, что $[y_1; y_2] \subset f(I)$.

Пусть $x_1 \in I$: $f(x_1) = y_1$, $x_2 \in I$: $f(x_2) = y_2$. Если $x_1 = x_2$ и, следовательно, $y_1 = y_2$, то все доказано.

Пусть $x_1 < x_2$, $[x_1; x_2] \subset I$, f — непрерывная функция на $[x_1; x_2]$. Для всяких y между y_1 и y_2 существует $x \in [x_1; x_2]$: $y = f(x) \Longrightarrow [y_1; y_2] \subset f(I)$.

□

Замечание 20. Обратное неверно. Если $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ всякий промежуток отображает в промежуток, то это не означает, что f непрерывна.

Пример 54 (к замечанию)**.** Обратное неверно:

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Теорема о непрерывности

Теорема 52. *Если функция f монотонна на промежутке $I \neq \varnothing$ и $f(I)$ — промежуток, то f непрерывна на I.*

Доказательство. Пусть f не убывает.

Допустим, что нижняя грань не равна нулю. Следовательно, в $f(I)$ нет $(A; f(x_0))$. Пусть x_0 — внутренняя точка I. Тогда

$$\exists \lim_{x \to x_0 -} f(x) = \sup_{x < x_0} f = A.$$

$$\exists \lim_{x\to x_0+} f(x) = \inf_{x>x_0} f = B.$$

Если x_0 — точка разрыва f, то хотя бы одно из неравенств $A < f(x_0)$ или $f(x_0) < B$ верно.

Пусть $A < f(x_0)$. Тогда $\forall x < x_0$ $f(x) \le A$ и $\forall x \ge x_0$ $f(x) \ge f(x_0)$.

$$(A, f(x_0)) \cap f(I) = \varnothing$$

С другой стороны, $\forall x_1 < x_0$ $[f(x_1), f(x_0)] \subset f(I)$ и $(A, f(x_0)) \subset [f(x_1), f(x_0)]$. Так как $f(x_1) \le A$, то получаем противоречие.

□

Теорема об обратной функции

Теорема 53 (об обратной функции)**.** *Пусть $I \ne \varnothing$ — промежуток. Функция $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная, строго монотонная. Тогда*

1) $f(I) = J$.

2) $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ — биекция

3) $f^{-1} : J \longrightarrow I$ — строго монотонная (имеет такую же монотонность, как и f) и непрерывная.

Доказательство. Достаточно поверить, что f^{-1} строго монотонна.

Пусть f возрастает и $y_1 < y_2$.

$$x_1 = f^{-1}(y_1) \vee f^{-1}(y_2) = x_2,$$
$$x_1 \ne x_2,$$
$$x_1 > x_2 \Longrightarrow f(x_2) < f(x_1) \text{ — противоречие},$$
$$\Longrightarrow f(x_2) < f(x_1), \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow,$$
$$f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$

Следовательно, f^{-1} возрастает.

□

Примеры применения теоремы об обратной функции

Пример 55. 1) $y = x^{2n+1}$, область определения — $\mathbb{R}$.

Функция непрерывная $\Longrightarrow$ ее область значений — промежуток. Он не ограничен сверху и не ограничен снизу.

$$m^{2n+1} \longrightarrow +\infty;$$
$$(-m)^{2n+1} \longrightarrow -\infty,$$

следовательно, область значений — $\mathbb{R}$. Эта функция строго возрастает, а значит по теореме об обратной функции существует $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная и возрастает.

$$f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{2n+1}} = \sqrt[2n+1]{y}$$

2) $y = x^{2n}$, область определения — $\mathbb{R}$.

Функция непрерывная $\Longrightarrow$ ее область значений — промежуток. Он не ограничен сверху и не ограничен снизу.

$$(\pm m)^{2n} \longrightarrow +\infty,$$

следовательно, область значений $[0; +\infty)$. Эта функция возрастает на $(0; +\infty)$ и отображает его на $[0; +\infty)$. Следовательно, по теореме об обратной функции существует $f^{-1} : [0; +\infty) \longrightarrow [0; +\infty)$ — непрерывная и возрастает.

$$f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{2n}} = \sqrt[2n]{y}$$

3) Построим $y = a^x$.

Пусть $1 < a$.

$$a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n},$$
$$a^0 = 1,$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n},$$
$$a^{\frac{p}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^p.$$

Функция $y = a^x$ на $\mathbb{Q}$: $a^0 = 1$,

$$a^{x+y} = a^x a^y,$$
$$x < y \Longrightarrow a^x < a^y,$$
$$a^N \longrightarrow +\infty; \quad a^{-n} \longrightarrow 0$$

Как определить a^x для $x \notin \mathbb{Q}$? Идея: рассматривать $r_n \in \mathbb{Q}$, $r_n \longrightarrow x$.

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}, \quad r_n \longrightarrow r \in \mathbb{Q} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow a^r = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}.$$

Утверждение о приближении функции

Утверждение 36. *Предположим, что функция f определена на $\mathbb{Q} \cap [a, b]$ и удовлетворяет условию $|f(x) - f(y)| \le c|x - y|$ $\forall x, y \in \mathbb{Q} \cap [a, b]$. Тогда существует единственная непрерывная на $[a, b]$ функция $\widetilde{f}$:*

$$f = \widetilde{f} \text{ на } \mathbb{Q} \cap [a, b].$$

Доказательство. Пусть $r_n \longrightarrow r$, $r_n \in \mathbb{Q}$, $\widetilde{f} = \lim_{n\to\infty} f(r_n)$. Рассмотрим r_n и r_m:

$$|f(r_n) - f(r_m)| \le c|r_n - r_m|$$

Последовательность r_n сходится $\Longrightarrow$ она фундаментальна.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N$: $\forall m, n > N\ |r_n - r_m| < \varepsilon \Longrightarrow |f(r_n) - f(r_m)| \le c\varepsilon$. Следовательно, последовательность $f(r_n)$ фундаментальная $\Longrightarrow$ существует $\lim\limits_{c\to\infty} f(r_n)$.

Пусть $r_n \longrightarrow x$ и $s_n \longrightarrow x$

$$|f(r_n) - f(s_n)| \le c|r_n - s_n| \longrightarrow 0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{c\to\infty} f(r_n) = \lim\limits_{c\to\infty} f(s_n)$.

Если $x \in \mathbb{Q}$, то $s_n = x$, $\lim\limits_{c\to\infty} f(r_n) = f(x)$.

$$f = \widetilde{f} \text{ на } \mathbb{Q}.$$

Пусть $r_n \longrightarrow x$, $s_n \longrightarrow y$

$$|f(r_n) - f(s_n) \le c|r_n - s_n|,$$
$$|\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(y)| \le c|x - y|,$$

следовательно, $\widetilde{f}$ непрерывна.

Осталось показать, что такая $\widetilde{f}$ единственная.

Пусть $\widetilde{f_1}$ и $\widetilde{f_2}$ — непрерывные функции, такие что

$$\widetilde{f_1} = f = \widetilde{f_2} text \mathbb{Q} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ по непрерывности $\widetilde{f_1} = \widetilde{f_2}$.

□

Утверждение об оценке показательной функции

Утверждение 37. *Для всякого отрезка* $[-N; N]$ *существует константа* $C(N) > 0$*, что*

$$|a^x - a^y| \le C(N)|x - y|, \quad \forall x, y \in [-N; N] \cap \mathbb{Q}.$$

Доказательство. 1) Как можно приблизить значения?

$$1 < a^{\frac{1}{n}} = (1 + a - 1)^{\frac{1}{n}} \le 1 + \frac{a-1}{n}$$

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 \le \frac{a-1}{n}.$$

Пусть $1 < x \le 1$, $x \in \mathbb{Q}$. Тогда

$$\frac{1}{n+1} < x \le \frac{1}{n}$$

$$a^x - 1 \le a^{\frac{1}{n}} - 1 \le \frac{a-1}{n} = \frac{(a-1)(n+1)}{n}\frac{1}{n+1} \le 2(a-1)x.$$

Итак, для всяких $x \in [0; 1] \cap \mathbb{Q}$ имеем

$$a^x - 1 \le 2(a-1)x$$

2) Теперь рассмотрим произвольные $x, y \in [-N; N] \cap \mathbb{Q}$ и $x < y$

$$|a^x - a^y| = a^y(a^{x-y} - 1) \le a^N(a^{x-y} - 1) \le *.$$

- при $0 < x - y \le 1$
$$* \le a^N 2(a-1)(x-y)$$

- $x - y > 1$
$$* \le a^{2N}(x-y)$$

В качестве $C(N) = \max\{a^N 2(a-1); a^{2N}\}$. Тем самым утверждение доказано.

$\square$

Лекция 20

Построение показательной функции

Утверждение 38. *Для всякого $a > 1$ существует непрерывная функция $f(x)$ на $\mathbb{R}$:*

$$f(x) = a^x \text{ при } x \in \mathbb{Q}$$

Доказательство. Рассмотрим отрезок $[-N; N]$. По утверждению 2 существует единственная функция f_N: $f_N(x)$ непрерывна на $[-N; N]$ и $f_N(x) = a^x$.

Пусть $N < M$. Тогда на $[-N; N]$ — функция f_N, на отрезке $[-M; M]$ — функция f_M. Кроме того, $[-N; N] \subset [-M; M]$. Имеем: на отрезке $[-N; N]$

$$f_N = f_M.$$

(из–за единственности).

Искомая функция:

$$f(x) = f_N(x) \text{ при } x \in [-N; N].$$

□

Пусть $a^x = f(x)$ для всяких $x \in \mathbb{R}$. Надо проверить, что

$$a^{x+y} = a^x a^y,$$

и что a^x возрастает и больше нуля.

Рассмотрим $x, y \in \mathbb{R}$. Имеем $r_n \longrightarrow x$, $s_n \longrightarrow y$, $r_n, s_n \in \mathbb{Q}$.

По непрерывности $a^{r_n} \longrightarrow a^x$, $a^{s_n} \longrightarrow a^y$.

Переходим к пределу от

$$a^{r_n} a^{s_n} = a^{r_n + s_n}$$

к

$$a^x a^y = a^{x+y}.$$

Почему a^x возрастает? Пусть $x < y$. Возьмем сходящиеся последовательности $r_n \longrightarrow x$, $s_n \longrightarrow y$ так, что

$$r_n \leq x \leq r < q \leq y \leq s_n$$

$$a^{r_n} \leq a^r < a^Q \leq a^{s_n}$$

Переходим к пределу:

$$a^x \leq a^r < a^q \leq a^y.$$

Область определения a^x — $\mathbb{R}$. Область значений — $(0; \infty)$. Функция строго возрастает и непрерывна. Значит, по теореме об обратной функции существует

$$f^{-1} : (0; \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

— непрерывна и возрастает.

$$f^{-1}(y) = \log_a y.$$

При $0 < a < 1$

$$a^x = \frac{1}{a^x}, \quad \log_a y = -\log_{1/a} y.$$

Равномерная непрерывность

Определение 75. Функция $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *равномерно непрерывна* на множестве D, если

$$\forall \varepsilon \ \exists \delta > 0 : \quad \forall x, y \in D \ \ |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Функция f непрерывна на $D \Longleftrightarrow \forall x \in D$ f непрерывна в точке x. В определении непрерывности δ зависит от ε и x, в отличие от определения равномерной непрерывности, где δ зависит только от ε.

Пример 56. Функция $f(x) = x$ равномерно непрерывна: $|f(x) - f(y)| = |x - y|$.

Функция $f(x) = x^2$ не является равномерно непрерывной.

$$|f(x) - f(y)| = |x - y||x + y|.$$

Теорема 54 (Кантора)**.** *Если f непрерывна на компакте K, то она равномерно непрерывна на K.*

Доказательство. Докажем теорему двумя способами.

1) Докажем от противного.

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \ \exists x, y \in K : |x - y| < \delta \text{ и } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Положим $\delta = \frac{1}{n}$, $x_n, y_n \in K$, $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ и $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. Так как K — компакт, то $\exists x_{n_k} \longrightarrow x_0 \in K$.

$$|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \Longrightarrow y_{n_k} \longrightarrow x_0.$$

Из–за непрерывности $f(x_{n_k}) \longrightarrow f(x_0)$ и $f(y_{n_k}) \longrightarrow f(x_0)$.

$$0 < \varepsilon \geq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \longrightarrow 0$$

— противоречие.

2) Для всяких $x \in K$ $\exists U_{\delta(x)}(x)$: $\omega(f, U_{\delta(x)}(x)) < \varepsilon$, т.е. $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Для всяких $x_1, x_2 \in U_{\delta(x)}(x)$ функция f непрерывна в точке x. Окрестности $U_{\delta(x)}(x)$ покрывают K, когда $x \in K$. Следовательно, существует покрытие K

$$U_{\frac{\delta(x_1)}{2}}(x_1), \ldots, U_{\frac{\delta(x_n)}{2}}(x_n).$$

$$\delta = \min\{\frac{\delta(x_1)}{2}, \ldots, \frac{\delta(x_N)}{2}$$

Пусть $|x - y| < \delta$. Существует $U_{\frac{\delta(x_k)}{2}}(x_k) \ni x$, $\delta \leq \frac{\delta(x_k)}{2}$, $x, y \in U_{\delta(x_k)}(x_k) \Longrightarrow$ $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

$\square$

Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Запишем условия непрерывности в терминах колебаний.

Непрерывность:

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \lim_{\delta \to 0+} \omega(f, U_\delta(a)) = 0.$$

Равномерная непрерывность:

$$\lim_{\delta \to 0+} \sup \omega(f, U_\delta(a)) = 0.$$

Равномерная сходимость

Пусть задана последовательность функций f_n.

Определение 76. Последовательность f_n сходится поточечно на D, если $\forall x$

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x).$$

Определение 77. Последовательность f_n сходится к f равномерно на D, если

$$\lim_{n \to \infty} \sup_D |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Поточечная сходимость:

$$\forall x \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N : \;\; \forall n > N \;\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Равномерная сходимость:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N : \;\; \forall n > N \;\; \forall x \;\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Теорема 55. *Пусть f_n непрерывны на $\mathbb{R}$ и $\forall x \in \mathbb{R}$ $f_n(x) \longrightarrow f(x)$. Тогда $\exists x_0 \in \mathbb{R}$: f непрерывна в точке x_0*

Лекция 21

Поточечная сходимость

Теорема 56. *Пусть f_n непрерывны на $\mathbb{R}$ и $\forall x \in \mathbb{R}$ $f_n(x) \longrightarrow f(x)$. Тогда $\exists x_0 \in \mathbb{R}$: f непрерывна в точке x_0*

Доказательство. 1) Предположим противное. Тогда

$$\mathbb{R} = \bigcup \{x \mid \omega(f,x) \geq \frac{1}{k}\}.$$

По теореме Бэра существует k и (α,β):

$$(\alpha,\beta) \subset \{x \mid \omega(f,x) \geq \frac{1}{k}\}.$$

Уменьшая интервал, считаем, что $\alpha < \beta$ и

$$[\alpha,\beta] \subset \{x \mid \omega(f,x) \geq \frac{1}{k}\}.$$

2) Пусть $\varepsilon > 0$, тогда в каждой точке x существует N_x: $\forall n,m \in N_x$ $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \Longrightarrow$

$$[\alpha,\beta] = \bigcup_N \bigcap_{m.n>N} \{x \in [\alpha,\beta] \mid |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon\}$$

Множество $\{x \in [\alpha,\beta] \mid |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon\}$ замкнуто (n и m фиксированы). Действительно, пусть x_k принадлежат этому множеству $x_k \longrightarrow x_0$

$$|f_n(x_k) - f_m(x_k)| \leq \varepsilon,$$
$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \varepsilon,$$

следовательно, x_0 принадлежит этому множеству. Следовательно, множество

$$\bigcap_{m.n>N} \{x \in [\alpha,\beta] \mid |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon\}$$

замкнуто.

3) По теореме Бэра существует N и интервал

$$(\alpha_1,\beta_1) \subset \bigcap_{m.n>N} \{x \in [\alpha,\beta] \mid |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon\}.$$

На этом интервале (α_1,β_1) имеем

$$\forall x \in (\alpha_1,\beta_1) \quad \omega(f,x) \geq \frac{1}{k},$$
$$\forall x \ \forall n,m > N \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

Фиксируем n, а m стремим к $+\infty$. Получаем

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

4) Положим $\varepsilon = \frac{1}{10k}$, где 10 было выбрано произвольным образом.

$$|f_n(x)-f_n(y)| \geq |f(x)-f(y)|-|f_n(x)-f(x)|-|f_n(y)-f(y)| \geq |f(x)-f(y)|-\frac{1}{5k},$$

$$\forall x, y \in (\alpha_1, \beta_1).$$

$$x_0 \in (\alpha_1, \beta_1) \quad \omega(f_n, U_\delta(x_0)) \geq omega(f, U_\delta(x_0)) - \frac{1}{5k}.$$

$$\sup |f_n(x) - f_n(y)| \geq |f(x) - f(y)| - \frac{1}{5x}.$$

$$\forall x, y \in U_\delta(x_0) \;\; |f(x) - f(y)| \leq \omega(f_n, U_\delta(x_0)) + \frac{1}{5k} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \omega(f, U_\delta(x_0)) \leq \omega(f_n, U_\delta(x_0)) + \frac{1}{5k}.$$

$\delta \longrightarrow 0$

$$0 \geq \omega(f, x_0) - \frac{1}{5k} \geq \frac{1}{k} - \frac{1}{5k} > 0$$

— противоречие.

□

Следствие 14. *Множество точек непрерывной функции f всюду плотно, т.е. во всяком интервале есть точка непрерывности.*

Доказательство. Пусть есть отображения g, g^{-1}:

$$(\alpha; \beta) \longleftrightarrow \mathbb{R}.$$

Например, такой функцией является $\arctan x$ и $\operatorname{tg} x$.

Рассмотрим функции $f_n(x)$ и $f(x)$. Введем новые функции

$$\widetilde{f}_n(y) = f_n(g(y)), \quad \widetilde{f}(y) = f(g(y)).$$

Эти функции действуют на всей числовой прямой. По теореме существует $y_0 \in \mathbb{R}$: $f(g(y_0))$ — непрерывна в точке y_0, где $x_0 = g(y_0)$.

$$f(x) = f(g(g^{-1}(x))).$$

Композиция непрерывных непрерывна $\Longrightarrow$ $f(x)$ непрерывна в данной точке.

□

Теорема 57. *Пусть $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in D$ — точка непрерывности f_n $\forall n$ и f_n сходится к f равномерно на D. Тогда f непрерывна в точке a.*

Доказательство. Будем доказывать с помощью так называемого «метода 3-х ε».

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)|.$$

Для всяких $\varepsilon > 0$ $\exists N$ $\forall n > N$ $\forall x \in D$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ (из равномерной сходимости). Фиксируем $n > N$. Так как f_n непрерывна в точке a, то существует $\delta > 0$: $\forall x \in D$ $|x - a| < \delta \Longrightarrow |f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < 3\varepsilon$.

□

Дифференциальное исчисление

Пусть функция f определена в окрестности точки a.

Определение 78. Функция f дифференцируема в точке a, если

$$f(a+h) - f(a) = Ah + \alpha(h)h,$$

где A — число, $\alpha(h)$ — функция, определенная в проколотой окрестности, $h = 0$, и

$$\lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0.$$

$f(a+h) - f(a)$ — приращение функции.

h — произвольное число из некоторой проколотой окрестности точки 0 — приращение аргумента.

Линейная функция $h \mapsto Ah$ (как $y = kx$) называется дифференциалом функции f и обозначается $df(a,h)$ или $df(h)$.

Пример 57. Рассмотрим функцию $f(x) = x$.

$$f(a+h) - f(a) = a + h - a = h = 1 \cdot h + 0 \cdot h, \quad df(h) = h.$$

У линейной функции дифференциал — это она сама.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2$.

$$(a+h)^2 - a^2 = a^2 + 2ah + h^2 - a^2 = h^2 + 2ah = 2a \cdot h + h \cdot h.$$

$$df(h) = 2ah$$

— дифференциал зависит от точки a.

Единственность дифференциала

Утверждение 39. *Дифференциал функции определен однозначно.*

$$f(a+h) - f(a) = A_1 h + \alpha_1(h)h,$$
$$f(a+h) - f(a) = A_2 h + \alpha_2(h)h$$

$\Longrightarrow A_1 = A_2$

Доказательство.

$$(A_1 - A_2)h + (\alpha_1(h) - \alpha_2(h))h = 0.$$

Так как $h \neq 0$, делим на h

$$A_1 - A_2 = \alpha_2(h) - \alpha_1(h) \longrightarrow 0.$$

Следовательно, $A_1 = A_2$.

□

Утверждение 40. *Функция f дифференцируема в точке $a \iff$ существует конечный предел*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Этот предел называется производной в точке a и обозначается $f'(a)$ и $\frac{df}{dx}(a)$. Кроме того,

$$df(a,h)=f'(a)h.$$

Доказательство. $\boxed{\Longrightarrow}$ $f(a+h)-f(a)=Ah+\alpha(h)h$ — это верно для h из некоторой проколотой окрестности нуля. Делим это равенство на h:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=A+\alpha(h)\longrightarrow A.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Пусть существует предел

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Обозначим его A. Положим

$$\alpha(h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-A.$$

$$\lim_{h\to 0}\alpha(h)=0.$$

Умножаем на h:

$$f(a+h)-f(a)=Ah+\alpha(h)h.$$

□

Геометрический смысл

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\alpha(h)h.$$
$$x=a+h,$$
$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\alpha(x-a)(x-a),$$
$$f(x)\sim f(a)+f'(a)(x-a).$$

Итого: $y=f(a)+f'(a)(x-a)$ — прямая.

Определение 79. Прямая $y=f(a)+f'(a)(x-a)$ — касательная к графику $y=f(x)$ в точке $(a;f(a))$.

Пример 58.

$$y=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=0.$$

Следовательно, касательная в точке $(0;0)$ — $y=0$.

Утверждение 41. Касательная — *это предельное положение секущей, т.е.*

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Наклон касательной:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \longrightarrow f'(a).$$

Лекция 22

Связь непрерывности и дифференцируемости

Утверждение 42. *Если f дифференцируема в точке a, то f непрерывна в точке a.*

Доказательство. По определению дифференцируемости

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + \alpha(h)h \longrightarrow 0.$$

Следовательно, при замене $x = a + h$

$$\lim_{a \to a} f(x) = f(a).$$

То есть f — непрерывная функция.

□

Пример 59. Рассмотрим функцию $f(x) = |x|$, $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

предела нет. Эта функция не дифференцируема в точке 0.

Пример Вейерштрасса

Теорема 58 (пример Вейерштрасса)**.** *Функция*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \sin(8^n x)$$

непрерывна на $\mathbb{R}$, но нигде не дифференцируема.

Доказательство. 1) Проверим непрерывность

$$S_n = \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} \sin(8^n x)$$

$$|f(x) - S_N(x)| = |\sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} \sin(8^n x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n}$$

$$\sup_x |f(x) - S_N(x)| \leq 2^{-N} \longrightarrow 0.$$

$$\frac{b_1}{1-q} \longrightarrow \frac{2^{-N-1}}{1/2} = 2^{-N}$$

Итак, S_N — непрерывная функция, и она равномерно сходится к f. Следовательно, f — непрерывная функция.

2) Проверим, что функция нигде не дифференцируема.

Пусть x фиксировано.

$$f(x \pm 2^{-3N-1}\pi) - f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(\sin(8^n(x \pm \frac{\pi}{2\cdot 8^N})) - \sin(8^n x)) =$$
$$= \sum_{n=1}^{N} 2^{-n}(\sin(8^n(x \pm \frac{\pi}{2\cdot 8^N})) - \sin(8^n x)).$$

$$\frac{f(x \pm 2^{-3N-1}\pi) - f(x)}{\pm 2^{-3N-1}\pi} = \frac{\sum\limits_{n=1}^{N} 2^{-n}(\sin(8^n(x \pm \frac{\pi}{2\cdot 8^N})) - \sin(8^n x))}{\pm 2^{-3N-1}\pi}.$$

Оценим последнее слагаемое

$$2^{-N}|\sin(8^n(x \pm \frac{\pi}{2\cdot 8^N})) - \sin(8^n x)| = 2^N \cdot 2|\sin\frac{\pi}{4}||\cos(8^N x \pm \frac{\pi}{4})| \geq 2^{-N}.$$

Добавляя или вычитая $\frac{\pi}{4}$ можно «загнать» точку внутрь лучей правее $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и левее $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Оценим остальные слагаемые сверху.

$$|\sum_{n=1}^{N-1} 2^{-n}(\sin(8^n(x \pm \frac{\pi}{2\cdot 8^N})) - \sin(8^n x))| \leq \sum_{n=1}^{N-1} 2^{-n}2|\sin(\frac{8^n\pi}{48^N})| \cdot 1 \leq$$
$$\leq \sum_{n=1}^{N-1} 2^{-n}2\frac{8^n\pi}{48^N}) = \frac{\pi}{2\cdot 8^N}\sum_{n=1}^{N-1} 4^n =$$
$$= \frac{\pi}{2\cdot 8^N}\frac{4(4^{N-1}-1)}{4-1} \leq \frac{\pi 4^N}{2\cdot 8^N \cdot 3} = \frac{\pi}{6}\cdot 2^{-N}.$$

Следовательно, первые слагаемые (сумма) не больше, чем последнее.

Итак,

$$\left|\frac{f(x \pm 2^{-3N-1}\pi) - f(x)}{\pm 2^{-3N-1}\pi}\right| \geq \frac{2^{-N} - 2^{-N}\frac{\pi}{6}}{\pm 2^{-3N-1}} = \frac{(1-\frac{\pi}{6})}{\pi}\cdot 2^{2N+1} \longrightarrow \infty.$$

$\square$

Правила дифференцирования

Утверждение 43. *Если f и g дифференцируемы в точке a, то $f+g$ дифференцируема в точке a.*

$$\boxed{(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)}$$

$$d(f+g) = df + dg.$$

Доказательство. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)+g(x)-(f(a)+g(a))}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim\limits_{x\to}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = f'(a)+g'(a)$ □

Утверждение 44. *Если f и g дифференцируемы в точке a, то fg дифференцируема в точке a.*

$$\boxed{(fg)'(a) = f'(a)g(a) + g'(a)f(a)}$$

$$d(fg) = gdf + fdg.$$

Доказательство. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-(f(a)g(a))}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(a) + + \lim\limits_{x\to}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}f(a) = f'(a)g(a) + g'(a)f(a)$. □

Утверждение 45. *Если f дифференцируема в точке a, и $f(a)\neq 0$, то $\frac{1}{f}$ дифференцируема в точке a.*

$$\boxed{(\frac{1}{f})'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}}$$

$$d(\frac{1}{f}) = -\frac{1}{f^2(a)}df.$$

Доказательство.

$$\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(a)}}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{-1}{f(x)f(a)}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\frac{1}{f^2(a)}f'(a).$$

□

Дифференцирование сложной функции

Теорема 59 (дифференцирование сложной функции)**.** *Пусть $f : U(a) \longrightarrow V(f(a))$, $g : V(f(a)) \longrightarrow \mathbb{R}$, и f и g дифференцируемы в точке a и $f(a)$ соответственно. Тогда $f(g(x)$ дифференцируема в точке a.*

$$\boxed{(g(f(x)))'(a) = g'(f(a))f'(a)}$$

Доказательство. Так как f дифференцируема, то

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + \alpha(h)h,$$

где $\lim\limits_{h\to 0}\alpha(h) = 0$.

Так как g дифференцируема в точке $f(a)$, то

$$g(a+t) - g(a) = g'(a)t + \alpha(t)t,$$

где $\lim\limits_{t\to 0}\alpha(t) = 0$.

Определим $\beta(0) = 0$ и равенство верно для каждого t из окрестности нуля, а β непрерывна в нуле.

$$t = f(a+h) - f(a).$$

$$
\begin{aligned}
&g(f(a)+f(a+h)-f(a))-g(f(a))= \\
&\qquad = g'(f(a))(f(a+h)-f(a))+\beta(f(a+h)-f(a))(f(a+h)-f(a))= \\
&\qquad\qquad = g'(f(a))f'(a)h+\underbrace{(g'(f(a))\alpha(h)+\beta(f(a+h)-f(a))(f'(a)+\alpha(h)))h}_{\to 0}.
\end{aligned}
$$

$\square$

Лекция 23

Инвариантность первого дифференциала

$$d(g \circ f)(h) = g'(f(a))f'(a)h$$

$$dg \circ f(h) = g'(f(a))df(h)$$

$$\boxed{d(g \circ f) = dg \circ df.}$$

$$\boxed{dg(f) = g'(f)df} \text{ — инвариантность I–го дифференциала}$$

В первом дифференциале можно делать замены переменных (как способ замены координат).

Инвариантность первого дифференциала

Вид дифференциала не зависит от выбора системы координат. Или в равенстве

$$dg = g'(y)dy$$

y можно считать или свободной переменной, или функцией (ответ в любом случае будет верный).

Дифференцирование f^{-1}

Пусть f непрерывна и строго монотонна на I. Тогда $f(I)$ — промежуток и определена обратная функция

$$f^{-1} : f(I) \longrightarrow I,$$

причем f^{-1} строго монотонна и непрерывна.

Утверждение 46. *Если f дифференцируема в точке $a \in I$ и $f'(a) \neq 0$, то f^{-1} дифференцируема в точке $f(a)$ и*

$$\boxed{(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}}.$$

Точка a — внутренняя точка I, $f(a)$ — внутренняя точка $f(I)$.

$$\boxed{df^{-1} = (df)^{-1}.}.$$

Доказательство.

$$\lim_{y \to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \lim_{y \to f(a)} H(f^{-1}(y)), \text{ где}$$

$$H(x) = \frac{x - a}{f(x) - f(a)}$$

$$\lim_{x \to a} H(x) = \frac{1}{f'(a)}, \quad \lim_{y \to f(a)} f^{-1}(y) = a$$

из–за непрерывности f^{-1}.

Так как f — биекция, то $f^{-1}(y) \neq a$ при $y \neq f(a)$. По теореме о пределе композиции

$$\lim_{y\to f(a)} H(f^{-1}(y)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

□

Таблица производных

1) $(\mathrm{const})' = 0$

2) $(x^n)' = nx^{n-1}$
   - $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$
   - $x \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$

Доказательство.

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x\to a}(x^{n-1} + ax^{n-2} + \ldots + a^{n-1}) = na^{n-1}.$$

□

3) $(e^x)' = e^x$.

Доказательство.

Лемма 1. • *Первый предел*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

• *Второй предел*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Доказательство леммы. • Докажем первое равенство:

$$\lim_{x\to 0}(\ln(1+x))^{1/x} = \ln e = 1$$

• Докажем второе равенство с помощью первого:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{t}{\ln(t+1)} = 1$$

$$t = e^x - 1 \longrightarrow 0, \quad x = \ln(t+1).$$

□

Применим второй предел:

$$\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{e^a(e^{x-a}-1)}{x-a}=e^a$$

□

4) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$

Доказательство.

$$x=a, y=\ln a$$
$$(\ln x)^{-1}(a)=\frac{1}{(e^y)'(f'(a)=\ln a)}=\frac{1}{a}.$$

□

Следствие 15. *$x>0$, $\alpha\in\mathbb{R}$: $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$.*

Доказательство.

$$x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$$
$$(x^\alpha)'=e^{\alpha\ln x}\cdot\frac{\alpha}{x}=x^\alpha\cdot x^{-1}\cdot\alpha=\alpha x^{\alpha-1}.$$

□

5) $(\sin x)'=\cos x$, $(\cos x)'=-\sin x$.

Доказательство.

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a}=\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}=\cos\frac{2a}{2}=\cos a$$
$$\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{-2\sin\frac{x-a}{2}\sin\frac{x+a}{2}}{x-a}=\lim_{x\to a}-\sin\frac{x+a}{2}=-\sin\frac{2a}{2}=-\sin a$$

□

6) $(\operatorname{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2x}$; $(\operatorname{ctg}x)'=-\frac{1}{\sin^2x}$.

Доказательство.

$$(\operatorname{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos x}{\cos x}+\sin x\left(\frac{\sin x}{\cos^2x}\right)=1+\operatorname{tg}^2x=\frac{1}{\cos^2x}.$$

□

7)

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}\bigg|_{y=\arcsin x}=\frac{1}{\cos(\arcsin x)}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Так как $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

8)

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

9) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$; $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.

Основные теоремы

Теорема 60 (Ферма)**.** *Пусть f определена в окрестности $U(a)$ точки a и $\forall x \in U(a)$ $f(x) \le f(a)$. Если f дифференцируема в точке a, то $f'(a) = 0$.*

Доказательство.

$$f'(a) = \lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \ge 0$$

$$f'(a) = \lim_{x\to a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le 0$$

Следовательно, $f'(a) = 0$.

Геометрический смысл: касательная в точке $(a; f(a))$ параллельна OX.

□

Теорема 61 (Ролль)**.** *Пусть f непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема на интервале $(a;b)$. Если $f(a) = f(b)$, то существует $c \in (a;b)$: $f'(c) = 0$.*

Физический смысл: если при одномерном движении точка вернулась в то положение, где была в начальный момент, то обязательно существует разворот.

Доказательство. По теореме Вейерштрасса существуют x_m, $x_M \in [a;b]$:

$$f(x_m) = \min_{[a;b]} f; \quad f(x_M) = \max_{[a;b]} f.$$

Если бы одна из этих точек лежала бы внутри $(a;b)$, то по теореме Ферма в этой точке производная равнялась бы нулю. Если x_m или x_M совпадают с a или b, то

$$\min_{[a;b]} f = \max_{[a;b]} f \Longrightarrow f = \mathrm{const}$$

и c — точка интервала .

□

Лекция 24

Теорема 62 (Ролль)**.** *Пусть f непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема на интервале $(a;b)$. Если $f(a) = f(b)$, то существует $c \in (a;b)$: $f'(c) = 0$.*

Физический смысл: если при одномерном движении точка вернулась в то положение, где была в начальный момент, то обязательно существует разворот.

Теорема 63 (Лагранж, теорема о среднем)**.** *Пусть f непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема на интервале $(a;b)$. Тогда существует $c \in (a;b)$:*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Физический смысл:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = v_{ср}.$$

Доказательство.

$$F(x) = f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right)' \quad F(a) = F(b) = 0$$

Следовательно, по теореме Ролля существует $c \in (a;b)$: $F'(c) = 0$.

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0.$$

□

Следствие 16. $f = \mathrm{const}$ *на* $(a;b) \iff f' \equiv 0$ *на* $(a;b)$.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in (a;b)$, $x_1 < x_2$; $[x_1;x_2] \subset (a;b)$

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

□

Следствие 17. *Пусть f дифференцируема на $(a;b)$, f не убывает $\iff f' \geq 0$.*

Пример: $y = x^3$; $y'(0) = 0$.

Доказательство. $\boxed{\Longrightarrow}$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$$

$\boxed{\Longleftarrow}$

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0.$$

□

Замечание 21. Если f дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $f' > 0$, то f строго возрастает.

Теорема 64 (Коши)**.** *Пусть f и g непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема на $(a;b)$. Тогда существует $c \in (a;b)$:*

$$(f(b)-f(a))g'(c) = (g(b)-g(a))f'(c).$$

Если $g' = 0$ на $(a;b)$, то $g(b) \neq g(a)$ и

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Геометрический смысл:

$$\begin{vmatrix} f(b)-f(a) & f'(c) \\ g(b)-g(a) & g'(c) \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство.

$$F(x) = \begin{vmatrix} f(b)-f(a) & f(x)-f(a) \\ g(b)-g(a) & g(x)-g(a) \end{vmatrix} = 0. \quad F(b) = \begin{vmatrix} f(b)-f(a) & f(b)-f(a) \\ g(b)-g(a) & g(b)-g(a) \end{vmatrix} = 0.$$

$$F'(x) = \begin{vmatrix} f(b)-f(a) & f'(x) \\ g(b)-g(a) & g'(x) \end{vmatrix}. \quad F(a) = \begin{vmatrix} f(b)-f(a) & 0 \\ g(b)-g(a) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

По теореме Ролля существует $c \in (a;b)$: $F'(c) = 0$.

□

Правило Лопиталя

Теорема 65. *Пусть f и g дифференцируемы на $(a;b)$ и $g' \neq 0$ на $(a;b)$. Предположим, что существует*

$$\lim_{x\to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

1) $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = \lim\limits_{x\to b-} g(x) = 0.$

2) $\lim\limits_{x\to b-} g(x) = \infty.$

Доказательство. 1) Определим $f(b) = g(b) = 0 \Longrightarrow f$ и g непрерывны в точке b. Следовательно, для всяких $x \in (a;b)$ f и g непрерывны на $[a;b]$.

Применим к $[x;b]$ и f с g теорему Коши

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(b)-f(x)}{g(b)-g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \text{ где } c \in (x,b)$$

Для всяких $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$: $\forall c \in (b-\delta; b)$

$$\left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - A\right| < \varepsilon.$$

Пусть $x \in (b-\delta; b) \Longrightarrow c$ из теоремы Коши $\in (b-\delta; b)$

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| = \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - A\right| < \varepsilon.$$

2) Рассмотрим $y \in (a, b)$. По теореме Коши

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \mid \cdot \frac{g(x)-g(y)}{g(x)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)}.$$

Для всяких $\varepsilon > 0$ существует $y \in (a; b)$: $\forall c \in (y; b)$

$$\left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - A\right| < \varepsilon.$$

Фиксируем такой y. Так как $\lim\limits_{x\to b-} g(x) = \infty$, то существует $\delta > 0$: $y < b - \delta$ и $\forall x \in (b-\delta; b)$

$$\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{g(y)}{g(x)}\right| < \varepsilon.$$

Для наших x:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| \le \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - A\right| + \left|\frac{f'(c)}{g'(c)}\right|\left|\frac{g(y)}{g(x)}\right| + \left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| < \varepsilon(|A|+\varepsilon+2) < \varepsilon(|A|+3). \quad (0 < \varepsilon < 1).$$

□

Замечание 22. 1) Аналогичное утверждение верно для $b = +\infty$

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} g = 0.$$

Повторяем доказательство, меняя местами x и y.

2) Аналогично для точки a и предела справа.

3) Аналогичное утверждение верно для $A = \pm\infty$.

Производные высоких порядков

Определение 80. Если f дифференцируема в окрестности $U(a)$ точки a, то определена функция $x \longrightarrow f'(x)$ на этой окрестности. Если эта функция дифференцируема в точке a, то ее производная называется второй производной функции f в точке a, и обозначается $f''(a)$ или

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(a).$$

Пусть уже определена производная n−го порядка. Если функция f n раз дифференцируема в окрестности $U(a)$, то определена функция $x \longrightarrow f^{(n)}(x)$ на этой окрестности.

Если эта функция дифференцируема в точке a, то ее производная называется производной $(n+1)$–го порядка функции f в точке a и обозначается

$$f^{(n+1)}(a) \text{ или } fracd^{(n+1)}fdx^{(n+1)}(a).$$

Пример 60. Найдем производную

$$((x-a)^m)^{(n)}, m = 1, 2, \dots$$

$$((x-a)^m)' = m(x-a)^{m-1}$$

$$((x-a)^m)'' = m(m-1)(x-a)^{m-2}$$

$$((x-a)^m)^{(n)} = \begin{cases} 0, \quad n > m \\ m(m-1)(m-2)\dots(m-(n-1))(x-a)^{m-n}, \quad n \le m. \end{cases}$$

Многочлен Тейлора

Пусть $P(x)$ — многочлен степени N. Хотим разложить его в точке a, т.е. записать

$$P(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_N(x-a)^N.$$

Имеем:

$$c_0 = P(a),$$
$$c_1 = P'(a),$$
$$c_k = \frac{P^{(k)}(a)}{k!},$$
$$c_k = \sum_{k=0}^{N} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Определение 81. Пусть f — n раз дифференцируема в точке a. Многочлен

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!},$$

$$(T_n(x))^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$$

называется многочленом Тейлора.

Теорема 66. *Если f — n раз дифференцируемая функция в точке a, то*

$$f(x) - T_n(x) = \alpha(x)(x-a)^n,$$

где $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0.$

Доказательство.

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}.$$

$$g(a) = g'(a) = \ldots = g^{(n)}(a) = 0.$$

Надо доказать, что

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

По правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \ldots$$

$$\ldots = \lim_{x\to a} \frac{g^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)} = \lim_{x\to a} \frac{g^{(n-1)}(x) - g^{(n-1)}(a)}{n!(x-a)} = \frac{g^{(n)}(x)}{n!} = 0.$$

□

Лекция 25

$\overline{o}$–малое и $\underline{O}$–большое

Пусть функции f и g определены в проколотой окрестности точки a ($U'(a)$). Если $f(x) = h(x)g(x)$ $\forall x \in U'(a)$ и $\lim\limits_{x\to a} h(x) = 0$, то

$$f(x) = \overline{o}(g(x))$$

при $x \to a$.

Если $f(x) = h(x)g(x)$ в $U'(a)$ и $\exists c > 0 : |h(x)| \le c$ $\forall x \in U'(a)$, то пишут

$$f(x) = \underline{O}(g(x))$$

при $x \longrightarrow a$.

Пример 61. Пусть $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$, $a = 0$.

$$f(x) = x \cdot g(x), \quad f = \overline{o}(g), \quad g \ne \overline{o}(f)!$$

Теорема 67. *Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + \overline{o}((x-a)^n), \quad x \to a.$$

Примеры

Пример 62. Пусть $a = 0$. Тогда

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \overline{o}(x^n),$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \overline{o}(x^{2n+2}),$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \overline{o}(x^{2n+1}),$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} + \overline{o}(x^n).$$

Теорема 68 (остаточный член)**.** *Пусть f n раз дифференцируема в каждой точке отрезка $[a;x]$, функция $f^{(n)}$ непрерывна на $[a;x]$ и дифференцируема на интервале $(a;x)$. Пусть g непрерывна на $[a;x]$ и дифференцируема на интервале $(a;x)$, причем $g' \ne 0$ на $(a;x)$. Тогда $\exists c \in (a;x)$:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + r_n(x,a),$$

где

$$r_n(x,a) = \frac{f^{(n+1)}(c)(g(x)-g(a))(x-c)^n}{n!g'(c)}$$

Доказательство. Идея: применить теорему Коши к $g(t)$ и

$$F(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)(x-t)^k}{k!} = *$$

По теореме Коши существует $c \in (a; x)$:

$$\frac{F(x) - F(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{F'(x)}{g'(c)}$$

$$* = f(x) - (f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2}(x-t)^2 + \dots)$$

Кроме того, $F(x) = 0$ и

$$F(a) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} = -\frac{F'(c)(g(x) - g(a))}{g'(c)}$$

Возьмем производную от $F(t)$:

$$F'(t) = -f'(t) - f''(t)(x-t) + f'(t) - \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 + f''(t)(x-t) - \ldots = -\frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!}.$$

Итого:

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} = \frac{f^{(n+1)}(c)(g(x) - g(a))(x-c)^n}{n! g'(c)}.$$

□

Следствие 18 (остаточный член в форме Коши)**.** *Положим* $g(t) = x - t \Longrightarrow g' = -1$, $g(x) = 0$, $g(a) = x - a$*:*

$$r_n(x, a) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)(x-c)^n}{n!}.$$

Следствие 19 (остаточный член в форме Лагранжа)**.** *Положим* $g(t) = (x-t)^{n+1}$*. Тогда*

$$r_n(x, a) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}(x-c)^n}{n!(n+1)(x-c)^n} = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Пример 63. 1) Пусть c лежит между x и 0. Тогда

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Доказательство.

$$\left|\frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leq \frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!} \longrightarrow 0$$

Для всяких x ряд $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ сходится кe^x, $x \in [-A; A]$

$$\left|\frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leq \frac{e^A A^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\sup\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leq \frac{e^A A^{n+1}}{(n+1)!} \longrightarrow 0, \quad (n \longrightarrow \infty)$$

— равномерная сходимость. Итак,

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!},$$

и ряд сходится равномерно на всяком отрезке $[-A; A]$. □

2) Пусть c лежит между x и 0 ($c > 0$). Тогда

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}.$$

Доказательство. Пусть $0 \leq x \leq 1$.

$$\left|\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}\right| \leq \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0.$$

Для этих x

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}.$$

Пусть теперь $-1 < x < 0$. Остаточный член:

$$\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{1+c}\right)^{n+1}.$$

Посмотрим на остаточный член в форме Коши

$$\frac{(-1)^n n!}{(1+c)^n} \frac{(x-c)^n x}{(1+c)}.$$

Оценим отношение

$$\left|\frac{x-c}{1+c}\right| = \frac{|x|-|c|}{1-|c|} = 1 - \frac{1-|x|}{1-|c|} \leq 1 - (1-|x|) = |x|.$$

$$\frac{(-1)^n n!(x-c)^n x}{(1+c)^{n+1}} \leq \frac{|x|}{|1+x|}|x|^n \longrightarrow 0.$$

Итак, для каждого $x \in [-1; 1]$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k.$$

$\square$

Лекция 26

Пример 64. Если f бесконечное число раз дифференцируема окрестности точки a, то ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}$$

называется рядом Тейлора функции f в точке a.

Пример 65 (Коши)**.**

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ e^{-1/x}, & x > 0 \end{cases}$$

У этой функции ряд Тейлора не сходится к самой функции.

Теорема 69. *Пусть f бесконечное число раз дифференцируема на интервале $(a - r; a + r)$ и*

$$\sup |f^{(n)}(x)| \le Cq^n n!, \ \ C > 0.$$

Тогда ряд Тейлора сходится к $f(x)$ для всех точек этого интервала.

Доказательство. Используем остаточный член в форме Лагранжа.

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(a)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \le \frac{Cq^{n+1}(n+1)! r^{n+1}}{(n+1)!} = C(qr)^{n+1} \longrightarrow 0.$$

□

Непрерывность f'

Пусть f дифференцируема всюду на $\mathbb{R}$.

$$f' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Последовательность $f_n(x) = n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x))$ поточечно сходится к f'. Следовательно, у f' всюду плотное множество точек непрерывности.

Функция f' может быть разрывной:

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}, \quad f(0) = 0.$$

$$x \ne 0 \ \ f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},$$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = 0.$$

Функция f' имеет разрыв второго рода в точке $x = 0$.

Теорема 70 (Дарбу)**.** *Пусть f дифференцируема в каждой точке отрезка $[a; b]$ и $f'(a)f'(b) < 0$. Тогда $\exists c \in [a; b]$: $f'(x) = 0$.*

Доказательство. Пусть $f'(a) < 0$ и $f'(b) > 0$

$$0 > f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Longrightarrow f(x) < f(a)$$

$$0 < f'(b) = \lim_{x\to b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \Longrightarrow f(x) < f(b)$$

Итак, минимум не равен ни $f(a)$, ни $f(b) \Longrightarrow$ он достигается внутри отрезка. По теореме Ферма $f'(c) = 0$.

□

Следствие 20. *Если f дифференцируема в каждой точке отрезка $[a;b]$ и $A = f'(a)$, $B = f'(b)$, то для всякой точки C между A и B найдется $c \in [a;b]$: $f'(c) = C$.*

Доказательство. Положим $g(x) = f(x) - Cx$

$$g'(a)g'(b) = (A - C)(B - C) \leq 0.$$

□

Правило Лейбница для производной высокого порядка

Теорема 71. *Пусть f и g n раз дифференцируема в точке a. Тогда fg — n раз дифференцируема в точке a и верно равенство,*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a).$$

Доказательство. Будем доказывать по индукции.

Пусть для n уже доказано. Докажем для $n+1$.

$$(fg)^{(n+1)} = ((fg)^{(n)})' = \left(\sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} C_n^k (f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)} = \sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(k)}(a) g^{(n-k)}.$$

□

Пример 66.

$$(xe^x)^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^{(k)} (e^x)^{(n-k)} = xe^x + ne^x.$$

Исследование функций

Определение 82. Точка a называется точкой *локального минимума (максимума) функции* f, если f определена в окрестности a $(U(a))$ и $\forall x \in U(a)$ $f(x) \geq f(a)$ $(f(x) \leq f(a))$.

Если $\forall x \in U'(a)$ неравенства строгие, то точка a — точка *строгого локального (минимума) максимума.*

Точки локального минимума или максимума называются точками локального экстремума f.

Теорема Ферма — необходимое условие локального экстремума.

Если функция f дифференцируема в точке a и точка a — точка внутреннего локального экстремума, то $f'(a) = 0$.

Лекция 27

Определение 83. Точка a называется точкой *локального минимума (максимума) функции* f, если f определена в окрестности a $(U(a))$ и $\forall x \in U(a)$ $f(x) \geq f(a)$ $(f(x) \leq f(a))$.

Если $\forall x \in U'(a)$ неравенства строгие, то точка a — точка *строгого локального (минимума) максимума.*

Точки локального минимума или максимума называются точками локального экстремума f.

Теорема Ферма — необходимое условие локального экстремума.

Если функция f дифференцируема в точке a и точка a — точка внутреннего локального экстремума, то $f'(a) = 0$.

После теоремы Лагранжа было доказано, что

1) если f дифференцируема на $(a; b)$, то $f' \geq 0 \iff f$ не убывает

2) если f дифференцируема на $(a; b)$ и $f > 0$ $(f < 0)$, то f возрастает (убывает).

Утверждение 47. *Пусть f непрерывна в окрестности $U(a)$ и дифференцируема в $U'(a)$*

1) если $f' \geq$ при $x < a$ и $f' \leq 0$ при $x > a$, то a — точка локального максимума (если строгие неравенства, то строгого локального максимума)

2) если $f' \leq$ при $x < a$ и $f' \geq 0$ при $x > a$, то a — точка локального минимума.

Достаточное условие локального экстремума

Теорема 72 (достаточное условие локального экстремума)**.** *Пусть f n (≥ 2) раз дифференцируема в точке a (f определена в $U(a)$) и $f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$, но $f^{(n)}(a) \neq 0$.*

Если $n = 2k + 1$, то a не является точкой локального экстремума.

Если $n = 2k$, то

1) $f^{(n)}(a) > 0 \Longrightarrow a$ — точка строгого локального минимума

2) $f^{(n)}(a) < 0 \Longrightarrow a$ — точка строгого локального максимума

Доказательство. По формуле Тейлора

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + \overline{o}((x-a)^n).$$

$$f(x) - f(a) = (x-a)^n \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \overline{o}(1)\right).$$

Так как $\overline{o}(1)$ — функция, стремящаяся к 0 при $x \to a$, то существует $U'(a)$: знак $\left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \overline{o}(1)\right)$ совпадает со знаком $f^{(n)}(a)$.

- $n = 2k+1 \implies (x-a)^n$ меняет знак при переходе x через $a \implies$ меняет знак выражение $f(x) - f(a) \implies$ точка a не является экстремумом.
- $n = 2k \implies (x-a)^n > 0\ \forall x \in U'(a) \implies$ знак $f(x) - f(a)$ совпадает со знаком $f^{(n)}$. Следовательно, если $f^{(n)} > 0$, то $f(x) - f(a) > 0$ и a — строгий минимум. Если $f^{(n)} < 0$, то a — строгий максимум.

□

Выпуклые функции

Пусть f определена на интервале $(a;b)$.

Определение 84. Функция f называется *выпуклой* функцией на интервале $(a;b)$, если $\forall x_1, x_2 \in (a;b)\ \forall \alpha \in [0;1]$

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \le \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$

Геометрический смысл: значение функции не больше значения на хорде (хорда не ниже дуги графика, которую она стягивает).

Утверждение 48. *Функция f выпукла на $(a;b) \iff \forall x_1 < x < x_2$ из $(a;b)$*

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

Доказательство. По определению

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \le \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$

$$\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 = x$$

$$\alpha = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$$

$$1 - \alpha = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$f(x) \le \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) \mid (x_2 - x_1)$$

$$(x_2 - x_1) f(x) \le (x_2 - x_1) f(x_1) + (x - x_1) f(x_2)$$

$$(x_2 - x)(f(x) - f(x_1)) \le (x - x_1)(f(x_2) - f(x))$$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

□

Теорема 73. *Пусть f выпукла на $(a;b)$, тогда $\forall [c;d] \subset (a;b)\ \exists M > 0$:*

$$|f(x) - f(y)| \le M|x - y| \quad \forall x, y \in [c;d].$$

В частности, выпуклые функции на интервале непрерывны.

Доказательство.

$$\frac{f(c)-f(u)}{c-u} \le \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(v)-f(d)}{v-d}.$$

Берем $M > 0$:

$$-M \le \frac{f(c)-f(u)}{c-u}, \quad M \ge \frac{f(v)-f(d)}{v-d}.$$

Для всяких $x, y \in [c; d]$

$$-M \le \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \le M.$$

□

Теорема 74. *Пусть f дифференцируема на интервале $(a; b)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) f выпуклая

2) f не убывает на $(a; b)$

3) $f(x) \ge f(y) + f'(y)(x-y)$.

Доказательство. $\boxed{1 \longrightarrow 2}$ Рассмотрим точки $u < x_1 < x_2 < v$

$$\frac{f(x_1)-f(u)}{x_1-u} \le \frac{f(v)-f(x_2)}{v-x_2} \longrightarrow f'(x_2) \text{ при } v \to x_2$$

Теперь пусть $u \longrightarrow x_1$. По аналогии получим

$$f'(x_1) \le f'(x_2).$$

$\boxed{2 \longrightarrow 3}$

а) Пусть $x > y$. При делении на $(x-y)$ знак не изменится

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \ge f(y) \Longrightarrow f'(c) \ge f'(y)$$

— т.к. по пункту 2 производная не убывает, точка c лежит правее y.

б) Пусть $x < y$. Доказательство проводим аналогично пункту а) (и знак, и положение точки c по отношению к y поменяется).

$\boxed{3 \longrightarrow 1}$ Рассмотрим точки $x_1 < x < x_2$. Докажем, что

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \tag{3}$$

Сравним правую и левую часть с $f'(x)$. Верно ли, что

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le f'(x)?$$

Имеем: $f(x) + f'(x)(x_1 - x) \leq f(x_1)$ — в точности свойство 3, где $x \sim x_1$, $y \sim x$, а значит, неравенство верно.

Верно ли, что

$$\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \geq f'(x)?$$

Имеем: $f(x) + f'(x)(x_2 - x) \leq f(x_2)$ — в точности свойство 3, где $x \sim x_2$, $y \sim x$, а значит, неравенство верно.

Следовательно, неравенство (3) верно.

□

Следствие 21. *Пусть f дважды дифференцируема на $(a; b)$. Тогда f выпукла $\Longleftrightarrow$ $f'' \geq 0$.*

Доказательство. Производная f' не убывает $\Longleftrightarrow$ $f'' \geq 0$. □

Лекция 28

Неравенство Йенсена

Теорема 75 (Неравенство Йенсена)**.** *Пусть f выпукла на интервале $(a;b)$; $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in [0;1]$; $\sum \alpha_k = 1$, $x_1,\dots,x_n \in (a;b)$.*

Тогда

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \le \alpha_1 f(x_1) + \ldots \alpha_n f(x_n)$$

Доказательство. Будем доказывать по индукции. Предположим, что для n доказано. Докажем для $n+1$.

$$\begin{aligned}
&f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{n+1}x_{n+1}) = \\
&\quad = f\left((\alpha_1+\ldots+\alpha_n)\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}x_1+\ldots+\frac{\alpha_n}{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}x_n\right)+\alpha_{n+1}x_n\right) \le \\
&\quad \le (\alpha_1+\ldots+\alpha_n) f\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}x_1+\ldots+\frac{\alpha_n}{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}x_n\right)+\alpha_{n+1}f(x_{n+1}) \le *
\end{aligned}$$

Отделили последнее слагаемое, а остальные записали удобным нам образом. Далее можем вынести $(\alpha_1+\ldots+\alpha_n)$, так как если бы этот множитель был бы нулем, то $\alpha_{n+1}=1$, и это тривиальная очевидная ситуация. Обозначим $(\alpha_1+\ldots+\alpha_n) = A$

$$* \le A\left(\frac{\alpha_1}{A}f(x_1)+\ldots+\frac{\alpha_n}{A}f(x_n)\right)+\alpha_{n+1}f(x_{n+1}) = \alpha_1 f(x_1)+\ldots+\alpha_{n+1}f(x_{n+1}).$$

□

Пример 67. 1) Пусть $x_i > 0$. Тогда

$$\frac{x_1+\ldots+x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1\ldots x_n}.$$

Доказательство. Прологарифмируем:

$$\ln\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right) \ge \frac{1}{n}\ln x_1+\ldots+\frac{1}{n}\ln x_n.$$

$$-\ln\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right) \ge \frac{1}{n}(-\ln x_1)+\ldots+\frac{1}{n}(-\ln x_n).$$

Функция $f(x) = -\ln x$ выпуклая.

$$f'(x) = -\frac{1}{x}, \quad f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0 \Longrightarrow$$

выпукла $\Longrightarrow$ неравенство верно. □

2) Энтропия.

Функция $x\ln x$ — выпуклая: $(x\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$.

Положим $H = -\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \ln p_i$ — *энтропия*. Сравним H и $\ln n$.

$$-\frac{1}{n}\ln n = \left(\frac{p_1+\ldots+p_n}{n}\right)\ln\left(\frac{p_1+\ldots+p_n}{n}\right) \le \frac{1}{n}p_1\ln p_1 + \ldots + \frac{1}{n}p_n\ln p_n \mid \cdot(-n).$$

$$-\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i \le \ln n.$$

Итак, H меньше энтропии в случае, когда все $p_i = \frac{1}{n}$. Значит, энтропия всегда меньше или равна, чем энтропия в самой неопределенной ситуации. Самая маленькая энтропия — энтропия, когда один из исходов точно известен.

Строгая выпуклость

Определение 85. Функция f на интервале $(a;b)$ называется *строго выпуклой*, если $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$, $x_1 \ne x_2$ и $\forall \alpha \in (0;1)$:

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2).$$

Функция строго выпукла $\iff$ при $x_1 < x < x_2$

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

Теорема 76. *Пусть f дифференцируема на $(a;b)$. Тогда следующие утверждения равносильны*

1) *f строго выпуклая*

2) *f' строго возрастает*

3) *$f(x) > f(y) + f'(y)(x-y)$ $\forall x \ne y$.*

Доказательство. $\boxed{1 \iff 2}$

$$f'(x_1) \le f'(c_1) = \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(c_2) \le f'(x_2).$$

$\boxed{2 \Longrightarrow 3}$ $f(x) > f(y) + f'(y)(x-y)$, $x > y$.

$$f'(c) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} > f'(y).$$

Аналогично для $x < y$.
$\boxed{3 \Longrightarrow 1}$ Пусть $x_1 < x < x_2$

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < f'(x) < \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

□

Следствие 22. *Пусть f дважды дифференцируема на $(a; b)$. Если $f'' > 0$, то f строго выпукла.*

Замечание 23.

1) Выпуклые функции иногда называются «выпуклые вниз».

2) Если $-f$ выпукла, то f называют «выпуклой вверх».

3) Если f определена в окрестности $U(a)$ и при $x < a$ f выпукла (вогнута), при $x > a$ f вогнута (выпукла), т.е. f меняет выпуклость в точке a, то говорят, что a — точка перегиба f.

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ