

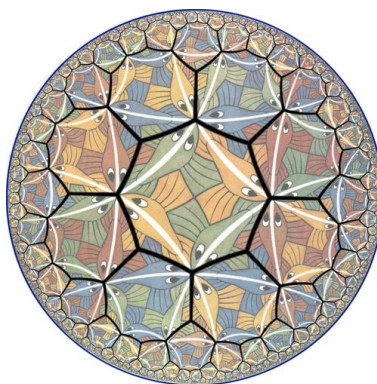


Comment paver le plan hyperbolique ?

Camille-Lucia CATHALAN, Elora DJELLAS, Léa HOUOT, Clara MOY

Encadré par Thierry COULBOIS, enseignant-chercheur à l'Institut de Mathématiques de
Marseille

L1 MPC1 - Année universitaire 2021-2022



Remerciements

Avant toute chose, nous tenions à remercier particulièrement notre encadrant de projet, M. Thierry COULBOIS, pour nous avoir amenées avec beaucoup de patience et de bienveillance dans des contrées inconnues aux droites pas très droites.

Nous remercions aussi Mme Guillemette CHAPUISAT¹ et M. Philippe MARSAL pour nous avoir donné l'opportunité de faire cette U.E. de projet, ainsi que pour tous les conseils méthodologiques prodigués au cours du semestre.

Nos cours d'algèbre ont été très profitables pour pouvoir aborder dans de bonnes conditions ce nouvel espace qu'est le plan hyperbolique ; nous tenions donc à remercier M. Glenn MERLET pour ses explications, notamment en ce qui concerne les domaines fondamentaux.

Nous remercions également Louison HAMON, en L1 PCGS à Rennes, et Lena RODRIGUES, L2 MPCI, pour leur relecture attentive et leurs conseils avisés.

Enfin, merci à nos camarades de la licence MPCI, L1 pour leurs questionnements existentiels face à nos pentagones réguliers à angles droits, L2 pour nous avoir fait partager leur expérience des projets, notamment en géométrie hyperbolique.

Pour conclure, nous adressons à notre rapporteur M. François BRUCKER nos remerciements pour sa lecture attentive de ce rapport.

Bon voyage en géométrie hyperbolique !

Image de couverture : Œuvre de Maurits Cornelis ESCHER, *Cirkellimiet III*, avec ajouts d'octogones et de fausses géodésiques, prise sur Image des Mathématiques [13]

1. Merci également pour le délai de 24h supplémentaires !

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Un bref historique	3
1.2	Deux visions étudiées	3
1.2.1	Le demi-plan de Poincaré	3
1.2.2	Le disque de Poincaré	4
1.2.3	L'isométrie permettant de passer du demi-plan au disque	4
2	Tracés sur le plan hyperbolique	5
2.1	Tracés élémentaires	5
2.1.1	Le demi-plan de Poincaré	5
2.1.2	Le disque de Poincaré	6
2.2	Tracé de polygones	6
2.3	Les pavages	8
3	Isométries du plan hyperbolique	10
3.1	Définition d'une homographie	10
3.2	Homographies remarquables	10
3.3	Le lien entre homographies et isométries	11
4	Construire un pavage avec des fractales	14
4.1	Les orbites	14
4.2	Les domaines fondamentaux	14
4.3	Ensemble de Cantor	15
4.4	Les tracés obtenus	16
4.4.1	Tracé d'orbite	16
4.4.2	Tracé des domaines fondamentaux	18
5	Conclusion	22
6	Annexes	23
6.1	Preuves	23
6.1.1	Concurrence des hauteurs dans un triangle	23
6.1.2	Homographies entre le disque de Poincaré et le demi-plan de Poincaré	24
6.1.3	La rotation par un angle θ est une isométrie	24
6.1.4	Tracé de polygone régulier à angles droits dans le disque de Poincaré	25
6.1.5	Composer deux homographies revient à multiplier les matrices associées	25
6.1.6	Être une homographie hyperbolique est équivalent à avoir 2 points fixes réels.	26
6.1.7	Représentation des éléments de $C(3)$	27
6.2	Programmes Python	28
6.2.1	Tracé de géodésique	28
6.2.2	Tracé de médiatrice	29
6.2.3	Tracés d'orbites	31
	Bibliographie	32

Chapitre 1

Introduction

1.1 Un bref historique

Monument de la géométrie durant des siècles, les *Éléments* d'Euclide sont à la base des mathématiques apprises dès l'école primaire. La géométrie euclidienne se base sur cinq axiomes. Celui auquel on s'intéresse en géométrie hyperbolique, est : *Étant donnés une droite D et un point M – qui n'appartient pas à la droite D –, il existe une et une seule droite d parallèle à la droite D et passant par le point M .* Pendant des siècles, les mathématiciennes et mathématiciens ont tenté de déduire cet axiome des quatre premiers, mais ont échoué, utilisant des énoncés équivalents pour le prouver, jusqu'à ce que Nikolaï Lobatchevski et János Bolyai découvrent indépendamment au XIX^{ème} siècle que le fait d'exclure cet axiome ouvre la porte à de nouvelles géométries. [24]

La géométrie hyperbolique, celle dans laquelle il existe une infinité de droites passant par un point et parallèles à une droite donnée, prend son essor à la fin du XIX^{ème} siècle avec les travaux de Beltrami, Poincaré et Klein [21]. Elle a des applications en dynamique chaotique [4] et en cosmologie. [18]

L'objectif de ce projet est d'explorer cette géométrie particulière en traçant des pavages sur le plan hyperbolique. Pour cela, il faut étudier les différentes représentations du plan hyperbolique, puis réussir à tracer des polygones réguliers sur ces représentations et comprendre les transformations de cet espace. Enfin il faut étudier l'ensemble de Cantor et les notions d'orbite et de domaines fondamentaux. Ces notions serviront à tracer nos pavages et on retrouvera l'ensemble de Cantor sur le bord à l'infini.

1.2 Deux visions étudiées

Afin de pouvoir tracer des pavages en géométrie hyperbolique, il faut comprendre comment fonctionnent les différentes représentations du plan hyperbolique qui seront étudiées lors de ce projet.

1.2.1 Le demi-plan de Poincaré

Pour commencer, on étudie un exemple de géométrie non-euclidienne, le demi-plan de Poincaré. Il consiste en l'ensemble des complexes de partie imaginaire strictement positive. On le note

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$$

Le demi-plan de Poincaré est intéressant car il est une représentation appropriée aux débutants. On avait déjà travaillé avec des nombres complexes et tracé leurs affixes sur un plan similaire. Il a donc été plus simple et intuitif de travailler sur ce demi-plan pour comprendre et s'approprier les nouvelles notions.

Définition 1.2.1. Une géodésique est le plus court chemin reliant deux points. [11]

Les géodésiques du demi-plan de Poincaré sont alors les demi-droites perpendiculaires à l'axe des abscisses et les demi-cercles euclidiens dont le centre est positionné sur l'axe des abscisses. En géométrie hyperbolique, il s'agit donc de droites. Ces droites n'atteignent jamais l'axe des réels. En effet, pour tout $z \in \mathbb{H}^2$, $\Im(z) \neq 0$ donc z ne peut pas être réel. Cet axe représente le bord à l'infini de \mathbb{H}^2 .

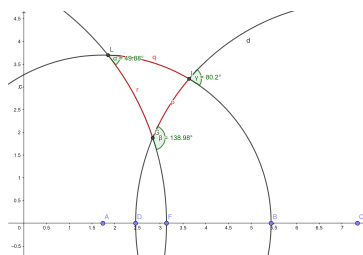


FIGURE 1.1 – Triangle dans le demi-plan de Poincaré

La géométrie hyperbolique est une géométrie conforme. Pour déterminer un angle, il suffit par conséquent de mesurer l'angle entre les tangentes euclidiennes aux demi-cercles euclidiens (qui sont comme expliqué précédemment des droites hyperboliques) au point où elles s'intersectent. Dans le demi-plan de Poincaré, la somme des angles d'un triangle est toujours inférieure à 180° . Avec GeoGebra, on peut effectivement tracer trois arcs de cercle qui s'intersectent, et constater que la somme des angles entre les tangentes aux courbes aux sommets du triangle n'atteint pas la valeur habituelle de π . En effet, on peut voir sur la figure 1.1 que $\alpha + (180 - \beta) + \gamma = 171,1^\circ$.

1.2.2 Le disque de Poincaré

Un autre exemple de géométrie non-euclidienne est le disque de Poincaré. Comme son nom l'indique, il s'agit d'un disque de rayon unité dont le bord représente l'infini. Les géodésiques sont alors les droites euclidiennes passant par le centre du disque, ainsi que les arcs de cercle perpendiculaires au bord du disque.

Dans le disque de Poincaré, il est possible de réaliser des pavages plus 'esthétiques' que dans \mathbb{H}^2 car les points se répartissent plus uniformément. Il est donc intéressant de travailler dans cette représentation de l'espace.

1.2.3 L'isométrie permettant de passer du demi-plan au disque

Pour passer du disque de Poincaré (noté \mathbb{D}) au demi-plan de Poincaré, il suffit d'appliquer aux points du disque l'homographie

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{D} &\longrightarrow \mathbb{H}^2 \\ z &\longmapsto \frac{-iz+1}{z-i} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Ainsi, toute droite du disque de Poincaré a son équivalent sur le demi-plan de Poincaré et inversement. En effet, pour passer du demi-plan au disque de Poincaré, il faut appliquer sa bijection réciproque :

$$y = \frac{-iz+1}{z-i} \iff yz - iy = 1 - iz \iff z = \frac{iy+1}{y+i}$$

On a donc l'homographie de passage du demi-plan au disque

$$\begin{aligned} \Xi : \mathbb{H}^2 &\longrightarrow \mathbb{D} \\ y &\longmapsto \frac{iy+1}{y+i} \end{aligned} \quad (1.2)$$

(preuve en 6.1.2). Ψ et Ξ sont bijections réciproques l'une de l'autre.

Chapitre 2

Tracés sur le plan hyperbolique

2.1 Tracés élémentaires

2.1.1 Le demi-plan de Poincaré

Tout comme en géométrie euclidienne, sur le demi-plan de Poincaré, on peut relier deux points quelconques par un segment de droite. Par exemple, sur la figure 2.1, les opérations suivantes ont été effectuées :

1. tracer la médiatrice g du segment $[AB]$
2. noter son intersection C avec l'axe des abscisses et tracer le cercle c de centre C et passant par A et B .

On peut voir qu'il s'agit bien d'une géodésique du demi-plan de Poincaré. Si les deux points sont de même partie réelle, il suffit de tracer la demi-droite verticale passant par ces deux points.

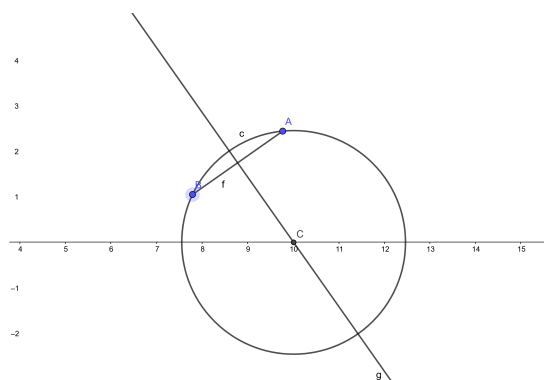


FIGURE 2.1 – Géodésique passant par les deux points A et B dans le demi-plan de Poincaré

Pour tracer la perpendiculaire à une droite en un point E (exemple Fig. 2.2), il faut :

1. tracer la tangente à la droite en E
2. tracer le demi-cercle (GeoGebra est en géométrie euclidienne !) ayant pour centre le point d'intersection entre la tangente et l'axe des abscisses et passant par E .

En effet, la tangente au premier arc de cercle est selon le rayon de la perpendiculaire. L'angle entre les deux tangentes aux deux droites est bien de 90° , ce qui confirme que la droite tracée est bien perpendiculaire à la première.

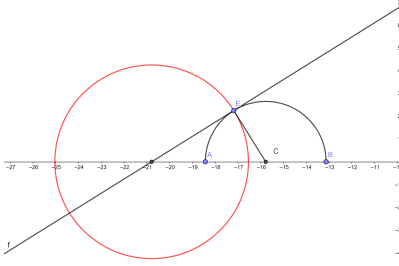


FIGURE 2.2 – Perpendiculaire à une géodésique dans le demi-plan de Poincaré

2.1.2 Le disque de Poincaré

Tout comme ce qui a été fait dans le demi-plan de Poincaré, on a cherché à tracer la géodésique passant par deux points (Figure 2.3).

Pour ce faire, il faut :

1. créer un disque unité de centre O
2. placer deux points A et B dans ce disque.
3. tracer la droite euclidienne (AO) , puis sa perpendiculaire en O
4. tracer le symétrique de A par rapport à O , nommé A' . On note E l'une des intersections entre la perpendiculaire à (AO) en O et le cercle unité,
5. tracer la droite $(A'E)$. On note F l'intersection entre la perpendiculaire à $(A'E)$ et la droite (AO) ,
6. utiliser l'outil de Geogebra "cercle passant par 3 points" pour pouvoir tracer le cercle passant par F , A et B . La portion de ce cercle contenue dans le disque de Poincaré représente la géodésique passant par A et par B .

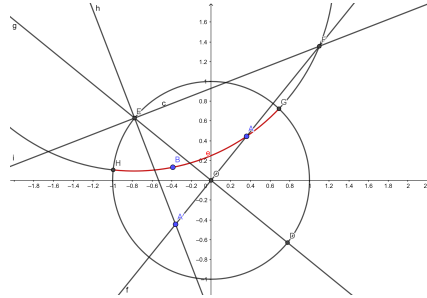


FIGURE 2.3 – Géodésique passant par les deux points A et B dans le disque de Poincaré

2.2 Tracé de polygones

Dans cette géométrie, on peut tracer des polygones à angles droits avec cette méthode, mais comment tracer des polygones réguliers ? Plus exactement, si le plus court chemin entre deux points est un arc de cercle (euclidien), comment mesure-t-on les distances dans le plan hyperbolique ?

La distance entre deux points dans le demi-plan de Poincaré est donnée par :

$$\text{dist}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 2 \ln \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + y_1^2} + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2}}{2\sqrt{y_1 y_2}}$$

[22] Si à (x_1, y_1) fixé, on fait varier la position du deuxième point, on constate que plus son ordonnée est petite, plus la distance croît.

Si on considère deux points A et B reliés par une droite hyperbolique, on peut également utiliser la relation suivante (le birapport) pour calculer la distance hyperbolique entre A et B :

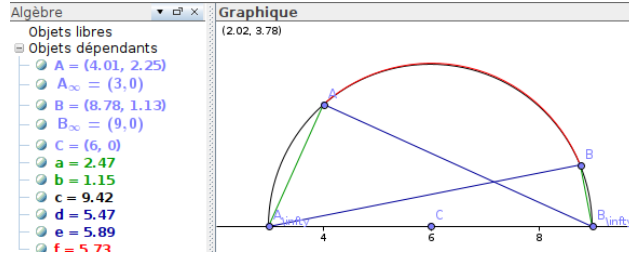


FIGURE 2.4 – Les distances euclidiennes utilisées pour calculer le birapport

$$\text{dist}(AB) = \left| \ln \left(\frac{|BA_\infty| |AB_\infty|}{|AA_\infty| |BB_\infty|} \right) \right| \quad (2.1)$$

[22] [14]

Avec A_∞ et B_∞ les points réels au bout de la droite support de géodésique entre A et B , respectivement du côté de A ou de B . On emploie donc les distances euclidiennes entre A , A_∞ , B , B_∞ pour obtenir la distance hyperbolique entre A et B (illustration sur la Figure 2.4).

Maintenant que l'on sait comment calculer les distances, essayons de tracer des polygones réguliers sur le plan hyperbolique. Cela permet de comprendre comment se comportent les figures sur les différentes représentations de ce dernier.

On sait qu'il est possible de tracer tout polygone régulier à angle droit d'au moins cinq côtés en géométrie hyperbolique (preuve en 6.1.4). De plus, il est plus facile de tracer des polygones à angles droits dans le disque de Poincaré que dans le demi-plan de Poincaré, c'est pourquoi on a tracé ces polygones sur le disque avant d'appliquer à leurs points l'homographie 1.1 permettant de passer de \mathbb{D} à \mathbb{H}^2 .

On a donc essayé de tracer un octogone au centre du disque de Poincaré à l'aide de GeoGebra (Fig.2.5).

Pour ce faire, le plus simple est de commencer par tracer un cercle euclidien (en vert) au centre du disque (en noir), et de placer les sommets de notre polygone sur ce cercle à intervalles réguliers. On sait que ces points seront à équidistance du centre du cercle car pour passer d'un point à un autre, on utilise une rotation $z \mapsto e^{i\theta} z$. Celle-ci conserve les longueurs hyperboliques (preuve en 6.1.3). Ensuite, il suffit de tracer la droite passant par deux points (en bleu) avec la méthode décrite précédemment, puis de faire varier la taille du cercle jusqu'à ce que les angles entre les tangentes euclidiennes des cercles soient égaux à 90° . Tous les côtés de l'octogone (en rouge) sont alors de même longueur, tous les angles sont égaux à 90° , et on obtient la Figure 2.5. En faisant de même pour un pentagone, on obtient la Figure 2.6.

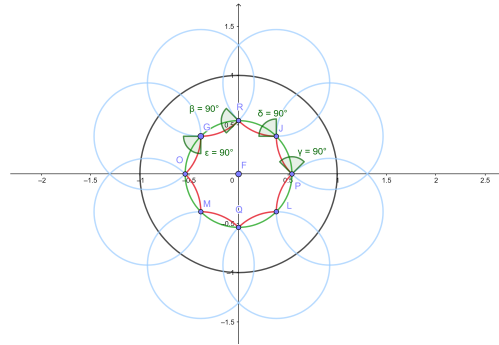


FIGURE 2.5 – Octogone régulier sur le disque de Poincaré

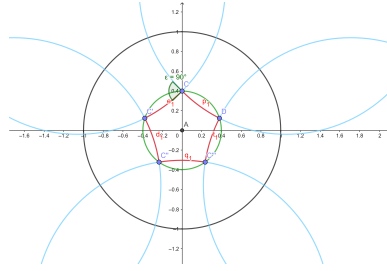


FIGURE 2.6 – Pentagone régulier sur le disque de Poincaré

Après cela, il suffit d'appliquer l'homographie 1.1 sur les points des sommets des polygones du disque de Poincaré pour obtenir ceux sur le demi-plan de Poincaré. Après avoir tracé les segments entre ces points, on obtient des polygones réguliers à angles droits sur le demi-plan de Poincaré (Fig. 2.7 et 2.8).

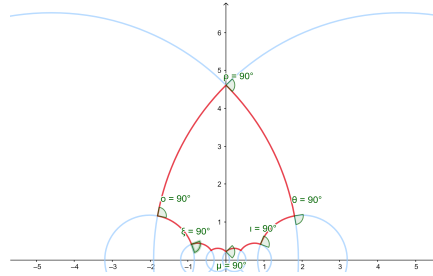


FIGURE 2.7 – Octogone régulier sur le demi-plan de Poincaré

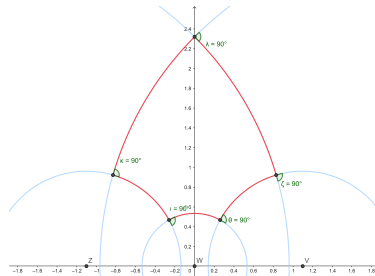
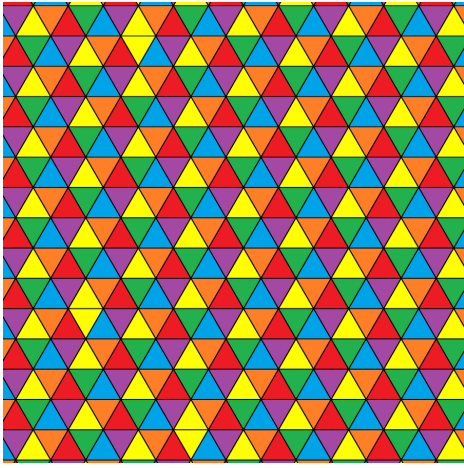


FIGURE 2.8 – Pentagone régulier sur le demi-plan de Poincaré

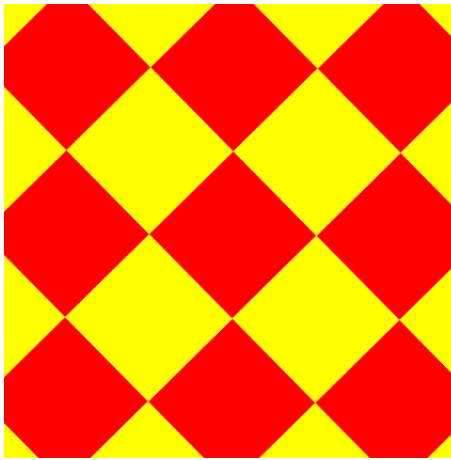
2.3 Les pavages

Définition 2.3.1. Pavage : Recouvrement d'un espace affine donné, à l'aide de figures ou de motifs identiques, ayant en commun deux à deux uniquement des parties de leurs frontières. [17] (Il existe seulement trois polygones réguliers pour paver le plan euclidien : triangle équilatéral, carré et hexagone.) [15]

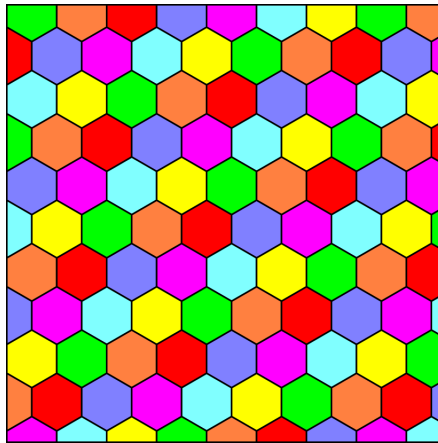
Contrairement à la géométrie euclidienne dans laquelle, comme l'indique cette définition, les seuls polygones réguliers avec lesquels il est possible d'effectuer des pavages sont les triangles (Fig. 2.9a), les carrés (Fig. 2.9b) et les hexagones (Fig. 2.9c), la géométrie hyperbolique permet de le faire avec n'importe quel polygone régulier à angles droits d'au moins cinq côtés, mais pas seulement.



(a) Pavage avec des triangles sur le plan euclidien [6]



(b) Pavage de carrés sur le plan euclidien [8]



(c) Pavage avec des hexagones sur le plan euclidien [7]

Chapitre 3

Isométries du plan hyperbolique

3.1 Définition d'une homographie

Dans le demi-plan de Poincaré, une homographie est le rapport entre deux fonctions affines. On peut associer à toute homographie une matrice carrée 2×2 dont les coefficients sont les coefficients directeurs de ces fonctions et leurs ordonnées à l'origine. On a donc $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice représentant la fonction
$$\varphi: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$$
 avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Par convention, on dira que $\frac{-d}{c}$ a comme image ∞ et que ∞ a comme image $\frac{a}{c}$. Pour composer des homographies, il suffit de multiplier leurs matrices associées (preuve en 6.1.5). Par ailleurs, dans nos programmes, on ne notera pas les homographies φ mais A, B, C , ou D .

Chaque matrice a un déterminant \det et une trace tr . Pour la matrice M , $\det(M) = ad - cb$ et $tr(M) = a + d$. On ne considère que les homographies associées à des matrices de déterminant strictement positif.

Chaque homographie peut être associée à une infinité de matrices. En effet, si on choisit la matrice $\lambda M = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$, l'homographie lui étant associée est $z \mapsto \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d}$. En simplifiant on a : $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$. On retrouve donc φ . On remarque que le déterminant de λM est $\lambda^2 \det(M)$ et que sa trace est $\lambda tr(M)$. Par convention, on choisit par défaut la matrice associée à une homographie dont le déterminant est égal à 1, en multipliant la matrice par la fraction adéquate pour se ramener à cette valeur, et dont la trace est strictement positive.

3.2 Homographies remarquables

Certaines homographies peuvent être classées dans une catégorie à part de part leurs propriétés.

C'est le cas des homographies hyperboliques, aussi appelées loxodromiques, qui sont des homographies dont les matrices associées ont un déterminant égal à 1 et une trace strictement supérieure à 2.

Les homographies hyperboliques ont aussi comme particularité d'avoir un pôle attractif et un pôle répulsif, c'est-à-dire un point vers lequel toutes les images convergent et un point duquel toutes les images s'éloignent. Ces points correspondent aux deux points fixes de l'homographie hyperbolique i.e les deux $z \in \mathbb{R}$ tels que

pour l'homographie hyperbolique
$$\Psi: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad \Psi(z) = z.$$
 On remarque qu'être une homographie hyperbolique est équivalent à avoir deux points fixes réels. (Preuve en 6.1.6)

3.3 Le lien entre homographies et isométries

Une isométrie est une transformation géométrique qui préserve les distances. C'est une application $f : E \rightarrow E$ qui vérifie $\forall P, Q \in E, \text{dist}(P, Q) = \text{dist}(f(P), f(Q))$ [27]. Par exemple, en géométrie euclidienne, la fonction affine $f : (x, y) \mapsto (x + 2, y)$ fait effectuer à deux points $A(1; 2)$ et $B(2; 3)$ une translation, mais la distance AB reste inchangée : A est envoyé sur A' , B sur B' et $AB = A'B'$, comme on peut le constater dans la Figure 3.1.

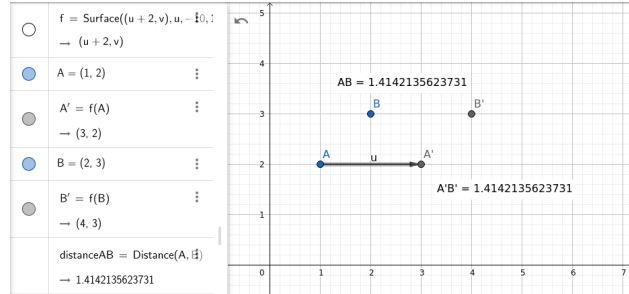


FIGURE 3.1 – Le segment entre A' et B' , images respectives des points A et B par f , est de même longueur que le segment $[AB]$

Théorème 3.3.1. *Les homographies de $\det > 0$ sont les isométries directes du demi-plan de Poincaré.*

Nous n'avons pas prouvé ce théorème, sur les conseils de notre encadrant, nous nous sommes contentées de vérifier que les droites hyperboliques étaient transformées en d'autres droites hyperboliques lorsqu'on leur appliquait une homographie.

On illustre par quelques exemples le fait que les homographies envoient une géodésique sur une autre géodésique.

Exemple 3.3.2. Considérons $f(z) = \frac{2z+3}{-z+1}$, ainsi que le demi-cercle euclidien unité \mathcal{C} . Soit z un point de \mathcal{C} . Il existe donc $\theta \in [2k\pi; (2k+1)\pi], k \in \mathbb{N}$ tel que $z = e^{i\theta}$. On applique f à z : $f(z) = \frac{2e^{i\theta}+3}{-e^{i\theta}+1} = \frac{(2e^{i\theta}+3)(-e^{-i\theta}+1)}{(-e^{i\theta}+1)(-e^{-i\theta}+1)} = \frac{-2+2e^{i\theta}-3e^{-i\theta}+3}{2-2\cos\theta} = \frac{1+2\cos\theta+2i\sin\theta-3\cos\theta+3i\sin\theta}{2-2\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{2-2\cos\theta} + \frac{5\sin\theta}{2-2\cos\theta}i = \frac{1}{2} + \frac{5\sin\theta}{2-2\cos\theta}i$. Tous les points de \mathcal{C} sont donc envoyés sur la demi-droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ car pour tout $\theta \in [2k\pi; (2k+1)\pi], k \in \mathbb{N}, 5\sin\theta \geq 0$ et $2-2\cos\theta \geq 0 \implies \frac{5\sin\theta}{2-2\cos\theta} \geq 0$.

$(0, i)$ est envoyé sur le point de coordonnées $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}i)$, et le point de coordonnées $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}i)$ est transformé en $(\frac{1}{2}, \frac{5+5\sqrt{2}}{2}i)$. On constate bien que les points du demi-cercle euclidien sont envoyés sur la demi-droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ (c.f. Figure 3.2).

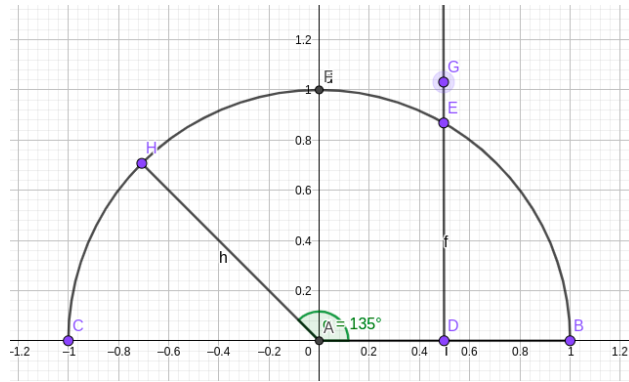


FIGURE 3.2 – Exemple 3.3.2 : Le point H est envoyé sur le point G par l'homographie

Exemple 3.3.3. Considérons à présent la demi-droite d'équation $x = 4$, et l'homographie $f : z \mapsto \frac{1}{-z+1}$. Pour z un point de la demi-droite, on a $z = 4 + ki, k \in \mathbb{R}_+^*$, et donc $f(z) = \frac{1}{-4-ki+1} = \frac{(-3+ki)}{(-3-ki)(-3+ki)} =$

$\frac{-3+ki}{9+k^2} = \frac{-3}{9+k^2} + \frac{k}{9+k^2}i$. Lorsque k tend vers 0, $\lim_{k \rightarrow 0} f(z) = -\frac{1}{3}$, et pour k tendant vers l'infini, on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(z) = 0$ car $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{-3}{9+k^2} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k}{9+k^2}i = 0$. Les points de la demi-droite se répartissent donc sur le demi-cercle ayant $-\frac{1}{3}$ et 0 comme points d'intersection avec l'axe des abscisses, qui est donc de centre $-\frac{1}{6}$. En faisant varier la valeur de k à l'aide de GeoGebra, on constate bien que le point z suit le bord du demi-cercle trouvé précédemment (c.f. Figure 3.3).

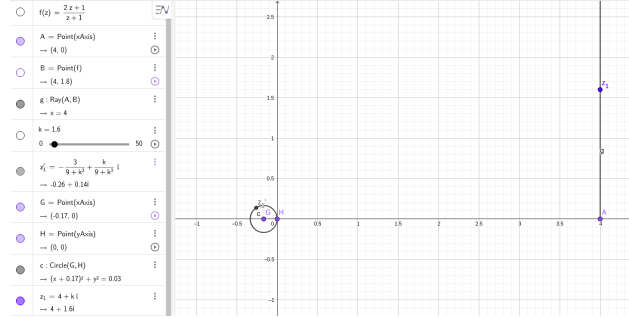


FIGURE 3.3 – Exemple 3.3.3 : La demi-droite d'équation $x = 4$ est envoyée sur le cercle de centre $-1/6$ et de rayon $1/6$

Exemple 3.3.4. Pour transformer une demi-droite en une autre demi-droite, on peut à présent prendre comme exemple la droite hyperbolique d'équation $x = 4$, et l'homographie $f : z \mapsto z - 6$. Pour tout z sur cette droite, il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $z = 4 + ki$, et $f(z) = 4 + ki - 6 = -2 + ki$. Tous les points de la demi-droite sont donc envoyés sur la demi-droite d'équation $x = -2$, 6 unités vers la gauche, lorsqu'on leur applique l'homographie ; les distances sont par conséquent bien conservées (c.f. Figure 3.4).

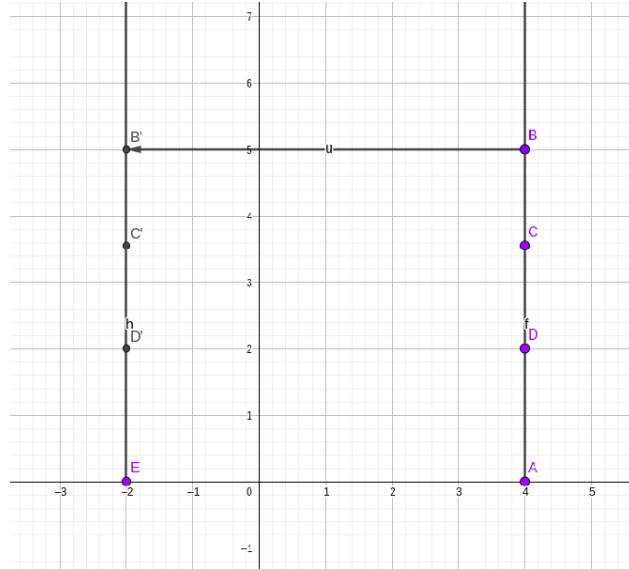


FIGURE 3.4 – Exemple 3.3.4 : La demi-droite d'équation $x = 4$ est translatée de 6 unités vers la gauche

Exemple 3.3.5. Enfin, prenons comme exemple le demi-cercle euclidien \mathcal{C} de centre 1 et de rayon 2, ainsi que l'homographie $z \mapsto z + 4$. Les points de \mathcal{C} , de coordonnées $(x; y)$ vérifient $(x - 1)^2 + y^2 = 2^2$. Soit A un point du cercle d'abscisse $x + iy$. Il est envoyé sur celui d'abscisse $x + 4 + iy$. L'équation cartésienne du cercle précédente peut alors s'écrire $((x + 4) - 5)^2 + y^2 = 2^2$. On en conclut que les points du demi-cercle \mathcal{C} sont envoyés sur le demi-cercle \mathcal{C}' de centre 5 et de rayon 2 (c.f. Figure 3.5).

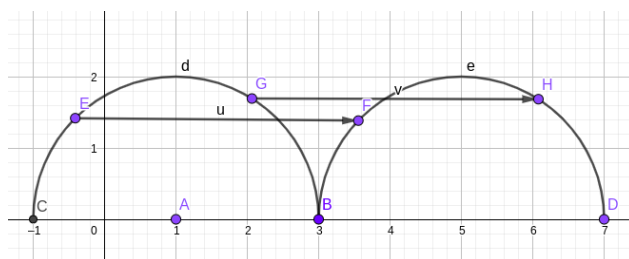


FIGURE 3.5 – Exemple 3.3.5 : Le demi-cercle de centre 1 est envoyé sur celui de centre 5

Ces quatre exemples mettent ainsi en exergue qu'une homographie du plan hyperbolique envoie bien une droite sur une autre droite (dans le sens hyperbolique du terme).

Ces isométries sont essentielles à notre projet. Grâce à celles-ci, il est possible de placer des points en faisant en sorte que les distances soient toujours égales.

Chapitre 4

Construire un pavage avec des fractales

4.1 Les orbites

Définition 4.1.1. Une action à gauche d'un groupe $(G, .)$ sur un ensemble X est une application $G \times X \rightarrow X$ envoyant (g, x) sur un élément noté $g.x \in X$, telle que :

- $\forall g, h \in G, g.(h.x) = (gh).x$
- $\forall x \in X, 1.x = x$

On dira également "Soit X un G -ensemble à gauche". [12]

Définition 4.1.2. Soit $X \subset E$ un G -ensemble à gauche
Soit $x \in X$, l'orbite de x dans X pour l'action de G est :

$$Gx = \{g * x \mid g \in G\} \subseteq X \text{ [19]}$$

C'est-à-dire, l'orbite d'un point x est formée de tous les points qu'il peut atteindre par l'action de tous les éléments $g \in G$ sur ce dernier.

Un point x d'un G -ensemble X possède une unique orbite et elle ne coïncide pas ni ne croise l'orbite d'un autre point $y \in X$ [26]. L'ensemble des orbites de l'action de G forme donc une partition de X .

Grâce à notre compréhension du concept d'orbite, on sait maintenant qu'il est possible de dessiner dans le demi-plan et dans le disque l'orbite d'un point par l'action du groupe engendré par deux homographies. On pourra alors obtenir ce qui pourrait aboutir à un pavage en faisant l'orbite d'un motif (de plusieurs points).

4.2 Les domaines fondamentaux

Définition 4.2.1. Soit X un G -ensemble à gauche.
L'ensemble F est un domaine fondamental de X si :

- $\bigcup_{g \in G} gF = X$
- $\forall g, g' \in G \text{ tq } g \neq g' \quad gF \cap g'F' = \emptyset$ [5]

i.e. F est un domaine fondamental de X si ses images par l'action de G forment une partition de X .

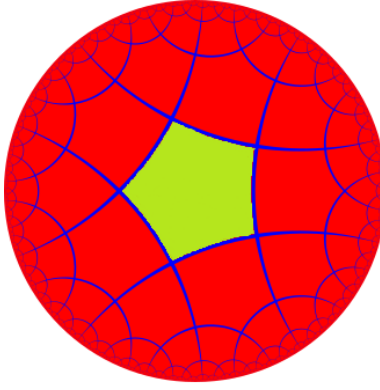


FIGURE 4.1 – Pavage d'un disque de Poincaré avec un pentagone régulier à angles droits [23]

On peut remarquer sur la figure 4.1 que le domaine fondamental considéré, puisqu'un domaine fondamental n'est pas unique, est en vert. Il permet de paver le disque de Poincaré avec ses images, ici, en rouge.

On peut également définir le domaine fondamental F par l'action de G comme un sous-ensemble qui contient exactement un point de toutes les orbites.[10]

On a donc maintenant un outil permettant de paver le demi-plan et le disque de Poincaré à partir des orbites d'un point par plusieurs homographies.

4.3 Ensemble de Cantor

L'ensemble de Cantor a été publié en 1883 par le mathématicien allemand Georg Cantor.

Afin de construire l'ensemble de Cantor triadique, on part du segment $I_0 = [0, 1]$. Puis, on enlève l'intervalle $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$ qui donne $I_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Et on continue en enlevant les intervalles $]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[$ et $]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[$, on a donc $I_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ [1]. En continuant on trouve une figure comme la 4.2.

Si on poursuit jusqu'à l'infini on obtient l'ensemble de Cantor triadique.



FIGURE 4.2 – Représentation graphique de la construction de l'ensemble de Cantor triadique [9]

Définition 4.3.1. On peut donc définir l'ensemble de Cantor triadique par :

$$C(3) = \bigcap_{k=0}^{\infty} I_k \quad [1]$$

Ce dernier est une fractale, en effet, en agrandissant l'image, on obtient une image qui ressemble à tout l'ensemble. [25]

De plus, cet ensemble présente certaines propriétés intéressantes :

- il est indénombrable
- il possède une longueur nulle [1]

Définition 4.3.2. Soit $x \in [0, 1]$, une forme triadique de x se définit par :

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \quad \text{avec } a_i \in \{0, 1, 2\} \quad [1]$$

En outre, on peut écrire :

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots |_3$$

Théorème 4.3.3. *L'ensemble de Cantor est l'ensemble des $x \in [0, 1]$ qui ont une forme triadique ne contenant pas de "1". [1]*

(Preuve en 6.1.7).

Après avoir tracé les orbites, on doit trouver un ensemble de Cantor sur le bord à l'infini du plan hyperbolique.

4.4 Les tracés obtenus

4.4.1 Tracé d'orbite

Afin d'effectuer les pavages, une première étape est le tracé de l'orbite d'un point à partir de matrices hyperboliques. On a effectué le premier programme sur le demi-plan de Poincaré, puis il suffit d'appliquer l'homographie 1.2 sur chacun des points pour avoir un équivalent sur le disque de Poincaré.

Point de vue mathématique

Pour ce faire, il faut, à partir de deux matrices hyperboliques A et B et de leurs inverses A^{-1} et B^{-1} , trouver tous les arrangements avec répétition possibles de longueur n , appelés mots. Dans nos programmes, on a choisi de tracer des mots de longueur $n = 3$ pour des raisons de complexité. Il faut ensuite appliquer au point z choisi chaque homographie (représentée par sa matrice associée) en multipliant les matrices jusqu'à obtenir le mot en entier, et noter leurs images successives. Sur \mathbb{H}^2 , on choisit $z = i$. Enfin, il faut tracer les segments reliant chaque point et son image par l'homographie lui étant appliquée. Dans tous nos programmes, on utilise les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Par exemple, on relie le point $A(z)$ avec les points $AB(z)$, $AA(z)$ et $AB^{-1}(z)$.

Les programmes

L'élaboration de ces programmes s'est révélée épineuse du fait de la méthode de résolution numérique qui a engendré un recours inévitable aux nombres flottants, et donc des valeurs approchées. Ces dernières ont complexifié le débogage du code en requérant de nombreux tests unitaires, avec GeoGebra ouvert en arrière-plan pour confirmer ou infirmer la cohérence des résultats obtenus. Le découpage des différents sous-problèmes mériterait d'être repris afin de faciliter l'utilisation, et d'avoir une imbrication plus naturelle des fonctions les résolvant.

On a tout d'abord cherché à tracer la droite passant par deux points dans un premier fichier nommé `trace_droite_hyperbolique.py`.

Pour tracer le demi-cercle euclidien passant par deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ et ayant un centre d'ordonnée nulle, on commence par définir le vecteur $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$. On peut ensuite définir un vecteur normal à \overrightarrow{AB} en échangeant les coordonnées de ce dernier et en multipliant par -1 une des coordonnées. En effet, soient $u = (a, b)$ et $v = (-b, a)$ deux vecteurs. On a bien $u \cdot v = a \cdot (-b) + b \cdot a = 0$, comme c'est le cas sur la Figure 4.3.

Maintenant en possession d'un vecteur normal, radial car selon le rayon du cercle recherché, on le divise par sa norme de sorte à obtenir un vecteur unitaire. Partant du milieu du segment euclidien $[AB]$, on ajoute enfin le vecteur normal unitaire calculé tant que l'ordonnée obtenue est positive.

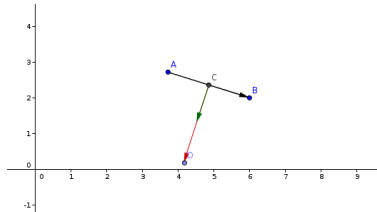


FIGURE 4.3 – En rouge et vert, deux vecteurs orthogonaux au vecteur reliant A à B

Il suffit alors de tracer le cercle ayant pour centre le point d'intersection et pour rayon la distance entre ce point et le point A , qui passe alors également par le point B , comme on le constate sur la figure 4.4. La fonction `points_cercle` retourne l'ensemble des points formés ainsi sous la forme d'une liste.

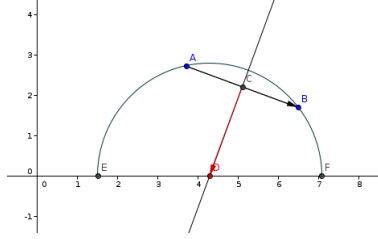


FIGURE 4.4 – La droite hyperbolique obtenue sur GeoGebra

Ce demi-cercle est composé de points d'ordonnées supérieures ou égales à 0, et est centré sur l'axe des abscisses. Pour une abscisse donnée, il existe donc un unique point appartenant à la géodésique ayant cette abscisse. Grâce à cela, on peut facilement tracer le segment entre deux points, en conservant de ce que retourne la fonction `points_cercle` uniquement les points ayant une abscisse comprise entre celle des deux points entre lesquels on souhaite tracer le segment. C'est ce que fait la fonction `points_segment`.

Après cela, on a codé le programme principal de tracé d'orbites appelé `Orbites_demi_plan.py`. On y définit les matrices A et B et leurs inverses grâce au module `numpy`, et à sa fonction `matrix`, qui construit une matrice à partir d'une chaîne de caractères. À partir de maintenant, on pose $C = A^{-1}$ et $D = B^{-1}$ afin de pouvoir les utiliser plus facilement dans le programme. On trouve ces inverses grâce à la fonction `linalg.inv`, du même module.

On détermine ensuite les arrangements de longueur n des quatre matrices à l'aide du module `itertools` et à sa fonction `product`, qui retourne tous les arrangements possibles de nos matrices sous forme de chaîne de caractère.

Pour pouvoir utiliser les mots obtenus, on retransforme les chaînes de caractères en les représentant en liste de matrices, puis on forme une liste de points représentant les sommets de l'orbite. Par la suite, on trace les segments reliant les points présents dans l'orbite grâce à la fonction `trace_segment` (cf. documentation en 6.2.1).

Ce programme a soulevé de nombreuses difficultés et nous a bloquées pendant un long moment à cause d'un problème d'ordre de multiplication des matrices. En effet, au lieu de multiplier les matrices à droite, ce qui permettrait, comme montré en 6.1.5, de composer les homographies, le programme les multipliait à

Le programme principal de tracé d'orbite sur le disque de Poincaré, `Orbites_disque.py`, reprend exactement celui du demi-plan de Poincaré, à quelques modifications près. En effet, pour passer les points dans le disque de Poincaré, il suffit de leur appliquer l'homographie 1.2. En appliquant cette homographie aux matrices obtenues en fin de programme et en utilisant les nouvelles fonctions de tracé décrites ci-dessous, on obtient une manière de tracer les orbites sur le disque de Poincaré, comme sur la Figure 4.6.

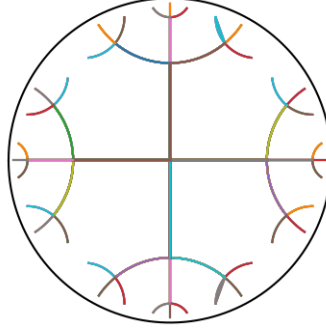


FIGURE 4.6 – Orbite du point 0 par des mots de longueur 3 sur le disque de Poincaré

Pour les tracés sur le disque de Poincaré, dans le fichier `TraceDisque.py`, on reprend la fonction `points_cercle` (c.f. documentation en 6.2.1) qui retourne tous les points d'un demi-cercle de centre et rayon donnés. Dans le programme pour le demi-plan de Poincaré, cette fonction ne retournait qu'un demi-cercle, il a donc suffi de coller deux demi-cercles afin de la faire fonctionner dans le disque de Poincaré.

On a trouvé sur internet une fonction permettant de déterminer le centre d'un cercle passant par deux points, `hyperbolic_circle` [3], n'ayant pas eu le temps de le faire. On a ensuite créé une fonction permettant de tracer les géodésiques sur le disque de Poincaré (`trace_geodesique_disque`). C'est à partir de ces géodésiques qu'il est possible de créer une fonction permettant de tracer les segments entre deux points (`trace_segment_disque`), en ne prenant que les points dont les abscisses sont entre celles des deux points et de même avec les ordonnées.

Cette approximation ne permet pas de tracer les segments entre n'importe quels points, mais fonctionne pour les points utilisés. Par manque de temps, il n'a pas été possible de régler ce problème. Par ailleurs, comme on peut le voir sur la Figure 4.6, certains segments hyperboliques sont reliés par la corde entre les deux points des extrémités. C'est un problème dû au fait que les cercles sont formés à partir de deux demi-cercles collés entre eux, ce qui fait que la liste de points obtenue n'est pas dans le bon ordre (par exemple, au lieu d'avoir les points A, B, C , on a B, C, A , ce qui entraîne le tracé du segment $[CA]$).

On peut remarquer que sur le bord du plan hyperbolique, il existe certains intervalles dans lesquels aucun point de l'orbite ne s'accumule, alors que sur d'autres, ces points peuvent s'accumuler. L'ensemble des points d'accumulation de l'orbite est un Cantor.

On observe sur la Figure 4.6 un pavage du plan hyperbolique par des polygones possédant une infinité d'angles droits. Si on itérait à l'infini (si cela était possible) on obtiendrait ce fameux pavage. Une particularité de ce pavage est donc que les cellules qui le composent sont de surface infinie.

4.4.2 Tracé des domaines fondamentaux

On a mis au point un programme de tracés de médiatrices dans le but de délimiter les domaines fondamentaux de nos tracés. L'objectif est ici de tracer la médiatrice à un segment hyperbolique défini par deux points A et B en entrée. Pour ce faire, on a d'abord besoin de trouver le milieu hyperbolique du segment $[AB]$, ce qui se fait à l'aide de la formule du birapport, en utilisant un point $M(x_M, y_M)$ mobile, se déplaçant sur le demi-cercle euclidien passant par A et B , et en calculant les distances hyperboliques AM et BM jusqu'à ce qu'on ait AM à peu près égal à BM (à une précision réglable). On connaît alors les coordonnées du milieu M de la portion de géodésique, et on peut donc trouver le point d'intersection entre la tangente à la droite hyperbolique (AB) en M et l'axe des abscisses.

En effet, le demi-cercle euclidien correspondant à la droite hyperbolique (AB) a pour équation cartésienne $R^2 = (x - x_{centre})^2 + y^2 \implies y = \sqrt{R^2 - (x - x_{centre})^2}$; avec R le rayon du cercle, et x_{centre} l'abscisse

de son centre, qu'on peut calculer à l'aide du programme précédent. En dérivant l'expression précédente, on obtient $y' = \frac{(x_{centre}-x)}{\sqrt{(x-x_{centre})^2}}$, qui correspond au coefficient directeur de la tangente au demi-cercle en x .

La tangente en M a donc pour équation $y'(x_M).(x-x_M)+y_M$. On cherche à trouver le point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses, donc à résoudre $y'(x_M).(x-x_M)+y_M = 0 \iff x = -\frac{y_M}{y'(x_M)} + x_M$

Une fois connu le point d'intersection $I(x_I, 0)$ de la tangente à la courbe en M et l'axe des abscisses, on peut tracer le demi-cercle euclidien de rayon $[IM]$, qui est une droite hyperbolique, coupant à angle droit la droite (AB) au milieu du segment $[AB]$; il s'agit donc de la médiatrice du segment hyperbolique $[AB]$.

Pour trouver les points d'intersection des médiatrices, il n'a pas été possible de faire un programme par manque de temps. On a donc créé une image de médiatrices avec le programme précédent et trouvé manuellement les points d'intersection de ces médiatrices.

Afin de tracer les domaines fondamentaux à partir de l'orbite, on trace les médiatrices entre le point initial et les quatre points qui l'entourent. On a calculé les points d'intersection des médiatrices avec la méthode expliquée précédemment et tracé leur orbite par nos matrices A, B, C et D . (Fig 4.7).

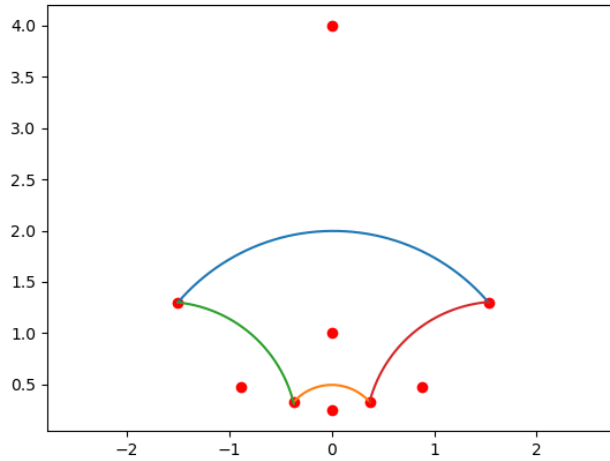


FIGURE 4.7 – Domaine fondamental du point i sur le demi-plan de Poincaré avec les matrices A et B

En représentant les domaines de l'orbite des mots de longueur 2, 3 et 4, on observe un même quadrilatère se répéter à différentes échelles. Ceci est illustré sur les figures 4.8, 4.9 et 4.10.

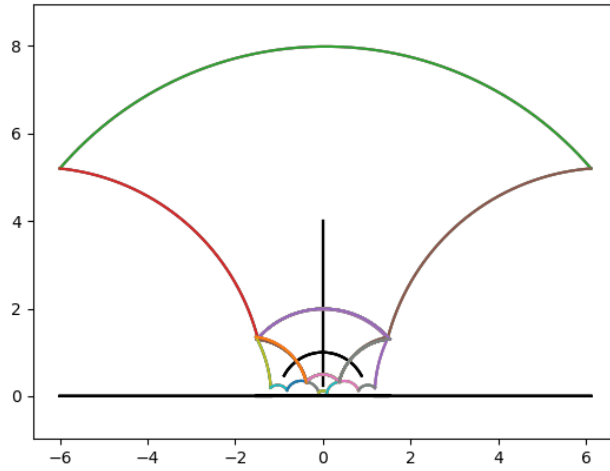


FIGURE 4.8 – Pavage obtenu avec les mots de longueur 1. L'arbre figure en noir

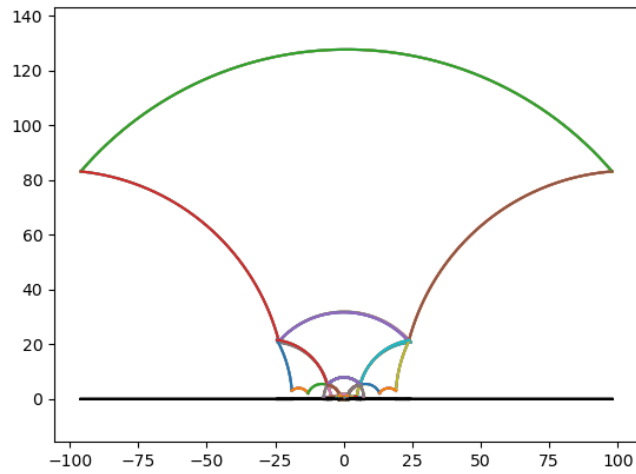


FIGURE 4.9 – Pavage obtenu avec les mots de longueur 4. On observe le même motif que précédemment, mais avec une taille beaucoup plus importante

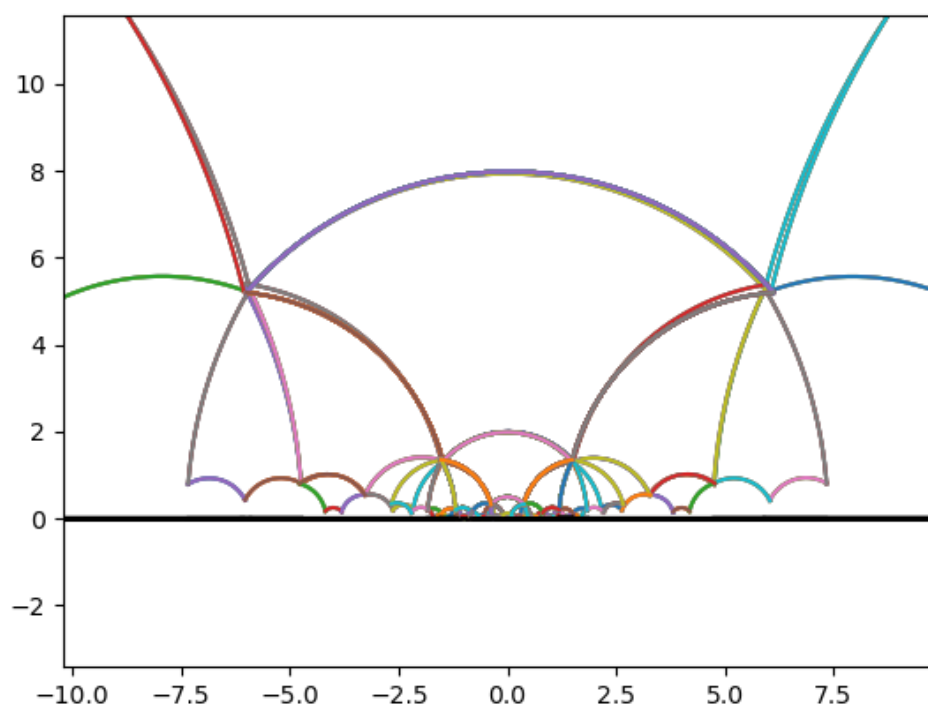


FIGURE 4.10 – Agrandissement du centre de la figure précédente

On n'a pas effectué de pavages de ce type dans le disque de Poincaré par manque de temps, mais une fois la liste des points obtenus, il suffit de leur appliquer la fonction 1.2.

Chapitre 5

Conclusion

Lors de ce projet, nous avons donc exploré la géométrie hyperbolique à travers le disque de Poincaré (\mathbb{D}) et le demi-plan de Poincaré (\mathbb{H}^2), deux représentations du plan hyperbolique, possédant chacune des caractéristiques propres. L'étude de ces plans hyperboliques et des tracés qu'il est possible d'y faire nous a amenées à mieux comprendre les principes d'homographies et d'isométries, ainsi que les orbites, domaines fondamentaux et ensemble de Cantor. Ces notions nous ont permis de tracer des orbites à la fois sur \mathbb{D} et sur \mathbb{H}^2 grâce à des programmes Python, ainsi que leurs domaines fondamentaux sur \mathbb{H}^2 .

Les principales difficultés lors de ce projet ont été la compréhension de nouveaux concepts tel que les orbites ou encore les domaines fondamentaux, à propos desquels les seules informations disponibles sont de niveau master, un niveau que nous n'avons pas. Certaines ressources pouvaient nous être "accessibles" mais pour cela il nous fallait tout de même faire des recherches complémentaires qui pouvaient nous prendre une quantité non négligeable de temps. Par ailleurs, comme ces notions sont assez poussées, le travail de synthèse était d'autant plus difficile. Cependant, grâce à notre encadrant Thierry Coulbois et à nos professeurs, nous avons pu en comprendre les rudiments.

L'autre grande difficulté a été les tracés. En effet, dès le début du projet, il nous a fallu trouver les manières de tracer des figures sur le \mathbb{D} et \mathbb{H}^2 à l'aide de GeoGebra, et il nous a fallu du temps avant de maîtriser ces procédés. Par ailleurs, les programmes permettant de tracer les orbites ont également été problématiques, et certaines erreurs nous ont menées à remanier l'entièreté du code. En outre, la création des droites reliant deux points et des médiatrices a été délicate du fait de la nécessité des approximations numériques. La vérification du bon fonctionnement des programmes en a été rendue plus ardue. Toutefois, le défi que constitue la recherche d'une solution numérique approchée à un problème de tracé géométrique s'est avéré ludique. La démarche de résolution algorithmique du problème, en le découpant en sous-problèmes et en tenant compte des besoins d'utilisation du projet, a été passionnante, bien que méritant encore de nombreuses améliorations pour faciliter l'utilisation du code, pourquoi pas en faisant appel à nos connaissances en programmation objet.

Nous avons aussi eu quelques problèmes quant à la rédaction du rapport. En effet, il a fallu explorer de nombreuses pistes pour améliorer notre compréhension du sujet. Malgré l'intérêt que nous leur portions, nous ne pouvions pas les intégrer à la version finale sous peine de rendre un rapport moins cohérent. Il a donc fallu passer sous silence certaines de nos recherches, notamment sur les ensembles de Julia et de Mandelbrot, et le codage de ce dernier.

Ce projet a été très enrichissant à plusieurs titres : il a permis une découverte des plans hyperboliques, des ensembles de Cantor et de plusieurs outils mathématiques tels que les orbites et les domaines fondamentaux. Grâce à ça, nous avons une nouvelle vision de la géométrie, qui est bien plus riche que ce que nous pouvions imaginer. Il nous a également permis d'expérimenter un projet de longue durée et nous a appris à nous organiser avec autonomie et à effectuer les tâches en avance pour pallier aux imprévus. De plus, nous avons dû apprendre à sélectionner, synthétiser et rendre compréhensibles les résultats que nous avons obtenus.

Finalement, et c'est le plus important, nous nous sommes beaucoup amusées, notamment à jouer avec la complexité de certains concepts mathématiques qui nous rappellent que, à un certain niveau, un non-initié (nous dans ce cas) ne verrait pas la différence entre le texte original et le même texte écrit à l'envers. [4]

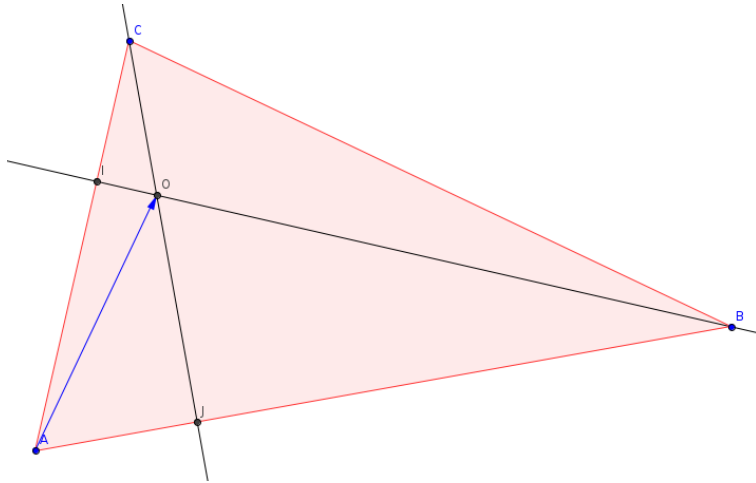
Chapitre 6

Annexes

6.1 Preuves

6.1.1 Concourance des hauteurs dans un triangle

En géométrie euclidienne, on apprend que les hauteurs d'un triangle sont concourantes. Ce résultat se démontre aisément à l'aide du produit scalaire et de la relation de Chasles.



Démonstration. Considérons le triangle ABC. On trace les hauteurs issues de B et C. Montrons que la hauteur issue de A passe bien par le point d'intersection O des deux autres hauteurs, i.e. $\vec{AO} \cdot \vec{BC} = 0$.

À l'aide de la relation de Chasles, on décompose \vec{AO} en $\vec{AJ} + \vec{JO}$. De même pour \vec{BC} qui devient $\vec{BJ} + \vec{JC}$.

On calcule alors $\vec{AO} \cdot \vec{BC}$:

$$(\vec{AJ} + \vec{JO}) \cdot (\vec{BJ} + \vec{JC}) = \vec{AJ} \cdot \vec{BJ} + \vec{AJ} \cdot \vec{JC} + \vec{JO} \cdot \vec{BJ} + \vec{JO} \cdot \vec{JC}.$$

Or, $\vec{AJ} \cdot \vec{JC} = \vec{JO} \cdot \vec{BJ} = 0$ puisque les vecteurs sont orthogonaux, et \vec{AJ}, \vec{BJ} ainsi que \vec{JO}, \vec{JC} étant colinéaires, on a $\vec{AO} \cdot \vec{BC} = -\|\vec{AJ}\| \times \|\vec{BJ}\| + \|\vec{JO}\| \times \|\vec{JC}\|$.

On sait également que $\vec{BO} \cdot \vec{AC} = 0$ i.e. $(\vec{BJ} + \vec{JO}) \cdot (\vec{AJ} + \vec{JC}) = 0 \iff \vec{BJ} \cdot \vec{AJ} + \vec{BJ} \cdot \vec{JC} + \vec{JO} \cdot \vec{AJ} + \vec{JO} \cdot \vec{JC} = 0 \iff -\|\vec{BJ}\| \times \|\vec{AJ}\| + \|\vec{JO}\| \times \|\vec{JC}\| = 0$, ce qui correspond au résultat trouvé précédemment. On en conclut que $\vec{AO} \cdot \vec{BC} = 0$, ce qui équivaut à dire que la hauteur en A passe par O, le point d'intersection des deux autres hauteurs. Les hauteurs d'un triangle en géométrie euclidienne sont par conséquent bien concourantes.

□

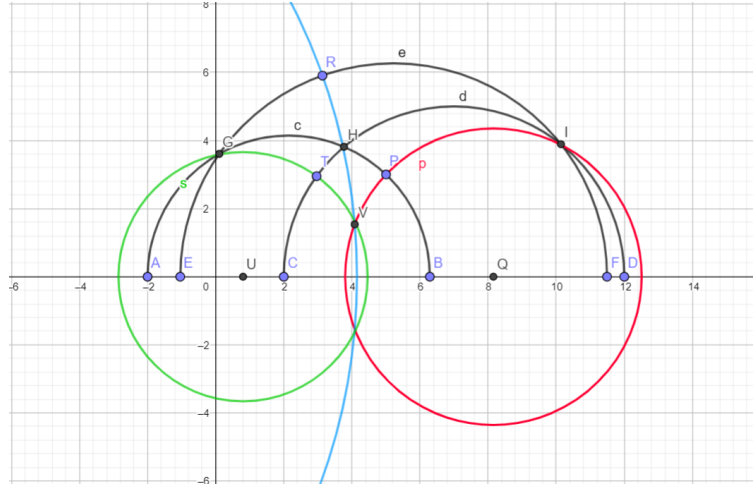


FIGURE 6.1 – Concourance des hauteurs (en couleur) du triangle GHI en géométrie hyperbolique

6.1.2 Homographies entre le disque de Poincaré et le demi-plan de Poincaré

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{H}^2$ tel que $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$.

Montrons que l'image de z par l'homographie 1.2, qui permet de passer du demi-plan de Poincaré au disque de Poincaré, est dans le disque de Poincaré.

On applique donc à z l'homographie 1.2 et on cherche son module :

$$\left| \frac{iz + 1}{z + i} \right| = \frac{|iz + 1|}{|z + i|} = \frac{|ai - b + 1|}{|a + (1 + b)i|} = \frac{\sqrt{a^2 + (1 - b)^2}}{\sqrt{a^2 + (1 + b)^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + 1 - 2b + b^2}{a^2 + 1 + 2b + b^2}}$$

$$\text{Or } b > 0 \iff 2b > -2b \iff a^2 + 1 - 2b + b^2 < a^2 + 1 + 2b + b^2 \iff \frac{a^2 + 1 - 2b + b^2}{a^2 + 1 + 2b + b^2} < 1 \iff \left| \frac{iz + 1}{z + i} \right| < 1$$

Donc l'image de z par l'homographie 1.2 est bien dans le disque de Poincaré.

Soit $z \in \mathbb{D}$ tel que $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$), alors $|z| = z\bar{z} < 1$.

Montrons que la partie imaginaire de l'image de z par l'homographie 1.1, qui permet de passer de \mathbb{D} à \mathbb{H}^2 est strictement supérieure à 0.

On applique à z l'homographie 1.1 :

$$Z = \frac{-iz + 1}{z - i} = \frac{(-iz + 1)(\bar{z} + i)}{(z - i)(z + i)} = \frac{-iz\bar{z} + z + \bar{z} + i}{z\bar{z} + iz - i\bar{z} + 1}$$

Donc

$$\Im(Z) = \frac{1 - z\bar{z}}{1 + z\bar{z} - 2b}$$

Or $z\bar{z} < 1$ selon les hypothèses, et $1 + z\bar{z} - 2b = a^2 + (b - 1)^2$ donc $\Im(Z) > 0$.

Donc Z est dans le demi-plan de Poincaré. □

6.1.3 La rotation par un angle θ est une isométrie

Démonstration. Soit $\theta \in [-\pi, \pi]$, on considère la fonction $z \mapsto e^{i\theta} z$.

Celle-ci peut aussi s'écrire sous la forme $z \mapsto \frac{e^{\frac{i\theta}{2}} z + 0}{0z + e^{-\frac{i\theta}{2}}}$.

On sait que dans le disque de Poincaré, les matrices associées aux isométries s'expriment sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ [2]}$$

Ici, $\alpha = e^{\frac{i\theta}{2}}$ et $\beta = 0$. $z \mapsto e^{i\theta} z$ est donc une isométrie. □

6.1.4 Tracé de polygone régulier à angles droits dans le disque de Poincaré

Démonstration. Soit X un polygone régulier euclidien à n côtés avec $4 < n$ et de centre A.

A peut être découpé en n triangles isocèles tous égaux (exemple sur la Figure 6.2), et l'angle au centre d'un triangle composant X est toujours égal à $\frac{360}{n}$ [20].

On sait que, en géométrie euclidienne, la somme des angles d'un triangle est égale à 180° . On en déduit que pour un triangle ABC en A, $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{180 - \frac{360}{n}}{2}$

Or l'angle à un sommet de X est la somme de deux angles de triangles isocèles identiques à ABC. Soient D, E, F trois sommets du polygone, on a donc :

$$\widehat{DEF} = \widehat{DEA} + \widehat{AEF} = 2\widehat{ABC} = 2 \frac{180 - \frac{360}{n}}{2} = 180(1 - \frac{2}{n})$$

Or $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante pour $n \geq 1$ donc pour tout $n > 4$:

$$\widehat{DEF} > 180(1 - \frac{2}{4}) \quad (6.1)$$

$$\Leftrightarrow \widehat{DEF} > 90^\circ \quad (6.2)$$

On a donc montré que, sur le plan euclidien, tout polygone d'au moins cinq côtés a des angles strictement supérieurs à 90° . Par ailleurs, un polygone du disque de Poincaré de rayon infinitésimal est équivalent à un polygone euclidien. Donc pour tout $n > 4$, il existe un polygone sur le disque de Poincaré dont les angles au sommet sont strictement supérieurs à 90° .

Par ailleurs, lorsque la longueur des rayons d'un polygone tend vers l'infini, les angles aux sommets de ce polygone tendent vers 0, dit "idéal" (exemple Fig. 6.3).

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout polygone régulier d'au moins cinq côtés, il existe une longueur de rayon telle que le polygone est rectangle

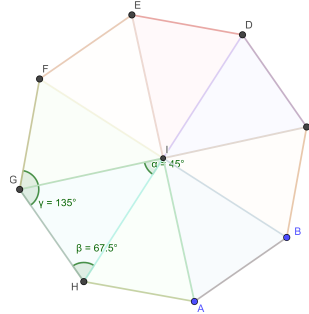


FIGURE 6.2 – Heptagone régulier

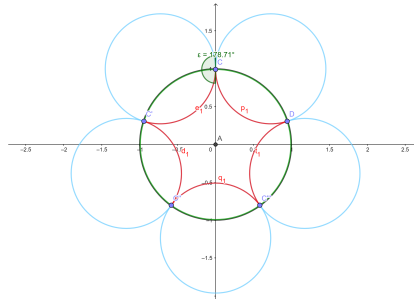


FIGURE 6.3 – Pentagone dont la longueur des côtés tend vers l'infini

□

6.1.5 Composer deux homographies revient à multiplier les matrices associées

Démonstration. Soient $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ et $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ et $z \mapsto \frac{ez+f}{gz+h}$

La matrice associée à φ est $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
 tandis que celle associée à ψ est $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$
 Soit $z \in \mathbb{C}$

$$\psi \circ \varphi(z) = \psi \left(\frac{az+b}{cz+d} \right) \quad (6.3)$$

$$= \frac{e \left(\frac{az+b}{cz+d} \right) + f}{g \left(\frac{az+b}{cz+d} \right) + h} \quad (6.4)$$

$$= \frac{\frac{eaz+eb}{cz+d} + f}{\frac{gaz+gb}{cz+d} + h} \quad (6.5)$$

$$= \frac{\left(\frac{eaz+eb+fcz+fd}{cz+d} \right)}{\left(\frac{gaz+gb+hc z+hd}{cz+d} \right)} \quad (6.6)$$

$$= \left(\frac{eaz+eb+fcz+fd}{cz+d} \right) \left(\frac{cz+d}{gaz+gb+hc z+hd} \right) \quad (6.7)$$

$$= \frac{eaz+eb+fcz+fd}{gaz+gb+hc z+hd} \quad (6.8)$$

$$= \frac{(ea+fc)z + (eb+fd)}{(ga+hc)z + (gb+hd)} \quad (6.9)$$

La matrice associée à $\psi \circ \varphi$ est : $\begin{pmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ag+hc & gb+hd \end{pmatrix}$. Or $BA = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ag+hc & gb+hd \end{pmatrix}$
 Composer ψ par φ revient à multiplier la matrice associée à ψ par celle associée à φ

□

6.1.6 Être une homographie hyperbolique est équivalent à avoir 2 points fixes réels.

Montrons qu'être une homographie hyperbolique implique d'avoir deux points fixes réels.

Soit φ une homographie hyperbolique. il existe M une matrice hyperbolique associée à φ tel que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. $\forall z \in \mathbb{C} \varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$
 On cherche si φ a des points fixes :

$$\frac{az+b}{cz+d} = z \iff az+b = cz^2 + dz \iff 0 = cz^2 + (d-a)z - b$$

On reconnaît une équation du second degré de discriminant :

$$\Delta = (d-a)^2 - 4c(-b) = (d-a)^2 + 4cb$$

Comme M est une matrice hyperbolique, son déterminant est égal à 1. On a comme relation $ad - cb = 1 \iff cb = ad - 1$ on a donc

$$\Delta = (d-a)^2 + 4ad - 4 \quad (6.10)$$

$$= d^2 - 2ad + a^2 + 4ad - 4 \quad (6.11)$$

$$= d^2 + 2ad + a^2 - 4 \quad (6.12)$$

$$= (d+a)^2 - 4 \quad (6.13)$$

La trace de M est strictement supérieure à 2 donc $a + d > 2 \implies (a + d)^2 > 4$ car $x \mapsto x^2$ est une fonction croissante sur \mathbb{R}_+

$\Delta > 0$, il y a donc deux solutions réelles à l'équation, soit deux points fixes réels.

Montrons qu'être une homographie avec deux points fixes réels implique d'être hyperbolique.

Soit φ une homographie. il existe M une matrice associée à φ tel que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tel que $\det(M) = ad - cb = 1$. $\forall z \in \mathbb{C} \varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$
On suppose que $\varphi(z)$ possède deux points fixes réels, donc :

$$\Delta = (d - a)^2 + 4cb > 0 \quad (6.14)$$

$$\implies d^2 - 2ad + a^2 + 4cb > 0 \quad (6.15)$$

$$\implies d^2 + 2ad + a^2 + 4cb > +4ad \quad (6.16)$$

$$\implies d^2 + 2ad + a^2 > 4(ad - cb) \quad (6.17)$$

$$\implies (d + a)^2 > 4(ad - cb) \quad (6.18)$$

$$\implies d + a > 2\sqrt{ad - cb} \quad (6.19)$$

$$(6.20)$$

Or $ad - cb = 1$ donc $d + a > 2\sqrt{1} = 2$.

Donc la trace de la matrice est supérieure à deux, l'homographie à laquelle elle est associée est donc hyperbolique. \square

6.1.7 Représentation des éléments de $C(3)$

Tout élément de $C(3)$ possède une unique forme triadique ne comportant que des "0" et des "2".

Démonstration. Commençons par l'unicité de la forme :

Soit $x \in C(3)$. Supposons par l'absurde que x admet deux écritures différentes dans sa forme triadique :

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \text{ et } x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i} \text{ avec } a_i, b_i \in \{0, 2\}.$$

Soit n le plus petit entier tel que $a_i \neq b_i$ et supposons, par exemple $a_n = 0$ et $b_n = 2$. On a alors d'une part, avec l'écriture avec a_i :

$$x \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{3^i} + \frac{0}{3^n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^k}$$

$$\text{or, } \frac{0}{3^n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^k} = \frac{1}{3^n}$$

Donc,

$$x \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^n}$$

Et d'autre part, avec l'écriture avec les b_i on a :

$$x \geq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{3^i} + \frac{2}{3^n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{0}{3^k} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{3^i} + \frac{2}{3^n}$$

On a donc une contradiction. [16]

Faisons une preuve par des exemples :

Démonstration. Montrons que $0,1111\dots|_3$ ne fait pas partie de $C(3)$:

$$0,1111\dots|_3 = 1.3^{-1} + 1.3^{-2} + \dots + 1.3^{-n} + \dots \quad (6.21)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad (6.22)$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad (6.23)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \text{ (par somme géométrique)} \quad (6.24)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}} \quad (6.25)$$

$$= \frac{1}{2} \quad (6.26)$$

Or $\frac{1}{2} \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$ et par construction de l'ensemble de Cantor triadique $\frac{1}{2} \notin C(3)$. Donc, $0,1111\dots|_3 \notin C(3)$.

— Montrons que $0,1|_3 = 0,02222\dots|_3$ fait partie de $C(3)$:

$$0,02222\dots|_3 = 0.3^{-1} + 2.3^{-2} + \dots + 2.3^{-n} + \dots \quad (6.27)$$

$$= 2 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad (6.28)$$

$$= 2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \quad (6.29)$$

$$= 2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \text{ (par somme géométrique)} \quad (6.30)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}} \quad (6.31)$$

$$= \frac{1}{3} \quad (6.32)$$

Et, par construction de l'ensemble de Cantor triadique $\frac{1}{3} \in C(3)$, puisque tout point qui est au bord d'un intervalle reste dans Cantor et $I_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Donc, $0,02222\dots|_3 \in C(3)$.

6.2 Programmes Python

Les programmes mentionnés dans ce rapport sont disponibles à l'adresse suivante : [page GitHub](#), et sont fournis avec le rapport.

6.2.1 Tracé de géodésique

Documentation

NAME

trace_droite_hyperbolique

FUNCTIONS

intersection_geodesique_abscisse(pointA: tuple, pointB: tuple, precision=0.01)

Prend deux couples de coordonnées en entrée et renvoie un tuple (centre[0], R), avec centre[0] l'abscisse du centre du cercle et R son rayon.

Attention, ce programme est conçu pour des points dans le demi-plan de Poincaré !

norme(vecteur: tuple)

Prend un couple de coordonnées représentant un vecteur en deux dimensions et renvoie sa norme

```
points_cercle(abscisse_centre: float, rayon: float, nombre_points=100)
    Renvoie deux listes contenant les coordonnees selon x et y des points d'un cercle
    de centre et de rayon donnés
```

```
trace_segment(A: tuple, B: tuple):
    Trace le segment hyperbolique entre les points A et B, avec A et B des tuples
```

Images générées

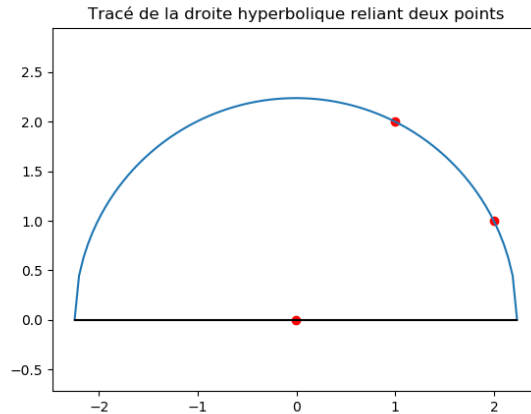


FIGURE 6.4 – Résultat : droite support de géodésique reliant deux points

6.2.2 Tracé de médiatrice

Documentation

L'objectif de ce programme est de tracer la médiatrice à un segment en géométrie hyperbolique.

DONNÉES EN ENTRÉE :

- * deux couple de coordonnées des points A et B dans le demi-plan de Poincaré

RÉSULTAT :

- * un couple (c, R) , avec c la position du centre du cercle sur l'axe des abscisses et R le rayon du cercle, qui sont ensuite traités avec la bibliothèque Matplotlib pour tracer la droite hyperbolique correspondante

ÉTAPES SUCCESSIVES :

- * on trouve le milieu M du segment AB à l'aide de la formule du birapport
- * on calcule l'équation de la tangente à la courbe à l'aide de l'équation du demi-cercle (dont on connaît le rayon et la position du centre grâce au programme de tracé de droite hyperbolique)
- * on calcule la position c du point d'intersection entre la tangente à la droite hyperbolique en M et l'axe des abscisses
- * on trace le cercle de centre c et de rayon $\text{eucli}(c, M)$ (distance euclidienne entre c et M)

Bonne lecture !

Modules

- * math
- * matplotlib.pyplot
- * trace_droite_hyperbolique

Functions

```
birapport(pointA: tuple, pointB: tuple)
    prend deux couples de coordonnées pointA et pointB en entrée et renvoie la distance hyperbolique
    entre pointA et pointB

coef_directeur_tangente_cercle(x: float, abscisse_centre: float, rayon: float)
    prend une abscisse d'un point du cercle et renvoie le coefficient directeur de la
    tangente à la courbe

equation_cercle(x: float, abscisse_centre: float, rayon: float)
    prend une abscisse et renvoie l'ordonnée d'un point du cercle

eucli(A: tuple, B: tuple)
    renvoie la distance euclidienne entre deux points exprimés en couples de coordonnées (tuple)

intersection_tangenteM_abscisses(pointA: tuple, pointB: tuple)
    prend en entrée les coordonnées de deux points pointA et pointB, et calcule l'intersection
    entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe au milieu pointM du segment
    hyperbolique [AB]
    renvoie ensuite la position du point d'intersection ainsi que la distance
    entre pointM et ce point

    abscisse_centre = trace_droite_hyperbolique
    .intersection_geodesique_abscisse(pointA, pointB, precision = 0.01)[0]

    rayon = trace_droite_hyperbolique
    .intersection_geodesique_abscisse(pointA, pointB, precision = 0.01)[1]

    la tangente au point M(x_m, y_m) d'un cercle a pour équation  $y'(x_m) * (x - x_m) + y_m$ ,
    avec  $y'(x_m) = \text{coef\_directeur\_tangente\_cercle}(x_m, \text{abscisse\_centre}, \text{rayon})$ 
    On résout alors  $y'(x_m) * (x - x_m) + y_m = 0$  ssi  $x = -y_m / y'(x_m) + x_m$ 

milieu_AB(pointA: tuple, pointB: tuple)
    prend deux points pointA et pointB en entrée, récupère les coordonnées des points
    sur la portion de droite hyperbolique entre pointA et pointB et y fait évoluer un point M
    jusqu'à ce que  $\text{birapport}(\text{pointA}, M) \approx \text{birapport}(\text{pointB}, M)$ 

points_mediatrice(pointA: tuple, pointB: tuple, nombre_points=100, precision=0.01)
    prend en entrée les points pointA et pointB et renvoie deux listes contenant respectivement
    les abscisses et les ordonnées des nombre_points du cercle (en subdivision régulière)
```

Précision des résultats

La fonction `intersection_geodesique_abscisse` prend en argument un paramètre `precision` qui est relié au nombre de chiffres significatifs de la valeur de position renvoyée. En effet, lors de la recherche du point d'intersection entre la médiatrice aux deux points en entrée et l'axe des abscisses, le vecteur unitaire normal est multiplié par la précision avant ajout. Une précision de 0.01 donne donc un résultat précis à 0.001 près.

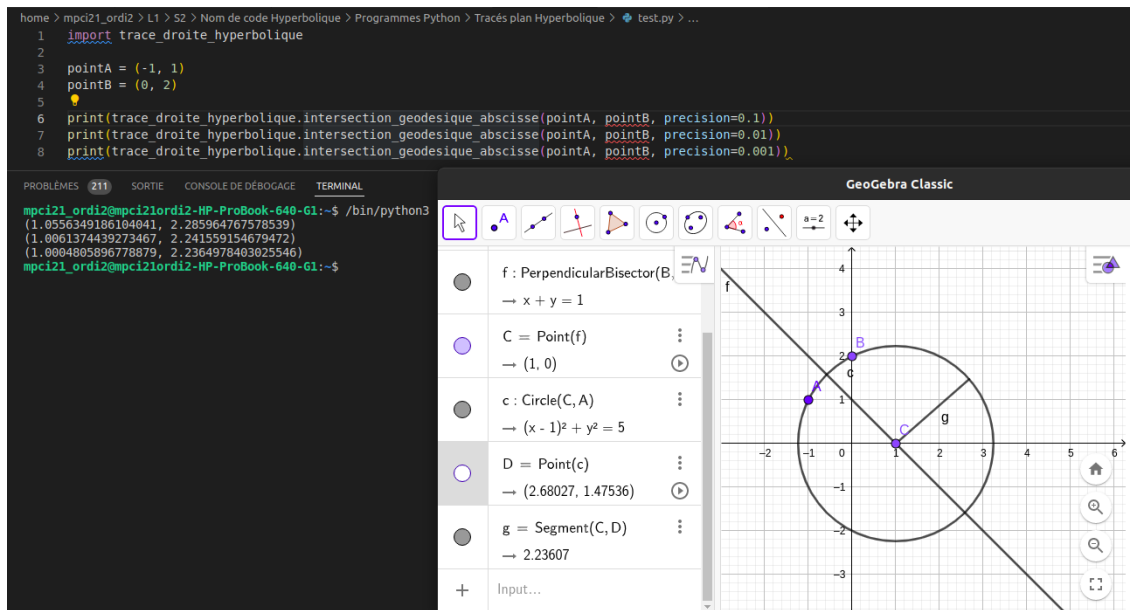


FIGURE 6.5 – Résultats obtenus en traçant la géodésique reliant A (-1, 1) à B (0, 2)

Images générées

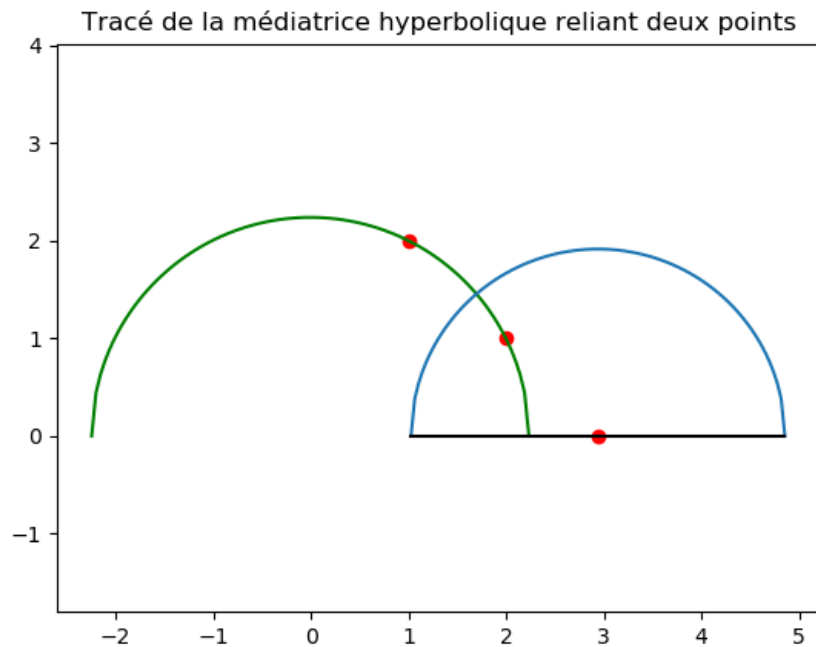


FIGURE 6.6 – La droite bleue est la médiatrice de la droite verte

6.2.3 Tracés d'orbites

TraceDisque
Modules
* math
* matplotlib.pyplot

Functions

`determinant(zA, zB, precision=1e-12)`

renvoie le déterminant des points zA et zB avec une précision donnée

`hyperbolic_circle(zA, zB, precision=1e-15)`

retourne le centre et le rayon de la géodésique passant par deux points sur le disque de Poincaré

`points_cercle_disque(abscisse_centre, ordonnee_centre, rayon, nombre_points=10000)`

Renvoie deux listes contenant les coordonnées selon x et y des points d'un cercle de centre et de rayon donnés

`points_segment_disque(abscisse_centre, ordonnee_centre, rayon, zA, zB, nombre_points=10000)`

Renvoie deux listes contenant les coordonnées selon x et y des points d'un cercle de centre et de rayon donnés

`trace_disque()`

trace le disque de rayon unité

`trace_geodesique_disque(zA, zB)`

trace la géodésique entre deux nombres imaginaires zA et zB donnés

`\trace_segment_disque(zA, zB)`

trace le segment entre deux nombres imaginaires zA et zB donnés

Bibliographie

- [1] Ferdinand CHOVANEC. *Cantor Sets*. Engliash. Mars 2010. URL : https://www.researchgate.net/publication/228747023_Cantor_sets.
- [2] Daniel CORAY. « Géométries non-euclidiennes ». In : *Présentation de la géométrie d'Eudoxe à Poincaré*. original-date : 2008. HERMANN. ISBN : 2 7056 6826 6.
- [3] *Dépôt GitHub de renaudTh - Overview*. en. URL : <https://github.com/renaudTh> (visité le 04/05/2022).
- [4] Bruno DESPRÉS et François DUBOIS. *Systèmes hyperboliques de lois de conservation : application à la dynamique des gaz*. Mathématiques appliquées. Palaiseau : [Paris] : Ecole polytechnique ; Diffusion, Ellipses, 2005. ISBN : 9782730212533.
- [5] S. V. DUZHIN et B. D. CHEBOTAREVSKIĬ. « Transformation groups for beginners ». eng. In : Student mathematical library v. 25. OCLC : ocm55016424. Providence, R.I : American Mathematical Society, 2004, p. 152. ISBN : 9780821836439.
- [6] *English : en :Triangular tiling with 6-color triangles, all vertices have all 6 colors, but order changes. It is made from {3,6}_1,1 toroidal symmetry*. Fév. 2017. URL : https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Triangular_tiling-6-coloring.png (visité le 12/05/2022).
- [7] *English : Hexagonal tiling rotational symmetry coloring*. Fév. 2014. URL : https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hexagonal_tiling_7-colors.svg (visité le 12/05/2022).
- [8] *English : Rectified square tiling*. Oct. 2021. URL : https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Rectified_square_tiling.svg (visité le 12/05/2022).
- [9] *Ensemble de Cantor*. fr. Page Version ID : 190851097. Fév. 2022. URL : https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Ensemble_de_Cantor&oldid=190851097 (visité le 12/05/2022).
- [10] *Fundamental domain - Encyclopedia of Mathematics*. URL : https://encyclopediaofmath.org/wiki/Fundamental_domain (visité le 29/04/2022).
- [11] *Géodésique*. fr. Page Version ID : 193280559. Avr. 2022. URL : <https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=G%C3%A9od%C3%A9sique&oldid=193280559> (visité le 12/05/2022).
- [12] *Groupes et géométrie - orbites*. fr-FR. URL : <https://www.youtube.com/watch?v=ZvuSRyIwjJc> (visité le 04/04/2022).
- [13] *Images des mathématiques*. URL : <https://images.math.cnrs.fr/Ceci-n-est-pas-une-geodesique?lang=fr> (visité le 28/04/2022).
- [14] *Images des mathématiques*. URL : <https://images.math.cnrs.fr/Une-chambre-hyperbolique.html?lang=fr> (visité le 28/04/2022).
- [15] *Images des mathématiques*. URL : <https://images.math.cnrs.fr/Ringworld.html?lang=fr> (visité le 28/04/2022).
- [16] *L'ensemble triadique de Cantor*. URL : <https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~perrin/enseignement/Cantor.pdf>.
- [17] Éditions LAROUSSE. *Définitions : pavage - Dictionnaire de français Larousse*. fr. URL : <https://www.larousse.fr/dictionnaires/francais/pavage/58788> (visité le 30/04/2022).
- [18] Jean-Pierre LUMINET. *L'univers chiffonné*. fre. Éd. rev. et augm. Folio 449. Paris : Gallimard, 2005. ISBN : 9782070300525.
- [19] *Orbites et stabilisateurs*. URL : <https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./o/orbite.html> (visité le 29/04/2022).

- [20] PIGER-LESMATHS. *Polygones Réguliers*. fr-fr. Juill. 2016. URL : <https://www.piger-lesmaths.fr/polygone-regulier/> (visité le 30/04/2022).
- [21] Henri POINCARÉ, Étienne GHYS et Jules VUILLEMIN. « Deuxième partie : L'espace ». fre. In : *La science et l'hypothèse*. Nouvelle éd. Champs. Paris : Flammarion, 2017. ISBN : 9782081404366.
- [22] *Poincaré half-plane model*. en. Page Version ID : 1081751961. Avr. 2022. URL : https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Poincar%C3%A9_half-plane_model&oldid=1081751961.
- [23] Parcly TAXEL et modifiée par Léa HOUOT. English. Jan. 2020. URL : https://wikimonde.com/article/G%C3%A9om%C3%A9trie_hyperbolique.
- [24] Rossana TAZZIOLI. *Images des mathématiques*. 2015. URL : <https://images.math.cnrs.fr/Les-geometries-non-euclidiennes-Histoire-et-historiographie.html?lang=fr> (visité le 28/04/2022).
- [25] *The Devil's Staircase / Infinite Series*. fr-FR. URL : <https://www.youtube.com/watch?v=dQXVn7pFsVI> (visité le 09/05/2022).
- [26] « The modular group and the fundamental domain ». English. In : mars 2019.
- [27] Marc TROYANOV. « Chapitre 5 : transformations affines et isométries ». fre. In : *Cours de géométrie*. Enseignement des mathématiques. Lausanne [Paris] : Presses polytechniques et universitaires romandes [diff. Geodif], 2009, p. 173-212. ISBN : 9782880748173.

Mots-clés :

Géométrie ; Hyperbolique ; Pavages ; Ensemble de Cantor ; Orbites

Résumé du projet

Dans ce projet, nous nous intéressons aux isométries du plan hyperbolique à travers deux de ses représentations : le demi-plan et le disque de Poincaré. Nous appliquons des homographies hyperboliques à un point et traçons l'orbite afin de représenter un arbre, qui comporte un motif fractal sur le bord du demi-plan de Poincaré, rappelant les motifs générés par l'ensemble triadique de Cantor. En représentant également les médiatrices des géodésiques reliant les points des orbites, nous obtenons finalement un pavage à partir d'un domaine fondamental, qui ne recouvre pas l'intégralité du plan et dont certaines cellules sont de surface infinie.