Bài tập về nhà môn Cấu trúc dữ liệu và thuật toán

Bài 2.1

Chứng minh rằng:

$$n! = o\left(n^n\right)$$
$$n! = \omega\left(2^n\right)$$
$$\lg(n!) = \Theta(n \lg n)$$

trong đó $\lg n = \log_2 n$.

Bài 2.2

Cho $p(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i$, trong đó $a_d > 0$, là một đa thức bậc d theo n, và cho k là một hằng số. Sử dụng định nghĩa của các ký hiệu tiệm cận để chứng minh các tính chất sau:

a. Nếu $k \geq d$, thì $p(n) = O(n^k)$.

b. Nếu $k \leq d$, thì $p(n) = \Omega(n^k)$.

c. Nếu $k = d$, thì $p(n) = \Theta(n^k)$.

d. Nếu $k > d$, thì $p(n) = o(n^k)$.

e. Nếu $k < d$, thì $p(n) = \omega(n^k)$.

Bài 2.3

Cho mỗi cặp biểu thức (A, B) trong bảng dưới đây, hãy chỉ ra liệu A là O, o, Ω, ω, hay Θ của B. Giả sử rằng $k \geq 1$, $\epsilon > 0$, và $c > 1$ là các hằng số. Viết câu trả lời của bạn dưới dạng bảng với "yes" hoặc "no" trong mỗi ô.

A	B	O	o	Ω	ω	Θ
$\lg^k n$	n^ϵ					
n^k	c^n					
$\sqrt{n}$	$n^{\sin n}$					
2^n	$2^{n/2}$					
$n^{\lg^c n}$	$c^{\lg n}$					
$\lg(n!)$	$\lg(n^n)$					

Bài 2.4

a. Sắp xếp các hàm sau theo thứ tự tăng dần. Cụ thể, hãy tìm một sắp xếp $g_1, g_2, \ldots, g_{30}$ của các hàm thỏa mãn $g_1 = \Omega(g_2), g_2 = \Omega(g_3), \ldots, g_{29} = \Omega(g_{30})$. Phân chia danh sách của bạn thành các lớp tương đương sao cho các hàm $f(n)$ và $g(n)$ thuộc cùng một lớp nếu và chỉ nếu $f(n) = \Theta(g(n))$.

$$\begin{array}{cccccc}
\lg(\lg^* n) & 2^{\lg^* n} & \left(\sqrt{2}\right)^{\lg n} & n^2 & n! & (\lg n)! \\
\left(\frac{3}{2}\right)^n & n^3 & \lg^2 n & \lg(n!) & 2^{2^n} & n^{1/\lg n} \\
\ln \ln n & \lg^* n & \lg^* n \cdot 2^n & n^{\lg n} & \ln n & 1 \\
2^{\lg n} & (\lg n)^{\lg n} & e^n & 4^{\lg n} & (n+1)! & \frac{1}{\sqrt{\lg n}} \\
\lg^*(\lg n) & 2^{\sqrt{2 \lg n}} & n & 2^n & n \lg n & 2^{2^n+1}
\end{array}$$

b. Hãy đưa ra một ví dụ về một hàm không âm $f(n)$ sao cho đối với tất cả các hàm $g_i(n)$ trong phần (a), $f(n)$ không là $O(g_i(n))$ và cũng không là $\Omega(g_i(n))$.

Bài 2.5

Cho $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm số dương tiệm cận. Hãy chứng minh hoặc bác bỏ từng giả thuyết sau:

a. $f(n) = O(g(n))$ suy ra $g(n) = O(f(n))$.

b. $f(n) + g(n) = \Theta(\min\{f(n), g(n)\})$.

c. $f(n) = O(g(n))$ suy ra $\lg f(n) = O(\lg g(n))$, trong đó $\lg g(n) \geq 1$ và $f(n) \geq 1$ với mọi n đủ lớn.

d. $f(n) = O(g(n))$ suy ra $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$.

e. $f(n) = O((f(n))^2)$.

f. $f(n) = O(g(n))$ suy ra $g(n) = \Omega(f(n))$.

g. $f(n) = \Theta(f(n)/2)$.

h. $f(n) + o(f(n)) = \Theta(f(n))$.

Bài 2.6

Cho $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm số dương tiệm cận. Hãy chứng minh các đồng nhất thức sau:

a. $\Theta(\Theta(f(n))) = \Theta(f(n))$.

b. $\Theta(f(n)) + O(f(n)) = \Theta(f(n))$.

c. $\Theta(f(n)) + \Theta(g(n)) = \Theta(f(n) + g(n))$.

d. $\Theta(f(n)) \cdot \Theta(g(n)) = \Theta(f(n) \cdot g(n))$.

e. Chứng minh rằng đối với bất kỳ hằng số thực $a_1, b_1 > 0$ và các hằng số nguyên k_1, k_2, thì giới hạn tiệm cận sau là đúng:

$$(a_1 n)^{k_1} \lg^{k_2}(a_2 n) = \Theta(n^{k_1} \lg^{k_2} n).$$