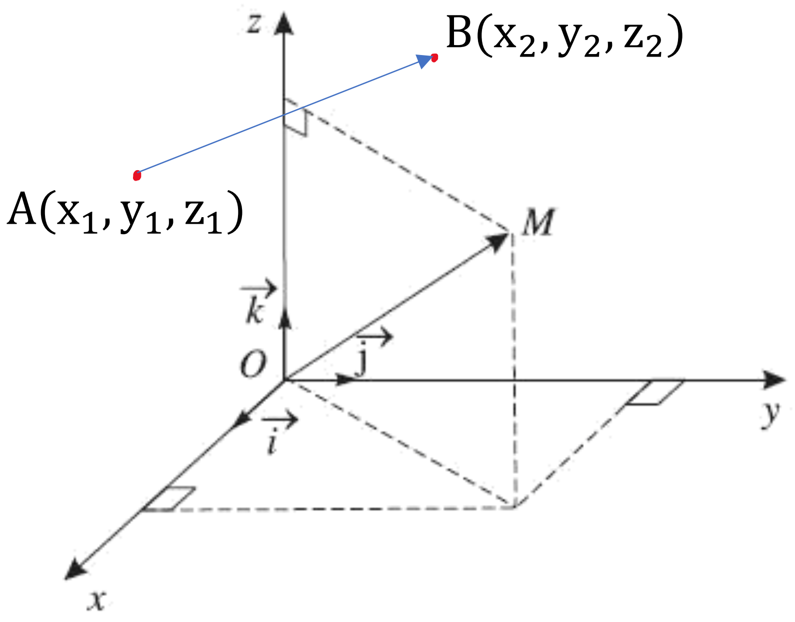
Chương 4
Giải tích vectơ

1. Vector trong không gian 2, 3 chiều
2. Hàm vô hướng, hàm vector và trường
3. Đạo hàm của hàm vô hướng, hàm vector
4. Gradient của trường vô hướng, đạo hàm theo hướng
5. Divergence và độ xoắn của trường vector

1. Vector trong không gian 2, 3 chiều



- $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$
- Mỗi điểm $M(x, y, z)$có thể đồng nhất với véc tơ $\boldsymbol{r}$ có điểm đầu là gốc tọa độ $(0\ 0, 0)$ và M là điểm cuối.

1. Vector trong không gian 2, 3 chiều

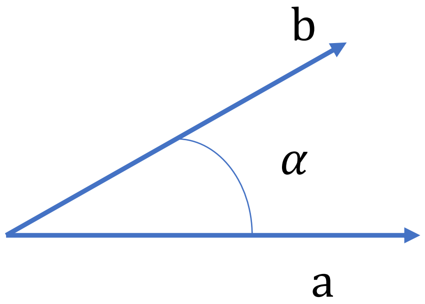
1.1. Nhắc lại về tích vô hướng (tích trong) của hai vector

$$(a, b) = \|a\|\|b\|cos\alpha$$

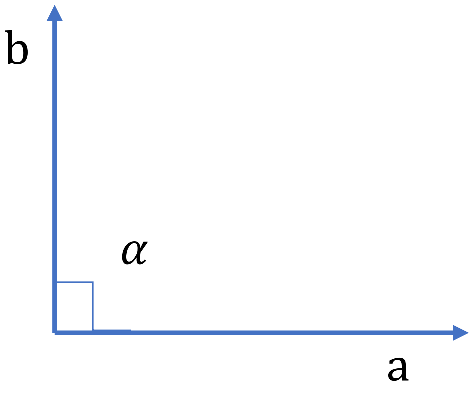
Với α là góc giữa hai vector a và b, khi đó $\alpha \in (0, \pi)$

Do đó góc giữa hai vector thoả mãn

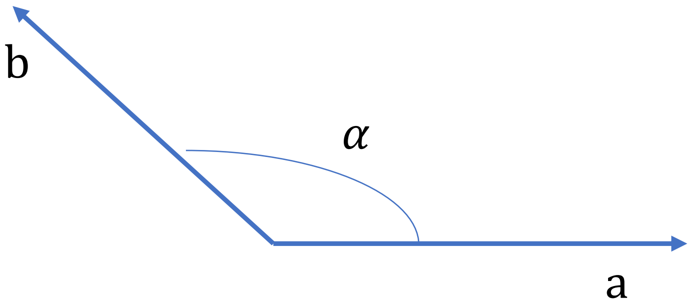
$$\cos\alpha = \frac{(a, b)}{\|a\|\|b\|}$$



$(\mathrm{a}, \mathrm{b}) > 0$



$(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = 0$



$(\mathrm{a}, \mathrm{b}) < 0$

1.1. Nhắc lại về tích vô hướng (tích trong) của hai vector

Một số tính chất quan trọng của tích vô hướng.

- $(a+b, c) = (a, c) + (b, c)$ $\quad$ (Tính chất phân phối)
- $|(a, b)| \leq \|a\| \, \|b\|$ $\quad$ (Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz)

Ngoài ra ta có:

- $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$ (Bất đẳng thức tam giác)
- $\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)$ $\quad$ (Đẳng thức hình bình hành)

1. Vector trong không gian 2, 3 chiều

1.1. Nhắc lại về tích vô hướng (tích trong) của hai vector

Ví dụ về ứng dụng của tích vô hướng

Công thực hiện của một lực $\vec{F}$ được biểu thị như một tích vô hướng:

$$\vec{S} = \overrightarrow{OB}$$

$$A = (\vec{F}, \vec{S}) = FScos\boldsymbol{\alpha}$$

1.2. Tích chéo (tích ngoài) của hai vector

Định nghĩa: Trong R^3, cho hai vector $\mathrm{a} = (\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3), \mathrm{b} = (\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \mathrm{b}_3)$. Khi đó ta định nghĩa tích chéo (tích ngoài) của hai vector a, b là một vector, ký hiệu là $\mathrm{a}\times\mathrm{b}$, có 3 thành phần lần lượt như sau:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{a}_2 & \mathrm{a}_3 \\ \mathrm{b}_2 & \mathrm{b}_3 \end{vmatrix} = \mathrm{a}_2\mathrm{b}_3 - \mathrm{a}_3\mathrm{b}_2$$

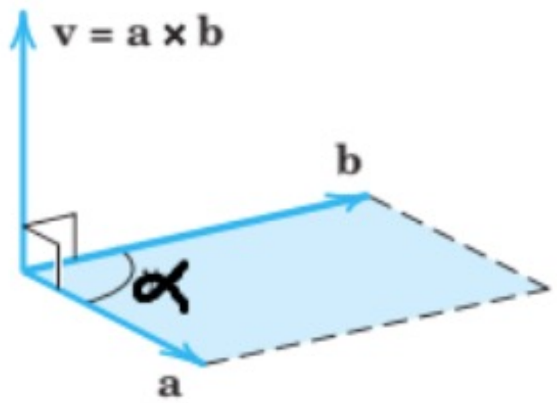
$$\begin{vmatrix} \mathrm{a}_3 & \mathrm{a}_1 \\ \mathrm{b}_3 & \mathrm{b}_1 \end{vmatrix} = \mathrm{a}_3\mathrm{b}_1 - \mathrm{a}_1\mathrm{b}_3$$

$$\begin{vmatrix} \mathrm{a}_1 & \mathrm{a}_2 \\ \mathrm{b}_1 & \mathrm{b}_2 \end{vmatrix} = \mathrm{a}_1\mathrm{b}_2 - \mathrm{a}_2\mathrm{b}_1$$

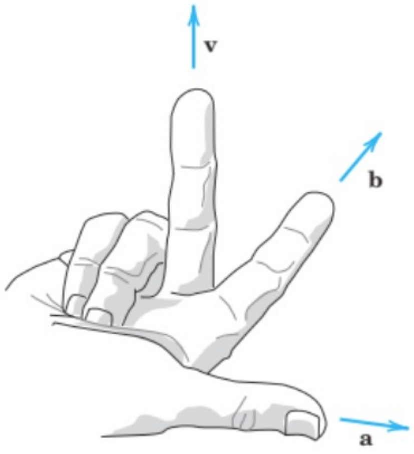
Ví dụ: Tìm tích chéo của hai vector: $\mathrm{a} = (-2, 1, 3),\ \ \mathrm{b} = (1, 4, 5)$

1. Vector trong không gian 2, 3 chiều

1.2. Tích chéo (tích ngoài) của hai vector



Tích chéo của hai véc tơ



Quy tắc bàn tay phải

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Ví dụ: Tìm tích chéo của hai vector: $a = (0, 2, 4),\ \ b = (1, 3, 5)$

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2i + 4j - 2k$$

Vậy $a \times b = v = (-2,4,2)$

1.2. Tích chéo (tích ngoài) của hai vector

Các tính chất cơ bản của tích chéo

- Nếu α là góc xen giữa hai vector a và b thì: $\|a\times b\| = \|a\|\,\|b\|\sin\alpha$
- Với mọi số k ta có: $(ka)\times b = k(a\times b) = a\times(kb)$
- Với ba vector a, b, c bất kỳ:
  - $a\times(b + c) = a\times b + a\times c$
  - $(a + b)\times c = a\times c + b\times c$
- Phản giao hoán: $a\times b = -b\times a$

Chú ý: Tính chéo không có tính chất kết hợp. Nghĩa là nói chung

$$(a\times b)\times c \neq a\times(b\times c)$$

1.2. Tích chéo (tích ngoài) của hai vector

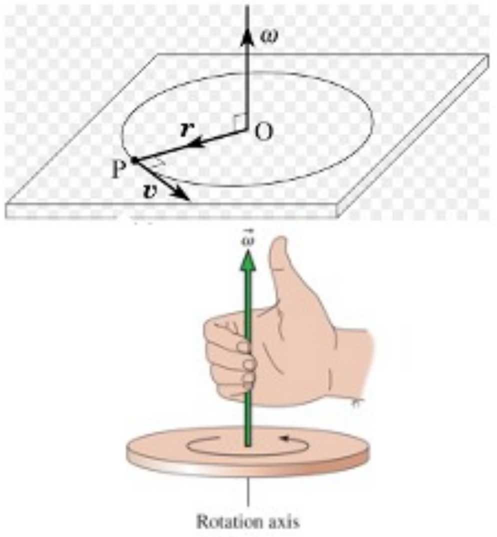
Ứng dụng của tích chéo

❖ Vận tốc góc của một vật chuyển động tròn

Vector vận tốc góc $\vec{\omega}$

Vector vận tốc góc $\vec{\omega}$

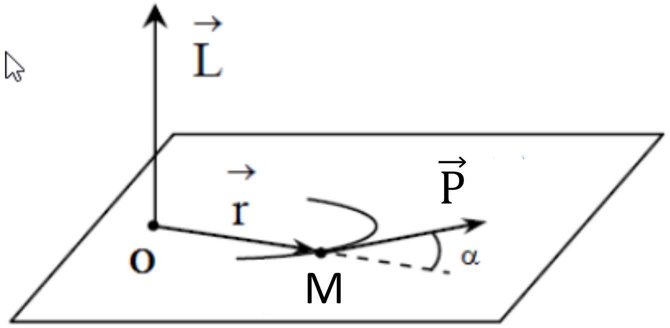
- Gốc tại quỹ đạo tròn
- Phương vuông góc với mặt phẳng quỹ đạo
- Chiều thuận chiều chuyển động (quy tắc nắm bàn tay phải)



$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

❖ Mô men động lượng: là một tính chất mô men gắn liền với vật thể trong chuyển động quay đo mức độ và phương hướng quay của vật, so với một tâm quay nhất định.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$$



1.3. Tích bộ ba vô hướng của ba vector

Định nghĩa: Tích bộ ba vô hướng hay tích hỗn hợp của ba véc tơ $a, b, c \ \in R^3$, ký hiệu là (a, b, c), được định nghĩa bởi

$$(a, b, c) = (a, b \times c) = a \cdot (b \times c)$$

Cụ thể hơn, nếu $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3), c = (c_1, c_2, c_3)$ thì:

$$(a, b, c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

1.3. Tích bộ ba vô hướng của ba vector

Các tính chất cơ bản của tích hỗn hợp

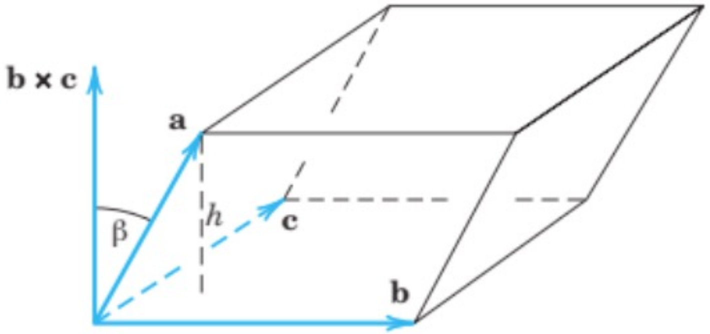
- Trong tích hỗn hợp, dấu $(\cdot)$ và dấu $(\times)$ có thể đổi chỗ cho nhau

$$a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c$$

- Với mọi số k

$$k(a, b, c) = (ka, b, c) = (a, kb, c) = (a, b, kc)$$

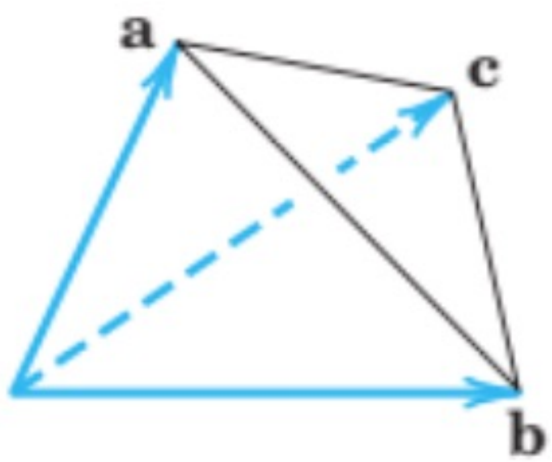
- Ba vector trong R^3 độc lập tuyến tính khi và chỉ khi tích hỗn hợp của chúng khác 0.
- Ý nghĩa hình học: giá trị tuyệt đối của tích hỗn hợp $|(a, b, c)|$ là thể tích của hình hộp xiên với ba cạnh cơ sở là ba vector a, b, c.



1.3. Tích bộ ba vô hướng của ba vector

Ví dụ: Thể tích tứ diện

Một tứ diện được xác định bởi ba vectơ cạnh $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ như Hình vẽ. Tìm thể tích của khối tứ diện với $\mathbf{a} = [2, 0, 3], \mathbf{b} = [0, 4, 1], \mathbf{c} = [5, 6, 0]$.



2.1. Định nghĩa

Hàm vô hướng

$$D \subset R^3 \to R \text{ (hoặc C)}$$

$$P \quad \to \quad f(P)$$

- Hàm f được gọi là hàm vô hướng hay hàm số.
- Ta nói một hàm vô hướng xác định một trường vô hướng trên miền xác định D.

Trong hệ toạ độ Decart:

$$P = (x, y, z)$$

Khi đó

$$f(P) = f(x, y, z)$$

Ví dụ: $f(x, y, z) = 2x + 3y - z, f(x, y, z) = xy + z^2$

Ví dụ: Trường nhiệt độ của vật thể, trường áp suất của không khí trong khí quyển Trái đất.

2. Hàm vô hướng, hàm vector, trường

Hàm vector

$$D \subset R^3 \rightarrow R^m$$

$$P \quad \rightarrow \quad v(P)$$

Nếu $m = 3$: $v(P) = [v_1(P), v_2(P), v_3(P)]$

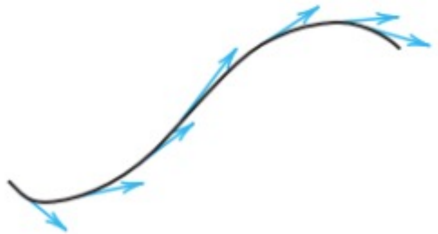
- Hàm v được gọi là hàm vector
- Ta nói hàm vector xác định một trường vector trong miễn xác định D.

Trong hệ toạ độ Decart:

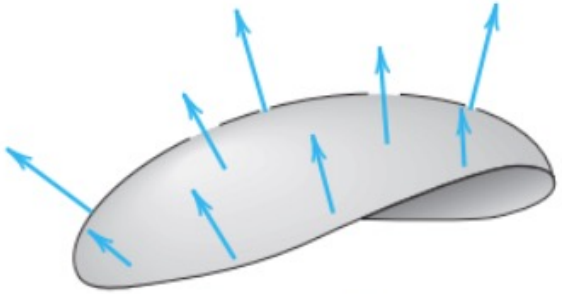
$$P = (x, y, z)$$

$$\Rightarrow v(P) = v(x, y, z) = [v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z)]$$

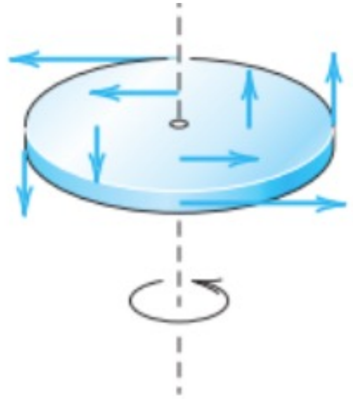
Ví dụ:



Trường véc tơ tiếp tuyến của đường cong



Trường véc tơ pháp tuyến của mặt cong



Trường vận tốc một vật thể quay

Chú ý:

- Chúng ta có thể mở rộng định nghĩa trên cho KGVT $\mathrm{R}^{\mathrm{n}} \rightarrow \mathrm{R}^{\mathrm{m}}$ bất kỳ.
- Hàm vô hướng là trường hợp đặc biệt của hàm vector với $\mathrm{m} = 1$.
- Hàm vô hướng và hàm vector cũng có thể phụ thuộc và các tham số khác như thời gian t.

3.1. Đạo hàm của hàm vector một biến

Giả sử hàm vector v chỉ phụ thuộc và một biến độc lập $t \in D$:

$$v = v(t) = [v_1(t), v_2(t), v_3(t)]$$

- Nếu các thành phần $v_1(t), v_2(t), v_3(t)$ khả vi tại $t \in D$ thì ta nói v khả vi tại t.
- Đạo hàm của hàm vector v, ký hiệu $v'(t)$, được định nghĩa như sau:

$$v'(t) = [v_1'(t), v_2'(t), v_3'(t)]$$

Nếu ta biểu diễn

$$v(t) = v_1(t)\boldsymbol{i} + v_2(t)\boldsymbol{j} + v_3(t)\boldsymbol{k}$$

Thì

$$v'(t) = v_1'(t)\boldsymbol{i} + v_2'(t)\boldsymbol{j} + v_3'(t)\boldsymbol{k}$$

Ví dụ: Tính đạo hàm của hàm vector $v(t) = [2t, 3t^2, \text{sint}]$

Chú ý: Đạo hàm của hàm vector cũng có các tính chất như của đạo hàm hàm một biến số.

Hơn nữa nó thoả mãn các tính chất sau:

- $(\mathrm{u} \cdot \mathrm{v})' = \mathrm{u}' \cdot \mathrm{v} + \mathrm{u} \cdot \mathrm{v}'$
- $(\mathrm{u} \times \mathrm{v})' = \mathrm{u}' \times \mathrm{v} + \mathrm{u} \times \mathrm{v}'$
- $(\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w})' = (\mathrm{u}', \mathrm{v}, \mathrm{w}) + (\mathrm{u}, \mathrm{v}', \mathrm{w}) + (\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}')$

3.2. Đạo hàm riêng

Xét $u = u(x, y) = x^3y^2 + 3x + 2y - 1$

- Đạo hàm riêng của u theo biến x là

$$u_x = 3x^2y^2 + 3$$

- Đạo hàm riêng của u theo biến y là

$$u_y = 2x^3y + 2$$

- Tương tự cho hàm nhiều hơn hai biến số.

Ví dụ:

$$v = v(x, y, z) = x^2y^5z^7 + 3y + 5z + 9$$

Tính v_x, v_y, v_z

- Đạo hàm riêng của hàm $u = u(x, y)$ tại điểm (x_0, y_0) cố định là

$$u_x(x_0, y_0) = \frac{d}{dx}u(x, y_0)\Big|_{x=x_0}$$

$$u_x(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$u_y(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

3. Đạo hàm của hàm vô hướng, hàm vector

Ý nghĩa: đạo hàm riêng thể hiện tốc độ thay đổi của hàm số theo một biến khi cố định các biến số khác.

u_x thể hiện tốc độ thay đổi của hàm số theo biến x khi biến y được giữ cố định.

- Các đạo hàm riêng như trên được gọi là các đạo hàm riêng cấp 1.
- Nếu tiếp tục tính các đạo riêng của các đạo hàm riêng cấp 1 thì chúng ta sẽ được các đạo hàm riêng cấp 2...

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \qquad u_{yx} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

3.3. Đạo hàm riêng của hàm vector

Mở rộng khái niệm đạo hàm riêng của hàm số như trên chúng ta cũng định nghĩa đạo hàm riêng của hàm véc tơ theo một biến nào đó bởi đạo hàm riêng của từng hàm thành phần theo biến đó.

Giả sử $\mathrm{v} = \mathrm{v}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) = [\mathrm{v}_1(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}), \mathrm{v}_2(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}), \mathrm{v}_3(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})]$

Đạo hàm riêng cấp 1 của v theo x là

$$\mathrm{v}_\mathrm{x} = \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{x}} = \left[\frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial \mathrm{x}}, \frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial \mathrm{x}}, \frac{\partial \mathrm{v}_3}{\partial \mathrm{x}}\right] = \frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial \mathrm{x}}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial \mathrm{x}}\boldsymbol{j} + \frac{\partial \mathrm{v}_3}{\partial \mathrm{x}}\boldsymbol{k}$$

Các đạo hàm riêng v_y, v_z được định nghĩa tương tự.

Các đạo hàm riêng cấp cao hơn của v cũng được mở rộng tương tự.

4.1. Định nghĩa gradient

Giả sử hàm $f = f(x, y, z)$ khả vi trong $D \subset R^3$. Khi đó gradient của f, ký hiệu là grad f hay ∇f, được định nghĩa là hàm vector có các thành phần là các đạo hàm riêng của f.

$$\mathrm{Grad}\, f = \nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right] = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

Toán tử vi phân napla ∇ được định nghĩa bởi

$$\boldsymbol{\nabla} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

4.2. Định nghĩa đạo hàm theo hướng

Cho hàm số $f = f(x, y, z)$ và vector $v \in R^3$ là một vector đơn vị. Khi đó đạo hàm của f theo hướng của vector v, ký hiệu là $D_v f$, tại điểm $P \in R^3$ được định nghĩa như sau:

$$D_v f(P) = \text{grad } f(P) \cdot v$$

Chú ý: Nếu v không phải là vector đơn vị mà là một vector bất kỳ khác 0 thì:

$$D_v f(P) = \frac{1}{\|v\|} \text{grad } f(P) \cdot v$$

Ví dụ: tìm đạo hàm của hàm $f = 2x^3 + 2xy^2 - z^2 + 1$ tại điểm $P(1, -1, 2)$ theo hướng của vector $v = (1,0,-1)$

Ghi nhớ công thức: $D_v f = \frac{1}{\|v\|} \text{grad } f \cdot v$

5.1. Divergence của trường vector

Cho $v = [v_1, v_2, v_3] = [v_1(x,y,z), v_2(x,y,z), v_3(x,y,z)]$ là một hàm vector khả vi. Khi đó divergence của v, ký hiệu là $\text{Div } v$, được định nghĩa như sau:

$$\text{Div } v = \nabla \cdot v = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot [v_1\ v_2, v_3] = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

Ví dụ: cho $v = [3xz, 2xy, -yz^2]$. Tính $\text{Div } v$.

Chú ý: Cho $f(x,y,z)$ là một hàm vô hướng khả vi đến cấp 2. Khi đó

$$\text{Div (grad f)} = \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = \Delta f$$

Trong đó toán tử Laplace Δ được định nghĩa bởi

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

5.2. Độ xoắn của trường vector

Cho $v = [v_1, v_2, v_3] = [v_1(x,y,z), v_2(x,y,z), v_3(x,y,z)]$. Độ xoắn của trường vector v, ký hiệu curl v, được định nghĩa như sau

$$\text{curl } v = \nabla \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Một số tính chất:

- $\text{curl}(\text{grad } f) = \mathbf{0}$
- $\text{Div}(\text{curl } v) = \mathbf{0}$