Bài tập

Bài 3.1. Tìm biểu diễn tham số của đường tròn là giao của mặt phẳng $z = 1$ với mặt cầu (S). Ở đó (S) có tâm $(3, 2, 1)$ và đi qua gốc tọa độ.

Bài 3.2. Biểu diễn tham số đường thẳng đi qua $(2, 1, 3)$ và có véc tơ chỉ phương $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

Bài 3.3. Viết biểu diễn tham số của đường Helix có phương trình $x^2 + y^2 = 25$, $z = 2\arctan\frac{y}{x}$.

Bài 3.4. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong C tại điểm P với

(a) $C : \mathbf{r}(t) = [t, t^2/2, 1]$; $P(2, 2, 1)$.

(b) $C : \mathbf{r}(t) = [\cos t, \sin t, 9t]$; $P(1, 0, 18\pi)$.

Bài 3.5. Tìm độ dài của các cung sau:

(a) (Circular helix) $C : \mathbf{r}(t) = [4\cos t, 4\sin t, 5t]$ từ $(4, 0, 0)$ đến $(4, 0, 10\pi)$.

(b) (Hypocycloid) $C : \mathbf{r}(t) = [a\cos^3 t, a\sin^3 t]$.

Bài 3.6. Tính tích phân đường $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$, trong đó:

(a) $C : y = 4x^2$ từ $(0, 0)$ tới $(1, 4)$ và $\mathbf{F} = [y^2, -x^2]$.

(b) C là một phần tư đường tròn tâm $(0, 0)$ từ $(2, 0)$ tới $(0, 2)$ và $\mathbf{F} = [xy, x^2y^2]$.

(c) $C : \mathbf{r} = [2\cos t, t, 2\sin t]$ từ $(2, 0, 0)$ tới $(2, 2\pi, 0)$ và $\mathbf{F} = [x - y, y - z, z - x]$.

Bài 3.7. Tính công W của lực $\mathbf{F}$ thực hiện dọc theo đường cong C trong các trường hợp sau:

(a) $C : \mathbf{r} = [2t, 5t, t]$ từ $t = 0$ tới $t = 1$ và $\mathbf{F} = [x + y, y + z, z + x]$.

(b) C là đường thẳng từ $(0, 0, 0)$ tới $(1, 1, 0)$ và $\mathbf{F} = [x, -z, 2y]$.

(c) $C : \mathbf{r} = [t, t^2, t]$ từ $(0, 0, 0)$ tới $(2, 4, 2)$ và $\mathbf{F} = [e^{-x}, e^{-y}, e^{-z}]$.

Bài 3.8. Tính tích phân đường $\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ với C là biên của miền R và được định hướng ngược chiều kim đồng hồ, trong các trường hợp sau:

(a) $\mathbf{F} = [y, -x]$; $C : x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$.

(b) $\mathbf{F} = [x^2e^y, y^2e^x]$; C là hình chữ nhật với các đỉnh $(0, 0), (2, 0), (2, 3), (0, 3)$.

(c) $\mathbf{F} = [x^2 + y^2, x^2 - y^2]$; $R : 1 \le y \le 2 - x^2$.

(d) $\mathbf{F} = [x^2y^2, \frac{-x}{y^2}]$; $R : 1 \le x^2 + y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge x$.

Bài 3.9. Tìm véc tơ pháp tuyến đơn vị của mặt cong $S : \mathbf{r}(u, v)$ tại điểm $P = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ trong các trường hợp sau:

(a) hình nón $\mathbf{r}(u, v) = [u\cos v, u\sin v, cu]$, $c > 0$;

(b) ellipsoid $\mathbf{r}(u, v) = [a\cos u\cos v, b\sin u\cos v, c\sin v]$, $a, b, c > 0$.

Bài 3.10. Tìm một véc tơ pháp tuyến (tại điểm P tùy ý) và viết một biểu diễn tham số của các mặt cong sau:

(a) Mặt phẳng $4x + 3y + 2z = 12$;

(b) Hình trụ $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$;

(c) Hình nón elliptic $z = \sqrt{x^2 + 4y^2}$.

Bài 3.11. Tính tích phân mặt loại 2, $\iint_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dA$, với $\mathbf{N} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ phù hợp với hướng dương của S trong các trường hợp sau:

(a) $\mathbf{F} = [-x^2, y^2, 0]$, $\quad S : \mathbf{r} = [u, v, 3u - 2v]$, $\quad 0 \leq u \leq \frac{3}{2}, -2 \leq v \leq 2$;

(b) $\mathbf{F} = [x, y, z]$, $\quad S : \mathbf{r} = [u \cos v, u \sin v, u^2]$, $\quad 0 \leq u \leq 4, -\pi \leq v \leq \pi$.

Bài 3.12. Tính tích phân mặt loại 2, $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA$ trong các trường hợp sau:

(a) $\mathbf{F} = [e^y, e^x, 1]$ và S là phía trên của mặt $x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ (hướng dương của S được định hướng bởi véc tơ pháp tuyến hướng lên trên);

(b) $\mathbf{F} = [0, x, 0]$ và S là phần phía ngoài mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nằm trong góc phần tám thứ nhất;

(c) $\mathbf{F} = [0, \sin y, \cos z]$ và S là phần mặt trụ $x = y^2$ với $0 \leq y \leq \pi/4$, $0 \leq z \leq y$ và hướng dương của S có hướng từ phải qua trái.

Bài 3.13. Tính tích phân mặt loại 1, $\iint_S G(\mathbf{r}) dA$, trong các trường hợp sau:

(a) $G = \cos x + \sin x$ và S là phần mặt phẳng $x + y + z = 1$ nằm trong góc phần tám thứ nhất;

(b) $G = x + y + z$ và mặt S được giới hạn bởi $z = x + 2y$ với $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq x$;

(c) $G = z$ và S là phần mặt cầu đơn vị nằm trong góc phần tám thứ nhất;

Bài 3.14. Mô-ment quán tính I của mặt cong S đối với trục L được cho bởi công thức sau:

$$I = \iint_S \rho D^2 dA \tag{3.40}$$

trong đó

- $\rho = \rho(x, y, z)$ là mật độ khối lượng (khối lượng trên một đơn vị diện tích) của mặt S,
- $D = D(x, y, z)$ là khoảng cách từ điểm (x, y, z) tới L.

Hãy tính mô-ment quán tính I của mặt cong S đối với trục L trong các trường hợp sau:

(a) $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, S là mặt đồng chất (ρ là hằng số) có khối lượng M và L là trục Oz;

(b) $S : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 2$ và L là đường thẳng $z = 1$ trong mặt phẳng Ozx;

(c) $S : x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leq z \leq 1$ và L là trục Oz.

Bài 3.15. Cho S là phía ngoài mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ được định hướng bởi véc tơ pháp tuyến đơn vị $\mathbf{n}$ hướng ra ngoài mặt cầu. Tính

$$I = \iint_S (7x\mathbf{i} - z\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} dA$$

bằng hai cách:

(a) bởi công thức Gauss–Ostrogradsky;

(b) bởi cách tính trực tiếp bằng định nghĩa của tích phân mặt loại 2 (xem Định nghĩa 3.4).

Bài 3.16. Tính tích phân mặt loại 2, $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA$, bằng công thức Gauss-Ostrogradsky với:

(a) $\mathbf{F} = [x^2, 0, z^2]$, S là phía ngoài của mặt của hộp $|x| \leq 1, |y| \leq 3, 0 \leq z \leq 2$. Kiểm tra lại kết quả tính $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA$ bằng cách tính trực tiếp từ định nghĩa;

(b) $\mathbf{F} = [e^x, e^y, e^z]$, S là phía ngoài của mặt của khối lập phương $|x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1$;

(c) $\mathbf{F} = [x^3 - y^3, y^3 - z^3, z^3 - x^3]$, S là phía ngoài của mặt của khối $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25, z \geq 0$.

Bài 3.17. Tính tích phân $\iint_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dA$ với:

(a) $\mathbf{F} = [z^2, -x^2, 0]$, S là phía trên của hình chữ nhật với 4 đỉnh $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,4,4)$, $(1,4,4)$;

(b) $\mathbf{F} = [e^{-z}, e^{-z} \cos y, e^{-z} \sin y]$, $S : z = y^2/2, -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ được định hướng dương bởi véc tơ pháp tuyến $\mathbf{n}$ sao cho $\mathbf{n}$ tạo với tia Oz một góc nhọn.

(c) $\mathbf{F} = [z^2, 3x/2, 0]$, $S : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, z = 1$ được định hướng dương bởi tia Oz.

(d) $\mathbf{F} = [y^3, -x^3, 0]$, $S : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$ được định hướng dương bởi tia Oz.

Bài 3.18. Tính tích phân $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' ds$ bằng công thức Stokes với:

(a) $\mathbf{F} = [-5y, 4x, z]$, C là đường tròn $x^2 + y^2 = 16, z = 4$ có hướng dương là hướng ngược chiều kim đồng hồ;

(b) $\mathbf{F} = [z^3, x^3, y^3]$, C là đường tròn $y^2 + z^2 = 9, x = 2$ có hướng dương là hướng ngược chiều kim đồng hồ;

(c) $\mathbf{F} = [y^2, x^2, z + x]$, C là tam giác ABC với $A(0,0,0), B(1,0,0)$, $C(1,1,0)$ được định hướng dương từ $A \to B \to C \to A$.

Tài liệu tham khảo

[1] Erwin Kreyszig, *Advanced engineering mathematics*, Nhà xuất bản Wiley (10th Edition, 2011) (Chương 9 & 10).

[2] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh, *Toán học cao cấp*, tập III, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (2014) (Chương 3).