Chương 4. Phương trình vi phân cấp một

Ngày 10/5/2021

Biên soạn: Phan Quang Sáng

Khoa Khoa học cơ bản, Đại học Phenikaa

MỤC LỤC

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Erwin Kreyszig (10th Edition, 2011), Advanced Engineering Mathematics, NXB Wiley.

[2] Neyhauser, C. (2010). Calculus for Biology and Medicine (3^{rd} Edition), Pearson.

[3] Stewart, J. (2015). Calculus: Early Transcendentals (8^{rd} Edition), Brooks Cole.

CHƯƠNG 4 PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Một đại lượng biến thiên (liên tục) được biểu diễn như là một hàm số, trong khi tốc độ thay đổi của đại lượng đó được biểu thị qua các đạo hàm của hàm số đó; chúng có mối liên hệ với nhau, và phương trình vi phân thể hiện mối liên hệ đó. Các mối liên hệ như vậy xuất hiện rất phổ biến, do vậy phương trình vi phân nảy sinh và đóng vai trò quan trọng trong nghiên cứu nhiều lĩnh vực khác nhau như kỹ thuật, vật lý, sinh học, kinh tế…

Mở đầu: Phương trình chuyển động

Một phương trình nổi tiếng mà chúng ta phần lớn đều đã biết đó là phương trình định luật 2 của Newton về chuyển động. Phương trình này chính là một dạng phương trình vi phân.

Nếu một vật thể có khối lượng m đang chuyển động có gia tốc a dưới tác động của một lực F thì theo định luật 2 Newton

$$F = ma$$

Tại thời điểm t vật thể có vị trí, giả sử là một hàm theo thời gian $u = u(t)$, thì vận tốc và gia tốc tức thời của nó lúc đó lần lượt là

$$v = v(t) = u'(t),\ a = v'(\mathrm{t}) = u''(t) \qquad (4.1)$$

Chúng ta cũng chú ý rằng lực F cũng có thể là một hàm của thời gian, vận tốc, và/ hoặc của vị trí. Vì thế ta có thể viết phương trình định luật 2 Newton dưới các dạng sau

$$mv'(\mathrm{t}) = F\left(t, v\right) \qquad (4.2)$$

hoặc

$$mu''(\mathrm{t}) = F\left(t, u, u'(t)\right). \qquad (4.3)$$

Đó chính là các phương trình vi phân đầu tiên chúng ta gặp.

Như vậy Định luật 2 Newton về chuyển động *dưới dạng một phương trình vi phân* cho phép xác định vị trí của một vật dựa vào vận tốc, gia tốc, và lực tác động lên vật đó được biểu diễn dưới dạng hàm vi phân theo thời gian.

4. 1 MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

4.2.1 Định nghĩa phương trình vi phân

Một cách khái quát, phương trình vi phân là một phương trình toán học biểu diễn mối quan hệ giữa một hàm số (chưa biết) và các đạo hàm (với cấp khác nhau) của nó. Một phương trình như vậy có chứa biến số độc lập, một hàm số phải tìm và các đạo hàm (hoặc vi phân) của hàm số đó.

Một cách cụ thể, phương trình vi phân là một phương trình có dạng toán học

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (4.4)$$

trong đó F là một hàm số, x là biến số độc lập thuộc một miền I nào đó của $\mathbb{R}$, $y = y(x)$ là hàm số chưa biết, và $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ là các đạo hàm các cấp của y.

Người ta gọi cấp của phương trình vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm của y có mặt trong phương trình. Về mặt hình thức ta thấy phương trình vi phân (4.7) trên có cấp n.

Ví dụ 1: $y' = f(x)$ là một phương trình vi phân cấp 1.

Ví dụ 2: $xy' + \dfrac{y^3}{\ln x} = \ln^2 x$ là một phương trình vi phân cấp 1.

Ví dụ 3: $y'' + x^2(y')^3 - 2y^4 = \sin x$ là một phương trình vi phân cấp 2.

Phương trình vi phân cấp một

Chúng ta nhắc lại rằng phương trình vi phân cấp một là phương trình dạng

$$F(x, y, y') = 0 \text{ hoặc } F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0, \qquad (4.5)$$

do đạo hàm $y'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

Một dạng đặc biệt của (4.8) là phương trình vi phân (cấp một) đã giải ra đạo hàm

$$y' = f(x, y) \quad \text{hoặc} \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

hoặc

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0. \qquad (4.6)$$

- ∗ Trong chương trình chúng ta chủ yếu xét các phương trình vi phân cấp một đã giải ra đạo hàm.
- ∗ Trong phương trình (4.9) ta cũng có thể coi x là hàm của biến số y.

4.2.2 Nghiệm của phương trình vi phân cấp một

Nghiệm của phương trình vi phân là một hàm số $y = y(x)$ thỏa mãn phương trình đó. Giải phương trình vi phân là tìm tất cả các nghiệm của nó.

Ví dụ: xét phương trình vi phân cấp 1

$$y' = 3x^2 + \sin x.$$

Rõ ràng hàm số y cần tìm phải là một nguyên hàm của $3x^2 + \sin x$, do đó mọi nghiệm của phương trình có dạng

$$y = x^3 - \cos x + C,$$

với C là một hằng số thực tùy ý. Chẳng hạn $C = 1$ ta được một nghiệm $y = x^3 - \cos x + 1$.

Qua ví dụ trên ta thấy, nói chung, phương trình vi phân cấp 1 có nghiệm với một hằng số tùy ý…Chúng được gọi là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân. Từ đó ta có định nghĩa:

Định nghĩa: một hàm số dạng tổng quát

$$y = \varphi(x, C) \tag{4.7}$$

là nghiệm của phương trình vi phân (4.8) với các hằng số thực tùy ý C được gọi là *nghiệm tổng quát*.

Nghiệm riêng của phương trình vi phân là nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát **(4.7)** khi C là một giá trị số cụ thể.

Khi giải phương trình vi phân (4.8) nhiều khi dẫn đến phương trình dạng ("không còn đạo hàm")

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{4.8}$$

trong đó C là một hằng số tùy ý. Khi đó **(4.8)** được gọi là *tích phân tổng quát* của phương trình vi phân. Khi $C = C_0$ là một số cụ thể thì **(4.8)** được gọi là một *tích phân riêng* của phương trình vi phân.

Về mặt hình học mỗi nghiệm hoặc tích phân riêng của phương trình vi phân biểu diễn một đường cong trên mặt phẳng tọa độ Oxy, và được gọi là một *đường cong tích phân*. Như vậy nghiệm tổng quát hoặc tích phân tổng quát tương ứng với một họ các đường cong tích phân. Giải phương trình vi phân cũng chính là đi tìm các đường cong tích phân.

4.2.3 Điều kiện ban đầu

Giá trị của một đại lượng tại một thời điểm nào đó, được chỉ định là thời gian ban đầu (thường biểu thị $t = 0$), gọi là giá trị ban đầu. Một cách tổng quát điều kiện ban đầu cho biết trạng thái ban đầu (độ lớn, tốc độ biến thiên..) của một đại lượng tại một thời điểm chỉ định. Trạng thái ban đầu hoàn toàn có thể quy định đến trạng thái của đại lượng đó ở các thời điểm trước hoặc sau thời điểm chỉ định.

Một cách toán học, điều kiện ban đầu là một điều kiện đối với nghiệm của phương trình vi phân (4.8) dạng

$$y(x_0) = y_0, \tag{4.9}$$

trong đó x_0, y_0 là các giá trị cho trước. Bài toán giải phương trình vi phân cùng với điều kiện ban đầu được gọi là **bài toán Cauchy**, hay bài toán giá trị ban đầu.

Nhận xét:

- Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân không chịu bất kỳ một điều kiện ban đầu nào.
- Khi cho nghiệm tổng quát (4.7) thỏa mãn điều kiện ban đầu **(4.9)** ta sẽ tìm được giá trị cụ thể của hằng số C, lúc này nghiệm tương ứng sẽ là nghiệm riêng.

Định lý (Peano-Cauchy-Picard): *Xét bài toán Cauchy* (4.8) *với điều kiện ban đầu* $y(x_0) = y_0$. *Nếu hàm hai biến* $f(x, y)$ *liên tục trong một lân cận của điểm* (x_0, y_0) *thì của bài toán Cauchy có ít nhất một nghiệm* $y = y(x)$ *với* x *trong một lân cận của* x_0. *Hơn nữa nếu* f *có đạo hàm riêng* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *liên tục trong một lân cận của* (x_0, y_0) *thì bài toán Cauchy có nghiệm duy nhất.*

Trường hợp duy nhất nghiệm cũng có nghĩa là qua điểm (x_0, y_0) cho trước có duy nhất một đường cong tích phân của phương trình (4.8) mà hệ số góc của tiếp tuyến của đường cong tại điểm đó là $f(x_0, y_0)$.

4. 2 MỘT SỐ LỚP PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

4.3.1 Phương trình vi phân với biến số phân ly

Phương trình vi phân với biến số phân ly là phương trình có dạng

$$N(y)\, y' = M(x) \tag{4.10}$$

hoặc dạng tương đương,

$$N(y)\, dy = M(x)\, dx \tag{4.11}$$

trong đó M, N là các hàm số một biến, được giả sử liên tục trong một miền nào đó.

Để giải phương trình với biến số phân ly **(4.11)** ta chỉ việc lấy tích phân hai vế phương trình:

$$\int N(y)\, dy = \int M(x)\, dx + C, \text{ với } C \text{ là hằng số thực bất kỳ.}$$

Sau khi tính các tích phân ở hai vế của phương trình trên chúng ta sẽ nhận tích phân tổng quát của phương trình vi phân.

Thật vậy, nếu đạo hàm hai vế của phương trình trên theo biến số x ta sẽ được (4.10).

Ví dụ 1: Phương trình $y' = f(x)$ với f là một hàm số giả sử liên tục trên một miền $I \subset \mathbb{R}$.

Đây chính là một phương trình dạng biến số phân ly (khuyết y). Rõ ràng y phải là một nguyên hàm của f, hoặc áp dụng phương pháp giải ở trên cho ta nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = \int f(x)\, dx + C, \text{ với mọi } C \in \mathbb{R}.$$

* Bài toán tương tự với phương trinh vi phân khuyết x dạng $y' = g(y)$.

Ví dụ 2: Giải phương trình vi phân $(x+1)y' = 2y^2x^2$.

Giải: Trước hết chúng ta thấy rằng phương trình trên chưa phải là dạng biên số phân ly (x và y còn ở cùng một chỗ). Tuy nhiên chúng ta có thể chuyển phương trình về dạng biến số phân ly nếu chia cả hai vế của phương trình cho y^2 và $x+1$ nếu nó khác không.

Ta có $y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0.$

Trước hết kiểm tra xem $y = 0$ có phải là nghiệm của phương trình hay không? Thay trực tiếp $y = 0$ vào phương trình ta được

$$(x+1).\, 0' = 2.\, 0^2 x^2$$

hay $0 = 0.$

Như vậy rõ ràng hàm số $y = 0$ là một nghiệm của phương trình.

Bây giờ ta đi tìm các nghiệm $y \neq 0.$ Chia hai vế phương trình ban đầu cho $y^2 \neq 0$ và $x+1$(với $x \neq -1$) ta được dạng biến số phân ly như sau

$$\frac{y'}{y^2} = 2\frac{x^2}{x+1}, x \neq -1 \text{ hay,}$$

$$\frac{dy}{y^2} = 2\frac{x^2}{x+1}dx, x \neq -1$$

Tích phân hai vế phương trình ta được

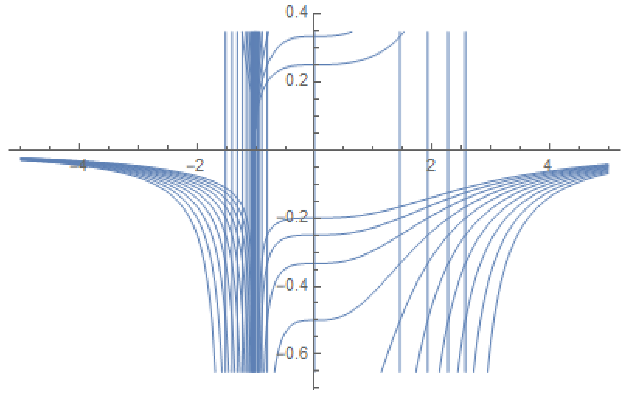
$$\int \frac{dy}{y^2} = \int 2\frac{x^2}{x+1}dx + C, x \neq -1, \text{ với mọi } C \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{y} = 2\int\left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)dx + C, x \neq -1, \text{ với mọi } C \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{y} = 2\left(\frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+1|\right) + C, x \neq -1, \text{ với mọi } C \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y} = -2\left(\frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+1|\right) + C,\ x \neq -1, \text{ với mọi } C \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow y\left(x^2 - 2x + 2\ln|x+1|\right) + 1 = Cy,\ x \neq -1, \text{ với mọi } C \in \mathbb{R}. \qquad (*)$$



Như vậy phương trình có tích tích phân tổng quát cho bởi biểu diễn $(*)$ và $y = 0$.

4.3.2 Phương trình vi phân đẳng cấp

Một số phương trình vi phân không phân ly được biến số nhưng có thể được chuyển về dạng biến số phân ly bằng cách đổi biến.

Định nghĩa: Hàm hai biến số $f = f(x, y)$ được gọi là hàm đẳng cấp bậc k (k là số tự nhiên hoặc thậm chí là số thực) nếu

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y) \text{ với mọi } \lambda, \text{và với mọi } x, y. \qquad (4.12)$$

Ví dụ: Kiểm tra các hàm đẳng cấp

(a) Hàm $f(x, y) = x^3 - x^2 y + 2xy^2 + y^3$ là một hàm đẳng cấp bậc 3 vì

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^3 - (\lambda x)^2(\lambda y) + 2(\lambda x)(\lambda y)^2 + (\lambda y)^3$$

$$= \lambda^3 x^3 - \lambda^3 x^2 y + \lambda^3 2xy^2 + \lambda^3 y^3 = \lambda^3(x^3 - x^2 y + 2xy^2 + y^3) = \lambda^3 f(x, y).$$

(b) Hàm $f(x, y) = x^2 y - 2y^2$ không phải là một hàm đẳng cấp vì

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2(\lambda y) - 2(\lambda y)^2 = \lambda^3 x^2 y - 2\lambda^2 y^2 = \lambda^2\left(\lambda x^2 y - 2y^2\right) \neq \lambda^n\left(x^2 y - 2y^2\right)$$

(ví dụ chọn $\lambda = -1,\ x = 1,\ y = 1$).

Ngoài ra chúng ta có thể nhận ra hàm f không phải là một hàm đẳng cấp vì số hạng thứ nhất $x^2 y$ có bậc 3 trong khi số hạng thứ hai $-2y^2$ có bậc 2.

Định nghĩa: Phương trình vi phân đẳng cấp là phương trình có dạng

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{4.13}$$

trong đó M và N là các hàm đẳng cấp có cùng bậc.

Một dạng đặc biệt của phương trình vi phân đẳng cấp (4.13) là

$$y' = f(x,y), \tag{4.14}$$

trong đó f là một hàm đẳng cấp bậc không.

Giải thích: nếu $N \neq 0$ phương trình (4.13) dẫn đến $y' = -\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$, hàm $f(x,y) = -\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$ là một hàm đẳng cấp bậc không.

Khi đó nếu chọn $\lambda = \dfrac{1}{x}$ thì ta có thể viết hàm f dưới dạng một hàm của $\dfrac{y}{x}$:

$$f(x,y) = \lambda^0 f(1,\frac{y}{x}) = f(1,\frac{y}{x}).$$

Mệnh đề: bằng phép đổi biến $y = xu(x)$ chúng ta có thể chuyển phương trình vi phân đẳng cấp (4.13) (hoặc (4.14)) về dạng biến số phân ly.

Chú ý rằng lúc đó $y' = u + xu'$ và $dy = udx + xdu$.

Chúng ta không chứng minh mệnh đề trên mà minh họa cách giải phương trình vi phân đẳng cấp thông qua các các ví dụ dưới đây.

Ví dụ: Giải phương trình vi phân

$$\left(x^2 + y^2\right)dx - \left(x^2 + xy\right)dy = 0. \tag{4.15}$$

Giải:

Phương trình (4.15) là một vi phân đẳng cấp vì $\left(x^2 + y^2\right)$ và $\left(x^2 + xy\right)$ là các hàm đẳng cấp cùng bậc 2.

Đặt $y = xu(x)$ rồi vào phương trình (4.15) ta

$$\left(x^2 + (ux)^2\right)dx - \left(x^2 + xux\right)\left(udx + xdu\right) = 0$$

$$\left(x^2 - x^2u\right)dx - \left(x^3 + x^3u\right)du = 0$$

$$x^2\left(1-u\right)dx = x^3\left(1+u\right)du$$

Chia hai vế của phương trình trên cho x^2 (với $x \neq 0$) ta được

$$\left(1-u\right)dx = x\left(1+u\right)du \tag{4.16}$$

Ta có $\quad 1-u=0 \Leftrightarrow u=1$.

Trường hợp 1: rõ ràng $u=1$ là của phương trình (4.16) nên $y=x$ là một nghiệm của phương trình (4.15).

Trường hợp 2: khi $u \neq 1$. Đưa (4.16) về dạng biến số phân ly rồi lấy tích phân hai vế ta được

$$\frac{dx}{x} = \frac{1+u}{1-u}du$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1+u}{1-u}du.$$

$$\ln|x| = -u - \ln|u-1| + C,\ \ C \in \mathbb{R}.$$

Thay $u = \frac{y}{x}$ vào phương trình trên ta được:

$$\ln|x| = -\frac{y}{x} - \ln\left|\frac{y}{x}-1\right| + C \text{, hay}$$

$$\ln e^{\frac{y}{x}}|y-x| = C,\ \ C \in \mathbb{R},\ \ \text{hay}$$

$$e^{\frac{y}{x}}(y-x) = M,\ \ M \in \mathbb{R}. \tag{4.17}$$

Công thức (4.17) chính là tích phân tổng quát của phương trình (4.15).

4.3.3 Phương trình vi phân tuyến tính

Phương trình vi phân tuyến tính là phương trình có dạng

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{4.18}$$

trong đó p và q là các hàm số một biến của x, giả sử liên tục trên một miền $I \subseteq \mathbb{R}$ nào đó.

- Nếu $q=0$ thì (4.18) trở thành phương trình được gọi là phương trình thuần nhất

$$y' + p(x)y = 0 \tag{4.19}$$

- Nếu $q \neq 0$ thì (4.18) gọi là phương trình tuyến tính không thuần nhất. Phương trình (4.19) gọi là phương trình thuần nhất tương ứng với (4.18).

Nhận xét: phương trình (4.18) là phương trình bậc 1 đối với y và y'.

Cách giải phương trình (4.18):

Nhận xét: nếu $v \neq 0$ là một hàm số nào đó sao cho $v(x) \neq 0, x \in I$ thì ta luôn có thể viết y dưới dạng tích của v và một hàm số khác: $y = uv$. (thật vậy lấy $u(x) = \dfrac{y(x)}{v(x)},\ x \in I$)

Ta tìm nghiệm của phương trình (4.18) dạng

$$y = uv,$$

trong đó $u = u(x)$ là hàm số của x, và $v = v(x)$ là một hàm khác không mà ta sẽ chọn một cách phù hợp.

Thay $y = uv$ vào (4.18) ta được

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x), \text{hay}$$

$$u'v + u\left[v' + p(x)v\right] = q(x). \tag{4.20}$$

Chọn một hàm số $v \neq 0$ sao cho $v' + p(x)v = 0$. (4.21)

Phương trình (4.21) tương đương với dạng biến số phân ly

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx \Leftrightarrow \int \frac{dv}{v} = \int -p(x)dx \Leftrightarrow \ln|v| = \int -p(x)dx,$$

và ta có thể chọn $v = e^{-\int p(x)dx}$. Lúc này phương trình (4.20) trở thành:

$$u'v = q(x),$$

$$u' = \frac{q(x)}{v(x)},$$

$$u = \int \frac{q(x)}{v(x)}\, dx + C, \text{với } C \in \mathbb{R} \text{ tùy ý.}$$

Với u và v như trên, $y = uv = \left[\int \frac{q(x)}{v(x)}\, dx + C\right] e^{-\int p(x)dx}$ là nghiệm tổng quát của (4.18).

Tóm tắt cách giải phương trình tuyến tính $y' + p(x)y = q(x)$
$y = uv$ $v' + p(x)v = 0$, $u'v = q(x)$

Chú ý: *có nhiều phương pháp khác nhau để giải phương trình vi phân tuyến tính như phương pháp Lagrange (phương pháp biến thiên hằng số), phương pháp thừa số tích phân... Phương pháp mà chúng ta vừa trình bày gọi là phương pháp Bernoulli.*

Ví dụ: Giải phương trình vi phân tuyến tính

$$y' - \frac{2}{x} y = x^2 \cos x \tag{4.22}$$

Giải:

Với điều kiện $x \neq 0$, đặt $y = uv$, rồi thay vào phương trình ta được

$$u'v + uv' - \frac{2}{x} uv = x^2 \cos x, \text{ hay}$$

$$u'v + u\left[v' - \frac{2}{x} v\right] = x^2 \cos x. \tag{4.23}$$

Chọn một hàm số $v \neq 0$ sao cho

$$v' - \frac{2}{x} v = 0, \text{ hay } \frac{v'}{v} = \frac{2}{x},$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{2dx}{x},$$

$$\ln|v| = 2\ln|x| + M,\ M \in \mathbb{R}.$$

Chọn $M = 0$ ta được $\ln|v| = 2\ln|x|$, hay $|v| = e^{2\ln|x|} = |x|^2$. Ta chọn $v = x^2,\ x \neq 0.$

Lúc đó phương trình (4.23) trở thành

$$u'x^2 = x^2 \cos x,\ x \neq 0.$$

$$u' = \cos x,$$

$$u = \int \cos x\, dx = \sin x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = uv = x^2(\sin x + C),\ x \neq 0,\ C \in \mathbb{R}.$$

4.3.4 Phương trình vi phân Bernoulli

Phương trình Bernoulli, đặt theo tên James Bernoulli (1654-1705), là một phương trình phi tuyến nổi tiếng có thể chuyển về dạng tuyến tính bằng một phép thế thích hợp.

Phương trình vi phân Bernoulli là phương trình có dạng

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha} \tag{4.24}$$

trong đó p và q là các hàm số một biến của x, giả sử liên tục trên một miền $I \subseteq \mathbb{R}$ nào đó, và hằng số $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$.

Chú ý:

- Nếu $\alpha = 0$ thì (4.24) trở thành phương trình tuyến tính mà chúng ta đã nghiên cứu ở phần trước.
- Nếu $\alpha = 1$ thì (4.24) có thể đưa về phương trình với biến số phân đã biết cách giải

$$y' = (p(x) - q(x))y.$$

Nhận xét: phương trình Bernoulli (4.24) có dạng gần giống phương trình tuyến tính (4.18), bằng cách đổi hàm chúng ta sẽ chuyển phương trình Bernoulli về dạng tuyến tính.

Cách giải phương trình (4.24):

Trước hết ta thấy nếu $\alpha < 0$ thì $y \neq 0$, còn nếu $\alpha > 0$ thì hàm số $y = 0$ là một nghiệm của phương trình(4.24).

Ta đi tìm các nghiệm khác không của phương trình. Chia hai vế của phương trình (4.24) cho $y^{\alpha} \neq 0$ ta được

$$y^{-\alpha} y' + p(x) y^{1-\alpha} = q(x) \tag{4.25}$$

Đặt hàm $z = y^{1-\alpha}$ (cũng coi z là hàm của biến x). Lúc đó ta có đạo hàm của z theo x là

$$z' = (1-\alpha) y^{-\alpha} y' \Leftrightarrow y^{-\alpha} y' = \frac{1}{1-\alpha} z'.$$

Do đó phương trình (4.25) trở thành:

$$\frac{1}{1-\alpha} z' + p(x) z = q(x), \text{ hay}$$

$$z' + (1-\alpha) p(x) z = (1-\alpha) q(x).$$

Phương trình cuối cùng có dạng phương trình vi phân tuyến tính mà chúng ta đã biết cách giải ở mục 4.3.3.

Ví dụ: Giải phương trình vi phân Bernoulli

$$y' + \frac{2}{x} y = \frac{y^3}{x^2}. \tag{4.26}$$

Giải: điều kiện $x \neq 0$.

Trước hết do $\alpha = 3 > 0$ nên dễ thấy $y = 0$ là một nghiệm của phương trình (4.26) .

Ta đi tìm các nghiệm khác không của phương trình. Chia hai vế của phương trình (4.26) cho $y^3 \neq 0$ ta được

$$y^{-3}y' + \frac{2}{x}\frac{1}{y^2} = \frac{1}{x^2} \tag{4.27}$$

Đặt hàm $z = \frac{1}{y^2}$. Lúc đó đạo hàm của z theo x là

$$z' = -2y^{-3}y' \Leftrightarrow y^{-3}y' = -\frac{1}{2}z'.$$

Do đó phương trình (4.27) trở thành $-\frac{1}{2}z' + \frac{2}{x}z = \frac{1}{x^2}$ hay

$$z' - \frac{4}{x}z = -\frac{2}{x^2}. \tag{4.28}$$

Phương trình (4.28) là một phương trình vi phân tuyến tính.

Với điều kiện $x \neq 0$, đặt $z = uv$, rồi thay vào phương trình ta được

$$\mathrm{vu}' + \mathrm{u}\left[v' - \frac{4}{x}v\right] = -\frac{2}{x^2}. \tag{4.29}$$

Chọn $v \neq 0$ là nghiệm phương trình

$$v' - \frac{4}{x}v = 0,$$

$$\frac{dv}{v} = 4\frac{dx}{x},$$

$$\ln|v| = 4\ln|x| + C_1.$$

Chọn $C_1 = 0$ và $v = x^4, x \neq 0.$

Lúc đó phương trình (4.29) trở thành

$$\mathrm{x}^4\mathrm{u}' = -\frac{2}{x^2}, \text{hay } \mathrm{u}' = -\frac{2}{x^6},$$

$$u = \int -\frac{2}{x^6}\,dx = -2\int x^{-6}\,dx = -2\frac{x^{-5}}{-5} + C = \frac{2}{5x^5} + C, C \in \mathbb{R}..$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (4.28) là

$$z = uv = \left(\frac{2}{5x^5} + C\right)x^4 = \frac{2}{5x} + Cx^4,\ x \neq 0, C \in \mathbb{R}.$$

Thay $z = \dfrac{1}{y^2}$ vào công thức trên ta được tích phân tổng quát của (4.26) là

$$\frac{1}{y^2} = \frac{2}{5x} + Cx^4,\ x \neq 0, C \in \mathbb{R}. \tag{4.30}$$

Như vậy phương trình (4.26) có họ tích phân tổng quát (4.30) và nghiệm $y = 0$ (với $x \neq 0$).

4.3.5 Phương trình vi phân toàn phần

Phương trình vi phân toàn phần là phương trình có dạng

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0, \tag{4.31}$$

trong đó M, N là các hàm số hai biến liên tục và có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trong một miền $D \subseteq \mathbb{R}^2$ thỏa mãn

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \text{ trên } D. \tag{4.32}$$

Người ta chứng minh được, với điều kiện (4.32) khi đó tồn tại một hàm số hai biến $F = F(x, y)$ trên D khả vi và có các đạo hàm riêng hỗn hợp đến cấp 2 liên tục sao cho M và N lần lượt là các đạo hàm riêng của F, tức là

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M, \frac{\partial F}{\partial y} = N. \tag{4.33}$$

Chúng ta cũng chú ý rằng nếu tồn tại một hàm F như thế, theo định lý Schwart thì

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x},$$ và từ (4.33) suy ra điều kiện (4.32) là cần thiết.

Khi đó vế trái của phương trình (4.31) là vi phân toàn phần của hàm F,

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}\, dx + \frac{\partial F}{\partial y}\, dy = M\ dx + N\ dy.$$

Do đó phương trình (4.31) có thể viết dưới dạng

$$dF = 0.$$

Từ đó tích phân tổng quát của phương trình (4.31) là

$$F = C, C \in \mathbb{R}.$$

Ta sử dụng công thức sau

$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y} \mathrm{N}(x,y)dy=C,C\in\mathbb{R}, \qquad (4.34)$$

với (x_0, y_0) là một điểm chọn tùy ý trong miền D.

Chú ý: khi ta thay đổi điểm $(x_0, y_0)\in D$ thì chỉ có thể làm thay đổi hằng số tùy ý $C\in\mathbb{R}$.

Ví dụ: giải phương trình vi phân

$$(x+y^2)dx+(2xy+y)\,dy=0$$

Giải: đặt $M=x+y^2$, $N=2xy+y$.

Ta thấy $\dfrac{\partial M}{\partial y}=2y=\dfrac{\partial N}{\partial x}$, với mọi $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ nên phương trình trên là phương trình vi phân toàn phần.

Chọn $x_0=0, y_0=0$. Sử dụng công thức (4.34), tích phân tổng quát của phương trình là

$$F(x,y)=\int_0^x M(x,0)dx+\int_0^y N(x,y)dy=C,C\in\mathbb{R}, \text{ hay}$$

$$\int_0^x x\,dx+\int_0^y (2x+y)dy=C,C\in\mathbb{R},$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{(2x+1)y^2}{2}=C,C\in\mathbb{R},$$

$$x^2+(2x+1)y^2=K,K\in\mathbb{R}.$$

Chú ý: chúng ta trình bày một cách khác để tìm hàm F như sau.

Hàm F cần tìm phải thỏa mãn điều kiện (4.33):

$$\frac{\partial F}{\partial x}=M=x+y^2, \frac{\partial F}{\partial y}=N=2xy+y.$$

Do $\dfrac{\partial F}{\partial x}=x+y^2$ nên $F(x,y)=\int\dfrac{\partial F}{\partial x}dx+G(y)$, với $G=G(y)$ là một hàm số của y (không phụ thuộc vào x),

$$F(x,y)=\int(x+y^2)dx+G(y)=\frac{x^2}{2}+y^2x+G(y). \qquad (4.35)$$

Tiếp theo do điều kiện $\frac{\partial F}{\partial y} = N = 2xy + y$ nên với F như ở (4.35) thì

$$2yx + G'(y) = 2xy + y,$$

$$G'(y) = y,$$

$$G(y) = \int y\, dy + C = \frac{y^2}{2} + C, C \in \mathbb{R}.$$

Từ đó thay G vừa tìm được vào (4.35) ta thu được kết quả như trong ví dụ trên

$$F(x, y) = \frac{x^2}{2} + y^2 x + \frac{y^2}{2} + C$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{(2x+1)y^2}{2} + C, C \in \mathbb{R}.$$

4.4 ỨNG DỤNG PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TRONG MÔ HÌNH HÓA

Ngoài các mô hình đã được đưa ra, trong mục này chúng tôi giới thiệu thêm một số mô hình đơn giản trong các lĩnh vực khác nhau dẫn đến phương trình vi phân.

4.4.1 Định luật giảm nhiệt độ của Newton

Định luật giảm nhiệt độ của Newton nói rằng tốc độ thay đổi nhiệt độ của một vật tỷ lệ thuận với sự chênh lệch nhiệt độ của nó và môi trường xung quanh (với điều kiện sự chênh lệch nhiệt độ là nhỏ và bản chất của bề mặt bức xạ không thay đổi).

Gọi $y = y(t)$ là nhiệt độ của vật theo thời gian đặt trong môi trường có nhiệt độ là một hằng số M. Chúng ta biết rằng tốc độ thay đổ của vật là $\frac{dy}{dt}$ nên định luật giảm nhiệt độ của Newton được biểu diễn dưới dạng

$$\frac{dy}{dt} = -k\left(y - M\right) \tag{4.36}$$

trong đó $k > 0$ là hằng số tỷ lệ tùy thuộc vào từng vật thể (hệ số truyền nhiệt) và được giả sử không thay đổi theo thời gian. Đó là một phương trình vi phân cấp một dạng biến số phân ly và chúng ta có thể tìm được nghiệm tổng quát

$$y = Ce^{-kt} + M, C \in \mathbb{R}. \tag{4.37}$$

Ví dụ: Một cốc nước sôi đặt trong một phòng có nhiệt độ được giữ cố định là 25°C. Giả sử cốc nước giảm nhiệt độ từ 100°C xuống còn 90°C trong vòng 5 phút. Hỏi sau bao nhiêu lâu thì cốc nước giảm nhiệt độ xuống còn 50°C.

Giải: gọi $y = y(t)$ là nhiệt độ của cốc nước theo thời gian, nó tuân theo định luật giảm nhiệt của Newton (4.36) nên có biểu thức dạng (4.37):

$$y = Ce^{-kt} + M, C \in \mathbb{R}.$$

Với dữ kiện của đề bài thì $M = 25,\ y(0) = 100,\ y(5) = 90.$ Từ đó ta có

$$C + 25 = 100 \Leftrightarrow C = 75.$$

$$75e^{-5k} + 25 = 90 \Leftrightarrow e^{-5k} = \frac{13}{15} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{5}\ln\frac{13}{15} \approx 0,0286.$$

Do đó $y = 75e^{-0,0286t} + 25.$

Nhiệt độ của cốc nước còn 50° C thì

$$75e^{-0,0286t} + 25 = 50 \Leftrightarrow e^{-0,0286t} = \frac{1}{3}$$

$$-0,0286t = \ln\frac{1}{3}$$

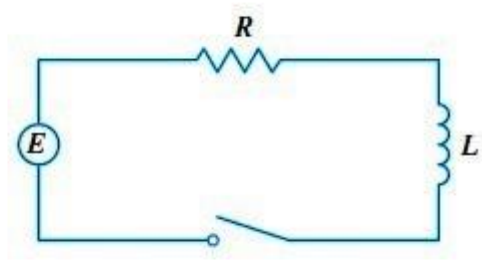
$$0,0286t = \ln 3$$

$$t \approx 38,41 \text{ (phút)}.$$

Vậy sau khoảng 38,41 phút thì nhiệt độ của cốc nước còn 50° C.

4.4.2 Mô hình mạch điện

Chúng ta xét một mạch điện như trong hình vẽ 4.6 gồm một nguồn phát điện E (có thể là pin hoặc máy phát điện) với đơn vị Vol (V), một điện trở R với đơn vị ôm (Ω) và một cuộn cảm với độ tự cảm (hay từ dung) L có đơn vị Henry (H).



Hình 4.6

Giả sử nguồn phát E hàm phụ thuộc vào thời gian t và gọi cường độ dòng điện trong mạch là $I = I(t)$, với đơn vị Ampe (A). Theo định luật cảm ứng Faraday, khi có dòng điện chạy qua cuộn cảm sẽ sinh ra một từ trường biến thiên theo thời gian và tạo ra một hiệu điện thế là $L\frac{dI}{dt}$. Theo một định luật của Kirchhoff thì tổng các hiệu điện thế qua điện trở R và qua cuộn cảm L phải bằng hiệu điện thế của nguồn phát E. Từ đó một mô hình cho cường độ dòng điện I được cho bởi phương trình vi phân bậc một:

$$L\frac{dI}{dt}+RI=E(t). \tag{4.38}$$

Ví dụ: Giả sử một mạch điện như trên với $R=8$ (V), $L=4$ (H) và nguồn phát không đổi $E=32$ (V). Hãy tìm biểu thức của cường độ dòng điện trong mạch theo thời gian kể từ lúc đóng mạch điện.

Giải: Cường độ dòng điện trong mạch được cho bởi phương trình

$$4\frac{dI}{dt}+8I=32.$$

Chúng ta cũng chú ý rằng khi chưa đóng mạch điện thì chưa có dòng điện, do đó ta có điều kiện ban đầu $I(0)=0$. Phương trình trên có thể đưa về dạng phân ly biến số

$$\frac{dI}{I-4}=-2dt.$$

Tích phân hai vế phương trình trên ta được

$$\ln|I-4|=-2t+C, C\in\mathbb{R}.$$

Từ đó suy ra $|I-4|=e^{-2t+C}, C\in\mathbb{R}$ và do đó $I-4=\pm e^{C}e^{-2t}$. Đặt $M=\pm e^{C}$, $M\neq 0$ ta nhận được

$$I=4+Me^{-2t}.$$

Điều kiện ban đầu $I(0)=0$ dẫn đến $M=-4$.

Vậy biểu thức của cường độ dòng điện trong mạch là

$$I(t)=4-4e^{-2t}.$$

Ngoài ra chúng ta cũng có thể thấy rằng $\lim\limits_{t\to+\infty}I(t)=4$ nên cường độ dòng điện trong mạch tiệm cận đến 4 (A) sau khi thời gian t đủ lớn.

Tóm tắt các dạng phương trình vi phân cấp một

1. Phương trình với biến số phân ly
2. Phương trình đẳng cấp
3. Phương trình tuyến tính
4. Phương trình Bernoiulli
5. Phương trình vi phân toàn phần

BÀI TẬP CHƯƠNG 4 PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Các bài từ 4.1-4.5, kiểm tra hàm số cho trước có phải là nghiệm của phương trình vi phân?

	Nghiệm	**Phương trình vi phân**
4. 1.	$N = Ce^{kt}$	$\frac{dN}{dt} = k\ N(t)$
4. 2.	$y = \frac{1}{1+Ce^{-t}}$	$\frac{dy}{dx} = ky(1-y)$
4. 3.	$y = C\sqrt{x^2+4}$	$\left(x^2+4\right)\frac{dy}{dx} = xy$
4. 4.	$N = 100e^{2t}$	$\frac{dN}{Ndt} = 2,\ N(0) = 100$
4. 5.	$y^2 = Cx^3$	$2xy' - 3y = 0$

Các bài tập từ 4.6-4.9, giải các phương trình vi phân với điều kiện ban đầu

	Phương trình vi phân	**Điều kiện ban đầu**
4. 6.	$\frac{dy}{dx} = x^2 + 2\sin x,$	sao cho $y_0 = 1$ khi $x_0 = 0$.
4. 7.	$\frac{ds}{dt} = 2e^{-3t},$	biết $s(0) = 2$.
4. 8.	$\frac{dy}{dx} = 2y,$	sao cho $y_0 = -2$ khi $x_0 = 0$.
4. 9.	$\frac{dN}{dt} = 2(3-N),$	biết $N(0) = 10$.

Các bài 4.10-4.14, giải các phương trình vi phân sau

4. 10. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

4. 11. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

4. 12. $ydx - (2x+1)dy = 0$

4. 13. $xy' + y = 0$

4. 14. $xy' = (y+1)$

Các bài *4.15-4.20*, giải các phương trình vi phân đẳng cấp

4. 15. $(x+y)dx-(x-y)dy=0$

4. 16. $ydx+(2\sqrt{xy}-x)dy=0$

4. 17. $y'=\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y}{x}}$

4. 18. $y'+\frac{y}{x}\ln\left(\frac{y}{x}\right)=0$

4. 19. $\left(x^3-xy^2\right)dx+\left(xy^2-y^3\right)dy=0$

4. 20. $\left(x^2+y^2\right)dx+3xydy=0$

Các bài 4.21-4.27, giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp một

4. 21. $y'-y=4$

4. 22. $y'+2xy=4x$

4. 23. $y'-\frac{y}{x}=x^2$

4. 24. $y'-\frac{y}{x\ln x}=x\ln x$

4. 25. $y'-\frac{1}{x}y=\frac{3}{x^2}$.

4. 26. $y'+\frac{2y}{x+3}=\frac{1}{x^2}$

4. 27. $y'+\frac{y}{x}=\frac{1}{x^2+1}$

Các bài 4.28-4.32, giải các phương trình Bernoulli

4. 28. $y'+y=xy^2$

4. 29. $y'+3xy=x^2y^3$

4. 30. $y'+xy=\frac{x}{y}$

4. 31. $y'+\frac{y}{x}=xy^2$

4. 32. $y'+\frac{y}{x}=\frac{y^3}{x^2}$

Giải các phương trình vi phân cấp một sau bằng một phương pháp thích hợp

4. 33. $(x^2+9)y'=xy$

4. 34. $y'x=y\ln y$

4. 35. $x\sqrt{y}dx-y(x+1)dy=0$

4. 36. $y'+2xy=xy^2$

4. 37. $y'=\frac{x^2+y^2}{x\left(x+y\right)}$

4. 38. $\left(y^2+2\right)y'=3x^2y\left(1+\frac{1}{x^3+1}\right)$

4. 39. $xy'=y-x\cos^2\frac{y}{x}$

4. 40. $y'-y\sin x=\sin 2x$

4. 41. $y'+4x^3y=x^3$

4. 42. $\frac{dy}{dx}-2\frac{y}{x}=\frac{1}{x^2}$

Bài tập ứng dụng phương trình vi phân

Các bài tập từ 4.43-4.44 liên quan đến mô hình giảm nhiệt độ

4. 43. Giả sử nhiệt độ của một vật, ký hiệu là $y = y(t)$, biến đổi theo phương trình

$$\frac{dy}{dt} = -2\left(y - 10\right) \text{ với } y(0) = 30.$$

Tìm $y(t)$ và nhiệt độ của vật khi $t = 4$.

4. 44. Một cốc cà phê được mang ra cho khách hàng. Giả sử cốc cà phê có nhiệt độ 95°C và nhiệt độ của môi trường là 28°C. Sau 5 phút thì thấy nhiệt độ của cốc cà phê còn 90°C. Hỏi sau 10 phút thì nhiệt độ của cốc cà phê là bao nhiêu.

Phân rã chất phóng xạ. Giả sử khối lượng của một chất phóng xạ theo thời gian ký hiệu là $m(t)$. Dựa trên giả thuyết tốc độ phóng xạ tỷ lệ thuận với lượng chất phóng xạ, quá trình phóng xạ được mô hình bởi phương trình

$$\frac{dm}{dt} = -\lambda m(t), \text{ với } m(0) = m_0, \quad (4.39)$$

trong đó λ là một hằng số dương, được gọi là *hằng số phóng xạ*.

4. 45. Radium có chu kỳ bán rã là 1599 năm. Giả sử ban đầu có 10 gam Radium. Hỏi sau sau 600 năm thì khối lượng Radium còn bao nhiêu?