

Tên học phần: Giải tích Số TC: 03

Ngày thi: 13/07/2022

Thời gian làm bài: 90 phút

Đề số 3

Câu 1 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1)(a) Xác định miền $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ trong toạ độ cực.(b) Tính tích phân $I = \iint_D (x^2 + y^2 - xy) dx dy$.**Câu 2** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Tính tích phân

$$I = \iiint_V (x^2 + y^2) z \, dx dy dz,$$

trong đó V là một miền trong \mathbb{R}^3 thỏa mãn các điều kiện: $4 \geq x^2 + y^2 + z^2 \geq 1, z \geq 0$.**Câu 3** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Cho cung (C) là một phần parabol $\begin{cases} y = 2x^2 \\ z = 2, \end{cases}$ định hướng từ $A(0, 0, 2)$ đến $B(1, 2, 2)$.(a) Tìm một biểu diễn tham số $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ của (C) .(b) Tính $I = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, biết $\mathbf{F} = (2x^2 - 3y, 2y^2 - 3x, xy - x - y)$.**Câu 4** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Cho mặt (S) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$ (với $a > 0$) hướng ra ngoài.(a) Tìm một biểu diễn tham số của (S) và một vectơ pháp tuyến tương ứng.(b) Tính tích phân của hàm vectơ $\mathbf{F} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$ trên mặt (S) .**Câu 5** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Giải phương trình vi phân tuyến tính cấp một không thuần nhất sau:

$$y' - \frac{2}{x}y = x^3 e^x.$$

----- Hết -----

- Thí sinh **không** được sử dụng tài liệu.
- Cán bộ coi thi không cần giải thích gì.

Trưởng bộ môn/khoa

Giảng viên ra đề

TS. Phan Quang Sáng

GS. TS. Phùng Văn Đồng

PGS. TS. Đỗ Văn Nam

TS. Lê Đức Ninh

TS. Đỗ Quốc Tuấn

TS. Vũ Hữu Nhựt

ThS. Nguyễn Đức Ngà

Đề số: 03

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1			2
	a		1
		$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$	0,5
		$1 \leq r \leq 2$	0,25
		$0 \leq \varphi \leq 2\pi$	0,25
	b		1
		$ J = r$ or $dxdy = r dr d\varphi$	0,25
		$I = \int_1^2 dr \int_0^{2\pi} r^2 (1 - \frac{1}{2} \sin 2\varphi) r d\varphi$	0,25
		$I = (r^4/4)_1^2 (\varphi + \cos(2\varphi)/4)_0^{2\pi}$	0,25
		$I = 15\pi/2$	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
2			2,00
		• Vẽ được hai hình cầu [không bắt buộc]	
		• Tọa độ cầu $z = r \cos \theta, x = r \sin \theta \cos \phi, y = r \sin \theta \sin \phi$	0,5
		• Miền lấy tích phân: $\phi \in [0, 2\pi], r \in [1, 2], \theta \in [0, \pi/2]$	0,25
		• Định thức Jacobi: $ J = r^2 \sin \theta$	0,25
		• Tích phân bằng $I = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_1^2 r^5 \sin^3 \theta \cos \theta dr$	0,25
		• Tính được tích phân $\int r^5 dr = r^6/6$ [hoặc $\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$]	0,25
		• Tính được thêm tích phân thứ hai $\int \sin^3 \theta \cos \theta d\theta = \sin^4(\theta)/4$	0,25
		• Đáp số: $21\pi/4$	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
3		(Làm cách khác đúng vẫn tính đủ điểm)	2,00
	a		0,5
		Biểu diễn tham số: $x = t, y = 2t^2, z = 2, 0 \leq t \leq 1$	0,5
	b		1,50

	$dx = dt, \quad dy = 4t dt, \quad dz = 0$	0,25
	$I = \int_0^1 (2t^2 - 3.2t^2) dt + (2.(2t^2)^2 - 3t) 4t dt + 0$	0,5
	$= \int_0^1 (-16t^2 + 32t^5) dt$	0,25
	$= \left(-\frac{16}{3}t^3 + \frac{32}{6}t^6\right) \Big _0^1$	0,25
	$= 0$	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
4			2,00
		<ul style="list-style-type: none"> Tham số hóa $x = a \sin u \cos v, y = a \sin u \sin v, z = a \cos u$	0,5
		<ul style="list-style-type: none"> Miền lấy tích phân $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v \leq 2\pi$	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> $\begin{cases} r'_u = (a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, -a \sin u) \\ r'_v = (-a \sin u \sin v, a \sin u \cos v, 0) \end{cases}$ 	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> $\mathbf{N} = r'_u \times r'_v = ((a \sin u)^2 \cos v, (a \sin u)^2 \sin v, a^2 \sin u \cos u)$ 	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> Đưa về tích phân $\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin u \, du dv$	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> Chuyển về $I = a^2 \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u \, du = 2a^2 \pi \left(-\cos u \Big _0^{\frac{\pi}{2}} \right)$	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> Tính đúng $I = 2a^2 \pi$	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
5		(Làm cách khác, ví dụ theo phương pháp Lagrange - biến thiên hằng số, đúng vẫn tính đủ điểm)	2,00

	Viết được: $y(x) = u(x)v(x)$	0,25
	Viết lại được phương trình vi phân: $u'v + u\left(v' - \frac{2}{x}v\right) = x^3e^x$	0,25
	Tìm được nghiệm riêng của phương trình $v' - \frac{2}{x}v = 0$ như sau: $\mathbf{v} = \mathbf{x}^2$	0,5
	Viết được: $u' = xe^x$	0,25
	Viết được: $\mathbf{u} = \int \mathbf{x}e^{\mathbf{x}}d\mathbf{x}$	0,25
	Sử dụng phương pháp tích phân từng phần tính được: $\int xe^x dx = e^x(x - 1) + C$	0,25
	Viết được nghiệm tổng quát: $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = [\mathbf{e}^{\mathbf{x}}(\mathbf{x} - \mathbf{1}) + \mathbf{C}]\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^2\mathbf{e}^{\mathbf{x}}(\mathbf{x} - \mathbf{1}) + \mathbf{C}\mathbf{x}^2$, với C là hằng số tích phân có giá trị tùy ý.	0,25

Trưởng bộ môn/khoa

Giảng viên ra đề

TS. Phan Quang Sáng

GS. TS. Phùng Văn Đồng

PGS. TS. Đỗ Văn Nam

TS. Lê Đức Ninh

TS. Đỗ Quốc Tuấn

TS. Vũ Hữu Nhựt

ThS. Nguyễn Đức Ngà