Lecture Notes: Đại số tuyến tính

Chương 3. Vấn đề giá trị riêng và chéo hóa ma trận

Biên soạn: Phan Quang Sáng- Bộ môn Toán, Đại học Phenikaa

Ngày 3 tháng 10 năm 2023

Mục lục

Vấn đề giá trị riêng và chéo hóa ma trận

Chương này trình bày các khái niệm về bài toán giá trị riêng, một số tính chất cơ bản của một số ma trận thực và phức đặc biệt (ma trận đối xứng và phản đối xứng; ma trận Hermit và phản Hermit; ma trận trực giao và Unita), bài toán chéo hóa ma trận.

1 Bài toán giá trị riêng

Bài toán giá trị riêng của ma trận nghiên cứu phương trình vectơ

$$Ax = \lambda x,$$

trong đó A là một ma trận vuông, λ là một hằng số chưa biết và x cũng là một véc tơ chưa biết.

Hiển nhiên $x = \theta$ (véc tơ không) luôn luôn là một nghiệm của phương trình trên và do đó không phải là mục tiêu của bài toán giá trị riêng, mà ở đây bài toán mong muốn tìm véc tơ $x \neq \theta$.

Phương trình trên có vẻ đơn giản nhưng lại nảy sinh trong rất nhiều vấn đề lý thuyết, có rất nhiều ứng dụng và xuất hiện thường xuyên trong kỹ thuật, vật lý, hình học, số học, toán lý thuyết, sinh học...

1.1 Giá trị riêng, véc tơ riêng

Ví dụ: xét phép nhân một véc tơ khác không bởi một ma trận

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 \\ 27 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \end{bmatrix}$$

Chúng ta hãy xem phép nhân ma trận đã cho có ảnh hưởng như thế nào đến các vectơ. Trong trường hợp đầu tiên, chúng ta nhận được một vectơ hoàn toàn mới có hướng khác và độ dài khác so với vectơ ban đầu. Điều này là bình thường và không được quan tâm. Tuy nhiên, trong trường hợp thứ hai, phép nhân tạo ra một vectơ mới có cùng hướng với vectơ ban đầu, chúng tỷ lệ với nhau với hằng số tỷ lệ là 10.

Định nghĩa 1.1. *Cho A là một ma trận vuông cấp n khác không. Số λ (thực hoặc phức) được gọi là một giá trị riêng của ma trận A nếu có một véc tơ $x \neq \theta$ (của $\mathbb{R}^n$ hoặc $\mathbb{C}^n$) sao cho*

$$Ax = \lambda x.$$

Lúc đó x được gọi một véc tơ riêng (hoặc véc tơ đặc trưng) của A tương ứng với giá trị riêng λ.

Bài toán tìm các giá trị riêng và các véc tơ riêng được gọi là bài toán giá trị riêng.

Tập hợp tất cả các giá trị riêng của A được gọi là phổ của A và được ký hiệu là $\sigma(A)$. Giá trị lớn nhất trong các giá trị tuyệt đối (hoặc modul) của các giá trị riêng của A được gọi là bán kính phổ của A.

Về mặt hình học, chúng ta đang tìm kiếm các vectơ x mà phép nhân bởi ma trận A có cùng tác động như khi nhân bởi một lượng vô hướng λ. Nói cách khác, Ax tỷ lệ với x; chúng có cùng hướng hoặc ngược hướng.

Cách tìm giá trị riêng, véc tơ riêng

Chúng ta sẽ minh họa phương pháp tìm giá trị riêng, véc tơ riêng của một ma trận thông qua ví dụ sau.

Ví dụ: tìm giá trị riêng, véc tơ riêng của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Chúng ta cần tìm véc tơ $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \neq \theta$ và số λ sao cho

$$Ax = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Phương trình trên được chuyển về hệ phương trình

$$\begin{cases} (-5-\lambda)x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + (-2-\lambda)x_2 &= 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

hoặc được viết dưới dạng ma trận $(A - \lambda I_n)x = \theta$.

Chúng ta chú ý từ quy tắc Cramer rằng, nếu định thức của ma trận hệ số $(A - \lambda I_n) \neq 0$ thì hệ trên chỉ có nghiệm duy nhất là $(0, 0)$. Từ đó để ma trận A có véc tơ riêng thì hệ phương trình trên phải có nghiệm không tầm thường $x \neq 0$, điều này chỉ xảy khi nếu định thức

$$D(\lambda) := det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0.$$

Từ đó A có hai giá trị riêng thực là $\lambda_1 = -1$ và $\lambda_2 = -6$.

Chúng ta sẽ tìm các véc tơ riêng tương ứng với các giá trị riêng.

(a) Với giá trị riêng $\lambda_1 = -1$: các véc tơ riêng là nghiệm khác không của hệ phương trình (1.1) khi thay $\lambda = \lambda_1 = -1$:

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 & = 0 \\ 2x_1 - x_2 & = 0 \end{cases}$$

Hệ có vô số nghiệm dạng $x_2 = 2x_1$ và tập hợp các nghiệm (không gian riêng tương ứng với $\lambda_1 = -1$) là một không gian véc tơ con 1 chiều của không gian véc tơ thực $\mathbb{R}^2$ sinh ra bởi véc tơ cơ sở $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$: $N(-1) = Span\{u_1\}$. Trong trường hợp này các véc tơ riêng tương ứng có dạng

$$k_1 u_1 = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ với } k_1 \neq 0.$$

(b) Với giá trị riêng $\lambda_2 = -6$: hoàn toàn tương tự như trường hợp trên, tập hợp các nghiệm (không gian riêng tương tương ứng với $\lambda_2 = -6$) là một không gian véc tơ con 1 chiều của không gian véc tơ thực $\mathbb{R}^2$ sinh bởi véc tơ cơ sở $u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$: $N(-6) = Span\{u_2\}$. Các véc tơ riêng tương ứng có dạng

$$k_2 u_2 = k_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{ với } k_2 \neq 0.$$

Một cách tổng quát

Phương trình $Ax = \lambda x$ tương đương với dạng ma trận

$$(A - \lambda I_n)x = \theta. \tag{1.2}$$

Từ quy tắc Cramer chúng ta suy ra, để ma trận A có véc tơ riêng thì hệ phương trình trên phải có nghiệm không tầm thường $x \neq 0$, điều này chỉ xảy khi nếu định thức

$$D(\lambda) = det(A - \lambda I_n) = 0. \tag{1.3}$$

Phương trình (1.3) được gọi là phương trình đặc trưng của ma trận A và định thức $D(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ cũng được gọi là đa thức đặc trưng của ma trận A.

Một số chú ý:

(1) Như vậy các giá trị riêng của ma trận A phải là nghiệm của đa thức đặc trưng, cho bởi phương trình đặc trưng (1.3). Đa thức đặc trưng có bậc n và từ một định lý cơ bản của đại số, nếu nói chung các giá trị riêng cả thực hoặc phức thì ma trận A có ít nhất một giá trị riêng và tối đa n giá trị riêng phân biệt.

(2) Các véc tơ riêng tương ứng với giá trị riêng λ là nghiệm khác không được xác định từ hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (1.2). Chúng ta biết rằng các véc tơ riêng đó, cùng với véc tơ không θ lập thành một không gian véc tơ con (của $\mathbb{R}^n$ hoặc $\mathbb{C}^n$), và được gọi là **không gian riêng** của A tương ứng với giá trị riêng λ, ký hiệu là $N(\lambda)$. Một cơ sở hữu hạn cho không gian riêng có thể được lựa chọn.

Ví dụ 1: tìm các giá trị riêng và các véc tơ riêng của các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Giải: Đa thức đặc trưng của A là

$$D(\lambda) := det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2.$$

Do đó, phương trình đặc trưng của A là

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Từ đó A có hai giá trị riêng thực là $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = 2$.
Tương tự như ví dụ trên chúng ta tìm được các véc tơ riêng tương ứng với các giá trị riêng từ hệ $(A - \lambda I)x = \theta$ như sau.

- Với $\lambda_1 = 1$, các giá trị riêng tương ứng có dạng

$$k_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ với } k_1 \neq 0.$$

- Với giá trị riêng $\lambda_2 = 2$, các véc tơ riêng tương ứng có dạng

$$k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ với } k_2 \neq 0.$$

Ví dụ 2: tìm các giá trị riêng và các véc tơ riêng của các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Giải: Phương trình đặc trưng của A là

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = 0$$

Từ đó A có một giá trị riêng là $\lambda = 0$ (nghiệm kép).

Các giá trị riêng tương ứng với giá trị riêng là $\lambda = 0$ là nghiệm khác không của hệ $(A - \lambda I)x = \theta$:

$$x_2 = 0.$$

Do đó các véc tơ riêng có dạng

$$k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ với } k \neq 0.$$

Không gian riêng tương ứng với $\lambda = 0$ là không gian con một chiều của $\mathbb{R}^2$ sinh bởi véc tơ $(1, 0)$: $N(0) = Span\{(1, 0)\}$.

Ví dụ 3: tìm các giá trị riêng và các véc tơ riêng của các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Giải: Đa thức đặc trưng của A là

$$\begin{aligned} D(\lambda) = det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 15\lambda + 9. \end{aligned}$$

Do đó, phương trình đặc trưng của A là

$$-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 15\lambda + 9 = 0$$
$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3 \text{ (với bội 2)}$$

Như vậy A có hai giá trị riêng là $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = 3$ (với bội 2).
Chúng ta sẽ đi tìm các không gian riêng và các giá trị riêng tương ứng với các giá trị riêng đó từ hệ $(A - \lambda I)x = \theta$ như sau.

(a) Với $\lambda_1 = 1$, xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_2 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &= -x_2 \\ x_3 &= 0 \end{cases}$$

Các nghiệm của hệ trên có dạng

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ x_2 \in \mathbb{R}.$$

Do đó không gian riêng tương ứng với $\lambda_1 = 1$ là không gian con một chiều của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi véc tơ $u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$: $N(1) = Span\{u_1\}$.

Các véc tơ riêng tương ứng trong trường hợp này là

$$N(1)\backslash\{\theta\} = \{x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 |\ x_2 \neq 0\}.$$

(b) Với giá trị riêng $\lambda_2 = 3$: xét hệ phương trình

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &= x_2 \\ x_2, x_3 &\in \mathbb{R} \end{cases}$$

Các nghiệm của hệ trên có dạng

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

Do đó không gian riêng tương ứng với $\lambda_2 = 3$ là không gian con hai chiều của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi 2 véc tơ (độc lập tuyến tính) $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ và $u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$: $N(3) = Span\{u_1, u_2\}$.

Các véc tơ riêng tương ứng trong trường hợp này là có dạng

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},\ \text{với}\ \ x_2, x_3 \in \mathbb{R}\ \text{và không cùng bằng 0.}$$

Ví dụ 4: tìm các giá trị riêng và các véc tơ riêng của các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Giải: Đa thức đặc trưng của A là

$$D(\lambda) := det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Phương trình đặc trưng của A:

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

có hai giá trị riêng phức là $\lambda_1 = i$ và $\lambda_2 = -i$.

Chú ý: nếu chỉ xét trong không gian véc tơ thực $\mathbb{R}^2$ trên trường số thực $\mathbb{R}$ thì A không có giá trị riêng. Tuy nhiên khi xét không gian véc tơ phức $\mathbb{C}^2$ trên trường số $\mathbb{C}$ thì A có hai giá trị riêng phức như ở trên, lúc này các véc tơ riêng được tìm kiếm là các véc tơ của $\mathbb{C}^2$.

Chúng ta sẽ tìm các véc tơ riêng tương ứng với các giá trị riêng từ hệ $(A - \lambda I)x = \theta$ như sau.

- Với $\lambda_1 = -i$, xét hệ phương trình

$$\begin{cases} ix_1 + x_2 & = 0 \\ -x_1 + ix_2 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = ix_2 \\ x_2 & \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Do đó không gian riêng tương ứng với $\lambda_1 = -i$ là không gian con một chiều của $\mathbb{C}^2$ sinh bởi véc tơ $u_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$: $N(i) = Span\{u_1\}$.

Các véc tơ riêng tương ứng trong trường hợp này có dạng

$$k \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \ k \in \mathbb{C}, \ k \neq 0.$$

- Với $\lambda_2 = -i$, xét hệ phương trình

$$\begin{cases} -ix_1 + x_2 & = 0 \\ -x_1 - ix_2 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 & = ix_1 \\ x_1 & \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Do đó không gian riêng tương ứng với $\lambda_1 = -i$ là không gian con một chiều của $\mathbb{C}^2$ sinh bởi véc tơ $u_2 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$: $N(-i) = Span\{u_2\}$.

Các véc tơ riêng tương ứng trong trường hợp này có dạng

$$l \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}, \ l \in \mathbb{C}, \ l \neq 0.$$

Định lý 1.2. *Chúng ta có các kết quả sau:*

(1) Ma trận A và A^T có cùng các giá trị riêng.

(2) Các véc tơ riêng ứng với các giá trị riêng phân biệt là độc lập tuyến tính.

Chứng minh. (1) Các đa thức đặc trưng của A và A^T là như nhau vì

$$det(A - \lambda I) = det(A - \lambda I)^T = det(A^T - \lambda I).$$

Do đó A và A^T có cùng các giá trị riêng.

(2) Giả sử $u_1, u_2, \ldots, u_l$ là các véc tơ riêng tương ứng với các giá trị riêng phân biệt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$: $Au_i = \lambda_i u_i$, chúng ta cần chứng minh hệ gồm các véc tơ đó độc lập.

Chúng ta chứng minh điều đó bằng quy nạp theo m với $1 \leq m \leq l$ rằng hệ $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ là độc lập tuyến tính.

Với $m = 1$, rõ ràng hệ chỉ có một véc riêng $u_1 \neq \theta$ là độc lập tuyến tính.

Giả sử quy nạp hệ $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$, $1 \leq m \leq l-1$ là độc lập tuyến tính, chúng ta sẽ chứng minh hệ $\{u_1, u_2, \ldots, u_m, u_{m+1}\}$ độc lập tuyến tính. Thật vậy, giả sử

$$k_1u_1 + k_2u_2 + \ldots + k_mu_m + k_{m+1}u_{m+1} = \theta, \;\; k_i \in K. \tag{1.4}$$

Từ đó suy ra $A(k_1u_1 + k_2u_2 + \ldots + k_mu_m + k_{m+1}u_{m+1}) = \theta$ và do định nghĩa của các véc tơ riêng nên đẳng thức này trở thành

$$k_1\lambda_1u_1 + k_2\lambda_2u_2 + \ldots + k_m\lambda_mu_m + k_{m+1}\lambda_{m+1}u_{m+1} = \theta. \tag{1.5}$$

Nhân (1.4) với λ_{m+1} rồi trừ đi (1.5) ta được

$$k_1(\lambda_{m+1} - \lambda_1)u_1 + k_2(\lambda_{m+1} - \lambda_2)u_2 + \ldots + k_m(\lambda_{m+1} - \lambda_m)u_m = \theta.$$

Do giả thiết quy nạp hệ $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ độc lập tuyến tính nên tất cả các hệ số trong vế trái của đẳng thức trên phải bằng không, tức là:

$$k_i(\lambda_{m+1} - \lambda_i) = 0 \Rightarrow k_i = 0 \;\; \text{vì } \lambda_{m+1} \neq \lambda_i \text{ với mọi } \; i = 1, \ldots, m.$$

Lúc này đẳng thức (1.4) trở thành $k_{m+1}u_{m+1} = \theta$, và do đó $k_{m+1} = 0$ vì $u_{m+1} \neq \theta$. Vậy hệ $\{u_1, u_2, \ldots, u_m, u_{m+1}\}$ độc lập tuyến tính.

□

Chú ý: số bội của giá trị riêng λ trong đa thức đặc trưng được gọi là bội đại số của λ, ký hiệu là M_λ; số chiều của không gian riêng $N(\lambda)$ tương ứng với λ được gọi là bội hình học của λ, ký hiệu là m_λ. Nói chung, chúng ta có thể chứng minh $m_\lambda \leq M_\lambda$.

1.2 Một số ứng dụng của bài toán giá trị riêng

- Bài toán giá riêng có vai trò quan trọng khi khảo sát các bài toán động, ở đó ta thực hiện các biến đổi tuyến tính lặp lại nhiều lần xuất phát từ tính chất: nếu $Ax = \lambda x$ thì $A^k x = \lambda^k x, k \geq 1$. Tính chất này có thể được ứng dụng trong các bài toán liên quan đến mô hình tăng trưởng dân số quần thể (như mô hình Leslie), bài toán hệ giao động hoặc các vấn đề liên quan chuỗi Makov.

- Trong cơ học, các vectơ riêng của tenxơ mô men quán tính xác định các trục chính của một vật rắn, tenxơ mô men quán tính là một đại lượng quan trọng để xác định sự quay của một vật rắn quanh khối tâm của nó.

- Các bài toán giá trị riêng thường gặp trong lĩnh vực phân tích giao động của một hệ cơ học (ví dụ hệ lò xo con lắc).

- Bài toán giá trị riêng xuất hiện trong cơ học lượng tử (toán tử Fock) và trong cơ học chất rắn (Tenxơ ứng suất).

- Trong lý thuyết thống kê bài toán giá trị riêng cho phép phân tích thành phần chính của dữ liệu theo hướng của véc tơ riêng.

- Ngoài ra người ta có thể chứng minh định thức của ma trận bằng tích của các giá trị riêng và toán tử vết của ma trận bằng tổng của các giá trị riêng.

2 Ma trận đối xứng, phản đối xứng

Định nghĩa 2.1 (Ma trận đối xứng và phản đối xứng)**.** *Ma trận thực vuông A được gọi là:*

(1) đối xứng nếu $A^T = A$, tức là $a_{ij} = a_{ji}$ với mọi i, j.

(2) phản đối xứng nếu $A^T = -A$, tức là $a_{ij} = -a_{ji}$ với mọi i, j.

Như vậy trong ma trận đối xứng (tương ứng phản đối xứng) các phần tử đối xứng qua đường chéo chính bằng nhau (tương ứng là đối của nhau).

Một số ví dụ:

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \\ 5 & -4 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 3 & -5 \\ -3 & 1 & 4 \\ 5 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

Chú ý: một ma trận vuông A bất kỳ có thể được viết thành tổng của một ma trận đối xứng và một ma trận phản đối xứng

$$A = R + S, \quad \text{với } R = \frac{1}{2}(A + A^T),\ S = \frac{1}{2}(A - A^T).$$

Định lý 2.2. *(Giá trị riêng của ma trận đối xứng và phản đối xứng)*

(1) Các giá trị riêng của ma trận đối xứng luôn là số thực và tính cả bội thì ma trận đối xứng cấp n có đủ n giá trị riêng thực.

(2) Các giá trị riêng của ma trận phản đối xứng luôn là số thuần ảo hoặc bằng không.

Kết quả của định lý trên cho ma trận ma trận đối xứng và phản đối xứng là trường hợp đặc biệt của ma trận Hermit và phản Hermit được trình bày ở phần tiếp theo (định lý 3.3).

Một số tính chất cơ bản (tùy chọn)

(1) Tổng và hiệu của hai ma trận đối xứng (phản đối xứng) là đối xứng (phản đối xứng).

(2) Bội vô hướng kA, $k \in \mathbb{R}$, của ma trận đối xứng (phản đối xứng) là đối xứng (phản đối xứng).

(3) Nếu A và B là đối xứng, khi đó AB đối xứng khi và chỉ khi A và B giao hoán, tức là $AB = BA$.

(4) Nếu A là ma trận đối xứng thì A^n cũng là ma trận đối xứng với mọi số nguyên dương n.

(5) Nếu A khả nghịch thì A^{-1} đối xứng (phản đối xứng) khi và chỉ khi A đối xứng (phản đối xứng).

(6) Định thức của ma trận phản đối xứng luôn không âm.

(7) Nếu A là ma trận phản đối xứng thì $A + I$ là ma trận khả nghịch.

(8) Nếu A là ma trận phản đối xứng thì A^2 là ma trận đối xứng.

Định lý 2.3. *Trang bị cho $\mathbb{R}^n$ một tích vô hướng $(\cdot, \cdot)$ thông thường. Khi đó*

(1) Ma trận A đối xứng khi và chỉ khi $(Ax, y) = (x, Ay)$ với mọi véc tơ $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(2) Ma trận A phản đối xứng khi và chỉ khi $(Ax, y) = -(x, Ay)$ với mọi véc tơ $x, y \in \mathbb{R}^n$.

3 Ma trận Hermit, phản Hermit

Nhắc lại: nếu số phức $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, thì số phức liên hợp của z là $\overline{z} = x - iy$ và môđun của z là $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Định nghĩa 3.1. *Cho $A = [a_{ij}]$, khi đó định nghĩa ma trận liên hợp của A, ký hiệu là $\overline{A}$, bởi $\overline{A} = [\overline{a_{ij}}]$, trong đó $\overline{a_{ij}}$ là phức liên hợp của a_{ij}.*

Ví dụ:

$$A = \begin{bmatrix} 4+2i & 2-i & -2 \\ 1-3i & 4 & -2+5i \end{bmatrix}, \text{ thì } \overline{A} = \begin{bmatrix} 4-2i & 2+i & -2 \\ 1+3i & 4 & -2-5i \end{bmatrix}$$

Định nghĩa 3.2 (Ma trận Hermit và phản Hermit)**.** *Ma trận phức vuông A được gọi là:*

(1) Hermit nếu $\overline{A}^T = A$ (hay $\overline{A} = A^T$), tức là $\overline{a_{ij}} = a_{ji}$ với mọi i, j.

(2) phản Hermit nếu $\overline{A}^T = -A$ (hay $\overline{A} = -A^T$), tức là $\overline{a_{ij}} = -a_{ji}$ với mọi i, j.

Chú ý:

(1) Hiển nhiên ma trận đối xứng (phản đối xứng) là trường hợp đặc biệt của ma trận Hermit (phản Hermit).

(2) Các phần tử nằm trên đường chéo chính của ma trận Hermit phải là số thực, trong khi các phần tử nằm trên đường chéo chính của ma trận phản Hermit phải là số thuần ảo (tức là có phần thực bằng 0) hoặc bằng 0.

(3) Một ma trận vuông bất kỳ có thể viết thành tổng của một ma trận Hermit và một ma trận phản đối xứng (phân tích Toeplitz).

Một số ví dụ: ma trận A dưới đây là Hermit, B dưới đây là phản Hermit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1+3i \\ 1-3i & 5 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 2i & 3-2i \\ -3-2i & -5i \end{bmatrix}$$

Chú ý: với một ma trận vuông A bất kỳ, do $det(\overline{A}) = \overline{det(A)}$ nên nếu λ là một giá trị riêng của A thì $\overline{\lambda}$ cũng sẽ là một giá trị riêng của $\overline{A}$.

Định lý 3.3. *(Giá trị riêng của ma trận Hermit và phản Hermit)*

(1) Các giá trị riêng của một ma trận Hermit cấp n (và do đó của ma trận đối xứng) luôn là số thực và tính cả bội thì nó có đủ n giá trị riêng thực.

(2) Các giá trị riêng của ma trận phản Hermit (và do đó của ma trận phản đối xứng) luôn là số thuần ảo hoặc bằng không.

Chứng minh. Giả sử λ là giá trị riêng của A và $x \neq \theta$ là một véc tơ riêng tương ứng. Nhân trái $Ax = \lambda x$ đó bởi $\overline{x}^T$ ta được

$$\overline{x}^T Ax = \lambda \overline{x}^T x.$$

Chú ý rằng $\overline{x}^T x > 0$ do $x \neq \theta$, nên từ đẳng thức trên suy ra

$$\lambda = \frac{\overline{x}^T Ax}{\overline{x}^T x} \tag{3.6}$$

(1) Nếu A là ma trận Hermit thì $\overline{A}^T = A$ hay tương đương $A^T = \overline{A}$. Để chứng minh λ là số thực chúng ta sẽ chứng tỏ tử số trong (3.6) là số thực. Vì $\overline{x}^T Ax$ là một số nên nó bằng với chuyển vị của nó, từ đó:

$$\overline{x}^T Ax = (\overline{x}^T Ax)^T = x^T A^T \overline{x} = x^T \overline{A}\overline{x} = \overline{\overline{x}^T Ax}.$$

Như vậy $\overline{x}^T Ax$ bằng với liên hợp của nó nên nó phải là một số thực.

(2) Nếu A là ma trận phản Hermit, khi đó $A^T = -\overline{A}$: làm tương tự như trên nhưng chúng ta lại nhận được

$$\overline{x}^T Ax = -\overline{\overline{x}^T Ax},$$

nên $\overline{x}^T Ax$ phải là số thuần ảo hoặc bằng 0 và vì thế λ cũng như vậy.

□

Ví dụ: tìm các giá trị riêng của các ma trận A và B trong ví dụ phía trên
Phương trình đặc trưng của các ma trận A và B tương ứng là

$$D_A(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda = 0 \Rightarrow \sigma(A) = \{0, 7\}$$

$$D_B(\lambda) = \lambda^2 + 3i\lambda + 23 = 0 \Rightarrow \sigma(B) = \{(-3 - \sqrt{101})i, (-3 + \sqrt{101})i\}$$

Một số tính chất (tùy chọn)

(1) Tổng và hiệu của hai ma trận Hermit (phản Hermit) là Hermit (phản Hermit).

(2) Bội vô hướng kA, $k \in \mathbb{R}$, của ma trận Hermit (phản Hermit) là Hermit (phản Hermit).

(3) Nếu A và B là Hermit, kho đó AB Hermit khi và chỉ khi A và B giao hoán, tức là $AB = BA$.

(4) A là ma trận phản Hermit khi và chỉ khi iA là Hermit.

(5) Nếu A là ma trận phản Hermit thì A^n là ma trận Hermit nếu n là số chẵn, phản Hermit nếu n là số lẻ.

(6) Định thức của ma trận Hermit luôn là số thực.

Chú ý: Mở rộng tích vô hướng trong $\mathbb{R}^n$, chúng ta có thể định nghĩa trên $\mathbb{C}^n$ một tích vô hướng phức và nó trở thành một không gian Unita như sau:

$$(u, v) = \overline{u}^T v, \ u, v \in \mathbb{C}^n.$$

Định lý 3.4. *Trang bị cho $\mathbb{C}^n$ một tích vô hướng $(\cdot, \cdot)$ như trên. Khi đó*

(1) Ma trận A Hermit khi và chỉ khi $(Ax, y) = (x, Ay)$ với mọi véc tơ $x, y \in \mathbb{C}^n$.

(2) Ma trận A phản Hermit khi và chỉ khi $(Ax, y) = -(x, Ay)$ với mọi véc tơ $x, y \in \mathbb{C}^n$.

4 Ma trận trực giao

Định nghĩa 4.1 (Ma trận trực giao)**.** *Ma trận thực vuông A được gọi là ma trận trực giao nếu*

$$A^T = A^{-1}.$$

Ánh xạ tuyến tính tương ứng với ma trận trực giao cho bởi $y = Ax$ được gọi là biến đổi trực giao.

Ví dụ 1: ma trận sau là ma trận trực giao

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Nhận xét: chúng ta dễ dàng chứng minh được

(1) Nếu ma trận A là ma trận trực giao thì ma trận chuyển vị A^T và ma trận nghịch đảo của nó A^{-1} cũng là các ma trận trực giao.

(2) Định thức của ma trận trực giao luôn bằng 1 hoặc -1.

Ví dụ 2: phép quay trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ bởi một góc $\theta \in \mathbb{R}$ là một biến đổi trực giao tương ứng với ma trận trực giao

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Chẳng hạn phép quay ngược chiều kim đồng hồ một góc 30 độ cho bởi ma trận

$$R_{\frac{\pi}{6}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

Định lý 4.2. *Biến đổi trực giao bảo toàn tích vô hướng thông thường của các véc tơ trong $\mathbb{R}^n$, tức là*

$$(Au, Av) = (u, v), \text{ với mọi véc tơ } u, v \in \mathbb{R}^n.$$

Từ đó biến đổi trực giao cũng bảo toàn độ dài (hay chuẩn) của các véc tơ trong $\mathbb{R}^n$:

$$\|Au\| = \|u\| \text{ với mọi véc tơ } u \in \mathbb{R}^n.$$

Chứng minh. Cho A là ma trận trực giao tức là $A^T = A^{-1}$ hay $A^T A = \mathbf{I}$. Với mọi $u, v \in \mathbb{R}^n$ ta có:

$$(Au, Av) = (Au)^T Av = u^T A^T Av = u^T \mathbf{I} v = u^T v = (u, v).$$

Từ đó khi cho $v = u$ ta nhận được ngay $\|Au\| = \|u\|$. □

Định lý 4.3. *Ma trận thực vuông A là ma trận trực giao khi và chỉ khi các véc tơ cột $A_1, A_2, \cdots, A_n$ (hoặc các véc tơ hàng) của nó lập thành một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^n$, tức là một cơ sở thỏa mãn*

$$(A_i, A_j) = A_i^T A_j = \delta_{ij},$$

trong đó

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \textit{nếu} \quad i \neq j \\ 1 & \textit{nếu} \quad i = j \end{cases} .$$

Chứng minh. (1) Nếu A là ma trận trực giao thì theo định nghĩa ta có $A^{-1}A = A^T A = I_n$. Biểu diễn tích này dưới dạng các véc tơ cột ta được

$$A^T A = \begin{bmatrix} A_1^T \\ A_2^T \\ \vdots \\ A_n^T \end{bmatrix} [A_1 \ A_2 \ \cdots \ A_n] = \begin{bmatrix} A_1^T A_1 & A_1^T A_2 & \cdots & A_1^T A_n \\ A_2^T A_1 & A_2^T A_2 & \cdots & A_2^T A_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_n^T A_1 & A_n^T A_2 & \cdots & A_n^T A_n \end{bmatrix} = I_n.$$

Chú ý rằng các phần từ trong ma trận tích như trên chính là các tích vô hướng của các véc tơ cột và do đó chúng ta có ngay điều cần chứng minh $(A_i, A_j) = A_i^T A_j = \delta_{ij}$.

Từ nhận xét nếu ma trận A là ma trận trực giao thì ma trận chuyển vị A^T cũng là các ma trận trực giao nên các véc tơ dòng cũng lập thành một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^n$.

(2) Ngược lại nếu véc tơ cột $A_1, A_2, \cdots, A_n$ của A làm thành một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^n$ thì ma trận tích $A^T A$ như trên phải là ma trận đơn vị. Vì vậy ma trận A khả nghịch và $A^{-1} = A^T$ nên A là ma trận trực giao.

Chứng minh tương tự nếu các véc tơ hàng của A lập thành một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^n$

□

Từ tính chất bảo toàn chuẩn của ma trận trực giao, chúng ta có thể chứng minh được định lý sau.

Định lý 4.4. *Các giá trị riêng của ma trận trực giao là các số thực hoặc cặp số phức liên hợp và có môđun bằng 1.*

Chứng minh. Nếu A là ma trận thực bất kỳ thì đa thức đặc trưng của nó là đa thức với các hệ số thực. Do đó theo một định lý cơ bản của đại số các nghiệm của đa thức đặc trưng là các số thực hoặc cặp số phức liên hợp. Điều này cũng đúng với ma trận trực giao là ma trận thực.

Do ma trận trực giao A bảo toàn chuẩn, do đó nếu $Ax = \lambda x$, $x \neq \theta$, thì $\|Ax\| = \|\lambda x\| = \|x\|$, và do đó $|\lambda| = 1$. □

Ví dụ 3: phương trình đặc trưng của ma trận trực giao A trong ví dụ trên là

$$-\lambda^3 + \frac{2}{3}\lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda - 1 = 0.$$

Từ đó tìm được các giá trị riêng của A là $-1, \frac{5+i\sqrt{11}}{6}, \frac{5-i\sqrt{11}}{6}$, chúng đều có môđun bằng 1.

5 Ma trận Unita (tùy chọn)

Khái niệm mở rộng của ma trực giao sang ma trận phức là ma trận Unita. Ma trận Unita cũng có các tính chất tương tự như với ma trận trực giao.

Định nghĩa 5.1 (Ma trận Unita)**.** *Ma trận phức vuông A được gọi là ma trận Unita nếu*

$$\overline{A}^T = A^{-1}.$$

Ánh xạ tuyến tính tương ứng với ma trận Unita cho bởi $y = Ax$ được gọi là biến đổi Unita.

Chú ý: định thức của ma trận Unita luôn có môđun bằng 1: $|det(A)| = 1$.

Ví dụ: ma trận A dưới đây là Unita

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}i & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2}i \end{bmatrix}.$$

Chúng ta nhắc lại rằng tích vô hướng (thông thường) trên $\mathbb{C}^n$ cho bởi

$$(u, v) = \overline{u}^T v, u \in \mathbb{C}^n.$$

Định lý 5.2. *Biến đổi Unita bảo toàn tích vô hướng và từ đó bảo toàn chuẩn của các véc tơ trong* $\mathbb{C}^n$.

Chứng minh. Nếu A là ma trận Unita thì là $\overline{A}^T = A^{-1}$ hay $\overline{A}^T A = \mathbf{I}$. Với mọi $u, v \in \mathbb{C}^n$ ta có:

$$(Au, Av) = \overline{Au}^T Av = (\overline{A}\overline{u})^T Av = \overline{u}^T \overline{A}^T Av = \overline{u}^T \mathbf{I} v = \overline{u}^T v = (u, v).$$

Từ đó khi cho $v = u$ ta nhận được ngay $\|Au\| = \|u\|$. $\square$

Từ tính chất bảo toàn tích vô hướng của ma trận Unita, tương tự như đối với ma trận trực giao, chúng ta có thể chứng minh được các định lý sau.

Định lý 5.3. *Nếu một ma trận là Unita (và do đó ma trận trực giao) thì các giá trị riêng của nó có môđun bằng 1, các không gian riêng trực giao với nhau.*

Định nghĩa 5.4. *Một hệ các véc tơ phức trong* $\mathbb{C}^n$ *được gọi là hệ Unita nếu tích vô hướng của các véc tơ đó thỏa mãn tính chất*

$$(u_i, u_j) = \overline{u}_i^T u_j = \delta_{ij}.$$

Định lý 5.5. *Ma trận phức vuông* A *là ma trận Unita khi và chỉ khi các véc tơ cột* $A_1, A_2, \cdots, A_n$ *(hoặc các véc tơ dòng) của nó lập thành một cơ sở Unita của* $\mathbb{C}^n$.

6 Vấn đề chéo hóa ma trận

Trong phần này chúng ta chỉ làm việc chủ yếu với các ma trận vuông thực, mặc dù có thể xây dựng tương tự đối với ma trận vuông phức.

6.1 Ma trận đồng dạng

Định nghĩa 6.1. *Ma trận* $\widehat{A}$ *vuông cấp* n *được gọi là đồng dạng với ma trận* A *vuông cùng cấp* n *nếu có một ma trận cấp* n *khả nghịch* P *sao cho* $\widehat{A} = P^{-1}AP$.

Một tính chất quan trọng của biến đổi đồng dạng đó là bảo toàn các giá trị riêng.

Định lý 6.2. *Hai ma trận đồng dạng có cùng các giá trị riêng. Hơn nữa nếu x là một véc tơ riêng của A thì $y = P^{-1}x$ là một véc tơ riêng của $\widehat{A}$.*

Chứng minh. Hai ma trận đồng dạng có cùng đa thức đặc trưng nên từ đó hai ma trận đồng dạng có cùng các giá trị riêng:

$$det(\widehat{A} - \lambda I) = det(P^{-1}(A - \lambda I)P) = det(A - \lambda I).$$

Hơn nữa nếu $Ax = \lambda x$, khi đó với $y = P^{-1}x$:

$$\widehat{A}y = \widehat{A}P^{-1}x = P^{-1}APP^{-1}x = P^{-1}Ax = P^{-1}(\lambda x) = \lambda P^{-1}x = \lambda y,$$

nên $y = P^{-1}x$ là véc tơ riêng của của $\widehat{A}$. Chú ý rằng biểu diễn trên cũng chứng tỏ rằng λ cũng là một giá trị riêng của $\widehat{A}$ nếu λ là một giá trị riêng của A. □

Ví dụ: xét các ma trận A

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \text{ và } P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},$$

khi đó

$$\widehat{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Chúng ta có thể kiểm tra đa thức đặc trưng của A là $\lambda^2 - 5\lambda + 6$ và từ đó A có hai giá trị riêng là 2 và 3 như của $\widehat{A}$.

6.2 Ma trận chéo hóa được

Định nghĩa 6.3. *Ma trận vuông A được gọi là chéo hóa được nếu nó đồng dạng với một ma trận chéo $\widehat{A}$, tức là có một ma trận khả nghịch P sao cho $P^{-1}AP = \widehat{A}$ là ma trận chéo.*

Bài toán xem xét ma trận vuông A có chéo hóa được hay không và tìm một ma trận khả nghịch P sao cho $P^{-1}AP = \widehat{A}$ là ma trận chéo được gọi là chéo hóa ma trận A; ma trận P còn được gọi là ma trận làm chéo hóa ma trận A.

Một số ví dụ

1) Ma trận $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ đồng dạng với ma trận chéo $\widehat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, với ma trận làm chéo hóa $P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ vì $P^{-1}AP = \widehat{A}$. Chúng ta có thể kiểm tra lại

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix},\ P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

2) Ma trận $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ đồng dạng với ma trận chéo $\widehat{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, với ma trận làm chéo hóa $Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ vì $Q^{-1}AQ = \widehat{B}$.

3) Ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ đồng dạng với ma trận $\widehat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ với ma trận làm chéo hóa $P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -6 & -3 & 2 \\ 13 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Độc giả có thể tự kiểm tra lại $P^{-1}AP = \widehat{A}$ với ma trận

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{12} \\ \frac{-8}{21} & \frac{-1}{7} & \frac{-2}{21} \\ \frac{-9}{28} & \frac{2}{7} & \frac{3}{28} \end{pmatrix}.$$

Định lý 6.4. *Ma trận A vuông cấp n chéo hóa được khi và chỉ khi A có đủ n véc tơ riêng độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^n$, tức là $\mathbb{R}^n$ có một cơ sở gồm toàn các véc tơ riêng của A.*

Chú ý: điều kiện chéo hóa được trong định lý trên cũng tương đương với điều kiện tổng các bội hình học của các giá trị riêng phải bằng n.

Chứng minh. Nếu ma trận vuông A chéo hóa được thì có một ma trận khả nghịch P sao cho $\widehat{A} = P^{-1}AP$ là ma trận chéo. Khi đó các véc tơ e_i trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$ là các véc tơ riêng của $\widehat{A}$. Từ đó theo theo Định lý (6.2), Pe_i sẽ là các véc tơ riêng của A, và hơn nữa n véc tơ này độc lập tuyến tính (với chú ý định thức của hệ véc tơ này chính là $\det(PI) = \det(P) \neq 0$).

Ngược lại giả sử A có đủ n véc tơ riêng độc lập tuyến tính (và cũng là một cơ sở) trong $\mathbb{R}^n$, khi đó lập ma trận khả nghịch P với các cột là tọa độ cột của các véc tơ riêng đó (trong cơ sở chính tắc) (P cũng chính là một ma trận chuyển cơ sở). Khi đó ma trận $\widehat{A} = P^{-1}AP$ sẽ là ma trận chéo với các phần tử trên đường chéo chính cũng là các giá trị riêng của A.

Thật vậy từ $Au_i = \lambda_1 u_i,\ i = 1, 2 \ldots, n$ suy ra:

$$[A[u_1]\ A[u_2] \cdots A[u_n]\ ] = [[u_1]\ [u_2] \cdots [u_n]\ ] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

hay $AP = P\widehat{A}$ và do đó $P^{-1}AP = \widehat{A}$ là ma trận chéo. □

Chú ý:

(1) Từ chứng minh của định lý trên chúng ta thấy rằng một ma trận P làm chéo hóa A có thể được chọn gồm các cột là các các véc tơ riêng. Khi đó ma trận chéo $\widehat{A} = P^{-1}AP$ có các phần tử trên đường chéo chính tương ứng là các giá trị riêng của A.

(2) Nếu A chéo hóa được, khi đó chúng ta sẽ có ngay $\det(A) = \det(\widehat{A})$ là tích của các giá trị riêng (tính cả bội) của A.

Hệ quả 6.5. *Nếu ma trận A vuông cấp n có n giá trị riêng phân biệt thì $\mathbb{R}^n$ có một cơ sở của gồm toàn các véc tơ riêng của A và do đó A chéo hóa được.*

Chứng minh. Giả sử A có n giá trị riêng phân biệt. Khi đó ứng với mỗi giá trị riêng ta lấy một véc tơ riêng thì các véc tơ này phải độc lập tuyến tính theo định lý (1.2), nên chúng lập thành một cơ sở của $\mathbb{R}^n$. Vì thế ma trận A chéo hóa được theo định lý trên. □

Ví dụ 1: Chéo hóa ma trận

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Giải: Trước hết chúng ta tìm các giá trị riêng và các véc tơ riêng độc lập tuyến tính của A.

Như đã trình bày ở phần trước, ma trận A có hai giá trị riêng thực là $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = 2$ do đó A chắc chắn chéo hóa được.

- Với $\lambda_1 = 1$, chúng ta lấy một véc tơ tương ứng là $u_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

- Với giá trị riêng $\lambda_2 = 2$, chúng ta lấy véc tơ một tương ứng là

$$u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Như vậy A có đủ hai véc tơ riêng độc lập tuyến tính $\{u_1, u_2\}$ nên cũng chứng tỏ A chéo hóa được với ma trận P làm chéo hóa A có các cột là các véc tơ u_1, u_2:

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Khi đó A đồng dạng với ma trận chéo có các phần tử trên đường chéo chính tương ứng là các giá trị riêng của A:

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 2: Chéo hóa ma trận (nếu có thể)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Giải: *Giải*: Đa thức đặc trưng của A là

$$D(\lambda) := det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4.$$

Do đó, phương trình đặc trưng của A là

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$

Từ đó A có một giá trị riêng là $\lambda = 2$ (nghiệm kép).

Với $\lambda = 2$, xét hệ $(A - \lambda I)x = \theta$:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 & = 0 \\ x_1 + x_2 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = -x_2.$$

Như vậ A chỉ có một véc tơ riêng độc lập tuyến tính là $u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ nên A không chéo hóa được.

Ví dụ 3: Chéo hóa ma trận (nếu có thể)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Giải: *Giải*: Trước hết chúng ta tìm các giá trị riêng và các véc tơ riêng (độc lập tuyến tính) của A như trong Ví dụ 3, mục 1.1.

Ma trận A có hai giá trị riêng là $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = 3$ (với bội 2).

- Với giá trị riêng $\lambda_1 = 1$, chúng ta lấy một véc tơ riêng tương ứng là

$$u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Với giá trị riêng $\lambda_2 = 3$ chúng ta có 2 véc tơ riêng tương ứng độc lập tuyến tính

$$u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ và } \; u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Như vậy A có đủ 3 véc tơ riêng độc lập tuyến tính $\{u_1, u_2, u_3\}$ nên A chéo hóa được. Ma trận P làm chéo hóa A có các cột là các véc tơ u_1, u_2, u_3:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Khi đó A đồng dạng với ma trận chéo

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 4: Chéo hóa ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Giải: Phương trình đặc trưng của A là $\lambda^2 + 4 = 0$ Từ đó ma trận A có hai giá trị riêng phức là $\lambda_1 = 2i$ và $\lambda_2 = -2i$.

Các véc tơ riêng tương ứng độc lập tuyến tính tìm được là

$$u_1 = \begin{bmatrix} -i \\ 2 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} i \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Như vậy A có đủ hai véc tơ riêng độc lập tuyến tính $\{u_1, u_2\}$ nên chéo hóa được bởi với ma trận

$$P = \begin{bmatrix} -i & i \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Khi đó A đồng dạng với ma trận chéo

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{bmatrix}.$$

Chú ý: ma trận vuông A cấp n không nhất thiết phải có đủ n giá trị riêng phân biệt mà vẫn có thể chéo hóa được, như ví dụ 3 ở trên.

6.3 Chéo hóa ma trận đối xứng

Định lý 6.6. *Ma trận đối xứng A cấp n luôn có một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^n$ gồm toàn các véc tơ riêng và do đó chéo hóa được bởi một ma trận trực giao: tồn tại một ma trận trực giao P sao cho $\widehat{A} = P^T AP$ là ma trận chéo với các phần tử trên đường chéo chính là các giá trị riêng thực của nó.*

Ví dụ: Chéo hóa trực giao ma trận đối xứng

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Giải: Đa thức đặc trưng của A là

$$\begin{aligned} D(\lambda) = det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda + 32. \end{aligned}$$

Do đó, phương trình đặc trưng của A là

$$-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 15\lambda + 9 = 0$$
$$\lambda_1 = 2 \text{ (với bội 2)}, \quad \lambda_2 = 8$$

Do đó A có hai giá trị riêng là $\lambda_1 = 2$ (với bội 2) và $\lambda_2 = 8$.

- Với giá trị riêng $\lambda_1 = 2$, không gian riêng tương ứng $N(2)$ là một không gian con hai chiều của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi hai véc tơ (độc lập tuyến tính)

$$u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tuy nhiên hai véc tơ này không trực chuẩn và do đó chúng ta phải thực hiện quá trình trực giao hóa (được gọi là quá trình trực giao hóa Gram-Smidt) chúng. Cụ thể như sau: chuẩn hóa véc tơ u_1 ta được

$$v_1 = \frac{u_1}{\| u_1 \|} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sau đó chọn trong $N(2)$ một véc tơ w_2 có dạng tổ hợp tuyến tính của v_1 và u_2 sao cho w_2 trực giao với v_1. Từ đó chọn được

$$w_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Trực chuẩn hóa w_2 chúng ta nhận được

$$v_2 = \frac{w_2}{\| w_1 \|} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

- Với $\lambda_1 = 8$, không gian riêng tương ứng $N(8)$ là một không gian con một chiều của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi véc tơ $u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Chuẩn hóa véc tơ này chúng ta nhận được

$$v_3 = \frac{u_3}{\| u_3 \|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Như vậy A có 3 véc tơ riêng $\{v_1, v_2, v_3\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$ và khi đó A sẽ chéo hóa trực giao được bởi ma trận trực giao

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

6.4 Chéo hóa ma trận Hermit (tùy chọn)

Tương tự như đối với ma trận đối xứng, chúng ta cũng có có kết quả sau. Ma trận Hermit cấp n luôn có một cơ sở trực chuẩn (Unita) của $\mathbb{C}^n$ gồm các véc tơ riêng và do đó luôn chéo hóa được bởi một ma trận Unita đến một ma trận chéo với các phần tử trên đường chéo chính là các giá trị riêng thực của nó.

7 Giới thiệu phần mềm tính toán

Giới thiệu một số ứng dụng của các phần mềm tính toán, như Mathematica, Maple...cho phép tìm giá trị riêng, véc tơ riêng và chéo hóa ma trận.

Tài liệu

[1] Erwin Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, (10th Edition, 2011), Nhà xuất bản Wiley, p. 256-309.

[2] Nguyễn Đình Trí (Chủ biên), Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh, *Toán học cao cấp Tập I* (2014), Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

[3] Strang Gilbert, *Introduction to Linear Algebra* (5th Edition, 2016), Wellesley-Cambridge Press.