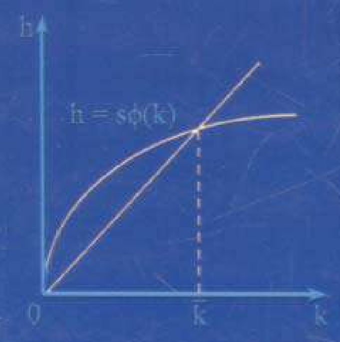
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN

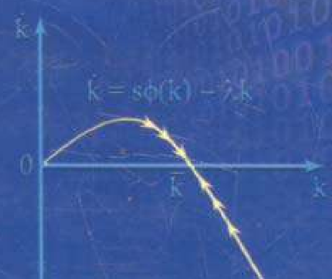
LÊ ĐÌNH THÚY

TOÁN CAO CẤP

CHO CÁC NHÀ KINH TẾ

PHẦN II: GIẢI TÍCH TOÁN HỌC





NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN

LÊ ĐÌNH THUÝ

TOÁN CAO CẤP CHO CÁC NHÀ KINH TẾ

PHẦN 2: GIẢI TÍCH TOÁN HỌC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn sách này là cuốn sách thứ hai của bộ sách hai tập 'TOÁN CAO CẤP CHO CÁC NHÀ KINH TẾ', *được biên soạn dựa theo chương trình môn Toán Cao cấp của trường Đại học Kinh tế quốc dân, dùng chung cho cả hai khối: Kinh tế học và Quản trị kinh doanh.*

Tiếp theo cuốn 'Toán Cao cấp cho các nhà kinh tế, Phần 1: Đại số tuyến tính' đã được xuất bản, cuốn 'Toán Cao cấp cho các nhà kinh tế, Phần 2: Giải tích toán học' bao hàm những nội dung sau đây:

Chương 1 : Hàm số và giới hạn.

Chương 2 : Đạo hàm và vi phân.

Chương 3 : Hàm số nhiều biến số.

Chương 4 : Cực trị của hàm nhiều biến.

Chương 5 : Tích phân.

Chương 6 : Phương trình vi phân.

Chương 7 : Phương trình sai phân.

Trong phạm vi của các chương nói trên, chúng tôi lần lượt trình bày các vấn đề cơ bản của Giải tích Toán học, cùng với một số nội dung chọn lọc của lý thuyết phương trình vi phân và phương trình sai phân. Những nội dung đó được lựa chọn căn cứ vào nhu cầu sử *dụng các phương pháp Toán học trong phân tích kinh tế, với mục đích trang bị kiến thức toán học cần thiết để sinh viên có thể tiếp cận với phương pháp mô hình trong Kinh tế học thực chứng.*

Chương 1 trình bày những khái niệm cơ bản về hàm số và giới hạn, trong đó chúng tôi nhấn mạnh việc sử dụng quan hệ hàm số để biểu diễn quan hệ giữa các biến số kinh tế. Lý thuyết giới hạn được trình bày một cách có hệ thống đối với dãy số. Đối với hàm số đối số liên tục chúng tôi chỉ chú trọng định nghĩa bằng ngôn ngữ dãy số, từ đó trình bày tóm tắt (không có chứng minh) các định lý cơ bản về giới hạn, khái niệm hàm số liên tục và các tính chất cơ bản của hàm liên tục.

Các chương 2, 3, 4 bao quát các nội dung cơ bản về phép toán vi phân, phục vụ cho việc ***phân tích tĩnh so sánh*** *trong kinh tế. Trong kinh tế học, đạo hàm và vi phân được sử dụng để phân tích xu hướng thay đổi của các quyết định khi điều kiện ngoại sinh thay đổi. Các bài toán cực trị giữ vai trò quan trọng trong việc phân tích sự lựa chọn tối ưu của các chủ thể kinh tế, do đó, cùng với bài toán cực trị của hàm một biến đã được trình bày ở chương 2, chúng tôi dành riêng chương 4 để trình bày lần lượt các bài toán cực trị và ứng dụng trong phân tích kinh tế. Ngoài ra, trong nhiều cuốn sách kinh tế học người ta dùng đến đạo hàm của hàm ẩn để phân tích các quan hệ, do đó trong chương 3 chúng tôi có trình bày một cách hết sức cô đọng khái niệm hàm ẩn và phương pháp tính đạo hàm của hàm ẩn.*

Các chương 5, 6, 7 là cơ sở toán học để tiếp cận với việc phân tích động thái của các biến số kinh tế theo thời gian. Các nội dung được lựa chọn chỉ dừng ở mức độ sử dụng của sinh viên bậc cử nhân kinh tế, không chú trọng lý thuyết. Phép toán tích phân được trình *bày giản lược, chủ yếu là các phương pháp tính toán. Các chương về phương trình vi phân và phương trình sai phân chỉ dừng ở các khái niệm cơ bản nhất và phương pháp giải một số loại phương trình cấp một, phương trình tuyến tính cấp hai và cách phân tích định tính quỹ đạo thời gian bằng đồ thị.*

Trong khuôn khổ của cuốn sách này, các nội dung toán học được trình bày bằng ngôn ngữ dành riêng cho sinh viên của các trường thuộc khối kinh tế. Đan xen với các nội dung toán học, chúng tôi đưa vào một số khái niệm cơ bản của Kinh tế học, trên cơ sở đó lần lượt giới thiệu các mô hình sử dụng toán học trong phân tích kinh tế. Giáo trình này không khai thác sâu các vấn đề toán học mà chỉ đề cập ở mức độ phục vụ cho một công cụ nghiên cứu kinh tế. Các khái niệm toán học trừu tượng được diễn đạt bằng ngôn ngữ mô tả, giúp bạn đọc nắm được thực chất của vấn đề. Đa số các định lý được phát biểu không có chứng minh mà chỉ hướng dẫn cách sử dụng. Mặc dù vậy, tính chất hệ thống và tính chặt chẽ của logic suy luận vẫn được tôn trọng. Cần nói thêm rằng các nội dung kinh tế được đưa vào là nhằm mục đích minh hoạ, giúp sinh viên làm quen với việc sử dụng công cụ toán học trong phân tích kinh tế. Đây là cuốn sách toán học phục vụ cho các nhà kinh tế chứ không phải là tài liệu phổ biến kiến thức kinh tế.

Với cuốn giáo trình này, chúng tôi đã cố gắng tạo dựng một cấu trúc môn học để việc giảng dạy toán học có ý nghĩa thiết thực hơn đối với việc đào tạo cán bộ trong lĩnh vực khoa học kinh tế và quản trị kinh doanh. Chắc hẳn vẫn còn những vấn đề cần phải được tiếp tục thảo luận về cấu trúc của cuốn sách và *các nội dung đã được đề cập. Chúng tôi mong mỏi có được những ý kiến đóng góp từ phía các nhà toán học, các nhà kinh tế, các bạn đồng nghiệp và đông đảo bạn đọc để có được một cuốn giáo trình tốt hơn.*

Cuối cùng, tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới Hội đồng Giám định giáo trình của Trường Đại học kinh tế quốc dân, các nhà giáo của Bộ môn Toán cơ bản và các bạn đồng nghiệp trong và ngoài trường đã có những ý kiến đóng góp hết sức bổ ích, giúp tác giả hoàn thành việc biên soạn cuốn sách này. Xin trân trọng cám ơn NXB Đại học Kinh Tế Quốc Dân đã tạo điều kiện đưa cuốn sách đến với bạn đọc.

LÊ ĐÌNH THUÝ

Chương 1
HÀM SỐ VÀ GIỚI HẠN

§1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

I. BIẾN SỐ

a. Khái niệm biến số

Trong các lĩnh vực khoa học, chúng ta thường gặp các đại lượng đo được bằng số. Khi nghiên cứu quy luật thay đổi trị số của các đại lượng đó, người ta thường dùng chữ để ký hiệu số đo của chúng. Chẳng hạn, trong hình học, chúng ta thường dùng chữ V để ký hiệu thể tích. Với mỗi khối hình học trong không gian, V là một số thực. Người ta gọi V là một biến số hình học.

Trong ngôn ngữ hình thức của toán học, từ "biến số" được hiểu theo nghĩa như sau:

Định nghĩa: *Biến số* là một ký hiệu mà ta có thể gán cho nó một số bất kỳ thuộc một tập số $X \neq \varnothing$ cho trước ($X \subset \mathbb{R}$). Tập hợp X được gọi là *miền biến thiên* (MBT) và mỗi số thực $x_0 \in X$ được gọi là một *giá trị* của biến số đó.

Từ *biến số* nhiều khi được gọi tắt là *biến*. Các biến số thường được ký hiệu bằng các chữ cái: x, y, z, ... Thông thường người ta chỉ xét các biến số mà MBT của nó có ít nhất hai số. Một biến số chỉ nhận một giá trị duy nhất được gọi là *hằng số*.

Trong giải tích toán học ta thường xét các biến số thay đổi giá trị một cách liên tục, với MBT là một khoảng số. Các khoảng số được ký hiệu như sau:

Khoảng đóng (đoạn): $[a; b] = \{x: a \le x \le b\}$.
Khoảng mở: $(a; b) = \{x: a < x < b\}$.
Các khoảng nửa mở: $[a; b) = \{x: a \le x < b\}$;
$(a; b] = \{x: a < x \le b\}$.
Các khoảng vô hạn: $(-\infty; b] = \{x: x \le b\}$;
$(-\infty; b) = \{x: x < b\}$;
$[a; +\infty) = \{x: x \ge a\}$;
$(a; +\infty) = \{x: x > a\}$;
$(-\infty; +\infty) = \mathbb{R}$.

b. Các biến số kinh tế

Trong lĩnh vực kinh tế người ta thường quan tâm đến các đại lượng như: giá cả, lượng cung, lượng cầu, doanh thu, chi phí, thu nhập quốc dân, tỷ lệ lạm phát, tỷ lệ thất nghiệp,... Khi phân tích xu hướng thay đổi trị số của các đại lượng đó theo không gian, thời gian và theo các điều kiện khác nhau, các nhà kinh tế xem chúng như các biến số. Các biến số đó được gọi là *biến số kinh tế*.

Trong các tài liệu kinh tế, người ta thường ký hiệu các biến số kinh tế bằng các chữ cái đầu các từ tiếng Anh liên quan đến ý nghĩa của các biến số đó. Sau đây là một số ký hiệu thường gặp:

- p : Giá hàng hoá (price);
- Q_s : Lượng cung (Quantity Supplied);
- Q_d : Lượng cầu (Quantity Demanded);
- U : Lợi ích (Utility);
- TC : Tổng chi phí (Total Cost);
- TR : Tổng doanh thu (Total Revenue);
- Y : Thu nhập quốc dân (National Income);
- C : Tiêu dùng (Consumption);
- S : Tiết kiệm (Saving);
- I : Đầu tư (Investment).

II. QUAN HỆ HÀM SỐ

a. Khái niệm hàm số

Khái niệm hàm số được sử dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực để biểu diễn quan hệ chi phối lẫn nhau giữa các biến số. Định nghĩa khái niệm hàm số bằng ngôn ngữ hình thức của toán học có nội dung như sau:

Định nghĩa: Một *hàm số f* xác định trên một tập hợp $X \subset \mathbb{R}$ là một quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực $x \in X$ với một và chỉ một số thực y.

Tập hợp X được gọi là *miền xác định* (MXĐ) của hàm số f. Số y tương ứng với số x, theo quy tắc f, được gọi là *giá trị của hàm số f tại điểm x*. Giá trị của hàm số f tại điểm x được ký hiệu là f(x). Khi nói đến các hàm số khác nhau, ta sử dụng các ký hiệu khác nhau: f, g, φ, ...

Định nghĩa: *Miền giá trị* (MGT) của một hàm số f là tập hợp tất cả các số thực là giá trị của hàm số đó tại ít nhất một điểm thuộc miền xác định của nó.

Miền giá trị của hàm số f xác định trên miền X được ký hiệu là f(X):

$$f(X) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in X \text{ sao cho } f(x) = y\}.$$

b. Hàm số dạng biểu thức

Ở bậc học phổ thông, bạn đã được làm quen với các biểu thức chứa biến số, từ những biểu thức có một phép toán đến những biểu thức có nhiều phép toán phối hợp, chẳng hạn như

$$x^n,\ \sqrt[n]{x},\ a^x,\ \log_a x, \sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x, \ldots$$

$$ax^2 + bx + c,\ \frac{ax^2 + bx + c}{px + q},\ \log_2 \frac{3x - 1}{5 - x}, \ldots$$

Ta gọi *miền xác định tự nhiên* của một biểu thức f(x) là tập hợp tất cả các số thực mà khi gán cho x thì biểu thức đó có nghĩa. Mỗi biểu thức f(x) là một hàm số xác định trên một tập con X bất kỳ của MXĐ tự nhiên của nó: mỗi số thực $x_0 \in X$ được đặt tương ứng với giá trị tính toán của biểu thức đó khi gán $x = x_0$.

Ví dụ: Biểu thức

$$f(x) = \log_2 \frac{3x-1}{5-x}$$

là một hàm số với MXĐ tự nhiên là tập hợp tất cả các số thực x thoả mãn điều kiện

$$\frac{3x-1}{5-x} > 0 \Leftrightarrow \tfrac{1}{3} < x < 5.$$

Theo biểu thức đó ta dễ dàng tính giá trị của hàm số tại một điểm bất kỳ thuộc MXĐ, chẳng hạn:

$$f(1) = \log_2 \frac{3.1-1}{5-1} = \log_2 \frac{1}{2} = -1,$$

$$f(3) = \log_2 \frac{3.3-1}{5-3} = \log_2 4 = 2; \ldots$$

Phương pháp xác định hàm số bằng biểu thức là một phương pháp phổ biến trong toán học cũng như trong các lĩnh vực ứng dụng toán học. Khi xem xét các hàm số cho bằng biểu thức, bạn cần lưu ý những điều sau đây:

- Về nguyên tắc, MXĐ của một hàm số là một tập số thực cho trước, còn biểu thức giữ vai trò quy tắc tương ứng f trong định nghĩa hàm số. Do đó, khi một hàm số xác định trên tập $X \subset \mathbb{R}$ được cho bằng một biểu thức f(x), tập X có thể chỉ là một tập con nào đó của MXĐ tự nhiên của biểu thức đó. Tuy nhiên, trong toán học nhiều khi người ta cho trước một biểu thức f(x) và xét biểu thức đó như một hàm số. Trong trường hợp này ta đồng nhất MXĐ của hàm số với MXĐ tự nhiên của biểu thức f(x).

- Một hàm số có thể được cho dưới dạng phân giã MXĐ thành các tập con rời nhau và trên mỗi tập con đó quy tắc xác định giá trị tương ứng của hàm số tại mỗi điểm được biểu diễn bằng một biểu thức riêng.

Ví dụ:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 \text{ khi } x \geq 0, \\ 1 - 2x \text{ khi } x < 0. \end{cases}$$

là một hàm số xác định trên $\mathbb{R}$: trong khoảng $[0; +\infty)$ giá trị của hàm số tại mỗi điểm x được tính theo công thức $f(x) = x^2 + 1$, còn trong khoảng $(-\infty; 0)$ giá trị của hàm số tại mỗi điểm x được tính theo công thức $f(x) = 1 - 2x$.

c. Quan hệ hàm số giữa các biến số

Trong các lĩnh vực khoa học người ta phân tích quy luật thay đổi giá trị của các đại lượng đo được bằng số dưới dạng các biến số có quan hệ với nhau: sự thay đổi giá trị của biến số này kéo theo sự thay đổi giá trị của biến số kia theo một quy luật nhất định. Chẳng hạn, trong kinh tế chúng ta thấy khi giá hàng hoá thay đổi thì lượng hàng hoá mà người sản xuất muốn bán ra thị trường và lượng hàng hoá mà người mua bằng lòng mua cũng thay đổi theo; khi thu nhập của các hộ gia đình thay đổi thì lượng tiêu dùng của họ cũng thay đổi v. v... Sự phụ thuộc của một biến số này vào một biến số khác thường được biểu diễn dưới dạng hàm số.

Cho hai biến số x và y với miền biến thiên là các tập hợp số thực X và Y, trong đó biến x có thể nhận giá trị tuỳ ý trong miền biến thiên X của nó. Ta gọi x là *biến độc lập*, hay *đối số*.

Định nghĩa: Ta nói *biến số y phụ thuộc hàm số vào biến số x*, hay *biến số y là hàm số của biến số x*, khi và chỉ khi tồn tại một quy tắc hoặc quy luật f sao cho mỗi giá trị của biến số x trong miền biến thiên X của nó được đặt tương ứng với một và chỉ một giá trị của biến số y.

Theo định nghĩa thì quy tắc f chính là một hàm số xác định trên miền biến thiên X của biến x và giá trị của hàm số f tại điểm x chính là giá trị tương ứng của biến số y:

$$x \mapsto y = f(x).$$

Để nói một cách khái quát rằng y là hàm số của x (y phụ thuộc hàm số vào x) ta có thể viết: $y = y(x)$.

Chú ý: Hai định nghĩa hàm số trên đây tương đương với nhau. Khi cho một hàm số f với MXĐ là tập hợp X, các cách diễn đạt sau đây có nghĩa như nhau:

- Cho hàm số f xác định trên tập X (X là một tập số cho trước);
- Cho hàm số $f(x)$, $x \in X$;
- Cho hàm số $y = f(x)$, $x \in X$.

Chú ý rằng khi viết hàm số dưới dạng $y = f(x)$, các ký hiệu x và y chỉ mang ý nghĩa hình thức, dùng để gọi tên các biến số. Một hàm số được xác định bởi hai yếu tố: miền xác định X (miền biến thiên của biến độc lập x) và quy tắc f cho phép ta xác định được giá trị của hàm số tại mỗi điểm $x \in X$. Chẳng hạn, dưới giác độ toán học ta không phân biệt các hàm số $y = x^2$ và $v = u^2$ khi miền biến thiên của x và miền biến thiên của u trùng nhau.

III. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Quan hệ hàm số $y = f(x)$ liên kết các cặp số thực (x_o, y_o), trong đó x_o là một số bất kỳ thuộc miền xác định X của hàm số và

$y_0 = f(x_0)$. Mỗi cặp số như vậy là một điểm của mặt phẳng toạ độ.

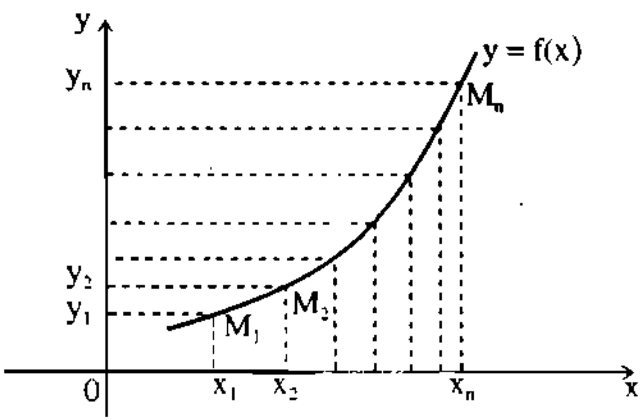
Định nghĩa: *Đồ thị* của hàm số f là tập hợp tất cả các điểm M(x, y) của mặt phẳng toạ độ có hoành độ x là một số thực bất kỳ lấy từ MXĐ của hàm số và tung độ y là giá trị tương ứng của hàm số tại điểm x.

Việc lập đồ thị của một hàm số f với miền xác định là một khoảng số thực thường được thực hiện theo trình tự như sau:

- Lấy các số $x_1, x_2, \ldots, x_n$ từ MXĐ của hàm số (càng gần nhau càng tốt).
- Tính các giá trị tương ứng của hàm số tại các điểm đó:

$$y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2)\ ,\ldots,\ y_n = f(x_n).$$

- Định vị các điểm $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \ldots, M_n(x_n, y_n)$.
- Nối các điểm $M_1, M_2, \ldots, M_n$ ta được hình ảnh đồ thị của hàm số.



Phương pháp đồ thị không phải là phương pháp chính xác. Tuy nhiên, người ta thường sử dụng đồ thị để minh hoạ bằng hình ảnh các đặc trưng cơ bản của sự phụ thuộc hàm số giữa các biến số. Nhìn vào đồ thị ta dễ dàng quan sát xu hướng biến thiên của hàm số khi biến độc lập thay đổi giá trị.

IV. KHÁI NIỆM HÀM NGƯỢC

Xét một hàm số $y = f(x)$ với miền xác định X và miền giá trị $Y = f(X)$. Nếu với mỗi giá trị $y_0 \in Y$ chỉ tồn tại duy nhất một giá trị $x_0 \in X$ sao cho $f(x_0) = y_0$, tức là phương trình $f(x) = y_0$ có một nghiệm duy nhất x_0 trong miền X, thì

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \quad (x \in X, y \in Y),$$

trong đó ký hiệu $x_0 = f^{-1}(y_0)$ chỉ nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = y_0$ như đã nói ở trên.

Như vậy, trong trường hợp này quan hệ hàm số $y = f(x)$ biểu diễn sự phụ thuộc của y vào x có thể đảo ngược để biểu diễn sự phụ thuộc của x vào y thông qua hàm số $x = f^{-1}(y)$.

Định nghĩa: Với giả thiết và quy ước về ký hiệu nêu trên, ta gọi hàm số $x = f^{-1}(y)$ là *hàm ngược* của hàm số $y = f(x)$. Nói cách khác, *hàm số f^{-1}* (xác định trên miền $Y = f(X)$) *là hàm ngược của hàm số f* (xác định trên miền X).

Ví dụ:

- Hàm số $y = x^3$ với miền xác định $X = \mathbb{R}$ có hàm ngược là hàm số $x = \sqrt[3]{y}$:

$$y = x^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y} \quad (x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}).$$

- Hàm ngược của hàm số mũ $y = a^x$ là hàm số logarit $x = \log_a y$:

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y \quad (x \in \mathbb{R},\ y > 0).$$

- Hàm số y = sinx với miền xác định $X = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ có hàm ngược là hàm số x = arcsiny ($-1 \le y \le 1$), trong đó ký hiệu $\arcsin y_0$ chỉ nghiệm duy nhất của phương trình $\sin x = y_0$ trong khoảng $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

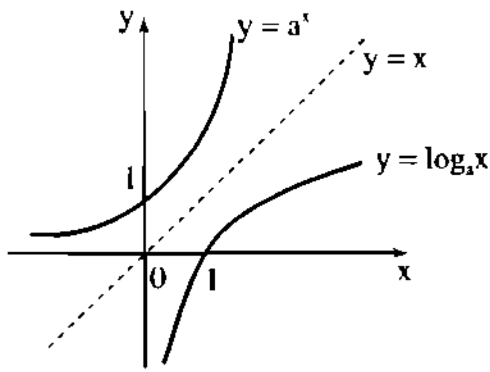
- Hàm số y = cosx với miền xác định $X = [0; \pi]$ có hàm ngược là hàm số x = arccosy ($-1 \le y \le 1$), trong đó ký hiệu $\arccos y_0$ chỉ nghiệm duy nhất của phương trình $\cos x = y_0$ trong khoảng $0 \le x \le \pi$.

- Hàm số y = tgx với miền xác định $X = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ có hàm ngược là hàm số x = arctgy ($y \in \mathbb{R}$), trong đó ký hiệu $\mathrm{arctg}\, y_0$ chỉ nghiệm duy nhất của phương trình $\mathrm{tg}x = y_0$ trong khoảng $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

- Hàm số y = cotgx với miền xác định $X = (0; \pi)$ có hàm ngược là hàm số x = arccotgy ($y \in \mathbb{R}$), trong đó ký hiệu $\mathrm{arccotg}\, y_0$ chỉ nghiệm duy nhất của phương trình $\mathrm{cotg}x = y_0$ trong khoảng $0 < x < \pi$.

Chú ý: Hàm số y = f(x) và hàm ngược $x = f^{-1}(y)$ có cùng một đồ thị, bởi vì y = f(x) và $x = f^{-1}(y)$ là các phương trình tương đương. Tuy nhiên, trong toán học người ta thường dùng ký hiệu x để chỉ biến độc lập và ký hiệu y để chỉ biến phụ thuộc, do đó thay cho cách viết hàm ngược dưới dạng $x = f^{-1}(y)$ người ta có thể tráo ký hiệu biến số và viết hàm ngược của hàm số y = f(x) dưới dạng $y = f^{-1}(x)$. Chẳng hạn, ta có thể nói: hàm số $y = \log_a x$ là hàm ngược của hàm số $y = a^x$, hay đơn giản hơn: $\log_a x$ là hàm ngược của hàm số a^x.

Do tráo ký hiệu biến số nên điểm M(x, y) thuộc đồ thị $y = f^{-1}(x)$ khi và chỉ khi điểm M'(y, x) thuộc đồ thị y = f(x). Trên mặt phẳng toạ độ hai điểm M(x, y) và M'(y, x) đối xứng nhau qua đường phân giác thứ nhất. Như vậy, nếu biểu diễn hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = f^{-1}(x)$ trên cùng một hệ toạ độ trực chuẩn thì chúng đối xứng nhau qua đường thẳng y = x (đường phân giác của góc phần tư thứ nhất). Chẳng hạn, hai đường cong $y = a^x$ và $y = \log_a x$ có dạng như hình vẽ dưới đây.



V. MỘT SỐ ĐẶC TRƯNG HÀM SỐ

a. Hàm số đơn điệu

Định nghĩa: Ta nói rằng hàm số y = f(x) *đơn điệu tăng* (*đơn điệu giảm*) trên một miền $X \subset \mathbb{R}$ nếu với mọi cặp điểm x_1, x_2 thuộc X, hiệu số $f(x_2) - f(x_1)$ luôn cùng dấu (trái dấu) với $x_2 - x_1$.

Nói cách khác:

- Hàm số f(x) là hàm đơn điệu tăng trên miền X nếu

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2) \quad (\forall x_1, x_2 \in X).$$

- Hàm số f(x) là hàm đơn điệu giảm trên miền X nếu

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad (\forall x_1, x_2 \in X).$$

Hàm số đơn điệu tăng (đơn điệu giảm) còn được gọi là hàm số *đồng* biến (hàm số *nghịch biến*).

Ví dụ:

- Hàm số $f(x) = x^2$ là hàm đơn điệu tăng trên khoảng $[0; +\infty)$ và đơn điệu giảm trên khoảng $(-\infty; 0]$:

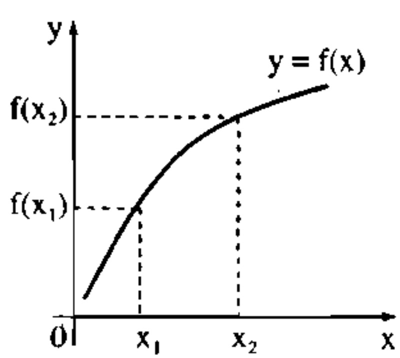
$$\forall x_1, x_2 \in [0; +\infty): \; x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2;$$

$$\forall x_1, x_2 \in (-\infty; 0]: \; x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2.$$

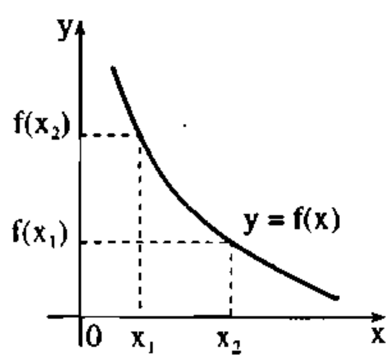
- Hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$ đơn điệu giảm trong khoảng $(0; +\infty)$:

$$\forall x_1, x_2 \in (0; +\infty): \; x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}.$$

Nếu quan sát đồ thị của hàm số theo hướng từ trái sang phải thì *đồ thị của hàm số đơn điệu tăng có dáng dốc lên và đồ thị của hàm số đơn điệu giảm có dáng dốc xuống.*



Hàm số đơn điệu tăng



Hàm số đơn điệu giảm

Chú ý: Khái niệm hàm số đơn điệu theo định nghĩa trên đây được hiểu theo nghĩa *đơn điệu ngặt*. Ta có thể mở rộng khái niệm hàm đơn điệu như sau:

- Hàm số f(x) được gọi là là hàm *đơn điệu tăng theo nghĩa rộng* trên miền X nếu

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \le f(x_2) \quad (\forall x_1, x_2 \in X).$$

- Hàm số f(x) được gọi là là hàm *đơn điệu giảm theo nghĩa rộng* trên miền X nếu

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \ge f(x_2) \quad (\forall x_1, x_2 \in X).$$

b. Hàm số bị chặn

Định nghĩa:

- Hàm số f(x) được gọi là *hàm bị chặn* trong một miền X nếu giá trị của hàm số chỉ thay đổi trong phạm vi một tập con của một khoảng số hữu hạn khi x biến thiên trên miền X, tức là tồn tại các hằng số m và M sao cho:

$$m \le f(x) \le M \quad \forall x \in X.$$

- Hàm số f(x) được gọi là *hàm bị chặn trên* trong một miền X nếu tồn tại hằng số M sao cho:

$$f(x) \le M \quad \forall x \in X.$$

Hằng số M được gọi là *cận trên* của hàm số f(x) trong miền X.

- Hàm số f(x) được gọi là *hàm bị chặn dưới* trong một miền X nếu tồn tại hằng số m sao cho:

$$f(x) \ge m \quad \forall x \in X.$$

Hằng số m được gọi là *cận dưới* của hàm số f(x) trong miền X.

Chú ý rằng *tính bị chặn bao hàm cả bị chặn trên và bị chặn dưới*. Dễ dàng thấy rằng hàm số f(x) bị chặn trong miền X khi và chỉ khi tồn tại hằng số $K > 0$ sao cho:

$$|f(x)| \leq K \quad (\forall x \in X)$$

Ví dụ:

Hàm số $f(x) = x^2 + a$ $(x \in \mathbb{R})$ là hàm bị chặn dưới:

$$f(x) = x^2 + a \geq a, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Hàm số $f(x) = -x^2 + a$ $(x \in \mathbb{R})$ là hàm bị chặn trên:

$$f(x) = -x^2 + a \leq a, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Hàm số $f(x) = \sin x$ $(x \in \mathbb{R})$ là hàm bị chặn:

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

c. Hàm số chẵn và hàm số lẻ

Định nghĩa:

- Hàm số f(x) xác định trên miền X được gọi là *hàm chẵn* nếu với mọi $x \in X$ ta luôn có $-x \in X$ và $f(-x) = f(x)$.
- Hàm số f(x) xác định trên miền X được gọi là *hàm lẻ* nếu với mọi $x \in X$ ta luôn có $-x \in X$ và $f(-x) = -f(x)$.

Ví dụ1: Các hàm số $f(x) = x^2$, $g(x) = \cos x$ $(x \in \mathbb{R})$ là các hàm số chẵn:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x), \forall x \in \mathbb{R};$$
$$g(-x) = \cos(-x) = \cos x = g(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ 2: Các hàm số $f(x) = x^3$, $g(x) = \sin x$ $(x \in \mathbb{R})$ là các hàm số lẻ:

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x), \forall x \in \mathbb{R};$$
$$g(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -g(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Đồ thị của hàm số chẵn và hàm số lẻ có tính chất đối xứng: *đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng, còn đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng.*

d. Hàm số tuần hoàn

Định nghĩa: Hàm số f(x) xác định trên miền X được gọi là *hàm tuần hoàn với chu kỳ T* nếu với mọi $x \in X$ ta luôn có $x + T \in X$ và

$$f(x + T) = f(x).$$

Dễ dàng thấy rằng nếu hàm số f(x) tuần hoàn với chu kỳ T thì nó cũng tuần hoàn với chu kỳ **mT** (m là số nguyên bất kỳ):

$$f(x + mT) = f(x), \forall x \in X.$$

Để cho xác định, *khi nói đến chu kỳ của hàm số tuần hoàn người ta thường lấy chu kỳ dương nhỏ nhất.*

Ví dụ 1: Các hàm số sinx, cosx là các hàm tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x;\ \cos(x + 2\pi) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ 2: Các hàm số tgx, cotgx là các hàm tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$:

$$\mathrm{tg}(x + \pi) = \mathrm{tg}x, \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;\ \mathrm{cotg}(x + \pi) = \mathrm{cotg}x, \forall x \neq k\pi.$$

VI. CÁC HÀM SỐ CƠ BẢN VÀ CÁC PHÉP TOÁN SƠ CẤP ĐỐI VỚI HÀM SỐ

a. Các hàm số sơ cấp cơ bản

Thông thường một hàm số y = f(x) được cho dưới dạng một biểu thức hữu hạn. Các biểu thức hữu hạn được hợp thành từ các biểu thức hàm số cơ bản.

Các hàm số sau đây được gọi là các *hàm số sơ cấp cơ bản*:

1. f(x) = C (hàm số nhận giá trị không đổi C với mọi x).
2. Hàm số luỹ thừa: $f(x) = x^{\alpha}$ (α = const.).

3. Hàm số mũ: $f(x) = a^x$ ($a > 0$ và $a \neq 1$).

4. Hàm số logarit: $f(x) = \log_a x$ ($a > 0$ và $a \neq 1$).

5. Các hàm số lượng giác:

   $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \mathrm{tg}x$, $f(x) = \mathrm{cotg}x$.

6. Các hàm lượng giác ngược:

   $f(x) = \arcsin x$, $f(x) = \arccos x$, $f(x) = \mathrm{arctg}x$, $f(x) = \mathrm{arccotg}x$.

Chú ý: Trong giải tích toán học cung và góc *luôn luôn được đo bằng radian.*

b. Các phép toán sơ cấp đối với hàm số

Các *phép toán sơ cấp* đối với hàm số bao gồm: phép cộng, phép trừ, phép nhân, phép chia và phép hợp hàm.

• Các phép toán cộng, trừ, nhân, chia đối với các biểu thức hàm số được thực hiện giống như đối với các biểu thức đại số. Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số cho dưới dạng biểu thức thì các biểu thức

$$f(x) + g(x),\ \ f(x) - g(x),\ \ f(x)g(x),\ \ \frac{f(x)}{g(x)}$$

được gọi tương ứng là tổng, hiệu, tích, thương của $f(x)$ và $g(x)$. Các hàm số này đặt tương ứng mỗi giá trị của biến độc lập x với tổng, hiệu, tích, thương các giá trị của các hàm số f và g tại điểm x:

$$f(x) + g(x):\quad x \mapsto y = f(x) + g(x)$$

$$f(x) - g(x):\quad x \mapsto y = f(x) - g(x)$$

$$f(x).g(x):\quad x \mapsto y = f(x).g(x)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}:\quad x \mapsto y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Ví dụ:

Hàm số $y = x + \sin x$ là tổng của hai hàm số:

$$f(x) = x,\ \ g(x) = \sin x.$$

Hàm số $y = x^3\log_3 x$ là tích của hai hàm số

$$f(x) = x^3,\ \ g(x) = \log_3 x.$$

- *Phép hợp hàm* là phép lập hàm số của hàm số. Giả sử ta có hai hàm số:

$y = f(u)$: biểu diễn sự phụ thuộc của y vào u,

$u = \varphi(x)$: biểu diễn sự phụ thuộc của u vào x.

Giả sử khi x thay đổi trong miền X, các giá trị của hàm số $u = \varphi(x)$ luôn luôn thuộc miền xác định của hàm số $y = f(u)$. Khi đó, mỗi giá trị của biến số x được đặt tương ứng với một và chỉ một giá trị của biến số y theo quy tắc như sau:

$$x \overset{\varphi}{\mapsto} u = \varphi(x) \overset{f}{\mapsto} y = f[\varphi(x)] = g(x).$$

Hàm số $y = g(x) = f[\varphi(x)]$ đặt tương ứng mỗi giá trị của biến số x với một giá trị duy nhất của biến y theo quy tắc nêu trên được gọi là *hàm hợp* của các hàm số $y = f(u)$ và $u = \varphi(x)$. Hàm hợp còn được gọi là *hàm kép*. Bỏ qua vai trò hình thức của các ký hiệu biến số ta có thể nói: $g(x) = f[\varphi(x)]$ là hàm hợp của hai hàm số $f(x)$ và $\varphi(x)$.

Ví dụ:

Hàm số $y = \sin^5 x$ là hàm hợp của hai hàm số $y = u^5$ và $u = \sin x$. Ta cũng có thể nói: $g(x) = \sin^5 x$ là hàm hợp của hai hàm số $f(x) = x^5$ và $\varphi(x) = \sin x$.

c. Các hàm số sơ cấp

Ta gọi *hàm số sơ cấp* là hàm số được cho dưới dạng một biểu thức hữu hạn, tức là một biểu thức được hợp thành từ các hàm số sơ cấp cơ bản nói trên thông qua một số hữu hạn các phép toán sơ cấp đối với hàm số.

Phạm vi của tập hợp các hàm sơ cấp khá rộng. Trong kinh tế học người ta thường hay sử dụng các dạng hàm số sau:

- Hàm số $f(x) = ax^{\alpha}$ (a và α là các hằng số).
- Hàm số mũ và hàm số logarit:

$$f(x) = a^x, \ f(x) = \log_a x \quad (a > 0 \text{ và } a \neq 1).$$

- Hàm đa thức, hay *hàm nguyên*:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n.$$

- Hàm phân thức, hay *hàm hữu tỷ*:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

trong đó P(x) và Q(x) là các đa thức.

VII. MỘT SỐ MÔ HÌNH HÀM SỐ TRONG PHÂN TÍCH KINH TẾ

a. Hàm cung và hàm cầu

Khi phân tích thị trường hàng hoá và dịch vụ, các nhà kinh tế sử dụng khái niệm *hàm cung* (supply function) và *hàm cầu* (demand function) để biểu diễn sự phụ thuộc của *lượng cung* và *lượng cầu* đối với một loại hàng hoá vào giá của hàng hoá đó. Hàm cung và hàm cầu có dạng:

$$\text{Hàm cung: } Q_s = S(p),$$

$$\text{Hàm cầu : } Q_d = D(p),$$

trong đó: p là giá hàng hoá; Q_s là lượng cung (quantity supplied), tức là lượng hàng hoá mà người bán bằng lòng bán; Q_d là lượng cầu (quantity demanded), tức là lượng hàng hoá mà người mua bằng lòng mua. Trong mô hình phân tích thị trường một loại hàng hoá, lượng cung của thị trường là tổng lượng cung của tất cả các nhà sản xuất và lượng cầu của thị trường là tổng lượng cầu của tất cả những người tiêu dùng.

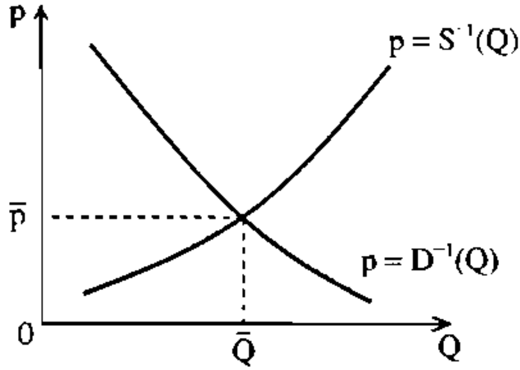
Tất nhiên, lượng cung và lượng cầu hàng hoá không chỉ phụ thuộc vào giá của hàng hoá đó, mà còn chịu ảnh hưởng của nhiều yếu tố khác, chẳng hạn như thu nhập và giá của các hàng hoá liên quan. Khi xem xét các mô hình hàm cung và hàm cầu ở dạng nêu trên người ta giả thiết rằng *các yếu tố khác không thay đổi*. Quy luật thị trường trong kinh tế học nói rằng, đối với các hàng hoá thông thường, *hàm cung là hàm đơn điệu tăng, còn hàm cầu là hàm đơn điệu giảm*. Điều này có nghĩa là, với các yếu tố khác giữ nguyên, khi giá hàng hoá tăng lên thì người bán sẽ muốn bán nhiều hơn và người mua sẽ mua ít đi. Các nhà kinh tế gọi đồ thị của hàm cung và hàm cầu là *đường cung* và *đường cầu*. Giao điểm của đường cung và đường cầu được gọi là *điểm cân bằng* của thị trường: Ở mức giá cân bằng $\overline{p}$ ta có $Q_s = Q_d = \overline{Q}$, tức là người bán bán hết và người mua mua đủ, thị trường không có hiện tượng dư thừa hoặc khan hiếm hàng hoá.

Chú ý: Trong các tài liệu kinh tế người ta thường sử dụng trục hoành để biểu diễn lượng Q và trục tung để biểu diễn giá p. Cách biểu diễn như vậy tương ứng với việc đảo ngược hàm cung và hàm cầu ở dạng nói trên. Trong kinh tế học nhiều khi người ta vẫn gọi hàm ngược của hàm $Q_s = S(p)$ là hàm cung và hàm ngược của hàm $Q_d = D(p)$ là hàm cầu:

$$Q_s = S(p) \Leftrightarrow p = S^{-1}(Q_s),$$

$$Q_d = D(p) \Leftrightarrow p = D^{-1}(Q_d).$$

Đồ thị của hàm cung và hàm cầu (đường cung và đường cầu) có dạng như hình vẽ.



Điểm cân bằng là điểm$(\overline{Q}, \overline{p})$, trong đó $\overline{Q}$ là lượng cân bằng và $\overline{p}$ là giá cân bằng.

b. Hàm sản xuất ngắn hạn

Các nhà kinh tế học sử dụng khái niệm hàm sản xuất để mô tả sự phụ thuộc của sản lượng hàng hoá (tổng số lượng sản phẩm hiện vật) của một nhà sản xuất vào các yếu tố đầu vào, gọi là *các yếu tố sản xuất*, như vốn và lao động v. v...

Trong kinh tế học khái niệm ngắn hạn và dài hạn không được xác định bằng một khoảng thời gian cụ thể, mà được hiểu theo nghĩa như sau:

Ngắn hạn là khoảng thời gian mà ít nhất một trong các yếu tố sản xuất không thể thay đổi. Dài hạn là khoảng thời gian mà tất cả các yếu tố sản xuất có thể thay đổi.

Khi phân tích sản xuất, người ta thường quan tâm đến hai yếu tố sản xuất quan trọng là vốn (Capital) và lao động (Labor), được ký hiệu tương ứng là K và L.

Trong ngắn hạn thì K không thay đổi, do đó hàm sản xuất ngắn hạn có dạng:

$$Q = f(L),$$

trong đó L là lượng lao động được sử dụng và Q là mức sản lượng tương ứng. Chú ý rằng khi xét hàm sản xuất, sản lượng Q và các yếu tố sản xuất K, L được đo theo luồng (flow), tức là đo định kỳ (hàng ngày, hàng tuần, hàng tháng, hàng năm v.v...).

c. Hàm doanh thu, hàm chi phí và hàm lợi nhuận

Tổng doanh thu (total revenue), tổng chi phí (total cost) và tổng lợi nhuận (total profit) của nhà sản xuất phụ thuộc vào sản lượng hàng hoá. Khi phân tích hoạt động sản xuất, cùng với hàm sản xuất các nhà kinh tế học còn sử dụng các hàm số:

• *Hàm doanh thu* là hàm số biểu diễn sự phụ thuộc của tổng doanh thu (ký hiệu là TR) vào sản lượng (ký hiệu là Q):

$$TR = TR(Q).$$

Chẳng hạn, tổng doanh thu của nhà sản xuất cạnh tranh là hàm bậc nhất:

$$TR = p.Q,$$

trong đó p là giá sản phẩm trên thị trường. Đối với nhà sản xuất độc quyền, tổng doanh thu được xác định theo công thức:

$$TR = D^{-1}(Q).Q,$$

trong đó $p = D^{-1}(Q)$ là hàm cầu ngược.

• *Hàm chi phí* là hàm số biểu diễn sự phụ thuộc của tổng chi phí sản xuất (ký hiệu là TC) vào sản lượng (ký hiệu là Q):

$$TC = TC(Q).$$

- *Hàm lợi nhuận* là hàm số biểu diễn sự phụ thuộc của tổng lợi nhuận (ký hiệu là π) vào sản lượng (ký hiệu là Q):

$$\pi = \pi(Q).$$

Hàm lợi nhuận có thể được xác định thông qua hàm doanh thu và hàm chi phí:

$$\pi = TR(Q) - TC(Q).$$

d. Hàm tiêu dùng và hàm tiết kiệm

Lượng tiền mà người tiêu dùng dành để mua sắm hàng hoá và dịch vụ phụ thuộc vào thu nhập. Các nhà kinh tế sử dụng *hàm tiêu dùng* để biểu diễn sự phụ thuộc của biến tiêu dùng C (Consumption) vào biến thu nhập Y (Income):

$$C = f(Y).$$

Thông thường, khi thu nhập tăng người ta có xu hướng tiêu dùng nhiều hơn, do đó hàm tiêu dùng là hàm đồng biến.

Hàm tiết kiệm là hàm số biểu diễn sự phụ thuộc của biến tiết kiệm S (Saving) vào biến thu nhập:

$$S = S(Y).$$

BÀI TẬP

1. Cho hàm số: $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 2}$. Hãy tính:

$$f(1),\ f(-2),\ f(-a),\ f\left(\frac{1}{a}\right),\ f(a+b).$$

2. Cho hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, \text{ khi } x < 0, \\ 2^x, \text{ khi } x \ge 0. \end{cases}$$

Hãy tính: $f(-4)$ $f(-3)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(4)$, $f(5)$.

3. Chứng minh:

a) $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}, \forall x \in [-1; 1]$.

b) $\mathrm{arctg}\, x + \mathrm{arccotg} x = \dfrac{\pi}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$.

4. Tìm MXĐ của các hàm số:

a) $y = \sqrt{2x - x^2}$ b) $y = \lg(x^2 - 9)$

c) $y = \arcsin(1 - x) + \lg(\lg x)$ d) $y = \log_2\log_3\log_4 x$

e) $y = \mathrm{cotg}\pi x + \arccos(2^x)$ f) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$

5. Tìm MXĐ và MGT của các hàm số:

a) $y = \sqrt{2 + x - x^2}$ b) $y = \arcsin\left(\lg \dfrac{x}{10}\right)$

6. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 3}$ đơn điệu tăng trong khoảng $(-\infty; -1)$ và đơn điệu giảm trong khoảng $(-1; +\infty)$.

7. Chứng minh rằng hàm số f(x) cho ở bài tập 6 là một hàm bị chặn.

8. Trong các hàm số cho dưới đây, hàm số nào là hàm chẵn, hàm số nào là hàm lẻ?

a) $f(x) = x^3 - 3x$ b) $f(x) = x^4 + 4x^2$

c) $f(x) = a^x + a^{-x}$ $(a > 0)$ d) $f(x) = \lg(x + \sqrt{1 + x^2})$

9. Cho hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } x \text{ là số hữu tỷ} \\ 0, & \text{nếu } x \text{ là số vô tỷ} \end{cases}$$

Chứng minh rằng f(x) là một hàm số tuần hoàn với chu kỳ T là một số hữu tỷ bất kỳ.

10. Chứng minh rằng nếu hàm số f(x) đơn điệu tăng (giảm) trong khoảng X thì hàm số −f(x) đơn điệu giảm (tăng) trong khoảng đó.

11. Với các hàm số cùng xác định trong một khoảng X, hãy chứng minh:

a) Tổng của các hàm số đơn điệu tăng (giảm) là một hàm số đơn điệu tăng (giảm);

b) Tích của các hàm số dương và đơn điệu tăng (giảm) là hàm số đơn điệu tăng (giảm);

c) Tích của hai hàm số âm và đơn điệu giảm (tăng) là hàm số đơn điệu tăng (giảm).

12. Với các hàm số có cùng MXĐ, hãy chứng minh:

a) Tổng của hai hàm số chẵn là một hàm số chẵn;

b) Tổng của hai hàm số lẻ là một hàm số lẻ;

c) Tích của hai hàm số chẵn là một hàm số chẵn;

d) Tích của hai hàm số lẻ là một hàm số chẵn;

e) Tích của một hàm số chẵn và một hàm số lẻ là một hàm số lẻ.

13. Gọi f^{-1} là hàm ngược của hàm số f. Hãy viết biểu thức $f^{-1}(x)$ trong các trường hợp sau:

a) $f(x) = ax + b, -\infty < x < +\infty \ (a \neq 0)$;

b) $f(x) = x^2, \ 0 \leq x < +\infty$;

c) $f(x) = x^2, \ -\infty < x \leq 0$;

d) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}, \ x \neq -1$.

14. Cho $f(x) = x^3 - x$, $g(x) = \sin 2x$. Hãy lập các biểu thức hàm số:

a) $f[g(x)]$ b) $g[f(x)]$ c) $f[f(x)]$ d) $g[g(x)]$

15. Hãy lập biểu thức hàm số f(x), cho biết:

a) $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$

b) $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$

c) $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}\quad (x>0)$

16. Biết rằng f(x) là một hàm số xác định và đơn điệu giảm trong khoảng U. Chứng minh rằng nếu hàm số $\varphi(x)$ xác định, đơn điệu tăng (giảm) trong khoảng X và $\varphi(X)\subset U$ thì hàm số $g(x)=f[\varphi(x)]$ đơn điệu giảm (tăng) trong khoảng X.

17. Hãy điền thuật ngữ thích hợp vào chỗ dấu ba chấm trong các câu dưới đây:

a) Hàm số biểu diễn lượng cung của nhà sản xuất tuỳ theo giá sản phẩm, khi các yếu tố khác không thay đổi, được gọi là ...

b) Hàm số biểu diễn lượng cầu của người tiêu dùng tuỳ theo giá sản phẩm, khi các yếu tố khác không thay đổi, được gọi là ...

c) Hàm số biểu diễn tổng chi phí của nhà sản xuất tương ứng với mỗi mức sản lượng đầu ra được gọi là ...

d) Hàm số biểu diễn tổng doanh thu của nhà sản xuất tương ứng với mỗi mức sản lượng đầu ra được gọi là ...

e) Hàm số biểu diễn lượng sản phẩm đầu ra của nhà sản xuất tuỳ theo lượng sử dụng lao động, khi các yếu tố khác không thay đổi, được gọi là ...

f) Hàm số biểu diễn ảnh hưởng của thu nhập đối với lượng tiêu dùng được gọi là ..

18. Cho biết hàm cung và hàm cầu của thị trường một hàng hoá như sau:

$$Q_s = 4p - 1;\ Q_d = 159 - 2p^2.$$

a) Hãy so sánh lượng cung với lượng cầu ở các mức giá p = 7, p = 8,1.

b) Xác định giá cân bằng và lượng cân bằng của thị trường.

19. Một doanh nghiệp có hàm sản xuất như sau:

$$Q = 100\sqrt[3]{L^2},$$

trong đó L là lượng sử dụng lao động và Q là lượng sản phẩm đầu ra mỗi tuần.

a) Hãy cho biết lượng sản phẩm đầu ra mỗi tuần khi doanh nghiệp sử dụng 64 đơn vị lao động mỗi tuần và giữ nguyên mức sử dụng các yếu tố đầu vào khác.

b) Tại mức sử dụng 64 đơn vị lao động mỗi tuần, nếu doanh nghiệp thêm 1 đơn vị lao động mỗi tuần thì sản lượng đầu ra mỗi tuần tăng bao nhiêu (tính xấp xỉ đến 1 chữ số thập phân)?

20. Một nhà sản xuất có hàm chi phí như sau:

$$TC = Q^3 - 5Q^2 + 20Q + 9.$$

a) Hãy tính tổng chi phí sản xuất tại các mức sản lượng $Q = 1$, $Q = 2$ và $Q = 10$.

b) Cho biết chi phí cố định và hàm chi phí khả biến.

21. Với hàm chi phí cho ở bài tập 20, hãy lập hàm lợi nhuận của nhà sản xuất trong các trường hợp sau:

a) Nhà sản xuất hoạt động trong môi trường cạnh tranh và giá thị trường của sản phẩm là $p = 28$.

b) Nhà sản xuất hoạt động trong môi trường độc quyền và lượng cầu đối với sản phẩm ở mỗi mức giá p là: $Q = 190 - 0,5p$.

§2. DÃY SỐ VÀ GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

I. DÃY SỐ

Một cách đơn giản ta gọi *dãy số vô hạn* là một dãy liệt kê các số thực theo thứ tự như sau:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \qquad (2.1)$$

Số x_n ở vị trí thứ n trong dãy liệt kê (2.1) được gọi là *số hạng thứ n* của dãy số. Mỗi dãy số dạng (2.1) cho tương ứng một hàm số $x_n = f(n)$ với đối số n biến thiên trên tập hợp tất cả các số tự nhiên $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$. Ngược lại, mỗi hàm số đối số tự nhiên $x_n = f(n)$ cho tương ứng một dãy số viết dưới dạng (2.1). Ta gọi hàm số $x_n = f(n)$ là *số hạng tổng quát* của dãy số (2.1). Do có sự tương ứng nói trên, ta đồng nhất dãy số (2.1) với hàm số f(n) (số hạng tổng quát của nó). Thay cho cách viết khai triển dưới dạng (2.1) ta có thể gọi đơn giản: *dãy số $x_n = f(n)$*, hoặc *dãy số x_n*.

Ví dụ 1: Hàm số $f(n) = n^2$ cho tương ứng dãy số:

$$1, 4, 9, 16, ..., n^2, ...$$

Ví dụ 2: Hàm bậc nhất $f(n) = a + d(n - 1)$ $(n \in \mathbb{N})$ cho tương ứng dãy số với số hạng tổng quát $x_n = a + d(n - 1)$:

$$a, a + d, a + 2d, ..., a + d(n - 1), ... \qquad (2.2)$$

Dãy số (2.2) có tính chất sau:

$$x_n = a + d(n - 1) = a + (n - 2)d + d = x_{n-1} + d, \forall n \geq 2.$$

Điều này có nghĩa là mỗi số hạng của dãy số (2.2), bắt đầu từ số hạng thứ hai, bằng số hạng đứng trước nó cộng với một hằng số d. Dãy số (2.2) được gọi là *cấp số cộng* và hằng số d được gọi là *công sai* của nó.

Ví dụ 3: Hàm số $f(n) = aq^{n-1}$ cho tương ứng dãy số có số hạng tổng quát $x_n = aq^{n-1}$:

$$a, aq, aq^2, aq^3, ..., aq^{n-1}, ... \qquad (2.3)$$

Mỗi số hạng của dãy số (2.3), bắt đầu từ số hạng thứ hai, bằng số hạng đứng trước nó nhân với một hằng số q:

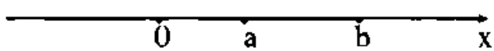
$$x_n = aq^{n-1} = (aq^{n-2}q)q = x_{n-1}q, \forall n \geq 2.$$

Dãy số (2.3) được gọi là *cấp số nhân* và hằng số q được gọi là *công bội* của nó.

II. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

a. Khái niệm dãy số hội tụ

Khái niệm giới hạn trong toán học biểu diễn xu hướng biến thiên của một biến số ngày càng *tiến gần* đến một số nào đó. Từ "tiến gần" bao hàm khái niệm về khoảng cách. Như ta đã biết, khoảng cách giữa hai số a và b được hiểu theo nghĩa khoảng cách giữa hai điểm tương ứng trên trục số và được xác định theo công thức: $d(a, b) = |a - b|$.



Giới hạn của dãy số x_n biểu diễn xu hướng biến thiên của x_n khi n lớn vô hạn.

Định nghĩa: Ta nói rằng *dãy số x_n có giới hạn a*, hay *x_n hội tụ đến a*, nếu khoảng cách giữa x_n và a có thể thu hẹp một cách tuỳ ý bằng cách lấy n đủ lớn, tức là với mọi số $\varepsilon > 0$ bé tuỳ ý, bao giờ cũng có thể tìm được tương ứng một số tự nhiên n_0 đủ lớn sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon \tag{2.4}$$

bắt đầu từ khi $n > n_0$.

Để nói dãy số x_n hội tụ đến a ta dùng ký hiệu:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a, \text{ hoặc } x_n \to a \text{ khi } n \to +\infty.$$

Bất đẳng thức (2.4) có thể viết dưới dạng:

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon).$$

Khoảng $V_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ được gọi là *lân cận bán kính ε của điểm a*. Định nghĩa dãy số hội tụ có thể phát biểu như sau:

Dãy số x_n hội tụ đến điểm a khi và chỉ khi mọi lân cận bán kính nhỏ tuỳ ý của điểm a đều chứa tất các các số hạng của dãy số đó bắt đầu từ một chỗ nào đó trở đi.

Để chứng minh dãy số x_n hội tụ đến điểm a, theo định nghĩa, ta phải chỉ ra số tự nhiên n_0 tương ứng với mỗi số $\varepsilon > 0$ sao cho bất đẳng thức (2.4) thoả mãn với mọi $n > n_0$.

Ví dụ 1: Xét dãy số có số hạng tổng quát $x_n = c$ (c là hằng số).

Ta có:

$$|x_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon, \forall\varepsilon > 0 \text{ và } \forall n.$$

Vậy, theo định nghĩa: $\lim\limits_{n\to+\infty} c = c$

Ví dụ 2: Xét dãy số có số hạng tổng quát: $x_n = \dfrac{2n+1}{n}$.

Ta có:

$$x_n = 2 + \frac{1}{n} \Rightarrow d_n = |x_n - 2| = \frac{1}{n}.$$

Khoảng cách giữa x_n và số 2 có thể thu hẹp tuỳ ý:

$d_n < 0,1$ khi $n > 10$,

$d_n < 0,01$ khi $n > 100$,

$d_n < 0,001$ khi $n > 1000$.

Với ε là một số dương bất kỳ, $d_n = |x_n - 2| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ khi $n > n_0 = [\varepsilon^{-1}]$ (ký hiệu $[x]$ chỉ phần nguyên của số thực x). Theo định nghĩa ta có:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n} = 2 \quad \text{hay} \quad \frac{2n+1}{n} \to 2 \text{ khi } n \to +\infty .$$

Ví dụ 3: Xét dãy số $x_n = \dfrac{1}{n^k}$ (n = 1, 2, 3, ...), trong đó k là một hằng số dương cho trước. Ta có:

$$|x_n - 0| = \frac{1}{n^k} < \varepsilon \Leftrightarrow n^k > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \varepsilon^{-\frac{1}{k}}.$$

Theo mỗi số $\varepsilon > 0$ ta chọn n_0 là phần nguyên của số $\varepsilon^{-\frac{1}{k}}$. Đó là số tự nhiên thoả mãn điều kiện $|x_n - 0| < \varepsilon$ khi $n > n_0$. Như vậy, theo định nghĩa ta có:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad (k > 0).$$

Ví dụ 4: Xét giới hạn:

$$\lim_{n \to +\infty} q^n \quad (0 < |q| < 1).$$

Trong trường hợp này ta có:

$$\left|q^n - 0\right| = |q|^n < \varepsilon \text{ khi } n > \log_{|q|} \varepsilon.$$

Theo mỗi số dương ε (chỉ cần xét $\varepsilon < 1$) ta lấy n_0 là phần nguyên của số $\log_{|q|} \varepsilon$. Khi $n > n_0$ ta luôn có:

$$\left|q^n - 0\right| = |q|^n < \varepsilon.$$

Vậy, theo định nghĩa:

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = 0.$$

b. Nguyên lý hội tụ

Định lý sau đây được gọi là *tiêu chuẩn Cauchy* về sự hội tụ của dãy số:

Định lý: Một dãy số x_n hội tụ đến một số a nào đó khi và chỉ khi với mọi số $\varepsilon > 0$ luôn tồn tại tương ứng một số tự nhiên n_0 đủ lớn sao cho bất đẳng thức

$$|x_{n+m} - x_n| < \varepsilon \qquad (2.5)$$

thoả mãn với mọi $n > n_0$ và với mọi $m \in \mathbb{N}$.

Tiêu chuẩn Cauchy nói rằng *một dãy số hội tụ khi và chỉ khi bắt đầu từ một chỗ nào đó trở đi khoảng cách giữa hai số hạng bất kỳ của dãy số đó nhỏ tuỳ ý.*

Ví dụ: Xét dãy số có số hạng tổng quát $x_n = (-1)^{n-1}$:

$$1, -1, 1, -1, \ldots$$

Với mọi số tự nhiên n ta có:

$$|x_{n+1} - x_n| = |(-1)^n - (-1)^{n-1}| = 2.$$

Từ đây suy ra với số $\varepsilon < 2$ bất đẳng thức $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ không bao giờ thoả mãn. Theo tiêu chuẩn Cauchy thì dãy số đã cho không hội tụ, tức là không tồn tại số a sao cho

$$\lim_{n \to +\infty} (-1)^{n-1} = a.$$

c. Giới hạn vô hạn

Trên đây là định nghĩa giới hạn hữu hạn của dãy số (giới hạn a là một số thực). Khái niệm dãy số có giới hạn vô hạn được định nghĩa như sau:

Định nghĩa: Ta nói rằng *dãy số x_n có giới hạn vô hạn* nếu x_n có giá trị tuyệt đối lớn tuỳ ý khi n đủ lớn, tức là với mọi số $E > 0$ lớn tuỳ ý, bao giờ cũng có thể tìm được một số tự nhiên n_0 đủ lớn sao cho

$$|x_n| > E$$

bắt đầu từ khi $n > n_0$. Một dãy số có giới hạn vô hạn còn được gọi là *vô cùng lớn (VCL).*

Nếu dãy số x_n có giới hạn vô hạn thì ta viết:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \infty \text{ hoặc } x_n \to \infty \text{ khi } n \to +\infty.$$

Nếu dãy số x_n có giới hạn vô hạn và xác định dấu, tức là $x_n > 0$ hoặc $x_n < 0$ bắt đầu từ một chỗ nào đó trở đi, thì ta viết tương ứng:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty, \text{ hoặc } \lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty.$$

Chú ý: Ta dùng ký hiệu $+\infty$ (dương vô cực) và $-\infty$ (âm vô cực) để chỉ các đầu mút của trục số, và ký hiệu ∞ có nghĩa là $-\infty$ hoặc $+\infty$. Các ký hiệu này chỉ mang ý nghĩa hình thức để diễn đạt ý niệm vô hạn, không nằm trong phạm vi hệ thống số thực. Do đó, nếu không có quy ước bổ sung thì ta không thể áp dụng các phép toán số học đối với $-\infty$ và $+\infty$.

Ví dụ: Xét dãy số có số hạng tổng quát $x_n = An^k$ ($n \in \mathbb{N}$), trong đó $A \neq 0$ và $k > 0$ là các hằng số cho trước. Với E là một số dương bất kỳ, ta có:

$$|x_n| = |A|n^k > E \Leftrightarrow n > \left(\frac{E}{|A|}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Theo $E > 0$ ta lấy n_0 là phần nguyên của số $\left(\frac{E}{|A|}\right)^{\frac{1}{k}}$. Khi $n > n_0$ bất đẳng thức $|x_n| > E$ được thoả mãn. Vậy, theo định nghĩa:

$$\lim_{n\to+\infty} An^k = \infty \quad (A \neq 0, k > 0).$$

Tuỳ theo dấu của A ta có thể viết:

$$\lim_{n\to+\infty} An^k = +\infty \text{ nếu } A > 0; \ \lim_{n\to+\infty} An^k = -\infty \text{ nếu } A < 0.$$

III. ĐẠI LƯỢNG VÔ CÙNG BÉ

a. Khái niệm vô cùng bé

Định nghĩa: Một dãy số α_n được gọi là *vô cùng bé* (VCB) khi và chỉ khi nó hội tụ đến 0: $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n = 0$.

Nói một cách trực tiếp, α_n là một VCB khi và chỉ khi với mọi số $\varepsilon > 0$ luôn tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho

$$|x_n| < \varepsilon, \forall n > n_0.$$

Từ định nghĩa giới hạn và định nghĩa VCB suy ra:

Định lý: Dãy số x_n hội tụ đến điểm a khi và chỉ khi dãy số $\alpha_n = x_n - a$ là một VCB. Nói cách khác, dãy số x_n hội tụ đến điểm a khi và chỉ khi nó biểu diễn được dưới dạng $x_n = a + \alpha_n$, trong đó α_n là một VCB.

b. Một số tính chất đơn giản của vô cùng bé

1. Nếu α_n và β_n là các VCB thì $\alpha_n \pm \beta_n$ cũng là VCB.

Thật vậy, nếu α_n và β_n là các VCB thì với mọi số $\varepsilon > 0$ ta tìm được các số tự nhiên n_1 và n_2 sao cho $|\alpha_n| < \varepsilon/2, \forall n > n_1$ và $|\beta_n| < \varepsilon/2\ \forall n > n_2$. Gọi n_0 là số lớn hơn trong hai số n_1, n_2, ta có

$$|\alpha_n \pm \beta_n| < |\alpha_n| + |\beta_n| < \varepsilon, \forall n > n_0.$$

Điều này chứng tỏ $\alpha_n \pm \beta_n$ là VCB.

2. Nếu α_n là VCB và u_n bị chặn thì $\alpha_n u_n$ cũng là VCB.

Thật vậy, dãy số u_n bị chặn có nghĩa là tồn tại hằng số $K > 0$ sao cho $|u_n| \le K, \forall n \in \mathbb{N}$. Nếu α_n là một VCB thì với mọi số $\varepsilon > 0$ ta tìm được số tự nhiên n_0 sao cho $|\alpha_n| < \varepsilon/K\ \ \forall n > n_0$, từ đây suy ra:

$$|u_n\alpha_n| = |u_n|.|\alpha_n| < K\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon, \forall n > n_0.$$

Điều này chứng tỏ $\alpha_n u_n$ là VCB.

IV. CÁC ĐỊNH LÝ CƠ BẢN VỀ GIỚI HẠN

a. Các tính chất cơ bản của dãy số hội tụ

Định lý 1: Nếu dãy số x_n hội tụ đến số a thì nó không thể hội tụ đến một số $b \neq a$. Nói cách khác, *giới hạn của một dãy số hội tụ là một số thực duy nhất.*

Chứng minh: Với $b \neq a$ ta có:

$$|x_n - a| + |x_n - b| \geq |(x_n - a) - (x_n - b)| = |a - b|.$$

Từ đây suy ra rằng với $\varepsilon < \frac{1}{2}|a - b|$ thì hai bất đẳng thức sau không thể đồng thời thoả mãn:

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad |x_n - b| < \varepsilon.$$

Nếu $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$ thì khi n đủ lớn ta luôn có $|x_n - a| < \varepsilon$, do đó $|x_n - b| \geq \varepsilon$. Điều này chứng tỏ số b không phải là giới hạn của dãy số x_n.

Định lý 2: Nếu dãy số x_n hội tụ thì nó bị chặn, tức là tồn tại các hằng số A, B sao cho $A \leq x_n \leq B$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh: Giả sử dãy số x_n hội tụ đến số a. Với ε_0 là một số dương cho trước ta tìm được số tự nhiên n_0 sao cho

$$a - \varepsilon_0 < x_n < a + \varepsilon_0, \forall n > n_0.$$

Đặt $A = \min\{x_1, \ldots, x_{n_0}, a - \varepsilon_0\}$, $B = \max\{x_1, \ldots, x_{n_0}, a + \varepsilon_0\}$, ta có

$$A \leq x_n \leq B \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Hệ quả: Nếu α_n và β_n là các VCB thì $\alpha_n\beta_n$ cũng là VCB.

Thật vậy, từ định lý 2 suy ra mọi VCB β_n đều bị chặn. Do đó, nếu α_n và β_n là các VCB thì $\alpha_n\beta_n$ cũng là VCB (ta đã chứng minh rằng tích của một VCB và một dãy số bị chặn là một VCB).

Định lý 3: Nếu $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$ và $a > p$ $(a < q)$ thì $x_n > p$ $(x_n < q)$ bắt đầu từ một chỗ nào đó trở đi. Đặc biệt, nếu $a > 0$ $(a < 0)$ thì $x_n > 0$ $(x_n < 0)$ khi n đủ lớn.

Chứng minh: Do $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$ nên theo số $\varepsilon > 0$ bất kỳ ta tìm được số tự nhiên n_0 sao cho bắt đầu từ khi $n > n_0$:

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Nếu $a > p$ thì với $0 < \varepsilon < a - p$ ta có $a - \varepsilon > p$. Theo số ε đó ta tìm được số tự nhiên n_0 sao cho:

$$x_n > a - \varepsilon > p, \forall n > n_0.$$

Tương tự, nếu $a < q$ thì với $0 < \varepsilon < q - a$ ta có $a + \varepsilon < q$. Theo số ε đó ta tìm được số tự nhiên n_0 sao cho:

$$x_n < a + \varepsilon < q, \forall n > n_0.$$

Định lý 4: Nếu $x_n \geq y_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ và cả hai dãy số x_n và y_n đều hội tụ thì:

$$\lim_{n \to +\infty} x_n \geq \lim_{n \to +\infty} y_n .$$

Chứng minh: Ta sẽ chứng minh định lý này bằng phương pháp phản chứng. Giả sử $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = b$ và $a < b$. Lấy một số p trong khoảng giữa a và b: $a < p < b$. Theo định lý 3, ta có thể tìm được các số tự nhiên n_1 và n_2 sao cho

$$x_n < p, \forall n > n_1 \text{ và } y_n > p, \forall n > n_2.$$

Gọi n_0 là số lớn hơn trong hai số n_1 và n_2, ta có

$$x_n < p < y_n, \forall n > n_0.$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $x_n \geq y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Mâu thuẫn này bác bỏ giả thiết $a < b$, do đó $a \geq b$ (điều phải chứng minh).

Chú ý: Khi $x_n > y_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ ta cũng chỉ có thể kết luận được rằng $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n \geq \lim\limits_{n \to +\infty} y_n$, bởi vì có khả năng xảy ra trường hợp $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \lim\limits_{n \to +\infty} y_n$. Chẳng hạn, $\frac{2}{n} > \frac{1}{n}$ với mọi số tự nhiên n, nhưng $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

b. Các quy tắc tính giới hạn

Định lý 5: Giả sử các dãy số x_n và y_n có giới hạn hữu hạn:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to+\infty} y_n = b.$$

Khi đó:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n y_n = ab$.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$, nếu $b \neq 0$.

Chứng minh:

Từ giả thiết suy ra $\alpha_n = x_n - a$ và $\beta_n = y_n - b$ là các VCB.

1. Ta có:

$$(x_n \pm y_n) - (a \pm b) = (x_n - a) \pm (y_n - b) = \alpha_n \pm \beta_n$$

Theo tính chất của VCB thì $(x_n \pm y_n) - (a \pm b)$ cũng là VCB, do đó

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b.$$

2. Ta có:

$$\begin{aligned} x_n y_n - ab &= (x_n - a)(y_n - b) + a(y_n - b) + b(x_n - a) \\ &= \alpha_n\beta_n + a\beta_n + b\,\alpha_n \end{aligned}$$

Theo tính chất của VCB thì $x_n y_n - ab = \alpha_n\beta_n + a\beta_n + b\alpha_n$ cũng là VCB, do đó

$$\lim_{n\to+\infty} x_n y_n = ab.$$

3. Ta có:

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{by_n}(bx_n - ay_n) = \frac{1}{by_n}[b(x_n - a) - a(y_n - b)]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{by_n}(b\alpha_n - a\beta_n).$$

Lấy một số K trong khoảng giữa $(0; |b|)$. Do y_n hội tụ đến b nên theo định lý 3, bắt đầu từ một chỗ nào đó ta có $|y_n| > K$. Từ đây suy ra

$$\frac{1}{|by_n|} < \frac{1}{|b|K}.$$

Từ định nghĩa giới hạn dễ dàng thấy rằng giới hạn của dãy số không thay đổi nếu ta bớt đi một số hữu hạn các số hạng đầu, do đó ta có thể xem $\frac{1}{by_n}$ như một dãy số bị chặn. Theo tính chất của VCB thì dãy số

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{by_n}(b\alpha_n - a\beta_n)$$

là một VCB, do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

Từ quy tắc giới hạn của tích suy ra:

Hệ quả: Nếu dãy số x_n hội tụ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} cx_n = c\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Chú ý: Định lý 5 cho ta các quy tắc tính giới hạn của tổng, hiệu, tích và thương của các dãy số. Các quy tắc đó được chứng minh với điều kiện các dãy số x_n và y_n có giới hạn hữu hạn, và đối với thương còn có giả thiết giới hạn ở mẫu số khác 0. Trong những trường hợp sau đây ta không có quy tắc nhất định để xác định giới hạn (người ta gọi là các *dạng vô định*):

- Giới hạn của dãy số $\frac{x_n}{y_n}$ khi cả hai dãy x_n và y_n cùng hội tụ đến 0 (gọi là dạng vô định $\frac{0}{0}$);
- Giới hạn của dãy số $\frac{x_n}{y_n}$ khi cả hai dãy x_n và y_n cùng có giới hạn vô hạn (gọi là dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$);
- Giới hạn của dãy số x_ny_n khi dãy x_n hội tụ đến 0 và dãy y_n có giới hạn vô hạn (gọi là dạng vô định $0.\infty$);

• Giới hạn của dãy số $x_n - y_n$ khi các dãy x_n và y_n cùng có giới hạn vô hạn và cùng dấu (gọi là dạng vô định $\infty - \infty$).

Khi gặp các giới hạn dạng vô định ta phải tìm cách biến đổi để đưa về dạng xác định (khử dạng vô định).

Ví dụ: Giới hạn sau đây có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$:

$$b = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3 - 3n^2 + n - 9}{4n^3 + 4n - 3}.$$

Để khử tính vô định ta chia cả tử và mẫu của biểu thức dưới dấu giới hạn cho n^3:

$$b = \lim_{n\to+\infty} \frac{2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{9}{n^3}}{4 + \frac{4}{n^2} - \frac{3}{n^3}}.$$

Đến đây, sử dụng định lý 5 ta xác định được $b = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Định lý 6: Nếu $u_n \le x_n \le v_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ và cả hai dãy số u_n và v_n cùng hội tụ đến a thì dãy số x_n cũng hội tụ đến a.

Chứng minh: Cho số $\varepsilon > 0$ bất kỳ. Do cả hai dãy số u_n và v_n cùng hội tụ đến a nên tồn tại các số tự nhiên n_1 và n_2 sao cho

$$a - \varepsilon < u_n < a + \varepsilon, \forall n > n_1,$$

$$a - \varepsilon < v_n < a + \varepsilon, \forall n > n_2.$$

Gọi n_0 là số lớn hơn trong hai số n_1 và n_2, ta có

$$a - \varepsilon < u_n \le x_n \le v_n < a + \varepsilon, \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon, \forall n > n_0.$$

Điều này chứng tỏ dãy số x_n hội tụ đến a.

Ví dụ: Tính giới hạn:

$$\lim_{n\to+\infty}[(n+1)^k - n^k] \quad (0 < k < 1).$$

Giải: Đặt $x_n = (n+1)^k - n^k$, với n = 1, 2, 3 .... Với giả thiết $0 < k < 1$, ta có:

$$0 < x_n = n^k\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^k - 1\right] < n^k\left[1+\frac{1}{n}-1\right] = n^{k-1} = \frac{1}{n^{1-k}}.$$

Khi $n \to +\infty$ ta có $u_n = 0 \to 0$ và $v_n = \dfrac{1}{n^{1-k}} \to 0$. Vậy, theo định lý 6, ta xác định được:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty}[(n+1)^k - n^k] = 0.$$

c. Giới hạn của dãy số đơn điệu

Định lý 7: Giả sử dãy số $x_n = f(n)$ đơn điệu tăng ít nhất theo nghĩa rộng:

$$x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_n \le x_{n+1} \le \ldots$$

Khi đó:

- Nếu dãy số đó bị chặn trên, tức là $x_n \le M \quad \forall n = 1, 2, 3, \ldots$ thì nó có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$.
- Nếu dãy số đó không bị chặn trên thì $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

Chứng minh: Trường hợp dãy số x_n bị chặn trên ta đặt $a = \sup\{x_n\}$. Theo tính chất của cận trên đúng, với $\varepsilon > 0$ bất kỳ tồn tại $x_{n_0} > a - \varepsilon$. Do x_n đơn điệu tăng nên khi $n > n_0$ ta luôn có

$$a \ge x_n \ge x_{n_0} > a - \varepsilon \Rightarrow |x_n - a| = a - x_n < \varepsilon.$$

Điều này chứng tỏ $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.

Nếu x_n không bị chặn trên thì theo số $E > 0$ bất kỳ ta tìm được số hạng $x_{n_0} > E$. Do dãy x_n đơn điệu tăng nên

$$x_n \geq x_{n_0} > E, \forall n > n_0.$$

Điều này chứng tỏ $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

Tương tự, ta có thể chứng minh được rằng *một dãy số đơn điệu giảm (ít nhất theo nghĩa rộng) có giới hạn hữu hạn nếu nó bị chặn dưới và có giới hạn $-\infty$ nếu nó không bị chặn dưới.*

Ví dụ 1: Cho c là một hằng số dương. Xét dãy số:

$$x_1 = \sqrt{c},\ x_2 = \sqrt{c+\sqrt{c}},\ x_3 = \sqrt{c+\sqrt{c+\sqrt{c}}}, \dots$$

Dễ dàng thấy rằng dãy số đã cho đơn điệu tăng. Mặt khác, bằng phương pháp quy nạp ta có thể chứng minh được rằng

$$x_n < 1 + \sqrt{c}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Thật vậy, hiển nhiên là $x_1 = \sqrt{c} < 1 + \sqrt{c}$. Với giả thiết $x_n < 1 + \sqrt{c}$ ta có:

$$x_{n+1} = \sqrt{c + x_n} < \sqrt{c + 1 + \sqrt{c}} < \sqrt{c + 2\sqrt{c} + 1} = \sqrt{c} + 1.$$

Do dãy x_n tăng và bị chặn trên nên nó có giới hạn hữu hạn. Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, ta có:

$$a^2 = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1}^2 = \lim_{n\to+\infty}(c + x_n) = c + a \Rightarrow a^2 - a - c = 0.$$

Chú ý rằng $a > 0$, từ đây ta tìm được $a = \dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$.

Ví dụ 2: Tính giới hạn của dãy số $y_n = \dfrac{c^n}{n!}$, trong đó c là một hằng số dương cho trước.

Giải: Trước hết ta thấy khi n đủ lớn thì $\frac{c}{n+1} < 1$, do đó

$$y_{n+1} = y_n \frac{c}{n+1} < y_n.$$

Điều này chứng tỏ bắt đầu từ một chỗ nào đó trở đi dãy số y_n đơn điệu giảm. Mặt khác $y_n > 0$, $\forall n \in N$. Theo định lý 7, tồn tại giới hạn hữu hạn:

$$\lim_{n \to +\infty} y_n = a.$$

Ta có $\lim\limits_{n \to +\infty} y_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} y_n . \frac{c}{n+1}$, từ đây suy ra:

$$a = a.0 = 0, \text{ tức là } \lim_{n \to +\infty} y_n = 0.$$

d. Số e và logarit tự nhiên

Xét dãy số với số hạng tổng quát: $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Sử dụng công thức khai triển nhị thức ta có thể chứng minh được các bất đẳng thức sau đây (n là số tự nhiên bất kỳ):

- $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$;

- $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$.

Các bất đẳng thức này chứng tỏ dãy số nói trên đơn điệu tăng và bị chặn trên, do đó nó có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$. Giới hạn của dãy số đó là một số xác định, được gọi là số e:

$$e = \lim_{n \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Người ta chứng minh được rằng số e là một số vô tỷ. Bạn đọc cần ghi nhớ giá trị xấp xỉ của con số quan trọng này: $e \approx 2,718$.

Do vai trò quan trọng của số e nên người ta hay sử dụng logarit cơ số e. Logarit cơ số e được gọi là *logarit tự nhiên*, hay *logarit Nêpe*. Logarit tự nhiên của số dương x được ký hiệu là lnx:

$$\ln x = \log_e x.$$

V. CẤP SỐ NHÂN: CÁC HỆ THỨC CƠ BẢN VÀ ỨNG DỤNG TRONG PHÂN TÍCH TÀI CHÍNH.

a. Cấp số nhân

Cấp số nhân là một dãy số x_n thoả mãn điều kiện:

$$x_{n+1} = x_n q,\ \forall n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.6}$$

tức là mỗi số hạng của nó bằng số hạng đứng kề trước số hạng đó nhân với một số q không đổi. Hằng số q được gọi là *công bội* của cấp số nhân. Nếu cho trước công bội q và số hạng đầu x_1 thì số hạng tổng quát của dãy số nhân (2.6) được tính theo công thức:

$$x_n = x_1 q^{n-1}. \tag{2.7}$$

Tổng n số hạng đầu của cấp số nhân (2.6) được tính theo công thức (với giả thiết $q \neq 1$):

$$S_n = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = \frac{x_1(1-q^n)}{1-q} \tag{2.8}$$

Một cấp số nhân với công bội có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 1 ($|q| < 1$) được gọi là *cấp số nhân lùi vô hạn*. Trong trường hợp này $q^n \to 0$ khi $n \to +\infty$, do đó:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{x_1}{1-q}.$$

Giới hạn của dãy số S_n được gọi là tổng tất cả các số hạng của cấp số nhân lùi vô hạn. Ta có thể viết:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots = \frac{x_1}{1-q}. \qquad (2.9)$$

b. Tính giá trị hiện tại và giá trị tương lai của tiền tệ

Giả sử bạn có một khoản tiền A đồng gửi vào một ngân hàng nào đó với một mức lãi suất cố định thì sau một khoảng thời gian bạn sẽ nhận được một khoản tiền lớn hơn là

$$B = A + (\text{tiền lãi}).$$

Người ta gọi khoản B đồng đó là *giá trị tương lai* của khoản A đồng hôm nay, và ngược lại: A là *giá trị hiện tại* của khoản B đồng mà bạn sẽ có được trong tương lai.

Trong thị trường tiền tệ, lãi suất được xem như giá của các khoản tiền cho vay. Có nhiều hình thức tổ chức trung gian tài chính thực hiện chức năng vay tiền của những người có tiền để rỗi nhưng không biết làm cho tiền sinh lợi và cho những người khác vay, trong đó ngân hàng là một loại hình tổ chức trung gian tài chính phổ biến. Lãi suất được quy định rất khác nhau. Trong kinh tế học, khi phân tích hoạt động tài chính, người ta giả thiết rằng có một mức lãi suất chung.

Ta gọi mức lãi suất chung là r, biểu diễn dưới dạng thập phân (chẳng hạn, nếu lãi suất là 9% thì $r = 0{,}09$; nếu lãi suất là 12% thì $r = 0{,}12$ v.v...).

Giả sử bạn có một khoản tiền A đồng thì sau một năm, với lãi suất r một năm, bạn sẽ có một khoản tiền gộp cả lãi lẫn gốc là

$$B_1 = A + rA = (1 + r)A.$$

Như vậy, nếu tính gộp tiền lãi vào tiền gốc thì cứ sau mỗi năm số tiền của bạn sẽ được nhân thêm bội số $q = 1 + r$. Gọi B_t là số tiền bạn sẽ có sau t năm, ta có một dãy số nhân với công bội $q = 1 + r$. Theo công thức (2.7), ta có:

$$B_t = B_0 q^t = A(1 + r)^t,$$

trong đó $B_0 = A$ là khoản tiền bạn có hôm nay.

Giá trị tương lai của A đồng bạn có hôm nay sau t năm được tính theo công thức:

$$B = A(1 + r)^t. \qquad (2.10)$$

Đảo lại công thức (2.10) ta được công thức tính giá trị hiện tại của một khoản B đồng mà bạn sẽ nhận sau t năm:

$$A = B(1 + r)^{-t} = \frac{B}{(1+r)^t}. \qquad (2.11)$$

Ví dụ: Một dự án đầu tư đòi hỏi chi phí hiện tại 100 triệu đồng và sẽ đem lại 150 triệu đồng sau 3 năm. Với lãi suất thịnh hành 8% một năm, ta thử đánh giá xem có nên thực hiện dự án đó hay không.

Giải: Để đánh giá dự án, ta thử tính giá trị hiện tại của 150 triệu đồng sẽ thu về sau 3 năm. Theo công thức (2.11) ta có:

$$A = 150(1 + 0{,}08)^{-3} \approx 119{,}075 \text{ (triệu đồng)}.$$

Như vậy, theo giá trị hiện tại, việc thực hiện dự án sẽ đem lại một khoản lợi 19,075 triệu đồng. Đó là một việc nên làm.

Một cách khác để đánh giá dự án là so sánh giá trị tương lai sau 3 năm của khoản chi phí 100 triệu đồng bỏ ra hôm nay với khoản 150 triệu đồng thu về sau 3 năm. Theo công thức (2.10), giá trị tương lai sau 3 năm của khoản chi phí 100 triệu đồng bỏ ra hôm nay là:

$$100(1 + 0{,}08)^3 = 125{,}971 \text{ (triệu đồng).}$$

Con số này nhỏ hơn 150 triệu sẽ thu về, tức là việc tiến hành dự án có lợi hơn là đem tiền cho vay.

Một phương pháp khác để đánh giá dự án đầu tư là tính giá trị hiện tại ròng. *Giá trị hiện tại ròng* của một dự án đầu tư là hiệu số của giá trị hiện tại của khoản tiền sẽ thu về trong tương lai và chi phí triển khai dự án. Gọi C là khoản chi phí hiện tại, B là khoản do dự án đem lại sau t năm, r là lãi suất năm và NPV (Net Present Value) là giá trị hiện tại ròng của dự án, ta có công thức:

$$NPV = B(1 + r)^{-t} - C.$$

Một tiêu chuẩn cơ bản để một dự án đầu tư được chấp thuận là NPV > 0. Trong ví dụ trên NPV = 119,075 − 100 = 19,075 > 0. Việc tính NPV cho phép ta so sánh các dự án đầu tư khác nhau để lựa chọn.

Ví dụ: Một nhà đầu tư có thể bỏ tiền để thực hiện một trong 3 dự án:

Dự án 1: Chi phí hiện tại \$2000 và đem lại \$3000 sau 4 năm;

Dự án 2: Chi phí hiện tại \$2000 và đem lại \$4000 sau 6 năm;

Dự án 3: Chi phí hiện tại \$3000 và đem lại \$4800 sau 5 năm.

Với lãi suất thịnh hành là 10% một năm thì nên chọn dự án nào?

Giải: Để trả lời câu hỏi này ta so sánh NPV của các dự án nói trên:

Dự án 1: $NPV = 3000(1 + 0{,}1)^{-4} - 2000 = \$49{,}04;$

Dự án 2: $NPV = 4000(1 + 0{,}1)^{-6} - 2000 = \$257{,}90;$

Dự án 3: $NPV = 4800(1 + 0{,}1)^{-5} - 3000 = -\$19{,}58.$

Câu trả lời là chọn dự án 2 vì dự án này có NPV lớn nhất. Dự án 3 không thể chấp nhận ngay cả khi không có dự án khác để lựa chọn vì NPV < 0.

c. Kỳ khoản và giá trị của các luồng vốn

Kỳ khoản là các khoản tiền tích góp đều đặn theo định kỳ (hàng tháng, hàng quý, hàng năm ...). Kỳ khoản định kỳ hàng năm được gọi là *niên khoản*, hay *niên kim* (annuity). Các khoản tiền bạn nộp đoàn phí hàng tháng, hay các khoản tiền thanh toán cho một hàng hoá mà bạn mua theo phương thức trả góp là các ví dụ về kỳ khoản.

Sử dụng phương pháp tính giá trị hiện tại và giá trị tương lai đã nêu ở trên và công thức tính tổng các số hạng của một cấp số nhân ta có thể tính được giá trị hiện tại và giá trị tương lai của một luồng kỳ khoản.

Ví dụ 1: Một dự án đầu tư sau một năm sẽ đem lại cho bạn đều đặn \$5000 mỗi năm, liên tiếp trong 10 năm sau đó. Hỏi rằng với lượng vốn phải đầu tư ban đầu là bao nhiêu thì bạn có thể chấp nhận dự án đó trong điều kiện lãi suất 10% một năm?

Giải: Để đánh giá dự án, ta hãy tính giá trị hiện tại của luồng thu nhập (ký hiệu là PV):

$$PV = \frac{5000}{1+0,1} + \frac{5000}{(1+0,1)^2} + \frac{5000}{(1+0,1)^3} + \cdots + \frac{5000}{(1+0,1)^{10}}$$

$$= 5000\left(\frac{1}{1,1} + \frac{1}{1,1^2} + \frac{1}{1,1^3} + \cdots + \frac{1}{1,1^{10}}\right)$$

$$= 5000\frac{\frac{10}{11}\left[1-\left(\frac{10}{11}\right)^{10}\right]}{1-\frac{10}{11}} \approx 30722,8\cdot$$

Câu trả lời là: dự án chỉ có thể được chấp nhận nếu số vốn phải đầu tư ban đầu nhỏ hơn \$37022,8.

Ví dụ 2: Giả sử bạn định mua một chiếc xe máy theo phương thức trả góp. Theo phương thức này, sau một tháng kể từ khi nhận hàng bạn phải trả đều đặn mỗi tháng một lượng tiền nhất định, liên tiếp trong 24 tháng. Giả sử giá xe máy vào thời điểm bạn mua xe là \$2500 (giá trả ngay) và giả sử lãi suất ngân hàng là 1% một tháng. Với mức phải trả hàng tháng là bao nhiêu thì việc mua trả góp là chấp nhận được?

Giải: Gọi a là khoản phải trả hàng tháng. Giá trị hiện tại của toàn bộ luồng tiền trả góp tại thời điểm nhận hàng là:

$$PV=\frac{a}{1,01}+\frac{a}{1,01^2}+\frac{a}{1,01^3}+\ \dots\ +\frac{a}{1,01^{24}}$$

$$=a\frac{\frac{100}{101}\left[1-\left(\frac{100}{101}\right)^{24}\right]}{1-\frac{100}{101}}\approx 21,24a.$$

Việc mua trả góp sẽ tương đương với việc mua trả ngay nếu

$$PV = 21,24a = 2500 \iff a = \frac{2500}{21,24} \approx 117,7.$$

Chắc hẳn bạn chỉ có thể bằng lòng mua trả góp nếu số tiền phải trả định kỳ hàng tháng không vượt quá \$117,7 , nếu không bạn thà vay tiền ngân hàng để trả ngay \$2500.

BÀI TẬP

22. Hãy chứng minh rằng dãy số $x_n = \dfrac{2n}{n+2}$ hội tụ đến 2, bằng cách chỉ ra số tự nhiên n_0 tương ứng với mỗi số $\varepsilon > 0$ sao cho

$$\left|x_n - 2\right| < \varepsilon,\ \forall n > n_0.$$

23. Sử dụng định nghĩa, hãy chứng minh:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{3n+2}=\dfrac{1}{3}$, b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{5n^2+1}=0$.

24. Sử dụng tiêu chuẩn Cauchy, hãy chứng minh:

a) Dãy số $x_n=\sin\dfrac{n\pi}{32}$ phân kỳ;

b) Dãy số $x_n=\dfrac{\cos 1!}{1.2}+\dfrac{\cos 2!}{2.3}+\cdots+\dfrac{\cos n!}{n(n+1)}$ hội tụ;

c) Dãy số $x_n=\dfrac{\sin 1}{2}+\dfrac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\dfrac{\sin n}{2^n}$ hội tụ.

25. Trong điều kiện lãi suất 0,9% một tháng, hãy cho biết:

a) Giá trị tương lai của 3 triệu đồng bạn có hôm nay sau 3 năm;

b) Giá trị hiện tại của khoản tiền 5 triệu đồng bạn sẽ nhận được sau 4 năm.

26. Một dự án đòi hỏi vốn đầu tư ban đầu $6000 và sẽ đem lại $10000 sau 5 năm. Trong điều kiện lãi suất tiền gửi ngân hàng là 9% một năm có nên đầu tư vào dự án đó hay không? Tính NPV của dự án đó.

27. Một công ty đề nghị bạn góp vốn $3500 và đảm bảo sẽ trả cho bạn $750 mỗi năm liên tiếp trong 7 năm. Bạn có chấp nhận góp vốn hay không nếu bạn còn có cơ hội đầu tư tiền vào chỗ khác với lãi suất 9% một năm.

28. Một dự án đòi hỏi chi phí ban đầu 40 triệu đồng và sẽ đem lại 10 triệu sau 1 năm, 20 triệu sau 2 năm và 30 triệu sau 3 năm. Dự án đó có lợi về mặt kinh tế hay không nếu lãi suất hiện hành là 10% một năm?

29. Một dự án đòi hỏi phải đầu tư ban đầu $7500 và sau một năm sẽ đem lại cho bạn $2000 mỗi năm, liên tiếp trong 5 năm. Hãy tính giá trị hiện tại ròng của dự án đó trong điều kiện lãi suất 12% một năm. Có nên thực hiện dự án đó hay không?

§3 GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

I KHÁI NIỆM GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

a. Định nghĩa giới hạn của hàm số

Định nghĩa giới hạn của dãy số có thể xem như định nghĩa giới hạn của hàm số đối số rời rạc f(n), với n biến thiên trên tập hợp số tự nhiên, khi n tiến ra vô hạn. Ta sẽ sử dụng khái niệm giới hạn của dãy số để định nghĩa giới hạn của một hàm số đối số liên tục $y = f(x)$, với miền xác định là các khoảng số thực.

Lý thuyết giới hạn đề cập đến xu hướng biến thiên của biến phụ thuộc y khi biến độc lập x tiến dần tới một điểm a cố định, tức là khi khoảng cách $|x-a|$ thu hẹp một cách tuỳ ý. Ta gọi đó là quá trình x tiến đến a và viết: $x \to a$.

Để xét giới hạn của hàm số $y = f(x)$ khi $x \to a$, ta giả thiết rằng hàm số được xác định trong các khoảng (c; a) và (a; b), còn tại chính điểm a hàm số có thể xác định hoặc không xác định. Quá trình $x \to a$ được xem xét với giả thiết $x \neq a$.

Một phương pháp xem xét giới hạn của hàm số f(x) khi $x \to a$ là "dẫn" biến độc lập x theo một dãy số x_n có giới hạn bằng a (x_n được lấy từ MXĐ của hàm số và $x_n \neq a$) và xét giới hạn của dãy các giá trị tương ứng của hàm số: $y_n = f(x_n)$.

Định nghĩa 1: Nếu với mọi dãy số x_n có giới hạn bằng a, dãy giá trị tương ứng của hàm số, tức là dãy số $y_n = f(x_n)$, luôn luôn có cùng một giới hạn b thì ta nói rằng *hàm số f(x) có giới hạn b khi $x \to a$* và ký hiệu như sau:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \text{hoặc} \quad f(x) \to b \text{ khi } x \to a.$$

Định nghĩa nêu trên áp dụng cho cả trường hợp a hoặc b, hoặc cả hai, là ∞ hoặc $\pm\infty$. Với a là một số thực thì giới hạn của hàm số khi $x \to a$ còn được gọi là *giới hạn tại điểm a*.

Ví dụ: Xét hàm số $f(x) = 2x^2 + 1$ khi $x \to 2$.

Với x_n là một dãy số bất kỳ có giới hạn bằng 2, dãy giá trị tương ứng của hàm số là:

$$y_n = f(x_n) = 2x_n^2 + 1.$$

Theo quy tắc tính giới hạn của dãy số ta có

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty}(2x_n^2 + 1) = 2\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right)^2 + 1 = 2.2^2 + 1 = 9.$$

Vậy, theo định nghĩa: $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2 + 1) = 9$.

Khái niệm giới hạn của hàm số có thể định nghĩa tương đương bằng ngôn ngữ khoảng cách, không sử dụng khái niệm giới hạn của dãy số. Trường hợp a và b là các số thực, định nghĩa 1 tương đương với định nghĩa sau đây:

Định nghĩa 2: Số b được gọi là *giới hạn của hàm số f(x) khi $x \to a$* nếu khoảng cách giữa f(x) và b có thể thu hẹp một cách tuỳ ý bằng cách thu hẹp tương ứng khoảng cách từ x đến a, tức là: với mọi số $\varepsilon > 0$ bé tuỳ ý, bao giờ cũng có thể tìm được tương ứng một số $\delta > 0$ đủ bé sao cho bất đẳng thức

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

được thoả mãn khi x thuộc MXĐ của hàm số và $0 < |x - a| < \delta$.

Ví dụ: Sử dụng định nghĩa, hãy chứng minh: $\lim\limits_{x\to 2}(3x - 1) = 5$.

Giải: Trong ví dụ này $f(x) = 3x - 1$. Ta có :

$$|f(x) - 5| = |(3x - 1) - 5| = 3|x - 2|.$$

Với mọi số $\varepsilon > 0$ ta chọn $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Khi $|x - 2| < \delta$ ta luôn có:

$$|f(x) - 5| = 3|x - 2| < 3\delta = \varepsilon.$$

Vậy, theo định nghĩa 2, ta có điều phải chứng minh.

b. Giới hạn một phía

Trong định nghĩa nêu trên chúng ta xét quá trình $x \to a$ không phân biệt $x > a$ hay $x < a$. Khi xem xét giới hạn, nhiều khi ta phải xét riêng hai quá trình với ký hiệu như sau:

- Quá trình x tiến đến a về phía bên phải, tức là $x \to a$ với điều kiện $x > a$, được ký hiệu là: $x \to a + 0$, hoặc đơn giản là $x \to a+$.

- Quá trình x tiến đến a về phía bên trái, tức là $x \to a$ với điều kiện $x < a$, được ký hiệu là: $x \to a - 0$, hoặc đơn giản là $x \to a-$.

Giới hạn của hàm số f(x) khi $x \to a+$ và khi $x \to a-$ được gọi tương ứng là *giới hạn bên phải* và *giới hạn bên trái* của hàm số tại điểm a:

Giới hạn bên phải: $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$;

Giới hạn bên trái: $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$.

Từ định nghĩa suy ra:

Định lý: Điều kiện cần và đủ để $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ là:

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = b.$$

II. GIỚI HẠN CỦA CÁC HÀM SỐ SƠ CẤP CƠ BẢN

Để thực hiện việc tính giới hạn của hàm số, trước hết bạn cần ghi nhớ các công thức dưới đây (chúng tôi bỏ qua phần chứng minh).

a. Giới hạn tại một điểm thuộc miền xác định

Giới hạn của hàm số sơ cấp cơ bản f(x) tại một điểm a thuộc MXĐ của nó được tính theo công thức:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Ví dụ:

$$\lim_{x \to 5} \sqrt{x} = \sqrt{5}, \quad \lim_{x \to -2} 3^x = 3^{-2}, \quad \lim_{x \to 8} \log_2 x = \log_2 8 = 3, \text{ v. v...}$$

b. Giới hạn tại các đầu mút của khoảng xác định và giới hạn khi $x \to \infty$

1. Hàm số luỹ thừa:

- Với $\alpha > 0$: $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0+} x^\alpha = 0$.

- Với $\alpha < 0$: $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$, $\lim\limits_{x \to 0+} x^\alpha = +\infty$.

2. Hàm số mũ:

- Với $a > 1$: $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.

- Với $0 < a < 1$: $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$.

3. Hàm số logarit:

- Với $a > 1$: $\lim\limits_{x \to 0+} \log_a x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$.

- Với $0 < a < 1$: $\lim\limits_{x \to 0+} \log_a x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$.

4. Các hàm lượng giác:

- Các hàm số sinx, cosx, tgx, cotgx không có giới hạn khi $x \to \pm\infty$.
- Hàm số tgx có giới hạn vô hạn khi $x \to \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in Z)$.
- Hàm số cotgx có giới hạn vô hạn khi $x \to k\pi$ $(k \in Z)$.

5. Các hàm lượng giác ngược

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{arctgx} = \frac{\pi}{2}$, $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \text{arctgx} = -\frac{\pi}{2}$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{arccotgx} = 0$, $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \text{arccotgx} = \pi$.

III. CÁC ĐỊNH LÝ CƠ BẢN VỀ GIỚI HẠN

a. Tính chất của hàm số có giới hạn hữu hạn

Tất cả các định lý về tính chất của các dãy số có giới hạn hữu hạn (dãy số hội tụ) đều có thể mở rộng cho hàm số đối số liên tục.

Định lý 1: Nếu hàm số f(x) có giới hạn khi $x \to a$ thì nó chỉ có một giới hạn duy nhất trong quá trình đó.

Định lý 2: Nếu hàm số f(x) có giới hạn hữu hạn khi $x \to a$ thì nó bị chặn trong miền $X = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \delta\}$, với δ là một số dương đủ nhỏ.

Định lý 3: Nếu $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ và $b > p$ $(b < q)$ thì, với δ là một số dương đủ nhỏ, ta cũng có

$$f(x) > p\ [f(x) < q)],\ \forall x \in \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \delta\}.$$

Định lý 4: Nếu $f(x) \geq g(x)$ với mọi $x \in \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \delta\}$ và cả hai hàm số f(x) và g(x) có giới hạn hữu hạn khi $x \to a$ thì

$$\lim_{x \to a} f(x) \geq \lim_{x \to a} g(x).$$

Tương tự như đối với dãy số, khi f(x) > g(x) ta cũng chỉ có thể kết luận được rằng $\lim\limits_{x \to a} f(x) \geq \lim\limits_{x \to a} g(x)$ (dấu bằng có thể xảy ra).

b. Các quy tắc tính giới hạn.

Sử dụng định nghĩa giới hạn của hàm số bằng ngôn ngữ dãy số và các quy tắc tính giới hạn của dãy số ta có thể thiết lập các quy tắc tính giới hạn của hàm số đối số liên tục. Dưới đây là các quy tắc thông dụng:

Quy tắc 1: Nếu khi $x \to a$ các hàm số f(x) và g(x) có giới hạn là các số thực b_1 và b_2 thì:

1. $\lim\limits_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = b_1 \pm b_2$;

2. $\lim\limits_{x \to a}[kf(x)] = k\lim\limits_{x \to a} f(x) = kb_1$;

3. $\lim\limits_{x \to a}[f(x).g(x)] = b_1 b_2$;

4. $\lim\limits_{x \to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b_1}{b_2}$ khi $b_2 \neq 0$;

5. $\lim\limits_{x \to a}[f(x)]^{g(x)} = {b_1}^{b_2}$, khi $b_1 > 0$.

Ví dụ 1: Tính các giới hạn

$$L_1 = \lim_{x \to \infty}\frac{2x^2 + 5x - 1}{5x^2 + 2x + 9}, \; L_2 = \lim_{x \to \infty}\left(\frac{2x - 1}{x + 1}\right)^{\frac{3x}{x - 5}}.$$

Giải: Bằng cách chia cả tử và mẫu của biểu thức dưới dấu giới hạn L_1 cho x^2, ta có:

$$L_1 = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2 + 5x - 1}{5x^2 + 2x + 9} = \lim_{x\to\infty}\frac{2 + 5x^{-1} - x^{-2}}{5 + 2x^{-1} + 9x^{-2}}.$$

Các hàm luỹ thừa x^{-n} ($n \in \mathbb{N}$) có giới hạn 0 khi $x \to \infty$. Theo quy tắc 1 ta dễ dàng xác định được $L_1 = \frac{2}{5}$

Tương tự, ta dễ dàng tính được:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x - 1}{x + 1} = 2,\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x - 5} = 3.$$

Theo quy tắc 1-5 ta xác định được:

$$L_2 = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x - 1}{x + 1}\right)^{\frac{3x}{x-5}} = 2^3 = 8.$$

Quy tắc 2: Nếu $\lim_{x\to a}\varphi(x) = b$, nhưng hàm số $u = \varphi(x)$ không nhận giá trị b tại những điểm x gần a, đồng thời hàm số f(u) có giới hạn khi $x \to b$ thì

$$\lim_{x\to a} f[\varphi(x)] = \lim_{u\to b} f(u).$$

Ví dụ 2: Tính giới hạn $\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{x^2 + x + 2}{2x^2 - x + 3}$.

Giải: Bằng cách tương tự như ở ví dụ 1 trên đây, ta dễ dàng thấy rằng

$$u = \frac{x^2 + x + 2}{2x^2 - x + 3} \to \frac{1}{2} \text{ khi } x \to \infty.$$

Theo quy tắc 2, ta có:

$$\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{x^2 + x + 2}{2x^2 - x + 3} = \lim_{u\to 1/2}\log_2 u = \log_2\frac{1}{2} = -1.$$

Quy tắc 3: Nếu hàm số sơ cấp (biểu thức hữu hạn) f(x) xác định tại điểm x = a thì $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Ví dụ 3: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-x+2}}$.

Giải: Biểu thức hữu hạn (hàm số sơ cấp) dưới dấu giới hạn xác định tại điểm x = 3, do đó

$$\lim_{x\to 3}\sqrt{\frac{x-1}{x^2-x+2}} = \lim_{x\to 3}\sqrt{\frac{3-1}{3^2-3+2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Quy tắc 4: Với giả thiết $f(x) \neq 0$:

- Nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ thì $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)} = \infty$;
- Nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ thì $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)} = 0$;

Ví dụ 4: Sử dụng quy tắc này ta dễ dàng xác định được các giới hạn sau:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x} = \infty \text{ (do } \lim_{x\to 0}\sin x = \sin 0 = 0\text{)};$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\ln x} = 0 \text{ (do } \lim_{x\to +\infty}\ln x = +\infty\text{)}.$$

Quy tắc 5: Nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ và g(x) là một hàm số bị chặn thì

$$\lim_{x\to a} f(x).g(x) = 0.$$

Ví dụ 5: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

Giải: Mặc dù hàm số sinx không có giới hạn khi $x \to \infty$, nhưng nó bị chặn. Sử dụng quy tắc 5, ta dễ dàng xác định được:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}.\sin x = 0.$$

c. Các dạng vô định

Khi tính giới hạn, bạn cần lưu ý các dạng vô định, tức là các dạng giới hạn không thể xác định được theo một quy tắc nhất định. Để tính các giới hạn đó, ta phải biến đổi về dạng cho phép áp dụng các quy tắc tính giới hạn nêu trên. Các dạng vô định có thể gặp gồm có:

- Dạng $\frac{0}{0}$ và $\frac{\infty}{\infty}$ xảy ra khi tính giới hạn của biểu thức $\frac{f(x)}{g(x)}$, trong đó cả hai hàm số f(x) và g(x) cùng có giới hạn 0, hoặc cùng có giới hạn vô hạn.

- Dạng $\infty - \infty$ xảy ra khi tính giới hạn của hiệu f(x) – g(x), trong đó f(x) và g(x) cùng dấu và cùng có giới hạn vô hạn.

- Dạng $0.\infty$ xảy ra khi tính giới hạn của tích f(x)g(x), trong đó hàm số f(x) có giới hạn 0 và hàm số g(x) có giới hạn vô hạn.

- Các dạng 1^∞, 0^0, ∞^0 xảy ra khi tính giới hạn của biểu thức $[f(x)]^{g(x)}$, trong đó f(x) là một hàm số dương. Ta gặp:

◊ Dạng 1^∞ nếu $f(x) \to 1$ và $g(x) \to \infty$;

◊ Dạng 0^0 nếu $f(x) \to 0$ và $g(x) \to 0$;

◊ Dạng ∞^0 nếu $f(x) \to +\infty$ và $g(x) \to 0$

IV. HAI GIỚI HẠN CƠ BẢN DẠNG VÔ ĐỊNH

Để tính một số giới hạn dạng vô định, bạn có thể sử dụng các công thức sau:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (dạng $\dfrac{0}{0}$).

2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$ (dạng 1^{∞}).

Ví dụ 1: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}$

Giải:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}a=a.$$

Ví dụ 2: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

Giải:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Ví dụ 3: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

Giải: Khi $x\to 0$ ta có $u=1-\cos x\to 0$. Sử dụng kết quả tính toán ở ví dụ 2 trên đây, ta dễ dàng tính được:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left\{\left[1+(\cos x-1)\right]^{\frac{1}{\cos x-1}}\right\}^{-\frac{1-\cos x}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

Ví dụ 4: Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x}$

Giải:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e \ \ (a > 0 \text{ và } a \neq 1).$$

Đặc biệt, với a = e, ta có:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

V. VÔ CÙNG BÉ VÀ VÔ CÙNG LỚN

a. Mở rộng khái niệm vô cùng bé

Khái niệm vô cùng bé (VCB) mà ta đã nói đến trong trường hợp dãy số (hàm số đối số tự nhiên) có thể mở rộng cho hàm số đối số liên tục như sau:

Định nghĩa: Hàm số $\alpha(x)$ được gọi là vô cùng bé khi $x \to a$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0.$$

Ví dụ: Theo các công thức giới hạn của các hàm sơ cấp cơ bản, ta có:

Các hàm số x^k $(k > 0)$, sinx, tgx là các VCB khi $x \to 0$;

Các hàm số x^k $(k < 0)$, arccotgx là các VCB khi $x \to +\infty$.

Từ định nghĩa suy ra:

Định lý: Hàm số f(x) có giới hạn b $(b \in \mathbb{R})$ khi $x \to a$ khi và chỉ khi $\alpha(x) = f(x) - b$ là một VCB khi $x \to a$. Nói cách khác, điều kiện cần và đủ để f(x) có giới hạn b khi $x \to a$ là: $f(x) = b + \alpha(x)$, trong đó $\alpha(x)$ là một VCB khi $x \to a$.

b. Xếp bậc các vô cùng bé

Cho $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB trong cùng một quá trình $x \to a$.

Định nghĩa 1: Ta nói rằng *$\beta(x)$ là VCB bậc cao hơn so với $\alpha(x)$* khi và chỉ khi

$$\lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0.$$

Để nói rằng $\beta(x)$ là VCB bậc cao hơn so với $\alpha(x)$ ta viết:

$$\beta(x) = o[\alpha(x)].$$

Ví dụ: Trong quá trình $x \to 0$, với $p > q > 0$, ta có $x^p = o(x^q)$, bởi vì:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^p}{x^q} = \lim_{x\to 0} x^{p-q} = 0.$$

Nhận xét: Từ định nghĩa ta dễ dàng suy ra các mệnh đề đơn giản sau đây:

- Nếu $\beta(x) = o[\alpha(x)]$ thì $a\beta(x) = o[\alpha(x)]$ (a là hằng số bất kỳ).
- Nếu $\beta(x) = o[\alpha(x)]$ và $\gamma(x) = o[\alpha(x)]$ thì:

$$\beta(x) \pm \gamma(x) = o[\alpha(x)].$$

- Nếu $\beta(x) = o[\alpha(x)]$ và $\gamma(x)$ là VCB thì $\beta(x)\gamma(x) = o[\alpha(x)]$.

Ví dụ: Với $k > 0$, khi $x \to 0$ ta có:

$$\beta(x) = a_1x^{k+1} + a_2x^{k+2} + \ldots + a_px^{k+p} = o(x^k)$$

Định nghĩa 2: Ta nói rằng *$\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là VCB cùng bậc* khi và chỉ khi

$$\lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = k \neq 0 \ (k\in \mathbb{R}).$$

Đặc biệt, khi k = 1 ta nói rằng *$\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB tương đương* và viết:

$$\beta(x) \sim \alpha(x).$$

Khái niệm VCB tương đương còn có thể nhìn nhận dưới giác độ khác như sau:

Định lý: $\beta(x)$ là một VCB tương đương với $\alpha(x)$ (trong quá trình $x \to a$) khi và chỉ khi

$$\beta(x) = \alpha(x) + o[\alpha(x)].$$

Chứng minh:

$$\lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1 \Leftrightarrow \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1 + \gamma(x) \ [\gamma(x) \text{ là VCB khi } x \to a]$$

$$\Leftrightarrow \beta(x) = \alpha(x) + \alpha(x).\gamma(x) = \alpha(x) + 0[\alpha(x)].$$

Ví dụ: Với $k > 0$, khi $x \to 0$ ta có:

$$\beta(x) = ax^k + a_1x^{k+1} + a_2x^{k+2} + ... + a_px^{k+p} \sim ax^k.$$

Định lý sau đây cho phép ta sử dụng VCB tương đương khi tính các giới hạn dạng vô định $\frac{0}{0}$:

Định lý: Giả sử khi $x \to a$ ta có các cặp VCB tương đương:

$$\alpha(x) \sim \alpha^*(x), \ \beta(x) \sim \beta^*(x).$$

Khi đó, nếu $\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta^*(x)}{\alpha^*(x)}$ tồn tại thì $\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{\beta^*(x)}{\alpha^*(x)}$.

Chứng minh: Thật vậy, ta có:

$$\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \frac{\beta(x)}{\beta^*(x)}\frac{\beta^*(x)}{\alpha^*(x)}\frac{\alpha^*(x)}{\alpha(x)}.$$

Chuyển qua giới hạn khi $x \to a$ ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ: Áp dụng định lý trên ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+3x^2-5x^3+7x^4}{3x-9x^2+x^3+3x^4+4x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}.$$

c. Vô cùng lớn

Định nghĩa: Một hàm số A(x) có giới hạn vô hạn khi $x \to a$ được gọi là một vô cùng lớn (VCL) trong quá trình đó.

Ví dụ: Với $k > 0$ và $a \neq 0$:

- ax^k là VCL khi $x \to +\infty$;
- ax^{-k} là VCL khi $x \to 0$.

VCB và VCL có liên hệ với nhau như sau:

Định lý: Nếu A(x) là một VCL khi $x \to a$ và $A(x) \neq 0$ thì $\alpha(x) = \frac{1}{A(x)}$ là một VCB khi $x \to a$. Ngược lại, nếu $\alpha(x)$ là một VCB khi $x \to a$ và $\alpha(x) \neq 0$ thì $A(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$ là một VCL trong quá trình đó.

BÀI TẬP

30. Sử dụng định nghĩa, hãy tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x\to 1}(3x^2-2x+1)$ b) $\lim_{x\to -2}\frac{x^3}{x+1}$

31. Chứng minh rằng các hàm số sinx, cosx, tgx, cotgx không có giới hạn khi $x\to\infty$.

32. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x^2+3x+1}-5x}{2x+1}$ b) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+5x+1}{2x^3+x^2-9}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2+x+1}{4x^2-x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$ d) $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)\cos\dfrac{x}{x^2-5x+6}$

33. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x^2-3x-10}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{2x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x-1}-\sqrt{x^2+x-5}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots x^m-m}{x+x^2+\cdots x^n-n}$ (m và n là các số nguyên dương)

34. Tính các giới hạn sau bằng cách sử dụng công thức $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=1$:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{tg2x}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi x}{x^3-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$

35. Chứng minh quy tắc sau đây đối với giới hạn dạng 1^∞: Nếu $\lim\limits_{x\to a}u(x)=1$, $\lim\limits_{x\to a}v(x)=\infty$ và $\lim\limits_{x\to a}v(x)[u(x)-1]=k$ thì

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}=e^k.$$

36. Tính các giới hạn sau bằng cách sử dụng quy tắc ở bài tập 35:

a) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-x+1}{3x^2+x+1}\right)^{\frac{x^2}{1-x}}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\cot g^2 x}$ d) $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\cot g\pi x}$

37. Tính các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$ $(a>0$ và $a\neq 1)$ b) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$ $(a>0)$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$ $(a>0$ và $a\neq 1)$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}$ $(\alpha\neq 0)$

38. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+9}{2x+3}\right)^{\frac{tg3(x-1)}{x-1}}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}x[\ln(x+1)-\ln x]$ d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\log_2 x}{x-1}$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$ f) $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x+\cos x)^{\cot gx}$ h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 5x)}$

39. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ và $\lim\limits_{x\to a}g(x)=k\neq 0\ (k\in\mathbb{R})$ thì $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)=\infty$.

40. Chứng minh rằng khi $x\to 0$:

a) $1-\cos ax=o(\sin x)$. b) $1-\cos ax\sim\dfrac{a^2x^2}{2}(a\neq 0)$.

c) $\sin ax+\sin^2 bx\sim ax(a\neq 0)$. d) $a^x-1\sim x\ln a\ (1\neq a>0)$.

e) $\ln(1+ax)\sim ax\ (a\neq 0)$. f) $(1+kx)^\alpha-1\sim k\alpha x\ (k\alpha\neq 0)$

g) thì $ax^\alpha+a_1x^{\alpha+1}+\cdots+a_nx^{\alpha+n}\sim ax^\alpha$ $(\alpha>0$ và $a\neq 0)$.

41. Với $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ là các VCB trong cùng một quá trình $x\to a$, hãy chứng minh:

a) Nếu $\alpha(x)\sim\beta(x)$ và $\beta(x)\sim\gamma(x)$ thì $\alpha(x)\sim\gamma(x)$;

b) Nếu $\alpha(x) \sim \beta(x)$ và $\beta(x) = o[\gamma(x)]$ thì $\alpha(x) = o[\gamma(x)]$.

42. Bằng cách thay VCB tương đương, hãy tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 3x}{2x^2 + 3x^3 - x^4}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5^x - 1}{4x + 3\sin^2 x + \cos x - 1}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + 4x^2 - 5x^3)}{\ln(1 + 2x^2 + 3x^3)}$ d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[5]{(1 + 3x)^2} - 1}{\sin x + 2\sin^2 x}$

§4 HÀM SỐ LIÊN TỤC

I. KHÁI NIỆM HÀM SỐ LIÊN TỤC

a. Hàm số liên tục tại một điểm

Định nghĩa 1: Ta nói rằng hàm số f(x) *liên tục tại điểm x_0* thuộc MXĐ của nó khi và chỉ khi:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (4.1)$$

Nếu đẳng thức (4.1) không được thoả mãn thì ta nói rằng hàm số f(x) *gián đoạn tại điểm x_0* và điểm x_0 được gọi là *điểm gián đoạn* của hàm số đó.

Điểm x_0 là điểm gián đoạn của hàm số f(x) trong các trường hợp sau đây:

- f(x) không xác định tại điểm x_0;
- f(x) không có giới hạn hoặc có giới hạn vô hạn khi $x \to x_0$;
- f(x) xác định tại điểm x_0 và có giới hạn hữu hạn khi $x \to x_0$, nhưng $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Ví dụ 1: Theo định lý về quy tắc tính giới hạn của hàm số sơ cấp tại một điểm thuộc MXĐ thì *mọi hàm số sơ cấp (hàm số cho dưới dạng một biểu thức hữu hạn) đều liên tục tại mọi điểm thuộc MXĐ của nó.*

Chú ý: Nếu đẳng thức (4.1) được thoả mãn với vế trái là giới hạn bên phải hoặc giới hạn bên trái của hàm số f(x) tại điểm x_0 thì ta nói tương ứng: hàm số f(x) *liên tục bên phải* hoặc *liên tục bên trái* tại điểm x_0. Như ta đã biết, hàm số f(x) có giới hạn b tại điểm $x = x_0$ khi và chỉ khi giới hạn bên phải và giới hạn bên trái của nó tại điểm đó đều bằng b, do đó *hàm số f(x) liên tục tại điểm x_0 khi và chỉ khi nó đồng thời liên tục bên phải và liên tục bên trái tại điểm đó.*

Ví dụ 2: Xét sự liên tục của hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, \text{ khi } x<0 \\ x^2+a, \text{khi } x \ge 0 \end{cases} \quad \text{(a là một số cho trước).}$$

Hàm số f(x) liên tục tại mọi điểm thuộc các khoảng (−∞; 0), (0; +∞), bởi vì trong mỗi khoảng đó f(x) là một biểu thức sơ cấp. Tại điểm x = 0 ta có:

$$f(0) = a, \quad \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x^2+a) = a;$$

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(2x+1) = 1.$$

Ta thấy:

Hàm số f(x) liên tục bên phải tại điểm x = 0 với mọi a:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = f(0) = a;$$

Hàm số f(x) liên tục bên trái tại điểm x = 0 khi và chỉ khi:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow a = 1.$$

Kết luận: Với $a = 1$ thì $f(x)$ liên tục tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$, còn với $a \neq 1$ thì $f(x)$ bị gián đoạn tại điểm $x = 0$.

b. Số gia của hàm số liên tục

Khái niệm hàm số liên tục có thể biểu diễn bằng ngôn ngữ số gia như sau:

Định lý: Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm x_0 khi và chỉ khi số gia

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

là VCB khi $\Delta x \to 0$.

Điều này suy ra trực tiếp từ định nghĩa:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0 \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0.$$

c. Hàm số liên tục trên một miền

Khái niệm hàm số liên tục trên một miền $X \subset \mathbb{R}$ được định nghĩa thông qua sự liên tục tại điểm như sau:

Định nghĩa 2: Ta nói hàm số $f(x)$ *liên tục trên một miền X* khi và chỉ khi nó liên tục tại mọi điểm thuộc miền đó.

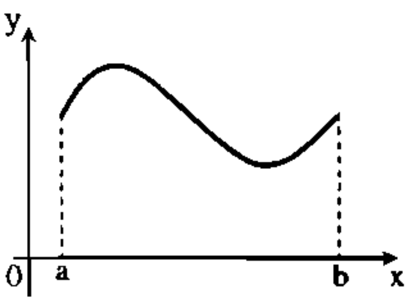
Trong trường hợp miền X là một trong các khoảng hữu hạn $[a;b]$, $[a; b)$ hoặc $(a; b]$ thì tại các đầu mút a và b ta chỉ có thể xét giới hạn một phía, do đó khái niệm hàm số liên tục trên một khoảng được áp dụng với quy ước:

- Điều kiện liên tục tại mút trái a (nếu khoảng đó đóng tại a) được hiểu theo nghĩa liên tục bên phải.

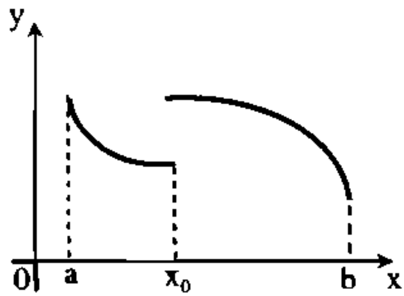
- Điều kiện liên tục tại mút phải b (nếu khoảng đó đóng tại b) được hiểu theo nghĩa liên tục bên trái.

Theo quy ước này, hàm số f(x) liên tục được gọi là liên tục trên khoảng đóng [a; b] khi và chỉ khi nó liên tục cả hai phía tại mọi điểm $x \in (a; b)$, liên tục bên phải tại a và liên tục bên trái tại b.

Dưới giác độ hình học, đồ thị của một hàm số liên tục trên một khoảng X là một đường cong liền một nét (không bị ngắt quãng). Trái lại đồ thị của hàm số gián đoạn bị ngắt quãng tại các điểm gián đoạn.



Hàm liên tục



Hàm gián đoạn

II. CÁC PHÉP TOÁN SƠ CẤP ĐỐI VỚI CÁC HÀM SỐ LIÊN TỤC

Các định lý sau đây khẳng định rằng tất cả các phép toán sơ cấp (phép cộng, phép trừ, phép nhân, phép chia và phép hợp hàm) đều bảo toàn tính liên tục của các hàm số.

Định lý 1: Nếu các hàm số f(x) và g(x) cùng liên tục tại điểm x_0 thì:

- Các hàm số f(x) + g(x), f(x) − g(x) và f(x)g(x) liên tục tại điểm x_0.
- Hàm số $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ cũng liên tục tại điểm x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

Định lý này là hệ quả trực tiếp của định lý về giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương các hàm số.

Định lý 2: Nếu hàm số $\varphi(x)$ liên tục tại điểm x_0 và hàm số $f(u)$ liên tục tại điểm tương ứng $u_0 = \varphi(x_0)$ thì hàm hợp $f[\varphi(x)]$ liên tục tại điểm x_0.

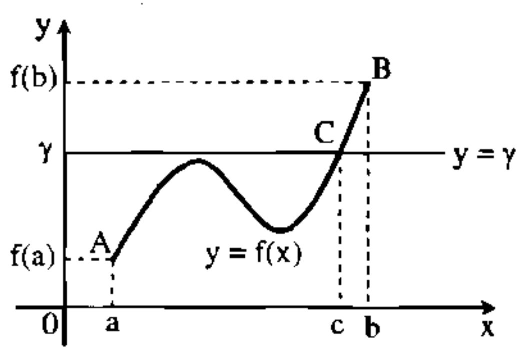
Định lý này là hệ quả trực tiếp của định lý về giới hạn của hàm hợp.

III. CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG

a. Định lý về giá trị trung gian

Định lý: Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng đóng $[a; b]$ và $f(a) \neq f(b)$ thì nó nhận mọi giá trị trung gian giữa hai giá trị $f(a)$ và $f(b)$, tức là với mọi số γ giữa $f(a)$ và $f(b)$ bao giờ cũng có thể tìm được ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = \gamma$.

Định lý trên khẳng định bản chất của tính liên tục: một hàm số liên tục, khi thay đổi từ giá trị này đến giá trị khác phải trải qua tất cả các giá trị trung gian.



Dưới giác độ hình học, với γ là một số bất kỳ giữa f(a) và f(b), hai điểm A(a, f(a)) và B(b, f(b)) nằm về hai phía của đường thẳng $y = \gamma$, còn đồ thị của hàm số y = f(x) là một đường cong liên tục nối hai điểm A và B. Hiển nhiên là, do không có sự "nhảy cóc", đường cong liên tục y = f(x) chắc chắn phải cắt đường thẳng $y = \gamma$ tại một điểm nào đó (điểm có hoành độ x = c).

Áp dụng định lý trong trường hợp $\gamma = 0$, ta có:

Hệ quả: Nếu hàm số f(x) liên tục trên khoảng đóng [a; b] và và giá trị của nó tại hai đầu mút trái dấu nhau thì phương trình f(x) = 0 có ít nhất một nghiệm trong khoảng (a; b), tức là tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho f(c) = 0.

Ví dụ: Xét phương trình: $x^6 + 5x - 1 = 0$.

Ta thấy rằng $f(x) = x^6 + 5x - 1$ là một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 5 > 0$, do đó phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm trong khoảng (0; 1).

b. Tính bị chặn của hàm số liên tục trên một khoảng đóng.

Định lý : Nếu hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a; b] thì:

- f(x) bị chặn trên [a; b];
- f(x) có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên [a; b], tức là tồn tại $c_1, c_2 \in [a; b]$ sao cho

$$m = f(c_1) \leq f(x) \leq M = f(c_2), \quad \forall x \in [a; b].$$

Chú ý: Một hàm số liên tục trong một khoảng không đóng hoặc khoảng vô hạn chưa chắc đã bị chặn và chưa chắc có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) trong khoảng đó. Chẳng hạn:

◊ Hàm số f(x) = 1/x liên tục trong khoảng (0; 1), nhưng không bị chặn trong khoảng đó.

◊ Hàm số $g(x) = x$ liên tục và bị chặn trong khoảng (0; 1), nhưng không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong khoảng đó.

c. Tính liên tục của hàm số đơn điệu với miền giá trị là một khoảng

Từ định lý về giá trị trung gian có thể chứng minh được rằng: nếu hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên một khoảng $(a; b)$ thì miền giá trị của nó là một khoảng $(c; d)$. Đối với các hàm số đơn điệu ta có thể chứng minh điều ngược lại.

Định lý: Nếu hàm số $f(x)$ xác định, đơn điệu theo nghĩa ngặt trong khoảng $(a; b)$ và miền giá trị của nó là một khoảng $(c; d)$ thì hàm số đó liên tục trong khoảng $(a; b)$.

Chứng minh:

Giả sử $f(x)$ là hàm đơn điệu tăng theo nghĩa ngặt trong khoảng $(a; b)$ và miền giá trị của nó là khoảng $(c; d)$.

Gọi x_0 là một điểm bất kỳ thuộc khoảng $(a; b)$, ta có

$$y_0 = f(x_0) \in (c; d).$$

Cho ε là một số dương bất kỳ. Ta chỉ cần xét những số ε đủ nhỏ sao cho

$$(y_0 - \varepsilon; y_0 + \varepsilon) \subset (c; d).$$

Do $f(x)$ là hàm đơn điệu tăng theo nghĩa ngặt trong khoảng $(a; b)$ nên tồn tại duy nhất một điểm $x_1 \in (a; b)$ và duy nhất một điểm $x_2 \in (a; b)$ sao cho

$$f(x_1) = y_0 - \varepsilon = f(x_0) - \varepsilon, \quad f(x_2) = y_0 + \varepsilon = f(x_0) + \varepsilon.$$

Do $f(x)$ là hàm đơn điệu tăng nên

$$f(x_1) < f(x_0) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_0 < x_2.$$

Gọi δ là số nhỏ hơn trong hai số dương $x_2 - x_0$ và $x_0 - x_1$. Khi $|x - x_0| < \delta$ ta luôn có:

$$x_1 \le x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \le x_2$$

$$\Rightarrow f(x_0) - \varepsilon = f(x_1) < f(x) < f(x_2) = f(x_0) + \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Sự tồn tại số $\delta > 0$ nêu trên chứng tỏ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, do đó hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm x_0.

Trường hợp f(x) đơn điệu giảm được chứng minh tương tự.

d. Định lý về sự tồn tại hàm ngược liên tục

Định lý: Nếu hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục và đơn điệu tăng (đơn điệu giảm) trên một khoảng X thì:

- Miền giá trị của hàm số $y = f(x)$ là một khoảng Y;
- Hàm số $y = f(x)$ có hàm ngược $x = f^{-1}(y)$;
- Hàm ngược $x = f^{-1}(y)$ là hàm liên tục và đơn điệu tăng (đơn điệu giảm) trên khoảng Y.

Ví dụ: Hàm số $y = \sin x$ liên tục và đơn điệu tăng trên $X=\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Miền giá trị của hàm số này là $Y = [-1; 1]$. Hàm ngược của nó là hàm số $x = \arcsin y$, xác định, đơn điệu tăng và liên tục trên $[-1; 1]$.

BÀI TẬP

43. Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm $x = 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{1-\cos 3x}{x\sin x} \text{ khi } x \neq 0 \\ \dfrac{9}{2} \text{ khi } x = 0 \end{cases}$$

44. Xét tính liên tục của các hàm số sau tại điểm $x = 1$:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ khi } x \leq 1 \\ ax + 2 \text{ khi } x > 1 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{|x-1|} \text{ khi } x \neq 1 \\ a \text{ khi } x = 1 \end{cases}$

45. Xét tính liên tục của các hàm số sau:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} & \text{khi } x \neq 3 \\ 1 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2^x - 4}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2} & \text{khi } |x| \leq 1 \\ |x - 1| & \text{khi } |x| > 1 \end{cases}$

46. Tìm k để hàm số sau liên tục trong khoảng (– 1; 1):

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1 + x) - \ln(1 - x)}{x} & \text{khi } 0 < |x| < 1 \\ k & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

47. Có thể nói gì về tính liên tục của hàm số f(x) + g(x) tại điểm x_0 trong các trường hợp sau:

a) f(x) liên tục tại x_0, nhưng g(x) gián đoạn tại điểm đó;

b) Cả hai hàm số f(x) và g(x) đều gián đoạn tại x_0.

48. Chứng minh các phương trình sau có nghiệm

a) $3^x = \sin x$ b) $2^x = x^2 + x + 3$

49. Chứng minh rằng phương trình $x^6 - 9x - 8 = 0$ có ít nhất 2 nghiệm thực.

50. Chứng minh rằng phương trình $x^5 + x^2 - 8x + 1 = 0$ có ít nhất 3 nghiệm thực.

Chương 2
ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

§1. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ

I. KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM

a. Đạo hàm của hàm số tại một điểm

Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trong khoảng $(a; b)$. Nếu xuất phát từ điểm $x_0 \in (a; b)$ ta cho biến độc lập thay đổi giá trị đến điểm $x \in (a; b)$ thì biến phụ thuộc y sẽ thay đổi giá trị từ $f(x_0)$ đến $f(x)$. Hiệu số $\Delta x = x - x_0$ chỉ lượng thay đổi giá trị của biến độc lập, được gọi là *số gia của đối số*, còn hiệu số

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

chỉ lượng thay đổi giá trị tương ứng của y, được gọi là *số gia tương ứng của hàm số* (ta sử dụng ký hiệu Δ để chỉ số gia, hay lượng thay đổi trị số của các biến số).

Tỷ số

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad (1.1)$$

biểu diễn tốc độ biến thiên trung bình của biến phụ thuộc y khi biến độc lập x thay đổi giá trị từ x_0 đến x. Nếu tỷ số này có giới hạn hữu hạn khi $\Delta x \to 0$ thì trị số giới hạn cho biết tốc độ biến thiên tức thời của hàm số tại điểm x_0.

Định nghĩa: Nếu tỷ số (1.1) có giới hạn hữu hạn khi $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k$$

thì số k được gọi là *đạo hàm* của hàm số $y = f(x)$ *tại điểm* x_0.

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 được biểu diễn bằng một trong các ký hiệu sau:

$$y'(x_0), \quad f'(x_0), \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df(x_0)}{dx}.$$

Theo định nghĩa ta có:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Ví dụ 1: Với $f(x) = x^2$, tại điểm x_0 bất kỳ ta có:

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - {x_0}^2}{\Delta x} = \frac{(2x_0 + \Delta x)\Delta x}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x.$$

Theo định nghĩa đạo hàm:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0.$$

Ví dụ 2: Với $f(x) = \sin x$, tại điểm x_0 bất kỳ ta có:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{2\cos\frac{x + x_0}{2}\sin\frac{x - x_0}{2}}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \cos\frac{x + x_0}{2} . \lim_{x \to x_0} \frac{\sin\frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} = \cos x_0.$$

Chú ý: Nếu giới hạn của tỷ số (1.1) khi $\Delta x \to 0$ được tính riêng từng phía ($\Delta x \to 0+$, $\Delta x \to 0-$) thì các giới hạn tương ứng được gọi là *đạo hàm một phía* (*đạo hàm bên phải, đạo hàm bên trái*) của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0. Các đạo hàm một phía được ký hiệu như sau:

Đạo hàm bên phải: $y'_+ = f'_+(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0+} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$;

Đạo hàm bên trái: $y'_- = f'_-(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0-} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$.

Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 khi và chỉ khi tại điểm đó đạo hàm bên phải và đạo hàm bên trái cùng tồn tại và bằng nhau:

$$f'(x_0) = k \Leftrightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = k.$$

Ví dụ: Với $f(x) = |x|$, tại điểm $x_0 = 0$ ta có:

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

Đạo hàm bên phải: $f'_+(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0+} \dfrac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1.$

Đạo hàm bên trái: $f'_-(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0-} \dfrac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1.$

Tại điểm $x_0 = 0$ hàm số $f(x) = |x|$ không có đạo hàm vì các đạo hàm một phía không bằng nhau.

b. Tính liên tục của hàm số có đạo hàm

Định lý: Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

Chứng minh: Thật vậy, nếu tồn tại $f'(x_0)$ thì

$$\lim_{x \to x_0}[f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = f'(x_0).0 = 0.$$

Từ đây suy ra:

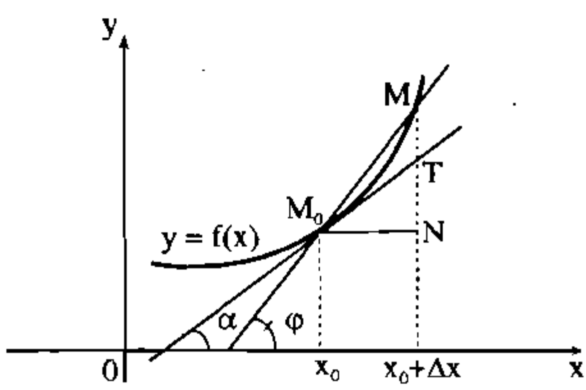
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Điều này chứng tỏ hàm số f(x) liên tục tại x_0.

Chú ý: Định lý khẳng định rằng hàm số liên tục tại tất cả các điểm mà tại đó nó có đạo hàm. Tuy nhiên, *một hàm số liên tục tại một điểm chưa chắc có đạo hàm tại điểm đó.* Chẳng hạn, hàm số f(x) = |x| vừa xét ở trên liên tục tại điểm x = 0, nhưng không có đạo hàm tại điểm đó.

c. Đạo hàm và độ dốc của đường cong

Như ta đã biết, hệ số góc của một đường thẳng biểu thị độ dốc của đường thẳng đó so với trục Ox. Độ dốc của đường cong $y = f(x)$ tại điểm M_0 được đo bởi hệ số góc của tiếp tuyến kẻ tại điểm đó.



Nếu thay đổi giá trị của biến độc lập từ x_0 đến $x_0 + \Delta x$ thì điểm tương ứng trên đồ thị xê dịch từ vị trí M_0 đến vị trí M. Số gia Δx có giá trị tuyệt đối càng nhỏ thì điểm M càng gần điểm M_0. Gọi φ là góc nghiêng của đường thẳng M_0M và α là góc nghiêng của tiếp tuyến M_0T với trục hoành, ta có:

$$tg\varphi = \frac{\overline{NM}}{\overline{M_0N}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (1.2)$$

Với x_0 cố định và $\Delta x \to 0$ thì điểm M tiến dần đến vị trí M_0 và đường thẳng M_0M tiến dần tới vị trí giới hạn là tiếp tuyến M_0T, đồng thời $\varphi \to \alpha$. Từ đẳng thức (1.2) suy ra:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\varphi \to \alpha} tg\varphi = tg\alpha \quad \Leftrightarrow \quad f'(x_0) = tg\alpha .$$

Từ đây suy ra: *Đạo hàm của hàm số y= f(x) tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm M_0 có hoành độ $x = x_0$*. Như vậy, đạo hàm $f'(x_0)$ là số đo độ dốc của đường cong $y = f(x)$ tại điểm $M_0[x_0, f(x_0)]$.

d. Đạo hàm của hàm số trên một miền

Theo định nghĩa thì đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại một điểm x_0 là một số thực xác định. Nếu hàm số có đạo hàm tại mọi điểm thuộc một miền X thì mỗi giá trị $x \in X$ cho tương ứng một giá trị xác định của đạo hàm y', do đó ta có hàm số:

$$y' = f'(x).$$

Ta gọi hàm số này là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ trên miền X.

Ví dụ:

Đạo hàm của hàm số $y = x^2$ là hàm số $y' = 2x$ $(x \in \mathbb{R})$.

Đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin x$ là hàm số $y' = \cos x$ $(x \in \mathbb{R})$.

II. ĐẠO HÀM CỦA CÁC HÀM SƠ CẤP CƠ BẢN

Để thực hiện việc tính toán đạo hàm, trước hết bạn cần ghi nhớ các công thức đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản. Các công thức sau đây được thiết lập trực tiếp theo định nghĩa.

1. $(C)' = 0$
2. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$. $\quad (x)' = 1$
3. $(a^x)' = a^x \ln a$; $(e^x)' = e^x$
4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
5. $(\sin x)' = \cos x$
6. $(\cos x)' = -\sin x$
7. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
8. $cotgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
12. $(arccotgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

III. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM.

a. Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương các hàm số.

Định lý 1: Nếu các hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì tại điểm đó:

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
2. $(ku)' = ku'$ (k là hằng số bất kỳ);
3. $(uv)' = u'v + uv'$;
4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ $\quad (v \neq 0)$.

Chứng minh:

Ta sẽ chứng minh công thức thứ ba (công thức đạo hàm của tích). Các công thức còn lại được chứng minh tương tự.

Đặt $y = uv$, tại điểm x_0 ta có:

$$\Delta y(x_0) = u(x_0 + \Delta x).v(x_0 + \Delta x) - u(x_0).v(x_0)$$

$$= [u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)].\ v(x_0 + \Delta x) + u(x_0)[\ v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)]$$

$$= \Delta u(x_0).\ v(x_0 + \Delta x) - u(x_0).\Delta v(x_0)$$

$$\Rightarrow \quad y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u(x_0)}{\Delta x}.v(x_0 + \Delta x) - u(x_0)\frac{\Delta v(x_0)}{\Delta x} \right).$$

Hàm số $v(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 nên nó liên tục tại điểm đó. Khi $\Delta x \to 0$ ta có:

$$\frac{\Delta u(x_0)}{\Delta x} \to u'(x_0),\quad \frac{\Delta v(x_0)}{\Delta x} \to v'(x_0),\quad v(x_0 + \Delta x) \to v(x_0).$$

Vậy đạo hàm của hàm số $y = u(x)v(x)$ tại điểm x_0 là:

$$y'(x_0) = (uv)' = u'(x_0).v(x_0) + u(x_0).v'(x_0).$$

Ví dụ 1: Tính đạo hàm của hàm số

$$y = 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 4x - 3.$$

Giải: Sử dụng các quy tắc 1 và 2 trong định lý 1, ta có:

$$y' = 2(x^4)' + 3(x^3)' - 5(x^2)' + 4(x)' - 0 = 8x^3 + 9x^2 - 10x + 4.$$

Ví dụ 2: Tính đạo hàm của hàm số:

$$f(x) = x^3 \ln x \ (x > 0).$$

Giải: Sử dụng quy tắc về đạo hàm của tích, ta có:

$$f'(x) = (x^3)'.\ln x + x^3.(\ln x)' = 3x^2 \ln x + x^2.$$

Ví dụ 3: Tính đạo hàm của hàm số:

$$y = \frac{\ln x}{x^4}.$$

Sử dụng quy tắc về đạo hàm của thương (với $u = \ln x$, $v = x^4$), ta có

$$y' = \frac{(\ln x)'.x^4 - (\ln x)(x^4)'}{x^8} = \frac{1 - 4\ln x}{x^5}.$$

Ví dụ 4: Tính đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{x\sin x + \cos x}{x\cos x - \sin x}$.

Giải: Đặt $u = x\sin x + \cos x$, $v = x\cos x - \sin x$, ta có:

$$u' = \sin x + x\cos x - \sin x = x\cos x,$$

$$v' = \cos x - x\sin x - \cos x = -x\sin x;$$

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$= \frac{x\cos x(x\cos x - \sin x) - (x\sin x + \cos x)(-x\sin x)}{(x\cos x - \sin x)^2}$$

$$= \frac{x^2}{(x\cos x - \sin x)^2}$$

b. Đạo hàm của hàm hợp

Định lý 2: Nếu hàm số $u = \varphi(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại điểm tương ứng $u_0 = \varphi(x_0)$ thì hàm hợp $y(x) = g(x) = f[\varphi(x)]$ có đạo hàm tại điểm x_0 và đạo hàm của hàm hợp (đạo hàm của y theo x) được tính theo công thức:

$$y'(x_0) = g'(x_0) = f'(u_0).\varphi'(x_0). \qquad (1.3)$$

Công thức (1.3) có thể viết dưới dạng:

$$y'_x = y'_u . u'_x . \qquad (1.3')$$

Chứng minh: Tại điểm x_0, nếu thay đổi giá trị của biến số x một lượng Δx thì $u = \varphi(x)$ thay đổi một lượng tương ứng bằng Δu, kéo theo $y = f(u)$ thay đổi một lượng Δy. Do hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại điểm u_0, ta có:

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u_0) \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u_0) + \alpha(\Delta u),$$

trong đó $\alpha(\Delta u)$ là VCB khi $\Delta u \to 0$. Từ đây suy ra

$$\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \Delta u.\alpha(\Delta u)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}.\alpha(\Delta u).$$

Hàm số $u = \varphi(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 nên nó liên tục tại điểm đó. Khi $\Delta x \to 0$ ta có $\Delta u \to 0$, do đó

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0). \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \lim_{\Delta u \to 0} \alpha(\Delta u)$$

$$= f'(u_0).u'(x_0) + u'(x_0).0 = f'(u_0).\varphi'(x_0).$$

Định lý đã được chứng minh.

Ví dụ 1: Hàm số $y = \sin^5 x$ là hàm hợp của hai hàm cơ bản $y = u^5$ và $u = \sin x$. Theo quy tắc nói trên ta có:

$$y' = (u^5)'(\sin x)' = 5u^4.\cos x = 5\sin^4 x.\cos x.$$

Với $u = \varphi(x)$ là một hàm số có đạo hàm và f(u) là hàm số sơ cấp cơ bản, ta có các công thức sau:

1. $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$. 1'. $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

2. $(a^u)' = (a^u \ln a).u'$; 2' $(e^u)' = e^u.u'$.

3. $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u\ln a}$; 3'. $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

4. $(\sin u)' = (\cos u).u'$. 5. $(\cos u)' = (-\sin u).u'$.

6. $(\mathrm{tg}u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$. 7. $(\mathrm{cotg}u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$.

8. $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$. 9. $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

10. $(\mathrm{arctg}u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$; 11. $(\mathrm{arccotg}u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$.

Ví dụ 2: Tính đạo hàm của hàm số $y = e^{\sin x}$.

Giải: Sử dụng công thức 2', với $u = \sin x$, ta có:

$$y' = (e^{\sin x})' = e^{\sin x}(\sin x)' = e^{\sin x}.\cos x.$$

Ví dụ 3: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x^2 + m}$.

Giải: Sử dụng công thức 1', với $u = x^2 + m$, ta có:

$$y' = \left(\sqrt{x^2+m}\right)' = \frac{\left(x^2+m\right)'}{2\sqrt{x^2+m}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+m}}.$$

(m là hằng số bất kỳ).

Ví dụ 4: Tính đạo hàm của hàm số $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+m}\right)$

Giải:

$$y' = \left[\ln(x + \sqrt{x^2+m}\right]' = \frac{\left(x+\sqrt{x^2+m}\right)'}{x+\sqrt{x^2+m}}$$

$$= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + m}}}{x + \sqrt{x^2 + m}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + m}}.$$

Ví dụ 5: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2 + a^2}}$.

Giải: Sử dụng phối hợp các quy tắc tính đạo hàm ta có:

$$y' = \frac{1}{a^2}\frac{1.\sqrt{x^2 + a^2} - x.\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}}{\left(\sqrt{x^2 + a^2}\right)^2} = \frac{1}{(x^2 + a^2)\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

c. Đạo hàm của biểu thức luỹ thừa mũ và phương pháp logarit hoá

Biểu thức luỹ thừa mũ là biểu thức dạng $y = u^v$, trong đó $u = u(x)$, $v = v(x)$ là các hàm số đối số x và $u(x) > 0$. Do cả cơ số u và luỹ thừa v đều phụ thuộc x, khi tính đạo hàm của biểu thức loại này ta không thể áp dụng trực tiếp các công thức đạo hàm của hàm số mũ và hàm luỹ thừa. Để tính đạo hàm, ta viết lại biểu thức hàm số dưới dạng:

$$y = e^{\ln y} = e^{v\ln u}.$$

Với giả thiết các hàm số $u = u(x)$, $v = v(x)$ có đạo hàm, ta có:

$$y' = e^{v\ln u}(v\ln u)' = u^v\left(v'\ln u + \frac{v.u'}{u}\right).$$

Ta cũng có thể tính đạo hàm của hàm số $y = u^v$ bằng *phương pháp logarit hoá* như sau:

- Lấy logarit của y (cơ số e): $\ln y = v\ln u$;
- Lấy đạo hàm hai vế ta được

$$\frac{y'}{y} = v'\ln u + v\frac{u'}{u},$$

từ đây suy ra:

$$y' = y\left(v'\ln u + \frac{v.u'}{u}\right) = u^v\left(v'\ln u + \frac{v.u'}{u}\right).$$

Ví dụ: Tính đạo hàm của hàm số: $y = \left(1 + x^2\right)^{\sin x}$.

Giải: Ta có:

$$\ln y = \sin x.\ln(1 + x^2) \Rightarrow (\ln y)' = [\sin x.\ln(1 + x^2)]'$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \cos x\ln(1 + x^2) + \sin x.\frac{(1 + x^2)'}{1 + x^2}$$

$$\Rightarrow y' = (1 + x^2)^{\sin x}\left[\cos x.\ln(1 + x^2) + \frac{2x\sin x}{1 + x^2}\right].$$

BÀI TẬP

1. Sử dụng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x + 1}$ tại điểm $x = 4$.

2. Tính đạo hàm của hàm số sau tại điểm $x = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1, \\ -3 & \text{khi } x = 1. \end{cases}$$

3. Sử dụng định nghĩa, hãy lập hàm số đạo hàm của các hàm số:

   a) $f(x) = \cos x$ b) $f(x) = \ln x$

4. Hãy chứng minh:

   a) Đạo hàm của một hàm số chẵn là một hàm số lẻ.

   b) Đạo hàm của một hàm số lẻ là một hàm số chẵn.

c) Đạo hàm của một hàm số tuần hoàn với chu kỳ T là một hàm tuần hoàn chu kỳ T.

5. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \frac{4}{11}x^5\sqrt{x} + \frac{2}{15}x^7\sqrt{x}$

b) $y = 3x^3.\ln x - x^3$ c) $y = x^3.\text{arctg}x$

d) $y = \frac{ax + b}{x^2 + 1}$ e) $y = xe^x(\sin x + \cos x)$

6. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \text{arctg}^{10}x$ b) $y = \ln(x^2 + x + 1)$

c) $y = 2^{\sin x}$ d) $y = \sqrt{x^4 + 2x^2}$

e) $y = \arcsin^2\left(\frac{x}{5}\right)$ f) $y = \sqrt[3]{(3x + 1)^2}$

7. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \ln\sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$ b) $y = \arcsin\frac{2x^3}{1 + x^6}$

c) $y = \text{arctg}\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$ d) $y = x.\sqrt[3]{(2x - 1)^2}$

e) $y = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$ $(a > 0)$

8. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 3x.\sin^3x + 3\cos x - \cos^3x$ b) $y = \ln\frac{(x - 1)(x - 3)^3}{(x - 2)^3(x - 4)}$

c) $y = \sin(\ln x).\cos(\ln x) - \ln\frac{1}{x}$ d) $y = e^{\sqrt{2x}}(\sqrt{2x} - 1)$

e) $y = x\arccos\frac{x}{2} - \sqrt{4 - x^2}$ f) $y = \arccos\frac{9 - x^2}{9 + x^2}$

9. Tính đạo hàm của các hàm số

a) $y = \log_x(1+x^2)$ $(1 \neq x > 0)$ b) $y = (\text{tg}x)^x$ $\left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$

c) $y = (\arcsin x)^x$ $(0 < x < 1)$ d) $y = (\text{arctg}x)^x$ $(x > 0)$

10. Tính đạo hàm của hàm số $y = |x| + |x - 2|$.

11. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

có đạo hàm tại mọi điểm x và tính đạo hàm f'(x).

12. Cho hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \leq 1 \\ 2ax + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

Hãy xác định a và b để hàm số liên tục và có đạo hàm tại điểm x = 1.

§2 VI PHÂN CỦA HÀM SỐ

I. KHÁI NIỆM VI PHÂN VÀ LIÊN HỆ VỚI ĐẠO HÀM

a. Khái niệm hàm khả vi và vi phân

Cho hàm số f(x) xác định và liên tục trong khoảng $X \subset \mathbb{R}$. Như ta đã biết, nếu f(x) liên tục tại điểm $x_0 \in X$ thì số gia

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

là một VCB khi $\Delta x \to 0$.

Định nghĩa: Hàm số f(x) được gọi là *hàm khả vi tại điểm x_0* nếu tồn tại số thực k sao cho:

$$\Delta f(x_0) = k.\Delta x + o(\Delta x). \qquad (2.1)$$

Tích $k.\Delta x$ trong biểu thức (2.1) được gọi là *vi phân của hàm số f(x) tại điểm x_0* và được ký hiệu là $df(x_0)$:

$$df(x_0) = k.\Delta x.$$

Ví dụ: Xét hàm số: $f(x) = x^3$. Tại điểm x_0 bất kỳ, ta có:

$$\Delta f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

$$= 3x_0^2.\Delta x + o(\Delta x).$$

Theo định nghĩa, $f(x)$ là hàm khả vi tại điểm x_0 và

$$df(x_0) = 3x_0^2.\Delta x.$$

b. Liên hệ với đạo hàm

Định lý: Hàm số $f(x)$ khả vi tại điểm x_0 khi và chỉ khi nó có đạo hàm tại điểm đó. Khi đó, hằng số k trong hệ thức (2.1) chính là đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0, tức là

$$df(x_0) = f'(x_0).\Delta x. \qquad (2.2)$$

Chứng minh: Giả sử hàm số $f(x)$ khả vi tại điểm x_0, tức là tồn tại hằng số k sao cho hệ thức (2.1) được thoả mãn. Chia hai vế của (2.1) cho Δx ta được:

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = k + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}.$$

Từ đây suy ra

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = k + 0 = k.$$

Điều này chứng tỏ $f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 và $f'(x_0) = k$.

Ngược lại, giả sử $f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0, tức là tồn tại giới hạn hữu hạn:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Khi đó, ta có:

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x),$$

trong đó $\alpha(\Delta x)$ là VCB khi $\Delta x \to 0$ [tức là $\alpha(\Delta x) \to 0$ khi $\Delta x \to 0$].

Từ đây suy ra:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0).\Delta x + \Delta x.\ \alpha(\Delta x)$$

Do $\alpha(\Delta x) \to 0$ khi $\Delta x \to 0$ nên $\Delta x.\alpha(\Delta x) = 0(\Delta x)$. Vậy, theo định nghĩa, hàm số $f(x)$ khả vi tại điểm x_0 và $df(x_0) = f'(x_0).\Delta x$.

Định lý đã được chứng minh.

c. *Biểu thức vi phân*

Theo định lý vừa chứng minh, vi phân của hàm số f(x) tại điểm x (nếu nó khả vi) được tính theo công thức:

$$df(x) = f'(x).\ \Delta x. \qquad (2.3)$$

Nếu hàm số $y = f(x)$ khả vi tại mọi điểm thuộc khoảng X thì biểu thức vi phân $df(x) = f'(x).\Delta x$ là một hàm số đối số x, xác định trên khoảng X (Δx là số gia bất kỳ, không phụ thuộc x). Áp dụng công thức trên cho hàm số $f(x) = x$ ta có:

$$dx = (x)'\Delta x = \Delta x.$$

Như vậy, *vi phân của biến độc lập x bằng số gia của nó*, do đó trong biểu thức (2.3) người ta thường viết dx thay vào chỗ Δx.

Biểu thức vi phân của hàm số $y = f(x)$ thường được được viết dưới dạng:

$$df(x) = f'(x).\ dx$$

hoặc

$$dy = y'_x\ dx. \qquad (2.4)$$

Để tính vi phân của một hàm số ta tính đạo hàm của nó, sau đó nhân với vi phân của biến độc lập.

Ví dụ:

- $d(x^3 + 3x) = (x^3 + 3x)'dx = (3x^2 + 3)dx.$
- $d(xe^x) = (xe^x)'dx = (x+1)e^x dx.$
- $d\left(\sqrt{1+x^2}\right) = \left(\sqrt{1+x^2}\right)' dx = \dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}.$

II. CÁC QUY TẮC TÍNH VI PHÂN.

a. Vi phân của tổng, hiệu, tích thương các hàm số

Định lý: Nếu các hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ khả vi tại điểm x thì tại điểm đó ta có:

1. $d(u \pm v) = du \pm dv;$
2. $d(ku) = kdu$ (k là hằng số);
3. $d(uv) = vdu + udv;$
4. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$ $(v \neq 0)$.

Chứng minh: Các quy tắc trên suy ra trực tiếp từ các quy tắc tính đạo hàm. Chẳng hạn, quy tắc tính vi phân của tích được chứng minh như sau:

$$d(uv) = (uv)'dx = (u'v + uv')dx = (u'dx)v + u(v'dx) = vdu + udv.$$

Bạn hãy tự chứng minh các quy tắc còn lại.

b. Tính bất biến của biểu thức vi phân

Nếu $y = f(x)$ là hàm số khả vi của biến độc lập x thì vi phân của nó được tính theo công thức (2.4). Ta hãy xét trường hợp x là hàm số khả vi của một biến độc lập t nào đó: $x = \varphi(t)$. Khi đó y là hàm số của biến độc lập t:

$$y = f[\varphi(t)].$$

Theo công thức tính vi phân và theo quy tắc tính đạo hàm của hàm hợp, ta có:

$$dy = y'_t\,dt = (y'_x\,x'_t)dt = y'_x(x'_t\,dt) = y'_x\,dx.$$

Như vậy: *Biểu thức vi phân (2.4) vẫn giữ nguyên dạng trong trường hợp x không phải là biến độc lập, mà phụ thuộc vào một biến độc lập khác. Nói cách khác, biểu thức vi phân (2.4) bất biến đối với phép biến đổi biến số $x = \varphi(t)$.*

Chú ý: Trong trường hợp x là biến phụ thuộc, dx trong biểu thức vi phân $dy = y'_x\,dx$ không còn là số gia Δx, mà là vi phân của hàm số $x = \varphi(t)$.

BÀI TẬP

13. Với $f(x) = 3x^4 + 4x^3$, hãy tính $\Delta f(1)$ và $df(1)$:

a) $\Delta x = 1$ b) $\Delta x = 0,2$ c) $\Delta x = 0,05$

14. Lập biểu thức vi phân của các hàm số:

a) $y = \ln(2x^3 + 3x^2)$ b) $y = \ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{2x+1}{4}\right)$

c) $y = x(\ln^3 x - 3\ln^2 x + 6\ln x - 6)$

§3. CÁC ĐỊNH LÝ CƠ BẢN VỀ HÀM SỐ KHẢ VI

I. ĐỊNH LÝ FERMAT

Định lý: Giả sử hàm số f(x) xác định trong khoảng X và nhận giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất) tại một điểm c bên trong khoảng X (c không trùng với các đầu mút của khoảng X). Khi đó, nếu tại điểm c hàm số f(x) có đạo hàm thì $f'(c) = 0$.

Chứng minh:

Giả sử hàm số f(x) nhận giá trị lớn nhất tại điểm $c \in X$ và c không trùng với các đầu mút của khoảng X. Với mọi $x \in X$ ta có:

$$f(x) \le f(c) \Rightarrow f(x) - f(c) \le 0.$$

Nếu hàm số f(x) có đạo hàm tại điểm c thì

$$f'(c) = f'_{+}(c) = \lim_{x \to c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Với giả thiết x > c ta có:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \le 0 \Rightarrow f'(c) = \lim_{x \to c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \le 0. \qquad (3.1)$$

Với giả thiết x < c ta có:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \ge 0 \Rightarrow f'(c) = \lim_{x \to c-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \ge 0. \qquad (3.2)$$

Từ (3.1) và (3.2) suy ra $f'(c) = 0$.

Trường hợp f(x) đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $c \in X$ được chứng minh hoàn toàn tương tự.

II. ĐỊNH LÝ ROLLE

Định lý: Giả sử hàm số f(x) thoả mãn các điều kiện:

1. Xác định và liên tục trên [a; b];
2. Khả vi trong khoảng (a; b);
3. f(a) = f(b).

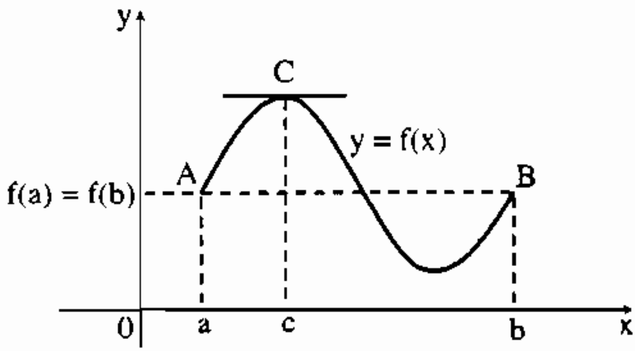
Khi đó, tồn tại điểm $c \in (a; b)$ sao cho: $f'(c) = 0$.

Chứng minh: Do hàm số f(x) liên tục trên [a; b] nên nó nhận giá trị nhỏ nhất tại một điểm $c_1 \in [a; b]$ và nhận giá trị lớn nhất tại một điểm $c_2 \in [a; b]$, tức là:

$$f(c_1) \le f(x) \le f(c_2), \forall x \in [a; b].$$

Nếu $f(c_1) = f(c_2)$ thì hàm số f(x) nhận giá trị không đổi trên $[a; b]$, do đó $f'(x) = 0, \forall x \in (a; b)$. Trong trường hợp này $f'(c) = 0$ với c là điểm bất kỳ thuộc khoảng (a; b).

Nếu $f(c_1) \neq f(c_2)$ thì, do $f(a) = f(b)$, ít nhất một trong hai điểm c_1 hoặc c_2 thuộc khoảng (a; b). Theo định lý Fermat ta có $f'(c_1) = 0$ nếu $c_1 \in (a; b)$, hoặc $f'(c_2) = 0$ nếu $c_2 \in (a; b)$. Sự tồn tại điểm c nêu trong định lý đã được chứng minh.



Dưới giác độ hình học, định lý Rolle có nghĩa như sau: *Nếu hai điểm A và B có tung độ bằng nhau và được nối với nhau bằng một đường cong liên tục y = f(x), có tiếp tuyến tại mọi điểm, thì trên đường cong đó có ít nhất một điểm mà tại đó tiếp tuyến song song với trục hoành* (đó là điểm C có hoành độ bằng c trên đường cong).

Ví dụ: Cho hàm số f(x) liên tục trên [a; b], có đạo hàm trong khoảng (a; b) và $f(a) = f(b) = 0$. Chứng minh rằng với k là một hằng số bất kỳ, phương trình $f'(x) = kf(x)$ có nghiệm.

Giải: Đặt $g(x) = f(x).e^{-kx}$, $x \in [a; b]$. Với các giả thiết về hàm số f(x), hàm số g(x) thoả mãn các điều kiện:

- Liên tục trên [a; b];
- Có đạo hàm trong khoảng (a; b):

$$g'(x) = e^{-kx}[f'(x) - kf(x)], \forall x \in (a; b);$$

- $g(a) = g(b) = 0$.

Theo định lý Rolle, tồn tại điểm $c \in (a; b)$ sao cho:

$$g'(c) = e^{-kc}[f'(c) - kf(c)] = 0$$

$$\Rightarrow f'(c) - kf(c) = 0 \Rightarrow f'(c) = kf(c).$$

Vậy phương trình $f'(x) = kf(x)$ có nghiệm $c \in (a; b)$.

III. ĐỊNH LÝ LAGRANGE

Định lý: Giả sử hàm số f(x) thoả mãn các điều kiện:

1. Xác định và liên tục trên [a; b];
2. Khả vi trong khoảng (a; b).

Khi đó, tồn tại điểm $c \in (a; b)$ sao cho:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{3.3}$$

Chứng minh:

Đặt:

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),\ x \in [a, b].$$

Từ các giả thiết của định lý Lagrange dễ dàng thấy rằng hàm số g(x) thoả mãn các điều kiện:

- Liên tục trên [a; b];
- Có đạo hàm trong (a; b): $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, $\forall x \in (a; b)$;
- $g(a) = g(b) = 0$.

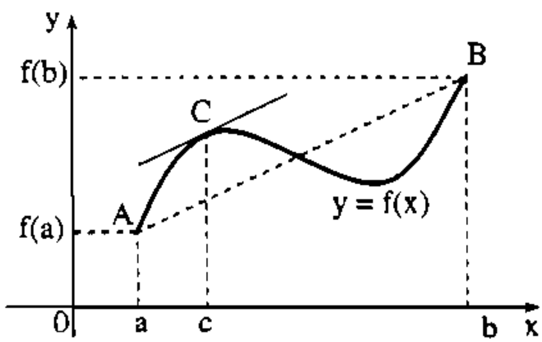
Theo định lý Rolle, tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Định lý đã được chứng minh.

Dưới giác độ hình học, định lý Lagrange có nghĩa như sau:

Nếu hai điểm A và B được nối với nhau bằng một đường cong liên tục $y = f(x)$, có tiếp tuyến tại mọi điểm, thì trên đường cong đó có ít nhất một điểm mà tại đó tiếp tuyến song song với đường thẳng AB.



Nhận xét: Khi $f(a) = f(b)$ đẳng thức (3.3) trở thành $f'(c) = 0$. Điều này chứng tỏ *định lý Rolle là một trường hợp riêng của định lý Lagrange*.

Công thức (3.3) thường được viết dưới dạng:

$$f(b) - f(a) = f'(c).(b - a), \tag{3.4}$$

trong đó c là một điểm trung gian giữa a và b.

Công thức (3.4) được gọi là *công thức Lagrange*, hay *công thức số gia hữu hạn*. Do công thức (3.4) tương đương với công thức

$$f(a) - f(b) = f'(c).(a - b)$$

nên ta có thể sử dụng công thức đó bất kể $a < b$ hay $a > b$. Đặt $a = x_0$, $b = x_0 + \Delta x$, ta có:

$$\Delta f(x_0) = f'(c).\Delta x. \tag{3.4'}$$

Công thức (3.4') nói rằng *số gia của hàm số bằng số gia của đối số nhân với giá trị của đạo hàm tại một điểm trung gian nào đó giữa x_0, và $x_0 + \Delta x$.*

Ví dụ 1: Chứng minh rằng nếu $0 < a < b$ thì

$$\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}.$$

Giải: Áp dụng định lý Lagrange cho hàm $f(x) = \ln x$ trên $[a; b]$, ta có:

$$\ln\frac{b}{a} = \ln b - \ln a = \frac{1}{c}(b-a).$$

Do $0 < a < c < b$ và $b - a > 0$, ta có:

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} = \frac{b-a}{c} < \frac{b-a}{a}.$$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng nếu hàm số $f(x)$ khả vi và không bị chặn trong khoảng hữu hạn $(a; b)$ thì $f'(x)$ cũng không bị chặn trong khoảng đó.

Giải: Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử $f'(x)$ bị chặn trong khoảng $(a; b)$, tức là tồn tại hằng số $K > 0$ sao cho

$$|f'(x)| \le K \quad \forall x \in (a; b).$$

Lấy một điểm $x_0 \in (a; b)$ và cố định x_0. Theo công thức Lagrange thì với mọi $x \in (a; b)$ ta có:

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0),$$

với c là một điểm nào đó giữa x_0 và x, từ đây suy ra:

$$|f(x)| \le |f(x_0)| + |f'(c)|\,|x - x_0| \le |f(x_0)| + K(b-a).$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $f(x)$ không bị chặn trong khoảng $(a; b)$.

IV. ĐỊNH LÝ CAUCHY

Định lý: Giả sử các hàm số f(x) và g(x) thoả mãn các điều kiện sau:

1. Xác định và liên tục trên [a; b];
2. Khả vi trong khoảng (a; b);
3. $g'(x) \neq 0$ với mọi $x \in (a; b)$.

Khi đó, tồn tại điểm $c \in (a; b)$ sao cho:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \tag{3.5}$$

Chứng minh: Trước hết ta thấy rằng, với các giả thiết của định lý thì $g(b) \neq g(a)$. Thật vậy, nếu $g(b) = g(a)$ thì, theo định lý Rolle, tồn tại điểm c sao cho $g'(c) = 0$, điều này trái với giả thiết rằng $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a; b)$.

Xét hàm số:

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)],\ x \in [a; b].$$

Dễ dàng thấy rằng $\varphi(x)$ liên tục trên [a; b], khả vi trong (a; b) và $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Theo định lý Rolle, tồn tại điểm $c \in (a; b)$ sao cho

$$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Định lý đã được chứng minh.

Nhận xét: Với $g(x) = x$ công thức (3.5) trở thành công thức (3.3). Điều này có nghĩa là *định lý Lagrange là một trường hợp riêng của định lý Cauchy*.

BÀI TẬP

15. Chứng minh rằng đạo hàm của hàm số

$$f(x) = \frac{(x^2 - 5x + 6)\ln(1 + x^2)}{\sqrt[3]{x^4 + x^2 + 5}}$$

triệt tiêu tại ít nhất 2 điểm.

16. Hãy chứng minh:

a) Nếu hàm số f(x) có đạo hàm trong khoảng (a; b) và hàm số f(x) nhận giá trị bằng nhau tại n + 1 điểm khác nhau thuộc khoảng đó thì phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất n nghiệm khác nhau trong khoảng (a; b).

b) Nếu hàm số f(x) có đạo hàm đến cấp n trong khoảng (a; b) và phương trình f(x) = 0 có n + 1 nghiệm khác nhau thuộc khoảng đó thì phương trình $f^{(n)}(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc (a; b).

17. Chứng minh rằng nếu hàm số f(x) có đạo hàm cấp 2 trong khoảng X và $f''(x) \neq 0$ với mọi $x \in X$ thì phương trình f(x) = 0 không có nhiều hơn 2 nghiệm thực trong khoảng đó.

18. Chứng minh rằng phương trình $x^6 + x^2 + 3x - 7 = 0$ có đúng 2 nghiệm thực.

19. Lập công thức Lagrange cho hàm số f(x) = x(1 − lnx) trên đoạn [a; b] (b > a > 0).

20. Lập công thức Lagrange cho hàm số f(x) = arcsin2x trên đoạn $\left[x_0; x_0 + \Delta x\right] \subset \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

21. Giả sử hàm số f(x) liên tục trong khoảng $(x_0 - r; x_0 + r)$ và có đạo hàm trong các khoảng $(x_0 - r; x_0)$, $(x_0, x_0 + r)$. Chứng minh rằng nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = k$ thì $f'(x_0) = k$.

22. Sử dụng công thức Lagrange, hãy chứng minh các bất đẳng thức sau đây:

a) $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$.

b) $|\cos b - \cos a| \leq |b - a|$

b) $py^{p-1}(x - y) \leq x^p - y^p \leq px^{p-1}(x - y)$, $0 < y < x$ và $p > 1$.

c) $|\mathrm{arctg}\, b - \mathrm{arctg}\, a| \leq |b - a|$.

§4. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CẤP CAO CÔNG THỨC TAYLOR

I. ĐẠO HÀM CẤP CAO

Như ta đã biết, nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại mọi điểm thuộc miền $X \subset \mathbb{R}$ thì đạo hàm $y' = f'(x)$ là một hàm số đối số x, xác định trong miền X, do đó ta có thể lấy đạo hàm của hàm số $y' = f'(x)$. Đạo hàm của đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ được gọi là *đạo hàm cấp hai* của hàm số đó. Tiếp theo ta lại có thể xét đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$ như một hàm số đối số x và lấy đạo hàm của nó.

Định nghĩa: Đạo hàm của đạo hàm cấp $n - 1$ của hàm số $y = f(x)$ được gọi là *đạo hàm cấp n* của hàm số đó.

Các đạo hàm cấp cao của hàm số $y = f(x)$ được ký hiệu như sau:

Đạo hàm cấp 2: $y'' = f''(x)$, hoặc $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$;

Đạo hàm cấp 3: $y''' = f'''(x)$, hoặc $\dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{d^3f(x)}{dx^3}$;

... ...

Đạo hàm cấp n: $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$, hoặc $\dfrac{d^ny}{dx^n} = \dfrac{d^nf(x)}{dx^n}$.

Đạo hàm cấp cao của hàm số còn được gọi là *đạo hàm lặp*. Để tính đạo hàm cấp n của hàm số $y = f(x)$, ta thực hiện phép toán đạo hàm liên tiếp n lần:

$$y' = f'(x),\ y'' = (y')',\ y''' = (y'')',\ \dots,\ y^{(n)} = [y^{(n-1)}]'.$$

Ví dụ:

- Với hàm số $y = x^{\alpha}$, ta có:

$y' = \alpha x^{\alpha-1}$, $y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$, ... , $y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$.

Đặc biệt, với $\alpha = -1$ ta có:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n.n!}{x^{n+1}},$$

trong đó n! (đọc là: *n giai thừa*) là tích số của các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến n:

$$n! = 1.2...n.$$

- Với hàm số $y = \ln x$, ta có $y' = \dfrac{1}{x}$, do đó

$$(\ln x)^{(n)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

- Với hàm số $y = a^x$, ta có:

  $y' = a^x\ln a$, $y'' = (a^x\ln a)' = a^x\ln^2 a$, ... , $y^{(n)} = (a^x)^{(n)} = a^x\ln^n a$.

  Đặc biệt, với a = e ta có: $(e^x)^{(n)} = e^x$.

- Với hàm số $y = \sin x$, ta có:

  $y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $y'' = -\sin x = \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right)$, ...

Bằng quy nạp ta chứng minh được:

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Tương tự:

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

II. VI PHÂN CẤP CAO.

Nếu hàm số $y = f(x)$ khả vi tại mọi điểm thuộc một khoảng X thì vi phân dy là một hàm số của biến x:

$$dy = f'(x)dx,$$

trong đó vi phân dx của biến độc lập x là số gia Δx, không phụ thuộc x. Khái niệm vi phân cấp cao được định nghĩa tương tự như đạo hàm cấp cao:

Định nghĩa: *Vi phân cấp n* của hàm số $y = f(x)$ là vi phân của vi phân cấp $n - 1$ của hàm số đó (ta gọi vi phân dy là vi phân cấp 1).

Vi phân cấp n của hàm số $y = f(x)$ được ký hiệu là $d^n y$, $d^n f(x)$:

$$d^n y = d(d^{n-1} y).$$

Trong công thức vi phân $dy = y'dx$ đạo hàm y' phụ thuộc x, còn $dx = \Delta x$ là số gia bất kỳ của biến độc lập x, không phụ thuộc x. Do đó, khi xem dy như một hàm số của x thì dx được xem như hằng số. Ta có:

$$d^2y = d(dy) = d[y'(x)dx] = dx.d[y'(x)]$$

$$= dx.[y'(x)]'dx = y''(x)(dx)^2.$$

Bằng phương pháp quy nạp ta có thể chứng minh công thức tính vi phân cấp n của một hàm số theo đạo hàm cấp n của nó:

$$d^n y = y^{(n)}(dx)^n.$$

Chú ý rằng biểu thức vi phân cấp cao không có tính bất biến như biểu thức vi phân cấp một, tức là *với $n > 1$ công thức này chỉ đúng khi x là biến độc lập.*

Ví dụ: Tính vi phân cấp 2 của hàm số $y = \ln(1 + x^2)$ tại điểm $x = 0$, khi biến độc lập x thay đổi một lượng $\Delta x = 0,3$.

Giải: Trước hết ta tính đạo hàm cấp 2:

$$y' = \frac{2x}{1+x^2},\ y'' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

Với $y''(0) = 2$, $dx = \Delta x = 0{,}3$, theo công thức tính vi phân cấp cao nêu trên ta có:

$$d^2y(0) = y''(0)\,(dx)^2 = 2.(0{,}3)^2 = 0{,}18.$$

III. CÔNG THỨC TAYLOR

a. Công thức Taylor đối với đa thức

Cho p(x) là một đa thức bậc n bất kỳ. Ta sẽ biểu diễn đa thức p(x) dưới dạng:

$$p(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \ldots + a_n(x-x_0)^n, \qquad (4.1)$$

trong đó x_0 là một số cho trước.

Từ (4.1), lấy đạo hàm liên tiếp đến cấp n ta có:

$$p'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \ldots + na_n(x-x_0)^{n-1},$$

$$p''(x) = 1.2.a_2 + 2.3.a_3(x-x_0) + \ldots + (n-1).n.a_n(x-x_0)^{n-2},$$

....

$$p^{(n)}(x) = 1.2\ldots(n-1).n.a_n.$$

Thay $x = x_0$ ta dễ dàng xác định được các hệ số a_k:

$$a_0 = p(x_0),\ a_1 = \frac{p'(x_0)}{1!},\ a_2 = \frac{p''(x_0)}{2!},\ \ldots,\ a_n = \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Như vậy, đa thức p(x) có thể viết dưới dạng

$$p(x) = p(x_0) + \frac{p'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{p''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \qquad (4.2)$$

Công thức (4.2) được gọi là *công thức khai triển Taylor* của đa thức p(x).

Trường hợp $x_0 = 0$ công thức Taylor (4.2) có dạng:

$$p(x) = p(0) + \frac{p'(0)}{1!}x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

b. Công thức Taylor đối với hàm số bất kỳ

Cho hàm số f(x) xác định trong khoảng (a; b) và có đạo hàm đến cấp n tại điểm $x_0 \in (a; b)$. Với hàm số f(x) đã cho ta lập đa thức bậc n:

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Bằng cách kiểm tra trực tiếp bạn có thể nhận thấy rằng đa thức p(x) và hàm số f(x) cùng với các đạo hàm đến cấp n của chúng nhận giá trị bằng nhau tại điểm x_0:

$$p(x_0) = f(x_0),\ p'(x_0) = f'(x_0), ..., p^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Trên đây ta đã chỉ ra rằng nếu f(x) là đa thức bậc n thì $f(x) \equiv p(x)$. Trong trường hợp f(x) không phải là đa thức thì f(x) không đồng nhất bằng p(x). Đặt $r(x) = f(x) - p(x)$ ta có:

$$f(x) = p(x) + r(x).$$

Như vậy, nếu hàm số f(x) có đạo hàm đến cấp n tại điểm x_0 thì

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r(x). \qquad (4.3)$$

Công thức (4.3) được gọi là *công thức khai triển Taylor* của hàm số f(x). Hàm số r(x) được gọi là *phần dư* của công thức khai triển (4.3). Trường hợp $x_0 = 0$, công thức Taylor có dạng:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r(x). \qquad (4.4)$$

Công thức (4.4) còn được gọi là *công thức Maclaurin.*

c. Biểu thức phần dư

Để xem xét phần dư r(x) trong công thức (4.3), trước hết ta chứng minh bổ đề sau đây:

Bổ đề: Nếu hàm số $\varphi(x)$ cùng với các đạo hàm đến cấp n của nó triệt tiêu tại điểm a thì $\varphi(x)$ là VCB bậc cao hơn so với $(x - a)^n$ khi $x \to a$.

Chứng minh: Ta chứng minh bổ đề này bằng phương pháp quy nạp theo n.

Nếu $\varphi(a) = \varphi'(a) = 0$ thì ta có:

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a} = \varphi'(a) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = o(x-a).$$

Giả sử bổ đề đúng với n = k, ta sẽ chứng minh rằng nó đúng với n = k +1. Thật vậy, nếu $\varphi(a) = \varphi'(a) = ... = \varphi^{(k)}(a) = \varphi^{(k+1)}(a) = 0$ thì, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\varphi'(x) = o[(x-a)^k].$$

Theo công thức Lagrange, ta có:

$$\varphi(x) = \varphi(x) - \varphi(a) = \varphi'(c)(x-a) = o[(c-a)^k].(x-a).$$

Do c là điểm trung gian giữa x và a nên

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{(x-a)^{k+1}} = \lim_{x\to a}\frac{o[(c-a)^k]}{(x-a)^k} = \lim_{x\to a}\frac{o[(x-a)^k]}{(x-a)^k} = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = o[(x-a)^{k+1}].$$

Bổ đề đã được chứng minh.

Bây giờ ta xét phần dư $r(x) = f(x) - p(x)$. Như đã nói ở trên, đa thức $p(x)$ và hàm số $f(x)$ cùng với các đạo hàm đến cấp n của chúng nhận giá trị bằng nhau tại điểm x_0, do đó ta có:

$$r(x_0) = r'(x_0) = r''(x_0) = ... = r^{(n)}(x_0) = 0.$$

Áp dụng bổ đề vừa chứng minh, từ đây suy ra:

$$r(x) = o[(x - x_0)^n]. \tag{4.5}$$

Biểu thức (4.5) được gọi là *phần dư dạng Peano* và công thức

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o[(x - x_0)^n]. \tag{4.6}$$

được gọi là *công thức Taylor với phần dư dạng Peano.*

Trường hợp $x_0 = 0$, công thức (4.6) trở thành:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n). \tag{4.7}$$

Công thức (4.7) còn có tên gọi là *công thức khai triển Mac-Laurin với phần dư dạng Peano*.

Biểu thức phần dư dạng Peano cho biết đặc trưng định tính của phần dư $r(x)$ khi $x \to x_0$. Để phân tích định lượng phần dư $r(x)$ ta cần phải thiết lập biểu thức phần dư dưới dạng khác.

Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm đến cấp $n + 1$ trong một lân cận $V=(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ của điểm x_0. Đặt $g(x) = (x - x_0)^{n+1}$, với mọi $x \in V$ ta có:

$$g'(x) = (n + 1)(x - x_0)^n, ..., g^{(n)}(x) = (n + 1)!(x - x_0);$$

$$g^{(n+1)}(x) = (n+1)!;\ g(x_0) = g'(x_0) = ... = g^{(n)}(x_0) = 0.$$

Với r(x) là phần dư của công thức (4.3), theo định lý Cauchy ta có:

$$\frac{r(x)}{g(x)} = \frac{r(x) - r(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{r'(c_1)}{g'(c_1)} \quad (c_1 \text{ nằm giữa } x \text{ và } x_0)$$

$$= \frac{r'(c_1) - r'(x_0)}{g'(c_1) - g'(x_0)} = \frac{r''(c_2)}{g''(c_2)} \ (c_2 \text{ nằm giữa } c_1 \text{ và } x_0)$$

$$= \cdots = \frac{r^{(n)}(c_n) - r^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(c_n) - g^{(n)}(x_0)} = \frac{r^{(n+1)}(c)}{g^{(n+1)}(c)} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},$$

trong đó c là một điểm nào đó giữa c_n và x_0, do đó c nằm giữa x và x_0. Từ đây suy ra:

$$r(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.g(x).$$

Như vậy, phần dư r(x) của công thức Taylor (4.3) còn có thể biểu diễn được dưới dạng

$$r(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \tag{4.8}$$

với c là một điểm nào đó giữa x và x_0.

Biểu thức (4.8) được gọi là *phần dư dạng Lagrange*.

d. Khai triển một số hàm sơ cấp cơ bản

- Với $f(x) = e^x$ ta có:

$$f^{(k)}(x) = e^x \ \ \forall k \in N; \ f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 1.$$

Thay các giá trị này vào (4.7) ta được công thức khai triển hàm số $f(x) = e^x$ theo luỹ thừa của x, với phần dư dạng Peano:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

- Với $f(x) = \sin x$ ta có:

$$f^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) \ \forall k \in N;$$

$$f(0) = 0,\ f^{(k)}(0) = \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } k = 2n \\ (-1)^{n-1}, & \text{nếu } k = 2n-1 \end{cases}$$

Thay các giá trị này vào (4.7) ta được công thức khai triển:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1}).$$

- Với $f(x) = \cos x$ ta có:

$$f^{(k)}(x) = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) \ \forall k \in N;$$

$$f(0) = 0,\ f^{(k)}(0) = \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } k = 2n-1 \\ (-1)^{n}, & \text{nếu } k = 2n \end{cases}$$

Thay các giá trị này vào (4.7) ta được công thức khai triển:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$

- Với $f(x) = \ln(1 + x)$ ta có:

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k},\ \forall k \in N;$$

$$f(0) = 0,\ f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!.$$

Thay các giá trị này vào (4.7) ta được công thức khai triển:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

e. Một số ví dụ ứng dụng

Ví dụ 1: Tính giới hạn: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x}$ $(a > 0, a \neq 1)$.

Đặt $f(x) = a^x$, ta có $f'(x) = a^x\ln a$; $f(0) = 1$, $f'(0) = \ln a$.

Khai triển $f(x) = a^x$ theo công thức Taylor, ta được:

$$a^x = 1 + x\ln a + o(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\ln a + o(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\ln a + \frac{o(x)}{x}\right) = \ln a.$$

Ví dụ 2: Tính giới hạn: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$ $(\alpha > 0)$.

Khai triển hàm số $f(x) = (1+x)^\alpha$ theo công thức Taylor ta có:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\alpha x - o(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\alpha - \frac{o(x)}{x}\right) = \alpha.$$

f. Công thức Taylor dạng vi phân

Nếu đặt $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ thì công thức Taylor (4.3) có dạng:

$$\Delta f(x_0) = \frac{f'(x_0).\Delta x}{1!} + \frac{f''(x_0).(\Delta x)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)(\Delta x)^n}{n!} + r(x).$$

Công thức này có thể viết dưới dạng

$$\Delta f(x_0) = \frac{df(x_0)}{1!} + \frac{d^2f(x_0)}{2!} + \cdots + \frac{d^nf(x_0)}{n!} + r(x). \qquad (4.9)$$

BÀI TẬP

23. Tính đạo hàm cấp 2 của các hàm số:

a) $y = -\frac{1}{9}x\sin 3x - \frac{2}{27}\cos 3x$

b) $y = \frac{1}{3}x^2\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}\sqrt{1-x^2} + x.\arcsin x$

c) $x\ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) - \sqrt{x^2+a^2}$

24. Tính đạo hàm cấp 3 của các hàm số:

a) $y = \frac{1}{2}\ln^2 x$ b) $y = (2x+3)^3\sqrt{2x+3}$

25. Tính đạo hàm cấp 4 của các hàm số:

a) $y = \frac{1}{x^2-4}$ c) $y = \ln(2x-1)$

26. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số:

a) $y = e^{kx}$ b) $y = \frac{2x+3}{x+1}$

27. Chứng minh rằng hàm số $y = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$ thoả mãn hệ thức:

$$x^2y'' + xy' + y = 0.$$

28. Chứng minh rằng hàm số $y = \sin(n.\arcsin x)$ thoả mãn hệ thức:

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0.$$

29. Chứng minh rằng hàm số $y = e^x + 2e^{2x}$ thoả mãn hệ thức:

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$$

30. Lập biểu thức vi phân cấp 2 của hàm số $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 4}\right)$.

31. Lập biểu thức vi phân cấp 3 của hàm số $y = \text{arctg}x$.

32. Khai triển đa thức $f(x) = x^5 + x^3 - 3x^2 + 1$ theo luỹ thừa của $x - 1$.

33. Khai triển hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ theo công thức Maclaurin đến x^2, với phần dư dạng Lagrange.

34. Khai triển hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x}$ theo công thức Taylor đến luỹ thừa bậc 5 của $x - 1$, với phần dư dạng Peano.

35. Khai triển hàm số $f(x) = e^{\sin x}$ theo công thức Maclaurin đến luỹ thừa bậc 3 của x, với phần dư dạng Peano.

§5. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM TRONG TOÁN HỌC

I. TÍNH CÁC GIỚI HẠN DẠNG VÔ ĐỊNH

a. Quy tắc Lôpitan

Quy tắc Lôpitan cho phép ta sử dụng đạo hàm để khử các dạng vô định dạng $\dfrac{0}{0}$ và $\dfrac{\infty}{\infty}$ khi tính giới hạn của hàm số. Nội dung của quy tắc này như sau:

Định lý: Giả sử các hàm số u(x) và v(x) thoả mãn các điều kiện:

1. Giới hạn $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{u(x)}{v(x)}$ có dạng vô định $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$, tức là cả hai hàm số u(x) và v(x) cùng có giới hạn 0 hoặc cùng có giới hạn vô hạn;

2. Tồn tại giới hạn: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{u'(x)}{v'(x)}$ (hữu hạn hoặc vô hạn).

Khi đó:

$$\lim_{x \to a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \to a} \frac{u'(x)}{v'(x)}.$$

Ví dụ 1: Tính giới hạn:

$$I = \lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{\sin 3x}.$$

Giải: Giới hạn này có dạng $\frac{0}{0}$. Sử dụng quy tắc Lôpitan ta có:

$$I = \lim_{x \to 0} \frac{(2^x - 1)'}{(\sin 3x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{2^x \ln 2}{3\cos 3x} = \frac{\ln 2}{3}.$$

Ví dụ 2: Tính giới hạn

$$J = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}.$$

Giải: Giới hạn này có dạng $\frac{\infty}{\infty}$. Theo quy tắc Lôpitan:

$$J = \lim_{x \to +\infty} \frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty.$$

Ví dụ 3: Tính giới hạn

$$K = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}x - x}{x^3}.$$

Giải: Giới hạn này có dạng $\frac{0}{0}$. Theo quy tắc Lôpitan:

$$K = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{3\cos^2 x} \ \frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{1}{3}.$$

Chú ý: Trường hợp $\lim_{x \to a} \frac{u'(x)}{v'(x)}$ không tồn tại ta không có kết luận gì về giới hạn $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{u(x)}{v(x)}$ (dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$). Trong trường hợp này giới hạn $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{u(x)}{v(x)}$ vẫn có thể tồn tại.

Ví dụ 4: Giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x + x}{x}$ có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$. Tỷ số đạo hàm

$$\frac{(\sin x + x)'}{(x)'} = \cos x + 1$$

không có giới hạn khi $x \to \infty$, trong khi đó

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x + x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\sin x + 1\right) = 1 \text{ (do } \frac{1}{x} \to 0 \text{ và } \sin x \text{ bị chặn).}$$

b. Các dạng vô định khác

Tất các dạng vô định khác đều có thể biến đổi về dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$.

- Dạng vô định $0.\infty$ là dạng giới hạn $\lim(uv)$, trong đó hàm số $u = u(x)$ có giới hạn 0 và hàm số $v = v(x)$ có giới hạn ∞. Trong trường hợp này ta biến đổi như sau:

$$\lim(uv) = \lim\frac{u}{v^{-1}} \text{ (dạng } \tfrac{0}{0}\text{)}, \text{ hoặc } \lim(uv) = \lim\frac{v}{u^{-1}} \text{ (dạng } \tfrac{\infty}{\infty}\text{)}.$$

Ví dụ 1: Tính giới hạn: $A = \lim\limits_{x\to 0+} x\ln x$.

Giải: Giới hạn này có dạng $0.\infty$. Ta biến đổi như sau [ký hiệu (L) đặt trên dấu = nói rằng bước biến đổi đó được thực hiện theo tắc Lôpitan]:

$$A = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x^{-1}} \text{ (dạng } \tfrac{\infty}{\infty}) \overset{(L)}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0+}(-x) = 0.$$

- Dạng vô định $\infty - \infty$ là dạng giới hạn $\lim(u - v)$, trong đó $u(x)$ và $v(x)$ là hai hàm số cùng dấu và cùng có giới hạn ∞. Trong trường hợp này ta biến đổi như sau:

$$\lim(u - v) = \lim\frac{\frac{1}{v} - \frac{1}{u}}{\frac{1}{uv}} \quad \text{(dạng } \tfrac{0}{0}).$$

Trường hợp u và v là các phân thức với mẫu số có giới hạn 0 ta dễ dàng biến đổi về dạng $\frac{0}{0}$ bằng cách quy đồng mẫu số.

Ví dụ 2: Tính giới hạn: $B = \lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$.

Giải: Giới hạn này có dạng $\infty - \infty$. Ta tính giới hạn này như sau:

$$B = \lim_{x\to 1}\frac{x - 1 - \ln x}{(x-1)\ln x} \text{ (dạng } \tfrac{0}{0}) \overset{(L)}{=} \lim_{x\to 1}\frac{1 - \frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x + x - 1} \text{ (dạng } \tfrac{0}{0}) \overset{(L)}{=} \lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x + 1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

- Các dạng vô định 1^{∞}, 0^0 và ∞^0 xuất hiện khi tính giới hạn của biểu thức u^v, trong đó $u = u(x) > 0$ và $v = v(x)$:

  Nếu $u \to 1$ và $v \to \infty$ thì $\lim u^v$ có dạng vô định 1^{∞};

  Nếu $u \to 0$ và $v \to 0$ thì $\lim u^v$ có dạng vô định 0^0;

  Nếu $u \to +\infty$ và $v \to 0$ thì $\lim u^v$ có dạng vô định ∞^0.

Nếu đặt $y = u^v$ thì trong cả ba trường hợp này giới hạn của biểu thức $\ln y = v\ln u$ đều có dạng $0.\infty$ (dạng này đã được chỉ dẫn cách tính ở trên). Nếu tính được

$$\lim(\ln y) = k$$

thì ta được:

$$\lim y = \lim e^{\ln y} = e^k.$$

Ví dụ 3: Tính giới hạn: $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\cot g^2 x}$.

Giải: Giới hạn này có dạng 1^∞. Trong trường hợp này

$$y = (\cos x)^{\cot g^2 x} \Rightarrow \ln y = \cot g^2 x.\ln(\cos x).$$

Ta có:

$$\lim_{x\to 0}(\ln y) = \lim_{x\to 0}\cot g^2 x.\ln(\cos x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{tg^2 x}\ \left(\text{dạng } \frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{(L)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-tgx}{2tgx.\dfrac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cos^2 x}{2} = -\frac{1}{2}$$

Từ đây suy ra:

$$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\cot g^2 x} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Ví dụ 2: Tính giới hạn: $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

Giải: Giới hạn này có dạng ∞^0. Với $y = x^{\frac{1}{x}}$, ta có:

$$\ln y = \frac{1}{x}\ln x = \frac{\ln x}{x};$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln y) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\ \left(\text{dạng}\,\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{(L)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

Kết quả là: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} y = e^0 = 1.$

II. ĐẠO HÀM VÀ HƯỚNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ

Xin nhắc lại rằng hàm số $y = f(x)$ được gọi là *đơn điệu tăng* (*đơn điệu giảm*) trên một khoảng X nếu với mọi cặp điểm x_1, x_2 thuộc X, hiệu số $f(x_2) - f(x_1)$ luôn cùng dấu (trái dấu) với $x_2 - x_1$. Nói cách khác, hàm số f(x) đơn điệu tăng (đơn điệu giảm) trong khoảng X khi và chỉ khi

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)\ [f(x_1) > f(x_2)],\ (\forall x_1, x_2 \in X).$$

Định lý sau đây cho biết điều kiện cần để hàm số f(x) đơn điệu tăng (đơn điệu giảm) trong một khoảng.

Định lý 1: Giả sử hàm số y = f(x) có đạo hàm tại mọi điểm thuộc khoảng (a; b). Nếu f(x) đơn điệu tăng (đơn điệu giảm) trong khoảng (a; b) thì

$$f'(x) \geq 0\ [f'(x) \leq 0],\ \forall x \in (a, b).$$

Chứng minh: Giả sử f(x) đơn điệu tăng trong khoảng (a; b). Tại điểm x_0 bất kỳ thuộc khoảng (a; b) ta luôn có:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0,\ \forall x \in (a, b),\ x \neq x_0.$$

Từ đây suy ra

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Tương tự, nếu f(x) đơn điệu giảm trong khoảng (a; b) thì tại mọi điểm $x_0 \in (a; b)$ ta luôn có $f'(x_0) \leq 0$.

Điều kiện đủ để hàm số f(x) đơn điệu tăng (đơn điệu giảm) trong một khoảng có nội dung như sau:

Định lý 2: Giả sử hàm số f(x) có đạo hàm trong khoảng (a; b). Khi đó:

- Nếu $f'(x) > 0$ [$f'(x) < 0$] tại mọi điểm $x \in (a; b)$ thì hàm số f(x) đơn điệu tăng (đơn điệu giảm) trong khoảng (a; b);
- Nếu $f'(x) = 0$ tại mọi điểm $x \in (a; b)$ thì hàm số f(x) nhận giá trị không đổi trong khoảng (a; b).

Chứng minh:

Với x_1 và x_2 là hai điểm khác nhau bất kỳ trong khoảng (a; b), theo công thức Lagrange ta có:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\,(x_2 - x_1),$$

trong đó c là một điểm nằm giữa x_1 và x_2. Từ đây suy ra rằng, nếu $f'(x) > 0$ [$f'(x) < 0$] tại mọi điểm $x \in (a; b)$ thì $f(x_2) - f(x_1)$ luôn luôn cùng dấu (trái dấu) với $x_2 - x_1$, do đó hàm số f(x) đơn điệu tăng (đơn điệu giảm) trong khoảng (a; b).

Cũng theo công thức trên, nếu $f'(x) = 0$ tại mọi điểm $x \in (a; b)$ thì với mọi x_1, x_2 thuộc khoảng (a; b) ta luôn có $f(x_2) - f(x_1) = 0$, hay $f(x_1) = f(x_2)$. Điều này chứng tỏ hàm số f(x) nhận giá trị không đổi trong khoảng (a; b).

Định lý trên cho phép ta xác định các khoảng tăng, giảm của một hàm số f(x) thông qua việc xét dấu của đạo hàm f'(x).

Ví dụ: Xét hàm số $f(x) = xe^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$. Ta có:

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1 - x).e^{-x}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dễ dàng thấy rằng:

$$f'(x) > 0 \ \forall x \in (-\infty; 1), \quad f'(x) < 0 \ \forall x \in (1; +\infty).$$

Theo định lý 2, hàm số f(x) tăng trong khoảng $(-\infty; 1)$ và giảm trong khoảng $(1; +\infty)$.

Định lý 2 có thể mở rộng như sau:

Định lý 3: Nếu hàm số f(x) liên tục trên khoảng X và $f'(x) > 0$ $[f'(x) < 0]$ với mọi $x \in X \setminus A$, trong đó A là một tập con rời rạc[1] của khoảng X, thì hàm số f(x) đơn điệu tăng (đơn điệu giảm) trên toàn bộ khoảng X.

Ví dụ:

- Hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ là hàm liên tục trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ và

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 > 0, \forall x \neq 1.$$

Theo định lý 3 ta có thể khẳng định rằng hàm số đã cho đơn điệu tăng trên toàn bộ khoảng $(-\infty; +\infty)$.

- Hàm số $g(x) = \sin x - x$ liên tục trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ và

$$g'(x) = \cos x - 1 < 0, \forall x \neq 2k\pi \ (k \in Z).$$

Tập hợp các số thực $x = 2k\pi$ (k là số nguyên bất kỳ) là một tập con rời rạc của khoảng $(-\infty; +\infty)$. Hàm số đã cho đơn điệu giảm trên toàn bộ khoảng $(-\infty; +\infty)$.

III. TÌM CÁC ĐIỂM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

a. Khái niệm cực trị địa phương

Giả sử hàm số f(x) xác định và liên tục trong khoảng (a; b).

Định nghĩa: Ta nói rằng hàm số đạt *giá trị cực đại* (*giá trị cực tiểu*) tại điểm $x_0 \in (a; b)$ nếu tồn tại số $\delta > 0$ đủ nhỏ sao cho bất đẳng thức

---

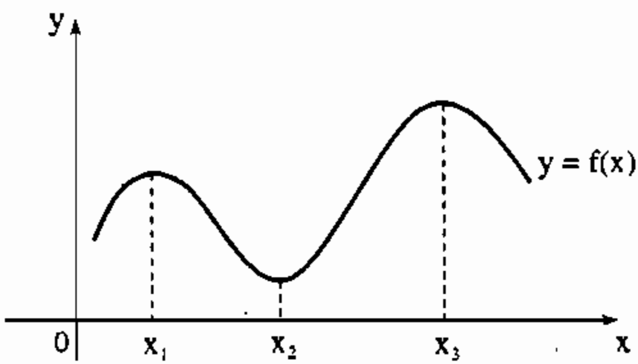
[1] Tập hợp $A \subset R$ được gọi là tập hợp rời rạc nếu $|x - x'| \geq k > 0 \ \forall x, x' \in A$ (k là hằng số).

$$f(x) \le f(x_0) \quad [\ f(x) \ge f(x_0)\ ]$$

luôn luôn được thoả mãn khi $|x - x_0| < \delta$.

Điểm x_0 mà tại đó hàm số f(x) nhận giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) được gọi là *điểm cực đại (điểm cực tiểu)* của nó. Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là *điểm cực trị* của hàm số.

Việc hạn chế $|x - x_0| < \delta$, với δ đủ nhỏ có nghĩa là khái niệm cực trị (giá trị cực đại hoặc giá trị cực tiểu) được hiểu theo nghĩa *cực trị địa phương* (còn gọi là *cực trị tương đối*): giá trị $f(x_0)$ là giá trị cực đại (cực tiểu) nếu nó lớn hơn (nhỏ hơn) tất cả các giá trị khác tại những điểm x gần x_0. Nhìn trên đồ thị thì điểm các cực đại (cực tiểu) là các đỉnh nhô lên (đỉnh thụt xuống) của đường cong y = f(x). Trên hình vẽ, x_1 và x_3 là các điểm cực đại, còn x_2 là điểm cực tiểu của hàm số y = f(x).



b. Điều kiện cần của cực trị

Điểm cực trị địa phương x_0 của hàm số f(x) là điểm mà tại đó hàm số đạt giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất trong phạm vi một khoảng $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, do đó từ định lý Fermat suy ra:

Định lý: Nếu hàm số f(x) đạt giá trị cực đại hoặc cực tiểu tại điểm $x_0 \in (a; b)$ và tại điểm đó hàm số có đạo hàm thì $f'(x_0) = 0$.

Định lý cho biết hàm số f(x) chỉ có thể đạt cực trị tại các điểm thuộc một trong hai loại sau đây:

1. Điểm mà tại đó đạo hàm triệt tiêu (gọi là *điểm dừng*);
2. Điểm mà tại đó hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm.

Các điểm thuộc cả hai loại được gọi là *điểm tới hạn* của hàm số. Để tìm các điểm cực trị của hàm số trước hết ta tìm các điểm tới hạn (giải điều kiện cần), sau đó dùng một trong các điều kiện đủ dưới đây để kiểm tra từng điểm tới hạn.

c. Điều kiện đủ theo đạo hàm cấp một.

Định lý: Giả sử điểm x_0 là một điểm tới hạn của hàm số f(x) và giả sử hàm số có đạo hàm f'(x) mang dấu xác định trong mỗi khoảng $(x_0 - \delta; x_0)$ và $(x_0; x_0 + \delta)$. Khi đó:

- **Nếu tại điểm x_0 đạo hàm f'(x) đổi dấu thì hàm số f(x) đạt cực trị tại điểm đó:**
  - **x_0 là điểm cực đại nếu f'(x) đổi dấu từ + sang −;**
  - **x_0 là điểm cực tiểu nếu f'(x) đổi dấu từ − sang +.**
- **Nếu tại x_0 đạo hàm f'(x) không đổi dấu thì hàm số không đạt cực trị tại điểm đó.**

Chứng minh:

Nếu tại điểm x_0 đạo hàm f'(x) đổi dấu từ (+) sang (−), tức là $f'(x) > 0$ $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0)$ và $f'(x) < 0$ $\forall x \in (x_0; x_0 + \delta)$, thì hàm số f(x) đơn điệu tăng trong khoảng $(x_0 - \delta; x_0]$ và đơn điệu giảm trong khoảng $[x_0; x_0 + \delta)$. Từ đó suy ra $f(x) < f(x_0)$ tại mọi điểm x mà $0 < |x - x_0| < \delta$. Điều này chứng tỏ x_0 là điểm cực đại của hàm số f(x). Tương tự, nếu f'(x) đổi dấu từ (−) sang (+) thì $f(x) > f(x_0)$ tại mọi điểm x mà $0 < |x - x_0| < \delta$, chứng tỏ x_0 là điểm cực tiểu của hàm số f(x).

Nếu f'(x) không đổi dấu, tức là f'(x) có dấu như nhau trong cả hai khoảng $(x_0 - \delta; x_0)$ và $(x_0; x_0 + \delta)$, thì hàm số f(x) đơn điệu (tăng hoặc giảm) trong khoảng $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, do đó x_0 không phải là điểm cực trị của hàm số f(x).

Ví dụ: Tìm các điểm cực trị của hàm số:

$$y = x.\sqrt[3]{(x-1)^2}\ .$$

Giải: Hàm số này xác định và liên tục trên toàn bộ trục số. Trước hết ta tính đạo hàm:

$$y' = \sqrt[3]{(x-1)^2} + \frac{2x}{3.\sqrt[3]{x-1}} = \frac{3(x-1)+2x}{3.\sqrt[3]{x-1}} = \frac{5x-3}{3.\sqrt[3]{x-1}} \quad (\forall x \neq 1).$$

Hàm số đã cho có 2 điểm tới hạn: $y' = 0$ khi $x = \frac{3}{5}$ và y' không tồn tại khi $x = 1$. Dấu của đạo hàm y' như dấu của biểu thức $(5x-3)(x-1)$:

x	$-\infty$		3/5		1		$+\infty$
y'		+	0	−	||	+	

Theo định lý trên thì hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 3/5$ và cực tiểu tại điểm $x = 1$.

d. Điều kiện đủ theo đạo hàm cấp cao

Gọi x_0 là một điểm dừng của hàm số $f(x)$.

Định lý: Giả sử tồn tại số tự nhiên $n \geq 2$ sao cho:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \text{ và } f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Khi đó:

- Nếu n là số chẵn thì x_0 là một điểm cực trị của hàm số $f(x)$:
  - ◊ x_0 là điểm cực đại nếu $f^{(n)}(x_0) < 0$;
  - ◊ x_0 là điểm cực tiểu nếu $f^{(n)}(x_0) > 0$.
- Nếu n lẻ thì x_0 không phải là điểm cực trị của hàm số $f(x)$.

Chứng minh: Với các giả thiết đã nêu, theo công thức Taylor ta có:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o[(x - x_0)^n]$$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^n\left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{o[(x - x_0)^n]}{(x - x_0)^n}\right].$$

Do $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ và do số hạng thứ hai trong dấu ngoặc vuông có giới hạn 0 khi $x \to x_0$ nên khi x đủ gần x_0 dấu của biểu thức trong dấu ngoặc vuông như dấu của $f^{(n)}(x_0)$.

Trường hợp n chẵn $(x - x_0)^n > 0$, do đó tồn tại số $\delta > 0$ sao cho khi $0 < |x - x_0| < \delta$ hiệu $f(x) - f(x_0)$ cùng dấu với $f^{(n)}(x_0)$. Từ đây suy ra:

- Nếu $f^{(n)}(x_0) > 0$ thì $f(x) > f(x_0)$ khi $0 < |x - x_0| < \delta$, chứng tỏ x_0 là điểm cực tiểu của hàm số f(x);
- Nếu $f^{(n)}(x_0) < 0$ thì $f(x) < f(x_0)$ khi $0 < |x - x_0| < \delta$, chứng tỏ x_0 là điểm cực đại của hàm số f(x).

Trường hợp n lẻ, tồn tại số $\delta > 0$ sao cho trong hai khoảng $(x_0 - \delta; x_0)$ và $(x_0; x_0 + \delta)$ hiệu $f(x) - f(x_0)$ trái dấu nhau. Điều này có nghĩa là nếu $f(x) > f(x_0)$ trong khoảng này thì $f(x) < f(x_0)$ trong khoảng kia, do đó x_0 không phải là điểm cực trị của hàm số f(x).

Trường hợp n = 2 ta có quy tắc sau:

- Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại của hàm số f(x);
- Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số f(x).

Ví dụ: Tìm các điểm cực trị của hàm số $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

Giải: Hàm số xác định trong khoảng $(0; +\infty)$ và

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2},\quad f''(x) = \frac{2\ln x - 3}{x^3}\ (\forall\, x > 0).$$

Phương trình $f'(x) = 0$ chỉ có một nghiệm $x = e$. Tại điểm tới hạn duy nhất này ta có:

$$f''(e) = -\frac{1}{e^3} < 0.$$

Theo quy tắc về điều kiện đủ thì $x = e$ là điểm cực đại của hàm số đã cho.

e. Bài toán cực trị toàn thể

Như ta đã biết, nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng đóng $[a; b]$ thì trên khoảng đó hàm số có giá trị lớn nhất (GTLN) và giá trị nhỏ nhất (GTNN). Nếu hàm số đạt GTLN (GTNN) tại một điểm x_0 *bên trong* khoảng $(a; b)$ thì $f(x_0)$ là một giá trị cực đại (giá trị cực tiểu). Ngoài ra, các giá trị tại đầu mút a và b cũng có thể là GTLN hoặc GTNN của hàm số. Như vậy, để tìm GTLN (GTNN) của hàm số $f(x)$ trên $[a; b]$, trước hết ta phải tìm tất cả các giá trị cực đại (giá trị cực tiểu), sau đó so sánh các giá trị đó cùng với các giá trị $f(a)$ và $f(b)$ để chọn ra số lớn nhất (số nhỏ nhất).

Ta cũng có thể tìm GTLN và GTNN của hàm số $f(x)$ trên khoảng $[a; b]$ bằng cách tính giá trị của nó tại *tất cả các điểm tới hạn và tại hai đầu mút*, sau đó chọn ra số lớn nhất và số nhỏ nhất.

Ví dụ: Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + 1$ trên khoảng $[-2; 3]$.

Ta có:

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 12x + 24 = 12(x^2 - 1)(x-2);$$

$$f'(x) = 0 \text{ tại các điểm } x = -1,\ x = 1 \text{ và } x = 2.$$

So sánh các giá trị $f(-2) = 41$, $f(-1) = -18$, $f(1) = 14$, $f(2) = 9$, $f(3) = 46$ ta tìm được:

Giá trị lớn nhất: $\max f(x) = 46$, tại điểm $x = 3$;

Giá trị nhỏ nhất: $\min f(x) = -18$, tại điểm $x = -1$.

Trong thực hành, ta thường gặp trường hợp hàm số $f(x)$ liên tục trong khoảng $(a; b)$ và *chỉ có một điểm cực trị duy nhất $x_0 \in (a; b)$*. Khi đó, nếu điểm x_0 là điểm cực đại (điểm cực tiểu) thì $f(x_0)$ chính là GTLN (GTNN) của hàm số $f(x)$ trong khoảng $(a; b)$.

Ví dụ: Hàm số $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ mà ta vừa xét ở trên chỉ có một điểm cực trị duy nhất trong khoảng $(0; +\infty)$ là điểm cực đại $x = e$. Giá trị của hàm số này tại điểm $x = e$ chính là GTLN của nó trong khoảng $(0; +\infty)$.

IV. LIÊN HỆ GIỮA ĐẠO HÀM CẤP HAI VÀ TÍNH LỒI, LÕM CỦA HÀM SỐ

a. Định nghĩa hàm số lồi và hàm số lõm

Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên một khoảng X.

Định nghĩa: Hàm số $f(x)$ được gọi là *hàm số lồi* (*hàm số lõm*) trong khoảng X nếu, với x_1 và x_2 là hai điểm bất kỳ thuộc khoảng X, bất đẳng thức

$$f[tx_1+(1-t)x_2] < tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \qquad (5.1)$$
$$(>)$$

được thoả mãn với mọi $t \in (0; 1)$.

Ta sẽ xét ý nghĩa hình học của bất đẳng thức (5.1).

Vế trái của bất đẳng thức (5.1) là tung độ của điểm P trên đồ thị $y = f(x)$, có hoành độ $\overline{x} = tx_1 + (1-t)x_2$. Nếu coi $x_1 < x_2$ thì $\overline{x}$ là một điểm thuộc khoảng (x_1, x_2). Thật vậy, với mọi $t \in (0; 1)$, ta có

$$\overline{x} = x_2 - t(x_2-x_1) < x_2, \ \overline{x} = x_1 + (1-t)(x_2-x_1) > x_1.$$

Điều này chứng tỏ P là một điểm nào đó trên phần đồ thị $y = f(x)$ giữa hai điểm $M_1(x_1, y_1)$ và $M_2(x_2, y_2)$, với $y_1 = f(x_1)$ và $y_2 = f(x_2)$.

Mặt khác, đường thẳng đi qua hai điểm M_1 và M_2 có phương trình:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

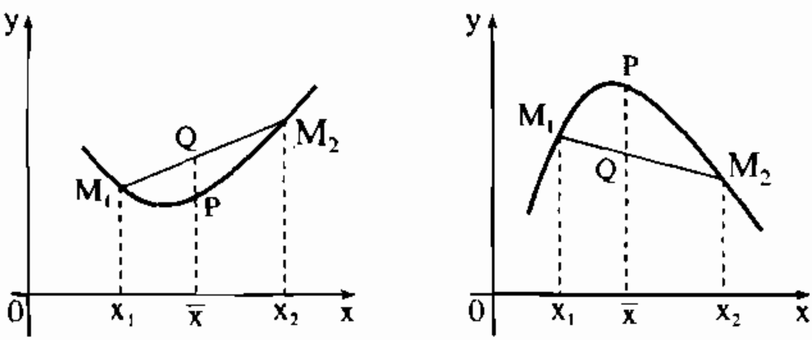
Gọi Q là điểm có hoành độ $\overline{x} = tx_1 + (1-t)x_2$ trên đường thẳng M_1M_2. Tung độ của Q là:

$$y_Q = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}[tx_1 + (1-t)x_2 - x_1]$$

$$= y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(1-t)(x_2 - x_1)$$

$$= y_1 + (y_2 - y_1)(1-t)$$

$$= ty_1 + (1-t)y_2 = tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$



Hàm lồi Hàm lõm

Như vậy, vế phải của bất đẳng thức (5.1) là tung độ của điểm Q trên đoạn thẳng M_1M_2. Bất đẳng thức (5.1) có nghĩa là: nếu hàm số f(x) là hàm lồi (hàm lõm) thì mọi điểm P trên cung đường cong M_1M_2 có vị trí thấp hơn (cao hơn) so với điểm Q có cùng hoành độ với nó trên đoạn thẳng M_1M_2.

Dưới giác độ hình học *đường cong y = f(x) được gọi là đường cong lồi (đường cong lõm) nếu mọi cung đường cong giữa hai điểm M_1M_2 bất kỳ đều nằm phía dưới (phía trên) đoạn thẳng M_1M_2.*

Nếu hàm số f(x) có đạo hàm tại mọi điểm thuộc khoảng X thì tại mỗi điểm của đường cong y = f(x) ta có thể kẻ tiếp tuyến. Có thể chứng minh được rằng *đường cong y = f(x) là đường cong lồi (đường cong lõm) khi và chỉ khi nó nằm phía trên (phía dưới) mọi tiếp tuyến của nó.*

b. Liên hệ với đạo hàm cấp hai

Định lý sau đây cho phép ta sử dụng đạo hàm cấp hai để xem xét tính chất lồi, lõm của hàm số:

Định lý: Giả sử hàm số f(x) có đạo hàm cấp hai trên khoảng X. Khi đó:

- Nếu hàm số f(x) lồi (lõm) trong khoảng (a; b) thì $f''(x) \geq 0$ $[f''(x) \leq 0]$ với mọi $x \in X$ (điều kiện cần);
- Nếu $f''(x) > 0$ $[f''(x) < 0)]$ với mọi $x \in (a; b)$ thì hàm số f(x) là hàm lồi (hàm lõm) trong khoảng (a; b) (điều kiện đủ).

Sử dụng định lý trên ta có thể xác định các khoảng lồi, lõm của hàm số thông qua việc xét dấu của đạo hàm cấp hai.

Ví dụ: Hàm số $f(x) = xe^x$ có đạo hàm cấp hai tại mọi điểm:

$$f''(x) = (x + 2)e^x.$$

Dễ dàng thấy rằng $f''(x) < 0$ khi $x < -2$ và $f''(x) > 0$ khi $x > -2$. Theo định lý trên, hàm số f(x) lõm trong khoảng $(-\infty; -2)$ và lồi trong khoảng $(-2; +\infty)$.

c. Điểm uốn của hàm số

Một hàm số liên tục trên một khoảng X có thể thay đổi hướng lồi lõm. Trong ví dụ trên đây, hàm số $f(x) = xe^x$ thay đổi hướng lồi lõm tại điểm $x = -2$.

Định nghĩa: Điểm x_0 mà tại đó hàm số liên tục f(x) thay đổi hướng lồi lõm được gọi là *điểm uốn* của hàm số đó.

Điểm $M_0[x_0, f(x_0)]$ tương ứng trên đồ thị là điểm nối tiếp của hai cung đường cong có hướng lồi lõm ngược nhau, được gọi là *điểm uốn của đường cong liên tục y = f(x).*

Ví dụ: Hàm số $f(x) = xe^x$ có một điểm uốn là điểm $x = -2$. Điểm $M_0(-2; -2e^{-2})$ là điểm uốn của đường cong $y = xe^x$.

Để xác định điểm uốn của hàm số liên tục f(x) ta lưu ý các mệnh đề sau:

- Nếu x_0 là điểm uốn của hàm số f(x) thì $f''(x_0) = 0$, hoặc $f''(x_0)$ không tồn tại (điều kiện cần);

- Với giả thiết f(x) là hàm số liên tục tại điểm x_0, nếu đạo hàm cấp hai tồn tại trong mỗi khoảng $(x_0-\delta; x_0)$, $(x_0, x_0+\delta)$ và đổi dấu khi chuyển qua điểm x_0 thì x_0 là điểm uốn của hàm số f(x) (điều kiện đủ)[1].

BÀI TẬP

36. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{-ax}}{\ln(1+x)}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{x\sin x}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{\ln(1+\frac{1}{x})}$ d) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{\ln(\sin x)}$

[1] Tại chính điểm x_0 đạo hàm cấp hai có thể tồn tại hoặc không tồn tại.

e) $\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{\ln(1-x)}{\cot g\pi x}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^m}{a^x}$ $(a > 1, m\in N)$

37. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\cot gx-\dfrac{1}{x}\right]$ b) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left[xtgx-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right]$

c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} tg2x.tg\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$ d) $\lim\limits_{x\to 1-}\ln x.\ln(1-x)$

38. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln(e+x)\right]^{\frac{1}{x}}$ b) $\lim\limits_{x\to 1-}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{tgx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\text{arctg}x\right)^x$

39. Xác định các khoảng tăng, giảm của các hàm số:

a) $y = 2x^2 - \ln x$ b) $y = x + \sin x$

c) $y = x(x-1)^2(x-2)^3$ d) $y = \dfrac{e^x}{x}$

e) $y = \dfrac{2}{3}x^2.\sqrt[3]{6x-7}$ f) $y = x - \ln(1+x)$

g) $y = x\ln^2 x$ h) $y = x^2e^{-x}$

40. Tìm các điểm cực trị của các hàm số:

a) $y = x\sqrt{1-x^2}$ b) $y = \dfrac{x}{2} - \text{arctg}x$

c) $y = xe^{-3x}$ d) $y = x\sqrt[3]{(3x-2)^2}$

e) $y = \dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ f) $y = \dfrac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$

g) $y = \frac{1}{2}(x^2 + 1)\text{arctg}x - \frac{\pi}{8}x^2 - \frac{x-1}{2}$

h) $y = \frac{1}{2}(x^2 - \frac{1}{2})\arcsin x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} - \frac{\pi}{12}x^2$

41. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

a) $f(x) = 3x - x^3$, $x \in [-2; 3]$

b) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in [0,01; 100]$

c) $y = x^2\ln x$, $x \in [1; e]$ d) $y = x\sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1; 1]$

d) $y = \text{arctg}\frac{1-x}{1+x}$, $x \in [0; 1]$

42. Chứng minh rằng nếu hàm số f(x) liên tục trong khoảng (a; b) và trong khoảng đó nó chỉ có một điểm cực trị duy nhất x_0 thì điểm cực trị địa phương x_0 đồng thời là điểm cực trị toàn cục của nó, tức là: $f(x_0)$ là GTLN (GTNN) của f(x) trong toàn bộ khoảng (a; b) nếu x_0 là điểm cực đại (cực tiểu).

43. Chứng minh rằng nếu hàm số f(x) có đạo hàm cấp hai $f''(x) > 0$ $[f''(x) < 0]$ trong khoảng (a; b) thì nó không thể có nhiều hơn một điểm dừng trong khoảng đó và điểm dừng duy nhất (nếu có) là điểm mà tại đó f(x) đạt GTNN (GTLN).

44. Chọn x để hàm số $y = \frac{4}{x} + \frac{9}{1-x}$ đạt giá trị nhỏ nhất trong khoảng (0; 1).

45. Chọn x để hàm số $y = (1-x)\sqrt[3]{x-2}$ đạt giá trị lớn nhất trong khoảng $(-\infty; +\infty)$.

46. Xác định các khoảng lồi lõm và điểm uốn của hàm số:

a) $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 + 50$ b) $y = \ln(1 + x^2)$

c) $y = \frac{\ln x}{x}$ c) $y = e^{\text{arctg}x}$

§6 SỬ DỤNG ĐẠO HÀM TRONG PHÂN TÍCH KINH TẾ

I. Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM TRONG KINH TẾ HỌC

a. Đạo hàm và giá trị cận biên

Xét mô hình hàm số

$$y = f(x),$$

trong đó x và y là các biến số kinh tế (ta coi biến độc lập x là biến số đầu vào và biến phụ thuộc y là biến số đầu ra). Trong kinh tế học người ta quan tâm đến xu hướng biến thiên của biến phụ thuộc y tại một điểm x_0 khi biến độc lập x thay đổi một lượng nhỏ. Chẳng hạn, khi xét mô hình hàm sản xuất $Q = f(L)$ người ta thường quan tâm đến số lượng sản phẩm hiện vật tăng thêm khi sử dụng thêm một đơn vị lao động.

Theo định nghĩa đạo hàm:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Khi Δx có giá trị tuyệt đối đủ nhỏ ta có:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \approx f'(x_0)$$

$$\Rightarrow \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0).\Delta x.$$

Với $\Delta x = 1$ ta có $\Delta y \approx f'(x_0)$. Như vậy, đạo hàm $f'(x_0)$ biểu diễn xấp xỉ lượng thay đổi giá trị của biến phụ thuộc y khi biến độc lập x tăng thêm một đơn vị.

Khi xét mô hình $y = f(x)$ biểu diễn ảnh hưởng của biến số kinh tế x đối với biến số kinh tế y, các nhà kinh tế gọi $f'(x_0)$ là *giá trị y-cận biên của x tại điểm x_0*.

Đối với mỗi hàm kinh tế, giá trị cận biên có tên gọi cụ thể như sau :

- Đối với mô hình hàm sản xuất $Q = f(L)$ thì $f'(L_0)$ được gọi là *sản phẩm hiện vật cận biên của lao động tại điểm L_0*. Sản phẩm hiện vật cận biên của lao động được ký hiệu là MPP_L (Marginal physical product of labor):

$$MPP_L = f'(L).$$

Tại mỗi điểm L, MPP_L cho biết xấp xỉ lượng sản phẩm hiện vật gia tăng khi sử dụng thêm một đơn vị lao động.

- Đối với mô hình hàm doanh thu $TR = TR(Q)$ thì $TR'(Q_0)$ được gọi là *doanh thu cận biên tại điểm Q_0*. Doanh thu cận biên được ký hiệu là MR (Marginal Revenue):

$$MR = TR'(Q).$$

Tại mỗi mức sản lượng Q, MR cho biết xấp xỉ lượng doanh thu tăng thêm khi sản xuất thêm một đơn vị sản phẩm. Đối với doanh nghiệp cạnh tranh ta có:

$$TR = pQ \Rightarrow MR = p \text{ (p là giá sản phẩm trên thị trường).}$$

- Đối với mô hình hàm chi phí $TC = TC(Q)$ thì $TC'(Q_0)$ được gọi là *chi phí cận biên tại điểm Q_0*. Chi phí cận biên được ký hiệu là MC (Marginal Cost):

$$MC = TC'(Q).$$

Tại mỗi mức sản lượng Q, MC cho biết xấp xỉ lượng chi phí tăng thêm khi sản xuất thêm một đơn vị sản phẩm

- Đối với hàm tiêu dùng $C = C(Y)$ thì $C'(Y)$ được gọi là *xu hướng tiêu dùng cận biên* và được ký hiệu là MPC (Marginal Propensity to Consume):

$$MPC = C'(Y).$$

Tại mỗi mức thu nhập Y, MPC là số đo xấp xỉ lượng tiêu dùng gia tăng khi người ta có thêm \$1 thu nhập.

- Đối với hàm tiết kiệm $S = S(Y)$ thì $S'(Y)$ được gọi là *xu hướng tiết kiệm cận biên* và được ký hiệu là MPS (Marginal Propensity to Save):

$$MPS = S'(Y).$$

Tại mỗi mức thu nhập Y, MPS là số đo xấp xỉ lượng tiết kiệm gia tăng khi người ta có thêm \$1 thu nhập.

Ví dụ 1: Giả sử hàm sản xuất của một doanh nghiệp là:

$$Q = 5\sqrt{L}.$$

Ở mức sử dụng $L = 100$ đơn vị lao động (chẳng hạn 100 giờ lao động một tuần), mức sản lượng tương ứng là $Q = 50$ sản phẩm. Sản phẩm cận biên của lao động tại điểm $L = 100$ là:

$$MPP_L = Q' = \frac{5}{2\sqrt{L}} = 0{,}25 \text{ (khi } L = 100).$$

Điều này có nghĩa là khi tăng mức sử dụng lao động hàng tuần thêm 1 đơn vị (từ 100 lên 101) thì sản lượng hàng tuần sẽ tăng thêm khoảng 0,25 đơn vị hiện vật.

Ví dụ 2: Một công ty độc quyền sản xuất một loại sản phẩm và tiêu thụ sản phẩm đó trên thị trường với hàm cầu:

$$Q = 1500 - 5p.$$

Hãy tính doanh thu cận biên tại mức sản lượng Q = 650 và giải thích ý nghĩa.

Giải: Căn cứ theo hàm cầu, để tiêu thụ được Q sản phẩm, công ty phải bán với giá:

$$p = 300 - \frac{1}{5}Q.$$

Hàm doanh thu là:

$$TR = (300 - \frac{1}{5}Q)Q = 300Q - \frac{1}{5}Q^2.$$

Doanh thu cận biên của công ty là:

$$MR = 300 - \frac{2}{5}Q.$$

Tại mức sản lượng Q = 500, ta có

$$MR = 300 - \frac{2}{5}.650 = 40.$$

Điều này có nghĩa là, tại mức sản lượng 600, nếu sản xuất thêm 1 sản phẩm thì tổng doanh thu của công ty sẽ tăng thêm $40 (ký hiệu $ chỉ đơn vị tiền tệ dùng để tính giá sản phẩm).

b. Quy luật lợi ích cận biên giảm dần

Xét mô hình y = f(x), trong đó y là biến số biểu diễn lợi ích (chẳng hạn như thu nhập, doanh thu, lợi nhuận, ...) và x là biến số mô tả yếu tố đem lại lợi ích y. Quy luật lợi ích cận biên giảm dần (the Law of diminishing returns) nói rằng khi x càng lớn thì giá trị y-cận biên càng nhỏ, tức là My = f′(x) là hàm số đơn điệu giảm (ít nhất theo nghĩa rộng). Dưới giác độ toán học, điều kiện để My giảm dần theo x là:

$$(My)' = f''(x) \le 0.$$

Ví dụ: Nếu hàm sản xuất ngắn hạn được ước lượng dưới dạng $Q = AL^{\alpha}$ (A và α là các hằng số dương) thì quy luật lợi ích cận biên giảm dần đòi hỏi:

$$Q'' = \alpha(\alpha - 1)AL^{\alpha - 2} \le 0 \Leftrightarrow \alpha \le 1.$$

II. TÍNH HỆ SỐ CO DÃN

Một vấn đề được quan tâm trong kinh tế là phản ứng của cung và cầu đối với sự biến động giá cả trên thị trường. Với giả thiết các yếu tố khác không thay đổi, sự phụ thuộc của lượng cầu Q_d vào giá p được biểu diễn bằng hàm cầu :

$$Q_d = D(p).$$

Trong mô hình hàm cầu biến số p được đo bằng đơn vị tiền tệ, còn biến số Q được đo bằng đơn vị hiện vật. Nếu gọi ΔQ_d là mức thay đổi lượng cầu khi giá thay đổi một đơn vị thì ý nghĩa của con số đó còn phụ thuộc vào đơn vị đo. Hơn nữa, đối với các hàng hoá khác nhau thì sự thay đổi giá thêm $1 mang ý nghĩa khác nhau. Chẳng hạn, nếu giá một chiếc ôtô tăng $1 thì có thể xem như giá ôtô không thay đổi. Trong khi đó nếu giá 1 kg cà phê tăng $1 thì chắc hẳn đó là một biến động lớn trên thị trường cà phê. Để đánh giá độ nhạy cảm của cầu hàng hoá đối với sự biến động giá cả, các nhà kinh tế sử dụng khái niệm hệ số co dãn.

Hệ số co dãn của cầu theo giá (tính ở mỗi mỗi mức giá) là số đo lượng thay đổi tính theo % của lượng cầu khi giá tăng 1%.

Tại mức giá p, nếu giá thay đổi một lượng Δp thì lượng cầu thay đổi tương ứng một lượng ΔQ_d. Mức phần trăm thay đổi của lượng cầu tính bình quân cho 1% thay đổi giá là:

$$\varepsilon = \frac{(\Delta Q_d / Q_d).100}{(\Delta p / p).100} = \frac{\Delta Q_d}{\Delta p}\,\frac{p}{Q_d} = \frac{\Delta D(p)}{\Delta p}\frac{p}{D(p)}.$$

Chuyển qua giới hạn khi $\Delta p \to 0$ ta được công thức tính hệ số co dãn của cầu theo giá tại điểm p:

Hãy tính doanh thu cận biên tại mức sản lượng Q = 650 và giải thích ý nghĩa.

Giải: Căn cứ theo hàm cầu, để tiêu thụ được Q sản phẩm, công ty phải bán với giá:

$$p = 300 - \frac{1}{5}Q.$$

Hàm doanh thu là:

$$TR = (300 - \frac{1}{5}Q)Q = 300Q - \frac{1}{5}Q^2.$$

Doanh thu cận biên của công ty là:

$$MR = 300 - \frac{2}{5}Q.$$

Tại mức sản lượng Q = 500, ta có

$$MR = 300 - \frac{2}{5}.650 = 40.$$

Điều này có nghĩa là, tại mức sản lượng 600, nếu sản xuất thêm 1 sản phẩm thì tổng doanh thu của công ty sẽ tăng thêm \$40 (ký hiệu \$ chỉ đơn vị tiền tệ dùng để tính giá sản phẩm).

b. Quy luật lợi ích cận biên giảm dần

Xét mô hình y = f(x), trong đó y là biến số biểu diễn lợi ích (chẳng hạn như thu nhập, doanh thu, lợi nhuận, ...) và x là biến số mô tả yếu tố đem lại lợi ích y. Quy luật lợi ích cận biên giảm dần (the Law of diminishing returns) nói rằng khi x càng lớn thì giá trị y-cận biên càng nhỏ, tức là My = f'(x) là hàm số đơn điệu giảm (ít nhất theo nghĩa rộng). Dưới giác độ toán học, điều kiện để My giảm dần theo x là:

$$(My)' = f''(x) \le 0.$$

Ví dụ: Nếu hàm sản xuất ngắn hạn được ước lượng dưới dạng $Q = AL^{\alpha}$ (A và α là các hằng số dương) thì quy luật lợi ích cận

$$\varepsilon = \frac{dQ_d}{dp}\,\frac{p}{Q_d} = \frac{dD(p)}{dp}\,\frac{p}{D(p)} = D'(p).\frac{p}{D(p)}\,.$$

Ví dụ 1: Nếu hàm cầu là $Q = 1400 - p^2$ thì hệ số co dãn tại mức giá p là:

$$\varepsilon = D'(p).\frac{p}{D(p)} = \frac{(1400 - p^2)'p}{1400 - p^2} = \frac{-2p^2}{1400 - p^2}$$

Khi $p = 20$ ta có $\varepsilon = -0,8$. Điều này có nghĩa là tại mức giá $p = 20$, nếu giá tăng 1% thì cầu sẽ giảm khoảng 0,8%.

Ví dụ 2: Nếu hàm cầu có dạng bậc nhất

$$Q = a - bp \quad (a, b > 0)$$

thì hệ số co dãn tại điểm p là:

$$\varepsilon = \frac{-bp}{a - bp}\,.$$

Tương tự: *Hệ số co dãn của cung theo giá* là số đo lượng thay đổi tính theo phần trăm của lượng cung khi giá tăng 1%. Nếu biết hàm cung $Q_s = S(p)$ thì hệ số co dãn của cung theo giá tại điểm p được tính theo công thức:

$$\varepsilon = \frac{dQ_s}{dp}\,\frac{p}{Q_s} = \frac{dS(p)}{dp}\,\frac{p}{S(p)} = S'(p).\frac{p}{S(p)}\,.$$

Nói chung, nếu biến số y phụ thuộc vào biến số x theo quy luật hàm số $y = f(x)$ thì hệ số co dãn của y theo x (lượng thay đổi tính bằng % của biến phụ thuộc y khi biến độc lập x tăng 1%) tại điểm x bất kỳ có thể tính theo công thức:

$$\varepsilon = f'(x)\frac{x}{f(x)}$$

III. QUAN HỆ GIỮA HÀM BÌNH QUÂN VÀ HÀM CẬN BIÊN

Trong kinh tế người ta dùng hàm chi phí biểu diễn tổng chi phí TC ở mỗi mức sản lượng Q:

$$TC = TC(Q).$$

Khi phân tích sản xuất, cùng với hàm chi phí, người ta còn sử dụng hàm chi phí bình quân và hàm chi phí cận biên. Ở mỗi mức sản lượng Q, chi phí bình quân là lượng chi phí tính bình quân trên một đơn vị sản phẩm:

$$AC = \frac{TC(Q)}{Q}.$$

Chi phí cận biên tại mỗi mức sản lượng Q là số đo xấp xỉ lượng chi phí gia tăng khi sản xuất thêm một đơn vị sản phẩm. Hàm chi phí cận biên MC là đạo hàm của tổng chi phí:

$$MC = TC'(Q).$$

Ta có:

$$AC'(Q) = \left(\frac{TC}{Q}\right)' = \frac{(TC)'Q - TC}{Q^2} = \frac{(TC)' - \frac{TC}{Q}}{Q} = \frac{MC - AC}{Q}.$$

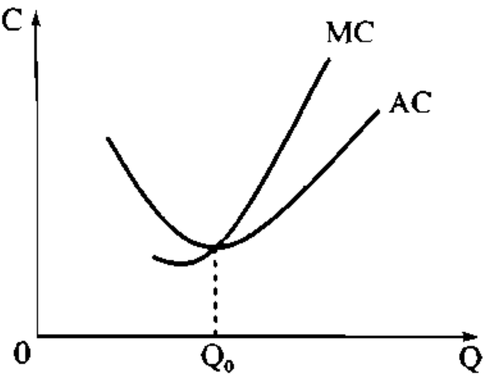
Do $Q > 0$ nên dấu của $AC'(Q)$ như dấu của $MC - AC$. Từ đây suy ra:

- Nếu $MC > AC$ thì $AC'(Q) > 0$, tức là *khi chi phí cận biên lớn hơn chi phí bình quân thì chi phí bình quân tăng*;

- Nếu $MC < AC$ thì $AC'(Q) < 0$, tức là *khi chi phí cận biên nhỏ hơn chi phí bình quân thì chi phí bình quân giảm*;

- $MC = AC$ khi và chỉ khi $AC'(Q) = 0$, tức là *chi phí bình quân chỉ có thể đạt cực tiểu tại điểm mà chi phí cận biên bằng chi phí bình quân.*

Trên hình vẽ AC (Average Cost) là đường chi phí bình quân, MC (Marginal Cost) là đường chi phí cận biên. Đường MC cắt đường AC tại điểm có hoành độ Q_0. Về phía $Q > Q_0$ đường MC cao hơn đường AC, tức là MC > AC, do đó AC tăng. Về phía $Q < Q_0$ đường MC thấp hơn đường AC, tức là MC < AC, do đó AC giảm.



Tương tự, doanh thu bình quân $AR(Q) = \dfrac{TR(Q)}{Q}$ và doanh thu cận biên $MR(Q) = TR'(Q)$ của nhà sản xuất liên hệ với nhau như sau:

- Nếu MR > AR thì $AR'(Q) > 0$, tức là *khi doanh thu cận biên lớn hơn doanh thu bình quân thì doanh thu bình quân tăng*;
- Nếu MR < AR thì $AR'(Q) < 0$, tức là *khi doanh thu cận biên nhỏ hơn doanh thu bình quân thì doanh thu bình quân giảm*;
- MR = AR khi và chỉ khi $AR'(Q) = 0$, tức là *doanh thu bình quân chỉ có thể đạt cực đại tại điểm mà doanh thu cận biên bằng doanh thu bình quân.*

IV. SỰ LỰA CHỌN TỐI ƯU TRONG KINH TẾ

Trong lĩnh vực hoạt động kinh tế việc ra quyết định gắn liền với việc tối ưu hoá một hàm mục tiêu $y = f(x)$. Bài toán đặt ra là: lựa chọn x để y đạt giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất. Đối với một doanh nghiệp sản xuất, mục tiêu thường được đặt ra là tối đa hoá lợi nhuận.

a. Chọn mức sản lượng tối ưu

Giả sử doanh nghiệp có hàm tổng chi phí $TC(Q)$ và hàm tổng doanh thu $TR(Q)$. Tổng lợi nhuận của doanh nghiệp là hàm số:

$$\pi = TR(Q) - TC(Q).$$

Bài toán đặt ra là: chọn mức sản lượng Q_0 để thu lợi nhuận tối đa. Điều kiện cần để π đạt cực đại tại điểm Q_0 là:

$$\pi' = TR'(Q_0) - TC'(Q_0) = 0 \Leftrightarrow TR'(Q_0) = TC'(Q_0) \Leftrightarrow MR = MC.$$

Bằng ngôn ngữ của kinh tế học, điều kiện cần để đạt lợi nhuận tối đa là: *doanh thu cận biên bằng chi phí cận biên.*

Tại điểm mà $MR = MC$, điều kiện đủ để π đạt cực đại là:

$$\pi'' = TR'' - TC'' < 0 \;\Leftrightarrow\; TR'' < TC''.$$

Ví dụ 1: Cho biết hàm doanh thu và hàm chi phí của nhà sản xuất như sau:

$$TR = 1400Q - 7{,}5Q^2,\; TC = Q^3 - 6Q^2 + 140Q + 750.$$

Hãy chọn mức sản lượng tối ưu (cho lợi nhuận tối đa).

Giải: Hàm lợi nhuận của nhà sản xuất trong trường hợp này là:

$$\pi = TR - TC = -Q^3 - 1{,}5Q^2 + 1260Q - 750.$$

Điều kiện cần để π đạt cực đại là:

$$\pi' = -3Q^2 - 3Q + 1260 = 0 \Leftrightarrow Q^2 + Q - 420 = 0.$$

Từ phương trình này ta xác định được $Q = 20$ (loại $Q = -21$ do $Q > 0$). Tại điểm $Q = 20$ ta có $\pi'' = -6Q - 3 = -123 < 0$, do đó $Q = 20$ là điểm cực đại. Chú ý rằng trong khoảng $(0; \infty)$ hàm lợi nhuận chỉ có một điểm cực trị duy nhất, do đó mức sản lượng tối ưu của nhà sản xuất là $Q = 20$.

Ví dụ 2: Hãy xác định mức sản lượng tối ưu của nhà sản xuất độc quyền, cho biết:

Hàm chi phí cận biên $MC = 3Q^2 - 6Q + 132$;

Hàm cầu đối với sản phẩm: $Q = 148 - \frac{2}{3}p$.

Giải: Căn cứ theo cầu của thị trường, để tiêu thụ được Q sản phẩm, nhà sản xuất phải bán với giá:

$$p = 222 - 1{,}5Q$$

Tổng doanh thu của nhà sản xuất tại mức sản lượng Q là:

$$TR = pQ = (222 - 1{,}5Q)Q.$$

Doanh thu cận biên là:

$$MR = TR'_Q = 222 - 3Q.$$

Điều kiện cần để tổng lợi nhuận đạt cực đại là:

$$MR = MC \Leftrightarrow 222 - 3Q = 3Q^2 - 6Q + 132$$

$$\Leftrightarrow Q^2 - Q - 30 = 0.$$

Từ đây ta tìm được $Q = 6$ (loại $Q = -5$). Điều kiện đủ thoả mãn khi $Q = 6$:

$$TC'' = MC'(Q) = 6Q - 6 = 30,\ TR'' = MR'(Q) = -3 < TC''.$$

Mức sản lượng tối ưu là: $Q = 6$.

b. Lựa chọn tối ưu mức sử dụng yếu tố đầu vào

Xét trường hợp doanh nghiệp cạnh tranh tiến hành sản xuất với hàm sản xuất ngắn hạn $Q = f(L)$, trong điều kiện giá sản phẩm trên thị trường là p và giá lao động (tiền công) là w. Khi đó tổng lợi nhuận là hàm số của biến số L (lượng lao động được sử dụng):

$$\pi = pf(L) - wL - C_0 \ (C_0 \text{ là chi phí cố định}).$$

Bài toán đặt ra là: chọn L để π đạt cực đại. Điều kiện cần để thu lợi nhuận tối đa là:

$$\pi' = pf'(L) - w = 0 \Leftrightarrow p.MPP_L = w.$$

Như vậy, điều kiện cần để đạt lợi nhuận tối đa là: *giá trị bằng tiền của sản phẩm hiện vật cận biên của lao động bằng giá lao động.*

Tại điểm L_0 mà điều kiện cần đã được thoả mãn, điều kiện đủ để đạt lợi nhuận tối đa là:

$$\pi'' = pf''(L_0) < 0 \ \Leftrightarrow \ f''(L_0) < 0.$$

Theo quy luật lợi ích cận biên giảm dần thì sản phẩm hiện vật cận biên của lao động giảm dần khi L tăng, do đó $Q'' = f''(L) < 0$, tức là điều kiện đủ được đảm bảo.

Ví dụ: Giả sử doanh nghiệp cạnh tranh có hàm sản xuất ngắn hạn $Q = 50\sqrt{L}$, giá sản phẩm là \$4 và giá lao động là \$5. Điều kiện cần để đạt lợi nhuận tối đa là:

$$4.MPP_l = 5 \Leftrightarrow 4.\frac{25}{\sqrt{L}} = 5 \Leftrightarrow L = 400.$$

Điều kiện đủ luôn thoả mãn: $Q'' = -\dfrac{12{,}5}{L\sqrt{L}} < 0$. Để đạt lợi nhuận tối đa doanh nghiệp phải sử dụng 400 đơn vị lao động.

BÀI TẬP

47. Cho biết hàm sản xuất ngắn hạn $Q = 15.\sqrt[3]{L}$. Hãy tính MPP_L khi $L = 8$ và khi $L = 1000$ và giải thích ý nghĩa của kết quả tìm được.

48. Hãy lập hàm chi phí cận biên và hàm chi phí bình quân, cho biết hàm chi phí:

a) $TC = 3Q^2 + 7Q + 12$

b) $TC = 2Q^3 - 3Q^2 + 4Q + 10$

49. Cho biết hàm doanh thu:

$$TR = 200Q - 3Q^2.$$

Hãy lập hàm doanh thu cận biên và hàm cầu đối với sản phẩm.

50. Cho biết hàm cầu đối với sản phẩm của nhà sản xuất độc quyền, với giá p tính bằng USD:

$$Q = 500 - 0{,}2p.$$

Hãy tính MR tại mức sản lượng $Q = 90$ và giải thích ý nghĩa.

51. Cho biết hàm cầu đối với một loại hàng hoá như sau:

$$Q = 3200 - 0{,}5p^2.$$

a) Tính hệ số co dãn của cầu theo giá ở mức giá $p < 80$;

b) Tính hệ số co dãn của cầu theo giá tại các mức giá $p = 20$, $p = 50$ và giải thích ý nghĩa.

52. Cho hàm cầu tuyến tính:

$$Q = a - bp \ (a, b > 0).$$

Gọi ε là hệ số co dãn của cầu theo giá, hãy chứng minh rằng $\varepsilon = -1$ khi $p = \frac{a}{2b}$, $\varepsilon < -1$ khi $0 < p < \frac{a}{2b}$, $-1 < \varepsilon < 0$ khi $\frac{a}{2b} < p < \frac{a}{b}$.

53. Cho biết tổng doanh thu của một nhà sản xuất độc quyền tại mỗi mức sản lượng Q là $TR = 500Q - 4Q^2$. Hãy tính hệ số co dãn theo giá của cầu đối với sản phẩm của nhà sản xuất đó tại mức giá p = 300 và giải thích ý nghĩa.

54. Tính hệ số co dãn của cung theo giá tại mỗi mức giá p trong trường hợp hàm cung tuyến tính: $Q = -a + bp$ (a, b > 0).

55. Cho biết hàm lợi nhuận của nhà sản xuất như sau:

$$\pi = -\frac{1}{3}Q^3 + 14Q^2 + 60Q - 54.$$

Hãy chọn mức sản lượng tối ưu (cho lợi nhuận tối đa).

56. Hãy xác định mức sản lượng tối ưu của nhà sản xuất, cho biết hàm doanh thu và hàm chi phí như sau:

a) $TR = 4000Q - 33Q^2$, $TC = 2Q^3 - 3Q^2 + 400Q + 5000$.

b) $TR = 4350Q - 13Q^2$, $TC = Q^3 - 5{,}5Q^2 + 150Q + 675$.

57. Hãy xác định mức sản lượng tối ưu của nhà sản xuất, cho biết hàm doanh thu cận biên và và hàm chi phí cận biên như sau:

$$MR = 5900 - 20Q; \quad MC = 6Q^2 - 8Q + 140$$

58. Một nhà sản xuất độc quyền bán sản phẩm trên thị trường có hàm cầu ngược $p = 1400 - 7{,}5Q$.

a) Tính hệ số co dãn của cầu theo giá ở mỗi mức giá p;

b) Xác định mức sản lượng cho lợi nhuận tối đa, cho biết hàm chi phí cận biên $MC = 3Q^2 - 12Q + 140$.

59. Một nhà sản xuất tiêu thụ sản phẩm trên thị trường cạnh tranh với giá \$20. Cho biết hàm sản xuất $Q = 12\sqrt[3]{L^2}$ và giá thuê lao động là \$40. Hãy xác định mức sử dụng lao động cho lợi nhuận tối đa.

60. Một nhà sản xuất độc quyền tiêu thụ sản phẩm trên thị trường có hàm cầu $D(p) = 750 - p$. Cho biết hàm sản xuất $Q = 6\sqrt{L}$ và giá thuê lao động là \$14. Hãy xác định mức sử dụng lao động cho lợi nhuận tối đa.

Chương 3
HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

§1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

I. HÀM SỐ HAI BIẾN

a. Khái niệm hàm số hai biến

Khái niệm hàm số một biến số phản ánh sự phụ thuộc hàm số của một biến số vào một biến số khác: mỗi giá trị của biến độc lập được đặt tương ứng với một giá trị xác định của biến phụ thuộc. Trong thực tế, nhiều khi một biến số phụ thuộc không chỉ vào một mà còn phụ thuộc đồng thời vào nhiều biến số khác. Chẳng hạn, sản lượng, tức là số lượng sản phẩm đầu ra của một nhà sản xuất, phụ thuộc vào mức sử dụng các yếu tố đầu vào (gọi là các yếu tố sản xuất) như lao động, vốn v.v...

Khái niệm hàm số n biến số phản ánh sự phụ thuộc hàm số của một biến số vào n biến số khác. Để cho đơn giản , trước hết ta đề cập đến trường hợp $n = 2$.

Cho một cặp biến số có thứ tự (x, y). Như ta đã biết, việc thiết lập hệ toạ độ trên mặt phẳng cho phép ta đồng nhất mỗi cặp số thực có thứ tự (x_0, y_0) với một điểm $M_0(x_0, y_0)$ của mặt phẳng. Mặt phẳng toạ độ được gọi là không gian hai chiều và được ký hiệu là $\mathbb{R}^2$. Theo quan điểm này, một cặp biến số (x, y) được xem như một biến điểm M(x, y) với miền biến thiên là một tập hợp **D** của không gian $\mathbb{R}^2$ và khái niệm hàm hai biến có thể định nghĩa bằng ngôn ngữ hình thức của toán học như sau:

Định nghĩa: *Một hàm số f của biến điểm M(x, y)*, với miền biến thiên $\mathbf{D} \subset \mathbb{R}^2$, là một quy tắc (quy luật) đặt tương ứng mỗi điểm $M(x, y) \in \mathbf{D}$ với một và chỉ một số thực w.

Miền **D** được gọi là *miền xác định* của hàm số f, còn số thực w tương ứng với điểm M(x, y) được gọi là *giá trị* của hàm số f tại điểm M(x, y) và được ký hiệu là f(M), hoặc f(x, y). Một hàm số của biến điểm hai chiều M(x, y) còn được gọi là *hàm số của hai biến số x và y*.

Trong các lĩnh vực khoa học người ta thường thiết lập sự phụ thuộc của một biến số w vào hai biến số x, y dưới dạng một hàm hai biến. Chẳng hạn, trong hình học diện tích S của một tam giác phụ thuộc vào cạnh đáy a và đường cao h theo quy luật hàm số: $S = \frac{ah}{2}$. Để nói rằng biến số w là một hàm số của hai biến x và y ta dùng ký hiệu w = f(x, y), trong đó f là một quy tắc cho phép ta xác định được giá trị tương ứng của w khi biết giá trị của x và y. Trong trường hợp này người ta còn nói rằng *biến số w phụ thuộc hàm số vào các biến số x, y*. Các biến số x, y được gọi là các *biến số độc lập*, hay các *đối số* của hàm số. Trong toán học, các ký hiệu biến số chỉ mang ý nghĩa hình thức. Khi nói đến các hàm số khác nhau người ta có thể vẫn dùng các ký hiệu biến số như nhau, nhưng phân biệt ở ký hiệu biểu diễn quy luật hàm số: $w = f(x,y)$, $w = g(x,y)$, $w = h(x,y)$ ...

Khi cho một hàm hai biến, các cách diễn đạt sau đây có nghĩa như nhau:

- Hàm số f xác định trên miền $\mathbf{D} \subset \mathbb{R}^2$;
- Hàm số f(M), $M \in \mathbf{D}$;
- Hàm số f(x, y), $(x, y) \in \mathbf{D}$;
- Hàm số w = f(x, y), $(x, y) \in \mathbf{D}$.

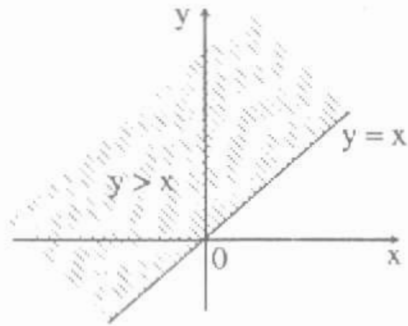
b. Miền xác định của hàm số dạng biểu thức

Miền xác định (MXĐ) của hàm hai biến $w = f(x,y)$ là miền biến thiên của biến điểm M(x, y). Nếu biểu diễn hình học thì đó là một tập hợp điểm của mặt phẳng toạ độ. Về nguyên tắc, khi cho một hàm số ta phải cho trước miền xác định **D** và chỉ rõ quy tắc f đặt tương ứng mỗi điểm $M(x, y) \in$ **D** với một số thực w nhất định.

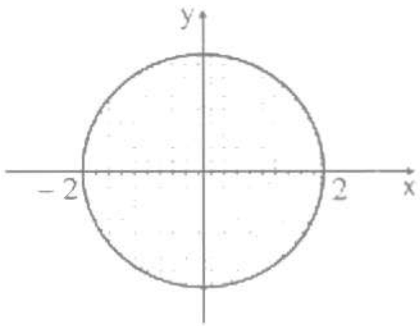
Thông thường một hàm số của hai biến x, y được cho dưới dạng một biểu thức $f(x,y)$. Mỗi biểu thức hai biến số x và y có MXĐ tự nhiên của nó. *Miền xác định tự nhiên* của một biểu thức $f(x,y)$ là tập hợp tất cả các cặp số thực (x_0, y_0) mà biểu thức đó có nghĩa khi ta gán $x = x_0$ và $y = y_0$. Hàm số cho dưới dạng một biểu thức hai biến $f(x,y)$ đặt tương ứng mỗi điểm $M_0(x_0, y_0)$ thuộc MXĐ tự nhiên của biểu thức đó với giá trị tính toán của nó khi gán $x = x_0$, $y = y_0$. Nói chung MXĐ của một hàm hai biến cho dưới dạng biểu thức có thể là tập con **D** bất kỳ của MXĐ tự nhiên của biểu thức đó (tuỳ theo ý nghĩa của các biến số). Tuy nhiên, trong toán học người ta thường xét biểu thức hàm số trong toàn bộ MXĐ tự nhiên của nó.

Ví dụ:

- MXĐ tự nhiên của hàm số $w = \sqrt{y - x}$ là tập hợp tất cả các điểm M(x, y) thoả mãn điều kiện $y \geq x$. Nếu biểu diễn hình học thì đó là nửa mặt phẳng phía trên đường thẳng y = x, kể cả đường thẳng này.



- MXĐ tư nhiên của hàm số $w = \ln(4 - x^2 - y^2)$ là tập hợp tất cả các điểm M(x, y) thoả mãn điều kiện $x^2 + y^2 < 4$. Đó là hình tròn có tâm ở gốc toạ độ có bán kính r = 2 (không kể các điểm của đường tròn).



c. Miền giá trị

Tương tư như trong trường hợp hàm một biến, ta dùng ký hiệu $f(x_0, y_0)$ hoặc $f(M_0)$ để chỉ giá trị tương ứng của hàm hai biến $w = f(x, y)$ tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ thuộc MXĐ của nó.

Ví dụ: Với $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ta có:

$f(0, 0) = 0$, $f(2, -1) = \sqrt{5}$, $f(3, 4) = 5$, $f(-2, -3) = \sqrt{13}$, ..

Định nghĩa: *Miền giá trị* (MGT) của hàm số $w = f(x, y)$ là tập hợp tất cả các giá trị của hàm số khi điểm M(x,y) thay đổi trong miền xác định.

Ví dụ: Miền giá trị của hàm số $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, là khoảng $[0; +\infty)$.

d. Đồ thị của hàm hai biến

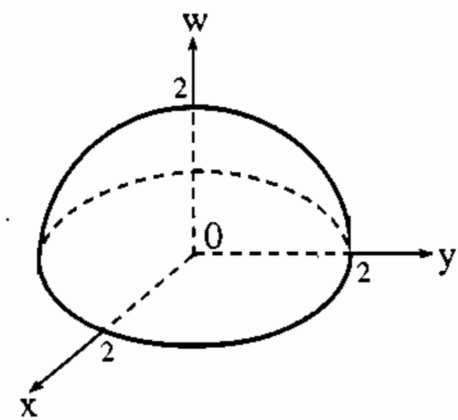
Để biểu diễn hình học quan hệ hàm số $w = f(x, y)$, trong không gian ba chiều ta dùng hệ toạ độ vuông góc với trục hoành 0x biểu diễn biến số x, trục tung 0y biểu diễn biến số y và trục cao 0w biểu diễn biến phụ thuộc w.

Miền xác định **D** của hàm số w = f(x, y) là một tập hợp điểm trên mặt phẳng (0xy). Theo quy tắc f, mỗi điểm M(x, y) cho tương ứng một số w là giá trị của hàm số tại điểm M(x, y), theo đó ta có tương ứng một điểm P(x, y, w) trong không gian với cao độ bằng w.

Định nghĩa: *Đồ thị* của hàm số w = f(x, y) là tập hợp tất cả các điểm P(x, y, w) trong không gian, trong đó M(x, y) là điểm bất kỳ thuộc miền xác định **D** và w là giá trị của hàm số tại điểm đó.

Thông thường đồ thị của một hàm hai biến là một mặt trong không gian 3 chiều.

Ví dụ: Đồ thị hàm số $w = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ là nửa mặt cầu có tâm ở gốc toạ độ và bán kính R = 2.



e. Đường mức

Cho w = f(x, y) là một hàm số xác định trong miền **D** và w_0 là một giá trị cố định của hàm số đó.

Định nghĩa: *Đường mức* của hàm số $w = f(x,y)$ là tập hợp tất cả các điểm $M(x,y)$ thoả mãn điều kiện :

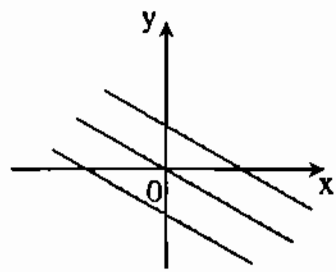
$$f(x, y) = w_0.$$

Nói cách khác, *đường mức của hàm hai biến $w = f(x,y)$ là tập hợp tất cả các điểm của mặt phẳng (0xy) mà khi điểm $M(x, y)$ biến thiên trên tập hợp đó, hàm số nhận một giá trị w_0 cố định.*

Thông thường đường mức của một hàm hai biến là một đường trên mặt phẳng. Mỗi giá trị w_0 cố định cho tương ứng một đường mức.

Ví dụ:

Các đường mức của hàm số $w = 2x + 3y$ là các đường thẳng $2x + 3y = w_0$, với w_0 là hằng số.



II. HÀM SỐ n BIẾN SỐ

a. Không gian điểm n chiều

Theo phương pháp toạ độ, mỗi điểm trên mặt phẳng được đồng nhất với một bộ hai số thực có thứ tự (x, y) và mỗi điểm trong không gian ba chiều được đồng nhất với một bộ ba số thực có thứ tự (x, y, z).

Trên mặt phẳng (trong không gian hai chiều) khoảng cách giữa hai điểm $M(x, y)$ và $M'(x', y')$ được xác định theo công thức:

$$d(M, M') = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}.$$

Tương tự, trong không gian ba chiều khoảng cách giữa hai điểm $M(x, y, z)$ và $M'(x', y', z')$ được xác định theo công thức:

$$d(M, M') = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}.$$

Tổng quát hoá các khái niệm nói trên ta định nghĩa điểm n chiều và không gian n chiều như sau:

Định nghĩa 1: Mỗi bộ n số thực có thứ tự $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ được gọi là một điểm n chiều.

Để gán tên cho một điểm n chiều $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ta dùng một chữ cái in hoa. Nếu gọi tên điểm đó là X thì ta viết:

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \text{ hoặc } X(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Định nghĩa 2: *Không gian điểm n chiều* (gọi tắt là không gian n chiều) là tập hợp tất cả các điểm n chiều, trong đó khoảng cách giữa hai điểm $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $X'(x'_1, x'_1, \ldots, x'_n)$ được xác định theo công thức:

$$d(X, X') = \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 + \cdots + (x'_n - x_n)^2}. \quad (1.1)$$

Không gian n chiều được ký hiệu là $\mathbb{R}^n$.

Ta có thể chứng minh được rằng khoảng cách trong không gian $\mathbb{R}^n$, xác định theo công thức (1.1), thoả mãn các tính chất quen biết của khoảng cách hình học trên mặt phẳng và trong không gian 3 chiều:

1. $d(X, X') \geq 0$;
2. $d(X, X') = 0$ khi và chỉ khi $X = X'$, tức là khi $x_i = x'_i$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$;
3. $d(X, X') = d(X', X)$;
4. $d(X, X') + d(X', X'') \geq d(X, X'')$.

Ba tính chất đầu là hiển nhiên. Để chứng minh tính chất thứ tư ta xét ba điểm n chiều bất kỳ:

$$X(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ X'(x'_1, x'_1, \ldots, x'_n),\ X''(x''_1, x''_2, \ldots, x''_n).$$

Đặt

$$x'_k - x_k = a_k, \; x''_k - x'_k = b_k,$$

ta có:

$$x''_k - x_k = a_k + b_k \; (k = 1, 2, \dots, n).$$

Tính chất 4 được viết dưới dạng:

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}$$

$$\geq \sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + \cdots + (a_n + b_n)^2}.$$

Bình phương hai vế và quy gọn ta được bất đẳng thức tương đương:

$$\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)} \geq a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$$

Bất đẳng thức này đã được nói đến trong chương trình toán sơ cấp dưới tên gọi là bất đẳng thức Bunhiacopxki.

b. Khái niệm hàm số n biến số

Ta có thể xem mỗi bộ n biến số có thứ tự $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ như một biến điểm $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ của không gian n chiều. Khái niệm hàm số n biến số được định nghĩa tương tự như hàm số hai biến số.

Định nghĩa:

Một hàm số f của biến điểm n chiều $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$, với miền biến thiên $\mathbf{D} \subset \mathbb{R}^n$, là một quy tắc (quy luật) đặt tương ứng mỗi điểm $X(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{D}$ với một và chỉ một số thực w. Miền **D** được gọi là *miền xác định* của hàm số f và số w được gọi là *giá trị của hàm số f tại điểm $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$* và được ký hiệu là $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, hoặc f(X).

Hàm số f của biến điểm n chiều $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ còn được gọi là hàm số của n biến số $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Khi dùng quan hệ hàm số f để biểu diễn sự phụ thuộc của một biến số w vào n biến số $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (gọi là các *biến độc lập* hay các *đối số*) ta dùng ký hiệu:

$$w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Các cách gọi tên hàm số sau đây được sử dụng với nghĩa như nhau:

- Hàm số f xác định trên miền $\mathbf{D} \subset \mathbb{R}^n$;
- Hàm số f(X), $X \in \mathbf{D}$;
- Hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{D}$;
- Hàm số $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{D}$.

Thông thường một hàm n biến được cho dưới dạng một biểu thức n biến $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Các khái niệm MXĐ, MGT của hàm số n biến số được hiểu theo nghĩa tương tự như đã định nghĩa cho hàm số hai biến số. Tập hợp tất cả các điểm n chiều $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mà tại đó hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nhận cùng một giá trị w_0 cố định được gọi là *tập mức* của hàm số đó. Phương trình của tập mức tương ứng với mỗi giá trị w_0 cho trước có dạng:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = w_0.$$

III. PHÉP HỢP HÀM

Giả sử hàm số $w = f(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ có các đối số $u_1, u_2, \ldots, u_m$ là các hàm số của các biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$u_k = \varphi_k(X) = \varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ X \in \mathbf{D}^{(1)}\ \ (k = 1, 2, \ldots, m).$$

(1) Ta giả thiết rằng các hàm số φ_i có cùng MXĐ.

Giả sử tập hợp tất cả các bộ giá trị $(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ của các hàm số $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ là tập con của MXĐ của hàm số f. Khi đó biến w là hàm số của các biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$ theo quy luật tương ứng bắc cầu:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \overset{\varphi_k}{\longmapsto} (u_1, u_2, \ldots, u_m) \overset{f}{\longmapsto} w.$$

Hàm số

$$\begin{aligned} w &= f[\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \\ &= g(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

đặt tương ứng mỗi điểm $X(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ với một số thực w theo quy luật tương ứng nói trên được gọi là *hàm hợp* của các hàm số $w = f(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ và $u_k = \varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Hàm hợp còn được gọi là *hàm kép*.

Ví dụ:

Hàm số $w = e^{xy} + \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ là hợp của các hàm số

$$w = u + v,\ u = e^{xy},\ v = \sqrt{1 + x^2 + y^2}.$$

Tiếp theo, hàm số $u = e^{xy}$ là hợp của các hàm số $u = e^t$ và $t = xy$; hàm số $v = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ là hợp của các hàm số $w = \sqrt{z}$, $z = 1 + x^2 + y$.

IV. MỘT SỐ HÀM SỐ TRONG PHÂN TÍCH KINH TẾ

Để tiếp cận với các phương pháp phân tích định lượng trong kinh tế học, ta hãy làm quen với một số hàm số mà các nhà kinh tế hay sử dụng khi phân tích các hoạt động kinh tế. Các ký hiệu biến số kinh tế đưa ra ở đây là các ký hiệu thông dụng trong các tài liệu về kinh tế học, thường là lấy chữ cái đầu của từ tiếng Anh tương ứng.

a. Hàm sản xuất

Hàm sản xuất là hàm số biểu diễn sự phụ thuộc của sản lượng tiềm năng của một doanh nghiệp vào lượng sử dụng các yếu tố sản xuất. Khi phân tích hoạt động sản xuất, các nhà kinh tế thường lưu tâm đến hai yếu tố sản xuất quan trọng nhất là tư bản (capital) và lao động (labor). Gọi K là lượng tư bản (vốn) và L là lượng lao động được sử dụng. Với trình độ công nghệ của mình, khi sử dụng K đơn vị tư bản và L đơn vị lao động, doanh nghiệp có khả năng sản xuất một lượng sản phẩm tối đa ký hiệu là Q (gọi là sản lượng tiềm năng). Hàm sản xuất có dạng:

$$Q = f(K, L). \tag{1.2}$$

Hàm số (1.2) cho biết số lượng sản phẩm mà doanh nghiệp có khả năng sản xuất được ở mỗi mức sử dụng kết hợp vốn và lao động. Khi phân tích sản xuất người ta giả thiết rằng các doanh nghiệp khai thác hết khả năng công nghệ, tức là Q luôn luôn là sản lượng tiềm năng, do đó hàm sản xuất f là do công nghệ xác định.

Dạng hàm sản xuất mà các nhà kinh tế học hay sử dụng là hàm Cobb-Douglas:

$$Q = aK^{\alpha} L^{\beta},$$

trong đó α, β, a là các hằng số dương.

Đường mức của hàm sản xuất có phương trình :

$$f(K, L) = Q_0 \quad (Q_0 = \text{const} > 0).$$

Trong kinh tế học thuật ngữ "đường mức " của hàm sản xuất có tên gọi là *đường đồng lượng*, hay *đường đẳng lượng* (isoquant). Đường đồng lượng là tập hợp các tổ hợp yếu tố sản xuất (K, L) cho cùng một mức sản lượng Q_0 cố định.

b. Hàm chi phí và hàm lợi nhuận

Như ta đã biết, tổng chi phí sản xuất TC (Total cost) tính theo sản lượng gọi là hàm chi phí, có dạng :

$$TC = TC(Q).$$

Nếu tính theo các yếu tố sản xuất thì hàm chi phí là hàm số của các yếu tố sản xuất:

$$TC = w_K K + w_L L + C_0,$$

trong đó w_K là giá thuê một đơn vị tư bản (chẳng hạn như một giờ sử dụng xưởng máy); w_L là giá thuê một đơn vị lao động (chẳng hạn như một giờ làm việc của một công nhân); C_0 là chi phí cố định.

Nếu doanh nghiệp cạnh tranh có hàm sản xuất $Q = f(K, L)$ và giá thị trường của sản phẩm là p thì tổng doanh thu của doanh nghiệp là hàm số của K và L:

$$TR = pQ = pf(K, L).$$

Tổng lợi nhuận của một doanh nghiệp cạnh tranh là hàm số:

$$\pi = pf(K, L) - (w_K K + w_L L + C_0).$$

c. Hàm chi phí kết hợp

Trên thực tế có nhiều doanh nghiệp sản xuất kết hợp nhiều loại sản phẩm. Giả sử doanh nghiệp sản xuất n sản phẩm. Với trình độ công nghệ nhất định, để sản xuất Q_1 đơn vị sản phẩm 1, Q_2 đơn vị sản phẩm 2, ... , Q_n đơn vị sản phẩm n, doanh nghiệp phải bỏ ra một khoản chi phí TC. Như vậy TC là hàm số của n biến số:

$$TC = TC(Q_1, Q_2, ..., Q_n). \tag{1.3}$$

Hàm số (1.3) được gọi là *hàm chi phí kết hợp*.

d. Hàm lợi ích (Utility function)

Sở thích của người tiêu dùng là một trong các yếu tố quan trọng chi phối quyết định mua sắm, tức là ảnh hưởng tới phía cầu của hoạt động kinh tế. Các nhà kinh tế học dùng *biến số lợi ích* U (Utility) để biểu diễn mức độ ưa thích của người tiêu dùng đối với mỗi tổ hợp hàng hoá trong cơ cấu tiêu dùng. Ta gọi mỗi tổ hợp hàng hoá là một túi hàng. Giả sử cơ cấu tiêu dùng gồm có n mặt hàng. Mỗi túi hàng là một bộ n số thực $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, trong đó x_i là lượng hàng hoá T_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). *Hàm lợi ích* là hàm số đặt tương ứng mỗi túi hàng $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ với một giá trị lợi ích U nhất định theo quy tắc: túi hàng nào được ưa chuộng hơn thì được gán giá trị lợi ích lớn hơn. Hàm lợi ích có dạng tổng quát như sau:

$$U = U(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Một trong những dạng hàm lợi ích hay được sử dụng là hàm Cobb-Douglas:

$$U = ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

($a, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ là các hằng số dương).

Tập mức của hàm lợi ích có phương trình :

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n) = U_0 \ (U_0 = \text{const}).$$

Trong kinh tế học tập mức của hàm lợi ích được gọi là *tập bàng quan* (Indifferent set). Tập bàng quan là tập hợp tất cả các túi hàng đem lại cùng một mức lợi ích cho người tiêu dùng (tập hợp các túi hàng được ưa chuộng như nhau). Trường hợp n = 2 tập bàng quan được gọi là *đường bàng quan* (Indifferent curve). Phương trình của đường bàng quan là phương trình hai biến số:

$$U(x_1, x_2) = U_0.$$

Chú ý rằng hàm lợi ích được sử dụng để biểu diễn sở thích của người tiêu dùng: túi hàng nào được ưa thích hơn thì được gán giá trị lợi ích lớn hơn. Giá trị lợi ích U chỉ mang ý nghĩa ước lệ. Nếu $V = g(U)$ là một hàm đơn điệu đồng biến thì hai hàm lợi ích $U = U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, và $V = g[U(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ cùng mô tả một sở thích.

e. Hàm cung và hàm cầu trên thị trường nhiều hàng hoá liên quan

Hàm cung (*hàm cầu*) biểu diễn lượng hàng hoá mà người bán bằng lòng bán (người mua bằng lòng mua) ở mỗi mức giá. Lượng cung và lượng cầu đối với một loại hàng hoá trên thị trường không những phụ thuộc vào giá của hàng hoá đó mà còn bị chi phối bởi giá của các hàng hoá liên quan và thu nhập của người tiêu dùng. Trên thị trường n hàng hoá liên quan hàm cung hàng hoá i và hàm cầu đối với hàng hoá i có dạng (với giả thiết thu nhập không thay đổi):

$$Q_{si} = S_i(p_1, p_2, \ldots, p_n),$$
$$Q_{di} = D_i(p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

trong đó Q_{si} là lượng cung hàng hoá i, Q_{di} là lượng cầu đối với hàng hoá i, p_i là giá hàng hoá i (i =1, 2, ..., n). Mô hình cân bằng của thị trường n hàng hoá liên quan có dạng:

$$\begin{cases} Q_{si} = Q_{di} \\ Q_{si} = S_i(p_1, p_2, \cdots, p_n) \\ Q_{di} = D_i(p_1, p_2, \cdots, p_n) \\ i = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

Hệ phương trình xác định giá cân bằng là:

$$\begin{cases} S_i(p_1, p_2, \cdots, p_n) = D_i(p_1, p_2, \cdots, p_n) \\ i = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

BÀI TẬP

1. Cho hàm số:

$$f(x, y) = x^3 + 3y^3 + 2xy^2.$$

Hãy tính các giá trị f(0, 1), f(1, – 2), f(a, b), f(b, a), f(a, 2a).

2. Cho hàm số:

$$f(x, y, z) = \frac{x + 2y + 3z}{x^2 + y^2 + x^2 + 1}.$$

Hãy tính các giá trị f(0, 0, 0), f(1, – 1, 1), f(3, 2, – 2), f(a, 2a, 3a).

3. Tìm MXĐ của các hàm số:

a) $u = \ln(xy)$ b) $u = \dfrac{x + y}{\sqrt{x - y}}$

c) $u = \arccos\dfrac{x^2 + y^2}{4}$ c) $u = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{4 - y^2}$

4. Tìm MXĐ của các hàm số:

a) $u = \dfrac{xyz}{x + y + z}$ b) $u = \dfrac{1}{\ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)}$

5. Hãy viết phương trình đường mức đi qua điểm A(0, 1) của hàm số:

$$u = \frac{x^2 + y^2}{2x + 6y}.$$

6. Hãy viết phương trình mặt mức đi qua điểm A(1, 1, 1) của hàm số:

$$u = x + y + z.$$

7. Lập hàm hợp của các hàm số sau:

$$w = u^2 + v^2,\ u = \sin x + \sin y + \sin z,\ v = \cos x + \cos y + \cos z.$$

8. Tìm biểu thức hàm số f(x, y), cho biết:

$$f(x + y, x - y) = x^2 + xy + 2y^2.$$

9. Một công ty cạnh tranh sản xuất một loại sản phẩm với hàm sản xuất $Q = 5\sqrt[3]{K}.\sqrt{L}$, với Q, K, L được tính hàng ngày.

a) Hãy viết phương trình đường đồng lượng ứng với mức sản lượng $Q = 200$.

b) Hãy biểu diễn tổng doanh thu, tổng chi phí và tổng lợi nhuận hàng ngày của công ty theo K và L, cho biết giá sản phẩm trên thị trường là \$4, giá tư bản là \$15, giá lao động là \$8 và mỗi ngày công ty phải trả \$50 chi phí khác.

10. Một nhà sản xuất độc quyền có hàm sản xuất $Q = 40K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{5}{6}}$ và tiêu thụ sản phẩm trên thị trường có hàm cầu $D(p) = 350 - 3p$. Hãy lập hàm số biểu diễn tổng doanh thu theo K và L.

11. Một công ty độc quyền sản xuất 2 loại sản phẩm với hàm chi phí kết hợp (Q_i là lượng sản phẩm i):

$$TC = 3Q_1^2 - 2Q_1Q_2 + 4Q_2^2.$$

a) Lượng chi phí mà công ty phải bỏ ra để sản xuất 4 đơn vị sản phẩm 1 và 2 đơn vị sản phẩm 2 là bao nhiêu?

b) Cho biết hàm cầu đối với sản phẩm 1 là $D_1(p_1) = 320 - 5p_1$, hàm cầu đối với sản phẩm 2 là $D_2(p_2) = 150 - 2p_2$. Hãy lập hàm số biểu diễn tổng lợi nhuận của công ty theo Q_1, Q_2.

12. Giả sử người tiêu dùng có hàm lợi ích như sau:

$$U = xy + 4y,$$

trong đó x là lượng hàng hoá A, y là lượng hàng hoá B.

a) Viết phương trình đường bàng quan, cho biết một trong các túi hàng thuộc đường bàng quan đó là $(x = 4, y = 3)$.

b) Hãy cho biết trong 2 túi hàng $(x = 4, y = 3)$ và $(x = 5, y = 2)$, túi hàng nào được ưa chuộng hơn?

c) Giả sử người tiêu dùng đang có 8 hàng hoá A, 3 hàng hoá B và có người đề nghị đổi cho chị ta một số hàng hoá A để lấy 1 hàng hoá B. Hỏi người đó phải đổi ít nhất bao nhiêu hàng hoá A thì chị ta mới bằng lòng đổi.

§2. GIỚI HẠN VÀ TÍNH LIÊN TỤC

I. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ 2 BIẾN SỐ

a. Giới hạn của dãy điểm trên mặt phẳng

Như ta đã biết, khoảng cách giữa 2 điểm M(x, y) và $M'(x', y')$ của mặt phẳng toạ độ được xác định theo công thức

$$d(M, M') = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}. \qquad (2.1)$$

Giả sử theo một quy tắc nhất định mỗi số tự nhiên k được đặt tương ứng với một điểm $M_k(x_k, y_k)$ nhất định trên mặt phẳng. Khi đó ta có dãy điểm :

$$M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \ldots, M_k(x_k, y_k), \ldots$$

Định nghĩa: Nếu tồn tại một điểm cố định A(a, b) sao cho

$$\lim_{k\to+\infty} d(M_k, A) = 0$$

thì ta nói rằng *dãy điểm* M_k *hội tụ đến điểm A*, hay *điểm A là giới hạn của dãy điểm* M_k *khi* $k \to +\infty$ và ký hiệu như sau :

$$\lim_{k\to+\infty} M_k = A \quad \text{hay} \quad M_k \to A \text{ khi } k \to +\infty.$$

Dựa vào công thức xác định khoảng cách (2.1) ta có thể chứng minh :

Định lý: Dãy điểm $M_k(x_k, y_k)$ hội tụ đến điểm A(a, b) khi và chỉ khi

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = a \text{ và } \lim_{k\to+\infty} y_k = b.$$

Chứng minh:

Giả sử dãy khoảng cách $d_k = d(M_k, A)$ có giới hạn 0. Cho số $\varepsilon > 0$ bất kỳ ta tìm được số tự nhiên k_0 đủ lớn sao cho:

$$d_k = \sqrt{(x_k - a)^2 + (y_k - b)^2} < \varepsilon, \forall k > k_0.$$

Từ đây suy ra $|x_k - a| < \varepsilon$ và $|y_k - b| < \varepsilon, \forall k > k_0$ (nếu một trong hai bất đẳng thức này không thoả mãn thì $d_k \geq \varepsilon$), do đó

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = a \text{ và } \lim_{k\to+\infty} y_k = b.$$

Ngược lại, nếu $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = a$ và $\lim\limits_{k\to+\infty} y_k = b$ thì theo số $\varepsilon > 0$ bất kỳ ta tìm được các số tự nhiên k_1, k_2 đủ lớn sao cho

$$|x_k - a| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \forall k > k_1 \text{ và } |x_k - a| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \forall k > k_2.$$

Gọi k_0 là số lớn hơn trong hai số k_1, k_2, ta có

$$d_k = \sqrt{(x_k - a)^2 + (y_k - b)^2} < \varepsilon, \forall k > k_0.$$

Điều này chứng tỏ $d_k \to 0$ khi $k \to +\infty$.

Định lý trên cho thấy sự hội tụ của dãy điểm trên mặt phẳng tương đương với sự hội tụ theo toạ độ.

Ví dụ: **Để tìm giới hạn của dãy điểm $\left\{M_k\left(\frac{1}{k}, \frac{k}{k+1}\right)\right\}$ ta tính giới hạn của các dãy số x_k và y_k:**

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k} = 0, \quad \lim_{k\to+\infty} y_k = \lim_{k\to+\infty} \frac{k}{k+1} = 1.$$

Theo định lý trên, ta có:

$$M_k\left(\frac{1}{k}, \frac{k}{k+1}\right) \to A(0, 1) \text{ khi } k \to +\infty.$$

b. Giới hạn của hàm số

Cho hàm số w = f(M), M(x, y)∈**D**. Giả sử A(a, b) là một điểm cố định của mặt phẳng sao cho tồn tại các dãy điểm $\left\{M_k\left(x_k, y_k\right)\right\}$ của miền **D** hội tụ đến điểm A (Điểm A có thể thuộc miền **D** hoặc không).

Lý thuyết giới hạn xem xét xu hướng của biến phụ thuộc w khi điểm M(x, y) thay đổi trong miền **D** và tiến dần đến điểm A, tức là khi thu hẹp một cách tuỳ ý khoảng cách từ điểm M đến điểm A (với giả thiết M ≠ A). Quá trình này được ký hiệu là:

$$M \to A \text{ hay } x \to a,\ y \to b.$$

Với w = f(M) = f(x, y) là một hàm số cho trước, mỗi dãy điểm

$$M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \ldots, M_k(x_k, y_k), \ldots \qquad (2.2)$$

cho tương ứng một dãy số với các số hạng là các giá trị tương ứng của hàm số w = f(x, y):

$$w_1 = f(M_1),\ w_2 = f(M_2),\ \ldots,\ w_k = f(M_k),\ \ldots \qquad (2.3)$$

Định nghĩa: Nếu với mọi dãy điểm (2.2) lấy từ miền xác định **D** của hàm số w = f(M) và hội tụ đến điểm A(a, b) mà dãy số (2.3) luôn luôn có giới hạn L thì số L được gọi là *giới hạn của hàm số w = f(M) khi M → A (khi x → a , y → b)* và ký hiệu như sau :

$$\lim_{M \to A} f(M) = L,$$

hoặc

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = L \qquad (2.4)$$

Ví dụ:

Sử dụng định nghĩa ta dễ dàng chứng minh :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}(3x - y^2) = -1.$$

Thật vậy, ở đây $f(x, y) = 3x - y^2$, $a = 1$, $b = 2$. Lấy bất kỳ dãy điểm $M_k(x_k, y_k)$ hội tụ đến điểm $A(1, 2)$, ta có :

$$f(x_k, y_k) = 3x_k - y_k^2,\quad \lim_{k\to+\infty} x_k = 1,\quad \lim_{k\to+\infty} y_k = 2$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{k\to+\infty} f(x_k, y_k) = \lim_{k\to+\infty}(3x_k - y_k^2) = -1.$$

Vậy, theo định nghĩa ta có

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}(3x - y^2) = -1.$$

c. Chú ý về các giới hạn lặp

Giới hạn (2.4) theo định nghĩa trên đây được gọi là *giới hạn bội* hoặc *giới hạn kép* (các quá trình $x \to a$, $y \to b$ diễn ra đồng thời, không phụ thuộc lẫn nhau). Ngoài giới hạn kép ta còn có thể xét các *giới hạn lặp* theo cách thức như sau :

- Với $y \neq b$ cố định ta tính giới hạn $\lim_{x\to a} f(x, y) = \varphi(y)$, sau đó tính tiếp giới hạn $\lim_{y\to b}\varphi(y) = E$. Trong trường hợp này ta viết

$$\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x, y) = E. \tag{2.5}$$

- Tương tự, ký hiệu

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x, y) = F \tag{2.6}$$

có nghĩa là

$$\lim_{y\to b} f(x, y) = \psi(x)\ \ (x \neq a) \text{ và } \lim_{x\to a}\psi(x) = F.$$

Nói chung giới hạn kép (2.4) và các giới hạn lặp (2.5), (2.6) là các giới hạn khác nhau, thậm chí các giới hạn lặp (2.5) và (2.6) cũng có thể khác nhau .

Ví dụ: Xét hàm số: $f(x, y) = \dfrac{x^2 + xy}{x^2 + y^2}$.

Dễ dàng thấy rằng khi $x \to 0$, $y \to 0$ hàm số đã cho không có giới hạn kép. Thật vậy, dọc theo hai dãy điểm $M_k\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$ và $M'_k\left(\frac{1}{k}, \frac{3}{k}\right)$ cùng hội tụ đến điểm A(0, 0), ta có

$$\lim_{k\to+\infty} f(M_k) = \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = 1,$$

trong khi đó

$$\lim_{k\to+\infty} f(M'_k) = \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{1}{k^2} + \frac{3}{k^2}}{\frac{1}{k^2} + \frac{9}{k^2}} = \frac{2}{5}.$$

Các giới hạn lặp trong trường hợp này cũng khác nhau :

$$\varphi(y) = \lim_{x\to 0} f(x, y) = 0 \ \forall y \neq 0 \Rightarrow \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x, y) = \lim_{y\to 0}\varphi(y) = 0,$$

$$\psi(x) = \lim_{y\to 0} f(x, y) = 1 \ \forall x \neq 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x, y) = \lim_{x\to 0}\psi(x) = 1.$$

II. GIỚI HẠN CỦA HÀM n BIẾN

a. Sự hội tụ của dãy điểm trong không gian n chiều

Khái niệm giới hạn của dãy điểm trong không gian n chiều được định nghĩa hoàn toàn tương tự như trên mặt phẳng. Xin nhắc lại rằng khoảng cách giữa hai điểm $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và

$X'(x'_1, x'_1, \dots, x'_n)$ của không gian n chiều được xác định theo công thức:

$$d(X, X') = \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 + \cdots + (x'_n - x_n)^2}.$$

Xét một dãy điểm n chiều:

$$X_1, X_2, \dots, X_k, \dots$$

trong đó $X_k = X_k(x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$ là các điểm trong không gian $\mathbf{R}^n$. Ta sẽ gọi tắt là *dãy điểm X_k*.

Định nghĩa: Ta nói dãy điểm $X_k(x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})$ hội tụ đến điểm $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ hay điểm A là *điểm giới hạn của dãy điểm X_k* (khi $k \to +\infty$) khi và chỉ khi

$$\lim_{k \to +\infty} d(X_k, A) = 0.$$

Khi đó ta dùng ký hiệu:

$$\lim_{k \to +\infty} X_k = A, \text{ hoặc } X_k \to A \text{ khi } k \to +\infty.$$

Tương tự như trên mặt phẳng ta có thể chứng minh được rằng dãy điểm $X_k(x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})$ hội tụ đến điểm $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ khi và chỉ khi

$$\lim_{k \to +\infty} x_{ki} = a_i, \ \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

b. Giới hạn của hàm số n biến số

Khái niệm giới hạn của hàm số 2 biến số mà ta đã định nghĩa trên đây được chuyển tổng quát cho trường hợp hàm số n biến số bằng cách thay biến điểm 2 chiều M(x, y) bằng biến điểm n chiều $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ và thay điểm A(a, b) bằng điểm $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Định nghĩa:

Số L được gọi là giới hạn của hàm số $w = f(X)$ khi $X \to A$ (khi $x_1 \to a_1$, $x_2 \to a_2$, ... , $x_n \to a_n$) nếu với mọi dãy điểm X_k lấy từ MXĐ của hàm số $f(X)$ và hội tụ đến điểm A, dãy số $w_k = f(X_k)$ luôn luôn có giới hạn bằng L.

Hai ký hiệu sau được sử dụng với nghĩa như nhau:

$$\lim_{X \to A} f(X) = L \quad \text{hoặc} \quad \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \vdots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = L.$$

Áp dụng định nghĩa giới hạn của hàm số n biến số cho trường hợp n =1 ta có định nghĩa quen biết về giới hạn của hàm một biến. Sự tương hợp về khái niệm cho phép ta thiết lập các định lý tương tự về giới hạn như đã biết trong lý thuyết hàm số một biến số. Các quy tắc tính giới hạn (giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương) của hàm một biến có thể áp dụng cho hàm số với số biến bất kỳ:

Định lý: Nếu các hàm số $f(X)$ và $g(X)$ có giới hạn hữu hạn khi $X \to A$ thì:

1. $\lim\limits_{X \to A}[f(X) \pm g(X)] = \lim\limits_{X \to A} f(X) \pm \lim\limits_{X \to A} g(X)$;

2. $\lim\limits_{X \to A}[kf(X)] = k\lim\limits_{X \to A} f(X)$ (k là hằng số);

3. $\lim\limits_{X \to A}[f(X).g(X)] = [\lim\limits_{X \to A} f(X)].[\lim\limits_{X \to A} g(X)]$;

4. $\lim\limits_{X \to A} \dfrac{f(X)}{g(X)} = \dfrac{\lim\limits_{X \to A} f(X)}{\lim\limits_{X \to A} g(X)}$ nếu $\lim\limits_{X \to A} g(X) \neq 0$.

III. HÀM SỐ LIÊN TỤC

Khái niệm hàm số liên tục nhiều biến số được định nghĩa tương tự như trong trường hợp hàm số một biến .

Định nghĩa: Hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ được gọi là *hàm liên tục tại điểm* $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ khi và chỉ khi

$$\lim_{\substack{x_1 \to \overline{x}_1 \\ \ldots \\ x_n \to \overline{x}_n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$$

Nếu hàm số $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ liên tục tại mọi điểm thuộc một miền $D \subset \mathbb{R}^n$ thì ta nói rằng nó liên tục trong miền đó. Một hàm số không liên tục được gọi là *hàm gián đoạn*.

Từ định nghĩa ta suy ra rằng hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ liên tục tại điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ khi và chỉ khi

$$\Delta f(\overline{X}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$$

có giới hạn bằng 0 khi $x_1 \to \overline{x}_1, x_2 \to \overline{x}_2 \ldots, x_n \to \overline{x}_n$.

Các định lý về hàm số liên tục một biến số có thể phát triển tương tự cho hàm số n biến số. Chẳng hạn, định lý về tổng, hiệu, tích, thương của các hàm số liên tục có nội dung như sau:

Định lý: Nếu các hàm số f(X) và g(X) của biến điểm n chiều $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ liên tục tại điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ thì:

1. Các hàm số $f(X) + g(X)$, $f(X) - g(X)$, $f(X)g(X)$ liên tục tại điểm $\overline{X}$;

2. Với giả thiết $g(\overline{X}) \neq 0$ hàm số $\dfrac{f(X)}{g(X)}$ cũng liên tục tại $\overline{X}$.

Các định lý về tính chất của hàm liên tục một biến trên một khoảng đóng cũng được mở rộng tương tự cho trường hợp hàm số n biến số.

Định lý: Giả sử hàm số f(X) xác định và liên tục trên miền

$$\mathbf{D} = \{X(x_1, \dots, x_n):\ a_1 \le x_1 \le b_1, \dots, a_n \le x_n \le b_n\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Khi đó:

1. Nếu $f(A)f(B) < 0$ ($A, B \in \mathbf{D}$) thì tồn tại điểm $C \in \mathbf{D}$ sao cho $f(C) = 0$;
2. Hàm số $f(X)$ bị chặn trong miền $\mathbf{D}$;
3. Hàm số $f(X)$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $\mathbf{D}$.

BÀI TẬP

13. Tìm điểm giới hạn của các dãy điểm:

a) $M_n\left(\frac{3}{n}, \frac{2n-1}{n+1}\right)$ b) $M_n\left(\frac{n}{n+1}, \frac{\sin n}{n}, \frac{1-3n^2}{n^2+n+1}\right)$

14. Sử dụng định nghĩa, hãy tính giới hạn:

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ y \to -1}} \frac{2x^3y^2 + x + 3y}{3x + 2y}$$

15. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x, y) = \frac{2x^2 + y^2}{3xy}$$

không có giới hạn khi $x \to 0$, $y \to 0$.

16. Cho hàm số

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x + y}{3x + 4y}, \text{khi } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, \text{khi } x = y = 0 \end{cases}$$

Hãy tính các giới hạn:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y),\ \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y),\ \lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y).$$

17. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$$

có $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x, y) = \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x, y) = 0$, nhưng giới hạn bội $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$ không tồn tại.

18. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x, y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

có giới hạn bội $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = 0$, trong khi các giới hạn lặp

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x, y),\ \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x, y)$$

không tồn tại.

19. Xét tính liên tục của hàm số f(x, y) tại điểm (0, 0):

a) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, \text{khi } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, \text{khi } x = y = 0 \end{cases}$

b) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, \text{khi } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, \text{khi } x = y = 0 \end{cases}$

§3. ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ VI PHÂN

I. SỐ GIA RIÊNG VÀ SỐ GIA TOÀN PHẦN

Một hàm số n biến số $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ có thể được xem như là hàm số của một trong các biến độc lập x_i khi các biến còn lại nhận giá trị không đổi. Điều này tương ứng với giả thiết "các yếu tố khác giữ nguyên" trong kinh tế học.

Xét hàm số $w = f(x, y)$ xuất phát tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ thuộc miền xác định. Nếu cố định $y = y_0$ và cho x thay đổi một lượng Δx thì giá trị của hàm số thay đổi một lượng tương ứng:

$$\Delta_x w = \Delta_x f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

Ta gọi $\Delta_x w$ là *số gia riêng theo biến x* của hàm số $w = f(x, y)$.

Tương tự, nếu cố định $x = x_0$ và chỉ cho biến y thay đổi một lượng Δy thì ta có tương ứng *số gia riêng theo biến y*:

$$\Delta_y w = \Delta_y f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Số gia toàn phần biểu thị lượng thay đổi giá trị của hàm số khi cả hai biến x, y cùng thay đổi, tức là khi điểm M chuyển vị trí từ $M_0(x_0, y_0)$ sang vị trí $M(x_0+\Delta x, \; y_0 + \Delta y)$. Số gia toàn phần được ký hiệu như sau:

$$\Delta w = \Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, \; y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Ví dụ: Với $w = xy$, ta có:

$$\Delta_x w = (x_0 + \Delta x)y_0 - x_0 y_0 = y_0 . \Delta x,$$

$$\Delta_y w = x_0(y_0 + \Delta y) - x_0 . y_0 = x_0 . \Delta y,$$

$$\Delta w = (x_0 + \Delta x).(y_0 + \Delta y) - x_0.y_0 = y_0 . \Delta x + x_0 . \Delta y + \Delta x . \Delta y.$$

Khái niệm số gia riêng và số gia toàn phần được định nghĩa tương tự cho hàm số với số biến bất kỳ. Khi xét hàm số n biến số $f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tại điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ ta có thể nói đến:

- Số gia riêng theo biến x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$:

$$\Delta_{x_i} f(\overline{X}) = f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_i + \Delta x_i, \ldots, \overline{x}_n) - f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_i, \ldots, \overline{x}_n).$$

• Số gia toàn phần:

$$\Delta f(\overline{X}) = f(\overline{x}_1 + \Delta x_1, \ldots, \overline{x}_i + \Delta x_i, \ldots, \overline{x}_n + \Delta x_n) - f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_i, \ldots, \overline{x}_n)$$

II. ĐẠO HÀM RIÊNG

Định nghĩa: *Đạo hàm riêng* của hàm n biến $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ theo một trong các biến độc lập tại một điểm $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là giới hạn của tỷ số giữa số gia riêng của hàm số và số gia của biến độc lập tương ứng khi số gia của biến độc lập đó tiến tới 0.

Chẳng hạn, đạo hàm riêng theo biến x của hàm số $w = f(x, y)$ tại điểm M(x, y) là giới hạn:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x w}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Đạo hàm riêng theo biến x_i của hàm số $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tại điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ được ký hiệu như sau :

$$w'_{x_i} = f'_{x_i}(\overline{X}), \text{ hoặc } \frac{\partial w}{\partial x_i} = \frac{\partial f(\overline{X})}{\partial x_i}.$$

Đạo hàm riêng của hàm số $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ theo một trong các biến độc lập tại một điểm (nếu tồn tại) là một số xác định. Nếu hàm số $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ có đạo hàm riêng theo biến x_i tại mọi điểm $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ thuộc một miền **D** thì w'_{x_i} là một hàm số xác định trong miền **D**: $w'_{x_i} = f'_{x_i}(X), X \in \mathbf{D}$.

Đạo hàm riêng thực chất là đạo hàm theo quan điểm một biến số, khi ta coi một trong các biến độc lập là đối số, còn các biến còn lại được cố định giá trị (xem như các hằng số hay các tham số).

Ví dụ 1: Tính các đạo hàm riêng của hàm số $w = x^3 + 2x^2y + y^2$.

Giải: Xem w như là hàm số của biến x và y là hằng số ta dễ dàng tính đạo hàm riêng theo x:

$$w'_x = \frac{\partial w}{\partial x} = 3x^2 + 4xy.$$

Tương tự, xem w là hàm số của một biến y và x là hằng số ta có:

$$w'_y = \frac{\partial w}{\partial y} = 2x^2 + 2y.$$

Ví dụ 2: Tính các đạo hàm riêng của hàm số $f(x, y) = x^y$ $(x > 0)$.

Giải: Các đạo hàm riêng của hàm số đã cho là:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y.x^{y-1}, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^y \ln x.$$

Ví dụ 3: Tính các đạo hàm riêng của hàm số:

$$w = x^2\sin y + y^3\cos z + z^4.$$

Giải: Đạo hàm riêng của w lần lượt theo các biến x, y, z là:

$$w'_x = 2x\sin y; \; w'_y = x^2\cos y + 3y^2\cos z; \; w'_z = -y^3\sin z + 4z^3.$$

Chú ý:

Để cho gọn, nhiều khi người ta sử dụng ký hiệu f_i để chỉ đạo hàm của hàm số $f(x_1, x_2,..., x_n)$ theo biến x_i:

$$f_i = f'_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, ..., n).$$

Ví dụ 4: Cho hàm số

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 - x_2^2x_3^3 + 2x_3x_4^5.$$

Theo ký hiệu như trên, ta có:

$f_1 = x_2$; $f_2 = x_1 - 2x_2x_3^3$; $f_3 = -3x_2^2x_3^2 + 2x_4^5$; $f_4 = 10x_3x_4^4$.

III. ĐẠO HÀM RIÊNG CỦA HÀM HỢP

Giả sử w = f(u, v), với u và v là các hàm số của cùng một biến x:

$$u = \varphi(x)\ ,\ \ v = \psi(x)\ .$$

Khi đó ta có hàm hợp (hàm kép):

$$w = f[\varphi(x), \psi(x)].$$

Đạo hàm của w theo x được tính theo công thức:

$$w'_x = f'_u(u, v).\ u'_x + f'_v(u, v).\ v'_x\ . \tag{3.1}$$

Đặc biệt, nếu w = f(x, y) và y = φ(x) thì

$$w'_x = f'_x(x, y) + f'_y(x, y).\ y'_x\ .$$

Trong công thức (3.1) u'_x, v'_x, w'_x là đạo hàm thông thường của hàm số một biến, khi u và v chỉ phụ thuộc vào một biến x. Nếu u và v phụ thuộc vào nhiều biến, chẳng hạn

$$u = \varphi(x, y, z)\ ;\ \ v = \psi(x, y, z).$$

thì công thức (3.1) là công thức tính đạo hàm riêng theo biến x của hàm số w và các ký hiệu nói trên là các ký hiệu đạo hàm riêng.

Một cách tổng quát, nếu $w = f(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ và mỗi biến u_k ($k = 1, 2, \ldots, m$) lại là hàm số của các biến số $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thì đạo hàm của w theo x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) được tính theo công thức:

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = \frac{\partial w}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial w}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial w}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}$$

(nếu các đạo hàm riêng ở vế phải tồn tại).

IV. VI PHÂN

Giả sử hàm số $w = f(x, y)$ xác định trong miền **D** và có các đạo hàm riêng liên tục tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ thuộc miền **D**. Xét số gia toàn phần của hàm số:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Ta có:

$$\begin{aligned}\Delta f(x_0, y_0) &= [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] \\ &\quad + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] \\ &= f'_x(c_1, y_0 + \Delta y).\Delta x + f'_y(x_0, c_2).\Delta y, \qquad (3.2)\end{aligned}$$

trong đó c_1 là một điểm trung gian giữa x_0 và $x_0 + \Delta x$; c_2 là một điểm trung gian giữa y_0 và $y_0 + \Delta y$.

Do f'_x và f'_y là các hàm số liên tục tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ nên ta có:

$$f'_x(c_1, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0, y_0) + \alpha, \; f'_y(x_0, c_2) = f'_y(x_0, y_0) + \beta, \qquad (3.3)$$

trong đó α và β phụ thuộc vào Δx, Δy và có giới hạn bằng 0 khi $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Thay (3.3) vào (3.2) ta được:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0).\Delta x + f'_y(x_0, y_0).\Delta y + \alpha.\Delta x + \beta.\Delta y.$$

Từ đây suy ra rằng khi Δx, Δy có giá trị tuyệt đối đủ nhỏ ta có

$$\Delta f(x_0, y_0) \approx f'_x(x_0, y_0).\Delta x + f'_y(x_0, y_0).\Delta y. \qquad (3.4)$$

Định nghĩa: Nếu hàm số $w = f(x, y)$ xác định trong miền **D** và có các đạo hàm riêng liên tục tại điểm $M_0(x_0, y_0) \in$ **D** thì biểu thức ở vế phải của công thức gần đúng (3.4) được gọi là *vi phân* *toàn phần* của hàm số $w = f(x, y)$ tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ và được ký hiệu là dw hoặc $df(x_0, y_0)$.

Theo định nghĩa:

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0).\Delta x + f'_y(x_0, y_0).\Delta y. \qquad (3.5)$$

Với x và y là các biến số độc lập, ta có $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Biểu thức vi phân toàn phần (3.5) được viết dưới dạng:

$$df = f'_x dx + f'_y dy,$$

hoặc

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy.$$

Với giả thiết hàm số n biến số $f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ có các đạo hàm riêng liên tục theo tất cả các biến độc lập, vi phân toàn phần được định nghĩa tương tự và được tính theo công thức:

$$df(X) = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n, \qquad (3.6)$$

trong đó

$$f_k = \frac{\partial f(X)}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Chú ý rằng trong công thức (3.6)

$$dx_1 = \Delta x_1,\ dx_2 = \Delta x_2,\ \dots,\ dx_n = \Delta x_n.$$

Chú ý: Vi phân của hàm số $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ theo công thức (3.6) được gọi là *vi phân toàn phần*. Nếu xét hàm số $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ như là hàm số của một trong các biến độc lập x_k (bằng cách cố định giá trị của các biến độc lập còn lại) thì vi phân tương ứng được gọi là *vi phân riêng* của hàm số theo biến x_k. Vi phân riêng của hàm số f theo biến x_k được ký hiệu là $d_{x_k}f$ và được tính theo công thức:

$$d_{x_k}f = f_k dx_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}dx_k.$$

Vi phân toàn phần là tổng số của tất cả các vi phân riêng:

$$df = d_{x_1}f + d_{x_2}f + ... + d_{x_n}f.$$

Ví dụ 1: Vi phân toàn phần và các vi phân riêng của hàm số $w = x^3y^4$ tại một điểm (x, y) bất kỳ được tính như sau:

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy = 3x^2y^4dx + 4x^3y^3dy;$$

$$d_xw = \frac{\partial w}{\partial x}dx = 3x^2y^4dx, \quad d_yw = \frac{\partial w}{\partial y}dy = 4x^3y^3dy.$$

Ví dụ 2:

Vi phân toàn phần của hàm số $f(x, y, z) = \ln(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)$ tại điểm M(x, y, z) bất kỳ là:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

$$= \frac{2xdx}{1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2} + \frac{4ydy}{1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2} + \frac{6zdz}{1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2}.$$

Chú ý: Cũng như biểu thức vi phân của hàm một biến, biểu thức vi phân toàn phần của hàm số n biến số (biểu thức (3.6)) được sử dụng bất kể các biến $x_1, x_2, ..., x_n$ là biến độc lập hay là hàm số của các biến khác.

V. ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ VI PHÂN CẤP CAO

a. Đạo hàm riêng cấp cao

Giả sử hàm số w = f(X) có đạo hàm riêng theo biến x_i tại mọi điểm $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ thuộc miền $D \subset \mathbb{R}^n$. Khi đó đạo hàm riêng

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_i} = f_i(X) \qquad (3.7)$$

là một hàm số xác định trong miền D. Đạo hàm riêng theo biến x_k của hàm số (3.7) được gọi là *đạo hàm riêng cấp hai* của hàm số $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và được ký hiệu như sau:

$$w''_{x_i x_k} = f''_{x_i x_k}(X), \text{ hoặc } \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_i \partial x_k}.$$

Thay cho các ký hiệu trên ta có thể sử dụng ký hiệu đơn giản:

$$w_{ik} \text{ hoặc } f_{ik}.$$

Nếu i = k thì ta có thể viết:

$$w''_{x_i x_i} = w''_{x_i^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2}.$$

Theo định nghĩa:

$$w''_{x_i x_k} = (w'_{x_i})'_{x_k} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_k}.$$

Ví dụ 1: Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số $w = x^3 y^4$.

Giải: Trước hết ta tính các đạo hàm riêng cấp 1:

$$w'_x = 3x^2y^4, \quad w'_y = 4x^3y^3.$$

Các đạo hàm riêng cấp 2 là các đạo hàm riêng của w'_x và w'_y:

$$w''_{xx} = (w'_x)'_x = 6xy^4, \quad w''_{xy} = (w'_x)'_y = 12x^2y^3,$$

$$w''_{yx} = (w'_y)'_x = 12x^2y^3, \quad w''_{yy} = (w'_y)'_y = 12x^3y^2.$$

Ví dụ 2: Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số

$$f(x, y, z) = 2x^2y^3z^4 + \frac{2y}{x} - \frac{x}{z}.$$

Giải: Các đạo hàm riêng cấp 1 của hàm số đã cho là:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy^3z^4 - \frac{2y}{x^2} - \frac{1}{z}, \ \frac{\partial f}{\partial y} = 6x^2y^2z^4 + \frac{2}{x}, \ \frac{\partial f}{\partial z} = 8x^2y^3z^3 + \frac{x}{z^2}.$$

Tính các đạo hàm riêng của 3 hàm số này, ta được:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4y^3z^4 + \frac{4y}{x^3}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 12xy^2z^4 - \frac{2}{x^2}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 16xy^3z^3 + \frac{1}{z^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 12xy^2z^4 - \frac{2}{x^2}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12x^2yz^4, \ \frac{\partial f}{\partial y \partial z} = 24x^2y^2z^3,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 16xy^3z^3 + \frac{1}{z^2}, \ \frac{\partial f}{\partial z \partial y} = 24x^2y^2z^3, \ \frac{\partial^2 f}{\partial^2 z} = 24x^2y^3z^2 - \frac{2x}{z^3}.$$

Chú ý: Với $i \neq k$, các đạo hàm riêng cấp 2

$$w''_{x_i x_k} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_k} \quad \text{và} \quad w''_{x_k x_i} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_k \partial x_i}$$

được gọi là *đạo hàm hỗn hợp* hay *đạo hàm chéo*. Mỗi bộ hai biến độc lập cho tương ứng một cặp đạo hàm hỗn hợp cấp hai. Nói chung hai đạo hàm hỗn hợp cấp hai theo cùng một cặp biến số nhưng sai khác ở trình tự lấy đạo hàm có thể không bằng nhau. Tuy nhiên, người ta chứng minh được rằng *nếu cả hai đạo hàm hỗn hợp đó cùng tồn tại và liên tục thì chúng bằng nhau.*

Một cách tổng quát, ta có thể nói đến đạo hàm riêng cấp m của hàm số n biến số.

Định nghĩa: Đạo hàm riêng cấp m (m > 1) của hàm số n biến số là đạo hàm riêng của đạo hàm riêng cấp m – 1 của nó.

Các đạo hàm riêng cấp m được ký hiệu tương tự như đạo hàm riêng cấp 2. Chẳng hạn, $(f''_{xz})'_y$ được ký hiệu là:

$$f'''_{xzy} \text{ hoặc } \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial y}.$$

Đạo hàm riêng cấp m của hàm số n biến số là đạo hàm lặp liên tiếp m lần, mỗi lần lấy đạo hàm riêng theo một biến tuỳ ý. Đạo hàm lặp m lần không theo cùng một biến nhất định được gọi là *đạo hàm hỗn hợp cấp m*. Có thể chứng minh được rằng *nếu hàm số f có các đạo hàm hỗn hợp cấp m liên tục thì đạo hàm hỗn hợp cấp m không phụ thuộc thứ tự lấy đạo hàm*. Chẳng hạn, nếu các đạo hàm hỗn hợp

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$$

cùng tồn tại và liên tục thì chúng bằng nhau.

Chú ý: Một hàm số n biến số có n^k đạo hàm riêng cấp k, trong đó có $n^k - n$ đạo hàm hỗn hợp.

b. Ma trận Hess

Hàm n biến $w = f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ có n^2 đạo hàm riêng cấp hai: $w_{ij} = w_{x_i x_j}$ (i,j = 1, 2, …, n). Ma trận vuông cấp n

$$H = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{n1} & w_{n2} & \dots & w_{nn} \end{bmatrix}$$

với $w_{ij} = w''_{x_i x_j}$ là phần tử ở dòng i và cột j được gọi là *ma trận Hess* của hàm $w = f(X)$. Với giả thiết hàm số $w = f(X)$ có các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục, ma trận Hess là ma trận đối xứng.

Ví dụ: Ma trận Hess của hàm 3 biến $w = 2x^2y^3z^4$ là ma trận:

$$H = \begin{bmatrix} w''_{xx} & w''_{xy} & w''_{xz} \\ w''_{yx} & w''_{yy} & w''_{yz} \\ w''_{zx} & w''_{zy} & w''_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4y^3z^4 & 12xy^2z^4 & 16xy^3z^3 \\ 12xy^2z^4 & 12x^2yz^4 & 24x^2y^2z^3 \\ 16xy^3z^3 & 24x^2y^2z^3 & 24x^2y^3z^2 \end{bmatrix}$$

c. Vi phân cấp cao

Giả sử hàm số $w = f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ có các đạo hàm riêng liên tục cấp một và cấp hai trên miền $D \subset \mathbb{R}^n$. Khi đó, vi phân toàn phần theo công thức (3.6) là một hàm số của biến điểm X, xác định trên miền D.

Định nghĩa: Vi phân toàn phần của vi phân toàn phần dw của hàm số $w = f(X)$ được gọi là *vi phân toàn phần cấp hai* của hàm số đó và được ký hiệu như sau:

$$d^2w, \quad d^2f(X).$$

Trường hợp hàm số hai biến số $w = f(x, y)$ ta có:

$$d^2w = d(dw) = (dw)'_x\,dx + (dw)'_y\,dy. \qquad (3.8)$$

Do $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ là các số gia bất kỳ, không phụ thuộc x và y, ta có:

$$(dw)'_x = (w'_x dx + w'_y dy)'_x = w''_{xx}\,dx + w''_{yx}\,dy,$$

$$(dw)'_y = (w'_x dx + w'_y dy)'_y = w''_{xy}\,dx + w''_{yy}\,dy$$

Thay vào biểu thức (3.8) ta được:

$$d^2w = w''_{xx}(dx)^2 + w''_{xy}\,dxdy + w''_{yx}\,dydx + w''_{yy}(dy)^2.$$

$$= w''_{xx}(dx)^2 + 2w''_{xy}dxdy + w''_{yy}(dy)^2. \qquad (3.9)$$

Tương tự, vi phân toàn phần cấp hai của hàm số n biến số $w = f(X) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ được tính theo công thức:

$$d^2f(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}dx_i dx_k. \qquad (3.10)$$

Nếu sử dụng ký hiệu đạo hàm cấp hai của hàm số f(X) dưới dạng viết gọn thì biểu thức (3.10) có dạng:

$$d^2f(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f_{ik}dx_i dx_k, \qquad (3.10')$$

trong đó:

$$f_{ik} = \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_i \partial x_k}.$$

Chú ý rằng *biểu thức vi phân toàn phần cấp hai (3.10) là một dạng toàn phương của n biến số $dx_1, dx_2, ..., dx_n$, với hệ số của $dx_i\, dx_k$ là* $\frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_i \partial x_k}$ *(i, k = 1, 2, ... , n)*. Ma trận của dạng toàn phương $d^2f(X)$ là ma trận Hess của hàm số f(X).

Ví dụ: Tính vi phân toàn phần cấp 2 của hàm số $w = 2x^2y^3z^4$ tại điểm M(x, y, z) bất kỳ.

Giải: Ma trận Hess của hàm số này tại điểm M(x, y, z) là:

$$H = \begin{bmatrix} w''_{xx} & w''_{xy} & w''_{xz} \\ w''_{yx} & w''_{yy} & w''_{yz} \\ w''_{zx} & w''_{zy} & w''_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4y^3z^4 & 12xy^2z^4 & 16xy^3z^3 \\ 12xy^2z^4 & 12x^2yz^4 & 24x^2y^2z^3 \\ 16xy^3z^3 & 24x^2y^2z^3 & 24x^2y^3z^2 \end{bmatrix}$$

Vi phân toàn phần cấp 2 là dạng toàn phương của 3 biến dx, dy, dz, với H là ma trận của nó:

$$d^2w = 4y^3z^4\,dx^2 + 12x^2yz^4dy^2 + 24x^2y^3z^2dz^2 + 24xy^2z^4dxdy$$
$$+ 32xy^3z^3dxdz + 48x^2y^2z^3dydz.$$

Nói tổng quát, *vi phân toàn phần cấp m* của hàm số $f(X)$ là vi phân toàn phần của vi phân toàn phần cấp $m - 1$ của nó và được ký hiệu là $d^mf(X)$:

$$d^mf(X) = d(d^{m-1}f(X)).$$

VI. ỨNG DỤNG TRONG KINH TẾ HỌC

a. Đạo hàm riêng và giá trị cận biên.

Xét hàm số $w = f(x_1, x_2,...,x_n)$ biểu diễn sự phụ thuộc của biến số kinh tế w vào n biến số kinh tế $x_1, x_2,...,x_n$. Trong kinh tế học đạo hàm riêng của w theo x_i tại điểm $X(x_1, x_2,...,x_n)$ được gọi là *giá trị w-cận biên của x_i* tại điểm đó. Giá trị w-cận biên của x_i biểu diễn xấp xỉ lượng thay đổi giá trị của biến phụ thuộc w khi biến x_i tăng thêm một đơn vị, trong khi các biến độc lập còn lại không thay đổi giá trị. Đối với mỗi hàm kinh tế người ta dùng các thuật ngữ tương ứng tuỳ theo tên gọi của các biến số kinh tế.

- Đối với hàm sản xuất

$$Q = f(K, L),$$

các đạo hàm riêng

$$Q_K = \frac{\partial Q}{\partial K}, \quad Q_L = \frac{\partial Q}{\partial L}$$

được gọi tương ứng là *sản phẩm hiện vật cận biên của tư bản* và *sản phẩm hiện vật cận biên của lao động* tại điểm (K, L). Để cho gọn, đôi khi người ta bỏ từ *hiện vật* và gọi tắt là *sản phẩm cận biên của tư bản* và *sản phẩm cận biên của lao động.*

Trong kinh tế học sản phẩm hiện vật cận biên của tư bản và sản phẩm hiện vật cận biên của lao động được ký hiệu là MPP_K

(Marginal Physical Product of Capital) và MPP_L (Marginal Physical Product of Labor):

$$MPP_K = \frac{\partial Q}{\partial K}, \quad MPP_L = \frac{\partial Q}{\partial L}.$$

Tại điểm (K_0, L_0) giá trị MPP_K biểu diễn xấp xỉ lượng sản phẩm hiện vật gia tăng khi sử dụng thêm một đơn vị tư bản và giữ nguyên mức sử dụng lao động; MPP_L biểu diễn xấp xỉ lượng sản phẩm gia tăng khi sử dụng thêm một đơn vị lao động và giữ nguyên mức sử dụng tư bản.

Ví dụ: Giả sử hàm sản xuất của một doanh nghiệp có dạng

$$Q = 30K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{1}{3}},$$

trong đó K, L, Q là mức sử dụng lao động, mức sử dụng tư bản và sản lượng hàng ngày.

Giả sử doanh nghiệp đó đang sử dụng 27 đơn vị tư bản và 64 đơn vị lao động trong một ngày, tức là K = 27 và L = 64. Sản lượng cận biên của tư bản và của lao động là

$$MPP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = 20.\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{3}} = 20.\left(\frac{64}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{80}{3} \approx 26{,}7;$$

$$MPP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = 10.\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{2}{3}} = 10.\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{90}{16} = \frac{45}{8} \approx 5{,}6.$$

Điều này có nghĩa là nếu doanh nghiệp tăng mức sử dụng tư bản lên 28 và giữ nguyên mức sử dụng 64 lao động trong một ngày thì sản lượng hàng ngày của nó sẽ tăng thêm khoảng 26, 7 đơn vị sản phẩm hiện vật; nếu doanh nghiệp nâng mức sử dụng lao động lên 65 đơn vị và giữ nguyên mức sử dụng 27 đơn vị tư bàn trong một ngày thì sản lượng hàng ngày sẽ tăng thêm khoảng 5,6 đơn vị sản phẩm hiện vật.

- Đối với hàm lợi ích

$$U = U(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

thì đạo hàm $U_i = \dfrac{\partial U}{\partial x_i}$ được gọi là *lợi ích cận biên* của hàng hoá thứ i đối với người tiêu dùng và được ký hiệu là MU_i. Con số MU_i tại điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)$ biểu diễn xấp xỉ lợi ích tăng thêm khi người tiêu dùng có thêm 1 đơn vị hàng hoá thứ i và lượng các hàng hoá khác không đổi.

b. Đạo hàm riêng cấp hai và quy luật lợi ích cận biên giảm dần

Xét mô hình hàm số

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

trong đó biến số u biểu diễn lợi ích kinh tế và $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các yếu tố đem lại lợi ích u. Quy luật lợi ích cận biên giảm dần (lợi ích tăng chậm dần) nói rằng, khi các yếu tố khác không thay đổi, giá trị u-cận biên của x_i giảm dần khi x_i tăng. Dưới giác độ toán học, quy luật này biểu hiện dưới dạng:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \le 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Ví dụ:

- Đối với hàm lợi ích U = f(x, y), trong đó x là lượng hàng hoá thứ nhất, y là lượng hàng hoá thứ hai và U là lợi ích của người tiêu dùng đối với túi hàng (x, y), quy luật lợi ích cận biên giảm dần trong kinh tế nói rằng lợi ích cận biên của hàng hoá thứ nhất giảm dần khi x tăng và y không đổi và lợi ích cận biên của hàng hoá thứ hai giảm dần khi y tăng và x không đổi. Quy luật lợi ích cận biên giảm dần biểu hiện ở các đạo hàm riêng cấp hai của hàm lợi ích như sau:

$$U''_{xx} \le 0 \Leftrightarrow MU_x = U'_x \text{ giảm khi x tăng và y không đổi;}$$

$$U''_{yy} \le 0 \Leftrightarrow MU_y = U'_y \text{ giảm khi y tăng và x không đổi.}$$

- Đối với hàm sản xuất, quy luật lợi ích cận biên giảm dần có nghĩa là ở mức sử dụng một yếu tố sản xuất càng lớn (trong khi lượng sử dụng các yếu tố khác không thay đổi) thì sản lượng gia tăng do sử dụng thêm một đơn vị yếu tố sản xuất đó đem lại càng nhỏ. Nói cách khác, sản phẩm hiện vật cận biên của mỗi yếu tố giảm dần khi lượng sử dụng yếu tố đó tăng (trong khi lượng sử dụng các yếu tố khác không thay đổi). Quy luật này biểu hiện thông qua đạo hàm riêng cấp hai của hàm sản xuất $Q = f(K, L)$ như sau:

$$(MPP_K)'_K = \frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} \le 0, \quad (MPP_L)'_L = \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} \le 0.$$

Chẳng hạn, đối với hàm sản suất Cobb - Douglas

$$Q = a\,K^{\alpha}L^{\beta} \quad (a, \alpha, \beta > 0)$$

ta có

$$(MPP_K)'_K = a\alpha\,(\alpha - 1)K^{\alpha-2}K^{\beta}, \;\; (MPP_L)'_L = a\beta(\beta - 1)L^{\alpha}K^{\beta-2}.$$

Biểu hiện của quy luật lợi ích cận biên giảm dần là:

$$\alpha \le 1 \text{ và } \beta \le 1 \quad (\text{để } (MPP_K)'_K \le 0 \text{ và } (MPP_L)'_L \le 0).$$

c. Tính hệ số co dãn

Khái niệm hệ số co dãn của cung và cầu theo giá và liên hệ với đạo hàm của hàm cung và hàm cầu đã được nói đến ở chương 2, §6. Một cách tổng quát, ta có thể nói đến hệ số co dãn của biến số w theo một biến x_k trong mô hình hàm số biểu diễn ảnh hưởng của các biến số kinh tế $x_1, x_2, \dots, x_n$ đối với biến số kinh tế w:

$$w = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \tag{3.11}$$

Định nghĩa: *Hệ số co dãn của w theo x_k* tại điểm $\left(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n\right)$ là số đo lượng thay đổi tính bằng phần trăm của w khi x_k tăng 1% và các biến độc lập khác không thay đổi.

Với giả thiết hàm số $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ có các đạo hàm riêng, hệ số co dãn của w theo x_k tại điểm $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)$ được tính theo công thức:

$$\varepsilon_k = \frac{\partial f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)}{\partial x_k} \cdot \frac{\overline{x}_k}{f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)}. \tag{3.12}$$

Chẳng hạn, trên thị trường hai hàng hoá liên quan, hàm cầu thường được xét dưới dạng

$$Q_{1d} = D_1(p_1, p_2, m),\ Q_{2d} = D_2(p_1, p_2, m),$$

trong đó Q_{id} là lượng cầu đối với hàng hoá i, p_i là giá hàng hoá i, m là thu nhập.

Hệ số co dãn của cầu đối với hàng hoá thứ nhất theo giá của hàng hoá đó tại điểm (p_1, p_2, m) được tính theo công thức:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial D_1(p_1, p_2, m)}{\partial p_1} \cdot \frac{p_1}{D_1(p_1, p_2, m)}.$$

Hệ số co dãn của cầu đối với hàng hoá thứ nhất theo giá của hàng hoá thứ hai tại điểm (p_1, p_2, m) được tính theo công thức:

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial D_1(p_1, p_2, m)}{\partial p_2} \cdot \frac{p_2}{D_1(p_1, p_2, m)}.$$

Hệ số co dãn của cầu đối với hàng hoá thứ nhất theo thu nhập tại điểm (p_1, p_2, m) được tính theo công thức:

$$\varepsilon_{1m} = \frac{\partial D_1(p_1, p_2, m)}{\partial m} \cdot \frac{m}{D_1(p_1, p_2, m)}.$$

Nhận xét:

Giả sử trong mô hình (3.11) các biến số $w, x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các biến số dương và ta có thể biểu diễn $\ln w$ qua $\ln x_1, \ln x_2, \ldots, \ln x_n$:

$$\ln w = g(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

trong đó

$$u_1 = \ln x_1,\ u_2 = \ln x_2, \ldots, u_n = \ln x_n.$$

Trong trường hợp này ta có:

$$\frac{\partial(\ln w)}{\partial x_k} = \frac{1}{w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_k}, \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial(\ln w)}{\partial x_k} = \frac{\partial g}{\partial u_k} \cdot \frac{du_k}{dx_k} = \frac{\partial(\ln w)}{\partial u_k} \cdot \frac{1}{x_k}. \tag{3.14}$$

Từ (3.13) và (3.14) suy ra:

$$\frac{1}{w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_k} = \frac{\partial(\ln w)}{\partial u_k} \cdot \frac{1}{x_k}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(\ln w)}{\partial u_k} = \frac{\partial w}{\partial x_k} \cdot \frac{x_k}{w} = \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \frac{x_k}{f}. \tag{3.15}$$

Từ (3.15) và (3.12) ta có:

$$\varepsilon_k = \frac{\partial(\ln w)}{\partial u_k} = \frac{\partial g}{\partial u_k}. \tag{3.16}$$

Như vậy, *nếu biểu diễn $\ln w$ qua $u_k = \ln x_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ thì hệ số co dãn của w theo x_k bằng đạo hàm riêng của $\ln w$ theo u_k.*

Ví dụ: Xét hàm số Cobb-Douglas

$$w = A\,x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n} \tag{3.17}$$

$$(A > 0 \text{ và } \alpha_k > 0\ \forall k = 1, 2, \ldots, n).$$

Ta có

$$\ln w = \ln A + \alpha_1\ln x_1 + \alpha_2\ln x_2 + \ldots + \alpha_n\ln x_n$$

$$= \ln A + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n.$$

Theo công thức (3.16) ta có:

$$\varepsilon_k = \frac{\partial(\ln w)}{\partial u_k} = \alpha_k.$$

Điều này chứng tỏ hệ số co dãn của w theo x_k trong mô hình hàm số Cobb-Douglas (3.17) đúng bằng luỹ thừa của x_k.

BÀI TẬP

20. Cho hàm số

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + xy + 3y^2}{x + y} & \text{khi } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{khi } x = y = 0 \end{cases}$$

Hãy tính $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0,0)$.

21. Tính các đạo hàm riêng của hàm số:

a) $u = x^3y - y^3x$ b) $u = (5x^2y - y^2 + 7)^3$

c) $u = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$ d) $u = e^{-\frac{x}{y}}$

e) $u = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ f) $u = \ln\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$

22. Tính các đạo hàm riêng của hàm số:

a) $u = xy + yz + zx$ b) $u = x^3 + yz^2 + 3xy - x + z$

c) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ d) $u = e^{x(x^2+y^2+z^2)}$

23. Sử dụng quy tắc tính đạo hàm của hàm hợp, hãy tính z'_x, z'_y, cho biết:

$$z = u^2 + v^3,\ u = y\sin x,\ v = x\cos y$$

24. Cho f(u) là một hàm số khả vi và

$$z = y.f(x^2 - y^2)$$

Hãy chứng minh: $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$.

25. Hãy tính $f'_y(x^2 + y^2, xy)$ và $\left[f(x^2 + y^2, xy)\right]'_y$, cho biết

$$f(x, y) = \sqrt{xy}.$$

26. Chứng minh rằng hàm số $u = f(x^2 + y^2)$, với f là hàm số khả vi, thoả mãn phương trình:

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

27. Chứng minh rằng hàm số $u = \sin x + f(\sin y - \sin x)$, với f là hàm số khả vi, thoả mãn phương trình:

$$\frac{\partial u}{\partial y}\cos x + \frac{\partial u}{\partial x}\cos y = \cos x.\cos y.$$

28. Cho hàm số $f(x, y) = xy^2$. Hãy tính $\Delta f(1, 1)$ và $df(1, 1)$ khi:

a) $\Delta x = 0{,}1$ và $\Delta y = 0{,}2$ b) $\Delta x = 5$ và $\Delta y = 2$

29. Lập biểu thức vi phân toàn phần của các hàm số:

a) $u = \dfrac{3x + 4y}{2x - y}$ b) $u = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$

c) $u = \operatorname{arctg}(xy)$ d) $u = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$

30. Lập biểu thức vi phân toàn phần của các hàm số:

a) $u = \dfrac{x^2y^3}{z^4}$ b) $u = x^{yz}$

31. Tính các đạo hàm riêng cấp 2 và lập biểu thức vi phân toàn phần cấp 2 của hàm số:

a) $u = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$ b) $u = \ln(x + y^2)$

c) $u = \dfrac{2x-3y}{x+2y}$ d) $u = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$

32. Cho hàm số:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{khi } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = y = 0 \end{cases}$$

Hãy tính $f''_{xy}(0,0)$, $f''_{yx}(0,0)$.

33. Chứng minh rằng hàm số $u = \ln\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ thoả mãn phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

34. Lập ma trận Hess và viết biểu thức vi phân toàn phần cấp 2 của hàm số $u = x^3y^2z^4$.

35. Tìm $df(1, 1, 1)$ và $d^2f(1, 1, 1)$, cho biết $f(x, y, z) = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}$.

36. Một doanh nghiệp có hàm sản xuất như sau: $Q = 12\sqrt[3]{K^2}.\sqrt{L}$.

a) Hãy tính MPP_K và MPP_L tại điểm ($K = 125$, $L = 100$) và giải thích ý nghĩa;

b) Chứng tỏ rằng MPP_K giảm khi K tăng và L không đổi;

c) Chứng tỏ rằng MPP_L giảm khi L tăng và K không đổi.

37. Cho biết hàm lợi ích của người tiêu dùng $U = x^{0,4}y^{0,7}$, trong đó x là lượng hàng hoá A, y là lượng hàng hoá B.

a) Hãy lập các hàm số biểu diễn lợi ích cận biên của mỗi hàng hoá. Hàm lợi ích này có phù hợp với quy luật lợi ích giảm dần hay không?

b) Nếu lượng hàng hoá A tăng 1% và lượng hàng hoá B không đổi thì lợi ích tăng bao nhiêu %?

38. Một doanh nghiệp sản xuất 2 loại sản phẩm với hàm chi phí kết hợp như sau:

$$TC = 45 + 125Q_1 + 84Q_2 - 6Q_1^2\ Q_2^2 + 0,8Q_1^3 + 1,2Q_2^3 .$$

Hãy lập các hàm số biểu diễn chi phí cận biên của mỗi sản phẩm.

39. Cho biết hàm cầu đối với một mặt hàng như sau:

$$Q = 35 - 0,4p + 0,15m + 0,12p_s,$$

trong đó Q, p là lượng cầu và giá của hàng hoá đó, m là thu nhập, p_s là giá hàng hoá thay thế. Hãy lập hàm số biểu diễn:

a) Hệ số co dãn của cầu theo giá p;

b) Hệ số co dãn của cầu theo thu nhập;

c) Hệ số co dãn của cầu theo giá hàng hoá thay thế.

§4. HÀM THUẦN NHẤT

I. KHÁI NIỆM HÀM THUẦN NHẤT VÀ CÔNG THỨC EULER

a. Khái niệm hàm thuần nhất

Như ta đã biết, một đa thức gọi là đa thức thuần nhất (hay đa thức đẳng cấp) nếu đa thức đó chỉ chứa các đơn thức cùng bậc. Chẳng hạn:

$$f(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

là một đa thức thuần nhất bậc 2 của hai biến số x và y. Trong giải tích toán học, khái niệm hàm số thuần nhất (hay hàm số đẳng cấp) được định nghĩa một cách tổng quát như sau:

Định nghĩa: Hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ xác định trong một miền **D** được gọi là *hàm số thuần nhất bậc s* nếu thoả mãn đồng nhất thức:

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^s f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

ít nhất khi $t > 0$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in$ **D**.

Ví dụ 1: Hàm số

$$f(x, y, z) = \sqrt{x + 2y + 3z}$$

là một hàm số thuần nhất bậc $s = 1/2$:

$$f(tx, ty, tz) = \sqrt{tx + 2ty + 3tz} = \sqrt{t}\,.\sqrt{x + 2y + 3z}$$

$$= t^{1/2} f(x, y, z).$$

Ví dụ 2: Hàm số $f(x, y) = \dfrac{x^3 + 3x^2y - 2y^3}{x^2 + y^2}$ là một hàm số thuần nhất bậc 1:

$$f(tx, ty) = \frac{(tx)^3 + 3(tx)^2(ty) - 2(ty)^3}{(tx)^2 + (ty)^2}$$

$$= t.\ \frac{x^3 + 3x^2y - 2y^3}{x^2 + y^2} = tf(x, y).$$

Ví dụ 3: Hàm số $f(x,y) = (x + y)\sqrt[3]{x^2 + y^2}$ là một hàm số thuần nhất bậc 5/3:

$$f(tx, ty) = (tx + ty)\sqrt[3]{(tx)^2 + (ty)^2}$$

$$= t\sqrt[3]{t^2}\,(x + y)\sqrt[3]{x^2 + y^2} = t^{5/3} f(x, y).$$

Từ định nghĩa dễ dàng suy ra:

- Nếu $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là một hàm thuần nhất bậc s thì hàm số $[f(x_1, x_2, \ldots, x_n)]^k$ là một hàm thuần nhất bậc ks.
- Nếu $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là một hàm thuần nhất bậc s và $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là một hàm số thuần nhất bậc r thì:
  - ◊ Tích $f(x_1, x_2, \ldots, x_n).g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là một hàm thuần nhất bậc $s + r$;
  - ◊ Thương $\dfrac{f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{g(x_1, x_2, \ldots x_n)}$ là một hàm số thuần nhất $s - r$

b. Công thức Euler.

Xét hàm số f (x, y) xác định và có các đạo hàm riêng liên tục trong miền:

$$\mathbf{D} = \{M(x,y):\ x > 0,\ y > 0\}.$$

Định lý: Hàm số **f** (x,y) là hàm số thuần nhất bậc s khi và chỉ khi

$$x f'_x(x,y) + y f'_y(x,y) = sf(x, y) \qquad (4.1)$$

tại mọi điểm $M(x, y) \in \mathbf{D}$.

Công thức (4.1) được gọi là *công thức Euler*.

Chứng minh: Nếu f(x, y) là hàm thuần nhất bậc s thì, với (x_0, y_0) là một điểm bất kỳ thuộc miền **D** ta có:

$$f(tx_0, ty_0) = t^s f(x_0, y_0), \ \forall t > 0. \qquad (4.2)$$

Lấy đạo hàm hai vế đồng nhất thức (4.2) theo t ta được:

$$f'_x(tx_0, ty_0).x_0 + f'_y(tx_0, ty_0).y_0 = st^{s-1} f(x_0, y_0).$$

Thay t = 1 ta được

$$x_0. f'_x(x_0, y_0) + y_0. f'_y(x_0, y_0) = sf(x_0, y_0).$$

Ngược lại, giả sử đẳng thức (4.1) được thoả mãn với mọi điểm $M(x, y) \in D$. Gọi (x_0, y_0) là một điểm bất kỳ thuộc miền D. Xét hàm số

$$\varphi(t) = t^{-s} f(tx_0, ty_0) \ (t > 0).$$

Ta có:

$$\varphi'(t) = -st^{-s-1} f(tx_0, ty_0) + t^{-s}[x_0 f'_x(tx_0, ty_0) + y_0 f'_y(tx_0, ty_0)]$$

$$= t^{-s-1}[(tx_0) f'_x(tx_0, ty_0) + (ty_0) f'_y(tx_0, ty_0) - sf(tx_0, ty_0)] = 0,$$

với mọi $t > 0$.

Điều này chứng tỏ hàm số $\varphi(t)$ nhận giá trị không đổi trên khoảng $t > 0$, do đó:

$$\varphi(t) = t^{-s} f(tx_0, ty_0) = \varphi(1) = f(x_0, y_0), \ \forall t > 0.$$

Từ đây suy ra

$$f(tx_0, ty_0) = t^s f(x_0, y_0), \ \forall t > 0.$$

Vì (x_0, y_0) là một điểm bất kỳ thuộc D nên đẳng thức này chứng tỏ hàm số f(x, y) là hàm số thuần nhất bậc s. Định lý đã được chứng minh.

Một cách tổng quát, hàm số n biến số $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là hàm số thuần nhất bậc s khi và chỉ khi thoả mãn đồng nhất thức (công thức Euler):

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n = sf(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

trong đó

$$f_j = \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

II. VẤN ĐỀ HIỆU QUẢ CỦA QUY MÔ

Các nhà kinh tế học sử dụng hàm sản xuất để mô tả trình độ công nghệ của nhà sản xuất: ở mỗi mức sử dụng các yếu tố sản xuất, nhà sản xuất có khả năng sản xuất một lượng sản phẩm tối đa Q. Nếu chỉ xét hai yếu tố sản xuất quan trọng nhất là lao động và tư bản thì hàm sản xuất có dạng:

$$Q = f(K, L).$$

Ta nói rằng quy mô sản xuất của một doanh nghiệp tăng lên μ lần khi và chỉ khi doanh nghiệp đó tăng mức sử dụng tất cả các yếu tố sản xuất lên μ lần ($\mu > 1$). Hiệu quả của quy mô được xác định thông qua việc so sánh tổng sản phẩm sau khi tăng quy mô lên μ lần với μ lần tổng sản phẩm trước khi tăng quy mô [so sánh $f(\mu K, \mu L)$ với $\mu f(K, L)$].

- Nếu $f(\mu K, \mu L) > \mu f(K, L)$ thì ta nói rằng hàm sản xuất biểu thị *hiệu quả tăng theo quy mô*;

- Nếu $f(\mu K, \mu L) < \mu f(K, L)$ thì ta nói rằng hàm sản xuất biểu thị *hiệu quả giảm theo quy mô*;

- Nếu $f(\mu K, \mu L) = f(K, L)$ thì ta nói rằng hàm sản xuất biểu thị *hiệu quả không đổi theo quy mô*.

Hàm sản xuất biểu thị hiệu quả không đổi theo quy mô là một hàm thuần nhất bậc nhất. Nói chung, nếu hàm sản xuất $Q = f(K, L)$ là một hàm thuần nhất bậc s, tức là

$$f(\mu K, \mu L) \equiv \mu^s f(K, L)$$

thì hiệu quả của quy mô được thể hiện thông qua bậc thuần nhất s như sau:

- $s > 1$: hiệu quả tăng theo quy mô;
- $s < 1$: hiệu quả giảm theo quy mô;
- $s = 1$: hiệu quả không đổi theo quy mô.

Ví dụ: Hàm sản xuất Cobb-Douglas $Q = A.L^{\alpha} K^{\beta}$ $(A, \alpha, \beta > 0)$ là một hàm thuần nhất bậc $\alpha + \beta$. Như vậy, hàm sản xuất Cobb-Douglas biểu hiện hiệu quả tăng, giảm hay không đổi theo quy mô tuỳ theo $\alpha + \beta > 1$, $\alpha + \beta < 1$ hay $\alpha + \beta = 1$.

Hàm sản xuất Cobb-Douglas biểu hiện hiệu quả không đổi theo qui mô có dạng :

$$Q = a.\, L^{\alpha}K^{1-\alpha} \quad (a, 0 < \alpha < 0).$$

BÀI TẬP

40. Hãy chứng tỏ các hàm số sau đây là các hàm thuần nhất và cho biết bậc thuần nhất của chúng:

a) $f(x, y) = \sqrt[3]{2x + 3y}$ b) $f(x, y) = 2x\sqrt{y} + 3y\sqrt{x}$

c) $f(x, y, z) = x^3 + x^2y + y^2z + z^3$

d) $f(x, y, z) = \dfrac{\sqrt[4]{x^3 + y^3 + z^3}}{xyz}$

41. Hãy kiểm tra công thức Ơle đối với các hàm thuần nhất sau đây:

a) $u = 2x^2 + 3xy - 5y^2$

b) $u = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

42. Chứng minh rằng nếu hàm khả vi $f(x, y)$ là hàm thuần nhất bậc s thì các hàm số $f'_x(x, y)$ và $f'_y(x, y)$ là các hàm thuần nhất bậc $s - 1$.

43. Hãy đánh giá hiệu quả của quy mô qua các hàm sản xuất:

a) $Q = 20K^{0,4}L^{0,3}$ b) $Q = 5K^{0,6}L^{0,8}$ c) $Q = 12\sqrt{K}\sqrt[3]{L^2}$

§5 HÀM ẨN

I. HÀM ẨN MỘT BIẾN

a. Khái niệm hàm ẩn

Giả sử các giá trị của hai biến số x và y liên hệ với nhau bằng một phương trình dạng

$$F(x, y) = 0. \qquad (5.1)$$

Trong phương trình (5.1), F(x, y) là một hàm hai biến xác định trong một miền $D \subset \mathbb{R}^2$. Nếu với mỗi x thuộc một khoảng X nào đó tồn tại một và chỉ một giá trị của y thoả mãn phương trình (5.1) thì phương trình (5.1) xác định một hàm số $y = y(x)$, $x \in X$.

Hàm số $y = y(x)$ cho gián tiếp dưới dạng phương trình (5.1), chưa giải y theo x, được gọi là *hàm ẩn*. Ta nói phương trình (5.1) xác định hàm ẩn $y = y(x)$ trong một khoảng X khi và chỉ khi:

$$F[x, y(x)] = 0 \quad \forall x \in X.$$

Nếu giải được phương trình (5.1) để biểu diễn y theo x bằng biểu thức thì hàm ẩn (5.1) có thể đưa được về dạng *hàm hiện.*

Ví dụ: Phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (-a \le x \le a,\ 0 \le y \le b) \qquad (5.2)$$

xác định y là hàm số của x:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad (-a \le x \le a). \qquad (5.3)$$

Hàm số cho dưới dạng (5.2) là hàm ẩn. Trong ví dụ này, hàm ẩn (5.2) có thể biểu diễn dưới dạng hàm hiện (5.3).

Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp, mặc dù ta có thể chứng minh được rằng *về mặt nguyên tắc* phương trình (5.1) xác định một hàm số $y = y(x)$, nhưng không thể biểu diễn y theo x một cách trực tiếp. Trong những trường hợp đó ta phải xét hàm số $y = y(x)$ gián tiếp dưới dạng phương trình (5.1). Ký hiệu $y = y(x)$ chỉ mang ý nghĩa hình thức để nói khái quát rằng biến số y là hàm số của biến số x.

b. Sự tồn tại hàm ẩn

Trên trục số ta gọi khoảng $V = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ là lân cận bán kính δ của điểm x_0 ($\delta > 0$). Tương tự, trong không gian $\mathbb{R}^n$ ta gọi lân cận bán kính r ($r > 0$) của điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ là tập hợp các điểm $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ có khoảng cách đến $\overline{X}$ nhỏ hơn r:

$$d(X, \overline{X}) < r.$$

Người ta đã chứng minh được định lý sau đây:

Định lý: Giả sử $F(x, y)$ xác định, liên tục, có các đạo hàm riêng liên tục trong một lân cận của điểm $M_0(x_0, y_0)$ và tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ thoả mãn các điều kiện:

$$F(x_0, y_0) = 0,\ F'_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

Khi đó:

- Phương trình (5.1) xác định một hàm số $y = y(x)$ trong một lân cận V của điểm x_0;
- Tại điểm x_0 hàm $y = y(x)$ nhận giá trị y_0: $y(x_0) = y_0$;
- Hàm số $y = y(x)$ có đạo hàm liên tục trong lân cận V của điểm x_0.

c. Tính đạo hàm của hàm ẩn

Định lý trên khẳng định sự tồn tại hàm ẩn $y = y(x)$ xác định bởi phương trình (5.1), đồng thời khẳng định sự tồn tại đạo hàm của hàm ẩn (khi các điều kiện của định lý thoả mãn). Việc tính đạo hàm của hàm ẩn (khi đã biết đạo hàm tồn tại) có thể thực hiện tương đối đơn giản. Với y = y(x) thì (5.1) là một đồng nhất thức, tức là vế trái là một hàm số đồng nhất bằng 0, do đó đạo hàm của nó (theo x) đồng nhất bằng 0. Theo quy tắc tính đạo hàm của hàm hợp, ta có

$$F'_x(x, y) + F'_y(x,y).y'_x = 0. \qquad (5.4)$$

Từ đây, với điều kiện $F'_y \neq 0$, ta tìm được:

$$y'_x = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}. \qquad (5.5)$$

Chú ý rằng công thức (5.5) được sử dụng với y là giá trị của hàm ẩn y = y(x) tại điểm x, tức là bộ hai (x, y) thoả mãn phương trình (5.1). Nếu hàm số F(x, y) có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục thì từ (5.5) ta có thể tính đạo hàm cấp hai của hàm ẩn y = y(x):

$$y''_{xx} = -\frac{(F''_{xx} + F''_{xy}.y'_x)F'_y - F'_x(F''_{yx} + F''_{yy}.y'_x)}{(F'_y)^2}. \qquad 5.6)$$

Thay (5.5) vào (5.6), ta được:

$$y''_{xx} = \frac{2F'_xF'_yF''_{xy} - (F'_x)^2F''_{yy} - (F'_y)^2F''_{xx}}{(F'_y)^3}. \qquad (5.7)$$

Ta cũng có thể tính đạo hàm cấp hai của hàm ẩn bằng cách lấy đạo hàm hai vế của đồng nhất thức (5.4) theo x, sau đó thay y'_x bằng vế phải của (5.5), từ đó suy ra (5.7).

Theo cách mô tả trên đây, với giả thiết F(x, y) có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp m và $F'_y \neq 0$, ta có thể tính đạo hàm cấp m của hàm ẩn y = y(x) xác định bởi phương trình (5.1).

Ví dụ 1: Giả sử y liên hệ với x như sau:

$$\ln\sqrt{x^2+y^2}-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=0. \qquad (5.8).$$

Xem y là hàm số của x thì (5.8) là một đồng nhất thức. Lấy đạo hàm hai vế của đồng nhất thức đó theo x ta được:

$$\frac{x+yy'}{x^2+y^2}-\frac{xy'-y}{x^2+y^2}=0 \ \Rightarrow\ x+yy'-(xy'-y)=0.$$

Từ đây, với điều kiện $y \neq x$, ta tìm được đạo hàm của hàm ẩn xác định bởi phương trình (5.8):

$$y'=\frac{x+y}{x-y}\ . \qquad (5.9)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (5.9) theo x (xem y là hàm số của x), ta có:

$$y''=\frac{(1+y')(x-y)-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2}=\frac{-2y+2xy'}{(x-y)^2} \qquad (5.10)$$

Thay y' từ (5.9) vào (5.10) ta được:

$$y''=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}.$$

Lặp lại quá trình này ta có thể tính đạo hàm cấp bất kỳ của hàm ẩn xác định bởi phương trình (5.8).

Ví dụ 2: Tìm các điểm cực trị của hàm ẩn xác định bởi phương trình:

$$x^3+y^3-3xy=0. \qquad (5.11)$$

Giải: Gọi F là biểu thức ở vế trái của phương trình (5.11), ta có:

$$F'_x = 3x^2 - 3y,\ F'_y = 3y^2 - 3x.$$

Điều kiện để phương trình (5.11) xác định hàm ẩn $y = y(x)$ là $F'_y = 3y^2 - 3x \neq 0$. Ta xét hàm ẩn trong lân cận của các điểm (x, y) thoả mãn điều kiện này, tức là khi $x \neq y^2$.

Từ (5.5) suy ra $y'_x = 0$ khi và chỉ khi $F'_x = 0$. Điểm dừng của hàm ẩn $y = y(x)$ xác định bởi phương trình (5.11) được xác định từ hệ hai phương trình:

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0,\ F'_x = 3x^2 - 3y = 0.$$

Giải hệ phương trình này và chú ý đến điều kiện $x \neq y^2$ ta tìm được: ($x = \sqrt[3]{2}$, $y = \sqrt[3]{4}$).

Để xét điều kiện đủ ta phải tính y''_{xx}. Chú ý rằng khi $x = \sqrt[3]{2}$, $y = \sqrt[3]{4}$ ta có:

$$F'_x = 0,\ F''_{xx} = 6x = 6\sqrt[3]{2} > 0,\ F'_y = 3(y^2 - x) = 3(\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{2}) > 0.$$

Từ (5.7) suy ra

$$y''_{xx} = \frac{-F''_{xx}}{F'_y} < 0.$$

Vậy $x = \sqrt[3]{2}$ là điểm cực đại của hàm ẩn xác định bởi phương trình (5.11) và

$$y_{max} = y(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{4}.$$

II. HÀM ẨN NHIỀU BIẾN

Giả sử mối liên hệ giữa biến số y và các biến số $x_1, x_2, ..., x_n$ được biểu diễn dưới dạng phương trình:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, y) = 0, \tag{5.12}$$

trong đó F là một hàm số của n + 1 biến số $x_1, x_2, ..., x_n, y$.

Nếu với mỗi điểm $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ thuộc một miền $\mathbf{D} \subset \mathbb{R}^n$ tồn tại một và chỉ một giá trị của biến y sao cho $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ thoả mãn phương trình (5.12) thì phương trình (5.12) xác định một hàm số $y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Hàm số $y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ xác định một cách gián tiếp thông qua phương trình (5.12) được gọi là *hàm ẩn*. Ta nói phương trình (5.12) xác định hàm ẩn $y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ trong miền $\mathbf{D} \subset \mathbb{R}^n$ khi và chỉ khi:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, y(x_1, x_2, ..., x_n)) = 0, \ \forall X(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbf{D}.$$

Định lý về sự tồn tại hàm ẩn trong trường hợp này có nội dung như sau:

Định lý: Giả sử hàm số $F(x_1, x_2, ..., x_n, y)$ xác định, liên tục, có các đạo hàm riêng liên tục trong một lân cận của điểm $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n, \overline{y})$ và tại điểm $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n, \overline{y})$ thoả mãn các điều kiện:

$$F(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n, \overline{y}) = 0, \ \ F'_y(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n, \overline{y}) \neq 0.$$

Khi đó:

- Phương trình (5.12) xác định hàm ẩn $y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ trong một lân cận V của điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$;
- Hàm số $y = y(X)$ nhận giá trị $\overline{y}$ tại điểm $X = \overline{X}$:

$$y(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n) = \overline{y};$$

- Hàm ẩn $y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trong lân cận V của điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$.

Việc tính các đạo hàm riêng của hàm ẩn nhiều biến được thực hiện tương tự như việc tính đạo hàm của hàm ẩn một biến. Lấy đạo hàm hai vế của đồng nhất thức (5.12) theo x_k (xem y là hàm số của n biến số $x_1, x_2, \ldots, x_n$), ta có:

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_k} = 0.$$

Với giả thiết $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, từ đây ta tìm được:

$$\frac{\partial y}{\partial x_k} = -\frac{\partial F / \partial x_k}{\partial F / \partial y}. \tag{5.13}$$

Các đạo hàm riêng cấp cao cũng được tính tương tự như tính đạo hàm cấp cao của hàm ẩn một biến.

Ví dụ 1: Xét hàm ẩn $z = z(x, y)$ xác định bởi phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{5.14}$$

Gọi F là biểu thức ở vế trái của (5.14), ta có:

$$F'_x = \frac{2x}{a^2},\ F'_y = \frac{2y}{b^2},\ F'_z = \frac{2z}{c^2}.$$

Với điều kiện $z \neq 0$, theo công thức (5.13) ta tìm được:

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{c^2 x}{a^2 z},\ z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{c^2 y}{b^2 z}. \tag{5.15}$$

Để tính các đạo hàm riêng của hàm ẩn $y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ xác định bởi phương trình (5.12) ta còn có thể làm như sau:

- Lấy vi phân toàn phần hai vế của đồng nhất thức (5.12) theo công thức vi phân toàn phần của hàm số n + 1 biến số $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$:[1]

[1] Chú ý rằng biểu thức vi phân toàn phần cấp một của hàm số F được sử dụng bất kể y là biến độc lập hay là hàm số của các biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

• Với giả thiết $F'_y \neq 0$ ta có thể biểu diễn dy qua $dx, dx_2, \ldots, dx_n$. Biểu thức đó chính là biểu thức vi phân toàn phần của hàm ẩn $y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, do đó hệ số của dx_k chính là đạo hàm của y theo x_k.

Trong ví dụ 1, lấy vi phân toàn phần hai vế của (5.14), ta có:

$$\frac{2xdx}{a^2} + \frac{2ydy}{b^2} + \frac{2zdz}{c^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad dz = -\frac{c^2xdx}{a^2z} - \frac{c^2ydy}{b^2z}.$$

Đây chính là biểu thức vi phân toàn phần của hàm ẩn z = z(x, y), do đó ta có các đạo hàm riêng như đã tính theo công thức (5.15).

Ví dụ 2: Cho hàm ẩn z = z(x, y) xác định bởi phương trình:

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2x + 4y - 6z = 0.$$

Hãy tính các đạo hàm riêng cấp 1 và cấp 2 của hàm số đã cho.

Giải: Gọi F là hàm số ở vế trái, ta có:

$$F'_x = 2x + 2,\ F'_y = 4y + 4,\ F'_z = 6z - 6.$$

Với điều kiện $z \neq 1$, ta có:

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{x+1}{3(1-z)},\ z'_y = \frac{2(y+1)}{3(1-z)};$$

$$z''_{xx} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1 - z - (x+1)(-z'_x)}{(1-z)^2}$$

$$= \frac{1 - z + (x+1)\dfrac{x+1}{3(1-z)}}{3(1-z)^2} = \frac{3(1-z)^2 + (x+1)^2}{9(1-z)^3};$$

$$z''_{xy} = -\frac{1-x}{3(1-z)^2}(-z')_y$$

$$= \frac{x+1}{3(1-z)^2}\,\frac{2(y+1)}{3(1-z)} = \frac{2(x+1)(y+1)}{9(1-z)^3};$$

$$z''_{xy} = -\frac{2(y+1)}{3(1-z)^2}(-z'_x)$$

$$= \frac{2(y+1)}{3(1-z)^2}\,\frac{x+1}{3(1-z)} = \frac{2(x+1)(y+1)}{9(1-z)^3};$$

$$z''_{yy} = \frac{2}{3}.\frac{1-z-(y+1)(-z'_y)}{(1-z)^2} = \frac{3(1-z)^2-(x+1)^2}{3(1-z)^3}$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{1-z+(y+1)\dfrac{2(y+1)}{3(1-z)}}{(1-z)^2} = \frac{2[3(1-z)^2-2(y+1)^2]}{9(1-z)^3}.$$

Ví dụ 3: Xét hàm ẩn $z = z(x, y)$ xác định bởi phương trình:

$$z = x + y\varphi(z)\,, \tag{5.16}$$

trong đó $\varphi(z)$ là hàm số khả vi và thoả mãn điều kiện

$$y\varphi'(z) \neq 1.$$

Hãy chứng minh:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(z)\frac{\partial z}{\partial x}$$

Giải: Thật vậy, lấy vi phân toàn phần hai vế của (5.16), ta có:

$$dz = dx + \varphi(z)dy + y\varphi'(z)dz$$

$$\Rightarrow \quad dz = \frac{dx}{1 - y\varphi'(z)} + \frac{\varphi(z)dy}{1 - y\varphi'(z)}.$$

Từ đây suy ra:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 - y\varphi'(z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\varphi(z)}{1 - y\varphi'(z)} = \varphi(z)\frac{\partial z}{\partial x}.$$

III. HỆ HÀM ẨN

Giả sử mối liên hệ giữa các biến số $y_1,..., y_m$ với các biến số $x_1,...,x_n$ được biểu diễn dưới dạng hệ phương trình:

$$\begin{cases} F_1(x_1,..., x_n; y_1,..., y_m) = 0 \\ F_2(x_1,..., x_n; y_1,..., y_m) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_m(x_1,..., x_n; y_1,..., y_m) = 0 \end{cases} \qquad (5.17)$$

trong đó F_k là các hàm số của n + m biến số $x_1,...,x_n, y_1,..., y_m$.

Nếu với mỗi $(x_1,\dots,x_n)$ thuộc một miền $D \in \mathbb{R}^n$ tồn tại một và chỉ một bộ giá trị $(y_1,\dots,y_n)$ sao cho $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ thoả mãn hệ phương trình (5.17) thì hệ phương trình đó xác định một hệ m hàm số của n biến số $x_1, ..., x_n$:

$$y_1 = y_1(x_1,..., x_n),... , y_m = y_m(x_1,..., x_n). \qquad (5.18)$$

Các hàm số (5.18) được xác định một cách gián tiếp dưới dạng hệ phương trình (5.17) được gọi là *một hệ hàm ẩn*. Khi thay các hàm số (5.18) vào các phương trình (5.17) ta được các đồng nhất thức.

Với giả thiết các hàm số F_k (k = 1,..., m) có các đạo hàm riêng theo các biến $y_1,\dots,y_n$, ta lập định thức:

$$J = \frac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(y_1,\ldots,y_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} \qquad (5.19)$$

Định thức J được gọi là *định thức Jacobi*. Người ta đã chứng minh định lý sau đây:

Định lý: Giả sử các hàm số F_k (k = 1, 2,..., m) xác định, liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trong một lân cận của điểm $(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n,\overline{y}_1,\ldots,\overline{y}_m)$ và tại điểm $(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n,\overline{y}_1,\ldots,\overline{y}_m)$ thoả mãn các điều kiện:

◊ $F_k(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n,\overline{y}_1,\ldots,\overline{y}_m) = 0, \forall k = 1, 2, \ldots, m;$

◊ $J \neq 0$ [J là định thức Jacobi ở công thức (5.19)].

Khi đó:

• Hệ phương trình (5.17) xác định hệ hàm ẩn (5.18) trong một lân cận V của điểm $\overline{X}(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n)$;

• Hàm số $y_k(X)$ nhận giá trị bằng $\overline{y}_k$ tại điểm $X = \overline{X}$:

$$y_k(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n) = \overline{y}_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m);$$

• Các hàm ẩn (5.18) liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trong lân cận V của điểm $\overline{X}(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n)$.

Để tính đạo hàm riêng của các hàm ẩn (5.18), xác định bởi hệ phương trình (5.17), theo biến x_i ta làm như sau:

Nếu xem $y_1,\ldots, y_m$ là các hàm ẩn của $x_1,\ldots, x_n$ thì ta có m đồng nhất thức (5.17). Lấy đạo hàm hai vế của các đồng nhất thức đó theo x_i, ta được:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2}\dfrac{\partial y_2}{\partial x_i} + \ldots + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}\dfrac{\partial y_m}{\partial x_i} = 0 \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2}\dfrac{\partial y_2}{\partial x_i} + \ldots + \dfrac{\partial F_2}{\partial y_m}\dfrac{\partial y_m}{\partial x_i} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_m}{\partial y_2}\dfrac{\partial y_2}{\partial x_i} + \ldots + \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}\dfrac{\partial y_m}{\partial x_i} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2}\dfrac{\partial y_2}{\partial x_i} + \ldots + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}\dfrac{\partial y_m}{\partial x_i} = -\dfrac{\partial F_1}{\partial x_i} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2}\dfrac{\partial y_2}{\partial x_i} + \ldots + \dfrac{\partial F_2}{\partial y_m}\dfrac{\partial y_m}{\partial x_i} = -\dfrac{\partial F_2}{\partial x_i} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_m}{\partial y_2}\dfrac{\partial y_2}{\partial x_i} + \ldots + \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}\dfrac{\partial y_m}{\partial x_i} = -\dfrac{\partial F_m}{\partial x_i} \end{cases} \quad (5.20)$$

Với giả thiết $J \neq 0$ thì (5.20) là một hệ phương trình Cramer của m ẩn $\dfrac{\partial y_1}{\partial x_i}$, ..., $\dfrac{\partial y_m}{\partial x_i}$. Theo quy tắc Cramer ta tìm được các đạo hàm riêng theo x_i của các hàm ẩn $y_1, \ldots, y_m$.

Ví dụ 1: Tính đạo hàm của các hàm ẩn $y = y(x)$, $z = z(x)$ xác định bởi hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 9 \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 2 \end{cases}$$

Giải: Xem y và z là các hàm số của biến số x, lấy đạo hàm 2 vế của 2 hệ thức đã cho ta được:

$$\begin{cases} 2 + 3y'_x - z'_x = 0 \\ 2x + 2yy'_x + 4zz'_x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y'_x - z'_x = -2 \\ 2yy'_x + 4zz'_x = -2x \end{cases}$$

Với giả thiết

$$J = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2y & 4z \end{vmatrix} = 2(6z + y) \neq 0,$$

giải hệ phương trình tuyến tính 2 ẩn y'_x, z'_x ta được:

$$y'_x = \frac{x - 4z}{6z + y},\ z'_x = \frac{4y - 3x}{6z + y}$$

Ví dụ 2: Tính các đạo hàm riêng của các hàm số $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, xác định bởi hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + u + v = a \\ x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = b^2 \end{cases} \tag{5.21}$$

Giải: Lấy đạo hàm hai vế của các đồng nhất thức (5.21) theo x (xem u, v là các hàm số của x, y), ta được:

$$\begin{cases} 1 + u'_x + v'_x = 0 \\ 2x + 2uu'_x + 2vv'_x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'_x + v'_x = -1 \\ 2uu'_x + 2vv'_x = -2x \end{cases}$$

Với giả thiết

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2u & 2v \end{vmatrix} = 2(v - u) \neq 0,$$

Giải hệ phương 2 ẩn u'_x v'_x ta dễ dàng tìm được:

$$u'_x = \frac{x - v}{v - u},\ u'_y = \frac{u - x}{v - u}.$$

Tương tự, lấy đạo hàm hai vế của các đồng nhất thức (5.21) theo y, ta được:

$$\begin{cases} 1 + u'_y + v'_y = 0 \\ 2x + 2uu'_y + 2vv'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'_y + v'_y = -1 \\ 2uu'_y + 2vv'_y = -2y \end{cases}.$$

Giải hệ phương trình này ta tìm được:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y - v}{v - u}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{u - y}{v - u}.$$

IV. TỶ LỆ THAY THẾ CẬN BIÊN

• Xét mô hình hàm lợi ích $U = U(x_1, x_2)$, với x_1 là lượng hàng hoá A, x_2 là lượng hàng hoá B. Đường bàng quan

$$U(x_1, x_2) = U_0$$

biểu diễn tập hợp các túi hàng (x_1, x_2) cho cùng một mức lợi ích U_0. Đạo hàm của hàm ẩn $x_2 = x_2(x_1)$ xác định bởi phương trình đường mức có thể tính được theo công thức:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{U'_{x_1}}{U'_{x_2}} = -\frac{MU_1}{MU_2}.$$

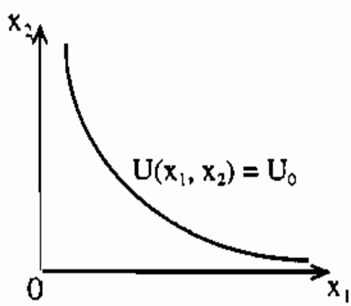
Lý thuyết người tiêu dùng trong Kinh tế học thừa nhận tiên đề về tính không bão hoà, hay "nhiều được ưa chuộng hơn ít", tức là lợi ích của người tiêu dùng tăng (người tiêu dùng ưa thích hơn) khi có thêm một loại hàng hoá trong cơ cấu tiêu dùng mà không bớt đi lượng các hàng hoá khác. Về mặt toán học điều này có nghĩa là $MU_1 = U'_{x_1} > 0$, $MU_2 = U'_{x_2} > 0$, do đó dx_2/dx_1 âm, tức là $x_2 = x_2(x_1)$ là hàm nghịch biến. Như vậy, các hàng hoá có thể thay thế nhau để duy trì một mức lợi ích nhất định. Theo ý nghĩa của đạo hàm thì

$$\theta_{21} = (-\,dx_2/dx_1) = MU_1/\,MU_2$$

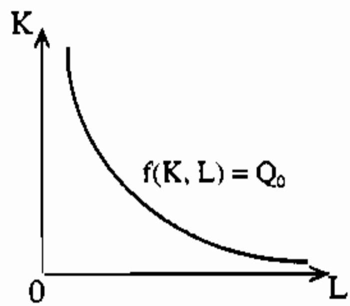
xấp xỉ bằng lượng tăng hàng hoá B để bù cho 1 đơn vị hàng hoá A bị bớt đi mà vẫn giữ nguyên lợi ích của người tiêu dùng. Các nhà kinh tế gọi tỷ số θ_{21} là *tỷ lệ thay thế cận biên* (marginal rate of substitution) của hàng hoá B cho hàng hoá A. Một tiên đề khác được thừa nhận trong kinh tế học là "*tỷ lệ thay thế cận biên giảm dần*", tức là θ_{21} giảm khi x_1 tăng và x_2 không đổi. Biểu hiện toán học là:

$$\frac{\partial(\theta_{12})}{\partial x_1} = -\frac{d^2x_2}{dx_1^2} \le 0 \Leftrightarrow \frac{d^2x_2}{dx_1^2} \ge 0 .$$

Như vậy, đường bàng quan (đồ thị của hàm ẩn $x_2 = x_2(x_1)$) có dáng dốc xuống và quay bề lõm lên trên như hình vẽ.



Đường bàng quan



Đường đồng lượng

• Tương tự, đường mức của hàm sản xuất xuất $Q = f(K, L)$, gọi là đường đồng lượng, có phương trình:

$$f(K, L) = Q_0$$

Phương trình này xác định hàm ẩn $K = K(L)$. Dọc theo đường đồng lượng, các yếu tố sản xuất có thể thay thế cho nhau để cho cùng một mức sản lượng Q_0. Tỷ số

$$\theta_{KL} = -\frac{dK}{dL} = \frac{f'_L}{f'_K} = \frac{MPP_L}{MPP_K}$$

được gọi là *tỷ lệ thay thế kỹ thuật cận biên* (marginal rate of technical substitution). Tỷ lệ này cho biết xấp xỉ lượng vốn phải tăng thêm khi lượng lao động giảm 1 đơn vị để giữ nguyên mức sản lượng.

Tương tự như lý thuyết người tiêu dùng, khi phân tích sản xuất người ta thừa nhận các tiên đề sau đây:

• Sản lượng đầu ra Q biến thiên cùng chiều với lượng sử dụng một yếu tố sản xuất (với các yếu tố khác giữ nguyên);

• Tỷ lệ thay thế kỹ thuật cận biên giảm dần, tức là khi lượng sử dụng lao động càng lớn thì lượng vốn phải tăng thêm để thay thế cho 1 đơn vị lao động bớt đi (mà vẫn giữ nguyên mức sản lượng) càng nhỏ.

Với các tiên đề nói trên, ta có:

$$MPP_K > 0,\ MPP_L > 0, \text{ kéo theo } \frac{dK}{dL} < 0;$$

$$\frac{\partial(\theta_{KL})}{\partial L} = -\frac{d^2K}{dL^2} < 0, \text{ kéo theo } \frac{d^2K}{dL^2} > 0.$$

Đường đồng lượng có hình dạng tương tự như đường bàng quan: dốc xuống và quay bề lõm lên trên.

V. PHÂN TÍCH TĨNH SO SÁNH TRONG KINH TẾ

Trong các mô hình phân tích kinh tế, các biến số có mặt trong mô hình được chia thành hai loại:

• *Các biến nội sinh* là các biến số được xác định bởi bản thân mô hình.

• *Các biến ngoại sinh* là các biến mà giá trị của chúng được xác định bên ngoài mô hình.

Trong một mô hình ra quyết định, các biến nội sinh còn được gọi là các *biến chọn*. Các biến ngoại sinh đặc trưng cho điều kiện (cơ hội) lựa chọn.

Phân tích tĩnh so sánh có nghĩa là phân tích xu hướng thay đổi của các quyết định lựa chọn khi điều kiện ngoại sinh thay đổi.

Giả sử mô hình có n biến nội sinh $(x_1, x_2,..., x_n)$ và m biến ngoại sinh $(\alpha_1, \alpha_1,..., \alpha_m)$. Quyết định lựa chọn $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ phụ thuộc vào $(\alpha_1, \alpha_1, ..., \alpha_m)$:

$$\overline{x}_1 = \varphi_1(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m),$$
$$\overline{x}_2 = \varphi_2(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m),$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$\overline{x}_n = \varphi_n(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m).$$

Xu hướng thay đổi của $\overline{x}_k$ khi α_i thay đổi được thể hiện thông qua dấu của đạo hàm riêng $\dfrac{\partial \overline{x}_k}{\partial \alpha_i}$.

Ví dụ 1: Giả sử doanh nghiệp canh tranh sản xuất một sản phẩm với hàm chi phí TC = TC(Q), trong điều kiện giá sản phẩm trên thị trường là p. Vấn đề đặt ra là sản xuất bao nhiêu thì thu được lợi nhuận tối đa. Bài toán ra quyết định là: Chọn Q để tổng lợi nhuận $\pi = pQ - TC(Q)$ đạt cực đại.

Trong mô hình này Q là biến chọn (biến nội sinh), p là biến ngoại sinh. Điều kiện cần để π đạt cực đại là

$$\pi'(Q) = p - TC'(Q) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad TC'(Q) = p. \tag{5.22}$$

Từ phương trình điều kiện cần (5.22) ta tìm được $\overline{Q} = \overline{Q}(p)$. Ta chọn $\overline{Q} = \overline{Q}(p)$ khi thoả mãn điều kiện đủ:

$$\pi''(\overline{Q}) = -TC''(\overline{Q}) < 0 \Leftrightarrow TC''(\overline{Q}) > 0.$$

Hàm số $\overline{Q} = \overline{Q}(p)$ là hàm ẩn được xác định từ hệ phương trình (5.22), do đó ta có đồng nhất thức

$$TC'[\overline{Q}(p)] = p.$$

Lấy đạo hàm hai vế của đồng nhất thức này theo p ta được

$$TC''(\overline{Q}).\frac{d\overline{Q}}{dp} = 1.$$

Từ đây suy ra

$$\frac{d\overline{Q}}{dp} = \frac{1}{TC''(\overline{Q})} > 0.$$

Điều này cho biết khi giá sản phẩm trên thị trường tăng thì doanh nghiệp sẽ sản xuất nhiều sản phẩm hơn, tức là lượng cung tăng.

Ví dụ 2: Xét mô hình IS-LM:

$$\text{IS:}\ \begin{cases} Y = C + I + G \\ C = aY + b \\ I = c - dr \\ G = G_0 \end{cases} \Leftrightarrow\ r = \frac{b + c + G_0 - (1-a)Y}{d};$$

$$\text{LM:}\ \begin{cases} L = M \\ L = \alpha Y - \beta r \\ M = M_0 \end{cases} \Leftrightarrow\ r = \frac{\alpha Y - M_0}{\beta},$$

trong đó: Y là tổng thu nhập của nền kinh tế, C là tiêu dùng, I là đầu tư, r là lãi suất, L là lượng cầu tiền, M là lượng cung tiền thực tế; a là xu hướng tiêu dùng cận biên ($0 < a < 1$); b, c, d, α,

β là các hằng số dương. Chú ý rằng, các biến ngoại sinh của mô hình là a, G_0, M_0.

Điểm cân bằng của cả hai thị trường (thị trường hàng hoá và thị trường tiền tệ) là giao điểm của đường IS và đường LM:

$$\overline{Y} = \frac{\beta(b + c + G_0) + dM_0}{\alpha d + \beta(1 - a)}, \ \bar{r} = \frac{\alpha(b + c + G_0) - (1 - a)M_0}{\alpha d + \beta(1 - a)}.$$

Để xem xét ảnh hưởng của chi tiêu của chính phủ đối với thu nhập và lãi xuất ta xem dấu của các đạo hàm riêng:

$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial G_0} = \frac{\beta}{\alpha d + \beta(1 - a)} > 0, \ \frac{\partial \bar{r}}{\partial G_0} = \frac{\alpha}{\alpha d + \beta(1 - a)} > 0.$$

Ta thấy rằng việc tăng chi tiêu của chính phủ làm cho cả thu nhập và lãi suất đều tăng.

Để xem xét ảnh hưởng của lượng cung tiền thực tế đối với thu nhập và lãi xuất ta xem dấu của các đạo hàm riêng:

$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial M_0} = \frac{d}{\alpha d + \beta(1 - a)} > 0, \ \frac{\partial \bar{r}}{\partial M_0} = \frac{-(1 - a)}{\alpha d + \beta(1 - a)} < 0.$$

Ta thấy rằng việc tăng lượng cung tiền thực tế làm cho thu nhập tăng và lãi suất giảm.

BÀI TẬP

44. Hãy tính đạo hàm $y'(x)$ của hàm số $y = y(x)$ cho dưới dạng hàm ẩn:

a) $x^3y - y^3x = a^4$ b) $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$

c) $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$ d) $\sqrt{x^2 + y^2} = ae^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$ $(a > 0)$

45. Tính đạo hàm cấp 1 và cấp 2 của hàm số $y = y(x)$ xác định bởi phương trình:

a) $y^2 = 2px$ b) $x^2 - xy + y^2 = 0$

c) $y^2 + 2\ln y = x^4$ d) $x^2y^2 - x^4 - y^4 = a^4$

46. Tính các đạo hàm riêng của hàm số $z = z(x, y)$ xác định bởi phương trình:

a) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ b) $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$

c) $z^3 + 3xyz = a^3$ d) $e^z - xyz = 0$

47. Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm ẩn $z = z(x, y)$, xác định bởi phương trình:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ b) $x + y + z = e^z$

48. Cho hàm ẩn $z = z(x, y)$ xác định bởi phương trình:

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0.$$

Hãy tính $z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}$ khi $x = 1$, $y = -2$, $z = 1$.

49. Lập các biểu thức dz, d^2z của hàm số $z = z(x, y)$ xác định bởi phương trình:

$$xyz = x + y + z.$$

50. Hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = 36 \\ 2x + 3y + 4z = 20 \end{cases}$$

xác định 2 hàm số $y = y(x)$, $z = z(x)$. Hãy tính y'_x, z'_x.

51. Hệ phương trình

$$\begin{cases} xu - yv = 0 \\ yu + xv = 1 \end{cases}$$

xác định 2 hàm số $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Hãy tính $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

52. Hệ phương trình

$$\begin{cases} e^u + u\sin v = x \\ e^u - u\cos v = y \end{cases}$$

xác định 2 hàm số $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Hãy tính $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

Chương 4
CỰC TRỊ CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

§1. CỰC TRỊ KHÔNG CÓ ĐIỀU KIỆN RÀNG BUỘC

I. KHÁI NIỆM CỰC TRỊ VÀ ĐIỀU KIỆN CẦN

a. Khái niệm cực trị địa phương

Khái niệm cực trị địa phương của hàm số n biến số được định nghĩa hoàn toàn tương tự như cực trị của hàm số một biến số.

Cho hàm số $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(X)$, xác định và liên tục trong miền

$$D = \{X(x_1, x_2, \ldots, x_n) : a_i < x_i < b_i,\ i=1, 2, \ldots, n\}.$$

Định nghĩa: Ta nói rằng hàm số $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ đạt *giá trị cực đại (giá trị cực tiểu)* tại điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n) \in D$ nếu tồn tại số $r > 0$ đủ nhỏ sao cho bất đẳng thức

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n) \quad (1.1)$$
$$(\ge)$$

được thoả mãn tại mọi điểm $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ của miền D mà khoảng cách đến điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ nhỏ hơn r:

$$d(X, \overline{X}) < r.$$

Điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ mà tại đó hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ đạt giá trị cực đại (cực tiểu) được gọi là *điểm cực đại* (*điểm cực tiểu*) của nó. Nói cách khác, điểm cực đại (điểm cực tiểu) địa phương của một hàm số là điểm mà tại đó hàm số đạt giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) trong phạm vi bán kính r nào đó.

b. Điều kiện cần của cực trị

Giả sử hàm số $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(X)$ xác định, liên tục và có các đạo hàm riêng theo tất cả các biến độc lập trong miền

$$\mathbf{D} = \left\{X(x_1, x_2, \dots, x_n) : a_i < x_i < b_i,\ i=1,2,\dots,n\right\}.$$

Với các giả thiết nêu trên ta có định lý sau đây:

Định lý: Điều kiện cần để hàm số $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ đạt cực trị (cực đại hoặc cực tiểu) tại điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n) \in \mathbf{D}$ là tại điểm đó tất cả các đạo hàm riêng cấp một triệt tiêu :

$$\begin{cases} w'_{x_i} = f'_{x_i}(\overline{X}) = 0, \\ \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \tag{1.2}$$

Chứng minh:

Với mỗi i cố định ($i = 1, \dots, n$) ta xét hàm số một biến x_i:

$$\varphi(x_i) = f(\overline{x}_1, \dots, x_i, \dots, \overline{x}_n).$$

Nếu hàm số $f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ đạt giá trị cực đại (cực tiểu) tại điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n) \in \mathbf{D}$ thì bất đẳng thức (1.1) thoả mãn khi $X \in \mathbf{D}$ và $d(X, \overline{X}) < r$. Từ đây suy ra

$$\varphi(x_i) = f(\overline{x}_1, \dots, x_i, \dots, \overline{x}_n) \underset{(\geq)}{\leq} f(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_i, \dots, \overline{x}_n) = \varphi(\overline{x}_i)$$

khi $|x_i - \overline{x}_i| < r$. Điều này chứng tỏ hàm số $\varphi(x_i)$ đạt giá trị cực đại (cực tiểu) tại điểm $\overline{x}_i$. Theo định lý về điều kiện cần để hàm một biến đạt cực trị ta có:

$$\varphi'(\overline{x}_i) = f'_{x_i}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n) = 0.$$

Định lý đã được chứng minh.

Định nghĩa: Điểm $\overline{X}$ thoả mãn điều kiện (1.2) được gọi là *điểm dừng* của hàm số $f(X)$.

Định lý trên cho thấy hàm số $f(X)$ *chỉ có thể đạt cực trị tại các điểm dừng*[1]. Tuy nhiên đây mới chỉ là điều kiện cần, chứ chưa phải là điều kiện đủ. Điều kiện đủ nêu dưới đây cho phép ta kiểm tra xem tại điểm dừng hàm số có thực sự đạt cực trị hay không. Chú ý rằng điều kiện đủ chỉ áp dụng sau khi điều kiện cần đã được thoả mãn (chỉ áp dụng cho các điểm dừng).

II. ĐIỀU KIỆN ĐỦ

a. Trường hợp hàm số hai biến số.

Giả sử $M_o(x_o, y_o)$ là một điểm dừng của hàm số $w = f(x, y)$ và tại điểm đó tất cả các đạo hàm riêng cấp 2 của nó đều tồn tại và liên tục. Xét định thức:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2,$$

trong đó

$$a_{11} = f''_{xx}(x_0, y_0); \quad a_{12} = f''_{xy}(x_0, y_0);$$

$$a_{21} = f''_{yx}(x_0, y_0); \quad a_{22} = f''_{yy}(x_0, y_0).$$

Định lý:

1. Nếu $D > 0$ thì điểm dừng $M_0(x_0, y_0)$ là *điểm cực trị* của hàm số $w = f(x, y)$:
   - $M_0(x_0, y_0)$ là *điểm cực đại* nếu $a_{11} < 0$;
   - $M_0(x_0, y_0)$ là *điểm cực tiểu* nếu $a_{11} > 0$.
2. Nếu $D < 0$ thì điểm $M_0(x_0, y_0)$ *không phải là điểm cực trị* của hàm số $w = f(x, y)$.

---

[1] Với giả thiết hàm số f có các đạo hàm riêng

Chú ý: Với giả thiết về sự tồn tại và liên tục của các đạo hàm riêng cấp hai ta có $a_{12} = a_{21}$, do đó

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 .$$

Khi $D > 0$ ta có $a_{11}a_{22} > 0$, suy ra a_{11} và a_{22} có dấu như nhau.

Trường hợp $D = 0$ ta không có kết luận gì về cực trị tại điểm dừng $M_0(x_0, y_0)$: hàm số có thể đạt cực trị hoặc không đạt cực trị tại điểm đó. Muốn có được kết luận ta phải sử dụng phương pháp khác.

Để tìm các điểm cực trị của hàm số trước hết ta phải xét điều kiện cần để tìm các điểm dừng, sau đó dùng điều kiện đủ để kiểm tra lần lượt từng điểm dừng và kết luận.

Ví dụ 1: Tìm các điểm cực trị của hàm số:

$$w = 8x^3 + 2xy - 3x^2 + y^2 .$$

Giải: Trước hết ta tính các đạo hàm riêng:

$$w'_x = 24x^2 + 2y - 6x, \quad w'_y = 2x + 2y ;$$

$$w''_{xx} = 48x - 6 , \quad w''_{xy} = w''_{yx} = 2 , \quad w''_{yy} = 2.$$

Các điểm dừng của hàm số được xác định từ hệ phương trình:

$$\begin{cases} w'_x = 0 \\ w'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2 + y - 3x = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}.$$

Hệ phương trình này có hai nghiệm $(x = 0, y = 0)$ và $(x = \frac{1}{3}, y = -\frac{1}{3})$.

Theo định lý về điều kiện cần thì hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại các điểm này. Ta sử dụng định lý về điều kiện đủ để kiểm tra lần lượt từng điểm dừng.

Tại điểm $(x = 0, y = 0)$ ta có:

$$a_{11} = -6, \quad a_{12} = a_{21} = 2, \quad a_{22} = 2;$$

$$D = (-6)2 - 2^2 = -16 < 0.$$

Vậy điểm $(x = 0, y = 0)$ không phải là điểm cực trị của hàm số đã cho.

Tại điểm $(x = \frac{1}{3}, y = -\frac{1}{3})$ ta có:

$$a_{11} = 10 \;,\; a_{12} = a_{21} = 2 \;,\; a_{22} = 2;$$

$$D = 20 - 4 > 0.$$

Vậy, theo định lý về điều kiện đủ, điểm $(x = \frac{1}{3}, y = -\frac{1}{3})$ là điểm cực tiểu của hàm số đã cho. Dễ dàng tính được:

$$w_{min} = w(\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}) = -\tfrac{4}{17}.$$

Ví dụ 2: Tìm các điểm cực trị của hàm số:

$$w = x + 2cy - e^x - e^{2y}$$

Giải: Các đạo hàm riêng cấp một và cấp hai của hàm số đã cho là:

$$w'_x = 1 - e^x \;,\quad w'_y = 2e - 2e^{2y};$$

$$w''_{xx} = -e^x \;,\; w''_{xy} = w''_{yx} = 0 \;,\; w''_{yy} = -4e^{2y}.$$

Hệ phương trình điều kiện cần $w'_x = w'_y = 0$ có một nghiệm duy nhất là $(x = 0, y = \frac{1}{2})$. Thay các giá trị này vào các biểu thức đạo hàm riêng cấp 2 ta có :

$$a_{11} = -1, \quad a_{12} = a_{21} = 0, \quad a_{22} = -4e.$$

Do $D = (-1)(-4e) - 0 = 4e > 0$ và $a_{11} < 0$ nên $(x = 0, y = \frac{1}{2})$ là điểm cực đại của hàm số đã cho và

$$w_{max} = w(0, \tfrac{1}{2}) = -1.$$

b. Điều kiện đủ tổng quát

Giả sử $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)$ là một điểm dừng của hàm số $w = f(X)$ và tại điểm đó hàm số có tất cả các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục. Như ta đã biết, vi phân toàn phần cấp hai của hàm số n biến số $w = f(X)$ tại điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)$ là một dạng toàn phương của n biến số $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$:

$$d^2f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}dx_i dx_j,$$

trong đó a_{ij} là các đạo hàm riêng cấp hai:

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 f(\overline{X})}{\partial x_i \partial x_j} \ (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Định lý:

• Nếu d^2f là một dạng toàn phương xác định dương thì điểm dừng $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)$ là *điểm cực tiểu* của hàm số f(X);

• Nếu d^2f là một dạng toàn phương xác định âm thì điểm dừng $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)$ là *điểm cực đại* của hàm số f(X);

• Nếu d^2f là một dạng toàn phương không xác định thì điểm dừng $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)$ *không phải là điểm cực trị* của hàm số f(X).

Ma trận của dạng toàn phương d^2f là ma trận vuông với các phần tử là các đạo hàm riêng cấp hai tại điểm dừng $\overline{X}$ (gọi là ma trận Hess):

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

trong đó:

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 f(\overline{X})}{\partial x_i \partial x_j} \; (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Một trong các phương pháp xem xét tính xác định của một dạng toàn phương là dựa vào các định thức con chính của ma trận của dạng toàn phương đó[1]. Xin nhắc lại rằng, định thức con cấp k của một ma trận vuông là định thức con tạo thành từ k dòng đầu và k cột đầu của nó. Ma trận H có n định thức con chính:

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Áp dụng định lý về dấu hiệu dạng toàn phương xác định ta có quy tắc sau đây:

• Nếu tất cả các định thức con chính của ma trận H đều dương ($D_k > 0$ với mọi k =1, 2,..., n) thì điểm dừng $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ là *điểm cực tiểu* của hàm số f(X);

• Nếu $(-1)^k D_k > 0$ với mọi k =1, 2,... , n, tức là ma trận H có tất cả các định thức con chính cấp lẻ âm và tất cả các định thức con chính cấp chẵn dương, thì điểm dừng $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ là *điểm cực đại* của hàm số f(X).

Ví dụ: Tìm các điểm cực trị của hàm số

$$w = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \quad (x > 0,\; y > 0,\; z > 0).$$

---

[1] Các dấu hiệu dạng toàn phương xác định đã được trình bày trong cuốn "Toán Cao Cấp cho các nhà kinh tế", phần 1: Đại số tuyến tính".

Giải: Để tìm các điểm cực trị, trước hết ta tính các đạo hàm riêng:

$$w'_x = 1 - \frac{y^2}{4x^2},\ \ w'_y = \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2},\ \ w'_z = \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2};$$

$$w''_{xx} = \frac{y^2}{2x^3},\ \ w''_{yy} = w''_{yx} = \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3},\ \ w''_{zz} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3};$$

$$w''_{xy} = w''_{yx} = -\frac{y}{2x^2},\ \ w''_{xz} = w''_{zx} = 0,\ \ w''_{yz} = w''_{xy} = -\frac{2z}{y^2}.$$

Giải hệ phương trình $w'_x = w'_y = w'_z = 0$ với $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ ta được một nghiệm: ($x = \frac{1}{2}$, $y = 1$, $z = 1$). Thay các giá trị này vào các đạo hàm riêng cấp 2 ta được:

$$a_{11} = 4,\ \ a_{22} = 3,\ \ a_{33} = 6,$$

$$a_{12} = a_{21} = -2,\ a_{13} = a_{31} = 0,\ a_{23} = a_{32} = -2;$$

$$H = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Các định thức con chính của ma trận H:

$$D_1 = 4 > 0,\ D_2 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 8 > 0,\ D_3 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 32 > 0.$$

Vậy ($x = \frac{1}{2}$, $y = 1$, $z = 1$) là điểm cực tiểu của hàm số đã cho và

$$w_{min} = w(\tfrac{1}{2}, 1, 1) = 4.$$

c. Từ cực trị địa phương đến cực trị toàn thể.

Khái niệm cực trị trên đây mang tính chất địa phương. Điểm cực trị $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ là điểm mà tại đó hàm số $w = f(x_1, x_2, .., x_n)$ đạt giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất so với giá trị của hàm số tại những điểm $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ cách điểm $\overline{X}$ một khoảng cách nhỏ hơn một số $r > 0$ nào đó.

Bài toán tìm điểm cực trị toàn cục (điểm mà tại đó hàm số đạt giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất) của hàm số nhiều biến số trên toàn bộ một miền **D** bất kỳ cho trước là một bài toán khá phức tạp. Ngay cả khi **D** là một miền đóng và bị chặn, ngoài việc tìm các điểm cực trị địa phương, ta còn phải tiếp tục xét cực trị trên tập hợp các điểm biên. Tuy nhiên, hầu hết các các mô hình tối ưu trong kinh tế học đều có cấu trúc hàm số ở dạng cho phép ta sử dụng mệnh đề sau đây:

Định lý: Giả sử hàm số $f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ xác định, liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp hai trong miền:

$$\mathbf{D} = \left\{X(x_1, x_2, \ldots, x_n): \; a_i < x_i < b_i, \; i = 1, 2, \ldots, n\right\}.$$

Nếu trong miền **D** hàm số $f(X)$ chỉ có một điểm dừng duy nhất $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ và điều kiện đủ để hàm số đạt giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) được thoả mãn tại mọi điểm thuộc miền **D** thì giá trị của hàm số tại điểm cực đại (điểm cực tiểu) địa phương $\overline{X}$ đồng thời là giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất) của hàm số $f(X)$ trên toàn bộ miền **D**.

Ví dụ: Xét hàm số:

$$w = x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 4xy - 6y - 16z + 20, \text{ với } (x, y, z) \in \mathbf{R}^3.$$

Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị là:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x} = 2x - 4y = 0 \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} = 10y - 4x - 6 = 0 \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} = 4z - 16 = 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình này có một nghiệm duy nhất: $(x = 6, y = 3, z = 4)$.

Tại mọi điểm $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ta có:

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix};$$

$$D_1 = 2 > 0,\ D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 10 \end{vmatrix} = 4 > 0,\ D_3 = |H| = 16 > 0.$$

Điều kiện đủ để hàm số đạt cực tiểu thoả mãn với mọi điểm $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, do đó điểm dừng $(x = 6, y = 3, z = 4)$ là điểm mà tại đó hàm số đã cho nhận giá trị nhỏ nhất trong toàn bộ không gian $\mathbb{R}^3$.

BÀI TẬP

1. Tìm các điểm cực trị của hàm số:

a) $u = 10x^2 + y^2 - 6xy - 24x$

b) $u = 4xy - x^2 - 7y^2 + 36y$

c) $u = 13x^2 + y^2 - 5xy - 2x - 10y + 1$

d) $u = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

e) $u = 18xy - 8x^3 - 27y^3$

2. Tìm các điểm cực trị của các hàm số sau với $x > 0, y > 0$:

a) $u = x^2y^3(6 - x - y)$

b) $u = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}$

3. Tìm các điểm cực trị của hàm số:

a) $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy - 10y - 12z$

b) $u = 6xz - 3x^2 - 2y^2 - 9z^2 + 8x + 12y$

c) $u = x^2 + 5y^2 + 10z^2 - 4xy - 6yz - 10z + 1$

d) $u = 3\ln x + 2\ln y + 5\ln z + \ln(22 - x - y - z)$

4. Tìm các điểm cực trị của hàm số $z = z(x, y)$, xác định bởi phương trình:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0.$$

5. Chọn (x, y) để hàm số

$$u = 2x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x - 16y + 125$$

đạt giá trị nhỏ nhất trong toàn bộ $\mathbb{R}^2$.

6. Chọn $(x, y\ z)$ để hàm số

$$u = 4xy - x^2 - 6y^2 - 3z^2 + 12y + 36z + 1$$

đạt giá trị lớn nhất trong toàn bộ $\mathbb{R}^3$.

§2. CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN RÀNG BUỘC

Trên đây ta đã xét bài toán cực trị của hàm số n biến số $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ với các biến chọn $x_1, x_2, \dots, x_n$ độc lập với nhau, tức là giá trị của biến số này không ảnh hưởng đến các biến số khác. Trên thực tế, nhiều khi ta phải chọn phương án tối ưu trong bối cảnh các biến chọn chi phối lẫn nhau bởi những điều kiện ràng buộc nhất định. Chẳng hạn, một người tiêu dùng phải ra quyết định mua sắm hai loại hàng hoá và giả sử hàm lợi ích (hay hàm thoả dụng) của người đó là:

$$U = U(x, y),$$

trong đó biến số U chỉ lợi ích (độ thoả mãn) của người đó khi có x đơn vị hàng hoá thứ nhất và y đơn vị hàng hoá thứ hai. Tâm lý chung của mọi người là *nhiều hơn ít*, tức là khi x và y càng lớn thì U càng lớn. Tuy nhiên, do túi tiền có hạn nên muốn mua được nhiều hơn thứ này thì người tiêu dùng phải bớt thứ kia. Giả sử, giá thị trường của các loại hàng hoá mà người tiêu dùng muốn mua là p_1, p_2 và người đó chỉ có số tiền là b. Khi đó, để tối đa hoá độ thoả dụng U, người đó chỉ được phép lựa chọn x và y trong khuôn khổ ràng buộc về ngân sách:

$$p_1x + p_2y = b.$$

Sau đây chúng ta sẽ xem xét lần lượt các bài toán cực trị có điều kiện. Trong mục này *ta luôn luôn giả thiết rằng hàm mục tiêu và các hàm số mô tả điều kiện ràng buộc có đạo riêng cấp 2 liên tục*.

I. CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN VỚI HAI BIẾN CHỌN VÀ MỘT PHƯƠNG TRÌNH RÀNG BUỘC

Xét bài toán:

Tìm các điểm cực trị của hàm số

$$w = f(x, y), \tag{2.1}$$

với điều kiện

$$g(x, y) = b. \tag{2.2}$$

Trong mô hình trên, x và y được gọi là các *biến chọn*, hay các biến quyết định; w là *biến mục tiêu*; f là *hàm mục tiêu*; phương trình (2.2) là *phương trình ràng buộc*.

a. Liên hệ với cực trị tự do.

Với sự có mặt của phương trình ràng buộc (2.2) miền biến thiên của cặp biến chọn (x, y) bị thu hẹp. Khái niệm cực trị có điều kiện được hiểu theo nghĩa địa phương giống như định nghĩa cực trị tự do ở §1, chỉ khác ở chỗ tất cả các bộ giá trị của các biến chọn phải thoả mãn điều kiện ràng buộc (2.2).

Hệ thức (2.2) áp đặt sự phụ thuộc lẫn nhau giữa các biến chọn dưới dạng hàm ẩn. Nếu từ (2.2) ta biểu diễn được y dưới dạng hàm hiện $y = \varphi(x)$ thì bài toán cực trị có điều kiện nêu trên quy về bài toán cực trị tự do của hàm số một biến số x:

$$w = f\,[x, \varphi\,(x)] = h(x).$$

Ví dụ:

Chọn (x, y) để hàm số

$$w = xy + 2x \qquad (2.3)$$

đạt cực đại, với điều kiện

$$8x + 4y = 120. \qquad (2.4)$$

Giải: Từ hệ thức (2.4) ta có $y = 30 - 2x$, điều này cho phép loại biến số y và biểu diễn hàm mục tiêu (2.3) dưới dạng:

$$w = 32x - 2x^2. \qquad (2.5)$$

Dễ dàng thấy rằng hàm số (2.5) đạt giá trị cực đại khi $x = 8$. Khi đó $y = 30 - 16 = 14$.

Vậy hàm số (2.3), với điều kiện (2.4), đạt giá trị cực đại tại điểm $(x = 8, y = 14)$.

b. Phương pháp nhân tử Lagrange

Trong cách tiếp cận nêu trên ta xem một trong hai biến chọn là biến độc lập và biến kia phụ thuộc vào nó. Hơn nữa, khi biểu thức g(x, y) phức tạp thì việc áp dụng phương pháp thế để loại bớt biến chọn sẽ gặp khó khăn. Nhà toán học Lagrange đề ra một phương pháp cho phép đưa bài toán cực trị có điều kiện về bài toán cực trị do mà vẫn giữ vai trò bình đẳng của các biến chọn.

Xuất phát từ hàm mục tiêu (2.1) và điều kiện (2.2) ta lập hàm số sau (gọi là *hàm số Lagrange*):

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda[b - g(x, y)]. \qquad (2.6)$$

Hàm số (2.6) có thêm một biến phụ λ, gọi là *nhân tử Lagrange*. Chú ý rằng với tất cả các điểm M(x, y) thoả mãn điều kiện (2.2), tức là khi xét cặp biến chọn (x, y) trong miền biến thiên đã bị thu hẹp bởi điều kiện (2.2), hàm mục tiêu w đồng nhất với hàm số L.

Định lý sau đây cho biết mối liên hệ giữa hàm số Lagrange (2.6) và bài toán cực trị có điều kiện mà ta đang xem xét.

Định lý:

Giả sử các hàm số f(x, y) và g(x, y) có các đạo hàm riêng liên tục trong một lân cận của điểm $M_0(x_0, y_0)$ và $g'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Khi đó, nếu hàm số (2.1), với điều kiện (2.2), đạt cực trị tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ thì tồn tại số λ_o sao cho bộ ba số thực (x_o, y_o, λ_o) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} L'_x = f'_x - \lambda g'_x = 0 \\ L'_y = f'_y - \lambda g'_y = 0 \\ L'_\lambda = b - g(x, y) = 0 \end{cases} \qquad (2.7)$$

Chứng minh:

Với các giả thiết đã nêu, phương trình ràng buộc (2.2) xác định một hàm ẩn $y = y(x)$ nhận giá trị y_0 tại điểm x_0: $y(x_0) = y_0$.

Giả sử hàm số (2.1), với điều kiện (2.2), đạt giá trị cực đại (cực tiểu) tại điểm $M_0(x_0, y_0)$.

Do (x_0, y_0) thoả mãn điều kiện (2.2), ta có:

$$b - g(x_0, y_0) = 0. \qquad (2.8)$$

Xét hàm số:

$$h(x) = f[x, y(x)].$$

Do hàm số (2.1), với điều kiện (2.2), đạt giá trị cực đại (cực tiểu) tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ nên $h(x)$ đạt giá trị cực đại (cực tiểu) tại điểm x_0. Từ đây suy ra:

$$h'(x_0) = f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0).y'(x_0) = 0. \qquad (2.9)$$

Mặt khác, lấy đạo hàm hai vế của phương trình ràng buộc (2.2) theo x, ta có:

$$g'_x(x, y) + g'_y(x, y).y'(x) = 0.$$

Tại điểm $x = x_0$ hàm ẩn $y = y(x)$ nhận giá trị y_0, do đó

$$g'_x(x_0, y_0) + g'_y(x_0, y_0).y'(x_0) = 0. \qquad (2.10)$$

Đặt $\lambda_0 = \dfrac{f'_y(x_0, y_0)}{g'_y(x_0, y_0)}$, ta có:

$$f'_y(x_0, y_0) - \lambda_0 g'_y(x_0, y_0) = 0. \qquad (2.11)$$

Nhân hai vế của (2.10) với λ_0, ta được:

$$\lambda_0 g'_x(x_0, y_0) + \lambda_0 g'_y(x_0, y_0).y'(x_0) = 0. \qquad (2.12)$$

Trừ các vế tương ứng của (2.9), (2.12) và lưu ý đến (2.11) ta được:

$$f'_x(x_0, y_0) - \lambda_0 g'_x(x_0, y_0) + [f'_y(x_0, y_0) - \lambda_0 g'_y(x_0, y_0)].y'(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad f'_x(x_0, y_0) - \lambda_0 g'_x(x_0, y_0) = 0. \qquad (2.13)$$

Các hệ thức (2.8), (2.11) và (2.13) chứng tỏ (x_0, y_0, λ_0) là một nghiệm của hệ phương trình (2.7). Định lý đã được chứng minh.

Định lý vừa chứng minh cho thấy điều kiện cần để hàm số (2.1) với điều kiện (2.2) đạt cực trị quy về điều kiện cần để hàm số Lagrange (2.6) đạt cực trị không có điều kiện. Điều lý thú là phương trình thứ ba của hệ điều kiện (2.7) chính là điều kiện ràng buộc (2.2) của bài toán cực trị có điều kiện.

Ví dụ: Trở lại bài toán tìm cực trị của hàm số (2.3) với điều kiện (2.4). Hàm số Lagrange trong trường hợp này là:

$$L = xy + 2x + \lambda(120 - 8x - 4y).$$

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} L'_x = y + 2 - 8\lambda = 0 \\ L'_y = x - 4\lambda = 0 \\ 8x + 4y = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{y+2}{8} = \dfrac{x}{4} \\ 2x + y = 30 \end{cases}$$

ta tìm được: $(x = 8, y = 14, \lambda = 2)$.

Vậy hàm số (2.3) với điều kiện (2.4) chỉ có thể đạt cực trị tại điểm $(x = 8, y = 14)$. Để có được kết luận cuối cùng về cực trị ta phải dùng điều kiện đủ để kiểm tra.

c. Điều kiện đủ

Điều kiện đủ được sử dụng để xét các điểm có khả năng xảy ra cực trị. Gọi (x_0, y_0, λ_0) là một điểm dừng của hàm số Lagrange, tức là một nghiệm của hệ phương trình (2.7). với giả thiết các hàm số $f(x, y)$ và $g(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục tại điểm (x_0, y_0), hàm số Lagrange có các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục.

Để xét điều kiện đủ, ta tính định thức:

$$\overline{D} = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} \end{vmatrix}$$

với các phần tử g_i, L_{ij} là giá trị của các đạo hàm riêng

$$g_1 = \frac{\partial g}{\partial x},\ \ g_2 = \frac{\partial g}{\partial y},$$

$$L_{11} = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2},\ \ L_{12} = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = L_{21}\ ,\ L_{22} = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}$$

tại điểm được xét ($x = x_o$, $y = y_0$, $\lambda = \lambda_0$).

Định lý: Điểm ($x = x_o$, $y = y_0$) là điểm cực đại nếu định thức $\overline{D} > 0$; là điểm cực tiểu nếu $\overline{D} < 0$.

Chú ý: Khi $\overline{D} = 0$ ta chưa thể kết luận gì về điểm dừng được xét.

Ví dụ 1: Ta lại tiếp tục xét bài toán tìm điểm cực trị của hàm số (2.3) với điều kiện (2.4). Như đã nêu ở trên, hàm số Lagrange

$$L = xy + 2x + \lambda\,(120 - 8x - 4y)$$

có một điểm dừng duy nhất: ($x = 8$, $y = 14$, $\lambda = 2$) .

Tại điểm này ta có :

$$g_1 = \frac{\partial g}{\partial x} = 8; \quad g_2 = \frac{\partial g}{\partial y} = 4 \qquad (\ g = 8x + 4y);$$

$$L_{11} = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0\ ,\ L_{12} = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = L_{21} = 1,\ L_{22} = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0;$$

$$\overline{D} = \begin{vmatrix} 0 & 8 & 4 \\ 8 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 64 > 0.$$

Vậy ($x = 8$, $y = 14$) là điểm cực đại.

Ví dụ 2: Tìm các điểm cực trị của hàm số

$$u = 8x + 15y + 28, \tag{2.14}$$

với điều kiện

$$2x^2 + 3y^2 = 107. \qquad (2.15)$$

Giải: Hàm số Lagrange trong ví dụ này là

$$L = 8x + 15y + 28 + \lambda(107 - 2x^2 - 3y^2).$$

Hệ phương trình điều kiện cần là:

$$\begin{cases} L'_x = 8 - 4\lambda x = 0 \\ L'_y = 15 - 6\lambda y = 0 \\ 2x^2 + 3y^2 = 107 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = \dfrac{2}{x} = \dfrac{5}{2y} \\ 2x^2 + 3y^2 = 107 \end{cases} \qquad (2.16).$$

Từ phương trình thứ nhất của hệ (2.16) suy ra $y = \dfrac{5x}{4}$. Thay vào phương trình thứ hai, ta được

$$2x^2 + 3\frac{25x^2}{16} = 107 \Rightarrow 32x^2 + 75x^2 = 16.107$$

$$\Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4.$$

Với $x = 4$ ta có tương ứng: $y = 5$, $\lambda = 0{,}5$.

Với $x = -4$ ta có tương ứng: $y = -5$, $\lambda = -0{,}5$.

Hàm số Lagrange có 2 điểm dừng:

$$(x = 4, y = 5, \lambda = 0{,}5) \text{ và } (x = -4, y = -5, \lambda = -0{,}5).$$

Để xét điều kiện đủ đối với các điểm dừng này ta phải tính các đạo hàm riêng cấp hai của hàm số Lagrange và các đạo hàm riêng của hàm số $g = 2x^2 + 3y^2$ ở vế trái của phương trình ràng buộc:

$$L_{11} = L''_{xx} = -4\lambda\,,\; L_{12} = L''_{xy} = 0,\; L_{21} = L''_{yx} = 0,\; L_{22} = L''_{yy} = -6\lambda;$$

$$g_1 = g'_x = 4x,\; g_2 = g'_y = 6y.$$

Ta có:

$$\overline{D} = \begin{vmatrix} 0 & 4x & 6y \\ 4x & -4\lambda & 0 \\ 6y & 0 & -6\lambda \end{vmatrix} = 144\lambda y^2 + 96\lambda x^2 = \lambda.(144y^2 + 96x^2).$$

Để xét điều kiện đủ ta không nhất thiết phải tính trị số của định thức $\overline{D}$, mà chỉ cần xác định dấu của nó. Ta thấy khi x và y không đồng thời bằng 0 thì $144y^2 + 96x^2 > 0$, do đó dấu của $\overline{D}$ như dấu của λ. Như vậy, $\overline{D} > 0$ tại điểm ($x = 4$, $y = 5$, $\lambda = 0{,}5$) và $\overline{D} < 0$ tại điểm ($x = -4$, $y = -5$, $\lambda = -0{,}5$,). Theo định lý về điều kiện đủ ta đi đến kết luận:

Hàm số (2.14), với điều kiện (2.15) có hai điểm cực trị:

Điểm cực đại : ($x = 4$, $y = 5$);

Điểm cực tiểu: ($x = -4$, $y = -5$).

Ví dụ 3: Tìm các điểm cực trị của hàm số $u = x^{0,4}y^{0,8}$, với điều kiện:

$$5x + 2y = 240.$$

Giải: Hàm số Lagrange trong trường hợp này là:

$$L = x^{0,4}y^{0,8} + \lambda(240 - 5x - 2y).$$

Hệ phương trình điều kiện cần:

$$\begin{cases} L'_x = 0,4x^{-0,6}y^{0,8} - 5\lambda = 0 \\ L'_y = 0,8x^{0,4}y^{-0,2} - 2\lambda = 0 \\ 5x + 2y = 240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{0,4y^{0,8}}{5x^{0,6}} = \dfrac{0,4x^{0,4}}{y^{0,2}} \\ 5x + 2y = 240 \end{cases}$$

Từ phương trình thứ nhất của hệ suy ra $y = 5x$. Thay y vào phương trình thứ hai, ta được:

$$5x + 10x = 240.$$

Từ đây ta tìm được ($x = 16$, $y = 80$), kèm theo $\lambda = 0,4(16)^{0,4}(80)^{-0,2}$.

Để xét điều kiện đủ ta tính các đạo hàm riêng của hàm số $g = 5x + 2y$ và các đạo hàm riêng cấp hai của hàm số Lagrange:

$$g_1 = g'_x = 5,\ \ g_2 = g'_y = 2;$$

$$L_{11} = L''_{xx} = -0,24x^{-1,6}y^{0,8},$$

$$L_{12} = L''_{xy} = 0,32x^{-0,6}y^{-0,2} = L''_{yx} = L_{21},$$

$$L_{22} = L''_{yy} = -0,16x^{0,4}y^{-1,2}.$$

Chú ý rằng, trong trường hợp này việc tính giá trị của các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số Lagrange khá cồng kềnh. Tuy nhiên, ta dễ dàng xét điều kiện đủ thông qua dấu của L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22}. Khi ($x = 16$, $y = 80$) ta có $L_{11} < 0$, $L_{12} = L_{21} > 0$, $L_{22} < 0$, do đó

$$\overline{D} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 5 & L_{11} & L_{12} \\ 2 & L_{21} & L_{22} \end{vmatrix} = 20L_{12} - 4L_{11} - 25L_{22} > 0.$$

Theo định lý về điều kiện đủ ta đi đến kết luận: hàm số $u = x^{0,4}y^{0,8}$, với điều kiện $5x + 2y = 240$ đạt giá trị cực đại tại điểm ($x = 16$, $y = 80$).

II. CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN VỚI n BIẾN CHỌN VÀ MỘT PHƯƠNG TRÌNH RÀNG BUỘC

Xét bài toán:

Tìm các điểm cực trị của hàm số

$$w = f(x_1, x_2, ..., x_n), \tag{2.17}$$

với điều kiện

$$g(x_1, x_2, ..., x_n) = b. \tag{2.18}$$

Hàm số (2.17) được gọi là *hàm mục tiêu*; $x_1, x_2, ..., x_n$ được gọi là các *biến chọn*; phương trình (2.18) được gọi là *phương trình ràng buộc*. Các nội dung đã trình bày về bài toán cực trị có điều kiện trong trường hợp hai biến chọn được phát triển tương tự cho trường hợp n biến chọn như sau:

a. Hàm số Lagrange.

Hàm số Lagrange là hàm số n + 1 biến số:

$$L(x_1, x_2 ..., x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \lambda[b - g(x_1, x_2, ..., x_n)].$$

Biến phụ λ được gọi là *nhân tử Lagrange*.

b. Điều kiện cần

Với giả thiết rằng các hàm số f và g có các đạo hàm riêng liên tục trong một lân cận của điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ và tại điểm $\overline{X}$ ít nhất một trong các đạo hàm riêng của g khác 0, ta có định lý sau đây:

Định lý: Nếu hàm số (2.17), với điều kiện (2.18), đạt cực trị tại điểm $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ thì tồn tại một giá trị $\lambda = \overline{\lambda}$ của nhân tử Lagrange sao cho $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n, \overline{\lambda})$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} L'_\lambda = b - g(x_1, x_2, ...x_n) = 0 \\ L'_{x_i} = f'_{x_i} - \lambda g'_{x_i} = 0 \\ \quad i = 1, 2, ..., n \end{cases} \tag{2.19}$$

Nói cách khác, điều kiện cần để hàm số (2.17), với điều kiện (2.18) đạt cực trị tại điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ là tồn tại số $\overline{\lambda}$ sao cho $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n, \bar{\lambda})$ là một điểm dừng của hàm số Lagrange. Chú ý rằng phương trình đầu của hệ phương trình (2.19) chính là điều kiện ràng buộc (2.18) của bài toán đang xét.

c. Điều kiện đủ

Điều kiện đủ được áp dụng đối với các điểm dừng của hàm số Lagrange, tức là những điểm đã thoả mãn điều kiện cần. Việc xét điểm dừng $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n, \bar{\lambda})$ được thực hiện với giả thiết các hàm số f và g có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục tại điểm $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$. Để xét điều kiện đủ, ta lập ma trận

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_1 & L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1n} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} & \cdots & L_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_n & L_{n1} & L_{n2} & \cdots & L_{nn} \end{pmatrix},$$

với các phần tử g_i, L_{ij} là giá trị của các đạo hàm riêng

$$g_k = g'_{x_k} \ (k = 1, 2, ..., n), \ L_{ij} = L''_{x_i x_j} \ (i, j = 1, 2, ..., n)$$

tại điểm được xét $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n, \bar{\lambda})$.

Định lý về điều kiện đủ dưới đây căn cứ vào *các định thức con chính* của ma trận $\bar{H}$:

$$\bar{D}_k = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & \cdots & g_k \\ g_1 & L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1k} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} & \cdots & L_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_k & L_{k1} & L_{k2} & \cdots & L_{kk} \end{vmatrix} \ (k = 2, 3, ..., n).$$

Chú ý rằng $\overline{H}$ là một ma trận vuông cấp n + 1 và $\overline{D}_k$ là định thức con chính cấp k + 1 có phần tử ở góc dưới bên phải là L_{kk}. Để xét điều kiện đủ, ta phải tính các định thức con chính từ cấp 3 đến cấp n + 1 (định thức con chính cấp n + 1 chính là định thức của ma trận $\overline{H}$).

Định lý:

1. Nếu $(-1)^k \overline{D}_k > 0$ với mọi k = 2, 3, ... , n, tức là:

$$\overline{D}_2 > 0,\ \overline{D}_3 < 0, \ldots, (-1)^n \overline{D}_n > 0$$

thì hàm số (2.17), với điều kiện (2.18), đạt *giá trị cực đại* tại điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$.

2. Nếu $\overline{D}_k < 0$ với mọi k = 2, 3,..., n thì hàm số (2.17), với điều kiện (2.18) đạt *giá trị cực tiểu* tại điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$.

Ví dụ: Tìm các điểm cực trị của hàm số w = x + y + z, với điều kiện

$$xyz = 8.$$

Giải: Hàm số Lagrange trong trường hợp này là:

$$L = x + y + z + \lambda(8 - xyz).$$

Điều kiện cần là:

$$\begin{cases} xyz = 8 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x} = 1 - \lambda yz = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 1 - \lambda xz = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 1 - \lambda xy = 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình này có một nghiệm duy nhất :

$$\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 2,\ \bar{\lambda} = \frac{1}{4}.$$

Để xét điều kiện đủ ta tính các đạo hàm riêng cấp 1 của hàm số $g(x, y, z) = xyz$ và các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số Lagrange tại điểm ($(\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 2, \bar{\lambda} = \frac{1}{4})$. Tại điểm này, ta có:

$$g_1 = yz = 4,\ g_2 = xz = 4,\ g_3 = xy = 4;$$

$$L_{11} = L_{22} = L_{33} = 0,\quad L_{12} = L_{21} = -\lambda z = -\frac{1}{2},$$

$$L_{13} = L_{31} = -\lambda y = -\frac{1}{2},\ L_{23} = L_{32} = -\lambda x = -\frac{1}{2};$$

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 4 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 4 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix};$$

$$\bar{D}_2 = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 4 & -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0,\ \bar{D}_3 = |\bar{H}| = -12 < 0.$$

Vậy theo định lý về điều kiện đủ, hàm số đạt giá trị cực tiểu tại điểm $(x = y = z = 2)$.

III. Ý NGHĨA CỦA NHÂN TỬ LAGRANGE

Xét mô hình tối ưu:

Chọn $(x_1, x_2,..., x_n)$ để hàm số

$$w = f(x_1, x_2,..., x_n)$$

đạt giá trị cực đại (cực tiểu), với điều kiện

$$g(x_1, x_2,..., x_n) = b.$$

Trong mô này, ta phân biệt vai trò của các biến số $x_1, x_2,..., x_n$, w với tham số b. Các biến chọn $x_1, x_2,..., x_n$ và biến mục tiêu w được gọi là các *biến nội sinh*, do bản thân mô hình quyết định thông qua phương pháp nhân tử Langrange. Khác với biến nội sinh, tham số b là một hằng số cho trước, không do mô hình quyết định. Trong nhiều mô hình kinh tế, tham số b là giá trị của một biến số nào đó và giá trị đó được xác định bên ngoài mô hình. Người ta gọi b là *biến ngoại sinh* của mô hình. Sự thay đổi giá trị của b đặc trưng cho sự thay đổi của ngoại cảnh, làm nới rộng hoặc thu hẹp ràng buộc, dẫn đến sự thay đổi lời giải tối ưu của bài toán. Nói cách khác phương án chọn tối ưu $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ của bài toán và giá trị tối ưu $\overline{w}$ của hàm mục tiêu phụ thuộc vào b:

$$\overline{x}_1 = \overline{x}_1(b),\ \overline{x}_2 = \overline{x}_2(b), ...,\ \overline{x}_n = \overline{x}_n(b);$$

Theo phương pháp nhân tử Lagrange, phương án chọn tối ưu nói trên được xác định cùng với một giá trị của nhân tử Lagrange $\lambda = \overline{\lambda}$ và giá trị tối ưu của w là hàm số của b

$$\overline{w} = f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n) = \overline{w}(b).$$

Theo quy tắc tính đạo hàm của hàm hợp, ta có:

$$\frac{d\overline{w}}{db} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{d\overline{x}_1}{db} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{d\overline{x}_2}{db} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{d\overline{x}_n}{db}.$$

Do $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n, \overline{\lambda})$ là điểm dừng của hàm số Lagrange nên, từ (2.19), ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \overline{\lambda}\frac{\partial g}{\partial x_i}, \forall i = 1, 2, ..., n.$$

Vậy

$$\frac{d\overline{w}}{db} = \overline{\lambda}\frac{\partial g}{\partial x_1}\frac{d\overline{x}_1}{db} + \overline{\lambda}\frac{\partial g}{\partial x_2}\frac{d\overline{x}_2}{db} + \cdots + \overline{\lambda}\frac{\partial g}{\partial x_n}\frac{d\overline{x}_n}{db}$$

$$= \overline{\lambda}\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\frac{d\overline{x}_1}{db} + \frac{\partial g}{\partial x_2}\frac{d\overline{x}_2}{db} + \cdots + \frac{\partial g}{\partial x_n}\frac{d\overline{x}_n}{db}\right) \qquad (2.20)$$

Mặt khác, $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ thoả mãn phương trình ràng buộc (2.18), do đó

$$g(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n) = b.$$

Lấy đạo hàm hai vế của đồng nhất thức này theo b ta được:

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}\frac{d\overline{x}_1}{db} + \frac{\partial g}{\partial x_2}\frac{d\overline{x}_2}{db} + \cdots + \frac{\partial g}{\partial x_n}\frac{d\overline{x}_n}{db} = 1. \qquad (2.21)$$

Từ các hệ thức (2.21) và (2.20) suy ra:

$$\overline{\lambda} = \frac{d\overline{w}}{db}. \qquad (2.22)$$

Hệ thức (2.22) cho thấy *nhân tử Lagrange $\overline{\lambda}$ chính là giá trị $\overline{w}$-cận biên của b*. Điều này có nghĩa là khi b tăng thêm 1 đơn vị thì giá trị tối ưu $\overline{w}$ của hàm mục tiêu thay đổi một lượng xấp xỉ bằng $\overline{\lambda}$.

Ví dụ: Trở lại bài toán chọn (x, y) để hàm số (2.3) đạt giá trị cực đại, với điều kiện (2.4). Theo phương pháp nhân tử Lagrange ta xác định được: $\overline{x} = 8$, $\overline{y} = 14$, kèm theo giá trị $\overline{\lambda} = 2$ của nhân tử Lagrange. Phương trình ràng buộc (2.4) là một trường hợp riêng của điều kiện

$$8x + 4y = b \qquad (2.4')$$

khi b = 120. Trong trường hợp này giá trị tối ưu của hàm số

(2.3) là:

$$\overline{w}(b) = \overline{x}\,\overline{y} + 2\overline{x} = 128 \text{ khi } b = 120.$$

Nếu b tăng thêm một đơn vị, tức là khi thay phương trình ràng buộc (2.4) bằng phương trình 8x + 4y = 121, thì giá trị tối ưu của w sẽ tăng thêm khoảng 2 đơn vị, tức là:

$$\overline{w}(121) \approx 128 + \overline{\lambda} = 130.$$

Chú ý: Nội dung nêu trên về ý nghĩa của nhân tử Lagrange chỉ đúng khi điều kiện ràng buộc được viết dưới dạng (2.18) và hàm số Lagrange được viết dưới dạng:

$$L = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda[b - g(x_1, x_2, \dots, x_n)].$$

IV. CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN VỚI n BIẾN CHỌN VÀ m PHƯƠNG TRÌNH RÀNG BUỘC

Xét bài toán tổng quát:

Tìm các điểm cực trị của hàm số

$$w = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \tag{2.23}$$

với điều kiện

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_1 \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_m \end{cases} \tag{2.24}$$

Trong mô hình này hàm số (2.23) là *hàm mục tiêu*; các biến $x_1, x_2, \dots, x_n$ là *các biến chọn*; hệ phương trình (2.24) là *hệ phương trình ràng buộc*. Ta luôn luôn giả thiết rằng số phương trình ràng buộc nhỏ hơn số biến chọn, tức là $m < n$.

Phương pháp nhân tử Lagrange để giải bài toán này được thực hiện với các giả thiết sau đây:

- Hàm mục tiêu f và các hàm số g_k ($k = 1, 2, \dots, m$) ở vế trái của các phương trình ràng buộc (2.24) có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục;

- Ma trận Jacobi

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

có hạng bằng m tại tất cả các điểm được xét.

a. Hàm số Lagrange

Trong trường hợp này, hàm số Lagrange là hàm số n + m biến số, $x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$:

$$L = f + \lambda_1(b_1 - g_1) + \lambda_2(b_2 - g_2) + \dots + \lambda_m(b_1 - g_m),$$

trong đó các biến phụ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ được gọi là các nhân tử Lagrange.

b. Điều kiện cần

Định lý: Nếu hàm số (2.23), với điều kiện (2.4), đạt cực trị (cực đại hoặc cực tiểu) tại điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)$ thì tồn tại các số $\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \dots, \overline{\lambda}_m$ sao cho bộ m + n số $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n; \overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \dots, \overline{\lambda}_m)$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda_1 \dfrac{\partial g_1}{\partial x_i} - \lambda_2 \dfrac{\partial g_2}{\partial x_i} - \dots - \lambda_m \dfrac{\partial g_m}{\partial x_i} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_k} = b_k - g_k(x_1, x_2, \dots x_n) = 0 \\ \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, m \end{cases} \tag{2.25}$$

Nói cách khác, điều kiện cần để hàm số (2.23), với điều kiện (2.24), đạt cực trị tại điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)$ là: tồn tại các số $\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \dots, \overline{\lambda}_m$ sao cho bộ m + n số ($\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n; \overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \ldots, \overline{\lambda}_m$) là một điểm dừng của hàm số Lagrange. Chú ý rằng m phương trình cuối của hệ (2.25) trùng với các điều kiện ràng buộc (2.24).

c. Điều kiện đủ

Điều kiện đủ được sử dụng để xét các điểm đã thoả mãn điều kiện cần. Tại mỗi điểm dừng ($\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n; \overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \ldots, \overline{\lambda}_m$) của hàm số Lagrange ta lập ma trận:

$$\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & g_{m1} & g_{m2} & \cdots & g_{mn} \\ g_{11} & g_{21} & \cdots & g_{m1} & L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1n} \\ g_{12} & g_{22} & \cdots & g_{m2} & L_{21} & L_{22} & \cdots & L_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{1n} & g_{2n} & \cdots & g_{mn} & L_{n1} & L_{n2} & \cdots & L_{nn} \end{pmatrix},$$

với các phần tử g_{ki}, L_{ij} là giá trị của các đạo hàm riêng

$$g_{ki} = \frac{\partial g_k}{\partial x_i} = -\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_k \partial x_i}, \; L_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, n; k = 1, 2, \ldots, m)$$

tại điểm được xét.

Ma trận $\overline{H}$ có m + n định thức con chính, nhưng khi xét điều kiện đủ ta chỉ xét n − m định thức con chính từ cấp 2m + 1 đến cấp m + n. Để cho tiện ta gọi $\overline{D}_p$ (p = m + 1,..., n) là định thức con chính cấp m + p có phần tử ở góc dưới cùng bên phải là L_{pp} ($\overline{D}_n$ chính là định thức của ma trận $\overline{H}$).

Định lý:

- Nếu tại điểm ($\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n; \overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \ldots, \overline{\lambda}_m$) tất cả các định thức con chính $\overline{D}_p$ (p = m + 1,..., n) cùng dấu với $(-1)^p$, tức là $(-1)^p\overline{D}_p > 0$, thì $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ là điểm cực đại;

- Nếu tại điểm $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n; \overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, ..., \overline{\lambda}_m)$ tất cả các định thức con chính $\overline{D}_p$ (p = m + 1,..., n) luôn luôn giữ dấu không đổi như $(-1)^m$ thì $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ là điểm cực tiểu.

Ví dụ: Tìm các điểm cực trị của hàm số w = xyz, với điều kiện

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ xy + yz + zx = 8 \end{cases}$$

Giải: Hàm số Lagrange trong trường hợp này là:

$$L = xyz + \lambda(5 - x - y - z) + \mu(8 - xy - yz - zx).$$

Điều kiện cần:

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ xy + yz + zx = 8 \\ L'_x = yz - \lambda - \mu(y + z) = 0 \\ L'_y = xz - \lambda - \mu(x + z) = 0 \\ L'_z = xy - \lambda - \mu(y + x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 5 \\ xy + yz + zx = 8 \\ yz = \lambda + \mu(y + z) \\ xz = \lambda + \mu(x + z) \\ xy = \lambda + \mu(y + x) \end{cases}$$

Trừ các vế của phương trình thứ ba và phương trình thứ tư, ta được:

$$z(y - x) = \mu(y - x) \Rightarrow y = x \text{ hoặc } \mu = z.$$

- Với y = x, theo hai điều kiện phía trên ta có:

$$2x + z = 5 \text{ và } x^2 + 2xz = 8 \Rightarrow x^2 + 2x(5 - 2x) = 8$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 10x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2, x = \frac{4}{3}.$$

Từ đây suy ra hai nghiệm của hệ phương trình điều kiện cần:

$$M_1(x = 2, y = 2, z = 1, \lambda = -4, \mu = 2);$$

$$M_2(x = \frac{4}{3}, y = \frac{4}{3}, z = \frac{7}{3}, \lambda = -\frac{16}{9}, \mu = \frac{4}{3}).$$

- Với $\mu = z$ thì từ ba phương trình cuối ta có:

$$\lambda = -z^2 = xy - z(x+y) \Rightarrow xy = z(x+y) - z^2.$$

Kết hợp với phương trình thứ hai, ta được:

$$z(x+y) - z^2 = -z(x+y) + 8 \Rightarrow 2z(x+y) - z^2 - 8 = 0.$$

Thay $x + y = 5 - z$ từ phương trình đầu, ta được

$$2z(5-z) - z^2 - 8 = 0 \Rightarrow 3z^2 - 10z + 8 = 0.$$

Từ đây ta tìm được $z = 2$, $z = \dfrac{4}{3}$.

Ứng với $z = 2$ ta tìm được hai nghiệm của hệ phương trình điều kiện cần:

$$M_3(x = 1,\ y = 2,\ z = 2,\ \lambda = -4,\ \mu = 2),$$

$$M_4(x = 2,\ y = 1,\ z = 2,\ \lambda = -4,\ \mu = 2).$$

Ứng với $z = \dfrac{4}{3}$ ta tìm được hai nghiệm của hệ phương trình điều kiện cần:

$$M_5\left(x = \frac{4}{3},\ y = \frac{7}{3},\ z = \frac{4}{3},\ \lambda = -\frac{16}{9},\ \mu = \frac{4}{3}\right).$$

$$M_6\left(x = \frac{7}{3},\ y = \frac{4}{3},\ z = \frac{4}{3},\ \lambda = -\frac{16}{9},\ \mu = \frac{4}{3}\right).$$

Tóm lại, hàm số Lagrange có 6 điểm dừng. Vì các biến chọn x, y, z có vai trò như nhau nên ta chỉ cần xét điều kiện đủ tại hai điểm M_1 và M_2.

Ta có:

$$g_{11} = g_{12} = g_{13} = 1,\ g_{21} = 2x,\ g_{22} = 2y,\ g_{23} = 2z;$$

$$L_{11} = L_{22} = L_{33} = 0,$$

$$L_{12} = L_{21} = z - \mu,\ L_{13} = L_{31} = y - \mu,\ L_{23} = L_{32} = x - \mu;$$

$$\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2x & 2y & 2z \\ 1 & 2x & 0 & z-\mu & y-\mu \\ 1 & 2y & z-\mu & 0 & x-\mu \\ 1 & 2z & y-\mu & x-\mu & 0 \end{pmatrix}.$$

Trong bài toán này ta chỉ cần xét một định thức con chính của ma trận $\overline{H}$ là định thức $\overline{D}_5 = |\overline{H}|$ (định thức con chính có phần tử ở góc dưới cùng bên phải là L_{33}).

Tại điểm M_1 ta có:

$$\overline{D}_5 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 8 > 0.$$

Tại điểm M_2 ta có:

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} & \frac{8}{3} & \frac{14}{3} \\ 1 & \frac{8}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{8}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{14}{3} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8 < 0.$$

Theo định lý về điều kiện đủ, ta đi đến kết luận:

Điểm cực đại là các điểm:

$$(x = 2, y = 2, z = 1), (x = 2, y = 1, z = 2), (x = 1, y = 2, z = 2);$$

Điểm cực tiểu là các điểm:

$$(x = \frac{4}{3}, y = \frac{4}{3}, z = \frac{7}{3}), (x = \frac{4}{3}, y = \frac{7}{3}, z = \frac{4}{3}),$$

$$(x = \frac{7}{3}, y = \frac{4}{3}, z = \frac{4}{3}).$$

d. Ý nghĩa của nhân tử Lagrange

Điểm tối ưu $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ (điểm cực đại hoặc điểm cực tiểu) của hàm mục tiêu $\overline{w} = f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ được xác định cùng với các nhân tử Lagrange $(\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, ..., \overline{\lambda}_m)$. Nếu xem $b_1, b_2, ..., b_m$ ở vế phải của các phương trình ràng buộc (2.24) là các biến ngoại sinh thì điểm tối ưu $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ phụ thuộc hàm số vào các biến ngoại sinh đó, do vậy giá trị tối ưu của hàm mục tiêu (2.23) là hàm số của $b_1, b_2, ..., b_m$:

$$\overline{w} = f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n) = \overline{w}(b_1, b_2, ..., b_m).$$

Tương tự như trường hợp cực trị có điều kiện với một phương trình ràng buộc, có thể chứng minh được rằng

$$\frac{\partial \overline{w}}{\partial b_k} = \overline{\lambda}_k \ (\forall k = 1, 2, ..., m)$$

Điều này có nghĩa là *nhân tử Lagrange $\overline{\lambda}_k$ chính là giá trị $\overline{w}$ - cận biên của b_k: khi riêng b_k tăng thêm 1 đơn vị thì giá trị tối ưu $\overline{w}$ của hàm mục tiêu thay đổi một lượng xấp xỉ bằng $\overline{\lambda}$.*

V. CỰC TRỊ VỚI ĐIỀU KIỆN LÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Trong kinh tế nhiều khi chúng ta gặp các tình huống lựa chọn với ràng buộc là các bất phương trình. Sau đây chúng tôi nêu một cách vắn tắt phương pháp giải bài toán loại này trong trường hợp hai biến chọn và một bất phương trình ràng buộc.

Xét bài toán: Chọn (x, y) để hàm số $w = f(x, y)$ đạt cực đại (cực tiểu) với điều kiện $g(x, y) \geq b$ [hoặc $g(x, y) \leq b$].

Để giải bài toán này, ta thay điều kiện bằng phương trình $g(x, y) = b$. Theo phương pháp nhân tử Lagrange ta tìm được $x = \overline{x}$, $y = \overline{y}$ và $\lambda = \overline{\lambda}$. Quyết định cuối cùng được thực hiện theo quy tắc sau đây:

1. Đối với bài toán cực đại hoá hàm số $w = f(x, y)$ với điều kiện $g(x, y) \geq b$:

- Nếu $\overline{\lambda} < 0$ thì điều kiện áp đặt thực sự là ràng buộc và phương án chọn tối ưu là $x = \overline{x}$, $y = \overline{y}$;

- Nếu $\overline{\lambda} \geq 0$ thì điều kiện áp đặt không phải là ràng buộc thực. Trong trường hợp này ta bỏ điều kiện và quay sang giải bài toán cực trị không có điều kiện.

2. .Đối với bài toán cực đại hoá hàm số $w = f(x, y)$ với điều kiện $g(x, y) \le b$:

- Nếu $\overline{\lambda} \ge 0$ thì điều kiện áp đặt thực sự là ràng buộc và phương án chọn tối ưu là $x = \overline{x}$, $y = \overline{y}$;

- Nếu $\overline{\lambda} < 0$ thì điều kiện áp đặt không phải là ràng buộc thực. Trong trường hợp này ta bỏ điều kiện và quay sang giải bài toán cực trị không có điều kiện.

3. Đối với bài toán cực tiểu hoá hàm số $w = f(x, y)$ với điều kiện $g(x, y) \ge b$:

- Nếu $\overline{\lambda} \ge 0$ thì điều kiện áp đặt thực sự là ràng buộc và phương án chọn tối ưu là $x = \overline{x}$, $y = \overline{y}$;

- Nếu $\overline{\lambda} < 0$ thì điều kiện áp đặt không phải là ràng buộc thực. Trong trường hợp này ta bỏ điều kiện và quay sang giải bài toán cực trị không có điều kiện.

4. Đối với bài toán cực tiểu hoá hàm số $w = f(x, y)$ với điều kiện $g(x, y) \le b$:

- Nếu $\overline{\lambda} < 0$ thì điều kiện áp đặt thực sự là ràng buộc và phương án chọn tối ưu là $x = \overline{x}$, $y = \overline{y}$;

- Nếu $\overline{\lambda} \ge 0$ thì điều kiện áp đặt không phải là ràng buộc thực. Trong trường hợp này ta bỏ điều kiện và quay sang giải bài toán cực trị không có điều kiện.

Ví dụ 1: Chọn (x, y) để hàm số

$$w = 3x^2 - xy + 2y^2 - 4x - 7y + 20$$

đạt giá trị cực tiểu, với điều kiện

$$x + y \ge 15.$$

Giải: Trước hết ta thay điều kiện bằng phương trình $x + y = 15$. Lập hàm số Lagrange:

$$L = 3x^2 - xy + 2y^2 - 4x - 7y + 20 + \lambda(15 - x - y).$$

Giải điều kiện cần:

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ L'_x = 6x - y - 4 - \lambda = 0 \\ L'_y = -x + 4y - 7 - \lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 15 \\ \lambda = 6x - y - 4 = -x + 4y - 7 \end{cases}$$

ta tìm được $\overline{x} = 6$, $\overline{y} = 9$, $\overline{\lambda} = 23$. Điều kiện đủ trong trường hợp này thoả mãn (bạn hãy tự kiểm tra!). Đối chiếu với quy tắc 3 nêu trên, do $\overline{\lambda} > 0$, điều kiện $x + y \geq 15$ thực sự là ràng buộc và phương án chọn tối ưu là $x = 6$, $y = 9$. Giá trị tối ưu của hàm mục tiêu w (giá trị cực tiểu) là $w = 149$.

Ví dụ 2: Chọn (x, y) để hàm số

$$w = 64x - 2x^2 + 4xy - 4y^2 + 32y + 50,$$

đạt giá trị cực đại, với điều kiện $x + y \leq 79$.

Giải: Trước hết ta thay điều kiện bằng phương trình $x + y = 79$. Lập hàm số Lagrange:

$$L = w = 64x - 2x^2 + 4xy - 4y^2 + 32y + 50 + \lambda(79 - x - y).$$

Giải điều kiện cần:

$$\begin{cases} x + y = 79 \\ L'_x = 64 - 4x + 4y - \lambda = 0 \\ L'_y = 4x - 8y + 32 - \lambda = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 79 \\ \lambda = 64 - 4x + 4y = 4x - 8y + 32 \end{cases}$$

ta tìm được $\overline{x} = 49$, $\overline{y} = 30$, $\overline{\lambda} = -12$.

Điều kiện đủ để w đạt cực đại trong trường hợp này thoả mãn. Theo quy tắc 2 nêu trên, do $\overline{\lambda} < 0$, điều kiện $x + y \leq 79$ không phải là ràng buộc thực. Để chọn (x, y) ta chuyển sang bài toán cực trị không có điều kiện và xác định được rằng w đạt cực đại khi $x = 40$, $y = 24$.

BÀI TẬP

7. Tìm các điểm cực trị của hàm số $u = 3x^2 + 5xy$, với điều kiện:

$$x + y = 16$$

8. Tìm các điểm cực trị của hàm số $u = \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}$ $(a > 0, b > 0)$, với điều kiện: $x^2 + y^2 = 1$.

9. Tìm các điểm cực trị của hàm số $u = 2x + 9y + 1$, với điều kiện:

$$x^2 + 3y^2 = 31.$$

10. Tìm các điểm cực trị của hàm số $u = x^{0,3}y^{0,7}$, với điều kiện:

$$5x + 4y = 200.$$

11. Tìm các điểm cực trị của hàm số $u = 2x^{0,9}y^{0,6}$, với điều kiện

$$3x + 5y = 600.$$

12. Tìm các điểm cực trị của hàm số $u = x - 2y + 2z$, với điều kiện:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

13. Tìm các điểm cực trị của hàm số $u = 5x + 4y + 3z$, với điều kiện:

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 36.$$

14. Tìm các điểm cực trị của hàm số $u = xy^2z^3$, với điều kiện:

$$x + 2y + 3z = 18 \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$$

§3 CÁC BÀI TOÁN VỀ SỰ LỰA CHỌN CỦA NGƯỜI TIÊU DÙNG

I. BÀI TOÁN TỐI ĐA HOÁ LỢI ÍCH

a. Đặt vấn đề

Lượng cầu đối với một loại hàng hoá trên thị trường là tổng lượng cầu của các cá nhân, do đó việc nghiên cứu cầu phải xuất phát từ sự lựa chọn của cá nhân người tiêu dùng. Để phân tích hành vi của người tiêu dùng chúng ta phải tính đến các yếu tố chi phối sự lựa chọn của cá nhân. Trong Kinh tế học thực chứng tân cổ điển người ta quan tâm đến hai yếu tố quan trọng sau đây:

1. Sở thích;
2. Các ràng buộc, hay cơ hội lựa chọn.

Sở thích của người tiêu dùng được các nhà kinh tế mô tả thông qua hàm lợi ích[1]. Trên thực tế, cơ cấu tiêu dùng gồm nhiều mặt hàng, nhưng khi nghiên cứu cầu đối với một loại hàng hoá ta gộp tất cả các hàng hoá còn lại thành một mặt hàng thứ hai. Ta sẽ xét hàm lợi ích dưới dạng

$$U = U(x, y),$$

trong đó x là lượng hàng hoá thứ nhất, y là lượng hàng hoá thứ hai, U là lợi ích (độ ưa chuộng) của người tiêu dùng đối với mỗi túi hàng (x, y).

Quyết định mua sắm của người tiêu dùng không thể chỉ dựa theo sở thích, bởi vì hàng hoá được bán theo giá thị trường và thu nhập của mỗi người có hạn. Do đó, quyết định mua sắm còn phải căn cứ vào ràng buộc về giá và thu nhập. Ràng buộc đối với người tiêu dùng được biểu diễn bằng phương trình (gọi là ràng buộc ngân sách):

$$p_1x + p_2y = m,$$

trong đó p_1 là giá hàng hoá thứ nhất, p_2 là giá hàng hoá thứ hai, m là thu nhập khả dụng.

b. Bài toán tối đa hoá lợi ích và hàm cầu Marshall

Bài toán tối đa hoá lợi ích có nội dung như sau:

Chọn (x, y) để hàm lợi ích

$$U = U(x, y) \tag{3.1}$$

đạt cực đại, với điều kiện

$$p_1x + p_2y = m. \tag{3.2}$$

Ta sẽ xem xét bài toán tối đa hoá lợi ích với giả thiết rằng hàm lợi ích có các đạo hàm riêng cấp một và cấp hai liên tục trong

---

[1] Khái niệm hàm lợi ích đã được nói đến ở §1,chương 4, của cuốn sách này.

miền $\{(x, y): x > 0, y > 0\}$. Để cho gọn, ta ký hiệu các đạo hàm riêng như sau:

$$U_1 = U'_x, U_2 = U'_y;$$

$$U_{11} = U''_{xx}, U_{12} = U''_{xy}, U_{21} = U''_{yx} = U_{12}, \ U_{22} = U''_{yy}.$$

Để giải bài toán tối đa hoá lợi ích ta lập hàm số Lagrange

$$L = U(x, y) + \lambda(m - p_1x - p_2y).$$

Điều kiện cần để túi hàng (x, y) cho lợi ích tối đa là:

$$\begin{cases} L'_\lambda = m - p_1x - p_2y = 0 \\ L'_x = U_1 - \lambda p_1 = 0 \\ L'_y = U_2 - \lambda p_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{U_1}{p_1} = \dfrac{U_2}{p_2} \\ p_1x + p_2y = m \end{cases} \tag{3.3}$$

Từ điều kiện (3.3) ta thấy rằng để xác định (x, y) ta chỉ cần giải hệ phương trình hai ẩn số

$$\begin{cases} \dfrac{U_1}{p_1} = \dfrac{U_2}{p_2} \\ p_1x + p_2y = m \end{cases} \tag{3.4}$$

Gọi $(\overline{x}, \overline{y})$ là nghiệm của hệ phương trình (3.4), giá trị tương ứng của nhân tử Lagrange được xác định theo công thức

$$\overline{\lambda} = \frac{U_1(\overline{x}, \overline{y})}{p_1} \ \text{hoặc} \ \overline{\lambda} = \frac{U_2(\overline{x}, \overline{y})}{p_2} \tag{3.5}$$

Để xét điều kiện đủ (đối với điểm dừng của hàm số Lagrange) ta tính các đạo hàm riêng của biểu thức $g = p_1x + p_2y$ và các đạo hàm riêng cấp hai của hàm số L:

$$g_1 = g'_x = p_1, \ g_2 = g'_y = p_2;$$

$$L_{11} = L''_{xx} = U_{11},\ L_{12} = L''_{xy} = U_{12},$$

$$L_{21} = L''_{yx} = U_{21} = U_{12},\ L_{22} = L''_{yy} = U_{22}.$$

Ta có:

$$\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \\ g_2 & L_{22} & L_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ p_1 & U_{11} & U_{12} \\ p_2 & U_{12} & U_{22} \end{pmatrix}.$$

Điều kiện đủ của bài toán cực đại hoá lợi ích là

$$\overline{D} = |\overline{H}| = 2p_1p_2U_{12} - p_1^2U_{22} - p_2^2U_{11} > 0. \tag{3.6}$$

Điều kiện đủ được áp dụng khi điều kiện cần đã được thoả mãn, do đó ta có:

$$\overline{\lambda} = \frac{U_1}{p_1} = \frac{U_2}{p_2} \Rightarrow p_1 = \frac{U_1}{\overline{\lambda}} \text{ và } p_2 = \frac{U_2}{\overline{\lambda}}.$$

Điều kiện đủ (3.6) có thể viết dưới dạng tương đương:

$$\frac{2}{\overline{\lambda}^2}U_1U_2U_{12} - \frac{1}{\overline{\lambda}^2}U_1^2U_{22} - \frac{1}{\overline{\lambda}^2}U_2^2U_{11} > 0.$$

Nhân hai vế với $\overline{\lambda}^2$ ta được:

$$2U_1U_2U_{12} - U_1^2U_{22} - U_2^2U_{11} > 0. \tag{3.7}$$

Như vậy, điều kiện đủ của bài toán cực đại hoá lợi ích chỉ liên quan đến hàm lợi ích $U = U(x, y)$. Trong kinh tế học, người ta luôn luôn giả thiết rằng hàm lợi ích $U(x, y)$ thoả mãn điều kiện (3.7) với mọi $x > 0$, $y > 0$ (khi đó điểm cực đại địa phương chính là điểm cực đại toàn thể).

Một trong các dạng hàm lợi ích hay được sử dụng là hàm Cobb-Douglas:

$$U = Ax^{\alpha}y^{\beta} \quad (A > 0,\ 0 < \alpha < 1,\ 0 < \beta < 1).$$

Hàm số này thoả mãn điều kiện (3.7) với mọi $x > 0$, $y > 0$, bởi vì:

$$U_1 = A\alpha x^{\alpha-1}y^{\beta} > 0,\ U_2 = A\beta x^{\alpha}y^{\beta-1} > 0;$$

$$U_{12} = A\alpha\beta\, x^{\alpha-1}y^{\beta-1} > 0,$$

$$U_{11} = A\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^{\beta} < 0,\ U_{22} = A\beta(\beta-1)x^{\alpha}y^{\beta-2} < 0.$$

Lượng hàng hoá mà người tiêu dùng quyết định mua chính là lượng cầu. Phương pháp nhân tử Lagrage cho phép xác định được lượng cầu đối với mỗi loại hàng hoá ở mỗi mức giá và thu nhập:

$$x = \overline{x}(p_1, p_2, m), \tag{3.8}$$

$$y = \overline{y}(p_1, p_2, m). \tag{3.9}$$

Trong kinh tế học, các hàm số (3.8), (3.9) được gọi là hàm cầu Mashall. *Hàm cầu Marshall là hàm cầu của người tiêu dùng theo quan điểm tối đa hoá lợi ích.*

c. Dẫn xuất các hàm cầu Marshall

Căn cứ để lập các hàm cầu Marshall là hàm lợi ích biểu diễn sở thích mua sắm của người tiêu dùng. Với giả thiết hàm lợi ích $U = U(x, y)$ thoả mãn điều kiện (3.7), các hàm cầu Marshall (3.8), (3.9) được dẫn xuất từ hệ phương trình (3.4). Điều này suy ra từ việc giải bài toán tối đa hoá lợi ích bằng phương pháp nhân tử Lagrange. Chú ý rằng trong bài toán tối đa hoá lợi ích điều kiện (3.2) có thể viết dưới dạng tương đương:

$$p_1x + p_2y = m \Leftrightarrow kp_1x + kp_2y = km \quad \forall k > 0.$$

Điều này có nghĩa là ràng buộc về ngân sách không có gì thay đổi khi giá của tất cả các mặt hàng tiêu dùng và thu nhập đều tăng hoặc giảm theo cùng một tỷ lệ. Từ đây suy ra rằng *các hàm cầu Marshall là các hàm thuần nhất bậc 0*:

$$\overline{x}(kp_1, kp_2, km) = \overline{x}(p_1, p_2, m),$$

$$\overline{y}(kp_1, kp_2, km) = \overline{y}(p_1, p_2, m).$$

Mặt khác, nếu $V = V(U)$ là một hàm dương đồng biến thì điểm cực đại của hàm số $V = V[U(x, y)]$ trùng với điểm cực đại của hàm số $U = U(x, y)$, do đó các hàm cầu Marshall không thay đổi khi ta thay hàm lợi ích bằng một hàm lợi ích khác biểu diễn cùng một sở thích. Điều này có nghĩa là các hàm cầu Marshall chỉ phụ thuộc vào sở thích mua sắm, thông qua hàm lợi ích.

Chú ý: Hệ phương trình (3.4) là hệ phương trình với hai ẩn số là hai biến chọn, không chứa nhân tử Lagrange. Nếu ta quan tâm đến ý nghĩa của nhân tử Lagrange thì có thể sử dụng công thức (3.5).

Ví dụ 1: Lập các hàm cầu Marshall của người tiêu dùng có hàm lợi ích:

$$U = x^{0,4}y^{0,9}.$$

Giải: Như đã nói ở trên, hàm lợi ích dạng này thoả mãn điều kiện (3.7). Các hàm cầu Marshaall được dẫn xuất từ hệ phương trình (3.4). Trong trường hợp này ta có:

$$U_1 = 0,4x^{-0,6}y^{0,9} = \frac{2y^{0,9}}{5x^{0,6}} \quad U_2 = 0,9x^{0,4}y^{-0,1} = \frac{9x^{0,4}}{10y^{0,1}}.$$

$$\frac{U_1}{p_1} = \frac{U_2}{p_2} \Leftrightarrow \frac{2y^{0,9}}{5p_1x^{0,6}} = \frac{9x^{0,4}}{10p_2y^{0,1}}.$$

Từ đây suy ra $y = \frac{9p_1}{4p_2}x$. Thay y theo x vào phương trình thứ hai (ràng buộc ngân sách), ta có:

$$p_1x + p_2\frac{9p_1}{4p_2}x = m \Rightarrow x = \frac{4m}{13p_1},\ y = \frac{9m}{13p_2}.$$

Hàm cầu đối với hàng hoá thứ nhất là: $\overline{x} = \frac{4m}{13p_1}$;

Hàm cầu đối với hàng hóa thứ hai là: $\overline{y} = \frac{9m}{13p_2}$.

Ví dụ 2: Lập các hàm cầu của người tiêu dùng có hàm lợi ích

$$U = xy + 2x$$

Giải: Trước hết ta thấy rằng hàm lợi ích đã cho thoả mãn điều kiện (3.7) khi $x > 0$, $y > 0$:

$$U_1 = y + 2,\ U_2 = x,\ U_{11} = 0,\ U_{12} = 1,\ U_{22} = 0$$

$$\Rightarrow\ 2U_1U_2U_{12} - U_1^2U_{22} - U_2^2U_{11} = 2(y+2)x > 0.$$

Ta giải hệ phương trình(3.4). Từ phương trình thứ nhất ta có:

$$\frac{U_1}{p_1} = \frac{U_2}{p_2} \Leftrightarrow \frac{y+2}{p_1} = \frac{x}{p_2} \Leftrightarrow y = \frac{p_1x}{p_2} - 2.$$

Thay y theo x vào phương trình thứ hai của hệ (3.4) ta có:

$$p_1x + p_2\left(\frac{p_1x}{p_2} - 2\right) = m$$

$$\Rightarrow\ x = \frac{m+2p_2}{2p_1},\quad y = \frac{p_1x}{p_2} - 2 = \frac{m+2p_2}{2p_2} - 2 = \frac{m}{2p_2} - 1.$$

Hàm cầu đối với hàng hoá 1 là: $\overline{x} = \dfrac{m+2p_2}{2p_1}$.

Hàm cầu đối với hàng hoá 2 là: $\overline{y} = \dfrac{m}{2p_2} - 1$.

d. Hàm lợi ích gián tiếp

Thay các hàm cầu (3.8), (3.9) vào hàm lợi ích $U = U(x, y)$ ta được hàm số biểu diễn sự phụ thuộc của lợi ích U vào các biến ngoại sinh p_1, p_2, m:

$$\overline{U} = U[\overline{x}(p_1, p_2, m), \overline{y}(p_1, p_2, m)] = \overline{U}(p_1, p_2, m) \qquad (3.10)$$

Hàm số (3.10) biểu diễn lợi ích tiêu dùng theo giá và thu nhập được gọi là *hàm lợi ích gián tiếp*. Nếu như hàm lợi ích trực tiếp (3.1) biểu diễn lợi ích của người tiêu dùng trực tiếp theo mỗi túi hàng (x, y) thì hàm lợi ích gián tiếp (3.10) biểu diễn lợi ích đạt được tuỳ theo điều kiện tiêu dùng (giá và thu nhập). Thông qua phân tích tĩnh so sánh ta có thể biết được lợi ích thay đổi như thế nào khi điều kiện tiêu dùng thay đổi.

- Theo ý nghĩa của nhân tử Lagrange thì $\overline{\lambda}$ là lợi ích cận biên của thu nhập:

$$\frac{\partial\overline{U}}{\partial m} = \overline{\lambda}.$$

Điều này có nghĩa là khi thu nhập tăng thêm \$1 thì lợi ích tăng một lượng $\overline{\lambda}$. Nói cách khác, khi thu nhập giảm \$1 thì lợi ích của người tiêu dùng giảm một lượng $\overline{\lambda}$.

- Để phân tích ảnh hưởng của sự thay đổi giá đối với lợi ích, ta tính đạo hàm riêng của $\overline{U}$ theo giá.

Từ hàm lợi ích gián tiếp (3.10) ta có:

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial p_1} = U_1 \frac{\partial \overline{x}}{\partial p_1} + U_2 \frac{\partial \overline{y}}{\partial p_1}. \qquad (3.11)$$

Mặt khác, lấy đạo hàm hai vế của đồng nhất thức $p_1\overline{x} + p_2\overline{y} = m$ ta được:

$$\overline{x} + p_1\frac{\partial \overline{x}}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial \overline{y}}{\partial p_1} = 0. \qquad (3.12)$$

Ta lại có:

$$\frac{U_1}{p_1} = \frac{U_2}{p_2} = \overline{\lambda} \Rightarrow p_1 = \frac{U_1}{\overline{\lambda}},\ p_2 = \frac{U_2}{\overline{\lambda}}. \qquad (3.13)$$

Thay (3.13) vào (3.12) ta được

$$\overline{x} + \frac{U_1}{\overline{\lambda}}\frac{\partial \overline{x}}{\partial p_1} + \frac{U_2}{\overline{\lambda}}\frac{\partial \overline{y}}{\partial p_1} = 0.$$

$$\Rightarrow U_1\frac{\partial \overline{x}}{\partial p_1} + U_2\frac{\partial \overline{y}}{\partial p_1} = -\overline{\lambda}.\overline{x}. \qquad (3.14)$$

Thay (3.14) vào (3.11) ta được

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial p_1} = -\overline{\lambda}.\overline{x}. \qquad (3.15)$$

Hệ thức (3.15) có thể hiểu như sau: Khi giá hàng hoá thứ nhất tăng thêm \$1 và các yếu tố khác không thay đổi thì thu nhập thực tế giảm một lượng bằng \$$\overline{x}$, do đó lợi ích của người tiêu dùng giảm một lượng bằng $\overline{\lambda}.\overline{x}$ (khi thu nhập giảm \$1 thì lợi ích giảm tương ứng $\overline{\lambda}$ đơn vị).

Tương tự, ta cũng có:

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial p_2} = -\overline{\lambda}\,\overline{y} \qquad (3.16)$$

II. TỐI THIỂU HOÁ CHI PHÍ TIÊU DÙNG

a. Bài toán tối thiểu hoá chi phí tiêu dùng

Khi quyết định mua sắm hàng hoá và dịch vụ, không phải người tiêu dùng nào cũng sử dụng toàn bộ thu nhập để hưởng lợi ích tối đa. Một xu hướng lựa chọn khác là người ta đặt ra một mức lợi ích U_0 nhất định và thực hiện lợi ích đó với chi phí nhỏ nhất. Bài toán về sự lựa chọn của người tiêu dùng trong trường hợp này được đặt ra như sau:

Chọn (x, y) để chi phí tiêu dùng

$$C = p_1x + p_2y \qquad (3.17)$$

đạt giá trị cực tiểu, với điều kiện

$$U(x,\ y) = U_o\,. \qquad (3.18)$$

Bài toán này được gọi là bài toán tối thiểu hoá chi phí tiêu dùng.

Để giải bài toán tối thiểu hoá chi phí tiêu dùng ta lập hàm số Lagrange:

$$L = p_1x + p_2y + \mu[U_0 - U(x, y)],$$

trong đó nhân tử Lagrange được ký hiệu bằng chữ μ để phân biệt với nhân tử Lagrange λ trong bài toán cực đại hoá lợi ích.

Hệ phương trình điều kiện cần trong trường hợp này có dạng:

$$\begin{cases} L'_\lambda = U_0 - U(x,\ y) = 0 \\ L'_x = p_1 - \mu U_1 = 0 \\ L'_y = p_2 - \mu U_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\mu} = \dfrac{U_1}{p_1} = \dfrac{U_2}{p_2} \\ U(x,\ y) = U_0 \end{cases}$$

Để tìm (x, y) ta chỉ việc giải hệ phương trình hai ẩn số:

$$\begin{cases} \dfrac{U_1}{p_1} = \dfrac{U_2}{p_2} \\ U(x, y) = U_0 \end{cases} \tag{3.19}$$

Công thức để tính nhân tử Lagrange tương ứng mỗi túi hàng $(\hat{x}, \hat{y})$ thoả mãn điều kiện (3.19) là:

$$\hat{\mu} = \frac{p_1}{U_1} = \frac{p_2}{U_2}. \tag{3.20}$$

Điều kiện đủ để hàm chi phí (3.17), với điều kiện (3.18), đạt giá trị cực tiểu tại điểm thoả mãn điều kiện (3.19) là:

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & U_1 & U_2 \\ U_1 & -\mu U_{11} & -\mu U_{12} \\ U_2 & -\mu U_{21} & -\mu U_{22} \end{vmatrix} < 0$$

$$\Leftrightarrow -\mu\,(U_1U_2U_{12} + U_1U_2U_{21} - U_1^2U_{22} - U_2^2U_{11}) < 0. \tag{3.21}$$

Trong kinh tế học có một tiên đề về sở thích là "nhiều được ưa chuộng hơn ít". Theo tiên đề này thì $U_1 > 0$ và $U_2 > 0$, do đó từ (3.20) ta có $\mu > 0$. Từ đây suy ra rằng điều kiện (3.21) trùng với điều kiện (3.7) mà ta đã nói đến khi dẫn xuất hàm cầu Marshall.

b. Hàm cầu Hick

Hàm cầu Hick là hàm cầu của người tiêu dùng theo quan điểm tối thiểu hoá chi phí cho một mức lợi ích U_0 không đổi. Các hàm cầu Hick cũng được dẫn xuất từ hàm lợi ích $U = U(x, y)$. Với giả thiết điều kiện (3.7) thoả mãn với mọi $x > 0$, $y > 0$, túi hàng (x, y) ít tốn kém nhất được xác định từ hệ phương trình (3.19). Căn cứ vào hàm lợi ích $U(x, y)$, từ hệ phương trình này ta tìm được:

$$x = \hat{x}(p_1, p_2, U_0), \tag{3.22}$$

$$y = \hat{y}(p_1, p_2, U_0). \tag{3.23}$$

Mỗi hàm số (3.22), (3.23) là một hàm cầu đối với một loại hàng hoá, được gọi là *hàm cầu Hick*, hay *hàm cầu lợi ích không đổi*.

Ví dụ: Xét trường hợp người tiêu dùng có hàm lợi ích:

$$U = xy + 2x.$$

Như đã xét ở trên, hàm lợi ích đã cho thoả mãn điều kiện (3.7) khi $x > 0$, $y > 0$. Các hàm cầu Hick được xác định từ hệ phương trình (3.19), với $U_1 = y + 2$, $U_2 = x$:

$$\begin{cases} \dfrac{U_1}{p_1} = \dfrac{U_2}{p_2} \\ xy + 2x = U_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y+2}{p_1} = \dfrac{x}{p_2} \\ xy + 2x = U_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{p_1 x}{p_2} - 2 \\ xy + 2x = U_0 \end{cases}$$

Thay y từ phương trình thứ nhất của hệ vào phương trình thứ hai, ta được:

$$x\left(\frac{p_1 x}{p_2} - 2\right) + 2x = U_0.$$

Từ đây ta xác định được các hàm cầu Hick:

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{p_2 U_0}{p_1}} \text{ (đối với hàng hoá thứ nhất),}$$

$$\hat{y} = \sqrt{\frac{p_1 U_0}{p_2}} - 2 \text{ (đối với hàng hoá thứ hai).}$$

c. Hàm chi tiêu

Thay các hàm cầu (3.22), (3.23) vào biểu thức (3.17) ta được hàm số biểu diễn chi phí tiêu dùng theo p_1, p_2 và U_0:

$$\hat{C} = p_1 \hat{x}(p_1, p_2, U_0) + p_2 \hat{y}(p_1, p_2, U_0) = \hat{C}(p_1, p_2, U_0). \quad (3.24)$$

Hàm số (3.24) được gọi là *hàm chi phí tiêu dùng*, hay *hàm chi tiêu*.

- Theo ý nghĩa của nhân tử LĐagrange thì $\hat{\mu}$ là chi phí cận biên của lợi ích:

$$\frac{\partial \hat{C}}{\partial U_0} = \hat{\mu}.$$

Điều này có nghĩa là để tăng lợi ích thêm 1 đơn vị người ta phải chi tiêu thêm $\$\hat{\mu}$.

- Để xét ảnh hưởng của sự thay đổi giá đối với chi phí tiêu dùng ta tính các đạo hàm riêng của $\hat{C}$ theo p_1 và p_2.

Từ hàm chi tiêu (3.24) ta có:

$$\frac{\partial \hat{C}}{\partial p_1} = \hat{x} + p_1 \frac{\partial \hat{x}}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial \hat{y}}{\partial p_1}.$$

Từ (3.20) ta có $p_1 = \hat{\mu} U_1$, $p_2 = \hat{\mu} U_2$, do đó

$$\frac{\partial \hat{C}}{\partial p_1} = \hat{x} + \hat{\mu}\left(U_1 \frac{\partial \hat{x}}{\partial p_1} + U_2 \frac{\partial \hat{y}}{\partial p_1} \right) \tag{3.25}$$

Mặt khác, lấy đạo hàm hai vế của đồng nhất thức

$$U(\hat{x}, \hat{y}) = U_0$$

theo p_1 ta được

$$U_1 \frac{\partial \hat{x}}{\partial p_1} + U_2 \frac{\partial \hat{y}}{\partial p_1} = 0 \tag{3.26}$$

Từ (3.25) và (3.26) suy ra

$$\frac{\partial \hat{C}}{\partial p_1} = \hat{x}. \tag{3.27}$$

Tương tự

$$\frac{\partial \hat{C}}{\partial p_1} = \hat{y}. \tag{3.28}$$

Các hệ thức (3.27), (3.28) có ý nghĩa như sau: khi giá một mặt hàng tăng thêm \$1 và các yếu tố khác không thay đổi thì chi phí tiêu dùng tăng thêm một lượng đúng bằng lượng cầu đối với hàng hoá đó.

III. PHƯƠNG TRÌNH SLUTSKY

Với mỗi mức giá p_1, p_2 và mức thu nhập m, theo các hàm cầu Marshall (3.8), (3.9) ta xác định được lượng cầu tương ứng đối với mỗi hàng hoá:

$$\bar{x} = \bar{x}(p_1, p_2, m), \ \bar{y} = \bar{y}(p_1, p_2, m)$$

và mức lợi ích tương ứng

$$\bar{U} = \bar{U}(p_1, p_2, m).$$

Thay $U_0 = \bar{U}$ vào các hàm cầu Hick ta xác định được tương ứng lượng cầu Hick ứng với mức giá p_1, p_2 và mức lợi ích $\bar{U}$:

$$\hat{x} = \hat{x}(p_1, p_2, \bar{U}), \ \hat{y} = \hat{y}(p_1, p_2, \bar{U}).$$

Do ($\hat{x}$, $\hat{y}$) là túi hàng cho mức lợi ích đúng bằng $\bar{U}$ nên:

$$\bar{x} = \hat{x} = \hat{x}(p_1, p_2, \bar{U}) \text{ và } \bar{y} = \hat{y} = \hat{y}(p_1, p_2, \bar{U}).$$

Từ đây suy ra

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial p_1} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial p_1} + \frac{\partial \hat{x}}{\partial \bar{U}} \frac{\partial \bar{U}}{\partial p_1}, \tag{3.29}$$

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial m} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial \bar{U}} \frac{\partial \bar{U}}{\partial m}. \tag{3.30}$$

Thay hệ thức (3.15) vào (3.29) ta được:

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial p_1} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial p_1} + \frac{\partial \hat{x}}{\partial \bar{U}}(-\bar{\lambda}.\bar{x}). \tag{3.31}$$

Theo ý nghĩa của nhân tử Lagrange thì $\dfrac{\partial \bar{U}}{\partial m} = \bar{\lambda}$, do đó từ (3.30) ta có:

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial m} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial \bar{U}} \bar{\lambda}. \tag{3.32}$$

Từ (3.31) và (3.32) ta có phương trình:

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial p_1} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial p_1} + \left(-\frac{\partial \bar{x}}{\partial m}.\bar{x}\right). \tag{3.34}$$

Phương trình (3.14) được gọi là *phương trình Slutsky*. Trong phương trình

(3.34), $\frac{\partial \bar{x}}{\partial p_1}$ biểu diễn ảnh hưởng chung của việc thay đổi giá đối với lượng cầu (đối với hàng hoá thông thường, khi giá tăng thì lượng cầu giảm). Ảnh hưởng đó được chia thành hai phần:

- $\frac{\partial \hat{x}}{\partial p_1}$ biểu diễn hiệu ứng thay thế để giữ mức lợi ích không đổi (khi giá hàng hoá tăng, người ta có thể duy trì lợi ích bằng cách dùng hàng hoá khác để thay thế);

- $-\frac{\partial \bar{x}}{\partial m}.\bar{x}$ biểu diễn hiệu ứng thu nhập (khi giá tăng thì thu nhập thực tế giảm, kéo theo lượng cầu giảm).

Hoàn toàn tương tự:

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial p_2} = \frac{\partial \hat{y}}{\partial p_2} - \frac{\partial \bar{y}}{\partial m}.\bar{y}\,.$$

BÀI TẬP

15. Cho biết hàm lợi ích

$$U = (x_1 + 3)x_2,$$

trong đó x_1 là lượng hàng hoá A, x_2 là lượng hàng hoá B. Hãy chọn túi hàng lợi ích tối đa trong điều kiện giá hàng hoá A là \$5, giá hàng hoá B là \$20, ngân sách tiêu dùng là \$185.

16. Cho biết hàm lợi ích tiêu dùng:

$$U = x_1x_2 + x_1 + 2x_2.$$

Trong điều kiện hàng hoá thứ nhất được bán với giá \$2, hàng hoá thứ hai được bán với giá \$5 và thu nhập dành cho tiêu dùng là \$51, hãy xác định lượng cầu đối với mỗi mặt hàng nếu người tiêu dùng tối đa hoá lợi ích của mình.

17. Cho biết hàm lợi ích tiêu dùng:

$$U = x_1^{0,6} x_2^{0,25}.$$

Trong điều kiện hàng hoá thứ nhất được bán với giá \$8, hàng hoá thứ hai được bán với giá \$5 và thu nhập dành cho tiêu dùng là \$680, hãy xác định lượng cầu đối với mỗi mặt hàng nếu người tiêu dùng tối đa hoá lợi ích của mình.

18. Lập các hàm cầu Marshall của người tiêu dùng, cho biết hàm lợi ích: $U = x_1x_2 + 3x_1$.

19. Lập các hàm cầu Marshall của người tiêu dùng, cho biết hàm lợi ích: $U = x_1^{0,7} x_2^{0,3}$.

20. Với hàm lợi ích và giá của hai loại hàng hoá cho ở bài tập 15, hãy xác định túi hàng chi phí tối thiểu đảm bảo mức lợi ích U = 196.

§4 CÁC BÀI TOÁN VỀ SỰ LỰA CHỌN CỦA NHÀ SẢN XUẤT

I. LỰA CHỌN TỐI ƯU MỨC SỬ DỤNG CÁC YẾU TỐ SẢN XUẤT

a. Bài toán tối đa hoá lợi nhuận

Xét trường hợp doanh nghiệp cạnh tranh thuần tuý sản xuất một loại sản phẩm. Mục tiêu của doanh nghiệp là thu lợi nhuận tối đa trên cơ sở sử dụng hợp lý các yếu tố đầu vào là lao động và tư bản (với giả thiết các yếu tố khác giữ nguyên).

Mọi doanh nghiệp cạnh tranh thuần tuý phải chấp nhận giá thị trường, kể cả giá đầu vào và giá đầu ra. Gọi p là giá thị trường của loại sản phẩm do doanh nghiệp sản xuất, w_L và w_K là giá thuê lao động và giá thuê tư bản, căn cứ vào hàm sản xuất $Q = f(K, L)$ ta có thể biểu diễn tổng lợi nhuận dưới dạng hàm số của hai biến số K, L:

$$\pi = pf(K, L) - (w_k K + w_L L + C_0)$$

trong đó $pQ = pf(K, L)$ là tổng doanh thu, $w_k K + w_L L$ là tổng chi phí cho các yếu tố sản xuất, C_0 là chi phí cố định (không phụ thuộc K và L).

Điều kiện cần của cực trị trong trường hợp này là :

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = p\frac{\partial f}{\partial K} - w_K = 0 \text{ và } \frac{\partial \pi}{\partial L} = p\frac{\partial f}{\partial L} - w_L = 0,$$

hay

$$p\frac{\partial f}{\partial K} = w_K \text{ và } p\frac{\partial f}{\partial L} = w_L. \tag{1.3}$$

Dưới giác độ kinh tế điều kiện (1.3) có nghĩa như sau:

Điều kiện cần để thu lợi nhuận tối đa là: doanh nghiệp phải sử dụng các yếu tố đầu vào ở mức mà giá trị bằng tiền của sản phẩm hiện vật cận biên của mỗi yếu tố đúng bằng giá của chính yếu tố đó.

Điều kiện đủ để hàm lợi nhuận đạt cực đại là:

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial K^2} = p\frac{\partial^2 f}{\partial K^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial L^2} = p\frac{\partial f}{\partial L^2} < 0$$

và

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial K^2}\frac{\partial^2 \pi}{\partial L^2} - \left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial K \partial L}\right)^2 = p^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial K^2}\ \frac{\partial^2 f}{\partial L^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial K \partial L}\right)^2\right] > 0.$$

Do $p > 0$ nên điều kiện này tương đương với điều kiện

$$Q_{KK} < 0, \ Q_{LL} < 0; \tag{1.4}$$

$$Q_{KK}Q_{LL} - Q^2_{KL} > 0, \tag{1.5}$$

trong đó ta dùng các ký hiệu :

$$Q_{KK} = \frac{\partial^2 f}{\partial K^2},\ Q_{LL} = \frac{\partial^2 f}{\partial L^2},\ Q_{LK} = \frac{\partial^2 f}{\partial L \partial K} = \frac{\partial^2 f}{\partial K \partial L} = Q_{KL}$$

(Ta luôn luôn giả thiết rằng hàm sản xuất có các đạo hàm cấp 2 liên tục).

Chú ý rằng điều kiện (1.4) biểu hiện quy luật lợi ích cận biên giảm dần. Tuy nhiên, chỉ riêng quy luật lợi ích cận biên giảm dần chưa đảm bảo lợi nhuận tối đa tại điểm thoả mãn điều kiện cần, mà phải tính đến điều kiện (1.5) nữa. Hàm lợi nhuận không đạt giá trị cực đại tại điểm thoả mãn điều kiện cần nếu giá trị tuyệt đối của Q_{KL} lớn hơn so với giá trị tuyệt đối của Q_{LL} và Q_{KK} (khi đó $Q_{KK}Q_{LL} - Q_{KL}^2 < 0$). Điều này có nghĩa là, mặc dù lợi ích cận biên giảm tại điểm dừng, lợi nhuận tối đa vẫn chưa đạt được nếu sự thay đổi của yếu tố đầu vào này lại ảnh hưởng mạnh hơn tới sản phẩm cận biên của yếu tố đầu vào kia so với ảnh hưởng đối với sản phẩm cận biên của chính yếu tố đầu vào đó.

b. Tối đa hoá sản lượng với ngân sách cố định

Xét trường hợp doanh nghiệp cạnh tranh thuần tuý tiến hành sản xuất một loại sản phẩm với một ngân sách B không đổi (cố định chi phí). Trong trường hợp này mục tiêu tối đa hoá lợi nhuận đồng nhất với mục tiêu tối đa hoá tổng doanh thu. Do giá sản phẩm là yếu tố ngoại sinh đối với nhà sản xuất cạnh tranh nên mục tiêu tối đa hoá tổng doanh thu TR = pQ lại quy về mục tiêu tối đa hoá sản lượng. Với Q = f(K, L) là hàm sản xuất, bài toán được đặt ra như sau:

Chọn (K, L) để hàm số :

$$Q = f(K, L), \tag{4.1}$$

đạt cực đại, với điều kiện

$$w_K K + w_L L = B, \tag{4.2}$$

(w_L và w_K là giá lao động và giá tư bản).

Bài toán này hoàn toàn tương tự như bài toán tối đa hoá lợi ích tiêu dùng mà ta đã xét ở §3: hàm lợi ích (3.1) được thay bằng hàm sản xuất (4.1) và ràng buộc ngân sách tiêu dùng (3.2) được thay bằng ràng buộc ngân sách sản xuất (4.2).

Ta giả thiết rằng hàm sản xuất $Q = f(K, L)$ có các đạo hàm riêng liên tục cấp một và cấp hai trong miền

$$\{(K, L): K > 0, L > 0\}$$

và sử dụng các ký hiệu:

$$Q_K = MPP_K = \frac{\partial Q}{\partial K}, Q_L = MPP_L = \frac{\partial Q}{\partial L};$$

$$Q_{KK} = \frac{\partial^2 Q}{\partial K^2},\ Q_{KL} = \frac{\partial^2 Q}{\partial K \partial L},\ Q_{LL} = \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2}.$$

Tương tự như bài toán cực đại hoá lợi ích, điều kiện cần để Q đạt cực đại, với điều kiện (4.2), là:

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{Q_K}{w_K} = \dfrac{Q_L}{w_L} \\ w_K K + w_L L = B \end{cases} \tag{4.3}$$

Điều kiện đủ để Q đạt cực đại, với điều kiện (4.2), là:

$$2Q_1Q_2Q_{12} - Q_2^2Q_{11} - Q_1^2Q_{22} > 0. \tag{4.4}$$

Với giả thiết điều kiện (4.4) thoả mãn với mọi $K > 0$ và $L > 0$, từ hệ phương trình điều kiện cần (4.3) ta xác định được các hàm cầu yếu tố (hàm cầu Marshall):

$$\overline{K} = \overline{K}(w_K, w_L, B),\ \ \overline{L} = \overline{L}(w_K, w_L, B).$$

c. Tối thiểu hoá chi phí sản xuất

Ta tiếp tục xét trường hợp doanh nghiệp cạnh tranh thuần tuý với hàm sản xuất:

$$Q = f(K, L).$$

Giả sử doanh nghiệp lập kế hoạch sản xuất một lượng sản phẩm cố định Q_0. Trong trường hợp này tổng doanh thu $TR = pQ_0$ là cố định, do đó mục tiêu tối đa hoá lợi nhuận đồng nhất với mục tiêu tối thiểu hoá chi phí sản xuất.

Bài toán được đặt ra như sau:

Chọn (K, L) để hàm số

$$C = w_K K + w_L L \tag{4.5}$$

đạt cực tiểu, với điều kiện

$$f(K, L) = Q_0. \tag{4.6}$$

Bài toán này hoàn toàn tương tự như bài toán tối thiểu hoá chi phí tiêu dùng. Lặp lại phương pháp đã trình bày khi nói về bài toán tối thiểu hoá chi tiêu, ta có các kết quả tương tự.

Điều kiện cần để C đạt giá trị cực tiểu, với điều kiện (4.6), là

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\mu} = \dfrac{Q_K}{w_K} = \dfrac{Q_L}{w_L} \\ f(K, L) = Q_0 \end{cases} \tag{4.7}$$

Điều kiện đủ để C đạt cực tiểu trùng với điều kiện đủ (4.4) của bài toán tối đa hoá sản lượng vừa nói trên.

Với giả thiết hàm sản xuất thoả mãn điều kiện (4.4), từ hệ phương trình (4.7) ta xác định được cầu đối với các yếu tố sản xuất (cầu Hick):

$$\hat{K} = \hat{K}(w_K, w_L, Q_0), \quad \hat{L} = \hat{L}(w_K, w_L, Q_0). \tag{4.8}$$

b. Dẫn xuất hàm chi phí

Theo phương pháp của bài toán tối thiểu hoá chi phí ta có thể lập hàm chi phí của doanh nghiệp xuất phát từ hàm sản xuất. Thật vậy, mỗi hàm hàm sản xuất $Q = f(K, L)$ cho tương ứng các hàm cầu yếu tố (4.8). Thay các hàm cầu đó vào (4.5) ta có thể biểu diễn tổng chi phí TC theo giá các yếu tố sản xuất và sản lượng Q_0.

$$\hat{C} = w_K.\ \hat{K}(w_K, w_L, Q_0) + w_L.\ \hat{L}(w_K, w_L, Q_0).$$

$$\Rightarrow\ \hat{C} = \hat{C}(w_K, w_L, Q_0). \tag{4.9}$$

Trong điều kiện giá các yếu tố sản xuất không đổi, hàm số (4.9) cho biết chi phí sản xuất tại mỗi mức sản lượng Q. Đó chính là hàm chi phí của doanh nghiệp sản xuất.

Ví dụ: Lập hàm chi phí tương ứng với hàm sản xuất

$$Q = 81\sqrt[3]{KL}$$

Giải: Trong trường hợp này ta có

$$Q_K = 27\sqrt[3]{\frac{L}{K^2}},\quad Q_L = 27\sqrt[3]{\frac{K}{L^2}};$$

Hàm sản xuất Cobb-Douglas với $\alpha = \frac{1}{3} < 1$ và $\beta = \frac{1}{3} < 1$ thoả mãn điều kiện (4.4), do đó các hàm cầu yếu tố được xác định từ hệ phương trình (4.7):

$$\begin{cases} \dfrac{Q_K}{w_K} = \dfrac{Q_L}{w_L} \\ f(K, L) = Q_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{27}{w_K}\sqrt[3]{\dfrac{L}{K^2}} = \dfrac{27}{w_L}\sqrt[3]{\dfrac{K}{L^2}} \\ 81\sqrt[3]{KL} = Q_0 \end{cases}$$

Từ phương trình thứ nhất suy ra $L = \dfrac{w_K K}{w_L}$. Thay L theo K vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$9^2.\sqrt[3]{\frac{w_K K^2}{w_L}} = Q_0 \Rightarrow K^2 = \frac{w_L Q_0^3}{9^6 w_K}.$$

Từ đây ta tìm được:

$$K = \frac{1}{9^3}\sqrt{\frac{w_L Q_0^3}{w_K}},\ L = \frac{1}{9^3}\sqrt{\frac{w_K Q_0^3}{w_L}}$$

$$\Rightarrow\ TC = w_K K + w_L L = \frac{w_K}{729}\sqrt{\frac{w_L Q_0^3}{w_K}} + \frac{w_L}{729}\sqrt{\frac{w_K Q_0^3}{w_L}}.$$

Hàm chi phí tương ứng với hàm sản xuất đã cho là:

$$TC = \frac{2.\sqrt{w_K w_L Q^3}}{729}.$$

II. LỰA CHỌN MỨC SẢN LƯỢNG TỐI ƯU

a. Trường hợp doanh nghiệp cạnh tranh sản xuất kết hợp nhiều loại sản phẩm

Xét trường hợp một doanh nghiệp cạnh tranh thuần tuý sản xuất 2 loại sản phẩm. Giả sử tổng chi phí kết hợp được tính theo số lượng sản phẩm:

$$TC = TC\,(Q_1, Q_2),$$

trong đó Q_1 là số lượng sản phẩm thứ nhất và Q_2 là số lượng sản phẩm thứ hai. Do tính chất cạnh tranh, doanh nghiệp phải chấp nhận giá thị trường của các sản phẩm đó. Với p_1, p_2 là giá thị trường của 2 loại sản phẩm, hàm tổng lợi nhuận có dạng:

$$\pi = p_1Q_1 + p_2Q_2 - TC(Q_1, Q_2).$$

Bài toán đặt ra trong trường hợp này là: chọn một cơ cấu sản lượng (Q_1, Q_2) để hàm tổng lợi nhuận đạt giá trị lớn nhất.

Ví dụ: Giả sử hàm tổng chi phí của doanh nghiệp cạnh tranh là:

$$TC = 6Q_1^2 + 3Q_2^2 + 4Q_1Q_2$$

và giá sản phẩm là $p_1 = 60$, $p_2 = 34$. Hãy xác định mức sản lượng tối ưu (cho lợi nhuận tối đa).

Giải: Hàm tổng lợi nhuận là hàm số:

$$\pi = 60Q_1 + 34Q_2 - 6Q_1^2 - 3Q_2^2 - 4Q_1Q_2.$$

Điều kiện cần để đạt lợi nhuận tối đa là:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi}{\partial Q_1} = 60 - 12Q_1 - 4Q_2 = 0 \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial Q_2} = 34 - 4Q_1 - 6Q_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{Q}_1 = 4 \\ \overline{Q}_2 = 3 \end{cases}$$

Ta lại có :

$$\pi_{11} = \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2} = -12; \quad \pi_{22} = \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2} = -6; \quad \pi_{12} = \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1 \partial Q_2} = -4.$$

Điều kiện đủ $\pi_{11}\pi_{22} - \pi_{12}^2 > 0$, $\pi_{11} < 0$ được thoả mãn với mọi Q_1 và Q_2, do đó lợi nhuận sẽ lớn nhất nếu doanh nghiệp sản xuất 4 đơn vị sản phẩm thứ nhất và 3 đơn vị sản phẩm thứ hai.

b. Trường hợp doanh nghiệp độc quyền sản xuất kết hợp nhiều loại sản phẩm

Xét trường hợp một doanh nghiệp độc quyền sản xuất hai loại sản phẩm với hàm chi phí kết hợp

$$TC = TC(Q_1, Q_2).$$

Doanh nghiệp độc quyền định giá sản phẩm của mình căn cứ vào chi phí sản xuất và cầu của thị trường.

Giả sử cầu đối với các sản phẩm là:

$Q_1 = D_1(p_1) \Leftrightarrow p_1 = D_1^{-1}(Q_1)$ (đối với sản phẩm thứ nhất);

$Q_2 = D_2(p_2) \Leftrightarrow p_2 = D_2^{-1}(Q_2)$ (đối với sản phẩm thứ hai).

Hàm lợi nhuận có dạng:

$$\pi = p_1Q_1 + p_2Q_2 - TC(Q_1, Q_2).$$

Căn cứ vào cầu của thị trường ta có thể biểu diễn tổng lợi nhuận theo Q_1 và Q_2:

$$\pi = D_1^{-1}(Q_1).Q_1 + D_2^{-1}(Q_2).Q_2 - TC(Q_1, Q_2).$$

Theo phương pháp giải bài toán cực trị của hàm hai biến ta xác định được mức sản lượng $\overline{Q}_1$, $\overline{Q}_2$ để π đạt cực đại, từ đó suy ra giá tối ưu:

$$\overline{p}_1 = D_1^{-1}(Q_1),\ \overline{p}_2 = D_2^{-1}(Q_2).$$

Ví dụ: Giả sử doanh nghiệp độc quyền sản xuất hai loại sản phẩm với hàm chi phí kết hợp

$$TC = Q_1^2 + 5Q_1Q_2 + Q_2^2.$$

Giả sử cầu đối với các loại hàng hoá đó là:

$p_1 = 56 - 4Q_1$ (đối với sản phẩm thứ nhất);

$p_2 = 48 - 2Q_2$ (đối với sản phẩm thứ hai).

Hãy xác định mức sản lượng và giá tối ưu cho các sản phẩm.

Giải: Hàm lợi nhuận trong trường hợp này là:

$$\pi = p_1Q_1 + p_2Q_2 - Q_1^2 - 5Q_1Q_2 - Q_2^2$$

$$= (56 - 4Q_1)Q_1 + (48 - 2Q_2)Q_2 - Q_1^2 - 5Q_1Q_2 - Q_2^2$$

$$= 56Q_1 + 48Q_2 - 5Q_1^2 - 3Q_2^2 - 5Q_1Q_2.$$

Giải bài toán cực trị ta xác định được mức sản lượng cho lợi nhuận tối đa:

$$\overline{Q}_1 = \frac{96}{35},\ \overline{Q}_2 = \frac{40}{7}.$$

Giá bán để đạt được lợi nhuận tối đa là:

$$\bar{p}_1 = 56 - 4\bar{Q}_1 = \frac{1576}{35} \approx 45; \quad \bar{p}_2 = 48 - 2\bar{Q}_2 = \frac{256}{7} \approx 36,7.$$

c. Trường hợp doanh nghiệp độc quyền có nhiều cơ sở sản xuất khác nhau

Xét trường hợp một doanh nghiệp độc quyền sản xuất một loại sản phẩm tại hai cơ sở sản xuất khác nhau. Trong trường hợp này, doanh nghiệp lựa chọn mức sản lượng và giá tối ưu căn cứ vào chi phí sản xuất của các nhà máy và cầu đối với sản phẩm.

Tổng lợi nhuận của doanh nghiệp là:

$$\pi = D^{-1}(Q).Q - TC_1(Q_1) - TC_2(Q_2),$$

trong đó Q_i là lượng sản phẩm sản xuất ở nhà máy i; TC_i là hàm chi phí của nhà máy i (i = 1, 2); $Q = Q_1 + Q_2$; $p = D^{-1}(Q)$ là hàm cầu ngược. Giải bài toán cực trị của hàm 2 biến $\pi(Q_1, Q_2)$ ta sẽ chọn được phương án kết hợp (Q_1, Q_2) để doanh nghiệp đạt được lợi nhuận tối đa, từ đó xác định giá tối ưu theo hàm cầu ngược.

Để giải bài toán tối đa hoá lợi nhuận trong trường hợp này, thay cho hàm tổng chi phí ta chỉ cần thông tin về chi phí cận biên của các nhà máy. Khi tính các đạo hàm riêng cấp 1 và cấp 2 của hàm số $\pi(Q_1, Q_2)$, bạn cần lưu ý rằng

$$TC_i'(Q_i) = MC_i(Q_i),\ TC_i''(Q_i) = MC_i'(Q_i).$$

Ví dụ: Một công ty độc quyền sản xuất một loại sản phẩm tại hai nhà máy với hàm chi phí cận biên như sau (Q_i là lượng sản phẩm sản xuất ở nhà máy i, MC_i là chi phí cận biên của nhà máy i):

$$MC_1 = 2 + 0,2Q_1,\ MC_2 = 6 + 0,04Q_2.$$

Công ty đó bán sản phẩm trên thị trường với hàm cầu ngược:

$$p = 66 - 0,1Q.$$

Nếu công ty đó muốn tối đa hoá lợi nhuận thì phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm và bán với giá bao nhiêu?

Giải: Tổng lợi nhuận của công ty là:

$$\pi = (66 - 0{,}1Q)Q - TC_1(Q_1) - TC_2(Q_2)$$

Với $Q = Q_1 + Q_2$, ta có:

$$\pi = 66(Q_1 + Q_2) - 0{,}1(Q_1 + Q_2)^2 - TC_1(Q_1) - TC_2(Q_2),$$

$$\pi'_{Q_1} = 66 - 0{,}2(Q_1 + Q_2) - MC_1(Q_1)$$

$$= 66 - 0{,}2(Q_1 + Q_2) - (2 + 0{,}2Q_1) = 64 - 0{,}4Q_1 - 0{,}2Q_2,$$

$$\pi'_{Q_2} = 66 - 0{,}2(Q_1 + Q_2) - MC_2(Q_2)$$

$$= 66 - 0{,}2(Q_1 + Q_2) - (6 + 0{,}04Q_2) = 60 - 0{,}2Q_1 - 0{,}24Q_2,$$

Điều kiện cần để π đạt cực đại là:

$$\begin{cases} 64 - 0{,}4Q_1 - 0{,}2Q_2 = 0 \\ 60 - 0{,}2Q_1 - 0{,}24Q_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2Q_1 + Q_2 = 320 \\ 5Q_1 + 6Q_2 = 1500 \end{cases}$$

Nghiệm của hệ phương trình này là: $(Q_1 = 60,\ Q_2 = 200)$.

Ta lại có:

$$\pi_{11} = \pi''_{Q_1Q_1} = -0{,}4,\ \pi_{12} = \pi''_{Q_1Q_2} = -0{,}2,\ \pi_{22} = \pi''_{Q_2Q_2} = -0{,}24;$$

$$D = \pi_{11}\pi_{22} - \pi_{12}^2 = 0{,}096 - 0{,}04 > 0 \text{ và } \pi_{11} < 0.$$

Điều kiện đủ để π đạt cực đại thoả mãn với mọi $Q_1 > 0$, $Q_2 > 0$. Như vậy, công ty đạt lợi nhuận tối đa khi sản xuất 60 sản phẩm tại nhà máy 1 và 200 sản phẩm tại nhà máy 2. Tổng sản lượng là: $Q = 60 + 200 = 260$. Theo hàm cầu ngược ta xác định được giá tối ưu là: $p = 66 - 0{,}1.(260) = 40$.

d. Trường hợp doanh nghiệp độc quyền tiêu thụ sản phẩm ở các thị trường khác nhau

Xét trường hợp một nhà sản xuất độc quyền, sản xuất một loại sản phẩm, nhưng tiêu thụ sản phẩm đó ở hai thị trường riêng biệt. Nhà sản xuất độc quyền ra quyết định sản xuất và quyết định giá bán sản phẩm căn cứ vào chi phí sản xuất và cầu của các thị trường đối với sản phẩm của nó.

Giả sử nhà sản xuất độc quyền tiến hành sản xuất với hàm chi phí $TC = TC(Q)$ và giả sử cầu đối với sản phẩm là:

Cầu của thị trường 1: $Q_1 = D_1(p_1) \Leftrightarrow p_1 = D_1^{-1}(Q_1)$;

Cầu của thị trường 2: $Q_2 = D_2(p_2) \Leftrightarrow p_2 = D_2^{-1}(Q_2)$.

Tổng lợi nhuận trong trường hợp này được tính như sau:

$$\pi = p_1Q_1 + p_2Q_2 - TC(Q),$$

trong đó $Q = Q_1 + Q_2$.

Đối với nhà sản xuất độc quyền bài toán được đặt ra là: chọn p_1, p_2, Q_1, Q_2 để hàm số

$$\pi = p_1Q_1 + p_2Q_2 - TC(Q_1 + Q_2),$$

với các điều kiện $Q_1 = D_1(p_1)$, $Q_2 = D_2(p_2)$, đạt cực đại. Đây là bài toán cực trị có điều kiện với bốn biến chọn và hai phương trình ràng buộc. Bài toán này có thể đưa về bài toán cực trị không có điều kiện với hai biến chọn bằng phương pháp thế. Sử dụng các biểu thức hàm cầu dưới dạng hàm ngược:

$$p_1 = D_1^{-1}(Q_1),\ p_2 = D_2^{-1}(Q_2).$$

ta có thể biểu diễn tổng lợi nhuận qua hai biến số Q_1, Q_2:

$$\pi = D_1^{-1}(Q_1).Q_1 + D_2^{-1}(Q_2).Q_2 - TC(Q_1 + Q_2). \qquad (4.10)$$

Theo phương pháp cực trị ta có thể chọn $Q_1 = \overline{Q}_1$, $Q_2 = \overline{Q}_2$ để hàm lợi nhận (4.10) đạt cực đại, từ đó ra quyết định:

Mức sản lượng tối ưu: $Q = \overline{Q}_1 + \overline{Q}_2$;

Giá tối ưu cho mỗi thị trường: $\overline{p}_1 = D_1^{-1}(\overline{Q}_1)$, $\overline{p}_2 = D_2^{-1}(Q_2)$.

Cách lựa chọn trên đây được áp dụng khi nhà sản xuất được tự do tiêu thụ sản phẩm của mình, tức là có thể định giá riêng cho mỗi thị trường tuỳ theo cầu. Nếu nhà sản xuất không được phép phân biệt giá thì ta phải giải bài toán cực đại hoá hàm số (4.10), với điều kiện:

$$p_1 = p_2 \Leftrightarrow D_1^{-1}(Q_1) - D_2^{-1}(Q_2) = 0.$$

Ví dụ: Giả sử:

$$TC = 2000 + 10.Q \quad (Q = Q_1 + Q_2);$$

Cầu của thị trường 1: $Q_1 = 21 - 0{,}1p_1$,

Cầu của thị trường 2: $Q_2 = 50 - 0{,}4p_2$.

Đảo ngược các hàm cầu ta được :

$$p_1 = 210 - 10.Q_1,$$

$$p_2 = 125 - 2{,}5.Q_2 .$$

Tổng doanh thu của cả hai thị trường là:

$$TR = p_1Q_1 + p_2Q_2 = (210 - 10Q_1)Q_1 + (125 - 2{,}5Q_2)Q_2.$$

Tổng lợi nhuận thu được là

$$\pi = TR - TC$$

$$= (210 - 10Q_1)Q_1 + (125 - 2{,}5Q_2)Q_2 - 2000 - 10(Q_1 + Q_2)$$

$$= 200Q_1 + 115Q_2 - 10Q_1^2 - 2{,}5Q_2^2 - 2000.$$

Bài toán đặt ra là lựa chọn Q_1, Q_2 để hàm tổng lợi nhuận π đạt giá trị cực đại, nhưng có sự khác nhau giữa trường hợp được phép phân biệt giá và trường hợp không được phép phân biệt giá.

- Trong trường hợp được phép phân biệt giá, các biến chọn Q_1, Q_2 độc lập với nhau, tức không có điều kiện ràng buộc. Điều kiện cần để π đạt cực đại là :

$$\pi_1 = \frac{\partial\pi}{\partial Q_1} = 200 - 20Q_1 = 0;\ \ \pi_2 = \frac{\partial\pi}{\partial Q_2} = 115 - 5Q_2 = 0.$$

Từ đây ta xác định được $\overline{Q}_1 = 10$, $\overline{Q}_2 = 23$. Dễ dàng ta thấy rằng điều kiện đủ của cực đại được thoả mãn với mọi Q_1, Q_2. Như vậy, để tối đa hoá lợi nhuận trong trường hợp được phép phân biệt giá, nhà sản xuất độc quyền bán 10 sản phẩm ở thị trường thứ nhất và 23 sản phẩm ở thị trường thứ hai. Sản lượng tối ưu là 33 sản phẩm và giá tối ưu trên mỗi thị trường là:

$$\overline{p}_1 = 210 - 10\overline{Q}_1 = 110,$$

$$\overline{p}_2 = 125 - 2{,}5\overline{Q}_2 = 67{,}5.$$

Tổng lợi nhuận thu được là : $\overline{\pi} = 322{,}5$

- Trong trường hợp không được phép phân biệt giá ta phải giải bài toán cực đại hoá hàm tổng lợi nhuận π với điều kiện ràng buộc $p_1 = p_2$, tức là:

$$210 - 10Q_1 = 125 - 2{,}5Q_2 \Leftrightarrow 10Q_1 - 2{,}5Q_2 = 85$$

Hàm số Lagrange trong trường hợp này là :

$$L = 200Q_1 + 115Q_2 - 10Q_1^2 - 2{,}5Q_2^2 - 2000 + \lambda(85 - 10Q_1 + 2{,}5Q_2).$$

Điều kiện cần của bài toán cực trị có điều kiện là :

$$\begin{cases} L_1 = 200 - 20Q_1 - 10\lambda = 0 \\ L_2 = 115 - 5Q_2 + 2{,}5\lambda = 0 \\ L_\lambda = 85 - 10Q_1 + 2{,}5Q_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{Q}_1 = 13{,}4 \\ \overline{Q}_2 = 19{,}6 \\ \overline{\lambda} = -6{,}8 \end{cases}$$

Điều kiện đủ của cực đại có điều kiện trong trường hợp này cũng được thoả mãn với mọi Q_1, Q_2. Vậy nếu không được phép phân biệt giá bán ở hai thị trường thì nhà sản xuất thu được lợi nhuận tối đa khi bán 13,4 sản phẩm ở thị trường thứ nhất và 19,6 sản phẩm ở thị trường thứ hai. Giá tối ưu là $\overline{p}_1 = \overline{p}_2 = 76$, và lợi nhuận thu được là $\overline{\pi} = 178$.

BÀI TẬP

21. Một doanh nghiệp có hàm sản xuất:

$$Q = 2K^{0,3}L^{0,5}.$$

a) Hãy đánh giá hiệu quả của việc tăng quy mô sản xuất.

b) Giả sử giá thuê tư bản là \$6, giá thuê lao động là \$2 và doanh nghiệp tiến hành sản xuất ngân sách cố định \$4800. Hãy cho biết doanh nghiệp đó sử dụng bao nhiêu đơn vị tư bản và bao nhiêu đơn vị lao động thì thu được sản lượng tối đa?

22. Hãy trả lời các câu hỏi ở bài tập 21, với hàm sản xuất:

$$Q = 10K^{0,8}L^{0,6},$$

giá thuê tư bản là \$30, giá thuê lao động là \$10 và doanh nghiệp tiến hành sản xuất ngân sách cố định \$2100.

23. Một công ty sản xuất một loại sản phẩm với hàm sản xuất như sau:

$$Q = K(L + 5).$$

Công ty này nhận được hợp đồng cung cấp 5600 sản phẩm. Hãy cho biết phương án sử dụng các yếu tố K, L sao cho việc sản xuất lượng sản phẩm theo hợp đồng tốn ít chi phí nhất, trong điều kiện giá thuê tư bản $w_K = 70$ và giá thuê lao động $w_L = 20$.

24. Một doanh nghiệp cạnh tranh thuần tuý sản xuất kết hợp 2 loại sản phẩm với hàm chi phí như sau (Q_i là lượng sản phẩm i):

$$TC = 3Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + 2Q_2^2 + 10.$$

Hãy chọn mức sản lượng kết hợp (Q_1, Q_2) để doanh nghiệp có được lợi nhuận tối đa khi giá sản phẩm 1 là \$160 và giá sản phẩm 2 là \$120.

25. Hãy trả lời câu hỏi ở bài tập 24 khi:

Hàm chi phí: $TC = Q_1^2 - 2Q_1Q_2 + 2Q_2^2 + 7$;

Giá sản phẩm 1: $p_1 = \$32$; Giá sản phẩm 2: $p_2 = \$16$.

26. Một công ty độc quyền sản xuất kết hợp 2 loại sản phẩm với hàm chi phí (Q_i là lượng sản phẩm i):

$$TC = 3Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + 2Q_2^2 + 55.$$

Hãy chọn mức sản lượng kết hợp (Q_1, Q_2) và giá bán các sản phẩm để doanh nghiệp có được lợi nhuận tối đa, khi cầu của thị trường đối với các sản phẩm của công ty như sau:

Sản phẩm 1: $Q_1 = 50 - 0,5p_1$; Sản phẩm 2: $Q_2 = 76 - p_2$.

27. Hãy trả lời câu hỏi ở bài tập 26 khi:

Hàm chi phí: $TC = Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2 + 20$;

Cầu đối với sản phẩm 1: $Q_1 = 25 - 0,5p_1$,

Cầu đối với sản phẩm 2: $Q_2 = 30 - p_2$.

28. Một công ty độc quyền sản xuất một loại sản phẩm tại hai nhà máy với hàm chi phí cận biên như sau (Q_i là lượng sản phẩm sản xuất ở nhà máy i, MC_i là chi phí cận biên của nhà máy i; i = 1, 2):

$$MC_1 = 2 + 0,1Q_1,\ MC_2 = 4 + 0,08Q_2.$$

Công ty đó bán sản phẩm trên thị trường với biểu cầu $p = 58 - 0,05Q$. Nếu công ty đó muốn tối đa hoá lợi nhuận thì phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm và bán với giá bao nhiêu?

29. Một công ty độc quyền sản xuất một loại sản phẩm tại bốn nhà máy với hàm chi phí cận biên như sau (Q_i là lượng sản phẩm sản xuất ở nhà máy i, MC_i là chi phí cận biên của nhà máy i; i = 1, 2):

$$MC_1 = 20 + Q_1,\ MC_2 = 40 + 0,5Q_2,\ MC_3 = 40 + Q_3,\ MC_4 = 60 + 0,5Q_4.$$

Công ty đó bán sản phẩm trên thị trường với biểu cầu $p = 580 - 0,3Q$. Nếu công ty đó muốn tối đa hoá lợi nhuận thì phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm và bán với giá bao nhiêu?

30. Một công ty độc quyền sản xuất một loại sản phẩm và bán sản phẩm đó tại hai thị trường khác nhau. Cho biết hàm chi phí

$$TC = 35 + 40Q \ (Q = Q_1 + Q_2)$$

và cầu của các thị trường đối với sản phẩm của công ty:

Thị trường 1: $Q_1 = 24 - 0,2p_1$,

Thị trường 2: $Q_2 = 10 - 0,05p_2$.

Hãy xác định sản lượng và giá bán trên mỗi thị trường để công ty thu lợi nhuận tối đa.

31. Một công ty độc quyền sản xuất một loại sản phẩm và bán sản phẩm đó tại hai thị trường khác nhau. Cho biết hàm chi phí cận biên

$$MC = 1,75 + 0,05Q \ (Q = Q_1 + Q_2)$$

và cầu của các thị trường đối với sản phẩm của công ty:

Thị trường 1: $p_1 = 12 - 0,15Q_1$;

Thị trường 2: $p_2 = 9 - 0,075Q_2$.

Hãy xác định sản lượng và giá bán trên mỗi thị trường để công ty thu lợi nhuận tối đa.

32. Một nhà sản xuất độc quyền sản xuất một loại sản phẩm và bán sản phẩm đó cho hai loại khách hàng. Cho biết hàm chi phí:

$$TC = 90 + 20Q.$$

Nếu nhà sản xuất đưa Q_1 sản phẩm ra bán cho loại khách hàng thứ nhất thì các khách hàng này bằng lòng trả giá $p_1 = 50 - 5Q_1$ USD cho mỗi sản phẩm. Nếu nhà sản xuất đưa Q_2 sản phẩm ra bán cho loại khách hàng thứ hai thì các khách hàng này bằng lòng trả giá $p_2 = 100 - 10Q_2$ USD cho mỗi sản phẩm. Hãy cho biết lượng cung tối ưu và giá tối ưu cho mỗi loại khách hàng.

Chương 5
PHÉP TOÁN TÍCH PHÂN

§1. NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH.

I. NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ

a. Khái niệm nguyên hàm

Chương này đề cập đến phép toán ngược của phép tính đạo hàm và vi phân của hàm số. Ta xét bài toán sau đây: *Tìm tất cả các hàm số có đạo hàm là một hàm số f(x) cho trước.*

Định nghĩa: Hàm số F(x) được gọi là *nguyên hàm* của hàm số f(x) trên một khoảng X nếu:

$$F'(x) = f(x), \text{ hay } dF(x) = f(x)dx, \ \forall x \in X.$$

Ví dụ:

- Hàm số sinx là nguyên hàm của hàm số cosx trên $\mathbb{R}$:
$$(\sin x)' = \cos x, \ \forall x \in X.$$
- Hàm số x^4 là một nguyên hàm của hàm số $4x^3$ trên $\mathbb{R}$:
$$(x^4)' = 4x^3, \ \forall x \in X.$$

b. Biểu thức nguyên hàm tổng quát

Định lý: Nếu F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên khoảng X thì:

- Hàm số F(x) + C, với C là một hằng số bất kỳ, cũng là nguyên hàm của hàm số f(x);
- Ngược lại, mọi nguyên hàm của hàm số f(x) đều biểu diễn được dưới dạng F(x) + C, với C là một hằng số.

Chứng minh: Với C là hằng số bất kỳ ta luôn có

$$[F(x) + C]' = F'(x),$$

do đó nếu $F'(x) = f(x)\ \forall x \in X$ thì $[F(x) + C]' = f(x),\ \forall x \in X$.

Ngược lại, với $\Phi(x)$ là một nguyên hàm bất kỳ của hàm số f(x), ta có:

$$[\Phi(x) - F(x)]' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0,\ (\forall x \in X).$$

Từ đây suy ra rằng hàm số $\Phi(x) - F(x)$ nhận giá trị không đổi trên khoảng X:

$$\Phi(x) - F(x) = C,\ \forall x \in X \Rightarrow \Phi(x) = F(x) + C,\ \forall x \in X.$$

Định lý nêu trên cho thấy biểu thức F(x) + C bao quát tất cả các nguyên hàm của hàm số f(x): mỗi hằng số C cho tương ứng một nguyên hàm.

II. TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

a. Định nghĩa tích phân

Định nghĩa: *Tích phân bất định* của hàm số f(x) là biểu thức nguyên hàm tổng quát F(x) + C, trong đó F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) và C là hằng số bất kỳ.

Để biểu diễn tích phân bất định của hàm số f(x) người ta dùng ký hiệu:

$\int f(x)dx$ [đọc là: *tích phân của f(x)dx*].

Biểu thức f(x)dx được gọi là *biểu thức dưới dấu tích phân* và hàm số f được gọi là *hàm số dưới dấu tích phân*.

Theo ký hiệu nói trên ta có:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Ví dụ:

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C;$$

$$\int 4x^3dx = x^4 + C.$$

b. Các tính chất cơ bản của tích phân bất định

Tích phân bất định có các tính chất cơ bản sau đây:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ hay $d\int f(x)dx = f(x)dx$;

2. $\int F'(x)dx = F(x) + C$ hay $\int dF(x) = F(x) + C$;

3. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;

4. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ (k là hằng số).

Hai tính chất đầu suy ra trực tiếp từ định nghĩa tích phân bất định. Bạn hãy tự chứng minh hai tính chất còn lại bằng cách lấy đạo hàm của hàm số ở vế phải để khẳng định rằng đạo hàm của nó chính là hàm số dưới dấu tích phân ở vế trái.

III. CÁC CÔNG THỨC TÍCH PHÂN CƠ BẢN

Để tính tích phân bất định, trước hết bạn cần ghi nhớ các công thức sau đây:

1. $\int 1.dx = \int dx = x + C$

2. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \text{arctg}x + C$

5. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

6. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

   $\int e^x dx = e^x + C$

7. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

8. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot g x + C$

10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

11. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

13. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + b} \right| + C$

Mười công thức đầu suy ra trực tiếp từ các công thức đạo hàm cơ bản. Các công thức còn lại bạn có thể tự chứng minh bằng cách lấy đạo hàm của hàm số ở vế phải để khẳng định rằng đạo hàm của nó chính là hàm số dưới dấu tích phân ở vế trái.

§2. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

I. PHƯƠNG PHÁP KHAI TRIỂN

Để tính tích phân ta cần phải sử dụng các phương pháp thích hợp để chuyển về các tích phân đã có trong bảng công thức tích phân cơ bản. Một phương pháp đơn giản là khai triển tích phân của tổng (hiệu) thành tổng (hiệu) các tích phân và đưa hằng số nhân ra ngoài dấu tích phân:

$$\int [af(x) + bg(x) - c\varphi(x)]dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx - c\int \varphi(x)dx$$

Ví dụ 1:

$$\int (3x^5 + 5x^3 - 2\sin x)dx = 3\int x^5 dx + 5\int x^3 dx - 2\int \sin x dx$$

$$= \frac{x^6}{2} + \frac{5x^4}{4} + 2\cos x + C.$$

Ví dụ 2:

$$\int\frac{(1-\sqrt[3]{x})^2dx}{x}=\int\frac{1-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$$

$$=\int\frac{dx}{x}-2\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}+\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\ln|x|-6\sqrt[3]{x}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+C.$$

Ví dụ 3:

$$\int tg^2x\,dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)dx=\int\frac{dx}{\cos^2x}-\int dx=tgx-x+C.$$

Ví dụ 4:

$$\int\frac{dx}{x^2(1+x^2)}=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$=\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{dx}{1+x^2}=-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg}x+C.$$

II. SỬ DỤNG TÍNH BẤT BIẾN CỦA BIỂU THỨC TÍCH PHÂN

- Tính bất biến của biểu thức tích phân có nội dung như sau:

$$\text{Nếu }\int f(x)dx=F(x)+C\text{ thì }\int f(u)du=F(u)+C,$$

trong đó $u=\varphi(x)$ là một biểu thức hàm số (với giả thiết rằng hàm số này có đạo hàm liên tục).

- Trường hợp $u = kx + b$ ta có $du = kdx$, hay $dx=\frac{du}{k}$. Sử dụng tính chất trên, ta có quy tắc sau:

$$\text{Nếu }\int f(x)dx=F(x)+C\text{ thì }\int f(kx+b)dx=\frac{1}{k}F(kx+b)+C.$$

Ví dụ 1:

Áp dụng quy tắc về tính bất biến của biểu thức tích phân trong trường hợp u = kx + b, từ các công thức 2, 3, 6, 7, 8 trong bảng tích phân cơ bản ta suy ra:

- $$\int (kx+b)^{\alpha} = \frac{(kx+b)^{\alpha+1}}{k(\alpha+1)} + C \quad (\alpha \neq -1),$$

- $$\int \frac{dx}{kx+b} = \frac{1}{k}\ln|kx+b| + C,$$

- $$\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C,$$

- $$\int \sin kx\,dx = -\frac{1}{k}\cos kx + C,$$

- $$\int \cos kx\,dx = \frac{1}{k}\sin kx + C.$$

Ví dụ 2:

$$\int x\left(1+x^2\right)^9 dx = \frac{1}{2}\int\left(1+x^2\right)^9\left(1+x^2\right)'dx = \frac{1}{2}\int\left(1+x^2\right)^9 d\left(1+x^2\right)$$

$$= \frac{1}{20}\left(1+x^2\right)^{10} + C \quad \left(u = 1+x^2\right).$$

Ví dụ 3:

$$\int \sin x\; e^{\cos x}dx = -\int e^{\cos x}d(\cos x) = -e^{\cos x} + C \;\; (u = \cos x).$$

Ví dụ 4:

$$\int \sin^5 x\; dx = -\int \sin^4 x\; d(\cos x) = -\int (1-\cos^2 x)^2 d(\cos x)$$

$$= -\int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)d(\cos x)$$

$$= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C.$$

Ví dụ 5:

$$\int tg^4 x.dx = \int tg^2 x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \int tg^2 x.\frac{dx}{\cos^2 x} - \int tg^2 x.dx$$

$$= \int tg^2 x.d(tgx) - \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \frac{1}{3}tg^3 x - (tgx - x) + C.$$

Ví dụ 6:

$$\int\frac{x - \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int\frac{x.dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int\frac{\arcsin x.dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} - \int \arcsin x.d(\arcsin x)$$

$$= -\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\arcsin^2 x + C.$$

Ví dụ 7:

$$\int\frac{dx}{\sin x.\cos x} = \int\frac{dx}{tgx.\cos^2 x} = \int\frac{d(tgx)}{tgx} = \ln|tgx| + C.$$

Ví dụ 8:

$$\int \cot gx.dx = \int\frac{\cos x.dx}{\sin x} = \int\frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C.$$

III. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

Xét tích phân $I = \int f(x)dx$, trong đó f(x) là một hàm số liên tục. Để tính tích phân này ta có thể chuyển sang một tích phân khác bằng cách thay $x = \varphi(t)$. Với giả thiết hàm số $x = \varphi(t)$ đơn điệu có đạo hàm liên tục, ta có:

$$dx = \varphi'(t)dt \Rightarrow I = \int f(x)dx = \int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt = \int g(t)dt.$$

Khi phép đổi biến được lựa chọn phù hợp thì tích phân theo biến số t sẽ đơn giản hơn. Nếu ta tính được $\int g(t)dt = G(t) + C$ thì

$$I = \int f(x)dx = G\left[h(x)\right] + C,$$

trong đó $t = h(x)$ là hàm ngược của hàm số $x = \varphi(t)$.

Ví dụ 1: Tính tích phân $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$.

Giải: Trong trường hợp này ta có thể đổi biến như sau:

$$x = t^6 \ (t > 0),\ dx = 6t^5dt;$$

$$I_1 = \int \frac{6t^5dt}{t^3(1+t^2)} = 6\int \frac{t^2dt}{1+t^2} = 6\int\left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = 6\left(\int dt - \int \frac{dt}{1+t^2}\right)$$

$$= 6(t - \text{arctg}t) + C.$$

Hàm ngược của hàm số $x = t^6$ là: $t = \sqrt[6]{x}$, do đó

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} = 6(\sqrt[6]{x} - \text{arctg}\sqrt[6]{x}) + C.$$

Ví dụ 2: Tính tích phân $I_2 = \int \sqrt{a^2 - x^2}.dx \quad (a > 0)$.

Giải: Để thoát khỏi căn trong trường hợp này ta thay $x = a\sin t$ $\left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$. Với phép đổi biến này ta có:

$$dx = a\cos t.dt,\ \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} = a\cos t,\ t = \arcsin\frac{x}{a};$$

$$I_2 = \int (a\cos t).(a\cos t.dt) = a^2\int \cos^2 t.dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C$$

$$= \frac{a^2}{2}t + \frac{1}{2}(a\sin t)(a\cos t) + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Ví dụ 3: Tính tích phân $I_3 = \int\frac{dx}{1+\sin x}.dx$.

Đặt $t = tg\frac{x}{2}$, ta có:

$$x = 2arctgt,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2};$$

$$I_3 = \int\frac{2dt}{(1+t^2)\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)} = 2\int\frac{dt}{(t+1)^2}$$

$$= -\frac{2}{t+1} + C = -\frac{2}{tg\frac{x}{2}+1} + C.$$

Chú ý: Nếu biểu thức f(x)dx dưới dấu tích phân có thể biểu diễn dưới dạng

$$f(x)dx = g[\varphi(x)]d\varphi(x)$$

thì ta có thể đặt $t = \varphi(x)$ để chuyển sang tích phân của biểu thức g(t)dt nếu tích phân đó dễ tính hơn.

Ví dụ 4: Tính tích phân $I_4 = \int\frac{e^{2x}dx}{e^x+1}$.

Ta có:

$$I_4 = \int\frac{e^x(e^x dx)}{e^x+1} = \int\frac{e^x d(e^x)}{e^x+1}.$$

Đặt $t = e^x$, ta được:

$$I_4 = \int \frac{tdt}{t+1} = \int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = t - \ln|t+1| + C$$
$$= e^x - \ln(e^x + 1) + C.$$

Ví dụ 5: Tính tích phân $I_5 = \int \frac{x^5 dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

Ta có:

$$I_5 = \int \frac{x^5 dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = \frac{1}{3}\int \frac{[(1+x^3)-1]\, d(1+x^3)}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$$

Đặt $t = 1 + x^3$ ta được:

$$I_5 = \frac{1}{3}\int \frac{(t-1)dt}{\sqrt[3]{t}} = \frac{1}{3}\int \left(\sqrt[3]{t^2} - \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\right).dt = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}}\right) + C$$

$$= \sqrt[3]{t^2}\left(\frac{t}{5} - \frac{1}{2}\right) + C = \frac{\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,(2x^3-3)}{10} + C.$$

IV. PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

a. Công thức tích phân từng phần

Giả sử $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục. Ta có:

$$d(uv) = vdu + udv \Rightarrow udv = d(uv) - vdu$$
$$\Rightarrow \int udv = \int d(uv) - \int vdu.$$

Từ đây suy ra:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Công thức này được gọi là *công thức tích phân từng phần*.

b. Áp dụng

Để tính tích phân $I = \int f(x)dx$ bằng phương pháp tích phân từng phần ta cần phải biểu diễn biểu thức dưới dấu tích phân dưới dạng:

$$f(x)dx = g(x).\,[h(x)dx] = udv,$$

trong đó $u = g(x)$ và $dv = h(x)dx$. Với u và dv là các biểu thức đã biết ta tìm được

$$du = u'dx = g'(x)dx,\ v = \int dv = \int h(x)dx,$$

sau đó sử dụng công thức tích phân từng phần.

Trước hết chúng tôi lưu ý bạn đọc một số dạng tích phân có thể tính được tương đối dễ dàng bằng phương pháp tích phân từng phần.

• Các tích phân

$$\int x^n e^{kx}dx\ ;\quad \int x^n \sin kx.dx\ ;\quad \int x^n \cos kx.dx$$

(n nguyên dương)

có thể tính được bằng phương pháp tích phân từng phần với $u = x^n$ và dv là phần còn lại của biểu thức dưới dấu tích phân.

• Tích phân dạng $\int x^\alpha \ln^n x.dx$ ($\alpha \neq -1$, n nguyên dương) có thể tính được bằng phương pháp tích phân từng phần với

$$u = \ln^n x \text{ và } dv = x^\alpha dx.$$

• Tích phân $\int x^n \text{arctg}kx\,dx$ (n nguyên dương) có thể tính được bằng phương pháp tích phân từng phần với $u = \text{arctg}kx$, $dv = x^n dx$.

Ví dụ 1: Tính tích phân: $I_1 = \int xe^{-2x}dx$.

Giải: Với $u = x$, $dv = e^{-2x}dx$, ta có:

$$du = dx,\ v = \int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}.$$

Thay vào công thức tích phân từng phần ta được:

$$I_1 = \int udv = uv - \int udv = -\frac{x}{2}e^{-2x} - \int(-\frac{1}{2}e^{-2x})dx$$

$$= -\frac{x}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx = -\frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C.$$

Ví dụ 2: Tính tích phân $I_2 = \int x^2 \sin 3x\, dx$.

Giải: Với $u = x^2$, $dv = \sin 3x.dx$, ta có: $du = 2x.dx$, $v = -\frac{1}{3}\cos 3x$,

$$I_2 = -\frac{x^2}{3}\cos 3x + \frac{2}{3}\int x\cos 3x\, dx.$$

Tiếp tục sử dụng công thức tích phân từng phần đối với tích phân ở vế phải với $u = x$, $dv = \cos 3x.dx$ ta có:

$$du = dx,\ v = \frac{1}{3}\sin 3x;$$

$$I_2 = -\frac{x^2}{3}\cos 3x + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{3}\sin 3x - \frac{1}{3}\int \sin 3x\, dx\right)$$

$$= -\frac{x^2}{3}\cos 3x + \frac{2x}{9}\sin 3x + \frac{2}{27}\cos 3x + C.$$

Ví dụ 3: Tính tích phân $I_3 = \int x^2 \ln x.dx$.

Giải: Với $u = \ln x$, $dv = x^2dx$, ta có: $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^3}{3}$,

$$I_3 = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C.$$

Ví dụ 4: Tính tích phân $I_4 = \int \sqrt{x} \ln^2 x \, dx$.

Giải: Với $u = \ln^2 x$, $dv = \sqrt{x}\, dx$, ta có:

$$du = 2\ln x.\frac{dx}{x}, \ v = \int \sqrt{x}\, dx = \frac{2x\sqrt{x}}{3}.$$

Sử dụng công thức tích phân từng phần ta được:

$$I_4 = \frac{2x\sqrt{x}\ln^2 x}{3} - \frac{4}{3}\int \sqrt{x} \ln x \, dx.$$

Tiếp tục sử dụng công thức tích phân từng phần đối với tích phân ở vế phải với $u = \ln x$, $dv = \sqrt{x}\, dx$ ta có:

$$du = \frac{dx}{x}, \ v = \frac{2x\sqrt{x}}{3};$$

$$I_4 = \frac{2x\sqrt{x}\ln^2 x}{3} - \frac{4}{3}\left(\frac{2x\sqrt{x}\ln x}{3} - \frac{2}{3}\int \sqrt{x}\, dx\right)$$

$$= \frac{2x\sqrt{x}\ln^2 x}{3} - \frac{4}{3}\left(\frac{2x\sqrt{x}\ln x}{3} - \frac{4x\sqrt{x}}{9}\right) + C$$

$$= \frac{2x\sqrt{x}}{27}\left(9\ln^2 x - 12\ln x + 8\right) + C.$$

Ví dụ 5: Tính tích phân $I_5 = \int x.\text{arctg}x \, dx$.

Giải: Sử dụng công thức tích phân từng phần với

$$u = \text{arctg}x, \ dv = xdx,$$

ta có:

$$du = \frac{dx}{1+x^2},\ v = \frac{x^2}{2};$$

$$I_5 = \frac{x^2\text{arctg}x}{2} - \frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{1+x^2} = \frac{x^2\text{arctg}x}{2} - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{x^2\text{arctg}x}{2} - \frac{1}{2}(x - \text{arctg}x) + C = \frac{x^2\text{arctg}x + \text{arctg}x - x}{2} + C.$$

Ví dụ 6: Tính tích phân $I_6 = \int x\text{tg}^2x.dx$.

Giải: Với $u = x$, $dv = \text{tg}^2x.dx$, ta có:

$$du = dx,\ v = \int \text{tg}^2x.dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \text{tg}x - x;$$

$$I_6 = x(\text{tg}x - x) - \int(\text{tg}x - x).dx$$

$$= x(\text{tg}x - x) + \int\frac{d(\cos x)}{\cos x} + \int xdx$$

$$= x\text{tg}x - \frac{1}{2}x^2 + \ln|\cos x| + C.$$

Ví dụ 7: Tính tích phân: $I_7 = \int\frac{xe^x.dx}{(x+1)^2}$.

Giải: Đặt $u = xe^x$, $dv = \frac{dx}{(1+x)^2}$, ta có:

$$du = (1+x)e^xdx,\ v = \frac{-1}{1+x}.$$

Sử dụng công thức tích phân từng phần ta được:

$$I_7 = \frac{-xe^x}{1+x} + \int e^x dx = \frac{-xe^x}{1+x} + e^x + C = \frac{e^x}{1+x} + C.$$

Ví dụ 8: Tính các tích phân:

$$I = \int e^{ax}\cos bx\,dx\,,\ K = \int e^{ax}\sin bx\,dx \quad (a, b \neq 0).$$

Giải: Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có:

$$I = \frac{1}{b}\int e^{ax}d(\sin bx) = \frac{1}{b}\left(e^{ax}\sin bx - \int \sin bx\, d(e^{ax})\right)$$

$$= \frac{1}{b}\left(e^{ax}\sin bx - a\int \sin bx.e^{ax}dx\right) = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}K;$$

$$K = -\frac{1}{b}\int e^{ax}d(\cos bx) = -\frac{1}{b}\left(e^{ax}\cos bx - \int \cos bx.d(e^{ax})\right)$$

$$= -\frac{1}{b}\left(e^{ax}\cos bx - a\int \cos bx.e^{ax}dx\right) = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}I.$$

Từ các kết quả trên ta có:

$$I = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\left(-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}I\right)$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)I = \frac{1}{b^2}e^{ax}\left(a\cos bx + b\sin bx\right)$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{a^2 + b^2}e^{ax}\left(a\cos bx + b\sin bx\right) + C.$$

Tương tự, ta tính được:

$$K = \frac{1}{a^2 + b^2}e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx) + C.$$

BÀI TẬP

1. Sử dụng bảng tích phân cơ bản và phương pháp khai triển hãy tính các tích phân sau:

a) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$ b) $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}.dx$

c) $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}dx$ d) $\int (2^x+3^x)^2 dx$

e) $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx$ f) $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$

g) $\int \cot g^2 x.dx$ h) $\int \frac{\cos 2x.dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

2. Sử dụng tính bất biến của biểu thức tích phân hãy tính các tích phân sau:

a) $\int (2x-1)^9 dx$ b) $\int \sqrt[3]{1-3x}.dx$

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$ d) $\int x(x^2+1)^9 dx$

e) $\int \frac{e^{2x}+1}{e^x+1}dx$ f) $\int \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$

g) $\int \frac{x}{2-3x^2}dx$ h) $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}dx$

3. Tính các tích phân sau:

a) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$ b) $\int \frac{\sin x.dx}{\cos^2 x}$

c) $\int \frac{dx}{x.\sqrt[3]{1+\ln x}}$ d) $\int \frac{dx}{1-\cos x}$

e) $\int tgx.dx$ f) $\int \frac{dx}{\cos^2 x.\sqrt{1+tgx}}$

g) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3.\sqrt{1-x^2}}$ h) $\int tg\frac{1}{x}.\frac{dx}{x^2}$

4. Sử dụng phương pháp đổi biến hãy tính các tích phân sau:

a) $\int x^2.\sqrt[3]{1-x}.dx$ b) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ d) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$

e) $\int \sqrt{e^x-1}.dx$ f) $\int \sqrt{16-x^2}.dx$

5. Tính các tích phân sau:

a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ b) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

c) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx$ d) $\int x^2.\sqrt{4-x^2}.dx$

e) $\int \frac{\ln x.dx}{x.\sqrt{1+\ln x}}$ f) $\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}.dx$

g) $\int \sin^3 x.\cos^2 x.dx$ h) $\int \sin^2 x.\cos^4 x.dx$

6. Sử dụng phương pháp tích phân từng phần hãy tính các tích phân sau:

a) $\int x\sin 2x.dx$ b) $\int x^2\cos 2x.dx$

c) $\int x\sin^2 x.dx$ d) $\int x^2\cos 3x.dx$

e) $\int xe^{-2x}.dx$ f) $\int x^2e^{3x}.dx$

7. Tính các tích phân sau:

a) $\int \sqrt{x} \ln x.dx$ b) $\int x \ln^3 x.dx$

c) $\int \ln^2 x.dx$ d) $\int x^2 \ln(x+1).dx$

e) $\int x\text{arctg}x.dx$ f) $\int \arcsin x.dx$

8. Tính các tích phân sau:

a) $\int \frac{x.dx}{\sin^2 x}$ b) $\int \frac{x\cos x.dx}{\sin^3 x}$

c) $\int \cos(\ln x).dx$ d) $\int \sin(\ln x).dx$

9. Tính các tích phân sau:

a) $\int e^{\sqrt{x}} dx$ b) $\int \cos \sqrt[3]{x}.dx$

c) $\int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx$ d) $\int \frac{\arcsin x}{x^2}.dx$

e) $\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}} dx$ f) $\int \frac{x\text{arctg}x}{(1+x^2)^2} dx$

g) $\int \frac{xe^{\text{arctg}x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx$ h) $\int (e^x - \cos x)^2 dx$

§3. MỘT SỐ DẠNG TÍCH PHÂN CƠ BẢN

1. TÍCH PHÂN CỦA CÁC PHÂN THỨC HỮU TỶ

a. Phân thức hữu tỷ với mẫu số bậc nhất

Tích phân $\int \frac{P(x)}{kx+b} dx$ [P(x) là một đa thức] có thể tính dễ dàng bằng cách biểu diễn biểu thức dưới dấu tích phân dưới dạng:

$$\frac{P(x)}{kx+b} = Q(x) + \frac{d}{kx+b},$$

trong đó đa thức Q(x) là thương của phép chia đa thức và số d là phần dư của phép chia. Tích phân của đa thức Q(x) có thể tính dễ dàng, còn tích phân của hạng thức thứ hai được tính theo công thức:

$$\int \frac{dx}{kx+b} = \frac{1}{k}\ln|kx+b| + C.$$

Ví dụ: Tính tích phân: $I = \int \frac{x^3+3x}{2x+1}dx$.

Giải: Ta có:

$$I = \int \frac{x^3+3x}{2x+1}dx = \int\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} + \frac{13}{8} - \frac{13}{8(2x+1)}\right)dx$$

$$= \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{8} + \frac{13x}{8} - \frac{13}{16}\ln|2x+1| + C.$$

b. Phân thức hữu tỷ với mẫu số bậc hai

Xét tích phân:

$$\int \frac{P(x)}{x^2+px+q}dx.$$

Bằng cách chia đa thức ta có thể biểu diễn biểu thức dưới dấu tích phân dưới dạng

$$\frac{P(x)}{x^2+px+q} = Q(x) + \frac{Mx+N}{x^2+px+q},$$

trong đó nhị thức Mx + N là phần dư của phép chia.

Để tính tích phân $I = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$ ta biến đổi phân thức dưới dấu tích phân như sau:

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{\frac{M}{2}(2x+p)+N-\frac{Mp}{2}}{x^2+px+q}dx$$

$$= \frac{M}{2}\ \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{dx}{x^2+px+q}.$$

Sau khi khai triển ta được

$$I = \int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\int\frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)K$$

Tích phân $K = \int\frac{dx}{x^2+px+q}$ có thể tính được dễ dàng như sau:

Trường hợp 1: Tam thức ở mẫu số có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2:

$$K = \int\frac{dx}{x^2+px+q} = \int\frac{dx}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{x_1-x_2}\ln\left|\frac{x-x_1}{x-x_2}\right| + C.$$

Trường hợp 2: Tam thức ở mẫu số có một nghiệm kép x_0:

$$K = \int\frac{dx}{x^2+px+q} = \int\frac{dx}{(x-x_0)^2} = -\frac{1}{x-x_0} + C.$$

Trường hợp 3: Tam thức ở mẫu số không có nghiệm thực:

$$K = \int\frac{dx}{x^2+px+q} = \int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} = \int\frac{dt}{a^2+t^2} = \frac{1}{a}\text{arctg}\frac{t}{a} + C$$

$$(t = x + \frac{p}{2},\ a^2 = q - \frac{p^2}{4} = \frac{4q - p^2}{4} > 0).$$

Ví dụ:

$$\int \frac{2x^2 - 3x + 2}{x^2 + x + 1} dx = \int\left(2 - \frac{5x}{x^2 + x + 1}\right)dx = 2\int dx - 5\int \frac{xdx}{x^2 + x + 1}$$

$$= 2x - 5\int \frac{x}{x^2 + x + 1} dx = 2x - 5\int \frac{\frac{1}{2}(2x+1) - \frac{1}{2}}{x^2 + x + 1} dx$$

$$= 2x - \frac{5}{2}\int \frac{d(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

$$= 2x - \frac{5}{2}\ln(x^2 + x + 1) + \frac{5}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

II. TÍCH PHÂN CỦA MỘT SỐ BIỂU THỨC CHỨA CĂN

a. Trường hợp biểu thức hàm số chứa căn của nhị thức bậc nhất.

Trong trường hợp biểu thức hàm số có chứa căn thức $\sqrt[n]{kx + b}$ ta đặt $t = \sqrt[n]{kx + b}$, từ đó suy ra phép đổi biến làm mất căn:

$$x = \frac{1}{k}(t^n - b), \quad dx = \frac{n}{k}t^{n-1}dt.$$

Ví dụ: Tính tích phân: $I = \int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

Giải: Đặt $t = \sqrt[3]{x - 1}$, ta có:

$$x = t^3 + 1,\ dx = 3t^2dt;$$

$$I = \int \frac{3t^2 dt}{1+t^2} = 3\int\left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right).dt = 3(t - \text{arctg}\, t) + C$$

$$= 3(\sqrt[3]{x-1} - \text{arctg}\sqrt[3]{x-1}) + C$$

b. Trường hợp biểu thức hàm số dưới dấu tích phân chứa căn thức dạng $\sqrt{a^2 - x^2}$

Trong trường hợp này ta sử dụng phép đổi biến x = a.sint, với $-\pi/2 \le t \le \pi/2$. Bằng phép đổi biến này ta có:

$$dx = a.\cos t\, dt,\ \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - (a\sin t)^2} = a\cos t\ \ (a > 0).$$

Ví dụ: Tính tích phân: $I = \int x^2\sqrt{4 - x^2}dx$.

Giải: Thay x = 2sint, với $-\pi/2 \le t \le \pi/2$, ta được:

$$\int (2\sin t)^2\sqrt{4 - (2\sin t)^2}\, 2\cos t dt = \int 16\sin^2 t\cos^2 t\, dt$$

$$= 4\int \sin^2 2t\, dt = 2\int (1 - \cos 4t)dt = 2(t - \tfrac{1}{4}\sin 4t) + C$$

$$= 2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin\left(4\arcsin\frac{x}{2}\right) + C.$$

III. TÍCH PHÂN CỦA MỘT SỐ BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC

a. Gợi ý chung

Trong lượng giác đã có các công thức đổi các hàm số lượng giác của cung x qua $t = \text{tg}\dfrac{x}{2}$:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \operatorname{tg}x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Khi tính tích phân của các biểu thức lượng giác ta có thể đặt $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Khi đó

$$x = 2\operatorname{arctg}t \text{ và } dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Ví dụ: Tính tích phân: $I = \int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

Thay biến theo các công thức nêu trên và rút gọn ta được:

$$I = \int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| + C = \ln\left|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

b. Tích phân dạng $\int \sin^m x.\cos^n x\,dx$

Nếu một trong hai số m, n là số lẻ thì tích phân loại này có thể đưa được về tích phân của đa thức bằng cách đổi biến số:

- Đổi qua $t = \cos x$ nếu m là số lẻ,
- Đổi qua $t = \sin x$ nếu n là số lẻ.

Nếu cả m và n đều chẵn thì ta sử dụng các công thức hạ bậc:

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2x),\ \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2x),\ \sin x.\cos x = \tfrac{1}{2}\sin 2x.$$

Ví dụ 1: Tính tích phân: $I = \int \sin^4 x.\cos^3 x\,dx$.

Giải: Đặt $t = \sin x$, ta có:

$$\sin^4 x = t^4,\ \cos^3 x.dx = \cos^2 x.(\cos x\,dx) = (1-t^2)\,dt.$$

$$I = \int t^4(1-t^2)dt = \int t^4dt - \int t^6dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C.$$

Ví dụ 2: Tính tích phân: $I = \int \sin^2 x.\cos^4 x.dx$.

Giải: Sử dụng các công thức hạ bậc ta có:

$$I = \int \frac{1}{4}\sin^2 2x.\cos^2 x.dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x.(1+\cos 2x)dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x.dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x.\cos 2x.dx$$

$$= \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x.d(\sin 2x)$$

$$= \frac{1}{16}(x - \frac{1}{4}\sin 4x) + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

c. Các tích phân:

$$\int \sin ax.\cos bx.dx\ ,\quad \int \cos ax.\cos bx.dx\ ,\quad \int \sin ax.\sin bx.dx\ .$$

Dễ dàng tính được các tích phân này bằng cách biến đổi tích thành tổng:

- $\int \sin ax.\cos bx.dx$

$$= \frac{1}{2}\int [\sin(a+b)x + \sin(a-b)x]dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(a+b)x}{a+b} + \frac{\cos(a-b)x}{a-b}\right] + C;$$

- $\int \cos ax.\cos bx.dx$

$$= \frac{1}{2}\int [\cos(a+b)x + \cos(a-b)x]dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(a+b)x}{a+b} + \frac{\sin(a-b)x}{a-b}\right] + C;$$

- $\int \sin ax.\sin bx.dx$

$$= \frac{1}{2}\int [\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(a-b)x}{a-b} - \frac{\sin(a+b)x}{a+b}\right].$$

BÀI TẬP

10. Tính các tích phân sau:

a) $\int \frac{x^2}{2x+1}dx$ b) $\int \frac{2x^2-x+1}{2x-1}dx$

c) $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$ d) $\int \frac{2x+1}{x^2-x+1}dx$

e) $\int \frac{2x+1}{x^2-5x+6}dx$ f) $\int \frac{2x^2+x+1}{x^2-2x+5}dx$

g) $\int \frac{x^3+1}{x^2+4x+5}dx$ h) $\int \frac{2x^3}{x^4-x^2+1}dx$

11. Tính các tích phân sau:

a) $\int \sin 3x.\cos x.dx$ b) $\int \cos x.\cos 2x.\cos 3x.dx$

c) $\int \sin^3 x.\cos^5 x.dx$ d) $\int \cos^6 x.dx$

e) $\int \sin^3 x.\cos^4 x.dx$ f) $\int \sin^2 x.\cos^4 x.dx$

12. Tính các tích phân sau:

a) $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$ b) $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$

c) $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx$ d) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}dx$

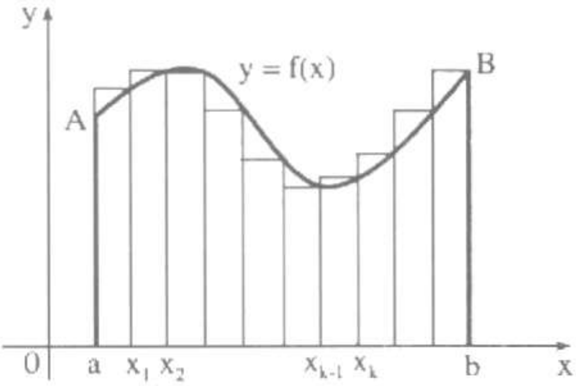
e) $\int \frac{\cos^3 x}{1+\sin x}dx$ e) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$

§4. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

I. KHÁI NIỆM TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

a. Bài toán diện tích hình thang cong.

Để minh hoạ cho khái niệm tích phân xác định, trước hết ta hãy xem xét một bài toán hình học: Tính diện tích của hình phẳng aABb giới hạn phía trên bởi đường cong liên tục $y = f(x)$, phía dưới là trục Ox và hai bên là hai đường thẳng $x = a$, $x = b$. Người ta gọi hình phẳng loại này là hình thang cong.



Việc tính diện tích trong trường hợp này được thực hiện theo phương pháp tương tự như phương pháp thiết lập công thức tính diện tích của hình tròn. Trước hết ta chia đáy phẳng phía dưới, tức là đoạn $[a; b]$ của trục Ox, thành n phần đều nhau. Các điểm chia được ký hiệu là:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b.$$

Tại mỗi điểm x_k của trục Ox ta kẻ các đường song song với trục Oy để chia hình thang cong aABb thành n hình thang cong nhỏ với đáy dưới đều nhau. Hình thang cong nhỏ thứ k có đáy dưới là đoạn $[x_{k-1}; x_k]$. Mỗi hình thang cong như thế có diện tích xấp xỉ bằng diện tích của hình chữ nhật với cùng đáy dưới và chiều cao bằng $f(x_k)$. Gọi S_k là diện tích của hình thang cong nhỏ thứ k, với đáy dưới là đoạn $[x_{k-1}; x_k]$, ta có:

$$S_k \approx f(x_k).\Delta x_k,$$

trong đó $\Delta x_k = \frac{1}{n}(b - a)$ là độ dài của đáy $[x_{k-1}; x_k]$ (độ dài của đoạn [a; b] bằng b – a, được chia thành n phần đều nhau). Diện tích S của hình thang cong aABb được tính xấp xỉ theo công thức:

$$S \approx T_n = f(x_1).\Delta x_1 + f(x_2).\Delta x_2 + \ldots + f(x_n).\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k .$$

Trong công thức tính xấp xỉ này, tổng T_n là diện tích của hình phẳng với đáy trên là một đường gấp khúc. Khi n lớn vô hạn, đường gấp khúc càng ngày càng áp sát vào đường cong y = f(x). Như vậy, diện tích S của hình thang cong là giới hạn của tổng T_n khi n tiến ra vô hạn:

$$S = \lim_{n\to+\infty} T_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k . \qquad (4.1)$$

Trong toán học, giới hạn (4.1) được gọi là *tích phân xác định* của hàm số f(x) trên đoạn [a; b].

b. Định nghĩa tích phân xác định.

Bài toán diện tích hình thang cong là một trong các bài toán cơ bản dẫn đến khái niệm tích phân xác định. Trong bài toán diện tích hình thang cong, f(x) là một hàm số liên tục và không âm trên đoạn [a; b]. Sau đây ta đề cập đến khái niệm tích phân xác định của một hàm số f(x) bất kỳ, xác định trên đoạn [a; b].

Với mỗi số tự nhiên n >1, ta chia đoạn [a; b] thành n đoạn nhỏ sao cho độ dài của mỗi đoạn nhỏ đó không vượt quá $\frac{2(b-a)}{n}$. Các điểm chia được ký hiệu như sau:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b.$$

Gọi Δx_k là độ dài của đoạn $[x_{k-1}; x_k]$:

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \leq \frac{2(b-a)}{n} \ (k = 1, 2, \dots, n).$$

Trên mỗi đoạn $[x_{k-1}; x_k]$ lấy một điểm ξ_k bất kỳ và lập tổng:

$$\sigma_n = f(\xi_1).\Delta x_1 + f(\xi_2).\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n).\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k .$$

Theo cách thức nêu trên ta được một dãy số σ_n. Chú ý rằng việc thành lập dãy số σ_n phụ thuộc và cách chia đoạn [a; b] và cách chọn các điểm trung gian ξ_k.

Định nghĩa: Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn:

$$I = \lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \qquad (4.2)$$

và giới hạn đó không phụ thuộc vào cách chia đoạn [a; b] và cách chọn các điểm ξ_k thì hàm số f(x) được gọi là *hàm khả tích* trên đoạn [a; b] và số I được gọi là *tích phân xác định* của hàm số f(x) trên đoạn [a; b].

Tích phân xác định được ký hiệu như sau:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

(đọc là: *tích phân từ a đến b của f(x)dx*)

Các đầu mút a và b của đoạn [a; b] được gọi tương ứng là *cận dưới* và *cận trên* của tích phân. Tổng σ_n được gọi là *tổng tích phân* của hàm số f(x).

Ví dụ:

Xét hàm số nhận giá trị không đổi: $f(x) = m$, $x \in [a; b]$. Với mọi cách chia đoạn [a; b] và cách chọn các điểm ξ_k ta có:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} m\Delta x_k = m\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = m(b-a).$$

Theo định nghĩa tích phân ta có:

$$\int_a^b m.dx = \lim_{n\to+\infty} \sigma_n = m(b-a).$$

Chú ý: Tích phân xác định của một hàm số f(x) khả tích trên đoạn [a; b] *là một số xác định* (trong khi tích phân bất định của f(x) *là hàm số của biến số x*). Do đó, tích phân xác định không phụ thuộc vào biến số dưới dấu tích phân (ta có thể dùng chữ bất kỳ thay cho chữ x):

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(t)dt = \cdots$$

c. Ý nghĩa hình học của tích phân xác định

Người ta chứng minh được rằng mọi hàm số liên tục trên đoạn [a; b] đều khả tích trên đoạn đó, do đó công thức diện tích (4.1) có thể viết dưới dạng:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Như vậy, nếu $y = f(x)$ là hàm liên tục và $f(x) \geq 0$ thì *tích phân* *xác định của hàm số f(x) trên đoạn [a; b] là số đo diện tích của hình thang cong aABb với cạnh cong phía trên là đồ thị của hàm số y = f(x) trên đoạn đó.*

d. Tích phân với các cận bất kỳ.

Trong định nghĩa tích phân nêu trên ta giả thiết a < b. Trường hợp a = b và trường hợp a > b khái niệm tích phân được hiểu theo quy ước sau đây:

1. $\int_a^a f(x)dx = 0,$

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad (a > b).$

Quy ước thứ hai có thể xem như một quy tắc: *Khi đổi chỗ các cận của tích phân thì tích phân đổi dấu.*

II. ĐIỀU KIỆN KHẢ TÍCH

Ta công nhận các định lý sau đây:

Định lý 1: Nếu hàm số f(x) khả tích trên đoạn [a; b] thì nó bị chặn trên đoạn đó.

Định lý 2: Một hàm số f(x) xác định trên đoạn [a; b] khả tích trên đoạn đó nếu nó thoả mãn một trong các điều kiện sau đây:

- f(x) liên tục trên [a; b];
- f(x) đơn điệu và bị chặn trên [a; b];
- f(x) bị chặn và chỉ có một số hữu hạn điểm gián đoạn trên [a; b].

Chú ý: Khi đã biết hàm số f(x) khả tích trên đoạn [a, b] thì giới hạn (4.2) không phụ thuộc vào cách chia đoạn [a, b] và cách chọn các điểm ξ_k. Do đó, khi tính tích phân của một hàm khả tích (theo định nghĩa) ta có thể chia đều đoạn [a; b] và chọn các điểm ξ_k như đã trình bày ở phần tính diện tích của hình thang cong. Theo cách chia đều ta có:

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n},\ \Delta x_k = \frac{b-a}{n}\ (k = 1, 2, \dots, n).$$

Ví dụ: Hàm số f(x) = x liên tục trên đoạn [0; 1], do đó nó khả tích trên đoạn đó. Để tính tích phân theo định nghĩa ta làm như sau:

Với mỗi số tự nhiên n ta chia đoạn [0; 1] thành n phần bằng nhau và trên mỗi đoạn $[x_{k-1}; x_k]$ ta chọn $\xi_k = x_k$. Khi đó, độ dài mỗi đoạn nhỏ bằng $\frac{1}{n}$. Ta có:

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{n},\ x_2 = \frac{2}{n},\ \dots,\ x_k = \frac{k}{n},\ \dots,\ x_n = \frac{n}{n} = 1;$$

$$f(\xi_k) = f(x_k) = x_k,\ \Delta x_k = \frac{1}{n};$$

$$\sigma_n = f(x_1).\Delta x_1 + f(x_2).\Delta x_2 + \dots + f(x_n).\Delta x_n = \frac{1}{n}\,[x_1 + x_2 + \dots + x_n]$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n}{n}\right) = \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2} = \frac{n+1}{2n}.$$

Theo định nghĩa:

$$\int_0^1 x\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

III. CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Tích phân xác định có các tính chất cơ bản sau đây (chúng tôi chỉ trình bày phần chứng minh tính chất cuối cùng):

1. Nếu hàm số f(x) khả tích trên đoạn [a; b][1] thì

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

2. Nếu f(x) khả tích trên đoạn chứa cả ba điểm a, b, c thì

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

3. Nếu các hàm số f(x) và g(x) khả tích trên đoạn [a; b] thì

$$\int_a^b \left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

4. Nếu hàm số f(x) khả tích trên đoạn [a; b] thì

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \quad \text{(k là hằng số bất kỳ).}$$

5. Giả sử a < b và $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a; b]$. Nếu cả hai hàm số f(x) và g(x) đều khả tích trên đoạn [a; b] thì

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx. \qquad (4.3)$$

Nói cách khác: *ta có thể lấy tích phân hai vế của một bất đẳng thức hàm số nếu cận dưới nhỏ hơn cận trên.*

Chú ý: Nếu f(x) và g(x) là các hàm số liên tục thì dấu đẳng thức trong bất đẳng thức (4.3) xảy ra khi và chỉ khi f(x) = g(x), $\forall x \in [a; b]$.

---

[1] Để khỏi rườm rà, khi phát biểu các tính chất của tích phân ta dùng ký hiệu [a; b] bất kể a < b hay a ≥ b.

6. Nếu a < b và hàm số f(x) khả tích trên đoạn [a; b] thì hàm số $|f(x)|$ cũng khả tích trên đoạn đó và

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

7. Nếu hàm số f(x) liên tục trên khoảng [a; b] (hoặc khoảng [b; a]) thì tồn tại ít nhất một điểm ξ trong khoảng giữa hai cận a và b sao cho:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi).(b-a). \tag{4.4}$$

Mệnh đề này được gọi là *định lý về giá trị trung bình*.

Chứng minh:

Trước hết ta chứng minh định lý về giá trị trung bình cho trường hợp a < b.

Theo tính chất của hàm số liên tục trên khoảng đóng, hàm số f(x) có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên [a; b]. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất, ta có:

$$m \le f(x) \le M, \quad \forall x \in [a; b].$$

Theo tính chất 5 nêu trên, ta có:

$$\int_a^b m.dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M.dx.$$

$$\Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

$$\Rightarrow m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M \text{ (do } b-a>0).$$

Điều này có nghĩa là số $\gamma = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ là một giá trị trung gian giữa hai giá trị m, M của hàm số f(x). Theo tính chất của hàm số liên tục thì hàm số f(x) nhận giá trị này tại một điểm ξ nào đó trên [a; b]:

$$\gamma = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(\xi).$$

Từ đây suy ra điều phải chứng minh.

Trường hợp a > b ta áp dụng kết quả vừa chứng minh cho tích phân trên đoạn [b; a], sau đó nhân hai vế với (−1) ta được đẳng thức (4.4).

Chú ý: Trên đây ta chứng minh rằng số

$$\gamma = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

là một giá trị của hàm số liên tục f(x). Giá trị này được gọi là *giá trị trung bình* của hàm số f(x) trên đoạn [a; b].

IV. LIÊN HỆ VỚI TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

a. Tích phân xác định với cận trên thay đổi.

Giả sử f(x) là một hàm số liên tục trên một khoảng X và a là một điểm cố định thuộc khoảng X. Khi đó tích phân

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

tồn tại với mọi $x \in X$. Như vậy $\Phi(x)$ là một hàm số của cận trên x. Hàm số này được gọi là *hàm cận trên*.

b. Định lý về đạo hàm của hàm cận trên.

Định lý: Nếu f(x) là hàm số liên tục trên khoảng X và $a \in X$ thì tại mọi điểm $x \in X$ ta có:

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt \right)'_x = f(x).$$

Chứng minh: Tại một điểm x bất kỳ của khoảng X ta có:

$$\Delta\Phi(x) = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$$

$$= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Theo định lý về giá trị trung bình, tồn tại điểm ξ trong khoảng giữa x và x + Δx sao cho $\Delta\Phi(x) = f(\xi)[(x + \Delta x) - x] = f(\xi)\Delta x$. Từ đây suy ra:

$$\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = f(\xi).$$

Chuyển qua giới hạn khi $\Delta x \to 0$ và chú ý rằng trong quá trình đó $\xi \to x$, ta có:

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x).$$

Nhận xét: Định lý về đạo hàm của hàm cận trên cho thấy tích phân xác định với cận trên thay đổi $\Phi(x)$ là một nguyên hàm của hàm số dưới dấu tích phân. Điều này chứng tỏ *mọi hàm số liên tục đều có nguyên hàm.*

c. Công thức Newton-Leibnitz

Định lý: Với F(x) là một nguyên hàm bất kỳ của hàm số liên tục f(x), ta có công thức:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b. \qquad (4.5)$$

Công thức (4.5) được gọi là *công thức Newton-Leibnitz.*

Chứng minh: Do hàm cận trên $\Phi(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên $\Phi(x)$ và $F(x)$ chỉ sai khác nhau một hằng số cộng:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) + C.$$

Thay $x = a$ ta xác định được hằng số C:

$$\Phi(a) = \int_a^a f(t)dt = F(a) + C = 0 \;\Rightarrow\; C = -F(a).$$

Vậy ta có

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Thay $x = b$ ta được:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Công thức Newton-Leibnitz cho phép ta tính tích phân xác định thông qua nguyên hàm của hàm số.

Ví dụ 1:

$$\int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}1^{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}0^{\alpha+1} = \frac{1}{\alpha+1} \;\; (\alpha \neq -1).$$

Ví dụ 2: Tính tích phân $I = \int_0^{\pi/4}\frac{xdx}{\cos^2 x}$.

Giải: Để tính tích phân này, trước hết ta tìm nguyên hàm của hàm số dưới dấu tích phân:

$$F(x) = \int\frac{xdx}{\cos^2 x}.$$

Áp dụng phương pháp tích phân từng phần với $u = x$, $dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$ ta dễ dàng tìm được (chỉ cần lấy một nguyên hàm ứng với C = 0):

$$F(x) = x\text{tg}x + \ln|\cos x|$$

Sử dụng công thức Newton-leibnitz ta có:

$$I = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = \frac{\pi}{4}\text{tg}\frac{\pi}{4} + \ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right| - 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$$

V. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN

Phương pháp đổi biến số có thể áp dụng trực tiếp đối với tích phân xác định như sau:

Giả sử ta phải tính tích phân:

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Thay $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$ với giả thiết hàm số $\varphi(t)$ thoả mãn các điều kiện:

- Hàm số $\varphi(t)$ xác định, liên tục và có đạo hàm liên tục trên khoảng $[\alpha, \beta]$ (hoặc khoảng $[\beta; \alpha]$);
- $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, tức là cận $x = a$ tương ứng với cận $t = \alpha$ và cận $x = b$ tương ứng với cận $t = \beta$;
- Khi t biến thiên trên khoảng $[\alpha, \beta]$ hàm số $x = \varphi(t)$ nhận giá trị không vượt ra ngoài khoảng $[a, b]$.

Khi đó:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \int_\alpha^\beta g(t)dt.$$

Ví dụ 1: Tính tích phân $I_1 = \int_1^3 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{(x-2)^2}}$.

Giải: Đặt $t = \sqrt[3]{x-2}$, ta có:

$$x = t^3 + 2 \text{ và } dx = 3t^2dt;$$

$$x = 1 \leftrightarrow t = -1 \ ; \ \ x = 3 \leftrightarrow t = 1.$$

Theo công thức đổi biến:

$$I_1 = \int_{-1}^{1} \frac{3t^2dt}{1+t^2} = 3\int_{-1}^{1}\left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = 3(t - \operatorname{arctg} t)\Big|_{-1}^{1} = 6 - \frac{3\pi}{2}.$$

Ví dụ 2: Tính tích phân $I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^8 x \, dx$.

Giải: Viết lại biểu thức dưới dấu tích phân dưới dạng:

$$\sin^3 x.\cos^8 x.dx = \sin^2 x \cos^8 x\,(\sin x dx)$$

$$= -(1 - \cos^2 x)\cos^8 x\, d(\cos x).$$

Đặt $t = \cos x$ ta được

$$I_2 = -\int_1^0 (1-t^2)t^8 dt = \int_0^1 (t^8 - t^{10})dt = \left(\tfrac{1}{9}t^9 - \tfrac{1}{11}t^{11}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{99}.$$

Ví dụ 3: Tính tích phân $I_3 = \int_0^2 x^4\sqrt{4-x^2}.dx$.

Giải: Thay $x = 2\sin t$ $(0 \le t \le \frac{\pi}{2})$, ta có:

$$dx = 2\cos t\, dt, \ \ \sqrt{4-x^2} = 2\cos t;$$

$$x = 0 \leftrightarrow t = 0, \ \ x = 2 \leftrightarrow t = \tfrac{\pi}{2};$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16\sin^4 t.(2\cos t).(2\cos t.dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16\sin^2 t.\sin^2 2t\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8(1-\cos 2t)\sin^2 2t.dt = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t.dt - 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t.\sin^2 2t\, dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t).dt - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\, d(\sin 2t)$$

$$= 4\left(1-\tfrac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \tfrac{4}{3}\sin^3 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi.$$

Ví dụ 4: Giả sử hàm số f(x) liên tục trên đoạn [–a; a]. Ta sẽ chứng minh rằng:

- $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^{a} f(x)dx$ nếu f là hàm chẵn;
- $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ nếu f là hàm lẻ.

Giải: Thật vậy, ta có:

$$I = \int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^{a} f(x)dx = I_1 + I_2,$$

với $I_1 = \int_{-a}^{0} f(x)dx,\ I_2 = \int_0^{a} f(x)dx$.

Đối với tích phân I_1, thay $x = -t$ ta được:

$$I_1 = \int_a^{0} f(-t)d(-t) = \int_0^{a} f(-t)dt.$$

Nếu f là hàm chẵn thì $f(-t) = f(t)$, do đó

$$I_1 = \int_0^a f(t)dt = I_2 \Rightarrow I = I_1 + I_2 = 2I_2 = 2\int_0^a f(x)dx.$$

Nếu f là hàm lẻ thì $f(-t) = -f(t)$, do đó

$$I_1 = -\int_0^a f(t)dt = -I_2 \Rightarrow I = I_1 + I_2 = 0.$$

VI. PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

Công thức tích phân từng phần đối với tích phân bất định được chuyển sang tích phân xác định dưới dạng:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu,$$

trong đó $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục.

Phương pháp áp dụng công thức này hoàn toàn tương tự như đối với tích phân bất định.

Ví dụ 1: Tính tích phân: $I_1 = \int_0^1 x.e^{3x}dx$.

Giải: Đặt $u = x$, $dv = e^{3x}dx$, ta có:

$$du = dx,\ v = \frac{1}{3}e^{3x};\ I_1 = \frac{1}{3}xe^{3x}\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 e^{3x}dx$$

$$= \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}e^{3x}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}(e^3 - 1) = \frac{2e^3 + 1}{9}.$$

Ví dụ 2: Tính tích phân $I_2 = \int_0^1 x^2.\text{arctgx.dx}$.

Giải: Đặt u = arctgx và dv = xdx, ta có: $du = \dfrac{dx}{1+x^2}$, $v = \frac{1}{3}x^3$;

$$I_2 = \tfrac{1}{3}x^3\text{arctgx}\Big|_0^1 - \tfrac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3dx}{1+x^2} = \tfrac{1}{3}x^3\text{arctgx}\Big|_0^1 - \tfrac{1}{3}\int_0^1 (x - \frac{x}{1+x^2})dx$$

$$= \tfrac{1}{3}x^2\text{arctgx}\Big|_0^1 - \tfrac{1}{3}[\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2)]\Big|_0^1 = \frac{\pi - 2(1-\ln 2)}{12}.$$

Ví dụ 3: Tính tích phân $I_3 = \int_0^1 \dfrac{x^2e^x dx}{(x+2)^2}$.

Giải: Đặt $u = x^2e^x$, $dv = \dfrac{dx}{(x+2)^2}$ ta có:

$$du = (2x.e^x + x^2e^x)dx = x(x+2)\,e^x dx,\ v = -\frac{1}{x+2};$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{x^2e^x dx}{(x+2)^2} = -\frac{x^2e^x}{x+2}\Big|_0^1 + \int_0^1 xe^x dx = -\frac{e}{3} + \int_0^1 xe^x dx.$$

Tích phân ở vế phải có dạng quen biết. Tiếp tục tính tích phân đó bằng phương pháp tích phân từng phần với u = x, $dv = e^x dx$ ta được kết quả:

$$I_3 = -\frac{e}{3} + 1.$$

VII. TÍCH PHÂN SUY RỘNG

a. Tích phân suy rộng với cận vô hạn

Giả sử f(x) là một hàm số liên tục trên khoảng $[a; +\infty)$. Khi đó với mọi $t \in [a; +\infty)$ tồn tại tích phân

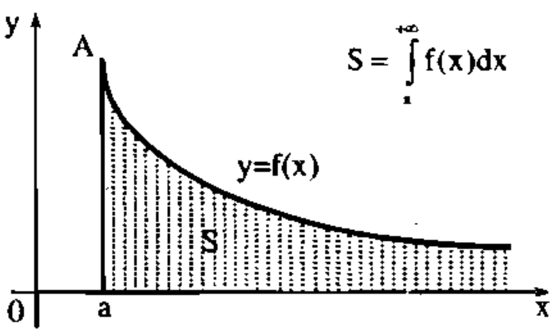
$$F(t) = \int_a^t f(x)dx.$$

Định nghĩa: Giới hạn của tích phân F(t) khi $t \to +\infty$ được gọi là tích phân suy rộng của hàm số f(x) trên khoảng [a; +∞) và ký hiệu như sau:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx. \qquad (4.6)$$

Nếu giới hạn ở vế phải tồn tại hữu hạn thì ta nói tích phân suy rộng (4.6) *hội tụ*. Ngược lại, nếu giới hạn ở vế phải là vô hạn hoặc không tồn tại thì ta nói tích phân đó *phân kỳ*.

Dưới giác độ hình học, trong trường hợp $f(x) \geq 0$, tích phân của hàm số f(x) trên khoảng [a; +∞) là diện tích của phần mặt phẳng bị chắn phía trên bởi đường cong y = f(x), phía dưới bởi trục Ox và bên trái bởi đường thẳng x = a.



Tích phân của hàm số f(x) trên các khoảng (−∞; a], (−∞; +∞) được định nghĩa tương tự:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)dx.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{u\to-\infty \\ v\to+\infty}} \int_u^v f(x)dx .$$

Tương tự như tích phân thông thường, ta có thể sử dụng công thức

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

nếu cả hai tích phân ở vế phải hội tụ (a là một số bất kỳ).

Ví dụ 1:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to+\infty} \text{arctgt} = \frac{\pi}{2} .$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to-\infty} (-\text{arctgt}) = \frac{\pi}{2} .$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi .$$

Ví dụ 2: Xét sự hội tụ của tích phân:

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} . \tag{4.7}$$

Giải: Với mọi $t > 1$ ta có:

$$F(t) = \int_1^t \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}(t^{1-\alpha} - 1) \text{ khi } \alpha \neq 1 \\ \ln t \text{ khi } \alpha = 1 \end{cases}$$

Với $\alpha > 1$: $I = \lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{1-\alpha}\left(t^{1-\alpha} - 1\right) = \dfrac{1}{\alpha - 1}$;

Với $\alpha < 1$: $I = \lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{1-\alpha}\left(t^{1-\alpha} - 1\right) = +\infty$;

Với $\alpha = 1$: $I = \lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \ln t = +\infty$.

Kết luận: Tích phân suy rộng (4.7) hội tụ khi $\alpha > 1$ và phân kỳ khi $\alpha \le 1$.

b. Tích phân suy rộng của hàm số không bị chặn

Các hàm số không bị chặn trên đoạn [a; b] không khả tích, tức là tích phân xác định trên đoạn đó không tồn tại theo nghĩa thông thường. Ta sẽ mở rộng khái niệm tích phân cho trường hợp này.

Giả sử hàm số f(x) liên tục tại mọi điểm $x \in [a; b)$, nhưng f(x) có giới hạn vô hạn khi $x \to b-$. Ta gọi điểm b là *điểm kỳ dị* của hàm số f(x). Với mọi $t \in [a; b)$, hàm số f(x) liên tục trên [a; t], do đó tồn tại tích phân

$$I(t) = \int_a^t f(x)dx.$$

Định nghĩa: Giới hạn của tích phân I(t) khi $t \to b-$ được gọi là tích phân suy rộng của hàm số f(x) trên đoạn [a; b] và ký hiệu như sau:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b-} \int_a^t f(x)dx. \qquad (4.8)$$

Nếu giới hạn ở vế phải tồn tại hữu hạn thì ta nói tích phân suy rộng (4.8) *hội tụ*. Ngược lại, nếu giới hạn ở vế phải là vô hạn hoặc không tồn tại thì ta nói tích phân đó *phân kỳ*.

Trường hợp hàm số f(x) liên tục tại mọi điểm $x\in(a; b]$ và có giới hạn vô hạn khi $x \to a+$ (a là điểm kỳ dị), tích phân suy rộng trên đoạn [a; b] được định nghĩa tương tự:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a+}\int_t^b f(x)dx\,.$$

Trường hợp hàm số f(x) liên tục trong khoảng (a; b) và có giới hạn vô hạn trong cả hai quá trình $x \to a+$ và $x \to b-$ (cả a và b đều là điểm kỳ dị), tích phân suy rộng được định nghĩa như sau:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{u\to a+\\ v\to b-}}\int_u^v f(x)dx\,.$$

Tương tự như tích phân thông thường, ta có thể sử dụng công thức:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

nếu cả hai tích phân ở vế phải hội tụ ($a < c < b$).

Ví dụ 1:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to 1-}\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to 1-}\arcsin t = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2};$$

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to -1+}\int_t^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to -1+}(-\arcsin t) = -\arcsin(-1) = \frac{\pi}{2};$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi\,.$$

Ví dụ 2: Xét sự hội tụ của tích phân:

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}. \qquad (4.9)$$

Giải: Với mọi $t \in (0; 1)$ ta có:

$$I(t) = \int_t^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(1 - t^{1-\alpha}) \text{ khi } \alpha \neq 1 \\ -\ln t \text{ khi } \alpha = 1 \end{cases}$$

Với $\alpha < 1$: $K = \lim\limits_{t \to 0+} I(t) = \lim\limits_{t \to 0+} \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - t^{1-\alpha}\right) = \frac{1}{1-\alpha}$;

Với $\alpha > 1$: $K = \lim\limits_{t \to 0+} I(t) = \lim\limits_{t \to 0+} \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - t^{1-\alpha}\right) = +\infty$;

Với $\alpha = 1$: $K = \lim\limits_{t \to 0+} I(t) = \lim\limits_{t \to 0+}[-\ln t] = +\infty$.

Kết luận: Tích phân suy rộng (4.9) hội tụ khi $\alpha < 1$ và phân kỳ khi $\alpha \geq 1$.

BÀI TẬP

13. Tính đạo hàm của các hàm số biến số x:

a) $y = \int_0^x \sqrt[4]{1 + t^2}dt$ b) $y = \int_0^{x^2} \sqrt[4]{1 + t^2}dt$

c) $y = \int_{3x}^0 \sqrt[4]{1 + t^2}dt$ d) $y = \int_{\sin x}^{x^4} \sqrt[4]{1 + t^2}dt$

14. Sử dụng quy tắc Lôpitan, hãy tính các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\int_0^x \ln(1 + t^2).dt}{x^3}$ b) $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t}.dt}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t}.dt}$

15. Xác định các khoảng tăng, giảm và các điểm cực trị của hàm số:

a) $f(x) = \int_0^x \frac{(t-2)^2(t-3)^3}{\sqrt{1+t^2}}dt$ b) $f(x) = \left(\int_0^{2x-3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}\right)^2$

16. Sử dụng công thức Newton-Leibnitz, hãy tính các tích phân:

a) $\int_0^1 \frac{1}{1+2x}dx$ b) $\int_0^{\pi/4} \cos 2x.dx$

c) $\int_0^{\pi/2} \sin 2x.\cos^3 x.dx$ d) $\int_0^1 x^2(2+3x^3)^{10}.dx$

17. Tính các tích phân:

a) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$ b) $\int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}dx$

c) $\int_0^4 x^3.\sqrt{x^2+9}.dx$ d) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}.dx$

e) $\int_0^{13} \frac{1}{1+\sqrt[3]{2x+1}}dx$ f) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\cos x+3}$

g) $\int_0^a x.\sqrt{a^2-x^2}.dx$ h) $\int_0^a x^2.\sqrt{a^2-x^2}.dx$

18. Tính các tích phân:

a) $\int_0^{\pi} x\sin\frac{x}{2}.dx$ b) $\int_0^1 x^2e^{-x}dx$

c) $\int_0^1 x\ln(x+1).dx$ d) $\int_1^e (x\ln x)^2.dx$

e) $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$ f) $\int_0^{\sqrt{3}} x\mathrm{arctg}x.dx$

g) $\int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$ h) $\int_0^2 \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}dx$

19. Tính tích phân:

a) $\int_0^2 x|x-1|dx$ b) $\int_{1/e}^{e} |\ln x|dx$

c) $\int_0^2 f(x)dx$, nếu $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ khi } 0 \le x \le 1 \\ 2 - x \text{ khi } 1 \le x \le 2 \end{cases}$

20. Cho f(x) là hàm số liên tục trên đoạn [−a; a]. Hãy chứng minh:

a) Nếu f(x) là hàm số chẵn thì

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx;$$

b) Nếu f(x) là hàm số lẻ thì

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

21. Cho f(x) là hàm số liên tục trên R và là hàm tuần hoàn với chu kỳ T thì với mọi a ta luôn có:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

22. Chứng minh rằng nếu f(x) là hàm số lẻ liên tục trên R và tuần hoàn với chu kỳ T thì hàm số

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

cũng là hàm tuần hoàn với chu kỳ T.

23. Chứng minh rằng nếu f(x) là hàm liên tục trên [a; b] thì

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\int_0^1 f\left[a+(b-a)x\right]dx\ .$$

24. Giả sử f(x) là hàm số liên tục trên đoạn [0; 1]. Hãy chứng minh:

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi} x f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = 2\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx$

25. Tính các tích phân:

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ b) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}$

c) $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$ (a > 1) d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^{2x}dx$

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(4+x^2)}$ f) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{xdx}{x^4+2x^2+1}$

26. Tính các tích phân:

a) $\displaystyle\int_0^1 x\ln x.dx$ b) $\displaystyle\int_1^2\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$

c) $\displaystyle\int_1^e\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ d) $\displaystyle\int_3^7\frac{x^2dx}{\sqrt{x-3}}$

§5 ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TRONG KINH TẾ HỌC

I. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

a. Xác định quỹ vốn dựa theo lượng đầu tư.

Giả sử việc đầu tư được tiến hành liên tục theo thời gian. Ta xem lượng đầu tư I và quỹ vốn K là các biến số phụ thuộc hàm số vào thời gian t:

$$I = I(t),\ \ K = K(t).$$

Lượng đầu tư I(t) tại thời điểm t chính là lượng bổ sung quỹ vốn tại thời điểm đó. Nói cách khác, I(t) là tốc độ tăng của K(t), do đó

$$I(t) = K'(t).$$

Nếu biết hàm đầu tư I(t) thì ta có thể xác định được quỹ vốn K(t):

$$K(t) = \int I(t)dt\,.$$

Hằng số C trong tích phân bất định được xác định nếu ta biết quỹ vốn ban đầu $K_0 = K(0)$.

Ví dụ: Giả sử lượng đầu tư tại thời điểm t được xác định dưới dạng hàm số:

$$I(t) = 140t^{0,75}$$

và quỹ vốn tại thời điểm xuất phát là K(0) = 150. Quỹ vốn tại thời điểm t là:

$$K(t) = \int 140t^{3/4}dt = 140.\tfrac{4}{7}t^{7/4} + C\,.$$

Tại thời điểm xuất phát K(0) = C = 150, do đó

$$K(t) = 80\sqrt[4]{t^7} + 150.$$

b. Xác định hàm tổng khi biết hàm giá trị cận biên

Giả sử biến số kinh tế y mang ý nghĩa tổng giá trị (tổng chi phí, tổng doanh thu, tổng số tiêu dùng v.v...), được xác định theo giá trị của biến số x:

$$y = f(x).$$

Như ta đã biết, đạo hàm $y' = f'x)$ là giá trị y cận biên của x (tại mỗi điểm x). Nếu biết được hàm giá trị cận biên $y' = f'(x) = g(x)$ thì ta có thể xác định được hàm tổng $y = f(x)$ thông qua phép toán tích phân:

$$y = f(x) = \int g(x)dx.$$

Chú ý rằng tích phân bất định là một tập hợp vô hạn các nguyên hàm, do đó cần phải lưu ý đến thông tin bổ sung thì mới xác định được hàm tổng.

Ví dụ 1: Giả sử chi phí cận biên (Marginal Cost) ở mỗi mức sản lượng Q là $MC = 25 - 30Q + 9Q^2$ và chi phí cố định (Fixed Cost) FC = 55. Hãy xác định hàm tổng chi phí và chi phí khả biến.

Giải: Hàm tổng chi phí là nguyên hàm của hàm chi phí cận biên:

$$TC = \int(25 - 30Q + 9Q^2)dQ = 25Q - 15Q^2 + 3Q^3 + C_0.$$

Chi phí cố định là phần chi phí không phụ thuộc sản lượng Q, do đó

$$FC = 55 = C(0) = C_0.$$

$$\Rightarrow TC = 55 + 25Q - 15Q^2 + 3Q^3.$$

Chi phí khả biến (Variable Cost) là phần chi phí phụ thuộc vào sản lượng Q. Đó là hiệu số của tổng chi phí và chi phí cố định. Trong trường hợp này:

$$VC = TC - FC = 25Q - 15Q^2 + 3Q^3.$$

Ví dụ 2: Giả sử doanh thu cận biên (Marginal Revenue) ở mỗi mức sản lượng Q được xác định dưới dạng hàm số:

$$MR = 60 - 2Q - 2Q^2.$$

Hãy xác định hàm tổng doanh thu và hàm cầu đối với sản phẩm.

Giải: Hàm tổng doanh thu TR là nguyên hàm của hàm doanh thu cận biên:

$$TR = \int (60 - 2Q - 2Q^2)dQ = 60Q - Q^2 - \tfrac{2}{3}Q^3 + R_0.$$

Hiển nhiên là doanh thu bán hàng khi $Q = 0$ là $R_0 = 0$. Vậy

$$TR = 60Q - Q^2 - \tfrac{2}{3}Q^3.$$

Gọi $p = p(Q)$ là hàm cầu đảo, tức là hàm ngược của hàm cầu $Q = D(p)$, ta có:

$$R = p(Q)Q.$$

Từ đây suy ra:

$$p(Q) = \frac{R}{Q} = 60 - Q - \tfrac{2}{3}Q^2.$$

Ví dụ 3: Hàm tiêu dùng $C = C(Y)$ biểu diễn lượng tiêu dùng C tuỳ theo mức thu nhập Y. Xu hướng tiêu dùng cận biên MPC (Marginal Propensity to consume) ở mỗi mức thu nhập Y là đạo hàm của hàm tiêu dùng:

$$MPC = C'(Y).$$

Giả sử ở mỗi mức thu nhập Y ta xác định được

$$MPC = 0,6 + \frac{0,1}{\sqrt[3]{Y}}$$

và mức tiêu dùng thiết yếu là 50. Hàm tiêu dùng được xác định như sau:

$$C = \int(0,6 + \frac{0,1}{\sqrt[3]{Y}})dY = 0,6Y + 0,15\sqrt[3]{Y^2} + C_0.$$

Mức tiêu dùng thiết yếu là mức tiêu dùng kể cả khi không có thu nhập:

$$C_0 = 50 \text{ khi } Y = 0.$$

Hàm tiêu dùng trong trường hợp này là:

$$C = 0,6Y + 0,15.\sqrt[3]{Y^2} + 50.$$

II. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

a. Tính xác suất

Xét một biến số x nhận các giá trị bằng số khác nhau một cách ngẫu nhiên, gọi là *biến ngẫu nhiên*. Xác suất để biến ngẫu nhiên x nhận một giá trị x_0 nào đó được tính thông qua một hàm số gọi là *hàm mật độ xác suất*, hay *hàm tần suất*. Hàm mật độ xác suất của một biến ngẫu nhiên liên tục x là một hàm số liên tục f(x) thoả mãn các điều kiện sau:

1. $f(x) \geq 0$ (xác suất là số không âm);
2. Nếu miền biến thiên của biến x là khoảng [A; B] thì

$$\int_A^B f(x)dx = 1$$

(x nhận giá trị trên miền biến thiên của nó là một biến cố chắc chắn).

3. Xác suất để x nhận giá trị trong khoảng [a; b] được tính theo công thức:

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)dx \quad (A \le a \le b \le B).$$

Ví dụ: Gọi t là thời gian xếp hàng để mua hàng trong một cửa hàng lớn (đo bằng phút). Qua số liệu thực nghiệm người ta ước lượng được hàm tần suất

$$f(t) = \frac{4}{81}t^3 \quad (0 \le t \le 3).$$

Xác suất để một khách hàng phải xếp hàng từ 1 đến 2 phút là

$$p = \int_1^2 \frac{4}{81}t^3 dt = \frac{1}{81}t^4 \Big|_1^2 = \frac{15}{81} \approx 0,1852.$$

b. Tính thặng dư của người tiêu dùng và thặng dư của nhà sản xuất.

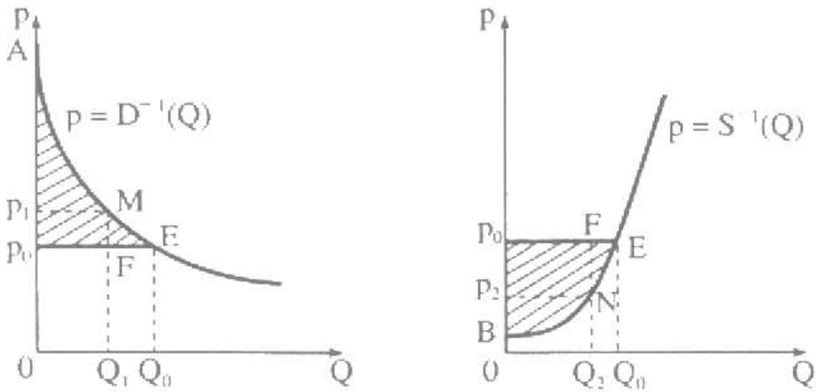
Khái niệm hàm cung, hàm cầu và điểm cân bằng thị trường đã được trình bày ở §1, chương 1. Thông qua mô hình thị trường người ta có thể đánh giá được lợi ích của thị trường đối với cả người mua và người bán.

Trong mô hình thị trường, hàm cầu $Q_d = D(p)$ cho biết lượng hàng hoá Q_d mà người mua bằng lòng mua ở mỗi mức giá p (ở đây Q_d là lượng cầu của toàn bộ thị trường). Khi biểu diễn bằng đồ thị mối liên hệ giữa giá và lượng cầu, các nhà kinh tế thường sử dụng trục tung để biểu diễn giá p và trục hoành biểu diễn lượng Q. Với cách biểu diễn như vậy thì *đường cầu* là đồ thị của hàm cầu đảo $p = D^{-1}(Q_d)$ (hàm ngược của hàm cầu $Q_d = D(p)$).

Giả sử điểm cân bằng của thị trường là (p_0, Q_0) và hàng hoá được bán với giá p_0 trên thị trường. Khi đó những người mua lẽ ra bằng lòng trả giá $p_1 > p_0$ được hưởng một khoản lợi bằng $p_1 - p_0$

đối với mỗi đơn vị hàng hoá mua theo giá thị trường (đoạn FM trên hình vẽ). Tổng số hưởng lợi của tất cả những người tiêu dùng bằng diện tích của tam giác cong AEp_0. Các nhà kinh tế gọi đó là *thặng dư của người tiêu dùng* (Consumers' Surplus). Thặng dư của người tiêu dùng được tính theo công thức:

$$CS = \int_0^{Q_0} D^{-1}(Q)dQ - p_0Q_0.$$



Thặng dư của người tiêu dùng   Thặng dư của nhà sản xuất

Hàm cung $Q_s = S(p)$ của thị trường cho biết lượng hàng hoá Q_s mà các nhà sản xuất bằng lòng bán ở mỗi mức giá p. *Đường cung* là đồ thị của hàm cung đảo $p = S^{-1}(Q_s)$. Nếu hàng hoá được bán trên thị trường ở mức giá cân bằng p_0 thì những nhà sản xuất lẽ ra bằng lòng bán ở mức giá $p_2 < p_0$ được hưởng một khoản lợi bằng $p_0 - p_2$ đối với mỗi đơn vị hàng hoá bán theo giá thị trường (đoạn FN trên hình vẽ). Tổng số hưởng lợi của tất cả các nhà sản xuất bằng diện tích của tam giác cong BEp_0. Các nhà kinh tế gọi đó là *thặng dư của nhà sản xuất* (Producers' Surplus). Thặng dư của nhà sản xuất được tính theo công thức:

$$PS = p_0Q_0 - \int_0^{Q_0} S^{-1}(Q)dQ.$$

BÀI TẬP

27. Cho biết hàm đầu tư $I = 40\sqrt[5]{t^3}$ và quỹ vốn tại thời điểm $t = 0$ là 90. Hãy xác định hàm quỹ vốn K(t).

28. Cho biết hàm đầu tư $I = 60\sqrt[3]{t}$ và quỹ vốn tại thời điểm $t = 1$ là 85. Hãy xác định hàm quỹ vốn K(t).

29. Cho biết chi phí cận biên ở mỗi mức sản lượng Q:

$$MC = 32 - 18Q + 12Q^2$$

và chi phí cố định: FC = 43. Hãy tìm hàm tổng chi phí và hàm chi phí khả biến.

30. Cho biết chi phí cận biên ở mỗi mức sản lượng Q:

$$MC = 12e^{0,5Q}$$

và chi phí cố định FC = 36. Hãy tìm hàm tổng chi phí.

31. Cho biết hàm doanh thu cận biên $MR = 84 - 4Q - Q^2$. Hãy tìm hàm tổng doanh thu TR(Q) và xác định cầu đối với sản phẩm của nhà sản xuất.

32. Cho biết xu hướng tiêu dùng cận biên MPC = 0,8 ở mọi mức thu nhập Y và mức tiêu dùng thiết yếu (mức tiêu dùng khi Y = 0) là 40. Hãy xác định hàm tiêu dùng C(Y).

33. Cho biết hàm cầu ngược $p = 42 - 5Q - Q^2$. Giả sử sản phẩm được bán trên thị trường với giá $p_0 = 6$. Hãy tính thặng dư của người tiêu dùng.

34. Cho biết hàm cung và hàm cầu đối với một loại sản phẩm:

$$Q_d = \sqrt{113 - p}\ ;\ Q_s = \sqrt{p} - 1.$$

Hãy tính thặng dư của nhà sản xuất và thặng dư của người tiêu dùng.

Chương 6

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

§1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

I. CÁC KHÁI NIỆM CHUNG

a. Khái niệm phương trình vi phân

Khi nghiên cứu sự phụ thuộc lẫn nhau giữa các biến số, nhiều khi người ta không thể thiết lập một cách trực tiếp quy luật phụ thuộc hàm số, trong khi đó lại dễ dàng thiết lập mối liên hệ hỗn hợp giữa các biến số có quan hệ hàm số, cùng với đạo hàm hoặc vi phân của hàm số biểu diễn sự phụ thuộc của một biến vào các biến còn lại. Trong nhiều trường hợp hệ thức liên hệ được viết dưới dạng phương trình có chứa hàm số phải tìm dưới dấu đạo hàm hoặc vi phân.

Định nghĩa: Một phương trình mà đối tượng phải tìm là hàm số và hàm số phải tìm có mặt trong phương trình đó dưới dấu đạo hàm hoặc vi phân các cấp được gọi là *phương trình vi phân.*

b. Hai loại phương trình vi phân

Định nghĩa 1: Phương trình vi phân với hàm số phải tìm là hàm số một biến số được gọi là *phương trình vi phân thường.*

Ví dụ: Các phương trình sau là các phương trình vi phân thường:

$$y' = y^2 + x^2, \tag{1.1}$$

$$xdy - y^2dx = 0, \tag{1.2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a^2y. \tag{1.3}$$

Định nghĩa 2: Phương trình vi phân với hàm số phải tìm là hàm số nhiều biến số được gọi là *phương trình vi phân đạo hàm riêng.*

Ví dụ: Các phương trình sau là các phương trình vi phân đạo hàm riêng:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{1.5}$$

c. Cấp của phương trình vi phân

Cấp của một phương trình vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm hoặc vi phân của hàm phải tìm có mặt trong phương trình đó.

Trong các phương trình nêu trên, các phương trình (1.1) và (1.2) là các phương trình vi phân thường cấp 1; phương trình (1.3) là phương trình vi phân thường cấp 2; phương trình (1.4) là phương trình vi phân đạo hàm riêng cấp 1; phương trình (1.5) là phương trình vi phân đạo hàm riêng cấp 2.

Trong khuôn khổ của cuốn sách này, chúng tôi chỉ đề cập đến các phương trình vi phân thường.

Phương trình vi phân thường cấp n có dạng tổng quát như sau:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1.6}$$

trong đó F là một hàm số của n + 2 biến số $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$.

d. Nghiệm của phương trình vi phân thường

Định nghĩa: *Nghiệm* của phương trình vi phân (1.6) là một hàm số $\varphi(x)$, xác định trong một khoảng (a; b) nào đó, mà khi thay $y = \varphi(x)$, $y' = \varphi'(x), \ldots, y^{(n)} = \varphi^{(n)}(x)$ vào phương trình đó ta được một đồng nhất thức:

$$F[x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n)}(x)] \equiv 0.$$

Giải một phương trình vi phân có nghĩa là tìm tất cả các nghiệm của phương trình đó.

II. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN THƯỜNG CẤP 1

a. Các dạng biểu diễn

Phương trình vi phân thường cấp một thường được cho dưới một trong các dạng sau đây:

- Dạng tổng quát:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0; \tag{1.7}$$

- Dạng đã giải theo đạo hàm:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y); \tag{1.8}$$

- Dạng đối xứng:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \tag{1.9}$$

Ở dạng (1.7) và (1.8), thay cho ký hiệu $\frac{dy}{dx}$ ta có thể dùng ký hiệu y'. Việc giải phương trình vi phân thường cấp 1 thường được thực hiện dưới dạng (1.8) hoặc (1.9). Dễ dàng biến đổi phương trình vi phân từ dạng (1.8) về dạng (1.9) và ngược lại:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \;\Rightarrow\; f(x, y)dx - dy = 0;$$

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}.$$

b. Nghiệm và tích phân của phương trình cấp 1

Theo định nghĩa nêu trên, nghiệm của một phương trình vi phân thường cấp 1 là một hàm số $\varphi(x)$, xác định trong một khoảng (a; b), mà khi thay $y = \varphi(x)$ và $y' = \varphi'(x)$ [hoặc $dy = \varphi'(x)dx$] vào phương trình đó ta được một đồng nhất thức. Chẳng hạn, hàm số $\varphi(x)$ là nghiệm của phương trình (1.8) khi và chỉ khi

$$\varphi'(x) \equiv f[x, \varphi(x)].$$

Nhiều khi nghiệm $y = y(x)$ của phương trình vi phân được viết dưới dạng hàm ẩn:

$$\Phi(x, y) = 0. \qquad (1.10)$$

Trong trường hợp này phương trình hữu hạn (1.10) được gọi là *tích phân* của phương trình vi phân.

Ví dụ 1: Phương trình

$$y' = f(x) \qquad (1.11)$$

là một ví dụ đơn giản về phương trình vi phân cấp một. Nghiệm của phương trình (1.11) là:

$$y = \int f(x)dx. \qquad (1.12)$$

Trong lý thuyết phương trình vi phân ta coi (1.12) là nghiệm của phương trình (1.11) ngay cả khi tích phân không thể tìm được dưới dạng hữu hạn.

Ví dụ 2: Hàm số $y = Ce^x$ (với C là hằng số bất kỳ), là nghiệm của phương trình $y' = y$, bởi vì:

$$(Ce^x)' \equiv Ce^x.$$

Ví dụ 3: Hàm số $y = \dfrac{1}{x}$ là một nghiệm của phương trình

$$xdy + ydx = 0,$$

bởi vì:

$$x.d\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}dx = x.\left(-\frac{dx}{x^2}\right) + \frac{1}{x}dx \equiv 0.$$

Ví dụ 4: Phương trình hữu hạn

$$y + \frac{1}{2}\ln(1 + y^2) = x + \frac{1}{3}x^3 \qquad (1.13)$$

là tích phân của phương trình vi phân

$$y' = \frac{(1 + x^2)(1 + y^2)}{1 + y + y^2}. \qquad (1.14)$$

Thật vậy, gọi $y = \varphi(x)$ là hàm ẩn được xác định từ phương trình hữu hạn (1.13), ta có:

$$\varphi(x) + \frac{1}{2}\ln[1 + \varphi^2(x)] \equiv x + \frac{1}{3}x^3.$$

Lấy đạo hàm hai vế đồng nhất thức này ta được

$$\varphi'(x) + \frac{\varphi(x)\varphi'(x)}{1 + \varphi^2(x)} \equiv 1 + x^2.$$

Từ đây ta có

$$\varphi'(x) \equiv \frac{[1 + x^2][1 + \varphi^2(x)]}{1 + \varphi(x) + \varphi^2(x)},$$

tức là khi thay $y = \varphi(x)$ vào phương trình (1.14) ta được một đồng nhất thức.

c. Nghiệm tổng quát và nghiệm riêng

Giải một phương trình vi phân có nghĩa là tìm tất cả các nghiệm của phương trình đó. Việc tìm nghiệm của phương trình vi phân dẫn đến việc lấy tích phân bất định, do đó trong biểu thức nghiệm của phương trình vi phân cấp 1 có mặt hằng số C bất kỳ:

$$y = \varphi(x, C).$$

Họ hàm số $y = \varphi(x, C)$ được gọi là *nghiệm tổng quát* của một phương trình vi phân thường cấp 1 nếu khi gán cho C một số bất kỳ thuộc một tập số thực nào đó ta được một nghiệm của phương trình đó. Mỗi nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát khi gán cho C một giá trị bằng số nhất định được gọi là một *nghiệm riêng* của phương trình.

Nghiệm tổng quát của một phương trình vi phân viết dưới dạng hàm ẩn

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

được gọi là *tích phân tổng quát* của phương trình đó. Mỗi tích phân ứng với một giá trị xác định của C được gọi là *tích phân riêng của* phương trình.

Ví dụ 1: Phương trình $y' = x^2$ có nghiệm tổng quát là:

$$y = \frac{1}{3}x^3 + C.$$

Nghiệm $y = \frac{1}{3}x^3$ ứng với $C = 0$ là một nghiệm riêng.

Ví dụ 2: Xét phương trình $ydy + xdx = 0$.

Viết lại phương trình dưới dạng

$$2xdx + 2ydy = 0.$$

Lấy tích phân hai vế ta được tích phân tổng quát:

$$x^2 + y^2 = C.$$

Với $C = 1$ ta có tích phân riêng:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

d. Bài toán Cauchy

Xét phương trình vi phân cấp một dưới dạng

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{1.15}$$

Bài toán tìm nghiệm riêng của phương trình (1.15) thoả mãn điều kiện

$$y = y_0 \text{ khi } x = x_0 \tag{1.16}$$

được gọi là *bài toán Cauchy*. Điều kiện (1.15) được gọi là *điều kiện ban đầu*. Điều kiện ban đầu là một bộ hai số thực (x_0, y_0) cho trước, trong đó y_0 là giá trị của hàm phải tìm tại điểm x_0.

Trong lý thuyết phương trình vi phân người ta đã chứng minh định lý sau đây (gọi là *định lý tồn tại và duy nhất*):

Định lý: Giả sử hàm số f(x, y) ở vế phải của phương trình (1.15) xác định, liên tục trong một lân cận V của điểm $M_0(x_0, y_0)$ và tồn tại hằng số K > 0 sao cho:

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \le K|y_2 - y_1|, \forall (x, y_1), (x, y_2) \in V.$$

Khi đó, trong một khoảng $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ với δ đủ nhỏ, tồn tại một và chỉ một nghiệm của phương trình (1.15) thoả mãn điều điều kiện (1.16).

§2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH CẤP 1

I. PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT

Phương trình vi phân tuyến tính[1] cấp 1 là phương trình dạng:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \tag{2.1}$$

[1] Từ 'tuyến tính' ở đây có nghĩa là bậc nhất đối với hàm phải tìm và đạo hàm của nó.

trong đó p(x) và q(x) là các hàm số cho trước. Chúng ta sẽ xét phương trình (2.1) với giả thiết rằng p(x) và q(x) là các hàm số liên tục trong một khoảng (a; b). Trường hợp đặc biệt, khi $q(x) \equiv 0$, phương trình (2.1) có dạng

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0. \tag{2.2}$$

Phương trình (2.2) được gọi là *phương trình tuyến tính thuần nhất*. Việc giải phương trình tuyến tính thuần nhất (2.2) được thực hiện như sau:

Nhân hai vế của phương trình (2.2) với $\dfrac{dx}{y}$ và chuyển p(x)dx sang vế phải ta được phương trình:

$$\frac{dy}{y} = -\,p(x)dx. \tag{2.3}$$

Chú ý rằng y = 0 là một nghiệm của phương trình (2.2), nhưng khi biến đổi về dạng (2.3) ta đã để mất nghiệm đó. Với giả thiết p(x) là hàm liên tục trong khoảng (a; b), lấy tích phân hai vế của phương trình (2.3) ta được:

$$\ln|y| = -\int p(x)dx. \tag{2.4}$$

Ta có thể viết hệ thức (2.4) dưới dạng

$$\ln|y| = -\int_{x_0}^{x} p(t)dt + C_1, \tag{2.5}$$

trong đó $x_0 \in (a; b)$ là một số tuỳ chọn và C_1 là hằng số bất kỳ. Viết C_1 dưới dạng $C_1 = \ln|C|$ $(C \neq 0)$, từ (2.5) suy ra

$$y = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}. \tag{2.6}$$

Hàm số (2.6), với C là hằng số bất kỳ, là nghiệm tổng quát của phương trình (2.2) (Nghiệm y = 0 để mất trong quá trình biến đổi là một nghiệm riêng ứng với C = 0) [2]. Công thức (2.6) có thể sử dụng dưới dạng

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}, \tag{2.6'}$$

nhưng ta chỉ cần lấy một nguyên hàm nào đó của p(x) thay vào chỗ $\int p(x)dx$.

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0. \tag{2.7}$$

Giải: Trong trường hợp này $p(x) = -\frac{1}{x}$. Áp dụng công thức (2.6') ta tìm được:

$$y = Ce^{\int \frac{dx}{x}} = Ce^{\ln|x|} = C|x| = \pm Cx.$$

Chú ý rằng với C là hằng số bất kỳ thì $\pm C$ cũng là hằng số bất kỳ, do đó nghiệm tổng quát của phương trình (2.7) trong cả hai khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$ có thể viết dưới dạng:

$$y = Cx.$$

Ví dụ 2: Giải phương trình $y' + xy = 0$.

Giải: Sử dụng công thức (2.6') với p(x) = x ta dễ dàng tìm được nghiệm tổng quát của phương trình này là:

$$y = Ce^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Nếu cho trước điều kiện ban đầu $y(x_0) = y_0$ thì từ (2.6) ta xác

---

[2] Phương trình (2.3) không có nghiệm này.

định được $C = y_0$. Từ đây suy ra:

Định lý: Nếu hàm số $p(x)$ liên tục trong khoảng $(a; b)$ thì, với $x_0 \in (a; b)$ và y_0 là một số bất kỳ, tồn tại một và chỉ một nghiệm của phương trình (2.2) thoả mãn điều kiện $y(x_0) = y_0$. Nghiệm đó được xác định theo công thức:

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} \quad (a < x < b). \tag{2.8}$$

Ví dụ: Tìm nghiệm riêng của phương trình

$$\frac{dy}{dx} + y\cos x = 0$$

thoả mãn điều kiện $y = 2$ khi $x = 0$.

Giải: Áp dụng công thức (2.8) ta tìm được nghiệm thoả mãn điều kiện đã cho:

$$y = 2e^{-\int_0^x \cos t dt} = 2e^{-\sin x}.$$

II. PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH KHÔNG THUẦN NHẤT

a. Liên hệ với phương trình tuyến tính thuần nhất

Xét hệ phương trình tuyến tính (2.1), với $q(x)$ không đồng nhất bằng 0. Trong trường hợp này ta gọi phương trình tuyến tính thuần nhất (2.2) có cùng vế trái với phương trình (2.1) là *phương trình thuần nhất liên kết* của nó.

Giữa phương trình (2.1) và phương trình thuần nhất liên kết có sự liên hệ như sau:

Định lý: Nếu $y_0(x)$ là một nghiệm của phương trình (2.1) và $y(x)$ là một nghiệm của phương trình thuần nhất liên kết (2.2) thì

$y_0(x) + y(x)$ là nghiệm của phương trình (2.1).

Chứng minh: Với $y_0(x)$ là một nghiệm của phương trình (2.1) và $y(x)$ là một nghiệm của phương trình thuần nhất liên kết (2.2) ta có:

$$\frac{dy_0(x)}{dx} + p(x)y_0(x) \equiv q(x), \ \frac{dy(x)}{dx} + p(x)y(x) \equiv 0.$$

Từ đây suy ra

$$\frac{d[y_0(x) + y(x)]}{dx} + p(x)[y_0(x) + y(x)]$$

$$\equiv \frac{d[y_0(x)]}{dx} + \frac{d[y(x)]}{dx} + p(x)y_0(x) + p(x)y(x)$$

$$\equiv \left(\frac{d[y_0(x)]}{dx} + p(x)y_0(x)\right) + \left(\frac{d[y(x)]}{dx} + p(x)y(x)\right)$$

$$\equiv 0 + q(x) \equiv q(x).$$

Điều này chứng tỏ hàm số $y_0(x) + y(x)$ là nghiệm của phương trình (2.1).

Từ định lý trên đây suy ra rằng *tổng của một nghiệm riêng của phương trình tuyến tính không thuần nhất (2.1) và nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất liên kết (2.2) là nghiệm tổng quát của phương trình (2.1).*

Nhận xét này cho phép ta giải phương trình tuyến tính (2.1) một cách dễ dàng khi nhận ra một nghiệm riêng của nó.

Ví dụ: Giải phương trình

$$\frac{dy}{dx} + y = 2e^x. \tag{2.9}$$

Giải: Phương trình thuần nhất liên kết

$$\frac{dy}{dx} + y = 0$$

có nghiệm tổng quát là:

$$y = Ce^{-x}.$$

Dễ dàng nhận ra rằng $y_0(x) = e^x$ là một nghiệm riêng của phương trình (2.9). Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình (2.9) là:

$$y = e^x + Ce^{-x}.$$

b. Phương trình ôtônôm tuyến tính cấp I

Xét phương trình tuyến tính

$$\frac{dy}{dx} + py = q, \tag{2.10}$$

trong đó p và q là các hằng số. Phương trình (2.10) không chứa biến độc lập x dưới dạng hiện được gọi là *phương trình ôtônôm*.

Theo công thức (2.6) ta dễ dàng tìm được nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất liên kết của phương trình (2.10):

$$y = Ce^{-\int_0^x p dx} = Ce^{-px}.$$

Để có nghiệm tổng quát của phương trình (2.10) ta chỉ cần chỉ ra một nghiệm riêng của nó. Dễ dàng thấy rằng:

Khi $p \neq 0$ thì phương trình (2.10) có nghiệm riêng $y = \dfrac{q}{p}$;

Khi $p = 0$ thì phương trình (2.10) có nghiệm riêng $y = qx$.

Nghiệm tổng quát của phương trình (2.20) như sau:

- *Trường hợp $p \neq 0$*: $y = \dfrac{q}{p} + Ce^{-px}$;
- *Trường hợp $p = 0$*: $y = qx + C$.

c. Phương pháp biến thiên hằng số

Dựa theo biểu thức nghiệm của phương trình thuần nhất liên kết (2.2) ta có thể giải phương trình tuyến tính không thuần nhất (2.1) bằng *phương pháp biến thiên hằng số*. Nội dung của phương pháp này như sau:

- *Bước 1*: Giải phương trình tuyến tính thuần nhất liên kết (2.2). Nghiệm tổng quát của phương trình (2.2) có dạng:

$$y = Cy_0(x), \tag{2.11}$$

trong đó C là hằng số bất kỳ và

$$y_0(x) = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt}. \tag{2.12}$$

- *Bước 2*: Tìm nghiệm của phương trình (2.1) dưới dạng (2.11), nhưng với C là hàm số của x: $C = C(x)$.

Với $y = C(x)y_0(x)$, ta có

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC(x)}{dx}y_0(x) + C(x)\frac{dy_0(x)}{dx}.$$

Từ (2.12) ta có

$$\frac{dy_0(x)}{dx} = -p(x)\, e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt} = -p(x)y_0(x).$$

Vậy:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC(x)}{dx}y_0(x) - C(x)p(x)y_0(x). \tag{2.13}$$

Hàm số $y = C(x)y_0(x)$ là nghiệm của phương trình (2.1) nếu khi thay $y = C(x)y_0(x)$ cùng với biểu thức đạo hàm (2.13) vào phương trình đó ta được đồng nhất thức:

$$\frac{dC(x)}{dx}y_0(x) - C(x)p(x)y_0(x) + p(x)C(x)y_0(x) = q(x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dC(x)}{dx} = q(x)[y_0(x)]^{-1} = q(x)e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt} = h(x).$$

Từ đây ta tìm được:

$$C(x) = \int_{x_0}^{x} h(u)du + \overline{C} \quad (\overline{C} \text{ là hằng số bất kỳ}).$$

- *Bước 3*: Thay $C = \int_{x_0}^{x} h(u)du + \overline{C}$ vào (2.11) ta được nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất (2.1):

$$y = \left[\int_{x_0}^{x} q(u)e^{\int_{x_0}^{u} p(t)dt}du + \overline{C}\right]e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}. \qquad (2.14)$$

Từ công thức nghiệm tổng quát (2.14) suy ra rằng, với y_0 là một số thực bất kỳ cho trước, $y(x_0) = y_0$ khi và chỉ khi $\overline{C} = y_0$.

Định lý: Nếu các hàm số p(x) và q(x) liên tục trong khoảng (a; b) thì, với $x_0 \in (a; b)$ và y_0 là một số bất kỳ, tồn tại một và chỉ một nghiệm của phương trình tuyến tính (2.1) thoả mãn điều kiện $y(x_0) = y_0$. Nghiệm đó được xác định theo công thức:

$$y = \left[\int_{x_0}^{x} q(u)e^{\int_{x_0}^{u} p(t)dt}du + y_0\right]e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$$

Mặc dù ta đã thiết lập được công thức tìm nghiệm của phương trình tuyến tính, nhưng công thức đó khá cồng kềnh. Bạn cần ghi nhớ nội dung của phương pháp biến thiên hằng số để thực hiện việc giải phương trình tuyến tính không thuần nhất.

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2. \tag{2.15}$$

Giải: Phương trình tuyến tính thuần nhất liên kết của phương trình (2.15) là

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0. \tag{2.16}$$

Theo công thức giải phương trình tuyến tính thuần nhất ta dễ dàng tìm được nghiệm tổng quát của phương trình (2.16):

$$y = Cx,$$

với C là hằng số bất kỳ. Tiếp theo, ta 'biến thiên' hằng số C (xem C là hàm số của x) và tìm nghiệm của phương trình (2.15) dưới dạng

$$y = C(x)\, x. \tag{2.17}$$

Thay biểu thức (2.17) cùng với đạo hàm

$$\frac{dy}{dx} = C(x) + x\frac{dC(x)}{dx}$$

vào phương trình (2.15) ta được

$$C(x) + x\frac{dC(x)}{dx} - \frac{C(x)x}{x} = x^2.$$

Từ đây suy ra

$$\frac{dC(x)}{dx} = x \Rightarrow C(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2} + \overline{C}.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (2.15) là

$$y = \left(\frac{1}{2}x^2 + \overline{C}\right)x = \frac{1}{2}x^3 + \overline{C}x.$$

Ví dụ 2: Giải phương trình

$$\frac{dy}{dx} - y\cot gx = 2x\sin x \qquad (2.18)$$

và tìm nghiệm riêng thoả mãn điều kiện: $y = 0$ khi $x = \frac{\pi}{2}$.

Giải: Trước hết ta giải phương trình thuần nhất liên kết của phương trình (2.18):

$$\frac{dy}{dx} - y\cot gx = 0. \qquad (2.19)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (2.19) là:

$y = C.\sin x$ (C là hằng số bất kỳ).

Tiếp theo ta tìm tất cả các hàm số $C = C(x)$ để $y = C(x).\sin x$ là nghiệm của phương trình (2.18). Thay

$$y = C(x).\sin x,\ \ \frac{dy}{dx} = \frac{dC(x)}{dx}\sin x + C(x)\cos x$$

vào phương trình (2.18) ta được

$$\frac{dC(x)}{dx}\sin x + C(x)\cos x - C(x)\sin x.\cot gx = 2x\sin x.$$

Từ đây suy ra

$$\frac{dC(x)}{dx} = 2x \Rightarrow C = \int 2xdx = x^2 + \overline{C}.$$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình (2.18) là

$y = (x^2 + \overline{C})\sin x$ ($\overline{C}$ là hằng số bất kỳ).

Thay $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$ vào biểu thức nghiệm tổng quát ta xác định được $\overline{C} = -\frac{\pi^2}{4}$. Nghiệm riêng thoả mãn điều kiện $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ là

$$y = \left(x^2 - \frac{\pi^2}{4}\right).\sin x.$$

BÀI TẬP

1. Sử dụng công thức nghiệm của phương trình tuyến tính thuần nhất, hãy tìm nghiệm tổng quát và nghiệm riêng thoả mãn điều kiện cho kèm theo của các phương trình sau:

a) $y' + 3x^2y = 0,\ y(0) = 5$

b) $y' + y\mathrm{tg}x = 0,\ y(\pi) = 2$

c) $y' - \frac{y}{x^2} = 0,\ y(1) = 4$

2. Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình:

a) $y' - 3x = 5$ b) $y' + 2x = -3$

c) $y' + 2x = 9$ d) $y' - x = 1$

3. Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau bằng cách chỉ ra một nghiệm riêng:

a) $y' + y = x + 1$ b) $y' + 2y = 4e^{2x}$

c) $y' + xy = x^2 + 1$ d) $y' + y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$

4. Giải các phương trình sau bằng phương pháp biến thiên hằng số:

a) $xy' - 2y = 2x^4$ b) $(2x+1)y' = 4x + 2y$

c) $x(y' - y) = e^x$ d) $x^2y' + xy + 1 = 0$

e) $y = x(y' - x\cos x)$ f) $y' = 2x(x^2 + y)$

g) $(xy' - 1)\ln x = 2y$ h) $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$

5. Tìm nghiệm của phương trình thoả mãn điều kiện cho kèm theo:

a) $y' + \dfrac{3y}{x} = \dfrac{2}{x^3},\ y(1) = 1$ b) $y' - 2xy = x,\ y(0) = 0$

c) $\sqrt{x}(y' - 1) = \dfrac{y}{2\sqrt{x}},\ y(4) = 10$ d) $xy' = x + y,\ y(1) = 2$

6. Giải các phương trình:

a) $(x + y^2)dy = ydx$ b) $(2e^y - x)y' = 1$

§3. MỘT SỐ LOẠI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN PHI TUYẾN CẤP 1 CÓ THỂ GIẢI ĐƯỢC

I. PHƯƠNG TRÌNH PHÂN LY BIẾN SỐ

Phương trình phân ly biến số có dạng

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0, \tag{3.1}$$

hoặc

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y). \tag{3.2}$$

Các phương trình (3.1) và (3.2) dễ dàng đưa được về dạng:

$$p(x)dx + q(y)dy = 0. \tag{3.3}$$

Phương trình (3.3), với hệ số của dx chỉ phụ thuộc x và hệ số của dy chỉ phụ thuộc y, được gọi là *phương trình tách biến*. Lấy tích phân hai vế phương trình (3.3) ta được tích phân tổng quát[1]:

---

[1] Trong trường hợp tích phân ở vế trái của biểu thức (3.4) không thể tính được dưới dạng hữu hạn, bạn có thể để nguyên dấu tích phân.

$$\int p(x)dx + \int q(y)dy = C. \qquad (3.4)$$

Chú ý: Để chuyển phương trình (3.1) về dạng tách biến (3.3) ta chia hai vế của phương trình đó cho $M_2(y)N_1(x)$, do đó có thể để mất các nghiệm dạng:

$$x = x_0, \forall y \text{ (xem x là hàm số của y)},$$

$$y = y_0, \forall x \text{ (xem y là hàm số của x)},$$

trong đó x_0 là nghiệm của phương trình đại số $N_1(x) = 0$ và y_0 là nghiệm của phương trình đại số $M_2(y) = 0$. Tương tự, để chuyển phương trình (3.2) về dạng (3.3) ta chia hai vế cho $f_2(y)$, do đó cũng có thể để mất các nghiệm dạng $y = y_0$, với y_0 là nghiệm của phương trình đại số $f_2(y) = 0$.

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0. \qquad (3.5)$$

Giải: Chia hai vế của phương trình (3.5) cho $\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$, ta được phương trình:

$$\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = 0. \qquad (3.6)$$

Các nghiệm để mất trong quá trình biến đổi là:

$$x = 1; \ x = -1 \quad \text{(Xem x là hàm của y)},$$

$$y = 1; \ y = -1 \quad \text{(Xem y là hàm của x)}.$$

Lấy tích phân hai vế phương trình (3.6) ta được tích phân tổng quát:

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} + \int\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = C_1 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = C.$$

Ví dụ 2: Giải phương trình:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \ln y}{\sin x}. \tag{3.7}$$

Giải: Nhân hai vế của phương trình với dx và chia hai vế cho ylny ta được phương trình tách biến:

$$\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{\sin x}. \tag{3.8}$$

Nghiệm để mất khi chia hai vế cho ylny là: $y = 1$.

Lấy tích phân hai vế phương trình (3.8) ta được (hằng số bất kỳ được viết dưới dạng $C_1 = \ln|C|$, với $C \neq 0$):

$$\ln|\ln y| = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \ln|C|.$$

Từ đây ta được nghiệm tổng quát của phương trình (3.8)):

$$\ln y = C\operatorname{tg}\frac{x}{2} \quad \Leftrightarrow \quad y = e^{C\operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$$

Chú ý rằng nghiệm $y = 1$ để mất trong quá trình biến đổi được hoàn lại khi lấy $C = 0$. Vậy nghiệm của phương trình (3.7) là:

$$y = e^{C.\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \quad \text{(C là hằng số bất kỳ).}$$

Ví dụ 3: Tìm nghiệm riêng của phương trình

$$\frac{yy'}{x} + e^y = 0 \tag{3.9}$$

thoả mãn điều kiện $y(1) = 0$.

Giải: Thay $y' = \frac{dy}{dx}$, phương trình (3.9) trở thành

$$\frac{ydy}{xdx} + e^{y} = 0.$$

Sau khi tách biến ta được phương trình

$$ye^{-y}dy + xdx = 0. \qquad (3.10)$$

Lấy tích phân hai vế của phương trình (3.10) ta được

$$-e^{-y}(y+1) + \frac{x^2}{2} = \frac{C}{2} \;\Leftrightarrow\; 2e^{-y}(y+1) = x^2 - C.$$

Theo điều kiện ban đầu thì $y = 0$ khi $x = 1$, do đó

$$2 = 1 - C \Rightarrow C = -1.$$

Vậy nghiệm thoả mãn điều kiện $y(1) = 0$ của phương trình (3.9) là:

$$2e^{-y}(y+1) = x^2 + 1.$$

II. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH ĐƯA ĐƯỢC VỀ DẠNG PHÂN LY BIẾN SỐ

a. Phương trình thuần nhất

Phương trình vi phân

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (3.11)$$

được gọi là *phương trình thuần nhất*[1] nếu hàm số $f(x, y)$ ở vế phải là một hàm số thuần nhất bậc 0, tức là:

$$f(tx, ty) \equiv t^0 f(x, y) \equiv f(x, y)$$

ít nhất với mọi $t > 0$.

[1] Từ 'thuần nhất' ở đây được hiểu theo nghĩa khác với nghĩa khi nói về phương trình thuần nhất trong đại số.

Hàm số thuần nhất bậc 0 ở vế phải có thể viết dưới dạng một hàm số của biến số $z = \frac{y}{x}$. Thật vậy, với $t = \frac{1}{x}$ ta có:

$$f(x, y) = f(tx, ty) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Như vậy, phương trình vi phân thuần nhất có thể viết dưới dạng:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{3.11'}$$

Đặt $z = \frac{y}{x}$, ta có:

$$y = xz \quad \text{và} \quad \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}.$$

Thay vào phương trình (3.11') ta được phương trình phân ly biến số với z là hàm phải tìm:

$$z + x\frac{dz}{dx} = \varphi(z) \quad \Leftrightarrow \quad x\frac{dz}{dx} = \varphi(z) - z.$$

Tóm lại: *phương trình thuần nhất có thể đưa được về dạng phân ly biến số với z là hàm phải tìm bằng phép đổi biến: y = xz.*

Phương trình dạng đối xứng

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{3.12}$$

là phương trình thuần nhất khi M(x, y) và N(x, y) là các hàm số thuần nhất cùng bậc m. Thật vậy, viết lại phương trình (3.12) dưới dạng

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

ta dễ dàng thấy rằng vế phải $f(x, y) = -\dfrac{M(x, y)}{N(x, y)}$ là một hàm thuần nhất bậc 0:

$$f(tx, ty) = -\frac{M(tx, ty)}{N(tx, ty)} = -\frac{t^m M(x, y)}{t^m N(x, y)} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = f(x, y).$$

Ví dụ 1: Giải phương trình: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + tg\dfrac{y}{x}$.

Giải: Thay $y = xz$ và $\dfrac{dy}{dx} = z + x\dfrac{dz}{dx}$ vào phương trình đã cho ta được phương trình:

$$z + x\frac{dz}{dx} = z + tgz \iff x\frac{dz}{dx} = tgz.$$

Giải phương trình phân ly biến số này ta được tích phân tổng quát (z là hàm ẩn của x):

$$\sin z = Cx.$$

Tích phân tổng quát của phương trình đã cho là:

$$\sin\frac{y}{x} = Cx \text{ (C là hằng số bất kỳ).}$$

Ví dụ 2: Giải phương trình: $(x + y)dx + (x - y)dy = 0$.

Giải: Phương trình này là phương trình thuần nhất, bởi vì các hàm số $M = x + y$, $N = x - y$ là các hàm thuần nhất bậc $m = 1$.

Để chuyển về dạng phân ly biến số ta thay

$$y = xz,\ dy = zdx + xdz$$

vào phương trình đã cho:

$$(x + xz)dx + (x - xz)(xdz + zdx) = 0.$$

Sau khi rút gọn ta được phương trình phân ly biến số:

$$(1 + 2z - z^2)dx + x(1 - z)dz = 0.$$

Giải phương trình cuối cùng này ta được

$$x^2(1 + 2z - z^2) = C.$$

Từ đây suy ra tích phân tổng quát của phương trình đã cho:

$$x^2 + 2xy - y^2 = C.$$

Ví dụ 3: Tìm nghiệm của phương trình

$$x\left(\frac{dy}{dx} - \sin\frac{y}{x}\right) = y \tag{3.13}$$

thoả mãn điều kiện $y(1) = \pi/2$.

Giải: Viết lại phương trình (3.13) dưới dạng

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}.$$

Thay $y = xz$, ta được phương trình

$$z + x\frac{dz}{dx} = z + \sin z \Leftrightarrow x\frac{dz}{dx} = \sin z.$$

Giải phương trình phân ly biến số này ta được

$$\operatorname{tg}\frac{z}{2} = Cx \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{y}{2x} = Cx.$$

Theo điều kiện đã cho thì $y = \frac{\pi}{2}$ khi $x = 1$, do đó $C = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$.

Vậy, nghiệm cần tìm là:

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2x} = x.$$

b. Phương trình dạng

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by). \qquad (3.14)$$

Phương trình này có thể đưa được về dạng phân ly biến số bằng cách đặt $z = ax + by$. Thật vậy, xem z là hàm số của x ta có:

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} = f(ax + by) = f(z).$$

Phép biến đổi nói trên đưa phương trình (3.14) về dạng phân ly biến số:

$$\frac{dz}{dx} = a + bf(z).$$

Ví dụ 1: Giải phương trình: $\frac{dy}{dx} = 2x + y$.

Giải: Đặt $z = 2x + y$ ta có

$$\frac{dz}{dx} = 2 + \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} = z.$$

Phương trình đã cho được quy về phương trình:

$$\frac{dz}{dx} = 2 + z.$$

Giải phương trình phân ly biến số này ta tìm được:

$$z = Ce^x - 2.$$

Thay $z = 2x + y$ ta được nghiệm tổng quát của phương trình đã cho:

$$y = Ce^x - 2(x + 1).$$

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x - y} + 1$.

Giải: Đặt $z = x - y$, ta có:

$$\frac{dz}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx},\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{z} + 1.$$

Với phép biến đổi này ta được phương trình

$$1 - \frac{dz}{dx} = \frac{1}{z} + 1 \iff \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{z}$$

Giải phương trình cuối cùng ta được:

$$z^2 = -2x + C.$$

Thay $z = x - y$ ta được tích phân tổng quát của phương trình đã cho:

$$(x - y)^2 = -2x + C.$$

c. Phương trình dạng

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{3.15}$$

Trước hết ta thấy rằng nếu $a_1b_2 = a_2b_1$ thì phương trình (3.15) có dạng (3.14). Thật vậy, trong trường hợp này ta có

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \Rightarrow a_1 = ka_2 \text{ và } b_1 = kb_2$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{k(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) = g(a_2x + b_2y).$$

Xét phương trình (3.15) khi $a_1b_2 \neq a_2b_1$. Trong trường hợp này hệ phương trình đại số tuyến tính

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

có một nghiệm duy nhất (x_0, y_0). Thay $x = x_0 + u$ và $y = y_0 + v$, ta có

$$dx = du; \quad dy = dv,$$

$$a_1x + b_1y + c_1 = a_1u + b_1v + (a_1x_0 + b_1y_0 + c_1) = a_1u + b_1v\ ;$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = a_2u + b_2v + (a_2x_0 + b_2y_0 + c_2) = a_2u + b_2v.$$

Phương trình (3.15) trở thành:

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right).$$

Phương trình này là phương trình vi phân thuần nhất với $v = v(u)$ là hàm phải tìm, do đó ta có thể đưa về dạng phân ly biến số bằng cách đặt $v = uz$.

Ví dụ: Giải phương trình:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}.$$

Giải: Hệ phương trình đại số tuyến tính

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

có một nghiệm duy nhất: $(x_0 = 1,\ y_0 = 2)$.

Thay $x = 1 + u$ và $y = 2 + v$ ta được phương trình thuần nhất:

$$\frac{dv}{du} = \frac{u - v}{u + v}.$$

Phép đổi biến $v = uz$ cho ta phương trình:

$$z + u\frac{dz}{du} = \frac{1-z}{1+z} \quad \Leftrightarrow \quad u\frac{dz}{du} = \frac{1-2z-z^2}{1+z}.$$

Giải phương trình phân ly biến số này ta được:

$$u^2(1-2z-z^2) = C_1$$

$$\Rightarrow \ du^2 - 2uv - v^2 = C_1$$

$$\Rightarrow \ (x-1)^2 - 2(x-1)(y-2) - (y-2)^2 = C_1.$$

Tích phân tổng quát của phương trình đã cho là:

$$x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 6y = C.$$

III. PHƯƠNG TRÌNH BERNOULLI

Phương trình Bernoulli là phương trình dạng

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = y^{\alpha}q(x), \tag{3.16}$$

trong đó α là một hằng số thực khác 0 và khác 1 (với $\alpha = 0$ hoặc $\alpha = 1$ phương trình này là phương trình tuyến tính).

Phương trình Bernoulli (3.16) có thể đưa được về dạng phương trình tuyến tính. Thật vậy, chia hai vế cho y^{α} ta được:[1]

$$y^{-\alpha}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-\alpha} = q(x). \tag{3.17}$$

Đặt $z = y^{1-\alpha}$ ta có

$$\frac{dz}{dx} = (1-\alpha)y^{-\alpha}\frac{dy}{dx}.$$

Sau khi thay vào phương trình (3.17) ta được phương trình

$$\frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{dz}{dx} + p(x)z = q(x)$$

---

[1] Chú ý rằng khi $\alpha > 0$, ta có thể để mất nghiệm $y = 0$.

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dz}{dx} + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x) \qquad (3.18)$$

Phương trình (3.18) là phương trình tuyến tính với hàm phải tìm là hàm số **z**.

Ví dụ: Giải phương trình

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 2x^3y^2. \qquad (3.19)$$

Giải: Chia hai vế của phương trình (3.19) cho y^2 ta được

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} - 2xy^{-1} = 2x^3. \qquad (3.20)$$

Đặt $z = y^{-1}$ ta có:

$$\frac{dz}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}.$$

Phương trình (3.20) được đưa về phương trình

$$\frac{dz}{dx} + 2xz = -2x^3.$$

Giải phương trình tuyến tính này ta tìm được

$$z = Ce^{-x^2} + 1 - x^2.$$

Từ đây suy ra nghiệm tổng quát của phương trình (3.19):

$$y = \frac{1}{Ce^{-x^2} + 1 - x^2} \text{ (C là hằng số bất kỳ).}$$

Chú ý rằng khi chia hai vế của phương trình (3.19) cho y^2 ta để mất nghiệm y = 0. Nghiệm này không có mặt trong biểu thức nghiệm tổng quát.[1]

[1] Trong lý thuyết phương trình vi phân, nghiệm không có mặt trong nghiệm tổng quát được gọi là *nghiệm kỳ dị*.

IV. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TOÀN PHẦN VÀ PHƯƠNG PHÁP THỪA SỐ TÍCH PHÂN

a. Phương trình vi phân toàn phần

Phương trình

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad (3.21)$$

được gọi là *phương trình vi phân toàn phần* nếu vế trái của nó là vi phân toàn phần của một hàm số hai biến số $\Phi(x, y)$ nào đó:

$$d\Phi(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy.$$

Nếu tìm được hàm số $\Phi(x, y)$ thì phương trình (3.21) có thể viết dưới dạng:

$$d\Phi(x, y) = 0.$$

Khi đó tích phân tổng quát của phương trình (3.21) là:

$$\Phi(x, y) = C.$$

Vấn đề đặt ra là làm thế nào để biết được phương trình (3.21) là phương trình vi phân toàn phần và khi đó hàm số $\Phi(x, y)$ được tìm bằng cách nào? Định lý sau đây trả lời câu hỏi này.

Định lý: Với giả thiết các hàm số $M(x, y)$ và $N(x, y)$ xác định, liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trong miền

$$\mathbf{D} = \{(x, y) : a < x < b;\ c < y < d\},$$

biểu thức

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy \qquad (3.22)$$

là vi phân toàn phần của một hàm số nào đó khi và chỉ khi thoả mãn đồng nhất thức:

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}. \qquad (3.23)$$

Khi điều kiện (3.23) được thoả mãn, hàm số $\Phi(x, y)$ có vi phân toàn phần là biểu thức (3.22) có thể tìm được theo công thức:

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy,$$

hoặc

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x, y)dy,$$

trong đó x_0 và y_0 có thể chọn tuỳ ý sao cho điểm (x_0, y_0) thuộc miền **D**.

Ví dụ 1: Giải phương trình

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0. \tag{3.24}$$

Giải: Trong ví dụ này $M = 3x^2 + 6xy^2$, $N = 6x^2y + 4y^3$.

Điều kiện (3.23) được thoả mãn:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 12xy,$$

do đó phương trình (3.24) là phương trình vi phân toàn phần. Vế trái của phương trình (3.24) là vi phân toàn phần của hàm số:

$$\Phi(x, y) = \int_0^x (3x^2 + 6xy^2)dx + \int_0^y 4y^3dy = x^3 + 3x^2y^2 + y^4.$$

Tích phân tổng quát của phương trình (3.24) là:

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C.$$

Ví dụ 2: Giải phương trình

$$(x + y + 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0. \tag{3.25}$$

Giải: Đây là phương trình vi phân toàn phần vì

$$\frac{\partial(x+y+1)}{\partial y} \equiv \frac{\partial(x-y^2+3)}{\partial x} \equiv 1.$$

Vế trái của phương trình (3.25) là vi phân toàn phần của hàm số

$$\Phi(x,y) = \int_0^x (x+y+1)dx + \int_0^y (3-y^2)dy = \frac{1}{2}x^2 + xy + x + 3y - \frac{1}{3}y^3.$$

Tích phân tổng quát của phương trình (3.25) là

$$\frac{1}{2}x^2 + xy + x + 3y - \frac{1}{3}y^3 = C_1$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x^2 - 2y^3 + 6xy + 6x + 18y = C.$$

b. Phương pháp thừa số tích phân

Có những trường hợp mặc dù phương trình vi phân

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

không phải là phương trình vi phân toàn phần, nhưng ta có thể chọn hàm số $p(x, y)$ sao cho sau khi nhân hai vế của phương trình với $p(x, y)$ ta được phương trình vi phân toàn phần:

$$p(x, y)M(x, y)dx + p(x, y)N(x, y)dy = 0,$$

tức là thoả mãn điều kiện

$$\frac{\partial(pM)}{\partial y} = \frac{\partial(pN)}{\partial x}. \qquad (3.26)$$

Hàm số $p(x, y)$ được gọi là *thừa số tích phân*. Nói chung, để tìm thừa số tích phân $p(x, y)$ ta phải giải phương trình vi phân đạo hàm riêng (3.26) và việc này hoàn toàn không đơn giản. Ở đây ta chỉ đề cập đến trường hợp thừa số tích phân chỉ phụ thuộc vào một biến số:

$$p = p(x) \text{ hoặc } p = p(y).$$

Trường hợp $p = p(x)$ điều kiện (3.26) trở thành

$$p\frac{\partial M}{\partial y} = N.\frac{dp}{dx} + p.\frac{\partial N}{\partial x},$$

hay

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} p.$$

Từ đây suy ra rằng, để tồn tại thừa số tích phân chỉ phụ thuộc x, điều kiện cần và đủ là

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \varphi(x), \tag{3.27}$$

tức là biểu thức (3.27) chỉ phụ thuộc một biến số x. Khi đó hàm số $p = p(x)$ được xác định thông qua phương trình vi phân thường tuyến tính:

$$\frac{dp}{dx} = \varphi(x)p.$$

Giải phương trình này ta được công thức tìm thừa số tích phân:

$$p(x) = e^{\int \varphi(x)dx}. \tag{3.28}$$

Tương tự, để tồn tại thừa số tích phân chỉ phụ thuộc một biến y, điều kiện cần và đủ là

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{M} = \psi(y), \tag{3.29}$$

tức là biểu thức (2.39) chỉ phụ thuộc một biến số y. Khi đó thừa số tích phân $p = p(y)$ được xác định bằng cách giải phương trình vi phân thường tuyến tính:

$$\frac{dp}{dy} = -\psi(y)p\,.$$

Công thức tìm thừa số tích phân trong trường hợp này là

$$p(y) = e^{-\int \psi(y)dy}. \tag{3.30}$$

Ví dụ 1: Giải phương trình

$$(1 - x^2y)dx + x^2(y - x)dy = 0. \tag{3.31}$$

Giải: Phương trình này không phải là phương trình vi phân toàn phần. Tuy nhiên, ta có

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -x^2,\ \ \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy - 3x^2$$

$$\Rightarrow\ \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = -\frac{2}{x} = \varphi(x).$$

Như vậy điều kiện (3.27) được thoả mãn, do đó tồn tại thừa số tích phân chỉ phụ thuộc x. Theo công thức (3.28):

$$p(x) = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = \frac{1}{x^2}.$$

Nhân hai vế của phương trình (3.31) với $\frac{1}{x^2}$ ta được phương trình vi phân toàn phần

$$\left(\frac{1}{x^2} - y\right)dx + (y - x)dy = 0\,.$$

Giải phương trình cuối cùng ta được tích phân tổng quát:

$$\frac{y^2}{2} - xy - \frac{1}{x} = C.$$

Ví dụ 2: Giải phương trình:

$$\left(\frac{x}{y} + 1\right)dx + \left(\frac{x}{y} - 1\right)dy = 0. \qquad (3.32)$$

Giải: Trong trường hợp này ta có:

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{M} = \frac{-\dfrac{x}{y^2} - \dfrac{1}{y}}{\left(\dfrac{x}{y} + 1\right)} = -\frac{1}{y} = \psi(y).$$

Như vậy điều kiện (3.29) được thoả mãn, do đó tồn tại thừa số tích phân chỉ phụ thuộc một biến y. Theo công thức (3.30) ta tìm được thừa số tích phân:

$$p(y) = e^{\int \frac{1}{y}dy} = y.$$

Nhân hai vế của phương trình (3.32) với y ta được phương trình vi phân toàn phần:

$$(x + y)dx + (x - y)dy = 0.$$

Giải phương trình cuối cùng ta được tích phân tổng quát của phương trình (3.32):

$$\frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} = C_1 \iff x^2 + 2xy - y^2 = C.$$

V. VÍ DỤ ÁP DỤNG: XÁC ĐỊNH HÀM CẦU KHI BIẾT HỆ SỐ CO DÃN CỦA CẦU THEO GIÁ

Như ta đã biết, hệ số co dãn của cầu theo giá được tính theo công thức

$$\varepsilon = \frac{dQ}{dp}.\frac{p}{Q}$$

trong đó Q là *lượng cầu* hàng hoá ở mỗi mức giá p. Nếu ta biết được hệ số co dãn $\varepsilon = \varepsilon(p, Q)$ thì hàm cầu có thể được xác định thông qua phương trình vi phân:

$$\frac{dQ}{dp}.\frac{p}{Q} = \varepsilon(p, Q).$$

Ví dụ 1: Giả sử $\varepsilon = -k$ (k là một hằng số dương), tức là hệ số co dãn của cầu theo giá không đổi, ta có

$$\frac{dQ}{dp}.\frac{p}{Q} = -k \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dQ}{Q} = -k\frac{dp}{p}.$$

Giải phương trình vi phân này ta tìm được dạng hàm cầu có hệ số co dãn không đổi:

$$Q = Cp^{-k} \text{ (C là hằng số dương).}$$

Ví dụ 2: Tìm hàm cầu $Q = D(p)$, cho biết hệ số co dãn của cầu theo giá

$$\varepsilon = -\frac{5p + 2p^2}{Q}$$

và lượng cầu ở mức giá p =10 là 500.

Giải: Giải phương trình vi phân

$$\frac{dQ}{dp}.\frac{p}{Q} = -\frac{5p+2p^2}{Q} \Leftrightarrow \frac{dQ}{dp} = -5 - 2p$$

ta tìm được: $Q = -p^2 - 5p + C$.

Thay p = 10 và Q = 500 ta xác định được hằng số C = 650.

Vậy hàm cầu là $Q = 650 - p^2 - 5p$.

BÀI TẬP

7. Giải các phương trình phân ly biến số:

a) $xydx + (x + 1)dy = 0$ b) $\sqrt{y^2 + 1}\,dx = xydy$

c) $2x^2yy' + y^2 = 2$ d) $y' - xy^2 = 2xy$

e) $e^{-y}\left(1 + y'\right) = 1$ f) $y' = e^{x+y}$

8. Tìm nghiệm của phương trình thoả mãn điều kiện cho kèm theo:

a) $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$, $y(0) = 1$

b) $y'\,\mathrm{cotg}x + y = 2$, $y(0) = -1$

c) $x(1 + y^2)dx + y(1 + x^2)dy = 0$, $y(1) = 1$

9. Giải các phương trình vi phân thuần nhất:

a) $y' = \dfrac{x - y}{x - 2y}$ b) $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$

c) $(x + 2y)dx - xdy = 0$ d) $x(x + 2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$

e) $y' = \dfrac{y^2 - 4xy}{2x^2 - 2xy + 2y^2}$ f) $y^2 + x^2y' = xyy'$

g) $(x^2 + y^2)y' = 2xy$ h) $xy' - y = x\,\mathrm{tg}\dfrac{y}{x}$

10. Giải các phương trình sau bằng cách đưa về dạng phân ly biến số:

a) $(2x - 2y - 1)dx + (x - y + 1)dy = 0$

b) $(1 + x + y)dy = (1 - 3x - 3y)dx$

c) $y' = \cos(y - x)$ d) $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$

e) $y' = (8x + 2y + 1)^2$ f) $y' = \dfrac{x + 2y + 1}{2x + 4y + 3}$

11. Giải các phương trình:

a) $(2x - y)dx + (2y - x + 1)dy = 0$

b) $(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0$

12. Giải các phương trình Bernoulli:

a) $y' + 2xy = 2x^3y^3$ b) $y' - y = xy^2$

c) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = -xy^2$ d) $2xy\dfrac{dy}{dx} - y^2 + x = 0$

e) $y' - 9x^2y = (x^5 + x^2)\sqrt[3]{y^2}$ f) $(2xy^2 - y)dx + xdy = 0$

13. Giải các phương trình vi phân toàn phần:

a) $(x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$

b) $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0$

c) $(x^3 - 3xy^2 + 2)dx - (3x^2y - y^2)dy = 0$

d) $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$

e) $xdx + ydy = \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ f) $\dfrac{2x}{y^3}dx + \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$

14. Chứng minh rằng hàm số $p(x, y) = (xy)^{-1}$ là thừa số tích phân của phương trình $(x^2y - x)dy + (xy^2 + y)dx = 0$ và giải phương trình này.

15. Chứng minh rằng phương trình tuyến tính $y' + p(x)y = q(x)$ có thể giải được bằng cách tìm thừa số tích phân chỉ phụ thuộc x.

16. Giải các phương trình sau bằng cách tìm thừa số tích phân một biến:

a) $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$ b) $y(1 + xy)dx - xdy = 0$

c) $\frac{y}{x}dx + (y^3 - \ln x)dy = 0$ d) $\left(\frac{x}{y} + 1\right)dx + \left(\frac{x}{y} - 1\right)dy = 0$

e) $(x^2 + y)dx - xdy = 0$

f) $(2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)dy = 0$

17. Giải các phương trình:

a) $x\frac{dy}{dx} - y = x\cos\frac{y}{x}$ b) $\frac{dy}{dx}.\cos^2 x + y = tgx$

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{1 + y^2}{(1 + x^2)xy}$ d) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + y - x^3y - 1}{x^2y + x^2}$

e) $(xy + y^2)dx - (2x^2 + xy)dy = 0$

f) $(2xy + xe^{-3x})dx + (x^2 - \cos 5y)dy = 0$

g) $\left(\frac{xy^2}{x^2 + e} - x\right)dx + y\ln(x^2 + e).dy = 0$

h) $y' = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + y}{x}$ $(x > 0)$

§4. PHÂN TÍCH ĐỘNG TRONG KINH TẾ: MỘT SỐ MÔ HÌNH PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1

I. PHÂN TÍCH ĐỊNH TÍNH QUỸ ĐẠO THỜI GIAN CỦA MỘT BIẾN SỐ KINH TẾ BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỒ THỊ

Một trong các đề tài quan trọng của kinh tế học là phân tích xu hướng vận động của các biến số kinh tế theo thời gian. Giả sử quy luật vận động của biến số y theo thời gian được biểu diễn dưới dạng phương trình vi phân cấp 1:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \tag{4.1}$$

trong đó t là biến thời gian. Nghiệm $y = y(t)$ của phương trình (4.1) thoả mãn điều kiện ban đầu $y(0) = y_0$ được gọi là quỹ đạo thời gian của biến số y. Việc phân tích định lượng quỹ đạo thời gian chỉ có thể thực hiện được khi ta giải được phương trình (4.1) và biểu diễn nghiệm của nó dưới dạng hàm hiện. Phương pháp định tính trình bày dưới đây cho phép ta phân tích quỹ đạo thời gian của biến số y ngay cả khi không thể tìm được nghiệm của phương trình (4.1) dưới dạng hiện.

Xét trường hợp vế phải của phương trình (4.1) khuyết biến số t:

$$\frac{dy}{dt} = f(y). \tag{4.2}$$

Phương trình (4.2) được gọi là *phương trình vi phân ôtônôm*. Trong trường hợp này ta có thể phân tích xu hướng vận động theo thời gian của biến số y thông qua hàm số f(y) ở vế phải.

a. Biểu đồ pha

Để cho tiện, ta dùng ký hiệu $\dot{y}$ thay cho ký hiệu $\frac{dy}{dt}$ và viết phương trình (4.2) dưới dạng:

$$\dot{y} = f(y). \tag{4.3}$$

Trên mặt phẳng toạ độ với trục hoành biểu diễn biến số y và trục tung biểu diễn biến số $\dot{y}$, ta lập đồ thị của hàm số (4.3). Đồ thị đó được gọi là *đường pha*. Biến số $\dot{y}$ trong phương trình (4.3) là đạo hàm của y theo t, do đó dấu của $\dot{y}$ cho biết xu hướng tăng, giảm của y theo t. Xu hướng vận động của y theo thời gian có thể xác định theo quy tắc sau:

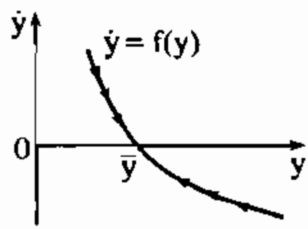
- Tại những điểm của đường pha nằm phía trên trục hoành $\dot{y}$

nhận giá trị dương, do đó y tăng theo thời gian (y vận động về phía bên phải);

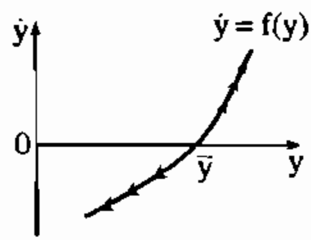
- Tại những điểm của đường pha nằm phía dưới trục hoành $\dot{y}$ nhận giá trị âm, do đó y giảm theo thời gian (y vận động về phía bên trái);

- Tại giao điểm $(\bar{y}, 0)$ của đường pha với trục hoành $\dot{y} = 0$. Người ta gọi $\bar{y}$ là *trạng thái tĩnh*, hay *trạng thái cân bằng*, của biến số y[1]. Trạng thái cân bằng tồn tại khi và chỉ khi đường pha cắt trục hoành.

Các hình FA-1 và FA-2 dưới đây là biểu đồ pha trong hai trường hợp thường gặp, khi đường pha cắt trục hoành.



FA-1



FA-2

b. Quỹ đạo thời gian và tính ổn định động của trạng thái cân bằng

Dựa vào biểu đồ pha chúng ta có thể phân tích định tính quỹ đạo thời gian của biến số y. Để minh hoạ, ta biểu diễn quỹ đạo thời gian tương ứng với các biểu đồ pha ở hình FA-1 và FA-2. Trên mặt phẳng với trục hoành biểu diễn biến thời gian t và trục tung biểu diễn biến số y, đường thẳng $y = \bar{y}$ biểu diễn trạng thái cân

---

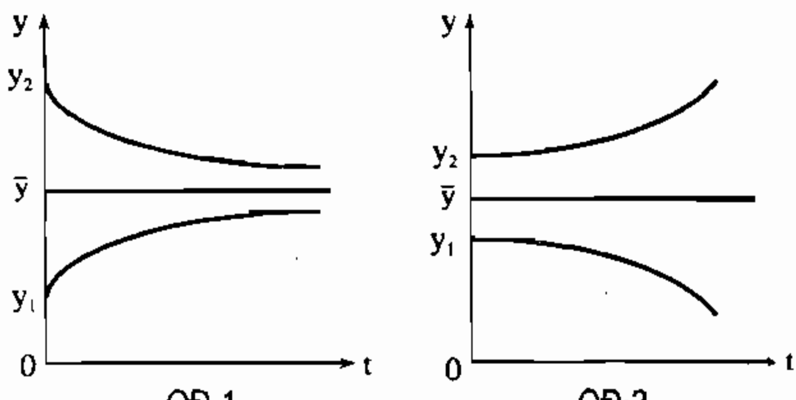
[1] Do $f(\bar{y}) = 0$, $y = \bar{y}$ là một nghiệm của phương trình vi phân (4.3), tức là $y = \bar{y}$ là một quỹ đạo thời gian của biến số y.

bằng.

Quỹ đạo thời gian tương ứng với biểu đồ pha ở hình FA-1 được minh hoạ ở hình QĐ-1. Nếu tại thời điểm xuất phát y nhận giá trị $y_1 < \overline{y}$ ($y = y_1$ khi $t = 0$) thì điểm tương ứng trên đường pha nằm phía trên trục hoành, do đó y tăng theo thời gian và tiến dần đến trạng thái cân bằng $\overline{y}$. Nếu tại thời điểm xuất phát y nhận giá trị $y_2 > \overline{y}$ ($y = y_2$ khi $t = 0$) thì điểm tương ứng trên đường pha nằm phía dưới trục hoành, do đó y giảm theo thời gian và tiến dần tới trạng thái cân bằng. Như vậy, trong trường hợp này mọi quỹ đạo thời gian của biến số y đều hội tụ đến trạng thái cân bằng. Điều này có nghĩa là:

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \overline{y}.$$

Trong trường hợp này ta nói rằng *trạng thái cân bằng* $\overline{y}$ *ổn định động* và $\overline{y}$ được gọi là *trạng thái ổn định*.



QĐ-1 QĐ-2

Quỹ đạo thời gian tương ứng với biểu đồ pha ở hình FA-2 được minh hoạ ở hình QĐ-2. Nếu tại thời điểm xuất phát y nhận giá trị $y_1 < \overline{y}$ thì điểm tương ứng trên đường pha nằm phía dưới trục hoành, do đó y giảm theo thời gian và ngày càng dời xa trạng thái cân bằng $\overline{y}$. Nếu tại thời điểm xuất phát y nhận giá trị $y_2 > \overline{y}$

thì điểm tương ứng trên đường pha nằm phía trên trục hoành, do đó y tăng theo thời gian và cũng ngày càng dời xa trạng thái cân bằng. Trong trường hợp này trạng thái cân bằng $\overline{y}$ không ổn định.

Phân tích trên đây cho thấy tính ổn định của trạng thái cân bằng $\overline{y}$ phụ thuộc vào dấu của $f'(\overline{y})$ tại điểm cân bằng $\overline{y}$. Trạng thái cân bằng $\overline{y}$ ổn định động khi và chỉ khi $f'(\overline{y}) < 0$.

Ví dụ: Để minh họa phương pháp ta xét mô hình phương trình tuyến tính cấp một:

$$\frac{dy}{dt} + py = q \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = -py + q.$$

Trong trường hợp này $f(y) = -py + q$, $f'(y) = -p$. Trạng thái cân bằng $\overline{y} = \frac{q}{p}$ ổn định động khi và chỉ khi $p > 0$. Bạn có thể so sánh với kết quả phân tích định lượng thông qua việc giải phương trình loại này theo phương pháp đã biết.

II. MÔ HÌNH TĂNG TRƯỞNG DOMAR

Mô hình tăng trưởng cổ điển của giáo sư Domar đề cập đến việc xác định luồng đầu tư đảm bảo cho nền kinh tế luôn luôn ở trạng thái cân bằng. Mô hình này được thiết lập trên cơ sở các giả thiết sau đây:

1. Các yếu tố sản xuất được sử dụng theo một tỷ lệ cố định:

$$\frac{K}{L} = \text{const},$$

do đó có thể xét hàm sản xuất như là hàm số một biến số K:

$$Q = f(K),$$

trong đó Q là sản lượng tiềm năng và K là tư bản hay quỹ vốn.

2. Tỷ lệ giữa sản lượng tiềm năng và quỹ vốn không đổi, tức là

$$Q = \rho K \text{ (}\rho\text{ là một hằng số dương).}$$

3. Nền kinh tế luôn luôn ở trạng thái sử dụng hết khả năng sản xuất, tức là thu nhập Y bằng sản lượng tiềm năng Q[1]:

$$Y = Q.$$

4. Xu hướng tiết kiệm cận biên không đổi và đầu tư bằng tiết kiệm:

$$I = S = sY$$

(Hằng số s là xu hướng tiết kiệm cận biên, $0 < s < 1$).

Ta xét tất cả các biến số nêu trên như các hàm số của biến thời gian t. Tại thời điểm t lượng đầu tư I(t) biểu thị tốc độ gia tăng của quỹ vốn K(t), do đó

$$I(t) = \frac{dK(t)}{dt}.$$

Theo giả thiết thứ hai ta có:

$$\frac{dQ}{dt} = \rho\frac{dK}{dt} = \rho I. \tag{4.4}$$

Từ giả thiết thứ ba suy ra

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dY}{dt}. \tag{4.5}$$

Từ giả thiết thứ tư suy ra

$$\frac{dI}{dt} = s\frac{dY}{dt} \iff \frac{dY}{dt} = \frac{1}{s}\frac{dI}{dt}. \tag{4.6}$$

Kết hợp các hệ thức (4.4), (4.5), (4.6) ta được

[1] Trong kinh tế học vĩ mô biến số Q được đo bằng đơn vị giá trị (tiền).

$$\frac{1}{s}\frac{dI}{dt} = \rho I. \qquad (4.7)$$

Phương trình (4.7) là phương trình tuyến tính thuần nhất. Giải phương trình này ta được quỹ đạo thời gian của biến số I:

$$I = Ae^{\rho st}.$$

Với t = 0 ta có I(0) = A, do đó

$$I = I(0)e^{\rho st},$$

trong đó I(0) là lượng đầu tư ban đầu (tại thời điểm xuất phát). Do $\rho > 0$ và $s > 0$ nên, với $I(0) > 0$, I tăng không ngừng (không có điểm dừng). Trạng thái cân bằng không tồn tại và $I \to +\infty$ khi $t \to +\infty$.

III. MÔ HÌNH TĂNG TRƯỞNG SOLOW

Trong mô hình Domar sản lượng tiềm năng được xét như là hàm số của một biến số K (quỹ vốn). Sự vắng mặt của biến số lao động L hàm ý rằng lao động và vốn được kết hợp theo một tỷ lệ cố định. Khác với Domar, giáo sư Solow đã tìm cách phân tích tăng trưởng trong điều kiện vốn và lao động được kết hợp theo tỷ lệ thay đổi.

a. Thiết lập mô hình

Ta xuất phát từ hàm sản xuất:

$$Q = F(K, L) \quad (K \text{ và } L > 0),$$

trong đó các biến số Q, K và L được xét dưới giác độ kinh tế vĩ mô.

Mô hình tăng trưởng Solow[1] được thiết lập với các giả thiết sau đây:

[1] Mô hình của Solow được gọi là mô hình tăng trưởng tân cổ điển.

1. Hàm sản xuất Q = F(K, L) là hàm thuần nhất bậc 1 (biểu thị hiệu quả không đổi theo quy mô). Với giả thiết này ta có:

$$\frac{1}{L}Q = \frac{1}{L}F(K, L) = F\left(\frac{1}{L}K,\ \frac{1}{L}L\right) = F\left(\frac{K}{L},\ 1\right) = \phi(k)$$

$$\Leftrightarrow \quad Q = L\phi(k), \tag{4.8}$$

trong đó biến số $k = \dfrac{K}{L}$ được gọi là *tỷ số vốn - lao động*. Biến số k biểu thị hàm lượng vốn tính bình quân cho một đơn vị lao động.

2. Tại mọi thời điểm nền kinh tế phát huy hết khả năng công nghệ, tức là tổng thu nhập Y bằng sản lượng tiềm năng Q:

$$Q(t) = Y(t)\ \forall\ t \geq 0.$$

3. Tại mọi thời điểm, một tỷ phần cố định của thu nhập được tiết kiệm và dùng hết cho đầu tư:

$$\frac{dK}{dt} = I(t) = sY(t),$$

trong đó s là xu hướng tiết kiệm cận biên (s là hằng số dương nhỏ hơn 1).

4. Lực lượng lao động tăng theo quy luật hàm số mũ:

$$\frac{dL}{dt} = \lambda L\ \ (\lambda\ = \text{const}\ > 0).$$

Từ đồng nhất thức K = k L ta có:

$$\frac{dK}{dt} = L\frac{dk}{dt} + k\frac{dL}{dt}. \tag{4.9}$$

Từ giả thiết 3, kết hợp với giả thiết 2 và hệ thức (4.8) suy ra:

$$\frac{dK}{dt} = sQ = sL.\ \phi(k).$$

Kết hợp hệ thức này với hệ thức ở giả thiết 4, ta có thể viết hệ thức (4.9) dưới dạng:

$$sL.\ \phi(k) = L\frac{dk}{dt} + k\lambda L.$$

Từ đây ta được phương trình (mô hình Solow):

$$\frac{dk}{dt} = s\phi(k) - \lambda k. \qquad 4.10)$$

Mô hình tăng trưởng Solow cho phép ta phân tích quỹ đạo thời gian của biến số k.

b. Phân tích định tính

Gọi f(k) là hàm số ở vế phải của phương trình (4.10). Trạng thái tĩnh $\overline{k}$ được xác định từ phương trình

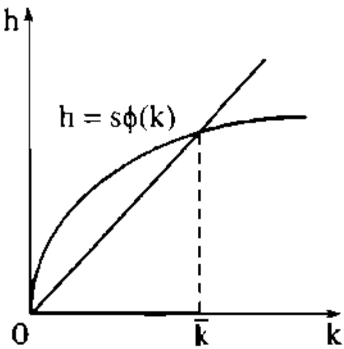
$$f(k) = s\phi(k) - \lambda k = 0 \Leftrightarrow s\phi(k) = \lambda k.$$

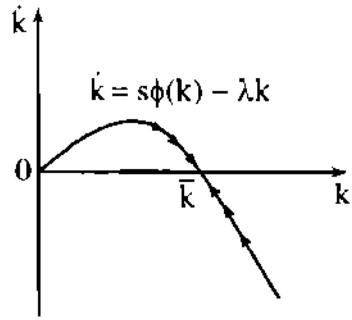
Từ hệ thức (4.8) ta có:

$$\frac{Q}{L} = \phi(k).$$

Như vậy, *hàm số $\phi(k)$ biểu diễn sự phụ thuộc của sản lượng bình quân của lao động* (tỷ số $\frac{Q}{L}$) vào *tỷ số vốn-lao động* k.

Nếu biểu diễn bằng đồ thị thì trạng thái cân bằng $\overline{k}$ là hoành độ giao điểm của đường h = $s\phi(k)$ với đường thẳng h = λk (ta ký hiệu hình thức trục tung là trục h). Theo quy luật kinh tế thì $\phi(k)$ là hàm đơn điệu tăng. Mặt khác, theo quy luật lợi ích cận biên giảm dần thì $\phi''(k) < 0$, do đó đồ thị $h = s\phi(k)$ là đường cong lõm (quay bề lõm xuống dưới). Với giả thiết K là một yếu tố không thể bỏ qua được của sản xuất, đường $h = s\phi(k)$ xuất phát từ gốc toạ độ. Ngoài ra, ta giả thiết rằng $s\phi(k) > \lambda k$ trong một khoảng giá trị nào đó của k, kể từ $k = 0$. Hình vẽ dưới đây biểu diễn vị trí của điểm tĩnh $\bar{k}$ và đồ thị pha của phương trình (4.10) ($\dot{k}$ là đạo hàm của k theo t).





Biểu đồ pha cho thấy trạng thái tĩnh $\bar{k}$ ổn định động: dù xuất phát từ bất cứ giá trị nào, cùng với thời gian $k(t) \to \bar{k}$. Các nhà kinh tế gọi $\bar{k}$ là *trạng thái ổn định* (steady state).

Một điều có ý nghĩa quan trọng là khi trạng thái cân bằng $\bar{k}$ đã đạt được thì tỷ lệ vốn - lao động không thay đổi theo thời gian, do đó K(t) và L(t) tăng với cùng tỷ lệ λ, kéo theo đầu tư ròng I(t) cũng tăng với cùng tỷ lệ λ. Điều này được minh chứng như sau (ký hiệu dấu chấm bên trên ký hiệu biến số chỉ đạo hàm của nó theo t):

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}L - \dot{L}K}{L^2} = 0 \Rightarrow \dot{K}L = \dot{L}K \Rightarrow \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{L}}{L} = \lambda$$

$$\Rightarrow K = K_0 e^{\lambda t} \text{ và } L = L_0 e^{\lambda t} \Rightarrow I = \dot{K} = \lambda K = \lambda K_0 e^{\lambda t} = I_0 e^{\lambda t}.$$

Như vậy, mô hình tăng trưởng Solow chỉ ra rằng nếu lực lượng lao động tăng với tỷ lệ ổn định λ thì tự thân nền kinh tế sẽ tiến dần tới trạng thái tăng trưởng ổn định, khi mà đầu tư ròng tăng theo cùng tỷ lệ λ, như K và L. Hơn nữa, do $Q = L\phi(\bar{k})$ và $\phi(\bar{k})$ không đổi nên Q cũng tăng với cùng tỷ lệ λ. Vì thế mà $\bar{k}$ được gọi là *trạng thái tăng trưởng ổn định (steady state)*. Steady state là trạng thái mà tất cả các biến số quan trọng nhất của nền kinh tế cùng tăng theo một tỷ lệ như nhau.

Chú ý rằng các phân tích trên đây được thực hiện với giả thiết hàm sản xuất f (công nghệ) không thay đổi theo thời gian. Để tính đến tiến bộ công nghệ ta chỉ cần thay đổi mô hình hàm sản xuất. Chẳng hạn, có thể xét hàm sản xuất dưới dạng:

$$Q = T(t)f(K, L) \quad (\dot{T} > 0)$$

trong đó T(t), là hàm tăng theo t, đặc trưng cho tiến bộ công nghệ: Ứng với mỗi tổ hợp yếu tố (K, L) sản lượng tiềm năng Q được nhân với hệ số T(t) tăng theo thời gian. Trong bối cảnh đó đường cong $h = s\phi(k)$ được đẩy lên phía trên và cắt đường thẳng $h = \lambda k$ tại điểm có hoành độ $\bar{k}$ lớn hơn. Điều này có nghĩa là, với sự tiến bộ của công nghệ, trạng thái ổn định sẽ đạt được với một hàm lượng vốn tính theo đầu công nhân ngày càng lớn hơn.

c. Phân tích định lượng

Để có thể phân tích định lượng ta phải biết hàm sản xuất F. Chẳng hạn, nếu hàm sản xuất có dạng Cobb-Douglas

$$Q = aK^{\alpha}L^{1-\alpha} \; (a > 0,\; 0 < \alpha < 1)$$

thì

$$\phi(k) = \frac{Q}{L} = a\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} = ak^{\alpha}.$$

Phương trình (4.10) trở thành

$$\frac{dk}{dt} = ask^{\alpha} - \lambda k \Leftrightarrow \frac{dk}{dt} + \lambda k = ask^{\alpha}.$$

Phương trình này là phương trình Bernoulli. Theo phương pháp đã biết ta tìm được

$$k = \left[\left(k_0^{1-\alpha} - \frac{as}{\lambda}\right)e^{-\lambda(1-\alpha)t} + \frac{as}{\lambda}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

trong đó $k_0 = k(0)$.

Do $\lambda > 0$ và $1-\alpha > 0$ nên $k \to \left(\frac{a.s}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ khi $t \to +\infty$. Trạng thái ổn định là:

$$\bar{k} = \left(\frac{a.s}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

IV. MÔ HÌNH ĐIỀU CHỈNH GIÁ THỊ TRƯỜNG

Giả sử cung và cầu của một loại hàng hoá như sau:

$$Q_d = a - bP \quad (a > 0, b > 0), \tag{4.11}$$

$$Q_s = -c + dP \quad (c > 0, d > 0). \tag{4.12}$$

Khi đó giá cân bằng (giá khi $Q_d = Q_s$) là một hằng số dương:

$$\bar{P} = \frac{a+c}{b+d}.$$

Nếu tại thời điểm xuất phát $t = 0$ giá $P(0)$ đúng bằng giá cân bằng $\bar{P}$ thì thị trường đã ở trạng thái cân bằng. Nhưng nếu $P(0) \neq \bar{P}$ thì phải sau một thời gian điều chỉnh thị trường mới có thể tiến tới trạng thái cân bằng. Trong khoảng thời gian đó cả giá P, lượng cầu Q_d và lượng cung Q_s đều thay đổi, do đó ta xem cả giá và lượng là các hàm số của thời gian t.

Vấn đề phân tích động được đặt ra như sau: *Nếu có đủ thời gian để điều chỉnh thì liệu thị trường có tiến tới trạng thái cân bằng hay không*, tức là *P(t) có hội tụ đến $\overline{P}$ hay không khi $t \to +\infty$?*

Để trả lời câu hỏi này ta lập quỹ đạo thời gian của giá cả, tức là thiết lập hàm số P = P(t). Để cho đơn giản ta giả thiết rằng tốc độ biến thiên của giá cả tỷ lệ thuận với lượng chênh lệch giữa cung và cầu, $Q_d - Q_s$, tại mọi thời điểm:

$$\frac{dP}{dt} = \delta(Q_d - Q_s) \quad (\delta > 0). \qquad (4.13)$$

Hằng số δ được gọi là *hệ số điều chỉnh*. Chú ý rằng trong phương trình (4.13), $\frac{dP}{dt} = 0$ khi và chỉ khi $Q_d = Q_s$. Thay (4.11) và (4.12) vào (4.13) ta được

$$\frac{dP}{dt} = \delta(a + c) - \delta(b + d)P$$

$$\Leftrightarrow \frac{dP}{dt} + \delta(b + d)P = \delta(a + c). \qquad (4.14)$$

Phương trình (4.14) là một phương trình vi phân tuyến tính. Giải phương trình này ta được:

$$P(t) = [P(0) - \overline{P}]e^{-\delta(b+d)t} + \overline{P},$$

trong đó $\overline{P}$ là trạng thái cân bằng:

$$\overline{P} = \frac{a + c}{b + d}.$$

Do $\delta(b + d) > 0$ nên $[P(0) - \overline{P}]e^{-\delta(b+d)t} \to 0$ khi $t \to +\infty$. Như vậy, mô hình trên đây cho thấy $P(t) \to \overline{P}$ khi $t \to +\infty$, tức là trạng thái cân bằng $\overline{P}$ là trạng thái ổn định.

§5. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI

I. KHÁI QUÁT CHUNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN THƯỜNG CẤP HAI

a. Nghiệm tổng quát và nghiệm riêng

Phương trình vi phân thường cấp hai có dạng tổng quát như sau:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \qquad 5.1)$$

trong đó F là một hàm số của 4 biến số x, y, y', y''.

Việc xét phương trình tổng quát (5.1) khá phức tạp, do đó người ta thường xét phương trình vi phân cấp 2 dưới dạng đã giải theo đạo hàm cấp 2:

$$y'' = f(x, y, y'). \qquad (5.2)$$

Việc giải phương trình vi phân cấp hai thường phải qua hai lần lấy tích phân bất định, do đó nghiệm của nó có dạng

$$y = \varphi(x, C_1, C_2), \qquad (5.3)$$

trong đó C_1 và C_2 là các hằng số bất kỳ

Họ hàm số (5.3) được gọi là *nghiệm tổng quát* của một phương trình vi phân thường cấp hai nếu khi gán cho mỗi ký hiệu C_1, C_2 một số bất kỳ ta được một nghiệm của phương trình đó. Mỗi nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát khi gán cho mỗi chữ C_1, C_2 một trị số xác định được gọi là *nghiệm riêng* của phương trình.

Ví dụ: Phương trình $y'' = 2x$ có thể giải như sau:

$$(y')' = y'' = 2x \Rightarrow y' = \int 2x.dx = x^2 + C_1$$

$$\Rightarrow y = \int (x^2 + C_1).dx = \frac{1}{3}x^3 + C_1x + C_2.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \frac{1}{3}x^3 + C_1x + C_2.$$

Từ nghiệm tổng quát ta có các nghiệm riêng:

$$y = \frac{1}{3}x^3 \quad (\text{khi } C_1 = C_2 = 0),$$

$$y = \frac{1}{3}x^3 + 2x - 3 \ (\text{khi } C_1 = 2, C_2 = -3), \text{ v.v...}$$

b. Bài toán Cauchy

Bài toán Cauchy trong trường hợp phương trình vi phân cấp 2 được đặt ra như sau:

Tìm nghiệm của phương trình (5.2) thoả mãn các điều kiện:

$$y = y_0 \text{ và } y' = y'_0 \text{ khi } x = x_0 \qquad (5.4)$$

trong đó x_0, y_0 và y'_0 là các số thực cho trước.

Điều kiện (5.4) được gọi là *điều kiện ban đầu*. Chú ý rằng điều kiện ban đầu (5.4) bao gồm giá trị của nghiệm và giá trị của đạo hàm của nó tại một điểm x_0 cho trước. Bộ ba số thực (x_0, y_0, y'_0) được gọi là *bộ giá trị ban đầu*.

Khi đã tìm được nghiệm tổng quát của phương trình (5.2), để tìm nghiệm riêng thoả mãn điều kiện ban đầu (5.4) ta tìm (C_1, C_2) từ hệ 2 phương trình:

$$\varphi(x_0, C_1, C_2) = y_0, \ \varphi'_x(x_0, C_1, C_2) = y'_0.$$

Ví dụ: Nghiệm tổng quát của phương trình $y'' = 2x$ là:

$$y = \frac{1}{3}x^3 + C_1x + C_2.$$

Đạo hàm của nghiệm tổng quát là: $y' = x^2 + C_1$.

Để tìm nghiệm thoả mãn điều kiện $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$ ta giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{3} + C_1 + C_2 = 1 \\ 1 + C_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Nghiệm riêng của phương trình $y'' = 2x$ thoả mãn điều kiện đã cho là:

$$y = \frac{1}{3}x^3 + x - \frac{1}{3}.$$

Định lý sau đây được gọi là *định lý tồn tại và duy nhất* đối với phương trình vi phân cấp hai:

Định lý: Giả sử hàm số $f(x, y, y')$ ở vế phải của phương trình (5.2) xác định, liên tục trong một lân cận V của điểm $M_0(x_0, y_0, y'_0)$ và tồn tại các hằng số $K, L > 0$ sao cho:

$$|f(x, y_2, y') - f(x, y_1, y')| \le K|y_2 - y_1| \ \forall (x, y_1, y'), (x, y_2, y') \in V;$$

$$|f(x, y, y'_2) - f(x, y, y'_1)| \le L|y'_2 - y'_1| \ \forall (x, y, y'_1), (x, y, y'_2) \in V.$$

Khi đó, trong một khoảng $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ với δ đủ nhỏ tồn tại một và chỉ một nghiệm của phương trình (5.2) thoả mãn điều điều kiện ban đầu (5.4).

c. Một số trường hợp có thể hạ cấp

Sau đây ta xét một số trường hợp phương trình vi phân cấp hai có thể biến đổi được về phương trình cấp 1.

- *Trường hợp 1*: Phương trình khuyết hàm phải tìm và đạo hàm cấp một của nó:

$$y'' = f(x).$$

Phương trình này có thể giải dễ dàng qua hai lần lấy tích phân bất định:

$$y' = \int f(x)dx = g(x) + C_1,$$

$$y = \int [g(x) + C_1]dx = \int g(x)dx + C_1x + C_2.$$

- *Trường hợp 2*: Phương trình khuyết hàm phải tìm:

$$y'' = f(x,\ y'). \qquad (5.5)$$

Trong trường hợp này, đặt $z = y'$ ta có $z' = y''$. Phương trình (5.5) được chuyển về phương trình vi phân cấp 1 với hàm phải tìm $z = y'$:

$$z' = f(x, z).$$

Ví dụ: Giải phương trình:

$$y'' = \frac{y'}{x}.$$

Giải: Thay $y' = z$, $y'' = z'$ ta được phương trình $z' = \frac{z}{x}$. Giải phương trình này ta tìm được $z = C_1x$. Tiếp theo, giải phương trình $y' = C_1x$ ta được nghiệm tổng quát của phương trình đã cho:

$$y = \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2.$$

- *Trường hợp 3*: Phương trình khuyết biến độc lập:

$$y'' = f(y, y'). \qquad (5.6)$$

Trong trường hợp này ta có thể hạ cấp phương trình bằng cách đặt $z = y'$ và xem z như là hàm số của biến số y: $z = z(y)$. Khi đó ta có:

$$\frac{dy}{dx} = z, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy}.$$

Phương trình (5.5) được đưa về phương trình vi phân cấp 1 với hàm phải tìm z (hàm số đối số y):

$$z\frac{dz}{dy} = f(y, z). \qquad (5.6)$$

Ví dụ: Giải phương trình:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2. \qquad (5.7)$$

Giải: Đặt $z = \dfrac{dy}{dx}$ và biến đổi như trên ta được phương trình

$$z\frac{dz}{dy} = \frac{1}{y}z^2.$$

Giải phương trình này ta được $z = C_1y$. Tiếp tục giải phương trình

$$\frac{dy}{dx} = C_1y$$

ta được nghiệm tổng quát của phương trình (5.7):

$$y = C_2e^{C_1x}.$$

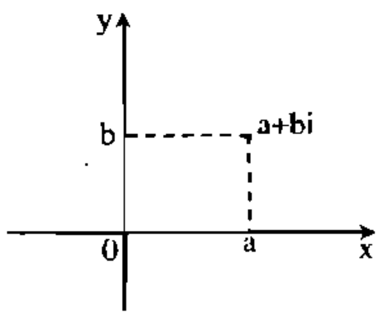
II. SƠ LƯỢC VỀ HỆ THỐNG SỐ PHỨC

Trong hệ thống số thực nhiều phương trình đại số không có nghiệm. Chẳng hạn, không tồn tại số thực x sao cho $x^2 = -1$. Để khắc phục hạn chế đó người ta phải mở rộng hệ thống số. Chúng tôi không trình bày ở đây toàn bộ cấu trúc đại số của hệ thống số phức, mà chỉ tóm tắt một số một số nội dung cơ bản nhất được sử dụng khi xét phương trình vi phân và phương trình sai phân tuyến tính cấp hai.

1. Ta gọi *đơn vị ảo* là số i thoả mãn phương trình $x^2 = -1$, tức là $i^2 = -1$.

2. Một cách hình thức, ta gọi *số phức* là số dạng a + bi, trong đó a và b là các số thực. Số a được gọi là *phần thực* và số b được gọi là *phần ảo* của số phức a + bi. Số bi được gọi là *số ảo.*

Số phức a + bi có thể biểu diễn bằng một điểm A(a, b) của mặt phẳng toạ độ với trục hoành biểu diễn phần thực (gọi là *trục thực*) và trục tung biểu diễn phần ảo (gọi là *trục ảo*).



3. Hai số phức được coi là *bằng nhau* khi và chỉ khi phần thực và phần ảo của chúng tương ứng bằng nhau:

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \text{ và } b = d.$$

4. Hai số phức có cùng phần thực và phần ảo đối dấu được gọi là

các *số phức liên hợp*. Số liên hợp của số phức a + bi là số a – bi.

5. Các phép toán cộng, trừ, nhân chia số phức được thực hiện như sau:

- $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$;
- $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$;
- $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$;
- $\dfrac{a+bi}{c+di} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$ (khi $c^2 + d^2 \neq 0$).

Tập hợp tất cả các số phức với các phép toán thực hiện như trên được gọi là *trường số phức*. Trong trường số phức, các số thực là các số có phần ảo bằng 0, do đó tập hợp tất cả các số thực là tập con của tập hợp tất cả các số phức. Hơn nữa, *các phép toán trên trường số phức thoả mãn tất cả các tính chất quen biết của các phép toán trên trường số thực, do đó khi thực hiện việc biến đổi một biểu thức số phức bạn có thể sử dụng tất cả các quy tắc và các công thức đã biết khi biến đổi biểu thức số thực*.

6. Mỗi số phức a + bi biểu diễn được dưới dạng lượng giác:

$$a + bi = \rho(\cos\theta + i\sin\theta),$$

trong đó ρ và θ được xác định theo các công thức:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}\,;\quad \cos\theta = \frac{a}{\rho},\ \sin\theta = \frac{b}{\rho}.$$

Người ta gọi ρ là *môdun* và góc θ là *argument* của số phức a + bi.

7. Luỹ thừa nguyên dương của số phức được định nghĩa tương tự như luỹ thừa nguyên dương của số thực:

$$x^n = x.x...x \text{ (n lần)}.$$

Ở dạng lượng giác, luỹ thừa nguyên dương của số phức được xác định theo công thức:

$$[\rho(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

8. Ta gọi *căn bậc n* của số phức a + bi, ký hiệu là $\sqrt[n]{a+bi}$, là số phức x + yi thoả mãn điều kiện:

$$(x + yi)^n = a + bi.$$

Căn bậc hai của số phức a + bi được ký hiệu là $\sqrt{a+bi}$. Theo định nghĩa, việc tìm căn bậc hai của số phức a + bi quy về việc tìm cặp số thực (x, y) sao cho:

$$(x + yi)^2 = a + bi \Leftrightarrow (x^2 - y^2) + 2xyi = a + bi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \tag{5.8}$$

Để tìm căn bậc hai của số phức a + bi ta phải giải hệ phương trình (5.8) với x và y là các ẩn số thực.

Đặc biệt, hệ phương trình (5.8) với a = – 1, b = 0 có hai nghiệm (0, 1) và (0, – 1), do đó

$$\sqrt{-1} = \pm i.$$

Tương tự, thông qua hệ phương trình (5.8) với a = – d (d > 0), ta dễ dàng xác định được:

$$\sqrt{-d} = \pm i\sqrt{d} \text{ (d là một số thực dương).}$$

Căn bậc n của một số phức khác 0 có n giá trị phức khác nhau. Khi viết số phức dưới dạng lượng giác ta có thể tính căn bậc n của số phức theo công thức:

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\theta + i\sin\theta)} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

$$(k = 0, 1, 2, ..., n - 1).$$

Chú ý: Trong các công thức trên, $\sqrt{d}$ và $\sqrt[n]{\rho}$ được hiểu theo nghĩa căn số học thông thường.

9. Với α là số thực bất kỳ ta có:

$$e^{\alpha i} = \cos\alpha + i\sin\alpha,\ e^{-\alpha i} = \cos\alpha - i\sin\alpha. \qquad (5.9)$$

Các công thức (5.9) được gọi là *công thức Euler*.

10. Phương trình bậc hai $x^2 + px + q = 0$ với các hệ số p, q là các số thực luôn luôn có nghiệm trong trường số phức. Nghiệm của nó như sau:

- Trường hợp $\Delta = p^2 - 4pq > 0$ phương trình có hai nghiệm thực phân biệt:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}.$$

- Trường hợp $\Delta = p^2 - 4q = 0$ phương trình có một nghiệm thực kép (hai nghiệm thực bằng nhau): $x = -\frac{p}{2}$.

- Trường hợp $\Delta = p^2 - 4q < 0$ phương trình có hai nghiệm phức liên hợp:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2}.$$

Chú ý: Nếu viết $p = 2p'$ thì ta có thể giải phương trình bậc hai $x^2 + 2p'x + q = 0$ theo $\Delta' = (p')^2 - q$ như sau:

◊ Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm thực phân biệt:

$$x = -p' \pm \sqrt{\Delta'}.$$

◊ Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có một nghiệm thực kép:

$$x = -p'.$$

◊ Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình có hai nghiệm phức liên hợp:

$$x = -p' \pm i\sqrt{-\Delta'}.$$

III. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH CẤP HAI

a. Định lý tồn tại và duy nhất đối với phương trình vi phân tuyến tính cấp hai

Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai là phương trình dạng:

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)y = g(x), \tag{5.10}$$

trong đó $p(x)$, $q(x)$, $g(x)$ là các hàm số cho trước.

Định lý tồn tại và duy nhất đối với phương trình (5.10) có nội dung như sau:

Định lý: Nếu các hàm số $p(x)$, $q(x)$, $g(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì, với $x_0 \in (a; b)$ và y_0, y'_0 là các số thực bất kỳ, tồn tại một và chỉ một nghiệm $y(x)$ của phương trình (5.10) thoả mãn điều kiện:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0.$$

Chứng minh: Viết lại phương trình (5.10) dưới dạng

$$y'' = g(x) - p(x)\,y' - q(x)y, \tag{5.10'}$$

Từ giả thiết $p(x)$, $q(x)$, $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ suy ra rằng hàm số

$$f(x, y, y') = g(x) - p(x)\,y' - q(x)y$$

liên tục trong miền $D = \{(x, y, y'):\ a \le x \le b,\ y \in \mathbb{R},\ y' \in \mathbb{R}\}$.

Mặt khác, các hàm số liên tục p(x) và q(x) bị chặn trên [a; b], do đó tồn tại các hằng số dương K, L sao cho

$$|p(x)| \le K,\ |q(x)| \le L,\ \forall x \in [a; b].$$

Từ đây suy ra:

$$|f(x, y_2, y') - f(x, y_1, y')| = |q(x)|\,|y_2 - y_1| \le L|y_2 - y_1|,$$

$$\forall (x, y_1, y'), (x, y_2, y') \in V;$$

$$|f(x, y, y'_2) - f(x, y, y'_1)| = |p(x)|.|y'_2 - y'_1| \le K|y'_2 - y'_1|,$$

$$\forall (x, y, y'_1), (x, y, y'_2) \in V.$$

Như vậy, hàm số ở vế phải của phương trình (5.10') thoả mãn các điều kiện của định lý tồn tại và duy nhất đối với phương trình vi phân cấp hai tổng quát, do đó ta có điều phải chứng minh.

b. Phương trình tuyến tính thuần nhất

Trường hợp đặc biệt, khi $g(x) \equiv 0$, phương trình (5.10) có dạng:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{5.11}$$

Phương trình (5.11) được gọi là *phương trình tuyến tính thuần nhất*. Ta sẽ xét phương trình (5.11) với giả thiết rằng p(x) và q(x) là các hàm liên tục trên [a; b].

Định lý 1: Nếu y(x) là nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất (5.11) thì Cy(x), trong đó C là hằng số bất kỳ, cũng là nghiệm của phương trình đó.

Chứng minh: Nếu y(x) là nghiệm của phương trình (5.11) thì

$$y''(x) + p(x)\,y'(x) + q(x)y(x) = 0.$$

Khi đó, với mọi hằng số C ta có:

$$[Cy(x)]'' + p(x)[Cy(x)]' + q(x)[Cy(x)]$$

$$= C[y''(x) + p(x)\,y'(x) + q(x)y(x)] = 0.$$

Điều này chứng tỏ Cy(x) là nghiệm của phương trình (5.11).

Định lý 2: Tổng hai nghiệm $y_1(x)$ và $y_2(x)$ của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất (5.11) là nghiệm của phương trình đó.

Chứng minh: Nếu $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là hai nghiệm của phương trình (5.11) thì

$$y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x) \equiv 0,$$

$$y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x) \equiv 0.$$

Từ đây suy ra:

$$[y_1(x) + y_2(x)]'' + p(x)[y_1(x) + y_2(x)]' + q(x)[y_1(x) + y_2(x)]$$

$$= [y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)] + [y_2''(x) + p(x)y_2'(x) +$$

$$+ q(x)y_2(x)] \equiv 0.$$

Điều này chứng tỏ hàm số $y_1(x) + y_2(x)$ là nghiệm của phương trình (5.11).

Định lý 3: Nếu phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất (5.11), với các hệ số p(x), q(x) là các hàm thực, có nghiệm phức[1] $y(x) = u(x) + iv(x)$ thì phần thực u(x) và phần ảo v(x) của nghiệm phức là các nghiệm thực của phương trình đó.

Chứng minh: Nếu $y(x) = u(x) + iv(x)$ là nghiệm của phương trình (5.11) thì

$$[u(x) + iv(x)]'' + p(x)[u(x) + iv(x)]' + q(x)[u(x) + iv(x)] \equiv 0$$

$$\Rightarrow [u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x)] + i[v''(x) + p(x)v'(x) +$$

$$+ q(x)v(x)] \equiv 0$$

Điều này xảy ra khi và chỉ khi thoả mãn cả hai đồng nhất thức

$$u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) \equiv 0,$$

$$v''(x) + p(x)v'(x) + q(x)v(x) \equiv 0,$$

tức là u(x) và v(x) là các nghiệm của phương trình (5.11).

---

[1] Hàm phức biến số thực là hàm số dạng $u(x) + iv(x)$, trong đó u(x) và v(x) là các hàm thực. Đạo hàm của nó được tính theo công thức tính đạo hàm thông thường, với i là hằng số: $[u(x) + iv(x)]' = u'(x) + iv'(x)$

Định nghĩa: Ta nói các hàm số $y_1(x), y_2(x),..., y_m(x)$ *phụ thuộc tuyến tính* trên một khoảng X nếu tồn tại các số $k_1, k_2, ... k_m$, trong đó có ít nhất một số khác 0, sao cho trên khoảng đó

$$k_1y_1(x) + k_2y_2(x) + \cdots + k_my_m(x) \equiv 0. \qquad (5.12)$$

Ngược lại, nếu đồng nhất thức (5.12) chỉ thoả mãn khi

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$$

thì ta nói rằng các hàm số $y_1(x), y_2(x), ..., y_m(x)$ *độc lập tuyến tính* trên khoảng X.

Trường hợp m = 2, ta dễ dàng chứng minh được rằng hệ hai hàm số $y_1(x), y_2(x)$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi chúng tỷ lệ (tỷ số giữa hai hàm số đó là một hằng số).

Ví dụ: Các cặp hàm số sau đây độc lập tuyên tính trên $\mathbb{R}$ (do chúng không tỷ lệ):

- e^{ax} và e^{bx} $(a \neq b)$;
- e^{ax} và xe^{ax};
- $e^{ax}\cos kx$ và $e^{ax}\sin kx$.

Định lý 4: Nếu $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính trên đoạn [a; b] của phương trình (5.11) thì

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0, \forall x \in [a; b].$$

Chứng minh: Giả sử tồn tại x_0 sao cho $W(x_0) = 0$. Khi đó, hệ phương trình tuyến tính thuần nhất với ma trận hệ số là ma trận của định thức $W(x_0)$ có nghiệm không tầm thường, do đó tồn tại các số C_1 và C_2 không đồng thời bằng 0 sao cho

$$y_1(x_0)C_1 + y_2(x_0)C_2 = 0 \text{ và } y_1'(x_0)C_1 + y_2'(x_0)C_2 = 0 \qquad (5.13)$$

Do $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là hai nghiệm của phương trình (5.11) nên theo định lý 1 và định lý 2, hàm số

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

cũng là nghiệm của phương trình (5.11). Theo (5.13) thì nghiệm $y(x)$ thoả mãn điều kiện $y(x_0) = y'(x_0) = 0$. Mặt khác, ta thấy phương trình (5.11) có nghiệm $\varphi(x) \equiv 0$ cũng thoả mãn điều kiện đó. Theo định lý tồn tại và duy nhất thì

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) \equiv 0,$$

điều này trái với giả thiết rằng $y_1(x)$ và $y_2(x)$ độc lập tuyến tính. Vậy không thể tồn tại $x_0 \in [a; b]$ sao cho $W(x_0) = 0$, tức là $W(x) \neq 0$ với mọi $x \in [a; b]$.

Định lý 5:

Nếu $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình tuyến tính thuần nhất (5.11) thì $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, trong đó C_1 và C_2 là các hằng số bất kỳ, là nghiệm tổng quát của phương trình đó.

Chứng minh: Theo định lý 1 và định lý 2 thì, với C_1 và C_2 là các hằng số bất kỳ, $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ là nghiệm của phương trình (5.11). Ta cần chứng minh rằng mọi nghiệm riêng của phương trình (5.11) đều biểu diễn được dưới dạng đó.

Gọi $\overline{y}(x)$ là một nghiệm riêng bất kỳ của phương trình (5.11). Lấy bất kỳ điểm $x_0 \in [a, b]$ và đặt $\overline{y}(x_0) = y_0$, $\overline{y}'(x_0) = y'_0$. Vì $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình (5.11) nên theo định lý 4 ta có $W(x_0) \neq 0$. Hệ hai phương trình tuyến tính hai ẩn C_1, C_2

$$\begin{cases} y_1(x_0)C_1 + y_2(x_0)C_2 = y_0 \\ y_1'(x_0)C_1 + y_2'(x_0)C_2 = y_0' \end{cases}$$

là hệ phương trình Cramer, do đó nó có một nghiệm duy nhất ($C_1 = \overline{C}_1$, $C_2 = \overline{C}_2$). Điều này chứng tỏ $y(x) = \overline{C}_1 y_1(x) + \overline{C}_2 y_2(x)$ là nghiệm duy nhất của phương trình (5.11) thoả mãn điều kiện $y(x_0) = y_0$ và $y'(x_0) = y_0'$. Từ đây suy ra.

$$\overline{y}(x) = \overline{C}_1 y_1(x) + \overline{C}_2 y_2(x).$$

c. Phương trình tuyến tính không thuần nhất

Xét phương trình tuyến tính (5.10) với g(x) không đồng nhất bằng 0. Ta luôn luôn giả thiết rằng các hàm số p(x), q(x) và g(x) xác định và liên tục trong một khoảng nào đó. Cùng với phương trình (5.10) ta xét phương trình tuyến tính thuần nhất (5.11) có cùng vế trái. Phương trình (5.11) được gọi là *phương trình thuần nhất liên kết* của phương trình (5.10).

Giữa phương trình tuyến tính không thuần nhất (5.10) và phương trình thuần nhất liên kết của nó có mối liên hệ về nghiệm như sau:

Định lý 6: Nếu $y_0(x)$ là nghiệm của phương trình tuyến tính không thuần nhất (5.10) và y(x) là nghiệm của phương trình thuần nhất liên kết (5.11) thì hàm số $y_0(x) + y(x)$ là nghiệm của phương trình (5.10).

Chứng minh. Với giả thiết $y_0(x)$ là nghiệm của phương trình (5.10) và y(x) là nghiệm của phương trình thuần nhất liên kết (5.11) ta có các đồng nhất thức:

$$y_0''(x) + p(x)y_0'(x) + q(x)y_0(x) = g(x),$$

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0.$$

Khi đó, do

$$[y_0(x) + y(x)]' = y_0'(x) + y'(x),$$

$$[y_0(x) + y(x)]'' = y_0''(x) + y''(x).$$

ta cũng có:

$$[y_0(x) + y(x)]'' + p(x)[y_0(x) + y(x)]' + q(x)[y_0(x) + y(x)]$$

$$= [y_0''(x) + p(x)y_0'(x) + q(x)y_0(x)] + [y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x)]$$

$$= g(x) + 0 = g(x).$$

Điều này chứng tỏ $y_0(x) + y(x)$ là nghiệm của phương trình tuyến tính không thuần nhất (5.10).

Hệ quả: Nếu $y_0(x)$ là một nghiệm riêng của phương trình tuyến tính không thuần nhất (5.10) và $y_1(x)$, $y_2(x)$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình thuần nhất liên kết (5.11) thì nghiệm tổng quát của phương trình (5.10) là:

$$y = y_0(x) + C_1y_1(x) + C_2y_2(x).$$

IV. PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH CẤP HAI VỚI CÁC HỆ SỐ HẰNG

a. Phương trình tuyến tính thuần nhất

Xét phương trình

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{5.14}$$

trong đó p, q là các hằng số thực ($p, q \in \mathbb{R}$).

Theo định lý 5, để giải phương trình (5.14) ta chỉ cần tìm hai nghiệm độc lập tuyến tính của nó. Ta sẽ tìm nghiệm của phương trình (5.14) dưới dạng $y = e^{kx}$. Đạo hàm cấp 1 và cấp 2 của hàm số này là: $y' = k\,e^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$. Hàm số $y = e^{kx}$ là nghiệm của phương trình (5.14) khi và chỉ khi

$$k^2e^{kx} + pk\,e^{kx} + qe^{kx} \equiv (k^2 + pk + q)e^{kx} \equiv 0.$$

Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{5.15}$$

Ta gọi phương trình bậc hai (5.15) là *phương trình đặc trưng* của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất (5.14). Nghiệm của phương trình vi phân (5.14) được xác định thông qua nghiệm của phương trình đặc trưng (5.15) như sau:

- *Trường hợp 1*: $\Delta = p^2 - 4q > 0$.

Trong trường hợp này phương trình đặc trưng (5.15) có hai nghiệm thực phân biệt $k = a$, $k = b$. Khi đó, phương trình vi phân (5.14) có hai nghiệm độc lập tuyến tính e^{ax} và e^{bx}, do đó nghiệm tổng quát của phương trình (5.14) là

$$y = C_1e^{ax} + C_2e^{bx}.$$

- *Trường hợp 2*: $\Delta = p^2 - 4q = 0$.

Trong trường hợp này phương trình đặc trưng (5.15) có một nghiệm kép $k = a \in \mathbb{R}$. Khi đó, cùng với nghiệm $y_1 = e^{ax}$ phương trình vi phân (5.14) còn có nghiệm $y_2 = xe^{ax}$. Thật vậy, do a là nghiệm kép của phương trình đặc trưng (5.15), ta có

$$k^2 + pk + q = (k - a)^2.$$

Lấy đạo hàm hai vế theo k ta được

$$2k + p = 2(k - a).$$

Từ các hệ thức trên suy ra

$$a^2 + pa + q = 2a + p = 0.$$

Với $y_2 = xe^{ax}$, ta có $y_2' = (ax + 1)\,e^{ax}$, $y_2'' = (a^2x + 2a)e^{ax}$, do đó

$$y_2'' + p\,y_2' + q = [(a^2x + 2a) + p(ax + 1) + qx]\,e^{ax}$$

$$= [(a^2 + pa + q)x + 2a + p]\,e^{ax} \equiv 0.$$

Điều này chứng tỏ $y_2 = xe^{ax}$ cũng là nghiệm của phương trình (5.14). Hai nghiệm $y_1 = e^{ax}$ và $y_2 = x\,e^{ax}$ độc lập tuyến tính, do đó nghiệm tổng quát của phương trình (5.14) trong trường hợp này là

$$y = C_1e^{ax} + C_2xe^{ax} = (C_1 + C_2x)e^{ax}.$$

- *Trường hợp 3*: $\Delta = p^2 - 4q < 0$.

Trong trường hợp này phương trình đặc trưng (5.15) có hai nghiệm phức liên hợp $k = \alpha \pm \beta i$. Khi đó, phương trình vi phân (5.14) có hai nghiệm phức liên hợp

$$e^{(\alpha \pm \beta i)x} = e^{\alpha x}e^{\pm \beta i} = e^{\alpha x}(\cos\beta x \pm i\sin\beta x).$$

Cặp nghiệm phức liên hợp này cho tương ứng hai nghiệm thực độc lập tuyến tính của phương trình (5.14): $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$. Nghiệm tổng quát của phương trình (5.14) trong trường hợp này là:

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).$$

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$y'' - 5y' + 6y = 0. \qquad (5.16)$$

Giải: Trong trường hợp này phương trình đặc trưng

$$k^2 - 5k + 6 = 0$$

có hai nghiệm thực phân biệt x = 2, x = 3. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (5.16) là: $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$.

Ví dụ 2: Giải phương trình:

$$y'' + 6y' + 9y = 0. \qquad (5.17)$$

Giải: Trong trường hợp này phương trình đặc trưng

$$k^2 + 6k + 9 = 0$$

có một nghiệm kép x = −3. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (5.17) là: $y = (C_1 + C_2x)e^{3x}$.

Ví dụ 3: Giải phương trình:

$$y'' - 2y' + 10y = 0. \qquad (5.18)$$

Giải: Trong trường hợp này, phương trình đặc trưng

$$k^2 - 2k + 10 = 0$$

có biệt thức Δ' = − 9, do đó nó có hai nghiệm phức liên hợp:

$$k = 1 \pm i\sqrt{9} = 1 \pm 3i$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (5.18) là:

$$y = e^x(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x).$$

b. Phương trình tuyến tính không thuần nhất

Xét phương trình vi phân tuyến tính cấp 2

$$y'' + py' + qy = g(x), \tag{5.19}$$

trong đó các hệ số p, q là các hằng số thực, còn g(x) là một hàm số liên tục.

Theo phương pháp nói trên ta dễ dàng tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất liên kết $y'' + py' + qy = 0$, do đó phương trình (5.19) có thể giải được nếu ta tìm được một nghiệm riêng của nó.

Sau đây chúng tôi mô tả (không chứng minh) phương pháp hệ số bất định để tìm nghiệm riêng của phương trình (5.19) trong một số trường hợp đặc biệt, khi hàm số g(x) ở vế phải có dạng đặc biệt.

- *Trường hợp 1:* $g(x) = P(x)$, trong đó P(x) là một đa thức.

Trong trường hợp này, nếu $k = 0$ không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng (5.15) thì nghiệm của phương trình (5.19) có thể tìm được dưới dạng

$$y_0(x) = Q(x),$$

trong đó Q(x) là một đa thức cùng bậc với P(x).

Nếu $k = 0$ là nghiệm bội s của phương trình đặc trưng (nghiệm đơn của phương trình bậc hai là nghiệm bội 1, còn nghiệm kép là nghiệm bội 2) thì nghiệm riêng của phương trình (5.19) có thể tìm được dưới dạng:

$$y_0(x) = x^s Q(x).$$

- *Trường hợp 2:* $g(x) = P(x)e^{ax}$, trong đó P(x) là một đa thức.

Trong trường hợp này, nếu $k = a$ không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng (5.15) thì nghiệm của phương trình (5.19) có thể tìm được dưới dạng

$$y_0(x) = Q(x)e^{ax},$$

trong đó Q(x) là một đa thức cùng bậc với P(x).

Nếu k = a là nghiệm bội s của phương trình đặc trưng thì nghiệm riêng của phương trình (5.19) có thể tìm được dưới dạng:

$$y_0(x) = x^s Q(x)e^{ax}.$$

• *Trường hợp 3*: $g(x) = e^{ax}[P_1(x)\cos bx + P_2(x)\sin bx]$, trong đó $P_1(x)$ và $P_2(x)$ là các đa thức bậc ≤ m (một trong hai đa thức đó có bậc m còn đa thức kia có bậc ≤ m, kể cả trường hợp đồng nhất bằng 0).

Trong trường hợp này, nếu $k = a \pm bi$ không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng (5.15) thì nghiệm của phương trình (5.19) có thể tìm được dưới dạng

$$y_0(x) = e^{ax}[Q_1(x)\cos bx + Q_2(x)\sin bx],$$

trong đó $Q_1(x)$ và $Q_2(x)$ là các đa thức bậc ≤ m.

Nếu $k = a \pm bi$ là nghiệm của phương trình đặc trưng thì nghiệm riêng của phương trình (5.19) có thể tìm được dưới dạng:

$$y_0(x) = xe^{ax}[Q_1(x)\cos bx + Q_2(x)\sin bx].$$

Ví dụ 1: Giải phương trình

$$y'' - 3y' + 2y = 2x - 1. \qquad (5.20)$$

Giải: Trong trường hợp này phương trình đặc trưng

$$k^2 - 3k + 2 = 0$$

có hai nghiệm thực k = 1 và k = 2, do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất liên kết là:

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x}.$$

Do k = 0 không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng của phương trình (5.20) có thể tìm được dưới dạng:

$$y = y_0(x) = Ax + B.$$

Hàm số này là nghiệm của phương trình đã cho khi và chỉ khi:

$$y'' - 3y' + 2y = 0 - 3A + 2(Ax + B) = 2Ax + 2B - 3A \equiv 2x - 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2A = 2 \\ 2B - 3A = -1 \end{cases} \Leftrightarrow A = 1 \text{ và } B = 1.$$

Ta tìm được nghiệm riêng $y_0(x) = x + 1$. Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình (5.20) là:

$$y = x + 1 + C_1e^x + C_2e^{2x}.$$

Ví dụ 2: Giải phương trình

$$y'' + y' = 4x + 3. \tag{5.21}$$

Giải: Trong trường hợp này phương trình đặc trưng $k^2 + k = 0$ có hai nghiệm thực $k = 0$ và $k = -1$, do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất liên kết là

$$y = C_1 + C_2e^{-x}.$$

Do $k = 0$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng của phương trình (5.21) có thể tìm được dưới dạng:

$$y = y_0(x) = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx.$$

Hàm số này là nghiệm của phương trình đã cho khi và chỉ khi:

$$y'' + y' = 2A + (2Ax + B) = 2Ax + 2A + B \equiv 4x + 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2A = 4 \\ 2A + B = 3 \end{cases} \Leftrightarrow A = 2 \text{ và } B = -1.$$

Ta tìm được nghiệm riêng $y_0(x) = 2x^2 - x$. Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình (5.21) là:

$$y = 2x^2 - x + C_1 + C_2e^{-x}.$$

Ví dụ 3: Giải phương trình

$$y'' + 6y' + 8y = xe^{-3x}. \quad (5.22)$$

Giải: Trong trường hợp này phương trình đặc trưng

$$k^2 + 6k + 8 = 0$$

có hai nghiệm thực $k = -2$ và $k = -4$, do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất liên kết là

$$y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-4x}.$$

Do $k = -3$ không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng của phương trình (5.22) có thể tìm được dưới dạng:

$$y = y_0(x) = (Ax + B)e^{-3x}.$$

Hàm số này là nghiệm của phương trình đã cho khi và chỉ khi:

$y'' + 6y' + 8y =$

$$= (9Ax - 6A + 9B)e^{-3x} + 6(-3Ax + A - 3B)e^{-3x} + 8(Ax + B)e^{-3x}$$

$$= (-Ax - B)e^{-3x} \equiv xe^{-3x} \Leftrightarrow -Ax - B \equiv x$$

$$\Leftrightarrow A = -1 \text{ và } B = 0.$$

Ta tìm được nghiệm riêng $y_0(x) = -xe^{-3x}$. Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình (5.22) là:

$$y = -xe^{-3x} + C_1e^{-2x} + C_2e^{-4x}.$$

Ví dụ 4: Giải phương trình

$$y'' + 4y = \cos 2x. \quad (5.23)$$

Giải: Trong trường hợp này phương trình đặc trưng $k^2 + 4 = 0$ có hai nghiệm phức liên hợp $k = \pm 2i$, do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất liên kết là

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$$

Do $k = 0 \pm 2i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng của phương trình (5.23) có thể tìm được dưới dạng:

$$y = y_0(x) = x(A\cos 2x + B\sin 2x).$$

Hàm số này là nghiệm của phương trình đã cho khi và chỉ khi:

$$y'' + 4y = -4A\sin 2x + 4B\cos 2x + x(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x$$

$$+ 4x(A\cos 2x + B\sin 2x)$$

$$= -4A\sin 2x + 4B\cos 2x \equiv \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow -4A = 0 \text{ và } 4B = 1 \Leftrightarrow A = 0 \text{ và } B = \frac{1}{4}.$$

Ta tìm được nghiệm riêng $y_0(x) = \frac{1}{4} x\sin 2x$. Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình (5.23) là:

$$y = \frac{1}{4} x\sin 2x + C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$$

Ví dụ 5: Xét phương trình

$$y'' + py' + qy = r, \tag{5.24}$$

trong đó p, q, r là các hằng số.

Nếu $q \neq 0$ thì $k = 0$ không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng $k^2 + pk + q = 0$, do đó ta có thể tìm nghiệm riêng của phương trình (5.24) dưới dạng $y_0(x) = A$ (A là hằng số). Thay $y = A$, $y' = 0$, $y'' = 0$ vào phương trình (5.24) ta xác định được $A = r/q$. Nghiệm tổng quát của phương trình (5.24) trong trường hợp $q \neq 0$ như sau:

$$y = \frac{r}{q} + C_1y_1(x) + C_2y_2(x),$$

trong đó $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình thuần nhất liên kết (hai nghiệm đó được xác định tuỳ theo các nghiệm của phương trình đặc trưng).

Nếu $q = 0$ và $p \neq 0$ thì $k = 0$ nghiệm đơn của phương trình đặc trưng $k^2 + pk = 0$ (phương trình này có hai nghiệm $k = 0$ và $k = -p$), do đó ta có thể tìm nghiệm riêng của phương trình (5.24) dưới dạng $y = Bx$ (B là hằng số). Thay $y' = B$, $y'' = 0$ vào phương trình $y'' + py' = r$ ta tìm được $B = r/p$. Trong trường hợp này phương trình (5.24) có nghiệm riêng $y_0(x) = rx/p$ và nghiệm tổng quát của nó là:

$$y = \frac{rx}{p} + C_1e^{-px} + C_2.$$

Trường hợp $p = q = 0$ dễ dàng tìm được nghiệm tổng quát của phương trình $y'' = r$:

$$y = \frac{rx^2}{2} + C_1x + C_2.$$

c. Phương pháp biến thiên hằng số

Trong trường hợp không tìm được nghiệm riêng của phương trình (5.19) ta có thể sử dụng phương pháp biến thiên hằng số. Nội dung của phương pháp này như sau:

Giải phương trình thuần nhất liên kết, ta được nghiệm tổng quát của nó:

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x), \tag{5.25}$$

trong đó $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình thuần nhất liên kết, C_1 và C_2 là các hằng số bất kỳ.

Tiếp theo ta tìm nghiệm của phương trình không thuần nhất (5.19) dưới dạng (5.25), nhưng với C_1, C_2 là các hàm số của x:

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x). \tag{5.26}$$

Lấy đạo hàm của hàm số (5.26) ta có:

$$y' = C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x).$$

Áp đặt điều kiện

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \tag{5.27}$$

ta có

$$y' = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x). \tag{5.28}$$

Lấy đạo hàm của hàm số (5.28) ta được:

$$y'' = C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x). \tag{5.29}$$

Từ (5.26), (5.28) và (5.29) ta có:

$$y'' + py' + qy =$$

$$= C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x)$$

$$+ p[C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)] + q[C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)]$$

$$= C_1(x)[y_1''(x) + py_1'(x) + qy_1(x)] + C_2(x)[y_2''(x) + py_2'(x) + qy_2(x)]$$

$$+ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x).$$

Do $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là các nghiệm của phương trình thuần nhất liên kết của phương trình (5.19) nên các biểu thức trong các dấu ngoặc vuông đồng nhất bằng 0. Từ đây suy ra:

$$y'' + py' + qy = C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x).$$

Như vậy hàm số (5.26) là nghiệm của phương trình (2.19) khi và chỉ khi thoả mãn đồng nhất thức:

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = g(x). \qquad (5.30)$$

Các đồng nhất thức (5.27) và (5.30) cho ta hệ phương trình để xác định $C_1'(x)$ và $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} y_1(x)C_1'(x) + y_2(x)C_2'(x) = 0 \\ y_1'(x)C_1'(x) + y_2'(x)C_2'(x) = g(x) \end{cases} \qquad (5.31)$$

Vì $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là các nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình thuần nhất liên kết của phương trình (5.19) nên, theo định lý 4, ta có:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

với mọi x thuộc khoảng xác định X của các nghiệm $y_1(x)$ và $y_2(x)$. Hệ phương trình Cramer (5.31) cho phép ta tìm được:

$$C_1'(x) = h_1(x),\ C_2'(x) = h_2(x) \qquad (5.32)$$

Từ đây suy ra:

$$C_1(x) = \int h_1(x)dx = \varphi_1(x) + \bar{C}_1, \qquad (5.33)$$

$$C_2(x) = \int h_2(x)dx = \varphi_2(x) + \bar{C}_2. \qquad (5.34).$$

Thay $C_1(x)$ và $C_2(x)$ từ (5.32) và (5.33) vào biểu thức (5.25) ta được nghiệm tổng quát của phương trình (5.19).

Để tiện cho thực hành, chúng tôi xin tóm tắt các bước thực hiện phương pháp biến thiên hằng số để giải phương trình tuyến tính không thuần nhất (5.19) như sau:

- Tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất liên kết dưới dạng (5.25);
- Tìm $C_1(x)$ và $C_2(x)$ để hàm số (5.26) là nghiệm của phương

trình (5.19). Để thực hiện điều đó ta giải hệ phương trình (5.31) và được kết quả (5.32), từ đó suy ra (5.33) và (5.34);

- Thay $C_1(x)$ và $C_2(x)$ từ (5.33) và (5.34) vào biểu thức (5.26) ta được nghiệm tổng quát của phương trình (5.19).

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}. \tag{5.35}$$

Giải: Giải phương trình thuần nhất liên kết $y'' - y = 0$ ta được nghiệm tổng quát của nó:

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x}.$$

Tiếp theo, ta tìm nghiệm của phương trình (5.35) dưới dạng:

$$y = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}. \tag{5.36}$$

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} e^xC_1'(x) + e^{-x}C_2'(x) = 0 \\ e^xC_1'(x) - e^{-x}C_2'(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1} \end{cases}$$

ta tìm được:

$$C_1'(x) = \frac{1}{2(e^x + 1)},\ C_2'(x) = -\frac{e^{2x}}{2(e^x + 1)}.$$

Từ đây suy ra:

$$C_1(x) = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{e^x + 1} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln(e^x + 1) + \overline{C}_1,$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{2}\int\frac{e^{2x}dx}{e^x + 1} = -\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\ln(e^x + 1) + \overline{C}_2$$

($\overline{C}_1$ và C_2 là các hằng số bất kỳ).

Thay $C_1(x)$ và $C_2(x)$ vừa tìm được vào (5.36) ta được nghiệm tổng quát của phương trình (5.35):

$$y = \frac{1}{2}\left[x - \ln(e^x + 1)\right]e^x - \frac{1}{2}\left[1 - e^{-x}\ln(e^x + 1)\right] + \overline{C}_1 e^x + \overline{C}_2 e^{-x}.$$

Ví dụ 2: Giải phương trình:

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}. \qquad (5.37)$$

Giải: Giải phương trình thuần nhất liên kết $y'' + y = 0$ ta được nghiệm tổng quát:

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Tiếp theo, ta tìm nghiệm của phương trình (5.37) dưới dạng:

$$y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x. \qquad (5.38)$$

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \frac{1}{\cos x} \end{cases}$$

ta tìm được

$$C_1'(x) = -\operatorname{tg}x\ ,\ C_2'(x) = 1.$$

Lấy tích phân ta được:

$$C_1(x) = \ln|\cos x| + \overline{C}_1,\ C_2(x) = x + \overline{C}_2$$

($\overline{C}_1$ và $\overline{C}_2$ là các hằng số bất kỳ).

Thay $C_1(x)$ và $C_2(x)$ vừa tìm được vào (5.38) ta được nghiệm tổng quát của phương trình (5.37):

$$y = \cos x.\ln|\cos x| + x\sin x + \overline{C}_1\cos x + \overline{C}_2\sin x.$$

BÀI TẬP

18. Tìm nghiệm tổng quát và nghiệm riêng thoả mãn điều kiện

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 2$$

của phương trình $y'' = xe^x$.

19. Giải các phương trình sau bằng cách biến đổi thành phương trình vi phân cấp 1, với $z = y' = z(x)$ là hàm phải tìm:

a) $x y'' + 2 y' = 0$ b) $y'' + y' \operatorname{tg}x = 0$

20. Giải phương trình sau bằng cách biến đổi thành phương trình vi phân cấp 1, với $z = \dfrac{dy}{dx} = z(y)$ là hàm phải tìm:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \operatorname{cotg}y$$

21. Chứng minh rằng, nếu $y_1(x)$ là nghiệm của phương trình

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)y = g_1(x)$$

và $y_2(x)$ là nghiệm của phương trình

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)y = g_2(x)$$

thì $y_1(x) + y_2(x)$ là nghiệm của phương trình

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)y = g_1(x) + g_2(x)$$

22. Giải các phương trình:

a) $y'' + 4y' + 3y = 0$ b) $y'' - 7y' + 10y = 0$

c) $y'' + 4y' + 4y = 0$ d) $y'' + 4y' + 8y = 0$

23. Tìm nghiệm thoả mãn điều kiện ban đầu cho kèm theo của các phương trình sau:

a) $y'' + y' - 2y = -10;\ y(0) = 8,\ y'(0) = -9$

b) $y'' + y' + 2y = 4;\ y(0) = 3,\ y'(0) = (2\sqrt{7} - 1)/2$

24. Đối với mỗi phương trình sau đây, hãy viết dạng nghiệm riêng có thể tìm được bằng phương pháp hệ số bất định:

a) $y'' + y' + ky = x$ b) $y'' - 2y' = x^2$

c) $y'' + 4y' + 4y = xe^{-2x}$ d) $y'' - 4y' + 4y = x^2e^{-2x}$

e) $y'' + 4y' + 13y = e^{-2x}(x^2\cos 3x + 2\sin 3x)$

f) $y'' + 4y' + 13y = e^{-2x}(x\cos 3x + 2\sin 3x)$

25. Giải các phương trình sau bằng cách tìm trước một nghiệm riêng:

a) $y'' - y = x^2 - x + 1$ b) $y'' - 4y' = -12x^2 + 6x - 4$

c) $y'' + y = 4e^x$ d) $y'' - 2y' + y = 4e^x$

e) $y'' + 4y = \sin 2x$ f) $y'' + y = 6\sin 2x$

g) $y'' - y' + y = -13\sin 2x$

h) $y'' - 2y' + 2y = e^x(2\cos x + 4x\sin x)$

26. Giải các phương trình sau:

a) $y'' - 2y' - 3y = -4e^x + 3$ b) $y'' - 3y' = e^{3x} - 18x$

c) $y'' + y = e^x + \cos x$ d) $y'' + y = \cos x + \cos 2x$

e) $y'' - 2y' + 2y = e^x + \cos x$ f) $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x} + 2x^2$

27. Giải các phương trình sau bằng phương pháp biến thiên hằng số:

a) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$ b) $y'' + y = \operatorname{tg} x$

c) $y'' - y' = \dfrac{2 - x}{x^3}e^x$ d) $y'' - 2y' + y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^3}$

e) $y'' - y' = 4\sqrt{x} + \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

§6 PHÂN TÍCH ĐỘNG TRONG KINH TẾ: MỘT SỐ MÔ HÌNH PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH CẤP 2

I. ĐIỀU KIỆN ỔN ĐỊNH ĐỘNG

Giả sử quy luật vận động theo thời gian t của biến số y được thiết lập dưới dạng phương trình:

$$y'' + py' + qy = r. \qquad (6.1)$$

Trạng thái cân bằng $y = \overline{y}$ là một nghiệm riêng của phương trình (6.1). Trạng thái cân bằng $\overline{y}$ tồn tại khi và chỉ khi $q \neq 0$. Khi đó

$$\overline{y} = \frac{r}{q}.$$

Điều kiện ổn định động của trạng thái cân bằng $\overline{y}$ là điều kiện để mọi quỹ đạo thời gian hội tụ đến $\overline{y}$.

Định lý:

Trạng thái cân bằng $\overline{y}$ ổn định động khi và chỉ khi tất cả các nghiệm của phương trình đặc trưng $k^2 + pk + q = 0$ đều có phần thực là số âm (phần thực của nghiệm thực chính là nghiệm đó).

Chứng minh:

Dễ dàng xác nhận điều này trong cả ba trường hợp:

- Nếu phương trình đặc trưng có hai nghiệm thực phân biệt $k_1 = a$, $k_2 = b$ thì nghiệm tổng quát của phương trình (6.1) là:

$$y = \overline{y} + C_1e^{at} + C_2e^{bt}.$$

Trong trường hợp này $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = \bar{y}$ khi và chỉ khi cả a và b đều là số âm.

- Nếu phương trình đặc trưng có một nghiệm thực kép $k_1 = k_2 = a$ thì nghiệm tổng quát của phương trình (6.1) là:

$$y = \bar{y} + (C_1 + C_2x)e^{at}.$$

Trong trường hợp này $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = \bar{y}$ khi và chỉ khi $a < 0$.

- Nếu phương trình đặc trưng có hai nghiệm phức liên hợp $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ thì nghiệm tổng quát của phương trình (6.1) là:

$$y = \bar{y} + e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t).$$

Trong trường hợp này $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = \bar{y}$ khi và chỉ khi $\alpha < 0$.

Nhận xét: Trường hợp phương trình đặc trưng không có nghiệm thực ($p^2 - 4q < 0$) thì phần thực của các nghiệm phức là $\alpha = -p/2$, do đó α là số âm khi và chỉ khi $p > 0$. Nếu phương trình đặc trưng có nghiệm thực ($p^2 - 4q > 0$) thì điều kiện để cả hai nghiệm thực đều âm là: $p > 0$ và $q > 0$.

II. MÔ HÌNH THỊ TRƯỜNG VỚI KỲ VỌNG GIÁ

Khi xét biến thời gian t liên tục, thông tin về xu hướng giá $P(t)$ có thể biết được thông qua $P'(t)$ (giá tăng hay giảm) và $P''(t)$ (giá tăng với tốc độ tăng hay giảm). Các thông tin đó có thể ảnh hưởng đến quyết định của người tiêu dùng và nhà sản xuất. Chẳng hạn, nếu cho rằng trong tương lai gần, giá một loại hàng hoá sẽ tăng nhanh thì người tiêu dùng sẽ mua nhiều hơn hàng hoá đó. Để xem xét ảnh hưởng của kỳ vọng giá (nhận định về xu hướng thay đổi của giá cả trên thị trường) đối với lượng cung và lượng cầu người ta xét hàm cung và hàm cầu dưới dạng:

$$Q_{dt} = D[P(t),\ P'(t),\ P''(t)],$$

$$Q_{st} = S[P(t),\ P'(t),\ P''(t)].$$

Quỹ đạo thời gian của giá thị trường (giá cân bằng cung cầu) được thiết lập dưới dạng phương trình vi phân cấp hai:

$$S[P(t),\ P'(t),\ P''(t)] = D[P(t),\ P'(t),\ P''(t)]. \qquad (6.2)$$

Nếu hạn chế ở mô hình tuyến tính và đơn giản hoá ký hiệu ta có thể viết:

$$Q_d = a - bP + \alpha P' + \beta P'',$$

$$Q_s = -c + dP + \gamma P' + \delta P''$$

$$(a, b, c, d > 0).$$

Để cho đơn giản ta giả thiết rằng chỉ có hàm cầu chứa kỳ vọng giá, tức là $\gamma = \delta = 0$. Khi đó phương trình (6.2) có dạng:

$$-c + dP = a - bP + \alpha P' + \beta P''$$

$$\Leftrightarrow\ P'' + \frac{\alpha}{\beta}P' - \frac{b+d}{\beta}P = -\frac{a+c}{\beta}. \qquad (6.3)$$

Trạng thái cân bằng là: $\bar{P} = \dfrac{a+c}{b+d}$.

Dựa vào định lý về điều kiện ổn định động của trạng thái cân bằng ta có thể rút ra một số kết luận khái quát về tính ổn định động của trạng thái cân bằng như sau:

- Nếu $\beta > 0$ thì phương trình đặc trưng có hai nghiệm thực trái dấu, do đó trạng thái cân bằng $\bar{P}$ không ổn định

- Nếu $\beta < 0$ và $\alpha < 0$ thì các hệ số của phương trình (6.3) dương, do đó các nghiệm của phương trình đặc trưng của nó hoặc là các số thực âm, hoặc là các số phức có phần thực âm.

Trong trường hợp này trạng thái cân bằng $\overline{P}$ ổn định.

- Nếu $\beta < 0$ và $\alpha > 0$ thì hệ số của P' âm và hệ số của P dương. Trong trường hợp này phương trình đặc trưng hoặc có các nghiệm thực dương, hoặc có các nghiệm phức với phần thực dương, do đó trạng thái cân bằng $\overline{P}$ không ổn định.

III. MÔ HÌNH ĐIỀU CHỈNH GIÁ CÓ TÍNH ĐẾN HÀNG HOÁ TỒN ĐỌNG

Trong mô hình đã xét ở §4 ta giả sử rằng tốc độ điều chỉnh giá tỷ lệ thuận với lượng chênh lệch cung cầu:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha(Q_d - Q_s) \quad (\alpha > 0),$$

trong đó lượng cung Q_s và lượng cầu Q_d là các hàm số biến số t (thời gian).

Trong mô hình nói trên ta bỏ qua lượng hàng hoá tồn đọng (hàng chưa bán hết) khi có sự dư cung. Vấn đề đặt ra ở đây là không chỉ lượng dư cung hiện thời mà cả lượng hàng tồn đọng chưa bán được cũng gây áp lực hạ giá. Để biểu diễn ý tưởng này ta xét mô hình:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha(Q_d - Q_s) - \beta\int_0^t [Q_s(x) - Q_d(x)]dx, \qquad (6.4)$$

trong đó α và β là các hằng số dương.

Từ (6.4) ta có:

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \alpha\left(\frac{dQ_d}{dt} - \frac{dQ_s}{dt}\right) - \beta[Q_s(t) - Q_d(t)].$$

Giả sử hàm cung và hàm cầu là các hàm tuyến tính:

$$Q_d = a - bP,\ Q_s = -c + dP \quad (a, b, c, d > 0).$$

Khi đó

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \alpha\left(-b\frac{dP}{dt} - d\frac{dP}{dt}\right) - \beta[-(a+c) + (b+d)P]$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2P}{dt^2} + \alpha(b+d)\frac{dP}{dt} + \beta(b+d)P = \beta(a+c). \qquad (6.5)$$

Quỹ đạo thời gian của giá cả được thiết lập gián tiếp dưới dạng phương trình vi phân (6.5). Với giả thiết a, b, c, d, α, β là các hằng số dương, các hệ số của phương trình (6.5) dương, do đó phương trình đặc trưng hoặc có các nghiệm thực âm, hoặc có các nghiệm phức với phần thực âm. Trạng thái cân bằng

$$\overline{P} = \frac{a+c}{b+d}$$

ổn định động. Dù xuất phát ở trạng thái $P_t = P(0)$ nào, giá thị trường sẽ được điều chỉnh dần đến trạng thái cân bằng.

IV. MÔ HÌNH Ô NHIỄM MÔI TRƯỜNG

Người ta cho rằng hàm lượng carbon dioxide trong khí quyển làm tăng nhiệt độ trái đất. Hàm lượng đó ngày một tăng cùng với sự phát triển công nghiệp, do chất đốt của các nhà máy thải carbon dioxide vào khí quyển, đồng thời một phần khí thải đó được hấp thụ tự nhiên bởi nước biển và cây cỏ.

Gọi y là hàm lượng carbon dioxide. Hàm lượng đó tăng theo quy luật

$$\frac{dy}{dt} = x - \alpha y, \qquad (6.6)$$

trong đó x là lượng carbon dioxide do các xí nghiệp công nghiệp thải vào khí quyển và $\alpha > 0$ là tham số biểu diễn tỷ phần carbon hấp thu bởi môi trường tự nhiên. Giả sử lượng carbon dioxide do các xí nghiệp công nghiệp thải vào khí quyển tăng theo thời gian theo quy luật

$$\frac{dx}{dt} = ae^{bt} - \beta y, \tag{6.7}$$

trong đó a, b, β là các hằng số dương. Hệ số β biểu diễn tỷ phần carbon dioxide bị hạn chế bớt do các hoạt động chống ô nhiễm khí quyển của các quốc gia.

Mô hình của chúng ta là một hệ hai phương trình vi phân cấp 1, nhưng ta có thể biểu diễn hệ phương trình đó dưới dạng phương trình vi phân cấp 2. Lấy đạo hàm hai vế của phương trình (6.6) và thế đạo hàm của x từ (6.7) vào vế phải ta có:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = ae^{bt} - \beta y - \alpha\frac{dy}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \alpha\frac{dy}{dt} + \beta y = ae^{bt}. \tag{6.8}$$

Theo phương pháp hệ số bất định ta tìm được nghiệm riêng của phương trình (6.8):

$$y(t) = \frac{a.e^{bt}}{b^2 + \alpha b + \beta}.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (6.8) như sau:

- Nếu $\alpha^2 - 4\beta > 0$:

$$y = C_1e^{k_1t} + C_2e^{k_2t} + \frac{a.e^{bt}}{b^2 + \alpha b + \beta},$$

trong đó $k_{1,2} = -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}$.

- Nếu $\alpha^2 - 4\beta = 0$:

$$y = (C_1 + C_2 t)e^{-\frac{\alpha}{2}t} + \frac{a.e^{bt}}{b^2 + \alpha b + \beta}.$$

- Nếu $\alpha^2 - 4\beta < 0$:

$$y = e^{-\frac{\alpha}{2}t}\left(C_1 \cos\theta t + C_2 \sin\theta t\right) + \frac{a.e^{bt}}{b^2 + \alpha b + \beta},$$

trong đó $\theta = \dfrac{\sqrt{4\beta - \alpha^2}}{2}$.

Do $\alpha > 0$, $\beta > 0$ nên k_1, k_2, $-\dfrac{\alpha}{2}$ là các số âm. Trong cả ba trường hợp nói trên ta đều có:

$$y(t) - \frac{a.e^{bt}}{b^2 + \alpha b + \beta} \to 0 \text{ khi } t \to +\infty.$$

Như vậy, quỹ đạo dài hạn của hàm lượng carbon dioxide trong khí quyển là

$$y = \frac{a.e^{bt}}{b^2 + \alpha b + \beta}.$$

Chương 7

PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN

§1. KHÁI NIỆM SAI PHÂN VÀ PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN

I. THỜI GIAN RỜI RẠC VÀ KHÁI NIỆM SAI PHÂN

Để phân tích động thái của một biến số kinh tế y ta cần xác định quỹ đạo thời gian $y = y(t)$, với t là biến thời gian. Trong các mô hình sử dụng đạo hàm và vi phân ta xét t thay đổi liên tục. Tuy nhiên, trên thực tế việc đo và phân tích các biến số kinh tế được tiến hành rời rạc theo thời gian: theo giờ, theo ngày, theo tháng, theo quý, theo năm..., tức là theo các thời kỳ đều đặn. Với cách xem xét như vậy thì biến số t chỉ nhận các giá trị nguyên: $t = 0$ (thời kỳ xuất phát), $t = 1$(thời kỳ thứ nhất), $t = 2$ (thời kỳ thứ hai), v.v... Để phân biệt với hàm số đối số liên tục, ta dùng ký hiệu y_t để nói rằng y hàm số đối số rời rạc $t = 0, 1, 2, 3, ...$

Khi xét hàm số đối số liên tục y(t) vi phân của hàm số được xác định thông qua đạo hàm

$$y'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}.$$

Khi xét t biến thiên rời rạc thì giá trị nhỏ nhất của $|\Delta t|$ bằng 1, do đó khái niệm đạo hàm và vi phân không có nghĩa. Trong trường hợp này, thay cho vi phân, người ta sử dụng khái niệm *sai phân*.

Định nghĩa: *Sai phân (sai phân cấp 1)* của hàm số đối số rời rạc $y = y_t$ là độ chênh lệch giá trị của hàm số tại hai thời kỳ kế tiếp.

Sai phân của hàm số $y = y_t$ tại thời điểm t được ký hiệu là Δy_t và được xác định theo công thức

$$\Delta y_t = y_{t+1} - y_t.$$

Ví dụ:

- Nếu hàm số y_t biến thiên theo quy luật cấp số cộng với công sai d thì sai phân cấp một là hằng số d:

$$\Delta y_t = y_{t+1} - y_t = d.$$

- Nếu hàm số y_t biến thiên theo quy luật cấp số nhân với công bội q thì sai phân tại thời điểm t được tính theo công thức:

$$\Delta y_t = y_{t+1} - y_t = qy_t - y_t = (q-1)y_t.$$

Cũng như đạo hàm, sai phân Δy_t của hàm số $y = y_t$ là một hàm số đối số rời rạc t, do đó khái niệm sai phân cấp cao được định nghĩa tương tự như vi phân cấp cao.

Định nghĩa: *Sai phân cấp n* của hàm số $y = y_t$ là sai phân của sai phân cấp $n - 1$ của hàm số đó.

Sai phân cấp n của hàm số y_t tại điểm t được ký hiệu là $\Delta^n y_t$:

$$\Delta^n y_t = \Delta(\Delta^{n-1} y_t)_t = \Delta^{n-1} y_{t+1} - \Delta^{n-1} y_t$$

Chẳng hạn, sai phân cấp hai được tính theo công thức

$$\Delta^2 y_t = \Delta(\Delta y_t) = \Delta y_{t+1} - \Delta y_t = (y_{t+2} - y_{t+1}) - (y_{t+1} - y_t)$$

$$= y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t.$$

Tương tự, ta có thể biểu diễn $\Delta^n y_t$ qua $y_t, y_{t+1}, \ldots, y_{t+n}$.

II. PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN

a. Khái niệm phương trình sai phân

Trong nhiều trường hợp quỹ đạo thời gian $y = y_t$ của một biến số rời rạc không thể quan sát được một cách trực tiếp mà phải thông qua các sai phân. Lý thuyết phương trình sai phân đề cập đến việc thiết lập hoặc phân tích định tính quỹ đạo thời gian $y = y_t$ thông qua các quan hệ sai phân.

Định nghĩa: *Phương trình sai phân* là phương trình với đối tượng phải tìm là một hàm số đối số rời rạc $y = y_t$, trong đó hàm số phải tìm có mặt dưới dạng sai phân các cấp.

Cấp cao nhất của sai phân của hàm phải tìm có mặt trong một phương trình sai phân được gọi là *cấp của phương trình sai phân* đó.

Phương trình sai phân cấp n có dạng tổng quát như sau:

$$\Phi(t, y_t, \Delta y_t, \Delta^2 y_t, \ldots, \Delta^n y_t) = 0. \qquad (1.1)$$

Bằng cách biểu diễn sai phân các cấp theo định nghĩa ta có thể bỏ dấu sai phân Δ và viết phương trình (1.1) dưới dạng

$$F(t, y_t, y_{t+1}, \ldots, y_{t+n}) = 0. \qquad (1.2)$$

Nếu từ dạng tổng quát (1.2) ta có thể biểu diễn y_{t+n} qua $t, y_t, y_{t-1}, \ldots, y_{t+n-1}$ thì phương trình sai phân cấp n có dạng:

$$y_{t+n} = f(t, y_t, y_{t+1}, \ldots, y_{t+n-1}). \qquad (1.3)$$

Chúng ta sẽ xét phương trình sai phân cấp n dưới dạng (1.3).

b. Nghiệm của phương trình sai phân

Nghiệm của phương trình sai phân (1.3) là hàm số đối số rời rạc $y_t = \varphi(t)$ mà khi thay $y_t = \varphi(t)$, $y_{t+1} = \varphi(t+1)$,..., $y_{t+n} = \varphi(t+n)$ vào phương trình đó ta được một đồng nhất thức trên tập hợp các số nguyên $t \geq 0$.

Giải một phương trình sai phân có nghĩa là tìm tất cả các nghiệm có thể có của phương trình đó.

Tương tự như phương trình vi phân, *nghiệm tổng quát* của một phương trình sai phân cấp n là hàm số đối số rời rạc

$$y_t = \varphi(t, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

trong đó $C_1, C_2, ..., C_n$ là các hằng số bất kỳ, mà khi gán cho mỗi ký tự $C_1, C_2, ..., C_n$ một số xác định ta được một nghiệm, gọi là *nghiệm riêng* của phương trình đó. Nghiệm riêng của phương trình sai phân cấp n được xác định khi cho trước điều kiện ban đầu. Điều kiện ban đầu đối với phương trình sai phân (1.3) được cho dưới dạng một bộ giá trị xác định của y tại n thời kỳ đầu tính từ thời kỳ xuất phát ($t = 0, t = 1, ..., t = n - 1$).

Ví dụ: Hàm số $y_t = 2t + C$, với C là hằng số bất kỳ, là nghiệm tổng quát của phương trình sai phân cấp một:

$$y_{t+1} = y_t + 2. \tag{1.4}$$

Thật vậy, với mọi $t = 0, 1, 2, 3, ...$ ta có:

$$y_{t+1} = 2(t+1) + C = (2t + C) + 2 = y_t + 2.$$

Nếu cho trước giá trị y_0 của nghiệm y_t tại thời kỳ xuất phát (khi $t = 0$) thì

$$y_0 = 2\times 0 + C = C.$$

Nghiệm nhận giá trị ban đầu y_0 cho trước là nghiệm riêng ứng với $C = y_0$:

$$y_t = at + y_0.$$

c. Phương trình sai phân ôtônôm

Phương trình sai phân (1.3) được gọi là phương trình ôtônôm nếu nó không chứa biến thời gian t dưới dạng hiện:

$$y_{t+n} = f(y_t, y_{t+1}, ..., y_{t+n-1}).$$

Phương trình (1.4) là một ví dụ về phương trình sai phân ôtônôm cấp một.

Phương trình sai phân ôtônôm cấp một tổng quát thường được xét dưới dạng:

$$y_{t+1} = f(y_t). \tag{1.5}$$

Việc biểu diễn phương trình sai phân ôtônôm cấp một dưới dạng

(1.5) nhiều khi cho phép ta tìm nghiệm của phương trình theo một phương pháp tương đối đơn giản gọi là *phương pháp lặp*.

Ví dụ 1: Giải phương trình: $y_{t+1} = y_t + 5$

Giải: Nếu không có thông tin gì về giá trị của y tại thời kỳ xuất phát t = 0 thì ta đặt $y_0 = C$, với C là hằng số bất kỳ. Từ biểu thức phương trình đã cho ta có:

$$y_1 = y_0 + 5 = C + 5,$$

$$y_2 = y_1 + 5 = C + 2\times 5,$$

$$y_3 = y_2 + 3 = C + 3\times 5, \ldots$$

Bằng phương pháp quy nạp ta xác định được nghiệm tổng quát của phương trình đã cho:

$$y_t = 5t + C.$$

Nếu biết $y = y_0$ khi $t = 0$ thì từ nghiệm tổng quát ta xác định được nghiệm riêng:

$$y_t = 5t + y_0.$$

Ví dụ 2: Giải phương trình

$$y_{t+1} = \alpha y_t \ (\alpha = \text{const.} \neq 0).$$

Giải: Đặt $y_0 = C$, với C là hằng số bất kỳ, ta có:

$$y_1 = \alpha y_0 = C\alpha \text{ , } y_2 = \alpha y_1 = C\alpha^2,\ y_3 = \alpha y_2 = C\alpha^3, \ldots$$

Bằng phương pháp quy nạp ta suy ra nghiệm tổng quát của phương trình đã cho:

$$y_t = C.\alpha^t.$$

Nghiệm riêng thoả mãn điều kiện ban đầu ($y = y_0$ khi $t = 0$) là

$$y_t = y_0\alpha^t.$$

BÀI TẬP

1. Cho số đối số rời rạc:

$$y_t = 2t^2 + 1 \ (t = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

Hãy tính Δy_t, $\Delta^2 y_t$, $\Delta^3 y_t$.

2. Hãy viết các phương trình sau dưới dạng không dùng ký hiệu Δ:

a) $2\Delta y_t = 3y_t$ b) $\Delta y_t + ty_t = 3t$

c) $\Delta^2 y_t - \Delta y_t + 3y_t = 9$ d) $\Delta^2 y_t + t\Delta y_t + 2y_t = t^2$

3. Giải các phương trình sau bằng phương pháp lặp:

a) $y_{t+1} = 3y_t + 1$, $y_0 = 5$ b) $y_{t+1} = b y_t^2$, $y_0 = 3$

§2. PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN CẤP MỘT

I. PHƯƠNG TRÌNH ÔTÔNÔM TUYẾN TÍNH CẤP MỘT

a. Phương trình tuyến tính thuần nhất

Phương trình sai phân ôtônôm tuyến tính cấp một có dạng

$$y_{t+1} + py_t = q\,, \tag{2.1}$$

trong đó p và q là các hằng số cho trước.

Trước hết ta xét phương trình (2.1) khi q = 0:

$$y_{t+1} + py_t = 0. \tag{2.2}$$

Ta gọi phương trình (2.2) là *phương trình tuyến tính thuần nhất*.

Phương trình (2.2) có thể viết dưới dạng

$$y_{t+1} = (-p)y_t.$$

Theo phương pháp lặp ta tìm được nghiệm tổng quát của phương trình (2.2):

$$\hat{y}_t = C(-p)^t . \qquad (2.3)$$

trong đó C là hằng số bất kỳ.

Nghiệm riêng của phương trình (2.2) thoả mãn điều kiện $y = y_0$ khi $t = 0$ (điều kiện ban đầu) được xác định theo công thức:

$$y_t = y_0(-p)^t .$$

Ví dụ: Theo công thức (2.3), nghiệm tổng quát của phương trình $y_{t+1} - 9y_t = 0$ là:

$$y_t = C.9^t .$$

Nghiệm riêng thoả mãn điều kiện y =3 khi t = 0 là

$$y_t = 3.9^t .$$

b. Phương trình tuyến tính không thuần nhất

Phương trình (2.1) với $q \neq 0$ được gọi là *phương trình tuyến tính không thuần nhất*. Phương trình tuyến tính thuần nhất (2.2) có cùng vế trái được gọi là *phương trình thuần nhất liên kết* của phương trình (2.1). Mối liên hệ giữa phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất với phương trình thuần nhất liên kết của nó hoàn toàn tương tự như phương trình vi phân tuyến tính.

Định lý: Nếu $\bar{y}_t$ là một nghiệm của phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất (2.1) và $\hat{y}_t$ là một nghiệm của phương trình thuần nhất liên kết (2.2) thì $\bar{y}_t + \hat{y}_t$ là nghiệm của phương trình (2.1).

Chứng minh: Thật vậy, nếu $\bar{y}_t$ là một nghiệm của phương trình tuyến tính không thuần nhất (2.1) và $\hat{y}_t$ là một nghiệm của phương trình thuần nhất liên kết (2.2) thì

$$\bar{y}_{t+1} + p\bar{y}_t = q \text{ và } \hat{y}_{t+1} + p\hat{y}_t = 0 \ \forall t = 0, 1, 2, 3, ...$$

Khi đó ta có:

$$(\bar{y}_{t+1} + \hat{y}_{t+1}) + p(\bar{y}_t + \hat{y}_t) = (\bar{y}_{t+1} + p\bar{y}_t) + (\hat{y}_{t+1} + p\hat{y}_t)$$

$$= q + 0 = q, \quad \forall t = 0, 1, 2, 3,$$

Điều này chứng tỏ $\bar{y}_t + \hat{y}_t$ là nghiệm của phương trình (2.1).

Hệ quả: Nếu $\bar{y}_t$ là một nghiệm riêng của phương trình (2.1) thì nghiệm tổng quát của nó là:

$$y_t = \bar{y}_t + C(-p)^t$$

Như vậy, để giải phương trình (2.1) ta chỉ cần tìm một nghiệm riêng của nó.

Trước hết ta thử tìm một nghiệm riêng của phương trình (2.1) dưới dạng $\bar{y}_t = k$, với k là một hằng số. Hàm số $y_t = k$ là nghiệm của phương trình (2.1) khi và chỉ khi

$$k + pk = q.$$

Nếu $p \neq -1$ thì từ đây ta xác định được $k = \dfrac{q}{1+p}$ và $\bar{y}_t = \dfrac{q}{1+p}$ là một nghiệm riêng của phương trình (2.1).

Nếu $p = -1$ thì phương trình (2.1) trở thành

$$y_{t+1} - y_t = q. \tag{2.4}$$

Ta thử tìm nghiệm riêng của phương trình này dưới dạng $\bar{y}_t = mt$, với m là một hằng số. Hàm số $y_t = mt$ là nghiệm của phương trình (2.4) khi và chỉ khi thoả mãn đồng nhất thức

$$m(t + 1) - mt = q$$

Từ đây ta xác định được m = q. Vậy $\bar{y}_t = qt$ là một nghiệm riêng của phương trình (2.4).

Tóm lại, phương trình sai phân tuyến tính (2.1) có nghiệm tổng quát như sau:

- *Trường hợp $p \neq -1$:*

$$y_t = \frac{q}{1+p} + C(-p)^t \tag{2.5}$$

- *Trường hợp $p = -1$:*

$$y_t = qt + C. \tag{2.6}$$

Nếu cho trước giá trị ban đầu $y = y_0$ khi $t = 0$ thì từ các biểu thức nghiệm (2.5) và (2.6) ta xác định được hằng số C:

Trường hợp $p \neq -1$: $C = y_0 - \dfrac{q}{1+p}$.

Trường hợp $p = -1$: $C = y_0$.

Vậy nghiệm thoả mãn điều kiện ban đầu ($y = y_0$ khi $t = 0$) của phương trình (2.1) là

- *Trường hợp $p \neq -1$:*

$$y_t = \frac{q}{1+p} + \left(y_0 - \frac{q}{1+p}\right)(-p)^t \tag{2.7}$$

- *Trường hợp $p = -1$:*

$$y_t = qt + y_0. \tag{2.8}$$

Ví dụ 1: Nghiệm thoả mãn điều kiện $y = 4$ khi $t = 0$ của phương trình

$$y_{t+1} + 2y_t = 9$$

được xác định theo công thức (2.7) với $p = 2$, $q = 9$, $y_0 = 4$:

$$y_t = \frac{9}{1+2} + \left(4 - \frac{9}{1+2}\right)(-2)^t = 3 + (-2)^t.$$

Ví dụ 2: Nghiệm thoả mãn điều kiện $y = 5$ khi $t = 0$ của phương trình

$$y_{t+1} - y_t = 3$$

được tính theo công thức (2.8) với $q = 3$, $y_0 = 5$:

$$y_t = 3t + 5.$$

c. Điều kiện ổn định động của trạng thái cân bằng

Trong chương 6 chúng ta đã nói đến trạng thái cân bằng (trạng thái tĩnh) của biến số y mà quy luật vận động theo thời gian của nó được thiết lập dưới dạng phương trình vi phân ôtônôm cấp một. Đó là trạng thái mà giá trị của y không thay đổi theo thời gian: $y'(t) = 0$. Tương tự, trạng thái cân bằng của biến số y mà quy luật vận động theo thời gian của nó được thiết lập dưới dạng phương trình sai phân cấp một là trạng thái mà $y_{t+1} = y_t$ (hay $\Delta y_t = 0$).

Xét trường hợp quy luật vận động theo thời gian của biến số y được thiết lập dưới dạng phương trình tuyến tính (2.1). Trong trường hợp này $\overline{y}$ là trạng thái cân bằng khi và chỉ khi

$$\overline{y} + p\overline{y} = q \Leftrightarrow (p + 1)\,\overline{y} = q.$$

Từ đây suy ra rằng trạng thái cân bằng tồn tại khi và chỉ khi $p \neq -1$. Khi đó

$$\overline{y} = \frac{q}{p+1}.$$

Theo công thức (2.7), quỹ đạo thời gian xuất phát từ trạng thái y_0 ($y = y_0$ khi $t = 0$) là

$$y_t = \overline{y} + (y_0 - \overline{y})(-p)^t. \qquad (2.7')$$

Ta nói rằng trạng thái cân bằng $\overline{y}$ *ổn định động* khi và chỉ khi.

dù xuất phát từ trạng thái y_0 nào ($y_0 \neq \overline{y}$), quỹ đạo thời gian y_t cũng hội tụ đến $\overline{y}$, tức là

$$y_t - \overline{y} = (y_0 - \overline{y})(-p)^t \to 0 \text{ khi } t \to +\infty.$$

Theo quy luật biến thiên của hàm số mũ thì điều này xảy ra khi và chỉ khi $|p| < 1$.

Chú ý rằng điều kiện ổn định động chỉ liên quan đến giá trị tuyệt đối của p chứ không phụ thuộc vào dấu của p. Dấu của p chỉ chi phối cách thức hội tụ hay phân kỳ của quỹ đạo thời gian so với trạng thái cân bằng:

- Với $p < 0$ thì $y_t - \overline{y} = (y_0 - \overline{y})(-p)^t$ giữ dấu không đổi. Quỹ đạo thời gian y_t luôn luôn nằm phía trên hoặc phía dưới quỹ đạo cân bằng $y_t = \overline{y}$ (tuỳ theo $y_0 > \overline{y}$ hay $y_0 < \overline{y}$).

- Với $p > 0$ thì $y_t - \overline{y} = (y_0 - \overline{y})(-p)^t$ đổi dấu liên tiếp từ thời kỳ này sang thời kỳ khác. Quỹ đạo thời gian y_t *dao động lên xuống* xung quanh quỹ đạo cân bằng $y_t = \overline{y}$ mỗi lần chuyển từ thời kỳ này sang thời kỳ khác.

II. MỘT SỐ MÔ HÌNH PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN ÔTÔNÔM TUYẾN TÍNH CẤP 1 TRONG KINH TẾ HỌC.

a. Mô hình Cobweb

Trong một số ngành, chẳng hạn như ngành nông nghiệp, việc sản xuất kéo dài theo thời gian, do đó nhiều khi các quyết định sản xuất được tiến hành trước khi hàng hoá được bán ra thị trường một thời kỳ. Khi ra quyết định sản xuất bao nhiêu, các nhà sản xuất căn cứ theo giá hiện hành, nhưng hàng hoá lại được bán ra vào thời kỳ tiếp theo. Điều này có nghĩa là lượng cung ở thời kỳ t + 1 phụ thuộc vào giá ở thời kỳ t. Nếu xét giá P và lượng Q là các hàm số của thời gian t thì mô hình cân bằng thị trường có dạng:[1]

$$Q_{d,t+1} = Q_{s,t+1},$$

$$Q_{d,t+1} = \alpha - \beta P_{t+1} \quad (\alpha \text{ và } \beta > 0),$$

$$Q_{s,t+1} = -\gamma + \delta P_t \quad (\gamma \text{ và } \delta > 0).$$

Phương trình xác định giá cân bằng thị trường là:

$$\alpha - \beta P_{t+1} = -\gamma + \delta P_t$$

$$\Leftrightarrow \quad P_{t+1} + \frac{\delta}{\beta} P_t = \frac{\alpha + \gamma}{\beta}. \tag{2.9}$$

Phương trình (2.9) là phương trình sai phân ôtônôm tuyến tính dạng (2.1). Giá cân bằng trong trường hợp này được xác định từ phương trình:

$$\overline{P} + \frac{\delta}{\beta} \overline{P} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta}.$$

Từ đây suy ra:

$$\overline{P} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}.$$

Sử dụng công thức (2.7') ta tìm được quỹ đạo thời gian của giá sản phẩm:

$$P_t = \overline{P} + (P_0 - \overline{P})\left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^t, \tag{2.10}$$

trong đó P_0 là giá tại thời kỳ xuất phát $t = 0$.

Biểu thức (2.10) cho thấy:

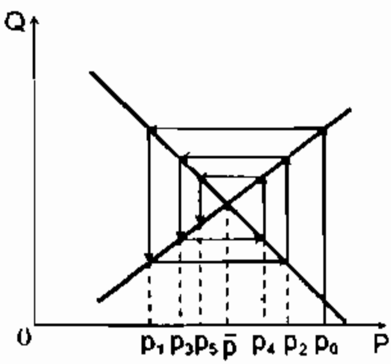
[1] Để cho đơn giản ta xét hàm cung và hàm cầu ở dạng tuyến tính (bậc nhất)

- Với $P_0 \neq \overline{P}$ qũy đạo thời gian của giá thị trường dao động lên xuống xung quanh giá cân bằng $\overline{P}$ (do $-\frac{\delta}{\beta} < 0$).

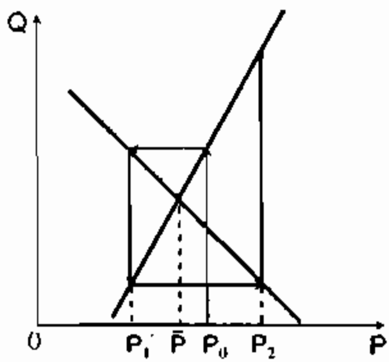
- Điều kiện ổn định động của giá cân bằng là

$$\frac{\delta}{\beta} < 1 \Leftrightarrow \delta < \beta,$$

tức là quỹ đạo thời gian của giá thị trường hội tụ đến mức giá cân bằng khi và chỉ khi đường cung phẳng hơn đường cầu (hệ số δ biểu thị độ dốc của đường cung và hệ số β biểu thị độ dốc của đường cầu). Nếu δ > β thì quỹ đạo thời gian của giá thị trường ngày càng rời xa mức cân bằng $\overline{P}$ (xem hình vẽ).



Trường hợp δ < β



Trường hợp δ > β

b. Mô hình thị trường có hàng hoá tồn đọng

Trong mô hình trên đây ta giả thiết giá được xác định ở mức cân bằng cung cầu trong từng thời kỳ, người bán không có hàng tồn dọng. Sau đây là mô hình thị trường với giả thiết những người bán có hàng hoá tồn đọng.

Các giả thiết của mô hình:

1. Cả lượng cung Q_s và lượng cầu Q_d đều không bị trễ và đều là hàm tuyến tính của giá cả ở mỗi thời kỳ:

$$Q_{dt} = \alpha - \beta P_t \quad (\alpha \text{ và } \beta > 0),$$

$$Q_{st} = -\gamma + \delta P_t \quad (\gamma \text{ và } \delta > 0).$$

2. Giá cả được điều chỉnh không theo nguyên tắc cân bằng thị trường ở mỗi thời kỳ. Việc đặt giá của người bán ở đầu mỗi thời kỳ căn cứ vào giá của thời kỳ trước và lượng hàng tồn kho của thời kỳ trước. Nếu theo mức giá của thời kỳ trước mà hàng hoá còn tồn đọng thì người bán đặt giá thấp hơn cho thời kỳ hiện tại và ngược lại, nếu lượng hàng hoá không đủ bán thì người bán đặt giá cao hơn.

3. Lượng điều chỉnh giá từ thời kỳ này sang thời kỳ khác tỷ lệ với lượng dư cung theo chiều ngược lại:

$$P_{t+1} - P_t = -\lambda(Q_{st} - Q_{dt}), \quad (\lambda = \text{const.} > 0).$$

Với các giả thiết trên đây ta có phương trình

$$P_{t+1} - P_t = -\lambda(-\gamma + \delta P_t - \alpha + \beta P_t)$$

hay:

$$P_{t+1} - [1 - \lambda(\beta + \delta)]P_t = \lambda(\alpha + \gamma). \qquad (2.11)$$

Phương trình (2.11) là một phương trình sai phân ôtônôm tuyến tính cấp một. Nghiệm của phương trình này là:

$$P_t = \overline{P} + (P_0 - \overline{P})[1 - \lambda(\beta + \delta)]^t$$

trong đó $\overline{P} = \dfrac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$ là giá cân bằng và P_0 là giá ở thời kỳ xuất phát $t = 0$. Điều kiện ổn định động là

$$-1 < 1 - \lambda(\beta + \delta) < 1 \Leftrightarrow 0 < \lambda(\beta + \delta) < 2$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < \lambda < \frac{2}{\beta + \delta}.$$

c. Mô hình Harrod

Mô hình Harrod được sử dụng để giải thích động thái tăng trưởng của nền kinh tế.

Các giả thiết của mô hình:

1. Tiết kiệm ở mỗi thời kỳ tỷ lệ với thu nhập ở cùng thời kỳ đó:

$$S_t = sY_t,$$

trong đó hằng số s được gọi là *xu hướng tiết kiệm cận biên* $(0 < s < 1)$.

2. Đầu tư tỷ lệ với lượng thay đổi của thu nhập quốc dân theo thời gian (nguyên lý gia tốc):

$$I_t = a(Y_t - Y_{t-1}), \ (a > 0).$$

3. Đầu tư bằng tiết kiệm ở mỗi thời kỳ:

$$I_t = S_t.$$

Từ các giả thiết nêu trên ta có:

$$a(Y_t - Y_{t-1}) = sY_t$$

hay

$$Y_t - \frac{a}{a-s} Y_{t-1} = 0.$$

Phương trình này tương đương với phương trình

$$Y_{t+1} - \frac{a}{a-s} Y_t = 0.$$

Từ đây suy ra quỹ đạo thời gian của của thu nhập

$$Y_t = \left(\frac{a}{a-s}\right)^t Y_0.$$

Do $\dfrac{a}{a-s} > 1$, thu nhập tăng không ngừng theo thời gian, không có giới hạn và không dao động lên xuống.

d. Mô hình thu nhập có trễ

Xét mô hình cân bằng kinh tế vĩ mô ở dạng đơn giản, không tính đến vai trò của chính phủ và quan hệ kinh tế với nước ngoài:

$$Y = C + I.$$

Giả sử $I = I_0$, tức là lượng đầu tư không thay đổi, và giả sử tiêu dùng của thời kỳ t +1 phụ thuộc vào thu nhập của thời kỳ t dưới dạng tuyến tính:

$$C_{t+1} = C_0 + cY_t \quad (0 < c < 1).$$

Khi đó ta có phương trình:

$$Y_{t+1} = C_{t+1} + I_0 = C_0 + cY_t + I_0$$

$$\Leftrightarrow \; Y_{t+1} - cY_t = C_0 + I_0.$$

Giải phương trình sai phân tuyến tính cấp một này ta được:

$$Y_t = (Y_0 - \overline{Y})c^t + \overline{Y},$$

trong đó

$$\overline{Y} = \frac{C_0 + I_0}{1-c}.$$

Hằng số c là xu hướng tiêu dùng cận biên $(0 < c < 1)$, do đó quỹ đạo thời gian của thu nhập quốc dân hội tụ đến $\overline{Y}$ khi $t \to +\infty$ và không có dao động.

III. PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH CẤP MỘT TỔNG QUÁT

Phương trình sai phân tuyến tính cấp 1 có dạng tổng quát như sau

$$y_{t+1} + p_t y_t = q_t. \tag{2.12}$$

trong đó p_t và q_t là các hàm số đối số rời rạc $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Để tìm nghiệm, ta đặt $b_t = -p_t$ và viết phương trình (2.12) dưới dạng:

$$y_{t+1} = b_t y_t + q_t. \tag{2.12'}$$

Gọi y_0 là giá trị của y tại thời điểm xuất phát, ta có:

$$y_1 = b_0 y_0 + q_0.$$

$$y_2 = b_1(b_0 y_0 + q_0) + q_1 = b_0 b_1 y_0 + q_0 b_1 + q_1,$$

$$y_3 = b_2(b_0 b_1 y_0 + q_0 b_1 + q_1) + q_2 = b_0 b_1 b_2 y_0 + q_0 b_1 b_2 + q_1 b_2 + q_2,$$

$$y_4 = b_3(b_0 b_1 b_2 y_0 + q_0 b_1 b_2 + q_1 b_2 + q_2) + q_3$$

$$= b_0 b_1 b_2 b_3 y_0 + q_0 b_1 b_2 b_3 + q_1 b_2 b_3 + q_2 b_3 + q_3, \ldots$$

Để biểu diễn nghiệm của phương trình (2.12') ta dùng các ký hiệu tổng và tích của các số $x_1, x_2, \ldots, x_n$ như sau:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \quad \prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Định lý: Nghiệm của phương trình (2.12') thoả mãn điều kiện ban đầu ($y = y_0$ khi $t = 0$) là:

$$y_t = y_0 \prod_{k=0}^{t-1} b_k + \sum_{k=0}^{t-1}\left(\frac{q_k}{b_k}\prod_{i=k}^{t-1} b_i\right). \tag{2.13}$$

Chứng minh:

Từ (2.13), $\forall t = 1, 2, 3, \ldots$ ta có:

$$y_{t+1} = y_0\prod_{k=0}^{t} b_k + \sum_{k=0}^{t}\left(\frac{q_k}{b_k}\prod_{i=k}^{t} b_i\right)$$

$$= y_0\prod_{k=0}^{t} b_k + \sum_{k=0}^{t-1}\left(\frac{q_k}{b_k}\prod_{i=k}^{t} b_i\right) + q_t$$

$$= y_0 b_t\prod_{k=0}^{t-1} b_k + \sum_{k=0}^{t-1}\left(\frac{q_k}{b_k} b_t\prod_{i=k}^{t-1} b_i\right) + q_t$$

$$= b_t\left[y_0\prod_{k=0}^{t-1} b_k + \sum_{k=0}^{t-1}\left(\frac{q_k}{b_k}\prod_{i=k}^{t-1} b_i\right)\right] + q_t = b_t y_t + q_t.$$

Điều này chứng tỏ khi thay y_t và y_{t+1} từ (2.13) vào hai vế của phương trình (2.12') ta được một đồng nhất thức.

Ta xét một số trường hợp riêng:

- Trường hợp b_t không đổi ($b_t = b$), nhưng q_t thay đổi theo t, nghiệm (2.13) trở thành:

$$y_t = y_0 b^t + \sum_{k=0}^{t-1} q_k b^{t-k-1}. \tag{2.14}$$

- Trường hợp b_t thay đổi theo t nhưng q_t không đổi ($q_t = q$), nghiệm (2.13) trở thành:

$$y_t = y_0\prod_{k=0}^{t-1} b_k + q\sum_{k=0}^{t-1}\left(\frac{1}{b_k}\prod_{i=k}^{t-1} b_i\right). \tag{2.15}$$

- Trường hợp cả b_t và q_t không đổi theo t ($b_t = b$ và $q_t = q$), phương trình (2.12') là phương trình ôtônôm. Trong trường hợp này biểu thức nghiệm (2.13) có dạng:

$$y_t = y_0 b^t + q\sum_{k=0}^{t-1} b^{t-k-1} = y_0 b^t + q(b^{t-1} + b^{t-2} + b + 1).$$

Nếu $b \neq 1$, ta có

$$y_t = y_0 b^t + q\frac{b^t - 1}{b-1} = \left(y_0 + \frac{q}{b-1}\right)b^t - \frac{q}{b-1}.$$

Nếu $b = 1$ thì

$$y_t = y_0 b^t + q.$$

Thay $b = -p$, ta có công thức (2.7) và (2.8).

Ví dụ 1: Xét phương trình:

$$y_{t+1} = (t+1)y_t + 2^t.$$

Theo công thức (2.13) ta xác định được nghiệm của phương trình này:

$$y_t = y_0\prod_{k=0}^{t-1}(k+1) + \sum_{k=0}^{t-1}\left(\frac{2^k}{k+1}\prod_{i=k}^{t-1}(i+1)\right).$$

$$\Leftrightarrow\ y_t = t!\left(y_0 + \sum_{k=0}^{t-1}\frac{2^k}{(k+1)!}\right).$$

Ví dụ 2:

Giả sử tổng tiêu dùng của nền kinh tế tại mỗi thời kỳ t được xác định theo quy luật hàm số

$$C_t = \alpha + \beta Y_{t-1}, \tag{2.16}$$

trong đó β là xu hướng tiêu dùng cận biên của thời kỳ trước đó ($0 < \beta < 1$) và giả sử tổng thu nhập quốc dân ở mỗi thời kỳ bằng tiêu dùng cộng với tiết kiệm:

$$Y_t = C_t + I_t. \tag{2.17}$$

Giả sử lượng đầu tư ở mỗi thời kỳ t được xác định theo quy luật hàm số

$$I_t = I_0(1 + g)^t, \qquad (2.18)$$

trong đó g là tỷ lệ tăng ngoại sinh trong chi tiêu đầu tư. Thay hàm tiêu dùng (2.16) và hàm đầu tư (2.18) vào phương trình (2.17) ta được phương trình:

$$Y_t = \beta Y_{t-1} + \alpha + (1 + g)^t.$$

Phương trình này có thể viết dưới dạng

$$Y_{t+1} = \beta Y_t + \alpha + (1 + g)^{t+1}. \qquad (2.19)$$

Theo công thức công thức (2.16) ta xác định được quỹ đạo thời gian của thu nhập quốc dân từ phương trình (2.19):

$$Y_t = Y_0\beta^t + \sum_{k=0}^{t-1}[\alpha + (1+g)^{k+1}]\beta^{t-k-1}.$$

Do $0 < \beta < 1$ nên $Y_0\beta^t \to 0$ khi $t \to +\infty$. Điều này chứng tỏ theo thời gian Y_t ngày càng tiến tới quỹ đạo

$$Y_t^* = \sum_{k=0}^{t-1}[\alpha + (1+g)^{k+1}]\beta^{t-k-1}.$$

Ta có thể xem Y_t^* là quỹ đạo tăng trưởng dài hạn của tổng thu nhập quốc dân.

IV. PHÂN TÍCH ĐỊNH TÍNH PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN ÔTÔNÔM PHI TUYẾN BẰNG BIỂU ĐỒ PHA.

Trên đây chúng tôi đã dẫn giải và chỉ ra các công thức tìm nghiệm của phương trình sai phân tuyến tính cấp một. Đối với phương trình sai phân phi tuyến, việc tìm nghiệm nói chung không đơn giản. Trong trường hợp không thể tìm nghiệm của phương trình sai phân dưới dạng hiện, ta có thể sử dụng phương pháp phân tích định tính bằng đồ thị.

Xét phương trình sai phân ôtônôm cấp một:

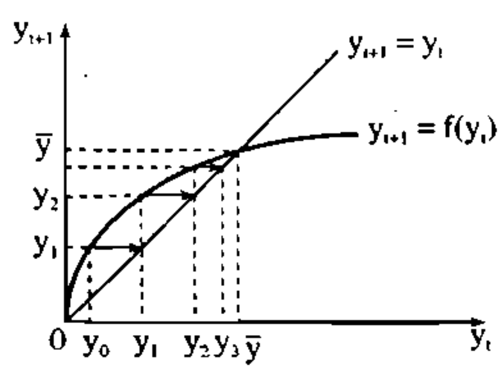
$$y_{t+1} = f(y_t), \qquad (2.20)$$

trong đó f là một hàm số biểu diễn sự phụ thuộc của y_{t+1} vào y_t. Phương trình (2.20) biểu diễn quy luật vận động theo thời gian của biến số y. Xin nhắc lại rằng *trạng thái cân bằng*, hay *trạng thái tĩnh* của biến số y là trạng thái ngừng thay đổi theo thời gian: $y_{t+1} = y_t$. Trạng thái cân bằng $\overline{y}$ được xác định từ phương trình:

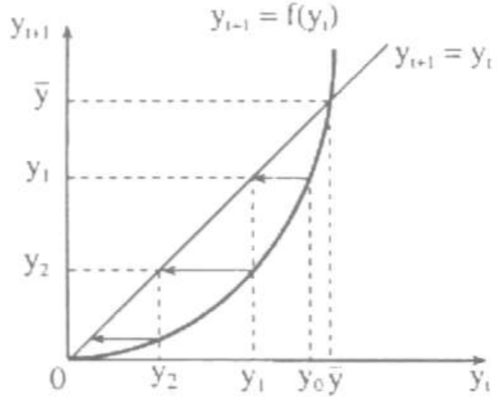
$$\overline{y} = f(\overline{y}).$$

Chúng ta có thể quan sát xu hướng của quỹ đạo thời gian so với trạng thái cân bằng thông qua biểu đồ pha. Biểu đồ pha được thiết lập như sau:

Trên mặt phẳng toạ độ với trục hoành biểu diễn y_t và trục tung biểu diễn y_{t+1} ta vẽ đồ thị của hàm số $y_{t+1} = f(y_t)$. Đồ thị đó được gọi là *đường pha*. Cùng với đồ thị pha ta vẽ đường thẳng $y_{t+1} = y_t$ (đường phân giác thứ nhất). Trạng thái cân bằng $\overline{y}$ được xác định bởi giao điểm của đường pha với đường thẳng $y_{t+1} = y_t$.



Hình A



Hình B

Nếu đường pha có dạng như hình A thì quỹ đạo thời gian xuất phát từ trạng thái $y_0 \neq \bar{y}$ ngày càng tiến gần đến trạng thái cân bằng $\bar{y}$. Trong trường hợp này $\bar{y}$ là trạng thái ổn định. Trái lại, nếu đường pha có dạng như hình B thì quỹ đạo thời gian xuất phát từ trạng thái $y_0 \neq \bar{y}$ ngày càng rời xa trạng thái cân bằng $\bar{y}$. Trong trường hợp này trạng thái cân bằng $\bar{y}$ không ổn định.

BÀI TẬP

4. Giải các phương trình sau với $y_0 = C$ chưa biết:

a) $y_{t+1} - 2y_t = 5$ b) $y_{t+1} - y_t = 9$

5. Giải các phương trình sau với y_0 cho trước:

a) $y_{t+1} - \frac{1}{3} y_t = 6,\ y_0 = 1$ b) $y_{t+1} + 2y_t = 9,\ y_0 = 4$

c) $y_{t+1} - \frac{1}{4} y_t = 5,\ y_0 = 2$ d) $y_{t+1} - y_t = 3,\ y_0 = 5$

6. Giải các phương trình sau với y_0 cho trước:

a) $y_{t+1} - \dfrac{2y_t}{t+1} = 0$ b) $y_{t+1} - 5y_t = t$

7. Với mỗi phương trình cho sau đây, hãy chỉ ra trạng thái cân bằng và cho biết y_t có hội tụ đến trạng thái cân bằng hay không:

a) $y_{t+1} - 0{,}8y_t = 1$ b) $y_{t+1} - y_t = 5$

c) $3y_{t+1} + 2y_t = 1$ d) $4y_{t+1} - 6y_t = 9$

§3. PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH CẤP HAI

I. PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH CẤP HAI TỔNG QUÁT

Phương trình sai phân tuyến tính cấp hai có dạng tổng quát như sau:

$$y_{t+2} + p_t y_{t+1} + q_t y_t = r_t, \tag{3.1}$$

trong đó p_t, q_t và r_t là các hàm số đối số rời rạc cho trước (t = 0, 1, 2, ...).

Trường hợp $r_t \equiv 0$ ta có phương trình

$$y_{t+2} + p_t y_{t+1} + q_t y_t = 0, \tag{3.2}$$

Phương trình (3.2) được gọi là phương trình tuyến tính *thuần nhất*. Khi xét phương trình (3.1) với r_t không đồng nhất bằng 0, ta gọi phương trình thuần nhất (3.2) với cùng vế trái là *phương trình thuần nhất liên kết của nó*.

Tương tự như phương trình vi phân tuyến tính cấp hai, ta có các định lý sau đây:

Định lý 1: Nếu $\hat{y}_t$ là nghiệm của phương trình thuần nhất (3.2) thì, với C là hằng số bất kỳ, $C\hat{y}_t$ cũng là nghiệm của nó.

Định lý 2: Nếu $\hat{y}_t$ và $\widetilde{y}_t$ là hai nghiệm của phương trình thuần nhất (3.2) thì $\hat{y}_t + \widetilde{y}_t$ cũng là nghiệm của nó.

Định lý 3: Nếu $\hat{y}_t$ và $\widetilde{y}_t$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính[1] của phương trình thuần nhất (3.2) thì hàm số

$$y_t = C_1\hat{y}_t + C_2\widetilde{y}_t,$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số bất kỳ, là nghiệm tổng quát của nó.

Định lý 4: Nếu hàm số $y_t = u_t + iv_t$ là nghiệm phức của phương trình tuyến tính thuần nhất (3.2), với p_t và q_t là các hàm thực, thì phần thực u_t và phần ảo v_t của nó là các nghiệm thực của phương trình (3.2).

Định lý 5: Nếu y_t là một nghiệm riêng của phương trình tuyến tính không thuần nhất (3.1) và y_t là nghiệm bất kỳ của phương trình thuần nhất liên kết (3.2) thì $y_t + y_t$ là nghiệm của phương trình (3.1).

Từ định lý 3 và định lý 5 ta suy ra rằng, nếu $\overline{y}_t$ là một nghiệm riêng của phương trình tuyến tính không thuần nhất (3.1) và $\hat{y}_t$, $\widetilde{y}_t$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình thuần nhất liên kết (3.2) thì nghiệm tổng quát của phương trình (3.1) là

$$y_t = y_t + C_1\hat{y}_t + C_2\widetilde{y}_t,$$

[1] Khái niệm hàm số phụ thuộc tuyến tính (độc lập tuyến tính) được định nghĩa tương tự như trường hợp hàm số đối số liên tục

II. PHƯƠNG TRÌNH ÔTÔNÔM TUYẾN TÍNH CẤP HAI

a. Phương trình ôtônôm tuyến tính thuần nhất

Xét phương trình:

$$y_{t+2} + py_{t+1} + qy_t = 0, \tag{3.3}$$

trong đó p và q là các hằng số thực.

Ta sẽ tìm nghiệm của phương trình (3.3) dưới dạng $y_t = a^t$ $(a \neq 0)$. Hàm số $y_t = a^t$ là nghiệm của phương trình (3.3) khi và chỉ khi thoả mãn đồng nhất thức:

$$a^{t+2} + pa^{t+1} + qa^t = 0 \Leftrightarrow a^t(a^2 + pa + q) = 0.$$

Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$a^2 + pa + q = 0. \tag{3.4}$$

Phương trình bậc hai (3.4) được gọi là *phương trình đặc trưng* của phương trình sai phân (3.3).

Ta xét 3 trường hợp sau:

- *Trường hợp 1*: Phương trình đặc trưng có hai nghiệm thực phân biệt a_1, a_2 $(p^2 - 4q > 0)$. Khi đó phương trình (3.2) có hai nghiệm độc lập tuyến tính a_1^t, a_2^t. Nghiệm tổng quát của phương trình (3.2) là:

$$y_t = C_1 a_1^t + C_2 a_2^t. \tag{3.5}$$

- *Trường hợp 2*: Phương trình đặc trưng có một nghiệm thực kép a_0 $(p^2 - 4q = 0)$. Khi đó $\hat{y}_t = a_0^t$ là nghiệm của phương trình (3.2). Ngoài ra, do a_0 là nghiệm kép của phương trình đặc trưng (3.4) nên

$$a_0^2 + pa_0 + q = 0 \text{ và } 2a_0 + p = 0.$$

Với mọi t = 0, 1, 2, ... ta có:

$$(t+2)a_0^{t+2} + p(t+1)a_0^{t+1} + qta_0^t$$

$$= (a_0^2 + pa_0 + q)ta_0^t + (2a_0 + p)a_0^{t+1} = 0.$$

Điều này chứng tỏ $\tilde{y}_t = ta_0^t$ cũng là nghiệm của (3.2). Các nghiệm $\hat{y}_t = a_0^t$ và $\tilde{y}_t = ta_0^t$ độc lập tuyến tính, do đó nghiệm tổng quát của phương trình (3.2) là:

$$y_t = (C_1 + C_2 t)\, a_0^t. \tag{3.6}$$

• *Trường hợp 3*: Phương trình đặc trưng có hai nghiệm phức liên hợp $a = \alpha \pm \beta i$ ($p^2 - 4q < 0$). Khi đó phương trình (3.2) có hai nghiệm phức liên hợp

$$(\alpha \pm \beta i)^t = [\rho(\cos\theta \pm i\sin\theta]^t = \rho^t(\cos\theta t \pm i\sin\theta t),$$

trong đó

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \tag{3.7}$$

còn θ được xác định theo công thức:

$$\cos\theta = \frac{\alpha}{\rho} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}},\ \sin\theta = \frac{\beta}{\rho} = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}. \tag{3.8}$$

Cặp nghiệm phức liên hợp nói trên cho tương ứng hai nghiệm thực độc lập tuyến tính:

$$\hat{y}_t = \rho^t\cos\theta t,\ \tilde{y}_t = \rho^t \sin\theta t.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất (3.2) trong trường hợp này là:

$$y_t = \rho^t(C_1\cos\theta t + C_2\sin\theta t). \tag{3.9}$$

Chú ý: Nếu biểu diễn α và β theo p và q từ phương trình đặc trưng (3.4) thì:

$$\alpha = -\frac{p}{2}, \beta = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}.$$

Môđun ρ và argument θ của số phức $\alpha + \beta i$ có thể tính trực tiếp theo p và q theo các công thức sau:

$$\rho = \sqrt{q}\,,\ \cos\theta = -\frac{p}{2\sqrt{q}}\,,\ \sin\theta = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2\sqrt{q}}. \qquad (3.10)$$

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t = 0 \qquad (3.11)$$

và tìm nghiệm riêng thoả mãn điều kiện $y_0 = 3,\ y_1 = 5$.

Giải: Phương trình đặc trưng của phương trình (3.11) là:

$$a^2 - 5a + 6 = 0.$$

Phương trình đặc trưng có hai nghiệm thực phân biệt $a_1 = 2$, $a_2 = 3$. Theo công thức (3.5), nghiệm tổng quát của phương trình (3.11) là:

$$y_t = C_1 2^t + C_2 3^t.$$

Để tìm nghiệm riêng thoả mãn điều kiện $y_0 = 3,\ y_1 = 5$, ta xác định C_1, C_2 từ hệ phương trình:

$$\begin{cases} y_0 = C_1 + C_2 = 3 \\ y_1 = 2C_1 + 3C_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 4 \\ C_2 = -1 \end{cases}$$

Nghiệm riêng thoả mãn điều kiện ($y_0 = 3,\ y_1 = 5$) của phương trình (3.11) là:

$$y_t = 2^{t+2} - 3^t.$$

Ví dụ 2: Giải phương trình:

$$y_{t+2} + 6y_{t+1} + 9y_t = 0 \qquad (3.12)$$

và tìm nghiệm riêng thoả mãn điều kiện: $y_0 = 4$, $y_1 = -8$.

Giải: Phương trình đặc trưng của phương trình (3.12) là phương trình

$$a^2 + 6a + 9 = 0.$$

Phương trình bậc hai này có một nghiệm kép $a = -3$. Theo công thức (3.6), nghiệm tổng quát của phương trình (3.12) là:

$$y_t = (C_1 + C_2t)(-3)^t.$$

Để tìm nghiệm riêng thoả mãn điều kiện $y_0 = 4$, $y_1 = -6$, ta xác định C_1, C_2 từ hệ phương trình:

$$\begin{cases} y_0 = C_1 = 4 \\ y_1 = (C_1 + C_2)(-3) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 4 \\ C_2 = -8 \end{cases}$$

Nghiệm riêng thoả mãn điều kiện ($y_0 = 4$, $y_1 = -8$) của phương trình (3.12) là:

$$y_t = 4(1 - 2t)(-3)^t$$

Ví dụ 3: Giải phương trình:

$$y_{t+2} + 2y_{t+1} + 2 = 0. \qquad (3.13)$$

Giải: Phương trình đặc trưng của phương trình (3.10)

$$a^2 + 2a + 2 = 0$$

có 2 nghiệm phức liên hợp

$$a = -1 \pm \sqrt{-1} = -1 \pm i.$$

Áp dụng các công thức (3.7), (3.8) với $\alpha = -1$ và $\beta = 1$, ta có:

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{2},$$

$$\cos\theta = \frac{\alpha}{\rho} = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\theta = \frac{\beta}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}.$$

Chú ý rằng nếu sử dụng công thức (3.10) với $p = q = 2$, ta cũng có:

$$\rho = \sqrt{q} = \sqrt{2},$$

$$\cos\theta = -\frac{p}{2\sqrt{q}} = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\theta = \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2\sqrt{q}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}.$$

Thay ρ và $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ vào (3.9) ta được nghiệm tổng quát của phương trình (3.13) là:

$$y_t = 2^{\frac{t}{2}}\left(C_1\cos\frac{3\pi t}{4} + C_2\sin\frac{3\pi t}{4}\right).$$

b. Phương trình ôtônôm tuyến tính không thuần nhất

Xét phương trình ôtônôm tuyến tính cấp 2:

$$y_{t+2} + py_{t+1} + qy_t = r, \tag{3.14}$$

trong đó p, q và r là các hằng số thực cho trước ($r \neq 0$).

Theo phương pháp trên đây ta có thể tìm được nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất liên kết, do đó để tìm nghiệm tổng quát của phương trình (3.14) ta chỉ cần tìm một nghiệm riêng của nó.

Ta thử tìm nghiệm riêng dưới dạng $y_t = \bar{y}$ ($\bar{y}$ là hằng số). Hàm số $y_t = \bar{y}$ là nghiệm của phương trình (3.14) khi và chỉ khi thoả mãn đồng nhất thức:

$$\bar{y} + p\bar{y} + q\bar{y} = r.$$

Nếu $p + q \neq -1$ thì từ đây ta xác định được

$$\overline{y} = \frac{r}{1+p+q}.$$

Như vậy, khi $p + q \neq -1$ nghiệm tổng quát của phương trình ôtônôm tuyến tính không thuần nhất (3.14) như sau:

- Nếu phương trình đặc trưng có hai nghiệm thực phân biệt a_1, a_2 (khi $p^2 - 4q > 0$):

$$y_t = C_1 a_1^t + C_2 a_2^t + \frac{r}{1+p+q}. \tag{3.15}$$

- Nếu phương trình đặc trưng có một nghiệm thực kép a_0 (khi $p^2 - 4q > 0$):

$$y_t = (C_1 + C_2 t) a_0^t + \frac{r}{1+p+q}. \tag{3.16}$$

- Nếu phương trình đặc trưng có hai nghiệm phức liên hợp $a = \alpha \pm \beta i$ (khi $p^2 - 4q < 0$):

$$y_t = \rho^t (C_1 \cos\theta t + C_2 \sin\theta t) + \frac{r}{1+p+q}, \tag{3.17}$$

trong đó $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, còn θ được xác định từ các công thức:

$$\cos\theta = \frac{\alpha}{\rho} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \sin\theta = \frac{\beta}{\rho} = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Xét trường hợp $p + q = -1$. Trong trường hợp này phương trình (3.14) có dạng:

$$y_{t+2} + py_{t+1} - (p+1)y_t = r. \tag{3.14'}$$

Ta tìm nghiệm riêng của phương trình (3.14') dưới dạng $y_t = \alpha t$. Hàm số $y_t = \alpha t$ là nghiệm của phương trình (3.14') khi và chỉ khi:

$$\alpha(t+2) + p\alpha(t+1) - (p+1)\alpha t = r \Leftrightarrow \alpha(p+2) = r.$$

Nếu $p \neq -2$ thì từ đây ta tìm được $\alpha = \dfrac{r}{p+2}$ và $y_t = \dfrac{rt}{p+2}$ là một nghiệm riêng của phương trình (3.14').

Chú ý rằng với $p \neq -2$ phương trình đặc trưng có hai nghiệm thực phân biệt $a = 1$ và $a = -p-1$, do đó nghiệm tổng quát của phương trình (3.14') là

$$y_t = C_1 + C_2(-p-1)^t + \frac{rt}{p+2}. \tag{3.18}$$

Nếu $p = -2$ thì phương trình (3.14') trở thành

$$y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = r. \tag{3.14''}$$

Ta tìm nghiệm của phương trình (3.14'') dưới dạng $y_t = \alpha t^2$. Hàm số này là nghiệm của phương trình (3.14'') khi và chỉ khi:

$$\alpha(t+2)^2 - 2\alpha(t+1)^2 + \alpha t^2 = r \Leftrightarrow \alpha = \frac{r}{2}.$$

Phương trình đặc trưng của phương trình (3.14'') có một nghiệm kép $a = 1$, do đó nghiệm tổng quát của nó là:

$$y = C_1 + C_2 t + \frac{rt^2}{2}. \tag{3.19}$$

Ví dụ 1: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình:

$$y_{t+2} + 4y_{t+1} + 3y_t = 16. \tag{3.20}$$

Trong trường hợp này $p + q = 7 \neq -1$ và phương trình đặc trưng

$$a^2 + 4a + 3 = 0$$

có hai nghiệm thực $a_1 = -1$, $a_2 = -3$. Theo công thức (3.15) với $p = 4$, $q = 3$, $r = 16$, ta có nghiệm tổng quát của phương trình (3.20):

$$y_t = C_1(-1)^t + C_2(-3)^t + 2.$$

Ví dụ 2: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình:

$$y_{t+2} - 8y_{t+1} + 16y_t = 39. \qquad (3.21)$$

Trong trường hợp này $p + q = 8 \neq -1$ và phương trình đặc trưng

$$a^2 - 8a + 16 = 0$$

có một nghiệm kép $a_0 = 4$. Theo công thức (3.16) với $p = -8$, $q = 16$, $r = 39$, ta có nghiệm tổng quát của phương trình (3.21):

$$y_t = (C_1 + C_2t)4^t + \frac{13}{3}.$$

Ví dụ 3: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình:

$$y_{t+2} - 2y_{t+1} + 4y_t = 15. \qquad (3.22)$$

Trong trường hợp này $p + q = 2 \neq -1$ và phương trình đặc trưng

$$a^2 - 2a + 4 = 0$$

có hai nghiệm phức liên hợp $a = 1 \pm i\sqrt{3}$.

Ta có:

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2,$$

$$\cos\theta = \frac{\alpha}{\rho} = \frac{1}{2},\ \sin\theta = \frac{\beta}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3},$$

$$\frac{r}{1+p+q} = \frac{15}{1-2+4} = 5.$$

Theo công thức (3.17), nghiệm tổng quát của phương trình (3.22) là:

$$y_t = 2^t\left(C_1\cos\frac{\pi t}{3} + C_2\sin\frac{\pi t}{3}\right) + 5.$$

Ví dụ 4: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình:

$$y_{t+2} + 5y_{t+1} - 6y_t = 4. \qquad (3.23)$$

Giải: Trong trường hợp này $p + q = -1$ và $p = 5 \neq -2$. Theo công thức (3.18), nghiệm tổng quát của phương trình (3.23) là:

$$y_t = C_1 + C_2(-6)^t + \frac{4t}{7}.$$

c. Trạng thái cân bằng và tính ổn định động

Giả sử quy luật vận động theo thời gian của biến số y được xác định dưới dạng phương trình ôtônôm tuyến tính (3.14). Trạng thái cân bằng là trạng thái mà $y_t = y_{t+1} = y_{t+2}$. Trạng thái cân bằng $\bar{y}$ được xác định từ hệ thức:

$$\bar{y} + p\bar{y} + q\bar{y} = r.$$

Từ đây suy ra rằng trạng thái cân bằng tồn tại khi và chỉ khi

$$p + q \neq -1.$$

Khi đó:

$$\bar{y} = \frac{r}{1+p+q}.$$

Từ công thức nghiệm tổng quát (3.15) suy ra nghiệm y_t hội tụ đến $\overline{y}$ khi và chỉ khi cả hai nghiệm thực a_1 và a_2 đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 1.

Từ công thức nghiệm tổng quát (3.16) suy ra nghiệm y_t hội tụ đến $\overline{y}$ khi và chỉ khi nghiệm thực kép a_0 của phương trình đặc trưng có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 1.

Từ công thức nghiệm tổng quát (3.17) suy ra y_t hội tụ đến $\overline{y}$ khi và chỉ khi môđun của hai nghiệm phức liên hợp của phương trình đặc trưng nhỏ hơn 1 ($\rho < 1$).

Định lý: Trạng thái cân bằng $\overline{y}$ ổn định động khi và chỉ khi tất cả các nghiệm của phương trình đặc trưng có môđun nhỏ hơn 1 (môđun của các số thực a_0, a_1, a_2 bằng giá trị tuyệt đối của chúng, còn môđun của các số phức $\alpha \pm \beta i$ là số dương

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}).$$

Ví dụ 1: Áp dụng định lý này ta thấy rằng đối với các phương trình (3.20), (3.21), (3.22) vừa xét trên đây, trạng thái cân bằng

$$\overline{y} = \frac{r}{1 + p + q}$$

không ổn định.

Ví dụ 2: Xét phương trình:

$$y_{t+2} - y_{t+1} + \frac{1}{4} y_t = 5.$$

Trong trường hợp này $p + q = -\frac{3}{4} \neq -1$ và phương trình đặc trưng có nghiệm kép $a_0 = \frac{1}{2} < 1$. Theo định lý trên, trạng thái cân bằng

$$\overline{y} = \frac{r}{1+p+q} = \frac{5}{1-1+\frac{1}{4}} = 20$$

ổn định động. Quan sát trực tiếp ta thấy mọi nghiệm của phương trình đã cho đều hội tụ đến $\overline{y} = 20$:

$$y_t = (C_1 + C_2t)\,\frac{1}{2^t} + 20 \to 20 \text{ khi } t \to +\infty.$$

Nhận xét: Trong trường hợp $p^2 - 4q > 0$, theo quy tắc so sánh các nghiệm thực của phương trình đặc trưng $a^2 + pa + q = 0$ với ± 1 ta có thể chứng minh được rằng trạng thái cân bằng $\overline{y}$ ổn định động khi và chỉ khi thoả mãn các bất đẳng thức sau:

$$1 + p + q > 0,\ 1 - p + q > 0,\ q < 1. \qquad (3.24)$$

III. PHƯƠNG TRÌNH PHI ÔTÔNÔM TUYẾN TÍNH CẤP HAI VỚI CÁC HỆ SỐ KHÔNG ĐỔI

Xét phương trình

$$y_{t+2} + py_{t+1} + qy_t = r_t, \qquad (3.25)$$

trong đó p và q là các hằng số và r_t là một hàm số đối số rời rạc t.

Phương trình thuần nhất liên kết của phương trình (3.25) là phương trình ôtônôm tuyến tính cấp hai, do đó ta có thể tìm được nghiệm tổng quát của nó dựa theo nghiệm của phương trình đặc trưng. Để giải phương trình (3.25) ta chỉ cần tìm một nghiệm riêng của nó. Một trong những phương pháp tìm nghiệm riêng của phương trình sai phân (3.25) là phương pháp hệ số bất định. Tương tự như việc tìm nghiệm riêng của phương trình vi phân tuyến tính cấp 2, ta có thể định dạng nghiệm riêng của phương trình (3.25) trong các trường hợp sau đây:

- *Trường hợp 1*: Hàm số r_t là một đa thức P(t). Trong trường hợp này:

◊ Nếu a = 1 không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng $a^2 + pa + q = 0$ thì nghiệm riêng của phương trình (3.25) có thể tìm được dưới dạng $\overline{y}_t = Q(t)$, trong đó Q(t) là đa thức cùng bậc với P(t).

◊ Nếu a = 1 là nghiệm của phương trình đặc trưng thì nghiệm riêng của phương trình (3.25) có thể tìm được dưới dạng $\overline{y}_t = t^sQ(t)$, trong đó Q(t) là đa thức cùng bậc với P(t), s =1 nếu a = 1 là nghiệm đơn và s = 2 nếu a = 1 là nghiệm kép của phương trình đặc trưng.

• *Trường hợp 2*: Hàm số r_t có dạng $r_t = a_0^tP(t)$, trong đó a_0 là một hằng số và P(t) là một đa thức. Trong trường hợp này:

◊ Nếu $a = a_0$ không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng $a^2 + pa + q = 0$ thì nghiệm riêng của phương trình (3.25) có thể tìm được dưới dạng $\overline{y}_t = a_0^tQ(t)$, trong đó Q(t) là đa thức cùng bậc với P(t).

◊ Nếu $a = a_0$ là nghiệm của phương trình đặc trưng thì nghiệm riêng của phương trình (3.25) có thể tìm được dưới dạng $\overline{y}_t = t^sa_0^tQ(t)$, trong đó Q(t) là đa thức cùng bậc với P(t), s =1 nếu a = 1 là nghiệm đơn và s = 2 nếu a = 1 là nghiệm kép của phương trình đặc trưng.

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = t + 1. \qquad (3.26)$$

Giải: Trong ví dụ này, phương trình đặc trưng $a^2 - 3a + 2 = 0$ có hai nghiệm thực $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất liên kết của phương trình (3.26) là:

$$\hat{y}_t = C_12^t + C_2.$$

Vế phải của phương trình (3.26) là một nhị thức bậc nhất và $a = 1$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng, do đó ta tìm nghiệm riêng của phương trình (3.26) dưới dạng:

$$\overline{y}_t = t(A + Bt) = At + Bt^2.$$

Hàm số này là nghiệm của phương trình (3.26) khi và chỉ khi

$$A(t+2) + B(t+2)^2 - 3[A(t+1) + B(t+1)^2] + 2(At + Bt^2) \equiv t + 1$$

$$\Leftrightarrow -2Bt + (-A + B) \equiv t + 1$$

$$\Leftrightarrow -2B = 1 \text{ và } B - A = 1 \Leftrightarrow A = -\frac{3}{2} \text{ và } B = -\frac{1}{2}.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (3.26) là:

$$y_t = -\frac{3}{2}t - \frac{1}{2}t^2 + C_1 2^t + C_2.$$

Ví dụ 2: Giải phương trình

$$y_{t+2} - 9y_{t+1} + 14y_t = 2^t. \qquad (3.27)$$

Giải: Trong ví dụ này, phương trình đặc trưng $a^2 - 9a + 14 = 0$ có hai nghiệm thực $a_1 = 2$, $a_2 = 7$, do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất liên kết là:

$$\hat{y}_t = C_1 2^t + C_2 7^t.$$

Do $a = 2$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng nên ta tìm nghiệm của phương trình (3.27) dưới dạng $\overline{y}_t = At.2^t$. Hàm số này là nghiệm của phương trình (3.27) khi và chỉ khi:

$$A(t+2)2^{t+2} - 9A(t+1).2^{t+1} + 14At.2^t \equiv 2^t$$

$$\Leftrightarrow -10A2^t \equiv 2^t \Leftrightarrow A = -\frac{1}{10}.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (3.27) là:

$$y_t = -\frac{t.2^t}{10} + C_1 2^t + C_2 7^t.$$

IV. MỘT SỐ MÔ HÌNH PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH CẤP HAI TRONG PHÂN TÍCH KINH TẾ

a. Mô hình hệ số gia tốc của Samuelson

Xét mô hình kinh tế vĩ mô:

$$Y = C_t + I_t + G_t \qquad (3.28)$$

với các giả thiết sau đây:

- Tiêu dùng của thời kỳ t phụ thuộc vào thu nhập của thời kỳ trước đó. Để cho đơn giản ta giả sử rằng C_t tỷ lệ với Y_{t-1}:

$$C_t = \alpha Y_{t-1}, \qquad (3.29)$$

trong đó α là xu hướng tiêu dùng cận biên ($0 < \alpha < 1$).

- Đầu tư ở thời kỳ t là hàm số của lượng tăng tiêu dùng. Cũng để cho đơn giản ta giả sử I_t tỷ lệ với $C_t - C_{t-1}$:

$$I_t = \beta(C_t - C_{t-1}), \qquad (3.30)$$

trong đó $\beta > 0$ là hệ số gia tốc.

- Chi tiêu của chính phủ không đổi (xem như yếu tố ngoại sinh): $G_t = G_0$.

Từ (3.29) và (3.30) ta có:

$$I_t = \alpha\beta(Y_{t-1} - Y_{t-2}). \qquad (3.31)$$

Thay C_t từ (3.29), I_t từ (3.31) và $G_t = G_0$ vào (3.28) ta được phương trình:

$$Y_t = \alpha(1+\beta)Y_{t-1} - \alpha\beta Y_{t-2} + G_0.$$

Phương trình này có thể viết lại dưới dạng tương đương:

$$Y_{t+2} - \alpha(1+\beta)Y_{t+1} + \alpha\beta Y_t = G_0. \qquad (3.32)$$

Như vậy, mô hình hệ số gia tốc của Samuelson được biểu diễn dưới dạng phương trình sai phân ôtônôm tuyến tính (3.32). Từ phương trình này ta xác định được trạng thái cân bằng của thu nhập quốc dân:

$$\overline{Y} = \frac{G_0}{1-\alpha(1+\beta)+\alpha\beta} = \frac{G_0}{1-\alpha}$$

Tính ổn định động của trạng thái cân bằng $\overline{Y}$ phụ thuộc vào nghiệm của phương trình đặc trưng:

$$a^2 - \alpha(1+\beta)a + \alpha\beta = 0. \qquad (3.33)$$

Trạng thái cân bằng ổn định động khi và chỉ khi các nghiệm của phương trình (3.33) có môđun nhỏ hơn 1. Ta xét điều kiện này theo α và β.

- *Trường hợp 1*: $[\alpha(1+\beta)]^2 - 4\alpha\beta > 0$, hay $\alpha > \dfrac{4\beta}{(1+\beta)^2}$

Trong trường hợp này phương trình đặc trưng (3.33) có hai nghiệm thực phân biệt a_1, a_2. Theo điều kiện (3.24), hai nghiệm đó có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 1 khi và chỉ khi thoả mãn cả ba bất đẳng thức:

$$1 - \alpha(1+\beta) + \alpha\beta = 1 - \alpha > 0,$$

$$1 + \alpha(1+\beta) + \alpha\beta = 1 - \alpha > 0,$$

$$\alpha\beta < 1.$$

Hai bất đẳng thức đầu thoả mãn do $0 < \alpha < 1$. Vì vậy, trạng thái cân bằng $\overline{Y}$ trong trường hợp này ổn định động khi và chỉ khi $\alpha\beta < 1$.

- *Trường hợp 2*: $[\alpha(1+\beta)]^2 - 4\alpha\beta = 0$, hay $\alpha = \dfrac{4\beta}{(1+\beta)^2}$

Trong trường hợp này phương trình đặc trưng (3.33) có một nghiệm thực kép

$$a_0 = \frac{1}{2}\alpha(1+\beta).$$

Trạng thái cân bằng $\overline{Y}$ trong trường hợp này ổn định động khi và chỉ khi:

$$\frac{1}{2}\alpha(1+\beta) = \frac{2\beta}{1+\beta} < 1 \Leftrightarrow \beta < 1.$$

- *Trường hợp 3*: $[\alpha(1+\beta)]^2 - 4\alpha\beta < 0$, hay $\alpha < \dfrac{4\beta}{(1+\beta)^2}$

Trong trường hợp này phương trình đặc trưng (3.33) có hai nghiệm phức liên hợp. Môđun của các nghiệm phức đó là: $\rho = \sqrt{\alpha\beta}$. Trong trường hợp này trạng thái cân bằng $\overline{Y}$ ổn định động khi và chỉ khi

$$\rho = \sqrt{\alpha\beta} < 1 \Leftrightarrow \alpha\beta < 1.$$

b. Mô hình Cobweb

Trong mô hình Cobweb ở §2 chúng ta giả thiết rằng nhà sản xuất ra quyết định về lượng sản phẩm đưa ra thị trường ở thời kỳ t + 1 dựa theo mức giá của thời kỳ t (do thời gian sản xuất kéo dài):

$$Q_{s,t+1} = -\gamma + \delta P_t.$$

Từ mô hình đó chúng ta thấy rằng trạng thái cân bằng của giá sản phẩm ổn định động khi và chỉ khi đường cung phẳng hơn đường cầu (hệ số góc của đường cung nhỏ hơn giá trị tuyệt đối của hệ số góc của đường cầu). Trong trường hợp ngược lại trạng thái cân bằng không ổn định. Việc lấy giá của thời kỳ t làm giá kỳ vọng của thời kỳ t + 1 mang tính chất thụ động. Để cải tiến mô hình ta xét hàm cung dưới dạng:

$$Q_{s,t+1} = -\gamma + \delta E_t(P_{t+1}),$$

trong đó $E_t(P_{t+1})$ là giá mà nhà sản xuất ở thời kỳ t kỳ vọng sẽ hiện hành ở thời kỳ t + 1. Chúng ta giả sử rằng

$$E_t(P_{t+1}) = P_t - \rho\Delta P_{t-1} = P_t - \rho(P_t - P_{t-1}),$$

trong đó ρ là một tham số, $-1 \le \rho \le 1$. Tham số ρ có ý nghĩa như sau: $0 \le \rho \le 1$ nếu nhà sản xuất cho rằng khi giá tăng (giảm) ở thời kỳ này thì nó sẽ giảm (tăng) ở thời kỳ tiếp theo; $-1 \le \rho \le 0$ nếu nhà sản xuất cho rằng khi giá tăng (giảm) ở thời kỳ này thì nó sẽ tiếp tục tăng (giảm) ở thời kỳ tiếp theo. Chú ý rằng mô hình Cobweb mà ta đã xét ở §2 là trường hợp riêng khi $\rho = 0$.

Với giả thiết nêu trên, hàm cung có dạng:

$$Q_{s,t+1} = -\gamma + \delta[\,P_t - \rho(P_t - P_{t-1})].$$

Giả sử hàm cầu có dạng

$$Q_{d,t+1} = \alpha - \beta P_{t+1}.$$

Khi đó giá cân bằng cung cầu được xác định từ phương trình

$$\alpha - \beta P_{t+1} = -\gamma + \delta[\,P_t - \rho(P_t - P_{t-1})].$$

Sau khi rút gọn ta được phương trình

$$P_{t+1} + \frac{\delta(1-\rho)}{\beta}P_t + \frac{\delta\rho}{\beta}P_{t-1} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta}$$

Phương trình này có thể viết dưới dạng tương đương:

$$P_{t+2} + \frac{\delta(1-\rho)}{\beta} P_{t+1} + \frac{\delta\rho}{\beta} P_t = \frac{\alpha + \gamma}{\beta} \qquad (3.34)$$

Trạng thái cân bằng được xác định từ phương trình:

$$\overline{P} + \frac{\delta(1-\rho)}{\beta} P + \frac{\delta\rho}{\beta} \overline{P} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta} \Rightarrow \overline{P} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$$

Tính ổn định động của trạng thái cân bằng phụ thuộc vào các nghiệm của phương trình đặc trưng:

$$a^2 + \frac{\delta(1-\rho)}{\beta} a + \frac{\delta\rho}{\beta} = 0. \qquad (3.35)$$

Trạng thái cân bằng ổn định động khi và chỉ khi các nghiệm của phương trình (3.45) có môđun nhỏ hơn 1. Ta xét điều kiện này theo các tham số của mô hình.

Trường hợp 1: $-1 \le \rho < 0$:

Trong trường hợp này phương trình đặc trưng (3.35) có hai nghiệm thực trái dấu nhau. Hai nghiệm đó có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 1 khi và chỉ khi thoả mãn cả ba bất đẳng thức sau:

$$1 + \frac{\delta(1-\rho)}{\beta} + \frac{\delta\rho}{\beta} = \frac{\beta + \delta}{\beta} > 0,$$

$$1 - \frac{\delta(1-\rho)}{\beta} + \frac{\delta\rho}{\beta} = \frac{\beta + \delta(2\rho - 1)}{\beta} > 0,$$

$$\frac{\delta\rho}{\beta} < 1.$$

Bất đẳng thức thứ nhất và thứ ba luôn luôn được thoả mãn, do đó trạng thái cân bằng ổn định động khi và chỉ khi bất đẳng thức thứ hai thoả mãn, tức là $\beta + \delta(2\rho - 1) > 0$

Trường hợp 2: $0 < \rho \le 1$:

Trong trường hợp này phương trình đặc trưng (3.35) có thể có nghiệm thực hoặc phức.

- Nếu phương trình (3.35) có hai nghiệm thực phân biệt thì cả hai nghiệm đó đều âm. Tương tự như trường hợp trên, điều kiện để cả hai nghiệm đó có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 1 là

$$\beta + \delta(2\rho - 1) > 0 \text{ và } \frac{\delta\rho}{\beta} < 1.$$

- Nếu phương trình (3.35) có nghiệm thực kép thì điều kiện ổn định động của trạng thái cân bằng là

$$-1 < \frac{-\delta(1-\rho)}{2\beta} < 1 \Leftrightarrow \delta(1-\rho) < 2\beta.$$

- Nếu phương trình (3.45) có hai nghiệm phức liên hợp thì bình phương môđun của nghiệm phức đó bằng số hạng tự do của phương trình bậc hai (3.45)[1], do đó điều kiện ổn định động của trạng thái cân bằng là: $\frac{\delta\rho}{\beta} < 1$.

BÀI TẬP

8. Giải các phương trình:

a) $y_{t+2} + 4y_{t+1} + 3y_t = 0$ b) $y_{t+2} + 2y_{t+1} - 15y_t = 0$

c) $y_{t+2} - 6y_{t+1} + 9y_t = 0$ d) $y_{t+2} - 8y_{t+1} + 25y_t = 0$

9. Giải các phương trình:

---

[1] Tích hai số phức liên hợp bằng bình phương môđun của chúng.

a) $y_{t+2} - 3y_{t+1} - 4y_t = -16$ b) $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 5$

c) $y_{t+2} - 2y_{t+1} + 2y_t = 10$ d) $2y_{t+2} + y_{t+1} - 3y_t = 12$

10. Giải các phương trình với y_0, y_1 cho trước:

a) $y_{t+2} + 3y_{t+1} - \frac{7}{4}y_t = 9$; $y_0 = 6$, $y_1 = 3$

b) $y_{t+2} - 2y_{t+1} + 2y_t = 1$; $y_0 = 3$, $y_1 = 4$

c) $y_{t+2} - y_{t+1} + \frac{1}{4}y_t = 2$; $y_0 = 4$, $y_1 = 7$

11. Giải các phương trình:

a) $y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 6t - 5$

b) $y_{t+2} - \frac{5}{2}y_{t+1} + y_t = 3^t$

c) $y_{t+2} + 2y_{t+1} + y_t = t$

d) $y_{t+2} - 10y_{t+1} + 25y_t = 100.5^t$

12. Giải các phương trình:

a) $9y_{t+2} - 6y_{t+1} - 3y_t = 48t + 72$

b) $y_{t+2} - 2y_{t+1} + \frac{3}{4}y_t = 3t + 5$

c) $3y_{t+2} - 9y_{t+1} - 12y_t = (6t + 35)5^t$

d) $y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t = -4(t + 1).2^t$

ĐÁP SỐ BÀI TẬP

Chương 1

1. $f(1) = 2$, $f(-2) = 2$, $f(-a) = \sqrt{a^2 - a + 2}$, $f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{\sqrt{2a^2 + a + 1}}{|a|}$

   $f(a + b) = \sqrt{(a + b)^2 + a + b + 2}$

2. $f(-4) = 17$, $f(-3) = 10$, $f(-1) = 2$, $f(0) = 1$, $f(4) = 16$, $f(5) = 32$

4. a) $[0; 2]$ b) $(-\infty; -3)\cup(3; +\infty)$ c) $(1; 2]$ d) $(4; +\infty)$

   e) $(-\infty; 0)\setminus\{-1, -2, -3, ...\}$ f) $(0; +\infty)\setminus\mathbb{N}$

5. a) MXĐ = $[-1; 2]$, MGT = $\left[0; \frac{3}{2}\right]$

   b) MXĐ = $[1; 100]$, MGT = $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

8. a) lẻ b) chẵn c) chẵn d) lẻ

13. a) $f^{-1}(x) = \frac{x - b}{a}$ $(x\in\mathbb{R})$ b) $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ $(x \ge 0)$

    c) $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$ $(x \ge 0)$ d) $f^{-1}(x) = \frac{1 - x}{1 + x}$ $(x \ne -1)$

14. a) $y = f[g(x)] = \sin^3 2x - \sin 2x$

    b) $y = g[f(x)] = \sin[2(x^3 - x)]$;

    c) $y = f[f(x)] = \left(x^3 - x\right)^3 - x^3 + x$;

    d) $y = g[g(x)] = \sin[2(\sin 2x)]$.

15. a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$ b) $f(x) = x^2 - 2$ c) $f(x) = \frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}$

17. a) Hàm cung b) Hàm cầu c) Hàm chi phí

    d) Hàm doanh thu e) Hàm sản xuất ngắn hạn f) Hàm tiêu dùng

18. a) $Q_s < Q_d$ khi p = 7; $Q_s > Q_d$ khi p = 8,1

b) ($p_0 = 8$, $Q_0 = 31$)

19. a) Q = 1600   b) $\Delta Q = 16,6$

20. a) TC = 25 khi Q = 1; TC = 37 khi Q = 2; TC = 709 khi Q = 10;

b) FC = 9; $VC = Q^3 - 5Q^2 + 20Q$

21. a) $\pi = -Q^3 + 5Q^2 + 8Q - 9$ b) $\pi = -Q^3 + 3Q^2 + 360Q - 9$

25. a) 4,1419 triệu đồng   b) 3,2523 triệu đồng

26. a) nên đầu tư, NPV ≈ \$499,3

27. Chấp nhận, bởi vì với lãi suất 9% một năm giá trị hiện tại của luồng tiền công ty trả là \$3774,7

28. Có lợi, bởi vì với lãi suất 10% một năm, giá trị hiện tại của luồng tiền dự án đem lại là \$49,159 triệu đồng

29. NPV = −290,448; Không nên thực hiện

30. a) 2   b) 8   **32.** a) − 16/5   b) 3/2   c) 1   d) 0

33. a) − 12/7   b) 4/3   c) 3/2   d) $\dfrac{m(m+1)}{n(n+1)}$

34. a) 3/2   b) $-\pi/3$ c) 4   d) 2

36. a) $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ b) $\sqrt[3]{e^2}$ c) e   d) 1/e

37. a) 1/lna   b) 1/a   c) lna   d) α

38. a) − 1/12   b) 8   c) 1   d) $\log_2 e$

e) 0   f) − 1/2   g) e   h) 9/25

42. a) 9/4   b) (ln5)/4   c) 2   d) 6/5   **43.** liên tục

44. a) liên tục nếu a = − 1, gián đoạn nếu $a \neq -1$

b) gián đoạn với mọi a

45. a) liên tục trên $\mathbb{R}$ b) liên tục trên $\mathbb{R}$ nếu $m = \ln 2$; gián đoạn tại $x = 2$ nếu $m \neq \ln 2$ c) gián đoạn tại điểm $x = -1$

46. $k = 2$ **47.** a) $f(x) + g(x)$ gián đoạn tại x_0 b) Chưa thể kết luận.

Chương 2

1. $f'(4) = 1/3$ **2.** $f'(1) = 1$ **3.** a) $f'(x) = -\sin x$ b) $f'(x) = 1/x$

5. a) $x^2\sqrt{x}\,(1-x^2)^2$ b) $9x^2\ln x$ c) $\dfrac{x^3}{1+x^2} + 3x^2\text{arctg}x$

d) $\dfrac{-ax^2 - 2bx + a}{(x^2+1)^2}$ e) $y' = e^x(\sin x + \cos x + 2x\cos x)$

6. a) $\dfrac{10\text{arctg}^9 x}{1+x^2}$ b) $\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ c) $2^{\sin x}\ln 2.\cos x$

d) $\dfrac{2x(x^2+1)}{\sqrt{x^4+2x^2}}$ e) $\dfrac{2\arcsin\left(\frac{x}{5}\right)}{\sqrt{25-x^2}}$ f) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{3x+1}}$

7. a) $\dfrac{1}{\cos x}$ b) $-\dfrac{6x^2}{1+x^6}\,\text{sgn}(1-x^6)$ (sgn(a) là dấu của số a)

c) $-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ d) $\dfrac{10x-3}{3\sqrt[3]{2x-1}}$ e) $\sqrt{a^2-x^2}$

8. a) $9x\sin^2x.\cos x$ b) $\dfrac{-6}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$

c) $\dfrac{2\cos^2(\ln x)}{x}$ d) $e^{\sqrt{7x}}$ e) $\arccos\dfrac{x}{2}$ f) $\dfrac{6\,\text{sgn}(x)}{x^2+9}$

9. a) $\dfrac{2x^2\ln x - (1+x^2)\ln(1+x^2)}{x(1+x^2)\ln^2 x}$

b) $(\text{tg}x)^{x-1}[\ln(\text{tg}x).\text{tg}x + x + x\text{tg}^2x]$

c) $(\arcsin x)^x\left(\ln(\arcsin x)+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}\,\arcsin x}\right)$

d) $(\operatorname{arctg} x)^x\left(\ln(\operatorname{arctg} x)+\dfrac{x}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}\right)$

10. $f'(x)=-2$ khi $x<0$; $f'(x)=0$ khi $0<x<2$; $f'(x)=2$ khi $x>2$; Tại các điểm $x=0$, $x=2$ đạo hàm không tồn tại.

11. $f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x},\ \forall x\neq 0;\ f'(0)=0$ **12.** $a=1, b=-1$

13. a) $df(1)=24;\ \Delta f(1)=73$

b) $df(1)=4{,}8;\ \Delta f(1)=6{,}1328$

c) $df(1)=1{,}2;\ \Delta f(1)=1{,}27701875$

14. a) $dy=\dfrac{6(x+1)dx}{2x^2+3x}$ b) $dy=\dfrac{dx}{\sin\dfrac{2x+1}{2}}$ c) $dy=dx.\ln^3 x$

19. $b(1-\ln b)-a(1-\ln a)=(a-b)\ln c\ \ (a<c<b)$

20. $\arcsin 2(x_0+\Delta x)-\arcsin 2x_0=\dfrac{2\Delta x}{\sqrt{1-4c^2}}\ \ (x_0<c<x_0+\Delta x)$

23. a) $x\sin 3x$ b) $2\sqrt{1-x^2}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$

24. a) $\dfrac{2\ln x-3}{x^3}$ b) $105\sqrt{2x+3}$

25. a) $\dfrac{24(5x^4+40x^2+16)}{(x^2-4)^5}$ b) $\dfrac{-96}{(2x-1)^4}$

26. a) $k^n e^{kx}$ b) $\dfrac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$

30. $-\dfrac{x(dx)^2}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$ **31.** $\dfrac{2(3x^2-1)(dx)^2}{(1+x^2)^3}$

32. $f(x) = 2(x-1) + 10(x-1)^2 + 11(x-1)^3 + 5(x-1)^4 + (x-1)^5$

33. $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + r_n(x),$

$$r_n(x) = -\frac{5x^3}{16\sqrt{[2+(x-1)\theta]^7}} \quad (0 < \theta < 1)$$

34. $f(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 + \frac{5}{81}(x-1)^3 - \frac{10}{243}(x-1)^4$

$$+ \frac{22}{729}(x-1)^5 + o((x-1)^5)$$

35. $f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$

36. a) $2a$ b) $a^2/2$ c) 2 d) 1 e) 0 f) 0

37. a) 0 b) -1 c) $1/2$ d) 0

38. a) $e^{\frac{1}{e}}$ b) 1 c) $\sqrt[3]{e}$ d) e^2 e) 2 f) $e^{\frac{2}{\pi}}$

39. a) Khoảng tăng: $(1/2; +\infty)$; Khoảng giảm: $(0; 1/2)$

b) Tăng trên $\mathbb{R}$

c) Khoảng tăng: $\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6}; 1\right)$, $\left(\frac{5+\sqrt{13}}{6}; +\infty\right)$; Khoảng giảm: $\left(-\infty; \frac{5-\sqrt{13}}{6}\right)$, $\left(1; \frac{5+\sqrt{13}}{6}\right)$

d) Khoảng tăng: $(1; +\infty)$; Khoảng giảm: $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$

e) Khoảng tăng: $(-\infty; 0)$, $(1; +\infty)$; Khoảng giảm: $(0; 1)$

f) Khoảng tăng: $(0; +\infty)$; Khoảng giảm: $(-1; 0)$

g) Khoảng tăng: $(0, 1/e^2)$, $(1; +\infty)$; Khoảng giảm: $(1/e^2; 1)$

h) Khoảng tăng: $(0; 2)$; Khoảng giảm: $(-\infty; 0)$, $(2; +\infty)$

40. a) Điểm CĐ: $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, Điểm CT: $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) Điểm CĐ: $x = -1$, Điểm CT: $x = 1$

c) Điểm CĐ: $x = 1/3$

d) Điểm CĐ: $x = 2/5$, Điểm CT: $x = 2/3$

e) Điểm CĐ: $x = -1$, Điểm CT: $x = 1$

f) Điểm CĐ: $x = 12/5$

g) Điểm CĐ: $x = 0$, Điểm CT: $x = 1$

h) Điểm CĐ: $x = 0$, Điểm CT: $x = 1/2$

41. a) $\max f(x) = f(-2) = 20$; $\min f(x) = f(0) = f(3) = 0$

b) $\max f(x) = f(100) = f(0{,}01) = 100{,}01$; $\min f(x) = f(1) = 2$

c) $\max f(x) = f(e) = e^2$; $\min f(x) = f(1) = 0$

d) $\max f(x) = f(0) = \pi/4$; $\min f(x) = f(1) = 0$

44. $x = 2/5$ **45.** $x = 7/4$

46. a) Khoảng lồi: $(-\infty; 2)$, $(4; +\infty)$; Khoảng lõm: $(2; 4)$; Có 2 điểm uốn: $x = 2$, $x = 4$ b) Khoảng lồi: $(-1; 1)$; Khoảng lõm: $(-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$; Có 2 điểm uốn: $x = -1$, $x = 1$ c) Khoảng lồi: $\left(\sqrt{e^3}; +\infty\right)$; Khoảng lõm: $\left(0; \sqrt{e^3}\right)$; Có 1 điểm uốn: $x = \sqrt{e^3}$ d) Khoảng lồi: $(-\infty; 1/2)$; Khoảng lõm: $(1/2; +\infty)$; Có 1 điểm uốn: $x = 1/2$

47. $MPP_L = \dfrac{5}{\sqrt[3]{L^2}}$; Khi $L = 8$ ta có $MPP_L = 1{,}25$, có nghĩa là nếu tăng lượng sử dụng lao động thêm 1 đơn vị thì sản lượng đầu ra sẽ tăng thêm khoảng 1,25 đơn vị hiện vật; Khi $L = 1000$ ta có $MPP_L = 0{,}05$, có nghĩa là nếu tăng lượng sử dụng lao động thêm 1 đơn vị thì sản lượng đầu ra sẽ tăng thêm khoảng 0,05 đơn vị hiện vật;

48. a) $MC = 6Q + 7$, $AC = 3Q + 7 + \dfrac{12}{Q}$

b) $MC = 6Q^2 - 6Q + 4$, $AC = 2Q^2 - 3Q + 4 + \dfrac{10}{Q}$

49. $MR = 200 - 6Q$; $p = 200 - 3Q \Leftrightarrow Q = \dfrac{200 - p}{3}$

50. MR = 2500 – 10Q = 1600 khi Q = 90. Điều này có nghĩa là khi tăng mức sản lượng từ 90 lên 91, tổng doanh thu sẽ tăng thêm 1600 USD.

51. $\varepsilon \approx -0{,}13$ khi p = 20; $\varepsilon \approx -1{,}28$ khi p = 50. Ý nghĩa: Tại mức giá p = 20, khi tăng giá 1% thì lượng cầu giảm 0,13%; Tại mức giá p = 50, khi tăng giá 1% thì lượng cầu giảm 1,28%.

53. $\varepsilon = -0{,}5$. Ý nghĩa: Tại mức giá p = 300, khi tăng giá 1% thì lượng cầu giảm 1,5%.

54. $\varepsilon = \dfrac{bp}{bp - a}$ **55.** Q = 30 **56.** a) Q = 20 b) Q = 35 **57.** Q = 30

58. a) $\varepsilon = \dfrac{p}{p - 1400}$ b) Q = 20 **59.** L = 64 **60.** L = 2025

Chương 3

1. $f(0, 1) = 3$; $f(1, -3) = -15$; $f(a, b) = a^3 + 3b^3 + 2ab^2$;

$f(b, a) = b^3 + 3a^3 + 2ba^2$; $f(a, 2a) = 33a^3$

2. $f(0, 0, 0) = 0$; $f(1, -1, 1) = \frac{1}{2}$; $f(3, 2, -2) = \frac{1}{18}$;

$$f(a, 2a, 3a) = \frac{14a}{14a^2 + 1}$$

3. a) $\{(x, y):\ xy > 0\}$ (Góc phần tư thứ nhất và thứ ba của mặt phẳng toạ độ)

b) $\{(x, y):\ x > y\}$ (Nửa mặt phẳng phía dưới đường thẳng y = x)

c) $\{(x, y):\ x^2 + y^2 \le 4\}$ (hình tròn tâm ở gốc toạ độ, bán kính bằng 2, kể cả các điểm thuộc đường tròn)

d) $\{(x, y):\ -1 \le x \le 1, -2 \le y \le 2\}$ (hình chữ nhật ABCD, với các đỉnh: A(1, 2), B(–1, 2), C(–1, –2), D(1, –2))

4. a) $\{(x, y, z):\ x + y + z \ne 0\}$ Tập hợp các điểm không thuộc mặt phẳng x + y + z = 0)

b) $\{(x, y, z):\ x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ (hình cầu tâm ở gốc toạ độ, bán kính bằng 1, trừ các điểm thuộc mặt cầu và gốc toạ độ).

5. $\dfrac{x^2 + y^2}{2x + 6y} = \dfrac{1}{6}$ **6.** $x + y + z = 3$

7. $w = (\sin x + \sin y + \sin z)^2 + (\cos x + \cos y + \cos z)^2$

8. $f(x, y) = x^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}y^2$

9. a) $\sqrt[3]{K}.\sqrt{L} = 40$ b) $TR = 20\sqrt[3]{K}.\sqrt{L}$; $TC = 15K + 8L + 50$

$\pi = 20\sqrt[3]{K}.\sqrt{L} - 15K - 8L - 50$

10. $TR = \dfrac{40}{3}\left(350 - 40K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{5}{6}}\right)K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{5}{6}}$

11. a) $TC = 48$ b) $TR = 64Q_1 + 75Q_2 + 2Q_1Q_2 - \dfrac{16}{5}Q_1^2 - \dfrac{9}{2}Q_2^2$

12. a) $xy + 4y = 24$ b) Túi hàng ($x = 4$, $y = 3$) được ưa chuộng hơn (giá trị lợi ích lớn hơn) c) Ít nhất 6 hàng hoá A .

13. a) A(0,2) b) A(1, 0, –3) **14.** 15/4 **16.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$ không tồn tại; $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x, y) = 1/4$; $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x, y) = 1/3$

19. a) Liên tục b) Gián đoạn **20.** $f'_x(0, 0) = 1$, $f'_y(0, 0) = 3$

21. a) $u'_x = 3x^2y - y^3$, $u'_y = x^3 - 3xy^2$

b) $u'_x = 30xy(5x^2y - y^2 + 7)^2$, $u'_y = 3(5x^2y - y^2 + 7)^2(5x^2 - 2y)$

c) $u'_x = \dfrac{1}{y} - \dfrac{y}{x^2}$, $u'_y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{y^2}$ d) $u'_x = -\dfrac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}$, $u'_y = \dfrac{x}{y^2}e^{-\frac{x}{y}}$

e) $u'_x = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$, $u'_y = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$

f) $u'_x = -\dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $u'_y = \dfrac{2x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$

22. a) $u'_x = y + z$, $u'_y = x + z$, $u'_z = x + y$

b) $u'_x = 3x^2 + 3y - 1$, $u'_y = z^2 + 3x$, $u'_z = 2yz + 1$

c) $u'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $u'_y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $u'_z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

d) $u'_x = (3x^2 + y^2 + z^2)\, e^{x(x^2+y^2+z^2)}$,

$u'_y = 2xy\, e^{x(x^2+y^2+z^2)}$, $u'_z = 2xz\, e^{x(x^2+y^2+z^2)}$

23. $z'_x = 2y^2\sin x\cos x + 3x^2\cos^3 y$, $z'_y = 2y\sin^2 x - 3x^3\sin y\cos^2 y$

25. $f'_y(x^2+y^2, xy) = \dfrac{x^2+y^2}{2\sqrt{(x^2+y^2)xy}}$

$\left[f(x^2+y^2, xy)\right]'_y = \dfrac{x(x^2+3y^2)}{2\sqrt{(x^2+y^2)xy}}$

28. a) $\Delta f(1, 1) = 0{,}584$; $df(1, 1) = 0{,}5$ b) $\Delta f(1, 1) = 53$; $df(1, 1) = 9$

29. a) $du = \dfrac{-11y\,dx}{(2x-y)^2} + \dfrac{11x\,dy}{(2x-y)^2}$ b) $du = \dfrac{-4xy^2dx}{(x^2-y^2)^2} + \dfrac{4x^2y\,dy}{(x^2-y^2)^2}$

c) $du = \dfrac{y\,dx}{1+x^2y^2} + \dfrac{x\,dy}{1+x^2y^2}$ d) $du = \dfrac{dx}{1+x^2} + \dfrac{dy}{1+y^2}$

30. a) $du = \dfrac{2xy^3dx}{z^4} + \dfrac{3x^2y^2dy}{z^4} - \dfrac{4x^2y^3dz}{z^5}$

b) $du = x^{yz}\left(\dfrac{yz\,dx}{x} + (z\,dy + y\,dz)\ln x\right)$

31. a) $u''_{xx} = 4(3x^2 - 2y^2)$, $u''_{xy} = u''_{yx} = -16xy$, $u''_{yy} = 4(3y^2 - 2x^2)$;

$d^2u = 4(3x^2 - 2y^2)dx^2 - 32xydxdy + 4(3y^2 - 2x^2)dy^2$

b) $u''_{xx} = -\dfrac{1}{\left(x+y^2\right)^2}$, $u''_{xy} = u''_{yx} = -\dfrac{2y}{\left(x+y^2\right)^2}$, $u''_{yy} = \dfrac{2(x-y^2)}{\left(x+y^2\right)^2}$;

$$d^2u = -\frac{dx^2}{\left(x+y^2\right)^2} - \frac{4ydxdy}{\left(x+y^2\right)^2} + \frac{2(x-y^2)dy^2}{\left(x+y^2\right)^2}$$

c) $u''_{xx} = -\dfrac{14y}{(x+2y)^3}$, $u''_{xy} = u''_{yx} = \dfrac{7(x-2y)}{(x+2y)^3}$, $u''_{yy} = \dfrac{28x}{(x+2y)^3}$;

$$d^2u = -\frac{14ydx^2}{(x+2y)^3} + \frac{14(x-2y)dxdy}{(x+2y)^3} + \frac{28xdy^2}{(x+2y)^3}$$

d) $u''_{xx} = \dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $u''_{xy} = u''_{yx} = \dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $u''_{yy} = \dfrac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$;

$$d^2u = \frac{2xydx^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} + \frac{2(y^2-x^2)dxdy}{\left(x^2+y^2\right)^2} - \frac{2xydy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

32. $f''_{xy}(0,0) = -1$, $f''_{yx}(0,0) = 1$

34. Ma trận Hess:

$$H = \begin{bmatrix} 6xy^2z^4 & 6x^2yz^4 & 12x^2y^2z^3 \\ 6x^2yz^4 & 2x^3z^4 & 8x^3yz^3 \\ 12x^2y^2z^3 & 8x^3yz^3 & 12x^3y^2z^2 \end{bmatrix}$$

$$d^2f = 6xy^2z^4dx^2 + 2x^3z^4dy^2 + 12x^3y^2z^2dz^2 + 12x^2yz^4dxdy +$$
$$+ 24x^2y^2z^3dxdz + 16x^3yz^3dydz$$

35. $df(1, 1, 1) = dx - dy$;

$d^2f(1, 1, 1) = -2(dx - dy)(dy + dz)$

36. a) $MPP_K = 16$, $MPP_L = 15$. Ý nghĩa: Khi $(K = 125, L = 100)$, nếu tăng lượng sử dụng vốn thêm 1 đơn vị và giữ nguyên lượng sử dụng lao động thì sản lượng đầu ra tăng thêm 16; nếu tăng lượng sử dụng lao động thêm 1 đơn vị và giữ nguyên lượng sử dụng vốn thì sản lượng đầu ra tăng thêm 15 (đơn vị hiện vật).

b) $Q''_{KK} < 0$ khi $K > 0, L > 0$ c) $Q''_{LL} < 0$ khi $K > 0, L > 0$

37. a) $MU_1 = 0,4x^{-0,6}y^{0,7}$, $MU_2 = 0,7x^{0,4}y^{-0,3}$; Hàm lợi ích phù hợp quy luật lợi ích cận biên giảm dần b) Lợi ích tăng 0,4%.

38. $MC_1 = 125 + 2,4Q_1^2 - 12Q_1Q_2^2$, $MC_2 = 84 + 3,6Q_2^2 - 12Q_1^2Q_2$

39. a) $\varepsilon_p = \dfrac{-0,4p}{35 - 0,4p + 0,15m + 0,12p_s}$

b) $\varepsilon_m = \dfrac{0,15m}{35 - 0,4p + 0,15m + 0,12p_s}$

c) $\varepsilon_{p_s} = \dfrac{0,12p_s}{35 - 0,4p + 0,15m + 0,12p_s}$

40. a) Thuần nhất bậc 1/3 b) Thuần nhất bậc 3/2

c) Thuần nhất bậc 3 d) Thuần nhất bậc – 9/4

43. a) Hiệu quả giảm theo quy mô b) Hiệu quả tăng theo quy mô

c) Hiệu quả tăng theo quy mô d) Hiệu quả không đổi theo quy mô

44. a) $y' = -\dfrac{y(3x^2 - y^2)}{x(x^2 - 3y^2)}$ b) $y' = \dfrac{x(a^2 - 2x^2 - 2y^2)}{y(2x^2 + 2y^2 + a^2)}$

c) $y' = \dfrac{ye^{xy} - ye^x - e^y}{xe^y + e^x - xe^{xy}}$ d) $y' = \dfrac{aye^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} + x^3 + xy^2}{axe^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} - y^3 - x^2y}$

45. a) $y' = \dfrac{p}{y}$, $y'' = -\dfrac{p^2}{y^3}$

b) $y' = \dfrac{2x - y}{x - 2y}$, $y'' = \dfrac{6(x^2 - xy + y^2)}{(x - 2y)^3}$

c) $y' = \dfrac{2x^3y}{y^2+1}$, $y'' = -\dfrac{2x^2y(2x^4y^2 - 2x^4 - 3y^4 - 6y^2 - 3)}{(y^2+1)^3}$

d) $y' = \dfrac{x(2x^2 - y^2)}{y(x^2 - 2y^2)}$,

$$y'' = -\frac{2(x^4 - x^2y^2 + y^4)(2x^4 - 11x^2y^2 + 2y^4)}{y^3(x^2 - 2y^2)^3}$$

46. a) $z'_x = -\dfrac{c^2x}{a^2z}$, $z'_y = -\dfrac{c^2y}{b^2z}$ b) $z'_x = \dfrac{2-x}{z+1}$, $z'_y = \dfrac{2y}{z+1}$

c) $z'_x = -\dfrac{yz}{z^2+xy}$, $z'_y = -\dfrac{xz}{z^2+xy}$

d) $z'_x = \dfrac{yz}{e^z - xy}$, $z'_y = \dfrac{xz}{e^z - xy}$

47. a) $z''_{xx} = -\dfrac{z^2+x^2}{z^3}$, $z''_{yy} = -\dfrac{z^2+y^2}{z^3}$, $z''_{xy} = z''_{yx} = -\dfrac{xy}{z^3}$

b) $z''_{xx} = z''_{yy} = z''_{xy} = z''_{yx} = -\dfrac{e^z}{\left(e^z - 1\right)^3}$

48. $z''_{xx} = -\dfrac{2}{5}, z''_{xy} = -\dfrac{1}{5}, z''_{yy} = -\dfrac{394}{125}$

49. $dz = \dfrac{(1-yz)dx + (1-xz)dy}{xy-1}$

$$d^2z = \frac{2y(yz-1)dx^2 + 2(xyz + z - x - y)dxdy + 2x(xz-1)dy^2}{(xy-1)^2}$$

50. $y'_x = \dfrac{2(2x^2 - z^2)}{3z^2 - 4y^2}$, $z'_x = \dfrac{3x^2 - 2y^2}{-3z^2 + 4y^2}$

51. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{xu + yv}{x^2 + y^2}, \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{xv - yu}{x^2 + y^2}$

$\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{yu - xv}{x^2 + y^2}, \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{xu + yv}{x^2 + y^2}$

52. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\sin v}{(\sin v - \cos v)e^u + 1}, \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{-\cos v}{(\sin v - \cos v)e^u + 1}$

$\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\cos v - e^u}{u[(\sin v - \cos v)e^u + 1]},$

$\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\sin v + e^u}{u[(\sin v - \cos v)e^u - 1]}$

Chương 4:

1. a) Điểm CT: ($x = 12$, $y = 36$) b) Điểm CĐ: ($x = 12$, $y = 6$)

c) Điểm CT: ($x = 2$, $y = 10$)

d) Điểm CT: ($x = 2$, $y = 1$); Điểm CĐ: ($x = -2$, $y = -1$)

e) Điểm CĐ: ($x = 1/2$, $y = 1/3$)

2. a) Điểm CĐ: ($x = 2$, $y = 3$) b) Điểm CT: ($x = 5$, $y = 2$)

3. a) Điểm CT: ($x = 5$, $y = 5$, $z = 2$)

b) Điểm CĐ: ($x = 2$, $y = 3$, $z = 2/3$)

c) Điểm CT: ($x = 30$, $y = 15$, $z = 5$)

d) Điểm CT: ($x = 1/2$, $y = 1$, $z = 1$)

4. Có 2 hàm $z = z_1(x, y)$ và $z = z_2(x, y)$ cùng xác định bởi phương trình đã cho: $z_1(1, -1) = -2$, $z_1(1, -1) = 6$. Điểm ($x = 1$, $y = -1$) là điểm cực tiểu của $z_1(x, y)$, đồng thời là điểm cực đại của $z_2(x, y)$.

5. ($x = 4$, $y = 6$) **6.** ($x = 6$, $y = 3$, $z = 6$)

7. Điểm CĐ: $(x = 20, y = -4)$

8. Điểm CĐ: $\left(x = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, y = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$

Điểm CĐ: $\left(x = \dfrac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, y = \dfrac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$

9. Điểm CĐ: $(x = 2, y = 3)$. Điểm CT: $(x = \ \ 2, y = \ \ 3)$

10. Điểm CĐ: $(x = 12, y = 35)$ **11.** Điểm CĐ: $(x = 120, y = 48)$

12. Điểm CĐ: $(x = 1/3, y = -2/3, z = 2/3)$

Điểm CT: $(x = -1/3, y = 2/3, z = -2/3)$

13. Điểm CĐ: $(x = 5, y = 2, z = 1)$

Điểm CT: $(x = -5, y = -2, z = -1)$

14. Điểm CĐ: $(x = 3, y = 3, z = 3)$

15. $(x_1 = 17, x_2 = 5)$ **16.** $(x_1 = 13, x_2 = 5)$ **17.** $(x_1 = 60, x_2 = 40)$

18. $\left(x_1 = \dfrac{3p_2 + m}{2p_1}, x_2 = \dfrac{m}{2p_2} - \dfrac{3}{2} \right)$ **19.** $\left(x_1 = \dfrac{7m}{10p_1}, x_2 = \dfrac{3m}{10p_2} \right)$

20. $(x_1 = 25, x_2 = 7)$ **21.** $(K = 300, L = 1500)$ **22.** $(K = 40, L = 90)$

23. $(K = 40, L = 135)$ **24.** $(Q_1 = 20, Q_2 = 20)$ **25.** $(Q_1 = 40, Q_2 = 24)$

26. $(Q_1 = 8, Q_2 = 10)$, $(p_1 = 84, p_2 = 66)$

27. $(Q_1 = 7, Q_2 = 4)$, $(p_1 = 36, p_2 = 26)$

28. $(Q_1 = 180, Q_2 = 200)$, $p = 39$

29. $(Q_1 = 140, Q_2 = 240, Q_3 = 120, Q_4 = 200)$. $p = 370$

30. $(Q_1 = 8, Q_2 = 4)$, $(p_1 = 80, p_2 = 120)$

31. $(Q_1 = 25, Q_2 = 30)$, $(p_1 = 8{,}25; p_2 = 6{,}75)$

32. $(Q_1 = 3, Q_2 = 4)$, $(p_1 = 35, p_2 = 60)$

Chương 5

1. a) $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x}$ b) $\frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7} + \frac{4}{\sqrt[4]{x}}$

c) $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^5} + \frac{9}{5}\sqrt[3]{x^5} - \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8}$

d) $\frac{4^x}{\ln 4} + 2\frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9}$ e) $-\frac{2}{5^x \ln 5} + \frac{1}{5(2^x \ln 2)}$

f) $x - \operatorname{arctg} x$ g) $-\operatorname{cotg} x - x$ h) $-\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x$

2. a) $\frac{1}{20}(2x-1)^{10}$ b) $-\frac{1}{4}\sqrt[3]{(1-3x)^4}$ c) $-\frac{2}{5}\sqrt{(2-5x)}$

d) $\frac{1}{20}(x^2+1)^{10}$ e) $e^x + x - 2\ln(e^x+1)$ f) $-\frac{1}{2(1+x^2)}$

g) $-\frac{1}{6}\ln\left|2-3x^2\right|$ h) $\frac{1}{4}\sqrt[3]{(1+x^3)^4}$

3. a) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ b) $\frac{1}{\cos x}$ c) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(1+\ln x)^2}$ d) $-\operatorname{cotg}\frac{x}{2}$

e) $-\ln\left|\cos x\right|$ f) $2\sqrt{1+\operatorname{tg} x}$ g) $-\frac{1}{2\arcsin^2 x}$ h) $\ln\left|\cos\frac{1}{x}\right|$

4. a) $-\frac{3}{140}\sqrt[3]{(1-x)^4}(14x^2+12x+9)$

b) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2} - 3\sqrt[3]{x+1} + 3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+1}\right|$

c) $2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|$

d) $x - 2\ln\left|1+\sqrt{e^x+1}\right|$ e) $2(\sqrt{e^x-1} - \operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1})$

f) $8\arcsin\frac{x}{4} + \frac{x}{2}\sqrt{16 - x^2}$

5. a) $-\operatorname{sgn}(x).\arcsin\frac{1}{|x|}$ b) $\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x).\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right|$

c) $-\frac{1}{15}(8 + 4x^2 + 3x^4)\sqrt{1-x^2})$

d) $2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{4}(x^2 - 2)\sqrt{4 - x^2}$

e) $\frac{2}{3}(\ln x - 2)\sqrt{1+\ln x}$ f) $\frac{1}{4}\ln^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

g) $\frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x$ h) $\frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x$

6. a) $-\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x$ b) $\frac{1}{4}(2x^2 - 1)\sin 2x + \frac{1}{2}x\cos 2x$

c) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x$ d) $\frac{1}{3}(x^2 - \frac{2}{9})\sin 3x + \frac{2}{9}x\cos 3x$

e) $-\frac{1}{4}e^{-2x}(2x + 1)$ f) $\frac{1}{27}e^{3x}(9x^2 - 6x + 2)$

7. a) $\frac{2}{9}x\sqrt{x}(3\ln x - 2)$ b) $\frac{1}{8}x^2(4\ln^3 x - 6\ln^2 x + 6\ln x - 3)$

c) $x(\ln^2 x - 2\ln x + 2)$

d) $\frac{1}{3}(x^3 + 1)\ln(x + 1) - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x$

e) $\frac{1}{2}(x^2 + 1)\operatorname{arctg}x - \frac{1}{2}x$ f) $x\arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$

8. a) $-x\operatorname{cotg}x + \ln|\sin x|$ b) $-\frac{x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\operatorname{cotg}x$

c) $\frac{1}{2}x[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)]$ d) $\frac{1}{2}x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]$

9. a) $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)$ b) $3\sqrt[3]{x^2}\sin\sqrt[3]{x}+6\sqrt[3]{x}\cos(\sqrt[3]{x})-6\sin(\sqrt[3]{x})$

c) $\dfrac{e^x(x-2)}{x+2}$ d) $\dfrac{-\arcsin x}{x}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1}\right|$

e) $2\sqrt{x+1}(\ln|x+1|-2)$

f) $\dfrac{(x^2-1)\text{arctg}x+x}{4(1+x^2)}$ g) $\dfrac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\text{arctg}x}$

h) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sin 2x}{4}-e^x(\cos x+\sin x)+\dfrac{1}{2}e^{2x}$

10. a) $\dfrac{1}{4}\left(x^2-x\right)+\dfrac{1}{8}\ln|2x+1|$ b) $\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}\ln|2x-1|$

c) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$ d) $\ln(x^2-x+1)+\dfrac{4}{\sqrt{3}}\text{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$

e) $\ln|x^2-5x+6|+6\ln\left|\dfrac{x-3}{x-2}\right|$

f) $2x+\dfrac{5}{2}\ln(x^2-2x+5)-2\text{arctg}\dfrac{x-1}{2}$

g) $\dfrac{1}{2}(x-4)^2+\dfrac{11}{2}\ln(x^2+4x+5)-\text{arctg}(x+2)$

h) $\dfrac{1}{2}\ln(x^4-x^2+1)+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\dfrac{2x^2-1}{\sqrt{3}}$

11. a) $-\dfrac{1}{8}\cos 4x-\dfrac{1}{4}\cos 2x$

b) $\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{8}\sin 2x+\dfrac{1}{16}\sin 4x+\dfrac{1}{24}\sin 6x$

c) $\dfrac{1}{8}\cos^8 x-\dfrac{1}{6}\cos^6 x$

d) $\frac{5}{16}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x$

e) $\frac{1}{7}\cos^7 x - \frac{1}{5}\cos^5 x$ f) $\frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x$

12. a) $\frac{1}{2}\text{arctg}\left(2\text{tg}\frac{x}{2}\right)$ b) $\frac{4\sqrt{3}}{3}\text{arctg}\frac{\sqrt{3}\text{tg}\frac{x}{2}}{3} + \ln|\cos x + 2|$

c) $2\text{tg}\frac{x}{2} - x$ d) $\frac{1}{2}\cos^2 x - \ln|\cos x|$

e) $\sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x$ f) $-\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x}$

13. a) $y' = \sqrt[4]{1 + x^2}$ b) $y' = 2x\sqrt[4]{1 + x^4}$

c) $y' = -3\sqrt[4]{1 + 9x^2}$ d) $y' = 4x^3\sqrt[4]{1 + x^8} - \sqrt[4]{1 + \sin^2 x}.\cos x$

14. a) 1/3 b) 1

15. a) Khoảng tăng: $(3; +\infty)$, khoảng giảm: $(-\infty; 3)$; Điểm CT: $x = 3$)
b) Khoảng tăng: $(3/2; +\infty)$, khoảng giảm: $(-\infty; 3/2)$; Điểm CT: $x = 3/2$)

16. a) $\frac{1}{2}\ln 3$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{1}{99}(5^{11} - 2^{11})$

17. a) $2 - \frac{\pi}{2}$ b) $8 + \frac{3\pi\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{1412}{5}$ d) $2 - \frac{\pi}{2}$

e) $3 + \frac{3}{2}\ln 2$ f) $\frac{2}{\sqrt{5}}\text{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$ g) $\frac{a^3}{3}$ h) $\frac{\pi a^4}{16}$

18. a) 4 b) $2 - \frac{5}{e}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{5e^3 - 2}{27}$

e) 2 f) $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ g) $\frac{e}{2} - 1$ h) 1

19. a) 1 b) $2 - \frac{2}{e}$ c) $\frac{5}{6}$

25. a) 1 b) $\frac{2\ln 2}{3}$ c) $\frac{1}{\ln a}$ d) $-\frac{1}{4}$ e) $\frac{\pi}{6}$ f) $\frac{1}{2(a^2+1)}$

26. a) $-\frac{1}{4}$ b) $\frac{8}{3}$ c) $2\sqrt{e}$ d) $\frac{404}{5}$

27. a) $K(t) = 25\sqrt[5]{t^8} + 90$ **28.** $K(t) = 45\sqrt[3]{t^4} + 40$

29. $TC = 32Q - 9Q^2 + 4Q^3 + 43$, $VC = 32Q - 9Q^2 + 4Q^3$

30. $TC = 24e^{0,5Q} + 12$ **31.** $MR = 84Q - 2Q^2 - \frac{1}{3}Q^3$; Hàm cầu ngược: $p = 84 - 2Q - \frac{1}{3}Q^2$ **32.** $C = 0,8Y + 40$ **33.** $CS = 82\frac{2}{3}$

34. $CS = 228\frac{2}{3}$, $PS = 277\frac{2}{3}$.

Chương 6

1. a) $y = 5e^{-x^3}$ b) $y = -2\cos x$ c) $y = 4e^{\frac{x-1}{x}}$

2. a) $y = -\frac{5}{3} + Ce^{3x}$ b) $y = -\frac{3}{2} + Ce^{-2x}$

c) $y = \frac{9}{2} + Ce^{-2x}$ d) $y = -1 + Ce^{x}$

3. a) $y = x + Ce^{-x}$ b) $y = e^{2x} + Ce^{-2x}$

c) $y = x + Ce^{-\frac{x^2}{2}}$ d) $y = \frac{1}{x} + Ce^{-x}$

4. a) $y = x^4 + Cx^2$ b) $y = (2x+1)\ln(2x+1) + 1 + C(2x+1)$

c) $y = e^x\ln x + Ce^x$ d) $y = -\frac{\ln x}{x} + \frac{C}{x}$

e) $y = x\sin x + Cx$ f) $y = -x^2 - 1 + Ce^{x^2}$

g) $y = -\ln x + C\ln^2 x$ h) $y = \left(x^2 + \frac{C}{x}\right)e^{-x}$

5. a) $y = \frac{2x-1}{x^3}$ b) $y = \frac{1}{2}\left(1 - e^{x^2}\right)$

c) $y = 2x + \sqrt{x}\ (x > 0)$ d) $y = x\ln x + 2x$

6. a) $x = y^2 + Cy$ (phương trình đã cho là phương trình tuyến tính nếu xem x là hàm số của y) b) $x = e^y + Ce^{-y}$

7. a) $y = C(x+1)e^{-x}$ b) $\ln|x| = \sqrt{y^2+1} + C$ c) $y^2 - 2 = Ce^{\frac{1}{x}}$

d) $y(Ce^{-x^2} - 1) = 2$ e) $e^{-y} = 1 + Ce^x$ f) $e^x = C - e^{-y}$

8. a) $y\left(\ln|x^2 - 1| + 1\right) = 1$ b) $y = 2 - 3\cos x$ c) $y = \sqrt{\frac{3-x^2}{1+x^2}}$

9. a) $x^2 - 2xy + 2y^2 = C$ b) $x^2 = y^2(\ln x + C)$

c) $y = Cx^2 - x$ d) $x^3 + 3x^2y - y^3 = C$

e) $2y^3 - 3xy^2 + 6x^2y = C$ f) $y = Ce^{\frac{y}{x}}$; $y = 0$

g) $y^2 - x^2 = Cy$; $y = 0$ h) $\sin\frac{y}{x} = Cx$; $y = 0$

10. a) $\ln(x-y) - 2x - y = C$ b) $3x + y + 2\ln|x + y - 1| = C$

c) $\operatorname{tg}\frac{y-x}{2} + x = C$

d) $\sqrt{4x+2y-1} - 2\ln\left(\sqrt{4x+2y-1} + 2\right) = x + C$

e) $\operatorname{arctg}\left(4x + y + \frac{1}{2}\right) = 4x + C$

f) $\ln|4x + 8y + 5| + 8y - 4x = C$

11. a) $x^2 + y^2 - xy + y = C$ b) $(y - 2x)^3 = C(y - x - 1)^2$

12. a) $2y^{-2} = Ce^{2x^2} + 2x^2 + 1$ b) $y = \frac{1}{Ce^{-x} - x + 1}$

c) $y(x^2 + Cx) = 1$ d) $y^2 = x(C - \ln|x|)$

e) $y = \left(Ce^{x^3} - \frac{1}{9}x^3 - \frac{2}{9}\right)^3$ f) $y = \frac{x}{x^2 + C}$

13. a) $x^2 + 2xy + 2y^2 = C$ b) $x^3 + 3xy^2 + 3x^2 = C$

c) $3x^4 - 18x^2y^2 + 24x + 4y^3 = C$

d) $x^2 - xy + y^2 + x - y = C$

e) $x^2 + y^2 - 2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C$ f) $x^2 - y^2 = Cy^3$

16. a) $\ln|x| - \frac{y^2}{x} = C$ b) $\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C$

c) $\frac{1}{y}\ln x + \frac{y^2}{2} = C$ d) $x^2 - y^2 + 2xy = C$

e) $x - \frac{y}{x} = C$ f) $x^2 + y - \frac{x}{y} + \ln|y| = C$

17. a) $x\,\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{y}{2x}\right) = C$ b) $y = \operatorname{tg}x - 1 + Ce^{-\operatorname{tg}x}$

c) $(1 + x^2)(1 + y^2) = Cx^2$

d) $y + 2\ln|y-1| = -\frac{1}{x} - \frac{x^2}{2} + C$; $y = 1$ (nghiệm đặc biệt)

e) $y^2 e^{\frac{y}{x}} = Cx$ f) $x^2y - \frac{1}{9}(1+3x)e^{-3x} - \frac{1}{5}\sin 5y = C$

g) $y^2\ln(x^2 + e) - x^2 = C$ h) $y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2$

18. Nghiệm tổng quát: $y = (x - 2)e^x + C_1x + C_2$; Nghiệm riêng thoả mãn điều kiện đã cho: $y = (x - 2)e^x + 3x + 3$.

19. a) $y = C_1 + \frac{C_2}{x}$ b) $y = C_1 + C_2\sin x$

20. $\text{tg}\frac{y}{2} = C_2e^{C_1x}$ (nghiệm tổng quát);

$y = C$ (họ nghiệm đặc biệt)

22. a) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$ b) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{5x}$

c) $y = (C_1 + C_2x)e^{2x}$ d) $y = (C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)e^{2x}$

23. a) $y = 5 - e^x + 4e^{-2x}$

b) $y = 2 + \left(\cos\frac{x\sqrt{7}}{2} + 2\sin\frac{x\sqrt{7}}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}$

24. a) $y = Ax + B$ nếu $k \neq 0$; $y = x(Ax + B)$ nếu $k = 0$.

b) $y = x(Ax^2 + Bx + C)$

c) $y = x^2(Ax + B)e^{2x}$ d) $y = (Ax^2 + Bx + C)e^{2x}$

e) $y = e^{2x}[(A_1x^2 + B_1x + C_1)\cos 3x + (A_2x^2 + B_2x + C_2)\sin 3x]$

f) $y = e^{-2x}[(A_1x^2 + B_1x)\cos 3x + (A_2x^2 + B_2x)\sin 3x]$

25. a) $y = -x^2 + x - 3 + C_1e^x + C_2e^{-x}$ b) $y = x^3 + x + \frac{1}{4}C_1e^{4x} + C_2$

c) $y = 2e^x + C_1\cos x + C_2\sin x$ d) $y = 2x^2e^x + (C_1x + C_2)e^x$

e) $y = -\frac{1}{4}x\cos 2x + C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$

f) $y = -2\sin 2x + C_1\cos x + C_2\sin x$

g) $y = 3\sin 2x - 2\cos 2x + e^{\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + C_2\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$

h) $y = (2x\sin x - x^2\cos x)e^x + (C_1\cos x + C_2\sin x)e^x$

26. a) $y = e^x - 1 + C_1e^{3x} + C_2e^{-x}$

b) $y = \frac{1}{3}xe^{3x} + 3x^2 + 2x + C_1e^{3x} + C_2$

c) $y = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}x\sin x + C_1\cos x + C_2\sin x$

d) $y = \frac{1}{2}x\sin x - \frac{1}{3}\cos 2x + C_1\cos x + C_2\sin x$

e) $y = e^x - \frac{2}{5}\sin x + \frac{1}{5}s\cos x + (C_1\cos x + C_2\sin x)e^x$

f) $y = 3xe^{2x} + x^2 + 3x + \frac{7}{2} + C_1e^{2x} + C_2e^x$

27. a) $y = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x.\ln|\cos 2x| + C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$

b) $y = -\cos x\ln\frac{1+\sin x}{|\cos x|} + C_1\cos x + C_2\sin x$

c) $y = \frac{e^x}{x} + C_1e^x + C_2$ d) $y = \frac{1}{x} + (C_1e^x + C_2)e^x$

e) $y = -\frac{8x\sqrt{x}}{3} - 4\sqrt{x} + C_1e^x + C_2$

Chương 7

1. $\Delta y = 4t + 2$, $\Delta^2 y_t = 4$, $\Delta^3 y_t = 0$

2. a) $2y_{t+1} - 5y_t = 0$ b) $y_{t+1} + (t-1)y_t = 3t$

c) $y_{t+2} - 3y_{t+1} + 5y_t = 0$ d) $y_{t+2} + (t-2)y_{t+1} - (t-3)y_t = t^2$

3. a) $y_t = 5.3^t + 3^{t-1} + 3^{t-2} + \cdots + 1$ b) $y_t = 3^{2^t} b^{2^t - 1}$

4. a) $y_t = -5 + C.2^t$ b) $y_t = 9t + C$

5. a) $y_t = 9 - 8.3^{-t}$ b) $y_t = 3 + 7.(-2)^t$

c) $y_t = \dfrac{20}{3} - \dfrac{14}{3}4^{-t}$ d) $y_t = 3t + 5$

6. a) $y_t = \dfrac{2^t}{t!}y_0$ b) $y_t = y_0.5^t + \dfrac{5^t - 1}{4}y_0\sum_{k=0}^{t-1}(t-k)5^k$

7. a) $\bar{y} = 5$, hội tụ b) Không tồn tại trạng thái cân bằng

c) $\bar{y} = \dfrac{1}{5}$, hội tụ d) $\bar{y} = -\dfrac{9}{2}$, không hội tụ

8. a) $y_t = C_1(-1)^t + C_2(-3)^t$ b) $y_t = C_1(-5)^t + C_2 3^t$

c) $y_t = (C_1 + C_2 t)3^t$

d) $y_t = 4^t(C_1\cos ax + C_2\sin ax)$, $a = \arccos\dfrac{4}{5} = \arcsin\dfrac{3}{5} \approx 0{,}6435$

9. a) $y_t = \dfrac{8}{3} + C_1(-1)^t + C_2 4^t$ b) $y_t = 5 + (C_1 + C_2)2^t$

c) $y_t = 10 + \left(C_1\cos\dfrac{\pi t}{4} + C_2\sin\dfrac{\pi t}{4}\right)2^{\frac{t}{2}}$ d) $\dfrac{12t}{5} + C_1 + C_2\left(-\dfrac{3}{2}\right)^t$

10. a) $y_t = 5\left(\frac{1}{2}\right)^t + \left(-\frac{7}{2}\right)^t + 4$

b) $y_t = \left(2\cos\frac{\pi t}{4} + \sin\frac{\pi t}{4}\right)2^{\frac{t}{2}} + 1$ c) $y_t = 8 + 2(t-2)\,2^{-t}$

11. a) $y_t = -3t^2 + 2t + C_1 + C_2 2^t$ b) $y_t = C_1 2^t + C_2\left(\frac{1}{2}\right)^t + \frac{2}{5}3^t$

c) $y_t = (C_1 + C_2 t)(-1)^t + \frac{t-1}{4}$ d) $y_t = (C_1 + C_2 x + 2x^2)5^x$

12. a) $2t^2 + t + C_1 + C_2\left(-\frac{1}{3}\right)^t$

b) $y_t = C_1\left(\frac{3}{2}\right)^t + C_2\left(\frac{1}{2}\right)^t - 12t - 20$

c) $y_t = C_1 4^t + C_2(-1)^t + \frac{t}{3}5^t$ d) $(t^2 + 5t + C_1).2^t + C_2.3^t$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Alpha C. Chiang: Fundamental Methods of Mathematical Economics, Third Edition. McGraw-Hill, Inc.

[2] Michael Hoy, John Chris McKenna, Ray Rees, Thanasis Stengos: Mathematics for Economics, Addison-Wesley Publishers Limitted,1996.

[3] Eugene Silberberg: The Structure of Economics, Part A: Mathematical Analysis. McGraw-Hill, Inc. 1978.

[4] Allen, R. G. D: Mathematical Analysis for Economists. MacMillan & Co., Ltd., London, 1938.

[5] Edward T. Dowling: Introduction to Mathematical Economics, 2/ed. Schaum's Outline Series McGraw-Hill, Inc.

[6] Mike Rosser: Basic Mathematics for Economists, London and New York, 1995.

[7] James M. Henderson and Richard E. Quandt: Microeconomic Theory, A Mathematical Approach. McGraw-Hill Company 3/ed, 1986.

[8] Robert H. Frank: Microeconomics and Behavior, McGraw-Hill, Inc., 1991.

[9] N. Gregory Mankiw and William Scarth: Macroeconomics, Canadian Edition, Worth Publishers, 1995.

[10] А. А. Глаголев, Т.В. Солнцева: Курс Высшей Математики, Издательство "Высшая школа", Москва - 1971

[11] Г.М. Фихтенгольц: Курс Дифференциального и Интегральнво Исчисления (I, II, III), Издательство "Наука", Москва - 1970.

[12] Л. Э. Эльгольц: ДифференциальныеУравнения, Государственное Издательсто Технико-теоретической Литературы, Москва - 1957.

[13] И.Г. Петровский: Лекции по Теории Обыкновенных Диференциальных Уравнений, Издательство "Наука", Москва - 1970.

[14] Б. П. Демидович: Сборник Задач по Математическому Анализу, Издательство "Наука", Москва - 1969.

[15] Г. Н. Берман: Сборник Задач по Курсу Математического Анализа, Издательство Технико-теоретической Литературы, Москва - 1957.

[16] Н. М. Матвеев: Сборник Задач по Обыкновенным Диференциальным Уравнениям, Издательство Ленинградского Университета - 1960.

[17] Carl P. Simon and Lawrence Blume: Mathematics for Economists, w. w. Norton & Company, Inc. 1994.

--- •□• ---

MỤC LỤC

TOÁN CAO CẤP CHO CÁC NHÀ KINH TẾ

PHẦN 2: GIẢI TÍCH TOÁN HỌC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN
Địa chỉ: 207 Đường Giải Phóng, Hà Nội
Website: http://nxb.neu.edu.vn - Email: nxb@neu.edu.vn
Điện thoại: (04) 38696407 - 36282486 - 36282483
Fax: (04) 36282485

Chịu trách nhiệm xuất bản: **GS.TS. NGUYỄN THÀNH ĐỘ**
Chịu trách nhiệm nội dung: **LÊ ĐÌNH THUÝ**
Biên tập kỹ thuật: BỘ MÔN TOÁN CƠ BẢN
Chế bản vi tính: QUANG KẾT
Thiết kế bìa: MAI HOA
Sửa bản in và đọc sách mẫu: NGỌC LAN - TRỊNH QUYÊN

In 3.500 cuốn, khổ 14,5 x 20,5 cm tại Công ty In và DVTM Phú Thịnh.
Mã số ĐKXB: 45 - 2010/CXB/98 - 242/ĐHKTQDHN và ISBN: 978-604-909-287-9.
In xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2010.

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN

"Cầu nối giữa tri thức và sự thành đạt của những nhà kinh tế và quản trị kinh doanh tương lai"

http://nxb.neu.edu.vn ❖ http://nxb.neu.edu.vn ❖ http://nxb.neu.edu.vn ❖ http://nxb.neu.edu.vn

TOÁN CAO CẤP CHO CÁC NHÀ KINH TẾ

PHẦN II: GIẢI TÍCH TOÁN HỌC

Tổng phát hành tại:

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN

207 Đường Giải Phóng, Quận Hai Bà Trưng, Hà Nội
Tel: (84-4) 3628 2486 - Fax: (84-4) 3628 2485
Email: nxb@neu.edu.vn - Website:http://nxb.neu.edu.vn

Toán cao cấp cho các nhà KT (P2)

55,000

Giá: 55.000VNĐ