

Mã học phần: MAT1090 (Dành cho các lớp CLC)

Thời gian làm bài: 90 phút.

Đề thi gồm: 2 trang

Sinh viên được sử dụng máy tính bỏ túi, nhưng không được sử dụng tài liệu.

Tất cả các tính toán không giải thích đều không tính điểm.

**CÂU 1 (2 điểm).** Cho ma trận vuông

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Tính định thức  $\det(A)$ . (1)
2. Tính định thức  $\det(3A^2)$ . (0.5)
3. Ma trận  $A$  khả nghịch hay không? Nếu  $A$  khả nghịch, tính định thức  $\det(A^{-1})$ . (0.5)

**CÂU 2 (2.5 điểm).** Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Tính ma trận nghịch đảo  $A^{-1}$ . (1.5)
2. Giải hệ phương trình tuyến tính (1)

$$\begin{cases} x_1 & & + & 2x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & & = & 4 \\ & - & 2x_2 & + & x_3 & = & -1 \end{cases}$$

**CÂU 3 (3 điểm).** Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Chứng minh rằng vectơ  $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  là một vectơ riêng của  $A$ . Tìm giá trị riêng tương ứng. (0.5)
2. Chéo hóa ma trận  $A$ , tức là, tìm một ma trận chéo  $D$  và một ma trận khả nghịch  $S$  sao cho  $A = SDS^{-1}$ , biết rằng đa thức đặc trưng của  $A$  có dạng (2)

$$f(\lambda) = -\lambda^3 + \square \lambda^2 - 5\lambda + 2.$$

3. Cho phép sử dụng máy tính bỏ túi để tính ma trận nghịch đảo  $S^{-1}$ . Xác định phần tử ở vị trí hàng 3 cột 2 của ma trận  $A^{100}$ . (0.5)

**CÂU 4 (2.5 điểm).** Trong không gian  $\mathbb{R}^4$ , cho các vectơ

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Gọi  $V$  là không gian con của  $\mathbb{R}^4$  sinh ra từ hai vectơ  $v_1, v_2$ , tức là  $V = \text{Span}\{v_1, v_2\}$ .

1. Tính số chiều của  $V$ . (0.5)

2. Tìm một cơ sở trực giao của  $V$ . (0.5)

3. Trong các vectơ thuộc  $V$ , tìm vectơ gần  $v_3$  nhất. (0.5)

4. Hệ phương trình tuyến tính (0.5)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = -4 \\ -x_1 - 3x_2 = 2 \end{cases} \quad (1)$$

có tương thích hay không?

5. Tìm các nghiệm bình phương tối thiểu của hệ phương trình (1). (0.5)

**Hết.**