Mục lục

Chương 1

Hàm số một biến số

Chương 1 trình bày khái niệm *hàm số một biến số* và giới thiệu một số hàm số sơ cấp cơ bản. Mục 1.1 nêu các ví dụ cơ bản về hàm số trong thực tế từ đó đưa ra định nghĩa tổng quát. Các khái niệm về *tính chẵn lẻ, tính đồng biến nghịch biến* và *hàm ngược* của một hàm số được xem xét. Mục 1.2 dành để mô tả chi tiết về khái niệm *hàm tuyến tính* cũng như ý nghĩa kinh tế của hàm tuyến tính trong *phân tích cung cầu* và *xác định thu nhập quốc dân*. Mục 1.3 định nghĩa *hàm toàn phương* và nêu các ví dụ minh họa trong tính toán *doanh thu, chi phí và lợi nhuận*. Mục 1.4 trang bị cho sinh viên khái niệm *hàm mũ* và *hàm logarit*. Các ví dụ thực tế trực quan cũng được minh họa cụ thể.

1.1. Khái niệm cơ bản

1.1.1. Định nghĩa hàm số

Khái niệm hàm số xuất hiện khi ta nghiên cứu hai đại lượng số biến thiên có mối quan hệ phụ thuộc nhau.

***Ví dụ* 1.1.1.1.** Diện tích A của hình tròn phụ thuộc vào bán kính r của hình tròn đó. Sự phụ thuộc giữa r và A được cho bởi công thức $A = \pi r^2$. Mỗi một số dương r có tương ứng một giá trị của A. Ta nói A là một hàm số của r. ■

***Ví dụ* 1.1.1.2.** Doanh số bán hàng S phụ thuộc vào thời gian t. Ta có thông tin doanh số $S(t)$ của tháng t như sau:

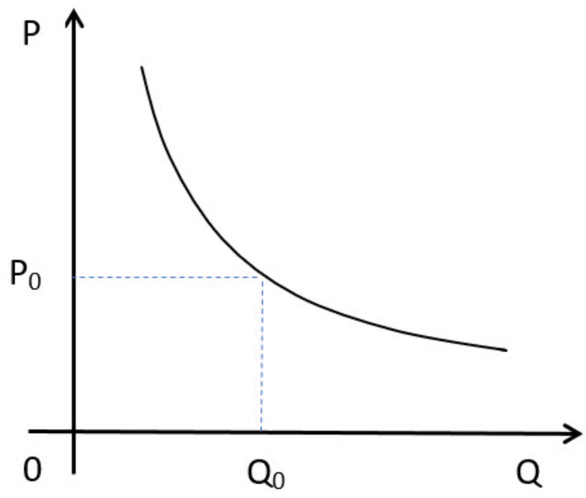
Tháng t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Doanh số S	57	54	59	62	65	63	70	71	68	76	69	71

Mỗi giá trị của tháng t cho ta một giá trị doanh số S, chẳng hạn $S(2) = 54$. Ta nói S là một hàm số của t. ■

***Ví dụ* 1.1.1.3.** Chi phí C phải bỏ ra khi đi taxi phụ thuộc vào độ dài quãng đường di chuyển d như sau: Giá mở cửa 10000 VNĐ/$0,3$ km; Giá đến km thứ 32 là 14000 VNĐ/km; Giá từ km thứ 33 trở đi là 11000VNĐ/km. Với một độ dài quãng đường di chuyển d, ta sẽ phải trả một số tiền C tương ứng tính theo quy tắc trên. Ta nói C là một hàm số của d. ■

***Ví dụ* 1.1.1.4.** Sự phụ thuộc giữa giá P và số lượng Q của một loại sản phẩm được mô tả trên hình 1.1. Với mỗi một số Q cho trước ta có một giá trị P tương ứng. Ta nói P là một hàm số của Q. ■

Các ví dụ trên mô tả mối quan hệ giữa hai đại lượng số qua một quy tắc đặc biệt, trong đó cho trước mỗi giá trị của r, t, d và Q, ta sẽ có duy nhất một giá trị A, S, C và P tương ứng.



Hình 1.1. Mối liên hệ giữa P và Q

Định nghĩa hàm số

Hàm số f là một quy tắc mô tả mối quan hệ giữa hai đại lượng số x và y sao cho tương ứng với mỗi một giá trị của x có duy nhất một giá trị của y, và ta kí hiệu $y = f(x)$.

Hàm số được biểu diễn dưới bốn dạng khác nhau:

i) Bằng công thức đại số (ví dụ 1.1.1.1);

ii) Bằng bảng số liệu (ví dụ 1.1.1.2);

iii) Bằng cách mô tả (ví dụ 1.1.1.3);

iv) Bằng hình vẽ trực quan (ví dụ 1.1.1.4).

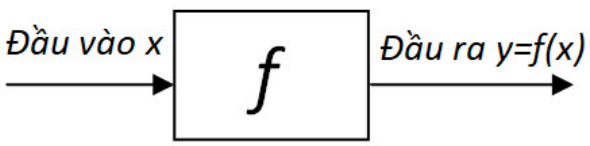
Hàm số đang biểu diễn dưới dạng này có thể chuyển về các dạng khác. Tuy nhiên, người ta hay dùng cách biểu diễn hàm số dưới dạng công thức đại số $y = f(x)$. Tập hợp tất cả các giá trị của x được gọi là **tập xác định** của hàm số f. Tập hợp tất cả các giá trị của $f(x)$ khi x thay đổi trong tập xác định được gọi là **tập giá trị** của hàm số f. Tập xác định thường được kí hiệu là D, còn tập giá trị được kí hiệu là E. Các tập D và E là tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. x được gọi là **biến độc lập** còn y được gọi là **biến phụ thuộc**. Trong ví dụ 1.1.1.1, hàm số $A = f(r) = \pi r^2$ có biến độc lập r; biến phụ thuộc A; tập xác định $[0, +\infty)$; tập giá trị $[0, +\infty)$.

***Ví dụ* 1.1.1.5.** Ta có tập xác định và tập giá trị của một số hàm số như dưới đây:

Hàm số	Tập xác định	Tập giá trị
$y = x^2$	$x \in (-\infty, +\infty)$	$y \in [0, +\infty)$
$y = \dfrac{1}{x}$	$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	$y \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
$y = \sqrt{x}$	$x \in [0, +\infty)$	$y \in [0, +\infty)$
$y = \sqrt{4-x}$	$x \in (-\infty, 4]$	$y \in [0, +\infty)$
$y = \sqrt{1-x^2}$	$x \in [-1, 1]$	$y \in [0, 1]$

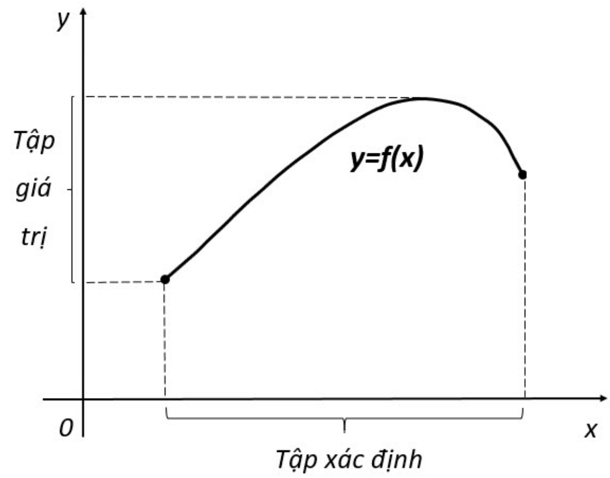
■

Có thể coi hàm số như là một cái máy sản xuất mà đầu vào của máy là giá trị x và đầu ra của máy là giá trị $y = f(x)$ (xem hình 1.2). Các hàm lập trình sẵn trên máy tính bỏ túi là ví dụ minh họa dễ hiểu cho việc coi hàm số như là một cái máy. Chẳng hạn, có thể coi phím căn bậc hai trên máy tính như là một hàm số. Ta ấn phím có nhãn $\sqrt{\cdot}$ (hoặc $\sqrt{x}$) và nhập vào giá trị đầu vào x. Nếu $x < 0$ thì máy tính báo lỗi (vì giá trị này không thuộc tập xác định). Nếu $x \geq 0$, giá trị của $\sqrt{x}$ sẽ được hiển thị.



Hình 1.2. Hàm số như là một máy sản xuất

Để trực quan hóa hàm số, người ta sử dụng đồ thị của nó. **Đồ thị** của hàm số là tập hợp tất cả các cặp $\Big\{(x, f(x)) | x \in D\Big\}$. Nói cách khác, đồ thị hàm số f bao gồm tất cả các điểm (x, y) trong mặt phẳng tọa độ sao cho $y = f(x)$ với x thuộc tập xác định của hàm số f. Có thể nói đồ thị là "hình ảnh" của hàm số và từ hình ảnh này ta có thể thấy rõ được tập xác định và tập giá trị của hàm số (xem hình 1.3).



Hình 1.3. Đồ thị hàm số

1.1.2. Hàm số chẵn và hàm số lẻ

Nếu một hàm số f thỏa mãn $f(-x) = f(x)$ với mọi x thuộc tập xác định của nó thì f được gọi là **hàm chẵn**. Chẳng hạn, hàm số $f(x) = x^2$ là hàm chẵn vì $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ ta có:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

Nếu f thỏa mãn $f(-x) = -f(x)$ với mọi x thuộc tập xác định thì f được gọi là **hàm lẻ**. Chẳng hạn, hàm số $f(x) = x^3$ là hàm lẻ vì $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ ta có:

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$

Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung là trục đối xứng trong khi đồ thị của hàm lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng (xem hình 1.4).

***Ví dụ* 1.1.2.1.** Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau đây:

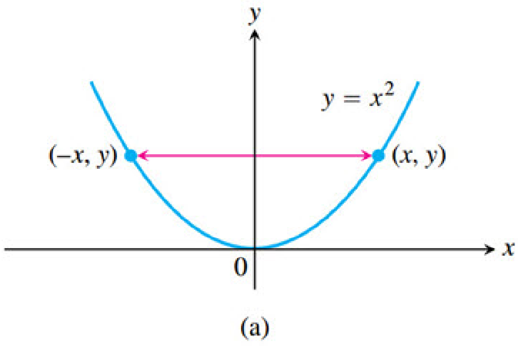
a/ $f(x) = x^7 + 2x$ *b/* $g(x) = 3 - x^6$ *c/* $h(x) = 5x^2 - 4x$

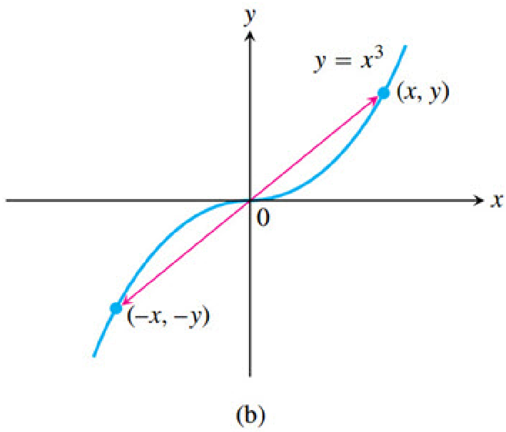
Lời giải:

Các hàm số trên đều có tập xác định $x \in (-\infty, +\infty)$.

a/ Hàm $f(x) = x^7 + 2x$ là lẻ vì $\forall x \in \mathbb{R}$, ta luôn có

$$f(-x) = (-x)^7 + 2(-x) = -(x^7 + 2x) = -f(x).$$





Hình 1.4. Tính đối xứng của đồ thị hàm số chẵn a) và hàm số lẻ b)

b/ Hàm $g(x) = 3 - x^6$ là chẵn vì $\forall x \in \mathbb{R}$, ta luôn có

$$g(-x) = 3 - (-x)^6 = 3 - x^6 = g(x).$$

c/ Hàm $h(x) = 5x^2 - 4x$ không chẵn cũng không lẻ vì chẳng hạn với $x = 1$, ta có

$$h(-1) = 5(-1)^2 - 4(-1) = 9$$

$$h(1) = 5(1)^2 - 4(1) = 1$$

Rõ ràng, $h(-1) \neq h(1)$ và $h(-1) \neq -h(1)$. ■

1.1.3. Hàm đồng biến và hàm nghịch biến

Ta kí hiệu các khoảng, đoạn: (a, b); $[a, b]$; $(a, b]$; $[a, b)$ là I. Một hàm số f được gọi là **đồng biến** (tăng) trên I nếu

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ khi } x_1 < x_2 \quad \forall x_1, x_2 \in I.$$

Một hàm số f được gọi là **nghịch biến** (giảm) trên I nếu

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ khi } x_1 < x_2 \quad \forall x_1, x_2 \in I.$$

Trong trường hợp tổng quát, tập I có thể thay bằng D là tập số bất kì. Lúc đó, ta có định nghĩa hàm số đồng biến hay nghịch biến trên tập D một cách tương tự như trên.

***Ví dụ* 1.1.3.1.** Xét hàm số $y = x^2$ và $y = x^3$ (xem hình 1.4), ta có:

Hàm số	Đoạn tăng	Đoạn giảm
$y = x^2$	$[0, +\infty)$	$(-\infty, 0]$
$y = x^3$	$(-\infty, +\infty)$	Không tồn tại

■

1.1.4. Các phép biến đổi hàm số

Trong tiểu mục này, ta sẽ xem xét các phép toán cơ bản như cộng, trừ, nhân, và chia các hàm số để tạo ra những hàm số mới.

Hàm tổng, hiệu, tích, thương

Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ với tập xác định lần lượt là D_f và D_g. Khi đó các hàm tổng, hiệu và tích của hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có tập xác định là $D_f \cap D_g$ và:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f.g)(x) = f(x).g(x)$$

Tại những điểm $x \in D_f \cap D_g$ và $g(x) \neq 0$, hàm thương của hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ được xác định như sau:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

***Ví dụ* 1.1.4.1.** Xét hai hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ và $g(x) = \sqrt{1 - x}$, ta có $D_f \cap D_g = [0, 1]$.

Hàm	Công thức biểu diễn	Tập xác định
$f+g$	$\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$	$[0,1]$
$f-g$	$\sqrt{x}-\sqrt{1-x}$	$[0,1]$
$f.g$	$\sqrt{x(1-x)}$	$[0,1]$
$\dfrac{f}{g}$	$\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$	$[0,1)$
$\dfrac{g}{f}$	$\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$	$(0,1]$

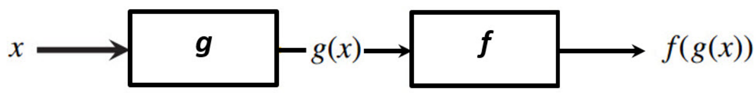
$\blacksquare$

Hàm hợp

Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$. **Hàm hợp** $f\circ g(x)$ được xác định bởi

$$f\circ g(x)=f\big(g(x)\big).$$

Để cho đơn giản, có thể coi hàm hợp là tổ hợp của hai máy như được minh họa trên hình 1.5.



Hình 1.5. Hàm hợp như là tổ hợp của hai máy

***Ví dụ* 1.1.4.2.** Cho hàm $f(x)=\sqrt{x}$ và $g(x)=x+1$. Hãy tìm các hàm hợp sau đây:

$$a/\quad f\circ g \qquad b/\quad g\circ f \qquad c/\quad f\circ f \qquad d/\quad g\circ g$$

Lời giải:

a/ $f\circ g=f\big(g(x)\big)=\sqrt{g(x)}=\sqrt{x+1}$ với tập xác định là $x\in[-1,+\infty)$.

b/ $g\circ f=g\big(f(x)\big)=f(x)+1=\sqrt{x}+1$ với tập xác định là $x\in[0,+\infty)$.

c/ $f\circ f=f\big(f(x)\big)=\sqrt{f(x)}=\sqrt{\sqrt{x}}=\sqrt[4]{x}$ với tập xác định là $x\in[0,+\infty)$.

d/ $g \circ g = g\big(g(x)\big) = g(x) + 1 = (x+1) + 1 = x + 2$ với tập xác định là $x \in (-\infty, +\infty)$.

■

Hàm ngược

Giả sử ta có bảng GNP của một quốc gia phụ thuộc theo thời gian t như sau:

t (năm)	2	5	10	20
$GNP = f(t)$ (tỷ USD)	12	16	27	74

Ta thấy, GNP là hàm của thời gian $GNP = f(t)$. Trong thực tế, ta còn quan tâm đến câu hỏi khi nào để GNP đạt tới một ngưỡng nào đó. Nói cách khác, ta đang nghĩ đến biểu diễn thời gian như là một hàm số của GNP. Hàm số này gọi là hàm ngược của hàm $GNP = f(t)$, kí hiệu f^{-1}. Vậy là $t = f^{-1}(x)$ là số năm cần có để GNP đạt ngưỡng x.

GNP (tỷ USD)	12	16	27	74
$t = f^{-1}(GNP)$ (năm)	2	5	10	20

Chú ý rằng không phải hàm số nào cũng có hàm ngược. Chỉ những hàm số có tương ứng một-một mới có hàm ngược. Vậy, thế nào là hàm có tương ứng một-một? Hàm số có **tương ứng một-một** là hàm số mà ứng với mỗi giá trị của hàm chỉ có một giá trị tương ứng của biến, tức là khi $x_1 \neq x_2$ thì ta có $f(x_1) \neq f(x_2)$.

***Ví dụ* 1.1.4.3.** Hàm số nào sau đây có tương ứng một-một?

$$a/\quad f(x) = x^2 \qquad\qquad b/\quad f(x) = x^3$$

Lời giải:

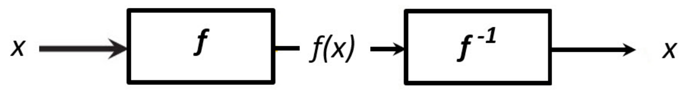
a/ Hàm số $f(x) = x^2$ không có tương ứng một-một bởi với $x = -1$ và $x = 1$ ta có cùng một giá trị $f(-1) = f(1) = 1$.

b/ Hàm số $f(x) = x^3$ có tương ứng một-một bởi vì khi $x_1 \neq x_2$ ta có ngay $f(x_1) = x_1^3 \neq x_2^3 = f(x_2)$. ■

Gọi f là hàm số có tương ứng một-một với tập xác định là A và tập giá trị là B. **Hàm ngược** của f, kí hiệu f^{-1}, có tập xác định là B, tập giá trị là A và được xác định bởi

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x).$$

Chú ý rằng $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$ (xem hình 1.6).



Hình 1.6. Hàm ngược của một hàm số

***Ví dụ* 1.1.4.4.** Hàm ngược của hàm $y = f(x) = x^3$ là $x = f^{-1}(y) = y^{1/3}$. Ta có:

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = f^{-1}(y) = f^{-1}(x^3) = \big(x^3\big)^{1/3} = x.$$

■

Người ta thường dùng x để chỉ biến độc lập và y để chỉ biến phụ thuộc nên ta có các bước để tìm hàm ngược của hàm $y = f(x)$ như sau:

Bước 1: Từ hàm $y = f(x)$, biểu diễn x theo y.

Bước 2: Thay vai trò của x và y.

***Ví dụ* 1.1.4.5.** Tìm hàm ngược của hàm $y = x^3 + 2$.

Lời giải:

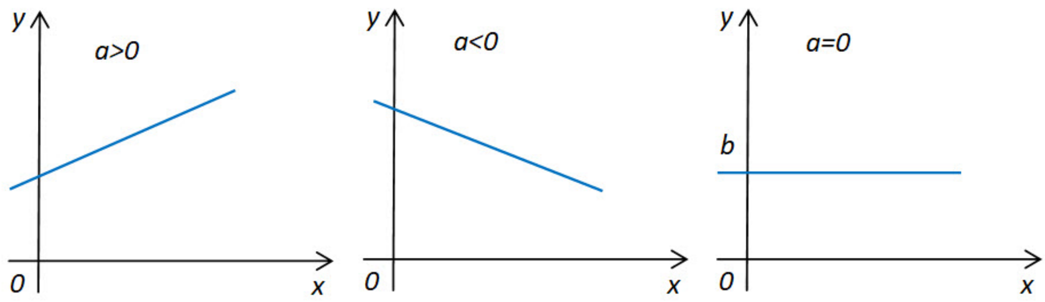
Bước 1: Từ $y = x^3 + 2$ ta có $x = \sqrt[3]{2-y}$.

Bước 2: Hàm ngược sẽ là $y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2-x}$. ■

1.2. Hàm tuyến tính

1.2.1. Định nghĩa

Hàm số được gọi là **hàm tuyến tính** hay hàm bậc nhất nếu nó có dạng $y = f(x) = ax + b$, trong đó a và b là các hằng số. Đồ thị của hàm tuyến tính là đường thẳng. Hệ số a được gọi là hệ số góc của đường thẳng. Hàm số là hàm tăng nếu $a > 0$; hàm giảm nếu $a < 0$ và là hàm hằng $y = b$ nếu $a = 0$ (xem hình 1.7).



Hình 1.7. Đồ thị hàm số $y = ax + b$

Hàm tuyến tính có tính chất đặc trưng, đó là giá trị hàm thay đổi đều khi biến số thay đổi. Chẳng hạn, xét hàm số $y = f(x) = 3x - 2$. Mỗi khi x tăng một lượng là 1 đơn vị thì $f(x)$ tăng một lượng là 3 đơn vị.

1.2.2. Phân tích cung cầu

Xét mối quan hệ giữa giá cả (P) và số lượng (Q) của một loại sản phẩm. Giả sử mối quan hệ này là tuyến tính, tức là ta có:

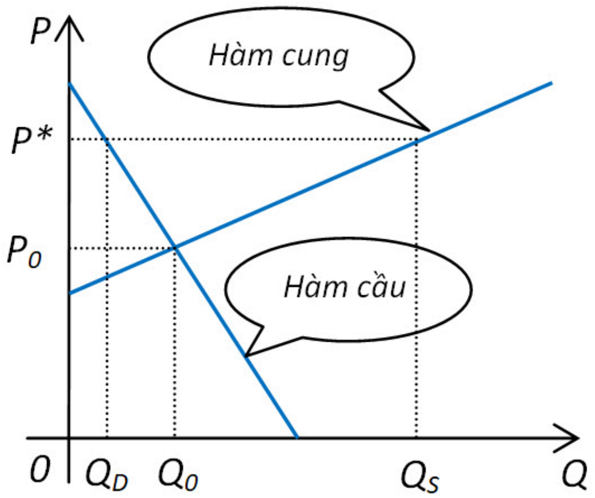
$$P = aQ + b$$

Mối quan hệ này sẽ khác nhau tùy thuộc vào việc ta là người tiêu dùng hay nhà sản xuất:

a) Với người tiêu dùng: Hàm số $P = aQ + b$ được gọi là hàm cầu. Khi giá cả tăng thì nhu cầu (số lượng sản phẩm) sẽ giảm và ngược lại. Nói cách khác hàm số $P = aQ + b$ là hàm giảm (a<0).

b) Với nhà sản xuất: Hàm số $P = aQ + b$ được gọi là hàm cung. Khi giá cả tăng thì nhà sản xuất có xu hướng sản xuất thêm sản phẩm và ngược lại khi giá giảm, nhà sản xuất sẽ hạn chế quy mô. Nói cách khác hàm số $P = aQ + b$ là hàm tăng (a>0).

Xét sự tương tác cung cầu trong kinh tế vi mô. Hình 1.8 vẽ đồ thị của hàm cung và hàm cầu trên cùng một trục tọa độ. Giao điểm giữa đường cung và đường cầu (P_0, Q_0) gọi là điểm cân bằng của thị trường bởi tại đó lượng cung chính xác bằng lượng cầu. Trong thực tế, ta thường hay quan tâm đến trường hợp giá thị trường bị lệch khỏi điểm cân bằng giá P_0. Giả sử giá cả thị trường là $P^* > P_0$, từ hình 1.8, ta thấy $Q_S > Q_D$. Lượng cung lớn hơn lượng cầu dẫn tới việc hàng sẽ bị tồn kho không bán được. Các công ti sẽ có xu hướng cắt giảm sản xuất. Hệ quả là, thị trường bị kéo lại về điểm cân bằng. Tương tự, nếu giá của thị trường nhỏ hơn giá tại điểm cân bằng, cầu sẽ vượt cung. Sự thiếu hụt hàng hóa sẽ đẩy giá lên và khuyến khích các công ti sản xuất nhiều hơn và do đó thị trường cũng quay về điểm cân bằng.



Hình 1.8. Cân bằng cung cầu

***Ví dụ* 1.2.2.1.** Hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm được cho bởi công thức:

$$P = -2Q_D + 50$$

$$P = \frac{1}{2}Q_S + 25$$

trong đó P, Q_D, và Q_S lần lượt tương ứng là giá, số lượng cầu, và số lượng cung.

a/ Xác định điểm cân bằng giá cả và số lượng

b/ Nếu chính phủ đánh thuế 5 USD trên mỗi đơn vị sản phẩm, điểm cân bằng của thị trường thay đổi thế nào?

Lời giải:

a/ Tại điểm cần bằng thị trường $Q_S = Q_D$. Vậy là, điểm cân bằng (P_0, Q_0) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} P = -2Q + 50 \\ P = \frac{1}{2}Q + 25 \end{cases}$$

Giải hệ ta được $P = 30$ và $Q = 10$.

b/ Nếu chính phủ đánh thuế 5 USD trên mỗi đơn vị sản phẩm, số tiền mà công ti thực tế nhận được khi bán mỗi sản phẩm với giá P, chỉ còn là $P - 5$. Vậy là trong hàm cung ban đầu, P được thay bằng $P - 5$:

$$P - 5 = \frac{1}{2}Q_S + 25$$

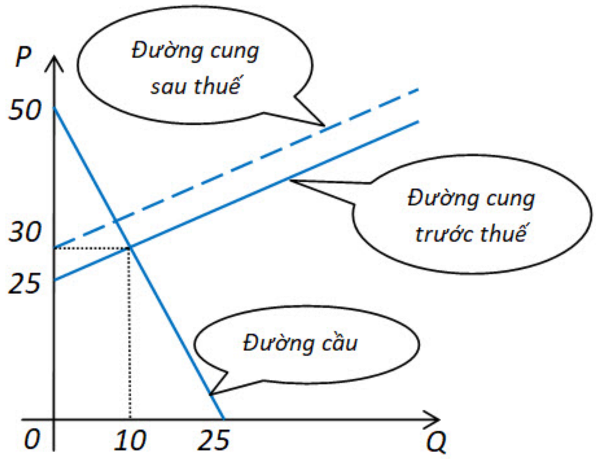
hay

$$P = \frac{1}{2}Q_S + 30$$

Tại điểm cân bằng $Q_S = Q_D$. Vậy là điểm cân bằng mới là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} P = -2Q + 50 \\ P = \frac{1}{2}Q + 30 \end{cases}$$

Giải hệ ta được $Q = 8$ và $P = 34$.



Hình 1.9. Điểm cân bằng trước và sau thuế

Trên hình 1.9, đường cung sau thuế thu được từ đường cung trước thuế bằng cách tịnh tiến lên trên 5 đơn vị. Chú ý rằng, khi chính phủ đánh thuế 5 USD trên mỗi đơn vị sản phẩm, điểm cân bằng của thị trường thay đổi. Ta thấy điểm cân bằng giá tăng từ 30 USD lên 34 USD. Vậy là, khách hàng phải chịu 4 USD tiền thuế, 1 USD còn lại được trả bởi công ti. ■

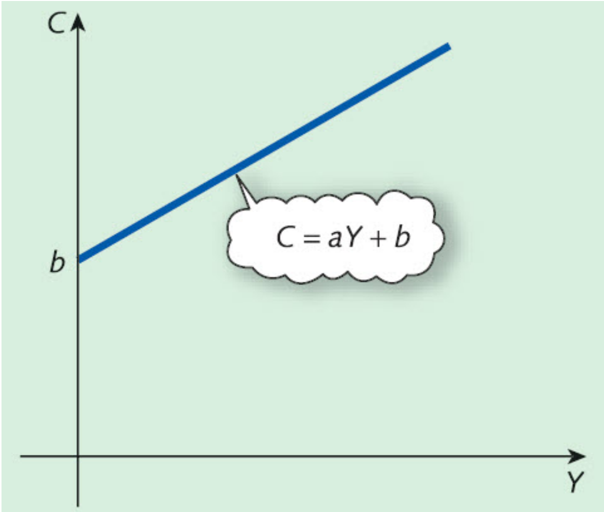
1.2.3. Xác định thu nhập quốc dân

Ta giả sử nền kinh tế chia ra hai thành phần: doanh nghiệp và hộ gia đình. Hộ gia đình có nguồn thu nhập (Y) được sử dụng vào hai việc, đó là tiêu dùng (C) và tiết kiệm (S):

$$Y = C + S$$

Tiêu dùng nói chung là hàm của nguồn thu nhập $C = f(Y)$. Giả sử mối quan hệ này là tuyến tính, tức $C = aY + b$. Thực tế, khi nguồn thu (Y) tăng, các hộ gia đình có xu hướng chi tiêu (C) nhiều hơn. Vậy là hàm $C = aY + b$ là hàm tăng, tức $a > 0$. Khi không có nguồn thu $(Y = 0)$, ta vẫn phải có tiêu dùng (C>0) nên $C = a(0) + b = b > 0$ (xem hình 1.10).

Như đã biết trong phần hàm tuyến tính, vì a là hệ số góc của hàm tuyến tính nên khi tăng Y lên 1 đơn vị, C sẽ tăng a đơn vị. Dễ thấy rằng $a < 1$ bởi khi tăng nguồn thu lên 1 đơn vị, thì một phần a sẽ tăng vào tiêu dùng C còn

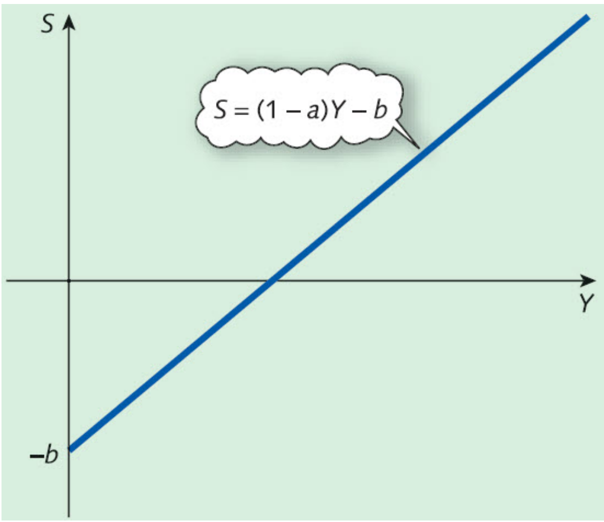


Hình 1.10. Hàm tiêu dùng

phần còn lại sẽ tăng vào khoản tiết kiệm S. Ta cũng có:

$$S = Y - C = Y - (aY + b) = (1 - a)Y - b$$

Vậy là, tiết kiệm S cũng là hàm tuyến tính của nguồn thu Y. Bởi $a < 1$ đồng nghĩa với hệ số góc dương nên hàm này cũng là hàm tăng (xem hình 1.11). Chú ý rằng khi nguồn thu $Y = 0$ thì khoản tiết kiệm $S = -b < 0$. Điều này có nghĩa là khi tiêu dùng C lớn hơn nguồn thu Y, hộ gia đình phải rút tiết kiệm.



Hình 1.11. Hàm tiết kiệm

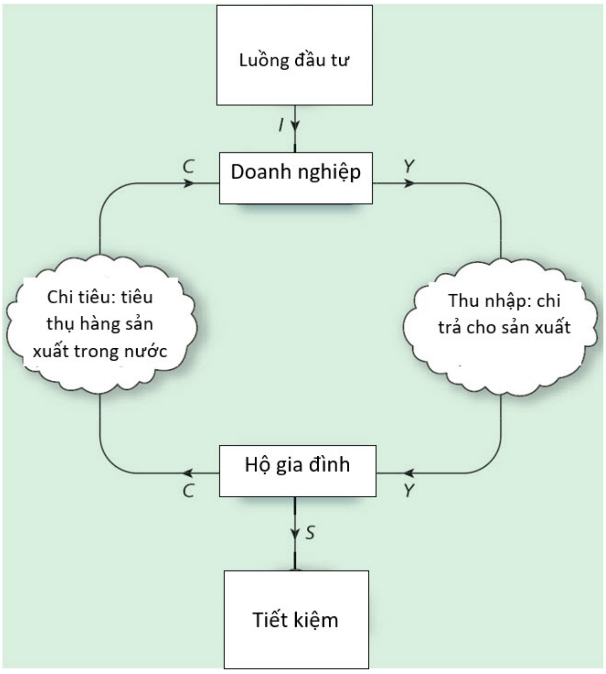
Mô hình đơn giản nhất của nền kinh tế quốc dân được thể hiện trên hình 1.12. Trong sơ đồ này, nguồn đầu tư (I) vào doanh nghiệp và tiền các hộ gia đình sử dụng cho tiêu dùng (C) chính là nguồn thu (Y) của doanh nghiệp:

$$Y = C + I$$

Giả sử rằng việc đầu tư là có kế hoạch từ trước, tức giá trị $I = I^*$ cố định, ta sẽ có:

$$Y = C + I^*$$

Từ phương trình trên và phương trình hàm tiêu dùng $C = aY + b$, ta có thể tính được giá trị C và Y cụ thể.



Hình 1.12. Mô hình kinh tế quốc dân

***Ví dụ* 1.2.3.1.** Tính nguồn thu và mức tiêu dùng biết hàm tiêu dùng cho bởi $C = 0,6Y + 10$ và lượng đầu tư được hoạch định là $I = 12$.

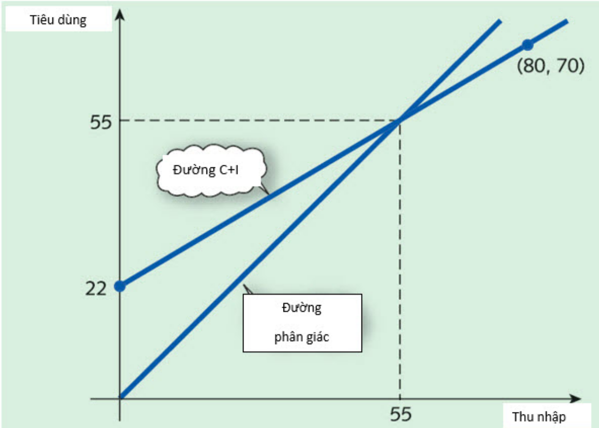
Lời giải:

Từ phương trình $Y = C + I$ ta có $Y = C + 12$.

Kết hợp với phương trình hàm tiêu dùng $C = 0,6Y + 10$, ta có hệ:

$$\begin{cases} Y = C + 12, \\ C = 0,6Y + 10 \end{cases}$$

Giải hệ ta được: $Y = 55$ và $C = 43$.



Hình 1.13. Điểm cân bằng nguồn thu và tiêu dùng

Ta có thể mô tả hình học về kết quả tìm được qua hình 1.13 với chú ý rằng trong hệ trục tọa độ mà trục hoành là nguồn thu và trục tung là tiêu dùng, mọi điểm trên đường phân giác của góc phần tư thứ nhất đều có đặc điểm là tiêu dùng và nguồn thu bằng nhau. Giao điểm của đường phân giác này với đường $C+I$ thỏa mãn phương trình $Y = C+I$ hay $Y = 0,6Y+10+12 = 0,6Y+22$. Từ đó có $Y = 55$ và $C = 0,6Y + 10 = 43$. ■

Trong mô hình trước, ta mới chỉ tính đến tiêu dùng của các hộ gia đình. Để mô hình đúng với thực tế hơn, ta tính đến cả tiêu dùng của chính phủ (G), và thuế (T). Trên hình 1.12, nguồn thu của doanh nghiệp giờ sẽ có 3 thành phần: tiêu dùng hộ gia đình, tiêu dùng chính phủ và lượng đầu tư:

$$Y = C + G + I$$

Giả sử tiêu dùng chính phủ và lượng đầu tư được cố định là G^* và I^*, khi đó ta có:

$$Y = C + G^* + I^*$$

Nếu mô hình quan tâm đến cả thuế T, thì thu nhập sau thuế Y_d của các hộ gia đình là

$$Y_d = Y - T,$$

và vậy là tiêu dùng C phụ thuộc vào thu nhập sau thuế Y_d:

$$C = aY_d + b.$$

Trong thực tế người ta thường cho thuế là cố định $T = T^*$ hoặc thuế tỉ lệ với thu nhập trước thuế $T = tY$, với t là một số nào đó hoặc là tổ hợp của hai phương án trên $T = tY + T^*$.

***Ví dụ* 1.2.3.2.** Cho $G = 20$; $I = 35$; $C = 0,9Y_d + 70$ và $T = 0,2Y + 25$. Tính mức thu nhập quốc dân cân bằng?

Lời giải:

Ta có $Y = C + G^* + I^* = C + 20 + 35$

$$Y = C + 55$$

Từ $C = 0,9Y_d + 70$; $T = 0,2Y + 25$ và $Y_d = Y - T$ ta có:

$$C = 0,9(Y - T) + 70 = 0,9Y - 0,9T + 70 = 0,9Y - 0,9(0,2Y + 25) + 70$$

$$C = 0,72Y + 47,5$$

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} Y = C + 55 \\ C = 0,72Y + 47,5 \end{cases}$$

ta thu được $Y = 366$. ■

Trở lại mô hình kinh tế hai thành phần:

$$Y = C + I$$

$$C = aY + b$$

Thực tế, lượng đầu tư I thường không phải là hằng số như ta đã xét lúc trước, mà nó phụ thuộc vào lãi suất ngân hàng r. Giả sử giá trị đầu tư phụ thuộc tuyến tính vào lãi suất, tức

$$I = cr + d,$$

với c, d là hằng số nào đó. Chú ý rằng vì khi lãi suất tăng thì lượng đầu tư sẽ giảm nên $c < 0$ và vì lượng đầu tư luôn là số dương nên $d > 0$. Ta có

$$Y = (aY + b + (cr + d))$$

$$(1-a)Y - cr = b + d$$

Phương trình trên mô tả mối liên quan của Y và r trong kinh tế vĩ mô được gọi là **phác đồ IS**.

Để xác định giá trị cụ thể của Y và r lúc này ta cần thêm thông tin về thị trường tiền tệ. Thị trường tiền tệ được gọi là cân bằng khi nguồn cung tiền M_S và nguồn cầu tiền tệ M_D bằng nhau:

$$M_S = M_D$$

Lượng tiền M_S bao gồm tất cả tiền đang lưu thông trên thị trường và tiền gửi trong tài khoản ngân hàng. Giá trị của M_S được kiểm soát bởi ngân hàng trung ương và thường được cố định một giá trị:

$$M_S = M_S^*$$

Lượng tiền M_D bao gồm 3 khoản:

i) nhu cầu tiền tệ để giao dịch trao đổi hàng hóa hàng ngày;

ii) nhu cầu tiền để dự phòng cho tiêu dùng phát sinh;

iii) nhu cầu tiền để đầu cơ.

Tổng nhu cầu tiền để giao dịch và dự phòng, kí hiệu L_1, tỉ lệ với thu nhập quốc dân Y:

$$L_1 = k_1 Y,$$

với k_1 là một hằng số dương.

Nhu cầu tiền đầu cơ, kí hiệu L_2 tỉ lệ nghịch với lãi suất r, giả sử mối quan hệ này là tuyến tính:

$$L_2 = k_2 r + k_3,$$

trong đó hằng số $k_2 < 0$ và $k_3 > 0$.

Vậy là tổng nhu cầu tiền tệ là

$$M_D = k_1 Y + k_2 r + k_3.$$

Thị trường tiền tệ cân bằng $M_S = M_D$ dẫn đến phương trình

$$k_1Y + k_2r + k_3 = M_S^*,$$

hay

$$k_1Y + k_2r = M_S^* - k_3.$$

Trong kinh tế vĩ mô, phương trình trên mô tả mối quan hệ của Y và r được gọi là **phác đồ LM**. Từ các phác đồ IS và LM, ta có thể tìm được chính xác giá trị cân bằng của Y và r.

***Ví dụ* 1.2.3.3.** Xác định giá trị cân bằng của thu nhập quốc dân và lãi suất biết thông tin về thị trường hàng hóa là

$$C = 0,8Y + 100$$

$$I = -20r + 1000,$$

và thị trường tiền tệ

$$M_S = 2375$$

$$L_1 = 0,1Y$$

$$L_2 = -25r + 2000.$$

Nếu nguồn cung tiền tệ M_S giảm thì thu nhập quốc dân Y và lãi suất r sẽ bị ảnh hưởng như thế nào?

Lời giải:

Nhu cầu tiền tệ là

$$M_D = L_1 + L_2 = 0,1Y - 25r + 2000$$

Vì lượng cung tiền tệ là $M_S = 2375$ nên ta có phác đồ LM được thể hiện trong phương trình sau:

$$0,1Y - 25r + 2000 = 2375$$

$$0,1Y - 25r = 375$$

Từ $Y = C + I$; $C = 0,8Y + 100$ và $I = -20r + 1000$, ta có:

$$Y = (0,8Y + 100) + (-20r + 1000)$$

Do đó, phác đồ IS có phương trình là:

$$0,2Y + 20r = 1100.$$

Ta có hệ 2 phương trình phác đồ LM và IS:

$$\begin{cases} 0,1Y - 25r = 375 \\ 0,2Y + 20r = 1100 \end{cases}$$

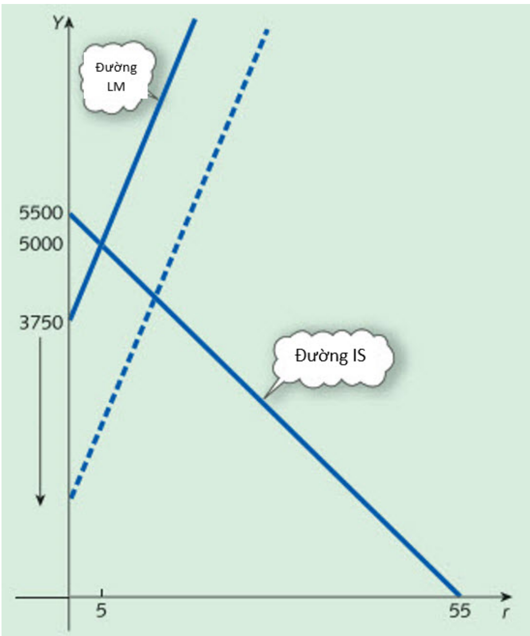
Giải hệ trên, ta thu được $Y = 5000$ và $r = 5$.

Ta biểu diễn Y theo r từ phương trình của phác đồ LM, cụ thể:

$$k_1Y + k_2r + k_3 = M_S^*$$

hay

$$Y = \Big(-\frac{k_2}{k_1}\Big)r + \frac{M_S^* - k_3}{k_1}$$



Hình 1.14. Đường LM và IS

Ta biểu diễn các đường phác đồ LM và IS trên cùng hệ trục tọa độ với trục hoành là lãi suất r và trục tung là thu nhập quốc dân Y (xem hình 1.14). Tọa độ giao điểm của hai đường LM và IS chính là nghiệm (5000, 5). Khi M_S^* giảm, đường IS không thay đổi trong khi đường LM sẽ bị tịnh tiến song song xuống dưới. Ta có thể giải thích từ phương trình trên, khi M_S^* giảm, hệ số góc của đường LM không đổi, trong khi giao điểm của đường LM với trục tung sẽ ở vị trí thấp hơn. Trên hình 1.14, ta biểu diễn đường LM mới bằng đường thẳng đứt đoạn. Nhìn giao điểm mới của đường LM và IS, ta có thể kết luận lãi suất r sẽ tăng trong khi thu nhập quốc dân Y sẽ giảm. ■

1.3. Hàm toàn phương

1.3.1. Định nghĩa

Hàm toàn phương hay còn gọi là hàm bậc hai là hàm số có dạng $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$.

Đồ thị của hàm toàn phương có dạng hình parabol (hình chữ U). Các bước để vẽ đồ thị hàm toàn phương bao gồm:

Bước 1: Xác định parabol có dạng chữ U thuận hay U ngược. Nếu $a > 0$, đồ thị có dạng chữ U bình thường. Nếu $a < 0$, đồ thị có dạng chữ U úp ngược.

Bước 2: Xác định trục đối xứng của đồ thị $x = \dfrac{-b}{2a}$.

Bước 3: Tính tọa độ đỉnh của parabol $x^* = \dfrac{-b}{2a}$, và $y = f(x^*)$.

Bước 4: Tìm giao điểm của parabol với trục tung $x = 0$ và với trục hoành (nếu có) bằng cách giải phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.

Bước 5: Tìm vài điểm đặc biệt khác của đồ thị nếu cần thiết.

***Ví dụ* 1.3.1.1.** Vẽ đồ thị của hàm toàn phương $y = -x^2 + 8x - 12$.

Lời giải:

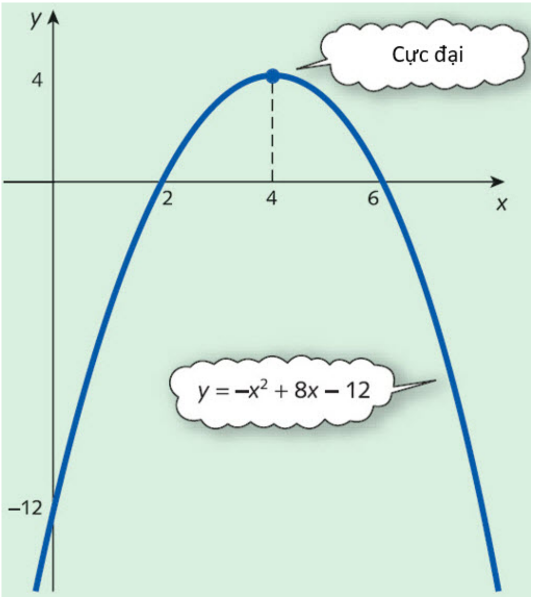
Bước 1: Vì $a = -1 < 0$, đồ thị có dạng chữ U úp ngược.

Bước 2: Trục đối xứng của đồ thị $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-8}{2(-1)} = 4$.

Bước 3: Tọa độ đỉnh của parabol $x^* = 4$, và $y = f(4) = -(4)^2 + 8(4) - 12 = 4$.

Bước 4: Giao điểm của parabol với trục tung $x = 0$ là (0, -12). Tìm giao điểm của đồ thị với trục hoành bằng cách giải phương trình $-x^2 + 8x - 12 = 0$. Giải phương trình này ta được nghiệm là $x = 2$ và $x = 6$.

Đồ thị của hàm số có dạng như hình 1.15. ■



Hình 1.15. Đồ thị hàm số $y = -x^2 + 8x - 12$

Trong phần trước, chúng ta xét bài toán cân bằng cung cầu trong kinh tế vi mô trong đó hàm cung và hàm cầu được cho ở dạng hàm tuyến tính. Ví dụ sau đây mở rộng các hàm cung và hàm cầu sang dạng hàm toàn phương.

***Ví dụ* 1.3.1.2.** Cho hàm cung và hàm cầu

$$P = Q_S^2 + 14Q_S + 22$$

$$P = -Q_D^2 - 10Q_D + 150$$

Tìm giá cân bằng và lượng cân bằng của thị trường.

Lời giải:

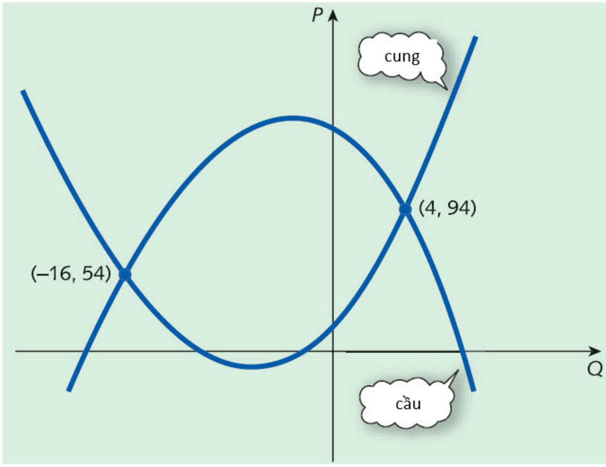
Tại điểm cân bằng ta có $Q_S = Q_D$, nếu chúng ta kí hiệu lượng cân bằng này là Q thì hàm cung và hàm cầu trở thành

$$\begin{cases} P = Q^2 + 14Q + 22 \\ P = -Q^2 - 10Q + 150 \end{cases}$$

Trừ phương trình vế với vế ta được phương trình bậc hai $2Q^2 + 24Q - 128 = 0$ hay

$$Q^2 + 12Q - 64 = 0$$

Giải phương trình bậc hai này ta được $Q = -16$ (loại, vì lượng cân bằng không thể là số âm) và $Q = 4$. Thay $Q = 4$ vào một trong hai phương trình trong hệ ta được $P = 94$. Bài toán có thể được mô tả trực quan bởi đồ thị trên hình



Hình 1.16. Hàm cung và hàm cầu toàn phương

1.16. ∎

1.3.2. Doanh thu, chi phí và lợi nhuận

Hàm doanh thu TR được định nghĩa là $TR = PQ$. Giả sử hàm cầu cho dưới dạng hàm tuyến tính $P = aQ + b \quad (a < 0, \quad b > 0)$, khi đó hàm doanh thu $TR = PQ = (aQ + b)Q = aQ^2 + bQ$. Vậy là hàm doanh thu có dạng toàn phương. Do hệ số $a < 0$ nên đồ thị của hàm TR có dạng chữ U ngược. Thêm nữa, đồ thị luôn đi qua gốc tọa độ. Điều này phù hợp với thực tiễn là khi số lượng hàng được bán bằng không ($Q = 0$) thì không có doanh thu ($TR = 0$). Dễ dàng thấy đồ thị có dạng chữ U ngược nên hàm doanh thu sẽ đạt cực đại tại đỉnh của parabol.

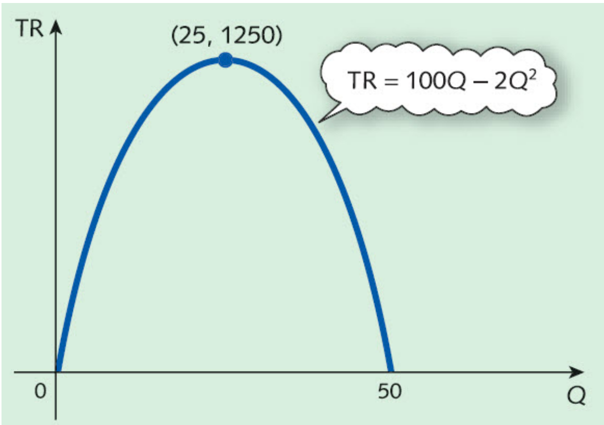
***Ví dụ* 1.3.2.1.** Cho hàm cầu $P = 100 - 2Q$. Xác định hàm doanh thu TR và vẽ đồ thị của nó.

a/ Tìm Q để $TR = 0$;

b/ Tìm giá trị cực đại của doanh thu TR.

Lời giải:

Hàm doanh thu $TR = PQ = (100 - 2Q)Q = 100Q - 2Q^2$. Hệ số $a = -2 < 0$ nên đồ thị hàm số có dạng chữ U ngược. Đồ thị hàm số được vẽ trên hình 1.17.



Hình 1.17. Đồ thị hàm doanh thu $TR = 100Q - 2Q^2$

a/ Khi $TR = 0$, ta có $100Q - 2Q^2 = 0$ từ đó suy ra $Q = 0$ hoặc $Q = 50$. Trên đồ thị hình 1.17, hai điểm tìm được chính là giao điểm của đồ thị với trục hoành.

b/ Giá trị cực đại của doanh thu TR đạt tại đỉnh của parabol, với

$$Q = -\frac{b}{2a} = -\frac{100}{2(-2)} = 25.$$

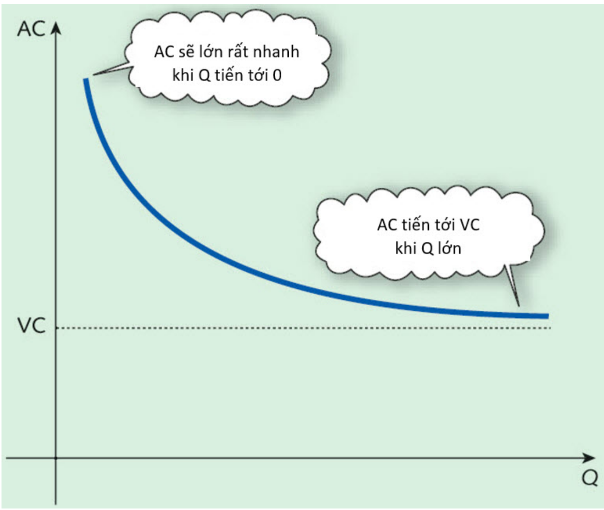
Giá trị cực đại khi đó là: $TR = 100(25) - 2(25)^2 = 1250$. ■

Bây giờ chúng ta chuyển sang xem xét hàm chi phí khi sản xuất Q sản phẩm. Chi phí sản xuất thường gồm hai phần: chi phí cố định và chi phí biến đổi. Chi phí cố định FC là chi phí cho đất đai, nhà xưởng, thiết bị ... những thứ không thay đổi dù ta sản xuất ít hay nhiều hàng hóa. Trong khi đó, chi phí biến đổi là thường là chi phí cho nguyên vật liệu kể cả nhân công để sản xuất hàng hóa. Nếu gọi VC là chi phí biến đổi cho một đơn vị hàng, thì tổng chi phí biến đổi cho Q đơn vị hàng sẽ là $TVC = (VC)Q$. Do đó, hàm tổng chi phí là $TC = FC + (VC)Q$.

Một hàm chi phí khác cũng hay được xem xét khi đánh giá so sánh các doanh nghiệp, đó là hàm chi phí trung bình AC:

$$AC = \frac{TC}{Q} = \frac{FC + (VC)Q}{Q} = \frac{FC}{Q} + VC.$$

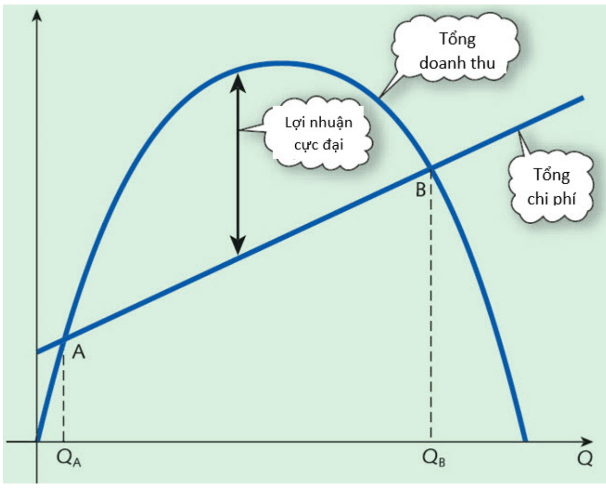
Nếu thành phần VC là hằng số thì hàm TC là hàm tuyến tính, còn hàm AC sẽ là hàm giảm. Thật vậy, khi Q tăng, số hạng $\frac{FC}{Q}$ giảm về không và do đó giá trị hàm AC giảm về giá trị VC. Đồ thị của hàm AC có dạng chữ L (xem hình 1.18).



Hình 1.18. Đồ thị hàm chi phí trung bình AC

Với giả thiết hàm cầu là tuyến tính và VC là hằng số, khi đó hàm TR là hàm toàn phương còn hàm TC là hàm tuyến tính. Hình 1.19 biểu diễn đồ thị của hai hàm này trên cùng một hệ trục tọa độ, với trục hoành là số lượng Q và trục tung là doanh thu hoặc chi phí. Đồ thị của chúng giao nhau tại hai điểm A và B tương ứng với hai giá trị số lượng Q_A và Q_B. Tại những điểm này, doanh thu và chi phí bằng nhau và do đó doanh nghiệp hòa vốn. Nếu $Q < Q_A$ hoặc $Q > Q_B$, đường chi phí TC nằm trên đường doanh thu TR. Khi đó doanh nghiệp bị thua lỗ. Trong trường hợp $Q_A < Q < Q_B$, doanh nghiệp sẽ đạt lợi nhuận, với giá trị lợi nhuận tương ứng với khoảng cách giữa hai đồ thị. Lợi nhuận sẽ lớn nhất đạt được khi khoảng cách giữa hai đồ thị là xa nhất. Tuy nhiên, cách tính lợi nhuận sẽ dễ dàng hơn khi ta sử dụng trực tiếp định nghĩa hàm lợi nhuận, kí hiệu bởi π:

$$\pi = TR - TC$$



Hình 1.19. Đồ thị hàm doanh thu và hàm chi phí

***Ví dụ* 1.3.2.2.** Nếu chi phí cố định là 4, chi phí biến đổi trên một đơn vị sản phẩm là 1, và hàm cầu được cho bởi công thức:

$$P = 10 - 2Q$$

Thiết lập hàm lợi nhuận π theo Q, từ đó

a/ Tính giá trị của Q tại đó doanh nghiệp hòa vốn.

b/ Tính lợi nhuận cực đại của doanh nghiệp.

Lời giải:

Hàm TC được cho bởi công thức

$$TC = FC + (VC)Q = 4 + Q.$$

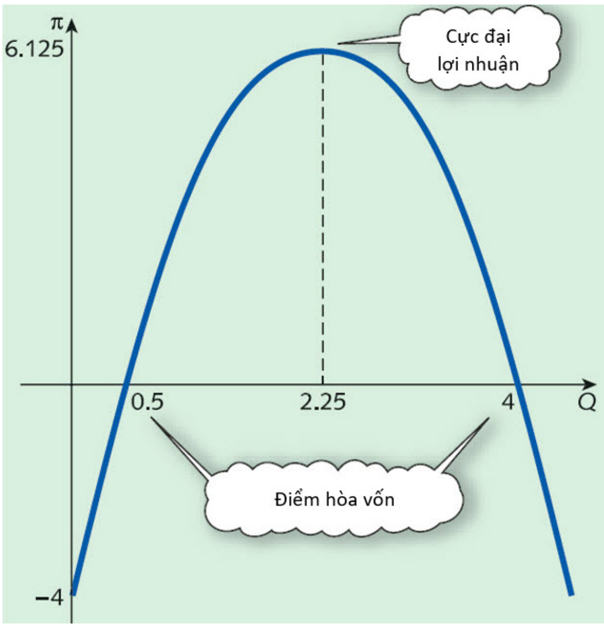
Vì hàm cầu là $P = 10 - 2Q$ nên hàm doanh thu là

$$TR = PQ = (10 - 2Q)Q = 10Q - 2Q^2.$$

Do đó, hàm lợi nhuận sẽ được tính là

$$\pi = TR - TC = (10Q - 2Q^2) - (4 + Q) = -2Q^2 + 9Q - 4.$$

Đồ thị của hàm số được minh họa trên hình 1.20.



Hình 1.20. Đồ thị hàm lợi nhuận

a/ Doanh nghiệp hòa vốn tức là $\pi = 0$, hay:

$$-2Q^2 + 9Q - 4 = 0$$

Giải phương trình bậc hai ở trên ta được $Q = 0,5$ và $Q = 4$.

b/ Lợi nhuận đạt cực đại tại điểm $Q = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{9}{2(-2)} = 2,25$. Giá trị lợi nhuận cực đại khi đó là:

$$\pi = -2(2,25)^2 + 9(2,25) - 4 = 6,125.$$

■

1.4. Hàm mũ và hàm logarit

1.4.1. Hàm mũ

Trước khi đi vào định nghĩa hàm mũ, ta nhắc lại một số quy ước và tính chất sau với số mũ:

i) Với n là một số nguyên dương và $a > 0$ thì

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdots a \text{ (}n\text{ lần của } a \text{ nhân với nhau).}$$

ii) Với n là một số nguyên dương và $a > 0$

$$a^0 = 1 \text{ và } a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

iii) Với n, p, q là số nguyên dương và $a > 0$ thì

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}.$$

iv) Với $a > 0$, ta có:

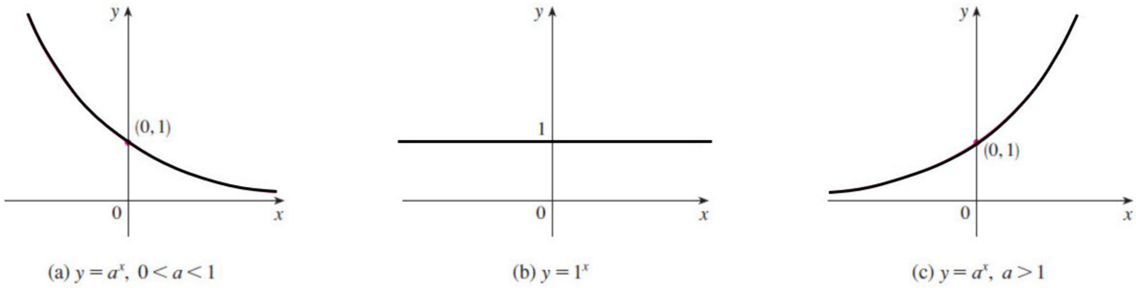
$$a)\quad a^x a^y = a^{x+y} \quad b)\quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad c)\quad (a^x)^y = a^{xy} \quad d)\quad (ab)^x = a^x b^x$$

Hàm mũ là hàm số có dạng $y = a^x$, với $a > 0$. Hàm số mũ có tập xác định là $(-\infty, +\infty)$ và tập giá trị là $(0, +\infty)$. Đồ thị của nó luôn đi qua điểm $(0, 1)$. Hàm mũ là hàm tăng nếu $a > 1$; là hàm giảm nếu $0 < a < 1$. Khi $a = 1$ hàm mũ suy biến về hàm hằng $y = 1$ (xem hình 1.21).

Trong thực tiễn ta hay gặp hàm số mũ với cơ số e như $y = e^x$ hoặc $y = e^{g(x)}$ với $g(x)$ là một hàm số của x. Nhắc lại rằng $e \approx 2,71828$ và nó là giá trị giới hạn của biểu thức $\left(1 + \dfrac{1}{m}\right)^m$ khi $m \to +\infty$. Xét một số ví dụ sau đây:

***Ví dụ* 1.4.1.1.** Tỉ lệ phần trăm (y) số hộ gia đình sở hữu tủ lạnh sau t năm là:

$$y = 100 - 95e^{-0,15t}.$$



Hình 1.21. Tính tăng giảm của hàm số mũ

(1) Tính tỉ lệ phần trăm số hộ sở hữu tủ lạnh

a/ Tại thời điểm tủ lạnh được tung ra thị trường;

b/ Sau 1 năm;

c/ Sau 10 năm;

d/ Sau 20 năm.

(2) Tính tỉ lệ phần trăm số hộ gia đình sở hữu tủ lạnh sau một khoảng thời gian đủ dài.

(3) Vẽ đồ thị hàm số $y(t)$ theo t.

Lời giải:

(1) Để tính toán tỉ lệ phần trăm này, ta chỉ cần thay thế $t = 0, \quad 1, \quad 10, \quad 20$ vào hàm số $y = 100 - 95e^{-0,15t}$

a/ $y(0) = 100 - 95e^0 = 5(\%)$;

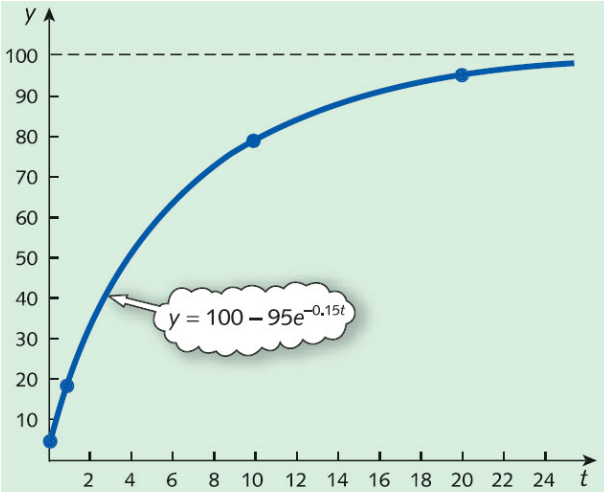
b/ $y(1) = 100 - 95e^{-0,15} = 18(\%)$;

c/ $y(10) = 100 - 95e^{-1,5} = 79(\%)$;

d/ $y(10) = 100 - 95e^{-3} = 95(\%)$.

(2) Ta thấy rằng tỉ lệ phần trăm số hộ gia đình sở hữu tủ lạnh sẽ tăng dần theo thời gian. Khi $t \to +\infty$ thì $e^{-0,15t} \to 0$. Do đó, $y \to 100 - 95(0) = 100(\%)$.

(3) Đồ thị hàm số $y(t)$ theo t được vẽ trên hình 1.22.



Hình 1.22. Đồ thị của hàm $y = 100 - 95e^{-0,15t}$ theo thời gian

Từ đồ thị ta thấy theo thời gian, tỉ lệ sở hữu tủ lạnh tăng dần nhưng bị chặn bởi con số 100(%). ■

1.4.2. Hàm logarit

Xét hàm số mũ $y = a^x$ ($a > 0$ và $a \neq 1$). Hàm này là hàm tăng hoặc giảm nên nó là hàm có tương ứng một-một, và vậy là nó có hàm ngược. Hàm ngược của hàm $y = f(x) = a^x$, được gọi là **hàm logarit cơ số** a, kí hiệu $\log_a$. Thật vậy, từ $y = f(x) = a^x$, ta có hàm ngược $x = f^{-1}(y) = \log_a(y)$. Thay đổi kí hiệu, dùng x để chỉ biến độc lập và y để chỉ biến phụ thuộc, ta có hàm ngược $y = \log_a(x)$.

Hàm logarit cơ số a $y = \log_a x$ có tập xác định là $(0, +\infty)$ và tập giá trị $(-\infty, +\infty)$. Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm $(1, 0)$ và đối xứng với đồ thị hàm số $y = a^x$ qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất (xem hình 1.23).

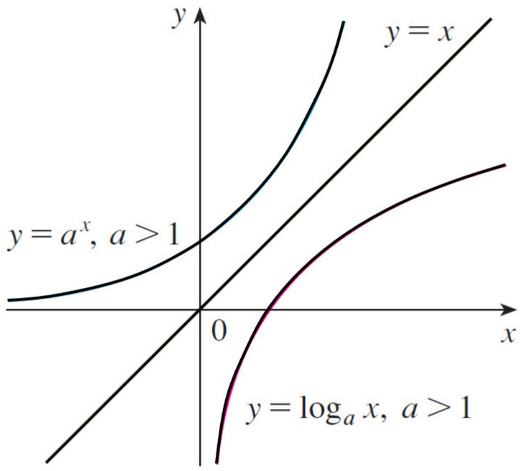
Một vài tính chất cơ bản của hàm logarit:

a/ $\log_a 1 = 0$

b/ $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

c/ $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

d/ $\log_a x^r = r \log_a x$



Hình 1.23. Đồ thị hàm logarit

Một hàm logarit cơ bản hay gặp trong thực tế là logarit cơ số e, kí hiệu: $\log_e x = \ln x$. Để đổi cơ số, ta có công thức:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

***Ví dụ* 1.4.2.1.** Một nền kinh tế được dự báo tăng trưởng liên tục với tổng sản phẩm quốc dân GNP (đơn vị: tỉ USD), sau t năm, cho bởi hàm số sau:

$$GNP = 80e^{0,02t}.$$

Hỏi sau bao nhiêu năm thì GNP sẽ đạt 88 tỷ USD? GNP sẽ tăng đến giá trị như thế nào?

Lời giải:

Ta cần tìm t bằng cách giải phương trình

$$88 = 80e^{0,02t}$$

$$e^{0,02t} = 1,1$$

$$0,02t = \ln 1,1$$

$$t = \frac{\ln 1,1}{0,02} = 4,77$$

Vậy là GNP sẽ đạt 88 tỉ đô sau $t = 4,77$ năm.

Theo thời gian, khi $t \to +\infty$, $GNP \to +\infty$. ■

1.5. Bài tập Chương 1

Hướng dẫn ôn tập

Mục 1.1: định nghĩa hàm số; tập xác định; tập giá trị; đồ thị hàm số; hàm số chẵn; hàm số lẻ; hàm đồng biến; hàm nghịch biến; hàm ngược.

Mục 1.2: hàm tuyến tính; phân tích cung cầu; xác định thu nhập quốc dân.

Mục 1.3: hàm toàn phương; hàm doanh thu; hàm chi phí; hàm lợi nhuận.

Mục 1.4: hàm mũ; hàm logarit.

Sinh viên ôn tập lần lượt các vấn đề then chốt theo thứ tự trên đây, nghiên cứu kĩ các ví dụ, rèn luyện kĩ năng tính toán và giải quyết vấn đề qua việc giải được tối thiểu 50% số bài tập được liệt kê cho từng mục.

Bài tập mục 1.2

Bài 1. Cho hàm số $f(x) = 3x + 15$ và $g(x) = \dfrac{1}{3}x - 5$. Tính:

a/ $f(2)$ *b/* $f(10)$ *c/* $f(0)$

d/ $g(21)$ *e/* $g(45)$ *g/* $g(15)$

Mô tả mối quan hệ giữa $f(x)$ và $g(x)$.

Bài 2. Vẽ đồ thị của hàm cung $P = \dfrac{1}{3}Q + 7$ và tính

a/ P khi $Q = 12$;

b/ Tính Q khi $P = 10$;

c/ Tính Q khi $P = 4$.

Bài 3. Hàm cung và hàm cầu của một sản phẩm được cho lần lượt bởi $P = 2Q_S + 10$ và $P = -5Q_D + 80$.

a/ Tìm điểm cân bằng giá và số lượng;

b/ Nếu chính phủ giảm thuế cho mỗi sản phẩm một lượng là 15% của giá sản phẩm, tính điểm cần bằng giá và lượng mới.

Bài 4. Hàm cung và hàm cầu của một sản phẩm được cho lần lượt bởi $P = Q_S + 8$ và $P = -3Q_D + 80$.

a/ Tìm điểm cân bằng giá và số lượng nếu chính phủ đánh thuế 36 USD trên mỗi sản phẩm.

b/ Tính tổng số tiền thuế mà chính phủ thu được..

Bài 5. Cho hàm cầu thỏa mãn $2P + 3Q_D = 60$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của P

Bài 6. Xét một nền kinh tế khép kín không có sự can thiệp của chính phủ, với hàm tiêu dùng

$$C = 0,6Y + 30$$

và lượng đầu tư cố định theo kế hoạch là $I = 100$.

a/ Tính thu nhập quốc dân;

b/ Tính lượng tiêu dùng;

c/ Tính lượng tiết kiệm.

Bài 7. Viết biểu thức của hàm tiết kiệm theo thu nhập, biết hàm tiêu dùng cho bởi công thức

$$a/ \quad C = 0,9Y + 72 \qquad\qquad b/ \quad C = \frac{Y^2 + 500}{Y + 10}$$

Bài 8. Cho

Hàm tiêu dùng: $C = 0,8Y + 60$

Hàm tiêu dùng: $I = -30r + 740$

Nguồn cung tiền tệ: $M_S = 4000$

Tổng nhu cầu tiền tệ cho giao dịch và dự trữ: $L_1 = 0,15Y$

Nhu cầu tiền cho đầu cơ: $L_2 = -20r + 3825$

Xác định thu nhập quốc dân Y và lãi suất r với giả thiết thị trường hàng hóa và tiền tệ đều ở trạng thái cân bằng.

Bài tập mục 1.3

Bài 1. Cho hàm cung và hàm cầu lần lượt là

$$P = Q_S^2 + 2Q_S + 12$$

$$P = -Q_D^2 - 4Q_D + 68$$

Xác định điểm cân bằng giá và lượng.

Bài 2. Cho các hàm cầu sau đây

$a/\quad P = 4 \qquad\qquad b/\quad P = \dfrac{7}{Q} \qquad\qquad c/\quad P = 10 - 4Q$

Biểu diễn hàm TR theo Q từ đó vẽ đồ thị của hàm số tương ứng.

Bài 3. Biết chi phí cố định là 1, chi phí biến đổi trên một đơn vị sản phẩm là $Q+1$. Biểu diễn hàm TC và AC theo Q từ đó vẽ đồ thị của hàm số.

Bài 4. Thiếp lập hàm lợi nhuận biết hàm cầu thỏa mãn phương trình

$$2Q + P = 25$$

và hàm chi phí trung bình

$$AC = \frac{32}{Q} + 5$$

Tìm giá trị Q mà tại đó công ti:

a/ hòa vốn;

b/ bị lỗ 432 đơn vị giá trị;

c/ có lợi nhuận cực đại.

Bài 5. Vẽ đồ thị hàm chi phí và hàm doanh thu sau đây trên cùng một hệ trục tọa độ

$$TC = 2Q + 10 \qquad\qquad TR = -2Q^2 + 14Q$$

a/ Dùng đồ thị để tính toán giá trị Q sao cho: i) công ti hòa vốn; ii) công ti tối đa hóa lợi nhuận.

b/ Yêu cầu tính toán như câu a) sử dụng phương pháp đại số.

Bài 6. Hàm lợi nhuận của một công ti có dạng

$$\pi = aQ^2 + bQ + c$$

Biết rằng giá trị lợi nhuận là 9;34; và 19 khi Q tương ứng là 1;2; và 3. Tìm a, b và c, sau đó tìm giá trị lợi nhuận khi $Q = 4$.

Bài tập mục 1.4

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a/ $2^{3x} = 4$ *b/* $4 \times 2^x = 32$ *c/* $8^x = 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

Bài 2. Giải phương trình

$$\log_{10} x + 2 + \log_{10} x - 1 = \log_{10} \frac{3}{2}$$

Bài 3. Gọi N là số sản phẩm sản xuất mỗi ngày của một công nhân; và gọi t là số ngày được đào tạo. Đại lượng N là một hàm của t:

$$N = 100 - 100e^{-0,4t}$$

a/ Tính số sản phẩm sản xuất mỗi ngày sau: i) 1 ngày đươc đào tạo; ii) 2 ngày đươc đào tạo; iii)10 ngày đươc đào tạo.

b/ Số sản phẩm mỗi ngày sản xuất được là bao nhiêu nếu thời gian t đủ lớn?

c/ Vẽ đồ thị.

Bài 4. Giá trị y của một ô tô cũ giảm theo thời gian t năm, và được cụ thể theo công thức:

$$y = Ae^{-ax}$$

Nếu ô tô mới có giá trị là 50000 USD và giá trị sau 2 năm sử dụng là 38000 USD, tìm A và a. Tính giá trị của ô tô:

a/ sau 5 năm;

b/ khi thời gian t đủ lớn.

Tài liệu tham khảo chính Chương 1

[1] Nguyễn Quốc Hưng, *Toán cao cấp và một số ứng dụng trong kinh doanh*, Nhà xuất bản Giao thông vận tải, 2009. Chương 1: Hàm số một biến; Chương 2: Ứng dụng hàm một biến

[2] Nguyễn Đình Trí, Trần Việt Dũng, Trần Xuân Hiển, Nguyễn Xuân Thảo *Toán cao cấp*, Tập 2; Giải tích, Nhà xuất bản Giáo dục, 2015. Chương 1: Hàm số một biến số

[3] Ian Jacques, *Mathematics for Economics and Business*, 7th edition, Pearson, 2013. Chapter 2: Linear Equations; Chapter 3: Non-linear Equations

[4] James Stewart, *Calculus: Early Transcendentals*, 6th edition Thomson, 2008. Chapter 1: Functions and Models

[5] George Thomas, Maurice Weir, *Thomas' Calculus*, 11th edition, Addison Wesley Longman , 2004. Chapter 1: Preliminaries

Chương 2

Tỉ lệ phần trăm, cấp số và toán tài chính

Chương 2 cung cấp cho sinh viên các kiến thức và hiểu biết để thực hành các tính toán tài chính cơ bản. Mục 2.1 trước hết ôn lại về *tỉ lệ phần trăm, hệ số tỉ lệ, tỉ lệ phần trăm thay đổi*; sau đó trình bày về *số chỉ số*, tính *giá trị điều chỉnh theo lạm phát*, khái niệm *lãi đơn* và *lãi kép*, *giá trị tương lai* khi tính lãi kép theo năm và khi tính lãi kép liên tục, xác định lãi suất hàng năm dựa trên một mức *lãi suất danh nghĩa*, xác định *lãi suất hiệu dụng* năm trong các phân tích, tính toán tài chính và đầu tư. Mục 2.2 ôn lại về khái niệm *cấp số nhân* và *công thức tính tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân* đã học ở trung học phổ thông, sau đó giới thiệu về các ứng dụng của cấp số nhân trong tính toán *tổng đầu tư được thực hiện theo một kế hoạch gửi tiết kiệm* và tính *lượng tiền chi trả hàng kì để trả hết một khoản nợ* trong thời hạn n kì. Mục 2.3 trang bị cho sinh viên các kiến thức và kĩ năng cần thiết trong việc tính toán *giá trị hiện tại của một lượng đầu tư* khi lãi kép được hình thành rời rạc và liên tục, sử dụng *giá trị hiện tại ròng* và *tỉ suất nội hoàn* để *đánh giá dự án đầu tư*, tính *giá trị hiện tại của một chuỗi niên kim* hay một *dòng tiền* nhằm *so sánh và chọn lựa dự án đầu tư*. Mục 2.3 cũng sẽ trình bày việc tính toán *giá trị hiện tại của trái phiếu chính phủ* để phân tích được *mối quan hệ giữa sự biến động của lãi suất và nhu cầu đầu cơ tiền tệ*.

2.1. Tỉ lệ phần trăm, lãi đơn và lãi kép

2.1.1. Tỉ lệ phần trăm

Các nội dung của tiểu mục 2.1.1 bao gồm: Ôn lại về tỉ lệ phần trăm, hệ số tỉ lệ, tỉ lệ phần trăm thay đổi, số chỉ số, tính giá trị điều chỉnh theo lạm phát.

Ôn lại về tỉ lệ phần trăm

Để có thể thực hiện các tính toán tài chính hay kế toán, chúng ta cần biết cách sử dụng tỉ lệ phần trăm một các thành thạo. Tỉ lệ phần trăm có thể được biểu diễn dưới dạng số thập phân hoặc dạng phân số, chẳng hạn như: 25% = 0,25 = 1/4.

Ví dụ 2.1.1.1. a/ Một đầu tư tăng từ 2500 lên 3375 triệu VND, hãy biểu thị gia tăng về đầu tư qua tỉ lệ phần trăm so với giá trị đầu tư ban đầu.

b/ Vào 1/1/2017, một công ti có số nhân viên là 840. Cho biết gia tăng của số nhân viên là 15% tính đến ngày cuối năm 31/12/2017. Hãy tìm số nhân viên của công ti tại thời điểm cuối năm 31/12/2017.

c/ Trong một đợt xả hàng cuối năm của một cửa hàng bán lẻ, giá cả tất cả các loại hàng giảm 20%. Tính giá bán ra cuối cùng của một loại hàng hóa mà trước khi xả hàng có giá 580 ngàn VND.

Lời giải:

a/ Giá trị gia tăng về đầu tư là: 3375 - 2500 = 875 triệu VND.
Vậy gia tăng về đầu tư theo tỉ lệ phần trăm là: 875/2500 = 0,35 hay 35%.

b/ Số nhân viên gia tăng là: 0,15.840 = 126.
Vậy số nhân viên của công ti tại thời điểm cuối năm là: 840 + 126 = 966.

c/ Giảm giá của loại hàng hóa là 0,2.580 = 116 ngàn VND.
Vậy giá bán ra cuối cùng là: 580 - 116 = 464 ngàn VND. ■

Hệ số tỉ lệ

Trong ví dụ 2.1.1.1b) và 2.1.1.1c), việc tính toán được thực hiện theo hai bước. Tại bước 1, cần tính giá trị tăng hay giảm trên thực tế căn cứ vào gia tăng về. Sau đó, tại bước 2, giá trị này được gộp vào giá trị ban đầu để tìm ra đáp số cuối cùng. Hai bước trên đây có thể kết hợp vào thành một bước duy nhất nhằm giúp cho qua trình tính toán đơn giản, cũng như để thực hiện tính toán hiệu quả hơn trong các bài toán tài chính phức tạp. Để thực hiện việc kết hợp này, cần sử dụng hệ số tỉ lệ.

***Ví dụ* 2.1.1.2.** a/ Giả sử tỉ lệ lạm phát của năm là 4%, tìm giá của một mặt hàng cuối năm biết giá vào đầu năm là 25 triệu VND.

b/ Giá của một mặt hàng là 750 ngàn VNĐ tính cả thuế bán hàng 20%. Tính giá của mặt hàng đó trước thuế.

c/ Biểu thị tỉ lệ phần trăm tăng từ 950 lên 1007.

Lời giải:

a/ Hệ số tỉ lệ là: 1+ 4/100 = 1,04, nên giá cuối năm là: 25.1,04 = 26 triệu VND.

b/ Hệ số tỉ lệ là 1 + 20/100 = 1,2, nên giá trước thuế là: 750/1,2 = 625 ngàn VND.

c/ Hệ số tỉ lệ = (giá trị mới)/(giá trị cũ) = 1007/950 = 1,06 cũng chính là 1 + 6/100.

Vậy tỉ lệ phần trăm tăng từ 950 lên 1007 là 6/100 hay 6%. ■

Ví dụ 2.1.1.3. a/ Giá trị một xe ô tô được khấu hao 25% trong vòng một năm.Tính giá trị xe cuối năm biết giá vào đầu năm là 430 triệu VND.

b/ Sau khi giảm giá bán 15%, giá của hàng hóa là 399,5 ngàn VND. Hãy giá của hàng hóa trước khi giảm giá.

c/ Số lượng hành khách sử dụng thông tin của một kênh dự báo thời tiết giảm từ 190205 xuống 174989 trong vòng một năm. Tìm tỉ lệ phần trăm giảm của số lượng cuối năm so với số lượng đầu năm.

Lời giải:

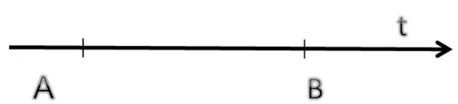
a/ Hệ số tỉ lệ là: 1- 25/100 = 0,75 nên giá trị cuối năm của xe ca là 430.0,75 = 32250 triệu VND.

b/ Hệ số tỉ lệ là: 1 – 15/100 = 0,85, nên giá của hàng hóa trước khi giảm giá là 399,5/0.85 = 470 ngàn VND.

c/ Hệ số tỉ lệ là: (giá trị mới/ giá trị cũ) = 174989/190205 = 0,92 = 1 – 8/100. Vậy tỉ lệ phần trăm giảm của số lượng cuối năm so với số lượng đầu năm là 8%. ■

Tỉ lệ phần trăm thay đổi

Trên trục thời gian t, ta kí hiệu A là giá trị cũ, B là giá trị mới của một loại hàng hóa (hình 2.1).



Hình 2.1

Lúc đó, tỉ lệ phần trăm thay đổi của B so với A là:

$$\left|\frac{B-A}{A}\right| = \left|\frac{mới - cũ}{cũ}\right|$$

Cần chú ý rằng tỉ lệ phần trăm thay đổi luôn không âm. Nếu $B > A$ thì ta có tỉ lệ phần trăm tăng, còn $B < A$ ta có tỉ lệ phần trăm giảm. Trong ví dụ 2.1.1.3c/, vì $B < A$ nên ta có tỉ lệ phần trăm giảm của B so với A là:

$$\left|\frac{174989 - 190205}{190205}\right| = \left|\frac{15216}{190205}\right| = 0,08 \text{ hay } 8\%.$$

Tỉ lệ phần trăm thay đổi tổng thể

Trên thực tế, giá cả hàng hóa có các tỉ lệ phần trăm thay đổi khác nhau trong các kì thời gian khác nhau. Ta cần tính tỉ lệ phần trăm thay đổi tổng thể khi gộp tất cả các kì thời gian này vào làm một.

Ví dụ 2.1.1.4. a/ Giá cổ phiếu của loại chứng khoán XYZ tăng 32% nửa đầu năm và tiếp tục tăng 10% nửa sau của năm. Hãy tính tỉ lệ phần trăm thay đổi của giá cổ phiếu trên từ đầu năm tới cuối năm.

b/ Tìm tỉ lệ phần trăm thay đổi tổng thể của giá một loại hàng hóa. Cho biết giá tăng 5% trong vòng một năm, nhưng sau đó giảm 30% trong ngày bán xả hàng cuối năm.

Lời giải:

a/ Do tỉ lệ phần trăm tăng của giá cổ phiếu nửa đầu năm là 32% nên hệ số tỉ lệ của nửa đầu năm là: 1 + 32/100 = 1,32. Tương tự,tỉ lệ phần trăm tăng của giá cổ phiếu nửa cuối năm là 10% nên hệ số tỉ lệ của nửa cuối năm là: 1 + 10/100 = 1,1.

Vậy hệ số tỉ lệ cho cả năm là: 1,32.1,1 = 1,452 = 1 + 45,2/100 > 1.

Tỉ lệ phần trăm thay đổi (tăng) của giá cổ phiếu từ đầu năm đến cuối năm là: |1,452-1| = 0,452 = 45,2%.

Cần chú ý rằng, nếu ta lấy: 32% + 10% = 42% thì sẽ thu được đáp số sai.

b/ Dễ thấy hệ số tỉ lệ tổng thể là 1,05.0,7 = 0,735 = 1 − 0,265 < 1. Vậy tỉ lệ phần trăm thay đổi tổng thể (giảm) của giá là: |0,735-1| = 0,265 = 26,5%. Như vậy, ta có:

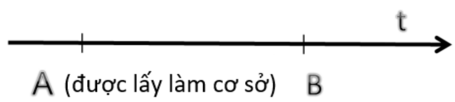
$$\textbf{Tỉ lệ phần trăm thay đổi tổng thể} = |\textbf{Hệ số tỉ lệ tổng thể} - 1|.$$

■

Số chỉ số

Các số liệu kinh tế thường được cho dưới dạng chuỗi thời gian, khi các giá trị của các chỉ số kinh tế được tính theo năm, quý hay tháng. Để phân tích sự tăng hay giảm của các chỉ số này theo thời gian, chúng ta sẽ sử dụng số chỉ số. Số chỉ số cho phép ta xác định được các khuynh hướng biến động và mối quan hệ của các số liệu kinh tế nêu trên.

Trên hình 2.2 dưới đây, trên trục thời gian t cho hai giá trị A và B của một chỉ số kinh tế.



Hình 2.2

Ta có thể chọn bất kì một trong hai giá trị trên làm giá trị cơ sở. Để tính số chỉ số của giá trị B, ta có công thức sau:

$$\text{Số chỉ số} = \text{Hệ số tỉ lệ căn cứ giá trị cơ sở} \times 100 = \frac{B}{A} \times 100.$$

***Ví dụ* 2.1.1.5.** Hàng 1 của bảng 2.1 sau đây cho biết các mức chi tiêu của các hộ gia đình (tính bằng tỉ USD) tại một quốc gia trong vòng 5 năm, từ năm 1999 tới 2003. Hãy tính số chỉ số mức chi tiêu hộ gia đình của các năm, với năm 2000 được chọn làm năm cơ sở (năm gốc) và giải thích ngắn gọn ý nghĩa của các số chỉ số đó.

Lời giải:

Bảng 2.1

Năm	1999	**2000**	2001	2002	2003
Mức chi tiêu gia đình	686,9	**697,2**	723,7	716,6	734,5
Số chỉ số	98,5	**100**	103,8	102,8	105,3

Số chỉ số mức chi tiêu hộ gia đình của năm 1999 là: (686,9/697,2).100 = 98,5; của năm 2000 (năm cơ sở) là: (697,2/697,2).100= 100; của năm 2001 là: (723,7/697,2).100 = 103,8. Tính tương tự, số chỉ số mức chi tiêu hộ gia đình của năm 2002 và 2003 tương ứng là: 102,8 và 105,3.

Như vậy so với năm 2000, mức chi tiêu hộ gia đình của các năm 2001, 2002 và 2003 tăng tương ứng là 3,8%, 2,8% và 5,3%; còn mức chi tiêu hộ gia đình của năm 1999 giảm 1,5%. ■

***Ví dụ* 2.1.1.6.** Tính số chỉ số của giá cổ phiếu A và cổ phiếu B (tính bằng USD) cho trong bảng 2.2, với tháng Tư được chọn làm tháng cơ sở. Từ đó, hãy so sánh hiệu quả của các cổ phiếu này trong giai đoạn từ tháng Một tới tháng Bảy.

Bảng 2.2

Tháng	1	2	3	**4**	5	6	7
Cổ phiếu A	0,31	0,28	0,31	**0,34**	0,40	0,39	0,45
Cổ phiếu B	6,34	6,40	6,45	**6,52**	6,57	6,43	6,65
Số chỉ số cổ phiếu A	91,2	82,3	91,2	**100**	117,6	114,7	132,4
Số chỉ số cổ phiếu B	97,2	98,2	98,9	**100**	100,8	98,6	107,4

Lời giải:

Cả hai cổ phiếu đều có số chỉ số là 100 trong tháng Tư (tháng cơ sở). Số chỉ số của cổ phiếu A và cổ phiếu B cho thấy cổ phiếu A có tỉ lệ phần trăm tăng cao hơn, tức là có hiệu quả cao hơn cổ phiếu B.

Chẳng hạn, giá của cổ phiếu A từ tháng Hai tới tháng Năm tăng là: (0,40-0,28)/0,28 = (114,7- 82,3)/82,3 = 42,9%. Cùng thời gian trên, giá cổ phiếu B chỉ tăng 2,7%.

Dựa vào các tính toán được thể hiện trên bảng 2.2, ta cũng có thể tính ra lợi nhuận khi đầu tư vào các loại cổ phiếu khi thời hạn đầu tư là từ tháng Một tới tháng Bảy. Với 1000 USD tại tháng Một ta có thể mua được: 1000/0,31= 3225 cổ phiếu A. Giá trị của các cổ phiếu đó tại tháng Bảy là: 3225.0,45 = 1451 USD. Lợi nhuận thu được là 451 USD. Trong khi đó, nếu ta mua cổ phiếu B thì chỉ thu được lợi nhuận là 48 USD. ■

Tính giá trị điều chỉnh theo lạm phát

Trong một kì thời gian, giá cả của rất nhiều loại hàng hóa và dịch vụ thường biến động, thông thường là tăng lên. Tỉ lệ lạm phát năm là tỉ lệ phần trăm thay đổi trung bình của giá cả các loại hàng hóa và dịch vụ so với năm trước đó. Để tính tới kiểu tiêu dùng của các hộ gia đình, khi tính tỉ lệ lạm phát năm, người ta chỉ lựa chọn các hoàng hóa và dịch vụ phản ánh kiểu tiêu dùng. Các hàng hóa và dịch vụ này tạo nên cái được gọi là "giỏ tiêu dùng".

Khi nói về giá của các loại hàng hóa và dịch vụ, cần chú ý phân biệt giá danh nghĩa và giá thực tế. Giá danh nghĩa là giá niêm yết trên thị trường, còn giá thực tế là giá của hàng hóa được điều chỉnh theo tỉ lệ lạm phát.

***Ví dụ* 2.1.1.7.** Bảng 2.3 cho biết giá (trung bình) của biệt thự trong một thành phố (giá được tính là triệu VND/m^2) trong thời gian từ 2009 tới 2014. Giá danh nghĩa là giá được niêm yết vào cuối năm được cho tại hàng 1. Tỉ lệ lạm phát hàng năm (tính từ cuối năm trước tới cuối năm sau) được cho ở hàng 2. Hãy tính giá thực tế của biệt thự sau khi được điều chỉnh căn cứ tỉ lệ lạm phát, trong đó năm 2011 được lấy làm năm cơ sở (năm 0).

Lời giải:

Từ hàng (2), ta tính hệ số tỉ lệ lạm phát (HSTLLP) hàng năm, chẳng hạn HSTLLP năm 2012 (tính từ cuối năm 2011, 31/12/2011, tới cuối năm 2012, 31/12/2012) là: 1 + 7,1/100 = 1,071. Tương tự HSTLLP của năm 2013 là

Bảng 2.3

Năm theo mốc 2011	-2	-1	**0**	1	2	3
Năm	2009	2010	**2011**	2012	2013	2014
Giá biệt thự danh nghĩa (1)	60	72	**89**	93	100	106
Tỉ lệ lạm phát năm (2)	5%	6%	**10,7%**	7,1%	3,5%	2,3%
Hệ số tỉ lệ lạm phát (HSTLLP) (3)	1,05	1,06	**1,107**	1,071	1,035	1,023
HSTLLP tổng thể với 2011 là năm cơ sở (4)	0,852	0,903	**1**	1,071	1,108	1,134
Giá biệt thự thực tế (5) = (1) / (4)	70	80	**89**	87	90	93

1,035. Các giá trị khác trên hàng (3) cũng được tìm ra một cách tương tự.

Sau đó ta tính HSTLLP tổng thể trên hàng (4) với 2011 là năm cơ sở, chẳng hạn, HSTLLP tổng thể tính tại cuối năm 2013 là: 1,071.1,035= 1,108. Tương tự, HSTLLP tổng thể tính tại cuối năm 2014 là: 1,071.1,035.1,023 = 1,108 .1,023 = 1,134.

Cần chú ý rằng, HSTLLP tổng thể tính tại cuối năm 2011 là 1 (vì ta đã chọn năm 2011 là năm cơ sở, hay, tỉ lệ lạm phát được tính với mốc là cuối năm, 31/12/2011).

Vì tỉ lệ lạm phát của năm 2011 (tính từ 31/12/2010 tới 31/12/2011) là 1,107, nên HSTLLP tổng thể tính tại cuối năm 2010 là: 1/1,107 = 0,903. Tương tự, HSTLLP tổng thể tính tại cuối năm 2009 là: (1/1,107)/1,06 = 0,903/1,06 = 0,852.

Như vậy, ta có công thức liên hệ sau:

(HSTLLP tổng thể tính tại cuối năm t).(HSTLLP của năm t +1) = (HSTLLP tổng thể tính tại cuối năm t + 1).

Để tính giá thực tế của biệt thự sau khi được điều chỉnh căn cứ tỉ lệ lạm phát trên hàng (5), ta áp dụng công thức: (Giá thực tế của biệt thự sau khi được điều chỉnh căn cứ tỉ lệ lạm phát tính tại cuối năm t) = (Giá danh nghĩa của biệt thự) / (HSTLLP tổng thể tính tại cuối năm t).

Chẳng hạn, giá thực tế của biệt thự tính tại cuối năm 2013 là: 100/1,108 = 90, còn giá thực tế của biệt thự tính tại cuối năm 2009 là: 60/0,852 = 70. ■

2.1.2. Lãi đơn và lãi kép

Trong tiểu mục 2.1.2 ta xem xét các nội dung sau: khái niệm lãi đơn và lãi kép, giá trị tương lai khi tính lãi kép theo năm và khi tính lãi kép liên tục, xác định lãi suất hàng năm dựa trên một mức lãi suất danh nghĩa.

Khái niệm lãi đơn và lãi kép

Khi tính lãi đơn, ta luôn thu được một khoản lãi hàng kì như nhau cho các kì thời gian như nhau căn cứ vào lượng tiền đầu tư gốc. Khi tính lãi kép, lãi hàng kì được tính căn cứ vào lượng tiền đầu tư gốc gộp với các lượng tiền lãi đã nhận được trong các kì thời gian trước.

***Ví dụ* 2.1.2.1.** Giả sử ta đầu tư vào một dự án 500 triệu VND với thời hạn 5 năm và với lãi suất là r = 10% hàng năm. Hãy tính lãi phát sinh và lượng tiền đầu tư tại thời điểm cuối mỗi năm bằng cách sử dụng lãi đơn và lãi kép.

Lời giải:

Nếu tính lãi đơn thì cuối hàng năm ta có được khoản lãi là: 500.10% = 50 triệu VND. Do đó, lượng tiền đầu tư cuối năm 1 là 550 triệu VND, cuối năm 2 là 600 triệu VND, cuối năm 3 là 650 triệu VND.

Còn nếu tính lãi kép, thì cuối năm 1 ta cũng có khoản lãi là 50 triệu VND, nên tại thời điểm cuối năm 1, gộp cả gốc lẫn lãi ta sẽ có 550 triệu VND. Vì vậy lượng tiền lãi cuối năm 2 sẽ là: 550.10% = 55 triệu VNĐ. Gộp cả gốc lẫn lãi, cuối năm 2 ta có lượng tiền đầu tư là: 550 + 55 = 605 triệu VND. Vậy lượng tiền lãi nhận được cuối năm 3 là: 605 × 10% = 60,5 triệu VND, và lượng tiền đầu tư gộp cả gốc lẫn lãi cuối năm 3 là: 605 + 60,5 = 665,5 triệu VND.

Tính toán tương tự ta sẽ có lượng tiền lãi và lượng tiền đầu tư tính tại thời điểm cuối hàng năm như được tổng hợp trong bảng 2.4. ■

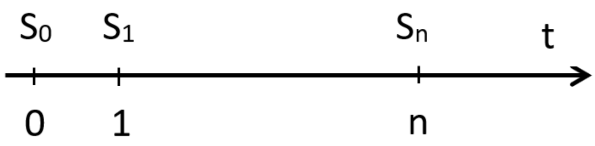
Nhận xét rằng, với lượng tiền đầu tư gốc như nhau và với cùng lãi suất như nhau, lãi thu được hàng năm theo cách tính lãi kép bao giờ cũng cao hơn lãi thu được hàng năm theo cách tính lãi đơn. Trên thực tế, các ngân hàng áp dụng tính lãi đơn cho các đầu tư tài chính ngắn hạn và tính lãi kép cho đầu tư tài

Bảng 2.4

Năm	Tính lãi đơn		Tính lãi kép	
	Lãi hàng năm	*Lượng đầu tư*	*Lãi hàng năm*	Lượng đầu tư
0		500		500
1	50	550	50	550
2	50	600	55	605
3	50	650	60.5	665.5
4	50	700	66.55	732.05
5	50	750	73.205	805.255

chính dài hạn.

Dựa vào ví dụ trên, ta lập công thức tính giá trị tương lai S_n sau n năm (n kì thời gian) nếu biết lượng tiền đầu tư ban đầu P, còn được gọi là giá trị gốc hay tiền gốc.



Hình 2.3

Trên hình 2.3, S_n là giá trị tương lai tại thời điểm n (cuối kì n), $S_0 = P$ là giá trị gốc.

Giả sử lãi suất hàng kì là r, lúc đó đối với cách tính lãi đơn ta có công thức:

$$S_1 = P + P\frac{r}{100} = P\Big(1 + \frac{r}{100}\Big),$$

$$S_2 = S_1 + P\frac{r}{100} = P\Big(1 + \frac{r}{100}\Big) + P\frac{r}{100} = P\Big(1 + \frac{2r}{100}\Big).$$

Dễ thấy, sau n kì, giá trị tương lai sẽ là:

$$S = S_n = P\Big(1 + \frac{nr}{100}\Big).$$

Còn đối với cách tính lãi kép ta có công thức:

$$S_1 = P + P\frac{r}{100} = P\Big(1 + \frac{r}{100}\Big),$$

$$S_2 = S_1 + S_1\frac{r}{100} = S_1\Big(1 + \frac{r}{100}\Big) = P\Big(1 + \frac{r}{100}\Big)^2.$$

Dễ thấy, sau n kì, giá trị tương lai sẽ là:

$$S = S_n = P\Big(1 + \frac{r}{100}\Big)^n.$$

Trong công thức với cách tính lãi kép trên đây, $1 + \dfrac{r}{100}$ cũng được gọi là hệ số tỉ lệ, còn $\Big(1 + \dfrac{r}{100}\Big)^n$ được gọi là hệ số tỉ lệ tổng thể cho n năm.

***Ví dụ* 2.1.2.2.** Ta đầu tư một lượng tiền gốc 250 triệu VND với lãi suất 12% tính lãi kép theo năm. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm lượng đầu tư lần đầu tiên sẽ vượt 2500 triệu VND.

Lời giải:

Áp dụng công thức $S = P\Big(1 + \dfrac{r}{100}\Big)^n$ với $P = 250, r = 12$, ta cần tìm n sao cho:

$$250\Big(1 + \frac{12}{100}\Big)^n \geq 2500 \Leftrightarrow \Big(1 + \frac{12}{100}\Big)^n \geq 10 \Leftrightarrow \ln\Big(1 + \frac{12}{100}\Big)^n \geq \ln 10$$

$$\Leftrightarrow n \ln\Big(1 + \frac{12}{100}\Big) \geq \ln 10$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 10}{\ln\big(1 + 12/100\big)} \Leftrightarrow n \geq \frac{2,303}{0,133} \Leftrightarrow n \geq 20,3.$$

Như vậy sau 21 năm, lần đầu tiên lượng đầu tư sẽ vượt 2500 triệu VND. ■

Lãi kép hình thành rời rạc và lãi kép hình thành rời rạc

Trong thực tế, lãi kép có thể được tính nhiều hơn một lần trong một kì thời gian với lãi suất danh nghĩa cho trước.

***Ví dụ* 2.1.2.3.** Một lượng tiền gốc được đầu tư 10 triệu VND với lãi suất danh nghĩa $r = 12\%$ cho một năm. Hãy tính giá trị tương lai của đầu tư sau $n = 4$ năm nếu lãi kép được tính:

a/ hàng năm, b/ hàng nửa năm, c/ hàng quý, d/ hàng tháng và e/ hàng tuần.

Lời giải:

Ta gọi m là số lần tính lãi trong một năm. Lúc đó, $m = 1, 2, 4, 12, 52$ tương ứng với các trường hợp a, b, c, d và e.

Với $m = 1$, ta có công thức $S = P\Big(1 + r/100\Big)^n$. Với $m = 2$, trong $n = 4$ năm ta có $2n = 2 \times 4 = 8$ kì tính lãi với lãi suất hàng kì (hàng nửa năm) là $\dfrac{r/2}{100}$, nên ta có công thức $S = P\Big(1 + \dfrac{r/2}{100}\Big)^{2n}$. Một cách tổng quát, nếu trong một năm ta tính lãi m = 1, 2, 4, 12, 52 lần, thì cần áp dụng công thức:

$$S = P\Big(1 + \frac{r/m}{100}\Big)^{mn}.$$

a/ Với $P = 10$, $m = 1$, $n = 4$, $r = 12\%$, ta có

$$S = 10\Big(1 + \frac{12}{100}\Big)^{1\times 4} = 15,74.$$

b/ Với $P = 10$, $m = 2$, $n = 4$, $r = 12\%$, ta có

$$S = 10\Big(1 + \frac{12/2}{100}\Big)^{2\times 4} = 15,94.$$

c/ Với $P = 10$, $m = 4$, $n = 4$, $r = 12\%$, ta có

$$S = 10\Big(1 + \frac{12/4}{100}\Big)^{4\times 4} = 16,05.$$

d/ Với $P = 10$, $m = 12$, $n = 4$, $r = 12\%$, ta có

$$S = 10\Big(1 + \frac{12/12}{100}\Big)^{12\times 4} = 16,12.$$

e/ Với $P = 10$, $m = 52$, $n = 4$, $r = 12\%$, ta có

$$S = 10\Big(1 + \frac{12/52}{100}\Big)^{52\times 4} = 16,15.$$

■

Từ ví dụ trên, ta có công thức tính giá trị tương lai của một lượng đầu tư gốc sau n kì thời gian, với lãi suất danh nghĩa r cho một năm và lãi kép hình thành rời rạc m lần trong một năm, như sau:

$$S = P\Big(1 + \frac{r/m}{100}\Big)^{mn}.$$

Trong trường hợp m rất lớn, tức là lãi kép được hình thành rất nhiều lần trong một năm, chẳng hạn lãi được tính hàng ngày ($m = 365$), hàng giờ ($m = 365 \times 24 = 8760$), thì ta có công thức tính giá trị tương lai của một lượng đầu tư gốc sau t kì thời gian, với lãi suất danh nghĩa r cho một năm và **lãi kép hình được hình thành liên tục**, như sau:

$$S = \lim_{m \to +\infty} P\Big(1 + \frac{r/m}{100}\Big)^{mt} = Pe^{rt/100}$$

Chú ý rằng ở đây t có thể nhận các giá trị thập phân, không nhất thiết là số nguyên.

***Ví dụ* 2.1.2.4.** Cũng với điều kiện như trong ví dụ 2.1.2.3, hãy tính giá trị tương lai của đầu tư sau n = 4 năm nếu lãi kép được hình thành liên tục.

Lời giải:

Từ $S = Pe^{rt/100}$ ta có $S = 10e^{(12\times 4)/100} = 16,16$ triệu VND. ■

Qua ví dụ 2.1.2.3 và ví dụ 2.1.2.4, có thể nhận thấy rằng giá trị tương lai khi tính lãi kép liên tục là 16,16 triệu VND không sai khác nhiều so với khi tính lãi kép hình thành rời rạc là 16,15 triệu VND hay 16,12 triệu VND khi $m = 52$ hay $m = 12$. Trong các hợp đồng tính lãi đơn lẻ, để tính lãi kép, người ta chỉ áp dụng cách tính lãi kép hình thành rời rạc. Tuy nhiên đối với các phân tích tài chính của các dự án lớn người ta sẽ áp dụng cách tính lãi kép hình thành liên tục.

Tỉ lệ phần trăm năm

Tỉ lệ phần trăm năm (được kí hiệu APR) là lãi suất năm tương đương được tính cho việc hình thành lãi với các kì hạn tính lãi khác nhau. Tên gọi khác của tỉ lệ phần trăm năm là lãi suất hiệu dụng năm. APR được áp dụng nhiều trong các phân tích, tính toán tài chính và đầu tư.

***Ví dụ* 2.1.2.5.** Tìm tỉ lệ phần trăm năm của một tài khoản đặt cọc có lãi suất danh nghĩa là $r = 8\%$, được tính lãi theo tháng.

Lời giải:

Như vậy, một năm lãi được tính 12 lần cuối mỗi tháng với lãi suất theo tháng là: 8%/12 = 0,67%. Hệ số tỉ lệ của một tháng là 1 + 0,67/100 = 1,0067. Hệ số tỉ lệ tổng thể cho 12 tháng là $1,0067^{12} = 1,0834 = 1 + 0,0834$. Vì vậy lãi suất hiệu dụng năm hay tỉ lệ phần trăm năm là 8,34%. ■

Từ lời giải của ví dụ trên, ta dễ dàng tìm được công thức tính tỉ lệ phần trăm năm:

$$APR = \left(1 + \frac{r/m}{100}\right)^m - 1,$$

trong đó r là lãi suất danh nghĩa năm, còn m là số lần tính lãi trong một năm.

2.1.3. Một số ứng dụng khác của tỉ lệ phần trăm

Các kĩ thuật toán học liên quan tới tỉ lệ phần trăm không chỉ được ứng dụng trong các tính toán tài chính, mà còn được ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khác.

***Ví dụ* 2.1.3.1.** Tổng sản phẩm thu nhập quốc dân năm (GNP) của một đất nước là 25000 triệu USD được dự báo là tăng 3,5% năm. Tổng dân số của nước này hiện tại là 40 triệu được dự báo tăng 2% năm. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm, GNP trên đầu người của nước này sẽ vượt hơn 700 USD?

Lời giải:

Hiện tại GNP trên đầu người là: 25000000000/40000000 = 625 USD. Do các năm tiếp theo GNP tăng nhanh hơn tổng dân số, nên GNP trên đầu người sẽ tăng lên.

Sau n năm, GNP được dự báo là: $25000.(1,035)^n$, còn tổng dân số là: $40.(1,02)^n$. Do đó, sau n năm, GNP trên đầu người được dự báo là:

$$\frac{25000.1,035^n}{40.1,02^n} = 625.\left(\frac{1,035}{1,02}\right)^n = 625.1,014706^n$$

Đặt: $625.1,014706^n = 700$, ta có $1,014706^n = 700/625 = 1,12$. Sau khi logarit hóa hai vế theo cơ số e, ta tìm ra $n = \dfrac{\ln 1,12}{\ln 1,0147061} = 7,76$ (năm).

Vậy sau ít nhất 8 năm, GNP trên đầu người sẽ vượt hơn 700 USD. ■

2.2. Cấp số nhân và ứng dụng trong tài chính

2.2.1. Ôn lại về cấp số nhân

Trong tiểu mục này chúng ta ôn lại về khái niệm cấp số nhân và công thức tính tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân.

***Ví dụ* 2.2.1.1.** Các dãy số sau đây có chung tính chất gì? Sau đó viết công thức tính số hạng thứ n của từng dãy số:

$$a/ \quad 2, 6, 18, 54, \cdots \qquad\qquad b/ \quad 1000, -100, 10, -1, \cdots$$

Lời giải:

Ta xét dãy số cho trong câu a/, số hạng thứ nhất của dãy số được kí hiệu là $a_1 = 2$, số hạng thứ hai $a_2 = 6$, số hạng thứ ba $a_3 = 18$, số hạng thứ tư $a_4 = 54$. Dễ thấy các số hạng của dãy số có tính chất: số hạng sau bằng số hạng đứng trước nhân với 3, tức là: $a_2 = 3a_1$, $a_3 = 3a_2 = 3^2a_1$, $a_4 = 3a_3 = 3^3a_1 \ldots$

Tương tự, nếu kí hiệu các số hạng của dãy số cho trong câu b/ là $b_1 = 1000$, $b_2 = -100$, $b_3 = 10$, $b_4 = -1 \ldots$, ta cũng thấy ngay: $b_2 = (-0,1)b_1$, $b_3 = (-0,1)b_2 = (-0,1)^2b_1$, $b_4 = (-0,1)b_3 = (-0,1)^3b_1 \ldots$

Như vậy tính chất chung của các dãy số cho trong câu a/ và câu b/ là: trong mỗi dãy số, mỗi số hạng đứng sau đều bằng số hạng đứng trước nhân với một hằng số.

Cũng dễ thấy số hạng tổng quát thứ n của dãy số trong câu a/ có dạng $a_n = 3^{n-1}a_1$, còn trong câu b/ có dạng $b_n = (-0,1)^{n-1}b_1$. ■

Từ ví dụ trên, ta nhắc lại định nghĩa cấp số nhân như sau: Xét dãy số a_1, a_2, a_3, a_4, $\ldots$, a_n, $\ldots$ thỏa tính chất số hạng sau bằng số hạng trước nhân với một hằng số r. Lúc đó dãy số trên được gọi là một cấp số nhân với công bội r. Số hạng thứ n của cấp số nhân được tính theo công thức: $a_n = a_1r^{n-1}$.

Theo công thức đã biết ở trung học phổ thông, tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân a_1, a_2, a_3, a_4, $\ldots$, a_n, $\ldots$ với công bội $r \neq 1$ được tính theo công thức sau:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + ... + a_1 r^{n-1}$$
$$= a_1(1 + r + r^2 + ... + r^{n-1}) = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Trong trường hợp $r = 1$, dễ thấy tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân là $n.a_1$.

***Ví dụ* 2.2.1.2.** Hãy tính tổng 6 số hạng đầu tiên của của các cấp số nhân cho trong câu a/ và câu b/ của ví dụ 2.2.1.1.

Lời giải:

Với cấp số nhân trong câu a/ ta có:

$$2 + 6 + 18 + 54 + 162 + 486 = 2\frac{3^6 - 1}{3 - 1} = 728.$$

Với cấp số nhân trong câu b/ ta có:

$$1000 + (-100) + 10 + (-1) + 0,1 + (-0,01) = 1000\frac{(-0,1)^6 - 1}{(-0,1) - 1} = 909,09.$$

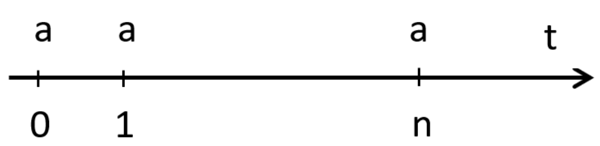
■

2.2.2. Các ứng dụng của cấp số nhân trong tính toán tài chính

Cấp số nhân được ứng dụng rộng rãi trong tính toán tài chính. Trong tiểu mục này chúng ta chỉ xét hai ứng dụng của cấp số nhân: Tính tổng đầu tư vào tài khoản ngân hàng nhận được từ một kế hoạch gửi tiết kiệm; và tính lượng tiền chi trả hàng kì để trả hết một khoản nợ trong thời hạn n kì.

Tính tổng đầu tư nhận được từ một kế hoạch gửi tiết kiệm

Hình 2.4 dưới đây minh họa một kế hoạch tiết kiệm.



Hình 2.4

Kế hoạch tiết kiệm thông qua hình thức đầu tư vào tài khoản ngân hàng của ta như sau: Ta sẽ gửi các khoản tiền bằng nhau với giá trị a vào tài khoản ngân hàng trong n kì thời gian bằng nhau. Hãy tính tổng đầu tư thu được sau n kì, nếu biết lãi suất ngân hàng cho mỗi kì là r, r đã được biểu thị thông qua tỉ lệ phần trăm (chẳng hạn $r = 5\%, r = 6\%\ldots$). Một kế hoạch tiết kiệm như mô tả trên đây còn được gọi là một **quỹ chìm** và thường được sử dụng để đáp ứng các nghĩa vụ tài chính sẽ phải thực hiện trong tương lai.

Trường hợp 1: Các khoản tiền được gửi vào cuối hàng kì. Lúc đó, khoản tiền gửi a vào cuối kì 1 sẽ có giá trị tại cuối kì n là: $a(1+r)^{n-1}$, trong đó $(1+r)^{n-1}$ chính là hệ số tỉ lệ tổng thể cho $n-1$ kì, tính từ cuối kì 1 đến cuối kì n. Tương tự, khoản tiền gửi a vào cuối kì 2 sẽ có giá trị tại cuối kì n là: $a(1+r)^{n-2}$; Khoản tiền gửi a vào cuối kì n - 1 sẽ có giá trị tại cuối kì n là: $a(1+r)$; và khoản tiền gửi a vào cuối kì n sẽ có giá trị tại cuối kì n là: a.

Vậy tổng đầu tư S thu được sau n kì được tính theo công thức sau:

$$a + a(1+r) + ... + a(1+r)^{n-2} + a(1+r)^{n-1} = a\frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)-1} = a\frac{q^n - 1}{q-1},$$

trong đó q = 1 + r.

Trường hợp 2: Các khoản tiền được gửi vào đầu hàng kì. Lúc đó, khoản tiền gửi a vào đầu kì 1 sẽ có giá trị tại cuối kì n là: $a(1+r)^n$, trong đó $(1+r)^n$ chính là hệ số tỉ lệ tổng thể cho n kì, tính từ đầu kì 1 đến cuối kì n. Tương tự, khoản tiền gửi a vào đầu kì 2 sẽ có giá trị tại cuối kì n là: $a(1+r)^{n-1}$; Khoản tiền gửi a vào đầu kì $n-1$ sẽ có giá trị tại cuối kì n là: $a(1+r)^2$; và khoản tiền gửi a vào đầu kì n sẽ có giá trị tại cuối kì n là: $a(1+r)^1$.

Vậy tổng đầu tư S thu được sau n kì được tính theo công thức sau:

$$a(1+r) + ... + a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^n = a(1+r)\frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)-1} = aq\frac{q^n - 1}{q-1},$$

trong đó q = 1 + r.

***Ví dụ* 2.2.2.1.** Một người gửi tiết kiệm 10 triệu VND vào đầu hàng tháng. Ngân hàng tính lãi suất tiết kiệm (lãi danh nghĩa) là 12% với lãi được tính hàng tháng.

a/ Hãy tính tổng lượng tiền tiết kiệm được sau 12 tháng.

b/ Sau bao nhiêu tháng thì tổng lượng tiền tiết kiệm lần đầu tiên vượt 200 triệu VND.

Lời giải:

Vì tiền tiết kiệm được gửi vào đầu hàng tháng nên ta áp dụng công thức đã nêu trong trường hợp 2 trên đây, với $r = 12\%/12$, n = 12 và q =1 + r =1,1.

a/ Tổng lượng tiền tiết kiệm được sau 12 tháng là:

$$aq\frac{q^n - 1}{q - 1} = 10.1,1.\frac{1,1^{12} - 1}{1,1 - 1} = 128,09 \text{ triệu VND.}$$

b/ Gọi n là số tháng cần xác định, ta có

$$aq\frac{q^n - 1}{q - 1} = 10.1,1.\frac{1,1^n - 1}{1,1 - 1} \geq 200 \Leftrightarrow 1,1^n - 1 \geq 0,98 \Leftrightarrow 1,1^n \geq 1,98$$

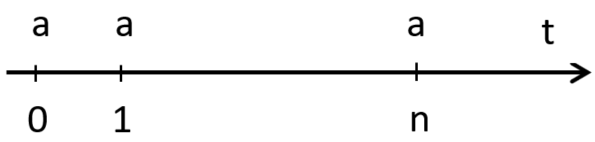
$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 1,98}{\ln 1,1} = 18,2.$$

Như vậy, sau 19 tháng tổng lượng tiền tiết kiệm lần đầu tiên vượt 200 triệu VND. ■

Trong ví dụ 2.2.2.1, lãi kép được hình thành rời rạc, và ta đã áp dụng $q = 1 + r$. Tuy nhiên, đối với trường hợp lãi kép hình thành liên tục, ta cần áp dụng $q = e^r$. Điều này có thể được giải thích ngắn gọn như sau: Khi số lần m tính lãi trong một năm tăng lên thì r ngày càng nhỏ đi, và $1 + r$ sẽ sát dần tới e^r. Điều này có thể kiểm tra dễ dàng khi cho r = 0,02 và r = 0,01: $e^{0,02} =$ 1,020201 , còn $e^{0,01}$ = 1,01005.

Tính lượng tiền chi trả hàng kì để trả hết một khoản nợ

Nhiều hãng kinh doanh tìm cách bảo đảm tài chính cho việc mở rộng kinh doanh bằng cách vay tiền từ các ngân hàng hay các tổ chức tài chính. Các ngân hàng cũng muốn cho vay nếu họ nhận được lãi cho các khoản nợ. Các hãng kinh doanh sẽ trả các khoản nợ bằng cách thực hiện các chi trả theo các kì thời gian, có thể theo tháng hoặc theo quý hoặc theo năm v.v... Giả sử là ngân hàng tính lãi theo tháng và hãng kinh doanh cũng chi trả nợ bằng các khoản chi trả thường xuyên và bằng nhau với giá trị là **a** vào cuối hàng tháng, như được minh hoạ trên hình 2.5.



Hình 2.5

Như vậy, hãng kinh doanh phải lập **kế hoạch chi trả nợ**, để trả hết một khoản nợ ban đầu L trong n kì thời gian, bằng các khoản tiền gửi bằng nhau **a** (khoản chi trả thường xuyên) cho ngân hàng vào các kì thời gian như nhau.

Giả sử lãi suất ngân hàng là r (được biểu thị theo tỉ lệ phần trăm) là hằng số. Chúng ta có thể tính được tổng số tiền chi trả thường xuyên sau n kì thời gian là:

$$R = a + a(1+r) + a(1+r)^2 + ... + a(1+r)^{n-1} = a\frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Tại cuối kì n, khoản nợ ban đầu L trở thành $L(1+r)^n$ và số dư nợ được tính theo công thức sau:

$$L(1+r)^n - a\frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

Vậy để khoản nợ ban đầu L được trả hết sau n kì thời gian, khoản chi trả thường xuyên **a** được tính theo công thức:

$$a = \frac{L(1+r)^n}{\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}}.$$

***Ví dụ* 2.2.2.2.** Tìm khoản chi trả thường xuyên theo tháng để trả hết một khoản nợ là 100000 USD trong vòng 25 năm nếu lãi suất ngân hàng là 8% với lãi kép tính theo năm.

Lời giải:

Như vậy ta có $L = 100000$ USD, $n = 25$, $r = 8\%$, cần tìm khoản chi trả thường xuyên **a** theo công thức:

$$a = \frac{L(1+r)^n}{\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}} = \frac{100000(1+0,08)^{25}}{\dfrac{(1+0,08)^{25} - 1}{0,08}} = \frac{684874,5204}{73,106} = 9367,89 \text{ USD}.$$

Do đó cuối hàng năm cần thực hiện một khoản chi trả theo năm là: a = 9367,89

USD để trả hết khoản nợ trong vòng 25 năm. Nếu đem khoản chi trả này chia cho 12, ta sẽ có khoản chi trả theo tháng là: 9367,89 / 12 = 780,66 USD.

Dựa trên khoản chi trả theo năm $a = 9367,89$ USD ở trên, ta có thể lập bảng theo dõi dư nợ dựa trên công thức tính dư nợ đã biết ở trên, dư nợ tại cuối năm t là:

$$L(1+r)^t - a\frac{(1+r)^t - 1}{r}.$$

Bảng 2.5 cho ta biết số dư nợ cuối các năm 1, 2, 3, 5, 10, 20, 25. Chẳng hạn

Bảng 2.5

Cuối năm thứ t	*Số dư nợ*
1	*98632.08*
2	*97154.73*
3	*95559.18*
5	*91975.20*
10	*80184.14*
20	*37403.21*
25	*0*

với $t = 5$ ta có số dư nợ cuối năm thứ 5 là:

$$\begin{aligned} L(1+r)^t - a\frac{(1+r)^t - 1}{r} &= 100000(1+0,85)^5 - 9367,89\frac{(1+0,08)^5 - 1}{0,08} \\ &= 91975,20. \end{aligned}$$

■

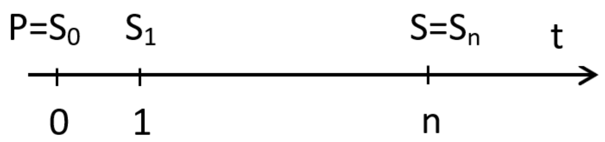
2.3. Đánh giá dự án đầu tư

2.3.1. Tính giá trị hiện tại khi lãi kép được hình thành rời rạc và liên tục

Trong phân tích tài chính nói chung và đánh giá dự án đầu tư nói riêng, khi tính toán giá trị của một lượng đầu tư cần chỉ rõ thời điểm xác định giá trị đó cũng như phương thức tính lãi. Các lượng đầu tư tại các thời điểm khác nhau thông thường được quy về các giá trị hiện tại.

Tính giá trị hiện tại khi lãi kép được hình thành rời rạc

Giả sử lượng đầu tư ban đầu là P $=S_0$, lãi suất đầu tư trên một kì thời gian là r%, thì sau n kì thời gian, giá trị tương lai của lượng đầu tư tại cuối kì 1, 2, ..., n là $S = S_t$ với $t = 1, 2, \cdots, n$, như được thể hiện trên hình 2.6. Giá trị tương lai S với thời gian đầu tư là t được tính theo công thức: $S = P(1+\dfrac{r}{100})^t$, trong đó $(1+\dfrac{r}{100})$ là hệ số tỉ lệ cho một kì thời gian, còn $(1+\dfrac{r}{100})^t$ chính là hệ số tỉ lệ tổng thể cho t kì thời gian.



Hình 2.6

Nếu cho biết giá trị tương lai S tại cuối kì t, thì giá trị ban đầu hay giá trị hiện tại P được tìm theo công thức:

$$P = S\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-t}.$$

Tính giá trị hiện tại khi lãi kép được hình thành liên tục

Khi lãi kép được hình thành liên tục, như đã biết, trong các công thức trên ta chỉ việc thay hệ số tỉ lệ $(1+\dfrac{r}{100})$ bằng $e^{rt/100}$. Lúc đó ta có các công thức

q=e^(r%)

sau đây thể hiện mối quan hệ giữa S và P:

$$S = Pe^{rt/100} \Leftrightarrow P = Se^{-rt/100}.$$

Trong cả hai trường hợp trên khi ta đi tính giá trị hiện tại dựa trên giá trị tương lai với lãi kép hình thành rời rạc hay liên tục, ta đều nói rằng, chúng ta thực hiện **quá trình chiết khấu** để tính P từ S, và lãi suất r cũng được gọi là **tỉ lệ chiết khấu** hay **lãi suất chiết khấu**.

***Ví dụ* 2.3.1.1.** Hãy tính giá trị hiện tại của một khoản đầu tư là 1000 triệu VND tại cuối năm thứ 4 nếu biết lãi suất chiết khấu (danh nghĩa) là 10% trong ba trường hợp sau:

a/ Lãi hình thành rời rạc theo năm (tức là một năm tính lãi một lần).

b/ Lãi hình thành rời rạc theo nửa năm (tức là một năm tính lãi hai lần).

c/ Lãi hình thành liên tục (tức là một năm tính lãi rất nhiều lần, chẳng hạn tính lãi theo tuần, theo ngày).

Lời giải:

Áp dụng các công thức đã biết trên đây, giá trị hiện tại được tính như sau:

a/ Lãi suất chiết khấu năm là 10%, và số kì tính lãi $n = 4$ nên

$$P = S\Big(1 + \frac{r}{100}\Big)^{-t} = 1000\Big(1 + \frac{10}{100}\Big)^{-4} = 683,01 \text{ triệu VND.}$$

b/ Lãi suất chiết khấu nửa năm là 10% / 2 = 5%, và số kì tính lãi $n = 8$ nên

$$P = S\Big(1 + \frac{r}{100}\Big)^{-t} = 1000\Big(1 + \frac{5}{100}\Big)^{-8} = 676,84 \text{ triệu VND.}$$

c/

$$P = Se^{-rt/100} = 1000e^{-10.4/100} = 670,3 \text{ triệu VND.}$$

■

2.3.2. Đánh giá dự án đầu tư sử dụng giá trị hiện tại ròng và tỉ suất nội hoàn

Trong tiểu mục này ta đưa ra khái niệm giá trị hiện tại ròng và tỉ suất nội hoàn. Đây là các khái niệm cơ bản được sử dụng rộng rãi trong đánh giá dự án đầu tư.

Giá trị hiện tại ròng

Giá trị hiện tại ròng (NPV) là khoản lãi thu được từ dự án được tính tại thời điểm hiện tại. Nó là hiệu số của giá trị hiện tại của các khoản thu về và giá trị hiện tại của các khoản chi phí. Nếu $NPV > 0$ có nghĩa là dự án có lợi nhuận, $NPV < 0$ có nghĩa là dự án bị lỗ, còn khi NPV $= 0$ có nghĩa là dự án hòa vốn.

***Ví dụ* 2.3.2.1.** Một dự án có lượng đầu tư ban đầu (chi phí ban đầu) là 15000 USD và được đảm bảo sẽ thu về 20000 USD sau 3 năm tới. Hãy tìm NPV của dự án và đánh giá dự án là lãi hay lỗ trong hai trường hợp: lãi suất thị trường là 5% và 12% trên một năm.

Lời giải:

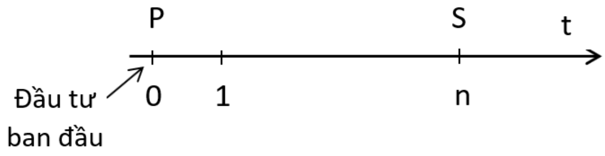
Ta tính giá trị hiện tại của khoản thu về cho hai trường hợp trên:

$$P = S\Big(1 + \frac{r}{100}\Big)^{-t} = 20000\Big(1 + \frac{5}{100}\Big)^{-3} = 17276,75 \text{ USD}.$$

$$P = S\Big(1 + \frac{r}{100}\Big)^{-t} = 20000\Big(1 + \frac{12}{100}\Big)^{-3} = 14235,60 \text{ USD}.$$

Vì vậy, NPV cho khi lãi suất thị trường 5% là: 17276,75 – 15000 = 2276,75 USD nên dự án có lãi. Còn NPV khi lãi suất thị trường 12% là: 14235,60 – 15000 = - 764,40 USD nên dự án bị lỗ. ■

Hình 2.7 minh họa một dự án đầu tư với thời gian đầu tư là n năm, với giá trị đầu tư ban đầu (chi phí) đã cho, S là khoản thu về của dự án tại cuối năm n, còn P là giá trị hiện tại của S.



Hình 2.7

Tỉ suất nội hoàn

Tỉ suất nội hoàn (IRR) của một dự án là tỉ lệ phần trăm năm cho ta cùng lượng thu về của dự án tương ứng với cùng lượng đầu tư ban đầu (chi phí) và thời gian đầu tư của dự án. Nếu IRR > lãi suất thị trường thì dự án có lãi, IRR < lãi suất thị trường thì dự án bị lỗ, còn khi IRR bằng với lãi suất thị trường thì dự án không có lãi và không lỗ.

***Ví dụ* 2.3.2.2.** Một dự án có khoản đầu tư ban đầu (chi phí ban đầu) là 15000 USD và được đảm bảo sẽ thu về 20000 USD sau 3 năm tới. Hãy tìm IRR của dự án và đánh giá dự án là lãi hay lỗ trong hai trường hợp: lãi suất thị trường là 5% và 12% trên một năm.

Lời giải:

Để tính IRR, ta cần tìm tỉ lệ phần trăm năm (lãi suất) r sao cho khi ta đầu tư ban đầu 15000 USD, trong thời hạn 3 năm thì cũng thu về được 20000 USD.

Áp dụng công thức đã biết ta có:

$$S = P\Big(1 + \frac{r}{100}\Big)^t \Leftrightarrow 20000 = 15000\Big(1 + \frac{r}{100}\Big)^3.$$

Từ đây ta có:

$$\Big(1 + \frac{r}{100}\Big)^3 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{r}{100} = \sqrt[3]{4/3} - 1 = 0,1.$$

Vậy IRR $= r = 10\%$.

Vì vậy, khi lãi suất thị trường 5% thì dự án có lãi. Còn khi lãi suất thị trường 12% thì dự án bị lỗ. ■

***Ví dụ* 2.3.2.3.** Một hãng kinh doanh phải quyết định chọn một trong hai dự án đầu tư sau đây: Dự án A cần có khoản đầu tư ban đầu (chi phí) là 1000 triệu VND và sẽ cho một khoản thu là 1200 triệu VND trong vòng 4 năm tới.

Dự án B cần có khoản đầu tư ban đầu (chi phí) là 30000 triệu VND và sẽ cho một khoản thu là 35000 triệu VND trong vòng 4 năm tới. Hãy đưa ra ý kiến tư vấn xem nên chọn đầu tư vào dự án nào, biết rằng lãi suất thị trường sẽ ổn định ở mức 3% trong vòng 4 năm tới, lãi kép được tính theo năm.

Lời giải:

Trước hết ta so sánh hai dự án căn cứ vào NPV. Đối với dự án A, ta có: NPV $= 1200(1,03)^{-4} - 1000 = 66{,}18$ triệu VND. Còn đối với dự án B: NPV $= 35000(1,03)^{-4} - 30000 = 1097{,}05$ triệu VND. Như vậy, cả hai dự án đều có lãi, tuy nhiên dự án B có hiệu quả cao hơn dự án A nếu so sánh NPV.

Bây giờ ta so sánh hai dự án căn cứ IRR. Kí hiệu IRR của dự án A là r_A và của dự án B là r_B, ta có thể tìm được giá trị của r_A và r_B như sau:

$$1200 = 1000(1 + r_A)^4 \Leftrightarrow 1 + r_A = 1,2^{1/4} = 1,047 \Leftrightarrow r_A = 4,7\%$$

$$35000 = 30000(1 + r_B)^4 \Leftrightarrow 1 + r_B = 1,167^{1/4} = 1,039 \Leftrightarrow r_B = 3,9\%$$

Như vậy, cả hai dự án đều có lãi, tuy nhiên dự án A có hiệu quả cao hơn dự án B nếu so sánh IRR. ■

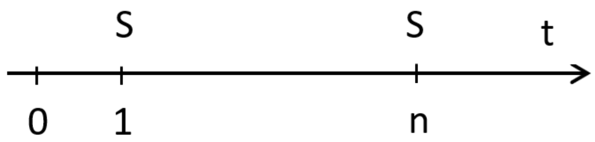
Từ ví dụ này có thể thấy phương pháp IRR là không đáng tin khi so sánh các cơ hội đầu tư với các lượng đầu tư ban đầu có sự khác biệt lớn về giá trị. Điều này được giải thích bởi phương pháp IRR chỉ so sánh về tỉ lệ phần trăm (lãi suất), mà rõ ràng rằng tỉ lệ phần trăm lớn của một lượng đầu tư nhỏ có thể cho lợi nhuận thấp hơn tỉ lệ phần trăm nhỏ của một lượng đầu tư lớn. Trên đây là các phân tích khi đánh giá dự án sử dụng các phương pháp tính NPV và IRR. Tuy nhiên, trong các giáo trình chuyên sâu về đánh giá dự án, còn nhiều tiêu chí khác cần xem xét, đánh giá, chẳng hạn như về độ rủi ro, thời gian hoàn vốn nhanh nhất v.v...

2.3.3. Tính giá trị hiện tại của chuỗi niên kim và dòng tiền

Trong các tiểu mục trước của mục 2.3, chúng ta mới xem xét giá trị hiện tại của duy nhất một giá trị tương lai. Trong mục này ta sẽ xem xét giá trị hiện tại của một dòng tiền, chẳng hạn, dãy các chi trả trong tương lai, mà trước hết là dãy chi trả thường xuyên, đều đặn với các giá trị bằng nhau. Sau đó, chúng ta sẽ xét các dãy chi trả không thường xuyên và đều đặn với các ứng dụng trong so sánh và chọn lựa dự án đầu tư.

Chuỗi niên kim

Chuỗi niên kim là dãy chi trả đơn giản nhất, khi các giá trị chi trả là bằng nhau và được thực hiện thường xuyên, đều đặn vào các thời điểm như nhau (thông thường là vào đầu kì hoặc vào cuối kì) trong các kì thời gian dài bằng nhau. Hình 2.8 minh họa một chuỗi niên kim với giá trị chi trả S được chi trả vào cuối mỗi kì trong n kì thời gian.



Hình 2.8

Giá trị hiện tại của chuỗi niên kim trên là tổng tất cả các giá trị hiện tại của các chi trả tại cuối kì 1, 2,$\cdots$, n và được tính theo công thức sau:

$$\begin{aligned} & S\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-1} + S\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-2} + \cdots + S\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-n} \\ = \; & S\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-1} \frac{\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-n} - 1}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-1} - 1} \end{aligned}$$

***Ví dụ* 2.3.3.1.** Cho biết lãi suất năm là $r = 7\%$ và lãi kép được tính theo năm. Hãy tìm giá trị hiện tại của một chuỗi niên kim cho ta thu nhập 10000 USD vào cuối mỗi năm trong các trường hợp sau:

a/ Chuỗi niên kim có thời hạn 10 năm.

b/ Chuỗi niên kim có thời hạn rất nhiều năm (vĩnh viễn).

Lời giải:

a/ Trước hết ta tính giá trị hiện tại khi chuỗi niên kim có thời hạn 10 năm theo công thức:

$$S\Big(1+\frac{r}{100}\Big)^{-1}\frac{\Big(1+\frac{r}{100}\Big)^{-n}-1}{\Big(1+\frac{r}{100}\Big)^{-1}-1} = 10000\Big(1+\frac{7}{100}\Big)^{-1}\frac{\Big(1+\frac{7}{100}\Big)^{-10}-1}{\Big(1+\frac{7}{100}\Big)^{-1}-1}$$

$$= 70235,82 \text{ USD}.$$

b/ Để tính giá trị hiện tại của chuỗi niên kim vĩnh viễn, ta đặt $n=\infty$, và nhận được công thức tính:

$$S(1+\frac{r}{100})^{-1}\frac{(1+\frac{r}{100})^{-n}-1}{(1+\frac{r}{100})^{-1}-1} = S(1+\frac{r}{100})^{-1}\frac{-1}{(1+\frac{r}{100})^{-1}-1} =$$

$$S(1+\frac{7}{100})^{-1}\frac{-1}{(1+\frac{7}{100})^{-1}-1} = \frac{10000.1,07^{-1}}{1-1,07^{-1}} = 142857,14 \text{ USD}$$

Bảng 2.6

t	*Giá trị hiện tại:* $1000(1,07)^{-t}$
1	*9345.794393*
2	*8734.387283*
3	*8162.978769*
4	*7628.952120*
5	*7129.861795*
6	*6663.422238*
7	*6227.497419*
8	*5820.091046*
9	*5439.337426*
10	*5083.492921*
Giá trị hiện tại của chuỗi niên kim	*70235.81541*

Chú ý rằng ta có thể lập bảng tính giá trị hiện tại của các thu nhập 10000 USD được trả vào cuối mỗi năm rồi cộng lại. Công thức tính giá trị hiện tại của thu nhập 10000 USD vào cuối năm t là: $S(1+\frac{r}{100})^{-t} = 10000(1,07)^{-t}$ với $t = 1, 2, \ldots, 10$. được cho trong bảng 2.6. ■

Tính giá trị hiện tại của dòng tiền và so sánh hiệu quả dự án đầu tư

Các dự án có thể cho ta các khoản thu về (tạm coi là các khoản chi trả về) không nhất thiết tại thời gian kết thúc dự án mà có thể tại nhiều thời điểm khác nhau, các khoản chi trả về cũng không nhất thiết là như nhau. Như vậy dãy chi trả không nhất thiết có tính chất thường xuyên, đều đặn. Tuy nhiên, bằng cách tính toán **giá trị hiện tại của dòng tiền các khoản chi trả về**, chúng ta có thể so sánh hiệu quả của các dự án.

***Ví dụ* 2.3.3.2.** Một hãng kinh doanh cần lựa chọn để đầu tư 20000 triệu VND vào một trong hai dự án. Dòng thu nhập năm của hai dự án (đều có thời hạn 4 năm) được cho trong bảng 2.7 tại các cột (2) và cột (3). Giả sử lãi suất năm là 11% với lãi kép được tính theo năm, hãy cho biết nên tư vấn cho hãng kinh doanh chọn dựa án nào để đầu tư.

Lời giải:

Bảng 2.7

t	Thu nhập		Thu nhập đã chiết khấu	
	Dự án A	*Dự án B*	*Dự án A*	Dự án B
1	6000	10000	5405,405	9009,009
2	3000	6000	2434,867	4869,734
3	10000	9000	7311,913	6580,722
4	8000	1000	5269,847	658,730
Tổng	27000	26000	20422,034	21118,19

Nếu ta cộng tổng cột (2) và cột (3) thì ta thấy tổng thu nhập theo kiểu cộng số học của dự án A là 27000 triệu VND, còn của dự án B là 26000 triệu VND. Mặc dù việc tính tổng như vậy không có ý nghĩa trong phân tích tài chính (không cho phép cộng các giá trị tiền tệ tại các thời điểm khác nhau), ta có thể hình dung là dự án A mang lại tổng thu nhập cao hơn dự án B, do đó đầu tư vào dự án B sẽ hiệu quả hơn.

Tuy nhiên, phân tích sơ bộ có thể thấy mặc dù tổng thu nhập (cộng số học) của dự án A cao hơn dự án B một chút, nhưng trong dòng tiền thu nhập của dự án B các khoản thu nhập lớn lại xuất hiện sớm hơn. Cụ thể là khoản thu nhập 10000 triệu VND xuất hiện trong dự án B vào cuối năm 1, trong khi lại xuất hiện trong dự án A vào cuối năm 3. Vì vậy, khoản thu nhập 10000 triệu VND như trên mang lại cho dựa án B nhiều lợi nhuận hơn là cho dựa án A.

Để đánh giá và so sánh hai dự án, ta cần tính giá trị hiện tại P của dòng tiền thu nhập của cả hai dựa án như sau:

Đối với dựa án A:

$$P = 6000.1,11^{-1} + 3000.1,11^{-2} + 10000.1,11^{-3} + 8000.1,11^{-4}$$

$$= 5405,41 + 2434,87 + 7311,91 + 5269,85 = 20422,04 \text{ triệu VND}$$

Đối với dựa án B:

$$P = 10000.1,11^{-1} + 6000.1,11^{-2} + 9000.1,11^{-3} + 1000.1,11^{-4}$$

$$= 9009,01 + 4869,73 + 6580,72 + 658,73 = 21118,19 \text{ triệu VND}$$

Các tính toán trên đây được cho trong cột (4) và cột (5) của bảng 2.7. Như vậy giá trị hiện tại (tổng các thu nhập đã chiết khấu) của dự án B cao hơn dự án A, do đó NPV của dự án B là 1118,19 triệu VND cao hơn NPV của dự án B là 422,04 triệu VND. Do đó, chúng ta nên tư vấn cho hãng kinh doanh chọn dựa án B để đầu tư. ■

Tính tỉ suất nội hoàn của dự án đầu tư với dòng thu nhập đã biết

Dự án đầu tư, theo phân tích ở trên, có thể mang về các khoản thu nhập với giá trị khác nhau tại các thời điểm khác nhau. Để đánh giá hiệu quả dự án ta có thể tính IRR cho các dự án đầu tư như vậy.

Ví dụ 2.3.3.3. a/ Hãy tính IRR của dự án đầu tư A với chi phí ban đầu là 20000 USD và có các thu nhập là 8000 USD và 15000 USD vào cuối năm 1 và năm 2.

b/ Hãy tính IRR của dự án đầu tư B với chi phí ban đầu là 5000 USD và có các thu nhập là 1000 USD, 2000 USD và 3000 USD vào cuối năm 1, năm 2 và năm 3.

Lời giải:

Kí hiệu IRR của các dự án trên là $r_A\%$ và $r_B\%$. Lúc đó để tính r_A, ta có:

$$20000 = 8000(1 + \frac{r_A}{100})^{-1} + 15000(1 + \frac{r_A}{100})^{-2},$$

từ đó ta có

$$10r_A + 320r_B - 3000 = 0 \Rightarrow r_A = 8,9(\%)$$

hoặc $r_A = -168,9(\%)$ (loại)

Để tính r_B, ta có:

$$5000 = 1000(1 + \frac{r_B}{100})^{-1} + 2000(1 + \frac{r_B}{100})^{-2} + 3000(1 + \frac{r_B}{100})^{-3}$$

Sử dụng phương pháp thử đúng sai, ta tính giá trị của vế phải với các giá trị khác nhau của $r_B\%$ là: $5\%, 6\%, 7\%, 8\%, 9\%$ và 10%. Kết quả tính toán được tổng hợp trong bảng 2.8.

Bảng 2.8

r_B	5%	6%	7%	8%	9%	10%
Giá trị vế phải	1308	5242	5130	5022	4917	4816

Trong các giá trị ở hàng 2, giá trị 5022 là gần nhất với 5000. Vậy ta có kết quả gần đúng $r_B = 8\%$. Để có độ chính xác hơn, hãy thử các giá trị trong khoảng 8% đến 9%. ∎

Tính toán giá trị hiện tại của trái phiếu chính phủ

Chúng ta áp dụng việc tính toán giá trị hiện tại của trái phiếu chính phủ trong phân tích mối quan hệ giữa sự biến động của lãi suất và nhu cầu đầu cơ (dự trữ) tiền tệ. Nhu cầu dựa trữ tiền tệ luôn phát sinh nhằm dự trữ tiền (bằng nhiều phương thức) với mục đích tận dụng các cơ hội thuận lợi khi có sự biến động về giá trị của các động sản tài chính khác, chẳng hạn như trái phiếu chính phủ.

Trái phiếu chính phủ do chính phủ phát hành, người dân có thể mua với một giá nhất định, cũng có nghĩa là người dân cho chính phủ vay một khoản nợ bằng trị giá trái phiếu. Chính phủ sẽ thanh toán / chi trả lãi của trái phiếu (khoản nợ) hàng năm cho tới khi trái phiếu hết hạn, lúc đó chính phủ sẽ hoàn lại tiền gốc mua trái phiếu cho người dân.

Trái phiếu chính phủ là một loại chứng khoán và có thể được giao dịch đổi chủ sở hữu, tức là có thể mua bán. Người mua lại trái phiếu sẽ là chủ sở hữu mới của trái phiếu, và được hưởng lãi của trái phiếu cho các năm còn lại cũng như được chính phủ hoàn trả tiền gốc mua trái phiếu khi trái phiếu hết hạn. Giá trị của trái phiếu tại thời điểm giao dịch mua bán phụ thuộc vào số năm còn lại trước khi trái phiếu hết hạn cũng như phụ thuộc vào (biến động) lãi suất trên thị trường.

***Ví dụ* 2.3.3.4.** Xem xét trái phiếu chính phủ của Chính phủ Mỹ với thời hạn 10 năm, ban đầu được chào bán với giá 5000 USD với lãi suất hàng năm (ghi trên trái phiếu) là 9%. Giả định rằng, tại thời điểm giao dịch mua bán, trái phiếu còn 4 năm trước khi hết hạn. Tính giá trị hiện tại (tại thời điểm giao dịch) của trái phiếu với lãi suất thị trường hiện hành r được dự báo là một trong các lãi suất sau: 5%, 7%, 9%, 11% và 13% với giả thiết lãi suất này ổn định trong 4 năm tiếp theo. Từ các kết quả tính toán, hãy thảo luận về mối quan hệ giữa sự biến động của lãi suất và nhu cầu đầu cơ (dự trữ) tiền tệ.

Lời giải:

Trước hết, ta định giá trái phiếu tại thời điểm giao dịch mua bán với lãi suất thị trường là r = 5%. Lúc này trái phiếu có dòng tiền thu nhập như sau: tiến lãi là 450 USD (tức là 9% của 5000 USD) được trả cho người sở hữu trái phiếu hàng năm vào cuối năm 1, 2, 3 và 4, và vào cuối năm 4 người sở hữu trái phiếu còn nhận được 5000 USD tiền thanh toán trái phiếu theo giá gốc. Vậy ta có dòng thu nhập là 450 USD, 450 USD, 450 USD và 5450 USD vào cuối các năm 1, 2, 3 và 4.

Giá trị hiện tại của dòng thu nhập được tính như sau:

$$450.1,05^{-1} + 450.1,05^{-2} + 450.1,05^{-3} + 5450.1,05^{-4}$$

$$= 429 + 408 + 389 + 4484 = 5710 \text{ USD.}$$

Vậy giá trị hiện tại của trái phiếu là 5710 USD, đây cũng là giá của trái phiếu tại thời điểm giao dịch (được định giá một cách hợp lí). Các tính toán trên được tổng hợp trong cột (3) của bảng 2.9. Tương tự, chúng ta có thể định giá được giá của trái phiếu tại thời điểm hiện tại trong các trường hợp khác khi lãi suất thị trường là 7%, 9%, 11% và 13%. Các kết quả tính toán cũng được tổng hợp trong bảng 2.9.

Bảng 2.9

Cuối năm thứ	Dòng thu nhập	Giá trị hiện tại				
		5%	7%	9%	11%	13%
1	*450*	429	421	413	405	398
2	*450*	408	393	379	365	352
3	*450*	389	367	347	329	312
4	*5450*	4484	4158	3861	3590	3343
Giá trị hiện tại của trái phiếu		5709	5339	5000	4690	4405

Ta có nhận xét rằng khi lãi suất thị trường càng thấp giá trị hiện tại của trái phiếu càng cao. Vì vậy, có thể nghĩ rằng, người dân có khuynh hướng giữ lại (không bán) trái phiếu khi lãi suất thị trường còn ở mức thấp, và có khuynh hướng bán đi trái phiếu khi lãi suất thị trường có chiều hướng tăng. Tuy nhiên, thật ra khi lãi suất lên cao, thì người dân thường mua lại trái phiếu với giá rẻ nhằm chờ đợi cơ hội lãi suất thị trường phục hồi trở lại và giảm xuống thấp để bán ra với giá cao hơn nhiều. Do đó, có thể kết luận rằng, khi lãi suất thị trường xuống thấp sau một giai đoạn đủ dài, nhu cầu đầu cơ tiền tệ (trái phiếu) sẽ tăng lên. ■

2.4. Bài tập Chương 2

Hướng dẫn ôn tập

Mục 2.1: tỉ lệ phần trăm; hệ số tỉ lệ; tỉ lệ phần trăm thay đổi; số chỉ số; giá trị điều chỉnh theo lạm phát; lãi đơn và lãi kép; giá trị tương lai; lãi suất danh nghĩa; lãi suất hiệu dụng năm.

Mục 2.2: khái niệm cấp số nhân; công thức tính tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân; tính tổng đầu tư được thực hiện theo một kế hoạch gửi tiết kiệm; tính lượng tiền chi trả hàng kì để trả hết một khoản vay nợ.

Mục 2.3: giá trị hiện tại của một lượng đầu tư; giá trị hiện tại ròng; tỉ suất nội hoàn; đánh giá dự án đầu tư; giá trị hiện tại của một chuỗi niên kim / một dòng tiền; so sánh / chọn lựa dự án đầu tư; giá trị hiện tại của trái phiếu chính phủ; mối quan hệ giữa sự biến động của lãi suất và nhu cầu đầu cơ tiền tệ.

Sinh viên ôn tập lần lượt các vấn đề then chốt theo thứ tự trên đây, nghiên cứu kĩ các ví dụ, rèn luyện kĩ năng tính toán và giải quyết vấn đề qua việc giải được tối thiểu 50% số bài tập được liệt kê cho từng mục.

Bài tập mục 2.1

Bài 1. Trong năm 2008 giá của một loại hàng hóa tăng 8%. Tại đợt bán xả hàng ngày 1/1/2009, giá của tất cả các sản phẩm giảm 25%.

a/ Biết giá xả hàng của hàng hóa là $688,5$ nghìn VND, hãy tìm giá gốc của loại hàng hóa này vào đầu năm 2008.

b/ Tìm tỉ lệ phần trăm thay đổi tổng thể của giá loại hàng trên.

c/ Hãy tìm tỉ lệ phần trăm tăng của giá để đưa giá về giá gốc tại thời điểm 1/1/2008.

Bài 2. Các số chỉ số của tốc độ tăng trưởng của mức thất nghiệp trong một giai đoạn kép dài 8 năm được cho trong bảng sau:

	Năm							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Số chỉ số 1	100	95	105	110	119	127		
Số chỉ số 2						100	112	118

a/ Hãy chỉ rõ các năm cơ sở cho từng số chỉ số.

b/ Nếu chính phủ quyết định sử dụng số chỉ số 2 thì giá trị của số chỉ số 1 vào các năm thứ 7 và thứ 8 bằng bao nhiêu?

c/ Tính giá trị của số chỉ số 2 tại các năm 1, 2, 3, 4 và 5.

d/ Giả sử mức thất nghiệp là $1,2$ triệu người vào năm thứ 4, hãy cho biết mức thất nghiệp vào các năm thứ 1 và năm thứ 8.

Bài 3. Giá của một loại hàng hóa vào thời điểm cuối năm của các năm từ 2003 tới 2008 cũng như tỉ lệ lạm phát tương ứng hàng năm được cho trong bảng sau:

Năm	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Giá (danh nghĩa) nghìn VND	230	242	251	257	270	284
Tỉ lệ lạm phát năm		4%	3%	2,5%	2%	2%

a/ Hãy tìm giá thực tế của các năm sau khi đã điều chỉnh về cuối năm 2004, kết quả tính toán được làm tròn tới hai chữ số thập phân. Từ đó tìm số chỉ số của giá cả thực tế cho tất cả các năm với năm 2004 được lấy làm năm cơ sở, kết quả tính toán được làm tròn tới một chữ số thập phân.

b/ Cho biết số chỉ số của giá thực tế vào năm 2009 là 109 và tỉ lệ lạm phát của năm này là $2,5\%$, hãy tìm giá danh nghĩa của hàng hóa vào năm 2009. Kết quả tính toán được làm tròn tới hàng đơn vị.

c/ Cho biết số chỉ số của giá thực tế vào năm 2002 là $95,6$ và giá danh nghĩa của hàng hóa vào năm 2002 là 215 nghìn VND, hãy tìm tỉ lệ lạm phát của năm 2003. Kết quả tính toán được làm tròn tới một chữ số thập phân.

Bài 4. Một lượng tiền gốc 7650 triệu VND được đầu tư với lãi suất $3,7\%$ tính lãi kép theo năm. Hỏi sau bao nhiêu năm lượng đầu tư lần đầu tiên sẽ vượt 12250 triệu VND.

Bài 5. Ngân hàng A đưa ra tỉ lệ thu nhập (lãi suất) là 5% tính lãi kép theo năm cho tất cả các năm cho khách hàng có tiền gửi vào ngân hàng. Còn ngân hàng B đưa ra tỉ lệ thu nhập là 3% cho năm thứ 1, 7% cho năm thứ 2 và các năm tiếp theo, tính lãi kép theo năm. Hãy lựa chọn ngân hàng để gửi tiền trong các trường hợp sau:

a/ Gửi tiền trong vòng 2 năm.

b/ Gửi tiền trong vòng 3 năm.

Bài 6. Dân số của một đất nước hiện tại là 56 triệu người và được dự báo có tốc độ tăng trưởng là $3,7\%$ hàng năm. Đất nước này có khả năng sản xuất ra 2500 triệu đơn vị thức ăn hàng năm, và theo ước tính mỗi người dân cần tối thiểu 65 đơn vị thức ăn mỗi năm. Hiện nay, số lượng các đơn vị thức ăn thiếu hụt được nhập khẩu từ nước ngoài để đáp ứng nhu cầu trong nước. Tuy nhiên, chính phủ đã quyết định sẽ tăng việc sản xuất thức ăn với tỉ lệ phần trăm tăng hàng năm không đổi nhằm mục đích đảm bảo tự cung cấp được thúc ăn sau 10 năm tới. Hãy tìm tỉ lệ phần trăm tăng này để đạt được mục tiêu chính phủ đặt ra.

Bài 7. Dự trữ dầu của thế giới hiện tại được ước lượng ở mức 600 tỉ đơn vị. Nếu lượng dự trữ này giảm 8% hàng năm thì sau bao nhiêu năm nữa nó sẽ còn lại ít hơn 100 tỉ đơn vị.

Bài 8.

a/ Doanh số bán hàng của một hàng bán tăng từ 12000 triệu VND cả năm 2016 lên 15000 triệu VND cả năm 2017. Hãy biểu thị gia tăng về doanh số qua tỉ lệ phần trăm.

b/ Chính phủ áp đặt mức thuế là 20% cho giá cả một loại ô tô. Người tiêu dùng phải trả bao nhiêu tiền khi mua xe ô tô loại này, biết giá trước thuế là 950 triệu VND.

c/ Giá trị đầu tư tháng cuối năm 2016 giảm so với giá trị đầu tư tháng đầu năm 2016 là 11%. Tìm giá trị đầu tư cuối năm 2016, biết giá trị đầu tư đầu năm 2016 là 1100 triệu VND.

Bài 9. Lương năm trung bình danh nghĩa (tính bằng triệu VND) của các nhân viên của một hãng kinh doanh cuối năm tại thời điểm được cho trong bảng sau trên hàng (1); còn tỉ lệ lạm phát năm (tính từ 31/12 năm trước tới 31/12 năm sau) được cho trên hàng (2). Hãy tính lương năm trung bình thực tế tại thời điểm cuối năm cho từng năm và cho nhận xét về tỉ lệ phần trăm tăng (giảm) của lương, nếu ta chọn năm 2014 làm năm cơ sở

Năm theo mốc 2014	-1	**0**	1	2	3
Năm	2013	**2014**	2015	2016	2017
Lương trung bình danh nghĩa (1)	220	**230**	236	244	255
Tỉ lệ lạm phát năm (2)	4%	**5,7%**	6,1%	6,5%	4,3%

Bài 10.

a/ Tổng sản phẩm đầu ra tính theo tháng của một nhà máy là 20000 triệu VND. Trong giai đoạn suy thoái sắp tới, dự báo sơ bộ cho biết nó sẽ giảm 40%. Hãy tính mức sản phẩm đầu ra trên trong giai đoạn sắp tới.

b/ Do áp dụng đổi mới công nghệ và tái cấu trúc, lượng lao động của một hãng kinh doanh đã giảm 24%. Hiện tại hãng đang có 650 nhân viên, hãy tính tổng sổ nhân viên của hãng trước khi áp dụng đổi mới công nghệ và tái cấu trúc.

c/ Do thị trường chứng khoán đổ vỡ, cổ phiếu XYZ bị rớt giá từ 105 ngàn VND xuống 45 ngàn VNĐ. Hãy tìm tỉ lệ phần trăm giảm giá so với giá ban đầu của cổ phiếu.

Bài 11. Một cửa hàng bán xe máy ước tính rằng doanh số bán hàng của cửa hàng tăng 3% mỗi năm và hãng cần bán được trong một năm ít nhất 600 xe máy thì năm đó mới có lãi. Hiện nay doanh số năm là 400, hỏi cần bao nhiêu năm nữa cửa hàng mới có thể đạt mức hòa vốn.

Bài 12.

a/ Một hãng sản xuất ô tô quyết định tăng lượng sản phẩm đầu ra từ 5000 lên 6000 trong 5 năm tới với tỉ lệ phần trăm tăng hàng năm không thay đổi r. Hãy tìm r để đạt được sự tăng trưởng trên.

b/ Siêu thị A hiện có doanh thu là 500 tỉ VND, doanh thu được dự báo tăng 1,5% năm. Siêu thị B, đối thủ cạnh tranh của siêu thị A, hiện có doanh thu là 400 tỉ VND, doanh thu được dự báo tăng 3,5% năm. Hỏi sau bao nhiêu năm doanh thu của siêu thị B sẽ vượt doanh thu của siêu thị A.

Bài tập mục 2.2

Bài 1. Một lượng tiền tiết kiệm thường xuyên là 500 USD được gửi vào một quỹ chìm tại thời điểm đầu mỗi năm trong vòng 10 năm. Hãy tính giá trị của quỹ này vào cuối năm thứ 10 trong các trường hợp sau:

a/ Lãi suất là 11% tính lãi kép theo năm.

b/ Lãi suất là 10% với lãi kép được hình thành liên tục.

Bài 2. Tìm khoản chi trả thường xuyên theo tháng để trả hết một khoản nợ là 50000 USD trong vòng 25 năm nếu lãi suất ngân hàng là 9% với lãi kép tính theo năm. Hãy tính số tiền chi trả tăng hàng tháng trong các trường hợp sau:

a/ Lãi suất tăng lên 10%

b/ Thời gian phải trả hết nợ giảm xuống 20 năm.

Bài 3. Một ngân hàng đưa ra ba loại tài khoản khác nhau mà lãi suất tính cho tiền gửi vào tài khoản phụ thuộc vào lượng tiền có trong tài khoản. Loại tài khoản thông thường có lãi suất 6% năm và được áp dụng cho tất cả các khách hàng có tiền gửi vào ngân hàng. Loại tài khoản ưu đãi có lãi suất 7% chỉ áp dụng cho khách hàng có số tiền gửi từ 5000 USD trở lên. Loại tài khoản ưu đãi đặc biệt có lãi suất 8% chỉ áp dụng cho các khách hàng có số tiền gửi từ 20000 USD trở lên. Giả sử lãi được tính theo năm và gộp vào số tiền có trong tài khoản vào thời điểm cuối mỗi năm. Một khách hàng gửi vào ngân hàng một số tiền là 4000 USD vào đầu mỗi năm trong vòng 25 năm. Hãy tính số tiền anh ta có trong tài khoản tại cuối năm thứ 25 năm, biết rằng tiền trong tài khoản được tự động chuyển lên mức lãi suất cao hơn với thời hạn sớm nhất có thể.

Bài 4. Vào đầu tháng, một khách hàng có một thẻ tín dụng nợ của công ti mức 8400 USD. Vào giữa tháng, người đó trả được A USD với $A < 8400$. Vào cuối tháng, công ti gộp vào khoản nợ thêm 6% khoản dư nợ. Quá trình này được tiếp tục cho các tháng sau khi người sử dụng thẻ tín dụng tiếp tục trả được A USD vào giữa hàng tháng.

a/ Tìm giá trị của A sao cho khách hàng luôn có mức 8400 USD trong thẻ tín dụng vào đầu mỗi tháng.

b/ Cho biết $A = 1000$, hãy tính mức tiền có trong thẻ tín dụng vào cuối tháng thứ 8.

c/ Chứng minh rằng giá trị A sao cho toàn bộ mức tiền 8400 USD ban đầu được tiêu hết trong n tháng.

d/ Tìm giá trị của A để số tiền nợ có thể trả hết đúng sau 2 năm.

Bài 5. Một người gửi 2000 USD vào tài khoản ngân hàng vào đầu hàng năm. Ngân hàng tính lãi suất tiết kiệm là 4%, lãi được tính theo quý.

a/ Tính lượng tiển tiết kiệm được sau 10 năm.

b/ Sau bao nhiêu năm thì lượng tiền tiết kiệm lần đầu tiên vượt 40000 USD.

Bài tập mục 2.3

Bài 1. Một dự án có lượng đầu tư ban đầu (chi phí ban đầu) là 7000 USD và được đảm bảo sẽ thu về 1500 USD vào cuối năm thứ 1, 2500 USD vào cuối năm thứ 2 và x USD vào cuối năm thứ 3. Hãy tìm giá trị của x, cho biết NPV của dự án là $838,18$ USD và lãi suất thị trường là 8% với lãi kép tính theo năm.

Bài 2. Một hãng sản xuất đã quyết định đầu tư mua một máy chế tạo mới với dự báo sẽ mang lại mức gia tăng doanh thu là 8000 USD vào cuối mỗi năm trong vòng 10 năm. Vào cuối năm thứ 10, hãng đã lên kế hoạch thanh lí chiếc máy đó với giá 5000 USD. Hãy xác định chi phí lớn nhất mà hãng phải trả để mua về chiếc máy này sao cho hãng không phải chịu thất thu ròng. Cho biết tỉ lệ (lãi suất) chiết khấu là 6% được tính lãi kép theo năm.

Bài 3. Một dự án cần có lượng đầu tư ban đầu là 50000 triệu VND. Dự án sẽ mang lại thu nhập là 40000 triệu VND vào cuối năm thứ 1 vào 10000 VND vào cuối năm thứ 2. Hãy tính giá trị của tỉ suất nội hoàn của dự án.

Bài 4. Một chuỗi niên kim vĩnh viễn mang lại 20000 triệu VND vào cuối mỗi năm. Cho biết lãi suất thị trường ổn định 5% với lãi kép theo năm, hãy tìm:

a/ Giá trị hiện tại của toàn bộ chuỗi niên kim.

b/ Giá trị hiện tại của chuỗi niên kim của các khoản chi trả, bắt đầu từ cuối năm thứ 30 trở đi.

c/ Giá trị hiện tại của chuỗi niên kim gồm các khoản chi trả của 30 năm đầu tiên.

Bài 5. Một dự án cần có khoản đầu tư ban đầu là 80000 USD và mang lại các khoản thu nhập 20000 USD vào cuối năm thứ 1, 30000 USD vào cuối năm thứ 2 và R USD vào cuối năm thứ 3. Hãy tìm giá trị của R nếu cho biết tỉ suất nội hoàn của dự án là 10%.

Bài 6. Hãy tính giá trị hiện tại của một khoản đầu tư là 200 triệu VNĐ tại cuối năm thứ 10 nếu biết lãi suất chiết khấu (danh nghĩa) là 6% trong ba trường hợp sau:

a/ Lãi hình thành rời rạc theo năm (tức là một năm tính lãi một lần).

b/ Lãi hình thành rời rạc theo tháng năm (tức là một năm tính lãi 12 lần).

c/ Lãi hình thành liên tục (tức là một năm tính lãi rất nhiều lần, chẳng hạn tính lãi theo tuần, theo ngày).

Bài 7. Một dự án có khoản đầu tư ban đầu (chi phí ban đầu) là 900 triệu VND và được đảm bảo sẽ thu về 2000 triệu VND sau 5 năm tới. Hãy tìm NPV và IRR của dự án và đánh giá dự án là có nên thực hiện hay không, nếu biết rằng có phương án đầu tư khác cho lãi suất hàng năm 15% trong vòng 5 năm.

Bài 8. Một hãng kinh doanh cần lựa chọn để đầu tư 10000 USD vào một trong hai dự án. Dòng thu nhập năm của hai dự án (đều có thời hạn 4 năm) được cho trong bảng sau tại các cột (2) và cột (3). Giả sử lãi suất là 11% với lãi kép được tính theo năm, hãy cho biết nên tư vấn cho hãng kinh doanh chọn dựa án nào để đầu tư.

t	Thu nhập		Thu nhập đã chiết khấu	
	Dự án A	*Dự án B*	*Dự án A*	Dự án B
1	6000	10000	5405,405	9009,009
2	3000	6000	2434,867	4869,734
3	10000	9000	7311,913	6580,722
4	8000	1000	5269,847	658,730
Tổng	27000	26000	20422,034	21118,19

Bài 9. Cho biết lãi suất (danh nghĩa) năm là $r = 5\%$ và lãi kép được tính theo tháng. Hãy tìm giá trị hiện tại của một chuỗi niên kim cho ta thu nhập 200 triệu VND vào cuối mỗi tháng trong các trường hợp sau:

a/ Chuỗi niên kim có thời hạn 20 năm.

b/ Chuỗi niên kim có thời hạn rất nhiều năm (vĩnh viễn).

Bài 10. Hãy ước lượng IRR (làm tròn tới 1%) của một dự án đầu tư với chi phí ban đầu là 12000 triệu VND và có các thu nhập là 8000 triệu VND, 3000 triệu VND, 2000 triệu VND và 1000 triệu VND vào cuối năm 1, năm 2, năm 3 và năm 4.

Bài 11. Chính phủ đã phát hành trái phiếu thời hạn 10 năm với giá phát hành là 500 nghìn VND và lãi suất năm của trái phiếu là 6%. Hãy định giá trái phiếu tại thời điểm hiện nay, khi còn 3 năm nữa là trái phiếu hết hạn, biết lãi suất thị trường hiện nay là 8%.

Tài liệu tham khảo chính Chương 2

[1] Nguyễn Quốc Hưng, *Toán cao cấp và một số ứng dụng trong kinh doanh*, Nhà xuất bản Giao thông vận tải, 2009. Tập 2, Phần đọc thêm: I. Cấp số và

dòng tiền (Tính giá trị tương lai của tiền tệ, Giá trị hiện tại của tiền tệ, Bài toán: Mua xe trả góp, Bài toán: Chọn dự án đầu tư)

[2] Teresa Bradley, *Essential Mathematics for Economics and Business*, 4th edition, John Wiley and Sons, 2013. Chapter 5. Financial Mathematics

[3] Ian Jacques, *Mathematics for Economics and Business*, 7th edition, Pearson, 2013. Chapter 3. Mathematics of Finance

Chương 3

Đạo hàm

Chương 3 tìm hiểu khái niệm *đạo hàm* và ứng dụng của đạo hàm trong các vấn đề kinh tế. Mục 3.1 giới thiệu khái niệm đạo hàm của hàm số một biến số và *các quy tắc tính đạo hàm* cơ bản. Mục này cũng đề cập đến *quy tắc tính đạo hàm của hàm hợp*, *đạo hàm hàm ngược* và *quy tắc tính đạo hàm cấp cao*. Mục 3.2 trình bày các ứng dụng của đạo hàm trong kinh tế học mà cụ thể là trong *phân tích doanh thu, chi phí, tiêu dùng và tiết kiệm*... Mục 3.3 đề cập đến một vấn đề quan trọng trong kinh doanh là xác định xem doanh thu sẽ ảnh hưởng thế nào khi giá bán sản phẩm thay đổi. Từ đó, khái niệm *độ co giãn* được đưa ra. Mục 3.4 nêu kỹ thuật tính *giá trị cực đại* hoặc *cực tiểu* của một hàm số.

3.1. Định nghĩa và quy tắc tính đạo hàm

3.1.1. Định nghĩa

Hàm số $y = f(x)$ thể hiện rằng đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng x qua quy tắc f. Câu hỏi đặt ra là đại lượng y thay đổi thế nào khi đại lượng x thay đổi? Câu hỏi này dẫn tới khái niệm đạo hàm được định nghĩa dưới đây.

Giả sử x biến thiên từ x_1 đến x_2. Khi đó lượng thay đổi của x được gọi là số gia của x, và được kí hiệu là:

$$\triangle x = x_2 - x_1.$$

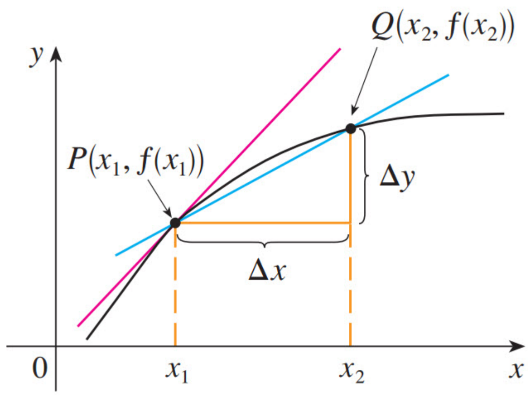
Còn lượng thay đổi tương ứng của y được gọi là số gia của y, và được kí hiệu là:

$$\triangle y = f(x_2) - f(x_1).$$

Tỉ số

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

được gọi là tốc độ thay đổi trung bình của y khi x thay đổi từ x_1 đến x_2.



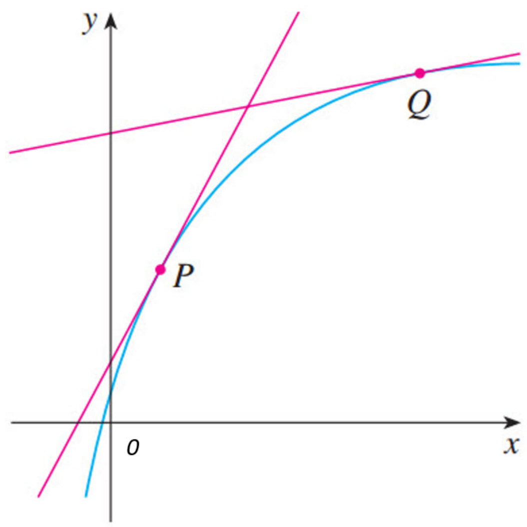
Hình 3.1. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Khi x_2 tiến sát về x_1, tức $\triangle x \to 0$, tỉ số trong công thức trên trở thành tốc độ thay đổi tức thời của y tại $x = x_1$. Trên hình 3.1, tốc độ thay đổi trung bình của y khi x thay đổi từ x_1 đến x_2 chính là hệ số góc của cát tuyến PQ trong khi tốc độ thay đổi tức thời của y tại $x = x_1$ là hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại $x = x_1$.

Định nghĩa đạo hàm: Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại x, là tốc độ thay đổi tức thời của y tại x, được kí hiệu là $f'(x) = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{\triangle y}{\triangle x}$.

Đạo hàm của hàm số còn được kí hiệu dưới dạng:

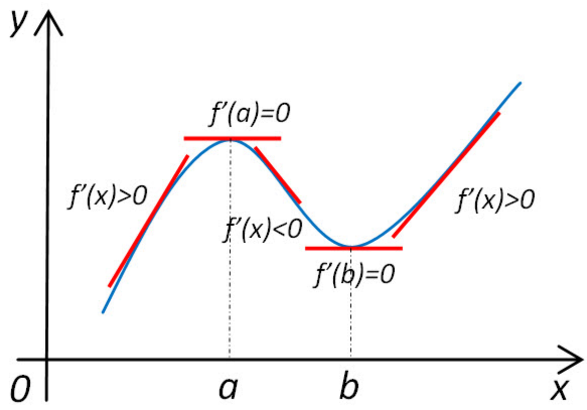
$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}.$$



Hình 3.2. Tốc độ thay đổi của y nhanh hơn tại P và chậm hơn tại Q

Đạo hàm của hàm số tại một điểm là hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm đó. Vì vậy, khi giá trị đạo hàm lớn hơn tức là độ dốc của đồ thị lớn hơn và vậy là tốc độ thay đổi của y là nhanh hơn (điểm P trên hình 3.2). Tương tự, giá trị đạo hàm nhỏ dẫn tới tốc độ thay đổi của y chậm hơn (điểm P trên hình 3.2). Ta cũng suy ra được rằng, hàm số tăng khi $f'(x) > 0$ và giảm khi $f'(x) < 0$ (xem hình 3.3). Tại những điểm $f'(x) = 0$, hàm số có thể đạt cực trị (sẽ xem xét chi tiết hơn ở phần sau).

Trong thực tế, khái niệm vận tốc mà ta hay nhắc tới khi di chuyển chính là một ví dụ về ứng dụng của đạo hàm. Thật vậy, xét một vật đang di chuyển trên đường thẳng (xem hình 3.4). Vị trí s của vật phụ thuộc vào thời điểm t. Nói cách khác, ta có hàm $s = f(t)$. Độ dài quãng đường mà vật di chuyển trong



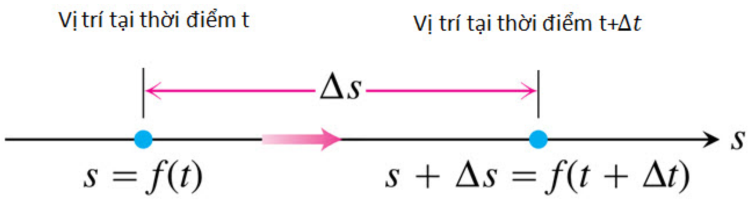
Hình 3.3. Đạo hàm và sự biến thiên của hàm số

khoảng thời gian $\triangle t$ từ thời điểm t_0 tới thời điểm $t_0 + \triangle t$ là:

$$\triangle s = f(t_0 + \triangle t) - f(t_0).$$

Vận tốc trung bình mà vật di chuyển trong khoảng thời gian $\triangle t$ là

$$v_{tb} = \frac{\text{quãng đường}}{\text{thời gian}} = \frac{\triangle s}{\triangle t}$$



Hình 3.4. Vị trí của vật thể di chuyển theo thời gian

$\lim\limits_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle s}{\triangle t}$ theo định nghĩa là đạo hàm của hàm số $f(t)$ theo thời gian tại điểm t. Nó chính là vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t: $v_{tt} = s' = \dfrac{df}{dt}$.

3.1.2. Đạo hàm các hàm cơ bản và quy tắc tính đạo hàm

Trong tiểu mục này, ta đi tính đạo hàm của một số hàm cơ bản.

***Ví dụ* 3.1.2.1.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$a)\quad f(x) = c \qquad\qquad b)\quad f(x) = ax + b \qquad\qquad c)\quad f(x) = x^2$

Lời giải:

a) Vì là hàm hằng nên khi biến x thay đổi một lượng $\triangle x$, $f(x)$ vẫn là hằng số, tức $\triangle f = 0$. Do đó:
$$\frac{\triangle f}{\triangle x} = 0$$
Khi $\triangle x \to 0$, tỉ số trên luôn là 0. Vậy hàm hằng $f(x) = c$ có đạo hàm $f(x) = 0$.

b) Xét sự thay đổi biến số từ x_0 tới $x_0 + \triangle x$. Giá trị của hàm $f(x) = ax + b$ sẽ thay đổi một lượng
$$\triangle f = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)$$
$$\triangle f = \big(a(x_0 + \triangle x) + b\big) - (ax_0 + b) = a\triangle x$$
Ta có
$$\frac{\triangle f}{\triangle x} = \frac{a\triangle x}{\triangle x} = a$$
Khi $\triangle x \to 0$, tỉ số trên luôn là a. Vậy hàm $f(x) = ax + b$ có đạo hàm $f'(x) = a$.

c) Xét sự thay đổi biến số từ x_0 tới $x_0 + \triangle x$. Giá trị của hàm $f(x) = x^2$ sẽ thay đổi một lượng
$$\triangle f = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = (x_0 + \triangle x)^2 - x_0^2$$
$$\triangle f = 2x_0\triangle x + (\triangle x)^2$$
Ta có
$$\frac{\triangle f}{\triangle x} = \frac{2x_0\triangle x + (\triangle x)^2}{\triangle x} = 2x_0 + \triangle x$$
Khi $\triangle x \to 0$, $\dfrac{\triangle f}{\triangle x} = 2x_0 + \triangle x \to 2x_0$.
Vậy là $f'(x_0) = 2x_0$. Giả sử cần tính $f'(1)$, ta chỉ cần thay $x_0 = 1$ để đạt được $f'(1) = 2.1 = 2$.
Vì x_0 có thể nhận giá trị bất kì nào đó, ta thường hay viết x thay cho x_0, tức ta viết $f'(x) = 2x$. ■

Ta có bảng tổng hợp đạo hàm một số hàm cơ bản như dưới đây:

a) $(c)' = 0$, trong đó c là hằng số;

b) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad (\alpha \in R, \quad x > 0)$;

c) $(a^x)' = a^x \ln a \qquad (a > 0, \quad a \neq 1)$;

d) $(e^x)' = e^x$;

e) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a} \qquad (a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0)$;

g) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x} \qquad (x > 0)$;

h) $(\sin x)' = \cos x$;

i) $(\cos x)' = -\sin x$.

Khi một hàm số được biểu diễn dưới dạng tổng, hiệu, tích hoặc thương của các hàm số $u = u(x)$, $v = v(x)$ (giả thiết hàm số $u = u(x)$, $v = v(x)$ có đạo hàm tại x), ta sử dụng quy tắc sau đây:

a) $\big(cu\big)' = cu'$;

b) $\big(u + v\big)' = u' + v'$;

c) $\big(u - v\big)' = u' - v'$;

d) $\big(uv\big)' = u'v + uv'$;

e) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

***Ví dụ* 3.1.2.2.** Tính đạo hàm của hàm số sau:

a) $f(x) = 2\ln x + 3x^2 \sin x$ *b)* $f(x) = \dfrac{e^x}{x^3} - 5\sqrt{x}$

Lời giải:

a)

$$f'(x) = (2\ln x + 3x^2 \sin x)' = 2(\ln x)' + 3(x^2 \sin x)'$$
$$f'(x) = \frac{2}{x} + 3(2x \sin x + x^2 \cos x)$$
$$f'(x) = \frac{2}{x} + 6x \sin x + 3x^2 \cos x)$$

b)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{e^x}{x^3} - 5\sqrt{x}\right)' \\
f'(x) &= \frac{(e^x)'x^3 - e^x(x^3)'}{\left(x^3\right)^2} - 5\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' \\
f'(x) &= \frac{x^3e^x - 3x^2e^x}{x^6} - 5\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \\
f'(x) &= \frac{x^3e^x - 3x^2e^x}{x^6} - \frac{5}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

■

3.1.3. Đạo hàm của hàm hợp

Xét hàm hợp $y = f(u)$ và $u = g(x)$. Nếu hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm theo u và hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm theo x thì hàm số hợp $y = f(u) = f\big(u(x)\big)$ có đạo hàm theo x và $y'(x) = y'(u).u'(x)$ hay $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}.\dfrac{du}{dx}$.

***Ví dụ* 3.1.3.1.** Cho hàm số $y = \ln(x^2+1)$. Đặt $u = x^2+1$, $y = \ln u$. Ta có:

$$y'(x) = y'(u).u'(x) = \frac{1}{u}.2x = \frac{2x}{x^2+1}.$$

■

***Ví dụ* 3.1.3.2.** Cho hàm số $y = e^{\sqrt{x}}$. Đặt $u = \sqrt{x}$, $y = e^u$. Ta có:

$$y'(x) = y'(u).u'(x) = e^u.\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}.$$

■

3.1.4. Đạo hàm hàm ngược

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x, $f'(x) \neq 0$ và nếu hàm số $y = f(x)$ có hàm ngược $x = \phi(y)$ thì hàm số $x = \phi(y)$ có đạo hàm tại y và $\phi'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$.

***Ví dụ* 3.1.4.1.** Trong kinh tế, hàm cầu $P = 6-3Q$ có hàm ngược là $Q = 2-\dfrac{1}{3}P$. Ta có $P'(Q) = \dfrac{dP}{dQ} = -3$ và $Q'(P) = \dfrac{dQ}{dP} = -\dfrac{1}{3}$. ■

3.1.5. Đạo hàm cấp cao

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm thì $y' = f'(x) = \dfrac{df}{dx}$ được gọi là đạo hàm cấp một. Đạo hàm, nếu có, của đạo hàm cấp một $\big(f'(x)\big)'$ được gọi là đạo hàm cấp hai, kí hiệu $y" = f''(x) = \dfrac{d^2f}{dx^2}$. Tương tự, đạo hàm, nếu có, của đạo hàm cấp $(n-1)$ của $f(x)$ được gọi là đạo hàm cấp n, kí hiệu là $f^{(n)}(x)$, tức $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \big(f^{(n-1)}(x)\big)'$.

***Ví dụ* 3.1.5.1.** Cho hàm số $f(x) = x^7 + \dfrac{1}{x}$. tính $f''(1)$.

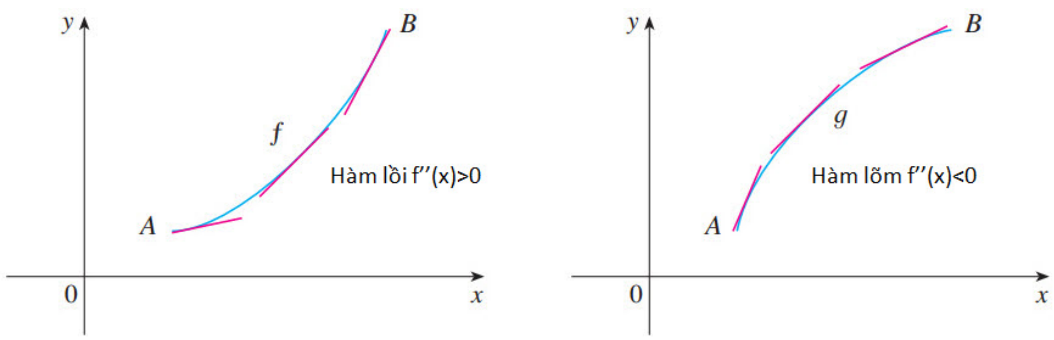
Lời giải:

Ta có $f'(x) = \big(x^7 + x^{-1}\big)' = 7x^6 - x^{-2}$. Từ đó $f''(x) = \big(7x^6 - x^{-2}\big)' = 42x^5 + 2x^{-3} = 42x^5 + \dfrac{2}{x^3}$. Vậy $f''(1) = 42 + 2 = 44$. ■

Đạo hàm cấp hai $f''(x)$ cho biết thông tin gì về hàm số $f(x)$? Xét minh họa ở hình 3.5.

i) Khi $f''(x) > 0$, hàm số $f'(x)$ là hàm tăng, các tiếp tuyến nằm dưới đường cong và có xu hướng dốc hơn khi x chạy từ trái qua phải. Trường hợp này, ta gọi hàm số là **hàm lồi**.

ii) Khi $f''(x) < 0$, hàm số $f'(x)$ là hàm giảm, các tiếp tuyến nằm trên đường cong và có xu hướng bớt dốc khi x chạy từ trái qua phải. Trường hợp này, ta gọi hàm số là **hàm lõm**.



Hình 3.5. Tính lồi lõm của hàm số

***Ví dụ* 3.1.5.2.** Xét hàm số $f(x) = x^3$. Ta có $f'(x) = 3x^2$ và $f''(x) = 6x$. Khi $x > 0$, $f''(x) > 0$. Vậy hàm số là hàm lồi khi $x > 0$. Khi $x < 0$, $f''(x) < 0$. Vậy hàm số là hàm lõm khi $x < 0$. ■

3.2. Một số hàm cận biên

Trong mục này, ta tìm hiểu ứng dụng của đạo hàm trong kinh tế học mà cụ thể là trong phân tích doanh thu, chi phí, tiêu dùng và tiết kiệm...

3.2.1. Doanh thu và chi phí cận biên

Trong Chương 1, ta đã biết doanh thu TR là một hàm số của biến Q. Một câu hỏi cần quan tâm là doanh thu TR sẽ bị tác động thế nào khi Q thay đổi. Để làm điều này, người ta đưa ra khái niệm **doanh thu cận biên**. Doanh thu cận biên MR được định nghĩa bởi

$$MR = \frac{d(TR)}{dQ}.$$

Trong các giáo trình kinh tế, ta hay gặp định nghĩa như sau: "*Doanh thu cận biên là sự thay đổi doanh thu TR khi số lượng hàng hóa Q tăng một đơn vị*". Dễ kiểm tra rằng, đây chẳng qua là một xấp xỉ của cách định nghĩa chính xác của MR qua đạo hàm. Thật vậy, theo cách định nghĩa này, $MR = \triangle(TR) = \dfrac{\triangle(TR)}{1} = \dfrac{\triangle(TR)}{\triangle Q}$, trong khi nếu $\triangle Q \to 0$ thì $\dfrac{\triangle(TR)}{\triangle Q} \to \dfrac{d(TR)}{dQ}$.

***Ví dụ* 3.2.1.1.** Cho hàm cầu $P = 120 - 3Q$. Tìm hàm doanh thu TR từ đó tính giá trị của MR tại $Q = 10$ bằng cách sử dụng:

a/ Định nghĩa đạo hàm;

b/ Định nghĩa theo cách tăng một đơn vị của Q.

Lời giải:

Ta có $TR = PQ = (120 - 3Q)Q = 120Q - 3Q^2$

a/ $MR = \dfrac{d(TR)}{dQ} = 120 - 6Q$. Tại $Q = 10$, ta có $MR = 120 - 6 \times 10 = 60$.

b/ Theo cách tăng một đơn vị của Q từ 10 tới 11, ta có:

$Q = 10$ cho tương ứng $TR = 120 \times 10 - 3 \times 10^2 = 900$.

$Q = 11$ cho tương ứng $TR = 120 \times 11 - 3 \times 11^2 = 957$.

Vậy nên $MR = 957 - 900 = 57$. ■

Chú ý rằng: $MR \approx \dfrac{\triangle(TR)}{\triangle Q} \Leftrightarrow \triangle(TR) \approx MR \times \triangle Q$. Vậy là sự thay đổi của tổng doanh thu có thể xấp xỉ bởi tích của doanh thu cận biên và sự thay đổi số lượng.

***Ví dụ* 3.2.1.2.** Cho hàm $TR = 100Q - Q^2$.

Xác định hàm doanh thu cận biên.

Nếu số lượng nhu cầu hiện tại là 60, hãy tính sự thay đổi doanh thu khi số lượng nhu cầu tăng 2 đơn vị.

Lời giải:

Ta có $MR = \dfrac{d(TR)}{dQ} = 100 - 2Q$.
Khi $Q = 60$, $MR = 100 - 2 \times 60 = -20$.
Nếu Q tăng 2 đơn vị, tức $\triangle Q = 2$, doanh thu sẽ thay đổi xấp xỉ một lượng là $\triangle(TR) \approx MR \times \triangle Q = (-20) \times 2 = -40$. Dấu âm thể hiện là doanh thu sẽ giảm khoảng 40 đơn vị. ■

Ta đã sử dụng công cụ đạo hàm để ứng dụng vào hàm doanh thu. Các hàm kinh tế khác hoàn toàn có thể áp dụng nguyên tắc tương tự. Chẳng hạn, ta định nghĩa **chi phí cận biên** MC là

$$MC = \frac{d(TC)}{dQ}.$$

Và ta cũng có: $\triangle(TC) \approx MC \times \triangle Q$: Sự thay đổi của tổng chi phí có thể xấp xỉ bởi tích của chi phí cận biên và sự thay dổi số lượng.

***Ví dụ* 3.2.1.3.** Tìm MC nếu biết hàm chi phí trung bình của một sản phẩm là $AC = 2Q + 6 + \dfrac{13}{Q}$. Nếu số lượng hàng đang là 15, chi phí sẽ thay đổi thế nào khi số lượng giảm 3 đơn vị.

Lời giải:

Ta có

$$TC = AC \times Q = \Big(2Q + 6 + \frac{13}{Q}\Big)Q = 2Q^2 + 6Q + 13.$$

Khi đó

$$MC = \frac{d(TC)}{dQ} = 4Q + 6.$$

Khi $Q = 15$, $MC = 4 \times 15 + 6 = 66$.

Khi số lượng giảm 3 đơn vị, tức $\triangle Q = -3$, tổng chi phí sẽ thay đổi là $\triangle(TC) \approx MC \times \triangle Q = 66 \times (-3) = -198$. Vậy TC giảm xấp xỉ 198 đơn vị. ■

3.2.2. Sản lượng lao động biên

Sản lượng Q thường phụ thuộc vào hai yếu tố lao động L và vốn K. Trong ngắn hạn, vốn K có thể coi là một hằng số. Do đó Q là hàm số một biến số L. Biến L ở đây thường để biểu diễn số công nhân hoặc số giờ làm. Giống như các phần trước, ta định nghĩa **sản lượng lao động biên** bởi công thức:

$$MP_L = \frac{dQ}{dL}.$$

MP_L xấp xỉ giá trị thay đổi của Q khi L tăng một đơn vị.

***Ví dụ* 3.2.2.1.** Xét hàm sản xuất $Q = 300\sqrt{L} - 4L$, trong đó Q là sản lượng và L là số nhân công. Tính giá trị MP_L khi

a/ $L = 1$

b/ $L = 9$

c/ $L = 100$

d/ $L = 2500$

Sau đó nhận xét về kết quả tìm được.

Lời giải:

Ta có $MP_L = \dfrac{dQ}{dL} = \dfrac{150}{\sqrt{L}} - 4.$

a/ Khi $L = 1$, ta có $MP_L = \dfrac{150}{\sqrt{1}} - 4 = 146.$

b/ Khi $L = 9$, ta có $MP_L = \dfrac{150}{\sqrt{9}} - 4 = 46.$

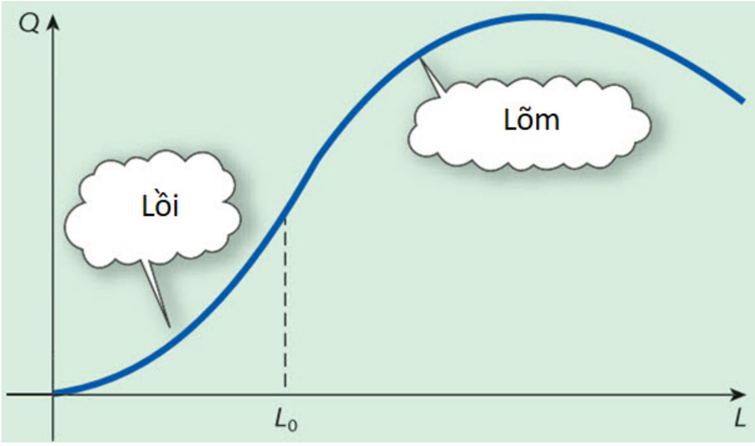
c/ Khi $L = 100$, ta có $MP_L = \dfrac{150}{\sqrt{100}} - 4 = 11.$

d/ Khi $L = 2500$, ta có $MP_L = \dfrac{150}{\sqrt{2500}} - 4 = -1.$

Ta thấy giá trị của MP_L giảm dần khi L tăng. Phần a) chỉ ra rằng khi tăng từ 1 thành 2 nhân công, năng suất tăng xấp xỉ 146 sản phẩm. Trong phần b), ta thấy nếu tăng từ 9 thành 10 nhân công, năng suất sẽ tăng thêm 46 sản phẩm. Trong phần c) sản lượng chỉ tăng có 11 đơn vị khi ta thêm một nhân công từ 100 thành 101. Trường hợp d) là tệ nhất. Khi ta tăng thêm một nhân công từ 2500 thành 2501, sản lượng không những không tăng mà còn bị giảm đi 1 đơn vị. Điều này có thể giải thích trên thực tế là do khi số lượng nhân công quá đông dẫn đến "vướng chân nhau" trong quá trình sản xuất. ■

Ví dụ trên mô tả **quy luật hiệu suất cận biên giảm dần** hay gọi đơn giản là **quy luật hiệu suất giảm dần**. Quy luật phát biểu rằng sau một ngưỡng nhất định mỗi đơn vị lao động tăng thêm sẽ bổ sung ít hơn vào tổng sản lượng so với các đơn vị trước.

Đồ thị của hàm sản xuất nói chung được mô tả như trên hình 3.6. Khi lượng lao động L nằm trong khoảng từ 0 đến L_0, MP_L tăng dần khi L tăng. Điều này có nghĩa $\dfrac{d(MP_L)}{dL} > 0$, tức là $\dfrac{d^2Q}{dL^2} > 0$. Nói cách khác, hàm sản xuất là hàm lồi trong khoảng $(0, L_0)$. Khi $L > L_0$, quy luật hiệu suất giảm dần sẽ xảy ra. Việc tăng lượng lao động L sẽ làm giảm MP_L. Vậy là $\dfrac{d(MP_L)}{dL} = \dfrac{d^2Q}{dL^2} < 0$, tức hàm sản xuất là hàm lõm khi $L > L_0$ đủ lớn nào đó.



Hình 3.6. Đồ thị hàm sản xuất

3.2.3. Khuynh hướng tiêu dùng và tiết kiệm biên

Giả sử rằng thu nhập quốc dân Y chỉ sử dụng cho tiêu dùng C và tiết kiệm S. Khi đó ta có

$$Y = C + S.$$

Trong kinh tế vĩ mô, vấn đề rất được quan tâm là C và S sẽ thay đổi thế nào khi Y thay đổi. Nói cách khác, nếu thu nhập tăng thì con người có xu hướng tiêu dùng thêm hay họ sẽ tiết kiệm? Để phân tích hành vi này, người ta đưa ra khái niệm **khuynh hướng tiêu dùng biên** MPC và **khuynh hướng tiết kiệm biên** MPS:

$$MPC = \frac{dC}{dY} \text{ và } MPS = \frac{dS}{dY}.$$

Chú ý rằng nếu lấy đạo hàm hai vế phương trình trên theo Y thì ta được

$$MPC + MPS = 1.$$

***Ví dụ* 3.2.3.1.** Cho hàm tiêu dùng $C = 0,01Y^2 + 0,2Y + 50$.
Tính MPC và MPS khi $Y = 30$.

Lời giải:

Từ $C = 0,01Y^2 + 0,2Y + 50$, ta có $MPC = \dfrac{dC}{dY} = 0,02Y + 0,2$. Tại $Y = 30$, $MPC = 0,02(30) + 0,2 = 0,8$.

Từ phương trình $MPC + MPS = 1$, ta có $MPS = 1 - MPC = 1 - 0,8 = 0,2$.

Điều này có nghĩa là khi thu nhập quốc dân tăng 1 đơn vị (từ 30 lên 31), tiêu dùng tăng xấp xỉ $0,8$ đơn vị trong khi tiết kiệm chỉ tăng $0,2$ đơn vị. Vậy là, ở mức thu nhập quốc dân này, người ta có xu hướng tiêu dùng hơn là tiết kiệm. ■

3.3. Độ co giãn

3.3.1. Độ co giãn của cầu theo giá

Một vấn đề quan trọng trong kinh doanh là xác định xem doanh thu sẽ ảnh hưởng thế nào khi giá bán sản phẩm thay đổi. Thông thường, hàm cầu là hàm giảm (tức khi giá P giảm thì số lượng hàng Q sẽ tăng, và ngược lại). Tuy nhiên, sẽ khó xác định doanh thu $TR = PQ$ là tăng hay giảm khi P tăng (giảm) và Q giảm (tăng). Nếu tỉ lệ phần trăm tăng số lượng Q lớn hơn tỉ lệ phần trăm giảm giá P, doanh thu TR sẽ tăng, ta nói nhu cầu là **giãn** theo giá. Trong trường hợp ngược lại, ta nói nhu cầu là **co** theo giá. Khi tỉ lệ phần trăm tăng số lượng Q và tỉ lệ phần trăm giảm giá P là như nhau, ta nói nhu cầu có **độ co giãn đơn vị** (không co không giãn) theo giá.

Ta định nghĩa **độ co giãn của cầu theo giá** sản phẩm như sau:

$$E = -\frac{\text{phần trăm thay đổi về nhu cầu số lượng sản phẩm}}{\text{phần trăm thay đổi về giá bán sản phẩm}}$$
$$E = -\frac{\triangle Q/Q \times 100}{\triangle P/P \times 100} = -\frac{P}{Q} \times \frac{\triangle Q}{\triangle P}$$

Chú ý rằng dấu trừ trong công thức trên để đảm bảo E là số dương.

***Ví dụ* 3.3.1.1.** Xác định độ co giãn của nhu cầu khi giá sản phẩm thay đổi từ 136 thành 119 biết hàm cầu là $P = 200 - Q^2$.

Lời giải:

Thay $P_1 = 136$ vào hàm $P = 200 - Q^2$ ta có $136 = 200 - Q^2$ hay $Q^2 = 64$ tức $Q = \pm 8$. Do số lượng phải là số không âm nên ta có $Q_1 = 8$. Tương tự, Thay $P_2 = 119$ vào hàm $P = 200 - Q^2$ ta tìm được $Q_2 = 9$. Vậy là

$\triangle P = P_2 - P_1 = 119 - 136 = -17$ và $\triangle Q = Q_2 - Q_1 = 9 - 8 = 1$. Trong công thức tính độ nhạy của giá $E = -\frac{P}{Q} \times \frac{\triangle Q}{\triangle P}$, P lấy giá trị 136 hay 119? Q lấy giá trị 8 hay 9? Cách người ta thường làm là chọn giá trị trung bình của chúng: $P = \frac{P_1 + P_2}{2} = \frac{136 + 119}{2} = 127,5$ và $Q = \frac{Q_1 + Q_2}{2} = \frac{8 + 9}{2} = 8,5$. Từ đó có $E = -\frac{127,5}{8,5} \times \frac{1}{(-17)} = 0,88$. Vậy nhu cầu là co theo giá. ∎

Nhược điểm trong cách tính trên là do không thể lấy giá trị chính xác của P và Q trên cả một cung, ta phải lấy giá trị trung bình của hai điểm để đại diện cho cả cung. Ta gọi độ co giãn theo cách tính này là **độ co giãn cung**. Khi $\triangle Q$ và $\triangle P$ tiến tới 0 thì có thể tính $\frac{\triangle Q}{\triangle P} \simeq \frac{dQ}{dP}$. Vậy là độ co giãn của cầu theo giá có thể tính bởi việc lấy giá trị P và Q tại một điểm. Ta còn gọi là **độ co giãn điểm** của cầu theo giá:

$$E = -\frac{P}{Q} \times \frac{dQ}{dP}$$

***Ví dụ* 3.3.1.2.** Cho hàm cầu $P = 50 - 2Q$. Xác định độ co giãn khi giá là 30. Với giá này, nhu cầu là co hay giãn?

Lời giải:

Thay $P = 30$ vào $P = 50 - 2Q$ ta tìm được $Q = 10$. Từ $P = 50 - 2Q$ ta có $Q = 25 - \frac{1}{2}P$. Do đó $\frac{dQ}{dP} = -\frac{1}{2}$. Vậy là $E = -\frac{30}{10} \times \frac{(-1)}{2} = 1,5$. Vì $E = 1,5 > 1$, nhu cầu là giãn khi giá $P = 30$. ∎

Chú ý rằng trong một số trường hợp cụ thể, nếu việc tính toán đạo hàm của Q theo P là khó khăn, ta có thể chuyển qua tính đạo hàm của P theo Q sau đó lấy giá trị nghịch đảo. Điều này có được là do tính chất của đạo hàm hàm ngược ta đã học trong mục 3.1.4.

***Ví dụ* 3.3.1.3.** Cho hàm cầu $P = -Q^2 - 4Q + 96$

a/ Tìm độ co giãn của cầu theo giá khi $P = 51$;

b/ Tính tỉ lệ phần trăm thay đổi về cầu khi giá tăng 2%.

Lời giải:

a/ Khi $P = 51$, giá trị Q tương ứng sẽ là nghiệm của phương trình

$$P = -Q^2 - 4Q + 96 = 51$$

$$Q^2 + 4Q - 45 = 0$$

Phương trình có 2 nghiệm là $Q = -9 < 0$ (loại) và $Q = 5$.

Để tính E ta cần tính $\frac{dQ}{dP}$. Tuy nhiên từ hàm cầu bậc hai của P theo Q, việc suy ngược ra hàm của Q theo P dẫn tới hàm căn thức phức tạp. Để tránh điều này ta tính $\frac{dP}{dQ}$ rồi lấy nghịch đảo.

Từ $P = -Q^2 - 4Q + 96$ ta có $\frac{dP}{dQ} = -2Q - 4$. Vậy là

$$\frac{dQ}{dP} = \frac{1}{-2Q - 4}$$

Khi $Q = 5$, ta có $\frac{dQ}{dP} = \frac{1}{-2(5) - 4} = -\frac{1}{14}$. Từ đó ta có

$$E = -\frac{P}{Q} \times \frac{dQ}{dP} = -\frac{51}{5} \times \frac{(-1)}{d14} = 0,73$$

b/ Từ công thức

$$E = -\frac{\text{phần trăm thay đổi về nhu cầu số lượng sản phẩm}}{\text{phần trăm thay đổi về giá bản sản phẩm}},$$

ta có

$$0,73 = -\frac{\text{phần trăm thay đổi về nhu cầu số lượng sản phẩm}}{2}$$

Do đó, phần trăm thay đổi về nhu cầu sản phẩm $= -0,73 \times 2 = -1,46$.

Vậy, việc tăng giá 2% dẫn đến việc giảm cầu 1,46%. ■

3.3.2. Độ co giãn của cung theo giá

Độ co giãn của cung theo giá được định nghĩa tương tự như độ co giãn của cầu theo giá. Tuy nhiên, trong công thức không còn dấu âm do tính chất của hàm cung đã đảm bảo giá trị của biểu thức luôn dương. Độ co giãn của cung theo giá được định nghĩa như sau:

$$E = \frac{\text{phần trăm thay đổi về nhu cầu số lượng sản phẩm}}{\text{phần trăm thay đổi về giá bản sản phẩm}} = \frac{P}{Q} \times \frac{\triangle Q}{\triangle P}.$$

$$E = \frac{P}{Q} \times \frac{dQ}{dP}$$

***Ví dụ* 3.3.2.1.** Cho hàm cung $P = 10 + \sqrt{Q}$, tìm độ co giãn của cung theo giá

a/ Khi Q tăng từ $Q_1 = 100$ tới $Q_2 = 105$

b/ Khi $Q = 100$.

Lời giải:

a/ Với $Q_1 = 100$ và $Q_2 = 105$ ta có $P_1 = 10+\sqrt{100} = 20$ và $P_2 = 10+\sqrt{105} = 20,247$. Do đó: $\triangle P = 20,247 - 20 = 0,247$; $\triangle Q = 105 - 100 = 5$; $P = \dfrac{20 + 20,247}{2} = 20,123$; $Q = \dfrac{100 + 105}{2}$=102,5. Vậy là $E = \dfrac{P}{Q} \times \dfrac{\triangle Q}{\triangle P} = \dfrac{20,123}{102,5} \times \dfrac{5}{0,247} = 3,97$.

b/ Từ $P = 10 + \sqrt{Q}$ ta có $\dfrac{dP}{dQ} = \dfrac{1}{2\sqrt{Q}}$ nên $\dfrac{dQ}{dP} = 2\sqrt{Q}$. Tại $Q = 100$ ta có $\dfrac{dQ}{dP} = 2\sqrt{100} = 20$. Vậy nên $E = \dfrac{20}{100} \times 20 = 4$. Ta có thể thấy kết quả của phần a) và phần b) là xấp xỉ nhau. ■

Bây giờ, ta nghiên cứu mối quan hệ giữa độ co giãn của cầu theo giá và hàm doanh thu cận biên. Ta có:

$$MR = \frac{d(TR)}{dQ} = \frac{d(P \times Q)}{dQ}$$
$$MR = \frac{dP}{dQ}Q + P\frac{dQ}{Q} = \frac{dP}{dQ}Q + P$$
$$MR = P\Big(1 + \frac{Q}{P} \times \frac{dP}{dQ}\Big)$$

Do $E = -\dfrac{P}{Q} \times \dfrac{dQ}{dP}$ nên $\dfrac{Q}{P} \times \dfrac{dP}{dQ} = -\dfrac{1}{E}$. Do đó:

$$MR = P\Big(1 - \frac{1}{E}\Big)$$

Khi $E < 1$, từ công thức trên suy ra $MR < 0$ với giá P bất kỳ. Vậy là hàm doanh thu sẽ giảm (do $MR < 0$) trong vùng mà nhu cầu là co theo giá. Tương tự, khi $E > 1$, từ công thức trên suy ra $MR > 0$. Doanh thu vì vậy sẽ tăng (do $MR > 0$) trong vùng mà nhu cầu là giãn theo giá. Khi nhu cầu có độ co giãn đơn vị ($E = 1$), công thức trên dẫn tới $MR = 0$, tức khi đó doanh thu ổn định.

3.4. Cực trị và tối ưu hóa các hàm kinh tế

3.4.1. Cực trị hàm số

Trong mục này, chúng ta tìm hiểu kỹ thuật tính giá trị cực đại hoặc cực tiểu của một hàm số.

Xét hàm số f với tập xác định D. Hàm số f có **cực đại toàn cục** tại điểm $c \in D$) nếu

$$f(x) \leq f(c) \quad \forall x \in D.$$

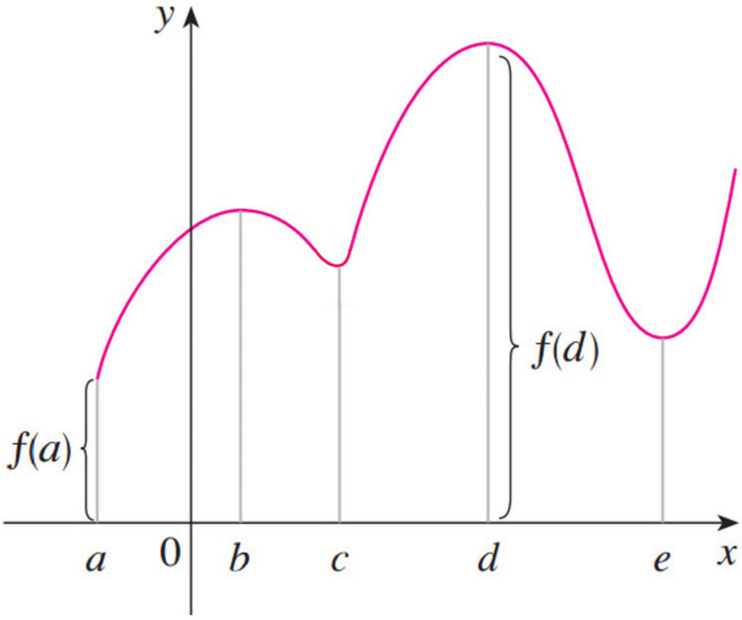
Giá trị $f(c)$ là **giá trị cực đại** của hàm số $f(x)$ trên D. Tương tự, hàm số $f(x)$ có **cực tiểu toàn cục** tại điểm $d \in D$) nếu

$$f(x) \geq f(d) \quad \forall x \in D.$$

Giá trị $f(d)$ là **giá trị cực tiểu** của hàm số $f(x)$ trên D.

Hình 3.7 ví dụ một hàm số $f(x)$ có cực đại toàn cục tại d và cực tiểu toàn cục tại a. Chú ý rằng $(d, f(d))$ là điểm cao nhất trên đồ thị và $(a, f(a))$ là điểm thấp nhất trên đồ thị. Nếu ta chỉ xét những điểm x sát gần điểm b, chẳng hạn, nếu chỉ xét trên khoảng (a, c), giá trị $f(b)$ là giá trị lớn nhất khi x nằm trong khoảng này. Khi đó ta nói hàm số có điểm cực đại địa phương tại b và giá trị $f(b)$ được gọi là giá trị cực đại địa phương. Tương tự, nếu chỉ xét những điểm gần c, chẳng hạn xét x trên khoảng (b, d), thì hàm số có giá trị nhỏ nhất tại c. Khi đó ta nói hàm số có cực tiểu địa phương tại c và $f(c)$ được gọi là giá trị cực tiểu địa phương.

Hàm số f được gọi là có **cực đại địa phương** tại điểm c nếu $f(x) \leq f(c)$



Hình 3.7. Đồ thị và các điểm dừng

với mọi x sát gần điểm c. Hàm số $f(x)$ được gọi là có **cực tiểu địa phương** tại điểm d nếu $f(x) \geq f(d)$ với mọi x sát gần điểm d.

Ta gọi chung cực đại hay cực tiểu là cực trị của hàm số. Dễ thấy điểm cực trị toàn cục là điểm cực trị địa phương nhưng điểm cực trị địa phương chưa chắc là cực trị toàn cục.

***Ví dụ* 3.4.1.1.** Xét trên đoạn $D = [-1, 4]$, hàm số $y = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$ có đồ thị trên hình 3.8. Hàm số có cực tiểu địa phương tại $x = 0$ và $x = 3$ và có cực đại địa phương tại $x = -1$; $x = 1$ và $x = 4$. Cực đại toàn cục của hàm số đạt tại $x = -1$ với giá trị cực đại là $f(-1) = 37$ trong khi cực tiểu toàn cục của hàm số đạt tại $x = 3$ với giá trị cực tiểu là $f(3) = -27$. ■

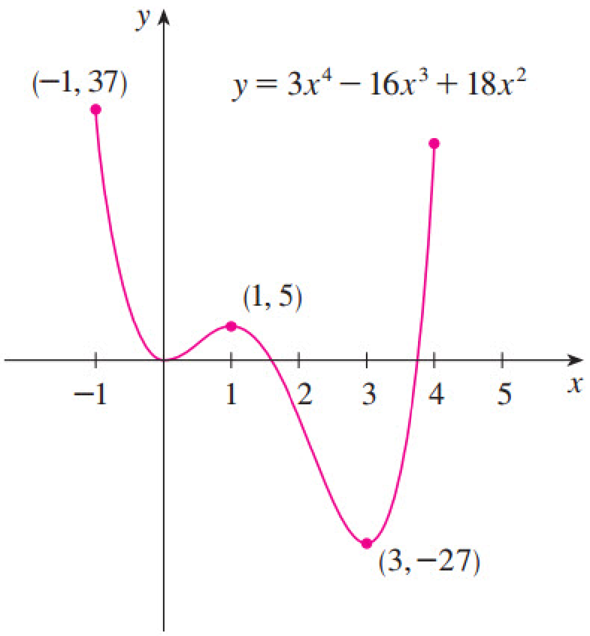
Để tìm cực trị, ta chú ý đến khái niệm điểm dừng sau đây:

Điểm $x = c$ được gọi là **điểm dừng** của hàm số $y = f(x)$ nếu $f'(c) = 0$.

Ví dụ trên hình 3.7, các điểm $x = b$, $x = c$, $x = d$ và $x = e$ là các điểm dừng.

Người ta đã chứng minh rằng trên một khoảng đóng, *hàm số liên tục* có cực đại toàn cục và cực tiểu toàn cục. Các hàm số gặp trong kinh tế thường là những hàm liên tục.

Các bước để tìm cực trị toàn cục (đối với các hàm số liên tục và có đạo hàm



Hình 3.8. Cực trị hàm số $y = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$

với mọi giá trị của biến x):

Bước 1: Tìm các điểm dừng;

Bước 2: Tính giá trị của hàm số tại các điểm dừng và tại hai điểm mút và chọn giá trị nhỏ nhất (cực tiểu toàn cục) hoặc giá trị lớn nhất (cực đại toàn cục).

***Ví dụ* 3.4.1.2.** Tìm cực trị toàn cục của hàm số $y = x^2$ trên đoạn $[-2, 1]$.

Lời giải:

Bước 1: Tìm điểm dừng bằng cách tính $f'(x)$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \quad 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

Bước 2: Tính giá trị $f(0) = 0$ và tính $f(-2) = 4$; $f(1) = 1$.
Vậy trên đoạn $[-2, 1]$ hàm số $y = x^2$ đạt cực đại toàn cục là 4 tại $x = -2$ và cực tiểu toàn cục là 0 tại $x = 0$. ■

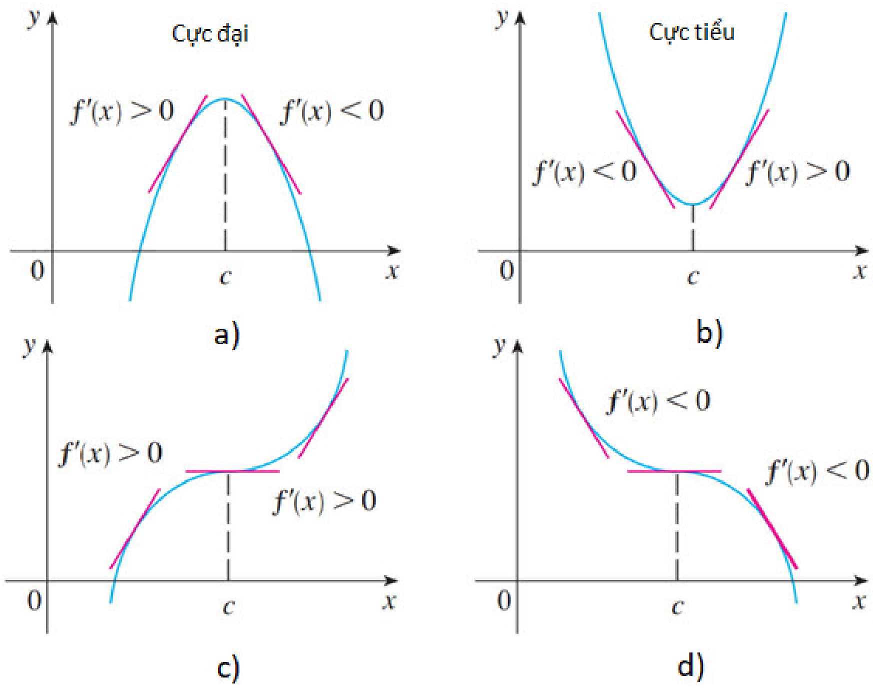
Cực trị toàn cục được tính toán như trên vậy còn cực trị địa phương được tìm thế nào? Trong tất cả các điểm dừng của hàm số tìm được, không phải điểm dừng nào cũng là điểm cực trị. Ngay cả nếu điểm dừng đó là điểm cực trị thì vẫn còn câu hỏi là điểm đó là điểm cực tiểu hay cực đại địa phương.

Cho hàm số $f(x)$ và điểm dừng c. Để phân loại điểm dừng c, ta bám sát định nghĩa cực trị địa phương và ý nghĩa của đạo hàm bậc nhất:

Khi dấu của đạo hàm bậc nhất $f'(x)$ dương khi $x < c$ và âm khi $x > c$, điểm dừng $x = c$ là điểm cực đại địa phương của $f(x)$ (hình 3.9a).

Khi dấu của đạo hàm bậc nhất $f'(x)$ âm khi $x < c$ và dương khi $x > c$, điểm dừng $x = c$ là điểm cực tiểu địa phương của $f(x)$ (hình 3.9b).

Khi dấu của đạo hàm bậc nhất $f'(x)$ cùng âm hoặc cùng dương khi $x \neq c$, điểm dừng $x = c$ không là điểm cực trị của $f(x)$ (hình 3.9c và 3.9d).



Hình 3.9. Cực trị địa phương và đạo hàm bậc nhất

Ngoài cách làm tổng quát trên, thực tế có một cách đơn giản hơn để phân loại điểm dừng, đó là sử dụng đạo hàm bậc hai của hàm số (nếu tồn tại). Cụ thể, giả sử c là điểm dừng của hàm $f(x)$. Nếu $f''(c) < 0$ hàm đạt cực đại địa phương tại c và nếu $f''(c) > 0$ hàm đạt cực tiểu địa phương tại c. Trường hợp, $f''(c) = 0$, ta không thể kết luận được và lại phải quay về phương pháp xét dấu đạo hàm bậc nhất.

Tóm lại, ta có hai bước để tìm cực trị địa phương của hàm số:

Bước 1: Tìm điểm dừng c bằng cách giải phương trình $f'(x) = 0$.

Bước 2: Xét dấu $f''(c)$:

+ Nếu $f''(c) > 0$, hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu địa phương tại c;

+ Nếu $f''(c) < 0$, hàm số $f(x)$ đạt cực đại địa phương tại c;

+ Nếu $f''(c) = 0$, ta chưa kết luận gì được về điểm dừng c, quay lại cách xét dấu đạo hàm bậc nhất.

***Ví dụ* 3.4.1.3.** Tìm và phân loại điểm dừng của hàm số

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4$$

Lời giải:

Bước 1: Tìm điểm dừng bằng cách tính $f'(x)$:

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ hoặc } x = 1$$

Hàm số có hai điểm dừng là $x = -2$ và $x = 1$.

Bước 2: Tính $f''(x) = 12x + 6$
+)Tại điểm dừng $x = -2$, ta có $f''(-2) = 12(-2) + 6 = -18 < 0$. Hàm số đạt cực đại địa phương tại $x = -2$ với giá trị cực đại khi đó là:

$$f(-2) = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) + 4 = 24$$

+)Tại điểm dừng $x = 1$, ta có $f''(1) = 12(1) + 6 = 18 > 0$. Hàm số đạt cực tiểu địa phương tại $x = 1$ với giá trị cực tiểu khi đó là:

$$f(1) = 2(1)^3 + 3(1)^2 - 12(1) + 4 = -3$$

■

Như trên đã đề cập, cực trị toàn cục là cực trị địa phương nhưng cực trị địa phương chưa chắc đã là cực trị toàn cục. Tuy nhiên trong các bài toán kinh tế, những điểm dừng là điểm cực trị địa phương hầu hết cũng đều là điểm cực trị toàn cục. Vì vậy, trong khuôn khổ giáo trình này, với các bài toán kinh tế, ta sử dụng cách tính cực trị địa phương để tìm cực trị toàn cục. Trong phần tiếp theo, ta sẽ áp dụng các kiến thức vừa học để tìm cực đại hoặc cực tiểu các hàm kinh tế như: tìm lợi nhuận lớn nhất; tối đa hóa năng suất lao động; tìm cực tiểu chi phí...

3.4.2. Tối ưu hóa hàm kinh tế

***Ví dụ* 3.4.2.1.** Một nhà máy có hàm sản xuất là $Q = 6L^2 - 0,2L^3$, trong đó L là số lượng nhân công.

a/ Tìm số lượng nhân công L để sản lượng đạt cực đại.

b/ Tìm số lượng nhân công L để cực đại năng suất lao động trung bình. Tính MP_L và AP_L tại giá trị L này từ đó cho nhận xét về kết quả đó.

Lời giải:

a/ Yêu cầu của bài toán là tìm L để hàm $Q = 6L^2 - 0,2L^3$ đạt cực đại.

Bước 1: Tìm điểm dừng

$$\frac{dQ}{dL} = 12L - 0,6L^2 = 0 \qquad \Leftrightarrow L(12 - 0,6L) = 0.$$

$$\Leftrightarrow L = 0 \text{ hoặc } L = \frac{12}{0,6} = 20$$

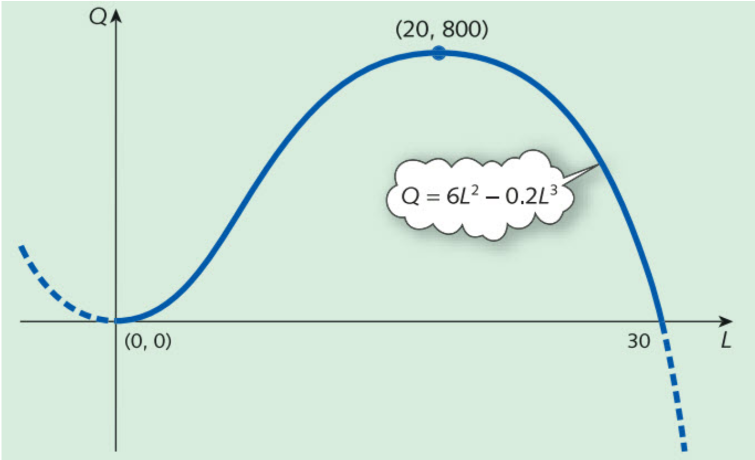
Bước 2: Tính đạo hàm cấp hai:

$$\frac{d^2Q}{dL^2} = 12 - 1,2L$$

Khi $L = 0$, $\dfrac{d^2Q}{dL^2} = 12 > 0$. Vậy là tại $L = 0$, hàm đạt cực tiểu $Q_{min} = 6(0)^2 - 0,2(0)^3 = 0$.

Khi $L = 20$, $\dfrac{d^2Q}{dL^2} = -12 < 0$. Vậy là tại $L = 20$, hàm đạt cực đại $Q_{max} = 62(0)^2 - 0,2(20)^3 = 800$.

b/ **Năng suất lao động trung bình** theo đầu người $AP_L = \dfrac{Q}{L} = 6L - 0,2L^2$. Yêu cầu của bài toán có nghĩa là tìm L để hàm AP_L đạt giá trị



Hình 3.10. Tìm giá trị lớn nhất của sản lượng $Q = 6L^2 - 0,2L^3$

cực đại.

Bước 1: Tìm điểm dừng

$$\frac{dAP_L}{dL} = 6 - 0,4L = 0 \qquad \Leftrightarrow L = 15.$$

Bước 2: Tính đạo hàm cấp hai:

$$\frac{d^2AP_L}{dL^2} = -0,4 < 0$$

Vậy AP_L đạt cực đại tại $L = 15$, và giá trị cực đại $AP_{Lmax} = 6 \times 15 - 0,2(15)^2 = 45$.

Ta tính toán MP_L tại $L = 15$

$$MP_L = \frac{dQ}{dL} = 12L - 0,6L^2 =$$

Khi $L = 15$, ta có $MP_L = 12 \times 15 - 0,6 \times (15)^2 = 45$. Ta thấy tại $L = 15$, giá trị AP_L và MP_L bằng nhau. ■

Trong bài toán cụ thể này ta thấy $MP_L = AP_L$ tại điểm cực đại của hàm AP_L. Tuy nhiên có thể mở rộng nhận xét này cho hàm sản xuất tổng quát bất kỳ. Bạn đọc quan tâm có thể tự chứng minh điều này.

***Ví dụ* 3.4.2.2.** Hàm cầu của một sản phẩm được cho bởi $P = 30 - Q$ và hàm chi phí là $TC = \frac{1}{2}Q^2 + 6Q + 7$.

a/ Tìm số lượng sản phẩm Q sao cho doanh thu đạt cực đại.

b/ Tìm số lượng sản phẩm Q sao cho lợi nhuận đạt cực đại. Tính MR và MC tại giá trị Q này từ đó cho nhận xét về kết quả.

Lời giải:

a/ Ta có $TR = PQ = (30 - Q)Q = 30Q - Q^2$. Yêu cầu bài toán tức là tìm Q để hàm TR đạt cực đại.
Bước 1: Tìm điểm dừng $\dfrac{dTR}{dQ} = 30 - 2Q = 0$. Ta có $Q = 15$.
Bước 2: Phân loại điểm dừng bằng cách tính đạo hàm bậc hai:

$$\frac{d^2TR}{dQ^2} = -2 < 0$$

Vậy là hàm TR đạt cực đại tại $Q = 15$ với $TR_{max} = 30 \times 15 - (15)^2 = 225$.

b/ Hàm lợi nhuận π được tính bởi công thức

$$\pi = TR - TC = (30Q - Q^2) - (\frac{1}{2}Q^2 + 6Q + 7) = -\frac{3}{2}Q^2 + 24Q - 7.$$

Yêu cầu của bài toán là tìm Q để hàm π đạt cực đại.
Bước 1: Tìm điểm dừng: $\dfrac{d\pi}{dQ} = -3Q + 24 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q = 8$.
Bước 2: Phân loại điểm dừng

$$\frac{d^2\pi}{dQ^2} = -3 < 0$$

Hàm π đạt cực đại tại $Q = 8$ với giá trị $\pi_{max} = -\frac{3}{2}8^2 + 24 \times 8 - 7 = 89$.

Để tính toán MR và MC tại $Q = 8$, ta có:

$$MR = \frac{dTR}{dQ} = 30 - 2Q = 30 - 2 \times 8 = 14.$$

$$MC = \frac{dTC}{dQ} = Q + 6 = 14.$$

Ta thấy $MR = MC$. ■

Trong ví dụ trên, ta thấy tại điểm cực đại lợi hàm lợi nhuận, $MR = MC$. Với bài toán tổng quát, ta cũng có kết quả tương tự. Bạn đọc quan tâm có thể tự chứng minh điều này.

***Ví dụ* 3.4.2.3.** Chi phí xây dựng một tòa nhà x tầng gồm 3 khoản sau:

i) 9 triệu USD tiền mua đất;

ii) $\frac{1}{4}$ triệu USD cho việc xây mỗi tầng;

iii) Chi phí chuyên dụng $10000x$/tầng.

Xác định số tầng của tòa nhà sao cho chi phí xây dựng trung bình cho mỗi tầng là nhỏ nhất.

Lời giải:

Chi phí mua đất 9 triệu USD là chi phí cố định không phụ thuộc vào số tầng của tòa nhà. Mỗi tầng chi phí mất $\dfrac{1}{4}$ triệu USD nên nếu ta xây x tầng thì chi phí sẽ là $250000x$ USD. Ngoài ra ta còn mất thêm chi phí chuyên dụng: $(10000x)x = 10000x^2$. Do đó, tổng chi phí cho x tầng sẽ là:

$$TC = 9000000 + 250000x + 10000x^2.$$

Chi phí trung bình cho một tầng là:

$$AC = \frac{TC}{x} = \frac{9000000}{x} + 250000 + 10000x.$$

Bước 1: Tìm điểm dừng bằng cách giải $\dfrac{d(AC)}{dx} = 0$

$$\frac{d(AC)}{dx} = \frac{-9000000}{x^2} + 10000 = 0.$$

Do đó, $x^2 = 900$, suy ra $x = 30$.

Bước 2: Xét dấu của đạo hàm cấp hai:

$$\frac{d^2(AC)}{dx^2} = (\frac{-9000000}{x^2}+10000)' = (-2)(-900000)x^{-3} = \frac{18000000}{x^3} > 0 \text{ khi } x = 30.$$

Vậy là, nếu xây 30 tầng, chi phí trung bình cho một tầng sẽ nhỏ nhất, và giá trị này là:

$$\frac{9000000}{30} + 250000 + 10000(30) = 850000.$$

■

3.5. Bài tập Chương 3

Hướng dẫn ôn tập

Mục 3.1: đạo hàm của hàm số một biến số; các quy tắc tính đạo hàm cơ bản; đạo hàm của hàm hợp; đạo hàm hàm ngược; đạo hàm cấp cao; hàm lồi; hàm lõm.

Mục 3.2: doanh thu cận biên; chị phí cận biên; sản lượng lao động biên; quy luật hiệu suất cận biên giảm dần; khuynh hướng tiêu dùng biên; khuynh hướng tiết kiệm biên.

Mục 3.3: độ co giãn của cung theo giá; độ co giãn của cầu theo giá.

Mục 3.4: tìm cực trị của hàm số; điểm dừng; tối ưu một số hàm kinh tế.

Sinh viên ôn tập lần lượt các vấn đề then chốt theo thứ tự trên đây, nghiên cứu kĩ các ví dụ, rèn luyện kĩ năng tính toán và giải quyết vấn đề qua việc giải được tối thiểu 50% số bài tập được liệt kê cho từng mục.

Bài tập mục 3.1

Bài 1. Sử dụng định nghĩa đạo hàm, tính đạo hàm của hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$

Bài 2. Cho hàm số $y = f(x) = 3\sqrt{x} - \dfrac{81}{x} + 13$. Tính $f'(9) =?$.

Bài 3. Cho hàm số $y = f(x) = -2x^3 + 4x^2 + x - 3$. Tính $f''(4) =?$. Ta có thể nói gì về đồ thị của hàm số tại điểm $x = 4$?

Bài 4. Tìm phương trình tiếp tuyến với đường cong $y = 4x^3 - 5x^2 + x - 3$ tại giao điểm của đường cong với trục tung.

Bài 5. Tính đạo hàm các hàm số sau đây:

$a/ \quad y = e^{2x} - 3e^{-4x}$ $\qquad b/ \quad y = xe^5x$ $\qquad c/ \quad y = \dfrac{e^{-x}}{x^2}$

$d/ y = 10e^{2x} - 5x^3 + 1$ $\qquad e/ \quad y = x(\ln x - 1)$

Bài 6. Sử dụng các phép biển đổi logarit để làm đơn giản hàm số sau đó tính đạo hàm

$$a/\quad y = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \qquad b/\quad y = \ln(x\sqrt{3x-1}) \qquad c/\quad y = \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

Bài 7.

a/ Sử dụng quy tắc tính đạo hàm của một thương để tính đạo hàm hàm số

$$y = \frac{2x+1}{\sqrt{4x+3}}.$$

b/ Sử dụng quy tắc đạo hàm hàm hợp để tính đạo hàm hàm số

$$y = \ln\left(\frac{2x+1}{\sqrt{4x+3}}\right).$$

c/ Tính toán lại đạo hàm của hàm số trong câu b) bằng cách sử dụng quy tắc hàm logarit.

Bài tập mục 3.2

Bài 1. Cho hàm chi phí trung bình

$$AC = \frac{15}{Q} + 2Q + 9$$

a/ Tìm biểu diễn của hàm TC từ đó tìm ra chi phí cố định.

b/ Tìm hàm chi phí cận biên.

Bài 2. Cho hàm sản xuất $Q = 50L - 0,01L^2$.

a/) Tính MP_L khi L lần lượt nhận các giá trị là 1; 10; 100 và 1000.

b/ Quy luật hiệu suất cận biên giảm dần có đúng trong trường hợp này?

Bài 3. Cho hàm cầu

$$Q = 100 - 4\sqrt{Q} - 3Q.$$

a/ Tìm biểu diễn của hàm TR theo Q.

b/ Tìm hàm MR từ đó tính giá trị của MR khi $Q = 9$.

c/ Sử dụng kết quả câu b) để ước lượng sự thay đổi của TR khi Q tăng 0,25 đơn vị từ mức hiện tại là 9 đơn vị; sau đó so sánh với cách tính chính xác sự thay đổi TR.

Bài 4. Cho hàm tiêu dùng $C = 0,01Y^2 + 0,8Y + 100$.

a/ Tính MPC và MPS khi $Y = 8$.

b/ Sử dụng công thức $C + S = Y$ để suy ra biểu diễn của S theo Y. Đạo hàm biểu thức này để tính MPS tại $Y = 8$ từ đó kiểm tra lại kết quả phần a).

Bài 5. Chi phí cố định để sản xuất một loại sản phẩm là 100 trong khi chi phí biến đổi là $2 + \frac{Q}{10}$ cho một đơn vị sản phẩm.

a/ Tìm TC và MC.

b/ Tính MC tại $Q = 30$ và từ đó ước lượng sự thay đổi của TC khi Q tăng 2 đơn vị từ mức sản xuất là 30 đơn vị hàng.

c/ Lượng hàng sản xuất là bao để $MC = 22$?

Bài 6. Cho hàm sản xuất $Q = 5\sqrt{L} - 0,1L$

a/ Tìm MP_L.

b/ Giải phương trình $MP_L = 0$ và giải thích ngắn gọn ý nghĩa của giá trị L này.

c/ Chỉ ra rằng Quy luật hiệu suất cận biên giảm dần đúng cho hàm sản xuất này.

Bài 7. Chi phí sản xuất trung bình của một doanh nghiệp được cho bởi công thức:

$$AC = 4Q + a + \frac{6}{Q}.$$

Biết rằng $MC = 35$ khi $Q = 3$, tìm giá trị của AC khi $Q = 6$.

Bài 8. Tìm hàm doanh thu cận biên cho các hàm cầu sau đây:

$$a/\quad P = \frac{e^{Q^2}}{Q^2} \qquad\qquad b/\quad P = \ln\left(\frac{2Q}{3Q+1}\right)$$

Bài tập mục 3.3

Bài 1. Cho hàm cầu $P = 500 - 4Q^2$.

a/ Tính độ co giãn của cầu theo giá dọc theo cung từ $Q = 8$ tới $Q = 10$.

b/ Tính độ co giãn của cầu theo giá tại điểm $Q = 9$ và so sánh với kết quả câu a)

Bài 2. Tìm độ co giãn của cầu theo giá tại $P = 6$ cho các hàm cầu sau:

$$a/\quad P = 30 - 2Q \qquad b/\quad P = 30 - 12Q \qquad c/\quad P = \sqrt{100 - 2Q}$$

Bài 3. Cho hàm cung $Q = 4 + 0,1P^2$

a/ Tính $\dfrac{dQ}{dP}$.

b/ Chỉ ra rằng $P = \sqrt{10Q - 40}$ và từ đó tính đạo hàm $\dfrac{dP}{dQ}$.

c/ Sử dụng câu a) và b) để kiểm tra

$$\frac{dQ}{dP} = \frac{1}{dP/dQ}.$$

Bài 4. Cho hàm cung $Q = 7 + 0,1P + 0,004P^2$. Tính độ co giãn của cung theo giá nếu giá hiện tại đang là 80.

a/ Nguồn cung là co, giãn, hay có độ co giãn đơn vị?

b/ Ước lượng tỉ lệ phần trăm thay đổi của nguồn cung nếu giá tăng 5%.

Bài 5. Cho hàm cầu

$$P = \frac{A}{Q^n},$$

trong đó A và n là các hằng số dương. Chỉ ra rằng độ co giãn của cầu theo giá là hằng số.

Bài 6. Tìm độ co giãn của cung theo giá cho hàm cung $Q = aP + b \quad (a > 0)$, từ đó chỉ ra rằng nguồn cung là

a/ có độ co giãn đơn vị khi $b = 0$;

b/ co khi $b > 0$.

Hãy đưa ra giải thích ngắn gọn bằng hình vẽ minh họa.

Bài 7. Tìm độ co giãn của cung theo giá với hàm cung $Q = 40 + 0,1P^2$.

a/ Ước lượng tỉ lệ phần trăm thay đổi của cung khi giá tăng 5% so với mức hiện tại là 17.

b/ Tìm giá mà tại đó cung có độ co giãn đơn vị.

Bài 8. Tìm độ co giãn của cầu theo giá đối với các hàm cầu sau đây

$$a/ \quad P = 100e^{-Q} \qquad\qquad b/ \quad P = 500 - 75\ln(2Q + 1)$$

Bài tập mục 3.4

Bài 1. Tìm và phân loại điểm dừng của các hàm số sau đây:

$$a/ \quad y = -x^2 + x + 1 \qquad\qquad b/ \quad y = -x^3 + 3x$$

Bài 2. Cho hàm sản xuất $Q = 30L^2 - 0,5L^3$. Tìm L sao cho AP_L đạt giá trị cực đại, và chỉ ra rằng $MP_L = AP_L$ tại điểm L đó.

Bài 3. Hàm cầu và hàm tổng chi phí được cho lần lượt bởi công thức:

$$4P + Q - 16 = 0$$

và

$$TC = 4 + 2Q - \frac{3Q^2}{10} + \frac{Q^3}{20}.$$

a/ Tìm biểu diễn của các hàm TR, π, MR và MC theo Q.

b/ Giải phương trình

$$\frac{d\pi}{dQ} = 0$$

sau đó xác định Q để lợi nhuận đạt cực đại.

c/ Kiểm tra $MR = MC$ tại điểm hàm lợi nhuận đạt giá trị cực đại.

Bài 4. Một nhà máy có chi phí cố định là 200 USD mỗi tuần, và chi phí biến đổi $VC = 2Q - 36$ cho một đơn vị hàng.

a/ Tìm biểu diễn của hàm chi phí trung bình;

b/ Tìm điểm dừng của hàm này và chỉ ra rằng đây là điểm cực tiểu của hàm.

Bài 5. Cho hàm cầu $Q = \sqrt{1000 - 4Q}$. Tìm Q để cực đại tổng doanh thu.

Bài 6. Giả sử rằng hàm $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ có điểm dừng tại $(2; 5)$, và đồ thị của nó đi qua điểm $(1; 3)$. Tìm giá trị a, b à c.

Bài 7. Cho hàm chi phí và hàm doanh thu lần lượt là $TC = 2Q$ và $TR = \ln(Q + 1)$. Tính sản lượng cần thiết để cực đại lợi nhuận.

Bài 8. Hàm sản xuất của một công ti được cho bởi:

$$Q = L^3 e^{-0{,}02L}.$$

Tìm giá trị của L để cực đại năng suất lao động trung bình.

Tài liệu tham khảo chính Chương 3

[1] Lê Đình Thúy, *Toán cao cấp cho các nhà kinh tế*, Tập 2, Nhà xuất bản Đại học Kinh tế Quốc dân, 2015. Chương 2: Đạo hàm và vi phân

[2] Teresa Bradley, Essential Mathematics for Economics and Business, 4th edition, John Wiley and Sons, 2013 Chapter 2: Differentiation and Applications

[3] Ian Jacques, Mathematics for Economics and Business, 7th edition, Pearson, 2013. Chapter 4: Differentiation

[4] James Stewart, *Calculus: Early Transcendentals*, 6th edition Thomson, 2008. Chapter 2: Limit and Derivatives; Chapter 3: Differentiation rules

Chương 4

Hàm số nhiều biến số

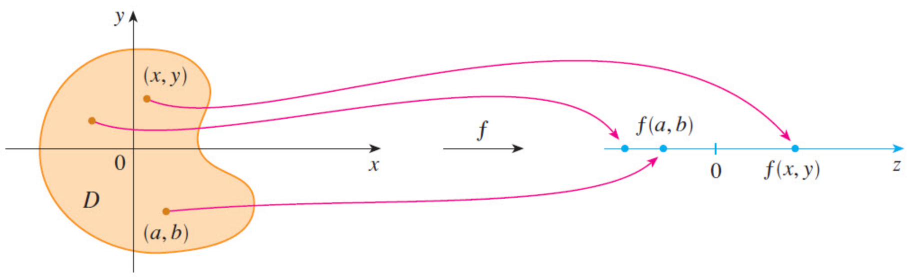
Chương 4 tìm hiểu các vấn đề liên quan đến *hàm số nhiều biến số*. Mục 4.1 trình bày khái niệm hàm số nhiều biến số, giới thiệu *hàm sản xuất Cobb-Douglas*, nêu khái niệm *đạo hàm riêng* và ứng dụng vào việc tính độ co giãn khi phân tích cung cầu trong kinh tế. Mục 4.2 trang bị cho sinh viên các kĩ thuật để tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất của các hàm kinh tế cho cả hai trường hợp bài toán có hoặc không có điều kiện *ràng buộc*. Với *bài toán tối ưu hàm kinh tế* có ràng buộc, *phương pháp thế* và *phương pháp nhân tử Lagrange* được minh họa cụ thể.

4.1. Hàm nhiều biến

4.1.1. Định nghĩa

Trong các bài toán kinh tế, một đại lượng không phụ thuộc vào chỉ riêng một đại lượng khác. Chẳng hạn, nhu cầu về một loại sản phẩm không chỉ phụ thuộc vào giá của sản phẩm đó, mà còn phụ thuộc vào thu nhập của người tiêu dùng, chi phí cho quảng cáo... Hay sản lượng của một quá trình sản xuất không chỉ phụ thuộc vào số nhân công mà còn phụ thuộc vào nguồn vốn... Do đó, để phân tích đầy đủ các vấn đề kinh tế, người ta phải mở rộng khái niệm hàm số một biến số tới hàm số nhiều biến số.

Hàm số hai biến số f là một quy tắc sao cho ứng với mỗi cặp $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}$ có tương ứng duy nhất một giá trị z, kí hiệu $z = f(x, y)$. Tập D được gọi là **tập xác định** của hàm số. Tập tất cả giá trị z có thể nhận được gọi là **tập giá trị** của hàm số. Các biến x, y được gọi là **biến độc lập** trong khi z được gọi là **biến phụ thuộc**.



Hình 4.1. Biểu diễn hàm hai biến số

Một cách để trực quan hóa hàm số hai biến số là vẽ sơ đồ như trên hình 4.1 trong đó tập xác định D được biểu diễn trên mặt phẳng $0xy$. Nếu hàm số được cho bởi biểu thức tường minh mà không chỉ rõ tập xác định cụ thể, ta hiểu rằng tập xác định là tập tất cả các giá trị của các biến độc lập sao cho biểu thức có nghĩa.

***Ví dụ* 4.1.1.1.** Cho hàm số

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$$

Tính giá trị $f(2,1)$ và tìm tập xác định của hàm số.

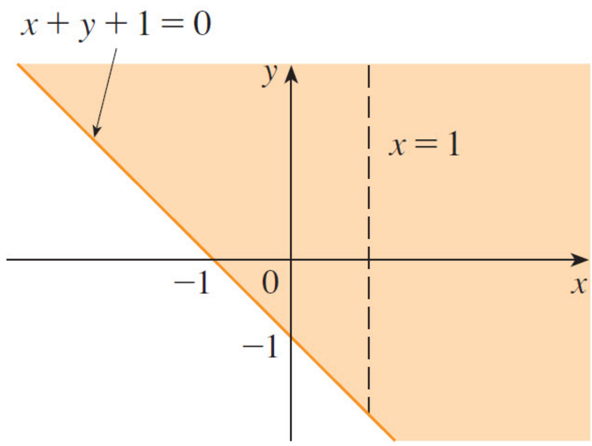
Lời giải:

$$f(2,1) = \frac{\sqrt{2+1+1}}{2-1} = 2$$

Tập xác định của hàm số là tập

$$D = \{(x,y) | x+y+1 \geq 0 \text{ và } x \neq 1\}$$

và được vẽ trên mặt phẳng tọa độ $0xy$ như trên hình 4.2. ■



Hình 4.2. Tập xác định của hàm $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$

***Ví dụ* 4.1.1.2.** Tìm tập xác định và tập giá trị của hàm

$$g(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

Lời giải:

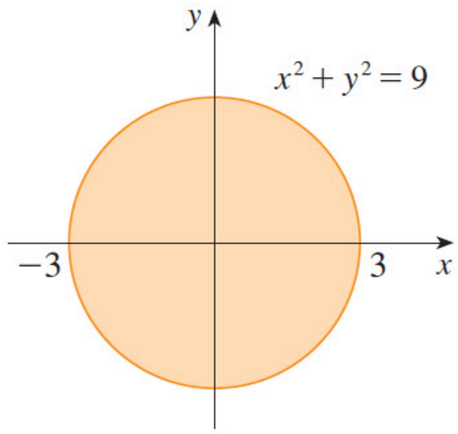
Tập xác định của hàm số là tập

$$D = \{(x,y) | 9 - x^2 - y^2 \geq 0\}$$

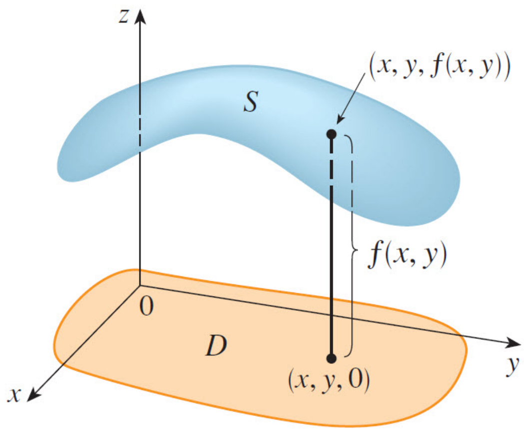
$$D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 9\}$$

và được vẽ trên mặt phẳng tọa độ $0xy$ như trên hình 4.3.

Vì $x^2 + y^2 \geq 0$ nên $9 - x^2 - y^2 \leq 9$ và do đó $0 \leq \sqrt{9 - x^2 - y^2} \leq 3$. Vậy tập giá trị của hàm số sẽ là $[0, 3]$. ■



Hình 4.3. Tập xác định của hàm $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$



Hình 4.4. Đồ thị hàm hai biến

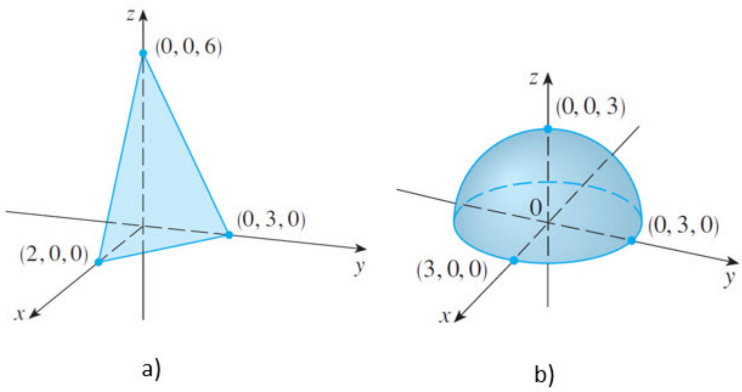
Một cách khác để trực quan hóa hàm nhiều biến là sử dụng đồ thị của nó. **Đồ thị** của hàm số $z = f(x, y)$ là tập tất cả các điểm (x, y, z) trong $\mathbb{R}^3$ với $(x, y) \in D$. Giống như đồ thị hàm một biến là đường cong C có phương trình $y = f(x)$, đồ thị hàm hai biến là mặt cong S có phương trình $z = f(x, y)$. Ta vẽ S với tập xác định D chính là hình chiếu của S xuống mặt phẳng $0xy$ (xem hình 4.4).

***Ví dụ* 4.1.1.3.** Đồ thị của hàm số $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ được vẽ trên hình 4.5 a) và đồ thị hàm $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ được vẽ trên hình 4.5 b). ■

Một hàm hai biến ta hay gặp trong kinh tế là **hàm sản xuất Cobb-Douglas**:

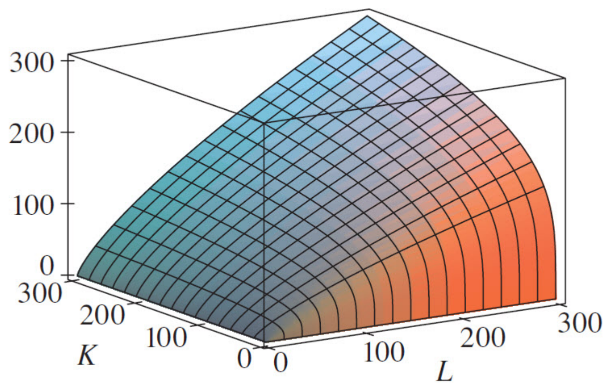
$$Q = aL^{\alpha}K^{\beta},$$

trong đó a, α và β là các hằng số dương, L và K là biến độc lập, Q là biến phụ thuộc.



Hình 4.5. Đồ thị của hàm $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ và hàm $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

Hàm sản xuất này do hai nhà kinh tế học là Charles Cobb và Paul Douglas giới thiệu năm 1928 khi nghiên cứu nền kinh tế Hoa Kỳ giai đoạn từ 1899-1922. Mô hình này xem xét sự ảnh hưởng của nguồn nhân lực và vốn tới sản lượng sản xuất theo dạng tích hàm lũy thừa. Ngay sau khi được giới thiệu mô hình đã thể hiện được tính ưu việt khi so sánh với rất nhiều mô hình đã tồn tại trước đó. Hàm sản xuất Cobb-Douglas có tập xác định $\{(L, K)|L \geq 0, \quad K \geq 0\}$ và tập giá trị $Q \geq 0$. Hình 4.6 vẽ đồ thị của một hàm sản xuất Cobb-Douglas cụ thể $Q(L, K) = 1,01L^{0,75}K^{0,25}$. Dễ thấy, sản lượng Q sẽ tăng khi một trong hai giá trị L hoặc K tăng.



Hình 4.6. Đồ thị hàm sản xuất Cobb Douglas $Q(L, K) = 1,01L^{0,75}K^{0,25}$

Ta có thể tổng quát hóa khái niệm cho hàm số với n biến số. Hàm số n biến số là một quy tắc sao cho tương ứng với một bộ n số $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ có duy nhất một giá trị $z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Tuy nhiên, để cho đơn giản trong các phần tiếp theo trong Chương 4 ta chỉ xét hàm số hai biến số ($n = 2$).

4.1.2. Đạo hàm riêng

Cho hàm số hai biến số $z = f(x, y)$. Ta biết rằng giá trị z phụ thuộc vào giá trị x và y. Sự thay đổi của biến x và biến y dẫn đến sự thay đổi của z. Nghiên cứu tốc độ thay đổi của z khi từng biến thay đổi dẫn đến khái niệm đạo hàm riêng. Vì hàm có hai biến số nên ta có hai đạo hàm riêng tương ứng với hai biến khác nhau. **Đạo hàm riêng của f theo x**, kí hiệu $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ hoặc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ hoặc f'_x được định nghĩa bởi:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x + \triangle x, y) - f(x, y)}{\triangle x},$$

với một giá trị cố định của y.

Tương tự, **đạo hàm riêng của f theo y**, kí hiệu $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ hoặc $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ hoặc f'_y được định nghĩa bởi:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(x, y + \triangle y) - f(x, y)}{\triangle y},$$

với một giá trị cố định của x.

Để tính đạo hàm riêng của hàm $f(x, y)$ theo x ta coi y là hằng số và tính như tính đạo hàm của hàm một biến. Tương tự, khi tính đạo hàm riêng của hàm $f(x, y)$ theo y, ta coi x là hằng số và tính toán như tính cho hàm số một biến số y.

***Ví dụ* 4.1.2.1.** Cho hàm $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$. Tính $f'_x(2, 1)$ và $f'_y(2, 1)$.

Lời giải:

Coi y là hằng số, ta có

$$f'_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3.$$

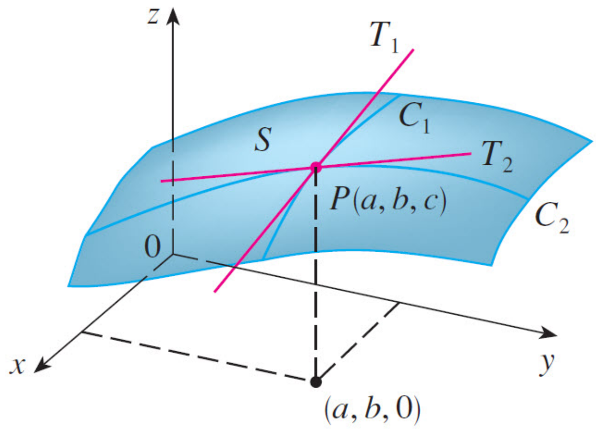
Từ đó

$$f'_x(2, 1) = 3(2)^2 + 2(2)1^3 = 16.$$

Coi x là hằng số, ta có

$$f'_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y.$$

Từ đó
$$f'_y(2,1) = 3(2)^2(1)^2 - 4(1) = 8.$$
■



Hình 4.7. Ý nghĩa hình học của đạo hàm riêng

Để giải thích ý nghĩa hình học của đạo hàm riêng, ta xem hình 4.7. Mặt cong S chính là đồ thị của hàm số $z = f(x,y)$. Nếu $f(a,b) = c$ thì điểm $P(a,b,c)$ nằm trên S. Bằng việc đặt y giá trị cố định $y = b$, ta thu hẹp việc xét mặt S thành đường cong C_1 (giao của mặt S với mặt phẳng $y = b$). Tương tự, khi cố định $x = a$, ta thu hẹp việc xét mặt S về đường cong C_2 (giao của mặt S với mặt phẳng $x = a$). Hai đường cong C_1 và C_2 giao nhau ở P. Chú ý rằng đường cong C_1 có là đồ thị của hàm số một biến số $g(x) = f(x,b)$ trong khi đường cong C_2 là đồ thị của hàm số một biến số $h(y) = f(a,y)$. Hệ số góc của tiếp tuyến T_1 với đường cong C_1 tại điểm P là $g'(a) = f'_x(a,b)$ trong khi hệ số góc của tiếp tuyến T_2 với đường cong T_2 tại điểm P là $h'(b) = f'(a,b)$.

Nếu $z = f(x,y)$ là hàm hai biến số thì các đạo hàm riêng cấp một của f theo x và y nói chung cũng là hàm hai biến số. Các đạo hàm riêng của các đạo hàm này gọi là **đạo hàm riêng cấp hai** của f. Ta sử dụng các kí hiệu sau
$$(f'_x(x,y))'_x = f''_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$
$$(f'_x(x,y))'_y = f''_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$
$$\left(f'_y(x,y)\right)'_x = f''_{yx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$\left(f'_y(x,y)\right)'_y = f''_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

***Ví dụ* 4.1.2.2.** Tìm các đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$.

Lời giải:

Trong ví dụ 4.1.2.1, ta đã có:

$$f'_x(x,y) = 3x^2 + 2xy^3$$

$$f'_y(x,y) = 3x^2y^2 - 4y$$

Do đó:

$$f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 2xy^3) = 6x + 2y^3; \qquad f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 2xy^3) = 6xy^2$$
$$f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 - 4y) = 6xy^2; \qquad f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 - 4y) = 6x^2y - 4$$

■

Trong ví dụ 4.1.2.2, ta có

$$f''_{xy} = f''_{yx}.$$

Biểu thức trên còn đúng với hàm bất kỳ không? Nó chỉ đúng khi các hàm đạo hàm riêng là các hàm liên tục. Các hàm số ta hay gặp thường có các đạo hàm riêng liên tục và do đó biểu thức trên được thỏa mãn.

Trước khi nghiên cứu ứng dụng của đạo hàm riêng trong các vấn đề kinh tế, ta tìm hiểu việc ứng dụng đạo hàm riêng trong tính giá trị gần đúng hàm hai biến $z = f(x,y)$. Thật vậy, từ định nghĩa đạo hàm riêng, ta thấy nếu x thay đổi một lượng nhỏ $\triangle x$ trong khi y được cố định, thì sự thay đổi tương ứng trong z là:

$$\triangle z \approx \frac{\partial z}{\partial x} \times \triangle x.$$

Tương tự, nếu y thay đổi một lượng nhỏ $\triangle y$ trong khi x được cố định, thì sự thay đổi tương ứng trong z là:

$$\triangle z \approx \frac{\partial z}{\partial y} \times \triangle y.$$

Trong thực tế, thường thì x và y thay đổi đồng thời. Khi đó sự thay đổi của z sẽ là tổng của hai sự thay đổi thành phần:

$$\triangle z \approx \frac{\partial z}{\partial x} \times \triangle x + \frac{\partial z}{\partial y} \times \triangle y$$

***Ví dụ* 4.1.2.3.** Cho hàm số hai biến số $z = x^3y - y^3x$.

a/ Tính z'_x và z'_y tại điểm $(1; 3)$;

b/ Không dùng máy tính, tính gần đúng giá trị của hàm số tại điểm $(1, 1; 2, 8)$.

Lời giải:

a/ Ta có:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y - y^3$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 - 3y^2x$$

Tại điểm $(1, 3)$, ta có

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y - y^3 = 3(1)^2(3) - 3^3 = -18$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 - 3y^2x = (1)^3 - 3(3)^2(1) = -26$$

b/ Sự thay đổi của x và y lần lượt là:

$$\triangle x = 1, 1 - 1 = 0, 1 \qquad \triangle y = 2, 8 - 3 = -0, 2$$

Sự thay đổi giá trị của z sẽ là:

$$\triangle z \approx \frac{\partial z}{\partial x} \times \triangle x + \frac{\partial z}{\partial y} \times \triangle y$$
$$\triangle z \approx (-18) \times 0, 1 + (-26) \times (-0, 2) = 3, 4$$

Giá trị của hàm số $z = x^3y - y^3x$ tại điểm $(1; 3)$ là:

$$z(1; 3) = 1^3(3) - 3^3 - 1 = -24$$

Vậy là, giá trị gần đúng của hàm số $z = x^3y - y^3x$ tại điểm $(1, 1; 2, 8)$ là:

$$z(1, 1; 2, 8) = -24 + 3, 4 = -20, 6.$$

■

4.1.3. Độ co giãn của cầu

Tiểu mục này xem xét ứng dụng của đạo hàm riêng cấp một vào trong một vấn đề kinh tế căn bản: độ co giãn của cầu.

Trên thực tế, nhu cầu Q của một loại sản phẩm không chỉ phụ thuộc vào giá P của sản phẩm đó, mà nó còn phụ thuộc vào thu nhập Y của người tiêu dùng, phụ thuộc vào giá P_A của sản phẩm có liên quan trên thị trường (để cho tiện ta gọi là sản phẩm A). Như vậy, hàm cầu là hàm của ba biến $Q = f(P, P_A, Y)$. Câu hỏi đặt ra là nhu cầu Q sẽ bị ảnh hưởng thế nào khi ba yếu tố P, P_A và Y thay đổi. Để trả lời câu hỏi trên, ta xét ba độ co giãn sau đây:

a/ **Độ co giãn của cầu theo giá**:

$$E_P = -\frac{\text{phần trăm thay đổi của } Q}{\text{phần trăm thay đổi của } P}$$

Dấu âm của phân số trên để đảm bảo $E_P > 0$. Tương tự như định nghĩa độ co giãn của cầu theo giá cho trường hợp hàm một biến số, ta có

$$E_P = -\frac{P}{Q} \times \frac{\partial Q}{\partial P}$$

b/ **Độ co giãn của cầu theo giá chéo** :

$$E_{P_A} = \frac{\text{phần trăm thay đổi của } Q}{\text{phần trăm thay đổi của } P_A}$$

$$E_{P_A} = \frac{P_A}{Q} \times \frac{\partial Q}{\partial P_A}$$

Dấu của E_{P_A} có thể âm hoặc dương phụ thuộc vào vai trò của sản phẩm A. Trong trường hợp sản phẩm A *thay thế* được sản phẩm đang xét (chẳng hạn, lúa gạo và lúa mì là các sản phẩm có thể thay thế lẫn nhau), khi giá P_A của sản phẩm A tăng, người dùng có xu hướng mua nhiều hơn sản phẩm đang xét, tức là Q tăng. Hệ quả là:

$$\frac{\partial Q}{\partial P_A} > 0$$

và đo đó $E_{P_A} > 0$. Trường hợp sản phẩm A là *bổ sung* cho sản phẩm đang xét (chẳng hạn, ô tô và xăng dầu). Khi giá P_A (giá xăng dầu) tăng, nhu cầu Q (số ô tô) giảm. Hệ quả là:

$$\frac{\partial Q}{\partial P_A} < 0$$

và do đó $E_{P_A} < 0$.

c/ **Độ co giãn của cầu theo thu nhập**:

$$E_Y = \frac{\text{phần trăm thay đổi của } Q}{\text{phần trăm thay đổi của } Y}$$

$$E_Y = \frac{Y}{Q} \times \frac{\partial Q}{\partial Y}$$

Tương tự như E_{P_A}, dấu của E_Y có thể dương hay âm. Nếu sản phẩm đang xét là đồ cao cấp, thì khi thu nhập tăng, nhu cầu về sản phẩm đó sẽ tăng ($\frac{\partial Q}{\partial Y} > 0$). Ngược lại nếu sản phẩm là loại rẻ tiền hay đồ thứ cấp, thì khi thu nhập tăng, người dùng có xu hướng ít có nhu cầu sử dụng ($\frac{\partial Q}{\partial Y} < 0$).

***Ví dụ* 4.1.3.1.** Cho hàm cầu $Q = 100 - 2P + P_A + 0,1Y$, với $P = 10$, $P_A = 12$ và $Y = 1000$. Tìm:

a/ Độ co giãn của cầu theo giá;

b/ Độ co giãn của cầu theo giá chéo;

c/ Độ co giãn của cầu theo thu nhập.

Lời giải:

Khi $P = 10$, $P_A = 12$ và $Y = 1000$, ta có $Q = 100 - 2(10) + 12 + 0,1(1000) = 192$.

a/ Để tính độ co giãn của cầu theo giá, ta tính $\dfrac{\partial Q}{\partial P} = -2$.

$$E_P = -\frac{P}{Q} \times \frac{\partial Q}{\partial P} = -\frac{10}{192} \times (-2) \approx 0,10.$$

b/ Để tính độ co giãn của cầu theo giá chéo, ta tính $\dfrac{\partial Q}{\partial P_A} = 1$.

$$E_{P_A} = \frac{P_A}{Q} \times \frac{\partial Q}{\partial P_A} = \frac{12}{192} \times (1) \approx 0,06.$$

Vậy A là sản phẩm thay thế được cho sản phẩm ban đầu.

c/ Để tính độ co giãn của cầu theo thu nhập, ta tính $\dfrac{\partial Q}{\partial Y} = 0,1$.

$$E_Y = \frac{Y}{Q} \times \frac{\partial Q}{\partial Y} = \frac{1000}{192} \times (0,1) \approx 0,52.$$

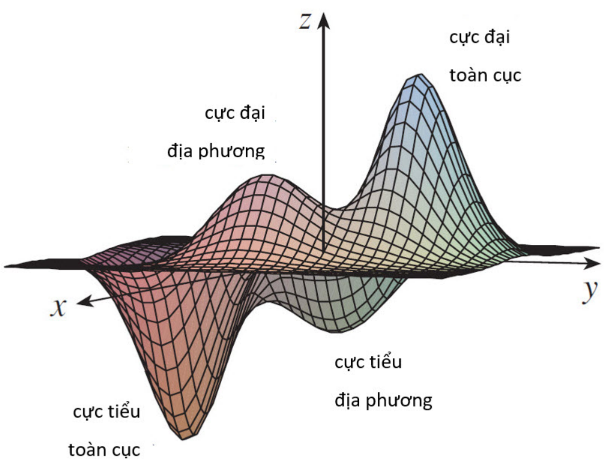
Vậy sản phẩm đang xem xét là sản phẩm cao cấp.

■

4.2. Tối ưu hóa các hàm kinh tế

4.2.1. Cực trị hàm nhiều biến và tối ưu không ràng buộc

Trong mục này chúng ta sẽ tìm hiểu cách sử dụng đạo hàm riêng để tìm cực trị của hàm số hai biến số. Trước hết, ta xem xét đồ thị một hàm số có dạng "đồi núi - thung lũng" như trên hình 4.8. Độ cao của các đỉnh đồi minh họa các giá trị cực đại còn độ sâu của các đáy thung lũng minh họa các giá trị cực tiểu của hàm số.



Hình 4.8. Cực trị địa phương và cực trị toàn cục

Ta nói hàm số hai biến số $f(x,y)$ có **cực tiểu địa phương** tại (a,b) nếu $f(x,y) \geq f(a,b)$ với mọi cặp giá trị (x,y) xung quanh gần (a,b). Ngược lại, hàm số $f(x,y)$ có **cực đại địa phương** tại (a,b) nếu $f(x,y) \leq f(a,b)$ với mọi cặp (x,y) xung quanh gần (a,b). Cực tiểu địa phương và cực đại địa phương có tên gọi chung là cực trị địa phương.

Nếu các bất đẳng thức trên đúng với mọi cặp (x,y) thuộc miền xác định của hàm số $f(x,y)$, ta có tương ứng khái niệm **cực tiểu toàn cục** và **cực đại toàn cục**. Cực tiểu toàn cục và cực đại toàn cục có tên gọi chung là cực trị toàn cục.

Điểm (a,b) được gọi là **điểm dừng** của hàm số $f(x,y)$ nếu $f'_x(a,b) = f'_y(a,b) = 0$. Điểm dừng có thể là điểm cực đại địa phương, cũng có thể là điểm cực tiểu địa phương, hoặc có thể không phải là điểm cực trị.

***Ví dụ* 4.2.1.1.** Xét hàm $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$.

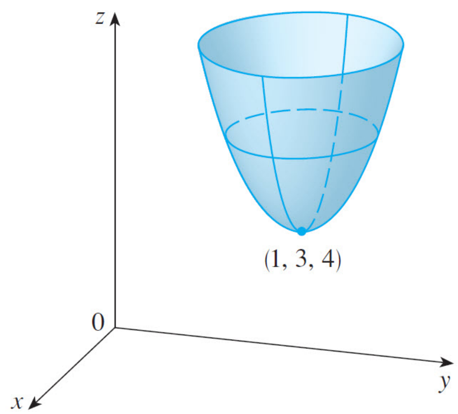
Hàm số có hai đạo hàm riêng:

$$f'_x(x,y) = 2x - 2 \qquad\qquad f'_y(x,y) = 2y - 6$$

Bằng cách giải hệ:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 2x - 2 = 0 \\ f'_y(x,y) = 2y - 6 = 0 \end{cases}$$

ta được điểm dừng $(x,y) = (1;3)$.



Hình 4.9. Cực trị hàm $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$

Ta lại có

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14 = (x-1)^2 + (y-3)^2 + 4$$

Vì $(x-1)^2 \geq 0$ và $(y-3)^2 \geq 0$ nên hàm số $f(x,y) \geq 4$ với mọi cặp (x,y). Trong trường hợp này, điểm dừng là điểm cực tiểu địa phương và cũng là điểm cực tiểu toàn cục (xem hình 4.9). Giá trị cực tiểu là $f(1,3) = 4$. ■

***Ví dụ* 4.2.1.2.** Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = y^2 - x^2$.

Lời giải:

Vì

$$f'_x(x,y) = -2x \text{ và } f'_y(x,y) = 2y$$

nên hàm số chỉ có một điểm dừng là điểm $(0,0)$.
Xét những điểm trên trục $0x$, ta có $y = 0$, vậy là hàm số:

$$f(x,y) = -x^2 < 0 \quad \forall x \neq 0$$

Xét những điểm trên trục $0y$, ta có $x = 0$, vậy là hàm số:

$$f(x,y) = y^2 > 0 \quad \forall y \neq 0$$

Vậy là xung quanh điểm dừng $(0,0)$ tồn tại những giá trị (x,y) sao cho hàm số nhận giá trị dương và âm, trong khi giá trị hàm số tại điểm dừng là $f(0,0) = 0$. Điều này chứng tỏ điểm $(0,0)$ không là cực trị của hàm số $f(x,y) = y^2 - x^2$. ■

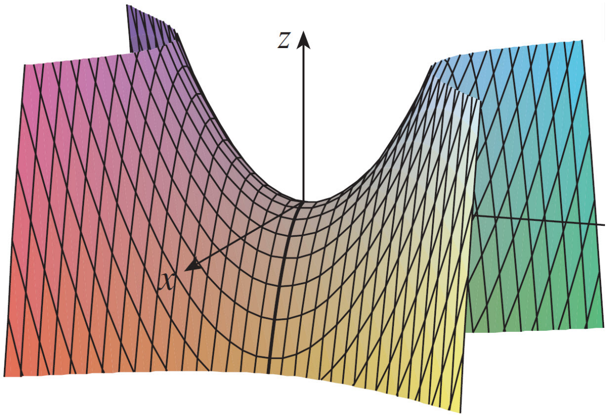
Ví dụ 4.2.1.2 chỉ ra rằng điểm dừng của một hàm số có thể là điểm cực trị hoặc không. Đồ thị của hàm số trong ví dụ 4.2.1.2 được vẽ trên hình 4.10. Ta thấy rằng điểm dừng $(0,0)$ là điểm cực đại nếu ta chỉ xét trong mặt phẳng $y = 0$ và là điểm cực tiểu nếu ta chỉ xét trong mặt phẳng $x = 0$. Đồ thị của hàm số tại những điểm quanh điểm dừng có dáng hình yên ngựa nên điểm dừng $(0,0)$ được gọi là **điểm yên ngựa**.

Để phân loại điểm dừng (a,b) là điểm cực trị hay điểm yên ngựa của hàm số $f(x,y)$, ta sử dụng quy tắc sau:

i) Tính các đạo hàm riêng cấp hai f''_{xx}, f''_{xy} và f''_{yy};

ii) Tính giá trị biểu thức

$$\triangle = (f''_{xy})^2 - (f''_{xx}) \times (f''_{yy})$$



Hình 4.10. Điểm yên ngựa

iii) Xét dấu của $\triangle$

+ Nếu $\triangle < 0$ và $f''_{xx} > 0$ (hoặc $f''_{yy} > 0$) thì điểm dừng (a, b) là điểm cực tiểu địa phương;

+ Nếu $\triangle < 0$ và $f''_{xx} < 0$ (hoặc $f''_{yy} < 0$) thì điểm dừng (a, b) là điểm cực đại địa phương;

+ Nếu $\triangle > 0$ thì điểm dừng (a, b) là điểm yên ngựa;

+ Nếu $\triangle = 0$ thì ta chưa thể kết luận gì về điểm dừng (a, b). Khi đó ta phải sử dụng phương pháp khác.

***Ví dụ* 4.2.1.3.** Tìm điểm dừng của hàm số

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$$

và sau đó phân loại chúng.

Lời giải:

Tính các đạo hàm riêng cấp một:

$$f'_x = 4x^3 - 4y \qquad\qquad f'_y = 4y^3 - 4x$$

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} f'_x = 4x^3 - 4y = 0 \\ f'_y = 4y^3 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y = 0 \\ y^3 - x = 0 \end{cases}$$

Thay $y = x^3$ vào phương trình $y^3 - x = 0$ ta được

$$x^9 - x = 0$$
$$x(x^8 - 1) = 0$$
$$x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = 0$$
$$x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0$$
$$x(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0$$

Suy ra $x = 0$, $x = 1$ và $x = -1$ tương ứng lần lượt với các giá trị của y là $y = 0$, $y = 1$ và $y = -1$.
Vậy ta có 3 điểm dừng:

$$M_1(0,0), \quad M_2(1,1) \text{ và } M_3(-1,-1).$$

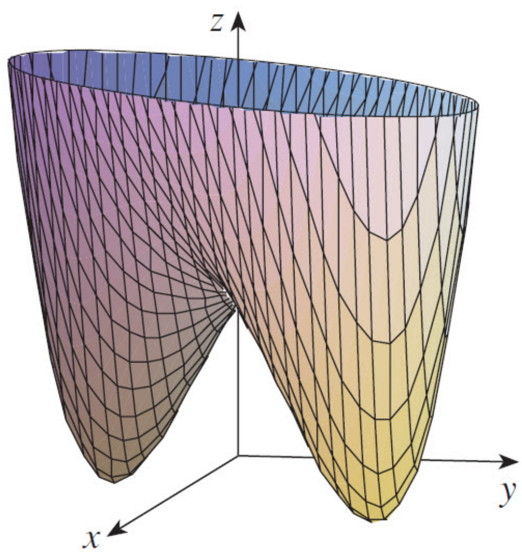
Tính các đạo hàm riêng cấp hai ta được:

$$f''_{xx} = 12x^2 \qquad f''_{xy} = -4 \qquad f''_{yy} = 12y^2$$

Biểu thức

$$\triangle = (f''_{xy})^2 - (f''_{xx}) \times (f''_{yy}) = (-4)^2 - (12x^2)(12y^2) = 16 - 144x^2y^2$$

Xét điểm dừng $M_1(0,0)$, ta có $\triangle(M_1) = 16 > 0$. Điểm M_1 là điểm yên ngựa.



Hình 4.11. Đồ thị hàm số $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

Xét điểm dừng $M_2(1,1)$, ta có $\triangle(M_2) = -128 < 0$. Thêm nữa do $f''_{xx}(M_2) = 12 > 0$ nên điểm M_2 là điểm cực tiểu. Giá trị cực tiểu là

$$f_{CT} = f(1,1) = 1^4 + 1^4 - 4(1)(1) + 1 = -1.$$

Xét điểm dừng $M_3(-1,-1)$, ta có $\triangle(M_3) = -128 < 0$. Thêm nữa do $f''_{xx}(M_3) = 12 > 0$ nên điểm M_3 cũng là điểm cực tiểu. Giá trị cực tiểu là

$$f_{CT} = f(-1,-1) = (-1)^4 + (-1)^4 - 4(-1)(-1) + 1 = -1.$$

Đồ thị của hàm số trên hình 4.11 minh họa trực quan các điểm dừng đã tìm được. ■

Chú ý rằng phương pháp ta xét ở trên là để tìm cực trị địa phương. Trong các bài toán kinh tế, ta có cực trị địa phương thường trùng với cực trị toàn cục.

***Ví dụ* 4.2.1.4.** Một doanh nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm G1 và G2 và bán với giá lần lượt là 1000 USD/1 sản phẩm G1 và 800 USD/1 sản phẩm G2. Tổng chi phí sản xuất các sản phẩm này là: $TC = 2Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2$, trong đó Q_1 và Q_2 lần lượt là số lượng sản phẩm G1 và G2. Doanh nghiệp cần sản xuất số lượng sản phẩm mỗi loại như thế nào để đạt cực đại lợi nhuận. Tính giá trị lợi nhuận khi đó.

Lời giải:

Tổng doanh thu doanh nghiệp thu được khi bán Q_1 sản phẩm G1 với giá 1000 USD/1 sản phẩm và Q_2 sản phẩm G2 với giá 800 USD/1 sản phẩm là

$$TR = 1000Q_1 + 800Q_2.$$

Lợi nhuận doanh nghiệp có được là:

$$\pi = TR - TC = (1000Q_1 + 800Q_2) - (2Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2).$$

$$\pi = 1000Q_1 + 800Q_2 - 2Q_1^2 - 2Q_1Q_2 - Q_2^2$$

Ta đi tìm Q_1 và Q_2 để hàm π đạt cực đại.

Bước 1: (Tìm điểm dừng)

Ta có các đạo hàm riêng cấp một:

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = 1000 - 4Q_1 - 2Q_2$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = 800 - 2Q_1 - 2Q_2$$

Giải hệ

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi}{\partial Q_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial Q_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1000 - 4Q_1 - 2Q_2 = 0 \\ 800 - 2Q_1 - 2Q_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = 100 \\ Q_2 = 300 \end{cases}$$

Bước 2:

Tính các đạo hàm riêng cấp hai:

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2} = -4; \qquad \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1 \partial Q_2} = -2; \qquad \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2} = -2.$$

Ta có

$$\left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1 \partial Q_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2}\right) = (-2)^2 - (-4)(-2) = -4 < 0 \quad \text{và} \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2} = -4 < 0$$

Do đó, $Q_1 = 100$ và $Q_2 = 300$ là điểm tại đó hàm lợi nhuận π đạt giá trị cực đại. Giá trị cực đại lúc đó là:

$$\pi_{max} = 1000(100) + 800(300) - 2(100)^2 - 2(100)(300) - (300)^2 = 170000 \text{ USD}.$$

Bạn đọc quan tâm có thể tìm hiểu thêm để chứng minh đây là giá trị cực đại toàn cục (lớn nhất) của lợi nhuận. ■

Ví dụ 4.2.1.5. Một doanh nghiệp bán hàng tại thị trường trong nước và nước ngoài với giá khác nhau. Gọi P_1 và Q_1 là giá và số lượng hàng bán được tại thị trường nước ngoài, cho biết $P_1 + Q_1 = 500$. Gọi P_2 và Q_2 là giá và số lượng hàng bán được tại thị trường trong nước, cho biết $2P_2 + 3Q_2 = 720$. Hàm tổng chi phí là $TC = 50000 + 20Q$, trong đó $Q = Q_1 + Q_2$. Xác định chính sách giá của doanh nghiệp để đạt lợi nhuận cực đại. Tính lợi nhuận cực đại đó.

Lời giải:

Từ $P_1 + Q_1 = 500$ ta có $P_1 = 500 - Q_1$. Doanh thu ở thị trường nước ngoài là:

$$TR_1 = P_1 Q_1 = (500 - Q_1)Q_1 = 500Q_1 - Q_1^2.$$

Từ $2P_2 + 3Q_2 = 720$ ta có $P_2 = 360 - \frac{3}{2}Q_2$. Doanh thu ở thị trường trong nước là:

$$TR_2 = P_2Q_2 - (360 - \frac{3}{2}Q_2)Q_2 = 360Q_2 - \frac{3}{2}Q_2^2.$$

Tổng doanh thu của doanh nghiệp là:

$$TR = TR_1 + TR_2 = 500Q_1 - Q_1^2 + 360Q_2 - \frac{3}{2}Q_2^2.$$

Chi phí của doanh nghiệp là:

$$TC = 50000 + 20Q = 50000 + 20(Q_1 + Q_2) = 50000 + 20Q_1 + 20Q_2.$$

Do đó, hàm lợi nhuận của doanh nghiệp là:

$$\pi = TR - TC = (500Q_1 - Q_1^2 + 360Q_2 - \frac{3}{2}Q_2^2) - (50000 + 20Q_1 + 20Q_2).$$

$$\pi = 480Q_1 - Q_1^2 + 340Q_2 - \frac{3}{2}Q_2^2 - 50000$$

Trước hết, ta đi tìm Q_1 và Q_2 để hàm π đạt cực đại.

Bước 1: (Tìm điểm dừng)

Ta có các đạo hàm riêng cấp một:

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = 480 - 2Q_1$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = 340 - 3Q_2$$

Giải hệ

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi}{\partial Q_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial Q_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 480 - 2Q_1 = 0 \\ 340 - 3Q_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = 240 \\ Q_2 = \dfrac{340}{3} \end{cases}$$

Bước 2:

Tính các đạo hàm riêng cấp hai:

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2} = -2; \qquad \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1 \partial Q_2} = 0; \qquad \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2} = -3.$$

Ta có

$$\left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1 \partial Q_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2}\right) = (0)^2 - (-2)(-3) = -6 < 0 \quad \text{và } \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2} = -2 < 0$$

Do đó, $Q_1 = 240$ và $Q_2 = \dfrac{340}{3}$ là điểm tại đó hàm lợi nhuận π đạt giá trị cực đại. Giá trị cực đại lúc đó là:

$$\pi_{max} = 480(240) - 240^2 + 340\Big(\frac{340}{3}\Big) - \frac{3}{2}\Big(\frac{340}{3}\Big)^2 - 50000 \approx 26866,67.$$

Từ $Q_1 = 240$, ta có $P_1 = 500 - Q_1 = 500 - 240 = 260$. Từ $Q_2 = \dfrac{340}{3}$ ta có $P_2 = 360 - \dfrac{3}{2}\Big(\dfrac{340}{3}\Big) = 190$. Vậy với chính sách giá $P_1 = 260$ cho thị trường nước ngoài và $P_2 = 190$ cho thị trường trong nước, doanh nghiệp sẽ đạt cực đại doanh thu là $26866,67$. ■

4.2.2. Phương pháp thế giải bài toán tối ưu có ràng buộc

Trong mục trước, chúng ta đã nghiên cứu cách đi tìm cực trị của một hàm số hai biến số $z = f(x, y)$, trong đó biến x và y có thể nhận giá trị bất kỳ. Tuy nhiên trong nhiều trường hợp thực tế các biến này cần thỏa mãn điều kiện nào đó. Chẳng hạn, một doanh nghiệp muốn cực đại năng suất với hàm sản xuất $Q = f(K, L)$, trong đó biến nguồn vốn K và biến lao động L phải thỏa mãn điều kiện chi phí. Cụ thể, ta gọi P_K và P_L lần lượt là chi phí cho một đơn vị vốn và một đơn vị lao động. Khi đó chi phí cho K đơn vị vốn và L đơn vị lao động là $P_K K + P_L L$. Giả sử rằng doanh nghiệp chỉ có một lượng tiền cố định là M cho vốn và lao động, vậy thì biến K và L phải thỏa mãn phương trình $P_K K + P_L L = M$. Do đó, bài toán trở thành đi tìm giá trị cực đại của hàm sản xuất $Q = f(K, L)$ với điều kiện chi phí $P_K K + P_L L = M$. Người ta gọi hàm $Q = f(K, L)$ là **hàm mục tiêu** và gọi phương trình chi phí $P_K K + P_L L = M$ là **ràng buộc**.

Một cách tổng quát, ta có thể phát biểu bài toán tối ưu là bài toán tìm cực đại (max) hoặc cực tiểu (min) của hàm mục tiêu $z = f(x, y)$ với ràng buộc $\phi(x, y) = M$. Phương pháp đơn giản nhất để giải bài toán này là **phương pháp thế**. Các bước cơ bản của phương pháp thế là chuyển bài toán hai biến số về bài toán một biến số sau đó áp dụng các kỹ thuật tối ưu hàm số một biến để giải. Chúng ta sẽ minh họa phương pháp này qua hai ví dụ tìm min và max sau đây:

***Ví dụ* 4.2.2.1.** Chi phí cho một đơn vị vốn và lao động của một doanh nghiệp lần lượt là 1 triệu VND và 2 triệu VND. Nếu hàm sản xuất được cho bởi $Q = 4LK + L^2$, tìm K và L để năng suất của doanh nghiệp đạt giá trị lớn nhất biết rằng chi phí đầu vào của doanh nghiệp được cố định ở mức 105 triệu VND.

Lời giải:

Vì chi phí cho một đơn vị vốn và lao động lần lượt là 1 triệu VND và 2 triệu VND, nên nếu doanh nghiệp sử dụng K đơn vị vốn và L đơn vị lao động, thì chi phí phải bỏ ra là $K + 2L$. Do chi phí này là 105 triệu VND nên ta có ràng buộc

$$K + 2L = 105$$

Bài toán tối ưu cần giải là bài toán tìm max hàm mục tiêu $Q = 4LK + L^2$ với điều kiện ràng buộc nêu trên. Với phương pháp thế, ràng buộc này suy ra $K = 105 - 2L$. Thế K vào hàm mục tiêu ta được:

$$Q = 4L(105 - 2L) + L^2 = 420L - 7L^2.$$

Vậy là, ta đã chuyển việc tìm max hàm hai biến số về tìm max hàm một biến số $Q = 420L - 7L^2$:

Bước 1: $\dfrac{dQ}{dL} = 420 - 14L = 0 \Leftrightarrow L = 30$. Ta có điểm dừng $L = 30$.

Bước 2: Vì đạo hàm bậc hai $\dfrac{d^2Q}{dL^2} = -14 < 0$ nên điểm dừng $L = 30$ là điểm cực đại. Giá trị cực đại là: $Q = 420(30) - 7(70)^2 = 6300$.

Tại $L = 30$, ta có $K = 105 - 2L = 105 - 2(30) = 45$. Vậy với 30 đơn vị lao động và 45 đơn vị vốn, doanh nghiệp sẽ đạt lợi nhuận cực đại là 6300. ■

***Ví dụ* 4.2.2.2.** Một nhà máy có hàm sản xuất là $Q = 2\sqrt{KL}$. Chi phí cho một đơn vị vốn và lao động lần lượt là 4 và 3 triệu VND. Tìm K và L để cực tiểu hóa tổng chi phí đầu vào biết rằng nhà máy phải sản xuất 160 sản phẩm.

Lời giải:

Vì chi phí cho một đơn vị vốn và lao động lần lượt là 4 triệu VND và 3 triệu VND, nên tổng chi phí khi sử dụng K đơn vị vốn và L đơn vị lao động là

$$TC = 4K + 3L.$$

Số sản phẩm phải sản xuất là 160 nên ta có

$$2\sqrt{KL} = 160.$$

Vậy nên ta có bài toán tối ưu tìm min của hàm mục tiêu TC với ràng buộc $\sqrt{KL} = 80$. Từ ràng buộc này, ta có $KL = 6400$ hay $L = \dfrac{6400}{K}$. Thế L vào hàm mục tiêu, ta được:

$$TC = 4K + 3\Big(\frac{6400}{K}\Big) = 4K + \frac{19200}{K}$$

Vậy là bài toán trở thành bài toán tìm min của hàm số một biến số K:
Bước 1: tìm điểm dừng $\dfrac{d(TC)}{dK} = 4 - \dfrac{19200}{K^2} = 0 \Leftrightarrow K^2 = \dfrac{19200}{4} = 4800$. Do đó, $K \approx 69,28$. Bước 2: Vì đạo hàm bậc hai $\dfrac{d^2(TC)}{dK^2} = \dfrac{38400}{K^3} > 0$ nên điểm dừng $K \approx 69,28$ là điểm cực tiểu. Khi đó giá trị L tương ứng là

$$L = \frac{6400}{K} \approx \frac{6400}{69,28} \approx 92,38.$$

Chi phí cực tiểu là $TC = 4K + 3L = 4(69,28) + 3(92,38) = 554,26$ triệu VND.
■

4.2.3. Phương pháp nhân tử Lagrange

Với các ví dụ trên phương pháp thế là đơn giản khi ta dễ dàng biểu diễn biến số này qua biến số kia. Tuy nhiên, khi ràng buộc của bài toán phức tạp hơn, ta có thể sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange. Xét bài toán tối ưu ràng buộc sau:

$$\min/\max f(x,y) \text{ v.đ.k. } \phi(x,y) = M.$$

Các bước của phương pháp nhân tử Lagrange:
Bước 1: Lập hàm Lagrange:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda(M - \phi(x,y))$$

Bước 2: Giải hệ phương trình tìm ba ẩn số x, y và λ sau để tìm điểm dừng của hàm Lagrange:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

Chú ý rằng, để phân loại nghiệm tối ưu (x, y) thu được là nghiệm cực tiểu hay cực đại cần phải sử dụng các công cụ toán học liên quan đến đạo hàm riêng cấp hai. Tuy nhiên, việc tính toán này khá phức tạp.Vì vậy, trong khuôn khổ giáo trình này, ta bỏ qua việc xem xét các công cụ toán học này. Bạn đọc quan tâm có thể tìm hiểu thêm trong các sách tham khảo khác.

***Ví dụ* 4.2.3.1.** Một doanh nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm G_1 và G_2 với tổng chi phí $TC = 10Q_1 + Q_1Q_2 + 10Q_2$, trong đó Q_1 và Q_2 lần lượt là số sản phẩm G_1 và G_2. Gọi P_1 và P_2 là đơn giá cho sản phẩm G_1 và G_2 và

$$P_1 = 50 - Q_1 + Q_2$$

$$P_2 = 30 + 2Q_1 - Q_2$$

a/ Tìm cực đại lợi nhuận nếu biết rằng tổng số sản phẩm doanh nghiệp sản xuất là 15.

b/ Tính giá trị lợi nhuận tối ưu nếu tổng số sản phẩm sản xuất của doanh nghiệp tăng thêm 1 đơn vị.

Lời giải:

a/ Ta có doanh thu từ việc bán sản phẩm G_1 và G_2 lần lượt là:

$$TR_1 = P_1Q_1 = (50 - Q_1 + Q_2)Q_1 = 50Q_1 - Q_1^2 + Q_1Q_2$$

$$TR_2 = P_2Q_2 = (30 + 2Q_1 - Q_2)Q_2 = 30Q_2 + 2Q_1Q_2 - Q_2^2$$

Do đó, tổng doanh thu của doanh nghiệp là

$$TR = TR_1 + TR_2 = 50Q_1 + 30Q_2 + 3Q_1Q_2 - Q_1^2 - Q_2^2$$

Hàm lợi nhuận khi đó là:

$$\pi = TR - TC = (50Q_1 + 30Q_2 + 3Q_1Q_2 - Q_1^2 - Q_2^2) - (10Q_1 + Q_1Q_2 + 10Q_2)$$

$$\pi = 40Q_1 + 20Q_2 + 2Q_1Q_2 - Q_1^2 - Q_2^2$$

Tổng số sản phẩm là 15 nên ta có ràng buộc $Q_1 + Q_2 = 15$. Mô hình tối ưu của bài toán là:

$$\max\{\pi\} \text{ v.đ.k. } Q_1 + Q_2 = 15.$$

Bước 1: Lập hàm Lagrange:

$$\mathcal{L}(Q_1, Q_2, \lambda) = 40Q_1 + 20Q_2 + 2Q_1Q_2 - Q_1^2 - Q_2^2 + \lambda(15 - Q_1 - Q_2)$$

Bước 2: Giải hệ

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_2} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 40 - 2Q_1 + 2Q_2 - \lambda = 0 \\ 2Q_1 + 20 - 2Q_2 - \lambda = 0 \\ 15 - Q_1 - Q_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = 10 \\ Q_2 = 5 \\ \lambda = 30 \end{cases}$$

Lợi nhuận đạt cực đại khi $Q_1 = 10$ và $Q_2 = 5$ và giá trị cực đại là

$$\pi = 40(10) + 20(5) + 2(10)(5) - 10^2 - 5^2 = 475$$

b/ Khi tổng số lượng sản phẩm tăng thêm 1 đơn vị, tức là $Q_1 + Q_2 = 16$. Vậy là, ta có thể làm lặp lại các bước tính toán tương tự như phần a) với ràng buộc mới. Tuy nhiên, giá trị của λ cho ta thông tin hữu ích. Cụ thể, xét trường hợp tổng quát:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda, M) = f(x, y) + \lambda(M - \phi(x, y))$$

Nếu coi hàm số trên là hàm có bốn biến số kể cả biến số M, ta có

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial M} = \lambda$$

Vậy là, giá trị λ không chỉ có ý nghĩa đơn thuần về mặt toán học mà nó còn có ý nghĩa kinh tế. Nhân tử λ chính là giá trị thay đổi của hàm

Lagrange $\mathcal{L}$ khi M tăng 1 đơn vị. Thêm nữa,khi ràng buộc được thỏa mãn, tức khi $\phi(x,y)=M$, hàm Lagrange $\mathcal{L}$ chính là hàm mục tiêu $f((x,y)$.

Như vậy, không cần làm lại như phần a), ta kết luận, giá trị lợi nhuận mới sẽ tăng thêm một lượng là $\lambda=30$ đơn vị, $\pi=475+30=505$. ■

***Ví dụ* 4.2.3.2.** Sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange để tính K và L sao cho hàm sản xuất Cobb-Douglas

$$Q=AK^{\alpha}L^{\beta} \text{ } (A,\, \alpha, \text{ và } \beta \text{ là các hằng số dương})$$

đạt giá trị cực đại, trong đó K và L thỏa mãn ràng buộc:

$$P_KK+P_LL=M.$$

Lời giải:

Bước 1: Hàm Lagrange

$$\mathcal{L}(K,L,\lambda)=AK^{\alpha}L^{\beta}+\lambda(M-P_KK-P_LL)$$

Bước 2: Giải hệ

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial K}=0 \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial L}=0 \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta}-\lambda P_K=0 \\ A\beta K^{\alpha}L^{\beta-1}-\lambda P_L=0 \\ M-P_KK-P_LL=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha(AK^{\alpha}L^{\beta})}{K}-\lambda P_K=0 \\ \dfrac{\beta(AK^{\alpha}L^{\beta})}{L}-\lambda P_L=0 \\ P_KK+P_LL=M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\alpha Q}{K}-\lambda P_K=0 \\ \dfrac{\beta Q}{L}-\lambda P_L=0 \\ P_KK+P_LL=M \end{cases}$$

Từ hệ trên ta có

$$\lambda=\frac{\alpha Q}{P_KK} \text{ và } \lambda=\frac{\beta Q}{P_LL}.$$

Do đó, ta có

$$\frac{\alpha Q}{P_KK}=\frac{\beta Q}{P_LL} \Leftrightarrow \frac{P_KK}{\alpha}=\frac{P_LL}{\beta} \Leftrightarrow P_KK=\frac{\alpha}{\beta}P_LL$$

Thay vào phương trình $P_K K + P_L L = M$ ta có

$$\frac{\alpha}{\beta} P_L L + P_L L = M$$

$$\alpha L + \beta L = \frac{\beta M}{P_L}$$

$$(\alpha + \beta) L = \frac{\beta M}{P_L}$$

$$L = \frac{\beta M}{(\alpha + \beta) P_L}$$

Thay giá trị $L = \dfrac{\beta M}{(\alpha + \beta) P_L}$ vào phương trình $P_K K = \dfrac{\alpha}{\beta} P_L L$, ta được

$$P_K K = \frac{\alpha M}{(\alpha + \beta)} \Leftrightarrow K = \frac{\alpha M}{(\alpha + \beta) P_K}$$

Vậy giá trị của K và L để Q đạt cực đại là:

$$K = \frac{\alpha M}{(\alpha + \beta) P_K} \text{ và } L = \frac{\beta M}{(\alpha + \beta) P_L}.$$

■

4.3. Bài tập Chương 4

Hướng dẫn ôn tập

Mục 4.1: hàm số nhiều biến số; hàm sản xuất Cobb-Douglas; đạo hàm riêng; tính độ co giãn khi phân tích cung cầu trong kinh tế.

Mục 4.2: tối ưu không ràng buộc; phương pháp thế; phương pháp nhân tử Lagrange.

Sinh viên ôn tập lần lượt các vấn đề then chốt theo thứ tự trên đây, nghiên cứu kĩ các ví dụ, rèn luyện kĩ năng tính toán và giải quyết vấn đề qua việc giải được tối thiểu 50% số bài tập được liệt kê cho từng mục.

Bài tập mục 4.1

Bài 1. Cho hàm số $f(x, y) = \ln(x + y - 1)$

$a/$ Tính $f(1, 1)$ $b/$ Tính $f(1, 1)$

$c/$ Tìm và vẽ tập xác định $d/$ Tìm tập giá trị của hàm số

Bài 2. Tìm tập xác định D và biểu diễn nó trên mặt phẳng $0xy$:

$a/$ $f(x, y) = \sqrt{x + y}$ $b/$ $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$

$c/$ $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{y - x^2}}{1 - x^2}$ $d/$ $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - y^2}$

Bài 3. Tính các đạo hàm riêng cấp một và cấp hai của các hàm sau đây:

$a/$ $f(x, y) = xy$ $b/$ $f(x, y) = e^x y$ $c/$ $f(x, y) = x^2 \ln y$

$d/$ $f(x, y) = x^2 + 2x + y$ $e/$ $f(x, y) = 16x^{1/4}y^{3/4}$ $g/$ $f(x, y) = \dfrac{y}{x^2} + \dfrac{x}{y}$

Bài 4. Cho hàm số $z = x^2y^3 - 10xy + y^2$

a/ Tính z'_x và z'_y tại điểm $(2, 3)$

b/ Ước lượng sự thay đổi của z khi x tăng 0,2 và y giảm 0,1.

Bài 5. Tìm tất cả các đạo hàm riêng cấp một và cấp hai của hàm số

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1x_3^2}{x_2} + \ln(x_2x_3)$$

Bài 6. Cho hàm cầu

$$Q = 200 - 2P - P_A + 0,1Y^2,$$

trong đó $P = 10$, $P_A = 15$ và $Y = 100$. Tìm:

a/ Độ co giãn của cầu theo giá;

b/ Độ co giãn của cầu theo giá chéo;

c/ Độ co giãn của cầu theo thu nhập;

Ước lượng phần trăm thay đổi nhu cầu nếu P_A tăng 3%. Sản phẩm A là bổ sung hay thay thế được?

Bài 7. Cho hàm cầu

$$Q = \frac{P_A Y^2}{P},$$

trong đó $P_A = 10$, $Y = 2$ và $P = 4$, tìm độ co giãn của cầu theo thu nhập. Nếu P_A và P là cố định, ước lượng phần trăm thay đổi của Y để Q tăng 2%.

Bài 8. Cho hàm sản xuất

$$Q = 10\sqrt{KL} + 3L,$$

với $K = 90$ và $L = 40$.

a/ Tính các sản phẩm cận biên MP_K và MP_L.

b/ Ước lượng sự thay đổi của Q khi K tăng lên 3 đơn vị còn L giảm đi 2 đơn vị.

Bài tập mục 4.2

Bài 1. Tìm và phân loại điểm dừng của các hàm số sau:

a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$ *b*) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 10$

Bài 2. Hàm lợi nhuận khi sản xuất hai loại sản phẩm của một doanh nghiệp được cho bởi công thức

$$\pi = 24Q_1 - Q_1^2 - Q_1Q_2 - 2Q_2^2 + 33Q_2 - 43$$

Tìm số lượng sản phẩm mỗi loại để lợi nhuận đạt cực đại. Tính giá trị lợi nhuận khi đó.

Bài 3. Một doanh nghiệp sản xuất 2 loại sản phẩm G1 và G2 và bán ra thị trường với giá tương ứng là 70 USD và 50 USD. Tổng chi phí để sản xuất hai sản phẩm là

$$TC = Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2,$$

trong đó Q_1 và Q_2 lần lượt tương ứng là số lượng sản phẩm G1 và G2. Tìm cực đại lợi nhuận và số lượng Q_1 và Q_2 tối ưu.

Bài 4. Một doanh nghiệp sản xuất một loại sản phẩm tại hai nhà máy khác nhau. Các hàm chi phí tại mỗi nhà máy là:

$$TC_1 = 8Q_1 \text{ và } TC_2 = Q_2^2.$$

Hàm cầu cho sản phẩm này là

$$P = 100 - 2Q,$$

trong đó $Q = Q_1 + Q_2$. Tìm giá trị của Q_1 và Q_2 để cực đại lợi nhuận. Tính giá trị lợi nhuận đó.

Bài 5. Một doanh nghiệp có hàm sản xuất là

$$Q = 2\sqrt{L} + 3\sqrt{K},$$

trong đó Q,L và K tương ứng kí hiệu cho sản lượng, số nhân công và lượng vốn. Chi phí nhân công là 2 USD cho một đơn vị nhân công còn chi phí vốn là 1 USD cho mỗi đơn vị vốn. Sản phẩm được bán với giá 8 USD. Hãy chỉ ra rằng hàm lợi nhuận được xác định bởi công thức:

$$\pi = 16\sqrt{L} + 24\sqrt{K} - 2L - K$$

Tìm lợi nhuận cực đại và giá trị của L và K khi đó.

Bài 6. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$z = 6x - 3x^2 + 2y$$

với điều kiện

$$y - x^2 = 2$$

Bài 7. Hàm sản xuất của một công ti cho bởi

$$Q = 50KL$$

Chi phí cho một đơn vị vốn và lao động lần lượt là 2 USD và 3 USD. Tìm K và L để tổng chi phí đầu vào là nhỏ nhất biết sản lượng sản xuất là 1200.

Bài 8. Tổng chi phí để sản xuất x sản phẩm A và y sản phẩm B là

$$TC = 22x^2 + 8y^2 - 5xy.$$

Giả sử rằng công ti cam kết sản xuất tổng cộng 20 sản phẩm. Tìm số lượng sản phẩm mỗi loại để chi phí sản xuất là cực tiểu.

Bài 9. Hàm sản xuất của một doanh nghiệp cho bởi

$$Q = 10K^{1/2}L^{1/4}$$

Mỗi đơn vị vốn và đơn vị lao động có chi phí tương ứng là 4 USD và 5 USD. Doanh nghiệp dự trù dành 60 USD cho các chi phí này. Tìm giá trị K và L để sản lượng là cực đại.

Bài 10. Một doanh nghiệp sản xuất xe đạp có hàm lợi nhuận

$$\pi = 5x^2 - 10xy + 3y^2 - 240x,$$

trong đó x là số lượng khung xe và y là số lượng bánh xe. Tìm cực đại lợi nhuận với giả thiết doanh nghiệp không muốn khung xe và bánh xe bị dư thừa khi kết thúc quá trình sản xuất.

Bài 11. Tìm cực đại hàm số

$$Q = 10\sqrt{KL},$$

với điều kiện

$$K + 4L = 16.$$

Ước lượng sự thay đổi trong giá trị tối ưu của Q nếu ràng buộc thay đổi thành

$$K + 4L = 17.$$

Bài 12. Một doanh nghiệp sản xuất 3 loại sản phẩm A, B và C với số lượng lần lượt là x, y và z. Doanh nghiệp cam kết sản xuất 30 sản phẩm A và B. Hàm lợi nhuận tương ứng là

$$\pi = 8x + 12y + 4z - 0,5x^2 - 0,5y^2 - z^2$$

Tính số lượng sản phẩm mỗi loại cần sản xuất để cực đại lợi nhuận.

Bài 13. Một công ti đầu tư x đơn vị vốn vào dự án A và y đơn vị vốn vào dự án B. Doanh thu dự kiến cho mỗi đơn vị đầu tư là 400 USD với dự án A và 800 USD với dự án B. Tuy nhiên để đáp ứng được chính sách của công ti, giá trị x và y phải thỏa mãn ràng buộc

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y = 195$$

Công ti nên đầu tư vào dự án A và B như thế nào để cực đại doanh thu?

Tài liệu tham khảo chính Chương 4

[1] Nguyễn Quốc Hưng, *Toán cao cấp và một số ứng dụng trong kinh doanh*, Nhà xuất bản Giao thông vận tải, 2009 Chương 3: Hàm nhiều biến; Chương 4: Ứng dụng hàm nhiều biến

[2] Lê Đình Thúy, *Toán cao cấp cho các nhà kinh tế*, Nhà xuất bản Đại học Kinh tế Quốc dân, 2015 Chương 3: Hàm số nhiều biến số; Chương 4: Cực trị của hàm nhiều biến

[3] Ian Jacques, *Mathematics for Economics and Business*, 7th edition, Pearson, 2013. Chapter 5. Partial Differentiation

[4] James Stewart, *Calculus: Early Transcendentals*, 6th edition Thomson, 2008. Chapter 14: Partial Derivatives

Chương 5

Tích phân

Chương 5 cung cấp cho sinh viên các kiến thức và hiểu biết để thực hành các tính toán liên quan tới tìm tích phân bất định và tính tích phân xác định, cũng như các ứng dụng của tích phân trong kinh tế, kinh doanh, quản lí và tài chính.

Mục 5.1 ôn lại khái niệm về *tích phân bất định* và *các công thức cơ bản tìm tích phân bất định.* Mục 5.1 cũng trình bày một số *ứng dụng của tích phân bất định trong kinh tế*, khi cần *tìm các chi phí, doanh thu, tiêu dùng, tiết kiệm nếu cho biết các hàm biên hay tỉ lệ biên của chi phí, doanh thu, tiêu dùng, tiết kiệm.*

Mục 5.2 trình bày khái niệm về *tích phân xác định* và *công thức tính tích phân xác định*, cũng như các *ứng dụng của tích phân xác định trong kinh tế và tài chính*, cụ thể là *khái niệm và cách tính thặng dư của người tiêu dùng và nhà sản xuất*, tính toán *lượng vốn hình thành của một dòng đầu tư* và tính *giá trị* *hiện tại của một dòng thu nhập liên tục.*

5.1. Tích phân bất định và các ứng dụng

5.1.1. Khái niệm và một số công thức cơ bản

Trong tiểu mục này chúng ta ôn lại khái niệm về tích phân bất định đã học ở trung học phổ thông. Đồng thời, chúng ta cũng ôn lại một số công thức cơ bản tìm tích phân bất định, như công thức tìm tích phân bất định của các hàm số lũy thừa, mũ, của tổng hay hiệu hai hàm số.

Khái niệm tích phân bất định

Cho hàm số $f(x)$. Nếu tồn tại một hàm số $F(x)$ sao cho $F'(x) = f(x)$ thì $F(x)$ được gọi là nguyên hàm (hay đối đạo hàm) của $f(x)$. Lúc đó, với hằng số c tùy ý, ta cũng có $[F(x) + c]' = f(x)$, nên $[F(x) + c]$ cũng là nguyên hàm của $f(x)$.

Tập hợp các nguyên hàm của $f(x)$ được gọi là tích phân bất định của $f(x)$, và được kí hiệu như sau:

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

***Ví dụ* 5.1.1.1.** Tìm các tích phân bất định sau:

$$a/ \quad \int 3x^2 dx \qquad\qquad b/ \quad \int \frac{1}{x^4} dx$$

Lời giải:

a/ Từ $(x^3)' = 3x^2$ nên với hằng số c tùy ý

$$\int 3x^2 dx = x^3 + c.$$

b/ Vì $(-\frac{1}{3x^3})' = \frac{1}{x^4}$ nên với hằng số c tùy ý

$$\int \frac{1}{x^4} dx = -\frac{1}{3x^3} + c.$$

■

Một số công thức cơ bản tìm tích phân bất định, bao gồm tích phân của hàm số lũy thừa, hàm số mũ, tổng hay hiệu của hai hàm số:

$$\begin{aligned}
&\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \text{ với } n \neq -1,\\
&\int \frac{1}{x} dx = lnx + c,\\
&\int e^{mx} dx = \frac{1}{m} e^{mx} + c,\\
&\int [af(x) \pm bg(x)]dx = a\int f(x)dx \pm b\int g(x)dx.
\end{aligned}$$

***Ví dụ* 5.1.1.2.** Tìm các tích phân bất định:

a/ $\displaystyle\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + c,$

b/ $\displaystyle\int \frac{1}{x^4} dx = -\frac{1}{3x^3} + c,$

c/ $\displaystyle\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + c,$

d/ $\displaystyle\int x^{1/3} dx = \frac{x^{4/3}}{4/3} + c,$

e/ $\displaystyle\int [3x^4 - x^2]dx = \frac{3x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + c,$

g/ $\displaystyle\int [2e^{4x} - 3x^4]dx = \frac{e^{4x}}{2} - \frac{3x^5}{5} + c.$ ■

5.1.2. Các ứng dụng của tích phân bất định trong kinh tế

Với một hàm kinh tế đã cho, bằng cách lấy đạo hàm, ta có thể tính được hàm cận biên hay tỉ lệ biên của nó. Trong mục này, giả sử hàm cận biên hay tỉ lệ biên của hàm kinh tế đã được biết, ta cần đi tìm hàm kinh tế đó.

***Ví dụ* 5.1.2.1.** a/ Biết hàm chi phí cận biên của công ti là: $MC = Q^2 + 2Q + 4$, trong đó Q là lượng sản phẩm đầu ra, và chi phí cố định $FC = 100$. Tìm hàm tổng chi phí TC.

b/ Hàm doanh thu cận biên của một nhà sản xuất độc quyền là: $MR = 10 - 4Q$, trong đó Q là lượng sản phẩm đầu ra. Hãy tìm hàm tổng doanh thu và thiết lập phương trình của đường cầu.

c/ Cho biết khuynh hướng tiêu dùng biên là: $MPC = 0,5 + \dfrac{0,1}{\sqrt{Y}}$, và mức tiêu dùng $C = 85$ khi thu nhập $Y = 100$. Hãy tìm biểu thức của hàm tiêu dùng.

d/ Cho biết khuynh hướng tiết kiệm biên là: $MPS = 0,5 - \dfrac{0,1}{\sqrt{Y}}$, và mức tiết kiệm là $S = 0$ khi $Y = 100$. Hãy tìm biểu thức của hàm tiết kiệm.

Lời giải:

a/ Ta có $MC = TC'$ nên

$$TC = \int MCdQ = \int (Q^2 + 2Q + 4)dQ = \frac{Q^3}{3} + Q^2 + 4Q + c.$$

Vì $FC = 100$ là TC ở mức $Q = 0$, nên ta có $c = 100$, vậy:

$$TC = \frac{Q^3}{3} + Q^2 + 4Q + 100.$$

b/ Vì $MR = TR'$ nên

$$TR = \int MRdQ = \int (10 - 4Q)dQ = 10Q - 2Q^2 + c.$$

Vì $TR = 0$ ở mức $Q = 0$, ta có $c = 0$, do đó

$$TR = 10Q - 2Q^2.$$

Do $P = \dfrac{TR}{Q}$ nên phương trình của đường cầu là: $P = 10 - 2Q$.

c/ Ta có

$$C = \int MPCdY = \int (0,5 + \frac{0,1}{\sqrt{Y}})dY = 0,5Y + 0,2\sqrt{Y} + c.$$

Vì $C = 85$ khi $Y = 100$ nên $c = 33$. Do đó, hàm tiêu dùng là:

$$C = 0,5Y + 0,2\sqrt{Y} + 33.$$

d/ Ta có:

$$S = \int MPSdY = \int (0,5 - \frac{0,1}{\sqrt{Y}})dY = 0.5Y - 0.2\sqrt{Y} + c.$$

Vì $S = 0$ khi $Y = 100$ nên $c = -48$. Do đó, hàm tiết kiệm là:

$$S = 0,5Y - 0,2\sqrt{Y} - 48.$$

■

5.2. Tích phân xác định và ứng dụng

5.2.1. Khái niệm tích phân xác định

Trong tiểu mục này, chúng ta ôn lại cách tính diện tích hình được giới hạn bởi đồ thị của một hàm số $y = f(x)$, trục Ox và các đường $x = a, x = b$, qua đó cũng ôn lại khái niệm về tích phân xác định đã học ở trung học phổ thông.

Tính diện tích hình được giới hạn bởi đồ thị của hàm số

***Ví dụ* 5.2.1.1.** Tính diện tích của hình được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^2$, trục Ox và các đường $x = 1$ và $x = 2$.

Lời giải:

Trên hình 5.1, hình cần tính diện tích là phần có tô đậm.

Ta có

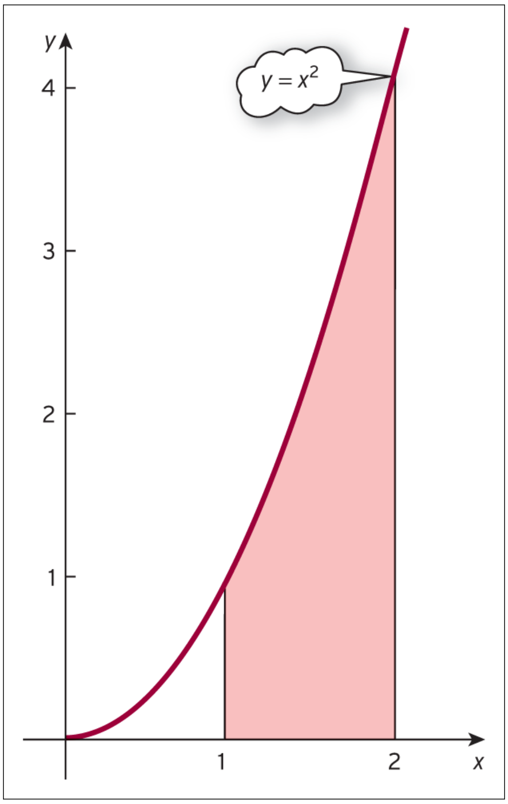
$$\int_1^2 x^2 dx = \left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Như vậy diện tích cần tìm là $\frac{7}{3}$. ■

Tích phân xác định

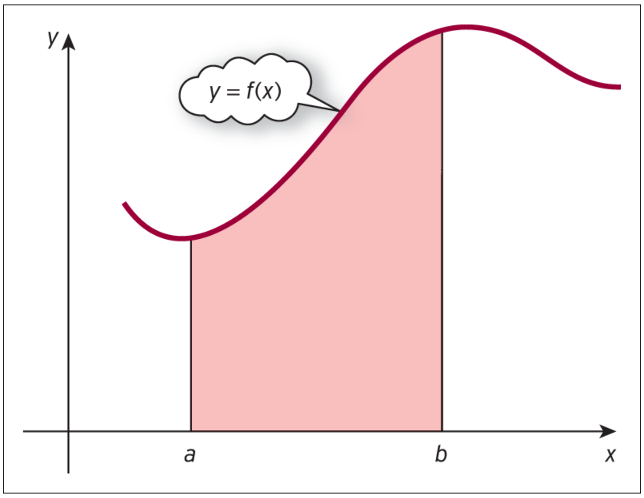
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ có nguyên hàm là $F(x)$, lúc đó tích phân xác định của $f(x)$ trên đoạn $[a, b]$ là một số được tính theo công thức sau:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$



Hình 5.1

Trên hình 5.2, diện tích của hình được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục Ox và các đường $x = a, x = b$, được tính theo công thức trên.



Hình 5.2

***Ví dụ* 5.2.1.2.** a/ Tính diện tích của hình được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 3x^{1/2}$, trục Ox và các đường $x = 1, x = 9$.

b/ Tính diện tích của hình được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 2x^3 + 1$, trục Ox và các đường $x = 1, x = 3$.

Lời giải:

a/ Diện tích cần tính là:

$$S = \int_1^9 3x^{1/2}dx = 2x^{3/2}\Big|_1^9 = 54 - 2 = 52.$$

b/ Diện tích cần tính là:

$$S = \int_1^3 (2x^3 + 1)dx = \left[\frac{x^4}{2} + x\right]\Big|_1^3 = \frac{81}{2} + 3 - \frac{1}{2} - 1 = 42.$$

■

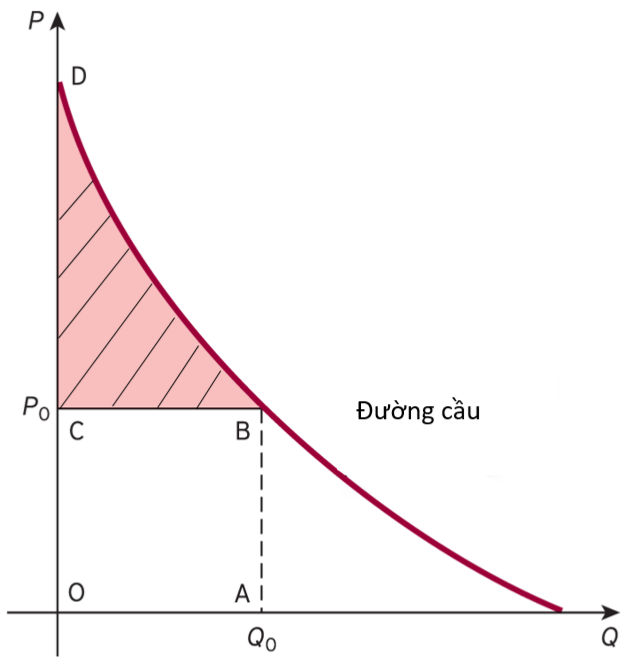
5.2.2. Tính thặng dư của người tiêu dùng và nhà sản xuất

Trong tiểu mục này chúng ta sẽ tìm hiểu một số ứng dụng của tích phân xác định trong kinh tế, cụ thể là khái niệm và cách tính thặng dư của người tiêu dùng và nhà sản xuất.

Thặng dư người tiêu dùng

Xét hàm cầu của một loại hàng hóa: $P = f(Q)$. Hàm cầu cho ta biết giá P của hàng hóa tương ứng với các lượng cầu Q khác nhau. Giả sử tại lượng cầu $Q = Q_0$, ta có giá một đơn vị hàng hóa là: $P = P_0$. Tổng số tiền người tiêu dùng chi ra để có tất cả Q_0 đơn vị hàng hóa là Q_0P_0 và chính là diện tích của hình chữ nhật OABC trên hình 5.3. Ở đây, P_0 là giá mà người tiêu dùng phải trả cho đơn vị cuối cùng, có nghĩa là lượng tiền người tiêu dùng phải chi ra để mua đơn vị hàng hóa thứ Q_0. Đối với các đơn vi hàng hóa từ 1, 2, ..., cho tới Q_0, người tiêu dùng sẽ sẵn sàng trả giá cao hơn, và tổng số tiền này chính là diện tích của hình được giới hạn bởi đường cầu $P = f(Q)$, trục OQ, các đường mức $Q = 0$ và $Q = Q_0$, như trên hình 5.3.

Từ đó, như ta thấy trên hình 5.3, phần hình được tô màu BCD chính là lợi ích của người tiêu dùng khi trả mức giá cố định P_0 cho tất cả các đơn vị hàng hóa từ 1, 2, ..., tới Q_0, và được gọi là thặng dư của người tiêu dùng.



Hình 5.3

Vậy thặng dư người tiêu dùng (được viết tắt là CS) được tính theo công thức:

$$CS = \int_0^{Q_0} f(Q)dQ - Q_0P_0.$$

Ví dụ 5.2.2.1. Tính thặng dư của người tiêu dùng tại $Q = 5$ cho biết đường cầu: $P = 30 - 4Q$.

Lời giải:

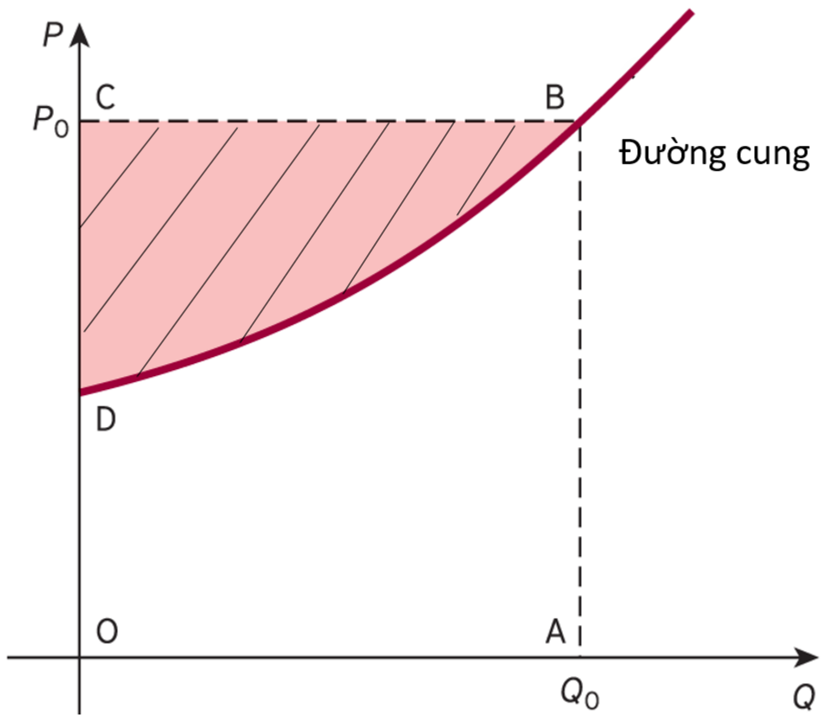
Ta có $Q_0 = 5$ nên $P_0 = 30 - 4 \times 5 = 10$. Áp dụng công thức trên, thặng dư người tiêu dùng là:

$$CS = \int_0^5 (30 - 4Q)dQ - 5.10 = [30Q - 2Q^2]_0^5 - 50 = 30.5 - 2.25 - 50 = 50.$$

■

Thặng dư nhà sản xuất

Xét hàm cung của một loại hàng hóa: $P = g(Q)$. Hàm cung cho ta biết giá P của hàng hóa tương ứng với các lượng cung Q khác nhau. Giả sử tại lượng cung $Q = Q_0$, ta có giá một đơn vị hàng hóa là: $P = P_0$. Tổng số tiền nhà sản xuất thu về khi bán ra tất cả Q_0 đơn vị hàng hóa là Q_0P_0 và chính là diện tích của hình chữ nhật OABC trên hình 5.4. Ở đây, P_0 là giá mà nhà sản xuất bán ra thị trường cho đơn vị cuối cùng, có nghĩa là lượng tiền nhà sản xuất thu về khi bán ra đơn vị hàng hóa thứ Q_0. Đối với các đơn vi hàng hóa từ $1, 2, \ldots,$ cho tới Q_0, nhà sản xuất sẵn sàng bán ra với giá thấp hơn, và tổng số tiền thu về như vậy chính là diện tích của hình được giới hạn bởi đường cung $P = g(Q)$, trục OQ, các đường mức $Q = 0$ và $Q = Q_0$, như trên hình 5.4.



Hình 5.4

Từ đó, như ta thấy trên hình 5.4, phần hình được tô màu BCD chính là lợi ích của nhà sản xuất khi bán với giá cố định P_0 cho tất cả các đơn vị hàng hóa từ $1, 2, \ldots,$ tới Q_0, và được gọi là thặng dư của nhà sản xuất.
Vậy thặng dư nhà sản xuất (được viết tắt là PS) được tính theo công thức:

$$PS = Q_0P_0 - \int_0^{Q_0} g(Q)dQ.$$

***Ví dụ* 5.2.2.2.** Cho hàm cầu: $P = 35 - Q_D^2$, và hàm cung: $P = 3 + Q_S^2$. Hãy tính thặng dư của nhà sản xuất với điều kiện cạnh tranh lành mạnh.

Lời giải:

Với điều kiện cạnh tranh lành mạnh, giá cả của hàng hóa được xác định bởi thị trường. Trước khi tính thặng dư nhà sản xuất ta cần tìm giá và lượng cân bằng từ điều kiện: $P = 35 - Q^2, P = 3 + Q^2 \Rightarrow 35 - Q^2 = 3 + Q^2 \Rightarrow Q^2 = 16 \Rightarrow Q = 4$ (lấy) hoặc $Q = -4$ (loại). Vậy lượng cân bằng $Q_0 = 4$. Thay vào hàm cầu (hoặc hàm cung), ta sẽ tìm được giá cân bằng, chẳng hạn, $P_0 = 35 - 16 = 19$.

Áp dụng công thức tính thặng dư nhà sản xuất, ta có:

$$PS = Q_0P_0 - \int_0^{Q_0} g(Q)dQ = 4.19 - \int_0^4 (3+Q^2)dQ = 76 - [(3.4+4^3/3) - 0] = 42,667.\blacksquare$$

5.2.3. Các ứng dụng khác của tích phân xác định

Trong tiểu mục này chúng ta nghiên cứu các ứng dụng của tích phân xác định trong việc tính toán lượng vốn hình thành của một dòng đầu tư và tính giá trị hiện tại của một dòng thu nhập liên tục.

Tính toán lượng vốn hình thành của một dòng đầu tư

Xét một dòng đầu tư với tốc độ đầu tư ròng tại thời điểm t là $I(t)$. Ta có thể hiểu $I(t)$ là tốc độ thay đổi của dự trữ vốn $K(t)$, nói cách khác, mối quan hệ giữa $I(t)$ và $K(t)$ như sau:

$$I(t) = \frac{dK}{dt} = K'(t)$$

hay

$$K(t) = \int I(t)dt.$$

Từ đó, ta có công thức tính lượng vốn hình thành của một dòng đầu tư trong kì thời gian từ $t = t_1$ tới $t = t_2$: $\int_{t_1}^{t_2} I(t)dt = K(t_2) - K(t_1)$.

Ví dụ 5.2.3.1. Xét một dòng đầu tư (đơn vị tiền tệ là USD) với tốc độ đầu tư ròng là: $I(t) = 9000\sqrt{t}$. Tính:

a/ Lượng vốn hình thành từ cuối năm 1 đến cuối năm thứ 4;

b/ Số năm cần thiết trước khi vốn dự trữ vượt quá 100000 USD.

Lời giải:

a/ Lượng vốn hình thành từ cuối năm 1 đến cuối năm 4 là:

$$\int_1^4 9000\sqrt{t}dt = 9000.(2/3).(4^{3/2} - 1) = 42000 \text{ USD}.$$

b/ Số năm T cần thiết trước khi vốn dự trữ vượt quá 100000 USD thỏa mãn:

$$\int_0^T 9000\sqrt{t}dt = 9000\frac{t^{3/2}}{3/2}\Big|_0^T = 6000.T^{3/2} = 100000 \Rightarrow T \approx 6,5 \text{ năm}.$$

■

Giá trị hiện tại của một dòng thu nhập liên tục

Trong Chương 2, chúng ta biết rằng để chiết khấu giá trị tương lai S về giá trị hiện tại P, có thể sử dụng công thức: $P = Se^{-rt/100}$, khi lãi kép được hình thành liên tục, với r (%) là tỉ lệ chiết khấu, t là số năm lãi kép được hình thành. Xem xét một quỹ được hình thành bởi dòng niên kim / dòng thu nhập liên tục với tốc độ $S = S(t)$ USD một năm. Để hình dung cụ thể về dòng thu nhập liên tục kéo dài trong n năm, ta có thể coi đây là dòng thu nhập rời rạc theo tuần (tức là các kì tính lãi kép là 1/52 năm) với tốc độ $S(t)/52$ một tuần. Sử dụng công thức chiết khấu trên, giá trị hiện tại của quỹ là:

$$P = S(t_1)e^{-rt_1/100}\triangle t_1 + S(t_2)e^{-rt_2/100}\triangle t_2 + ... + S(t_q)e^{-rt_q/100}\triangle t_q$$

với tổng số tuần trong n năm là: $q = 52n$ và

$$\triangle t_1 = \triangle t_2 = \cdots = \triangle t_q = \frac{1}{52}, \quad t_1 = \frac{1}{52}, \quad t_2 = \frac{2}{52}, \quad t_q = \frac{52n}{52}.$$

Thật vậy, ta xét, chẳng hạn số hạng đầu tiên của tổng tích phân trên:

$$S(t_1)e^{-rt_1/100}\triangle t_1 = S\Big(\frac{1}{52}\Big)e^{-r(\frac{1}{52})/100}\Big(\frac{1}{52}\Big)$$

thì thấy ngay đây chính là giá trị hiện tại của lượng thu nhập là $S\left(\frac{1}{52}\right).\left(\frac{1}{52}\right)$ tại thời điểm cuối tuần 1. Các số hạng tiếp theo chính là giá trị hiện tại của lượng thu nhập tại các thời điểm cuối tuần $2, 3, \cdots, 52n$.

Vì vậy, khi ta chuyển từ dòng thu nhập rời rạc theo tuần sang dòng thu nhập liên tục, thì tổng tích phân trên đây sẽ có giới hạn là tích phân xác định sau:

$$P = \int_0^n S(t)e^{-\frac{rt}{100}}dt.$$

Đây chính là công thức tính giá trị hiện tại của một dòng thu nhập liên tục trong n năm với tốc độ thu nhập ròng là $S(t)$ một năm.

***Ví dụ* 5.2.3.2.** Tính giá trị hiện tại của một dòng thu nhập liên tục trong 5 năm ở mức không đổi 1000 USD một năm nếu tỉ lệ chiết khấu là 9%.

Lời giải:

Sử dụng công thức tính giá trị hiện tại của dòng thu nhập, ta có:

$$P = \int_0^n S(t)e^{-\frac{rt}{100}}dt = \int_0^5 1000e^{-0,09t}dt = 4026,35 \text{ USD}.$$

■

5.3. Bài tập Chương 5

Hướng dẫn ôn tập

Mục 5.1: khái niệm về tích phân bất định; các công thức cơ bản tìm tích phân bất định; ứng dụng của tích phân bất định trong kinh tế: tìm các chi phí, doanh thu, tiêu dùng, tiết kiệm nếu cho biết các hàm biên hay tỉ lệ biên của chi phí, doanh thu, tiêu dùng, tiết kiệm.

Mục 5.2: khái niệm về tích phân xác định; công thức tính tích phân xác định; ứng dụng của tích phân xác định trong kinh tế và tài chính: tính thặng dư của người tiêu dùng và nhà sản xuất, tính lượng vốn hình thành của một dòng đầu tư, tính giá trị hiện tại của một dòng thu nhập liên tục.

Sinh viên ôn tập lần lượt các vấn đề then chốt theo thứ tự trên đây, nghiên cứu kĩ các ví dụ, rèn luyện kĩ năng tính toán và giải quyết vấn đề qua việc giải được tối thiểu 50% số bài tập được liệt kê cho từng mục.

Bài tập mục 5.1

Bài 1. Tìm các tích phân bất định sau đây:

$$a/\ \int 3x dx \qquad b/\ \int 5x^4 dx \qquad c/\ \int 10x^8 dx \qquad d/\ \int x^{20} dx$$

Bài 2. Tìm các tích phân bất định sau đây:

$$\begin{array}{lll} a/ \int x^7 dx & b/ \int \dfrac{4}{x^5} dx & c/ \int e^{5x} dx \\ d/ \int x^{-2/5} dx & e/ \int [x^{10} - 8x^6] dx & g/ \int [-5e^{3x} + 3x^5] dx \end{array}$$

Bài 3.

a/ Hãy chứng tỏ rằng $\sqrt{x}(\sqrt{x} + x^2) = x + x^{5/2}$. Từ đó tìm:

$$\int \sqrt{x}(\sqrt{x} + x^2) dx.$$

b/ Áp dụng cách thức như trong phần a/ để tìm tích phân bất định cho các hàm số sau:

$$f(x) = x^4(x^6 + 1/x^2), \quad f(x) = e^{2x}(e^{3x} + e^{-x} + 3), \quad f(x) = x^{3/2}(\sqrt{x} - 1/\sqrt{x}).$$

Bài 4.

a/ Biết hàm chi phí cận biên của công ti là: $MC = 4$, trong đó Q là lượng sản phẩm đầu ra, và chi phí cố định $FC = 500$. Hãy tìm biểu thức của hàm tổng chi phí TC và tính TC khi công ti sản xuất 40 sản phẩm.

b/ Hàm doanh thu cận biên của một nhà sản xuất độc quyền là: $MR = 100 - 6Q$, trong đó Q là lượng sản phẩm đầu ra. Hãy tìm hàm tổng doanh thu và thiết lập phương trình của đường cầu.

c/ Cho biết khuynh hướng tiêu dùng biên là: $MPC = 0,5 + 0,1/\sqrt{Y}$, và mức tiêu dùng $C = 100$ khi thu nhập $Y = 144$. Hãy tìm biểu thức của hàm tiêu dùng.

d/ Cho biết khuynh hướng tiết kiệm biên là: $MPS = 0,5 - 0,1/\sqrt{Y}$, và mức tiết kiệm là $S = 40$ khi $Y = 169$. Hãy tìm biểu thức của hàm tiết kiệm.

Bài 5.

a/ Tìm hàm tiêu dùng biết: $MPC = 20 + 10/Y^{3/4}$, và mức tiêu dùng là 420 khi $Y = 16$.

b/ Cho biết hàm chi phí biên: $MC + 15 + 3Q^2$, hãy tìm biểu thức của chi phí biến thiên (cho một đơn vị sản phẩm)

Bài 6. Tìm biểu thức của hàm tiết kiệm, cho biết:

$$MPC = 0,4 + 0,4/Y \text{ và } C = 50 \text{ khi } Y = 100.$$

Bài 7. Cho biết các hàm doanh thu biên và chi phí biên của một hàng sản xuất như sau: $MR = 240 - 0,6Q^2$ và $MC = 150 + 0,3Q^2$. Cho biết thêm chi phí cố định là 50, hãy xác định lợi nhuận tối đa.

Bài tập mục 5.2

Bài 1. Tính các tính phân xác định:

$$a/ \int_1^2 (x^4 - 1)dx \qquad b/ \int_1^3 (3x^2 + 2x + 1)dx \qquad c/ \int_0^4 (e^3 + 1)dx$$

Bài 2. Hãy tính các tích phân xác định sau:

$$a/\int_{-1}^{2}(5x^2-4x+6)dx \qquad b/\int_{2}^{10}\frac{1}{(2x+5)\sqrt{2x+5}}dx.$$

Bài 3. Tính thặng dư của người tiêu dùng tại $Q=6$ cho biết đường cầu: $P=90-Q^{1/2}$.

Bài 4. Cho hàm cầu: $P=50-2Q_D$, và hàm cung: $P=10+2Q_S$. Hãy tính thặng dư người tiêu dùng và thặng dự nhà sản xuất với điều kiện cạnh tranh lành mạnh.

Bài 5. Xét một dòng đầu tư (đơn vị tiền tệ là triệu VND) với tốc độ đầu tư ròng là: $I(t)=800t^{1/3}$. Hãy tính:

a/ Lượng vốn hình thành từ cuối năm 1 đến cuối năm thứ 8.

b/ Số năm cần thiết trước khi vốn dự trữ vượt quá 48600 triệu VND.

Bài 6. Tính giá trị hiện tại của một dòng thu nhập liên tục trong 10 năm ở mức không đổi 500 triệu VND một năm nếu tỉ lệ chiết khấu là 6%.

Bài 7.

a/ Tính thặng dư của người tiêu dùng tại $Q=8$ biết hàm cầu: $P=50-4Q$.

b/ Cho biết thặng dư của nhà sản xuất là 400 tại $Q=a$ với hàm cung: $P=6+8Q$. Hãy tìm giá trị của a.

Bài 8. Cho hàm cầu: $P=74-Q_D^2$, và hàm cung: $P=(Q_S+2)^2$. Hãy tính thặng dự của người tiêu dùng và nhà sản xuất trong điều kiện cạnh tranh hoàn hảo.

Bài 9. Cho biết tốc độ đầu tư ròng: $I(t)=100e^{0,1t}$. Hãy tính:

a/ Lượng vốn được hình thành từ cuối năm thứ 2 tới cuối năm thứ 5.

b/ Số năm cần thiết trước khi vốn dự trữ vượt quá 100000 USD.

Bài 10. Tính giá trị hiện tại của một dòng thu nhập liên tục ở mức không đổi 1000 USD một năm nếu tỉ lệ chiết khấu là 5% và tiền được chi trả trong:
a/ 3 năm, b/ 10 năm, c/ 100 năm, d/ vĩnh viễn.

Bài 11. Cho biết 25000 USD là giá trị hiện tại của một dòng thu nhập liên tục trong n năm ở mức không đổi 5000 USD một năm với tỉ lệ chiết khấu 10% năm. Hãy tìm giá trị của n với kết quả tính toán làm tròn tới 1 chữ số thập phân.

Tài liệu tham khảo chính Chương 5

[1] Nguyễn Quốc Hưng, *Toán cao cấp và một số ứng dụng trong kinh doanh*, Nhà xuất bản Giao thông vận tải, 2009. Tập 1. Chương 5: Tích phân và một số ứng dụng

[2] Lê Đình Thúy, *Toán cao cấp cho các nhà kinh tế*, Nhà xuất bản Đại học Kinh tế Quốc dân, 2015. Chương 5: Phép toán tích phân

[3] Teresa Bradley, *Essential Mathematics for Economics and Business*, 4th edition, John Wiley and Sons, 2013. Chapter 8. Integration and Applications

[4] Ian Jacques, *Mathematics for Economics and Business*, 7th edition, Pearson, 2013. Chapter 6. Integration

Chương 6

Ma trận

Chương 6 cung cấp cho sinh viên các kiến thức và hiểu biết để thực hành các tính toán liên quan tới các phép toán ma trận, công thức Cramer giải hệ phương trình tuyến tính n ẩn n phương trình, cũng như các ứng dụng liên quan trong phân tích các mô hình kinh tế.

Mục 6.1 tìm hiểu khái niệm *ma trận*, *các phép toán ma trận cơ bản*, bao gồm: phép toán *chuyển vị ma trận*, phép toán *cộng hoặc trừ hai ma trận*, phép toán *nhân ma trận với một số* và phép toán *nhân hai ma trận*. Mục 6.1 cũng trình bày về khái niệm *hệ phương trình tuyến tính* và *cách viết hệ phương trình tuyến tính dưới dạng phương trình ma trận*.

Mục 6.2 tìm hiểu về *ma trận nghịch đảo*, *phép toán tìm ma trận nghịch đảo* và *phương pháp ma trận nghịch đảo giải hệ phương trình tuyến tính* cũng như các ứng dụng của phương pháp này trong *phân tích cân bằng các mô hình kinh tế*.

Mục 6.3 trình bày về việc áp dụng *quy tắc Cramer giải hệ phương trình tuyến tính n ẩn n phương trình* cụ thể cho các trường hợp n =2, 3 và 4, cũng như các ứng dụng của phương pháp này trong *phân tích cân bằng một số mô hình kinh tế vĩ mô* bao gồm *mô hình thu nhập quốc dân* và *mô hình thương mại giữa hai nước*.

6.1. Các phép toán ma trận cơ bản

6.1.1. Định nghĩa ma trận

Ma trận là một khái niệm hết sức cơ bản của toán học và được ứng rộng rãi trong phân tích kinh tế và tài chính. Trong tiểu mục này, chúng ta xem xét định nghĩa và kí hiệu ma trận.

Bài toán dẫn tới khái niệm ma trận

Một hãng sản xuất ba loại hàng hóa: G1, G2 và G3 và được bán cho hai nhà cung cấp C1 và C2. Doanh số bán hàng của hãng sản xuất hàng tháng cho hai nhà cung cấp được tổng hợp trong bảng 6.1 dưới đây.

Bảng 6.1

		Doanh số bán hàng		
		G1	G2	G3
Bán cho nhà cung cấp	C1	7	3	4
	C2	1	5	6

Thông tin trên có thể được viết lại dưới dạng ma trận doanh số bán hàng cấp 2×3, với 2 hàng và 3 cột, gồm với 6 phần tử như sau:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Như vậy, ma trận trên đây có thể ví như một tủ có 6 ngăn, 3 ngăn ở hàng trên và 3 ngăn ở hàng dưới, được *sử dụng để lưu trữ dữ liệu* doanh số bán hàng. Người ta cũng gọi ma trận trên đây là một mảng hai chiều cấp 2×3.

Định nghĩa và kí hiệu ma trận

Một mảng hình chữ nhật các số, được bao quanh bởi một cặp dấu ngoặc vuông hoặc tròn, được gọi là ma trận. Ma trận có m hàng và n cột được gọi là ma trận cấp $m{\times}n$.

Số nằm trên hàng thứ i và cột j của ma trận được gọi là phần tử của ma trận và được kí hiệu là a_{ij}. Ma trận được biểu thị bằng các chữ hoa **A, B, C** ... Ma trận cấp $m \times n$ được kí hiệu một cách tổng quát như sau:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Nói riêng, một ma trận cấp 2×3 được kí hiệu bởi:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Các ma trận đặc biệt

Ma trận **O** (đọc là ma trận không) là ma trận có tất cả các phần tử là 0. Như vậy ta có nhiều ma trận **O** với các cấp $m{\times}n$ khác nhau. Ma trận cấp $m \times 1$ còn được gọi là véc tơ cột với m tọa độ, ma trận cấp $1{\times}n$ được gọi là véc tơ hàng với n tọa độ.

Ma trận vuông là ma trận có số hàng bằng số cột. Ma trận vuông có các phần tử nằm trên đường chéo chính đều bằng 1, còn các phần tử khác đều bằng

0, được gọi là **ma trận đơn vị**. Như vậy ta có nhiều ma trận đơn vị với các cấp $n \times n$ (hay cấp n nếu nói một cách vắn tắt) khác nhau.

***Ví dụ* 6.1.1.1.** a/ Ma trận $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ là ma trận vuông cấp 2.

b/ Ma trận $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ là ma trận cấp 3×4.

c/ Ma trận $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ là ma trận $\mathbf{O}$ cấp 2×3.

d/ Ma trận $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ là ma trận đơn vị cấp 3.

e/ Ma trận $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ là véc tơ hàng có 3 tọa độ.

g/ Ma trận $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ là véc tơ cột có 2 tọa độ.

h/ Với các kí hiệu trên đây, $b_{12} = 1$, $c_{32} = 4$, $i_{33} = 1$, $i_{31} = 0$. ■

6.1.2. Các phép toán ma trận cơ bản

Trong tiểu mục này ta xem xét các phép toán ma trận cơ bản, bao gồm: phép toán chuyển vị ma trận, phép toán cộng hoặc trừ hai ma trận, phép toán nhân ma trận với một số và phép toán nhân hai ma trận.

Phép toán chuyển vị ma trận

Xét một ma trận, để cho đơn giản, ma trận cấp 2×3: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$.

Lúc đó, nếu ta chuyển đổi vị trí các hàng thành các cột (và do đó các cột lại trở thành các hàng) thì ta có ma trận chuyển vị của ma trận đã cho được kí hiệu và viết như sau:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

Dễ thấy, ma trận chuyển vị A^T có cấp 3×2. Ta dùng chữ T để chỉ ma trận chuyển vị.

Một cách tổng quát, cho một ma trận **A** cấp $m \times n$. Lúc đó, ma trận chuyển vị của **A** được kí hiệu bởi A^T là một ma trận cấp $n \times m$, tìm được bằng cách thay thế các hàng bằng các cột (cũng có nghĩa là thay thế các cột bằng các hàng).

***Ví dụ* 6.1.2.1.** a/ Tìm ma trận chuyển vị của các ma trận sau đây:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

b/ Tìm giá trị của a^T_{23} và b^T_{31}.

Lời giải:

a/ Ta có

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 4 & 1 & 7 \\ 2 & 9 & 6 & 0 & 8 \end{bmatrix} \text{ và } B^T = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b/ $a^T_{23} = 4$ và $b^T_{31} = 1$. ■

Phép cộng và trừ ma trận

Xét 02 ma trận cùng cấp **A** và **B**, để cho đơn giản, ta coi **A** và **B** có cấp 2×3:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \text{ và } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}.$$

Khi thực hiện phép toán cộng (trừ) hai ma trận **A** và **B** ta sẽ thu được ma trận **C** cùng cấp với các ma trận **A** và **B** với các phần tử tìm được bằng cách cộng (trừ) các phần tử tương ứng:

$$\mathbf{C}{=}\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & a_{13} \pm b_{13} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & a_{23} \pm b_{23} \end{bmatrix}$$

Như vậy ta có $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$, với mọi $i = 1, 2$ và với mọi $j = 1, 2, 3$.

Cần lưu ý rằng ta chỉ có thể thực hiện các phép toán cộng hoặc trừ hai ma trận khi chúng có cùng một cấp, lúc đó: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.

***Ví dụ* 6.1.2.2.** Cho $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ và $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$.

Tìm **A+B**, **A-B** và **A-A**.

Lời giải:

Ta có

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 14 & 3 & 5 \\ -1 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \text{ - } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -5 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

và $\mathbf{A} - \mathbf{A}$ là ma trận **O** cấp 2×3. ■

Phép toán nhân ma trận với một số

Xét ma trận **A**, để đơn giản, ta coi **A** có cấp 2×3. Lúc đó ta có thể nhân ma trận **A** với một số k để được một ma trận được kí hiệu là $k\mathbf{A}$ với các phần tử nhận được bằng cách nhân số k tương ứng với các phần tử của ma trận đã cho.

$$k\mathbf{A} = k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{bmatrix}$$

***Ví dụ* 6.1.2.3.** Cho ma trận $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$. Hãy tìm 12**A**, -**A**, 0**A**.

Lời giải:

Ta có:

$$12\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 12.7 & 12.3 & 12.4 \\ 12.1 & 12.5 & 12.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 84 & 36 & 48 \\ 12 & 60 & 72 \end{bmatrix}$$

$$-\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -7 & -3 & -4 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$0\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

■

Chú ý rằng, nếu **A** và **B** là các ma trận cùng cấp, k, p, q, là các số thực thì ta luôn có: $k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$, $(p+q)\mathbf{A} = p\mathbf{A} + q\mathbf{A}$, $(pq)\mathbf{A} = p(q\mathbf{A})$.

Phép toán nhân ma trận với ma trận

Trước hết ta xét phép toán nhân véc tơ hàng có n tọa độ với một véc tơ cột có cùng số tọa độ. Để cho đơn giản, ta chọn $n = 3$. Thật vậy, giả sử ta có véc tơ hàng $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 50 & 30 & 20 \end{bmatrix}$ và véc tơ cột $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 175 \end{bmatrix}$. Các véc tơ được kí hiệu bởi các chữ thường đậm. Lúc đó ta có thể nhân véc tơ **p** với véc tơ **q**, với véc tơ **p** viết bên trái và véc tơ **q** viết bên phải để được một số thực, được kí hiệu và tính như sau:

$$\begin{aligned}\mathbf{pq} = & \begin{bmatrix} 50 & 30 & 20 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 175 \end{bmatrix} \\ = & \ 50.100 + 30.200 + 20.175 = 5000 + 6000 + 3500 = 14500.\end{aligned}$$

Một cách tổng quát *ta có thể nhân một véc tơ hàng (viết bên trái) với một véc tơ cột (viết bên phải) với điều kiện hai véc tơ này có cùng số tọa độ*. Kết quả cho ta một số thực tính được bằng cách lấy các tọa độ của véc tơ viết bên trái nhân tương ứng với các tọa độ của véc tơ bên phải, sau đó lấy tổng của tất cả các giá trị của các tích vừa tính được. Phép toán nhân hai véc tơ như trên chính là phép toán nhân vô hướng hai véc tơ như đã học ở trung học phổ thông.

Bây giờ ta chuyển sang xét phép toán nhân ma trận $\mathbf{A}$ cấp $m \times s$ với ma trận $\mathbf{B}$ cấp $s \times n$. Chú ý rằng ta chỉ có thể nhân hai ma trận trên, $\mathbf{A}$ là ma trận viết bên trái và $\mathbf{B}$ là ma trận viết bên phải, với điều kiện ma trận $\mathbf{A}$ có số cột bằng số hàng của ma trận $\mathbf{B}$. Lúc đó, tích của hai ma trận $\mathbf{A}$ và $\mathbf{B}$ là một ma trận $\mathbf{C}$ có cấp $m \times n$ và các phần tử c_{ij} của ma trận $\mathbf{C}$ được tính theo quy tắc:

$$\mathbf{c}_{ij} = \textbf{(hàng i của ma trận A)}\times\textbf{(cột j của ma trận B)},$$

với mọi chỉ số $i = 1, 2, \ldots, m$ và mọi chỉ số $j = 1, 2, \ldots, n$.

***Ví dụ* 6.1.2.4.** Cho hai ma trận: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ và $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Hãy tính ma trận $\mathbf{AB}$ (nếu có).

Lời giải:

Ta thấy ma trận $\mathbf{A}$ có cấp 2×3 và ma trận $\mathbf{B}$ có cấp 3×4, tức là số cột của $\mathbf{A}$ bằng số hàng của $\mathbf{B}$, đều bằng 3. Vì vậy ta có thể nhân ma trận $\mathbf{A}$ (bên trái) với ma trận **B** (bên phải) để được ma trận **C** cấp 2×4 như sau:

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 5 & 4 \\ 23 & 17 & 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

Thật vậy, ta có thể dễ dàng kiểm tra lại:

$$\begin{aligned} c_{11} &= (\text{hàng 1 của } \mathbf{A}) \times (\text{cột 1 của } \mathbf{B}) \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = 2.3 + 1.1 + 0.5 = 7. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{23} &= (\text{hàng 2 của } \mathbf{A}) \times (\text{cột 3 của } \mathbf{B}) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1.2 + 0.1 + 4.1 = 6. \end{aligned}$$

Các phần tử khác của ma trận **C** cũng có thể được kiểm tra một cách tương tự. ■

Chú ý rằng: **A(B + C) = AB + AC, (A + B)C = AC + BC, A(BC) = (AB)C** nếu các phép toán ma trận ở các vế phải và vế trái có thể thực hiện được. Trong khi đó, cho hai ma trận **A** và **B**, thì chưa chắc đã có thể nhân **AB** hay **BA**; còn trong trường hợp ta có thể nhân **AB** và **BA**, thì nói chung **AB**$\neq$**BA**.

***Ví dụ* 6.1.2.5.** Cho $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ và $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Hãy tìm **AB** và **BA**. Sau đó kiểm tra lại rằng **AB**$\neq$ **BA**.

Lời giải:

Ta có

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 8 \end{bmatrix},$$

còn

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rõ ràng trong ví dụ này: **AB**$\neq$ **BA**. ■

***Ví dụ* 6.1.2.6.** Hãy viết hệ phương trình tuyến tính sau đây dưới dạng phương trình ma trận:

$$\begin{cases} 2x - 5y &= 6 \\ 7x + 8y &= -1 \end{cases}$$

Lời giải:

Trước hết, ta lập ma trận các hệ số vế trái $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, viết véc tơ các ẩn dước dạng cột $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, và viết các hệ số vế phải dưới dạng cột $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Lúc đó hệ phương trình tuyến tính đã cho có thể viết dưới dạng phương trình ma trận sau đây:

$$\mathbf{Ax{=}B} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x - 5y \\ 7x + 8y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5y &= 6 \\ 7x + 8y &= -1 \end{cases}$$

■

6.2. Phép toán tìm ma trận nghịch đảo

6.2.1. Ma trận đơn vị và tính chất

Định nghĩa ma trận đơn vị

Ma trận đơn vị cấp 2×2 là ma trận $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

Ma trận đơn vị cấp 3×3 là ma trận $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Để vắn tắt, ta gọi các ma trận vuông trên là các ma trận đơn vị cấp 2 và cấp 3.

Một cách tổng quát, ma trận đơn vị cấp $n \times n$ (hay nói vắn tắt, cấp n) là ma trận vuông cấp n có tính chất: các phần tử nằm trên đường chéo chính đều bằng 1, các phần tử còn lại đều bằng 0. Như vậy ta có nhiều ma trận đơn vị với các cấp khác nhau.

Tính chất của ma trận đơn vị

Cho ma trận đơn vị $\mathbf{I}$ (cấp n bất kì). Lúc đó, ta luôn có: $\mathbf{AI = A, IB = B}$ đúng với mọi ma trận $\mathbf{A}$ có số cột bằng n và mọi ma trận $\mathbf{B}$ có số hàng bằng n.

***Ví dụ* 6.2.1.1.** a/ Hãy kiểm tra **BI=B** với **I** là ma trận đơn vị cấp 3, và ma trận

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 15 \end{bmatrix}$$

b/ Hãy kiểm tra **IA=A** với **I** là ma trận đơn vị cấp 2, và ma trận

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Lời giải:

a/ Dễ dàng kiểm tra được:

$$\mathbf{BI} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 15 \end{bmatrix} = \mathbf{B}.$$

b/ Ta có

$$\mathbf{IA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \mathbf{A}.$$

■

6.2.2. Định nghĩa và phép toán tìm ma trận nghịch đảo

Trong tiểu mục này, trước hết chúng ta xét khái niệm ma trận nghịch đảo và sau đó tìm hiểu các bước tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của một ma trận vuông đã cho.

Định nghĩa ma trận nghịch đảo

Xét một ma trận $\mathbf{A}$ vuông cấp $n \times n$ (cấp n, nếu nói vắn tắt). Nếu tồn tại một ma trận vuông $\mathbf{B}$ cùng cấp sao cho $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$ thì $\mathbf{B}$ được gọi là nghịch đảo của $\mathbf{A}$ và được kí hiệu là $\mathbf{A}^{-1}$.

Ma trận vuông $\mathbf{A}$ được gọi là ma trận không suy biến nếu tồn tại $\mathbf{A}^{-1}$, trong trường hợp ngược lại $\mathbf{A}$ được gọi là ma trận suy biến.

***Ví dụ* 6.2.2.1.** a/ Cho $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$, lúc đó $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -5/18 & -1/18 \\ -1/9 & -2/9 \end{bmatrix}$

vì $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

b/ Cho $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, lúc đó $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & -11/10 & 5/2 \\ 1/5 & 2/5 & -1 \\ -1/5 & 3/5 & -1 \end{bmatrix}$

vì $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Để kiểm tra chẳng hạn trường hợp a/, ta cần kiểm tra kết quả của 4 phép toán sau: (hàng 1 của A)×(cột 1 của $\mathbf{A}^{-1}$) = 1, (hàng 1 của **A**)×(cột 2 của $\mathbf{A}^{-1}$) = 0, (hàng 2 của **A**)×(cột 1 của $\mathbf{A}^{-1}$) = 0, và (hàng 2 của **A**)×(cột 2 của $\mathbf{A}^{-1}$) = 1. Tóm lại ta có:(hàng i của **A**)×(cột j của $\mathbf{A}^{-1}$) bằng 1 khi $i = j$ và bằng 0 khi $i \neq j$. Tương tự cho trường hợp b/ ta phải kiểm tra 9 phép toán. ■

Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận vuông cấp 2

Cho ma trận $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Các bước tìm ma trận nghịch đảo $\mathbf{A}^{-1}$:

Bước 1: Tính định thức của ma trận **A** với công thức $\det \mathbf{A} = ad - bc$.

Bước 2: Nếu $\det \mathbf{A} = 0$ thì **A** là ma trận suy biến và ta kết luận: không tồn tại ma trận nghịch đảo $\mathbf{A}^{-1}$. Nếu $\det \mathbf{A} \neq 0$ thì **A** là ma trận không suy biến và tồn tại ma trận nghịch đảo $\mathbf{A}^{-1}$ của ma trận **A**.

Bước 3: Tìm ma trận nghịch đảo $\mathbf{A}^{-1}$ theo công thức $\dfrac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Bước 4: Kiểm tra lại $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

***Ví dụ* 6.2.2.2.** Tìm ma trận nghịch đảo $\mathbf{A}^{-1}$ của ma trận $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

Lời giải:

Bước 1: Tính định thức của ma trận **A** với công thức $\det(\mathbf{A}) = (-4).(-5) - 1.2 = 18$.

Bước 2: Vì $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ nên **A** là không suy biến và tồn tại ma trận nghịch đảo $\mathbf{A}^{-1}$ của ma trận **A**

Bước 3: Tìm ma trận nghịch đảo $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{18}\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{5}{18} & -\dfrac{1}{18} \\ -\dfrac{1}{9} & -\dfrac{2}{9} \end{bmatrix}$.

Bước 4: $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Ta kiểm tra chẳng hạn: $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\dfrac{5}{18} & -\dfrac{1}{18} \\ -\dfrac{1}{9} & -\dfrac{2}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$. ■

Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận vuông cấp 3

Xét ma trận vuông cấp 3: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

Lúc đó ứng với mỗi phần tử a_{ij} của ma trận $\mathbf{A}$, ta có thể tìm được số liên hợp A_{ij} được xác định bằng giá trị định thức của ma trận cấp 2, thu được khi gạch bỏ bớt hàng i và cột j của ma trận $\mathbf{A}$, với dấu '+' hay '-' đứng trước tùy theo dấu của $(-1)^{i+j}$.

Chú ý rằng dấu của $(-1)^{i+j}$ nằm trên hàng i và cột j trong ma trận dấu

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

***Ví dụ* 6.2.2.3.** Xét ma trận $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Hãy tìm các số liên hợp A_{ij} tương ứng với các phần tử a_{ij} của ma trận, với mọi $i, j = 1, 2, 3$.

Lời giải:

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = (-1)\det\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = (-1).(-6) = 6.$$

Bằng cách làm tương tự, ta có: $A_{11} = 2$, $A_{12} = 2$, $A_{13} = -2$, $A_{21} = -11$, $A_{22} = 4$, $A_{22} = 6$, $A_{31} = 25$, $A_{32} = -10$, $A_{33} = -10$. ■

Ta có các bước tìm ma trận nghịch đảo của ma trận vuông cấp 3 như sau:

Xét ma trận vuông cấp 3: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. Trước hết ta cần tìm các số liên hợp của ma trận $\mathbf{A}$ và tìm ma trận liên hợp $\mathbf{C}$ của ma trận $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

Sau đó ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tính định thức của ma trận $\mathbf{A}$ bằng cách sử dụng một trong các công thức

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) = {} & a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \text{ (khai triển theo hàng 1)}, \\ = {} & a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} \text{ (khai triển theo hàng } i\text{, với } i = 1, 2, 3), \\ = {} & a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} \text{ (khai triển theo cột } j\text{, với } j = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Bước 2: Nếu $\det(\mathbf{A}) = 0$ thì $\mathbf{A}$ là ma trận suy biến và ta kết luận: không tồn tại ma trận nghịch đảo $\mathbf{A}^{-1}$. Nếu $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ thì $\mathbf{A}$ là ma trận không suy biến và tồn tại ma trận nghịch đảo $\mathbf{A}^{-1}$ của ma trận $\mathbf{A}$.

Bước 3: Tìm ma trận nghịch đảo $\mathbf{A}^{-1}$ theo công thức

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{1}{det(A)} C^T = \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix},$$

trong đó $\mathbf{C}^T$ là ma trận chuyển vị của ma trận $\mathbf{C}$.

Bước 4: Kiểm tra lại $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

***Ví dụ* 6.2.2.4.** Tìm ma trận nghịch đảo nếu có của ma trận $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Lời giải:

Theo ví dụ 6.2.2.3, ta có ma trận liên hợp của ma trận $\mathbf{A}$ là:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -11 & 4 & 6 \\ 25 & -10 & -10 \end{bmatrix}$$

Bước 1: Tính định thức của ma trận $\mathbf{A}$ sử dụng khai triển theo (các phần tử của) hàng 1:

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 2.2 + 4.2 + 1.(-2) = 10.$$

Bước 2: Vì $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ nên $\mathbf{A}$ là không suy biến và tồn tại ma trận nghịch đảo $\mathbf{A}^{-1}$ của ma trận $\mathbf{A}$

Bước 3: Tìm ma trận nghịch đảo

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{1}{\det(A)} C^T = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 & -11 & 25 \\ 2 & 4 & -10 \\ -2 & 6 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & -11/10 & 5/2 \\ 1/5 & 2/5 & -1 \\ -1/5 & 3/5 & -1 \end{bmatrix}$$

Bước 4: Ta kiểm tra $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Chẳng hạn:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/5 & -11/10 & 5/2 \\ 1/5 & 2/5 & -1 \\ -1/5 & 3/5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}.$$

■

Phương pháp ma trận nghịch đảo giải hệ phương trình tuyến tính

Xét hệ phương trình tuyến tính gồm hai phương trình với hai ẩn:

$$\begin{cases} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{cases}$$

Hệ phương trình này có thể viết dưới dạng phương trình ma trận

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

trong đó: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ và $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$.

Giả sử $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, khi đó:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{Ax}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{Ix} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{ad - bc}(de - bf) \\ \dfrac{1}{ad - bc}(-ce + af) \end{bmatrix}$$

***Ví dụ* 6.2.2.5.** a/ Xét hệ phương trình sau với P_1 và P_2 là các giá cả cân bằng của hai loại hàng hóa:

$$\begin{cases} -4P_1 + P_2 = -13 \\ 2P_1 - 5P_2 = -7 \end{cases}$$

Tìm các giá cả cân bằng P_1 và P_2 bằng phương pháp ma trận nghịch đảo.

b/ Xét hệ phương trình sau, trong đó các biến nội sinh là C và Y là mức tiêu dùng cân bằng và thu nhập cân bằng trong mô hình kinh tế vĩ mô hai thành phần, I^* là mức đầu tư và b là mức tiêu dùng tự động. I^* là biến ngoại sinh:

$$\begin{cases} Y = & C + I^* \\ C = & aY + b. \end{cases}$$

Tìm Y và C.

Lời giải:

a/ Trước hết ta viết hệ phương trình đã cho dưới dạng ma trận $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ -7 \end{bmatrix},$$

trong đó: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -13 \\ -7 \end{bmatrix}$.

Trong ví dụ 6.2.2.2, ta đã tìm được ma trận nghịch đảo

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{18} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \end{bmatrix}.$$

Vậy $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ hay

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{18} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -13 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Do đó $P_1 = 4, P_2 = 3$.

b/ Trước hết, ta đưa hệ phương trình đã cho về dạng

$$\begin{cases} Y - C = & I^* \\ -aY + C = & b. \end{cases}$$

Đưa hệ phương trình này về dạng phương trình ma trận $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, ta có:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I^* \\ b \end{bmatrix},$$

trong đó: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -a & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} Y \\ C \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} I^* \\ b \end{bmatrix}$.

Ta thấy $\det(\mathbf{A}) = 1 - a > 0$ vì a là hệ số khuynh hướng tiêu dùng biên thỏa mãn điều kiện: $0 < a < 1$.

Dễ dàng tìm được ma trận nghịch đảo

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{1-a} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{bmatrix}.$$

Vậy $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ hay

$$\begin{bmatrix} Y \\ C \end{bmatrix} = \frac{1}{1-a} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^* \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{1-a} \begin{bmatrix} I^* + b \\ aI^* + b \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (I^* + b)/(1-a) \\ (aI^* + b)/(1-a) \end{bmatrix}.$$

Như vậy ta có $\mathbf{Y} = \dfrac{I^* + b}{1-a}$ và $\mathbf{C} = \dfrac{aI^* + b}{1-a}$. ■

Trong ví dụ 6.2.2.5b, ta có thể tìm các nhân tử thu nhập theo mức đầu tư và theo tiêu dùng tự động, cũng như các nhân tử tiêu dùng theo mức đầu tư và theo tiêu dùng tự động như sau:

$$\frac{\partial Y}{\partial I^*} = \frac{\partial Y}{\partial b} = \frac{1}{1-a} \text{ và } \frac{\partial C}{\partial I^*} = \frac{a}{1-a}, \quad \frac{\partial C}{\partial b} = \frac{1}{1-a}$$

Các nhân tử này đều dương, có nghĩa là khi mức đầu tư I^* hay mức tiêu dùng tự động b tăng đều dẫn tới mức thu nhập cân bằng Y và mức tiêu dùng cân bằng C tăng. Hơn nữa, chúng ta có thể phân tích thêm về giá trị của các nhân tử trên. Chẳng hạn, cho $a = 0,4$, lúc đó $\dfrac{\partial Y}{\partial I^*} = \dfrac{5}{3} = 1,67$, có nghĩa là khi I^* biến động tăng 01 đơn vị (trong điều kiện b không thay đổi) thì Y sẽ biến động tăng $1,67$ đơn vị.

***Ví dụ* 6.2.2.6.** Hãy xác định các giá cả cân bằng cho ba loại hàng hóa độc lập thỏa mãn mô hình:

$$\begin{cases} 2P_1 + 4P_2 + P_3 = 77 \\ 4P_1 + 3P_2 + 7P_3 = 114 \\ 2P_1 + P_2 + 3P_3 = 48 \end{cases}$$

Lời giải:

Ta đi tìm các giá cả cân bằng P_1, P_2 và P_3 bằng phương pháp ma trận nghịch đảo.

Trước hết ta viết hệ phương trình trên về dạng ma trận $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77 \\ 114 \\ 48 \end{bmatrix},$$

trong đó: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$ và $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 77 \\ 114 \\ 48 \end{bmatrix}$.

Trong ví dụ 6.2.2.4, ta đã tìm được ma trận nghịch đảo

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{11}{10} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -1 \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -1 \end{bmatrix}.$$

Vậy $\mathbf{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ hay

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{11}{10} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -1 \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 77 \\ 114 \\ 48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Do đó $P_1 = 10$, $P_2 = 13$ và $P_3 = 5$. ■

6.3. Quy tắc Cramer giải hệ phương trình và ứng dụng

6.3.1. Quy tắc của Cramer giải hệ phương trình tuyến tính

Trong tiểu mục này, trước hết chúng ta tìm hiểu về việc áp dụng quy tắc Cramer giải hệ phương trình tuyến tính gồm ba phương trình với ba ẩn. Từ đó phát biểu quy tắc Cramer cho trường hợp giải hệ phương trình tuyến tính gồm n phương trình với n ẩn. Sau đó chúng ta xét tiếp các ví dụ áp dụng quy tắc Cramer giải hệ phương trình tuyến tính dạng trên đây với $n = 3, n = 2$ và $n = 4$.

Quy tắc Cramer

Xét hệ phương trình tuyến tính gồm ba phương trình với ba ẩn sau đây:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Hệ phương trình trên có thể viết về dạng sau $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, trong đó:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Giả sử $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, khi đó: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$.

Để giải hệ phương trình tuyến tính trên đây với điều kiện $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$***, chúng ta áp dụng công thức*** $x_i = \dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}$***, trong đó*** A_i ***là ma trận thu được bằng cách thay thế cột*** i ***trong ma trận A bởi cột véc tơ tự do*** b***, với mọi chỉ số*** $i = 1, 2, 3$.

Cần chú ý rằng trong trường hợp giải hệ phương trình tuyến tính gồm n phương trình với n ẩn với ma trận $\mathbf{A}$ của hệ không suy biến (tức là khi $\det(\mathbf{A}) \neq 0$) ta có quy tắc Cramer được phát biểu tương tự như trên. Lúc này với mọi chỉ số $i = 1, 2, \ldots, n$, ta có giá trị của các ẩn được tìm theo công thức: $x_i = \dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}$.

***Ví dụ* 6.3.1.1.** Giải hệ phương trình tuyến tính sau áp dụng quy tắc Cramer.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \\ -4x_1 + x_2 + 6x_3 = -9 \\ 2x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 13 \end{cases}$$

Lời giải:

Ta đưa hệ phương trình tuyến tính trên về dạng phương trình ma trận:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 6 \\ 2 & 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ -9 \\ 13 \end{bmatrix},$$

trong đó

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 6 \\ 2 & 7 & 5 \end{bmatrix}, \text{ và } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ -9 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Từ đó ta có $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 \\ -9 & 1 & 6 \\ 13 & 7 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 3 \\ -4 & -9 & 6 \\ 2 & 13 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ -4 & 1 & -9 \\ 2 & 7 & 13 \end{bmatrix}.$

Ta có thể tính được: $\det(\mathbf{A}) = -63$, $\det(\mathbf{A}_1) = -315$, $\det(\mathbf{A}_2) = 63$ và $\det(\mathbf{A}_3) = -126$ bằng cách khai triển theo hàng hoặc theo cột. Chẳng hạn, khai triển theo hàng 1 ta có:

$$\begin{aligned} \det(A) = &\ 1.\det \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} - 2.\det \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + 3.\det \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \\ = &\ 1.(-37) - 2.(-32) + 3.(-30) = -63, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(A_1) = &\ 9.\det \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} - 2.\det \begin{bmatrix} -9 & 6 \\ 13 & 5 \end{bmatrix} + 3.\det \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ 13 & 7 \end{bmatrix} \\ = &\ = 9.(-37) - 2.(123) + 3.(76) = -315. \end{aligned}$$

Áp dụng quy tắc Cramer ta có:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-315}{-63} = 5,$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{63}{-63} = -1,$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{-126}{-63} = 2.$$

Khi thử lại kết quả trên, tức là khi thay các giá trị vừa tìm được của các ẩn vào hệ phương trình đã cho, ta thấy kết quả tính toán là chính xác. ■

***Ví dụ* 6.3.1.2.** Giải hệ phương trình tuyến tính sau áp dụng quy tắc Cramer.

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 = -6 \\ 4x_1 + 5x_2 = 12 \end{cases}$$

Lời giải:

Ta có

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \text{ nên } \det(\mathbf{A}) = 27,$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 12 & 5 \end{bmatrix} \text{ nên } \det(\mathbf{A}_1) = -54,$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} \text{ nên } \det(\mathbf{A}_2) = 108.$$

Vậy:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{54}{27} = -2,$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{108}{-27} = -4.$$

■

***Ví dụ* 6.3.1.3.** Áp dụng quy tắc Cramer tìm giá trị của ẩn x_1 từ hệ phương trình tuyến tính gồm 4 phương trình với 4 ẩn sau đây:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Lời giải:

Áp dụng quy tắc Cramer ta có $x_1 = \dfrac{det(A_1)}{det(A)}$ trong đó

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ và } \mathbf{A}_1 = \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vì trong ví dụ này ta chỉ phải tìm giá trị của x_1, nên ta tính các định thức $\det(\mathbf{A})$ và $\det(\mathbf{A}_1)$ bằng cách khai triển theo cột 1 như sau:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) = & \; a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41} \\ = & \; 1.A_{11} + 0.A_{21} + (-1).A_{31} + (-1).A_{41}, \end{aligned}$$

trong đó:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\det\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1; A_{31} = (-1)^{3+1}\det\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\det\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1; A_{41} = (-1)^{4+1}\det\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -1.$$

Vậy: $\det(\mathbf{A}) = 1.1 + 0.1 + (-1).1 + (-1).(-1) = 1.$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}_1) = \det(\mathbf{B}) = & \; b_{11}B_{11} + b_{21}B_{21} + b_{31}B_{31} + b_{41}B_{41} \\ = & \; 2.B_{11} + 1.B_{21} + 0.B_{31} + 1.B_{41}, \end{aligned}$$

trong đó:

$$B_{11} = A_{11} = (-1)^{1+1}\det\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1;$$

$$B_{21} = A_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1;$$

$$B_{31} = A_{31} = (-1)^{3+1} \det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1;$$

$$B_{41} = A_{41} = (-1)^{4+1} \det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -1.$$

Vậy $\det(\mathbf{A}_1) = 2.1 + 1.1 + 0.1 + 1.(-1) = 2$.

Từ đó ta có: $x_1 = \dfrac{\det(A_1)}{\det(A)} = \dfrac{2}{1} = 2$. ■

6.3.2. Một số ứng dụng của quy tắc Cramer

Trong tiểu mục này ta xét việc ứng dụng quy tắc Cramer trong giải các hệ phương trình tuyến tính biểu thị mô hình thu nhập quốc dân và mô hình thương mại giữa hai nước.

Mô hình thu nhập quốc dân

***Ví dụ* 6.3.2.1.** Xét mô hình kinh tế vĩ mô ba thành phần, có tên gọi là mô hình thu nhập quốc dân, sau đây:

$$\begin{cases} Y = & C + I^* + G^* \\ C = & aY_d + b \qquad (0 < a < 1, \quad b > 0) \\ Y_d = & Y - T \\ T = & tY + T^* \qquad (t < 1, \quad T* > 0) \end{cases}$$

Xác định giá trị của Y từ mô hình trên.

Lời giải:

Trong mô hình này Y – thu nhập quốc dân, C – mức tiêu dùng quốc dân, Y_d – thu nhập sau thuế, T – thuế là các biến nội sinh mà ta cần xác định giá trị khi điều cần cân bằng được thực hiện. Các biến I^* - mức đầu tư, G^* - mức chi tiêu của bộ máy chính phủ, T^* - thuế cố định là các biến ngoại sinh. Các tham số của mô hình bao gồm: a – khuynh hướng tiêu dùng biên, b – tiêu dùng cố định và t – hệ số thuế (tỉ lệ tính thuế theo thu nhập).

Đưa các biến nội sinh sang vế trái của các phương trình, ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} Y \quad -C & = I^* + G^* \\ \qquad C \quad -aY_d & = b \\ -Y \qquad\quad +Y_d \quad +T & = 0 \\ -tY \qquad\qquad\quad +T & = T^* \end{cases}$$

Dễ dàng đưa được hệ phương trình trên về dạng ma trận $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ như sau:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -t & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ C \\ Y_d \\ T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^* + G^* \\ b \\ 0 \\ T^* \end{bmatrix}$$

Chúng ta có thể áp dụng quy tắc Cramer để giải hệ phương trình tuyến tính trên, chẳng hạn ta có mức thu nhập quốc dân cân bằng là: $Y = \dfrac{\det(A_1)}{\det(A)}$, với

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -t & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ và } \mathbf{A}_1 = \mathbf{B} = \begin{bmatrix} I^* + G^* & -1 & 0 & 0 \\ b & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ T^* & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vì trong trường hợp này ta chỉ phải tìm giá trị của Y, nên ta tính các định thức $\det(\mathbf{A})$ và $\det(\mathbf{A}_1)$ bằng cách khai triển theo cột 1 như sau:

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}) = &\quad a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}\\ = &\quad 1.A_{11} + 0.A_{21} + (-1).A_{31} + (-t).A_{41},\end{aligned}$$

trong đó:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\det\begin{bmatrix}1 & -a & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = 1; A_{21} = (-1)^{2+1}\det\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\det\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & -a & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = a; A_{41} = (-1)^{4+1}\det\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & -a & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} = -a.$$

Vậy $\det(\mathbf{A}) = 1.1 + 0.1 + (-1).a + (-t).(-a) = 1 - a + at.$

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}_1) = &\ b_{11}B_{11} + b_{21}B_{21} + b_{31}B_{31} + b_{41}B_{41}\\ = &\ (I^* + G^*).B_{11} + b.B_{21} + 0.B_{31} + T^*.A_{41},\end{aligned}$$

trong đó:

$$B_{11} = A_{11} = (-1)^{1+1}\det\begin{bmatrix}1 & -a & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = 1;$$

$$B_{21} = A_{21} = (-1)^{2+1}\det\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = 1;$$

$$B_{31} = A_{31} = (-1)^{3+1}\det\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & -a & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = a;$$

$$B_{41} = A_{41} = (-1)^{4+1} \det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -a.$$

Vậy $\det(\mathbf{A}_1) = (I^* + G^*).1 + b.1 + 0.a + T^*.(-a) = I^* + G^* + b - aT^*$.

Từ đó ta có:

$$Y = \frac{det(A_1)}{det(A)} = \frac{I^* + G^* + b - aT^*}{1 - a + at}.$$

Chúng ta có thể tìm các nhân tử của Y theo I^*, G^*, T^*, a, b và t, sau đó phân tích ý nghĩa của các nhân tử này. Chẳng hạn nhân tử của thu nhập quốc dân Y theo mức chi tiêu của bộ máy chính phủ G^* là: $\dfrac{\partial Y}{\partial G^*} = \dfrac{1}{1 - a + at}$. Dễ thấy nhân tử này có dấu dương do $a < 1$ và at là số dương. Do đó có thể thấy khi G^* tăng (với điều kiện các biến ngoại sinh khác và các tham số không thay đổi) thì Y cũng tăng. Giả sử $a = 0,6$, $t = 0,3$, thì nhân tử thu nhập quốc dân theo mức chi tiêu của bộ máy chính phủ là $\dfrac{1}{1 - 0,6 + 0,6.0,3} \approx 1,72$. Điều này có nghĩa là khi G^* tăng 1 đơn vị thì Y tăng 1,72 đơn vị. ■

Mô hình thương mại giữa hai nước

***Ví dụ* 6.3.2.2.** Xét mô hình thương mại giữa hai nước cho bởi các phương trình sau

$$\begin{cases} Y_1 = & C_1 + I_1^* + X_1 - M_1 \\ C_1 = & 0,8Y_1 + 200 \\ M_1 = & 0,2Y_1 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} Y_2 = & C_2 + I_2^* + X_2 - M_2 \\ C_2 = & 0,9Y_2 + 100 \\ M_2 = & 0,1Y_2 \end{cases}$$

trong trường hợp hai quốc gia đạt được cân bằng xuất nhập khẩu:

$$X_1 = M_2 \text{ và } X_2 = M_1.$$

Ở đây, Y_1 là thu nhập quốc dân, C_1 là mức tiêu dùng, I_1^* là mức đầu tư của nước thứ nhất, X_1 là mức xuất khẩu của nước thứ nhất sang nước thứ 2, M_1 là mức nhập khẩu của nước thứ nhất từ nước thứ hai. Trong các biến trên chỉ cóI_1^* là biến ngoại sinh, còn lại ba biến khác là biến nội sinh. Các biến còn lại được giải thích tương tự. Tìm thu nhập quốc dân của hai nước.

Lời giải:

Trước hết, ta biểu thị mô hình trên dưới dạng hệ phương trình tuyến tính. Từ ba phương trình bên trái và điều kiện $X_1 = M_2 = 0,1Y_2$, ta có:

$$\begin{aligned} & Y_1 = C_1 + I_1^* + X_1 - M_1 \\ \Rightarrow\ & Y_1 = 0,8Y_1 + 200 + I_1^* + 0,1Y_2 - 0,2Y_1 \\ \Rightarrow\ & 0,4Y_1 \breve{}\, 0,1Y_2 = 200 + I_1^*. \end{aligned}$$

Từ ba phương trình bên phải và điều kiện $X_2 = M_1 = 0,2Y_1$, ta cũng có:

$$\begin{aligned} & Y_2 = C_2 + I_2^* + X_2 - M_2 \\ \Rightarrow\ & Y_2 = 0,9Y_2 + 100 + I_2^* + 0,2Y_1 \breve{}\, 0,1Y_2 \\ \Rightarrow\ & \quad -0,2Y_1 + 0,2Y_2 = 100 + I_2^*. \end{aligned}$$

Vậy ta có hệ phương trình tuyến tính gồm hai phương trình với hai ẩn sau đây:

$$\begin{cases} 0,4Y_1 - 0,1Y_2 & = 200 + I_1^* \\ -0,2Y_2 + 0,2Y_2 & = 100 + I_2^* \end{cases}$$

Đưa hệ phương trình về dạng phương trình ma trận:

$$\begin{bmatrix} 0,4 & -0,1 \\ -0,2 & 0,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 + I_1^* \\ 100 + I_2^* \end{bmatrix}$$

Áp dụng quy tắc Cramer ta có

$$Y_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)} = \frac{50 + 0,2I_1^* + 0,1I_2^*}{0,06},$$

$$Y_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)} = \frac{80 + 0,2I_1^* + 0,4I_2^*}{0,06}.$$

Ta có thể tính các nhân tử của các mức thu nhập cân bằng Y_1 và Y_2 theo các mức đầu tư I_1^* và I_2^*. Chẳng hạn, nhân tử của Y_1 do I_2^* biến động là:

$\dfrac{\partial Y_1}{\partial I_2^*} = \dfrac{0,1}{0,06} = \dfrac{5}{3} = 1,67$. Như vậy có thể thấy khi mức đầu tư của nước thứ hai là I_2^* tăng thì điều này cũng ảnh hưởng đáng kể tới mức thu nhập quốc dân của nước thứ nhất, Y_1 sẽ tăng theo. Hơn nữa, nếu I_2^* tăng 01 đơn vị thì Y_1 sẽ tăng 1,67 đơn vị. ■

6.4. Bài tập Chương 6

Hướng dẫn ôn tập

Mục 6.1: khái niệm ma trận; các phép toán ma trận cơ bản: chuyển vị ma trận, cộng hoặc trừ hai ma trận, nhân ma trận với một số, nhân hai ma trận; khái niệm hệ phương trình tuyến tính; cách viết hệ phương trình tuyến tính dưới dạng phương trình ma trận.

Mục 6.2: ma trận nghịch đảo; phép toán tìm ma trận nghịch đảo; phương pháp ma trận nghịch đảo giải hệ phương trình tuyến tính; ứng dụng phương pháp ma trận nghịch đảo giải hệ phương trình tuyến tính trong phân tích cân bằng các mô hình kinh tế.

Mục 6.3: quy tắc Cramer giải hệ phương trình tuyến tính n ẩn n phương trình; ứng dụng quy tắc Cramer trong phân tích cân bằng một số mô hình kinh tế vĩ mô: mô hình thu nhập quốc dân, mô hình thương mại giữa hai nước.

Sinh viên ôn tập lần lượt các vấn đề then chốt theo thứ tự trên đây, nghiên cứu kĩ các ví dụ, rèn luyện kĩ năng tính toán và giải quyết vấn đề qua việc giải được tối thiểu 50% số bài tập được liệt kê cho từng mục.

Bài tập mục 6.1

Bài 1. Một chuỗi 03 nhà hàng A, B và C bán các loại sản phẩm sau: áo thể thao, máy luyện tập và vợt chơi quần vợt. Doanh thu theo tuần và lợi nhuận thu về của từng loại sản phẩm (tính theo USD) được tổng hợp như trong các bảng 6.2 và 6.3 sau đây:

Các ma trận doanh thu và lợi nhuận được kí hiệu là S và P một cách

Bảng 6.2

Doanh thu theo tuần	Cửa hàng A	Cửa hàng B	Cửa hàng C
Áo thể thao	60	40	25
Máy luyện tập	80	123	90
Vợt chơi quần vợt	10	0	25

Bảng 6.3

Lợi nhuận từng loại	Cửa hàng A	Cửa hàng B	Cửa hàng C
Áo thể thao	1	1	1,5
Máy luyện tập	5	8	6
Vợt chơi quần vợt	20	25	30

tương ứng.

a/ Kí hiệu SP^T là $\mathbf{A}$, hãy tìm phần tử a_{11} và giải thích ngắn gọn ý nghĩa của số này.

b/ Kí hiệu S^TP là $\mathbf{B}$, hãy tìm phần tử b_{33} và giải thích ngắn gọn ý nghĩa của số này.

Bài 2. Cho các ma trận: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ và $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$.

Hãy tìm ma trận $\mathbf{X}$ thỏa mãn phương trình: $2\mathbf{A} + \mathbf{X}^T = 3\mathbf{B}$.

Bài 3. Cho các ma trận sau:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & 0 \\ -5 & 9 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 9 \end{bmatrix} \text{ và } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ -4 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Cho biết: $\mathbf{D} = \mathbf{A(2B + 3C)}$, hãy tìm phần tử d_{23}.

Bài 4. Xét thị trường hàng hóa: $C = aY + b$ và $I = cr + d$; và thị trường tiền tệ: $M_S = M_S^*$ và $M_D = k_1Y + k_2r + k_3$. Cả hai thị trường đều ở trạng thái cân bằng. Hãy tìm ma trận $\mathbf{A}$ sao cho: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, trong đó: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} r \\ Y \end{bmatrix}$ và $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} M_S^* - k_3 \\ b + d \end{bmatrix}$.

Bài tập mục 6.2

Bài 1. Ma trận nào trong số các ma trận sau có ma trận nghịch đảo không có trong số ma trận đã cho:

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Bài 2. Hãy tìm (nếu có) ma trận nghịch đảo của các ma trận sau:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ và } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Các ma trận trên là suy biến hay không suy biến?

Bài 3. Xét thị trường hàng hóa:

$$\begin{cases} C = \ aY + b \quad (0 < a < 1,\, b > 0) \\ I = \ cr + d \qquad (c < 0,\, d > 0); \end{cases}$$

và thị trường tiền tệ:

$$\begin{cases} M_S = & M_S^* \\ M_D = & k_1Y + k_2r + k_3 \quad (k_1 > 0,\, k_2 > 0,\, k_3 < 0). \end{cases}$$

Hãy chứng tỏ rằng, trong trường hợp cả hai thị trường đều ở trạng thái cân bằng, thì thu nhập Y và lãi suất r thỏa mãn phương trình ma trận:

$$\begin{bmatrix} 1-a & -c \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b+d \\ M_S^* - k_3 \end{bmatrix}.$$

Sau đó giải hệ phương trình để tìm Y và r. Hãy viết biểu thức nhân tử của r theo biến động của M_S^* và cho biết lãi suất là tăng hay giảm khi lượng cung tiền tăng lên.

Bài 4. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận: $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Bài 5. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & a \\ 5 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ theo a.

Sau đó cho biết với giá trị nào của a thì hệ phương trình sau không có nghiệm duy nhất (vô nghiệm hoặc có nhiều hơn một nghiệm).

$$\begin{cases} 6x + 3y + az = b \\ 5x + 4y + 2z = c \\ 7x + 2y + 3z = d. \end{cases}$$

Bài 6. Xét các phương trình cung và cầu tuyến tính trong mô hình thị trường một loại hàng hóa sau đây:

$$P = aQ_s + b \quad (a > 0, b > 0)$$

$$C = -cQ_D + d \quad (c > 0, d > 0)$$

Hãy chứng tỏ rằng giá cả cân bằng P và lượng cân bằng Q thỏa mãn phương trình ma trận sau: $\begin{bmatrix} 1 & -a \\ 1 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$. Sau đó giải hệ phương trình để biểu thị P và Q theo a, b, c và d. Hãy viết các nhân tử cho P và Q theo biến động của b và chứng tỏ rằng khi b tăng dẫn tới Q giảm.

Bài 7. Hãy xác định các giá cả cân bằng cho ba loại hàng hóa độc lập thỏa mãn mô hình:

$$\begin{cases} P_1 + 3P_2 + 3P_3 = 32 \\ P_1 + 4P_2 + 3P_3 = 37 \\ P_1 + 3P_2 + 4P_3 = 35 \end{cases}$$

Bài tập mục 6.3

Bài 1. Áp dụng quy tắc Cramer để giải các hệ phương trình sau đây:

a/ $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 7 \end{bmatrix}$,

b/ $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 17 \\ -1 \end{bmatrix}$,

c/ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -24 \\ 15 \end{bmatrix}$.

Bài 2. Hãy chứng tỏ rằng ma trận $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -t & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ có định thức là: $1-a+at$. Sau đó, áp dụng quy tắc Cramer để tìm C từ hệ phương trình sau:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -t & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ C \\ Y_d \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I^* + G^* \\ b \\ 0 \\ T^* \end{bmatrix}$$

Hãy tìm nhân tử của C theo G^* và cho biết ý nghĩa của nhân tử này.

Bài 3. Xét mô hình kinh tế vĩ mô sau đây:

$$\begin{cases} Y = & C + I^* + G^* + X^* - M \\ C = & aY_d + b & (0 < a < 1,\ b > 0) \\ M = & mY + M^* & (m < 1,\ M^* > 0). \end{cases}$$

Hãy chứng tỏ rằng hệ phương trình trên đây có thể đưa về phương trình $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, trong đó:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -a & 1 & 0 \\ -m & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} Y \\ C \\ M \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} I^* + G^* + X^* \\ b \\ M^* \end{bmatrix}.$$

Sau đó áp dụng quy tắc Cramer để chứng tỏ rằng: $Y = \dfrac{b + I^* + G^* + X^* - M^*}{1 - a + m}$. Hãy tìm nhân tử của Y theo I^* (được gọi là nhân tử đầu tư tự động của Y) và cho biết tại sao khi I^* tăng thì y cũng tăng theo.

Bài 4. Xét mô hình kinh tế vĩ mô sau đây:

Thu nhập quốc dân: $Y = C + I^* + G^* \quad (G^* > 0)$

Tiêu dùng: $C = aY + b \quad (0 < a < 1, b > 0)$

Đầu tư: $I = cr + d \quad (c < 0, d > 0)$

Lượng cung tiền: $M_S^* = k_1Y + k_2r \quad (k_1 > 0, k_2 < 0, M_S^* > 0)$.

Hãy chứng tỏ rằng hệ phương trình trên đây có thể đưa về phương trình ma trận $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, trong đó:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ k_1 & 0 & 0 & k_2 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} Y \\ C \\ I \\ r \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} G^* \\ b \\ d \\ M_S^* \end{bmatrix}.$$

Sau đó áp dụng quy tắc Cramer để chứng tỏ rằng:

$$r = \frac{M_S^*(1-a) - k_1(b + d + G^*)}{k_2(1-a) + ck_1}.$$

Hãy tìm nhân tử của r theo G^* (được gọi là nhân tử tài khóa chính phủ của r) và cho biết tại sao khi G^* tăng thì r cũng tăng theo.

Bài 5. Xét mô hình thương mại giữa hai nước cho bởi các phương trình như sau:

$$\begin{aligned} Y_1 &= C_1 + I_1^* + X_1 - M_1 & \quad Y_2 &= C_2 + I_2^* + X_2 - M_2 \\ C_1 &= 0,6Y_1 + 50 \qquad , & C_2 &= 0,8Y_2 + 80 \\ M_1 &= 0,2Y_1 & M_2 &= 0,1Y_2 \end{aligned}$$

Cho biết: $I_2^* = 70$, hãy tìm giá trị của I_1^* nếu cán cân thương mại (xuất nhập khẩu) giữa hai nước là bằng 0.

Bài 6. Áp dụng quy tắc Cramer giải hệ phương trình tuyến tính gồm 4 phương trình với 4 ẩn sau đây:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bài 7. Xét mô hình thương mại giữa hai nước cho bởi các phương trình sau

$$\begin{aligned} Y_1 &= C_1 + I_1^* + X_1 - M_1 \\ C_1 &= 0,7Y_1 + 50 \\ I_1^* &= 200 \\ M_1 &= 0,3Y_1 \end{aligned} \quad \text{và} \quad \begin{aligned} Y_2 &= C_2 + I_2^* + X_2 - M_2 \\ C_2 &= 0,8Y_1 + 100 \\ I_2^* &= 300 \\ M_2 &= 0,1Y_2 \end{aligned}$$

Hãy đưa hệ phương trình tuyến tính trên về dạng phương trình ma trận, sau đó tím các mức thu nhập cân bằng Y_1 và Y_2, từ đó cho biết cán cân thanh toán mức xuất nhập khẩu giữa hai nước.

Tài liệu tham khảo chính Chương 6

[1] Nguyễn Quốc Hưng, *Toán cao cấp và một số ứng dụng trong kinh doanh*, Nhà xuất bản Giao thông vận tải, 2009. Tập 2, Chương 2: Ma trận; Chương 3: Định thức; Chương 4: Hệ phương trình tuyến tính; Chương 5: Phần ứng dụng trong quản trị kinh doanh

[2] Lê Đình Thúy, *Toán cao cấp cho các nhà kinh tế*, Nhà xuất bản Đại học Kinh tế Quốc dân, 2015. Chương 3: Ma trận và định thức; Chương 4: Hệ phương trình tuyến tính

[3] Teresa Bradley, *Essential Mathematics for Economics and Business*, 4th edition, John Wiley and Sons, 2013. Chapter 3: Simultaneous Equations; Chapter 9: Linear Algebra and Applications

[4] Ian Jacques, *Mathematics for Economics and Business*, 7th edition, Pearson, 2013. Chapter 7: Matrices

Chương 7

Quy hoạch tuyến tính

Chương 7 trình bày cách *mô hình hóa* bài toán thực tế về bài toán *quy hoạch tuyến tính* và phương pháp giải. Mục 7.1 giới thiệu hai ví dụ kinh điển trong kinh tế là bài toán cực tiểu chi phí và bài toán cực đại lợi nhuận, từ đó mô hình hóa và trình bày khái niệm cơ bản liên quan đến bài toán quy hoạch tuyến tính. Mục 7.2 hướng dẫn cho sinh viên *phương pháp hình học* giải bài toán quy hoạch tuyến tính hai biến số cũng như cách *sử dụng phần mềm Excel để giải bài toán quy hoạch tuyến tính* tổng quát. Mục 7.3 nêu một vài ứng dụng cụ thể trong kinh tế tài chính để sinh viên có thể làm quen với cách mô hình hóa và luyện tập cách giải bài toán quy hoạch tuyến tính bằng phần mềm.

7.1. Một số ví dụ và khái niệm cơ bản

7.1.1. Một số ví dụ

Tiểu mục này trình bày các ví dụ về hai bài toán điển hình ta thường gặp trong kinh tế: bài toán cực đại lợi nhuận và bài toán cực tiểu chi phí.

***Ví dụ* 7.1.1.1.** Một nhà máy sản xuất hai loại sản phẩm A và B. Giá bán mỗi sản phẩm A và B tương ứng là 7 triệu VND và 4 triệu VND. Chi phí sản xuất cho mỗi sản phẩm A và B lần lượt là 6 triệu VND và 3 triệu VND. Ngoài ra, chi phí vận chuyển từ nơi sản xuất đến nơi tiêu thụ cho mỗi sản phẩm A là 200 nghìn VND và cho sản phẩm B là 300 nghìn VND. Để có vốn sản xuất, nhà máy phải đi vay ngân hàng. Ngân hàng giới hạn chỉ cho nhà máy vay 2,7 tỉ VND cho việc sản xuất và 120 triệu VND cho việc vận chuyển hàng hóa mỗi tuần. Nhà máy nên sản xuất bao nhiêu sản phẩm mỗi loại để tối đa hóa lợi nhuận?

Lời giải:
Nhà máy cần quyết định sản xuất bao nhiêu sản phẩm A và B mỗi tuần. Ta kí hiệu những thứ chưa biết này bởi các ẩn số, cụ thể: Gọi x và y lần lượt là số sản phẩm A và sản phẩm B cần được sản xuất mỗi tuần.

Tổng chi phí sản xuất x sản phẩm A và y sản phẩm B là:

$$6x + 3y \text{ (triệu VND)}$$

Tổng chi phí vận chuyển x sản phẩm A và y sản phẩm B là:

$$0,2x + 0,3y \text{ (triệu VND)}$$

Tổng doanh thu khi bán được x sản phẩm A và y sản phẩm B là:

$$7x + 4y \text{ (triệu VND)}$$

Do đó, tổng lợi nhuận của nhà máy là:

$$(7x + 4y) - (6x + 3y) - (0,2x + 0,3y) = 0,8x + 0,7y \text{ (triệu VND)}$$

Do số tiền dành cho sản xuất là 2,7 tỉ VND nên ta có:

$$6x + 3y \leq 2700$$

Tương tự, do số tiền dành cho vận chuyển không được vượt quá 120 triệu VND nên ta có:

$$0,2x + 0,3y \leq 120$$

Vì x và y là số lượng sản phẩm nên chúng phải là số không âm.
Bài toán tìm phương án sản xuất để cực đại lợi nhuận dẫn đến bài toán tối ưu toán học sau:

$$\begin{aligned} \max \quad & \{0,8x + 0,7y\} \\ \text{với điều kiện} \quad & \text{(v.đ.k.)} \\ 6x + 3y & \leq 2700 \\ 0,2x + 0,3y & \leq 120 \\ x & \geq 0 \\ y & \geq 0 \end{aligned}$$

Bài toán trên là một ví dụ của bài toán quy hoạch tuyến tính. Cách giải bài toán này sẽ được đề cập trong phần sau. ■

***Ví dụ* 7.1.1.2.** Một doanh nghiệp thực phẩm sử dụng hai nhà máy P1 và P2 để chế biến thịt bò. Hai nhà máy có thể hoạt động 7 ngày trong tuần. Sau khi chế biến, thịt bò được chia làm ba loại: loại chất lượng cao, loại chất lượng trung bình và loại chất lượng thấp. Loại chất lượng cao được đưa vào siêu thị, loại chất lượng vừa được đưa ra chợ cóc và loại chất lượng thấp được dùng làm thức ăn cho động vật. Mỗi tuần, doanh nghiệp có hợp đồng cần cung cấp 120 kg thịt chất lượng cao, 80 kg thịt chất lượng trung bình và 240 kg thịt chất lượng thấp. Mỗi ngày hoạt động, nhà máy P1 tiêu tốn 4000 USD trong khi nhà máy P2 tiêu tốn 3200 USD. Năng suất chế biến hàng ngày của nhà máy P1 là 60 kg thịt chất lượng cao, 20 kg thịt chất lượng trung bình và 40 kg thịt chất lượng thấp. Năng suất chế biến của nhà máy P2 cho 3 loại chất lượng cao, vừa, và thấp tương ứng lần lượt là 20 kg, 20 kg và 120 kg. Để tối thiểu hóa chi phí và đảm bảo sản lượng chế biến cho hợp đồng đã kí, doanh nghiệp sẽ sử dụng mỗi nhà máy bao nhiêu ngày?

Lời giải:
Số ngày hoạt động của mỗi nhà máy là con số chưa biết ta cần tính nên ta đặt chúng là các ẩn số.
Gọi x và y lần lượt là số ngày nhà máy P1 và P2 hoạt động mỗi tuần.
Tổng chi phí doanh nghiệp tiêu tốn:

$$4000x + 3200y \text{ (USD)}$$

Lượng thịt chất lượng cao mà doanh nghiệp chế biến được tại cả hai nhà máy là:

$$60x + 20y$$

Lượng thịt chất lượng trung bình mà doanh nghiệp chế biến được tại cả hai nhà máy là:

$$20x + 20y$$

Tương tự, lượng thịt chất lượng thấp mà doanh nghiệp chế biến được tại cả hai nhà máy là:

$$40x + 120y$$

Để đảm bảo hợp đồng, số lượng thịt các loại cần chế biến phải không nhỏ hơn số lượng yêu cầu. Do đó ta có:

$$60x + 20y \geq 120$$

$$20x + 20y \geq 80$$

$$40x + 120y \geq 240$$

Thêm nữa, vì x và y là số ngày trong tuần nên:

$$x \geq 0 \text{ và } x \leq 7$$

$$y \geq 0 \text{ và } y \leq 7$$

Do vậy, bài toán tìm phương án chế biến thực phẩm chuyển về bài toán tối ưu toán học sau:

$$\begin{aligned}
&\min \quad \{4000x + 3000y\} \\
&\text{v.đ.k.} \\
&\qquad 60x + 20y \geq 120 \\
&\qquad 20x + 20y \geq 80 \\
&\qquad 40x + 120y \geq 240 \\
&\qquad x \geq 0 \\
&\qquad x \leq 7 \\
&\qquad y \geq 0 \\
&\qquad y \leq 7
\end{aligned}$$

Bài toán trên là một ví dụ khác của bài toán quy hoạch tuyến tính. Cách giải bài toán này sẽ được đề cập trong phần sau. ■

7.1.2. Khái niệm cơ bản

Trong tiểu mục trước, ta đã xét hai ví dụ kinh điển trong kinh tế được mô hình hóa dưới dạng một bài toán tối ưu toán học, mà cụ thể là bài toán quy hoạch tuyến tính. Tiểu mục này giới thiệu rõ một số khái niệm liên quan.

Một bài toán, ta kí hiệu là P, được gọi là **bài toán tối ưu** toán học nếu nó được viết dưới dạng sau đây:

$$\begin{aligned}
&\min / \max \quad \{f(x_1, x_2, ..., x_n)\} \\
&\text{v.đ.k.} \\
&\qquad g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq 0 \\
&\qquad h(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geq 0 \\
&\qquad r(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0
\end{aligned}$$

Trong bài toán (P), hàm số $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ được gọi là **hàm mục tiêu**; các điều kiện phương trình và bất phương trình được gọi là các **ràng buộc**. Bài toán có thể không có ràng buộc hoặc có số lượng ràng buộc bất kỳ. Ở đây, ta viết bài toán với ba ràng buộc là vì muốn mô tả rằng bài toán tối ưu có ba kiểu ràng buộc là ràng buộc $\leq$; ràng buộc $\geq$, và ràng buộc $=$. Mỗi một bộ n biến $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ được gọi là một **phương án** của bài toán tối ưu. Tập tất cả các phương án thỏa mãn tất cả các ràng buộc được gọi là **tập phương án khả thi**. Phương án $(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$ được gọi là **phương án tối ưu** nếu nó là phương án tốt nhất (cho giá trị hàm mục tiêu nhỏ nhất với bài toán cực tiểu, và lớn nhất với bài toán cực đại) trong số tất cả các phương án thuộc tập phương án khả thi. Giá trị của hàm mục tiêu tại phương án tối ưu được gọi là **giá trị tối ưu**.

Nếu hàm mục tiêu f và tất cả các hàm ràng buộc g, h, và r trong bài toán tối ưu tổng quát có dạng tuyến tính thì bài toán tối ưu được gọi là bài toán **quy hoạch tuyến tính**. Chú ý rằng hàm tuyến tính n biến là hàm xác định dưới dạng bậc nhất như sau:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n,$$

trong đó các hệ số $c_i, \quad i = 1, \cdots, n$ là hằng số nào đó. Do đó, bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát n biến và m ràng buộc có thể viết như sau:

$$\min / \max \quad \{c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n\}$$

v.đ.k.

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1;\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2;\\
&\vdots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m,
\end{aligned}$$

trong đó các hệ số $a_{ij} \quad i = 1, \cdots, m; \quad j = 1, \cdots, n$ và $b_i \quad i = 1, \cdots, m$ là các hằng số cho trước. Trong các ràng buộc, dấu $=$ có thể thay bằng các dấu $\leq$ hoặc $\geq$.

Bài toán quy hoạch tuyến tính được khởi thủy năm 1939 khi nhà kinh tế học Leonid Kantorovich nghiên cứu giải quyết vấn đề giảm thiểu chi phí tiêu dùng của quân đội trong thế chiến thứ 2. Năm 1947, Goerge Dantzig đưa ra mô hình quy hoạch tuyến tính khi nghiên cứu bài toán lập kế hoạch hoạt động quân sự và giới thiệu thuật toán đơn hình để giải bài toán này. Thuật toán đơn hình dù ra đời sớm nhưng đã chứng minh được tính hiệu quả khi giải quyết được nhiều bài toán quy hoạch tuyến tính trong kinh tế và quản lí. Ngày nay, thuật toán này được tích hợp vào các phần mềm máy tính để ta có thể sử dụng được dễ dàng. Trình bày nội dung thuật toán đơn hình cần thêm một số kiến thức toán học chuyên sâu. Thay vì phương pháp đơn hình, giáo trình sẽ chỉ giới thiệu phương pháp hình học sau đó là cách sử dụng phần mềm Excel để giải bài toán quy hoạch tuyến tính.

7.2. Phương pháp giải

7.2.1. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính hai biến số

Khi bài toán quy hoạch tuyến tính có hai biến số, các hàm mục tiêu hay ràng buộc của bài toán có thể biểu diễn trên hệ trục tọa độ. Dựa trên hình vẽ này ta có thể tìm ra phương án tối ưu. Phương pháp giải bài toán dựa trên hình vẽ này gọi là **phương pháp hình học**. Trước hết ta điểm qua một số khái niệm và tính chất quan trọng cần thiết áp dụng trong phương pháp hình học.

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính hai biến số:

$$\min/\max\left\{f(x_1,x_2)=c_1x_1+c_2x_2|(x_1,x_2\in D)\right\},$$

trong đó tập phương án khả thi D được xác định bởi các phương trình bất phương trình tuyến tính hai biến số. Trên hệ trục tọa độ, tập D này được biểu diễn là một đa giác kín hoặc hở. Đỉnh của đa giác được gọi là **đỉnh** của tập D. Đồ thị $f(x_1,x_2)=c_1x_1+c_2x_2=k$ (với k là hằng số nào đó) được gọi là **đường mức** k. Người ta còn gọi k là giá trị của đường mức. Vì là hàm tuyến tính nên đường mức k có dạng đường thẳng. Đường mức 0 là đường thẳng đi qua gốc tọa độ. Véc tơ hệ số hàm mục tiêu $\overrightarrow{c}=(c_1,c_2)$ là véc tơ pháp tuyến của đường mức k.

Ta có một số tính chất sau đây:

- Tịnh tiến đường mức k theo hướng véc tơ $\overrightarrow{c}$ giá trị k sẽ tăng, tịnh tiến ngược hướng với hướng của $\overrightarrow{c}$ giá trị k sẽ giảm.

- Phương án tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính (nếu có) đạt tại đỉnh nào đó của tập phương án khả thi D.

- Nếu bài toán quy hoạch tuyến tính có 2 phương án tối ưu đạt tại hai đỉnh thì tất cả các điểm nằm trên cạnh nối hai đỉnh cũng là các phương án tối ưu.

Dựa vào các tính chất trên, phương pháp hình học giải bài toán quy hoạch tuyến tính gồm các bước sau:

Bước 1: Vẽ tập phương án khả thi D;

Bước 2: Vẽ véc tơ $\overrightarrow{c}$ và đường mức 0;

Bước 3: Tìm đỉnh xa hoặc gần gốc tọa độ nhất (x_1^*, x_2^*) tùy thuộc vào bài toán là tìm cực tiểu hay tìm cực đại;

Bước 4: Nếu tồn tại đỉnh (x_1^*, x_2^*) như vậy, vẽ đường mức đi qua đỉnh đó. Tọa độ đỉnh đó là phương án tối ưu và giá trị của đường mức là giá trị tối ưu của bài toán. Trường hợp ngược lại không tìm được (x_1^*, x_2^*), ta kết luận bài toán không có phương án tối ưu.

Ví dụ 7.2.1.1. Công ti RMC sản xuất hai sản phẩm: phụ gia nhiên liệu và dung môi. Phụ gia nhiêu liệu để bán cho các công ti dầu khí và được dùng để sản xuất xăng và nhiên liệu liên quan. Dung môi thì được bán cho các công ti sản xuất các sản phẩm tẩy rửa. Sản xuất hai sản phẩm trên cần pha trộn ba loại nguyên vật liệu 1, 2 và 3. Để sản xuất một tấn phụ gia nhiên liệu cần 0,4 tấn Nguyên vật liệu 1 và 0,6 tấn Nguyên vật liệu 3 trong khi một tấn dung môi là sự hòa trộn của 0,5 tấn Nguyên vật liệu 1; 0,2 tấn Nguyên vật liệu 2 và 0,3 tấn Nguyên vật liệu 3. Số nguyên vật liệu của RMC là có hạn, cụ thể hiện thời công ti chỉ có 20 tấn Nguyên vật liệu 1, 5 tấn Nguyên vật liệu 2 và 21 tấn Nguyên vật liệu 3. Qua phân tích, công ti ước lượng rằng lợi nhuận thu được từ mỗi tấn phụ gia nhiên liệu là 40 USD trong khi từ mỗi tấn dung môi là 30 USD. Với lượng nguyên vật liệu như trên, hãy xác định số lượng phụ gia nhiên liệu và dung môi cần sản xuất để lợi nhuận thu về đạt cực đại.

Lời giải:

Gọi F và S lần lượt là số tấn phụ gia nhiên liệu và số lượng dung môi cần sản xuất. Hàm lợi nhuận khi đó sẽ là

$$40F + 30S.$$

Do điều kiện hạn chế về số lượng ba loại nguyên vật liệu nên ta có ba ràng buộc tương ứng

$$0,4F + 0,5S \le 20$$

$$0,2S \le 5$$

$$0,6F + 0,3S \le 21$$

Các biến F và S phải không âm do chúng là số lượng sản phẩm. Tóm lại ta có bài toán quy hoạch tuyến tính 2 biến số 3 ràng buộc sau đây:

$$\begin{array}{lrcrl}
\max & \{40F & + & 30S\} & \\
\text{v.đ.k.} & & & & \\
& 0,4F & + & 0,5S & \le 20 \\
& & & 0,2S & \le 5 \\
& 0,6F & + & 0,3S & \le 21 \\
& F, & & S & \ge 0
\end{array}$$

Bây giờ ta mô tả từng bước phương pháp hình học để giải bài toán quy hoạch tuyến tính trên (xem chi tiết trên hình 7.1).

Bước 1: Vẽ tập phương án khả thi D. Xét hệ trục tọa độ có trục hoành là trục F trục tung là trục S. Đầu tiên, ta biểu diễn $0,4F + 0,5S \le 20$. Ta biết rằng đồ thị $0,4F + 0,5S = 20$ là đường thẳng. Đường thẳng này chia mặt phẳng tọa độ thành hai nửa mặt phẳng: một nửa ứng với phần $0,4F + 0,5S < 20$ và một nửa ứng với phần $0,4F + 0,5S > 20$. Để xác định nửa nào ứng với bất phương trình nào cụ thể ta có thể sử dụng một điểm thử bất kỳ. Chẳng hạn lấy điểm thử là gốc tọa độ $(0, 0)$, thay vào $0,4F + 0,5S$ ta có:

$$0,4(0) + 0,5(0) = 0 < 20$$

Gốc tọa độ thuộc nửa mặt phẳng ứng với phần $0,4F+0,5S < 20$ nên mọi điểm nằm cùng phía với gốc tọa độ so với đường thẳng $0,4F + 0,5S = 20$ cũng thỏa mãn $0,4F + 0,5S < 20$. Do vậy, bất phương trình ta cần biểu diễn là nửa mặt phẳng vừa được xác định cộng thêm biên là đường thẳng $0,4F + 0,5S = 20$. Biểu diễn tương tự cho hai ràng buộc còn lại và các ràng buộc dấu, ta được tập phương án khả thi D như phần gạch đứng trên hình 7.1.

Bước 2: Để dễ biểu diễn trên hình, ta vẽ véc tơ $\frac{1}{2}\overrightarrow{c} = (20, 15)$ thay vì véc tơ $\overrightarrow{c} = (40, 30)$. Với đường mức 0, ta biết rằng nó đi qua gốc tọa độ và nhận véc tơ $\overrightarrow{c}$ là véc tơ pháp tuyến nên đường $40F + 30S = 0$ đơn giản là đường thẳng đi qua 0 và vuông góc với véc tơ $\frac{1}{2}\overrightarrow{c} = (20, 15)$ vừa vẽ.

Bước 3: Bài toán ta cần giải là bài toán tìm cực đại, tức tìm những điểm thuộc tập phương án khả thi sao cho đường mức đi qua có giá trị lớn nhất. Ta biết rằng khi tịnh tiến theo hướng $\overrightarrow{c}$, giá trị đường mức tăng dần. Vậy là ta xác định được phương án tối ưu là điểm thuộc tập phương án khả thi cách xa đường mức 0 nhất.

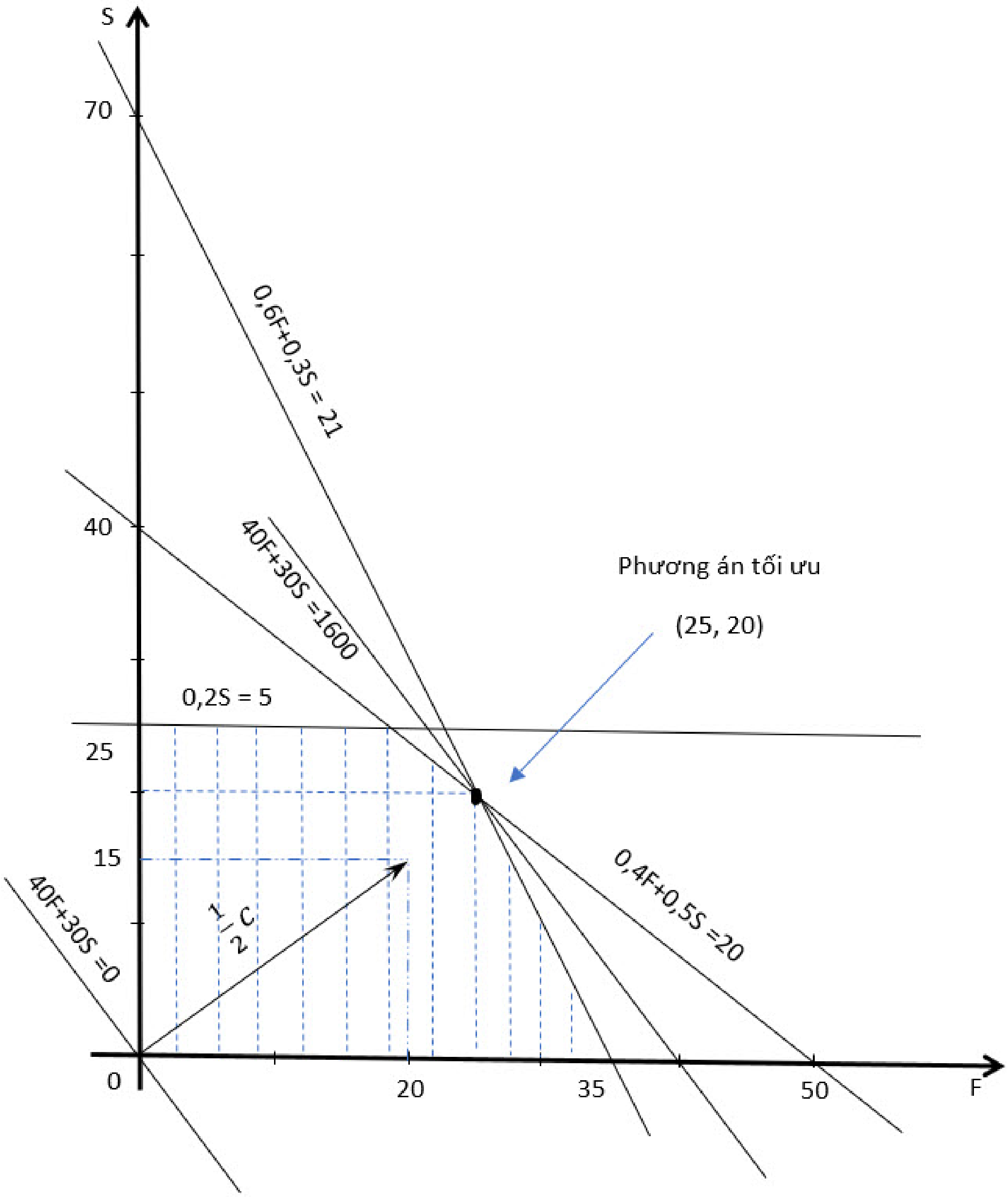
Bước 4: Điểm tối ưu là giao của đường $0,4F+0,5S = 20$ và $0,6F+0,3S = 21$. Do đó tọa độ của nó là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 0,4F + 0,5S = 20, \\ 0,6F + 0,3S = 21, \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được phương án tối ưu $F = 25$ và $S = 20$. Giá trị tối ưu là giá trị của đường mức:

$$40(25) + 30(20) = 1600.$$

Vậy, công ti RMC cần sản xuất 25 tấn phụ gia nhiên liệu và 20 tấn dung môi để thu được lợi nhuận lớn nhất là 1600 USD. ■



Hình 7.1. Phương pháp hình học giải bài toán quy hoạch tuyến tính

Trong ví dụ trên, tập phương án khả thi D có 5 đỉnh khác nhau. Bởi phương án tối ưu sẽ đạt tại đỉnh nên ta có thể tính tọa độ tại 5 đỉnh và so sánh giá trị của hàm mục tiêu tại 5 đỉnh đó để tìm ra đáp án.

***Ví dụ* 7.2.1.2.** Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$\min \quad \{x \;+\; y\}$$

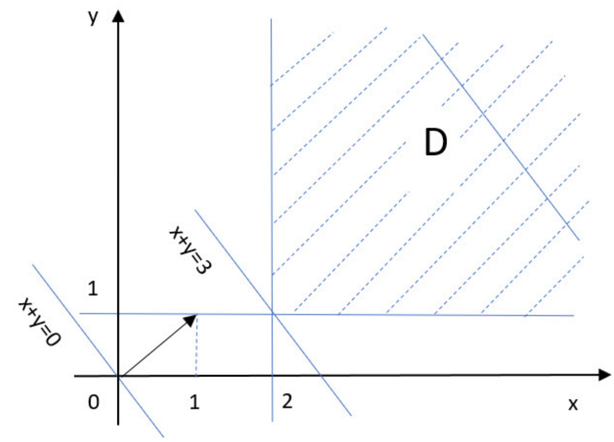
v.đ.k.

$$x \geq 2$$

$$y \geq 1$$

Lời giải:

Bài toán này có thể được giải như minh họa trên hình 7.2.



Hình 7.2. Bài toán quy hoạch tuyến tính không có phương án tối ưu

Điểm thuộc tập phương án khả thi gần đường mức 0 nhất là điểm $(2, 1)$. Do đó, bài toán có nghiệm tối ưu là $(2, 1)$ với giá trị tối ưu là $x + y = 2 + 1 = 3$.

Vẫn bài toán trên nhưng chuyển từ tìm cực tiểu sang tìm cực đại:

$$\begin{array}{lccl} \max & \{x & + & y\} \\ \text{v.đ.k.} & & & \\ & x & & \geq 2 \\ & & y & \geq 1 \end{array}$$

Khi tịnh tiến theo hướng của véc tơ $\overrightarrow{c} = (1, 1)$, ta tịnh tiến ra vô hạn. Không tồn tại điểm thuộc tập phương án khả thi xa đường mức 0 nhất. Trong trường hợp này ta nói bài toán không có phương án tối ưu. ■

Chú ý trong ví dụ 7.2.1.2, tập phương án khả thi có một đỉnh duy nhất. Nếu ta áp dụng phương pháp tìm các đỉnh rồi so sánh giá trị hàm mục tiêu sẽ dẫn tới phương án tối ưu là đỉnh duy nhất đó. Tức là, kết quả thu được là sai. Do đó, để sử dụng phương pháp tính và so sánh giá trị hàm mục tiêu tại các đỉnh của tập phương án khả thi, ta phải đảm bảo trước rằng bài toán quy hoạch tuyến tính tồn tại phương án tối ưu.

7.2.2. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính bằng Excel

Các phiên bản khác nhau của Excel có thể không giống tuyệt đối nhưng về cơ bản các bước, cách làm là tương tự nhau. Tiểu mục này sẽ hướng dẫn cách sử dụng Excel 2016 để giải bài toán quy hoạch tuyến tính.

Microsoft Excel tích hợp một add-in gọi là Solver. Thông thường Solver này xuất hiện trên **Menu Data**, **Tab Analysis**. Nếu chưa thấy Solver này xuất hiện, ta có thể cài đặt nó trong phần **Options** của Excel, cụ thể như sau:

- Từ **Menu File**, chọn **Options** để hộp thoại **Excel Options** hiện ra;
- Trong bảng phía bên trái hộp thoại **Excel Options**, bấm chọn **Add-ins**;
- Trong hộp **Manage**, chọn **Excel Add-ins** rồi nhấn nút **Go...**;
- Hộp thoại **Add-ins** mới hiện ra, ta chọn **Solver Add-in** rồi bấm nút **OK**.

Để hướng dẫn thực hành cách sử dụng Excel, ta lấy bài toán quy hoạch tuyến tính trong ví dụ 7.2.1.1 làm minh họa.

Bước 1: Nhập dữ liệu vào một trang tính (xem hình 7.3):

i) Nhập dữ liệu bài toán vào phần trên của trang tính:

Ô B5 tới C7 chỉ ra nhu cầu về nguyên liệu mỗi tấn sản phẩm;

Ô B8 tới C8 chỉ ra lợi nhuận mỗi sản phẩm/tấn;

Ô D5 tới D7 chỉ ra lượng nguyên liệu khả dụng.

ii) Xác định vị trí ô để ghi phương án tối ưu: Ô B15 sẽ ghi lượng phụ gia nhiên liệu và ô C15 ghi lượng dung môi.

iii) Chọn một ô để ghi giá trị hàm mục tiêu tối ưu: Ô B17 được gán công thức

$$B17 := B8 * B15 + C8 * C15$$

	A	B	C	D
1	**RMC**			
2				
3		**Yêu cầu nguyên vật liệu**		
4	**Nguyên vật liệu**	**Phụ gia nhiên liệu**	**Dung môi**	**Số lượng khả dụng**
5	Nguyên vật liệu 1	0.4	0.5	20
6	Nguyên vật liệu 2	0	0.2	5
7	Nguyên vật liệu 3	0.6	0.3	21
8	**Lợi nhuận/tấn**	40	30	
9				
10				
11	**Mô hình**			
12				
13		**Các biến quyết định**		
14		**Phụ gia nhiên liệu**	**Dung môi**	
15	**Số tấn sản xuất**	25	20	
16				
17	**Lợi nhuận cực đại**	=B8*B15+C8*C15		
18				
19	**Ràng buộc**	Lượng dùng (vế trái)		Lượng khả dụng (vế phải)
20	Nguyên vật liệu 1	=B5*B15+C5*C15	<=	=D5
21	Nguyên vật liệu 2	=B6*B15+C6*C15	<=	=D6
22	Nguyên vật liệu 3	=B7*B15+C7*C15	<=	=D7

Hình 7.3. Nhập dữ liệu cho bài toán RMC

iv) Chọn các ô để ghi các vế trái của các ràng buộc:

$$\text{Ô } B20 := B5 * B15 + C5 * C15$$

$$\text{Ô } B21 := B6 * B15 + C6 * C15$$

$$\text{Ô } B22 := B7 * B15 + C7 * C15$$

v) Chọn các ô ghi vế phải của các ràng buộc:

$$D20 := D5 \qquad D21 := D6 \qquad D22 := D7$$

Chú ý:

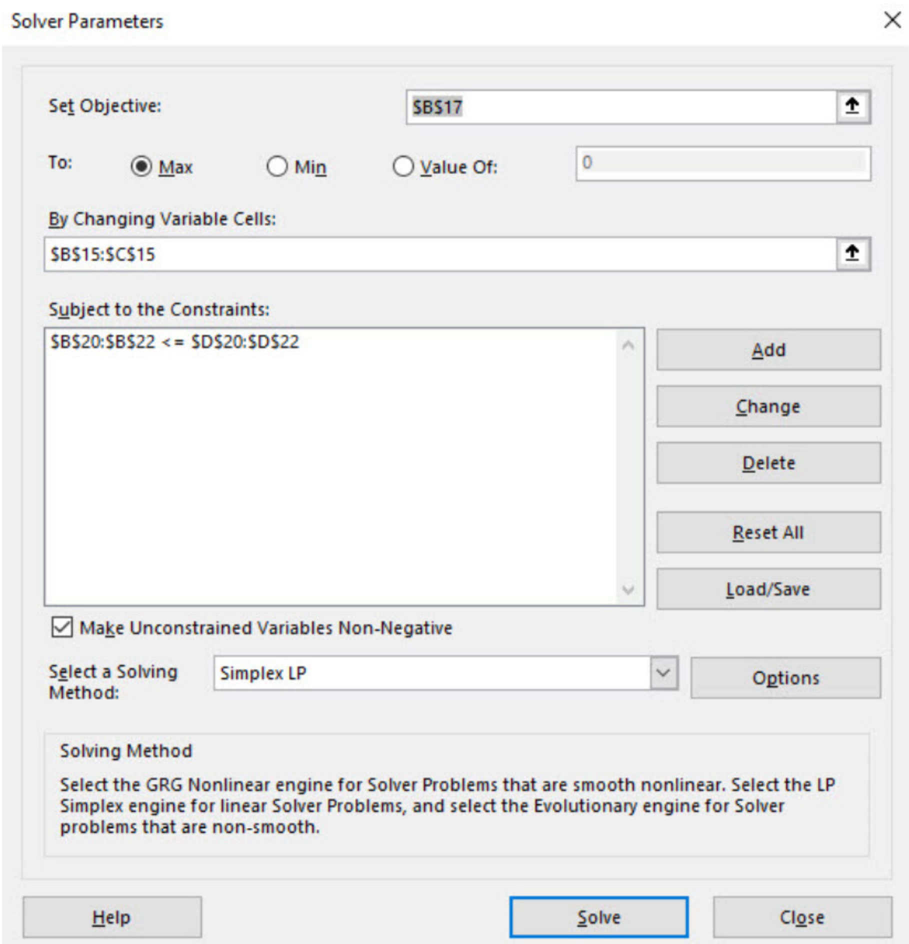
- Các nhãn và bản thân dấu "<=" chỉ có tác dụng mô tả cho người đọc dễ theo dõi chứ không có tác dụng làm máy tính hiểu.
- Các công thức trong ô B17,B20,B21,B22 là phép tính tích vô hướng của hai véc tơ. Ta có thể thay thế chúng bằng hàm

SUMPRODUCT, ví dụ:

$$B17 = SUMPRODUCT(B15 : C15, B8 : C8)$$

Cách viết này sẽ đặc biệt thuận tiện khi số lượng biến lớn

Bước 2: Chọn nút **Solver** trên **Menu Data**, **Tab Analysis**



Hình 7.4. Hộp thoại Solver Parameters

Bước 3: Khi hộp thoại **Solver Parameters** xuất hiện (xem hình 7.4)

i) Nhập địa chỉ ô chứa giá trị hàm mục tiêu (B17) vào hộp **Set Objective**;

ii) Vì bài toán của ta tìm cực đại nên đánh dấu chọn vào **Max**;

iii) Nhập địa chỉ các ô chứa biến (B15:C15) vào hộp **By Changing Variable Cells**.

Bước 4: Nhấn nút **Add** để thêm ràng buộc. Khi đó hộp thoại **Add Constraint** hiện ra:

i) Nhập vế trái của ràng buộc vào hộp **Cell Reference**

ii) Nhập vế phải của ràng buộc vào hộp **Constraint**

iii) Chọn dấu ràng buộc. Chú ý rằng có thể nhập đồng thời những ràng buộc cùng loại $\leq$, $\geq$ hay $=$ một lúc. Do vậy để cho thuận tiện, trong bước 1 người ta thường viết những ràng buộc cùng loại dấu vào một nhóm ô liền nhau.

Bước 5: Đánh dấu chọn vào **Make Unconstrained Variables Non-negative** vì các biến của không âm;

Bước 6: Trong hộp **Select a Solving Method**, chọn **Simplex LP** để chỉ định phương pháp đơn hình giải bài toán quy hoạch tuyến tính;

Bước 7: Chọn nút **Solve**. Khi hộp thoại **Solver Results** xuất hiện, chọn **Answer** và **Keep Solver Solution** rồi nhấn nút **OK**.

Phân tích độ nhạy với Excel

Thực tế xung quanh ta là một môi trường vận động biến đổi, chẳng hạn: giá nguyên vật liệu thay đổi, nhu cầu thay đổi, khả năng sản xuất thay đổi, giá cổ phiếu thay đổi, ... Do đó, các hệ số của bài toán quy hoạch tuyến tính được mô hình hóa trong môi trường như vậy thường bị thay đổi. Một vấn đề quan trọng khi nghiên cứu bài toán quy hoạch tuyến tính là **phân tích độ nhạy** của các hệ số trong bài toán quy hoạch tuyến tính. Cụ thể, ta phân tích xem khi các hệ số thay đổi, bài toán quy hoạch tuyến tính mới sẽ có kết quả thế nào. Việc phân tích độ nhạy giúp ta có thông tin cần thiết mà không phải giải lại bài toán quy hoạch tuyến tính với hệ số cập nhật mới. Hai nhóm hệ số ta thường quan tâm phân tích độ nhạy là hệ số hàm mục tiêu và hệ số vế phải của ràng buộc.

Nếu ta muốn phân tích độ nhạy của các hệ số của bài toán quy hoạch tuyến tính, thì trong bước 7 ở trên ta phải chọn **Sensitivity** thay vì **Answer**. Sau khi nhấn **OK**, một trang kết quả được hiện ra. Hình 7.5 minh họa thông tin về độ nhạy của bài toán trong ví dụ 7.2.1.1.

Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
B15	Số tấn sản xuất Phụ gia nhiên liệu	25	0	40	20	16
C15	Số tấn sản xuất Dung môi	20	0	30	20	10

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
B20	Nguyên vật liệu 1 sử dụng	20	33.3333333	20	1.5	6
B21	Nguyên vật liệu 2 sử dụng	4	0	5	1E+30	1
B22	Nguyên vật liệu 3 sử dụng	21	44.4444444	21	9	2.25

Hình 7.5. Thông tin độ nhạy của các hệ số

Bảng thông tin chứa 2 phần: Variable Cells ở trên và Constraints ở dưới.

Trong phần Variable Cells, cột Final Value chứa giá trị của các phương án tối ưu. Cụ thể, bài toán RMC có phương án sản xuất tối ưu là 25 tấn phụ gia nhiêu liệu và 20 tấn dung môi.

Giá trị trong cột Reduced Cost là gì? Trong Excel, một Reduced Cost có giá trị khác không chỉ ra lượng giá trị hàm mục tiêu sẽ thay đổi nếu biến tương ứng được tăng lên một đơn vị. Reduced cost của cả hai biến trong bài toán RMC bằng 0 chứng tỏ chúng là phương án tối ưu.

Ba cột tiếp theo Objective Coefficient, Allowable Increase, Allowable Decrease lần lượt chỉ ra hệ số hiện tại, lượng có thể giảm, lượng có thể tăng của hệ số hiện tại của hàm mục tiêu để phương án tối ưu của bài toán không đổi. Cụ thể, để bài toán RMC có phương án tối ưu là (25,20), véc tơ hệ số $\overrightarrow{c} = (c_1, c_2)$ có thể thay đổi như sau:

$$\begin{cases} c_1 \in [40-16, 40+20] \\ c_2 \in [30-10, 30+20] \end{cases} \text{hay} \begin{cases} c_1 \in [24, 60] \\ c_2 \in [20, 50] \end{cases}$$

Trong phần phía dưới Constraints, cột Final Value chỉ số lượng nguyên liệu cần dùng để có phương án tối ưu. Cụ thể, ở đây RMC cần dùng 20 tấn Nguyên liệu 1, 4 tấn nguyên liệu 2, và 21 tấn nguyên liệu 3 để sản xuất ra 25 tấn phụ gia nhiêu liệu và 20 tấn dung môi.

Cột thứ hai Shadow Price chứa thông tin khá quan trọng. Đây chính là lượng thay đổi của giá trị hàm mục tiêu mỗi khi vế phải tăng một đơn vị. Hai cột cuối chỉ ra lượng có thể tăng, lượng có thể giảm của vế phải để giá trị ở cột Shadow Price vẫn đúng. Chẳng hạn với ràng buộc Nguyên vật liệu 1, vế phải thay đổi trong khoảng từ 20-6 =14 tới 20+1,5=21,5 thì Shadow Price vẫn là 33,33.

7.3. Một vài ứng dụng của quy hoạch tuyến tính

7.3.1. Bài toán lựa chọn phương án tiếp thị

Các phương tiện tiếp thị nói chung gồm có báo, tạp chí, đài phát thanh, truyền hình, thư tín... Với một lượng ngân sách nhất định dành cho quảng cáo, ta phải lựa chọn phương án tiếp thị sao cho tần suất hoặc khả năng lan tỏa thông tin là lớn nhất. Ví dụ sau sẽ mô hình hóa bài toán lựa chọn phương án tiếp thị thành bài toán quy hoạch tuyến tính.

Tập đoàn RELD chuyên bán các căn hộ cao cấp. Họ thuê công ti BPJ thiết kế chiến dịch quảng cáo nhắm đến người có thu nhập cao. Sau khi khảo sát thị trường, BPJ gợi ý rằng tập đoàn RELD nên quảng cáo theo 5 cách: Tin trên ti vi vào giờ ban ngày, tin trên ti vi bào buổi tối, tin trên nhật báo, tin trên tuần báo, và tin trên đài phát thanh. BPJ đã thu thập dữ liệu về lượng khách hàng tiềm năng, chi phí quảng cáo, số lượng tin quảng cáo trên mỗi kênh truyền thông, và độ lan tỏa thông tin. Độ lan tỏa thông tin được công ti BPJ đưa ra dựa trên các yếu tố như nhân khẩu học (tuổi, thu nhập, học vấn của khách hàng được tiếp cận tin), hình ảnh, chất lượng quảng cáo. Bảng 7.1 cho ta thông tin về 5 cách thức đưa tin này: Tập đoàn RELD chi 30000 USD làm ngân sách quảng cáo đồng thời yêu cầu nhấn mạnh một số điều kiện: 1) Số quảng cáo trên TV phải ít nhất là 10 tin; 2) Lượng khách tiềm năng tiếp cận

Bảng 7.1. Thông tin quảng cáo

Phương tiện quảng cáo	Số khách tiếp cận	Chi phí cho mỗi tin	Số tin lớn nhất	Độ lan tỏa
TV (ban ngày)	1000	1500	15	65
TV(tối)	2000	3000	10	90
Nhật báo	1500	400	25	40
Tuần báo	2500	1000	4	60
Đài phát thanh	300	100	30	20

tin quảng cáo ít nhất đạt 50000 người; 3) Chi phí cho quảng cáo trên truyền hình không vượt quá 18000 USD. Công ti BPJ phải thiết kế chiến dịch quảng cáo thế nào?

Bài toán đặt ra ở đây là thiết kế số lượng tin quảng cáo theo 5 cách trên. Do đó, chúng ta kí hiệu 5 biến số: DTV= số tin quảng cáo trên truyền hình vào giờ ban ngày;
ETV= số tin quảng cáo trên truyền hình vào giờ ban tối;
DN= số tin quảng cáo trên nhật báo;
SN= số tin quảng cáo trên tuần báo;
R= số tin quảng cáo trên đài phát thanh.
Nếu lấy mục tiêu là độ lan tỏa lớn nhất thì ta cần đi tìm:

$$\max\{65DTV + 90ETV + 40DN + 60SN + 20R\}$$

Các ràng buộc phải thỏa mãn là các điều kiện về số lượng tin lớn nhất trên mỗi kênh; tổng ngân sách; ngân sách cho quảng cáo trên truyền hình; số tin trên truyền hình; và số khán giả cần đạt được. Ta có bài toán quy hoạch tuyến tính sau đây:

$$\begin{array}{lrrrrrl}
\max & 65DTV & +90ETV & +40DN & +60SN & +20R & \\
\text{v.đ.k.} & & & & & & \\
& DTV & & & & & \le 15 \\
& & ETV & & & & \le 10 \\
& & & DN & & & \le 25 \\
& & & & SN & & \le 4 \\
& & & & & R & \le 30 \\
& 1500DTV & +3000ETV & +400DN & +1000SN & +100R & \le 30000 \\
& 1500DTV & +3000ETV & & & & \le 18000 \\
& DTV & +ETV & & & & \ge 10 \\
& 1000DTV & +2000ETV & +1500DN & +2500SN & +300R & \ge 50000 \\
& DTV, & ETV, & DN, & SN, & R & \ge 0
\end{array}$$

Giải bài toán quy hoạch tuyến tính 5 biến 9 ràng buộc trên bằng cách sử dụng Excel ta được phương án tối ưu như trên hình 7.6.

Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
B14	Số lượng tối ưu DTV	10	0	65	25	65
C14	Số lượng tối ưu ETV	0	-65	90	65	1E+30
D14	Số lượng tối ưu DN	25	0	40	1E+30	16
E14	Số lượng tối ưu SN	2	0	60	40	16.6666667
F14	Số lượng tối ưu R	30	0	20	1E+30	14

Độ lan tỏa tối ưu = 2370

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
B18	Giá trị DTV	10	0	15	1E+30	5
B19	Giá trị ETV	0	0	10	1E+30	10
B20	Giá trị DN	25	16	25	5	5
B21	Giá trị SN	2	0	4	1E+30	2
B22	Giá trị R	30	14	30	20	20
B23	Tổng chi phí cho QC	30000	0.06	30000	2000	2000
B24	Chi phí QC trên TV	15000	0	18000	1E+30	3000
B25	Số tin trên TV	10	-25	10	1.33333333	1.33333333
B26	Số người tiếp cận	61500	0	50000	11500	1E+30

Hình 7.6. Kết quả bài toán lựa chọn phương án tiếp thị cho bởi Excel

Phương án tối ưu là sử dụng 10 quảng cáo giờ ban ngày trên truyền hình; 25 tin trên nhật báo; 2 tin trên tuần báo và 30 tin trên đài phát thanh. Không có tin nào phát trên truyền hình buổi tối. Giá trị lớn nhất của độ lan tỏa ta thu được là 2370. Chú ý rằng ràng buộc tổng ngân sách (ràng buộc 6) có Shadow Price là 0,06. Tức là, cứ 1 USD ngân sách quảng cáo tăng thêm sẽ dẫn tới việc độ lan tỏa thông tin tăng thêm 0,06. Shadow Price cho ràng buộc 8 là -25 nghĩa là việc giảm số quảng cáo trên truyền hình đi 1 sẽ dẫn tới việc tăng độ lan tỏa của chiến dịch quảng cáo lên 25 đơn vị. Điều này gợi ý cho tập đoàn RELD nên xem xét việc giảm yêu cầu phải có ít nhất 10 tin trên truyền hình.

7.3.2. Bài toán nghiên cứu thị trường

Công ti MSI là một công ti nghiên cứu thị trường, chuyên điều tra phản ứng của người tiêu dùng khi tiếp xúc với một sản phẩm hoặc một dịch vụ mới. Công ti HHP vừa tung ra một sản phẩm gia dụng và muốn khảo sát phản ứng của người dùng đối với sản phẩm này. Công ti HHP thuê MSI thực hiện phỏng vấn 1000 hộ gia đình với yêu cầu sau:

i) Phỏng vấn ít nhất 400 hộ gia đình có trẻ em;

ii) Phỏng vấn ít nhất 400 hộ gia đình không có trẻ em;

iii) Số hộ được phỏng vấn buổi tối không nhỏ hơn số hộ được phỏng vấn ban ngày;

iv) Ít nhất 40% số buổi phỏng vấn hộ gia đình có trẻ nhỏ phải được thực hiện vào buổi tối;

v) Ít nhất 60% số buổi phỏng vấn hộ gia đình không có trẻ nhỏ phải được thực hiện vào buổi tối.

Chi phí để phỏng vấn hộ gia đình có trẻ em hay không có trẻ em, cũng như chi phí thực hiện vào ban ngày hay buổi tối là khác nhau (xem bảng 7.2).

Công ti phải phỏng vấn mỗi loại hộ gia đình với số lượng thế nào, giờ giấc (ngày hay tối) ra sao để tối thiểu chi phí khảo sát?

Bảng 7.2. Chi phí phỏng vấn mỗi hộ gia đình

Hộ gia đình	Phỏng vấn ban ngày	Phỏng vấn tối
Có trẻ em	20 USD	25 USD
Không có trẻ em	18 USD	20 USD

Ta kí hiệu các biến sau cho những đại lượng cần tìm:

DC= số hộ gia đình có trẻ em được phỏng vấn ban ngày;

EC= số hộ gia đình có trẻ em được phỏng vấn buổi tối;

DNC= số hộ gia đình không có trẻ em được phỏng vấn ban ngày;

ENC= số hộ gia đình không có trẻ em được phỏng vấn buổi tối.

Tổng chi phí thực hiện phỏng vấn là:

$$20DC + 25EC + 18DNC + 20ENC$$

Vì số lượng phỏng vấn là 1000 nên:

$$DC + EC + DNC + ENC = 1000$$

Năm yêu cầu của công ti HHP dẫn tới 5 ràng buộc sau:

i) Hộ gia đình có trẻ em $DC + EC \geq 400$.

ii) Hộ gia đình không có trẻ em $DNC + ENC \geq 400$.

iii) Số hộ được phỏng vấn buổi tối không nhỏ hơn số hộ được phỏng vấn ban ngày, tức:

$$EC + ENC \geq DC + DNC \text{ hay } -DC + EC - DNC + ENC \geq 0$$

iv) Ít nhất 40% số buổi phỏng vấn hộ gia đình có trẻ nhỏ phải được thực hiện vào buổi tối:

$$EC \geq 0,4(DC + EC) \text{ hay } -0,4DC + 0,6EC \geq 0$$

v) Ít nhất 60% số buổi phỏng vấn hộ gia đình không có trẻ nhỏ phải được thực hiện vào buổi tối:

$$ENC \geq 0,6(DNC + ENC) \text{ hay } -0,6DNC + 0,4ENC \geq 0$$

Thêm cả các ràng buộc không âm với các biến, ta có bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$\begin{array}{lrcrcrcrl}
\min & \{20DC & + & 25EC & + & 18DNC & + & 20ENC\} & \\
\text{v.đ.k.} & & & & & & & & \\
& DC & + & EC & + & DNC & + & ENC & = 1000 \\
& DC & + & EC & & & & & \geq 400 \\
& & & & & DNC & + & ENC & \geq 400 \\
& -DC & + & EC & - & DNC & + & ENC & \geq 0 \\
& -0,4DC & + & 0,6EC & & & & & \geq 0 \\
& & & & & -0,6DNC & + & 0,4ENC & \geq 0 \\
& DC, & & EC, & & DNC, & & ENC & \geq 0
\end{array}$$

Giải bài toán quy hoạch tuyến tính 4 biến 6 ràng buộc trên bằng Excel ta được phương án tối ưu:

Số hộ gia đình có trẻ em được phỏng vấn ban ngày= DC=240;

Số hộ gia đình có trẻ em được phỏng vấn buổi tối=EC=160;

Số hộ gia đình không có trẻ em được phỏng vấn ban ngày=DNC=240;

Số hộ gia đình không có trẻ em được phỏng vấn buổi tối=ENC=360.

Chi phí tối ưu để thực hiện phỏng vấn là 20320. Trên hình 7.7, giá trị Shadow Price=19,2 chỉ ra rằng mỗi phỏng vấn tăng thêm sẽ phát sinh chi phí 19,2.

Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
D5	Biến DC	240	0	20	5	4.66666667
E5	Biến EC	160	0	25	1E+30	5
F5	Biến DNC	240	0	18	2	1E+30
G5	Biến ENC	360	0	20	4.66666667	2
	Chi phí nhỏ nhất = 20320					

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
D20	Tổng số phỏng vấn	1000	19.2	1000	1E+30	200
D21	Gia đình có trẻ	400	2.8	400	100	400
D22	Gia đình không trẻ	600	0	400	200	1E+30
D23	Pv tối>=ngày	40	0	0	40	1E+30
D24	Số pv GD có trẻ buổi tối	0	5	0	240	20
D25	Sô pv GĐ không trẻ buổi tối	0	2	0	240	20

Hình 7.7. Kết quả bài toán khảo sát thị trường cho bởi Excel

7.3.3. Bài toán lựa chọn danh mục đầu tư

Bài toán lựa chọn danh mục đầu tư là bài toán lựa chọn các phương án đầu tư cụ thể (cổ phiếu, trái phiếu, bất động sản,...) từ một tập các phương án đầu tư cho trước. Đây là bài toán mà các giám đốc tài chính, người quản lý của các quỹ tương hỗ, công ti bảo hiểm, ngân hàng thường gặp. Mục tiêu ở đây là tối đa lợi nhuận kỳ vọng đạt được hoặc tối thiểu hóa rủi ro gặp phải. Các điều kiện ràng buộc ở đây thường là ràng buộc về trạng thái pháp lý, chính sách của công ti, các loại hình đầu tư khả dụng, rủi ro tối đa có thể chấp nhận được... Bài toán này có thể được mô hình hóa dưới nhiều dạng bài toán tối ưu khác nhau. Trong phần này, ta nghiên cứu một bài toán được mô hình dưới dạng bài toán quy hoạch tuyến tính.

Xét trường hợp của Quỹ tương hỗ Welte. Quỹ đang tìm kiếm các cơ hội đầu tư cho một khoản ngân sách 100000 USD. Dựa trên các số liệu được phân tích, các chuyên gia hàng đầu của Welte nhận định rằng đầu tư nên tập trung vào các công ti dầu khí, công ti thép và trái phiếu chính phủ. Các phương án đầu tư và tỉ suất lợi nhuận tương ứng được cụ thể trong bảng 7.3. Các chuyên gia cũng nhận định:

i) Không đầu tư quá 50000 USD vào mỗi ngành công nghiệp (dầu, thép);

Bảng 7.3. Tỉ suất lợi nhuận của danh mục đầu tư

Phương án đầu tư	Dầu Atlantic	Dầu Pacific	Thép Midwwest	Thép Huber	Trái phiếu chính phủ
Tỉ suất lợi nhuận (%)	7,3	10,3	6,4	7,5	4,5

ii) Trái phiếu chính phủ nên được đầu tư ít nhất bằng 25% so với đầu tư vào các công ti thép;

iii) Đầu tư vào Công ti dầu Pacific có lợi nhuận cao nhưng rủi ro lớn nên không được chiếm quá 60% tổng lượng đầu tư vào các công ti dầu khí.

Welte nên đầu tư vào lĩnh vực gì, với ngân sách bao nhiêu để tối đa lợi nhuận?

Gọi A, P, M, H, và G lần lượt là số tiền đầu tư vào Công ti dầu Atlantic, Công ti dầu Pacific, Công ti thép Midwest, Công ti thép Huber và Trái phiếu chính phủ.
Lợi nhuận Welte thu được sẽ là:

$$0,073A + 0,103P + 0,064M + 0,075H + 0,045G$$

Ngân sách đầu tư là 100000 nên

$$A + P + M + H + G = 100000$$

Yêu cầu không đầu tư quá 50000 vào hai ngành công nghiệp nên ta có:

$$A + P \leq 50000$$

$$M + H \leq 50000$$

Đầu tư vào trái phiếu chính phủ ít nhất bằng 25% đầu tư vào các công ti thép:

$$G \geq 0,25(M + H) \text{ hay } -0,25M - 0,25H + G \geq 0$$

Cuối cùng, đầu tư vào công ti Pacific không nên quá 60% lượng đầu tư vào các công ti dầu khí:

$$P \leq 0,6(A + P) \text{ hay } -0,6A + 0,4P \leq 0$$

Thêm các ràng buộc biến không âm, ta có bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$\max \quad \{0,073A + 0,103P + 0,064M + 0,075H + 0,045G$$

v.đ.k.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl}
A & + & P & + & M & + & H & + & G & = 100000 \\
A & + & P & & & & & & & \leq 50000 \\
 & & & & M & + & H & & & \leq 50000 \\
 & & & - & 0,25M & - & 0,25H & + & G & \geq 0 \\
-0,6A & + & 0,4P & & & & & & & \leq 0 \\
A, & & P, & & M, & & H, & & G & \geq 0
\end{array}$$

Giải bài toán bằng Excel, ta được phương án tối ưu là:

$$A = 20000; \quad P = 30000; \quad M = 0; \quad H = 40000; \text{ và } G = 10000$$

Vậy là Quỹ Welte nên đầu tư vào tất cả các danh mục trừ công ti dầu Midwest. Lợi nhuận dự kiến đạt được sẽ là 8000 USD, tức lãi suất trung bình là 8%.

Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
D4	Biến A	20000	0	0.073	0.03	0.055
E4	Biến P	30000	0	0.103	1E+30	0.03
F4	Biến M	0	-0.011	0.064	0.011	1E+30
G4	Biến H	40000	0	0.075	0.0275	0.011
H4	Biến G	10000	0	0.045	0.03	1E+30

Lợi nhuận tối ưu = 8000

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
D15	Ngân sách	100000	0.069	100000	12500	50000
D16	Cty dầu max	50000	0.022	50000	50000	12500
D17	Cty thép max	40000	0	50000	1E+30	10000
D18	Trái phiếu min	0	-0.024	0	50000	12500
D19	Cty Pacific	0	0.03	0	20000	30000

Hình 7.8. Kết quả bài toán tối ưu danh mục đầu tư cho bởi Excel

Trên hình 7.8, Shadow Price của ràng buộc 3 là 0, điều này chứng tỏ nếu tăng giới hạn đầu tư lên quá 50000 USD cho các công ti ngành thép thì giá trị tối ưu vẫn không đổi. Shadow Price 0,069 của ràng buộc 1 chỉ ra rằng với mỗi 1 USD đầu tư thêm, lợi nhuận sẽ thu được 0,069 USD (tương đương 6,9%). Vậy là, nếu Quỹ có thể huy động vốn với lãi suất nhỏ hơn 6,9%, nhà quản lý điều hành Quỹ có thể xem xét đầu tư thêm. Shadow Price của ràng buộc 4 là -0,024. Điều này có nghĩa là việc tăng giá trị vế phải ràng buộc 4 lên 1 đơn vị sẽ làm cho giá trị lợi nhuận tối ưu giảm đi 0,024. Tức là, nếu công ti đầu tư thêm 1 USD vào trái phiếu chính phủ thì tổng doanh thu sẽ giảm đi 0,024 USD.

7.3.4. Bài toán quản lí điều hành sản xuất

Công ti Janders sản xuất hai loại máy tính bỏ túi: Một loại cho lĩnh vực kinh doanh BC và một loại cho lĩnh vực kĩ thuật T. Mỗi máy tính có ba thành phần cơ bản: vỏ máy, vi mạch, màn hình. Hai loại máy tính đều có màn hình giống nhau nhưng khác nhau về vỏ máy và vi mạch. Cả ba thành phần này công ti đều có thể tự sản xuất hoặc mua từ nhà cung cấp bên ngoài. Dự báo nhu cầu thị trường là 3000 máy tính loại BC và 2000 máy tính loại T. Tuy nhiên, khả năng sản xuất của công ti là có hạn: công ti chỉ có 200 giờ chính quy để sản xuất và 50 giờ làm thêm. Mỗi giờ làm thêm mất phụ phí 9 USD. Chi phí sản xuất/mua ngoài cũng như thời gian sản xuất các thành phần linh kiện được cho trong bảng 7.4.

Công ti cần phải xác định bao nhiêu thành phần linh kiện mỗi loại có thể tự sản xuất, bao nhiêu phải mua ngoài để cực tiểu chi phí.

Bài toán có các biến như sau:

MHS = số màn hình tự sản xuất;

MHM = số màn hình mua ngoài;

BCVMS = số vi mạch máy BC tự sản xuất;

BCVMM = số vi mạch máy BC mua ngoài;

Bảng 7.4. Thông tin về chi phí và thời gian

Thành phần linh kiện	Giá sản xuất (USD/cái)	Giá mua ngoài (USD/cái)	Thời gian (phút/cái)
Màn hình	0,50	0,60	1,0
Vi mạch máy BC	3,75	4,00	3,0
Vi mạch máy T	3,30	3,90	2,5
Vỏ máy BC	0,60	0,65	1,0
Vỏ máy T	0,75	0,78	1,5

TVMS = số vi mạch máy T tự sản xuất;

TVMM = số vi mạch máy T mua ngoài;

BCVoS = số vỏ máy BC tự sản xuất;

BCVoM = số vỏ máy BC mua ngoài;

TVoS = số vỏ máy T tự sản xuất;

TVoM = số vỏ máy T mua ngoài;

T = số giờ làm thêm.

Tổng chi phí công ti Janders muốn cực tiểu hóa là:
min$\{0,5MHS + 0,6MHM + 3,75BCVMS + 4BCVMM + 3,3TVMS + 3,9TVMM + 0,6BCVoS + 0,65BCVoM + 0,75TVoS + 0,78TVoM + 9T\}$
Năm ràng buộc đầu tiên liên quan đến số lượng máy tính cần sản xuất:

$$MHS + MHM = 5000$$

$$BCVMS + BCVMM = 3000$$

$$TVMS + TVMM = 2000$$

$$BCVoS + BCVoM = 3000$$

$$TVoS + TVoM = 2000$$

Ràng buộc thứ 6 là ràng buộc liên quan đến giới hạn của số lượng giờ làm thêm:

$$T \leq 50$$

Ràng buộc thứ 7 là ràng buộc liên quan đến thời gian sản xuất các thành phần linh kiện. Vì số phút công ti có thể có là $60(200 + T) = 12000 + 60T$ nên:

$$MHS + 3BCVMS + 2,5TVMS + 1BCVoS + 1,5TVoS \leq 12000 + 60T$$

Tóm lại, ta có bài toán quy hoạch tuyến tính 11 biến và 7 ràng buộc chưa kể ràng buộc biến không âm. Giải bài toán này bằng Excel ta được kết quả như trên hình 7.9.

Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
B4	Số lượng MHS	5000	0	0.5	0.016666667	1E+30
C4	Số lượng MHM	0	0.016667	0.6	1E+30	0.016666667
D4	Số lượng BCVMS	666.6667	0	3.75	0.1	0.05
E4	Số lượng BCVMM	2333.333	0	4	0.05	0.1
F4	Số lượng TVMS	2000	0	3.3	0.391666667	1E+30
G4	Số lượng TVMM	0	0.391667	3.9	1E+30	0.391666667
H4	Số lượng BCVoS	0	0.033333	0.6	1E+30	0.033333333
I4	Số lượng BCVoM	3000	0	0.65	0.033333333	1E+30
J4	Số lượng TVoS	0	0.095	0.75	1E+30	0.095
K4	Số lượng TVoM	2000	0	0.78	0.095	1E+30
L4	Số lượng T	0	4	9	1E+30	4
	Tổng chi phí tối ưu= 24443.333					

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
P8	Số màn hình	5000	0.583333	5000	2000	5000
P9	Số vi mạch BC	3000	4	3000	1E+30	2333.333333
P10	Số vi mạch T	2000	3.508333	2000	800	2000
P11	Số vỏ máy BC	3000	0.65	3000	1E+30	3000
P12	Số vỏ máy T	2000	0.78	2000	1E+30	2000
P13	Giờ làm thêm	0	0	50	1E+30	50
P14	Thời gian sản xuất	12000	-0.083333	12000	7000	2000

Hình 7.9. Kết quả bài toán quản lí điều hành sản xuất cho bởi Excel

Phương án tối ưu tìm được là: Công ti sản xuất toàn bộ 5000 màn hình, 667 vi mạch máy BC, 2000 vi mạch máy T; Phần còn lại bao gồm 2333 vi mạch máy BC, 3000 vỏ máy BC và 2000 vỏ máy T được mua ngoài; Việc làm tăng ca là không cần thiết và tổng chi phí tối ưu sẽ là 24443,333 USD.

Trên hình 7.9, Reduced Cost ứng với thời gian làm tăng ca là 4. Điều này có nghĩa là việc làm tăng ca thêm mỗi giờ dẫn đến giá trị hàm mục tiêu giảm đi 4 USD. Mà ta biết rằng, chi phí mỗi giờ làm thêm hiện là 9 USD. Vậy là nếu chi phí cho mỗi giờ làm thêm nhỏ hơn 9-4=5 USD, công ti có thể dùng thời gian tăng ca để sản xuất sản phẩm thay vì mua ngoài. Shadow Price của ràng buộc 7 là 0,083. Điều này có nghĩa là mỗi phút làm thêm có giá trị là 0,083, tức mỗi giờ làm thêm có giá trị $(0,083) \times (60)$ =5 USD. Điều này đúng khi thời gian làm việc chính quy dao động từ $12000 - 2000 = 10000$ phút đến $12000 + 7000 = 19000$ phút.

7.4. Bài tập Chương 7

Hướng dẫn ôn tập

Mục 7.1: khái niệm và các thuật ngữ cơ bản của bài toán quy hoạch tuyến tính; mô hình hóa bài toán thực tế về bài toán quy hoạch tuyến tính.

Mục 7.2: phương pháp hình học giải bài toán quy hoạch tuyến tính hai biến số; cách sử dụng phần mềm Excel để giải bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát.

Mục 7.3: luyện tập giải bằng Excel các bài toán quy hoạch tuyến tính cụ thể trong kinh tế tài chính.

Sinh viên ôn tập lần lượt các vấn đề then chốt theo thứ tự trên đây, nghiên cứu kĩ các ví dụ, rèn luyện kĩ năng tính toán và giải quyết vấn đề qua việc giải được tối thiểu 50% số bài tập được liệt kê cho từng mục.

Bài tập mục 7.2 và mục 7.3

Bài 1. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$\begin{array}{lrcrl}
\min & \{x & + & y\} & \\
\text{v.đ.k.} & & & & \\
& x & - & 2y & \leq 3 \\
& x & - & y & \leq 4 \\
& x & & & \geq 1 \\
& & & y & \geq 0
\end{array}$$

Bài 2. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$\begin{array}{lrcrl}
\max & \{6x & + & 2y\} & \\
\text{v.đ.k.} & & & & \\
& x & - & y & \geq 0 \\
& 3x & + & y & \geq 8 \\
& x & & & \geq 0 \\
& & & y & \geq 0
\end{array}$$

Bài 3. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$\begin{array}{lrcrl}
\min & \{3x & - & 4y\} & \\
\text{v.đ.k.} & & & & \\
& -2x & + & y & \leq 12 \\
& x & - & y & \leq 2 \\
& x & & & \geq 0 \\
& & & y & \geq 0
\end{array}$$

Bài 4. Ta có thể nói gì về phương án tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính ở bài 3 nếu a/ Hàm mục tiêu được cực đại hóa thay vì cực tiểu hóa?

b/ Ràng buộc thứ hai được đổi thành $x + y \leq 2$ và mục tiêu là đi tìm cực tiểu?

c/ Ràng buộc thứ hai được đổi thành $3x - 4y \leq 24$ và mục tiêu là đi tìm cực đại?

Bài 5. Một công ti sản xuất 2 loại găng tay cho cầu thủ bóng chày: găng bình thường và găng cho cầu thủ bắt bóng. Công ti có 900 giờ khả dụng cho bộ phận cắt may, 300 giờ cho bộ phận hoàn thiện và 100 giờ cho bộ phận đóng gói và vận chuyển hàng. Thời gian cần thiết để làm một chiếc găng tại mỗi bộ phận và lợi nhuận được ước lượng như sau:

Loại găng	Bộ phận may vá (giờ)	Bộ phận hoàn thiện (giờ)	Bộ phận gói/vận chuyển (giờ)	Lợi nhuận (USD/đôi)
Găng bình thường	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	5
Găng bắt bóng	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	8

Công ti mong muốn cực đại lợi nhuận. Hãy:

a/ Lập mô hình bài toán quy hoạch tuyến tính cho bài toán trên;

b/ Sử dụng phương pháp hình học tìm phương án sản xuất tối ưu;

c/ Tính lợi nhuận tối ưu đạt được;

d/ Tính tổng số giờ sử dụng tại mỗi bộ phận khi sản xuất theo phương án tối ưu;

e/ Tìm số giờ còn thừa tại các bộ phận khi đó.

Bài 6. Một nhà hàng có ngân sách 1000 USD mỗi tháng dành cho quảng cáo trên báo và đài. Ông chủ nhà hàng quyết định rằng mỗi loại hình quảng cáo đều phải chiếm ít nhất 25% ngân sách. Tổng số tiền dành cho quảng cáo trên báo phải ít nhất gấp hai lần số tiền dành cho quảng cáo trên đài. Chuyên gia tư vấn tiếp thị đo hiệu quả của mỗi USD bỏ ra cho mỗi kênh quảng cáo bởi một chỉ số có thang điểm từ 0 đến 100. Họ đánh giá rằng mỗi USD quảng cáo trên báo có điểm số là 50 trong khi mỗi USD quảng cáo trên đài có điểm số là 80. Nhà hàng nên phân phối ngân sách cho quảng cáo mỗi loại ra sao để tối đa hóa hiệu quả của quảng cáo?

Bài 7. Một công ti khai thác than sở hữu hai mỏ than A và B. Hai mỏ này nằm ở hai vị trí khác nhau và có chi phí khai thác khác nhau. Mỗi giờ chi phí khai thác tại mỏ A là 50 USD trong khi tại mỏ B là 40 USD. Than khai thác tại hai mỏ được phân thành 3 loại với chất lượng khác nhau: tốt, trung bình, và thấp. Năng suất khai thác một giờ tại mỏ A là 0,75 tấn than chất lượng cao, 0,25 tấn chất lượng trung bình và 0,5 tấn chất lượng thấp. Tại mỏ B, năng suất mỗi giờ là 0,25 tấn than chất lượng cao; 0,25 tấn than chất lượng trung bình và 1,5 tấn chất lượng thấp. Công ti có hợp đồng cung cấp cho đối tác mỗi tuần 36 tấn than chất lượng cao, 24 tấn than chất lượng trung bình và 72 tấn than chất lượng thấp. Hãy lập kế hoạch số giờ khai thác than tại hai mỏ mỗi tuần để cực tiểu chi phí hoạt động của công ti.

Bài 8. Xét bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$\begin{array}{lrcrl}
\max & \{3x & + & 2y\} & \\
\text{v.đ.k.} & & & & \\
 & x & + & y & \leq 10 \\
 & 3x & + & y & \leq 24 \\
 & x & + & 2y & \leq 16 \\
 & x, & & y & \geq 0
\end{array}$$

a/ Sử dụng phương pháp hình học giải bài toán quy hoạch tuyến tính trên;

b/ Giả sử hệ số hàm mục tiêu của x thay đổi từ 3 thành 5. Phương án tối ưu có thay đổi không? Sử dụng phương pháp hình học để tìm phương án tối ưu mới.

c/ Giả sử hệ số hàm mục tiêu của x vẫn là 3 nhưng hệ số hàm mục tiêu của y đổi từ 2 thành 4. Phương án tối ưu có thay đổi không? Sử dụng phương pháp hình học để tìm phương án tối ưu mới.

d/ Kiểm tra lại kết quả 3 câu hỏi trên sử dụng Excel.

Bài 9. Sử dụng Excel giải bài toán quy hoạch tuyến tính ở bài 5.

a/ Phân tích độ nhạy của các hệ số hàm mục tiêu;

b/ Phân tích độ nhạy của vế phải;

c/ Giá trị của phương án tối ưu sẽ thay đổi thế nào nếu công ti có thêm 20 giờ cho bộ phận đóng gói và vận chuyển hàng?

Bài 10. Một công ti sản xuất 3 loại điều hòa không khí: loại tiết kiệm, loại chuẩn, và loại chất lượng cao. Lợi nhuận thu được từ mỗi một chiếc điều hòa trên tương ứng là 63 USD, 95 USD, và 135 USD. Thông tin về việc sản xuất 3 loại điều hòa được cho như sau:

Loại điều hòa	Số quạt	Số cuộn làm mát	Thời gian sản xuất
Tiết kiệm	1	1	8 giờ
Chuẩn	1	2	12 giờ
Chất lượng cao	1	4	14 giờ

Công ti hiện có 200 quạt, 320 cuộn làm mát, và 2400 giờ sản xuất khả dụng. Tính số điều hòa mỗi loại cần sản xuất để cực đại lợi nhuận.

a/ Lập mô hình quy hoạch tuyến tính cho bài toán trên;

b/ Sử dụng Excel giải bài toán trên;

c/ Nếu lợi nhuận cho một chiếc điều hòa chất lượng cao là 150 USD. Phương án tối ưu có thay đổi không?

Bài 11. Xét bài toán quy hoạch tuyến tính đã đề cập ở bài 10.

a/ Phân tích độ nhạy của hệ số hàm mục tiêu;

b/ Giả sử rằng lợi nhuận cho mẫu điều hòa tiết kiệm tăng thêm 6 USD/cái, lợi nhuận cho mẫu điều hòa chuẩn giảm 2 USD/cái, và lợi nhuận cho mẫu điều hòa chất lượng cao tăng 4 USD/cái. Phương án tối ưu mới sẽ như thế nào?

c/ Phân tích độ nhạy của vế phải ràng buộc.

d/ Phân tích sự thay đổi của Shadow Price nếu số lượng quạt khả dụng của công ti tăng thêm 100 chiếc.

Bài 12. ***Bài toán pha trộn xăng***

Một công ti xăng dầu sản xuất hai loại xăng: xăng tiêu chuẩn và xăng cao cấp. Xăng tiêu chuẩn được bán với giá 2,9 USD/ lít trong khi xăng cao cấp được bán với giá 3 USD/lít. Hai loại xăng này được sản xuất bằng cách pha trộn ba thành phần dầu mỏ khác nhau. Công ti đã mua và lưu trữ trong kho 3 thành phần dầu mỏ với giá và số lượng khác nhau, cụ thể như sau:

Thành phần dầu mỏ	Giá/lít	Số lượng
1	2,50 USD	5000 lít
2	2,60 USD	10000 lít
3	2,84 USD	10000 lít

Để pha trộn ra được 2 loại xăng trên, yêu cầu về chỉ số thành phần dầu mỏ phải thỏa mãn như sau: i) Xăng tiêu chuẩn có nhiều nhất 30% thành phần dầu mỏ 1; ít nhất 40% thành phần dầu mỏ 2; nhiều nhất 20% thành phần dầu mỏ 3. ii) Xăng cao cấp chứa ít nhất 25% thành phần dầu mỏ 1; nhiều nhất 45% thành phần dầu mỏ 2; và ít nhất 30% thành phần dầu mỏ 3. Công ti cần sản xuất ít nhất 10000 lít xăng tiêu chuẩn để bán cho khách hàng. Công ti cần xác định số lít mỗi thành phần dầu mỏ sử dụng để pha trộn xăng tiêu chuẩn và số lít mỗi thành phần dầu mỏ sử dụng để pha trộn xăng cao cấp để cực đại lợi nhuận thu được.

a/ Lập mô hình quy hoạch tuyến tính cho bài toán trên;

b/ Sử dụng Excel giải bài toán trên;

c/ Phân tích độ nhạy của các hệ số.

Tài liệu tham khảo chính Chương 7

[1] Nguyễn Thị Bạch Kim, *Các phương pháp tối ưu: Lý thuyết và thuật toán*, Nhà xuất bản Bách Khoa, 2014. Chương 3: Quy hoạch tuyến tính

[2] Nguyễn Hải Thanh, Toán ứng dụng, Nhà xuất bản Đại học Sư phạm, 2005 Chương 2: Một số mô hình và phương pháp tối ưu

[3] David Anderson, Dennis Sweeney, Thomas Wiliams, Jeffrey Camm, Kipp Martin, *Quantitave Methods for Business*, 12th international edition, South-Western Cengage Learning, 2013. Chapter 7: Introduction to Linear Programming; Chapter 8: Linear Programming-Sensitivity Analysis and Interpretation of Solution; Chapter 9: Linear Programming Applications in Marketing, Finance and Operations Management

[4] Ian Jacques, *Mathematics for Economics and Business*, 7th edition, Pearson, 2013. Chapter 8: Linear Programming

Chương 8

Phương trình sai phân và phương trình vi phân

Chương 8 cung cấp cho sinh viên các kiến thức và hiểu biết để thực hành các tính toán liên quan tới phương trình sai phân tuyến tính cấp 1 và phương trình vi phân tuyến tính cấp 1, cũng như các ứng dụng của chúng trong phân tích cân bằng động một số mô hình kinh tế: mô hình xác định thu nhập quốc dân và mô hình thị trường một loại hàng hóa.

Mục 8.1 giới thiệu khái niệm *phương trình sai phân*, các bước giải *phương trình sai phân tuyến tính cấp 1*, bao gồm: tìm *hàm bù, nghiệm riêng, nghiệm tổng quát*, *nghiệm thỏa mãn điều kiện ban đầu cho trước* và *phân tích tính ổn* *định của nghiệm tìm được*. Mục 8.1 sau đó trình bày các ứng dụng của phương trình sai phân tuyến tính cấp 1 trong *phân tích cân bằng động mô hình xác định thu nhập quốc dân có độ trễ* và *mô hình thị trường một loại hàng hóa với cung có độ trễ*.

Mục 8.1 tìm hiểu khái niệm *phương trình vi phân*, các bước giải *phương trình vi phân tuyến tính cấp 1*, bao gồm: tìm *hàm bù, nghiệm riêng, nghiệm tổng quát, nghiệm thỏa mãn điều kiện ban đầu cho trước* và *phân tích tính ổn định của nghiệm tìm được*. Mục 8.1 sau đó trình bày các ứng dụng của phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 trong *phân tích cân bằng động mô hình xác định thu nhập quốc dân* và *mô hình thị trường một loại hàng hóa*.

8.1. Phương trình sai phân và ứng dụng

8.1.1. Khái niệm phương trình sai phân

Chúng ta bắt đầu tiểu mục này bằng việc xét mức thu nhập quốc dân của một năm. Mức thu nhập quốc dân của năm t được biểu thị bởi Y_t, đây là một biến kinh tế phụ thuộc vào t. Giả sử tốc độ tăng trưởng của thu nhập quốc dân là 7% trên một năm được duy trì ổn định qua các năm. Lúc đó, hệ số tỉ lệ của mức thu nhập quốc dân năm sau so với năm trước là 1,07. Do đó ta có: $Y_1 = 1,07Y_0$, $Y_2 = 1,07Y_1$, $Y_3 = 1,07Y_2$, ..., $Y_t = 1,07Y_{t-1}$, ... Như đã biết trước, dãy số $Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, ..., Y_t, ...$ là một cấp số nhân với công bội là 1,07. Mối liên quan Y_t và Y_{t-1} được thể hiện qua phương trình $Y_t = 1.07Y_{t-1}$.

Định nghĩa phương trình sai phân

Phương trình sai phân là phương trình thể hiện mối liên quan giữa các số hạng liên tiếp của một dãy số.

***Ví dụ* 8.1.1.1.** Xét phương trình sai phân: $Y_t = 2Y_{t-1}$. Biết $Y_0 = 3$, hãy tìm ba số hạng tiếp theo của dãy số cho bởi phương trình sai phân.

Lời giải:

Ta có: $Y_0 = 3, Y_1 = 2Y_0 = 2.3 = 6$, $Y_2 = 2Y_1 = 2^2.3 = 12$, $Y_3 = 2Y_2 = 2^3.3 = 24$. Từ đó ta thấy ngay công thức tìm số hạng tổng quát của dãy số là: $Y_t = 2Y_{t-1} = 2^t.3$. Ta nói rằng $Y_t = 2^t.3$ là nghiệm của phương trình sai phân $Y_t = 2Y_{t-1}$ với điều kiện ban đầu $Y_0 = 3$.

Một cách tổng quát, ta có: $Y_t = y_0 b^t$ là nghiệm của phương trình sai phân $Y_t = bY_{t-1}$ với điều kiện ban đầu $Y_0 = y_0$. ■

Phương trình sai phân trong ví dụ 8.1.1.1 là phương trình sai phân tuyến tính cấp 1 có dạng: $Y_t = bY_{t-1}$ với điều kiện ban đầu $Y_0 = y_0$. Ta có thể thấy ngay, ngoài phương trình sai phân tuyến tính cấp 1, còn nhiều dạng phương trình sai phân khác, có thể tuyến tính hay phi tuyến, có thể cấp 1 hay cấp n. Tuy nhiên trong giáo trình này, chúng ta chỉ tìm hiểu cách giải của *phương trình sai phân tuyến tính cấp 1 dạng tổng quát sau:* $Y_t = bY_{t-1} + c$ *với điều kiện ban đầu* $Y_0 = y_0$.

Các bước giải phương trình: $Y_t = bY_{t-1} + c(*)$ ***với điều kiện ban đầu*** $Y_0 = y_0$

Bước 1. Tìm nghiệm của phương trình: $Y_t = bY_{t-1}$. Nghiệm là: $Y_t = Ab^t$, trong đó A là một hằng số tùy chọn. Nghiệm này được gọi là hàm bù của phương trình sai phân (*) và được kí hiệu bởi CF.

Bước 2. Tìm một nghiệm riêng của phương trình sai phân (*). Nghiệm riêng được kí hiệu là PS và được tìm theo công thức sau:

$$Y_t = \frac{c}{(1-b)} \quad \text{nếu } b \neq 1,$$
$$Y_t = ct \quad \text{nếu } b = 1.$$

Bước 3. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình sai phân (*):

$$Y_t = CF + PS.$$

Trường hợp 1, $b \neq 1$: $Y_t = Ab^t + c/(1-b)$,

Trường hợp 2, $b = 1$: $Y_t = A + ct$.

Bước 4. Chọn giá trị của A để nghiệm tổng quát tìm được ở bước 3 thỏa mãn điều kiện ban đầu $Y_0 = y_0$.

Trường hợp 1, $b \neq 1$: do $Y_0 = Ab^0 + \dfrac{c}{(1-b)} = A + \dfrac{c}{(1-b)} = y_0$, vậy:

$$A = y_0 - \frac{c}{(1-b)}$$

Trường hợp 2, $b = 1$: do $Y_0 = A + c.0 = A = y_0$ nên $A = y_0$.

Các bước giải trên cho ta biết công thức tìm nghiệm của phương trình sai phân: $Y_t = bY_{t-1} + c$ (*) với điều kiện ban đầu $Y_0 = y_0$ như sau:

Trường hợp 1, $b \neq 1$: $\quad Y_t = Ab^t + \dfrac{c}{(1-b)}$ với $A = y_0 - \dfrac{c}{(1-b)}$,

Trường hợp 2, $b = 1$: $\quad Y_t = A + ct$ với $A = y_0$.

***Ví dụ* 8.1.1.2.** Tìm nghiệm của phương trình sai phân tuyến tính cấp 1: $Y_t = 4Y_{t-1} + 21$ với điều kiện ban đầu: $Y_0 = 1$.

Lời giải:

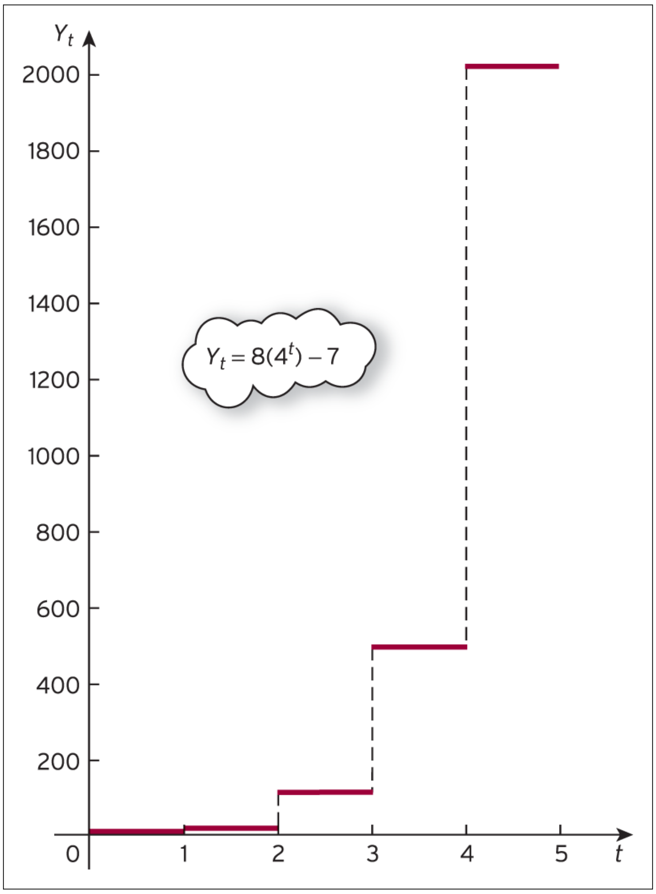
Bước 1. Tìm hàm bù: $CF = A4^t$.

Bước 2. Tìm nghiệm riêng: $PS = 21/(1-4) = 21/(-3) = -7$.

Bước 3. Tìm nghiệm tổng quát: $Y_t = CF + PS = A4^t - 7$.

Bước 4. Tìm nghiệm thỏa mãn điều kiện ban đầu $Y_0 = 1$. Ta có: $A = 1 - (-7) = 8$, nên nghiệm cần tìm là: $Y_t = 8.4^t - 7$.

Trên hình 8.1 là đồ thị của nghiệm Y_t tìm được trong ví dụ 8.1.1.2. Đồ thị của Y_t được gọi là quỹ đạo thời gian của biến kinh tế Y_t (mức thu nhập quốc dân). Trong trường hợp này, ta nói rằng quỹ đạo thời gian của Y_t là phân kì hoặc bùng nổ, điều này có nghĩa rằng khi thời gian t đủ lớn, nghiệm $Y_t = 8.4^t - 7$ sẽ ngày càng lớn và có tính phân kì (không hội tụ). Lúc này, ta cũng nói rằng mô hình cho bởi phương trình sai phân không có tính ổn định. ■



Hình 8.1

***Ví dụ* 8.1.1.3.** Tìm nghiệm của phương trình sai phân tuyến tính cấp 1: $Y_t = \dfrac{1}{3}Y_{t-1} + 8$ với điều kiện ban đầu: $Y_0 = 2$.

Lời giải:

Bước 1. Tìm hàm bù: $CF = A\left(\dfrac{1}{3}\right)^t$.

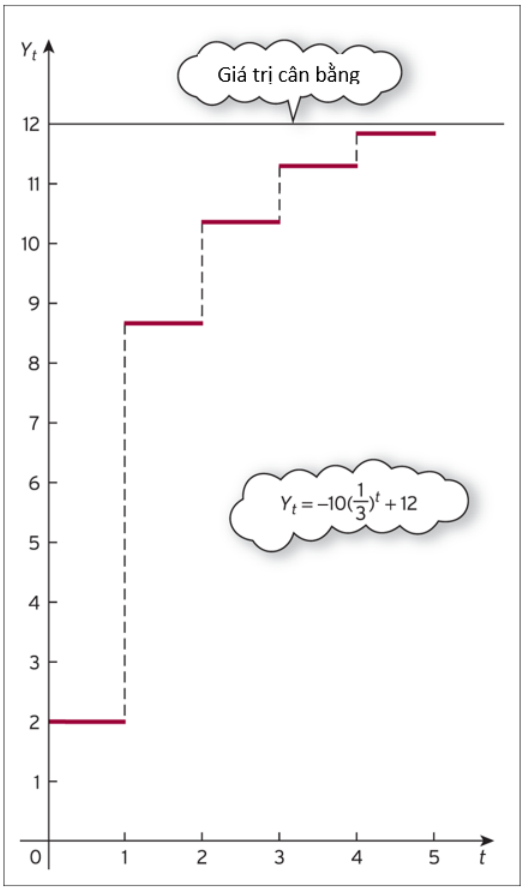
Bước 2. Tìm nghiệm riêng: $PS = 8/(1 - 1/3) = 12$.

Bước 3. Tìm nghiệm tổng quát: $Y_t = CF + PS = A\left(\dfrac{1}{3}\right)^t + 12$.

Bước 4. Tìm nghiệm thỏa mãn điều kiện ban đầu $Y_0 = 2$. Ta có: $A = 2 - 12 = -10$, nên nghiệm cần tìm là:

$$Y_t = -10(1/3)^t + 12.$$

Trên hình 8.2 là đồ thị của nghiệm Y_t tìm được trong ví dụ 8.1.1.3.Trong trường hợp này, ta nói rằng quỹ đạo thời gian của Y_t hội tụ đều đặn đến mức cân bằng



Hình 8.2

12. Điều này có nghĩa rằng khi thời gian t đủ lớn, nghiệm $Y_t = -10\left(\frac{1}{3}\right)^t + 12$ sẽ ngày càng lớn và sát dần đến mức cân bằng 12. Lúc này ta cũng nói rằng mô hình cho bởi phương trình sai phân có tính ổn định. ■

Trong phần cuối của tiểu mục này, chúng ta tổng hợp các công thức tìm nghiệm của phương trình sai phân tuyến tính cấp 1: $Y_t = bY_{t-1} + c$ với $Y_0 = y_0$ trong bảng 8.1, và phân tích tính ổn định của mô hình kinh tế được xác định bởi phương trình sai phân trên trong bảng 8.2.

Bảng 8.1

	Nghiệm tổng quát	**Tìm giá trị A sao cho $Y_0 = y_0$**
$b \neq 1$	$Y_t = Ab_t + c/(1-b)$	$A = y_0 - c/(1-b)$
$b = 1$	$Y_t = A + ct.$	$A = y_0$

Bảng 8.2

	Quỹ đạo thời gian Y_t	**Mô hình kinh tế có tính**
$b > 1$	Phân kì đều đặn	Không ổn định
$0 < b < 1$	Hội tụ đều đặn	Ổn định
$-1 < b < 0$	Hội tụ dao động	Ổn định
$b < -1$	Phân kì dao động	Không ổn định

8.1.2. Một số ứng dụng của phương trình sai phân

Trong tiểu mục này chúng ta sẽ xem xét hai ứng dụng của phương trình sai phân tuyến tính cấp 1 trong việc phân tích cân bằng động mô hình xác định thu nhập quốc dân và phân tích cân bằng động cung cầu trong mô hình thị trường một loại hàng hóa.

Mô hình xác định thu nhập quốc dân

Trong Chương 1, chúng ta đã học về mô hình kinh tế vĩ mô hai thành phần đơn giản với các phương trình cấu trúc sau đây

$$\begin{aligned} Y &= C + I \\ C &= aY + b \\ I &= I^* \end{aligned}$$

Trong các phương trình trên đây: Y – mức thu nhập quốc dân và C– mức tiêu dùng quốc dân là các biến nội sinh; I^* - mức đầu tư quốc dân là biến ngoại sinh; a – là khuynh hướng tiêu dùng biên $(0 < a < 1)$ và b – mức tiêu dùng tự động $(b > 0)$ là các tham số. Phương trình thứ nhất là phương trình cân bằng, biểu thị sự cân bằng mong muốn giữa mức thu nhập quốc dân (Y) với tổng của mức tiêu dùng quốc dân và mức đầu tư quốc dân $(C + I)$. Phương trình thứ hai là phương trình hành vi thể hiện hành vi, kiểu biến động của mức tiêu dùng quốc dân (C) phụ thuộc vào mức thu nhập quốc dân (Y). Còn phương trình thứ ba là phương trình định nghĩa, trong đó mức đầu tư quốc dân (I) được coi là biến ngoại sinh với giá trị được xác định trước (I^*). Các phương trình trên đây không bao gồm yếu tố thời gian, nên mô hình trên đây chỉ được sử dụng trong trường hợp chúng ta thực hiện phân tích cân bằng tĩnh.

Trong thực tế, có độ trễ về mặt thời gian giữa C và Y. Đó là vì mức tiêu dùng quốc dân trong năm t, được kí hiệu là C_t, phụ thuộc vào mức thu nhập quốc dân Y_{t-1} của năm trước đó $t-1$. Chúng ta có thể viết lại các phương trình trên dưới đây dưới dạng phương trình có tính phụ thuộc thời gian như sau

$$\begin{aligned} Y_t &= C_t + I_t \\ C_t &= aY_{t-1} + b \\ I_t &= I^*. \end{aligned}$$

Khi thay thế các biểu thức của C_t và I_t vào phương trình thứ nhất, chúng ta có phương trình sai phân tuyến tính cấp 1 sau đây:

$$Y_t = aY_{t-1} + b + I^*.$$

Nếu ta biết mức thu nhập quốc dân Y_0 của năm đầu tiên, thì chúng ta có thể rút ra biểu thức tìm mức thu nhập quốc dân Y_t của năm thứ t một cách rõ ràng bằng cách giải phương trình sai phân trên với điều kiện ban đầu $Y_0 = y_0$. Biểu thức của Y_t cho phép chúng ta thực hiện phân tích cân bằng động.

***Ví dụ* 8.1.2.1.** Xét mô hình thu nhập quốc dân hai thành phần sau:

$$\begin{aligned} Y_t &= C_t + I_t \\ C_t &= 0,8Y_{t-1} + 100 \\ I_t &= 200. \end{aligned}$$

Tìm biểu thức của mức thu nhập quốc dân Y_t tại năm t khi $Y_0 = 1700$, sau đó phân tích về tính ổn định của mô hình.

Lời giải:

Bằng cách thay thế các biểu thức của C_t và I_t từ phương trình thứ hai và thứ ba vào phương trình thứ nhất, chúng ta có phương trình sai phân tuyến tính cấp 1: $Y_t = 0,8Y_{t-1} + 300$ với điều kiện ban đầu $Y_0 = 1700$. Áp dụng thủ tục giải theo bốn bước:

Bước 1. Tìm hàm bù: $CF = A(0,8)^t$.

Bước 2. Tìm nghiệm riêng: $PS = 300/(1\breve{}0,8) = 1500$.

Bước 3. Tìm nghiệm tổng quát: $Y_t = CF + PS = A(0,8)^t + 1500$.

Bước 4. Tìm nghiệm thỏa mãn điều kiện ban đầu $Y_0 = 1700$. Ta có: $A = 1700$ – $1500 = 200$, nên nghiệm cần tìm là: $Y_t = 200(0,8)^t + 1500$.

Khi thời gian t tăng đủ lớn, $(0,8)^t$ hội tụ về 0, và do đó quỹ đạo thời gian của Y_t hội tụ đều đặn tới mức thu nhập cân bằng 1500. Mô hình thu nhập quốc dân có tính ổn định. Lưu ý rằng khuynh hướng tiêu dùng biên: $MPC = b = 0,8$ là điều kiện để mô hình có tính ổn định. ■

Phân tích cân bằng động cung cầu trong mô hình thị trường một loại hàng hóa

Nhớ lại rằng trong Chương 1, chúng ta đã được học về mô hình thị trường cân bằng cung cầu cho một loại hàng hóa, mô hình thị trường đơn giản này được cho bởi các phương trình cấu trúc sau đây:

$$\begin{aligned} Q_S &= aP - b \\ Q_D &= -cP + d \\ Q_D &= Q_S. \end{aligned}$$

Trong mô hình trên: P là giá cả của hàng hóa, Q_S và Q_D là các lượng cung và cầu hàng hóa; a, b, c và d là các tham số nhận giá trị dương. Phương trình thứ nhất và phương trình thứ hai là các phương trình hành vi, biểu thị hành vi của lượng cung (Q_S) và lượng cầu (Q_D) phụ thuộc vào sự biến động của giá cả P. Phương trình thứ ba là phương trình cân bằng. Các phương trình trên đây không bao gồm yếu tố thời gian, nên mô hình trên đây chỉ được sử dụng trong trường hợp chúng ta thực hiện phân tích cân bằng tĩnh.

Trong thực tế, giữa Q_S và P có một độ trễ về thời gian. Đó là Q_S trong giai đoạn t, được kí hiệu là Q_{St}, phụ thuộc vào P_{t-1} là giá cả trong giai đoạn $t\breve{}1$

trước đó. Chúng ta có thể viết lại các phương trình trên dưới đây dưới dạng các phương trình cung và cầu phụ thuộc thời gian như sau:

$$\begin{aligned} Q_{St} &= aP_{t-1} - b \\ Q_{Dt} &= -cP_t + d \\ Q_{Dt} &= Q_{St}. \end{aligned}$$

Thay các biểu thức của Q_{St} và Q_{Dt} từ các phương trình thứ nhất và thứ hai vào phương trình thứ ba, ta có:

$$aP_{t-1} - b = -cP_t + d \Leftrightarrow P_t = (-\frac{a}{c})P_{t-1} + \frac{b+d}{c}$$

Nếu cho biết giá cả P_0 tại thời điểm ban đầu P_0 thì chúng ta có thể rút ra được biểu thức của P_t một cách rõ ràng bằng cách giải phương trình sai phân tuyến tính cấp 1 trên đây với điều kiện ban đầu $P_0 = p_0$. Hơn nữa, chúng ta cũng có thể tìm được biểu thức của Q_{St} cũng như Q_{Dt} , do $Q_{St} = Q_{Dt}$ nên ta dùng kí hiệu chung là Q_t. Q_t có thể tính theo công thức: $Q_t = -cP_t + d$. Các biểu thức của P_t , Q_t cho phép chúng ta thực hiện phân tích cân bằng động. Cần chú ý rằng, theo các phân tích trong bảng 8.2, khi: $-1 < (-a/c) < 0 \Leftrightarrow c > a$ thì quỹ đạo thời gian của P_t hội tụ về mức giá cân bằng và mô hình có tính ổn định. Nếu trái lại, khi $(-a/c) < -1 \Leftrightarrow a > c$ thì mô hình không có tính ổn định.

***Ví dụ* 8.1.2.2.** Xét các phương trình cung và cầu:

$$\begin{aligned} Q_{St} &= 4P_{t-1} - 10 \\ Q_{Dt} &= -5P_t + 35. \end{aligned}$$

Giả sử rằng thị trường luôn ở trong trạng thái cân bằng tại mọi thời điểm t, hãy tìm biểu thức cho P_t và Q_t khi $P_0 = 6$, sau đó hãy cho biết mô hình có ổn định không?

Lời giải:

Thay các biểu thức của Q_{St} và Q_{Dt} từ các phương trình thứ nhất và thứ hai vào phương trình thứ ba, ta có: $4P_{t-1}\breve{}10 = -5P_t + 35 \Leftrightarrow P_t = -0,8P_{t-1} + 9$ với điều kiện ban đầu $P_0 = 6$.

Áp dụng thủ tục giải theo bốn bước:

Bước 1. Tìm hàm bù: $CF = A(0,8)^t$.

Bước 2. Tìm nghiệm riêng: $PS = 9/(1 - (-0,8)) = 9/1,8 = 5$.

Bước 3. Tìm nghiệm tổng quát: $P_t = CF + PS = A(0,8)^t + 5$.

Bước 4. Tìm nghiệm thỏa mãn điều kiện ban đầu $P_0 = 6$. Ta có: $A = 6 - 5 = 1$, nên nghiệm cần tìm là: $P_t = (0,8)^t + 5$.

Ta tìm $Q_{St} = Q_{Dt} = Q_t = -5P_t + 35 = 5(0,8)^t + 10$.

Khi thời gian t tăng đủ lớn, $(0,8)^t$ hội tụ về 0, và do đó quỹ đạo thời gian của P_t cũng như của Q_t hội tụ đều đặn tới mức giá cả và lượng cung cầu cân bằng là 5 và 10, một cách tương ứng. Mô hình thị trường một loại hàng hóa trên đây có tính ổn định. Lưu ý rằng ở đây độ dốc của đường cung là 4 (dốc lên) và độ dốc của đường cầu là -5 (dốc xuống), và $-1 < 4/(-5) < 0$ chính là điều kiện để mô hình có tính ổn định. ■

8.2. Phương trình vi phân và ứng dụng

8.2.1. Khái niệm phương trình vi phân

Chúng ta bắt đầu tiểu mục này bằng cách ôn lại bài toán tính toán lượng vốn hình thành của một dòng đầu tư như đã nêu tại tiểu mục 5.2.3 ở Chương 5. Xét một dòng đầu tư với tốc độ đầu tư ròng tại thời điểm t là $I(t)$. Ta có thể hiểu $I(t)$ là tốc độ thay đổi của dự trữ vốn $K(t)$, nói cách khác, mối quan hệ giữa $I(t)$ và $K(t)$ như sau: $\dfrac{dK(t)}{dt} = I(t)$. Nếu $I(t)$ là một hàm số đã biết, ta có thể tìm được biểu thức của hàm số $K(t)$ chưa biết bằng cách tìm tích phân bất định: $K(t) = \displaystyle\int I(t)dt$.

***Ví dụ* 8.2.1.1.** Hãy tìm biểu thức của hàm dự trữ vốn $K(t)$ tại thời điểm t, biết tốc độ thay đổi dự trữ vốn $I(t) = t$ và dự trữ vốn tại thời điểm ban đầu $K(0) = 20$.

Lời giải:

Ta có phương trình $\dfrac{dK(t)}{dt} = t$ với điều kiện ban đầu $K(0) = 20$. Lúc này, ta có $\int dK(t) = \int tdt \Leftrightarrow K(t) = \int tdt = \dfrac{t^2}{2} + B$, với B là một hằng số tùy chọn. Vì $K(0) = 20 = 0 + B$ nên $B = 20$. Cuối cùng ta có biểu thức của hàm dự trữ vốn: $K(t) = \dfrac{t^2}{2} + 20$. ■

Định nghĩa phương trình vi phân

Phương trình vi phân là phương trình bao gồm đạo hàm các cấp của một hàm số $y = y(t)$ chưa biết mà ta cần tìm.

Phương trình vi phân: $\dfrac{dy}{dt} = my + c$ với $y(0) = y_0$, m và c là các số thực, được gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 với điều kiện ban đầu $y(0) = y_0$.

***Ví dụ* 8.2.1.2.** Tìm nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp 1: $\dfrac{dy}{dt} = 3y$ với điều kiện ban đầu $y(0) = 5$.

Lời giải:

Ta cần tìm biểu thức của hàm số $y = y(t)$ được biểu thị theo t. Ta có: $\dfrac{dy}{dt} = 3y \Leftrightarrow \dfrac{dy}{y} = 3dt \Leftrightarrow \int \dfrac{dy}{y} = \int 3dt \Leftrightarrow \ln y = 3t + B \Leftrightarrow y(t) = e^B e^{3t} = Ae^{3t}$, trong đó A là hằng số tùy chọn. Do $y(0) = Ae^0 = A$ nên $A = 5$. Cuối cùng ta có nghiệm của phương trình vi phân đã cho với điều kiện ban đầu $y(0) = 5$ là hàm số $y(t) = 5e^{3t}$. ■

Các bước giải phương trình: $\dfrac{dy}{dt} = my + c$ (*) với điều kiện ban đầu $y(0) = y_0$

Bước 1. Tìm nghiệm của phương trình vi phân $\dfrac{dy}{dt} = my$. Nghiệm có dạng $y(t) = Ae^{mt}$, trong đó A là một hằng số tùy chọn. Nghiệm này được gọi là hàm bù của phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 (*) và được kí hiệu là CF.

Bước 2. Tìm một nghiệm riêng của phương trình vi phân (*). Nghiệm riêng này được kí hiệu là PS và được tìm theo công thức:

$$y(t) = -\frac{c}{m} \quad \text{nếu } m \neq 0$$
$$y(t) = ct \quad \text{nếu } m = 0$$

Bước 3. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình (*) theo công thức $y(t) = CF + PS$.
Trường hợp 1, $m \neq 0$: $y(t) = Ae^{mt} - \dfrac{c}{m}$,
Trường hợp 2, $m = 0$: $y(t) = A + ct$.
Bước 4. Chọn A để nghiệm tìm thấy ở bước 3 thỏa mãn điều kiện ban đầu $y(0) = y_0$.
Trường hợp 1, $m \neq 0$: $y(t) = \Big(y_0 + \dfrac{c}{m}\Big)e^{mt} - \dfrac{c}{m}$ (do $y(0) = Ae^0 - \dfrac{c}{m}$ nên $A = y_0 + \dfrac{c}{m}$),
Trường hợp 2, $m = 0$: $y(t) = y_0 + ct$ (do $y(0) = A + c.0$ nên $A = y_0$).

***Ví dụ* 8.2.1.3.** Giải phương trình vi phân $\dfrac{dy}{dt} = -2y + 100$ với các điều kiện ban đầu đã cho như sau:

a/ $y(0) = 10$;

b/ $y(0) = 90$;

c/ $y(0) = 50$.

Lời giải:

a/ Giải $\dfrac{dy}{dt} = -2y + 100$ với điều kiện ban đầu $y(0) = 10$.

Áp dụng thủ tục giải theo bốn bước ta có:

Bước 1. Tìm hàm bù: $CF = Ae^{-2t}$.

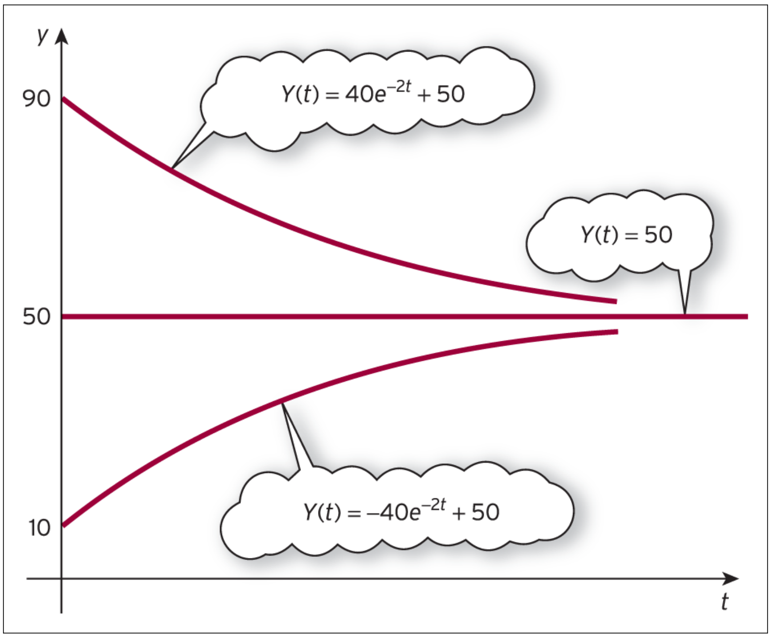
Bước 2. Tìm nghiệm riêng: $PS = -\dfrac{100}{(-2)} = 50$.

Bước 3. Tìm nghiệm tổng quát: $y(t) = CF + PS = Ae^{-2t} + 50$.

Bước 4. Tìm nghiệm thỏa mãn điều kiện ban đầu $y(0) = 10$. Ta có $A = 10 - 50 = -40$, nên nghiệm cần tìm là: $y(t) = -40e^{-2t} + 50$.

Nhánh dưới trên hình 8.3 là đồ thị của nghiệm $y(t)$ tìm được. Trong trường hợp này, ta nói rằng quỹ đạo thời gian của $y(t)$ hội tụ đến mức cân bằng 50. Điều này có nghĩa rằng khi thời gian t đủ lớn, nghiệm

$y(t) = -40e^{-2t} + 50$ sẽ ngày càng lớn và sát dần đến mức cân bằng 50. Lúc này ta cũng nói rằng mô hình cho bởi phương trình vi phân có tính ổn định.



Hình 8.3

b/ Giải $\dfrac{dy}{dt} = -2y + 100$ với điều kiện ban đầu $y(0) = 90$.

Bước 1. Tìm hàm bù: $CF = Ae^{-2t}$.

Bước 2. Tìm nghiệm riêng: $PS = -\dfrac{100}{(-2)} = 50$.

Bước 3. Tìm nghiệm tổng quát: $y(t) = CF + PS = Ae^{-2t} + 50$.

Bước 4. Tìm nghiệm thỏa mãn điều kiện ban đầu $y(0) = 90$. Ta có $A = 90 - 50 = 40$, nên nghiệm cần tìm là: $y(t) = 40e^{-2t} + 50$.

Nhánh trên trên hình 8.3 là đồ thị của nghiệm $y(t)$ tìm được. Trong trường hợp này, ta nói rằng quỹ đạo thời gian của $y(t)$ hội tụ đến mức cân bằng 50. Điều này có nghĩa rằng khi thời gian t đủ lớn, nghiệm $y(t) = 40e^{-2t}+50$ sẽ ngày càng nhỏ và sát dần đến mức cân bằng 50. Lúc này ta cũng nói rằng mô hình cho bởi phương trình vi phân có tính ổn định.

c/ Giải $\dfrac{dy}{dt} = -2y + 100$ với điều kiện ban đầu $y(0) = 50$.

Bước 1. Tìm hàm bù: $CF = Ae^{-2t}$.

Bước 2. Tìm nghiệm riêng: $PS = -\dfrac{100}{(-2)} = 50$.

Bước 3. Tìm nghiệm tổng quát: $y(t) = CF + PS = Ae^{-2t} + 50$.

Bước 4. Tìm nghiệm thỏa mãn điều kiện ban đầu $y(0) = 50$. Ta có $A = 50 - 50 = 0$, nên nghiệm cần tìm là: $y(t) = 0.e^{-2t} + 50$. hay $y(t) = 50$

Nhánh giữa trên hình 8.3 là đồ thị của nghiệm $y(t)$ tìm được. Trong trường hợp này, ta nói rằng quỹ đạo thời gian của $y(t)$ luôn giữ ở mức cân bằng 50 đối với mọi thời điểm t. Mô hình cho bởi phương trình vi phân có tính ổn định.

Cần chú ý rằng trong các ví dụ $a/, b/$ và $c/$ trên đây mô hình được cho bởi phương trình vi phân luôn có tính ổn định. Điều này được giải thích bởi hệ số $m = -2 < 0$. ■

Trong phần cuối của tiểu mục này, chúng ta tổng hợp các công thức tìm nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp 1: $\dfrac{dy}{dt} = my + c(*)$ với điều kiện ban đầu $y(0) = y_0$ trong bảng 8.3, và phân tích tính ổn định của mô hình kinh tế được xác định bởi phương trình sai phân trên trong bảng 8.4.

Bảng 8.3

m	**Nghiệm tổng quát**	**Tìm giá trị A sao cho $Y_0 = y_0$**
$m \neq 0$	$y(t) = Ae^{mt} - \dfrac{c}{m}$	$A = y_0 + cm$
$m = 0$	$Y_t = A + ct.$	$A = y_0$

8.2.2. Một số ứng dụng của phương trình vi phân

Trong tiểu mục này chúng ta sẽ xem xét hai ứng dụng của phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 trong việc phân tích cân bằng động mô hình xác định

Bảng 8.4

m	**Quỹ đạo thời gian Y_t**	**Mô hình có tính**
$m < 0$	Hội tụ	Ổn định
$m > 0$	Phân kì	Không ổn định

thu nhập quốc dân và phân tích cân bằng động cung cầu trong mô hình thị trường một loại hàng hóa.

Mô hình xác định thu nhập quốc dân

Chúng ta đã được học trong Chương 1 về mô hình kinh tế vĩ mô hai thành phần đơn giản với các phương trình cấu trúc sau đây:

$$
\begin{aligned}
Y &= C + I \\
C &= aY + b \cdot \\
I &= I^*
\end{aligned}
$$

Trong các phương trình trên đây: Y – mức thu nhập quốc dân và C – mức tiêu dùng quốc dân là các biến nội sinh; I^* - mức đầu tư quốc dân là biến ngoại sinh; a – là khuynh hướng tiêu dùng biên $(0 < a < 1)$ và b – mức tiêu dùng tự động $(b > 0)$ là các tham số.

Chúng ta nhắc lại rằng phương trình thứ nhất là phương trình cân bằng, biểu thị sự cân bằng mong muốn giữa mức thu nhập quốc dân (Y) với tổng của mức tiêu dùng quốc dân và mức đầu tư quốc dân $(C + I)$. Vế trái (Y) của phương trình là dòng tiền từ các doanh nghiệp đi tới các hộ gia đình, nói cách khác, đây là dòng tiền các doanh nghiệp chi trả cho các yếu tố sản xuất mà các hộ gia đình đã đóng góp. Vế phải $(C + I)$ của phương trình là tổng lượng tiền mà các doanh nghiệp nhận được dưới hình thức đầu tư (I) hoặc các chi trả cho tiêu dùng (C) khi mua hàng hoá từ phía các hộ gia đình. Sau đây, chúng ta sẽ thực hiện phân tích cân bằng động, trong đó thời gian t được coi là thay đổi một cách liên tục (khác với tại tiểu mục 8.1.2: thời gian t được coi là thay đổi một cách rời rạc), và các biến Y, C và I được coi là các hàm số phụ thuộc vào

t: $Y = Y(t)$, $C = C(t)$, $I = I(t)$. Lúc này, thay vì giả sử $Y = C + I$ có thể đạt được ngay, chúng ta cần giả sử rằng Y và C biến động theo thời gian t, và khi t đủ lớn vế trái và vế phải của phương trình này dần sát gần vào nhau. Điều này sẽ xảy ra nếu chúng ta giả định rằng tại một thời điểm t bất kì, tốc độ thay đổi của Y là tỉ lệ với mức dư thừa của tổng chi tiêu cho tiêu dùng và đầu tư $(C + I)$ so với tổng thu nhập (Y), tức là chúng ta có phương trình phụ thuộc thời gian sau đây, (trong đó Y, C và I là các hàm số của t):

$$\frac{dY}{dt} = \alpha(C + I - Y) \text{ với } \alpha \text{ là hệ số điều chỉnh mang giá trị dương.}$$

Phương trình này có ý nghĩa như sau: Nếu $C + I > Y$ thì $\frac{dY}{dt} > 0$ và Y sẽ có xu hướng tăng lên để cân bằng với $C + I$. Nếu $C + I < Y$ thì $\frac{dY}{dt} < 0$ và Y sẽ có xu hướng giảm đi để cân bằng với $C + I$. Còn nếu $C + I = Y$ thì $\frac{dY}{dt} = 0$, tức là Y đã đạt tới mức cân bằng và không có xu hướng biến động.

Bởi vậy, để thực hiện phân tích cân bằng động đối với mô hình xác định thu nhập quốc đân, chúng ta xét các phương trình (với điều kiện $\alpha > 0$ và với giả định $I = I^*$ để cho bài toán đơn giản hơn):

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} &= \alpha(C + I - Y) \\ C &= aY + b \\ I &= I^*. \end{aligned}$$

Sau khi thay thế các biểu thức của C và I vào phương trình thứ nhất, ta có phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 sau đây với $Y = Y(t)$ là hàm số cần tìm:

$$\frac{dY}{dt} = \alpha(a - 1)Y + \alpha(b + I^*).$$

***Ví dụ* 8.2.2.1.** Xét mô hình xác định thu nhập quốc dân hai thành phần sau:

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} &= 0,5(C + I - Y) \\ C &= 0,8Y + 400 \\ I &= 600. \end{aligned}$$

Hãy tìm biểu thức của $Y(t)$ nếu biết $Y(0) = 7000$. Sau đó cho biết mô hình có tính ổn định hay không?

Lời giải:

Sau khi thay thế các biểu thức của C và I vào phương trình thứ nhất, ta có phương trình vi phân tuyến tính cấp 1: $\dfrac{dY}{dt} = -0,1Y + 500$ với điều kiện ban đầu $Y(0) = 7000$.

Áp dụng thủ tục giải 4 bước, ta có:

Bước 1. Tìm hàm bù: $CF = Ae^{-0,1t}$.

Bước 2. Tìm nghiệm riêng: $PS = -\dfrac{500}{(-0,1)} = 5000$.

Bước 3. Tìm nghiệm tổng quát: $Y(t) = CF + PS = Ae^{-0,1t} + 5000$.

Bước 4. Tìm nghiệm thỏa mãn điều kiện ban đầu $Y(0) = 7000$. Ta có $A = 7000 - 5000 = 2000$, nên nghiệm cần tìm là: $Y(t) = 2000e^{-0,1t} + 5000$.

Dễ thấy, do $m = -0,1 < 0$ nên, khi t đủ lớn, $2000e^{-0,1t}$ sát dần tới 0, và nghiệm $Y(t) = 2000e^{-0,1t} + 5000$ sẽ ngày càng sát dần đến mức cân bằng 5000. Lúc này ta nói rằng quỹ đạo thời gian của $Y(t)$ hội tụ đến mức cân bằng 5000 và mô hình cho bởi phương trình vi phân có tính ổn định. ■

Phân tích cân bằng động cung cầu trong mô hình thị trường một loại hàng hóa

Nhớ lại rằng trong Chương 1, chúng ta đã học được về mô hình thị trường cân bằng cung cầu cho một loại hàng hóa với các phương trình cấu trúc sau:

$$\begin{aligned} Q_S &= aP - b \\ Q_D &= -cP + d \\ Q_D &= Q_S. \end{aligned}$$

Trong mô hình trên: P là giá cả của hàng hóa, Q_S và Q_D là các lượng cung và cầu hàng hóa; a, b, c và d là các tham số nhận giá trị dương. Nhắc lại rằng phương trình thứ ba là phương trình cân bằng. Để phân tích cân bằng động, thay vì giả định rằng $Q_D = Q_S$ được đạt được ngay tức khắc, một cách hợp lí hơn, chúng ta giả định tốc độ thay đổi giá cả của P biến động tỉ lệ thuận với dư thừa của lượng cầu so với lượng cung, tức là:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha(Q_D - Q_S), \text{ trong đó } \alpha \text{ là hệ số điều chỉnh có giá trị dương.}$$

Phương trình này có ý nghĩa như sau: Nếu $Q_D > Q_S$ thì $\frac{dP}{dt} > 0$ và P sẽ có xu hướng tăng lên và Q_S có xu hướng tăng, Q_D có xu hướng giảm, và Q_D có xu hướng cân bằng với Q_S. Nếu $Q_D < Q_S$ thì $\frac{dP}{dt} < 0$ và P sẽ có xu hướng giảm và Q_S có xu hướng giảm, Q_D có xu hướng tăng, và Q_D có xu hướng cân bằng với Q_S. Còn nếu $Q_D - Q_S = 0$ thì $\frac{dP}{dt} = 0$, tức là P đã đạt tới mức cân bằng và không có xu hướng biến động để luôn có sự cân bằng giữa Q_D và Q_S.

Bởi vậy, để thực hiện phân tích cân bằng động đối với mô hình cung cầu trong thị trường một loại hàng hóa, chúng ta xét các phương trình sau đây, trong đó cung và cầu phụ thuộc theo thời gian:

$$\begin{aligned} Q_S &= aP - b \\ Q_D &= -cP + d \\ \frac{dP}{dt} &= \alpha(Q_D - Q_S). \end{aligned}$$

Sau khi thay thế biểu thức của Q_S và Q_D vào phương trình thứ ba, chúng ta nhận được phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 sau đây với $P = P(t)$ là hàm số cần tìm:

$$\frac{dP}{dt} = -\alpha(a+c)P + \alpha(d+b).$$

***Ví dụ* 8.2.2.2.** Xét mô hình thị trường một loại hàng hóa:

$$\begin{aligned} Q_S &= 3P - 4 \\ Q_D &= -5P + 20 \\ \frac{dP}{dt} &= 0,2(Q_D - Q_S) \end{aligned}$$

Tìm các biểu thức của $P(t)$, $Q_S(t)$ và $Q_D(t)$ nếu biết điều kiện ban đầu $P(0) = 2$. Sau đó hãy cho biết mô hình có tính ổn định hay không?

Lời giải:

Sau khi thay thế biểu thức của Q_S và Q_D vào phương trình thứ ba, chúng ta nhận được phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 sau đây với $P = P(t)$ là hàm số cần tìm:

$$\frac{dP}{dt} = -1,6P + 4,8.$$

Áp dụng thủ tục giải 4 bước chúng ta có:

Bước 1. Tìm hàm bù: $CF = Ae^{-1,6t}$.

Bước 2. Tìm nghiệm riêng: $PS = -\dfrac{4,8}{(-1,6)} = 3$.

Bước 3. Tìm nghiệm tổng quát: $P(t) = CF + PS = Ae^{-1,6t} + 3$.

Bước 4. Tìm nghiệm thỏa mãn điều kiện ban đầu $P(0) = 2$. Ta có $A = 2 - 3 = -1$, nên nghiệm cần tìm là: $P(t) = -e^{-1,6t} + 3$

Ta cũng có:

$$Q_S(t) = 3P(t) - 4 = -3e^{-1,6t} + 5 \text{ và}$$

$$Q_D(t) = -5P(t) + 20 = 5e^{-1,6t} + 5.$$

Dễ thấy, vì $m = -1,6 < 0$, nên khi t đủ lớn, $e^{-1,6t}$ sát dần tới 0, và do đó các nghiệm $P(t)$, $Q_S(t)$, $Q_D(t)$ sẽ ngày càng sát dần đến các mức cân bằng 3, 5 và 5 một cách tương ứng. Lúc này, ta nói rằng các quỹ đạo thời gian của $P(t)$, $Q_S(t)$, $Q_D(t)$ hội tụ đến các mức cân bằng 3, 5 và 5. Mô hình thị trường một loại hàng hóa là có tính ổn định. ■

8.3. Bài tập Chương 8

Hướng dẫn ôn tập

Mục 8.1: khái niệm phương trình sai phân; các bước giải phương trình sai phân tuyến tính cấp 1: tìm hàm bù, nghiệm riêng, nghiệm tổng quát, nghiệm thỏa mãn điều kiện ban đầu cho trước và phân tích tính ổn định của nghiệm tìm được; các ứng dụng của phương trình sai phân tuyến tính cấp 1: phân tích cân bằng động mô hình xác định thu nhập quốc dân có độ trễ và mô hình thị trường một loại hàng hóa với cung có độ trễ.

Mục 8.2: khái niệm phương trình vi phân; các bước giải phương trình vi phân tuyến tính cấp 1: tìm hàm bù, nghiệm riêng, nghiệm tổng quát, nghiệm thỏa mãn điều kiện ban đầu cho trước và phân tích tính ổn định của nghiệm tìm được; các ứng dụng của phương trình vi phân tuyến tính cấp 1: phân tích cân bằng động mô hình xác định thu nhập quốc dân, mô hình thị trường một loại hàng hóa.

Sinh viên ôn tập lần lượt các vấn đề then chốt theo thứ tự trên đây, nghiên cứu kĩ các ví dụ, rèn luyện kĩ năng tính toán và giải quyết vấn đề qua việc giải được tối thiểu 50% số bài tập được liệt kê cho từng mục.

Bài tập mục 8.1

Bài 1. Giải các phương trình sai phân tuyến tính cấp 1 sau đây với điều kiện ban đầu đã cho:

a/ $Y_t = Y_{t-1} + 2$ với $Y_0 = 0$;

b/ $Y_t = -Y_{t-1} + 6$ với $Y_0 = 4$;

c/ $Y_t = 0Y_{t-1} + 3$ với $Y_0 = 3$.

Bài 2. Xét mô hình thu nhập quốc dân hai thành phần sau:

$$\begin{aligned} Y_t &= C_t + I_t \\ C_t &= 0,7Y_{t-1} + 400 \\ I_t &= 0,1Y_{t-1} + 100. \end{aligned}$$

Tìm biểu thức của Y_t khi $Y_0 = 3000$, sau đó phân tích về tính ổn định của mô hình.

Bài 3. Xét các phương trình cung và cầu:

$$\begin{aligned} Q_{St} = &\ 0,4P_{t-1} - 12 \\ Q_{Dt} = &\ -0,8P_1 + 60. \end{aligned}$$

Giả sử rằng thị trường luôn ở trong trạng thái cân bằng tại mọi thời điểm t, hãy tìm biểu thức cho P_t và Q_t khi $P_0 = 70$, sau đó hãy cho biết mô hình có ổn định không?

Bài 4. Xét mô hình thu nhập quốc dân hai thành phần sau:

$$\begin{aligned} Y_t = &\ C_t + I_t \\ C_t = &\ 0,7Y_{t-1} + 400 \\ I_t = &\ 200. \end{aligned}$$

Tìm giá trị của C_2 và C_3 khi $Y_0 = 400$.

Bài 5. Xét mô hình thu nhập quốc dân hai thành phần sau:

$$\begin{aligned} Y_t = &\ C_t + I_t \\ C_t = &\ 0,8Y + 300 \\ I_t = &\ 0,15Y_{t-1} + 100. \end{aligned}$$

Tìm biểu thức của Y_t khi $Y_0 = 4000$, sau đó phân tích về tính ổn định của mô hình.

Bài 6. Xét mô hình thị trường:

$$\begin{aligned} Q_{St} = &\ aP_{t-1} - b \\ Q_{Dt} = &\ -cP + d \\ P_t = &\ P_{t-1} - e(Q_{s,t-1} - Q_{d,t-1}). \end{aligned}$$

Giả sử rằng thị trường luôn ở trong trạng thái cân bằng tại mọi thời điểm t, hãy tìm biểu thức rút gọn cho biết mối quan hệ giữa P_t và P_{t-1}.

Bài 7. Xét mô hình thị trường với các phương trình cung và cầu:

$$\begin{aligned} Q_{St} &= aP_{t-1} - b \\ Q_{Dt} &= -cP + d, \end{aligned}$$

trong đó các hằng số a, b, c và d đều dương.

a/ Giả sử rằng thị trường luôn ở trong trạng thái cân bằng tại mọi thời điểm t, hãy chứng tỏ rằng: $P_t = (-a/c)P_{t-1} + (b+d)/c$.

b/ Chứng tỏ rằng: $(b+d)/(a+c)$ là nghiệm riêng của phương trình sai phân trong câu a/, sau đó tìm nghiệm tổng quát của phương trình sai phân trong câu a/.

c/ Hãy nêu rõ và ngắn gọn các điều kiện để đảm bảo nghiệm tổng quát tìm được ở câu b/ có tính hội tụ và xác định giá cả cân bằng và lượng cân bằng.

Bài 8. Giải các phương trình sai phân tuyến tính cấp 1 sau với điều kiện ban đầu đã cho, sau đó vẽ quỹ đạo thời gian của Y_t:

a/ $Y_t = -\dfrac{1}{2}Y_{t-1} + 6$ với điều kiện ban đầu: $Y_0 = 0$.

b/ $Y_t = (-2)Y_{t-1} + 9$ với điều kiện ban đầu: $Y_0 = 4$.

Bài 9. Xét mô hình thu nhập quốc dân hai thành phần sau:

$$\begin{aligned} Y_t &= C_t + I_t \\ C_t &= 0,89Y + 250 \\ I_t &= 350. \end{aligned}$$

Tìm biểu thức của mức thu nhập quốc dân Y_t tại năm t khi $Y_0 = 6500$, sau đó phân tích về tính ổn định của mô hình.

Bài 10. Xét các phương trình cung và cầu:

$$\begin{aligned} Q_{St} &= 3P_{t-1} - 30 \\ Q_{Dt} &= -2P_t + 22. \end{aligned}$$

Giả sử rằng thị trường trong trạng thái cân bằng tại mọi thời điểm t, hãy tìm biểu thức cho P_t và Q_t khi $P_0 = 11$, sau đó hãy cho biết mô hình có ổn định không?

Bài tập mục 8.2

Bài 1. Tìm nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp 1: $\dfrac{dy}{dt} = -3y$ trong trường hợp điều kiện ban đầu là:

$$a/\quad y(0) = 40 \qquad , b/\quad y(0) = 80, \qquad c/\quad y(0) = 60$$

Bài 2. Xét mô hình xác định thu nhập quốc dân hai thành phần sau:

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} &= 0,5(C + I - Y) \\ C &= 0,7Y + 500 \\ I &= 0,2Y + 500. \end{aligned}$$

Hãy tìm biểu thức của $Y(t)$ nếu biết $Y(0) = 200$. Sau đó cho biết mô hình có tính ổn định hay không?

Bài 3. Xét mô hình thị trường một loại hàng hóa:

$$\begin{aligned} Q_S &= 3P - 1 \\ Q_D &= -2P + 9 \\ \frac{dP}{dt} &= 0,5(Q_D - Q_S). \end{aligned}$$

Tìm các biểu thức của $P(t)$, $Q_S(t)$ và $Q_D(t)$ nếu biết điều kiện ban đầu $P(0) = 1$. Sau đó hãy cho biết mô hình có tính ổn định hay không?

Bài 4. Một lượng tiền gốc (ban đầu) là 4000 USD được đưa vào đầu tư với lãi suất 6% năm và giá trị tương lai của lượng tiền đầu tư sau t năm là $S(t)$ thỏa mãn phương trình: $\dfrac{dS}{dt} = 0,06S$.

a/ Hãy giải phương trình trên để tìm biểu thức của S biểu thị theo t.

b/ Cho biết kiểu hình thành lãi trong mô hình này.

Bài 5. Xét mô hình xác định thu nhập quốc dân hai thành phần sau:

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} &= 0,2(C+I-Y) \\ C &= 0,8Y+420 \\ I &= 300. \end{aligned}$$

a/ Hãy tìm biểu thức của $Y(t)$ nếu biết $Y(0)=8000$.

b/ Sau đó tìm biểu thức của hàm tiết kiệm $S(t)$.

c/ Xác định thời điểm khi thu nhập quốc dân rơi về mức 4150 và tìm tốc độ (tỉ lệ) thay đổi của thu nhập tại thời điểm đó. Kết quả tính toán được làm tròn tới số nguyên gần nhất.

Bài 6. Xét phương trình vi phân: $\dfrac{dy}{dt} = -2y + 5e^{3t}$.

a/ Hãy tìm biểu thức của hàm bù.

b/ Bằng cách thay $y = De^{3t}$ vào phương trình vi phân đã cho để tìm nghiệm riêng của phương trình.

c/ Từ các kết quả của câu a/ và câu b/ hãy tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân đã cho, sau đó tìm nghiệm thỏa mãn điều kiện ban đầu $y(0)=7$.

d/ Cho biết, nghiệm tìm được trong câu c/ có tính ổn định hay không? Tại sao?

Bài 7. Xét phương trình vi phân: $\dfrac{dy}{dt} = -y + 4t - 3$.

a/ Hãy tìm biểu thức của hàm bù.

b/ Bằng cách thay $y = Dt + E$ vào phương trình vi phân đã cho để tìm nghiệm riêng của phương trình.

c/ Từ các kết quả của câu a/ và câu b/ hãy tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân đã cho, sau đó tìm nghiệm thỏa mãn điều kiện ban đầu $y(0)=1$.

d/ Cho biết, nghiệm tìm được trong câu c/ có tính ổn định hay không? Tại sao?

Bài 8. Tìm nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 sau đây:

a/ $\dfrac{dy}{dt} = 4y$ với điều kiện ban đầu $y(0) = 6$.

b/ $\dfrac{dy}{dt} = -5y$ với điều kiện ban đầu $y(0) = 2$.

Bài 9. Xét mô hình xác định thu nhập quốc dân hai thành phần sau:

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} &= 0,1(C + I - Y) \\ C &= 0,9Y + 100 \\ I &= 300. \end{aligned}$$

Hãy tìm biểu thức của $Y(t)$ nếu biết $Y(0) = 7000$. Sau đó cho biết mô hình có tính ổn định hay không ổn định?

Bài 10. Xét mô hình thị trường một loại hàng hóa:

$$\begin{aligned} Q_S &= 2P - 2 \\ Q_D &= -P + 4 \\ \frac{dP}{dt} &= \frac{1}{3}(Q_D - Q_S). \end{aligned}$$

Tìm các biểu thức của $P(t)$, $Q_S(t)$ và $Q_D(t)$ nếu biết điều kiện ban đầu $P(0) = 1$. Sau đó hãy cho biết mô hình có tính ổn định hay không?

Tài liệu tham khảo chính Chương 8

[1] Nguyễn Quốc Hưng, *Toán cao cấp và một số ứng dụng trong kinh doanh*, Nhà xuất bản Giao thông vận tải, 2009. Tập 1, Chương 6: Phương trình vi phân và một số ứng dụng

[2] Lê Đình Thúy, *Toán cao cấp cho các nhà kinh tế*, Nhà xuất bản Đại học Kinh tế Quốc dân, 2015. Chương 6: Phương trình vi phân; Chương 7: Phương trình sai phân

[3] Teresa Bradley, *Essential Mathematics for Economics and Business*, 4th edition, John Wiley and Sons, 2013. Chapter 8: Integration and Applications; Chapter 10: Difference Equations

[4] Ian Jacques, *Mathematics for Economics and Business*, 7th edition, Pearson, 2013. Chapter 9: Dynamics