

TRƯỜNG ĐẠI HỌC PHENIKAA  
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN  
BỘ MÔN TOÁN

---

**ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KỲ II (2022-2023)**

**MÔN HỌC: GIẢI TÍCH**

**LỚP: Giải tích-1-2-22(N02)**

THỜI GIAN LÀM BÀI: 60 PHÚT (Không kể thời gian phát đề)

NGÀY KIỂM TRA: 18/04/2023

**CA 1**

**Câu 1** (3,0 điểm). Tính vi phân toàn phần của hàm số  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^3 + 7z}$ . Sử dụng kết quả này, hãy tính gần đúng giá trị của biểu thức sau:

$$A = \sqrt{(0,9)^2 + (2,1)^3 + 7 \times (1,1)}.$$

**Câu 2** (2,0 điểm). Tính tích phân sau:

$$\iint_R xy \, dx dy,$$

trong đó miền  $R$  là tam giác  $ABC$  với tọa độ của ba đỉnh như sau:  $A(0,0), B(2,0), C(2,1)$ .

**Câu 3** (3,0 điểm). Tính tích phân sau:

$$I = \iiint_T (x^2 + y^2 + 2z^2) \, dx dy dz,$$

trong đó  $T$  là một vùng được giới hạn bởi các điều kiện:  $z \leq 0$  và  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ .

**Câu 4** (2,0 điểm). Sử dụng tích phân bội hai, bạn hãy tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường:  $x = y^2$  và  $x^2 + y^2 = 2$  với  $-1 \leq y \leq 1$ .

---

**Ghi chú:**

- Sinh viên không được sử dụng tài liệu nào;
- Cán bộ coi thi không được giải thích gì thêm.

TRƯỜNG ĐẠI HỌC PHENIKAA  
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN  
BỘ MÔN TOÁN

---

**ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KỲ II (2022-2023)**

**MÔN HỌC: GIẢI TÍCH**

**LỚP: Giải tích-1-2-22(N02)**

THỜI GIAN LÀM BÀI: 60 PHÚT (Không kể thời gian phát đề)

NGÀY KIỂM TRA: 18/04/2023

**CA 2**

**Câu 1** (3,0 điểm). Tính vi phân toàn phần của hàm số  $f(x, y, z) = \sqrt{x^3 + y^2 + z^2}$ . Sử dụng kết quả này, hãy tính gần đúng giá trị của biểu thức sau:

$$A = \sqrt{(0,9)^3 + (2,1)^2 + (1,9)^2}.$$

**Câu 2** (2,0 điểm). Tính tích phân sau:

$$\iint_R (x + y) \, dx dy,$$

trong đó miền  $R$  là tam giác  $ABC$  với tọa độ của ba đỉnh như sau:  $A(0,0), B(2,0), C(2,-1)$ .

**Câu 3** (3,0 điểm). Tính tích phân sau:

$$I = \iiint_T (x^2 + y^2 + 3z^2) \, dx dy dz,$$

trong đó  $T$  là một vùng được giới hạn bởi các điều kiện:  $z \geq 0$  và  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ .

**Câu 4** (2,0 điểm). Sử dụng tích phân bội hai, bạn hãy tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường:  $x = -y^2$  và  $x^2 + y^2 = 2$  với  $-1 \leq y \leq 1$ .

---

**Ghi chú:**

- Sinh viên không được sử dụng tài liệu nào;
- Cán bộ coi thi không được giải thích gì thêm.

## ĐÁP ÁN

### CA 1

**Câu 1 (3,0 điểm)** Vi phân toàn phần của hàm  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^3 + 7z}$  là

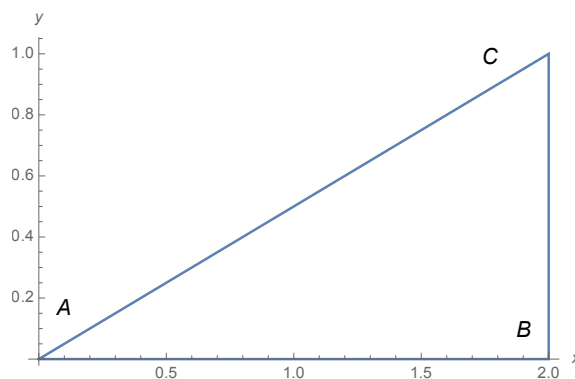
$$df(x, y, z) = f_x dx + f_y dy + f_z dz = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^3 + 7z}} dx + \frac{3y^2}{2\sqrt{x^2 + y^3 + 7z}} dy + \frac{7}{2\sqrt{x^2 + y^3 + 7z}} dz.$$

Giá trị gần đúng của biểu thức  $\sqrt{(0,9)^2 + (2,1)^3 + 7 \times (1,1)}$  tính thông qua vi phân toàn phần là

$$\begin{aligned} f(0,9;2,1;1,1) &\simeq f(1,2,1) + df(1,2,1) \\ &= \sqrt{1^2 + 2^3 + 7 \times 1} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^3 + 7 \times 1}} \times (-0,1) + \frac{3 \times 2^2}{2\sqrt{1^2 + 2^3 + 7 \times 1}} \times (0,1) + \frac{7}{2\sqrt{1^2 + 2^3 + 7 \times 1}} \times (0,1) \\ &= 4 - \frac{0,1}{4} + \frac{1,2}{8} + \frac{0,7}{8} \\ &= 4 - 0,025 + 0,15 + 0,0875 \\ &= 4,2125. \end{aligned}$$

**Câu 2 (2,0 điểm)** Miền  $R$  (tam giác  $ABC$ ) được mô tả bởi hình sau:

Bây giờ ta cần xác định phương trình đường thẳng chứa đoạn  $AC$ . Gọi dạng tổng quát của phương



Hình 1: Tam giác  $ABC$ .

trình đường thẳng này là  $y = ax + b$ . Tại  $A(0,0)$ , ta có  $0 = a \cdot 0 + b$  nên suy ra  $b = 0$ . Tại  $C(2,1)$ , ta có  $1 = 2a$  nên suy ra  $a = 1/2$ . Kết luận: phương trình đường thẳng chứa đoạn  $AC$  là  $y = x/2$ . Do đó, ta tính được tích phân như sau:

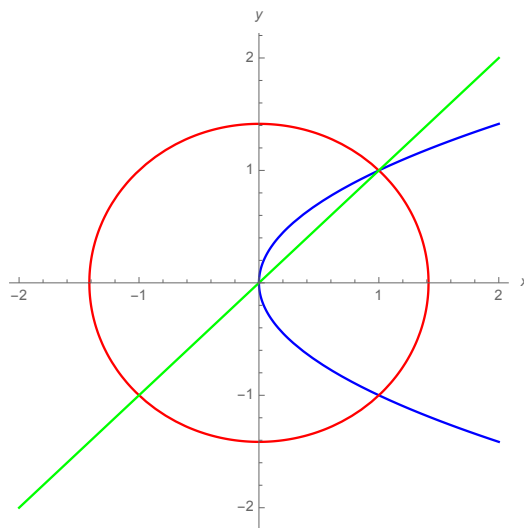
$$I = \iint_R xy \, dx dy = \int_0^2 dx \int_0^{x/2} xy dy = \int_0^2 dx \left( x \frac{y^2}{2} \Big|_0^{x/2} \right) = \int_0^2 \frac{x^3}{8} dx = \frac{x^4}{32} \Big|_0^2 = \frac{1}{2}.$$

**Câu 3 (3,0 điểm)** Sử dụng hệ toạ độ cầu với  $x = r \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = r \cos \theta$ , và  $J = r^2 \sin \theta$ . Với điều kiện  $z \leq 0$  ta suy ra  $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ . Hai biến còn lại không bị ảnh hưởng từ điều kiện  $z \leq 0$  nên chúng nằm trong khoảng như sau  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  và  $0 < r \leq a$ . Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a dr \int_{\pi/2}^{\pi} (r^2 \sin^2 \theta + 2r^2 \cos^2 \theta) r^2 \sin \theta d\theta \\ &= \left( \varphi \Big|_0^{2\pi} \right) \left( \int_0^a r^4 dr \right) \left[ \int_{\pi/2}^{\pi} (\cos^2 \theta + 1) d(-\cos \theta) \right] \\ &= 2\pi \left( \frac{r^5}{5} \Big|_0^a \right) \left( -\frac{\cos^3 \theta}{3} - \cos \theta \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right) \\ &= \frac{8}{15} \pi a^5. \end{aligned}$$

**Câu 4 (2,0 điểm)** Hình phẳng được mô tả bởi hình sau:

*Nhận xét:* Ta thấy hình phẳng này chứa hai nửa bằng nhau (nằm góc phần tư thứ nhất và tư) và



Hình 2: Hình phẳng giới hạn bởi đường tròn màu đỏ và parabol màu xanh nước biển.

đối xứng nhau qua trục  $Ox$  nên ta chỉ cần tính diện tích nửa nằm trong góc phần tư thứ nhất.

Ta dùng đường thẳng  $y = x$  (màu xanh lá) đi qua hai giao điểm nằm trong góc phần tư thứ hai của đường tròn và parabol để chia thành hai hình phẳng nhỏ  $A$  và  $B$ : Hình phẳng  $A$  tạo bởi từ đường màu đỏ, màu xanh lá và trục  $Ox$ ; hình phẳng  $B$  tạo bởi từ đường xanh lá và xanh nước biển.

Diện tích hình phẳng  $A$  được tính trong hệ toạ độ cực như sau:

$$S_A = \int_0^{\sqrt{2}} dr \int_0^{\pi/4} r d\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Diện tích hình phẳng  $B$  được tính trong hệ toạ Đề-các như sau:

$$S_B = \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} dy = \frac{1}{6}.$$

Do đó, diện tích nửa nằm trong góc phần tư thứ hai là

$$S_1 = S_A + S_B = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}.$$

Do đó, diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đường tròn màu đỏ và parabol màu xanh nước biển là

$$S = 2S_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}.$$

## ĐÁP ÁN

### CA 2

**Câu 1 (3,0 điểm)** Vi phân toàn phần của hàm  $f(x, y, z) = \sqrt{x^3 + y^2 + z^2}$  là

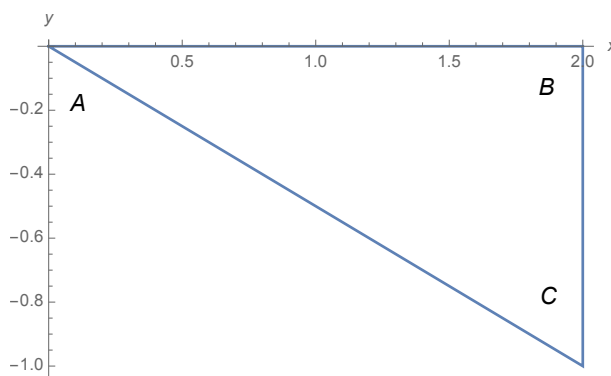
$$df(x, y, z) = f_x dx + f_y dy + f_z dz = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + y^2 + z^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^3 + y^2 + z^2}} dy + \frac{z}{\sqrt{x^3 + y^2 + z^2}} dz.$$

Giá trị gần đúng của biểu thức  $\sqrt{(0,9)^3 + (2,1)^2 + (1,9)^2}$  tính thông qua vi phân toàn phần là

$$\begin{aligned} f(0,9;2,1;1,9) &\simeq f(1,2,2) + df(1,2,2) \\ &= \sqrt{1^3 + 2^2 + 2^2} \\ &\quad + \frac{3 \times 1^2}{2\sqrt{1^3 + 2^2 + 2^2}} \times (-0,1) + \frac{2}{\sqrt{1^3 + 2^2 + 2^2}} \times (0,1) + \frac{2}{\sqrt{1^3 + 2^2 + 2^2}} \times (-0,1) \\ &= 3 - \frac{0,3}{6} \\ &= 3 - 0,05 \\ &= 2,95. \end{aligned}$$

**Câu 2 (2,0 điểm)** Miền  $R$  (tam giác  $ABC$ ) được mô tả bởi hình sau:

Bây giờ ta cần xác định phương trình đường thẳng chứa đoạn  $AC$ . Gọi dạng tổng quát của phương



Hình 3: Tam giác  $ABC$ .

trình đường thẳng này là  $y = ax + b$ . Tại  $A(0,0)$ , ta có  $0 = a \cdot 0 + b$  nên suy ra  $b = 0$ . Tại  $C(2,-1)$ , ta có  $-1 = 2a$  nên suy ra  $a = -1/2$ . Kết luận: phương trình đường thẳng chứa đoạn  $AC$  là  $y = -x/2$ . Do đó, ta tính được tích phân như sau:

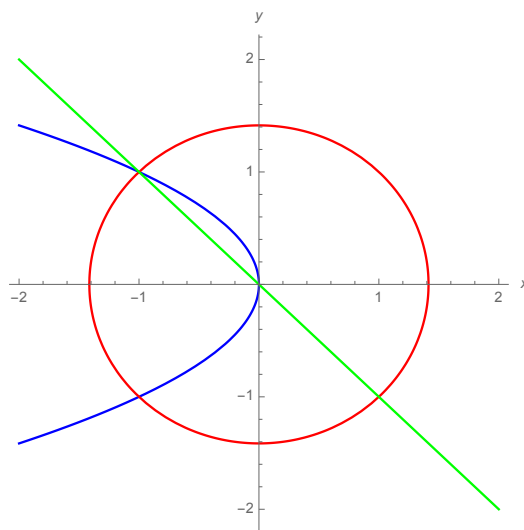
$$I = \iint_R (x + y) \, dx dy = \int_0^2 dx \int_{-x/2}^0 (x + y) dy = \int_0^2 dx \left( xy + \frac{y^2}{2} \Big|_{-x/2}^0 \right) = \int_0^2 \frac{3x^2}{8} dx = \frac{x^3}{8} \Big|_0^2 = 1.$$

**Câu 3 (3,0 điểm)** Sử dụng hệ toạ độ cầu với  $x = r \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = r \cos \theta$ , và  $J = r^2 \sin \theta$ . Với điều kiện  $z \geq 0$  ta suy ra  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ . Hai biến còn lại không bị ảnh hưởng từ điều kiện  $z \leq 0$  nên chúng nằm trong khoảng như sau  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  và  $0 < r \leq a$ . Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a dr \int_0^{\pi/2} (r^2 \sin^2 \theta + 3r^2 \cos^2 \theta) r^2 \sin \theta d\theta \\ &= \left( \varphi \Big|_0^{2\pi} \right) \left( \int_0^a r^4 dr \right) \left[ \int_0^{\pi/2} (2 \cos^2 \theta + 1) d(-\cos \theta) \right] \\ &= 2\pi \left( \frac{r^5}{5} \Big|_0^a \right) \left( -\frac{2 \cos^3 \theta}{3} - \cos \theta \Big|_0^{\pi/2} \right) \\ &= \frac{10}{15} \pi a^5. \end{aligned}$$

**Câu 4 (2,0 điểm)** Hình phẳng được mô tả bởi hình sau:

*Nhận xét:* Ta thấy hình phẳng này chứa hai nửa bằng nhau (nằm góc phần tư thứ hai và ba) và đối



Hình 4: Hình phẳng giới hạn bởi đường tròn màu đỏ và parabol màu xanh nước biển.

xứng nhau qua trục  $Ox$  nên ta chỉ cần tính diện tích nửa nằm trong góc phần tư thứ hai.

Ta dùng đường thẳng  $y = -x$  (màu xanh lá) đi qua hai giao điểm nằm trong góc phần tư thứ hai của đường tròn và parabol để chia thành hai hình phẳng nhỏ  $A$  và  $B$ : Hình phẳng  $A$  tạo bởi từ đường màu đỏ, màu xanh lá và trục  $Ox$ ; hình phẳng  $B$  tạo bởi từ đường xanh lá và xanh nước biển.

Diện tích hình phẳng  $A$  được tính trong hệ toạ độ cực như sau:

$$S_A = \int_0^{\sqrt{2}} dr \int_{3\pi/4}^{\pi} r d\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Diện tích hình phẳng  $B$  được tính trong hệ toạ Đề-các như sau:

$$S_B = \int_{-1}^0 dx \int_{-x}^{\sqrt{-x}} dy = \frac{1}{6}.$$

Do đó, diện tích nửa nằm trong góc phần tư thứ hai là

$$S_1 = S_A + S_B = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}.$$

Do đó, diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đường tròn màu đỏ và parabol màu xanh nước biển là

$$S = 2S_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}.$$