# Lecture Notes: Đại số tuyến tính

Chương 1: Ma trận, định thức và hệ phương trình tuyến tính

Biên soạn: Phan Quang Sáng- Bộ môn Toán, Đại học Phenikaa

Ngày 3 tháng 10 năm 2023

## Mục lục

# 1 Nhắc lại về trường số thực, phức

## 1.1 Trường số thực

Tập hợp số đã được mở rộng từ tập hợp các số tự nhiên đến tập hợp các số thực

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

## 1.2 Trường số phức

Ký hiệu $\mathbb{R}^2$ là tập hợp

$$\mathbb{R}^2 = \{(a, b) : \ a \in \mathbb{R}, \ b \in \mathbb{R}\}.$$

Trên $\mathbb{R}^2$ chúng ta trang bị hai phép toán:

- Phép cộng, ký hiệu (+): $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$
- Phép nhân, ký hiêu ($\cdot$): $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 - a_2 b_1)$

Khi đó chúng ta có thể kiểm tra hai phép toán trên là giao hoán và thỏa mãn tính chất kết hợp, phép nhân có tính phân phối đối với phép cộng; phần tử $(0, 0)$ là phần tử không (trung hòa) đối với phép cộng và mọi phần tử đều có đối xứng qua phần tử không; phần tử $(1, 0)$ là đơn vị của phép nhân và mọi phần tử khác không đều có nghịch đảo đối với phép nhân:

$$\text{nếu} \quad (a, b) \neq (o, 0) \text{ thì } \quad (a, b)^{-1} = (\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}).$$

Người ta nói rằng $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ như trên là một trường số phức, ký hiệu $\mathbb{C}$. Mỗi số thực $x \in \mathbb{R}$ lúc này có thể đồng nhất với $(x, 0) \in \mathbb{C}$, do đó $\mathbb{R}$ có thể coi là trường số con của trường số phức $\mathbb{C}$.

Bên cạnh đó chúng ta có thể thấy:

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0).$$

Ký hiệu số phức $(0, 1) = i$, được gọi là đơn vị ảo. Nó thỏa mãn $i^2 = (-1, 0)$, cái được đồng nhất với số thực -1, và do đó $i^2 = -1$.

Khi đó mỗi số phức $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ có thể được biểu diễn như sau

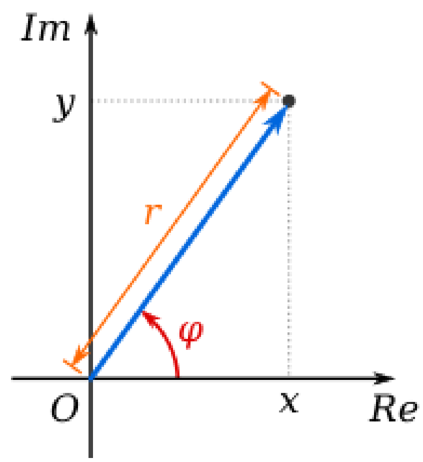
$$z = (a, b) = (a, 0) + b(0, 1) = a + bi,$$

và được goi là **dạng đại số** của số phức. Người ta cũng ký hiệu $\Re z = a$, $Imz = b$ và tương ứng gọi là phần thực và phần ảo của $z$. Như vậy mọi số phức $z \in \mathbb{C}$ có dạng đại số là

$$z = a + ib,$$

trong đó $i$ ký hiệu đơn vị ảo.

**Biểu diễn hình học của số phức**: mỗi số phức $z = a + ib$ tương ứng với một điểm duy nhất $M(a, b)$ trên mặt phẳng tọa độ.




**Dạng lượng giác của số phức**: mỗi số phức $z = a + ib$ có thể viết dưới dạng

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

trong đó $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ và được goi là mô đun của $z$, $\varphi$ là góc giữa $\overrightarrow{OM}$ với trục thực và được gọi là argument của $z$, ký hiệu $\varphi = Arg(z)$.

**Dạng mũ của số phức**: với mỗi số thực $\varphi$ nếu chúng ta đặt

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

thì số phức $z$ có thể viết dưới **dạng mũ** như sau

$$z = re^{i\varphi}.$$

# 2 Ma trận và các phép toán

## 2.1 Định nghĩa ma trận

Người ta có thể sắp xếp và ghi dữ liệu dưới dạng các bảng hình chữ được gọi là ma trận và thường sử dụng các chữ cái in hoa, như $A, B, C...$, để ký hiệu.

Ví dụ: Doanh thu bán hàng của một cửa hàng cho ba sản phẩm I, II, III vào các ngày trong tuần từ Thứ hai đến Chủ nhật cho mỗi tuần có thể được sắp xếp trong một ma trận như sau:

$$\begin{array}{cc}
\text{Thứ} & \text{Hai Ba Tư Năm Sáu Bẩy CN} \\
\hline
\text{A=} & \begin{bmatrix} 40 & 33 & 81 & 0 & 21 & 47 & 33 \\ 0 & 12 & 78 & 50 & 50 & 96 & 90 \\ 10 & 0 & 0 & 27 & 43 & 78 & 56 \end{bmatrix}. \quad \begin{matrix} I \\ II \\ III \end{matrix}
\end{array}$$

Nếu công ty có 10 cửa hàng, chúng ta có thể thiết lập 10 ma trận như vậy, mỗi ma trận cho một cửa hàng. Khi đó, nếu cộng các phần tử tương ứng của các ma trận này, chúng ta có thể nhận được một ma trận hiển thị tổng doanh thu của từng sản phẩm trong mỗi ngày.

**Định nghĩa 2.1.** *Một ma trận là một bảng hình chữ nhật chứa các số (thực hoặc phức) hoặc hàm số được sắp xếp theo hàng và cột và được đặt trong dấu ngoặc vuông (hoặc tròn).*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

*Ma trận gồm $m$ hàng và $n$ cột như trên được gọi là có cấp $m \times n$. Các số (hoặc hàm số) $a_{ij}$ được gọi là các phần tử của ma trận.*

*Ký hiệu $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, hoặc đơn giản $A = [a_{ij}]$.*

Nếu tất cả các phần tử $a_{ij}$ của ma trận là các số thực (hoặc số phức) thì ma trận được gọi là ma trận thực (hoặc ma trận phức).

Ví dụ:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

là một ma trận cấp $2 \times 3$.

**Định nghĩa 2.2.** *Hai ma trận $A = [a_{ij}]$ và $B = [b_{ij}]$ được gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng cấp và có các phần tử tương ứng bằng nhau: $a_{ij} = b_{ij}$ với mọi $i, j$.*

**Một số dạng ma trận đặc biệt**:

- Ma trận không, ký hiệu $\theta$: là ma trận có tất cả các phần tử bằng không.

- Ma trận vuông: nếu $m = n$, ma trận còn được gọi là ma trận vuông cấp $n$. Khi đó các phần tử $a_{ii}$ tạo thành đường chéo gọi là đường chéo chính.

- Ma trận tam giác trên: là ma trận vuông mà tất cả các phần tử nằm bên dưới đường chéo chính đều bằng không, $a_{ij} = 0$ với mọi $i < j$. Các phần tử nằm trên đường chéo có thể bằng không hoặc khác không. Ma trận tam giác dưới được định nghĩa tương tự.

Ví dụ: một số ma trận tam giác

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ (tam giác trên)}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ (tam giác dưới)}$$

- Ma trận đường chéo: là ma trận vuông mà tất cả các phần tử nằm ngoài đường chéo chính đều bằng không: $a_{ij} = 0$ với mọi $i \neq j$.

Ví dụ:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Ma trận đơn vị cấp $n$, ký hiệu $I_n$: là ma trận chéo mà mọi phần tử nằm trên đường chéo chính đều bằng 1.

Ví dụ: ma trận đơn vị cấp 2

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Véc tơ**: là trường hợp đặc biệt ma trận với chỉ một hàng (gọi là véc tơ hàng) hoặc một cột (gọi là véc tơ cột). Các phần tử của nó được gọi là các thành phần của véc tơ. Véc tơ được ký hiệu bằng các chữ cái thường, như $a, b, c$...

Ví dụ:

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

## 2.2 Các phép toán cơ bản với ma trận

### 2.2.1 Chuyển vị

**Định nghĩa 2.3.** *Chuyển vị của ma trận $A$ cấp $m \times n$ là ma trận cấp $n \times m$, ký hiệu $A^T$, có được từ $A$ bằng cách chuyển hàng thành cột và ngược lại.*

*Nếu $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ thì $A^T = [a_{ji}]_{n\times m}$*

**Ví dụ**:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}^T.$$

**Tính chất**: $(A^T)^T = A$.

### 2.2.2 Phép cộng ma trận

#### Phép cộng các ma trận cùng cấp

**Ví dụ**: Cho các ma trận sau

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Dự đoán $A + B$ là gì?

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

**Định nghĩa 2.4.** *Giả sử* $A = [a_{ij}]$ *và* $B = [b_{ij}]$ *là hai ma trận cấp* $m \times n$. *Khi đó* $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$.

Ví dụ:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 6 & -3 & 4 \\ 6 & -2 & 10 \end{bmatrix}$$

**Một số tính chất**:

- $A + B = B + A$
- $A + \theta = \theta + A = A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$

### 2.2.3 Nhân vô hướng

Ví dụ: hãy dự đoán $2C$ là gì, với $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

**Định nghĩa 2.5.** *Cho* $A = [a_{ij}]_{m \times n}$. *Khi đó với mỗi số thực* $k$, *ta định nghĩa*

$$kA = [ka_{ij}]_{m \times n}.$$

Ví dụ:

$$2 \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$$

$$2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \\ 8 & -6 & 6 \end{bmatrix}$$

Chúng ta dễ dàng kiểm tra được một số tính chất sau với mọi ma trận $A, B$ và các số $k, l$.

- $k(A + B) = kA + kB$
- $(k + l)A = kA + lA$
- $k(lA) = l(kA) = lkA$
- $(kA)^T = kA^T$

### 2.2.4 Phép nhân ma trận

**Phép nhân hai véc tơ**:
Ví dụ: tích của hai véc tơ cùng độ dài $u = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ và $v = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, thì $u \times v$ là giá trị cho tổng của tích các phần tử tương ứng của hai véc tơ:

$$u \times v = 2 \times 3 + (-1) \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times (-2) + 5 \times 4 = 18$$

**Tổng quát**: nếu $u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix}$ và $v = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$ thì tích vô hướng của $u$ và $v$, ký hiệu là $u \times v$ (hoặc $u.v$, $uv$) được định nghĩa là

$$uv = u_1 \times v_1 + u_2 \times v_2 + \cdots u_n \times v_n.$$

Chú ý người ta còn coi tích vô hướng của $u$ và $v$ như là tích của véc tơ dòng $u$ và véc tơ cột $v^T$:

$$uv = u \times v^T = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = u_1 \times v_1 + u_2 \times v_2 + \cdots u_n \times v_n.$$

**Phép nhân hai ma trận**:
Tích vô hướng của hai véc tơ có thể được mở rộng sang tích của hai ma trận $A$ và $B$ bằng cách lấy tích vô hướng của từng véc tơ dòng của $A$ với mỗi véc tơ cột của $B$. Ở đây chúng ta cần điều kiện số hàng của ma trận $B$ phải bằng số cột của ma trận $A$ và chúng ta sẽ biểu diễn các tích vô hướng nhận được thành một ma trận.

**Ví dụ**:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -13 & 12 \end{bmatrix}.$$

Một cách tổng quát:

**Định nghĩa 2.6.** *Cho $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ và $B = [b_{ij}]_{n \times k}$. Khi đó tích của hai ma trận $A$ và $B$ là một ma trận, ký hiệu là $C = AB = [c_{ij}]_{m \times k}$ có cấp $m \times k$, với các phần tử*

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell j}, \ i = 1, \ldots, n; \ j = 1, \ldots, k.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 5 \\ -1 & -14 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$$

**Chú ý**: phần tử $c_{ij}$ của $C$ là tích của véc tơ hàng thứ $i$ của ma trận $A$ và véc tơ cột thứ $j$ của ma trận $B$:

$$c_{ij} = a_i b_j = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

**Chú ý**: $A\theta = \theta$, $\theta A = \theta$, $AI_n = I_nA = A$ nếu $A$ vuông cấp $n$, phép nhân ma trận không có tính chất giao hoán.

**Tính chất 2.7.** *Phép nhân ma trận có các tính chất sau*

*(1)* $(A + B)C = AC + BC$, $A(B + C) = AB + AC$. *(Tính chất phân phối)*

*(2)* $(kA)B = k(AB) = A(kB)$, *và được viết là* $kAB$.

*(3)* $(AB)C = A(BC)$, *và được viết là* $ABC$. *(Tính chất kết hợp)*

*(4)* $(AB)^T = B^T A^T$.

Chú ý (xử lý song song của tích trên máy tính): một cách biểu diễn khác của tích ma trận thường được sử dụng bởi các thuật toán tiêu chuẩn, ở đó người ta có thể coi tích $AB$ như là tích của $A$ với từng véc tơ cột của $B$:

$$AB = A \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ab_1 & Ab_2 & \cdots & Ab_k \end{bmatrix}$$

**Ví dụ**: ma trận tích

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 7 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 4 & 34 \\ -17 & 8 & 23 \end{bmatrix},$$

có các cột được tạo thành bởi

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -17 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 23 \end{bmatrix}.$$

## 2.3 Một số ứng dụng của các phép toán ma trận

### 2.3.1 Sản xuất máy tính: ứng dụng phép nhân ma trận

Công ty Supercomp Ltd sản xuất hai mẫu máy tính PC1086 và PC1186. Ma trận $A$ thể hiện chi phí mỗi máy tính (tính bằng nghìn đô la) và $B$ là số liệu sản xuất của năm 2010 (theo bội số của 10.000 chiếc.) Tìm một ma trận $C$ để hiển thị cho các cổ đông biết chi phí mỗi quý (tính bằng triệu đô la) về nguyên liệu, lao động và các khoản khác.

$$\begin{array}{rcl} & \begin{array}{cc}\text{PC1086} & \text{PC1186}\end{array} & \\ \mathbf{A} = & \begin{bmatrix}1.2 & 1.6\\ 0.3 & 0.4\\ 0.5 & 0.6\end{bmatrix} & \begin{array}{l}\text{Phần cứng}\\ \text{Nhân công}\\ \text{Chi phí khác}\end{array}\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl} & \begin{array}{c}\text{Quý}\\ \begin{array}{cccc}1 & 2 & 3 & 4\end{array}\end{array} & \\ \mathbf{B} = & \begin{bmatrix}3 & 8 & 6 & 9\\ 6 & 2 & 4 & 3\end{bmatrix} & \begin{array}{l}\text{PC1086}\\ \text{PC1186}\end{array}\end{array}$$

Giải:

$$\begin{array}{rcl} & \begin{array}{c}\textbf{Quý}\\ \begin{array}{cccc}1 & 2 & 3 & 4\end{array}\end{array} & \\ \mathbf{C} = \mathbf{AB} = & \begin{bmatrix}13.2 & 12.8 & 13.6 & 15.6\\ 3.3 & 3.2 & 3.4 & 3.9\\ 5.1 & 5.2 & 5.4 & 6.3\end{bmatrix} & \begin{array}{l}\text{Phần cứng}\\ \text{Nhân công}\\ \text{Chi phí khác}\end{array}\end{array}$$

### 2.3.2 Mật mã

Ý tưởng: tương ứng chuyển dữ liệu cần mã hóa thành một ma trận số $A$. Nhân bên phải (hoặc trái) ma trận A với một ma trận khả nghịch bất kỳ B (phù hợp về cấp, được gọi là chìa khóa) được một ma trận $C$

$$AB = C,$$

và $C$ chính là dữ liệu đã được mã hóa.

Muốn giải mã dữ liệu ban đầu là ma trận $A$ cần biết ma trận chìa khóa $B$ và khi đó

$$A = CB^{-1}.$$

Ví dụ: chúng ta tương ứng mỗi chữ cái với một số tự nhiên là thứ tự của chúng trong bảng chữ cái và các ký tự trống bởi số 0. Khi đó một câu sẽ tương ứng với một dãy số, và chúng ta sẽ chia dãy số này vào các hàng khác nhau để một ma trận, các phần tử còn thiếu của ma trận chúng ta điền số 0. Khi đó ta được một ma trận chưa mã hóa, gọi là ma trận A.

# 3 Định thức của ma trận

## 3.1 Định nghĩa định thức ma trận

Một định thức cấp $n$ tương ứng với một ma trận vuông $A = [a_{ij}]$ cấp $n$, ký hiệu là $det(A)$ hoặc $\mid A \mid$, được định nghĩa quy nạp theo $n = 1, 2, \ldots$.

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Định thức được định nghĩa bằng quy nạp như sau.

- Khi $n = 1$, $A = [a_{11}]$ thì $D = det(A) = a_{11}$.

- Với $n \geq 2$: trước hết ta gọi định gọi định thức con tương ứng với phần tử $a_{ij}$ là định thức cấp $(n-1)$ của ma trận con thu được từ $A$ bằng cách bỏ đi hàng $i$ và cột $j$, ký hiệu là $M_{ij}$. Khi đó, đặt

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, \tag{3.1}$$

và được gọi là **phần bù đại số** (cofactor) của phần tử $a_{ij}$ trong định thức. Định nghĩa định thức cấp $n$ bởi

$$D = \mid A \mid = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}.$$

Ví dụ: cho $A = [5]$ và $B = [-4]$ thì $det(A) = 5$, $det(B) = -4$.

Ví dụ: cho $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $(n = 2)$ thì $det(A) = ad - bc$.

Ví dụ: $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -3 \times 4 - (-1) \times 5 = 7$.

Ví dụ:

$$\begin{aligned} D = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} &= (-2) \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 3 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 4 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -2 \times (-2) - 3 \times (-8) + 4 \times (-6) \\ &= 4 \end{aligned}$$

**Chú ý**: dấu đằng trước $M_{ij}$ của các phần bù đại số $A_{ij}$ tuân theo bảng sau, ví dụ với $n = 3$:

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Quy tắc tính định thức như trong định nghĩa trên được gọi là khai triển định thức theo hàng 1. Tuy vậy định thức cũng có thể được cho bởi khai triển theo một hàng hoặc một cột bất kỳ.

**Định lý 3.1.** *Ta có thể khai triển một định thức theo một hàng hoặc một cột bất kỳ,*

$$D = \mid A \mid = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}. \ (\textit{khai triển theo hàng } i)$$

$$D = \mid A \mid = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}. \ (\textit{khai triển theo cột } j)$$

*Chứng minh.* Chứng minh định lý này tham khảo phụ lục A-81 trang 1221. □

**Nhận xét**: nếu ma trận có một hàng hoặc một cột toàn số không thì định thức của nó bằng không.

## 3.2 Các tính chất chung về định thức

**Định lý 3.2.** *Định thức của ma trận chuyển vị bằng định thức của ma trận ban đầu:*

$$|A^T| = |A|.$$

$\Rightarrow$ Do đó một tính chất nào đó về định thức đúng theo hàng thì cũng đúng theo cột.

*Chứng minh.* Chúng ta sẽ chứng minh định lý bằng quy nạp.

Rõ rành khẳng định của định lý đúng với $n = 1$ và $n = 2$:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \text{ và } \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Giả sử giả thiết quy nạp khẳng định đúng với các định thức đến cấp $(n-1)$. Khi đó chúng ta dễ dàng thấy khẳng định của định lý cũng đúng với định thức cấp $n$ vì khai triển của $|A|$ theo hàng $i$ (bất kỳ) và khai triển của $|A^T|$ theo cột $i$ sẽ dẫn đến các định thức con cấp $(n-1)$ của các ma trận con là chuyển vị của nhau nên bằng nhau theo giả thiết quy nạp.

□

Từ định nghĩa định thức, Định lý 3.1 và Định lý 3.2 chúng ta có ngay các tính chất sau (bằng cách khai triển theo hàng hoặc cột được xét).

**Tính chất 3.3.** *Nhân một hàng (hoặc một cột) với một hằng số $k$ thì giá trị định thức cũng được nhân với $k$.*

$\Rightarrow$ Có thể đưa nhân tử chung của một hàng hoặc một cột ra ngoài định thức.

Ví dụ:

$$\begin{vmatrix} -2 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

**Tính chất 3.4.** *Nếu một hàng (hoặc một cột) của định thức là tổng của hai hàng (hoặc hai cột) thì định thức bằng tổng của hai định thức tương ứng với mỗi hàng* *(cột) đó. (Chú thích: các hàng hoặc cột khác giữ nguyên)*

$$\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_k^{(1)} + A_k^{(2)} \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_k^{(1)} \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_k^{(2)} \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix},$$

*với $A_i$ ký hiệu các hàng của định thức.*

**Định lý 3.5.** *Với định thức cấp lớn hơn hoặc bằng 2, nếu đổi chỗ hai dòng hoặc hai cột thì định thức đổi dấu.*

*Chứng minh.* Chúng ta sẽ chứng minh định lý bằng quy nạp.

Rõ rành khẳng định của định lý đúng với $n = 2$, vì

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \text{ còn } \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bc - ad.$$

Giả sử giả thiết quy nạp khẳng định đúng với các định thức đến cấp $(n-1)$, ta sẽ chứng tỏ khẳng định cũng đúng với định thức cấp $n$.

Cho $D$ là một định thức cấp $n$ của ma trận $A$ và $E$ là thu được từ $D$ bằng cách đổi chỗ hai hàng nào đó, ví dụ $k$ và $l$. Khai triển $D$ và $E$ theo một hàng khác hai hàng đó, giả sử đó là hàng $i$, với $i \neq k$ và $i \neq k$, ta được

$$D = \mid A \mid = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}, \quad E = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} N_{ij}.$$

Chúng ta chú ý rằng các định thức con $N_{ij}$ có cấp $(n-1)$, thu được từ $M_{ij}$ bằng cách đổi chỗ hai hàng như ở trên (chúng phải chứa hai hàng đó vì chúng ta vừa khai triển định thức theo một hàng khác). Theo giả thiết quy nạp ta có $N_{ij} = -M_{ij}$ và từ đó suy ra ngay $E = -D$. □

Từ định lý trên, kết hợp với các Tính chất 3.3 và 3.4, chúng ta có ngay các hệ quả sau.

**Hệ quả 3.6.** *Định thức có hai hàng hoặc hai cột giống hệt nhau thì bằng* 0.

**Hệ quả 3.7.** *Định thức có hai hàng hoặc hai cột tỷ lệ thì bằng* 0.

**Hệ quả 3.8.** *Định thức không thay đổi khi cộng vào một hàng (hoặc cột) bội số của các hàng (hoặc cột) khác.*

**Định lý 3.9.** *Định thức của tích các ma trận bằng tích các định thức:*

$$det(AB) = det(A)det(B),$$

*với $A$ và $B$ là các ma trận vuông cấp $n$.*

**Một số chú ý**:

(1) Định thức của ma trận tam giác bằng tích các phần tử nằm trên đường chéo chính, đặc biệt $| I_n |= 1$. (khai triển liên tiếp theo cột 1 hoặc dòng cuối )

(2) Do việc tính định thức theo định nghĩa thường khá dài nên người ta có thể sử dụng các phép biến đổi cơ bản như trong Định lý 3.5, Tính chất 3.3, và Hệ quả 3.8 để biến đổi về định thức của ma trận tam giác (hoặc thậm chí ma trận chéo):

   (a) Đổi chỗ hai hàng hoặc hai cột của định thức;

   (b) Nhân một hàng hoặc một cột với một số khác 0; hoặc tương tự đưa nhân tử chung của một hàng hoặc một cột ra ngoài định thức;

   (c) Cộng vào một hàng (cột) bội số của một hàng (cột) khác.

Ví dụ: tính định thức

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

# 4 Hạng của ma trận

**Định nghĩa 4.1.** *Cho $A$ là ma trận cấp $m \times n$. Hạng của ma trận $A$ là cấp cao nhất trong số các định thức con khác không của $A$, ký hiệu là $r(A)$.*

Như vậy nếu $r(A) = r$ thì $A$ có ít nhất một định thức con cấp $r$ khác không và mọi định thức con cấp lớn hơn $r$ của $A$ (nếu có) đều bằng không.

**Ví dụ**: hạng của ma trận sau bằng 2

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

vì có ít nhất một định thức con cấp 2 khác 0, giả sử $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$, và hơn nữa mọi định thức con cấp 3 đều bằng 0 (với chú ý hàng 3 bằng tổng của hai hàng trên).

**Chú ý**:

(1) Từ định nghĩa trên ta thấy ngay nếu ma trận $A$ vuông cấp $n$ thì $r(A) = n$ khi và chỉ khi $det(A) \neq 0$.

(2) Từ định nghĩa của hạng và Định lý 3.5 ta thấy ngay $r(A^T) = r(A)$.

**Định nghĩa 4.2** ( Ma trận bậc thang)**.** *Trước hết chúng ta goi một dòng của ma trận A được gọi là hàng không nếu nó chỉ gồm những phần tử 0. Ngược lại, nếu hàng của ma trận A có ít nhất một phần tử khác 0 thì nó được gọi là hàng khác không.*

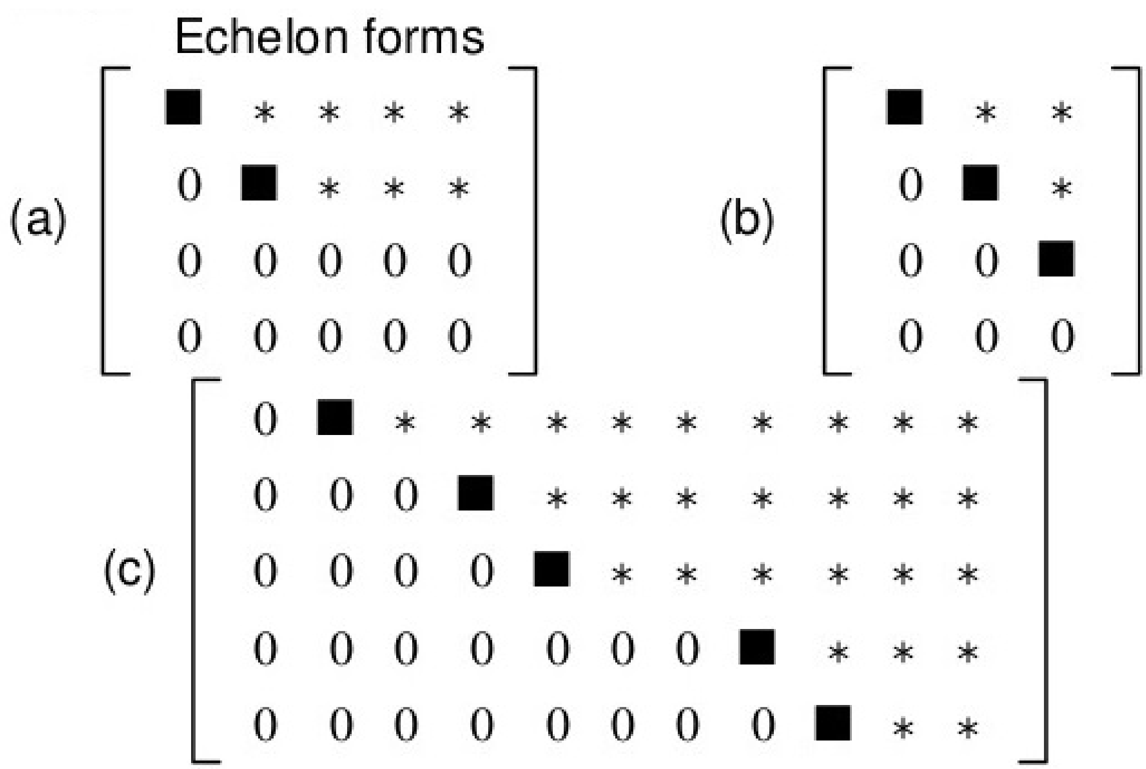
*Ma trận A khác không cấp $m \times n$ được gọi là ma trận bậc thang (row-echelon matrix), nếu nó có các đặc điểm sau đây:*

*- Hoặc ma trận không có hàng không hoặc các hàng không luôn nằm phía dưới các hàng khác không.*

*- Nếu ma trận có ít nhất hai hàng khác không thì đối với hai hàng khác không bất kỳ của nó, phần tử khác không đầu tiên của hàng dưới luôn nằm ở bên phải cột chứa phần tử cơ sở của hàng trên.*

**Ví dụ**: các ma trận sau là các ma trận dạng bậc thang:

$$\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 11 & 5 \\ 0 & -14 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$




**Chú ý**: hạng ma trận bậc thang bằng số hàng khác không của nó. Ở đây chúng ta quy ước một hàng của ma trận được gọi là bằng không nếu mọi phần tử của hàng đó đều bằng 0. Chúng ta có thể lấy ma trận con có cỡ lớn nhất có địnhthức khác không gồm các phần tử nằm trên đường chéo chính là các phần tử khác không đầu tiên của các hàng khác không đó.

Do các phép biến đổi cơ bản trên hàng (hoặc cột) không làm thay đổi tính bằng không hay khác không của một định thức nên chúng ta có ngay kết quả sau:

**Định lý 4.3.** *Các phép biến đổi cơ bản trên hàng (hoặc cột) không làm thay đổi hạng của ma trận.*

Thông thường việc kiểm tra các định thức con để tìm hạng có thể rất dài. Tuy vậy với chú ý và định lý ở trên, để tìm hạng của ma trận chúng ta có thể thực hiện các phép đổi sơ cấp trên hàng (hoặc cột) của ma trận để đưa nó về dạng bậc thang mà không làm thay đổi hạng.

**Ví dụ 1**: tìm hạng của ma trận sau

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -5 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Giải: ta sẽ biến đổi ma trận trên về dạng bậc thang như sau.
Thực hiện phép toán trên hàng 2H1+H2, -3H1+H3:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 8 & 10 \\ 0 & 1 & -3 & -8 & -10 \end{bmatrix},$$

và sau đó H2+H3:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ma trận trên có dạng bậc thang và có hai hàng khác không, do đó hạng của ma trận trên bằng 2.

**Ví dụ 2**: tìm hạng của ma trận sau

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 9 \\ -1 & 2 & -5 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Giải: ta sẽ biến đổi ma trận trên về dạng bậc thang bằng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng như sau.

- Thực hiện các phép toán -2H1+H2, -5H1+H3, H1+H4:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

- Thực hiện các phép toán 22+H3, 2H2+H4:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ma trận trên có dạng bậc thang và có hai hàng khác không, do đó hạng của ma trận trên bằng 2.

**Ví dụ**: tìm hạng của các ma trận sau

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -5 & 1 \\ 4 & -1 & 8 & 5 \\ 3 & 1 & 8 & 5 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 2 & -5 \\ -3 & 5 & 4 & 6 & -3 \\ 4 & -9 & -17 & -8 & 32 \end{bmatrix}$$

# 5 Ma trận nghịch đảo

Trong phần này chúng ta chỉ xét các ma trận vuông.

**Định nghĩa 5.1.** *Ma trận $A$ vuông cấp $n$ được gọi là có nghịch đảo (hoặc khả nghịch, hoặc không suy biến) nếu có một ma trận $B$ vuông cấp $n$ sao cho*

$$AB = BA = I_n,$$

*trong đó $I_n$ là ma trận đơn vị cấp $n$. Khi đó ma trận $B$ như trên là duy nhất và được gọi là ma trận nghịch đảo của $A$, ký hiệu là $B = A^{-1}$.*

**Chú ý**: chứng minh tính duy nhất của ma trận nghịch đảo coi như một bài tập.

**Ví dụ**: tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

**Giải**: Theo định nghĩa, chúng ta tìm ma trận $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ sao cho $AB = BA = I_2$ nên

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Đẳng thức trên dẫn đến hệ phương trình

$$\begin{cases} 2a + 5c &= 1 \\ 1a + 3c &= 0 \\ 2b + 5d &= 0 \\ 1b + 3d &= 1 \end{cases}$$

và tìm được $a = 3, c = -1, b = -5, d = 2$.

Từ đó ma trận nghịch đảo của $A$ là $B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = A^{-1}$. (chúng ta có thể kiểm lại rằng $AB = BA = I$)

**Một vài tính chất**: (chứng minh coi như bài tập)

(i) $(A^{-1})^{-1} = A$.

(ii) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

(iii) Nếu $A$ và $B$ khả nghịch thì $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Người ta định nghĩa ma trận phụ hợp của ma trận vuông $A = [a_{ij}]$, ký hiệu là $A^*$, là ma trận chuyển vị của ma trận các phần bù đại số của các phân tử của $A$:

$$A^* = [A_{ij}]^T,$$

trong đó $A_{ij}$ là phần bù đại số của $a_{ij}$, đã được định nghĩa ở (3.1).

**Định lý 5.2.** *Ma trận $A$ khả nghịch khi và chỉ khi $det(A) \neq 0$. Khi đó*

*(1)*

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}.$$

*(2) Ma trận nghịch đảo $A^{-1}$ cho bởi công thức*

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} A^*. \tag{5.2}$$

*Đặc biệt, nghich đảo của ma trận cấp 2*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ là ma trận } A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

*Chứng minh.* Ký hiệu vế phải của 5.2 bởi $B$. Ta sẽ chứng tỏ $BA := G = I_n$. Thật vậy các phần tử của $G$ là

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_{ki}}{det(A)} a_{kj} = \frac{1}{det(A)}(a_{1j}A_{1i} + a_{2j}A_{2i} + \cdots + a_{nj}A_{ni}).$$

Với $i = j$ thì phần trong ngoăc của đẳng thức trên chính là khai triển định thức của $A$ theo cột thứ $i$, do đó $g_{ii} = 1$.

Với $i \neq j$ thì phần trong ngoăc của đẳng thức trên bằng không vì nó chính là khai triển định thức theo cột thứ $i$ của ma trận có hai cột giống hệt nhau: ma trận có được từ $A$ bằng cách thay cột thứ $i$ của $A$ bằng cột thứ $j$. Từ đó $g_{ij} = 0$ nếu $i \neq j$.

□

**Ví dụ 1**: tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},$$

**Giải**: Do $det(A) = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 5 = 3 \neq 0$ nên ma trận $A$ khả nghịch. Ma trận nghịch đảo của $A$ là

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 & -5/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

**Ví dụ 2**: tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của ma trận

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Giải**: Do $det(B) = 2 \cdot 2 - (-4) \cdot (-1) = 0$ nên ma trận $B$ không khả nghịch.

**Ví dụ 3**: tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

**Giải**:

$det(A) = -1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \times 2 + 2 \times 5 + 2 \times 1 = 10 \neq 0$, nên ma trận $A$ khả nghịch.

Các phần bù đại số của các phần tử của $A$ là:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -5,\ A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12, A_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -10, A_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5,\ A_{33} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Ma trận phụ hợp của $A$ là

$$A^* = \begin{bmatrix} 2 & 12 & -4 \\ -5 & -10 & 5 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Từ đó, ma trận nghich đảo của $A$ là

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}A^* = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 2 & 12 & -4 \\ -5 & -10 & 5 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/5 & 6/5 & -2/5 \\ -1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/10 & -2/5 & 3/10 \end{bmatrix}.$$

# 6 Hệ phương trình tuyến tính

**Ví dụ**: hệ hai phương trình tuyến tính của ba ẩn số

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 & = -3 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 & = 12 \end{cases}$$

Nếu thay $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 2$ vào hai phương trình trên thì thỏa mãn và do đó người ta gọi $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 2$ hoặc bộ ba số $(1, 1, 2)$ là một nghiệm của phương trình.

Một cách tổng quát, một hệ gồm $m$ phương trình tuyến tính của $n$ ẩn số $x_1, x_2, \cdots, x_n$ có dạng:

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{array}\right., \tag{6.3}$$

trong đó $a_{ij}$ là các hằng số cho trước được gọi là các hệ số của hệ, các $b_i$ ở vế phải của các phương trình cũng là các hằng số và được gọi là các hằng số tự do.

Nếu tất cả các $b_i$ đều bằng không thì hệ phương trình được gọi là thuần nhất, ngược lại nếu ít nhất một trong các hệ số tự do $b_i \neq 0$ thì hệ được gọi là hệ không thuần nhất.

Một nghiệm của hệ (6.3) là một tập các số $x_1, x_2, \cdots, x_n$ thỏa mãn $m$ phương trình của hệ. Một véc tơ nghiệm của hệ là một véc tơ $x$ mà các thành phần của nó tạo thành một nghiệm của hệ:

**Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính**:

Đặt $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ và được gọi là ma trận hệ số của hệ, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$.

Khi đó hệ phương trình (6.3) được viết bởi chỉ một phương trình véc tơ dạng ma trận

$$Ax = b.$$

Người ta cũng ký hiệu $A^{bs} = [A \mid b]$ và gọi là ma trận bổ sung của hệ phương trình (6.3).

**Ví dụ**: hệ phương trình trong ví dụ trên được biểu diễn dưới dạng ma trận

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 12 \end{bmatrix}$$

## 6.1 Hệ Cramer

**Hệ Cramer**: hệ (6.3) gọi là hệ Cramer nếu $A$ là ma trận vuông ($m = n$) và $det(A) \neq 0$. Khi đó hệ Cramer có nghiệm duy nhất

$$x = A^{-1}b.$$

Hơn nữa

$$x_j = \frac{det(A_j)}{det(A)}, j = 1, 2, \cdots, n,$$

trong đó $A_j$ là ma trận có được từ $A$ bằng cách thay cột thứ $j$ bằng cột vế phải.

*Chứng minh.* Rõ ràng nếu $det(A) \neq 0$ thì $A$ khả nghịch và đẳng thức $Ax = b$ tương đương với $x = A^{-1}b$ nên đó là nghiệm duy nhất của hệ phương trình.

Lúc này chúng ta sử dụng công thức

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}A^* = \frac{1}{det(A)}[A_{ij}]^T,$$

và do đó

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{det(A)}[A_{ij}]^T b.$$

Chú ý phép nhân hàng $j$ của ma trận $[A_{ij}]^T$ với cột $b$ chúng ta suy ra

$$x_j = \frac{1}{det(A)}(b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots + b_nA_{nj}).$$

Phần trong ngoặc của biểu thức trên chính là $\det(A_j)$ có được bằng cách khai triển định thức theo cột $j$. Định lý được chứng minh. □

**Ví dụ 1**: giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + y &= -3 \\ 5x + 7y &= 6 \end{cases}$$

Định thức của ma trận hệ số là

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 9 \neq 0,$$

nên hệ phương trình là một hệ Cramer.

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -27, \quad \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 27.$$

Do đó nghiệm của hệ phương trình là

$$\begin{cases} x & = \frac{-27}{9} = -3 \\ y & = \frac{27}{9} = 3 \end{cases}$$

**Ví dụ 2**: giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + y - z & = 1 \\ x + 2y + z & = 8 \\ 3x - y - z & = -2 \end{cases}$$

Định thức của ma trận hệ số là $\det(A) = 9$ và các định thức $\det(A_1) = 9$, $\det(A_2) = 9$, $\det(A_3) = 27$. Từ đó nghiệm của hệ phương trình là $x = 1$, $y = 1$ và $z = 3$.

## 6.2 Phương pháp khử Gauss

Chúng ta xét hệ phương trình tuyến tính dạng tổng quát dạng (6.3).

Chúng ta có nhận xét rằng các phép biến đổi "sơ cấp" sau với hàng là các phép biến đổi tương đương hệ phương trình:

- Đổi chỗ hai hàng;
- Nhân, hoặc chia một hàng với một số khác không;
- Nhân một hàng với 1 số rồi cộng vào một hàng khác.

Chúng ta lấy ví dụ xét một hệ phương trình đơn giản

$$\begin{cases} 2x + y & = -3 \\ 5x + 7y & = 6 \end{cases}.$$

Chúng ta sẽ sử dụng các phép biến đổi trên để đưa ra một phương trình hệ quả chỉ chứa một biến, ví dụ thực hiện phép toán -5 PT (1) + 2 PT (2) ta được:

$$9y = 27.$$

Từ đó hệ ban đầu tương đương với hệ

$$\begin{cases} 2x + y & = -3 \\ 9y & = 27, \end{cases}$$

mà từ phương trình thứ hai chúng ta có thể tìm được ngay $y = 3$. Từ đó thay giá trị $y = 3$ vào phương trình đầu ta tìm được $x = -3$.

Việc biến đổi hệ phương trình như trên chính là chúng ta đã sử dụng phương pháp khử và việc biến đổi thực chất xảy ra đối với các hệ số của các biến và các giá trị ở vế phải. Trong ví dụ trên ma trận tương ứng với hệ phương trình sau khi biến đổi

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 9 & 27 \end{bmatrix},$$

là một ma trận dạng bậc thang.

**Phương pháp khử Gauss**: xét hệ phương trình (6.3). Đặt $A^{bs} = [A \mid b]$, gọi là ma trận bổ sung của hệ. Giải hệ phương trình bằng phương pháp Gauss chính là biến đổi tương đương hệ phương trình bằng cách sử dụng các phép biến đổi sơ cấp với hàng để đưa ma trận $A^{bs}$ về một ma trận dạng bậc thang.

**Định lý 6.1.** *Hệ phương trình* (6.3) *có nghiệm khi và chỉ khi*

$$r(A) = r(A^{bs}) := r.$$

*Hơn nữa:*

*(1) Nếu $r =$ số ẩn $= n$ thì hệ có nghiệm duy nhất.*

*(2) Nếu $r <$ số ẩn $= n$ thì hệ có vô số nghiệm: ta có thể chọn $r$ ẩn chính và biểu diễn chúng theo $n - r$ ẩn (phụ) nhận giá trị bất kỳ còn lại.*

**Chú ý**: hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có nghiệm không tầm thường (nghiệm khác không) khi và chỉ khi $r(A) = r(A^{bs}) = r < n$. Đặc biệt nếu $A$ vuông thì điều đó tương đương với $\det(A) = 0$.

**Ví dụ 1**: giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + 2z &= 4 \\ -2x + y + z &= 0 \\ 3x - 2y + 5z &= 6 \end{cases}$$

Giải: Ma trận bổ sung của hệ phương trình là

$$A^{bs} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Ta sẽ đưa ma trận bổ sung về dạng bậc thang như sau.

- Thực hiện phép toán 2H1+H2, -3H1+H3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

- Thực hiện phép toán 5H2+3H3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 22 & 22 \end{bmatrix}$$

Do đó hệ trở thành

$$\begin{cases} x + y + 2z & = 4 \\ \quad 3y + 5z & = 8 \\ \qquad 22z & = 22 \end{cases}$$

Từ đó dễ dàng tìm được nghiệm của hệ phương trình là $z = 1$, $y = 1$ và $x = 1$.

**Ví dụ 2**: Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss

$$\begin{cases} x - 2y + 2z + 3t & = 4, \\ -2x + 3y - z + 2t & = 2, \\ 3x - 5y + 3z + t & = 2. \end{cases}$$

Giải: Ma trận bổ sung của hệ phương trình là

$$A^{bs} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -5 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ta sẽ đưa ma trận bổ sung về dạng bậc thang như sau.

- Thực hiện phép toán 2H1+H2, -3H1+H3:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 8 & 10 \\ 0 & 1 & -3 & -8 & -10 \end{bmatrix}$$

- Thực hiện phép toán H2+H3:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ta thấy $r(A) = r(A^{bs}) = 2 < 4$ nên hệ phương trình có vô số nghiệm (2 ẩn chính và 2 ẩn tùy ý).

Hệ trở thành

$$\begin{cases} x - 2y + 2z + 3t & = 4 \\ -y + 3z + 8t & = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y & = 4 - 2z - 3t \\ y & = 3z + 8t - 10 \end{cases}$$

Từ đó giải ra

$$\begin{cases} x & = 4z + 13t - 16 \\ y & = 3z + 8t - 10 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có vô số nghiệm dạng

$$\begin{cases} x & = 4z + 13t - 16, \\ y & = 3z + 8t - 10 \\ y, z \in \mathbb{R} & \text{tùy ý}. \end{cases}$$

**Ví dụ 3**: Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss

$$\begin{cases} x - 2y + 2z + 3t & = 4, \\ -2x + 3y - z + 2t & = 2, \\ 3x - 5y + 3z + t & = 5. \end{cases}$$

Giải: Ma trận bổ sung của hệ phương trình là

$$A^{bs} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -5 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Thực hiện các phép biến đổi trên hàng tương tư như trong ví dụ 2 đối với ma trận trên (chỉ khác phần tử cuối cùng) chúng ta được ma trận dạng bậc thang sau:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 8 & 10 \\ 0 & 1 & -3 & -8 & -10 \end{bmatrix}$$

- Thực hiện phép toán H2+H3:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ta thấy $r(A) = 2 < r(A^{bs}) = 3$ nên hệ phương trình trên vô nghiệm. Bên cạnh đó chúng ta cũng có thể thấy hệ phương trình vô nghiệm vì lúc này hệ đã cho tương đương với hệ sau

$$\begin{cases} x - 2y + 2z + 3t & = 4 \\ -y + 3z + 8t & = 10 \\ \quad 0 & = 3 \end{cases}.$$

## 6.3 Tìm ma trận nghịch đảo bằng phương pháp Gauss- Jordan

Việc tìm ma trận nghịch đảo của một ma trận $A$ vuông cấp $n$ khả nghịch chính là tìm một ma trận vuông $X$ cấp $n$ sao cho $AX = I_n$.

Điều đó cũng đồng nghĩa với việc giải đồng thời $n$ hệ phương trình tuyến tính có dạng

$$AX_i = e_i, i = 1, 2, \cdots n,$$

trong đó $X_i$ ký hiệu các cột của $X$, $e_i$ ký hiệu các cột của ma trận đơn vị $I_n$. Từ đó chúng ta có thể áp dụng phương pháp khử Gauss để giải các hệ phương trình trên. Tuy nhiên do các hệ này có cùng ma trận hệ số là $A$ nên chúng ta có thể tiến hành phương pháp khử cho đồng thời $n$ hệ phương trình này để đưa ma trận hệ số về dạng ma trận đơn vị,

$$\begin{aligned} & [A \mid I_n] \\ \Rightarrow\ & [I_n \mid K] \end{aligned}$$

Khi đó ma trận $K$ ở bên vế phải như trên là ma trận nghiệm $X$ và do đó chính là ma trận nghịch đảo $A^{-1}$.

**Ví dụ**, p.303: sử dụng phương pháp Gauss- Jordan tìm ma trận nghịch đảo của

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Đầu tiên thực hiện khử Gauss đối với ma trận $[A \mid I]$:

$$[\mathbf{A} \quad \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \text{Row 2} + 3\,\text{Row 1} \\ \text{Row 3} - \text{Row 1} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \text{Row 3} - \text{Row 2} \end{array}$$

Tiếp túc biến đổi Gauss–Jordan để đưa các phần tử nằm phía trên đường chéo chính của ma trận phía bên trái về các số 0:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0,7 & 0,2 & 0,3 \\ -1,3 & -0,2 & 0,7 \\ 0,8 & 0,2 & -0,2 \end{bmatrix}.$$

Chúng ta có thể kiểm tra lại:

$$\begin{array}{l}
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3.5 & 1.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array}\right] \begin{array}{l} -\text{Row } 1 \\ 0.5 \text{ Row } 2 \\ -0.2 \text{ Row } 3 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0.6 & 0.4 & -0.4 \\ 0 & 1 & 0 & -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{Row } 1 + 2 \text{ Row } 3 \\ \text{Row } 2 - 3.5 \text{ Row } 3 \\ \phantom{x} \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0 & -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{Row } 1 + \text{Row } 2 \\ \phantom{x} \\ \phantom{x} \end{array}
\end{array}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

### 6.4 Một số ứng dụng của hệ phương trình tuyến tính

Hệ phương trình tuyến tính có rất nhiều ứng dụng khác nhau. Nó có thể được sử dụng để mô hình hóa các bài toán về tính lưu lượng giao thông (với nhiều nút), bài toán về mạch điện...

## 7 Giới thiệu phần mềm tính toán

Giới thiệu một số ứng dụng từ các phần mềm tính toán như Mathematica, Maple... để thực hiện các phép toán với ma trận, giải hệ phương trình tuyến tính.

## Tài liệu

[1] Erwin Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, (10th Edition, 2011),

Nhà xuất bản Wiley, p. 256-309.

[2] Nguyễn Đình Trí (Chủ biên), Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh, *Toán học cao cấp Tập I* (2014), Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

[3] Strang Gilbert, *Introduction to Linear Algebra* (5th Edition, 2016), Wellesley-Cambridge Press.