

Tên học phần: Giải tích   Số TC: 03

Ngày thi: 13/07/2022

Thời gian làm bài: 90 phút

## Đề số 8

Câu 1 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1). Tính tích phân

$$I = \iint_D (x - 2y) dx dy,$$

biết miền  $D$  được giới hạn bởi ba đường  $y = 0$ ,  $y = x$ , và  $x + y = 2$ .

Câu 2 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1). Tính tích phân

$$I = \iiint_V (x + y) dx dy dz,$$

biết miền  $V$  được giới hạn bởi mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  ( $a > 0$ ) với điều kiện  $x \geq 0$  và  $y \geq 0$ .Câu 3 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1).  $C$  là đoạn thẳng  $AB$ , được định hướng từ  $A(0, 0, 0)$  đến  $B(3, 2, 1)$ .(a) Tìm một biểu diễn tham số  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  của  $C$ .(b) Tính tích phân  $I = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , biết  $\vec{F} = (y^2 + z^2, z^2 + x^2, x^2 + y^2 + \cos^2 \frac{\pi z}{4})$ .Câu 4 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1). Cho mặt trụ  $S$  xác định bởi  $x^2 + y^2 = 1$  và  $0 \leq z \leq 2$ .(a) Tìm một biểu diễn tham số  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  của  $S$  và vectơ pháp tuyến  $\vec{N}$  tương ứng.(b) Tính tích phân của hàm vectơ  $\vec{F} = (x^2, z, y)$  trên mặt  $S$  với định hướng  $\vec{N}$ .

Câu 5 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1). Giải phương trình vi phân tuyến tính cấp một không thuần nhất sau:

$$y' - \frac{1}{x}y = x^2 e^x.$$

----- Hết -----

- Thí sinh **không** được sử dụng tài liệu.
- Cán bộ coi thi **không** giải thích gì thêm.

Trưởng bộ môn/khoa

Giảng viên ra đề

TS. Phan Quang Sáng

GS. TS. Phùng Văn Đồng

PGS. TS. Đỗ Văn Nam

TS. Lê Đức Ninh

TS. Đỗ Quốc Tuấn

TS. Vũ Hữu Nhựt

ThS. Nguyễn Đức Ngà

Đề số 8

Câu	Nội dung	Điểm
<b>1</b>		<b>2</b>
	$D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1 \text{ và } y \leq x \leq 2 - y\}$	0,5
	$I = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} dx(x - 2y)$	0,5
	$I = \int_0^1 dy 2(1 - y)(1 - 2y)$	0,5
	$I = (2y - 3y^2 + 4y^3/3)_0^1$	0,25
	$I = 1/3$	0,25

Câu	Nội dung	Điểm
<b>2</b>		<b>2,00</b>
	Vẽ được hình cầu [không bắt buộc]	
	Tọa độ cầu $z = r \cos \theta$ , $x = r \sin \theta \cos \phi$ , $y = r \sin \theta \sin \phi$	0,5
	Miền lấy tích phân: $\phi \in [0, \pi/2]$ , $r \in [0, a]$ , $\theta \in [0, \pi]$	0,25
	Định thức Jacobi: $ J  = r^2 \sin \theta$	0,25
	Tích phân bằng $I = \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^a dr r^3 \sin^2 \theta (\cos \phi + \sin \phi)$	0,25
	Tính được tích phân $\int dr r^3 = r^4/4$ [hoặc $\int d\phi (\cos \phi + \sin \phi) = \sin \phi - \cos \phi$ ]	0,25
	Tính được thêm tích phân thứ hai: $2 \int d\theta \sin^2 \theta = \int d\theta [1 - \cos(2\theta)] = \theta - \sin(2\theta)/2$	0,25
	Đáp số: $\pi a^4/4$	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
<b>3</b>		(Làm cách khác đúng vẫn tính đủ điểm)	<b>2,00</b>
	a		0,5
		Biểu diễn tham số: $x = 3t, y = 2t, z = t, 0 \leq t \leq 1$	0,5
	b		1,50
		$dx = 3dt, \quad dy = 2dt, \quad dz = dt$	0,25
		$I = \int_0^1 (4t^2 + t^2)3dt + (t^2 + 9t^2)2dt + (9t^2 + 4t^2 + \cos^2 \frac{\pi t}{4})dt$	0,5
		$= \int_0^1 (48t^2 + \frac{1}{2}(1 + \cos \frac{\pi t}{2}))dt$	0,25
		$= (16t^3 + \frac{t}{2} + \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi t}{2}) \Big _0^1$	0,25

		$= \frac{33}{2} + \frac{1}{\pi}$	0,25
--	--	----------------------------------	------

Câu	Nội dung	Điểm
4		<b>2,00</b>
	Tham số hóa $x = \cos u, y = \sin u, z = v$	0,5
	Miền lấy tích phân $0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2$	0,25
	$\begin{cases} \vec{r}'_u = (-\sin u, \cos u, 0) \\ \vec{r}'_v = (0, 0, 1) \end{cases}$	0,25
	$\vec{N} = \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v = (\cos u, \sin u, 0)$	0,25
	Đưa về tích phân $\int_0^2 \int_0^{2\pi} (\cos^3 u + v \sin u) \, du dv$	0,25
	Chuyển về $I = \int_0^2 \left( \sin u - \frac{\sin^3 u}{3} - v \cos u \right) \Big _0^{2\pi} dv$	0,25
	Tính đúng $I = 0$	0,25

Câu	Nội dung	Điểm
5	<b>(Làm cách khác đúng vẫn tính đủ điểm)</b>	<b>2,00</b>
	Viết được: $y(x) = u(x)v(x)$	0,25
	Viết lại được phương trình vi phân: $u'v + u \left( v' - \frac{1}{x}v \right) = x^2 e^x$	0,25
	Tìm được nghiệm riêng của phương trình $v' - \frac{1}{x}v = 0$ như sau: $\mathbf{v} = \mathbf{x}$	0,5
	Viết được: $u' = xe^x$	0,25
	Viết được: $\mathbf{u} = \int \mathbf{x}e^{\mathbf{x}} d\mathbf{x} + \mathbf{C}$	0,25
	Sử dụng phương pháp tích phân từng phần tính được: $\int xe^x dx = e^x(x - 1)$	0,25
	Viết được nghiệm tổng quát: $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = [e^{\mathbf{x}}(\mathbf{x} - 1) + \mathbf{C}] \mathbf{x} = \mathbf{x}e^{\mathbf{x}}(\mathbf{x} - 1) + \mathbf{C}\mathbf{x}$ , với $C$ là hằng số tích phân có giá trị tùy ý.	0,25

Trưởng bộ môn/khoa

Giảng viên ra đề

TS. Phan Quang Sáng

GS. TS. Phùng Văn Đồng

PGS. TS. Đỗ Văn Nam

TS. Lê Đức Ninh

TS. Đỗ Quốc Tuấn

TS. Vũ Hữu Nhựt

ThS. Nguyễn Đức Ngà