TRƯỜNG ĐẠI HỌC TÀI CHÍNH – MARKETING

BỘ MÔN TOÁN THỐNG KÊ

Giáo Trình

TOÁN DÀNH CHO KINH TẾ VÀ QUẢN TRỊ

(*Dành cho chương trình chất lượng cao*)

Mã số : GT – 01 – 18

Nhóm biên soạn:

Nguyễn Huy Hoàng (Chủ biên)

Nguyễn Trung Đông

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH - 2018

MỤC LỤC

Trang

LỜI MỞ ĐẦU

Sinh viên đại học khối ngành Kinh tế và Quản trị kinh doanh, khi học môn Toán cao cấp thường đặt câu hỏi: môn học có ứng dụng gì trong phân tích kinh tế và quản trị kinh doanh hay không? Nhằm trả lời cho câu hỏi này, chúng tôi biên soạn giáo trình: Toán dành cho kinh tế và quản trị. Giáo trình tiếp thu tư tưởng của các tài liệu đang được giảng dạy cho các trường đại học danh tiếng trên thế giới như:

1. Michael Hoy, John Livernois, Chris Mc Kenna, Ray Rees, Thanasis Stengos, Mathematics for Economics, The MIT Press Cambrige, Massachusetts, London, England (second edition), 2001.

2. Laurence D. Hoffmann, Gerald L. Bradley, Applied Calculus For Business, Economics, and the Social and Life Sciences, The Mc. Graw - Hill Companies, Inc (Expanded 10^{th} ed), 2010.

Cũng như các tài liệu trong nước, phù hợp điều kiện, chương trình đào tạo của Việt Nam như:

1. Nguyễn Huy Hoàng – Toán cơ sở cho kinh tế, NXB Thông tin và Truyền thông, 2011& NXB GD, 2014.

Nội dung cuốn giáo trình, được trình này dưới dạng mô hình và phương pháp giải bao gồm 3 chương và một phụ lục Toán cao cấp, cùng một số đề tham khảo để sinh viên, có thể tự rèn luyện. Đối tượng chính của giáo trình là sinh viên hệ đào tạo chất lượng cao, nên ở mỗi chương chúng tôi có giới thiệu thuật ngữ Anh – Việt, giúp sinh viên dễ dàng đọc sách tham khảo bằng tiếng Anh.

Nội dung cụ thể giáo trình :

Chương 1. Một số mô hình đại số tuyến tính như mô hình cân đối liên ngành, mô hình IS – LM, các mô trình cân bằng thị trường…

Chương 2. Sử dụng đạo hàm trong phân tích kinh tế và quản trị kinh doanh như: phân tích hàm cận biên, hệ số co dãn, hệ số tăng trưởng, tối ưu hàm một biến…Trình bày phương pháp sử dụng công cụ tích phân trong kinh tế và quản trị kinh doanh như: tìm hàm tổng khi biết hàm cận biên, hàm quỹ vốn khi biết hàm đầu tư, tính thặng dư của nhà sản xuất và của người tiêu dùng và phương trình vi phân áp dụng phân tích kinh tế như: tìm hàm cầu khi biết hệ số co dãn,…

Chương 3. Trình bày các ứng dụng đạo hàm riêng và vi phân toàn phần trong phân tích kinh tế như phân tích cận biên, hệ số co dãn riêng, một số hình tối ưu hàm nhiều biến trong kinh tế như tối đa hóa lợi nhuận, tối thiểu hóa chi tiêu, …Các mô hình tối ưu có điều kiện ràng buộc: tối đa hóa lợi ích với ràng buộc ngân sách chi tiêu, …

Để thuận lợi trong việc tra cứu các kiến thức cơ bản về Toán cao cấp, phục vụ việc giải thích các kiến thức nền cho phân tích kinh tế và quản trị kinh doanh chúng tôi đưa vào phần phụ lục Toán cao cấp.

Giáo trình do TS. Nguyễn Huy Hoàng và ThS. Nguyễn Trung Đông là các giảng viên có nhiều năm kinh nghiệm giảng dạy toán dành cho sinh viên khối ngành kinh tế và quản trị kinh doanh, cùng biên tập.

Giáo trình chắc chắn còn nhiều thiếu sót, rất mong được sự góp ý của các đồng nghiệp cùng các em sinh viên. Mọi ý kiến đóng góp xin gởi về địa chỉ email:

hoangtoancb@ufm.edu.vn và nguyendong@ufm.edu.vn.

Xin trân trọng cảm ơn!

Các tác giả

MỘT SỐ KÝ HIỆU

1. Q : Sản lượng.
2. D : Cầu.
3. S : Cung.
4. Q_D : Lượng cầu.
5. Q_S : Lượng cung.
6. P : Giá bán.
7. L : Lao động (nhân công).
8. MPL : Hàm sản phẩm cận biên của lao động.
9. K : Vốn (tư bản).
10. π : Lợi nhuận.
11. TR : Tổng doanh thu.
12. MR : Doanh thu biên.
13. TC : Tổng chi phí.
14. FC : Chi phí cố định.
15. VC : Chi phí biến đổi (chi phí khả biến).
16. MC : Chi phí biên.
17. AC : Chi phí trung bình (chi phí bình quân).
18. T : Tổng thuế.
19. t : thuế trên một đơn vị sản phẩm.
20. TU : Tổng hữu dụng.
21. MU : Hữu dụng biên.
22. $\varepsilon_{Y|X}$: Hệ số co giãn của Y theo X.
23. r_Y : Hệ số tăng trưởng của Y (nhịp tăng trưởng của Y).
24. Y_d : Thu nhập khả dụng.
25. I : Nhu cầu đầu tư của dân cư.
26. G : Nhu cầu tiêu dùng của chính phủ.
27. X : Nhu cầu xuất khẩu.
28. M : Nhu cầu nhập khẩu.
29. IS – LM : Đầu tư/Tiết kiệm – Nhu cầu thanh khoản/Cung tiền.

Chương 1

Một số mô hình đại số và tuyến tính áp dụng trong phân tích kinh tế

1.1. Mô hình cân đối liên ngành (*Mô hình Input – Output của Leontief)*

Trong phần này, chúng tôi xin giới thiệu một mô hình kinh tế, công cụ chủ yếu để giải mô hình này là các phép toán đối với ma trận và định thức.

1.1.1. Giới thiệu mô hình

Trong một nền kinh tế hiện đại, việc sản xuất một loại sản phẩm hàng hóa nào đó (output) đòi hỏi phải sử dụng các loại hàng hóa khác nhau để làm nguyên liệu đầu vào (input) của quá trình sản xuất và việc xác định tổng cầu đối với sản phẩm của mỗi ngành sản xuất trong tổng thể nền kinh tế là quan trọng, nó bao gồm:

– Cầu trung gian từ phía các nhà sản xuất sử dụng loại sản phẩm đó cho quá trình sản xuất.

– Cầu cuối cùng từ phía những người sử dụng sản phẩm để tiêu dùng hoặc xuất khẩu, bao gồm các hộ gia đình, Nhà nước, các tổ chức xuất khẩu,...

Xét một nền kinh tế có n ngành sản xuất, ngành $1,2,...,n$. Để thuận tiện cho việc tính chi phí cho các yếu tố sản xuất, ta phải biểu diễn lượng cầu của tất cả các loại hàng hóa ở dạng giá trị, tức là đo bằng tiền. Tổng cầu về sản phẩm hàng hóa của ngành i $(i = 1, 2,..., n)$ được ký hiệu, x_i và xác định bởi:

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{in} + b_i \ (i = 1,2,...,n) \qquad (1.1)$$

Trong đó:

x_{ik} : là giá trị sản phẩm của ngành i mà ngành k cần sử dụng cho quá trình sản xuất của mình (giá trị cầu trung gian).

b_i : là giá trị sản phẩm của ngành i dành cho nhu cầu tiêu dùng và xuất khẩu (giá trị cầu cuối cùng).

Tuy nhiên, trong thực tế, ta thường không có thông tin về giá trị cầu trung gian x_{ik}, nhưng người ta lại chủ động trong việc xác định tỉ phần chi phí đầu vào của sản xuất.

Gọi

a_{ik} : là tỉ phần chi phí đầu vào của ngành k đối với sản phẩm của ngành i, nó được tính bởi công thức:

$$a_{ik} = \frac{x_{ik}}{x_k} \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

Trong đó

+) $0 \le a_{ik} \le 1$, và ở đây, giả thiết a_{ik} là cố định đối với mỗi ngành sản xuất i, $(k = 1, 2, ..., n)$. Người ta còn gọi a_{ik} là hệ số chi phí đầu vào và ma trận.

+) $A = (a_{ik})_n$ được gọi là ma trận hệ số chi phí đầu vào (ma trận hệ số kỹ thuật).

+) Giả sử $a_{ik} = 0{,}3$ có nghĩa là để sản xuất ra 1 đồng giá trị sản phẩm của mình, ngành k đã phải chi 0,3 đồng để mua sản phẩm của ngành i phục vụ cho quá trình sản xuất.

Đặt

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Ta gọi X là ma trận tổng cầu và B là ma trận cầu cuối cùng. Khi đó, từ đẳng thức (1.1), thay $x_{ik} = a_{ik} \cdot x_k$ chúng ta có:

$$x_i = a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \cdots + a_{in} \cdot x_n + b_i \ (i = 1, 2, ..., n)$$

Hay biểu diễn dưới dạng ma trận:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Tức là

$$X = AX + B \tag{1.2}$$

1.1.2. Phương pháp giải

Từ (1.2), ta có $(I - A)X = B$

Trong đó, I là ma trận đơn vị cấp n, nếu $(I - A)$ không suy biến thì:

$$X = (I - A)^{-1} B \tag{1.3}$$

Công thức (1.3) được gọi là công thức tính ma trận tổng cầu.

+) Ma trận $(I - A)$ được gọi là ma trận Leontief. Như vậy, nếu chúng ta biết ma trận hệ số kỹ thuật A và ma trận cầu cuối cùng thì sẽ xác định được giá trị tổng cầu của các ngành sản xuất.

+) Ma trận $C = (I - A)^{-1} = (c_{ij})_{n \times n}$, và gọi là ma trận hệ số chi phí toàn bộ. Hệ số c_{ij} cho biết: để sản xuất một đơn vị giá trị nhu cầu cuối cùng của ngành j, thì ngành i cần phải sản xuất một lượng sản phẩm có giá trị là c_{ij}.

1.1.3. Các ví dụ

Ví dụ 1. Giả sử trong một nền kinh tế có hai ngành sản xuất: ngành 1 và ngành 2 có ma trận hệ số kỹ thuật là:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Cho biết giá trị cầu cuối cùng đối với sản phẩm của ngành 1 và ngành 2 thứ tự là 10, 20 tỉ đồng. Hãy xác định giá trị tổng cầu đối với mỗi ngành.

Giải

Gọi

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ là ma trận tổng cầu.}$$

Với x_1 là giá trị tổng cầu của ngành 1, x_2 là giá trị tổng cầu của ngành 2.

Theo giả thiết ma trận cầu cuối B có dạng:

$$B = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Ta có:

$$I - A = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,3 \\ -0,4 & 0,9 \end{pmatrix}$$

Ma trận phụ hợp tương ứng

$$(I - A)^* = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,3 \\ 0,4 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Ma trận nghịch đảo của $I - A$

$$(I - A)^{-1} = \frac{1}{0,6}\begin{pmatrix} 0,9 & 0,3 \\ 0,4 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Áp dụng công thức (1.3) để tính ma trận tổng cầu:

$$X = (I - A)^{-1} B$$

Vậy ma trận tổng cầu là:

$$X = \frac{1}{0,6}\begin{pmatrix} 0,9 & 0,3 \\ 0,4 & 0,8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \frac{1}{0,6}\begin{pmatrix} 15 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ \frac{100}{3} \end{pmatrix}$$

Hay:

Giá trị tổng cầu của ngành 1 là $x_1 = 25$ tỉ đồng.

Giá trị tổng cầu của ngành 2 là $x_2 = \frac{100}{3}$ tỉ đồng.

Ví dụ 2. Giả sử trong một nền kinh tế có 3 ngành sản xuất: ngành 1, ngành 2 và ngành 3. Biết ma trận hệ số kĩ thuật là:

$$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}$$

và giá trị cầu cuối cùng đối với sản phẩm của từng ngành thứ tự là 40, 40 và 110 (đơn vị tính: nghìn tỉ đồng). Hãy xác định giá trị tổng cầu của từng ngành sản xuất.

Giải

Gọi

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$ là ma trận tổng cầu.

Với x_1 là giá trị tổng cầu của ngành 1, x_2 là giá trị tổng cầu của ngành 2, x_3 là giá trị tổng cầu của ngành 3.

Theo giả thiết ma trận cầu cuối B có dạng:

$$B = \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 110 \end{pmatrix}$$

Ta có:

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,1 & -0,2 \\ -0,2 & 0,7 & -0,2 \\ -0,1 & -0,4 & 0,7 \end{pmatrix}$$

Định thức của ma trận $I - A$

$$|I - A| = \begin{vmatrix} 0,6 & -0,1 & -0,2 \\ -0,2 & 0,7 & -0,2 \\ -0,1 & -0,4 & 0,7 \end{vmatrix} = 0,2$$

Ma trận phụ hợp tương ứng

$$(I - A)^* = \begin{pmatrix} 0,41 & 0,15 & 0,16 \\ 0,16 & 0,40 & 0,16 \\ 0,15 & 0,25 & 0,40 \end{pmatrix}$$

Ma trận nghịch đảo của $I - A$

$$(I - A)^{-1} = \frac{1}{0,2}\begin{pmatrix} 0,41 & 0,15 & 0,16 \\ 0,16 & 0,40 & 0,16 \\ 0,15 & 0,25 & 0,40 \end{pmatrix}$$

Áp dụng công thức (1.3) để tính ma trận tổng cầu:

$$X = (I - A)^{-1} B$$

$$\Leftrightarrow X = \frac{1}{0,2}\begin{pmatrix} 0,41 & 0,15 & 0,16 \\ 0,16 & 0,40 & 0,16 \\ 0,15 & 0,25 & 0,40 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Vậy giá trị tổng cầu của các ngành 1, 2, 3 lần lượt là $x_1 = 200$ (nghìn tỉ đồng), $x_2 = 200$ (nghìn tỉ đồng) và $x_3 = 300$ (nghìn tỉ đồng).

Ví dụ 3. Trong mô hình input – output mở biết ma trận kỹ thuật số như sau

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & m & 0,3 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$$

a) Nêu ý nghĩa phần tử nằm ở hàng 2 cột 1 của ma trận A.

b) Tìm yêu cầu của ngành kinh tế mở khi $m = 0,2$ biết sản lượng của 3 ngành là 300, 250, 220.

c) Tìm m biết rằng khi sản lượng của 3 ngành là 400, 400, 300 thì ngành kinh tế thứ nhất cung cấp cho ngành kinh tế mở là 130.

d) Với m tìm được ở câu c). Tìm ma trận hệ số chi phí toàn bộ và nêu ý nghĩa phần tử nằm ở hàng 3 cột 2 của ma trận này.

Giải

a) Ý nghĩa $a_{21} = 0,3$: Hệ số này cho biết để sản xuất ra một đơn vị giá trị ngành 1 thì ngành 2 phải cung cấp trực tiếp cho ngành này một lượng sản phẩm có giá trị là 0,3.

b) Gọi X là ma trận giá trị sản lượng của 3 ngành.

Từ giả thiết đề cho, ta có $X = \begin{pmatrix} 300 \\ 250 \\ 220 \end{pmatrix}$

Giá trị sản lượng cầu cuối: $B = (I - A)X = \begin{pmatrix} 124 \\ 91 \\ 41 \end{pmatrix}$

c) Gọi Y là ma trận giá trị sản lượng của 3 ngành

$$Y = \begin{pmatrix} 400 \\ 400 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

Từ giả thiết đề bài, ta có:

$$X_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + b_1$$

$$\Leftrightarrow 400 = 0,2 \cdot 400 + 400m + 0,3 \cdot 300 + 130 \Leftrightarrow m = 0,25.$$

d) Với $m = 0,25$. Ta có

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,25 & 0,3 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Ma trận hệ số chi phí toàn bộ:

$$C = (I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,751 & 0,769 & 0,849 \\ 0,743 & 1,538 & 0,663 \\ 0,716 & 0,769 & 1,711 \end{pmatrix}$$

Hệ số $c_{32} = 0,769$ cho biết: để sản xuất một đơn vị giá trị nhu cầu cuối cùng của ngành 2 thì ngành 3 cần phải sản xuất một lượng sản phẩm có giá trị là $0,769$.

1.1.4. Bài tập

Bài số 1. Trong mô hình cân đối liên ngành cho ma trận hệ số kỹ thuật và ma trận cầu cuối. Hãy xác định ma trận tổng cầu:

1) $A=\begin{pmatrix}0,2 & 0,4\\ 0,1 & 0,3\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}200\\ 300\end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix}0,4 & 0,2 & 0,1\\ 0,1 & 0,3 & 0,4\\ 0,2 & 0,2 & 0,3\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}40\\ 110\\ 40\end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix}0,3 & 0,5 & 0,3\\ 0,2 & 0,2 & 0,3\\ 0,4 & 0,2 & 0,3\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}20000\\ 10000\\ 40000\end{pmatrix}$

Đáp số: 1) $X=\begin{pmatrix}500\\ 500\end{pmatrix}$*; 2)* $X=\begin{pmatrix}200\\ 300\\ 200\end{pmatrix}$*; 3)* $X=\begin{pmatrix}265178,6\\ 175892,9\\ 258928,6\end{pmatrix}$.

Bài số 2. Cho dòng 3 trong ma trận hệ số kỹ thuật của mô hình cân đối liên ngành gồm bốn ngành sản xuất là

$$\begin{pmatrix}0,2 & 0,1 & 0,2 & 0,3\end{pmatrix}$$

Hãy xác định số tiền mà ngành 4 phải trả cho ngành 3 để mua sản phẩm của ngành 3 làm nguyên liệu đầu vào của sản xuất, biết tổng giá trị sản phẩm của ngành 4 là 200 nghìn tỷ đồng.

Đáp số: 60.

Bài số 3. Xét mô hình Input – Output mở gồm 3 ngành với ma trận hệ số kỹ thuật là

$$A=\begin{pmatrix}0,1 & 0,3 & 0,2\\ 0,4 & 0,2 & 0,1\\ 0,2 & 0,3 & 0,3\end{pmatrix}$$

1) Nếu ý nghĩa kinh tế của phần tử nằm ở hàng 2 cột 1 của ma trận A.
2) Cho ma trận cầu cuối $B=\begin{pmatrix}110 & 52 & 90\end{pmatrix}^T$. Tìm sản lượng của mỗi ngành.
3) Tìm sản lượng của mỗi ngành. Biết rằng do cải tiến kỹ thuật ở ngành 1 tiết kiệm được 25% nguyên liệu lấy từ ngành 2 và ma trận cầu cuối là $B=\begin{pmatrix}124 & 66 & 100\end{pmatrix}^T$

Đáp số: 1) $a_{21}=0,4$; 2) $X=\begin{pmatrix}270\\239\\308\end{pmatrix}$; 3) $X=\begin{pmatrix}286\\230\\323\end{pmatrix}$.

Bài số 4. Cho ma trận các hệ số chi phí trực tiếp dạng giá trị của năm t là:

$$A=\begin{pmatrix}0,2 & 0 & 0,3\\ 0,1 & 0,1 & 0,1\\ 0,2 & 0,2 & 0,1\end{pmatrix}$$

1) Nếu ý nghĩa phần tử nằm ở dòng 1, cột 3 của ma trận A.
2) Tìm ma trận hệ số chi phí toàn bộ.
3) Cho biết ma trận cầu cuối của các ngành là $B=\begin{pmatrix}800 & 1500 & 700\end{pmatrix}^T$. Tìm sản lượng của mỗi ngành.

Đáp số: 1) $a_{13}=0,3$*; 2)* $C=\dfrac{1}{0,572}\begin{pmatrix}0,79 & 0,06 & 0,27\\ 0,11 & 0,66 & 0,11\\ 0,2 & 0,16 & 0,72\end{pmatrix}$*; 3)* $X=\begin{pmatrix}1592,7\\2019,2\\1580,4\end{pmatrix}$.

Bài số 5. Cho ma trận hệ số chi phí toàn bộ và ma trận tổng cầu như sau:

$$C=\begin{pmatrix}1,5625 & 0,3125 & 0,3125\\ 0,3977 & 1,5341 & 0,625\\ 0,5398 & 0,6534 & 1,5625\end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix}150\\200\\150\end{pmatrix}$$

1) Nêu ý nghĩa phần tử nằm ở hàng 2 cột 3 của ma trận C.
2) Tìm ma trận hệ số kỹ thuật.
3) Tìm ma trận cầu cuối.

Đáp số: $c_{23}=0,625$*; 2)* $A=\begin{pmatrix}0,3 & 0,1 & 0,2\\ 0,1 & 0,2 & 0,3\\ 0,1 & 0,3 & 0,2\end{pmatrix}$*; 3)* $B=\begin{pmatrix}55\\100\\45\end{pmatrix}$.

Bài số 6. Trong mô hình input – output mở gồm 3 ngành với ma trận hệ số kỹ thuật là

$$A=\begin{pmatrix}0,3 & 0,1 & 0,1\\ 0,1 & 0,2 & 0,3\\ 0,2 & 0,3 & 0,2\end{pmatrix}$$

1) Nếu ý nghĩa kinh tế của phần tử nằm ở hàng 2 cột 3 của ma trận A.
2) Cho ma trận cầu cuối $B=\begin{pmatrix}70 & 100 & 30\end{pmatrix}^T$. Tìm sản lượng mỗi ngành.

3) Tìm sản lượng của mỗi ngành. Biết rằng do cải tiến kỹ thuật ở ngành 2 tiết kiệm được 50% nguyên liệu lấy từ ngành 3 và ma trận cầu cuối là $B = \begin{pmatrix} 50 & 80 & 20 \end{pmatrix}^T$

Đáp số: 1) $a_{23} = 0,3$*; 2)* $X = \begin{pmatrix} 150 \\ 200 \\ 150 \end{pmatrix}$*; 3)* $X = \begin{pmatrix} 102,7 \\ 141,8 \\ 77,3 \end{pmatrix}$.

Bài số 7. Trong mô hình input – output mở gồm 3 ngành với ma trận hệ số kỹ thuật là

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$$

1) Nếu ý nghĩa kinh tế của phần tử nằm ở hàng 3 cột 2 của ma trận A.
2) Cho ma trận cầu cuối $B = \begin{pmatrix} 118 & 52 & 96 \end{pmatrix}^T$. Tìm sản lượng của mỗi ngành.
3) Tìm sản lượng của mỗi ngành. Biết rằng do cải tiến kỹ thuật ở ngành 1 tiết kiệm được 25% nguyên liệu lấy từ ngành 2 và ma trận cầu cuối là $B = \begin{pmatrix} 118 & 52 & 96 \end{pmatrix}^T$

Đáp số: 1) $a_{32} = 0,3$*; 2)* $X = \begin{pmatrix} 300 \\ 320 \\ 280 \end{pmatrix}$*; 3)* $X = \begin{pmatrix} 276,3 \\ 264,7 \\ 256,3 \end{pmatrix}$.

Bài số 8. Cho ma trận các hệ số chi phí trực tiếp dạng giá trị của năm t như sau:

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$$

1) Tìm ma trận hệ số chi phí toàn bộ dạng giá trị năm t. Giải thích ý nghĩa kinh tế của phần tử ở dòng 2 cột 3 của ma trận này.
2) Tìm ma trận hệ số chi phí toàn bộ và nêu ý nghĩa phần tử nằm ở hàng 2 cột 3 của ma trận này.
3) Năm $(t+1)$ nhu cầu sản phẩm cuối cùng của các ngành lần lượt là 180, 150, 100 (tỷ VNĐ). Tính giá trị sản lượng của các ngành, biết rằng các hệ số chi phí năm $(t+1)$ và năm t như nhau.

Đáp số: 1) $a_{23} = 0,2$*;2)* $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0,56 & 1,88 & 0,68 \\ 0,96 & 1,08 & 1,88 \end{pmatrix}$, $c_{23} = 0,68$*; 3)* $X = \begin{pmatrix} 610 \\ 450,8 \\ 522,8 \end{pmatrix}$.

Bài số 9. Quan hệ trao đổi sản phẩm giữa 4 ngành sản xuất và cầu hàng hóa được cho ở bảng sau (đơn vị tính : triệu USD).

Ngành cung ứng sản phẩm (Output)	Ngành ứng dụng sản phẩm (Input)				Cầu cuối cùng
	1	2	3	4	
1	80	20	110	230	160
2	200	50	90	120	140
3	220	110	30	40	0
4	60	140	160	240	400

Hãy tính tổng cầu đối với sản phẩm của mỗi ngành và lập ma trận hệ số kỹ thuật (tính xấp xỉ 3 chữ số thập phân).

Đáp số: $X = \begin{pmatrix} 600 \\ 600 \\ 400 \\ 1000 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 0,133 & 0,033 & 0,275 & 0,23 \\ 0,333 & 0,083 & 0,225 & 0,12 \\ 0,367 & 0,167 & 0,075 & 0,04 \\ 0,1 & 0,233 & 0,4 & 0,24 \end{pmatrix}$.

Bài số 10. Xét nền kinh tế có hai ngành với ma trận hệ số chi phí trực tiếp là

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,15 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$$

1) Tính định thức của ma trận B với $B = \frac{1}{6}A^3$.
2) Cho biết mệnh đề sau đúng hay sai?
$$\left|A(I-A)^{-1} + I\right| > \left|(I-A)^{-1}\right|$$
3) Tìm ma trận hệ số chi phí toàn bộ.
4) Tìm sản lượng của mỗi ngành. Biết rằng do cải tiến kỹ thuật ở ngành 1 tiết kiệm được 25% nguyên liệu lấy từ ngành 2 và ma trận cầu cuối là $b = (20 \quad 40)^T$.

Đáp số: 1) $|B| = -\frac{1}{45}\cdot 10^{-5}$ *; 2) Sai; 3)* $C = \begin{pmatrix} 1,1538 & 0,1923 \\ 0,2564 & 1,1538 \end{pmatrix}$*; 4)* $X = \begin{pmatrix} 30,5 \\ 49,5 \end{pmatrix}$.

1.2. Một số mô hình tuyến tính trong phân tích kinh tế

Trong phần này, chúng tôi xin giới thiệu với bạn đọc một số mô hình tuyến tính trong phân tích kinh tế, công cụ toán học được sử dụng chính ở đây là hệ phương trình tuyến tính.

1.2.1. Mô hình cân bằng thị trường n hàng hóa có liên quan

1.2.1.1. Giới thiệu mô hình

Giả sử chúng ta nghiên cứu thị trường bao gồm n hàng hóa có liên quan: hàng hóa 1, 2,..., n. Khái niệm này được hiểu là khi giá của một mặt hàng nào đó thay đổi thì nó không những ảnh hưởng tới lượng cung $\left(Q_{S_i}\right)$ và lượng cầu $\left(Q_{D_i}\right)$ của bản thân mặt hàng đó, mà nó còn ảnh hưởng tới giá và lượng cung, lượng cầu của các mặt hàng còn lại. Người ta thường biểu diễn sự phụ thuộc của lượng cung và lượng cầu vào giá của các hàng hóa bởi hàm cung và hàm cầu như sau:

$$Q_{S_i} = S_i\left(P_1, P_2, ..., P_n\right),\ i = 1, 2, ..., n;$$
$$Q_{D_i} = D_i\left(P_1, P_2, ..., P_n\right),\ i = 1, 2, ..., n.$$

Trong đó $P_1, P_2, ..., P_n$ là ký hiệu thứ tự là giá của hàng hóa 1, 2,..., n.

Mô hình cân bằng thị trường n hàng hóa có liên quan (cân bằng cung cầu) được xác định bởi:

$$Q_{S_i} = Q_{D_i},\quad i = 1, 2, ..., n \tag{1.4}$$

Nếu giả thiết các Q_{S_i} và Q_{D_i} $\left(i = 1, 2, ..., n\right)$ có dạng tuyến tính, thì mô hình trên chính là một hệ gồm có n phương trình và n ẩn $P_1, P_2, ..., P_n$.

Giải hệ phương trình chúng ta tìm được bộ giá cân bằng thị trường:

$$\overline{P} = \left(\overline{P}_1, \overline{P}_2, ..., \overline{P}_n\right)$$

Thay vào Q_{S_i} (hoặc Q_{D_i}) chúng ta thu được bộ lượng cân bằng thị trường:

$$\overline{Q} = \left(\overline{Q}_1, \overline{Q}_2, ..., \overline{Q}_n\right)$$

1.2.1.2. Các ví dụ

Ví dụ 3. Cho biết hàm cung, hàm cầu của thị trường hai loại hàng hóa như sau:

$$Q_{S_1} = -2 + 3P_1;\ Q_{D_1} = 8 - 2P_1 + P_2$$

$$Q_{S_2} = -1 + 2P_2;\ Q_{D_2} = 11 + P_1 - P_2$$

Với

Q_{S_1}, Q_{S_2} là lượng cung hàng hóa 1 và 2.

Q_{D_1}, Q_{D_2} là lượng cầu hàng hóa 1 và 2.

P_1, P_2 là giá của hàng hóa 1 và 2.

Khi thị trường cân bằng hãy thiết lập hệ phương trình tuyến tính với ẩn số là P_1 và P_2.

Sử dụng quy tắc Cramer (phương pháp định thức) xác định giá và lượng cân bằng của hai mặt hàng.

Giải

Áp dụng công thức (1.4), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} Q_{S_1} = Q_{D_1} \\ Q_{S_2} = Q_{D_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2+3P_1 = 8-2P_1+P_2 \\ -1+2P_2 = 11+P_1-P_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5P_1 - P_2 = 10 \\ -P_1+3P_2 = 12 \end{cases}$$

Giải hệ bằng quy tắc Cramer:

$$D = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 14;\ D_{P_1} = \begin{vmatrix} 10 & -1 \\ 12 & 3 \end{vmatrix} = 42;\ D_{P_2} = \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ -1 & 12 \end{vmatrix} = 70$$

Vậy bộ giá cân bằng là: $\left(\overline{P}_1 = \dfrac{D_{P_1}}{D} = \dfrac{42}{14} = 3;\ \overline{P}_2 = \dfrac{D_{P_2}}{D} = \dfrac{70}{14} = 5\right)$

Lượng cân bằng là:

$$\overline{Q}_1 = \overline{Q}_{D_1} = \overline{Q}_{S_1} = -2+3\overline{P}_1 = -2+3.3 = 7$$

$$\overline{Q}_2 = \overline{Q}_{D_2} = \overline{Q}_{S_2} = -1+2\overline{P}_2 = -1+2.5 = 9$$

Ví dụ 4. Giả sử thị trường gồm hai loại hàng hóa: hàng hóa 1 và hàng hóa 2 có hàm cung và cầu như sau:

$$Q_{S_1} = -2+2P_1;\ Q_{D_1} = 1-P_1+P_2$$

$$Q_{S_2} = -5+3P_1;\ Q_{D_2} = 2+5P_1-P_2$$

trong đó:

Q_{S_i} $(i=1, 2)$: là lượng cung hàng hóa i.

Q_{D_i} $(i=1, 2)$: là lượng cầu hàng hóa i.

P_i $(i=1, 2)$: là giá hàng hóa i.

Bằng phương pháp ma trận nghịch đảo, hãy xác định bộ giá và lượng cân bằng thị trường của hai hàng hóa nói trên.

Giải

Áp dụng công thức (1.4), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} Q_{S_1} = Q_{D_1} \\ Q_{S_2} = Q_{D_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 + 2P_1 = 1 - P_1 + P_2 \\ -5 + 3P_2 = 2 + 5P_1 - P_2 \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} 3P_1 & - & P_2 & = & 3 \\ -5P & + & 4P_2 & = & 7 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên bằng quy tắc Cramer

Đặt các ma trận sau:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix};\quad X = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$$

Ta có

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 7\ ;\quad A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Hệ phương trình trên tương đương: $AX = B$

Suy ra

$$X = A^{-1}.B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 19 \\ 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{7} \\ \frac{36}{7} \end{pmatrix}$$

Vậy bộ giá cân bằng là:

$$\left(\overline{P}_1 = \frac{19}{7};\ \overline{P}_2 = \frac{36}{7}\right)$$

tương ứng với bộ lượng cân bằng là:

$$\overline{Q}_1 = \overline{Q}_{D_1} = \overline{Q}_{S_1} = -2 + 2\frac{19}{7} = \frac{24}{7}$$

$$\overline{Q}_2 = \overline{Q}_{D_2} = \overline{Q}_{S_2} = -5 + 3\frac{36}{7} = \frac{73}{7}$$

Ví dụ 5. Xét thị trường gồm ba loại hàng hóa gồm chè, cafe, cacao có hàm cung và hàm cầu tương ứng như sau:

$$Q_{S_1} = -10 + P_1;\ Q_{D_1} = 20 - P_1 - P_3 \qquad \text{(chè)}$$

$$Q_{S_2} = 2P_2;\ Q_{D_2} = 40 - 2P_2 - P_3 \qquad \text{(café)}$$

$$Q_{S_3} = -5 + 3P_3;\ Q_{D_3} = 10 - P_1 + P_2 - P_3 \qquad \text{(ca cao)}$$

Hãy thiết lập mô hình cân bằng thị trường của ba loại hàng hóa trên. Sử dụng quy tắc Cramer xác định giá và lượng cafe ở trạng thái cân bằng thị trường.

Giải

Áp dụng công thức (1.4), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} Q_{S_1} = Q_{D_1} \\ Q_{S_2} = Q_{D_2} \\ Q_{S_3} = Q_{D_3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2P_1 \quad\quad + \ P_3 = 30 \\ \quad\quad 4P_2 + \ P_3 = 40 \\ P_1 - P_2 + 4P_3 = 15 \end{cases}$$

Xác định giá và lượng cafe ở trạng thái cân bằng thị trường bằng quy tắc Cramer:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 30;\ D_{P_2} = \begin{vmatrix} 2 & 30 & 1 \\ 0 & 40 & 1 \\ 1 & 15 & 4 \end{vmatrix} = 280$$

Vậy giá cafe ở trạng thái cân bằng thị trường là:

$$\overline{P}_2 = \frac{D_{P_2}}{D} = \frac{280}{30} = \frac{28}{3}$$

và lượng cân bằng là:

$$\overline{Q}_2 = \overline{Q}_{S_2} = 2.\frac{28}{3} = \frac{56}{3}.$$

1.2.2. Mô hình cân bằng thu nhập quốc dân

1.2.2.1. Giới thiệu mô hình

Xét mô hình cân bằng thu nhập quốc dân ở dạng đơn giản, với các ký hiệu: Y là tổng thu nhập quốc dân, G là chi tiêu chính phủ, I là đầu tư hộ gia đình và C là tiêu dùng của các hộ gia đình.

Chúng ta giả thiết rằng chi tiêu Chính phủ và đầu tư là cố định $G = G_0$ và $I = I_0$, còn chi tiêu hộ gia đình có dạng tuyến tính:

$$C = aY + b \ \ (0 < a < 1,\ b > 0).$$

Mô hình cân bằng thu nhập quốc dân có dạng hệ phương trình tuyến tính gồm hai phương trình, 2 ẩn Y và C:

$$\begin{cases} Y = G_O + I_O + C \\ C = aY + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y - C = G_O + I_O \\ -aY + C = b \end{cases}$$

Giải hệ bằng quy tắc Cramer, chúng ta xác định được mức thu nhập cân bằng và mức tiêu dùng cân bằng của nền kinh tế.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a \neq 0 \text{ (do } 0 < a < 1)$$

$$D_Y = \begin{vmatrix} G_O + I_O & -1 \\ b & 1 \end{vmatrix} = G_O + I_O + b\,;$$

$$D_C = \begin{vmatrix} 1 & G_O + I_O \\ -a & b \end{vmatrix} = b + a(G_O + I_O)$$

Vậy

$$\overline{Y} = \frac{D_Y}{D} = \frac{G_O + I_O + b}{1 - a}$$

$$\overline{C} = \frac{D_C}{D} = \frac{b + a(G_O + I_O)}{1 - a}$$

Tiếp theo, xét mô hình trong trường hợp thu nhập chịu thuế với thuế suất t% (thường biểu diễn dưới dạng thập phân). Khi đó, thu nhập sau thuế là:

$$Y_d = Y - tY = (1 - t)Y$$

và hàm chi tiêu khi đó có dạng:

$$C = aY_d + b = a(1 - t)Y + b$$

Ngoài ra, chúng ta cũng xem xét mô hình với ảnh hưởng của yếu tố xuất khẩu X và nhập khẩu M. Khi đó, mô hình có dạng:

$$\begin{cases} Y = G_O + I_O + C + X - M \\ C = a(1 - t).Y + b \end{cases}$$

Chú ý

Hai yếu tố xuất khẩu (X) và nhập khẩu (M) có thể cho dưới dạng hàm của thu nhập Y hoặc là giá trị cố định cho trước.

Chúng ta vẫn biến đổi đưa mô hình về hệ gồm 2 phương trình, 2 ẩn Y và C.

1.2.2.2. Các ví dụ

Ví dụ 6. Cho mô hình sau:

$$C = 0{,}8Y_d + 250;$$

$$I = I_0;\ G = G_0;$$

$Y_d = (1-t)Y$ (t là thuế suất thu nhập).

a) Sử dụng quy tắc Cramer, hãy xác định mức thu nhập quốc dân và chi tiêu ở trạng thái cân bằng.

b) Tính mức thu nhập quốc dân và chi tiêu ở trạng thái cân bằng với $I_0 = 150$, $G_0 = 500$ (đơn vị: tỉ VNĐ) và $t = 0{,}15$ (15%).

Giải

Đầu tiên ta xác định mô hình cân bằng:

$$\begin{cases} Y = G_O + I_O + C \\ C = 0{,}8Y + 250 \end{cases}$$

Hay

$$\begin{cases} Y & - & C & = & G_O + I_O \\ -0{,}8(1-t)Y & + & C & = & 250 \end{cases}$$

Ta có

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -0{,}8(1-t) & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0{,}8(1-t);$$

$$D_Y = \begin{vmatrix} G_O + I_O & -1 \\ 250 & 1 \end{vmatrix} = G_O + I_O + 250;$$

$$D_C = \begin{vmatrix} 1 & G_O + I_O \\ -0{,}8(1-t) & 250 \end{vmatrix} = 250 + 0{,}8(1-t)(G_O + I_O).$$

a) Vậy thu nhập quốc dân và chi tiêu cân bằng là:

$$\overline{Y} = \frac{D_Y}{D} = \frac{G_O + I_O + 250}{1 - 0{,}8(1-t)}$$

$$\overline{C} = \frac{D_C}{D} = \frac{0{,}8(1-t)(G_O + I_O) + 250}{1 - 0{,}8(1-t)}$$

Nhận xét: $\overline{Y}$ và $\overline{C}$ phụ thuộc vào I_0, G_0 và t.

b) Với $I_0 = 150$, $G_0 = 500$, $t = 0{,}15$ chúng ta có:

$$\overline{Y} = \frac{150+500+250}{1-0,8(1-0,15)} = \frac{900}{0,32} = 2812,5 \text{ (tỉ VNĐ)}$$

$$\overline{C} = \frac{0,8(1-0,15)(150+500)+250}{1-0,8(1-0,15)} = \frac{692}{0,32} = 2162,5 \text{ (tỉ VNĐ).}$$

Ví dụ 7. Xét mô hình cân bằng:

$$Y = C + I_0 + G_0 + X_0 - M$$

Với $C = a(1-t)Y,\ (0 < a < 1)$, t là thuế suất

$$M = b(1-t)Y,\ (0 < b < 1)$$

a) Hãy xác định mức thu nhập và chi tiêu quốc dân ở trạng thái cân bằng $\overline{Y}$, $\overline{C}$ bằng quy tắc Cramer.

b) Tính $\overline{Y}$ và $\overline{C}$ khi $t = 0,1;\ a = 0,85;\ b = 0,1;\ I_0 = 250;\ G_0 = 400$ và $X_0 = 100$. Đơn vị tính I_0, G_0, X_0 là tỉ VNĐ; t là %.

Giải

a) Ta thiết lập hệ 2 phương trình 2 ẩn Y và C :

Ta có

$$\begin{cases} Y = C + I_O + G_O + X_O - b(1-t)Y \\ C = a(1-t)Y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[1 + b(1-t)\right]Y - C = I_O + G_O + X_O \\ -a(1-t)Y + C = 0 \end{cases}$$

Các định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 + b(1-t) & -1 \\ -a(1-t) & 1 \end{vmatrix} = 1 + (1-t)(b-a);$$

$$D_Y = \begin{vmatrix} I_O + G_O + X_O & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = I_O + G_O + X_O;$$

$$D_C = \begin{vmatrix} 1 + b(1-t) & I_O + G_O + X_O \\ -a(1-t) & 0 \end{vmatrix} = a(1-t)(G_O + I_O + X_O).$$

Vậy thu nhập và chi tiêu quốc dân cân bằng là:

$$\overline{Y} = \frac{D_Y}{D} = \frac{G_O + I_O + X_O}{1 + (1-t)(b-a)}$$

$$\overline{C} = \frac{D_C}{D} = \frac{a(1-t)(G_o + I_o + X_o)}{1+(1-t)(b-a)}$$

b) Khi $t = 0,1;\ a = 0,85;\ b = 0,1;\ I_0 = 250;\ G_0 = 400$ và $X_0 = 100$.

Ta có:

$$\overline{Y} = \frac{250+400+100}{1+(1-0,1)(0,1-0,85)} = \frac{750}{0,325} \approx 2307,6923 (\text{tỉ VNĐ})$$

$$\overline{C} = \frac{0,85(1-0,1)(250+400+100)}{1+(1-0,1)(0,1-0,85)} = \frac{573,75}{0,325} \approx 1765,3846 (\text{tỉ VNĐ}).$$

1.2.3. Mô hình IS – LM

Trong tiếng Anh, IS – LM là viết tắt của Investment/Saving – Liquidity preference/Money supply (Đầu tư/Tiết kiệm – Nhu cầu thanh khoản/Cung tiền)

1.2.3.1. Giới thiệu mô hình

Mô hình IS – LM phân tích trạng thái cân bằng của nền kinh tế, chúng ta xét cả hai thị trường hàng hóa và tiền tệ. Mục tiêu là chúng ta xác định mức thu nhập quốc dân và lãi suất ở trạng thái cân bằng.

+) Xét thị trường hàng hóa dịch vụ với các yếu tố gồm

- Chi tiêu chính phủ : $G = G_0$
- Chi tiêu hộ gia đình : $C = aY + b, (0 < a < 1, b > 0)$
- Đầu tư : $I = d - cr, (c, d > 0)$ với r là lãi suất.
- Phương trình cân bằng thị trường hàng hóa, dịch vụ (Phương trình đường IS)

$$Y = C + I + G_0 = aY + b - cr + d + G_0$$

$$\Leftrightarrow (1-a)Y + cr = b + d + G_0$$

+) Xét thị trường tiền tệ với các yếu tố

- Lượng cầu tiền: $L = L(Y,r) = mY - nr,\ (m, n > 0)$
- Lượng cung tiền: $M = M_0$
- Phương trình cân bằng thị trường tiền tệ (Phương trình đường LM)

$$L = M \Leftrightarrow mY - nr = M_0$$

Để xác định mức thu nhập quốc dân và lãi suất cân bằng $\overline{Y}$ và $\overline{r}$ chúng ta thiết lập hệ gồm 2 phương trình, 2 ẩn Y và r (mô hình IS – LM)

$$\begin{cases} IS \\ LM \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-a)Y & - & cr & = & b+d+G_0 \\ mY & - & nr & = & M_0 \end{cases}$$

Giải hệ bằng quy tắc Cramer, chúng ta có:

$$D = \begin{vmatrix} 1-a & c \\ m & -n \end{vmatrix} = -n(1-a) - mc;$$

$$D_Y = \begin{vmatrix} b+d+G_O & c \\ M_O & -n \end{vmatrix} = -n(b+d+G_O) - cM_O;$$

$$D_r = \begin{vmatrix} 1-a & b+d+G_O \\ m & M_O \end{vmatrix} = (1-a)M_O - m(b+d+G_O).$$

Vậy mức thu nhập quốc dân và lãi suất cân bằng là:

$$\overline{Y} = \frac{D_Y}{D} = \frac{n(b+d+G_O) + cM_O}{n(1-a) + mc}$$

$$\overline{r} = \frac{D_r}{D} = \frac{-(1-a)M_O + m(b+d+G_O)}{n(1-a) + mc}.$$

1.2.3.2 Các ví dụ

Ví dụ 8. Xét mô hình IS – LM với:

$C = 0,6Y + 35;$

$I = 65 - r;$

$G = G_0;$

$L = 5Y - 50r;$

$M = M_0.$

a) Sử dụng quy tắc Cramer xác định mức thu nhập quốc dân và lãi suất cân bằng.

b) Tính $\overline{Y}$, $\overline{r}$ khi $G_0 = 70; M_0 = 1500$ (nghìn tỉ VNĐ).

Giải

a) Phương trình đường IS:

$$Y = C + I + G_0 = 0,6Y + 35 + 65 - r + G_0$$

$$\Leftrightarrow 0,4Y + r = 100 + G_0$$

Phương trình đường LM: $L = M_0 \Leftrightarrow 5Y - 50r = M_0$

Chúng ta xác định thu nhập quốc dân và lãi suất cân bằng từ hệ 2 phương trình, 2 ẩn Y và r.

$$\begin{cases} IS \\ LM \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,4Y & + & r & = & 100 + G_O \\ 5Y & - & 50r & = & M_O \end{cases}$$

Ta có

$$D = \begin{vmatrix} 0,4 & 1 \\ 5 & -50 \end{vmatrix} = -25$$

$$D_Y = \begin{vmatrix} 100 + G_O & 1 \\ M_O & -50 \end{vmatrix} = -5000 - 50G_O - M_O$$

$$D_r = \begin{vmatrix} 0,4 & 100 + G_O \\ 5 & M_O \end{vmatrix} = 0,4M_O - 500 - 5G_O$$

Vậy

$$\overline{Y} = \frac{D_Y}{D} = \frac{5000 + 50G_O + M_O}{25}$$

$$\overline{r} = \frac{D_r}{D} = \frac{500 + 5G_O - 0,4M_O}{25}.$$

b) Với $G_0 = 70; M_0 = 1500$ chúng ta có:

$$\overline{Y} = \frac{D_Y}{D} = \frac{5000 + 3500 + 1500}{25} = 400 \text{ (ngàn tỉ VNĐ)}$$

$$\overline{r} = \frac{D_r}{D} = \frac{500 + 350 - 600}{25} = 10\,\%.$$

Ví dụ 9. Xét mô hình IS – LM với:

$$C = a(1-t) + b - cr;$$
$$I = I_0; G = G_0;$$
$$L = mY - nr; M = M_0.$$

Với các hệ số $0 < a < 1,\ b > 0,\ c > 0,\ m > 0,\ n > 0,\ 0 < t < 1$.

a) Thiết lập mô hình IS – LM.

b) Giải mô hình bằng quy tắc Cramer.

c) Nếu chi tiêu chính phủ tăng 1 đơn vị thì thu nhập cân bằng thay đổi như thế nào?

Giải

a) Phương trình đường IS:

$$Y = C + I + G = a\left(1-t\right)Y + b - cr + I_0 + G_0$$

$$\Leftrightarrow \left[1 - a\left(1 - t\right)\right]Y + cr = b + I_0 + G_0$$

Phương trình đường LM:

$$L = M \Leftrightarrow mY - nr = M_0$$

Mô hình IS – LM:

$$\begin{cases} IS \\ LM \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [1 - a\left(1 - t\right)Y + cr = b + I_O + G_O \\ mY - nr = M_O \end{cases}$$

b) Giải mô hình bằng quy tắc Cramer:

Ta có

$$D = \begin{vmatrix} 1 - a\left(1 - t\right) & c \\ m & -n \end{vmatrix} = -n\left[1 - a\left(1 - t\right)\right] - mc$$

$$D_Y = \begin{vmatrix} b + I_O + G_O & c \\ M_O & -n \end{vmatrix} = -n\left(b + I_O + G_O\right) - cM_O$$

$$D_r = \begin{vmatrix} 1 - a\left(1 - t\right) & b + I_O + G_O \\ m & M_O \end{vmatrix} = \left[1 - a\left(1 - t\right)\right]M_O - m\left(b + I_O + G_O\right)$$

Vậy,

$$\overline{Y} = \frac{D_Y}{D} = \frac{n(b + I_O + G_O) + cM_O}{n\left[1 - a(1 - t)\right] + mc}$$

$$\overline{r} = \frac{D_r}{D} = \frac{m\left(b + I_O + G_O\right) - \left[1 - a\left(1 - t\right)\right]M_O}{n\left[1 - a\left(1 - t\right)\right] + mc}.$$

c) Ta có

$$\overline{Y}_0 = \frac{n(b + I_O + G_O) + cM_O}{n\left[1 - a(1 - t)\right] + mc}$$

$$\overline{Y}_1 = \frac{n(b + I_O + G_O + 1) + cM_O}{n\left[1 - a(1 - t)\right] + mc}$$

Suy ra

$$\Delta\overline{Y} = \overline{Y}_1 - \overline{Y}_0 = \frac{n}{n\left[1 - a(1 - t)\right] + mc} > 0$$

Vậy nếu chi tiêu chính phủ tăng 1 đơn vị thì thu nhập cân bằng tăng:

$$\frac{n}{n\left[1 - a(1 - t)\right] + mc}.$$

1.2.4. Bài tập

Bài số 1. Xét thị trường hai loại hàng hóa với hàm cung và hàm cầu như sau:

$$Q_{S_1} = -1 + P_1;\ Q_{D_1} = 20 - 2P_1 - P_2$$

$$Q_{S_2} = P_2;\ Q_{D_2} = 40 - P_1 - 2P_2$$

Hãy xác định bộ giá trị và lượng cân bằng thị trường của hai hàng hóa đó bằng quy tắc Cramer.

Đáp số: $\overline{P_1} = \frac{23}{8};\ \overline{P_2} = \frac{99}{8};\ \overline{Q}_1 = \frac{15}{8};\ \overline{Q}_2 = \frac{99}{8}.$

Bài số 2. Sử dụng phương pháp ma trận nghịch đảo xác định bộ giá trị và lượng cân bằng thị trường của hai loại hàng hóa với hàm cung và hàm cầu như sau:

1) $Q_{S_1} = 2P_1;\ Q_{D_1} = 20 - P_1 + P_2$

$Q_{S_2} = -10 + 2P_2;\ Q_{D_2} = 40 + P_1 - 2P_2$

2) $Q_{S_1} = -20 + 2P_1;\ Q_{D_1} = 100 - 5P_1 - P_2$

$Q_{S_2} = -10 + P_2;\ Q_{D_2} = 80 - 2P_1 - 4P_2$

Đáp số: 1) $\overline{P}_1 = \frac{130}{11}; \overline{P}_2 = \frac{170}{11};\ \overline{Q}_1 = \frac{260}{11};\ \overline{Q}_2 = \frac{230}{11}.$

2) $\overline{P}_1 = \frac{170}{11};\ \overline{P}_2 = \frac{130}{11};\ \overline{Q}_1 = \frac{120}{11};\ \overline{Q}_2 = \frac{20}{11}.$

Bài số 3. Xét thị trường ba loại hàng hóa với hàm cung và hàm cầu như sau:

$$Q_{S_1} = -10 + P_1;\ Q_{D_1} = 20 - P_1 - P_3$$

$$Q_{S_2} = 2P_2;\ Q_{D_2} = 40 - 2P_2 - P_3$$

$$Q_{S_3} = -5 + 3P_3;\ Q_{D_3} = 10 - P_1 + P_2 - P_3$$

Hãy xác định bộ giá trị và lượng cân bằng thị trường của ba hàng hóa đó bằng quy tắc Cramer.

Đáp số: $\overline{P}_1 = \frac{41}{3}; \overline{P}_2 = \frac{28}{3};\ \overline{P}_3 = \frac{8}{3}; \overline{Q}_1 = \frac{11}{3}; \overline{Q}_2 = \frac{56}{3};\ \overline{Q}_3 = 3.$

Bài số 4. Xét thị trường ba loại hàng hóa với hàm cung và hàm cầu như sau:

$$Q_{S_1} = -60 + 6P_1 - 2P_3;\ Q_{D_1} = 120 - 5P_1 + P_2$$

$$Q_{S_2} = -30 - P_1 + 9P_2 - P_3;\ Q_{D_2} = 160 + P_1 - 6P_2 + P_3$$

$$Q_{S_3} = -20 - 2P_1 + 8P_3;\ Q_{D_3} = 140 + P_2 - 4P_3$$

Hãy xác định bộ giá trị và lượng cân bằng thị trường của ba hàng hóa đó bằng phương pháp ma trận nghịch đảo.

Đáp số: $\overline{P}_1 = \dfrac{19910}{933}$; $\overline{P}_2 = \dfrac{16760}{933}$; $\overline{P}_3 = \dfrac{17155}{933}$;

$\overline{Q}_1 = \dfrac{29170}{933}$; $\overline{Q}_2 = \dfrac{28595}{311}$; $\overline{Q}_3 = \dfrac{78760}{933}$.

Bài số 5. Xét thị trường có 4 loại hàng hóa. Biết hàm cung và cầu của 4 loại hàng hóa trên như sau:

$$Q_{S_1} = -30 + 20P_1 - 3P_2 - P_3 - P_4;\ Q_{D_1} = 115 - 11P_1 + P_2 + 2P_3 + 5P_4$$

$$Q_{S_2} = -50 - 2P_1 + 18P_2 - 2P_3 - P_4;\ Q_{D_2} = 250 + P_1 - 9P_2 + P_3 + 2P_4$$

$$Q_{S_3} = -40 - P_1 - 2P_2 + 12P_3;\ Q_{D_3} = 150 + P_1 + P_2 - 7P_3 + 3P_4$$

$$Q_{S_4} = -15 - 2P_2 - P_3 + 18P_4;\ Q_{D_4} = 180 + P_1 + 2P_3 - 10P_4$$

Tìm điểm cân bằng thị trường.

Đáp số: $\overline{P}_1 = 10$; $\overline{P}_2 = 15$; $\overline{P}_3 = 15$; $\overline{P}_4 = 10$;

$\overline{Q}_1 = 100$; $\overline{Q}_2 = 260$; $\overline{Q}_3 = 100$; $\overline{Q}_4 = 120$.

Bài số 6. Xét mô hình cân bằng thu nhập quốc dân:

$$Y = G_0 + I_0 + C;$$
$$C = 0,4Y + 30.$$

Hãy xác định mức thu nhập và chi tiêu quốc dân ở trạng thái cân bằng bằng quy tắc Cramer, biết $I_0 = 200$, $G_0 = 500$ (triệu USD).

Đáp số: $\overline{Y} = \dfrac{3650}{3}$; $\overline{C} = \dfrac{3100}{6}$.

Bài số 7. Xét mô hình

$$Y = G_0 + I_0 + C;\ C = 0,8Y_d;\ Y_d = (1-t)Y$$

Hãy xác định mức thu nhập và chi tiêu quốc dân ở trạng thái cân bằng bằng quy tắc Cramer, biết $I_0 = 200$, $G_0 = 500$ (triệu USD) và thuế suất thu nhập $t = 0,1$.

Đáp số: $\overline{Y} = \dfrac{17500}{3}$; $\overline{C} = 4200$.

Bài số 8. Xét mô hình

$Y = C + G_0 + I_0 + X_0 - M$;

$C = aY_d, \ (0 < a < 1)$;

$Y_d = (1-t)Y; \ M = 0{,}1Y_d$.

1) Sử dụng quy tắc Cramer, hãy xác định mức thu nhập và chi tiêu quốc dân $\overline{Y}, \overline{C}$ ở trạng thái cân bằng.

2) Tính $\overline{Y}, \overline{C}$ khi $I_0 = 200, G_0 = 500, X_0 = 100, a = 0{,}1$ và $t = 0{,}1$.

Đáp số: 1) $\overline{Y} = \dfrac{-(G_0 + I_0 + X_0)}{a(1-t) + 0{,}1t - 1{,}1}; \overline{C} = \dfrac{-a(1-t)(G_0 + I_0 + X_0)}{a(1-t) + 0{,}1t - 1{,}1}$;

2) $\overline{Y} = 800; \overline{C} = 72$.

Bài số 9. Xét mô hình

$Y = C + I$;
$C = 0{,}8Y + 50$;
$I = 20 - 5r$;
$L = 0{,}5Y + 100 - r$;
$M_0 = 200$.

Hãy sử dụng quy tắc Cramer, xác định thu nhập và lãi suất ở trạng thái cân bằng.

Đáp số: $\overline{Y} = \dfrac{5700}{27}; \ \overline{r} = \dfrac{50}{9}$.

Bài số 10. Xét mô hình

$Y = C + I + G_0$;

$C = 0{,}8(1-t)Y; \ t = 0{,}1$;

$G_0 = 200; \ I = 100 - r$;

$L = 0{,}5Y - 2r; \ M_0 = 500$.

Hãy sử dụng quy tắc Cramer, xác định thu nhập và lãi suất ở trạng thái cân bằng.

Đáp số: $\overline{Y} = \dfrac{55000}{53}; \overline{r} = \dfrac{7500}{53}$.

Bài số 11. Cho mô hình thu nhập quốc dân:

$$\begin{cases} Y = C + I + G_0 \\ C = b_0 + b_1Y \\ I = a_0 + a_1Y - a_2R_0 \end{cases} \quad (a_0, a_1, b_0, b_1 > 0; a_1 + b_1 < 1)$$

trong đó:

G_0 là chi tiêu chính phủ; R_0 là lãi suất; I là đầu tư; C là tiêu dùng; Y là thu nhập

1) Sử dụng quy tắc Cramer để xác định $\overline{Y}, \overline{C}$ ở trạng thái cân bằng.
2) Với $b_0 = 200$; $b_1 = 0,7$; $a_0 = 100$; $a_1 = 0,2$; $a_2 = 10$; $R_0 = 7$; $G_0 = 500$.

   Tính $\overline{Y}, \overline{C}$.

Đáp số: 1) $\overline{Y} = \dfrac{a_0 + a_2R_0 + G_0 + b_0}{1 - a_1 - b_1}$; $\overline{C} = \dfrac{b_0 - a_1b_0 + a_0b_1 + a_2b_1R_0 + b_1G_0}{1 - a_1 - b_1}$;

2) $\overline{Y} = 7300$; $\overline{C} = 5310$.

Bài số 12. Một số chỉ tiêu kinh tế vĩ mô của nền kinh tế (đóng) có mối liên hệ sau:

$$Y = C + I + G;$$

$$C = 0,85Y_d + 70;$$

$$Y_d = Y - T.$$

trong đó:

Y: là thu nhập quốc dân; C: là tiêu dùng dân cư; Y_d: là thu nhập khả dụng; I: là đầu tư; G: là chi tiêu chính phủ; T: là thuế. Với $I = 200; G = 500; T = 500.$ Hãy

1) Xác định thu nhập quốc dân ở trạng thái cân bằng.
2) Phân tích chủ trương "kích cầu" của chính phủ thông qua chính sách giảm thuế.

Đáp số: 1) $\overline{Y} = 2300$ *; 2) Chính phủ giảm thuế làm cho thu nhập tăng lên.*

Bài số 13. Một số chỉ tiêu kinh tế vĩ mô của nền kinh tế có mối liên hệ sau

$$Y = C + I + G + X - N;\ C = 0,08(1-t)Y;\ \ N = 0,015(1-t)Y.$$

trong đó:

Y: là thu nhập quốc dân; C: là tiêu dùng dân cư; I: là đầu tư; G: là chi tiêu chính phủ; X: là xuất khẩu; M: là nhập khẩu; t: là thuế. Biết rằng $I = 700; G = 900;\ X = 600;$ $t = 0,015.$ Hãy

1) Xác định thu nhập quốc dân ở trạng thái cân bằng.
2) Với chỉ tiêu ở câu 1, có ý kiến cho rằng nếu giảm xuất khẩu 10% thì chính phủ có thể tăng chi tiêu 10% mà không ảnh hưởng tới thu nhập. Hãy nhận xét ý kiến này.

Đáp số: 1) $\overline{Y} \approx 2350,490131$ *; 2) Ý kiến trên sai.*

Thuật ngữ chính chương 1	
Tiếng Anh	**Tiếng Việt**
Consumption	Tiêu dùng
Disposable Income	Thu nhập khả dụng
Equilibrium Price	Giá cân bằng
Equilibrium Quantity Demanded	Lượng cầu cân bằng
Export	Xuất khẩu
Gross Domestic Product	Tổng sản phẩm quốc nội
Gross National Income	Tổng thu nhập quốc dân
Income Tax Rates	Thuế thu nhập
Import	Nhập khẩu
Input – Output Model	Mô hình cân đối liên ngành
IS – LS Model	Mô hình IS – LM
Investment	Đầu tư
Money Demand	Lượng cầu tiền
Money Supply	Lượng cung tiền
Market Prices	Giá thị trường
Market Equilibrium	Thị trường cân bằng
Matrix of Producting Coefficients	Ma trận hệ số kỹ thuật
Market Model	Mô hình cân bằng
National Income Model	Mô hình cân bằng kinh tế quốc dân
Price	Giá hàng hóa
Quantity Supplied	Lượng cung
Quantity Demanded	Lượng cầu
Saving	Tiết kiệm
Tax	Thuế
The final demand matrix	Ma trận cầu cuối
The matrix of Outputs	Ma trận tổng cầu
Utility	Lợi ích

Chương 2

Áp dụng phép tính vi tích phân hàm một biến và phương trình vi phân vào phân tích kinh tế và kinh doanh

2.1. Bài toán lãi suất và hiệu quả đầu tư

2.1.1. Giới hạn e và bài toán lãi suất

Định nghĩa số e

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ với } e \approx 2,71828...$$

Giả sử ta có một khoản tiền V_0 đồng (*giá trị hiện tại)* gửi vào ngân hàng với lãi suất cố định $r\%$ một năm. Gọi V_t là số tiền ta có được sau t năm (*giá trị tương lai)*:

$$V_t = V_0\left(1+r\right)^t. \tag{2.1}$$

Nếu trong một năm có n lần tính lãi với lãi suất mỗi lần tính là $r_n = \frac{r}{n}$ thì trong t năm có $n \cdot t$ lần tính lãi. Vậy số tiền sau t năm có là

$$V_t = V_0\left(1+r_n\right)^{nt} = V_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Giả sử việc tính lãi trên là liên tục, tức là cho $n \to \infty$, khi đó số tiền nhận được sau t năm:

$$V_t = \lim_{n\to\infty} V_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = \lim_{n\to\infty} V_0\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^{r.t} = V_0.e^{r.t} \tag{2.2}$$

Công thức (2.2) là công thức tính lãi gộp liên tục.

Giải ngược công thức (2.1), ta được công thức tính giá trị hiện tại của khoản tiền V_t sau t năm

$$V_0 = V_t\left(1+r\right)^{-t} \tag{2.3}$$

Giải ngược công thức (2.2) ta được công thức tính giá trị hiện tại của khoản tiền $V_t^{/}$ sau t năm

$$V_0 = V_t.e^{-r.t} \tag{2.4}$$

Ví dụ 1. Ngày 5/3/2016, giả sử Ông Bách gửi 10 triệu đồng vào một tài khoản tiết kiệm lãi suất 5,24% năm. Tính số tiền Ông Bách sở hữu vào ngày 5/3/2020 (Giả sử lãi suất không đổi trong suốt 4 năm).

Giải

Ta có

+) Số tiền hiện tại vào ngày 5/3/2016: $V_0 = 10$ triệu đồng,

+) Ngày đáo hạn 5/3/2020: $t = 4$ năm,

+) Lãi suất: $r = 5,24\%$ /năm.

Áp dụng công thức (2.1), ta có lượng vốn được đầu tư trong 4 năm. Lượng tiền Ông Bách nhận được vào gày 5/3/2020,

$$V_4 = 10 \cdot (1 + 0,0524)^4 = 12,267 \text{ triệu đồng.}$$

Ví dụ 2. Giả sử Ông Bách mong muốn sở hữu khoản tiền 20 triệu đồng vào ngày 2/3/2020 ở một tài khoản lãi suất năm là 6,05%. Hỏi Ông Bách cần đầu tư bao nhiêu tiền trên tài khoản này vào ngày 2/3/2015 để đạt được mục tiêu đề ra (Giả sử lãi suất không đổi trong suốt 5 năm).

Giải

Ta có

+) Số tiền tương lai vào ngày 2/3/2020: $V_5 = 20$ triệu đồng,

+) Kỳ hạn: $t = 5$ năm,

+) Lãi suất: $r = 6,05\%$ /năm.

Áp dụng công thức (2.3), ta có lượng vốn sẽ được đầu tư trong 5 năm. Do đó, lượng vốn cần đầu tư vào ngày 2/3/2015 là :

$$V_0 = 20 \cdot (1 + 0,0605)^{-5} = 14,91 \text{ triệu đồng.}$$

Ví dụ 3. Xác định hiện giá của khoản tiền 20 triệu đồng nhận được sau 3 năm, khi tích lũy liên tục với lãi suất 6%. So sánh với phương thức tích lũy năm lãi suất 6%. (Giả sử lãi suất không đổi trong suốt thời gian).

Giải

Ta có

+) Số tiền tương lai sau 3 năm: $V_3 = 20$ triệu đồng,

+) Kỳ hạn: $t = 3$ năm,

+) Lãi suất: $r = 6\%/\text{năm}$.

Áp dụng công thức (2.4) cho hiện giá V_0 khi tích lũy liên tục :

$$V_0 = 20 \cdot e^{-0,06 \cdot 3} = 20 \cdot 0,835270 = 16,705 \text{ triệu đồng.}$$

Áp dụng công thức (2.3) cho hiện giá V_0 khi tích lũy theo năm :

$$V_0 = 20 \cdot (1,06)^{-3} = 16,792 \text{ triệu đồng.}$$

Hiện giá theo phương thức tích lũy liên tục nhỏ hơn hiện giá theo phương thức tích lũy năm.

Ví dụ 4. Sau 5 năm, một thương phiếu sẽ được thanh toán với số tiền là 10000 USD. Với lãi suất 9% năm, hãy tính giá trị hiện tại của thương phiếu.

Giải

Ta có

+) Số tiền tương lai sau 5 năm: $V_5 = 10000$ triệu đồng,

+) Kỳ hạn: $t = 5$ năm,

+) Lãi suất: $r = 9\%/\text{năm}$.

Áp dụng công thức (2.3), ta có giá trị hiện tại của thương phiếu là

$$V_0 = 10000 \times (1,09)^{-5} \approx 6499,31 \text{ (USD)}$$

2.1.2. Đánh giá hiệu quả đầu tư

Giá trị hiện tại ròng của một dự án đầu tư là hiệu số của giá trị hiện tại của khoản tiền sẽ thu về trong tương lai và chi phi triển khai dự án. Giá trị hiện tại ròng được tính theo công thức:

$$NPV = B(1+r)^{-t} - C \tag{2.5}$$

trong đó, C là khoản chi phí hiện tại; B là khoản mà dự án đem về sau t năm, r là lãi suất năm. Một tiêu chuẩn cơ bản để dự án đầu tư được chấp thuận là $NPV > 0$.

Ví dụ 5. Một nhà đầu tư có thể bỏ tiền để thực hiện một trong 3 dự án:

+) Dự án 1. Chi phí hiện tại là 2000 USD và đem lại 3000 USD sau 4 năm.

+) Dự án 2. Chi phí hiện tại là 2000 USD và đem lại 4000 USD sau 6 năm.

+) Dự án 3. Chi phí hiện tại là 3000 USD và đem lại 4800 USD sau 5 năm.

Với lãi suất thịnh hành là 10% một năm thì nên chọn dự án nào?

Giải

Để trả lời câu hỏi này ta so sánh NPV của các dự án nói trên

+) Chi phí hiện tại của các dự án

$$C_1 = 2000,\ C_2 = 2000,\ C_3 = 3000$$

+) Khoản tiền mà các dự án đem lại

$$B_1 = 3000,\ B_2 = 4000,\ B_3 = 4800$$

+) Lãi suất của các dự án

$$r_1 = r_2 = r_3 = 10\% = 0,1$$

+) Kỳ hạn của các dự án

$$n_1 = 4,\ n_2 = 6, n_3 = 5$$

Áp dụng công thức (2.5), ta có

Dự án 1. $NPV_1 = B_1(1+r_1)^{-n_1} - C_1 = 3000(1,1)^{-4} - 2000 = 49,04$ USD.

Dự án 2. $NPV_2 = B_2(1+r_2)^{-n_2} - C_2 = 4000(1,1)^{-6} - 2000 = 257,9$ USD.

Dự án 3. $NPV_3 = B_3(1+r_3)^{-n_3} - C_3 = 4800(1,1)^{-5} - 3000 = -19,58$ USD.

Ta chọn dự án 2 vì dự án này NPV lớn nhất.

2.1.3. Giá trị hiện tại của chuỗi tiền tệ

Giá trị hiện tại của chuỗi tiền tệ là tổng số giá trị hiện tại của các kỳ khoản được phát sinh trong tương lai (Giá trị của chuỗi tiền tệ được quy về điểm gốc).

Gọi

+) a_i là giá trị của kỳ khoản thứ i, $i = 1, 2, ..., n$,

+) r là lãi suất một kỳ,

+) n là số lần thanh toán,

+) PV là giá trị hiện tại của chuỗi tiền tệ.

Công thức xác định giá trị hiện tại của chuỗi tiền tệ (cuối kỳ) như sau:

$$PV = \sum_{i=1}^{n} a_i (1+r)^{-i} \tag{2.6}$$

Nếu chuỗi tiền tệ cố định, tức là $a_i = a,\ i = 1, 2, .., n$ thì

$$PV = a\sum_{i=1}^{n}(1+r)^{-i} = a\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} \tag{2.7}$$

Ví dụ 6. Một dự án số vốn đầu tư ban đầu là 30000 USD sau một năm đem lại cho bạn đều đặn 5000 USD mỗi năm, liên tiếp trong 10 năm sau đó. Lãi suất không đổi 10%/năm. Bạn có chấp nhận dự án này hay không?

Giải

Để đánh giá dự án, ta tính giá trị hiện tại ròng của dự án

Ta có

+) Số tiền mỗi năm: $a = 5000$ USD,

+) Lãi suất: $r = 10\% / \text{năm}$,

+) Kỳ hạn: $n = 10$ năm,

+) Vốn ban đầu: $C = 30000$ USD

Giá trị hiện tại của dòng tiền, ta áp dụng biểu thức (2.7):

$$PV = a\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} = 5000\frac{1-\left(1,1\right)^{-10}}{0,1} = 30722,8 \text{ USD}.$$

Giá trị hiện tại ròng:

$$NPV = PV - C = 30722,9 - 30000 = 722,8 \text{ USD}.$$

Vì $NPV > 0$ nên chấp nhận dự án.

Ví dụ 7. Một công ty ôtô bán xe VIOS theo hai phương án sau:

+) Phương án 1. Trả luôn một lần với giá 18000 USD.

+) Phương án 2. Trả ngay 5000 USD và nhận xe, phần còn lại trả góp theo quý (liên tục trong 6 quý) mỗi quý là 2450 USD, biết lãi suất là 3%/quý. Nếu cần mua xe ôtô bạn chọn phương án thanh toán nào?

Giải

Phương án 2.

+) Số tiền mỗi năm: $a = 2450$ USD,

+) Lãi suất: $r = 3\% / \text{quý}$,

+) Kỳ hạn: $n = 6$ quý,

Giá trị hiện tại của dòng tiền, ta áp dụng biểu thức (2.7):

$$PV = a\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} = 2450\frac{1-\left(1,03\right)^{-6}}{0,03} = 13272,12 \text{ USD}.$$

Tổng số tiền phương án 2 phải trả: $5000 + 13272,12 = 18272,12$ USD.

Kết luận. Trả góp đắt hơn.

2.1.4. Bài tập

Bài số 1. Trong điều kiện lãi suất 0,9% một tháng, hãy cho biết:

1) Giá trị tương lai của khoản tiền 3 triệu đồng bạn có hôm nay sau 3 năm.
2) Giá trị hiện tại của khoản tiền 5 triệu đồng bạn sẽ nhận được sau 4 năm.

Đáp số: 1) 4,142 triệu đồng; 2) 3,252 triệu đồng.

Bài số 2. Hôm nay, Ông Bách đầu tư 5 triệu đồng vào một tài khoản tiết kiệm với lãi suất năm 4,5%.

1) Tính giá trị số tiền ông ta sở hữu sau 5 năm, 10 năm, 30 năm.
2) Tính giá trị số tiền ông Bách sở hữu sau 10 năm khi lãi suất giữ nguyên ở mức 4,5% trong hai năm đầu, giảm xuống còn 3% trong năm năm kế tiếp và tăng lên thành 6% trong ba năm cuối.

Đáp số: 1) 6,23; 7,765; 18,73; 2) 7,54.

Bài số 3. Dân số thành phố A là 20000 người, tăng trưởng 3% năm, và của thành phố B là 30000, tăng trưởng 1% năm. Sau bao nhiêu năm thì dân số hai thành phố này bằng nhau.

Đáp số : 20,7 năm.

Bài số 4. Xác định giá trị nhận được bởi lượng vốn 10 triệu đồng đầu tư theo phương thức tích lũy liên tục trong 5 năm ở mức lãi suất năm 4%.

Đáp số : 12,2 triệu đồng.

Bài số 5. Xác định hiện giá của khoản tiền 20 triệu đồng nhận được sau 3 năm, khi tích lũy liên tục với lãi suất 6%.

Đáp số : 16,71 triệu đồng.

Bài số 6. Một dự án đòi hỏi số tiền đầu tư ban đầu là 6000 USD và sẽ đem lại 10000 USD sau 5 năm. Trong điều kiện lãi suất tiền gởi ngân hàng là 9% một năm, có nên đầu tư vào dự án đó hay không? Tính NPV của dự án trên.

Đáp số: $\mathrm{NPV} = 499,314.$

Bài số 7. Một công ty đề nghị góp vốn 3500 USD và đảm bảo sẽ trả 750 USD mỗi năm, liên tiếp trong 7 năm. Lãi suất không đổi là 9%/năm. Bạn có chấp nhận dự án này hay không?

Đáp số: $\mathrm{NPV} = 274,715$ *USD.*

Bài tập 8. Xác định giá trị nhận được của lượng vốn 10 triệu đồng, đầu tư trong 4 năm ở mức lãi 3,5%, trong các điều kiện sau :

1) Tích lũy liên tục,

2) Tích lũy hàng năm.

Đáp số: 1) 11,503 triệu đồng; 2) 11,475 triệu đồng.

Bài số 9. Với mức lãi 4%, tính hiện giá của khoản tiền 5 triệu đồng nhận được sau 4 năm, nếu phương thức tích lũy là

1) Tích lũy liên tục,

2) Tích lũy hàng năm.

Đáp số: 1) 4,261 triệu đồng; 2) 4,274 triệu đồng.

Bài số 10. Có 3 dự án cùng một số vốn ban đầu là 10000 USD và các luồng thu nhập (CF) như sau :

+) Dự án A.

Năm	1	2	3
CF	4000 USD	4000 USD	4000 USD

+) Dự án B.

Năm	1	2	3
CF	3000 USD	5000 USD	8000 USD

+) Dự án C.

Năm	1	2	3
CF	8000 USD	5000 USD	3000 USD

Giả sử lãi suất cả 3 dự án đều là 10%.

Nếu phải chọn 1 trong 3 dự án thì bạn nên chọn dự án nào ?

Đáp số : Chọn dự án C.

Bài số 11. Một doanh nhân bỏ ra K USD vào thời điểm hiện tại mua tích trữ một loại rượu nho để bán vào một thời điểm nào đó bất kỳ trong tương lai, biết giá của lô rượu này tăng theo quy luật $V_t = Ke^{\sqrt{t}}$ (t là biến thời gian). Giả sử chi phí bảo quản trong đáng kể (có thể bỏ qua). Cho lãi suất liên tục $r\%$. Hãy xác định thời điểm bán lô rượu có lợi nhất.

Đáp số : $t = \dfrac{1}{4r^2}$.

Bài số 12. Hãy xác định lãi suất r tính gộp liên tục một năm tương đương với lãi đơn gộp 5%/năm, tính lãi 1 năm 1 lần.

Đáp số: 4,9%.

2.2. Áp dụng đạo hàm vào phân tích kinh tế và kinh doanh

2.2.1. Các hàm số thường gặp trong phân tích kinh tế và kinh doanh

2.2.1.1. Hàm sản xuất ngắn hạn

Để tiến hành sản xuất, đầu tiên chúng ta cần các yếu tố đầu vào là vốn (K) và lao động (L). Trong ngắn hạn, người ta giả thiết K là không thay đổi, khi đó sản lượng đầu ra Q sẽ phụ thuộc hàm số vào yếu tố đầu vào L và gọi là *hàm sản xuất ngắn hạn:*

$$Q = f(L),\ L \geq 0$$

Ví dụ 5. Cho hàm sản xuất ngắn hạn

$$Q = 120.L^{\frac{2}{3}};\ \ Q = a.L^{\alpha}(a > 0, 0 < \alpha < 1)$$

2.2.1.2. Hàm chi phí (tổng chi phí)

+) Chi phí TC phụ thuộc đầu ra Q : $TC = TC(Q), Q \geq 0$

Ví dụ 6. Cho hàm chi phí phụ thuộc vào sản lượng Q

$$TC(Q) = Q^3 - 6Q^2 + 140Q + 1500, Q \geq 0$$

$$TC(Q) = 30.e^{0,3Q} + 200$$

$$TC(Q) = 3Q^2 + 7Q + 243$$

+) Chi phí TC phụ thuộc đầu vào L :

$TC = p_L.L = TC(L), L \geq 0$ (p_L giá thuê một đơn vị lao động).

Ví dụ 7. Cho hàm chi phí phụ thuộc vào lao động L

$$TC(L) = p_L \cdot L = 3.L\ \ (L \geq 0,\ p_L = 3).$$

2.2.1.3. Hàm doanh thu (tổng doanh thu)

Doanh thu TR phụ thuộc đầu ra Q :

$TR = P.Q = TR(Q), Q \geq 0$ (P ký hiệu là giá hàng hóa).

Ví dụ 8. Cho hàm doanh thu phụ thuộc vào sản lượng Q

$$TR(Q) = 1200Q - 3Q^2, Q \geq 0$$

Doanh thu TR phụ thuộc đầu vào L :

$TR = P.Q = P.f(L) = TR(L), L \geq 0$ (P ký hiệu là giá hàng hóa)

Ví dụ 9. Cho hàm doanh thu phụ thuộc vào lao động L

$$TR(L) = 5.300\sqrt{L} = 1500\sqrt{L},\ L \ge 0\ \ (P = 5;\ Q = 300\sqrt{L}).$$

2.2.1.4. Hàm lợi nhuận (tổng lợi nhuận)

Lợi nhuận π được tính bằng hiệu giữa doanh thu TR và chi phí TC:

+) Lợi nhuận π phụ thuộc đầu ra: $\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q)$

Ví dụ 10. Cho hàm doanh thu $TR(Q) = 1200Q - 3Q^2,\ Q \ge 0$ và hàm chi phí

$$TC(Q) = Q^3 - 6Q^2 + 140Q + 1500,\ Q \ge 0$$

Suy ra hàm lợi nhuận phụ thuộc vào sản lượng Q

$$\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) = -Q^3 + 3Q^2 + 1060Q - 1500,\ \ Q \ge 0$$

+) Lợi nhuận π phụ thuộc đầu vào: $\pi(L) = TR(L) - TC(L)$.

Ví dụ 11. Cho hàm sản xuất: $Q = 300\sqrt{L},$ giá một đơn vị lao động là 3, giá sản phẩm là 5. Xác định hàm lợi nhuận.

Ta có

+) Hàm doanh thu : $TR(L) = PQ = 5.300\sqrt{L} = 1500\sqrt{L}$

+) Hàm chi phí: $TC(L) = p_L L = 3L$

+) Suy ra hàm lợi nhuận phụ thuộc vào lao động L

$$\pi(L) = TR(L) - TC(L) = 1500\sqrt{L} - 3.L,\ \ L \ge 0.$$

2.2.1.5. Hàm chi tiêu

Chi tiêu C phụ thuộc thu nhập Y: $C = C(Y),\ Y \ge 0$

Ví dụ 12. Cho hàm chi tiêu phụ thuộc vào mức thu nhập như sau:

$$C(Y) = aY + b\ \ (0 < a < 1,\ b > 0),\ Y \ge 0.$$

2.2.1.6. Hàm tiết kiệm

Tiết kiệm S phụ thuộc thu nhập Y: $S = S(Y),\ Y \ge 0$

Ví dụ 13. Cho hàm tiết kiệm phụ thuộc vào mức thu nhập như sau:

$$S(Y) = 0{,}3Y + 0{,}1.\sqrt{Y} + 100,\ Y \ge 0.$$

2.2.1.7. Hàm cung và hàm cầu một loại hàng hóa

Lượng cung và lượng cầu hàng hóa phụ thuộc vào giá hàng hóa:

+) Hàm cung: $Q_S = S(P),\ P > 0$.

+) Hàm cầu: $Q_D = D(P),\ P > 0$.

Ví dụ 14. Cho hàm cung và hàm cầu dạng tuyến tính như sau:

+) Hàm cung: $S(P) = aP - b\ (a, b > 0)$.

+) Hàm cầu: $D(P) = -cP + d\ (c, d > 0)$.

2.2.2. Đạo hàm và giá trị cận biên

Cho hàm số $y = f(x)$ với x, y là các biến số kinh tế (ở đây ta xem biến số độc lập x là biến đầu vào và biến phụ thuộc y là biến số đầu ra), gọi x_0 là một điểm thuộc tập xác định của hàm số.

Hàm số ký hiệu $My = f^{/}(x)$ được gọi là hàm cận biên.

Giá trị $My(x_0) = f^{/}(x_0)$ được gọi là giá trị cận biên của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0 (hay giá trị y cận biên của x tại điểm x_0). Đối với mỗi hàm số kinh tế cụ thể, giá trị cận biên có tên gọi cụ thể.

Ý nghĩa. Tại x_0, khi đối số x thay đổi một đơn vị thì giá trị hàm số $f(x)$ thay đổi một lượng xấp xỉ bằng $My(x_0) = f^{/}(x_0)$.

Chú ý. Nếu $My(x_0) = f^{/}(x_0) > 0$ thì $f(x)$ sẽ thay đổi cùng chiều với đối số x (nghĩa là $f(x)$ tăng khi x tăng và $f(x)$ giảm khi x giảm) và nếu $My(x_0) = f^{/}(x_0) < 0$ thì $f(x)$ sẽ thay đổi ngược chiều với đối số x (nghĩa là $f(x)$ tăng khi x giảm và $f(x)$ giảm khi x tăng).

Ví dụ 15. Cho hàm doanh thu $TR(Q) = 1200Q - Q^2\ (Q \geq 0)$

a) Tìm hàm doanh thu cận biên $MR(Q)$.

b) Tại $Q_0 = 590$, nếu sản lượng Q tăng một đơn vị thì doanh thu sẽ thay đổi bao nhiêu đơn vị.

c) Tính giá trị doanh thu cận biên tại $Q_0 = 610$ và nêu ý nghĩa kết quả nhận được.

Giải

a) Hàm doanh thu cận biên:

$$MR(Q) = TR^{/}(Q) = 1200 - 2Q\ (Q \geq 0)$$

b) $MR(590) = 1200 - 2.590 = 20 > 0$

Vậy tại $Q_0 = 590$, nếu sản lượng Q tăng một đơn vị thì doanh thu sẽ tăng một lượng xấp xỉ bằng 20 đơn vị.

c) $MR(610) = 1200 - 2.610 = -20 < 0$

Vậy tại $Q_0 = 610$, nếu sản lượng Q thay đổi một đơn vị thì doanh thu sẽ thay đổi (ngược chiều) một lượng xấp xỉ 20 đơn vị (trong trường hợp này, khi Q tăng thêm một đơn vị thì doanh thu sẽ giảm một lượng xấp xỉ bằng 20 đơn vị).

Ví dụ 16. Cho hàm sản xuất ngắn hạn: $Q = 30\sqrt{L}$, $(L \geq 0)$

a) Tìm hàm sản phẩm cận biên của lao động $MPL(L)$.

b) Tại $L_0 = 144,$ nếu lao động L tăng thêm một đơn vị thì sản lượng sẽ thay đổi bao nhiêu đơn vị?

Giải

a) Hàm sản phẩm cận biên của lao động:

$$MPL(L) = Q'(L) = \frac{15}{\sqrt{L}}.$$

b) $MPL(144) = \frac{15}{\sqrt{144}} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4} = 1,25$ (đơn vị sản phẩm)

Vậy tại $L_0 = 144$, nếu lao động L tăng thêm một đơn vị thì sản lượng sẽ tăng một lượng xấp xỉ 1,25 đơn vị.

Ví dụ 17. Cho hàm chi tiêu phụ thuộc vào thu nhập như sau:

$$C(Y) = aY + b \quad (0 < a < 1,\ b > 0),\ Y \geq 0$$

a) Tìm hàm xu hướng tiêu dùng cận biên $MPC(Y)$.

b) Cho biết ý nghĩa kinh tế của hệ số a trong biểu thức hàm số đã cho.

Giải

a) Hàm xu hướng tiêu dùng cận biên:

$$MPC(Y) = C'(Y) = (aY + b)' = a$$

b) Tại mọi mức thu nhập, khi thu nhập thay đổi một đơn vị thì chi tiêu sẽ thay đổi xấp xỉ a đơn vị. Chú ý rằng, vì $a > 0$ nên thay đổi của chi tiêu sẽ cùng chiều với thay đổi của thu nhập.

Ví dụ 18. Cho hàm tổng chi phí: $TC(Q) = 0,1Q^2 + 0,3Q + 100$ $(Q \geq 0)$

a) Tìm hàm chi phí cận biên $MC(Q)$.

b) Tính chi phí cận biên tại mức sản lượng $Q_0 = 120$ và giải thích ý nghĩa kết quả nhận được.

Giải

a) Hàm chi phí cận biên:

$$MC(Q) = TC^{/}(Q) = 0,2Q + 0,3$$

b) $MC(120) = 0,2 \times 120 + 0,3 = 24,3$ (đơn vị sản phẩm)

Ý nghĩa. Tại mức sản lượng $Q_0 = 120,$ khi sản lượng thay đổi một đơn vị thì chi phí sẽ thay đổi một lượng xấp xỉ bằng 24,3 đơn vị, tuy nhiên vì 24,3 > 0 nên chi phí cũng sẽ thay đổi cùng chiều với sản lượng.

2.2.3. Đạo hàm và hệ số co dãn

Cho hàm số $y = f(x)$ với x, y là các biến số kinh tế (ở đây ta xem biến số độc lập x là biến đầu vào và biến phụ thuộc y là biến số đầu ra), gọi x_0 là một điểm thuộc tập xác định của hàm số.

Giá trị $\varepsilon_{yx}(x_0) = y^{/}(x_0)\dfrac{x_0}{y(x_0)}$ được gọi là hệ số co dãn của y theo x tại x_0.

Ý nghĩa. Tại $x_0,$ khi đối số x thay đổi 1% thì giá trị của hàm số $y = f(x)$ thay đổi một lượng xấp xỉ bằng $|\varepsilon_{yx}(x_0)|$%.

Ví dụ 19. Xét hàm cầu của một loại hàng hóa $Q_D = D(P),$ tại mức giá P_0 :

Hệ số co dãn của cầu theo giá tại mức giá P_0 :

$$\varepsilon_D(P_0) = D^{/}(P_0)\frac{P_0}{D(P_0)}$$

Áp dụng với hàm cầu $D(P) = 6P - P^2,$ tại mức giá $P_0 = 5$ và giải thích ý nghĩa của kết quả nhận được. Cũng tại mức giá đó, nếu giá tăng 3% thì cầu sẽ thay đổi như thế nào?

Giải

Áp dụng công thức trên ta có

$$\varepsilon_D(5) = D^{/}(5)\frac{5}{D(5)} = -4$$

Ý nghĩa. Tại mức giá $P_0 = 5,$ nếu giá tăng 1% thì cầu sẽ giảm một lượng 4%. Còn nếu giá *tăng* 3% thì cầu sẽ *giảm* một lượng xấp xỉ 3.(4%) = 12%.

Ví dụ 20. Cho hàm sản xuất $Q = a.L^{\alpha}, \ (a > 0,\ 0 < \alpha < 1).$ Tại mức sử dụng lao động nào đó, tính hệ số co dãn của sản lượng theo lao động.

Giải

Hệ số co dãn của Q theo L

$$\varepsilon_{QL}(L) = Q^{/}(L)\frac{L}{Q(L)} = \frac{\alpha.a.L^{\alpha-1}}{a.L^{\alpha}}L = \alpha$$

Ý nghĩa. Tại mọi mức sử dụng lao động, nếu lao động thay đổi 1% thì sản lượng sẽ thay đổi (cùng chiều) một lượng xấp xỉ α%.

2.2.4. Đạo hàm cấp 2 và quy luật lợi ích biên giảm dần

Cho hàm số $y = f(x)$ với x, y là các biến số kinh tế.

Nội dung. Khi giá trị của đối số x đủ lớn, nếu giá trị của x tăng thì giá trị cận biên My sẽ giảm, hay là $(My)^{/} = f^{//}(x) < 0$. Điều kiện $f^{//}(x) < 0$ là biểu thị toán học của *Quy luật lợi ích cận biên giảm dần.*

Ví dụ 21. Cho hàm sản xuất $Q = aL^{\alpha}, \ (a > 0, \alpha > 0)$, hãy tìm điều kiện của tham số α để hàm tuân theo *quy luật lợi ích cận biên giảm dần.*

Giải

+) Đạo hàm cấp 1: $Q^{/} = \alpha.a.L^{\alpha-1}$

+) Đạo hàm cấp 2: $Q^{//} = (\alpha-1).\alpha.a.L^{\alpha-2}$

+) Hàm sản xuất tuân theo quy luật cận biên giảm dần

$$Q^{//} < 0 \Leftrightarrow (\alpha-1) < 0 \Leftrightarrow \alpha < 1.$$

Ví dụ 22. Cho hàm doanh thu: $TR(Q) = 1200Q - Q^2$. Hàm này có tuân theo *Quy luật lợi ích cận biên giảm dần* hay không?

Giải

+) Đạo hàm cấp 1: $TR^{/}(Q) = 1200 - 2Q$

+) Đạo hàm cấp 2: $TR^{//}(Q) = -2 < 0$.

Vậy hàm doanh thu này có tuân theo *quy luật lợi ích cận biên giảm dần.*

2.2.5. Khảo sát hàm bình quân

Cho hàm số $y = f(x)$ với x, y là các biến số kinh tế (ở đây ta xem biến số độc lập x là biến đầu vào và biến phụ thuộc y là biến số đầu ra).

Hàm số $Ay = \frac{y}{x}$ $(x > 0)$ được gọi là hàm bình quân. Chúng ta sẽ khảo sát khoảng tăng, giảm, cực trị của hàm số này.

Ta có:

$$(Ay)' = \left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{y' - \frac{y}{x}}{x} = \frac{My - Ay}{x} \quad (x > 0)$$

Do đó, trong khoảng hàm bình quân tăng thì $My > Ay$ (đường cận biên nằm trên đường bình quân).

Trong khoảng hàm bình quân giảm thì $My < Ay$ (đường cận biên nằm dưới đường bình quân).

Tại điểm hàm bình quân đạt cực trị thì $My - Ay = 0 \Leftrightarrow My = Ay$ (đường cận biên gặp đường bình quân tại điểm đường bình quân đạt cực trị).

Ví dụ 23. Chứng minh rằng: $\frac{My}{Ay} = \left[1 + \varepsilon_{Ay/x}(x)\right]$.

Giải

Áp dụng công thức tính hệ số co dãn của hàm bình quân theo x, ta có

$$\varepsilon_{Ay/x}(x) = (Ay)' \frac{x}{Ay} = \frac{My - Ay}{Ay} = \frac{My}{Ay} - 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + \varepsilon_{Ay/x}(x) = \frac{My}{Ay}.$$

Ví dụ 24. Cho hàm chi phí $TC = TC(Q)$, $(Q > 0)$.

a) Hãy phân tích mối quan hệ giữa hàm chi phí bình quân $AC(Q)$ và hàm chi phí cận biên $MC(Q)$.

b) Áp dụng phân tích đối với trường hợp $TC(Q) = 3Q^2 + 7Q + 27$, $Q > 0$.

Giải

a) Hàm chi phí bình quân

$$AC(Q) = \frac{TC(Q)}{Q}$$

Đạo hàm của hàm chí phí bình quân theo biến Q

$$AC^{/}(Q) = \frac{MC - AC}{Q} \quad (Q > 0)$$

Do đó, trong khoảng hàm chi phí bình quân tăng thì $MC > AC$ (đường chi phí cận biên nằm trên đường chi phí bình quân).

Còn trong khoảng hàm chi phí bình quân giảm thì $MC < AC$ (đường chi phí cận biên nằm dưới đường chi phí bình quân).

Tại điểm hàm chi phí bình quân đạt cực trị thì $MC = AC$ (đường chi phí cận biên gặp đường chi phí bình quân tại điểm mà đường chi phí bình quân đạt cực trị).

b) $TC(Q) = 3Q^2 + 7Q + 27, \ \ Q > 0$

Hàm bình quân:

$$AC(Q) = \frac{TC(Q)}{Q} = 3Q + 7 + \frac{27}{Q}$$

Đạo hàm cấp 1: $AC^{/}(Q) = 3 - \frac{27}{Q^2}$

Giải phương trình:

$$AC^{/}(Q) = 0 \Leftrightarrow Q^2 = 9 \Leftrightarrow Q = 3 \ \text{(nhận do } Q > 0)$$

+) Nếu $Q > 3$ thì hàm chi phí bình quân tăng và $MC > AC$ (đường chi phí cận biên nằm trên đường chi phí bình quân).

+) Nếu $Q < 3$ thì hàm chi phí bình quân giảm và $MC < AC$ (đường chi phí cận biên nằm dưới đường chi phí bình quân).

+) Nếu $Q = 3$ thì hàm chi phí bình quân đạt cực trị và $MC = AC$ (đường chi phí cận biên gặp đường chi phí bình quân tại điểm mà đường chi phí bình quân đạt cực tiểu).

Ví dụ 25. (Bạn đọc tự làm các ví dụ áp dụng với hàm số dưới đây)

Cho hàm sản xuất ngắn hạn: $Q = 40L^2 - L^3$ $(L > 0)$. Hãy phân tích mối quan hệ giữa hàm sản phẩm bình quân của lao động $APL = \frac{Q}{L}$ $(L > 0)$ và hàm sản phẩm cận biên của lao động MPL.

2.2.6. Bài toán tối ưu hàm một biến

2.2.6.1. Tìm mức sử dụng lao động L để sản lượng hoặc lợi nhuận tối đa

Bài toán 1. Giả sử một công ty sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết rằng hàm sản xuất ngắn hạn là $Q = Q(L)$ (L là lao động). Hãy xác định mức sử dụng lao động để công ty sản xuất được nhiều sản phẩm nhất.

Giải quyết bài toán. Ta khảo sát cực trị của bài toán này với biến độc lập L là biến đầu vào và biến phụ thuộc Q là biến đầu ra.

Chú ý. Để phù hợp với thực tế thì tại $L > 0$ tìm được ta phải có mức sản lượng $Q > 0$.

Ví dụ 26. Cho hàm sản xuất $Q = 120L^2 - L^3, L > 0.$ Hãy xác định mức sử dụng lao động để sản lượng tối đa.

Giải

+) Đạo hàm cấp 1: $Q'(L) = 240L - 3L^2$.

+) Giải phương trình: $Q'(L) = 240L - 3L^2 = 0$

$\Leftrightarrow L = 80$ (nhận) hay $L = 0$ (loại).

+) Hàm số có điểm dừng: $L = 80$

+) Đạo hàm cấp 2 : $Q''(L) = 240 - 6L$, tại $L = 80$.

+) Ta có $Q''(80) = -240 < 0$.

Vậy khi lao động là 80 thì sản lượng tối đa là $Q_{max} = Q(80) = 256000$.

Bài toán 2. Giả sử một công ty sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết rằng hàm sản xuất ngắn hạn là $Q = Q(L)$ (L là lao động), giá sản phẩm P và giá một đơn vị lao động là p_L. Hãy xác định mức sử dụng lao động để công ty thu được lợi nhuận tối đa.

Giải quyết bài toán.

Bước 1. Tìm hàm tổng doanh thu: $TR(L) = PQ = P \cdot Q(L)$.

Bước 2. Tìm hàm chi phí: $TC(L) = p_L \cdot L$.

Bước 3. Tìm hàm lợi nhuận: $\pi(L) = TR(L) - TC(L)$.

Bước 4. Ta khảo sát cực trị của bài toán này với biến độc lập L là biến đầu vào và biến phụ thuộc π là biến đầu ra.

Chú ý. Để phù hợp với thực tế thì ta phải có mức lao động, sản lượng, chi phí, đơn giá và lợi nhuận đều dương.

Ví dụ 27. Cho biết hàm sản xuất ngắn hạn $Q = 100\sqrt[5]{L^3}$, $L > 0$ và giá của sản phẩm là $P = 5$ USD, giá thuê một đơn vị lao động là $p_L = 3$ USD. Hãy tìm mức sử dụng lao động để lợi nhuận tối đa.

Giải

Ta có

+) Hàm doanh thu: $TR(Q) = PQ = 500\sqrt[5]{L^3}$

+) Hàm chi phí : $TC(L) = p_L \cdot L = 3L$

+) Hàm lợi nhuận : $\pi(L) = 500\sqrt[5]{L^3} - 3L$

+) Đạo hàm cấp 1 : $\pi^{/}(L) = 300L^{-2/5} - 3$

+) Giải phương trình $\pi^{/}(L) = 0 \Leftrightarrow L = 100000$

+) Đạo hàm cấp 2: $\pi^{//}(L) = -120L^{-7/5}$

Xét lại $L = 100000$, ta có $\pi^{//}(100000) = -\dfrac{3}{250000} < 0$

Với $L = 100000$ thì lợi nhuận tối đa là $\pi_{max} = \pi(100000) = 200000$.

2.2.6.2. Tìm mức sản lượng Q để chi phí tối thiểu, doanh thu, lợi nhuận tối đa

Bài toán 1. Giả sử một công ty sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết rằng hàm tổng chi phí $TC = TC(Q)$ (Q là sản lượng). Hãy xác định sản lượng Q để tổng chi phí là bé nhất.

Giải quyết bài toán. Ta khảo sát cực trị của bài toán này với biến độc lập Q là biến đầu vào và biến phụ thuộc TC là biến đầu ra.

Chú ý. Để phù hợp với thực tế, ta phải có mức sản lượng và chi phí đều phải dương.

Ví dụ 28. Cho hàm tổng chi phí: $TC(Q) = Q^3 - 210Q^2 + 12000Q$, $(Q > 0)$. Hãy xác định mức sản lượng Q để chi phí bình quân nhỏ nhất.

Giải

+) Hàm chi phí bình quân:

$$AC(Q) = \frac{TC(Q)}{Q} = Q^2 - 210Q + 12000$$

+) Đạo hàm cấp 1: $AC^{/}(Q) = 2Q - 210$

+) Giải phương trình: $AC^{/}(Q) = 0 \Leftrightarrow Q = 105$

+) Đạo hàm cấp 2: $AC^{//}(Q) = 2 > 0$

Vậy khi $Q = 105$ thì chi phí bình quân đạt giá trị nhỏ nhất là

$$AC_{min} = AC(105) = 975.$$

Ví dụ 29. Cho biết hàm tổng chi phí: $TC(Q) = Q^3 - 9Q^2 + 60Q + 150 \ (Q \geq 0)$. Hãy xác định mức sản lượng Q để chi phí nhỏ nhất.

Giải

+) Đạo hàm cấp 1:

$$TC^{/}(Q) = 3Q^2 - 18Q + 60 \ (Q \geq 0)$$

+) Ta có

$$\Delta = (-18)^2 - 4.3.60 = -396 < 0$$

+) Với $a = 3 > 0 \Rightarrow TC^{/}(Q) > 0 \ (\forall Q \geq 0)$

Vậy $TC(Q)$ luôn tăng với $\forall Q \geq 0$, nên $TC(Q)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $Q = 0$.

Bài toán 2. Giả sử một công ty sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết rằng hàm tổng chi phí $TC = TC(Q)$ (Q là sản lượng) và hàm cầu của công ty là $Q_D = D(Q)$. Hãy xác định mức sản lượng Q để công ty thu được lợi nhuận tối đa.

Giải quyết bài toán.

Bước 1. Tìm hàm tổng doanh thu: $TR(Q) = PQ = D^{-1}(Q) \cdot Q$.

Bước 2. Tìm hàm lợi nhuận: $\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q)$.

Bước 3. Ta khảo sát cực trị của bài toán này với biến độc lập Q là biến đầu vào và biến phụ thuộc π là biến đầu ra.

Chú ý. Để phù hợp với thực tế thì ta phải có mức sản lượng, đơn giá, lợi nhuận đều dương.

Ví dụ 30. Một xí nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết hàm cầu là $Q_D = 656 - \frac{1}{2}P$ và hàm tổng chi phí $TC(Q) = Q^3 - 77Q^2 + 1000Q + 40000$. Hãy xác định mức sản lượng Q sao cho xí nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.

Giải

Với một mức sản lượng Q, để **bán hết sản phẩm**, thì xí nghiệp cần phải bán theo một đơn giá P sao cho $Q_D = Q$. Do đó, ta có

$$Q_D = Q \Leftrightarrow 656 - \frac{1}{2}P = Q \Leftrightarrow P = 1312 - 2Q,$$

Mặt khác **doanh thu** của xí nghiệp là

$$TR(Q) = P \times Q = (1312 - 2Q) \times Q = -2Q^2 + 1312Q$$

và **lợi nhuận** thu được của xí nghiệp là

$$\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) = -2Q^2 + 1312Q - (Q^3 - 77Q^2 + 1000Q + 40000)$$

Hay

$$\pi(Q) = -Q^3 + 75Q^2 + 312Q - 40000$$

Bây giờ ta tìm $Q > 0$ sao cho π đạt giá giạ lớn nhất. Ta có

$$\pi^{/}(Q) = -3Q^2 + 150Q^2 + 312$$

Suy ra,

$$\pi^{/}(Q) = 0 \Leftrightarrow -3Q^2 + 150Q + 312 = 0 \Leftrightarrow Q = 52 \text{ (nhận) hay } Q = -2 \text{ (loại)}.$$

Mặt khác, $\pi^{//}(Q) = -6Q + 150$ nên $\pi^{//}(52) = -162 < 0$.

Vậy $\pi(Q)$ đạt cực đại tại $Q = 52$.

Khi đó, ta có các kết quả phù hợp sau :

Lợi nhuận : $\pi = 38416$, đơn giá : $P = 1208$, tổng chi phí : $TC = 24400$.

Kết luận: Để đạt lợi nhuận cao nhất, xí nghiệp cần sản xuất với mức sản lượng $Q = 52$. Khi đó lợi nhuận tương ứng là $\pi = 38416$.

Ví dụ 31. Cho hàm tổng lợi nhuận:

$$\pi(Q) = -\frac{1}{3}Q^3 + 3Q^2 - 15Q + 500 \quad (Q \geq 0)$$

Hãy xác định mức sản lượng Q để lợi nhuận lớn nhất.

Giải

+) Đạo hàm cấp 1:

$$\pi^{/}(Q) = -Q^2 + 6Q - 15 \ (Q \geq 0)$$

+) Ta có $\Delta = 6^2 - 4.(-1).(-15) = -24 < 0$

+) Với $a = -1 < 0 \Rightarrow \pi^{/}(Q) < 0 \ (\forall Q \geq 0)$.

Vậy $\pi(Q)$ luôn giảm với $\forall Q \geq 0$, nên $\pi(Q)$ đạt giá trị lớn nhất khi $Q = 0$.

2.2.6.3. Bài toán thuế doanh thu

Bài toán. Giả sử một xí nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết hàm cầu là $Q_D = D(P)$ (P là đơn giá) và hàm tổng chi phí là $TC = TC(Q)$ (Q là sản lượng). Hãy xác định mức thuế t trên một đơn vị sản phẩm để có thể thu được nhiều thuế nhất từ xí nghiệp.

Giải quyết bài toán. Với một mức thuế t trên một đơn vị sản phẩm, xí nghiệp định mức sản lượng Q phụ thuộc vào thuế t sao cho đạt lợi nhuận tối đa. Với mức sản lượng Q, để **bán hết sản phẩm**, thì xí nghiệp cần phải bán theo một đơn giá P sao cho $Q_D = Q$. Do đó, ta có

$$D(P) = Q \Leftrightarrow P = D^{-1}(Q)$$

Doanh thu của xí nghiệp là

$$TR(Q) = P \times Q = D^{-1}(Q) \times Q$$

Trong đó tiền thuế xí nghiệp phải nộp là

$$T(t) = Q \times t.$$

Lợi nhuận của xí nghiệp là

$$\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) = D^{-1}(Q) \times Q - TC(Q) - T(t)$$

Vậy theo yêu cầu bài toán, ta cần tìm $Q = Q(t)$ sao cho $\pi(Q)$ đạt **giá trị lớn nhất**. Khi đó với tiền thuế mà xí nghiệp phải nộp là $T(t) = Q(t) \times t.$ Ta cần tìm giá trị $t > 0$ sao cho $T(t) = Q(t) \times t$ đạt cực đại.

Chú ý. Để phù hợp với thực tế thì tại $t > 0$ tìm được ta phải có mức sản lượng và đơn giá, lợi nhuận, tổng chi phí đều dương.

Ví dụ 32. Một xí nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết hàm cầu là $Q_D = 2000 - P$ và hàm tổng chi phí $TC(Q) = Q^2 + 1000Q + 50$. Hãy xác định mức thuế t trên một đơn vị sản phẩm để có thể thu được nhiều thuế nhất từ xí nghiệp.

Giải

Với một mức sản lượng Q, để **bán hết sản phẩm**, thì xí nghiệp cần phải bán theo một đơn giá P sao cho $Q_D = Q$. Do đó, ta có

$$Q_D = Q \Leftrightarrow 2000 - P = Q \Leftrightarrow P = 2000 - Q.$$

Mặt khác **doanh thu** của xí nghiệp là

$$TR(Q) = P \times Q = D^{-1}(Q) \times Q = (2000 - Q) \times Q = -Q^2 + 2000Q$$

Tiền thuế của xí nghiệp là : $T(t) = Q \times t$, và **lợi nhuận** thu được của xí nghiệp là :

$$\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) - Q \times t = -2Q^2 + (1000 - t)Q - 50$$

Bây giờ ta tìm $Q > 0$ sao cho π đạt giá giạ lớn nhất. Ta có

$$\pi^{/}(Q) = -4Q + 1000 - t$$

Suy ra

$$\pi^{/}(Q) = 0 \Leftrightarrow -4Q + (1000 - t) = 0 \Leftrightarrow Q = \frac{1}{4}(1000 - t).$$

Khi đó tiền thuế xí nghiệp phải nộp là : $T(t) = Q \times t = \frac{1}{4}(1000t - t^2)$

Ta cần xác định $t > 0$ sao cho $T(t)$ đạt cực đại.

Ta có

$$T^{/}(t) = \frac{1}{4}(1000 - 2t), \text{ suy ra } T^{/}(t) = 0 \Leftrightarrow 1000 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 500.$$

Vì $T^{//}(t) = -2 < 0$ nên $T(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại $t = 500$.

Khi đó, ta có các kết quả phù hợp sau :

Sản lượng: $Q = 125$,

Đơn giá: $P = 1875$,

Lợi nhuận: $\pi = 31200$, tổng chi phí : $TC = 14067$.

Tiền thuế thu được là: $T = 62500$. Khi định mức thuế trên một đơn vị sản phẩm là $t = 500$.

2.2.6.4. Bài toán thuế nhập khẩu

Bài toán. Cho biết hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm trong thị trường nội địa lần lượt là $Q_S = S(P)$ và $Q_D = D(P)$ (P là đơn giá). Biết rằng giá bán của loại sản phẩm đó trên thị trường quốc tế **cộng với chi phí nhập khẩu** (nhưng chưa tính thuế nhập khẩu) là $P_1 < P_0$, trong đó P_0 là đơn giá tại điểm cân bằng (là điểm mà tại đó mức cung bằng lượng cầu) của thị trường nội địa. Một công ty được độc quyền nhập loại sản phẩm trên. Hãy xác định mức thuế nhập khẩu t trên một đơn vị sản phẩm để thu được từ công ty nhiều thuế nhất (Giả sử khối lượng nhập khẩu của công ty không ảnh hưởng đến giá bán trên thị trường quốc tế).

Giải quyết bài toán. Gọi t là mức thuế nhập khẩu trên một đơn vị sản phẩm. Mức thuế t phải thoả điều kiện $t > 0$ và $t + P_1 < P_0$. Do được độc quyền, công ty sẽ nhập sản phẩm trên để bán với đơn giá P thoả $t + P_1 < P < P_0$ với số lượng là $Q_D - Q_S = D(P) - S(P)$. Khi đó lợi nhuận mà công ty thu được là :

$$\pi(P) = (P - P_1 - t)\left[D(P) - S(P)\right].$$

Tuy nhiên công ty sẽ chọn đơn giá để lợi nhuận đạt cao nhất. Do đó ta cần xác định P sao cho $\pi(P)$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó $P = P(t)$ và tiền thuế công ty phải nộp là :

$$T(t) = t \times \left[D(P(t)) - S(P(t))\right].$$

Để thu được thuế nhiều nhất từ công ty ta cần xác định giá trị $t > 0$ sao cho $T(t)$ đạt cực đại. Mức thuế phải thoả $t + P_1 < P_0$ và để phù hợp với thực tế ta phải có các đại lượng tương ứng như đơn giá, lượng cung, lượng cầu đều dương.

Ví dụ 33. Cho biết hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm trong thị trường nội địa lần lượt là $Q_S = P - 200$ và $Q_D = 4200 - P$ (P là đơn giá). Biết rằng giá bán của loại sản phẩm đó trên thị trường quốc tế cộng với chi phí nhập khẩu (nhưng chưa tính thuế nhập khẩu) là $P_1 = 1600$. Một công ty được độc quyền nhập loại sản phẩm trên. Hãy xác định mức thuế nhập khẩu t trên một đơn vị sản phẩm để thu được từ công ty nhiều thuế nhất. (Giả sử khối lượng nhập khẩu của công ty không ảnh hưởng đến giá bán trên thị trường quốc tế).

Giải

Trước hết ta tìm điểm cân bằng trong thị trường nội địa. Ta có

$$Q_D = Q_S \Leftrightarrow P - 200 = 4200 - P \Leftrightarrow P = 2200 \; (P_0 = 2200)$$

Gọi t là mức thuế trên một đơn vị sản phẩm thoả điều kiện :

$$1600 + t < 2200 \qquad (*)$$

Khi đó, lượng hàng mà công ty nhập về là :

$$Q_D - Q_S = (4200 - P) - (P - 200) = 4400 - 2P.$$

Lợi nhuận mà công ty thu được là :

$$\pi(P) = (P - P_1 - t)[Q_D - Q_S] = (P - 1600 - t)(4400 - 2P)$$

Đơn giá P được định ra sao cho $\pi(P)$ đạt cực đại. Ta có $\pi^{/}(P) = -4P + 2(3800 + t)$,

Suy ra

$$\pi^{/}(P) = 0 \Leftrightarrow -4P + 2(3800 + t) = 0 \Leftrightarrow P = 1900 + 0,5t,$$

và vì $\pi^{//}(P) = -4 < 0$ nên $\pi(P)$ đạt cực đại tại $P = 1900 + 0,5t.$

Khi đó tiền thuế mà công ty phải nộp là

$$T(t) = t[Q_D - Q_S] = t(4400 - 2P) = t(600 - t).$$

Ta cần xác định $t > 0$ sao cho $T(t)$ đạt giá trị lớn nhất. Ta có $T^{/}(t) = 600 - 2t$,

Suy ra $T^{/}(t) = 0 \Leftrightarrow 600 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 300.$

Vì $T^{//}(t) = -2 < 0$ nên $T(t)$ đạt cực đại tại $t = 300$, với $T(t) = 90000$. Thoả mãn (*) và ta có các số liệu phù hợp sau:

Đơn giá: $P = 2025 > 0$, lượng cung: $Q_S = 1850 > 0$, lượng cầu: $Q_D = 2150 > 0.$

Kết luận: Để thu được nhiều nhất thuế nhập khẩu từ công ty, cần định mức thuế trên một đơn vị sản phẩm là $t = 300$. Khi đó tiền thuế thu được là $T = 90000$.

2.2.6.5. Bài toán thuế xuất khẩu

Bài toán. Cho biết hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm trong thị trường nội địa lần lượt là $Q_S = S(P)$ và $Q_D = D(P)$ (P là đơn giá). Biết rằng giá bán của loại sản phẩm đó trên thị trường quốc tế **trừ đi chi phí xuất khẩu** (nhưng chưa trừ thuế xuất khẩu) là $P_1 > P_0$, trong đó P_0 là đơn giá tại điểm cân bằng (là điểm mà tại đó mức cung bằng lượng cầu) của thị trường nội địa. Một công ty được độc quyền nhập loại sản phẩm trên. Hãy xác định mức thuế xuất khẩu t trên một đơn vị sản phẩm để thu được từ công ty nhiều thuế nhất (Giả sử khối lượng xuất khẩu của công ty không ảnh hưởng đến giá bán trên thị trường quốc tế).

Giải quyết bài toán. Gọi t là mức thuế xuất khẩu trên một đơn vị sản phẩm. Mức thuế t phải thoả điều kiện $t > 0$ và $P_1 - t > P_0$. Do được độc quyền, công ty sẽ mua sản phẩm trên với đơn giá P thoả $P_0 < P < P_1 - t$ với số lượng là $Q_S - Q_D = S(P) - D(P)$. Khi đó lợi nhuận mà công ty thu được là :

$$\pi(P) = (P_1 - P - t)\left[S(P) - D(P)\right].$$

Tuy nhiên công ty sẽ chọn đơn giá mua để lợi nhuận tối đa. Do đó ta cần xác định P sao cho $\pi(P)$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó $P = P(t)$ và tiền thuế công ty phải nộp là:

$$T(t) = t \times \left[S(P(t)) - D(P(t))\right].$$

Để thu được thuế nhiều nhất từ công ty ta cần xác định giá trị $t > 0$ sao cho $T(t)$ đạt cực đại. Mức thuế phải thoả $P_1 - t > P_0$ và để phù hợp với thực tế ta phải có các đại lượng tương ứng như đơn giá, lượng cung, lượng cầu đều dương.

Ví dụ 34. Cho biết hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm trong thị trường nội địa lần lượt là $Q_S = P - 200$ và $Q_D = 4200 - P$ (P là đơn giá). Biết rằng giá bán của loại sản phẩm đó trên thị trường quốc tế trừ đi chi phí xuất khẩu (nhưng chưa trừ thuế xuất khẩu) là $P_1 = 3200$. Một công ty được độc quyền xuất khẩu loại sản phẩm trên. Hãy xác định mức thuế xuất khẩu t trên một đơn vị sản phẩm để thu được từ công ty nhiều thuế nhất. (Giả sử khối lượng nhập khẩu của công ty không ảnh hưởng đến giá bán trên thị trường quốc tế).

Giải

Trước hết ta tìm điểm cân bằng trong thị trường nội địa. Ta có

$$Q_D = Q_S \Leftrightarrow P - 200 = 4200 - P \Leftrightarrow P = 2200 \ (P_0 = 2200)$$

Gọi t là mức thuế trên một đơn vị sản phẩm thoả điều kiện :

$$t > 0; \quad 3200 - t > 2200 \qquad (*)$$

Khi đó, lượng hàng mà công ty xuất khẩu là :

$$Q_S - Q_D = (P - 200) - (4200 - P) = 2P - 4400.$$

Lợi nhuận mà công ty thu được là :

$$\pi(P) = (P_1 - P - t)\left[Q_S - Q_D\right] = (3200 - P - t)(2P - 4400)$$

Đơn giá P được định ra sao cho $\pi(P)$ đạt cực đại. Ta có

$$\pi^{/}(P) = -4P + 2(5400 - t),$$

suy ra

$$\pi^{/}(P) = 0 \Leftrightarrow -4P + 2(5400 - t) = 0 \Leftrightarrow P = 2700 - \frac{t}{2},$$

và vì $\pi^{//}(P) = -4 < 0,$ nên $\pi(P)$ đạt cực đại tại $P = 2700 - \frac{1}{2}t.$

Khi đó tiền thuế mà công ty phải nộp:

$$T(t) = t[Q_S - Q_D] = t(2P - 4400) = t(1000 - t).$$

Ta cần xác định $t > 0$ sao cho $T(t)$ đạt giá trị lớn nhất. Ta có

$$T^{/}(t) = 1000 - 2t\text{, suy ra } T^{/}(t) = 0 \Leftrightarrow 1000 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 500.$$

Vì $T^{//}(t) = -2 < 0$ nên $T(t)$ đạt cực đại tại $t = 500$, như vậy với $T(t) = 250000.$ Thoả mãn $(*)$, và ta có các số liệu phù hợp sau :

Đơn giá: $P = 2450 > 0$, lượng cung: $Q_S = 2250 > 0$, lượng cầu: $Q_D = 1750 > 0.$

Kết luận: Để thu được nhiều nhất thuế nhập khẩu từ công ty, cần định mức thuế trên một đơn vị sản phẩm là $t = 500.$ Khi đó tiền thuế thu được là $T = 250000.$

2.2.7. Hệ số tăng trưởng (nhịp tăng trưởng)

Cho hàm số $y = f(t)$, với t là biến thời gian. Tỉ số $r_y = \dfrac{f^{/}(t)}{f(t)}$ được gọi là hệ số tăng trưởng (nhịp tăng trưởng) của hàm số $y = f(t)$ tại thời điểm $t,$ nó cho biết % thay đổi của giá trị hàm số $y = f(t)$ khi t thay đổi một đơn vị.

Ví dụ 35. Cho hàm đầu tư $I(t) = I_0.e^{rt}, (I_0 > 0,\ r > 0),$ t tính theo năm. Hãy tính nhịp tăng trưởng của đầu tư.

Giải. Ta có

$$r_I = \frac{I^{/}(t)}{I(t)} = \frac{r.I_0.e^{rt}}{I_0.e^{rt}} = r > 0$$

Điều đó có nghĩa sau mỗi năm, đầu tư tăng xấp xỉ $r\%$.

Ví dụ 36. Cho hàm năng suất lao động $Q(t) = -2t^2 + 60t + 100,$ t tính theo năm. Tính nhịp tăng trưởng của Q tại $t = 10.$

Giải

Nhịp tăng trưởng của Q. Ta có :

$$r_Q = \frac{Q^{/}(t)}{Q(t)} = \frac{-4t + 60}{-2t^2 + 60t + 100}$$

Với $t = 10$ ta suy ra nhịp tăng trưởng của Q:

$$r_Q = \frac{Q^{/}(10)}{Q(10)} = \frac{20}{500} = \frac{1}{25}$$

Sau năm thứ 10, năng suất lao động chỉ tăng xấp xỉ (1/25)%.

Ví dụ 37. (Hệ số tăng trưởng của hàm hợp)

Cho hàm số $y = f\left[u(t)\right],$ t là biến thời gian

$$y = f\left[u(t)\right] \Rightarrow y_t^{/} = y_u^{/}.u_t^{/}$$

Hệ số tăng trưởng

$$r_y = \frac{y_t^{/}}{y} = \frac{y_u^{/}.u_t^{/}}{y} = \frac{y_u^{/}}{y}.u.\frac{u_t^{/}}{u} = \varepsilon_{yu}.r_u$$

Áp dụng cho trường hợp: $Q = 300\sqrt[3]{L^2},$ $L(t) = \sqrt{100 + 3t - t^2}$, t tính theo tháng

Hệ số co dãn của Q theo L:

$$\varepsilon_{QL} = Q^{/}(L)\frac{L}{Q} = \frac{2}{3}$$

Hệ số tăng trưởng của L:

$$r_L = \frac{L^{/}(t)}{L(t)} = \frac{3 - 2t}{2(100 + 3t - t^2)}$$

Hệ số tăng trưởng của Q:

$$r_Q = E_{QL}.r_L = \frac{2}{3}\frac{3 - 2t}{3(100 + 3t - t^2)}$$

Với $t = 3$. Ta có

$$r_L = \frac{-3}{200} \Rightarrow r_Q = \frac{2}{3}.\left(\frac{-3}{200}\right) = -\frac{1}{100} = -0,01.$$

2.2.8. Bài tập

Bài số 1. Cho hàm tiêu dùng (chi tiêu) phụ thuộc vào thu nhập như sau:

$$C = 0,8Y + 0,2\sqrt{Y} + 300 \ \ (Y \geq 0)$$

1) Tại mức thu nhập $Y_0 = 169$ USD nếu thu nhập tăng thêm 1 USD thì mức tiêu dùng thay đổi như thế nào?
2) Tính $MPC(Y)$ tại mức thu nhập $Y_0 = 144$ USD. Nêu ý nghĩa kết quả nhận được.

Đáp số: 1) $MPC(169) = 0,8077$ *; 2)* $MPC(144) = 0,8083$.

Bài số 2. Cho hàm tổng chi phí: $TC(Q) = 5000 + \dfrac{5Q^2}{Q+3}$

1) Tìm hàm chi phí cận biên $MC(Q)$.
2) Tính chi phí trung bình $AC(Q)$ tại $Q = 100$.
3) Tính hệ số co dãn của $TC(Q)$ theo Q tại $Q = 17$.

Đáp số: 1) $MC = \dfrac{5Q^2 + 30Q}{(Q+3)^2}$ *; 2)* $AC = \dfrac{5650}{103}$ *; 3)* $\varepsilon_{TC/Q} = 0,0164$.

Bài số 3. Cho hàm sản xuất $Q = 120L^{\frac{2}{3}}$ $(L > 0)$. Tại mức sử dụng lao động bất kỳ, nếu lao động tăng 10% hỏi sản lượng thay đổi bao nhiêu %.

Đáp số: $\varepsilon_{QL} = \dfrac{2}{3}$.

Bài số 4. Cho hàm sản xuất $Q = 100L^{0,5}$, biết giá sản phẩm là $P = 4$ USD và giá thuê một đơn vị lao động $p_L = 2$ USD. Hãy xác định mức sử dụng lao động để lợi nhuận thu được là tối đa.

Đáp số: $\pi_{max} = \pi(10000) = 20000$.

Bài số 5. Tìm hàm chi phí cận biên cho biết hàm chi phí bình quân:

$$AC(Q) = 3Q + 7 + \frac{36}{Q}$$

Đáp số: $MC = 6Q + 7$.

Bài số 6. Cho biết hàm tổng chi phí: $TC(Q) = Q^3 - 5Q^2 + 60Q$. Hãy xác định mức sản lượng Q để chi phí bình quân nhỏ nhất (với $Q > 0$).

Đáp số: $AC_{min}\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{215}{4}.$

Bài số 7. Cho biết hàm chi phí là $TC(Q)=Q^3-8Q^2+57Q+2,\ Q>0$ và hàm cầu $Q=90-2P.$ Hãy xác định mức sản lượng Q để lợi nhuận đạt cực đại.

Đáp số: $\pi_{max}=\pi(4)=6.$

Bài số 8. Cho biết hàm chi phí là $TC(Q)=4Q^3+5Q^2+500,\ Q>0$ và hàm cầu $Q=11160-P.$ Hãy xác định mức sản lượng Q để lợi nhuận đạt cực đại.

Đáp số: $\pi_{max}=\pi(30)=220900.$

Bài số 9. Cho biết hàm tổng chi phí TC và hàm cầu (đảo), hãy xác định mức sản lượng cho lợi nhuận tối đa (với $Q>0$):

1) $TC(Q)=Q^3-6Q^2+140Q+150$; $P=1400-7,5Q$.

2) $TC(Q)=0,2Q^2+4Q+57$; $P=9-0,25Q$.

Đáp số: 1) $\pi_{max}=\pi(20)=16450$*; 2)* $\pi_{max}=\pi\left(\frac{50}{9}\right)=-\frac{388}{9}\approx-43,111.$

Bài số 10. Cho hàm cầu: $Q=120-3P$. Hãy tính hệ số co dãn của cầu tại các mức giá $P=20$ và $P=30$ và giải thích ý nghĩa kết quả nhận được.

Đáp số: $\varepsilon_D(20)=-1;\ \varepsilon_D(30)=-3.$

Bài số 11. Cho hàm cầu $Q_D=\sqrt{400-0,01P^2}$

1) Hãy tính hệ số co dãn của cầu theo giá tại mức giá $P_0=120$ và giải thích ý nghĩa kết quả nhận được.

2) Xác định mức giá P để hệ số co dãn của cầu theo giá bằng -1.

Đáp số: 1) $\varepsilon=-0,5625$*; 2)* $100\sqrt{2}.$

Bài số 12. Cho hàm cầu $Q_D=3000e^{-0,004P}$. Hãy tính hệ số co dãn của cầu theo giá tại mức giá $P_0=100$ và giải thích ý nghĩa kết quả nhận được.

Đáp số: $\varepsilon=-0,4.$

Bài số 13. Cho hàm cầu đảo $P=150-3Q-Q^2.$ Hãy tính hệ số co dãn của sản lượng theo giá bán tại mức sản lượng $Q_0=10.$

Đáp số: $\varepsilon_D = -\frac{2}{23}$.

Bài số 14. Cho hàm doanh thu $R(x)$ phụ thuộc ngân sách dành cho quảng cáo x

$$R(x) = -2x^3 + 27x^2 + 132x + 207;\ 0 \le x \le 17.$$

Hãy xác định mức sử dụng ngân sách quảng cáo x để doanh thu tối đa.

Đáp số: $R_{max} = R(11) = 2264$.

Bài số 15. Cho hàm lợi nhuận phụ thuộc sản lượng như sau:

$$\pi(x) = -0,02x^2 + 300x - 200000;\ 0 \le x \le 20000$$

Hãy xác định mức sản lượng để tối đa hóa lợi nhuận.

Đáp số: $\pi_{max} = \pi(7500) = 925000$.

Bài số 16. Cho hàm sản xuất :

$$Y(t) = 0,2K^{0,4}L^{0,8} \text{ với } K(t) = 120 + 0,1t;\ L(t) = 300 + 0,3t.$$

Tính hệ số tăng trưởng của vốn K, lao động L và của Y.

Đáp số: $r_K = \frac{0,1}{120+0,1t}$; $r_L = \frac{0,1}{100+0,1t}$; $r_Y = \frac{0,04}{120+0,1t} + \frac{0,08}{100+0,1t}$.

Bài số 17. Thu nhập quốc dân (Y) của một quốc gia có dạng: $Y = 0,48K^{0,4}L^{0,3}X^{0,01}$, với K là vốn, L là lao động và X là xuất khẩu ròng. Cho nhịp tăng trưởng của X là 4%, của K là 3%, của L là 5%. Hãy xác định nhịp tăng trưởng của Y.

Đáp số: $r_Y = 0,0274$.

Bài số 18. Một xí nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết hàm cầu là $Q_D = 300 - P$ và hàm tổng chi phí $TC(Q) = Q^3 - 19Q^2 + 333Q + 10$. Hãy xác định mức sản lượng Q sao cho xí nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.

Đáp số: $\pi_{max} = \pi(11) = 474$.

Bài số 19. Một công ty có hàm cầu về sản phẩm và hàm tổng chi phí là:

$$P = 2750 - \frac{45}{8}Q;\ TC(Q) = \frac{Q^3}{30} - 15Q^2 + 2500Q$$

trong đó P là giá và Q là sản lượng.

1) Tính sản lượng và giá bán để tối đa hóa lợi nhuận? Tính và nêu ý nghĩa hệ số co dãn của cầu sản phẩm tại mức giá và sản lượng tối ưu?

2) Tìm giá bán để tối đa hóa sản lượng bán ra mà công ty không bị lỗ?

Đáp số: 1) $\pi_{max} = \pi(200) \approx 158333; \varepsilon = \frac{-13}{9}$*; 2) 305,778.*

Bài số 20. Một xí nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết hàm cầu là $Q_D = 2640 - P$ và hàm tổng chi phí $TC(Q) = Q^2 + 1000Q + 100$. Hãy xác định mức thuế t trên một đơn vị sản phẩm để có thể thu được nhiều thuế nhất từ xí nghiệp.

Đáp số: 820.

Bài số 21. Cho biết hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm trong thị trường nội địa lần lượt là $Q_S = P - 200$ và $Q_D = 1800 - P$ (P là đơn giá). Biết rằng giá bán của loại sản phẩm đó trên thị trường quốc tế cộng với chi phí nhập khẩu (nhưng chưa tính thuế nhập khẩu) là $P_1 = 500$. Một công ty được độc quyền nhập loại sản phẩm trên. Hãy xác định mức thuế nhập khẩu t trên một đơn vị sản phẩm để thu được từ công ty nhiều thuế nhất. (Giả sử khối lượng nhập khẩu của công ty không ảnh hưởng đến giá bán trên thị trường quốc tế).

Đáp số: 250.

Bài số 22. Cho biết hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm trong thị trường nội địa lần lượt là $Q_S = P - 20$ và $Q_D = 400 - P$ (P là đơn giá). Biết rằng giá bán của loại sản phẩm đó trên thị trường quốc tế trừ đi chi phí xuất khẩu (nhưng chưa trừ thuế xuất khẩu) là $P_1 = 310$. Một công ty được độc quyền xuất khẩu loại sản phẩm trên. Hãy xác định mức thuế xuất khẩu t trên một đơn vị sàn phẩm để thu được từ công ty nhiều thuế nhất. (Giả sử khối lượng nhập khẩu của công ty không ảnh hưởng đến giá bán trên thị trường quốc tế).

Đáp số: 50.

Bài số 23. Cho biết hàm cầu ngược và hàm chi phí của một nhà độc quyền như sau:

$$P = 200 - Q,\ TC = Q^2 \text{ (trong đó } P \text{ là giá, } Q \text{ là sản lượng)}$$

1) Tìm mức sản lượng và mức giá để lợi nhuận cực đại.
2) Tính hệ số co dãn của cầu tại mức tối đa hóa lợi nhuận.
3) Hãy xác định mức thuế t trên một đơn vị sản phẩm để có thể thu được nhiều thuế nhất của nhà độc quyền.

Đáp số: 1) $Q = 50, P = 150$*; 2)* -3*; 3)* $t = 100$.

2.3. Áp dụng tích phân vào phân tích kinh tế và kinh doanh

2.3.1. Bài toán tìm hàm tổng khi biết hàm cận biên

Giả sử biến số kinh tế y mang ý nghĩa tổng giá trị (tổng chi phí, tổng doanh thu, tổng tiêu dùng,…) là hàm số được xác định theo giá trị của đối số x:

$$y = f(x)$$

Nếu ta biết được hàm giá trị cận biên $My = f'(x)$ thì ta có thể xác định được hàm tổng $y = f(x)$ thông qua phép toán tích phân:

$$y = f(x) = \int f'(x)dx = \int Mydx$$

Hằng số C trong tích phân bất định trên được xác định nếu ta biết giá trị của y tại một điểm x_0 nào đó:

$$y_0 = f(x_0).$$

Ví dụ 38. Cho hàm sản phẩm biên của lao động: $MPL = 40.L^{-0,5}$. Hãy tìm hàm sản xuất ngắn hạn $Q = f(L)$, biết $Q(100) = 4000$.

Giải

Ta có

$$Q = f(L) = \int 40L^{-0,5}dL = 80L^{0,5} + C$$

Từ giả thiết:

$$Q(100) = 4000 \Leftrightarrow 80.100^{0,5} + C = 4000 \Leftrightarrow C = 3200$$

Vậy

$$Q = 80L^{0,5} + 3200.$$

Ví dụ 39. Cho hàm chi phí cận biên ở mỗi mức sản lượng Q là $MC(Q) = 8.e^{0,2Q}$ và chi phí cố định là: $FC = 50$. Tìm hàm tổng chi phí.

Giải

Ta có

$$TC(Q) = \int 8.e^{0,2Q}dQ = 40.e^{0,2Q} + C.$$

Chi phí cố định là chi phí ở mức $Q = 0$, do đó $FC = TC(0)$.

Suy ra

$$50 = 40 + C \text{ nên } C = 10.$$

Vậy

$$TC(Q) = 40e^{0,2Q} + 10.$$

Lưu ý. Chi phí khả biến là phần chi phí phụ thuộc vào mức sản lượng Q và bằng hiệu số của tổng chi phí và chi phí cố định. Trong trường hợp này:

$$VC(Q) = TC(Q) - FC = 40e^{0,2Q}$$

Ví dụ 40. Cho hàm doanh thu cận biên ở mỗi mức sản lượng Q là:

$$MR(Q) = 50 - 2Q - 3Q^2$$

Hãy xác định hàm tổng doanh thu và hàm cầu đối với sản phẩm.

Giải

Hàm tổng doanh thu $TR(Q)$ là nguyên hàm của hàm doanh thu cận biên:

$$TR(Q) = \int (50 - 2Q - 3Q^2)dQ = 50Q - Q^2 - Q^3 + C$$

Hiển nhiên khi $Q = 0$ doanh thu bán hàng là $TR(0) = 0 \Leftrightarrow C = 0$.

Vậy

$$TR(Q) = 50Q - Q^2 - Q^3$$

Gọi $P = P(Q)$ là hàm cầu đảo, tức là hàm ngược của hàm cầu $Q = D(P)$.

Ta có hàm doanh thu được tính như sau:

$$TR(Q) = P(Q) \cdot Q$$

Suy ra

$$P(Q) = \frac{TR(Q)}{Q} = 50 - Q - Q^2.$$

Ví dụ 41. Cho hàm tiêu dùng $C = C(Y)$ phụ thuộc vào mức thu nhập Y và xu hướng tiêu dùng cận biên $MPC(Y)$ ở mỗi mức thu nhập Y là: $MPC(Y) = 0,8 + 0,1Y^{-1/2}$. Hãy tìm hàm tiêu dùng, biết rằng mức tiêu dùng tự định là 50.

Giải

Ta có

$$C(Y) = \int (0,8 + 0,1Y^{-1/2})dY = 0,8Y + 0,2\sqrt{Y} + C$$

Mức tiêu dùng tự định là mức tiêu dùng khi không có thu nhập:

$$C(0)=50 \Leftrightarrow C=50$$

Vậy hàm tiêu dùng trong trường hợp này là:

$$C(Y)=0,8Y+0,2\sqrt{Y}+50.$$

Ví dụ 42. Cho hàm tiết kiệm $S=S(Y)$ phụ thuộc vào mức thu nhập Y và xu hướng tiết kiệm cận biên $MPS(Y)$ ở mỗi mức thu nhập Y là: $MPS(Y)=-8+0,4Y$. Hãy tìm hàm tiết kiệm, biết rằng mức tiết kiệm sẽ là $S=40$ khi mức thu nhập $Y=10$.

Giải

Ta có

$$S(Y)=\int(-8+0,4Y)dY=-8Y+0,2Y^2+C$$

Mức tiết kiệm là $S=40$ khi thu nhập $Y=10$: $S(10)=40 \Leftrightarrow C=100$

Vậy hàm tiết kiệm trong trường hợp này là:

$$S(Y)=100-8Y+0,2Y^2.$$

Ví dụ 43. Một doanh nghiệp có hàm doanh thu cận biên: $MR(Q)=960-0,15Q^2$. Hãy tìm tổng doanh thu nếu doanh nghiệp định giá sản phẩm là 715.

Giải

Hàm tổng doanh thu $TR(Q)$ là nguyên hàm của hàm doanh thu cận biên:

$$TR(Q)=\int\left(960-0,15Q^2\right)dQ=960Q-0,05Q^3+C$$

Hiển nhiên khi $Q=0$ doanh thu bán hàng là $TR(0)=0 \Leftrightarrow C=0$.

Vậy

$$TR(Q)=960Q-0,05Q^3$$

Gọi $P=P(Q)$ là hàm cầu đảo, tức là hàm ngược của hàm cầu $Q=D(P)$.

Ta có hàm doanh thu được tính như sau: $TR(Q)=P(Q)\cdot Q$

Suy ra

$$P(Q)=\frac{TR(Q)}{Q}=960-0,05Q^2.$$

Với $P=715 \Leftrightarrow 960-0,05Q^2=715 \Leftrightarrow Q=70$

Vậy tổng doanh thu: $TR=PQ=715\cdot 70=50050.$

2.3.2. Bài toán tìm hàm quỹ vốn khi biết hàm đầu tư

Giả sử lượng đầu tư I (tốc độ bổ sung vốn) và quỹ vốn K là các hàm số của biến thời gian t:

$$I = I(t),\ K = K(t)$$

Giữa quỹ vốn và đầu tư có quan hệ $I(t) = K'(t)$ (lượng đầu tư tại thời điểm t, biểu thị tốc độ tăng vốn tại thời điểm đó), do đó nếu biết hàm đầu tư $I(t)$ thì hàm quỹ vốn $K(t)$ được xác định như sau:

$$K(t) = \int K'(t)dt = \int I(t)dt$$

Hằng số C trong tích phân bất định trên được xác định nếu ta biết quỹ vốn tại một thời điểm nào đó.

Ví dụ 44. Cho hàm đầu tư sau $I(t) = 3t^{1/2}$ (nghìn đô la một tháng) và quỹ vốn tại thời điểm $t = 1$ là $K(1) = 10$ (nghìn đô la). Hãy xác định hàm quỹ vốn $K(t)$ và lượng vốn tích lũy được từ tháng thứ 4 đến tháng thứ 9.

Giải

Quỹ vốn tại thời điểm t là:

$$K(t) = \int 3t^{1/2}dt = 2t^{3/2} + C.$$

Tại thời điểm $t = 1$ thì $K(1) = 2 + C = 10$, do đó: C = 8

$$K(t) = 2t^{3/2} + 8 \text{ (nghìn đô la)}$$

Lượng vốn tích lũy được từ tháng thứ 4 đến tháng thứ 9 được tính theo công thức:

$$K(9) - K(4) = 2t^{\frac{3}{2}}\Big|_4^9 = 38 \text{ (nghìn đô la).}$$

Ví dụ 45. Giả sử lượng đầu tư tại thời điểm t được xác định dưới dạng hàm số

$$I(t) = 140t^{0,75}$$

và quỹ vốn tại thời điểm xuất phát là $K(0) = 150$. Hãy xác định hàm quỹ vốn $K(t)$.

Giải

Quỹ vốn tại thời điểm t là:

$$K(t) = \int 140t^{3/4}dt = 80t^{7/4} + C.$$

Tại thời điểm xuất phát $K(0) = C = 150$, do đó

$$K(t) = 80\sqrt[4]{t^7} + 150 \text{ (nghìn đô la).}$$

2.3.3. Tính thặng dư của nhà sản xuất (PS) và thặng dư của người tiêu dùng (CS)

Cho hàm cầu $Q_D = D(P)$ hoặc hàm cầu đảo $P = D^{-1}(Q_D)$ (hàm ngược của hàm cầu $Q_D = D(P)$). Giả sử điểm cân bằng của thị trường là (P_0, Q_0) và hàng hoá được bán với giá P_0. Khi đó thặng dư của người tiêu dùng được tính theo công thức:

$$CS = \int_0^{Q_0} D^{-1}(Q)dQ - P_0Q_0.$$

Cho hàm cung $Q_S = S(P)$ hoặc hàm cung đảo $P = S^{-1}(Q_S)$. Nếu hàng hoá được bán ở mức giá cân bằng P_0 thì thặng dư của nhà sản xuất được tính theo công thức:

$$PS = P_0Q_0 - \int_0^{Q_0} S^{-1}(Q)dQ.$$

Ví dụ 45. Cho các hàm cung và cầu sau:

$$Q_S = \sqrt{P-2} - 1,\ Q_D = \sqrt{43-P} - 2.$$

Hãy tính thặng dư của nhà sản xuất và thặng dư của người tiêu dùng.

Giải

Các hàm cầu đảo và cung đảo lần lượt là:

$$D^{-1}(Q) = 43 - (Q+2)^2,\ \ S^{-1}(Q) = (Q+1)^2 + 2$$

Sản lượng cân bằng Q_0 là nghiệm dương của phương trình: $D^{-1}(Q) = S^{-1}(Q)$

Suy ra:

$$Q_0 = 3 \text{ và } P_0 = 18$$

Thặng dư nhà sản xuất được tính theo công thức:

$$PS = 18\times 3 - \int_0^3 \left[(Q+1)^2 + 2\right]dQ = 27.$$

Thặng dư người tiêu dùng được tính theo công thức:

$$CS = \int_0^3 \left[43 - (Q+2)^2\right]dQ - 18\times 3 = 36.$$

2.3.4. Bài tập

Bài số 1. Cho hàm sản phẩm cận biên của lao động: $MPL(L) = 60.L^{-\frac{2}{3}}$. Hãy tìm hàm sản xuất ngắn hạn $Q = f(L)$, biết $Q(100) = 10000$.

Đáp số: $Q(L) = 180\sqrt[3]{L} + 10000 - 180\sqrt[3]{100}$.

Bài số 2. Cho biết chi phí cận biên ở mỗi mức sản lượng Q như sau:

$MC(Q) = 120 - 40Q + 0,3Q^2$ và chi phí cố định: $FC = 300$

1) Hãy tìm hàm tổng chi phí và hàm chi phí khả biến.
2) Tính giá trị chi phí cận biên tại mức sản lượng $Q_0 = 140$ và nêu ý nghĩa.

Đáp số: 1) $TC(Q) = 0,1Q^3 - 20Q^2 + 120Q + 300$; $VC = 0,1Q^3 - 20Q^2 + 120Q$;

2) $MC(140) = 400$.

Bài số 3. Cho biết chi phí cận biên ở mỗi mức sản lượng Q: $MC(Q) = 15e^{0,3Q}$ và chi phí cố định: $FC = 120$. Hãy tìm hàm tổng chi phí.

Đáp số: $TC = 50e^{0,3Q} + 70$.

Bài số 4. Cho biết doanh thu cận biên ở mỗi mức sản lượng Q: $MR(Q) = 40Q - 16e^{0,4Q}$. Hãy tìm hàm tổng doanh thu.

Đáp số: $TR = 40 + 20Q^2 - 40e^{0,4Q}$.

Bài số 5. Cho biết hàm doanh thu cận biên: $MR(Q) = 84 - 4Q - Q^2$. Hãy cho biết hàm tổng doanh thu $TR(Q)$ và hàm cầu.

Đáp số: $TR = 84Q - 2Q^2 - \frac{1}{3}Q^3$; $P = 84 - 2Q - \frac{1}{3}Q^2$.

Bài số 6. Cho biết xu hướng tiêu dùng cận biên $MPC(Y) = 0,8$ ở mọi mức thu nhập Y và $C = 800$ khi $Y = 0$. Hãy xác định hàm tiêu dùng $C(Y)$.

Đáp số: $C(Y) = 0,8Y + 800$.

Bài số 7. Cho biết xu hướng tiết kiệm cận biên $MPS(Y) = 0,9Y^{-0,5}$ ở mọi mức thu nhập Y và $S = 500$ khi $Y = 100$. Hãy xác định hàm tiết kiệm $S(Y)$.

Đáp số: $S(Y)=\dfrac{9}{5}Y^{0,5}+482.$

Bài số 8. Cho Y là thu nhập, S là tiết kiệm. Biết rằng mức tiết kiệm sẽ là $S=-7,42$ khi thu nhập $Y=5.$

1) Hãy xác định hàm tiết kiệm nếu biết khuynh hướng tiết kiệm cận biên là

$$MPS(Y)=Y-0,4.$$

2) Kể từ mức thu nhập dương nào trở nên sẽ có mức tiết kiệm dương?

Đáp số: 1) $S(Y)=\dfrac{Y^2}{2}-0,4Y-17,92;$ *2)* $Y>6,2.$

Bài số 9. Tìm hàm tổng nhập khẩu $M(Y)$ với Y là thu nhập quốc dân nếu khuynh hướng nhập khẩu cận biên là $M^{/}(Y)=0,1$ và $M=20$ khi $Y=0.$

Đáp số: $M(Y)=0,1Y+20.$

Bài số 10. Cho biết doanh thu cận biên ở mỗi mức sản lượng Q:

$$MR(Q)=\frac{10}{(1+Q)^2}.$$

1) Hãy tìm hàm tổng doanh thu.

2) Tại mức sản lượng $Q=4$. Nếu tăng giá 1% thì sản lượng thay đổi như thế nào?

Đáp số: 1) $TR(Q)=\dfrac{10Q}{1+Q}$; *2) Sản lượng giảm 1,25%.*

Bài số 11. Cho biết doanh thu cận biên ở mỗi mức sản lượng Q của một doanh nghiệp như sau:

$$MR(Q)=1800-1,8Q^2.$$

1) Hãy tìm hàm tổng doanh thu

2) Hãy cho biết tại mức sản lượng $Q=10$. Nếu doanh nghiệp giảm giá 1% thì mức cầu sẽ biến động như thế nào?

Đáp số: 1) $TR=1800Q-0,6Q^3$*; 2) Sản lượng tăng 14,5%.*

Bài số 12. Cho Y là thu nhập, S là tiết kiệm. Biết rằng mức tiết kiệm sẽ là $S=0$ khi thu nhập $Y=81$. Hãy xác định hàm tiết kiệm nếu biết khuynh hướng tiết kiệm cận biên là

$$MPS(Y)=0,3-0,1Y^{-0,5}$$

Đáp số: $S(Y)=0,3Y-0,2Y^{0,5}-22,5.$

Bài số 13. Cho biết hàm đầu tư: $I=40\sqrt[5]{t^3}$.

Hãy cho biết hàm quỹ vốn $K(t)$, biết rằng quỹ vốn tại thời điểm $t=0$ là 75.

Đáp số: $K(t)=25\sqrt[5]{t^8}+75.$

Bài số 14. Cho biết hàm đầu tư $I=60\sqrt[3]{t}$ và quỹ vốn tại thời điểm $t=1$ là 85. Hãy cho biết hàm quỹ vốn $K(t)$.

Đáp số: $K(t)=45\sqrt[3]{t^4}+40.$

Bài số 15. Cho biết hàm đầu tư: $I=12\sqrt[3]{t}$ (t là biến thời gian).

1) Hãy cho biết hàm quỹ vốn $K(t)$, biết rằng $K(0)=25$.
2) Xác định tổng lượng vốn tích lũy được trong khoảng thời gian $t\in[1,10]$.

Đáp số: 1) $K(t)=9\sqrt[3]{t^4}+25$; *2) 185.*

Bài số 16. Cho biết hàm cầu: $P=42-5Q-Q^2$. Giả sử giá cân bằng là $P_0=6$. Hãy tính thặng dư của người tiêu dùng.

Đáp số: $CS=\dfrac{248}{3}.$

Bài số 17. Cho biết hàm cầu và hàm tổng chi phí như sau

$$P=110-Q \text{ và } TC=Q^3-25Q^2+2Q+3000;\ Q>0$$

1) Tìm sản lượng Q và giá bán P để lợi nhuận cực đại.
2) Tìm thặng dư của người tiêu dùng tại mức sản lượng để lợi nhuận cực đại.

Đáp số: 1) $Q=18,\ P=92,\ \pi_{max}=888$*; 2)* $CS=162.$

Bài số 18. Cho hàm cầu và hàm tổng chi phí

$$P=124-2Q \text{ và } TC(Q)=2Q^3-59Q^2+4Q+7600;\ Q>0$$

1) Hãy xác định mức sản lượng Q để tối đa hóa lợi nhuận.
2) Tính thặng dư của người tiêu dùng tại điểm tối đa hóa lợi nhuận.

Đáp số: 1) $\pi_{max}=\pi(20)=1600$*; 2)* $CS=400.$

Bài số 19. Cho biết hàm cầu và hàm cung đảo:

$$D^{-1}(Q) = 65 - Q^2;\ S^{-1}(Q) = \frac{1}{3}Q^2 + 2Q + 5$$

Hãy tính thặng dư của nhà sản xuất và thặng dư của người tiêu dùng.

Đáp số: $CS = 144$; $PS = 84$.

Bài số 20. Cho biết hàm cầu và hàm cung:

$$D^{-1}(Q) = -0,1Q^2 + 90;\ S^{-1}(Q) = 0,2Q^2 + Q + 50.$$

Hãy tính thặng dư của nhà sản xuất và thặng dư của người tiêu dùng.

Đáp số: $CS = \frac{200}{3}$; $PS = \frac{550}{3}$.

Bài số 21. Cho biết hàm cầu và hàm cung:

$$D^{-1}(Q) = 131 - \frac{1}{3}Q^2;\ S^{-1}(Q) = 50 + \frac{2}{3}Q^2.$$

Hãy tính thặng dư của nhà sản xuất và thặng dư của người tiêu dùng.

Đáp số: $CS = 162$; $PS = 324$.

Bài số 22. Cho biết hàm cầu và hàm cung:

$$D^{-1}(Q) = \sqrt{245 - 2Q};\ S^{-1}(Q) = 5 + Q.$$

Hãy tính thặng dư của nhà sản xuất và thặng dư của người tiêu dùng.

Đáp số: $CS = 3,29$; $PS = 50$.

Bài số 23. Cho biết hàm cầu và hàm cung:

$$D^{-1}(Q) = \frac{16}{Q+2} - 3;\ S^{-1}(Q) = \frac{1}{3}(Q+1).$$

Hãy tính thặng dư của nhà sản xuất và thặng dư của người tiêu dùng.

Đáp số: $CS = 16\ln 2 - 8$; $PS = \frac{2}{3}$.

Bài số 24. Cho biết hàm cầu và hàm cung:

$$Q_D = \sqrt{113 - P};\ Q_S = \sqrt{P} - 1.$$

Hãy tính thặng dư của nhà sản xuất và thặng dư của người tiêu dùng.

Đáp số: $CS = \frac{686}{3}$; $PS = \frac{833}{3}$.

2.4. Phương trình vi phân và áp dụng kinh tế

2.4.1. Tìm hàm cầu khi biết hệ số co dãn của cầu theo giá

Chúng ta đã biết công thức tính hệ số co dãn của cầu theo giá như sau:

$$\varepsilon_D = Q_D^{/}(P)\cdot\frac{P}{Q_D} = \frac{dQ_D}{dP}\cdot\frac{P}{Q_D}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dQ}{Q_D} = \varepsilon_D\cdot\frac{dP}{P} \qquad (*)$$

Trong đó: Q_D là lượng cầu, P là giá sản phẩm.

Cách giải

Lấy tích phân 2 vế của phương trình (*), ta có

$$\int\frac{dQ_D}{Q_D} = \int\varepsilon_D\frac{dP}{P}$$

Suy ra

$$\ln Q_D = \int\varepsilon_D\frac{dP}{P}$$

Lưu ý.

Để xác định hằng số C trong tích phân bất định, ta cần có thông tin về lượng cầu của một mức giá cụ thể.

Ví dụ 46. Cho hệ số co dãn của hàm cầu là: $\varepsilon_D = -2$

Tìm hàm cầu Q_D biết rằng $Q(1) = 20.$

Giải

Từ hệ số co dãn ta có

$$\frac{dQ}{dP}\cdot\frac{P}{Q} = -2 \Leftrightarrow \frac{dQ}{Q} = -2\frac{dP}{P}$$

Suy ra

$$\ln|Q| = -2\ln|P| + C \Leftrightarrow Q = AP^{-2} \quad (A \text{ là hằng số})$$

Từ giả thiết

$$Q(1) = 20 \Leftrightarrow 20 = A \Leftrightarrow A = 20$$

Vậy

$$Q = 20P^{-2}.$$

Ví dụ 47. Cho hệ số co dãn của hàm cầu là

$$\varepsilon_D = \frac{-2P}{2000-2P}$$

Tìm hàm cầu Q_D biết rằng $Q(0)=2000$.

Giải

Từ hệ số co dãn ta có

$$\frac{dQ}{dP}\cdot\frac{P}{Q} = \frac{-2P}{2000-2P} \Leftrightarrow \frac{dQ}{Q} = \frac{-dP}{1000-P}$$

Suy ra

$$\ln|Q| = \ln|1000-P| + C \Leftrightarrow Q = A(1000-P) \quad (A \text{ là hằng số})$$

Từ giả thiết

$$Q(0)=2000 \Leftrightarrow 2000 = 1000A \Leftrightarrow A = 2$$

Vậy

$$Q = 2000-2P.$$

2.4.2. Biến động của giá trên thị trường theo thời gian

Giả sử một sản phẩm đang được lưu thông trên thị trường với hàm cung Q_S và hàm cầu Q_D. Gọi P_0, Q_0 lần lượt giá và lượng cân bằng. Nếu tại thời điểm bắt đầu việc nghiên cứu $t=0$, $P(0)=p_0$ thì thị trường đã đạt được sự cân bằng. Nhưng nếu $P(0)\neq p_0$, nghĩa là thị trường chưa đạt được sự cân bằng. Để đạt được sự cân bằng cần có thời gian để điều chỉnh, khi đó P, Q_S, Q_D là các hàm theo thời gian t. Vấn đề đặt ra là sự điều chỉnh giá P có đạt được mức giá cân bằng thị trường theo thời gian hay không? Nghĩa là $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t) = P(0)$.

Sự thay đổi của giá phụ thuộc lượng cung, cầu trên thị trường, để đơn giản chúng ta giả thiết rằng tỷ lệ của sự thay đổi giá tại mọi thời điểm tỷ lệ thuận với độ chênh lệch giữa cầu và cung $(Q_D - Q_S)$ tại thời điểm đó.

Nếu như vậy ta có thể diễn tả bằng phương trình:

$$\frac{dP}{dt} = \Delta(Q_D - Q_S) \qquad (*)$$

Trong đó $\Delta > 0$ là một hằng số thích hợp, gọi là hệ số điều chỉnh

Lưu ý. Khi $\frac{dP}{dt}=0$ khi và chỉ khi $Q_S=Q_D$. Điều đó có nghĩa là $\frac{dP}{dt}=0$ xảy ra tại mọi thời điểm cân bằng.

Giải phương trình vi phân (*) ta tìm được hàm $P(t)$.

Ví dụ 48. Cho hàm cung và hàm cầu

$$Q_S=3P-60;\ Q_D=30-P$$

Nếu $Q_D=Q_S$ thì giá cân bằng $P_0=\frac{45}{2}$

Giả sử $\frac{dP}{dt}=\frac{1}{2}(Q_D-Q_S)$ và $P(0)=30$

Từ

$$\frac{dP}{dt}=\frac{1}{2}(Q_D-Q_S)\Leftrightarrow\frac{dP}{dt}=45-2P$$

$$\Leftrightarrow P'+2P=45 \qquad (*)$$

+) Bước 1. Một nguyên hàm của 2 là $2t$

+) Bước 2. Chọn thừa số tích phân: e^{2t}

+) Bước 3. Nhân 2 vế của (*) cho e^{2t} ta được

$$e^{2t}P'+e^{2t}2P=45e^{2t}$$

$$\Leftrightarrow\left(e^{2t}P\right)'=45e^{2t} \qquad (**)$$

+) Bước 4. Lấy tích phân 2 vế của (**), ta được

$$e^{2t}P=\frac{45}{2}e^{2t}+C$$

Suy ra $P(t)=\frac{45}{2}+Ce^{-2t}$ (C là hằng số)

Từ giả thiết : $P(0)=30\Leftrightarrow\frac{45}{2}+C=30\Leftrightarrow C=\frac{15}{2}$

Vậy

$$P(t)=\frac{45}{2}+\frac{15}{2}e^{-2t}$$

Nhận thấy : $\lim\limits_{t\to+\infty}P(t)=\frac{45}{2}=P_0$.

Ví dụ 49. Cho hàm cung và hàm cầu

$$Q_S = P - 20;\ Q_D = 60 - 2P$$

Tìm hàm giá phụ thuộc vào thời gian t, biết rằng $P(0) = 40$ và $P(2) = 30.$

Giải

Ta có

$$\frac{dP}{dt} = k\left(Q_D - Q_S\right)$$

Thay hàm cung hàm cầu vào, ta có

$$\frac{dP}{dt} = k\left(80 - 3P\right)$$

$$\Leftrightarrow P' + 3kP = 80k \qquad (*)$$

+) Bước 1. Một nguyên hàm của $3k$ là $3kt$

+) Bước 2. Chọn thừa số tích phân: e^{3kt}

+) Bước 3. Nhân 2 vế của (*) cho e^{3kt} ta được

$$e^{3kt}P' + e^{3kt}3kP = 80ke^{3kt}$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{3kt}P\right)' = 80ke^{3kt} \qquad (**)$$

+) Bước 4. Lấy tích phân 2 vế của (**), ta được

$$e^{3kt}P = \frac{80}{3}e^{3kt} + C$$

Suy ra $P(t) = \dfrac{80}{3} + Ce^{-3kt}$ (C là hằng số)

Từ giả thiết : $P(0) = 40 \Leftrightarrow \dfrac{80}{3} + C = 40 \Leftrightarrow C = \dfrac{40}{3}$

Ta có

$$P(t) = \frac{80}{3} + \frac{40}{3}e^{-3kt}$$

Từ giả thiết : $P(2) = 30 \Leftrightarrow \dfrac{80}{3} + \dfrac{40}{3}e^{-6k} = 30 \Leftrightarrow k = 0,231$

Vậy

$$P(t) = \frac{80}{3} + \frac{40}{3}e^{-0,693t}.$$

2.4.3. Bài tập

Bài số 1. Tìm hàm cầu Q_D cho biết hệ số co dãn của cầu theo giá là

$$\varepsilon_D = -\frac{5P + 2P^2}{Q}$$

và lượng cầu ở mức giá $P = 10$ là 500.

Đáp số: $Q(P) = 650 - 5P - P^2$.

Bài số 2. Biết hệ số co dãn của cầu theo giá là: $\varepsilon_D = \dfrac{6P - 4P^2}{Q}$

Hãy tìm hàm cầu, biết rằng $Q = 700$ khi $P = 10$.

Đáp số: $Q = 6P - 2P^2 + 840$.

Bài số 3. Tìm hàm cầu biết hệ số co dãn của cầu theo giá là $\varepsilon_D = -2$, và ở mức giá $P = 2$ thì lượng cầu $Q = 100$.

Đáp số: $Q = 400P^{-2}$.

Bài số 4. Cho hàm cung và hàm cầu: $Q_S = P - 200$; $Q_D = 4200 - P$. Tìm hàm giá phụ thuộc vào thời gian t, biết rằng hệ số điều chỉnh $\Delta = \dfrac{1}{2}$ và $P(0) = 3000$.

Đáp số: $P(t) = 2200 + 800e^{-t}$.

Bài số 5. Cho hàm cung và hàm cầu: $Q_D = 8 - 2P$; $Q_S = 2 + P$. Tìm hàm giá phụ thuộc vào thời gian t, biết rằng $P(0) = 5$ và $P(2) = 3$.

Đáp số: $P(t) = 2 + 3e^{-0,549t}$.

Bài số 6. Cho hàm cung và hàm cầu: $Q_D = 7 - P$; $Q_S = 1 + P$. Tìm hàm giá phụ thuộc vào thời gian t, biết rằng $P(0) = 6$ và $P(4) = 4$.

Đáp số: $P(t) = 3 + 3e^{-0,2747t}$.

Bài số 7. Cho hàm cung và hàm cầu: $Q_D = 11 - 3P$; $Q_S = 5 + P$. Tìm hàm giá phụ thuộc vào thời gian t, biết rằng $P(0) = 10$ và $P(3) = 7$.

Đáp số: $P(t) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{17}{2}e^{-0,1451t}$.

Thuật ngữ chính chương 2	
Tiếng Anh	**Tiếng Việt**
Average Cost	Chi phí bình quân
Compound Interest	Lãi kép
Consumers' Surplus	Thặng dư của người tiêu dùng
Differential equations of the first order	Phương trình vi phân cấp 1
Linear differential equations	Phương trình vi phân tuyến
Elasticity coefficient	Hệ số co dãn
Elasticity of demand	Độ co dãn của cầu
Fixed Cost	Chi phí cố định
Future Value	Giá trị tương lai
Marginal Cost	Chi phí cận biên
Marginal product of labor	Sản phẩm cận biên của lao động
Marginal product of Capital	Sản phẩm cận biên của vốn
Marginal Propensity to Consume	Xu hướng tiêu dùng cận biên
Marginal Propensity to Save	Xu hướng tiết kiệm cận biên
Marginal Profit	Lợi nhuận cận biên
Marginal Revenue	Doanh thu cận biên
Net Present Value	Hiện giá thuần
Product	Sản phẩm
Profit	Lợi nhuận
Production Cost	Chi phí sản xuất
Producers' Surplus	Thặng dư của nhà sản xuất
Present Value	Giá trị hiện tại
Revenue	Doanh thu
Single Interest	Lãi đơn
The Law of diminishing returns	Quy luật lợi ích cận biên giảm dần
Total Cost	Tổng chi phí
Total Revenue	Tổng doanh thu
Variable Cost	Chi phí biến đổi

Chương 3

Áp dụng phép toán vi phân hàm nhiều biến vào phân tích kinh tế và kinh doanh

3.1. Các hàm số nhiều biến trong phân tích kinh tế

3.1.1. Hàm sản suất

Khi phân tích hoạt động sản xuất, các nhà kinh tế quan tâm đến hai yếu tố đầu vào quan trọng là vốn (capital) và lao động (labor) và chúng được ký hiệu là K và L. Do đó, hàm sản xuất có dạng:

$$Q = f(K, L).$$

Ý nghĩa.

Hàm sản xuất biểu diễn sự phụ thuộc của sản lượng hàng hoá vào hai yếu tố đầu vào vốn (tư bản) và lao động.

Một hàm sản xuất mà kinh tế học thường sử dụng là hàm sản xuất dạng Cobb – Douglas có dạng: $Q = aK^{\alpha}L^{\beta}$

Trong đó: a, α, β là các hằng số dương.

3.1.2. Hàm doanh thu, chi phí, lợi nhuận

3.1.2.1 Hàm chi phí

+) Hàm chi phí phụ thuộc đầu vào: $TC = TC(K, L)$.

Nếu tính theo các yếu tố sản xuất thì hàm chi phí là hàm số của các yếu tố sản xuất và có dạng:

$$TC(K, L) = p_K K + p_L L + C_0.$$

Trong đó:

p_K : Giá thuê một đơn vị vốn (tư bản).

p_L : Giá thuê một đơn vị lao động.

C_0 : Chi phí cố định.

+) Hàm chi phí kết hợp: $TC = TC(Q_1, Q_2)$.

Trong đó

Q_1: Số đơn vị hàng hóa 1;

Q_2: Số đơn vị hàng hóa 2.

3.1.2.2. Hàm doanh thu và hàm lợi nhuận

+) Nếu doanh nghiệp là doanh nghiệp cạnh tranh thì tổng doanh thu của doanh nghiệp phụ thuộc vào K, L và có dạng:

$$TR = P \cdot f(K,L) = TR(K,L) \quad (P: \text{ là giá sản phẩm})$$

+) Hàm doanh thu gộp:

$$TR = TR_1 + TR_2 = P_1.Q_1 + P_2.Q_2 = TR(Q_1,Q_2)$$

Với P_1: là giá sản phẩm mặt hàng 1, P_2: là giá sản phẩm mặt hàng 2.

3.1.2.3. Hàm lợi nhuận

Hàm lợi nhuận: $\pi = TR - TC$

+) Hàm lợi nhuận phụ thuộc đầu vào

$$\pi = P.f(K,L) - (p_k K + p_L L + C_0) = \pi(K,L)$$

+) Hàm lợi nhuận phụ thuộc đầu ra

$$\pi(Q_1,Q_2) = TR(Q_1,Q_2) - TC(Q_1,Q_2).$$

3.1.3. Hàm lợi ích

Giả sử cơ cấu tiêu dùng của người tiêu dùng gồm có n mặt hàng. Mỗi giỏ hàng là một bộ gồm n số thực $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, trong đó x_1 là lượng hàng hoá T_1, x_2 là lượng hàng hoá $T_2, ..., x_n$ là lượng hàng hoá T_n. Hàm lợi ích là hàm số đặt tương ứng với mỗi túi hàng $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ với một giá trị U nhất định theo quy tắc: Giỏ hàng nào được ưa chuộng nhiều hơn thì gán giá trị lợi ích lớn hơn. Hàm lợi ích có dạng tổng quát như sau:

$$U = U(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Hàm lợi ích hay được sử dụng là hàm Cobb – Douglas:

$$U = a x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n} \quad (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \text{ là các hằng số dương}).$$

3.1.4. Điểm cân bằng

+) Mức thu nhập quốc dân cân bằng $\overline{Y}$ phụ thuộc vào chi tiêu của Chính phủ G_0, lượng đầu tư I_0 và xuất khẩu X_0: $\overline{Y} = f(G_0, I_0, X_0)$.

+) Mức lãi suất cân bằng $\overline{r}$ phụ thuộc vào chi tiêu của Chính phủ G_0 và lượng cung tiền M_0:

$$\overline{r} = g(G_0, M_0).$$

3.1.5. Hàm cung, cầu thị trường n hàng hóa liên quan

Mức cung và mức cầu đối với một loại hàng hoá trên thị trường không những chỉ phụ thuộc vào giá hàng hoá đó mà còn bị chi phối bởi giá của các hàng hoá liên quan và thu nhập của người tiêu dùng. Trên thị trường n hàng hoá liên quan hàm cung và hàm cầu đối với hàng hoá i có dạng (giả thiết thu nhập không thay đổi):

$$Q_{S_i} = S_i(P_1, P_2, ..., P_n)$$

$$Q_{D_i} = D_i(P_1, P_2, ..., P_n)$$

Trong đó, Q_{S_i} là lượng cung hàng hoá i, Q_{D_i} là lượng cầu hàng hoá i, P_i là giá của hàng hoá i $(i = 1, 2, 3, ..., n)$.

Ví dụ 1. Cho các hàm cầu: $Q_1 = 40 - P_1$; $Q_2 = 30 - 0,5P_2$. Hãy lập hàm doanh thu.

Giải

Từ hai hàm cầu thuận ta suy ra hai hàm cầu đảo như sau:

$$P_1 = 40 - Q_1;\ P_2 = 60 - 2Q_2$$

Hàm doanh thu gộp

$$TR(Q_1, Q_2) = P_1Q_1 + P_2Q_2$$
$$= (40 - Q_1)Q_1 + (60 - 2Q_2)Q_2$$

hay

$$TR(Q_1, Q_2) = -Q_1^2 - 2Q_2^2 + 40Q_1 + 60Q_2$$

Ví dụ 2. Cho hàm sản xuất: $Q(K, L) = 10K^{0,3}L^{0,4}$. Giá thuê một đơn vị vốn $p_K = 3$ USD, giá thuê một đơn vị lao động $p_L = 2$ USD và giá sản phẩm là $P = 4$ USD. Hãy lập hàm lợi nhuận.

Giải

Hàm doanh thu:

$$TR(K, L) = PQ = 40K^{0,3}L^{0,4}$$

Hàm chi phí :

$$TC(K, L) = p_K K + p_L L = 3K + 2L$$

Hàm lợi nhuận: $\pi(K, L) = TR(K, L) - TC(K, L) = 40K^{0,3}L^{0,4} - 3K - 2L.$

3.2. Áp dụng đạo hàm riêng và vi phân toàn phần vào phân tích kinh tế và kinh doanh

3.2.1. Đạo hàm riêng và giá trị cận biên

Xét mô hình hàm kinh tế: $w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ trong đó $x_1, x_2, ..., x_n, w$ là các biến kinh tế.

Đạo hàm riêng của hàm số w theo biến x_i tại điểm $X(x_1, x_2, ..., x_n)$ được gọi là giá trị cận biên của hàm w theo biến x_i tại điểm đó. Nghĩa là, $w'_{x_i}(x_1, x_2, ..., x_n)$ biểu diễn xấp xỉ lượng thay đổi giá trị của biến w khi giá trị x_i thay đổi 1 đơn vị trong điều kiện giá trị các biến độc lập còn lại không thay đổi.

3.2.1.1. Hàm sản xuất: $Q = f(K, L)$

Có các đạo hàm riêng:

$$Q'_K = \frac{\partial Q}{\partial K};\ Q'_L = \frac{\partial Q}{\partial L}$$

được gọi tương ứng là hàm sản phẩm cận biên của vốn (tư bản) (ký hiệu: MPK) và hàm sản phẩm cận biên của lao động (ký hiệu: MPL) tại điểm (K, L).

Ý nghĩa của các đạo hàm riêng

+) $Q'_K = f'_K(K, L)$: biểu diễn xấp xỉ lượng sản phẩm hiện vật gia tăng khi sử dụng thêm một đơn vị vốn (tư bản) và giữ nguyên mức sử dụng lao động.

+) $Q'_L = f'_L(K, L)$: biểu diễn xấp xỉ lượng sản phẩm gia tăng khi sử dụng thêm một đơn vị lao động và giữ nguyên mức sử dụng vốn.

Ví dụ 3. Giả sử hàm sản suất của một doanh nghiệp là:

$$Q(K, L) = 20K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{3}{4}}$$

Trong đó: K, L, Q là mức sử dụng vốn, mức sử dụng lao động và sản lượng hàng ngày.

a) Giả sử doanh nghiệp đó đang sử dụng 16 đơn vị vốn và 81 đơn vị lao động trong một ngày tức $K = 16,\ L = 81$.

Sản lượng cận biên của vốn là:

$$MPK(16,81) = f'_K(16,81) = 5.\left(16^{-0,75}81^{0,75}\right) = 16,875$$

Sản lượng cận biên của lao động là:

$$MPL(16,81) = f_L^{/}(16,81) = 15.\left(16^{0,25}81^{-0,25}\right) = 10$$

Nghĩa là, nếu doanh nghiệp tăng mức sử dụng vốn K từ 16 lên 17 đơn vị và giữ nguyên mức sử dụng lao động $L = 81$ trong một ngày, thì sản lượng tăng thêm xấp xỉ $16,875$ đơn vị sản phẩm. Tương tự, nếu giữ nguyên mức sử dụng vốn $K = 16$ và tăng mức sử dụng lao động L từ 81 lên 82 trong một ngày thì sản lượng tăng thêm xấp xỉ 10 đơn vị sản phẩm.

b) Tại $K_0 = 16, L_0 = 81$, nếu giảm vốn K xuống 0,5 đơn vị và tăng lao động L lên 2 đơn vị thì Q sẽ thay đổi như thế nào?

$$\Delta(Q) \approx f_K^{/}(K_0, L_0)\Delta K + f_L^{/}(K_0, L_0)\Delta L$$

hay

$$\Delta(Q) \approx \frac{135}{8}.(-0,5) + 10 \cdot 2 = \frac{185}{16} > 0$$

Vậy Q sẽ tăng xấp xỉ 185/16 đơn vị.

3.2.1.2. Hàm lợi ích: $U = U(x_1, x_2, ..., x_n)$

Đạo hàm riêng của hàm lợi ích đối với các biến độc lập là:

$$MU_i = \frac{\partial U}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

MU_i : được gọi là lợi ích cận biên của hàng hoá thứ i.

Ý nghĩa. Đạo hàm riêng MU_i tại điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ biểu diễn xấp xỉ lợi ích tăng thêm khi người tiêu dùng có thêm một đơn vị hàng hoá thứ i trong điều kiện số đơn vị các hàng hoá khác không thay đổi.

Ví dụ 4. Giả sử hàm tiêu dùng hàng ngày của một người tiêu dùng đối với hai loại hàng hoá được cho như sau:

$$U(x_1, x_2) = 2\sqrt[3]{x_1}\sqrt{x_2}$$

Trong đó: x_1, x_2 lần lượt là mức sử dụng hàng hoá 1 và hàng hoá 2, U là lợi ích của người tiêu dùng hàng ngày.

Giả sử người tiêu dùng đang sử dụng 64 đơn vị hàng hóa 1 và 25 đơn vị hàng hoá 2 trong một ngày.

+) Lợi ích cận biên của hàng hoá 1 đối với người tiêu dùng là:

$$MU_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1}(64,25) = \frac{2}{3}\left(64^{-\frac{2}{3}}25^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{5}{24} \approx 0,21$$

+) Lợi ích cận biên của hàng hoá 2 đối với người tiêu dùng là:

$$MU_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2}(64,25) = \left(64^{\frac{1}{3}}25^{-\frac{1}{2}}\right) = 0,8$$

Nghĩa là, nếu người tiêu dùng tăng mức sử dụng hàng hoá 1 thêm một đơn vị $x_1 = 65$ và giữ nguyên mức sử dụng hàng hoá 2 trong một ngày thì lợi ích tăng thêm khoảng $0,21$ đơn vị. Tương tự, nếu giữ nguyên mức sử dụng hàng hoá 1 và tăng mức sử dụng hàng hoá 2 thêm 1 đơn vị trong một ngày thì lợi ích tăng thêm khoảng $0,8$ đơn vị.

Ví dụ 5. Người ta ước lượng hàm sản xuất hàng ngày của một doanh nghiệp như sau:

$$Q(K,L) = 80\sqrt{K}.\sqrt[3]{L}.$$

a) Với $K = 25$ và $L = 64$ hãy cho biết mức sản xuất hàng ngày của doanh nghiệp.

b) Bằng các đạo hàm riêng của Q, cho biết nếu doanh nghiệp:

+) Sử dụng thêm một đơn vị lao động mỗi ngày và giữ nguyên mức $K = 25$ thì sản lượng sẽ thay đổi là bao nhiêu?

+) Ngược lại, nếu sử dụng thêm một đơn vị vốn mỗi ngày và giữ nguyên mức $L = 64$ thì sản lượng sẽ thay đổi bằng bao nhiêu?

c) Nếu giá thuê một đơn vị vốn K là 12 USD, giá đơn vị L là 2,5 USD và doanh nghiệp sử dụng các yếu tố đầu vào ở mức nêu trong câu a) thì doanh nghiệp nên sử dụng thêm một đơn vị K hay thêm một đơn vị L mỗi ngày?

Giải

a) Mức sản xuất hàng của doanh nghiệp khi $K = 25$ và $L = 64$ là:

$$Q = 80.\sqrt{25}.\sqrt[3]{64} = 80.5.4 = 1600 \text{ (đvsp).}$$

b) Các đạo hàm riêng của hàm sản xuất:

+) Đạo hàm riêng của Q theo K và của Q theo L:

$$Q'_K(K,L) = 80.\frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{K}}\sqrt[3]{L};$$

$$Q'_L(K,L) = 80.\frac{1}{3}.\sqrt{K}\frac{1}{\sqrt[3]{L^2}}.$$

Tại mức $K = 25$ và $L = 64$, ta có

$$Q_K^{/}(25,64) = 32; \;\; Q_L^{/}(25,64) = \frac{25}{3} \approx 8,3$$

+) Nếu giữ nguyên mức sử dụng vốn $K = 25$ và sử dụng thêm một đơn vị lao động mỗi ngày thì sản lượng tăng một lượng xấp xỉ là $8,3$ đơn vị.

+) Nếu giữ nguyên mức sử dụng lao động $L = 64$ và sử dụng thêm một đơn vị vốn mỗi ngày thì sản lượng thay đổi một lượng xấp xỉ là 32 đơn vị.

c) Với các giả thiết đã cho thì doanh nghiệp nên sử dụng thêm một đơn vị lao động mỗi ngày. Vì ta có $\frac{MPL}{p_L} = \frac{25/3}{2,5} > \frac{MPK}{p_K} = \frac{32}{12}$.

3.2.2. Đạo hàm riêng và hệ số co dãn

Cho mô hình hàm kinh tế: $w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$

Hệ số co dãn của w theo biến x_i tại điểm $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ là số đo lượng thay đổi tính bằng phần trăm của w khi x_i thay đổi 1% trong điều kiện giá trị của các biến độc lập khác không thay đổi, được ký hiệu và xác định như sau:

$$\varepsilon_{w|x_i} = \frac{\partial f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)}{\partial x_i} . \frac{\overline{x}_i}{f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)}.$$

Ví dụ 6. Giả sử hàm cầu của hàng hoá 1 trên thị trường hai hàng hoá liên quan có dạng sau: $Q_{D_1}(P_1, P_2) = 6300 - 2P_1^2 - \frac{5}{3}P_2^2$. Trong đó, P_1, P_2 tương ứng là giá của hàng hoá 1, 2 . Tính hệ số co dãn của cầu theo giá tại điểm $(20,30)$.

Giải

Hệ số co dãn của cầu theo giá P_1 đối với giá của hàng hoá đó tại thời điểm (P_1, P_2)

$$\varepsilon_{Q_{D_1}|P_1} = \frac{\partial Q_{D_1}}{\partial P_1}\frac{P_1}{Q_{D_1}} = -4P_1.\frac{P_1}{6300 - 2P_1^2 - \frac{5}{3}P_2^2}$$

Hệ số co dãn của cầu đối với hàng hoá thứ nhất theo giá hàng hoá thứ hai P_2 tại thời điểm (P_1, P_2) là:

$$\varepsilon_{Q_{D_1}|P_2} = -\frac{10}{3}P_2.\frac{P_2}{6300 - 2P_1^2 - \frac{5}{3}P_2^2}$$

Tại điểm $(20,30)$ ta có: $\varepsilon_{Q_{D_1}|P_1} = -0,4; \varepsilon_{Q_{D_1}|P_2} = -0,75$.

Điều này có nghĩa là khi hàng hoá 1 đang ở mức giá 20 và hàng hoá 2 ở mức giá 30 nếu tăng giá hàng hoá 1 lên 1% còn giá hàng hoá 2 không đổi thì cầu đối với hàng hoá 1 sẽ giảm $0,4\%$, tương tự, nếu giá của hàng hoá 1 không thay đổi nhưng giá của hàng hoá hai tăng thêm 1% thì cầu đối với hàng hoá 1 cũng giảm $0,75\%$.

Ví dụ 7. Giả sử hàm sản xuất của một doanh nghiệp có dạng:

$$Q(K,L) = 120K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}.$$

a) Khi đó hệ số co dãn của sản lượng theo vốn tại thời điểm (K,L) là:

$$\varepsilon_{QK} = 40K^{-\frac{2}{3}}L^{\frac{2}{3}}.\frac{K}{120K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}.$$

Khi đó hệ số co dãn của sản lượng theo lao động tại thời điểm (K,L) là:

$$\varepsilon_{QL} = 80K^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{1}{3}}.\frac{L}{120K^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{2}{3}}} = \frac{80}{120} = \frac{2}{3}.$$

Nhận xét

Nếu mô hình hàm số kinh tế có dạng mô hình hàm Cobb –Douglass thì hệ số co dãn của w theo x_k đúng bằng luỹ thừa của x_k.

b) Tại mức sử dụng (K,L) nếu giảm vốn K xuống 2% và tăng lao động L lên 3% thì Q sẽ thay đổi như thế nào?

Ta có

$$\Delta Q \approx (-2).\varepsilon_{QK} + 3.\varepsilon_{QL} = (-2).\frac{1}{3} + 3.\frac{2}{3} = \frac{4}{3} > 0$$

Do đó sản lượng Q tăng xấp xỉ (4/3)%.

c) Tại mức sử dụng (K,L) nếu tăng vốn K lên 2% và giảm lao động L xuống 3% thì Q sẽ thay đổi như thế nào?

Ta có

$$\Delta Q \approx 2.\varepsilon_{QK} - 3.\varepsilon_{QL} = 2.\frac{1}{3} - 3.\frac{2}{3} = -\frac{4}{3} < 0$$

Do đó sản lượng Q giảm xấp xỉ (4/3)%.

3.2.3. Đạo hàm riêng cấp 2 và quy luật lợi ích biên giảm dần

Xét mô hình hàm kinh tế hai biến số: $z = f(x, y)$.

+) $z'_x = f'_x(x, y)$: là hàm cận biên của mô hình hàm kinh tế trên theo biến x.

+) $z'_y = f'_y(x, y)$: là hàm cận biên của mô hình hàm kinh tế trên theo biến y.

Trong kinh tế học, quy luật lợi ích cận biên giảm dần nói rằng: giá trị $z-$ cận biên của biến x giảm dần khi x tăng y không đổi. Tương tự, cho giá trị $z-$ cận biên của biến y giảm dần khi y tăng và x không đổi (Chú ý: chúng ta xét trong điều kiện giá trị của các biến x, y là đủ lớn).

Cơ sở toán học:

+) $z'_x = f'_x(x, y)$: là hàm số giảm khi $z''_{xx} = f''_{xx}(x, y) < 0$.

+) $z'_y = f'_y(x, y)$: là hàm số giảm khi $z''_{yy} = f''_{yy}(x, y) < 0$.

Ví dụ 8. Hàm sản xuất của một doanh nghiệp có dạng Cobb – Douglas như sau:

$$Q(K, L) = aK^{\alpha}L^{\beta} \quad (a, \alpha, \beta > 0)$$

Hàm sản phẩm cận biên của vốn:

$$Q'_K(K, L) = a\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta}.$$

Hàm sản phẩm cận biên của lao động:

$$Q'_L(K, L) = a\beta K^{\alpha}L^{\beta-1}.$$

Biểu hiện của quy luật lợi ích cận biên giảm dần:

$$\begin{cases} Q''_{KK}(K, L) = a\alpha(\alpha-1)K^{\alpha-2}L^{\beta} < 0 \\ Q''_{LL}(K, L) = a\beta(\beta-1)K^{\alpha}L^{\beta-2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < 1 \\ \beta < 1 \end{cases}.$$

Áp dụng vào bài toán cụ thể ta thấy hàm sản xuất:

Trong đó K, L, Q là mức sử dụng vốn, mức sử dụng lao động và sản lượng hàng ngày. Hàm này thoả mãn quy luật lợi ích cận biên giảm dần.

Ví dụ 9. Cho hàm lợi ích: $U(x, y) = 15xy - 2x^2 - 3y^2$, $(x, y > 0)$. Hàm số trên có tuân theo quy luật lợi ích cận biên giảm dần hay không.

Giải

Đạo hàm riêng cấp 1 của hàm U theo biến x và theo y

$$U_x'(x,y) = 15y - 4x;\ U_y'(x,y) = 15x - 6y$$

Đạo hàm riêng cấp 2 của hàm U theo x và theo y

$$U_{xx}''(x,y) = -4 < 0;\ U_{yy}''(x,y) = -6 < 0$$

Vậy hàm số trên tuân theo quy luật lợi ích cận biên giảm dần.

3.2.4. Hàm thuần nhất và vấn đề hiệu quả của quy mô

3.2.4.1. Khái niệm hàm thuần nhất

Hàm số $z = f(x,y)$ được gọi là hàm thuần nhất cấp k $(k \geq 0)$ nếu với $\forall t \neq 0$, chúng ta có:

$$f(tx,\ ty) = t^k \cdot f(x,\ y)$$

Ví dụ 10. Hàm sản xuất $Q(K,L) = aK^{\alpha}L^{\beta}$ là hàm thuần nhất cấp $(\alpha + \beta)$ vì $\forall t \neq 0$:

Ta tính toán giá trị của hàm $Q(K,L)$ tại điểm $(tK,\ tL)$

$$Q(tK,tL) = a(tK)^{\alpha}(tL)^{\beta} = t^{\alpha+\beta}\left(aK^{\alpha}L^{\beta}\right) = t^{\alpha+\beta}Q(K,L)$$

Ví dụ 11. Hàm sản xuất dạng C.E.S

$$Q(K,L) = A\left[\alpha.K^{\frac{-1}{\beta}} + (1-\alpha)L^{\frac{-1}{\beta}}\right]^{-\beta};\ (A > 0; 0 < \alpha < 1; \beta > -1)$$

Luôn là hàm thuần nhất cấp 1. Vì $\forall t \neq 0$.

Ta tính toán giá trị của hàm $Q(K,L)$ tại điểm $(tK,\ tL)$

$$Q(tK,\ tL) = A\left[\alpha.(tK)^{\frac{-1}{\beta}} + (1-\alpha)(tL)^{\frac{-1}{\beta}}\right]^{-\beta}$$

$$\Leftrightarrow Q(tK,\ tL) = tA\left[\alpha.K^{\frac{-1}{\beta}} + (1-\alpha)L^{\frac{-1}{\beta}}\right]^{-\beta} = tQ(K,\ L)$$

Ví dụ 12. Hàm số $z(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$ là hàm thuần nhất cấp 0. Vì $\forall t \neq 0$.

Ta tính toán giá trị của hàm $z(x,y)$ tại điểm $(tx,\ ty)$.

$$z(tx,\ ty) = \frac{2(tx)(ty)}{(tx)^2 - (ty)^2} = \frac{2xy}{x^2 - y^2} = t^0 z(x,\ y)$$

3.2.4.2. Vấn đề hiệu quả của quy mô

Xét hàm sản xuất $Q = f(K, L)$. Với K, L là các yếu tố đầu vào; Q là yếu tố đầu ra

+) Nếu $Q(mK, mL) > mQ(K, L)$ thì chúng ta nói hàm sản xuất có hiệu quả tăng theo quy mô.

+) Nếu $Q(mK, mL) < mQ(K, L)$ thì chúng ta nói hàm sản xuất có hiệu quả giảm theo quy mô.

+) Nếu $Q(mK, mL) = mQ(K, L)$ thì chúng ta nói hàm sản xuất có hiệu quả không đổi theo quy mô.

3.2.4.3. Liên hệ hiệu quả của quy mô với bậc thuần nhất

Giả sử hàm sản xuất $Q = f(K, L)$ là hàm thuần nhất cấp k.

+) Nếu $k > 1$ thì hàm sản xuất có hiệu quả tăng theo quy mô.

+) Nếu $k < 1$ thì hàm sản xuất có hiệu quả giảm theo quy mô.

+) Nếu $k = 1$ thì hàm sản xuất có hiệu quả không đổi theo quy mô.

Ví dụ 13. Hàm sản xuất dạng C.E.S có bậc thuần nhất bằng 1, nên nó có hiệu quả không đổi theo quy mô.

Ví dụ 14. Hàm sản xuất: $Q(K, L) = aK^{\alpha}L^{\beta}$ có cấp thuần nhất $(\alpha + \beta)$ nên:

+) Nếu $(\alpha + \beta) > 1$ thì nó có hiệu quả tăng theo quy mô.

+) Nếu $(\alpha + \beta) < 1$ thì nó có hiệu quả giảm theo quy mô.

+) Nếu $(\alpha + \beta) = 1$ thì nó có hiệu quả không đổi theo quy mô.

3.2.4.4. Liên hệ với đạo hàm riêng – Công thức Euler

Định lý (Công thức Euler). Hàm số $z = f(x, y)$ là hàm thuần nhất cấp k khi và chỉ khi $x \cdot z'_x(x, y) + y \cdot z'_y(x, y) = k \cdot z(x, y)$.

Với $z = f(x, y)$ được giả thiết là hàm liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục.

3.2.5. Đạo hàm của hàm ẩn và áp dụng phân tích kinh tế

3.2.5.1. Khái niệm hàm ẩn

Nếu giá trị của hai biến x, y quan hệ với nhau bởi hệ thức $F(x, y) = 0$ (*), trong đó $F(x, y)$ là hàm hai biến xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$.

Nếu $\forall x \in X$, tồn tại hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn hệ thức (*), thì ta nói hệ thức này xác định hàm ẩn $y = f(x)$ trên tập X.

Ví dụ 15. Xét hệ thức

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \qquad (**)$$

Với $\forall x \in [-1,1]$ ta có $y(x) = \pm\sqrt{1-x^2}$

Vậy hàm $y = \sqrt{1-x^2}$ với $\forall x \in [-1,1]$ và hàm $y = -\sqrt{1-x^2}$ với $\forall x \in [-1,1]$ là các hàm ẩn xác định bởi hệ thức (**).

3.2.5.2. Định lý hàm ẩn

Cho hàm hai biến $F(x,y)$ xác định trong một lân cận của điểm (x_0, y_0) và $F(x_0, y_0) = 0,$ giả thiết rằng $F(x,y)$ có các đạo hàm riêng liên tục và $F'_y(x,y) \neq 0$ tại mọi điểm (x,y) thuộc hàm lân cận của (x_0, y_0); Khi đó tồn tại duy nhất hàm liên tục $y = f(x)$ xác định trong một lân cận của x_0 thỏa mãn điều kiện:

$$y_0 = f(x_0),\ F[x, f(x)] = 0$$

và $y'_x = -\dfrac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$ (công thức đạo hàm của hàm ẩn)

Ví dụ 16. Cho hàm số: $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ (**)

Xác định hai hàm ẩn liên tục $y = \sqrt{1-x^2}$ và $y = -\sqrt{1-x^2}$ với $\forall x \in [-1,1].$

Tại điểm $(x_0, y_0) = (0,1)$ ta có $F(0,1) = 0.$ Khi đó chỉ có hàm ẩn $y = \sqrt{1-x^2}$ thoả mãn điều kiện $y(0) = 1.$

Sử dụng công thức tính đạo hàm của hàm ẩn. Tính đạo hàm của y theo x.

Đạo hàm riêng của F theo x và theo y

$$F'_x(x,y) = 2x;\ F'_y(x,y) = 2y$$

Đạo hàm của y theo x:

$$y'_x = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\frac{x}{y}$$

+) Nếu $y(x) = \sqrt{1-x^2}$ thì $y'_x = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\dfrac{x}{y}$

+) Nếu $y(x) = -\sqrt{1-x^2}$ thì $y'_x = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\dfrac{x}{y}$

Ví dụ 17. Cho hàm cầu $D = D(P, Y_0)$ (với P là giá, Y_0 là mức thu nhập) và hàm cung $S = S(P)$ với các giả thiết $D'_P < 0$, $D'_{Y_0} > 0$, $S' > 0$.

Giả sử giá cân bằng $\overline{P}$ phụ thuộc mức thu nhập Y_0 là hàm ẩn biểu diễn bởi hệ thức:

$$F(P, Y_0) = D(P, Y_0) - S(P) = 0 \qquad (***)$$

Khi đó:

$$\overline{P}'_{Y_0} = -\frac{F'_{Y_0}(P, Y_0)}{F'_P(P, Y_0)} = \frac{D'_{Y_0}(P, Y_0)}{S'(P) - D'_P(P, Y_0)} > 0$$

điều đó nói nên rằng giá cân bằng sẽ thay đổi cùng chiều với thu nhập (chẳng hạn khi thu nhập Y_0 tăng thì sẽ kéo theo giá cân bằng tăng).

Ví dụ 18. Giá một loại hàng P và chênh lệch cung – cầu S liên hệ với nhau bởi phương trình:

$$SP - 0{,}1P^2 \ln S = c \quad \text{(c là hằng số)}$$

Sử dụng công thức đạo hàm của hàm ẩn để tính tốc độ thay đổi của giá khi chênh lệch cung cầu thay đổi?

Giải:

Đặt:

$$F(P,S) = SP - 0{,}1P^2 \ln S - c = 0$$

Ta có

Đạo hàm riêng của F theo S:

$$F'_S(S,P) = P - 0{,}1.P^2.\frac{1}{S}$$

Đạo hàm riêng của F theo P:

$$F'_P(S,P) = S - 0{,}2P.\ln S.$$

Tốc độ thay đổi của giá khi chênh lệch cung cầu thay đổi:

$$P'_S = -\frac{\partial F/\partial S}{\partial F/\partial P} = -\frac{P - 0{,}1.P^2.\frac{1}{S}}{S - 0{,}2P.\ln S} = -\frac{P.S - 0{,}1P^2}{S^2 - 0{,}2.P.S.\ln S}.$$

3.2.6. Hai hàng hóa có tính chất thay thế hoặc bổ sung

Giả sử $Q_1 = D_1(P_1, P_2)$; $Q_2 = D_2(P_1, P_2)$ là hàm cầu của hai loại hàng hóa, P_1, P_2 thứ tự là giá của hai hàng hóa đó. Theo tính chất của hàm cầu hàng hóa thông thường: giá tăng thì cầu giảm, chúng ta có:

$$\frac{\partial D_1}{\partial P_1} < 0 \ \& \ \frac{\partial D_2}{\partial P_2} < 0$$

+) Nếu $\frac{\partial D_1}{\partial P_2} < 0 \ \& \ \frac{\partial D_2}{\partial P_1} < 0$ thì hai hàng hóa có tính chất bổ sung.

+) Nếu $\frac{\partial D_1}{\partial P_2} > 0 \ \& \ \frac{\partial D_2}{\partial P_1} > 0$ thì hai hàng hóa có tính chất thay thế.

Ví dụ 19. Giả sử hàm cầu của hai hàng hóa cho bởi:

$$D_1(P_1, P_2) = 300 + \frac{8}{P_1 + 2} - 4P_2;$$

$$D_2(P_1, P_2) = 200 - 3P_1 + \frac{7}{P_2 + 4}.$$

Đạo hàm riêng của D_1 theo P_2: $\frac{\partial D_1}{\partial P_2}(P_1, P_2) = -4$

Đạo hàm riêng của D_2 theo P_1: $\frac{\partial D_2}{\partial P_1}(P_1, P_2) = -3$

Chúng ta có $\frac{\partial D_1}{\partial P_2} = -4 < 0 \ \& \ \frac{\partial D_2}{\partial P_1} = -3 < 0,$ do đó hai hàng hóa này có tính chất bổ sung được cho nhau.

Ví dụ 20. Giả sử hàm cầu của hai hàng hóa cho bởi:

$$Q_1 = 45 - 3P_1 + P_2; \ Q_2 = 30 + 2P_1 - P_2.$$

Đạo hàm riêng của Q_1 theo P_2 : $\frac{\partial Q_1}{\partial P_2}(P_1, P_2) = 1$

Đạo hàm riêng của Q_2 theo P_1 : $\frac{\partial Q_2}{\partial P_1}(P_1, P_2) = 2$

Chúng ta có $\frac{\partial Q_1}{\partial P_2} = 1 > 0 \ \& \ \frac{\partial Q_2}{\partial P_1} = 2 > 0$, do đó hai hàng hóa này có tính chất thay thế được cho nhau.

3.2.7. Bài tập

Bài số 1. Cho hàm lợi ích : $U(x,y)=12xy-2x^2-y^2 \quad (x,y>0)$

1) Tại $x_0=50,\ y_0=60$, nếu x tăng thêm 1 đơn vị và y không đổi thì lợi ích thay đổi như thế nào?
2) Tính MU_y tại $x_0=50,\ y_0=60$ và giải thích ý nghĩa kết quả nhận được.
3) Tính tỉ số $MRTS_{yx}=\dfrac{MU_x}{MU_y}\left(x_0=50,\ y_0=60\right)$.
4) Tại $x_0=50,\ y_0=60$, nếu x tăng thêm 0,5 đơn vị và y giảm 1,5 đơn vị thì lợi ích thay đổi như thế nào?

Đáp số : 1) $MU_x(50,60)=520$; *2)* $MU_y(50,60)=1480$;

3) $MRTS_{yx}(50,60)=\dfrac{13}{12}$; *4)* $\Delta U(50,60)=-460$.

Bài số 2. Cho hàm cầu : $Q_D=0,4Y^{0,2}P^{-0,3}$ (Y là thu nhập, P là giá). Hãy tính hệ số co dãn của cầu theo giá và của cầu theo thu nhập.

Đáp số : $\varepsilon_{Q_D|Y}=0,2$; $\varepsilon_{Q_D|P}=-0,3$.

Bài số 3. Cho hàm sản xuất có dạng: $Q(K,L)=12KL-2K^2-3L^2 \quad (K,L>0)$. Hàm sản xuất trên có hiệu quả tăng, giảm hay không đổi theo quy mô? Giải thích.

Đáp số : Hàm sản xuất có hiệu quả tăng theo quy mô.

Bài số 4. Cho hàm sản xuất có dạng: $Q(K,L)=120K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{1}{2}} \quad (K,L>0)$

1) Tính MPK và MPL tại K = 1000 và L = 225. Nêu ý nghĩa kết quả nhận được.
2) Tính tỉ số $MRTS_{LK}=\dfrac{MPK}{MPL}$, $\left(K_0=1000,\ L_0=225\right)$.
3) Tính hệ số co dãn của sản lượng theo vốn K và theo lao động L.
4) Nếu giữ nguyên mức sử dụng vốn K, tăng mức sử dụng lao động L thêm 4% thì sản lượng Q thay đổi như thế nào?
5) Nếu tăng mức sử dụng vốn K thêm 3% và giảm mức sử dụng lao động L xuống 2% thì sản lượng Q thay đổi như thế nào?

Đáp số : 1) $MPK(1000,225)=120$; $MPL(1000,225)=400$; *2)* $MRTS_{LK}=0,3$;

3) $\varepsilon_{Q|K} = \frac{2}{3}; \varepsilon_{Q|L} = \frac{1}{2};$ *4) Sản lượng sẽ tăng 2%; 5) Sản lượng sẽ tăng 1%.*

Bài số 5. Cho hàm sản xuất có dạng: $Q(K,L) = \left(\frac{1}{3}K^{0,5} + \frac{2}{3}L^{0,5}\right)^2$ với K là vốn và L là lao động.

1) Tìm hàm năng suất cận biên của vốn và lao động.
2) Hàm sản xuất trên có hiệu quả tăng theo qui mô không?

Đáp số : 1) $MPK = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}K^{0,5} + \frac{2}{3}L^{0,5}\right)K^{-0,5}; MPL = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}K^{0,5} + \frac{2}{3}L^{0,5}\right)L^{-0,5};$

2) Hàm sản xuất có hiệu quả giảm theo quy mô.

Bài số 6. Giả sử hàm cầu của hai hàng hóa cho bởi:

$$Q_1 = 55 - 2P_1 - P_2; \quad Q_2 = 40 - P_1 - P_2$$

Sử dụng đạo hàm riêng cho biết hai hàng hóa có tính chất thay thế hay bổ sung?

Đáp số : Hàng hóa có tính bổ sung.

Bài số 7. Cho hàm sản xuất $Y(t) = 0,7K^{0,5}L^{0,7}$. Với $K = 120 + 0,2t; L = 100 + 0,1t$

1) Tính hệ số tăng trưởng của vốn K, lao động L và Y.
2) Tính hệ số co dãn của Y theo K và Y theo L.
3) Hãy cho biết hiệu quả của việc tăng quy mô sản xuất trong trường hợp này.

Đáp số : 1) $r_K = \frac{0,2}{120 + 0,2t}; r_L = \frac{0,1}{100 + 0,1t}; r_Y = \frac{0,1}{120 + 0,2t} + \frac{0,07}{100 + 0,1t};$

2) $\varepsilon_{YK} = 0,5; \varepsilon_{YL} = 0,7$ *; 3) Tăng quy mô sản xuất có hiệu quả.*

Bài số 8. Thu nhập quốc dân (Y) của một quốc gia có dạng:

$$Y = 0,48K^{0,4}L^{0,3}NX^{0,01}$$

Trong đó: K là vốn, L là lao động và NX là xuất khẩu ròng.

1) Khi tăng 1% lao động sẽ ảnh hưởng như thế nào đến thu nhập quốc dân? Có ý kiến cho rằng giảm mức lao động xuống 2% thì có thể tăng xuất khẩu ròng 15% mà thu nhập vẫn không đổi, cho biết điều này đúng hay sai?
2) Cho nhịp tăng trưởng của NX là 4%, của K là 3%, của L là 5%. Xác định nhịp tăng trưởng của Y.

Đáp số: 1) Thu nhập quốc dân tăng 0,3%; sai; 2) $r_Y = 2,74\%$.

3.3. Mô hình cực trị không có điều kiện ràng buộc (tự do) nhiều biến trong kinh tế

3.3.1. Xác định quỹ vốn và lao động để tối đa hóa doanh thu, lợi nhuận

Cho hàm sản xuất $Q = f(K, L)$ và giá bán sản phẩm P. Biết giá thuê một đơn vị vốn là p_K và giá thuê một đơn vị lao động là p_L.

Bài toán 1. Xác định mức sử dụng vốn K và lao động L để sản lượng Q cực đại/tối đa.

Bài toán được đưa về bài toán cực trị tự do của hàm sản xuất với hai biến K và L.

Bài toán 2. Hãy xác định mức sử dụng vốn K và lao động L để lợi nhuận cực đại /tối đa.

Chúng ta cần xác định hàm doanh thu, hàm chi phí và hàm lợi nhuận.

+) Hàm doanh thu : $TR(K,L) = P.Q = P.f(K, L)$

+) Hàm chi phí : $TC(K,L) = p_K \cdot K + p_L \cdot L$

+) Hàm lợi nhuận : $\pi(K, L) = TR - TC = P \cdot Q(K, L) - p_K \cdot K - p_L \cdot L$

Bài toán được đưa về bài toán cực trị tự do của hàm lợi nhuận với hai biến K và L.

Ví dụ 21. Ước lượng hàm sản xuất của một doanh nghiệp có dạng:

$$Q(K,L) = -K^3 - 8L^3 + 3KL + 200, \ (K > 0, L > 0)$$

Hãy xác định mức sử dụng vốn và lao động để sản lượng cực đại.

Giải

+) Bước 1. Tính các đạo hàm riêng cấp 1 và cấp 2

Đạo hàm riêng cấp 1

$$Q'_K(K, L) = -3K^2 + 3L;$$

$$Q'_L(K, L) = -24L^2 + 3K.$$

Đạo hàm riêng cấp 2

$$Q''_{KK}(K, L) = -6K; \ Q''_{LL}(K, L) = -48L;$$

$$Q''_{KL}(K, L) = Q''_{LK}(K, L) = 3.$$

+) Bước 2. Giải hệ phương trình để tìm điểm dừng

$$\begin{cases} Q'_K(K,L) = 0 \\ Q'_L(K,L) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3K^2 + 3L = 0 \\ 3K - 24L^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L = K^2 \\ K - 8K^4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K = \dfrac{1}{2} \\ L = \dfrac{1}{4} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} K = 0 \\ L = 0 \end{cases} \text{ (loại vì } K > 0, L > 0 \text{)}$$

Hàm số có một điểm dừng $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

+) Bước 3. Kiểm tra điều kiện đủ tại $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

$$A = Q''_{KK}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = -3 < 0; \; C = Q''_{LL}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = -12 < 0;$$

$$B = Q''_{KL}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = Q''_{LK}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = 3 > 0.$$

Xét định thức

$$D = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -12 \end{vmatrix} = 27 > 0 \text{ và } A < 0$$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ với $Q_{max} = Q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1601}{8}$.

Ví dụ 22. Tìm K, L để hàm lợi nhuận sau đạt giá trị cực đại

$$\pi(K, L) = 300K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{1}{4}} - 100K - 150L$$

Giải

+) Bước 1. Tính các đạo hàm riêng cấp 1 và cấp 2

Đạo hàm riêng cấp 1

$$\pi'_K(K, L) = 200K^{-\frac{1}{3}}L^{\frac{1}{4}} - 100;$$

$$\pi'_L(K, L) = 75K^{\frac{2}{3}}L^{-\frac{3}{4}} - 150$$

Đạo hàm riêng cấp 2

$$\pi''_{KK}(K, L) = -\frac{200}{3}K^{-\frac{4}{3}}L^{\frac{1}{4}}; \; \pi''_{LL}(K, L) = -\frac{225}{4}K^{\frac{2}{3}}L^{-\frac{7}{4}};$$

$$\pi''_{KL}(K, L) = \pi''_{LK}(K, L) = 50K^{-\frac{4}{3}}L^{-\frac{3}{4}}.$$

+) Bước 2. Giải hệ phương trình để tìm điểm dừng

$$\begin{cases}\pi_K^{/}(K, L) = 0 \\ \pi_L^{/}(K, L) = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 200K^{-\frac{1}{3}}L^{\frac{1}{4}} - 100 = 0 \\ 75K^{\frac{2}{3}}L^{-\frac{3}{4}} - 150 = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 200K^{-\frac{1}{3}}L^{\frac{1}{4}} = 100 \quad (1) \\ 75K^{\frac{2}{3}}L^{-\frac{3}{4}} = 150 \quad (2)\end{cases}$$

Lập tỷ số hai phương trình ta suy ra được: $K = 4L$ (3)

Thế (3) vào (2), ta được

$$75(4L)^{\frac{2}{3}}L^{-\frac{3}{4}} = 150 \Leftrightarrow L^{-\frac{1}{12}} = 2\cdot 4^{-\frac{2}{3}} \Leftrightarrow L = 16 \quad (4)$$

Thay (4) vào (3), ta được: $K = 64$

Hàm số có một điểm dừng $M(64,16)$

+) Bước 3. Kiểm tra điều kiện đủ tại $M(64,16)$

$$A = \pi_{KK}^{//}(64,16) = -\frac{200}{3}(64)^{-\frac{4}{3}}(16)^{\frac{1}{4}} = -\frac{25}{48} < 0;$$

$$C = \pi_{LL}^{//}(64,16) = -\frac{225}{4}(64)^{\frac{2}{3}}(16)^{-\frac{7}{4}} = -\frac{225}{32} < 0;$$

$$B = \pi_{KL}^{//}(64,16) = \pi_{LK}^{//}(64,16) = 50(64)^{-\frac{1}{3}}(16)^{-\frac{3}{4}} = \frac{25}{16} > 0.$$

Xét định thức

$$D = \begin{vmatrix} -\frac{25}{48} & \frac{25}{16} \\ \frac{25}{16} & -\frac{225}{32}\end{vmatrix} = \frac{625}{512} \quad \text{và} \quad A < 0$$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $M(64,16)$ với $\pi_{max} = \pi(64,16) = 800$.

Ví dụ 23. Cho hàm sản xuất của doanh nghiệp: $Q(K,L) = 15K^{0,4}L^{0,4}$, trong đó Q là sản lượng, K là vốn và L là lao động. Viết hàm lợi nhuận. Tìm giá trị của K và L thỏa mãn điều kiện cần để cực đại hàm lợi nhuận biết giá thuê một đơn vị vốn là 2 USD, giá thuê một đơn vị lao động là 4 USD và giá bán sản phẩm là 1 USD.

Giải

Hàm lợi nhuận

$$\pi(K, L) = TR - TC = PQ - (p_K K + p_L L) = 15K^{0,4}L^{0,4} - 2K - 4L$$

+) Bước 1. Tính các đạo hàm riêng cấp 1 và cấp 2

Đạo hàm riêng cấp 1

$$\pi'_K(K, L) = 6K^{-0,6}L^{0,4} - 2;\ \pi'_L(K, L) = 6K^{0,4}L^{-0,6} - 4.$$

Đạo hàm riêng cấp 2

$$\pi''_{KK}(K, L) = -3,6K^{-1,6}L^{0,4};\ \pi''_{LL}(K, L) = -3,6K^{0,4}L^{-1,6};$$

$$\pi''_{KL}(K, L) = \pi''_{LK}(K, L) = 2,4K^{-0,6}L^{-0,6}.$$

+) Bước 2. Giải hệ phương trình để tìm điểm dừng

$$\begin{cases} \pi'_K(K, L) = 0 \\ \pi'_L(K, L) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6K^{-0,6}L^{0,4} - 2 = 0 \\ 6K^{0,4}L^{-0,6} - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6K^{-0,6}L^{0,4} = 2 & (1) \\ 6K^{0,4}L^{-0,6} = 4 & (2) \end{cases}$$

Lập tỷ số phương trình (1) và phương trình (2) ta được: $K = 2L$ (3)

Thế (3) vào (2), ta có

$$6(2L)^{0,4}L^{-0,6} = 4 \Leftrightarrow L^{-0,2} = \frac{4}{6 \cdot 2^{0,4}} \Leftrightarrow L = 30,375 \quad (4)$$

Thay (4) vào (3), ta được: $K = 60,75$

Hàm số có một điểm dừng $M(60,75;\ 30,375)$

+) Bước 3. Kiểm tra điều kiện đủ tại $M(60,75;\ 30,375)$

$$A = \pi''_{KK}(60,75;\ 30,375) = -3,6(60,75)^{-1,6}(30,375)^{0,4};$$

$$C = \pi''_{LL}(60,75;\ 30,375) = -3,6(60,75)^{0,4}(30,375)^{-1,6};$$

$$B = \pi''_{KL}(60,75;\ 30,375) = 2,4(60,75)^{-0,6}(30,375)^{-0,6}.$$

Xét định thức

$$D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = 7,2(60,75)^{-1,2}(30,375)^{-1,2} > 0 \text{ và } A < 0$$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $M(60,75;\ 30,375)$, với $\pi_{max} = \pi(60,75;30,375) = \dfrac{243}{5}$.

3.3.2. Xác định cơ cấu sản phẩm để tối thiểu hóa chi phí, tối đa hóa doanh thu, lợi nhuận

Bài toán 1. Hãng độc quyền sản xuất hai loại sản phẩm với giá bán/hàm cầu thứ tự là P_1, P_2 và hàm chi phí kết hợp $TC = TC(Q_1, Q_2)$. Hãy xác định cơ cấu sản phẩm/sản lượng của từng loại sản phẩm để hãng có doanh thu/ lợi nhuận tối đa.

Chúng ta cần xác định hàm doanh thu/ lợi nhuận

+) Hàm doanh thu : $TR(Q_1, Q_2) = P_1.Q_1 + P_2Q_2$

+) Hàm lợi nhuận: $\pi(Q_1, Q_2) = TR(Q_1, Q_2) - TC(Q_1, Q_2)$

Bài toán được đưa về bài toán cực trị tự do của hàm doanh thu/hàm lợi nhuận với hai biến $Q_1; Q_2$.

Bài toán 2. Hãng độc quyền sản xuất một loại sản phẩm nhưng tiêu thụ ở hai thị trường phân biệt với hàm cầu ở từng thị trường thứ tự lần lượt là $P_1 = P_1(Q_1, Q_2)$; $P_2 = P_2(Q_1, Q_2)$ và hàm chi phí kết hợp $TC = TC(Q_1, Q_2)$. Hãy xác định lượng cung ở từng thị trường để hãng có doanh thu/ lợi nhuận tối đa.

Chúng ta cần xác định hàm doanh thu/ lợi nhuận

+) Hàm doanh thu : $TR(Q_1, Q_2) = P_1Q_1 + P_2Q_2$

+) Hàm lợi nhuận: $\pi(Q_1, Q_2) = TR(Q_1, Q_2) - TC(Q_1, Q_2)$

Bài toán được đưa về bài toán cực trị tự do của hàm doanh thu/hàm lợi nhuận với hai biến Q_1, Q_2.

Ví dụ 24. Một hãng độc quyền sản xuất hai loại sản phẩm. Cho biết hàm cầu đối với hai loại sản phẩm đó như sau:

$$Q_1 = 1300 - P_1;\ \ Q_2 = 675 - 0,5P_2$$

và hàm chi phí kết hợp là $TC(Q_1, Q_2) = Q_1^2 + 3Q_1Q_2 + Q_2^2$. Hãy cho biết mức sản lượng Q_1, Q_2 và các giá bán tương ứng để doanh nghiệp đó thu được lợi nhuận tối đa.

Giải

+) Bước 1. Lập hàm lợi nhuận

Từ các hàm cầu thuận ta suy ra hàm cầu đảo:

$$P_1 = 1300 - Q_1;\ P_2 = 1350 - 2Q_2$$

Hàm lợi nhuận của doanh nghiệp

$$\pi(Q_1, Q_2) = P_1Q_1 + P_2Q_2 - TC(Q_1, Q_2)$$

Hay

$$\pi(Q_1,Q_2) = -2Q_1^2 - 3Q_2^2 + 1300Q_1 + 1350Q_2 - 3Q_1Q_2$$

Vậy bài toán trở thành tìm điểm cực đại của hàm $\pi(Q_1,Q_2)$.

+) Bước 2. Tính các đạo hàm riêng cấp 1 và cấp 2

$$\pi'_{Q_1}(Q_1,Q_2) = -4Q_1 - 3Q_2 + 1300;$$

$$\pi'_{Q_2}(Q_1,Q_2) = -3Q_1 - 6Q_2 + 1350;$$

$$\pi''_{Q_1Q_1}(Q_1,Q_2) = -4; \pi''_{Q_2Q_2}(Q_1,Q_2) = -6; \pi''_{Q_1Q_2} = -3.$$

+) Bước 3. Giải hệ phương trình để tìm điểm dừng

$$\begin{cases} \pi'_{Q_1}(Q_1,Q_2) = 0 \\ \pi'_{Q_2}(Q_1,Q_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4Q_1 - 3Q_2 + 1300 = 0 \\ -3Q_1 - 6Q_2 + 1350 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = 250 \\ Q_2 = 100 \end{cases}$$

Vậy hàm số có một điểm dừng là $M(250, 100)$.

Bước 4. Kiểm tra điều kiện đủ tại $M(250,100)$.

$$A = \pi''_{Q_1Q_1}(250,100) = -4; C = \pi''_{Q_2Q_2}(250,100) = -6;$$

$$B = \pi''_{Q_1Q_2}(250,100) = \pi''_{Q_2Q_1}(250,100) = -3.$$

Xét định thức

$$D = \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = 15 > 0 \text{ và } A = -4 < 0$$

nên $M(250, 100)$ là điểm cực đại của hàm π.

Bước 5. Kết luận: Doanh nghiệp cần bán hàng với mức sản lượng cho mỗi sản phẩm và giá cả tương ứng là

$$Q_1 = 250; \ P_1 = 1300 - 250 = 1050;$$

$$Q_2 = 100; \ P_2 = 1350 - 200 = 1150$$

để thu được lợi nhuận tối đa là

$$\pi_{max} = \pi(250, 100) = 230000.$$

Ví dụ 25. Cho biết hàm lợi nhuận của một doanh nghiệp sản xuất ba loại sản phẩm là

$$\pi = -Q_1^2 - 3Q_2^2 - 7Q_3^2 + 300Q_2 + 1200Q_3 + 4Q_1Q_3 + 20$$

Hãy tìm mức sản lượng Q_1, Q_2, Q_3 để doanh nghiệp thu được lợi nhuận tối đa.

Giải

+) Bước 1. Giải hệ phương trình để tìm điểm dừng

$$\begin{cases} \pi'_{Q_1} = 0 \\ \pi'_{Q_2} = 0 \\ \pi'_{Q_3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2Q_1 + 4Q_3 = 0 \\ -6Q_2 + 300 = 0 \\ -14Q_3 + 4Q_1 + 1200 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = 400 \\ Q_2 = 50 \\ Q_3 = 200 \end{cases}$$

Vậy hàm số có một điểm dừng là $M(400, 50, 200)$.

+) Bước 2. Kiểm tra điều kiện đủ tại $M(400, 50, 200)$.

$$a_{11} = \pi''_{Q_1Q_1}(400, 50, 200) = -2;$$
$$a_{22} = \pi''_{Q_2Q_2}(400, 50, 200) = -6;$$
$$a_{33} = \pi''_{Q_3Q_3}(400, 50, 200) = -14;$$
$$a_{12} = a_{21} = \pi''_{Q_1Q_2}(400, 50, 200) = 0;$$
$$a_{13} = a_{31} = \pi''_{Q_1Q_3}(400, 50, 200) = 4;$$
$$a_{23} = a_{32} = \pi''_{Q_2Q_3}(400, 50, 200).$$

Xét ma trận Hess tại điểm dừng $M(400, 50, 200)$

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & -6 & 0 \\ 4 & 0 & -14 \end{pmatrix}$$

Từ ma trận H thành lập các ma trận con tương ứng

$$H_1 = (-2);\ H_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix};\ H_3 = H$$

Ta có $|H_1| = -2 < 0;\ |H_2| = 12 > 0;\ |H_3| = -72 < 0$

Xét $|H_1||H_2| = -24 < 0;\ |H_2||H_3| = -864 < 0$

nên $M(400, 50, 200)$ là điểm cực đại của hàm số π.

+) Bước 3. Kết luận : Doanh nghiệp cần bán các mặt hàng với số lượng

$$Q_1 = 400;\ Q_2 = 50;\ Q_3 = 200$$

để thu được lợi nhuận tối đa là :

$$\pi_{max} = \pi(400, 50, 200) = 127520.$$

3.3.3. Bài tập

Bài số 1. Cho biết hàm lợi nhuận của một doanh nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm được cho như sau:

$$\pi(Q_1, Q_2) = 160Q_1 - 3Q_1^2 - 2Q_1Q_2 - 2Q_2^2 + 120Q_2 - 18.$$

Hãy tìm mức sản lượng Q_1, Q_2 để doanh nghiệp đạt được lợi nhuận tối đa.

Đáp số : $\pi_{max} = \pi(20;20) = 2782.$

Bài số 2. Một hãng độc quyền sản xuất hai loại sản phẩm. Cho biết hàm cầu đối với hai loại sản phẩm đó như sau: $Q_1 = 25 - 0,5P_1; Q_2 = 30 - P_2$. Với hàm chi phí kết hợp $TC = Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2 + 20.$ Hãy xác định mức sản lượng Q_1, Q_2 và giá bán tương ứng để hãng đạt lợi nhuận tối đa.

Đáp số : $\pi_{max} = \pi(7;4) = 215.$

Bài số 3. Trả lời câu hỏi của bài tập số 2 với: $Q_1 = 50 - 0,5P_1;\ Q_2 = 76 - P_2$ và

$$TC = 3Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + 2Q_2^2 + 105$$

Đáp số : $\pi_{max} = \pi(8;10) = 675.$

Bài số 4. Cho hàm sản xuất của hãng $Q(K,L) = 10K^{0,3}L^{0,4}$, biết giá thuê một đơn vị vốn K bằng 0,03, giá thuê một đơn vị lao động L bằng 2, giá sản phẩm bằng 4. Hãy xác định mức sử dụng K và L để hãng thu được lợi nhuận tối đa.

Đáp số : $\pi_{max} = \pi(2560000, 51200) = 76800.$

Bài số 5. Một doanh nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm. Gọi Q_1 và Q_2 là sản lượng tương ứng của các loại sản phẩm đó. Giả sử hàm lợi nhuận là: $\pi = 15Q_1 + 12Q_2 - 3Q_1Q_2^2 - Q_1^3.$ Hãy xác định mức sản lượng cần sản xuất Q_1 và Q_2 sao cho doanh nghiệp thu được lợi nhuận tối đa.

Đáp số : $\pi_{max} = \pi(2,1) = 28.$

Bài số 6. Doanh nghiệp cạnh tranh có hàm sản xuất dạng:

$$Q(K,L) = -2K^2 + 3KL - 3L^2 + 30K + 20L \quad (K, L > 0)$$

1) Hãy xác định mức sử dụng vốn K và lao động L để doanh nghiệp thu được sản lượng cực đại.

2) Cho biết giá thị trường của sản phẩm là $P = 2$ USD, giá thuê một đơn vị vốn là $p_K = 4$ USD, giá thuê một đơn vị lao động $p_L = 22$ USD. Hãy xác định mức sử dụng K và L để hãng thu được lợi nhuận tối đa.

Đáp số : 1) $Q_{max} = Q\left(16, \frac{34}{3}\right) = \frac{1060}{3}$; *2)* $\pi_{max} = \pi(13,8) = 436.$

Bài số 7. Một hãng độc quyền sản xuất hai loại sản phẩm. Cho biết hàm cầu đối với hai loại sản phẩm đó như sau:

$$Q_1 = 75 - 3P_1 - P_2;\ Q_2 = 60 - 2P_1 - P_2.$$

Với hàm chi phí kết hợp $TC = 2Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2 + 300.$ Hãy xác định mức sản lượng Q_1, Q_2 và giá bán tương ứng để hãng đạt lợi nhuận tối đa.

Đáp số : $\pi_{max} = \pi\left(\frac{45}{11}, \frac{105}{22}\right) = \frac{795}{11}.$

Bài số 8. Một xí nghiệp sản xuất độc quyền hai loại sản phẩm. Biết hàm cầu của hai loại sản phẩm trên lần lượt là :

$$Q_{D_1} = 40 - 2P_1 + P_2 \text{ và } Q_{D_2} = 15 + P_1 - P_2.$$

Với hàm tổng chi phí là : $TC = Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2$. Hãy định các mức sản lượng Q_1 và Q_2 để doanh nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.

Đáp số: $Q_1 = 8,\ Q_2 = \frac{23}{3}.$

Bài số 9. Doanh nghiệp cạnh tranh có hàm sản xuất dạng:

$$Q(K,L) = K^{0,5} + L^{0,5}$$

1) Đánh giá hiệu quả của việc tăng quy mô sản xuất.
2) Tính MPK và MPL tại điểm $(16,25)$ và nêu ý nghĩa.
3) Cho biết giá thị trường của sản phẩm là $P = 2$ USD, giá thuê một đơn vị vốn là $p_K = 0,25$ USD, giá thuê một đơn vị lao động $p_L = 0,2$ USD. Hãy xác định mức sử dụng K và L để hãng thu được lợi nhuận tối đa.

Đáp số : 1) Doanh nghiệp có hiệu quả giảm theo quy mô;

2) $MPK(16,25) = \frac{1}{8}$; $MPL(16,25) = \frac{1}{10}$ *3)* $\pi_{max} = \pi(16,25) = 9.$

3.4. Mô hình cực trị có điều kiện ràng buộc nhiều biến trong kinh tế

3.4.1. Tối đa hóa lợi ích trong điều kiện ràng buộc về ngân sách dành cho chi tiêu

Bài toán. Cho hàm lợi ích của chủ thể như sau: $U = U(X, Y)$. Biết rằng giá mặt hàng hóa X là P_X, giá mặt hàng hóa Y là P_Y và ngân sách dành cho chi tiêu của chủ thể là I. Hãy xác định số lượng mặt hàng X, Y sao cho tối đa hóa lợi ích của chủ thể.

Mô hình bài toán. Tìm (X, Y) sao cho $U(X, Y)$ đạt giá trị lớn nhất thỏa mãn điều kiện: $X \cdot P_X + Y \cdot P_Y = I.$

Ví dụ 26. Cho biết hàm lợi ích tiêu dùng: $U(x, y) = x^{0,4}y^{0,6}$. Giả sử giá của các mặt hàng tương ứng là 2 USD, 3 USD và thu nhập dành cho tiêu dùng là 130 USD. Hãy xác định lượng cầu đối với mỗi mặt hàng để người tiêu dùng thu được lợi ích tối đa.

Giải

Gọi x là số lượng mặt hàng 1; y là số lượng mặt hàng 2.

+) Bước 1. Mô hình bài toán. Tìm (x, y) sao cho $U(x, y) = x^{0,4}y^{0,6}$ đạt giá trị tối đa thỏa mãn điều kiện $g(x, y) = 2x + 3y = 130$.

+) Bước 2. Lập hàm Lagrange

$$L(x, y, \lambda) = x^{0,4}y^{0,6} + \lambda(130 - 2x - 3y)$$

+) Bước 3. Giải hệ phương trình để tìm điểm dừng

$$\begin{cases} L'_x(x, y, \lambda) = 0,4x^{-0,6}y^{0,6} - 2\lambda = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) = 0,6x^{0,4}y^{-0,4} - 3\lambda = 0 \\ L'_\lambda(x, y, \lambda) = 130 - 2x - 3y \quad = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{-0,6}y^{0,6} = 5\lambda & (1) \\ x^{0,4}y^{-0,4} = 5\lambda & (2) \\ 2x + 3y = 130 & (3) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra $y = x$, thay vào phương trình thứ (3) ta có

$$2x + 3.x = 130 \Leftrightarrow x = 26 \Rightarrow y = 26;\ \lambda = 0,2$$

Vậy hàm số có một điểm dừng $M(26, 26)$ ứng với $\lambda = 0,2$.

+) Bước 4. Kiểm tra điều kiện đủ. Xét tại điểm dừng $M(26, 26)$ với $\lambda = 0,2$.

$$g_1 = g'_x(26, 26) = 2;\ g_2 = g'_y(26, 26) = 3;$$

$$L_{11} = L''_{xx}(26; 26; 0,2) = -0,24(26)^{-1,6}(26)^{0,6} = -\frac{3}{325} < 0;$$

$$L_{22} = L''_{yy}(26;26;0,2) = -0,24(26)^{0,4}(26)^{-1,4} = -\frac{3}{325} < 0;$$

$$L_{12} = L_{21} = L''_{xy}(26;26;0,2) = 0,24(26)^{-0,6}(26)^{-0,4} = \frac{3}{325} > 0.$$

Xét định thức

$$|H| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & L_{11} & L_{12} \\ 3 & L_{21} & L_{22} \end{vmatrix} = 12L_{12} - 9L_{11} - 4L_{22} = \frac{3}{13} > 0$$

nên $M(26,26)$ là điểm cực đại của hàm số.

+) Bước 5. Kết luận : Người tiêu dùng cần mua mặt hàng 1 và mặt hàng 2 đều với số lượng 26 đơn vị để thu được lợi ích tối đa là $U(26,26) = 26^{0,4}.26^{0,6} = 26.$

Ví dụ 27. Một hộ gia đình có hàm lợi ích tiêu dùng với hai loại hàng hóa như sau

$$U(x_1, x_2) = 20x_1^{0,45}x_2^{0,55}, \ \ (x_1 > 0, x_2 > 0)$$

Trong đó x_1, x_2 tương ứng là số đơn vị của hai loại hàng hóa với giá $p_1 = 6,\ p_2 = 11.$ Ngân sách tiêu dùng là $I = 600$.

a) Lập hàm Lagrange để tìm cực trị hàm lợi ích trong điều kiện ràng buộc ngân sách dành cho tiêu dùng.

b) Tìm gói hàng cực đại hàm lợi ích.

c) Khi ngân sách tiêu dùng tăng 1 đơn vị thì mức lợi ích cực đại tăng bao nhiêu đơn vị?

Giải

a) Lập bài toán: Tìm (x_1, x_2) sao cho $U(x_1, x_2) = 20x_1^{0,45}x_2^{0,55}$ $(x_1 > 0, x_2 > 0)$ đạt giá trị tối đa thỏa mãn điều kiện: $g(x_1, x_2) = 6x_1 + 11x_2 = 600.$

Lập hàm Lagrange:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 20x_1^{0,45}x_2^{0,55} + \lambda(600 - 6x_1 - 11x_2).$$

b) Điều kiện cần:

$$L'_{x_1}(x_1, x_2, \lambda) = 9x_1^{-0,55}x_2^{0,55} - 6\lambda;$$

$$L'_{x_2}(x_1, x_2, \lambda) = 11x_1^{0,45}x_2^{-0,45} - 11\lambda;$$

$$L'_{\lambda}(x_1, x_2, \lambda) = 600 - 6x_1 - 11x_2.$$

Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} L'_{x_1}(x_1,x_2,\lambda) & = & 0 \\ L'_{x_2}(x_1,x_2,\lambda) & = & 0 \\ L'_{\lambda}(x_1,x_2,\lambda) & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x_1^{-0,55}x_2^{0,55} - 6\lambda & = & 0 \\ 11x_1^{0,45}x_2^{-0,45} - 11\lambda & = & 0 \\ 600 - 6x_1 - 11x_2 & = & 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11x_1^{0,45}x_2^{-0,45} - 11\lambda & = & 0 \\ \dfrac{x_2}{x_1} & = & \dfrac{2}{3} \\ 600 - 9x_2 - 11x_2 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = & 45 \\ x_2 & = & 30 \\ \lambda & = & (1,5)^{0,45} = 1,2 \end{cases}$$

Vậy hàm số có 1 điểm dừng $M(45,30)$ với $\lambda = 1,2$

Điều kiện đủ: Xét tại điểm $M(45,30)$ với $\lambda = 1,2$

$$g_1 = g'_{x_1}(45,30) = 6;\ g_2 = g'_{x_2}(45,30) = 11;$$

$$L_{11} = L''_{x_1x_1}(45;30;1,2) = -4,95 \cdot 45^{-1,55}30^{0,55} < 0;$$

$$L_{22} = L''_{x_2x_2}(45;30;1,2) = -4,95 \cdot 45^{0,45} \cdot 30^{-1,45} < 0;$$

$$L_{12} = L_{21} = L''_{x_1x_2}(45;30;1,2) = 4,95 \cdot 45^{-0,55} \cdot 30^{-0,45} > 0.$$

Lập ma trận Hess

$$H = \begin{pmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 11 \\ 6 & L_{11} & L_{12} \\ 11 & L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$$

Ta có

$$|H| = 132L_{12} - 121L_{11} - 36L_{22} > 0$$

Vậy điểm $M(45,30)$ là điểm cực đại của hàm số, với gói hàng (45, 30) thì hàm lợi ích đạt cực đại bằng 720,099.

c) Ý nghĩa của nhân tử Lagrange λ.

Khi ngân sách tiêu dùng tăng lên 1 đơn vị thì giỏ giá trị lợi ích cực đại tăng lên một lượng xấp xỉ bằng $\lambda = 1,2$ đơn vị.

3.4.2. Tối đa hóa sản lượng trong điều kiện ràng buộc về ngân sách dành cho sản xuất

Bài toán. Cho hàm sản xuất của một doanh nghiệp: $Q = Q(K,L)$. Biết rằng giá thuê một đơn vị vốn là p_K, giá thuê một đơn vị lao động là p_L và ngân sách dành cho sản xuất của doanh nghiệp là I. Hãy xác định mức sử dụng K, L sao cho doanh nghiệp tối đa hóa sản lượng.

Mô hình bài toán. Tìm (K,L) sao cho $Q(K,L)$ đạt giá trị tối đa thỏa mãn điều kiện : $K \cdot p_K + L \cdot p_L = I$.

Ví dụ 28. Một doanh nghiệp có hàm sản xuất: $Q(K,L) = K^{0,4}L^{0,3}$

a) Hãy đánh giá hiệu quả của việc tăng quy mô sản xuất.

b) Giả sử giá thuê một đơn vị vốn là 4 USD, giá thuê một đơn vị lao động là 3 USD và doanh nghiệp tiến hành sản xuất với ngân sách cố định là 1050 USD. Hãy cho biết doanh nghiệp đó sử dụng bao nhiêu đơn vị vốn và bao nhiêu đơn vị lao động thì thu được sản lượng tối đa?

Giải

a) Ta thấy $0,3 + 0,4 = 0,7 < 1$ nên doanh nghiệp sản xuất có hiệu quả giảm theo quy mô.

b) Lập mô hình bài toán. Tìm (K,L) sao cho $Q = K^{0,4}L^{0,3}$ đạt giá trị tối đa thỏa mãn điều kiện $4K + 3L = 1050$.

Đặt $g(K,L) = 4K + 3L = 1050$.

+) Bước 1. Để tránh nhầm lẫn, trong bài này ta ký hiệu hàm Lagrange là

$$f(K,L,\lambda) = K^{0,4}L^{0,3} + \lambda(1050 - 4K - 3L)$$

+) Bước 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} f_K^{/} = 0,4K^{-0,6}L^{0,3} - 4\lambda = 0 \\ f_L^{/} = 0,3K^{0,4}L^{-0,7} - 3\lambda = 0 \\ f_\lambda^{/} = 1050 - 4K - 3L \quad = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K^{-0,6}L^{0,3} = 10\lambda & (1) \\ K^{0,4}L^{-0,7} = 10\lambda & (2) \\ 4K + 3L = 1050 & (3) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra $K = L$, thay vào phương trình thứ (3) ta có

$$7K = 1050 \Leftrightarrow K = 150 \Rightarrow L = 150;\ \lambda = \frac{1}{10.150^{0,3}}$$

Vậy hàm số có một điểm dừng $M(150,150)$ ứng với $\lambda = \frac{1}{10.150^{0,3}}$.

+) Bước 3. Kiểm tra điều kiện đủ tại $M(150,150)$ ứng với $\lambda = \frac{1}{10.150^{0,3}}$

$$g_1 = g_K^{/}(150,150) = 4;\ g_2 = g_L^{/}(150,150) = 3;$$

$$f_{11} = f_{KK}^{//}(150,150,\lambda) = -0,24.150^{-1,3} < 0;$$

$$f_{22} = f_{LL}^{//}(150,150,\lambda) = -0,21.150^{-1,3} < 0;$$

$$f_{12} = f_{21} = f_{KL}^{//}(150,150,\lambda) = 0,12.150^{-1,3} > 0.$$

Xét định thức:

$$|H| = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 4 & F_{11} & F_{12} \\ 3 & F_{21} & F_{22} \end{vmatrix} = 24f_{12} - 9f_{11} - 16f_{22} = \frac{42}{5} \cdot 150^{-1,3} > 0$$

nên $M(150,150)$ là điểm cực đại của hàm số.

+) Bước 4. Kết luận: Doanh nghiệp cần sử dụng 150 đơn vị vốn và 150 đơn vị lao động để thu được sản lượng tối đa là $Q_{max} = Q(150,150) = 150^{0,7}$.

Ví dụ 29. Công ty M chuyên sản xuất một mặt hàng A, có hàm sản xuất phụ thuộc hai yếu tố vốn K và lao động L như sau: $Q(K,L) = 40K^{0,4}L^{0,6}$ trong đó Q là sản lượng và $K > 0$, $L > 0$. Cho biết giỏ vốn và lao động lần lượt là $p_K = 11$, $p_L = 20$, với khả năng chi phí tối đa cho vốn và lao động là 6600. Hãy sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange tìm K và L sao cho sản lượng Q đạt cực đại.

Giải

+) Bước 1. Lập mô hình bài toán. Tìm (K, L) sao cho $Q(K,L) = 40K^{0,4}L^{0,6}$ đạt giá trị lớn nhất thỏa mãn điều kiện:

$$g(K,L) = 11K + 20L = 6600$$

+) Bước 2. Lập hàm Lagrange:

$$f(K,L,\lambda) = 40K^{0,4}L^{0,6} + \lambda(6600 - 11K - 20L)$$

+) Bước 3. Điều kiện cần:

Đạo hàm riêng cấp 1 của hàm f

$$f_K^{/}(K,L,\lambda) = 16K^{-0,6}L^{0,6} - 11\lambda;$$

$$f_L^{/}(K,L,\lambda) = 24K^{0,4}L^{-0,4} - 20\lambda;$$

$$f_\lambda^{/}(K,L,\lambda) = 6600 - 11K - 20L.$$

Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} f'_K(K,L,\lambda) = 0 \\ f'_L(K,L,\lambda) = 0 \\ f'_\lambda(K,L,\lambda) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16K^{-0,6}L^{0,6} - 11\lambda = 0 \\ 24K^{0,4}L^{-0,4} - 20\lambda = 0 \\ 6600 - 11K - 20L = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{16}{11}K^{-0,6}L^{0,6} = \lambda \\ L = \dfrac{33}{40}K \\ 6600 - 11K - 20.\dfrac{33}{40}K = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K_0 = 240 \\ L_0 = 198 \\ \lambda_0 = \dfrac{16}{11}.\left(\dfrac{33}{40}\right)^{0,6} \end{cases}$$

Vậy hàm số có một điểm dừng:

$$M(240, 198); \lambda_0 = \frac{16}{11}.\left(\frac{33}{40}\right)^{0,6} > 0$$

+) Bước 4. Điều kiện đủ:

Đạo hàm riêng cấp 2 của hàm f

$$f''_{KK}(K,L,\lambda) = -9,6K^{-1,6}L^{0,6};$$

$$f''_{LL}(K,L,\lambda) = -9,6K^{0,4}L^{-1,4};$$

$$f''_{KL}(K,L,\lambda) = 9,6K^{-0,6}L^{-0,4}.$$

Đạo hàm riêng cấp 1 của g

$$g_1 = g'_K(240, 198) = 11;\ g_2 = g'_L(240, 198) = 20.$$

Xét tại điểm dừng tại $M(240, 198); \lambda_0 = \dfrac{16}{11}.\left(\dfrac{33}{40}\right)^{0,6} > 0$

Ta có

$$f_{11} = f''_{KK}(240, 198, \lambda_0) = -9,6(240)^{-1,6}(198)^{0,6} < 0;$$

$$f_{22} = f''_{LL}(240, 198, \lambda_0) = -9,6(240)^{0,4}(198)^{-1,4} < 0;$$

$$f_{12} = f_{21} = f''_{KL}(240, 198, \lambda_0) = 9,6(240)^{-0,6}(198)^{-0,4} > 0.$$

Lập ma trận Hess tại điểm dừng:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & f_{11} & f_{12} \\ g_2 & f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 11 & 20 \\ 11 & f_{11} & f_{12} \\ 20 & f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$$

Ta có

$$\left|H\right| = 440f_{12} - 400f_{11} - 121f_{22} > 0, \quad \left(f_{12} > 0; f_{11} < 0; f_{22} < 0\right)$$

Vậy điểm $M\left(240,198\right)$ là điểm cực đại của hàm số, tức là với mức vốn $K = 240$, lao động $L = 198$ thì sản lượng Q đạt mức tối đa là 8553,49.

3.4.3. Tối thiểu hóa chi tiêu trong điều kiện giữ mức lợi ích

Bài toán. Cho hàm lợi ích của chủ thể như sau: $U = U\left(X, Y\right)$. Biết rằng giá mặt hàng hóa X là P_X, giá mặt hàng hóa Y là P_Y và mức lợi ích định trước của chủ thể là U_0. Hãy xác định số lượng mặt hàng X, Y sao cho tối thiểu hóa chi tiêu cho chủ thể.

Mô hình bài toán. Tìm $\left(X, Y\right)$ sao cho $C\left(X, Y\right) = X \cdot P_X + Y \cdot P_Y$ đạt giá trị nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện : $U\left(X, Y\right) = U_0$.

Ví dụ 30. Cho hàm chi tiêu $C\left(x_1, x_2\right) = p_1x_1 + p_2x_2$ và hàm lợi ích $U\left(x_1, x_2\right) = x_1x_2$.

a) Hãy cực tiểu hàm chi tiêu trong điều kiện giữ mức lợi ích bằng U_0.

b) Áp dụng : với $p_1 = 8, p_2 = 4, U_0 = 8$.

c) Với dữ kiện câu b) nếu mức lợi ích U_0 tăng 1 đơn vị thì ngân sách chi tiêu cực tiểu tăng bao nhiêu đơn vị.

d) Với dữ kiện câu b). Nếu mức lợi ích U_0 tăng 1% thì ngân sách chi tiêu cực tiểu tăng bao nhiêu %.

Giải

a) Tìm (x_1, x_2) sao cho $C = p_1x_1 + p_2x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất thỏa : $g = x_1x_2 = U_0$

+) Bước 1. Lập hàm Lagrange: $L(x_1, x_2, \lambda) = p_1x_1 + p_2x_2 + \lambda\left(U_0 - x_1x_2\right)$

Đạo hàm riêng cấp 1

$$L'_{x_1}(x_1, x_2, \lambda) = p_1 - \lambda x_2;\ L'_{x_2}(x_1, x_2, \lambda) = p_2 - \lambda x_1;$$

$$L'_{\lambda}(x_1, x_2, \lambda) = U_0 - x_1x_2;\ g'_{x_1} = x_2;\ g'_{x_2} = x_1.$$

Đạo hàm riêng cấp 2

$$L''_{x_1x_1}(x_1, x_2, \lambda) = 0;\ L''_{x_2x_2}(x_1, x_2, \lambda) = 0;$$

$$L''_{x_1x_2}(x_1, x_2, \lambda) = -\lambda = L''_{x_2x_1}(x_1, x_2, \lambda).$$

+) Bước 2. Tìm điểm dừng cùng giá trị λ, từ hệ phương trình sau

$$\begin{cases} L'_{x_1} = p_1 - \lambda x_2 = 0 \\ L'_{x_2} = p_2 - \lambda x_1 = 0 \\ L'_{\lambda} = U_0 - x_1 x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{p_1}{x_2} \\ \lambda = \dfrac{p_2}{x_1} \\ x_1 x_2 = U_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{p_1}{x_2} \\ x_2 = \dfrac{p_1}{p_2} x_1 \\ x_1^2 = \dfrac{p_2}{p_1} U_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{\dfrac{p_2}{p_1} U_0} \\ x_2 = \sqrt{\dfrac{p_1}{p_2} U_0} \\ \lambda = \sqrt{\dfrac{p_1 p_2}{U_0}} \end{cases} \quad (x_1, x_2 > 0)$$

Hàm số có một điểm dừng :

$$M\left(\sqrt{\frac{p_2}{p_1} U_0}; \sqrt{\frac{p_1}{p_2} U_0}\right); \lambda_0 = \sqrt{\frac{p_1 p_2}{U_0}} > 0.$$

+) Bước 3. Kiểm tra điều kiện đủ tại điểm dừng

$$M\left(\sqrt{\frac{p_2}{p_1} U_0}; \sqrt{\frac{p_1}{p_2} U_0}\right); \lambda_0 = \sqrt{\frac{p_1 p_2}{U_0}} > 0.$$

Ta có

$$g_1 = g'_{x_1} = \sqrt{\frac{p_1}{p_2} U_0} > 0; \;\; g_2 = g'_{x_2} = \sqrt{\frac{p_2}{p_1} U_0} > 0.$$

$$L_{11} = 0; L_{22} = 0; L_{12} = L_{21} = -\lambda_0 = -\sqrt{\frac{p_1 p_2}{U_0}} < 0.$$

Xét định thức:

$$|H| = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & 0 & -\lambda_0 \\ g_2 & -\lambda_0 & 0 \end{vmatrix} = -2\lambda_0 g_1 g_2 = -2\sqrt{p_1 p_2 U_0} < 0$$

Vậy điểm $M\left(\sqrt{\dfrac{p_2}{p_1} U_0}; \sqrt{\dfrac{p_1}{p_2} U_0}\right)$ là điểm cực tiểu của hàm chi tiêu.

b) Áp dụng : với $p_1 = 8, p_2 = 4, U_0 = 8$ thì

$$\begin{cases} x_1 &= \sqrt{\dfrac{p_2}{p_1}U_0} = \sqrt{\dfrac{4}{8}\cdot 8} = 2 \\ x_2 &= \sqrt{\dfrac{p_1}{p_2}U_0} = \sqrt{\dfrac{8}{4}\cdot 8} = 4 \\ \lambda &= \sqrt{\dfrac{p_1p_2}{U_0}} = \sqrt{\dfrac{8\cdot 4}{8}} = 2 \end{cases}$$

Vậy $M(2, 4)$; $\lambda_0 = 2 > 0$ là điểm cực tiểu của hàm chi tiêu.

c) Với dữ kiện câu b). Nếu mức lợi ích U_0 tăng 1 đơn vị thì ngân sách chi tiêu cực tiểu tăng bao nhiêu đơn vị?

Theo ý nghĩa của nhân tử Lagrange: $\dfrac{\partial C}{\partial U} = \lambda_0 = 2 > 0$

Vậy nếu nếu mức lợi ích U_0 tăng 1 đơn vị thì ngân sách chi tiêu cực tiểu sẽ tăng xấp xỉ 2 đơn vị.

d) Với dữ kiện câu b). Nếu mức lợi ích U_0 tăng 1% thì ngân sách chi tiêu cực tiểu tăng bao nhiêu %

Ngân sách chi tiêu cực tiểu:

$$C_{min} = 2\sqrt{p_1p_2U_0}$$

Do đó :

$$\frac{\partial C}{\partial U_0} = \sqrt{\frac{p_1p_2}{U_0}}$$

Hệ số co dãn của hàm chi tiêu theo lợi ích tại điểm tối ưu

$$\varepsilon_{U_0}^{C} = \frac{\partial C}{\partial U_0}\cdot\frac{U_0}{C_{min}} = \sqrt{\frac{p_1p_2}{U_0}}\,\frac{U_0}{2\sqrt{p_1p_2U_0}} = 0{,}5 > 0$$

Vậy ngân sách chi tiêu cực tiểu tăng xấp xỉ 0,5%.

3.4.4. Tối thiểu hóa chi phí trong điều kiện giữ mức sản lượng

Bài toán. Cho hàm sản xuất của một doanh nghiệp: $Q = Q(K,L)$. Biết rằng giá thuê một đơn vị vốn là p_K, giá thuê một đơn vị lao động là p_L và mức sản lượng yêu cầu định trước của doanh nghiệp là Q_0. Hãy xác định mức sử dụng K, L sao cho doanh nghiệp tối thiểu hóa chi phí.

Mô hình bài toán. Tìm (K,L) sao cho $TC(K, L) = K \cdot p_K + L \cdot p_L$ đạt giá trị nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện : $Q(K,L) = Q_0$.

Ví dụ 31. Giả sử hàm sản xuất doanh nghiệp có dạng: $Q = 25K^{0,5}L^{0,5}$. Biết rằng giá thuê một đơn vị vốn là $p_K = 12$, giá thuê một đơn vị lao động là $p_L = 3$.

a) Định mức sử dụng K, L tối ưu để sản xuất được mức sản lượng $Q = 1250$.

b) Tính hệ số co dãn của tổng chi phí theo sản lượng tại điểm tối ưu và nêu ý nghĩa.

Giải

a) Định mức sử dụng K, L tối ưu để sản xuất được mức sản lượng $Q = 1250$.

+) Bước 1. Lập mô hình bài toán. Tìm (K, L) sao cho $TC(K,L) = 12K + 3L$ đạt giá trị nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện:

$$g(K, L) = 25K^{0,5}L^{0,5} = 1250$$

+) Bước 2. Lập hàm Lagrange:

$$f(K,L,\lambda) = 12K + 3L + \lambda\left(1250 - 25K^{0,5}L^{0,5}\right)$$

+) Bước 3. Điều kiện cần:

Đạo hàm riêng cấp 1 của hàm f

$$f'_K(K,L,\lambda) = 12 - 12,5\lambda K^{-0,5}L^{0,5};$$

$$f'_L(K,L,\lambda) = 3 - 12,5\lambda K^{0,5}L^{-0,5};$$

$$f'_\lambda(K,L,\lambda) = 1250 - 25K^{0,5}L^{0,5}.$$

Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} f'_K(K,L,\lambda) = 0 \\ f'_L(K,L,\lambda) = 0 \\ f'_\lambda(K,L,\lambda) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 - 12,5\lambda K^{-0,5}L^{0,5} = 0 \\ 3 - 12,5\lambda K^{0,5}L^{-0,5} = 0 \\ 1250 - 25K^{0,5}L^{0,5} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12,5\lambda K^{-0,5}L^{0,5} = 12 \\ 12,5\lambda K^{0,5}L^{-0,5} = 3 \\ 25K^{0,5}L^{0,5} = 1250 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K = 25 \\ L = 100 \\ \lambda = 0,48 \end{cases}$$

Vậy hàm số có một điểm dừng:

$$M(25, 100); \lambda = 0,48$$

+) Bước 4. Điều kiện đủ:

Đạo hàm riêng cấp 2 của hàm f

$$f''_{KK}(K,L,\lambda) = 6,25\lambda K^{-1,5}L^{0,5};$$

$$f''_{LL}(K,L,\lambda) = 6,25\lambda K^{0,5}L^{-1,5};$$

$$f''_{KL}(K,L,\lambda) = -6,25\lambda K^{-0,5}L^{-0,5}.$$

Đạo hàm riêng cấp 1 của g

$$g'_K = 12,5K^{-0,5}L^{0,5};\ g'_L = 12,5K^{0,5}L^{-0,5}$$

Xét tại điểm dừng $M(25, 100); \lambda = 0,48$

Ta có

$$g_1 = g'_K(25, 100) = 25;\ g_2 = g'_L(25, 100) = 6,25$$

$$f_{11} = f''_{KK}(25;100;0,48) = \frac{6}{25} = 0,24;$$

$$f_{22} = f''_{LL}(25;100;0,48) = \frac{3}{200} = 0,015;$$

$$f_{12} = f_{21} = f''_{KL}(25;100;0,48) = -\frac{3}{50} = -0,06.$$

Lập ma trận Hess tại điểm dừng $M(25, 100); \lambda = 0,48$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & f_{11} & f_{12} \\ g_2 & f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 25 & 6,25 \\ 25 & 0,24 & -0,06 \\ 6,25 & -0,06 & 0,015 \end{pmatrix}$$

Ta có: $|H| = -37,5 < 0$. Vậy điểm $M(25, 100)$ là điểm cực tiểu của hàm số, tức là với mức vốn $K = 25$, lao động $L = 100$ với $TC_{min} = 600$.

b) Tính hệ số co dãn của tổng chi phí theo sản lượng tại Q và nêu ý nghĩa

Ta có: $\varepsilon_{TC/Q} = TC'(Q)\dfrac{Q}{TC(Q)}$

Tại điểm tối ưu, $\lambda = 0,48,\ Q = 1250,\ TC_{min} = 600$ thì

$$\varepsilon_{TC/Q} = \lambda\frac{Q}{TC_{min}} = 0,48 \cdot \frac{1250}{600} = 1$$

Ý nghĩa. Tại điểm tối ưu, nếu sản lượng tăng 1% thì chi phí tối thiểu tăng 1%.

3.4.5. Tối đa hóa lợi nhuận của hãng độc quyền, trong trường hợp không phân biệt giá bán ở hai thị trường

Bài toán. Giả sử một công ty độc quyền sản xuất một loại sản phẩm và bán sản phẩm đó ở hai thị trường khác nhau. Biết hàm tổng chi phí $TC = TC(Q)$, $(Q = Q_1 + Q_2)$ và cầu của hai thị trường lần lượt là $Q_1 = D(P_1)$, $Q_2 = D(P_2)$. Hãy xác định sản lượng và giá bán trên mỗi thị trường để công ty thu được lợi nhuận tối đa. Biết rằng giá bán tại hai thị trường là như nhau.

Mô hình bài toán. Tìm (Q_1, Q_2) sao cho hàm lợi nhuận $\pi = \pi(Q_1, Q_2)$ đạt giá trị lớn nhất thỏa mãn điều kiện : $P_1 = P_2$.

Phương pháp giải.

Bước 1. Từ hai hàm cầu thuận $Q_1 = D(P_1)$, $Q_2 = D(P_2)$, ta suy ra hai hàm cầu đảo $P_1 = D^{-1}(Q_1)$, $P_2 = D^{-1}(Q_2)$.

Bước 2. Lập hàm doanh thu:

$$TR(Q_1, Q_2) = P_1Q_1 + P_2Q_2 = D^{-1}(Q_1)Q_1 + D^{-1}(Q_2)Q_2.$$

Bước 3. Lập hàm lợi nhuận:

$$\pi(Q_1, Q_2) = TR(Q_1, Q_2) - TC(Q_1, Q_2).$$

Bước 4. Từ giả thiết giá bán hai thị trường là như nhau, nghĩa là

$$P_1 = P_2 \Leftrightarrow D^{-1}(Q_1) = D^{-1}(Q_2).$$

Bước 5. Khảo sát cực trị của hàm lợi nhuận $\pi = \pi(Q_1, Q_2)$ với điều kiện ràng buộc là : $D^{-1}(Q_1) = D^{-1}(Q_2)$.

Ví dụ 32. Một công ty độc quyền sản xuất một loại sản phẩm và bán sản phẩm đó ở hai thị trường khác nhau. Biết hàm tổng chi phí $TC = 35 + 40Q$, $(Q = Q_1 + Q_2)$ và cầu của hai thị trường lần lượt là $Q_1 = 24 - 0,2P_1$, $Q_2 = 10 - 0,05P_2$. Hãy xác định sản lượng và giá bán trên mỗi thị trường để công ty thu được lợi nhuận tối đa. Biết rằng giá bán tại hai thị trường là như nhau.

Giải

Từ hai hàm cầu thuận $Q_1 = 24 - 0,2P_1$; $Q_2 = 10 - 0,05P_2$, ta có suy ra hai hàm cầu đảo

$$P_1 = 120 - 5Q_1,\ P_2 = 200 - 20Q_2$$

+) Hàm doanh thu:

$$TR(Q_1,Q_2)=P_1Q_1+P_2Q_2=120Q_1-5Q_1^2+200Q_2-20Q_2^2$$

+) Hàm lợi nhuận:

$$\pi(Q_1,Q_2)=TR(Q_1,Q_2)-TC(Q_1,Q_2)=80Q_1-5Q_1^2+160Q_2-20Q_2^2$$

+) Theo giả thiết:

$$P_1=P_2 \Leftrightarrow 120-5Q_1=200-20Q_2 \Leftrightarrow -Q_1+4Q_2=16$$

+) Bước 1. Lập mô hình bài toán.

Tìm (Q_1,Q_2) sao cho $\pi(Q_1,Q_2)$ đạt giá trị lớn nhất thỏa mãn điều kiện:

$$g(Q_1,Q_2)=-Q_1+4Q_2=16$$

+) Bước 2. Lập hàm phụ Lagrange:

$$f(Q_1,Q_2,\lambda)=80Q_1-5Q_1^2+160Q_2-20Q_2^2+\lambda(16+Q_1-4Q_2)$$

+) Bước 3. Điều kiện cần:

Đạo hàm riêng cấp 1 của hàm f

$$f'_{Q_1}(Q_1,Q_2,\lambda)=80-10Q_1+\lambda;$$

$$f'_{Q_2}(Q_1,Q_2,\lambda)=160-40Q_2-4\lambda;$$

$$f'_{\lambda}(Q_1,Q_2,\lambda)=16+Q_1-4Q_2.$$

Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} f'_{Q_1}(Q_1,Q_2,\lambda) = 0 \\ f'_{Q_2}(Q_1,Q_2,\lambda) = 0 \\ f'_{\lambda}(Q_1,Q_2,\lambda) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 80-10Q_1+\lambda=0 \\ 160-40Q_2-4\lambda=0 \\ 16+Q_1-4Q_2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10Q_1 - \lambda = 80 \\ 40Q_2 + 4\lambda = 160 \\ -Q_1 + 4Q_2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = \dfrac{32}{5} \\ Q_2 = \dfrac{28}{5} \\ \lambda = -16 \end{cases}$$

Vậy hàm số có một điểm dừng: $M\left(\dfrac{32}{5},\dfrac{28}{5}\right);\lambda=-16$

+) Bước 4. Điều kiện đủ:

Đạo hàm riêng cấp 2 của hàm f

$$f''_{Q_1Q_1}(Q_1,Q_2,\lambda) = -10;\ f''_{Q_2Q_2}(Q_1,Q_2,\lambda) = -40;$$

$$f'_{Q_1Q_2}(Q_1,Q_2,\lambda) = f'_{Q_2Q_1}(Q_1,Q_2,\lambda) = 0.$$

Đạo hàm riêng cấp 1 của g

$$g'_{Q_1}(Q_1,Q_2) = -1;\ g'_{Q_2}(Q_1,Q_2) = 4$$

Xét tại điểm dừng $M\left(\frac{32}{5},\frac{28}{5}\right);\lambda = -16$

Ta có

$$g_1 = g'_{Q_1}\left(\frac{32}{5},\frac{28}{5}\right) = -1;$$

$$g_2 = g'_{Q_2}\left(\frac{32}{5},\frac{28}{5}\right) = 4;$$

$$f_{11} = f''_{Q_1Q_1}\left(\frac{32}{5},\frac{28}{5},-16\right) = -10;$$

$$f_{22} = f''_{Q_2Q_2}\left(\frac{32}{5},\frac{28}{5},-16\right) = -40;$$

$$f_{12} = f_{21} = f''_{Q_1Q_2}\left(\frac{32}{5},\frac{28}{5},-16\right) = 0.$$

Lập ma trận Hess tại điểm dừng $M\left(\frac{32}{5},\frac{28}{5}\right);\lambda = -16$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & f_{11} & f_{12} \\ g_2 & f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & -10 & 0 \\ 4 & 0 & -40 \end{pmatrix}$$

Ta có định thức của ma trận Hess

$$\det(H) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & -10 & 0 \\ 4 & 0 & -40 \end{vmatrix} = 200 > 0.$$

Vậy hàm số đạt cực đại tại điểm $M\left(\frac{32}{5},\frac{28}{5}\right)$, nghĩa là sản lượng $Q_1 = \frac{32}{5},\ Q_2 = \frac{28}{5}$ và giá bán tương ứng $P_1 = P_2 = 88$ thì công ty đạt được lợi nhuận tối đa với $\pi_{max} = 576$.

3.4.6. Bài tập

Bài số 1. Cho biết hàm lợi ích tiêu dùng: $U(x_1, x_2) = x_1x_2 + x_1 + x_2$. Trong đó x_1, x_2 lần lượt là khối lượng hai mặt hàng. Giả sử giá bán của các mặt hàng tượng ứng là $P_1 = 2$ USD, $P_2 = 5$ USD và thu nhập dành cho người tiêu dùng là $I = 500$ USD. Hãy xác định lượng cầu đối với mỗi mặt hàng nếu người tiêu dùng muốn tối đa hóa lợi ích của mình. Nếu thu nhập của người tiêu dùng tăng 1% thì lợi ích tối đa thay đổi như thế nào?

Đáp số : $U_{max} = U\left(\frac{503}{4}; \frac{497}{10}\right); \varepsilon_{U|M} = 1,973.$

Bài số 2. Cho biết hàm lợi ích tiêu dùng: $U(x_1, x_2) = x_1^{0,6}x_2^{0,25}$. Trong đó x_1, x_2 lần lượt là khối lượng hai mặt hàng. Giả sử giá bán của các mặt hàng tượng ứng là $P_1 = 8$ USD, $P_2 = 5$ USD và thu nhập dành cho người tiêu dùng là $I = 680$ USD. Hãy xác định lượng cầu đối với mỗi mặt hàng nếu người tiêu dùng muốn tối đa hóa lợi ích của mình. Nếu thu nhập dành cho người tiêu dùng tăng thêm 1 USD, thì lợi ích tối đa thay đổi như thế nào?

Đáp số : $U_{max} = U(60;40) = 29,34; \frac{\partial U}{\partial M} = 0,037.$

Bài số 3. Một doanh nghiệp có hàm sản xuất:

$$Q(K, L) = K^{0,3}L^{0,5}$$

1) Đánh giá hiệu quả của việc tăng quy mô sản xuất
2) Giả sử giá thuê một đơn vị vốn là 6 USD, giá thuê một đơn vị lao động là 2 USD và doanh nghiệp tiến hành sản xuất với ngân sách cố định là 384 USD. Hãy cho biết doanh nghiệp đó sử dụng bao nhiêu đơn vị tư bản và bao nhiêu đơn vị lao động thì thu được sản lượng tối đa.

Đáp số : 1) Doanh nghiệp có hiệu quả giảm theo quy mô;

2) $Q_{max} = Q(24,120) = 28,422.$

Bài số 4. Một doanh nghiệp có hàm sản xuất:

$$Q(K, L) = 10K^{0,7}L^{0,1}$$

1) Đánh giá hiệu quả của việc tăng quy mô sản xuất.
2) Giả sử giá thuê một đơn vị vốn là 28 USD, giá thuê một đơn vị lao động là 10 USD và doanh nghiệp tiến hành sản xuất với ngân sách cố định là 4000 USD. Hãy cho

biết doanh nghiệp đó sử dụng bao nhiêu đơn vị tư bản và bao nhiêu đơn vị lao động thì thu được sản lượng tối đa.

Đáp số : 1) Doanh nghiệp có hiệu quả giảm theo quy mô;

2) $Q_{max} = Q(125,50) = 434,244.$

Bài số 5. Cho hàm sản xuất của một hãng

$$Q(K,L) = 10K^{0,3}L^{0,4}.$$

1) Đánh giá hiệu quả của việc tăng quy mô sản xuất.
2) Biết rằng giá thuê một đơn vị vốn K bằng 0,03 USD, giá thuê một đơn vị lao động bằng 2 USD. Hãy xác định mức sử dụng K và L để hãng tối thiểu hóa chi phí, biết rằng hãng muốn giữ mức sản lượng là 1200.

Đáp số: 1) Tăng quy mô sản xuất không hiệu quả ; $TC_{min} = TC(8750,175) = 612,5.$

Bài số 6. Tối thiểu hóa hàm chi phí $TC(x,y) = 3x + 4y, (x > 0,\ y > 0)$, trong điều kiện giữ mức lợi ích $U(x,y) = 2xy = 337,5.$ Nếu mức lợi ích tăng thêm 1 đơn vị thì chi phí tối thiểu thay đổi như thế nào?

Đáp số : $TC_{min} = TC(15;11,25) = 90; \dfrac{\partial TC}{\partial U} = \lambda = \dfrac{2}{15}.$

Bài số 7. Tối thiểu hóa hàm chi phí $TC(x,y) = x^2 + 4y^2 - 3xy + 10, (x > 0,\ y > 0)$, trong điều kiện giữ mức doanh thu $TR(x,y) = 5x + 7y = 508.$

Đáp số : $TC_{min} = TC(61,29) = 1788.$

Bài số 8. Một công ty độc quyền sản xuất một loại sản phẩm và bán sản phẩm đó ở hai thị trường khác nhau. Biết hàm chi phí cận biên $MC = 1,75 + 0,05Q$, $(Q = Q_1 + Q_2)$ và cầu của hai thị trường lần lượt là $P_1 = 12 - 0,15Q_1$, $P_2 = 9 - 0,075Q_2$. Hãy xác định sản lượng và giá bán trên mỗi thị trường để công ty thu được lợi nhuận tối đa. Biết rằng giá bán hai thị là như nhau và chi phí cố định là 100.

Đáp số : $Q_1 = \dfrac{695}{27}, Q_2 = \dfrac{310}{27}; P_1 = P_2 = \dfrac{293}{36}$ *thì lợi nhuận được đại.*

Bài số 9. Một công ty có hàm sản xuất: $Q(K,L) = 0,5K(L-2)$, trong đó K, L lần lượt là vốn và lao động. Biết giá thuê một đơn vị vốn là $p_K = 120$ USD và giá thuê một đơn vị lao động là $p_L = 60$ USD. Nếu doanh nghiệp chi số tiền 3000.

1) Tính mức sử dụng vốn và lao động để tối đa hóa sản lượng.
2) Nếu số tiền doanh nghiệp chi tăng 10% thì sản lượng tối đa thay đổi như thế nào?

Đáp số : 1) $Q_{max} = Q(12,26) = 144;$ *2) Sản lượng tối đa tăng 20,833%.*

Bài số 10. Một nhóm dân cư có hàm thỏa dụng

$$U(X,Y) = 2X^{0,6}Y^{0,2}.$$

Biết rằng giá các mặt hàng tương ứng lần lượt là $P_X = 240, P_Y = 4.$ Hãy xác định phương án tiêu dùng cho cụm dân cư trên để có thể đặt được độ thỏa dụng là 40 với chi phí bé nhất.

Đáp số : $TC_{min} = U(20,400) = 6400.$

Bài số 11. Một công ty độc quyền sản xuất một loại sản phẩm và bán sản phẩm đó ở hai thị trường khác nhau. Biết hàm tổng chi phí $TC = 2000 + 10Q,$ $(Q = Q_1 + Q_2)$ và cầu của hai thị trường lần lượt là $Q_1 = 21 - 0,1P_1; Q_2 = 50 - 0,4P_2.$ Hãy xác định sản lượng và giá bán trên mỗi thị trường để công ty thu được lợi nhuận tối đa. Biết rằng giá bán tại hai thị trường là như nhau.

Đáp số : $\pi_{max} = \pi\left(\dfrac{67}{5};\dfrac{98}{5}\right) = 178; P_1 = P_2 = 76.$

Bài số 12. Cho hàm sản xuất của một doanh nghiệp có dạng:

$$Q(K,L) = K(L+5),$$

trong đó K, L lần lượt là vốn và lao động. Biết giá thuê một đơn vị vốn là 70 USD và giá thuê một đơn vị lao động là 20 USD.

1) Nếu doanh nghiệp nhận được hợp đồng cung cấp 5600 sản phẩm. Tính mức sử dụng vốn và lao động sao cho việc sản xuất lượng sản phẩm theo hợp đồng tốn ít chi phí nhất?
2) Tính hệ số co dãn của hàm tổng chi phí theo sản lượng Q tại thời điểm tối ưu? Nêu ý nghĩa của hệ số đó?

Đáp số : 1) $TC_{min} = TC(40,135) = 5500;$ *2)* $\varepsilon_{TC|Q} = \dfrac{28}{55}.$

Bài số 13. Một công ty có hàm sản xuất:

$$Q(K,L) = K^{3/4}L^{1/2} \text{ (}K\text{ – vốn, } L\text{ – lao động).}$$

Biết giá thuê một đơn vị vốn là 30 USD và giá thuê một đơn vị lao động 5 USD.

1) Công ty cần sản xuất 2048 sản phẩm, khi đó công ty nên sử dụng bao nhiêu đơn vị vốn và lao động để tối thiểu hóa chi phí
2) Tại thời điểm tối thiểu hóa chi phí, nếu sản lượng tăng lên 2% thì chi phí sẽ thay đổi như thế nào?
3) Đánh giá hiệu quả của việc tăng quy mô sản xuất.

Đáp số : 1) $TC_{min} = TC(256,1024) = 12800$; *2) 1,6%; 3) Tăng quy mô hiệu quả..*

Bài số 14. Một người muốn dùng số tiền 178000 ngàn đồng để mua hai mặt hàng có đơn giá tương ứng là 400 ngàn đồng và 600 ngàn đồng. Hàm hữu dụng của hai mặt hàng trên là $TU(X,Y) = (X+20)(Y+10)$ (X, Y lần lượt là số lượng của hai mặt hàng). Hãy xác định số lượng cần mua của hai loại mặt hàng trên để hàm hữu dụng đạt giá trị cao nhất.

Đáp số : $TU_{max} = TU(220,150) = 38400.$

Bài số 15. Mỗi cá nhân sẽ được lợi từ thu nhập (INCOME) và nghỉ ngơi (LEISURE). Giả sử mỗi ngày có 12 giờ để chia ra thời gian làm việc và nghỉ ngơi. Tiền lương cho mỗi giờ làm việc là 3 USD và hàm lợi ích của cá nhân là

$$TU(L,I) = L^{0,5}I^{0,75}$$

trong đó: L: là số giờ nghỉ ngơi; I : là thu nhập. Cá nhân này sẽ cân đối giữa thời gian nghỉ ngơi và làm việc thế nào để tối đa hóa lợi ích của mình?

Đáp số : $TU_{max} = TU\left(\frac{24}{5},\frac{108}{5}\right) = \left(\frac{24}{5}\right)^{0,5}\left(\frac{108}{5}\right)^{0,75}.$

Bài số 16. Cho hàm lợi ích tiêu dùng của một chủ thể có dạng như sau:

$$\ln\left[TU(x,y)\right] = 0,7\ln x + 0,3\ln y$$

Cho biết x, y là khối lượng các hàng hóa. Cho p, q là giá các hàng hóa tương ứng, I là ngân sách tiêu dùng.

1) Có ý kiến cho rằng, nếu chủ thể trên tăng khối lượng hàng hóa x lên 1% và giảm khối lượng hàng hóa y đi 3% thì lợi ích tiêu dùng không đổi. Điều đó đúng hay sai.
2) Xác định khối lượng hàng hóa x, y để lợi ích tiêu dùng có lợi nhất cho chủ thể đó.

Đáp số : 1) Sai ; 2) $TU_{max} = TU\left(\frac{7M}{4p};\frac{3M}{4q}\right).$

Thuật ngữ chính chương 3	
Tiếng Anh	**Tiếng Việt**
Constant Return to Scale	Hiệu quả không đổi theo quy mô
Capital	Vốn
Cost minimization	Tối thiểu hóa chi phí
Decreases Returns to Scale	Hiệu quả giảm theo quy mô
Increases Returns to Scale	Hiệu quả tăng đổi theo quy mô
Labor	Lao động
Marginal Product of Labor	Sản phẩm cận biên của lao động
Marginal Product of Capital	Sản phẩm cận biên của vốn
Manufacturing Efficiency	Hiệu quả sản xuất
Maximization of Utility	Tối đa hóa lợi ích
Method of Lagrange Multipliers	Phương pháp nhân tử Lagrange
Marginal Analysis	Phân tích cận biên
Revenue Maximization	Tối đa hóa doanh thu
Profit Maximization	Tối đa hóa lợi nhuận
Partial Derivatives	Đạo hàm riêng
Total Differential	Vi phân toàn phần
The Partial Coefficient Elasticity	Hệ số co dãn riêng phần
The Function homogeneous of degree k	Hàm thuần nhất bậc k
The Hessian Matrix	Ma trận Hessian

PHỤ LỤC

Phụ lục 1. Ma trận, định thức, hệ phương trình tuyến tính

1.1. Các khái niệm cơ bản về ma trận

1.1.1. Một bảng gồm $(m \times n)$ số thực được sắp thành m dòng (hàng) và n cột được gọi là ma trận có cấp $m \times n$.

Ký hiệu: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m \times n}$

với

i : gọi là chỉ số dòng.

j : gọi là chỉ số cột.

a_{ij} : là phần tử nằm ở dòng i và cột j trong ma trận A.

1.1.2. Ma trận có số dòng bằng số cột $(m = n)$ được gọi là ma trận vuông cấp n

Ký hiệu: $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

Với $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ được gọi là các phần tử nằm trên đường chéo chính.

1.1.3. Hai ma trận được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng cấp và có tất cả các phần tử tương ứng vị trí bằng nhau.

Cho hai ma trận: $A = (a_{ij})_{m \times n}$ và $B = (b_{ij})_{m \times n}$

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} a_{ij} = b_{ij} \\ \forall i = 1, 2, \dots, m;\ \forall j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

1.1.4. Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n}$, ma trận ký hiệu A^T nhận được từ ma trận A bằng cách đổi dòng thành cột hoặc đổi cột thành dòng, được gọi là ma trận chuyển vị của ma trận A.

Ví dụ 1. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$

Ma trận chuyển vị của ma trận A là

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Dễ nhận thấy $\left(A^T\right)^T = A$.

1.1.5. Ma trận dạng tam giác và dạng hình thang.

a) Ma trận tam giác trên là ma trận vuông mà mọi phần tử nằm phía dưới đường chéo đều bằng 0.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

b) Ma trận tam giác dưới là ma trận vuông mà mọi phần tử nằm phía trên đường chéo đều bằng 0.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

c) Ma trận hình thang (ma trận bậc thang) là ma trận ứng với hai dòng bất kỳ số hạng khác không đầu tiên của dòng dưới phải nằm bên phải số hạng khác không đầu tiên của dòng trên.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

với $r < n$ và $a_{11}, a_{22},...,a_{rr}$ gọi là các phần tử chéo.

1.1.6. Ma trận vuông cấp n có tất cả các phần tử trên đường chéo chính bằng 1, các phần tử còn lại đều bằng 0, được gọi là ma trận đơn vị cấp n. Ký hiệu là I_n.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

...

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

1.1.7. Cho ma trận $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, ma trận ký hiệu $-A = \left(-a_{ij}\right)_{m\times n}$ gọi là ma trận đối của ma trận A.

1.1.8. Ma trận có tất cả các phần tử bằng 0 được gọi là ma trận không.

1.2. Hai phép toán tuyến tính đối với ma trận

1.2.1. Nhân một số thực với ma trận là nhân số đó với tất cả các phần tử của ma trận:

Cho ma trận $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ và $\forall k \in \mathbb{R}$ ta có:

$$kA = (k \cdot a_{ij})_{m\times n}$$

Đặc biệt $(-1)A = -A = \left(-a_{ij}\right)_{m\times n}$

1.2.2. Cộng hai ma trận cùng cấp là cộng các phần tử tương ứng các vị trí với nhau:

Cho hai ma trận : $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ và $B = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$. Ta có $A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)_{m\times n}$

1.2.3. Các tính chất

Cho ba ma trận A, B, C cùng cấp và $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) $A + B = B + A$

b) $(A + B) + C = A + (B + C)$

c) $A + 0 = A$

d) $A + (-A) = 0$

e) $1 \cdot A = A$

f) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

g) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

h) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$

1.3. Phép nhân hai ma trận

1.3.1. Chúng ta sẽ làm quen khái niệm này bằng bài toán thực tế như sau: bạn mua ba mặt hàng với số lượng lần lượt là 7, 6, 5 và giá bán tương ứng là 2, 3, 4 thì số tiền bạn phải trả được tính bằng: 7.2 + 6.3 + 5.4 = 52.

1.3.2. Cho hai ma trận $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ và $B = \left(b_{jk}\right)_{n\times p}$

Khi đó $AB = \left(c_{ik}\right)_{m\times p}$ với

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

với: $i = 1, 2, ..., m$; $k = 1, 2, ..., p$.

$AB = \left(c_{ik}\right)_{m\times p}$ được gọi là tích của 2 ma trận A và B.

Nhận xét:

- Tích hai ma trận tồn tại khi số cột của ma trận đứng trước bằng số dòng ma trận đứng sau.

- Ma trận tích có số dòng bằng số dòng của ma trận đứng trước và có số cột bằng số cột của ma trận đứng sau.

1.3.3. Các tính chất

a) $(AB)C = A(BC)$

Với giả thiết số cột của A bằng số dòng của B và số cột của B bằng số dòng của C. Đặc biệt, nếu A là ma trận vuông ta định nghĩa:

$$A^2 = A.A;\ ....;\ A^k = \underbrace{A.A.....A}_{k}$$

b) $A(B + C) = AB + AC$; $(A + B)C = AC + BC$

Với giả thiết cấp của các ma trận A, B, C phải phù hợp với phép toán.

c) $\alpha\left(AB\right) = \left(\alpha A\right)B = A\left(\alpha B\right)$.

d) $\left(AB\right)^T = B^T A^T$.

e) $I^k = I$ (I là ma trận đơn vị).

f) Nếu $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ thì $AI_n = A; I_mA = A$.

1.4. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng của ma trận

1.4.1. Ba phép biến đổi sơ cấp trên dòng của ma trận

a) Đổi chỗ 2 dòng của ma trận.

$$A \xrightarrow{(i)\sim(i')} B$$

b) Nhân một số thực khác không với một dòng.

$$A \xrightarrow[\alpha\neq 0]{(i):=\alpha(i)} B$$

c) Thay 1 dòng bất kỳ bằng chính nó rồi cộng với một số thực nhân cho dòng khác.

$$A \xrightarrow{(i):=(i)+\alpha(i')} B$$

1.4.2. Liên hệ với phép nhân ma trận

Cho $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ và ma trận đơn vị: $I_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Định nghĩa:

$$I(i,j) = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & 1 & \\ & & & \ddots & & \\ & & 1 & & 0 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \text{dong i} \\ \\ \text{dong j} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$I(i,\alpha) = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \text{dong i} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$I(i,j,\alpha)=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & \alpha & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \text{dong i} \\ \\ \text{dong j} \\ \\ \\ \end{array}$$

- Phép đổi chỗ 2 dòng của A được coi là thực hiện phép nhân ma trận $I(i,j)\times A$
- Phép nhân 1 dòng với số $\alpha \neq 0$ được coi là phép nhân ma trận $I(i,\alpha)\times A$.

Cộng vào dòng i dòng j đã nhân với α $(i \neq j)$ được coi là phép nhân ma trận $I(i,j,\alpha)\times A$.

1.5. Quy tắc thực hành tính định thức cấp hai và cấp ba

1.5.1. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

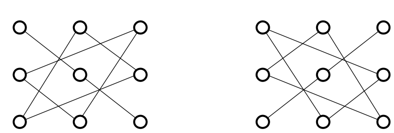
Tích hai phần tử trên đường chéo chính trừ tích hai phần tử trên đường chéo phụ.

Ví dụ 2. Tính định thức $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 3\cdot(-2) = 10$.

1.5.2. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \left(a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3\right) - \left(c_1b_2a_3 + b_1a_2c_3 + a_1c_2b_3\right)$

Tổng đầu gồm 3 tích số lấy theo đường chéo chính và 2 đường song song với nó nhân với phần tử đối diện.

Tổng sau cùng cũng gồm 3 tích số nhưng lấy theo đường chéo còn lại và 2 đường song song với nó nhân với phần tử đối diện. Cụ thể:



Tæng ®Çu   Tæng sau

Ví dụ 3. Tính định thức

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot 2 - 3\cdot 3\cdot 5 - 4\cdot 1\cdot 4 - 4\cdot 2\cdot 5 + 3\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 3\cdot 4 = -63$$

1.6. Một số tính chất cơ bản của định thức

1.6.1. Định thức của ma trận vuông $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ bằng định thức ma trận chuyển vị của nó, $|A| = \left|A^T\right|$

Ví dụ 4.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 10$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -30$$

1.6.2. Định thức bằng 0 nếu trong định thức có một dòng toàn các phần tử bằng 0.

Ví dụ 5.

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

1.6.3. Định thức đổi dấu mỗi khi đổi chỗ 2 dòng của định thức và giữ nguyên các dòng còn lại.

Ví dụ 6. Tính định thức

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -30 \quad \text{và} \quad \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 30$$

1.6.4. Định thức bằng 0 nếu trong định thức có hai dòng có phần tử giống nhau.

Ví dụ 7.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0$$

1.6.5. Thừa số chung của một dòng có thể đưa ra ngoài dấu định thức (hay nhân 1 số với định thức là nhân số đó chỉ với một dòng của định thức)

Ví dụ 8.

$$\begin{vmatrix} \alpha a & \alpha b \\ c & d \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha c & \alpha d \end{vmatrix}$$

1.6.6. Định thức bằng 0 nếu định thức có hai dòng tỉ lệ

Ví dụ 9.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha a_1 & \alpha b_1 & \alpha c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

1.6.7. Nếu trong định thức có 1 dòng các phần tử được tách thành tổng 2 số thì định thức cũng được tách thành tổng của hai định thức tương ứng.

Ví dụ 10.

$$\begin{vmatrix} a_1 + c_1 & b_1 + d_1 \\ a_2 + c_2 & b_2 + d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 + c_2 & b_2 + d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ a_2 + c_2 & b_2 + d_2 \end{vmatrix}$$

1.6.8. Định thức không thay đổi khi ta sử dụng phép biến đổi loại 3

Ví dụ 11.

$$\begin{vmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha a_{i1} + a_{k1} & \alpha a_{i2} + a_{k2} & \ldots & \alpha a_{in} + a_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

Chú ý: Các tính chất nêu trên cũng vẫn đúng với cột của định thức.

1.6.9. Nếu A và B là hai ma trận vuông cùng cấp thì:

$$|AB| = |A||B| = |BA|$$

Nói riêng: $|A^k| = \underbrace{|A|.|A|.....|A|}_{k} = |A|^k$

1.7. Phần bù đại số và ma trận phụ hợp

Cho ma trận $A = (a_{ij})_n$ vuông cấp n.

1.7.1. Định thức cấp $(n-1)$ thu được từ A bằng cách xóa bớt dòng i và cột j, lấy dấu (+) nếu $(i+j)$ chẵn, lấy dấu (–) nếu $(i+j)$ lẻ, được gọi là phần bù đại số của phần tử a_{ij} ($\forall i, j = 1, 2, .., n$), ký hiệu là A_{ij}.

1.7.2. Ma trận ký hiệu A^*, được định nghĩa như sau:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Trong đó: $A_{ij}\ (\forall i, j = 1, 2, .., n)$ là phần bù đại số của phần tử a_{ij}, được gọi là ma trận phụ hợp của ma trận A.

Chú ý: Nếu A là ma trận vuông cấp n thì A^* cũng là ma trận vuông cấp n.

Ví dụ 12. Tính các ma trận phụ hợp

a) Cho $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ thì $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$

Với $A_{11} = +a_{22}; A_{12} = -a_{21}; A_{21} = -a_{12}; A_{22} = +a_{11}$

nghĩa là $A^* = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

b) Cho ma trận

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{thì } B^* = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} & B_{31} \\ B_{12} & B_{22} & B_{32} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{pmatrix}$$

Với

$$B_{11} = +\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -10; B_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2;\ B_{31} = +\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -15$$

$$B_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 17;\ B_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -16;\ B_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -6$$

$$B_{13} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2;\ B_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -13;\ B_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

Hay

$$B^* = \begin{pmatrix} -10 & 2 & -15 \\ 17 & -16 & -6 \\ 2 & -13 & 3 \end{pmatrix}$$

c) Cho ma trận sau

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Hãy tìm phần tử nằm ở dòng 4 cột 1 trong ma trận phụ hợp của C.

$$C_{41}^{*} = C_{14} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 47$$

1.8. Phương pháp tính định thức

1.8.1. Tính định thức bằng khai triển theo 1 dòng hoặc 1 cột của định thức.

Cho ma trận vuông cấp n: $A = \left(a_{ij}\right)_n$, ký hiệu $D_n = |A|$, khi đó D_n có thể được tính bởi một trong hai công thức dưới đây.

$$D_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \qquad (1)$$

$$D_n = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \qquad (2)$$

Với A_{ij} là phần bù đại số của a_{ij} $(\forall i, j = 1, 2, .., n)$

(1) gọi là công thức khai triển định thức theo dòng i.

(2) gọi là công thức khai triển định thức theo cột j.

Chú ý:

Các phần bù đại số A_{ij} là các định thức cấp $(n-1)$, nên ý nghĩa của công thức (1) và (2) là có thể tính định thức cấp n (D_n) thông qua các định thức cấp $(n-1)$ (A_{ij}).

1.8.2. Ví dụ 13.

a) Tính định thức của ma trận:

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Chúng ta khai triển định thức này theo dòng 1

$$D_4 = |C| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -2C_{11} + 3C_{14}$$

$$C_{11} = +\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 14\ ;\ C_{14} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 47$$

Vậy

$$D_4 = |C| = -2\cdot 14 + 3\cdot 47 = 113$$

Chú ý: Có thể có lợi nếu khai triển định thức theo dòng (cột) có nhiều phần tử bằng 0. Nếu ma trận chưa có dòng (cột) như vậy thì có thể dùng các tính chất của định thức để tạo ra.

1.9. Ma trận nghịch đảo

1.9.1. Định nghĩa: Cho ma trận vuông cấp n: $A = \left(a_{ij}\right)_n$.

Nếu X là ma trận vuông cùng cấp với A và thoả mãn điều kiện: $AX = XA = I_n$, thì X được gọi là ma trận nghịch đảo của ma trận A.

Ký hiệu: $X = A^{-1}$

Nhận xét: Ma trận nghịch đảo của ma trận vuông $A = \left(a_{ij}\right)_n$ (nếu có) là duy nhất.

1.9.2. Định lý: Cho $A = \left(a_{ij}\right)_n$ là ma trận vuông cấp n.

Điều kiện cần và đủ để A có ma trận nghịch đảo là định thức của A khác 0.

Trước khi giới thiệu công thức tính ma trận nghịch đảo, chúng ta quay lại với khái niệm ma trận phụ hợp ở mục (1.7).

Ví dụ 14. Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{thì} \quad A^* = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Giả sử:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

Nhận xét:

$$A.A^{*}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}=|A|\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=|A|I$$

(I : là ma trận đơn vị)

Tương tự:

$$A^{*}.A=\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=|A|\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=|A|I$$

Vậy chúng ta có: $A.A^{*}=A^{*}.A=|A|.I$

Do $|A|\neq 0$ nên:

$$A.\left(\frac{1}{|A|}.A^{*}\right)=\left(\frac{1}{|A|}.A^{*}\right).A=I$$

Hay theo định nghĩa $\frac{1}{|A|}.A^{*}$ là ma trận nghịch đảo của ma trận A.

Công thức tính ma trận nghịch đảo:

Nếu $A=\left(a_{ij}\right)_n$ là ma trận vuông cấp n không suy biến ($|A|\neq 0$), thì ma trận nghịch đảo của nó được tính bởi công thức sau:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}.A^{*}$$

Ở đây, A^{*} là ma trận phụ hợp của ma trận A.

Ví dụ 15. Cho $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận A^{-1}.

Giải

Đầu tiên tính:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix}=-22\neq 0$$

Tiếp theo, xác định ma trận phụ hợp A^{*}:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=14\,;\,A_{21}=-\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=-2\,;\,A_{31}=\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-10$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 5\,;\, A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -7\,;\, A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -15\,;\, A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -1;\, A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

Vậy ma trận phụ hợp của ma trận A là:

$$A^* = \begin{pmatrix} 14 & -2 & -10 \\ 5 & -7 & -2 \\ -15 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Ma trận nghịch đảo của A được xác định bởi:

$$A^{-1} = -\frac{1}{22}\begin{pmatrix} 14 & -2 & -10 \\ 5 & -7 & -2 \\ -15 & -1 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} -14 & 2 & 10 \\ -5 & 7 & 2 \\ 15 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Ví dụ 16. Cho $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}$

Hãy tìm ma trận nghịch đảo của ma trận $(I - A)$.

Giải

Ta có:

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,3 \\ -0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$$

$$|I - A| = \begin{vmatrix} 0,8 & -0,3 \\ -0,1 & 0,6 \end{vmatrix} = 0,45$$

Vậy ma trận phụ hợp của ma trận A là:

$$(I - A)^* = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Ma trận nghịch đảo của A được xác định bởi:

$$(I - A)^{-1} = \frac{1}{0,45}\begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$$

1.10. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

1.10.1. Các ví dụ

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ x + 5y = -1 \end{cases}$ gọi là hệ 2 phương trình 2 ẩn

Gọi: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ là ma trận hệ số (của ẩn); $b = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ là cột hệ số tự do

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ là cột ẩn; $\overline{A} = (A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & -1 \end{array}\right)$ là ma trận hệ số mở rộng.

b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \\ 3x_1 + \qquad 4x_3 = 5 \end{cases}$ gọi là hệ 2 phương trình 3 ẩn.

Gọi: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ là ma trận hệ số (của ẩn)

$b = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ là cột hệ số tự do; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ là cột ẩn

$\overline{A} = (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \end{array}\right)$ là ma trận hệ số mở rộng.

c) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - 3y = 0 \\ 3x + 4y = -1 \end{cases}$ gọi là hệ 3 phương trình 2 ẩn

Ta có

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ma trận hệ số (của ẩn)

$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ cột hệ số tự do; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ là cột ẩn

$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{array}\right)$ ma trận hệ số mở rộng

Nhận xét:

- Cho một hệ phương trình tuyến tính, chúng ta có thể biểu diễn nó thông qua ma trận hệ số mở rộng (ma trận mở rộng). Ngược lại, nếu cho trước ma trận hệ số mở rộng và ký hiệu ẩn chúng ta sẽ khôi phục lại được hệ phương trình tuyến tính.

- Các hệ phương trình trên có thể viết dưới dạng ma trận: $AX = b$.

1.10.2. Các định nghĩa

1. Hệ phương trình tuyến tính là một hệ thống gồm m phương trình bậc nhất theo n ẩn số có dạng tổng quát như sau :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \qquad (*)$$

trong đó $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các *ẩn* cần tìm, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ (gọi là các *hệ số*) và $b_i \in \mathbb{R}$ (gọi là các *hệ số tự do*), $i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}$. Đặt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

$$\overline{A} = \left(A \middle| B\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

trong đó ta gọi A là *ma trận các hệ số*, $\overline{A}$ là *ma trận bổ sung* (*ma trận các hệ số mở rộng*), X là *ma trận ẩn* và B là *ma trận các hệ số tự do*. Khi đó, hệ phương trình tuyến tính (1.1) được viết lại dưới dạng phương trình ma trận là $AX = B$.

(ma trận mở rộng)

Chúng ta có thể biểu diễn hệ phương trình (*) dưới dạng:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \\ i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \qquad \text{(Dạng viết gọn)} \qquad (**)$$

Hoặc dạng ma trận:

$$AX = b \qquad (***)$$

2. Nếu $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ khi đó hệ (*) có dạng $AX = 0$, nó được gọi là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.

3. Bộ n số thực có thứ tự $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ được gọi là một nghiệm của hệ phương trình (*) nếu khi chúng ta thay $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, ..., x_n = \alpha_n$, thì tất cả các phương trình trong hệ (*) đều trở thành đẳng thức đúng.

Nhận xét: Hệ thuần nhất luôn nhận bộ số $\theta = (0,0,..,0)$ làm nghiệm (gọi là nghiệm tầm thường).

4. Hai hệ phương trình có cùng số ẩn được gọi là tương đương nếu tập hợp nghiệm của chúng là bằng nhau.

Chú ý: Hai hệ phương trình cùng vô nghiệm cũng được coi là tương đương.

Nhận xét: Việc giải một hệ phương trình chính là đưa hệ ban đầu thành hệ mới tương đương nhưng đơn giản hơn.

Sau đây, sẽ giới thiệu hai hệ phương trình được coi là đơn giản và các phép biến đổi hệ phương trình để đưa hệ ban đầu thành hệ mới tương đương.

1.10.3. Hệ phương trình dạng tam giác và dạng hình thang

a) Hệ phương trình dạng tam giác

Hệ gồm n phương trình, n ẩn có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \cdots \\ \qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Với $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} \neq 0$ được gọi là hệ phương trình dạng tam giác.

Chú ý: Ma trận hệ số A có dạng tam giác có thể được viết như sau:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Dễ dàng nhận thấy hệ có duy nhất nghiệm.

Ví dụ 17. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 5 \\ \quad 2x_2 + x_3 = -1 \\ \qquad 3x_3 = 9 \end{cases}$

Chúng ta giải ngược từ phương trình cuối lên phương trình đầu.

Hệ có duy nhất nghiệm ($x_1 = 22,\ x_2 = -2,\ x_3 = 3$)

Nhận xét: Hệ phương trình thuần nhất có dạng tam giác chỉ có duy nhất nghiệm tầm thường.

b) Hệ phương trình dạng hình thang

Hệ gồm r phương trình, n ẩn (với r < n) có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_r + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + ... + a_{2r}x_r + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad ... \\ \qquad\qquad a_{rr}x_r + ... + a_{rn}x_n = b_r \end{cases}$$

Với $a_{11}, a_{22}, ..., a_{rr} \neq 0$, được gọi là hệ phương trình dạng hình thang.

Chú ý: Ma trận hệ số A có dạng hình thang có thể được viết như sau:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1r} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2r} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{rr} & ... & a_{rn} \end{pmatrix}$$

Để giải hệ hình thang đầu tiên chúng ta giữ lại vế trái các ẩn $x_1, x_2, ..., x_r$ (gọi là các ẩn chính) và chuyển sang vế phải các ẩn $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$ (gọi là các ẩn tự do). Khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ \qquad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{2n}x_n \\ \qquad\qquad ... \\ \qquad\qquad a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

Cho các ẩn tự do nhận một bộ giá trị tùy ý:

$$x_{r+1} = \alpha_{r+1}, x_{r+2} = \alpha_{r+2}, ..., x_n = \alpha_n \ \left(\forall \alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}\right)$$

Khi đó hệ mới nhận được có dạng tam giác, giải hệ ta có được:

$$x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, ..., x_r = \alpha_r$$

Tuy nhiên, cứ với mỗi bộ giá trị của các ẩn tự do chúng ta lại thu được một bộ giá trị của các ẩn chính, nên hệ ban đầu có vô số nghiệm.

Ví dụ 18. Cho hệ phương trình có dạng hình thang sau

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ \qquad 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 = x_3 - 2x_4 \\ \qquad 2x_2 = -3x_3 + x_4 \end{cases}$$

Chọn x_1, x_2 làm ẩn cơ sở và x_3, x_4 làm ẩn tự do .

Gán cho $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$ $(\forall\alpha,\beta \in \mathbb{R})$ ta thu được hệ phương trình dạng tam giác:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = \alpha - 2\beta \\ \qquad 2x_2 = -3\alpha + \beta \end{cases}$$

Suy ra: $x_2 = \dfrac{-3\alpha + \beta}{2}; x_1 = 7\alpha - 4\beta$

Vậy hệ ban đầu có vô số nghiệm dạng:

$$W = \left\{ \left(7\alpha - 4\beta, \frac{-3\alpha + \beta}{2}, \alpha, \beta \right) \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Ta còn gọi nghiệm này là nghiệm tổng quát.

Nhận xét: Hệ thuần nhất có dạng hình thang sẽ có nghiệm khác nghiệm tầm thường.

1.10.4. Các phép biến đổi tương đương hệ phương trình

Ba phép biến đổi dưới đây sẽ biến đổi hệ ban đầu thành hệ mới tương đương:

1. Đổi chỗ hai phương trình trong hệ.

2. Nhân hai vế của một phương trình với cùng một số khác 0.

3. Cộng vào hai vế, hai vế tương ứng của một phương trình khác đã nhân với cùng một số.

Nhận xét: Việc thực hiện các phép biến đổi tương đương hệ phương trình, thực chất là làm trên các hệ số. Do đó, tương ứng với 3 phép biến đổi tương đương hệ phương trình chúng ta có 3 phép biến đổi sơ cấp trên dòng đối với ma trận hệ số mở rộng $\overline{A}$ như sau:

1'. Đổi chỗ 2 dòng của ma trận.

2'. Nhân 1 dòng với một số khác 0.

3'. Cộng vào một dòng của ma trận một dòng khác đã nhân với một số.

Ví dụ 19. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$$

Ta biến đổi tương đương hệ này như sau:

$$\begin{cases}3x-4y=5\\ x+2y=6\end{cases} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases}x+2y=6\\ 3x-4y=5\end{cases} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases}x+2y=6\\ 0-10y=-13\end{cases}$$

(1) Đổi chỗ 2 phương trình.

(2) Cộng vào 2 vế của phương trình thứ hai, hai vế tương ứng của phương trình đầu tiên đã nhân với (-3).

Tương ứng đối với ma trận hệ số mở rộng. Chúng ta có các phép biến đổi sơ cấp trên dòng.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 1 & 2 & 6\end{pmatrix} \xrightarrow{(a)} \begin{pmatrix}1 & 2 & 6\\ 3 & -4 & 5\end{pmatrix} \xrightarrow{(b)} \begin{pmatrix}1 & 2 & 6\\ 0 & -10 & -13\end{pmatrix}$$

(a) Đổi chỗ 2 dòng ma trận.

(b) Cộng vào dòng 2 dòng 1 đã nhân với (–3).

Do vậy, để "tiết kiệm" khi biến đổi tương đương hệ phương trình chúng ta chỉ cần thực hiện trên ma trận hệ số mở rộng.

1.11. Phương pháp khử ẩn liên tiếp Gauss

1.11.1. Nội dung

Để giải một hệ phương trình tuyến tính chúng ta sẽ sử dụng các phép biến đổi tương đương hệ phương trình để đưa hệ ban đầu về hệ phương trình có dạng tam giác hoặc dạng hình thang (hay ma trận hệ số A có dạng tam giác hoặc hình thang) cụ thể đối với hệ phương trình như sau:

$$\begin{cases}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2\\ \dots \quad \dots \quad \dots\\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m\end{cases} \qquad (*)$$

Không mất tổng quát, chúng ta luôn có giả thiết $a_{11} \neq 0$ (vì nếu chưa có ta có thể đổi phương trình khác để có điều đó).

Để ma trận hệ số A có dạng tam giác hoặc hình thang, đầu tiên, chúng ta làm cho các phần tử ở cột thứ nhất, dòng thứ hai trở đi biến thành 0 bằng cách nhân dòng 1 với $\left(-\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right)$ rồi cộng vào dòng i $(i = 2,3,\dots)$, sau $(m-1)$ phép biến đổi như vậy chúng ta thu được hệ phương trình tương đương.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad\qquad \ldots \\ \qquad a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_n \end{cases} \qquad (**)$$

Trong đó: $a'_{ij} = a_{ij} - \dfrac{a_{i1}}{a_{11}} a_{ij}$

$$b'_i = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} b_1 \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

Ở đây, ta còn nói "khử ẩn x_1", tiếp theo bằng cách tương tự, chúng ta "khử ẩn x_2" từ phương trình thứ ba trở đi đối với hệ (**). Sau đó, lại "khử ẩn x_3" từ phương trình thứ tư trở đi (nếu có)... Quá trình "khử ẩn" theo cách nêu trên là quá trình lặp, sau hữu hạn bước biến đổi quá trình sẽ dừng lại ở một trong các trường hợp sau đây:

1. Hệ nhận được có dạng tam giác (hệ có duy nhất nghiệm) hay ma trận hệ số A có dạng tam giác.

2. Hệ nhận được có dạng hình thang (hệ có vô số nghiệm) hay ma trận hệ số có dạng hình thang.

3. Trong hệ xuất hiện phương trình dạng:

$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$, với $b \neq 0$.

Khi đó, hệ vô nghiệm.

Chú ý:

- Trong quá trình biến đổi trong hệ có thể xuất hiện phương trình dạng :

$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$

Khi đó chúng ta có thể loại bỏ phương trình này ra khỏi hệ phương trình.

- Về mặt thực hành, để giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp khử ẩn liên tiếp ta làm như sau: Đầu tiên, xác định ma trận hệ số mở rộng $\overline{A} = (A|b)$. Tiếp theo, sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng để biến đổi sao cho ma trận hệ số A chuyển thành dạng tam giác hoặc hình thang. Bạn đọc có thể theo dõi cụ thể qua các ví dụ minh họa dưới đây.

1.11.2. Ví dụ 20.

Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp khử ẩn liên tiếp Gauss:

1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 \qquad - 2x_3 = -1 \end{cases}$

Bước 1: Lập ma trận mở rộng $\overline{A}$

$$\overline{A} = \left(A|b\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Bước 2. Biến đổi $\overline{A}$ để đưa A về dạng tam giác hoặc hình thang:

$$\overline{A} = \left(A|b\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 4 \\ 0 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{29}{5} \end{array}\right)$$

(1) Đổi chỗ dòng 1 và 2.

(2) Cộng vào dòng 2 dòng 1 đã nhân với (-2).

Cộng vào dòng 3 dòng 1 đã nhân với (-3).

(3) Cộng vào dòng 3 dòng 2 đã nhân với $\left(-\dfrac{6}{5}\right)$.

Bước 3. Khôi phục lại hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \qquad 5x_2 - 5x_3 = 4 \\ \qquad\qquad x_3 = -\dfrac{29}{5} \end{cases}$$

Đây là hệ phương trình dạng tam giác, tương đương với hệ ban đầu. Hệ có duy nhất nghiệm là:

$$W = \left(-\frac{19}{5}, -\frac{24}{5}, -\frac{29}{5}\right)$$

2. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -2 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1 \\ x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases}$

Bước 1. Xác định ma trận hệ số mở rộng $\overline{A}$:

$$\overline{A} = \left(A|b\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -4 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

Bước 2. Biến đổi $\overline{A}$ sao cho ma trận hệ số A đưa được về dạng tam giác hoặc hình thang.

$$\overline{A} = \left(A|b\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -4 & 5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -4 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 7 & -5 & 6 & 5 \\ 0 & 7 & -5 & 6 & 5 \\ 0 & 7 & -5 & 6 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 7 & -5 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(1) Đổi chỗ dòng (1) và dòng (2).

(2) Cộng vào dòng 2 dòng 1 đã nhân với (-2).

Cộng vào dòng 3 dòng 1 đã nhân với (-3).

Cộng vào dòng 4 dòng 1 đã nhân với (-1).

(3) Cộng vào dòng 3 dòng 2 đã nhân với (-1).

Cộng vào dòng 4 dòng 2 đã nhân với (-1).

Bước 3. Khôi phục lại hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -2 \\ 7x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 5 \end{cases}$$

Hệ phương trình có dạng hình thang, nó tương đương với hệ:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -2 - x_3 + x_4 \\ 7x_2 = 5 + 5x_3 - 6x_4 \end{cases}$$

Chọn x_1, x_2 làm ẩn cơ sở và x_3, x_4 làm ẩn tự do.

Gán cho $x_3 = \alpha,\ x_4 = \beta\ \ (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})$ ta có:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -2 - \alpha + \beta \\ \qquad 7x_2 = 5 + 5\alpha - 6\beta \end{cases}$$

Hệ có vô số nghiệm dạng:

$$W = \left\{ \left(\frac{1 + 8\alpha - 11\beta}{7}, \frac{5 + 5\alpha - 6\beta}{7}, \alpha, \beta \right) \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

3. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \\ -3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$

Bước 1. Xác định ma trận mở rộng $\overline{A}$

$$\overline{A} = (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -3 & 2 \\ -3 & -4 & 5 & 1 \end{array} \right)$$

Bước 2. Biến đổi ma trận $\overline{A}$

$$\overline{A} = (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -3 & 2 \\ -3 & -4 & 5 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 13 & -11 & -18 \\ 0 & -13 & 11 & 16 \end{array} \right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 13 & -11 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

(1) Cộng vào dòng 2 dòng 1 đã nhân với (-4)

Cộng vào dòng 3 dòng 1 đã nhân với 3.

(2) Cộng vào dòng 3 dòng 2 đã nhân với 1.

Trong hệ xuất hiện phương trình có dạng:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -2$$

Phương trình này vô nghiệm, do đó hệ phương trình cũng vô nghiệm.

1.12. Hệ phương trình Cramer

1.12.1. Định nghĩa

Hệ gồm n phương trình, n ẩn có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases} \qquad (*)$$

Với

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

được gọi là hệ phương trình Cramer.

1.12.2. Ví dụ 21. Xét các hệ sau

1. $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ x + 4y = -1 \end{cases}$

Hệ phương trình trên là hệ gồm 2 phương trình, 2 ẩn và

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 11 \neq 0,$$

nên nó là hệ phương trình Cramer.

2. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 = 5 \\ 3x_1 + x_3 = 4 \end{cases}$

Hệ phương trình trên là hệ gồm 3 phương trình 3 ẩn và

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$$

nên nó là hệ phương trình Cramer.

1.12.3. Dạng ma trận của hệ phương trình Cramer – Phương pháp ma trận nghịch đảo giải hệ Cramer

Ký hiệu:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Khi đó, hệ phương trình Cramer (*) có thể viết dưới dạng ma trận như sau:

$$\begin{cases} AX = b \\ |A| \neq 0 \end{cases} \qquad (**)$$

Phương trình này có nghiệm duy nhất xác định bởi công thức:

$$X = A^{-1}b$$

Ví dụ áp dụng:

a) Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp ma trận nghịch đảo:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ x + 4y = -1 \end{cases}$$

Ta có:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bước 1. Tìm ma trận nghịch đảo A^{-1}

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Bước 2. Nghiệm của hệ được tính bởi công thức:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}.b = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 13 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{11} \\ \frac{-6}{11} \end{pmatrix}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất

$$\left(x = \frac{13}{11};\ y = \frac{-6}{11} \right)$$

b) Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp ma trận nghịch đảo.

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7 \\ x_1 + \quad x_2 \qquad\quad = 5 \\ 3x_1 \qquad\quad + x_3 = 4 \end{cases}$$

Ta có:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};\ b = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Bước 1. Tìm ma trận nghịch đảo A^{-1}

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 10 & -2 \\ -3 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 10 & -2 \\ -3 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Bước 2. Hệ có duy nhất nghiệm được tính bởi công thức:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}.b = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 10 & -2 \\ -3 & 9 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 0 \\ 35 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Hay

$$(x_1 = 0,\ x_2 = 5,\ x_3 = 4).$$

1.12.4. Quy tắc Cramer (Phương pháp định thức giải hệ phương trình Cramer)

Quy tắc Cramer: Hệ phương trình Cramer (*) có duy nhất nghiệm được tính theo công thức:

$$x_j = \frac{D_{x_j}}{D}, \quad (j = 1, 2, ..., n)$$

Với

$$D = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Các D_{x_j} nhận được từ D bằng cách thay cột hệ số của ẩn x_j bởi cột hệ số tự do b $(j = 1, 2, ..., n)$.

Chẳng hạn:

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & ... & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_n & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}, ..., D_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} & b_n \end{vmatrix}$$

*** Ví dụ áp dụng:**

Giải các hệ phương trình sau bằng quy tắc Cramer (phương pháp định thức):

a) $\begin{cases} a_1x + b_1y = k_1 \\ a_2x + b_2y = k_2 \end{cases}$ giả thiết $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$

Ta có

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} k_1 & b_1 \\ k_2 & b_2 \end{vmatrix} = k_1b_2 - k_2b_1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & k_1 \\ a_2 & k_2 \end{vmatrix} = a_1k_2 - a_2k_1$$

Hệ có nghiệm duy nhất:

$$\left(x = \frac{D_x}{D} = \frac{k_1b_2 - k_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1};\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{a_1k_2 - a_2k_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \right)$$

b) $\begin{cases} 3x + 4y = -5 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$

Ta có

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0;\ D_x = \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = -19$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 28$$

Hệ có nghiệm duy nhất: $\left(x = \frac{D_x}{D} = \frac{19}{11};\ y = \frac{D_y}{D} = -\frac{28}{11} \right)$

c) $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = k_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = k_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = k_3 \end{cases}$

Ta có

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0\,;\; D_x = \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{vmatrix};\;\; D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix}.$$

Hệ có nghiệm duy nhất:

$$\left(x = \frac{D_x}{D};\; y = \frac{D_y}{D};\; z = \frac{D_z}{D} \right)$$

d) Chúng ta giải lại ví dụ b) trong mục 1.3.3.

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 = 5 \\ 3x_1 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0\,;\; D_{x_1} = \begin{vmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_{x_2} = \begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 35\,;\; D_{x_3} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 28$$

Hệ có nghiệm duy nhất là:

$$\left(x_1 = \frac{D_{x_1}}{D} = \frac{0}{7} = 0;\; x_2 = \frac{D_{x_2}}{D} = \frac{35}{7} = 5;\; x_3 = \frac{D_{x_3}}{D} = \frac{28}{7} = 4 \right)$$

Phụ lục 2. Đạo hàm và vi phân hàm số một biến

2.1. Đạo hàm của hàm số một biến

2.1.1. Các định nghĩa

– Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong một lân cận điểm x_0 (một khoảng đủ nhỏ chứa x_0).

– Ký hiệu $\Delta x = x - x_0$ gọi là số gia của đối số (với $|\Delta x|$ đủ nhỏ), tương ứng $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ được gọi là số gia của hàm số.

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

thì hàm số $f(x)$ được gọi là có đạo hàm tại điểm x_0 và kết quả của giới hạn này, được gọi là đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0, ký hiệu là $f'(x_0)$ hay $y'(x_0)$.

Ví dụ 1. Sử dụng định nghĩa, xây dựng công thức tính đạo hàm của hàm số $y = f(x) = x^2$

Tập xác định của hàm số : $D_f = \mathbb{R}$

Với $x_0 \in \mathbb{R}$, xét giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = 2x_0$

Vậy $f'(x_0) = 2x_0$ hay $\left(x^2\right)' = 2x$ $(\forall x \in \mathbb{R})$

Ví dụ 2. Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos 3x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0. \end{cases}$. Tính đạo hàm $f'(0)$.

Giải

Xét $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1 - \cos 3x}{x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{3x}{2}}{x^2} = \frac{9}{2}$.

Vậy hàm số có đạo hàm $f'(0) = \frac{9}{2}$.

Ví dụ 3. Dùng định nghĩa xây dựng công thức tính đạo hàm của hàm số:

$$y = f(x) = \sqrt{3x + 1}.$$

Giải

Tập xác định của hàm số : $D_f = \left[-\frac{1}{3};+\infty\right)$.

Xét $x_0 \in \left[-\frac{1}{3};+\infty\right)$. Ta có: $\Delta y = \sqrt{3x+1} - \sqrt{3x_0+1}$, do đó :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{3x_0+1}}{x - x_0}.$$

Khi $x_0 > -\frac{1}{3}$ giới hạn trên tồn tại và nhận giá trị hữu hạn:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{3x_0+1}}{x - x_0} = \frac{3}{2\sqrt{3x_0+1}}.$$

Khi $x_0 = -\frac{1}{3}$, giới hạn trên không tồn tại hữu hạn.

Do đó, đạo hàm của hàm số là: $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$.

– Đạo hàm một phía:

+ Đạo hàm bên trái của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0:

$$f'_-(x_0) \overset{dn}{=} \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ (nếu giới hạn này tồn tại và hữu hạn)}$$

+ Đạo hàm bên phải của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0:

$$f'_+(x_0) \overset{dn}{=} \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ (nếu giới hạn này tồn tại và hữu hạn)}$$

Hàm số có đạo hàm tại điểm x_0 khi và chỉ khi hàm số có đạo hàm trái, đạo hàm phải tại x_0, đồng thời hai đạo hàm này bằng nhau :

$$f'(x_0) \text{ tồn tại} \Leftrightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$$

– Đạo hàm trên một khoảng :

+ Hàm số $f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng (a,b) nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm trên khoảng này.

+ Hàm số $f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên đoạn $[a,b]$ nếu nó có đạo hàm trên khoảng (a,b) và có đạo hàm bên phải tại a, đạo hàm bên trái tại b.

2.1.2. Liên hệ với tính liên tục

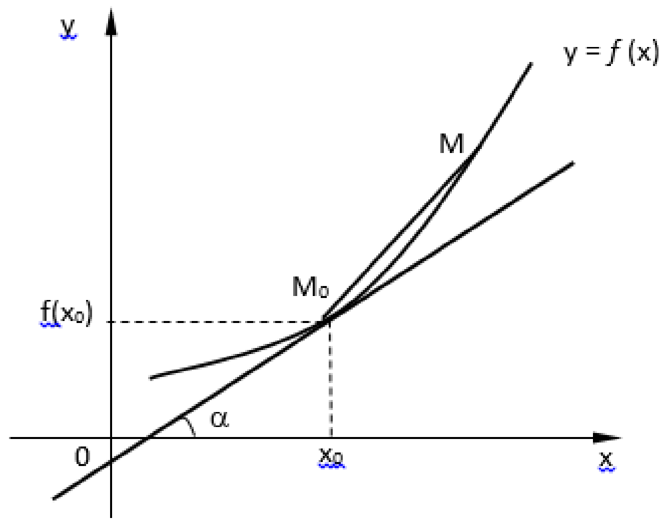
– Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f(x)$ liên tục tại x_0, điều ngược lại không chắc đã đúng.

Ví dụ 4. Hàm số $f(x) = |x|$ liên tục tại $x_0 = 0$ nhưng không có đạo hàm tại điểm đó.

2.1.3. ý nghĩa hình học của đạo hàm

– Đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$. Ta có $f^{/}(x_0) = \tan\alpha$

Phương trình tiếp tuyến đó là: $y - f(x_0) = f^{/}\left(x_0\right)\left(x - x_0\right)$.



Ví dụ 5. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2$ tại điểm $x_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Giải.

Ta có

$$f^{/}(x) = 2x \text{. Tại } x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{, ta có } f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \text{ và } f^{/}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $x_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ là : $y - \dfrac{1}{2} = \sqrt{2}\left(x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

2.1.4. Ý nghĩa của đạo hàm

$f^{/}(x_0)$ hay $y^{/}(x_0)$ biểu thị tốc độ thay đổi của giá trị hàm số $f(x)$ tại điểm x_0, khi đối số x thay đổi một lượng nhỏ. Nói cách khác, tại x_0 khi đối số x thay đổi một lượng nhỏ, thì giá trị hàm số $f(x)$ sẽ thay đổi một lượng xấp xỉ bằng $f^{/}(x_0)$.

2.2. Đạo hàm của các hàm sơ cấp cơ bản

Dưới đây là bảng công thức đạo hàm của một số hàm số sơ cấp cơ bản

1. $(c)' = 0$ (c là hằng số)	**2.** $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$; $(x)' = 1$.
3. $(a^x)' = a^x \ln a$; $(e^x)' = e^x$.	**4.** $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$; $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
5. $(\sin x)' = \cos x$.	**6.** $(\cos x)' = -\sin x$.
7. $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.	**8.** $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.	**10.** $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
11. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.	**12.** $(\mathrm{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

2.3. Các quy tắc tính đạo hàm

2.3.1. Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương của các hàm số

Nếu các hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ cùng có đạo hàm thì:

1. $(ku)' = ku'$ (k là hằng số).

2. $(u \pm v)' = u' + v'$.

3. $(uv)' = u'v + uv'$.

4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$.

2.3.2. Đạo hàm của hàm số hợp

Nếu hàm số $u = \varphi(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại điểm $u_0 = \varphi(x_0)$ thì hàm hợp $y = f\left[\varphi(x)\right]$ có đạo hàm tại điểm x_0 và giá trị của đạo hàm được tính theo công thức:

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

Áp dụng quy tắc đạo hàm của hàm hợp, nếu $u = \varphi(x)$ là một hàm số có đạo hàm thì các công thức đạo hàm được sử dụng như sau:

1. $(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1}.u'.$	**6.** $(\tan u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}.u'.$
2. $(a^u)' = (a^u \ln a)u';\ (e^u)' = e^u u'.$	**7.** $(\cot u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}.u'.$
3. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u\ln a}.u';$ $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}.$	**8.** $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}.u'.$ **9.** $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}.u'.$
4. $(\sin u)' = \cos u.u'.$	**10.** $(\arctan u)' = \dfrac{1}{1+u^2}.u'.$
5. $(\cos u)' = -\sin u.u'.$	**11.** $(\text{arccot}\, u)' = -\dfrac{1}{1+u^2}.u'.$

2.4. Khái niệm vi phân và liên hệ với đạo hàm

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên X. Giả sử $f(x)$ liên tục tại $x_0 \in X$.

Nếu số gia của hàm số $f(x)$ tại x_0 có thể biểu diễn được dưới dạng:

$$\Delta f(x_0) = A.\Delta x + \alpha(\Delta x)$$

trong đó, A là một hằng số, $\alpha(\Delta x)$ là một vô cùng bé bậc cao hơn Δx thì ta nói hàm số $f(x)$ khả vi tại x_0 và giá trị $A.\Delta x$ được gọi là vi phân của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0, ký hiệu là: $df(x_0)$. Như vậy, $df(x_0) = A.\Delta x.$

Định lý: Hàm số $f(x)$ khả vi tại x_0 khi và chỉ khi hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 và khi đó: $df(x_0) = f'(x_0).\Delta x.$

– Nếu hàm số khả vi tại mọi điểm trong khoảng X thì ta nói hàm số khả vi trong X. Khi đó, ta có một hàm số xác định trên X gọi là biểu thức vi phân của hàm số, ký hiệu là: $df(x)$ hoặc dy.

$$df(x) = dy = A.\Delta x.$$

Đặc biệt nếu $y = x$ thì $dx = \Delta x$. Do đó, biểu thức vi phân của hàm số $y = f(x)$ thường được viết dưới dạng: $df(x) = f'(x)dx.$

2.5. Các quy tắc tính vi phân

Nếu các hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ khả vi tại điểm x_0 thì tại điểm đó ta có:

1. $d(u \pm v) = du \pm dv.$

2. $d(ku) = kdu$ (k là hằng số).

3. $d(uv) = vdu + udv$.

4. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$ $(v \neq 0)$.

Ví dụ 6. Tính vi phân của hàm số $y = x\cos\dfrac{x}{2}$ tại $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ khi $\Delta x = 0{,}01$.

Giải

Ta có: $y' = \cos\dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{2}\sin\dfrac{x}{2} \Rightarrow y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Vậy, $dy\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\Delta x = \dfrac{0{,}01(4-\pi)}{4\sqrt{2}} = \dfrac{4-\pi}{400\sqrt{2}}$.

Ví dụ 7. Tìm biểu thức vi phân của các hàm số:

a) $y = ax + b$.

b) $y = x(\ln x - 1)$.

c) $y = \dfrac{1}{12}\sin\dfrac{x-6}{x+6}$.

Giải

a) Ta có: $y' = [ax + b)]' = a$. Do vậy, $dy = adx$

b) Ta có: $y' = [x(\ln x - 1)]' = x'(\ln x - 1) + x(\ln x - 1)' = \ln x$.

Do vậy, $dy = \ln x dx$.

c) Ta có: $y' = \left(\dfrac{1}{12}\sin\dfrac{x-6}{x+6}\right)' = \dfrac{1}{12}\cos\dfrac{x-6}{x+6}.\left(\dfrac{x-6}{x+6}\right)' = \dfrac{1}{(x+6)^2}\cos\dfrac{x-6}{x+6}$.

Do vậy, $dy = y'dx = \dfrac{1}{(x+6)^2}\cos\dfrac{x-6}{x+6}dx$.

*** Tính bất biến của biểu thức vi phân cấp 1:**

Xét hàm số hợp $y = f(x), x = x(t)$. Biểu thức vi phân của hàm số là:

$$dy = y'_t dt = (y'_x . x'_t)dt = y'_x . dx.$$

Như vậy, biểu thức vi phân giữ nguyên dạng trong trường hợp x là biến độc lập, cũng như x là biến trung gian.

2.6. Các định lý cơ bản về hàm số khả vi và áp dụng

2.6.1. Bổ đề Fermat

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng (a,b) và đạt giá trị cực đại (hoặc giá trị cực tiểu) tại điểm c thuộc khoảng (a,b). Khi đó, nếu tại c hàm số có đạo hàm thì $f'(c)=0$.

2.6.2. Định lý Rolle

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $[a,b]$ và khả vi trên (a,b). Nếu $f(a)=f(b)$ thì tồn tại điểm $c\in(a,b)$ sao cho: $f'(c)=0$.

2.6.3. Định lý Lagrange

Nếu hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $[a,b]$ và khả vi trên (a,b) thì tồn tại điểm $c\in(a,b)$ sao cho

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

2.6.4. Định lý Cauchy

Nếu các hàm số $f(x), g(x)$ xác định, liên tục trên $[a,b]$, khả vi trên (a,b) và $g(x)\neq 0, \forall x\in(a,b)$ thì tồn tại điểm $c\in(a,b)$ sao cho :

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Ví dụ 8. Chứng minh bất đẳng thức: $|\sin a-\sin b|\leq|a-b|$.

Giải

Ta có hàm số $f(x)=\sin x$ xác định và liên tục trên $[a,b]$, có đạo hàm $y'=\cos x$ trên (a,b). Theo công thức Lagrange, tồn tại $c\in(a,b)$ sao cho

$$f(a)-f(b)=f'(c)(a-b)$$

Hay

$$\sin a-\sin b=(a-b).\cos c$$

Do $|\cos c|\leq 1$ nên ta suy ra

$$|\sin a-\sin b|=|\cos c||a-b|\leq|a-b|.$$

Ví dụ 9. Cho $f(x)=(x^2-3x+2)\ln(x^2+1)$.

Chứng minh rằng phương trình $f^{/}(x)=0$ có nghiệm.

Giải

Hàm số $f(x)$ xác định và khả vi trên R.

Mặt khác $f(1)=f(2)=0.$ Theo kết quả của định lý Rolle, tồn tại $c\in(1,2)$ thoả mãn $f^{/}(c)=0.$

Vậy phương trình $f^{/}(x)=0$ có nghiệm trong khoảng $(1,2)$.

Bạn đọc tự chứng minh rằng $f^{//}(x)=0$ cũng có nghiệm.

2.7. Áp dụng vi phân để tính gần đúng

Chúng ta có kết quả là: số gia hàm số tại điểm x_0 xấp xỉ với vi phân hàm số tại điểm đó:

$$\Delta f(x_0)\approx df(x_0)\Rightarrow f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f^{/}(x_0).\Delta x$$

$$\Leftrightarrow f(x_0+\Delta_x)\approx f^{/}(x_0).\Delta_x+f(x_0)$$

Để tính gần đúng $f(x_0+\Delta x)$ chúng ta sẽ tính $f(x_0)$ và $f^{/}(x_0)$.

Ví dụ 10. Không tra bảng, tính gần đúng giá trị $\sqrt[7]{1,04}$.

Giải

Đặt :

$$f(x)=\sqrt[7]{x},$$

Đạo hàm cấp 1:

$$f^{/}(x)=\frac{1}{7}x^{-\frac{6}{7}}\text{ , lấy } x_0=1,\ \Delta x=0,04$$

Áp dụng công thức:

$$f(x)=f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f^{/}(x_0).\Delta x$$

Hay

$$\sqrt[7]{1,04}=f(1+0,04)\approx f(1)+f^{/}(1).\Delta x$$

$$=\sqrt[7]{1}+\frac{1}{7.\sqrt[7]{1^6}}.0,04\approx 1,0057$$

Phụ lục 3. Bài toán tối ưu hàm một biến

3.1. Xác định khoảng tăng, giảm và cực trị của hàm số

Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trong khoảng (a,b). Ta nói rằng hàm số nhận giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) tại điểm $x_0 \in (a,b)$ nếu tồn tại số $\delta > 0$ sao cho bất đẳng thức:

$f(x) < f(x_0)$ $[f(x) > f(x_0)]$ luôn thoả mãn khi $0 < |x - x_0| < \delta$.

Điểm mà tại đó hàm số nhận giá trị cực đại hoặc giá trị cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị của hàm số.

Định lý 1. Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trong khoảng (a,b). Khi đó:

- Nếu $f'(x) > 0$ $\left(f'(x) < 0\right)$ tại mọi điểm $x \in (a,b)$ thì hàm số đơn điệu tăng (giảm) trong khoảng (a,b).
- Nếu $f'(x) = 0$ tại mọi điểm $x \in (a,b)$ thì hàm số $f(x)$ nhận giá trị không đổi trong khoảng (a,b).

Định lý 2. Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số $f(x)$ và tại điểm đó hàm số $f(x)$ có đạo hàm thì $f'(x_0) = 0$.

Nhận xét : Hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại các điểm tới hạn:

- Điểm mà tại đó đạo hàm triệt tiêu (gọi là điểm dừng).
- Điểm mà tại đó hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm.

Định lý 3. Giả sử x_0 là một điểm tới hạn của $f(x)$ và tồn tại $\varepsilon > 0$ mà $f'(x)$ có dấu xác định trong mỗi khoảng $(x_0 - \varepsilon, x_0),(x_0, x_0 + \varepsilon)$. Khi đó

- Nếu khi qua điểm x_0 đạo hàm $f'(x)$ đổi dấu thì hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại điểm đó.

  +) x_0 là điểm cực đại nếu $f'(x)$ đổi dấu từ (+) sang (–) .

  +) x_0 là điểm cực tiểu nếu $f'(x)$ đổi dấu từ (–) sang (+).

- Nếu khi qua điểm x_0 đạo hàm $f'(x)$ không đổi dấu thì hàm số không đạt cực trị tại điểm đó.

Định lý 4. Giả sử x_0 là một điểm dừng của hàm số $f(x)$ và tồn tại số tự nhiên $n \geq 2$ sao cho: $f^{/}(x_0) = f^{//}(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ và $f^{(n)}(x_0) \neq 0.$

Khi đó:

- Nếu n là số chẵn thì x_0 là một điểm cực trị của $f(x)$.

  +) x_0 là điểm cực đại nếu $f^{(n)}(x_0) < 0.$

  +) x_0 là điểm cực tiểu nếu $f^{(n)}(x_0) > 0.$

- Nếu n là số lẻ thì x_0 không phải là điểm cực trị của $f(x)$.

Ví dụ 1. Xác định khoảng tăng, giảm và tìm cực trị của hàm số: $y = (x-5)e^x$.

Giải

Hàm số $y = (x-5)e^x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Ta có:

$$y^{/} = (x-4)e^x;\ y^{/} = 0 \Leftrightarrow x = 4.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$y^{/}$		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-e^4$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số tăng trên $(-\infty, 4)$; giảm trên $(4;+\infty)$ và đạt giá trị cực tiểu tại $x = 4$ với $y_{CT} = -e^4$.

Ví dụ 2. Tìm cực trị của hàm số: $y = (x-1)^4$.

Giải

Hàm số $y = (x-1)^4$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Ta có:

$$y^{/} = 4(x-1)^3;\ y^{/} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Hàm số có điểm dừng tại $x_0 = 1$.

Đạo hàm cấp hai: $y^{//} = 12(x-1)^2 \Rightarrow y^{//}(1) = 0.$

Đạo hàm cấp ba: $y''' = 24(x-1) \Rightarrow y'''(1) = 0.$

Đạo hàm cấp bốn: $y^{(4)} = 24 \Rightarrow y^{(4)}(1) = 24 > 0.$

Do đó hàm số $y = (x-1)^4$ đạt giá trị cực tiểu tại $x = 1$ với $y_{CT} = 0.$

Ví dụ 3. Xác định khoảng tăng, giảm và tìm cực trị của hàm số: $y = (2x+1)\sqrt[3]{x^2}.$

Giải

Hàm số có tập xác định: $\mathbb{R}.$

Ta có:

$$y' = 2\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3}(2x+1).\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2(5x+1)}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Hàm số có hai điểm tới hạn: $x_1 = -\frac{1}{5}$ và $x_2 = 0.$

Bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		$-1/5$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{1}{25}}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số tăng trên $\left(-\infty, -\frac{1}{5}\right)$ và $\left(0, +\infty\right)$; giảm trên $(-\frac{1}{5}; 0).$

Hàm số đạt giá trị cực tiểu tại $x = 0$ với $y_{CT} = 0$; hàm số đạt giá trị cực đại tại $x = -\frac{1}{5}$ với $y_{CD} = \frac{3}{5\sqrt[3]{25}}.$

Ví dụ 4. Tìm khoảng tăng, giảm và cực trị của hàm số: $y = \frac{\ln x}{x^2}.$

Giải

Hàm số có tập xác định: $(0, +\infty).$

Ta có:

$$y' = \frac{x(1-2\ln x)}{x^4} = \frac{1-2\ln x}{x^3};\quad y' = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{e}.$$

Bảng biến thiên của hàm số:

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
y'	$\Vert$	$+$	0	$-$	
y	$\Vert -\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số tăng trên $\left(0,\sqrt{e}\right)$, giảm trên $\left(\sqrt{e},+\infty\right)$ và đạt cực đại tại $x=\sqrt{e}$ với $y_{CD}=e^{-1}$.

Ví dụ 5. Tìm khoảng tăng, giảm và cực trị của hàm số: $y=\dfrac{e^{4x}}{3x+2}$.

Giải

Hàm số có tập xác định: $(-\infty,-\frac{2}{3})\cup(-\frac{2}{3},+\infty)$.

Ta có:

$$y'=\frac{e^{4x}(12x+5)}{(3x+2)^2};\ \ y'=0\Leftrightarrow x=-\frac{5}{12}.$$

Bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$-\frac{5}{12}$		$+\infty$
y'		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$\frac{4}{3}e^{-5/3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số giảm trên các khoảng $\left(-\infty,-\dfrac{2}{3}\right)$ và $\left(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{5}{12}\right)$; tăng trên khoảng $\left(-\dfrac{5}{12},+\infty\right)$. Hàm số đạt giá trị cực tiểu tại $x=-\dfrac{5}{2}$ với $y_{CT}=\dfrac{4}{3}e^{-\frac{5}{3}}$.

Ví dụ 6. Tìm cực trị của hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2+5$

Giải

Hàm số có Tập xác định là $\mathbb{R}$

Ta có :

$$y' = f'(x) = 3x^2 - 6x$$

Giải phương trình: $y' = 0 \Leftrightarrow 3x\left(x-2\right) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 2$

Ta có

$$y'' = 6x - 6$$

Với $y''(0) = -6 < 0$

Với $y''(2) = +6 > 0$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ với $y_{CD} = y(0) = 5$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$ với $y_{CT} = y(2) = 1$.

3.2. Xác định khoảng lồi, lõm và điểm uốn của đồ thị hàm số

Định nghĩa : Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên (a,b). Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số lồi trên $\left(a,b\right)$ nếu $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ và $\forall t \in (0,1)$ ta luôn có:

$$f\left[tx_1 + (1-t)x_2\right] < tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Nếu bất đẳng thức trên có dấu ngược lại thì hàm số được gọi là hàm số lõm trên (a,b).

Điểm mà tại đó đồ thị hàm số liên tục $f(x)$ thay đổi tính lồi, lõm được gọi là điểm uốn của đồ thị hàm số đó.

Định lý. Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên khoảng X. Khi đó:

– Nếu hàm số $f(x)$ lồi (lõm) trên khoảng $\left(a,b\right)$ thì :

$$f''(x) \geq 0 \ \left(f''(x) \leq 0\right) \text{ với mọi } x \in (a,b) \text{ (điều kiện cần).}$$

– Nếu $f''(x) \geq 0$ $\left(f''(x) \leq 0\right)$ với mọi $x \in \left(a,b\right)$ thì hàm số $f(x)$ là hàm lồi (lõm) trong khoảng $\left(a,b\right)$ (điều kiện đủ).

Ví dụ 7. Xác định khoảng lồi, lõm và điểm uốn của đồ thị hàm số: $y = \ln(1+4x^2)$

Giải

Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$

Đạo hàm cấp 1

$$y' = \frac{8x}{1+4x^2}$$

Đạo hàm cấp 2

$$y^{//} = \frac{8(1-4x^2)}{(1+4x^2)^2}$$

Giải phương trình: $y^{//} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$.

Ta có bảng xét dấu của $y^{//}$:

x	$-\infty$		$-1/2$		$1/2$		$+\infty$
$y^{//}$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy, hàm số lồi trong khoảng $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ và lõm trong các khoảng $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ và $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. Đồ thị hàm số có hai điểm uốn là : $A\left(-\frac{1}{2},\ln 2\right)$; $B\left(\frac{1}{2},\ln 2\right)$.

3.3. Bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$. Khi đó hàm số sẽ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó. Muốn tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$, ta tìm tất cả các điểm tới hạn của hàm số trên đoạn $[a,b]$, rồi tính giá trị của $f(x)$ tại các điểm tới hạn và tại a,b. So sánh các giá trị tính được, từ đó suy ra giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[a,b]$.

Ví dụ 8. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = x^2e^{-x}$ trên đoạn $[-1,3]$

Giải

Ta có $y^{/} = e^{-x}(2x - x^2)$,

Giải phương trình : $y^{/} = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 2$

Vậy, hàm số có hai điểm tới hạn là: $x_1 = 0,\ x_2 = 2$.

So sánh các giá trị $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(3)$. Ta được giá trị nhỏ nhất của hàm số là $f(0) = 0$ và giá trị lớn nhất của hàm số là $f(-1) = e$.

2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục, khả vi trên (a,b):

– Nếu $f(x)$ có duy nhất điểm cực đại trên khoảng (a,b), thì giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên (a,b) chính bằng giá trị cực đại của nó.

– Nếu $f(x)$ có duy nhất điểm cực tiểu trên khoảng (a,b), thì giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên (a,b) chính bằng giá trị cực tiểu của nó.

Ví dụ 9. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ trên khoảng $(-2,1)$.

Giải

Ta có :

$$y' = f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

Giải phương trình: $y' = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 2$

Loại điểm $x_2 = 2$ vì $2 \notin (-2,1)$

Tại $x_1 = 0$, $y''(0) = -6 < 0$ nên hàm số đạt cực đại tại điểm này, vì có duy nhất điểm cực đại trên khoảng $(-2,1)$, nên giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng đó bằng giá trị cực đại $y(0) = 5$.

Ví dụ 10. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ trên khoảng $(1,3)$.

Giải

Ta có :

$$y' = f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

Giải phương trình : $y' = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 2$

Loại điểm $x_1 = 0$ vì $0 \notin (1,3)$

Tại $x_2 = 2$, $y''(2) = 6 > 0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại điểm này, vì có duy nhất điểm cực đại trên khoảng $(1,3)$, nên giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng đó bằng giá trị cực tiểu $y(2) = 1$.

Phụ lục 4. Bảng công thức nguyên hàm cơ bản và các phương pháp tính tích phân

4.1. Khái niệm tích phân bất định

Định nghĩa: Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên tập X nếu

$$F'(x) = f(x) \text{ hay } dF(x) = f(x)dx, \ \forall x \in X.$$

Nếu $G(x)$ là một nguyên hàm khác của hàm $f(x)$ trên tập X, ta có

$$G(x) = F(x) + C \text{ (C là hằng số)}$$

Tích phân bất định của hàm số $f(x)$ là tập tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên tập X.

Ký hiệu:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Ví dụ 1.

Ta có

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C; \quad \int \cos x \, dx = \sin x + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+k}} dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2+k}\right) + C$$

4.2. Các tính chất cơ bản của tích phân bất định

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

2. $\int f'(x)dx = f(x) + C$ hay $\int df(x) = f(x) + C$

3. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

4. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ (k là hằng số)

5. Tính bất biến của biểu thức tích phân:

Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\int f(u)du = F(u) + C,$ trong đó $u = \varphi(x)$ là một biểu thức hàm số có đạo hàm liên tục.

4.3. Các công thức nguyên hàm cơ bản

1. $\int 1.dx = x + C$	**9.** $\int \cos x.dx = \sin x + C$
2. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$.	**10.** $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x \rvert + C$	**11.** $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$
4. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$	**12.** $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a} + C$
5. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	**13.** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$
6. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$	**14.** $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$
7. $\int e^x dx = e^x + C$	**15.** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+b}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2+b}\right\rvert + C$
8. $\int \sin x.dx = -\cos x + C$	

4.4. Các phương pháp tích phân

Trong khi thực hành tính tích phân, ta không chỉ sử dụng một phương pháp giải mà có thể phải kết hợp một số phương pháp với nhau. Dưới đây sẽ trình bày các phương pháp với các ví dụ minh họa cụ thể để tính các dạng tích phân thường gặp.

4.4.1. Sử dụng bảng tích phân cơ bản và phương pháp khai triển

Ta có thể tính tích phân của một hàm phức tạp bằng cách khai triển nó thành tổng (hiệu) tích phân của các hàm đơn giản hơn.

Ví dụ 2. Tính tích phân : $\int x\sqrt[3]{x-1}dx$

Giải

Nếu khai triển $x = x - 1 + 1$, ta chuyển tích phân ban đầu về tổng hai tích phân sau:

$$\int x\sqrt[3]{x-1}dx = \int (x-1+1)\sqrt[3]{x-1}dx = \int (x-1)\sqrt[3]{x-1}dx + \int \sqrt[3]{x-1}dx$$

$$= \int (x-1)^{\frac{4}{3}}dx + \int (x-1)^{\frac{1}{3}}dx = \frac{3}{7}(x-1)^{\frac{7}{3}} + \frac{3}{4}(x-1)^{\frac{4}{3}} + C$$

Ví dụ 3. Tính tích phân: $\int \dfrac{\cos 2x}{\sin^2 x}dx$

Giải

Khai triển $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ ta có:

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{1 - 2\sin^2 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}dx - \int 2dx = -\cot x - 2x + C.$$

4.4.2. Sử dụng tính bất biến của biểu thức tích phân

Nếu ta nhận thấy tích phân cần tính có dạng như sau:

$$I = \int f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)dx$$

thì có thể đặt $u = \varphi(x)$ để chuyển về tính một biểu thức tích phân dễ hơn:

$$I = \int f(u)du = F(u) + C$$

Trường hợp $u = kx + b$ ta có:

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}\int f(kx+b)d(kx+b) = \frac{1}{k}F(kx+b) + C$$

Ví dụ 4. Tính tích phân: $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4-5x}}$

Giải

Ta có

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4-5x}} = \int \left(4-5x\right)^{-\frac{1}{3}}dx = -\frac{1}{5}\int \left(4-5x\right)^{-\frac{1}{3}}d(4-5x)$$

$$= -\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{2}\cdot(4-5x)^{\frac{2}{3}} + C = -\frac{3}{10}\sqrt[3]{(4-5x)^2} + C.$$

4.4.3. Phương pháp đổi biến số

a) Phép đổi biến xuôi

Giả sử cần tính tích phân $I = \int f[u(x)].u'(x).dx$

Đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x).dx$

$$I = \int f[u(x)]u'(x).dx = \int f(t).dt = F(t) + C = F[u(x)] + C$$

Ví dụ 5. Tính tích phân $\int \sqrt{1+e^x}.dx$.

Giải

Đặt $t = \sqrt{1+e^x}$. Khi đó $e^x = t^2 - 1,\ x = \ln(t^2 - 1)$, suy ra $dx = \frac{2t.dt}{t^2 - 1}$

Ta có:

$$\int \sqrt{1+e^x}.dx = \int \frac{2t^2.dt}{t^2-1} = \int 2 + \frac{2.dt}{t^2-1} = 2t + \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$$

$$= 2\sqrt{1+e^x} + \ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + C.$$

• Trường hợp biểu thức hàm số chứa căn thức dạng $\sqrt[n]{kx+b}$

Khi đó ta đổi biến bằng cách đặt: $t = \sqrt[n]{kx+b}$, suy ra:

$$x = \frac{1}{k}(t^n - b),\ dx = \frac{n}{k}t^{n-1}dt.$$

Ví dụ 6. Tính tích phân $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}}$.

Giải

Trong trường hợp này để khử được hết căn ta có thể đổi biến bằng cách đặt

$$t = \sqrt[6]{x} \Rightarrow x = t^6,\ dx = 6t^5dt,\ \sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x} = t^3 - 2t^2.$$

Tích phân ban đầu biến đổi thành:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}} = \int \frac{6t^5.dt}{t^3 - 2t^2} = 6\int \frac{t^3}{t-2}dt = 6\int \left(t^2 + 2t + 4 + \frac{8}{t-2}\right)dt$$

$$= 6\left[\frac{t^3}{3} + t^2 + 4t - 8\ln|t-2|\right] + C$$

$$= 2\sqrt{x} + 6\sqrt[3]{x} + 24\sqrt[6]{x} - \frac{4}{3}\ln\left|\sqrt[6]{x} - 2\right| + C.$$

b) Phép đổi biến ngược

Xét tích phân $I = \int f(x)dx$ trong đó $f(x)$ là một hàm số liên tục và cho $\varphi(t)$ là một hàm đơn điệu, có đạo hàm liên tục ($\varphi(t)$ có hàm số ngược).

Đặt $x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t)dt$, ta có:

$$I = \int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \int g(t)dt$$

Nếu ta tính được $\int g(t)dt = G(t) + C$ và $t = h(x)$ là hàm ngược của hàm số $x = \varphi(t)$ thì: $I = \int f(x)dx = G[h(x)] + C$

• Trường hợp biểu thức hàm số chứa căn thức dạng $\sqrt{a^2 - x^2}$

Ta đổi biến $x = a.\sin t$, $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$, khi đó:

$$dx = a.\cos t.dt,\ \sqrt{a^2 - x^2} = a.\cos t,\ (a > 0).$$

1.4.4. Phương pháp tích phân từng phần

Giả sử $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục. Khi đó, ta có:

$$\int f(x)dx = \int udv = uv - \int vdu.$$

Lưu ý rằng, $\int vdu$ là dễ tính, hoặc lặp tích phân ban đầu sau hai lần tính và $v = \int dv$

.**• Đối với các tích phân**

$$\int x^n e^{kx}dx,\ \int x^n \sin kx.dx,\ \int x^n \cos kx.dx,\ (\text{n nguyên dương})$$

ta áp dụng công thức tích phân từng phần đối với $u = x^n$ và dv là phần còn lại của biểu thức dưới dấu tích phân.

Ví dụ 7. Tính tích phân $I = \int x^2 \sin 2x.dx$.

Giải

Đặt $u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx$, $dv = \sin 2x.dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2}\cos 2x$.

Theo công thức tính tích phân từng phần ta có:

$$I = \int udv = uv - \int vdu = -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \underbrace{\int x\cos 2x.dx}_{J}.$$

Tiếp tục áp dụng tích phân từng phần với $J = \int x\cos 2x.dx$

Đặt: $u = x \Rightarrow du = dx$, $dv = \cos 2x.dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}\sin 2x$, suy ra:

$$J = \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2xdx = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

Vậy $I = -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$.

• Đối với tích phân

$$\int x^\alpha \ln^n xdx \quad (\alpha \ne -1,\ \text{n nguyên dương})$$

ta áp dụng công thức tích phân từng phần với $u = \ln^n x$, $dv = x^\alpha dx$.

Ví dụ 8. Tính tích phân $I = \int x \log_2 x.dx$.

Giải

Đặt $u = \log_2 x \Rightarrow du = \frac{1}{(\ln 2)x} dx$, $dv = xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$

Ta có: $I = \frac{x^2}{2}\log_2 x - \frac{1}{2\ln 2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\log_2 x - \frac{x^2}{4\ln 2} + C$.

Chú ý : Khi áp dụng công thức tích phân từng phần với dạng tích phân

$$\int P(x)\ln(ax+b)dx,$$

trong đó $P(x)$ là một đa thức, ta sẽ phải tính tích phân của phân thức hữu tỷ với mẫu số bậc nhất.

Ví dụ 9. Tính tích phân $I = \int x\ln(x+2).dx$.

Giải

Đặt $u = \ln(x+2) \Rightarrow du = \frac{dx}{x+2}$, $dv = xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$

Ta có:

$$I = \frac{x^2}{2}\ln(x+2) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x+2}dx = \frac{x^2}{2}\ln(x+2) - \frac{1}{2}\int\left(x - 2 + \frac{4}{x+2}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x+2) - \frac{1}{4}x^2 + x - 2\ln(x+2) + C.$$

4.5. Khái niệm tích phân xác định và các lớp hàm khả tích

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và bị chặn trên $[a;b]$. Chia $[a;b]$ thành n phần bởi các điểm chia $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ (phép phân hoạch π).

Đặt $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, 2, ..., n)$

gọi: $d_\pi = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta_i$, lấy $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$

Lập tổng $\sigma(\pi) = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta_i f(\xi_i)$. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{d_\pi \to 0} \sigma(\pi) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i f(\xi_i) = I$$

không phụ thuộc phép phân hoạch π, cũng như cách chọn điểm ξ_i, thì chúng ta nói hàm số $y = f(x)$ khả tích trên $[a;b]$ và số I được gọi là tích phân xác định của hàm số $y = f(x)$ trên $[a;b]$. Ký hiệu là: $I = \int_a^b f(x)dx$

Với a gọi là cận dưới, b gọi là cận trên.

Các lớp hàm khả tích

Các lớp hàm sau đây khả tích trên $[a;b]$:

a) Các hàm số liên tục trên $[a;b]$.

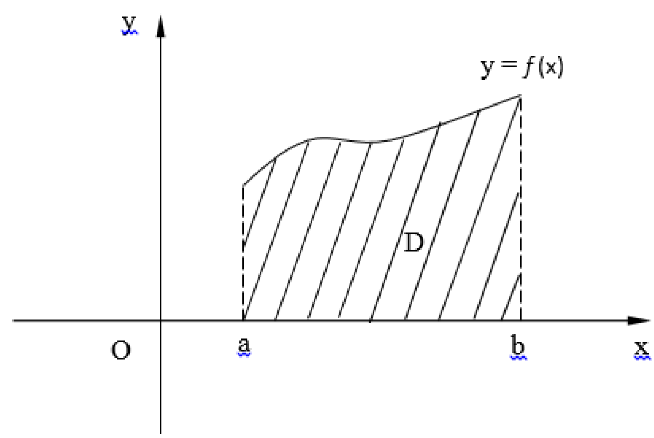
b) Các hàm số bị chặn và gián đoạn tại hữu hạn điểm trên $[a;b]$.

c) Các hàm số bị chặn và đơn điệu trên $[a;b]$.

Ý nghĩa hình học của tích phân xác định

Cho hàm số $y = f(x) \geq 0$, xác định và liên tục trên $[a;b]$, khi đó

$\int_a^b f(x)dx = S(D)$, (diện tích của miền D, với $D = \{a \leq x \leq b; 0 \leq y \leq f(x)\}$ người ta thường gọi D là hình thang cong).



4.6. Các tính chất cơ bản của tích phân xác định

Giả sử các điều kiện khả tích của các hàm số đều được thoả mãn, khi đó ta có các tính chất sau của tích phân xác định:

1. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

2. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

3. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

4. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.

5. Nếu $a < b$ và $f(x) \geq g(x),\ \forall x \in [a,b]$ thì: $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

6. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ (hoặc $[b,a]$) thì tồn tại ít nhất một điểm ξ trong khoảng giữa hai cận a và b sao cho:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad \text{(định lý giá trị trung bình).}$$

7. $\int_a^a f(x)dx = 0$.

4.7. Liên hệ tích phân bất định

Tích phân xác định với cận trên thay đổi

Giả sử $f(x)$ là một hàm số liên tục trên $[a;b]$, khi đó với mọi $x \in [a;b]$ thì hàm số

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

được gọi là hàm cận trên (hay tích phân xác định với cận trên thay đổi).

Định lý về đạo hàm của hàm cận trên

Nếu $f(x)$ là một hàm số liên tục trên $[a;b]$, khi đó với mọi $x \in [a;b]$ ta có:

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x).$$

Trong trường hợp phải tính đạo hàm của hàm số $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$,

ta nên đặt $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt = F(\beta(x)) - F(\alpha(x))$, trong đó $F(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(t)$ rồi sử dụng công thức đạo hàm hàm hợp.

Ví dụ 10. Tính đạo hàm của hàm số:

$$f(x) = \int_{-2}^{x^2} \ln(t^3+1)dt$$

Giải

Sử dụng công thức: $\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt\right)' = f\left[\beta(x)\right]\beta'(x) - f\left[\alpha(x)\right]\alpha'(x)$

Ta có : $f'(x) = (x^2)' \cdot \ln\left(x^6+1\right) - (-2)' \cdot \ln\left(x^6+1\right) = 2x.\ln(x^6+1)$.

Ví dụ 11. Tính giới hạn của hàm số sau:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \tan t^2 dt}{x^3}.$$

Giải

Để không phải tính tích phân trên tử thức của hàm lấy giới hạn, ta có thể áp dụng quy tắc L'hospital. Khi đó đạo hàm của tử thức sẽ là $\tan x^2$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \tan t^2 dt}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

Công thức Newton – Leibnitz

Với $F(x)$ là nguyên hàm bất kỳ của hàm số liên tục $f(x)$ khi đó ta có công thức:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Ví dụ 12. Tính tích phân $I = \int_0^1 e^{3x}dx$.

Giải

Ta có : $I = \int_0^1 e^{3x}dx = \frac{1}{3}\int_0^1 e^{3x}d(3x) = \frac{1}{3}e^{3x}\Big|_0^1 = \frac{e^3-1}{3}$.

4.8. Phương pháp đổi biến

Giả sử cần tính tích phân $I = \int_a^b f(x).dx$.

Thay $x = \varphi(t),\ dx = \varphi'(t)dt$ với giả thiết hàm số $\varphi(t)$ thoả mãn các điều kiện sau:

– Hàm số $\varphi(t)$ xác định, liên tục và có đạo hàm liên tục trên $[\alpha, \beta]$.

– $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$ tức là cận $x = a$ tương ứng với cận $t = \alpha$ và cận $x = b$ tương ứng với cận $t = \beta$.

– Khi t biến thiên trên khoảng $[\alpha, \beta]$ hàm số $x = \varphi(t)$ nhận các giá trị không vượt ra ngoài $[a, b]$.

Khi đó: $I = \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta [\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \int_\alpha^\beta g(t)dt.$

Phương pháp đổi biến được vận dụng giống như trong trường hợp tích phân bất định, tuy nhiên cần ghi nhớ: phải đổi cận khi đổi biến.

Ví dụ 13. Tính $I = \int_0^2 \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

Giải

Đổi biến bằng cách đặt $t = \sqrt[3]{x-1}$, suy ra $x = t^3 + 1 \Rightarrow dx = 3t^2dt$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = -1,\ \ x = 2 \Rightarrow t = 1$.

Theo công thức đổi biến ta có:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{3t^2dt}{1+t^2} = 3\int_{-1}^{1}\left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = 3(t - \arctan t)\Big|_{-1}^{1} = 6 - \frac{3\pi}{2}.$$

Ví dụ 14. Tính $I = \int_0^{\pi/2} \cos^3 x.\sin^8 x.dx$.

Giải

Đổi biến bằng cách đặt $t = \sin x$, $\cos^3 x.dx = \cos^2 x.d(\sin x) = t^2.dt$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0,\ \ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$, ta được:

$$I = \int_0^1 (1 - t^2)t^8dt = \int_0^1 (t^8 - t^{10})dt = \left(\frac{t^9}{9} - \frac{t^{11}}{11}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{99}.$$

Ví dụ 15. Tính $I=\int\limits_0^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Giải

Đặt $x=\sin t, t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $\sqrt{1-x^2}=\cos t$, $dx=\cos t.dt$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$, $x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$, ta có:

$$I=\int\limits_0^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int\limits_0^{\pi/6}\frac{\cos t dt}{\cos t}=\int\limits_0^{\pi/6}dt=t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}.$$

4.9. Phương pháp tích phân từng phần

Công thức tính tích phân từng phần trong tích phân xác định là:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu.$$

trong đó: $u=u(x)$, $v=v(x)$ là các hàm số liên tục và

$$uv\Big|_a^b=u(b)v(b)-u(a)v(a).$$

Ví dụ 16. Tính $I=\int\limits_0^1 x^2\sqrt{e^x}dx$.

Giải

Ta có $I=\int\limits_0^1 x^2\sqrt{e^x}dx=\int\limits_0^1 x^2e^{\frac{x}{2}}dx$.

Đặt $u=x^2\Rightarrow du=2xdx$, $dv=e^{\frac{x}{2}}dx\Rightarrow v=2e^{\frac{x}{2}}$.

Khi đó: $I=2x^2e^{\frac{x}{2}}\Big|_0^1-4\int\limits_0^1 xe^{\frac{x}{2}}dx=2\sqrt{e}-4J$.

Tính tiếp J bằng phương pháp tích phân từng phần như sau:

$$J=2\int\limits_0^1 x.d(e^{x/2})=2xe^{x/2}\Big|_0^1-2\int\limits_0^1 e^{x/2}.dx=2\sqrt{e}-4e^{\frac{x}{2}}\Big|_0^1=-2\sqrt{e}+4.$$

Vậy $I=2\sqrt{e}-4\left(-2\sqrt{e}+4\right)=10\sqrt{e}-16$.

Phụ lục 5. Đạo hàm riêng và vi phân toàn phần

5.1. Đạo hàm riêng

5.1.1. Đạo hàm riêng cấp 1

a) Trường hợp hàm số hai biến số

Cho hàm số $z = f(x, y)$, $M_0(x_0, y_0) \in D_f$. Nếu giữ giá trị của biến y không đổi và cho giá trị của biến x một số gia Δx thì hàm số $z = f(x, y)$ có số gia tương ứng là $f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$, số gia này gọi là số gia riêng của hàm số $z = f(x, y)$ theo biến x, tại $M_0(x_0, y_0)$, ký hiệu là $\Delta_x z(M_0)$ hay $\Delta_x f(M_0)$.

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x f(M_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm riêng của hàm số $z = f(x, y)$ theo biến x tại điểm (x_0, y_0), ký hiệu là $z'_x(M_0)$ hay $\dfrac{\partial z}{\partial x}(M_0)$ hay $f'_x(M_0)$ hay $\dfrac{\partial f}{\partial x}(M_0)$.

Ý nghĩa : Đạo hàm riêng của hàm số $z = f(x, y)$ theo biến x tại điểm (x_0, y_0) biểu thị tốc độ biến thiên của giá trị hàm số $z = f(x, y)$ tại điểm (x_0, y_0) khi x thay đổi một lượng nhỏ, trong điều kiện giá trị của biến y không thay đổi.

Tương tự, ta cũng có định nghĩa đạo hàm riêng của hàm số $z = f(x, y)$ theo biến y tại M_0, ký hiệu là $z'_y(M_0)$ hay $\dfrac{\partial z}{\partial y}(M_0)$ hay $f'_y(M_0)$ hay $\dfrac{\partial f}{\partial y}(M_0)$.

Ví dụ 1. Tính đạo hàm riêng theo định nghĩa của hàm số:

a) $w = x^3 y^2$ tại điểm $(1, 2)$.

b) $f(x, y) = x + (y - 1)\arccos\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ tại điểm $(x, 1)$.

Giải

a) $\Delta w_x(1, 2) = x^3.2^2 - 1^3.2^2 = 4x^3 - 4$; $\Delta x = x - 1$

Vậy $w'_x(1, 2) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{4x^3 - 4}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} 4(x^2 + x + 1) = 12$.

Tương tự:

$$\Delta w_y(1,2)=1^3.y^2-1^3.2^2=y^2-4\,;\ \Delta y=y-2$$

Vậy $w_y^{/}(1,2)=\lim\limits_{y\to 2}\dfrac{y^2-4}{y-2}=\lim\limits_{y\to 2}(y+2)=4.$

b)

$$f_x^{/}(x,1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(x+\Delta x+(1-1)\arccos\sqrt{\dfrac{x+\Delta x}{1}}\right)-\left(x+(1-1)\arccos\sqrt{\dfrac{x}{1}}\right)}{\Delta x}=1$$

Tương tự:

$$f_y^{/}(x,1)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\left(x+(1+\Delta y-1)\arccos\sqrt{\dfrac{x}{1+\Delta y}}\right)-\left(x+(1-1)\arccos\sqrt{\dfrac{x}{1}}\right)}{\Delta y}$$

$$\Leftrightarrow f_y^{/}(x,1)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y.\arccos\sqrt{\dfrac{x}{\Delta y+1}}}{\Delta y}=\arccos\sqrt{x}.$$

Nhận xét : Để tính đạo hàm riêng $f_x^{/}$ của hàm số $z=f(x,y)$ theo biến x ta xem y như là hằng số và khi đó $z=f(x,y)$ là hàm số của một biến x, do đó ta áp dụng các công thức đạo hàm cơ bản và quy tắc tính đạo hàm của hàm một biến. Tương tự, cho việc tính đạo hàm riêng của z theo y.

Ví dụ 2. Tính đạo hàm riêng của hàm số sau: $z=e^{\sin\frac{y}{x}}+\arctan(xy)$

Giải

Ta có đạo hàm riêng cấp 1 của hàm số

$$z_x^{/}=e^{\sin\frac{y}{x}}.\cos\frac{y}{x}.\left(-\frac{y}{x^2}\right)+\frac{y}{1+x^2y^2}.$$

$$z_y^{/}=e^{\sin\frac{y}{x}}.\cos\frac{y}{x}.\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{x}{1+x^2y^2}.$$

b) Trường hợp đạo hàm riêng hàm số nhiều hơn hai biến số

Đạo hàm riêng của hàm số n biến số $w=f(x_1,x_2,...,x_n)$ theo một trong các biến độc lập tại một điểm $\overline{X}(\overline{x}_1,\overline{x}_2,...,\overline{x}_n)$ là giới hạn (nếu có) của tỷ số giữa số gia riêng hàm số và số gia của biến độc lập tương ứng khi số gia của biến độc lập đó tiến tới 0.

Ký hiệu:

$$w'_{x_i} = \frac{\partial w}{\partial x_i} = f'_{x_i}\left(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n\right) = \frac{\partial f\left(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n\right)}{\partial x_i}$$

$$= \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f\left(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_i + \Delta x_i, ..., \overline{x}_n\right) - f\left(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_i, ..., \overline{x}_n\right)}{\Delta x_i}$$

$$= \lim_{x_i \to \overline{x}_i} \frac{f\left(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., x_i, ..., \overline{x}_n\right) - f\left(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_i, ..., \overline{x}_n\right)}{x_i - \overline{x}_i}$$

Chú ý : Đạo hàm riêng của hàm số w theo biến x_i tại điểm $\overline{X}\left(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n\right)$ biểu thị tốc độ biến thiên của giá trị hàm số $w = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ tại điểm $\overline{X}\left(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n\right)$ khi x_i thay đổi một lượng nhỏ, trong điều kiện giá trị các biến còn lại không thay đổi. Khi tính đạo hàm $w'_{x_i} = f'_{x_i}\left(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n\right)$ (đạo hàm riêng theo biến x_i) ta coi các biến còn lại như hằng số và xem w như là một hàm của biến x_i. Sau đó áp dụng các quy tắc tính đạo hàm của hàm số một biến số.

Ví dụ 3. Tính các đạo hàm riêng cấp 1 của hàm số:

a) $f(x, y) = \ln(x^4 + x^2y^2 + y^2)$

b) $w = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{z^2}$

Giải

a) Ta có đạo hàm riêng cấp 1

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{x^4 + x^2y^2 + y^2}\left(4x^3 + 2xy^2\right)$$

$$f'_y(x, y) = \frac{1}{x^4 + x^2y^2 + y^2}\left(2x^2y + 2y\right)$$

b) Ta có đạo hàm riêng cấp 1

$$w'_x(x, y, z) = z^2\left(\frac{x}{y}\right)^{z^2-1} . \frac{1}{y}$$

$$w'_y(x, y, z) = z^2\left(\frac{x}{y}\right)^{z^2-1} . \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -z^2\frac{x^{z^2}}{y^{z^2+1}}$$

$$w_z^{/}(x,y,z)=\left(\ln\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)^{z^2}.2z$$

5.1.2. Đạo hàm riêng của hàm hợp

Nếu $z=f(u,v)$ và $u=u(x), v=v(x)$ thì đạo hàm của hàm số z theo biến x là

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}$$

Nếu $w=f(u_1,u_2,...,u_m)$ và mỗi biến u_k với $(k = 1,2,...,m)$ lại là hàm của các biến $x_1,x_2,...,x_n$ thì đạo hàm của hàm số w theo x_i $(i=1,2,3...,n)$ được tính theo công thức:

$$\frac{\partial w}{\partial x_i}=\frac{\partial w}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i}+\frac{\partial w}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_i}+\cdots+\frac{\partial w}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$$

(Nếu các đạo hàm ở vế phải tồn tại).

Ví dụ 4. Cho hàm số $w=u^2+\ln v$ với $u=\sin\left(2x+y^2\right)$, $v=x^4+y^4+\cos^2 x$. Tính đạo hàm riêng của hàm số theo biên x, y.

Giải

Ta có

$$\frac{\partial w}{\partial u}=2u,\ \frac{\partial w}{\partial v}=\frac{1}{v};\ \frac{\partial u}{\partial x}=2\cos\left(2x+y^2\right),\ \frac{\partial v}{\partial x}=4x^3-\sin 2x$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=2\sin\left(2x+y^2\right)2\cos\left(2x+y^2\right)+\frac{1}{x^4+y^4+\cos^2 x}\left(4x^3-\sin 2x\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2y\cos\left(2x+y^2\right),\ \frac{\partial v}{\partial y}=4y^3$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=2\sin\left(2x+y^2\right).2y\cos\left(2x+y^2\right)+\frac{1}{x^4+y^4+\cos^2 x}.\left(4y^3\right).$$

Ví dụ 5. Cho hàm số $z=f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)+\operatorname{arccot}\frac{x}{y}$. Tính đạo hàm riêng của hàm số $f(-x,y)$ theo biến x và đạo hàm riêng của hàm số $f\left(x,\frac{1}{y}\right)$ theo biến y.

Giải

Cách 1:

$$f\left(-x,y\right)=\ln\left(x^2+y^2\right)+\text{arccot}\left(-\frac{x}{y}\right)=g\left(x,y\right)$$

$$g_x'\left(x,y\right)=\frac{2x}{x^2+y^2}-\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}.\left(-\frac{1}{y}\right)=\frac{2x+y}{x^2+y^2}.$$

$$f\left(x,\frac{1}{y}\right)=\ln\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)+\text{arccot}\left(xy\right)=h\left(x,y\right)$$

$$h_y'\left(x,y\right)=\frac{1}{x^2+\frac{1}{y^2}}.\left(-\frac{2}{y^3}\right)+\frac{x}{1+x^2y^2}=\frac{-2+xy}{(1+x^2y^2)y}.$$

Cách 2. Xem $f\left(-x,y\right)$ là hàm hợp của hàm số $f\left(u,v\right)$ và các hàm số $u=-x, v=y$ sau đó tính đạo hàm của hàm số $f\left(u,v\right)$ theo biến x theo công thức đạo hàm của hàm hợp.

Tương tự, xem hàm $f\left(x,\frac{1}{y}\right)$ là hàm hợp của hàm số $f\left(u,v\right)$ và các hàm số $u=x,\ v=\frac{1}{y}$.

5.1.3. Đạo hàm riêng cấp 2

a) Trường hợp hàm số hai biến số

Cho hàm số $z=f\left(x,y\right)$. Tính các đạo hàm riêng lần thứ nhất ta được $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ gọi là các đạo hàm cấp một của hàm z. Tính đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng đó ta được các đạo hàm riêng mới gọi là các đạo hàm riêng cấp hai của hàm số z ký hiệu là:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}''\left(x,y\right),\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}''\left(x,y\right).$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}''\left(x,y\right),\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}''\left(x,y\right).$$

Tương tự, đạo hàm riêng cấp hai của hàm số n biến số là đạo hàm riêng của đạo hàm riêng cấp một.

Ký hiệu:

$$w''_{x_i x_j} = f''_{x_i x_j}$$

Hàm số n biến số có n^2 đạo hàm riêng cấp hai và nếu $i \neq j$ thì các đạo hàm riêng cấp 2 được gọi là đạo hàm hỗn hợp cấp 2.

Ví dụ 6. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của hàm số sau: $w = x^3 y + xy^2$

Giải

- Tính các đạo hàm riêng cấp 1:

$$w'_x = 3x^2 y + y^2;\ w'_y = x^3 + 2xy.$$

- Tính các đạo hàm riêng cấp 2:

$$w''_{xx} = 6xy;\ w''_{xy} = 3x^2 + 2y = w''_{yx};\ \ w''_{yy} = 2x.$$

Ví dụ 7. Cho hàm số $z = \arctan\frac{x}{y}$. Chứng minh rằng: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

Giải

Tính các đạo hàm cấp 1:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}.\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{y}{x^2+y^2};\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}.\left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{-x}{x^2+y^2}$$

Mặt khác:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2};\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Vậy:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Ví dụ 8. Cho $\varphi(u)$ là một hàm số có đạo hàm với u là hàm số của hai biến số x và y. Đặt $z = y.\varphi\left(x^2 - y^2\right)$. Hãy chứng minh: $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.

Giải

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'_u.2x;\ \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(u) + y.\varphi'_u.(-2y)$$

$$VT = \frac{1}{x}.y.\varphi'_u.2x + \frac{1}{y}.\left(\varphi(u) + y\varphi'_u.(-2y)\right) = \frac{\varphi(u)}{y} = \frac{y.\varphi\left(x^2 - y^2\right)}{y^2} = \frac{z}{y^2} = VP$$

Chú ý: Nói chung, hai đạo hàm hỗn hợp cấp hai theo cùng một cặp biến số nhưng sai khác nhau ở trình tự lấy đạo hàm có thể không bằng nhau. Tuy nhiên, cả hai đạo hàm đó cùng tồn tại và liên tục thì chúng bằng nhau. Trong chương trình của chúng ta chỉ xét những đạo hàm hỗn hợp cấp hai tồn tại và liên tục.

5.2. Vi phân toàn phần

5.2.1. Vi phân cấp 1

a) Trường hợp hàm số hai biến số

Cho hàm số $w = f(x, y)$. Khi đồng thời cho x số gia Δx và y số gia Δy thì hàm số $w = f(x, y)$ có số gia tương ứng là:

$$\Delta w = \Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Số gia này gọi là số gia toàn phần của hàm số $w = f(x, y)$ tại điểm (x, y).

Nếu hàm số $w = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng $f'_x(x, y)$ và $f'_y(x, y)$ liên tục tại điểm (x_0, y_0) thì số gia toàn phần Δf tại điểm (x_0, y_0) có thể viết dưới dạng:

$$\Delta w = \Delta f = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y. \qquad (1)$$

Trong đó, $\alpha, \beta \to 0$ khi Δx và $\Delta y \to 0$.

Định nghĩa: Nếu hàm số $w = f(x, y)$ xác định trong miền D và có các đạo hàm riêng liên tục tại điểm $M_0(x_0, y_0) \in D$ thì biểu thức $f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$ được gọi là vi phân toàn phần của hàm số $w = f(x, y)$ tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ và được ký hiệu là dw hay $df(x_0, y_0)$.

Vậy vi phân toàn phần của hàm số hai biến số tại một điểm $M_0(x_0, y_0)$ là:

$$dw = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$$

Hay: $df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$.

Với x, y là các biến độc lập, ta có $dx = \Delta x,\ dy = \Delta y$ và khi không nhấn mạnh vi phân toàn phần tại một điểm nào đó thì biểu thức vi phân toàn phần của hàm số được viết:

$$df = f_x^{/}dx + f_y^{/}dy$$

Ví dụ 9. Tính vi phân toàn phần của hàm số : $w = f(x,y) = \ln\left(x^2 + xy + y^2\right)$

tại điểm $M_0(1,2)$ biết $\Delta x = 0,1; \Delta y = 0,2$.

Giải

Ta có đạo hàm riêng cấp 1

$$f_x^{/}(x,y) = \frac{2x+y}{x^2+xy+y^2};\; f_y^{/}(x,y) = \frac{x+2y}{x^2+xy+y^2}$$

Vậy

$$f_x^{/}(1,2) = \frac{2.1+2}{1^2+1.2+2^2} = \frac{4}{7};$$

$$f_y^{/}(1,2) = \frac{1+2.2}{1^2+1.2+2^2} = \frac{5}{7}.$$

Vi phân toàn phần của hàm số tại điểm $M_0(1,2)$ là:

$$df(1,2) = \frac{4}{7}.0,1 + \frac{5}{7}0,2 = 0,2.$$

∗ Tương tự, giả thiết hàm số n biến số $w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ có các đạo hàm riêng liên tục theo tất cả các biến độc lập, biểu thức vi phân toàn phần là:

$$dw = f_1dx_1 + f_2dx_2 + \cdots + f_ndx_n$$

Với $f_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

Ví dụ 10. Viết biểu thức vi phân toàn phần của hàm số:

$$w = \tan\left(\frac{xy^2}{z}\right)$$

Giải

Ta có đạo hàm riêng cấp 1

$$w_x^{/} = \frac{1}{\cos^2\left(\dfrac{xy^2}{z}\right)}.\frac{y^2}{z};$$

$$w'_y = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{xy^2}{z}\right)}.\frac{2xy}{z};$$

$$w'_z = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{xy^2}{z}\right)}.\left(-\frac{xy^2}{z^2}\right)$$

Biểu thức vi phân toàn phần của hàm số là:

$$dw = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{xy^2}{z}\right)}.\frac{y^2}{z}dx + \frac{1}{\cos^2\left(\frac{xy^2}{z}\right)}.\frac{2xy}{z}dy + \frac{1}{\cos^2\left(\frac{xy^2}{z}\right)}.\left(-\frac{xy^2}{z^2}\right)dz.$$

5.2.2. Ứng dụng vi phân toàn phần để tính gần đúng

Từ (1) ta suy ra: $\Delta f = df + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$

Trong đó, $\alpha, \beta \to 0$ khi Δx và $\Delta y \to 0$. Do đó, trong trường hợp hàm số $w = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục thì Δf khác df càng ít khi Δx, Δy càng nhỏ (về giá trị tuyệt đối). Vì vậy, ta có thể tính đơn giản: $\Delta f \approx df$ với Δx, Δy đủ nhỏ.

Ví dụ 11. Tính gần đúng $(0,99)^{2,01}$.

Giải

Ta xét hàm số $f(x, y) = x^y$ thì số phải tính $(0,99)^{2,01}$ chính là $f(0,99; 2,01)$.

Mặt khác:

$$f(0,99; 2,01) = f(1 - 0,01; 2 + 0,01)$$

$$\Delta f(1; 2) = f(1 - 0,01; 2 + 0,01) - f(1, 2)$$

Mà theo công thức gần đúng $\Delta f \approx df$, tại $x_0 = 1,\ y_0 = 2$ với $\Delta x = -0,01,\ \Delta y = 0,01$. Suy ra:

$$f(0,99; 2,01) \approx f(1, 2) + df(1, 2).$$

Với $f(1, 2) = 1^2 = 1,\ f'_x = yx^{y-1},\ f'_y = x^y \ln x$

$$df(1, 2) = yx^{y-1}.\Delta x + x^y \ln x.\Delta y = 2.1.(-0,01) + 1.\ln 1.0,01 = -0,02$$

Vậy:

$$f(0,99; 2,01) \approx 1 - 0,02 = 0,98.$$

Nhận xét : Để tính gần đúng một số A nào đó ta phải tìm được biểu thức của hàm số $f(x,y)$ (nếu chỉ cần hai biến độc lập) sao cho số A chính là giá trị của hàm số tại điểm (x_1,y_1) nào đó $A=f(x_1,y_1)$. Sau đó viết $f(x_1,y_1)$ dưới dạng

$$f(x_1,y_1)=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y),$$

trong đó x_0, y_0 được chọn sao cho giá trị của hàm $f(x_0,y_0)$ được tính dễ dàng (chính xác), suy ra $\Delta x = x_1 - x_0$, $\Delta y = y_1 - y_0$ rồi tính gần đúng số gia toàn phần $\Delta f(x_0,y_0) \approx df(x_0,y_0)$.

Cuối cùng sử dụng công thức:

$$df(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y$$

Vậy

$$A=f(x_1,y_1)\approx f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0).$$

5.2.3. Vi phân cấp 2

Định nghĩa:

Vi phân toàn phần của vi phân toàn phần cấp một dw của hàm số $w=f(x_1,x_2,...,x_n)$ được gọi là vi phân toàn phần cấp hai của hàm số đó và được ký hiệu như sau:

$$d^2w,\ d^2f(x_1,x_2,...,x_n)$$

Đối với trường hợp hàm số hai biến số biểu thức vi phân toàn phần cấp hai là:

$$d^2w = w''_{xx}(dx)^2 + 2w''_{xy}(dxdy) + w''_{yy}(dy)^2$$

Ví dụ 12. Viết biểu thức vi phân toàn phần cấp hai của hàm số:

$$w=e^{x+2y}$$

Giải

Tính đạo hàm riêng cấp 1: $w'_x = e^{x+2y}$; $w'_y = 2e^{x+2y}$

Tính đạo hàm riêng cấp 2:

$$w''_{xx}=e^{x+2y},\ w''_{xy}=2e^{x+2y}=w''_{yx},\ w''_{yy}=4e^{x+2y}$$

Biểu thức vi phân toàn phần cấp 2:

$$dw = e^{x+2y}(dx)^2 + 2.2e^{x+2y}(dxdy) + 4e^{x+2y}(dy)^2.$$

Phụ lục 6. Bài toán cực trị hàm nhiều biến không có điều kiện ràng buộc (cực trị tự do)

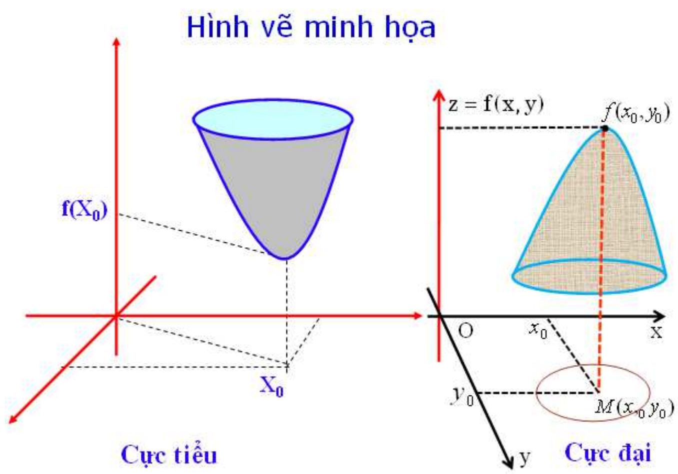
6.1. Khái niệm cực trị địa phương

Cho hàm n biến $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ và $X_0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right) \in D$. Hàm f xác định và liên tục trong miền

$$D = \left\{X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i < x_i < b_i; i = 1, 2, \ldots, n\right\}$$

i) Hàm f đạt cực đại tại điểm X_0, nếu $f(X) \leq f(X_0)$; $\forall X \in D$

ii) Hàm f đạt cực tiểu tại điểm X_0, nếu $f(X) \geq f(X_0)$; $\forall X \in D$



Hàm số $f(X)$ đạt cực đại hay cực tiểu tại điểm X_0 được gọi là điểm cực trị của hàm số.

Bài toán 1: Tìm cực trị của hàm số $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(X)$ với $X_0 \in D$

*** Điều kiện cần**

Giả sử hàm số $w = f(X)$ xác định, liên tục và có các đạo hàm riêng theo tất cả các biến độc lập trong miền D. Để hàm số này đạt cực trị (cực đại hoặc cực tiểu) tại điểm $X_0 \in D$ thì tại điểm đó tất cả các đạo hàm riêng cấp một triệt tiêu:

$$w'_{x_i} = f'_{x_i}(X_0) = 0; \;\; i = 1, 2, \ldots, n$$

Điểm X_0 thoả mãn điều kiện trên được gọi là **điểm dừng** của hàm số $f(X)$.

*** Điều kiện đủ**

Giả sử X_0 là một điểm dừng của hàm số $w = f(X)$ và tại điểm đó hàm số có tất cả các đạo hàm riêng cấp hai liên tục.

• **Định lý 1:** Xét dạng toàn phương của n biến số $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$

$$d^2f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}dx_i dx_j$$

trong đó $a_{ij} = f''_{x_i x_j}(X_0)$.

1. Nếu d^2f là dạng toàn phương xác định dương thì điểm dừng X_0 là điểm cực tiểu của hàm số $f(X)$.

2. Nếu d^2f là dạng toàn phương xác định âm thì điểm dừng X_0 là điểm cực đại của hàm số $f(X)$.

3. Nếu d^2f là dạng toàn phương không xác định thì điểm dừng X_0 không phải là điểm cực trị của hàm số $f(X)$.

• **Định lý 2:** Xét ma trận của dạng toàn phương d^2f (ma trận Hess):

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

có các định thức con chính cấp k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ là:

$$H_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

1. Nếu $H_k > 0$ với $\forall k = 1, 2, \ldots, n$ (tức là ma trận H có tất cả các định thức con chính dương) thì điểm dừng X_0 là điểm cực tiểu của hàm số $f(X)$.

2. Nếu $(-1)^k H_k > 0$ với $\forall k = 1, 2, \ldots, n$ (tức là ma trận H có các định thức con chính cấp lẻ âm và cấp chẵn dương) thì điểm dừng X_0 là điểm cực đại của hàm số $f(X)$. Trong thực hành, ta thường gặp các bài toán tìm cực trị tự do của hàm hai biến và hàm ba biến.

Sau đây chúng tôi sẽ phát biểu các bước tìm cực trị cho các hàm trong những trường hợp này.

6.2. Trường hợp hàm hai biến

Với hàm hai biến $z = f(x,y)$.

Bước 1: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} z'_x = f'_x(x,y) = 0 \\ z'_y = f'_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

Các nghiệm của hệ là tọa độ các điểm dừng.

Bước 2: Kiểm tra điều kiện đủ tại các điểm dừng.

Giả sử $M(x_0, y_0)$ là một điểm dừng của hàm số đã cho. Xét định thức

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

trong đó

$$a_{11} = f''_{xx}(x_0, y_0);\ \ a_{12} = f''_{xy}(x_0, y_0);$$

$$a_{21} = f''_{yx}(x_0, y_0);\ \ a_{22} = f''_{yy}(x_0, y_0).$$

Trường hợp 1 : Nếu $D > 0$ thì điểm dừng M là điểm cực trị của hàm số $w = f(x,y)$:

$M(x_0, y_0)$ là điểm cực đại nếu $a_{11} < 0$.

$M(x_0, y_0)$ là điểm cực tiểu nếu $a_{11} > 0$.

Trường hợp 2 : Nếu $D < 0$ thì điểm dừng M không phải là điểm cực trị của hàm số $w = f(x,y)$.

6.3. Trường hợp hàm ba biến

Với hàm ba biến $w = f(x,y,z)$.

Bước 1: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} w'_x = f'_x(x,y,z) = 0 \\ w'_y = f'_y(x,y,z) = 0 \\ w'_z = f'_z(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Các nghiệm của hệ là tọa độ các điểm dừng.

Bước 2: Kiểm tra điều kiện đủ tại các điểm dừng.

Giả sử $M(x_0, y_0, z_0)$ là một điểm dừng của hàm số đã cho. Xét các định thức con chính của ma trận:

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Với $H_1 = a_{11};\ H_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};\ H_3 = |H|$, trong đó:

$$a_{11} = f''_{xx}(x_0, y_0, z_0);\quad a_{12} = f''_{xy}(x_0, y_0, z_0);\quad a_{13} = f''_{xz}(x_0, y_0, z_0);$$

$$a_{21} = f''_{yx}(x_0, y_0, z_0);\quad a_{22} = f''_{yy}(x_0, y_0, z_0);\quad a_{23} = f''_{yz}(x_0, y_0, z_0);$$

$$a_{31} = f''_{zx}(x_0, y_0, z_0);\quad a_{32} = f''_{zy}(x_0, y_0, z_0);\quad a_{33} = f''_{zz}(x_0, y_0, z_0).$$

Trường hợp 1: Nếu $H_1 > 0; H_2 > 0; H_3 > 0$ thì M là điểm cực tiểu của hàm số $w = f(x, y, z)$.

Trường hợp 2 : Nếu $H_1 < 0; H_2 > 0; H_3 < 0$ thì M là điểm cực đại của hàm số $w = f(x, y, z)$.**Chú ý :** Trong khuôn khổ chương trình, ta thường gặp những hàm số có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục, nên các đạo hàm chéo đều bằng nhau, do đó $a_{ij} = a_{ji}\ (i \neq j)$.

Ví dụ 1. Tìm cực trị của hàm số $z = x^3 + 2xy - 8y^3$.

Giải

Bước 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} z'_x = 3x^2 + 2y = 0 \\ z'_y = 2x - 24y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 = -2y \\ 24y^2 = 2x \end{cases}$$

Lập tỉ số vế theo vế của hai phương trình trên, ta có $x = -2y$

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ, ta có

$$2y(6y+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_2 = -\dfrac{1}{6} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Vậy hàm số có hai điểm dừng $M_1(0,0)$ và $M_2\left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{6}\right)$.

Bước 2: Kiểm tra điều kiện đủ

$$z''_{xx} = 6x;\ z''_{yy} = -48y;\ z''_{xy} = z''_{yx} = 2$$

+) Tại điểm $M_1(0,0)$, ta có: $D = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0$

nên M_1 không phải là điểm cực trị.

+) Tại điểm $M_2\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right)$, ta có: $D = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 12 > 0$ và $a_{11} = 2 > 0$

nên M_2 là điểm cực tiểu. Khi đó giá trị cực tiểu của hàm số là

$$z_{CT} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 2.\frac{1}{3}.\left(-\frac{1}{6}\right) - 8\left(-\frac{1}{6}\right)^3 = -\frac{1}{27}.$$

Ví dụ 2. Tìm cực trị của hàm số: $z = -3x^2 - 4y^2 + 2xy - 2x + 3y + 1$.

Giải

Bước 1: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} z'_x = -6x + 2y - 2 = 0 \\ z'_y = -8y + 2x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{5}{22} \\ y = \dfrac{7}{22} \end{cases}$$

Vậy hàm số có một điểm dừng là $M\left(-\frac{5}{22}, \frac{7}{22}\right)$.

Bước 2: Kiểm tra điều kiện đủ

$$a_{11} = z''_{xx} = -6; a_{22} = z''_{yy} = -8; a_{12} = a_{21} = z''_{xy} = 2.$$

Ta có: $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} = 44 > 0$ và $a_{11} = -6 < 0$

nên M là điểm cực đại của hàm số. Khi đó giá trị cực đại của hàm số là

$$z_{CD} = z\left(-\frac{5}{22}, \frac{7}{22}\right) = \frac{825}{484}.$$

Ví dụ 3. Tìm cực trị của hàm số: $w = x^2 + 2y^2 + 9z^2 - 4xz - 2y + 3z + 4$.

Giải

Bước 1: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} w'_x = 2x - 4z = 0 \\ w'_y = 4y - 2 = 0 \\ w'_z = 18z - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3/5 \\ y = 1/2 \\ z = -3/10 \end{cases}$$

Vậy hàm số có một điểm dừng là $M\left(\frac{-3}{5}, \frac{1}{2}, \frac{-3}{10}\right)$.

Bước 2: Kiểm tra điều kiện đủ

$a_{11} = w''_{xx} = 2;\ a_{22} = w''_{yy} = 4;\ a_{33} = w''_{zz} = 18;$

$a_{12} = a_{21} = w''_{xy} = 0; a_{13} = a_{31} = w''_{xz} = -4; a_{23} = a_{32} = w''_{yz} = 0.$

Lập ma trận: $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 18 \end{pmatrix}$

Ta có: $H_1 = 2 > 0;\ H_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 > 0;\ H_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 18 \end{vmatrix} = 80 > 0$

nên M là điểm cực tiểu. Khi đó giá trị cực tiểu của hàm số là

$$z_{CT} = z\left(\frac{-3}{5}, \frac{1}{2}, \frac{-3}{10}\right) = \frac{61}{20}.$$

Ví dụ 4. Tìm cực trị của hàm số $z = 20xy - \frac{10}{x} - \frac{5}{y}$ (điều kiện: $x < 0;\ y < 0$).

Giải

Bước 1: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} z'_x = 20y + \frac{10}{x^2} = 0 \\ z'_y = 20x + \frac{5}{y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = -\frac{1}{x^2} \\ 4x = -\frac{1}{y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2y = -1 \\ 4xy^2 = -1 \end{cases}$$

Theo giả thiết $x < 0;\ y < 0$ nên ta có thể xác định quan hệ giữa $x,\ y$ như sau:

$$\frac{2x^2y}{4xy^2} = \frac{-1}{-1} \Rightarrow \frac{x}{2y} = 1 \Rightarrow x = 2y$$

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ, ta có

$$8y^3=-1\Rightarrow y^3=-\frac{1}{8}\Rightarrow y=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=-1 \text{ (thoả mãn điều kiện)}$$

Vậy hàm số có một điểm dừng $M\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$.

Bước 2: Kiểm tra điều kiện đủ

$$z''_{xx}=-\frac{20}{x^3}\Rightarrow a_{11}=z''_{xx}\left(-1,-\frac{1}{2}\right)=20;$$

$$z''_{yy}=-\frac{10}{y^3}\Rightarrow a_{22}=z''_{yy}\left(-1,-\frac{1}{2}\right)=80;$$

$$z''_{xy}=z''_{yx}=20\Rightarrow a_{12}=a_{21}=z''_{xy}\left(-1,-\frac{1}{2}\right)=20.$$

Ta có:

$$D=\begin{vmatrix}20 & 20\\ 20 & 80\end{vmatrix}=1200>0 \text{ và } a_{11}=20>0$$

nên M là điểm cực tiểu. Khi đó giá trị cực tiểu của hàm số là

$$z_{CT}=20.(-1).\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{10}{-1}-\frac{5}{-1/2}=30.$$

Ví dụ 5. Tìm cực trị của hàm số $z=-x^4-y^4+x^2-2xy+y^2-2$.

Giải

Bước 1: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}z'_x=-4x^3+2x-2y=0\\ z'_y=-4y^3-2x+2y=0\end{cases}$$

Cộng phương trình thứ nhất với phương trình thứ hai của hệ, ta có quan hê giữa hai biến

$$-4x^3-4y^3=0\Rightarrow x=-y$$

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ, ta có

$$-4x\left(x^2-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=1\\ x_2=-1\\ x_3=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y_1=-1\\ y_2=1\\ y_3=0\end{array}\right.$$

Vậy hàm số có ba điểm dừng $M_1(1,-1)$, $M_2(-1,1)$ và $M_3(0,0)$.

Bước 2: Kiểm tra điều kiện đủ

$$z''_{xx} = -12x^2 + 2;\ z''_{yy} = -12y^2 + 2;\ z''_{xy} = z''_{yx} = -2$$

+) Tại điểm $M_1(1,-1)$, ta có $D = \begin{vmatrix} -10 & -2 \\ -2 & -10 \end{vmatrix} = 96 > 0$ và $a_{11} = -10 < 0$

nên M_1 là điểm cực đại. Khi đó giá trị cực đại của hàm số là

$$z_{CD} = z(1,-1) = 0$$

+) Tại điểm $M_2(-1,1)$, ta có $D = \begin{vmatrix} -10 & -2 \\ -2 & -10 \end{vmatrix} = 96 > 0$ và $a_{11} = -10 < 0$

nên M_2 là là điểm cực đại. Khi đó giá trị cực đại của hàm số là

$$z_{CD} = z(1,-1) = 0$$

+) Tại điểm $M_3(0,0)$, ta có $D = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

nên ta chưa thể kết luận được tính chất của điểm này. Ta cần xét điểm M_3 thông qua định nghĩa cực trị địa phương:

Xét những điểm $M(x,y)$ có khoảng cách đến $M_3(0,0)$ nhỏ hơn một số thực dương: $0 < d(M,M_3) < r$.

Xét hiệu :

$$z(M) - z(M_3) = -x^4 - y^4 + x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 - (x^4 + y^4)$$

Tại những điểm $M(x,y)$ thoả mãn $x = y \neq 0$, ta có

$$z(M) - z(M_3) = -(x^4 + y^4) < 0 \Rightarrow z(M) < z(M_3)$$

Tại những điểm $M(x,y)$ thoả mãn $x = 2y \neq 0$, ta có

$$z(M) - z(M_3) = y^2 - 17y^4 = y^2(1 - 17y^2) > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{17}} < y < \frac{1}{\sqrt{17}}$$

nên tại những điểm $M(2y,y)$ mà $-\frac{1}{\sqrt{17}} < y < \frac{1}{\sqrt{17}}$ thì $z(M) > z(M_3)$

Vậy theo định nghĩa, M_3 không phải là điểm cực trị của hàm số.

Phụ lục 7. Bài toán cực trị có điều kiện ràng buộc phương trình (phương pháp nhân tử Lagrange)

7.1. Bài toán cực trị có điều kiện ràng buộc

Bài toán. Tìm cực trị của hàm số : $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(X)$

với điều kiện : $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(X) = b$.

Lập hàm Lagrange:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda\left[b - g(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right]$$

Với λ : nhân tử Lagrange.

Điều kiện cần:

Giả sử các hàm f và g có các đạo hàm riêng liên tục trong một lân cận của điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ và tại điểm đó ít nhất một trong các đạo hàm riêng của g khác 0. Nếu hàm $w = f(X)$ với điều kiện $g(X) = b$ đạt cực trị tại $\overline{X}$ thì tồn tại một giá trị $\overline{\lambda}$ của nhân tử Lagrange sao cho $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n, \overline{\lambda})$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} L'_{\lambda} = b - g(X) = 0 \\ L'_{x_i} = f'_{x_i} - \lambda g'_{x_i} = 0 \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Điều kiện đủ:

Giả sử các hàm f và g có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục tại điểm $\overline{X}$ và điểm $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n, \overline{\lambda})$ là một điểm dừng của hàm số Lagrange. Lập ma trận:

$$\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & g_1 & g_2 & \ldots & g_n \\ g_1 & L_{11} & L_{12} & \ldots & L_{1n} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} & \ldots & L_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_n & L_{n1} & L_{n2} & \ldots & L_{nn} \end{pmatrix}$$

trong đó

$$g_k = g'_{x_k}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n);\ L_{ij} = L''_{x_i x_j}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n, \overline{\lambda});\ (i, j, k = 1, 2, \ldots, n)$$

Các định thức con chính cấp k $(k = 2, 3, \ldots, n)$ là

$$\overline{H}_k = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & \dots & g_k \\ g_1 & L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1k} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_k & L_{k1} & L_{k2} & \dots & L_{kk} \end{vmatrix}$$

1. Nếu $(-1)^k \overline{H}_k > 0$ với $\forall k = 2,3,\dots,n$ thì hàm $w = f(X)$ với điều kiện $g(X) = b$ đạt giá trị cực đại tại điểm $\overline{X}$.

2. Nếu $\overline{H}_k < 0$ với $\forall k = 2,3,\dots,n$ thì hàm $w = f(X)$ với điều kiện $g(X) = b$ đạt giá trị cực tiểu tại điểm $\overline{X}$.

7.2. Trường hợp hàm hai biến

Xét hàm hai biến $z = f(x,y)$ với điều kiện $g(x,y) = b$.

Bước 1: Lập hàm Lagrange: $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\left[b - g(x,y)\right]$

Bước 2: Giải hệ phương trình sau để tìm điểm dừng

$$\begin{cases} L'_x = f'_x - \lambda g'_x = 0 \\ L'_y = f'_y - \lambda g'_y = 0 \\ L'_\lambda = b - g(x,y) = 0 \end{cases}$$

Bước 3: Giả sử $M(x_0, y_0)$ là một điểm dừng ứng với giá trị λ_0, ta xét định thức

$$\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} \end{vmatrix}$$

trong đó:

$$g_1 = g'_x(x_0, y_0);\ g_2 = g'_y(x_0, y_0);\ L_{11} = L''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0);$$

$$L_{22} = L''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0);\ L_{12} = L_{21} = L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0).$$

Trường hợp 1 : Nếu $\left|\overline{H}\right| > 0$ thì hàm số $z = f(x,y)$ với điều kiện $g(x,y) = b$ đạt giá trị cực đại tại điểm M.

Trường hợp 2: Nếu $\left|\overline{H}\right| < 0$ thì hàm số $z = f(x,y)$ với điều kiện $g(x,y) = b$ đạt giá trị cực tiểu tại điểm M.

7.3. Trường hợp hàm ba biến

Xét hàm ba biến $w = f(x,y,z)$ với điều kiện $g(x,y,z) = b$.

Bước 1: Lập hàm Lagrange

$$L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda\left[b - g(x,y,z)\right]$$

Bước 2: Giải hệ phương trình sau để tìm điểm dừng

$$\begin{cases} L'_x = f'_x - \lambda g'_x = 0 \\ L'_y = f'_y - \lambda g'_y = 0 \\ L'_z = f'_z - \lambda g'_z = 0 \\ L'_\lambda = b - g(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Bước 3: Giả sử $M(x_0, y_0, z_0)$ là một điểm dừng ứng với giá trị λ_0, xét các định thức con chính của ma trận

$$\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ g_3 & L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix}$$

là $\overline{H}_2 = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} \end{vmatrix}$ và $\overline{H}_3 = \left|\overline{H}\right|$, trong đó

$$g_1 = g'_x(x_0, y_0, z_0);\ g_2 = g'_y(x_0, y_0, z_0);\ g_3 = g'_z(x_0, y_0, z_0);$$

$$L_{11} = L''_{xx}(x_0, y_0, z_0, \lambda_0);\ L_{12} = L_{21} = L''_{xy}(x_0, y_0, z_0, \lambda_0);$$

$$L_{22} = L''_{yy}(x_0, y_0, z_0, \lambda_0);\ L_{23} = L_{32} = L''_{yz}(x_0, y_0, z_0, \lambda_0);$$

$$L_{33} = L''_{zz}(x_0, y_0, z_0, \lambda_0);\ L_{13} = L_{31} = L''_{xz}(x_0, y_0, z_0, \lambda_0).$$

Trường hợp 1 : Nếu $\overline{H}_2 > 0;\ \overline{H}_3 < 0$ thì hàm số $w = f(x,y,z)$ với điều kiện $g(x,y,z) = b$ đạt giá trị cực đại tại điểm M.

Trường hợp 2 : Nếu $\overline{H}_2 < 0;\ \overline{H}_3 < 0$ thì hàm số $w = f(x,y,z)$ với điều kiện $g(x,y,z) = b$ đạt giá trị cực tiểu tại điểm M.

Ví dụ 1. Sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange tìm cực trị của hàm số $z = -x^2 - 2y^2$ với điều kiện $3x - 2y = -22$.

Giải

Bước 1: Lập hàm Lagrange

$$L(x,y,\lambda) = -x^2 - 2y^2 + \lambda\left(-22 - 3x + 2y\right)$$

Bước 2: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} L'_x = -2x - 3\lambda \quad = 0 \\ L'_y = -4y + 2\lambda \quad = 0 \\ L'_\lambda = -22 - 3x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \quad = -3\lambda/2 \\ y \quad = \lambda/2 \\ 3x - 2y = -22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = 2 \\ \lambda = 4 \end{cases}$$

Vậy hàm số có một điểm dừng là $M\left(-6,2\right)$ ứng với $\lambda = 2$.

Bước 3: Kiểm tra điều kiện đủ

$$g_1 = g'_x = 3;\ g_2 = g'_y = -2;\ L_{11} = L''_{xx} = -2;$$

$$L_{22} = L''_{yy} = -4;\ L_{12} = L_{21} = L''_{xy} = 0.$$

Xét định thức : $\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 44 > 0$

Vậy điểm M là điểm cực đại. Khi đó giá trị cực đại của hàm số là

$$z_{CD} = z\left(-6,2\right) = -\left(-6\right)^2 - 2.2^2 = -44.$$

Ví dụ 2. Sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange tìm cực trị của hàm số $z = 3x - y$ với điều kiện $3x^2 + 4y^2 = 208$.

Giải

Bước 1: Lập hàm Lagrange: $L(x,y,\lambda) = 3x - y + \lambda\left(208 - 3x^2 - 4y^2\right)$

Bước 2: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} L'_x = 3 - 6\lambda x \quad = 0 \\ L'_y = -1 - 8\lambda y \quad = 0 \\ L'_\lambda = 208 - 3x^2 - 4y^2 \quad = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda x \quad = 1 \quad (1) \\ 8\lambda y \quad = -1 \quad (2) \\ 3x^2 + 4y^2 = 208 \quad (3) \end{cases}$$

Từ (1) và (2), ta có $x = -4y$ ($x \neq 0,\ y \neq 0$, vì nếu $x = 0,\ y = 0$ là vô lý)

Thay vào phương trình thứ (3), ta có $52y^2 = 208 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -2 \\ y = 2 \end{array}\right.$

Với $y=-2$ kết hợp với (1) và (2), ta có

$$\begin{cases} 2\lambda x & =1 \\ 8\lambda y & =-1 \\ y=-2 & \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=-2 \\ \lambda=\dfrac{1}{16} \end{cases}$$

Với $y=2$ kết hợp với (1) và (2), ta có

$$\begin{cases} 2\lambda x & =1 \\ 8\lambda y & =-1 \\ y=2 & \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-8 \\ y=2 \\ \lambda=-\dfrac{1}{16} \end{cases}$$

Vậy hàm số có hai điểm dừng:

$$M_1(8,-2) \text{ ứng với } \lambda_1=\frac{1}{16};\ M_2(-8,2) \text{ ứng với } \lambda_2=-\frac{1}{16}.$$

Bước 3: Kiểm tra điều kiện đủ tại điểm $M_i(x_i,y_i)$ ứng với $\lambda_i\ (i=1,2)$

$$g_x^{/}=6x;\ g_y^{/}=8y;\ L_{xx}^{//}=-6\lambda;\ L_{yy}^{//}=-8\lambda;\ L_{xy}^{//}=L_{yx}^{//}=0.$$

Suy ra $g_1=6x_i; g_2=8y_i; L_{11}=-6\lambda_i; L_{22}=-8\lambda_i; L_{12}=L_{21}=0.$

Xét định thức: $\left|\overline{H}\right|=\begin{vmatrix} 0 & 6x_i & 8y_i \\ 6x_i & -6\lambda_i & 0 \\ 8y_i & 0 & -8\lambda_i \end{vmatrix}=96\lambda_i\left(3x_i^2+4y_i^2\right)=96.19.\lambda_i$

+) Tại điểm $M_1(8,-2)$. Ta có $\left|\overline{H}\right|=96.19.\dfrac{1}{16}>0$

nên M_1 là điểm cực đại. Khi đó giá trị cực đại của hàm số là

$$z_{CD}=z(8,-2)=3.8+2=26.$$

+) Tại điểm $M_2(-8,2)$. Ta có $\left|\overline{H}\right|=96.19.\left(-\dfrac{1}{16}\right)<0$

nên M_2 là điểm cực tiểu. Khi đó giá trị cực tiểu của hàm số là

$$z_{CT}=z(-8,2)=3.(-8)-2=-26.$$

Phụ lục 8. Phương trình vi phân

8.1. Các khái niệm cơ bản

a) Định nghĩa phương trình vi phân

Phương trình vi phân cấp n có dạng sau: $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$

Ví dụ 1. Cho các phương trình vi phân

$y' - 5x = 0$	Phương trình vi phân cấp 1
$(3x - y)dx + (x + y)dy = 0$	Phương trình vi phân cấp 1
$y'' - 3y' + 2y = (x+1)e^x$	Phương trình vi phân cấp 2

b) Nghiệm của phương trình vi phân

Nghiệm của phương trình vi phân là một hàm số trên khoảng $I \subset \mathbb{R}$

Có 3 dạng sau:

- Dạng hiện : $y = f(x)$
- Dạng ẩn : $\varphi(x, y) = 0$
- Dạng tham số : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Nghiệm của phương trình vi phân

- Nghiệm tổng quát : $y = f(x, C)$, nghiệm riêng $y = f(x, C_0)$
- Tích phân tổng quát : $\varphi(x, y, C) = 0$
- Nghiệm kỳ dị.

8.2. Phương trình vi phân cấp 1

Phương trình vi phân cấp 1 có dạng tổng quát:

$$F(x, y, y') = 0 \quad \text{hay} \quad y' = f(x, y) \quad (*)$$

Hàm số $y = \varphi(x)$ xác định và khả vi trên khoảng $I \subset \mathbb{R}$ được gọi là nghiệm của phương trình (*) trên $I \subset \mathbb{R}$, nếu

$$\begin{cases} (x, \varphi(x)) \in G, \forall x \in I \\ \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), \forall x \in I \end{cases} \text{ với G là tập xác định của hàm } f(x, y)$$

Bài toán Cauchy: Tìm hàm số $y = \varphi(x)$ là nghiệm của phương trình (*) thỏa điều kiện đầu $y_0 = \varphi(x_0)$.

a) Phương trình tách biến

Có 3 dạng sau:

$$y' = f(x)g(y)$$

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$$

Phương pháp giải

Phân ly biến số x và dx về một vế và y và dy về một vế rồi lấy tích phân hai vế

Ví dụ 2. Giải phương trình vi phân sau

1) $y' = e^x$

2) $(x + \sin x)dx + 5y^4dy = 0$

3) $y' - xy^2 = 2xy$

Giải

1) $y' = e^x \Leftrightarrow dy = e^x dx \Leftrightarrow y = e^x + C$ (C là hằng số)

2) $(x + \sin x)dx + 5y^4dy = 0$ (2)

Lấy tích phân 2 vế của phương trình (2)

$$\int (x + \sin x)dx + \int 5y^4dy = C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - \cos x + y^5 = C \quad \text{(với C là hằng số)}$$

3) $y' - xy^2 = 2xy$

Phương trình (3) được viết lại như sau

$$\frac{dy}{dx} = xy^2 + 2xy = xy(y+2) \Leftrightarrow dy = xy(y+2)dx \quad (3)$$

Trường hợp 1: Nếu $y = 0, -2$ là nghiệm của phương trình

Trường hợp 2: Nếu $y \neq 0, -2$, chia hai vế của phương trình (3) cho $y(y+2)$, ta được

$$\frac{dy}{y(y+2)} = xdx,$$

Lấy tích phân hai vế của phương trình trên, ta có

$$\int \frac{dy}{y(y+2)} = \int xdx + C \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+2}\right)dy = \int xdx + C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\ln|y| - \ln|y+2|\right) = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\Leftrightarrow \ln\left|\frac{y}{y+2}\right| = x^2 + C \text{ (với C là hằng số)}$$

b) Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 có dạng: $y' + a(x)y = b(x)$. Trong đó . $a(x), b(x)$. là các hàm số liên tục.

Phương pháp giải

Bước 1: Tìm một nguyên hàm của $a(x)$

$$u(x) = \int a(x)dx$$

Bước 2: Chọn thừa số tích phân

$$v(x) = e^{u(x)}$$

Bước 3: Nhân hai vế của phương trình cho thừa số tích phân: $v(x)$ $(v(x) \neq 0, \forall x)$ thì ta có

$$v(x)y' + a(x)v(x)y = v(x)b(x)$$

$$\Leftrightarrow \left(v(x)y\right)' = v(x)b(x) \text{ (*)}$$

Bước 4: Lấy tích phân hai vế của (*), ta được

$$v(x)y = \int v(x)b(x)dx \Rightarrow y = \frac{1}{v(x)}\int v(x)b(x)dx$$

Ví dụ 3. Giải phương trình vi phân sau3

1) $y' + \frac{1}{x}y = 1$ với . $x > 0,\ y(1) = 1$.

2) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

Giải

1) $y' + \frac{1}{x}y = 1$ với $x > 0,\ y(1) = 1$

Bước 1: $\frac{1}{x}$ có nguyên hàm là $\ln|x| = \ln x$ (vì $x > 0$)

Bước 2: Chọn thừa số tích phân: $e^{\ln x} = x$

Bước 3: Nhân hai vế của phương trình cho x, thì ta có

$$xy' + y = x \Leftrightarrow (xy)' = x \quad (*)$$

Bước 4: Lấy tích phân hai vế của (*)

$$xy = \int x dx + C \Rightarrow y = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right) = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$$

Với điều kiện đầu $y(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{C}{1} = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$

Vậy nghiệm của phương trình: $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x}$

2) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

Bước 1: $2x$ có nguyên hàm là x^2

Bước 2: Chọn thừa số tích phân: e^{x^2}

Bước 3: Nhân hai vế của phương trình cho e^{x^2}, thì ta có

$$e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y = x \Leftrightarrow \left(e^{x^2}y\right)' = x \quad (*)$$

Bước 4: Lấy tích phân hai vế của (*)

$$e^{x^2}y = \int x dx + C \Rightarrow y = e^{-x^2}\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)$$

MỘT SỐ ĐỀ THAM KHẢO

Đề số 01

Câu 1. Cho hàm sản xuất Cobb Douglas: $Q(K,L)=80\sqrt{K}\sqrt[3]{L^2}$

trong đó Q : là sản lượng, K : là vốn, L : là lao động.

1) Tính hệ số co dãn của Q theo K và theo L. Nêu ý nghĩa.
2) Nếu nhịp tăng trưởng của vốn là 4% và nhịp tăng trưởng của lao động là 6% thì nhịp tăng trưởng của sản lượng là bao nhiêu?

Câu 2. Cho hàm chi phí cận biên ở mỗi mức sản lượng Q là $MC(Q)=15e^{0,6Q}$ và chi phí cố định là 20. Tìm hàm tổng chi phí.

Câu 3. Cho ma trận hệ số kỹ thuật của 3 ngành như sau

$$A=\begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0,1 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$$

1) Nêu ý nghĩa kinh tế của phần tử ở hàng 2 và cột 3 của ma trận này.
2) Cho biết ma trận cầu cuối $b=\begin{pmatrix} 60 & 50 & 70 \end{pmatrix}^T$. Tìm sản lượng mỗi ngành

Câu 4. Cho hàm tổng chi phí như sau:

$$C(Q)=4000+5Q+0,1Q^2 \text{ (Q là sản lượng)}$$

1) Tính chi phí biên tại mức sản lượng 100.
2) Tìm Q để cực tiểu hàm chi phí bình quân

Câu 5. Một công ty có hàm sản xuất: $Q(K,L)=2K(L-2)$, trong đó K, L lần lượt là vốn và lao động. Biết giá thuê một đơn vị vốn là 600 USD và giá thuê một đơn vị lao động là 300 USD. Nếu doanh nghiệp chi số tiền 15000 USD. Tìm mức sử dụng K và L sao cho sản lượng tối đa.

Đề số 02

Câu 1. Thu nhập quốc dân của một quốc gia (Y) phụ thuộc vào vốn (K), lao động được sử dụng (L) và ngân sách đào tạo 5 năm trước đó (G) như sau: $Y=0,38K^{0,35}L^{0,18}G^{0,25}$

trong đó K, L, G là các hàm theo thời gian như sau:

$$K(t) = K_0(1,2)^t \;;\; L(t) = L_0(1,05)^t \;;\; G(t) = G_0(1,25)^t.$$

Tính hệ số tăng trưởng của thu nhập quốc dân.

Câu 2. Một doanh nghiệp có hàm chi phí cận biên : $MC(Q) = 0,9Q^2 - 6Q + 19$, với Q là sản lượng

1) Hãy tìm hàm tổng chi phí của doanh nghiệp, biết chi phí cố định bằng 30.
2) Hãy xác định hàm chi phí biến đổi bình quân và mức sản lượng cực tiểu hóa hàm này.

Câu 3. Lượng đầu tư tại thời điểm t cho bởi hàm số:

$$I(t) = 5t\sqrt[3]{t\sqrt{t}}\left(1+\sqrt{t}\right)$$

Biết quỹ vốn vào thời điểm xuất phát $K(0) = 84$, tìm hàm quỹ vốn tại thời điểm $t = 4$.

Câu 4. Cho mô hình thu nhập quốc dân

$$\begin{cases} Y = C + I_0 + G_0 \\ C = 150 + 0,8(Y - T) \\ T = 0,2Y \end{cases}$$

Trong đó Y là thu nhập quốc dân, I_0 là đầu tư, G_0 là chi tiêu chính phủ, C là tiêu dùng, T là thuế. Tìm thu nhập quốc dân và tiêu dùng ở trạng thái cân bằng khi $I_0 = 200, G_0 = 900$.

Câu 5. Một hãng có hai cơ sở sản xuất với các hàm sản xuất có dạng:

$$Q_1 = 2\left(L_1 + 100\right)^{0,5} \quad \text{và} \quad Q_2 = 2\left(L_2 + 200\right)^{0,5}$$

Tìm phương án sử dụng nhân công tại hai cơ sở để hãng có thể làm ra một lô hàng là 200 đơn vị với giá thành nhỏ nhất, biết giá thuế công nhân tại hai cơ sở là như nhau là w USD/đơn vị lao động.

Đề số 03

Câu 1. Cho hàm cung và hàm cầu của một loại hàng háo như sau :

$$D = 1,5Y^{0,45}P^{-0,25};\; S = 1,5P^{0,35}.$$

Trong đó: Y là thu nhập, P là giá của hàng hóa.

1) Xác định hệ số co dãn của cầu theo giá, theo thu nhập và nêu ý nghĩa.
2) Xem xét mức tác động của thu nhập tới mức giá cân bằng.

Câu 2. Cho hàm sản phẩm cận biên của lao động $MPL = 40L^{0,5}$. Tìm hàm sản xuất ngắn hạn $Q = f(L)$, biết rằng $Q(100) = 4000$.

Câu 3. Xét thị trường ba loại hàng hóa với hàm cung và hàm cầu như sau:

$$Q_{S_1} = -10 + P_1;\ Q_{D_1} = 20 - P_1 - P_3$$

$$Q_{S_2} = 2P_2;\ Q_{D_2} = 40 - 2P_2 - P_3$$

$$Q_{S_3} = -5 + 3P_3;\ Q_{D_3} = 10 - P_1 + P_2 - P_3$$

Hãy xác định bộ giá trị và lượng cân bằng thị trường của ba hàng hóa đó bằng quy tắc Cramer.

Câu 4. Cho hàm chi phí trung bình của doanh nghiệp cạnh tranh hoàn hảo như sau:

$$AV(Q) = \frac{12}{Q} - \frac{1}{2}Q + \frac{1}{4}Q^2 + 10$$

1) Tìm hàm chi phí cận biên.
2) Với giá bán $P = 106$, Tìm Q để lợi nhuận cực đại.

Câu 5. Một công ty có hàm sản xuất: $Q = K^{0,4}L^{0,3}$, trong đó K, L lần lượt là vốn và lao động. Biết giá một đơn vị vốn là 4 USD và giá một đơn vị lao động là 3 USD. Nếu doanh nghiệp chi số tiền 1050 USD. Tìm mức sử dụng vốn và lao động để tối đa hóa sản lượng.

Đề số 04

Câu 1. Cho biết hàm chi phí cận biên ở mỗi mức sản lượng Q là:

$MC(Q) = 36 + 28Q - 12Q^2$ và $FC = 53$. Hãy tìm hàm tổng chi phí và chi phí biến đổi.

Câu 2.

1) Cho hàm cầu $D = 6P - P^2$. Hãy tính hệ số co dãn của cầu theo giá tại múc giá $P = 5$ và nêu ý nghĩa.
2) Cho hàm đầu tư $I(t) = \sqrt[3]{t}$. Hãy tìm hàm quỹ vốn $K(t)$, biết quỹ vốn tại thời điểm ban đầu bằng 100000.

Câu 3. Một doanh nghiệp độc quyền sản xuất hai loại sản phẩm. Cho biết hàm cầu đối với hai loại sản phẩm đó như sau: $Q_1 = 210 - P_1;\ Q_2 = 60 - \frac{1}{3}P_2$ với hàm chi phí kết hợp $C = 30(Q_1 + Q_2)$. Hãy tìm sản lượng Q_1 và Q_2 và giá bán tương ứng để doanh nghiệp thu được lợi nhuận tối đa.

Câu 4. Cho mô hình cân bằng kinh tế:

$$Y = C + I_0 + G_0;$$

$$C = C_0 + b\left(Y - T\right);$$

$$T = T_0 + tY.$$

Cho $C_0 = 80; I_0 = 90; G_0 = 81; T_0 = 20; b = 0,9; t = 0,1$. Xác định mức cân bằng của Y. Nếu C_0 tăng 1% thì mức cân bằng của Y thay đổi như thế nào?

Câu 5. Định K, L sao cho hàm chi phí $C = L + 0,01K$ ($K > 0, L > 0$) đạt giá trị nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện $\sqrt{K \cdot L} = 20$.

Đề số 05

Câu 1. Cho hàm doanh thu trung bình: $AR\left(Q\right) = 60 - 3Q$. Tìm hàm doanh thu cận biên, $MR\left(Q\right)$. Chứng minh rằng hàm $AR\left(Q\right)$ và hàm $MR\left(Q\right)$ có cùng tung độ góc, nhưng độ dốc của $MR\left(Q\right)$ gấp đôi độ dốc của $AR\left(Q\right)$.

Câu 2. Cho hàm cầu về một loại nông sản: $D = 200 - 50P$. Có 50 cơ sở giống hệt nhau cùng trồng loại nông sản này với hàm chi phí của mỗi cơ sở là $TC\left(Q\right) = Q^2$ (Q là sản lượng). Hãy xác định lượng cung tối ưu của mỗi cơ sở và giá cân bằng thị trường.

Câu 3. Cho mô hình

$$Y = C + I;$$

$$C = C_0 + aY, \ (0 < a < 1);$$

$$I = I_0 - br, \ (b > 0);$$

$$L = L_0 + mY - nr, \ (m, n > 0);$$

$$M_s = L.$$

Trong đó Y là thu nhập quốc dân, I là đầu tư, C là tiêu dùng, L là mức cầu tiền, M_s là mức cung tiền, r là lãi suất.

1) Hãy xác định thu nhập quốc dân và lãi suất cân bằng.
2) Cho $a = 0,7; b = 1800; C_0 = 500; I_0 = 400; L_0 = 800; m = 0,6; \ n = 1200;$

$M_s = 2000$. Tính hệ số co dãn của thu nhập, lãi suất theo mức cung tiền tại điểm cân bằng và nêu ý nghĩa.

Câu 4. Cho hàm sản xuất của hãng $Q = 300\sqrt[3]{K^2}\sqrt[4]{L}$, biết giá thuê một đơn vị tư bản K bằng 100, giá thuê một đơn vị lao động bằng 150, giá sản phẩm bằng 1. Hãy xác định mức sử dụng K và L để hãng thu được lợi nhuận tối đa.

Câu 5. Cho biết hàm cầu và hàm cung:

$$D^{-1}(Q) = \sqrt{276 - 2Q}\ ;\ \ S^{-1}(Q) = 6 + Q.$$

Hãy tính thặng dư của người sản xuất và thặng dư của người tiêu dùng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Huy Hoàng (chủ biên), Lê Thị Anh, Phùng Minh Đức, Bùi Quốc Hoàn, Phạm Bảo Lâm, Nguyễn Mai Quyên, Đoàn Trọng Tuyến, Hoàng Văn Thắng – H**ướng dẫn giải bài tập Toán cao cấp cho các nhà kinh tế,** NXB ĐHKTQD, 2006& NXB Thống kê, 2007

[2] Bộ môn toán cơ bản – **Bài tập toán cao cấp**, NXB Đại học Kinh tế Quốc dân, 2008.

[3] Nguyễn Huy Hoàng – **Toán cơ sở cho kinh tế**, NXB Thông tin và Truyền thông, 2011& NXB GD, 2014.

[4] Nguyễn Thị An, Nguyễn Huy Hoàng, **Giới thiệu đề thi tuyển sinh Sau đại học (2006 – 2012), Môn Toán Kinh tế (Phần Toán cơ sở cho Kinh tế),** NXB Chính trị – Hành chính, 2012.

[5] Laurence D. Hoffmann, Gerald L. Bradley, **Applied Calculus For Business, Economics, and the Social and Life Sciences,** The Mc. Graw - Hill Companies, Inc (Expanded 10^{th} ed), 2010.

[6] Michael Hoy, John Livernois, Chris Mc Kenna, Ray Rees, Thanasis Stengos, **Mathematics for Economics,** The MIT Press Cambrige, Massachusetts, London, England (second edition), 2011.

[7] Michael Hoy, John Livernois, Chris Mc Kenna, Ray Rees, Thanasis Stengos, **Solutions Manual Mathematics for Economics,** The MIT Press Cambrige, Massachusetts, London, England (second edition), 2011.

[8] A. C. Chiang, **Fundamental Methods of Mathematical Economics**, Mc GrawHill, Inc., 3rd edition, 1984.

[9] A. C. Chiang, **Instructor's Manual to accompany Fundamental Methods of Mathematical Economics**, Mc GrawHill, Inc., 4rd edition, 2005.