

BÀI TẬP GIẢI TÍCH CHƯƠNG 1

Nguyễn Đức Ngà

Ngày 26 tháng 2 năm 2023

Bài 1. Tính các đạo hàm $f'(1)$, $f''(2)$ và $f'''(3)$ với $f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$.

Bài 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a. $y = (x+1)\sqrt{x+2}$

b. $y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(3-x)^3}$

c. $y = \sin(5-3x) + 2\cos(1+3x)$

d. $y = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

e. $y = \frac{2x-1}{3-5x}$

f. $y = x^2 \ln(2x+1)$

g. $y = \sqrt{2x^3+1}$

h. $y = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

i. $y = \frac{1}{1+\ln x}$

k. $y = x^{\cos x}$

l. $y = \begin{cases} x^2 e^{-x^2} & \text{nếu } |x| \leq 1 \\ e^{-1} & \text{nếu } |x| > 1 \end{cases}$

Bài 3. Vị trí của một chiếc xe hơi chuyển động dọc theo một đường thẳng sau t (giây) được cho bởi hàm $s(t) = 8t^2 - \frac{1}{16}t^3$.

(a) Tính vận tốc trung bình của xe trong các khoảng thời gian $[4, 4.1]$, $[4, 4.01]$, $[4, 4.001]$, $[4, 4.0001]$.

(b) Dựa vào ý (a), hãy ước lượng vận tốc tức thời tại $t = 4$ (giây).

Bài 4. Sử dụng công thức $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h$, tính gần đúng các giá trị sau bằng cách chọn $f(x)$, x_0 và h một cách phù hợp.

(a) $(2.0001)^6$.

(b) $\sin(0.02)$.

(c) $\frac{1}{0.98}$.

(d) $\cos^2(0.001)$.

(e) $(15.999)^{1/4}$.

Bài 5. Hàm số nào dưới đây thỏa mãn các giả thiết của Định lý giá trị trung bình và hàm số nào không thỏa mãn, trên đoạn được chỉ ra? Giải thích.

(a) $f(x) = x^{2/3}$, $[-1, 8]$.

(b) $f(x) = x^{4/5}$, $[0, 1]$.

(c) $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$, $[0, 1]$.

(d) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & -2 \leq x \leq -1 \\ 2x^2 - 3x - 3, & -1 < x \leq 0. \end{cases}$

Bài 6. Tìm các số c thỏa mãn $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ trong Định lý giá trị trung bình đối với các trường hợp sau đây.

(a) $f(x) = x^2 + 2x - 1$, $[0, 1]$.

(b) $f(x) = x^3 - x^2$, $[-1, 2]$.

(c) $f(x) = x^{2/3}$, $[0, 1]$.

(d) $f(x) = x + \frac{1}{2}$, $[0.5, 2]$.

(e) $f(x) = \begin{cases} x^3, & -2 \leq x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 2. \end{cases}$

Bài 7. Chứng minh rằng phương trình

$$\frac{x^{2021}}{2021} + \frac{x^{2020}}{2020} + \cdots + \frac{x^2}{2} + x + 1 = 0$$

có một nghiệm thực duy nhất.

Bài 8. Giả sử hàm số f khả vi liên tục đến cấp hai trên \mathbb{R} và phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

(a) Sử dụng định lý Rolle cho hàm $G(x) = e^{-2x}f(x)$ để chứng minh rằng phương trình $f'(x) - 2f(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt.

(b) Chứng minh rằng phương trình $f''(x) - 4f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm.

Bài 9. Giả sử hàm số f khả vi trên \mathbb{R} và phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng các phương trình sau có nghiệm.

(a) $f(x) - f'(x) = 0$.

(b) $xf(x) + f'(x) = 0$.

Bài 10. Tính tổng của các chuỗi số dưới đây.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(4n-1)(4n+1)}$.

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n}$.

Bài 11. Dựa vào Định lý giá trị trung bình, chứng minh các bất đẳng thức sau.

(a) $|\sin(a) - \sin(b)| \leq |a - b|$ với mọi số thực a, b .

(b) $|\arctan(a) - \arctan(b)| \leq |a - b|$ với mọi số thực a, b .

(c) $|\cos(x) - 1| \leq |x|$ với mọi số thực x .

Bài 12. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau.

(a) $f(x) = \frac{1}{x-2}$.

(b) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$.

(c) $f(x) = e^x \sin(x)$.

(d) $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$.

(e) $f(x) = \cos(x) \cos(3x)$.

Bài 13. Cho hàm số $f(x) = x^n$ với n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$f(1) + \frac{f'(1)}{1!} + \frac{f''(1)}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = 2^n.$$

Bài 14. Tìm các đa thức Taylor cấp 0, 1, 2, và 3 của hàm số $f(x)$ tại a .

(a) $f(x) = e^{2x}$, $a = 0$.

(b) $f(x) = \ln(x)$, $a = 1$.

(c) $f(x) = 1/x$, $a = 2$.

(d) $f(x) = \sin(x)$, $a = 3\pi/4$.

(e) $f(x) = \frac{1}{2x+5}$, $a = 0$.

Bài 15. Tìm đa thức Taylor cấp 4 tại $x = 0$ của các hàm số sau.

(a) $f(x) = e^{x-x^2}$.

(b) $f(x) = \frac{1}{1-x+x^2}$.

(c) $f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$.

(d) $f(x) = e^x \sin(x)$.

(e) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Bài 16. Tìm chuỗi Taylor tại $x = 0$ của các hàm số sau.

(a) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$.

(b) $f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$.

(c) $f(x) = \frac{x}{1+x-2x^2}$.

(d) $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2+x^3}$.

(e) $f(x) = \frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$.

(f) $f(x) = \ln(1+x+x^2+x^3)$.

Bài 17. Tính các giới hạn sau đây.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}.$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{1 - \cos(x)}.$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan(x)}{x^3}.$

(e) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2(e^{-1/x^2} - 1).$

Bài 18. Tính các đạo hàm riêng $\frac{\partial z}{\partial u}$ và $\frac{\partial z}{\partial v}$ theo hai cách.

(a) $z = 4e^x \ln(y), x = \ln(u \cos(v)), y = u \sin(v).$

(b) $z = \arctan(x/y), x = u \cos(v), y = u \sin(v).$

(c) $z = 5x^2 + 3y^2, x = 2u - 7v, y = -3u + 2v.$

Bài 19. Tính đạo hàm $\frac{df}{dt}$ theo hai cách.

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2, x = \sin(t) + \cos(t), y = \sin(t) - \cos(t).$

(b) $f(x, y) = xy, x = \sin(t) + \cos(t), y = \sin(t) - \cos(t).$

(c) $f(x, y) = \frac{1}{x + y}, x = t, y = t^2.$

Bài 20. Tính đạo hàm $\frac{dy}{dx}$ của hàm số ẩn $y = y(x)$ trong các trường hợp sau.

(a) $x^3 + y^2x - 3 = 0.$

(b) $\sin(x + y) + \cos(x - y) = 4.$

(c) $x^2y^3 + \cos(y) = 0.$

(d) $e^{xy} + ye^y = 1.$

(e) $x^{2/3} + y^{2/3} = 1.$

Bài 21. Sử dụng công thức $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y$, tính gần đúng các giá trị sau bằng cách chọn $f(x, y), (x_0, y_0), \Delta x, \Delta y$ một cách phù hợp.

(a) $\sqrt[3]{(1.02)^2 + (0.05)^2}.$

(b) $\ln(\sqrt[3]{1.03} + \sqrt[4]{0.98} - 1).$

Bài 22. Nhiệt độ $T(x, y)$ (độ C) tại điểm (x, y) thỏa mãn $\frac{\partial T}{\partial x}(1, 2) = 3$, $\frac{\partial T}{\partial y}(1, 2) = -1$. Cho biết $x = e^{2t-2}$ (cm) và $y = 2 + \ln(t)$ (cm). Tính tốc độ thay đổi nhiệt độ tại thời điểm $t = 1$ (giây).

Bài 23. Điện trở tương đương R của hai điện trở R_1 và R_2 mắc song song, được tính bởi công thức $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Người ta đo được $R_1 = 6$, $R_2 = 7$ (Ω) với độ chính xác là 0.05 (Ω). Ước lượng độ chính xác của điện trở tương đương R .

Bài 24. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của các hàm số sau.

(a) $f(x, y) = x^2 \ln(x + y)$.

(b) $f(x, y) = e^{x^2 y}$.

(c) $f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.

(d) $f(x, y) = \frac{1}{3} \sqrt[3]{x^2 + y^2}$.

(e) $f(x, y) = \sin(x \ln(y))$.

Bài 25. Tìm các hàm số $f(x, y)$ thỏa mãn một trong các điều kiện dưới đây.

(a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.

(b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$.

(c) $\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 - 2xy^2 + 2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = y^2 - 2x^2y + 3$.

(d) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2y + 2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^4 - 30xy^5$, $f(0, 0) = 1$, $f(1, 1) = -2$.