

BÀI TẬP - ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

BỘ MÔN TOÁN – ĐẠI HỌC PHENIKAA

Biên soạn: Phan Quang Sáng

CHƯƠNG 1: MA TRẬN - ĐỊNH THỨC – HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Bài 1. Tìm các số m, n, k biết :

$$1) A_{m \times 3} \cdot B_{n \times 4} = C_{2 \times k}$$

ĐS: 1) $m = 2, n = 3, k = 4$

$$2) A_2 \cdot B_{m \times n} = C_{k \times 5}$$

2) $m = 2, n = 5, k = 2$

Bài 2. Cho 2 ma trận $A = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Tính : A^2, AB và BA .

ĐS: $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 12 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -6 & -9 \end{bmatrix}$

Bài 3. Cho các ma trận: $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

Tính $A + 3B', AB, BA, ABC, CB$.

ĐS: $A + 3B' = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 15 \\ -1 & 14 & 18 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} 21 & 29 \\ 12 & 13 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 8 & 23 & 6 \\ 16 & 46 & 12 \end{bmatrix}, ABC = \begin{bmatrix} 129 & 118 \\ 63 & 71 \end{bmatrix},$

không tồn tại CB .

Bài 4. Cho các ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ và $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1) Hai ma trận nào có thể nhân được với nhau ?

2) Tính AB, ABC, C^n .

ĐS: 1) AB, BA, BC, CA

2) $AB = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, ABC = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, C^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Bài 5. Thực hiện các phép tính sau:

1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix};$ 2) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^3$.

ĐS: 1) $\begin{bmatrix} 14 \\ 10 \end{bmatrix};$ 2) $\begin{bmatrix} -1 & 27 & -9 \\ 18 & -28 & 0 \\ 0 & 9 & -1 \end{bmatrix}$.

Bài 6. Cho 2 ma trận $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

a) Tìm ma trận X sao cho $A - X = -2B'$.

b) Tìm ma trận Y sao cho $Y' - BA = 0$.

ĐS: a) $X = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 8 & -5 \end{bmatrix}$ b) $Y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & -10 & -7 \\ -2 & -15 & -9 \end{bmatrix}$

Bài 7. Cho hai ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

Hãy thực hiện phép tính: $AB, B'A'$. Kiểm tra lại đẳng thức $(AB)' = B'A'$ có đúng với các ma trận A, B hay không.

ĐS: $AB = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ -2 & 21 \end{bmatrix}; B'A' = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix}.$

Bài 8. Cho các ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Tìm phần tử nằm ở hàng 2, cột 3 của ma trận $3A'BC$.

ĐS: 15

Bài 9. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

1) Tìm ma trận X thỏa mãn $A^2 + 2A - 3X = 0$

2) Tính A^{2017} .

ĐS: 1) $X = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & 2 \\ 0 & \frac{8}{3} \end{bmatrix}; 2) A^{2017} = \begin{bmatrix} 2^{2017} & 2017 \cdot 2^{2016} \\ 0 & 2^{2017} \end{bmatrix}$

Bài 10. Tính các định thức sau:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -8 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

ĐS: a) -24 b) -7 c) -37 d) 35 e) -56 f) -24

Bài 11. Tính các định thức sau:

$$1) \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}; 2) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x \\ 1 & x & 0 \end{vmatrix}; 3) \begin{vmatrix} 1 & -a & 1 \\ -2 & 1 & -a \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}; 4) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}; 5) \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

ĐS: 1) $(x+2)(x-1)^2$ 2) 0 3) $3a^2 - 4a + 2$ 4) 40 5) -45

Bài 12. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & m \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

- 1) Với $m=1$ hãy tính $\det A$, $\det(5A')$, $\det(A^4)$.
- 2) m là giá trị nào đó mà $\det A = 3$. Với những giá trị m đó hãy tính $\det(A^{-1})$, $\det(2A^2)$

ĐS: 1) $\det A = 2$, $\det(5A') = 250$, $\det(A^4) = 16$

2) $\det A^{-1} = \frac{1}{3}$, $\det(2A^2) = 72$

Bài 13. Tính các định thức sau:

$$a) \begin{vmatrix} 4 & -2 & m \\ -5 & m & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} 1 & m & m & 2 \\ 1 & m & 2 & m \\ 1 & 2 & m & m \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

ĐS: a) $-2m^2 - 32m + 10$

b) $3(2m+3)(m-1)(m-2)^2$

Bài 14. Cho hai ma trận A, B vuông cấp 3 có: $\det(2A) = -4$, $\det(B^3) = 8$, $\det(A+B) = \frac{5}{2}$.

Tính $\det A$, $\det B$, $\det(A'B')$, $\det(5A^4B^{-1})$, $\det(AB+B^2)$.

ĐS: $\det A = -1/2$; $\det B = 2$; $\det(A'B') = -1$; $\det(5A^4B^{-1}) = 125/32$; $\det(AB+B^2) = 5$.

Bài 15. Cho ma trận A cấp 3 có $\det(2A) = 80$.

- a) Chứng minh ma trận A khả nghịch.
- b) Tính $\det(A^{-1})$, $\det(A')$ và $\det(A^6)$.

ĐS: a) $\det A = 10 \neq 0$, nên ma trận A khả nghịch.

b) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{10}$, $\det(A') = 10$, $\det(A^6) = 10^6$

Bài 16. Cho các ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 5 \\ -1 & -4 & 3 \\ 3 & 9 & -7 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ và } D = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 \\ -1 & -4 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

- 1) Hãy tính các tích AB và BA . Từ đó hãy cho biết ma trận A có khả nghịch không? chỉ ra ma trận nghịch đảo (nếu có) của ma trận A .
- 2) Ma trận C có phải ma trận nghịch đảo của ma trận B hay không? Vì sao?
- 3) Tìm ma trận X (nếu có) thỏa mãn: $XA = B$.
- 4) Hãy tính tích CD . Từ đó hãy cho biết ma trận D có khả nghịch không? chỉ ra ma trận nghịch đảo (nếu có) của ma trận D .

ĐS: 1) $AB = BA = I_3$, $A^{-1} = B$ 2) không 3) $X = B^2 = \dots$ 4) $CD = 3I_3$

Bài 17. Tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của các ma trận sau:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

ĐS: a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$ b) $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -3 \\ -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} & 5 \end{bmatrix}$ c) $C^{-1} = \frac{-1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 10 & -14 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -5 \end{bmatrix}$

Bài 18. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}$.

1) Tìm x để ma trận A khả nghịch và thỏa mãn $\det(A^{-1}) = 2$.

2) Tìm ma trận nghịch đảo của A khi $x = 2$.

ĐS: 1) $x = \frac{3}{4}$; 2) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -8/3 & 5/3 & -4/3 \\ 1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$.

Bài 19. Cho hai ma trận: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

1) Tìm ma trận nghịch đảo của A .

2) Tìm ma trận X sao cho $XA = B^t$.

3) Tìm ma trận Y sao cho $AYA = B$.

ĐS: 1) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 3/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{bmatrix}$; 2) $X = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ 1/5 & -7/5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; 3) Không tồn tại ma trận Y .

Bài 20. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} m-1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 5 & -2 \end{bmatrix}$,

a) Tìm m để ma trận A khả nghịch.

b) Với $m = 3$, tìm ma trận nghịch đảo nếu có của ma trận A .

ĐS: a) $\det A = -8m + 21$. A khả nghịch $\Leftrightarrow m \neq 21/8$

b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$

Bài 21. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} m & 1 & 2 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

- a) Tìm m để ma trận A khả nghịch.
b) Khi A khả nghịch, tính $\det(A^{-1})$.

$$\det A = m^2 - 6m + 5.$$

ĐS: a) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1, \\ m \neq 5. \end{cases}$ b) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{m^2 - 6m + 5}$

Bài 22(+). Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & m & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

- 1) Tìm m để ma trận A khả nghịch.
2) Giả sử m là những giá trị mà ma trận A khả nghịch. Chứng minh rằng với những giá trị m đó thì A^2, A^3 cũng khả nghịch.
3) Với $m = -1$, hãy tìm ma trận nghịch đảo của A .

ĐS: 1) $m \neq -1/2$ 3) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -5 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Bài 23(+). Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & m & 2 \end{bmatrix}$.

- a) Tìm điều kiện của m để ma trận A khả nghịch.
b) Khi A khả nghịch, hãy tìm phần tử nằm ở hàng 4, cột 3 của ma trận nghịch đảo của A .

ĐS: a) $m \neq 2$ b) $\frac{m+5}{m-2}$

Bài 24(+). Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1+m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+m \end{bmatrix}$

- 1) Tìm điều kiện của m để A khả nghịch.
2) Khi A khả nghịch, giả sử ma trận nghịch đảo của A là $A^{-1} = (c_{ij})_{4 \times 4}$. Tìm m để $c_{23} = \frac{1}{4}$

và $\det(A^{-1}) = -\frac{1}{16}$

ĐS: 1) $m \neq 0$ và $m \neq -4$ 2) $m = -2$

Bài 25. Cho hai ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

- 1) Tìm phần tử nằm ở vị trí hàng 3, cột 2 của ma trận A^2 .
- 2) Tính $A + B$.
- 3) Chứng minh A khả nghịch. Tìm phần tử nằm ở vị trí hàng 1, cột 3 của ma trận A^{-1} .
- 4) Tính $\det(A + B)$ và $\det(A^2 + BA)$.

ĐS: 1) Phần tử cần tìm là tích của “hàng 3 ma trận A ” với “cột 2 ma trận A ”;

2) $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$; 4) $\det(A + B) = -24$; $\det(A^2 + BA) = -1008$.

Bài 26. Tìm hạng của các ma trận sau:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & 2 \\ 1 & 10 & 17 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 5 & 3 \\ 7 & 9 & 7 & 9 & 7 \end{bmatrix}$.

ĐS: $r(A) = 2$, $r(B) = 3$, $r(C) = 2$

Bài 27. Tìm hạng của các ma trận sau :

$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 0 & -11 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 3 & 21 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

ĐS: $r(A) = 2$; $r(B) = 3$; $r(C) = 3$.

Bài 28: Xác định hạng của các ma trận sau tùy theo tham số a :

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 3 \end{bmatrix}$ 2) $B = \begin{bmatrix} 3 & a & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & 2 \\ 1 & 10 & 17 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

ĐS: 1) Với $a = 0; -5 \rightarrow r(A) = 2; a \neq 0; -5 \rightarrow r(A) = 3$.
2) Với $a = 0 \rightarrow r(B) = 2; a \neq 0 \rightarrow r(B) = 3$.

Bài 29. Tìm m để ma trận sau có hạng bằng 2:

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ m & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

ĐS: $m = 0$

Bài 30. Cho $A = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & 5 & -8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ và I là ma trận đơn vị cấp 3.

1) Tìm ma trận X sao cho $2A - 3X = 5I$.

2) Tính $A + B^2$ và $B.A'$.

Từ đó hãy cho biết ma trận B có khả nghịch không? nếu có, hãy suy ra ma trận nghịch đảo của ma trận B .

3) Tìm $x \in \mathbb{R}$ sao cho $\det(B - xI) = 0$. Tìm ma trận Y thỏa mãn: $(B - 3I)Y = 0$.

ĐS: 1) $X = \begin{bmatrix} -11/3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -2/3 \\ 4 & 10/3 & -7 \end{bmatrix}$; 2) $A + B^2 = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 9 \\ -3 & 12 & 4 \\ 9 & 4 & -6 \end{bmatrix}$; $B.A' = -3I$.

3) $x = 3 \vee x = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$; $Y = [3z \ 2z \ z]^T, z \in \mathbb{R}$.

Bài 31. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$. Tìm các ma trận X sao cho $AX = B$.

ĐS: $X = \begin{bmatrix} 2z+1 \\ 0.5z-4 \\ z \\ 3-1.5z \end{bmatrix}, z \in \mathbb{R}$.

Bài 32. Giải các phương trình sau:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$

b) $X \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

ĐS: a) $X = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

b) $X = \begin{bmatrix} 20 & -15 & 13 \\ 17 & -12 & 11 \\ 48 & -35 & 30 \end{bmatrix}$

Bài 33. Giải các hệ phương trình tuyến tính sau :

1) $\begin{cases} x + y - 2z - 4t = 0 \\ 3x - y + 2z - 8t = 0; \\ x + 4y - z - 7t = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x + 2y - z + t = 2 \\ 4x + 3y - z + 2t = 3 \\ 8x + 5y - 3z + 4t = 6 \\ 3x + 3y - 2z + 2t = 3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x + 2y + 3z + 4t = 1 \\ x + y + z = -2; \\ 6x + 5y + 6z + 4t = -5 \\ 7x + 5y + 7z + 8t = 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - 4y + 3z = 1 \\ 5x + 5y - z = 2 \\ 7x + 2y + 3z = 10 \\ -2x + 3y + z = 5 \end{cases}$

ĐS: 1) $\{x = 3t; y = t; z = 0; t \in \mathbb{R}\}$

2) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

3) $\{x = -4t - z + 5; y = 4t - 7; z, t \in \mathbb{R}\}$

4) VN.

Bài 34. Tìm m để hệ phương trình sau trở thành hệ Cramer? Khi đó hãy tính thành phần x trong công thức nghiệm:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 2my - 2z = 1 \\ -x + y - 3z = 3 \end{cases}$$

ĐS: $m \neq -1/2$

Bài 35. Với giá trị nào của m thì các hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\text{a) } \begin{cases} x - 2y + z - t = -1 \\ 3x + y - 2z + t = 2 \\ x + 5y - 4z + mt = 5 \end{cases} ; \quad \text{b) } \begin{cases} x + y + 10z - 6t = 3 \\ x + 2y + mz - t = 1 \\ 2x + 5y - z + mt = 2 \end{cases}$$

ĐS: a) $m \neq 4$ b) $m \neq 3$

Bài 36. Với giá trị nào của m thì các hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\text{a) } \begin{cases} x - 2y + z - t = -1 \\ 3x + y - 2z + t = 2 \\ x + 5y - 4z + mt = 5 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y + 10z - 6t = 3 \\ x + 2y + mz - t = 1 \\ 2x + 5y - z + mt = 2 \end{cases}$$

ĐS: a) $m \neq 4$ b) $m \neq 3$

Bài 37. Với giá trị nào của m thì hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất? Có vô số nghiệm?

$$\begin{cases} x + 3y - 2t = 0 \\ -y + 2z - t = 0 \\ 2x - z + t = 0 \\ 4x + y + mz = 0 \end{cases}$$

ĐS: $\det(A) = 11m + 5$ với A là ma trận hệ số của hệ (Hệ vuông thuần nhất có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\det(A) \neq 0$, có vô số nghiệm khi và chỉ khi $\det(A) = 0$)

Bài 38. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y - z = 4 \\ 3x + 3y + (m+4)z = m^2 + 2 \end{cases}$$

- a) Hệ phương trình có nghiệm duy nhất?
b) Giải hệ phương trình với $m = -1$.

ĐS: a) $m \neq -1$ b) $\begin{cases} x = -1 - 4z \\ y = 2 + 3z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$

Bài 39. Tìm tất cả các ma trận X (nếu có) thỏa mãn:

$$1) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X = X \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad 2) X \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad 3) X \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$4) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad 5) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

ĐS: 1) $X = \begin{bmatrix} x & y \\ y & x+y \end{bmatrix}, x, y \in \mathbb{R}; \quad 2) X = \begin{bmatrix} -3 & 7 & 2 \\ 1 & -1.5 & 0.5 \end{bmatrix};$

3) $X = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}; \quad 4) X = \begin{bmatrix} 7/4 \\ 5/4 \\ -7/4 \end{bmatrix}; \quad 5) X = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$