

Tên học phần: Giải tích Số TC: 03

Ngày thi: 13/07/2022

Thời gian làm bài: 90 phút

Đề số 5

Câu 1 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Tính tích phân $I = \iint_D (1+y)e^x dx dy$, biết miền D là tam giác có ba đỉnh $(0,0)$, $(1,0)$, và $(1,1)$.

Câu 2 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Tính tích phân

$$I = \iiint_V xyz \, dx dy dz,$$

trong đó V là một miền giới hạn bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = b^2$ ($b > 0$) cùng với các điều kiện $0 \leq z \leq a$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Câu 3 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Cho cung C là một phần tư đường tròn $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ z = 1, \end{cases}$ định hướng từ $A(1,0,1)$ đến $B(0,1,1)$.

(a) Tìm một biểu diễn tham số $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ của C .

(b) Tính $I = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, biết $\mathbf{F} = (x^2 + y^2 + z^2 + x + y, 3x - 2y + z, xy)$.

Câu 4 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Cho mặt nón (C) $z^2 = 4(x^2 + y^2)$, $0 \leq z \leq 2$.

(a) Tìm một biểu diễn tham số của (C) và một vectơ pháp tuyến \mathbf{N} tương ứng.

(b) Tính tích phân của hàm vectơ $\mathbf{F} = (y^2, xz, -z^2)$ trên mặt (C) .

Câu 5 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Giải phương trình vi phân đẳng cấp (hay thuần nhất) sau:

$$y^2 + x^2 y' = 2xy y'.$$

----- Hết -----

- Thí sinh **không** được sử dụng tài liệu.
- Cán bộ coi thi không cần giải thích gì.

Trưởng bộ môn/khoa

Giảng viên ra đề

TS. Phan Quang Sáng

GS. TS. Phùng Văn Đồng

PGS. TS. Đỗ Văn Nam

TS. Lê Đức Ninh

TS. Đỗ Quốc Tuấn

TS. Vũ Hữu Nhựt

ThS. Nguyễn Đức Ngà

Đề số: 05

Câu	Nội dung	Điểm
1		2
	$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1 \text{ và } 0 \leq y \leq x\}$	0,5
	$I = \int_0^1 dx \int_0^x dy (1+y)e^x$	0,5
	$I = \int_0^1 dx (x + x^2/2)e^x$	0,5
	$I = (x^2 e^x / 2)_0^1$	0,25
	$I = e/2$	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
2			2,00
		• Vẽ được hình trụ [không bắt buộc]	
		• Tọa độ trụ $z = z, x = r \cos \phi, y = r \sin \phi$	0,5
		• Miền lấy tích phân: $\phi \in [0, \pi/2], z \in [0, a], r \in [0, b]$	0,25
		• Định thức Jacobi: $ J = r$	0,25
		• Tích phân bằng $I = \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^a dz \int_0^b dr r^3 z \sin \phi \cos \phi$	0,25
		• Tính được tích phân $\int dr r^3 = r^4/4$ [hoặc $\int dz z = z^2/2$]	0,25
		• Tính được thêm tích phân thứ hai $\int d\phi \sin \phi \cos \phi = \sin^2(\phi)/2$	0,25
		• Đáp số: $b^4 a^2 / 16$	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
3		(Làm cách khác đúng vẫn tính đủ điểm)	2,00
	a		0,5
		Biểu diễn tham số: $x = \cos t, y = \sin t, z = 1, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$	0,5
	b		1,50
		$dx = -\sin t dt, \quad dy = \cos t dt, \quad dz = 0$	0,25
		$I = \int_0^{\pi/2} (2 + \sin t + \cos t)(-\sin t) dt + (3 \cos t - 2 \sin t + 1)(\cos t) dt + 0$	0,5
		$= \int_0^{\pi/2} (-2 \sin t + \cos t - 3 \sin t \cos t - \sin^2 t + 3 \cos^2 t) dt$	0,25
		$= (2 \cos t + \sin t + \frac{3}{4} \cos 2t + t + \sin 2t) \Big _0^{\pi/2}$	0,25
		$= -\frac{5}{2} + \frac{\pi}{2}$	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
4			2,00
		<ul style="list-style-type: none"> Tham số hóa $x = u \cos v, y = u \sin v, z = 2u$ 	0,5
		<ul style="list-style-type: none"> Miền lấy tích phân $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi$ 	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> $\begin{cases} r_u = (\cos v, \sin v, 2) \\ r_v = (-u \sin v, u \cos v, 0) \end{cases}$ 	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> $\mathbf{N} = r_v \times r_u = (2u \cos v, 2u \sin v, -u)$ 	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> Đưa về tích phân $\int_0^{2\pi} \int_0^1 u^3 (\sin^2 v \cos v + 2 \cos v \sin v + 4) du dv$ 	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> Chuyển về $I = \int_0^1 u^3 du \int_0^{2\pi} (\cos^2 v \sin v + \sin 2v + 4) dv = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3} \cos^3 v - \frac{1}{2} \cos 2v + 4v \right) \Big _0^{2\pi}$ 	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> Tính đúng $I = 2\pi$ 	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
5		(Làm cách khác đúng vẫn tính đủ điểm)	2,00
		Đặt ẩn phụ: $u = \frac{y}{x}$	0,25
		Viết được: $y' = u'x + u$	0,25
		Viết lại phương trình: $u'x + u = \frac{u^2}{2u-1}$	0,25
		Viết được: $\int \frac{2u-1}{u(1-u)} du = \int \frac{dx}{x}$	0,25
		Phân tách được: $\int \frac{2u-1}{u(1-u)} du = -\int \frac{du}{u} + \frac{du}{1-u}$	0,25
		Tính được: $-\int \frac{du}{u} + \frac{du}{1-u} = -\ln u(1-u) $	0,25
		Tính được: $\int \frac{dx}{x} = \ln \bar{C}x $	0,25
		Tính được tích phân tổng quát: $u(1-u) = \frac{1}{\bar{C}x} \rightarrow \mathbf{y^2 - xy + Cx = 0}$	0,25

Trưởng bộ môn/khoa

Giảng viên ra đề

TS. Phan Quang Sáng

GS. TS. Phùng Văn Đồng

PGS. TS. Đỗ Văn Nam

TS. Lê Đức Ninh

TS. Đỗ Quốc Tuấn

TS. Vũ Hữu Nhựt

ThS. Nguyễn Đức Ngà