BÀI TẬP GIẢI TÍCH CHƯƠNG 2

Nguyễn Đức Ngà

Ngày 16 tháng 2 năm 2023

Bài 1. Sử dụng quy tắc trung điểm với $m = 4$ và $n = 2$, tính gần đúng thể tích của phần không gian giới hạn bởi mặt $z = f(x, y)$, các mặt phẳng đứng $x = 1,\ x = 2,\ y = 1,\ y = 2$, và mặt phẳng ngang $z = 0$.

(a) $f(x, y) = 4x + 2y$;

(b) $f(x, y) = 16x^2 + \dfrac{y}{2}$.

Bài 2. Sử dụng quy tắc trung điểm với $m = n = 4$, tính gần đúng tích phân $\iint\limits_R f(x, y)dA$ biết giá trị của hàm $f(x, y)$ được cho trong bảng sau.

	y				
x	9	9.5	10	10.5	11
8	9.8	5	6.7	5	5.6
8.5	9.4	4.5	8	5.4	3.4
9	8.7	4.6	6	5.5	3.4
9.5	6.7	6	4.5	5.4	6.7
10	6.8	6.4	5.5	5.7	6.8

Bài 3. Tính tích phân $\iint\limits_R f(x, y)dA$ sau trên miền được chỉ ra.

(a) $f(x, y) = 6y^2 - 2x,\ R:\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2.$

(b) $f(x, y) = xy\cos(y),\ R:\ -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \pi.$

(c) $f(x, y) = e^{x-y},\ R:\ 0 \le x \le \ln 2,\ 0 \le y \le \ln 2.$

(d) $f(x, y) = xye^{xy^2},\ R:\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1.$

(e) $f(x,y) = \dfrac{xy^3}{x^2+1}$, $R: \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 2$.

Bài 4. Sử dụng định lý Fubini, tính tích phân

$$\int_0^2 \int_0^1 \frac{x}{1+xy} dx dy.$$

Bài 5. Tính tích phân $\iint\limits_R f(x,y) dA$ sau trên miền được chỉ ra.

(a) $f(x,y) = 2x + 5y, \ R: \ 0 \le x \le 1, \ x^3 \le y \le x^3 + 1$.

(b) $f(x,y) = 1, \ R: \ 0 \le x \le \pi/2, \ \sin(x) \le y \le \sin(x) + 1$.

(c) $f(x,y) = xy, \ R: \ y^2 - 1 \le x \le \sqrt{1-y^2}, \ -1 \le y \le 1$.

(d) $f(x,y) = \sin(y)$, trong đó R là tam giác có các đỉnh là $(0,0), \ (0,3), \ (3,0)$.

(e) $f(x,y) = y - x$, trong đó R là hình vuông $|x| + |y| \le 1$.

Bài 6. Đổi thứ tự các tích phân sau

(a) $\int\limits_0^1 \int\limits_2^{4-2x} dy dx$.

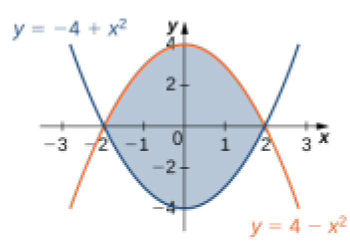
(b) $\int\limits_0^2 \int\limits_{y-2}^{0} dx dy$.

(c) $\int\limits_0^1 \int\limits_{x-1}^{1-x} x dy dx$.

(d) $\int\limits_0^{\ln 2} \int\limits_{e^y}^{2} dx dy$.

(e) $\int\limits_0^3 \int\limits_1^{e^y} (x+y) dx dy$.

Bài 7. Tính diện tích của miền phẳng dưới đây nhờ một thứ tự tích phân phù hợp.



Bài 8. Tính Jacobian của các phép đổi biến sau.

(a) $x = u + 2v,\ y = -u + v$.

(b) $x = u^3,\ y = v/u^2$.

(c) $x = e^{2u-v},\ y = e^{u-v}$.

(d) $x = u\cos(v),\ y = u\sin(v)$.

(e) $x = ue^{v},\ y = e^{-v}$.

Bài 9. Sử dụng phép đổi biến $x = -u + v,\ y = v$ để tính các tích phân sau, biết R là hình bình hành với các đỉnh là $(0,0),\ (1,0),\ (2,1),\ (1,1)$.

(a) $\iint\limits_R (y - x)dA$.

(b) $\iint\limits_R (y^2 - xy)dA$.

Bài 10. Sử dụng phép đổi biến $x = u,\ y = v/5$ để tính các tích phân sau, biết R là miền giới hạn bởi elipse $x^2 + 25y^2 = 1$.

(a) $\iint\limits_R \sqrt{x^2 + 25y^2}dA$.

(b) $\iint\limits_R (x^2 + 25y^2)^2 dA$.

Bài 11. Tính các tích phân sau bằng cách chuyển sang tọa độ cực.

(a) $\int\limits_0^3 \int\limits_0^{\sqrt{9-y^2}} (x^2 + y^2)dxdy$.

(b) $\int\limits_0^6 \int\limits_0^{y} xdxdy$.

(c) $\int\limits_{-1}^1 \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1 + x^2 + y^2)^2}dxdy$.

(d) $\int\limits_1^2 \int\limits_x^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}dydx$.

(e) $\iint\limits_R \frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}}dA$, ở đây R là miền chứa (x, y) thỏa mãn $1 \le x^2 + y^2 \le 4$.

Bài 11. Tính tích phân bội ba $\iiint\limits_B f(x, y, z)dV$ trong các trường hợp sau.

(a) $f(x,y,z) = 2x + 3y^2 + 4z,\ B:\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2,\ 0 \leq z \leq 3.$

(b) $f(x,y,z) = xy + yz + zx,\ B:\ 1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2,\ 1 \leq z \leq 3.$

(c) $f(x,y,z) = 2x + 5y + 7z,\ B:\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq -x + 1,\ 1 \leq z \leq 2.$

(d) $f(x,y,z) = x + 2yz,\ B:\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x,\ 0 \leq z \leq 5 - x - y.$

(e) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2,\ B:\ 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2x,\ 0 \leq z \leq 4 - x - y.$

Bài 12. Tính tích phân $\iiint\limits_B f(x,y,z)dV$ bằng cách chuyển sang tọa độ trụ.

(a) $f(x,y,z) = z,\ B:\ x^2 + y^2 \leq 9,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 1.$

(b) $f(x,y,z) = xz^2,\ B:\ x^2 + y^2 \leq 16,\ x \geq 0,\ y \leq 0,\ -1 \leq z \leq 1.$

(c) $f(x,y,z) = xy,\ B:\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ x \geq y,\ -1 \leq z \leq 1.$

(d) $f(x,y,z) = e^{\sqrt{x^2+y^2}},\ B:\ x^2 + y^2 \leq 4,\ x \leq y\sqrt{3},\ y \leq 0,\ 2 \leq z \leq 3.$

(e) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2},\ B:\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 1.$

Bài 13. Tính tích phân $\iiint\limits_B f(x,y,z)dV$ bằng cách chuyển sang tọa độ cầu.

(a) $f(x,y,z) = z,\ B:\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0.$

(b) $f(x,y,z) = x + y,\ B:\ 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2,\ z \geq 0,\ y \geq 0.$

(c) $f(x,y,z) = 2xy,\ B:\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2},\ x \geq 0,\ y \geq 0.$

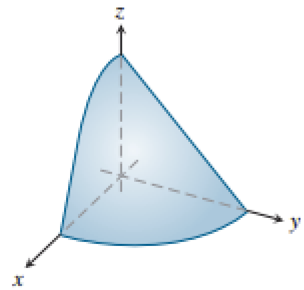
(d) $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2},\ B:\ x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2,\ x, y, z \geq 0.$

(e) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, B là miền giới hạn bởi mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

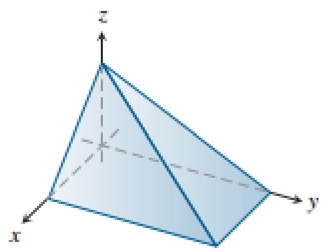
Bài 14. Viết công thức tính thể tích của phần không gian bên trong mặt cầu $x^2+y^2+z^2 = 16$ và ngoài mặt trụ $x^2 + y^2 = 4$ như một tích phân bội ba trong hệ tọa độ trụ và hệ tọa độ cầu.

Bài 15. Tính thể tích phần không gian giới hạn bởi các mặt $x^2 + y^2 = 4,\ z = 0,\ x + z = 3.$

Bài 16. Tính thể tích phần không gian ở góc phần tám thứ nhất giới hạn bởi mặt $z = 4 - x^2 - y$.



Bài 17. Tính thể tích phần không gian ở góc phần tám thứ nhất giới hạn bởi các mặt $x + z = 1,\ y + 2z = 2$.



Bài 18. (a) Sử dụng tọa độ cực, chứng minh rằng $(a > 0)$

$$\frac{\pi}{4}(1 - e^{-a^2}) \leq \int_0^a \int_0^a e^{-x^2-y^2}\, dx dy \leq \frac{\pi}{4}.$$

(b) Sử dụng hệ thức $\left(\int_0^a e^{-x^2} dx\right)\left(\int_0^a e^{-y^2} dy\right) = \int_0^a \int_0^a e^{-x^2-y^2} dx dy$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi(1 - e^{-a^2})} \leq \int_0^a e^{-x^2} dx \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(c) Dựa vào ý (b), tính giới hạn $\lim\limits_{a\to+\infty} \int_0^a e^{-x^2} dx$.

Mục tiêu của **Bài 19** và **Bài 20** là chứng minh công thức quen biết sau đây

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Bài 19. Sử dụng công thức $\dfrac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + \cdots$ với $|r| < 1$, chứng minh rằng

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Bài 20. Xét tích phân

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - xy} dx dy.$$

(a) Sủ dụng phép đổi biến $x = u - v,\ y = u + v$, chứng minh rằng

$$I = 2 \iint_D \frac{1}{1 - u^2 + v^2} dv du,$$

trong đó D là hình vuông với các đỉnh $(0, 0),\ (1/2, 1/2),\ (1, 0),\ (1/2, -1/2)$.

(b) Bằng cách chia hình vuông D thành hai phần theo đường chéo nối $(1/2, 1/2)$ với $(1/2, -1/2)$, chứng minh rằng

$$I = \int_0^{1/2} \int_{-u}^{u} \frac{1}{1 - u^2 + v^2} dv du + \int_{1/2}^{1} \int_{u-1}^{1-u} \frac{1}{1 - u^2 + v^2} dv du.$$

(c) Sử dụng công thức $\int_{-z}^{z} \frac{1}{a^2 + t^2} dt = \frac{2}{a} \arctan\left(\frac{z}{a}\right)$, chứng minh rằng

$$I = \underbrace{\int_0^{1/2} \frac{2}{\sqrt{1 - u^2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1 - u^2}}\right) du}_{I_1} + \underbrace{\int_{1/2}^{1} \frac{2}{\sqrt{1 - u^2}} \arctan\left(\frac{1 - u}{\sqrt{1 - u^2}}\right) du}_{I_2}.$$

(d) Tính các tích phân I_1 và I_2 nhờ các phép đổi biến $u = \sin(\theta)$ và $u = \cos(2\theta)$ tương ứng.