

BÀI TẬP GIẢI TÍCH

Phan Quang Sáng
Bộ môn Toán - Đại học Phenikaa

Ngày 19 tháng 10 năm 2022

Chương 1

1 Phép tính vi phân hàm số một biến

Bài 1.1. Xét sự liên tục của các hàm số sau

$$a. f(x) = |x|$$

$$c. f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

$$e. f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{nếu } x < 1 \\ 3x + 1 & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$$

$$g. y = \sqrt{2x^3 + 1},$$

$$i. y = \frac{1}{1 + \ln x},$$

$$b. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{nếu } x \neq 3 \\ a & \text{nếu } x = 3 \end{cases}$$

$$d. f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

$$f. f(x) = \begin{cases} \sin \pi x & \text{nếu } x \text{ hữu tỷ} \\ 0 & \text{nếu } x \text{ vô tỷ} \end{cases}$$

$$h. y = \frac{1}{\sqrt{2x + 1}}.$$

$$k. y = x^{\cos x}.$$

Bài 1.2. Tính các đạo hàm $f'(1)$, $f''(2)$ và $f'''(3)$ với $f(x) = (x - 1)(x - 2)^2(x - 3)^3$.

Bài 1.3. Tính đạo hàm của các hàm số sau

$$a. y = (x + 1)\sqrt{x + 2}$$

$$c. y = \sin(5 - 3x) + 2 \cos(1 + 3x)$$

$$e. y = \frac{2x - 1}{3 - 5x}$$

$$g. y = \sqrt{2x^3 + 1}$$

$$i. y = \frac{1}{1 + \ln x}$$

$$l. y = \begin{cases} x^2 e^{-x^2} & \text{nếu } |x| \leq 1 \\ \frac{1}{e} & \text{nếu } |x| > 1 \end{cases}$$

$$b. y = \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{(x + 1)^2} + \frac{1}{(3 - x)^3}$$

$$d. y = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

$$f. y = x^2 \ln(2x + 1)$$

$$h. y = \frac{1}{\sqrt{2x + 1}}$$

$$k. y = x^{\cos x}$$

Bài 1.4. Tính đạo hàm cấp cao của các hàm số sau

$$a. y = e^{x \sin x}, y''(0)$$

$$c. y = \ln(x^2 - 3x + 2), y^{(5)}(4)$$

$$e. y = x^2 e^x, y^{(10)}(0)$$

$$i. y = \sqrt{3x + 1}, y^{(n)}$$

$$g. y = \ln \frac{1 + 2x}{1 - 2x}, y^{(100)}$$

$$b. y = \frac{x^2}{1 - x^2}, y^{(4)}$$

$$d. y = \frac{1}{2x + 1}, y^{(n)}$$

$$f. y = \sin(2x), y^{(100)}$$

$$k. y = \frac{1}{\sqrt[3]{-x + 3}}, y^{(n)}$$

Bài 1.5. Chứng minh rằng phương trình

$$\frac{x^{2021}}{2021} + \frac{x^{2020}}{2020} + \cdots + \frac{x^2}{2} + x + 1 = 0$$

có một nghiệm thực duy nhất.

Bài 1.6. Tìm số trung gian c trong định lý Rolles cho hàm số $f(x) = (x+1)(x-2)(x+5)$.

Bài 1.7. Tìm số trung gian c trong định lý Lagrange cho hàm số $f(x) = x^3 - 5x$ and $a = 0, b = 2$.

Bài 1.8. Giả sử hàm số f khả vi liên tục đến cấp hai trên \mathbb{R} và có 3 nghiệm phân biệt.

- (a) Sử dụng định lý Rolle cho hàm $G(x) = e^{-2x}f(x)$ để chứng minh rằng phương trình $f'(x) - 2f(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt.
- (b) Chứng minh rằng phương trình $f''(x) - 4f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm.

Bài 1.9. Giả sử hàm số f khả vi trên \mathbb{R} và có 2 nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng các phương trình sau có nghiệm:

- (a) $f(x) - f'(x) = 0$.
- (b) $xf(x) + f'(x) = 0$.

Bài 1.10. Giả sử hàm số f liên tục trên $[0; 1]$, khả vi trên $(0; 1)$, và $f(1) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại điểm $c \in (0; 1)$ sao cho

$$2021f(c) + cf'(c) = 0.$$

Bài 1.11. Giả sử các số thực a_0, a_1, \dots, a_n thỏa mãn

$$\frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} + \cdots + \frac{a_1}{2} + a_0 = 0.$$

Chứng minh rằng đa thức $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ có ít nhất một nghiệm trên $(0; 1)$.

2 Khai triển Taylor

Bài 2.1. Viết khai triển Taylor của hàm $f(x) = x^5 + 2x^3 - 7$ theo lũy thừa của $(x-3)$.

Bài 2.2. Viết khai triển Taylor của hàm $f(x) = \frac{1}{x+2}$ tại $x = 1$.

Bài 2.3. Viết khai triển Maclaurin đến cấp 4 của hàm $f(x) = x^2 e^x$.

Bài 2.4. Khai triển hàm $y = \ln(1+2x)$ theo lũy thừa nguyên dương của x tới x^4 .

Bài 2.5. Viết khai triển Taylor của hàm $f(x) = e^{2x-x^2}$ tới x^4 .

Bài 2.6. Khai triển hàm $y = \sin^2(3x)$ theo lũy thừa nguyên dương của $x - \frac{\pi}{2}$ tới $(x - \frac{\pi}{2})^3$.

Bài 2.7. Tìm 4 số hạng đầu trong khai triển Taylor của $y = x^{10} - 4x^5 + 4x^2 - 7x$ tại $x = 2$. Sử dụng khai triển này để tính xấp xỉ $y(2,05)$ and $y(1,97)$.

Bài 2.8. Cho hàm $f(x) = x^n$, với n là một số nguyên dương. Chứng minh

$$f(1) + \frac{f'(1)}{1!} + \frac{f''(1)}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = 2^n.$$

3 Chuỗi số - Chuỗi Taylor - Chuỗi Maclaurin

Bài 3.1. Tìm giá trị của chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}.$$

Bài 3.2. Tìm giá trị của chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{6^n}.$$

Bài 3.3. Khai triển hàm số $f(x) = \frac{1}{1-x}$ thành chuỗi lũy thừa của x .

Bài 3.4. Khai triển hàm số $f(x) = \ln(1 + 3x)$ thành chuỗi lũy thừa của x .

Bài 3.5. Khai triển hàm số $y = \sqrt{x+1}$, sau đó hàm $y = \sqrt{x^2+1}$, thành chuỗi lũy thừa của x .

Bài 3.6. Khai triển hàm số $y = \frac{1}{\sqrt[3]{2x+3}}$ thành chuỗi lũy thừa của x .

Bài 3.7. Khai triển hàm số $f(x) = \sin(2x)$ thành chuỗi lũy thừa của x .

4 Function of several variables

For problems 4.1-4.3, find the partial derivatives and the total differentials (of order 1, and 2) for the given functions.

Problem 4.1. $u(x, y) = x^3 \sin^2 y$.

Problem 4.2. $u(x, y) = (x + 1) \arctan \frac{x}{y+1}$.

Problem 4.3. $u(x, y, z) = x^3 e^{yz^2}$.

Problem 4.4. Find the second partial derivatives of the functions

$$f(x, y) = \ln \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{và} \quad g(x, y, z) = \frac{z^2}{x + y^3}.$$

Problem 4.5. Let $u = \ln(x^2 + y^2)$. Compute $\Delta = u''_{xx} + u''_{yy}$.

Problem 4.6. Find functions $u = u(x, y)$ satisfying $u'_x = 1$, $u'_y = y$ and $u(0, 0) = 0$.

Problem 4.7. Find functions $u = u(x, y)$ satisfying $u'_x = e^y$, $u'_y = xe^y$.

Problem 4.8. Find functions $u = u(x, y)$ satisfying $u'_x = 2x \sin(x^2 + y^2)$, $u'_y = 2y \sin(x^2 + y^2) + 1$ and $u(0, \sqrt{\pi}) = \pi$.

Problem 4.9. Let $z = z(x, y)$ be a function satisfying

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Find the first and second partial derivatives of z .

Problem 4.10. Let $z = z(x, y)$ be a function satisfying

$$x + y + z = e^z.$$

Find the first and second partial derivatives of z .