TRƯỜNG ĐẠI HỌC PHENIKAA
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN

BÀI TẬP ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

HỌC KỲ 1, NĂM HỌC 2023-2024
Hà Nội, 17/10/2023

Chương 1

Ma trận, Định thức, và Hệ phương trình tuyến tính

1.1 Bài tập đề nghị

Bài 1. Cho hai ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

(a) Thực hiện tính $3A + 2C^T$.

(b) Tìm ma trận $CA - 3B + I$.

Bài 2. Cho các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tính A^2, AB và BA.

Bài 3. Cho các ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}.$$

Tính các ma trận sau (nếu tồn tại): AB, BA, AC, B^2, và CB.

Bài 4. Có hai sinh viên X và Y đi chợ mua Cá, Thịt và Rau. Sinh viên X mua 2kg Cá, 3kg Thịt và 4 bó Rau. Sinh viên Y mua 1kg Cá, 1.5kg Thịt và 5 bó Rau. Giá tiền các loại thực phẩm như sau: 100 ngàn/1kg Cá, 120 ngàn/1kg Thịt và 10 ngàn/1 bó Rau. Các thông tin trên được lưu lại trong các ma trận sau

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1,5 & 5 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 100 \\ 120 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

(a) Tính AB.

(b) Cho biết ý nghĩa của tích AB.

Bài 5. Cho các ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 6 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Tính AB và $B^T A^T$.

(b) Kiểm tra lại đẳng thức $(AB)^T = B^T A^T$ có đúng với các ma trận A và B không?

Bài 6. Cho các ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Tìm ma trận X sao cho $2A - X = -B^T$.

(b) Tìm ma trận Y sao cho $2Y^T - BA = 0$.

Bài 7. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$. Tìm hai ma trận B và C cấp 2×2 sao cho $AB = AC$ nhưng $B \neq C$.

Bài 8. Cho các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Tính AB và BA.

(b) Liệu có tồn tại ma trận X sao cho $(AB - BA)X = I$ không?

Bài 9. Cho các ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix}, \text{ với } \ a, b \in \mathbb{R}.$$

Tìm liên hệ giữa a và b của ma trận B để cho ma trận B có thể giao hoán với ma trận A (theo phép nhân ma trận), tức là $AB = BA$.

Bài 10. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

(a) Chứng minh rằng $A^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$.

(b) Chứng minh bằng phương pháp quy nạp rằng $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$ với $n \geq 1$.

Bài 11. Tính C^n với ma trận

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bài 12. Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Tìm ma trận X sao cho $A^2 + 2A - 3X = 0$;

(b) Tính A^{2023}. (*Gợi ý: xét phần dư phép chia đa thức A^{2023} cho đa thức $A^2+2A-3X$ ở câu trên*)

Bài 13. Tính định thức của các ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 5 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Bài 14. Tính các định thức sau:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & -1 & 4 \end{vmatrix};$$

Bài 15. Tìm hạng của các ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & 7 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 7 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -5 \\ 10 & 2 & 4 & 15 \end{bmatrix}.$$

Bài 16. Biện luận hạng của các ma trận sau theo m:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & m & -1 & 2 \\ 2 & -1 & m & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bài 17. Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ x & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Tìm x để ma trận A khả nghịch và thỏa mãn $\det(A^{-1}) = 3$.

Bài 18. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau (nếu có):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Bài 19. Các ma trận sau có khả nghịch không? Nếu có, hãy tìm ma trận nghịch đảo của chúng bằng hai phương pháp: phần bù đại số và phương pháp khử Gauss-Jordan.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

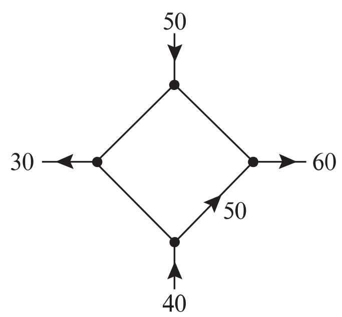
Bài 20. Tìm ma trận X thỏa mãn:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}; \quad (b) X \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Bài 21. Sử dụng phương pháp Cramer để giải các hệ phương trình sau

$$(a) \begin{cases} 3x - 5y & = 7 \\ 4x + 7y & = -2 \end{cases}; \quad (b) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 7x_3 & = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 & = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 & = 6 \end{cases}.$$

Bài 22. Hình vẽ dưới đây mô tả một mạng lưới giao thông, với số lượng phương tiện và hướng di chuyển trên mỗi nhánh đã biết được ghi trên hình. Hãy lập một hệ phương trình, từ đó xác định số lượng phương tiện và hướng di chuyển ở các nhánh còn lại.



Bài 23. Cân bằng phản ứng hóa học sau bằng cách điền các số thích hợp vào ô trống.

$$\square HCl + \square Na_3PO_4 \longrightarrow \square H_3PO_4 + \square NaCl.$$

Bài 24. Giải các hệ phương trình sau:

$$a)\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4 &= 5\\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4 &= 1\\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4 &= 1\\ 4x_1+3x_2+2x_3+x_4 &= -5\end{cases} \qquad b)\begin{cases} 5x_1-x_2+2x_3+x_4 &= 7\\ 2x_1+x_2+4x_3-2x_4 &= 1\\ x_1-3x_2-6x_3+5x_4 &= 0\end{cases}$$

Bài 25. Với giá trị nào tham số m thì hệ phương trình sau có nghiệm.

$$\begin{cases} x+y+10z-6t &= 3,\\ x+2y+mz-t &= 1,\\ 2x+5y-z+mt &= 2.\end{cases}$$

Bài 26. Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x-3y+z-3t &= 1,\\ -3x+5y-4z+t &= -3,\\ x-2y+3z+2t &= m+1.\end{cases}$$

(a) Tìm điều kiện của m để hệ phương trình trên có nghiệm.

(b) Với m tìm được ở ý (a), hãy giải hệ phương trình đã cho.

Bài 27. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+ax_3 &= 3;\\ 3x_1-x_2-ax_3 &= 2;\\ 2x_1+x_2+3x_3 &= b.\end{cases}$$

Xác định a và b để:

(a) Hệ có nghiệm duy nhất.

(b) Hệ có vô số nghiệm.

(c) Hệ vô nghiệm.

Bài 28. Với a và b là hai chữ số cuối trong mã số sinh viên của bạn, xét hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x+y+3z-3t &= 5+a,\\ 2x+ay+z-2bt &= m+b,\\ 11x+(3+4a)y+13z-(9+8b)t &= 2a+3b.\end{cases}$$

(a) Tìm điều kiện của m để hệ phương trình trên có nghiệm.

(b) Với m tìm được ở ý (a), hãy giải hệ phương trình đã cho.

1.2 Bài tập tham khảo

Bài 1. Trong không gian các ma trận vuông thực cỡ 2:

(a) Tìm hai ma trận A sao cho $A^2 = I_2$.

(b) Tìm hai ma trận A sao cho $A^2 = 0$.

(c) Tìm ba ma trận A sao cho $A^2 = A$.

(d) Tìm hai ma trận A và B sao cho $AB = 0$ nhưng $BA \neq 0$.

(e) Liệt kê tất cả các ma trận bậc thang dòng cỡ 2.

Bài 2. Cho biết

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2023.$$

Tính các định thức sau:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{vmatrix} a & b & c \\ x+5a & y+5b & z+5c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

Bài 3. Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-a \end{vmatrix}.$$

Bài 4. Giải các phương trình

$$(a) \begin{vmatrix} 1-a & -3 & 2 \\ -3 & 7-a & -5 \\ 2 & -5 & 8-a \end{vmatrix} = 0 \qquad (b) \begin{vmatrix} 1-a & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2-a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2-a \end{vmatrix} = 0.$$

Bài 5. Tìm hạng của các ma trận sau:

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{bmatrix}; \quad E = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 & 9 \\ -2 & 6 & -6 & -1 & -10 \\ -3 & 9 & -6 & -6 & -3 \\ 3 & -9 & 4 & 9 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bài 6. Biện luận hạng của các ma trận sau theo m:

$$B = \begin{bmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m \end{bmatrix}.$$

Bài 7. Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -7 & -9 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Tìm cột thứ ba của A^{-1} mà không cần tính các cột khác.

Bài 8. Cho các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 11 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Không cần tính A^{-1}, hãy tính $A^{-1}B$. (Gợi ý: $A^{-1}B$ là nghiệm của phương trình $AX = B$.)

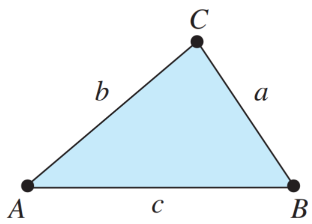
Bài 9. Cho A là một ma trận vuông. Chứng tỏ rằng nếu A tất cả các phần thử của A đều là số nguyên và $|\det(A)| = 1$ thì tất cả các phần tử của A^{-1} cũng đều là số nguyên.

Bài 10. Cho A là một ma trận vuông và A^0 là ma trận phụ hợp của A. Chứng minh rằng:

(a) Nếu A không khả nghịch thì $AA^* = A^*A = 0$

(b) Nếu A khả nghịch thì $\det(A^*) = (\det A)^{n-1}$.

Bài 11. Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh là a, b, c như hình vẽ.



(a) Chứng tỏ rằng ta có đẳng thức sau

$$c = a\cos B + b\cos A.$$

Gợi ý: Dựng đường cao CH của tam giác.

(b) Từ ý (a) ta có hệ phương trình theo các ẩn số $\cos A, \cos B, \cos C$ như sau

$$\begin{cases} \phantom{c\cos A +{}} c\cos B + b\cos C = a \\ c\cos A + + a\cos C = b \\ b\cos A + a\cos B = c. \end{cases}$$

Hãy chứng minh định lý cosin

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

bằng cách dùng phương pháp Cramer để tìm $\cos C$ cho hệ phương trình trên.

Bài 12. Để tìm nguyên hàm của hàm số

$$f(x)=\frac{4x^3-13x^2-18x-9}{(x+3)^2(x-3)^2},$$

người ta phân tích f thành các số hạng như sau

$$\frac{4x^3-13x^2-18x-9}{(x+3)^2(x-3)^2}=\frac{a}{x+3}+\frac{b}{(x+3)^2}+\frac{c}{x-3}+\frac{d}{(x-3)^2},$$

với $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Hãy tìm các số a,b,c,d.

Bài 13. Với mỗi ma trận vuông A và đa thức $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$, ta định nghĩa

$$p(A)=a_0I+a_1A+\cdots+a_nA^n.$$

Chẳng hạn, với $p(x)=2+3x-5x^2$ thì

$$p(A)=2I+3A-5A^2.$$

Cho ma trận

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{bmatrix}.$$

(a) Tính $p(A)$ biết $p(x)=6-5x+x^2$.

(b) Tìm hai số a và b sao cho

$$x^{2023}=(6-5x+x^2)q(x)+a+bx.$$

(Gợi ý: thay lần lượt $x=2$ và $x=3$ vào hai vế.)

(c) Tính A^{2023}. (Gợi ý: Thay x bởi A vào hai vế của đẳng thức trong ý (b).)

Bài 14. Mỗi năm có 5% dân số trong thành phố chuyển ra ngoại ô và có 3% dân số ngoại ô vào thành phố. Với mỗi số nguyên không âm k, ký hiệu x_k và y_k lần lượt là dân số ở thành phố và ở ngoại ô trong năm thứ k.

(a) Điền vào ô trống các số phù hợp sao cho các đẳng thức sau đúng

$$\begin{cases}x_k=\square x_{k-1}+\square y_{k-1},\\ y_k=\square x_{k-1}+\square y_{k-1}.\end{cases}$$

(b) Cho biết dân số hiện tại $x_0=600$ ngàn người và $y_0=400$ ngàn người. Tính dân số ở thành phố và ngoại ô trong năm tiếp theo.

(c) Tìm ma trận P sao cho

$$\begin{bmatrix}x_k\\ y_k\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}x_{k-1}\\ y_{k-1}\end{bmatrix}.$$

(d)* Sử dụng phương pháp tương tự **Bài 13.**, tính P^k với k nguyên dương.

(e)* Có thể nói gì về dân số ở thành phố và ngoại ô sau rất nhiều năm, biết thông tin hiện tại như ý (b).
(Gợi ý: Khi k tiến ra vô cùng thì P^k tiến đến ma trận nào?)