

Chương 3

ĐỘNG LỰC HỌC VẬT RẮN

Nội dung giảng dạy

3.1. Hệ chất điểm. Khối tâm của cơ hệ.

3.2. Định luật bảo toàn động lượng.

3.3. Chuyển động của vật rắn.

3.4. Phương trình cơ bản của chuyển động quay của vật rắn quanh một trục cố định.

3.5. Mômen động lượng của một hệ chất điểm.

3.6. Định luật bảo toàn mômen động lượng.

3.1. Hệ chất điểm. Khối tâm của cơ hệ

3.1.1. Hệ chất điểm. Vật rắn

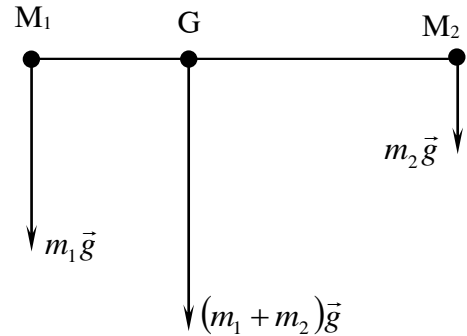
Hệ chất điểm là một tập hợp chất điểm. Vật rắn có thể được xem như là một hệ chất điểm, trong đó khoảng cách giữa hai chất điểm bất kỳ của hệ luôn không đổi.

3.1.2. Định nghĩa khối tâm hệ chất điểm

a. Khối tâm của hệ hai chất điểm

Giả thiết có một hệ gồm hai chất điểm M_1 và M_2 (hình 3.1), với khối lượng lần lượt là m_1 và m_2 đặt trong trọng trường đều.

Trọng lực tác dụng lên các chất điểm M_1 và M_2 là hai vector $m_1\vec{g}$ và $m_2\vec{g}$ song song cùng chiều. Hợp lực của hai lực song song cùng chiều này là một lực có điểm đặt G nằm trên M_1M_2 sao cho:



Hình 3.1

$$\frac{\overline{M_1G}}{\overline{M_2G}} = -\frac{\vec{P}_2}{\vec{P}_1} = -\frac{m_2\vec{g}}{m_1\vec{g}} = -\frac{m_2}{m_1},$$

hay
$$m_1\overline{M_1G} + m_2\overline{M_2G} = 0.$$

Viết biểu thức trên dưới dạng vector ta có:

$$m_1\overline{M_1G} + m_2\overline{M_2G} = 0 \quad (3.1)$$

Điểm G thoả mãn (3.1) được gọi là khối tâm của hệ hai chất điểm.

b. Trường hợp tổng quát khối tâm của một hệ chất điểm

Khối tâm của một hệ chất điểm M_1, M_2, \dots, M_n lần lượt có khối lượng m_1, m_2, \dots, m_n là một điểm G xác định bởi phương trình

$$m_1 \overrightarrow{M_1 G} + m_2 \overrightarrow{M_2 G} + \dots + m_n \overrightarrow{M_n G} = 0.$$

Suy ra:

$$\boxed{\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{M_i G} = 0} \quad (3.2)$$

c. Tọa độ khối tâm

Việc xác định tọa độ của khối tâm G đối với một gốc tọa độ O của một hệ chất điểm bất kỳ được phân tích như sau. Gọi M_i là chất điểm bất kỳ, ta có:

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OM_i} + \overrightarrow{M_i G}. \quad (3.3)$$

Nhân hai vế của (3.3) với m_i ta được:

$$m_i \overrightarrow{OG} = m_i \overrightarrow{OM_i} + m_i \overrightarrow{M_i G}.$$

Với cả hệ, chúng ta lấy tổng: $\left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OM_i} + \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{M_i G}.$

Mà $\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{M_i G} = 0$. Do đó $\left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OM_i}.$

Từ đó suy ra:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (3.4)$$

Đặt $\overrightarrow{OG} = \vec{R}$; $\overrightarrow{OM_i} = \vec{r_i}$. Ta có:

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r_i}}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (3.5)$$

\vec{R} xác định theo biểu thức (3.5) gọi là vector tọa độ khối tâm của một hệ chất điểm.

*** Cách xác định tọa độ khối tâm của hệ chất điểm phân bố liên tục (vật rắn)**

Gọi dm là khối lượng của yếu tố thể tích dV nằm tại vị trí xác định bởi vector \vec{R} , khi đó ta có:

$$dm = \rho(\vec{R}).dV$$

Trong đó $\rho(\vec{R})$ gọi là mật độ khối lượng phụ thuộc vào vector tọa độ \vec{R} . Tọa độ khối tâm được xác định bởi công thức:

$$\vec{R} = \frac{1}{m} \int_V \vec{R}.dm = \frac{1}{m} \int_V \vec{R}.\rho(\vec{R}).dV.$$

3.1.3. Vận tốc của khối tâm

a. Vector vận tốc của khối tâm

Ta có:
$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt}. \quad (3.6)$$

Suy ra

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_{i=1}^n m_i},$$

trong đó $\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i$ là vector vận tốc của chất điểm M_i nên

$$\vec{V} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad (3.7)$$

mà $\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \vec{P}$ là tổng động lượng cả hệ. Như vậy, vận tốc khối tâm:

$$\vec{V} = \frac{\vec{P}}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (3.8)$$

b. Vector động lượng của khối tâm

Từ (3.8) ta suy ra tổng động lượng của hệ là :

$$\vec{P} = \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \vec{V}. \quad (3.9)$$

Như vậy, tổng động lượng của hệ bằng động lượng của một chất điểm đặt tại khối tâm của hệ, có khối lượng bằng tổng khối lượng của hệ và có vận tốc bằng vận tốc khối tâm của hệ.

3.1.4. Phương trình chuyển động của khối tâm

Giả thiết các chất điểm M_1, M_2, \dots, M_n của hệ lần lượt chịu tác dụng của những lực: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ và chuyển động với các vector gia tốc $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ thoả mãn các phương trình:

$$\begin{aligned} m_1 \vec{a}_1 &= \vec{F}_1, \\ m_2 \vec{a}_2 &= \vec{F}_2, \\ &\dots\dots\dots, \\ m_n \vec{a}_n &= \vec{F}_n. \end{aligned}$$

Ta đạo hàm hai vế của (3.7) theo thời gian:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{V}}{dt} &= \frac{\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}{\sum_{i=1}^n m_i} \\
 \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \frac{d\vec{V}}{dt} &= \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \\
 \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \vec{A} &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_i .
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

trong đó $\vec{A} = \frac{d\vec{V}}{dt}$ là vector gia tốc khối tâm.

Như vậy, khối tâm của một hệ chuyển động như một chất điểm có khối lượng bằng tổng khối lượng của hệ và chịu tác dụng của một lực bằng tổng ngoại lực tác dụng lên hệ.

3.2. Định luật bảo toàn động lượng

3.2.1. Đối với một hệ cô lập

* Trường hợp hệ gồm hai chất điểm

Theo định luật III Newton, tổng các lực tương tác (ở đây là nội lực tương tác):

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 .$$

Gọi \vec{p}_1 và \vec{p}_2 là vector động lượng của hai chất điểm, ta có:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{p}_1}{dt} &= \vec{F}_1, \quad \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_2, \\
 \Rightarrow \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \\
 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) &= 0 . \\
 \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 &= \text{const}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

* Trường hợp tổng quát

Đối với một hệ chất điểm chuyển động, áp dụng định lý I về động lượng, ta có:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{P}}{dt} &= \vec{F} , \\
 \Rightarrow \frac{d}{dt}(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n) &= \vec{F} .
 \end{aligned}$$

trong đó \vec{F} là tổng các ngoại lực tác dụng lên hệ (vì tổng các nội lực tương tác trong hệ bằng không).

Với hệ cô lập: $\vec{F} = 0$ nên

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n) &= 0 \\ \Rightarrow m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n &= \text{const} \\ \Rightarrow \vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_n &= \text{const}.\end{aligned}\quad (3.12)$$

Như vậy, tổng động lượng của một hệ cô lập luôn được bảo toàn.

3.2.2. Sự bảo toàn động lượng theo một phương

Trường hợp hệ không cô lập ($\vec{F} \neq 0$), nhưng tổng hợp lực theo phương x luôn bằng 0 ($F_x = 0$), khi đó chiếu phương trình động lượng theo phương x, ta có:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + \dots + m_n v_{nx}) &= F_x = 0 \\ \Rightarrow m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + \dots + m_n v_{nx} &= \text{const}.\end{aligned}\quad (3.13)$$

Như vậy, nếu tổng hợp lực theo phương nào đó bằng 0 thì hình chiếu của động lượng theo phương đó được bảo toàn.

3.2.3. Ví dụ về ứng dụng định luật bảo toàn động lượng

Giả sử một khẩu súng có khối lượng M đặt trên giá nằm ngang; trong nòng súng có một viên đạn khối lượng m (hình 3.2).

Khi bắn, đạn bay về phía trước với vận tốc \vec{v} , súng giật lùi về phía sau với vận tốc \vec{V} .

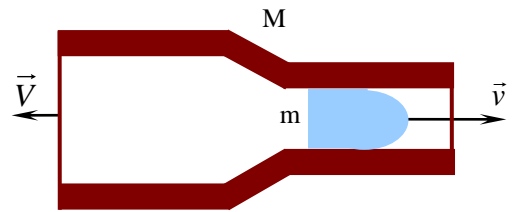
Vì hệ kín, tổng động lượng của hệ trước khi bắn bằng 0.

Tổng động lượng của hệ ngay sau khi bắn: $m\vec{v} + M\vec{V}$.

Theo định luật bảo toàn động lượng, $m\vec{v} + M\vec{V} = 0$.

$$\Rightarrow \vec{V} = -\frac{m}{M}\vec{v}.\quad (3.14)$$

Dấu (-) chứng tỏ \vec{v} và \vec{V} ngược chiều. Về độ lớn, V tỷ lệ thuận với m và tỷ lệ nghịch với M, súng càng nặng thì khi bắn càng ít bị giật lùi.



Hình 3.2

3.3. Chuyển động của vật rắn

Vật rắn là một hệ chất điểm, trong đó khoảng cách giữa các chất điểm không thay đổi.

Chuyển động của một vật rắn bao gồm hai chuyển động cơ bản là chuyển động tịnh tiến và chuyển động quay.

3.3.1. Chuyển động tịnh tiến

* Đặc điểm

Khi vật rắn chuyển động tịnh tiến, mọi chất điểm chuyển động theo những quỹ đạo giống nhau.

Tại mỗi thời điểm, các chất điểm của vật rắn đều có cùng vector vận tốc và vector gia tốc.

Phương trình chuyển động của vật rắn tịnh tiến:

$$\left(\sum_i m_i \right) \vec{a} = \sum_i \vec{F}_i. \quad (3.15)$$

(3.15) cũng chính là phương trình chuyển động của khối tâm vật rắn. Như vậy, để khảo sát chuyển động tịnh tiến của vật rắn ta chỉ cần xét chuyển động của khối tâm vật rắn.

3.1.2. Chuyển động quay

* Đặc điểm

Mọi chất điểm của vật rắn vạch ra những vòng tròn có cùng trục (Δ).

Trong cùng một khoảng thời gian mọi chất điểm đều quay được cùng một góc θ .

Tại cùng một thời điểm, mọi chất điểm đều có cùng vận tốc góc và cùng gia tốc góc

$$\omega = \frac{d\theta}{dt},$$
$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Tại một thời điểm, vector vận tốc và vector gia tốc tiếp tuyến của một chất điểm bất kỳ trên vật rắn cách trục quay một khoảng r_i được xác định bằng hệ thức:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i,$$
$$\vec{a}_{ti} = \vec{\beta} \wedge \vec{r}_i.$$

3.4. Phương trình cơ bản của chuyển động quay của vật rắn quanh một trục cố định

3.4.1. Mômen lực trong chuyển động quay

Giả thiết có một lực \vec{F} tác dụng lên vật rắn quay xung quanh một trục Δ , đặt tại điểm M (hình 3.3). Ta phân tích \vec{F} thành hai thành phần:

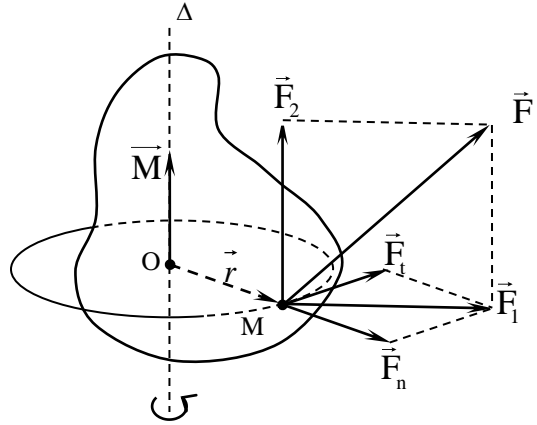
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,$$

trong đó \vec{F}_1 vuông góc với trục, \vec{F}_2 song song với trục. Lực \vec{F}_1 nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục Δ đi qua M lại được phân tích làm hai thành phần:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_t + \vec{F}_n.$$

Ta xét tác dụng của lực tiếp tuyến \vec{F}_t tại điểm M ứng với đường tròn bán kính $OM = r$.

Thực nghiệm chứng tỏ rằng tác dụng của lực không những phụ thuộc vào cường độ của nó mà còn phụ thuộc vào khoảng cách r , khoảng cách r càng lớn thì tác dụng của lực càng mạnh. Để đặc trưng đầy đủ hơn tác dụng của lực trong chuyển động quay người ta đưa ra đại lượng *mômen lực*.



Hình 3.3

Mômen của lực \vec{F}_t đối với trục quay Δ là một vector \vec{M} được xác định bởi:

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}_t. \quad (3.20)$$

\vec{M} có phương vuông góc với mặt phẳng chứa \vec{r} và \vec{F}_t , nghĩa là phương của trục quay, chiều thuận đối với chiều quay từ \vec{r} sang \vec{F}_t , độ lớn:

$$M = r \cdot F_t \cdot \sin(\vec{r}, \vec{F}_t) \Rightarrow M = r \cdot F_t.$$

Đơn vị của mômen lực theo hệ SI là N. m.

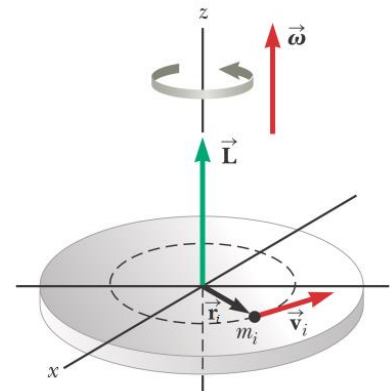
Chú ý: mômen của lực \vec{F} đối với trục quay Δ sẽ bằng không khi lực đó bằng không hoặc khi lực đó đồng phẳng với trục quay Δ .

3.4.2. Phương trình cơ bản của chuyển động quay của vật rắn

Xét chất điểm M_i bất kỳ thuộc vật rắn, cách trục quay Δ một khoảng r_i ứng với bán kính vector $\overrightarrow{OM_i} = \vec{r}_i$, có khối lượng m_i , dưới tác dụng của lực theo phương tiếp tuyến với quỹ đạo \vec{F}_i .

Theo định luật II Newton chất điểm này sẽ chuyển động với gia tốc tiếp tuyến \vec{a}_i thỏa mãn phương trình:

$$\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i.$$



Hình 3.4

Độ lớn: $F_i = m_i a_i$. Mà $M_i = r_i \cdot F_i$. Sau khi biến đổi, ta được:

$$M_i = m_i r_i^2 \beta.$$

Dạng vector: $\vec{M}_i = m_i r_i^2 \vec{\beta}.$ (3.22)

Để tính cho cả vật rắn, ta cộng theo hai vế của phương trình (3.22) cho các chất điểm của vật rắn:

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \vec{\beta}. \quad (3.23)$$

Với $\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i$ tổng hợp mômen ngoại lực tác dụng lên vật rắn. $\left(\sum_i m_i r_i^2 \right) = I$ gọi là *mômen quán tính* của vật rắn đối với trục quay Δ .

Ta được: $\vec{M} = I \vec{\beta}.$ (3.24)

Phương trình (3.24) gọi là phương trình cơ bản của chuyển động quay của vật rắn xung quanh một trục. Ta cũng có thể viết:

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{M}}{I} \quad (3.25)$$

Như vậy, gia tốc góc trong chuyển động quay của vật rắn xung quanh một trục cố định tỷ lệ với mômen lực đối với trục quay và tỷ lệ nghịch với mômen quán tính của nó.

3.5. Mômen động lượng của hệ chất điểm

Mômen động lượng của chất điểm i đối với trục Δ : $\vec{L}_i = \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i$. Mômen động lượng của cả hệ sẽ là

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i.$$

Vì \vec{v} vuông góc với \vec{r}_i nên độ lớn L được xác định bởi phương trình sau:

$$L = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega = I \omega.$$

Dạng vector:

$$\vec{L} = I \vec{\omega}.$$

3.6. Định luật bảo toàn mômen động lượng của hệ chất điểm

3.6.1. Định luật

Ta có:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt},$$

nghĩa là đạo hàm theo thời gian của vector mômen động lượng của vật rắn quay

quanh một trục cố định bằng tổng mômen của các ngoại lực tác dụng lên vật rắn tại thời điểm đó

Khi tổng hợp mômen lực tác dụng lên vật bằng 0 thì

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}}{dt} &= 0, \\ \Rightarrow \vec{L} &= I\vec{\omega} = \text{const.}\end{aligned}\quad (3.15)$$

Như vậy, đối với một vật cô lập hoặc chịu tác dụng của những lực mà mômen của các lực đó đối với điểm gốc O bằng 0 thì mômen động lượng của nó là một đại lượng bảo toàn.

Người ta còn áp dụng định luật này cho trường hợp một hệ chất điểm. Khi $\vec{M} = 0$, ta được:

$$I_1\vec{\omega}_1 + I_2\vec{\omega}_2 + \dots + I_n\vec{\omega}_n = \text{const.} \quad (3.16)$$

3.6.2. Định lý

Từ $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \Rightarrow d\vec{L} = \vec{M}.dt$. Tích phân hai vế phương trình trên trong khoảng thời gian từ t_1 đến t_2 ta được

$$\Delta\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}.dt.$$

Đại lượng này gọi là xung lượng của mômen lực trong khoảng thời gian

$$\Delta t = t_2 - t_1.$$

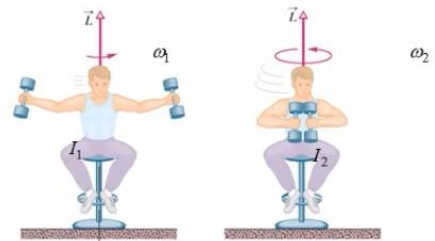
Như vậy, độ biến thiên vector mômen động lượng của vật rắn quay quanh một trục cố định bằng xung lượng của tổng mômen lực tác dụng lên vật rắn trong khoảng thời gian tương ứng

3.6.3. Ứng dụng định luật

Đối với một hệ quay xung quanh một trục với vận tốc góc ω , nếu tổng hợp mômen ngoại lực tác dụng bằng 0, thì mômen động lượng của hệ được bảo toàn: $L = I\omega = \text{const}$.

Nếu mômen quán tính I của hệ tăng thì ω giảm, hệ quay chậm lại; ngược lại, nếu mômen quán tính I của hệ giảm thì ω tăng, hệ quay nhanh lên.

Thí dụ một người múa làm động tác quay tròn, ở đây ngoại lực tác dụng là trọng lực và phản lực của mặt sàn (bỏ qua ma sát), chúng đều có phương thẳng đứng, nghĩa là song song với trục quay nên mômen của chúng đối với trục quay bằng không. Như vậy, nếu người đó dang tay ra (I tăng) thì vận tốc quay sẽ giảm, nếu



$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 = \text{const}$$

Hình 3.5

người đó thu tay lại (I giảm) thì vận tốc quay sẽ tăng.

3.6.4. Mômen quán tính

a. Mômen quán tính

Nếu vật rắn có khối lượng phân bố thành từng phần tử có khối lượng m_i , nằm cách trục quay những khoảng tương ứng r_i thì mômen quán tính của vật rắn đối với trục quay Δ là:

$$I = \sum_i m_i \cdot r_i^2. \quad (3.26)$$

Nếu vật rắn có khối lượng phân bố liên tục, chia vật rắn thành những phần tử có khối lượng nguyên tố dm , khoảng cách từ dm đến trục quay là r , mômen quán tính của vật rắn đối với trục quay Δ sẽ là:

$$I = \int_{\text{toàn vật}} r^2 dm. \quad (3.27)$$

Trong chuyển động quay, mômen quán tính có ý nghĩa tương tự như khối lượng trong chuyển động tịnh tiến, mômen quán tính càng lớn thì gia tốc góc càng nhỏ, sự thay đổi trạng thái chuyển động càng ít. *Mômen quán tính là số đo quán tính của vật trong chuyển động quay.*

b. Mômen quán tính của một số vật rắn

Mômen quán tính của một thanh đồng chất chiều dài ℓ , khối lượng M đối với trục quay Δ_0 đi qua trung điểm G của thanh và vuông góc với thanh.

$$I = \frac{1}{12} M \cdot \ell^2.$$

Mômen quán tính của một đĩa tròn đồng chất bán kính R , khối lượng M đối với trục quay Δ đi qua tâm đĩa (hình trụ đặc).

$$I = \frac{MR^2}{2}.$$

Mômen quán tính của một trụ rỗng mỏng bán kính R , khối lượng m đối với trục quay Δ đi qua tâm hình trụ (vành tròn).

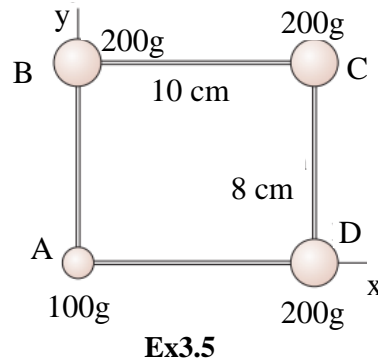
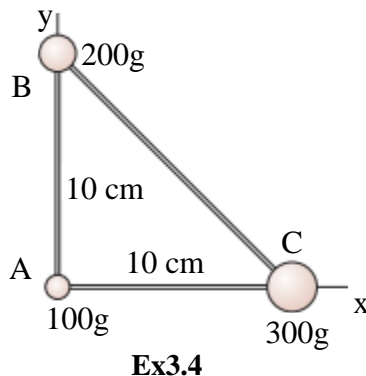
$$I = mR^2.$$

Mômen quán tính của một quả cầu đặc hoặc rỗng bán kính R , khối lượng m đối với trục quay Δ đi qua tâm quả cầu.

$$I = \frac{2}{5} mR^2 \text{ và } I = \frac{2}{3} mR^2.$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

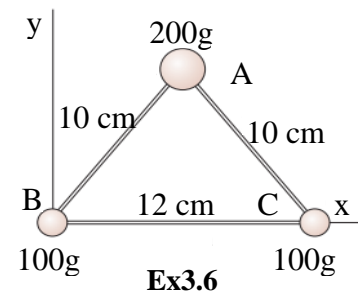
- Một vận động viên trượt băng giữ hai cánh tay dang rộng khi quay với tốc độ 180 vòng/phút. Tốc độ của bàn tay cô ấy là bao nhiêu nếu chúng cách nhau 140 cm?
Đáp án: 13,2 m/s
- Một máy khoan tốc độ cao đạt 2000 vòng/phút trong 0,5 giây.
 - Máy khoan có gia tốc góc bằng bao nhiêu?
 - Máy quay bao nhiêu vòng trong 0,5 giây đầu tiên này?
 Đáp án: a. 419 rad/s^2 b. 8,3 vòng
- Một chiếc quạt trần có đường kính quạt 80 cm đang quay với tốc độ 60 vòng/phút. Giả sử quạt dừng lại sau 25 giây sau khi tắt.
 - Tính tốc độ của đầu cánh quạt sau khi tắt 10 giây?
 - Quạt quay được bao nhiêu vòng tới khi dừng lại?
 Đáp án: a. 1,5 m/s b. 12,5 vòng
- Ba vật có khối lượng như thể hiện trong hình Ex3.4 được kết nối bằng các thanh cứng không có khối lượng. Tìm tọa độ khối tâm của hệ 3 vật này?
Đáp án: $x = 5 \text{ cm}$, $y = 3,3 \text{ cm}$



- Bốn vật có khối lượng như thể hiện trong hình Ex3.5 được kết nối bởi các thanh cứng không khối lượng.
 - Tìm tọa độ khối tâm của hệ.
 - Tìm mômen quán tính đối với một trục đi qua A và vuông góc với mặt phẳng chứa hệ.

Đáp án: a. $x = 5,7 \text{ cm}$, $y = 4,6 \text{ cm}$ b. $0,0066 \text{ kg.m}^2$

- Ba vật có khối lượng như thể hiện trong hình Ex3.6 được kết nối bằng các thanh cứng không khối lượng.
 - Tìm tọa độ khối tâm của hệ.
 - Tìm mômen quán tính đối với trục đi qua A và vuông góc với trang giấy.
 - Tìm mômen quán tính đối với trục đi qua B và C.



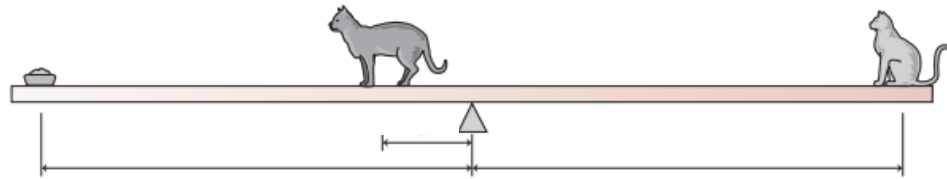
Đáp án: a. $x = 6 \text{ cm}$, $y = 4 \text{ cm}$ b. $0,002 \text{ kg.m}^2$

c. $0,00128 \text{ kg.m}^2$

7. Một vận động viên thể hình giữ một quả bóng thép nặng 3 kg trong tay. Cánh tay của anh ta dài 70 cm và có khối lượng 4 kg. Độ lớn của mômen lực đối với vai anh ta là bao nhiêu nếu anh ta
- giữ cánh tay thẳng song song với sàn?
 - giữ cánh tay thẳng nhưng chếch xuống 45° so với phương ngang?

Đáp án: a. 34 N.m b. 24 N.m

8. Một con mèo nặng 5 kg và một bát cá ngừ nặng 2 kg nằm ở hai đầu đối diện của bập bênh dài 4 m (như hình Ex3.8). Phải đặt một con mèo nặng 4 kg ở bên trái trụ bao xa để bập bênh cân bằng?

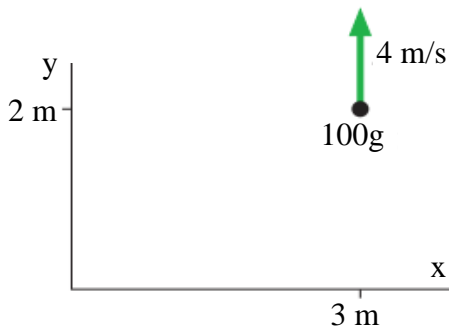


Ex3.8

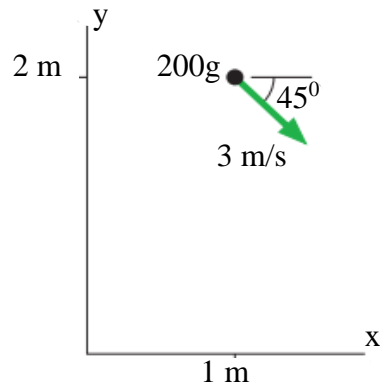
Đáp án: 1,5 m

9. Một lốp xe có đường kính 60 cm. Chiếc xe đang đi với tốc độ 20 m/s.
- Vận tốc góc của lốp xe là bao nhiêu?
 - Tốc độ của một điểm ở mép trên của lốp xe là bao nhiêu?
 - Tốc độ của một điểm ở mép dưới của lốp xe là bao nhiêu?

Đáp án: a. 66,67 rad/s b. 40m/s c. 0



Ex3.10



Ex3.11

10. Độ lớn và hướng của mômen động lượng của hạt nặng 200 g so với gốc O là bao nhiêu như mô tả trong hình Ex3.10 và Ex3.11?

Đáp án: $1,2\vec{k}$ kg.m²/s; $-1,27\vec{k}$ kg.m²/s

11. Tìm mômen động lượng của Trái đất đối với trục quay riêng của nó. Xem trái đất là hình cầu đặc, đồng chất có bán kính $R = 6400\text{km}$, có khối lượng riêng trung bình $\rho = 5,5\text{g/cm}^3$.

Đáp án: $9,9 \cdot 10^{37}$ (kg.m²)

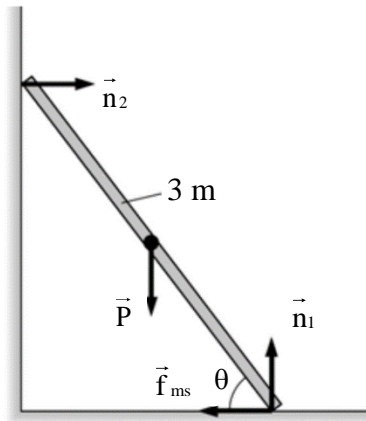
- 12.** Để một quả bóng bowling nặng 5 kg, đường kính 22 cm có mômen động lượng là $0,23 \text{ kg m}^2/\text{s}$ thì nó phải quay với tốc độ bao nhiêu vòng trên phút?

Đáp án: 91 vòng/phút

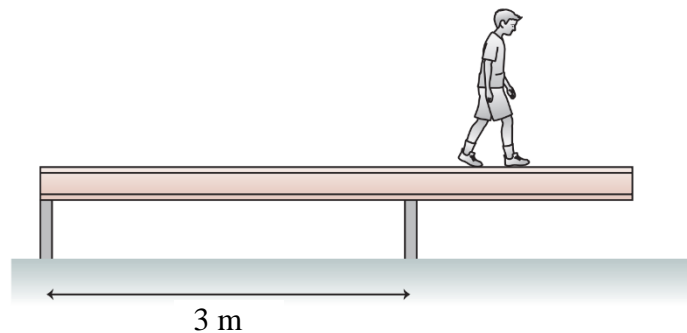
- 13.** Một đĩa xoay nặng 2 kg, đường kính 20 cm quay với tốc độ 100 vòng/phút trên vòng bi không ma sát. Cùng lúc, hai vật cùng có khối lượng 500 g rơi từ trên cao xuống, chạm vào đĩa xoay ở hai đầu đối diện của đường kính và dính chặt. Ngay sau sự kiện này, vận tốc góc của đĩa xoay là bao nhiêu vòng/phút?

Đáp án: 50 vòng/phút

- 14.** Một cái thang dài 3 m, như trong hình Ex3.14, dựa vào một bức tường không ma sát. Hệ số ma sát tĩnh giữa thang và sàn là 0,4. Góc tối thiểu giữa thang và sàn là bao nhiêu mà thang vẫn không bị trượt?



Ex3.14

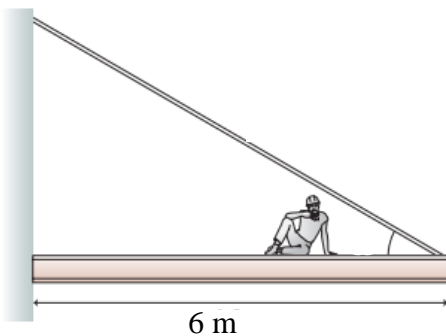


Ex3.15

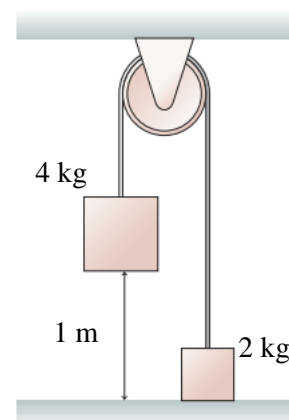
Đáp án: 51°

- 15.** Một dầm nặng 40 kg, dài 5 m được đỡ bởi hai trụ như trong Ex3.15. Một cậu bé 20 kg bắt đầu đi dọc theo dầm. Cậu bé có thể đi bao xa mà dầm không bị đổ?

Đáp án: Cách đầu dầm bên phải 1 m



Ex3.16



Ex3.17

- 16.** Trong hình Ex3.16, một công nhân xây dựng nặng 80 kg trên một thanh dầm thép nặng 1450 kg để ăn bữa trưa. Anh ta ngồi cách đầu thanh dầm 2 m. Cáp đỡ được thanh dầm nếu ở mức dưới 15000 N. Người công nhân có nên lo lắng không?

Đáp án: $T = 15300 \text{ N}$, nên lo lắng.

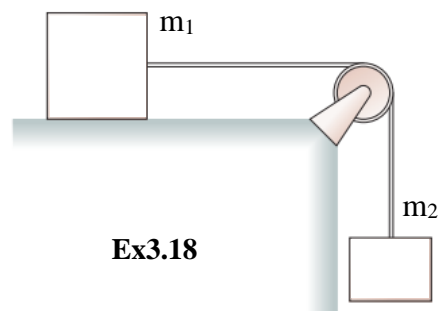
- 17.** Hai vật trong Hình Ex3.17 được nối với nhau bằng một sợi dây không có khối lượng vắt qua một ròng rọc. Ròng rọc có đường kính 12 cm và khối lượng 2 kg. Khi ròng rọc quay, ma sát ở trục phát ra một mômen lực có cường độ 0,5 N.m. Nếu các vật được thả từ trạng thái nghỉ, phải mất bao lâu để vật 4 kg chạm sàn?

Đáp án: 1,1 s

- 18.** Các vật có khối lượng m_1 và m_2 được nối với nhau bằng một sợi dây không khối lượng vắt qua ròng rọc như trong hình Ex3.18. Bỏ qua ma sát ở ròng rọc. Khối lượng m_1 trượt trên mặt nằm ngang không ma sát. Khối lượng m_2 được chuyển động từ trạng thái nghỉ.

a. Giả sử ròng rọc là không có khối lượng. Tìm gia tốc của m_1 và lực căng dây.

b. Giả sử ròng rọc có khối lượng m_p và bán kính R . Tìm gia tốc của m_1 và lực căng ở phần trên và phần dưới của dây. Kiểm tra kết quả của bạn có phù hợp với phần a khi $m_p = 0$.



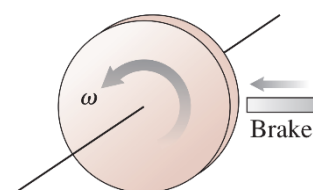
Ex3.18

Đáp án: a. $a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2}$; $T = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$.

b. $a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2 + 0.5 m_p}$; $T_1 = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2 + 0.5 m_p}$; $T_2 = \frac{(m_1 + 0.5 m_p) m_2 g}{m_1 + m_2 + 0.5 m_p}$.

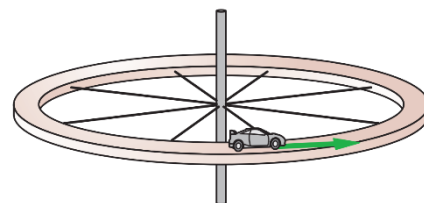
- 19.** Một đĩa nặng 2 kg, đường kính 30 cm trong Ex3.19 đang quay ở 300 vòng/phút. Tính lực ma sát phanh tác dụng lên vành đĩa để đĩa dừng lại trong 3 s?

Đáp án: 1.57 N



Ex3.19

- 20.** Trong hình Ex3.20, một chiếc ô tô đồ chơi nặng 200 g được đặt trên một đường ray hẹp có đường kính 60 cm giúp xe đi theo hình tròn. Đường ray nặng 1 kg quay tự do trên một trục thẳng đứng, không ma sát. Các nan hoa có khối lượng không đáng kể. Sau khi bật công tắc, ô tô sớm đạt tốc độ ổn định 0,75 m/s so với đường ray. Vận tốc góc của đường ray, tính bằng vòng/phút là bao nhiêu?



Ex3.20

Đáp án: 4 vòng/phút