BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC PHENIKAA

ĐÁP ÁN ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC PHẦN

Học phần: Đại số tuyến tính
Mã học phần: FFS703007

ĐỀ SỐ: 1
Đáp án gồm có........trang

Câu 1		**2,00 điểm**	CĐR 1.1
	Khai triển theo hàng thứ ba hoặc cột thứ ba, ta có $$\det(A) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$	0,5	
	Ma trận $A(\theta)$ có nghịch đảo vì $\det(A(\theta)) = 1 \neq 0$ với mọi θ	0.5	
	Tính $$A(\theta)A(-\theta) = I$$	0.5	
	Suy ra $$A(\theta)^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$	0.5	

Câu 2		**2,00 điểm**	CĐR 1.1
(a)		**1,25**	
	Ma trận hệ số bổ sung của hệ phương trình $$A^{bs} = \left[\begin{array}{cccc\|c} 6 & -6 & 5 & 7 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 3m+4 \\ 32 & -32 & 27 & 39 & 0 \end{array}\right].$$	0,25	

	Dùng phương pháp khử Gauss (hoặc Gauss-Jordan) đưa A^{bs} về dạng bậc thang $$A^{bs} \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc\|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3m+4 \\ 6 & -6 & 5 & 7 & -2 \\ 32 & -32 & 27 & 39 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc\|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3m+4 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -18m-26 \\ 0 & 0 & -5 & -25 & -96m-128 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc\|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3m+4 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -26-18m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-6m \end{array}\right] = E.$$	0,5	
	Hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $r(A) = r(A^{bs}) = 2$.	0,25	
	$\Leftrightarrow 2-6m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}$.	0,25	
(b)		**0,75**	
	Thay $m = \frac{1}{3}$ vào ma trận bậc thang E, thu được hệ phương trình $$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ -x_3 - 5x_4 = -32. \end{cases}$$	0,25	
	Đặt $x_2 = s \in \mathbb{R}, x_4 = t \in \mathbb{R}$ và thay thế ngược, thu được hệ phương trình tương đương $$\begin{cases} x_1 = s + 3t - 27 \\ x_2 = s \\ x_3 = -5t + 32 \\ x_4 = t. \end{cases}$$ Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $$\{(s+3t-27, s, -5t+32, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$$ (Lưu ý: SV có thể có cách chọn biến tự do khác và tìm ra công thức nghiệm khác với đáp án)	0,5	

Câu 3		**2,00 điểm**	CĐR 1.1

(a)		**0,75**	
	Chứng minh X đóng kín với phép cộng.	0,25	
	Chứng minh X đóng kín với phép nhân vô hướng.	0,25	
	Nhận xét rằng $X \neq \emptyset$ và đóng kín với các phép toán nên nó là không gian con.	0,25	
(b)		**1,25**	
	X là được tham số hóa bởi s và t như sau: $$(s,t) \mapsto (s+(23/2)t, s, t).$$	0,25	
	Chọn $s=1, t=0$, thu được $\mathbf{u}_1 = (1,1,0)$; Chọn $s=0, t=1$, thu được $\mathbf{u}_2 = (23/2, 0, 1)$.	0,25	
	Chứng minh $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ là một cơ sở của X và suy ra số chiều của X bằng 2.	0,50	
	Tọa độ của $\mathbf{v}$ là $(-20, 2)$.	0,25	
Ghi chú	Cơ sở U không duy nhất. Do đó, thí sinh có thể chọn cơ sở khác. Khi đó, tọa độ của $\mathbf{v}$ cũng sẽ khác.		

<u>Câu 4</u>		**2,00 điểm**	CĐR 1.1
a)		**0,5**	
	Ma trận $$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -10 \\ -2 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$ Đa thức đặc trưng $$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 3 = -(\lambda-3)(\lambda-1)^2.$$	0,25	
	Giá trị riêng $\lambda = 3$ (nghiệm đơn), $\lambda = 1$ (nghiệm kép)	0,25	
b)		**1,5**	
	Với $\lambda = 3$, các vector riêng là $(k,k,0)$. Cho $k=-1$, ta có $u_1 = (-1,-1,0)$.	0,25	
	Với $\lambda = 1$, các vector riêng là $(2s-5t, s, t)$.	0,25	
	Cho $s=3$, $t=1$, ta có $u_2 = (1,3,1)$.	0,25	
	Cho $s=2$, $t=1$, ta có $u_3 = (-1,2,1)$.	0,25	

	Ma trận làm chéo hóa $P = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.	0,25	
	Ma trận chéo cần tìm là $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.	0,25	

<u>Câu 5</u>		**2,00 điểm**	CĐR 1.1
	Tính được gradient của f tại điểm A: $\overrightarrow{grad}\ f(A) = \nabla f(A) = (6,3,2)$	0,5	
	Tính được: $\overrightarrow{AB} = (2,0,-2)$	0,5	
	Tính được vector $\vec{v}$ (vector đơn vị của $\overrightarrow{AB}$): $\vec{v} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	0,5	
	Tính được đạo hàm theo hướng $\overrightarrow{AB}$ của f tại A: $D_v f(A) \equiv \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(A) = \overrightarrow{grad}\ f(A) \cdot \vec{v} = 2\sqrt{2}$	0,5	

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **TRƯỜNG ĐẠI HỌC PHENIKAA**	**ĐÁP ÁN ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC PHẦN** **Học phần: Đại số tuyến tính** **Mã học phần: FFS703007**

<u>ĐỀ SỐ:</u> 2
Đáp án gồm có........trang

<u>Câu 1</u>		**2,00 điểm**	CĐR 1.1
	$$2A+B^T=\begin{bmatrix}2 & 2 & -1\\ 7 & 3 & 8\end{bmatrix}$$	0,5	
	$$AB=\begin{bmatrix}-5 & 7\\ 4 & 3\end{bmatrix}$$	0.5	
	Khai triển theo cột thứ hai $$D=-\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 4 & 1 & 8\\ 3 & 0 & 2 & 0\\ -4 & 5 & 0 & 0\end{vmatrix}$$	0,25	
	Khai triển theo hàng thứ nhất $$D=-\begin{vmatrix}4 & 1 & 8\\ 0 & 2 & 0\\ 5 & 0 & 0\end{vmatrix}$$	0,25	
	Khai triển theo cột thứ ba $$D=-8\begin{vmatrix}0 & 2\\ 5 & 0\end{vmatrix}$$	0,25	
	$$D=80$$	0,25	

<u>Câu 2</u>		**2,00 điểm**	CĐR 1.1
(a)		**1,25**	
	Ma trận hệ số bổ sung của hệ phương trình $$A^{bs} = \left[\begin{array}{cccc\|c} -2 & -6 & -3 & -7 & -4 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 3m+2 \\ -8 & -24 & -13 & -35 & -2 \end{array}\right].$$	0,25	
	Dùng phương pháp khử Gauss (hoặc Gauss-Jordan) đưa A^{bs} về dạng bậc thang $$A^{bs} \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc\|c} 1 & 3 & 1 & 0 & 3m+2 \\ -2 & -6 & -3 & -7 & -4 \\ -8 & -24 & -13 & -35 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc\|c} 1 & 3 & 1 & 0 & 3m+2 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & 6m \\ 0 & 0 & -5 & -35 & 24m+14 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc\|c} 1 & 3 & 1 & 0 & 3m+2 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & 6m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14-6m \end{array}\right] = E.$$	0,5	
	Hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $r(A) = r(A^{bs}) = 2$.	0,25	
	$\Leftrightarrow 14-6m=0 \Leftrightarrow m=\frac{7}{3}$.	0,25	
(b)		**0,75**	
	Thay $m=\frac{7}{3}$ vào ma trận bậc thang E, thu được hệ phương trình $$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3=9 \\ -x_3-7x_4=14. \end{cases}$$	0,25	

	Đặt $x_2 = s \in \mathbb{R}, x_4 = t \in \mathbb{R}$ và thay thế ngược, thu được hệ phương trình tương đương $$\begin{cases} x_1 = -3s + 7t + 23 \\ x_2 = s \\ x_3 = -7t - 14 \\ x_4 = t. \end{cases}$$ Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $$\{(-3s + 7t + 23, s, -7t - 14, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$$ (Lưu ý: SV có thể có cách chọn biến tự do khác và tìm ra công thức nghiệm khác với đáp án)	0,5	

<u>Câu 3</u>		**2,00 điểm**	CĐR 1.1
(a)		**0,75**	
	Chứng minh X đóng kín với phép cộng.	0,25	
	Chứng minh X đóng kín với phép nhân vô hướng.	0,25	
	Nhận xét rằng $X \neq \emptyset$ và đóng kín với các phép toán nên nó là không gian con.	0,25	
(b)		**1,25**	
	X là được tham số hóa bởi s và t như sau: $$(s,t) \mapsto ((2/23)s + (2/23)t, s, t).$$	0,25	
	Chọn $s = 1, t = 0$, thu được $\mathbf{u}_1 = (2/23, 1, 0)$; Chọn $s = 0, t = 1$, thu được $\mathbf{u}_2 = (2/23, 0, 1)$.	0,25	
	Chứng minh $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ là một cơ sở của X và suy ra số chiều của X bằng 2.	0,50	
	Tọa độ của $\mathbf{v}$ là $(45, 1)$.	0,25	
Ghi chú	Cơ sở U không duy nhất. Do đó, thí sinh có thể chọn cơ sở khác. Khi đó, tọa độ của $\mathbf{v}$ cũng sẽ khác.		

<u>Câu 4</u>		**2,00 điểm**	CĐR 1.1
a)		**0,5**	

	Ma trận $$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -10 \\ -2 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$ Đa thức đặc trưng $$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)^2.$$	0,25	
	Giá trị riêng $\lambda = 1$ (nghiệm đơn), $\lambda = -1$ (nghiệm kép)	0,25	
b)		**1,5**	
	Với $\lambda = 1$, các vector riêng là $(k,k,0)$. Cho $k = -1$, ta có $u_1 = (-1,-1,0)$.	0,25	
	Với $\lambda = -1$, các vector riêng là $(2s - 5t, s, t)$.	0,25	
	Cho $s = 3$, $t = 1$, ta có $u_2 = (1,3,1)$.	0,25	
	Cho $s = 2$, $t = 1$, ta có $u_3 = (-1,2,1)$.	0,25	
	Ma trận làm chéo hóa $P = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.	0,25	
	Ma trận chéo cần tìm là $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.	0,25	

<u>Câu 5</u>		**2,00 điểm**	CĐR 1.1
	Tính được gradient của f tại điểm B: $\overrightarrow{grad}\ f(B) = \nabla f(B) = (2,3,6)$	0,5	
	Tính được: $\overrightarrow{AB} = (2,0,-2)$	0,5	
	Tính được vector $\vec{v}$ (vector đơn vị của $\overrightarrow{AB}$): $\vec{l} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	0,5	
	Tính được đạo hàm theo hướng $\overrightarrow{AB}$ của f tại B: $D_v f(B) \equiv \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(B) = \overrightarrow{grad}\ f(B) \cdot \vec{v} = -2\sqrt{2}$	0,5	

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC PHENIKAA

ĐÁP ÁN ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC PHẦN

Học phần: Đại số tuyến tính
Mã học phần: FFS703007

ĐỀ SỐ: 3
Đáp án gồm có........trang

Câu 1		**2,0 điểm**	CĐR 1.1
	Định thức của A $$\det(A) = 5x - 5$$	0,5	
	Ma trận A có nghịch đảo khi và chỉ khi $\det(A) \neq 0$	0,25	
	$$\det(A) \neq 0 \iff x \neq 1.$$	0,25	
	$$c_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = -15$$	0,25	
	$$c_{23} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = 5$$	0,25	
	$$c_{33} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -5$$	0,25	
	Hàng thứ ba cần tìm $$\frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$	0,25	

Câu 2		**2,00 điểm**	CĐR 1.1
(a)		**1,25**	

	Ma trận hệ số bổ sung của hệ phương trình $$A^{bs}=\left[\begin{array}{cccc\|c} 1 & 3 & 0 & -5 & -4 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 4m+5 \\ 7 & 21 & 5 & -5 & 5 \end{array}\right].$$	0,25	
	Dùng phương pháp khử Gauss (hoặc Gauss-Jordan) đưa A^{bs} về dạng bậc thang $$\begin{aligned} A^{bs} &\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc\|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 4m+5 \\ 1 & 3 & 0 & -5 & -4 \\ 7 & 21 & 5 & -5 & 5 \end{array}\right] \\ &\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc\|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 4m+5 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & -9-4m \\ 0 & 0 & -2 & -12 & -28m-30 \end{array}\right] \\ &\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc\|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 4m+5 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & -9-4m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12-20m \end{array}\right] = E. \end{aligned}$$	0,5	
	Hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $r(A)=r(A^{bs})=2$.	0,25	
	$\Leftrightarrow -12-20m=0 \Leftrightarrow m=-\frac{3}{5}$.	0,25	
(b)		**0,75**	
	Thay $m=-\frac{3}{5}$ vào ma trận bậc thang E, thu được hệ phương trình $$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3+x_4=\frac{13}{5} \\ -x_3-6x_4=-\frac{33}{5}. \end{cases}$$	0,25	

	Đặt $x_2 = s \in \mathbb{R}, x_4 = t \in \mathbb{R}$ và thay thế ngược, thu được hệ phương trình tương đương $$\begin{cases} x_1 = -3s + 5t - 4 \\ x_2 = s \\ x_3 = -6t + \frac{33}{5} \\ x_4 = t. \end{cases}$$ Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $$\left\{ \left(-3s + 5t - 4, s, -6t + \frac{33}{5}, t \right) \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$ (Lưu ý: SV có thể có cách chọn biến tự do khác và tìm ra công thức nghiệm khác với đáp án)	0,5	

Câu 3		**2,00 điểm**	CĐR 1.1
(a)		**0,75**	
	Chứng minh X đóng kín với phép cộng.	0,25	
	Chứng minh X đóng kín với phép nhân vô hướng.	0,25	
	Nhận xét rằng $X \neq \emptyset$ và đóng kín với các phép toán nên nó là không gian con.	0,25	
(b)		**1,25**	
	X là được tham số hóa bởi s và t như sau: $$(s,t) \mapsto (2s + (9/2)t, s, t).$$	0,25	
	Chọn $s = 1, t = 0$, thu được $\mathbf{u}_1 = (2, 1, 0)$; Chọn $s = 0, t = 1$, thu được $\mathbf{u}_2 = (9/2, 0, 1)$.	0,25	
	Chứng minh $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ là một cơ sở của X và suy ra số chiều của X bằng 2.	0,50	
	Tọa độ của $\mathbf{v}$ là $(-4, 2)$.	0,25	
Ghi chú	Cơ sở U không duy nhất. Do đó, thí sinh có thể chọn cơ sở khác. Khi đó, tọa độ của $\mathbf{v}$ cũng sẽ khác.		

Câu 4		**2,00 điểm**	CĐR 1.1
a)		**0,5**	

	Ma trận $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$ Đa thức đặc trưng $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - 5\lambda^2 - 8\lambda - 4 = -(\lambda+1)(\lambda+2)^2.$	0,25	
	Giá trị riêng $\lambda = -1$ (nghiệm đơn), $\lambda = -2$ (nghiệm kép)	0,25	
b)		**1,5**	
	Với $\lambda = -1$, các vector riêng là $(k, k, 0)$. Cho $k = 1$, ta có $u_1 = (1, 1, 0)$.	0,25	
	Với $\lambda = -2$, các vector riêng là $(2s, t, s)$.	0,25	
	Cho $s = 3$, $t = 7$, ta có $u_2 = (6, 7, 3)$.	0,25	
	Cho $s = 1$, $t = 2$, ta có $u_3 = (2, 2, 1)$.	0,25	
	Ma trận làm chéo hóa $P = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 1 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.	0,25	
	Ma trận chéo cần tìm là $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.	0,25	

<u>**Câu 5**</u>		**2,00 điểm**	CĐR 1.1
	Tính được gradient của f tại điểm B: $\overrightarrow{grad}\ f(B) = \nabla f(B) = (2, 3, 6)$	0,5	
	Tính được: $\overrightarrow{BA} = (-2, 0, 2)$	0,5	
	Tính được vector $\vec{v}$ (vector đơn vị của $\overrightarrow{BA}$): $\vec{v} = \frac{\overrightarrow{BA}}{\left\lvert\overrightarrow{BA}\right\rvert} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	0,5	
	Tính được đạo hàm theo hướng $\overrightarrow{BA}$ của f tại B: $D_v f(B) \equiv \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(B) = \overrightarrow{grad}\ f(B) \cdot \vec{v} = 2\sqrt{2}$	0,5	

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC PHENIKAA

ĐÁP ÁN ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC PHẦN

Học phần: Đại số tuyến tính
Mã học phần: FFS703007

ĐỀ SỐ: 4
Đáp án gồm có........trang

Câu 1		**2,00 điểm**	CĐR 1.1
	Chuyển về $$(A-2I)X=B$$	0,5	
	Tính nghịch đảo của $A-2I$ $$(A-2I)^{-1}=\begin{bmatrix}7 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}$$	0,25	
	Tính X $$X=(A-2I)^{-1}B=\begin{bmatrix}7 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 5\\ -2 & -2\end{bmatrix}$$	0,25	
	Khai triển theo hàng thứ năm $$D=\begin{vmatrix}1 & 3 & 5 & 3\\ -2 & -7 & -4 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix}$$	0,25	
	Khai triển theo hàng thứ ba $$D=\begin{vmatrix}1 & 3 & 3\\ -2 & -7 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$	0,25	
	Khai triển theo hàng thứ ba $$D=\begin{vmatrix}1 & 3\\ -2 & -7\end{vmatrix}$$	0,25	

	$D = -1$	0,25	

<u>Câu 2</u>		**2,00 điểm**	CĐR 1.1
(a)		**1,25**	
	Ma trận hệ số bổ sung của hệ phương trình $$A^{bs} = \left[\begin{array}{cccc\|c} 4 & -24 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -6 & 1 & -4 & 5m+1 \\ 9 & -54 & 7 & -4 & -2 \end{array}\right].$$	0,25	
	Dùng phương pháp khử Gauss (hoặc Gauss-Jordan) đưa A^{bs} về dạng bậc thang $$E = \left[\begin{array}{cccc\|c} 1 & -6 & 1 & -4 & 5m+1 \\ 0 & 0 & -1 & 16 & -3-20m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5-5m \end{array}\right].$$	0,5	
	Hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $r(A) = r(A^{bs}) = 2$.	0,25	
	$\Leftrightarrow -5-5m = 0 \Leftrightarrow m = -1.$	0,25	
(b)		**0,75**	
	Thay $m = -1$ vào ma trận bậc thang E, thu được hệ phương trình $$\begin{cases} x_1 - 6x_2 + x_3 - 4x_4 = -4 \\ -x_3 + 16x_4 = 17. \end{cases}$$	0,25	

	Đặt $x_2 = s \in \mathbb{R}, x_4 = t \in \mathbb{R}$ và thay thế ngược, thu được hệ phương trình tương đương $$\begin{cases} x_1 = 6s - 12t + 13 \\ x_2 = s \\ x_3 = 16t - 17 \\ x_4 = t. \end{cases}$$ Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $$\{(6s - 12t + 13, s, 16t - 17, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$$ (Lưu ý: SV có thể có cách chọn biến tự do khác và tìm ra công thức nghiệm khác với đáp án)	0,5	

<u>Câu 3</u>		**2,00 điểm**	CĐR 1.1
(a)		**0,75**	
	Chứng minh X đóng kín với phép cộng.	0,25	
	Chứng minh X đóng kín với phép nhân vô hướng.	0,25	
	Nhận xét rằng $X \neq \emptyset$ và đóng kín với các phép toán nên nó là không gian con.	0,25	
(b)		**1,25**	
	X là được tham số hóa bởi s và t như sau: $$(s,t) \mapsto ((8/19)s + (2/19)t, s, t).$$	0,25	
	Chọn $s = 1, t = 0$, thu được $\mathbf{u}_1 = (8/19, 1, 0)$; Chọn $s = 0, t = 1$, thu được $\mathbf{u}_2 = (2/19, 0, 1)$.	0,25	
	Chứng minh $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ là một cơ sở của X và suy ra số chiều của X bằng 2.	0,50	
	Tọa độ của $\mathbf{v}$ là $(4, 3)$.	0,25	
Ghi chú	Cơ sở U không duy nhất. Do đó, thí sinh có thể chọn cơ sở khác. Khi đó, tọa độ của $\mathbf{v}$ cũng sẽ khác.		

<u>Câu 4</u>		**2,00 điểm**	CĐR 1.1
a)		**0,5**	

	Ma trận $$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 10 \\ 2 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$ Đa thức đặc trưng $$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 15\lambda + 9 = -(\lambda - 1)(\lambda - 3)^2.$$	0,25	
	Giá trị riêng $\lambda = 1$ (nghiệm đơn), $\lambda = 3$ (nghiệm kép)	0,25	
b)		**1,5**	
	Với $\lambda = 1$, các vector riêng là $(k, k, 0)$. Cho $k = -1$, ta có $u_1 = (-1, -1, 0)$.	0,25	
	Với $\lambda = 1$, các vector riêng là $(2s - 5t, s, t)$.	0,25	
	Cho $s = 3$, $t = 1$, ta có $u_2 = (1, 3, 1)$.	0,25	
	Cho $s = 2$, $t = 1$, ta có $u_3 = (-1, 2, 1)$.	0,25	
	Ma trận làm chéo hóa $P = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.	0,25	
	Ma trận chéo cần tìm là $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.	0,25	

<u>Câu 5</u>		**2,00 điểm**	CĐR 1.1
	Tính được gradient của f tại điểm A: $\overrightarrow{grad}\ f(A) = \nabla f(A) = (6, 3, 2)$	0,5	
	Tính được: $\overrightarrow{BA} = (-2, 0, 2)$	0,5	
	Tính được vector $\vec{v}$ (vector đơn vị của $\overrightarrow{BA}$): $\vec{v} = \frac{\overrightarrow{BA}}{\left\lvert\overrightarrow{BA}\right\rvert} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	0,5	
	Tính được đạo hàm theo hướng $\overrightarrow{BA}$ của f tại A: $D_v f(A) \equiv \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(A) = \overrightarrow{grad}\ f(A) \cdot \vec{v} = -2\sqrt{2}$	0,5	