Chương 1

PHÉP TÍNH VI PHÂN CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN VÀ HÀM SỐ NHIỀU BIẾN

Mục lục

GIỚI THIỆU

Nội dung xuyên suốt của bài giảng là tính gần đúng giá trị của hàm số tại một điểm, khi ta đã biết thông tin của hàm số này tại một điểm khác gần đó. Nói rõ hơn, xét hàm số $f(x)$, và giả sử rằng giá trị $f(x_0)$ đã biết. Bây giờ, ta muốn tính giá trị $f(x_0+h)$ với $|h|$ nhỏ. Để bạn đọc dễ hình dung, ta xét trường hợp đơn giản nhất, $f(x)$ là hàm số hằng. Khi đó, dễ dàng có được $f(x_0+h) = f(x_0)$, như thế $f(x_0+h)$ là một hàm hằng đối với h. Nếu $f(x)$ là một hàm bậc nhất, $f(x) = a+bx$, thì $f(x_0+h) = a+b(x_0+h) = f(x_0)+bh$, tức là $f(x_0+h)$ là một hàm bậc nhất đối với h.

Xét hàm số $f(x)$ bất kỳ, ta biết rằng $f(x)$ liên tục tại x_0 khi và chỉ khi

$$\lim_{h\to 0}\big(f(x_0+h) - f(x_0)\big) = 0.$$

Nói cách khác $f(x_0+h) = f(x_0) + r_0(h)$ với $\lim\limits_{h\to 0} r_0(h) = 0$. Hệ quả là, nếu $f(x)$ liên tục tại x_0 thì ta có thể xấp xỉ hàm số $f(x_0+h)$ bởi hàm số hằng $y = f(x_0)$ với sai số $r_0(h)$ thỏa mãn $\lim\limits_{h\to 0} r_0(h) = 0$. Bây giờ, nếu $f(x)$ là một hàm số khả vi (cấp 1) tại x_0 thì $f(x_0+h)$ được xấp xỉ bởi hàm bậc nhất đối với h

$$f(x_0+h) = a_0 + a_1h + r_1(h),$$

trong đó sai số $r_1(h)$ thỏa mãn $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{r_1(h)}{h} = 0$ (tại sao không phải là $\lim\limits_{h\to 0} r_1(h) = 0$?).

Tương tự, nếu hàm số $f(x)$ khả vi cấp 2 tại x_0 thì

$$f(x_0+h) = a_0 + a_1h + a_2h^2 + r_2(h),$$

trong đó sai số $r_2(h)$ thỏa mãn $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{r_2(h)}{h^2} = 0$.

Một cách tổng quát, nếu $f(x)$ khả vi đến cấp n tại x_0 thì

$$f(x_0+h) = a_0 + a_1h + \cdots + a_nh^n + r_n(h) \quad \text{trong đó } \lim_{h\to 0}\frac{r_n(h)}{h^n} = 0. \quad (*)$$

Các hằng số $a_0, a_1, \ldots, a_n$ được xác định duy nhất và phụ thuộc vào $f(x)$ và x_0. Đa thức $T_n(h) = a_0 + a_1h + \cdots + a_nh^n$ được gọi là *đa thức Taylor* của hàm số $f(x)$ tại x_0. Hệ thức $(*)$ cho biết, nếu $|h|$ nhỏ thì $f(x_0+h)$ xấp xỉ bằng đa thức Taylor của nó. Sự kiện này rất có ý nghĩa trong thực hành, vì hàm số $f(x)$ có thể chứa nhiều phép toán phức tạp, trong khi đó việc tính toán với đa thức lại đơn giản, chỉ bao gồm cộng, trừ, nhân và chia.

1.1 Đạo hàm

Tất cả học sinh tốt nghiệp phổ thông đã làm quen với khái niệm đạo hàm, và tính thuần thục đạo hàm của các hàm số cơ bản, như hàm đa thức, hàm mũ, hàm logarit, hàm lượng giác,... cho nên trong bài giảng này, ta không liệt kê lại bảng đạo hàm và các quy tắc tính đạo hàm. Thay vào đó, ta tập trung vào ứng dụng của đạo hàm trong các vấn đề tính gần đúng, bài toán cực trị, tính giới hạn dạng vô định.

1.1.1 Nhắc lại về đạo hàm

Giả sử $s(t)$ là vị trí của một vật chuyển động dọc theo một trục tọa độ ở thời điểm t. *Vận tốc trung bình* của vật đó trong khoảng thời gian $[t, t+h]$ nếu $h > 0$ hoặc $[t+h, t]$ nếu $h < 0$, được xác định bởi công thức

$$v_{tb} = \frac{s(t+h) - s(t)}{h}.$$

Ví dụ 1.1.1. Một hòn đá được thả từ độ cao 64m xuống mặt đất. Khoảng cách từ hòn đá đến mặt đất ở thời điểm t được cho bởi $s(t) = -16t^2 + 64$. Tính vận tốc trung bình của hòn đá trong các khoảng thời gian $[0.499, 0.5]$ và $[0.5, 0.501]$.

Thay dữ liệu vào công thức vận tốc trung bình, ta có

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{s(0.5) - s(0.499)}{0.001} = -15.984(m/s) \\ v_2 &= \frac{s(0.501) - s(0.5)}{0.001} = -16.016(m/s). \end{aligned}$$

Khi h tiến về 0, tỷ số $\dfrac{s(t+h) - s(t)}{h}$ phản ánh sự nhanh chậm của chuyển động tại thời điểm t. Giới hạn

$$\lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

nếu tồn tại, được gọi là *vận tốc tức thời* tại thời điểm t.

Chẳng hạn, trong ví dụ trên, vận tốc tức thời của hòn đá tại thời điểm $t = 0.5$ (s) là

$$v = \lim_{h \to 0} \frac{s(0.5+h) - s(0.5)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-16(0.5+h)^2 + 16 \cdot 0.5^2}{h} = -16(m/s).$$

Ta xét một vấn đề trong kinh tế. Giả sử $c(x)$ là số tiền cần chi để sản xuất x tấn thép trong 1 tuần. Nếu ta sản xuất thêm h tấn thép trong 1 tuần thì tỷ số

$$\frac{c(x+h) - c(x)}{h}$$

cho biết chi phí trung bình để sản xuất thêm mỗi tấn. Giới hạn của tỷ số trên khi $h \to 0$ được gọi là *chi phí cận biên* của việc sản xuất thêm thép mỗi tuần khi lượng sản phẩm hiện tại là x tấn hàng tuần.

Định nghĩa 1.1.2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng (a, b) và $x_0 \in (a, b)$. *Đạo hàm* của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 ký hiệu bởi $f'(x_0)$, được định nghĩa là giới hạn sau đây (nếu giới hạn này tồn tại)

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì $f(x)$ được gọi là *khả vi* tại x_0.

Chú ý rằng, nhờ phép đổi biến $x - x_0 = h$ định nghĩa 1.1.2 tương đương với

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Ví dụ 1.1.3. Tính đạo hàm của hàm số $y = ax + b$ tại điểm $x = x_0$ bất kỳ. Ta có

$$\begin{aligned} f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{a(x_0 + h) + b - (ax_0 + b)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{ah}{h} = a. \end{aligned}$$

Vì $a = a(x + 1) + b - (ax + b) = f(x + 1) - f(x)$ nên ta có thể xem giá trị a là lượng thay đổi của đối số khi biến số tăng thêm 1 đơn vị.

Ví dụ 1.1.4. Tính đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{1}{x}$ tại điểm $x_0 \neq 0$ bất kỳ.

Theo định nghĩa, đạo hàm tại điểm $x = x_0$ là

$$\begin{aligned} f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(\frac{1}{x_0 + h} - \frac{1}{x_0}\Big) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{-h}{(x_0 + h)x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x_0 + h)x_0} = -\frac{1}{x_0^2}. \end{aligned}$$

Xét đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Hệ số góc của đường thẳng đi qua $P(x_0, f(x_0))$ và $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$ được cho bởi công thức

$$k = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Một cách trực giác, khi $h \to 0$ thì đường thẳng PQ tiến về tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại P, và giá trị k khi đó là hệ số góc của tiếp tuyến. Ta có định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 1.1.5. *Hệ số góc* của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $P(x_0, f(x_0))$ là $f'(x_0)$ (nếu đạo hàm này tồn tại).

Tiếp tuyến của đồ thị tại điểm P là đường thẳng đi qua P với hệ số góc nói trên.

Ví dụ 1.1.6. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$ tại điểm $x_0 = 1$.

Ví dụ 1.1.7. (Tốc độ thay đổi lợi nhuận) Một công ty sản xuất đồ chơi bán x máy chơi điện tử với giá $c(x) = -0.01x + 400$ đô la mỗi máy. Chi phí sản xuất ra x máy chơi điện tử là $p(x) = 100x + 10000$ đô la. Tính tốc độ thay đổi của lợi nhuận khi bán được 10000 máy. Công ty nên mở rộng sản xuất hay thu hẹp sản xuất?

Định lý 1.1.8. *Nếu hàm số $f(x)$ khả vi tại x_0 thì $f(x)$ liên tục tại x_0.*

Chứng minh. Ta phải chứng minh rằng

$$\lim_{h\to 0}\big(f(x_0+h) - f(x_0)\big) = 0.$$

Với $h \neq 0$,

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot h.$$

Lấy giới hạn khi $h \to 0$ cả hai vế, ta nhận được

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\big(f(x_0+h) - f(x_0)\big) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot h\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h\\ &= f'(x_0)\cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

□

Chiều ngược lại của định lý trên không đúng. Để minh họa, ta xét hàm số $f(x) = |x|$. Hàm số này liên tục tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$, tuy nhiên $f'(0)$ không tồn tại. Thật vậy, xét tỷ số

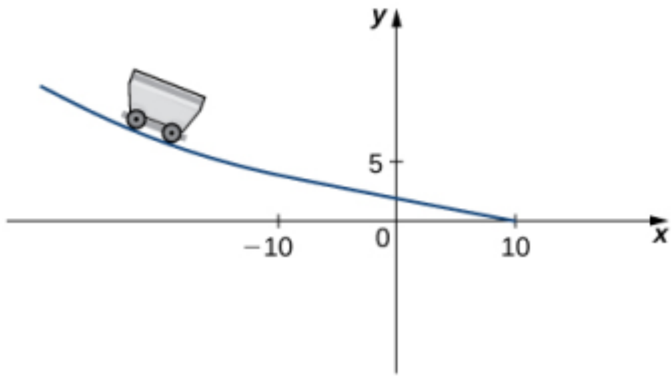
$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h}.$$

Khi $h \to 0^+$ thì tỷ số trên có giới hạn bằng 1, còn khi $h \to 0^-$ thì tỷ số trên có giới hạn bằng -1. Điều này giải thích vì sao hàm số đã cho không khả vi tại $x = 0$.

Ví dụ 1.1.9. Một công ty sản xuất đồ chơi muốn thiết kế đường chạy cho ôtô xuất phát dọc theo một đường parabol, sau đó chuyển sang một đường thẳng (xem hình vẽ). Hàm số biểu thị đường chạy có dạng

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{10} + bx + c & \text{nếu } x < -10,\\ -\dfrac{x}{4} + \dfrac{5}{2} & \text{nếu } x \geq -10.\end{cases}$$

Để chiếc xe chuyển động trơn chu trên đường chạy, hàm số $f(x)$ cần khả vi tại $x = -10$. Hãy tìm b và c sao cho hàm số $f(x)$ khả vi tại $x = -10$.



Theo Định lý 1.1.8, điều kiện cần để hàm số $f(x)$ khả vi tại $x = -10$ là hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = -10$. Do đó ta cần có

$$\lim_{x \to -10^-} f(x) = \lim_{x \to -10^+} f(x).$$

Ta có

$$\lim_{x \to -10^-} f(x) = \frac{(-10)^2}{10} - 10b + c = 10 - 10b + c$$
$$\lim_{x \to -10^+} f(x) = \frac{10}{4} + \frac{5}{2} = 5.$$

Suy ra $10 - 10b + c = 5$ hay tương đương với $c = 10b - 5$.

Tiếp theo, điều kiện để đạo hàm $f'(-10)$ tồn tại là

$$\lim_{x \to -10^-} \frac{f(x) - f(-10)}{x + 10} = \lim_{x \to -10^+} \frac{f(x) - f(-10)}{x + 10}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -10^-} \frac{f(x) - f(-10)}{x + 10} &= \lim_{x \to -10^-} \frac{\frac{1}{10}x^2 + bx + c - 5}{x + 10} \\
&= \lim_{x \to -10^-} \frac{\frac{1}{10}x^2 + bx + (10b - 5) - 5}{x + 10} \quad \text{(thay } c = 10b - 5\text{)} \\
&= \lim_{x \to -10^-} \frac{x^2 - 100 + 10bx + 100b}{10(x + 10)} \\
&= \lim_{x \to -10^-} \frac{(x + 10)(x - 10 + 10b)}{10(x + 10)} \\
&= b - 2
\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -10^+}\frac{f(x)-f(-10)}{x+10} &= \lim_{x\to -10^+}\frac{-\frac{1}{4}x+\frac{5}{2}-5}{x+10}\\ &= \lim_{x\to -10^+}\frac{-x-10}{4(x+10)}\\ &= -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Vậy $b-2=-\frac{1}{4}$ hay $b=\frac{7}{4}$ và $c=10\left(\frac{7}{4}\right)-5=\frac{25}{2}$.

Đạo hàm cấp cao

Đạo hàm $f'(x)$ còn được gọi là *đạo hàm cấp một* của hàm số $f(x)$. Nếu hàm số $f'(x)$ khả vi tại x thì hàm số $(f')' := f''$ được gọi là *đạo hàm cấp hai* của hàm số $f(x)$. Một cách tổng quát, *đạo hàm cấp* n của hàm số $f(x)$, ký hiệu bởi $f^{(n)}$, được định nghĩa một cách truy hồi

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x).$$

Ở đây, ta quy ước $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Ví dụ 1.1.10. Tính đạo hàm cấp n của hàm số $f(x)=\sin(x)$.

Giải

Ta có

$$f'(x)=\cos(x),\ f''(x)=-\sin(x),\ f^{(3)}(x)=-\cos(x),\ f^{(4)}(x)=\sin(x).$$

Suy ra với k không âm,

$$f^{(4k)}(x)=\sin(x),\ f^{(4k+1)}(x)=\cos(x),\ f^{(4k+2)}(x)=-\sin(x),\ f^{(4k+3)}(x)=-\cos(x).$$

Sử dụng của ngôn ngữ ma trận, ta có lời giải khác như sau.

Đặt

$$g(x)=\begin{pmatrix}\sin(x)\\ \cos(x)\end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}g'(x) &= \begin{pmatrix}\cos(x)\\ -\sin(x)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin(x)\\ \cos(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} g(x).\end{aligned}$$

.

Hệ quả là

$$g''(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} g'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 g(x).$$

Tổng quát, ta có đẳng thức

$$g^{(n)}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^n g(x).$$

Đẳng thức này cho thấy việc lấy đạo hàm của hàm $g(x)$ giống như tính lũy thừa ma trận. Như thế, ta đã chuyển bài toán tính đạo hàm sang vấn đề tính lũy thừa. Ta có

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(\frac{n\pi}{2}) & \sin(\frac{n\pi}{2}) \\ -\sin(\frac{n\pi}{2}) & \cos(\frac{n\pi}{2}) \end{pmatrix}.$$

Vậy

$$\begin{aligned} \sin^{(n)}(x) &= \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sin(x) + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \\ \cos^{(n)}(x) &= -\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sin(x) + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Quy tắc Leibniz

Quy tắc này được dùng để tính đạo hàm cấp cao của tích. Cụ thể,

$$(fg)^{(n)} = \binom{n}{0} fg^{(n)} + \binom{n}{1} f'g^{(n-1)} + \cdots + \binom{n}{n-1} f^{(n-1)}g' + \binom{n}{n} f^{(n)}g,$$

ở đây $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Ví dụ 1.1.11. Tính đạo hàm cấp n của hàm số $f(x) = x^2e^x$.

Giải

Áp dụng công thức Leibniz với chú ý rằng $(x^2)^{(n)} = 0$ nếu $n > 2$ và $(e^x)^{(n)} = e^x$ với mọi số nguyên không âm n.

$$\begin{aligned} (x^2e^x)^{(n)} &= \binom{n}{0}(x^2)^{(0)}(e^x)^n + \binom{n}{1}(x^2)'(e^x)^{(n-1)} + \binom{n}{2}(x^2)''(e^x)^{(n-2)} \\ &= x^2e^x + 2nxe^x + n(n-1)e^x \\ &= \big(x^2 + 2nx + n(n-1)\big)e^x. \end{aligned}$$

Đạo hàm của hàm hợp Giả sử hàm số $u = g(x)$ xác định trên khoảng (a, b) và lấy giá trị trên khoảng (c, d), hàm số $y = f(u)$ xác định trên (c, d) và lấy giá trị trên $\mathbb{R}$. Khi đó, hàm số xác định trên (a, b) và lấy giá trị trên $\mathbb{R}$ theo quy tắc

$$x \mapsto f(g(x))$$

được gọi là ***hàm hợp*** của hàm $y = f(u)$ với hàm $u = g(x)$.

Ví dụ 1.1.12. Hàm số $y = \sin(2x + 1)$ là hợp của hàm số $y = \sin(u)$ với $u = 2x + 1$.

Ta thừa nhận quy tắc sau đây.

Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm tại x là u'_x, và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại u là f'_u thì hàm hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm tại x là

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Ví dụ 1.1.13. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin(\cos(x))$.

Đặt $u = \cos(x)$. Khi đó

$$y = \sin(u) \Rightarrow y'_u = \cos(u),\ u'_x = -\sin(x).$$

Do đó,

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \cos(u)(-\sin(x)) = -\cos(\cos(x))\sin(x).$$

1.1.2 Ứng dụng của đạo hàm

Vi phân và xấp xỉ bậc nhất

Tưởng tượng bạn được phụ huynh giao nhiệm vụ đi chợ mua thịt heo. Giả sử rằng giá thịt là a (vnđ)/1kg và phí gửi xe là b (vnđ)/1 lượt. Nếu bạn mua x_0 (kg) thịt heo thì số tiền phải trả là

$$c(x) = ax_0 + b.$$

Bây giờ nếu bạn mua thêm h (kg) thịt thì số tiền cần thanh toán khi đó là $c(x_0 + h) = a(x_0 + h) + b = c(x_0) + ah$. Từ đó suy ra số tiền chênh lệch khi mua thêm h (kg) là

$$\Delta c = c(x_0 + h) - c(x_0) = ah.$$

Như thế $c(x_0 + h) - c(x_0)$ là một *hàm tuyến tính* từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$. Nếu $f(x)$ không phải là hàm bậc nhất thì nói chung hiệu số $f(x_0 + h) - f(x_0)$ không phải là hàm tuyến tính. Tuy vậy, nếu $f(x)$ khả vi tại x_0 thì theo định nghĩa, ta có

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + r(h),$$

trong đó $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{r(h)}{h} = 0$. Điều này nghĩa là khi h gần 0 thì hiệu $f(x_0+h) - f(x_0)$ xấp xỉ bằng $f'(x_0)h$ với sai số bằng $r(h)$. Ta đi đến định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 1.1.14. Cho hàm số $f(x)$ khả vi tại x_0. Khi đó, hàm tuyến tính ký hiệu bởi $df(x_0, h)$

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$df(x_0, h) = f'(x_0)h$$

được gọi là *vi phân* của hàm số $f(x)$ tại x_0.

Vi phân của hàm $f(x) = x$ tại x_0 bất kỳ là

$$dx(x_0, h) = h.$$

Do đó, ta có thể viết

$$df(x_0, h) = f'(x_0)dx(x_0, h),$$

hoặc ngắn gọn là

$$df = f'dx.$$

Theo định nghĩa của vi phân, khi h gần 0 thì hiệu số $f(x_0+h) - f(x_0)$ xấp xỉ bằng vi phân của hàm số $f(x)$ tại x_0. Ta có công thức gần đúng

$$\boxed{f(x_0+h) - f(x_0) \approx f'(x_0)h}$$

Ví dụ 1.1.15. Tính gần đúng $\sin 31^0$.

Xét hàm số $f(x) = \sin(x)$ với $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$ và $h = \dfrac{\pi}{180}$. Áp dụng công thức tính gần đúng, ta có

$$\sin(x_0 + h) \approx \sin(x_0) + h\cos(x_0).$$

Thay dữ liệu, ta thu được kết quả

$$\sin 31^0 \approx 0.5 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0.01745 \approx 0.5151.$$

Ví dụ 1.1.16. Xét hàm số $f(x) = \sqrt[n]{x}$. Với h đủ nhỏ, ta có

$$\sqrt[n]{x+h} \approx \sqrt[n]{x} + \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}h.$$

Nói riêng, với $x = a^n$,

$$\sqrt[n]{a^n + h} \approx a + \frac{h}{na^{n-1}}.$$

Chẳng hạn,

$$\sqrt{120} = \sqrt{11^2 - 1} \approx 11 - \frac{1}{2\cdot 11} \approx 10.9545.$$

Ví dụ 1.1.17. Tính gần đúng $y(0.1)$ biết $y' = xy + 1$ và $y(0) = 1$.

Giải

Ta có

$$y(x_0 + h) \approx y(x_0) + y'(x_0)h.$$

Thay $h = 0.1$ và $x_0 = 0$, ta được

$$\begin{aligned} y(0.1) &\approx y(0) + y'(0) \cdot 0.1 \\ &= 1 + (0 \cdot 1 + 1) \cdot 0.1 = 1.1. \end{aligned}$$

Tổng quát, với phương trình vi phân $y' = f(x, y)$ thỏa mãn $y(x_0) = y_0$, ta có công thức gần đúng

$$\boxed{y(x_0 + h) \approx y(x_0) + hf(x_0, y_0)}$$

Cực trị

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên D.

Định nghĩa 1.1.18. Hàm số $f(x)$ đạt *cực đại* tại $x_0 \in D$ nếu tồn tại một khoảng $(a, b) \subset D$ chứa x_0 sao cho $f(x) \leq f(x_0)$ với mọi $x \in (a, b)$. Tương tự, hàm số $f(x)$ đạt *cực tiểu* tại $x_0 \in D$ nếu tồn tại một khoảng $(a, b) \subset D$ chứa x_0 sao cho $f(x) \geq f(x_0)$ với mọi $x \in (a, b)$. Hàm số $f(x)$ được gọi là đạt *cực trị* tại x_0 nếu f đạt cực đại hoặc cực tiểu tại x_0.

Ví dụ 1.1.19. Hàm số $f(x) = x^2$ xác định trên $\mathbb{R}$ đạt cực tiểu tại $x = 0$, và không có cực đại.

Ví dụ 1.1.20. Hàm số $f(x) = \sin x$ xác định trên $\mathbb{R}$ đạt cực đại tại các điểm $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, và đạt cực tiểu tại các điểm $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Ví dụ 1.1.21. Hàm số $f(x) = x^3$ không có cả cực đại và cực tiểu.

Định lý 1.1.22 (Fermat)**.** *Nếu hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại x_0 và đạo hàm $f'(x_0)$ tồn tại thì $f'(x_0) = 0$.*

Chứng minh. Xét trường hợp hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại x_0. Trường hợp cực tiểu được tiến hành tương tự.

Theo định nghĩa, tồn tại khoảng (a, b) chứa x_0 sao cho $f(x) \leq f(x_0)$ với mọi $x \in (a, b)$. Do đó

$$f(x_0 + h) \leq f(x_0) \quad \text{với } h \text{ đủ nhỏ sao cho } x_0 + h \in (a, b)$$

Suy ra

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0,$$
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0.$$

Do đạo hàm $f'(x_0)$ tồn tại nên hai giới hạn trên cũng tồn tại và bằng nhau (cùng bằng $f'(x_0)$). Như thế

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0$$

□

Ta có các nhận xét sau.

(a) Định lý Fermat chỉ là điều kiện cần cho sự tồn tại cực trị. Chẳng hạn, hàm số $f(x) = x^3$ **không** đạt cực trị tại $x = 0$, mặc dù $f'(0) = 0$.

(b) Nếu hàm số f đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$ hoặc $f'(x_0)$ không tồn tại. Ta có định nghĩa dưới đây.

Định nghĩa 1.1.23. Cho hàm số f xác định trên khoảng (a, b). Ta nói $x_0 \in (a, b)$ là một *điểm tới hạn* của f nếu $f'(x_0) = 0$ hoặc $f'(x_0)$ không tồn tại.

Theo định nghĩa trên, hàm số f chỉ có thể đạt cực trị tại các điểm tới hạn của nó.

Ví dụ 1.1.24. Hàm số $f(x) = |x|$ khả vi tại mọi điểm $x \neq 0$, và không khả vi tại $x = 0$. Do đó, $x = 0$ là một điểm tới hạn của f, đồng thời là một điểm cực tiểu.

Ví dụ 1.1.25. Hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x}$ khả vi tại mọi $x \neq 0$, và không khả vi tại $x = 0$. Do đó, $x = 0$ là một điểm tới hạn của f. Dễ thấy $x = 0$ **không** là điểm cực trị của hàm số f.

Ví dụ 1.1.26. Tìm tất cả các điểm tới hạn của hàm số $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.

Dưới đây, ta trình bày bài toán *tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn.*

Ta thừa nhận định lý sau.

Định lý 1.1.27. *Nếu hàm số* $f(x)$ *liên tục trên đoạn* $[a, b]$ *thì* f *có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.*

Nhận xét rằng, giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số f đạt được tại các đầu mút $x = a$, $x = b$ hoặc tại $x_0 \in (a, b)$. Nếu trường hợp sau cùng xảy ra thì x_0 phải là một điểm cực trị của f. Hệ quả là x_0 là một điểm tới hạn của f. Nhận định này dẫn đến thuật toán tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên $[a, b]$ như sau.

- **Bước 1**. Tính $f(a)$ và $f(b)$.
- **Bước 2**. Tìm tất cả các điểm tới hạn của f trên (a, b) và tính giá trị của f tại những điểm này.
- **Bước 3**. So sánh các giá trị tìm được ở **Bước 1** và **Bước 2**. Giá trị lớn nhất trong các giá trị thu được là giá trị lớn nhất của hàm số f. Giá trị nhỏ nhất trong các giá trị thu được là giá trị nhỏ nhất của hàm số f.

Ví dụ 1.1.28. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau trên các khoảng được chỉ ra.

(a) $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ trên $[1, 3]$.

(b) $f(x) = x^2 - 3\sqrt[3]{x^2}$ trên $[0, 2]$.

Khai triển Taylor

Ta đã biết hàm bậc nhất $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ xấp xỉ tốt hàm số $f(x)$ tại những x đủ gần x_0. Đa thức Taylor tại x_0 dưới đây là một sự mở rộng của khái niệm hàm tuyến tính, và cho một xấp xỉ tốt nhất của hàm số f tại lân cận của x_0.

Định nghĩa 1.1.29. Cho hàm số f có đạo hàm đến cấp n trên (a, b) và $x_0 \in (a, b)$. Đa thức

$$T_{n,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

được gọi là *đa thức Taylor cấp n* của f tại x_0. Hiệu $f(x) - T_{n,x_0}(x) := R_{n,x_0}(x)$ được gọi là *phần dư thứ* n của đa thức Taylor.

Nhận xét rằng, đa thức Taylor T_{n,x_0} là một đa thức có bậc không vượt quá n thỏa mãn $T_{n,x_0}(x_0) = f(x_0)$ và $T^{(k)}_{n,x_0}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ với $1 \le k \le n$. Khi $x_0 = 0$, đa thức $T_{n,0}(x)$ và $R_{n,0}(x)$ được ký hiệu gọn là $T_n(x)$ và $R_n(x)$

$$T_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

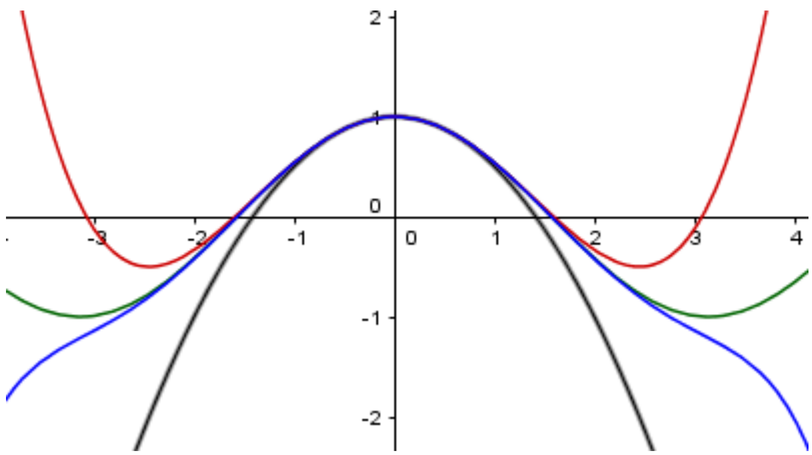
(Lưu ý, ở đây ta không dùng thuật ngữ *đa thức Taylor bậc* n vì đa thức Taylor chưa chắc có bậc bằng n, chẳng hạn khi $f^{(n)}(x_0) = 0$.)

Ví dụ 1.1.30. Đa thức Taylor cấp n của hàm số $f(x) = e^x$ tại $x = 0$ là

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Ví dụ 1.1.31. Đa thức Taylor cấp $2, 4$ và 6 của hàm số $f(x) = \cos(x)$ tại $x = 0$ là

$$T_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2!},$$
$$T_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!},$$
$$T_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}.$$



Ghi chú: Đường xanh lá cây là đồ thị hàm $\cos(x)$, đường màu đen là đồ thị của $T_2(x)$, đường màu đỏ là đồ thị $T_4(x)$, và đường màu xanh da trời là đồ thị của $T_6(x)$.

Ví dụ trên cho thấy, các đa thức Taylor xấp xỉ tốt hàm số $f(x) = \cos(x)$ tại những giá trị x gần 0. Tổng quát, định lý dưới đây nôm na khẳng định rằng nếu x rất gần x_0 thì hiệu số $R_{n,x_0}(x) = f(x) - T_{n,x_0}(x)$ cũng rất nhỏ, và đa thức Taylor là đa thức xấp xỉ "tốt nhất" hàm số $f(x)$ tại những giá trị x gần x_0. Trước khi phát biểu định lý, ta cần khái niệm sau.

Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì ta nói $f(x)$ là *vô cùng bé bậc cao hơn* $g(x)$ tại x_0, và ký hiệu $f(x) = o(g(x))$.

Việc tìm đa thức Taylor của hàm số $f(x)$ tại $x = x_0$ được quy về tìm đa thức Taylor của hàm số $f(x + x_0)$ tại $x = 0$. Vì vậy, định lý dưới đây chỉ xét $x_0 = 0$ cho đơn giản ký hiệu.

Định lý 1.1.32. *Cho hàm số* f *có đạo hàm đến cấp* n *trên* (a, b) *và* $0 \in (a, b)$*. Khi đó, hai mệnh đề sau đây là đúng.*

(i)

$$f(x) - T_n(x) = o(x^n).$$

(ii) Nếu $P_n(x)$ *là một đa thức bậc* $\leq n$ *thỏa mãn* $f(x) - P_n(x) = o(x^n)$ *thì*

$$P_n(x) = T_n(x).$$

Công thức $f(x) = T_n(x) + o(x^n)$ được gọi là *khai triển Taylor của hàm số* $f(x)$ *trong lân cận của* 0.

Chứng minh. (i) Theo định nghĩa,

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x).$$

Dễ dàng kiểm tra các khẳng định sau

$$R_n(0) = R_n'(0) = \cdots = R_n^{(n)}(0) = 0,$$

và đạo hàm cấp n của hàm số $g(x) = x^n$ tại 0 là $n!$.

Áp dụng quy tắc L'Hospital n lần liên tiếp, ta được

$$\lim_{x \to 0} \frac{R_n(x)}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{R_n^{(n)}(0)}{n!} = 0.$$

(ii) Giả sử tồn tại đa thức $P_n(x)$ bậc $\leq n$ thỏa mãn

$$f(x) - P_n(x) = o(x^n).$$

Kết hợp với sự kiện $f(x) - T_n(x) = o(x^n)$ ta được

$$P_n(x) - T_n(x) = o(x^n).$$

Đặt

$$P_n(x) - T_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Ta có

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = o(x^n).$$

Cho $x \to 0$ ta có $a_0 = 0$. Khi đó

$$a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = o(x^n) \Longrightarrow a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1} = o(x^{n-1}).$$

Tiếp tục cho $x \to 0$ ta thu được $a_1 = 0$, và ta lại có

$$a_2x^2 + a_3x^3 \cdots + a_nx^n = o(x^n) \Longrightarrow a_2 + a_3x + \cdots + a_nx^{n-2} = o(x^{n-2}).$$

Lập luận tương tự ta có $a_2 = 0$. Quá trình này cứ tiếp diễn cho đến khi $a_n = 0$. Như thế $P_n(x) - T_n(x) = 0$ hay $P_n(x) = T_n(x)$.

□

Ví dụ 1.1.33. (i) Đạo hàm cấp n của hàm số $f(x) = \sin(x)$là

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2}).$$

Do đó,

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n = 2k, \\ 1 & \text{nếu } n = 4k+1, \\ -1 & \text{nếu } n = 4k+3. \end{cases}$$

Vì vậy khai triển Taylor hàm số $f(x) = \sin(x)$ trong lân cận của 0 là

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}).$$

(ii) Hàm số $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ có $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$. Suy ra $f^{(n)}(0) = n!$.

Khai triển Taylor hàm số $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ trong lân cận 0 là

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n).$$

(iii) Hàm số $f(x) = (1+x)^r$ thỏa mãn $f^{(n)}(x) = r(r-1)\ldots(r-n+1)(1+x)^{r-n}$.

Dẫn đến $f^{(n)}(0) = r(r-1)\ldots(r-n+1)$. Vậy khai triển Taylor của hàm số $f(x) = (1+x)^r$ trong lân cận 0 là

$$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{r(r-1)\ldots(r-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Việc sử dụng định nghĩa để tìm đa thức Taylor đôi khi phức tạp vì cần tính đạo hàm cấp cao. Khẳng định (ii) trong định lý 1.1.32 giúp ta tìm đa thức Taylor mà không phải áp dụng định nghĩa. Ví dụ dưới đây minh họa điều đó.

Ví dụ 1.1.34. Tìm đa thức Taylor cấp 6 của hàm số $f(x) = x^3 e^x$ tại $x = 0$.

Dưới đây ta trình bày hai lời giải cho ví dụ trên.

- Áp dụng định nghĩa, ta cần tính $f^{(k)}(x)$ với $1 \le k \le 6$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= e^x(x^3 + 3x^2) \Longrightarrow f'(0) = 0, \\
f''(x) &= e^x(x^3 + 6x^2 + 6x) \Longrightarrow f''(0) = 0, \\
f^{(3)}(x) &= e^x(x^3 + 9x^2 + 18x + 6) \Longrightarrow f^{(3)}(0) = 6, \\
f^{(4)}(x) &= e^x(x^3 + 12x^2 + 36x + 24) \Longrightarrow f^{(4)}(0) = 24, \\
f^{(5)}(x) &= e^x(x^3 + 15x^2 + 60x + 60) \Longrightarrow f^{(5)}(0) = 60, \\
f^{(6)}(x) &= e^x(x^3 + 18x^2 + 90x + 120) \Longrightarrow f^{(6)}(0) = 120.
\end{aligned}$$

  Suy ra đa thức Taylor cần tìm là

$$\sum_{k=0}^{6} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = x^3 + x^4 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{6}x^6.$$

- Ta có

$$\begin{aligned}
x^3 e^x &= x^3\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) \\
&= x^3 + x^4 + \frac{x^5}{2} + \frac{x^6}{6} + x^3 o(x^3) \\
&= x^3 + x^4 + \frac{x^5}{2} + \frac{x^6}{6} + o(x^6).
\end{aligned}$$

  Sử dụng Định lý 1.1.32 (ii), ta được đa thức Taylor cần tìm là

$$x^3 + x^4 + \frac{x^5}{2} + \frac{x^6}{6}.$$

Để tìm đa thức Taylor cấp n của hàm số $u(x) = f(x)g(x)$ tại $x = 0$ ta có thể làm như sau.

- Viết đa thức Taylor cấp n của $f(x)$ và $g(x)$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \text{các đơn thức bậc} \le n + o(x^n) \\
g(x) &= \text{các đơn thức bậc} \le n + o(x^n).
\end{aligned}$$

- Trong tích $f(x)g(x)$, chỉ giữ lại các đơn thức có bậc $\leq n$, những đơn thức bậc $> n$ được chuyển vào $o(x^n)$.

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \big(\text{các đơn thức bậc} \leq n + o(x^n)\big)\big(\text{các đơn thức bậc} \leq n + o(x^n)\big) \\ &= \underbrace{\text{các đơn thức bậc} \leq n}_{\text{đa thức Taylor cần tìm}} + o(x^n) \end{aligned}$$

Ví dụ 1.1.35. Tìm đa thức Taylor cấp 5 của hàm số $f(x) = e^x \sin(x)$ tại $x = 0$.

Giải

Trước hết, ta tìm đa thức Taylor cấp 5 của hàm $g(x) = \sin(x)$ và $h(x) = e^x$.

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}, \\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} e^x \sin(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right). \\ &= x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + o(x^5). \end{aligned}$$

Bạn đọc có thể giải bài tập này bằng định nghĩa.

Ta đã thấy rằng đa thức Taylor của hàm số $f(x)$ tại $x = x_0$ cho xấp xỉ tốt hàm số $f(x)$ tại những giá trị x gần x_0. Câu hỏi đặt ra là, với những giá trị x "xa" x_0 thì đa thức Taylor còn xấp xỉ tốt không? Định lý sau đây mô tả rõ hơn phần dư của đa thức Taylor, và phần nào giúp ta trả lời cho câu hỏi nêu trên.

Định lý 1.1.36. *Cho f là một hàm số xác định trên khoảng (a, b), có đạo đến cấp $n + 1$ trên (a, b) và $x_0 \in (a, b)$. Khi đó*

(i) Với mọi $x \in (a, b)$ tồn tại một số c nằm giữa x và x_0 sao cho

$$R_{n,x_0}(x) = f(x) - T_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

(ii) Nếu tồn tại số $M > 0$ để $|f^{(n)}(c)| \leq M$ với mọi c nằm giữa x và x_0 thì

$$\lim_{n\to\infty} \left|f(x) - T_{n,x_0}(x)\right| = 0.$$

Lưu ý rằng số c nói trong định lý trên phụ thuộc vào x, và vì c nằm giữa x và x_0 nên có thể viết $c = x_0 + \theta(x - x_0)$ với $0 < \theta < 1$. Do đó phần dư trên còn được viết dưới dạng

$$R_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Khẳng định (ii) trong định lý trên nói rằng, nếu giả thiết của định lý được thỏa mãn thì đa thức Taylor $T_{n,x_0}(x)$ xấp xỉ tốt hàm số $f(x)$ với n đủ lớn.

Chứng minh. □

Ví dụ 1.1.37. Tính gần đúng số e với độ chính xác 10^{-3}.

Khai triển Taylor hàm số $f(x) = e^x$ tại $x = 0$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

Cho $x = 1$, ta được

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}$$

Từ đây ta có

$$\left|e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)\right| \leq \frac{e^\theta}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Ta tìm n sao cho

$$\frac{3}{(n+1)!} \leq 10^{-3} \Longrightarrow n \geq 6.$$

Vậy ta có thể lấy giá trị

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{6!} = 2.718055556\ldots$$

Định lý giá trị trung bình

Có một chiếc xe ôtô di chuyển trên đường cao tốc dài 50 km, với tốc độ cho phép là 100 km/h. Thực tế, thời gian chiếc xe này chạy hết 50 km cao tốc là 25 phút (5/12 h). Do đó, tốc độ trung bình khi xe chạy trên cao tốc là $50 : (5/12) = 120$ km/h. Giả thiết rằng vị trí của chiếc xe là một hàm số khả vi theo biến thời gian. Khi ấy định lý giá trị trung bình cho biết có một thời điểm t_0 mà tốc độ của xe tại đó bằng 120 km/h, lớn hơn tốc độ cho phép. Như vậy, cảnh sát giao thông có lý do để xử lý lỗi đi quá tốc độ của chiếc xe này.

Trước hết, ta xét một trường hợp riêng của Định lý giá trị trung bình, đó là định lý Rolle.

Định lý 1.1.38 (Rolle). *Cho* f *là một hàm số liên tục trên đoạn* $[a, b]$ *và khả vi trên* (a, b). *Nếu* $f(a) = f(b)$ *thì tồn tại ít nhất một điểm* $x_0 \in (a, b)$ *sao cho* $f'(x_0) = 0$.

Chứng minh. Đặt $f(a) = f(b) = k$. Ta xét hai trường hợp sau.

(i) $f(x) = k$ với mọi $x \in (a, b)$. Khi đó, $f'(x) = 0$ với mọi $x \in (a, b)$.

(ii) Tồn tại $x \in (a, b)$ mà $f(x) \neq k$. Vì hàm số f liên tục trên $[a, b]$ nên f có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $[a, b]$, đồng thời một trong hai giá trị này khác k. Không mất tổng quát, giả sử giá trị lớn nhất là $f(x_0) \neq k$ đạt được tại $x_0 \in (a, b)$. Khi đó, x_0 là một điểm cực trị của hàm số f. Theo định lý Fermat, ta có $f'(x_0) = 0$.

□

Giả thiết về tính khả vi của f là cần thiết. Chẳng hạn, xét hàm số $f(x) = |x|$ liên tục trên $[-1, 1]$ và thỏa mãn $f(-1) = f(1) = 1$. Tuy nhiên, không tồn tại $x \in (-1, 1)$ để $f'(x) = 0$. Chú ý rằng hàm số $f(x) = |x|$ không khả vi tại $x = 0$.

Ví dụ 1.1.39. Với các hàm số dưới đây, chỉ ra rằng các điều kiện trong định lý Rolle đều thỏa mãn, và tìm tất cả các giá trị x_0 sao cho $f'(x_0) = 0$.

(a) $f(x) = x^2 + 2x$ trên $[-2, 0]$.

(b) $g(x) = x^3 - 4x$ trên $[-2, 2]$.

Ví dụ 1.1.40. Các hàm số $f(x) = |x|$ và $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ có thỏa mãn Định lý Rolle trên đoạn $[-1, 1]$ hay không? Vì sao?

Định lý 1.1.41 (Định lý giá trị trung bình). *Cho* f *là một hàm số liên tục trên đoạn* $[a, b]$ *và khả vi trên* (a, b). *Khi đó, tồn tại ít nhất một điểm* $x_0 \in (a, b)$ *sao cho*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Về mặt hình học, Định lý giá trị trung bình cho biết nếu hàm số f liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên (a, b), thì có một điểm $x_0 \in (a, b)$ sao cho tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại x_0 song song với đường thẳng đi qua hai điểm $(a, f(a))$ và $(b, f(b))$.

Chứng minh. Mặc dù định lý Rolle là một trường hợp đặc biệt của Định lý giá trị trung bình, ta có thể dùng định lý Rolle để chứng minh Định lý giá trị trung bình.

Ký hiệu $l(x)$ là phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $(a, f(a))$ và $(b, f(b))$

$$l(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Dễ thấy $l(a) = f(a)$ và $l(b) = f(b)$.
Xét hàm số

$$g(x) = f(x) - l(x).$$

Ta có hàm số g liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b) và

$$g(a) = l(a) - f(a) = 0$$
$$g(b) = l(b) - f(b) = 0.$$

Như vậy $g(a) = g(b)$. Áp dụng định lý Rolle, tồn tại $x_0 \in (a, b)$ sao cho

$$g'(x_0) = 0 \iff f'(x_0) - l'(x_0) = 0$$
$$\iff f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Ví dụ 1.1.42. Có một quả bóng được thả từ độ cao 100m. Vị trí của quả bóng ở thời điểm t (giây) được cho bởi $s(t) = -16t^2 + 100$.

(a) Sau bao lâu kể từ lúc thả quả bóng chạm đất?

(b) Tính vận tốc trung bình của quả bóng từ lúc thả đến lúc chạm đất.

(c) Tìm thời điểm t_0 sao cho vận tốc tức thời tại t_0 bằng vận tốc trung bình.

Ví dụ 1.1.43. So sánh hai số π^e và e^π.

Ta sẽ so sánh $\ln(\pi^e) = e\ln(\pi)$ và $\ln(e^\pi) = \pi\ln(e)$. Điều này gợi ý ta xét hàm số

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} \quad \text{với } x \in (0, +\infty).$$

Ta có

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

Sử dụng Định lý 1.1.41 ta nhận được

$$\frac{\ln(\pi)}{\pi} - \frac{\ln(e)}{e} = \frac{1 - \ln(c)}{c^2}(\pi - e),$$

trong đó $c \in (e, \pi)$. Như thế $1 - \ln(c) < 0$. Từ đây suy ra

$$\frac{\ln(\pi)}{\pi} - \frac{\ln(e)}{e} < 0 \quad \text{tương đương} \quad \frac{\ln(\pi)}{\pi} < \frac{\ln(e)}{e}.$$

Vậy $\pi^e < e^\pi$.

Sau đây ta trình bày ba hệ quả của Định lý giá trị trung bình.

Hệ quả 1.1.44. *Nếu hàm số* f *khả vi trên* (a, b) *và* $f'(x) = 0$ *với mọi* $x \in (a, b)$ *thì* $f(x) = c$ *với mọi* $x \in (a, b)$*, ở đây* c *là một hằng số.*

Hệ quả 1.1.45. *Nếu* f *và* g *là các hàm số khả vi trên* (a, b) *và* $f'(x) = g'(x)$ *với mọi* $x \in (a, b)$ *thì* $f(x) = g(x) + c$ *với mọi* $x \in (a, b)$*, ở đây* c *là một hằng số.*

Hệ quả 1.1.46. *Cho* f *là một hàm số liên tục trên* $[a, b]$ *và khả vi trên* (a, b)*. Khi đó*

(i) Nếu $f'(x) > 0$ *với mọi* $x \in (a, b)$ *thì* f *đồng biến trên* $[a, b]$*.*

(ii) Nếu $f'(x) < 0$ *với mọi* $x \in (a, b)$ *thì* f *nghịch biến trên* $[a, b]$*.*

Phiên bản mở rộng của Định lý giá trị trung bình dưới đây được dùng để chứng minh cho quy tắc L'Hôpital ở mục sau.

Định lý 1.1.47 (Định lý giá trị trung bình mở rộng)**.** *Cho các hàm số* f *và* g *liên tục trên* $[a, b]$ *và có đạo hàm trên* (a, b)*. Giả sử* $g'(x) \neq 0$ *với mọi* $x \in (a, b)$*. Khi đó tồn tại một số* $c \in (a, b)$ *sao cho*

$$\big(f(b) - f(a)\big)g'(c) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(c).$$

Quy tắc L'Hôpital

Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ thì giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ được gọi là *dạng vô định* $\dfrac{0}{0}$. Chẳng hạn, các giới hạn sau ở dạng vô định $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}, \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}, \lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4}.$$

Định lý 1.1.48 (Dạng 0/0)**.** *Cho các hàm số* f *và* g *có đạo hàm liên tục trên* (a, b) *và* $x_0 \in (a, b)$*. Nếu* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ *thì*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Định lý vẫn đúng cho các giới hạn một phía và khi thay x_0 bởi ∞, *Chứng minh.* Vì các hàm số f và g có đạo hàm tại x_0 nên chúng liên tục tại x_0, suy ra

$$f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \quad \text{và} \quad g(x_0) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0.$$

Hệ quả là

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}.$$

Áp dụng Định lý giá trị trung bình mở rộng, tồn tại c nằm giữa x và x_0 sao cho

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Khi $x \to x_0$ thì $c \to x_0$. Vì f' và g' là các hàm liên tục trên (a, b) nên

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \\ &= \lim_{c\to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.\end{aligned}$$

□

Ví dụ 1.1.49. Dùng quy tắc L'Hôpital, tính các giới hạn sau.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x}$.

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(\pi x)}{\ln x}$.

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{1/x} - 1}{1/x}$.

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$ hoặc $-\infty$ thì giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ được gọi là dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Định lý 1.1.50 (Dạng ∞/∞)**.** *Cho các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên (a, b) và $x_0 \in (a, b)$. Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ (hoặc $-\infty$) và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$ (hoặc $-\infty$). Khi đó*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

nếu giới hạn ở vế phải tồn tại, hoặc bằng ∞ hay $-\infty$. Định lý vẫn đúng nếu x_0 là ∞ hay $-\infty$, hay các giới hạn một phía.

Ví dụ 1.1.51. Áp dụng quy tắc L'Hospital, tính các giới hạn sau.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x-5}{2x+1}$.

(b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\cot x}$.

Sau đây, ta xét một vài dạng vô định khác.

Ví dụ 1.1.52 (Dạng $0 \cdot \infty$)**.** Tính các giới hạn sau

(a) $\lim\limits_{x\to 0} x \cot x$.

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 e^{-x}$.

Ví dụ 1.1.53 (Dạng $\infty - \infty$)**.** Tính các giới hạn sau

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\tan x}\right)$.

(b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$.

Ví dụ 1.1.54 (Dạng ∞^0)**.** Tính các giới hạn sau.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x}$.

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/\ln x}$

Phương pháp Newton

Chúng ta biết rằng phương trình bậc nhất và phương trình bậc hai đều có công thức nghiệm tường minh khá đơn giản, trong khi đó các phương trình bậc lớn hơn hai, thì hoặc là không có công thức nghiệm, hoặc là có công thức nhưng rất phức tạp và ít được dùng trong thực tế. Trong tiểu mục này, ta sẽ trình bày một phương pháp giải gần đúng phương trình, có tên gọi là phương pháp Newton (hay phương pháp tiếp tuyến). Ý tưởng của phương pháp này là sử dụng xấp xỉ bậc nhất của hàm số. Nói rõ hơn, thay vì giải phương trình $f(x) = 0$, ta sẽ giải phương trình $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$, ở đây x_0 được gọi là một *nghiệm xấp xỉ*, được chọn sao cho càng gần nghiệm đúng của phương trình càng tốt.

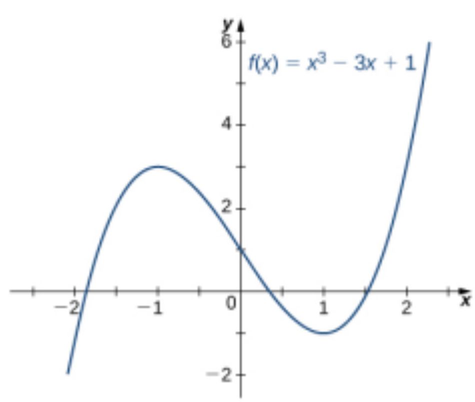
Dưới đây ta liệt kê các bước của phương pháp Newton để tìm nghiệm gần đúng của phương trình $f(x) = 0$.

- **Bước 1**. Chọn xấp xỉ ban đầu x_0. Để chọn được x_0 gần với nghiệm đúng của phương trình, ta có thể khảo sát và vẽ phác đồ thị của hàm số $y = f(x)$, hoặc sử dụng kết quả sau đây: Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $[a, b]$.

- **Bước 2**. Giải phương trình $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$ ta được
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$
Ta xem x_1 là một *xấp xỉ mới* của nghiệm đúng, và tiếp tục giải phương trình $f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) = 0$ để có
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$
Lặp lại quá trình trên, ta thu được dãy số (x_n) được xác định theo công thức truy hồi
$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad (n \geq 1).$$

- **Bước 3**. Gọi α là nghiệm đúng của phương trình $f(x) = 0$. Ta muốn ước lượng $|x_n - \alpha|$. Áp dụng Định lý giá trị trung bình, ta nhận được
$$|f(x_n)| = |f(x_n) - f(\alpha)| = |f'(c)||x_n - \alpha|.$$
Ký hiệu $m = \min\limits_{x \in [a,b]} f'(x)$. Nếu $m > 0$ thì ta có đánh giá
$$|x_n - \alpha| \leq \frac{|f(x_n)|}{f'(c)} \leq \frac{|f(x_n)|}{m}.$$

Ví dụ 1.1.55. Sử dụng phương pháp Newton, tìm nghiệm gần đúng của phương trình $x^3 - 3x + 1 = 0$.



Ký hiệu $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(1.5) = -0.125, f(2) = 3$ và $f'(x) = 3x^2 - 3 > 0$ với mọi $x \in (1.5, 2)$. Do đó phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất α trên đoạn $[1.5, 2]$. Ta sẽ ước lượng nghiệm này.

Chọn $x_0 = 1.5$. Ta có

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^3 - 3x_0 + 1}{3x_0^2 - 3} = \frac{23}{15} \approx 1.533333,$$
$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 - 3x_1 + 1}{3x_1^2 - 3} \approx 1.532090643,$$
$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^3 - 3x_2 + 1}{3x_2^2 - 3} \approx 1.532088886.$$

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3 \geq 3.75$ với $x \in [1.5, 2]$. Do đó ta có ước lượng sai số

$$|x_3 - \alpha| \leq \frac{|f(x_3)|}{3.75} \approx 5.32125 \times 10^{-11}.$$

Phương trình đã cho còn có hai nghiệm khác, lần lượt thuộc các đoạn $[-2, -1]$ và $[0, 1]$. Bạn đọc hãy áp dụng phương pháp Newton để tìm xấp xỉ các giá trị này.

Ví dụ 1.1.56. Tính gần đúng $\sqrt{2}$.

Xét hàm số $f(x) = x^2 - 2$ với $f'(x) = 2x$. Ta biết rằng $\sqrt{2}$ là một nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^2 - 2}{2x_{n-1}} \\ &= \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}\right). \end{aligned}$$

Ta có thể chọn $x_0 = 1.5$. Từ đó, ta nhận được

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{2}{x_0}\right) \approx 1.416666667,$$
$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right) \approx 1.414215686,$$
$$x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{2}{x_2}\right) \approx 1.414213562.$$

Ước lượng sai số cho x_3. Theo Định lý giá trị trung bình

$$|x_3 - \sqrt{2}| = \frac{|f(x_3)|}{f'(c)},$$

trong đó c nằm giữa x_3 và $\sqrt{2}$. Ta có thể đánh giá $f'(c) > f'(1.4) = 2.8$. Do đó

$$|x_3 - \sqrt{2}| < \frac{|f(x_3)|}{2.8} \approx 3.8 \times 10^{-10}.$$

Cần chú ý rằng, không phải bao giờ phương pháp Newton cũng thành công. Chẳng hạn, nếu $f'(x_n) = 0$ và $f(x_n) \neq 0$ thì quá trình lặp không thể tiếp diễn, hoặc nếu ta chọn x_0 "xa" nghiệm đúng thì rất có thể dãy xấp xỉ (x_n) không hội tụ về nghiệm. Ta xét một ví dụ minh họa cho tình huống này.

Ví dụ 1.1.57. Bằng khảo sát hàm số $f(x) = x^3 - 2x + 2$, ta có thể chỉ ra rằng phương trình $x^3 - 2x + 2 = 0$ có nghiệm duy nhất và nghiệm này thuộc đoạn $[-2, -1]$. Chọn $x_0 = 0$. Áp dụng phương pháp Newton, ta tính x_1 và x_2.

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^3 - 2x_0 + 2}{3x_0^2 - 2} = 1,$$
$$x_2 = x_0 - \frac{x_1^3 - 2x_1 + 2}{3x_1^2 - 2} = 0.$$

Như thế dãy số $x_0, x_1, x_2, \ldots$ dao động quanh hai giá trị 0 và 1, và do đó không hội tụ về nghiệm trên đoạn $[-2, -1]$.

1.2 Sơ lược về chuỗi số và chuỗi lũy thừa

Nghịch lý chia đôi (Dichotomy paradox)

Xét đoạn thẳng AB có độ dài bằng 1 (đơn vị dài). Gọi A_1 là trung điểm của AB, A_2 là trung điểm của A_1B, A_3 là trung điểm của A_2B,..., A_n là trung điểm của $A_{n-1}B$.

Giả sử một con kiến bò trên đoạn thẳng AB, xuất phát từ A và đi đến B. Trên đường đến B, con kiến phải đi qua các điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Ta thấy

$$AA_1 + A_1A_2 + \cdots A_{n-1}A_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1 \quad \text{với mọi } n.$$

Bất đẳng thức trên suy ra rằng con kiến không thể đến B. Rõ ràng đây là nghịch lý.

Để thoát khỏi nghịch lý trên, ta có quan sát như sau: khi n rất lớn thì $1 - \frac{1}{2^n}$ xấp xỉ bằng 1. Dưới ngôn ngữ giới hạn, điều ấy nghĩa là

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1.$$

Người ta thường diễn đạt vế trái của đẳng thức trên như là một **tổng vô hạn**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots.$$

1.2.1 Chuỗi số

Định nghĩa 1.2.1. Cho dãy số $\{a_n\}$. Một biểu thức dạng

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

được gọi là một ***chuỗi vô hạn***. Số a_n được gọi là ***số hạng thứ*** n của chuỗi. Dãy số $\{s_n\}$ định nghĩa bởi

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

được gọi là ***dãy tổng riêng*** của chuỗi. Nếu dãy tổng riêng hội tụ đến số L thì ta nói ***chuỗi hội tụ***, và có ***tổng*** bằng L. Trong trường hợp này, ta viết

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = L.$$

Nếu dãy tổng riêng phân kỳ thì ta nói ***chuỗi phân kỳ***.

Ví dụ 1.2.2. Tính tổng của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Xét tổng riêng

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$, và do đó

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Chuỗi ở Ví dụ 1.2.2 có dạng $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$. Người ta gọi những chuỗi dạng này là *chuỗi viễn vọng* (tiếng anh là Telescoping Series). Tổng riêng của chuỗi viễn vọng là

$$\begin{aligned} s_n &= (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_{n+1} - a_n) \\ &= a_{n+1} - a_0. \end{aligned}$$

Do đó, chuỗi viễn vọng $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ hội tụ khi và chỉ khi dãy số (a_n) hội tụ.

Ví dụ 1.2.3. Chứng minh rằng *chuỗi điều hòa* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ.

Ta thấy

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{2}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{> \frac{4}{8}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}}_{> \frac{8}{16}} + \cdots$$

Như thế, nếu $n = 2^k$ thì

$$s_{2^k} > 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{(k-1) \text{ số hạng}} = 1 + \frac{k}{2}.$$

Do đó dãy tổng riêng tiến ra $+\infty$, và chuỗi điều hòa là phân kỳ.

Chuỗi hình học là một chuỗi có dạng

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n,$$

trong đó a và r là các hằng số, $a \neq 0$. Hằng số r có thể dương, chẳng hạn

$$2 + 2\Big(\frac{1}{3}\Big) + 2\Big(\frac{1}{3}\Big)^2 + \cdots + 2\Big(\frac{1}{3}\Big)^n + \cdots \quad \Big(a = 2, r = \frac{1}{3}\Big)$$

hoặc có thể âm, ví dụ

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \Big(-\frac{1}{2}\Big)^n + \cdots \quad \Big(a = 1, r = -\frac{1}{2}\Big).$$

Với $r = 1$, tổng riêng của chuỗi là

$$s_n = a + a \cdot 1 + a \cdot 1^2 + \cdots a \cdot 1^n = na.$$

Như vậy, chuỗi phân kỳ vì dãy tổng riêng $\{s_n\}$ tiến ra $-\infty$ hoặc $+\infty$ tùy theo a âm hay dương.

Với $r = -1$, ta có

$$s_{2n} = a, s_{2n+1} = 0.$$

Chuỗi phân kỳ vì dãy tổng riêng $\{s_n\}$ nhận giá trị một trong hai giá trị a hoặc 0.

Với $|r| \neq 1$,

$$\begin{aligned} s_n &= a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n \\ rs_n &= ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n+1} \\ s_n - rs_n &= a - ar^{n+1} \\ s_n &= \frac{a(1 - r^{n+1})}{1 - r}. \end{aligned}$$

Nếu $|r| > 1$ thì dãy số $\{r^{n+1}\}$ phân kỳ nên chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} ar^n$ phân kỳ.

Nếu $|r| < 1$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$, kéo theo

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-r}.$$

Như thế, trong trường hợp $|r| < 1$ thì chuỗi hình học là hội tụ và có tổng bằng $\dfrac{a}{1-r}$.

Ví dụ 1.2.4. Biểu diễn số $5.232323\ldots$ dưới dạng thương của hai số nguyên.

Ta có

$$\begin{aligned} 5.232323\ldots &= 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{100^2} + \frac{23}{100^3} \cdots \\ &= 5 + \frac{1}{100}\Big(23 + \frac{23}{100} + \frac{23}{100^2} + \cdots\Big) \quad (a = 23, r = \frac{1}{100}) \\ &= 5 + \frac{1}{100}\frac{23}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{518}{99}. \end{aligned}$$

Ví dụ 1.2.5. Tưởng tượng bạn trúng xổ số với số tiền là 20 triệu đô la. Nhà phát hành cho bạn ba lựa chọn: (1) nhận một lúc 20 triệu đô la; (2) nhận 1.5 triệu đô la mỗi năm, trong vòng 20 năm; (3) nhận 1 triệu đô la mỗi năm, kéo dài vĩnh viễn (chuyển xuống người thừa kế). Sự lựa chọn nào là có lợi nhất, biết rằng lãi suất hàng năm là $r = 5\%$?

Giải

Để biết lựa chọn nào có lợi nhất, ta cần tính xem *giá trị hiện tại* (tiếng anh *present value*) của lựa chọn nào lớn nhất. Giá trị hiện tại của lựa chọn (1) là 20 triệu đô la.

Ta xét lựa chọn (2). Số tiền 1.5 triệu đô la vào cuối năm thứ nhất có giá trị hiện tại P_1 được xác định từ phương trình

$$P_1(1 + r) = 1.5 \quad \text{suy ra } P_1 = \frac{1.5}{1 + r}.$$

Số tiền 1.5 triệu đô là vào cuối năm thứ hai có giá trị hiện tại là P_2

$$P_2(1 + r)^2 = 1.5 \quad \text{suy ra } P_2 = \frac{1.5}{(1 + r)^2}.$$

Tổng quát, số tiền 1.5 triệu đô la ở thời điểm năm thứ k có giá trị hiện tại P_k

$$P_k(1+r)^k = 1.5 \quad \text{suy ra } P_k = \frac{1.5}{(1+r)^k}.$$

Vậy giá trị hiện tại của lựa chọn nhận 1.5 triệu đô la 20 năm liên tiếp là

$$\begin{aligned} P &= P_1 + P_2 + \cdots + P_{20} \\ &= \frac{1.5}{1+r} + \frac{1.5}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{1.5}{(1+r)^{20}} \approx 18.693 \text{ (triệu đô la)} \end{aligned}$$

Cuối cùng ta xét lựa chọn (3). Lập luận tương tự như lựa chọn (2), giá trị hiện tại P của việc nhận C đô la hàng năm, kéo dài vĩnh viễn, là

$$\begin{aligned} P &= \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{C}{(1+r)^n} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{(1+r)^n}. \end{aligned}$$

Như thế P là tổng của một chuỗi hình học với công bội $q = \frac{1}{1+r}$. Ta có

$$P = \frac{C}{r}.$$

Áp dụng với $C = 1$ và $r = 0.05$ ta nhận được $P = 20$ triệu đô la.

Tóm lại, giá trị hiện tại của lựa chọn (1) và lựa chọn (3) là bằng nhau, và chúng lớn hơn lựa chọn (2). Vậy bạn có thể tùy ý chọn (1) hoặc (3).

Định lý 1.2.6. *Nếu chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ thì* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Chứng minh. Theo giả thiết của định lý, dãy tổng riêng s_n hội tụ, $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$.

Do đó,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = s - s = 0.$$

□

Định lý trên suy ra: *Nếu dãy số* $\{a_n\}$ *phân kỳ hoặc hội tụ với* $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ *thì chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *phân kỳ.*

Ví dụ 1.2.7. (a) Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}$ phân kỳ vì $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

(b) Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n+1}$ phân kỳ vì $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1 \neq 0$.

(c) Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ phân kỳ vì dãy số $\{(-1)^n\}$ phân kỳ.

Lưu ý, sự kiện $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ không suy ra chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ. Chẳng hạn, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ phân kỳ mặc dù $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Định lý 1.2.8. *Giả sử các chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *hội tụ và có tổng lần lượt là* A *và* B. *Khi đó,*

(i) Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ *hội tụ và có tổng bằng* $A + B$.

(ii) Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (ka_n)$ *hội tụ với mọi số* k *và có tổng bằng* kA.

Chứng minh. Đặt

$$\begin{aligned} A_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \\ B_n &= b_1 + b_2 + \cdots + b_n. \end{aligned}$$

Khi đó, dãy tổng riêng của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ là

$$\begin{aligned} s_n &= (a_1 + b_1) + \cdots + (a_n + b_n) \\ &= (a_1 + \cdots + a_n) + (b_1 + \cdots + b_n) \\ &= A_n + B_n. \end{aligned}$$

Theo giả thiết, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ và $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = B$. Như thế,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = A + B.$$

Dãy tổng riêng của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (ka_n)$ là

$$\begin{aligned} p_n &= ka_1 + ka_2 + \cdots + ka_n \\ &= k(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \\ &= kA_n. \end{aligned}$$

Do vậy

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} kA_n = kA.$$

Định lý được chứng minh. □

Ví dụ 1.2.9. (a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{6^n}$$
$$= \frac{1/6}{1-1/6} + \frac{1/2}{1-1/2} = \frac{6}{5}.$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+1)} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$
$$= 4 \cdot 1 = 4.$$

Hệ quả 1.2.10. *(i) Nếu chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *phân kỳ thì chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty}(ka_n)$ *cũng phân kỳ với mọi* $k \neq 0$.

(ii) Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ và chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *phân kỳ thì các chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *và* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ *phân kỳ.*

Lưu ý rằng, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ có thể hội tụ ngay cả khi các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ đều phân kỳ. Chẳng hạn, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)$ đều phân kỳ, nhưng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(1 + (-1)) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$ hội tụ.

1.2.2 Các tiêu chuẩn hội tụ

Tiêu chuẩn tích phân

Cho dãy số $\{a_n\}$ với $a_n > 0$ với mọi $n > N$. Giả sử $a_n = f(n)$ với f là một hàm số liên tục, nhận giá trị dương và nghịch biến với mọi $x > N$. Khi đó, chuỗi $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ và tích phân $\int_N^{\infty} f(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Ví dụ 1.2.11. Xét sự hội tụ của **p-chuỗi** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, ở đây p là một số thực.

Tiêu chuẩn so sánh

Cho hai chuỗi $\sum a_n$ và $\sum b_n$ thỏa mãn $0 \le a_n \le b_n$ với mọi $n > N$. Khi đó

(i) Nếu chuỗi $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ cũng hội tụ.

(ii) Nếu chuỗi $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ phân kỳ thì chuỗi $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ phân kỳ.

Ví dụ 1.2.12.

Tiêu chuẩn so sánh dạng giới hạn

Cho hai chuỗi $\sum a_n$ và $\sum b_n$ thỏa mãn $0 \le a_n \le b_n$ với mọi $n > N$. Khi đó

(i) Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$ thì chuỗi $\sum a_n$ và $\sum b_n$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

(ii) Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ và chuỗi $\sum b_n$ hội tụ thì chuỗi $\sum a_n$ hội tụ.

(iii) Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ và chuỗi $\sum b_n$ phân kỳ thì chuỗi $\sum a_n$ phân kỳ.

Tiêu chuẩn tỷ số

Cho chuỗi số $\sum a_n$. Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$.

(i) Nếu $\rho < 1$ thì chuỗi $\sum a_n$ hội tụ.

(ii) Nếu $\rho > 1$ hoặc $p = \infty$ thì chuỗi $\sum a_n$ phân kỳ.

Tiêu chuẩn căn

Cho chuỗi số $\sum a_n$. Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$.

(i) Nếu $\rho < 1$ thì chuỗi $\sum a_n$ hội tụ.

(ii) Nếu $\rho > 1$ hoặc $\rho = \infty$ thì chuỗi $\sum a_n$ phân kỳ.

Tiêu chuẩn chuỗi đan dấu

Chuỗi số $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots$ hội tụ nếu các điều kiện sau đồng thời thỏa mãn:

(i) $a_n > 0$ với mọi n.

(i) $a_{n+1} \leq a_n$ với mọi n.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ký hiệu tổng của chuỗi là L và $s_n = a_0 - a_1 + \cdots + (-1)^n a_n$. Khi đó,

$$|L - s_n| \leq a_{n+1}$$

.

1.2.3 Chuỗi lũy thừa

Định nghĩa 1.2.13. (i) **Chuỗi lũy thừa tâm** $x = 0$ là một chuỗi có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

(ii) **Chuỗi lũy thừa tâm** $x = a$ là một chuỗi có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots,$$

trong đó $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ là các hằng số.

Ví dụ 1.2.14. Chuỗi hình học

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

là một chuỗi lũy thừa tâm $x = 0$. Chuỗi phân kỳ khi $|x| \geq 1$ và hội tụ về hàm số $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ khi $|x| < 1$. Trong trường hợp hội tụ, ta nói rằng hàm số $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ *biểu diễn được qua chuỗi lũy thừa*, và viết

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots .$$

Ví dụ 1.2.15. Chuỗi

$$1 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n + \cdots$$

là một chuỗi lũy thừa tâm $x = 2$. Chuỗi này hội tụ khi và chỉ khi $\left| -\dfrac{x-2}{2} \right| < 1$, hay $0 < x < 4$. Trong trường hợp hội tụ, tổng của chuỗi là

$$1 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n + \cdots = \frac{1}{1 + \dfrac{x-2}{2}} = \frac{2}{x}.$$

Tập hợp tất cả các giá trị của x để chuỗi hội tụ được gọi là ***miền hội tụ*** của chuỗi.

Ví dụ 1.2.16. Tìm miền hội tụ của các chuỗi sau.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

(c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.

(d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (nx)^n$.

Chú ý rằng, phép đổi biến $x = a + t$ đưa chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ về chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n t^n$. Vì vậy, các kết quả dưới đây chỉ trình bày cho chuỗi lũy thừa tâm $x = 0$ cho đơn giản ký hiệu.

Định lý 1.2.17 (Bán kính hội tụ). *Cho chuỗi lũy thừa* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$*. Khi đó, một trong ba khả năng sau xảy ra.*

(i) Tồn tại một số R *sao cho chuỗi đã cho hội tụ với mọi* x *thỏa mãn* $|x| < R$ *và phân kỳ với mọi* x *thỏa mãn* $|x| > R$*. Chuỗi có thể hội tụ hay phân kỳ tại* $x = -R$ *hoặc* $x = R$*.*

(ii) Chuỗi hội tụ với mọi $x \in \mathbb{R}$*.*

(iii) Chuỗi hội tụ tại $x = 0$ *và phân kỳ với mọi* $x \neq 0$*.*

Số R nói trong khẳng định (i) nêu trên được gọi là ***bán kính hội tụ*** của chuỗi lũy thừa. Trong trường hợp (ii) và (iii), ta có thể coi $R = \infty$ và $R = 0$ tương ứng.

Ví dụ 1.2.18. Tính bán kính hội tụ của các chuỗi sau.

Ta có thể lấy đạo hàm và tích phân theo từng số hạng, như trong định lý dưới đây. Giả sử chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ có bán kính hội tụ là $R > 0$. Khi đó, ta xác định hàm số

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{với } x \in (-R, R).$$

Định lý 1.2.19. *Giả sử* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *có bán kính hội tụ là* $R > 0$*. Khi đó*

(i) Hàm số $f(x)$ *liên tục trên khoảng* $(-R, R)$*.*

(i) Hàm số f *có đạo hàm mọi cấp trên* $(-R, R)$*, có thể thu được đạo hàm đó bằng cách đạo hàm từng số hạng trong chuỗi và các chuỗi này đều có bán kính hội tụ bằng* R

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1},$$
$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2},$$
$$\dots$$

(ii) Chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ *hội tụ với bán kính hội tụ* R*. Hơn nữa*

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Ví dụ 1.2.20. Lấy đạo hàm hai vế của đẳng thức

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

ta được

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Định lý 1.2.21 (Tính duy nhất). *Giả sử hai chuỗi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *và* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ *cùng hội tụ về* $f(x)$ *trên khoảng* I. *Khi đó*

$$c_n = d_n \quad \text{với mọi } n \geq 0.$$

Định lý 1.2.22. *Giả sử các chuỗi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *và* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ *hội tụ về các hàm* $f(x)$ *và* $g(x)$ *tương ứng trên cùng khoảng* I. *Khi đó các khẳng định sau là đúng.*

(i) *Chuỗi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (c_n x^n \pm d_n x^n)$ *hội tụ về* $f \pm g$ *trên* I.

(ii) *Với mọi số nguyên* $m \geq 0$ *và với mọi số thực* b, *chuỗi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} bx^m c_n x^n$ *hội tụ về* $bx^m f(x)$ *trên* I.

(iii) *Với mọi số nguyên* $m \geq 0$ *và với mọi số thực* b, *chuỗi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (bx^m)^n$ *hội tụ về* $f(bx^m)$ *với miền hội tụ là những giá trị* x *thỏa mãn* bx^m *thuộc* I.

Ví dụ 1.2.23. Biểu diễn các hàm số sau qua chuỗi lũy thừa.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)(2-x)}$.

(b) $f(x) = \dfrac{3x}{1+x^2}$.

Định lý 1.2.24. *Giả sử hai chuỗi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *và* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ *lần lượt hội tụ về* $f(x)$ *và* $g(x)$ *trên* I. *Ký hiệu*

$$e_n = c_0 d_n + c_1 d_{n-1} + \cdots + c_{n-1} d_1 + c_n d_0.$$

Khi đó chuỗi $\Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n\Big)\Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n x^n\Big) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} e_n x^n$ *hội tụ về* $f(x)g(x)$ *trên* I.

Chuỗi $\Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n\Big)\Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n x^n\Big)$ được gọi là *tích Côsi* của hai chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ và $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n x^n$.

Ví dụ 1.2.25. Biểu diễn hàm số $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)}$ qua chuỗi lũy thừa.

1.2.4 Biểu diễn hàm số qua chuỗi lũy thừa

Trong mục trước, ta thấy có những hàm số được biểu thị như là tổng của một chuỗi lũy thừa hội tụ trên một khoảng nào đó. Chẳng hạn, hàm số $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ xác định trên $(-1, 1)$, là tổng của chuỗi sau đây

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

Câu hỏi đặt ra là: Những hàm số như thế nào thì biểu diễn được dưới dạng chuỗi lũy thừa? Trong trường hợp biểu diễn được, các hệ số của chuỗi được tính ra sao?

Giả sử hàm số $f(x)$ bằng tổng của chuỗi lũy thừa với bán kính hội tụ dương

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots .$$

Ta thấy $a_0 = f(a)$. Lấy đạo hàm liên tiếp trong khoảng hội tụ,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1 \cdot a_1 + 1 \cdot 2a_2(x-a) + \cdots + na_n(x-a)^{n-1} + \cdots \\
f''(x) &= 1 \cdot 2a_2 + 1 \cdot 2 \cdot 3a_3(x-a) + \cdots + n(n-1)a_n(x-a)^{n-2} + \cdots \\
f'''(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4(x-a) + \cdots + n(n-1)(n-2)a_n(x-a)^{n-3} + \cdots \\
&\cdots \\
f^{(n)}(x) &= n!a_n + \text{tổng có nhân tử chung là } (x-a).
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$a_k = \frac{f^k(a)}{k!}.$$

Như vậy, nếu hàm số $f(x)$ biểu diễn được dưới dạng chuỗi lũy thừa thì hàm $f(x)$ khả vi mọi cấp và chuỗi đó phải có dạng

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

Ta đi đến định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 1.2.26. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trong một khoảng nào đó chứa a. *Chuỗi Taylor* của hàm số $f(x)$ tại a là

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots .$$

Chuỗi Maclaurin của hàm số $f(x)$ là chuỗi Taylor của hàm số $f(x)$ tại 0

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(0)}{k!}x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

Ví dụ 1.2.27. Chuỗi Maclaurin của hàm số $f(x) = e^x$ là

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots .$$

Ví dụ 1.2.28. Tìm chuỗi Maclaurin của hàm số $f(x) = x \sin x$.

Ta cần tính $f^{(n)}(0)$ với mọi n. Áp dụng công thức Leibniz, ta có

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{(k)} \sin^{(n-k)}(x).$$

Lưu ý rằng $x^{(k)} = 0$ với $k \geq 2$, ta được

$$f^{(n)}(x) = x \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n \sin\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right).$$

Như vậy,

$$f^{(n)}(0) = n \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right).$$

Chuỗi Maclaurin của hàm số $f(x) = x \sin(x)$ là

$$x^2 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{120} + \cdots$$

Ta có cách khác như sau. Chuỗi Maclaurin của hàm $y = \sin(x)$ là

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots$$

Do đó, chuỗi Maclaurin của hàm số $f(x) = x \sin(x)$ là

$$x\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots\right) = x^2 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{120} + \cdots$$

Ví dụ 1.2.29. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x = 0, \\ e^{-1/x^2} & \text{nếu } x \neq 0. \end{cases}$

Người ta chứng minh được rằng $f^{(n)}(0) = 0$ với mọi n. Do đó, chuỗi Maclaurin của hàm số $f(x)$ là

$$0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n + \cdots .$$

Chuỗi này hội tụ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (có tổng bằng 0), và chỉ hội tụ về $f(x)$ tại $x = 0$. Ví dụ này cho thấy có những chuỗi Maclaurin hội tụ, nhưng **không** hội tụ về hàm số sinh ra chuỗi đó.

Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trong một khoảng I chứa a. Nhắc lại rằng khai triển Taylor của hàm số $f(x)$ tại a là

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

trong đó

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (c \text{ nằm giữa } x \text{ và } a).$$

Ta đi đến kết quả sau.

Định lý 1.2.30. *Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trong khoảng I chứa a. Khi đó, chuỗi Taylor*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

hội tụ về $f(x)$ khi và chỉ khi

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad \textit{với mọi } x \in I.$$

Chứng minh. □

Khai triển các hàm sơ cấp thành chuỗi lũy thừa

1. Khai triển hàm số $f(x) = e^x$.

   Cố định x_0 và lấy số r sao cho $x_0 \in [-r, r]$. Khi đó, áp dụng khai triển Taylor tại $x = 0$ ta có

   $$e^{x_0} = 1 + x_0 + \frac{x_0^2}{2!} + \cdots + \frac{x_0^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x_0^{n+1},$$

   ở đây c là một số nằm giữa x_0 và 0. Do đó

   $$e^c \le e^r.$$

   Hệ quả là

   $$\frac{e^c}{(n+1)!}|x_0|^{n+1} \le \frac{e^r}{(n+1)!}|x_0|^{n+1} \to 0 \quad \text{khi } n \to \infty.$$

   Áp dụng Định lý 1.2.30, ta nhận được

   $$e^{x_0} = 1 + x_0 + \frac{x_0^2}{2!} + \cdots + \frac{x_0^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_0^n}{n!}.$$

Do x_0 là tùy ý nên ta có kết luận

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

2. Khai triển hàm $\sin(x)$ và $\cos(x)$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots .$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots .$$

Cả hai khai triển trên đều có miền hội tụ là $\mathbb{R}$.

3. Khai triển hàm $\ln(1+x)$ với $x > -1$.

Ta có

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \quad x \in (-1, 1).$$

Lấy tích phân hai vế, ta có

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad x \in (-1, 1).\end{aligned}$$

Vậy

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots \quad x \in (-1, 1).$$

1.2.5 Ứng dụng

Tính gần đúng tích phân xác định

Ví dụ 1.2.31. Tính tích phân $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}$ với độ chính xác 10^{-4}.

Trước hết, khai triển Maclaurin hàm số $f(x) = \sin x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

Do đó,

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \cdots$$

Chuỗi lũy thừa nhận được hội tụ với mọi x (bán kính hội tụ bằng ∞). Lấy tích phân từng số hạng của chuỗi, ta được

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{3!3} + \frac{1}{5!5} - \frac{1}{7!7} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!(2n+1)} + \cdots$$

Đặt

$$s_n = 1 - \frac{1}{3!3} + \frac{1}{5!5} - \frac{1}{7!7} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!(2n+1)}.$$

Khi đó

$$\left| s_n - \int_0^1 \frac{\sin x}{x} \right| < \frac{1}{(2n+3)!(2n+3)}.$$

Với $n = 2$,

$$\frac{1}{(2 \cdot 2 + 3)!(2 \cdot 2 + 3)} \approx 0.00002834467 < 10^{-4}.$$

Vậy

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} \approx 1 - \frac{1}{3!3} + \frac{1}{5!5} \approx 0.9461.$$

Tính giới hạn dạng vô định

Ví dụ 1.2.32. Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$

Khai triển Maclaurin hàm số $f(x) = \sin x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

Suy ra

$$\sin x - x = -\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

Như vậy

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} &= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots}{x^3} \\ &= \lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{6} + \frac{x^2}{120} - \cdots \right) = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Giải phương trình vi phân

Ví dụ 1.2.33. Tìm nghiệm dưới dạng chuỗi của phương trình

$$y' = 2xy \quad \text{với } y(0) = 1.$$

Ta có thể giải theo hai cách.

- Ta tìm nghiệm dưới dạng chuỗi Maclaurin

$$y = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

Ta có

$$\begin{aligned} y'' &= (2xy)' = 2y + 2xy', \\ y^{(3)} &= (2y + 2xy')' = 4y' + 2xy'', \\ y^{(n)} &= (2n-2)y^{(n-2)} + 2xy^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Sử dụng điều kiện $y(0) = 1, y'(0) = 0$, ta thu được

$$y^{(2k+1)}(0) = 0, y^{(2k)}(0) = 2^k(2k-1)(2k-3)\cdots 1 = \frac{(2k)!}{k!}.$$

Vậy nghiệm cần tìm có dạng

$$1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2k}}{k!} + \cdots$$

Đây là chuỗi Maclaurin của hàm số $y = e^{x^2}$.

- Viết nghiệm dưới dạng

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n + \cdots$$

Do $y(0) = 1$ nên $c_0 = 1$. Lấy đạo hàm hai vế, ta có

$$y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \cdots$$

Thay vào phương trình vi phân ban đầu

$$c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \cdots = 2x(1 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n + \cdots)$$

Cân bằng hệ số ở hai vế theo Định lý 1.2.21

$$c_{2k+1} = 0, c_{2k} = \frac{1}{k!}.$$

1.3 Hàm số nhiều biến

Dưới đây ta nêu ra một vài ví dụ về hàm số nhiều biến.

- Giả sử bạn gửi tiết kiệm số tiền P (VND) theo hình thức lãi kép với lãi suất 5%. Khi đó, số tiền tích lũy sau t năm là
$$A = Pe^{0.05t},$$
ở đây, số tiền tích lũy A phụ thuộc vào hai biến, đó là số tiền ban đầu P và thời gian t. Ta viết
$$A(P,t) = Pe^{0.05t}.$$
- Theo Định luật Culông, lực tương tác tĩnh điện giữa hai điện tích điểm q_1 và q_2 đặt cách nhau một khoảng r được cho bởi
$$F = k\frac{|q_1q_2|}{\epsilon r^2},$$
trong đó k và ϵ là các hằng số. Ta có thể xem lực F phụ thuộc ba biến số q_1, q_2 và r.
- Giả sử bạn đi chợ mua rau, thịt, cá và gạo. Giá tiền (tính trên kg) của mỗi loại hàng hóa trên là a, b, c, d (vnđ) tương ứng. Nếu bạn mua mỗi loại hàng hóa trên với khối lượng lần lượt là x, y, z, t (kg) thì số tiền cần thanh toán được tính bởi công thức
$$g(x,y,z,t) = ax + by + cz + dt.$$

Mỗi ví dụ trên lần lượt cho ta một hàm số hai biến, ba biến và bốn biến.

Một cách khái quát, *một hàm số n biến là một quy tắc f gán mỗi bộ n số thực $(x_1,\dots,x_n)$ với một số thực duy nhất* $f(x_1,\dots,x_n)$. Cần lưu ý rằng, đây không phải là định nghĩa của hàm số, vì ta không biết thế nào là một quy tắc. Thực ra ta chỉ mô tả hàm số thông qua một thuật ngữ gần gũi hơn mà thôi.

Vì bạn đọc chủ yếu là sinh viên mới học giải tích nên ta chỉ xét trường hợp hàm số hai biến ($n = 2$). Khi độc giả đã thành thạo với hàm số hai biến thì phát triển lên nhiều hơn hai biến là một việc đơn giản.

Các hàm số hai biến thường được ký hiệu là $f(x,y)$. Tập xác định của hàm số hai biến $f(x,y)$ là tập tất cả các bộ số (x,y) sao cho $f(x,y)$ xác định. Nếu không nói gì thêm, thì mỗi hàm số được hiểu là đang xét trên tập xác định của nó.

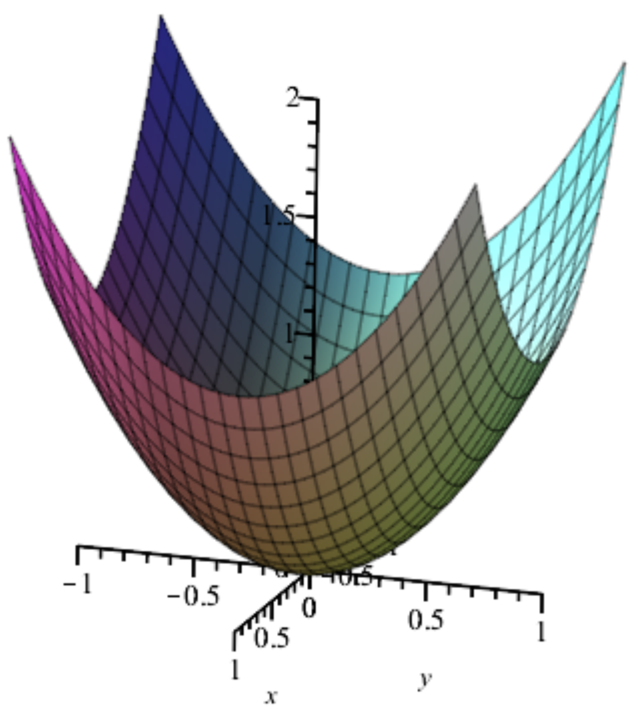
Ví dụ 1.3.1. 1. Tập xác định của hàm số $f(x,y) = x^2 - y^2 + \sin(xy)$ là $\mathbb{R}^2$.

2. Tập xác định của hàm số $f(x, y) = \sqrt{x - 2y}$ là nửa mặt phẳng xác định bởi bất phương trình $x - 2y \geq 0$.

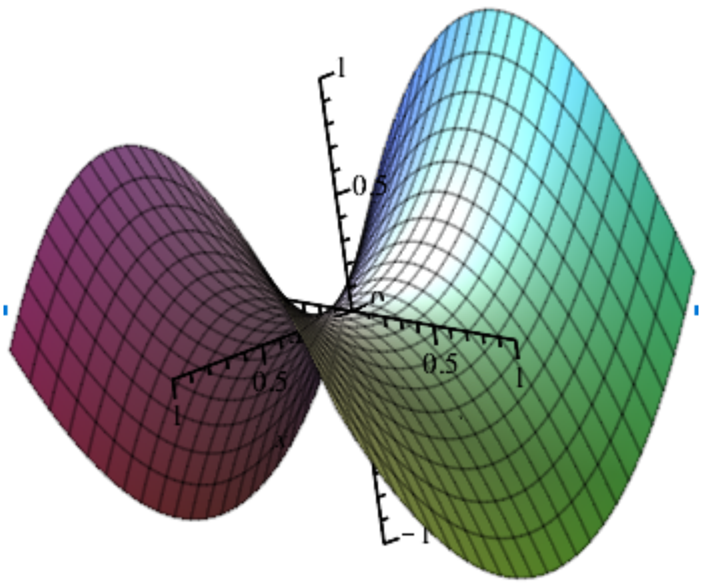
3. Tập xác định của hàm số $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ là hình tròn $x^2 + y^2 \leq 1$.

Đồ thị của hàm số $f(x, y)$ là tập hợp tất cả các điểm $(x, y, f(x, y))$ trong không gian $\mathbb{R}^3$, và thường được mô tả trong hệ tọa độ Đề các vuông góc.

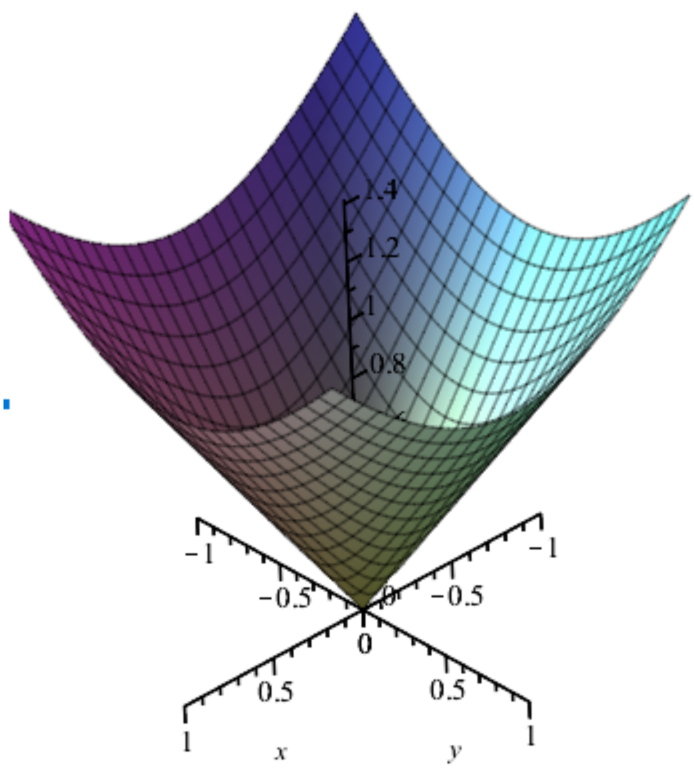
Ví dụ 1.3.2. Đồ thị của hàm số $f(x, y) = x^2 + y^2$ được gọi là mặt paraboloid.



Ví dụ 1.3.3. Đồ thị hàm số $f(x, y) = x^2 - y^2$ được gọi là mặt yên ngựa.



Ví dụ 1.3.4. Đồ thị hàm số $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ được gọi là mặt nón.



Tập hợp trong $\mathbb{R}^2$

- Cho hai điểm $A(x_1, y_1)$ và $B(x_2, y_2)$ trong $\mathbb{R}^2$. Khoảng cách giữa A và B được cho bởi công thức
$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

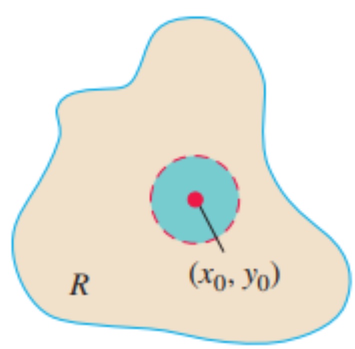
  Các tính chất của khoảng cách.

  1. $d(A, B) \geq 0$ với mọi cặp điểm A, B.
  2. $d(A, B) = 0$ khi và chỉ khi A và B trùng nhau.
  3. $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$ với mọi điểm A, B, C.

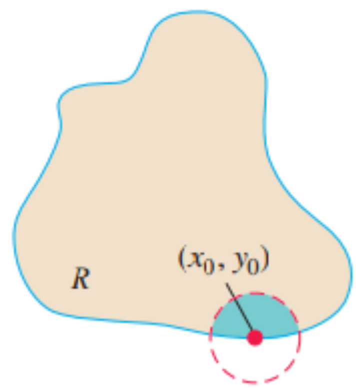
- Khi khảo sát giới hạn của hàm số một biến $\lim_{x \to a} f(x)$, ta chỉ quan tâm những giá trị x gần a, tức là x thỏa mãn $|x - a| < \delta$ tương đương $x \in (a - \delta, a + \delta)$ với δ nhỏ. Để diễn đạt sự kiện điểm A "gần" điểm B trong $\mathbb{R}^2$, ta cần một đối tượng trong $\mathbb{R}^2$ tương tự như $(a - \delta, a + \delta)$ trong $\mathbb{R}$, đó là khái niệm *hình tròn mở*.

  Cho điểm $M(a, b)$ và một số $\delta > 0$. Tập hợp các điểm $A(x, y)$ thỏa mãn $d(A, M) < \delta$ được gọi là một *hình tròn mở tâm* M *với bán kính* δ. Về sau, nếu không cần chỉ rõ tâm và bán kính thì ta chỉ viết *hình tròn mở* cho gọn.

- Ta nói điểm $A(x_0, y_0)$ là một *điểm trong* của tập R nếu tồn tại một hình tròn mở tâm A chứa trong R. Tập hợp tất cả các điểm trong của tập R được gọi là *phần trong* của R.

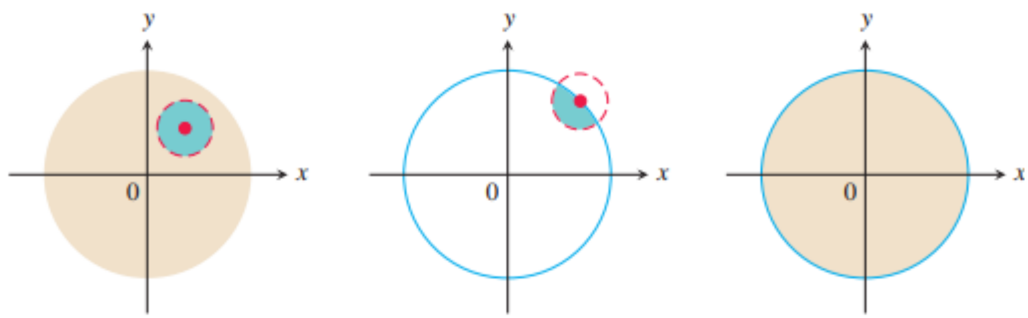


- Ta nói điểm $A(x_0, y_0)$ là một điểm biên của R nếu mọi hình tròn mở tâm A chứa cả những điểm ngoài R và bên trong R. Tập hợp tất cả các điểm biên của R được gọi là *biên* của R.



- Ta nói tập hợp R là *mở* nếu mọi điểm thuộc R đều là điểm trong của R. Ta nói tập hợp R là *đóng* nếu mọi điểm biên của R đều thuộc R. Một tập hợp R được gọi là *bị chặn* nếu R chứa trong một hình tròn nào đó.

  Ví dụ 1.3.5. Cho tập hợp R xác định bởi $x^2 + y^2 \le 1$.



  Phần trong của R là tập các điểm (x, y) sao cho $x^2 + y^2 < 1$. Biên của R là tập các điểm (x, y) thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$. Tập hợp R là đóng vì nó chứa mọi điểm biên.

1.3.1 Giới hạn và liên tục

Định nghĩa 1.3.6. Ta nói dãy điểm $\{(x_n, y_n)\}$ hội tụ về điểm (a, b) và viết $(x_n, y_n) \to (a, b)$ nếu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ và $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

Ví dụ 1.3.7. Dãy điểm $\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ hội tụ về điểm $(0, 0)$ vì

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

Định nghĩa 1.3.8. Cho hàm số $f(x, y)$ xác định trên D và điểm (a, b) (có thể thuộc D hoặc không thuộc D). Ta nói hàm số $f(x, y)$ có giới hạn bằng L khi (x, y) tiến về (a, b) nếu với mọi dãy điểm $\{(x_n, y_n)\}$ hội tụ về (a, b), ta đều có $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = L$.

Ví dụ 1.3.9. Sử dụng định nghĩa, tính giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}(x^2 - y^2 + xy)$.

Lấy một dãy điểm $\{(x_n, y_n)\}$ bất kỳ hội tụ về $(1, 2)$. Ta có

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(x_n^2 + y_n^2 - x_n y_n) &= \lim_{n\to\infty} x_n^2 + \lim_{n\to\infty} y_n^2 - \lim_{n\to\infty} x_n y_n \\
&= (\lim_{n\to\infty} x_n)^2 + (\lim_{n\to\infty} y_n)^2 - \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n \quad \text{(tính chất của giới hạn)} \\
&= 1^2 + 2^2 - 1 \cdot 2 = 3 \quad (\lim_{n\to\infty} x_n = 1, \lim_{n\to\infty} y_n = 2).
\end{aligned}$$

Ví dụ 1.3.10. Chứng minh giới hạn sau không tồn tại $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.

Ta sẽ chọn hai dãy điểm $\{(x_n, y_n)\}$ và $\{(z_n, t_n)\}$ cùng hội tụ về $(0, 0)$, nhưng

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(z_n, t_n).$$

Cụ thể, ta chọn $(x_n, y_n) = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)$ và $(y_n, t_n) = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}\right)$.
Ta có

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1/n^2}{1/n^2 + 1/n^2} = \frac{1}{2}, \\
\lim_{n\to\infty} f(z_n, t_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{2/n^2}{1/n^2 + 4/n^2} = \frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

Ví dụ 1.3.11. Chứng minh giới hạn sau không tồn tại $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4xy^2}{x^2 + 3y^4}$.

Giới hạn của hàm số hai biến cũng có các tính chất tương tự như hàm số một biến. Giả sử $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$ và $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x, y) = M$. Khi ấy

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \big(f(x, y) \pm g(x, y)\big) = L \pm M$;
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} cf(x, y) = cL$;
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)g(x, y) = LM$;
4. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{f(x, y)}{g(x, y)} = \dfrac{L}{M}$ với $M \neq 0$.
5. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \sqrt[n]{f(x, y)} = \sqrt[n]{L}$ với mọi L nếu n lẻ, và với mọi $L \geq 0$ nếu n chẵn.

Nguyên lý kẹp. Giả sử $f(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y)$ với mọi (x,y) trong một lân cận nào đó của (a,b) và $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y) = L$. Khi đó

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L.$$

Ví dụ 1.3.12. Sử dụng Nguyên lý kẹp 1.3.1, tính các giới hạn sau

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$;

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$;

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$.

Nhắc lại định nghĩa về tính liên tục của hàm số một biến. Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục tại a nếu $f(x)$ xác định tại a và $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Ta có định nghĩa tương tự cho hàm số hai biến.

Định nghĩa 1.3.13. Hàm số $f(x,y)$ được gọi là liên tục tại điểm (a,b) nếu hai điều kiện sau đồng thời thỏa mãn

1. $f(x,y)$ xác định tại (a,b);
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$.

Hàm số $f(x,y)$ được gọi là liên tục trên D nếu $f(x,y)$ liên tục tại mọi điểm thuộc D.

Do các tính chất của giới hạn, ta thấy rằng tổng, hiệu, tích, thương của các hàm liên tục là một hàm liên tục.

Ví dụ 1.3.14. Chứng minh rằng hàm số $f(x,y) = \dfrac{2x+y}{x+y-1}$ liên tục tại điểm $(1,2)$.

Tập xác định của hàm số $f(x,y)$ là

$$D = \{(x,y) : x+y-1 \neq 0\}$$

và $(1,2)$ thuộc D vì $1+2-1 = 2 \neq 0$.

Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{2x+y}{x+y-1} &= \frac{\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}(2x+y)}{\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}(x+y-1)}\\ &= \frac{4}{2} = 2 = f(1,2).\end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 1.3.15. Xét tính liên tục của hàm số sau

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{nếu } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Tập xác định của hàm số đã cho là $D = \mathbb{R}^2$. Tại những điểm $(x,y) \neq (0,0)$, hàm số đã cho liên tục vì nó là thương của các hàm liên tục. Do đó, ta chỉ cần khảo sát tính liên tục của $f(x,y)$ tại điểm $(0,0)$.

Đầu tiên, ta thấy $f(0,0) = 0$. Tiếp theo, ta xét giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Cho (x,y) tiến đến $(0,0)$ dọc theo trục hoành, ta thu được

$$\begin{aligned} \lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x,0) &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2-0^2}{x^2+0^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1. \end{aligned}$$

Tương tự, cho (x,y) tiến về $(0,0)$ dọc theo trục tung,

$$\begin{aligned} \lim_{(0,y)\to(0,0)} f(0,y) &= \lim_{(y\to 0)} \frac{0^2-y^2}{0^2+y^2} \\ &= \lim_{y\to 0}\left(-\frac{y^2}{y^2}\right) = -1. \end{aligned}$$

Như thế, giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ không tồn tại. Vậy hàm số đã cho không liên tục tại $(0,0)$.

Ta đã biết rằng, nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ thì $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên đoạn ấy. Dưới đây ta sẽ phát biểu một khẳng định tương tự cho hàm số hai biến. Trước hết, ta cần một khái niệm trong $\mathbb{R}^2$ tương tự đoạn $[a,b]$ trong $\mathbb{R}$, đó là *tập compact*.

Định nghĩa 1.3.16. Một tập con A khác rỗng của $\mathbb{R}^2$ được là một tập compact nếu A là đóng và bị chặn.

Ta có thể hình dung một tập compact bao gồm phần bên trong và biên. Các ví dụ dưới đây minh họa điều đó.

Ví dụ 1.3.17. Các tập dưới đây là compact.

(a) $A = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$ (hình tròn kể cả biên).

(b) $B = \{(x,y) : |x|+|y| \leq 1\}$ (hình vuông kể cả biên).

(c) $C = \{(x, y) : x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ (tam giác kể cả biên).

Ví dụ 1.3.18. Các tập dưới đây không là tập compact.

(a) $X = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 1\}$ (là tập đóng nhưng không bị chặn).

(b) $Y = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ (bị chặn nhưng không phải tập đóng).

(c) $Z = \{(x, y) : x < y\}$ (không phải tập đóng, cũng không bị chặn).

Ta thừa nhận định lý sau đây.

Định lý 1.3.19. *Giả sử hàm số $f(x, y)$ liên tục trên một tập compact D. Khi đó, hàm số $f(x, y)$ đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên D.*

Định lý trên chỉ khẳng định sự tồn tại mà không cho biết phương pháp để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

1.3.2 Đạo hàm riêng

Định nghĩa 1.3.20. Cho hàm số hai biến $f(x, y)$. Đạo hàm riêng của $f(x, y)$ theo biến x, ký hiệu là $\partial f/\partial x$ hoặc f_x, được định nghĩa như sau

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}.$$

Đạo hàm riêng của hàm số $f(x, y)$ theo biến y, ký hiệu là $\partial f/\partial y$, hoặc f_y, được định nghĩa như sau

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}.$$

Định nghĩa trên cho thấy khi lấy đạo hàm riêng theo biến x thì ta coi biến y như hằng số, và ngược lại, khi lấy đạo hàm theo biến y thì ta coi biến x như hằng số.

Ví dụ 1.3.21. Tính các đạo hàm riêng $\partial f/\partial x$ và $\partial f/\partial y$ của các hàm số sau.

(a) $f(x, y) = 2x^2 - y^2 + 3x - 5y$.

(b) $f(x, y) = \sin(x^3 + x^2 y + 4)$.

Ví dụ 1.3.22. Tính các đạo hàm riêng của hàm số

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

tại điểm $(0, 0)$.

Đạo hàm riêng theo biến x tại điểm $(0, 0)$ được cho bởi

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự, ta có

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Hàm số $f(x, y)$ không liên tục tại $(0, 0)$ vì giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ không tồn tại. Thật vậy, ta chọn hai dãy điểm $\left\{\left(\frac{1}{n}, 0\right)\right\}$ và $\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}$ cùng hội tụ về $(0, 0)$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},0\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1/n^2\cdot 0}{1/n^2+0^2} = 0,\\ \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1/n\cdot 1/n}{1/n^2+1/n^2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Ví dụ trên minh chứng cho khẳng định rằng khác với hàm số một biến, sự tồn tại các đạo hàm riêng của hàm số hai biến **không** kéo theo tính liên tục của hàm số ấy. Ta sẽ xây dựng một khái niệm đạo hàm sâu sắc hơn, chẳng hạn để từ sự tồn tại của đạo hàm này có thể suy ra tính liên tục của hàm số.

Đạo hàm riêng cấp cao

Xét hàm số $f(x, y) = 2x^3 + 4xy^2 - 6xy + 1$. Các đạo hàm riêng của $f(x, y)$ là

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + 4y^2 - 6y \text{ và } \frac{\partial f}{\partial y} = 8xy - 6x.$$

Các đạo hàm riêng này là các hàm số theo x và y, do đó ta có thể tính đạo hàm riêng của các hàm số ấy. Tương tự với hàm số một biến, ta gọi các đạo hàm riêng này đạo hàm riêng cấp hai, đạo hàm riêng cấp ba,.... Có cả thảy bốn đạo hàm riêng cấp hai:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Ta cũng có thể ký hiệu lần lượt như sau: $f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}, f_{yx}$. Hai trường hợp sau cùng được gọi là *đạo hàm riêng hỗn hợp*.

Ví dụ 1.3.23. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của hàm số $f(x,y) = x\cos(y) + ye^x$.

Ta tính các đạo hàm riêng cấp một

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(y) + ye^x, \ \frac{\partial f}{\partial y} = -x\sin(y) + e^x.$$

Tiếp theo, ta tính các đạo hàm riêng cấp hai.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\big(\cos(y) + ye^x\big) = ye^x,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\big(-x\sin(y) + e^x\big) = -x\cos(y),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\big(-x\sin(y) + e^x\big) = -\sin(y) + e^x,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\big(\cos(y) + ye^x\big) = -\sin(y) + e^x.
\end{aligned}$$

Trong ví dụ trên, ta thấy các đạo hàm riêng hỗn hợp bằng nhau. Đây không phải là sự tình cờ, như định lý sau đây chỉ ra.

Định lý 1.3.24 (Clairaut)**.** *Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trong một lân cận U của (a,b). Nếu các đạo hàm riêng $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ và $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ liên tục trên U thì*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a,b).$$

Ví dụ 1.3.25. Tính đạo hàm riêng $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ của hàm số $f(x,y) = xy + \frac{e^y}{y^2+1}$.

Theo định nghĩa của $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, ta cần tính đạo hàn riêng của $f(x,y)$ theo biến y trước, rồi tính theo biến x sau. Nếu ta làm ngược lại thì đơn giản hơn nhiều

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = 1.$$

Ví dụ 1.3.26. Cho hàm số $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{nếu}(x,y) \neq (0,0),\\ 0 & \text{nếu } (x,y) = (0,0).\end{cases}$

Chứng minh rằng $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) \neq \frac{\partial f^2}{\partial y\partial x}(0,0)$.

1.3.3 Hàm số khả vi

Như ta đã thấy, sự tồn tại các đạo hàm riêng của một hàm số hai biến không kéo theo tính liên tục của hàm số đó.

Định nghĩa 1.3.27. Hàm số $f(x, y)$ được gọi là khả vi tại điểm (a, b) nếu hai điều kiện sau đồng thời thỏa mãn.

(a) Các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ và $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ đều tồn tại.

(b) Hàm số $f(x, y)$ có thể viết dưới dạng

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) + E(x, y),$$

với $E(x, y)$ là một hàm số thỏa mãn $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{E(x, y)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} = 0.$

Nhận xét rằng, nếu đặt $h = x - a$, $k = y - b$ thì Định nghĩa 1.3.27 (b) được diễn đạt lại như sau

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k + E(h, k),$$

trong đó $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$

Nếu $f(x, y)$ khả vi tại (a, b) thì hàm tuyến tính ký hiệu bởi $Df(a, b)$

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$Df(a, b)(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k$$

được gọi là *vi phân* của hàm số $f(x, y)$ tại (a, b).

Ví dụ 1.3.28. Xét tính khả vi của hàm số $f(x, y) = 2x + 3y$ tại điểm (a, b) bất kỳ.

Ta có

$$\begin{aligned} f(a + h, b + k) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k &= 2(a + h) + 3(b + k) - 2a - 3b - 2h - 3k \\ &= 0. \end{aligned}$$

Vậy hàm số $f(x, y)$ là khả vi tại (a, b) với vi phân là

$$Df(a, b)(h, k) = 2h + 3k.$$

Ví dụ 1.3.29. Xét tính khả vi của hàm số $f(x, y) = xy$ tại điểm (a, b) bất kỳ.

Xét hiệu

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k &= (a+h)(b+k) - ab - bh - ak \\ &= hk. \end{aligned}$$

Bây giờ ta khảo sát giới hạn

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Sử dụng bất đẳng thức

$$-\frac{1}{2}\sqrt{h^2+k^2} \leq \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq \frac{1}{2}\sqrt{h^2+k^2}$$

cùng với Nguyên lý kẹp ta nhận được

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Vậy hàm số đã cho là khả vi tại (a, b) vời vi phân là

$$Df(a, b)(h, k) = bh + ak.$$

Định lý 1.3.30. *Nếu hàm số $f(x, y)$ khả vi tại (a, b) thì $f(x, y)$ liên tục tại (a, b).*

Chứng minh. Ta phải chứng minh rằng

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \Big(f(a+h, b+k) - f(a, b)\Big) = 0.$$

Sử dụng giả thiết khả vi của hàm số $f(x, y)$ tại (a, b), ta có

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k + E(h, k).$$

Chú ý rằng

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k\Big) = 0,$$

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k)\to(0,0)} E(h, k) &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2+k^2}\frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2+k^2} \cdot \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= 0 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Từ đó ta có điều cần chứng minh. □

Ta đã biết rằng một hàm số $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng tại (a, b) thì chưa chắc là khả vi tại (a, b). Vậy các đạo hàm riêng cần được ràng buộc thêm điều kiện gì để hàm số là khả vi? Định lý sau đây cho ta một câu trả lời.

Định lý 1.3.31. *Nếu hàm số $f(x, y)$ có đạo hàm riêng tại một lân cận của (a, b) và các đạo hàm riêng liên tục tại (a, b) thì hàm số $f(x, y)$ khả vi tại đó.*

Chứng minh. □

Ứng dụng vi phân vào tính gần đúng

Giả sử hàm số $f(x, y)$ khả vi tại (a, b). Với h, k gần 0, vi phân là hàm tuyến tính xấp xỉ hiệu $f(a+h, b+k) - f(a, b)$. Nói cách khác

$$\boxed{f(a+h, b+k) \approx f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k}$$

Ví dụ 1.3.32. Sử dụng vi phân, tính gần đúng giá trị $\ln(1.01^2 + 2.005^2)$.

Hàm số $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ khả vi tại $(1, 2)$. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) &= \left.\frac{2x}{x^2+y^2}\right|_{(1,2)} = \frac{2}{5} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) &= \left.\frac{2y}{x^2+y^2}\right|_{(1,2)} = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Áp dụng công thức 1.3.3 với $h = 0.01, k = 0.005$,

$$\begin{aligned} \ln(1.01^2 + 2.005^2) &\approx \ln(1^2 + 2^2) + \frac{2}{5} \cdot 0.01 + \frac{4}{5} \cdot 0.005 \\ &\approx 1.617437912. \end{aligned}$$

Ví dụ 1.3.33. Trong kinh doanh, để phân tích hành vi của người tiêu dùng, người ta gán mỗi sự lựa chọn hàng hóa với một con số, U, gọi là *hàm lợi ích*. Hàm này mô tả mức độ hài lòng của khách hàng. Chẳng hạn, có hai loại hàng hóa G_1 và G_2, và người tiêu dùng mua x sản phẩm G_1 và y sản phẩm G_2. Khi đó U là một hàm số theo x và y,

$$U = U(x, y).$$

Giả sử rằng $U(3, 7) = 20$ và $U(4, 5) = 25$. Điều này cho thấy khách hàng vui vẻ hơn khi mua 4 sản phẩm G_1 và 5 sản phẩm G_2 so với việc mua 3 sản phẩm G_1 và 7 sản phẩm G_2.

Cho hàm lợi ích $U(x, y) = x^{1/4}y^{3/4}$. Hãy ước lượng sự thay đổi của hàm lợi ích khi x giảm từ 100 xuống 99 và y tăng từ 200 lên 201.

Theo yêu cầu bài toán, ta cần xấp xỉ

$$U(100-1, 200+1) - U(100, 200).$$

Áp dụng công thức gần đúng 1.3.3

$$U(100-1, 200+1) - U(100, 200) \approx \frac{\partial U}{\partial x}(100, 200) \cdot (-1) + \frac{\partial U}{\partial y}(100, 200) \cdot 1$$

Ta có

$$\frac{\partial U}{\partial x}(100, 200) = 0.25x^{-3/4}y^{3/4}\Big|_{(100,200)} \approx 0.42$$
$$\frac{\partial U}{\partial y}(100, 200) = 0.75x^{1/4}y^{-1/4}\Big|_{(100,200)} \approx 0.63.$$

Như vậy

$$U(100-1, 200+1) - U(100, 200) \approx 0.42 \cdot (-1) + 0.63 \cdot 1 = 0.21.$$

1.3.4 Đạo hàm của hàm hợp

Định lý 1.3.34. *Giả sử các hàm số* $x(t)$ *và* $y(t)$ *khả vi tại* t_0*, và hàm số* $f(x, y)$ *khả vi tại* $(x(t_0), y(t_0))$*. Khi đó, hàm số* $z = f(x(t), y(t))$ *khả vi tại* t_0 *và*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt},$$

trong đó các đạo hàm của $x(t)$ *và* $y(t)$ *tính tại* t_0*, còn các đạo hàm riêng của* z *tính tại* $(x(t_0), y(t_0))$*.*

Nhận xét rằng công thức trên có thể viết lại dưới ngôn ngữ tích ma trận như sau.

$$\frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 1.3.35. Tính $\frac{dz}{dt}$ trong các trường hợp sau.

(a) $z = x^2 + 3y^2$, $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$.

(b) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, $x = t$, $y = t^2$.

Định lý 1.3.36. *Giả sử các hàm số* $x(u,v)$ *và* $y(u,v)$ *khả vi tại* (u_0,v_0)*, và hàm số* $f(x,y)$ *khả vi tại* $\big(x(u_0,v_0),y(u_0,v_0)\big)$*. Khi đó hàm số* $z=f(x(u,v),y(u,v))$ *khả vi tại* (u_0,v_0)*, và*

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$
$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Dưới ngôn ngữ ma trận, công thức trên có dạng

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial u}\\ \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}.$$

Ví dụ 1.3.37. Tính các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ và $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ trong trường hợp $z=x^2+y^2$, $x=u\cos(v)$, $y=u\sin(v)$.

Ta cần tính sáu đạo hàm riêng.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial f}{\partial y}=2y.$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\cos(v),\ \frac{\partial y}{\partial u}=\sin(v),\ \frac{\partial x}{\partial v}=-u\sin(v),\ \frac{\partial y}{\partial v}=u\cos(v).$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=2x\cdot\cos(v)+2y\cdot\sin(v)=2u\cos^2(v)+2u\sin^2(v)=2u$$
$$\frac{\partial z}{\partial v}=2x\cdot(-u\sin(v))+2y\cdot u\cos(v)=-u^2\sin(2v)+u^2\sin(2v)=0.$$

Ta có thể tính trực tiếp như sau. Thay $x=u\cos(v)$ và $y=u\sin(v)$ vào hàm số $f(x,y)$

$$z=(u\cos(v))^2+(u\sin(v))^2=u^2.$$

Suy ra

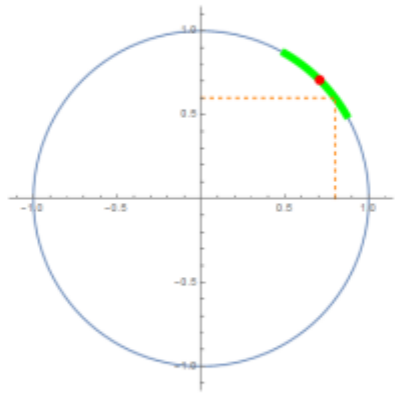
$$\frac{\partial z}{\partial u}=2u,\ \frac{\partial z}{\partial v}=0.$$

Hàm ẩn

Xét phương trình $x^2+y^2=1$. Với mỗi x thuộc $(-1,1)$ có đến hai giá trị của y thỏa mãn $x^2+y^2=1$, đó là $y=\sqrt{1-x^2}$ và $y=-\sqrt{1-x^2}$. Về mặt hình học, điều này nghĩa là mọi đường thẳng song song với trục tung $x=a$ (với a thuộc $(-1,1)$) đều cắt đường tròn đơn vị tại hai điểm phân biệt. Do vậy, phương trình $x^2 + y^2 = 1$ **không** xác lập một hàm số y theo x.

Tuy nhiên, nếu bây giờ ta chỉ xét nửa trên của đường tròn, tức là $y > 0$, thì phương trình $x^2 + y^2 = 1$ định nghĩa hàm số $y = \sqrt{1 - x^2}$. Một ví dụ khác, xét một lân cận của một điểm trên đường tròn (xem hình vẽ, điểm màu đỏ và lân cận màu xanh). Khi ấy, tồn tại một khoảng (a, b) và (c, d) sao cho với mỗi x thuộc (a, b), có duy nhất một y thuộc (c, d) sao cho $x^2 + y^2 = 1$. Trong cả hai ví dụ trên, ta nói rằng phương trình $x^2 + y^2 = 1$ định nghĩa một *hàm số ẩn* $y = f(x)$ xác định trên $(-1, 1)$ và (a, b) tương ứng.

Bây giờ xét điểm $(1, 0)$. Xem như một bài tập, bạn đọc hãy giải thích tại sao phương trình $x^2 + y^2 = 1$ không định nghĩa một hàm số ẩn nào trên mọi lân cận của điểm này.



Một cách tổng quát, người ta chứng minh được rằng, nếu hàm số $F(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục trên một tập mở U nào đó, điểm (x_0, y_0) thuộc U sao cho $F(x_0, y_0) = c$ và $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ thì tồn tại một lân cận của (x_0, y_0) sao cho phương trình $F(x, y) = c$ định nghĩa một hàm số ẩn $y = f(x)$ trên một lân cận của x_0. Hơn nữa, hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x_0) = y_0$ và có đạo hàm liên tục trong lân cận nói trên.

Ví dụ 1.3.38. Tính đạo hàm của hàm số ẩn $y = f(x)$ xác định từ phương trình $x^3 - y = 0$.

Giải

Từ phương trình $x^3 - y = 0$ ta có

$$y = \sqrt[3]{x}.$$

Suy ra

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Trong ví dụ trên, ta tìm được biểu thức tường minh của y theo x, và từ đó dễ dàng tính được đạo hàm. Ví dụ sau cho thấy không phải lúc nào cũng đơn giản như vậy

Ví dụ 1.3.39. Tính đạo hàm của hàm số ẩn xác định bởi $x^y - y^x = 0$.

Giả sử hàm số $y = f(x)$ là hàm ẩn được xác định từ phương trình $F(x, y) = 0$. Thế thì

$$F(x, f(x)) = 0.$$

Sử dụng Định lý 1.3.34, ta có

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dF(x, f(x))}{dx} \\ &= \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} \\ &= \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' \end{aligned}$$

Do đó, nếu $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ thì

$$\boxed{y' = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}}$$

Với $F(x, y) = x^y - y^x$, ta có

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yx^{y-1} - y^x \ln(y), \ \frac{\partial F}{\partial y} = x^y \ln(x) - xy^{x-1}.$$

Suy ra

$$y' = \frac{yx^{y-1} - y^x \ln(y)}{x^y \ln(x) - xy^{x-1}}.$$

Ví dụ 1.3.40. Tính đạo hàm của hàm ẩn $y = f(x)$ xác định từ phương trình $y^3 + x^2y - 1 = 0$.

Giải

Ta trình bày hai cách giải cho ví dụ này.

- Lấy đạo hàm theo biến x hai vế của phương trình $y^3 + x^2y - 1 = 0$, ta được

$$\begin{aligned} 3y^2y' + 2xy + x^2y' &= 0 \\ (3y^2 + x^2)y' &= -2xy \\ y' &= -\frac{2xy}{3y^2 + x^2}. \end{aligned}$$

- Ký hiệu $F(x, y) = y^3 + x^2y - 1$. Ta có

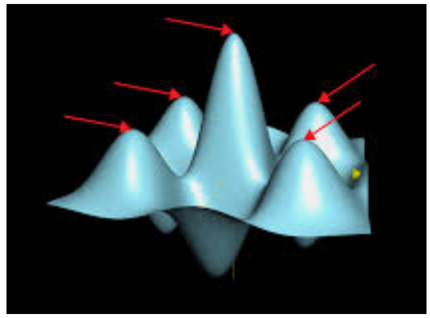
$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy, \ \frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 + x^2.$$

Suy ra

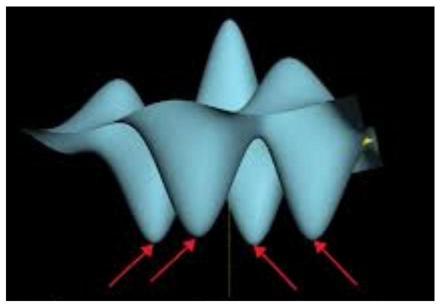
$$y' = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = -\frac{2xy}{3y^2 + x^2}.$$

1.3.5 Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

Mục tiêu của phần này là trình bày một thuật toán để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên một tập compact D. Những giá trị như vậy đạt được trên biên của D hoặc phần trong của D. Vị trí ở phần trong mà tại đó hàm số đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất, được gọi là các điểm cực trị, như định nghĩa dưới đây.



Những điểm cực đại



Những điểm cực tiểu

Định nghĩa 1.3.41. Cho hàm số $f(x, y)$ xác định trong một lân cận mở chứa (a, b). Ta nói hàm số $f(x, y)$ có *cực đại* tại (a, b) nếu $f(x, y) \leq f(a, b)$ với mọi (x, y) thuộc một hình tròn mở tâm (a, b). Hàm số $f(x, y)$ có *cực tiểu* tại (a, b) nếu $f(x, y) \geq f(a, b)$ với mọi (x, y) thuộc một hình tròn mở tâm (a, b). Nếu hàm số có cực đại hoặc cực tiểu tại (a, b) thì ta nói hàm số có *cực trị* tại (a, b).

Nhận xét rằng, hàm số $f(x, y)$ có cực đại tại (a, b) khi và chỉ khi $-f(x, y)$ có cực tiểu tại (a, b).

Định lý 1.3.42. *Cho hàm số $f(x, y)$ xác định trong một lân cận mở chứa (a, b). Giả sử hàm số $f(x, y)$ có cực trị tại (a, b) và các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ và $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ tồn tại. Khi đó*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0.$$

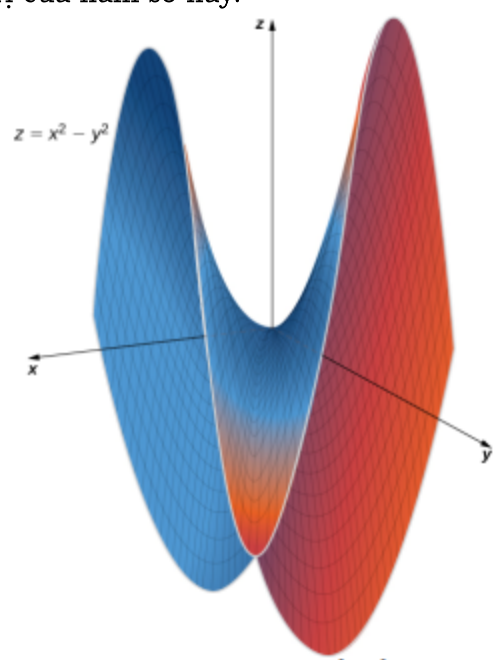
Định lý trên cho phép ta hạn chế việc tìm cực trị xuống những điểm có tất cả đạo hàm riêng bằng không, hoặc tại những điểm mà đạo hàm riêng không tồn tại. Những điểm như thế được gọi là *điểm tới hạn*.

Ví dụ 1.3.43. Điểm $(0,0)$ là một điểm tới hạn của hàm số $f(x,y) = x^2 + y^2$ vì

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 2x\Big|_{(0,0)} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 2y\Big|_{(0,0)} = 0.$$

Điểm $(0,0)$ là một điểm tới hạn của hàm số $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ vì đạo hàm riêng $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)$ không tồn tại.

Ví dụ 1.3.44. Điểm $(0,0)$ là một điểm tới hạn của hàm số $f(x,y) = x^2 - y^2$ nhưng không phải là điểm cực trị của hàm số này.



Sau đây ta phát biểu một điều kiện đủ về cực trị.

Định lý 1.3.45. *Cho hàm số $f(x,y)$ có các đạo hàm riêng cấp một và cấp hai liên tục trong một lân cận mở chứa (a,b). Giả sử $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$. Ký hiệu*

$$D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2.$$

(a) Nếu $D > 0$ và $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$ thì $f(x,y)$ có cực tiểu tại (a,b);

(b) Nếu $D > 0$ và $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$ thì $f(x,y)$ có cực đại tại (a,b);

(c) Nếu $D < 0$ *thì* $f(x, y)$ *không có cực trị tại* (a, b)*;*

(d) Nếu $D = 0$ *thì tiêu chuẩn không đưa ra kết luận.*

Ta minh họa các bước tìm cực trị qua ví dụ dưới đây.

Ví dụ 1.3.46. Tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = x^3 + 2xy - 6x - 4y^2$.

Đầu tiên, ta tìm các điểm tới hạn của $f(x, y)$. Vì $f(x, y)$ là hàm đa thức nên các đạo hàm riêng tồn tại tại mọi điểm (x, y). Do vậy, các điểm tới hạn là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0. \end{cases}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y - 6 = 0 \\ 2x - 8y \quad\quad = 0 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta thu được hai nghiệm $\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{8}\right)$.

Tiếp theo, ta tính các đạo hàm riêng cấp hai.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -8,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2.$$

Suy ra

$$D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = -48x - 4.$$

Cuối cùng, chuyển thông tin vào bảng sau.

Điểm tới hạn	$\partial^2 f/\partial x^2$	D	Kết luận
$(4/3, 1/3)$	8	-68	Không phải cực trị
$(-3/2, -3/8)$	-9	68	Cực đại

Sau đây, ta trình bày các bước để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x, y)$ trên tập compact D.

1. Tìm tất cả các điểm tới hạn của hàm số $f(x, y)$ trên phần trong của D.
2. Tính giá trị của $f(x, y)$ tại những điểm tới hạn vừa tìm được.
3. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $f(x, y)$ trên biên của D.

4. So sánh các giá trị tìm được ở bước 2 và bước 3 để chọn ra giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

Ví dụ 1.3.47. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau.

(a) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 4y^2 - 4x - 2y + 24$ trên hình chữ nhật $0 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq 2$.

(b) $g(x, y) = x^2 + y^2 + 2x - 2y$ trên hình tròn $x^2 + y^2 \leq 16$.

Giải

(a) Đầu tiên, ta sẽ tìm các điểm tới hạn của $f(x, y)$ trên phần trong của hình chữ nhật đã cho. Ta có

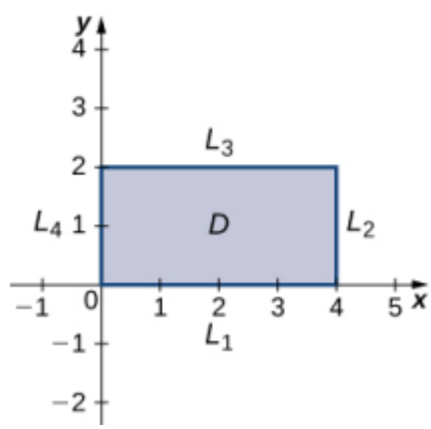
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y - 4,\ \frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 8y - 2.$$

Các điểm tới hạn là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x - 2y - 4 = 0 \\ -2x + 8y - 2 = 0. \end{cases}$$

Giải hệ ta được $(x, y) = (3, 1)$. Ta có $f(3, 1) = 17$.

Tiếp theo, ta tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x, y$ trên biên của D. Biên của D bao gồm bốn đoạn thẳng được chỉ ra như hình vẽ dưới đây.



Đoạn thẳng L_1 được tham số hóa như sau $x = t,\ y = 0$ với $t \in [0, 4]$. Ta có $g(t) = f(x(t), y(t)) = t^2 - 4t + 24$ và $g'(t) = 2t - 4$. Giải phương trình $g'(t) = 0$ ta có $t = 2$, tương ứng với điểm $(2, 0)$ và $\boxed{f(2,0)=20}$.

Đoạn thẳng L_2 được tham số bởi $x = 4,\ y = t$ với $t \in [2, 0]$. Ta có $g(t) = f(x(t), y(t)) = 4t^2 - 10t + 24$ và $g'(t) = 8t - 10$. Giải phương trình $g'(t) = 0$ ta được $t = 5/4$, tương ứng với điểm $(4, 5/4)$, và $\boxed{f(4,5/4)=71/4}$.

Đoạn thẳng L_3 được tham số hóa bởi $x = t,\ y = 2$ với $t \in [0, 4]$. Ta có $g(t) = f(x(t), y(t)) = t^2 - 8t + 36$ và $g'(t) = 2t - 8$. Giải phương trình $g'(t) = 0$ ta được $t = 4$, tương ứng với điểm $(4, 2)$, và $\boxed{f(4,2)=20}$.

Đoạn thẳng L_4 được tham số hóa bởi $x = 0,\ y = t$ với $t \in [0, 2]$. Ta có $g(t) = f(x(t), y(t)) = 4t^2 - 2t + 24$ và $g'(t) = 8t - 2$. Giải phương trình $g'(t) = 0$ ta được $t = 1/4$, tương ứng với điểm $(0, 1/4)$, và $\boxed{f(0,1/4)=95/4}$.

Ta tính giá trị của $f(x, y)$ tại các đỉnh $(0, 0),\ (4, 0),\ (0, 2)$

$$\boxed{f(0,0)=24,\ f(4,0)=24,\ f(0,2)=36}$$

Vậy giá trị lớn nhất là $f(0, 2) = 36$ và giá trị nhỏ nhất là $f(4, 5/4) = 71/4$.

(b) Ta có

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x + 4,\ \frac{\partial g}{\partial y} = 2y - 6.$$

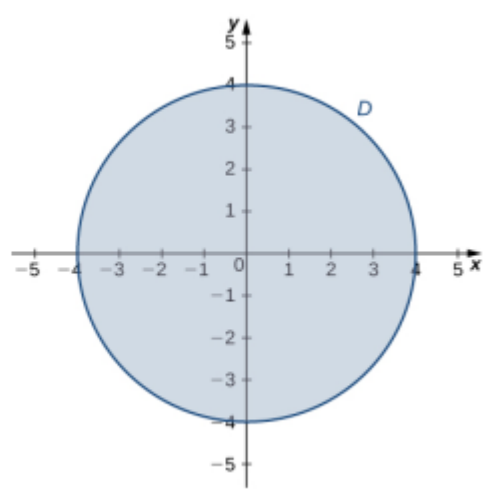
Điểm tới hạn của hàm số $g(x, y)$ trên D là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x + 2 = 0, \\ 2y - 2 = 0. \end{cases}$$

Suy ra điểm tới hạn là $(x, y) = (-1, 1)$, và như thế $\boxed{g(-1,1)= -2}$.

Tiếp theo, ta tham số hóa biên của D bởi $x = 4\cos(t),\ y = 4\sin(t)$ với $t \in [0, 2\pi]$. Xét hàm số

$$h(t) = g(x(t), y(t)) = 16 + 8\cos(t) - 8\sin(t).$$



Ta có $h'(t) = -8\sin(t) - 8\cos(t)$. Giải phương trình $h'(t) = 0$ trên $[0, 2\pi]$ ta thu được hai nghiệm $3\pi/4$ và $7\pi/4$, tương ứng với hai điểm $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ và $(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$. Tính giá trị của $g(x, y)$ tại hai điểm này, ta có

$$\boxed{g(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) = 16 - 8\sqrt{2},\ g(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}) = 16 + 8\sqrt{2}}.$$

Vậy giá trị lớn nhất là $g(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}) = 16+8\sqrt{2}$ và giá trị nhỏ nhất là $g(-1, 1) = -2$.

CHƯƠNG 2. TÍCH PHÂN BỘI

Ngày 23 tháng 3 năm 2021

Biên soạn: Đỗ Quốc Tuấn

Bộ môn Toán- Khoa Khoa học cơ bản

Trường Đại học Phenikaa

Mục lục

Tài liệu tham khảo chính

• Erwin Kreyszig, *Advanced engineering mathematics*, Nhà xuất bản Wiley (10th Edition, 2011) (Chương 10).

• Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh, *Toán học cao cấp*, tập III, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (2014) (Chương 3).

Tóm tắt lý thuyết

• Tích phân kép (bội hai): định nghĩa, cách tính trong tọa độ Descartes, đổi biến (chú ý phép đổi biến sang tọa độ cực), ứng dụng hình học.

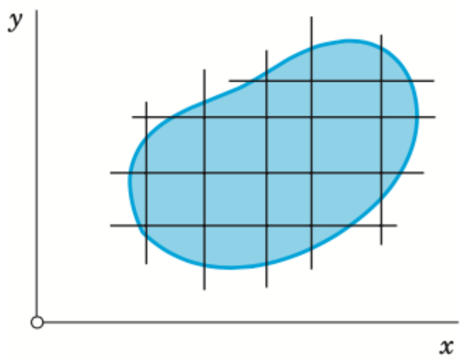
• Tích phân bội ba: định nghĩa, cách tính trong tọa độ Descartes, đổi biến (chú ý phép đổi biến sang tọa độ trụ, tọa độ cầu), ứng dụng hình học.

1 TÍCH PHÂN KÉP (double integrals)

Lưu ý: Tích phân kép còn được gọi với tên khác là tích phân bội hai.

1.1 Định nghĩa của tích phân kép

Để định nghĩa tích phân kép của hàm $f(x, y)$ trên miền R đóng, bị chặn trên mặt phẳng hai chiều xy với đường biên cong (không nhất thiết phải trơn, có thể gãy khúc), ta chia miền R bằng các đường song song [1] với trục Ox và Oy và đánh số các hình chữ nhật nằm trong miền R từ 1 đến n. Trong hình chữ nhật thứ k, ta chọn một điểm tuỳ ý (điểm mẫu) có toạ độ (x_k, y_k). Hình chữ nhật này có diện tích ΔA_k.



Hình 1: Miền R đóng, bị chặn (màu xanh). Ta chia miền R bởi các đường song song với Ox và Oy.

Bây giờ, ta đi tính tổng sau:

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k. \tag{1}$$

Ta thấy rằng, có nhiều cách chia miền R. Với mỗi cách chia miền R, ta có số hình chữ nhật nằm trong R là n_i. Và do đó, ta có các giá trị tương ứng J_{n_i}. *Câu hỏi đặt ra là khi $n_i \to \infty$ thì các J_{n_i} có tiến về cùng một giá trị hay không ?*

Các nhà toán học đã chỉ ra được rằng nếu $f(x, y)$ là hàm liên tục trên R thì khi $n_i \to \infty$ sao cho $\Delta_{n_i} = \max\{\Delta A_k,\ 1 \le k \le n_i\} \to 0$, các J_{n_i} sẽ hội tụ về cùng một giá trị I . Điều này có nghĩa *giá trị giới hạn này tồn tại không phụ thuộc vào cách chia R và cách chọn điểm mẫu (x_k, y_k)*. Giới hạn này được gọi là **tích phân kép** của $f(x, y)$ trên miền R. Ta kí hiệu tích phân kép như sau

$$I = \iint_R f(x, y)dA. \tag{2}$$

[1] Lưu ý: các đường chia này có thể không nhất thiết phải song song với các trục Ox và Oy. Tuy nhiên, việc chọn cách chia bằng các đường song song với các trục toạ độ sẽ giúp ta dễ hình dung hơn.

* Chú ý rằng, trong nhiều tài liệu, yếu tố diện tích dA được viết là dS.

Bên cạnh đó, chúng ta chú ý rằng $dA = dxdy$, do đó tích phân kép trên viết còn được viết như sau

$$I = \iint_R f(x, y)dxdy. \tag{3}$$

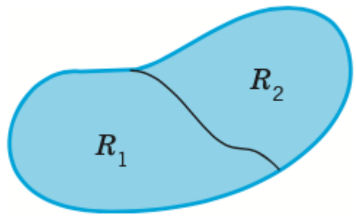
Lưu ý: tích phân kép có các tính chất tương tự như tích phân xác định của hàm một biến số. Cụ thể, ta có các tính chất sau của tích phân kép:

$$\iint_R kf(x, y)dxdy = k \iint_R f(x, y)dxdy \text{ với } k \text{ là hằng số,} \tag{4}$$

$$\iint_R [f(x, y) \pm g(x, y)]dxdy = \iint_R f(x, y)dxdy \pm \iint_R g(x, y)dxdy. \tag{5}$$

Nếu miền R chia thành hai miền con R_1 và R_2, nghĩa là $R = R_1 \cup R_2$, và đảm bảo rằng $R_1 \cap R_2$ là đường biên chung của R_1 và R_2 (như mô tả bởi hình 2 phía dưới) thì

$$\iint_R f(x, y)dxdy = \iint_{R_1} f(x, y)dxdy + \iint_{R_2} f(x, y)dxdy. \tag{6}$$



Hình 2: Miền R được chia thành hai miền con R_1 và R_2.

Định lý giá trị trung bình: Nếu hàm $f(x, y)$ liên tục trên miền đóng, bị chặn R thì tồn tại ít nhất một điểm (x_0, y_0) thuộc miền R sao cho

$$\iint_R f(x, y)dxdy = f(x_0, y_0)A, \tag{7}$$

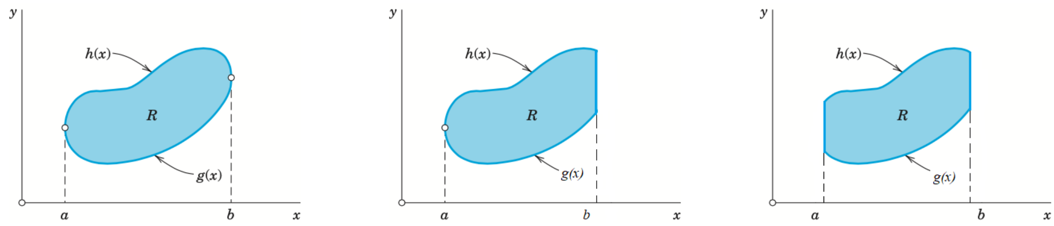
với A là diện tích của miền R.

1.2 Cách tính tích phân kép trong hệ toạ độ Đề-các

- Nếu ta phân tích miền R theo cách như mô tả bởi hình 3, nghĩa là ta xác định được hai đường cong $g(x)$ (phía dưới) và $h(x)$ (phía trên) bao quanh miền R. Ngoài ra, hai đầu của hai đường cong này có cùng chung hoành độ: $x = a$ (ngoài cùng bên trái) và $x = b$ (ngoài cùng bên phải), nghĩa là $a < b$. Theo đó, tích phân kép được tính như sau: *tính tích phân theo biến y trước, rồi tính theo biến x sau*:

$$\iint_R f(x, y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)dy \right] dx. \tag{8}$$

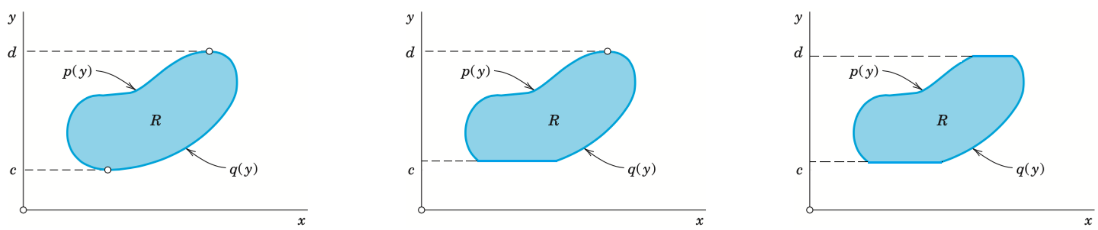
Lưu ý: Khi tính tích phân theo y thì ta coi x như hằng số.



Hình 3: Miền R được giới hạn bởi hai đường cong $g(x)$ (phía dưới) và $h(x)$ (phía trên).

- Nếu ta phân tích miền R theo cách như mô tả bởi hình 4, nghĩa là ta xác định được hai đường cong $p(y)$ (phía trái) và $q(y)$ (phía phải) bao quanh miền R. Ngoài ra, hai đầu của hai đường cong này có cùng chung tung độ: $y = c$ (dưới cùng) và $y = d$ (trên cùng), nghĩa là $c < d$. Theo đó, tích phân kép được tính như sau: *tính tích phân theo biến x trước, rồi tính theo biến y sau*, khi tính tích phân theo x thì ta coi y như hằng số.:

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)dx \right] dy. \tag{9}$$



Hình 4: Miền R được giới hạn bởi hai đường cong $p(y)$ (phía trái) và $q(y)$ (phía phải).

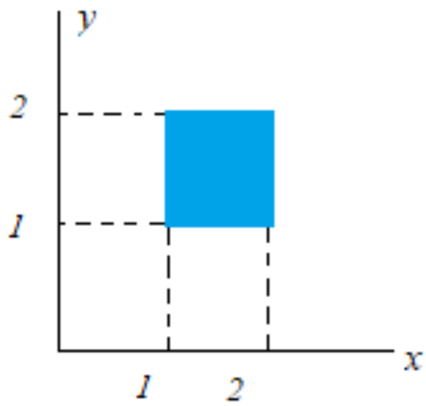
Một vài lưu ý quan trọng:

- Trong một số trường hợp, việc đổi thứ tự lấy tích phân, nghĩa là thay vì tính tích phân theo x trước, y sau ta có thể đổi lại tính tích phân theo y trước, x sau, hoặc ngược lại, có thể sẽ giúp tính toán nhanh hơn (bài tập 3).
- Trong một số trường hợp, việc xác định cận lấy tích phân gặp khó khăn thì ta nên chia miền lấy tích phân R thành các miền nhỏ sao cho dễ dàng xác định được cận lấy tích phân (bài tập 5).

Ví dụ 1: Tính tích phân sau

$$I = \iint_R \frac{dxdy}{(x+y)^2}, \tag{10}$$

với miền R được xác định như sau $R = [1,2] \times [1,2]$ (xem hình 5).



Hình 5: Miền $R = [1, 2] \times [1, 2]$.

Miền R là hình vuông được xác định bởi bốn đường thẳng: $x = 1$ và $x = 2$ (hai đường này song song với trục Oy); $y = 1$ và $y = 2$ (hai đường này song song với trục Ox). Ta có thể tính theo một trong hai cách như trên.

- **Cách 1**: Tính y trước, x sau:

$$I = \iint_R \frac{dxdy}{(x+y)^2} = \int_1^2 \left[\int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}\right] dx, \tag{11}$$

ở đây $a = 1$, $b = 2$, $g(x) = 1$, và $h(x) = 2$. Ta tính tích phân theo y (trong ngoặc vuông) như sau

$$\int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2} = -\frac{1}{x+y}\bigg|_1^2 = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}. \tag{12}$$

Thay vào tích phân I bên trên, ta có

$$I = \int_1^2 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) dx = \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\bigg|_1^2 = \ln\frac{9}{8}. \tag{13}$$

- **Cách 2**: Tính x trước, y sau:

$$I = \iint_R \frac{dxdy}{(x+y)^2} = \int_1^2 \left[\int_1^2 \frac{dx}{(x+y)^2}\right] dy, \tag{14}$$

ở đây $c = 1$, $d = 2$, $p(y) = 1$, và $q(y) = 2$. Ta tính tích phân theo x (trong ngoặc vuông) như sau

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x+y)^2} = -\frac{1}{x+y}\bigg|_1^2 = \frac{1}{y+1} - \frac{1}{y+2}. \tag{15}$$

Thay vào tích phân I bên trên, ta có

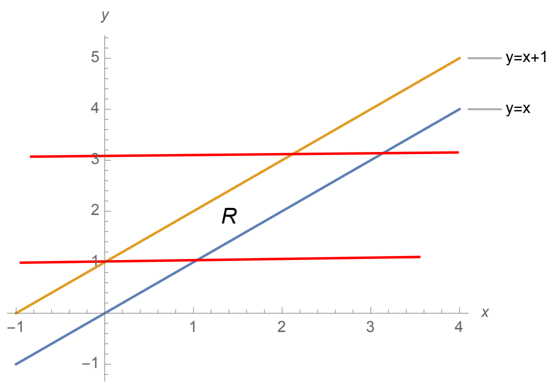
$$I = \int_1^2 \left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y+2}\right) dy = \ln\left|\frac{y+1}{y+2}\right|\bigg|_1^2 = \ln\frac{9}{8}. \tag{16}$$

Ví dụ 2: Tính tích phân sau

$$I = \iint_R (x^2 + y^2) dx dy, \tag{17}$$

với miền R được giới hạn bởi các đường: $y = x$, $y = x + 1$, $y = 1$, và $y = 3$.

Nhận xét: Ở đây, ta đã có hai đường thẳng $y = 1$ và $y = 3$, do đó ta sẽ tính tích phân theo y sau và theo x trước. Muốn tính x trước, ta cần xác định hai đường $p(y)$ và $q(y)$. Hai đường này xác định từ phương trình hai đường còn lại như sau: $y = x \Rightarrow x = y$ và $y = x + 1 \Rightarrow x = y - 1$. Câu hỏi bây giờ là đường nào là $p(y)$ (nằm bên tay trái) và đường nào là $q(y)$ (nằm bên tay phải) ? Do đó, ta cần phải vẽ miền R trên hệ trục toạ độ Oxy để hình dung cho chính xác (xem hình dưới đây)



Hình 6: Miền R được giới hạn bởi các đường thẳng $y = 1$ (màu đỏ phía dưới), $y = 3$ (màu đỏ phía trên), $y = x + 1$ (màu vàng), và $y = x$ (màu xanh).

Theo hình vẽ, ta xác định được: $p(y) = y - 1$ (ứng với đường màu vàng) và $q(y) = y$ (ứng với đường màu xanh). Do đó, ta tính được tích phân kép như sau

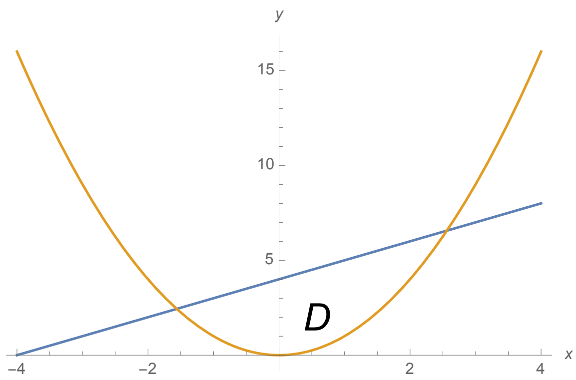
$$\begin{aligned}
I &= \int_1^3 \left[\int_{y-1}^{y} (x^2 + y^2) dx \right] dy \\
&= \int_1^3 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \bigg|_{y-1}^{y} \right] dy \\
&= \int_1^3 \left[\frac{y^3}{3} + y^3 - \frac{(y-1)^3}{3} - y^2(y-1) \right] dy \\
&= \int_1^3 \left[\frac{y^3}{3} - \frac{(y-1)^3}{3} + y^2 \right] dy \\
&= \frac{y^4}{4} - \frac{(y-1)^4}{12} + \frac{y^3}{3} \bigg|_1^3 \\
&= 14. \qquad (18)
\end{aligned}$$

Ví dụ 3: Tính tích phân sau

$$I = \iint_D xy dx dy, \tag{19}$$

với miền D được giới hạn bởi đường thẳng $x - y + 4 = 0$ và đường parabol $x^2 = y$.

Ở ví dụ này, ta chưa có thông tin gì về cận lấy tích phân của biến x. Để tìm các cận của x, ta cần tìm các điểm giao của đường thẳng $y = x + 4$ (hay chính là đường $x - y + 4 = 0$) và đường parabol $y = x^2$. Có hai cách để xác định các điểm giao này. **Cách thứ nhất** và là cách trực quan nhất đó là vẽ các đường $y = x + 4$ và $y = x^2$ trên cùng một hệ trục toạ độ, sau đó sẽ xác định toạ độ của các điểm giao, từ đó xác định được các cận lấy tích phân theo biến x. **Cách thứ hai** đó là giải phương



Hình 7: Hình vẽ xác định miền D giới hạn bởi hai đường: đường thẳng $y = x + 4$ (màu xanh) và đường parabol $y = x^2$ (màu vàng).

trình $x + 4 = x^2$. Giải phương trình này ta thu được hai nghiệm

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{17}}{2}; \ x_2 = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}.$$

Trong khoảng $[x_1, x_2]$ ta thấy đường $y = x + 4$ nằm bên trên đường $y = x^2$ theo trục Oy. Do đó, tích phân kép nêu trên sẽ được tính như sau

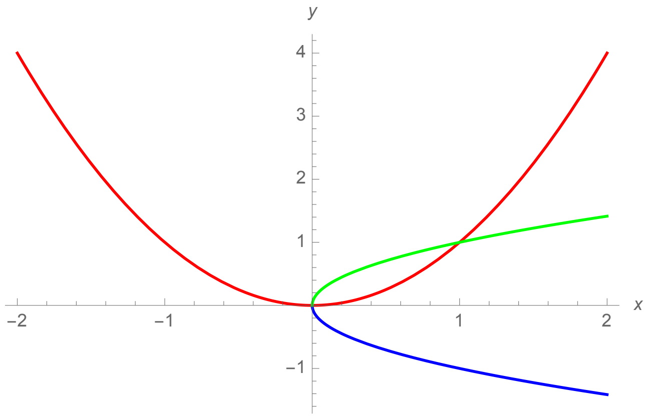
$$\begin{aligned}
I &= \iint_D xydxdy \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{x^2}^{x+4} xydy \right] dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{xy^2}{2} \Big|_{x^2}^{x+4} \right] dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \left(-x^5 + x^3 + 8x^2 + 16x \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \left(-\frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4} + \frac{8x^3}{3} + 8x^2 \right) \Big|_{\frac{1-\sqrt{17}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{17}}{2}} \\
&= \frac{51\sqrt{17}}{8}.
\end{aligned}$$

Ví dụ 4: Tính tích phân sau

$$I = \iint_D (x^2 + y)dxdy, \tag{20}$$

với miền D được giới hạn bởi các đường parabol: $y = x^2$ và $x = y^2$.

Ta thấy rằng $x = y^2$ tương đương với $y = \pm\sqrt{x}$. Tuy nhiên, do $y = x^2 > 0$ nên chỉ có đường $y = \sqrt{x}$ mới giao với đường $y = x^2$. Điều này cũng thể hiện trên hình vẽ 7 dưới đây. Theo hình vẽ



Hình 8: Hình vẽ xác định miền D giới hạn bởi hai đường: đường parabol $y = x^2$ (màu đỏ) và đường parabol $y = \sqrt{x}$ (màu xanh lá cây). Rõ ràng đường parabol $y = -\sqrt{x}$ (màu xanh nước biển) không tham gia vào việc xác định miền D.

(hoặc giải phương trình $x^2 = \sqrt{x}$) ta thấy toạ độ các điểm giao là $x_1 = 0$ và $x_2 = 1$. Ngoài ta ta thấy đường $y = \sqrt{x}$ nằm trên đường $y = x^2$ $\forall x \in [0, 1]$. Như vậy, tích phân hai lớp trên được xác định như sau

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D (x^2 + y)dxdy \\
&= \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} \left(x^2 + y\right) dy \right] dx \\
&= \int_0^1 \left[\left(x^2 y + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} \right] dx \\
&= \int_0^1 \left(-\frac{3x^4}{2} + x^2\sqrt{x} + \frac{x}{2} \right) dx \\
&= \frac{-3x^5}{10} + \frac{2x^{7/2}}{7} + \frac{x^2}{4} \Big|_0^1 \\
&= \frac{33}{140}.
\end{aligned}$$

1.3 Đổi biến

Trong nhiều trường hợp, miền R có các dạng đặc biệt như hình tròn, hình elip, nên việc đổi biến ví dụ như từ biến (x, y) sang biến toạ độ cực (r, θ) là cần thiết. Do đó, ta cần phải xây dựng cách chuyển tích phân kép từ hệ toạ độ Đề-các (x, y) sang hệ toạ độ (u, v).

Nhắc lại, với tích phân xác định một biến, nếu ta đổi biến x thành biến u theo cách sau $x = x(u)$, thì tích phân sẽ biến đổi như sau với chú ý $dx = x'(u)du$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x(u))\frac{dx}{du}du, \tag{21}$$

với $x(\alpha) = a$ và $x(\beta) = b$.

Quay lại với tích phân kép, nếu ta đổi hai biến (x, y) thành hai biến (u, v) theo cách sau $x = x(u, v)$ và $y = y(u, v)$, thì tích phân kép sẽ biến đổi tương ứng như sau: nếu $\det(J) \neq 0$ (hoặc có thể bằng 0 tại một số hữu hạn điểm) thì

$$\int_R f(x, y)dxdy = \iint_{R^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left|\det(J)\right| dudv, \tag{22}$$

với J là ma trận Jacobi,

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

Chú ý $\det(J)$ còn được gọi là định thức **Jacobian**

$$\det(J) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

Lưu ý rằng điều kiện $\det(J) \neq 0$ đảm bảo phép đổi biến là *song ánh*. Định thức Jacobian J có thể âm hoặc dương. Do đó, dấu trị tuyệt đối $|J|$ đảm bảo rằng kết quả thu được luôn dương. Trong tích phân trên, R^* là ảnh ngược của miền R trong mặt phẳng uv sao cho mỗi điểm (u, v) trong R^* tương ứng với một điểm (x, y) trong R và ngược lại mỗi điểm (x, y) trong R tương ứng với duy nhất một điểm (u, v) trong R^* (đảm bảo tính chất của ánh xạ song ánh).

- Hệ toạ độ cực (polar coordinates): Bây giờ ta xét một phép biến đổi quan trọng đó là việc đổi biến từ hệ toạ độ Đề-các sang hệ toạ độ cực:

$$x = r\cos\varphi, \tag{23}$$

$$y = r\sin\varphi. \tag{24}$$

Trong trường hợp này, $u = r$ và $v = \varphi$. Do đó, Jacobian tương ứng là

$$\begin{aligned} \det(J) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial r} \\ &= \cos\varphi(r\cos\varphi) - (-r\sin\varphi)\sin\varphi = r, \end{aligned} \tag{25}$$

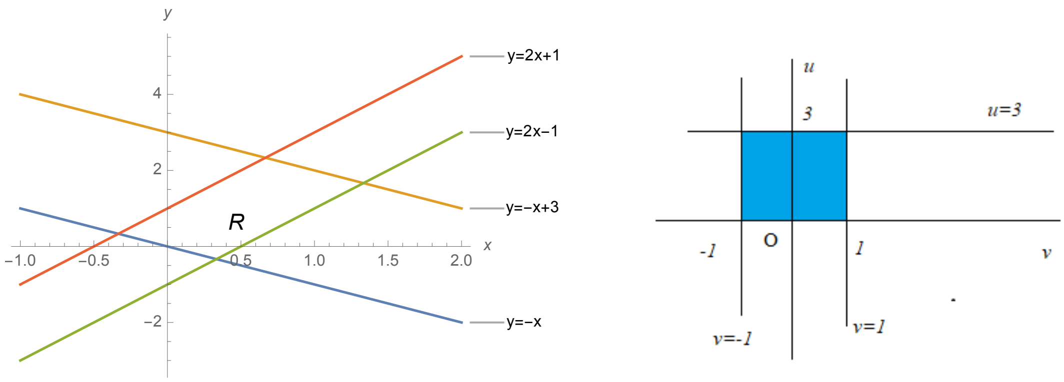
Do $r \geq 0$ nên $|\det(J)| = r$. Vậy,

$$\int_R f(x, y)dxdy = \iint_{R^*} f(x(r, \varphi), y(r, \varphi))rdrd\varphi. \tag{26}$$

Ví dụ 5: Tính tích phân sau

$$I = \iint_R (x+y)dxdy, \tag{27}$$

với R là miền giới hạn bởi các đường thẳng sau: $y=-x$, $y=-x+3$, $y=2x-1$, và $y=2x+1$.



Hình 9: Hình vẽ xác định miền $R(x, y)$ (trái) và miền $R^*(v, u)$ (phải, hình vuông màu xanh).

Nhận xét: Miền R được mô tả như hình vẽ số 8 dưới đây. Rõ ràng hình R rất khó để xác định cận lấy tích phân do các cạnh không song song với trục Ox và Oy, bên cạnh đó các đường không liên tục, được mô tả bởi các phương trình khác nhau. Thông thường, muốn xử lý hình R, ta cần phải chia nó thành các phần nhỏ bởi các đường song song với Ox hoặc Oy. Tuy nhiên, có một cách đơn giản hơn để xử lý, đó là đổi biến số theo cách sau

$$u = x + y, \tag{28}$$

$$v = -2x + y. \tag{29}$$

Với cách đổi biến này, ta thu được một hình $R^*(v, u)$ có dạng hình chữ nhật (xem hình), được bao quanh bởi các đường $u = 0$ (tương ứng với $y = -x$), $u = 3$ (tương ứng với đường $y = -x + 3$), $v = -1$ (tương ứng với đường $y = 2x - 1$), và $v = 1$ (tương ứng với đường $y = 2x + 1$).

Ta có,

$$x = \frac{1}{3}(u - v), \tag{30}$$

$$y = \frac{1}{3}(2u + v), \tag{31}$$

do đó ta tính được Jacobian như sau

$$\det(J) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \neq 0. \tag{32}$$

Theo đó, ta tính được tích phân kép như sau

$$I = \iint_{R^*} u\frac{1}{3}dudv = \frac{1}{3}\int_0^3 udu \int_{-1}^1 dv = 3. \tag{33}$$

Ví dụ 6: Tính tích phân sau

$$I = \iint_R \frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \tag{34}$$

với R là phần tư hình tròn đơn vị (là hình tròn được bao bởi đường tròn có bán kính bằng đơn vị độ dài, nghĩa là bằng 1) nằm góc phần tư thứ nhất.

Hình tròn đơn vị có phương trình như sau

$$x^2 + y^2 = r^2, \text{ với } 0 \leq r \leq 1. \tag{35}$$

Với tích phân này, để cho thuận tiện trong việc tính toán ta chuyển hệ toạ đồ Đề-các sang hệ toạ độ cực như sau

$$x = r\cos\varphi;\ \ y = r\sin\varphi. \tag{36}$$

Ở đây về mặt tổng quát khi chưa có điều kiện gì thì φ có giá trị nằm trong đoạn $[0, 2\pi]$, nghĩa là $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Tuy nhiên, do yêu cầu đầu bài thì ta chỉ xét góc phần tư thứ nhất của hình tròn nên $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. Nhắc lại với cách đổi biến như này thì Jacobian có giá trị là $\det(J) = r$. Do đó, tích phân trên trong hệ toạ độ cực có dạng như sau

$$I = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \frac{rdr}{\sqrt{1+r^2}} = \frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1). \tag{37}$$

1.4 Ứng dụng của tích phân kép

- Tính diện tích miền phẳng: Diện tích A của miền R trong mặt phẳng Oxy được xác định như sau:

$$A = \iint_R dxdy. \tag{38}$$

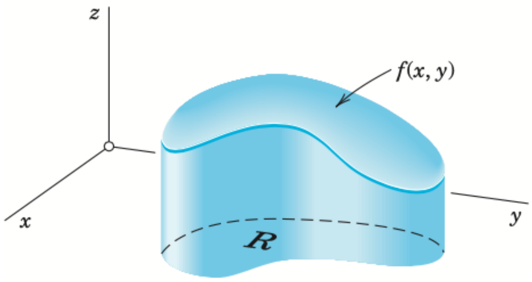
- Tính thể tích của vật thể hình trụ: Vật thể hình trụ có mặt xung quanh là mặt trụ với đường sinh song song với Oz, đáy là miền R trong mặt phẳng Oxy, phía trên giới hạn bởi mặt cong $z = f(x,y)$ với $f(x,y) \geq 0$ (xem hình màu xanh trong hình 9):

$$V = \iint_R f(x,y)dxdy. \tag{39}$$

Lưu ý, trong trường hợp $f(x,y) \leq 0$, ta hoàn toàn có thể tính thể tích của vật thể hình trụ tương ứng như sau:

$$V = -\iint_R f(x,y)dxdy. \tag{40}$$

- Tính khối lượng của bản phẳng: Xét bản phẳng kim loại (hoặc chất liệu khác như nhựa, giấy,...) trong mặt phẳng xy có mật độ khối lượng (= khối lượng trên một đơn vị diện tích) là $\rho(x,y)$



Hình 10: Hình trụ có một mặt cho bởi đồ thị $z = f(x, y)$.

và hình dạng được xác định bởi miền R. Khi đó, khối lượng của bản phẳng được tính bằng công thức sau

$$M = \iint_R \rho(x, y)dxdy. \tag{41}$$

- **Xác định trọng tâm của bản phẳng**: Với bản phẳng kim loại R như trên, ta xác định được toạ độ trọng tâm $G(x_G, y_G)$ theo công thức sau

$$x_G = \frac{1}{M}\iint_R x\rho(x, y)dxdy, \tag{42}$$

$$y_G = \frac{1}{M}\iint_R y\rho(x, y)dxdy, \tag{43}$$

với M là khối lượng của bản phẳng tính theo công thức (41).

- **Xác định mô-ment quán tính của bản phẳng**: Với bản phẳng kim loại R như trên, ta tính được mô-ment quán tính của nó đối với trục x (I_x), trục y (I_y), và đối với gốc toạ độ (I_0) như sau

$$I_x = \iint_R y^2\rho(x, y)dxdy, \tag{44}$$

$$I_y = \iint_R x^2\rho(x, y)dxdy, \tag{45}$$

$$I_0 = I_x + I_y = \iint_R (x^2 + y^2)\rho(x, y)dxdy. \tag{46}$$

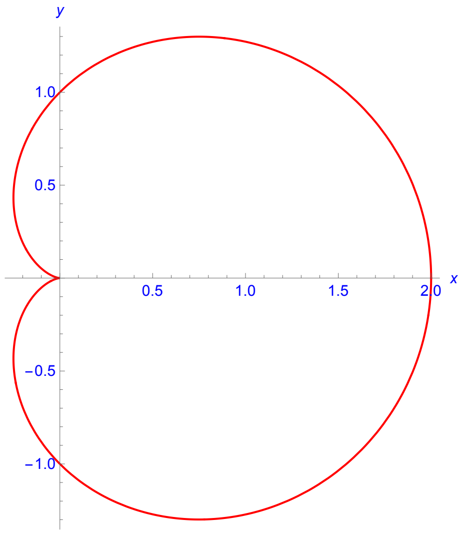
Ví dụ 7: Xác định trọng tâm của bản phẳng đồng chất D được giới hạn bởi đường sau $r = a(1 + \cos\varphi)$ với $a > 0$.

Bản phẳng D có hình dạng giống như hình vẽ dưới đây:

Do bản phẳng là đồng chất nên $\rho(x, y) = \rho_0$, với ρ_0 là hằng số, không phụ thuộc vào biến x và y. Do đó, công thức tính trọng tâm của bản phẳng đồng chất trong hệ toạ độ Đề-các sẽ trở thành

$$x_G = \frac{1}{S}\iint_D xdxdy, \tag{47}$$

$$y_G = \frac{1}{S}\iint_D ydxdy, \tag{48}$$



Hình 11: Bản phẳng D được tạo bởi $r = a(1 + \cos\varphi)$ với $a = 1 > 0$. Hình này còn có tên gọi là hình Cardioid.

sới $S \equiv \iint_D dxdy$ là diện tích của bản D. Đầu tiên ta tính diện tích bản D trong hệ toạ độ cực với $x = r\cos\varphi$ và $y = r\sin\varphi$ như sau

$$\begin{aligned} S &= \iint_D dxdy \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} rdr \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{r^2}{2}\Big|_0^{a(1+\cos\varphi)} \right] \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi \\ &= \frac{3}{2}\pi a^2. \end{aligned} \tag{49}$$

Tiếp theo, ta tính công thức trọng tâm của bản phẳng trong hệ toạ độ cực như sau

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{2}{3\pi a^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r\cos\varphi r dr \\ &= \frac{2}{3\pi a^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \left[\cos\varphi \frac{r^3}{3}\Big|_0^{a(1+\cos\varphi)} \right] \\ &= \frac{2a}{9\pi}\int_0^{2\pi} \cos\varphi(1+\cos\varphi)^3 d\varphi \\ &= \frac{2a}{9\pi}\frac{15\pi}{4} \\ &= \frac{5a}{6} \end{aligned} \tag{50}$$

và

$$\begin{aligned}
y_G &= \frac{2}{3\pi a^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r\sin\varphi r dr \\
&= \frac{2}{3\pi a^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \left[\sin\varphi \frac{r^3}{3}\bigg|_0^{a(1+\cos\varphi)}\right] \\
&= \frac{2a}{9\pi}\int_0^{2\pi} \sin\varphi(1+\cos\varphi)^3 d\varphi \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{51}$$

Kết quả này đúng như dự đoán dựa trên tính chất đối xứng của hình D. Thật vậy, từ tính chất đối xứng qua trục Ox của hình D ta kết luận là trọng tâm G phải nằm trên trục Ox, nghĩa là $y_G = 0$.

2 TÍCH PHÂN BỘI BA (triple integrals)

2.1 Định nghĩa

Đây là sự mở rộng của tích phân bội từ hai biến lên ba biến.

Xét một miền không gian ba chiều đóng, bị chặn T. Xét hàm số $f(x, y, z)$ xác định trong miền T này. Ta chia miền T này bởi các mặt phẳng song song với các mặt toạ độ. Với cách chia này, giả sử ta có n hình hộp chữ nhật con nằm trong T. Trong mỗi hình hộp chữ nhật này, ta chọn một điểm tuỳ ý (điểm mẫu), giả sử có tọa độ là (x_k, y_k, z_k) trong hộp thứ k.

Gọi ΔV_k là thể tích của hộp thứ k. Bây giờ, ta xét tổng sau

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k. \tag{52}$$

Tương tự như đối với tích phân kép, ta thấy rằng, có nhiều cách chia miền T. Với mỗi cách chia miền T, ta có số hình hộp chữ nhật nằm trong T là n_i. Và do đó, ta có các giá trị tương ứng J_{n_i}. Tương tự như tích phân kép, câu hỏi đặt ra bây giờ đó là: *khi $n_i \to \infty$ sao cho đường kính các hình hộp chữ nhật nhỏ tiến về 0 thì các J_{n_i} có tiến về cùng một giá trị hay không ?*

Người ta chứng minh được rằng nếu $f(x, y, z)$ liên tục trong T thì các J_{n_i} sẽ hội tụ về cùng một giá trị I, không phụ thuộc vào cách chia miền T và cách chọn điểm mẫu (x_k, y_k, z_k). Giới hạn này được gọi là **tích phân bội ba** của $f(x, y, z)$ trên miền T và được kí hiệu như sau

$$I = \iiint_T f(x, y, z)dV. \tag{53}$$

Nếu chú ý rằng yếu tố thể tích được xác định như sau $dV = dxdydz$, thì tích phân bội ba còn được viết như sau

$$I = \iiint_T f(x, y, z)dxdydz. \tag{54}$$

2.2 Cách tính tích phân bội ba trong hệ toạ độ Đề-các

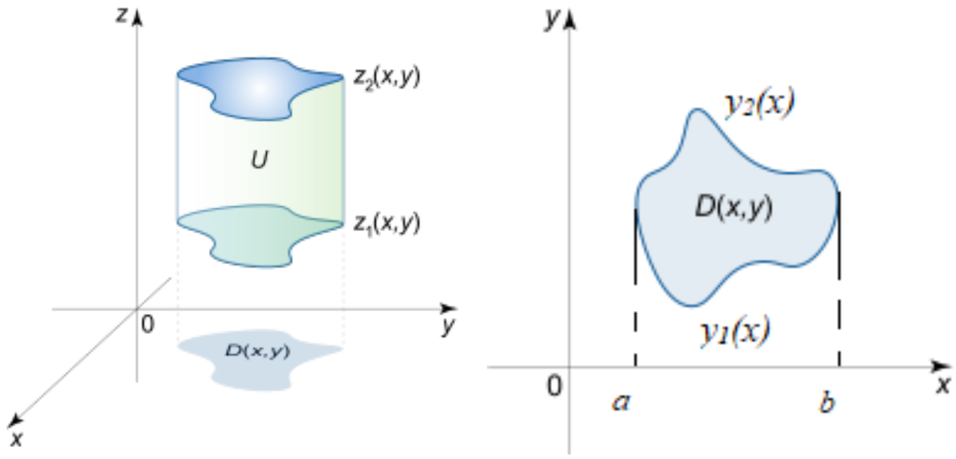
Nếu miền T được giới hạn bởi các mặt $z = z_1(x, y)$ và $z = z_2(x, y)$ trong đó $z_1(x, y)$ và $z_2(x, y)$ là các hàm số liên tục trên miền R với miền R hình chiếu của miền T lên mặt phẳng Oxy, thì ta có

$$\iiint_T f(x, y, z)dxdydz = \iint_R \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz\right] dxdy. \tag{55}$$

Tiếp tục, nếu miền R được giới hạn bởi các đường $y = y_1(x)$ và $y = y_2(x)$ trong đó $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là các hàm số liên tục trên đoạn $[a, b]$, thì tích phân trên được tính như sau

$$\begin{aligned}\iiint_T f(x, y, z)dxdydz &= \iint_R \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz\right] dxdy \\ &= \int_a^b \left\{\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz\right] dy\right\} dx.\end{aligned} \tag{56}$$

Ta có thể hiểu công thức như sau: tính tích phân theo z trước (coi x và y như hằng số), sau đó tính tích phân theo y (coi x là hằng số), và cuối cùng là tính tích phân theo x.



Hình 12: Miền không gian 3 chiều T (hay là U như trong hình vẽ) và hình chiếu của nó trên mặt phẳng Oxy, nghĩa là miền hai chiều R (hay là D như trong hình vẽ). Nguồn ảnh: https://www.math24.net/triple-integrals-cartesian-coordinates

Ví dụ 8: Tính tích phân bội ba sau

$$I = \iiint_T z dx dy dz, \tag{57}$$

với T được giới hạn như sau: $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$, $x \leq y \leq 2x$, và $0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Trong ví dụ này, $f(x, y, z) = z$. Do thông tin đầu bài rất rõ ràng nên ta có thể tính được luôn tích phân bội ba như sau

$$\begin{aligned}
\iiint_T z dx dy dz &= \int_0^{1/4} dx \int_x^{2x} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z dz \\
&= \int_0^{1/4} dx \int_x^{2x} dy \left[\frac{z^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right] \\
&= \int_0^{1/4} dx \int_x^{2x} \left[\frac{1}{2} \left(1 - x^2 - y^2\right) \right] dy \\
&= \int_0^{1/4} dx \left[\frac{1}{2} \left(y - x^2 y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_x^{2x} \right] \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{1/4} \left(x - \frac{10x^3}{3} \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{10x^4}{12} \right) \Big|_0^{1/4} \\
&= \frac{43}{3072}.
\end{aligned} \tag{58}$$

Ví dụ 9: Tính tích phân bội ba sau

$$\iiint_T (x + y + z)dxdydz, \tag{59}$$

với T được xác định bởi các đường: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ và mặt phẳng $x + y + z = 1$.

Ta xác định các cận của tích phân như sau:

- Từ phương trình mặt phẳng $x + y + z = 1$ ta suy ra $z = 1 - x - y$.

- Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, ta có $z = 0$ và do đó $y = 1 - x$

- Khi $y = z = 0$ thì $x = 1$.

Như vậy, tích phân trên được tính như sau

$$\begin{aligned}
\iiint_V (x + y + z)dxdydz &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x + y + z)dz \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[\left(xz + yz + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x-y} \right] \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[\frac{1}{2} \left(1 - x^2 - 2xy - y^2 \right) \right] dy \\
&= \int_0^1 dx \left[\frac{1}{2} \left(y - x^2 y - xy^2 - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{1-x} \right] \\
&= \int_0^1 \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{2} + \frac{1}{3} \right) dx \\
&= \frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{3} \Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{8}.
\end{aligned} \tag{60}$$

2.3 Đổi biến

Tương tự như tích phân kép, trong nhiều bài toán ta cần phải đổi hệ toạ độ thông qua đổi biến, nghĩa là $x \mapsto x(u, v, w)$, $y \mapsto y(u, v, w)$, và $z \mapsto z(u, v, w)$. Ở đây, u, v, và w là các biến mới.

Khi đó, nếu $J \neq 0$ (hoặc có thể bằng 0 tại một số hữu hạn điểm) thì

$$\iiint_T f(x, y, z)dxdydz = \iiint_{T^*} f(x(u, v, w), y(x, y, w), z(x, y, w))|J|dudvdw, \tag{61}$$

với T^* là ảnh ngược của T và J là định thức **Jacobian** được xác định như sau

$$J = \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}. \tag{62}$$

Để đảm bảo phép đổi biến là *song ánh* thì $J \neq 0$. Nhắc lại J có thể âm hoặc dương. Do đó, dấu trị tuyệt đối $|J|$ đảm bảo rằng kết quả thu được luôn dương.

Hệ toạ độ trụ (Cylindrical coordinates): Bây giờ ta xét việc đổi biến từ hệ toạ độ Đề-các sang hệ toạ độ trụ như sau

$$x = r\cos\varphi, \tag{63}$$

$$y = r\sin\varphi, \tag{64}$$

$$z = z, \tag{65}$$

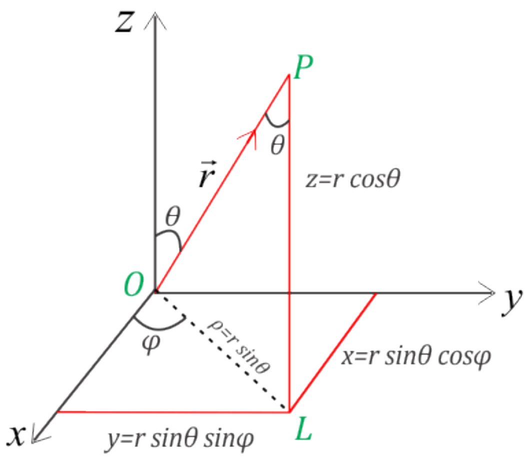
với $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, và $-\infty < z < +\infty$. Đồng nhất $u = r$, $v = \varphi$, và $w = z$ (tất nhiên cách đồng nhất này không phải là duy nhất, ví dụ ta có thể đồng nhất u với φ hoặc z), ta tính được J như sau

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r. \tag{66}$$

Do $r > 0$ nên $|J| = r$. Do đó,

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{T^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdrd\varphi dz. \tag{67}$$

Hệ toạ độ cầu (Spherical coordinates): Bây giờ ta xét việc đổi biến từ hệ toạ độ Đề-các sang hệ toạ độ cầu như sau (xem hình vẽ):



Hình 13: Hệ toạ độ cầu (r, θ, φ). Nguồn ảnh: https://physicscatalyst.com/graduation/spherical-coordinates-system

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \tag{68}$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi, \tag{69}$$

$$z = r\cos\theta, \tag{70}$$

với $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, and $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Đồng nhất $u = r$, $v = \theta$, và $w = \varphi$, ta tính được Jacobian như sau

$$J = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta. \quad (71)$$

Do $\sin\theta > 0 \ \forall\ \theta \in (0,\pi)$, nên $|J| = r^2\sin\theta$. Như vậy,

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{T^*} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta drd\theta d\varphi. \quad (72)$$

Ví dụ 10: Tính tích phân bội ba sau

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}dxdydz, \quad (73)$$

với V được xác định bởi: $x^2+y^2+z^2 \leq 1$, $x^2+y^2 \leq z^2$, và $z \geq 0$.

Với ví dụ này, ta sẽ chuyển từ hệ toạ độ Đề-các (x,y,z) sang hệ toạ độ cầu (r,θ,φ) như sau

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta. \quad (74)$$

với $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$ và $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Khi chuyển đổi hệ toạ độ, ta cần tính định thức Jacobi tương ứng. Cụ thể, ta đã tính được định thức với kết quả như sau

$$J = r^2\sin\theta. \quad (75)$$

Để xác định các cận lấy tích phân, ta sẽ phân tích các thông tin đầu bài đưa ra. Đầu tiên, điều kiện $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ tương đương với $r^2 \leq 1$ hay $0 \leq r \leq 1$. Như vậy, $0 \leq r \leq 1$ đã được xác định đối với biến r. Điều kiện $z \geq 0$ tương đương với $\cos\theta \geq 0$ hay $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Điều kiện $x^2+y^2 \leq z^2$ tương đương với $\sin\theta \leq \cos\theta$ hay $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$. Với góc φ ta không có điều kiện rằng buộc nào nên ta vẫn sử dụng điều kiện tổng quát $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Với các thông tin phân tích trên và $\sqrt{x^2+y^2} = r\sin\theta$, ta tính tích phân như sau

$$\begin{aligned}\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}dxdydz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^1 r\sin\theta r^2\sin\theta dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} d\theta \left[\sin^2\theta \frac{r^4}{4}\Big|_0^1\right] \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \frac{1}{4}\sin^2\theta d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{1}{4}\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right)\Big|_0^{\pi/4}\right] \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)d\varphi \\ &= \frac{\pi-2}{16}\pi. \end{aligned} \quad (76)$$

2.4 Ứng dụng của tích phân bội ba

- Tính thể tích của vật thể ba chiều: Thể tích V của miền không gian đóng, kín ba chiều T (dùng để mô tả hình dáng vật thể) được xác định như sau

$$V = \iiint_T dxdydz. \tag{77}$$

- Tính khối lượng của vật thể ba chiều: Giả sử vật thể không đồng chất, có khối lượng riêng của nó là hàm theo các biến toạ độ $\rho(x, y, z)$ (nếu vật thể đồng chất thì khối lượng riêng của nó là hằng số ρ_0, nghĩa là như nhau tại mọi khu vực trên vật thể). Khi đó, khối lượng của vật thể được xác định như sau

$$m = \iiint_T \rho(x, y, z)dxdydz. \tag{78}$$

- Xác định trọng tâm G của vật thể ba chiều: Toạ độ trọng tâm G (x_G, y_G, z_G) của vật thể ba chiều được xác định theo công thức sau

$$x_G = \frac{1}{m}\iiint_T x\rho(x, y, z)dxdydz, \tag{79}$$

$$y_G = \frac{1}{m}\iiint_T y\rho(x, y, z)dxdydz, \tag{80}$$

$$z_G = \frac{1}{m}\iiint_T z\rho(x, y, z)dxdydz, \tag{81}$$

với m là khối lượng của vật thể tính theo công thức (78).

Ví dụ 11: Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, và $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Với vật thể được giới hạn bởi các mặt đặc biệt như đầu bài cho, ta cần chuyển sang hệ toạ độ cầu để làm việc với: $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, và $z = r\cos\theta$. Theo đầu bài ta có, $1 \le r \le 2$. Từ phương trình mặt $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ta suy ra $r\cos\theta = r\sin\theta$ hay $\theta = \pi/4$. Như vậy, $0 \le \theta \le \pi/4$. Với các thông tin trên, thể tích V tính như sau

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} d\theta \int_1^2 r^2 \sin\theta dr \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \left(\sin\theta \frac{r^3}{3}\Big|_1^2 \right) d\theta \\
&= \frac{7}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \sin\theta d\theta \\
&= -\frac{7}{3} 2\pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) \\
&= \frac{14}{3}\pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right).
\end{aligned} \tag{82}$$

BÀI TẬP

Bài tập 1: Tính các tích phân kép sau

$$I = \int_0^2 \int_x^{2x} (x+y)^2 dydx, \tag{83}$$

$$I = \int_0^3 \int_{-y}^{y} (x^2+y^2) dxdy. \tag{84}$$

Bài tập 2: Tính các tích phân kép sau

$$I = \iint_R \frac{dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \text{ với } R \text{ được giới hạn bởi } x^2+y^2 \le 2y,\ x \le y, \tag{85}$$

$$I = \iint_R \left(\frac{y^2}{x^2} + xy + x + y\right), \text{ với } R \text{ được giới hạn bởi } 1 \le x^2+y^2 \le 4. \tag{86}$$

Bài tập 3: Đổi thứ tự lấy tích phân

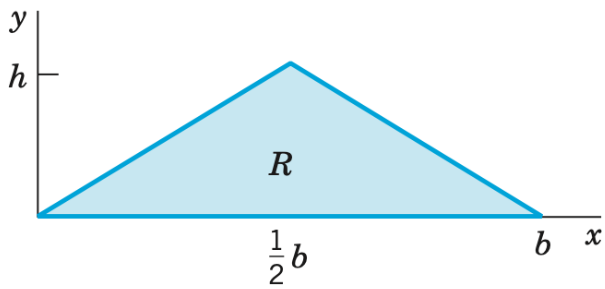
$$I = \int_0^1 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx. \tag{87}$$

Bài tập 4: Tính các tích phân bội ba sau

$$I = \iiint_V (1-x-y-z)dxdydz, \text{ với } V \text{ được xác định bởi } x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x+y+z \le 1, \tag{88}$$

$$\iiint_V \left(x^2+y^2+z^2\right) dxdydz, \text{ với } V \text{ được xác định bởi } 3(x^2+y^2)+z^2 = 3a^2 \text{ và } a > 0. \tag{89}$$

Bài tập 5: Xét một tấm kim loại mỏng đồng chất có mật độ khối lượng là $\rho(x,y) = 1$ và hình dáng như mô tả bởi hình vẽ R dưới đây



Hình 14: Thông số kích thước của tấm kim loại mỏng

i) Hãy tính diện tích của tấm kim loại trên theo công thức tích phân kép.

ii) Hãy xác định vị trí trọng tâm của tấm kim loại trên.

Bài tập 6: Xét một nửa khối cầu kim loại đồng chất, có mật độ khối lượng là $\rho(x,y,z) = 2$ và có bán kính bằng 1 (độ dài đơn vị).

i) Hãy tính thể tích cuả nửa khối cầu theo công thức tích phân bội ba.

ii) Hãy xác định trọng tâm của nửa khối cầu.

Lecture Notes: Giải tích

Chương 3: Tích phân đường, tích phân mặt

Biên soạn: Vũ Hữu Nhự, PHENIKAA University

Ngày 19 tháng 5 năm 2021

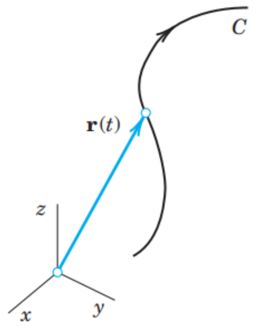
Mục lục

Chương 3

Tích phân đường và tích phân mặt

3.1 Đường cong: biểu diễn tham số, véc tơ tiếp xúc, tiếp tuyến, độ dài

- **Biểu diễn tham số của đường cong**: *Biểu diễn tham số* của đường cong C với tham số t có dạng
$$\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)] = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \tag{3.1}$$
ở đó $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ và $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ (xem Hình 3.1).



Hình 3.1: Biểu diễn tham số của đường cong C

- **Đường cong định hướng**: Đường cong C có thể được định hướng bằng cách chọn một điểm đầu và một điểm cuối. Chẳng hạn, trên đường cong C ta chọn điểm A là điểm đầu và điểm B là điểm cuối, khi đó ta nói đường cong C được định hướng từ A tới B và ta gọi hướng từ A tới B là *hướng dương*, ngược lại, hướng từ B tới A là *hướng âm*.

  Ta nói biểu diễn tham số (3.1) phù hợp với hướng dương của đường cong C nếu
$$\begin{cases} a \le b \\ \text{khi } t \text{ chạy từ } a \text{ tới } b \text{ thì } M(x(t), y(t), z(t)) \text{ chạy theo hướng dương của đường cong } C. \end{cases}$$

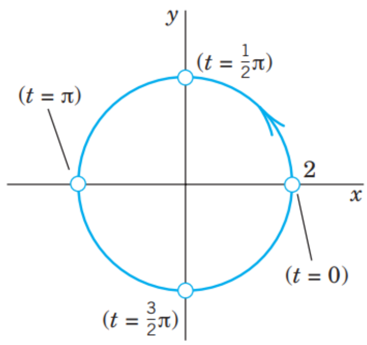
Nhận xét 3.1. *Khi đường cong C nằm trên mặp phẳng $Oxy (z = 0)$, biểu diễn tham số của C có thể được cho dưới dạng*
$$\boldsymbol{r}(t) = [x(t), y(t)] = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}. \tag{3.2}$$

Ví dụ 3.1. *Đường cong* $C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 0 \end{cases}$ *nằm trong mặt phẳng Oxy với tâm là gốc tọa độ O và bán kính $r = 2$ có biểu diễn tham số sau*
$$\boldsymbol{r}(t) = [2\cos t, 2\sin t, 0], \quad \textit{hay ta có thể viết gọn hơn} \quad \boldsymbol{r}(t) = [2\cos t, 2\sin t]$$

với $0 \leq t \leq 2\pi$.

- *Với* $t = 0$, *ta có* $\boldsymbol{r}(0) = [2, 0]$.
- *Với* $t = \frac{\pi}{2}$, *ta có* $\boldsymbol{r}(0) = [0, 2]$.
- *Với* $t = \pi$, *ta có* $\boldsymbol{r}(\pi) = [-2, 0]$.
- *Với* $t = \frac{3\pi}{2}$, *ta có* $\boldsymbol{r}(3\pi/2) = [0, -2]$.

Hướng dương của đường cong C *(tương ứng với biểu diễn tham số* $\boldsymbol{r}(t)$*) là hướng ngược chiều kim đồng hồ (xem Hình 3.2).*

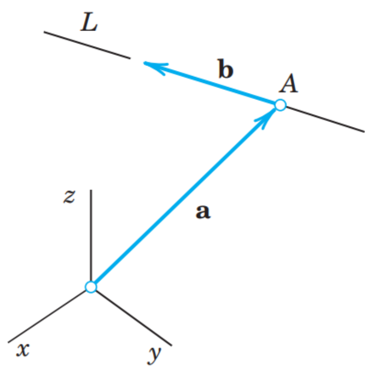


Hình 3.2: Đường tròn với hướng dương ngược chiều kim đồng hồ

Ví dụ 3.2. *Đường thẳng* L *qua điểm* $A(a_1, a_2, a_3)$ *và có véc tơ chỉ phương* $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ *có phương trình tham số sau*

$$\boldsymbol{r}(t) = a + t\boldsymbol{b} = [a_1 + tb_1, a_2 + tb_2, a_3 + tb_3] \quad \text{với} \quad \boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$$

(xem Hình 3.3).



Hình 3.3: Biểu diễn tham số của đường thẳng L

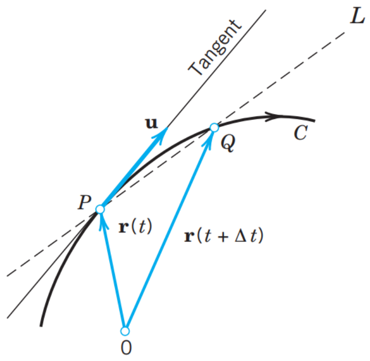
- **Tiếp tuyến của đường cong**: Cho đường cong C có biểu diễn tham số (3.1) và hai điểm $P = \mathbf{r}(t_0)$ và $Q = \mathbf{r}(t_0 + \Delta t)$. *Véc tơ tiếp xúc* của C tại điểm P được cho bởi

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t_0) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}[r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)] \\ &= [x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)] \end{aligned} \tag{3.3}$$

và *véc tơ tiếp xúc đơn vị* của C tại điểm P được cho bởi

$$\mathbf{u}(t_0) = \frac{1}{|\mathbf{r}'(t_0)|}\mathbf{r}'(t_0)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2 + (z'(t_0))^2}}[x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)]$$

(xem Hình 3.4). Do đó, biểu diễn tham số của *tiếp tuyến* của đường cong C tại $P = \mathbf{r}(t_0)$



Hình 3.4: Tiếp tuyến của đường cong C

có dạng

$$\mathbf{q}(w) = \mathbf{r}(t_0) + w\mathbf{r}'(t_0) \quad (w \text{ là tham số}). \tag{3.4}$$

Ví dụ 3.3. *Viết phương trình tham số của elliptic (E) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ tại $P(\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.*

Giải. Biểu diễn tham số của elliptic (E) là

$$\boldsymbol{r}(t) = [2\cos t, \sin t].$$

Đạo hàm $\boldsymbol{r}'(t) = [-2\sin t, \cos t]$.

Dễ thấy $P = \boldsymbol{r}(t_0)$ với $t_0 = \frac{\pi}{4}$. Do đó $\boldsymbol{r}'(\pi/4) = [-\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ và biểu diễn tham số của tiếp tuyến với (E) tại P là

$$\boldsymbol{q}(w) = \boldsymbol{r}(t_0) + w\boldsymbol{r}'(t_0) = [\sqrt{2}(1-w), \frac{1}{\sqrt{2}}(1+w)].$$

- **Độ dài của một cung**. Cho cung C có biểu diễn tham số

$$\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)], \quad a \le t \le b.$$

Khi đó *độ dài* của cung C được tính bằng công thức sau

$$l = \int_a^b \sqrt{\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}'(t)}dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt. \tag{3.5}$$

3.2 Tích phân đường trong mặt phẳng và không gian, tính chất, cách tính, ứng dụng tìm công cơ học. Định lý Green trong mặt phẳng (liên hệ tích phân đường loại 2 với tích phân kép)

3.2.1 Định nghĩa và cách tính

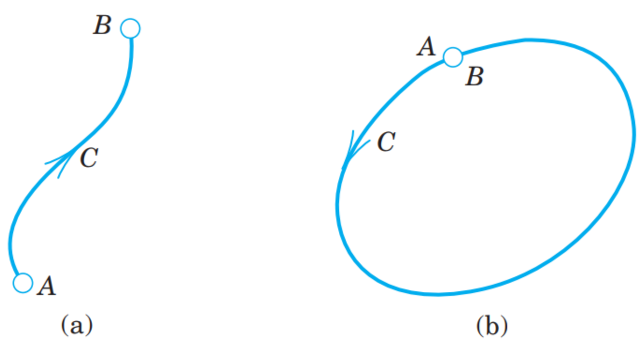
Cho đường cong C có biểu diễn tham số

$$\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)] = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad a \le t \le b. \tag{3.6}$$

Đường cong C (xem Hình 3.5) được định hướng từ $A = \mathbf{r}(a)$ (ứng với $t = a$) đến $B = \mathbf{r}(b)$ (ứng với $t = b$). Ta gọi

- $A = \mathbf{r}(a)$ là *điểm đầu*.
- $B = \mathbf{r}(b)$ là *điểm cuối*.
- C là đường cong *kín* nếu $A \equiv B$.
- C là đường cong *trơn* nếu $\mathbf{r}'(t)$ liên tục trên $[a, b]$.
- C là đường cong *trơn từng khúc (piecewise smooth)* nếu nó là hợp của hữu hạn các đường cong trơn.

Ví dụ 3.4. *Hình chữ nhật có biên là một đường cong trơn từng khúc.*



Hình 3.5: Đường cong định hướng C. (b) - đường cong kín

Bài toán: *Xét một chất điểm M di chuyển theo một đường cong C từ điểm đầu $A = \mathbf{r}(a)$ đến điểm cuối $B = \mathbf{r}(b)$ dưới tác dụng của một lực $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Hãy tính công W của lực $\mathbf{F}$?*

Để đưa ra lời giải cho bài toán trên, người ta chia cung $\overset{\frown}{AB}$ của đường cong C bằng các điểm $A_i = \mathbf{r}(t_i)$, $0 \leq i \leq n$, với

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b.$$

Khi đó công W của lực $\mathbf{F}$ bằng tổng các công thực hiện ΔW_i để đưa vật từ điểm A_i tới điểm A_{i+1} và $\Delta W_i \approx \mathbf{F}(\mathbf{r})(\xi_i) \cdot \overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ với $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$.

Bằng cách thông qua giới hạn, người ta xây dựng được khái niệm *tích phân đường* $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ và giá trị của tích phân đường đó bằng đúng công W cần tính (xem Định nghĩa 3.1 và công thức (3.8)).

Giả thiết tổng quát. Trong chương này, chúng ta luôn giả thiết: C **là đường cong trơn từng khúc**.

Định nghĩa 3.1 (Tích phân đường (loại 2))**.** Cho hàm véc tơ $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (F_1(\mathbf{r}), F_2(\mathbf{r}), F_3(\mathbf{r}))$ xác định trên đường cong C được định hướng từ $A = \mathbf{r}(a)$ tới $B = \mathbf{r}(b)$ với $a \leq b$. Khi đó *tích phân đường* (loại 2) của hàm véc tơ $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ trên đường cong C là đại lượng được cho bởi

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_C (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz) = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \quad (\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{dt}), \tag{3.7}$$

ở đó

(-) $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ hàm véc tơ dưới dấu tích phân.

(-) C là *đường lấy tích phân.*

(-) $d\mathbf{r} = [dx, dy, dz]$.

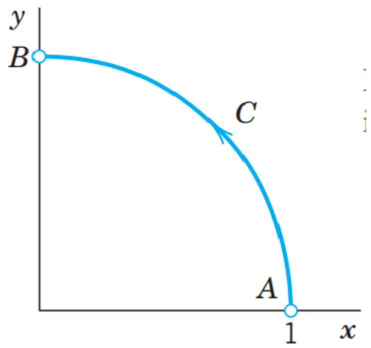
Vì $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (F_1, F_2, F_3)$, nên ta có

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt = \int_a^b (F_1x' + F_2y' + F_3z')dt. \tag{3.7'}$$

• Nếu C là đường cong kín, trong công thức (3.7) ta viết

$$\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad \text{thay vì} \quad \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

Ví dụ 3.5 (Tích phân đường trên mặt phẳng)**.** *Tính tích phân đường của hàm véc tơ* $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = [-y, -xy]$ *trên đường cong* C *với* C *là một cung tròn từ* A *đến* B *được cho trong Hình 3.6.*



Hình 3.6: Cung C cho Ví dụ 3.5

Giải. Biểu diễn tham số của $C : \boldsymbol{r}(t) = [\cos t, \sin t]$ *với* $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$. *Khi đó*

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = [-y, -xy] = [-\sin t, -\sin t \cos t]$$

và

$$\boldsymbol{r}'(t) = [-\sin t, \cos t].$$

Theo công thức (3.7')*, ta có*

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} &= \int_0^{\pi/2} (F_1x' + F_2y')dt \\ &= \int_0^{\pi/2} [(-\sin t)(-\sin t) + (-\sin t \cos t)\cos t]dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Ví dụ 3.6 (Tích phân đường trong không gian)**.** *Tính tích phân đường của hàm véc tơ* $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = [z, x, y]$ *trên đường xoắn ốc* C *:*

$$\boldsymbol{r}(t) = [\cos t, \sin t, 3t], \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Giải. Ta có

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = [z, x, y] = [3t, \cos t, \sin t]$$

và

$$\boldsymbol{r}'(t) = [-\sin t, \cos t, 3].$$

Theo công thức (3.7')*, ta có*

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} &= \int_0^{\pi/2} (F_1x' + F_2y' + F_3z')dt \\ &= \int_0^{\pi/2} [3t(-\sin t) + \cos t \cos t + 3\sin t]dt = 7\pi.\end{aligned}$$

Nhận xét 3.2. *Từ Định nghĩa 3.1 ta thấy rằng nếu $\boldsymbol{F}$ liên tục trên đường cong trơn (hoặc trơn từng khúc) C, thì tích phân đường $\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$ tồn tại.*

3.2.2 Tính chất của tích phân đường

Tích phân đường có một số tích chất sau.

(i) $\int_C k\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = k\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ với k là hằng số.

(ii) $\int_C [\mathbf{F}(\mathbf{r}) + \mathbf{G}(\mathbf{r})] \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_C \mathbf{G}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$.

(iii) Nếu C chia thành hai đường cong C_1 và C_2 có hướng cùng hướng với C, thì

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

(iv) Nếu đổi hướng dương của cung C thì tích phân (3.7) đổi dấu.

(v) Tích phân đường (3.7) không phụ thuộc vào cách biểu diễn tham số của C, có nghĩa là, nếu C có hai cách biểu diễn tham số

$$\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)], \quad a \le t \le b$$

và

$$\mathbf{r}^*(t^*) = [x^*(t^*), y^*(t^*), z^*(t^*)], \quad a^* \le t^* \le b^*,$$

thì

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}^*) \cdot d\mathbf{r}^*.$$

(vi) Trong trường hợp tổng quát thì tích phân đường (3.7) phụ thuộc vào hàm véc tơ $\mathbf{F}$, điểm đầu A, điểm cuối B và đường cong C điểm A tới điểm B.

3.2.3 Ứng dụng: Tìm công cơ học

Công của lực $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ để di chuyển một chất điểm M dọc theo một cung C từ A đến B được tính bởi

$$W = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}. \tag{3.8}$$

Ví dụ 3.7 (Công bằng độ biến thiên của động năng)**.** *Xét một vật M có khối lượng m chuyển động dọc theo cung $C : \boldsymbol{r}(t)$ (với t là thời gian) dưới tác động của một lực $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$. Khi đó* vận tốc *$\boldsymbol{v}$ của vật M được cho bởi*

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}.$$

Từ công thức (3.8), ta có

$$W = \int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{v}(t) dt. \tag{3.9}$$

Theo định luật 2 Newton, ta có

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = m\boldsymbol{r}''(t) = m\boldsymbol{v}'(t).$$

Thay biểu thức trên vào (3.9) thu được

$$W = \int_a^b m\boldsymbol{v}'(t) \cdot \boldsymbol{v}(t) dt = \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}|^2\Big|_{t=a}^{t=b}.$$

Trong vế phải của biểu thức trên, $\frac{m}{2}|\boldsymbol{v}|^2$ chính là động năng của vật M. Vì vậy, công thực hiện chính bằng độ biến thiên của động năng.

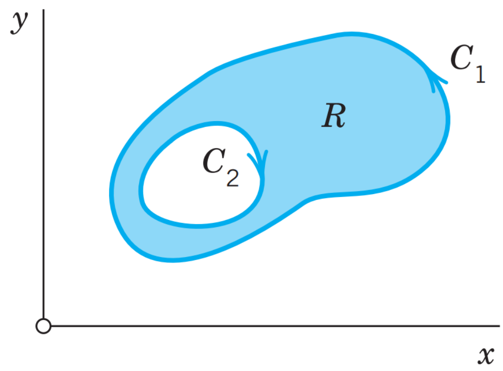
3.2.4 Công thức Green trong mặt phẳng

Công thức Green trong mặt phẳng giúp chúng ta biến đổi giữa tích phân kép trên một miền $R \subset \mathbb{R}^2$ sang tích phân đường và ngược lại.

Định lý 3.1 (Công thức Green trong mặt phẳng)**.** *Cho R là miền đóng và bị chặn trong mặt phẳng Oxy với biên C là đường cong trơn từng khúc. Giả sử $F_1(x,y)$ và $F_2(x,y)$ là các hàm liên tục và có các đạo hàm riêng $\frac{\partial F_1}{\partial y}$ và $\frac{\partial F_2}{\partial x}$ liên tục trên một miền chứa R. Khi đó,*

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy = \oint_C (F_1dx + F_2dy)\,. \tag{3.10}$$

Ở đây, biên C của R được định hướng dương sao cho miền R luôn nằm bên trái C nếu ta di chuyển trên C theo hướng dương đó (xem Hình 3.7).



Hình 3.7: Miền R với biên C gồm hai phần C_1 và C_2. C_1 được định hướng ngược chiều kim đồng hồ và C_2 được định hướng cùng chiều kim đồng hồ.

Nhận xét 3.3. *Công thức Green* (3.10) *có thể được viết dưới dạng sau*

$$\oint_C (F_1dx + F_2dy) = \iint_R \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ F_1 & F_2 \end{vmatrix} dxdy. \tag{3.11}$$

Ví dụ 3.8. *Kiểm chứng công thức Green* (3.10) *với $F_1 = y^2 - 7y$, $F_2 = 2xy + 2x$ và đường cong C là đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.*

Giải. Miền R là hình tròn $x^2 + y^2 \le 1$. Vế trái của (3.10) *là*

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy = \iint_R [(2y+2) - (2y-7)]dxdy = 9 \iint_R dxdy = 9S(R) = 9\pi,$$

với $S(R)$ là diện tích của miền R.

Theo Định lý 3.1, hướng dương của đường cong C phải là hướng ngược chiều kim đồng hồ. Do đó, ta có biểu diễn tham số của C

$$\boldsymbol{r}(t) = [x,y] = [\cos t, \sin t], \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Nên

$$F_1 = y^2 - 7y = \sin^2 t - 7\sin t, \quad F_2 = 2xy + 2x = 2\cos t \sin t + 2\cos t.$$

Vì vậy, vế phải của (3.10) *là*

$$\begin{aligned}\oint_C (F_1dx + F_2dy) &= \int_0^{2\pi} [(\sin^2 t - 7\sin t)(-\sin t) + (2\cos t\sin t + 2\cos t)\cos t]dt \\ &= \int_0^{2\pi} [-\sin^3 t + 7\sin^2 t + 2\cos^2 t\sin t + 2\cos^2 t]dt \\ &= 9\pi.\end{aligned}$$

Vậy, ta có

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy = \oint_C (F_1 dx + F_2 dy) .$$

3.3 Mặt trong không gian 3 chiều: biểu diễn tham số, véc tơ pháp tuyến, mặt định hướng được

• **Biểu diễn của mặt trong hệ tọa độ** $Oxyz$. Phương trình của mặt cong S trong hệ tọa độ $Oxyz$ được cho bởi

$$z = f(x, y) \quad \text{hoặc} \quad g(x, y, z) = 0. \tag{3.12}$$

Ví dụ 3.9. *Nửa mặt cầu phía trên mặt* Oxy *với tâm* $O(0, 0, 0)$ *và bán kính* $r = a$ *có phương trình*

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

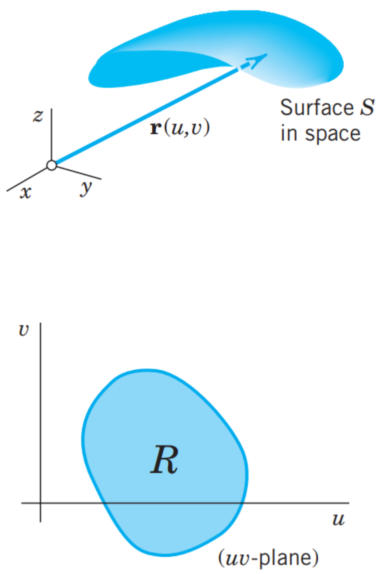
hoặc

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0 \quad (z \geq 0).$$

• **Biểu diễn tham số của mặt.** Biểu diễn tham số của mặt S có dạng

$$\mathbf{r}(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)] = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in R \subset \mathbb{R}^2, \tag{3.13}$$

ở đó u và v là các tham số (xem Hình 3.8).



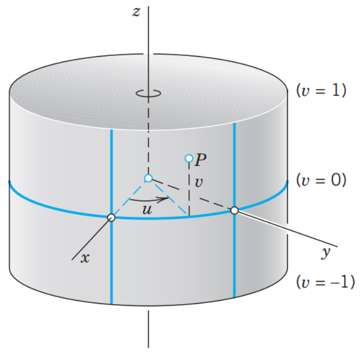
Hình 3.8: Biểu diễn tham số của mặt cong

Ví dụ 3.10 (Biểu diễn tham số của một mặt trụ)**.** *Mặt trụ* $x^2 + y^2 = a^2$, $-1 \leq z \leq 1$ *có bán kính đáy* a*, chiều cao bằng* 2 *và đường sinh song song với* Oz*. Một biểu diễn tham số của mặt trụ có dạng*

$$\boldsymbol{r}(u, v) = [a \cos u, a \sin u, v] = a \cos u \boldsymbol{i} + a \sin u \boldsymbol{j} + v \boldsymbol{k}, \tag{3.14}$$

với tham số $(u, v) \in R$ *(xem Hình 3.9). Trong đó, miền* R *là hình chữ nhật*

$$R := \{(u, v) : 0 \leq u \leq 2\pi, -1 \leq v \leq 1\}.$$



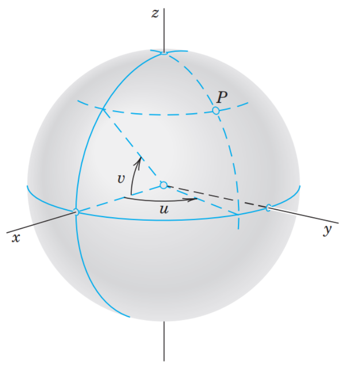
Hình 3.9: Biểu diễn tham số của mặt trụ

Ví dụ 3.11 (Biểu diễn tham số của một mặt cầu)**.** *Mặt cầu* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (a > 0)$ *có một biểu diễn tham số dạng*

$$\boldsymbol{r}(u, v) = [a \cos u \cos v, a \sin u \cos v, a \sin v], \tag{3.15}$$

với tham số $(u, v) \in R$ *(xem Hình 3.10). Trong đó, miền* R *là hình chữ nhật*

$$R := \left\{(u, v) : 0 \leq u \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}\right\}.$$



Hình 3.10: Biểu diễn tham số của mặt cầu

Ví dụ 3.12 (Biểu diễn tham số của một mặt nón)**.** *Mặt nón* $z = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq z \leq H$ *có một biểu diễn tham số dạng*

$$\boldsymbol{r}(u, v) = [u \cos v, u \sin v, u], \tag{3.16}$$

với tham số $(u, v) \in R$*. Trong đó, miền* R *là hình chữ nhật*

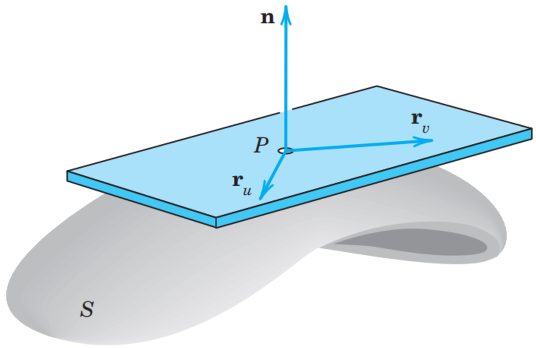
$$R := \{(u, v) : 0 \leq u \leq H, 0 \leq v \leq 2\pi\}.$$

- **Mặt phẳng tiếp xúc và véc tơ pháp tuyến.**

Định nghĩa 3.2. Cho mặt cong S và điểm $P \in S$. Khi đó, ta gọi:

(i) một véc tơ tiếp xúc với một đường cong tùy ý nằm trong S tại điểm P là *véc tơ tiếp xúc* của S tại P;

(ii) tập tất cả véc tơ tiếp xúc với S tại điểm P là *mặt phẳng tiếp xúc* của S tại P;



Hình 3.11: Véc tơ pháp tuyến và mặt phẳng tiếp xúc của S tại P

(iii) một véc tơ vuông góc với mặt phẳng tiếp xúc của S tại P là *véc tơ pháp tuyến* của S tại P

(xem mặt phẳng tiếp xúc và véc tơ pháp tuyến trong Hình 3.11).

Giả sử mặt cong S có biểu diễn tham số $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ trong (3.13) và điểm $P = \mathbf{r}(u_0, v_0) \in S$. Khi đó các đạo hàm riêng $\mathbf{r}'_u(u_0, v_0) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0)$ và $\mathbf{r}'_v(u_0, v_0) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$ là các véc tơ tiếp xúc với S tại P. Giả sử hai véc tơ tiếp xúc này độc lập tuyến tính, khi đó một véc tơ pháp tuyến của S tại P là

$$\mathbf{N}(u_0, v_0) = \mathbf{r}'_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}'_u(u_0, v_0) \neq \mathbf{0} = (0, 0, 0). \tag{3.17}$$

Ở đây, với $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ và $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, kí hiệu

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{3.18}$$

là *tích ngoài (tích có hướng)* của hai véc vơ $\mathbf{a}$ và $\mathbf{b}$.

Véc tơ pháp tuyến đơn vị của S tại P là

$$\mathbf{n}(u_0, v_0) = \frac{1}{|\mathbf{N}(u_0, v_0)|} \mathbf{N}(u_0, v_0). \tag{3.19}$$

Nhận xét 3.4. *Nếu S được cho bởi phương trình*

$$g(x, y, z) = 0,$$

khi đó, véc tơ pháp tuyến đơn vị của S tại $P(x_0, y_0, z_0)$ được cho bởi

$$\boldsymbol{n}(P) = \frac{1}{|\text{grad } g(P)|} \text{grad } g(P), \tag{3.20}$$

với $\text{grad } g = \nabla g = (\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z})$.

Ví dụ 3.13. *Mặt cầu $S : g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ có véc tơ pháp tuyến đơn vị tại điểm $P(x_0, y_0, z_0) \in S$ là*

$$\boldsymbol{n}(P) = \left[\frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{a}, \frac{z_0}{a} \right].$$

Ví dụ 3.14. *Cho mặt nón $S : g(x, y, z) = -z + \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ và điểm $P(x_0, y_0, z_0) \in S$ và P không phải là đỉnh của hình nón. Khi đó véc tơ pháp tuyến đơn vị của S tại P là*

$$\boldsymbol{n}(P) = \left[\frac{x_0}{\sqrt{2(x_0^2 + y_0^2)}}, \frac{y_0}{\sqrt{2(x_0^2 + y_0^2)}}, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right].$$

• **Mặt trơn và mặt trơn từng mảnh**.

Định nghĩa 3.3. (i) Mặt cong S được gọi là mặt *trơn* nếu hai véc tơ tiếp xúc $\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v$ tại điểm P bất kỳ là độc lập tuyến tính và véc tơ pháp tuyến $\mathbf{n}$ phụ thuộc liên tục vào điểm P.

(ii) Mặt cong S được gọi là *trơn từng mảnh* nếu nó là hợp của hữu hạn các mặt trơn không dẫm lên nhau.

Ví dụ 3.15. ∘ *Mặt cầu là mặt trơn.*

∘ *Mặt là biên của hình hộp chữ nhật là mặt trơn từng mảnh.*

• **Sự định hướng của mặt trơn và mặt trơn từng mảnh**.

∘ Cho mặt **trơn** S. Tại mỗi điểm P của mặt S có hai véc tơ pháp tuyến là $\widetilde{\mathbf{n}}$ và $\mathbf{n}' = -\widetilde{\mathbf{n}}$. Nếu ta chọn một hướng của pháp tuyến là *hướng dương*, thì hướng ngược lại là *hướng âm.*

Chẳng hạn, ta chọn hướng của $\widetilde{\mathbf{n}}$ là hướng dương, thì hướng $\mathbf{n}' = -\widetilde{\mathbf{n}}$ là hướng âm.

∘ Cho mặt **trơn** S có biên là đường cong C. Giả sử S được định hướng dương bởi hướng của véc tơ pháp tuyến $\widetilde{\mathbf{n}}$. Ta nói *hướng dương của biên C phù hợp với sự định hướng dương của mặt S* nếu một người đứng thẳng theo hướng pháp tuyến $\widetilde{\mathbf{n}}$ và đi dọc theo chiều dương của biên C thì miền S sẽ nằm bên trái của người đó (xem Hình 3.12 (a)).

∘ Cho mặt cong S là mặt **trơn từng mảnh** có các mặt trơn thành phần là $S_1, S_2, ..., S_k$. Ta có thể định hướng dương mặt S thông qua sự định hướng dương của từng mặt S_i sao cho biên chung C^* của hai mặt tiếp giáp bất kỳ, chẳng hạn S_1 và S_2, thỏa mãn tích chất sau: các hướng dương của C^* phù hợp với sự định hướng dương của S_1 và của S_2 là ngược hướng nhau (xem Hình 3.12 (b)).

3.4 Tích phân mặt loại 2: định nghĩa, cách tính; ứng tính thông lượng của một trường véc tơ qua một mặt (tùy chọn)

3.4.1 Định nghĩa và cách tính

• **Biểu diễn tham số phù hợp với sự định hướng của mặt**. Cho mặt trơn S được định hướng dương bởi một véc tơ pháp tuyến $\widetilde{\mathbf{n}}$. Xét một biểu diễn tham số

$$\mathbf{r}(u,v) = [x(u,v), y(u,v), z(u,v)] = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}, \quad (u,v) \in R \subset \mathbb{R}^2. \quad (3.21)$$

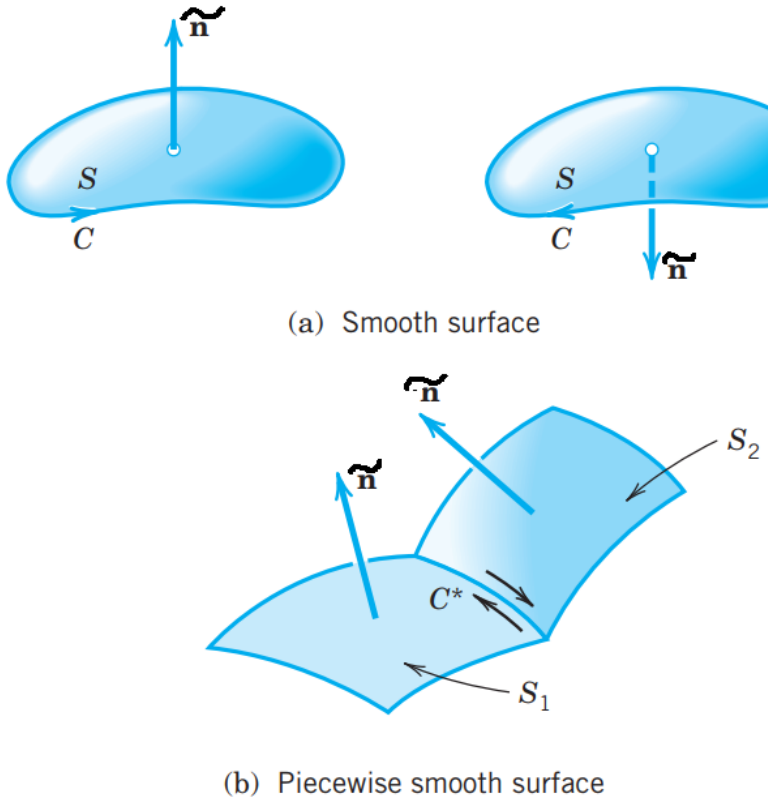
Khi đó một véc tơ pháp tuyến $\mathbf{N}$ tại điểm $P = \mathbf{r}(u,v)$ tùy ý, được tính bởi công thức (3.17),

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \frac{D(z,x)}{D(u,v)}, \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right) \neq \mathbf{0}. \quad (3.22)$$

Ta nói rằng $\mathbf{N}$ *phù hợp với hướng dương của S* nếu $\mathbf{N}$ cùng hướng với $\widetilde{\mathbf{n}}$.

Định nghĩa 3.4 (Tích phân mặt loại 2)**.** Giả sử véc tơ pháp tuyến $\mathbf{N}$ được cho bởi công thức (3.22) phù hợp với hướng dương của mặt định hướng S. Khi đó *tích phân mặt (loại 2)* của hàm véc tơ $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ trên mặt cong định hướng S được ký hiệu là

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA \quad (3.23)$$



Hình 3.12: (a) sự định hướng của mặt trơn; (b) sự định hướng của mặt trơn từng mảnh

và có giá trị bằng

$$\iint_R \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \mathbf{N}(u,v)dudv, \tag{3.24}$$

ở đó

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|\mathbf{N}|}\mathbf{N} \text{ là véc tơ pháp tuyến đơn vị cùng hướng với } \mathbf{N}$$

và

$$\mathbf{n}dA = \mathbf{N}dudv \quad \text{với } dA \text{ là yếu tố diện tích trên mặt } S.$$

- **Cách tính tích phân mặt**. Ta có

$$\begin{aligned}
&\mathbf{F} = [F_1, F_2, F_3],\\
&\mathbf{N} = [N_1, N_2, N_3] = \left[\frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \frac{D(z,x)}{D(u,v)}, \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right],\\
&\mathbf{n} = \frac{1}{|\mathbf{N}|}\mathbf{N} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \quad (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1),
\end{aligned}$$

với α, β, γ lần lượt là góc tạo bởi $\mathbf{n}$ và tia Ox, Oy, Oz (*chúng ta gọi* $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ *là các cosin chỉ hướng của véc tơ pháp tuyến đơn vị* $\boldsymbol{n}$). Từ công thức (3.24), ta thu được

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dA &= \iint_S (F_1\cos\alpha + F_2\cos\beta + F_3\cos\gamma)dA\\
&= \iint_R (F_1N_1 + F_2N_2 + F_3N_3)dudv.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Nhận xét 3.5. *(i) Trong công thức* (3.25)*, ta có*

$$\cos\alpha dA = dydz, \quad \cos\beta dA = dzdx, \quad \cos\gamma dA = dxdy.$$

Vì vậy, ta thu được công thức sau

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dA = \iint_S (F_1dydz + F_2dzdx + F_3dxdy). \tag{3.26}$$

Do đó, tích phân mặt (loại 2) của hàm $\boldsymbol{F}$ *trên mặt định hướng* S *cũng được* ***ký hiệu*** *là*

$$\iint_S (F_1dydz + F_2dzdx + F_3dxdy). \tag{3.27}$$

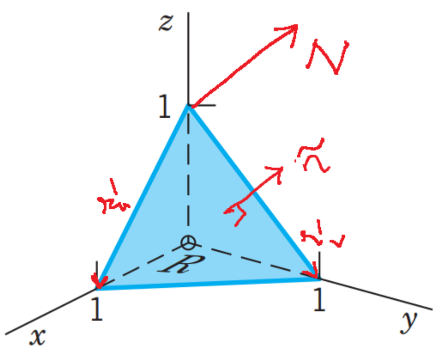
Tuy nhiên, khi sử dụng ký hiệu trên, chúng ta phải chú ý đến hướng của mặt cong S.

(ii) Từ công thức (3.25)*, ta thấy:*

- *Nếu hàm véc tơ* $\boldsymbol{F}$ *liên tục trên mặt cong trơn (hoặc trơn từng mảnh)* S *thì tích phân mặt loại 2* (3.23) *tồn tại.*
- *Nếu chúng ta đổi hướng mặt* S*, thì tích phân mặt loại 2* (3.24) *đổi dấu.*
- *Tích phân mặt loại 2 có các tính chất tương tự như tích phân kép.*

Ví dụ 3.16. *Tính tích phân mặt của hàm véc tơ* $\boldsymbol{F} = [x^2, 0, 3y^2]$ *trên mặt* S*. Trong đó* S *là phía trên phần giới hạn của mặt phẳng* $x + y + z = 1$ *trong góc phần tám thứ nhất (xem Hình 3.13).*

$N = \nabla g = (1,1,1)$



Hình 3.13: Véc tơ chỉ phương $\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v$ và véc tơ pháp tuyến $\mathbf{N}$ của mặt S

Giải. *Đặt* $x = u, y = v$*, ta có* $z = 1 - u - v$*. Do đó chúng ta có thể biểu diễn tham số mặt* S *bởi*

$$\boldsymbol{r}(u,v) = [u, v, 1-u-v], \quad (u,v) \in R$$

với R *là tam giác có các đỉnh* $(0,0,0), (1,0,0)$ *và* $(0,1,0)$ *trên mặt* Oxy*. Các véc tơ chỉ phương của* S *là*

$$\boldsymbol{r}'_u = (1, 0, -1), \quad \boldsymbol{r}'_v = (0, 1, -1).$$

Do đó, véc tơ pháp tuyến $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v = (1,1,1)$.

Theo giả thiết S *là phần phía trên của mặt* $x + y + z = 1$ *giới hạn trong góc phần tám thứ nhất, nên* S *được định hướng dương bởi véc tơ pháp tuyến* $\tilde{\boldsymbol{n}}$ *hướng lên trên. Dễ thấy* $\boldsymbol{N}$ *cùng hướng với* $\tilde{\boldsymbol{n}}$ *và vì vậy* $\boldsymbol{N}$ *phù hợp với hướng dương của* S.

Dễ thấy $\boldsymbol{F} = [u^2, 0, 3v^2]$*. Theo định nghĩa, ta có*

$$\begin{aligned}\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dA &= \iint_R \boldsymbol{F(r)}\cdot\boldsymbol{N}dudv\\ &= \iint_R \left[u^2.1+0.1+3v^2.1\right]dudv\\ &= \iint_R (u^2+3v^2)dudv.\end{aligned}$$

Hơn nữa, R có thể biểu diễn dưới dạng sau

$$R = \left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le v\le 1, 0\le u\le 1-v\right\}.$$

Vậy

$$\begin{aligned}\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dA &= \int_0^1 dv\int_0^{1-v}(u^2+3v^2)du\\ &= \int_0^1 \frac{1}{3}(1-v)^3+3v^2(1-v)dv = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Nhận xét 3.6. *Khi biểu diễn tham số $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ có véc tơ pháp tuyến $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{r}'_u\times\boldsymbol{r}'_v$* ***không phù hợp với hướng dương của*** *S, ta có thể đổi thứ tự u và v cho nhau để thu được một biểu diễn tham số khác của S,*

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(u,v)=\boldsymbol{r}(v,u),$$

có véc tơ pháp tuyến

$$\widetilde{\boldsymbol{N}}=\tilde{\boldsymbol{r}}'_u\times\tilde{\boldsymbol{r}}'_v=-\boldsymbol{N}$$

phù hợp với hướng dương của S.

3.4.2 Ứng dụng tính thông lượng của một trường véc tơ (tùy chọn)

Giả sử ta nhúng một màng cong S trong môi trường chất lỏng có mật độ khối lượng ρ và đang chảy với vận tốc $\mathbf{v}$ không phụ thuộc vào thời gian. Khi đó *thông lượng* Φ của trường véc tơ

$$\mathbf{F}=\rho\mathbf{v}$$

biểu thị khối lượng của chất lỏng chảy qua S trong một đơn vị thời gian.

Người ta đã chứng minh được rằng, thông lượng Φ chính là tích phân mặt loại 2 của hàm véc tơ $\mathbf{F}$ trên mặt cong định hướng S,

$$\Phi=\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dA. \tag{3.28}$$

Hơn nữa thông lượng Φ là một đại lượng đại số, có nghĩa là, nếu ta coi lượng chất lỏng chảy qua mặt S theo hướng của véc tơ pháp tuyến là dương thì lượng chất lỏng chảy qua S theo hướng ngược lại là âm.

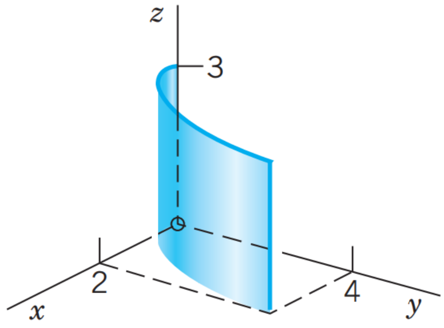
Ví dụ 3.17. *Tính thông lượng của dòng nước chảy qua mặt trụ-parabolic $S: y=x^2, 0\le x\le 2, 0\le z\le 3$ (xem Hình 3.14) nếu vận tốc của dòng nước là $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}=[3z^2,6,6xz](m/s)$. (Mật độ khối lượng hay khối lượng riêng của nước $\rho=1g/cm^3=1ton/m^3$.)*

Giải. Đặt $x=u, z=v$, ta có $y=u^2$. Khi đó mặt cong S được biểu diễn dưới dạng

$$S:\boldsymbol{r}=[u,u^2,v],\quad 0\le u\le 2, 0\le v\le 3.$$

Véc tơ pháp tuyến của S là

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{r}'_u\times\boldsymbol{r}'_v=[1,2u,0]\times[0,0,1]=[2u,-1,0].$$



Hình 3.14: Mặt cong S trong Ví dụ 3.17

Dễ thấy

$$\boldsymbol{F} = [3z^2, 6, 6xz] = [3v^2, 6, 6uv] \implies \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N} = 6uv^2 - 6.$$

Do đó, lưu lượng nước chảy qua mặt S là

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} dA = \iint_R \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N} du dv \\ &= \int_0^2 du \int_0^3 (6uv^2 - 6) dv = 72\,[m^3/s].\end{aligned}$$

Vậy lưu lượng nước chảy qua mặt S là 72 lít/giây.

3.5 Tích phân mặt loại 1: định nghĩa, cách tính; ứng dụng (tính diện tích mặt, khối lượng mặt, trọng tâm, mô men quán tính) (tùy chọn)

3.5.1 Định nghĩa và cách tính

Định nghĩa 3.5 (Tích phân mặt loại 1)**.** Cho hàm $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ liên tục và mặt cong trơn (hoặc trơn từng mảnh) S được cho bởi biểu diễn tham số (3.13). Khi đó *tích phân mặt loại 1* của hàm G trên mặt cong S được ký hiệu là

$$\iint_S G(\mathbf{r}) dA \tag{3.29}$$

và có giá trị bằng

$$\iint_R G(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{N}(u, v)| du dv. \tag{3.30}$$

Ở đó

$$dA = |\mathbf{N}| du dv = |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| du dv \quad \text{là yếu tố diện tích của mặt } S.$$

Nhận xét 3.7. *Trong định nghĩa trên của tích phân mặt loại 1, chúng ta không cần chú ý tới sự định hướng của mặt cong S.*

• **Ứng dụng: Tính khối lượng mặt cong** S. Nếu $G(\mathbf{r})$ là mật độ khối lượng (khối lượng trên một đơn vị diện tích) của S, thì khối lượng của mặt cong S là

$$m(S) = \iint_S G(\mathbf{r}) dA. \tag{3.31}$$

• **Ứng dụng: Tính diện tích mặt cong** S. Nếu $G \equiv 1$, thì tích phân mặt loại 1 của G trên mặt S chính là diện tích mặt S. Vì vậy,

$$A(s) = \iint_S dA = \iint_R |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| dudv. \tag{3.32}$$

Ví dụ 3.18 (Diện tích mặt cầu)**.** *Tính diện tích mặt cầu* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(a > 0)$.

Giải. Biểu diễn tham số của mặt cầu S là

$$\boldsymbol{r}(u,v) = [a\cos v\cos u, a\cos v\sin u, a\sin v], \quad 0 \le u \le 2\pi, \frac{-\pi}{2} \le v \le \frac{\pi}{2}.$$

(xem Ví dụ 3.11). Bởi tính toán đơn giản, ta thu được

$$\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v = [a^2\cos^2 v\cos u, a^2\cos^2 v\sin u, a^2\cos v\sin v]$$

và

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v| &= a^2\sqrt{(\cos^2 v\cos u)^2 + (\cos^2 v\sin u)^2 + (\cos v\sin v)^2}\\ &= a^2|\cos v|\\ &= a^2\cos v \quad do\ v \in [-\pi/2, \pi/2].\end{aligned}$$

Vậy diện tích mặt cầu S là

$$A(S) = \int_0^{2\pi} du \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2\cos v dv = 4\pi a^2.$$

3.5.2 Xét trường hợp mặt cong S được cho bởi $z = f(x, y)$

Khi đó, đặt $x = u, y = v$, ta có $z = f(u, v)$ và biểu diễn tham số của S là

$$\mathbf{r}(u,v) = [u, v, f(u,v)].$$

Dễ thấy,

$$\begin{aligned}&\mathbf{r}'_u = [1, 0, f'_u], \quad \mathbf{r}'_v = [0, 1, f'_v],\\ &\mathbf{N} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = [-f'_u, -f'_v, 1], \quad |\mathbf{N}| = \sqrt{1 + (f'_u)^2 + (f'_v)^2}.\end{aligned}$$

Vì vậy, từ công thức (3.29)–(3.30), ta có

$$\iint_S G(\mathbf{r}) dA = \iint_{R^*} G(x, y, f(x,y))\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dxdy, \tag{3.33}$$

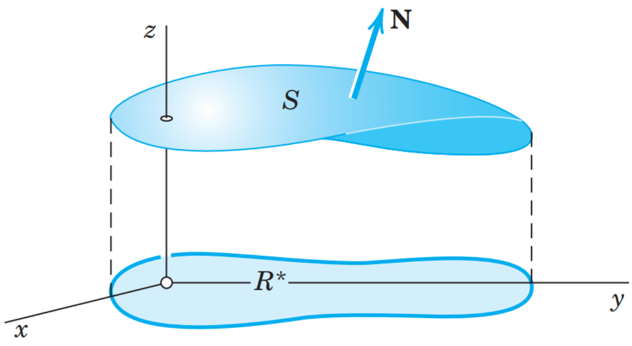
ở đó R^* là hình chiếu của mặt cong S trên mặt Oxy và véc tơ pháp tuyến $\mathbf{N}$ của S hướng lên (xem Hình 3.15). Nếu $\mathbf{N}$ hướng xuống dưới, ta thêm dấu " $-$ " vào vế phải của công thức (3.33).

• **Áp dụng tính diện tích mặt cong**. Cho $G = 1$, ta thu được công thức tính diện tích mặt cong S như sau:

$$A(S) = \iint_{R^*} G(x, y, f(x,y))\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dxdy. \tag{3.34}$$

3.6 Công thức Gauss–Ostrogradsky (liên hệ giữa tích phân mặt loại 2 và tích phân bội 3)

Mối liên hệ giữa tích phân mặt loại 2 và tích phân bội 3 được thể hiện qua Định lý Gauss–Ostrogradsky dưới đây (Định lý 3.2). Định lý này sẽ giúp thiết lập những phương trình cơ bản trong sự dịch chuyển của chất lỏng, sự truyền nhiệt,...



Hình 3.15: Mặt cong S và hình chiếu R^* trên mặt Oxy

Toán tử *div* hay *toán tử phân kỳ* áp dụng trên hàm véc tơ $\mathbf{F} = [F_1, F_2, F_3]$ và được cho bởi công thức

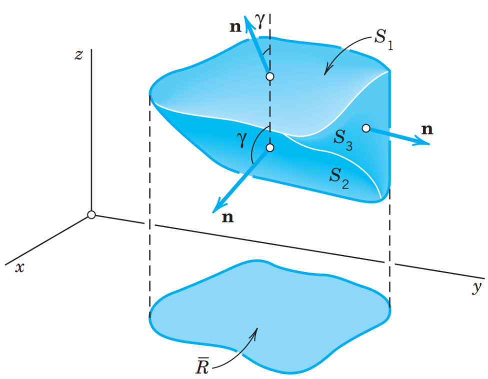
$$\text{div } F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}. \tag{3.35}$$

Định lý 3.2 (Công thức Gauss–Ostrogradsky)**.** *Cho T là miền đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}^3$ với biên S là mặt cong trơn (hoặc trơn từng mảnh) được định hướng dương theo hướng pháp tuyến ngoài $\boldsymbol{n}$ (xem Hình 3.16). Giả sử $\boldsymbol{F}$ là hàm véc tơ có các đạo hàm riêng liên tục trên miền chứa T. Khi đó*

$$\iiint_T \text{div } F dV = \iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} dA. \tag{3.36}$$

Công thức (3.36) *còn được viết dưới dạng sau: Với $\boldsymbol{F} = [F_1, F_2, F_3]$ và véc tơ pháp tuyến đơn vị ngoài $\boldsymbol{n} = [\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma]$ với $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ là các cosin chỉ phương của $\boldsymbol{n}$, khi đó công thức* (3.36) *trở thành*

$$\begin{aligned}\iiint_T \left[\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right] dxdydz &= \iint_S (F_1\cos\alpha + F_2\cos\beta + F_3\cos\gamma)dA \\ &= \iint_S (F_1 dydz + F_2 dzdx + F_3 dxdy).\end{aligned} \tag{3.36*}$$

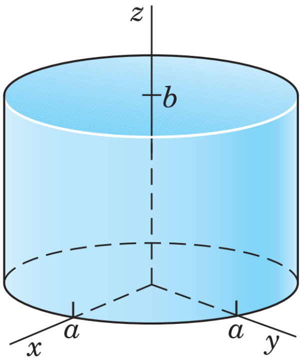


Hình 3.16: Biên S của miền T và véc tơ pháp tuyến ngoài **n**

Ví dụ 3.19. *Tính*

$$I = \iint_S (x^3 dydz + x^2 y dzdx + x^2 z dxdy)$$

với S là phía ngoài của mặt đóng kín gồm phần hình trụ $\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ 0 \le z \le b \end{cases}$ *và hai đáy nằm trên các mặt $z=0$ (đáy dưới) và $z=b$ (đáy trên) (xem Hình 3.17).*



Hình 3.17: Mặt S trong Ví dụ 3.19

Giải. Ta có $F_1 = x^3, F_2 = x^2y, F_3 = x^2z$. *Do đó* $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 3x^2 + x^2 + x^2 = 5x^2$. *Theo công thức Gauss-Ostrogradsky* (3.36), *ta có*

$$I = \iint_S (x^3dydz + x^2ydzdx + x^2zdxdy) = \iiint_T \operatorname{div} F dxdydz = \iiint_T 5x^2dxdydz.$$

Ở đây T là khối trụ với biên S và $\boldsymbol{n}$ là véc tơ pháp tuyến ngoài của S.

Xét phép biến đổi sang tọa độ trụ (r,θ,z):

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z, \end{cases}$$

ta có

$$dxdydz = rdrd\theta dz$$

và

$$(x,y,z) \in T \quad \Leftrightarrow \quad (0 \le r \le a, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le z \le b).$$

Vậy

$$\begin{aligned} I &= \iiint_T 5x^2dxdydz = \int_0^b dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a (5r^2\cos^2\theta) rdr \\ &= 5\int_0^b dz \int_0^{2\pi} \frac{a^4}{4}\cos^2\theta d\theta = \frac{5\pi}{4}a^4b. \end{aligned}$$

3.7 Định lý Stokes (liên hệ giữa tích phân đường loại 2 và tích phân mặt loại 2)

Công thức Stokes trong Định lý 3.3 thể hiện mối liên hệ giữa tích phân đường loại 2 và tích phân mặt loại 2 và nó là sự mở rộng của Công thức Green (3.10).

Cho hàm véc tơ $\mathbf{F} = [F_1, F_2, F_3]$, *curl* (*độ xoáy*) của trường véc tơ $\mathbf{F}$ được cho bởi

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right]. \tag{3.37}$$

Định lý 3.3 (Định lý Stokes)**.** *Cho S là mặt cong trơn từng mảnh và được định hướng dương bởi véc tơ pháp tuyến đơn vị $\boldsymbol{n}$. Giả sử C là biên của S được định hướng dương phù hợp với hướng của S (xem Hình 3.18). Cho $\boldsymbol{F} = [F_1, F_2, F_3]$ là hàm véc tơ có các đạo hàm riêng liên tục trên một miền chứa S. Khi đó, ta có*

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy \right] = \oint_C (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz). \tag{3.38}$$

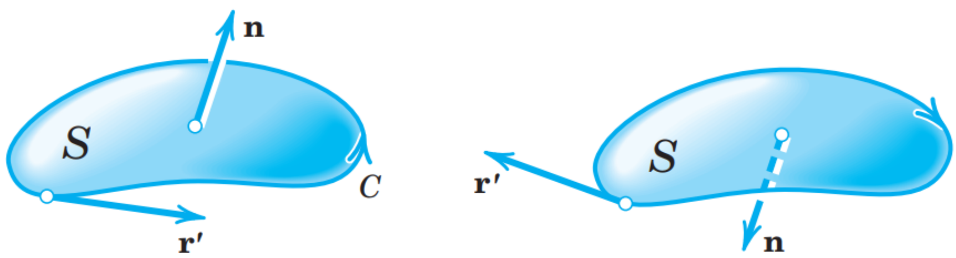
Nếu mặt cong S được tham số hóa bởi

$$\boldsymbol{r}(u,v) = [x(u,v), y(u,v), z(u,v)] = x(u,v)\boldsymbol{i} + y(u,v)\boldsymbol{j} + z(u,v)\boldsymbol{k}, \quad (u,v) \in R \subset \mathbb{R}^2, \tag{3.39}$$

sao cho véc tơ pháp tuyến $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v = [N_1, N_2, N_3]$ có hướng phù hợp với hướng của S, thì công thức (3.38) *được viết dưới dạng*

$$\iint_S (\text{curl } \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} dA = \oint_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r}'(s) ds, \tag{3.38*}$$

ở đó $\boldsymbol{r}'(s) = \frac{\partial r}{ds}$ là véc tơ tiếp xúc đơn vị của đường C và s là (tham số) độ dài cung C. Trong đó $\boldsymbol{F} = [F_1, F_2, F_3]$, $\boldsymbol{n}dA = \boldsymbol{N}dudv$ và $\boldsymbol{r}'ds = [dx, dy, dz]$.



Hình 3.18: Biên C của mặt cong S

Ví dụ 3.20. *Kiểm chứng Định lý Stokes với $\boldsymbol{F} = [y, z, x]$ và S là phía ngoài mặt paraboloid tròn xoay*

$$z = f(x,y) = 1 - (x^2 + y^2), \quad z \geq 0$$

(xem Hình 3.19).

Giải. Biên C của S được định hướng như Hình 3.19 phù hợp với hướng dương của S. Khi đó, C có biểu diễn tham số

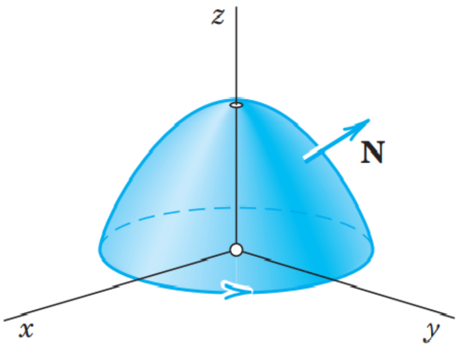
$$\boldsymbol{r}(s) = [\cos s, \sin s, 0], \quad 0 \leq s \leq 2\pi.$$

Véc tơ tiếp xúc đơn vị của C là $\boldsymbol{r}'(s) = [-\sin s, \cos s, 0]$. Hàm véc tơ $\boldsymbol{F}$ hạn chế trên C là

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})(s) = [\sin s, 0, \cos s].$$

Vậy

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})(s) \cdot \boldsymbol{r}' ds = \int_0^{2\pi} [\sin s(-\sin s) + 0.\cos s + 0.\cos s] ds = -\pi.$$



Hình 3.19: Mặt cong S trong Ví dụ 3.20

Tiếp theo, ta sẽ tính tích phân mặt loại 2, $\iint_S (\text{curl } \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} dA$. *Ta có* $F_1 = y, F_2 = z, F_3 = x$ *và*

$$\text{curl } \boldsymbol{F} = [-1, -1, -1].$$

Véc tơ pháp tuyến của S *là*

$$\boldsymbol{N} = \text{grad } g(x, y, z) = [2x, 2y, 1]$$

với $g(x, y, z) = z - f(x, y) = (x^2 + y^2) + z - 1$. *Dễ thấy* $\boldsymbol{N}$ *có hướng phù hợp với hướng dương của* S. *Nên*

$$\begin{aligned} \iint_S (\text{curl } \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} dA &= \iint_R (\text{curl } \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{N} dx dy \quad (u = x, v = y) \\ &= \iint_R (-2x - 2y - 1) dx dy. \end{aligned}$$

Ở đó R *là hình tròn đơn vị trong mặt phẳng* Oxy. *Bằng phép đổi biến sang hệ tọa độ cực,* $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, *khi đó*

$$R = \{(r, \theta) \mid 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$

Nên ta thu được

$$\iint_S (\text{curl } \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} dA = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (-2r\cos\theta - 2r\sin\theta - 1) r dr = -\pi.$$

Vậy, ta kiểm chứng được công thức Stoke:

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_S (\text{curl } \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} dA.$$

Ví dụ 3.21. *Tính* $\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ *ở đó* C *là đường tròn* $x^2 + y^2 = 4; z = -3$, *được định hướng dương ngược chiều kim đồng hồ và*

$$\boldsymbol{F} = [y, xz^3, -zy^3].$$

Giải. C *là biên của đĩa* $S : x^2 + y^2 \le 4$ *nằm trong mặt phẳng* $z = -3$ *và hướng dương của* S *là hướng pháp tuyến* $\boldsymbol{n} = (0, 0, 1)$. *Dễ thấy hướng của biên* C *phù hợp với hướng dương của* S. *Với* $z = -3$, *ta có*

$$F_1 = y, F_2 = -27x, F_3 = 3y^3$$

và

$$(\text{curl } \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = -27 - 1 = -28.$$

Theo công thức Stokes, ta có

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_S (\text{curl } \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} dA = \iint_S (-28) dA = -28 \times 4\pi = -112\pi.$$

Bài tập

Bài 3.1. Tìm biểu diễn tham số của đường tròn là giao của mặt phẳng $z = 1$ với mặt cầu (S). Ở đó (S) có tâm $(3, 2, 1)$ và đi qua gốc tọa độ.

Bài 3.2. Biểu diễn tham số đường thẳng đi qua $(2, 1, 3)$ và có véc tơ chỉ phương $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

Bài 3.3. Viết biểu diễn tham số của đường Helix có phương trình $x^2 + y^2 = 25$, $z = 2\arctan\frac{y}{x}$.

Bài 3.4. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong C tại điểm P với

(a) $C : \mathbf{r}(t) = [t, t^2/2, 1]$; $P(2, 2, 1)$.

(b) $C : \mathbf{r}(t) = [\cos t, \sin t, 9t]$; $P(1, 0, 18\pi)$.

Bài 3.5. Tìm độ dài của các cung sau:

(a) (Circular helix) $C : \mathbf{r}(t) = [4\cos t, 4\sin t, 5t]$ từ $(4, 0, 0)$ đến $(4, 0, 10\pi)$.

(b) (Hypocycloid) $C : \mathbf{r}(t) = [a\cos^3 t, a\sin^3 t]$.

Bài 3.6. Tính tích phân đường $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$, trong đó:

(a) $C : y = 4x^2$ từ $(0, 0)$ tới $(1, 4)$ và $\mathbf{F} = [y^2, -x^2]$.

(b) C là một phần tư đường tròn tâm $(0, 0)$ từ $(2, 0)$ tới $(0, 2)$ và $\mathbf{F} = [xy, x^2y^2]$.

(c) $C : \mathbf{r} = [2\cos t, t, 2\sin t]$ từ $(2, 0, 0)$ tới $(2, 2\pi, 0)$ và $\mathbf{F} = [x - y, y - z, z - x]$.

Bài 3.7. Tính công W của lực $\mathbf{F}$ thực hiện dọc theo đường cong C trong các trường hợp sau:

(a) $C : \mathbf{r} = [2t, 5t, t]$ từ $t = 0$ tới $t = 1$ và $\mathbf{F} = [x + y, y + z, z + x]$.

(b) C là đường thẳng từ $(0, 0, 0)$ tới $(1, 1, 0)$ và $\mathbf{F} = [x, -z, 2y]$.

(c) $C : \mathbf{r} = [t, t^2, t]$ từ $(0, 0, 0)$ tới $(2, 4, 2)$ và $\mathbf{F} = [e^{-x}, e^{-y}, e^{-z}]$.

Bài 3.8. Tính tích phân đường $\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ với C là biên của miền R và được định hướng ngược chiều kim đồng hồ, trong các trường hợp sau:

(a) $\mathbf{F} = [y, -x]$; $C : x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$.

(b) $\mathbf{F} = [x^2e^y, y^2e^x]$; C là hình chữ nhật với các đỉnh $(0, 0), (2, 0), (2, 3), (0, 3)$.

(c) $\mathbf{F} = [x^2 + y^2, x^2 - y^2]$; $R : 1 \le y \le 2 - x^2$.

(d) $\mathbf{F} = [x^2y^2, \frac{-x}{y^2}]$; $R : 1 \le x^2 + y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge x$.

Bài 3.9. Tìm véc tơ pháp tuyến đơn vị của mặt cong $S : \mathbf{r}(u, v)$ tại điểm $P = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ trong các trường hợp sau:

(a) hình nón $\mathbf{r}(u, v) = [u\cos v, u\sin v, cu]$, $c > 0$;

(b) ellipsoid $\mathbf{r}(u, v) = [a\cos u\cos v, b\sin u\cos v, c\sin v]$, $a, b, c > 0$.

Bài 3.10. Tìm một véc tơ pháp tuyến (tại điểm P tùy ý) và viết một biểu diễn tham số của các mặt cong sau:

(a) Mặt phẳng $4x + 3y + 2z = 12$;

(b) Hình trụ $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$;

(c) Hình nón elliptic $z = \sqrt{x^2 + 4y^2}$.

Bài 3.11. Tính tích phân mặt loại 2, $\iint_S \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{n}dA$, với $\mathbf{N} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ phù hợp với hướng dương của S trong các trường hợp sau:

(a) $\mathbf{F} = [-x^2, y^2, 0]$, $\quad S : \mathbf{r} = [u, v, 3u - 2v]$, $\quad 0 \leq u \leq \frac{3}{2}, -2 \leq v \leq 2$;

(b) $\mathbf{F} = [x, y, z]$, $\quad S : \mathbf{r} = [u\cos v, u\sin v, u^2]$, $\quad 0 \leq u \leq 4, -\pi \leq v \leq \pi$.

Bài 3.12. Tính tích phân mặt loại 2, $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dA$ trong các trường hợp sau:

(a) $\mathbf{F} = [e^y, e^x, 1]$ và S là phía trên của mặt $x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ (hướng dương của S được định hướng bởi véc tơ pháp tuyến hướng lên trên);

(b) $\mathbf{F} = [0, x, 0]$ và S là phần phía ngoài mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nằm trong góc phần tám thứ nhất;

(c) $\mathbf{F} = [0, \sin y, \cos z]$ và S là phần mặt trụ $x = y^2$ với $0 \leq y \leq \pi/4$, $0 \leq z \leq y$ và hướng dương của S có hướng từ phải qua trái.

Bài 3.13. Tính tích phân mặt loại 1, $\iint_S G(\mathbf{r})dA$, trong các trường hợp sau:

(a) $G = \cos x + \sin x$ và S là phần mặt phẳng $x + y + z = 1$ nằm trong góc phần tám thứ nhất;

(b) $G = x + y + z$ và mặt S được giới hạn bởi $z = x + 2y$ với $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq x$;

(c) $G = z$ và S là phần mặt cầu đơn vị nằm trong góc phần tám thứ nhất;

Bài 3.14. Mô-ment quán tính I của mặt cong S đối với trục L được cho bởi công thức sau:

$$I = \iint_S \rho D^2 dA \tag{3.40}$$

trong đó

- $\rho = \rho(x, y, z)$ là mật độ khối lượng (khối lượng trên một đơn vị diện tích) của mặt S,
- $D = D(x, y, z)$ là khoảng cách từ điểm (x, y, z) tới L.

Hãy tính mô-ment quán tính I của mặt cong S đối với trục L trong các trường hợp sau:

(a) $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, S là mặt đồng chất (ρ là hằng số) có khối lượng M và L là trục Oz;

(b) $S : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 2$ và L là đường thẳng $z = 1$ trong mặt phẳng Ozx;

(c) $S : x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leq z \leq 1$ và L là trục Oz.

Bài 3.15. Cho S là phía ngoài mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ được định hướng bởi véc tơ pháp tuyến đơn vị $\mathbf{n}$ hướng ra ngoài mặt cầu. Tính

$$I = \iint_S (7x\mathbf{i} - z\mathbf{k})\cdot\mathbf{n}dA$$

F = (7x, 0, -z)

bằng hai cách:

(a) bởi công thức Gauss–Ostrogradsky;

(b) bởi cách tính trực tiếp bằng định nghĩa của tích phân mặt loại 2 (xem Định nghĩa 3.4).

Bài 3.16. Tính tích phân mặt loại 2, $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dA$, bằng công thức Gauss-Ostrogradsky với:

(a) $\mathbf{F} = [x^2, 0, z^2]$, S là phía ngoài của mặt của hộp $|x| \leq 1, |y| \leq 3, 0 \leq z \leq 2$. Kiểm tra lại kết quả tính $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA$ bằng cách tính trực tiếp từ định nghĩa;

(b) $\mathbf{F} = [e^x, e^y, e^z]$, S là phía ngoài của mặt của khối lập phương $|x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1$;

(c) $\mathbf{F} = [x^3 - y^3, y^3 - z^3, z^3 - x^3]$, S là phía ngoài của mặt của khối $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25, z \geq 0$.

Bài 3.17. Tính tích phân $\iint_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dA$ với:

(a) $\mathbf{F} = [z^2, -x^2, 0]$, S là phía trên của hình chữ nhật với 4 đỉnh $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 4, 4)$, $(1, 4, 4)$;

(b) $\mathbf{F} = [e^{-z}, e^{-z} \cos y, e^{-z} \sin y]$, $S : z = y^2/2, -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ được định hướng dương bởi véc tơ pháp tuyến $\mathbf{n}$ sao cho $\mathbf{n}$ tạo với tia Oz một góc nhọn.

(c) $\mathbf{F} = [z^2, 3x/2, 0]$, $S : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, z = 1$ được định hướng dương bởi tia Oz.

(d) $\mathbf{F} = [y^3, -x^3, 0]$, $S : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$ được định hướng dương bởi tia Oz.

Bài 3.18. Tính tích phân $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' ds$ bằng công thức Stokes với:

(a) $\mathbf{F} = [-5y, 4x, z]$, C là đường tròn $x^2 + y^2 = 16, z = 4$ có hướng dương là hướng ngược chiều kim đồng hồ;

(b) $\mathbf{F} = [z^3, x^3, y^3]$, C là đường tròn $y^2 + z^2 = 9, x = 2$ có hướng dương là hướng ngược chiều kim đồng hồ;

(c) $\mathbf{F} = [y^2, x^2, z + x]$, C là tam giác ABC với $A(0, 0, 0), B(1, 0, 0)$, $C(1, 1, 0)$ được định hướng dương từ $A \to B \to C \to A$.

Tài liệu tham khảo

[1] Erwin Kreyszig, *Advanced engineering mathematics*, Nhà xuất bản Wiley (10th Edition, 2011) (Chương 9 & 10).

[2] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh, *Toán học cao cấp*, tập III, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (2014) (Chương 3).

Chương 4. Phương trình vi phân cấp một

Ngày 10/5/2021

Biên soạn: Phan Quang Sáng

Khoa Khoa học cơ bản, Đại học Phenikaa

MỤC LỤC

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Erwin Kreyszig (10th Edition, 2011), Advanced Engineering Mathematics, NXB Wiley.

[2] Neyhauser, C. (2010). Calculus for Biology and Medicine (3rd Edition), Pearson.

[3] Stewart, J. (2015). Calculus: Early Transcendentals (8rd Edition), Brooks Cole.

CHƯƠNG 4 PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Một đại lượng biến thiên (liên tục) được biểu diễn như là một hàm số, trong khi tốc độ thay đổi của đại lượng đó được biểu thị qua các đạo hàm của hàm số đó; chúng có mối liên hệ với nhau, và phương trình vi phân thể hiện mối liên hệ đó. Các mối liên hệ như vậy xuất hiện rất phổ biến, do vậy phương trình vi phân nảy sinh và đóng vai trò quan trọng trong nghiên cứu nhiều lĩnh vực khác nhau như kỹ thuật, vật lý, sinh học, kinh tế…

Mở đầu: Phương trình chuyển động

Một phương trình nổi tiếng mà chúng ta phần lớn đều đã biết đó là phương trình định luật 2 của Newton về chuyển động. Phương trình này chính là một dạng phương trình vi phân.

Nếu một vật thể có khối lượng m đang chuyển động có gia tốc a dưới tác động của một lực F thì theo định luật 2 Newton

$$F = ma$$

Tại thời điểm t vật thể có vị trí, giả sử là một hàm theo thời gian $u = u(t)$, thì vận tốc và gia tốc tức thời của nó lúc đó lần lượt là

$$v = v(t) = u'(t),\ a = v'(\mathrm{t}) = u''(t) \qquad (4.1)$$

Chúng ta cũng chú ý rằng lực F cũng có thể là một hàm của thời gian, vận tốc, và/ hoặc của vị trí. Vì thế ta có thể viết phương trình định luật 2 Newton dưới các dạng sau

$$mv'(\mathrm{t}) = F\left(t, v\right) \qquad (4.2)$$

hoặc

$$mu''(\mathrm{t}) = F\left(t, u, u'(t)\right). \qquad (4.3)$$

Đó chính là các phương trình vi phân đầu tiên chúng ta gặp.

Như vậy Định luật 2 Newton về chuyển động *dưới dạng một phương trình vi phân* cho phép xác định vị trí của một vật dựa vào vận tốc, gia tốc, và lực tác động lên vật đó được biểu diễn dưới dạng hàm vi phân theo thời gian.

4. 1 MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

4.2.1 Định nghĩa phương trình vi phân

Một cách khái quát, phương trình vi phân là một phương trình toán học biểu diễn mối quan hệ giữa một hàm số (chưa biết) và các đạo hàm (với cấp khác nhau) của nó. Một phương trình như vậy có chứa biến số độc lập, một hàm số phải tìm và các đạo hàm (hoặc vi phân) của hàm số đó.

Một cách cụ thể, phương trình vi phân là một phương trình có dạng toán học

$$F(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{y}', \mathrm{y}'', \ldots, \mathrm{y}^{(\mathrm{n})}) = 0\,, \qquad (4.4)$$

trong đó F là một hàm số, x là biến số độc lập thuộc một miền I nào đó của $\mathbb{R}$, $y = y(x)$ là hàm số chưa biết, và $y', y'', \ldots, y^{(\mathrm{n})}$ là các đạo hàm các cấp của y.

Người ta gọi cấp của phương trình vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm của y có mặt trong phương trình. Về mặt hình thức ta thấy phương trình vi phân (4.7) trên có cấp n.

Ví dụ 1: $y' = f(x)$ là một phương trình vi phân cấp 1.

Ví dụ 2: $xy' + \dfrac{y^3}{\ln x} = \ln^2 x$ là một phương trình vi phân cấp 1.

Ví dụ 3: $y'' + x^2(y')^3 - 2y^4 = \sin x$ là một phương trình vi phân cấp 2.

Phương trình vi phân cấp một

Chúng ta nhắc lại rằng phương trình vi phân cấp một là phương trình dạng

$$F(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{y}') = 0 \text{ hoặc } F(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \frac{dy}{dx}) = 0\,, \qquad (4.5)$$

do đạo hàm $\mathrm{y}'(\mathrm{x}) = \dfrac{dy}{dx}$.

Một dạng đặc biệt của (4.8) là phương trình vi phân (cấp một) đã giải ra đạo hàm

$$y' = f(x, y) \text{ hoặc } \frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

hoặc

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0. \qquad (4.6)$$

- ∗ Trong chương trình chúng ta chủ yếu xét các phương trình vi phân cấp một đã giải ra đạo hàm.
- ∗ Trong phương trình (4.9) ta cũng có thể coi x là hàm của biến số y.

4.2.2 Nghiệm của phương trình vi phân cấp một

Nghiệm của phương trình vi phân là một hàm số $y = y(x)$ thỏa mãn phương trình đó. Giải phương trình vi phân là tìm tất cả các nghiệm của nó.

Ví dụ: xét phương trình vi phân cấp 1

$$y' = 3x^2 + \sin x.$$

Rõ ràng hàm số y cần tìm phải là một nguyên hàm của $3x^2 + \sin x$, do đó mọi nghiệm của phương trình có dạng

$$y = x^3 - \cos x + C,$$

với C là một hằng số thực tùy ý. Chẳng hạn $C = 1$ ta được một nghiệm $y = x^3 - \cos x + 1$.

Qua ví dụ trên ta thấy, nói chung, phương trình vi phân cấp 1 có nghiệm với một hằng số tùy ý…Chúng được gọi là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân. Từ đó ta có định nghĩa:

Định nghĩa*:* một hàm số dạng tổng quát

$$y = \varphi(x, C) \tag{4.7}$$

là nghiệm của phương trình vi phân (4.8) với các hằng số thực tùy ý C được gọi là *nghiệm tổng quát*.

Nghiệm riêng của phương trình vi phân là nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát **(4.7)** khi C là một giá trị số cụ thể.

Khi giải phương trình vi phân (4.8) nhiều khi dẫn đến phương trình dạng ("không còn đạo hàm")

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{4.8}$$

trong đó C là một hằng số tùy ý. Khi đó **(4.8)** được gọi là *tích phân tổng quát* của phương trình vi phân. Khi $C = C_0$ là một số cụ thể thì **(4.8)** được gọi là một *tích phân riêng* của phương trình vi phân.

Về mặt hình học mỗi nghiệm hoặc tích phân riêng của phương trình vi phân biểu diễn một đường cong trên mặt phẳng tọa độ Oxy, và được gọi là một *đường cong tích phân*. Như vậy nghiệm tổng quát hoặc tích phân tổng quát tương ứng với một họ các đường cong tích phân. Giải phương trình vi phân cũng chính là đi tìm các đường cong tích phân.

4.2.3 Điều kiện ban đầu

Giá trị của một đại lượng tại một thời điểm nào đó, được chỉ định là thời gian ban đầu (thường biểu thị $t = 0$), gọi là giá trị ban đầu. Một cách tổng quát điều kiện ban đầu cho biết trạng thái ban đầu (độ lớn, tốc độ biến thiên..) của một đại lượng tại một thời điểm chỉ định. Trạng thái ban đầu hoàn toàn có thể quy định đến trạng thái của đại lượng đó ở các thời điểm trước hoặc sau thời điểm chỉ định.

Một cách toán học, điều kiện ban đầu là một điều kiện đối với nghiệm của phương trình vi phân (4.8) dạng

$$y(x_0) = y_0, \tag{4.9}$$

trong đó x_0, y_0 là các giá trị cho trước. Bài toán giải phương trình vi phân cùng với điều kiện ban đầu được gọi là **bài toán Cauchy**, hay bài toán giá trị ban đầu.

Nhận xét:

- Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân không chịu bất kỳ một điều kiện ban đầu nào.
- Khi cho nghiệm tổng quát (4.7) thỏa mãn điều kiện ban đầu **(4.9)** ta sẽ tìm được giá trị cụ thể của hằng số C, lúc này nghiệm tương ứng sẽ là nghiệm riêng.

Định lý (Peano-Cauchy-Picard): *Xét bài toán Cauchy* (4.8) *với điều kiện ban đầu* $y(x_0) = y_0$. *Nếu hàm hai biến* $f(x, y)$ *liên tục trong một lân cận của điểm* (x_0, y_0) *thì của bài toán Cauchy có ít nhất một nghiệm* $y = y(x)$ *với* x *trong một lân cận của* x_0. *Hơn nữa nếu* f *có đạo hàm riêng* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *liên tục trong một lân cận của* (x_0, y_0) *thì bài toán Cauchy có nghiệm duy nhất.*

Trường hợp duy nhất nghiệm cũng có nghĩa là qua điểm (x_0, y_0) cho trước có duy nhất một đường cong tích phân của phương trình (4.8) mà hệ số góc của tiếp tuyến của đường cong tại điểm đó là $f(x_0, y_0)$.

4. 2 MỘT SỐ LỚP PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

4.3.1 Phương trình vi phân với biến số phân ly

Phương trình vi phân với biến số phân ly là phương trình có dạng

$$N(y)\, y' = M(x) \tag{4.10}$$

hoặc dạng tương đương,

$$N(y)\, dy = M(x)\, dx \tag{4.11}$$

trong đó M, N là các hàm số một biến, được giả sử liên tục trong một miền nào đó.

Để giải phương trình với biến số phân ly **(4.11)** ta chỉ việc lấy tích phân hai vế phương trình:

$$\int N(y)\, dy = \int M(x)\, dx + C, \text{ với } C \text{ là hằng số thực bất kỳ.}$$

Sau khi tính các tích phân ở hai vế của phương trình trên chúng ta sẽ nhận tích phân tổng quát của phương trình vi phân.

Thật vậy, nếu đạo hàm hai vế của phương trình trên theo biến số x ta sẽ được (4.10).

Ví dụ 1: Phương trình $y' = f(x)$ với f là một hàm số giả sử liên tục trên một miền $I \subset \mathbb{R}$.

Đây chính là một phương trình dạng biến số phân ly (khuyết y). Rõ ràng y phải là một nguyên hàm của f, hoặc áp dụng phương pháp giải ở trên cho ta nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = \int f(x)\,dx + C, \text{ với mọi } C \in \mathbb{R}.$$

* Bài toán tương tự với phương trinh vi phân khuyết x dạng $y' = g(\mathrm{y})$.

Ví dụ 2: Giải phương trình vi phân $(x+1)y' = 2y^2x^2$.

Giải: Trước hết chúng ta thấy rằng phương trình trên chưa phải là dạng biên số phân ly (x và y còn ở cùng một chỗ). Tuy nhiên chúng ta có thể chuyển phương trình về dạng biến số phân ly nếu chia cả hai vế của phương trình cho y^2 và $x+1$ nếu nó khác không.

Ta có $\quad y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0.$

Trước hết kiểm tra xem $y = 0$ có phải là nghiệm của phương trình hay không? Thay trực tiếp $y = 0$ vào phương trình ta được

$$(x+1).\,0' = 2.\,0^2 x^2$$

hay $\quad 0 = 0.$

Như vậy rõ ràng hàm số $y = 0$ là một nghiệm của phương trình.

Bây giờ ta đi tìm các nghiệm $y \neq 0$. Chia hai vế phương trình ban đầu cho $y^2 \neq 0$ và $x+1$(với $x \neq -1$) ta được dạng biến số phân ly như sau

$$\frac{y'}{y^2} = 2\frac{x^2}{x+1},\ x \neq -1 \text{ hay,}$$

$$\frac{dy}{y^2} = 2\frac{x^2}{x+1}dx,\ x \neq -1$$

Tích phân hai vế phương trình ta được

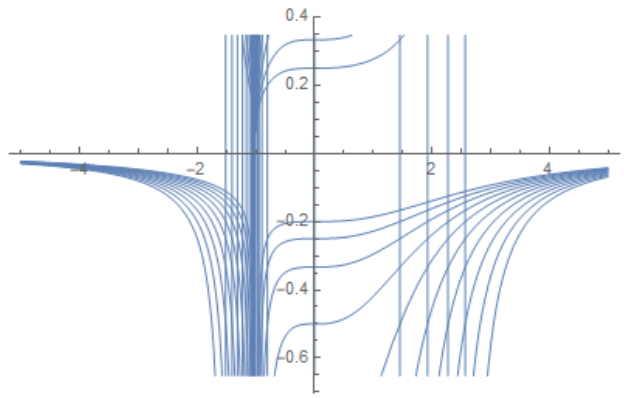
$$\int \frac{dy}{y^2} = \int 2\frac{x^2}{x+1}dx + C,\ x \neq -1, \text{ với mọi } C \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{y} = 2\int \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx + C,\ x \neq -1, \text{ với mọi } C \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{y} = 2\left(\frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+1| \right) + C,\ x \neq -1, \text{ với mọi } C \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y} = -2\left(\frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+1|\right) + C,\ x \neq -1, \text{ với mọi } C \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow y\left(x^2 - 2x + 2\ln|x+1|\right) + 1 = Cy,\ x \neq -1, \text{ với mọi } C \in \mathbb{R}. \qquad (*)$$



Như vậy phương trình có tích tích phân tổng quát cho bởi biểu diễn (*) và $y = 0$.

4.3.2 Phương trình vi phân đẳng cấp

Một số phương trình vi phân không phân ly được biến số nhưng có thể được chuyển về dạng biến số phân ly bằng cách đổi biến.

Định nghĩa: Hàm hai biến số $f = f(x,y)$ được gọi là hàm đẳng cấp bậc k (k là số tự nhiên hoặc thậm chí là số thực) nếu

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x,y) \text{ với mọi } \lambda, \text{và với mọi } x,\ y. \qquad (4.12)$$

Ví dụ: Kiểm tra các hàm đẳng cấp

(a) Hàm $f(x,y) = x^3 - x^2y + 2xy^2 + y^3$ là một hàm đẳng cấp bậc 3 vì

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^3 - (\lambda x)^2(\lambda y) + 2(\lambda x)(\lambda y)^2 + (\lambda y)^3$$

$$= \lambda^3x^3 - \lambda^3x^2y + \lambda^3 2xy^2 + \lambda^3y^3 = \lambda^3(x^3 - x^2y + 2xy^2 + y^3) = \lambda^3 f(x,y).$$

(b) Hàm $f(x,y) = x^2y - 2y^2$ không phải là một hàm đẳng cấp vì

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2(\lambda y) - 2(\lambda y)^2 = \lambda^3x^2y - 2\lambda^2y^2 = \lambda^2\left(\lambda x^2y - 2y^2\right) \neq \lambda^n\left(x^2y - 2y^2\right)$$

(ví dụ chọn $\lambda = -1,\ x = 1,\ y = 1$).

Ngoài ra chúng ta có thể nhận ra hàm f không phải là một hàm đẳng cấp vì số hạng thứ nhất x^2y có bậc 3 trong khi số hạng thứ hai $-2y^2$ có bậc 2.

Định nghĩa: *P*hương trình vi phân đẳng cấp là phương trình có dạng

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \qquad (4.13)$$

trong đó M và N là các hàm đẳng cấp có cùng bậc.

Một dạng đặc biệt của phương trình vi phân đẳng cấp (4.13) là

$$y' = f(x,y), \qquad \textit{(4.14)}$$

trong đó f là một hàm đẳng cấp bậc không.

Giải thích: nếu $N \neq 0$ phương trình (4.13) dẫn đến $y' = -\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$, hàm

$f(x,y) = -\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$ là một hàm đẳng cấp bậc không.

Khi đó nếu chọn $\lambda = \dfrac{1}{x}$ thì ta có thể viết hàm f dưới dạng một hàm của $\dfrac{y}{x}$:

$$f(x,y) = \lambda^0 f(1,\frac{y}{x}) = f(1,\frac{y}{x}).$$

Mệnh đề: bằng phép đổi biến $y = xu(x)$ chúng ta có thể chuyển phương trình vi phân đẳng cấp (4.13) (hoặc (4.14)) về dạng biến số phân ly.

Chú ý rằng lúc đó $y' = u + xu'$ và $dy = udx + xdu$.

Chúng ta không chứng minh mệnh đề trên mà minh họa cách giải phương trình vi phân đẳng cấp thông qua các các ví dụ dưới đây.

Ví dụ: Giải phương trình vi phân

$$\left(x^2 + y^2\right)dx - \left(x^2 + xy\right)dy = 0. \qquad (4.15)$$

Giải:

Phương trình (4.15) là một vi phân đẳng cấp vì $\left(x^2 + y^2\right)$ và $\left(x^2 + xy\right)$ là các hàm đẳng cấp cùng bậc 2.

Đặt $y = xu(x)$ rồi vào phương trình (4.15) ta

$$\left(x^2 + (ux)^2\right)dx - \left(x^2 + xux\right)\left(udx + xdu\right) = 0$$

$$\left(x^2 - x^2u\right)dx - \left(x^3 + x^3u\right)du = 0$$

$$x^2\left(1-u\right)dx = x^3\left(1+u\right)du$$

Chia hai vế của phương trình trên cho x^2 (với $x \neq 0$) ta được

$$\left(1-u\right)dx = x\left(1+u\right)du \tag{4.16}$$

Ta có $\quad 1-u=0 \Leftrightarrow u=1$.

Trường hợp 1: rõ ràng $u=1$ là của phương trình (4.16) nên $y=x$ là một nghiệm của phương trình (4.15).

Trường hợp 2: khi $u \neq 1$. Đưa (4.16) về dạng biến số phân ly rồi lấy tích phân hai vế ta được

$$\frac{dx}{x} = \frac{1+u}{1-u}du$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1+u}{1-u}du.$$

$$\ln|x| = -u - \ln|u-1| + C,\ \ C \in \mathbb{R}.$$

Thay $u = \frac{y}{x}$ vào phương trình trên ta được:

$$\ln|x| = -\frac{y}{x} - \ln\left|\frac{y}{x}-1\right| + C \text{, hay}$$

$$\ln e^{\frac{y}{x}}|y-x| = C,\ \ C \in \mathbb{R},\ \text{ hay}$$

$$e^{\frac{y}{x}}(y-x) = M,\ \ M \in \mathbb{R}. \tag{4.17}$$

Công thức (4.17) chính là tích phân tổng quát của phương trình (4.15).

4.3.3 Phương trình vi phân tuyến tính

Phương trình vi phân tuyến tính là phương trình có dạng

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{4.18}$$

trong đó p và q là các hàm số một biến của x, giả sử liên tục trên một miền $I \subseteq \mathbb{R}$ nào đó.

- Nếu $q=0$ thì (4.18) trở thành phương trình được gọi là phương trình thuần nhất

$$y' + p(x)y = 0 \tag{4.19}$$

- Nếu $q \neq 0$ thì (4.18) gọi là phương trình tuyến tính không thuần nhất. Phương trình (4.19) gọi là phương trình thuần nhất tương ứng với (4.18).

Nhận xét: phương trình (4.18) là phương trình bậc 1 đối với y và y'.

Cách giải phương trình (4.18):

Nhận xét: nếu $v \neq 0$ là một hàm số nào đó sao cho $v(x) \neq 0, x \in I$ thì ta luôn có thể viết y dưới dạng tích của v và một hàm số khác: $y = uv$. (thật vậy lấy $u(x) = \dfrac{y(x)}{v(x)},\ x \in I$)

Ta tìm nghiệm của phương trình (4.18) dạng

$$y = uv,$$

trong đó $u = u(x)$ là hàm số của x, và $v = v(x)$ là một hàm khác không mà ta sẽ chọn một cách phù hợp.

Thay $y = uv$ vào (4.18) ta được

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x), \text{hay}$$

$$u'v + u\left[v' + p(x)v\right] = q(x). \tag{4.20}$$

Chọn một hàm số $v \neq 0$ sao cho $v' + p(x)v = 0$. (4.21)

Phương trình (4.21) tương đương với dạng biến số phân ly

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx \Leftrightarrow \int \frac{dv}{v} = \int -p(x)dx \Leftrightarrow \ln|v| = \int -p(x)dx,$$

và ta có thể chọn $v = e^{-\int p(x)dx}$. Lúc này phương trình (4.20) trở thành:

$$u'\text{v} = q(x),$$

$$u' = \frac{q(x)}{v(x)},$$

$$u = \int \frac{q(x)}{v(x)}dx + C, \text{với } C \in \mathbb{R} \text{ tùy ý.}$$

Với u và v như trên, $y = uv = \left[\int \dfrac{q(x)}{v(x)}dx + C\right]e^{-\int p(x)dx}$ là nghiệm tổng quát của (4.18).

Tóm tắt cách giải phương trình tuyến tính $y' + p(x)y = q(x)$
$y = uv$ $v' + p(x)v = 0$, $u'v = q(x)$

Chú ý*: có nhiều phương pháp khác nhau để giải phương trình vi phân tuyến tính như phương pháp Lagrange (phương pháp biến thiên hằng số), phương pháp thừa số tích phân... Phương pháp mà chúng ta vừa trình bày gọi là phương pháp Bernoulli.*

Ví dụ: Giải phương trình vi phân tuyến tính

$$y' - \frac{2}{x} y = x^2 \cos x \tag{4.22}$$

Giải:

Với điều kiện $x \neq 0$, đặt $y = uv$, rồi thay vào phương trình ta được

$$u'v + uv' - \frac{2}{x} uv = x^2 \cos x, \text{hay}$$

$$u'v + u\left[v' - \frac{2}{x} v\right] = x^2 \cos x. \tag{4.23}$$

Chọn một hàm số $v \neq 0$ sao cho

$$v' - \frac{2}{x} v = 0, \text{ hay } \frac{v'}{v} = \frac{2}{x},$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{2dx}{x},$$

$$\ln|v| = 2\ln|x| + M, M \in \mathbb{R}.$$

Chọn $M = 0$ ta được $\ln|v| = 2\ln|x|$, hay $|v| = e^{2\ln|x|} = |x|^2$. Ta chọn $v = x^2, x \neq 0.$

Lúc đó phương trình (4.23) trở thành

$$u'x^2 = x^2 \cos x,\ x \neq 0.$$

$$u' = \cos x,$$

$$u = \int \cos x\, dx = \sin x + C, C \in \mathbb{R}.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = uv = x^2 (\sin x + C), x \neq 0, C \in \mathbb{R}.$$

4.3.4 Phương trình vi phân Bernoulli

Phương trình Bernoulli, đặt theo tên James Bernoulli (1654-1705), là một phương trình phi tuyến nổi tiếng có thể chuyển về dạng tuyến tính bằng một phép thế thích hợp.

Phương trình vi phân Bernoulli là phương trình có dạng

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha} \tag{4.24}$$

trong đó p và q là các hàm số một biến của x, giả sử liên tục trên một miền $I \subseteq \mathbb{R}$ nào đó, và hằng số $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$.

Chú ý:

- Nếu $\alpha = 0$ thì (4.24) trở thành phương trình tuyến tính mà chúng ta đã nghiên cứu ở phần trước.
- Nếu $\alpha = 1$ thì (4.24) có thể đưa về phương trình với biến số phân đã biết cách giải

$$y' = (p(x) - q(x))y.$$

Nhận xét: phương trình Bernoulli (4.24) có dạng gần giống phương trình tuyến tính (4.18), bằng cách đổi hàm chúng ta sẽ chuyển phương trình Bernoulli về dạng tuyến tính.

Cách giải phương trình (4.24):

Trước hết ta thấy nếu $\alpha < 0$ thì $y \neq 0$, còn nếu $\alpha > 0$ thì hàm số $y = 0$ là một nghiệm của phương trình(4.24).

Ta đi tìm các nghiệm khác không của phương trình. Chia hai vế của phương trình (4.24) cho $y^{\alpha} \neq 0$ ta được

$$y^{-\alpha} y' + p(x) y^{1-\alpha} = q(x) \tag{4.25}$$

Đặt hàm $z = y^{1-\alpha}$ (cũng coi z là hàm của biến x). Lúc đó ta có đạo hàm của z theo x là

$$z' = (1-\alpha) y^{-\alpha} y' \Leftrightarrow y^{-\alpha} y' = \frac{1}{1-\alpha} z'.$$

Do đó phương trình (4.25) trở thành:

$$\frac{1}{1-\alpha} z' + p(x) z = q(x), \text{ hay}$$

$$z' + (1-\alpha) p(x) z = (1-\alpha) q(x).$$

Phương trình cuối cùng có dạng phương trình vi phân tuyến tính mà chúng ta đã biết cách giải ở mục 4.3.3.

Ví dụ: Giải phương trình vi phân Bernoulli

$$y' + \frac{2}{x} y = \frac{y^3}{x^2}. \tag{4.26}$$

Giải: điều kiện $x \neq 0$.

Trước hết do $\alpha = 3 > 0$ nên dễ thấy $y = 0$ là một nghiệm của phương trình (4.26) .

Ta đi tìm các nghiệm khác không của phương trình. Chia hai vế của phương trình (4.26) cho $y^3 \neq 0$ ta được

$$y^{-3}y' + \frac{2}{x}\frac{1}{y^2} = \frac{1}{x^2} \tag{4.27}$$

Đặt hàm $z = \frac{1}{y^2}$. Lúc đó đạo hàm của z theo x là

$$z' = -2y^{-3}y' \Leftrightarrow y^{-3}y' = -\frac{1}{2}z'.$$

Do đó phương trình (4.27) trở thành $-\frac{1}{2}z' + \frac{2}{x}z = \frac{1}{x^2}$ hay

$$z' - \frac{4}{x}z = -\frac{2}{x^2}. \tag{4.28}$$

Phương trình (4.28) là một phương trình vi phân tuyến tính.

Với điều kiện $x \neq 0$, đặt $z = uv$, rồi thay vào phương trình ta được

$$\text{vu}' + \text{u}\left[v' - \frac{4}{x}v\right] = -\frac{2}{x^2}. \tag{4.29}$$

Chọn $v \neq 0$ là nghiệm phương trình

$$v' - \frac{4}{x}v = 0,$$

$$\frac{dv}{v} = 4\frac{dx}{x},$$

$$\ln|v| = 4\ln|x| + C_1.$$

Chọn $C_1 = 0$ và $v = x^4, x \neq 0.$

Lúc đó phương trình (4.29) trở thành

$$\text{x}^4\text{u}' = -\frac{2}{x^2}, \text{hay } \text{u}' = -\frac{2}{x^6},$$

$$u = \int -\frac{2}{x^6}\,dx = -2\int x^{-6}\,dx = -2\frac{x^{-5}}{-5} + C = \frac{2}{5x^5} + C, C \in \mathbb{R}..$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (4.28) là

$$z = uv = \left(\frac{2}{5x^5} + C\right)x^4 = \frac{2}{5x} + Cx^4,\ x \neq 0, C \in \mathbb{R}.$$

Thay $z = \dfrac{1}{y^2}$ vào công thức trên ta được tích phân tổng quát của (4.26) là

$$\frac{1}{y^2} = \frac{2}{5x} + Cx^4,\ x \neq 0, C \in \mathbb{R}. \tag{4.30}$$

Như vậy phương trình (4.26) có họ tích phân tổng quát (4.30) và nghiệm $y = 0$ (với $x \neq 0$).

4.3.5 Phương trình vi phân toàn phần

Phương trình vi phân toàn phần là phương trình có dạng

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0, \tag{4.31}$$

trong đó M, N là các hàm số hai biến liên tục và có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trong một miền $D \subseteq \mathbb{R}^2$ thỏa mãn

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \text{ trên } D. \tag{4.32}$$

Người ta chứng minh được, với điều kiện (4.32) khi đó tồn tại một hàm số hai biến $F = F(x, y)$ trên D khả vi và có các đạo hàm riêng hỗn hợp đến cấp 2 liên tục sao cho M và N lần lượt là các đạo hàm riêng của F, tức là

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M,\ \frac{\partial F}{\partial y} = N. \tag{4.33}$$

Chúng ta cũng chú ý rằng nếu tồn tại một hàm F như thế, theo định lý Schwart thì

$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$, và từ (4.33) suy ra điều kiện (4.32) là cần thiết.

Khi đó vế trái của phương trình (4.31) là vi phân toàn phần của hàm F,

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy = M\,dx + N\,dy.$$

Do đó phương trình (4.31) có thể viết dưới dạng

$$dF = 0.$$

Từ đó tích phân tổng quát của phương trình (4.31) là

$$F = C, C \in \mathbb{R}.$$

Ta sử dụng công thức sau

$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y} \mathrm{N}(x,y)dy=C, C\in\mathbb{R}, \tag{4.34}$$

với (x_0, y_0) là một điểm chọn tùy ý trong miền D.

Chú ý: khi ta thay đổi điểm $(x_0, y_0)\in D$ thì chỉ có thể làm thay đổi hằng số tùy ý $C\in\mathbb{R}$.

Ví dụ: giải phương trình vi phân

$$(x+y^2)dx+(2xy+y)\,dy=0$$

Giải: đặt $M=x+y^2, N=2xy+y$.

Ta thấy $\dfrac{\partial M}{\partial y}=2y=\dfrac{\partial N}{\partial x}$, với mọi $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ nên phương trình trên là phương trình vi phân toàn phần.

Chọn $x_0=0, y_0=0$. Sử dụng công thức (4.34), tích phân tổng quát của phương trình là

$$F(x,y)=\int_0^x M(x,0)dx+\int_0^y N(x,y)dy=C, C\in\mathbb{R}, \text{ hay}$$

$$\int_0^x x\,dx+\int_0^y (2x+y)dy=C, C\in\mathbb{R},$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{(2x+1)y^2}{2}=C, C\in\mathbb{R},$$

$$x^2+(2x+1)y^2=K, K\in\mathbb{R}.$$

Chú ý: chúng ta trình bày một cách khác để tìm hàm F như sau.

Hàm F cần tìm phải thỏa mãn điều kiện (4.33):

$$\frac{\partial F}{\partial x}=M=x+y^2, \frac{\partial F}{\partial y}=N=2xy+y.$$

Do $\dfrac{\partial F}{\partial x}=x+y^2$ nên $F(x,y)=\int\dfrac{\partial F}{\partial x}dx+G(y)$, với $G=G(y)$ là một hàm số của y (không phụ thuộc vào x),

$$F(x,y)=\int(x+y^2)dx+G(y)=\frac{x^2}{2}+y^2x+G(y). \tag{4.35}$$

Tiếp theo do điều kiện $\frac{\partial F}{\partial y} = N = 2xy + y$ nên với F như ở (4.35) thì

$$2yx + G'(y) = 2xy + y,$$

$$G'(y) = y,$$

$$G(y) = \int y\, dy + C = \frac{y^2}{2} + C, C \in \mathbb{R}.$$

Từ đó thay G vừa tìm được vào (4.35) ta thu được kết quả như trong ví dụ trên

$$F(x, y) = \frac{x^2}{2} + y^2 x + \frac{y^2}{2} + C$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{(2x+1)y^2}{2} + C, C \in \mathbb{R}.$$

4.4 ỨNG DỤNG PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TRONG MÔ HÌNH HÓA

Ngoài các mô hình đã được đưa ra, trong mục này chúng tôi giới thiệu thêm một số mô hình đơn giản trong các lĩnh vực khác nhau dẫn đến phương trình vi phân.

4.4.1 Định luật giảm nhiệt độ của Newton

Định luật giảm nhiệt độ của Newton nói rằng tốc độ thay đổi nhiệt độ của một vật tỷ lệ thuận với sự chênh lệch nhiệt độ của nó và môi trường xung quanh (với điều kiện sự chênh lệch nhiệt độ là nhỏ và bản chất của bề mặt bức xạ không thay đổi).

Gọi $y = y(t)$ là nhiệt độ của vật theo thời gian đặt trong môi trường có nhiệt độ là một hằng số M. Chúng ta biết rằng tốc độ thay đổ của vật là $\frac{dy}{dt}$ nên định luật giảm nhiệt độ của Newton được biểu diễn dưới dạng

$$\frac{dy}{dt} = -k\left(y - M\right) \tag{4.36}$$

trong đó $k > 0$ là hằng số tỷ lệ tùy thuộc vào từng vật thể (hệ số truyền nhiệt) và được giả sử không thay đổi theo thời gian. Đó là một phương trình vi phân cấp một dạng biến số phân ly và chúng ta có thể tìm được nghiệm tổng quát

$$y = Ce^{-kt} + M, C \in \mathbb{R}. \tag{4.37}$$

Ví dụ: Một cốc nước sôi đặt trong một phòng có nhiệt độ được giữ cố định là 25°C. Giả sử cốc nước giảm nhiệt độ từ 100°C xuống còn 90°C trong vòng 5 phút. Hỏi sau bao nhiêu lâu thì cốc nước giảm nhiệt độ xuống còn 50°C.

Giải: gọi $y = y(t)$ là nhiệt độ của cốc nước theo thời gian, nó tuân theo định luật giảm nhiệt của Newton (4.36) nên có biểu thức dạng (4.37):

$$y = Ce^{-kt} + M, C \in \mathbb{R}.$$

Với dữ kiện của đề bài thì $M = 25,\ y(0) = 100,\ y(5) = 90.$ Từ đó ta có

$$C + 25 = 100 \Leftrightarrow C = 75.$$

$$75e^{-5k} + 25 = 90 \Leftrightarrow e^{-5k} = \frac{13}{15} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{5}\ln\frac{13}{15} \approx 0,0286.$$

Do đó $y = 75e^{-0,0286t} + 25.$

Nhiệt độ của cốc nước còn 50° C thì

$$75e^{-0,0286t} + 25 = 50 \Leftrightarrow e^{-0,0286t} = \frac{1}{3}$$

$$-0,0286t = \ln\frac{1}{3}$$

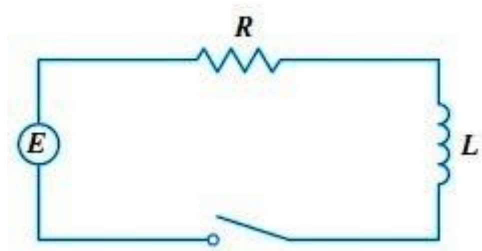
$$0,0286t = \ln 3$$

$$t \approx 38,41 \text{ (phút)}.$$

Vậy sau khoảng 38,41 phút thì nhiệt độ của cốc nước còn 50° C.

4.4.2 Mô hình mạch điện

Chúng ta xét một mạch điện như trong hình vẽ 4.6 gồm một nguồn phát điện E (có thể là pin hoặc máy phát điện) với đơn vị Vol (V), một điện trở R với đơn vị ôm (Ω) và một cuộn cảm với độ tự cảm (hay từ dung) L có đơn vị Henry (H).



Hình 4.6

Giả sử nguồn phát E hàm phụ thuộc vào thời gian t và gọi cường độ dòng điện trong mạch là $I = I(t)$, với đơn vị Ampe (A). Theo định luật cảm ứng Faraday, khi có dòng điện chạy qua cuộn cảm sẽ sinh ra một từ trường biến thiên theo thời gian và tạo ra một hiệu điện thế là $L\frac{dI}{dt}$. Theo một định luật của Kirchhoff thì tổng các hiệu điện thế qua điện trở R và qua cuộn cảm L phải bằng hiệu điện thế của nguồn phát E. Từ đó một mô hình cho cường độ dòng điện I được cho bởi phương trình vi phân bậc một:

$$L\frac{dI}{dt}+RI=E(t). \qquad (4.38)$$

Ví dụ: Giả sử một mạch điện như trên với $R=8$ (V), $L=4$ (H) và nguồn phát không đổi $E=32$ (V). Hãy tìm biểu thức của cường độ dòng điện trong mạch theo thời gian kể từ lúc đóng mạch điện.

Giải: Cường độ dòng điện trong mạch được cho bởi phương trình

$$4\frac{dI}{dt}+8I=32.$$

Chúng ta cũng chú ý rằng khi chưa đóng mạch điện thì chưa có dòng điện, do đó ta có điều kiện ban đầu $I(0)=0$. Phương trình trên có thể đưa về dạng phân ly biến số

$$\frac{dI}{I-4}=-2dt.$$

Tích phân hai vế phương trình trên ta được

$$\ln|I-4|=-2t+C, C\in\mathbb{R}.$$

Từ đó suy ra $|I-4|=e^{-2t+C}, C\in\mathbb{R}$ và do đó $I-4=\pm e^{C}e^{-2t}$. Đặt $M=\pm e^{C}$, $M\neq 0$ ta nhận được

$$I=4+Me^{-2t}.$$

Điều kiện ban đầu $I(0)=0$ dẫn đến $M=-4$.

Vậy biểu thức của cường độ dòng điện trong mạch là

$$I(t)=4-4e^{-2t}.$$

Ngoài ra chúng ta cũng có thể thấy rằng $\lim\limits_{t\to+\infty} I(t)=4$ nên cường độ dòng điện trong mạch tiệm cận đến 4 (A) sau khi thời gian t đủ lớn.

Tóm tắt các dạng phương trình vi phân cấp một

1. Phương trình với biến số phân ly
2. Phương trình đẳng cấp
3. Phương trình tuyến tính
4. Phương trình Bernoiulli
5. Phương trình vi phân toàn phần

BÀI TẬP CHƯƠNG 4 PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Các bài từ 4.1-4.5, kiểm tra hàm số cho trước có phải là nghiệm của phương trình vi phân?

	Nghiệm	**Phương trình vi phân**
4. 1.	$N = Ce^{kt}$	$\frac{dN}{dt} = k\ N(t)$
4. 2.	$y = \frac{1}{1+Ce^{-t}}$	$\frac{dy}{dx} = ky(1-y)$
4. 3.	$y = C\sqrt{x^2+4}$	$\left(x^2+4\right)\frac{dy}{dx} = xy$
4. 4.	$N = 100e^{2t}$	$\frac{dN}{Ndt} = 2,\ N(0) = 100$
4. 5.	$y^2 = Cx^3$	$2xy' - 3y = 0$

Các bài tập từ 4.6-4.9, giải các phương trình vi phân với điều kiện ban đầu

	Phương trình vi phân	**Điều kiện ban đầu**
4. 6.	$\frac{dy}{dx} = x^2 + 2\sin x,$	sao cho $y_0 = 1$ khi $x_0 = 0$.
4. 7.	$\frac{ds}{dt} = 2e^{-3t},$	biết $s(0) = 2$.
4. 8.	$\frac{dy}{dx} = 2y,$	sao cho $y_0 = -2$ khi $x_0 = 0$.
4. 9.	$\frac{dN}{dt} = 2(3-N),$	biết $N(0) = 10$.

Các bài 4.10-4.14, giải các phương trình vi phân sau

4. 10. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

4. 11. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

4. 12. $ydx - (2x+1)dy = 0$

4. 13. $xy' + y = 0$

4. 14. $xy' = (y+1)$

Các bài *4.15-4.20*, giải các phương trình vi phân đẳng cấp

4. 15. $(x+y)dx-(x-y)dy=0$

4. 16. $ydx+(2\sqrt{xy}-x)dy=0$

4. 17. $y'=\dfrac{y}{x}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

4. 18. $y'+\dfrac{y}{x}\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)=0$

4. 19. $\left(x^3-xy^2\right)dx+\left(xy^2-y^3\right)dy=0$

4. 20. $\left(x^2+y^2\right)dx+3xydy=0$

Các bài 4.21-4.27, giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp một

4. 21. $y'-y=4$

4. 22. $y'+2xy=4x$

4. 23. $y'-\dfrac{y}{x}=x^2$

4. 24. $y'-\dfrac{y}{x\ln x}=x\ln x$

4. 25. $y'-\dfrac{1}{x}y=\dfrac{3}{x^2}.$

4. 26. $y'+\dfrac{2y}{x+3}=\dfrac{1}{x^2}$

4. 27. $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{x^2+1}$

Các bài 4.28-4.32, giải các phương trình Bernoulli

4. 28. $y'+y=xy^2$

4. 29. $y'+3xy=x^2y^3$

4. 30. $y'+xy=\dfrac{x}{y}$

4. 31. $y'+\dfrac{y}{x}=xy^2$

4. 32. $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{y^3}{x^2}$

Giải các phương trình vi phân cấp một sau bằng một phương pháp thích hợp

4. 33. $(x^2+9)y'=xy$

4. 34. $y'x=y\ln y$

4. 35. $x\sqrt{y}dx-y(x+1)dy=0$

4. 36. $y'+2xy=xy^2$

4. 37. $y'=\dfrac{x^2+y^2}{x\left(x+y\right)}$

4. 38. $\left(y^2+2\right)y'=3x^2y\left(1+\dfrac{1}{x^3+1}\right)$

4. 39. $xy'=y-x\cos^2\dfrac{y}{x}$

4. 40. $y'-y\sin x=\sin 2x$

4. 41. $y'+4x^3y=x^3$

4. 42. $\dfrac{dy}{dx}-2\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{x^2}$

Bài tập ứng dụng phương trình vi phân

Các bài tập từ 4.43-4.44 liên quan đến mô hình giảm nhiệt độ

4. 43. Giả sử nhiệt độ của một vật, ký hiệu là $y = y(t)$, biến đổi theo phương trình

$$\frac{dy}{dt} = -2(y-10) \text{ với } y(0) = 30.$$

Tìm $y(t)$ và nhiệt độ của vật khi $t = 4$.

4. 44. Một cốc cà phê được mang ra cho khách hàng. Giả sử cốc cà phê có nhiệt độ 95°C và nhiệt độ của môi trường là 28°C. Sau 5 phút thì thấy nhiệt độ của cốc cà phê còn 90°C. Hỏi sau 10 phút thì nhiệt độ của cốc cà phê là bao nhiêu.

Phân rã chất phóng xạ. Giả sử khối lượng của một chất phóng xạ theo thời gian ký hiệu là $m(t)$. Dựa trên giả thuyết tốc độ phóng xạ tỷ lệ thuận với lượng chất phóng xạ, quá trình phóng xạ được mô hình bởi phương trình

$$\frac{dm}{dt} = -\lambda m(t), \text{ với } m(0) = m_0, \quad (4.39)$$

trong đó λ là một hằng số dương, được gọi là *hằng số phóng xạ*.

4. 45. Radium có chu kỳ bán rã là 1599 năm. Giả sử ban đầu có 10 gam Radium. Hỏi sau sau 600 năm thì khối lượng Radium còn bao nhiêu?