Guía 2. Conjuntos

Carlos Domingo, Jacinto Dávila

Unviersidad de Los Andes, Venezuela

1.- Una noción más básica que la del número es la de conjunto, pero es necesario discutirla y aclararla porque es a base de toda Matemática. Trate de explicar que es un conjunto.

____

____

____

2.- Para indicar un conjunto se escriben sus elementos entre {}, así el conjunto A de los números enteros entre -3 y 4 ambos incluidos es:

$A = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$

El conjunto P de los planetas del sistema solar es:

$P = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$

El orden no interesa $\{a,b\} = \{\ \ ,\ \ \}$

3.- Según lo anterior el conjunto queda definido cuando se indican todos sus elementos. ¿Puede siempre definirse así? ____ Indique dos conjuntos que no pueden definirse de esta manera.

____

____

____

Indique otra manera de definir conjuntos:

____

____

____

4.- Los componentes de un conjunto se llaman *elementos* y se dicen que *pertenecen* al conjunto. La relación "pertenece a" se indica $\in$. Así si: $A = \{a, z, \odot, *, \triangle, \square\}$ entonces $\square$ ____ A. La idea de pertenecer, como la de conjunto es una idea intuitiva básica. "No pertenece" se indica $\notin$ o $\in'$. ____ $\notin A$

5.- La manera usual de definir un conjunto es dar una regla tal que para todo objeto pueda decirse si pertenece o no al conjunto. Ejemplo:

____

6.- La forma anterior de definir se expresa así formalmente: Sea $P(x)$ una función proposicional con sentido (puede ser sólo V ó F) para todo objeto x. Queda definido entonces el conjunto A de todas las x que hacen verdadera $P(x)$. Así si $P(x)$ es $x > 10$ esto define al conjunto de los números mayores que 10.
Se indica así: $A = \{x|x > 10\}$ donde: $=$ significa "es" $\{$ significa "el conjunto de todos los" $|$ significa "tales que".

Veremos que esra manera simple de definir conjuntos lleva a ciertas paradojas.

7.- Definir con una expresión formal los siguientes conjuntos:

a. Números enteros entre -6 y +50 (incluidos ambos):

____

____

b. Números enteros divisibles por 3:

____

c. Números fraccionarios entre 2/3 y 1:

____

d. Puntos del plano cartesiano que están a distancia 5 del origen:

____

e. Alumnos de la ULA que aprobaron más de 10 materias:

____

f. Proposiciones que considera la lógica formal (son verdaderas o falsas):

____

8.- Se dice que B es un subconjunto de A si todo elemento de B lo es de A. Se indica $B \subset A$.Es decir,

$$8.a) B \subset A \leftrightarrow (x \in B \rightarrow x \in A)$$

¿Es cierto que $A \subset A$? ____ ¿Es cierto que $B \subset A \leftrightarrow x \notin A \rightarrow x \notin B$?____ Haga las tablas de verdad de la implicación anterior y de esta.

____

____

____

____

____

____

____

Suponga que B no contiene ningún elemento (conjunto vacío). ¿Es cierto que $B \subset A$?____.Decir que sí es decir que el conjunto vacío es subconjunto de todo conjunto. La suposición de que hay un conjunto vacío permite dar generalidad a muchas definiciones y resultados.

9.- Dos conjuntos se dicen *iguales* si tienen los mismos elementos.

9.a) Si $A \subset B$ y $B \subset A$ resulta: A____B

¿Porqué?

____

____

En lo que sigue se introducen reglas que permiten formar nuevos conjuntos a partir de conjuntos dados.

10.- Se pueden considerar como *axiomas* que afirman la existencia de los nuevos conjuntos. Si A y B son conjuntos se puede formar un nuevo conjunto Z que los contiene como elementos $Z = \{\_\_\_, \_\_\_\}$ ¿Se puede decir que los elementos de A también son elementos de Z?____.

11.- *Unión*. Sea A y B dos conjuntos. Se llama unión de A y B y se indica $A \cup B =$ al conjunto que tiene los elementos que están en A o en B o en ambos y soló dichos elementos.
Así si $A = \{s, b, m, n, p\}$ $B = \{a, b, s, t, p\}$ entonces $A \cup B = \{$

____$\}$

12.- *Intersección*. Dsdos A y B. Se llama intersección al conjunto que tiene sólo los elementos que pertenecen a A y B. Se indica $A \cap B$. Para los conjuntos A y B del caso anterior se tiene: $A \cap B = \{$

____$\}$

13.- Ambas definiciones pueden ponerse formalmente así:

$$13.a)\ A \cup B = \{x | x \in \underline{\hspace{6cm}}\}$$
$$13.b)\ A \cap B = \{x | x \in \underline{\hspace{6cm}}\}$$

14.- El *Conjunto Universal* E. En general cuando se define un conjunto se tiene presente un universo o conjunto mayor para el cual la proposición $P(x)$ que define el conjunto es *significativa* (sea V o F). Tal conjunto que comprende al definido se llama conjunto universal.
Así si definimos $A = \{x | x$ entero y $x > 100\}$ el conjunto universal es el de los enteros.

15.- *Complementación*. Dado un conjunto A, los elementos del conjunto universal E que no pertenecen a A forman otro conjunto que llamaremos A', complemento de A. Así para el ejemplo anterior:

$$15.a)\ A' = \{x | \underline{\hspace{6cm}}\}$$

Formalmente se define:

$$15.b)\ \text{Si } Y = \{x | P(x)\} \text{ entonces } Y' = \{x | \underline{\hspace{1.5cm}}$$

o bien si E es el universal de Y, $Y' = \{x | \notin Y \wedge x \in E\}$

16.- Si ϕ es el vacío y E el universal se tiene:

$$\begin{aligned} A \cup A' &= \_\_\_\_\_\_ \\ A \cap A' &= \_\_\_\_\_\_ \\ A \cup \phi &= \_\_\_\_\_\_ \\ A \cap \phi &= \_\_\_\_\_\_ \\ A \cap E &= \_\_\_\_\_\_ \\ A \cup E &= \_\_\_\_\_\_ \\ \phi &= \_\_\_\_\_\_ \\ E' &= \_\_\_\_\_\_ \end{aligned}$$

17.- *Diferencia entre dos conjunjtos.* Dados los conjuntos A y B se denomina diferencia AB al conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B.

$$17.a)\ AB = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

Se tiene: $E - A =$ ____ y $A - \phi =$ ____

18.- Para demostrar las siguientes igualdades usar las definiciones 8.a) y 9.a, entre otras que necesite.

$(A')' = A$

____

____

____

____

$(A \cup B)' = A' \cap B'$ (De Morgan)

$(A \cap B)' = A' \cup B'$ (De Morgan)

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (Asociativa)

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (Asociativa)

$(A \cup B) \cap C = (A \cap B) \cup (B \cap C)$ (Distributiva)

$(A \cap B) \cup C = (A \cup B) \cap (B \cup C)$ (Distributiva)

Demostrar que $A \subset B \leftrightarrow B' \subset A'$

19.- Diagramas de Venn. Una manera de vizualizar las propiedades de los conjuntos es representar cada conjunto mediante una figura cerrada. Los elementos son los puntos (indicados o no) dentro de la figura.

20.- *Pares Ordenados*. La idea de par ordenado (a, b) puede considerarse también una idea intuitiva primitiva. a se llama primer elemento. b se llama segundo elemento. Como se ve la idea implica los conceptos de primero y segundo. En la teoría axiomática, de la que hablaremos más adelante se puede introducir el par ordenado como definición sin acudir a las ideas de "primero" y "segundo".

Véase la diferencia entre (a, b) y $\{a, b\}$ ¿Cuál es?

21.- *Producto Cartesiano*. Dados dos conjuntos A y B se puede formar el conjunto de los pares (a, b) tales que a es un elemento de A y b uno de B. Tal conjunto de pares se llama producto cartesiano de A y B y se indica AxB. $C = AxB = \{x | x = (a, b)$ siendo $a \in A$ y $b \in B\}$

¿Cómo se representa gráficamente?

22.- **Sean $A = \{3, a, 5, x\}$ $B = \{a, b\}$, $AxB = \{$**

____

____$\}$

23.- ¿Es en general $AxB = BxA$? ________

24.- Demostar las relaciones siguientes $(A \cup B)xZ = (AxZ) \cup (BxZ)$

____

____

____

____

$(A \cap B)xZ = (AxZ) \cap (BxZ)$

____

____

____

____

25.- Relaciones. La **relación** entre dos objetos es una idea intuitiva básica. Se puede expresar indicando los dos objetos y entre ellos el nombre que describe la relación. Así:

a. 4 es ______________ que 5.

b. 3 ______________ 3.

c. La luna ______________ la Tierra.

d. Juan ______________ Pedro.

En general se indica a $\Re$ b y se dice que a *tiene la relación R con b.*

26.- *Relación entre elementos de dos conjuntos*. En general, si $a \Re b$, a pertenece a un conjunto A y b a un conjunto B (puede ser eventualmente $A = B$). Identifique en los ejemplos anteriores los conjuntos A y B e indique casos en los que se cumple la relación y casos en que no se cumple.

a. A = ______________________________ B = ______________________________

b.

____

____

____

c.

____

____

____

d.

____

____

____

27.- Definición de la relación usando el concepto de producto cartesiano.

28.- **Dominio y recorrido de una relación**. Sea a $\Re$ b con $a \in A$ y $b \in B$. Se llama *dominio* de la relación al subconjunto de las a $\in A$ para los cuales vale la relación. Se llama *recorrido* o *rango* de la relación al conjunto de los b para los cuales la relación es válida. Sea $A = \{2, 4, 6\}$ $B = \{2, 3, 4, 9\}$ Sea la relación $a > b$ con $a \in A$ y $b \in B$.

a. Hallar el dominio y el recorrido de R

dominio de $R = \{$ ______________________________ $\}$

recorrido de $R = \{$ ______________________________ $\}$

b. Representar la relación como producto cartesiano y ver que subconjunto del producto representa la relación.

29.- **Relacion de equivalencia**. Una relación R definida entre los elementos de A se denomina *relación de equivalencia* si tiene las propiedades siguientes (x, y, z pertenecen a A)

a. es *reflexiva*, es decir, Para todo x, $x\ R\ x$.

b. es *simétrica*, es decir, Para todo x y todo y, $x\ R\ y \to y\ R\ x$.

c. es *transitiva*, es decir, Para ____________, $x\ R\ y \bigwedge y\ R\ z \to x\ R\ z$.

Averigüe que es una relación anti-simétrica y una relación asimétrica.

Dar elemplos de relaciones:

a. de equivalencia.

____

____

____

b. reflexiva y transitiva; no simétrica.

____

____

____

c. simétrica; no reflexiva ni transitiva.

____

____

d. transitiva; no reflexiva ni simétrica.

---

e. relflexiva y simétrica; no transitiva.

30.- *Division en clase de equivalencia*. Si entre todos los elementos de un conjunto A está definida una relación de equivalencia; podemos juntar todos los elementos a uno dado (es decir que tienen la relación R de equivalencia con él) en un subconjunto de A. Tal subconjunto es una clase de equivalencia de A.
Supongamos que seguimos ente proceso de reunión para todos los $x \in A$.
-¿Puede quedar algún elemento que no pertenezca a ninguna clase de equivalencia? ____
-¿Puede un elemento pertenecer a dos clases de equivalencia diferentes? ____

Se tiene pues la partición en clases de equivalencia es una subdivisión completa de A en conjuntos disjuntos.
Dar ejemplos de relaciones de equivalencia y de las subdivisiones en clases que originan.

31.- *Funciones.* Una función del conjunto X en el Y es una *relación* tal que para *cada* elemento $x \in X$ le corresponde un *único* $y \in Y$. Se indica $f(x) \to Y$ ó $X \to Y$ ó $y = f(x)$. Indicar los gráficos las relaciones entre elementos mediante flechas. Relación que no es Función.

Dar ejemplos de Funciones numéricas y no numéricas

32.- *Tipos de Funciones.* Son usuales las siguientes denominaciones de casos especiales de funciones (X se refiere al dominio y Y al rango o recorrido):
a. *Función Inyectiva:* a diferentes elementos de X le corresponden diferentes elementos de Y.
b. *Función Sobreyectiva:* todo elemento de Y es correspondiente de alguno de X.
c. a. *Función Biyectiva:* es inyectiva y sobreyectiva.

Distinguir en las siguientes *relaciones* cuáles son funciones y que tipo son o no son:

- x es subordinado de y

- y es satélite de x

- $y = x2$ $(x, y$ *reales*$)$

- $n \leftarrow n + 1$ (n entero)

- $(a, b) \rightarrow (a + b)/2$

- lanzamientos de un dado $\rightarrow$ número que salió

- proposición lógica $\rightarrow$ su valor de verdad

- persona $\rightarrow$ nombre propio
