Guía 3. Estructuras Algebráicas

Carlos Domingo

Unviersidad de Los Andes, Venezuela

1.- Hemos visto las ideas básicas relacionadas con el concepto de conjunto. Un conjunto abstracto particularmete útil es el de los números. En gran parte su utilidad reside en que con ellos podemos "calcular". Es decir definir "operaciones" $(+, x, \backslash$ ó $-)$ que producen números. Por ejemplo la suma de dos números naturales $(1, 2, 3, 4, ...)$ es un número natural.
Si consideramos esta operación como una función de dos variables y N es el conjunto de los números naturales.

¿Cuál es el dominio de la función?

____

____

____

____

____

¿Cuál es el rango o recorrido?

____

____

____

____

____

¿Son los mismos si consideramos la multiplicación?

¿Qué pasa si consideramos las operaciones inversas de las anteriores? (resta y división)

2.- Los números y la suma no son los únicos conjuntos y operaciones que tienen la propiedad de que un par de elementos del conjunto le corresponde 1 elemento del mismo conjunto. Considere estos ejemplos y diga cúales tienen la propiedad

a. T = {desplazamientos rectilíneos de un punto en un plano} Operación de dos traslaciones t1, t1: realizar t1 y luego t2.

b. Operación definida por la tabla (+), conjunto {a,b,c} (si es b ___ b = c)

(+)

(+)	**a**	**b**	**c**
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

c. Operación definida por la tabla (*), conjunto {a,b,c}

(*)

(*)	**a**	**b**	**c**
a	a	b	c
b	d	e	c
c	s	b	p

d. H = {a,b,c} (.) dada por:

(.)

(.)	**a**	**b**	**c**
a	a	b	c
b	c	a	b
c	c	b	a

e. C ={hileras de letras}, operación: poner una hilera a continuación de la otra.

f. P ={proposiciones lógicas}, operación: $\bigwedge$ (el "y" lógico).

g. Dar otros ejemplos

3.- Cuando ocurre que la operación entre dos elementos del conjunto nos vuelve a dar un elemento del conjunto se dice que el conjunto es **cerrado** respecto de la operación.

¿Qué importancia puede tener esta propiedad de cierre?

4.- Esta multiplicidad de ejemplos de conjunto C en las que puede definirse una función $f(CxC) -> C$ ha llevado a estudiar este tipo de funciones (operaciones) en más detalle. En principio los conjuntos y funcioness pueden definirse arbitrariamente como se ve en los ejemplos anteriores. Pero para que la operación tenga algún interés debe tener ciertas propiedades que se correspondan a relacione importantes que se hallan en la realidad, es decir las operaciones deben ser "modelos matemáticos" de operaciones significativas con objetos reales. Veamos los tipos más usuales de estas funciones o estructuras.

5.- Grupo - Es un conjunto *cerrado* respecto de una operación **asociativa** con **cero** e **inverso**. Es decir:

a. si $a \in G \wedge b \in G -> a\ (+)\ b \in G$

b. $(a\ (+)\ b)\ (+)\ c = a\ (+)\ (b\ (+)\ c)$

c. Existe un $e \in G$ tal que para todo $a \in G$ es $a\ (+)\ e = e\ (+)\ a = a$

d. Dado $a \in G$ existe un $a' \in G$ tal que $(+)\ a' = e$

Ver en los ejemplos 2.- a.,b.,c.,d.,e.,f., cuales forman un grupo. Indicar el elemento neutro. Si no forman decir porqué.

6.- Decir cuales conjuntos forman un grupo con las operaciones indicadas. Indicar cuál es el elemento neutro.

a. Números naturales. Operación $+$

b. Números enteros. Operación $+$

c. Números enteros. Operación x

d. Números fraccionarios. Operación x

e. Rotaciones de una figura en el plano. Operación a (+) b: hacer primero rotación de ángulo a y luego la de ángulo b.

f. Números con 1 decimal. Operación: multiplicación seguida de redondeo a un decimal. (considere $0.2x0.8x10.5$)

g. Rotaciones de una figura en el espacio de 3 dimensiones

h. Matrices de $2x2$. Operación: producto de matrices:

A			B			AXB	
a	b	por	e	f	igual	ae	bg
c	d		g	h		____	____

¿Qué pasa si consideramos sólo las matrices no singulares? (con inversa).

i. Los conjuntos con la operación intersección () (y con la operación Unión?).

j. Los polinomios de grado $<= n$ con la operación "suma de polinomios".

k. Las proposiciones lógicas con la operación $\wedge$.

7.- Un grupo se llama conmutativo o abeliano si, además de las operaciones indicadas en 5., la operación (+) es **conmutativa**. Es decir: a (+) b = b (+) a. Decir cuáles de los grupos vistos en 2. y 6. son abelianos

___

___

___

___

8.- Entre muchos entes matemáticos de un conjunto existen **dos** operaciones que pueden relacionarse entre ellas. Indique las que conozca en los ejemplos 2. y 6. (formen o no un grupo).

___

___

___

___

9.- Anillo - Es un grupo cerrado respecto de 2 operaciones (+) y (x) que es un grupo abeliano respecto de (+) y tal que la (x) es asociativa y distributiva respecto de (+). Es decir, si a, b, c pertenecen a A
a. a (+) b $\in$ A; (a (+) b) (+) c = a (+) (b (+) c);
existe e|a (+) e = e (+) a = a; existe a'|a (+) a' = e; a (+) b = b (+) a;

b. a (*) b $\in$ A; (a (*) b) (*) c = a (*) (b (*) c);
c. (a (+) b) (*) c = (a (*) c) (+) (b (*) c); a (*) (b (+) c) = (a (*) b) (+) (a (*) c);
El anillo se llama **con unidad** si existe un elemento u tal que: a (x) u = u (x) a = a para todo a $\in$ A
El anillo es conmutativo si a (x) b = b (x) a.

Discutir en los ejemplos de 2. y 6. cúales forman anillo, ver si hay unidad y cuáles anillos son conmutativos.

10.- Demostrar que si el anillo es conmutativo la distributividad a derecha se deduce de la distributividad a izquierda.

11.- Dominio de integridad, D, es un anillo de conmutación con unidad en el cual si a,b,c pertenecen a D entonces c (x) a = c (x) b -¿ a = b (multiplicación). Esta propiedad equivale a decir: que r (x) s = 0 -¿ r = 0 para todo s (demostrar)

12.- Decir qué ejemplos de 2. y 6. son dominios de integridad.

13.- Cuerpo - Es un dominio de integridad tal que todo elemento menos el neutro tiene un inverso multiplicativo. Es decir para todo a $\in$ k y a diferente de e existe a' tal que a a' $=$ u.

¿Cuáles de los ejemplos en 12. son Cuerpos?

14.- Algebra de Boole - Es un conjunto con dos operaciones idempotentes, conmutativas, asociativas respectivamente distributivas, entre cuyos términos tienen una relación de inclusión reflexiva, antisimétrica y transitiva ($=$) consistente con las operaciones, con dos cotas universales y una operación de complementación involutiva que sigue la ley dual (De Morgan)

Es decir:

15.- ¿Qué es un conjunto parcialmente ordenado? ¿Verdad que esta pregunta debería estar al principio?

—

Fin del documento de Estructuras Algebráicas. Licencia pendiente.