Guía 1. Lógica

Carlos Domingo, Jacinto Dávila

Unviersidad de Los Andes

1.- Considere el siguiente diálogo:

```
-¿Para qué sirve la lógica?.
-Para explicar para qué sirve la lógica.
```

¿Tiene sentido? ¿Tiene lógica?

2.- Los lógicos suelen afirmar que existen ciertas palabras cuyo significado trasciende todo tema particular y, por tanto, se les puede considerar "palabras lógicas". La palabra "y" y la palabra "0" son dos ejemplos.

¿Se te ocurren otros ejemplos?

¿Cuál es el significado de estas palabras?

3.- Si “o” significa lo que dice esta tabla:

Semántica de la o

p	**q**	**p o q**
verdad	verdad	verdad
verdad	falso	verdad
falso	verdad	verdad
falso	falso	false

e “y” significa lo que dice esta otra tabla:

Semántica de la y

p	**q**	**p y q**
verdad	verdad	
verdad	falso	
falso	verdad	
falso	falso	

¿Cuál es el significado de “y/o”?.

______

______

4.- Una proposición es una oración que se puede asociar con un valor de verdad. Es decir, puede ser verdadera o falsa. El lenguaje de la lógica proposicional, o de la lógica de enunciados, se construye sobre proposiciones. Algunas veces las proposiciones son representadas por letras como p, q, r, s, w.
Para decir que p es ___________ decimos que p = V. Dualmente, p es falsa si p = ___

5.- Ocúpese de asignar valores a las proposiciones siguientes (a este, los lógicos lo llaman un ejercicio de interpretación en lógica proposicional):
p = 3 es menor que 5, p = ___
q = un triángulo tiene 4 lados, q = ___
r = Ecuador está en America, r = ___
s = Existe un círculo perfecto, s = ___
w = El rey de Venezuela es ateo, w = ___
t = Los rectángulos son obligatorios, t = ___
u = la oración u es una mentira, u = ___
z = la oración z es improbable, z = ___
(NOTA: "u" y "z" son casos (muy) difíciles).
Ahora discuta los casos difíciles y sugiera como podrían evitarse esas dificultades.

6.- Las prosiciones anteriores son llamadas **proposiciones simples**. Las proposciones simples se suelen mostrar como una oración con sujeto y predicado, pero no tienen que ser así necesariamente (piense en un ejemplo). Decidir sobre la verdad o falsedad de una proposición puede conducir a problemas científicos o filosóficos no resueltos.

En lo que sigue trataremos un problema más simple: a) Supondremos que siempre se puede asignar a una proposición bien el valor v (verdadera) o bien el valor f (falso). De esta forma, se comporta como una variable que puede adoptar uno de los valores; y b) Consideremos **proposiciones compuestas** formadas por dos o más proposiciones simples y discutiremos que valor de verdad debemos asignarles cuando se conocen los valores de verdad de las simples.

7.- Vamos a considerar el caso simple de una proposición compuesta formada por dos proposicones simples unidas por un "y". Juzgue el valor de que daría a cada una y al conjunto en los siguientes ejemplos, suponiendo las definiciones en los problemas previos.
w = Ecuador es un país y Ecuador está en América, es decir: p y q.
u = El caracol es un animal y es un vertebrado = s y t.
Un banco le dará crédito al Sr. Fulano si es verdadero que:
r = el Sr. Fulano es solvente y el Sr. Fulano tiene los documentos en regla = a y b

¿En qué casos le daría crédito? (para valores de a y de b).

___

___

___

8.- Considere las tablas en el problema 3. La tabla inferior puede considerarse como la definición de la operación "y" (algunas veces se escribe $\bigwedge$, el techito, ó **&** ó $\hat{\cdot}$) a partir de los valores de p y q (de la misma manera que la tabla pitagórica define la multiplicación).
Note que nuestra variables p y q sólo pueden tomar los valores ___ o ___, mientras que una variable numérica puede adoptar infinidad de valores.

9.- ¿Coincide estrictamente la definición de ese "y" con el "y" en Español?

10.- ¿Considere ahora proposiciones compuestas formadas por dos simples y la palabra "o".
w = Suiza está en Europa o Suiza está en Asia = ___
s = El gato es un reptil o el gato es un pez = ___
t = El maíz es un vegetal o el maiz es comestible = ___
Un banco dará crédito al Sr. Sutano cuando sea verdadero que:
r = El Sr. Sutano es solvente o el Sr. Sutano es amigo del gerente = ___

¿Cuańdo se da crédito al Sr. Sutano?
A partir de esos ejemplos, dadas dos proposiciones p y q cualesquiera ¿cuándo se diría que p ó q es verdadera?

___

___

___

11.- La tabla inicial en el problema 3 define la operacion "o" (algunas veces se representa con $\bigvee$, la canalita)

12.- ¿Coincide la definición de "o", con el "o" en Español?

13.- El "o" de un lenguaje natural, como el Español, se llama en lógica "o" exclusivo, mientras que el "o" simple en lógica suele ser el "o" inclusivo. Construya la tabla de verdad para el o exclusivo (o excluyente):

Semántica de ó (o exclusivo)

p	**q**	**p ó q**
verdad	verdad	?
verdad	falso	?
falso	verdad	?
falso	falso	?

14.- Las proposciones compuestas que expresan una condición son muy importantes en Matemáticas y en Computación. Es muy útil definir rigurosamente su semántica. Considere las proposicones simples:
p = La temperatura llega a 80 grados. q = La cera se funde.
w = si p entonces q = si la temperatura llega a 80 grados, la cera se funde.

Suponga que se dan los ____ casos posibles de variantes de valores para p y q. ¿En cuáles casos w se podría considerar verdadera y en cuáles falsa?

____

____

____

Semántica de si .. entonces ..

p	q	si p entonces q
verdad	verdad	?
verdad	falso	?
falso	verdad	?
falso	falso	?

La decisión de como conviene asignar valores a w = si p entonces q (o $p- > q$, como otras veces se escribe) ha sido muy discutida en la historia de la lógica. Se ha convenido que w es falsa SOLO SI p es verdadera y q es falsa.
A esta operación se le llama implicación (material).

15.- ¿En cuáles casos coincide la tabla con el sentido usual de las oraciones si ... entonces .. en Español?.

____
____
____

16.- Suponga que si p entonces q es verdadera,
a) ¿Es necesario que p sea cierta para que q sea cierta? ______
b) ¿Es suficiente que p sea cierta para que q sea cierta? ______

17.- Considere ahora el caso con si p entonces q y si q entonces p. Complete la tabla siguiente:

Semántica de q equivalente a p

p	**q**	**q − > p**	**p − > q**	**(p − > q) y (q − > p)**
verdad	verdad	?	?	?
verdad	falso	?	?	?
falso	verdad	?	?	?
falso	falso	?	?	?

a) ¿Es necesario que p sea cierta para que q sea cierta? ______
b) ¿Es suficiente que p sea cierta para que q sea cierta? ______

18.- La propsición compuesta (si p entonces q) y (si q entonces p) se denomina **equivalencia** y se suele escribir $p <-> q$.

¿Cómo se justifica el llamarlas equivalentes?
Nótese que si $p <-> q$ entonces que p sea cierto es condición necesaria y ______________ para que q también lo sea.

____

____

____

____

19.- En Matemáticas es muy usual tener que demostrar que dos afirmaciones p y q son equivalentes. Se suele decir que p es *condicion necesaria y suficiente* para q. Para demostrarlo es preciso probar que $p-> q$ y que $q-> p$.
Para probar $p-> q$, se suele asumir que p es cierto y proceder con la prueba de q.
Ejemplo: Demostrar que para que un número sea divisible por 6 es necesario y sificiente que lo sea por 2 y por 3 (Recuerde el teorema de divisibilidad que dice: si a*b es divisible por k entonces a es divisible por k o b es divisible por k).

20.- La negación de una proposición es también una proposición. ¿Cómo es su tabla de verdad?

21.- Una **prueba lógica** es una secuencia de fórmulas que se "conectan" unas con otras. Así, si nos dicen que las siguientes proposiciones son ciertas:

si p entonces q.

si q entonces r.

p = v.

si p entonces q.

q = v.

si q entonces r.

---

r = v.

Una prueba es un argumento válido.

22.- En lógica existen ciertas **reglas de inferenica**, que parece ser formas genéricas para los argumentos. La más conocida se llaman **modus ponens**:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{A} = \text{v} \\ \text{si A entonces B}\end{array}}{\text{B} = \text{v}}$$

Noten que esta A y B son variables que representan a cualquier proposición.
Otra regla de inferenica menos popular, pero sumamente poderosa es computación es la **modus tollens**:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{si A entonces B} \\ \text{no B(ó B} = \text{f)}\end{array}}{\text{no A (ó A} = \text{f).}}$$

23.- Otra regla de inferencia, conocida como **Resolución**, ha sido convertida en un sistema para pruebas automático y ha sido implementada en la plataforma y lenguaje de programación para **Inteligencia Artificial** PROLOG.
A partir de este texto:

```
b :- a.
a.
```

Un programa Prolog (de los muchos que hay), respondería a la consulta

```
? b.  (que significa que asumo que b es falso)
```

con un

```
true
```

queriendo decir que el sistema REFUTA (niega) que b sea falso (el *true* es por Sí! puede probar que no es falso). Es decir, b es cierto.

24.- Para apreciar la utilidad de estas herramientas lógicas, muchas personas parecen preferir el uso de proposiciones más significativas (es decir, más fácilmente leíbles). Considere el siguiente **Programa Lógico**:

```
fiebre :- infeccion.
infeccion :- colonia_bacterial.
infeccion :- virus.
mas_leucocitos :- fiebre, \+(caso_raro).
```

Este texto es la codificación para un sistema Prolog de una base de conocimiento en la que 1) una infección implica fiebre, 2) una colonia bacterial implica una infección, 3) un virus implica una infección y 4) hay más leucocitos en el cuerpo si hay fiebre y no es un caso raro.

Un "paciente" que se presente con:

```
virus.
```

podría conducir a la prueba de que:

```
?  fiebre.
true.
```

25.- La lógica en los items anteriores es la lógica de proposiciones. Esta forma de lógica tiene una expresividad limitada. Esto significa que es más difícil o incluso imposible plasmar ciertas verdades en ese lenguaje. Por ejemplo, escriba que todos los números naturales son enteros.

Existen otras formas de lógica mucho más expresivas que la lógica proposicional. El mismo Aristóteles, padre de la lógica, hace más de 25 siglos, propuso la primera: La **lógica de los silogismos**. Los silogismos son una forma particular de argumentos que emplean la siguiente representación de proposiciones:

```
Todo P es M
```

ó Algún P es M
ó Ningún P es M en la que P y M son **términos variables**. Es decir, P y M puede

ser remplazados por términos que describen objetos particulares. Por ejemplo:

`Toda ballena es mamífero.`

26.- La forma más popular de lógica con variables, sin embargo, es ahora la **lógica de predicados**, propuesta hace 2 siglos por Frege. Es muy popular en Computación, al punto que existen sistemas capaces de ejecutarla. Por ejemplo, con esta forma:

```
hij_(jesus,jose)
```

podríamos representar en Prolog que Jesús es hijo (o hija) de José. Una de las virtudes más interesantes de la lógica de predicados es la posibilidad de emplear cuantificadores sobre términos variables.

Por ejemplo, para decir que si un individuo es hijo de otro entonces el segundo es padre del primero y vale para todo padre y todo hijo, diríamos en Prolog:

```
padre(X,Y) :- hij_(Y,X).
```

En este ejemplo, la forma precisa de traducirlo a la lógica de predicados es:

`Para todo X y todo Y, si Y es hijo de X entonces X es ______ de Y.`

27.- La expresividad de la lógica de predicados, inclusive de subconjuntos suyos como la llamada **lógica de primer orden**, es notable cuando se trata de representar relaciones que se definen en términos de sí mismas. Las llamadas definiciones recursivas o recurrentes son sumamente útiles en matemáticas. Por ejemplo, para definir a los números, uno podría decir (siguiendo a Peano) que:

```
el cero es un número.
si n es un número, el sucesor de n también lo es.
```

¿Donde está la definición recursiva en este ejemplo?. ¿Podemos escribir definiciones resursivas en lógica de proposiciones?

28.- Las definiciones recursivas pueden ser muy útiles para representar relaciones sobre conjuntos cuyo tamaño no está definido a priori. Por ejemplo, este:

```
ancestro(X,Y) :- hijo(Y,X).
ancestro(X,Y) :- ancestro(X,Z), ancestro(Z,Y).
```

Este es un programa lógico quen nos permitiría computar la línea de ascendencia filial a partir de un registro de padres e hijos en una familia dada. Pruébelo con la suya. ¿Qué otras reglas se le ocurre incluir?

fin del documento de Lógica. Mayo 2007.