



INGENIERÍA  
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES  
MÉRIDA VENEZUELA



# INDUCCIÓN MATEMÁTICA

---

Por Carlos Domingo. Editado por Carmen Rodríguez y Jacinto Dávila  
Presentación elaborada por Gustavo Mejía

# INDUCCIÓN MATEMÁTICA

---

1. La estructura de un dominio de integridad la poseen los números enteros que fueron los entes matemáticos que primero reconoció la humanidad al formarse la actividad de “contar”.

---

Definamos pues un conjunto  $\mathbb{Z}$  (... -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...) con una operación  $+$  y otra  $\bullet$  (o simplemente indicada con blanco) con las siguientes propiedades [escribirlas para elementos  $a, b, c, d, \dots$  cualesquiera de  $\mathbb{Z}$ ]

- 1) Asociativa  $+$   $(a + b) + c =$  \_\_\_\_\_
- 2) Existe el elemento neutro, 0, de  $+$  \_\_\_\_\_
- 3) Existe inverso o elemento simétrico de  $+$  \_\_\_\_\_
- 4) Conmutativa sobre  $+$  \_\_\_\_\_
- 5) Asociativa sobre  $\bullet$  \_\_\_\_\_
- 6) Existe el elemento unitario de  $\bullet$  \_\_\_\_\_
- 7) Conmutativa sobre  $\bullet$  \_\_\_\_\_
- 8) Distributiva a la izquierda \_\_\_\_\_
- 9) Simplificación a la izquierda \_\_\_\_\_
- 10) Cierre de  $+$  y  $\bullet$  (son funciones de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ) \_\_\_\_\_

# INDUCCIÓN MATEMÁTICA

---

Estas propiedades, que fueron extraídas por la experiencia humana en la práctica de las operaciones  $+$  y  $\cdot$ , pueden considerarse definiciones de esas operaciones y junto con otras tres que veremos pueden tomarse como la definición de números enteros.

11) Entre los elementos de  $\mathbb{Z}$  existe una relación de igualdad que es

- reflexiva: Para todo  $a$  en  $\mathbb{Z}$ ,  $a =$  \_\_\_\_\_
- recíproca (o simétrica): Para todo  $a$  y  $b$  en  $\mathbb{Z}$ ,  $a = b \rightarrow$  \_\_\_\_\_
- transitiva: Para todo  $a$ ,  $b$  y  $c$  en  $\mathbb{Z}$ , \_\_\_\_\_

Los elementos que la cumplen se dicen iguales.

# INDUCCIÓN MATEMÁTICA

---

2. Con estos axiomas basta para demostrar una serie de propiedades que en álgebra elemental se dan como nuevas. Además las propiedades demostradas valen para cualquier dominio de integridad.

a) Distributividad a la derecha:  $(a + b) c =$  \_\_\_\_\_ (aplicar 7, 8, 7 a cada término)

b) Unicidad del cero. Si para todo  $a$  es:  $a + Z = a$  entonces  $Z = 0$

En particular para  $a = 0$  es:

$0 + Z =$ _____	hipótesis
$0 =$ _____	simétrica
$0 + Z =$ _____	por 2
_____ = _____	transitiva

c) Para todo  $a, b, c$  en  $Z$ ,  $a + b = a + c \rightarrow b = c$

Demostración:

$$a' + a = 0$$

$$a + a' = 0, \text{ etc 3 y 4}$$

$$a' + (a + b) = a' + (a + c), \text{ con 10 y la hipótesis asociativa.}$$

En el teorema anterior se basa la simplificación de términos en diferentes miembros.

# INDUCCIÓN MATEMÁTICA

---

d) Para todo  $a$  hay un solo  $x$  tal que:  $a + x = 0$ .

Demostración: (las demostraciones de unicidad suelen hacerse por el absurdo).  
Suponemos que  $x, y$  son dos números diferentes y decimos.

$$\begin{aligned} a + x &= a + y \\ \underline{\quad} &= \underline{\quad}, \text{ por c) } \end{aligned}$$

para concluir que \_\_\_\_\_ QEPD.

e) Para todo  $a, b$  en  $\mathbb{Z}$ , hay un solo  $x$  tal que:  $a + x = b$ .

Demostración:

Para ver que lo hay, hay que poner:

$$x = -a + b$$

Para ver que es único hagamos:

$$a + x = \underline{\quad} \text{ por c), una vez más.}$$

# INDUCCIÓN MATEMÁTICA

---

f) Para todo  $a$  en  $\mathbb{Z}$ , se tiene que  $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

Demostración:

$$\begin{aligned} a \cdot a &= a \cdot (a + 0), \text{ por 2 y 10} \\ &= a \cdot a + \underline{\hspace{2cm}}, \text{ por 8} \\ a \cdot 0 &= \underline{\hspace{2cm}}, \text{ por b) 7} \end{aligned}$$

g) Si  $a \cdot u = a$  para todo  $a$ , entonces  $u = 1$  (compárese con b).

Demostración:

En particular poniendo  $a = 1$ :

$$\begin{aligned} 1 \cdot u &= \underline{\hspace{2cm}} \\ u \cdot 1 &= \underline{\hspace{2cm}}, 8 \\ 1 \cdot u &= u \cdot 1 = 1 = 1 \cdot 1, \text{ transitiva y 6} \\ 1 \cdot u &= 1 \cdot 1, \text{ transitiva} \\ \underline{\hspace{2cm}} &= \underline{\hspace{2cm}}, \text{ simplificación} \end{aligned}$$

# INDUCCIÓN MATEMÁTICA

---

h) Si  $a b = 0$  o bien  $a = 0$  o bien  $b = 0$ .

Demostración:

Sea  $a b = 0$  y  $b \neq 0$

$a b = 0$ , por hipótesis

$a b = 0$  b, f) y transitiva

\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_, simplificación

i) El inverso del inverso de  $a$  es  $a$ .

$-(-a) = a$

$-a + a = 0$ , por 2

$-a + (-(-a)) = \underline{\hspace{2cm}}$ , 2 aplicada a  $-a$  ó  $-a$

$-a + a = -a + (-(-a))$ , transitiva

\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_, simplificación

j)  $(-a) b = -a b$

$(a + (-a)) b = \underline{\hspace{2cm}}$ , por 3 y distributiva

\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_, por f)

$a b + (-a b) = \underline{\hspace{2cm}}$ , por 2

$a b + (-a) b = \underline{\hspace{2cm}}$ , transitiva

\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_, simplificación

# INDUCCIÓN MATEMÁTICA

---

k)  $(-a)(-b) = ab$

$(-a)(-b) = -((-b)),$  por j)

\_\_\_\_\_  $= -(-\text{_____}),$  por j)

\_\_\_\_\_  $= \text{_____},$  por i)

l) desarrollar  $(a + b)(c + d)$

m) desarrollar  $(a - b)(c - d)$ , note que  $(a - b)$  es  $a + (-b)$



# INDUCCIÓN MATEMÁTICA

---

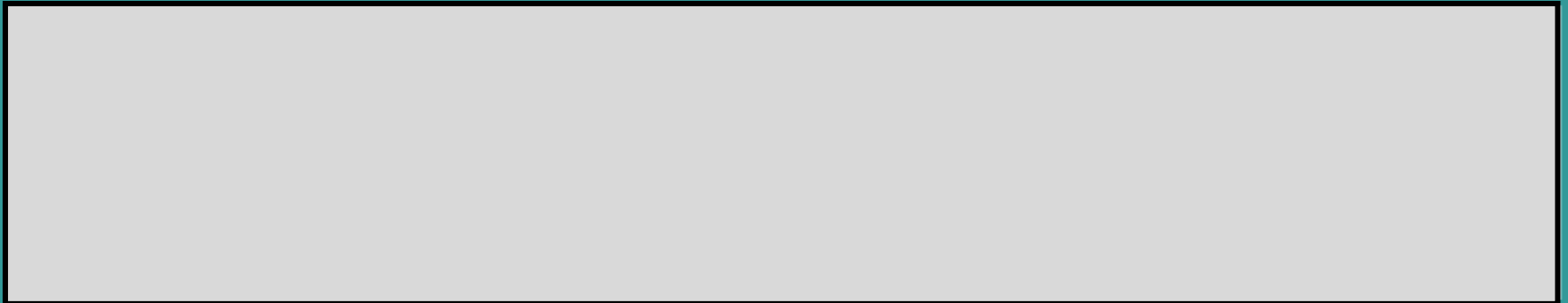
## 3. Relaciones de orden

Un dominio de integridad es ordenado si se pueden distinguir en él ciertos elementos llamados positivos  $Z^+ = \{..,a,b,c,..\}$  tales que:

a)  $a \in Z^+$  tal que  $b \in Z^+ \Rightarrow a + b \in Z^+$   
 $a \in Z^+$  tal que  $b \in Z^+ \Rightarrow a \cdot b \in Z^+$

b) Tricotomía:  $a$  es positivo,  $a$  es cero o bien  $-a$  es positivo.

12) El conjunto  $Z$  es ordenado. ¿lo será el de los elementos  $(a + b)$ , con  $a, b$  enteros?



# INDUCCIÓN MATEMÁTICA

---

13) Se define  $a < b$  si y sólo si  $b - a$  es positivo. También se indica  $b > a$ . Por comodidad se define  $a \leq b$  si  $a < b$  ó  $a = b$ . Se indica también  $b \geq a$ .

a)  $b \in \mathbb{Z}^+ \leftrightarrow b > 0$

b)  $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$ , ley transitiva

c)  $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

d)  $a < b \Rightarrow ac < bc$ ,  $c$  positivo

e)  $a > 0 \Rightarrow -a < 0$

## 4. Principio del buen ordenamiento (del buen orden)

(Ver también en [http://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto\\_bien\\_ordenado](http://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto_bien_ordenado))

Un conjunto se dice ordenado si entre dos cualesquiera de sus elementos se da la relación  $a < b$  ó bien  $a = b$  ó bien  $b < a$ .

El conjunto de los enteros es ordenado.

Un conjunto se dice bien ordenado si todo subconjunto no vacío del mismo tiene un elemento menor que todos los demás (primer elemento).

# INDUCCIÓN MATEMÁTICA

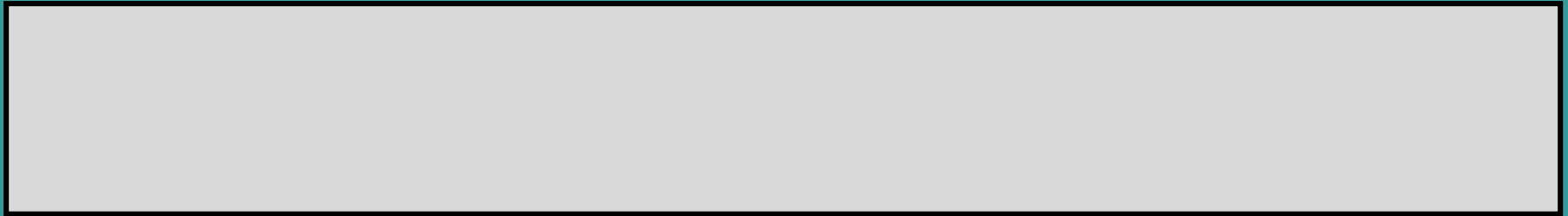
---

Agregamos el axioma:

14) El conjunto de los enteros es bien ordenado.

En un conjunto "parcialmente ordenado" (COPO en Español, POSET en Inglés) para algunos elementos  $a, b$  no se cumple ni  $a < b$ , ni  $a = b$ , ni  $b < a$ .

5. Dar ejemplos de conjuntos ordenados pero no bien ordenados. Dar ejemplos de conjuntos parcialmente ordenados.



6. No hay ningún entero entre 0 y 1.

Demostración:

Sea  $0 < c < 1$

Sea  $C = \{ \text{todos los } c \text{ tales que } 0 < c < 1 \}$

Sea  $m$  el menor de los  $c$  (axioma 14)

# INDUCCIÓN MATEMÁTICA

---

Se tiene que  $0 < m < 1$  y por tanto:

$m \cdot 0 < m \cdot m < \underline{\hspace{2cm}}$ . Sin embargo,  $m^2$  es un entero mayor que cero pero menor que  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

Luego es menor que 1. Luego  $m$  no es el menor de los  $c$ . Este teorema permite ver el siguiente que es la base del principio de inducción.

7. Si un conjunto  $C$  de enteros positivos contiene al 1 y siempre que contenga al  $n$  contiene también al  $n + 1$ , entonces contiene a los enteros positivos.

Dar un argumento intuitivo y decir por que no es una demostración:

# INDUCCIÓN MATEMÁTICA

---

Demostración:

Supongamos un  $C$  tal que  $1 \in C$  y Si  $n \in C \rightarrow n+1 \in C$ .

Sea  $C'$  el conjunto de los enteros que no pertenecen a  $C$ .

Supongamos tal  $C'$  no vacío. Por 14) tiene un primer elemento.

Sea ese elemento  $m$ . ¿Puede ser  $m = 1$ ? \_\_\_\_\_. Es decir, entonces es  $m$  es  $| > 1 | = 1$   
 $| < 1 |$

(tache los que no correspondan, cuando entienda las razones).

Además  $m - 1 \in C$  ¿por qué?

# INDUCCIÓN MATEMÁTICA

---

Pero entonces  $m - 1 + 1 \in$  \_\_\_\_\_ por \_\_\_\_\_

Entonces \_\_\_\_\_  $\in C$  contra la hipótesis.

Luego  $C'$  debe ser \_\_\_\_\_

8. Principio (teorema) de inducción completa.

Sea  $p$  una proposición significativa para los enteros. Supongamos que:

- $p$  es verdadera para 1
- Si  $p$  es verdadera para  $k$  lo es para  $k + 1$

Entonces  $p$  es verdadera para todo número.

Demostración:

Basta repetir el teorema anterior considerando el conjunto  $C$  para el cual  $p$  es verdadera.

9. Con el principio de inducción completa se pueden demostrar (o definir) en un número finito de pasos propiedades (o definiciones) que requerirían un número infinito de pasos.

# INDUCCIÓN MATEMÁTICA

---

Ejemplo:

a) Demostrar que la distributividad a izquierda (axioma 1-8) vale para cualquier  $n$ . Es decir:  
 $a(b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n) = a b_1 + a b_2 + \dots + a b_n$

Supongamos que vale para  $k$ :

Se demuestra que vale para  $k+1$ , pues suman a ambos miembros a  $b_{(k+1)}$

Además vale para  $k = 1$  pues

# INDUCCIÓN MATEMÁTICA

---

Luego:

b) Contraejemplo:

“Todo número es igual al siguiente”. Supongamos que  $k = k + 1$  (vale para  $k$ ).  
Sumando 1 a ambos lados de esa expresión tenemos

$k + 1 = (k + 1) + 1$ , es decir, resulta válida para  $k + 1$ .

Luego vale para todo número.

¿Qué piensa de esta demostración?



# INDUCCIÓN MATEMÁTICA

---

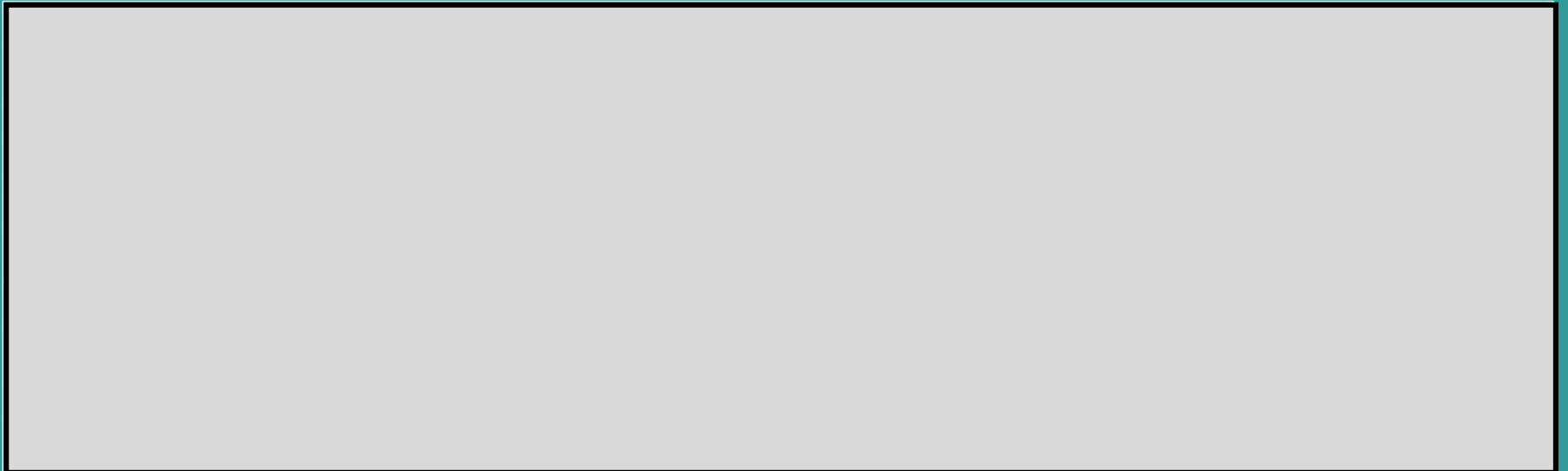
10. Otro enunciado del principio de inducción

Sea  $p$  una proposición referente a los enteros positivos.

Si de la suposición que es  $p$  verdadera para todo  $k < m$  resulta que es válida para  $m$  entonces es  $p$  válida para todo entero positivo.

Demostración:

Sea  $S$  el conjunto de los enteros positivos para los cuales  $p$  es falsa.



# INDUCCIÓN MATEMÁTICA

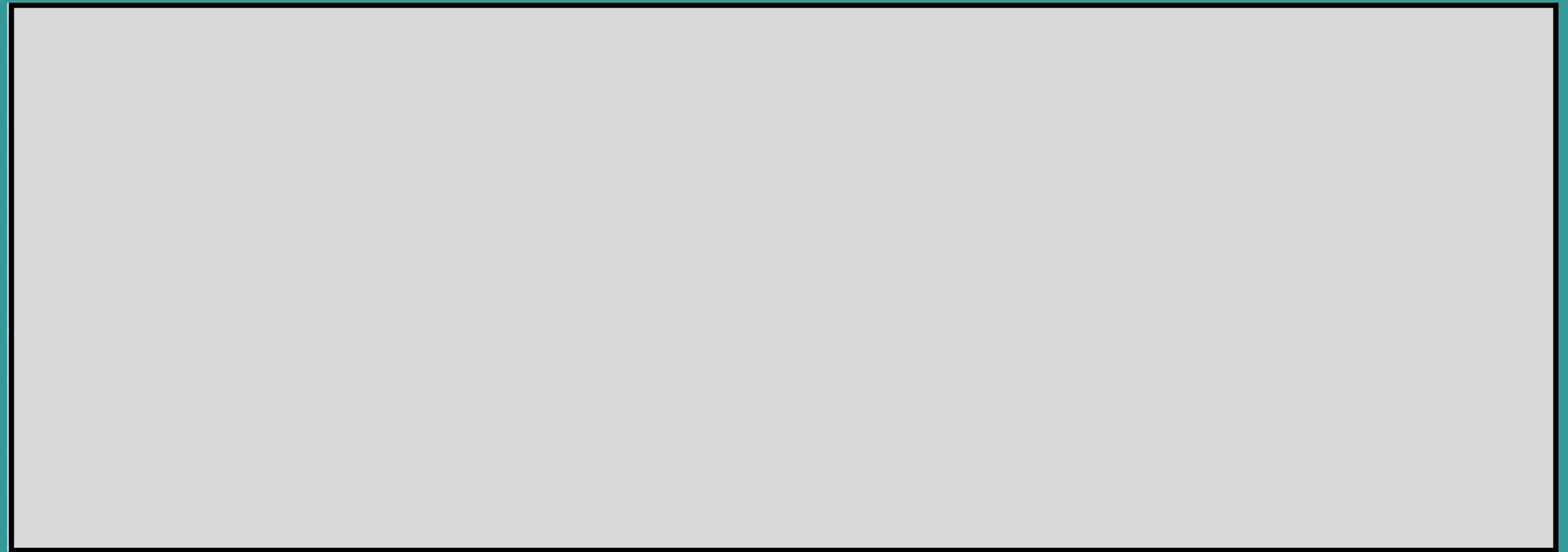
---

11- Definamos la potenciación así

$$a^1 = a$$

$$a^{(m+1)} = a^{(m)}a$$

Demostrar que  $a^{(m)} a^{(n)} = a^{(m+n)}$



fin del documento sobre inducción matemática. Licencia Pendiente.