Universidad de Los Andes, Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Sistemas
Matemáticas Discretas

Guía de Ejercicios Resueltos Conjuntos

1. Demostrar que $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ *(Propiedad Distributiva)*

   Para demostrar esta igualdad debemos probar primero que,

   $$(A \cap B) \cup C \subseteq (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

   Por simbología tenemos,

   $$\forall x[x \in (A \cap B) \cup C \to x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)]$$

   Por logíca tenemos que $p \to q$, donde p es: $x \in (A \cap B) \cup C$ y q sera: $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$, de modo que es necesario demostrar esta proposición.

   Entonces, por definición de la unión entre dos conjuntos se tiene que,

   $$x \in (A \cap B) \text{ ó } x \in C$$

   Mostraremos que,

   $$x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

   Ahora bien,

   1) Tenemos que $x \in C$, entonces $x \in (A \cup C)$ y $x \in (B \cup C)$. Por unión $x \in A$ ó $x \in C$ y $x \in B$ ó $x \in C$ ambas son verdaderas porqué estamos suponiendo que $x \in C$, por lo tanto $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$

   2) Tenemos $x \in (A \cap B)$, entonces $x \in A$ y $x \in B$. Tomando estas afirmaciones se tiene que $x \in (A \cup B)$ por unión $x \in A$ ó $x \in C$ por las afirmaciones esto es cierto y también tenemos $x \in (A \cup C) \Rightarrow x \in B$ ó $x \in C$. Por las afirmaciones esto también es cierto porqué $x \in B$, por lo tanto $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$ es verdadera.

   Ahora falta demostrar,

   $$(A \cup C) \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup C$$

   Procedemos igual,

   $$\forall x[x \in (A \cup B) \cap (B \cup C) \to x \in (A \cap B) \cup C)]$$

   Tenemos que $x \in (A \cup C)$ y $x \in (B \cup C)$, ahora consideremos 2 casos $x \in C$ ó $x \notin C$

   Mostremos que,

   $$x \in (A \cap B) \cup C$$

1) Supongamos que $x \in C$. Entonces $x \in (A \cap B) \cup C$ es verdadera

2) Supongamos que $x \notin C$. Entonces $x \in (A \cup C)$ necesariamente se tiene que $x \in A$. De igual manera, ya que $x \in (B \cup C)$, entoces $x \in B$ con esto mostramos que $x \in (A \cap B)$ y por lo tanto $x \in (A \cap B) \cup C$.

2. Demostrar que $A \subset B \leftrightarrow B' \subset A'$

   Para demoestrar esto debemos probar que,

$$A \subset B \rightarrow B' \subset A' \text{ y } B' \subset A' \rightarrow A \subset B$$

   Tenemos que, por lógica una proposición condicional es lógicamente igual a su contrarecíproca, quiere decir $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$

   Por esto tenemos que,

   1) Si $B' \not\subset A' \rightarrow A \not\subset B$

   Ahora procedemos a demostrar 1), supongamos que A y B son conjuntos tales que $B' \subset A'$ y mostremos que $A \not\subset B$, como por hipótesis $B' \not\subset A'$. Entonces, existe un elemento x que pertenece a B' pero no a A'. Es decir, existe un $x \in B'$ y $x \notin A'$. En otras palabras, existe x tal que $x \notin B$ y $x \in A$, esto precisamente dice que $A \not\subset B$ y así damos por demoestrado $B' \not\subset A' \rightarrow A \not\subset B$.

   2)

$$B' \subset A' \rightarrow A \subset B, \text{ aplicando lo anterior tenemos}$$
$$A \not\subset B \rightarrow B' \not\subset A'$$

   Tenemos como hipótesis que existe un $x \in A$ pero $x \notin B$, esto queire decir que $x \notin A'$ y $x \in B'$, esto es precisamente que $B' \not\subset A'$, por la hipótesis que $x \in B'$, hemos demostrado $A \not\subset B \rightarrow B' \not\subset A'$.