ASA 2011, loppukoe 11.11.2011 klo 12–16, MT2

(Huom: viisi tehtävää)

1. Halutaan testata, löytyykö taulukosta $A[1..n]$ vastalukua jollekin taulukon $B[1..n]$ luvulle; taulukot sisältävät kokonaislukuja. Esimerkiksi taulukoiden sisällöillä $[2,-4,-3,2]$ ja $[1,3,-1,-2]$ vastaus olisi "kyllä", koska niistä löytyy kaksikin vastalukuparia, $(2,-2)$ ja $(-3,3)$. Esitä tehtävän suorittava algoritmi ja arvioi sen aikakompleksisuus suhteessa taulukoiden kokoon n.

   ("Brute-force" 3 p, kertaluokkaa tehokkaampi 6 p.)

2. On valittava tehokkain kolmesta saman ongelman ratkaisevasta hajota-ja-hallitse-tyyppisestä algoritmista A, B ja C, jotka ratkaisevat ogelman (n-kokoiset tapaukset) seuraavasti:

   - Algoritmi A ratkaisee viisi kpl puolta pienempiä osaongelmia rekursiivisesti ja yhdistää niiden ratkaisut lineaarisessa ajassa.
   - Algoritmi B ratkaisee kaksi $(n-1)$-kokoista osaongelmaa rekursiivisesti ja yhdistää niiden ratkaisut vakioajassa.
   - Algoritmi C ratkaisee yhdeksän kpl $n/3$-kokoisia osaongelmia rekursiivisesti ja yhdistää niiden ratkaisut neliöllisessä ($O(n^2)$) ajassa.

   Mikä on kunkin algoritmin aikakompleksisuus asymptoottisen kertaluokan tarkkuudella? Mikä algoritmeista on tämän perusteella tehokkain? (6 p.)

3. Esitä prioriteettijonon käyttöön perustuvan lajittelualgoritmin periaate. Arvioi ja perustele menetelmän kompleksisuus. Onko kyseessä asymptoottiselta kompleksisuudeltaan optimaalinen lajittelumenetelmä? Perustele! (6 p.)

4. Ei-negatiivisille kokonaisluvuille n ja k määritellyt *Eulerin luvut* $E_{n,k}$ nousevat esiin mm. lajittelualgoritmien analysoinnissa. Eulerin luvut voi laskea seuraavilla palautuskaavoilla:

$$E_{n,k} = \begin{cases} 1, & \text{jos } k = 0, \\ (k+1)E_{n-1,k} + (n-k)E_{n-1,k-1}, & \text{jos } 0 < k < n \text{ ja} \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

   Laadi kaavoihin perustuva polynomisessa ajassa toimiva algoritmi Eulerin luvun $E_{n,k}$ laskemiseksi syöteluvuista n ja k. (Ol. $0 < k < n$). Arvioi algoritmin aikakompleksisuus. (6 p.)

5. *Väritettävyys*-ongelma nähtiin NP-vaikeaksi palautuksella, joka muuntaa 3SAT-ongelman tapauksen w verkoksi $G(w)$. Alla esitetään tähän palautukseen liittyviä väittämiä. Vastaa kuhunkin OIKEIN, jos väittämä on järkevä ja pitää paikkansa, tai VÄÄRIN, jos väittämä on järjetön tai ei pidä paikkaansa:

   (a) Tapaus w on konjunktiivisessa normaalimuodossa oleva propositiokaava.

   (b) Verkko $G(w)$ on lineaarisen kokoinen suhteessa kaavan w pituuteen.

   (c) Verkko $G(w)$ on eksponentiaalisen kokoinen suhteessa kaavan w pituuteen, mutta epädeterministinen Turingin kone voi muodostaa sen polynomisessa ajassa.

   (d) Laillisessa värityksessä jokaisella yhteen solmuun liittyvällä kaarella on eri väri.

   (e) Verkolle $G(w)$ muodostuu laillinen väritys asettamalla jokaiselle solmulle eri väri.

   (f) Verkon $G(w)$ laillinen väritys vaatii vähintään neljä eri väriä.

   (g) Kaavan w toteutuvuus ratkeaa selvittämällä verkon $G(w)$ minimaalisen solmupeitteen koko.

   (h) Jos kaava w on toteutuva, kolme väriä riittää verkon $G(w)$ lailliseen väritykseen.

   (i) Jos kaava w ei ole toteutuva, jokin verkon $G(w)$ laillisista värityksistä vaatii eksponentiaalisen monta väriä.

   (j) Palautus osoittaa, että jos propositiokaavojen toteutuvuus pystytään ratkaisemaan polynomisessa ajassa, niin *Väritettävyys* pystytään ratkaisemaan polynomisessa ajassa.

   (k) Palautus osoittaa, että jos *Väritettävyys* pystytään ratkaisemaan polynomisessa ajassa, niin myös 3-konjunktiivisten propositiokaavojen toteutuvuus pystytään ratkaisemaan polynomisessa ajassa.

   (l) Palautus osoittaa, että jos konjunktiivisessa normaalimuodossa olevien propositiokaavojen toteutuvuuden testaaminen vaatii eksponentiaalisen ajan, niin myös *Väritettävyys*-ongelman ratkaiseminen vaatii eksponentiaalisen ajan.

(6 p.)

(Yht. max. 30 p.)