

# 16

## Spectral Clustering

# 谱聚类

构造无向图，距离远的两点，权重值低；降维聚类



生命中最重要的问题，几乎都是概率问题。

*The most important questions of life are indeed, for the most part, really only problems of probability.*

—— 皮埃尔-西蒙·拉普拉斯 (Pierre-Simon Laplace) | 法国著名天文学家和数学家 | 1749 ~ 1827



- ◀ `sklearn.cluster.SpectralClustering()` 谱聚类算法
- ◀ `sklearn.datasets.make_circles()` 创建环形样本数据
- ◀ `sklearn.preprocessing.StandardScaler().fit_transform()` 标准化数据；通过减去均值然后除以标准差，处理后数据符合标准正态分布

## 16.1 谱聚类

**谱聚类** (spectral clustering) 思路是将样本数据看做是空间**结点** (node)，这些结点之间用**边** (edge) 连构成的**无向图** (undirected graph)，也叫**加权图**。无向图中，距离远的数据点，边的权重值低；距离近的数据点，在无向图中，边的权重值高。

用无向图聚类的过程很简单，切断无向图中权重值低的边，得到一系列子图。子图内部结点之间边的权重尽可能高，子图之间边权重尽可能低。

### 流程

这个思路虽然简单，但是实际操作需要一系列矩阵运算。

首先，需要计算数据  $\mathbf{X}$  之间的两两距离，并构造成距离矩阵  $\mathbf{D}$ 。然后，将距离转换成权重值，即**相似度** (similarity)，构造**相似度矩阵** (similarity matrix)  $\mathbf{S}$ ，利用  $\mathbf{S}$  可以绘制无向图。

之后，将相似度矩阵转化成**拉普拉斯矩阵** (Laplacian matrix)  $\mathbf{L}$ 。最后，**特征值分解** (eigen decomposition)  $\mathbf{L}$ ，相当于将  $\mathbf{L}$  投影在一个低维度正交空间。在这个低维度空间中，用简单聚类方法对投影数据进行聚类，并得到原始数据聚类。

下面通过实例，我们一一讨论谱聚类这些步骤所涉及的技术细节。

## 16.2 距离矩阵

图 1 给出 12 个样本点在平面上位置。计算数据**两两距离** (pairwise distance)， $\mathbf{x}^{(i)}$  和  $\mathbf{x}^{(j)}$  两个点之间欧氏距离  $d_{i,j}$ ：

$$d_{i,j} = \sqrt{(\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)})^T (\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)})} = \|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)}\| \quad (1)$$

其中， $\mathbf{x}^{(i)}$  和  $\mathbf{x}^{(j)}$  均为列向量。

图 2 所示为热图描绘的 12 个样本点两两欧氏距离构造的对称矩阵  $\mathbf{D}$ ；注意， $\mathbf{D}$  的对角线元素均为 0，这是因为观察点和自身之间距离为 0。色块颜色越浅，说明距离越近；色块颜色越深，说明距离越远。

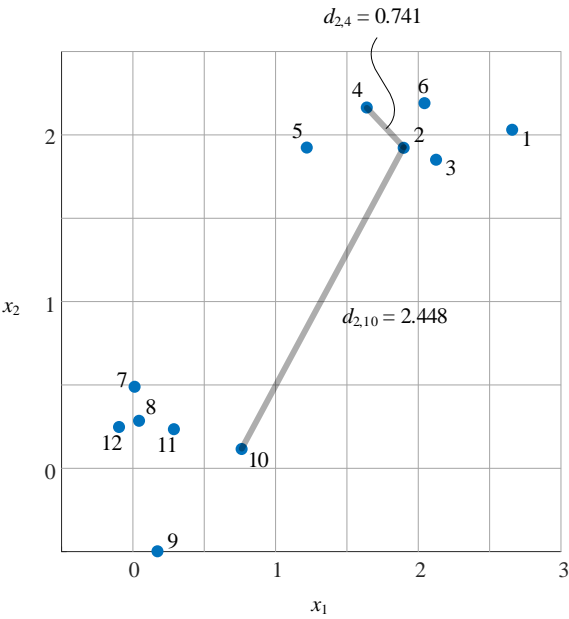


图 1. 12 个样本点平面位置

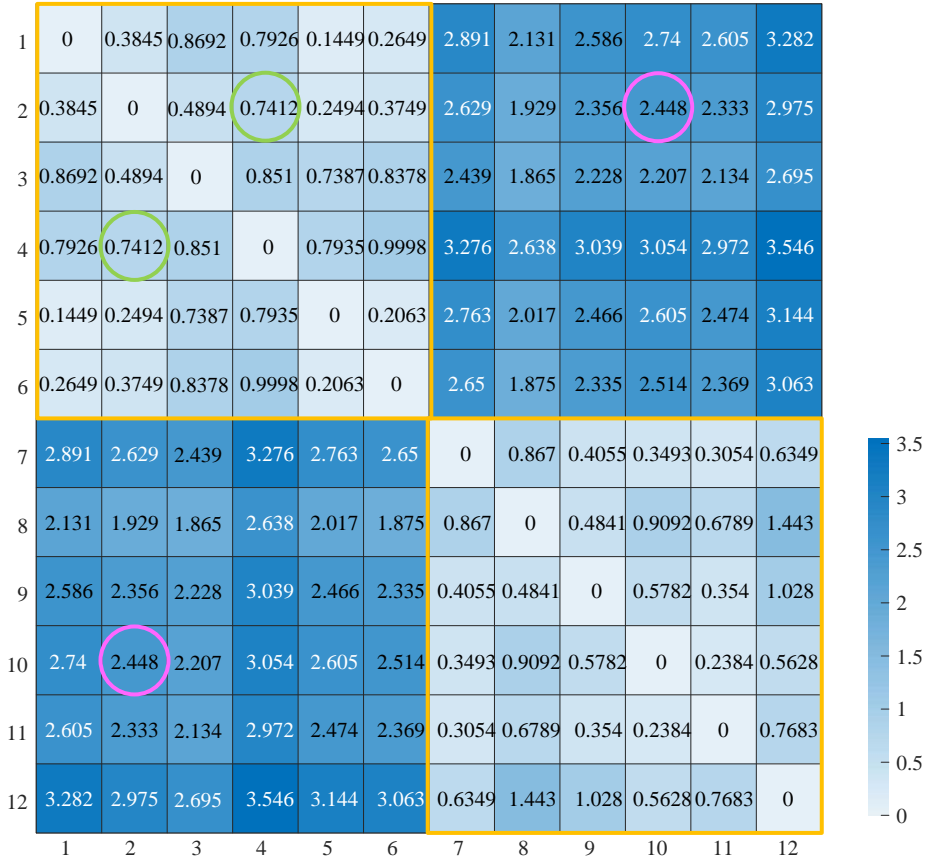


图 2. 12 个样本点两两欧氏距离构造的成对距离矩阵  $D$

## 16.3 相似度

然后利用  $d_{ij}$  计算  $i$  和  $j$  两点的相似度  $s_{ij}$ ，“距离  $\rightarrow$  相似度”的转换采用高斯核函数：

$$s_{i,j} = \exp\left(-\left(\frac{d_{i,j}}{\sigma}\right)^2\right) = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)}\|^2}{\sigma^2}\right) \quad (2)$$

相似度取值区间为  $(0, 1]$ 。 $\mathbf{x}^{(i)}$  和  $\mathbf{x}^{(j)}$  两个点距离越近，它们的相似性越高。任意点和自身的距离为 0，因此对应的相似度最大为 1。

$\sigma = 1$  时，两两距离  $d_{ij}$  和相似度  $s_{ij}$  两者关系如图 3 所示。

图 1 中，点  $\mathbf{x}^{(2)}$  和  $\mathbf{x}^{(10)}$  之间欧氏距离为  $d_{2,10} = 2.448$ ，点  $\mathbf{x}^{(2)}$  和  $\mathbf{x}^{(4)}$  之间欧氏距离为  $d_{2,4} = 0.741$ 。利用上式，可以计算得到，点  $\mathbf{x}^{(2)}$  和  $\mathbf{x}^{(10)}$  之间相似度  $s_{2,10} = 0.0025$ ，点  $\mathbf{x}^{(2)}$  和  $\mathbf{x}^{(4)}$  之间欧氏距离为  $s_{2,4} = 0.577$ 。

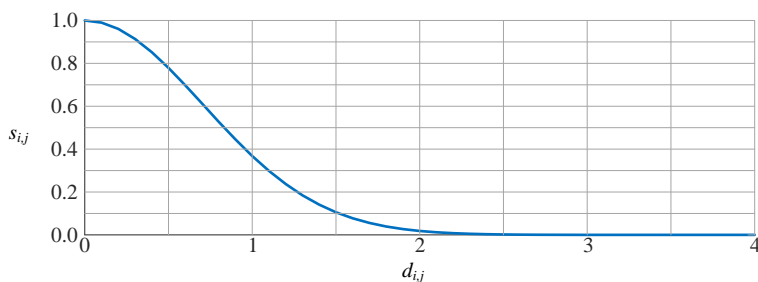


图 3. 欧氏距离和相似度关系

图 2 所示成对距离矩阵可以转化为图 4 所示**相似度矩阵** (similarity matrix)  $S$ 。 $S$  也叫**邻接矩阵** (adjacency matrix)。相似度矩阵  $S$  的每个元素均大于 0。请读者注意，一些教材将两两距离矩阵  $D$  叫做相似度矩阵。从图 4 一眼就可以看出数据可以划分为两簇。

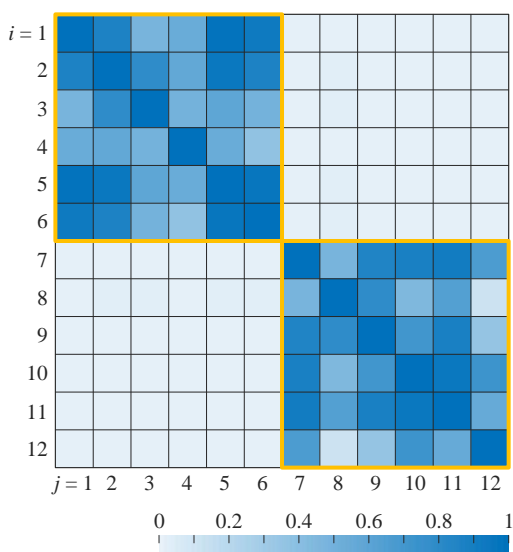


图 4. 12 个样本点两两相似度矩阵  $S$

## 16.4 无向图

图 5 为相似度矩阵  $S$  无向图。图中绿色线越粗，表明两点之间的相似度越高，也就是两点距离越近。

切断相似度小于 0.001 两两元素之间的联系得到无向图图 6。图 7 为，切断相似度小于 0.005 两两元素之间的联系得到无向图。观察图 8 可以知道，当切断相似度小于 0.031 两两元素之间的联系，可以将原始数据划分为两簇。

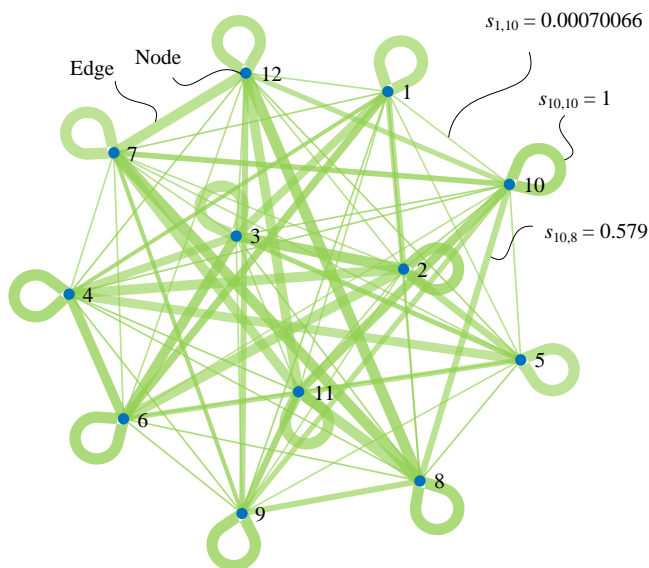


图 5. 相似度对称矩阵  $S$  无向图

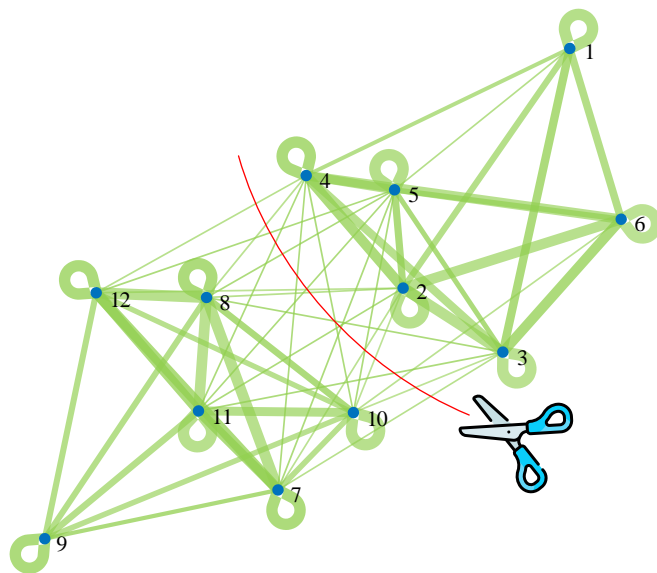


图 6. 当切断相似度小于 0.001 两两元素之间的联系得到无向图

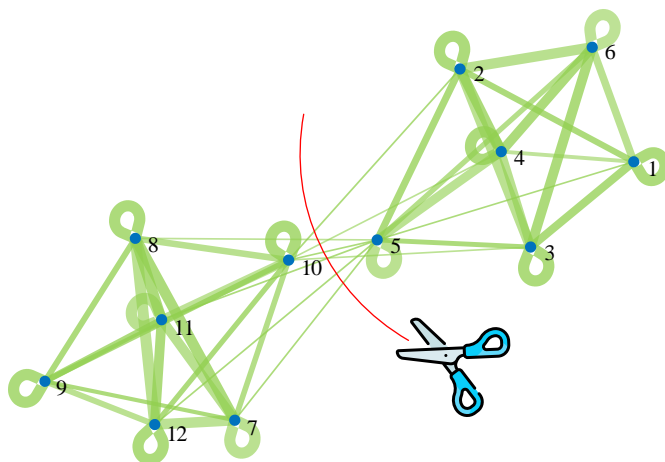


图 7. 当切断相似度小于 0.005 两两元素之间的联系得到无向图

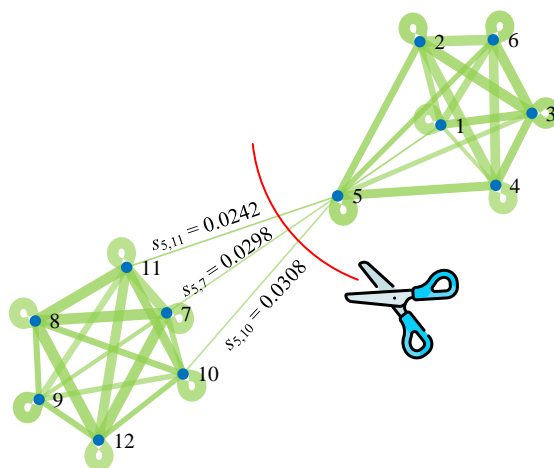


图 8. 当切断相似度小于 0.02 两两元素之间的联系得到无向图

## 16.5 拉普拉斯矩阵

**度矩阵** (degree matrix)  $G$  是一个对角阵。 $G$  的对角线元素是对应相似度矩阵  $S$  对应列元素之和，即：

$$G_{i,i} = \sum_{j=1}^n s_{i,j} = \text{diag}(I^T S) \quad (3)$$

|    |       |       |       |       |       |       |      |       |       |       |       |       |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1  | 4.791 | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0    | 0     | 0     | 0     | 0     |       |
| 2  | 0     | 5.071 | 0     | 0     | 0     | 0     | 0    | 0     | 0     | 0     | 0     |       |
| 3  | 0     | 0     | 3.876 | 0     | 0     | 0     | 0    | 0     | 0     | 0     | 0     |       |
| 4  | 0     | 0     | 0     | 3.498 | 0     | 0     | 0    | 0     | 0     | 0     | 0     |       |
| 5  | 0     | 0     | 0     | 0     | 5.013 | 0     | 0    | 0     | 0     | 0     | 0     |       |
| 6  | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 4.664 | 0    | 0     | 0     | 0     | 0     |       |
| 7  | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 4.79 | 0     | 0     | 0     | 0     |       |
| 8  | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0    | 3.569 | 0     | 0     | 0     |       |
| 9  | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0    | 0     | 4.604 | 0     | 0     |       |
| 10 | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0    | 0     | 0     | 4.726 | 0     |       |
| 11 | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0    | 0     | 0     | 0     | 4.945 |       |
| 12 | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0    | 0     | 0     | 0     | 0     | 3.424 |
|    | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7    | 8     | 9     | 10    | 11    | 12    |

图 9.12 个样本点两两相似度构造的度矩阵  $G$ 

## 拉普拉斯矩阵

然后构造**拉普拉斯矩阵** (Laplacian matrix)  $L$ 。有三种方法构造拉普拉斯矩阵。

第一种叫做**未归一化拉普拉斯矩阵** (unnormalized Laplacian matrix)，具体定义如下：

$$L = G - S \quad (4)$$

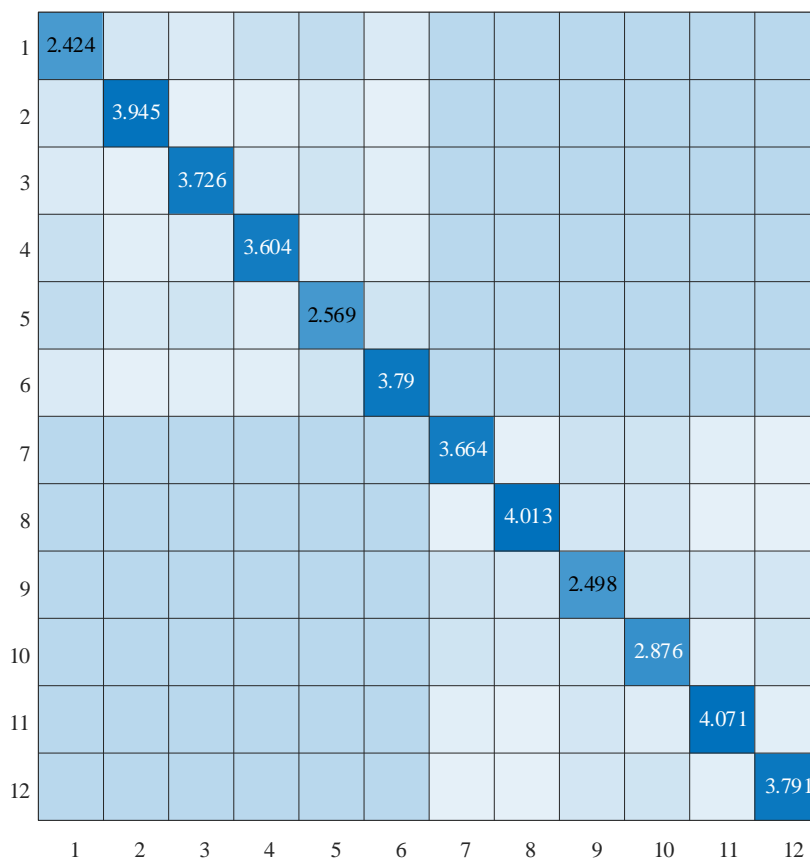
第二种叫做**归一化随机漫步拉普拉斯矩阵** (normalized random-walk Laplacian matrix)，也叫 Shi-Malik 矩阵，定义如下：

$$L_{rw} = G^{-1}(G - S) \quad (5)$$

第三种叫做**归一化对称拉普拉斯矩阵** (normalized symmetric Laplacian matrix)，也叫做 Ng-Jordan-Weiss 矩阵，如下：

$$L_s = G^{-1/2}(G - S)G^{-1/2} \quad (6)$$

采用第一种方法获得拉普拉斯矩阵  $L$ ，热图如图 10 所示。

图 10. 12 个样本点两两相似度构造未归一化拉普拉斯矩阵  $L$ 

## 16.6 特征值分解

对拉普拉斯矩阵  $L$  进行特征值分解：

$$L = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^{-1} \quad (7)$$

其中

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{12} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_{12}] \quad (8)$$

图 11 所示为拉普拉斯矩阵  $L$  特征值分解得到的特征值从小到大排序。按从小到大排列  $\lambda$  值，对应第 2 个， $\lambda_2 = 0.01285$ ，对应的特征向量  $\mathbf{v}_2 = [-0.300, -0.295, -0.297, -0.294, -0.275, -0.298, 0.283, 0.285, 0.288, 0.278, 0.284, 0.286]$ 。



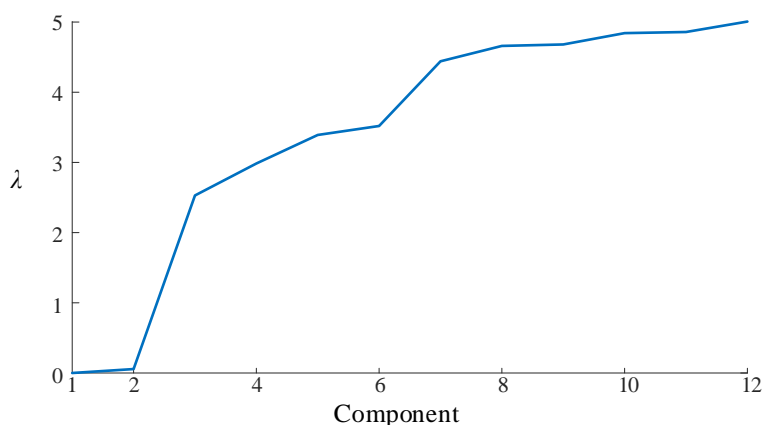
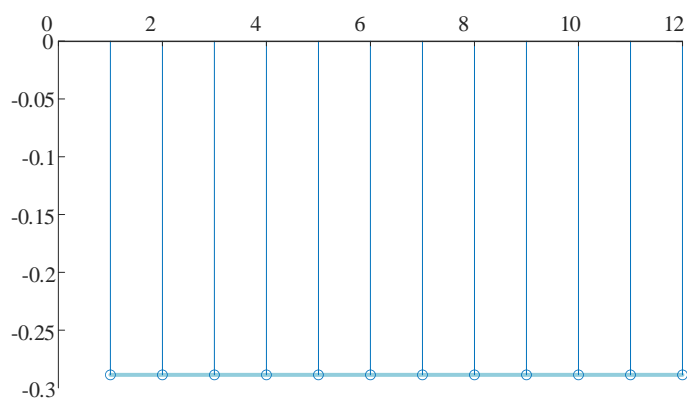
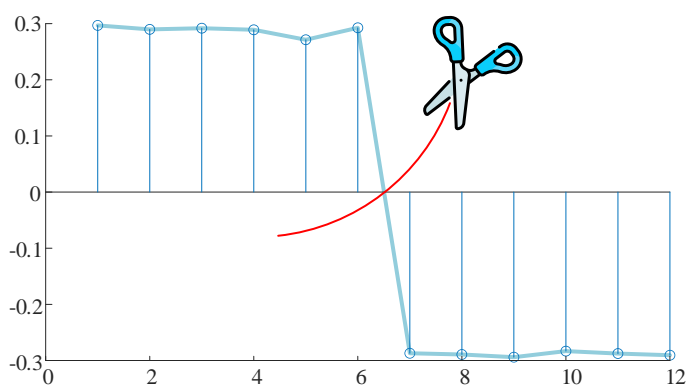
图 11. 拉普拉斯矩阵  $L$  特征值分解得到的特征值从小到大排序

图 12 和图 13 分别展示前两个特征向量的结果。相当于将拉普拉斯矩阵  $L$  投影到一个二维空间，具体如图 14 所示。在图 14 所示平面内，可以很容易将数据划分为两簇。

图 12. 特征向量  $v_1$  结果图 13. 特征向量  $v_2$  结果

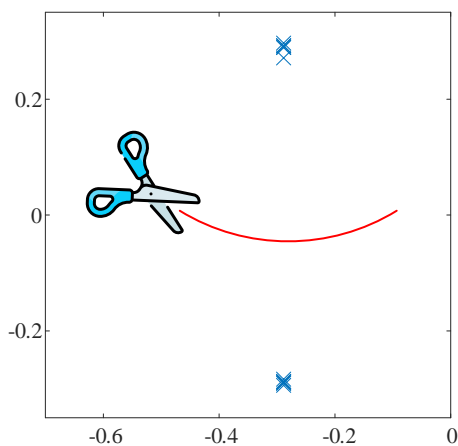
图 14. 矩阵  $L$  投影到低维度正交空间结果

图 15 所示为采用谱聚类算法对环形样本数据聚类结果。

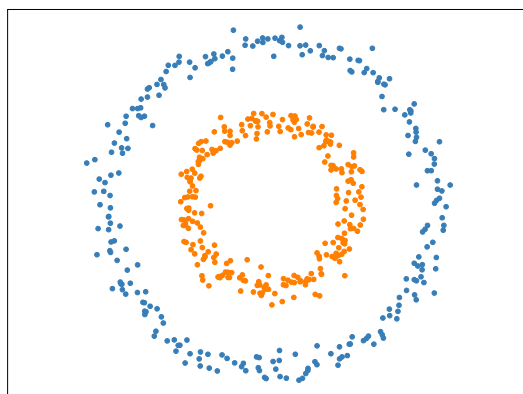


图 15. 环形样本数据聚类结果



代码 Bk7\_Ch16\_01.py 可以获得图 15。



请读者注意，拉普拉斯矩阵  $L$  为**半正定矩阵** (positive semi-definite matrix)。证明过程请参考 Ulrike von Luxburg 创作的 *A Tutorial on Spectral Clustering*。” *Statistics and Computing Journal* 一文。