

# 19

## Canonical Correlation Analysis

# 典型相关分析

找到两组数据的整体相关性的最大线性组合



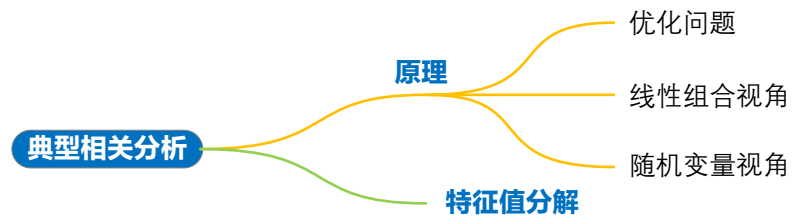
人类生而好奇，这正是科学的火种。

*Men love to wonder, and that is the seed of science.*

—— 拉尔夫·爱默生 (Ralph Waldo Emerson) | 美国思想家、文学家 | 1803 ~ 1882



- numpy.linalg.eig() 特征值分解
- numpy.linalg.inv() 矩阵求逆
- seaborn.heatmap() 绘制热图
- seaborn.jointplot() 绘制散点图，含边缘分布
- seaborn.pairplot() 成对散点图
- seaborn.scatterplot() 绘制散点图
- sklearn.cross\_decomposition.CCA() 典型相关分析



# 19.1 典型相关分析原理

**典型相关分析** (Canonical Correlation Analysis, CCA) 是一种用于探究两组变量之间关系的多元统计分析方法。其核心思想是将两组变量分别投影到新的低维空间中，使得这两组变量在新空间中的投影尽可能相关。

CCA 常用于处理两组多元变量之间的关系。通过 CCA 可以发现这两组变量中的某些维度之间存在相关性，这种相关性可以帮助研究者更好地理解两组变量之间的关系。

在 CCA 中，研究者需要先对两组变量进行标准化处理，然后计算它们的相关系数矩阵。接着，CCA 会生成一组线性组合，使得两组变量在新的低维空间中的投影尽可能相关。这些线性组合称为典型变量，相关系数则称为典型相关系数。最终的结果是一组典型变量和对应的典型相关系数。

## 原理

下面以  $\mathbf{X}$  和  $\mathbf{Y}$  为例介绍典型相关分析原理。

$n \times p$  数据矩阵  $\mathbf{X}$  可以写成：

$$\mathbf{X}_{n \times p} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{x}_p] \quad (1)$$

$n \times q$  数据矩阵  $\mathbf{Y}$  可以写成：

$$\mathbf{Y}_{n \times q} = [\mathbf{y}_1 \quad \mathbf{y}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{y}_q] \quad (2)$$

⚠ 注意， $\mathbf{X}$  和  $\mathbf{Y}$  的行数一致。

$\mathbf{X}$  朝向量  $\mathbf{u}_1$  投影结果为  $\mathbf{s}_1$ ：

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{X}_{n \times p} \mathbf{u}_1 \quad (3)$$

其中， $\mathbf{u}_1$  的形状为  $p \times 1$ ， $\mathbf{s}_1$  的形状为  $n \times 1$ 。

⚠ 注意，很多参考文献中，向量一般记做  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$ ，投影结果一般记做  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{v}$ ；但是本书  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{v}$  特指代表投影方向的向量，所以本章依然沿用这种记法。

展开 (3) 得到如下线性组合形式：

$$\mathbf{s}_1 = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{x}_p] \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ \vdots \\ u_{p,1} \end{bmatrix} = u_{1,1} \mathbf{x}_1 + u_{2,1} \mathbf{x}_2 + \cdots + u_{p,1} \mathbf{x}_p \quad (4)$$

$\mathbf{Y}$  朝向量  $\mathbf{v}_1$  投影结果为  $\mathbf{t}_1$ ：

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{Y}_{n \times q} \mathbf{v}_1 \quad (5)$$

其中， $\mathbf{v}_1$  的形状为  $q \times 1$ ， $\mathbf{t}_1$  的形状为  $n \times 1$ 。 $p$  和  $q$  可以不相等，也就是说  $\mathbf{u}_1$ 、 $\mathbf{v}_1$  形状可能不同。但是  $\mathbf{s}_1$ 、 $\mathbf{t}_1$  形状相同。

展开 (5) 得到如下线性组合形式：

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

$$\mathbf{t}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \cdots & \mathbf{y}_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{2,1} \\ \vdots \\ v_{q,1} \end{bmatrix} = v_{1,1}\mathbf{y}_1 + v_{2,1}\mathbf{y}_2 + \cdots v_{q,1}\mathbf{y}_q \quad (6)$$

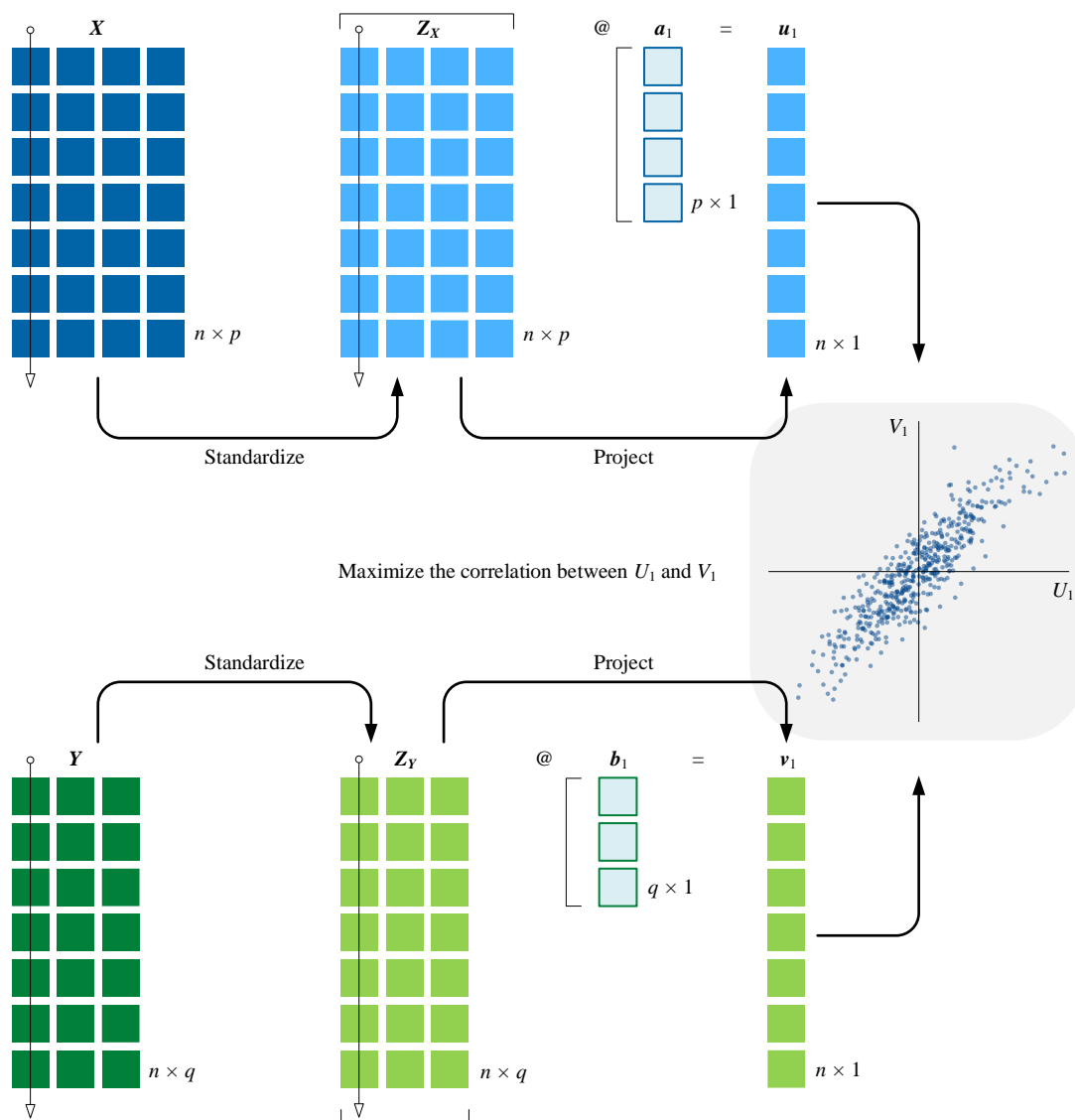


图 1. 典型相关分析原理

## 优化问题

如图 1 所示，典型相关分析 CCA 的问题便是找到  $\mathbf{u}_1$  和  $\mathbf{v}_1$ ，使得  $s_1$  和  $t_1$  相关性最大。

⚠ 注意，如图 1 所示，从数据角度来看，一般情况  $\mathbf{X}$  和  $\mathbf{Y}$  都先经过标准化处理。

## 随机变量

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

用随机变量来写的话， $S_1$  对应  $s_1$ ， $T_1$  对应  $t_1$ 。随机变量  $S_1$  可以写成如下线性变换：

$$S_1 = \mathbf{u}_1^T \mathbf{X} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{2,1} & \cdots & u_{p,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix} = u_{1,1}X_1 + u_{2,1}X_2 + \cdots + u_{p,1}X_p \quad (7)$$

同理，随机变量  $T_1$  可以写成：

$$T_1 = \mathbf{v}_1^T \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{2,1} & \cdots & v_{q,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_q \end{bmatrix} = v_{1,1}Y_1 + v_{2,1}Y_2 + \cdots + v_{q,1}Y_q \quad (8)$$

$S_1$  和  $T_1$  是**第一对典型变量** (first pair of canonical variables)。

$S_1$  和  $T_1$  的相关性系数为：

$$\text{corr}(S_1, T_1) = \frac{\text{cov}(S_1, T_1)}{\sqrt{\text{var}(S_1)} \sqrt{\text{var}(T_1)}} \quad (9)$$

这样寻找第一对典型变量的优化问题可以写成：

$$\underset{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1}{\text{argmax}} \text{corr}(S_1, T_1) \quad (10)$$



有关随机变量的线性变换，请大家回顾《统计至简》第 14 章。

## 寻找更多典型变量

如图 2 所示，再找到第一对典型变量之后，依然最大化相关性系数可以找到**第二对典型变量** (second pair of canonical variables)。约束条件是第一、第二对典型变量不相关。

用向量来写， $s_2$  也是  $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_p \end{bmatrix}$  的线性组合：

$$s_2 = \mathbf{X} \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,2} \\ u_{2,2} \\ \vdots \\ u_{p,2} \end{bmatrix} = u_{1,2}\mathbf{x}_1 + u_{2,2}\mathbf{x}_2 + \cdots + u_{p,2}\mathbf{x}_p \quad (11)$$

上式相当于  $\mathbf{X}$  朝  $\mathbf{u}_2$  投影。

$t_2$  为  $\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \cdots & \mathbf{y}_q \end{bmatrix}$  的线性组合：

$$t_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \cdots & \mathbf{y}_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,2} \\ v_{2,2} \\ \vdots \\ v_{q,2} \end{bmatrix} = v_{1,2}\mathbf{y}_1 + v_{2,2}\mathbf{y}_2 + \cdots + v_{q,2}\mathbf{y}_q \quad (12)$$

上式相当于  $\mathbf{Y}$  朝  $\mathbf{v}_2$  投影。

通过最大化的  $s_2$  和  $t_2$  相关性系数，可以找到第二对典型变量。这步优化问题的约束条件为：

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_2 &= 0 \\
\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2 &= 0 \\
\mathbf{u}_1^T \mathbf{v}_2 &= 0 \\
\mathbf{v}_1^T \mathbf{u}_2 &= 0
\end{aligned} \tag{13}$$

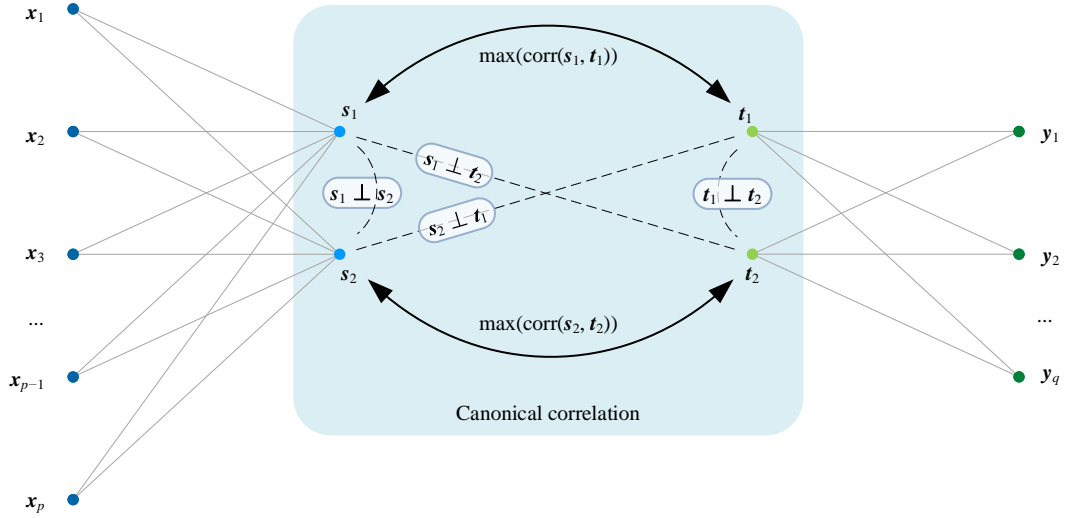


图 2. 线性组合角度看 CCA

随机变量  $S_2$  可以写成：

$$S_2 = \mathbf{u}_2^T \mathbf{X} = \begin{bmatrix} u_{1,2} & u_{2,2} & \cdots & u_{p,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix} = u_{1,2}X_1 + u_{2,2}X_2 + \cdots + u_{p,2}X_p \tag{14}$$

随机变量  $T_2$  可以写成：

$$T_2 = \mathbf{v}_2^T \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} v_{1,2} & v_{2,2} & \cdots & v_{q,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_q \end{bmatrix} = v_{1,2}Y_1 + v_{2,2}Y_2 + \cdots + v_{q,2}Y_q \tag{15}$$

同理，为了求解  $U_2$  和  $V_2$ ，约束条件为：

$$\begin{aligned}
\text{cov}(U_1, U_2) &= 0 \\
\text{cov}(V_1, V_2) &= 0 \\
\text{cov}(U_1, V_2) &= 0 \\
\text{cov}(V_1, U_2) &= 0
\end{aligned} \tag{16}$$

考虑到一般情况下  $\mathbf{X}$  和  $\mathbf{Y}$  已经标准化， $E(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$  且  $E(\mathbf{Y}) = \mathbf{0}$ 。这样  $E(U_1) = 0$ ， $E(V_1) = 0$ 。

这个步骤最多重复  $\min(p, q)$  次，可以最多找到  $\min(p, q)$  对典型变量。 $\min(p, q)$  对应  $\mathbf{X}$  和  $\mathbf{Y}$  的列数最小值。

## 19.2 从一个协方差矩阵考虑



《统计至简》第 13 章特别介绍过协方差矩阵分块。

$[X, Y]$  的协方差矩阵可以按图 3 所示形式分成四个子块。 $\Sigma_{XX}$  为  $X$  的协方差矩阵， $\Sigma_{YY}$  为  $Y$  的协方差矩阵，它俩都是方阵。 $\Sigma_{XY}$ 、 $\Sigma_{YX}$  都是  $X$ 、 $Y$  的互协方差矩阵 (cross-covariance matrix)，它俩互为转置。

$S_1$  和  $T_1$  各自的方差、协方差为：

$$\begin{aligned}\text{var}(S_1, T_1) &= \mathbf{u}_1^T \Sigma_{XX} \mathbf{u}_1 \\ \text{var}(S_1, T_1) &= \mathbf{v}_1^T \Sigma_{YY} \mathbf{v}_1 \\ \text{cov}(S_1, T_1) &= \mathbf{u}_1^T \Sigma_{XY} \mathbf{v}_1\end{aligned}\tag{17}$$



如果大家对上式概念模糊的话，请回顾《统计至简》第 14 章。

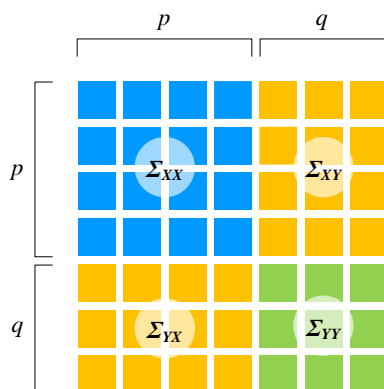


图 3.  $[X, Y]$  的协方差矩阵分块

这样，(9) 的相关性系数可以写成：

$$\text{corr}(S_1, T_1) = \frac{\mathbf{u}_1^T \Sigma_{XY} \mathbf{v}_1}{\sqrt{\mathbf{u}_1^T \Sigma_{XX} \mathbf{u}_1} \sqrt{\mathbf{v}_1^T \Sigma_{YY} \mathbf{v}_1}}\tag{18}$$

观察上式，大家是否发现它实际上是个瑞利商 (Rayleigh quotient)。



我们在《矩阵力量》第 14 章了解过瑞利商。

### 优化结果

利用拉格朗日乘法，我们可以求得优化问题的解。此处，省略推导过程，直接给出结果。

向量  $\mathbf{u}$  是  $\mathbf{P} = \Sigma_{XX}^{-1} \Sigma_{XY} \Sigma_{YY}^{-1} \Sigma_{YX}$  的特征向量。如图 4 所示， $\mathbf{P}$  为  $p \times p$  方阵。

向量  $\mathbf{v}$  是  $\mathbf{Q} = \Sigma_{YY}^{-1} \Sigma_{YX} \Sigma_{XX}^{-1} \Sigma_{XY}$  的特征向量。如图 5 所示， $\mathbf{Q}$  为  $q \times q$  方阵。

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

值得注意的是，如图 1 所示，一般 CCA 算法中，数据先要经过标准化处理。也就是说图 3 中真正参与运算的是相关性系数矩阵，而非协方差矩阵。

本章下面要使用的 `sklearn.cross_decomposition.CCA()` 函数就是先对数据标准化，再进行 CCA 分析。

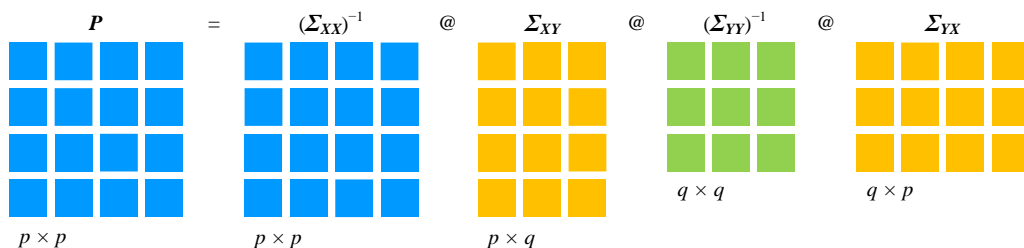


图 4.  $\Sigma_{XX}^{-1} \Sigma_{XY} \Sigma_{YY}^{-1} \Sigma_{YX}$  对应运算

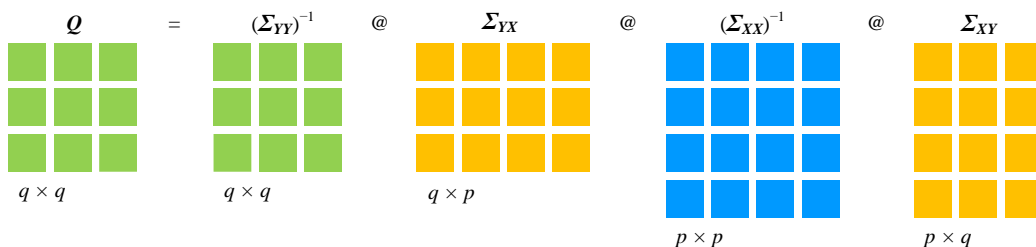
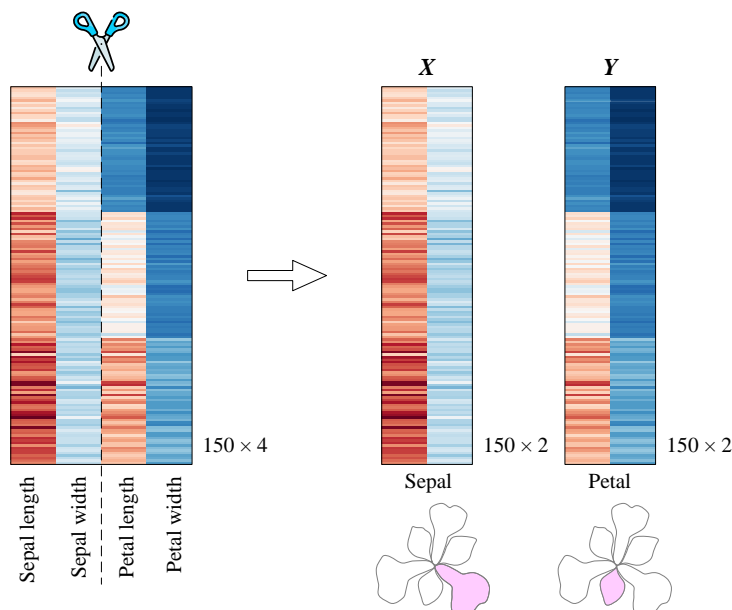


图 5.  $\Sigma_{YY}^{-1} \Sigma_{YX} \Sigma_{XX}^{-1} \Sigma_{XY}$  对应运算

## 19.3 以鸢尾花数据为例

本节以鸢尾花数据为例介绍如何完成典型相关分析。

如所示，我们把鸢尾花数据 4 列均分为  $X$  和  $Y$  两个矩阵。 $X$  代表花萼（长度、宽度）， $Y$  代表花瓣（长度、宽度）。



本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



图 6. 把鸢尾花数据均分成两个子块

典型相关分析就是，将花萼数据  $X$  的两列合成一列  $s_1$ ，将花瓣数据  $Y$  的两列合成一列  $t_1$ 。通过合适的组合方式，让  $s_1$  和  $t_1$  的相关性最大。可以理解为找到花萼、花瓣之间“整体”关系。

图 7 所示为鸢尾花数据的相关性系数矩阵。请大家特别关注热图中黄色框高亮的两个子块，花萼和花瓣之间最大的相关性存在于花萼长度和花瓣长度 (0.87)。

比 0.87 更大的相关性系数是 0.96，这个相关性系数是花瓣长度、宽度之间的关系，而非花萼、花瓣之间的关系。

此外，CCA 分析中，图 7 的相关性系数矩阵就相当于图 3 的协方差矩阵。

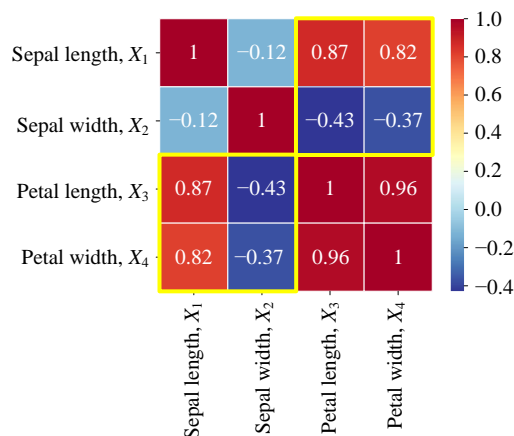


图 7. 鸢尾花数据的相关性系数矩阵

## CCA 结果

通过 CCA 分析，我们得到的结果如图 8 (a) 所示。大家可以在本章代码中自行验算，可以发现图 8 (a) 中每一列均值均为 0。

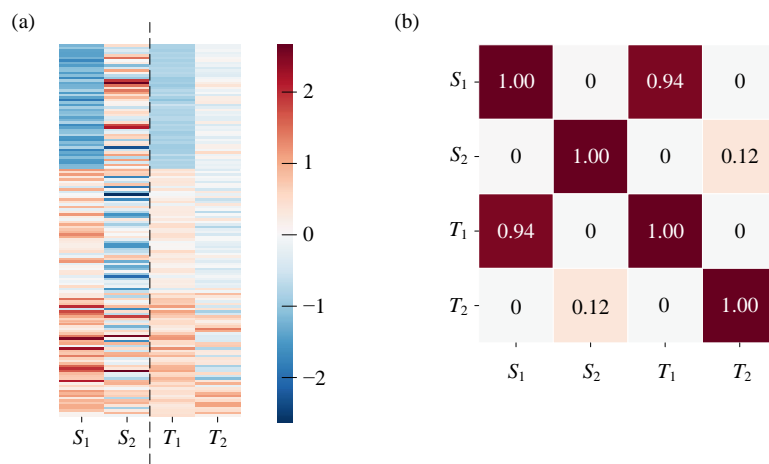


图 8. CCA 分析结果

图 8 (b) 所示为图 8 (a) 结果的相关性系数矩阵。 $S_1$  和  $T_1$  的相关性系数达到 0.94。此外，大家发现图 8 (b) 中很多相关性系数为 0 的情况，这就是本章前文介绍的优化问题约束条件。

图 9 所示为用散点图可视化  $S_1$  和  $T_1$  的关系。图 9 (b) 还考虑了鸢尾花分类。观察图 9 (a)，大家可能已经发现  $S_1$  和  $T_1$  均方差明显不同。

图 10 所示为 CCA 结果成对特征散点图。

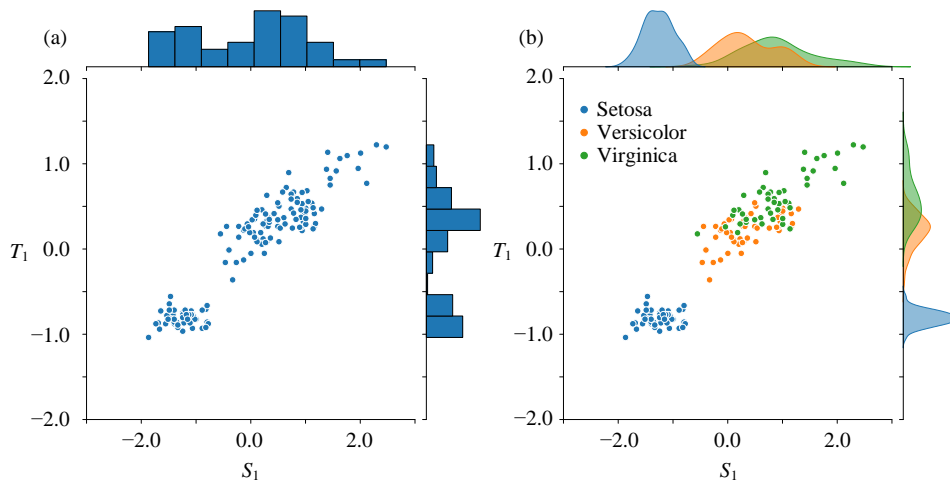


图 9.  $S_1$  和  $T_1$  的散点图

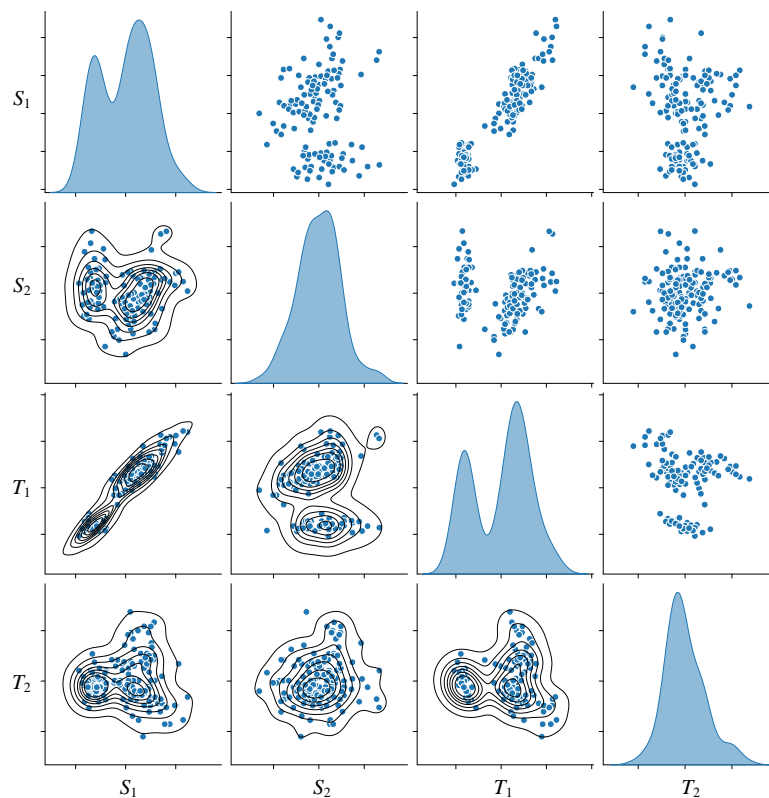


图 10. CCA 结果成对特征散点图

## 投影

大家可能会好奇到底怎样的  $u_1$ 、 $v_1$  让  $S_1$  和  $T_1$  的相关性系数如此之大？

`sklearn.cross_decomposition.CCA()` 函数同样返回  $u_1$ 、 $v_1$ ，具体如图 11 所示。

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

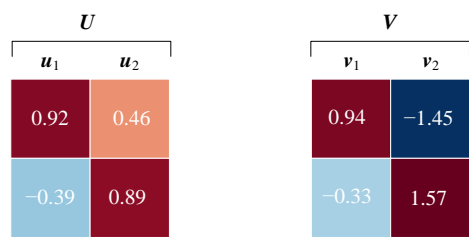


图 11. CCA 投影向量结果

假设  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$  已经标准化， $\mathbf{x}_1$  和  $\mathbf{x}_2$  按如下方式线性组合得到  $\mathbf{s}_1$ ：

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{X}_{150 \times 2} \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.92 \\ -0.39 \end{bmatrix} = 0.92\mathbf{x}_1 - 0.39\mathbf{x}_2 \tag{19}$$

大家可以自己验证  $\mathbf{u}_1$  为单位向量。

同样，假设  $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2]$  已经标准化， $\mathbf{y}_1$  和  $\mathbf{y}_2$  按如下方式线性组合得到  $\mathbf{t}_1$ ：

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{Y}_{150 \times 2} \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.94 \\ -0.33 \end{bmatrix} = 0.94\mathbf{x}_1 - 0.33\mathbf{x}_2 \tag{20}$$

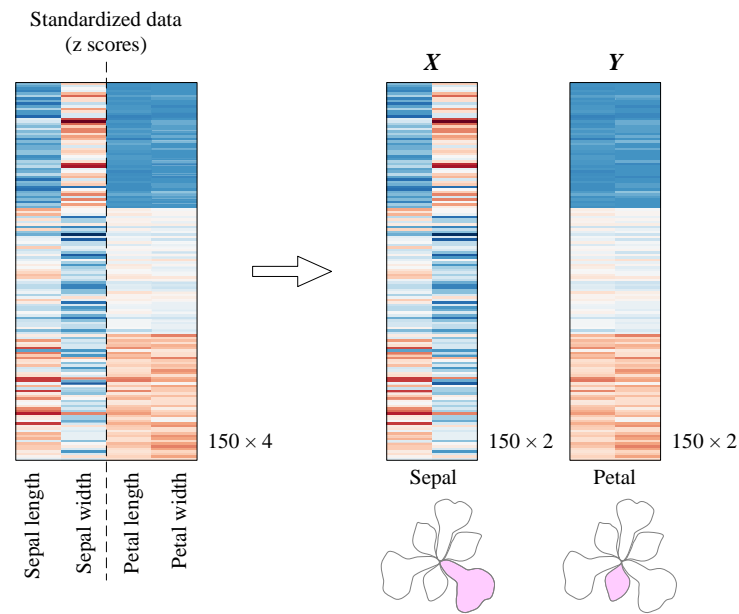
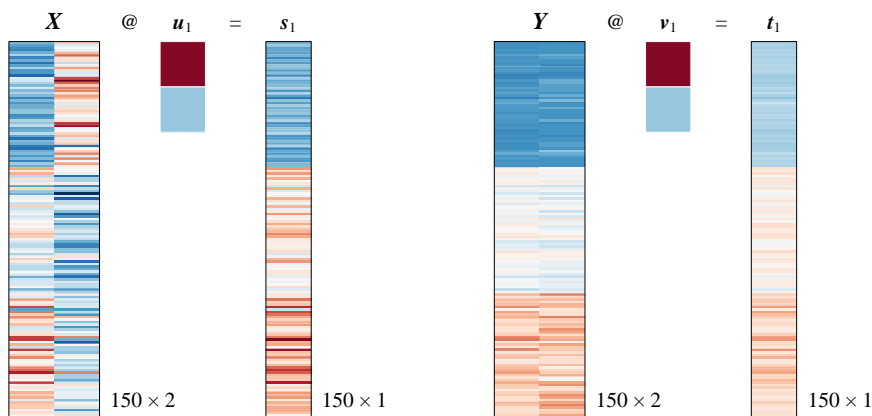


图 12. 标准化的鸢尾花数据

图 13. 通过投影计算  $s_1$  和  $t_1$ 

## 特征值分解

下面我们利用特征值分解自行求解  $u_1$ 、 $v_1$ 。根据图 4 和图 5，我们先需要计算  $P$  和  $Q$  两个方阵。具体过程如图 14、图 15 所示。

$$P = (\Sigma_{XX})^{-1} @ \Sigma_{XY} @ (\Sigma_{YY})^{-1} @ \Sigma_{YX}$$

0.73	-0.37
-0.30	0.17

1.01	0.12
0.12	1.01

0.87	0.82
-0.43	-0.37

13.72	-13.21
-13.21	13.72

0.87	-0.43
0.82	-0.37

图 14. 计算矩阵  $P$ 

$$Q = (\Sigma_{YY})^{-1} @ \Sigma_{YX} @ (\Sigma_{XX})^{-1} @ \Sigma_{XY}$$

1.31	1.19
-0.46	-0.41

13.72	-13.21
-13.21	13.72

0.87	-0.43
0.82	-0.37

1.01	0.12
0.12	1.01

0.87	0.82
-0.43	-0.37

图 15. 计算矩阵  $Q$ 

然后对  $P$  和  $Q$  分别进行特征值分解，具体如图 16、图 17 所示。

注意，图 17 中矩阵  $V$  的第 2 列向量  $v_2$  和图 11 中不同，但是两者为倍数关系，即共线。

$$P = U @ \Lambda_P @ U^{-1}$$

0.73	-0.37
-0.30	0.17

0.92	0.46
-0.39	0.89

0.89	0
0	0.02

0.89	-0.46
0.39	0.92

图 16. 矩阵  $P$  特征值分解

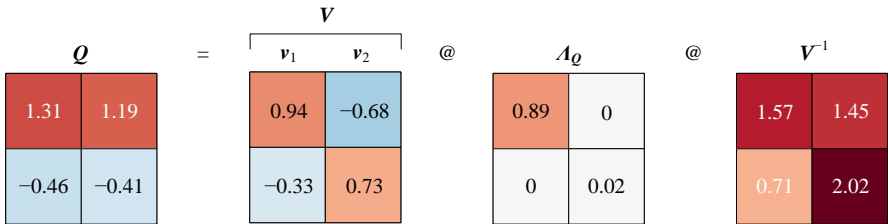
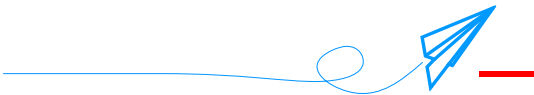


图 17. 矩阵  $Q$  特征值分解



Bk7\_Ch19\_01.ipynb 完成本章 CCA 分析及可视化。



至此，我们完成了《数据有道》一册学习！恭喜大家，走完了鸢尾花书 6/7 的旅程！

本册两个核心话题是回归、降维。鸢尾花书中线性回归、主成分分析被反反复复提及，原因很简单，这两种算法实际上是各种数据工具的合体。我们可以从代数、几何、数据、概率统计、线性组合、向量空间、矩阵分解、优化各种角度理解线性回归、主成分分析。这也是鸢尾花书想给大家“灌输”的理念——见树又见林。

数据可以是各种各样的形式，比如数字、文本、图像等等。但是，这些数据并不是随意的，需要经过处理和清洗才能用于机器学习。Garbage in, garbage out! 我们不能让机器学习算法去学习一些无用的垃圾数据吧！而《数据有道》介绍的算法常被用于特征工程。

大家已经清楚，回归、降维、分类、聚类是机器学习的四大类问题。本册关注机器学习中的回归、降维这两类问题。鸢尾花书最后一册《机器学习》则关注经典分类、聚类算法。

让我们在《机器学习》一册再见！