

20

K-Means Clustering

*K*均值聚类

簇内距离和最小，迭代求解



几何是万物美的本原。

Geometry is the archetype of the beauty of the world.

—— 约翰内斯·开普勒 (Johannes Kepler) | 德国天文学家、数学家 | 1571 ~ 1630



```
◀ numpy.cov() 计算协方差矩阵
◀ pandas.DataFrame.cov() 计算数据帧协方差矩阵
◀ scipy.spatial.Voronoi 函数获得沃罗诺伊图相关数据
◀ scipy.spatial.voronoi_plot_2d 函数绘制沃罗诺伊图
◀ sklearn.cluster.KMeans() K 均值聚类算法函数; model.fit() 拟合数据, model.predict() 预测聚类标签,
  model.cluster_centers_ 输出簇质心位置, model.inertia_ 输出簇 SSE 之和
◀ sklearn.metrics.silhouette_score 计算轮廓系数
◀ yellowbrick.cluster.SilhouetteVisualizer 函数绘制轮廓图
```

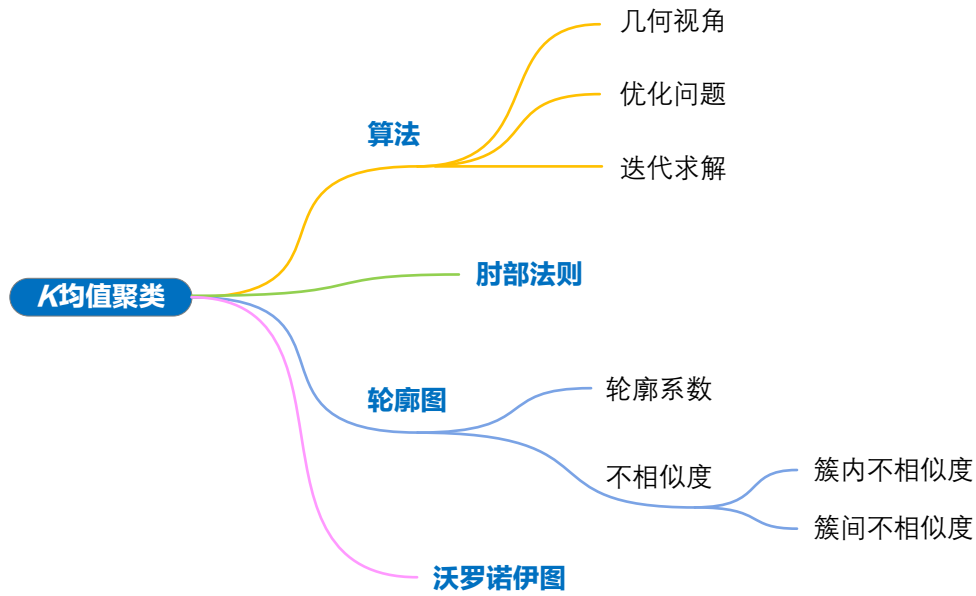
本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com



20.1 K 均值聚类

K 均值聚类 (K -means clustering) 的 K 不同于 k 近邻中的 k 。

本书第 2 章介绍的 **k 近邻算法** (k -Nearest Neighbors, k -NN) 是有监督学习分类算法，样本数据有标签，它的 k 是指设定的近邻数量。

而 K 均值聚类则是无监督学习聚类算法，样本数据无标签， K 是指将给定样本集 Ω 划分成 K 簇 $C = \{C_1, C_2, \dots, C_K\}$ 。

原理

图 1 所示为 K 均值算法原理图。 K 均值聚类的每一簇样本数据用**簇质心** (cluster centroid) 来描述。比如，二聚类问题有两个簇质心 μ_1 和 μ_2 。如果以欧氏距离为距离度量，距离质心 μ_1 更近的点，被划分为 C_1 簇；而距离质心 μ_2 更近的点，被划分为 C_2 簇。

比如，图 1 中 A 点明显距离 μ_1 更近， A 点被划分为 C_1 簇， C 点距离 μ_2 更近，因此 C 点划分到 C_2 簇。 B 点距离 μ_1 和 μ_2 相等，因此 B 点位于决策边界。很明显，决策边界为 μ_1 和 μ_2 **中垂线** (perpendicular bisector)。



建议大家回顾《矩阵力量》第 19 章讲解的有关中垂线内容。

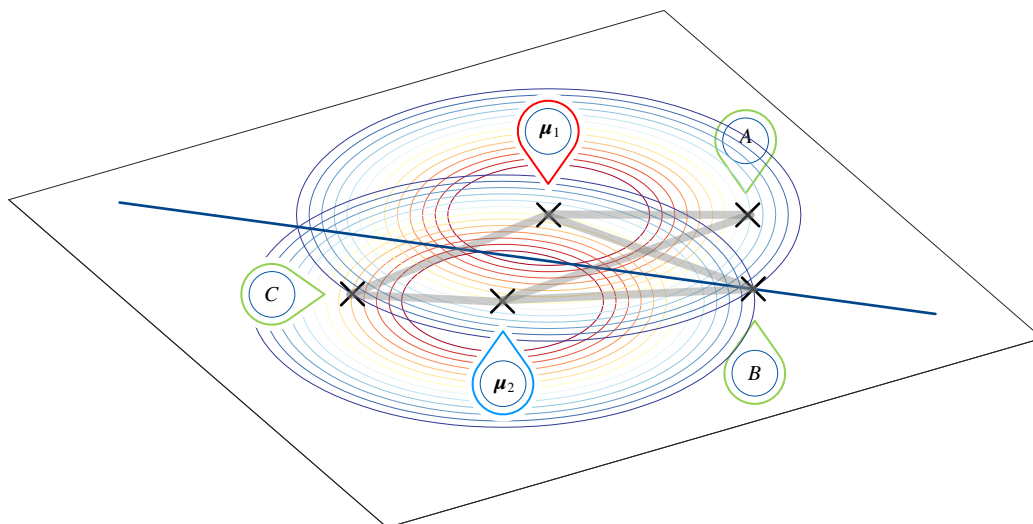


图 1. K 均值算法原理

由于采用欧氏距离，图 1 中簇质心 μ_1 和 μ_2 等高线为两组同心圆；同心圆颜色相同，代表距离簇质心 μ_1 和 μ_2 距离相同。因此，同色同心圆的交点位于决策边界上。

20.2 优化问题

K 均值聚类算法的优化目标是，将所有给定样本点划分 K 簇，并使得簇内距离平方和最小。采用最简单的欧拉距离，以上优化目标记做：

$$\arg \min_C \sum_{k=1}^K \sum_{x \in C_k} \|x - \mu_k\|^2 \quad (1)$$

其中， x 为样本数据任意一点，形式为列向量； μ_k 为任意一簇 C_k 样本数据的质心。

实际上，(1) 中簇内距离平方和相当于**残差平方和** (Sum of Squared Error, SSE)。SSE 度量样本数据的聚集程度；为了方便读者理解，下一节专门讲解质心、协方差矩阵、残差平方和等描述簇数据的数学工具。

任意一点 x 和质心 μ_k 欧氏距离平方，可以通过下式计算得到：

$$d^2 = \text{dist}(x, \mu_k)^2 = \|x - \mu_k\|^2 = (x - \mu_k)^T (x - \mu_k) \quad (2)$$

其中，

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_D]^T, \quad \mu_k = [\mu_{k,1} \quad \mu_{k,2} \quad \cdots \quad \mu_{k,D}]^T \quad (3)$$

两特征聚类

当特征数为 $D = 2$ 时，欧氏距离平方和展开为下式：

$$\begin{aligned} d^2 &= (x - \mu_k)^T (x - \mu_k) \\ &= (x_1 - \mu_{k,1})^2 + (x_2 - \mu_{k,2})^2 \end{aligned} \quad (4)$$

丛书反复介绍，当 d 取某一定值时，(4) 所示解析式是以 $(\mu_{k,1}, \mu_{k,2})$ 为圆心的正圆， d 为半径。如图 1 所示， d 取不同值时，(4) 的几何表达为以 μ_1 和 μ_2 为中心得到两组同心正圆。

对于二分类问题，决策边界满足：

$$(x - \mu_1)^T (x - \mu_1) = (x - \mu_2)^T (x - \mu_2) \quad (5)$$

整理得到决策边界解析式。=：

$$(\mu_1 - \mu_2)^T \left(x - \frac{(\mu_1 + \mu_2)}{2} \right) = 0 \quad (6)$$

发现 K 均值聚类决策边界为一超平面，超平面通过 μ_1 和 μ_2 中点，并垂直于 μ_1 和 μ_2 连线，即垂直于 $(\mu_2 - \mu_1)$ 。

三聚类

图 2 所示为三聚类问题簇数据和质心位置。根据这三个质心位置，可以绘制两两质心的中垂线。决策边界在这三条中垂线上。图 2 实际上便是**沃罗诺伊图** (Voronoi diagram)。本章最后一节介绍沃罗诺伊图。

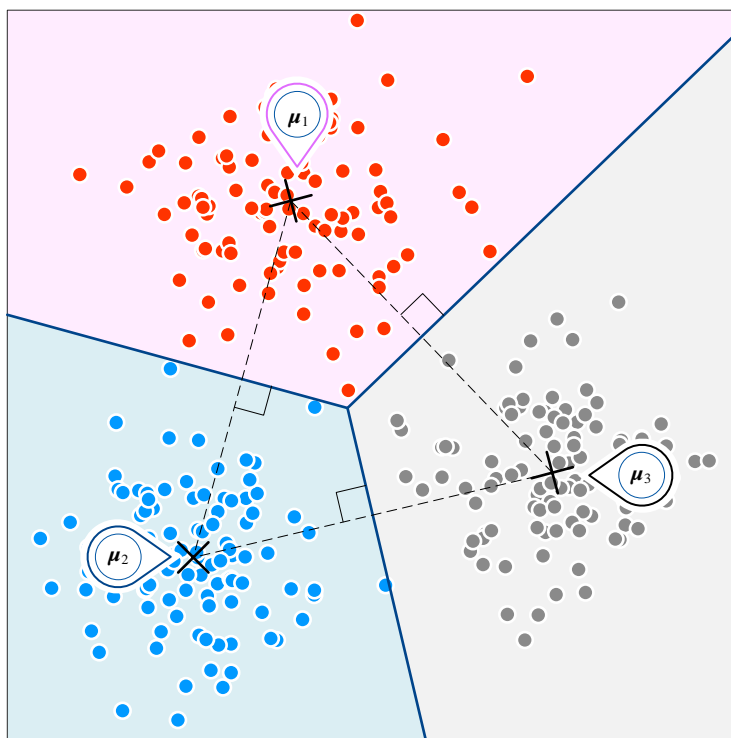


图 2. 三聚类问题簇质心、决策边界和区域划分

图 3 中， z 轴高度代表三聚类预测标签。

容易发现，在确定决策边界位置上， K 均值聚类原理和本书第 2 章介绍的**最近质心分类器** (Nearest Centroid Classifier) 很相似。

不同的是， K 均值聚类算法采用迭代方式找到簇质心位置，这是下一节要介绍的内容。

采用欧氏距离的 K 均值聚类相当于**高斯混合模型** (Gaussian Mixture Model, GMM) 的一个特例。这一点，下一章会详细介绍。

目前 Scikit-learn 中 K 均值聚类算法距离度量仅支持欧氏距离；MATLAB 中 K 均值聚类算法函数还支持城市街区距离、余弦距离、相关系数距离等。

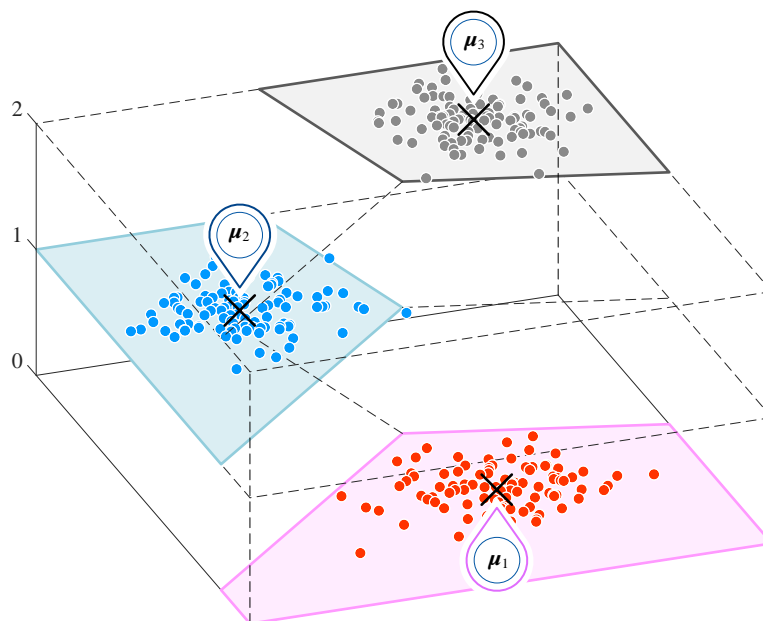


图 3. 三聚类预测标签

20.3 迭代过程

本节以二聚类为例介绍 K 均值聚类流程图。

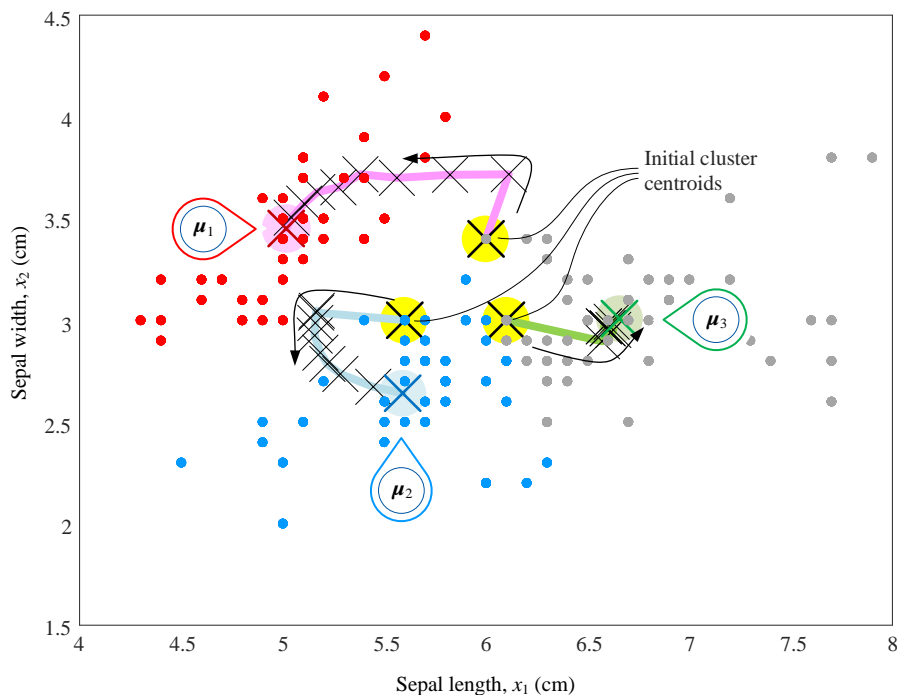
流程

流程输入为样本数据和聚类簇数 (比如 2)。然后, 从样本中随机选取 2 个数据作为初始簇质心 μ_1 和 μ_2 。然后进入如下迭代循环:

- ◀ 计算每一个样本和均值向量 μ_1 和 μ_2 距离;
- ◀ 比较每个样本和 μ_1 和 μ_2 距离, 确定簇划分;
- ◀ 根据当前簇, 计算并更新均值向量 μ_1 和 μ_2

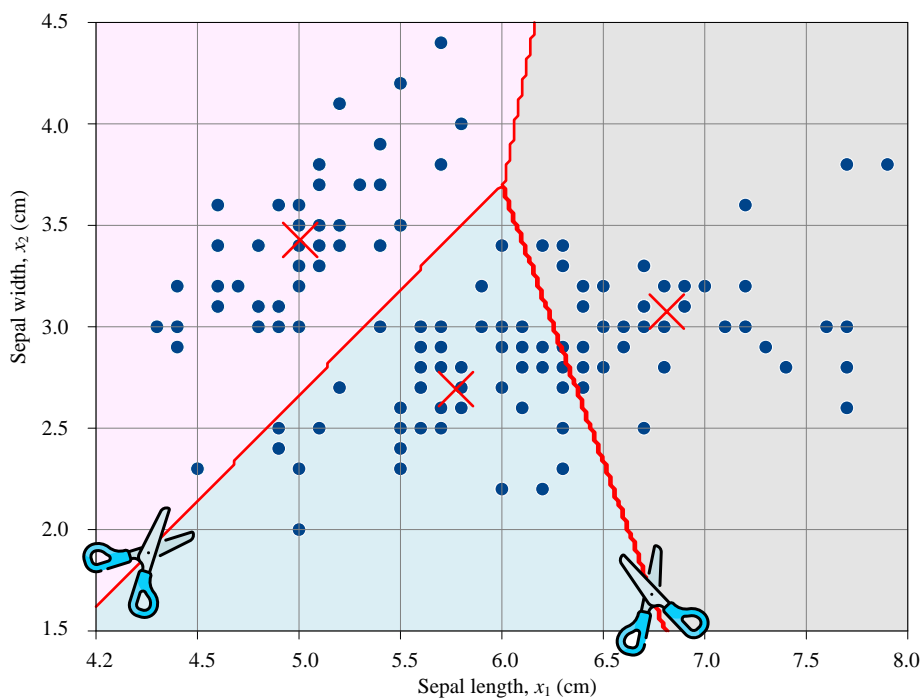
直到均值向量 μ_1 和 μ_2 满足迭代停止条件, 得到簇划分。

图 4 所示为一鸢尾花数据为例 K 均值算法迭代过程。随机选取三个样本点 (黄色高亮) 作为初始簇质心 μ_1 、 μ_2 和 μ_3 , 经过 10 次迭代, 簇质心位置不断连续变化, 最终收敛。

图 4. K 均值算法迭代过程，鸢尾花数据为例

鸢尾花数据聚类

图 5 所示为 K 均值算法聚类鸢尾花数据。Scikit-learn 工具包用来 K 均值聚类算法函数为 `sklearn.cluster.KMeans()`。利用 `model.fit()` 拟合数据后，`model.predict()` 预测聚类标签，`model.cluster_centers_`，输出簇质心位置。

图 5. K 均值算法聚类鸢尾花数据



代码 Bk7_Ch20_01.ipynb 绘制图 5。

20.4 肘部法则：选定聚类簇值

手肘法则 (elbow method) 可以用来判断合适的聚类簇值 K 。手肘法则的关键指标是误差平方和 SSE：

$$SSE(X|K) = \sum_{k=1}^K SSE(C_k) = \sum_{k=1}^K \sum_{x \in C_k} \|x - \mu_k\|^2 \quad (7)$$

随着聚类簇数 K 不断增大，均值聚类算法对样本数据划分会逐渐变得更加精细；因此，随着 K 不断增大，每个簇的聚合程度会逐渐提高，SSE 会逐渐变小。

极端情况，当 $K = n$ ，也就是每个样本数据自成一簇， $SSE = 0$ 。

K 不断增大，SSE 不断减小的过程如图 6 所示。观察此图发现一个有意思的现象，当 K 小于“合适”聚类数时， K 增大时，会导致 SSE 大幅下降；但是， K 大于“合适”聚类数时， K 再增大，SSE 下降幅度不断变缓。

这就是为什么图 6 呈现出“手肘”形状，也便是手肘法则的名称由来。理想的聚类簇数 K 便是“肘”拐点的位置。 K 均值聚类算法函数输出值 `model.inertia` 便是当前 SSE 值。

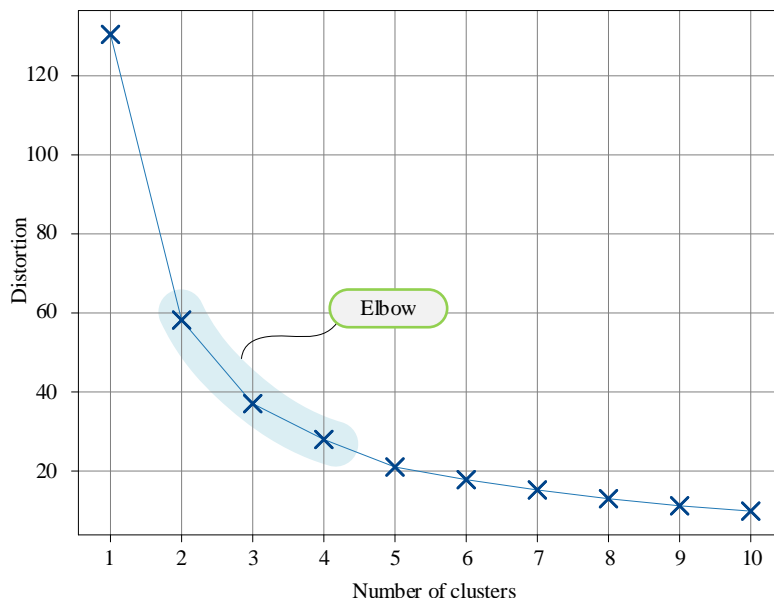


图 6. K 均值算法聚类鸢尾花数据



代码 Bk7_Ch20_02.ipynb 绘制图 6。

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

20.5 轮廓图：选定聚类簇值

轮廓图 (silhouette plot) 也常用来选定聚类簇值 K 。

轮廓图上每一条线代表的是**轮廓系数** (silhouette coefficient), s_i , 可以通过下式计算获得：

$$s_i = \frac{b_i - a_i}{\max\{a_i, b_i\}} \quad (8)$$

其中, a_i 为簇内不相似度, b_i 为簇间不相似度。

簇内不相似度

如图 7 (a) 所示, 簇内不相似度 a_i 代表样本 i ($i \in C_k$) 到同簇其他样本 j ($j \in C_k, i \neq j$) 距离平均值：

$$a_i = \frac{1}{\text{count}(C_k) - 1} \sum_{j \in C_k, i \neq j} d_{i,j} \quad (9)$$

其中, $d_{i,j}$ 为样本 i 和 j 之间距离。 a_i 越小, 说明样本 i 越应该被划分到 C_k 簇。

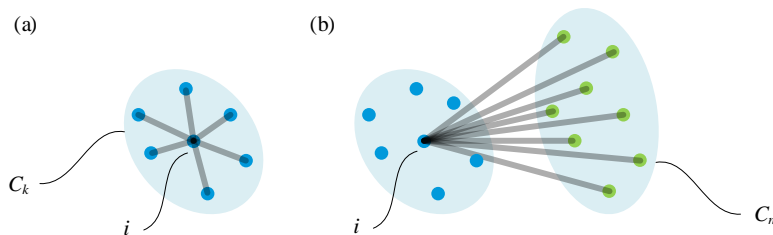


图 7. a_i 为簇内不相似度, 和 b_i 为簇间不相似度

簇间不相似度

如图 7 (b) 所示, 簇间不相似度 b_i 代表样本 i ($i \in C_k$) 到其他簇 (C_m) 样本 j ($j \in C_m, C_m \neq C_k$) 距离平均值的最小值：

$$b_i = \min \frac{1}{\text{count}(C_m)} \sum_{j \in C_m} d_{i,j} \quad (10)$$

b_i 越大, 说明样本 i 越不应该被划分到其他簇。

注意, 当簇数超过 2 时, b_i 需要在不同簇之间取最小值。

以鸢尾花数据为例

轮廓系数 s_i 的取值在 $[-1, 1]$ 区间。 s_i 越趋向于 1, 说明样本 i 分类越正确; s_i 越趋向于 -1, 说明样本 i 分类越错误。当 s_i 在 0 附近时, 样本 i 靠近聚类边界。

图 8、图 9 和图 10 所示为 K 分别取 3、4 和 5 时，聚类边界和轮廓图。理想的聚类结果是，簇内尽量紧密，簇间尽量远离。轮廓系数平均值越高，说明分类越合理。比较图 8、图 9 和图 10， $K = 3$ 时，轮廓系数较高，并且轮廓图簇宽度均匀。轮廓图结合肘部法则判断聚类簇数更合适。

计算轮廓系数的函数为 `sklearn.metrics.silhouette_score`。

`yellowbrick.cluster.SilhouetteVisualizer` 函数绘制轮廓图。

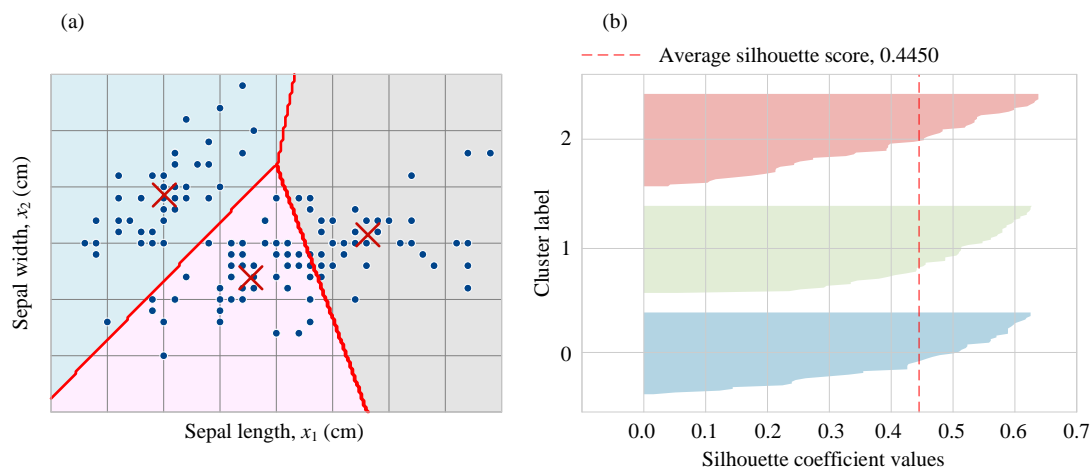


图 8. K 均值算法聚类鸢尾花数据和轮廓图， $K = 3$

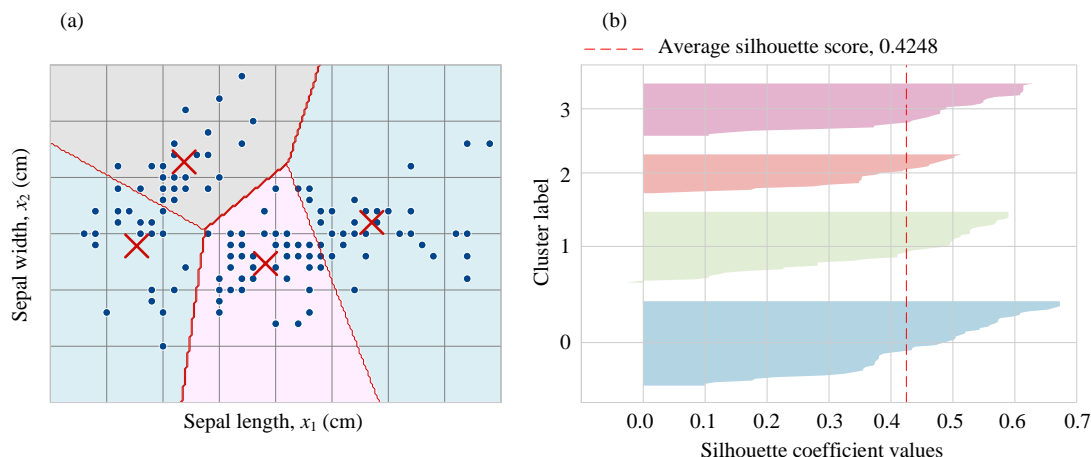
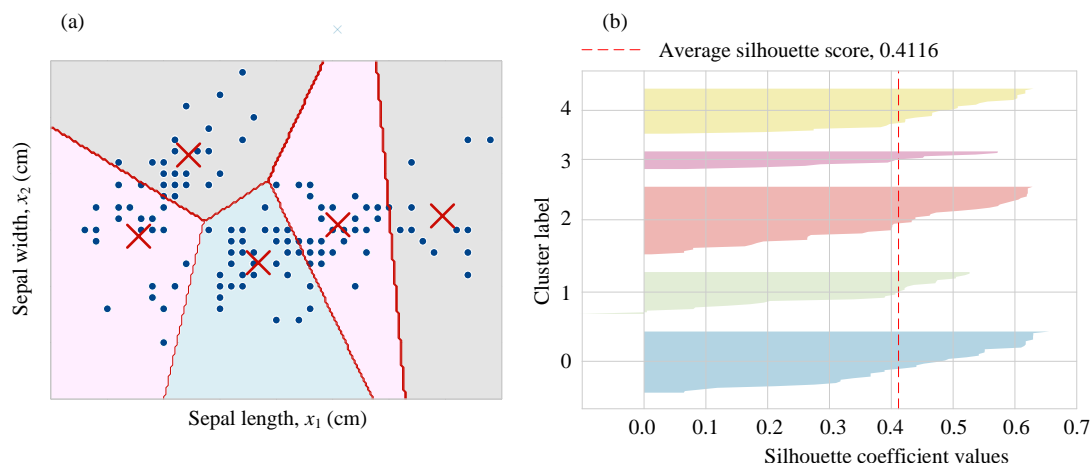


图 9. K 均值算法聚类鸢尾花数据和轮廓图， $K = 4$

图 10. K 均值算法聚类鸢尾花数据和轮廓图, $K = 5$ 

代码 Bk7_Ch20_03.ipynb 绘制图 8、图 9 和图 10。

20.6 沃罗诺伊图

沃罗诺伊图 (Voronoi diagram), 是由俄国数学家格奥尔吉·沃罗诺伊 (Georgy Voronoy) 发明的空间分割算法。本章介绍的 K 均值聚类, 本书前文介绍的**最近质心分类器** (Nearest Centroid Classifier), 实际上都依赖沃罗诺伊图确定决策边界。

图 11 所示为平面 4 点构造的沃罗诺伊图。距离较近的两点连线, 绘制中垂线; 若干中垂线便是分割平面区域的边界线。

`scipy.spatial.Voronoi` 函数获得沃罗诺伊图相关数据。`scipy.spatial.voronoi_plot_2d` 函数绘制沃罗诺伊图。图 12 所示为随机生成平面 30 个点, 以及它们构造的沃罗诺伊图。

K 均值聚类, 相当于在利用圆圈 (欧氏距离) 描述每个簇质心; 而实际上, 描述簇数据更好的形状可能是正椭圆, 甚至旋转椭圆。这就是下一章高斯混合模型 GMM 需要解决的问题。

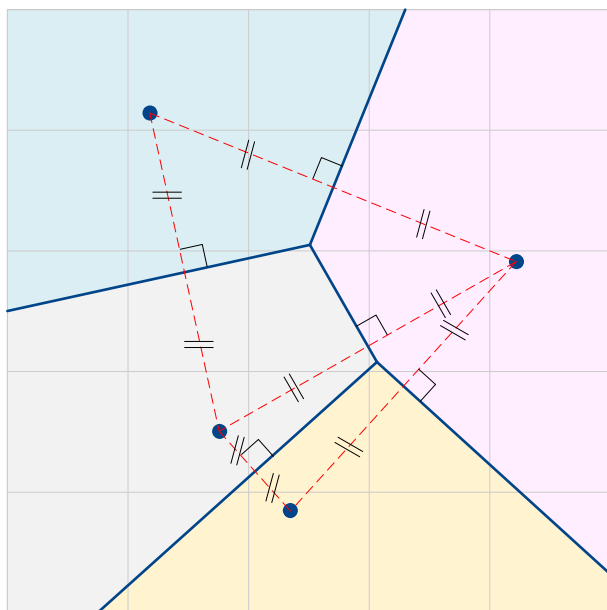


图 11.4 点平面沃罗伊图

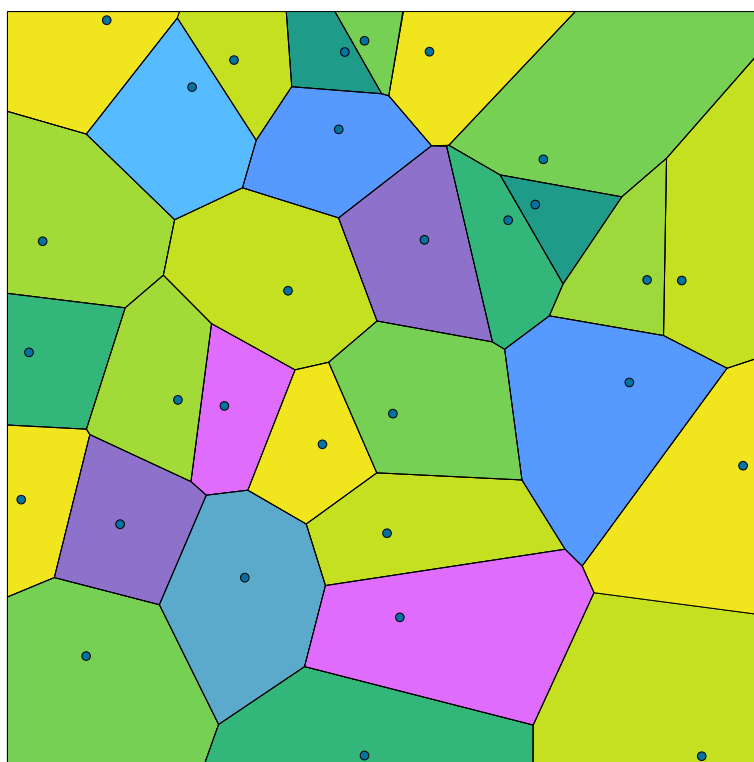


图 12.30 点平面沃罗伊图



代码 Bk7_Ch20_04.ipynb 绘制图 12。



K 均值聚类是一种无监督的机器学习技术，用于将数据集分为 K 个不同的簇。该算法首先需要随机初始化 K 个聚类中心，然后根据数据点和聚类中心的距离将数据点划分到最近的簇中。接着更新聚类中心，并重复以上步骤，直到聚类中心不再发生变化或达到预设的迭代次数。

该算法的优化问题是最小化数据点与其所属聚类中心之间的距离和，可以使用梯度下降等方法来求解。肘部法则是一种确定最佳 K 值的方法，它基于聚类中心数量 K 与聚类误差平方和之间的关系。当 K 值增大时，SSE 逐渐减小，但减小速度会逐渐变慢，当 K 达到某个值时，SSE 的下降速度会急剧减缓，这个 K 值对应的点就是肘部。轮廓图是一种衡量聚类结果质量的方法，它基于数据点与其所属簇的紧密度和分离度之间的平衡。



注意， K -means 聚类结果的簇质心并不是从样本数据点挑选出来的；如果从样本数据点所在位置挑选合适的位置作为簇质心的话，这种方法叫做 k 中心聚类 (k -medoids clustering)。请大家参考下例，这个例子还使用不同距离度量。

https://scikit-learn-extra.readthedocs.io/en/latest/auto_examples/cluster/plot_kmedoids_digits.html