考研数学命题人终极预测卷(一)

一、选择题

(1)【答案】 (D)

【分析】 由分部积分，

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x = x\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\Bigg|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x\cdot 2\left(\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\mathrm{d}x$$
$$= 0-0+\int_0^{+\infty}2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x-\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}\mathrm{d}x,$$

则$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{2x}\mathrm{d}(2x)=\frac{\pi}{2}$.

(2)【答案】 (D)

【分析】 $F(x)=\int_a^b|f(x)-f(t)|\mathrm{d}t=\int_a^x|f(x)-f(t)|\mathrm{d}t+\int_x^b|f(x)-f(t)|\mathrm{d}t$

$$=\int_a^x(f(x)-f(t))\mathrm{d}t+\int_x^b(f(t)-f(x))\mathrm{d}t$$
$$=(x-a)f(x)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_x^b f(t)\mathrm{d}t-(b-x)f(x).$$
$$F'(x)=f(x)+(x-a)f'(x)-f(x)-f(x)+f(x)-(b-x)f'(x)$$
$$=(2x-(a+b))f'(x).$$

令 $F'(x)=0$,得唯一驻点 $x_0=\frac{1}{2}(a+b)\in(a,b)$. 当 $a\leqslant x<x_0$ 时 $F'(x)<0$;当 $x_0<x\leqslant b$ 时 $F'(x)>0$,所以 $F(x_0)$ 为 $F(x)$ 的极小值,$x=x_0$ 为 $F(x)$ 的极小值点.

(3)【答案】 (C)

【分析】 $|f(x,y)-0|=\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$,

所以$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0$,$f(x,y)$ 在点 O 处连续,排除(A),(B).下面考察(C).

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=0,\ \lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=0,$$

所以 $f'_x(0,0)=0$,$f'_y(0,0)=0$. 若在点 $O(0,0)$ 处可微,则应有

$$\Delta f=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,\ 0)=\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$
$$=f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y+o(\rho)\ \left(\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)$$
$$=o(\rho).$$

但是上式并不成立,事实上,

$$\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\cdot\rho}=\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2},\ \lim_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\text{ 不存在.}$$

所以 $f(x,y)$ 在点 $O(0,0)$ 不可微. 故应选(C).

(4)【答案】 (B)

【分析】 ① 与 ③ 是正确的,② 与 ④ 是不正确的,理由如下:

① 是正确的. 设 $x_0\in(-\infty,+\infty)$,则它必含于某区间$[a,b]$中,由于题设 $f(x)$ 在任意闭区间$[a,b]$上连续,故在 x_0 处连续,所以在$(-\infty,+\infty)$上连续,论证的关键之处是:函数 $f(x)$ 的连续性是按点来讨论的,在区间上每一点处连续,就说它在该区间上连续.

③ 是正确的. 设 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$，所以 $f(x_0) > 0$，且在 x_0 处连续. 由连续函数的四则运算知，$\dfrac{1}{f(x)}$ 在 x_0 处也连续，所以 $\dfrac{1}{f(x)}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

② 是不正确的. 反例：设 $f(x) = x$，在区间 $[a,b]$ 上 $|f(x)| \leqslant \max\{|a|, |b|\} \xlongequal{\text{设为}} M$，这个界与 $[a,b]$ 有关，容易看出，在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上 $f(x) = x$ 就无界了.

④ 是不正确的. 反例：$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$，在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上 $0 < f(x) \leqslant 1$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界，而 $\dfrac{1}{f(x)} = \mathrm{e}^{x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上无界，这是因为当 $x \to \pm\infty$ 时，$\dfrac{1}{f(x)} \to +\infty$. 故应选(B).

(5)**【答案】** (C)

【分析】 逐个分析关系式是否成立.

① 式成立. 因为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均是 n 阶可逆矩阵，故存在可逆阵 $\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{W}$，使 $\boldsymbol{QA} = \boldsymbol{E}, \boldsymbol{WB} = \boldsymbol{E}$(可逆阵可通过初等行变换化为单位阵)，故有 $\boldsymbol{QA} = \boldsymbol{WB}, \boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{QA} = \boldsymbol{B}$. 记 $\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}$，则有 $\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{B}$ 成立. 故 ① 式成立.

② 式成立. 因为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均是 n 阶可逆矩阵，可取 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}$，则有 $\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{BA}$. 故 ② 式成立.

③ 式不成立. 因为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均是 n 阶实对称矩阵，它们均可以相似于对角阵，但不一定相似于同一个对角阵，即 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 不一定相似. 例如 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$(均满足题设的实对称可逆阵的要求)，但对任意可逆阵 $\boldsymbol{P}$，均有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{EP} = \boldsymbol{E} \neq \boldsymbol{B}$. 故 ③ 式不成立.

④ 式成立. 因为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均是实对称可逆矩阵，其特征值均不为零，$\boldsymbol{A}^2, \boldsymbol{B}^2$ 的特征值均大于零. 故 $\boldsymbol{A}^2, \boldsymbol{B}^2$ 的正惯性指数为 n(秩为 n，负惯性指数为 0)，故 $\boldsymbol{A}^2 \simeq \boldsymbol{B}^2$，即存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}^2$，故 ④ 式成立.

由上分析，故应选(C).

【注】 由本题可知，两个同阶可逆阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 必是等价的(由式 ① 知)，且其积 $\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{BA}$ 必是相似的(由式 ② 知)，但 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 不一定相似(由式 ③ 知)，但两个实对称可逆阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$，其平方 $\boldsymbol{A}^2$ 与 $\boldsymbol{B}^2$ 一定是合同的(由式 ④ 知).

(6)**【答案】** (C)

【分析】 $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & t \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & t+2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & t+1 \end{bmatrix}$，

当 $t \neq -1$ 时，$r(\boldsymbol{B}) = 3$.

法一 由 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解，$t \neq -1$ 时，$r(\boldsymbol{B}) = 3$，知 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_2 - \boldsymbol{\xi}_3$ 是对应齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的两个线性无关解，故 $r(\boldsymbol{A}) \leqslant 1$，但 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}$，(若 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 无解，这和题设条件矛盾) 故必有 $r(\boldsymbol{A}) = 1$，故应选(C).

法二 $\boldsymbol{A\xi}_i = \boldsymbol{b}(i = 1,2,3)$，故有 $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3] = \boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}]$，

又当 $t \neq -1$，$r(\boldsymbol{B}) = 3$，则 $\boldsymbol{B}$ 是可逆阵，故 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{AB}) = r[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}] = 1$.

故(C) 成立，则(D) 必不成立. 又 $t = -1$ 时，$r(\boldsymbol{B}) = 2$，则对应齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 有一个线性无关解向量，故 $\boldsymbol{A}$ 的秩可能是 1，也可能是 2，不能确定，故(A)，(B) 都不成立.

(7)**【答案】** (A)

【分析】 因为 $X \sim N(1,2), Y \sim N(2,2), Z \sim N(3,7)$，

所以 $X - Y \sim N(-1,4), Y - Z \sim N(-1,9)$，

又 $a = P\{X < Y\} = P\{X - Y < 0\} = P\left\{\dfrac{X - Y + 1}{2} < \dfrac{0+1}{2}\right\} = \Phi\left(\dfrac{1}{2}\right)$，

$b = P\{Y < Z\} = P\{Y - Z < 0\} = P\left\{\dfrac{Y - Z + 1}{3} < \dfrac{0+1}{3}\right\} = \Phi\left(\dfrac{1}{3}\right)$，

而且 $\Phi(x)$ 单调递增，所以 $a > b$，选(A).

(8)【答案】　(B)

【分析】　X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 分布函数讨论如下：

① 当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=0$；② 当 $y\geqslant 1$ 时，$F_Y(y)=1$；

③ 当 $0\leqslant y<1$ 时，

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{Y=0\}+P\{0<Y\leqslant y\}=P\{-1\leqslant X\leqslant 0\}+P\{0<\sqrt{X}\leqslant y\}$$

$$=\frac{1}{2}+P\{0<X\leqslant y^2\}=\frac{1}{2}+\int_0^{y^2}\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{y^2+1}{2};$$

即 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \dfrac{y^2+1}{2}, & 0\leqslant y<1,\\ 1, & y\geqslant 1,\end{cases}$ 其在 $y=0$ 处为间断点，选(B).

二、填空题

(9)【答案】　$\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-8)$

【分析】　$y'(x)=\sqrt{3+x^4}$，$\mathrm{d}l=\sqrt{1+y'^2(x)}\mathrm{d}x=\sqrt{4+x^4}\mathrm{d}x$. 因为 $\sqrt{3+t^4}$ 为 t 的偶函数，所以 $y(x)=\int_0^x\sqrt{3+t^4}\mathrm{d}t$ 为 x 的奇函数，所以

$$\int_l y(x)\mathrm{d}l=\int_{-1}^1 y(x)\sqrt{4+x^4}\mathrm{d}x=0,$$

$$\int_l |x|^3\mathrm{d}l=2\int_0^1 x^3\sqrt{4+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(4+x^4)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-8).$$

所以 $\int_l(|x|^3+y)\mathrm{d}l=0+\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-8)=\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-8)$.

(10)【答案】　$\frac{32}{15}\pi a^5$

【分析】　由高斯公式，以 Ω 表示 S 所围的球域，有

$$\iint_S\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}v=\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}\rho^4\sin\varphi\mathrm{d}\rho=\frac{32}{15}\pi a^5.$$

(11)【答案】　$\frac{13}{\sqrt{41}}$

【分析】　$\mathbf{grad}\, v|_P=(-4,4,-3)$，单位化为 $\left(-\frac{4}{\sqrt{41}},\frac{4}{\sqrt{41}},-\frac{3}{\sqrt{41}}\right)$，$\mathbf{grad}\, u|_P=(-6,1,5)$，所以所求方向导数 $=\left(-\frac{4}{\sqrt{41}}\right)\times(-6)+\frac{4}{\sqrt{41}}\times 1+\left(-\frac{3}{\sqrt{41}}\right)\times 5=\frac{13}{\sqrt{41}}$.

(12)【答案】　$x\sin\left(\frac{\pi}{6}+\ln x\right)$

【分析】　此为齐次方程. 令 $y=ux$，原方程化为

$$x^2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=x\sqrt{1-u^2}.$$

分离变量，积分得　　$\arcsin u=\ln x+C$，即 $y=x\sin(\ln x+C)$.

再由 $y(1)=\frac{1}{2}$ 得 $C=\frac{\pi}{6}$. 所以 $y=x\sin\left(\frac{\pi}{6}+\ln x\right)$.

(13)【答案】 $\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$

【分析】 法一 $\boldsymbol{A}$ 是实对称阵,其对应的二次型为

$$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}a_1&a_1&a_1\\a_1&a_1+a_2&a_1+a_2\\a_1&a_1+a_2&a_1+a_2+a_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

$$=a_1x_1^2+(a_1+a_2)x_2^2+(a_1+a_2+a_3)x_3^2+2a_1x_1x_2+2a_1x_1x_3+2(a_1+a_2)x_2x_3$$

$$=a_1(x_1+x_2+x_3)^2+a_2(x_2+x_3)^2+a_3x_3^2.$$

令$\begin{cases}y_1=x_1+x_2+x_3,\\y_2=x_2+x_3,\\y_3=x_3.\end{cases}$ 即$\begin{cases}x_1=y_1-y_2,\\x_2=y_2-y_3,\\x_3=y_3,\end{cases}$ 即 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$,

得 $f=a_1y_1^2+a_2y_2^2+a_3y_3^2$,其中 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{C}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$.

法二 用 $\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$ 左乘 $\boldsymbol{A}$,得

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1&a_1&a_1\\a_1&a_1+a_2&a_1+a_2\\a_1&a_1+a_2&a_1+a_2+a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1&a_1&a_1\\0&a_2&a_2\\0&0&a_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}_1,$$

再用 $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 右乘 $\boldsymbol{A}_1$,得

$$\begin{bmatrix}a_1&a_1&a_1\\0&a_2&a_2\\0&0&a_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1&0&0\\0&a_2&0\\0&0&a_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{B},$$

得 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$,

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\left(\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix},$$

即 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$,其中 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$.

(14)【答案】 $\dfrac{2\sigma^4}{n}$

【分析】 由于 $\overline{X}$ 与 S^2 独立,故

$$D\left[\overline{X}^2+\left(1-\frac{1}{n}\right)S^2\right]=D(\overline{X}^2)+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2D(S^2)=D(\overline{X}^2)+\frac{1}{n^2}D[(n-1)S^2].$$

又因为$\overline{X}\sim N\left(0,\frac{\sigma^2}{n}\right)$,$\frac{\sqrt{n}\,\overline{X}}{\sigma}\sim N(0,1)$,$\frac{n\overline{X}^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(1)$,故$D\left(\frac{n\overline{X}^2}{\sigma^2}\right)=2$,得$D(\overline{X}^2)=\frac{2\sigma^4}{n^2}$.

同理,$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$,$D\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right]=2(n-1)$,$D[(n-1)S^2]=2\sigma^4(n-1)$,

所以

$$D\left[\overline{X}^2+\left(1-\frac{1}{n}\right)S^2\right]=\frac{2\sigma^4}{n^2}+\frac{1}{n^2}2\sigma^4(n-1)=\frac{2\sigma^4}{n}.$$

三、解答题

(15)**【解】** 设曲面上的点的坐标为(x,y,z),其到平面$x-y-z=1$的距离为

$$d=\frac{1}{\sqrt{3}}\,|\,x-y-z-1\,|.$$

在约束条件$3x^2+3y^2-2xy-4z=0$下,求d^2的最小值.为此,令

$$F(x,y,z,\lambda)=\frac{1}{3}(x-y-z-1)^2+\lambda(3x^2+3y^2-2xy-4z),$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{2}{3}(x-y-z-1)+6\lambda x-2\lambda y=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{2}{3}(x-y-z-1)+6\lambda y-2\lambda x=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{2}{3}(x-y-z-1)-4\lambda=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=3x^2+3y^2-2xy-4z=0,$$

解之得唯一解$(x,y,z)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$,此点到平面的距离为最小,且$d_{\min}=\frac{1}{6}\sqrt{3}$.

(16)**【解】** $I=\int_l e^x\cos y\mathrm{d}x-e^x\sin y\mathrm{d}y+\int_l 2(x+y)\mathrm{d}x+\frac{3}{2}x\mathrm{d}y=I_1+I_2$,

$I_1=\int_l \mathrm{d}e^x\cos y=e^x\cos y\Big|_{(0,0)}^{(\pi,0)}=e^\pi-1$,

$I_2=\int_l 2(x+y)\mathrm{d}x+\frac{3}{2}x\mathrm{d}y=\int_0^\pi\left(2(x+\sin x)+\frac{3}{2}x\cos x\right)\mathrm{d}x$

$\quad=\left[x^2-2\cos x+\frac{3}{2}x\sin x+\frac{3}{2}\cos x\right]\Big|_0^\pi=\pi^2+1.$

$I=I_1+I_2=e^\pi+\pi^2$.

(17)**【证】** 不妨认为$y>x>0$(因若$x>y>0$,则变换所给不等式左边的x与y,由行列式的性质知,左式的值不变),则

$$\frac{1}{x-y}\begin{vmatrix}x & y\\ e^x & e^y\end{vmatrix}=\frac{xe^y-ye^x}{x-y}=\frac{\frac{e^y}{y}-\frac{e^x}{x}}{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}.$$

由柯西公式,存在$\xi\in(x,y)$使上式$=\frac{\frac{\xi e^\xi-e^\xi}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}}=e^\xi-\xi e^\xi$.

记$f(u)=e^u-ue^u$,有$f(0)=1$,$f'(u)=-ue^u<0(u>0)$,所以当$u>0$时,$f(u)<1$,从而知$e^\xi-\xi e^\xi<1$.于是得证.

(18)**【解】** 用柱面坐标,$\mathrm{d}v=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$,

$$\iiint_\Omega\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{x^2+y^2+z}}=\int_1^4\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3z}}\frac{r}{\sqrt{r^2+z}}\mathrm{d}r=2\pi\int_1^4\sqrt{r^2+z}\Big|_{r=0}^{r=\sqrt{3z}}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_1^4\sqrt{z}\mathrm{d}z=\frac{4}{3}\pi z^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4=\frac{28\pi}{3}.$$

(19)【证】 (Ⅰ) $f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n+1}\right)=f'(\xi_n)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=f'(\xi_n)\frac{1}{n(n+1)}$.

$$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n+1}\right)\right|\leqslant\frac{M}{n^2},$$

其中 $|f'(x)|\leqslant M$，M 是正常数，所以 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n+1}\right)\right]$ 绝对收敛.

(Ⅱ) $S_n=\sum\limits_{i=2}^{n}\left[f\left(\frac{1}{i}\right)-f\left(\frac{1}{i+1}\right)\right]=f\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

由于级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n+1}\right)\right]$ 绝对收敛，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\frac{1}{n+1}\right)$ 存在，即 $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 存在.

(20)【解】 (Ⅰ) **法一** $\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}$，求得 $\boldsymbol{A}^*$，即可求得 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}A_{ij}$.

$$|\boldsymbol{A}|=1,\boldsymbol{A}\text{ 可逆},\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0&\cdots&0&0\\0&1&-1&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&-1\\0&0&0&\cdots&0&1\end{bmatrix},$$

故 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}A_{ij}=n-(n-1)=1$.

法二 $\sum\limits_{j=1}^{n}A_{1j}=A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}=A_{11}=1$，

$$\sum_{j=1}^{n}A_{2j}=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&1&1&\cdots&1\\0&0&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}=0,\text{同理}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}=0,i=3,\cdots,n,$$

故 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}A_{ij}=1$.

(Ⅱ)
$$|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}A_{22}&A_{23}&\cdots&A_{2n}\\A_{32}&A_{33}&\cdots&A_{3n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{n2}&A_{n3}&\cdots&A_{nn}\end{vmatrix}\xlongequal{\text{转置}}\begin{vmatrix}A_{22}&A_{32}&\cdots&A_{n2}\\A_{23}&A_{33}&\cdots&A_{n3}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{2n}&A_{3n}&\cdots&A_{nn}\end{vmatrix}\xlongequal{\text{升阶}}$$

$$\begin{vmatrix}1&A_{21}&A_{31}&\cdots&A_{n1}\\0&A_{22}&A_{32}&\cdots&A_{n2}\\0&A_{23}&A_{33}&\cdots&A_{n3}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&A_{2n}&A_{3n}&\cdots&A_{nn}\end{vmatrix}\xlongequal{\text{记}}|\boldsymbol{C}|,$$

$\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{C}$，得

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{C}|=|\boldsymbol{AC}|=\left|\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&A_{21}&A_{31}&\cdots&A_{n1}\\0&A_{22}&A_{32}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&A_{2n}&a_{3n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}\right|$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & |\boldsymbol{A}| & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & |\boldsymbol{A}| \end{vmatrix}=a_{11}\,|\boldsymbol{A}|^{n-1}.$$

由 $|\boldsymbol{A}|=-2\neq 0$，得 $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{C}|=a_{11}\,|\boldsymbol{A}|^{n-2}=3\cdot(-2)^{n-2}$.

(21)**【解】** **法一** （Ⅰ）由题设条件知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 4 & \cdots & 2n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 2n & \cdots & n^2 \end{bmatrix}，且\boldsymbol{A}\to\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}，故 r(\boldsymbol{A})=1.$$

（Ⅱ）由 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & \cdots & -n \\ -2 & \lambda-4 & \cdots & -2n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -n & -2n & \cdots & \lambda-n^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & \cdots & -n \\ -2\lambda & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -n\lambda & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda-\sum\limits_{i=1}^{n}i^2 & -2 & \cdots & -n \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}=\left(\lambda-\sum_{i=1}^{n}i^2\right)\lambda^{n-1},$$

故 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0,\lambda_n=\sum\limits_{i=1}^{n}i^2$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0$ 时，方程组 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 就是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，其同解方程组是 $x_1+2x_2+\cdots+nx_n=0$，解得对应的线性无关特征向量为

$$\boldsymbol{\xi}_1=[-2,1,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=[-3,0,1,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1}=[-n,0,\cdots,0,1]^{\mathrm{T}}.$$

当 $\lambda_n=\sum\limits_{i=1}^{n}i^2$ 时，$(\lambda_n\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，对系数矩阵作初等行变换，得

$$\lambda_n\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \lambda_n-1 & -2 & \cdots & -n \\ -2 & \lambda_n-4 & \cdots & -2n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -n & -2n & \cdots & \lambda_n-n^2 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} \lambda_n-1 & -2 & \cdots & -n \\ -2\lambda_n & \lambda_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -n\lambda_n & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\lambda_n\neq 0}\begin{bmatrix} \lambda_n-1 & -2 & \cdots & -n \\ -2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -n & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} \lambda_n-\sum\limits_{i=1}^{n}i^2 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -n & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\lambda_n=\sum\limits_{i=1}^{n}i^2}{=\!=\!=\!=}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -n & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

方程组的同解方程组为 $\begin{cases} -2x_1+x_2=0, \\ -3x_1+x_3=0, \\ \cdots\cdots \\ -nx_1+x_n=0. \end{cases}$

解得对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_n=[1,2,\cdots,n]^{\mathrm{T}}$.

从而知 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关特征向量,$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$,取

$$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1},\boldsymbol{\xi}_n]=\begin{bmatrix}-2&-3&\cdots&-n&1\\1&0&\cdots&0&2\\0&1&\cdots&0&3\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&n\end{bmatrix},$$

则
$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}0&&&&\\&0&&&\\&&\ddots&&\\&&&0&\\&&&&\sum_{i=1}^{n}i^2\end{bmatrix}=\boldsymbol{\Lambda}.$$

法二 （Ⅰ）由题设条件 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&\cdots&n\\2&4&\cdots&2n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\n&2n&\cdots&n^2\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{A}$ 中第 i 行元素是第 1 行的 i 倍,故有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&\cdots&n\\2&4&\cdots&2n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\n&2n&\cdots&n^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\\vdots\\n\end{bmatrix}[1,2,\cdots,n]\xlongequal{\text{记}}\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}},$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}=[1,2,\cdots,n]^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$. 故 $r(\boldsymbol{A})=1$.

（Ⅱ）因 $\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{A}=\left(\sum_{i=1}^{n}i^2\right)\boldsymbol{A}$,故知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $0,\sum_{i=1}^{n}i^2$.

当$\lambda=0$时,对应的特征向量满足$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,因 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}i^2\neq0$,在方程 $\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 两边左乘 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$,

得
$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0,\text{得 }\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0.$$

当 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$ 时,两边左乘 $\boldsymbol{\alpha}$,得 $\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$,故方程组 $\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$ 与 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$ 是同解方程组,解方程组 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$,得线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{\xi}_1=[-2,1,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=[-3,0,1,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1}=[-n,0,\cdots,0,1]^{\mathrm{T}}.$$

又 $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^{n}i^2=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\neq0$,故 $\boldsymbol{A}$ 有一个非零特征值 $\lambda_n=\sum_{i=1}^{n}i^2$.

当 $\lambda_n=\sum_{i=1}^{n}i^2=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 时,由 $(\lambda_n\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,

由观察知,$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}$ 时,有

$$(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}-(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0},$$

故 $\boldsymbol{\alpha}=[1,2,\cdots,n]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\xi}_n$ 是对应 $\lambda_n=\sum_{i=1}^{n}i^2$ 的特征向量.

即 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量,$\boldsymbol{A}$ 能相似于对角阵.(下同法一)

(22)**【解】** （Ⅰ）(U,V) 为 D 上二维均匀分布,则下列事件的概率可由面积之比得到:

$$P\{X=-1,Y=-1\}=P\left\{U\leqslant-1,V\leqslant\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{8},$$

$$P\{X=-1,Y=1\}=P\left\{U\leqslant-1,V>\frac{1}{2}\right\}=0,$$

$$P\{X=1,Y=-1\}=P\left\{U>-1,V\leqslant\frac{1}{2}\right\}=\frac{6}{8},$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\left\{U>-1,V>\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{8},$$

故(X,Y)的联合分布律为：

$X \backslash Y$	-1	1	$p_{i\cdot}$
-1	$1/8$	0	$1/8$
1	$6/8$	$1/8$	$7/8$
$p_{\cdot j}$	$7/8$	$1/8$	1

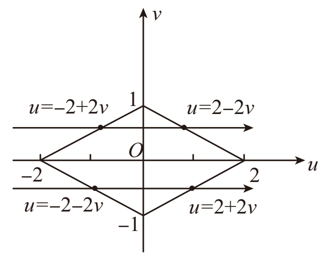
(Ⅱ)$EX=\dfrac{3}{4},EY=-\dfrac{3}{4},E(XY)=\dfrac{1}{8}-\dfrac{6}{8}+\dfrac{1}{8}=-\dfrac{1}{2},$

$E(X^2)=E(Y^2)=1,$

$DX=E(X^2)-E^2(X)=\dfrac{7}{16},DY=E(Y^2)-E^2(Y)=\dfrac{7}{16},$

$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-EXEY=\dfrac{1}{16},$

$\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\ \sqrt{DY}}=\dfrac{1}{7}.$



(Ⅲ)易知 $f(u,v)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & (u,v)\in D,\\ 0, & 其他,\end{cases}$

V的边缘密度 $f_V(v)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)\mathrm{d}u=\begin{cases}\displaystyle\int_{-2-2v}^{2+2v}\frac{1}{4}\mathrm{d}u, & -1<v\leqslant 0,\\ \displaystyle\int_{-2+2v}^{2-2v}\frac{1}{4}\mathrm{d}u, & 0<v<1,\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}1+v, & -1<v\leqslant 0,\\ 1-v, & 0<v<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

(23)**【解】**　(Ⅰ)**法一**　(用二阶原点矩)

$$\begin{aligned}EX&=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{\mu}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\theta}}\mathrm{d}x\\&=-x\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\theta}}\Big|_{\mu}^{+\infty}+\int_{\mu}^{+\infty}1\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\theta}}\mathrm{d}x\\&=\mu-\theta\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\theta}}\Big|_{\mu}^{+\infty}=\mu+\theta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(X^2)&=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_{\mu}^{+\infty}x^2\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\theta}}\mathrm{d}x\\&=-x^2\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\theta}}\Big|_{\mu}^{+\infty}+\int_{\mu}^{+\infty}2x\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\theta}}\mathrm{d}x\\&=\mu^2+2\theta EX=\mu^2+2\mu\theta+2\theta^2.\end{aligned}$$

于是,令

$$\begin{cases}\mu+\theta=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}, & ①\\ \mu^2+2\mu\theta+2\theta^2=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i^2. & ②\end{cases}$$

②$-$①^2 再开方可得 μ,θ 的矩估计量为

$$\begin{cases}\hat{\theta}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2},\\ \hat{\mu}=\overline{X}-\sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2}.\end{cases}$$

法二 (用二阶中心矩)

$$DX=E(X^2)-E^2(X)=\theta^2,$$

令

$$\begin{cases}\mu+\theta=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=\overline{X},\\ \theta^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2.\end{cases}$$

易得 μ,θ 的矩估计量:

$$\begin{cases}\hat{\theta}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2},\\ \hat{\mu}=\overline{X}-\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2}.\end{cases}$$

(Ⅱ)因为似然函数为

$$L(x_1,\cdots,x_n,\mu,\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}, & x_i\geqslant\mu,i=1,\cdots,n,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

于是 $\ln L=-n\ln\theta-\dfrac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+\dfrac{n\mu}{\theta}$,

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\mu}=\frac{n}{\theta}>0,$$

由此可知 $\ln L$ 关于 μ 单调增加,即 $L(x_1,\cdots,x_n,\mu,\theta)$ 关于 μ 单调增加.
又因为 $\mu\in(-\infty,\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}]$,故 μ 的最大似然估计量为

$$\hat{\mu}=\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}.$$

令

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{n}{\theta^2}\mu=0,$$

解得 θ 的最大似然估计量为

$$\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}.$$

考研数学命题人终极预测卷(二)

一、选择题

(1)**【答案】** (C)

【分析】 由麦克劳林公式有,$x-\sin x=x-\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)=\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$,所以当 $x\to0$ 时,$x-\sin x\sim\dfrac{1}{6}x^3$. 于是$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\frac{1}{6}x^3}=1$,即 $f(x)\sim\dfrac{1}{6}x^3(x\to0)$. 另一方面,由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在 4 阶导数,由皮亚诺余项泰勒公式展开到 $o(x^4)$,有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+\frac{1}{6}f'''(0)x^3+\frac{1}{24}f^{(4)}(0)x^4+o(x^4),$$

推知 $f(0)=0,f'(0)=0,f''(0)=0,f'''(0)=1,f^{(4)}(0)$ 任意,故应选(C).

【注】 推知$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\frac{1}{6}x^3}=1$ 之后,也可用洛必达法则.