Rosenbluth 公式

马远卓 卢梦 张一镆 孙嘉琪 乔颢

北京大学物理学院

2016 年 4 月 13 日

思路

Rutherford

$$|\frac{d\sigma}{d\Omega}|_R = \frac{4Z^2\alpha^2(\hbar c)^2E'^2}{|qc|^4} \tag{1}$$

Mott

$$|\frac{d\sigma}{d\Omega}|_{Mott} = |\frac{d\sigma}{d\Omega}|_R(1-\beta\sin^2\frac{\theta}{2}) \tag{2}$$

Rosenbluth

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |\frac{d\sigma}{d\Omega}|_{Mott}(A\cos^2(\frac{\sigma}{2}) - \frac{q^2}{2m}B\sin^2(\frac{\sigma}{2})) \tag{3}$$

经典卢瑟福散射

卢瑟福散射公式

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(E,\theta) = \frac{(zZe)^2}{(4\pi\epsilon_0)^4(4E)^2\sin^4\frac{\theta}{2}} \tag{4}$$

要求：

1. 非相对论电子
2. 不考虑核反冲
3. 核为点粒子
4. 弹性散射

莫特截面

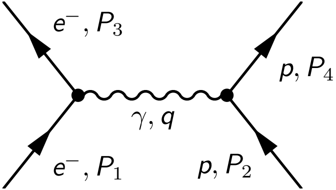
考虑电子自旋

$$|\frac{d\sigma}{d\Omega}|^{*}_{Mott} = |\frac{d\sigma}{d\Omega}|_{R}(1-\beta^2\sin^2\frac{\theta}{2}) \tag{5}$$

考虑核反冲

$$|\frac{d\sigma}{d\Omega}|_{Mott} = |\frac{d\sigma}{d\Omega}|^{*}_{Mott}\frac{E'}{E} \tag{6}$$

考虑核自旋，核子仍然视做点粒子



$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim |\mathcal{M}|^2 \tag{7}$$

$$i\mathcal{M} = [\bar{u}(P_4)(-ie\gamma^{\mu})u(P_2)]\frac{-ig_{\mu\nu}}{(P_1 - P_3)^2 + i\epsilon}[\bar{u}(P_3)(-ie\gamma^{\nu})u(P_1)] \tag{8}$$

对初态自旋取平均则有：

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim < |\mathcal{M}|^2 > &= \frac{e^4}{4(P_1 - P_3)^4}[4(P_1^\mu P_3^\nu + P_3^\mu P_1^\nu + (m^2 - P_1 P_3)g^{\mu\nu})] \\ &\times [4(P_{2\mu} P_{4\nu} + P_{4\mu} P_{2\nu} + (M^2 - P_2 P_4)g_{\mu\nu})] \\ &\equiv \frac{e^4}{q^4} L^{\mu\nu}_{electron} L_{\mu\nu proton}\end{aligned} \tag{9}$$

其中 m 为电子质量，M 为质子质量。

通过上述式子可以得到

核子视作 $\frac{1}{2}$ 自旋点粒子散射截面

$$|\frac{d\sigma}{d\Omega}|_{\frac{1}{2}Spin} = |\frac{d\sigma}{d\Omega}|_{Mott}(1 + 2\tau \tan^2\frac{\theta}{2}) \tag{10}$$

然而测量发现核子具有反常磁矩，也就意味着核子不是点粒子，他有着内部结构，需要对散射进行进一步的修正。

$$\begin{aligned} \mu_p &= 2.79\mu_N \\ \mu_n &= -1.91\mu_N \end{aligned} \tag{11}$$

考虑核内部结构

对上述推导做修正

$$L_{\mu\nu proton} \Rightarrow k_{\mu\nu proton}$$

在顶点处相关项有：$q = P_4 - P_2, P_2, P_4, g_{\mu\nu}$。令 $p = P_2$，这样的话 p，q 相互独立。因此构造 $k_{\mu\nu}$ 的项可以选择有

$$g_{\mu\nu}, p_\mu p_\nu, q_\mu q_\nu, p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu, p_\mu q_\nu - p_\nu q_\mu$$

因为 $L_{\mu\nu proton}$ 对 μ, ν 对称，因而 $k_{\mu\nu proton}$ 在极限近似下也应该如此。
所以可以排除 $p_\mu q_\nu - p_\nu q_\mu$ 反对称项。

综上，有

$$k_{\mu\nu proton} = -k_1 g_{\mu\nu} + \frac{k_2}{M^2} p_\mu q_\nu + \frac{k_4}{M^2} q_\mu q_\nu + \frac{k_5}{M^2}(p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu) \quad (12)$$

其中 k_1, k_2, k_4, k_5 为修正因子，只与 q^2 相关。

根据 Ward identity 有 $q_\mu k^{\mu\nu} proton = 0$, 所以可以得到

$$\begin{aligned} k_4 &= k_2 + \frac{k_1}{q^2} M^2 \\ k_5 &= \frac{k_2}{2} \end{aligned} \quad (13)$$

进而有

$$\begin{aligned} k_{\mu\nu proton} &= k_1(-g_{\mu\nu} + \frac{1}{q^2} q^\mu q^\nu) + \frac{k_2}{M^2}(p_\mu + \frac{q_\mu}{2})(p_\nu + \frac{q_\nu}{2}) \\ L^{\mu\nu}_{electron} &= [P^\mu_1 P^\nu_3 + P^\mu_3 P^\nu_1 + g^{\nu\mu}(m^2 - P_1 \cdot P_3)] \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim L^{\mu\nu} k_{\mu\nu} = k_1 \times (\mathbb{A}) + \frac{k_2}{M^2} \times (\mathbb{B}) \tag{15}$$

同时可以用关系式化简

$$P_1 + P_2 = P_3 + P_4$$

$$P_1 - P_3 = P_4 - P_2 = q$$

$$P_1 \cdot q = P_4 \cdot q = \frac{q^2}{2}$$

$$P_2 \cdot q = P_3 \cdot q = -\frac{q^2}{2}$$

化简得到：

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= 2P_1 \cdot P_3 - 4m^2 \\ \mathbb{B} &= 2(P_2 \cdot p)(P_3 \cdot p) + \frac{q^2}{2} M^2 \end{aligned} \tag{16}$$

所以综上有：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim 2[k_1((P_1 \cdot P_3) - 2m^2) + \frac{k_2}{M^2}((P_1 \cdot p)(P_3 \cdot p)) + \frac{q^2 M^2}{4}] \quad (17)$$

我们有 P_1, P_2, P_3, P_4 的相关信息

1. P_1=(E,0,0,E)
2. P_2=(M,0,0,0)
3. P_3=(E$'$,0,E$'$sinθ,E$'$cosθ)
4. P_4=(E+M-E$'$,0,-E$'$sinθ,E-E$'$cosθ)

带入上式可以得到

$$<|\mathcal{M}|^2>=\frac{e^4}{4E_1E_3\sin^4\frac{\theta}{2}}[2k_1\sin^2\frac{\theta}{2}+k_2\cos^2\frac{\theta}{2}] \quad (18)$$

化简就可以得到 Rosenbluth 形式：

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \left(\frac{\alpha}{4ME_1\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)^2\frac{E_3}{E_1}[2k_1(q^2)\sin^2\frac{\theta}{2}+k_2(q^2)\cos^2\frac{\theta}{2}] \\ &= \left(\frac{\alpha}{4ME_1\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)^2\frac{E_3}{E_1}\cos^2\frac{\theta}{2}[k_2(q^2)+2k_1(q^2)\tan^2\frac{\theta}{2}]\end{aligned} \tag{19}$$

通过测量 $\frac{d\sigma}{d\Omega}(E,\theta)$ 可以得到 $k_2(q^2)$ 以及 $k_1(q^2)$ 的具体形式。
但是上式并没有很明显的体现出电和磁形状因子。

因此最开始构造光子和质子的顶点因子时，直接用代表电形状和磁形状因子的 F1 和 F2 来构造

$$\bar{u}(P_4)(-ie\Gamma^{\mu})u(P_2)$$
$$\Gamma^{\mu} = \gamma^{\mu}F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_{\nu}}{2M}F_2(q^2) \tag{20}$$

重新推导可以得到 rosenbluth 公式，也即 K1 和 K2 由 F1 和 F2 表示出来。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |\frac{d\sigma}{d\Omega}|_{Mott} \cdot [(F_1^2 - \frac{q^2}{4M^2}F_2^2) - \frac{q^2}{2M^2}(F_1 + F_2)^2 tan^2\frac{\theta}{2}] \tag{21}$$