常微分方程

简单的定义

仅含有单个自变量的微分方程，即 $y\sim x,\space F(x,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0$

如果 $y,y',y'',\cdots,y^{(n)}$ 都是一次的，那么称上式为*（n阶）线性微分方程*，它的一般形式是：

$y^{(n)}+y^{(n-1)}A_1(x)+\cdots+yA_n(x)=f(x)$

$f(x)=0$ 时，我们称该方程为*齐次线性微分方程*

对于 n 阶微分方程 $F(x,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0$，它的解通常包含 n 个相互独立的积分常数 $C_1,C_2,\cdots ,C_n$ ，即 $\Phi(x,y,C_1,C_2,\cdots,C_n)=0$

基本性质

对于 n 阶齐次线性方程，若 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 为方程的解，则它们的线性组合 $y_0=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 亦为方程的解，或者说齐次线性方程的解集具有*线性结构*，所有的解构成一个*向量空间——解空间*。（与向量的基底表示类比）

对于 n 阶非齐次线性方程（即 $f(x)\neq0$ ），不难证明，它的解可以由相应的齐次方程通解加上非齐次方程的一个特解得到，这样的解构成的空间叫做*仿射空间*。

常微分方程求解

- 有时候可以分离变量

  $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)=g(x)h(y)$

  讨论一下 $h(y)=0$ 时的情况，然后

  $\frac{\mathrm{d}y}{h(y)}=g(x)\mathrm{d}x,\space \int\frac{\mathrm{d}y}{h(y)}=\int g(x)\mathrm{d}x,\space ln|y|=\int g(x)\mathrm{d}x,\space y=Ce^{\int g(x)\mathrm{d}x}$

- 如果 x,y 齐次，

（严格定义为：对于一定范围内的 $x,y,\space \exist t\Rightarrow f(tx,ty)=t^nf(x,y)$）

那么可以换元：

令 $u_x=\frac{y}{x},\space y=ux,\space y'_x=u'_x\cdot x+u$，然后代入原式即可。

- 对于一阶线性方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$
  - 某个似乎没有名字的方法

    看起来不好分离变量，那让 $Q(x)=0$ 好了，先试试

$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x,\space\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\int P(x)\mathrm{d}x,\space y=Ce^{\int P(x)\mathrm{d}x}$（不过要讨论 $y=0$ 的情况）

$Q(x)\neq0$ 时，注意到通过在等式两侧同时乘以 $e^{\int P(x)\mathrm{d}x}$，可以使

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot e^{\int P(x)\mathrm{d}x}+P(x)\cdot e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\cdot y=Q(x)\cdot e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\\\left(y\cdot e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\right)'_x=Q(x)\cdot e^{\int P(x)\mathrm{d}x}$

然后随便积一下就好啦x

$y=e^{-\int P (x)\mathrm{d}x}\cdot\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$

- **变量代换法**

  其实从上述操作中可以看出，如果不会解的话，让它等于零就行了x

  设 $y=u_x\cdot v_x$，代入原式：

  $\begin{split}Q(x)&=u'v+v'u+P(x)uv\\&=u\left[P(x)v+v'\right]+u'v\end{split}$

  中间那堆看起来很烦，让它等于零好了：

  $P(x)v+v'=0,\space ln|v|=-\int P(x)\mathrm{d}x,\space v=Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

  那么

  $Q(x)=Cu'e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}m,\space u=\frac{1}{C}\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$

  于是

  $y=u\cdot v=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\cdot\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$

  和上一个方法得出了一样的答案x

- **常数变易法**

  不难看出，$P(x)v+v'=0$，其实和 $P(x)y+y'=Q(x)=0$ 是一样的，对比一下可以发现：

  $v=Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\\y=uv=Cue^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

  也就是说，可以把上式齐次线性方程的解 C 看作关于 x 的函数从而求出非齐次方程的通解。

- n 阶线性微分方程

同样地，先解出对应的齐次线性方程通解，再依次将 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 换为 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 并求解。

一般地：

其中 W 表示*朗斯基行列式*。

一个栗子（味道应该还行？）：

$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)\cdots\cdots(1)$

令 $f(x)=0$，得到齐次方程的通解

$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)\cdots\cdots(2)$

使用常数变易法：

$y=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)$

现在我们来找出非齐次方程的一个特解*（因为是特解所以可以加一堆限制条件，能解出来就行xwx）*：

$y'=u_1'(x)y_1(x)+u_1(x)y_1'(x)+u_2'(x)y_2(x)+u_2(x)y_2'(x)$

为了不让 $u_1(x)$ 和 $u_2(x)$ 的高阶导在后续过程中出现，令

$u_1'(x)y_1(x)+u_2'(x)y_2(x)=0\cdots\cdots(3)$

那么有

$y''=u_1'(x)y_1'(x)+u_1(x)y_1''(x)+u_2'(x)y_2'(x)+u_2(x)y_2''(x)$

代入(1):

$\begin{split}f(x)=&u_1(x)\left(y''_1+p(x)y'_1+q(x)y_1\right)\\&+u_2(x)\left(y''_2+p(x)y'_2+q(x)y_2\right)+u_1'(x)y_1'+u_2'(x)y_2'\\f(x)=&u_1'(x)y_1'(x)+u_2'(x)y_2'(x)\cdots\cdots(4)\end{split}$

联立$(2)(3)$式

$\left\{\begin{matrix}\begin{split}&u_1'(x)y_1(x)+u_2'(x)y_2(x)=0\\&u_1'(x)y_1'(x)+u_2'(x)y_2'(x)=f(x)\end{split}\end{matrix}\right.$

便可解出 u_1,u_2.

然后将特解加上线性齐次方程的通解(1)，便可以得到非齐次方程的通解，这里空白太小就不赘述了 xD

- 可降阶二次微分方程
  - 不显含未知函数的二阶方程

    $f(x,y',y'')=0$

    令 $t=y'$，则 $y''=t'_x$

    然后原式可化为

    $g(x,t,t'_x)=0$
  - 不显含自变量的二阶方程

    $m(y,y',y'')=0$

    令 $p=y'$，则 $y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p'_y\cdot p$

    然后原式可化为

    $n(y,p,p\cdot p'_y)=0$

- 高阶不显含自变量的线性齐次方程

  $f(y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0$

  可以记为

  $y^{(n)}+A_1y^{(n-1)}+\cdots+A_ny=0$

  欧拉发现，这一类方程的解都具有 $y=e^{\widetilde{z}x}$ 的形式，其中 $\widetilde{z}$ 为复数。

  于是设 $y=e^{\widetilde{z}x}$，

  $\widetilde{z}^ne^{\widetilde{z}x}+A_1\widetilde{z}^{n-1}e^{\widetilde{z}x}+\cdots+A_ne^{\widetilde{z}x}=0$

  同时除以 $e^{\widetilde{z}x}$，

  $\widetilde{z}^n+A_1\widetilde{z}^{n-1}+\cdots+A_n=0$

  我们称上式为原微分方程的*特征方程*。注意到它和原式结构相同，因此可以直接把 $y^{(n)}$ 换为 $\widetilde{z}^n$，而 ${\widetilde{z}}$ 为特征方程的解。

  如果该特征方程无重根，则 $\widetilde{z}$ 的 n 个解 $\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2,\cdots,\widetilde{z}_n$ 相互独立，故原方程的通解为

  $y=C_1e^{\widetilde{z}_1x}+C_2e^{\widetilde{z}_2x}+\cdots+C_ne^{\widetilde{z}_nx}$

  不过若 A_i 均为实数，我们应找到原方程的实数解。

  记 $\widetilde{z}_k=a_k+b_ki$

  由于 A_i 均为实数，特征方程的根必定是共轭的，即若 $a+bi$ 为一解，则 $a-bi$ 为另一解。

  $e^{(a+bi)x}=e^{a}(\cos bx+i\sin bx)$

  $e^{(a-bi)x}=e^a(\cos bx-i\sin bx)$

  我们知道对于线性齐次方程，解的任意线性组合仍为该方程的解。于是对 $e^{(a+bi)x}$ 与 $e^{(a-bi)x}$ 进行组合，可以得到原式的两个实数根：

  $y=e^a\cos bx$ 与 $y=e^a\sin bx$，通解为 $y=C_1e^a\cos bx+C_2e^a\sin bx$

  以不显含 x 的二阶齐次线性方程为栗：

  $y''+by'+cy=0$

  解得

  $\widetilde{z}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2},\space\Delta=b^2-4c$

  - 若 $\Delta>0$，$y=C_1e^{\widetilde{z}_1}+C_2e^{\widetilde{z}_2}$
  - 若 $\Delta=0$，$y=C_1e^{\widetilde{z}}+C_2x\cdot e^{\widetilde{z}}$
  - 若 $\Delta<0$，$y=C_1e^a\cos bx+C_2e^a\sin bx$

参考文献

崔士襄 *《“常数变易法”来历的探讨》*

维基百科相关条目

致谢

Yukina Azusa

lyy00054

yc

by *Catoverflow*

12.26.2019