

常微分方程

简单的定义

仅含有单个自变量的微分方程，即 $y \sim x, F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$

如果 $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ 都是一次的，那么称上式为 $(n$ 阶) 线性微分方程，它的一般形式是：

$$y^{(n)} + y^{(n-1)}A_1(x) + \dots + yA_n(x) = f(x)$$

$f(x) = 0$ 时，我们称该方程为齐次线性微分方程

对于 n 阶微分方程 $F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ ，它的解通常包含 n 个相互独立的积分常数 C_1, C_2, \dots, C_n ，即 $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$

基本性质

对于 n 阶齐次线性方程，若 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 为方程的解，则它们的线性组合 $y_0 = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 亦为方程的解，或者说齐次线性方程的解集具有线性结构，所有的解构成一个向量空间——解空间。（与向量的基底表示类比）

对于 n 阶非齐次线性方程（即 $f(x) \neq 0$ ），不难证明，它的解可以由相应的齐次方程通解加上非齐次方程的一个特解得到，这样的解构成的空间叫做仿射空间。

常微分方程求解

- 有时候可以分离变量

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = g(x)h(y)$$

讨论一下 $h(y) = 0$ 时的情况，然后

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx, \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx, \ln|y| = \int g(x)dx, y = Ce^{\int g(x)dx}$$

- 如果 x, y 齐次，

（严格定义为：对于一定范围内的 $x, y, \exists t \Rightarrow f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ ）

那么可以换元：

令 $u_x = \frac{y}{x}, y = ux, y'_x = u'_x \cdot x + u$ ，然后代入原式即可。

- 对于一阶线性方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

- 某个似乎没有名字的方法

看起来不好分离变量，那让 $Q(x) = 0$ 好了，先试试

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx, \int \frac{dy}{y} = -\int P(x)dx, y = Ce^{\int P(x)dx} \text{（不过要讨论 } y = 0 \text{ 的情况）}$$

$Q(x) \neq 0$ 时，注意到通过在等式两侧同时乘以 $e^{\int P(x)dx}$ ，可以使

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} \cdot e^{\int P(x)dx} + P(x) \cdot e^{\int P(x)dx} \cdot y &= Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} \\ \left(y \cdot e^{\int P(x)dx} \right)' &= Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} \end{aligned}$$

然后随便积一下就好啦x

$$y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx$$

◦ 变量代换法

其实从上述操作中可以看出，如果不会解的话，让它等于零就行了x

设 $y = u_x \cdot v_x$ ，代入原式：

$$\begin{aligned} Q(x) &= u'v + v'u + P(x)uv \\ &= u[P(x)v + v'] + u'v \end{aligned}$$

中间那堆看起来很烦，让它等于零好了：

$$P(x)v + v' = 0, \ln|v| = -\int P(x)dx, v = Ce^{-\int P(x)dx}$$

那么

$$Q(x) = Cu'e^{-\int P(x)dx}m, u = \frac{1}{C} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx$$

于是

$$y = u \cdot v = e^{-\int P(x)dx} \cdot \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx$$

和上一个方法得出了一样的答案x

◦ 常数变易法

不难看出， $P(x)v + v' = 0$ ，其实和 $P(x)y + y' = Q(x) = 0$ 是一样的，对比一下可以发现：

$$\begin{aligned} v &= Ce^{-\int P(x)dx} \\ y &= uv = Cue^{-\int P(x)dx} \end{aligned}$$

也就是说，可以把上式齐次线性方程的解 C 看作关于 x 的函数从而求出非齐次方程的通解。

• n 阶线性微分方程

同样地，先解出对应的齐次线性方程通解，再依次将 C_1, C_2, \dots, C_n 换为 u_1, u_2, \dots, u_n 并求解。

一般地：

$$u'_j = (-1)^{n+j} \frac{W(y_1, \dots, y_{j-1}, y_j, \dots, y_n) \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}}{W(y_1, y_2, \dots, y_n)}$$

其中 W 表示[朗斯基行列式](#)。

一个栗子（味道应该还行？）：

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \cdots \cdots (1)$$

令 $f(x) = 0$ ，得到齐次方程的通解

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \cdots \cdots (2)$$

使用常数变易法：

$$y = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

现在我们来找出非齐次方程的一个特解（因为是特解所以可以加一堆限制条件，能解出来就行
xwx）：

$$y' = u_1'(x)y_1(x) + u_1(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2(x) + u_2(x)y_2'(x)$$

为了不让 $u_1(x)$ 和 $u_2(x)$ 的高阶导在后续过程中出现，令

$$u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0 \cdots \cdots (3)$$

那么有

$$y'' = u_1'(x)y_1'(x) + u_1(x)y_1''(x) + u_2'(x)y_2'(x) + u_2(x)y_2''(x)$$

代入(1)：

$$\begin{aligned} f(x) &= u_1(x)(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) \\ &\quad + u_2(x)(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) + u_1'(x)y_1' + u_2'(x)y_2' \\ f(x) &= u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) \cdots \cdots (4) \end{aligned}$$

联立(2)(3)式

$$\begin{cases} u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0 \\ u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

便可解出 u_1, u_2 。

然后将特解加上线性齐次方程的通解(1)，便可以得到非齐次方程的通解，这里空白太小就不赘述了 xD

- 可降阶二次微分方程

- 不显含未知函数的二阶方程

$$f(x, y', y'') = 0$$

令 $t = y'$ ，则 $y'' = t'_x$

然后原式可化为

$$g(x, t, t'_x) = 0$$

- 不显含自变量的二阶方程

$$m(y, y', y'') = 0$$

令 $p = y'$ ，则 $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p'_y \cdot p$

然后原式可化为

$$n(y, p, p \cdot p'_y) = 0$$

- 高阶不显含自变量的线性齐次方程

$$f(y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

可以记为

$$y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + \cdots + A_n y = 0$$

欧拉发现，这一类方程的解都具有 $y = e^{\tilde{z}x}$ 的形式，其中 \tilde{z} 为复数。

于是设 $y = e^{\tilde{z}x}$ ，

$$\tilde{z}^n e^{\tilde{z}x} + A_1 \tilde{z}^{n-1} e^{\tilde{z}x} + \cdots + A_n e^{\tilde{z}x} = 0$$

同时除以 $e^{\tilde{z}x}$ ，

$$\tilde{z}^n + A_1 \tilde{z}^{n-1} + \cdots + A_n = 0$$

我们称上式为原微分方程的**特征方程**。注意到它和原式结构相同，因此可以直接把 $y^{(n)}$ 换为 \tilde{z}^n ，而 \tilde{z} 为特征方程的解。

如果该特征方程无重根，则 \tilde{z} 的 n 个解 $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \cdots, \tilde{z}_n$ 相互独立，故原方程的通解为

$$y = C_1 e^{\tilde{z}_1 x} + C_2 e^{\tilde{z}_2 x} + \cdots + C_n e^{\tilde{z}_n x}$$

不过若 A_i 均为实数，我们应找到原方程的实数解。

记 $\tilde{z}_k = a_k + b_k i$

由于 A_i 均为实数，特征方程的根必定是共轭的，即若 $a + bi$ 为一解，则 $a - bi$ 为另一解。

$$e^{(a+bi)x} = e^a (\cos bx + i \sin bx)$$

$$e^{(a-bi)x} = e^a (\cos bx - i \sin bx)$$

我们知道对于线性齐次方程，解的任意线性组合仍为该方程的解。于是对 $e^{(a+bi)x}$ 与 $e^{(a-bi)x}$ 进行组合，可以得到原式的两个实数根：

$$y = e^a \cos bx \text{ 与 } y = e^a \sin bx, \text{ 通解为 } y = C_1 e^a \cos bx + C_2 e^a \sin bx$$

以不显含 x 的二阶齐次线性方程为栗：

$$y'' + by' + cy = 0$$

解得

$$\tilde{z} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, \Delta = b^2 - 4c$$

- 若 $\Delta > 0$, $y = C_1 e^{\tilde{z}_1} + C_2 e^{\tilde{z}_2}$
- 若 $\Delta = 0$, $y = C_1 e^{\tilde{z}} + C_2 x \cdot e^{\tilde{z}}$
- 若 $\Delta < 0$, $y = C_1 e^a \cos bx + C_2 e^a \sin bx$

参考文献

崔士襄 《“常数变易法”来历的探讨》

维基百科相关条目

致谢

Yukina Azusa

Lyy00054

yc

by [Catoverflow](#)

Licensed under [CC-BY-SA 4.0](#)

12.26.2019