常微分方程

简单的定义

仅含有单个自变量的微分方程，即 $y \sim x$, $F(x, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$

如果 $y, y', y'', \cdots, y^{(n)}$ 都是一次的，那么称上式为（*n阶*）*线性微分方程*，它的一般形式是：

$$y^{(n)} + y^{(n-1)}A_1(x) + \cdots + yA_n(x) = f(x)$$

$f(x) = 0$ 时，我们称该方程为*齐次线性微分方程*

对于 n 阶微分方程 $F(x, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$，它的解通常包含 n 个相互独立的积分常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ ，即 $\Phi(x, y, C_1, C_2, \cdots, C_n) = 0$

基本性质

对于 n 阶齐次线性方程，若 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 为方程的解，则它们的线性组合 $y_0 = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x)$ 亦为方程的解，或者说齐次线性方程的解集具有*线性结构*，所有的解构成一个*向量空间——解空间*。（与向量的基底表示类比）

齐次方程的通解可以用 n 个线性无关特解的线性组合表示

若 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 线性无关，则方程组

$$\begin{cases} C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n = 0 \\ C_1y_1' + C_2y_2' + \cdots + C_ny_n' = 0 \\ \cdots \\ C_1y_1^{(n)} + C_2y_2^{(n)} + \cdots + C_ny_n^{(n)} = 0 \end{cases}$$

有非零解，即

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1, y_2, \cdots, y_n \\ y_1', y_2', \cdots, y_n' \\ \cdots \\ y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \cdots, y_n^{(n)} \end{vmatrix} \neq 0$$

其中 W 表示[朗斯基行列式]。

对于 n 阶非齐次线性方程（即 $f(x) \neq 0$ ），不难证明，它的解可以由相应的齐次方程通解加上非齐次方程的一个特解得到，这样的解构成的空间叫做*仿射空间*。

常微分方程求解

- 有时候可以分离变量

  $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y) = g(x)h(y)$

  讨论一下 $h(y) = 0$ 时的情况，然后

  $\frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = g(x)\mathrm{d}x$, $\int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = \int g(x)\mathrm{d}x$, $ln|y| = \int g(x)\mathrm{d}x$, $y = Ce^{\int g(x)\mathrm{d}x}$

- 如果 x, y 齐次，

  （严格定义为：对于一定范围内的 x, y, $\exists t \Rightarrow f(tx, ty) = t^n f(x, y)$）

那么可以换元：

令 $u_x=\frac{y}{x}$, $y=ux$, $y'_x=u'_x\cdot x+u$，然后代入原式即可。

- 对于一阶线性方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$
  - 某个似乎没有名字的方法

    看起来不好分离变量，那让 $Q(x)=0$ 好了，先试试

    $\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x$, $\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\int P(x)\mathrm{d}x$, $y=Ce^{\int P(x)\mathrm{d}x}$（不过要讨论 $y=0$ 的情况）

    $Q(x)\neq 0$ 时，注意到通过在等式两侧同时乘以 $e^{\int P(x)\mathrm{d}x}$，可以使

    $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot e^{\int P(x)\mathrm{d}x}+P(x)\cdot e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\cdot y=Q(x)\cdot e^{\int P(x)\mathrm{d}x}$$
    $$\left(y\cdot e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\right)'_x=Q(x)\cdot e^{\int P(x)\mathrm{d}x}$$

    然后随便积一下就好啦x

    $$y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\cdot\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

  - **变量代换法**

    其实从上述操作中可以看出，如果不会解的话，让它等于零就行了x

    设 $y=u_x\cdot v_x$，代入原式：

    $$\begin{aligned}Q(x)&=u'v+v'u+P(x)uv\\&=u\left[P(x)v+v'\right]+u'v\end{aligned}$$

    中间那堆看起来很烦，让它等于零好了：

    $$P(x)v+v'=0,\ ln|v|=-\int P(x)\mathrm{d}x,\ v=Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

    那么

    $$Q(x)=Cu'e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}m,\ u=\frac{1}{C}\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

    于是

    $$y=u\cdot v=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\cdot\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

    和上一个方法得出了一样的答案x

  - **常数变易法**

    不难看出，$P(x)v+v'=0$，其实和 $P(x)y+y'=Q(x)=0$ 是一样的，对比一下可以发现：

    $$v=Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$
    $$y=uv=Cue^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

    也就是说，可以把上式齐次线性方程的解 C 看作关于 x 的函数从而求出非齐次方程的通解。

- n 阶线性微分方程

同样地，先解出对应的齐次线性方程通解，再依次将 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 换为 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 并求解。

一般地：

$$u_j' = (-1)^{n+j}\frac{W(y_1,\cdots,y_{j-1},y_j,\cdots,y_n)_{\binom{0}{f}}}{W(y_1,y_2,\cdots,y_n)}$$

一个栗子（味道应该还行？）：

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)\cdots\cdots(1)$$

令 $f(x)=0$，得到齐次方程的通解

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)\cdots\cdots(2)$$

若知道(1)的一个非零解$y_1(x)$，则

$$W(x)=y_1y_2'-y_1'y_2=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)\mathrm{d}t}$$

不妨令 $W(x_0)=1$，

$$\frac{y_1y_2'-y_2y_1'}{y_1^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)=\frac{1}{y_1^2}e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)\mathrm{d}t}$$

积分，

$$\frac{y_2}{y_1}=\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}x$$

便可解得 y_1，且 $W(x_0)\neq 0$，二者线性无关，(2) 式通解即为

$$y=C_1y_1+C_2y_2$$

使用常数变易法：

$$y=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)$$

现在我们来找出非齐次方程的一个特解*（因为是特解所以可以加一堆限制条件，能解出来就行xwx）*：

$$y'=u_1'(x)y_1(x)+u_1(x)y_1'(x)+u_2'(x)y_2(x)+u_2(x)y_2'(x)$$

为了不让 $u_1(x)$ 和 $u_2(x)$ 的高阶导在后续过程中出现，令

$$u_1'(x)y_1(x)+u_2'(x)y_2(x)=0\cdots\cdots(3)$$

那么有

$$y''=u_1'(x)y_1'(x)+u_1(x)y_1''(x)+u_2'(x)y_2'(x)+u_2(x)y_2''(x)$$

代入(1):

$$\begin{aligned}f(x)=&u_1(x)\left(y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1\right)\\&+u_2(x)\left(y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2\right)+u_1'(x)y_1'+u_2'(x)y_2'\\f(x)=&u_1'(x)y_1'(x)+u_2'(x)y_2'(x)\cdots\cdots(4)\end{aligned}$$

联立(2)(3)式

$$\begin{cases}u_1'(x)y_1(x)+u_2'(x)y_2(x)=0\\u_1'(x)y_1'(x)+u_2'(x)y_2'(x)=f(x)\end{cases}$$

便可解出 u_1,u_2.

然后将特解加上线性齐次方程的通解(1)，便可以得到非齐次方程的通解，这里空白太小就不赘述了 xD

- 可降阶二次微分方程
  - 不显含未知函数的二阶方程

    $$f(x,y',y'')=0$$

    令 $t=y'$，则 $y''=t'_x$

    然后原式可化为

    $$g(x,t,t'_x)=0$$

  - 不显含自变量的二阶方程

    $$m(y,y',y'')=0$$

    令 $p=y'$，则 $y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p'_y\cdot p$

    然后原式可化为

    $$n(y,p,p\cdot p'_y)=0$$

- 高阶不显含自变量的线性齐次方程

  $$f(y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0$$

  可以记为

  $$y^{(n)}+A_1y^{(n-1)}+\cdots+A_ny=0$$

  欧拉发现，这一类方程的解都具有 $y=e^{\tilde{z}x}$ 的形式，其中 $\tilde{z}$ 为复数。

  于是设 $y=e^{\tilde{z}x}$，

  $$\tilde{z}^ne^{\tilde{z}x}+A_1\tilde{z}^{n-1}e^{\tilde{z}x}+\cdots+A_ne^{\tilde{z}x}=0$$

  同时除以 $e^{\tilde{z}x}$，

  $$\tilde{z}^n+A_1\tilde{z}^{n-1}+\cdots+A_n=0$$

  我们称上式为原微分方程的*特征方程*。注意到它和原式结构相同，因此可以直接把 $y^{(n)}$ 换为 $\tilde{z}^n$，而 $\tilde{z}$ 为特征方程的解。

  如果该特征方程无重根，则 $\tilde{z}$ 的 n 个解 $\tilde{z}_1,\tilde{z}_2,\cdots,\tilde{z}_n$ 相互独立，故原方程的通解为

  $$y=C_1e^{\tilde{z}_1x}+C_2e^{\tilde{z}_2x}+\cdots+C_ne^{\tilde{z}_nx}$$

  不过若 A_i 均为实数，我们应找到原方程的实数解。

  记 $\tilde{z}_k=a_k+b_ki$

  由于 A_i 均为实数，特征方程的根必定是共轭的，即若 $a+bi$ 为一解，则 $a-bi$ 为另一解。

  $$e^{(a+bi)x}=e^a(\cos bx+i\sin bx)$$

  $$e^{(a-bi)x}=e^a(\cos bx-i\sin bx)$$

  我们知道对于线性齐次方程，解的任意线性组合仍为该方程的解。于是对 $e^{(a+bi)x}$ 与 $e^{(a-bi)x}$ 进行组合，可以得到原式的两个实数根：

  $y=e^a\cos bx$ 与 $y=e^a\sin bx$，通解为 $y=C_1e^a\cos bx+C_2e^a\sin bx$

  以不显含 x 的二阶齐次线性方程为栗：

  $$y''+by'+cy=0$$

  解得

  $$\tilde{z}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2},\ \Delta=b^2-4c$$

  - 若 $\Delta>0$，$y=C_1e^{\tilde{z}_1}+C_2e^{\tilde{z}_2}$

- 若 $\Delta = 0$，$y = C_1 e^{\tilde{z}} + C_2 x \cdot e^{\tilde{z}}$
- 若 $\Delta < 0$，$y = C_1 e^{a} \cos bx + C_2 e^{a} \sin bx$

参考文献

崔士襄 *《“常数变易法”来历的探讨》*

维基百科相关条目

致谢

Yukina Azusa

lyy00054

yc

by *[Catoverflow]*

12.26.2019