无穷级数

级数：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

部分和：$A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

收敛性

Cauchy 收敛

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是：

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^*,\ \forall n > N$$
$$\left|\sum_{n=N+1}^{N+p} a_n\right| < \varepsilon,\ \text{对}\ \forall p \in \mathbb{N}^*\ \text{成立}$$

- 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛，则我们称一般级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛
- 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 不收敛而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则称为条件收敛

收敛级数的性质

若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ 收敛
3. 改变任意有限项的值不影响 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性

正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n \geqslant 0$$

1. 正项级数收敛的充要条件是部分和数列有界
2. 若正项级数收敛，则收敛于 $\sup\{S_n\}$
3. 若正项级数发散，则发散到 $+\infty$
4. 任意改变求和顺序不影响正项级数的收敛值

比较判别法

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 为正项级数

- 若 $\exists N \in \mathbb{N}^*,\ \forall n > N,\ a_n \leqslant b_n$
  1. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛
  2. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散

- 记 $A=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$
    1. $A\in(0,\infty)$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 同敛散
    2. $A=0$，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛
    3. $A=\infty$，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散

下面的各种判别法都是基于比较判别法的原理导出的.

Cauchy/柯西判别法

记 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$

1. 若 $q\in(0,1)$，级数收敛
2. 若 $q\geqslant 1$，级数发散

d’Alembert/达朗贝尔判别法

$\exists N\in\mathbb{N}^*$, $n>N$，记 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$

1. 若 $q\in(0,1)$，级数收敛
2. 若 $q\geqslant 1$，级数发散

> 基于 $\sum_{n=1}^{\infty}q^n$ 的收敛性

Rabbe/拉比判别法

记 $\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=a$

1. 若 $a\in(0,1)$，级数发散
2. 若 $a>1$，级数收敛

> 基于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ 的收敛性

Gauss/高斯判别法

记 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\frac{\mu}{n}+\frac{\theta_n}{n^2}$，其中 θ_n 有界

1. 若 $\lambda>1$ 或 $\lambda=1$, $\mu>1$，级数发散
2. 若 $\lambda<1$ 或 $\lambda=1$, $\mu\leqslant 1$，级数收敛

> 基于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^{\beta}n}$ 的收敛性

$\sum_{n=1}^{\infty}q^n$, $q\in(0,1)$　$\sum_{n=1}^{\infty}n^a$, $a\in(0,1)$　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^{\beta}n}$ 收敛速度依次递减，即上述判别法依次变严.

Cauchy/柯西积分判别法

若 $f(x)$ 是在 $[1,+\infty]$ 上单调递减的非负函数，那么 $\sum_{n=1}^{\infty}f(x)$ 与 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 同敛散.

$$f(x+1)\leqslant\int_x^{x+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant f(x+1)$$
$$\sum_{i=2}^{n+1}f(i)\leqslant\int_1^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{i=1}^{n}f(i)$$

一般级数的收敛性判别：

交错级数

顾名思义，正负项交错的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n,\ a_n \geqslant 0$$

$\{a_n\}$ 单调递减时，$S_{2n+2}-S_{2n}=a_{2n+1}-a_{2n+2}\geqslant 0$

$$\begin{aligned} S_{2n} &= a_1-(a_2-a_3)-\cdots-(a_{2n-2}-a_{2n-1})-a_{2n} \\ &\leqslant a_1 \end{aligned}$$

$$S_{2n}=(a_1-a_2)+\cdots+(a_{2n}-a_{2n-1})\ \text{递增}$$

即 S_{2n} 单调有界收敛，易得 S_n 亦收敛.

于是可以推出：

`Leibniz`/莱布尼茨判别法

非负数列 $\{a_n\}$ 递减且趋于零，则交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，且部分和 S_n 与级数和 S 差值满足：$|S_n-S|<a_{n+1}$

一般级数

Abel/阿贝尔分部求和

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=A_nb_n+\sum_{i=1}^{n-1}A_i(b_i-b_{i+1})$$

> 其实是分部积分的离散形式：

$$ab=\int a'_x b\mathrm{d}x+\int b'_x a\mathrm{d}x$$
$$A_nb_n=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n-1}A_i(b_{i+1}-b_i)$$

Abel/阿贝尔引理

若 $\{b_n\}$ 单调，A_n 有界，记 $M=\sup|A_n|$，则有

$$\begin{aligned} \left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n}A_i(b_i-b_{i+1})+A_nb_n\right| \\ &\leqslant \left|\sum_{i=1}^{n}A_i(b_i-b_{i+1})\right|+|A_nb_n| \\ &= M(|b_1-b_n|+|b_n|) \\ &\leqslant M(2|b_n|+|b_1|) \end{aligned}$$

由此可以推出：

`Dirichlet`/迪利克雷判别法

若 $\{b_n\}$ 单调趋于零，A_n 有界，则 $\sum a_nb_n$ 收敛

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=n}^{n+p}a_ib_i\leqslant M(|b_n|+2|b_{n+p}|)=0$$

由 Cauchy 判别法知 $\sum a_n b_n$ 收敛

Abel/阿贝尔判别法

若 $\{b_n\}$ 单调有界（收敛于 b），A_n 收敛，则 $\sum a_n b_n$ 收敛

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=n}^{n+p} a_i b_i = \sum_{i=n}^{n+p} a_i b + \sum_{i=n}^{n+p} a_i(b_i - b)$$

由 Dirichlet 判别法知 $\sum_{i=n}^{n+p} a_i b_i$ 收敛，故 $\sum a_n b_n$ 收敛

> 判断一般级数收敛性的关键在于从原级数中拆出满足上述判定条件的级数，进行简化

级数的积

Cauchy/柯西乘积

定义：

若 $c_n = a_n \cdot b_n$，则称 $\sum c_n$ 为 $\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 的 Cauchy 乘积

收敛性：

$a_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$，显然 $\sum a_n$ 收敛，而 $\sum a_n \cdot a_n$ 不收敛

也就是收敛级数的 Cauchy 乘积的和不一定收敛

Mertens/梅尔腾斯定理

> ~~简称梅尔~~

若 $\sum a_n, \sum b_n$ 收敛于 A, B，且至少有一个级数绝对收敛，则她们的 Cauchy 乘积收敛，且 $\sum c_n \to AB$

Abel/阿贝尔定理

若收敛级数 $\sum a_n, \sum b_n$ 的 Cauchy 乘积收敛，则必定收敛于 AB

无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \exp(\sum \ln a_n)$$

然后当级数使就行x

致谢

Yukina Azusa

by *Catoverflow*

01.05.2020