常微分方程

简单的定义

仅含有单个自变量的微分方程，即 $y \sim x$，$F(x, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$

线性方程

如果 $y, y', y'', \cdots, y^{(n)}$ 都是一次的，那么称上式为*（n阶）线性微分方程*，它的一般形式是：

$$y^{(n)} + y^{(n-1)} A_1(x) + \cdots + y A_n(x) = f(x)$$

$f(x) = 0$ 时，我们称该方程为*齐次线性微分方程*

对于 n 阶微分方程 $F(x, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$，它的解通常包含 n 个相互独立的积分常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ ，即 $\Phi(x, y, C_1, C_2, \cdots, C_n) = 0$

基本性质

线性方程的通解

对于 n 阶齐次线性方程，若 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 为方程的解，则它们的线性组合 $y_0 = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)$ 亦为方程的解，或者说齐次线性方程的解集具有*线性结构*，所有的解构成一个*向量空间——解空间*。（与向量的基底表示类比）

齐次方程的通解可以用 n 个线性无关特解的线性组合表示

对于 n 阶非齐次线性方程（即 $f(x) \neq 0$ ），不难证明，它的解可以由相应的齐次方程通解加上非齐次方程的一个特解得到，这样的解构成的空间叫做*仿射空间*。

线性相关与 Wronski 行列式

若 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 线性无关，则方程组

$$\begin{cases} C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n = 0 \\ C_1 y_1' + C_2 y_2' + \cdots + C_n y_n' = 0 \\ \cdots \\ C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)} + \cdots + C_n y_n^{(n)} = 0 \end{cases}$$

有非零解，即

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1, y_2, \cdots, y_n \\ y_1', y_2', \cdots, y_n' \\ \cdots \\ y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \cdots, y_n^{(n)} \end{vmatrix} \neq 0$$

其中 W 表示[*朗斯基行列式*]。

不过要注意的是：$W(x) = 0 \nRightarrow$ 线性相关

常微分方程求解

分离变量

对于方程：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)=g(x)h(y)$$

讨论一下 $h(y)=0$ 时的情况，然后

$$\frac{\mathrm{d}y}{h(y)}=g(x)\mathrm{d}x,\ \int\frac{\mathrm{d}y}{h(y)}=\int g(x)\mathrm{d}x,\ ln|y|=\int g(x)\mathrm{d}x,\ y=Ce^{\int g(x)\mathrm{d}x}$$

齐次代换

若 x,y 齐次（严格定义为：对于一定范围内的 $x,y,\ \exists t\Rightarrow f(tx,ty)=t^nf(x,y)$）

那么可以换元：

$$u_x=\frac{y}{x},\ y=ux,\ y'_x=u'_x\cdot x+u$$

然后代入原式即可。

线性方程求解

基本方法

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$$

- 某个似乎没有名字的方法

  看起来不好分离变量，那让 $Q(x)=0$ 好了，先试试

  $\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x,\ \int\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\int P(x)\mathrm{d}x,\ y=Ce^{\int P(x)\mathrm{d}x}$（不过要讨论 $y=0$ 的情况）

  $Q(x)\neq 0$ 时，注意到通过在等式两侧同时乘以 $e^{\int P(x)\mathrm{d}x}$，可以使

  $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot e^{\int P(x)\mathrm{d}x}+P(x)\cdot e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\cdot y=Q(x)\cdot e^{\int P(x)\mathrm{d}x}$$
  $$\left(y\cdot e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\right)'_x=Q(x)\cdot e^{\int P(x)\mathrm{d}x}$$

  然后随便积一下就好啦x

  $$y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\cdot\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

- **变量代换法**

  其实从上述操作中可以看出，如果不会解的话，让它等于零就行了x

  设 $y=u_x\cdot v_x$，代入原式：

  $$\begin{aligned}Q(x)&=u'v+v'u+P(x)uv\\&=u\left[P(x)v+v'\right]+u'v\end{aligned}$$

  中间那堆看起来很烦，让它等于零好了：

  $$P(x)v+v'=0,\ ln|v|=-\int P(x)\mathrm{d}x,\ v=Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

  那么

  $$Q(x)=Cu'e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}m,\ u=\frac{1}{C}\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

于是

$$y=u\cdot v=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\cdot\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

和上一个方法得出了一样的答案x

- **常数变易法**

  不难看出，$P(x)v+v'=0$，其实和 $P(x)y+y'=Q(x)=0$ 是一样的，对比一下可以发现：

  $$\begin{aligned}&v=Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\\&y=uv=Cue^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\end{aligned}$$

  也就是说，可以把上式齐次线性方程的解 C 看作关于 x 的函数从而求出非齐次方程的通解。

二阶线性微分方程

对于式子

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)\cdots\cdots(1)$$

令 $f(x)=0$，得到齐次方程的通解

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)\cdots\cdots(2)$$

Liouville 公式

$$W(x)=W(x_0)\cdot e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)\mathrm{d}t}$$

证明：

由式 (1)，

$$y_1''(x)=-p(x)y_1'(x)-q(x)y_1(x)$$

$$y_2''(x)=-p(x)y_2'(x)-q(x)y_2(x)$$

可得

$$\begin{aligned}W'(x)&=y_1(x)y_2''(x)-y_1''(x)y_2(x)\\&=-p(x)\left[y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x)\right]\\&=-p(x)W(x)\end{aligned}$$

不难得出

$$\begin{aligned}&W(x)=C\cdot e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)\mathrm{d}t}\\&W(x_0)=C\end{aligned}$$

使用 Wronski 行列式求解

由 Liouville 公式可知，若 y_1,y_2 为式 (1) 的一对线性无关解，则 $W(x)\neq 0$ 恒成立

注意仅凭线性无关并不能推出 $W(x)=0$，*在式 (1) 的前提下才可推出。*

同时，若 y_1,y_2 线性相关，$W(x)=0$ 恒成立。

若知道(1)的一个非零解 $y_1(x)$，则

$$W(x)=y_1y_2'-y_1'y_2=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)\mathrm{d}t}$$

不妨令 $W(x_0)=1$，

$$\frac{y_1y_2'-y_2y_1'}{y_1^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)=\frac{1}{y_1^2}e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)\mathrm{d}t}$$

积分，

$$\frac{y_2}{y_1}=\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}x$$

便可解得 y_2，且 $W(x_0)\neq 0$，二者线性无关.

求解非齐次方程

使用常数变易法:

$$y=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)$$

现在我们来找出非齐次方程的一个特解*（因为是特解所以可以加一堆限制条件，能解出来就行 xwx）*:

$$y'=u_1'(x)y_1(x)+u_1(x)y_1'(x)+u_2'(x)y_2(x)+u_2(x)y_2'(x)$$

为了不让 $u_1(x)$ 和 $u_2(x)$ 的高阶导在后续过程中出现，令

$$u_1'(x)y_1(x)+u_2'(x)y_2(x)=0\cdots\cdots(3)$$

那么有

$$y''=u_1'(x)y_1'(x)+u_1(x)y_1''(x)+u_2'(x)y_2'(x)+u_2(x)y_2''(x)$$

代入(1):

$$\begin{aligned}f(x)=&u_1(x)\left(y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1\right)\\&+u_2(x)\left(y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2\right)+u_1'(x)y_1'+u_2'(x)y_2'\\f(x)=&u_1'(x)y_1'(x)+u_2'(x)y_2'(x)\cdots\cdots(4)\end{aligned}$$

联立(2)(3)式

$$\begin{cases}u_1'(x)y_1(x)+u_2'(x)y_2(x)=0\\u_1'(x)y_1'(x)+u_2'(x)y_2'(x)=f(x)\end{cases}$$

便可解出 u_1,u_2.

然后将特解加上线性齐次方程的通解 (2) ，便可以得到非齐次方程的通解，这里空白太小就不赘述了 xD

特殊可降阶二次微分方程

- 不显含未知函数的二阶方程

  $$f(x,y',y'')=0$$

  令 $t=y'$，则 $y''=t_x'$

  然后原式可化为

  $$g(x,t,t_x')=0$$

- 不显含自变量的二阶方程（详见下文的特征方程）

  $$m(y,y',y'')=0$$

  令 $p=y'$，则

  $$y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p_y'\cdot p$$

  然后原式可化为

  $$n(y,p,p\cdot p_y')=0$$

n 阶线性微分方程

同样地，先解出对应的齐次线性方程通解，再依次将 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 换为 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 并求解。

一般地：

$$u_j' = (-1)^{n+j} \frac{W(y_1, \cdots, y_{j-1}, y_j, \cdots, y_n)_{\binom{0}{f}}}{W(y_1, y_2, \cdots, y_n)}$$

高阶不显含自变量的线性齐次方程

对于

$f(y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$

可以记为

$y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + \cdots + A_n y = 0$

欧拉发现，这一类方程的解都具有 $y = e^{\tilde{z}x}$ 的形式，其中 $\tilde{z}$ 为复数。

于是设 $y = e^{\tilde{z}x}$，

$\tilde{z}^n e^{\tilde{z}x} + A_1 \tilde{z}^{n-1} e^{\tilde{z}x} + \cdots + A_n e^{\tilde{z}x} = 0$

除以 $e^{\tilde{z}x}$，

$\tilde{z}^n + A_1 \tilde{z}^{n-1} + \cdots + A_n = 0$

我们称上式为原微分方程的*特征方程*。注意到它和原式结构相同，因此可以直接把 $y^{(n)}$ 换为 $\tilde{z}^n$，而 $\tilde{z}$ 为特征方程的解。

如果该特征方程无重根，则 $\tilde{z}$ 的 n 个解 $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \cdots, \tilde{z}_n$ 相互独立，故原方程的通解为

$y = C_1 e^{\tilde{z}_1 x} + C_2 e^{\tilde{z}_2 x} + \cdots + C_n e^{\tilde{z}_n x}$

不过若 A_i 均为实数，我们应找到原方程的实数解。

记 $\tilde{z}_k = a_k + b_k i$

由于 A_i 均为实数，特征方程的根必定是共轭的，即若 $a + bi$ 为一解，则 $a - bi$ 为另一解。

$e^{(a+bi)x} = e^a(\cos bx + i \sin bx)$

$e^{(a-bi)x} = e^a(\cos bx - i \sin bx)$

我们知道对于线性齐次方程，解的任意线性组合仍为该方程的解。于是对 $e^{(a+bi)x}$ 与 $e^{(a-bi)x}$ 进行组合，可以得到原式的两个实数根：

$y = e^a \cos bx$ 与 $y = e^a \sin bx$，通解为 $y = C_1 e^a \cos bx + C_2 e^a \sin bx$

以不显含 x 的二阶齐次线性方程为栗：

$y'' + by' + cy = 0$

解得

$\tilde{z} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$, $\Delta = b^2 - 4c$

若 $\Delta > 0$，$y = C_1 e^{\tilde{z}_1} + C_2 e^{\tilde{z}_2}$

若 $\Delta = 0$，$y = C_1 e^{\tilde{z}} + C_2 x \cdot e^{\tilde{z}}$

若 $\Delta < 0$，$y = C_1 e^{a} \cos bx + C_2 e^{a} \sin bx$

参考文献

崔士襄 *《“常数变易法”来历的探讨》*

维基百科相关条目

致谢

Yukina Azusa

lyy00054

yc

by *[Catoverflow]*

12.26.2019