常微分方程

简单的定义

仅含有单个自变量的微分方程，即 $y \sim x,\ F(x, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$

如果 $y, y', y'', \cdots, y^{(n)}$ 都是一次的，那么称上式为*（n阶）线性微分方程*，它的一般形式是：

$$y^{(n)} + y^{(n-1)}A_1(x) + \cdots + yA_n(x) = f(x)$$

$f(x) = 0$ 时，我们称该方程为*齐次线性微分方程*

对于 n 阶微分方程 $F(x, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$，它的解通常包含 n 个相互独立的积分常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ ，即 $\Phi(x, y, C_1, C_2, \cdots, C_n) = 0$

基本性质

对于 n 阶齐次线性方程，若 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 为方程的解，则它们的线性组合 $y_0 = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 亦为方程的解，或者说齐次线性方程的解集具有*线性结构*，所有的解构成一个*向量空间——解空间*。（与向量的基底表示类比）

对于 n 阶非齐次线性方程（即 $f(x) \neq 0$ ），不难证明，它的解可以由相应的齐次方程通解加上非齐次方程的一个特解得到，这样的解构成的空间叫做*仿射空间*。

常微分方程求解

- 有时候可以分离变量

  $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y) = g(x)h(y)$

  讨论一下 $h(y) = 0$ 时的情况，然后

  $\frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = g(x)\mathrm{d}x,\ \int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = \int g(x)\mathrm{d}x,\ ln|y| = \int g(x)\mathrm{d}x,\ y = Ce^{\int g(x)\mathrm{d}x}$

- 如果 x, y 齐次，

  （严格定义为：对于一定范围内的 $x, y,\ \exists t \Rightarrow f(tx, ty) = t^n f(x, y)$）

  那么可以换元：

  令 $u_x = \frac{y}{x},\ y = ux,\ y'_x = u'_x \cdot x + u$，然后代入原式即可。

- 对于一阶线性方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$
  - 某个似乎没有名字的方法

    看起来不好分离变量，那让 $Q(x) = 0$ 好了，先试试

    $\frac{\mathrm{d}y}{y} = -P(x)\mathrm{d}x,\ \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int P(x)\mathrm{d}x,\ y = Ce^{\int P(x)\mathrm{d}x}$（不过要讨论 $y = 0$ 的情况）

    $Q(x) \neq 0$ 时，注意到通过在等式两侧同时乘以 $e^{\int P(x)\mathrm{d}x}$，可以使

    $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \cdot e^{\int P(x)\mathrm{d}x} + P(x) \cdot e^{\int P(x)\mathrm{d}x} \cdot y = Q(x) \cdot e^{\int P(x)\mathrm{d}x}$

    $\left(y \cdot e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\right)'_x = Q(x) \cdot e^{\int P(x)\mathrm{d}x}$

然后随便积一下就好啦x

$$y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\cdot\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

- **变量代换法**

  其实从上述操作中可以看出，如果不会解的话，让它等于零就行了x

  设 $y=u_x\cdot v_x$，代入原式：

  $$\begin{aligned}Q(x)&=u'v+v'u+P(x)uv\\&=u\left[P(x)v+v'\right]+u'v\end{aligned}$$

  中间那堆看起来很烦，让它等于零好了：

  $$P(x)v+v'=0,\ ln|v|=-\int P(x)\mathrm{d}x,\ v=Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

  那么

  $$Q(x)=Cu'e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}m,\ u=\frac{1}{C}\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

  于是

  $$y=u\cdot v=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\cdot\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

  和上一个方法得出了一样的答案x

- **常数变易法**

  不难看出，$P(x)v+v'=0$，其实和 $P(x)y+y'=Q(x)=0$ 是一样的，对比一下可以发现：

  $$\begin{aligned}&v=Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\\&y=uv=Cue^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\end{aligned}$$

  也就是说，可以把上式齐次线性方程的解 C 看作关于 x 的函数从而求出非齐次方程的通解。

- n 阶线性微分方程

  同样地，先解出对应的齐次线性方程通解，再依次将 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 换为 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 并求解。

  一般地：

  $$u_j'=(-1)^{n+j}\frac{W(y_1,\cdots,y_{j-1},y_j,\cdots,y_n)_{\binom{0}{f}}}{W(y_1,y_2,\cdots,y_n)}$$

  其中 W 表示*朗斯基行列式*。

一个栗子（味道应该还行？）：

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)\cdots\cdots(1)$$

令 $f(x)=0$，得到齐次方程的通解

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)\cdots\cdots(2)$$

使用常数变易法：

$$y=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)$$

现在我们来找出非齐次方程的一个特解*（因为是特解所以可以加一堆限制条件，能解出来就行xwx）*：

$$y' = u_1'(x)y_1(x) + u_1(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2(x) + u_2(x)y_2'(x)$$

为了不让 $u_1(x)$ 和 $u_2(x)$ 的高阶导在后续过程中出现，令

$$u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0 \cdots\cdots(3)$$

那么有

$$y'' = u_1'(x)y_1'(x) + u_1(x)y_1''(x) + u_2'(x)y_2'(x) + u_2(x)y_2''(x)$$

代入(1)：

$$\begin{aligned} f(x) =& u_1(x)\left(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1\right) \\ &+ u_2(x)\left(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2\right) + u_1'(x)y_1' + u_2'(x)y_2' \\ f(x) =& u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) \cdots\cdots(4) \end{aligned}$$

联立(2)(3)式

$$\begin{cases} u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0 \\ u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

便可解出 u_1, u_2.

然后将特解加上线性齐次方程的通解(1)，便可以得到非齐次方程的通解，这里空白太小就不赘述了 xD

- 可降阶二次微分方程
  - 不显含未知函数的二阶方程

    $$f(x, y', y'') = 0$$

    令 $t = y'$，则 $y'' = t_x'$

    然后原式可化为

    $$g(x, t, t_x') = 0$$
  - 不显含自变量的二阶方程

    $$m(y, y', y'') = 0$$

    令 $p = y'$，则 $y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p_y' \cdot p$

    然后原式可化为

    $$n(y, p, p \cdot p_y') = 0$$

- 高阶不显含自变量的线性齐次方程

  $$f(y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

  可以记为

  $$y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + \cdots + A_n y = 0$$

  欧拉发现，这一类方程的解都具有 $y = e^{\tilde{z}x}$ 的形式，其中 $\tilde{z}$ 为复数。

  于是设 $y = e^{\tilde{z}x}$，

  $$\tilde{z}^n e^{\tilde{z}x} + A_1 \tilde{z}^{n-1} e^{\tilde{z}x} + \cdots + A_n e^{\tilde{z}x} = 0$$

  同时除以 $e^{\tilde{z}x}$，

$\tilde{z}^n + A_1\tilde{z}^{n-1} + \cdots + A_n = 0$

我们称上式为原微分方程的*特征方程*。注意到它和原式结构相同，因此可以直接把 $y^{(n)}$ 换为 $\tilde{z}^n$ ，而 $\tilde{z}$ 为特征方程的解。

如果该特征方程无重根，则 $\tilde{z}$ 的 n 个解 $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \cdots, \tilde{z}_n$ 相互独立，故原方程的通解为

$y = C_1 e^{\tilde{z}_1 x} + C_2 e^{\tilde{z}_2 x} + \cdots + C_n e^{\tilde{z}_n x}$

不过若 A_i 均为实数，我们应找到原方程的实数解。

记 $\tilde{z}_k = a_k + b_k i$

由于 A_i 均为实数，特征方程的根必定是共轭的，即若 $a + bi$ 为一解，则 $a - bi$ 为另一解。

$e^{(a+bi)x} = e^a(\cos bx + i\sin bx)$

$e^{(a-bi)x} = e^a(\cos bx - i\sin bx)$

我们知道对于线性齐次方程，解的任意线性组合仍为该方程的解。于是对 $e^{(a+bi)x}$ 与 $e^{(a-bi)x}$ 进行组合，可以得到原式的两个实数根：

$y = e^a \cos bx$ 与 $y = e^a \sin bx$，通解为 $y = C_1 e^a \cos bx + C_2 e^a \sin bx$

以不显含 x 的二阶齐次线性方程为栗：

$y'' + by' + cy = 0$

解得

$\tilde{z} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}$, $\Delta = b^2 - 4c$

- 若 $\Delta > 0$，$y = C_1 e^{\tilde{z}_1} + C_2 e^{\tilde{z}_2}$
- 若 $\Delta = 0$，$y = C_1 e^{\tilde{z}} + C_2 x \cdot e^{\tilde{z}}$
- 若 $\Delta < 0$，$y = C_1 e^a \cos bx + C_2 e^a \sin bx$

参考文献

崔士襄 *《“常数变易法”来历的探讨》*

维基百科相关条目

致谢

Yukina Azusa

lyy00054

yc

by *Catoverflow*

12.26.2019