Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский Государственный Технический Университет имени Н.Э. Баумана»

ОТЧЕТ

По лабораторной работе №3

По курсу «Анализ алгоритмов»

Тема: «Трудоёмкость сортировок»

Студент: Жарова Е.А.

Группа ИУ7-51

Москва, 2017

Оглавление

Постановка задачи

Изучить и реализовать алгоритмы сортировки: вставками, «пузырьком» и быстрая сортировка.
Оценить трудоёмкость одного из алгоритмов сортировки с указанием лучшего и худшего случаев.
Сравнить реализованные алгоритмы сортировки и сделать выводы.

Описание модели вычислений

При оценке трудоёмкости мы будем пользоваться следующей моделью вычисления:

1. Операции, которые имеют трудоемкость “0”:
   - логический переход по ветвлению;
   - операции обращения к полю структуры/класса (->, .);
   - объявление переменных
2. Операции, которые имеют трудоёмкость «1»:
   - Арифметические операции {сложение(+), вычитание(-), умножение(*), деление(/), битовый сдвиг(<<, >>), деление нацело, взятие остатка(%) };
   - логические операции { и(&&), не(!), или(||) };
   - операции сравнения {<, >, =, !=, >=, <=};
   - операции присваивания {=, +=, -=, *=, /=, %=};
   - операция взятия индекса ([]);
   - операции побитового И(&) и ИЛИ(|)
   - унарный плюс и минус
   - операции инкремента и декремента(постфиксные и префиксные) (++, --).

Сортировка вставками

1. Описание

Сортировка вставками — алгоритм сортировки, в котором элементы входной последовательности просматриваются по одному, и каждый новый поступивший элемент размещается в подходящее место среди ранее упорядоченных элементов. Вычислительная сложность - $O(n^2)$.

В начальный момент отсортированная последовательность пуста. На каждом шаге алгоритма выбирается один из элементов входных данных и помещается на нужную позицию в уже отсортированной последовательности до тех пор, пока набор входных данных не будет исчерпан. В любой момент времени в отсортированной последовательности элементы удовлетворяют требованиям к выходным данным алгоритма.

Данный алгоритм можно ускорить при помощи использования бинарного поиска для нахождения места текущему элементу в отсортированной части. Проблема с долгим сдвигом массива вправо решается при помощи смены указателей.

2. Реализация

```
1. template <class T>
2. void insertionSort(T* begin, T* end)
3. {
4.     T tmp;
5.     T* j;
6.     for(T* i = begin + 1; i < end; i++)
7.     {
8.         tmp = *i;
9.         j = i - 1;
10.        while(j >= begin && tmp >= *j)
11.        {
12.            *(j + 1) = tmp;
13.            j--;
14.        }
15.    }
16. }
```

3. Теоретическая оценка

W – число заходов в цикл while.

f = 3 + 13(n-1) + 9W = 9W + 13n – 10

Лучший случай (массив отсортирован: W = 0):

$f_л = 13n - 10$

Худший случай (массив отсортирован в обратную сторону: $W = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2}$):

$$f_x = \frac{9(n-1)n}{2} + 13n - 10 = 4.5n^2 + 8.5n - 10$$

Сортировка «пузырьком»

1. Описание

Сортировка «пузырьком» (сортировка простыми обменами) — простой алгоритм сортировки. Для понимания и реализации этот алгоритм — простейший, но эффективен он лишь для небольших массивов. Сложность алгоритма: $O(n^2)$

Алгоритм состоит из повторяющихся проходов по сортируемому массиву. За каждый проход элементы последовательно сравниваются попарно и, если порядок в паре неверный, выполняется обмен элементов. Проходы по массиву повторяются N – 1 раз или до тех пор, пока на очередном проходе не окажется, что обмены больше не нужны, что означает — массив отсортирован. При

каждом проходе алгоритма по внутреннему циклу, очередной наибольший элемент массива ставится на своё место в конце массива рядом с предыдущим «наибольшим элементом», а наименьший элемент перемещается на одну позицию к началу массива («всплывает» до нужной позиции, как пузырёк в воде. Отсюда и название алгоритма).

2. Реализация

```
1.  template <class T>
2.  void bubleSort(T* begin, T* end)
3.  {
4.      bool flag;
5.      for (T *i = end - 1; i >= begin; i--)
6.      {
7.          flag = true;
8.          for (T *j = begin + 1; j <= i; j++)
9.          {
10.             if (*(j-1) > *j)
11.             {
12.                 T tmp = *j;
13.                 *j = *(j-1);
14.                 *(j-1) = tmp;
15.                 flag = false;
16.             }
17.         }
18.         if(flag)
19.             break;
20.     }
21. }
```

3. Теоретическая оценка

Трудоемкость тела внутреннего цикла оценивается, как O(1), потому что не зависит от количества элементов в массиве. В результате выполнения внутреннего цикла, наибольший элемент смещается в конец массива неупорядоченной части, поэтому через N таких вызовов массив в любом случае окажется отсортирован. Если же массив отсортирован, то внутренний цикл будет выполнен лишь один раз. Тогда в лучшем случае алгоритм будет иметь трудоёмкость: $T_л = O\left(\sum_{j=1}^{n-1} 1\right) = O(n)$

В худшем и среднем случае: $T = O\left(\sum_{i=n-1}^{0} \sum_{j=1}^{i} 1\right) = O(n^2)$

Быстрая сортировка

1. Описание

Быстрая сортировка(сортировка Хоара, qsort) — широко известный алгоритм сортировки, разработанный английским информатиком Чарльзом Хоаром во время его работы в МГУ в 1960 году.

Один из самых быстрых известных универсальных алгоритмов сортировки массивов: в среднем $O(n \log n)$ обменов при упорядочении n элементов; из-за наличия ряда недостатков на практике обычно используется с некоторыми доработками.

Общая идея алгоритма состоит в следующем:

- Выбрать из массива элемент, называемый опорным. Это может быть любой из элементов массива. От выбора опорного элемента не зависит корректность алгоритма, но в отдельных случаях может сильно зависеть его эффективность.
- Сравнить все остальные элементы с опорным и переставить их в массиве так, чтобы разбить массив на три непрерывных отрезка, следующие друг за другом: «меньшие опорного», «равные» и «большие».

- Для отрезков «меньших» и «больших» значений выполнить рекурсивно ту же последовательность операций, если длина отрезка больше единицы.

На практике массив обычно делят не на три, а на две части: например, «меньшие опорного» и «равные и большие»; такой подход в общем случае эффективнее, так как упрощает алгоритм разделения.

2. Реализация

```
template <class T>
void quickSort(T* begin, T* end)
{
    T *i = begin, *j = end, x = *(i + (j - i) / 2);

    do
    {
        while (*i < x) i++;
        while (*j > x) j--;

        if(i <= j)
        {
            if (*i > *j)
            {
                T tmp = *j;
                *j = *i;
                *i = tmp;
            }
            i++;
            j--;
        }
    } while (i <= j);

    if (i < end)
        quickSort(i, end);
    if (begin < j)
        quickSort(begin, j);
}
```

3. Теоретическая оценка

Лучший случай: с помощью выбранного опорного элемента массив будет делится ровно пополам (+- 1 элемент). Тогда глубина рекурсии будет равна $\log_2 n$. При этом на каждом уровне рекурсии суммарная трудоемкость разделения массива на две части будет равна O(n). Тогда трудоемкость алгоритма будет равна $O(n\log_2 n)$.

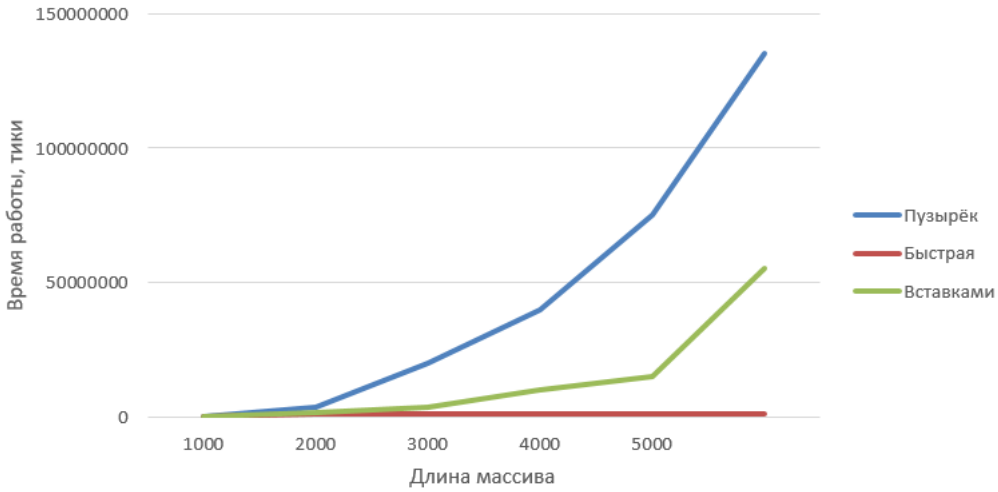
В среднем: временная сложность алгоритма составляет O(nlogn).

Худший случай: выбираемый опорный элемент равен минимальному или максимальному значению на текущем интервале, так как это приведет к тому, что при рекурсивном вызове sort длина массива сокращается не в два раза, а всего лишь на один элемент. Трудоемкость алгоритма быстрой сортировки для этого случая будет равна $O(n^2)$. В связи с этим существуют различные оптимизации, в том числе и по выбору барьерного элемента, который можно выбирать случайным образом или, например, выбирать средний по значению элемент из первого, последнего и среднего элементов текущего участка массива.

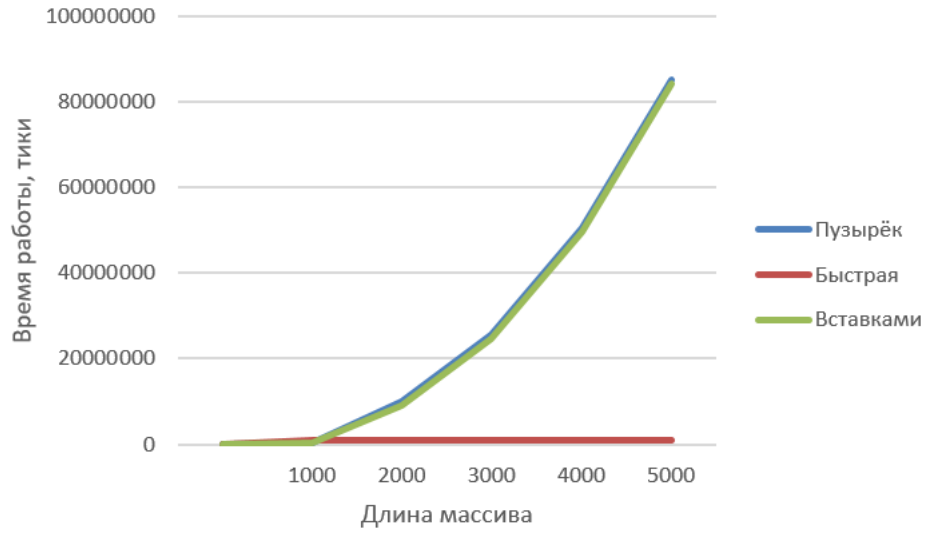
Сравнение алгоритмов

Для сравнения алгоритмов были проведены тесты на отсортированных массивах, произвольных массивах и отсортированных в обратном порядке массивов различных длин: 100, 200, …, 5000.

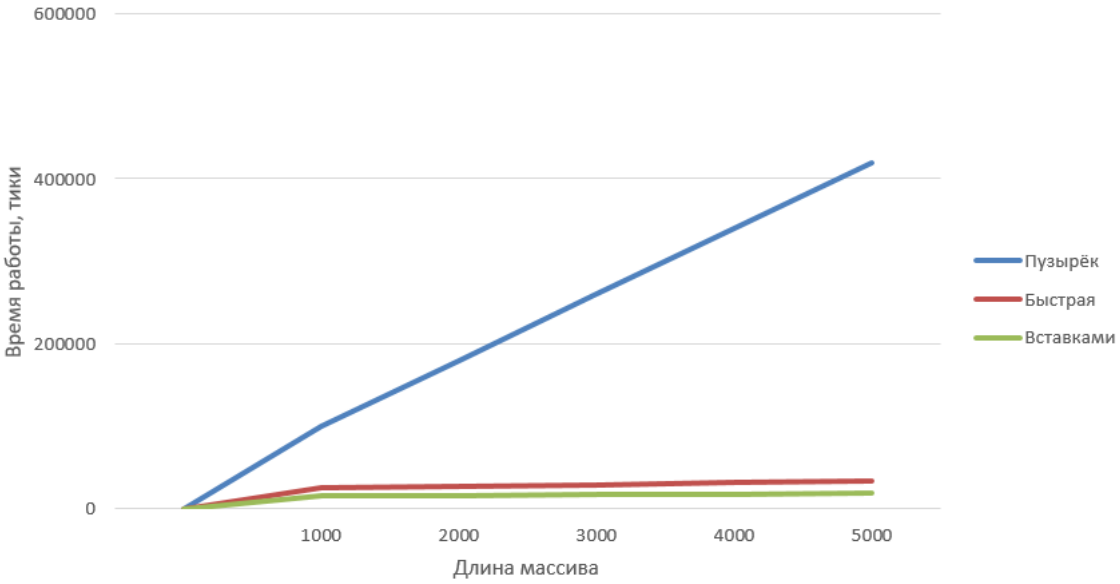
Анализ быстродействия для произвольных массивов:



Анализ быстродействия для отсортированных в обратном порядке массивов:



Анализ быстродействия для отсортированных массивов:



Выводы:

- Для отсортированного массива (лучший случай) алгоритмы сортировки «пузырьком» и вставками работают быстрее алгоритма быстрой сортировки.
- Для произвольного массива и массива отсортированного в обратном порядке время работы алгоритма зависит от длины массива квадратично (для сортировок вставками и «пузырьком») и линейно (для быстрой сортировки). Это подтверждает теоретическую оценку трудоёмкости данных алгоритмов.
- Когда массив имеет небольшое количество элементов и частично отсортирован, наиболее эффективным алгоритмом сортировки является алгоритм сортировки вставками. Быстрая сортировка из-за дополнительных затрат на обслуживание вызовов рекурсивной функции имеет низкую эффективность.

Заключение

Были изучены и реализованы алгоритмы сортировки: вставками, «пузырьком», быстрая сортировка. Во время выполнения работы была произведена оценка трудоёмкости сортировки вставками и сравнение быстродействия реализованных алгоритмов.