Отчет

Программирование, механика, 1 курс

21 мая 2018 г.

Содержание

Список иллюстраций

Введение

Математическая модель является идеализированным и упрощенным “заместителем” реального объекта или явления, отражающим в математической форме важнейшие свойства оригинала — законы, которым он подчиняется, связи, присущие его частям. Исследуя эти свойства, можно получить некоторую информацию об исходном объекте. Цель этого проекта — моделирование траектории маятника.

Маятник — это система, подвешенная в поле тяжести и совершающая механические колебания. В этой работе я моделировала простейший маятник — тело, подвешенное на нерастяжимой нити. Я рассмотрела разные варианты движения, в зависимости от сил, действие которых на маятник я учитывала.

Траектория маятника в данном случае — это уравнение движения, которое определяет координату x (отклонение от вертикали) в зависимости от времени. В случае с маятником Фуко, плоскость колебаний которого медленно поворачивается, появляется так же координата y (траектория задается параметрически).

Все представленные модели линейные (уравнения движения являются комплексными экспонентами (в т.ч. синусоидами)) и детерминированные (для заданных входных данных результат уникальный и предопределенный).
Модели маятников были написаны на C++ и собраны в динамическую библиотеку **libPendulum.dll**

Цель и задачи

- Цель работы — моделирование траектории маятника.
- Задачи:
  - Рассмотреть разные варианты движения маятника, в зависимости от действующих на него сил
  - Реализовать каждую модель на C++, опираясь на полученные (найденные) теоретические результаты
  - Собрать все в библиотеку для дальнейшего использования

Теория

Как уже сообщалось выше, моделируемая система представляет собой тело, подвешенное в поле силы тяжести на нерастяжимой нити. Отсюда его базовые характеристики — масса m и длина l. Другие начальные условия, определяющие движение маятника — начальное отклонение от вертикали (оно же x_0) и начальная скорость (v_0).

Простой математический маятник

Самая простая модель маятника — это математический маятник. В этом случае единственной существенной силой будет сила тяжести. Мы так же пренебрегаем размерами тела. Движение такой модели не будет зависить от массы маятника, и это видно по формулам, приведенным ниже.

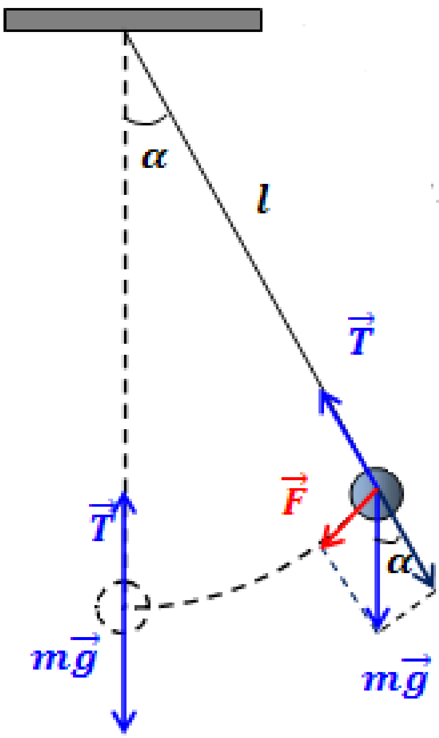


Рис. 1: Силы, действующие на математический маятник

Красным цветом на рисунке обозначена тангенциальная составляющая силы тяжести — $\vec{F}_t$. Ее значение: $F_t = mg\sin\alpha$.
В соответсвии со вторым законом Ньютона:

$$\vec{a}_t = \frac{\vec{F}_t}{m} \tag{1}$$

Получим $a_t = -g\sin\alpha$
Тангенциальное ускорение связано с углом таким образом:

$$\vec{a}_t = l\frac{d^2\alpha}{dt^2} \tag{2}$$

Получим:

$$l\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -gsin\alpha \tag{3}$$

Обозначим

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{4}$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\omega^2 sin\alpha \tag{5}$$

Ограничимся случаем малых колебаний: $\sin\alpha \approx \alpha$
Тогда:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\omega^2\alpha \tag{6}$$

Решением этого уравнения будет:

$$\alpha(t) = A_\alpha \sin(\omega t + \alpha_0) \tag{7}$$

A и α_0 задаются начальными условиями.
Координата x_0 связана с углом α следующим соотношением: $x_0 = l\sin\alpha \approx l\alpha$ Тогда уравнение движения имеет вид:

$$x(t) = A_\alpha l \sin(\omega t + \alpha_0) \tag{8}$$

или

$$x(t) = A\sin(\omega t + \alpha_0) \tag{9}$$

В описании маятника на C++ используются формулы (4) и (9). Из формулы (4) появляется новая характеристика — циклическая частота. Еще одной характеристикой маятника является период — время, за которое совершается одно колебание. Период связан с частотой следующим образом:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{10}$$

Найдем значения амплитуды A и начального угла отклонения (или фазы) α_0 из уравнений для x и x':

$$A = \sqrt{{x_0}^2 + (\frac{v_0}{\omega})^2} \tag{11}$$

$$\alpha_0 = \arctan\frac{x_0}{v_0} \tag{12}$$

Если $x_0 = v_0 = 0$, то $A = \alpha = 0$.
Как видим, движение математического маятника действительно не зависит от массы.

Маятник Фуко

Маятник Фуко — это математический маятник, плоскость колебаний которого медленно поворачивается относительно земной поверхности в сторону, противоположную направлению вращения Земли. Это происходит из-за того, что на маятник действует сила Кориолиса.

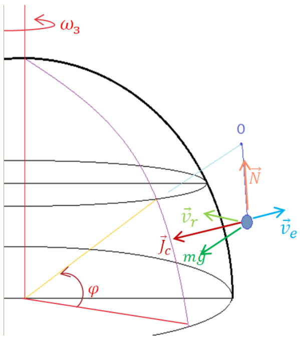


Рис. 2: Силы, действующие на маятник Фуко

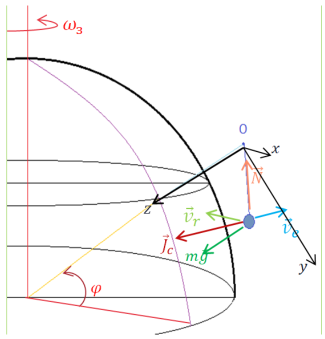


Рис. 3: Система координат $Oxyz$

J_c — сила Кориолиса, N — сила натяжения нити, φ — географическая широта. $N_x = -\frac{nx}{l}$, $N_y = -\frac{ny}{l}$, $N_z = -\frac{nz}{l}$. Поместим начало координат в точку подвеса O. Ось Oz направим вдоль отвесной линии (желтым), ось Oy перпендикулярно Oz в плоскости меридиана (по касательной к нему) и Oy по касательной к плоскости параллели. $Ox \perp Oy \perp Oz$.
Так как нить нерастяжимая, то

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2 \tag{13}$$

Проекции сил, действующих на маятник Фуко:

$$m\ddot{x} = -\frac{nx}{l} + 2m\omega(\dot{z}\cos\varphi - \dot{y}\sin\varphi) \tag{14}$$

$$m\ddot{y} = -\frac{ny}{l} + 2m\omega\dot{x}\sin\varphi \tag{15}$$

$$m\ddot{z} = -\frac{nz}{l} - 2m\omega\dot{x}\cos\varphi - mg \tag{16}$$

Как и в случае с математическим маятником рассмотрим только малые колебания маятника. Тогда $x \ll l, y \ll l, \dot{x} \ll \sqrt{gl}, \dot{y} \ll \sqrt{gl}$
$z = \sqrt{l^2 - x^2 - y^2} \approx 1 - \frac{x^2}{2l^2} - \frac{y^2}{2l^2} \approx l$
Продифференцируем (13) по времени: $\dot{z} = -\frac{x\dot{x}}{z} - \frac{y\dot{y}}{z} \approx -\frac{x\dot{x}}{l} - \frac{y\dot{y}}{l}$
Отсюда

$$\dot{z} \ll \dot{x}\dot{z} \ll \dot{y} \tag{17}$$

Продифференцируем предыдущее выражени по времени:

$$\frac{\ddot{z}}{g} = -\frac{\dot{x}\ddot{x}}{gl} - \frac{\dot{y}\ddot{y}}{gl} - \frac{\dot{x}^2}{gl} - \frac{\dot{y}^2}{gl} \ll 1 \tag{18}$$

$\ddot{z} \ll g$ Так как угловая скорость Земли достаточно мала $\omega \ll \sqrt{g/l} \Rightarrow \omega\sqrt{gl} \ll g$
Следовательно, $\omega x \ll \omega\sqrt{gl} \ll g$
Пренебрегая малыми слагаемыми получим для (16):

$$\frac{nz}{l} = mg \tag{19}$$

$n \approx mg$
Тогда (14) и (15):

$$\ddot{x} = -\omega^2 x - 2\omega_* \dot{y} \tag{20}$$

$$\ddot{y} = -\omega^2 y + 2\omega_* \dot{x} \tag{21}$$

Где $\omega_* = \omega \sin\varphi$.
Умножим уравнение (20) на $-y$, (21) на x и сложим:

$$x\ddot{y} - y\ddot{y} = 2\omega_*(x\dot{x} + y\dot{y}) \tag{22}$$

$$\frac{d(x\dot{y} - y\dot{x})}{dt} = \omega_* \frac{d(x^2 + y^2)}{dt} \tag{23}$$

Введем полярную систему координат: $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$
Тогда дифференциальное уравнение примет вид:

$$\frac{d\rho^2\dot{\theta}}{dt} = \omega_* \frac{d\rho^2}{dt} \tag{24}$$

Его интегрирование дает:

$$\rho^2\dot{\theta} = \omega_*\rho^2 + {}_1 \tag{25}$$

Отсюда при $t = 0\rho = 0\theta = \omega_* t$
Найдем ρ:
Умножим (20) на x и (21) на y. Сложим:

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} = -\omega^2(x^2 + y^2) + 2\omega_*(\dot{x}y - \dot{y}x) \tag{26}$$

Отсюда:

$$\ddot{\rho} + \omega_1^2 \rho = 0 \tag{27}$$

Где $\omega_1 = \omega^2 + \omega_*^2 \approx \omega^2$.
Получим уравнение движения в полярных координатах:

$$\rho = \beta \sin(\omega_1 t + \gamma) \tag{28}$$

Где β и γ находятся из начальных условий:

$$\gamma = \arctan \frac{\omega_1 \cos\theta}{\frac{v_0}{x_0} + \omega_* \sin\theta} \beta = \frac{x_0}{\sin\gamma} \tag{29}$$

Если $x_0 = 0$, то $\gamma = 0, \beta = \frac{v_0}{\omega_1 \cos\theta}$

Физический маятник

Физическим маятником называется твердое тело, закрепленное на неподвижной горизонтальной оси (оси подвеса), не проходящей через центр тяжести, и совершающее колебания относительно этой оси под действием силы тяжести. В отличие от математического маятника массу такого тела нельзя считать точечной. В положение равновесия его возвращает та же тангенциальная составляющая силы тяжести — $F_t = -mg \sin\alpha \approx -mg\alpha$. У физического маятника появляются новые значащие характеристики — форма, "радиус", момент инерции и приведенная длина.
Дифференциальное уравнение колебаний физического маятника имеет вид:

$$\frac{d^2\alpha}{dt} + \frac{mgl}{J}\alpha = 0 \tag{30}$$

Где J — момент импульса.

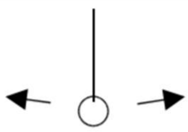
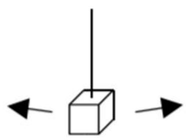
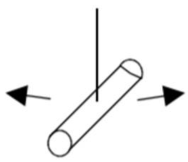
Тело	**Изображение тела, подвешенного на нити**	**Момент инерции $J_{цм}$**
Шар радиуса ***r***		$\frac{2}{5}mr^2$
Куб со стороной ***a=2r*** (любое расположение относительно оси вращения)		$\frac{1}{6}ma^2 = \frac{2}{3}mr^2$
Цилиндр радиуса ***r***, ось цилиндра параллельна оси вращения - в том числе плоский диск или тонкий длинный цилиндр		$\frac{1}{2}mr^2$
Тонкий диск малого радиуса ***r***, нить подвеса проходит через ось симметрии диска (ось вращения параллельна плоскости диска)		$\frac{1}{4}mr^2$

Рис. 4: Формула для момента импульса

Решение этого уравнения:

$$\alpha(t) = A_\alpha \sin(\omega t + \alpha_0) \tag{31}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{g}} \tag{32}$$

Найдем длину математического маятника, уравнение движения которого совпадает с (31). Такая длина называется **приведенная длина**:

$$L = \frac{J}{ml} \tag{33}$$

Маятник с вязким трением

Силы трения, зависящие от значения скорости движущегося тела, у которых трение покоя отсутствует, называются силами вязкого трения.
$F = -kv$, где k — динамическая вязкость. Например, вязкость воздуха — 18,6 мкПа*с
Уравнение его движения:

$$\ddot{x} + 2c\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{34}$$

$c = \frac{k}{2m}$
$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$
Имеет три решения в зависимости от c.

1. $c < \omega_0$

$$x(t) = Ae^{-ct}\sin(\omega t + \alpha_0) \tag{35}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - c^2} \tag{36}$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + (\frac{v_0 + cx_0}{\omega})^2} \tag{37}$$

$$\alpha = \arcsin\frac{x_0}{A} \tag{38}$$

2. $c = \omega_0$

$$x = e^{-ct}(C_1 + C_2 t) \tag{39}$$

$$C_1 = x_0 \tag{40}$$

$$C_2 = v_0 + cx_0 \tag{41}$$

3. $c > \omega_0$

$$x = C_1 e^{-\gamma_1 t} + C_2 e^{-\gamma_2 t} \tag{42}$$

$$\gamma_{1,2} = -c \pm \sqrt{c^2 - \omega_0^2} \tag{43}$$

$$C_1 = \frac{v_0 - \gamma_2 x0}{\gamma_1 - \gamma_2} \tag{44}$$

$$C_2 = \frac{v_0 - \gamma_2 x0}{\gamma_2 - \gamma_1} \tag{45}$$

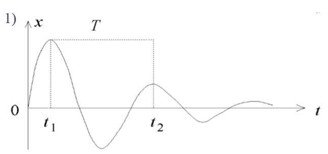


Рис. 5: Уравнение (35)

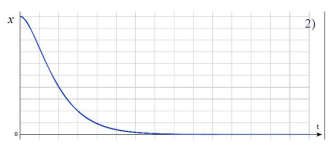


Рис. 6: Уравнение (39)

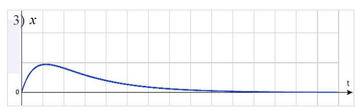


Рис. 7: Уравнение (42)

Реализация на C++

Динамическая библиотека (DLL) представляет собой библиотеку функций (ресурсов), которыми может пользоваться любой процесс, загрузивший эту библиотеку.
Динамическая библиотека libPendulum.dll содержит в себе классы моделей маятников, а так же некоторые необходимые константы, функции и т.д. Все физические величины далее приведены в СИ, если не указано другое. Пока что здесь всего три более-менне полноценных модели: простой математический маятник, физический маятник, и маятник, на который действует вязкое трение. Кроме того, метод для нахождения координат маятника Фуко.

Структура

Составляющие (на данный момент, еще можно добавить пользовательские модули):

Pendulum.h

SMP.cpp PHYP.cpp Пользовательский модуль (?) Pendulum.cpp PWF.cpp

Внутренние зависимости:

Pendulum.cpp <=> базовый класс Pendulum

SMP.cpp <=> класс Simple_Math_Pendulum PWF.cpp <=> класс Pendulum_W_Friction

PHYP.cpp <=> класс Ph_Pendulum

Чтобы подключить библиотеку, достаточно заголовочного файла Pendulum.h и, собственно, библиотеки. Подробное описание кода см. документацию по проекту.

Пример работы

```
 input.txt:
10 0.471239
1.5 0.1 15 2
1.5 0.1 15 2 0.0000186
1.5 0.1 15 2 куб 1
```

```
 output.txt:
Координата простого математического маятника:
2.06304
Координата маятника с вязким трением:
2.06129
Координата физического маятника:
2.60926
Координаты маятника Фуко:
x = 2.06304; y = 0.000682892
```

На основании полученных данных можно сказать, что для маленького промежутка времени t координаты представленных маятников не сильно отличаются друг от друга.

Заключение

С помощью созданных моделей можно пронаблюдать, как изменится траектория маятника, в зависимости от того, какие силы, действующие на него, мы учитываем (какой из моделей пользуемся). Библиотека так же позволяет получить информацию об основных характеристиках того или иного варианта.
В проекте можно многое изменить, например, добавить новые модели маятников (нелинейные, колебательный контур и т.д.). Усовершенствовать код (пока он очень плох).