

Отчет

Программирование, механика, 1 курс

20 мая 2018 г.

Содержание

Введение	3
Введение	3
Теория	4
Простой математический маятник	4
Маятник Фуко	5
Физический маятник	7
Маятник с вязким трением	8
Реализация на C++	9
Структура	9
Пример работы (для Complex_Test.cpp)	9
Заключение	10

Список иллюстраций

1	Силы, действующие на математический маятник	4
2	Силы, действующие на маятник Фуко	5
3	Система координат $Oxyz$	5
4	Формула для момента импульса	7
5	Уравнение (35)	8
6	Уравнение (39)	8
7	Уравнение (42)	8

Введение

Математическая модель является идеализированным и упрощенным “заместителем” реального объекта или явления, отражающим в математической форме важнейшие свойства оригинала — законы, которым он подчиняется, связи, присущие его частям. Исследуя эти свойства, можно получить некоторую информацию об исходном объекте. Цель этого проекта — моделирование траектории маятника.

Маятник — это система, подвешенная в поле тяжести и совершающая механические колебания. В этой работе я моделировала простейший маятник — тело, подвешенное на нерастяжимой нити. Я рассмотрела разные варианты движения, в зависимости от сил, действие которых на маятник я учитывала.

Траектория маятника в данном случае — это уравнение движения, которое определяет координату x (отклонение от вертикали) в зависимости от времени. В случае с маятником Фуко, плоскость колебаний которого медленно поворачивается, появляется так же координата y (траектория задается параметрически).

Все представленные модели линейные (уравнения движения являются комплексными экспонентами (в т.ч. синусоидами)) и детерминированные (для заданных входных данных результат уникальный и предопределенный).

Модели маятников были написаны на C++ и собраны в динамическую библиотеку **libPendulum.dll**

Цель и задачи

- Цель работы — моделирование траектории маятника.
- Задачи:
 - Рассмотреть разные варианты движения маятника, в зависимости от действующих на него сил
 - Реализовать каждую модель на C++, опираясь на полученные (найденные) теоретические результаты
 - Собрать все в библиотеку для дальнейшего использования

Теория

Как уже сообщалось выше, моделируемая система представляет собой тело, подвешенное в поле силы тяжести на нерастяжимой нити. Отсюда его базовые характеристики — масса m и длина l . Другие начальные условия, определяющие движение маятника — начальное отклонение от вертикали (оно же x_0) и начальная скорость (v_0).

Простой математический маятник

Самая простая модель маятника — это математический маятник. В этом случае единственной существенной силой будет сила тяжести. Мы так же пренебрегаем размерами тела. Движение такой модели не будет зависеть от массы маятника, и это видно по формулам, приведенным ниже.

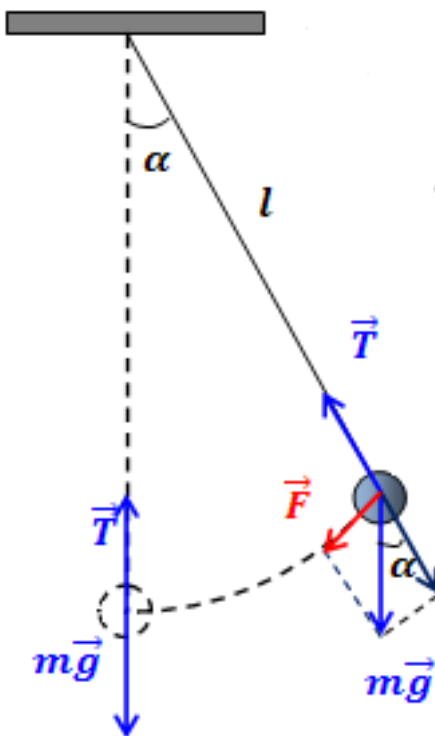


Рис. 1: Силы, действующие на математический маятник

Красным цветом на рисунке обозначена тангенциальная составляющая силы тяжести — \vec{F}_t . Ее значение: $F_t = mg \sin \alpha$.

В соответствии со вторым законом Ньютона:

$$\vec{a}_t = \frac{\vec{F}_t}{m} \quad (1)$$

Получим $a_t = -g \sin \alpha$

Тангенциальное ускорение связано с углом таким образом:

$$\vec{a}_t = l \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \quad (2)$$

Получим:

$$l \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -g \sin \alpha \quad (3)$$

Обозначим

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (4)$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\omega^2 \sin\alpha \quad (5)$$

Ограничимся случаем малых колебаний: $\sin\alpha \approx \alpha$

Тогда:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\omega^2 \alpha \quad (6)$$

Решением этого уравнения будет:

$$\alpha(t) = A_\alpha \sin(\omega t + \alpha_0) \quad (7)$$

A и α_0 задаются начальными условиями.

Координата x_0 связана с углом α следующим соотношением: $x_0 = l \sin\alpha \approx l\alpha$ Тогда уравнение движения имеет вид:

$$x(t) = A_\alpha l \sin(\omega t + \alpha_0) \quad (8)$$

или

$$x(t) = A \sin(\omega t + \alpha_0) \quad (9)$$

В описании маятника на C++ используются формулы (4) и (9). Из формулы (4) появляется новая характеристика — циклическая частота. Еще одной характеристикой маятника является период — время, за которое совершается одно колебание. Период связан с частотой следующим образом:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (10)$$

Найдем значения амплитуды A и начального угла отклонения (или фазы) α_0 из уравнений для x и x' :

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \quad (11)$$

$$\alpha_0 = \arctan \frac{x_0}{v_0/\omega} \quad (12)$$

Если $x_0 = v_0 = 0$, то $A = \alpha = 0$.

Как видим, движение математического маятника действительно не зависит от массы.

Маятник Фуко

Маятник Фуко — это математический маятник, плоскость колебаний которого медленно поворачивается относительно земной поверхности в сторону, противоположную направлению вращения Земли. Это происходит из-за того, что на маятник действует сила Кориолиса.

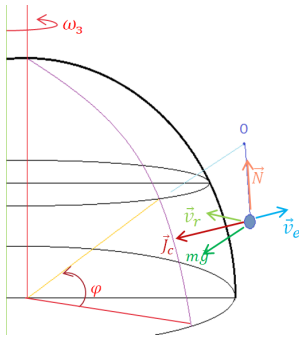


Рис. 2: Силы, действующие на маятник Фуко

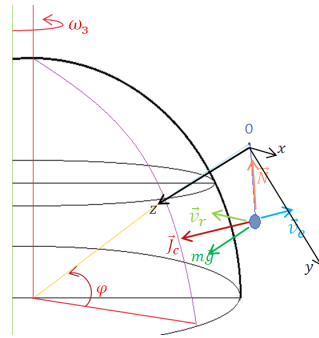


Рис. 3: Система координат $Oxyz$

J_c — сила Кориолиса, N — сила натяжения нити, φ — географическая широта. $N_x = -\frac{nx}{l}$, $N_y = -\frac{ny}{l}$, $N_z = -\frac{nz}{l}$. Поместим начало координат в точку подвеса O . Ось Oz направим вдоль отвесной линии (желтым), ось Oy перпендикулярно Oz в плоскости меридиана (по касательной к нему) и Ox по касательной к плоскости параллели. $Ox \perp Oy \perp Oz$.
Так как нить нерастяжимая, то

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2 \quad (13)$$

Проекции сил, действующих на маятник Фуко:

$$m\ddot{x} = -\frac{nx}{l} + 2m\omega(\dot{z} \cos \varphi - \dot{y} \sin \varphi) \quad (14)$$

$$m\ddot{y} = -\frac{ny}{l} + 2m\omega\dot{x} \sin \varphi \quad (15)$$

$$m\ddot{z} = -\frac{nz}{l} - 2m\omega\dot{x} \cos \varphi - mg \quad (16)$$

Как и в случае с математическим маятником рассмотрим только малые колебания маятника. Тогда $x \ll l, y \ll l, \dot{x} \ll \sqrt{gl}, \dot{y} \ll \sqrt{gl}$
 $z = \sqrt{l^2 - x^2 - y^2} \approx l - \frac{x^2}{2l} - \frac{y^2}{2l} \approx l$

Продифференцируем (13) по времени: $\dot{z} = -\frac{x\dot{x}}{z} - \frac{y\dot{y}}{z} \approx -\frac{x\dot{x}}{l} - \frac{y\dot{y}}{l}$

Отсюда

$$\dot{z} \ll \dot{x} \ll \dot{y} \quad (17)$$

Продифференцируем предыдущее выражение по времени:

$$\frac{\ddot{z}}{g} = -\frac{\dot{x}\ddot{x}}{gl} - \frac{\dot{y}\ddot{y}}{gl} - \frac{\dot{x}^2}{gl} - \frac{\dot{y}^2}{gl} \ll 1 \quad (18)$$

$\ddot{z} \ll g$ Так как угловая скорость Земли достаточно мала $\omega \ll \sqrt{g/l} \Rightarrow \omega\sqrt{gl} \ll g$

Следовательно, $\omega x \ll \omega\sqrt{gl} \ll g$

Пренебрегая малыми слагаемыми получим для (16):

$$\frac{nz}{l} = mg \quad (19)$$

$n \approx mg$

Тогда (14) и (15):

$$\ddot{x} = -\omega^2 x - 2\omega_* \dot{y} \quad (20)$$

$$\ddot{y} = -\omega^2 y + 2\omega_* \dot{x} \quad (21)$$

Где $\omega_* = \omega \sin \varphi$.

Умножим уравнение (20) на $-y$, (21) на x и сложим:

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = 2\omega_*(x\dot{x} + y\dot{y}) \quad (22)$$

$$\frac{d(xy - yx)}{dt} = \omega_* \frac{d(x^2 + y^2)}{dt} \quad (23)$$

Введем полярную систему координат: $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$

Тогда дифференциальное уравнение примет вид:

$$\frac{d\rho^2 \dot{\theta}}{dt} = \omega_* \frac{d\rho^2}{dt} \quad (24)$$

Его интегрирование дает:

$$\rho^2 \dot{\theta} = \omega_* \rho^2 + 1 \quad (25)$$

Отсюда при $t = 0, \rho = 0, \theta = \omega_* t$

Найдем ρ :

Умножим (20) на x и (21) на y . Сложим:

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} = -\omega^2(x^2 + y^2) + 2\omega_*(\dot{x}y - \dot{y}x) \quad (26)$$

Отсюда:

$$\ddot{\rho} + \omega_1^2 \rho = 0 \quad (27)$$

Где $\omega_1 = \omega^2 + \omega_*^2 \approx \omega^2$.

Получим уравнение движения в полярных координатах:

$$\rho = \beta \sin(\omega_1 t + \gamma) \quad (28)$$

Где β и γ находятся из начальных условий:

$$\gamma = \arctan \frac{\omega_1 \cos \theta}{\frac{v_0}{x_0} + \omega_* \sin \theta} \beta = \frac{x_0}{\sin \gamma} \quad (29)$$

Если $x_0 = 0$, то $\gamma = 0, \beta = \frac{v_0}{\omega_1 \cos \theta}$

Физический маятник

Физическим маятником называется твердое тело, закрепленное на неподвижной горизонтальной оси (оси подвеса), не проходящей через центр тяжести, и совершающее колебания относительно этой оси под действием силы тяжести. В отличие от математического маятника массу такого тела нельзя считать точечной. В положение равновесия его возвращает та же тангенциальная составляющая силы тяжести — $F_t = -mg \sin \alpha \approx -mg\alpha$. У физического маятника появляются новые значащие характеристики — форма, “радиус”, момент инерции и приведенная длина.

Дифференциальное уравнение колебаний физического маятника имеет вид:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{mgl}{J} \alpha = 0 \quad (30)$$

Где J — момент импульса.

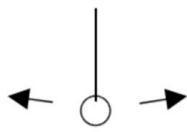
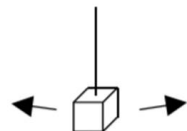
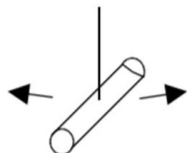

Тело	Изображение тела, подвешенного на нити	Момент инерции J_{cm}
Шар радиуса r		$\frac{2}{5} mr^2$
Куб со стороной $a=2r$ (любое расположение относительно оси вращения)		$\frac{1}{6} ma^2 = \frac{2}{3} mr^2$
Цилиндр радиуса r , ось цилиндра параллельна оси вращения - в том числе плоский диск или тонкий длинный цилиндр		$\frac{1}{2} mr^2$
Тонкий диск малого радиуса r , нить подвеса проходит через ось симметрии диска (ось вращения параллельна плоскости диска)		$\frac{1}{4} mr^2$

Рис. 4: Формула для момента импульса

Решение этого уравнения:

$$\alpha(t) = A_\alpha \sin(\omega t + \alpha_0) \quad (31)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{g}} \quad (32)$$

Найдем длину математического маятника, уравнение движения которого совпадает с (31). Такая длина называется **приведенная длина**:

$$L = \frac{J}{ml} \quad (33)$$

Маятник с вязким трением

Силы трения, зависящие от значения скорости движущегося тела, у которых трение покоя отсутствует, называются силами вязкого трения.

$F = -kv$, где k — динамическая вязкость. Например, вязкость воздуха — 18,6 мкПа*с

Уравнение его движения:

$$\ddot{x} + 2c\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (34)$$

$$c = \frac{k}{2m}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Имеет три решения в зависимости от c .

$$1. \quad c < \omega_0$$

$$x(t) = Ae^{-ct} \sin(\omega t + \alpha_0) \quad (35)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - c^2} \quad (36)$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + cx_0}{\omega}\right)^2} \quad (37)$$

$$\alpha = \arcsin \frac{x_0}{A} \quad (38)$$

$$2. \quad c = \omega_0$$

$$x = e^{-ct}(C_1 + C_2 t) \quad (39)$$

$$C_1 = x_0 \quad (40)$$

$$C_2 = v_0 + cx_0 \quad (41)$$

$$3. \quad c > \omega_0$$

$$x = C_1 e^{-\gamma_1 t} + C_2 e^{-\gamma_2 t} \quad (42)$$

$$\gamma_{1,2} = -c \pm \sqrt{c^2 - \omega_0^2} \quad (43)$$

$$C_1 = \frac{v_0 - \gamma_2 x_0}{\gamma_1 - \gamma_2} \quad (44)$$

$$C_2 = \frac{v_0 - \gamma_1 x_0}{\gamma_2 - \gamma_1} \quad (45)$$

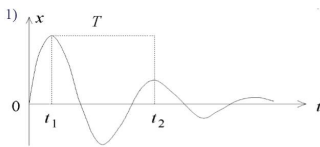


Рис. 5: Уравнение (35)

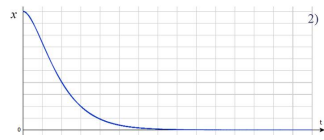


Рис. 6: Уравнение (39)

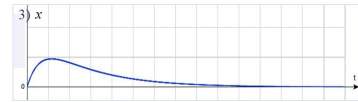


Рис. 7: Уравнение (42)


```
input.txt:
10 0.471239
1.5 0.1 15 2
1.5 0.1 15 2 0.0000186
1.5 0.1 15 2 куб 1
```

```
output.txt:
Координата простого математического маятника:
2.06304
Координата маятника с вязким трением:
2.06129
Координата физического маятника:
2.60926
Координаты маятника Фуко:
x = 2.06304; y = 0.000682892
```

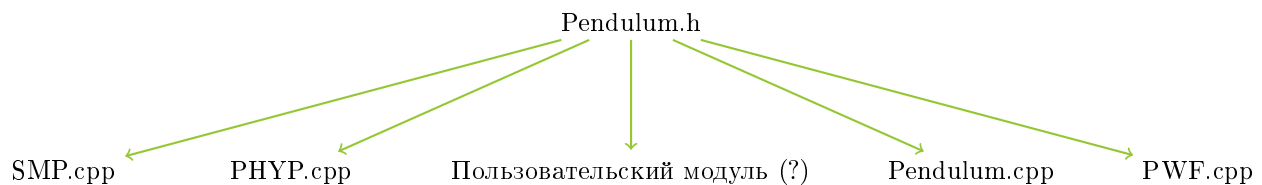
Реализация на C++

Динамическая библиотека (DLL) представляет собой библиотеку функций (ресурсов), которыми может пользоваться любой процесс, загрузивший эту библиотеку.

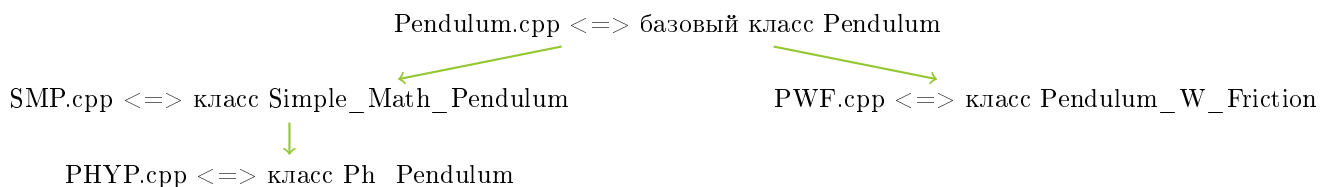
Динамическая библиотека libPendulum.dll содержит в себе классы моделей маятников, а так же некоторые необходимые константы, функции и т.д. Все физические величины далее приведены в СИ, если не указано другое. Пока что здесь всего три более-менее полноценных модели: простой математический маятник, физический маятник, и маятник, на который действует вязкое трение. Кроме того, метод для нахождения координат маятника Фуко.

Структура

Составляющие (на данный момент, еще можно добавить пользовательские модули):



Внутренние зависимости:



Чтобы подключить библиотеку, достаточно заголовочного файла Pendulum.h и, собственно, библиотеки. Подробное описание кода см. документацию по проекту.

Пример работы

На основании полученных данных можно сказать, что для маленького промежутка времени t координаты представленных маятников не сильно отличаются друг от друга.

Заключение

С помощью созданных моделей можно пронаблюдать, как изменится траектория маятника, в зависимости от того, какие силы, действующие на него, мы учитываем (какой из моделей пользуемся). Библиотека так же позволяет получить информацию об основных характеристиках того или иного варианта.

В проекте можно многое изменить, например, добавить новые модели маятников (нелинейные, колебательный контур и т.д.). Усовершенствовать код (пока он очень плох).