Санкт-Петербургский государственный университет

Математико-механический факультет

ОТЧЁТ ПО ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАДАНИЮ №7

«Проекционные методы для краевой задачи ОДУ второго порядка.»

Выполнила:
Бушмакова М. А.

Санкт-Петербург, 2020 г.

1 Постановка задачи

Требуется найти решение дифференциального уравнения(1), удовлетворяющее граничным условиям (2,3).

$$-(p(x)u')' + q(x)u = f(x) \tag{1}$$
$$\alpha_0 u(x_0) - \alpha_1 u'(x_0) = \alpha \tag{2}$$
$$\beta_0 u(x_1) - \beta_1 u'(x_1) = \beta \tag{3}$$
$$\tag{4}$$

1.1 Теория

В основе проекционного метода — выборе л.н.з. системы функций $\{\phi_i\}$, которая называется координатной. Тогда решение ищется в виде линейной комбинации этих функций:

$$u^n(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i(x) \tag{5}$$

Где c_i — решение СЛАУ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_i = f_i \, i = 1, .., n$. В качестве координатных функций будем брать многочлены Лежандра.

1.2 Метод Ритца

Разобьем промежуток $[x_0, x_1]$ на n равных частей. $h = (x_1 - x_0)/n$, решение ищем в виде значений в точках $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, ..., n$. Заменим производные в уравнении (1) конечными разностями:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + q_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + r_i y_i = f_i \, i = 1, ..., n-1 \tag{6}$$
$$\alpha_0 y_0 - \alpha_1 (y_1 - y_0)/h = \alpha \tag{7}$$
$$\beta_0 y_0 - \beta_1 (y_n - y_{n-1})/h = \beta \tag{8}$$

Получим СЛАУ и решим её.

2 Численный эксперимент

- будем увеличивать количество узлов до получения заданной точности $varepsilon$
- погрешность оцениваем по правилу Ричардсона
- нарисуем графики зависимости погрешности от количества узлов сетки и график самого точного решения.

3 Результаты

3.1 Тест 1

Исходные данные:

$$u = \sin(x-1)(x+1)$$
$$p = \cos(x-1)$$
$$q = -2\cos(x-1)$$
$$f = 1 - 3\cos^2(x-1)$$
$$u(-1) = u(1) = 0$$

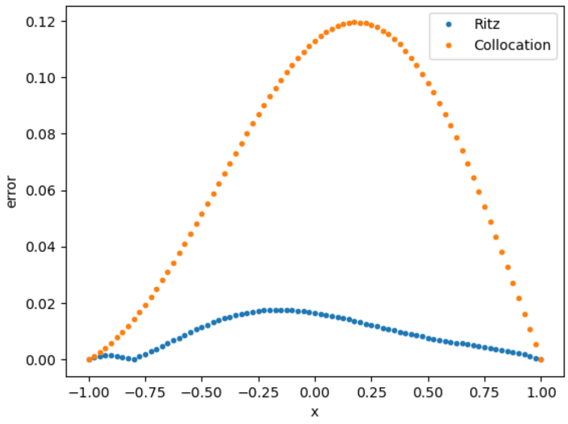

Рис. 1. график зависимости погрешности от x $N = 3$

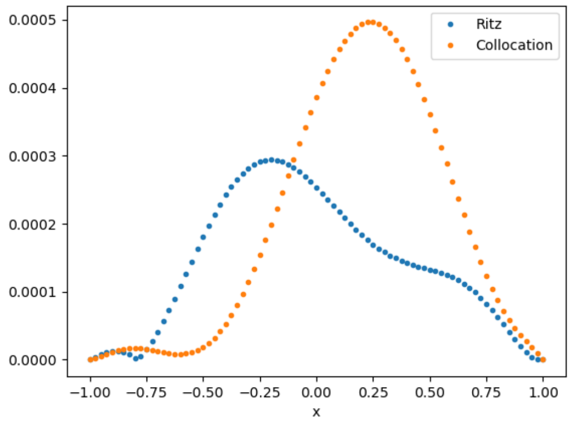

Рис. 2. график зависимости погрешности от x $N = 5$

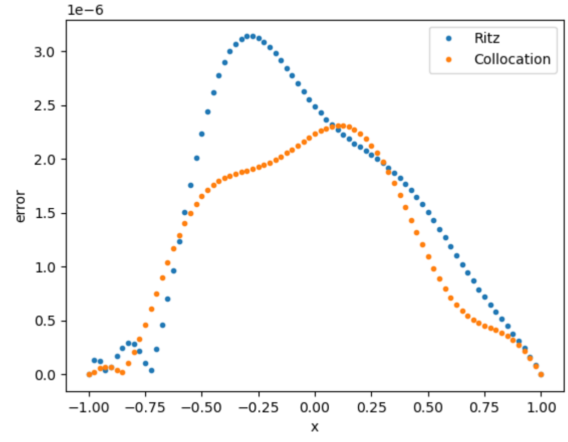

Рис. 3. график зависимости погрешности от x $N = 5$

3.2 Тест 2

Исходные данные:

$$u = 1 - x^2$$
$$p = x^2$$
$$q = 6$$
$$f = 6$$
$$u(-1) = u(1) = 0$$

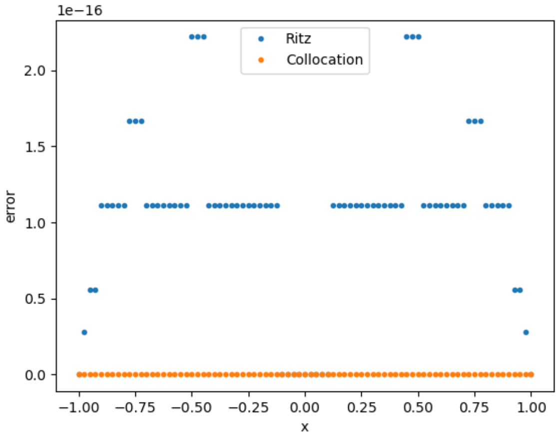

Рис. 4. график зависимости погрешности от x $N = 3$

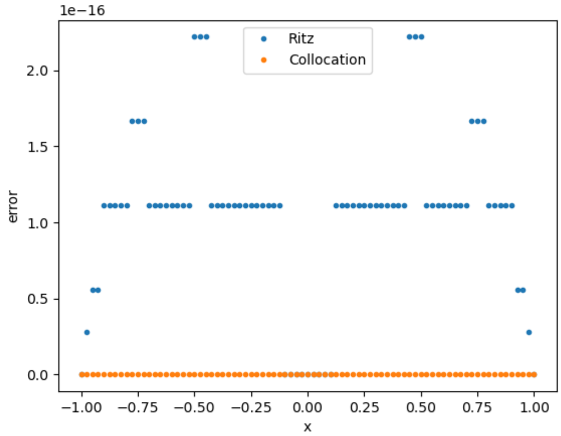

Рис. 5. график зависимости погрешности от x $N = 5$

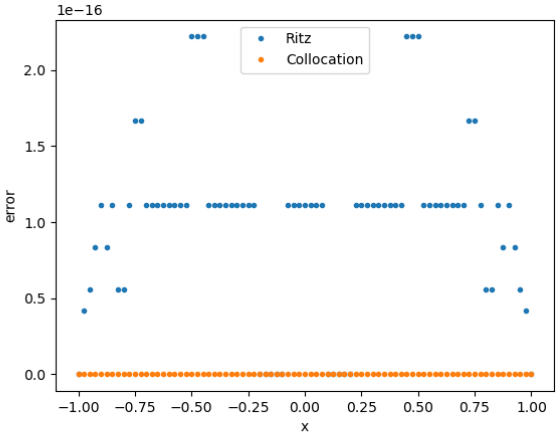

Рис. 6. график зависимости погрешности от x $N = 5$

3.3 Вывод

Использованный метод позволяет довольно быстро достичь требуемой точности.