Санкт-Петербургский государственный университет

Математико-механический факультет

ОТЧЁТ ПО ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАДАНИЮ №3

«Решение СЛАУ методами последовательных приближений»

Выполнила:
Бушмакова М. А.

Санкт-Петербург, 2020 г.

1 Постановка задачи

Нужно найти решение системы линейных уравнений:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{1}$$

Задача корректна при $detA \neq 0$. Будем решать задачу последовательными приближениями, т.е.:

$$x_{k+1} = F_k(x_0, x_1, ..., x_k) \tag{2}$$

Используемые методы — стационарные (F_k не зависит от k), первого порядка (зависит только от x_k).

2 Теоретические основания

Метод итерации сходится в случае, когда выполняется условие диагонального преобладания матрицы $A : |a_{ii}| \geq \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$. Т.о. можем считать, $a_{ii} \neq 0$.

2.1 Метод простых итераций

Рассмотрим простейший случай, когда F — линейная функция:

$$\mathbf{x}_{k+1} = B\mathbf{x}_k + c \tag{3}$$

$$B\mathbf{x}_k + Cb = \mathbf{x}_{k+1} \tag{4}$$

$$B + CA = E \tag{5}$$

Выразим x_1 через первое уравнение, x_2 через второе и т.д. В качестве матрицы B получим: $b_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$, $i \neq j$; $b_{ii} = 0$. Вектор c: $c_i = \frac{b_i}{a_i i}$.

2.2 Метод Зейделя

Представим матрицу $A = L + D + R$, где D — диагональная матрица, L — нижняя треугольная с нулями на главной диагонали, R — верхняя треугольная с нулями на главной диагонали. Формула метода Зейделя:

$$\mathbf{x}_{k+1} = -(D + L)^{-1}R\mathbf{x}_k + (D + L)^{-1}\mathbf{b} \tag{6}$$

3 Численный эксперимент

Будем оценивать погрешность ε, как $\varepsilon \leq \|\mathbf{x_k} - \mathbf{x_{k+1}}\|$. Порядок эксперимента:

- решим систему двумя методами: простой итерации и методом Зейделя для заданной точности ε
- сравним количество итераций

4 Результаты

4.1 Тест 1

Исходные данные:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} b = (1, -1, 1)$$

$$\varepsilon = 0.001$$

Простые итерации	Зейдель
15	5

Таблица 1. Количество итераций

Но для $\varepsilon = 10^{-4}$ уже не сходится, т.к. нет диагонального преобладания. $|a_{ii}| < \sum_{i \neq j} |a_{ij}|,\ i = 1, 3$

4.2 Тест 2

Исходные данные:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} b = (1, -1, 1)$$

$$\varepsilon = 10^{-7}$$

Простые итерации	Зейдель
22	12

Таблица 2. Количество итераций

$|a_{ii}| = \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$

4.3 Тест 2

Исходные данные:

$$A = \begin{bmatrix} 2000 & 0 & 0.3 \\ 1 & 400 & 0.1 \\ 0 & -1000 & 2 \end{bmatrix} b = (-1, 0, -2)$$

$$\varepsilon = 10^{-7}$$

$|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|,\ i = 1$ $|a_{ii}| < \sum_{i \neq j} |a_{ij}|,\ i = 2, 3$

Простые итерации	Зейдель
14	9

Таблица 3. Количество итераций

4.4 Тест 2

Исходные данные:

$$A = \begin{bmatrix} 11100 & 0.03 \\ -1 & 106000 \end{bmatrix} b = (1, -1)$$
$$\varepsilon = 10^{-7}$$

Простые итерации	Зейдель
2	2

Таблица 4. Количество итераций

$|a_{ii}| >> \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$

4.5 Вывод

Чем больше диагональное преобладание матрицы A, тем меньше итераций требуется для заданной точности, т.к. решение сходится быстрее. Для быстро сходящихся решений метод Зейделя и простых итераций работают одинаково быстро, для остальных — метод Зейделя работает быстрее.