Санкт-Петербургский государственный университет

Математико-механический факультет

ОТЧЁТ ПО ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАДАНИЮ №1

«Решение задачи Коши для жесткой системы дифференциальных уравнений с заданной точностью»

Выполнила:
Бушмакова М. А.

Санкт-Петербург, 2020 г.

1 Постановка задачи

Рассмотрим систему m линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} \tag{1}$$

где $\mathbf{y}$ — m-мерный вектор, а A — матрица коэффициентов;
И задачу Коши для него:

$$y_i(x_0) = y_{i,0} \tag{2}$$

Пусть λ_i — собственные числа матрицы A, допустим, что $\lambda_i \in \mathbb{R}$.
Определение Система называется жесткой, если $\forall i = 1, .., m$ $Re(\lambda_i) < 0$ и $max(-Re(\lambda_i))/min(-Re(\lambda_i))$ велико.
Будем численно решать систему (1-2) тремя методами: методом Рунге-Кутты, неявным методом Адамса и методом Розенброка с комплексным коэффициентом. Для того, чтобы найти численное решение (1-2), зададим рассчетную сетку (N узлов) и вычислим значения $\tilde{\mathbf{y}}$ — решения — в каждом узле. Заметим, что точность выбранных методов зависит от количества узлов, и будем менять значение N, чтобы приблизиться к заданной точности ε.

2 Теоретические основания

Здесь $h = (x_1 - x_0)/N$ — шаг сетки, $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(x_0)$.

2.1 Метод Рунге-Кутты

Расчетная формула метода Рунге-Кутты получается в результате применения формулы Симпсона для численного интегрирования.
Рассчётные формулы метода:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{3}$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i) \tag{4}$$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}) \tag{5}$$

$$k_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}) \tag{6}$$

$$k_2 = hf(x_i + h, y_i + k_3),\ i = 1, ..., N \tag{7}$$

Теоретическая погрешность метода Рунге-Кутты: $O(h^4)$. Метод устойчив при $N > max(\|\lambda\|)$

2.2 Метод Адамса

Идея метода: предположим, что известны значения решения в точках $x_0, ..., x_i$. Чтобы найти решение в точке x_{i+1}, заменим функции $f_i(x, \mathbf{y})$ (в нашем случае $f_i = A_i \cdot \mathbf{y}$) на интерполяционный многочлен $P[x, y_1, ..., y_m]$, построенный по узлам $x_{i+1}, .., x_{i+1-k}$.
Пусть $\mathbf{q}_i = hf(x_i, \mathbf{y}_i)$
Возьмём $k = 2$, тогда формулы для вычисления $\mathbf{y}_{i+1}$:

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \frac{1}{12}(5\mathbf{q}_{i+1} + 8\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i-1}) \tag{8}$$

В нашем случае необходимо решить следующее уравнение:

$$(E - \frac{5Ah}{12})\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \frac{Ah}{12}(8\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_{i-1}) \tag{9}$$

Для реккурентного соотношения необходимо вычислить $\mathbf{y}_1$. Найдём его с помощью метода Рунге-Кутты. Теоретическая погрешность метода Адамса ($k = 2$): $O(h^3)$.

2.3 Метод Розенброка с комплексным коэффициентом

Идея метода — в обратную схему Эйлера $\tilde{y} = y + hf(\tilde{y})$ подставим вместо $\tilde{y}$ её разложение в ряд Тейлора.

$$\tilde{y} = f(y) + f_y(y)(\tilde{y} - y) \tag{10}$$

$$\tilde{y} = y + h \cdot b \cdot w \tag{11}$$

$$(E - a \cdot h \cdot f_y(y, x))w = f(u, t + ch) \tag{12}$$

Положим, $b = 1$, $c = 1/2$, $a = 1/2$. Такой выбор коэффициентов даст второй порядок аппроксимации ($O(h^2)$).
Можно взять комплексное a. Получим рассчётную схему метода Розенброка с комплексными коэффициентами:

$$\tilde{y} = y + h \cdot Re(w) \tag{13}$$

$$(E - \frac{i+1}{2} \cdot h \cdot f_y(y, x))w = f(u, t + h/2) \tag{14}$$

3 Численный эксперимент

Порядок эксперимента:

- построим последовательность равномерных сеток с N, $2N$, $4N$,... и т.д. узлами

- будем решать задачу Коши выбранными методами на каждой сетке, увеличивая количество узлов до тех пор, пока не получим необходимую точность

- оцениваем погрешность по правилу Ричардсона $\|\Delta\| = \max_{1 \leq n \leq N} \Delta(x_n)$, где $\Delta(x) = \frac{y_r(x) - y_{r-1}(x)}{r^p - 1}$. Здесь p — теоретический порядок точности численного метода, r — коэффициент сгущения сетки, N — количество точек сетки

- построим графики зависимости погрешности от N (в двойном логарифмическом масштабе)

- при увеличении N должен быть выход на асимптотику. Чтобы это показать, оценим угол наклона $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\log \Delta_i - \log \Delta_{i-1}}{\log 2} = -p$.

4 Результаты

Заданная точность — $\varepsilon = 1e^{-6}$.

4.1 Тест 1

Исходные данные:

$$\dot{y} = z$$
$$\dot{z} = -4y$$
$$y(0) = 0.8$$
$$z(0) = 2$$

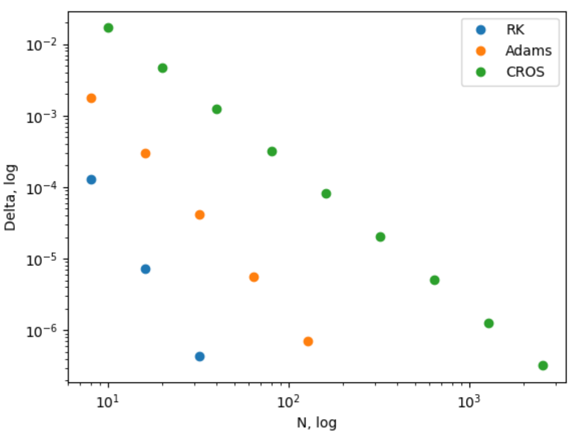

Рис. 1. график зависимости погрешности от N

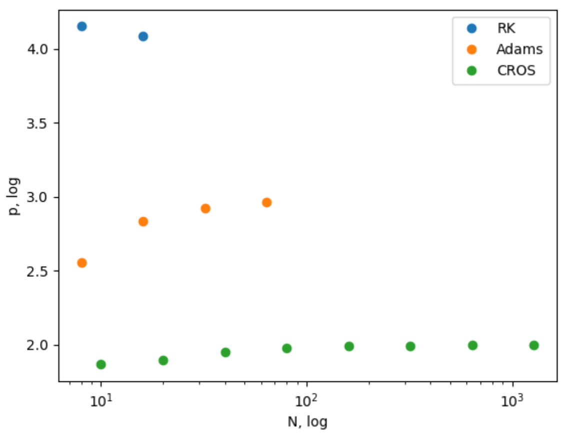

Рис. 2. зависимость p от N

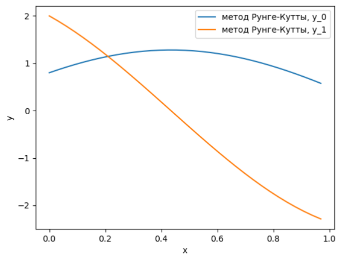

Рис. 3. метод РК

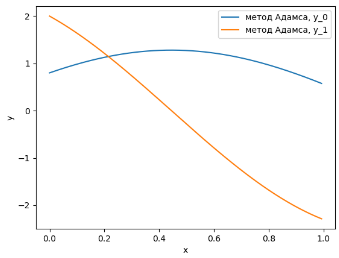

Рис. 4. метод Адамса

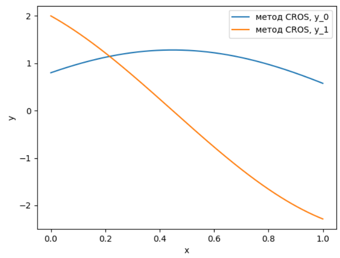

Рис. 5. метод CROS

4.2 Тест 2

Исходные данные:

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$$
$$\mathbf{y}(0) = (2, 1, 0)$$
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -28 & 0 \\ 28 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

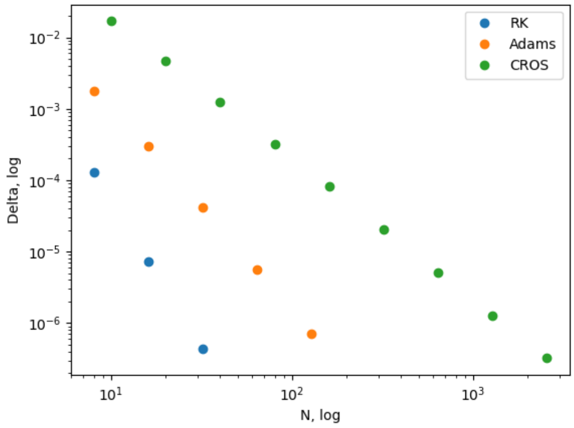

Рис. 6. график зависимости погрешности от N

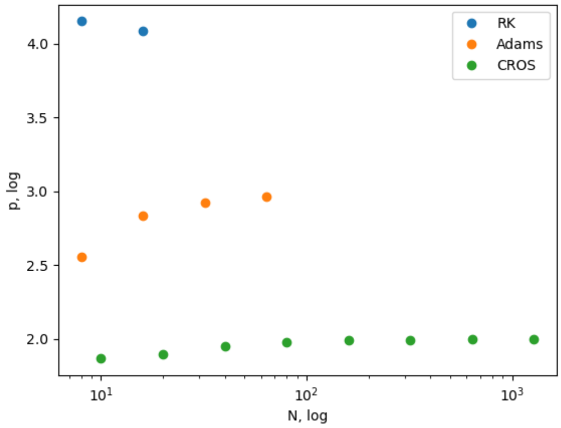

Рис. 7. зависимость p от N

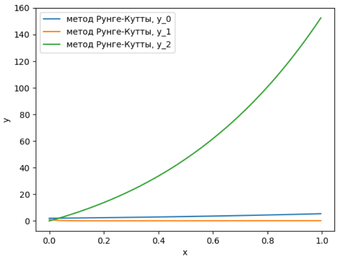

Рис. 8. метод РК

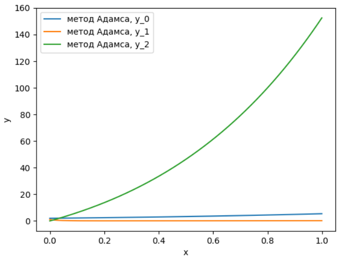

Рис. 9. метод Адамса

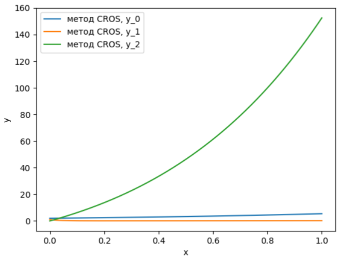

Рис. 10. метод CROS

4.3 Тест 3

На этом тесте посмотрим, что будет, если $N < max\|\lambda\|$ Исходные данные:

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$$
$$\mathbf{y}(0) = (100, 101, 101, 201, 201)$$
$$A = \begin{bmatrix} -10000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10001 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -10002 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -10002 & 2 & 100 & 900 & 1000 \\ -10002 & 2 & -900 & 2000 & -1100 \end{bmatrix}$$

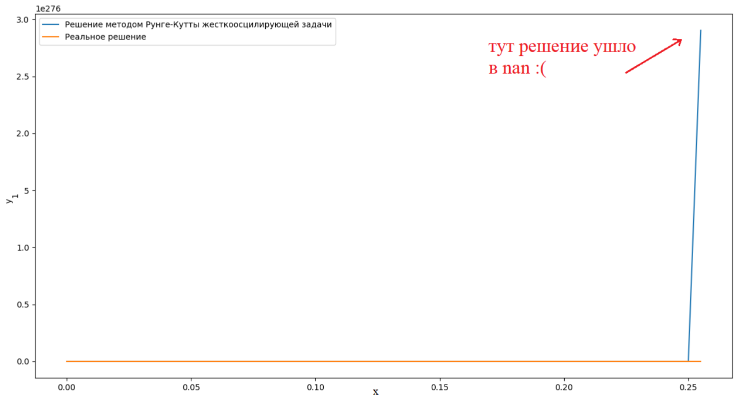

Рис. 11. резкое возрастание погрешности для метода РК, $N = 200$

Это жесткоосцилирующая система ($\lambda_{min} = -10000$) и явный метод (метод Рунге-Кутты) перестаёт на ней работать (получаются слишком большие числа). При недостаточно малом шаге наблюдается резкое возрастание погрешности (так, например, для $N = 10^4$ будем иметь для y_1: $y_{1,1} = k \cdot y_{1,0}$, где k — порядка 1. Тогда для каждого $i \in 1, .., N$ $y_{1,i}$ будет больше в k раз. В итоге получим $y_{1,N} = k^{10^4}$. Т.е. если $k > 1$ — на каком-то шаге мы дойдём до nan). Если мы увеличим шаг так, чтобы $k < 1$, получим намного большее время

работы программы, чем хотелось бы.
Эти результаты соответствуют теории, написанной выше.

4.4 Тест 4

Исходные данные:

$$\dot{y} = -125y + 123.15z$$
$$\dot{z} = 123.15y - 123z$$
$$y(0) = 1$$
$$z(0) = 1$$

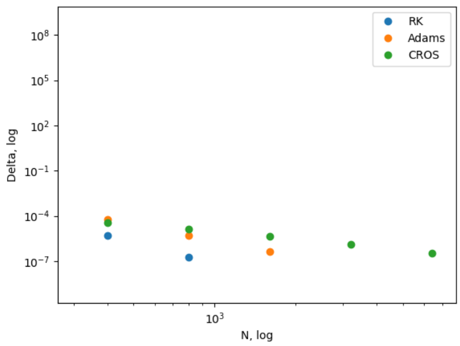

Рис. 12. график зависимости погрешности от N

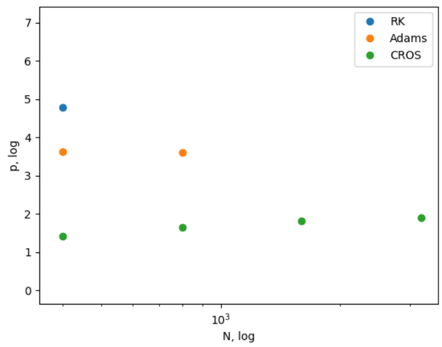

Рис. 13. зависимость p от N

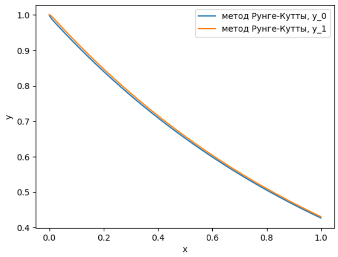

Рис. 14. метод РК

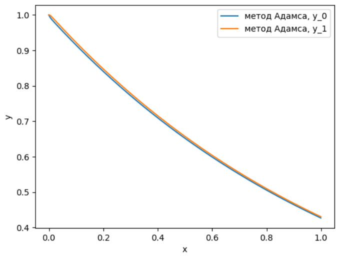

Рис. 15. метод Адамса

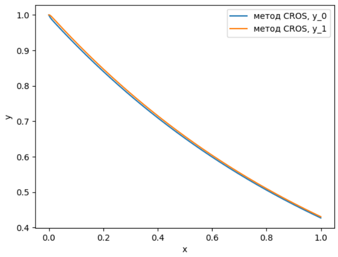

Рис. 16. метод CROS

4.5 Тест 5

Исходные данные:

$$\dot{y} = -1000y - 2z$$
$$\dot{z} = -2z$$
$$y(0) = 1$$
$$z(0) = 1$$

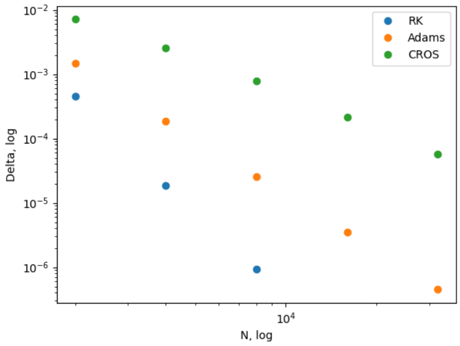

Рис. 17. график зависимости погрешности от N

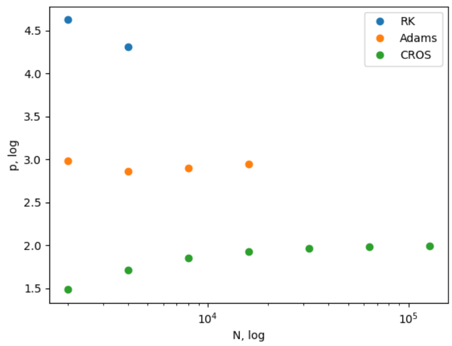

Рис. 18. зависимость p от N

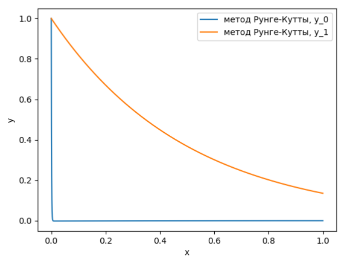

Рис. 19. метод РК

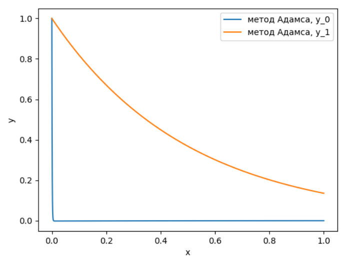

Рис. 20. метод Адамса

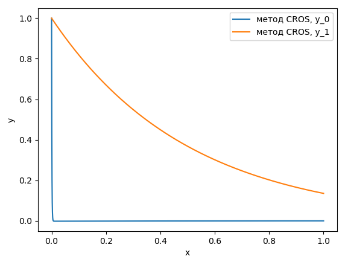

Рис. 21. метод CROS

4.6 Вывод

Как видно на рисунках (2, 7, 13, 18), при увеличении количества узлов для каждого метода $tg\alpha \approx -p$. Явные методы (метод Рунге-Кутты) плохо работает на жестких задачах (тест 3) — либо резко увеличивается ошибка, либо увеличивается сложность вычислений, поэтому для жестких задач рационально использовать неявные методы (Адамса и CROS). Для того, чтобы метод Рунге-Кутты сходился, не всегда достаточно теоретической нижней границы для N ($max\|\lambda\|$), иногда требуется на несколько порядков больше ($N = 10^4$ не подошло в тесте 3). Разница с теорией, скорее всего, связана с погрешностью машинных вычислений и другими ограничениями (слишком большие числа становятся nan).