Санкт-Петербургский государственный университет

Математико-механический факультет

ОТЧЁТ ПО ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАДАНИЮ №1

«Решение СЛАУ методом вращений и методом LU-разложения»

Выполнила:
Бушмакова М. А.

Санкт-Петербург, 2020 г.

1 Постановка задачи

Нужно найти решение системы линейных уравнений:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{1}$$

Задача корректна при $detA \neq 0$. Она может быть плохо обусловлена ($cond_s = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| > 10^4$) (кроме диагональных матриц).
Попробуем улучшить обусловленность системы.

2 Теоретические основания

2.1 Повышение устойчивости

Для эрмитовых матриц верно:

$$(A + \alpha E)\mathbf{x} = \mathbf{b} + \alpha \mathbf{x_0} \tag{2}$$

Где α — параметр, x_0 выбирают так, чтобы $\|x - x_0\|$ было маленьким, по априорным сведениям о решение системы или по результатам предыдущих расчётов. При увеличении α решение будет более устойчивым, но будет сильнее отличаться от решения исходной системы.
Для неэрмитовых матриц домножим уравнение на A^H:

$$A^H A\mathbf{x} = A^H\mathbf{b} \tag{3}$$

Такая система обусловлена хуже, чем исходная, так что потребуется больший α.

2.2 Метод вращений

Всякая невырожденная матрица A может быть представлена в виде $A = QR$, где Q — ортогональная матрица, R — верхняя треугольная с положительными элементами на главной диагонали.
Будем "поворачивать" матрицу A. Матрица плоского поворота T_{ij}, такая что: $T_{kk} = 1,\ k \neq i, j$; $T_{ii} = T_{jj} = \cos\phi$, $T_{ij} = -T_{ji} = -\sin\phi$. Для того, чтобы обнулить j-ую компоненту вектора, можно применить к нему T_{ij} с $\phi = atan(-a_{ij}/a_{ii})$. Последовательность $T_{12} \cdot T_{13} \cdot ... \cdot T_{1n}$ приведёт вектор к виду $(\|a\|, 0, ..., 0)$. Тогда, чтобы получить верхнюю треугольную матрицу, применим к A последовательно $T_{12}T_{13}...T_{23}T_{24}...T_{2n}...T_{n-1,n}$.
Получим: $Q = T_{12}^{-1}T_{13}^{-1}...T_{23}^{-1}T_{24}^{-1}...T_{2n}^{-1}...T_{n-1,n}^{-1}$
Тогда нужная нам система:

$$\mathbf{y} = Q^T\mathbf{b}$$
$$R\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

2.3 Метод LU-разложения

Пусть матрицу можно представить в виде: $A = LU$, где L — нижняя треугольная матрица, U —верхняя треугольная матрица. LU-разложение существует только в том случае, когда матрица A обратима, а все угловые миноры невырождены. Из этого, в свою очередь, следует, что $a_{ii} \neq 0$.
Приведём матрицу A к верхнетреугольному виду методом Гаусса, последовательно умножая на M_i:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 1 & ... & ... \\ ... & ... & -m_{i+1,i} & ... & ... \\ ... & ... & -m_{i+2,i} & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & -m_{n,i} & ... & 1 \end{bmatrix}$$
$$m_{ji} = a_{ji}/aii$$

Тогда: $L = M_1^{-1} \cdot M_2^{-1} \cdot ... \cdot M_{n-1}^{-1}$, $U = M_{n-1} \cdot ... \cdot M_2 \cdot M_1$.
Далее последовательно (т.к. матрицы треугольные) выражаем из системы y_i, x_i:

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b}$$
$$U\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

3 Численный эксперимент

Порядок эксперимента:

- решим систему двумя методами: LU-разложения и методом вращений
- сравним погрешности ($\Delta = \|\tilde{x} - x\|$, $\tilde{x}$ — вычисленное решение)
- для матрицы Гильберта будем повышать обусловленность системы, меняя параметр α
- построим графики зависимости числа обусловленности и погрешности методов от α.

4 Результаты

4.1 Тест 1

Исходные данные:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \cdots & \frac{1}{17} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{} & \cdots & \cdots & \frac{1}{18} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{16} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{1}{29} \end{bmatrix}$$

$$b = (1.0, 0.5403, -0.4161, -0.99, -0.6536, 0.2837, 0.9602, 0.7539, -0.1455,\\ -0.9111, -0.8391, 0.0044, 0.8439, 0.9074, 0.1367)$$

Здесь A — матрица Гильберта 15x15, $cond_s(A) \approx 1.75 \cdot 10^{18}$ — система плохо обусловлена. Будем повышать устойчивость, используя (2). $\alpha = 0, 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}$, $10^{-2}, 0.1, 1, 10, 100, 1000$. Получим зависимости от α для погрешности Δ и числа обусловленности (логарифмический масштаб):

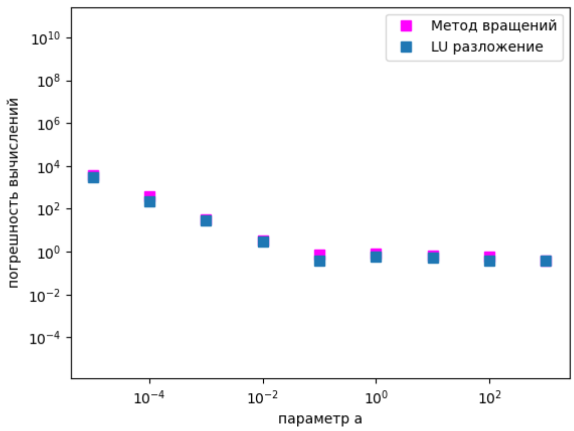

Рис. 1. график зависимости погрешности от α

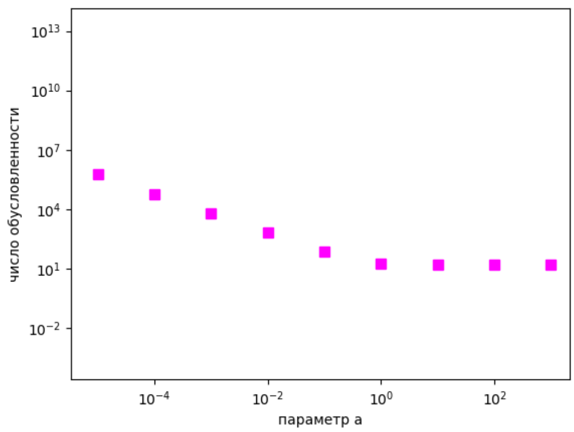

Рис. 2. зависимость $cond_s$ от α

4.2 Тест 2

Исходные данные:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

LU	QR
$2.4825 \cdot 10^{-16}$	0.0

Таблица 1. Абсолютная погрешность вычислений

4.3 Тест 3

Исходные данные:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 9 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$b = (-5, 0, 0, 5)$$

LU	QR
$8.426 \cdot 10^{-15}$	0.0

Таблица 2. Абсолютная погрешность вычислений

4.4 Тест 4

Исходные данные:

$$A = \begin{bmatrix} -22. & 0. & 0.25 & 0. & 0. \\ 2. & -20. & 1. & 0.5 & 0. \\ -2. & 2. & -18. & 2. & 0.75 \\ 0. & -2. & 2. & 2. & 3. \\ 0. & 0. & -2. & 0. & 2. \end{bmatrix} b = (0, 1, 2, 3, 4)$$

LU	QR
$8.016 \cdot 10^{-16}$	0.0

Таблица 3. Абсолютная погрешность вычислений

4.5 Вывод

Метод поворотов даёт намного меньшую погрешность, чем LU-разложение, он довольно точен для хорошо обусловленных задач. В случае с плохо обусловленными задачами, нужно использовать регуляризацию, чтобы получить удовлетворительную погрешность (например, для матрицы Гильберта размера 15x15 нужно хотя бы $\alpha \approx 10^{-2}$ (Рис. 2)). Кроме того, параметр регуляризации не должен быть слишком большим, иначе погрешности испортятся.