Санкт-Петербургский государственный университет

Математико-механический факультет

ОТЧЁТ ПО ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАДАНИЮ №5

«Нахождение максимального по модулю собственного числа оператора»

Выполнила:
Бушмакова М. А.

Санкт-Петербург, 2020 г.

1 Постановка задачи

Для матрицы A собственные числа λ_i определяются формулой:

$$A\mathbf{x} = \lambda_i \mathbf{x},\ \mathbf{x} \neq 0 \tag{1}$$

Хотим найти λ, т.ч. $|\lambda| = max|\lambda_i|$. Матрица A — эрмитова, и пронумеруем с.ч. так, чтобы $|\lambda_1| > |\lambda_2| > ... > |\lambda_n|$.

2 Теоретические основания

Матрица A — эрмитова, она имеет полную ортогональную систему из собственных векторов $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,...,n}$, следовательно, любой вектор $\mathbf{x}$ можно представить в виде: $\mathbf{x} = \sum_{i=1,..,n} c_i \mathbf{e}_i$.
Тогда $\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0 = \sum_{i=1,...,n} \lambda_i c_i \mathbf{e_i}$. Отсюда получим:

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k \tag{2}$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \sum_{i=1,...,n} \lambda_i^k c_i \mathbf{e_i} = \lambda_1^k \sum_{i=1,...,n} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k c_i \mathbf{e_i} = \lambda_1^k c_1 \mathbf{e}_1 + O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\right) \tag{3}$$

Тогда для больших k:

$$\frac{{x^{(k+1)}}_i}{{x^{(k)}}_i} = \lambda_1 + O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\right) \tag{4}$$

2.1 Степенной метод

Будем приближать λ_1 по формуле, эквивалентной (4):

$$\frac{\|\mathbf{x}_{k+1}\|}{\|\mathbf{x}_k\|} \to |\lambda_1| \tag{5}$$

2.2 Метод скалярных произведений

Рассмотрим матрицу A^T с ортонормированной системой собственных векторов $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1,...,n}$, $\mathbf{y} = \sum_{i=1,..,n} f_i \mathbf{v}_i$ = тогда:

$$(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1}) = (A^k \mathbf{x}_0, A^{k(T)} \mathbf{y}_0) = (A^{2k} \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \lambda_1^{2k} \sum_{i=1,...,n} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2k} c_i f_i \tag{6}$$

$$(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_{k+1}) = (A^{2k-1} \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \lambda_1^{2k-1} \sum_{i=1,...,n} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2k-1} c_i f_i \tag{7}$$

$$\frac{(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1})}{(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_{k+1})} = \lambda_1 + O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k}\right) \tag{8}$$

Расчётная формула — (8).
Как видно, метод скалярных произведений должен сходиться в два раза быстрее, чем степенной.

3 Численный эксперимент

- посчитаем максимальные по модулю собственные числа степенным методом и методом скалярного произведения.
- точность вычислений будем оценивать следующим образом: $|\frac{\|x_{k+1}\|}{\|x_k\|} - \frac{\|x_{k-1}\|}{\|x_{k-2}\|}| < \varepsilon$
- x_0 — подбираем так, чтобы не с.в. и не нулевой
- сравним количество итераций
- сравним с результатами метода Якоби

4 Результаты

4.1 Тест 1

Исходные данные:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0. \\ 0 & 1 & 10 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 20 & 30 & ... & 100 & 110 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 90 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 110 & 0 & ... & 0 & 1 \end{bmatrix} |\lambda| = 234.75487731596832$$

$$x_0 = (1, 2, ..., 11, 12)$$

$$\varepsilon = 10^{-10}$$

С	СП
172	172

Таблица 1. количество итераций

4.2 Тест 2

Исходные данные:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} |\lambda| = 13.29805462978732$$

$$x_0 = (1, 1, 2, 3, 4)$$

$$\varepsilon = 10^{-10}$$

С	СП
17	17

Таблица 2. количество итераций

4.3 Тест 3

Исходные данные:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} |\lambda| = 3.3027756377319943$$

$$x_0 = (1, 1)$$

$$\varepsilon = 10^{-10}$$

С	СП
15	15

Таблица 3. количество итераций

4.4 Тест 4

Исходные данные:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \cdots & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \cdots & \frac{1}{8} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \cdots & \cdots & \frac{1}{11} \end{bmatrix} |\lambda| = 1.6188998589243377$$

$$x = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

$$\varepsilon = 10^{-12}$$

С	СП
23	23

Таблица 4. количество итераций

Для матрицы Гильберта метод Якоби справился примерно за 37 итераций, погрешность порядка 10^{-12}, для данных методов погрешность:

С	СП
1.3343e-15	1.7764e-15

Таблица 5. погрешность

4.5 Вывод

Оба метода дают примерно одинаковое количество итераций, точность у метода скалярных произведений немного лучше. Для матрицы Гильберта метод СП и С работают лучше, чем метод Якоби.