Санкт-Петербургский государственный университет

Математико-механический факультет

ОТЧЁТ ПО ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАДАНИЮ №6

«Решение краевой задачи для ОДУ второго порядка сеточным методом»

Выполнила:
Бушмакова М. А.

Санкт-Петербург, 2020 г.

1 Постановка задачи

Требуется найти решение дифференциального уравнения(1), удовлетворяющее граничным условиям (2,3).

$$u'' + q(x)u' + r(x)u = f(x) \tag{1}$$
$$\alpha_0 u(x_0) - \alpha_1 u'(x_0) = \alpha \tag{2}$$
$$\beta_0 u(x_1) - \beta_1 u'(x_1) = \beta \tag{3}$$
$$\tag{4}$$

1.1 Разностный метод

Разобьем промежуток $[x_0, x_1]$ на n равных частей. $h = (x_1 - x_0)/n$, решение ищем в виде значений в точках $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, ..., n$. Заменим производные в уравнении (1) конечными разностями:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + q_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + r_i y_i = f_i \, i = 1, ..., n-1 \tag{5}$$
$$\alpha_0 y_0 - \alpha_1 (y_1 - y_0)/h = \alpha \tag{6}$$
$$\beta_0 y_0 - \beta_1 (y_n - y_{n-1})/h = \beta \tag{7}$$

Получим СЛАУ и решим её.

2 Численный эксперимент

- будем увеличивать количество узлов до получения заданной точности $varepsilon$
- погрешность оцениваем по правилу Ричардсона
- нарисуем графики зависимости погрешности от количества узлов сетки и график самого точного решения.

3 Результаты

$\varepsilon = 10^{-2}$

3.1 Тест 1

Исходные данные:

$$u'' - (1 + x/2)(x - 3)u' + (x - 3)\exp x/2u = 2 - x$$
$$u(-1) = u(1) = 0$$

количество итераций — 9.

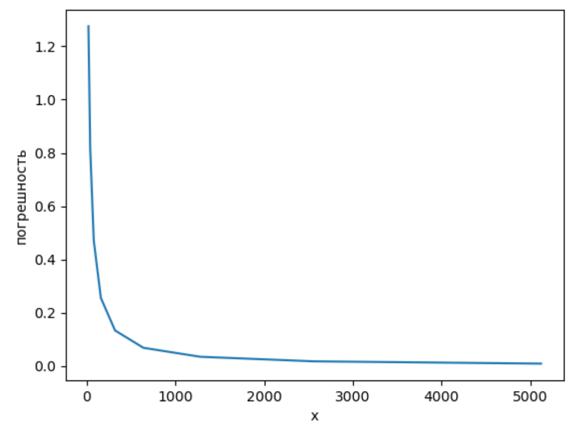

Рис. 1. график зависимости погрешности от N

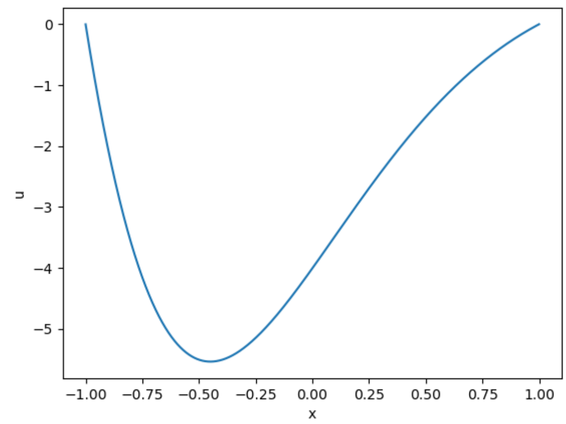

Рис. 2. график решения

3.2 Тест 2

Исходные данные:

$$\frac{x-2}{x+2}u'' - xu' + (1 - sin(x))u = x^2$$
$$u(-1) = u(1) = 0$$

количество итераций — 7.

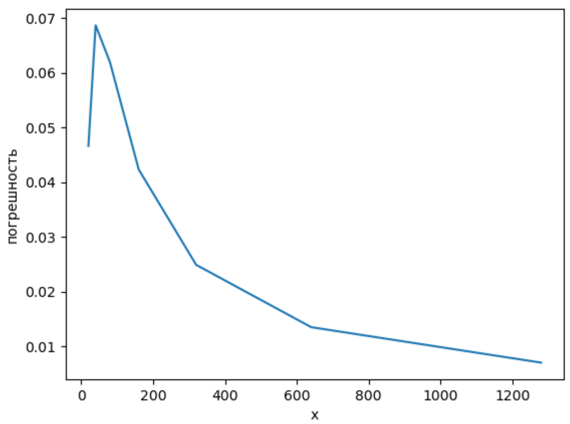

Рис. 3. график зависимости погрешности от N

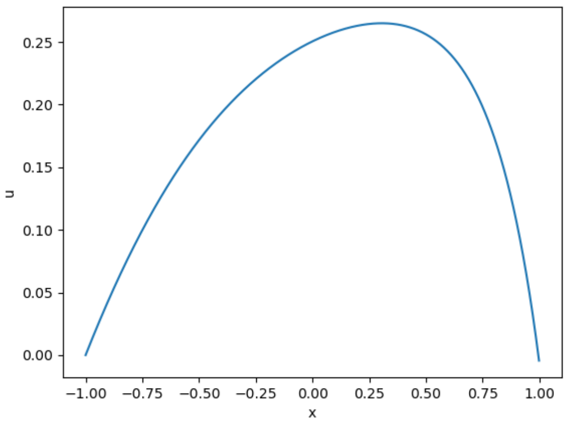

Рис. 4. график решения

3.3 Тест 3

Исходные данные:

$$\begin{gathered}u'' - x \exp xu = \sin x \exp x/2 \\ 0.3u(0) - u'(0) = -0.8 \\ 0.9u(1) + u'(1) = -0.1\end{gathered}$$

количество итераций — 6.

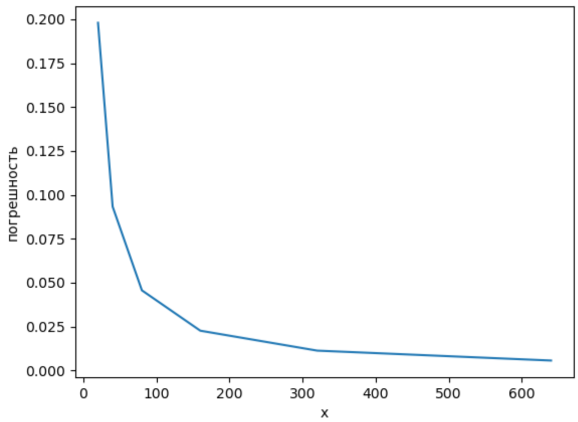

Рис. 5. график зависимости погрешности от N

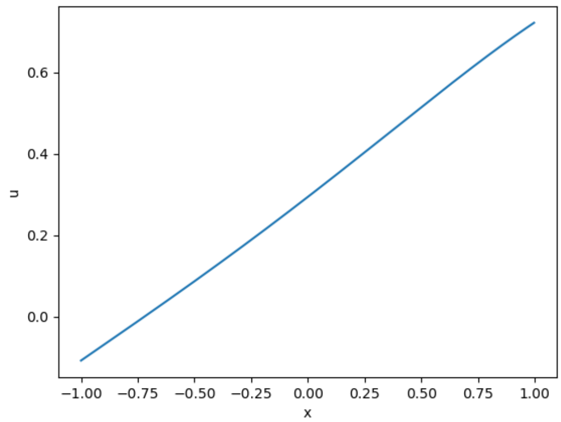

Рис. 6. график решения

3.4 Вывод

Использованный метод позволяет довольно быстро достичь требуемой точности.