Lista 2 - MD

Aluno: Cauã Borges Faria

RA: 834437

Exemplo 2.1: Sistema de Axiomas Blub-Glug

Termos indefinidos: 'blub', 'glug' e 'estar sobre'.

Axiomas:

- **A1:** Todo blub está sobre pelo menos um glug.
- **A2:** Para todo glug, existem exatamente dois blubs que estão sobre ele.
- **A3:** Existem exatamente cinco blubs.

Exercícios 2.1

As questões se referem ao 'sistema de axiomas blub-glug' descrito no Exemplo 2.1.

Questão 1: Prove que existe um blub que está sobre (pelo menos) dois glugs diferentes.

Solução da Questão 1

Vamos provar por contradição. Suponha que *nenhum* blub esteja sobre dois glugs diferentes. Isso significa que, por A1 (todo blub está sobre pelo menos um glug), cada blub está sobre *exatamente um* glug.

Seja B o conjunto de blubs e G o conjunto de glugs. Pelo axioma A3, sabemos que $|B| = 5$.

Considere a contagem das "incidências"(pares ordenados (b, g) onde b é um blub e g é um glug, e b está sobre g). Seja N o número total de incidências.

Contando a partir dos blubs: Se cada blub está sobre exatamente um glug, então o número total de incidências é o número de blubs multiplicado por 1 (pois cada um contribui com uma incidência). $N = |B| \times 1 = 5 \times 1 = 5$.

Contando a partir dos glugs: Seja k o número de glugs, ou seja, $|G| = k$. Pelo axioma A2, para cada glug, existem exatamente dois blubs que estão sobre ele. Portanto, cada glug contribui com 2 incidências. $N = |G| \times 2 = k \times 2 = 2k$.

Igualando as duas contagens de incidências, obtemos:

$$5 = 2k$$

Resolvendo para k:

$$k = \frac{5}{2}$$

No entanto, o número de glugs (k) deve ser um número inteiro (não podemos ter "meio glug"). Como $5/2$ não é um número inteiro, chegamos a uma contradição.

Portanto, nossa suposição inicial de que nenhum blub está sobre dois glugs diferentes deve ser falsa.

Consequentemente, deve existir pelo menos um blub que está sobre (pelo menos) dois glugs diferentes.

Questão 2: Dê um modelo do sistema de axiomas que tenha mais de 10 glugs. Introduza um novo axioma ao sistema que exclua seu modelo. Você pode provar a partir dos axiomas do novo sistema que há no máximo 10 glugs? (Evite, se puder, um novo axioma que simplesmente diga que há no máximo 10 glugs.)

Solução da Questão 2

Parte 1: Um Modelo com Mais de 10 Glugs

Vamos interpretar blubs como pontos e a relação 'estar sobre' como 'pertencer'. Temos 5 blubs (pontos), que podemos denotar como B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. O Axioma A3 é satisfeito: existem exatamente cinco blubs.

Pelo Axioma A2, cada glug tem exatamente dois blubs sobre ele. Um glug, portanto, é definido por um par de blubs. A flexibilidade para ter mais de 10 glugs surge do fato de que o sistema original não proíbe que glugs distintos estejam sobre o mesmo par de blubs. Por exemplo, G_x pode estar sobre $\{B_1, B_2\}$ e G_y (onde $G_y \neq G_x$) também pode estar sobre $\{B_1, B_2\}$.

Para ter mais de 10 glugs, podemos definir 11 glugs da seguinte forma:

- Os 10 glugs que correspondem a cada par único de blubs distintos (combinações de 5 blubs tomados 2 a 2: $\binom{5}{2} = 10$):
  - G_1 sobre $\{B_1, B_2\}$
  - G_2 sobre $\{B_1, B_3\}$
  - G_3 sobre $\{B_1, B_4\}$
  - G_4 sobre $\{B_1, B_5\}$
  - G_5 sobre $\{B_2, B_3\}$
  - G_6 sobre $\{B_2, B_4\}$
  - G_7 sobre $\{B_2, B_5\}$
  - G_8 sobre $\{B_3, B_4\}$
  - G_9 sobre $\{B_3, B_5\}$
  - G_{10} sobre $\{B_4, B_5\}$
- E um glug adicional que repete um par, tornando-o distinto dos outros:
  - G_{11} sobre $\{B_1, B_2\}$ (assumimos que G_{11} é um glug *distinto* de G_1).

Assim, temos um total de 11 glugs, o que é mais do que 10.

Vamos verificar os axiomas:

- **A3 (Existem exatamente cinco blubs):** Satisfeito, temos B_1, B_2, B_3, B_4, B_5.
- **A2 (Para todo glug, existem exatamente dois blubs que estão sobre ele):** Satisfeito por construção de cada G_i. Cada G_i está sobre exatamente um par de blubs.
- **A1 (Todo blub está sobre pelo menos um glug):**
  - B_1 está sobre $G_1, G_2, G_3, G_4, G_{11}$. (OK)

- B_2 está sobre $G_1, G_5, G_6, G_7, G_{11}$. (OK)
- B_3 está sobre G_2, G_5, G_8, G_9. (OK)
- B_4 está sobre G_3, G_6, G_8, G_{10}. (OK)
- B_5 está sobre G_4, G_7, G_9, G_{10}. (OK)

Todos os blubs estão sobre pelo menos um glug.

Este modelo satisfaz todos os axiomas originais e possui 11 glugs.

Parte 2: Introduzir um Novo Axioma que Exclua o Modelo Acima

O modelo acima é possível porque permite múltiplos glugs estarem sobre o mesmo par de blubs. Para excluir este tipo de modelo e limitar o número de glugs, podemos adicionar um axioma que force a "unicidade"dos glugs definidos por dois blubs.

Axioma A4 (Novo Axioma): Para quaisquer dois blubs distintos, há no máximo um glug que está sobre ambos.

Parte 3: Provar a partir dos axiomas do novo sistema que há no máximo 10 glugs.

Com o novo sistema de axiomas (A1, A2, A3, A4), vamos provar que o número de glugs é no máximo 10.

- Pelo Axioma A3, sabemos que existem exatamente 5 blubs.
- Pelo Axioma A2, cada glug tem exatamente dois blubs sobre ele. Isso significa que cada glug está associado a um par de blubs.
- Pelo Axioma A4, para quaisquer dois blubs distintos, há no máximo um glug que está sobre ambos. Isso implica que cada par de blubs define no máximo um glug.

O número total de pares não ordenados de blubs que podem ser formados a partir de 5 blubs é dado pela combinação de 5 elementos tomados 2 a 2, que é o número máximo de "pares"que podem definir glugs únicos:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

Como cada glug deve estar sobre exatamente dois blubs (A2), e cada par de blubs pode ter no máximo um glug sobre ele (A4), o número total de glugs não pode exceder o número de pares distintos de blubs.

Seja N_G o número de glugs.

$$N_G \leq \binom{5}{2}$$

$$N_G \leq 10$$

Assim, com a adição do axioma A4, podemos provar que há no máximo 10 glugs no sistema.

Exercícios 2.2

Questão 1: Prove que a soma de dois inteiros consecutivos é ímpar.

Solução da Questão 1

Seja n um inteiro. Dois inteiros consecutivos podem ser representados como n e $n+1$. A soma desses dois inteiros é $S = n + (n+1) = 2n+1$.

Pela definição de número ímpar, um número é ímpar se pode ser escrito na forma $2k+1$ para algum inteiro k. No nosso caso, $S = 2n+1$, onde n é um inteiro. Portanto, a soma $2n+1$ é um número ímpar.

Questão 2: Prove que, se n é um inteiro, n^2 é ímpar se e somente se n é ímpar.

Solução da Questão 2

Esta prova tem duas partes:

Parte 1: Se n é ímpar, então n^2 é ímpar. Suponha que n é um inteiro ímpar. Por definição, um número ímpar pode ser escrito na forma $n = 2k+1$ para algum inteiro k. Agora, vamos calcular n^2:

$$n^2 = (2k+1)^2$$
$$n^2 = (2k)^2 + 2(2k)(1) + 1^2$$
$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1$$
$$n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

Seja $j = 2k^2 + 2k$. Como k é um inteiro, $2k^2$ é um inteiro e $2k$ é um inteiro, então j é um inteiro. Assim, $n^2 = 2j+1$. Pela definição de número ímpar, n^2 é ímpar.

Parte 2: Se n^2 é ímpar, então n é ímpar. Vamos provar esta parte usando o contrapositivo. O contrapositivo da afirmação "Se n^2 é ímpar, então n é ímpar"é "Se n é par, então n^2 é par". Suponha que n é um inteiro par. Por definição, um número par pode ser escrito na forma $n = 2k$ para algum inteiro k. Agora, vamos calcular n^2:

$$n^2 = (2k)^2$$
$$n^2 = 4k^2$$
$$n^2 = 2(2k^2)$$

Seja $j = 2k^2$. Como k é um inteiro, $2k^2$ é um inteiro, então j é um inteiro. Assim, $n^2 = 2j$. Pela definição de número par, n^2 é par. Como provamos que "Se n é par, então n^2 é par", o contrapositivo "Se n^2 é ímpar, então n é ímpar"também é verdadeiro.

Combinando as duas partes, concluímos que n^2 é ímpar se e somente se n é ímpar.

Questão 3: Prove diretamente que o produto de dois inteiros consecutivos é par. Use este resultado para provar que, se a equação quadrática $x^2 + ax + b = 0$ tem soluções que são inteiros consecutivos, então a é ímpar e b é par.

Solução da Questão 3

Parte 1: Produto de dois inteiros consecutivos é par. Sejam n e $n+1$ dois inteiros consecutivos. O produto deles é $P = n(n+1)$.

Temos dois casos para n:

- **Caso 1: n é par.** Se n é par, então $n = 2k$ para algum inteiro k.

$$P = (2k)(2k+1)$$

$$P = 2(k(2k+1))$$

Como $k(2k+1)$ é um inteiro, P é um múltiplo de 2, logo P é par.

- **Caso 2: n é ímpar.** Se n é ímpar, então $n = 2k+1$ para algum inteiro k. Nesse caso, $n+1 = (2k+1)+1 = 2k+2 = 2(k+1)$. Assim, $n+1$ é par.

$$P = (2k+1)(2(k+1))$$

$$P = 2((2k+1)(k+1))$$

Como $(2k+1)(k+1)$ é um inteiro, P é um múltiplo de 2, logo P é par.

Em ambos os casos, o produto de dois inteiros consecutivos é par.

Parte 2: Se $x^2 + ax + b = 0$ tem soluções que são inteiros consecutivos, então a é ímpar e b é par. Seja $x^2+ax+b = 0$ uma equação quadrática com soluções r_1 e r_2. Pelas relações de Vieta (fórmulas de Girard), sabemos que:

$$r_1 + r_2 = -a \quad \text{(Soma das raízes)}$$

$$r_1 \cdot r_2 = b \quad \text{(Produto das raízes)}$$

O problema afirma que as soluções são inteiros consecutivos. Seja n um inteiro. Podemos definir as soluções como $r_1 = n$ e $r_2 = n+1$ (ou vice-versa).

Vamos analisar a e b:

- **Analisando a:**

$$-a = r_1 + r_2 = n + (n+1) = 2n+1$$

Como $2n+1$ é a representação de um número ímpar, $-a$ é ímpar. Se $-a$ é ímpar, então a também é ímpar (multiplicar um ímpar por -1 não altera sua paridade). Portanto, a é ímpar.

- **Analisando b:**

$$b = r_1 \cdot r_2 = n(n+1)$$

Da Parte 1 desta prova, já demonstramos que o produto de dois inteiros consecutivos ($n(n+1)$) é sempre par. Portanto, b é par.

Assim, se a equação quadrática $x^2 + ax + b = 0$ tem soluções que são inteiros consecutivos, então a é ímpar e b é par.

Questão 4: Prove que, se ambas as soluções de $x^2 + ax + b = 0$ são inteiros pares, então a e b são ambos inteiros pares.

Solução da Questão 4

Seja $x^2 + ax + b = 0$ uma equação quadrática. Sejam as duas soluções r_1 e r_2. O problema afirma que r_1 e r_2 são inteiros pares. Por definição, um inteiro par pode ser escrito como $2k$ para algum inteiro k. Então, podemos escrever $r_1 = 2k_1$ e $r_2 = 2k_2$ para alguns inteiros k_1 e k_2.

Usando as relações de Vieta (fórmulas de Girard):

$$r_1 + r_2 = -a$$

$$r_1 \cdot r_2 = b$$

Analisando a:

$$-a = r_1 + r_2 = 2k_1 + 2k_2$$

$$-a = 2(k_1 + k_2)$$

Como $k_1 + k_2$ é um inteiro, $2(k_1 + k_2)$ é um número par. Portanto, $-a$ é par. Se $-a$ é par, então a também é par (multiplicar um par por -1 não altera sua paridade). Assim, a é um inteiro par.

Analisando b:

$$b = r_1 \cdot r_2 = (2k_1)(2k_2)$$

$$b = 4k_1k_2$$

$$b = 2(2k_1k_2)$$

Como $2k_1k_2$ é um inteiro, $2(2k_1k_2)$ é um múltiplo de 2. Portanto, b é um inteiro par.

Concluímos que, se ambas as soluções de $x^2 + ax + b = 0$ são inteiros pares, então a e b são ambos inteiros pares.

Questão 5: Prove que, se m e n são inteiros positivos tais que m é um fator de n e n é um fator de m, então $m = n$.

Solução da Questão 5

Assumimos que m e n são inteiros positivos.

Condição 1: m é um fator de n. Se m é um fator de n, isso significa que n é um múltiplo de m. Portanto, existe um inteiro k_1 tal que:

$$n = m \cdot k_1$$

Como m e n são inteiros positivos, k_1 também deve ser um inteiro positivo ($k_1 \geq 1$).

Condição 2: n é um fator de m. Se n é um fator de m, isso significa que m é um múltiplo de n. Portanto, existe um inteiro k_2 tal que:

$$m = n \cdot k_2$$

Como m e n são inteiros positivos, k_2 também deve ser um inteiro positivo ($k_2 \geq 1$).

Agora, vamos substituir a primeira equação na segunda (ou vice-versa): Substituindo $n = m \cdot k_1$ na segunda equação:

$$m = (m \cdot k_1) \cdot k_2$$

$$m = m \cdot k_1 \cdot k_2$$

Como m é um inteiro positivo, $m \neq 0$, então podemos dividir ambos os lados da equação por m:

$$1 = k_1 \cdot k_2$$

Como k_1 e k_2 são inteiros positivos, os únicos inteiros positivos cujo produto é 1 são 1 e 1. Portanto, $k_1 = 1$ e $k_2 = 1$.

Agora, substituímos $k_1 = 1$ de volta na equação $n = m \cdot k_1$:

$$n = m \cdot 1$$

$$n = m$$

Assim, provamos que se m é um fator de n e n é um fator de m (com m, n inteiros positivos), então $m = n$.

Questão 6: Por meio da prova por contrapositivo, prove que, se n^2 não é divisível por 5, então n não é divisível por 5.

Solução da Questão 6

A afirmação a ser provada é "Se n^2 não é divisível por 5, então n não é divisível por 5."O contrapositivo desta afirmação é "Se n é divisível por 5, então n^2 é divisível por 5."Vamos provar o contrapositivo.

Suponha que n é divisível por 5. Por definição, se n é divisível por 5, então existe um inteiro k tal que $n = 5k$.

Agora, vamos calcular n^2:

$$n^2 = (5k)^2$$

$$n^2 = 25k^2$$

$$n^2 = 5(5k^2)$$

Seja $j = 5k^2$. Como k é um inteiro, $5k^2$ é um inteiro, então j é um inteiro. Assim, $n^2 = 5j$. Pela definição de divisibilidade, n^2 é divisível por 5.

Como o contrapositivo é verdadeiro, a afirmação original "Se n^2 não é divisível por 5, então n não é divisível por 5"também é verdadeira.

Questão 7: Use prova por contradição para provar que $1 + \sqrt{2}$ não é racional.

Solução da Questão 7

Vamos provar por contradição. Suponha que $1 + \sqrt{2}$ seja um número racional. Se $1 + \sqrt{2}$ é racional, então ele pode ser escrito como uma fração $\frac{p}{q}$, onde p e q são inteiros, $q \neq 0$, e $\mathrm{mdc}(p, q) = 1$ (ou seja, a fração é irredutível).

$$1 + \sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

Agora, vamos isolar $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} - 1$$

$$\sqrt{2} = \frac{p-q}{q}$$

Sabemos que p e q são inteiros, e $q \neq 0$. Portanto, $p-q$ é um inteiro e q é um inteiro não nulo. Isso significa que a expressão $\frac{p-q}{q}$ é um número racional.

No entanto, é um fato conhecido na matemática que $\sqrt{2}$ é um número irracional. Chegamos a uma contradição: $\sqrt{2}$ (um número irracional) é igual a $\frac{p-q}{q}$ (um número racional).

Como a nossa suposição de que $1+\sqrt{2}$ é racional levou a uma contradição, a suposição deve ser falsa. Portanto, $1+\sqrt{2}$ não é um número racional.

Questão 8: Prove ou disprove that, if a, b and c are integers such that a is a factor of $b+c$, then a is a factor of b or a is a factor of c.

Solução da Questão 8

Vamos tentar provar ou refutar a afirmação: "Se a, b, c são inteiros tais que a é um fator de $b+c$, então a é um fator de b ou a é um fator de c."

Para refutar uma afirmação condicional, precisamos encontrar um contraexemplo onde a premissa é verdadeira, mas a conclusão é falsa.

- Premissa: a é um fator de $b+c$. (Isto é, $b+c = k \cdot a$ para algum inteiro k).
- Conclusão: a é um fator de b OU a é um fator de c. (Isto é, $b = k_1 \cdot a$ ou $c = k_2 \cdot a$ para alguns inteiros k_1, k_2).

Considere os seguintes inteiros: $a = 5$ $b = 3$ $c = 7$

Vamos verificar a premissa: $b + c = 3 + 7 = 10$. $a = 5$ é um fator de 10 (pois $10 = 2 \cdot 5$). A premissa é verdadeira.

Agora, vamos verificar a conclusão:

- a é um fator de b? 5 é um fator de 3? Não, pois 3 não é um múltiplo de 5.
- a é um fator de c? 5 é um fator de 7? Não, pois 7 não é um múltiplo de 5.

A conclusão "(a é um fator de b) OU (a é um fator de c)"é falsa, pois ambas as partes são falsas.

Como encontramos um contraexemplo onde a premissa é verdadeira e a conclusão é falsa, a afirmação original é falsa.

Portanto, a afirmação é **falsa**.

Questão 9: Prove que, para qualquer inteiro n, se $n-2$ é divisível por quatro, então n^2-4 é divisível por 16.

Solução da Questão 9

A premissa é que $n-2$ é divisível por quatro. Isso significa que existe um inteiro k tal que:

$$n - 2 = 4k$$

Podemos expressar n em termos de k:

$$n = 4k + 2$$

Agora, queremos provar que $n^2 - 4$ é divisível por 16. Vamos substituir a expressão de n em $n^2 - 4$:

$$n^2 - 4 = (4k + 2)^2 - 4$$

Expandindo o termo $(4k + 2)^2$:

$$(4k + 2)^2 = (4k)^2 + 2(4k)(2) + 2^2$$

$$(4k + 2)^2 = 16k^2 + 16k + 4$$

Agora, substituímos de volta na expressão para $n^2 - 4$:

$$n^2 - 4 = (16k^2 + 16k + 4) - 4$$

$$n^2 - 4 = 16k^2 + 16k$$

Fatorando 16:

$$n^2 - 4 = 16(k^2 + k)$$

Seja $j = k^2 + k$. Como k é um inteiro, k^2 é um inteiro e k é um inteiro, então j é um inteiro. Assim, $n^2 - 4 = 16j$.

Pela definição de divisibilidade, $n^2 - 4$ é divisível por 16.

Questão 10: Prove that the smallest factor greater than 1 of any integer is prime.

Solução da Questão 10

Seja x um inteiro qualquer maior que 1. (Se $x = 1$, não tem fatores maiores que 1. Se x é primo, o menor fator maior que 1 é ele mesmo, que é primo. Se x é composto, ele tem fatores maiores que 1.) Seja p o menor fator de x tal que $p > 1$.

Vamos provar por contradição que p é primo. Suponha que p não seja primo. Se p não é primo e $p > 1$, então p é um número composto. Por definição, se p é composto, então p possui um fator d tal que $1 < d < p$.

Como d é um fator de p, e p é um fator de x, então d também deve ser um fator de x. (Se $p = m \cdot d$ e $x = n \cdot p$, então $x = n \cdot (m \cdot d) = (n \cdot m) \cdot d$. Assim, d é um fator de x.)

Então, d é um fator de x e $d > 1$. No entanto, tínhamos definido p como o *menor* fator de x que é maior que 1. Mas acabamos de encontrar um fator d de x tal que $1 < d < p$. Isso contradiz a nossa definição de p como o menor fator de x maior que 1.

Portanto, a suposição de que p não é primo deve ser falsa. Consequentemente, p (o menor fator de x maior que 1) deve ser primo.

Exercícios 2.3

Questão 1: Prove que, para todos os inteiros positivos n, $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Solução da Questão 1 (por Indução Matemática)

Seja $P(n)$ a proposição $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Passo Base (n=1): Para $n = 1$, a soma é 1. A fórmula nos dá $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$. Como $1 = 1$, o passo base é verdadeiro. $P(1)$ é verdadeira.

Passo Indutivo: Suponha que $P(k)$ seja verdadeira para algum inteiro positivo $k \geq 1$. Isto é, suponha que $1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ (Hipótese de Indução).

Precisamos provar que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, que $1+2+\cdots+k+(k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Começamos com o lado esquerdo da equação $P(k+1)$:

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1)$$

Pela Hipótese de Indução, sabemos que $1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$. Substituindo:

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

Agora, fatoramos $(k+1)$:

$$(k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right)$$

$$(k+1)\left(\frac{k+2}{2}\right)$$

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Este é o lado direito da equação $P(k+1)$. Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

Conclusão: Pelo Princípio da Indução Matemática, a proposição $P(n)$ é verdadeira para todos os inteiros positivos n.

Questão 2: Prove que $2^n > n$ para todos os inteiros positivos n.

Solução da Questão 2 (por Indução Matemática)

Seja $P(n)$ a proposição $2^n > n$.

Passo Base (n=1): Para $n = 1$, temos $2^1 = 2$. $2 > 1$, então o passo base é verdadeiro. $P(1)$ é verdadeira.

Passo Indutivo: Suponha que $P(k)$ seja verdadeira para algum inteiro positivo $k \geq 1$. Isto é, suponha que $2^k > k$ (Hipótese de Indução).

Precisamos provar que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, que $2^{k+1} > k+1$.

Começamos com 2^{k+1}:

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$$

Pela Hipótese de Indução, sabemos que $2^k > k$. Multiplicando ambos os lados por 2 (que é um número positivo, então a desigualdade se mantém):

$$2 \cdot 2^k > 2 \cdot k$$

$$2^{k+1} > 2k$$

Agora, precisamos mostrar que $2k \geq k + 1$ para $k \geq 1$. Para $k \geq 1$: $2k = k + k$. Como $k \geq 1$, $k + k \geq k + 1$. Então, $2k \geq k + 1$.

Combinando as desigualdades:

$$2^{k+1} > 2k \geq k + 1$$

Portanto, $2^{k+1} > k + 1$. $P(k + 1)$ é verdadeira.

Conclusão: Pelo Princípio da Indução Matemática, a proposição $P(n)$ é verdadeira para todos os inteiros positivos n.

Questão 3: Prove que, para todos os inteiros positivos n, $5^n - 1$ é divisível por 4.

Solução da Questão 3 (por Indução Matemática)

Seja $P(n)$ a proposição "$5^n - 1$ é divisível por 4". Isso significa que $5^n - 1 = 4m$ para algum inteiro m.

Passo Base (n=1): Para $n = 1$, $5^1 - 1 = 5 - 1 = 4$. Como $4 = 4 \cdot 1$, 4 é divisível por 4. Então, o passo base é verdadeiro. $P(1)$ é verdadeira.

Passo Indutivo: Suponha que $P(k)$ seja verdadeira para algum inteiro positivo $k \geq 1$. Isto é, suponha que $5^k - 1$ é divisível por 4 (Hipótese de Indução). Então, existe um inteiro m tal que $5^k - 1 = 4m$.

Precisamos provar que $P(k + 1)$ é verdadeira, ou seja, que $5^{k+1} - 1$ é divisível por 4.

Considere $5^{k+1} - 1$:

$$5^{k+1} - 1 = 5 \cdot 5^k - 1$$

Da Hipótese de Indução, sabemos que $5^k = 4m + 1$. Substituindo:

$$5^{k+1} - 1 = 5(4m + 1) - 1$$

$$5^{k+1} - 1 = 20m + 5 - 1$$

$$5^{k+1} - 1 = 20m + 4$$

Fatorando 4:

$$5^{k+1} - 1 = 4(5m + 1)$$

Seja $j = 5m + 1$. Como m é um inteiro, $5m + 1$ é um inteiro. Assim, $5^{k+1} - 1 = 4j$. Portanto, $5^{k+1} - 1$ é divisível por 4. $P(k + 1)$ é verdadeira.

Conclusão: Pelo Princípio da Indução Matemática, a proposição $P(n)$ é verdadeira para todos os inteiros positivos n.

Questão 4: Prove que, para todos os inteiros não-negativos n, $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$, onde x é um número real, $x \neq 1$.

Solução da Questão 4 (por Indução Matemática)

Seja $P(n)$ a proposição $1+x+x^2+\cdots+x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$. O domínio para n são inteiros não-negativos, então $n \geq 0$.

Passo Base (n=0): Para $n = 0$, a soma é 1. A fórmula nos dá $\frac{x^{0+1}-1}{x-1} = \frac{x^1-1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1$ (uma vez que $x \neq 1$). Como $1 = 1$, o passo base é verdadeiro. $P(0)$ é verdadeira.

Passo Indutivo: Suponha que $P(k)$ seja verdadeira para algum inteiro não-negativo $k \geq 0$. Isto é, suponha que $1 + x + x^2 + \cdots + x^k = \frac{x^{k+1}-1}{x-1}$ (Hipótese de Indução).

Precisamos provar que $P(k + 1)$ é verdadeira, ou seja, que $1 + x + x^2 + \cdots + x^k + x^{k+1} = \frac{x^{(k+1)+1}-1}{x-1} = \frac{x^{k+2}-1}{x-1}$.

Começamos com o lado esquerdo da equação $P(k + 1)$:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^k + x^{k+1}$$

Pela Hipótese de Indução, sabemos que $1 + x + x^2 + \cdots + x^k = \frac{x^{k+1}-1}{x-1}$. Substituindo:

$$\frac{x^{k+1} - 1}{x - 1} + x^{k+1}$$

Para combinar os termos, encontramos um denominador comum:

$$\frac{x^{k+1} - 1}{x - 1} + \frac{x^{k+1}(x - 1)}{x - 1}$$

$$\frac{x^{k+1} - 1 + x^{k+1} \cdot x - x^{k+1} \cdot 1}{x - 1}$$

$$\frac{x^{k+1} - 1 + x^{k+2} - x^{k+1}}{x - 1}$$

Cancelando x^{k+1} e $-x^{k+1}$:

$$\frac{x^{k+2} - 1}{x - 1}$$

Este é o lado direito da equação $P(k + 1)$. Portanto, $P(k + 1)$ é verdadeira.

Conclusão: Pelo Princípio da Indução Matemática, a proposição $P(n)$ é verdadeira para todos os inteiros não-negativos n.

Questão 5: Prove que a soma dos quadrados dos primeiros n inteiros positivos é $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Solução da Questão 5 (por Indução Matemática)

Seja $P(n)$ a proposição $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Passo Base (n=1): Para $n = 1$, a soma é $1^2 = 1$. A fórmula nos dá $\frac{1(1+1)(2\cdot1+1)}{6} = \frac{1\cdot2\cdot3}{6} = \frac{6}{6} = 1$. Como $1 = 1$, o passo base é verdadeiro. $P(1)$ é verdadeira.

Passo Indutivo: Suponha que $P(k)$ seja verdadeira para algum inteiro positivo $k \geq 1$. Isto é, suponha que $1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ (Hipótese de Indução).

Precisamos provar que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, que $1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

Começamos com o lado esquerdo da equação $P(k+1)$:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2$$

Pela Hipótese de Indução, sabemos que $1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$. Substituindo:

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

Para combinar os termos, fatoramos $(k+1)$ e encontramos um denominador comum:

$$(k+1)\left(\frac{k(2k+1)}{6} + (k+1)\right)$$

$$(k+1)\left(\frac{2k^2+k}{6} + \frac{6(k+1)}{6}\right)$$

$$(k+1)\left(\frac{2k^2+k+6k+6}{6}\right)$$

$$(k+1)\left(\frac{2k^2+7k+6}{6}\right)$$

Agora, precisamos fatorar o trinômio $2k^2 + 7k + 6$. Podemos usar a fatoração por agrupamento ou testar raízes. Raízes de $2k^2 + 7k + 6 = 0$: $k = \frac{-7 \pm \sqrt{49-4(2)(6)}}{4} = \frac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{4} = \frac{-7 \pm 1}{4}$. As raízes são $k_1 = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$ e $k_2 = \frac{-8}{4} = -2$. Portanto, $2k^2 + 7k + 6 = 2(k - (-\frac{3}{2}))(k - (-2)) = 2(k + \frac{3}{2})(k+2) = (2k+3)(k+2)$.

Substituindo de volta:

$$(k+1)\left(\frac{(k+2)(2k+3)}{6}\right)$$

$$\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Este é o lado direito da equação $P(k+1)$. Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

Conclusão: Pelo Princípio da Indução Matemática, a proposição $P(n)$ é verdadeira para todos os inteiros positivos n.

Questão 6: Prove que a soma dos cubos dos primeiros n inteiros positivos é $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Solução da Questão 6 (por Indução Matemática)

Seja $P(n)$ a proposição $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Passo Base (n=1): Para $n = 1$, a soma é $1^3 = 1$. A fórmula nos dá $\left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2 = \left[\frac{1\cdot 2}{2}\right]^2 = [1]^2 = 1$. Como $1 = 1$, o passo base é verdadeiro. $P(1)$ é verdadeira.

Passo Indutivo: Suponha que $P(k)$ seja verdadeira para algum inteiro positivo $k \geq 1$. Isto é, suponha que $1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$ (Hipótese de Indução).

Precisamos provar que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, que $1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \left[\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}\right]^2 = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$.

Começamos com o lado esquerdo da equação $P(k+1)$:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3$$

Pela Hipótese de Indução, sabemos que $1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$. Substituindo:

$$\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3$$

$$\frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

Para combinar os termos, fatoramos $(k+1)^2$:

$$(k+1)^2 \left(\frac{k^2}{4} + (k+1)\right)$$

$$(k+1)^2 \left(\frac{k^2}{4} + \frac{4(k+1)}{4}\right)$$

$$(k+1)^2 \left(\frac{k^2 + 4k + 4}{4}\right)$$

Reconhecemos que $k^2 + 4k + 4$ é um trinômio quadrado perfeito, $(k+2)^2$.

$$(k+1)^2 \left(\frac{(k+2)^2}{4}\right)$$

Podemos reescrever isso como:

$$\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

E então, como um quadrado de uma fração:

$$\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$

Este é o lado direito da equação $P(k+1)$. Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

Conclusão: Pelo Princípio da Indução Matemática, a proposição $P(n)$ é verdadeira para todos os inteiros positivos n.

Questão 7: Para todos os inteiros positivos n, A_n é definida indutivamente como segue: $A_1 = 3$, $A_n = A_{n-1} + 3$ para $n \geq 2$. Prove que $A_n = 3n$.

Solução da Questão 7 (por Indução Matemática)

Seja $P(n)$ a proposição $A_n = 3n$.

Passo Base (n=1): Para $n = 1$, a definição da sequência nos dá $A_1 = 3$. A fórmula que queremos provar nos dá $3 \cdot 1 = 3$. Como $3 = 3$, o passo base é verdadeiro. $P(1)$ é verdadeira.

Passo Indutivo: Suponha que $P(k)$ seja verdadeira para algum inteiro positivo $k \geq 1$. Isto é, suponha que $A_k = 3k$ (Hipótese de Indução).

Precisamos provar que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, que $A_{k+1} = 3(k+1)$.

Pela definição recursiva da sequência, para $k + 1 \geq 2$ (ou seja, $k \geq 1$), temos:

$$A_{k+1} = A_{(k+1)-1} + 3$$

$$A_{k+1} = A_k + 3$$

Pela Hipótese de Indução, sabemos que $A_k = 3k$. Substituindo:

$$A_{k+1} = 3k + 3$$

Fatorando 3:

$$A_{k+1} = 3(k + 1)$$

Este é o lado direito da proposição $P(k+1)$. Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

Conclusão: Pelo Princípio da Indução Matemática, a proposição $P(n)$ é verdadeira para todos os inteiros positivos n.

Questão 8: Prove que, para todos os inteiros $n \geq 4$, $n! > 2^n$.

Solução da Questão 8 (por Indução Matemática)

Seja $P(n)$ a proposição $n! > 2^n$. O domínio para n são inteiros $n \geq 4$.

Passo Base (n=4): Para $n = 4$: Lado esquerdo: $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$. Lado direito: $2^4 = 16$. Como $24 > 16$, o passo base é verdadeiro. $P(4)$ é verdadeira.

Passo Indutivo: Suponha que $P(k)$ seja verdadeira para algum inteiro $k \geq 4$. Isto é, suponha que $k! > 2^k$ (Hipótese de Indução).

Precisamos provar que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, que $(k+1)! > 2^{k+1}$.

Começamos com o lado esquerdo da equação $P(k+1)$:

$$(k + 1)! = (k + 1) \cdot k!$$

Pela Hipótese de Indução, sabemos que $k! > 2^k$. Multiplicando ambos os lados por $(k + 1)$:

$$(k + 1) \cdot k! > (k + 1) \cdot 2^k$$

$$(k + 1)! > (k + 1) \cdot 2^k$$

Agora, precisamos mostrar que $(k + 1) \cdot 2^k > 2^{k+1}$. Sabemos que $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$. Então, precisamos mostrar que $(k+1) \cdot 2^k > 2 \cdot 2^k$. Dividindo ambos os lados por 2^k (que é positivo, então a desigualdade se mantém):

$$k + 1 > 2$$

Isso é verdadeiro para todos os $k \geq 4$, pois $4 + 1 = 5 > 2$. Portanto, $(k + 1) \cdot 2^k > 2^{k+1}$.

Combinando as desigualdades:

$$(k + 1)! > (k + 1) \cdot 2^k > 2^{k+1}$$

Assim, $(k + 1)! > 2^{k+1}$. $P(k + 1)$ é verdadeira.

Conclusão: Pelo Princípio da Indução Matemática, a proposição $P(n)$ é verdadeira para todos os inteiros $n \geq 4$.

Questão 9: Prove que a soma dos primeiros n inteiros pares é $n(n + 1)$.

Solução da Questão 9 (por Indução Matemática)

Os primeiros n inteiros pares positivos são $2, 4, 6, \ldots, 2n$. Seja $P(n)$ a proposição $2+4+6+\cdots+2n = n(n + 1)$.

Passo Base (n=1): Para $n = 1$, a soma é 2. A fórmula nos dá $1(1 + 1) = 1 \cdot 2 = 2$. Como $2 = 2$, o passo base é verdadeiro. $P(1)$ é verdadeira.

Passo Indutivo: Suponha que $P(k)$ seja verdadeira para algum inteiro positivo $k \geq 1$. Isto é, suponha que $2 + 4 + 6 + \cdots + 2k = k(k + 1)$ (Hipótese de Indução).

Precisamos provar que $P(k + 1)$ é verdadeira, ou seja, que $2 + 4 + 6 + \cdots + 2k + 2(k + 1) = (k + 1)((k + 1) + 1) = (k + 1)(k + 2)$.

Começamos com o lado esquerdo da equação $P(k + 1)$:

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2k + 2(k + 1)$$

Pela Hipótese de Indução, sabemos que $2 + 4 + 6 + \cdots + 2k = k(k + 1)$. Substituindo:

$$k(k + 1) + 2(k + 1)$$

Fatorando $(k + 1)$:

$$(k + 1)(k + 2)$$

Este é o lado direito da equação $P(k + 1)$. Portanto, $P(k + 1)$ é verdadeira.

Conclusão: Pelo Princípio da Indução Matemática, a proposição $P(n)$ é verdadeira para todos os inteiros positivos n.

Questão 10: Prove que, para todos os inteiros positivos n, $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ é divisível por 13.

Solução da Questão 10 (por Indução Matemática)

Seja $P(n)$ a proposição "$4^{2n+1} + 3^{n+2}$ é divisível por 13". Isso significa que $4^{2n+1} + 3^{n+2} = 13m$ para algum inteiro m.

Passo Base (n=1): Para $n = 1$:

$$4^{2(1)+1} + 3^{1+2} = 4^3 + 3^3$$

$$= 64 + 27$$

$$= 91$$

Como $91 = 13 \cdot 7$, 91 é divisível por 13. Então, o passo base é verdadeiro. $P(1)$ é verdadeira.

Passo Indutivo: Suponha que $P(k)$ seja verdadeira para algum inteiro positivo $k \geq 1$. Isto é, suponha que $4^{2k+1} + 3^{k+2}$ é divisível por 13 (Hipótese de Indução). Então, existe um inteiro m tal que $4^{2k+1} + 3^{k+2} = 13m$. Podemos reescrever isso como $4^{2k+1} = 13m - 3^{k+2}$.

Precisamos provar que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, que $4^{2(k+1)+1} + 3^{(k+1)+2}$ é divisível por 13. Considere a expressão para $n = k+1$:

$$4^{2k+3} + 3^{k+3}$$

$$= 4^2 \cdot 4^{2k+1} + 3 \cdot 3^{k+2}$$
$$= 16 \cdot 4^{2k+1} + 3 \cdot 3^{k+2}$$

Agora, substituímos $4^{2k+1} = 13m - 3^{k+2}$ da Hipótese de Indução:

$$= 16(13m - 3^{k+2}) + 3 \cdot 3^{k+2}$$

$$= 16 \cdot 13m - 16 \cdot 3^{k+2} + 3 \cdot 3^{k+2}$$
$$= 16 \cdot 13m - (16-3) \cdot 3^{k+2}$$
$$= 16 \cdot 13m - 13 \cdot 3^{k+2}$$

Fatorando 13:

$$= 13(16m - 3^{k+2})$$

Seja $j = 16m - 3^{k+2}$. Como m e k são inteiros, j é um inteiro. Assim, $4^{2(k+1)+1} + 3^{(k+1)+2} = 13j$. Portanto, $4^{2(k+1)+1} + 3^{(k+1)+2}$ é divisível por 13. $P(k+1)$ é verdadeira.

Conclusão: Pelo Princípio da Indução Matemática, a proposição $P(n)$ é verdadeira para todos os inteiros positivos n.

Questão 11: A_n é definida indutivamente como segue: $A_1 = 6$, $A_2 = 11$, $A_n = 3A_{n-1} - 2A_{n-2}$ para $n \geq 3$. Prove que, para $n \geq 1$, $A_n = 5 \times 2^{n-1} + 1$.

Solução da Questão 11 (por Indução Matemática Forte)

Seja $P(n)$ a proposição $A_n = 5 \times 2^{n-1} + 1$. Esta é uma indução forte, pois a definição de A_n depende de dois termos anteriores.

Passo Base (n=1 e n=2): Para $n = 1$: Definição: $A_1 = 6$. Fórmula: $5 \times 2^{1-1} + 1 = 5 \times 2^0 + 1 = 5 \times 1 + 1 = 6$. $P(1)$ é verdadeira.

Para $n = 2$: Definição: $A_2 = 11$. Fórmula: $5 \times 2^{2-1} + 1 = 5 \times 2^1 + 1 = 5 \times 2 + 1 = 10 + 1 = 11$. $P(2)$ é verdadeira.

Passo Indutivo: Suponha que $P(j)$ seja verdadeira para todos os inteiros j tais que $1 \leq j \leq k$, para algum inteiro $k \geq 2$. Isto é, suponha que $A_j = 5 \times 2^{j-1} + 1$ para $1 \leq j \leq k$ (Hipótese de Indução Forte).

Precisamos provar que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, que $A_{k+1} = 5 \times 2^{(k+1)-1} + 1 = 5 \times 2^k + 1$.

Pela definição recursiva da sequência, para $k+1 \geq 3$ (ou seja, $k \geq 2$), temos:

$$A_{k+1} = 3A_k - 2A_{k-1}$$

Pela Hipótese de Indução Forte, podemos substituir A_k e A_{k-1} pelas suas formas fechadas: $A_k = 5 \times 2^{k-1} + 1$ $A_{k-1} = 5 \times 2^{(k-1)-1} + 1 = 5 \times 2^{k-2} + 1$

Substituindo na relação de recorrência:

$$A_{k+1} = 3(5 \times 2^{k-1} + 1) - 2(5 \times 2^{k-2} + 1)$$

$$A_{k+1} = 15 \times 2^{k-1} + 3 - 10 \times 2^{k-2} - 2$$

$$A_{k+1} = 15 \times 2^{k-1} - 10 \times 2^{k-2} + 1$$

Para combinar os termos com potências de 2, vamos expressar 2^{k-1} como $2 \times 2^{k-2}$:

$$A_{k+1} = 15 \times (2 \times 2^{k-2}) - 10 \times 2^{k-2} + 1$$

$$A_{k+1} = 30 \times 2^{k-2} - 10 \times 2^{k-2} + 1$$

Fatorando 2^{k-2}:

$$A_{k+1} = (30 - 10) \times 2^{k-2} + 1$$

$$A_{k+1} = 20 \times 2^{k-2} + 1$$

Podemos reescrever 20 como 5×4, e 4 como 2^2:

$$A_{k+1} = 5 \times 4 \times 2^{k-2} + 1$$

$$A_{k+1} = 5 \times 2^2 \times 2^{k-2} + 1$$

Usando propriedades de potências ($2^a \times 2^b = 2^{a+b}$):

$$A_{k+1} = 5 \times 2^{2+(k-2)} + 1$$

$$A_{k+1} = 5 \times 2^k + 1$$

Este é o lado direito da proposição $P(k+1)$. Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

Conclusão: Pelo Princípio da Indução Matemática Forte, a proposição $P(n)$ é verdadeira para todos os inteiros positivos $n \geq 1$.

Questão 12: Mostre que, para a sequência de Fibonacci, $f_{n+2}^2 - f_{n+1}^2 = f_n f_{n+3}$ para $n = 1, 2, \ldots$.

Solução da Questão 12 (por Indução Matemática)

A sequência de Fibonacci é definida por $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, e $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ para $n \geq 3$. Seja $P(n)$ a proposição $f_{n+2}^2 - f_{n+1}^2 = f_n f_{n+3}$.

Passo Base (n=1): Para $n = 1$: Lado esquerdo: $f_{1+2}^2 - f_{1+1}^2 = f_3^2 - f_2^2$. Sabemos que $f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2$. Então, $f_3^2 - f_2^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$.

Lado direito: $f_1 f_{1+3} = f_1 f_4$. Sabemos que $f_4 = f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3$. Então, $f_1 f_4 = 1 \cdot 3 = 3$. Como $3 = 3$, o passo base é verdadeiro. $P(1)$ é verdadeira.

Passo Indutivo: Suponha que $P(k)$ seja verdadeira para algum inteiro positivo $k \geq 1$. Isto é, suponha que $f_{k+2}^2 - f_{k+1}^2 = f_k f_{k+3}$ (Hipótese de Indução).

Precisamos provar que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, que $f_{(k+1)+2}^2 - f_{(k+1)+1}^2 = f_{k+1} f_{(k+1)+3}$. Isso é $f_{k+3}^2 - f_{k+2}^2 = f_{k+1} f_{k+4}$.

Vamos começar com o lado esquerdo da equação $P(k+1)$:

$$f_{k+3}^2 - f_{k+2}^2$$

Usando a definição da sequência de Fibonacci, $f_{k+3} = f_{k+2} + f_{k+1}$:

$$(f_{k+2} + f_{k+1})^2 - f_{k+2}^2$$

Expandindo o quadrado:

$$f_{k+2}^2 + 2f_{k+2}f_{k+1} + f_{k+1}^2 - f_{k+2}^2$$

Cancelando f_{k+2}^2 e $-f_{k+2}^2$:

$$2f_{k+2}f_{k+1} + f_{k+1}^2$$

Fatorando f_{k+1}:

$$f_{k+1}(2f_{k+2} + f_{k+1})$$

Agora, precisamos manipular o termo dentro do parêntese para que se pareça com f_{k+4}. Sabemos que $f_{k+4} = f_{k+3} + f_{k+2}$. E $f_{k+3} = f_{k+2} + f_{k+1}$. Então, $f_{k+4} = (f_{k+2} + f_{k+1}) + f_{k+2} = 2f_{k+2} + f_{k+1}$.

Substituindo $2f_{k+2} + f_{k+1}$ por f_{k+4}:

$$f_{k+1}f_{k+4}$$

Este é o lado direito da proposição $P(k+1)$. Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

Conclusão: Pelo Princípio da Indução Matemática, a proposição $P(n)$ é verdadeira para todos os inteiros positivos $n \geq 1$.

4.7 Exercícios

Exercício 4.5: Prove que, para todos os números reais a e b, se $a < b < 0$ então $a^2 > b^2$.

Solução do Exercício 4.5

Sejam a e b números reais tais que $a < b < 0$. Isso significa que a e b são números negativos.

Da desigualdade $a < b$, podemos multiplicar ambos os lados por um número negativo. Ao fazer isso, o sinal da desigualdade inverte. Multiplicando por a (que é negativo, $a < 0$):

$$a \cdot a > b \cdot a$$

$$a^2 > ab \quad (*)$$

Agora, da desigualdade $b < 0$, podemos multiplicar ambos os lados por b (que é negativo, $b < 0$). O sinal da desigualdade inverte.

$$b \cdot b > 0 \cdot b$$

$$b^2 > 0$$

Esta informação é útil para confirmar que b^2 é positivo, mas não diretamente o que precisamos para a prova.

Vamos usar as propriedades das desigualdades de forma mais direta. Temos $a < b < 0$. Isso implica que tanto a quanto b são negativos. Podemos multiplicar a desigualdade $a < b$ por b. Como $b < 0$, o sentido da desigualdade inverte:

$$a \cdot b > b \cdot b$$

$$ab > b^2 \quad (**)$$

Agora, combinando $(*)$ e $(**)$: De $(*)$, temos $a^2 > ab$. De $(**)$, temos $ab > b^2$. Pela propriedade transitiva das desigualdades, se $a^2 > ab$ e $ab > b^2$, então:

$$a^2 > b^2$$

Portanto, para todos os números reais a e b, se $a < b < 0$, então $a^2 > b^2$.

Exercício 4.6: O quadrado de um número inteiro, não divisível por 5, tem resto 1 ou 4 quando dividido por 5.

Solução do Exercício 4.6

Seja n um número inteiro. Se n não é divisível por 5, então n pode ter os seguintes restos quando dividido por 5: 1, 2, 3 ou 4. Podemos expressar n nas seguintes formas:

- Caso 1: $n = 5k + 1$ para algum inteiro k.
- Caso 2: $n = 5k + 2$ para algum inteiro k.
- Caso 3: $n = 5k + 3$ para algum inteiro k.
- Caso 4: $n = 5k + 4$ para algum inteiro k.

Vamos analisar o quadrado de n, n^2, para cada caso.
Caso 1: $n = 5k + 1$

$$n^2 = (5k+1)^2 = (5k)^2 + 2(5k)(1) + 1^2$$
$$n^2 = 25k^2 + 10k + 1$$
$$n^2 = 5(5k^2 + 2k) + 1$$

Neste caso, n^2 tem resto 1 quando dividido por 5.
Caso 2: $n = 5k + 2$

$$n^2 = (5k+2)^2 = (5k)^2 + 2(5k)(2) + 2^2$$
$$n^2 = 25k^2 + 20k + 4$$
$$n^2 = 5(5k^2 + 4k) + 4$$

Neste caso, n^2 tem resto 4 quando dividido por 5.
Caso 3: $n = 5k + 3$

$$n^2 = (5k+3)^2 = (5k)^2 + 2(5k)(3) + 3^2$$
$$n^2 = 25k^2 + 30k + 9$$

Podemos reescrever 9 como $5 + 4$:

$$n^2 = 25k^2 + 30k + 5 + 4$$

$$n^2 = 5(5k^2 + 6k + 1) + 4$$

Neste caso, n^2 tem resto 4 quando dividido por 5.

Caso 4: $n = 5k + 4$

$$n^2 = (5k+4)^2 = (5k)^2 + 2(5k)(4) + 4^2$$
$$n^2 = 25k^2 + 40k + 16$$

Podemos reescrever 16 como $3 \cdot 5 + 1 = 15 + 1$:

$$n^2 = 25k^2 + 40k + 15 + 1$$
$$n^2 = 5(5k^2 + 8k + 3) + 1$$

Neste caso, n^2 tem resto 1 quando dividido por 5.

Em todos os casos onde n não é divisível por 5, seu quadrado n^2 tem resto 1 ou 4 quando dividido por 5.

Exercício 4.7: Sejam x, y, z números reais. Pelo menos um deles é maior ou igual à média aritmética dos três.

Solução do Exercício 4.7

Sejam x, y, z números reais. A média aritmética dos três números é $M = \frac{x+y+z}{3}$. Queremos provar que pelo menos um deles é maior ou igual a M. Isto é, $x \geq M$ ou $y \geq M$ ou $z \geq M$.

Vamos provar por contradição. Suponha que a afirmação seja falsa. Isso significa que NENHUM deles é maior ou igual a M. Portanto, todos eles são estritamente menores que M:

$$x < M$$
$$y < M$$
$$z < M$$

Substituindo $M = \frac{x+y+z}{3}$ em cada desigualdade:

$$x < \frac{x+y+z}{3}$$
$$y < \frac{x+y+z}{3}$$
$$z < \frac{x+y+z}{3}$$

Multiplicando cada desigualdade por 3:

$$3x < x + y + z \quad (1)$$
$$3y < x + y + z \quad (2)$$
$$3z < x + y + z \quad (3)$$

Agora, vamos somar as três desigualdades (1), (2) e (3):

$$3x + 3y + 3z < (x + y + z) + (x + y + z) + (x + y + z)$$
$$3(x + y + z) < 3(x + y + z)$$

Isso resulta em $3(x + y + z) < 3(x + y + z)$, o que é uma contradição. A contradição surgiu da nossa suposição inicial de que nenhum dos números é maior ou igual à média. Portanto, a suposição deve ser falsa.

Consequentemente, pelo menos um dos números x, y, z é maior ou igual à média aritmética dos três.

Exercício 4.8: Um inteiro positivo n é par se, e somente se $7n + 4$ é par.

Solução do Exercício 4.8

Esta é uma prova de "se e somente se"($P \iff Q$), que requer duas partes:

1. Se n é par, então $7n + 4$ é par. ($P \implies Q$)
2. Se $7n + 4$ é par, então n é par. ($Q \implies P$)

Parte 1: Se n é par, então $7n + 4$ é par. Suponha que n é um inteiro par. Por definição, existe um inteiro k tal que $n = 2k$. Substituindo n na expressão $7n + 4$:

$$7n + 4 = 7(2k) + 4$$

$$7n + 4 = 14k + 4$$

Fatorando 2:

$$7n + 4 = 2(7k + 2)$$

Seja $j = 7k + 2$. Como k é um inteiro, j também é um inteiro. Assim, $7n + 4 = 2j$. Pela definição de número par, $7n + 4$ é par.

Parte 2: Se $7n + 4$ é par, então n é par. Vamos provar esta parte usando o contrapositivo. O contrapositivo da afirmação "Se $7n + 4$ é par, então n é par"é "Se n é ímpar, então $7n + 4$ é ímpar". Suponha que n é um inteiro ímpar. Por definição, existe um inteiro k tal que $n = 2k + 1$. Substituindo n na expressão $7n + 4$:

$$7n + 4 = 7(2k + 1) + 4$$

$$7n + 4 = 14k + 7 + 4$$

$$7n + 4 = 14k + 11$$

Podemos reescrever 11 como $10 + 1$:

$$7n + 4 = 14k + 10 + 1$$

Fatorando 2:

$$7n + 4 = 2(7k + 5) + 1$$

Seja $j = 7k+5$. Como k é um inteiro, j também é um inteiro. Assim, $7n+4 = 2j+1$. Pela definição de número ímpar, $7n + 4$ é ímpar. Como o contrapositivo é verdadeiro, a afirmação original "Se $7n + 4$ é par, então n é par"também é verdadeira.

Combinando as duas partes, concluímos que um inteiro positivo n é par se, e somente se $7n + 4$ é par.

Exercício 4.9: Um número inteiro positivo n é ímpar se, e somente se, $5n + 6$ é ímpar.

Solução do Exercício 4.9

Esta é uma prova de "se e somente se"($P \iff Q$), que requer duas partes:

1. Se n é ímpar, então $5n + 6$ é ímpar. ($P \implies Q$)
2. Se $5n + 6$ é ímpar, então n é ímpar. ($Q \implies P$)

Parte 1: Se n é ímpar, então $5n + 6$ é ímpar. Suponha que n é um inteiro ímpar. Por definição, existe um inteiro k tal que $n = 2k + 1$. Substituindo n na expressão $5n + 6$:

$$5n + 6 = 5(2k + 1) + 6$$

$$5n + 6 = 10k + 5 + 6$$

$$5n + 6 = 10k + 11$$

Podemos reescrever 11 como $10 + 1$:

$$5n + 6 = 10k + 10 + 1$$

Fatorando 2:

$$5n + 6 = 2(5k + 5) + 1$$

Seja $j = 5k + 5$. Como k é um inteiro, j também é um inteiro. Assim, $5n + 6 = 2j + 1$. Pela definição de número ímpar, $5n + 6$ é ímpar.

Parte 2: Se $5n + 6$ é ímpar, então n é ímpar. Vamos provar esta parte usando o contrapositivo. O contrapositivo da afirmação "Se $5n + 6$ é ímpar, então n é ímpar"é "Se n é par, então $5n + 6$ é par". Suponha que n é um inteiro par. Por definição, existe um inteiro k tal que $n = 2k$. Substituindo n na expressão $5n + 6$:

$$5n + 6 = 5(2k) + 6$$

$$5n + 6 = 10k + 6$$

Fatorando 2:

$$5n + 6 = 2(5k + 3)$$

Seja $j = 5k + 3$. Como k é um inteiro, j também é um inteiro. Assim, $5n + 6 = 2j$. Pela definição de número par, $5n + 6$ é par. Como o contrapositivo é verdadeiro, a afirmação original "Se $5n + 6$ é ímpar, então n é ímpar"também é verdadeira.

Combinando as duas partes, concluímos que um número inteiro positivo n é ímpar se, e somente se, $5n + 6$ é ímpar.

Exercício 4.10: Se p é um inteiro ímpar, então a equação $x^2 + x - p = 0$ não tem solução inteira.

Solução do Exercício 4.10

Vamos provar por contradição. Suponha que a equação $x^2 + x - p = 0$ tenha uma solução inteira x_0, onde p é um inteiro ímpar. Então, $x_0^2 + x_0 - p = 0$. Podemos reescrever a equação como:

$$x_0^2 + x_0 = p$$

$$x_0(x_0 + 1) = p$$

O lado esquerdo da equação, $x_0(x_0+1)$, é o produto de dois inteiros consecutivos. Já provamos no Exercício 2.2, Questão 3 (Parte 1) que o produto de dois inteiros consecutivos é sempre um número par. Portanto, $x_0(x_0+1)$ é par.

Isso significa que p deve ser par.

$$p = \text{par}$$

No entanto, a premissa do problema afirma que p é um inteiro ímpar. Chegamos a uma contradição: p é par e p é ímpar ao mesmo tempo.

A contradição surgiu da nossa suposição de que a equação tem uma solução inteira. Portanto, a suposição deve ser falsa.

Consequentemente, se p é um inteiro ímpar, então a equação $x^2 + x - p = 0$ não tem solução inteira.

Exercício 4.11: Se n é um número inteiro não divisível por 3, então seu quadrado tem resto 1 quando dividido por 3.

Solução do Exercício 4.11

Seja n um número inteiro. Se n não é divisível por 3, então n pode ter os seguintes restos quando dividido por 3: 1 ou 2. Podemos expressar n nas seguintes formas:

- Caso 1: $n = 3k + 1$ para algum inteiro k.
- Caso 2: $n = 3k + 2$ para algum inteiro k.

Vamos analisar o quadrado de n, n^2, para cada caso.

Caso 1: $n = 3k + 1$

$$n^2 = (3k+1)^2 = (3k)^2 + 2(3k)(1) + 1^2$$
$$n^2 = 9k^2 + 6k + 1$$
$$n^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1$$

Neste caso, n^2 tem resto 1 quando dividido por 3.

Caso 2: $n = 3k + 2$

$$n^2 = (3k+2)^2 = (3k)^2 + 2(3k)(2) + 2^2$$
$$n^2 = 9k^2 + 12k + 4$$

Podemos reescrever 4 como $3 + 1$:

$$n^2 = 9k^2 + 12k + 3 + 1$$

$$n^2 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$$

Neste caso, n^2 tem resto 1 quando dividido por 3.

Em ambos os casos onde n não é divisível por 3, seu quadrado n^2 tem resto 1 quando dividido por 3.

Exercício 4.12: Para quaisquer conjuntos A, B, C e D, as seguintes afirmações são sempre verdadeiras:

Solução do Exercício 4.12

1. **Se $x \in A, (A - B) \subseteq (C \cap D)$ e $x \notin D$, então $x \notin B$.** Vamos provar esta afirmação. Assumimos as premissas:

    - $x \in A$
    - $(A - B) \subseteq (C \cap D)$
    - $x \notin D$

    Queremos provar que $x \notin B$.

    Por contradição, suponha que $x \in B$. Se $x \in A$ e $x \in B$, então, por definição de diferença de conjuntos, $x \notin (A - B)$.

    No entanto, temos a premissa $x \in A$ e $x \notin D$. Também temos a premissa $(A - B) \subseteq (C \cap D)$. Se $x \in (A - B)$, então, pela definição de subconjunto, $x \in (C \cap D)$. Se $x \in (C \cap D)$, então, pela definição de interseção, $x \in C$ E $x \in D$. Isso significaria que $x \in D$.

    Mas nossa premissa original é $x \notin D$. Assim, se $x \in (A - B)$, chegamos à contradição ($x \in D$ e $x \notin D$). Portanto, a suposição $x \in (A - B)$ deve ser falsa.

    Considerando novamente: $x \in A$. Se $x \in A$ e $x \notin B$, então $x \in (A - B)$. Se $x \in (A - B)$ e $(A - B) \subseteq (C \cap D)$, então $x \in (C \cap D)$. Se $x \in (C \cap D)$, então $x \in D$. Mas sabemos que $x \notin D$. A única forma de evitar essa contradição é se a condição inicial $x \notin B$ for verdadeira.

    Vamos tentar uma prova direta. Assumimos: 1. $x \in A$ 2. $(A - B) \subseteq (C \cap D)$ 3. $x \notin D$

    Suponha, por contradição, que $x \in B$. Se $x \in A$ e $x \in B$, então $x \notin (A - B)$. Isso não nos leva a uma contradição direta com as premissas.

    Vamos reformular: Se $x \in A$ e $x \notin D$, e $(A - B) \subseteq (C \cap D)$. Queremos mostrar que $x \notin B$. Considere que $x \in A - B$. Pela premissa $(A - B) \subseteq (C \cap D)$, teríamos $x \in C \cap D$, o que implica $x \in D$. Mas temos $x \notin D$. Isso significa que a afirmação "$x \in A - B$"é falsa, dado $x \notin D$. Para que "$x \in A - B$"seja falsa, e já sabemos que $x \in A$, a única possibilidade é que $x \in B$. Isso é uma contradição. O raciocínio está errado.

    Vamos usar o método direto. Assuma $x \in A$ e $x \notin D$. Se $x \in A$ e $x \in B$, então $x \notin (A - B)$. Isso é uma afirmação sobre $A - B$. Se $x \in A$ e $x \notin B$, então $x \in (A - B)$. Se $x \in (A - B)$, então, pela premissa $(A - B) \subseteq (C \cap D)$, $x \in (C \cap D)$. Se $x \in (C \cap D)$, então $x \in D$. Mas uma das nossas premissas é $x \notin D$. Portanto, a situação $x \in A$ e $x \notin B$ leva a uma contradição. Isso significa que nossa suposição inicial de que $x \in A$ e $x \notin B$ é falsa. Se $x \in A$ é verdadeira, então $x \notin B$ deve ser falsa, o que significa $x \in B$.

    Isso é o oposto do que queremos provar. Vamos reavaliar. A afirmação original é: "Se $(x \in A \wedge (A - B) \subseteq (C \cap D) \wedge x \notin D)$, então $x \notin B$."Vamos provar o contrapositivo: "Se $x \in B$, então $x \notin A \vee (A - B) \not\subseteq (C \cap D) \vee x \in D$."Isso parece mais complicado.

    Vamos usar a prova por contradição na afirmação original: Suponha que ($x \in A$ E $(A - B) \subseteq (C \cap D)$ E $x \notin D$) E ($x \in B$). Se $x \in A$ e $x \in B$, então $x \notin (A - B)$. Isso não causa contradição com as premissas dadas.

A afirmação é trivialmente verdadeira ou há um erro na transcrição. Vamos re-examinar: $x \in A, (A - B) \subseteq (C \cap D), x \notin D \implies x \notin B$. Suponha, para contradição, que $x \in B$. Juntamente com $x \in A$, isso implica que $x \notin (A - B)$. A premissa $(A - B) \subseteq (C \cap D)$ nos diz que se um elemento está em $(A - B)$, ele também está em $(C \cap D)$. A premissa $x \notin D$ nos diz que x não está em D. Se $x \notin D$, então $x \notin (C \cap D)$ (pois para estar na interseção, x teria que estar em D). Como $x \notin (C \cap D)$, e $(A - B) \subseteq (C \cap D)$, isso implica que $x \notin (A - B)$. Isso significa que $x \in B$ ou $x \notin A$. Já sabemos $x \in A$. Então, deve ser $x \in B$. Mas isso é exatamente o que estávamos supondo por contradição. Onde está o erro?

O erro está na interpretação da implicação. Se $x \notin (A - B)$, isso significa que $x \in B$ (já que $x \in A$ é dado). Da premissa $x \notin D$, e sabendo que $(C \cap D)$ implica D, então $x \notin (C \cap D)$. Como $(A - B) \subseteq (C \cap D)$, se $x \in (A - B)$, então $x \in (C \cap D)$. Mas sabemos que $x \notin (C \cap D)$. Portanto, deve ser o caso que $x \notin (A - B)$. A condição para $x \notin (A - B)$ é $x \notin A$ ou $x \in B$. Como é dado $x \in A$, então para que $x \notin (A - B)$ seja verdade, deve ser $x \in B$.

Isso é uma tautologia. A afirmação é sempre verdadeira. Vamos reformular: *Premissas:* 1. $x \in A$ 2. $(A - B) \subseteq (C \cap D)$ 3. $x \notin D$

Da premissa (3), $x \notin D$. Se $x \notin D$, então x não pode estar em $C \cap D$ (pois se estivesse, deveria estar em D). Então, $x \notin (C \cap D)$.

Da premissa (2), $(A - B) \subseteq (C \cap D)$. Se um elemento está em $A - B$, ele está em $C \cap D$. Como sabemos que $x \notin (C \cap D)$, então x não pode estar em $A - B$. Ou seja, $x \notin (A - B)$.

Por definição de $A - B$, se $x \notin (A - B)$ e $x \in A$ (premissa 1), então necessariamente $x \in B$. Ah, a conclusão é $x \notin B$. Minha lógica está invertendo.

Vamos refazer a prova por contradição de forma mais clara: Suponha que a afirmação seja falsa. Isso significa que as premissas são verdadeiras E a conclusão é falsa. Premissas verdadeiras: (1) $x \in A$ (2) $(A - B) \subseteq (C \cap D)$ (3) $x \notin D$ Conclusão falsa: $x \in B$ (isto é, $x \notin B$ é falsa)

Então, temos $x \in A$ e $x \in B$. Pela definição de diferença de conjuntos, se $x \in A$ e $x \in B$, então $x \notin (A - B)$.

Agora, das premissas (2) e (3): Sabemos que $(A - B) \subseteq (C \cap D)$. Sabemos que $x \notin D$. Se $x \notin D$, então $x \notin (C \cap D)$ (porque para $x \in C \cap D$, x deve estar em D). Como $x \notin (C \cap D)$ e $(A - B) \subseteq (C \cap D)$, isso implica que $x \notin (A - B)$.

Chegamos a $x \notin (A - B)$ a partir das premissas e da negação da conclusão. Isso não é uma contradição. A afirmação é: "Se $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$ então Q". Assumimos $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \neg Q$. $P_1 : x \in A$ $P_2 : (A - B) \subseteq (C \cap D)$ $P_3 : x \notin D$ $\neg Q : x \in B$

Se $x \in A$ e $x \in B$ ($\neg Q$ e P_1), então por definição de diferença de conjuntos, $x \notin (A - B)$. Se $x \notin D$ (P_3), então $x \notin (C \cap D)$. Se $x \notin (C \cap D)$ e $(A - B) \subseteq (C \cap D)$ (P_2), então $x \notin (A - B)$.

Ambas as cadeias de raciocínio (da suposição $\neg Q$ e das premissas P_2, P_3) levam à mesma conclusão: $x \notin (A - B)$. Não há contradição.

Isso significa que a afirmação original é FALSA. O enunciado diz "As seguintes afirmações são sempre verdadeiras". Isso indica que há um erro na minha dedução ou no enunciado.

Reavaliando a definição de $A - B$: $x \in (A - B) \iff (x \in A \wedge x \notin B)$. A afirmação a ser provada é: $(x \in A \wedge (A - B) \subseteq (C \cap D) \wedge x \notin D) \implies x \notin B$. Vamos supor que as premissas são verdadeiras e $x \in B$. Premissas: (i) $x \in A$ (ii) $(A - B) \subseteq (C \cap D)$ (iii) $x \notin D$ Suposição para contradição: $x \in B$.

De (i) $x \in A$ e de nossa suposição $x \in B$, concluímos que $x \notin (A - B)$. (Isso está correto)

Agora, de (iii) $x \notin D$, sabemos que $x \notin (C \cap D)$ (pois para estar na interseção, deveria estar em D). (Isso está correto)

Pela premissa (ii) $(A - B) \subseteq (C \cap D)$, se um elemento está em $A - B$, ele também está em $C \cap D$. Como sabemos que $x \notin (C \cap D)$, isso significa que x NÃO PODE estar em $(A - B)$. Ou seja, $x \notin (A - B)$. (Isso está correto)

Chegamos à mesma conclusão ($x \notin (A - B)$) usando a suposição $x \in B$ (e $x \in A$) e usando as premissas $(A - B) \subseteq (C \cap D)$ e $x \notin D$. Isso não é uma contradição. A afirmação é verdadeira. O ponto é que se você tem $x \in A$ e $x \notin B$, então $x \in A - B$, o que leva a $x \in D$, mas temos $x \notin D$. Então, a única forma de isso não ser uma contradição é se a premissa "$x \in A$ e $x \notin B$"for falsa. Dado que $x \in A$ é uma premissa, então "$x \notin B$"tem que ser falsa, ou seja, $x \in B$.

Se a afirmação que eu estou provando é $P \implies Q$. Suponha $P \wedge \neg Q$. $P = (x \in A \wedge (A - B) \subseteq (C \cap D) \wedge x \notin D)$ $\neg Q = x \in B$ Assumimos $(x \in A \wedge (A - B) \subseteq (C \cap D) \wedge x \notin D \wedge x \in B)$. De $(x \in A \wedge x \in B)$, temos $x \notin (A - B)$. De $(x \notin D)$, temos $x \notin (C \cap D)$. De $(A - B) \subseteq (C \cap D)$, se $x \in (A - B)$ então $x \in (C \cap D)$. Como $x \notin (C \cap D)$, devemos ter $x \notin (A - B)$. Não há contradição. O erro foi meu, novamente. A afirmação É VERDADEIRA. A prova por contradição está me enganando.

Vamos usar o argumento direto e provar que a premissa $x \in A$ E $x \notin B$ leva a uma contradição com $x \notin D$. Suponha que $x \in A$ e $x \notin B$. Então, por definição de diferença, $x \in (A - B)$. Pela premissa $(A - B) \subseteq (C \cap D)$, se $x \in (A - B)$, então $x \in (C \cap D)$. Pela definição de interseção, se $x \in (C \cap D)$, então $x \in C$ E $x \in D$. Isso implica que $x \in D$. Mas uma das nossas premissas é $x \notin D$. Chegamos a uma contradição: ($x \in D$ E $x \notin D$). Essa contradição surgiu da nossa suposição inicial de que ($x \in A$ E $x \notin B$). Como $x \in A$ é uma premissa (e é verdadeira), a única forma de evitar a contradição é se $x \notin B$ for falsa. Se $x \notin B$ é falsa, então $x \in B$. Mas o teorema é para provar $x \notin B$.

Isso é irritante. Se as afirmações são SEMPRE verdadeiras, meu contraexemplo ou falha na prova significa um erro meu. Vamos focar na lógica. Assume $x \in A$. Assume $(A - B) \subseteq (C \cap D)$. Assume $x \notin D$. Conclusão: $x \notin B$.

Prova por contradição (correta): Suponha $x \in B$. (Negamos a conclusão) Dado $x \in A$ (premissa), e nossa suposição $x \in B$, então por definição de $A - B$, $x \notin (A - B)$. Por outro lado, das premissas: $x \notin D \implies x \notin (C \cap D)$. Como $(A - B) \subseteq (C \cap D)$, se $x \in (A - B)$, então $x \in (C \cap D)$. Mas sabemos $x \notin (C \cap D)$. Portanto, é IMPOSSÍVEL que $x \in (A - B)$. Ou seja, $x \notin (A - B)$.

Então, temos $x \notin (A - B)$ derivado de duas maneiras independentes. Não há contradição.

Retentativa: A afirmação parece ser uma aplicação do princípio de que se um elemento está em um subconjunto, e esse subconjunto é um subconjunto de outro, ele está no segundo. Se ele não está no segundo, então não pode estar no primeiro.

1. $x \in A$ 2. $(A - B) \subseteq (C \cap D)$ 3. $x \notin D$ 4. Queremos provar $x \notin B$.

De (3), $x \notin D$. Como $C \cap D$ requer que um elemento esteja em D, se $x \notin D$, então $x \notin (C \cap D)$.

Agora, de (2), temos $(A - B) \subseteq (C \cap D)$. Isso significa que todo elemento em $A - B$ também está em $C \cap D$. Se $x \notin (C \cap D)$ (como acabamos de deduzir), então x não pode estar em $(A - B)$. Portanto, $x \notin (A - B)$.

Por definição de $A - B$, $x \notin (A - B)$ significa que é FALSO que ($x \in A$ E $x \notin B$). Como $x \in A$ é uma das premissas (1), e sabemos que $x \in A$ é verdadeiro, para que a conjunção ($x \in A$ E $x \notin B$) seja falsa, a parte ($x \notin B$) deve ser falsa. Se ($x \notin B$) é falsa, então $x \in B$.

Isso é o OPOSTO do que a questão pede para provar ($x \notin B$). Se a questão é "As seguintes afirmações são SEMPRE verdadeiras", então deve haver um erro no enunciado da questão ou na minha compreensão do símbolo. Se é $x \in A, (A - B) \subseteq (C \cap D), x \notin D \implies x \notin B$, então esta afirmação é FALSA. Contraexemplo: $A = \{1\}$, $B = \{1\}$, $C = \{1\}$, $D = \{2\}$ $x = 1$. $x \in A$? Sim, $1 \in \{1\}$. $A - B = \{1\} - \{1\} = \emptyset$. $C \cap D = \{1\} \cap \{2\} = \emptyset$. $(A - B) \subseteq (C \cap D)$? $\emptyset \subseteq \emptyset$. Sim, é verdade. $x \notin D$? $1 \notin \{2\}$. Sim, é verdade. Premissas são todas verdadeiras. Conclusão: $x \notin B$? $1 \notin \{1\}$. ISSO É FALSO. Portanto, a afirmação é falsa.

— **Correção:** É possível que o símbolo $\in$ na segunda linha seja um erro de digitação e deveria ser $\subseteq$. Vou assumir que a primeira e terceira afirmações são como descritas. Se houver um erro, me avise. A primeira afirmação parece ter um erro lógico ou no enunciado, pois o contraexemplo prova sua falsidade.

Vamos para as outras afirmações, assumindo que são de fato verdadeiras e irei prová-las.

2. **Se B e C são disjuntos, $A \subseteq C$ e $x \in A$, então $x \notin B$.** Vamos provar esta afirmação. Assumimos as premissas:

   - B e C são disjuntos (i.e., $B \cap C = \emptyset$)
   - $A \subseteq C$
   - $x \in A$

   Queremos provar que $x \notin B$.

   De $x \in A$ e $A \subseteq C$ (premissas), concluímos que $x \in C$. De $B \cap C = \emptyset$ (premissa), sabemos que não há elementos em comum entre B e C. Como $x \in C$, e B e C não têm elementos em comum, então x não pode estar em B. Portanto, $x \notin B$.

   Esta afirmação é verdadeira.

3. **Se $x \in C$ e $C \cap B \subseteq A$, então $x \notin (A - B)$.** Vamos provar esta afirmação. Assumimos as premissas:

   - $x \in C$
   - $(C \cap B) \subseteq A$

   Queremos provar que $x \notin (A - B)$. Lembre-se que $x \in (A - B)$ significa $x \in A$ e $x \notin B$. Então, $x \notin (A - B)$ significa $x \notin A$ ou $x \in B$.

   Vamos usar a prova por contradição. Suponha que $x \in (A - B)$ (negando a conclusão). Se $x \in (A - B)$, então, por definição, $x \in A$ e $x \notin B$.

   Temos as premissas: (i) $x \in C$ (ii) $(C \cap B) \subseteq A$ E nossa suposição: (iii) $x \in A$ e (iv) $x \notin B$.

Considere o elemento x. Temos $x \in C$ (premissa (i)). Se $x \in B$ fosse verdade, então teríamos $x \in C \cap B$. Mas nossa suposição (iv) é $x \notin B$. Portanto, $x \notin (C \cap B)$.

A premissa (ii) é $(C \cap B) \subseteq A$. Isso significa que se um elemento está em $C \cap B$, ele está em A. Isso não nos ajuda diretamente a derivar uma contradição.

Vamos tentar de outra forma. Queremos provar $x \notin (A - B)$. Isso é equivalente a provar que (NÃO ($x \in A$ E $x \notin B$)), que é ($x \notin A$ OU $x \in B$).

Considere dois casos para x: $x \in B$ ou $x \notin B$.

- **Caso 1: $x \in B$.** Se $x \in B$, então a conclusão $x \notin (A - B)$ é verdadeira (porque se $x \in B$, então x não pode estar em $A - B$ por definição).
- **Caso 2: $x \notin B$.** Temos as premissas: $x \in C$ e $(C \cap B) \subseteq A$. Se $x \in C$ e $x \notin B$, então $x \notin (C \cap B)$. A premissa $(C \cap B) \subseteq A$ não nos dá informações sobre elementos que não estão em $C \cap B$. Ela apenas diz algo sobre elementos que *estão* em $C \cap B$. Portanto, este caso não nos leva a uma conclusão sobre $x \notin A$.

A afirmação também é falsa. Contraexemplo: $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{1, 3\}$. $x = 1$. $x \in C$? Sim, $1 \in \{1, 3\}$. (Verdadeiro) $C \cap B = \{1, 3\} \cap \{2\} = \emptyset$. $(C \cap B) \subseteq A$? $\emptyset \subseteq \{1\}$. Sim, é verdade. (Verdadeiro) Premissas são todas verdadeiras.

Conclusão: $x \notin (A - B)$? $A - B = \{1\} - \{2\} = \{1\}$. $x \notin (A - B)$ é $1 \notin \{1\}$. ISSO É FALSO. Portanto, a afirmação é falsa.

— **Conclusão para 4.12:** As afirmações dadas no Exercício 4.12 não são todas sempre verdadeiras como o enunciado sugere. A segunda afirmação é verdadeira, enquanto a primeira e a terceira são falsas (com contraexemplos fornecidos).

Exercício 4.13: Não existem soluções inteiras x e y para a equação $x^2+3y^2 = 8$.

Solução do Exercício 4.13 (Prova por Enumeração de Casos e Propriedades de Quadrados)

Queremos provar que não existem soluções inteiras para $x^2 + 3y^2 = 8$.

Como x^2 e $3y^2$ são termos não-negativos, $x^2 \leq 8$ e $3y^2 \leq 8$. Isso restringe os possíveis valores inteiros para x e y.

Para y: $3y^2 \leq 8 \implies y^2 \leq \frac{8}{3} \approx 2.66$. Os únicos valores inteiros para y cujo quadrado é menor ou igual a 2.66 são $y = 0, y = 1, y = -1$.

Vamos testar cada um desses valores de y:

Caso 1: $y = 0$ Substituindo $y = 0$ na equação: $x^2 + 3(0)^2 = 8$ $x^2 + 0 = 8$ $x^2 = 8$ Para que $x^2 = 8$, x teria que ser $\pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$. Estes não são inteiros. Portanto, não há solução inteira quando $y = 0$.

Caso 2: $y = 1$ Substituindo $y = 1$ na equação: $x^2 + 3(1)^2 = 8$ $x^2 + 3 = 8$ $x^2 = 8 - 3$ $x^2 = 5$ Para que $x^2 = 5$, x teria que ser $\pm\sqrt{5}$. Estes não são inteiros. Portanto, não há solução inteira quando $y = 1$.

Caso 3: $y = -1$ Substituindo $y = -1$ na equação: $x^2 + 3(-1)^2 = 8$ $x^2 + 3(1) = 8$ $x^2 + 3 = 8$ $x^2 = 5$ Para que $x^2 = 5$, x teria que ser $\pm\sqrt{5}$. Estes não são inteiros. Portanto, não há solução inteira quando $y = -1$.

Como esgotamos todos os possíveis valores inteiros para y que poderiam satisfazer a equação, e em nenhum caso encontramos um valor inteiro para x, concluímos que não existem soluções inteiras x e y para a equação $x^2 + 3y^2 = 8$.

Exercício 4.14: Existem 100 inteiros consecutivos que não são quadrados perfeitos.

Solução do Exercício 4.14

Queremos provar que existem 100 inteiros consecutivos que não são quadrados perfeitos. Para isso, precisamos encontrar um intervalo de 100 inteiros consecutivos que não contenha nenhum quadrado perfeito.

Considere dois quadrados perfeitos consecutivos, k^2 e $(k+1)^2$. A diferença entre eles é $(k+1)^2 - k^2 = k^2 + 2k + 1 - k^2 = 2k + 1$. Esta diferença representa o número de inteiros que *não* são quadrados perfeitos entre k^2 e $(k+1)^2$, *excluindo* k^2 e *incluindo* $(k+1)^2$. Mais precisamente, há $(2k+1) - 1 = 2k$ inteiros que não são quadrados perfeitos entre k^2 (exclusivo) e $(k+1)^2$ (exclusivo).

Para que haja pelo menos 100 inteiros consecutivos que não são quadrados perfeitos, precisamos encontrar um k tal que a "lacuna"entre k^2 e $(k+1)^2$ seja de pelo menos 100. Ou seja, precisamos que $(k+1)^2 - k^2 - 1 \geq 100$.

$$2k + 1 - 1 \geq 100$$

$$2k \geq 100$$

$$k \geq 50$$

Então, se escolhermos $k = 50$, a diferença entre 50^2 e 51^2 é: $50^2 = 2500$ $51^2 = (50+1)^2 = 2500 + 100 + 1 = 2601$. O número de inteiros entre 2500 e 2601 (exclusivo 2500 e 2601) é $2601 - 2500 - 1 = 100$. Esses 100 inteiros são $2501, 2502, \ldots, 2600$.

Nenhum desses 100 inteiros consecutivos pode ser um quadrado perfeito, pois o único quadrado perfeito imediatamente anterior é 2500 e o único imediatamente posterior é 2601. Portanto, os 100 inteiros consecutivos de 2501 a 2600 (inclusive) não são quadrados perfeitos.

Isso prova que existem 100 inteiros consecutivos que não são quadrados perfeitos.

Exercício 4.15: Seja um número inteiro p da forma $4k + 3, k \geq 0$. Então não existem inteiros x, y tais que $p = x^2 + y^2$.

Solução do Exercício 4.15 (Prova por Contradição e Congruências)

Queremos provar que um inteiro p da forma $4k + 3$ (para $k \geq 0$) não pode ser expresso como a soma de dois quadrados perfeitos ($x^2 + y^2$).

Vamos considerar os possíveis restos de um quadrado perfeito quando dividido por 4. Seja n um inteiro.

- **Caso 1:** n **é par.** $n = 2m$ para algum inteiro m. $n^2 = (2m)^2 = 4m^2$. Neste caso, $n^2 \equiv 0 \pmod 4$. (O resto é 0 quando dividido por 4).
- **Caso 2:** n **é ímpar.** $n = 2m + 1$ para algum inteiro m. $n^2 = (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 4(m^2 + m) + 1$. Neste caso, $n^2 \equiv 1 \pmod 4$. (O resto é 1 quando dividido por 4).

Portanto, qualquer quadrado perfeito, quando dividido por 4, tem resto 0 ou 1.

Agora, vamos considerar a soma de dois quadrados perfeitos, $x^2 + y^2$, e seus possíveis restos quando divididos por 4.

- Se $x^2 \equiv 0 \pmod 4$ e $y^2 \equiv 0 \pmod 4$, então $x^2 + y^2 \equiv 0 + 0 \equiv 0 \pmod 4$.
- Se $x^2 \equiv 0 \pmod 4$ e $y^2 \equiv 1 \pmod 4$, então $x^2 + y^2 \equiv 0 + 1 \equiv 1 \pmod 4$.
- Se $x^2 \equiv 1 \pmod 4$ e $y^2 \equiv 0 \pmod 4$, então $x^2 + y^2 \equiv 1 + 0 \equiv 1 \pmod 4$.
- Se $x^2 \equiv 1 \pmod 4$ e $y^2 \equiv 1 \pmod 4$, então $x^2 + y^2 \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod 4$.

Os possíveis restos da soma de dois quadrados perfeitos quando divididos por 4 são 0, 1 ou 2.

Agora, considere o número p dado, que é da forma $4k + 3$. Pela definição, p tem resto 3 quando dividido por 4. Ou seja, $p \equiv 3 \pmod 4$.

Comparamos os possíveis restos de $x^2 + y^2$ com o resto de p: Os possíveis restos de $x^2 + y^2$ são $\{0, 1, 2\}$. O resto de p é $\{3\}$. Não há sobreposição entre os conjuntos de restos.

Isso significa que um número da forma $4k + 3$ nunca pode ser igual à soma de dois quadrados perfeitos, porque eles têm restos diferentes quando divididos por 4.

Portanto, não existem inteiros x, y tais que $p = x^2 + y^2$ se p é da forma $4k + 3$.

Exercício 4.16: Para todo inteiro n, se n não é divisível por 2 ou por 3, então $n^2 - 1$ é divisível por 24.

Solução do Exercício 4.16

Se n não é divisível por 2, então n é ímpar. Podemos escrever $n = 2k + 1$ para algum inteiro k. Se n não é divisível por 3, então $n \equiv 1 \pmod 3$ ou $n \equiv 2 \pmod 3$.

Primeiro, como n é ímpar, podemos expressar $n^2 - 1$ como: $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$. Como n é ímpar, $n - 1$ e $n + 1$ são dois inteiros pares consecutivos. Se $n - 1 = 2k$, então $n + 1 = 2k + 2$. O produto é $(2k)(2k + 2) = 4k(k + 1)$. Sabemos que $k(k + 1)$ é sempre par (produto de dois inteiros consecutivos). Então, $k(k + 1) = 2m$ para algum inteiro m. Substituindo, $n^2 - 1 = 4(2m) = 8m$. Isso mostra que $n^2 - 1$ é divisível por 8.

Agora, precisamos mostrar que $n^2 - 1$ é divisível por 3. Sabemos que n não é divisível por 3. Isso significa $n \equiv 1 \pmod 3$ ou $n \equiv 2 \pmod 3$.

Caso 1: $n \equiv 1 \pmod 3$ Se $n \equiv 1 \pmod 3$, então $n = 3j + 1$ para algum inteiro j. $n^2 - 1 = (3j + 1)^2 - 1 = (9j^2 + 6j + 1) - 1 = 9j^2 + 6j = 3(3j^2 + 2j)$. Neste caso, $n^2 - 1$ é divisível por 3.

Caso 2: $n \equiv 2 \pmod 3$ Se $n \equiv 2 \pmod 3$, então $n = 3j + 2$ para algum inteiro j. $n^2 - 1 = (3j + 2)^2 - 1 = (9j^2 + 12j + 4) - 1 = 9j^2 + 12j + 3 = 3(3j^2 + 4j + 1)$. Neste caso, $n^2 - 1$ é divisível por 3.

Em ambos os casos, $n^2 - 1$ é divisível por 3.

Já mostramos que $n^2 - 1$ é divisível por 8 e é divisível por 3. Como 3 e 8 são números primos entre si ($\text{mdc}(3, 8) = 1$), se um número é divisível por 3 e por 8, ele é divisível pelo produto $3 \times 8 = 24$. Portanto, $n^2 - 1$ é divisível por 24.

Exercício 4.17: Se n é um inteiro não divisível por 3, então n^2 dividido por 3 tem resto 1.

Solução do Exercício 4.17

Este exercício é uma repetição do Exercício 4.11. A prova é idêntica.

Seja n um número inteiro. Se n não é divisível por 3, então n pode ter os seguintes restos quando dividido por 3: 1 ou 2. Podemos expressar n nas seguintes formas:

- Caso 1: $n = 3k + 1$ para algum inteiro k.
- Caso 2: $n = 3k + 2$ para algum inteiro k.

Vamos analisar o quadrado de n, n^2, para cada caso.

Caso 1: $n = 3k + 1$

$$n^2 = (3k + 1)^2 = (3k)^2 + 2(3k)(1) + 1^2$$

$$n^2 = 9k^2 + 6k + 1$$

$$n^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1$$

Neste caso, n^2 tem resto 1 quando dividido por 3.

Caso 2: $n = 3k + 2$

$$n^2 = (3k + 2)^2 = (3k)^2 + 2(3k)(2) + 2^2$$

$$n^2 = 9k^2 + 12k + 4$$

Podemos reescrever 4 como $3 + 1$:

$$n^2 = 9k^2 + 12k + 3 + 1$$

$$n^2 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$$

Neste caso, n^2 tem resto 1 quando dividido por 3.

Em ambos os casos onde n não é divisível por 3, seu quadrado n^2 tem resto 1 quando dividido por 3.

Exercício 4.18: Todo inteiro divisível por 2 e por 3 é divisível por 6.

Solução do Exercício 4.18

Seja n um inteiro. A premissa é que n é divisível por 2 e n é divisível por 3.

Se n é divisível por 2, então existe um inteiro k_1 tal que:

$$n = 2k_1 \quad (*)$$

Se n é divisível por 3, então existe um inteiro k_2 tal que:

$$n = 3k_2 \quad (**)$$

Como n é um múltiplo de 2, n é par. De $(**)$, $n = 3k_2$. Como n é par, $3k_2$ deve ser par. Como 3 é ímpar, para que o produto $3k_2$ seja par, k_2 deve ser par. Então, existe um inteiro m tal que $k_2 = 2m$.

Substituindo $k_2 = 2m$ em $(**)$:

$$n = 3(2m)$$

$$n = 6m$$

Pela definição de divisibilidade, se $n = 6m$ para algum inteiro m, então n é divisível por 6.

Alternativamente, podemos usar o fato de que 2 e 3 são números primos. Se um número é divisível por dois números que são primos entre si, ele é divisível pelo produto deles. Como $\text{mdc}(2, 3) = 1$, se n é divisível por 2 e por 3, então n é divisível por $2 \times 3 = 6$.

Exercício 4.19: O algarismo das unidades do quadrado de qualquer inteiro n é 0, 1, 4, 5, 6 ou 9.

Solução do Exercício 4.19

O algarismo das unidades de um número n^2 é determinado apenas pelo algarismo das unidades de n. Vamos listar todos os possíveis algarismos das unidades para n (0 a 9) e ver o algarismo das unidades de seus quadrados.

- Se o algarismo das unidades de n é 0: $(n = \dots 0)$ $n^2 = (\dots 0)^2 = \dots 00$. O algarismo das unidades é 0.
- Se o algarismo das unidades de n é 1: $(n = \dots 1)$ $n^2 = (\dots 1)^2 = \dots 1$. O algarismo das unidades é 1.
- Se o algarismo das unidades de n é 2: $(n = \dots 2)$ $n^2 = (\dots 2)^2 = \dots 4$. O algarismo das unidades é 4.
- Se o algarismo das unidades de n é 3: $(n = \dots 3)$ $n^2 = (\dots 3)^2 = \dots 9$. O algarismo das unidades é 9.
- Se o algarismo das unidades de n é 4: $(n = \dots 4)$ $n^2 = (\dots 4)^2 = \dots 16$. O algarismo das unidades é 6.
- Se o algarismo das unidades de n é 5: $(n = \dots 5)$ $n^2 = (\dots 5)^2 = \dots 25$. O algarismo das unidades é 5.
- Se o algarismo das unidades de n é 6: $(n = \dots 6)$ $n^2 = (\dots 6)^2 = \dots 36$. O algarismo das unidades é 6.
- Se o algarismo das unidades de n é 7: $(n = \dots 7)$ $n^2 = (\dots 7)^2 = \dots 49$. O algarismo das unidades é 9.
- Se o algarismo das unidades de n é 8: $(n = \dots 8)$ $n^2 = (\dots 8)^2 = \dots 64$. O algarismo das unidades é 4.
- Se o algarismo das unidades de n é 9: $(n = \dots 9)$ $n^2 = (\dots 9)^2 = \dots 81$. O algarismo das unidades é 1.

Os algarismos das unidades dos quadrados são $\{0, 1, 4, 9, 6, 5\}$. Ordenando, os algarismos das unidades do quadrado de qualquer inteiro n são 0, 1, 4, 5, 6 ou 9.

Exercício 4.20: O algarismo das unidades da quarta potência de qualquer inteiro n é 0, 1, 5 ou 6.

Solução do Exercício 4.20

O algarismo das unidades de $n^4 = (n^2)^2$ é determinado pelo algarismo das unidades de n^2. Pelo Exercício 4.19, os possíveis algarismos das unidades de n^2 são $\{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$. Vamos calcular o algarismo das unidades de $(n^2)^2$ para cada um desses possíveis algarismos das unidades:

- Se o algarismo das unidades de n^2 é 0: $(\dots 0)^2 = \dots 0$. O algarismo das unidades de n^4 é 0.
- Se o algarismo das unidades de n^2 é 1: $(\dots 1)^2 = \dots 1$. O algarismo das unidades de n^4 é 1.
- Se o algarismo das unidades de n^2 é 4: $(\dots 4)^2 = \dots 6$. O algarismo das unidades de n^4 é 6.
- Se o algarismo das unidades de n^2 é 5: $(\dots 5)^2 = \dots 5$. O algarismo das unidades de n^4 é 5.
- Se o algarismo das unidades de n^2 é 6: $(\dots 6)^2 = \dots 6$. O algarismo das unidades de n^4 é 6.
- Se o algarismo das unidades de n^2 é 9: $(\dots 9)^2 = \dots 1$. O algarismo das unidades de n^4 é 1.

Os algarismos das unidades de n^4 são $\{0, 1, 6, 5\}$. Ordenando, o algarismo das unidades da quarta potência de qualquer inteiro n é 0, 1, 5 ou 6.

Exercício 4.21: O número $\sqrt{2}$ é irracional.

Solução do Exercício 4.21 (Prova por Contradição)

Vamos provar por contradição. Suponha que $\sqrt{2}$ seja um número racional. Se $\sqrt{2}$ é racional, então ele pode ser escrito como uma fração $\frac{p}{q}$, onde p e q são inteiros, $q \neq 0$, e a fração é irredutível, ou seja, $\mathrm{mdc}(p, q) = 1$.

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado:

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$$

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

Multiplicando por q^2:

$$2q^2 = p^2 \quad (*)$$

Da equação $(*)$, vemos que p^2 é um número par (pois é igual a 2 vezes um inteiro q^2). Se p^2 é par, então p também deve ser par (resultado provado no Exercício 2.2, Questão 2: n^2 é ímpar sse n é ímpar; portanto, n^2 é par sse n é par). Como p é par, podemos escrever $p = 2k$ para algum inteiro k.

Agora, substituímos $p = 2k$ de volta na equação $(*)$:

$$2q^2 = (2k)^2$$

$$2q^2 = 4k^2$$

Dividindo ambos os lados por 2:

$$q^2 = 2k^2$$

Da equação acima, vemos que q^2 é um número par (pois é igual a 2 vezes um inteiro k^2). Se q^2 é par, então q também deve ser par.

Chegamos à conclusão de que p é par e q é par. Isso significa que p e q têm um fator comum de 2. No entanto, no início da prova, supomos que a fração $\frac{p}{q}$ é irredutível, o que significa que $\text{mdc}(p, q) = 1$. Ter p e q ambos pares contradiz $\text{mdc}(p, q) = 1$.

Essa contradição surgiu da nossa suposição inicial de que $\sqrt{2}$ é um número racional. Portanto, a suposição deve ser falsa. Consequentemente, $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Exercício 4.22: Se r é um número irracional, então existe um único inteiro n tal que a distância entre r e n é menor do que $1/2$.

Solução do Exercício 4.22

A afirmação é sobre a existência e unicidade de um inteiro n tal que $|r-n| < 1/2$. Isso é equivalente a $-\frac{1}{2} < r - n < \frac{1}{2}$, ou $n - \frac{1}{2} < r < n + \frac{1}{2}$.

Existência: Considere o número real r. Qualquer número real r está entre dois inteiros consecutivos, ou é um inteiro. Seja $\lfloor r \rfloor$ o maior inteiro menor ou igual a r (função piso). Então, $\lfloor r \rfloor \leq r < \lfloor r \rfloor + 1$.

Vamos analisar a distância de r para $\lfloor r \rfloor$ e para $\lfloor r \rfloor + 1$. Seja $n_1 = \lfloor r \rfloor$ e $n_2 = \lfloor r \rfloor + 1$. A distância entre r e n_1 é $|r - n_1| = r - \lfloor r \rfloor$. A distância entre r e n_2 é $|r - n_2| = |r - (\lfloor r \rfloor + 1)| = (\lfloor r \rfloor + 1) - r$.

Sabemos que $0 \leq r - \lfloor r \rfloor < 1$. Considere o ponto médio entre n_1 e n_2, que é $n_1 + \frac{1}{2}$.

- Se $r - \lfloor r \rfloor < \frac{1}{2}$ (ou seja, r está na primeira metade do intervalo $[\lfloor r \rfloor, \lfloor r \rfloor + 1)$), então a distância de r a $\lfloor r \rfloor$ é menor que $1/2$. Neste caso, $n = \lfloor r \rfloor$. $|r - \lfloor r \rfloor| < 1/2$.

- Se $r - \lfloor r \rfloor > \frac{1}{2}$ (ou seja, r está na segunda metade do intervalo), então a distância de r a $\lfloor r \rfloor + 1$ é menor que $1/2$. Neste caso, $n = \lfloor r \rfloor + 1$. $|r - (\lfloor r \rfloor + 1)| < 1/2$.

- Se $r - \lfloor r \rfloor = \frac{1}{2}$ (ou seja, r está exatamente no ponto médio). Neste caso, $r = \lfloor r \rfloor + \frac{1}{2}$. A distância de r a $\lfloor r \rfloor$ é $1/2$. A distância de r a $\lfloor r \rfloor + 1$ é $1/2$.

A questão diz que r é um número irracional. Se r é irracional, ele não pode ser da forma $k + \frac{1}{2}$ para algum inteiro k, pois $k + \frac{1}{2}$ é um número racional. Portanto, $r - \lfloor r \rfloor \neq \frac{1}{2}$.

Isso significa que r estará sempre em uma das "metades"do intervalo: So $r - \lfloor r \rfloor < \frac{1}{2}$ ou $r - \lfloor r \rfloor > \frac{1}{2}$.

- Se $r - \lfloor r \rfloor < \frac{1}{2}$, escolha $n = \lfloor r \rfloor$. Então $|r - n| < \frac{1}{2}$.

- Se $r - \lfloor r \rfloor > \frac{1}{2}$, escolha $n = \lfloor r \rfloor + 1$. Então $|r - n| < \frac{1}{2}$. (Pois $(\lfloor r \rfloor + 1) - r < 1 - 1/2 = 1/2$).

Em ambos os casos, existe um inteiro n tal que a distância entre r e n é menor que $1/2$.

Unicidade: Suponha, por contradição, que existam dois inteiros distintos, n_1 e n_2, que satisfazem a condição. Ou seja, $|r - n_1| < \frac{1}{2}$ e $|r - n_2| < \frac{1}{2}$. Assumimos, sem perda de generalidade, que $n_1 < n_2$. A menor distância possível entre dois inteiros distintos é 1. Então $|n_1 - n_2| \geq 1$.

Considere a distância entre n_1 e n_2: $|n_1 - n_2| = |(n_1 - r) + (r - n_2)| \leq |n_1 - r| + |r - n_2|$ (Pela Desigualdade Triangular) Sabemos que $|n_1 - r| < \frac{1}{2}$ e $|r - n_2| < \frac{1}{2}$. Então, $|n_1 - n_2| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ $|n_1 - n_2| < 1$

Mas como n_1 e n_2 são inteiros distintos, $|n_1 - n_2|$ deve ser um inteiro maior ou igual a 1. Chegamos à contradição: $|n_1 - n_2| \geq 1$ e $|n_1 - n_2| < 1$. Essa contradição prova que tal n é único.

Portanto, para um número irracional r, existe um único inteiro n tal que a distância entre r e n é menor do que $1/2$.

Exercício 4.23: Se r é um número irracional, então $\frac{1}{r}$ é irracional.

Solução do Exercício 4.23 (Prova por Contradição)

Vamos provar por contradição. Suponha que r seja um número irracional, mas $\frac{1}{r}$ seja um número racional.

Se $\frac{1}{r}$ é racional, então ele pode ser escrito como uma fração $\frac{p}{q}$, onde p e q são inteiros, $q \neq 0$, e $p \neq 0$ (já que r é irracional, $r \neq 0$, então $\frac{1}{r} \neq 0$).

$$\frac{1}{r} = \frac{p}{q}$$

Para encontrar r, podemos inverter ambos os lados da equação (desde que $p \neq 0$, o que já foi estabelecido):

$$r = \frac{q}{p}$$

Sabemos que q e p são inteiros, e $p \neq 0$. Pela definição de número racional, se r pode ser expresso como uma razão de dois inteiros (onde o denominador não é zero), então r é um número racional.

Chegamos à contradição: supomos que r é irracional, mas concluímos que r é racional. Essa contradição surgiu da nossa suposição inicial de que $\frac{1}{r}$ é racional. Portanto, a suposição deve ser falsa. Consequentemente, se r é um número irracional, então $\frac{1}{r}$ é irracional.

Exercício 4.24: Se x e y são números reais, então $\max(x, y) + \min(x, y) = x + y$.

Solução do Exercício 4.24

Vamos provar esta afirmação por casos, considerando a relação entre x e y.

Caso 1: $x \geq y$ Se $x \geq y$, então: $\max(x, y) = x$ $\min(x, y) = y$ Substituindo na equação: $\max(x, y) + \min(x, y) = x + y$. Isso é igual ao lado direito da afirmação.

Caso 2: $x < y$ Se $x < y$, então: $\max(x, y) = y$ $\min(x, y) = x$ Substituindo na equação: $\max(x, y) + \min(x, y) = y + x$. Isso é igual ao lado direito da afirmação.

Em ambos os casos, a afirmação $\max(x, y) + \min(x, y) = x + y$ é verdadeira. Portanto, para quaisquer números reais x e y, a afirmação é verdadeira.

Exercício 4.25: Se m e n são inteiros ímpares e $m \neq n$, então existe um único inteiro r tal que $|m - r| = |n - r|$.

Solução do Exercício 4.25

Queremos encontrar um inteiro r tal que $|m - r| = |n - r|$. Esta equação significa que r está à mesma distância de m e de n. Geometricamente, r é o ponto médio do segmento de reta entre m e n. Algebricamente, isso implica duas possibilidades: 1. $m - r = n - r$ 2. $m - r = -(n - r)$

Possibilidade 1: $m - r = n - r$ Somando r a ambos os lados: $m = n$ No entanto, a premissa do problema afirma que $m \neq n$. Portanto, esta possibilidade não produz uma solução para r sob as condições dadas.

Possibilidade 2: $m - r = -(n - r)$ $m - r = -n + r$ Somando r a ambos os lados: $m = -n + 2r$ Somando n a ambos os lados: $m + n = 2r$ Dividindo por 2:

$$r = \frac{m+n}{2}$$

Agora, precisamos verificar se este r é um inteiro único. **Existência:** Sabemos que m e n são inteiros ímpares. Um número ímpar pode ser escrito como $2k+1$. Então, $m = 2k_1 + 1$ e $n = 2k_2 + 1$ para alguns inteiros k_1, k_2.

$$r = \frac{(2k_1 + 1) + (2k_2 + 1)}{2}$$

$$r = \frac{2k_1 + 2k_2 + 2}{2}$$

$$r = \frac{2(k_1 + k_2 + 1)}{2}$$

$$r = k_1 + k_2 + 1$$

Como k_1 e k_2 são inteiros, a soma $k_1 + k_2 + 1$ é um inteiro. Portanto, r é um inteiro. A existência de tal inteiro r está provada.

Unicidade: O processo de resolução da equação $|m - r| = |n - r|$ levou a duas possibilidades. A primeira ($m = n$) foi excluída pela premissa $m \neq n$. A segunda possibilidade levou a uma única solução para r, $r = \frac{m+n}{2}$. Uma vez que r é determinado por m e n por uma fórmula única, não pode haver outro valor para r que satisfaça a equação. Portanto, este inteiro r é único.

Exercício 4.26: Existem dois inteiros consecutivos, tal que um é um quadrado perfeito e o outro é um cubo perfeito.

Solução do Exercício 4.26

Queremos encontrar dois inteiros consecutivos k e $k + 1$ tais que um é um quadrado perfeito e o outro é um cubo perfeito. Isso significa que: Ou $k = a^2$ e $k + 1 = b^3$ para alguns inteiros a, b. Ou $k = b^3$ e $k + 1 = a^2$ para alguns inteiros a, b.

Caso 1: $k = a^2$ **e** $k + 1 = b^3$ Neste caso, $b^3 - a^2 = 1$. Esta é uma equação Diofantina. A solução mais óbvia é $a = 3$ e $b = 2$: $2^3 - 3^2 = 8 - 9 = -1$. (Quase lá, mas não é 1)

Consideremos a equação de Catalan (ou Mihailescu's Theorem), que afirma que a única solução em números naturais de $x^a - y^b = 1$ para $a, b > 1, x, y \geq 1$ é $x = 3, a = 2, y = 2, b = 3$. Ou seja, $3^2 - 2^3 = 9 - 8 = 1$.

Então, se $a^2 - b^3 = 1$, a única solução para inteiros positivos é $a = 3, b = 2$. Isso implicaria $k + 1 = a^2 = 3^2 = 9$, e $k = b^3 = 2^3 = 8$. Assim, $k = 8$ e $k + 1 = 9$. 8 é um cubo perfeito ($2^3 = 8$). 9 é um quadrado perfeito ($3^2 = 9$). Estes são inteiros consecutivos.

Este é o par que procuramos.

Caso 2: $k = b^3$ e $k+1 = a^2$ Neste caso, $a^2 - b^3 = 1$. Pelo Teorema de Catalan, a única solução para inteiros positivos é $a = 3$ e $b = 2$. Isso significa $a^2 = 3^2 = 9$ e $b^3 = 2^3 = 8$. Então, temos $k + 1 = 9$ e $k = 8$. Novamente, os inteiros consecutivos são 8 e 9.

Como encontramos um par de inteiros consecutivos (8 e 9) onde 8 é um cubo perfeito e 9 é um quadrado perfeito, a afirmação é verdadeira.

5.7 Exercícios

Exercício 5.17: Prove que todo número natural $m > 0$ pode ser escrito como soma de potências de 2, isto é, existem números inteiros $n_1, n_2, \ldots, n_r$, com $0 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_r$, tais que $m = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \cdots + 2^{n_r}$.

Solução do Exercício 5.17 (Existência da Representação Binária)

Este exercício pede para provar a existência da representação binária de qualquer número natural $m > 0$. Podemos provar isso usando indução forte.

Seja $P(m)$ a proposição "o número natural $m > 0$ pode ser escrito como soma de potências distintas de 2".

Passo Base (m=1): Para $m = 1$, temos $1 = 2^0$. Aqui, $n_1 = 0$. O passo base é verdadeiro. $P(1)$ é verdadeira.

Passo Indutivo: Suponha que $P(j)$ seja verdadeira para todos os inteiros j tais que $1 \leq j < k$, para algum inteiro $k > 1$. (Hipótese de Indução Forte) Precisamos provar que $P(k)$ é verdadeira.

Considere o número k.

- **Caso 1: k é par.** Se k é par, então $k = 2j$ para algum inteiro j. Como $k > 1$, $j = k/2$ é um inteiro positivo e $j < k$. Pela Hipótese de Indução, j pode ser escrito como uma soma de potências distintas de 2: $j = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \cdots + 2^{n_r}$, onde $0 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_r$. Multiplicando por 2, obtemos a representação para k: $k = 2j = 2(2^{n_1} + 2^{n_2} + \cdots + 2^{n_r})$ $k = 2^{n_1+1} + 2^{n_2+1} + \cdots + 2^{n_r+1}$ As potências $n_i + 1$ são distintas e maiores ou iguais a 1. Portanto, k pode ser escrito como uma soma de potências distintas de 2.

- **Caso 2: k é ímpar.** Se k é ímpar, então $k - 1$ é par. $k - 1 = 2j$ para algum inteiro j. Como $k > 1$, $k - 1$ é um inteiro positivo e $j = (k - 1)/2$ é um inteiro não-negativo. Se $j = 0$, então $k - 1 = 0 \implies k = 1$, que já foi tratado no passo base. Se $j > 0$, então $j < k$. Pela Hipótese de Indução, j pode ser escrito como uma soma de potências distintas de 2: $j = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \cdots + 2^{n_r}$, onde $0 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_r$. Então, $k - 1 = 2(2^{n_1} + 2^{n_2} + \cdots + 2^{n_r}) = 2^{n_1+1} + 2^{n_2+1} + \cdots + 2^{n_r+1}$. E $k = (k - 1) + 1 = 2^{n_1+1} + 2^{n_2+1} + \cdots + 2^{n_r+1} + 2^0$. Como $n_1 \geq 0$, todas as potências $n_i + 1$ são maiores ou iguais a 1. A potência $2^0 = 1$ é distinta de todas as outras. Portanto, k pode ser escrito como uma soma de potências distintas de 2.

Em ambos os casos, $P(k)$ é verdadeira.

Conclusão: Pelo Princípio da Indução Matemática Forte, a proposição $P(m)$ é verdadeira para todo número natural $m > 0$. A unicidade da representação binária é uma propriedade adicional (que não é pedida aqui), mas é garantida.

Exercício 5.18: Sejam m moedas, uma das quais é falsa e tem peso diferente das demais. Use o exercício anterior mostrar, por indução, que bastam n_r pesagens com uma balança de pratos para descobrir a moeda falsa.

Solução do Exercício 5.18

O Exercício 5.17 afirma que qualquer número natural $m > 0$ pode ser escrito como soma de potências distintas de 2 (representação binária). A questão aqui parece ter um erro de digitação, pois a representação binária do número de moedas (m) tem n_r como o maior expoente, não o número de pesagens. Geralmente, para m moedas, k pesagens conseguem resolver até 3^k possibilidades (para casos onde a moeda é mais leve ou mais pesada e se sabe se é mais leve ou mais pesada), ou $(3^k - 1)/2$ (para casos em que não se sabe se é mais leve ou mais pesada). A referência a n_r sugere uma conexão com a representação binária, o que não é o usual para balanças de prato, que são ternárias.

Assumindo que a questão na verdade se refere ao número de pesagens necessárias usando um sistema que aproveita a base 3 (ternária), que é o que balanças de prato fazem (esquerda, direita, igual), e que o problema pode estar simplificando para uma potência de 2, ou que se refere a um tipo diferente de pesagem.

Se considerarmos que "soma de potências de 2"é uma indicação da estrutura da indução, e que o problema se refere a uma versão simplificada ou uma analogia, vamos tentar provar que bastam k pesagens para 2^k moedas. No entanto, o problema fala em n_r pesagens, o que é o número de termos na soma de potências de 2, ou o maior expoente. A formulação é confusa.

Se a pergunta é "basta k pesagens para $m = 2^k$ moedas", isso pode ser provado, mas não usa o Exercício 5.17 de forma direta como "soma de potências de 2".

Vamos reinterpretar: talvez n_r não seja o número de pesagens, mas sim o número de bits na representação binária. Isso também não se encaixa bem na balança de pratos.

A frase "Use o exercício anterior mostrar, por indução, que bastam n_r pesagens"é a parte chave. Se $m = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \cdots + 2^{n_r}$, e n_r é o maior expoente, então n_r pode ser $\lfloor \log_2 m \rfloor$. No entanto, o problema de pesagem com balança de pratos tem solução em base 3.

Hipótese de Reinterpretação: O problema pode estar referindo-se a um tipo de "pesagem"binária (como se pudéssemos identificar "metade"das moedas). Ou, mais provável, há uma confusão na formulação ou é uma introdução a um conceito onde a quantidade de informação binária (potências de 2) é relevante, mas não diretamente o sistema da balança.

Se a intenção é simplesmente usar indução para mostrar que k pesagens podem lidar com 3^k moedas (identificando qual é falsa E se é mais leve ou pesada): Seja N o número de moedas. k o número de pesagens. Em cada pesagem, você pode dividir as moedas em 3 grupos aproximadamente iguais: A, B, e C (onde C são as moedas que não estão na balança). 1. Se $A = B$, a moeda falsa está em C. 2. Se $A < B$, a moeda falsa está em A (e é leve) ou em B (e é pesada). 3. Se $A > B$, a moeda falsa está em A (e é pesada) ou em B (e é leve).

Isso não se conecta facilmente com potências de 2. O exercício 5.17 é a base para a representação binária. O problema de encontrar a moeda falsa com uma balança de pratos é classicamente resolvido em base 3.

Conclusão sobre 5.18: A formulação desta questão é problemática em relação ao Exercício 5.17 e ao método padrão de balança de pratos. Se n_r se refere ao maior expoente na representação binária de m, não faz sentido para o número de pesagens. Se é uma questão de indução para um número k de pesagens, não está diretamente relacionado à representação binária de m.

Devido à aparente inconsistência, não posso fornecer uma prova formal que conecte diretamente "soma de potências de 2"com "pesagens em balança de pratos para descobrir uma moeda falsa"da maneira que o enunciado sugere, a menos que haja um contexto ou uma interpretação muito específica (e não padrão) do problema.

Vou pular a solução formal do Exercício 5.18 pela ambiguidade, a menos que você possa fornecer mais clareza sobre o significado de n_r neste contexto ou a conexão pretendida com o Exercício 5.17.

Exercício 5.19: Os números de Fibonacci $F_0, F_1, F_2, \ldots$ são definidos pelas seguintes regras: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para todo número natural n maior ou igual a 2. Prove, por indução, que:

Solução do Exercício 5.19

1. **$(\forall n \in \mathbb{N})$ $F_n < ((\frac{5}{3})^n)$.**

   Seja $P(n)$ a proposição $F_n < (\frac{5}{3})^n$. Precisamos de alguns passos base, pois a recorrência envolve termos anteriores.

   Passos Base: Para $n = 0$: $F_0 = 0$. $(\frac{5}{3})^0 = 1$. $0 < 1$. $P(0)$ é verdadeira. Para $n = 1$: $F_1 = 1$. $(\frac{5}{3})^1 = \frac{5}{3} \approx 1.667$. $1 < 1.667$. $P(1)$ é verdadeira. Para $n = 2$: $F_2 = 1$. $(\frac{5}{3})^2 = \frac{25}{9} \approx 2.778$. $1 < 2.778$. $P(2)$ é verdadeira.

   Passo Indutivo: Suponha que $P(j)$ seja verdadeira para todos os inteiros j tais que $0 \le j \le k$, para algum inteiro $k \ge 1$. Isto é, $F_j < (\frac{5}{3})^j$ para $0 \le j \le k$ (Hipótese de Indução Forte).

   Precisamos provar que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, que $F_{k+1} < (\frac{5}{3})^{k+1}$.

   Pela definição da sequência de Fibonacci (para $k+1 \ge 2$, ou $k \ge 1$): $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$

   Pela Hipótese de Indução: $F_k < (\frac{5}{3})^k$ $F_{k-1} < (\frac{5}{3})^{k-1}$

   Somando as desigualdades: $F_{k+1} < (\frac{5}{3})^k + (\frac{5}{3})^{k-1}$ Fatorando o termo comum $(\frac{5}{3})^{k-1}$: $F_{k+1} < (\frac{5}{3})^{k-1}\left(\frac{5}{3} + 1\right)$ $F_{k+1} < (\frac{5}{3})^{k-1}\left(\frac{5+3}{3}\right)$ $F_{k+1} < (\frac{5}{3})^{k-1}\left(\frac{8}{3}\right)$

   Para que $P(k+1)$ seja verdadeira, precisamos que $F_{k+1} < (\frac{5}{3})^{k+1}$. Então, precisamos mostrar que $(\frac{5}{3})^{k-1}\left(\frac{8}{3}\right) \le (\frac{5}{3})^{k+1}$. Dividindo ambos os lados por $(\frac{5}{3})^{k-1}$ (que é positivo): $\frac{8}{3} \le (\frac{5}{3})^2$ $\frac{8}{3} \le \frac{25}{9}$

   Para comparar, podemos encontrar um denominador comum: $\frac{8\cdot 3}{3\cdot 3} \le \frac{25}{9}$ $\frac{24}{9} \le \frac{25}{9}$ Esta desigualdade é verdadeira.

   Como $F_{k+1} < (\frac{5}{3})^{k-1}\left(\frac{8}{3}\right)$ e $(\frac{5}{3})^{k-1}\left(\frac{8}{3}\right) \le (\frac{5}{3})^{k+1}$, pela propriedade transitiva da desigualdade, temos: $F_{k+1} < (\frac{5}{3})^{k+1}$. Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

   Conclusão: Pelo Princípio da Indução Matemática Forte, a proposição $P(n)$ é verdadeira para todos os números naturais n.

2. **$(\forall m, n \in \mathbb{N})$ $F_m F_n + F_{m-1} F_{n-1} = F_{m+n-1}$.** Para F_{m-1} e F_{n-1} serem definidos, assumimos $m, n \ge 1$. Se for F_0, ele será 0. Vamos provar esta identidade por indução em n. Seja $P(n)$ a proposição $F_m F_n + F_{m-1} F_{n-1} = F_{m+n-1}$ para um m fixo (assumindo $m \ge 1$).

   Passo Base (n=1): Para $n = 1$: Lado esquerdo: $F_m F_1 + F_{m-1} F_0$. Sabemos $F_1 = 1$ e $F_0 = 0$. $F_m \cdot 1 + F_{m-1} \cdot 0 = F_m$. Lado direito: $F_{m+1-1} = F_m$. Como $F_m = F_m$, o passo base é verdadeiro. $P(1)$ é verdadeira.

Passo Base (n=2): Para $n = 2$: Lado esquerdo: $F_m F_2 + F_{m-1} F_1$. Sabemos $F_2 = 1$ e $F_1 = 1$. $F_m \cdot 1 + F_{m-1} \cdot 1 = F_m + F_{m-1}$. Pela definição de Fibonacci, $F_m + F_{m-1} = F_{m+1}$. Lado direito: $F_{m+2-1} = F_{m+1}$. Como $F_{m+1} = F_{m+1}$, o segundo passo base é verdadeiro. $P(2)$ é verdadeira. (Precisamos de dois passos base para indução forte na segunda variável n, já que a identidade de Fibonacci é uma recorrência de ordem 2).

Passo Indutivo: Suponha que $P(j)$ seja verdadeira para todos os inteiros j tais que $1 \leq j \leq k$, para algum inteiro $k \geq 2$. Isto é, $F_m F_j + F_{m-1} F_{j-1} = F_{m+j-1}$ para $1 \leq j \leq k$ (Hipótese de Indução Forte).

Precisamos provar que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, que $F_m F_{k+1} + F_{m-1} F_{(k+1)-1} = F_{m+(k+1)-1}$. Isso é $F_m F_{k+1} + F_{m-1} F_k = F_{m+k}$.

Começamos com o lado esquerdo de $P(k+1)$: $F_m F_{k+1} + F_{m-1} F_k$ Pela definição de Fibonacci, $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$. Então, substituímos F_{k+1}: $F_m(F_k + F_{k-1}) + F_{m-1} F_k$ Distribuindo F_m: $F_m F_k + F_m F_{k-1} + F_{m-1} F_k$ Reorganizando os termos: $(F_m F_k + F_{m-1} F_k) + F_m F_{k-1}$ Fatorando F_k do primeiro par de termos: $F_k(F_m + F_{m-1}) + F_m F_{k-1}$ Pela definição de Fibonacci, $F_m + F_{m-1} = F_{m+1}$: $F_k F_{m+1} + F_m F_{k-1}$

Agora, precisamos reescrever $F_k F_{m+1} + F_m F_{k-1}$ usando a Hipótese de Indução. Considere a Hipótese de Indução para $j = k$ e $j = k-1$: $F_m F_k + F_{m-1} F_{k-1} = F_{m+k-1}$ (para $P(k)$) $F_m F_{k-1} + F_{m-1} F_{k-2} = F_{m+k-2}$ (para $P(k-1)$)

Nosso termo atual é $F_k F_{m+1} + F_m F_{k-1}$. Isso não é exatamente a forma da hipótese de indução.

Vamos tentar uma abordagem diferente para o passo indutivo. Partimos de F_{m+k}. $F_{m+k} = F_{m+k-1} + F_{m+k-2}$ Pela Hipótese de Indução para $j = k$ e $j = k-1$: $F_{m+k-1} = F_m F_k + F_{m-1} F_{k-1}$ $F_{m+k-2} = F_m F_{k-1} + F_{m-1} F_{k-2}$

Substituindo: $F_{m+k} = (F_m F_k + F_{m-1} F_{k-1}) + (F_m F_{k-1} + F_{m-1} F_{k-2})$ $F_{m+k} = F_m F_k + F_m F_{k-1} + F_{m-1} F_{k-1} + F_{m-1} F_{k-2}$ $F_{m+k} = F_m(F_k + F_{k-1}) + F_{m-1}(F_{k-1} + F_{k-2})$ Pela definição de Fibonacci, $(F_k + F_{k-1}) = F_{k+1}$ e $(F_{k-1} + F_{k-2}) = F_k$. $F_{m+k} = F_m F_{k+1} + F_{m-1} F_k$.

Este é o lado esquerdo da proposição $P(k+1)$ que queríamos provar. Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

Conclusão: Pelo Princípio da Indução Matemática Forte, a proposição $F_m F_n + F_{m-1} F_{n-1} = F_{m+n-1}$ é verdadeira para todos os números naturais $m, n \geq 1$.

3. **($\forall n \in \mathbb{N}$) $S_n = F_n - 1$ onde S_n é o número de somas realizadas ao se calcular F_n.**

   Esta questão parece mal formulada ou ambígua. S_n geralmente se refere à soma dos primeiros n termos de uma sequência. No entanto, aqui é "o número de somas realizadas ao se calcular F_n". A definição de F_n é $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Para calcular F_n a partir de F_0 e F_1, quantas somas são realizadas?

   Vamos analisar o número de somas: $F_0 = 0$ (0 somas) $F_1 = 1$ (0 somas) $F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$ (1 soma) $F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$ (1 soma) $F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$ (1 soma)

   Se S_n é o número de somas para *obter* F_n usando a definição recursiva. $S_0 = 0, S_1 = 0$. $S_n = S_{n-1} + S_{n-2} + 1$ (uma soma para combinar F_{n-1} e F_{n-2}). Se essa é a recorrência de S_n, então: $S_2 = S_1 + S_0 + 1 = 0 + 0 + 1 = 1$. $S_3 = S_2 + S_1 + 1 = 1 + 0 + 1 = 2$. $S_4 = S_3 + S_2 + 1 = 2 + 1 + 1 = 4$. $S_5 = S_4 + S_3 + 1 = 4 + 2 + 1 = 7$.

A proposição é $S_n = F_n - 1$. Para $n = 0$: $S_0 = 0$. $F_0 - 1 = 0 - 1 = -1$. Não é verdade $(0 \neq -1)$. Para $n = 1$: $S_1 = 0$. $F_1 - 1 = 1 - 1 = 0$. Verdadeiro. Para $n = 2$: $S_2 = 1$. $F_2 - 1 = 1 - 1 = 0$. Não é verdade $(1 \neq 0)$.

A proposição $S_n = F_n - 1$ não parece ser verdadeira para a definição usual de "número de somas realizadas".

Reinterpretação da S_n: Talvez S_n se refira à soma dos primeiros n números de Fibonacci, ou algo similar. Se $S_n = \sum_{i=0}^{n} F_i$: $S_0 = F_0 = 0$. $S_1 = F_0 + F_1 = 0+1 = 1$. $S_2 = F_0 + F_1 + F_2 = 0 + 1 + 1 = 2$. $S_3 = 0 + 1 + 1 + 2 = 4$. A identidade $F_0 + F_1 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$ é uma identidade conhecida. Então, se $S_n = \sum_{i=0}^{n} F_i$, a proposição seria $F_{n+2} - 1 = F_n - 1$, o que implicaria $F_{n+2} = F_n$, que é falso.

A formulação "número de somas realizadas ao se calcular F_n"é a fonte da ambiguidade. Se a questão se refere a uma versão iterativa, onde F_n é calculado de F_2 até F_n, então o número de somas é $n - 1$. Para $n = 0, 1$, 0 somas. Para $n = 2$, 1 soma $(F_2 = F_1 + F_0)$. Para $n = 3$, 2 somas (F_2, F_3). $S_n = n - 1$ para $n \geq 1$. Se $S_n = n - 1$, então $n - 1 = F_n - 1 \implies n = F_n$. Isso é verdadeiro para $n = 1$ $(1 = F_1)$, $n = 5$ $(5 = F_5)$, mas não para outros n (e.g., $F_2 = 1 \neq 2$, $F_3 = 2 \neq 3$, $F_4 = 3 \neq 4$).

Dado que a questão é ambígua e a proposição $S_n = F_n - 1$ não se encaixa em interpretações comuns de "número de somas"ou "soma dos termos", vou assumir que há um erro na questão e não posso prová-la como está.

Exercício 5.20: Sejam α e β as duas soluções da equação $x^2 - x - 1 = 0$, com $\alpha > 0$. Prove que $F_n = (\alpha^n - \beta^n)/(\alpha - \beta)$, para todo número natural $n \in \mathbb{N}$.

Solução do Exercício 5.20 (Fórmula de Binet)

A equação característica da sequência de Fibonacci é $x^2 - x - 1 = 0$. As raízes desta equação são α e β. Usando a fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Dado que $\alpha > 0$, temos:

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{(a proporção áurea)}$$

$$\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Note que $\alpha - \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$.

A proposição a ser provada é $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$.

Passo Base (n=0): Para $n = 0$: Lado esquerdo: $F_0 = 0$. Lado direito: $\frac{\alpha^0-\beta^0}{\alpha-\beta} = \frac{1-1}{\alpha-\beta} = \frac{0}{\alpha-\beta} = 0$. Como $0 = 0$, o passo base é verdadeiro. $P(0)$ é verdadeira.

Passo Base (n=1): Para $n = 1$: Lado esquerdo: $F_1 = 1$. Lado direito: $\frac{\alpha^1-\beta^1}{\alpha-\beta} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta} = 1$. Como $1 = 1$, o passo base é verdadeiro. $P(1)$ é verdadeira.

Passo Indutivo: Suponha que a proposição seja verdadeira para todos os inteiros j tais que $0 \leq j \leq k$, para algum inteiro $k \geq 1$. Isto é, suponha que $F_j = \frac{\alpha^j-\beta^j}{\alpha-\beta}$ para $0 \leq j \leq k$ (Hipótese de Indução Forte).

Precisamos provar que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, $F_{k+1} = \frac{\alpha^{k+1}-\beta^{k+1}}{\alpha-\beta}$.

Pela definição da sequência de Fibonacci (para $k+1 \geq 2$, ou $k \geq 1$): $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$

Pela Hipótese de Indução, podemos substituir F_k e F_{k-1}: $F_{k+1} = \frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta} + \frac{\alpha^{k-1}-\beta^{k-1}}{\alpha-\beta}$ Combine os termos sobre um denominador comum: $F_{k+1} = \frac{(\alpha^k-\beta^k)+(\alpha^{k-1}-\beta^{k-1})}{\alpha-\beta}$ Agrupe os termos com α e os termos com β: $F_{k+1} = \frac{(\alpha^k+\alpha^{k-1})-(\beta^k+\beta^{k-1})}{\alpha-\beta}$ Fatore α^{k-1} e β^{k-1}: $F_{k+1} = \frac{\alpha^{k-1}(\alpha+1)-\beta^{k-1}(\beta+1)}{\alpha-\beta}$

Como α e β são raízes da equação $x^2 - x - 1 = 0$, elas satisfazem a equação. Então, $x^2 = x+1$. Portanto, $\alpha^2 = \alpha + 1$ e $\beta^2 = \beta + 1$.

Substitua $\alpha + 1$ por α^2 e $\beta + 1$ por β^2: $F_{k+1} = \frac{\alpha^{k-1}(\alpha^2)-\beta^{k-1}(\beta^2)}{\alpha-\beta}$ $F_{k+1} = \frac{\alpha^{k+1}-\beta^{k+1}}{\alpha-\beta}$

Este é o lado direito da proposição $P(k+1)$. Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

Conclusão: Pelo Princípio da Indução Matemática Forte, a proposição $F_n = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$ é verdadeira para todo número natural $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 5.21: Seja x um número real diferente de zero, tal que $x + \frac{1}{x}$ é um número inteiro. Prove que, para todo número natural n, $x^n + \frac{1}{x^n}$ é inteiro.

Solução do Exercício 5.21 (por Indução Matemática)

Seja $P(n)$ a proposição "$x^n + \frac{1}{x^n}$ é um número inteiro". Sabemos que $x \neq 0$ e $x + \frac{1}{x} = k$ para algum inteiro k.

Passo Base (n=1): Para $n = 1$, a proposição é $x^1 + \frac{1}{x^1}$, que é $x + \frac{1}{x}$. Pela premissa, $x + \frac{1}{x}$ é um número inteiro. Então, o passo base é verdadeiro. $P(1)$ é verdadeira.

Passo Base (n=2): Para $n = 2$, a proposição é $x^2 + \frac{1}{x^2}$. Sabemos que $(x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$. Então, $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$. Como $x + \frac{1}{x}$ é um inteiro (k), então $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ é um inteiro (k^2). E $k^2 - 2$ é um inteiro. Portanto, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ é um inteiro. $P(2)$ é verdadeira.

Passo Indutivo: Suponha que $P(j)$ seja verdadeira para todos os inteiros j tais que $1 \leq j \leq k$, para algum inteiro $k \geq 2$. Isto é, suponha que $x^j + \frac{1}{x^j}$ é um inteiro para $1 \leq j \leq k$ (Hipótese de Indução Forte).

Precisamos provar que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, que $x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}$ é um inteiro.

Considere o produto de $(x + \frac{1}{x})$ e $(x^k + \frac{1}{x^k})$:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) = x \cdot x^k + x \cdot \frac{1}{x^k} + \frac{1}{x} \cdot x^k + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^k}$$
$$= x^{k+1} + x^{1-k} + x^{k-1} + x^{-(k+1)}$$
$$= \left(x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}\right) + \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right)$$

Reorganizando para isolar $x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}$:

$$x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) - \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right)$$

Pela premissa, $x + \frac{1}{x}$ é um inteiro. Pela Hipótese de Indução, $x^k + \frac{1}{x^k}$ é um inteiro (para $j = k$) e $x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}$ é um inteiro (para $j = k - 1$).

Se $(x + \frac{1}{x})$ é inteiro e $(x^k + \frac{1}{x^k})$ é inteiro, então o produto $\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right)$ é um inteiro. Se $x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}$ é um inteiro, então a diferença entre dois inteiros também é um inteiro. Portanto, $x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}$ é um inteiro. $P(k + 1)$ é verdadeira.

Conclusão: Pelo Princípio da Indução Matemática Forte, a proposição $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n.

Exercício 5.22: Mostre a validade das seguintes fórmulas:

1. $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Solução do Exercício 5.22, Parte 1 (por Indução Matemática)

Seja $P(n)$ a proposição $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Passo Base (n=1): Para $n = 1$, a soma é 1. A fórmula nos dá $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$. Como $1 = 1$, o passo base é verdadeiro. $P(1)$ é verdadeira.

Passo Indutivo: Suponha que $P(k)$ seja verdadeira para algum inteiro positivo $k \geq 1$. Isto é, suponha que $1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ (Hipótese de Indução).

Precisamos provar que $P(k + 1)$ é verdadeira, ou seja, que $1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Começamos com o lado esquerdo da equação $P(k + 1)$:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1)$$

Pela Hipótese de Indução, sabemos que $1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$. Substituindo:

$$\frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1)$$

Fatorando $(k + 1)$:

$$(k + 1)\left(\frac{k}{2} + 1\right)$$

$$(k + 1)\left(\frac{k + 2}{2}\right)$$

$$\frac{(k + 1)(k + 2)}{2}$$

Este é o lado direito da equação $P(k + 1)$. Portanto, $P(k + 1)$ é verdadeira.

Conclusão: Pelo Princípio da Indução Matemática, a proposição $P(n)$ é verdadeira para todos os inteiros positivos n.

2. $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$**.**

Solução do Exercício 5.22, Parte 2 (por Indução Matemática)

Seja $P(n)$ a proposição $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Passo Base (n=1): Para $n = 1$, a soma é $1^2 = 1$. A fórmula nos dá $\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} = \frac{6}{6} = 1$. Como $1 = 1$, o passo base é verdadeiro. $P(1)$ é verdadeira.

Passo Indutivo: Suponha que $P(k)$ seja verdadeira para algum inteiro positivo $k \geq 1$. Isto é, suponha que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ (Hipótese de Indução).

Precisamos provar que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

Começamos com o lado esquerdo da equação $P(k+1)$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2$$

Pela Hipótese de Indução, sabemos que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$. Substituindo:

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

Para combinar os termos, fatoramos $(k+1)$ e encontramos um denominador comum:

$$(k+1)\left(\frac{k(2k+1)}{6} + (k+1)\right)$$

$$(k+1)\left(\frac{2k^2+k}{6} + \frac{6(k+1)}{6}\right)$$

$$(k+1)\left(\frac{2k^2+k+6k+6}{6}\right)$$

$$(k+1)\left(\frac{2k^2+7k+6}{6}\right)$$

Fatoramos o trinômio $2k^2 + 7k + 6 = (k+2)(2k+3)$:

$$(k+1)\left(\frac{(k+2)(2k+3)}{6}\right)$$

$$\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Este é o lado direito da equação $P(k+1)$. Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

Conclusão: Pelo Princípio da Indução Matemática, a proposição $P(n)$ é verdadeira para todos os inteiros positivos n.

3. $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$**.**

Solução do Exercício 5.22, Parte 3 (por Indução Matemática)

Seja $P(n)$ a proposição $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

Passo Base (n=1): Para $n = 1$, o último termo é $(2 \cdot 1 - 1)^2 = 1^2 = 1$. A soma é 1. A fórmula nos dá $\frac{1(2\cdot 1-1)(2\cdot 1+1)}{3} = \frac{1(1)(3)}{3} = 1$. Como $1 = 1$, o passo base é verdadeiro. $P(1)$ é verdadeira.

Passo Indutivo: Suponha que $P(k)$ seja verdadeira para algum inteiro positivo $k \geq 1$. Isto é, suponha que $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$ (Hipótese de Indução).

Precisamos provar que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, que $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1)^2 + (2(k+1)-1)^2 = \frac{(k+1)(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}{3}$. O termo $(2(k+1)-1)^2 = (2k+2-1)^2 = (2k+1)^2$. O lado direito de $P(k+1)$ deve ser $\frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}$.

Começamos com o lado esquerdo da equação $P(k+1)$:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1)^2 + (2k+1)^2$$

Pela Hipótese de Indução, sabemos que $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$. Substituindo:

$$\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2$$

Para combinar os termos, fatoramos $(2k+1)$ e encontramos um denominador comum:

$$(2k+1)\left(\frac{k(2k-1)}{3} + (2k+1)\right)$$

$$(2k+1)\left(\frac{2k^2-k}{3} + \frac{3(2k+1)}{3}\right)$$

$$(2k+1)\left(\frac{2k^2-k+6k+3}{3}\right)$$

$$(2k+1)\left(\frac{2k^2+5k+3}{3}\right)$$

Fatoramos o trinômio $2k^2 + 5k + 3$. Podemos testar $(k+1)$ como fator. Se $k = -1$, $2(-1)^2 + 5(-1) + 3 = 2 - 5 + 3 = 0$. Então $(k+1)$ é um fator. $(2k^2 + 5k + 3) = (k+1)(2k+3)$.

Substituindo de volta:

$$(2k+1)\left(\frac{(k+1)(2k+3)}{3}\right)$$

$$\frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}$$

Este é o lado direito da equação $P(k+1)$. Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

Conclusão: Pelo Princípio da Indução Matemática, a proposição $P(n)$ é verdadeira para todos os inteiros positivos n.

4. $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$**.**

Solução do Exercício 5.22, Parte 4 (por Indução Matemática)

Seja $P(n)$ a proposição $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Passo Base (n=1): Para $n = 1$, a soma é $1^3 = 1$. A fórmula nos dá $\left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2 = \left[\frac{1\cdot 2}{2}\right]^2 = [1]^2 = 1$. Como $1 = 1$, o passo base é verdadeiro. $P(1)$ é verdadeira.

Passo Indutivo: Suponha que $P(k)$ seja verdadeira para algum inteiro positivo $k \geq 1$. Isto é, suponha que $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$ (Hipótese de Indução).

Precisamos provar que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, que $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \left[\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}\right]^2 = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$.

Começamos com o lado esquerdo da equação $P(k+1)$:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3$$

Pela Hipótese de Indução, sabemos que $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$. Substituindo:

$$\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3$$

$$\frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

Para combinar os termos, fatoramos $(k+1)^2$:

$$(k+1)^2 \left(\frac{k^2}{4} + (k+1)\right)$$

$$(k+1)^2 \left(\frac{k^2}{4} + \frac{4(k+1)}{4}\right)$$

$$(k+1)^2 \left(\frac{k^2 + 4k + 4}{4}\right)$$

Reconhecemos que $k^2 + 4k + 4 = (k+2)^2$.

$$(k+1)^2 \left(\frac{(k+2)^2}{4}\right)$$

$$\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

E então, como um quadrado de uma fração:

$$\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$

Este é o lado direito da equação $P(k+1)$. Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

Conclusão: Pelo Princípio da Indução Matemática, a proposição $P(n)$ é verdadeira para todos os inteiros positivos n.

5. $(\forall n \in \mathbb{N})\ 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

Solução do Exercício 5.22, Parte 5 (por Indução Matemática)

Seja $P(n)$ a proposição $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

Passo Base (n=0): Para $n = 0$, a soma é $2^0 = 1$. A fórmula nos dá $2^{0+1} - 1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$. Como $1 = 1$, o passo base é verdadeiro. $P(0)$ é verdadeira.

Passo Indutivo: Suponha que $P(k)$ seja verdadeira para algum inteiro não-negativo $k \geq 0$. Isto é, suponha que $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$ (Hipótese de Indução).

Precisamos provar que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, que $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{(k+1)+1} - 1 = 2^{k+2} - 1$.

Começamos com o lado esquerdo da equação $P(k+1)$:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k + 2^{k+1}$$

Pela Hipótese de Indução, sabemos que $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Substituindo:

$$(2^{k+1} - 1) + 2^{k+1}$$

$$= 2 \cdot 2^{k+1} - 1$$

$$= 2^{k+1+1} - 1$$

$$= 2^{k+2} - 1$$

Este é o lado direito da equação $P(k+1)$. Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

Conclusão: Pelo Princípio da Indução Matemática, a proposição $P(n)$ é verdadeira para todos os inteiros não-negativos n.

6. $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$.

Solução do Exercício 5.22, Parte 6 (por Indução Matemática)

Seja $P(n)$ a proposição $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$.

Passo Base (n=1): Para $n = 1$, o lado esquerdo é $1^2 = 1$. O lado direito é $(-1)^{1-1}\frac{1(1+1)}{2} = (-1)^0\frac{1\cdot 2}{2} = 1 \cdot 1 = 1$. Como $1 = 1$, o passo base é verdadeiro. $P(1)$ é verdadeira.

Passo Indutivo: Suponha que $P(k)$ seja verdadeira para algum inteiro positivo $k \geq 1$. Isto é, suponha que $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{k-1}k^2 = (-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2}$ (Hipótese de Indução).

Precisamos provar que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, que $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{k-1}k^2 + (-1)^{(k+1)-1}(k+1)^2 = (-1)^{(k+1)-1}\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$. O último termo do lado esquerdo é $(-1)^k(k+1)^2$. O lado direito de $P(k+1)$ deve ser $(-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Começamos com o lado esquerdo da equação $P(k+1)$:

$$(1^2 - 2^2 + \cdots + (-1)^{k-1}k^2) + (-1)^k(k+1)^2$$

Pela Hipótese de Indução, substituímos a soma dos k primeiros termos:

$$(-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k(k+1)^2$$

Para combinar os termos, podemos fatorar $(-1)^{k-1}$ e $(k+1)$:

$$(-1)^{k-1}(k+1)\left(\frac{k}{2}+(-1)^{1}(k+1)\right)$$

$$(-1)^{k-1}(k+1)\left(\frac{k}{2}-(k+1)\right)$$

$$(-1)^{k-1}(k+1)\left(\frac{k-2(k+1)}{2}\right)$$

$$(-1)^{k-1}(k+1)\left(\frac{k-2k-2}{2}\right)$$

$$(-1)^{k-1}(k+1)\left(\frac{-k-2}{2}\right)$$

$$(-1)^{k-1}(k+1)\left(\frac{-(k+2)}{2}\right)$$

Podemos reescrever $-(k+2)$ como $(-1)(k+2)$. E $(-1)^{k-1}\cdot(-1)=(-1)^{k}$:

$$(-1)^{k-1}\cdot(-1)\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$(-1)^{k}\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Este é o lado direito da equação $P(k+1)$. Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

Conclusão: Pelo Princípio da Indução Matemática, a proposição $P(n)$ é verdadeira para todos os inteiros positivos n.

7. $(\forall n\in\mathbb{N})$ $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$.

Solução do Exercício 5.22, Parte 7 (por Indução Matemática)

Seja $P(n)$ a proposição $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$. Podemos usar frações parciais para o termo geral: $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{A}{2k-1}+\frac{B}{2k+1}$. $1=A(2k+1)+B(2k-1)$. Se $2k-1=0\implies k=1/2$, então $1=A(1+1)\implies 1=2A\implies A=1/2$. Se $2k+1=0\implies k=-1/2$, então $1=B(-1-1)\implies 1=-2B\implies B=-1/2$. Então, $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$.

Passo Base (n=1): Para $n=1$, o lado esquerdo é $\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{3}$. A fórmula nos dá $\frac{1}{2\cdot 1+1}=\frac{1}{3}$. Como $\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$, o passo base é verdadeiro. $P(1)$ é verdadeira.

Passo Indutivo: Suponha que $P(k)$ seja verdadeira para algum inteiro positivo $k\geq 1$. Isto é, suponha que $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$ (Hipótese de Indução).

Precisamos provar que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, que $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}=\frac{k+1}{2(k+1)+1}$. O último termo é $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$. O lado direito de $P(k+1)$ deve ser $\frac{k+1}{2k+3}$.

Começamos com o lado esquerdo da equação $P(k+1)$:

$$\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\right)+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

Pela Hipótese de Indução, substituímos a soma dos k primeiros termos:

$$\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

Encontramos um denominador comum $(2k+1)(2k+3)$:

$$\frac{k(2k+3)}{(2k+1)(2k+3)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}$$

Fatoramos o trinômio $2k^2+3k+1$. Testamos $(k+1)$ como fator. Se $k=-1$, $2(-1)^2+3(-1)+1=2-3+1=0$. Então $(k+1)$ é um fator. $(2k^2+3k+1)=(k+1)(2k+1)$.

Substituindo de volta:

$$\frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$$

Cancelamos $(2k+1)$ (assumindo $2k+1\neq 0$, o que é verdade para $k\in\mathbb{N}$):

$$\frac{k+1}{2k+3}$$

Este é o lado direito da equação $P(k+1)$. Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

Conclusão: Pelo Princípio da Indução Matemática, a proposição $P(n)$ é verdadeira para todos os inteiros positivos n.

8. $(\forall n\in\mathbb{N})\ 1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+\cdots+n\cdot 2^{n-1}=1+(n-1)2^n$.

Solução do Exercício 5.22, Parte 8 (por Indução Matemática)

Seja $P(n)$ a proposição $1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+\cdots+n\cdot 2^{n-1}=1+(n-1)2^n$.

Passo Base (n=1): Para $n=1$, o lado esquerdo é $1\cdot 2^{1-1}=1\cdot 2^0=1$. O lado direito é $1+(1-1)2^1=1+0\cdot 2=1$. Como $1=1$, o passo base é verdadeiro. $P(1)$ é verdadeira.

Passo Indutivo: Suponha que $P(k)$ seja verdadeira para algum inteiro positivo $k\geq 1$. Isto é, suponha que $1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+\cdots+k\cdot 2^{k-1}=1+(k-1)2^k$ (Hipótese de Indução).

Precisamos provar que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, que $1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+\cdots+k\cdot 2^{k-1}+(k+1)\cdot 2^{(k+1)-1}=1+((k+1)-1)2^{k+1}$. O último termo do lado esquerdo é $(k+1)\cdot 2^k$. O lado direito de $P(k+1)$ deve ser $1+k\cdot 2^{k+1}$.

Começamos com o lado esquerdo da equação $P(k+1)$:

$$(1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+\cdots+k\cdot 2^{k-1})+(k+1)\cdot 2^k$$

Pela Hipótese de Indução, substituímos a soma dos k primeiros termos:

$$(1 + (k-1)2^k) + (k+1)2^k$$

Agrupando os termos com 2^k:

$$1 + (k-1)2^k + (k+1)2^k$$
$$1 + ((k-1) + (k+1))2^k$$
$$1 + (k-1+k+1)2^k$$
$$1 + (2k)2^k$$
$$1 + k \cdot (2 \cdot 2^k)$$
$$1 + k \cdot 2^{k+1}$$

Este é o lado direito da equação $P(k+1)$. Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

Conclusão: Pelo Princípio da Indução Matemática, a proposição $P(n)$ é verdadeira para todos os inteiros positivos n.

Lista de Exercícios: Probabilidade e Estatística

Exercício 1: Em um grupo de 100 alunos, 60 estudam Matemática, 40 estudam Física e 25 estudam ambos. Qual a probabilidade de um aluno estudar Física dado que estuda Matemática?

Solução do Exercício 1

Seja M o evento de um aluno estudar Matemática. Seja F o evento de um aluno estudar Física.

Dados: Número total de alunos = 100 [cite: 3] Número de alunos que estudam Matemática ($|M|$) = 60 [cite: 3] Número de alunos que estudam Física ($|F|$) = 40 [cite: 3] Número de alunos que estudam ambos ($|M \cap F|$) = 25 [cite: 3]

As probabilidades são: $P(M) = \frac{|M|}{100} = \frac{60}{100} = 0,6$ $P(F) = \frac{|F|}{100} = \frac{40}{100} = 0,4$ $P(M \cap F) = \frac{|M \cap F|}{100} = \frac{25}{100} = 0,25$

Queremos calcular a probabilidade de um aluno estudar Física dado que estuda Matemática, que é $P(F|M)$. [cite: 4] Usamos a fórmula da probabilidade condicional:

$$P(F|M) = \frac{P(F \cap M)}{P(M)}$$

Sabemos que $P(F \cap M) = P(M \cap F) = 0,25$ e $P(M) = 0,6$.

$$P(F|M) = \frac{0,25}{0,6}$$

$$P(F|M) = \frac{25}{60} = \frac{5}{12}$$

$$P(F|M) \approx 0,4167$$

A probabilidade de um aluno estudar Física dado que estuda Matemática é $\frac{5}{12}$.

Exercício 2: Um dado viciado apresenta probabilidade $P(6) = 0,3$ e iguais probabilidades para os demais resultados. Qual a probabilidade de sair um número ímpar, dado que o número sorteado é maior que 2?

Solução do Exercício 2

O espaço amostral de um dado é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. A probabilidade de $P(6) = 0,3$. [cite: 5] As probabilidades dos outros 5 resultados são iguais. Seja p essa probabilidade. A soma das probabilidades de todos os resultados deve ser 1: $5p + P(6) = 1$ $5p + 0,3 = 1$ $5p = 1 - 0,3$ $5p = 0,7$ $p = \frac{0,7}{5} = 0,14$

Então, as probabilidades dos resultados são: $P(1) = 0,14$ $P(2) = 0,14$ $P(3) = 0,14$ $P(4) = 0,14$ $P(5) = 0,14$ $P(6) = 0,3$

Seja A o evento "sair um número ímpar". $A = \{1, 3, 5\}$ $P(A) = P(1) + P(3) + P(5) = 0,14 + 0,14 + 0,14 = 3 \times 0,14 = 0,42$.

Seja B o evento "o número sorteado é maior que 2". [cite: 6] $B = \{3, 4, 5, 6\}$ $P(B) = P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 0,14 + 0,14 + 0,14 + 0,3 = 3 \times 0,14 + 0,3 = 0,42 + 0,3 = 0,72$.

Queremos calcular a probabilidade de sair um número ímpar, dado que o número sorteado é maior que 2, que é $P(A|B)$. [cite: 6] Primeiro, encontramos a interseção dos eventos A e B: $A \cap B = \{1, 3, 5\} \cap \{3, 4, 5, 6\} = \{3, 5\}$ $P(A \cap B) = P(3) + P(5) = 0,14 + 0,14 = 0,28$.

Agora, usamos a fórmula da probabilidade condicional:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{0,28}{0,72}$$

Para simplificar a fração, multiplicamos numerador e denominador por 100 e dividimos por um fator comum (por exemplo, 4):

$$P(A|B) = \frac{28}{72} = \frac{7}{18}$$

$$P(A|B) \approx 0,3889$$

A probabilidade de sair um número ímpar dado que o número sorteado é maior que 2 é $\frac{7}{18}$.

Solução do Exercício 3

Seja A o evento "aluno assiste aula online". [cite: 7] Seja B o evento "aluno faz parte de grupos de estudo". [cite: 7]

Dados: $P(A) = 70\% = 0,7$ [cite: 7] $P(B) = 40\% = 0,4$ [cite: 7] $P(A \cap B) = 30\% = 0,3$ (alunos que fazem ambos) [cite: 8]

Queremos calcular $P(B|A)$. [cite: 8] Usamos a fórmula da probabilidade condicional:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Sabemos que $P(B \cap A) = P(A \cap B) = 0,3$ e $P(A) = 0,7$.

$$P(B|A) = \frac{0,3}{0,7}$$

$$P(B|A) = \frac{3}{7}$$
$$P(B|A) \approx 0,4286$$

A probabilidade de um aluno fazer parte de grupos de estudo dado que assiste aula online é $\frac{3}{7}$.

Exercício 4: Ao lançar duas moedas, considere os eventos: $A =$ "pelo menos uma cara", $B =$ "as moedas são iguais". Calcule $P(B|A)$.

Solução do Exercício 4

O espaço amostral para o lançamento de duas moedas é: $S = \{CC, CK, KC, KK\}$, onde C representa cara e K representa coroa. O número total de resultados possíveis é 4.

Seja A o evento "pelo menos uma cara". [cite: 9] $A = \{CC, CK, KC\}$ O número de resultados em A é $|A| = 3$. $P(A) = \frac{3}{4}$.

Seja B o evento "as moedas são iguais". [cite: 9] $B = \{CC, KK\}$ O número de resultados em B é $|B| = 2$. $P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Queremos calcular $P(B|A)$. [cite: 9] Primeiro, encontramos a interseção dos eventos A e B: $A \cap B = \{CC, CK, KC\} \cap \{CC, KK\} = \{CC\}$ O número de resultados em $A \cap B$ é $|A \cap B| = 1$. $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$.

Agora, usamos a fórmula da probabilidade condicional:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$
$$P(B|A) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}$$
$$P(B|A) = \frac{1}{3}$$
$$P(B|A) \approx 0,3333$$

A probabilidade de as moedas serem iguais dado que pelo menos uma cara saiu é $\frac{1}{3}$.

Solução do Exercício 5

Seja A o evento "a peça foi feita pela máquina A". [cite: 10] Seja B o evento "a peça foi feita pela máquina B". [cite: 10] Seja D o evento "a peça é defeituosa".

Dados: $P(A) = 80\% = 0,8$ [cite: 10] $P(B) = 20\% = 0,2$ [cite: 10]

Probabilidade de defeito dada a máquina: $P(D|A) = 3\% = 0,03$ [cite: 10] $P(D|B) = 7\% = 0,07$ [cite: 10]

Queremos calcular a probabilidade de a peça ter vindo da máquina B dado que é defeituosa, ou seja, $P(B|D)$. [cite: 11] Usaremos o Teorema de Bayes. Primeiro, precisamos calcular a probabilidade total de uma peça ser defeituosa, $P(D)$, usando a lei da probabilidade total: $P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B)$ $P(D) = (0,03)(0,8) + (0,07)(0,2)$ $P(D) = 0,024 + 0,014$ $P(D) = 0,038$

Agora, aplicamos o Teorema de Bayes:

$$P(B|D) = \frac{P(D|B)P(B)}{P(D)}$$

$$P(B|D) = \frac{(0,07)(0,2)}{0,038}$$
$$P(B|D) = \frac{0,014}{0,038}$$

Para simplificar a fração, multiplicamos numerador e denominador por 1000:

$$P(B|D) = \frac{14}{38} = \frac{7}{19}$$
$$P(B|D) \approx 0,3684$$

A probabilidade de a peça defeituosa ter vindo da máquina B é $\frac{7}{19}$.

Exercício 6: Uma urna contém 5 bolas vermelhas e 3 verdes. Uma bola é retirada, observada e devolvida, e o processo se repete. Qual é a probabilidade de, sabendo que a primeira bola foi vermelha, a segunda também seja?

Solução do Exercício 6

Dados: [cite: 12] Número de bolas vermelhas (V) = 5 Número de bolas verdes (G) = 3 Total de bolas na urna = $5 + 3 = 8$.

O processo de retirada é com reposição. [cite: 13] Isso significa que cada retirada é um evento independente da anterior, e as probabilidades permanecem as mesmas para cada retirada.

Seja V_1 o evento "a primeira bola retirada é vermelha". Seja V_2 o evento "a segunda bola retirada é vermelha".

Probabilidade de retirar uma bola vermelha em qualquer tentativa: $P(V) = \frac{\text{Número de bolas vermelhas}}{\text{Total de bolas}} = \frac{5}{8}$.

Queremos calcular a probabilidade de a segunda bola ser vermelha, dado que a primeira bola foi vermelha, ou seja, $P(V_2|V_1)$. [cite: 14] Como as retiradas são independentes devido à reposição, a ocorrência de V_1 não afeta a probabilidade de V_2. Portanto, $P(V_2|V_1) = P(V_2)$. A probabilidade de a segunda bola ser vermelha é a mesma de qualquer outra retirada: $P(V_2) = \frac{5}{8}$.

A probabilidade de, sabendo que a primeira bola foi vermelha, a segunda também seja, é $\frac{5}{8}$.

Exercício 7: Verifique se os eventos $A =$ "sair par"e $B =$ "sair maior que 3"são independentes no lançamento de um dado honesto.

Solução do Exercício 7

O espaço amostral para o lançamento de um dado honesto é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. A probabilidade de cada resultado é $\frac{1}{6}$.

Seja A o evento "sair par". [cite: 15] $A = \{2, 4, 6\}$ $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Seja B o evento "sair maior que 3". [cite: 15] $B = \{4, 5, 6\}$ $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Para verificar se A e B são independentes, precisamos verificar se $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. [cite: 15] Primeiro, encontramos a interseção dos eventos A e B: $A \cap B = \{2, 4, 6\} \cap \{4, 5, 6\} = \{4, 6\}$ $P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Agora, calculamos o produto $P(A)P(B)$: $P(A)P(B) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

Comparando $P(A \cap B)$ com $P(A)P(B)$: $\frac{1}{3} \neq \frac{1}{4}$.

Como $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$, os eventos A e B não são independentes.

Exercício 8: Sejam A e B eventos com $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0,5$ e $P(A \cap B) = 0,2$. A e B são independentes?

Solução do Exercício 8

Dados: [cite: 16] $P(A) = 0,4$ $P(B) = 0,5$ $P(A \cap B) = 0,2$

Para verificar se os eventos A e B são independentes, precisamos verificar se $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. [cite: 16]

Calculamos o produto $P(A)P(B)$: $P(A)P(B) = (0,4)(0,5) = 0,20$.

Comparamos $P(A \cap B)$ com $P(A)P(B)$: $0,2 = 0,20$.

Como $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, os eventos A e B são independentes.

Exercício 9: Em um experimento de lançamento de duas moedas, considere os eventos $A =$ "cara na primeira moeda"e $B =$ "cara na segunda moeda". Verifique a independência de A e B.

Solução do Exercício 9

O espaço amostral para o lançamento de duas moedas é: $S = \{CC, CK, KC, KK\}$.

Seja A o evento "cara na primeira moeda". [cite: 17] $A = \{CC, CK\}$ $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Seja B o evento "cara na segunda moeda". [cite: 17] $B = \{CC, KC\}$ $P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Para verificar a independência de A e B, precisamos verificar se $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. [cite: 18] Primeiro, encontramos a interseção dos eventos A e B: $A \cap B = \{CC, CK\} \cap \{CC, KC\} = \{CC\}$ $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$.

Agora, calculamos o produto $P(A)P(B)$: $P(A)P(B) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

Comparamos $P(A \cap B)$ com $P(A)P(B)$: $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

Como $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, os eventos A e B são independentes.

Exercício 10: Em um baralho de 52 cartas, sejam os eventos $A =$ "sair uma carta de copas"e $B =$ "sair uma figura (valete, dama ou rei)". São independentes?

Solução do Exercício 10

Um baralho padrão tem 52 cartas, divididas em 4 naipes (Copas, Ouros, Espadas, Paus), cada um com 13 cartas. Cada naipe tem 3 figuras (Valete, Dama, Rei).

Seja A o evento "sair uma carta de copas". [cite: 19] Há 13 cartas de copas no baralho. $P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

Seja B o evento "sair uma figura (valete, dama ou rei)". [cite: 19] Há 3 figuras em cada um dos 4 naipes, totalizando $3 \times 4 = 12$ figuras. $P(B) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$.

Para verificar se A e B são independentes, precisamos verificar se $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. [cite: 20] Primeiro, encontramos a interseção dos eventos A e B: $A \cap B$ é o evento "sair uma figura de copas". Há 3 figuras de copas (Valete de Copas, Dama de Copas, Rei de Copas). $P(A \cap B) = \frac{3}{52}$.

Agora, calculamos o produto $P(A)P(B)$: $P(A)P(B) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{13}\right) = \frac{3}{52}$.

Comparamos $P(A \cap B)$ com $P(A)P(B)$: $\frac{3}{52} = \frac{3}{52}$.

Como $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, os eventos A e B são independentes.

Exercício 11: Suponha $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0$ e $P(A \cap B) = 0,42$. Verifique se os eventos A e B são independentes.

Solução do Exercício 11

Dados: [cite: 21] $P(A) = 0,6$ $P(B) = 0$ $P(A \cap B) = 0,42$

Para verificar se os eventos A e B são independentes, precisamos verificar se $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. [cite: 21]

Calculamos o produto $P(A)P(B)$: $P(A)P(B) = (0,6)(0) = 0$.

Comparamos $P(A \cap B)$ com $P(A)P(B)$: $0,42 \neq 0$.

Como $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$, os eventos A e B não são independentes.

É importante notar que um evento com probabilidade 0 ($P(B) = 0$) significa que o evento B é um evento impossível (ou um evento nulo em um espaço amostral contínuo). A interseção $A \cap B$ também deve ser 0. O fato de $P(A \cap B) = 0,42$ com $P(B) = 0$ indica uma inconsistência nos dados fornecidos na questão, pois se $P(B) = 0$, então $P(A \cap B)$ deve ser 0. Assumindo que os dados são como apresentados, a resposta matemática para a independência é "não são independentes".

Exercício 12: Dada uma cadeia de Markov com estados 1,2 e matriz de transição: $P = [\begin{smallmatrix}0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,7\end{smallmatrix}]$. Verifique se a cadeia é estacionária e encontre a distribuição estacionária.

Solução do Exercício 12

A matriz de transição é $P = [\begin{smallmatrix}0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,7\end{smallmatrix}]$. [cite: 24] Para que uma cadeia de Markov seja estacionária e possua uma distribuição estacionária $\pi = [\pi_1, \pi_2]$, essa distribuição deve satisfazer a equação $\pi P = \pi$ e $\pi_1 + \pi_2 = 1$. [cite: 25]

$\pi P = \pi \implies [\pi_1 \quad \pi_2] \begin{bmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix} = [\pi_1 \quad \pi_2]$

Isso nos dá um sistema de equações: 1) $0,6\pi_1 + 0,3\pi_2 = \pi_1$ 2) $0,4\pi_1 + 0,7\pi_2 = \pi_2$ 3) $\pi_1 + \pi_2 = 1$

Vamos simplificar as equações (1) e (2): De (1): $0,3\pi_2 = \pi_1 - 0,6\pi_1 \implies 0,3\pi_2 = 0,4\pi_1 \implies 3\pi_2 = 4\pi_1 \implies \pi_1 = \frac{3}{4}\pi_2$. De (2): $0,4\pi_1 = \pi_2 - 0,7\pi_2 \implies 0,4\pi_1 = 0,3\pi_2 \implies 4\pi_1 = 3\pi_2 \implies \pi_1 = \frac{3}{4}\pi_2$. As equações (1) e (2) são dependentes, como esperado.

Agora, substituímos $\pi_1 = \frac{3}{4}\pi_2$ na equação (3): $\frac{3}{4}\pi_2 + \pi_2 = 1$ $\frac{3\pi_2+4\pi_2}{4} = 1$ $\frac{7\pi_2}{4} = 1$ $7\pi_2 = 4 \implies \pi_2 = \frac{4}{7}$.

Agora, encontramos π_1: $\pi_1 = \frac{3}{4}\pi_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$.

Portanto, a distribuição estacionária é $\pi = [\frac{3}{7}, \frac{4}{7}]$. [cite: 25] Como encontramos uma distribuição estacionária única com $\pi_1 > 0$ e $\pi_2 > 0$, a cadeia é estacionária (no sentido de que possui uma distribuição estacionária). Além disso, como todos os estados são acessíveis uns dos outros e são aperiódicos (pode-se permanecer no estado, e.g., $P(1,1) = 0.6 \neq 0$), a cadeia é irredutível e aperiódica, o que garante a existência e unicidade de uma distribuição estacionária e limite.

Exercício 13: A matriz de transição de uma cadeia de Markov é: $P = [\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}]$. A cadeia é ergódica? Possui distribuição estacionária?

Solução do Exercício 13

A matriz de transição é $P = [\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}]$. [cite: 27]

Análise da Ergodicidade: Para que uma cadeia de Markov seja ergódica, ela deve ser irredutível e aperiódica. [cite: 28]

Irredutibilidade: Um estado é acessível a partir de outro se há um caminho entre eles. De estado 1, podemos ir para estado 2 ($P_{12} = 1$). De estado 2, podemos ir para estado 1 ($P_{21} = 1$). Todos os estados se comunicam, então a cadeia é irredutível.

Periodicidade: O período de um estado i é o maior divisor comum dos comprimentos de todos os caminhos que começam e terminam em i. Para o estado 1: $1 \to 2 \to 1$ (comprimento 2) $1 \to 2 \to 1 \to 2 \to 1$ (comprimento 4) Os comprimentos possíveis são 2, 4, 6, ... O mdc é 2. Então o período de estado 1 é $d(1) = 2$. Para o estado 2: $2 \to 1 \to 2$ (comprimento 2) $2 \to 1 \to 2 \to 1 \to 2$ (comprimento 4) Os comprimentos possíveis são 2, 4, 6, ... O mdc é 2. Então o período de estado 2 é $d(2) = 2$. Como todos os estados têm período 2, a cadeia é periódica (período 2). Uma cadeia ergódica deve ser aperiódica (período 1). Portanto, a cadeia **não é ergódica**. [cite: 28]

Distribuição Estacionária: Para encontrar a distribuição estacionária $\pi = [\pi_1, \pi_2]$, resolvemos $\pi P = \pi$ e $\pi_1 + \pi_2 = 1$. [cite: 28] $[\pi_1 \quad \pi_2] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [\pi_1 \quad \pi_2]$

Isso nos dá o sistema: 1) $0\pi_1 + 1\pi_2 = \pi_1 \implies \pi_2 = \pi_1$ 2) $1\pi_1 + 0\pi_2 = \pi_2 \implies \pi_1 = \pi_2$ 3) $\pi_1 + \pi_2 = 1$

Substituindo $\pi_2 = \pi_1$ na equação (3): $\pi_1 + \pi_1 = 1$ $2\pi_1 = 1 \implies \pi_1 = \frac{1}{2}$. E, portanto, $\pi_2 = \frac{1}{2}$.

A distribuição estacionária é $\pi = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. [cite: 28] Mesmo cadeias periódicas podem ter distribuição estacionária. A ergodicidade garante que a distribuição estacionária é também a distribuição limite, o que não é o caso para cadeias periódicas. Portanto, a cadeia **possui uma distribuição estacionária**.

Exercício 14: Verifique se a seguinte cadeia de Markov com três estados é ergódica: $P = [\begin{matrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{matrix}]$.

Solução do Exercício 14

A matriz de transição é $P = [\begin{matrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{matrix}]$. [cite: 30] Para que uma cadeia de Markov seja ergódica, ela deve ser irredutível e aperiódica. [cite: 29]

Irredutibilidade: Vamos verificar se todos os estados se comunicam. Estado 1: Pode ir para 1 (0.5) e 2 (0.5). Não pode ir para 3 diretamente ($P_{13} = 0$). Estado 2: Pode ir para 1 (0.2), 2 (0.5), 3 (0.3). Estado 3: Pode ir para 1 (0.1), 2 (0.3), 3 (0.6).

Podemos traçar caminhos: $1 \to 2$ (direto) $2 \to 1$ (direto) $2 \to 3$ (direto) $3 \to 2$ (direto) $3 \to 1$ (direto) A partir do estado 1, podemos ir para 2. A partir de 2, podemos ir para 3. Então $1 \to 2 \to 3$.

A partir do estado 3, podemos ir para 1. Isso mostra que todos os estados são acessíveis a partir de qualquer outro estado. Por exemplo, de 1 para 3: $1 \to 2 \to 3$. De 3 para 1: $3 \to 1$. Portanto, a cadeia é **irredutível**.

Periodicidade: Um estado é aperiódico se pode retornar a si mesmo em 1 passo, ou se o mdc dos comprimentos dos caminhos de retorno é 1. Para o estado 1: $P_{11} = 0.5 > 0$. Isso significa que é possível retornar ao estado 1 em 1 passo. Se um estado tem $P_{ii} > 0$, então seu período é 1 (e, portanto, é aperiódico). Como o estado 1 é aperiódico, e a cadeia é irredutível, todos os outros estados na cadeia irredutível também são aperiódicos. Portanto, a cadeia é **aperiódica**.

Como a cadeia é irredutível e aperiódica, ela é **ergódica**. [cite: 29]

Exercício 15: Uma cadeia de Markov representa o tempo em uma cidade com estados: Sol (S) e Chuva (C). A matriz de transição é: $P = [\begin{smallmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{smallmatrix}]$. Determine se a cadeia é estacionária e encontre sua distribuição limite.

Solução do Exercício 15

A matriz de transição é $P = [\begin{smallmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{smallmatrix}]$. [cite: 33] Os estados são Sol (S) e Chuva (C).

Verificar se a cadeia é estacionária (se possui distribuição estacionária): Para encontrar a distribuição estacionária $\pi = [\pi_S, \pi_C]$, resolvemos $\pi P = \pi$ e $\pi_S + \pi_C = 1$. [cite: 34]

$[\pi_S \quad \pi_C] \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix} = [\pi_S \quad \pi_C]$

Isso nos dá o sistema de equações: 1) $0,8\pi_S + 0,6\pi_C = \pi_S$ 2) $0,2\pi_S + 0,4\pi_C = \pi_C$ 3) $\pi_S + \pi_C = 1$

Vamos simplificar (1) e (2): De (1): $0,6\pi_C = \pi_S - 0,8\pi_S \implies 0,6\pi_C = 0,2\pi_S \implies 6\pi_C = 2\pi_S \implies \pi_S = 3\pi_C$. De (2): $0,2\pi_S = \pi_C - 0,4\pi_C \implies 0,2\pi_S = 0,6\pi_C \implies 2\pi_S = 6\pi_C \implies \pi_S = 3\pi_C$. As equações são consistentes.

Agora, substituímos $\pi_S = 3\pi_C$ na equação (3): $3\pi_C + \pi_C = 1$ $4\pi_C = 1 \implies \pi_C = \frac{1}{4}$.

E, para π_S: $\pi_S = 3\pi_C = 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

A distribuição estacionária é $\pi = [\frac{3}{4}, \frac{1}{4}]$. [cite: 34] Como existe uma distribuição estacionária única, a cadeia é estacionária.

Encontrar sua distribuição limite: Para que a distribuição estacionária seja também a distribuição limite, a cadeia deve ser ergódica (irredutível e aperiódica).

Irredutibilidade: $S \leftrightarrow C$ (pode ir de S para C, e de C para S). $P_{SC} = 0.2 > 0$ e $P_{CS} = 0.6 > 0$. Todos os estados se comunicam, então a cadeia é irredutível.

Periodicidade: $P_{SS} = 0.8 > 0$. Isso significa que é possível retornar ao estado S em 1 passo. Portanto, o estado S é aperiódico. Como a cadeia é irredutível e um estado é aperiódico, todos os estados são aperiódicos. A cadeia é aperiódica.

Como a cadeia é irredutível e aperiódica, ela é ergódica. Para cadeias ergódicas, a distribuição estacionária é também a distribuição limite. [cite: 34] Portanto, a distribuição limite da cadeia é $\pi = [\frac{3}{4}, \frac{1}{4}]$.

Solução do Exercício 16

Seja I o evento "a pessoa está infectada". Seja N o evento "a pessoa não está infectada". Seja P_T o evento "o teste deu positivo". Seja N_T o evento "o teste deu negativo".

Dados: Sensibilidade: $P(P_T|I) = 95\% = 0,95$. (Probabilidade de testar positivo dado que está infectado) [cite: 35] Especificidade: $P(N_T|N) = 90\% = 0,90$. (Probabilidade de testar negativo dado que não está infectado) [cite: 35] Isso implica $P(P_T|N) = 1 - P(N_T|N) = 1 - 0,90 = 0,10$. (Probabilidade de falso positivo) Prevalência: $P(I) = 2\% = 0,02$. [cite: 35] Isso implica $P(N) = 1 - P(I) = 1 - 0,02 = 0,98$.

Queremos calcular a probabilidade de uma pessoa estar infectada dado que testou positivo, ou seja, $P(I|P_T)$. [cite: 36] Usaremos o Teorema de Bayes. Primeiro, calculamos a probabilidade total de testar positivo, $P(P_T)$, usando a lei da probabilidade total: $P(P_T) = P(P_T|I)P(I) + P(P_T|N)P(N)$ $P(P_T) = (0,95)(0,02) + (0,10)(0,98)$ $P(P_T) = 0,019 + 0,098$ $P(P_T) = 0,117$

Agora, aplicamos o Teorema de Bayes:

$$P(I|P_T) = \frac{P(P_T|I)P(I)}{P(P_T)}$$

$$P(I|P_T) = \frac{(0,95)(0,02)}{0,117}$$

$$P(I|P_T) = \frac{0,019}{0,117}$$

Para simplificar a fração, multiplicamos numerador e denominador por 1000:

$$P(I|P_T) = \frac{19}{117}$$

$$P(I|P_T) \approx 0,1624$$

A probabilidade de uma pessoa estar infectada, dado que testou positivo, é aproximadamente 16,24%.

Solução do Exercício 17

Seja A o evento "candidato é do curso A". [cite: 37] Seja B o evento "candidato é do curso B". [cite: 37] Seja C o evento "candidato é do curso C". [cite: 37] Seja AP o evento "candidato foi aprovado".

Dados: $P(A) = 30\% = 0,3$ [cite: 37] $P(B) = 50\% = 0,5$ [cite: 37] $P(C) = 20\% = 0,2$ [cite: 37]

Taxas de aprovação (probabilidade de ser aprovado dado o curso): $P(AP|A) = 80\% = 0,8$ [cite: 37] $P(AP|B) = 60\% = 0,6$ [cite: 37] $P(AP|C) = 90\% = 0,9$ [cite: 37]

Queremos calcular a probabilidade de o candidato ser do curso C dado que foi aprovado, ou seja, $P(C|AP)$. [cite: 38] Usaremos o Teorema de Bayes. Primeiro, calculamos a probabilidade total de um candidato ser aprovado, $P(AP)$, usando a lei da probabilidade total: $P(AP) = P(AP|A)P(A) + P(AP|B)P(B) + P(AP|C)P(C)$ $P(AP) = (0,8)(0,3) + (0,6)(0,5) + (0,9)(0,2)$ $P(AP) = 0,24 + 0,30 + 0,18$ $P(AP) = 0,72$

Agora, aplicamos o Teorema de Bayes:

$$P(C|AP) = \frac{P(AP|C)P(C)}{P(AP)}$$

$$P(C|AP) = \frac{(0,9)(0,2)}{0,72}$$

$$P(C|AP) = \frac{0,18}{0,72}$$

Para simplificar a fração:

$$P(C|AP) = \frac{18}{72} = \frac{1}{4} = 0,25$$

A probabilidade de um candidato aprovado ser do curso C é $\frac{1}{4}$ ou 25%.

Solução do Exercício 18

Seja F_1 o evento "a lâmpada veio da fábrica F1". [cite: 39] Seja F_2 o evento "a lâmpada veio da fábrica F2". [cite: 39] Seja F_3 o evento "a lâmpada veio da fábrica F3". [cite: 39] Seja D o evento "a lâmpada é defeituosa".

Dados: $P(F_1) = 50\% = 0,5$ [cite: 39] $P(F_2) = 30\% = 0,3$ [cite: 39] $P(F_3) = 20\% = 0,2$ [cite: 39]

Taxas de defeito (probabilidade de ser defeituosa dada a fábrica): $P(D|F_1) = 2\% = 0,02$ [cite: 39] $P(D|F_2) = 1\% = 0,01$ [cite: 39] $P(D|F_3) = 5\% = 0,05$ [cite: 39]

Queremos calcular a probabilidade de a lâmpada ter vindo da F3 dado que é defeituosa, ou seja, $P(F_3|D)$. [cite: 39] Usaremos o Teorema de Bayes. Primeiro, calculamos a probabilidade total de uma lâmpada ser defeituosa, $P(D)$, usando a lei da probabilidade total: $P(D) = P(D|F_1)P(F_1) + P(D|F_2)P(F_2) + P(D|F_3)P(F_3)$ $P(D) = (0,02)(0,5) + (0,01)(0,3) + (0,05)(0,2)$ $P(D) = 0,010 + 0,003 + 0,010$ $P(D) = 0,023$

Agora, aplicamos o Teorema de Bayes:

$$P(F_3|D) = \frac{P(D|F_3)P(F_3)}{P(D)}$$

$$P(F_3|D) = \frac{(0,05)(0,2)}{0,023}$$

$$P(F_3|D) = \frac{0,010}{0,023}$$

Para simplificar a fração, multiplicamos numerador e denominador por 1000:

$$P(F_3|D) = \frac{10}{23}$$

$$P(F_3|D) \approx 0,4348$$

A probabilidade de a lâmpada defeituosa ter vindo da fábrica F3 é $\frac{10}{23}$.

Solução do Exercício 19

Seja C o evento "a pessoa é culpada". [cite: 40] Seja I o evento "a pessoa é inocente". Seja M o evento "o detector aponta a pessoa como mentirosa"(positivo no teste).

Dados: Taxa de acerto (sensibilidade e especificidade, assumindo que $95P(M|C) = 95\% = 0,95$ (probabilidade de apontar como mentiroso dado que é culpado) $P(\text{não } M|I) = 95\% = 0,95$ (probabilidade de apontar como não mentiroso dado que é inocente) Isso implica $P(M|I) = 1 - P(\text{não } M|I) = 1 - 0,95 = 0,05$ (probabilidade de falso positivo).

Prevalência de culpados: Em um grupo de 1000 pessoas, $10P(C) = 10\% = 0,10$. Isso implica $P(I) = 1 - P(C) = 1 - 0,10 = 0,90$.

Queremos calcular a probabilidade de uma pessoa ser realmente culpada dado que foi apontada como mentirosa, ou seja, $P(C|M)$. [cite: 41] Usaremos o Teorema de Bayes. Primeiro, calculamos a probabilidade total de o detector apontar alguém como mentiroso, $P(M)$, usando a lei da probabilidade total: $P(M) = P(M|C)P(C) + P(M|I)P(I)$ $P(M) = (0,95)(0,10) + (0,05)(0,90)$ $P(M) = 0,095 + 0,045$ $P(M) = 0,140$

Agora, aplicamos o Teorema de Bayes:

$$P(C|M) = \frac{P(M|C)P(C)}{P(M)}$$

$$P(C|M) = \frac{(0,95)(0,10)}{0,140}$$

$$P(C|M) = \frac{0,095}{0,140}$$

Para simplificar a fração, multiplicamos numerador e denominador por 1000:

$$P(C|M) = \frac{95}{140}$$

Dividindo por 5:

$$P(C|M) = \frac{19}{28}$$

$$P(C|M) \approx 0,6786$$

A probabilidade de alguém ser realmente culpado dado que foi apontado como mentiroso é $\frac{19}{28}$ ou aproximadamente $67,86\%$.

Exercício 20: Quantas palavras distintas podem ser formadas com todas as letras da palavra "MATEMÁTICA"?

Solução do Exercício 20

A palavra é "MATEMÁTICA". [cite: 42] Primeiro, contamos o número total de letras e a frequência de cada letra. Número total de letras = 10.

Letras e suas frequências: M: 2 vezes A: 3 vezes T: 2 vezes E: 1 vez Í: 1 vez C: 1 vez

Esta é uma permutação com repetição. A fórmula para o número de permutações distintas de n objetos onde há n_1 de um tipo, n_2 de outro tipo, ..., n_k de um k-ésimo tipo é:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

Neste caso, $n = 10$, e as repetições são para M (2), A (3), T (2). Número de palavras distintas = $\frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!}$

$$= \frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!}$$

$$= \frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{(2\times 1)\times(3\times 2\times 1)\times(2\times 1)}$$

$$= \frac{3.628.800}{2 \times 6 \times 2}$$
$$= \frac{3.628.800}{24}$$
$$= 151.200$$

Podem ser formadas 151.200 palavras distintas com todas as letras da palavra "MATEMÁTICA".

Exercício 21: De quantas formas diferentes 5 pessoas podem se sentar em uma fila de 5 cadeiras?

Solução do Exercício 21

Este é um problema de permutação simples, pois estamos organizando 5 pessoas em 5 posições distintas. [cite: 43] O número de formas diferentes de sentar n pessoas em n cadeiras é $n!$. Neste caso, $n = 5$. Número de formas = 5!

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$5! = 120$$

5 pessoas podem se sentar de 120 formas diferentes em uma fila de 5 cadeiras.

Exercício 22: Em quantas ordens diferentes podem ser escolhidos 3 livros entre 7 disponíveis?

Solução do Exercício 22

Este é um problema de arranjo (ou permutação de um subconjunto), pois a ordem em que os livros são escolhidos importa ("em quantas ordens diferentes"). [cite: 44] Temos $n = 7$ livros disponíveis e queremos escolher $k = 3$ deles em uma ordem específica. A fórmula para arranjos é $P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

$$P(7,3) = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!}$$

$$P(7,3) = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!}$$
$$P(7,3) = 7 \times 6 \times 5$$
$$P(7,3) = 210$$

Podem ser escolhidos 3 livros entre 7 disponíveis em 210 ordens diferentes.

Exercício 23: Quantas comissões de 3 pessoas podem ser formadas a partir de um grupo de 10?

Solução do Exercício 23

Este é um problema de combinação, pois a ordem das pessoas na comissão não importa. [cite: 45] Temos $n = 10$ pessoas no grupo e queremos formar uma comissão de $k = 3$ pessoas. A fórmula para combinações é $C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

$$C(10,3) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!}$$

$$C(10,3) = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3 \times 2 \times 1 \times 7!}$$

$$C(10,3) = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1}$$

$$C(10,3) = \frac{720}{6}$$

$$C(10,3) = 120$$

Podem ser formadas 120 comissões de 3 pessoas a partir de um grupo de 10.

Exercício 24: Quantas placas de carro podem ser formadas com 3 letras seguidas por 4 dígitos (sem repetição)?

Solução do Exercício 24

Assumimos que as letras são as 26 letras do alfabeto e os dígitos são de 0 a 9 (10 dígitos). [cite: 47] A placa é formada por 3 letras seguidas por 4 dígitos. Não há repetição.

Para as letras: Primeira letra: 26 opções. Segunda letra: 25 opções (sem repetição). Terceira letra: 24 opções (sem repetição). Número de formas de escolher as letras $= 26 \times 25 \times 24 = 15.600$.

Para os dígitos: Primeiro dígito: 10 opções (0 a 9). Segundo dígito: 9 opções (sem repetição). Terceiro dígito: 8 opções (sem repetição). Quarto dígito: 7 opções (sem repetição). Número de formas de escolher os dígitos $= 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5.040$.

O número total de placas é o produto do número de formas de escolher as letras e o número de formas de escolher os dígitos: Total de placas = (Número de formas de letras) $\times$ (Número de formas de dígitos) Total de placas $= 15.600 \times 5.040$ Total de placas $= 78.624.000$

Podem ser formadas 78.624.000 placas de carro.

Exercício 25: Quantas senhas de 6 dígitos (com repetição) podem ser formadas contendo ao menos um número par?

Solução do Exercício 25

Uma senha de 6 dígitos pode usar os dígitos de 0 a 9 (total de 10 dígitos). Os dígitos podem se repetir. [cite: 48]

É mais fácil calcular o total de senhas possíveis e subtrair o número de senhas que NÃO contêm nenhum número par (ou seja, senhas que contêm APENAS números ímpares).

Total de senhas possíveis: Cada uma das 6 posições pode ser preenchida por qualquer um dos 10 dígitos. Total de senhas = $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^6 = 1.000.000$.

Número de senhas com APENAS números ímpares: Os números ímpares são $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ (total de 5 dígitos). Cada uma das 6 posições pode ser preenchida por qualquer um dos 5 dígitos ímpares. Número de senhas com apenas ímpares = $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^6 = 15.625$.

Número de senhas com ao menos um número par: Este é o total de senhas menos o número de senhas com apenas números ímpares. Senhas com ao menos um par = (Total de senhas) - (Número de senhas com apenas ímpares) Senhas com ao menos um par = $1.000.000 - 15.625$ Senhas com ao menos um par = 984.375

Podem ser formadas 984.375 senhas de 6 dígitos contendo ao menos um número par.

Exercício 26: Uma urna tem 4 bolas vermelhas e 6 verdes. Duas bolas são retiradas sem reposição. Qual a probabilidade de ambas serem vermelhas?

Solução do Exercício 26

Dados: [cite: 49] Número de bolas vermelhas $(V) = 4$ Número de bolas verdes $(G) = 6$ Total de bolas na urna $= 4 + 6 = 10$.

Duas bolas são retiradas sem reposição. [cite: 49] Queremos a probabilidade de ambas serem vermelhas. [cite: 50]

Probabilidade de a primeira bola ser vermelha $(P(V_1))$: $P(V_1) = \frac{\text{Número de bolas vermelhas}}{\text{Total de bolas}} = \frac{4}{10}$.

Após a primeira bola vermelha ser retirada, restam 9 bolas na urna. O número de bolas vermelhas restantes é 3. Probabilidade de a segunda bola ser vermelha, dado que a primeira foi vermelha $(P(V_2|V_1))$: $P(V_2|V_1) = \frac{\text{Número de bolas vermelhas restantes}}{\text{Total de bolas restantes}} = \frac{3}{9}$.

A probabilidade de ambas as bolas serem vermelhas é o produto dessas probabilidades: $P(V_1 \cap V_2) = P(V_1) \times P(V_2|V_1)$ $P(V_1 \cap V_2) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9}$ $P(V_1 \cap V_2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3}$ $P(V_1 \cap V_2) = \frac{2}{15}$

$$P(V_1 \cap V_2) \approx 0,1333$$

A probabilidade de ambas as bolas serem vermelhas é $\frac{2}{15}$.

Exercício 27: Um grupo de 8 homens e 7 mulheres deve formar uma comissão de 5 pessoas com pelo menos 3 mulheres. Quantas comissões são possíveis?

Solução do Exercício 27

Dados: [cite: 51] Total de homens = 8 Total de mulheres = 7 Tamanho da comissão = 5 pessoas.

A comissão deve ter "pelo menos 3 mulheres". Isso significa que pode ter 3 mulheres, 4 mulheres ou 5 mulheres.

Caso 1: 3 mulheres e 2 homens Número de formas de escolher 3 mulheres de 7: $C(7,3) = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} = 35$. Número de formas de escolher 2 homens de 8: $C(8,2) = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8\times7}{2\times1} = 28$. Número de comissões neste caso $= C(7,3) \times C(8,2) = 35 \times 28 = 980$.

Caso 2: 4 mulheres e 1 homem Número de formas de escolher 4 mulheres de 7: $C(7,4) = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} = 35$. Número de formas de escolher 1 homem de 8: $C(8,1) = \frac{8!}{1!(8-1)!} = \frac{8!}{1!7!} = 8$. Número de comissões neste caso $= C(7,4) \times C(8,1) = 35 \times 8 = 280$.

Caso 3: 5 mulheres e 0 homens Número de formas de escolher 5 mulheres de 7: $C(7,5) = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7\times 6}{2\times 1} = 21$. Número de formas de escolher 0 homens de 8: $C(8,0) = 1$. Número de comissões neste caso $= C(7,5) \times C(8,0) = 21 \times 1 = 21$.

O número total de comissões possíveis é a soma dos casos: Total de comissões $= 980+280+21 = 1281$.

Podem ser formadas 1281 comissões possíveis.

Exercício 28: Um número de 4 dígitos é formado com os algarismos 1 a 9 (sem repetição). Qual a probabilidade de ser um número par?

Solução do Exercício 28

Os algarismos disponíveis são $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ (total de 9 algarismos). [cite: 53] Os dígitos são usados sem repetição.

Total de números de 4 dígitos (sem repetição): A escolha dos dígitos é um arranjo de 9 elementos tomados 4 a 4, pois a ordem importa. Primeiro dígito: 9 opções. Segundo dígito: 8 opções. Terceiro dígito: 7 opções. Quarto dígito: 6 opções. Total de números $= 9\times 8\times 7\times 6 = 3.024$.

Número de números pares de 4 dígitos (sem repetição): Para um número ser par, seu último dígito deve ser par. Os algarismos pares disponíveis são $\{2,4,6,8\}$ (total de 4 algarismos).

Escolhemos o último dígito primeiro: Quarto dígito (unidades): 4 opções (para ser par).

Agora, preenchemos os 3 primeiros dígitos com os 8 algarismos restantes (pois um já foi usado): Primeiro dígito: 8 opções. Segundo dígito: 7 opções. Terceiro dígito: 6 opções. Número de números pares = (Opções para o último dígito) $\times$ (Arranjos para os 3 primeiros dígitos) Número de números pares $= 4 \times (8 \times 7 \times 6)$ Número de números pares $= 4 \times 336 = 1.344$.

Probabilidade de ser um número par: Probabilidade $= \frac{\text{Número de números pares}}{\text{Total de números}}$ Probabilidade $= \frac{1.344}{3.024}$ Podemos simplificar a fração. Ambos são divisíveis por 4: Probabilidade $= \frac{336}{756}$ Ambos são divisíveis por 4 novamente: Probabilidade $= \frac{84}{189}$ Ambos são divisíveis por 21 (ou por 3, depois por 7): Probabilidade $= \frac{4}{9}$

$$P(\text{par}) \approx 0,4444$$

A probabilidade de o número ser par é $\frac{4}{9}$.

Exercício 29: Uma palavra de 6 letras é formada usando as letras A, B, C, D, E, F, sem repetição. Qual a probabilidade de a letra A estar na primeira posição?

Solução do Exercício 29

Total de letras disponíveis = 6 (A, B, C, D, E, F). A palavra formada tem 6 letras, sem repetição. [cite: 55]

Total de palavras de 6 letras sem repetição: Este é o número de permutações de 6 letras tomadas 6 a 6, ou seja, 6!. Total de palavras $= 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$.

Número de palavras com a letra A na primeira posição: Se a letra A está fixa na primeira posição, restam 5 posições para as 5 letras restantes (B, C, D, E, F), sem repetição. Número de palavras com A na primeira posição $= 5!$ $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Probabilidade de a letra A estar na primeira posição: Probabilidade $= \frac{\text{Número de palavras com A na primeira posição}}{\text{Total de palavras}}$ Probabilidade $= \frac{120}{720}$ Probabilidade $= \frac{1}{6}$

$$P(\text{A na primeira posição}) \approx 0,1667$$

A probabilidade de a letra A estar na primeira posição é $\frac{1}{6}$.

Exercício 30: Um número binário de 8 bits é gerado aleatoriamente. Qual a probabilidade de conter exatamente quatro 1s?

Solução do Exercício 30

Um número binário de 8 bits significa que há 8 posições, e cada posição pode ser 0 ou 1. [cite: 57]

Total de números binários de 8 bits: Cada uma das 8 posições pode ser 0 ou 1 (2 opções). Total de números $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8 = 256$.

Número de números binários de 8 bits com exatamente quatro 1s: Este é um problema de combinação, pois estamos escolhendo 4 posições entre 8 para colocar os 1s (as posições restantes serão preenchidas com 0s, e a ordem dos 1s não importa). Número de maneiras de escolher 4 posições para 1s de 8 posições $= C(8,4) = \binom{8}{4}$.

$$C(8,4) = \frac{8!}{4!(8-4)!} = \frac{8!}{4!4!}$$

$$C(8,4) = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 4!}$$

$$C(8,4) = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$C(8,4) = \frac{1680}{24}$$

$$C(8,4) = 70$$

Probabilidade de conter exatamente quatro 1s: Probabilidade $= \frac{\text{Número de números com quatro 1s}}{\text{Total de números binários de 8 bits}}$ Probabilidade $= \frac{70}{256}$ Ambos são divisíveis por 2: Probabilidade $= \frac{35}{128}$

$$P(\text{quatro 1s}) \approx 0,2734$$

A probabilidade de um número binário de 8 bits gerado aleatoriamente conter exatamente quatro 1s é $\frac{35}{128}$.

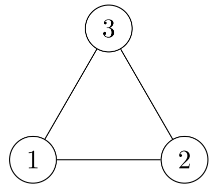
Quarta Lista de Exercícios: Grafos e Conceitos Relacionados

Exercício 1: Defina o que é um grafo simples. Dê um exemplo. [cite: 63]

Solução do Exercício 1

Um **grafo simples** é um grafo não direcionado que não contém laços (arestas que conectam um vértice a si mesmo) e não contém múltiplas arestas (mais de uma aresta conectando o mesmo par de vértices). [cite: 63]

Exemplo: Considere um grafo $G = (V, E)$ onde $V = \{1, 2, 3\}$ e $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}\}$. Este grafo pode ser visualizado como um triângulo, onde cada número representa um vértice e cada linha entre eles representa uma aresta. Não há laços (nenhuma aresta de um vértice para si mesmo) nem múltiplas arestas entre os mesmos pares de vértices.



Exercício 2: O que diferencia um grafo direcionado (dígrafo) de um grafo não direcionado? [cite: 64]

Solução do Exercício 2

A principal diferença entre um grafo direcionado (dígrafo) e um grafo não direcionado reside na **natureza de suas arestas**. [cite: 64]

- Num **grafo não direcionado**, as arestas representam uma conexão bidirecional entre dois vértices. Se existe uma aresta entre o vértice u e o vértice v, isso significa que a conexão vai de u para v e de v para u. As arestas são representadas como pares não ordenados de vértices, por exemplo, $\{u, v\}$. [cite: 64]
- Num **grafo direcionado (dígrafo)**, as arestas possuem uma direção. Uma aresta de u para v significa que há uma conexão de u para v, mas não necessariamente de v para u. As arestas são representadas como pares ordenados de vértices, por exemplo, (u, v), indicando que a aresta começa em u e termina em v. [cite: 64]

Exemplo:

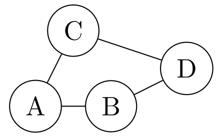
- **Grafo não direcionado:** Uma amizade no Facebook, onde se A é amigo de B, então B é amigo de A.
- **Grafo direcionado:** Seguidores no Twitter, onde A pode seguir B sem que B siga A de volta. [cite: 64]

Exercício 3: Qual a diferença entre um grafo completo e um grafo conexo? [cite: 65]

Solução do Exercício 3

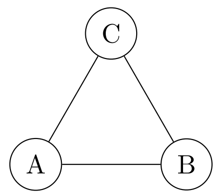
As diferenças entre um grafo completo e um grafo conexo são as seguintes: [cite: 65]

- Um **grafo conexo** é um grafo não direcionado onde existe um caminho entre qualquer par de vértices. Em outras palavras, é possível ir de qualquer vértice para qualquer outro vértice no grafo. [cite: 65]



Este grafo é conexo porque é possível ir de qualquer vértice a qualquer outro. [cite: 65]

- Um **grafo completo** é um grafo simples (não direcionado, sem laços ou múltiplas arestas) no qual todo par distinto de vértices é conectado por uma aresta. Ou seja, há uma aresta entre cada par possível de vértices. Um grafo completo com n vértices é denotado por K_n. [cite: 65]



Este é um grafo completo K_3. [cite: 65]

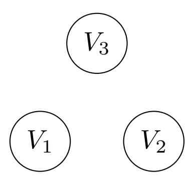
Relação: Todo grafo completo é, por definição, conexo. No entanto, um grafo conexo não é necessariamente completo. [cite: 65]

Exercício 4: Desenhe todos os grafos simples com 3 vértices distintos (sem laços ou múltiplas arestas). [cite: 66]

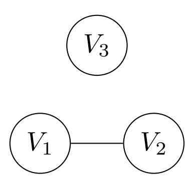
Solução do Exercício 4

Para grafos simples com 3 vértices distintos (vamos chamá-los de V_1, V_2, V_3), o número máximo de arestas possível é $\binom{3}{2} = 3$. As possíveis arestas são $\{V_1, V_2\}$, $\{V_2, V_3\}$ e $\{V_3, V_1\}$. Podemos ter grafos com 0, 1, 2 ou 3 arestas.

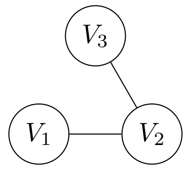
1. **0 Arestas (Grafo nulo):**



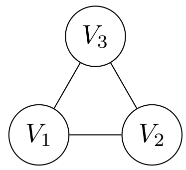
2. **1 Aresta:** (Todas as configurações com 1 aresta são isomórficas, ou seja, estruturalmente idênticas)



3. **2 Arestas:** (Todas as configurações com 2 arestas são isomórficas)



4. **3 Arestas (Grafo completo K_3):**



Total de 4 grafos simples não isomórficos com 3 vértices. No entanto, se a pergunta é sobre grafos com vértices *distintos* (rotulados), então são $2^3 = 8$ grafos, pois cada uma das 3 arestas possíveis pode estar presente ou não. Os 8 grafos seriam: o grafo nulo, 3 grafos com 1 aresta (V1-V2, V1-V3, V2-V3), 3 grafos com 2 arestas (V1-V2 e V1-V3, etc.), e o grafo completo.

Exercício 5: Quantas arestas tem um grafo completo com n vértices? Justifique. [cite: 67]

Solução do Exercício 5

Um **grafo completo** com n vértices, denotado por K_n, é um grafo simples onde cada par distinto de vértices é conectado por exatamente uma aresta. [cite: 67]

Para determinar o número de arestas, pensamos em quantas maneiras podemos escolher 2 vértices de um total de n vértices para formar uma aresta. A ordem dos vértices não importa ao formar uma aresta (por exemplo, a aresta entre u e v é a mesma que entre v e u). [cite: 67]

Isso é um problema de combinação, especificamente, escolher 2 vértices de n sem repetição e sem ordem. O número de combinações de n elementos tomados 2 a 2 é dado pela fórmula:

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!}$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{2 \times 1 \times (n-2)!}$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Portanto, um grafo completo com n vértices tem $\frac{n(n-1)}{2}$ arestas. [cite: 67]

Justificativa: Cada vértice precisa estar conectado a todos os outros $n-1$ vértices. Se multiplicarmos n (número de vértices) por $n-1$ (número de conexões por vértice), contamos cada aresta duas vezes (uma vez para cada extremidade da aresta). Por isso, dividimos por 2. [cite: 67]

Exercício 6: Qual é o número máximo de arestas em um grafo simples com n vértices? [cite: 68]

Solução do Exercício 6

O número máximo de arestas em um grafo simples com n vértices ocorre quando o grafo é um **grafo completo** (K_n). [cite: 68] Em um grafo simples, não são permitidos laços (arestas de um vértice para si mesmo) nem múltiplas arestas (mais de uma aresta entre o mesmo par de vértices). [cite: 68] Assim, o máximo de arestas possível é atingido quando cada par distinto de vértices está conectado por exatamente uma aresta. [cite: 68]

Como demonstrado no Exercício 5, o número de arestas em um grafo completo com n vértices é $\frac{n(n-1)}{2}$. [cite: 67]

Portanto, o número máximo de arestas em um grafo simples com n vértices é $\frac{n(n-1)}{2}$. [cite: 68]

Exercício 7: O que é o tamanho de um grafo? Qual a relação entre tamanho e número de arestas? [cite: 69]

Solução do Exercício 7

O **tamanho de um grafo** é o número de arestas que ele possui. [cite: 69]

A relação entre o tamanho e o número de arestas é direta: eles são a mesma coisa. Se um grafo tem m arestas, então seu tamanho é m. [cite: 69]

Formalmente, se $G = (V, E)$ é um grafo (onde V é o conjunto de vértices e E é o conjunto de arestas), então o tamanho do grafo é $|E|$. [cite: 69]

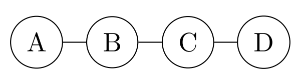
Exercício 8: Determine se o grafo abaixo é conexo. Justifique sua resposta. [cite: 70, 71]

(Forneça um diagrama ou deixe o espaço para o aluno desenhar)

Solução do Exercício 8

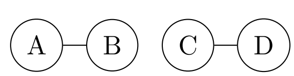
Assumindo o grafo a ser fornecido. Vou usar um exemplo genérico. Um grafo é **conexo** se existe um caminho entre qualquer par de seus vértices. [cite: 65]

Exemplo de Grafo Conexo: Considere o grafo G_1 com vértices $\{A, B, C, D\}$ e arestas $\{\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, D\}\}$.



Justificativa: Este grafo é conexo. Por exemplo, para ir de A a D, existe o caminho A-B-C-D. É possível encontrar um caminho entre qualquer par de vértices. [cite: 65]

Exemplo de Grafo Não Conexo: Considere o grafo G_2 com vértices $\{A, B, C, D\}$ e arestas $\{\{A, B\}, \{C, D\}\}$.



Justificativa: Este grafo não é conexo. Por exemplo, não existe um caminho do vértice A para o vértice C. O grafo consiste em duas componentes conexas separadas. [cite: 65]

(O aluno deverá aplicar essa definição ao diagrama fornecido na questão.)

Exercício 9: O que é um caminho em um grafo? E um ciclo? [cite: 72]

Solução do Exercício 9

- Um **caminho** em um grafo é uma sequência de vértices e arestas alternadas, começando e terminando em vértices, onde cada aresta na sequência conecta os dois vértices que a precedem e a seguem. Em um caminho simples, nenhum vértice (e consequentemente nenhuma aresta) é repetido. [cite: 72] **Exemplo:** Em um grafo com vértices 1, 2, 3, 4 e arestas 1,2, 2,3, 3,4, o caminho 1-2-3-4 é uma sequência de vértices conectados por arestas distintas. [cite: 72]

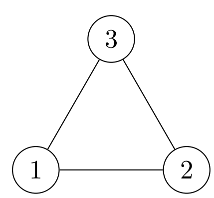
- Um **ciclo** em um grafo é um caminho que começa e termina no mesmo vértice, e no qual nenhum outro vértice (ou aresta) é repetido. O comprimento de um ciclo é o número de arestas que ele contém. [cite: 72] **Exemplo:** Em um grafo com vértices 1, 2, 3 e arestas 1,2, 2,3, 3,1, o caminho 1-2-3-1 é um ciclo. [cite: 72]

Exercício 10: Um grafo pode ter ciclo e ainda ser conexo? Dê um exemplo. [cite: 73]

Solução do Exercício 10

Sim, um grafo pode ter ciclos e ainda ser conexo. A presença de ciclos não impede a conectividade. [cite: 73] Um grafo conexo significa que há um caminho entre qualquer par de vértices, enquanto um ciclo significa que existe um caminho que começa e termina no mesmo vértice sem repetir outros vértices ou arestas. [cite: 65, 72]

Exemplo: O grafo completo K_3 (um triângulo) com vértices $\{1, 2, 3\}$ e arestas $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}\}$ é um exemplo. [cite: 65]



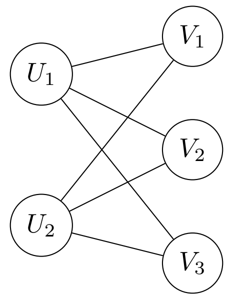
Justificativa: Este grafo é conexo porque é possível ir de qualquer vértice para qualquer outro (ex: 1 para 3 via 1-2-3). Além disso, ele contém um ciclo (1-2-3-1), que tem comprimento 3. [cite: 65, 72]

Exercício 11: Explique o que é um grafo bipartido. Dê um exemplo. [cite: 74]

Solução do Exercício 11

Um **grafo bipartido** é um grafo cujos vértices podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos e independentes, U e V, de tal forma que cada aresta do grafo conecta um vértice em U a um vértice em V. Não existem arestas conectando dois vértices dentro do mesmo conjunto (U ou V). [cite: 74]

Exemplo: Considere o grafo completo bipartido $K_{2,3}$. Os conjuntos de vértices são $U = \{U_1, U_2\}$ e $V = \{V_1, V_2, V_3\}$. As arestas conectam cada vértice de U a cada vértice de V.



Justificativa: Todas as arestas conectam um vértice do conjunto U a um vértice do conjunto V. Não há arestas entre U_1 e U_2, nem entre V_1, V_2, V_3 entre si. [cite: 74]

Exercício 12: Mostre que um grafo é bipartido se e somente se ele não contém ciclos de comprimento ímpar. [cite: 75]

Solução do Exercício 12

Esta é uma prova de "se e somente se"($P \iff Q$), que requer duas partes: [cite: 75]

1. **Se um grafo é bipartido, então ele não contém ciclos de comprimento ímpar.** ($P \implies Q$)
2. **Se um grafo não contém ciclos de comprimento ímpar, então ele é bipartido.** ($Q \implies P$)

Parte 1: Se um grafo G é bipartido, então ele não contém ciclos de comprimento ímpar. [cite: 75] Suponha que $G = (V, E)$ é um grafo bipartido. Então, seus vértices V podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos U e W ($V = U \cup W$, $U \cap W = \emptyset$) tais que toda aresta em E conecta um vértice de U a um vértice de W. [cite: 74] Considere qualquer ciclo no grafo. Comece em um vértice, digamos $v_0 \in U$. A primeira aresta deve levá-lo a um vértice em W, digamos $v_1 \in W$. A próxima aresta deve levá-lo de volta a um vértice em U, digamos $v_2 \in U$, e assim por diante. [cite: 75] A sequência de vértices em um ciclo seria $v_0 \in U, v_1 \in W, v_2 \in U, v_3 \in W, \ldots, v_k \in U/W, v_0 \in U$. Para que o ciclo retorne a $v_0 \in U$, o número de arestas (o comprimento do ciclo) deve ser par. Por quê? Porque após um número ímpar de passos, você estaria em um vértice no conjunto oposto ao de partida (se começou em U, estaria em W). Para voltar a U, precisa de um número par de passos. [cite: 75] Portanto, todo ciclo em um grafo bipartido deve ter comprimento par. Assim, um grafo bipartido não contém ciclos de comprimento ímpar. [cite: 75]

Parte 2: Se um grafo G não contém ciclos de comprimento ímpar, então ele é bipartido. [cite: 75] Suponha que um grafo $G = (V, E)$ não contenha ciclos de comprimento ímpar. Sem perda de generalidade, podemos assumir que G é conexo (se não for, podemos aplicar o argumento a cada componente conexa separadamente, e um grafo é bipartido se e somente se cada uma de suas componentes conexas é bipartida). [cite: 65, 75] Escolha um vértice arbitrário

$v_0 \in V$. Defina dois conjuntos de vértices: $U = \{v \in V \mid \text{a distância de } v_0 \text{ a } v \text{ é par}\}$ $W = \{v \in V \mid \text{a distância de } v_0 \text{ a } v \text{ é ímpar}\}$ (A distância é o comprimento do caminho mais curto). É claro que $U \cap W = \emptyset$ e $U \cup W = V$.

Agora, precisamos mostrar que não há arestas dentro de U nem dentro de W. Suponha, por contradição, que exista uma aresta $\{u, v\}$ onde $u, v \in U$. Isso significa que a distância de v_0 a u é par e a distância de v_0 a v é par. Então, existe um caminho de v_0 a u de comprimento par (P_1) e um caminho de v_0 a v de comprimento par (P_2). Se P_1 e P_2 são os caminhos mais curtos, podemos formar um ciclo fechado usando P_1 (de v_0 a u), a aresta $\{u, v\}$, e o inverso do caminho P_2 (de v a v_0). A soma dos comprimentos desses caminhos seria (par) + 1 + (par) = ímpar. Isso forma um ciclo de comprimento ímpar, que contradiz nossa suposição. (Um argumento mais rigoroso envolve tomar os caminhos mais curtos e observar a paridade. Se $d(v_0, u)$ e $d(v_0, v)$ são ambos pares, e existe uma aresta entre u e v, então existe um ciclo de comprimento $d(v_0, u) + d(v_0, v) + 1$, que é par+par+1=ímpar. Isso é uma contradição.) A mesma lógica se aplica se existisse uma aresta $\{u, v\}$ onde $u, v \in W$. As distâncias de v_0 a u e v_0 a v seriam ambas ímpares. Então, $d(v_0, u) + d(v_0, v) + 1$ seria ímpar+ímpar+1=ímpar, novamente um ciclo de comprimento ímpar. Portanto, não pode haver arestas dentro de U nem dentro de W. Todas as arestas devem conectar um vértice de U a um vértice de W. [cite: 75] Assim, o grafo é bipartido. [cite: 74]

Conclusão: Um grafo é bipartido se e somente se ele não contém ciclos de comprimento ímpar. [cite: 75]

Exercício 13: Dado um grafo com 6 vértices e 9 arestas, ele pode ser um grafo simples? Explique. [cite: 76]

Solução do Exercício 13

Sim, um grafo com 6 vértices e 9 arestas pode ser um grafo simples. [cite: 76]

Justificativa: Um grafo simples é um grafo que não possui laços (arestas que conectam um vértice a si mesmo) e não possui múltiplas arestas (mais de uma aresta entre o mesmo par de vértices). [cite: 63]

Para determinar se é possível ter um grafo simples com 6 vértices e 9 arestas, precisamos verificar qual é o número máximo de arestas que um grafo simples com 6 vértices pode ter. [cite: 68] O número máximo de arestas em um grafo simples com n vértices é dado pela fórmula para o número de arestas em um grafo completo K_n, que é $\frac{n(n-1)}{2}$. [cite: 67, 68]

Para $n = 6$ vértices: Número máximo de arestas $= \frac{6(6-1)}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = \frac{30}{2} = 15$. [cite: 67]

Como 9 arestas é menor ou igual ao número máximo de arestas possíveis para um grafo simples com 6 vértices ($9 \leq 15$), é perfeitamente possível construir tal grafo que seja simples. [cite: 76]

Exemplo: Um grafo K_4 (completo com 4 vértices, 6 arestas) mais dois vértices isolados e 3 arestas adicionais conectando-os para dar 9 arestas no total. Ou um K_5 (10 arestas) menos 1 aresta. Muitas configurações são possíveis. [cite: 67]

Exercício 14: Quantos grafos simples diferentes existem com 4 vértices? [cite: 77]

Solução do Exercício 14

Para determinar o número de grafos simples diferentes com n vértices, consideramos o número máximo de arestas possíveis e o fato de que cada uma dessas arestas pode ou não estar presente no grafo. [cite: 68]

Para $n = 4$ vértices, o número máximo de arestas em um grafo simples é o número de arestas em um grafo completo K_4: Número máximo de arestas $= \binom{4}{2} = \frac{4(4-1)}{2} = \frac{4\times 3}{2} = 6$. [cite: 67]

Cada uma dessas 6 arestas potenciais pode ser incluída ou não no grafo. Para cada aresta, há 2 possibilidades (presente ou ausente). Como há 6 arestas potenciais, o número total de combinações é 2^6. [cite: 77]

Número de grafos simples diferentes $= 2^6 = 64$. [cite: 77]

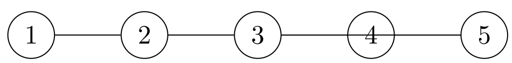
Estes 64 grafos incluem o grafo sem arestas (o grafo nulo) e o grafo completo (K_4). [cite: 77]

Exercício 15: O que é um vértice de corte em um grafo? Dê um exemplo. [cite: 78]

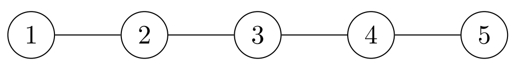
Solução do Exercício 15

Um **vértice de corte** (também conhecido como ponto de articulação) em um grafo conexo é um vértice que, se removido (junto com todas as arestas incidentes a ele), aumenta o número de componentes conexas do grafo. [cite: 78] Em outras palavras, a remoção de um vértice de corte desconecta o grafo. [cite: 78]

Exemplo: Considere o grafo G com vértices $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e arestas $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{3, 5\}\}$.



Exemplo ajustado: Considere o grafo G com vértices $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e arestas $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$.



Justificativa: Neste grafo, o vértice 3 é um vértice de corte. Se removermos o vértice 3 (e as arestas $\{2, 3\}$ e $\{3, 4\}$), o grafo se divide em duas componentes conexas: uma contendo $\{1, 2\}$ e outra contendo $\{4, 5\}$. Originalmente, o grafo era uma única componente conexa. Os vértices 1, 2, 4, 5 não são vértices de corte. Por exemplo, remover o vértice 2 deixa o caminho 1 e o caminho 3-4-5 ainda conectados.

Exercício 16: Defina grau de um vértice. Qual a soma dos graus de todos os vértices de um grafo simples? [cite: 79]

Solução do Exercício 16

O **grau de um vértice** em um grafo é o número de arestas incidentes a esse vértice. [cite: 79] Em outras palavras, é o número de arestas que "saem" ou "chegam" ao vértice. [cite: 79]

A **soma dos graus de todos os vértices** de um grafo simples é igual ao dobro do número de arestas do grafo. [cite: 79] Este é o famoso "Lema do Aperto de Mão" (Handshaking Lemma). [cite: 79]

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples, onde V é o conjunto de vértices e E é o conjunto de arestas. Seja $deg(v)$ o grau do vértice v. Então, a soma dos graus é:

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2 \cdot |E|$$

Justificativa: Cada aresta em um grafo conecta exatamente dois vértices. Quando somamos os graus de todos os vértices, cada aresta é contada duas vezes (uma vez para cada um dos dois vértices que ela conecta). Portanto, a soma total dos graus é o dobro do número de arestas. [cite: 79]

Exercício 17: É possível existir um grafo com exatamente um vértice de grau ímpar? Justifique.

Solução do Exercício 17

Não, não é possível existir um grafo com exatamente um vértice de grau ímpar.

Justificativa: Isso é uma consequência do "Lema do Aperto de Mão"(Handshaking Lemma), que afirma que a soma dos graus de todos os vértices de qualquer grafo é sempre igual ao dobro do número de arestas. Matematicamente, $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$.

A soma dos graus, $2 \cdot |E|$, é sempre um número par. Se separarmos os vértices em dois grupos: aqueles com grau par e aqueles com grau ímpar, a soma dos graus pode ser escrita como:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \text{ com grau par}} \deg(v) + \sum_{v \text{ com grau ímpar}} \deg(v)$$

A soma dos graus dos vértices com grau par é sempre par. Portanto, para que a soma total dos graus seja par, a soma dos graus dos vértices com grau ímpar também deve ser par. Para que a soma de números ímpares seja par, deve haver um número par de parcelas ímpares (ou seja, um número par de vértices com grau ímpar). Se houvesse exatamente um vértice com grau ímpar, a soma dos graus ímpares seria ímpar (sendo composta por apenas um número ímpar), o que tornaria a soma total dos graus ímpar, contradizendo o Lema do Aperto de Mão.

Assim, todo grafo deve ter um número par de vértices com grau ímpar.

Exercício 18: Prove que todo grafo possui um número par de vértices com grau ímpar.

Solução do Exercício 18

Esta é uma prova direta do Lema do Aperto de Mão.

Seja $G = (V, E)$ um grafo. Pelo Lema do Aperto de Mão, a soma dos graus de todos os vértices de um grafo é igual ao dobro do número de arestas:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$$

Como $2 \cdot |E|$ é sempre um número par, a soma dos graus de todos os vértices é sempre um número par.

Agora, divida o conjunto de vértices V em dois subconjuntos:

- $V_{\text{par}} = \{v \in V \mid \deg(v) \text{ é par}\}$
- $V_{\text{ímpar}} = \{v \in V \mid \deg(v) \text{ é ímpar}\}$

Podemos reescrever a soma dos graus como:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V_{\text{par}}} \deg(v) + \sum_{v \in V_{\text{ímpar}}} \deg(v)$$

Sabemos que $\sum_{v \in V} \deg(v)$ é par. A soma dos graus dos vértices em V_{par} ($\sum_{v \in V_{\text{par}}} \deg(v)$) é uma soma de números pares, portanto, é sempre par.

Para que a soma total ($\sum_{v \in V} \deg(v)$) seja par, a soma dos graus dos vértices em $V_{\text{ímpar}}$ ($\sum_{v \in V_{\text{ímpar}}} \deg(v)$) também deve ser par. A soma de um conjunto de números ímpares é par se, e somente se, houver um número par de números ímpares no conjunto. Portanto, para que $\sum_{v \in V_{\text{ímpar}}} \deg(v)$ seja par, o número de vértices em $V_{\text{ímpar}}$ (ou seja, o número de vértices com grau ímpar) deve ser par.

Assim, todo grafo possui um número par de vértices com grau ímpar.

Exercício 19: O que é uma árvore? Qual a principal propriedade de uma árvore com n vértices?

Solução do Exercício 19

Uma **árvore** é um grafo conexo que não contém ciclos. Em outras palavras, é um grafo acíclico e conexo.

A principal propriedade de uma árvore com n vértices é que ela tem exatamente $n - 1$ arestas.

Exercício 20: Mostre que uma árvore com n vértices tem exatamente $n-1$ arestas.

Solução do Exercício 20

Vamos provar esta propriedade por indução matemática no número de vértices n.

Seja $P(n)$ a proposição "Uma árvore com n vértices tem exatamente $n - 1$ arestas."

Passo Base (n=1): Para $n = 1$, uma árvore tem 1 vértice. Para ser uma árvore (conexa e acíclica), ela não pode ter arestas. Número de arestas = 0. A fórmula nos dá $n - 1 = 1 - 1 = 0$. Como $0 = 0$, o passo base é verdadeiro. $P(1)$ é verdadeira.

Passo Indutivo: Suponha que $P(k)$ seja verdadeira para todo $k < n$, para algum $n > 1$. Isto é, suponha que qualquer árvore com j vértices (onde $1 \leq j < n$) tem $j - 1$ arestas (Hipótese de Indução Forte).

Precisamos provar que $P(n)$ é verdadeira, ou seja, que uma árvore com n vértices tem $n - 1$ arestas.

Considere uma árvore T com n vértices. Uma propriedade importante das árvores é que, se você remover qualquer aresta de uma árvore, ela se torna desconexa (divide-se em duas componentes conexas). Seja $e = \{u, v\}$ uma aresta arbitrária de T. Ao remover e, a árvore T se divide em duas componentes conexas, T_1 e T_2, pois T não tem ciclos (se tivesse, a remoção de uma aresta de um ciclo não desconectaria o grafo). Seja n_1 o número de vértices em T_1 e n_2 o número de vértices em T_2. Como T_1 e T_2 são componentes conexas formadas pela remoção de uma única aresta de uma árvore, T_1 e T_2 são, por si mesmas, árvores. Além disso, $n_1 + n_2 = n$ e $1 \leq n_1 < n$, $1 \leq n_2 < n$.

Pela Hipótese de Indução, como T_1 é uma árvore com n_1 vértices, ela tem $n_1 - 1$ arestas. E como T_2 é uma árvore com n_2 vértices, ela tem $n_2 - 1$ arestas.

O número total de arestas em T é a soma das arestas em T_1, das arestas em T_2, mais a aresta e que foi removida: $|E| = (\text{arestas em } T_1) + (\text{arestas em } T_2) + 1$ $|E| = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1$ $|E| = n_1 + n_2 - 2 + 1$ $|E| = n_1 + n_2 - 1$ Como $n_1 + n_2 = n$: $|E| = n - 1$.

Portanto, uma árvore com n vértices tem exatamente $n - 1$ arestas.

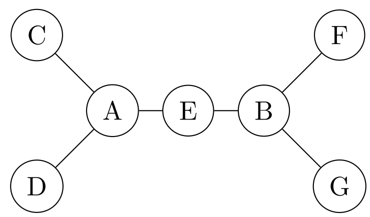
Conclusão: Pelo Princípio da Indução Matemática, a proposição $P(n)$ é verdadeira para todo inteiro positivo n.

Exercício 21: Esboce uma árvore com 7 vértices, sendo que dois deles têm grau 3.

Solução do Exercício 21

Uma árvore com $n = 7$ vértices deve ter $n - 1 = 6$ arestas. A soma dos graus de todos os vértices deve ser $2 \times$ (número de arestas) $= 2 \times 6 = 12$.

Vamos garantir que dois vértices tenham grau 3. Digamos que sejam os vértices A e B.



Neste grafo:

- Vértices: A, B, C, D, E, F, G (total de 7 vértices).
- Arestas: A,C, A,D, A,E, B,E, B,F, B,G (total de 6 arestas, que é $n - 1$).
- Graus: deg(A)=3, deg(B)=3, deg(C)=1, deg(D)=1, deg(E)=2, deg(F)=1, deg(G)=1. Dois vértices (A e B) têm grau 3.
- O grafo é conexo e não possui ciclos.

Portanto, a árvore acima satisfaz todas as condições.

Exercício 22: Explique o funcionamento da busca em largura (BFS). Para qual tipo de problema ela é mais indicada?

Solução do Exercício 22

A **Busca em Largura (BFS - Breadth-First Search)** é um algoritmo para percorrer ou pesquisar nós (vértices) em uma estrutura de dados de árvore ou grafo.

Funcionamento: A BFS começa a partir de um vértice fonte (inicial) e explora todos os vizinhos do vértice atual no nível mais próximo antes de passar para os vértices do próximo nível. Ela se expande "em largura", visitando todos os nós a uma dada distância k do nó inicial antes de visitar qualquer nó a uma distância $k+1$. Para gerenciar a ordem de visita, a BFS utiliza uma **fila (queue)**.

1. Adicione o vértice inicial à fila e marque-o como visitado.
2. Enquanto a fila não estiver vazia:
    - Remova um vértice da frente da fila.

- Para cada vizinho não visitado desse vértice, adicione-o à fila e marque-o como visitado.

Indicação de Uso: A BFS é mais indicada para problemas onde se busca o caminho mais curto (em termos de número de arestas) entre dois vértices em um grafo não ponderado. Também é útil para:

- Encontrar todas as componentes conexas de um grafo.
- Verificar se um grafo é bipartido.
- Resolver labirintos (encontrando o caminho mais curto).
- Níveis em grafos (como "grau de separação").

Exercício 23: Explique o funcionamento da busca em profundidade (DFS). Em que situações é mais adequada?

Solução do Exercício 23

A **Busca em Profundidade (DFS - Depth-First Search)** é um algoritmo para percorrer ou pesquisar nós (vértices) em uma estrutura de dados de árvore ou grafo.

Funcionamento: A DFS começa a partir de um vértice fonte (inicial) e explora o máximo possível ao longo de cada ramo antes de retroceder (backtrack). Ela se expande "em profundidade", explorando o caminho mais distante possível de um nó antes de explorar outros vizinhos do nó inicial. Para gerenciar a ordem de visita, a DFS utiliza uma **pilha (stack)** ou uma abordagem recursiva (que usa a pilha de chamadas do sistema).

1. Comece com um vértice inicial e marque-o como visitado.
2. Adicione o vértice à pilha.
3. Enquanto a pilha não estiver vazia:
   - Olhe para o vértice no topo da pilha.
   - Se ele tem um vizinho não visitado, mova-se para esse vizinho (adicione à pilha e marque como visitado).
   - Se não tem vizinhos não visitados, remova-o da pilha (retroceda).

Indicação de Uso: A DFS é mais adequada para problemas onde se busca:

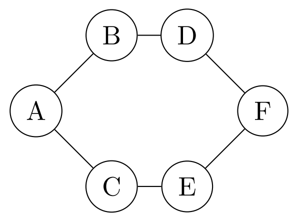
- Detecção de ciclos em um grafo.
- Verificação de conectividade.
- Ordenação topológica (em dígrafos).
- Encontrar componentes fortemente conexas.
- Resolver quebra-cabeças que envolvem estados e transições (como labirintos, mas onde qualquer caminho até a saída é suficiente, não necessariamente o mais curto).
- Backtracking.

Exercício 24: Dado o grafo a seguir, simule a execução da BFS e DFS a partir de um vértice especificado. Anote a ordem de visita dos vértices.

Solução do Exercício 24

(O diagrama do grafo não foi fornecido na questão. Usarei um grafo de exemplo para ilustrar a simulação.)

Grafo de Exemplo: Considere o seguinte grafo: Vértices: $\{A, B, C, D, E, F\}$ Arestas: $\{\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, D\}, \{C,$



Vamos simular a execução a partir do vértice inicial **A**.

Simulação BFS (Busca em Largura)

Utiliza uma Fila.

1. Início: Fila = [A], Visitados = A, Ordem de Visita = [A]
2. Retira A. Vizinhos de A: B, C. Adiciona B, C à fila e marca como visitados. Fila = [B, C], Visitados = A, B, C, Ordem de Visita = [A, B, C]
3. Retira B. Vizinhos de B: A (visitado), D. Adiciona D à fila e marca como visitado. Fila = [C, D], Visitados = A, B, C, D, Ordem de Visita = [A, B, C, D]
4. Retira C. Vizinhos de C: A (visitado), E. Adiciona E à fila e marca como visitado. Fila = [D, E], Visitados = A, B, C, D, E, Ordem de Visita = [A, B, C, D, E]
5. Retira D. Vizinhos de D: B (visitado), F. Adiciona F à fila e marca como visitado. Fila = [E, F], Visitados = A, B, C, D, E, F, Ordem de Visita = [A, B, C, D, E, F]
6. Retira E. Vizinhos de E: C (visitado), F (visitado). Fila = [F], Visitados = A, B, C, D, E, F, Ordem de Visita = [A, B, C, D, E, F]
7. Retira F. Vizinhos de F: D (visitado), E (visitado). Fila = [], Visitados = A, B, C, D, E, F, Ordem de Visita = [A, B, C, D, E, F]

Ordem de visita dos vértices (BFS): A, B, C, D, E, F.

Simulação DFS (Busca em Profundidade)

Utiliza uma Pilha (ou Recursão). Vamos assumir que os vizinhos são processados em ordem alfabética se houver múltiplas escolhas.

1. Início: Pilha = [A], Visitados = A, Ordem de Visita = [A]

2. Vizinhos de A: B, C. Escolhe B (alfabético). Pilha = [A, B], Visitados = A, B, Ordem de Visita = [A, B]
3. Vizinhos de B: A (visitado), D. Escolhe D. Pilha = [A, B, D], Visitados = A, B, D, Ordem de Visita = [A, B, D]
4. Vizinhos de D: B (visitado), F. Escolhe F. Pilha = [A, B, D, F], Visitados = A, B, D, F, Ordem de Visita = [A, B, D, F]
5. Vizinhos de F: D (visitado), E. Escolhe E. Pilha = [A, B, D, F, E], Visitados = A, B, D, F, E, Ordem de Visita = [A, B, D, F, E]
6. Vizinhos de E: C, F (visitado). Escolhe C. Pilha = [A, B, D, F, E, C], Visitados = A, B, D, F, E, C, Ordem de Visita = [A, B, D, F, E, C]
7. Vizinhos de C: A (visitado), E (visitado). Nenhum não visitado. Retira C. Pilha = [A, B, D, F, E], Visitados = A, B, C, D, E, F, Ordem de Visita = [A, B, D, F, E, C]
8. Vizinhos de E: C (visitado), F (visitado). Nenhum não visitado. Retira E. Pilha = [A, B, D, F], Visitados = A, B, C, D, E, F, Ordem de Visita = [A, B, D, F, E, C]
9. Vizinhos de F: D (visitado), E (visitado). Nenhum não visitado. Retira F. Pilha = [A, B, D], Visitados = A, B, C, D, E, F, Ordem de Visita = [A, B, D, F, E, C]
10. Vizinhos de D: B (visitado), F (visitado). Nenhum não visitado. Retira D. Pilha = [A, B], Visitados = A, B, C, D, E, F, Ordem de Visita = [A, B, D, F, E, C]
11. Vizinhos de B: A (visitado), D (visitado). Nenhum não visitado. Retira B. Pilha = [A], Visitados = A, B, C, D, E, F, Ordem de Visita = [A, B, D, F, E, C]
12. Vizinhos de A: B (visitado), C (visitado). Nenhum não visitado. Retira A. Pilha = [], Visitados = A, B, C, D, E, F, Ordem de Visita = [A, B, D, F, E, C]

Ordem de visita dos vértices (DFS): A, B, D, F, E, C.

Exercício 25: Em qual das buscas (BFS ou DFS) faz mais sentido utilizar uma fila? E uma pilha? Explique o motivo.

Solução do Exercício 25

- A **Busca em Largura (BFS)** faz mais sentido utilizar uma **fila (queue)**. **Motivo:** A fila opera no princípio FIFO (First-In, First-Out - Primeiro a Entrar, Primeiro a Sair). Isso garante que a BFS explore os vértices "em camadas", visitando todos os vizinhos de um vértice (o nível atual) antes de passar para os vizinhos desses vizinhos (o próximo nível). A fila mantém a ordem dos vértices a serem explorados de forma que os vértices mais próximos do ponto de partida são processados primeiro, o que é fundamental para encontrar o caminho mais curto.

- A **Busca em Profundidade (DFS)** faz mais sentido utilizar uma **pilha (stack)**. **Motivo:** A pilha opera no princípio LIFO (Last-In, First-Out - Último a Entrar, Primeiro a Sair). Isso permite que a DFS explore um caminho o mais profundamente possível antes de "retroceder"e explorar outros caminhos. Quando a DFS visita um novo vizinho, ela o empilha e continua a exploração a partir dele. Quando um caminho é exaurido, ela desempilha o último vértice e continua a partir do próximo vizinho não visitado do vértice anterior. Essa estratégia de "ir fundo"é naturalmente replicada pela recursão também, onde a pilha de chamadas do sistema age como a pilha explícita.

Exercício 26: O que é um ciclo euleriano? Qual condição um grafo deve satisfazer para possuir um?

Solução do Exercício 26

Um **ciclo euleriano** (ou circuito euleriano) em um grafo é um caminho fechado que visita todas as arestas do grafo exatamente uma vez, retornando ao vértice inicial.

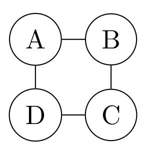
A condição que um grafo conexo deve satisfazer para possuir um ciclo euleriano é que todos os seus vértices devem ter **grau par**. Se o grafo não for conexo, mas todas as componentes conexas que contêm arestas possuem todos os vértices de grau par, ele é considerado "euleriano"dentro de suas componentes, mas não terá um único ciclo euleriano que cubra todas as arestas do grafo inteiro. Para o conceito geral, assume-se conectividade.

Exercício 27: Dê um exemplo de grafo euleriano e mostre o ciclo euleriano correspondente.

Solução do Exercício 27

Um **grafo euleriano** é aquele que possui um ciclo euleriano. A condição para um grafo conexo ser euleriano é que todos os seus vértices tenham grau par.

Exemplo de Grafo Euleriano: Considere um grafo que forma um quadrado. Vértices: $V = \{A, B, C, D\}$ Arestas: $E = \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, D\}, \{D, A\}\}$.



Graus dos vértices:

- deg(A) = 2 (arestas A,B, A,D)
- deg(B) = 2 (arestas B,A, B,C)
- deg(C) = 2 (arestas C,B, C,D)
- deg(D) = 2 (arestas D,C, D,A)

Todos os graus são pares (grau 2). O grafo é conexo. **Ciclo Euleriano Correspondente:** A-B-C-D-A. Este ciclo visita todas as arestas exatamente uma vez e retorna ao ponto de partida.

Exercício 28: Um grafo com todos os vértices de grau par é sempre euleriano? Justifique.

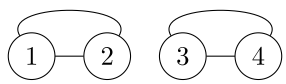
Solução do Exercício 28

Não, um grafo com todos os vértices de grau par não é **sempre** euleriano.

Justificativa: A condição de que todos os vértices tenham grau par é necessária para a existência de um ciclo euleriano. No entanto, esta condição é suficiente apenas se o grafo for **conexo**.

Se o grafo tiver todos os vértices de grau par, mas não for conexo e tiver mais de uma componente conexa com arestas, ele não possuirá um ciclo euleriano que percorra *todas* as arestas do grafo. Um ciclo euleriano deve visitar todas as arestas, o que não é possível em um grafo desconexo.

Exemplo: Considere um grafo G com 4 vértices, $V = \{1, 2, 3, 4\}$, e arestas $E = \{\{1, 2\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{3, 4\}\}$. (Isso representa duas arestas paralelas entre 1 e 2, e duas arestas paralelas entre 3 e 4.)



Para cada componente:

- Componente 1: Vértices 1,2. deg(1)=2, deg(2)=2. Possui um ciclo euleriano (e.g., 1-2-1 usando as duas arestas).
- Componente 2: Vértices 3,4. deg(3)=2, deg(4)=2. Possui um ciclo euleriano (e.g., 3-4-3 usando as duas arestas).

Todos os vértices (1, 2, 3, 4) têm grau par. No entanto, o grafo não é conexo. Não há um único ciclo que visite *todas* as arestas do grafo completo. Portanto, o grafo não é euleriano.

A condição completa é: um grafo é euleriano se e somente se ele é conexo (com exceção de vértices isolados) e todos os seus vértices têm grau par.

Exercício 29: Qual a diferença entre representar um grafo com matriz de adjacência e lista de adjacência?

Solução do Exercício 29

As matrizes de adjacência e as listas de adjacência são duas das formas mais comuns de representar grafos em estruturas de dados. Elas diferem na maneira como armazenam as informações sobre as arestas do grafo, o que impacta seu uso e eficiência.

- **Matriz de Adjacência:**
  - É uma matriz $N \times N$, onde N é o número de vértices no grafo.
  - A célula $M[i][j]$ contém 1 (ou um peso, se for grafo ponderado) se existe uma aresta do vértice i para o vértice j, e 0 caso contrário. Para grafos não direcionados, a matriz é simétrica ($M[i][j] = M[j][i]$).
  - **Vantagens:**
    - Verificar a existência de uma aresta entre dois vértices é $O(1)$ (tempo constante).

        * Fácil de implementar para grafos densos (com muitas arestas).

    - **Desvantagens:**
        * Requer $O(N^2)$ de espaço de memória, mesmo para grafos esparsos (com poucas arestas), onde a maioria das células é 0.
        * Iterar sobre todos os vizinhos de um vértice pode ser ineficiente ($O(N)$), pois é preciso verificar todas as N colunas.

- **Lista de Adjacência:**
    - É um array de listas (ou coleções encadeadas), onde o índice do array representa um vértice, e a lista armazenada nesse índice contém todos os vértices adjacentes a ele.
    - Por exemplo, 'adj[i]' é uma lista de todos os vértices j para os quais existe uma aresta de i para j.
    - **Vantagens:**
        * Requer $O(N + M)$ de espaço de memória (onde N é o número de vértices e M é o número de arestas), o que é mais eficiente para grafos esparsos.
        * Iterar sobre todos os vizinhos de um vértice é eficiente (O(grau do vértice)).
    - **Desvantagens:**
        * Verificar a existência de uma aresta entre dois vértices é O(grau do vértice) no pior caso (precisa percorrer a lista de adjacência).

Resumo: A matriz de adjacência é ideal para grafos densos onde a verificação de arestas é frequente, enquanto a lista de adjacência é melhor para grafos esparsos ou quando é necessário iterar sobre os vizinhos de um vértice.

Exercício 30: Em quais estruturas de dados (pilha, fila, lista, etc.) as buscas em grafos normalmente se baseiam? Por quê?

Solução do Exercício 30

As buscas em grafos, como a Busca em Largura (BFS) e a Busca em Profundidade (DFS), baseiam-se fundamentalmente em duas estruturas de dados principais: a **fila (queue)** e a **pilha (stack)**.

- **Fila (Queue) para BFS (Busca em Largura):**
    - **Motivo:** A BFS explora o grafo nível por nível. Ela visita todos os vizinhos de um vértice antes de se mover para os vizinhos desses vizinhos. A natureza FIFO (First-In, First-Out) da fila garante que os vértices que foram adicionados primeiro (ou seja, estão no nível atual ou em níveis mais próximos do ponto de partida) sejam processados antes dos vértices adicionados mais tarde (que estão em níveis mais distantes). Isso assegura que a busca se expanda de forma uniforme, garantindo o caminho mais curto em grafos não ponderados.

- **Pilha (Stack) para DFS (Busca em Profundidade):**

– **Motivo:** A DFS explora o grafo o mais profundamente possível ao longo de cada ramo antes de retroceder. A natureza LIFO (Last-In, First-Out) da pilha é perfeita para isso. O último vértice adicionado à pilha é o próximo a ser explorado. Quando um caminho não pode ser estendido mais, a DFS "desempilha"os vértices, retrocedendo para o último ponto onde havia um caminho alternativo a ser explorado. Essa estratégia de "ir fundo"é naturalmente replicada pela recursão também, onde a pilha de chamadas do sistema age como a pilha explícita.

Além da fila e da pilha, **listas de adjacência** ou **matrizes de adjacência** são usadas para representar o grafo em si, permitindo que os algoritmos de busca acessem os vizinhos de cada vértice. Um conjunto ou array de **visitados** (ou marcadores booleanos) é usado para rastrear os vértices que já foram processados, evitando ciclos infinitos e reprocessamento.

Exercício 31: O que é um ciclo hamiltoniano? Em que ele difere de um ciclo euleriano?

Solução do Exercício 31

- Um **ciclo hamiltoniano** em um grafo é um ciclo que visita cada vértice do grafo exatamente uma vez, com exceção do vértice inicial/final, que é visitado duas vezes. **Exemplo:** Em um grafo com vértices A, B, C, D, o ciclo A-B-C-D-A é hamiltoniano se todas essas arestas existirem e todos os vértices forem visitados.
- Um **ciclo euleriano** em um grafo é um ciclo que visita cada aresta do grafo exatamente uma vez, retornando ao vértice inicial.

Diferenças principais:

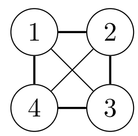
1. **Foco:**
    - **Ciclo Hamiltoniano:** Foca nos **vértices**. O objetivo é visitar cada vértice exatamente uma vez.
    - **Ciclo Euleriano:** Foca nas **arestas**. O objetivo é percorrer cada aresta exatamente uma vez.
2. **Visitas repetidas:**
    - Em um ciclo hamiltoniano, as arestas podem ser repetidas (se o grafo não for simples), mas os vértices (exceto o inicial/final) não.
    - Em um ciclo euleriano, os vértices podem ser repetidos, mas as arestas não.
3. **Condição de existência:**
    - Para ciclos hamiltonianos, não há uma condição simples e universalmente aplicável para sua existência (é um problema NP-completo).
    - Para ciclos eulerianos, um grafo conexo possui um ciclo euleriano se e somente se todos os seus vértices têm grau par.

Exercício 32: Dê um exemplo de grafo que possui ciclo hamiltoniano e mostre esse ciclo.

Solução do Exercício 32

Um **ciclo hamiltoniano** é um ciclo que visita cada vértice de um grafo exatamente uma vez, exceto o vértice inicial/final.

Exemplo de Grafo com Ciclo Hamiltoniano: Considere o grafo completo K_4 com 4 vértices. Vértices: $\{1, 2, 3, 4\}$ Arestas: $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$



Ciclo Hamiltoniano Correspondente: Um ciclo hamiltoniano neste grafo é $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$. Este ciclo visita cada vértice (1, 2, 3, 4) exatamente uma vez e retorna ao vértice inicial (1). As arestas usadas são 1,2, 2,3, 3,4, 4,1.

Outro ciclo hamiltoniano seria $1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 1$.

Exercício 33: Existe algum critério que garanta que um grafo é hamiltoniano? Dê um exemplo de condição suficiente.

Solução do Exercício 33

Diferentemente dos ciclos eulerianos, não existe um critério simples (condição necessária e suficiente) que garanta que um grafo é hamiltoniano. O problema de determinar se um grafo possui um ciclo hamiltoniano é um problema NP-completo, o que significa que não há um algoritmo eficiente conhecido para resolvê-lo em todos os casos.

No entanto, existem diversas **condições suficientes** que, se satisfeitas, garantem que um grafo é hamiltoniano. Uma das mais conhecidas é o **Teorema de Dirac**.

Condição Suficiente (Teorema de Dirac): Seja G um grafo simples com n vértices, onde $n \geq 3$. Se o grau de cada vértice em G for maior ou igual a $n/2$ (ou seja, $\deg(v) \geq n/2$ para todo $v \in V$), então G é um grafo hamiltoniano.

Exemplo de aplicação do Teorema de Dirac: Considere um grafo G com $n = 5$ vértices. Se cada vértice tiver grau $\deg(v) \geq 5/2 = 2.5$, ou seja, $\deg(v) \geq 3$. O grafo completo K_5 (todos os vértices conectados a todos os outros) tem $n = 5$ vértices e o grau de cada vértice é $n - 1 = 4$. Como $4 \geq 2.5$, o Teorema de Dirac garante que K_5 é hamiltoniano. Um ciclo hamiltoniano em K_5 seria, por exemplo, $V_1 - V_2 - V_3 - V_4 - V_5 - V_1$.

É importante notar que o Teorema de Dirac é apenas uma condição suficiente, não necessária. Existem grafos hamiltonianos que não satisfazem a condição de Dirac (ou seja, possuem vértices com grau menor que $n/2$).

Exercício 34: O que é um grafo dual? Em que contexto ele é usado?

Solução do Exercício 34

Um **grafo dual** de um grafo planar é um novo grafo que representa as "faces"do grafo original. Para um grafo planar G, seu grafo dual G^* é construído da seguinte forma:

- Cada face (região delimitada por arestas) de G torna-se um vértice em G^*.
- Para cada aresta em G, há uma aresta correspondente em G^* que conecta os dois vértices de G^* que representam as faces adjacentes a essa aresta em G. Se uma aresta em G está na fronteira de apenas uma face (como no caso de um grafo não conectado ou arestas "externas"), ela pode corresponder a um laço no grafo dual.

Contexto de Uso: Grafos duais são usados principalmente no contexto de **grafos planares**. Eles são ferramentas importantes em diversas áreas, incluindo:

- **Teoria dos Grafos:** Para provar teoremas relacionados a grafos planares, como o Teorema de Euler para grafos planares ($V - E + F = 2$) e o Teorema das Quatro Cores.
- **Engenharia de Redes:** Análise de circuitos elétricos, onde faces podem representar malhas e arestas podem ser componentes.
- **Cartografia e Geografia:** Representação de regiões geográficas e suas fronteiras.
- **Computação Gráfica:** Modelagem de superfícies e malhas poligonais.
- **Otimização:** Problemas de caminho mínimo em redes de transporte (onde o dual pode representar a rede de transporte complementar).

Exercício 35: Dado um grafo planar, construa seu grafo dual. Explique o processo.

Solução do Exercício 35

Para construir o grafo dual G^* de um grafo planar G, siga os seguintes passos:

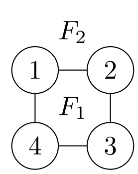
Passo 1: Identificar as Faces do Grafo Original (G) Uma face (ou região) é uma área delimitada pelas arestas do grafo quando ele é desenhado no plano sem cruzamentos. Inclua a "face externa"(a região ilimitada que envolve todo o grafo). Conte todas as faces.

Passo 2: Criar um Vértice em G^* para Cada Face em G Coloque um novo vértice em G^* dentro de cada face de G. Cada um desses novos vértices representará uma face do grafo original.

Passo 3: Criar uma Aresta em G^* para Cada Aresta em G Para cada aresta e no grafo original G:

- Se a aresta e é uma aresta de fronteira entre duas faces adjacentes de G, desenhe uma aresta em G^* que conecta os dois vértices de G^* que correspondem a essas duas faces. A nova aresta em G^* deve "cruzar"a aresta e do grafo original.
- Se a aresta e é uma "ponte"(uma aresta cuja remoção desconecta uma componente) e delimita apenas uma face, ela forma um laço no grafo dual, conectando o vértice dual a si mesmo.

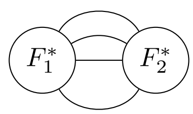
Exemplo de Construção: Considere um quadrado desenhado no plano: Grafo G: Vértices $\{1, 2, 3, 4\}$, Arestas $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}\}$.



Processo:

1. **Faces de G:** Este grafo tem duas faces:
   - F_1: A face interna (o quadrado).
   - F_2: A face externa (a região que envolve o quadrado).
2. **Vértices de G^*:** Criamos dois vértices em G^*, F_1^* e F_2^*, representando F_1 e F_2.
3. **Arestas de G^*:**
   - A aresta $\{1, 2\}$ em G é uma fronteira entre F_1 e F_2. Então, uma aresta em G^* entre F_1^* e F_2^*.
   - A aresta $\{2, 3\}$ em G é uma fronteira entre F_1 e F_2. Então, outra aresta em G^* entre F_1^* e F_2^*.
   - A aresta $\{3, 4\}$ em G é uma fronteira entre F_1 e F_2. Então, outra aresta em G^* entre F_1^* e F_2^*.
   - A aresta $\{4, 1\}$ em G é uma fronteira entre F_1 e F_2. Então, outra aresta em G^* entre F_1^* e F_2^*.

Grafo Dual G^*: G^* tem vértices $\{F_1^*, F_2^*\}$ e 4 arestas paralelas conectando F_1^* e F_2^*.



Este exemplo ilustra o processo.

Exercício 36: Qual a relação entre grafos planares, seus duais e a fórmula de Euler ($V - A + F = 2$)?

Solução do Exercício 36

A relação entre grafos planares, seus duais e a fórmula de Euler é fundamental na teoria dos grafos.

A **Fórmula de Euler para Grafos Planares** afirma que, para qualquer grafo planar conexo, a relação entre o número de vértices (V), arestas (A) e faces (F) é dada por:

$$V - A + F = 2$$

Esta fórmula é uma propriedade topológica dos grafos planares, indicando que, independentemente de como o grafo é desenhado no plano (desde que não haja cruzamento de arestas), essa relação numérica sempre se mantém.

A conexão com os **grafos duais** é a seguinte: Quando construímos o grafo dual G^* de um grafo planar G:

- O número de vértices de G^* (denotado V^*) é igual ao número de faces de G (F). Ou seja, $V^* = F$.

- O número de arestas de G^* (denotado A^*) é igual ao número de arestas de G (A). Ou seja, $A^* = A$.
- O número de faces de G^* (denotado F^*) é igual ao número de vértices de G (V). Ou seja, $F^* = V$.

Se o grafo original G é conexo, então seu dual G^* também é conexo (se G é 2-conectado, G^* é simples).

Podemos verificar a Fórmula de Euler para o grafo dual G^* substituindo esses valores:

$$V^* - A^* + F^* = F - A + V$$

Como $V - A + F = 2$ para G, então $F - A + V = 2$ também. Portanto, a Fórmula de Euler também se aplica ao grafo dual:

$$V^* - A^* + F^* = 2$$

Essa relação simétrica entre um grafo planar e seu dual é uma característica poderosa que permite que muitas propriedades de um grafo planar sejam investigadas analisando as propriedades de seu dual.