Lista 2 - MD

Aluno: Cauã Borges Faria

RA: 834437

Exercício 5.22: Mostre a validade das seguintes fórmulas:

1. $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Solução do Exercício 5.22, Parte 1 (por Indução Matemática)

Seja $P(n)$ a proposição $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Passo Base (n=1): Para $n = 1$, a soma é 1. A fórmula nos dá $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{1\cdot 2}{2} = 1$. Como $1 = 1$, o passo base é verdadeiro. $P(1)$ é verdadeira.

Passo Indutivo: Suponha que $P(k)$ seja verdadeira para algum inteiro positivo $k \geq 1$. Isto é, suponha que $1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ (Hipótese de Indução).

Precisamos provar que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, que $1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Começamos com o lado esquerdo da equação $P(k+1)$:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1)$$

Pela Hipótese de Indução, sabemos que $1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$. Substituindo:

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

Fatorando $(k+1)$:

$$(k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right)$$

$$(k+1)\left(\frac{k+2}{2}\right)$$

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Este é o lado direito da equação $P(k+1)$. Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

Conclusão: Pelo Princípio da Indução Matemática, a proposição $P(n)$ é verdadeira para todos os inteiros positivos n.

2. $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Solução do Exercício 5.22, Parte 2 (por Indução Matemática)

Seja $P(n)$ a proposição $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Passo Base (n=1): Para $n = 1$, a soma é $1^2 = 1$. A fórmula nos dá $\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} = \frac{6}{6} = 1$. Como $1 = 1$, o passo base é verdadeiro. $P(1)$ é verdadeira.

Passo Indutivo: Suponha que $P(k)$ seja verdadeira para algum inteiro positivo $k \geq 1$. Isto é, suponha que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ (Hipótese de Indução).

Precisamos provar que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

Começamos com o lado esquerdo da equação $P(k+1)$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2$$

Pela Hipótese de Indução, sabemos que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$. Substituindo:

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

Para combinar os termos, fatoramos $(k+1)$ e encontramos um denominador comum:

$$(k+1)\left(\frac{k(2k+1)}{6} + (k+1)\right)$$

$$(k+1)\left(\frac{2k^2+k}{6} + \frac{6(k+1)}{6}\right)$$

$$(k+1)\left(\frac{2k^2+k+6k+6}{6}\right)$$

$$(k+1)\left(\frac{2k^2+7k+6}{6}\right)$$

Fatoramos o trinômio $2k^2 + 7k + 6 = (k+2)(2k+3)$:

$$(k+1)\left(\frac{(k+2)(2k+3)}{6}\right)$$

$$\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Este é o lado direito da equação $P(k+1)$. Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

Conclusão: Pelo Princípio da Indução Matemática, a proposição $P(n)$ é verdadeira para todos os inteiros positivos n.

3. $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

Solução do Exercício 5.22, Parte 3 (por Indução Matemática)

Seja $P(n)$ a proposição $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

Passo Base (n=1): Para $n = 1$, o último termo é $(2 \cdot 1 - 1)^2 = 1^2 = 1$. A soma é 1. A fórmula nos dá $\frac{1(2\cdot1-1)(2\cdot1+1)}{3} = \frac{1(1)(3)}{3} = 1$. Como $1 = 1$, o passo base é verdadeiro. $P(1)$ é verdadeira.

Passo Indutivo: Suponha que $P(k)$ seja verdadeira para algum inteiro positivo $k \geq 1$. Isto é, suponha que $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$ (Hipótese de Indução).

Precisamos provar que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, que $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1)^2 + (2(k+1)-1)^2 = \frac{(k+1)(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}{3}$. O termo $(2(k+1)-1)^2 = (2k+2-1)^2 = (2k+1)^2$. O lado direito de $P(k+1)$ deve ser $\frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}$.

Começamos com o lado esquerdo da equação $P(k+1)$:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1)^2 + (2k+1)^2$$

Pela Hipótese de Indução, sabemos que $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$. Substituindo:

$$\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2$$

Para combinar os termos, fatoramos $(2k+1)$ e encontramos um denominador comum:

$$(2k+1)\left(\frac{k(2k-1)}{3}+(2k+1)\right)$$

$$(2k+1)\left(\frac{2k^2-k}{3}+\frac{3(2k+1)}{3}\right)$$

$$(2k+1)\left(\frac{2k^2-k+6k+3}{3}\right)$$

$$(2k+1)\left(\frac{2k^2+5k+3}{3}\right)$$

Fatoramos o trinômio $2k^2+5k+3$. Podemos testar $(k+1)$ como fator. Se $k=-1$, $2(-1)^2+5(-1)+3=2-5+3=0$. Então $(k+1)$ é um fator. $(2k^2+5k+3)=(k+1)(2k+3)$.

Substituindo de volta:

$$(2k+1)\left(\frac{(k+1)(2k+3)}{3}\right)$$

$$\frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}$$

Este é o lado direito da equação $P(k+1)$. Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

Conclusão: Pelo Princípio da Indução Matemática, a proposição $P(n)$ é verdadeira para todos os inteiros positivos n.

4. $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Solução do Exercício 5.22, Parte 4 (por Indução Matemática)

Seja $P(n)$ a proposição $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Passo Base (n=1): Para $n=1$, a soma é $1^3=1$. A fórmula nos dá $\left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2=\left[\frac{1\cdot 2}{2}\right]^2=[1]^2=1$. Como $1=1$, o passo base é verdadeiro. $P(1)$ é verdadeira.

Passo Indutivo: Suponha que $P(k)$ seja verdadeira para algum inteiro positivo $k\geq 1$. Isto é, suponha que $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$ (Hipótese de Indução).

Precisamos provar que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, que $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\left[\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}\right]^2=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$.

Começamos com o lado esquerdo da equação $P(k+1)$:

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3$$

Pela Hipótese de Indução, sabemos que $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$. Substituindo:

$$\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3$$

$$\frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

Para combinar os termos, fatoramos $(k+1)^2$:

$$(k+1)^2 \left(\frac{k^2}{4} + (k+1) \right)$$

$$(k+1)^2 \left(\frac{k^2}{4} + \frac{4(k+1)}{4} \right)$$

$$(k+1)^2 \left(\frac{k^2+4k+4}{4} \right)$$

Reconhecemos que $k^2 + 4k + 4 = (k+2)^2$.

$$(k+1)^2 \left(\frac{(k+2)^2}{4} \right)$$

$$\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

E então, como um quadrado de uma fração:

$$\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right]^2$$

Este é o lado direito da equação $P(k+1)$. Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

Conclusão: Pelo Princípio da Indução Matemática, a proposição $P(n)$ é verdadeira para todos os inteiros positivos n.

5. $(\forall n \in \mathbb{N})\ 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

Solução do Exercício 5.22, Parte 5 (por Indução Matemática)

Seja $P(n)$ a proposição $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

Passo Base (n=0): Para $n = 0$, a soma é $2^0 = 1$. A fórmula nos dá $2^{0+1} - 1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$. Como $1 = 1$, o passo base é verdadeiro. $P(0)$ é verdadeira.

Passo Indutivo: Suponha que $P(k)$ seja verdadeira para algum inteiro não-negativo $k \geq 0$. Isto é, suponha que $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$ (Hipótese de Indução).

Precisamos provar que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, que $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{(k+1)+1} - 1 = 2^{k+2} - 1$.

Começamos com o lado esquerdo da equação $P(k+1)$:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k + 2^{k+1}$$

Pela Hipótese de Indução, sabemos que $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Substituindo:

$$(2^{k+1} - 1) + 2^{k+1}$$

$$= 2 \cdot 2^{k+1} - 1$$

$$= 2^{k+1+1} - 1$$
$$= 2^{k+2} - 1$$

Este é o lado direito da equação $P(k+1)$. Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

Conclusão: Pelo Princípio da Indução Matemática, a proposição $P(n)$ é verdadeira para todos os inteiros não-negativos n.

6. $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$.

Solução do Exercício 5.22, Parte 6 (por Indução Matemática)

Seja $P(n)$ a proposição $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$.

Passo Base (n=1): Para $n = 1$, o lado esquerdo é $1^2 = 1$. O lado direito é $(-1)^{1-1}\frac{1(1+1)}{2} = (-1)^0\frac{1\cdot 2}{2} = 1 \cdot 1 = 1$. Como $1 = 1$, o passo base é verdadeiro. $P(1)$ é verdadeira.

Passo Indutivo: Suponha que $P(k)$ seja verdadeira para algum inteiro positivo $k \geq 1$. Isto é, suponha que $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{k-1}k^2 = (-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2}$ (Hipótese de Indução).

Precisamos provar que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, que $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{k-1}k^2 + (-1)^{(k+1)-1}(k+1)^2 = (-1)^{(k+1)-1}\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$. O último termo do lado esquerdo é $(-1)^k(k+1)^2$. O lado direito de $P(k+1)$ deve ser $(-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Começamos com o lado esquerdo da equação $P(k+1)$:

$$(1^2 - 2^2 + \cdots + (-1)^{k-1}k^2) + (-1)^k(k+1)^2$$

Pela Hipótese de Indução, substituímos a soma dos k primeiros termos:

$$(-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k(k+1)^2$$

Para combinar os termos, podemos fatorar $(-1)^{k-1}$ e $(k+1)$:

$$(-1)^{k-1}(k+1)\left(\frac{k}{2} + (-1)^1(k+1)\right)$$

$$(-1)^{k-1}(k+1)\left(\frac{k}{2} - (k+1)\right)$$

$$(-1)^{k-1}(k+1)\left(\frac{k - 2(k+1)}{2}\right)$$

$$(-1)^{k-1}(k+1)\left(\frac{k - 2k - 2}{2}\right)$$

$$(-1)^{k-1}(k+1)\left(\frac{-k - 2}{2}\right)$$

$$(-1)^{k-1}(k+1)\left(\frac{-(k+2)}{2}\right)$$

Podemos reescrever $-(k+2)$ como $(-1)(k+2)$. E $(-1)^{k-1} \cdot (-1) = (-1)^k$:

$$(-1)^{k-1} \cdot (-1)\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$(-1)^k \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Este é o lado direito da equação $P(k+1)$. Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

Conclusão: Pelo Princípio da Indução Matemática, a proposição $P(n)$ é verdadeira para todos os inteiros positivos n.

7. $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

Solução do Exercício 5.22, Parte 7 (por Indução Matemática)

Seja $P(n)$ a proposição $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$. Podemos usar frações parciais para o termo geral: $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{A}{2k-1} + \frac{B}{2k+1}$. $1 = A(2k+1) + B(2k-1)$. Se $2k-1=0 \implies k=1/2$, então $1 = A(1+1) \implies 1 = 2A \implies A = 1/2$. Se $2k+1=0 \implies k=-1/2$, então $1 = B(-1-1) \implies 1 = -2B \implies B = -1/2$. Então, $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$.

Passo Base (n=1): Para $n=1$, o lado esquerdo é $\frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{3}$. A fórmula nos dá $\frac{1}{2\cdot 1+1} = \frac{1}{3}$. Como $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, o passo base é verdadeiro. $P(1)$ é verdadeira.

Passo Indutivo: Suponha que $P(k)$ seja verdadeira para algum inteiro positivo $k \geq 1$. Isto é, suponha que $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1}$ (Hipótese de Indução).

Precisamos provar que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, que $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)} = \frac{k+1}{2(k+1)+1}$. O último termo é $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$. O lado direito de $P(k+1)$ deve ser $\frac{k+1}{2k+3}$.

Começamos com o lado esquerdo da equação $P(k+1)$:

$$\left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\right) + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

Pela Hipótese de Indução, substituímos a soma dos k primeiros termos:

$$\frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

Encontramos um denominador comum $(2k+1)(2k+3)$:

$$\frac{k(2k+3)}{(2k+1)(2k+3)} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}$$

Fatoramos o trinômio $2k^2+3k+1$. Testamos $(k+1)$ como fator. Se $k=-1$, $2(-1)^2+3(-1)+1 = 2-3+1 = 0$. Então $(k+1)$ é um fator. $(2k^2+3k+1) = (k+1)(2k+1)$.

Substituindo de volta:

$$\frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$$

Cancelamos $(2k+1)$ (assumindo $2k+1 \neq 0$, o que é verdade para $k \in \mathbb{N}$):

$$\frac{k+1}{2k+3}$$

Este é o lado direito da equação $P(k+1)$. Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

Conclusão: Pelo Princípio da Indução Matemática, a proposição $P(n)$ é verdadeira para todos os inteiros positivos n.

8. $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} = 1 + (n-1)2^n$.

Solução do Exercício 5.22, Parte 8 (por Indução Matemática)

Seja $P(n)$ a proposição $1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} = 1 + (n-1)2^n$.

Passo Base (n=1): Para $n = 1$, o lado esquerdo é $1 \cdot 2^{1-1} = 1 \cdot 2^0 = 1$. O lado direito é $1 + (1-1)2^1 = 1 + 0 \cdot 2 = 1$. Como $1 = 1$, o passo base é verdadeiro. $P(1)$ é verdadeira.

Passo Indutivo: Suponha que $P(k)$ seja verdadeira para algum inteiro positivo $k \geq 1$. Isto é, suponha que $1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + \cdots + k \cdot 2^{k-1} = 1 + (k-1)2^k$ (Hipótese de Indução).

Precisamos provar que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, que $1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + \cdots + k \cdot 2^{k-1} + (k+1) \cdot 2^{(k+1)-1} = 1 + ((k+1)-1)2^{k+1}$. O último termo do lado esquerdo é $(k+1) \cdot 2^k$. O lado direito de $P(k+1)$ deve ser $1 + k \cdot 2^{k+1}$.

Começamos com o lado esquerdo da equação $P(k+1)$:

$$(1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + \cdots + k \cdot 2^{k-1}) + (k+1) \cdot 2^k$$

Pela Hipótese de Indução, substituímos a soma dos k primeiros termos:

$$(1 + (k-1)2^k) + (k+1)2^k$$

Agrupando os termos com 2^k:

$$1 + (k-1)2^k + (k+1)2^k$$
$$1 + ((k-1) + (k+1))2^k$$
$$1 + (k-1+k+1)2^k$$
$$1 + (2k)2^k$$
$$1 + k \cdot (2 \cdot 2^k)$$
$$1 + k \cdot 2^{k+1}$$

Este é o lado direito da equação $P(k+1)$. Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

Conclusão: Pelo Princípio da Indução Matemática, a proposição $P(n)$ é verdadeira para todos os inteiros positivos n.