第一章 概率论的基本概念

注意： 这是第一稿（存在一些错误）

1 解：该试验的结果有 9 个：（0，a），（0，b），（0，c），（1，a），（1，b），（1，c），（2，a），（2，b），（2，c）。所以，

（1）试验的样本空间共有 9 个样本点。

（2）事件 A 包含 3 个结果：不吸烟的身体健康者，少量吸烟的身体健康者，吸烟较多的身体健康者。即 A 所包含的样本点为（0，a），（1，a），（2，a）。

（3）事件 B 包含 3 个结果：不吸烟的身体健康者，不吸烟的身体一般者，不吸烟的身体有病者。即 B 所包含的样本点为（0，a），（0，b），（0，c）。

2、解

（1） $AB\bigcup BC\bigcup AC$ 或 $AB\overline{C}\bigcup \overline{A}BC\bigcup A\overline{B}C\bigcup ABC$；

（2） $\overline{A}\,\overline{B}\bigcup \overline{B}\,\overline{C}\bigcup \overline{A}\,\overline{C}$

（提示：题目等价于 $\overline{A}$，$\overline{B}$，$\overline{C}$ 至少有 2 个发生，与（1）相似）；

（3） $\overline{A}BC\bigcup A\overline{B}C\bigcup AB\overline{C}$；

（4） $\overline{A}\bigcup \overline{B}\bigcup \overline{C}$ 或 $\overline{ABC}$；

（提示：$\overline{A}$，$\overline{B}$，$\overline{C}$ 至少有一个发生，或者 A，B，C 不同时发生）；

3（1）错。依题得 $p(AB)=p(A)+p(B)-p(A\cup B)=0$，但 $A\cap B\neq$ 空集，故 A、B 可能相容。

（2）错。举反例

（3）错。举反例

（4）对。证明：由 $p(A)=0.6$，$p(B)=0.7$ 知

$p(AB)=p(A)+p(B)-p(A\cup B)=1.3-p(A\cup B)>0.3$，即 A 和 B 交非空，故 A 和 B 一定相容。

4、解

（1）因为 A，B 不相容，所以 A，B 至少有一发生的概率为：

$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)$=0.3+0.6=0.9

(2) A，B 都不发生的概率为：

$P(\overline{A\bigcup B})=1-P(A\bigcup B)=1-0.9=0.1$；

（3） A 不发生同时 B 发生可表示为：$\overline{A}\cap B$，又因为 A，B 不相容，于是

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) = 0.6$；

5 解：由题知 $p(AB \cup AC \cup BC) = 0.3$, $P(ABC) = 0.05$.

因 $p(AB \cup AC \cup BC) = p(AB) + p(AC) + p(BC) - 2p(ABC)$ 得，

$$p(AB) + p(AC) + p(BC) = 0.3 + 2p(ABC) = 0.4$$

故 A,B,C 都不发生的概率为

$$p(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = 1 - p(A \cup B \cup C)$$

$$= 1 - [(p(A) + p(B) + p(C)) - p(AB) + p(AC) + p(BC) + p(ABC)]$$

$$= 1 - (1.2 - 0.4 + 0.05)$$

$$= 0.15 .$$

6、解 设 $A=$｛“两次均为红球”｝，$B=$｛“恰有 1 个红球”｝，$C=$｛“第二次是红球”｝

若是放回抽样，每次抽到红球的概率是：$\dfrac{8}{10}$，抽不到红球的概率是：$\dfrac{2}{10}$，则

（1）$P(A) = \dfrac{8}{10} \times \dfrac{8}{10} = 0.64$；

（2）$P(B) = 2 \times \dfrac{8}{10} \times (1 - \dfrac{8}{10}) = 0.32$；

（3）由于每次抽样的样本空间一样，所以：

$$P(C) = \frac{8}{10} = 0.8$$

若是不放回抽样，则

（1）$P(A) = \dfrac{C_8^2}{C_{10}^2} = \dfrac{28}{45}$；

（2）$P(B) = \dfrac{C_8^1 C_2^1}{C_{10}^2} = \dfrac{16}{45}$；

（3）$P(C) = \dfrac{A_8^1 A_7^1 + A_2^1 A_8^1}{A_{10}^2} = \dfrac{4}{5}$。

7 解：将全班学生排成一排的任何一种排列视为一样本点，则样本空间共有 $30!$ 个样本点。

（1）把两个“王姓”学生看作一整体，和其余 28 个学生一起排列共有 $29!$ 个样本点，而两个“王姓”学生也有左右之分，所以，两个“王姓”学生紧挨在一起共有 $2 \cdot 29!$ 个样本点。

即两个“王姓”学生紧挨在一起的概率为 $\dfrac{2\cdot 29!}{30!}=\dfrac{1}{15}$。

（2）两个“王姓”学生正好一头一尾包含 $2\cdot 28!$ 个样本点，故

两个“王姓”学生正好一头一尾的概率为 $\dfrac{2\cdot 28!}{30!}=\dfrac{1}{435}$。

8、解

（1）设 $A=$ {“1 红 1 黑 1 白”}，则

$$P(A)=\frac{C_2^1C_3^1C_2^1}{C_7^3}=\frac{12}{35};$$

（2）设 $B=$ {“全是黑球”}，则

$$P(B)=\frac{C_3^3}{C_7^3}=\frac{1}{35};$$

（3）设 $C=$ {第 1 次为红球，第 2 次为黑球，第 3 次为白球"}，则

$$P(C)=\frac{2\times 3\times 2}{7!}=\frac{2}{35}。$$

9 解：设 $A_i=\{第i号车配对\}$, $i=1,2,\ldots,9$.

若将先后停入的车位的排列作为一个样本点，那么共有 $9!$ 个样本点。

由题知，出现每一个样本点的概率相等，当 A_i 发生时，第 i 号车配对，其余 9 个号可以任意排列，故（1） $p(A_i)=\dfrac{8!}{9!}$。

（2）1 号车配对，9 号车不配对指 9 号车选 2~8 号任一个车位，其余 7 辆车任意排列，共有 $7\cdot 7!$ 个样本点。故 $p\left(A_1\overline{A_9}\right)=\dfrac{7\cdot 7!}{9!}=\dfrac{7}{72}$.

(3) $p\left(A_1\overline{A_2}\cdots\overline{A_8}A_9\right)=p\left(\overline{A_2}\cdots\overline{A_8}\,|\,A_1A_9\right)p\left(A_1A_9\right)$, $p\left(\overline{A_2}\cdots\overline{A_8}\,|\,A_1A_9\right)$ 表示在事件：已知 1 号和 9 号配对情况下，2~8 号均不配对，问题可以转化为 2~8 号车随即停入 2~8 号车位。

记 $B_i=\{第i+1号车配对\}$, $i=1,2,\ldots,7$。

则 $p\left(\overline{A_2}\cdots\overline{A_8}\,|\,A_1A_9\right)=p\left(\overline{B_1}\cdots\overline{B_7}\right)=1-p\left(B_1\cup\cdots\cup B_7\right)$。

由上知, $p\left(B_i\right)=\dfrac{6!}{7!}=\dfrac{1}{7}$, $p\left(B_iB_j\right)=\dfrac{5!}{7!}=\dfrac{1}{42}$, ($i<j$), $p\left(B_iB_jB_k\right)=\dfrac{4!}{7!}=\dfrac{1}{210}$, ($i<j<k$)

……

$p(B_1\cdots B_7)=\frac{1}{7!}$。则 $p(\overline{B_1}\cdots\overline{B_7})=\sum_{i=0}^{7}\frac{(-1)^i}{i!}$

故 $p(A_1\overline{A_2}\cdots\overline{A_8}A_9)=p(\overline{B_1}\cdots\overline{B_7})p(A_1A_9)=\frac{7!}{9!}\sum_{i=0}^{7}\frac{(-1)^i}{i!}=\frac{1}{72}\sum_{i=0}^{7}\frac{(-1)^i}{i!}$。

10、解 由已知条件可得出:

$P(B)=1-P(\overline{B})=1-0.6=0.4$；

$P(AB)=P(A)-P(A\overline{B})=0.7-0.5=0.2$；

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.9$；

（1）$P(A\,|\,A\cup B)=\frac{P(A\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A\cup B)}=\frac{7}{9}$；

（2）$P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=0.4-0.2=0.2$

$P(\overline{A}\cup B)=P(\overline{A})+P(B)-P(\overline{A}B)=0.5$

于是 $P(A\,|\,\overline{A}\cup B)=\frac{P(A\cap(\overline{A}\cup B))}{P(\overline{A}\cup B)}=\frac{P(AB)}{P(\overline{A}\cup B)}=\frac{2}{5}$；

（3）$P(AB\,|\,A\cup B)=\frac{P(AB\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(AB)}{P(A\cup B)}=\frac{2}{9}$。

11 解：由题知 $p(A)=0.5$, $p(B)=0.3$, $p(C)=0.4$, $p(B|A)=0.2$, $p(A\cup B|C)=0.6$

则
$$\begin{aligned}p(A\cup B\cup C)&=p(A\cup B\cup C|C)p(C)+p(A\cup B\cup C|\overline{C})p(\overline{C})\\&=p(C)+p(A\cup B|\overline{C})p(\overline{C})\\&=p(C)+p(A\cup B)-p(A\cup B|C)p(C)\\&=p(C)+p(A)+p(B)-p(AB)-p(A\cup B|C)p(C)\\&=p(C)+p(A)+p(B)-p(B|A)p(A)-p(A\cup B|C)p(C)\\&=0.86\end{aligned}$$

12、解 设 $A=$\{该职工为女职工\}，$B=$\{该职工在管理岗位\}，由题意知，

$P(A)=0.45$，$P(B)=0.1$，$P(AB)=0.05$

所要求的概率为

（1） $P(B \mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{1}{9}$；

（2） $P(\overline{A} \mid B)=\dfrac{P(\overline{A}B)}{P(B)}=\dfrac{P(B)-P(AB)}{P(B)}=\dfrac{1}{2}$。

13、解：

$$p(Y=2)=p(Y=2|X=1)p(X=1)+p(Y=2|X=2)p(X=2)+\cdots+p(Y=2|X=5)p(X=5)$$

$$=0\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}$$

$$=\frac{77}{300}$$

14、解 设 $A=$\{此人取的是调试好的枪 \}，$B=$\{此人命中\}，由题意知：

$P(A)=\dfrac{3}{4}$，$P(B \mid A)=\dfrac{3}{5}$，$P(B \mid \overline{A})=\dfrac{1}{20}$

所要求的概率分别是：

（1） $P(B)=P(A)P(B \mid A)+P(\overline{A})P(B \mid \overline{A})=\dfrac{37}{80}$；

（2） $P(\overline{A} \mid B)=\dfrac{P(\overline{A}B)}{P(B)}=\dfrac{P(\overline{A})P(B \mid \overline{A})}{P(B)}=\dfrac{1}{37}$。

15 解 ： 设 $A_1=\{入市时间在1年以内\}$ ， $A_2=\{入市时间在1年以上不到4年\}$ ，

$A_3=\{入市时间在4年以上\}$，$B_1=\{股民赢\}$，$B_2=\{股民平\}$，$B_3=\{股民亏\}$

则

$p(B_1|A_1)=0.1$ ，$p(B_2|A_1)=0.2$ ，$p(B_3|A_1)=0.7$ ，$p(B_1|A_2)=0.2$ ，$p(B_2|A_2)=0.3$ ，

$p(B_3|A_2)=0.5$，$p(B_1|A_3)=0.4$，$p(B_2|A_3)=0.4$，$p(B_3|A_3)=0.2$

(1) $p(B_1)=p(B_1|A_1)p(A_1)+p(B_1|A_2)p(A_2)+p(B_1|A_3)p(A_3)$

$$=0.22$$

（2） $p(A_1|B_3)=\dfrac{p(A_1B_3)}{p(B_3)}$

$$=\frac{p(B_3|A_1)p(A_1)}{p(B_3|A_1)p(A_1)+p(B_3|A_2)p(A_2)+p(B_3|A_3)p(A_3)}$$

$$=\frac{7}{13}\approx 0.538$$

16、解 设A，B分别为从第一、二组中取优质品的事件，C，D分别为第一、二次取到得产品是优质品的事件，有题意知：

$P(A)=\frac{10}{30}$，$P(B)=\frac{15}{20}$

（1） 所要求的概率是：

$$P(C)=\frac{1}{2}P(A)+\frac{1}{2}P(B)=\frac{13}{24}\approx 0.5417$$

（2）由题意可求得：$P(D)=P(C)=\frac{13}{24}$

$$P(\overline{C}D)=\frac{1}{2}\times\frac{20}{30}\times\frac{10}{29}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{20}\times\frac{15}{19}\approx 0.2136$$

所要求的概率是：

$$P(\overline{C}\mid D)=\frac{P(\overline{C}D)}{P(D)}=\frac{2825}{7163}\approx 0.3944$$ 。

17 解：（1）第三天与今天持平包括三种情况：第 2 天平，第 3 天平；第 2 天涨，第 3 天跌;第 2 天跌，第 3 天涨。则

$$p_1=\alpha_3\gamma_3+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\beta_1$$

（2）第 4 天股价比今天涨了 2 个单位包括三种情况：第 2 天平，第 3、4 天涨；第 2、4 天涨，第 3 天平；第 2、3 天涨，第 4 天平。则

$$p_2=2\alpha_3\gamma_1\alpha_1+\alpha_1{}^2\alpha_3$$ 。

19(1)对。证明:假设 A,B 不相容,则$p(AB)=0$。而$p(A)>0$，$p(B)>0$，即$p(A)p(B)>0$，

故$p(AB)\neq p(A)p(B)$，即 A,B 不相互独立。与已知矛盾，所以 A,B 相容。

（2）可能对。证明：由$p(A)=0.6$，$p(B)=0.7$知

$$p(AB)=p(A)+p(B)-p(A\cup B)=1.3-p(A\cup B)>0.3,$$

$$p(A)p(B)=0.6\times 0.7=0.42,$$

$p(AB)$与$p(A)p(B)$可能相等，所以 A,B 独立可能成立。

（3）可能对。

（4）对。证明：若 A,B 不相容，则$p(AB)=0$。而$p(A)>0$，$p(B)>0$，即$p(A)p(B)>0$，

故$p(AB)\neq p(A)p(B)$，即 A,B 不相互独立。

18、证明：必要条件

由于A，B相互独立， 根据定理 1.5.2 知，A与$\overline{B}$也相互独立，于是：

$P(A|B)=P(A)$，$P(A|\overline{B})=P(A)$

即 $P(A|B)=P(A|\overline{B})$

充分条件

由于 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ 及 $P(A|\overline{B})=\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$，结合已知条件，成立

$$\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$$

化简后，得：

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

由此可得到，A 与 B 相互独立。

20、解 设 A_i 分别为第 i 个部件工作正常的事件，B 为系统工作正常的事件，则 $P(A_i)=p_i$

（1）所要求的概率为：

$$\begin{aligned}\alpha=P(B)&=P(A_1A_2A_3\bigcup A_1A_2A_4\bigcup A_1A_3A_4\bigcup A_2A_3A_4)\\&=P(A_1A_2A_3)+P(A_1A_2A_4)+P(A_1A_3A_4)+P(A_2A_3A_4)-3P(A_1A_2A_3A_4)\\&=p_1p_2p_3+p_1p_2p_4+p_1p_3p_4+p_2p_3p_4-3p_1p_2p_3p_4\end{aligned}$$

（2） 设 C 为 4 个部件均工作正常的事件，所要求的概率为：

$$\beta=P(C|B)=\frac{p_1p_2p_3p_4}{\alpha}。$$

（3）$\gamma=C_3^2\alpha^2(1-\alpha)$。

21 解：记 $C_i=\{第\mathrm{i}次出现正面\}$，$\mathrm{i}=1,2\ldots\ldots$

（1）$p(A_i)=p(\overline{C_1}\cdots\overline{C_{i-1}}C_i)=p(\overline{C_1})\cdots p(\overline{C_{i-1}})p(C_i)=p(1-p)^{i-1}$

$$p(B_4)=p(\overline{C_1}\,\overline{C_2}C_3C_4)+p(C_1\overline{C_2}C_3C_4)=p^2(1-p)$$

（2）$$p(B_4|A_1)=\frac{p(B_4A_1)}{p(A_1)}=\frac{p^3(1-p)}{p}=p^2(1-p)$$

（3）$$p(A_1|B_4)=\frac{p(B_4A_1)}{p(B_4)}=\frac{p^3(1-p)}{p^2(1-p)}=p$$

22、解 设 A={照明灯管使用寿命大于 1000 小时}，B={照明灯管使用寿命大于 2000 小时}，C={照明灯管使用寿命大于 4000 小时}，由题意可知

$P(A)=0.95$，$P(B)=0.3$，$P(C)=0.05$

（1） 所要求的概率为：

$P(C \mid A)=\dfrac{P(AC)}{P(A)}=\dfrac{0.05}{0.95}=\dfrac{1}{19}$；

（2）设 A_i 分别为有 i 个灯管损坏的事件（$i=0,1,2,3\cdots$），α 表示至少有 3 个损坏的概率，则

$$P(A_0)=\left[P(B)\right]^{10}=(0.3)^{10}=0.0000059$$

$$P(A_1)=C_{10}^{1}\left[P(B)\right]^{9}(1-P(B))=0.0001378$$

$$P(A_2)=C_{10}^{2}\left[P(B)\right]^{8}(1-P(B))^{2}=0.0014467$$

所要求的概率为：

$$\alpha=1-P(A_0)-P(A_1)-P(A_2)=0.9984$$

23 解：设 $A=\{系统能正常工作\}$，$B=\{系统稳定\}$，$C=\{系统外加电压正常\}$，

则 $p(C)=0.99$，$p(B|C)=0.9$，$p(B|\overline{C})=0.2$，$p(A|B)=0.8$，$p(\overline{A}|\overline{B})=0.9$

（1）$p(A)=p(A|B)p(B)+p(A|\overline{B})p(\overline{B})$

$$=p(A|B)\left[p(B|C)p(C)+p(B|\overline{C})p(\overline{C})\right]+\left[1-p(\overline{A}|\overline{B})\right]\left[p(\overline{B}|C)p(C)+p(\overline{B}|\overline{C})p(\overline{C})\right]$$

$$=0.8\times(0.9\times0.99+0.2\times0.01)+(1-0.9)\times\left[(1-0.9)\times0.99+(1-0.2)\times0.01\right]$$

$$=\frac{1}{19}$$

（2）记 $A_i=\{第i个元件正常工作\}$，则 $p(A_i)=\dfrac{1}{19}$

$$p(\overline{A_1}\cup\cdots\cup\overline{A_5})=1-p(\overline{A_1}\cdots\overline{A_5})$$

$$=1-p(\overline{A_1})\cdots p(\overline{A_5})$$

$$=1-\left(1-\frac{1}{19}\right)^{5}$$

$$\approx 0.9984$$

第二章 随机变量及其概率分布

注意： 这是第一稿（存在一些错误）

1 解：X 取值可能为 2,3,4,5,6，则 X 的概率分布律为：

$$p(X=2)=\frac{\text{痧}_{1}\,{}_{5}^{1}}{{}_{7}^{3}}=\frac{1}{35}；$$

$$p(X=3)=\frac{\text{痧}_{2}\,{}_{4}^{1}}{{}_{7}^{3}}=\frac{8}{35}；$$

$$p(X=4)=\frac{\text{痧}_{3}\,{}_{3}^{1}}{{}_{7}^{3}}=\frac{9}{35}；$$

$$p(X=5)=\frac{\text{痧}_{4}\,{}_{2}^{1}}{{}_{7}^{3}}=\frac{8}{35}；$$

$$p(X=6)=\frac{\text{痧}_{5}\,{}_{1}^{1}}{{}_{7}^{3}}=\frac{1}{7}。$$

2、解 （1）由题意知，此二年得分数 X 可取值有 0、1、2、4，有

$$P(X=0)=1-0.2=0.8,$$

$$P(X=1)=0.2\times(1-0.2)=0.16,$$

$$P(X=2)=0.2\times0.2\times(1-0.2)=0.032,$$

$$P(X=4)=0.2\times0.2\times0.2=0.008,$$

从而此人得分数 X 的概率分布律为：

X	0	1	2	4
P	0.8	0.16	0.032	0.008

（2）此人得分数大于 2 的概率可表示为：

$$P(X>2)=P(X=4)=0.008；$$

(3)已知此人得分不低于 2，即 $X\geq 2$，此人得分 4 的概率可表示为：

$$P(X=4\mid X\geq 2)=\frac{P(X=4)}{P(X\geq 2)}=\frac{0.008}{0.032+0.008}=0.2。$$

3 解：（1）没有中大奖的概率是 $p_1=\left(1-10^{-7}\right)^n$；

（2）每一期没有中大奖的概率是 $p=\left(1-10^{-7}\right)^{10}$，

n 期没有中大奖的概率是 $p_2=p^n=\left(1-10^{-7}\right)^{10n}$。

4、解 （1）用 X 表示男婴的个数，则 X 可取值有 0、1、2、3，至少有 1 名男婴的概率可表示为：

$P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)=1-(1-0.51)^3=0.8824$；

（2）恰有 1 名男婴的概率可表示为：

$P(X=1)=C_3^1 0.51\times(1-0.51)^2=0.3674$；

（3）用 α 表示第 1，第 2 名是男婴，第 3 名是女婴的概率，则

$\alpha=0.51^2\times(1-0.51)=0.127$；

（4）用 β 表示第 1，第 2 名是男婴的概率，则

$\beta=0.51^2=0.260$。

5 解：X 取值可能为 0,1,2,3；Y 取值可能为 0,1,2,3

$p(x=0)=(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$，

$p(x=1)=p_1(1-p_2)(1-p_3)+p_2(1-p_1)(1-p_3)+p_3(1-p_1)(1-p_2)$，

$p(x=2)=p_1p_2(1-p_3)+p_1p_3(1-p_2)+p_3p_2(1-p_1)$，

$p(x=3)=p_1p_2p_3$。

Y 取每一值的概率分布为：

$p(y=0)=p_1$，

$p(y=1)=(1-p_1)p_2$，

$p(y=2)=(1-p_1)(1-p_2)p_3$，

$p(y=3)=(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$。

6、解 由题意可判断各次抽样结果是相互独立的，停止时已检查了 X 件产品，说明第 X 次抽样才有可能抽到不合格品。X 的取值有 1、2、3、4、5，有

$P(X=k)=p(1-p)^{k-1}, k=1,2,3,4$，

$P(X=5)=(1-p)^4$；

（2）$P(X\le 2.5)=P(X=1)+P(X=2)=p+p(1-p)=p(2-p)$。

7 解：（1）$\alpha = C_5^3\left(1-0.1\right)^3 0.1^2 + C_5^4\left(1-0.1\right)^4 0.1 + C_5^5\left(1-0.1\right)^5 = 0.991$，

$\beta = 1 - C_5^3 0.2^3\left(1-0.2\right)^2 + C_5^4 0.2^4\left(1-0.2\right) + C_5^5 0.2^5 = 0.942$。

（2）诊断正确的概率为 $p=0.7\alpha+0.3\beta=0.977$。

（3）此人被诊断为有病的概率为 $p=0.7\alpha+0.3\left(1-\beta\right)=0.711$。

7、解　（1）用 X 表示诊断此人有病的专家的人数，X 的取值有 1、2、3、4、5。在此人有病的条件下，诊断此人有病的概率为：

$$\begin{aligned}\alpha &= P(X\ge 3)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)\\ &= C_5^3(1-0.1)^3\cdot 0.1^2+C_5^4(1-0.1)^4\cdot 0.1+C_5^5(1-0.1)^5\\ &= 0.991\end{aligned}$$

在此人无病的条件下，诊断此人无病的概率为：

$$\begin{aligned}\beta &= P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\\ &= C_5^0(1-0.2)^5+C_5^1(1-0.2)^4\cdot 0.2+C_5^2(1-0.2)^3\cdot 0.2^2\\ &= 0.942\end{aligned}$$

（2）用 γ 表示诊断正确的概率，诊断正确可分为两种情况：有病条件下诊断为有病、无病条件下诊断为无病，于是：

$\gamma=0.7\alpha+0.3\beta=0.977$；

（3）用 η 表示诊断为有病的概率，诊断为有病可分为两种情况：有病条件下诊断此人为有病、无病条件下诊断此人为有病，于是：

$\eta=0.7\alpha+0.3\times(1-\beta)=0.711$；

8、解 用 A 表示恰有 3 名专家意见一致，B 表示诊断正确的事件，则

$P(AB)=0.7\times P(X=3)+0.3\times P(X=2)=0.112$

$P(A)=0.7\times P(X=3\text{或}X=2)+0.3\times P(X=2\text{或}X=3)=0.1335$

所求的概率可表示为：

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=0.842$$

9 解：（1）由题意知，候车人数 $X=k$ 的概率为 $p\left(X=k\right)=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}$，

则 $p\left(X=0\right)=e^{-\lambda}$，

从而单位时间内至少有一人候车的概率为 $p=1-e^{-\lambda}$，所以 $1-e^{-\lambda}=1-e^{-4.5}$

解得 $\lambda=4.5$

则 $p\left(X=k\right)=\dfrac{e^{-4.5}4.5^{k}}{k!}$。

所以单位时间内至少有两人候车的概率为 $p=1-p\left(X=0\right)-p\left(X=1\right)=1-5.5e^{-4.5}$。

（2）若 $\lambda=3.2$，则 $p\left(X=k\right)=\dfrac{e^{-3.2}3.2^{k}}{k!}$，

则这车站就他一人候车的概率为 $p=\dfrac{3.2}{e^{3.2}-1}$。

10、解 有题意知，X: $\pi(\lambda t)$，其中 $\lambda=\dfrac{1}{20}$

（1）10：00 至 12：00 期间，即 $t=120$，恰好收到 6 条短信的概率为：

$$P(X=6)=\frac{e^{-\lambda t}(t\lambda)^{6}}{6!}=\frac{e^{-6}\cdot\left(-6\right)^{6}}{6!}=\frac{324}{5}e^{-6}=0.161;$$

（2）在 10：00 至 12：00 期间至少收到 5 条短信的概率为：

$$P(X\geq 5)=1-P(X<5)=1-\sum_{k=0}^{4}P(X=k)$$

$$=1-\sum_{k=0}^{4}\frac{e^{-\lambda t}(t\lambda)^{k}}{k!}=1-115e^{-6}$$

于是，所求的概率为：

$$P(X=6\mid X\geq 5)=\frac{324}{5\left(e^{6}-115\right)}。$$

11、解：由题意知，被体检出有重大疾病的人数近似服从参数为 $\lambda=np=3000\times\dfrac{1}{1000}=3$

的泊松分布，即 $p\left(X=k\right)=\dfrac{e^{-3}3^{k}}{k!}$，$k=0,1,2,\text{L L}$。

则至少有 2 人被检出重大疾病的概率为

$p=1-p\left(X=0\right)-p\left(X=1\right)=1-e^{-3}-3e^{-3}\approx 0.801$。

12、解 （1）由于 $P\{0<X\le 1)+P(2\le X\le 3)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$，因此 X 的概率分布函数为：

$$F(x)=P(X\le x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{x}{2} & 0\le x<1\\ \frac{1}{2} & 1\le x<2\\ \frac{x-1}{2} & 2<x<3\\ 1 & x\ge 3\end{cases},$$

（2） $P\{X\le 2.5\}=\frac{2.5-1}{2}=\frac{3}{4}$

13、解：（1）由 $\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x\right)dx=\int_{0}^{2}c\left(4-x^2\right)dx=1$ 解得 $c=\frac{3}{16}$。

（2）易知 $x\le 0$ 时，$F\left(x\right)=0$； $x\ge 2$ 时，$F\left(x\right)=1$；

当 $0<x<2$ 时，$F\left(x\right)=\int_0^x f\left(y\right)dy=\frac{3}{16}\int_0^x\left(4-y^2\right)dy=\frac{\left(12x-x^3\right)}{16}$，

所以，X 的分布函数为 $F\left(x\right)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \frac{\left(12x-x^3\right)}{16}, & 0<x<2,\\ 1 & x\ge 2.\end{cases}$

（3） $p\left(-1<X<1\right)=F\left(1\right)-F\left(-1\right)=F\left(1\right)=\frac{11}{16}$。

（4）事件 $\left\{-1<X<1\right\}$ 恰好发生 2 次的概率为

$$p=C_5^2 p\left(-1<X<1\right)^2\left(1-p\left(-1<X<1\right)\right)^3={}_5^2\frac{11}{16}^2\left(1-\frac{11}{16}\right)^3=0.1442。$$

14、解 （1）该学生在 7：20 过 X 分钟到站， $X\sim U(0,25)$，由题意知，只有当该学生在 7：20~7：30 期间或者 7：40~7：45 期间到达时，等车小时 10 分钟，长度一共 15 分钟，所以：

$P\{$该学生等车时间小于10分钟$\}$=$P\{X<10\}$=$\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$；

（2）由题意知，当该学生在 7：20~7：25 和 7：35~7：45 到达时，等车时间大于 5 分钟又小于 15 分钟，长度为 15 分钟，所以：

$P\{$该学生等车时间大于5分钟又小于15分钟$\}$=$P\{5<X<15\}$=$\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$；

（3）已知其候车时间大于 5 分钟的条件下，其能乘上 7：30 的班车的概率为：

$$P\{\text{该学生乘上}7:30\text{的班车}|X>5\}=\frac{P\{\text{该学生乘上}7:30\text{的班车且}X>5\}}{P\{X>5\}}$$

其中 $P\{\text{该学生乘上}7:30\text{的班车且}X>5\}=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$，$P\{X>5\}=\frac{5+15}{25}=\frac{4}{5}$，于是

$$P\{\text{该学生乘上}7:30\text{的班车}|X>5\}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{1}{4}。$$

15、解：由题知，X 服从区间$\left(-1,3\right)$上的均匀分布，则 X 的概率密度函数为

$$f_X\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & -1<x<3,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

在该区间取每个数大于 0 的概率为$\frac{3}{4}$，则

$$p\left\{Y=k\right\}={}_{n}^{k}\left(\frac{3}{4}\right)^{k}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}，\ k=0,1,2,\mathrm{L}\ ,n。$$

16、解（1）

$$\begin{aligned}P(X>2.5)&=P(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{2.5-\mu}{\sigma})=P(\frac{X-\mu}{\sigma}>-2.5)\\&=1-P(\frac{X-\mu}{\sigma}\le -2.5)=1-\Phi(-2.5)\\&=\Phi(2.5)=0.9938\end{aligned}$$

（2）

$$\begin{aligned}P(X<3.52)&=P(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{3.52-\mu}{\sigma})=P(\frac{X-\mu}{\sigma}<-1.48)\\&=\Phi(-1.48)=1-\Phi(1.48)\\&=1-0.9306=0.0694\end{aligned}$$

（3）

$$\begin{aligned}P(4<X<6)&=P(\frac{4-\mu}{\sigma}<\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{6-\mu}{\sigma})=P(-1<\frac{X-\mu}{\sigma}<1)\\&=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1\\&=1.6826-1=0.6826\end{aligned}$$

17、解：他能实现自己的计划的概率为

$$p\left(x\ge 3\right)=1-p\left(x\le 3\right)=1-\Phi\left(\frac{3-2.3}{0.5}\right)=1-\Phi\left(1.4\right)=0.0808。$$

18、解 （1）$X \sim N(170, 5.0^2)$，有题意知，该青年男子身高大于 170cm 的概率为：

$$
\begin{aligned}
P(X>170) &= P(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{170-\mu}{\sigma}) \\
&= P(\frac{X-\mu}{\sigma} > 0) \\
&= 1-\Phi(0) = 0.5
\end{aligned}
$$

（2）该青年男子身高大于 165cm 且小于 175cm 的概率为：

$$
\begin{aligned}
P(165<X<175) &= P(\frac{165-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{175-\mu}{\sigma}) = P(-1 < \frac{X-\mu}{\sigma} < 1) \\
&= \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 \\
&= 1.6826 - 1 = 0.6826
\end{aligned}
$$

（3）该青年男子身高小于 172cm 的概率为：

$$
\begin{aligned}
P(X<172) &= P(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{172-\mu}{\sigma}) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} < 0.4) \\
&= \Phi(0.4) = 0.6554
\end{aligned}
$$
。

19、解：系统电压小于 200 伏的概率为 $p_1 = p\left(X \le 200\right) = \Phi\left(\frac{200-220}{25}\right) = \Phi\left(-0.8\right)$，

在区间 $\left[200, 240\right]$ 的概率为

$$p_2 = p\left(200 \le X < 240\right) = \Phi\left(\frac{240-220}{25}\right) - \Phi\left(\frac{200-220}{25}\right) = \Phi\left(0.8\right) - \Phi\left(-0.8\right),$$

大于 240 伏的概率为 $p_3 = p\left(X \ge 240\right) = 1 - \Phi\left(\frac{240-220}{25}\right) = 1 - \Phi\left(0.8\right)$。

（1）该电子元件不能正常工作的概率为 $\alpha = 0.1p_1 + 0.001p_2 + 0.2p_3 = 0.064$。

（2）$\beta = \frac{0.2p_3}{\alpha} = 0.662$。

（3）该系统运行正常的概率为 $\theta = {}_{3}^{2}\left(1-\alpha\right)^2 \alpha + \left(1-\alpha\right)^3 = 0.972$。

20、解 （1）有题意知：

$$P(|Z| < a) = P(-a < Z < a) = 1 - 2P(Z \ge a) = \alpha$$

于是 $P(Z \ge a) = \frac{1-\alpha}{2}$，

从而得到侧分位点 $a = z_{(1-\alpha)/2}$；

（2）

$P(|Z|>b)=P(Z>b\text{或}Z<b)=P(Z>b)+P(Z<b)=2P(Z>b)=\alpha$，

于是 $P(Z>b)=\dfrac{\alpha}{2}$，

结合概率密度函数是连续的，可得到侧分点为 $b=z_{\alpha/2}$；

（3）

$P(Z<c)=1-P(Z\geq c)=\alpha$

于是 $P(Z\geq c)=1-\alpha$，从而得到侧分位点为 $c=z_{1-\alpha}$。

21、解：由题意得，$p\left(X<x_1\right)=\Phi\left(\dfrac{x_1-15}{2}\right)$，

$p\left(x_1<X<x_2\right)=\Phi\left(\dfrac{x_2-15}{2}\right)-\Phi\left(\dfrac{x_1-15}{2}\right)$，

$p\left(X>x_2\right)=1-\Phi\left(\dfrac{x_2-15}{2}\right)$，

则 $\Phi\left(\dfrac{x_1-15}{2}\right):(\Phi\left(\dfrac{x_2-15}{2}\right)-\Phi\left(\dfrac{x_1-15}{2}\right)):(1-\Phi\left(\dfrac{x_2-15}{2}\right))=50:34:16$，

解得 $x_1=15$，$x_2=17$。

22、解 （1）由密度函数的性质得：

$1=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}a\cdot e^{-x^2}dx=a\sqrt{\pi}$

所以 $a=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$；

（2）

$P(X>\dfrac{1}{2})=1-P(X\leq\dfrac{1}{2})=1-\int_{-\infty}^{0.5}a\cdot e^{-x^2}dx$

令 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}t$，上式可写为：

$P(X>\dfrac{1}{2})=1-\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1-\Phi(\dfrac{1}{\sqrt{2}})=1-0.761=0.239$。

23 解：（1）易知 X 的概率密度函数为 $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{8}e^{-\frac{x}{8}}, & x>0,\\ 0, & x\leq 0。\end{cases}$

（2）A 等待时间超过 10 分钟的概率是 $p\left(X>10\right)=\int_{10}^{\infty}f\left(x\right)dx=e^{-1.25}$。

（3）等待时间大于 8 分钟且小于 16 分钟的概率是

$p\left(8<X<16\right)=\int_{8}^{16}f\left(x\right)dx=e^{-1}-e^{-2}$。

24、解 用X，Y分别表示甲、乙两厂生产的同类型产品的寿命，用Z表示从这批混合产品中随机取一件产品的寿命，则该产品寿命大于 6 年的概率为：

$$\begin{aligned}P(Z>6)&=P(X>6)\cdot P(\text{取到甲厂的产品})+P(Y>6)\cdot P(\text{取到乙厂的产品})\\&=0.4\int_{6}^{\infty}\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x}dx+0.6\int_{6}^{\infty}\frac{1}{6}e^{-\frac{1}{6}x}dx\\&=0.4e^{-2}+0.6e^{-1}=0.2749\end{aligned}$$

（2）该产品寿命大于 8 年的概率为：

$$\begin{aligned}P(Z>8)&=P(X>8)\cdot P(\text{取到甲厂的产品})+P(Y>8)\cdot P(\text{取到乙厂的产品})\\&=0.4\int_{8}^{\infty}\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x}dx+0.6\int_{8}^{\infty}\frac{1}{6}e^{-\frac{1}{6}x}dx\\&=0.4e^{-\frac{8}{3}}+0.6e^{-\frac{4}{3}}=0.1860\end{aligned}$$

所求的概率为：

$$P(Z>8\mid Z>6)=\frac{P(Z>8)}{P(Z>6)}=0.6772\quad。$$

25、解：（1）由题知，$f\left(x\right)=\begin{cases}0.2e^{-0.2x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0。\end{cases}$

（2）$p\left\{5<x<10\right\}=F\left(10\right)-F\left(5\right)=e^{-1}-e^{-2}$.

（3）每天等待时间不超过五分钟的概率为 $p\left\{x\le 5\right\}=F\left(5\right)=1-e^{-1}$，

则每一周至少有 6 天等待时间不超过五分钟的概率为

$p={}_{7}^{6}p\left\{x\le 5\right\}^{6}\left(1-p\left\{x\le 5\right\}\right)+p\left\{x\le 5\right\}^{7}=\left(1-e^{-1}\right)^{6}\left(6e^{-1}+1\right)$。

26、解 （1）这 3 只元件中恰好有 2 只寿命大于 150 小时的概率α为：

$\alpha=C_3^2[P(X>150)]^2P(X\le 150)=C_3^2[1-P(X\le 150)]^2P(X\le 150)$，

其中 $P(X\le 150)=\int_{0}^{150}0.01e^{-0.01x}dx=0.7769$

于是 $\alpha=3\cdot[1-P(X\le 150)]^2P(X\le 150)=0.1160$；

（2）这个人会再买，说明这 3 只元件中至少有 2 只寿命大于 150 小时，这时所求的概率β为：

$\beta = C_3^2[P(X>150)]^2 P(X \le 150) + C_3^3[P(X>150)]^3 = 0.1271$。

27、解：依题知，Y 的分布律为

$p\left(Y=10\right) = p\left(X=2\right) = 0.7^2 = 0.490$，

$p\left(Y=8\right) = p\left(X=3\right) = {}_{2}^{1}0.7\left(1-0.7\right)\cdot 0.7 = 0.294$，

$p\left(Y=2\right) = p\left(X \ge 4\right) = p\left(X=4\right) + p\left(X=5\right) =$ 痰${}_{3}^{1}0.7\left(1-0.7\right)^2 \cdot 0.7 + {}_{4}^{1}0.7\left(1-0.7\right)^3 \cdot 0.7 = 0.216$

28、解 （1）由密度函数的性质可得：

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-1}^{2} c(4-x^2)dx = 9c$$

于是 $c = \dfrac{1}{9}$

（2）设 X，Y 的分布函数分别为：$F_X(x)$，$F_Y(x)$，Y 的概率密度为 $f_Y(x)$，有

$$F_Y(x) = P(Y \le x) = P(3X \le x) = P(X \le \frac{1}{3}x) = F_X(\frac{1}{3}x)$$

那么，$f_Y(x) = \dfrac{1}{3}f(\dfrac{1}{3}x) = \begin{cases} \dfrac{1}{27}[4-\left(\dfrac{x}{3}\right)^2], -3<x<6 \\ 0, \quad \text{其他} \end{cases}$；

（3）设 Z 的分布函数为：$F_z(x)$。当 $x \le 0$，显然 $F_z(x)=0$。当 $x>0$，有

$$F_z(x) = P(Z \le x) = P(|X| \le x) = P(-x<X<x) = F_X(x) - F_X(-x),$$

于是有 $f_Z(x) = f(x) + f(-x) = \begin{cases} \dfrac{2}{9}(4-x^2), 0<x\le 1 \\ \dfrac{1}{9}(4-x^2), 1<x<2 \\ 0, \quad x \ge 2 \end{cases}$

从而，Z 的概率密度为：$f_Z(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{9}(4-x^2), 0<x\le 1 \\ \dfrac{1}{9}(4-x^2), 1<x<2 \\ 0, \quad \text{其他} \end{cases}$，

Z 的分布函数为：

$$F_Z(x)=\begin{cases}0\\ 2(12x-x^3)/27, & 0<x\le 1\\ (12x-x^3+11)/27, & 1<x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$。

29、解：（1）依题知，$N(t):\ \pi(\lambda t)$

当 $t\le 0$ 时，$F_T(t)=0$，

当 $t>0$ 时，$F_T(t)=\int_0^t f_{N(t)}(y)\,dy=1-e^{-\lambda t}$，

所以，T 的概率分布函数为 $F_T(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t}, & t>0,\\ 0, & t\le 0。\end{cases}$

（2）$p(T>t_0+t|T>t_0)=\dfrac{p(T>t_0+t,T>t_0)}{p(T>t_0)}$

$$=\frac{p(T>t_0+t)}{p(T>t_0)}$$

$$=\frac{e^{-\lambda(t_0+t)}}{e^{-\lambda t_0}}$$

$$=e^{-\lambda t}$$ 。

30、解 由题意知，$X\sim U(0,1)$，即 X 的概率密度为：

$$f_X(x)=\begin{cases}1, x\in(0,1)\\ 0, 其他\end{cases}$$

设 X，Y 的分布函数分别为：$F_X(x)$，$F_Y(y)$，其中 $Y=X^n$。有

$$F_X(x)=P(X\le x)=\begin{cases}0, x<0\\ x, x\in[0,1)\\ 1, x\ge 1\end{cases}$$

当 $y\le 0$，显然有 $F_Y(y)=0$。当 $y>0$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^n\le y)=P(0<X^n\le y)=P(0<X\le \sqrt[n]{y})=F_X(\sqrt[n]{y})$$

那么 $f_Y(Y)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}, 0<y<1\\ 0, \quad 其他\end{cases}$ 。

31 解：由题意知，X 的概率分布函数为 $F\left(x\right)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{2x}{3\pi}, & 0\le x<\dfrac{3\pi}{2},\\ 1, & x\ge\dfrac{3\pi}{2}.\end{cases}$

则 $p\left(Y\le y\right)=p\left(\cos X\le y\right)$

$$=p\left(X\le \arccos y\right)$$

$$=F\left(\arccos y\right)$$

$$=\begin{cases}0, & y<-1,\\ \dfrac{4\left(\pi-\arccos y\right)}{3\pi}, & -1\le y<0,\\ 1-\dfrac{2\arccos y}{3\pi}, & 0\le y<1,\\ 1, & y\ge 1.\end{cases}$$

32、解 由题意知，$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，即 X 的概率密度为：

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}e^{-(x-\mu)^2/\left(2\sigma^2\right)},|x|<+\infty$$

设 X，Y 的分布函数分别为：$F_X(x)$，$F_Y(y)$，其中 $Y=X^2$。

当 $y\le 0$，显然有 $F_Y(y)=0$。当 $y>0$，有

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$$

那么

$$f_Y(Y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \dfrac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})]=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi y}\cdot\sigma}[e^{-\left(\sqrt{y}-\mu\right)^2/\left(2\sigma^2\right)}+e^{-\left(\sqrt{y}+\mu\right)^2/\left(2\sigma^2\right)}], & y>0\end{cases}$$ 。

33 解：（1）由题意知，$\begin{cases}\int_0^2\left(ax+b\right)dx=1\\ \int_0^1\left(ax+b\right)dx=\dfrac{1}{3}\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=\dfrac{1}{3}\\ b=\dfrac{1}{6}\end{cases}$。

（2）$y=\sqrt{x}$ 的反函数为 $x=y^2$，则

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X\left(y^2\right)\cdot 2y, & 0<y<\sqrt{2}, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{y\left(2y^2+1\right)}{3}, & 0<y<\sqrt{2}, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

34、解 设 X，Y，Z 的分布函数分别为：$F_X(x)$，$F_Y(y)$，$F_Z(z)$。由 $Y=e^X$，容易得出：

当 $y\le 0$，有 $F_Y(y)=0$。当 $y>0$，有

$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^X\le y)=P(X\le \ln y)$，

从而求得 Y 的概率密度：$f_Y(y)=\begin{cases} 0, & y\le 0 \\ \dfrac{1}{y}f_X(\ln y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,y}e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}, & y>0 \end{cases}$；

又 $Z=\ln|X|$，于是

$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(\ln|X|\le z)=P(|X|\le e^z)=P(-e^z\le X\le e^z)=F_X(e^z)-F_X(-e^z)$

从而

$$f_Z(z)=[f_X(e^z)+f_X(-e^z)]e^z=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{z-\frac{\left(e^z\right)^2}{2}},|z|<\infty$$

第三章 多维随机变量及其概率分布

注意： 这是第一稿（存在一些错误）

1、解 互换球后，红球的总数是不变的，即有 $X+Y=6$， X 的可能取值有：2，3，4， Y 的取值为：2，3，4。则 (X,Y) 的联合分布律为：

$$P(X=2,Y=2)=P(X=2,Y=3)=P(X=3,Y=2)=P(X=3,Y=4)=P(X=4,Y=3)=P(X=4,Y=4)=0$$

$$P(X=2,Y=4)=P(X=4,Y=2)=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{6}{25}$$

$$P(X=3,Y=3)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{13}{25}$$

由于 $X+Y=6$，计算 X 的边际分布律为：

$$P(X=2)=P(X=2,Y=4)=\frac{6}{25}$$

$$P(X=3)=P(X=3,Y=3)=\frac{13}{25}$$

$$P(X=4)=P(X=4,Y=2)=\frac{6}{25}$$

2 解： $a+b+0.5=1 \qquad (1)$

$$P\{X=0\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}=0.4+a$$

$$p\{X+Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}=a+b$$

因事件 $\{X=0\}$ 与事件 $\{X+Y=1\}$ 相互独立，则

$P\{X=0,X+Y=1\}=P\{X=0\}\cdot P\{X+Y=1\}$,即

$$a=(0.4+a)(a+b) \qquad (2)$$

由 (1)，(2) 解得 $\begin{cases} a=0.4 \\ b=0.1 \end{cases}$。

3、解 利用分布律的性质，由题意，得

$$a+0.1+0.1+b+0.1+0.1+c=1$$

$$P\{Y\le 0\,|\,X<2)=\frac{P(Y\le 0,X<2)}{P(X<2)}=\frac{P(Y\le 0,X=1)}{P(X=1)}=\frac{a+0.1}{a+0.1+b}=0.5$$

$$P\{Y=1\}=b+c=0.5$$

计算可得：$a=c=0.2$ $b=0.3$
于是 X 的边际分布律为：

$$P(X=1)=a+0.1+b=0.6$$

$$P(X=2)=0.1+0.1+c=0.2+c=0.4$$

Y 的边际分布律为

$P(Y=-1)=a+0.1=0.3$，$P(Y=0)=0.2$

$$P(Y=1)=b+c=0.5$$

4 解：（1）由已知 $p\left\{X=0,Y=0\right\}=p\left\{X=1,Y=2\right\}=0.1$，则

$p\left\{X=0,Y=2\right\}=p\left\{Y=2\right\}-p\left\{X=1,Y=2\right\}=0.3-0.1=0.2$，

$p\left\{X=0,Y=1\right\}=p\left\{X=0\right\}-p\left\{X=0,Y=0\right\}-p\left\{X=0,Y=2\right\}=0.1$，

$p\left\{X=1,Y=0\right\}=p\left\{Y=0\right\}-p\left\{X=0,Y=0\right\}=0.1$，

$p\left\{X=1,Y=1\right\}=p\left\{X=1\right\}-p\left\{X=1,Y=0\right\}-p\left\{X=1,Y=2\right\}=0.4$。

（2）$p\left\{Y=k\middle|X=0\right\}=\dfrac{p\left\{X=0,Y=k\right\}}{p\left\{X=0\right\}}=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & k=0,\\ \dfrac{1}{4}, & k=1,\\ \dfrac{1}{2}, & k=2.\end{cases}$

5、解 （1）每次抛硬币是正面的概率为 0.5，且每次抛硬币是相互独立的。由题意知，X 的可能取值有：3，2，1，0，Y 的取值为：3，1。则 (X,Y) 的联合分布律为：

$$P(X=3,Y=1)=P(X=2,Y=3)=P(X=1,Y=3)=P(X=0,Y=1)=0$$

$P(X=3,Y=3)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$，$P(X=2,Y=1)=C_3^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{8}$

$P(X=1,Y=1)=C_3^1\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{8}$，$P(X=0,Y=3)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$

X 的边际分布律为：

$P(X=0)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$，$P(X=1)=C_3^1\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{8}$

$P(X=2)=C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$，$P(X=3)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

Y的边际分布律为：

$P(Y=3)=P(X=0,Y=3)+P(X=3,Y=3)=\frac{1}{4}$

$P(Y=1)=P(X=1,Y=1)+P(X=2,Y=1)=\frac{3}{4}$

（2）在$\{Y=1\}$的条件下X的条件分布律为：

$P(X=0\mid Y=1)=0$，$P(X=1\mid Y=1)=\frac{P(X=1,Y=1)}{P(Y=1)}=\frac{1}{2}$

$P(X=2\mid Y=1)=\frac{P(X=2,Y=1)}{P(Y=1)}=\frac{1}{2}$，$P(X=3\mid Y=1)=0$

6 解：（1）$p\left\{X=0,Y=1\right\}=p\left\{Y=1\middle|X=0\right\}p\left\{X=0\right\}=\frac{1}{15}$,

$p\left\{X=0,Y=2\right\}=p\left\{Y=2\middle|X=0\right\}p\left\{X=0\right\}=\frac{11}{30}$,

$p\left\{X=0,Y=3\right\}=p\left\{Y=3\middle|X=0\right\}p\left\{X=0\right\}=\frac{1}{15}$,

$p\left\{X=1,Y=1\right\}=p\left\{Y=1\middle|X=1\right\}p\left\{X=1\right\}=\frac{7}{18}$,

$p\left\{X=1,Y=2\right\}=p\left\{Y=2\middle|X=1\right\}p\left\{X=1\right\}=\frac{1}{18}$,

$p\left\{X=1,Y=3\right\}=p\left\{Y=3\middle|X=1\right\}p\left\{X=1\right\}=\frac{1}{18}$。

（2）$p\left\{Y=1\right\}=p\left\{X=0,Y=1\right\}+p\left\{X=1,Y=1\right\}=\frac{41}{90}$,

$p\left\{Y=2\right\}=p\left\{X=0,Y=2\right\}+p\left\{X=1,Y=2\right\}=\frac{38}{90}$,

$p\left\{Y=3\right\}=p\left\{X=0,Y=3\right\}+p\left\{X=1,Y=3\right\}=\frac{11}{90}$。

（3）$p\left\{X=0\middle|Y=1\right\}=\frac{p\left\{X=0,Y=1\right\}}{p\left\{Y=1\right\}}=\frac{6}{41}$,

$p\left\{X=1\middle|Y=1\right\}=\frac{p\left\{X=1,Y=1\right\}}{p\left\{Y=1\right\}}=\frac{35}{41}$。

7、解 （1）已知$P(X=m)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}$，$m=0,1,2,3\cdots$。由题意知，每次因超速引起的事

故是相互独立的，当 $m=0,1,2,3\cdots$ 时，

$P(Y=n\mid X=m)=C_m^n(0.1)^n(0.9)^{m-n}$， $n=0,1,2,\cdots m$。

于是 (X,Y) 的联合分布律为：

$$P(X=m,Y=n)=P(X=m)\cdot P(Y=n\mid X=m)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}C_m^n(0.1)^n(0.9)^{m-n},$$

（$n=0,1,2,\cdots m$； $m=0,1,2,3\cdots$ ）

（2） Y 的边际分布律为：

$$P(Y=n)=\sum_{m=0}^{+\infty}P(X=m,Y=n)=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}C_m^n(0.1)^n(0.9)^{m-n}=\frac{e^{-0.1\lambda}(0.1\lambda)^n}{n!},$$

$(n=0,1,2,\cdots)$

即 $Y\sim\pi(0.1\lambda)$。

（该题与 41 页例 3.1.4 相似）

8 解：（1） Y 可取值为 0， a， $2a$，

$p(X=0,Y=0)=0.6$，

$p(X=0,Y=a)=p(X=0,Y=2a)=0$，

$p(X=1,Y=0)=0.3(1-p)$，

$p(X=1,Y=a)=0.3p$，

$p(X=1,Y=2a)=0$，

$p(X=2,Y=0)=0.1(1-p)^2$，

$p(X=2,Y=a)=0.2p(1-p)$，

$p(X=2,Y=2a)=0.1p^2$。

（2） $p(Y=0|X=1)=(1-p)$，

$p(Y=a|X=1)=p$，

$p(Y=2a|X=1)=0$。

9、解 (1)由边际分布函数的定义，知

$$F_X(x)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}0, x<0\\0.3, 0\le x<1\\1, x\ge 1\end{cases}$$

$$F_Y(y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}0, y<0\\0.4, 0\le y<1\\1, y\ge 1\end{cases}$$

（2）从 X 和 Y 的分布函数，可以判断出 X 和 Y 都服从两点分布，则 X 的边际分布律为：

X	0	1
P	0.3	0.7

Y 的边际分布律为

Y	0	1
P	0.4	0.6

（3） 易判断出 $P(X=0,Y=0)=0.1$，所以 (X,Y) 的联合分布律为：

$P(X=0,Y=0)=0.1$

$P(X=0,Y=1)=P(X=0)-P(X=0,Y=0)=0.2$

$P(X=1,Y=0)=P(Y=0)-P(X=0,Y=0)=0.3$

$P(X=1,Y=1)=P(Y=1)-P(X=0,Y=1)=0.4$。

１０解：(1) $p\{X=0,Y=1\}=p\{Y=1|X=0\}p\{X=0\}=p\{B|\overline{A}\}p\{\overline{A}\}=0.35$，

$p\{X=0,Y=0\}=p\{X=0\}-p\{X=0,Y=1\}=0.35$，

$p\{X=1,Y=0\}=p\{Y=0\}-p\{X=0,Y=0\}=1-p\{Y=1\}-p\{X=0,Y=0\}=0.25$，

$p\{X=1,Y=1\}=p\{X=1\}-p\{X=1,Y=0\}=0.05$。

（2）当 $x<0$ 或 $y<0$ 时，$F(x,y)=0$，

当 $0\le x<1$，$0\le y<1$ 时，$F(x,y)=p\{X=0,Y=0\}=0.35$，

当 $0\le x<1$，$y\ge 1$ 时，$F(x,y)=p\{X=0,Y=0\}+p\{X=0,Y=1\}=0.7$，

当 $x \geq 1$，$0 \leq y < 1$ 时，$F(x,y) = p\{X=0, Y=0\} + p\{X=1, Y=0\} = 0.6$，

当 $x \geq 1$，$y \geq 1$ 时，$F(x,y) = 1$。

所以，(X,Y) 的联合分布函数为 $F(x,y) = \begin{cases} 0, & x<0 \text{或} y<0, \\ 0.35, & 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1, \\ 0.7, & 0 \leq x < 1, y \geq 1, \\ 0.6, & x \geq 1, 0 \leq y < 1, \\ 1, & x \geq 1, y \geq 1. \end{cases}$

11、解 由 (X,Y) 的联合分布律可知，在 $\{X=1\}$ 的条件下，Y 的条件分布律为：

$$P(Y=0 \mid X=1) = \frac{P\{Y=0, X=1\}}{P\{X=1\}} = \frac{0.25}{0.3} = \frac{5}{6}$$

$$P(Y=1 \mid X=1) = \frac{P\{Y=1, X=1\}}{P\{X=1\}} = \frac{0.05}{0.3} = \frac{1}{6}$$

因此在 $\{X=1\}$ 的条件下，Y 的条件分布函数为

$$F_{Y|X}(Y|1) = \begin{cases} 0, y<0 \\ \dfrac{5}{6}, 0 \leq y < 1 \\ 1, y \geq 1 \end{cases}$$

12 解：设 $F\{x,y\} = kxy$，$(x,y) \in D$，

则 $x \geq 1$，$y \geq 1$ 时，$k + 0.2 = 1$，即 $k = 0.8$。

所以 (X,Y) 的联合分布函数为

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & x<0 \text{或} y<0, \\ 0.8xy+0.1, & 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1, \\ 0.8x+0.1, & 0 \leq x < 1, y \geq 1, \\ 0.8y+0.1, & x \geq 1, 0 \leq y < 1, \\ 1, & x \geq 1, y \geq 1. \end{cases}$$

13，解 由 $f(x,y)$ 的性质，得：

$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = \int_0^1 dy \int_0^y c(y-x)dx = \dfrac{c}{6}$，

所以 $c = 6$

（2）设 $D_1 = \{(x,y) \mid x+y \leq 1, 0 \leq x \leq y \leq 1\}$，则

$$P\{X+Y\le 1\}=\iint_{D_1} f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}c(y-x)dy=0.5$$

（3）设 $D_2=\{(x,y)\,|\,0\le x\le y\le 1, X\le 0.5\}$，则

$$P\{X<0.5\}=\iint_{D_2} f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1}c(y-x)dy=\frac{7}{8}$$

14 解：（1）由 $1=\int_1^2\int_x^{4-x}c\left(x-1\right)dydx=\frac{c}{3}$ 得 $c=3$。

（2）由（1）知，$f\left(x,y\right)=\begin{cases}3\left(x-1\right), & 1<x<2,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$

则 $f_X\left(x\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x,y\right)dy=\begin{cases}3\int_x^{4-x}\left(x-1\right)dy, & 1<x<2,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}=\begin{cases}3\left(x-1\right)\left(4-2x\right), & 1<x<2,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$

$$f_Y\left(y\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x,y\right)dx=\begin{cases}3\int_1^{y}\left(x-1\right)dx, & 1\le y<2,\\ 3\int_1^{4-y}\left(x-1\right)dx, & 2\le y<3,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{3\left(y-1\right)^2}{2}, & 1<y\le 2,\\ \dfrac{3\left(3-y\right)^2}{2}, & 2<y<3,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

15、解 （1）由题意，知

当 $x\in(0,+\infty)$，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^x e^{-x}dy=xe^{-x}$

当 $x\in(-\infty,0]$ ，$f_X(x)=0$

所以：$f_X(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ xe^{-x}, x>0\end{cases}$；

当 $y\in(0,+\infty)$ ，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_y^{+\infty}e^{-x}dx=e^{-y}$

当 $y\in(-\infty,0]$， $f_Y(y)=0$

所以 ：$f_Y(y)=\begin{cases}0, y\le 0\\ e^{-y}, y>0\end{cases}$；

（2）当 $x>0$ 时，有

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, 0<y<x\\ 0, y\text{取其他值}\end{cases}$$

（3）当已知$\{X=x\}$时，由$f_{Y|X}(y|x)$的公式可以判断出，Y的条件分布为$[0,x]$上的均匀分布。

16 解：（1）由$f_{Y|X}\left(y|x\right)=\dfrac{f\left(x,y\right)}{f_X\left(x\right)}$得，

$$f\left(x,y\right)=f_{Y|X}\left(y|x\right)f_X\left(x\right)=\begin{cases}\lambda^2 e^{-\frac{y}{x}-\lambda x}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

（2）当$x>0$时，

$$F_{Y|X}\left(y|x\right)=\int_{-\infty}^{y}\frac{f\left(x,v\right)}{f_X\left(x\right)}dv=\int_{-\infty}^{y}f_{Y|X}\left(v|x\right)dv=\begin{cases}\int_0^y\frac{1}{x}e^{-\frac{v}{x}}dv, & y>0,\\ 0, & \mathrm{y}\le 0。\end{cases}=\begin{cases}1-e^{-\frac{y}{x}}, & y>0,\\ 0, & \mathrm{y}\le 0。\end{cases}$$

（3）$p\left\{Y>1\middle|X=1\right\}=p\left\{X=1\right\}-p\left\{Y\le 1\middle|X=1\right\}=e^{-1}$。

17、解 （1）由题意可得：

当$|y|<1$时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{y^2}^{1}\frac{5}{4}xdx=\frac{5}{8}(1-y^4)$，

当$|y|\ge 1$，$f_Y(y)=0$

所以 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{5}{8}(1-y^4),|y|<1\\ 0,|y|\ge 1\end{cases}$；

（2）当$y^2<1$时

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{\frac{5}{4}x}{\frac{5}{8}(1-y^4)}=\dfrac{2x}{1-y^4},y^2\le x<1\\ 0,x\text{取其他值}\end{cases}$$

（3）当$y=\frac{1}{2}$时，$f_{X|Y}(x|\frac{1}{2})=\begin{cases}\dfrac{32x}{15},\frac{1}{4}\le x<1\\ 0,x\text{取其他值}\end{cases}$

所以 $P\{X>\frac{1}{2}|Y=\frac{1}{2}\}=\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}f_{X|Y}(x|\frac{1}{2})dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{32x}{15}dx=0.8$。

18 解：（1）因 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & 其他。\end{cases}$，$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & x<y<1,\\ 0, & 其他。\end{cases}$，

所以 $f(x,y)=f_{Y|X}(y|x)f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<y<1,\\ 0, & 其他。\end{cases}$

（2）$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^y\dfrac{1}{1-x}dx, & 0<y<1,\\ 0, & 其他。\end{cases}=\begin{cases}-\ln(1-y), & 0<y<1,\\ 0, & 其他。\end{cases}$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}-\dfrac{1}{(1-x)\ln(1-y)}, & 0<x<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

19、解 设事故车与处理车的距离 Z 的分布函数为 $F_Z(t)$，X 和 Y 都服从（0，m）的均匀分布，且相互独立，由题意知：

当 $0<t<m$ 时，$F_Z(t)=P(Z<t)=P\{|X-Y|<t\}=\dfrac{m^2-(m-t)^2}{m^2}=\dfrac{2mt-t^2}{m^2}$，

有

$$F_Z(t)=\begin{cases}0, t<0\\ \dfrac{2mt-t^2}{m^2}, 0\le t<m\\ 1, t\ge m\end{cases}$$

所以 Z 的概率密度函数 $f_Z(t)$ 为：

$$f_Z(t)=\begin{cases}\dfrac{2(m-t)}{m^2}, & 0\le t<m\\ 0, t取其他值\end{cases}$$

20 解：由题意得 (X,Y): $U(D)$，即 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}, & (x,y)\in D,\\ 0, & 其他。\end{cases}$

（1）$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\dfrac{2}{\pi}dx, & 0<y<1,\\ 0, & 其他。\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & 0<y<1,\\ 0, & 其他。\end{cases}$

（2）$p\left\{Y<1/2\right\}=\int_0^{1/2} f_Y\left(y\right)dy=\frac{4}{\pi}\int_0^{1/2}\sqrt{1-y^2}\,dy=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$

（3）同理得 $f_X\left(x\right)=\begin{cases}\frac{4}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$,

所以 $f(x,y)\neq f_X\left(x\right)\cdot f_Y\left(y\right)$，故 X 和 Y 不独立。

21、解 （1）设 X，Y 的边际概率密度分别为 $f_X(x)$，$f_Y(y)$，由已知条件得，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(y-1)^2}{4}}$$

（计算的详细过程见例 3.3.5）

（2）有条件概率密度的定义可得：

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{1}{\sqrt{3\pi}}e^{-\frac{1}{3}[y-1+\frac{1}{\sqrt{2}}x]^2}$$

在 $\{X=0\}$ 的条件下，Y 的条件概率密度为：

$$f_{Y|X}(y\,|\,0)=\frac{1}{\sqrt{3\pi}}e^{-\frac{1}{3}[y-1]^2}$$

（3）$P(Y\leq 1\,|\,X=0\}=\int_{-\infty}^{1} f_{Y|X}(y\,|\,0)dy=\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{\sqrt{3\pi}}e^{-\frac{1}{3}[y-1]^2}dy=0.5$

22 解：（1）$f_X\left(x\right)=\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x,y\right)dy$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}[f_1\left(x,y\right)+f_2\left(x,y\right)]dy$$

$$=\frac{1}{2}(f_{1X}\left(x\right)+f_{2X}\left(x\right))$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\ \left|x\right|<\infty$$

$$f_Y\left(y\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}},\ \left|y\right|<\infty$$

（2）当 $\rho_i=0\ \left(i=1,2\right)$ 时，X_1 与 Y_1，X_2 与 Y_2 均独立，则

$$
\begin{aligned}
f\left(x,y\right) &= \frac{1}{2}[f_1\left(x,y\right)+f_2\left(x,y\right)] \\
&= \frac{1}{2}[f_{1X}\left(x\right)f_{1Y}\left(y\right)+f_{2X}\left(x\right)f_{2Y}\left(y\right)] \\
&= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}
\end{aligned}
$$

所以，$f(x,y)=f_X\left(x\right)\cdot f_Y\left(y\right)$，即 X 与 Y 独立。

23、解 设 T 表示正常工作的时间。由题意知 $X_i \sim E(\lambda)$（$i=1,2,3$），即

$$
F_{X_i}(x_i)=\begin{cases}0, x_i \le 0 \\ 1-e^{-\lambda x_i}, x_i>0\end{cases}。
$$

设 $F_T(t)$ 是设备正常工作时间的概率分布函数，$f_T(t)$ 是概率密度函数。则

当 $t>0$ 时

$$
\begin{aligned}
&F_T(t)=P(T\le t) \\
&=P(X_1\le t,X_2\le t)+P(X_1\le t,X_3\le t)+P(X_2\le t,X_3\le t)-2P\{X_1\le t,X_2\le t,X_3\le t) \\
&=3(1-e^{-\lambda t})^2-2(1-e^{-\lambda t})^3
\end{aligned}
$$

当 $t\le 0$ 时，$F_T(t)=0$。

于是：$F_T(t)=\begin{cases}0, t\le 0 \\ 3(1-e^{-\lambda t})^2-2(1-e^{-\lambda t})^3, t>0\end{cases}$

同时可求得：$f_T(t)=\begin{cases}0, t\le 0 \\ 6\lambda e^{-2\lambda t}(1-e^{-\lambda t}), t>0\end{cases}$。

24 解：（1）$P\left(z=k\right)=C_n^k p^k\left(1-p\right)^{n-k}$，$k=0,1,\cdots,n$。

所以，$Z \sim B\left(n,p\right)$

（2）

$$
\begin{aligned}
P\left(W=k\right) &= P\left(X+Y=k\right) \\
&= \sum_{l=0}^{k} P\left(X=l,Y=k-l\right) \\
&= \sum_{l=0}^{k} C_m^l p^l\left(1-p\right)^{m-l} C_n^{k-l} p^{k-l}\left(1-p\right)^{n-k+l} \\
&= C_{m+n}^k p^k\left(1-p\right)^{m+n-k}, k=0,\cdots,m+n
\end{aligned}
$$

所以，$W \sim B\left(m+n,p\right)$。

25、解 设 $f_X(x)$，$f_Y(y)$，$f_Z(t)$ 分别是 X，Y，Z 的概率密度。利用公式（3.5.5），由题意得：

$$f_Z(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(t-x)dx=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f_Y(t-x)dx$$

$$=\frac{1}{2a}\int_{t-a}^{t+a} f_Y(y)dx=\frac{1}{2a}[P(Y\le t+a)-P(Y\le t-a)] \qquad ,\ |t|<+\infty\text{。}$$

$$=\frac{1}{2a}[\Phi(\frac{t+a-\mu}{\sigma})-\Phi(\frac{t-a-\mu}{\sigma})]$$

26 解：$f_Z(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t-x)\,dx$

$$=\begin{cases}\int_0^t \frac{3\text{-}t}{3}dx, & 0<t\le 1,\\ \int_0^1 \frac{3\text{-}t}{3}dx, & 1<t\le 2,\\ \int_{t-2}^1 \frac{3\text{-}t}{3}dx, & 2<t<3,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{t(3\text{-}t)}{3}, & 0<t\le 1,\\ \frac{(3\text{-}t)}{3}, & 1<t\le 2,\\ \frac{(3\text{-}t)^2}{3}, & 2<t<3,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

27、解 设 X_i 为一月中第 i 天的产煤量（$i=1,2,\cdots 30$），Z 是一月中总的产煤量。由于 $X_i\sim N(1.5,0.1^2)$，且相互独立，因此有 $Z=\sum_{i=0}^{30}X_i\sim N(30\times 1.5,30\times 0.1^2)$，即 $Z\sim N(45,0.3)$。

于是，

$$P(Z>46)=1-P(Z\le 46)=1-\Phi(\frac{46-45}{\sqrt{0.3}})=0.034$$

28 解：$F_Z(z)=P(X+Y\le z)$

$$=P\left(X=0,Y\le z\right)+P\left(X=100,Y\le z-100\right)+P\left(X=500,Y\le z-500\right)$$

$$=0.5F\left(z\right)+0.3F\left(z-100\right)+0.2F\left(z-500\right)$$

所以，$f_Z\left(z\right)=0.5f\left(z\right)+0.3f\left(z-100\right)+0.2f\left(z-500\right)$。

29、解 （1）由于 $X_i\sim\pi(\lambda)$（$i=1,2,\cdots 10$），且相互独立，因此有 $\sum_{i=0}^{10}X_i\sim\pi(10\lambda)$（见例 3.5.1），由题意知，得

$$P(\sum_{i=0}^{10}X_i\ge 2)=1-P(\sum_{i=0}^{10}X_i<2)=1-P(\sum_{i=0}^{10}X_i=0)-P(\sum_{i=0}^{10}X_i=1)$$
$$=1-(1+10\lambda)e^{-10\lambda}$$

（2）所求的概率为：

$$P(\max_{1\le i\le 10}X_i\ge 2)=1-P(\max_{1\le i\le 10}X_i<2)$$
$$=1-P(X_1<2,X_2<2,\cdots X_{10}<2)=1-P(X_1<2)^{10}$$
$$=1-(1+\lambda)^{10}e^{-10\lambda}$$

（3）由题意可求：

$$P(\min_{1\le i\le 10}X_i=0)=1-P(X_1>0,X_2>0,\cdots X_{10}>0)$$
$$=1-[1-P(X_1=0)]^{10}=1-(1-e^{-\lambda})^{10}$$

及

$$P(\max_{1\le i\le 10}X_i\ge 2,\min_{1\le i\le 10}X_i=0)=P(\min_{1\le i\le 10}X_i=0)-P(\max_{1\le i\le 10}X_i<2,\min_{1\le i\le 10}X_i=0)$$
$$=P(\min_{1\le i\le 10}X_i=0)-P(\max_{1\le i\le 10}X_i<2)+P(\max_{1\le i\le 10}X_i<2,\min_{1\le i\le 10}X_i>0)$$
$$=P(\min_{1\le i\le 10}X_i=0)-P(\max_{1\le i\le 10}X_i<2)+P\{0<X_i<2\mid i=1,2,\cdots 10\}$$
$$=P(\min_{1\le i\le 10}X_i=0)-(1+\lambda)^{10}e^{-10\lambda}+\lambda^{10}e^{-10\lambda}$$

于是所求的概率为：

$$P(\max_{1\le i\le 10}X_i\ge 2\mid\min_{1\le i\le 10}X_i=0)=\frac{P(\max_{1\le i\le 10}X_i\ge 2,\min_{1\le i\le 10}X_i=0)}{P(\min_{1\le i\le 10}X_i=0)}=P(\min_{1\le i\le 10}X_i=0)-P(\max_{1\le i\le 10}X_i<2,\min_{1\le i\le 10}X_i=0)$$
$$=\frac{P(\min_{1\le i\le 10}X_i=0)-(1+\lambda)^{10}e^{-10\lambda}+\lambda^{10}e^{-10\lambda}}{P(\min_{1\le i\le 10}X_i=0)}$$
$$=1-\frac{[(1+\lambda)^{10}-\lambda^{10}]e^{-10\lambda}}{1-(1-e^{-\lambda})^{10}}$$

30 解：① $P\left(Z=1\right)=P\left(X=0,Y=1\right)=0.04$，

$P\left(Z=2\right)=P\left(X=0,Y=2\right)+P\left(X=1,Y=1\right)=0.14$，

$P(Z=3)=P(X=0,Y=3)+P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=1)=0.3$，

$P(Z=4)=P(X=1,Y=3)+P(X=2,Y=2)=0.32$，

$P(Z=5)=P(X=2,Y=3)=0.2$。

② $P(M=1)=P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=1)=0.1$，

$P(M=2)=P(X=0,Y=2)+P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=2)=0.5$，

$P(M=3)=0.4$。

③ $P(N=0)=0.2$，

$P(N=1)=P(X=1,Y=1)+P(X=1,Y=2)+P(X=1,Y=3)+P(X=2,Y=1)=0.4$

$P(N=2)=P(X=2,Y=2)+P(X=2,Y=3)=0.4$。

31、解 设T的概率密度函数为$f_T(t)$。

（1）串联

当$t>0$时

$$P(T\le t)=1-P(T>t)=1-P(X>t,Y>t)$$
$$=1-\int_t^{+\infty}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}dx\int_t^{+\infty}\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}dy=1-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

计算可得$f_T(t)=(\lambda_1+\lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$

当$t\le 0$时，显然有$f_T(t)=0$。

因此T的概率密度函数为$f_T(t)$为：

$$f_T(t)=\begin{cases}(\lambda_1+\lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t},t>0\\0,t\le 0\end{cases}$$

（2）并联

当$t>0$时

$$P(T\le t)=P(X\le t,Y\le t)$$
$$=\int_0^t\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}dx\int_0^t\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}dy=1-e^{-\lambda_1 t}-e^{-\lambda_2 t}+e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

计算可得$f_T(t)=\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}+\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}-(\lambda_1+\lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$

当$t\le 0$时，显然有$f_T(t)=0$。

因此T的概率密度函数为$f_T(t)$为：

$$f_T(t)=\begin{cases}\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}+\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}-(\lambda_1+\lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}, t>0\\ 0, t\le 0\end{cases}$$

（3）备份

由题意知，$T=X+Y$，于是

当 $t\le 0$ 时，显然有 $f_T(t)=0$ 。

当 $t>0$ 时

$$f_T(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(t-x)dx=\int_0^t \lambda_1 e^{-\lambda_1 y}\lambda_2 e^{-\lambda_2(t-x)}dx$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}[e^{-\lambda_1 t}-e^{-\lambda_2 t}]t, \lambda_2\ne\lambda_1\\ \lambda_1{}^2 te^{-\lambda_1 t}, \lambda_2=\lambda_1\end{cases}$$

从而所求的概率密度函数为：

当 $\lambda_2\ne\lambda_1$ 时

$$f_T(t)=\begin{cases}\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}[e^{-\lambda_1 t}-e^{-\lambda_2 t}], t>0\\ 0, t\le 0\end{cases}$$

当 $\lambda_2=\lambda_1$ 时

$$f_T(t)=\begin{cases}0, t\le 0\\ \lambda_1{}^2 te^{-\lambda_1 t}, t>0\end{cases}$$

32 解：令 $\begin{cases}u=x\\ v=2x-y\end{cases}$，则

$$F_Z(z)=P(2X-Y\le z)$$

$$=\iint\limits_{2x-y\le z} f(x,y)\,dxdy$$

$$=\int_0^z\int_{v/2}^2 f(u,2u-v)dudv$$

$$=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ \int_0^z\int_{v/2}^2 \dfrac{1}{4}dudv, & 0<z\le 4,\\ 1, & z\ge 4.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ \dfrac{z}{2}-\dfrac{z^2}{16}, & 0<z\le 4,\\ 1, & z\ge 4.\end{cases}$$

所以，$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}-\dfrac{z}{8}, & 0<z\le 4,\\ 0, & 其他。\end{cases}$

33、解 （1）由题意得，对X独立观察n次，n次观察值之和W的概率分布律为：

$P(W=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$，$k=0,1,2,3,\cdots,n$

（2）X的可能取值为：0，1，Z的可能取值为：0，1，因此(X,Z)的联合分布律为：

$$P(X=0,Z=0)=P(X=0,X+Y\neq 1)=P(X=0,Y=0)=(1-p)^2$$

$$P(X=0,Z=1)=P(X=0,X+Y=1)=P(X=0,Y=1)=p(1-p)$$

$$P(X=1,Z=0)=P(X=1,X+Y\neq 1)=P(X=1,Y=1)=p^2$$

$$P(X=1,Z=1)=P(X=1,X+Y=1)=P(X=1,Y=0)=p(1-p)$$

34 解：令$\begin{cases}u=x\\ v=\dfrac{x}{y}\end{cases}$，则

$$F_Z(t)=P\left(\frac{X}{Y}\le t\right)$$

$$=\iint\limits_{\substack{\frac{x}{y}\le t,\\ 0<x<1,\\ 0<y<1}} f(x,y)\,dxdy$$

$$=\begin{cases}\int_0^t\int_0^1 f\left(u,\dfrac{u}{v}\right)\dfrac{u}{v^2}\,dudv, & t\ge 1,\\ \int_0^t\int_0^v f\left(u,\dfrac{u}{v}\right)\dfrac{u}{v^2}\,dudv, & 0<t<1,\\ 0, & t\le 0.\end{cases}$$

$$=\begin{cases} 1-\dfrac{1}{2t}, & t\geq 1, \\ \dfrac{t}{2}, & 0<t<1, \\ 0, & t\leq 0. \end{cases}$$

$$f_Z(t)==\begin{cases} \dfrac{1}{2t^2}, & t\geq 1, \\ \dfrac{1}{2}, & 0<t<1, \\ 0, & t\leq 0. \end{cases}$$

第四章　随机变量的数字特征

注意：　这是第一稿（存在一些错误）

1、 解 每次抽到正品的概率为：$\dfrac{N}{M}$，放回抽取，抽取n次，抽到正品的平均次数为：$\dfrac{N}{M}n$

2、方案一：平均年薪为 3 万

方案二：记年薪为 X，则 $p(X=1.2)=0.2$，$p(X=4.2)=0.8$

$EX=1.2\times 0.2+4.2\times 0.8=3.6>3$

故应采用方案二

3 、解 由于：$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx=2\int_0^{+\infty}\dfrac{x}{\pi(1+x^2)}dx=\dfrac{1}{\pi}\ln(1+x^2)\,|_0^{+\infty}=+\infty$

所以X的数学期望不存在。

4、$p(X=2)=\dfrac{1}{28}$，$p(X=3)=\dfrac{1}{14}$，$p(X=4)=\dfrac{3}{28}$，$p(X=5)=\dfrac{1}{7}$，$p(X=6)=\dfrac{5}{28}$，

$p(X=7)=\dfrac{3}{14}$，$p(X=2)=\dfrac{1}{4}$，

$EX=2\times\dfrac{1}{28}+3\times\dfrac{1}{14}+4\times\dfrac{3}{28}+5\times\dfrac{1}{7}+6\times\dfrac{5}{28}+7\times\dfrac{3}{14}+8\times\dfrac{1}{4}=6$。

5、 解 每次向右移动的概率为p，到时刻n为止质点向右移动的平均次数，即η_n的期望为：

$E(\eta_n)=np$

时刻n质点的位置S_n的期望为：$E(S_n)=np-n(1-p)=n(2p-1)$

6、不会

7 、解　方法 1：由于 $P(T\geq 0)=1$，所以 T 为非负随机变量。于是有：

$$E(T)=\int_0^{+\infty}(1-F(t))dt=\int_0^{+\infty}P(T>t)dt=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-t}(1+e^{-t})dt=\frac{3}{4}$$

方法二：由于 $P(T\geq 0)=1$，所以，可以求出 T 的概率函数：

$$f(t)=\begin{cases}0,t<0\\ \frac{1}{2}e^{-t}(1+2e^{-t}),t\geq 0\end{cases}$$

于是 $E(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}|t|f(t)dt=\int_0^{+\infty}tf(t)dt=\frac{3}{4}$

8、$f_X(x)=\int_0^x f(x,y)dy=\int_0^x\frac{2}{x}e^{-2x}dy=2e^{-2x}$，$0<x<+\infty$

（1）$EX=\int_0^{\infty}xf_X(x)dx=\int_0^{\infty}2xe^{-2x}dx=\frac{1}{2}$

（2）$E(3X-1)=3EX-1=\frac{1}{2}$

（3）$E(X,Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^{\infty}\int_0^{x}xy\frac{2}{x}e^{-2x}dydx=\frac{1}{4}$。

9．解 设棍子上的点是在[0,1]之间的，Q 点的位置距离端点 0 的长度为 q。设棍子是在 t 点处跌断，t 服从[0,1]的均匀分布。于是：包含 Q 点的棍子长度为 T，则：

$$T=\begin{cases}t,q<t<1\\ 1-t,0\leq t<q\\ \min(q,1-q),t=q\end{cases}\quad ,\ q\leq t\leq 1$$

于是包 Q 点的那一段棍子的平均长度为：

$$E(T)=\int_0^1 Tdx=\int_0^q(1-t)dt+\int_q^1 tdt=\frac{1}{2}+q-q^2$$

10、X: $U(8,9)$，Y: $U(8,9)$

$$E|X-Y|=\int_8^9\int_8^9|x-y|f(x,y)\,dxdy=\frac{1}{3}(\text{小时})$$

即先到的人等待的平均时间为 20 分钟。

11、解 (I)每个人化验一次，需要化验 500 次

（II）分成 k 组，对每一组进行化验一共化验 $\frac{500}{k}$ 次，每组化验为阳性的概率为：$1-0.7^k$，若该组检验为阳性的话，需对每个人进行化验需要 k 次，于是该方法需要化验的次数为：$\frac{500}{k}(1+(1-0.7^k)k)$。

将（II）的次数减去（I）的次数，得：$\frac{500}{k}(1+(1-0.7^k)k)-500=500(\frac{1}{k}-0.7^k)$

于是：

当$\dfrac{1}{k}-0.7^k<0$时，第二种方法检验的次数少一些；当$\dfrac{1}{k}-0.7^k>0$时，第一种方法检验的次数少一些；当$\dfrac{1}{k}-0.7^k=0$时，二种方法检验的次数一样多。

12、$f(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}, & t>0,\\ 0, & t\le 0.\end{cases}$

$$ET=\int_0^8 t\lambda e^{-\lambda t}dt+\int_8^{\infty}8\lambda e^{-\lambda t}dt=\frac{1-e^{-8\lambda}}{\lambda}$$。

13、解 由题意知：

$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi r^2},x,y\text{在圆内}\\ 0\text{，其他值}\end{cases}$，$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi r},-r<x<r\\ 0\text{，其他值}\end{cases}$，$f_Y(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi r},-r<y<r\\ 0\text{，其他值}\end{cases}$

（1） 计算可得$E(X)=E(Y)=\int_{-r}^{r}x\dfrac{2}{\pi r}dx=0$

（2） A的位置是（x，y），距中心位置（0，0）的距离是：$\sqrt{x^2+y^2}$，于是所求的平均距离为：

$$E(\sqrt{X^2+Y^2})=\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2}\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{1}{\pi r^2}dxdy=\frac{2r}{3}$$

14、（1）$a=1$时，$p(\xi_n=0)=\dfrac{C_{14}^2}{C_{15}^2}$，$p(\xi_n=1)=\dfrac{C_1^1C_{14}^1}{C_{15}^2}$

$$E\xi_n=\frac{C_1^1C_{14}^1}{C_{15}^2}=\frac{2}{15}\ne\frac{4}{3}$$

$a\ge 2$时，$p(\xi_2=0)=\dfrac{C_{15-a}^2}{C_{15}^2}$，$p(\xi_2=1)=\dfrac{C_a^1C_{15-a}^1}{C_{15}^2}$，$p(\xi_2=2)=\dfrac{C_a^2}{C_{15}^2}$

$$E\xi_2=1\times\frac{C_a^1C_{15-a}^1}{C_{15}^2}+2\times\frac{C_a^2}{C_{15}^2}=\frac{2a}{15}$$

由$E\xi_2=\dfrac{4}{3}$得，$a=10$。

（2）$p(\xi_9=4)=\dfrac{C_{10}^4C_5^5}{C_{15}^9}$，$p(\xi_9=5)=\dfrac{C_{10}^5C_5^4}{C_{15}^9}$，$p(\xi_9=6)=\dfrac{C_{10}^6C_5^3}{C_{15}^9}$，

$p(\xi_9=7)=\dfrac{C_{10}^7C_5^2}{C_{15}^9}$，$p(\xi_9=8)=\dfrac{C_{10}^8C_5^1}{C_{15}^9}$，$p(\xi_9=4)=\dfrac{C_{10}^9C_5^0}{C_{15}^9}$

$$E\xi_9=4\times\frac{C_{10}^4C_5^5}{C_{15}^9}+5\times\frac{C_{10}^5C_5^4}{C_{15}^9}+6\times\frac{C_{10}^6C_5^3}{C_{15}^9}+7\times\frac{C_{10}^7C_5^2}{C_{15}^9}+8\times\frac{C_{10}^8C_5^1}{C_{15}^9}+9\times\frac{C_{10}^9C_5^0}{C_{15}^9}=6\text{。}$$

15、解 $f_{Y|X}(y\mid x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2r},-\sqrt{r^2-x^2}<y<\sqrt{r^2-x^2}\\ 0\text{，其他值}\end{cases}$

$$f_{Y|X}(y\mid\frac{\sqrt{3}r}{2})=\frac{f(\frac{\sqrt{3}r}{2},y)}{f_X(\frac{\sqrt{3}r}{2})}=\begin{cases}\dfrac{1}{2r},-\dfrac{r}{2}<y<\dfrac{r}{2}\\ 0\text{，其他值}\end{cases}$$

于是：

$$E(Y\mid X=\frac{\sqrt{3}r}{2})=\int_{-\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}}\frac{1}{2r}ydy=0$$

16、记 Y 为进入购物中心的人数，X 为购买冷饮的人数，则

$$p_X\left(X=k\right)=\sum_{m=k}^{\infty}p_Y\left(Y=m\right)C_m^kp^k\left(1-p\right)^{m-k}$$

$$=\sum_{m=k}^{\infty}\frac{\lambda^me^{-\lambda}}{m!}C_m^kp^k\left(1-p\right)^{m-k}$$

$$=\sum_{m=k}^{\infty}\frac{\lambda^me^{-\lambda}}{\left(m-k\right)!k!}p^k\left(1-p\right)^{m-k}$$

$$=\frac{\lambda^ke^{-\lambda}p^k}{k!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}\left(1-p\right)^m$$

$$=\frac{\left(\lambda p\right)^ke^{-\lambda p}}{k!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[\lambda\left(1-p\right)]^m}{m!}e^{-\lambda(1-p)}$$

$$=\frac{\left(\lambda p\right)^ke^{-\lambda p}}{k!}$$

故购买冷饮的顾客人数服从参数为 λp 的泊松分布，易知期望为 λp。

17、解：由题意知 $P(X=k)=\dfrac{1}{11}$，其中 $k=0,1,2,\cdots10$。于是

$$P(Y=k,X=i)=0,i=k+1,\cdots,11$$

$$P(Y=k,X=i)=P(X=i)P(Y=k\mid X=i)=\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{11-i},i=0,1,\cdots,k$$

从而$P(Y=k)=\sum_{i=0}^{k}P(Y=k,X=i)=\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{11-i}$

于是：$E(Y)=\sum_{k=0}^{10}\sum_{i=0}^{k}k\frac{1}{11-i}=7.5$

又$P(Z=k)=\sum_{i=1}^{10}\frac{(11-i)i^{k-1}}{11^{k-1}}$

从而$E(Z)=\sum_{k=1}^{\infty}P(Z=k)k=\sum_{i=1}^{10}\frac{1}{(11-i)}=3.02$

18、 $D\left(\xi_2\right)=\frac{C_{15-a}^2}{C_{15}^2}\left(0-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{C_a^1C_{15-a}^1}{C_{15}^2}\left(1-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{C_a^2}{C_{15}^2}\left(2-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{26}{63}$.

19、解 $E(X^k)=\int_0^\infty x^k\frac{\lambda^a}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx=\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\lambda^k\Gamma(\alpha)},(k\geq 1)$

$D(X)=\int_0^\infty x^2\frac{\lambda^a}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx-[\int_0^\infty x\frac{\lambda^a}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx]^2=\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^2\Gamma(\alpha)}-[\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda\Gamma(\alpha)}]^2=\frac{\alpha}{\lambda^2}$

20、 $EX=\int_{-\infty}^{\infty}xf\left(x\right)dx=0$，

$DX=EX^2=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-|x|}dx=2$

$E|X|=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|x|e^{-|x|}dx=1$

$D|X|=E|X|^2-\left(E|X|\right)^2=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-|x|}dx-1=1$

21、解 (1)设 p 表示从产品取到非正品的概率，于是有：

$p=(1-98\%)*0.7+0.2*(1-90\%)+0.1*(1-74\%)=0.06$，

用 X 表示产品中非正品数，X 服从二项分布 B(100，0.06)，有：

$E(X)=\sum_{k=0}^{100}kP(X=k)=100\times 0.06=6$

$D(X)=100p(1-p)=5.64$（参考 77 页的例 4.2.5）

（3） 用 Y 表示在该条件下正品数，Y 服从二项分布 B(100,0.98)，于是

$E(Y)=100\times 0.98=98$

$D(X)=100\times 0.98\times(1-0.98)=1.96$

22、 $p(X=0)=p(X=1)=p(Y=0)=p(Y=1)=\frac{1}{2}$

（1） $p(X+Y\geq 1)=p(X=0,Y=1)+p(X=1,Y=1)+p(X=1,Y=0)$

$$=p(X=0)p(Y=1)+p(X=1)p(Y=1)+p(X=1)p(Y=0)$$

$$=\frac{3}{4}$$

（2） $E\left(X\cdot(-1)^{Y}\right)=0\cdot(-1)^{0}p(X=0)p(Y=0)+0\cdot(-1)^{1}p(X=0)p(Y=1)+$

$$1\cdot(-1)^{0}p(X=1)p(Y=0)+1\cdot(-1)^{1}p(X=1)p(Y=1)=0$$

$$D\left(X\cdot(-1)^{Y}\right)=E\left(X\cdot(-1)^{Y}\right)^{2}-[E\left(X\cdot(-1)^{Y}\right)]^{2}$$

$$=E\left(X\cdot(-1)^{Y}\right)^{2}$$

$$=[0\cdot(-1)^{0}]^{2}p(X=0)p(Y=0)+[0\cdot(-1)^{1}]^{2}p(X=0)p(Y=1)+$$

$$[1\cdot(-1)^{0}]^{2}p(X=1)p(Y=0)+[1\cdot(-1)^{1}]^{2}p(X=1)p(Y=1)$$

$$=\frac{1}{2}$$

23、解 证明：

$D(XY)=E((XY)^2)-(E(XY))^2=E(X^2Y^2)-(E(XY))^2$

$=E(X^2)E(Y^2)-(E(X)E(Y))^2$(由于$X,Y$相互独立）

$=(D(X)+E(X)^2)\cdot(D(Y+E(Y)^2)-E(X)^2E(Y)^2$

$=D(X)\cdot D(Y)+(E(X))^2\cdot D(Y)+(E(Y))^2\cdot D(X)$

24、$f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\leq 0.\end{cases}$ $\quad f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-4y}, & y>0,\\ 0, & y\leq 0.\end{cases}$

$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\leq 0.\end{cases}$ $\quad F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-4y}, & y>0,\\ 0, & y\leq 0.\end{cases}$

（1）$Z=\min\{X,Y\}$

$$F_Z(z)=p(Z\leq z)=1-\left[\left(1-F_X(z)\right)\left(1-F_Y(z)\right)\right]=\begin{cases}1-e^{-6z}, & z>0,\\ 0, & z\leq 0.\end{cases}$$

故Z服从参数为$\lambda=6$的指数分布，故$EZ=\frac{1}{6}$，$DZ=\frac{1}{36}$。故$Cv(Z)=\frac{\sqrt{DZ}}{EZ}=1$。

（2） $Z=\max\{X,Y\}$

$$F_Z(z)=p(Z\le z)=F_X(z)F_Y(z)=\begin{cases}(1-e^{-2z})(1-e^{-4z}), & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

$EZ=\int_0^{\infty} zdF_Z(z)=\frac{7}{12}$，

$DZ=EZ^2-(EZ)^2=\int_0^{\infty} z^2dF_Z(z)-\frac{49}{144}=\frac{33}{144}$，

故 $Cv(Z)=\frac{\sqrt{DZ}}{EZ}=\frac{\sqrt{33}}{7}$。

(3) $Z=X+Y$，

$EZ=EX+EY=\frac{3}{4}$， $DZ=DX+DY=\frac{5}{16}$，

$Cv(Z)=\frac{\sqrt{DZ}}{EZ}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

25、解（1）由相关系数的定义，得：

$\rho_{X|X|}=\frac{Cov(X,|X|)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(|X|)}}$，其中 $Cov(X,|X|)=E(X|X|)-E(X)E(|X|)$

通过计算得 $Cov(X,|X|)=0$，即 $\rho_{X|X|}=0$，从而说明 $X,|X|$ 是不相关的。

（2）很显然，X与$|X|$不是相互独立的。

26、(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\frac{1}{2}$， $|x|<1$

$E(X)=0$， $DX=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{1}{3}$，

同理 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\frac{1}{2}$， $|y|<1$

$E(Y)=0$， $DY=\frac{1}{3}$

$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}xy\cdot\frac{1}{4}(1+xy)dxdy=\frac{1}{9}$

$\rho_{X,Y}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{1}{3}$，故 X 和 Y 正相关。

又 $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，故 X 和 Y 不独立。

（2）

$\operatorname{cov}(X^2,Y^2)=E(X^2Y^2)-E(X^2)E(Y^2)=E(X^2Y^2)-D(X)D(Y)=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}x^2y^2\cdot\frac{1}{4}(1+xy)dxdy-\frac{1}{9}=0$

故 $\rho=0$，即 X 和 Y 不相关。

又 $F_{X^2,Y^2}(x,y)=p\left(X^2\le x,Y^2\le y\right)$

$$=p\left(-\sqrt{x}\le X\le\sqrt{x},-\sqrt{y}\le Y\le\sqrt{y}\right)$$

$$=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}f(t,v)\,dtdv=\sqrt{xy}$$

所以 $f_{X^2,Y^2}(x,y)=\dfrac{1}{4\sqrt{xy}}=\dfrac{1}{4\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{y}}=m(x)\cdot n(y)$，故 X^2 和 Y^2 相互独立。

27、解（1）由题意得：

$$E(A)=\frac{\pi}{3}\lambda+\frac{\pi}{4}\theta+\frac{\pi}{6}(1-\lambda-\theta)=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\lambda-\frac{\pi}{12}\theta$$

$E(\sin A)=\sin\dfrac{\pi}{6}-\lambda\sin\dfrac{\pi}{6}-\theta\sin\dfrac{\pi}{12}$，$E(\cos A)=\cos\dfrac{\pi}{6}-\lambda\cos\dfrac{\pi}{6}-\theta\cos\dfrac{\pi}{12}$

结合已知条件，可求出：$\lambda=\dfrac{1}{4}$，$\theta=\dfrac{1}{2}$

由于 A 和 B 是独立同分布的，于是（A,B）的联合分布律为：

A \ B	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	P(A=i)
$\frac{\pi}{3}$	1/16	1/8	1/16	1/4
$\frac{\pi}{4}$	1/8	1/4	1/8	1/2
$\frac{\pi}{6}$	1/16	1/8	1/16	1/4

（2）

$$E(\sin C)=E(\sin(B+A))=E(\sin B\cos A)+E(\cos B\sin A)$$

$$=E(\sin B)E(\cos A)+E(\cos B)E(\sin A)=2[\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}+1}{8}]^2\approx0.966$$

（3）$\rho_{AC}=\dfrac{Cov(A,C)}{\sqrt{D(A)}\sqrt{D(C)}}$，其中

$$Cov(A,C)=Cov(A,\pi-A-B)=Cov(A,-A)+Cov(A,-B)=Cov(A,-A)=-D(A)$$

$$D(C)=D(\pi-A-B)=D(A)+D(B)=2D(A)$$

所以：$\rho_{AC}=\dfrac{Cov(A,C)}{\sqrt{D(A)}\sqrt{D(C)}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，说明 A 和 C 是负相关的。

28（1）不会写

（2）$\operatorname{cov}\left(\bar{X}, X_i\right)=\operatorname{cov}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j, X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\operatorname{cov}\left(X_j, X_i\right)=\frac{1}{n}D\left(X_i\right)=\frac{1}{n}$

（3）$\operatorname{cov}\left(S_k, T_k\right)=\operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i, \sum_{j=n_0+1}^{n_0+k} X_j\right)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=n_0+1}^{n_0+k}\operatorname{cov}\left(X_i, X_j\right)$

$$=\sum_{i=1}^{n_0}\sum_{j=n_0+1}^{n_0+k}\operatorname{cov}\left(X_i, X_j\right)+\sum_{i=n_0+1}^{k}\sum_{j=n_0+1}^{k}\operatorname{cov}\left(X_i, X_j\right)+\sum_{i=n_0+1}^{k}\sum_{j=k+1}^{n_0+k}\operatorname{cov}\left(X_i, X_j\right)$$

$$=\sum_{i=n_0+1}^{k} DX_i=k-n_0,$$

$$DS_k=\sum_{i=1}^{k} DX_i=k,$$

$$DT_k=\sum_{j=n_0+1}^{n_0+k} DX_j=k,$$

$$\rho=\frac{\operatorname{cov}\left(S_k,\right)}{\sqrt{DS_k}\sqrt{DT_k}}=\frac{k-n_0}{k}。$$

29.解 （1）证明：由于 X 和 Y 相互独立，于是由题意得

$$E(\xi)=E(XY)=E(X)E(Y)=0$$

$$D(\xi)=D(XY)=D(X)\cdot D(Y)+(E(X))^2\cdot D(Y)+(E(Y))^2\cdot D(X)=4p(1-p)+(2p-1)^2=1$$

从而有$\xi \sim N(0,1)$

（2）

$$\rho_{X\xi}=\frac{Cov(X,\xi)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(\xi)}}=Cov(X,\xi)=Cov(X,XY)=E(X^2Y)-E(X)E(XY)$$
$$=E(X^2)E(Y)-E(X)^2E(Y)=E(Y)=2p-1$$

当$p=\frac{1}{2}$时，X和ξ是不相关的；当$p>\frac{1}{2}$，即$\rho_{XC}>0$时，说明X和ξ是正相关的

当$p<\frac{1}{2}$，即$\rho_{XC}<0$时，说明X和ξ是负相关的

显然，X和ξ是 不独立的

30 （1）$p\left(X=0, Y=0\right)=p\left(Y=0 \mid X=0\right)p\left(X=0\right)=\frac{2}{5}$,

$p(X=0,Y=1)=p(Y=1|X=0)p(X=0)=\frac{1}{5}$，

$p(X=1,Y=0)=p(Y=0|X=1)p(X=1)=\frac{1}{5}$，

$p(X=1,Y=1)=p(Y=1|X=1)p(X=1)=\frac{1}{5}$，

$p(X=0)=\frac{3}{5}$， $p(X=1)=\frac{2}{5}$， $p(Y=0)=\frac{3}{5}$， $p(Y=1)=\frac{2}{5}$，

$p(X=0,Y=0)\neq p(X=0)p(Y=0)$，故 X 和 Y 不独立。

（2）$\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

$$=0\cdot\left(p(X=0,Y=0)+p(X=0,Y=1)+p(X=1,Y=0)\right)$$

$$+1\cdot p(X=1,Y=1)-p(X=1)p(Y=1)=\frac{1}{25}$$

故 X 和 Y 正相关。

31、解 （1）泊松分布的表示式为：$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!},k=0,1,\mathrm{L}$ ，于是通过计算有：

$$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)}=\frac{\lambda}{k+1}$$

故：$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)}=\begin{cases}>1,\text{当}\lambda>k+1\\=1,\text{当}\lambda=k+1\\<1,\text{当}\lambda<k+1\end{cases}$

因此若 λ 为正整数，则众数为 λ 和 λ-1；当 λ 不为正整数时，则众数为 λ 的整数部分[λ]。

32 （1）由 $\rho=0$ 知，X 和 Y 不相关，等价于 X 和 Y 相互独立。

X: $N(0,1)$，Y: $N(1,4)$

$E\xi=aEX-bEY=-b$， $E\eta=aEY-bEX=a$，

$D\xi=a^2DX+b^2DY=a^2+4b^2$， $D\eta=a^2DY+b^2DX=4a^2+b^2$，

$\xi^*=\frac{\xi+b}{\sqrt{a^2+4b^2}}$ 和 $\eta^*=\frac{\eta-a}{\sqrt{4a^2+b^2}}$ 分别为 ξ 和 η 的标准化变量。

$\mathrm{cov}(\xi,\eta)=\mathrm{cov}(aX-bY,aY-bX)$

$$=(a^2+b^2)\mathrm{cov}(X,Y)-ab\left(\mathrm{cov}(X,X)+\mathrm{cov}(Y,Y)\right)$$

$$=-ab(DX+DY)=-5ab$$

$$\rho=\frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}=\frac{-5ab}{\sqrt{a^2+4b^2}\sqrt{4a^2+b^2}}$$

(2) $\rho=\frac{1}{2}$ 时，$\operatorname{cov}(X,Y)=\rho\sqrt{DX}\sqrt{DY}=1$，

$E\xi=aEX-bEY=-b$，$D\xi=a^2DX+b^2DY-2ab\operatorname{cov}(X,Y)=a^2+4b^2-2ab$

则 $Cv(\xi)=\frac{\sqrt{D\xi}}{E\xi}=-\frac{\sqrt{a^2+4b^2-2ab}}{b}$

（3）因 $E\eta=aEY-bEX=a$，$D\eta=a^2DY+b^2DX-2ab\operatorname{cov}(X,Y)=4a^2+b^2-2ab$

η：$N(a,4a^2+b^2-2ab)$

故定义知η的中位数为a，众数为a。

（4）$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=(a^2+b^2)\operatorname{cov}(X,Y)-ab(DX+DY)=-(2a+b)(a+2b)$

故$b=-2a$或$a=-2b$时，ξ和η不相关。

又正态分布的独立性与相关性相同，

故$b=-2a$或$a=-2b$时，ξ和η独立且不相关，否则不独立且相关。

33、解 （1）由题意可知：

$D(X_1)=1, E(X_1)=0$，说明 $X_1\sim N(0,1)$

$D(X_1)=1, E(X_1)=0$，说明 $X_2\sim N(0,16)$

$D(X_3)=4, E(X_3)=1$，说明 $X_3\sim N(1,4)$

（2）对于二维正态而言，两变量不相关等价于两变量独立。

由于$Cov(X_1,X_2)=2\neq 0$，所以X_1与X_2相关且不独立

由于$Cov(X_1,X_3)=-1\neq 0$，所以X_1与X_3相关且不独立

由于$Cov(X_3,X_2)=0$，所以X_3与X_2不相关且独立

从而（由 88 页性质 4）可以判断出X_1，X_2与X_3不相互独立

（3）计算有$E(Y_1)=E(X_1-X_2)=0$，$E(Y_2)=E(X_3-X_1)=1$

$$Cov(Y_1,Y_1)=Cov(X_1-X_2,X_1-X_2)=Cov(X_1,X_1)+Cov(X_2,X_2)-2Cov(X_1,X_2)=13$$

$$Cov(Y_1,Y_2)=Cov(X_1-X_2,X_3-X_1)=Cov(X_1,X_3)-Cov(X_1,X_1)-Cov(X_2,X_3)+Cov(X_2,X_1)=0$$

$$Cov(Y_2, Y_2) = Cov(X_3 - X_1, X_3 - X_1) = Cov(X_3, X_3) + Cov(X_1, X_1) - 2Cov(X_3, X_1) = 7$$

于是 $Y = (Y_1, Y_2)' \sim N(\mu, \Sigma)$，其中 $\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\Sigma = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

第五章　大数定律及中心极限定理

注意：　这是第一稿（存在一些错误）

1、 解（1）由于 $P\{X \ge 0\} = 1$，且 $E(X) = 36$，利用马尔科夫不等式，得

$$P\{X \ge 50\} \le \frac{E(X)}{50} = 0.72$$

（2）$D(X) = 2^2$，$E(X) = 36$，利用切比雪夫不等式，所求的概率为：

$$P\{32 < X < 40\} = 1 - P(|X - 36| \ge 4) \ge 1 - \frac{2^2}{16} = \frac{3}{4} = 0.75$$

2、解：$X_i \sim B(500, 0.1)$，

$$P\left\{\frac{1}{500}\sum_{i=1}^{500}|X_i - 10\%| < 5\%\right\} \ge 1 - \frac{D\left(\frac{1}{500}\sum_{i=1}^{500} X_i\right)}{0.05^2} = \frac{116}{125} = 92.8\%$$

3、 解 ξ 服从参数为 0.5 的几何分布，$P(\xi = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, (n = 2, 3, 4 \cdots)$

可求出 $E(\xi) = \sum_{n=2}^{\infty} nP(\xi = n) = 3, D(\xi) = 2$

于是令 $\frac{a+b}{2} = E(\xi)$，$\frac{b-a}{2} = \varepsilon$，利用切比雪夫不等式，得

有 $P(a < \xi < b) = 1 - P(|\xi - E(\xi)| \ge \varepsilon) \ge 1 - \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2} = 75\%$

从而可以求出 $\varepsilon = 2\sqrt{2}, a = E(\xi) - \varepsilon = 3 - 2\sqrt{2}, b = E(\xi) + \varepsilon = 3 + 2\sqrt{2}$

4、解：$F_{X_{(n)}}(x) = P\left(X_{(n)} \le x\right) = P\left(X_1 \le x, \cdots, X_n \le x\right) = \left(F(x)\right)^n = \frac{x^n}{a^n}$，$x \in (0, a)$。

则 $p_{X_{(n)}}(x)=n\left(F(x)\right)^{n-1}p(x)=\dfrac{nx^{n-1}}{a^n}$， $x\in(0,a)$。

$$E_{X_{(n)}}(x)=\int_0^a x\cdot\frac{nx^{n-1}}{a^n}dx=\frac{n}{n+1}a,$$

$$D_{X_{(n)}}(x)=\int_0^a x^2\cdot\frac{nx^{n-1}}{a^n}dx-\left(\frac{n}{n+1}a\right)^2=\frac{n}{(n+2)(n+1)^2}a^2。$$

$$P\left\{\left|X_{(n)}-\frac{n}{n+1}a\right|\geq\varepsilon\right\}\leq\frac{n}{\varepsilon^2(n+2)(n+1)^2}a^2,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|X_{(n)}-a\right|\geq\varepsilon\right\}=0$。

5、 解 服从大数定律。由题意得：

$$P\{X_i=k\}=\frac{\left(i^{2/3}\right)^k e^{-i^{2/3}}}{k!},E(X_i)=D(X_i)=i^{2/3}$$

由 $\dfrac{1}{n^2}D(\sum\limits_{i=1}^n X_i)=\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^n D(X_i)=\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^n i^{2/3}\leq\left(\dfrac{1}{n}\right)^{1/3}\xrightarrow{n->\infty}0$

根据马尔科夫大数定律，可判断该序列服从大数定律的。

6、解：（1） $h(x)=x^2$，则 $h(x)$ 连续。

$E\left(\left|h(X_1)\right|\right)=EX_1^2=\sigma^2+\mu^2<\infty$，则 $\forall\varepsilon>0$，有

$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n X_i^2-\left(\sigma^2+\mu^2\right)\right|\geq\varepsilon\right\}=0$，则 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n X_i^2\xrightarrow{p}\left(\sigma^2+\mu^2\right)$，$(n\to\infty)$。

（2） $h(x)=(x-\mu)^2$ 连续，$E\left(\left|h(X_1)\right|\right)=E\left(X_1-\mu\right)^2=\sigma^2<\infty$，则 $\forall\varepsilon>0$，有

$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n\left(X_i-\mu\right)^2-\sigma^2\right|\geq\varepsilon\right\}=0$，则 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n\left(X_i-\mu\right)^2\xrightarrow{p}\sigma^2$，$(n\to\infty)$。

（3） $\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{\sum\limits_{i=1}^n X_i^2}\xrightarrow{p}\lim\limits_{n\to\infty}E\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{\sum\limits_{i=1}^n X_i^2}$

$\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}=\overline{X}\xrightarrow{p}\mu$， $\sum\limits_{i=1}^n X_i^2=(n-1)S^2+n\overline{X}\xrightarrow{p}(n-1)\sigma^2+n\mu^2$，故

$$\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{\sum\limits_{i=1}^n X_i^2}\xrightarrow{p}\lim_{n\to\infty}\frac{n\mu}{(n-1)\sigma^2+n\mu^2}=\frac{\mu}{\sigma^2+\mu^2}$$

(4)原式依概率收敛，即

$$\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{\sqrt{n\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2\right)}}\xrightarrow{p}\lim_{n\to\infty}E\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{\sqrt{n\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2\right)}}$$

$$\lim_{n\to\infty}E\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{\sqrt{n\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2\right)}}=\lim_{n\to\infty}E\frac{n\overline{X}}{\sqrt{n\left(n-1\right)S^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n-1}}E\frac{\overline{X}}{S}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n-1}}E\left(\frac{\left(\overline{X}-\mu\right)\Big/\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{S}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}+\frac{\mu}{S}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n-1}}E\frac{\mu}{S}$$

$$=E\frac{\mu}{S}$$

$$=\frac{\mu}{\sigma}$$

7　解 （1）由题意得：$P\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-a\right|\geq\varepsilon\}=1-P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-a\right|<\varepsilon\right\}=1-1=0$

根据推论 5.1.4，可求得

$$a=E(X_1^2)=\int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{2}{\lambda^2}$$

（2）由题意得：$E(X_i)=\frac{1}{\lambda},D(X_i)=\frac{1}{\lambda^2}$，

$$E(\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{100}X_i)=\frac{2}{\lambda},D(\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{100}X_i)=\frac{1}{2500}\sum_{i=1}^{100}D(X_i)=\frac{1}{25\lambda^2}$$

根据中心极限定理，可知 $\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{100}X_i\sim N(\frac{2}{\lambda},\frac{1}{25\lambda^2})$

（3）　$E(X_i^2)=a=\frac{2}{\lambda^2},D(X_i^2)=\frac{24}{\lambda^4}$，利用中心极限定理，可知

$$\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}X_i^2\sim N(\frac{2}{\lambda^2},\frac{24}{100\lambda^4})$$

从而 $P\{\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}X_i^2 \le \frac{2}{\lambda^2}\} = 0.5$

8、解：$\frac{X-50}{50} \overset{近似地}{\sim} N(0,1)$，

$$P = P(X>60) = 1-P(X\le 60) = 1-P\left(\frac{X-50}{50}\le 0.2\right) = 1-\Phi(0.2) = 7.9\%$$

9、解 （1）由题意得：记 $p = P\{0.95 < X < 1.05\} = 1.1 - \frac{0.95^2}{2} - \frac{1.05}{2}$，引入随机变量

$Y_i = \begin{cases} 1，第i次试验中该事件发生 \\ 0,第i次试验中该事件不发生 \end{cases}$， i=1, 2, 3L ，且 $P(Y_i = 1) = p$

于是 $Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ 服从二项分布：$P(Y=k) = P(\sum_{i=1}^{100} Y_i = k) = C_{100}^{n} p^k (1-p)^{100-k}$

方法一：（Y 的精确分布）

$$P(Y>2) = 1-P(Y=0)-P(Y=1) = 1-(1-p)^{100} - 100p(1-p)^{99} = 99.756\%$$

方法二（泊松分布）

Y 近似服从参数为 $100p$ 的泊松分布

$$P(Y>2) = 1-P(Y=0)-P(Y=1) = 1-e^{-100p} - 100pe^{-100p} = 99.66\%$$

方法三：（中心极限定理）

Y 近似服从 $N(100p, 100p(1-p))$

于是： $P(Y>2) = 1-P(Y\le 2) = 1-\Phi(\frac{2-100p}{\sqrt{100p(1-p)}}) = 99.55\%$

（2）设至少需要 n 次观察

记 $q = P\left\{\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right\} = \frac{3}{4}$，这时 $P(Y_i = 1) = q$

于是 $Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ 近似服从 $N(nq, nq(1-q))$

$$95\% \le P(Y \ge 80) = P(\frac{Y-nq}{\sqrt{nq(1-q)}} \ge \frac{80-nq}{\sqrt{nq(1-q)}}) = 1-\Phi(\frac{80-nq}{\sqrt{nq(1-q)}})$$

经查表有 $\frac{80-nq}{\sqrt{nq(1-q)}}\approx 1.65$，从而求得 n=117

10、解：$X=\begin{cases}1, & 0.3,\\ 2, & 0.5,\\ 3, & 0.2.\end{cases}$

$EX=1\times 0.3+2\times 0.5+0\times 0.2=1.3$，

$DX=0.3^2\times 0.3+0.7^2\times 0.5+1.3^2\times 0.2=0.61$，

$$\frac{\frac{1}{800}\sum_{i=1}^{800}X_i-1.3}{\sqrt{\frac{0.61}{800}}}\overset{\text{近似地}}{:}N(0,1),$$

则 $P\left(\sum_{i=1}^{800}X_i>1000\right)=P\left(\frac{\frac{1}{800}\sum_{i=1}^{800}X_i-1.3}{\sqrt{\frac{0.61}{800}}}>\frac{\frac{1000}{800}-1.3}{\sqrt{\frac{0.61}{800}}}\right)$

$$=\Phi(1.81)=96.48\%$$

11 、解 （1）由题意得，引入随机变量

$X_i=\begin{cases}1，第i名选手得0分\\ 0,第i名选手不得0分\end{cases}$， i=1, 2, 3L ,100，且 $P(X_i=1)=0.3$

所求的概率为：

$$P\left(\sum_{i=1}^{100}X_i\le 35\right)=P(\frac{\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}X_i-0.3}{\sqrt{0.3*0.7/100}}\le\frac{0.35-0.3}{\sqrt{0.3*0.7/100}})=\Phi(\frac{0.35-0.3}{\sqrt{0.3*0.7/100}})=86.21\%$$

（2）用 X_i 表示第 i 名选手的得分，则

$P(X_i=0)=0.2, P(X_i=1)=0.2*0.8=0.16$
$P(X_i=2)=0.2*0.8^2=0.128, P(X_i=4)=0.8^3=0.512$

并且 $E(X_i)=2.464, D(X_i)=2.793$

同时 $\frac{\sum_{i=1}^{100}X_i-2.464*100}{\sqrt{100*2.793}}\sim N(0,1)$，

于是所求的概率为：

$$P(\sum_{i=1}^{100} X_i \geq 220) = 1 - \Phi(\frac{220 - 2.464*100}{\sqrt{100*2.793}}) = \Phi(1.58) = 94.3\%$$

第六章　　统计量与抽样分布

注意：　这是第一稿（存在一些错误）

1、解：易知的 $\overline{X}$ 期望为 μ，方差为 $\frac{\sigma^2}{n}$，则 $\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \overset{\text{近似地}}{\sim} N\left(0,1\right)$，

所以，$P\left(\left|\overline{X}-\mu\right| < 0.1\sigma\right) = P\left(\frac{\left|\overline{X}-\mu\right|}{\frac{\sigma}{\sqrt{285}}} < \frac{0.1\sigma}{\frac{\sigma}{\sqrt{285}}}\right) \approx \Phi\left(0.1\sqrt{285}\right) = 0.909$。

2、解　（1）由题意得：

$$E(\overline{X}^2) = D(\overline{X}) + E(\overline{X})^2 = D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) + E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = \frac{1}{n}\sigma^2 + \mu^2$$

$$E(X_1 \cdot \overline{X}) = E(X_1 \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left(X_i X_1\right) = \frac{1}{n}\sigma^2 + \mu^2$$

（2）$X_1 - \overline{X}$ 服从正态分布，其中：

$E(X_1 - \overline{X}) = 0$，$D(X_1 - \overline{X}) = (\frac{n-1}{n})^2 D(X_1) + \frac{n-1}{n^2} D(X_2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$

从而　$X_1 - \overline{X} \sim N(0, \frac{n-1}{n}\sigma^2)$

由于 $\frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$，$i = 1, 2, \cdots n$，且相互独立，因此：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(X_i - \mu\right)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2\left(n\right)$$

由于$\dfrac{\left(\overline{X}-\mu\right)}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，所以$\dfrac{n\left(\overline{X}-\mu\right)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2\left(1\right)$

由于$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2\left(n-1\right)$，所以

$$\frac{n\left(\overline{X}-\mu\right)^2}{\sigma^2}/\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2(n-1)}=\frac{n\left(\overline{X}-\mu\right)^2}{S^2}\sim F\left(1,n-1\right)$$

（3）由于$\sum\limits_{i=1}^{n/2}\dfrac{\left(X_i-\mu\right)^2}{\sigma^2}\sim\chi(n/2)$，以及$\sum\limits_{i=1+n/2}^{n}\dfrac{\left(X_i-\mu\right)^2}{\sigma^2}\sim\chi(n/2)$，因此有：

$$\sum_{i=1}^{n/2}\frac{\left(X_i-\mu\right)^2}{\sigma^2}/\sum_{i=1+n/2}^{n}\frac{\left(X_i-\mu\right)^2}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n/2}\left(X_i-\mu\right)^2/\sum_{i=1+n/2}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2\sim F(\frac{n}{2},\frac{n}{2})$$

3、解：（1）$\left(n+1\right)\overline{X_{n+1}}=\sum\limits_{i=1}^{n+1}X_i=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i+X_{n+1}=n\overline{X_n}+X_{n+1}$

故$\overline{X_{n+1}}=\dfrac{n}{n+1}\overline{X_n}+\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$

（2）$nS_{n+1}^2-\left(n-1\right)S_n^2-\left(X_{n+1}-\overline{X_{n+1}}\right)^2=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X_{n+1}}\right)^2-\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X_n}\right)^2$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(X_i-\overline{X_{n+1}}\right)^2-\left(X_i-\overline{X_n}\right)^2\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(2X_i-\overline{X_n}-\overline{X_{n+1}}\right)\left(\overline{X_n}-\overline{X_{n+1}}\right)$$

$$=n\left(\overline{X_n}-\overline{X_{n+1}}\right)^2$$

$$=n\left\{\frac{1}{n}\left[\left(n+1\right)\overline{X_{n+1}}-X_{n+1}\right]-\overline{X_{n+1}}\right\}^2$$

$$=\frac{1}{n}\left(\overline{X_{n+1}}-X_{n+1}\right)^2$$

$$=\frac{1}{n}\left(X_{n+1}-\overline{X_{n+1}}\right)^2$$

4、解 用$\overline{X}$表示a的估计值，则$\dfrac{\left(\overline{X}-a\right)}{2.5/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$。由题意得：

$$95\%\le P(\left|\overline{X}-a\right|\le 0.5)=2P(\overline{X}-a\le 0.5)-1=2\Phi(\frac{0.5}{2.5}\sqrt{n})-1$$

经查表有：$n=97$

5、解：（1）$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2 \xrightarrow{p} \lim_{n\to\infty} E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2\right)$，

因$\frac{X_i}{\sigma}$: $N(0,1)$，故$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2$: $\chi^2(n)$，

所以$\lim_{n\to\infty} E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2\right)=\frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2\right)=\frac{1}{n}\cdot n=1$。

（2）因$E\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2\right)=n$，$D\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2\right)=2n$，

故$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2-n}{\sqrt{2n}} \overset{\text{近似地}}{:} N(0,1)$，

由分布函数的的右连续性知，$\lim_{n\to\infty} F_n(x)=\Phi(x)$，即$\lim_{n\to\infty} F_n(1)=\Phi(1)$。

（3）$E\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2-\overline{X}\right)=E\left((n-1)S^2\right)=(n-1)\sigma^2$

$$D\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2-\overline{X}\right)=D\left((n-1)S^2\right)+D\overline{X}$$

$$=\sigma^4 D\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)+\frac{\sigma^2}{n}$$

因$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$: $\chi^2(n-1)$，故$D\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)=2(n-1)$

故$D\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2-\overline{X}\right)=2(n-1)\sigma^4+\frac{\sigma^2}{n}$

6、解 （1）由题意得：$\sum_{i=1}^{10}\frac{\left(X_i-\mu\right)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(10)$，于是：

$$P(0.26\sigma^2\le\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}\left(X_i-\mu\right)^2\le 2.3\sigma^2)=P(2.6\le\sum_{i=1}^{10}\frac{\left(X_i-\mu\right)^2}{\sigma^2}\le 23)=0.9786$$

（2）由于$\frac{(10-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，即$\sum_{i=1}^{10}\frac{\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(9)$，于是

$$P(0.26\sigma^2 \le \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}\left(X_i-\overline{X}\right)^2 \le 2.3\sigma^2) = P(2.6 \le \sum_{i=1}^{10}\frac{\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{\sigma^2} \le 23) = 0.9719$$

7、解：$Y_1 = X_1 + X_2 \sim N\left(0,8\right)$，

$Y_2 = X_3 + X_4 + X_5 \sim N\left(0,12\right)$，

$Y_3 = X_6 + X_7 + X_8 + X_9 \sim N\left(0,16\right)$，

显然Y_1，Y_2和Y_3相互独立。

则$\frac{Y_1}{2\sqrt{2}} \sim N\left(0,1\right)$，$\frac{Y_2}{2\sqrt{3}} \sim N\left(0,1\right)$，$\frac{Y_3}{4} \sim N\left(0,1\right)$，

取$a=\frac{1}{8}$，$b=\frac{1}{12}$，$c=\frac{1}{16}$，则$Y \sim \chi^2\left(3\right)$

8、 解 由题意得：$\sum_{i=1}^{9}\frac{X_i}{3} \sim N(0,1)$，以及$\sum_{i=1}^{9}Y_i^2 \sim \chi^2\left(9\right)$，从而有

$\sum_{i=1}^{9}\frac{X_i}{3}/\sqrt{\sum_{i=1}^{9}Y_i^2/9} \sim t(9)$，即$\sum_{i=1}^{9}X_i/\sqrt{\sum_{i=1}^{9}Y_i^2} \sim t(9)$

9、解：（1）Y_1和Y_2相互独立，

$X_1 - Y_1 = \frac{X_1 - X_3}{2}$，$X_3 - Y_1 = \frac{X_3 - X_1}{2}$，

$X_2 - Y_2 = \frac{X_2 - X_4}{2}$，$X_4 - Y_2 = \frac{X_4 - X_2}{2}$，

$X_1 - X_3 \sim N\left(0,2\sigma^2\right)$，

$X_2 - X_4 \sim N\left(0,2\sigma^2\right)$，

$$Z = \frac{\left(X_1 - X_3\right)^2}{\left(X_2 - X_4\right)^2} = \frac{\left(\left(X_1 - X_3\right)/\sqrt{2}\sigma\right)^2}{\left(\left(X_2 - X_4\right)/\sqrt{2}\sigma\right)^2} \sim F\left(1,1\right),$$

（2）$Z = \frac{X_1^2 + X_3^2}{X_2^2 + X_4^2} = \frac{X_1^2/\sigma^2 + X_3^2/\sigma^2}{X_2^2/\sigma^2 + X_4^2/\sigma^2}$

因$\frac{X_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2\left(1\right)$，$i=1,2,3,4$，则

$$Z=\frac{X_1^{\ 2}+X_3^{\ 2}}{X_2^{\ 2}+X_4^{\ 2}}=\frac{X_1^{\ 2}/\sigma^2+X_3^{\ 2}/\sigma^2}{X_2^{\ 2}/\sigma^2+X_4^{\ 2}/\sigma^2}=\frac{\left(X_1^{\ 2}/\sigma^2+X_3^{\ 2}/\sigma^2\right)/2}{\left(X_2^{\ 2}/\sigma^2+X_4^{\ 2}/\sigma^2\right)/2}\sim F(2,2)$$

10、解 （1）由题意得：$E(X)=0$，$D(X)=2$，从而

$E(\overline{X})=0$，$D(\overline{X})=\frac{2}{100}=\frac{1}{50}$

（2）由题意可计算：

$$E(S^2)=E\left(\frac{1}{99}\sum_{i=1}^{100}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\right)=\frac{1}{99}\sum_{i=1}^{100}E(X_i^2-2\overline{X}X_i+\overline{X}^2)=\frac{1}{99}\sum_{i=1}^{100}(2-\frac{2*2}{100}+\frac{2}{100})=2$$

（3）$\overline{X}$近似服从正态分布$\overline{X}\sim N(0,\frac{1}{50})$，于是

$$P(\left|\overline{X}\right|>0.04)=P(P(\frac{\left|\overline{X}\right|}{\sqrt{1/50}}>\frac{0.04}{\sqrt{1/50}})\approx 2-2\Phi(\frac{0.04}{\sqrt{1/50}})=0.7794$$

11、解：$X_{n+1}\sim N(0,1)$，$\overline{X}\sim N\left(0,\frac{1}{n}\right)$，

$\frac{X_{n+1}-\overline{X}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\sim N(0,1)$，$(n-1)S^2\sim\chi^2(n-1)$，

$$Y=\frac{X_{n+1}-\overline{X}}{S}\sqrt{\frac{n}{n+1}}=\frac{\frac{X_{n+1}-\overline{X}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}}{\sqrt{(n-1)S^2/(n-1)}}\sim t(n-1)$$

12、 解 （1）$\chi^2_{0.05}(5)=11.070$，$\chi^2_{0.06}(5)=10.596$，$\chi^2_{0.95}(5)=1.145$，$\chi^2_{0.94}(5)=1.250$

（2）$t_{0.05}(8)=2.306$，$t_{0.06}(8)=2.189$，$t_{0.95}(8)=0.065$，$t_{0.94}(8)=0.078$，

（3）$F_{0.05}(3,5)=5.409$，$F_{0.05}(5,3)=9.013$，$F_{0.04}(3,5)=6.098$，$F_{0.04}(5,3)=10.617$

13、解：$X_{(1)}$和$nX_{(1)}$是统计量，

$F_{X_{(1)}}(x)=P\left(X_{(1)}\le x\right)=1-P\left(X_{(1)}\ge x\right)=1-\left(1-F(x)\right)^n=1-e^{-n\lambda x}$，

则$X_{(1)}\sim E(n\lambda)$，

$F_{nX_{(1)}}(x)=P\left(nX_{(1)}\le x\right)=1-P\left(X_{(1)}\ge\frac{x}{n}\right)=1-\left(1-F\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n=1-e^{-\frac{\lambda}{n}x\cdot n}=1-e^{-\lambda x}$，

则$nX_{(1)}\sim E(\lambda)$。

14、解由题意得：$\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(6,6)$，$\frac{S_2^2}{S_1^2}\sim F(6,6)$，于是：

$0.05=P(\max(\frac{S_1^2}{S_2^2},\frac{S_2^2}{S_1^2})>C)=2P(\frac{S_1^2}{S_2^2}>C)$，从而：$C=F_{0.025}(6,6)=5.82$

15、解：$\overline{X}$ 和 S^2 分别是总体 X 的期望 EX 和方差 DX 的无偏估计。又

$$EX=\int_0^\theta x\frac{1}{\theta}dx=\frac{\theta}{2},\quad DX=EX^2-\left(EX\right)^2=\int_0^\theta x^2\frac{1}{\theta}dx-\frac{\theta^2}{4}=\frac{\theta^2}{12},$$

故 $E\overline{X}=\frac{\theta}{2}$，$E\left(S^2\right)=DX=\frac{\theta^2}{12}$，

$$E\left(\overline{X}^2\right)=D\overline{X}+(E\overline{X})^2=D\left(\frac{1}{5}\sum_{i=1}^5 X_i\right)+(E\overline{X})^2=\frac{1}{25}\sum_{i=1}^5 DX_i+\frac{\theta^2}{4}=\frac{4\theta^2}{15}。$$

16、解（1）由于 $\frac{X_i-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$，$i=1,2,\text{L}\ n$，且相互独立，以及 $\frac{5S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2\left(5\right)$，因此：

$$\sum_{i=1}^6\frac{\left(X_i-\mu\right)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(6),\quad \sum_{i=1}^6\frac{\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(5)$$

（2）由于 $\frac{\left(\overline{X}-\mu\right)}{\sigma/\sqrt{6}}\sim N(0,1)$，所以 $\frac{6\left(\overline{X}-\mu\right)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2\left(1\right)$

同时 $\frac{6\left(\overline{X}-\mu\right)^2}{S_1^2}=\frac{6\left(\overline{X}-\mu\right)^2}{\sigma^2}/\frac{S_1^2}{\sigma^2}\sim F\left(1,5\right)$

（3）由题意得：

$$0=E(a(\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sigma}))=\frac{a}{\sigma}(E(\overline{X})-E(\overline{Y}))=0$$

$$1=D\left(a(\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sigma})\right)=\left(\frac{a}{\sigma}\right)^2(D(\overline{X})+D(\overline{Y}))=\frac{1}{4}a^2$$

从而求得：$a=2$

（4）由（3）知：$2(\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sigma})\sim N(0,1)$，

又 $\frac{5S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(5)$ 和 $\frac{11S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(11)$，于是 $\frac{5S_1^2+11S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(11)$，从而

$$2(\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sigma})/\sqrt{\frac{5S_1^2+11S_2^2}{\sigma^2}/16} \sim t(16)$$

化简后求得：$b=8$

17、解：$\sum_{i=1}^{8} X_i$：$\chi^2(8n)$，$\sum_{i=9}^{16} X_i$：$\chi^2(8n)$，且$\sum_{i=1}^{8} X_i$和$\sum_{i=9}^{16} X_i$相互独立。

则$\dfrac{\sum_{i=1}^{8} X_i \Big/ 8n}{\sum_{i=9}^{16} X_i \Big/ 8n}$：$F(8n,8n)$，

则$P\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{8} X_i}{\sum_{i=9}^{16} X_i} \le 1\right) = P\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{8} X_i \Big/ 8n}{\sum_{i=9}^{16} X_i \Big/ 8n} \le 1\right) = F_{(8n,8n)}(1) = 0.5$，

又$\dfrac{\sum_{i=1}^{8} X_i}{\sum_{i=9}^{16} X_i}$为连续分布，故$P\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{8} X_i}{\sum_{i=9}^{16} X_i} = 1\right) = 0$。

第七章 参数估计

注意： 这是第一稿（存在一些错误）

1、解 由$\mu_1 = E(X) = \int_0^{\theta} xf(x,\theta)d\theta = \dfrac{2}{\theta}$， $\nu_1 = D(X) = \dfrac{3\theta^2}{10} - \dfrac{\theta^2}{4} = \dfrac{\theta^2}{20}$，可得$\theta$的矩估计量为$\hat{\theta} = 2\overline{X}$，这时$E(\hat{\theta}) = 2E(\overline{X}) = \theta$， $D(\hat{\theta}) = D(2\overline{X}) = 4\cdot\dfrac{\theta^2}{20n} = \dfrac{\theta^2}{5n}$。

3、解 由$\mu_1 = E(X) = 2\theta(1-\theta) + 2(1-\theta)^2 = 2(1-\theta)$，得$\theta$的矩估计量为：

$\hat{\theta} = 1 - \dfrac{\overline{X}}{2} = 1 - \dfrac{2}{6} = \dfrac{2}{3}$。

建立关于θ的似然函数：$L(\theta) = (\theta^2)^3(2\theta(1-\theta))^2(1-\theta)^2 = 4\theta^8(1-\theta)^4$

令$\dfrac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta}=\dfrac{\partial(8\ln\theta+4\ln(1-\theta))}{\partial\theta}=\dfrac{8}{\theta}-\dfrac{4}{1-\theta}=0$，得到$\theta$的极大似然估计值：$\hat{\theta}=\dfrac{2}{3}$

4、解：矩估计：

$\mu_1=0\cdot\theta+1\cdot\lambda+2\cdot(1-\theta-\lambda)=2-2\theta-\lambda$，

$\nu_2=(2-2\theta-\lambda)^2\theta+(2\theta+\lambda-1)^2\lambda+(2\theta+\lambda)^2(1-\theta-\lambda)$,

$A_1=1$,

$B_2=\dfrac{3}{4}$,

故$\begin{cases} 2-2\hat{\theta}-\hat{\lambda}=1, \\ (2-2\hat{\theta}-\hat{\lambda})^2\hat{\theta}+(2\hat{\theta}+\hat{\lambda}-1)^2\hat{\lambda}+(2\hat{\theta}+\hat{\lambda})^2(1-\hat{\theta}-\hat{\lambda})=\dfrac{3}{4}. \end{cases}$

解得$\begin{cases} \hat{\lambda}=\dfrac{1}{4}, \\ \hat{\theta}=\dfrac{3}{8}. \end{cases}$为所求矩估计。

极大似然估计：

$L(\theta,\lambda)=P\{X_1=X_4=X_5=0,X_2=X_6=X_8=2,X_3=X_7=1\}=\theta^3\lambda^2(1-\theta-\lambda)^3$，

$l(\theta,\lambda)=\ln L(\theta,\lambda)=3\ln\theta+2\ln\lambda+3\ln(1-\theta-\lambda)$，

$\begin{cases} \dfrac{\partial l(\theta,\lambda)}{\partial\theta}=\dfrac{3}{\theta}-\dfrac{3}{1-\theta-\lambda}=0, \\ \dfrac{\partial l(\theta,\lambda)}{\partial\lambda}=\dfrac{2}{\lambda}-\dfrac{3}{1-\theta-\lambda}=0. \end{cases}$解得$\begin{cases} \hat{\theta}=\dfrac{3}{8}, \\ \hat{\lambda}=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$即为所求。

5、解 由$E(X)=p^2+3p(1-p)+3(1-p)^2=p^2-3p+3$，所以得到$p$的矩估计量为

$\hat{p}=\dfrac{3-\sqrt{9-4(3-\bar{X})}}{2}=\dfrac{3-\sqrt{4\bar{X}-3}}{2}$

建立关于p的似然函数：　$L(p)=(\dfrac{p(1-p)}{2})^{n_0}(p^2)^{n_1}(\dfrac{3p(1-p)}{2})^{n_2}(1-p^2)^{n_3}$

令$\dfrac{\partial \ln L(p)}{\partial p}=0$，求得到$\theta$的极大似然估计值：$\hat{p}=\dfrac{n_0+2n_1+n_2}{2n}$

6、解：(1) $EX=\int_0^1 x(\theta+1)x^\theta dx=\dfrac{\theta+1}{\theta+2}$，

由 $\frac{\hat{\theta}+1}{\hat{\theta}+2}=\overline{X}$ 得 $\hat{\theta}=\frac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$ 为 θ 的矩估计量。

$$L(\theta,\lambda)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\begin{cases}(\theta+1)^n\prod_{i=1}^{n}x_i^{\theta}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

$$l(\theta,\lambda)=\ln L(\theta,\lambda)=\begin{cases}n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

令 $\frac{\partial l(\theta)}{\partial\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$ 得 $\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}-1$ ，

所以 θ 的极大似然估计为 $-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}-1$ 。

(2) $EX=\int_0^1 xf(x,\theta)\,dx=e^{\frac{\theta}{2}}$ ，令 $e^{\frac{\hat{\theta}}{2}}=\overline{X}$ 得 $\hat{\theta}=2\ln\overline{X}$ 为 θ 的矩估计量。

$$L(\theta,\lambda)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\frac{1}{(2\pi\theta)^{\frac{n}{2}}\prod_{i=1}^{n}x_i}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i)^2}{2\theta}},$$

$$l(\theta,\lambda)=\ln L(\theta,\lambda)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi\theta)-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\frac{\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i)^2}{2\theta}$$

令 $\frac{\partial l(\theta)}{\partial\theta}=-\frac{n}{2\theta}+\frac{\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i)^2}{2\theta^2}=0$ 得 $\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i)^2$ 为 θ 的极大似然估计。

(3) $EX=\int_0^2 xf(x,\theta)\,dx=\frac{2\theta}{\theta+1}$,

令 $\frac{2\hat{\theta}}{\hat{\theta}+1}=\overline{X}$ 得 $\hat{\theta}=\frac{\overline{X}}{2-\overline{X}}$ 为 θ 的矩估计量。

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\begin{cases}\theta^n 2^{-n\theta}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\theta-1}, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

$$l(\theta)=\ln L(\theta)=\begin{cases} n\ln\theta-n\theta\ln 2+(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

令 $\dfrac{\partial l(\theta)}{\partial\theta}=\dfrac{n}{\theta}-n\ln 2+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$ 得，$\hat{\theta}=\dfrac{n}{n\ln 2-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$ 为 θ 的极大似然估计。

(4) $EX=\int_{\theta}^{100}xf(x,\theta)\,dx=\dfrac{100+\theta}{2}$，令 $\dfrac{100+\hat{\theta}}{2}=\overline{X}$ 得 $\hat{\theta}=2\overline{X}-100$ 为 θ 的矩估计量。

$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\dfrac{1}{(100-\theta)^n}$，因 $0<\theta<100$，要使 $L(\theta)$ 最大，则 θ 应取最大。

又 θ 不能大于 $\min\{x_1,\cdots,x_n\}$，故 θ 的极大似然估计为 $\hat{\theta}=\min\{X_1,\cdots,X_n\}$

(5) $EX=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,\theta)\,dx=0$，故 $\overline{X}=0$。

$\operatorname{var}X=EX^2=2\theta^2$，

由 $2\hat{\theta}^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 和 $\theta>0$ 得

$\hat{\theta}=\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{2n}}$ 为 θ 的矩估计量。

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n 2^n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\theta}}, & -\infty<x<\infty,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

则

$$l(\theta)=\ln L(\theta)=\begin{cases}-n\ln 2-n\ln\theta-\dfrac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}|x_i|, & -\infty<x<\infty,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

令 $\dfrac{\partial l(\theta)}{\partial\theta}=-\dfrac{n}{\theta}+\dfrac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\theta^2}=0$ 得 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$ 为 θ 的极大似然估计。

7、解 （1）记 $p=P\{|X|<4\}$，由题意有 $p=P\{|X|<4\}=P\{X<4\}-P\{X\le -4\}$

根据极大似然估计的不变性可得概率 $p=P\{|X|<4\}$ 的极大似然估计为：

$$\hat{p}=\Phi(\frac{4-4}{\sqrt{24s^2/25}})-\Phi(\frac{-4-4}{\sqrt{24s^2/25}})=0.5-\Phi(\frac{-4}{\sqrt{6}})=\Phi(\frac{4}{\sqrt{6}})-0.5=0.4484$$

（2）由题意得：$1-0.05=1-P\{X>A\}=P\{X\le A\}=\Phi(\frac{A-4}{\sqrt{24s^2/25}})=\Phi(\frac{A-4}{2\sqrt{6}})$，

于是经查表可求得 A 的极大似然估计为 $\hat{A}=12.0588$

8、(1) $\mu=\bar{X}$，$E\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left(X_i-\mu\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(EX_i^2-2\mu EX_i+\mu^2\right)=\sigma^2$

(2) $E\left[k\sum_{i=1}^{n-1}\left(X_{i+1}-X_i\right)^2\right]=k\sum_{i=1}^{n}E\left(X_{i+1}-X_i\right)^2=k\sum_{i=1}^{n}\left(EX_{i+1}{}^2-2EX_{i+1}EX_i+EX_i^2\right)=2\left(n-1\right)k\sigma^2$

则 $k=\frac{1}{2\left(n-1\right)}$ 即为所求。

9、解 由题意得 $E(\hat{\mu}_1)=E(\sum_{i=1}^{8}X_i-\sum_{i=9}^{15}X_i)=8\mu-7\mu=\mu$

及 $E(\hat{\mu}_2)=E(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{8}X_i-\frac{1}{7}\sum_{i=9}^{15}X_i)=2\mu-\mu=\mu$

所以 $\hat{\mu}_1$ 和 $\hat{\mu}_2$ 都是 μ 的无偏估计量

又：$D(\hat{\mu}_1)=D(\sum_{i=1}^{8}X_i-\sum_{i=9}^{15}X_i)=8\sigma^2-7\sigma^2=\sigma^2$

以及 $D(\hat{\mu}_2)=D(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{8}X_i-\frac{1}{7}\sum_{i=9}^{15}X_i)=\frac{8}{16}\sigma^2-\frac{7}{49}\sigma^2=\frac{5}{14}\sigma^2$

有 $D(\hat{\mu}_1)>D(\hat{\mu}_2)$，说明 $\hat{\mu}_2$ 更有效。

10、(1)依题，X_i，Y_j 与 Z_l 相互独立，$ET=aES_1^2+bES_2^2+cES_3^2=\left(a+b+c\right)\sigma^2$

故 T 是 σ^2 的无偏估计的充要条件为 $a+b+c=1$

(2)记 n 个样本的方差为 S^2，则 $\frac{\left(n-1\right)S^2}{\sigma^2}$: $\chi^2\left(n-1\right)$，$D\left(S^2\right)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$

故 $D\left(S_1^{\ 2}\right)=2\sigma^4$，$D\left(S_2^{\ 2}\right)=\sigma^4$，$D\left(S_3^{\ 2}\right)=\dfrac{2}{3}\sigma^4$

故 $DT=a^2DS_1^2+b^2DS_2^2+c^2DS_3^2=\left(a^2+\dfrac{b^2}{2}+\dfrac{c^2}{3}\right)2\sigma^4$

要使T为最有效估计，只须使$a^2+\dfrac{b^2}{2}+\dfrac{c^2}{3}$在$a+b+c=1$的条件下取最小值即可。

令 $L=a^2+\dfrac{b^2}{2}+\dfrac{c^2}{3}-\lambda\left(a+b+c-1\right)$

由$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial a}=2a-\lambda=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial b}=b-\lambda=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial c}=\dfrac{2c}{3}-\lambda=0,\\ a+b+c=1.\end{cases}$ 得$\begin{cases}a=\dfrac{1}{6},\\ b=\dfrac{1}{3},\\ c=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$即为所求。

11、解 由题意可以求出：$E(X^2)=\int_0^\infty x^2f(x,\theta)dx=2\theta$。

建立建立关于θ的似然函数：$L(\theta)=\prod_{i=1}^n(\dfrac{X_i}{\theta}e^{-\frac{X_i^2}{2\theta}})$，于是有：

$$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^n\ln(\frac{X_i}{\theta}e^{-\frac{X_i^2}{2\theta}})=\sum_{i=1}^n\ln(X_i)-n\ln\theta-\sum_{i=1}^n\frac{X_i^2}{2\theta}$$

令$\dfrac{\partial\ln L(\theta)}{\partial\theta}=\dfrac{-n}{\theta}+\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{X_i^2}{2\theta^2}=0$，得到$\theta$的极大似然估计值：$\hat{\theta}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^n X_i^2}{2n}$。

又：$E(\hat{\theta})=E(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^n X_i^2}{2n})=E(\dfrac{X_1^2}{2})=\dfrac{2\theta}{2}=\theta$，无偏的。

12、$f\left(x,\theta\right)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\theta^2}, & 0\le x<\theta,\\ 0, & 其他。\end{cases}$，$\theta>0$，

$EX=\int_{-\infty}^{\infty}xf\left(x,\theta\right)dx=\dfrac{2\theta}{3}$ 故$\hat{\theta}=\dfrac{3}{2}\overline{X}$为$\theta$的矩估计量，且为无偏估计。

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)=\begin{cases}\dfrac{2^n}{\theta^{2n}}\prod_{i=1}^{n} x_i, & 0\le x<\theta,\\ 0, & 其他。\end{cases}$$

显然$L(\theta)$关于θ单调递减。故θ取最小值时$L(\theta)$最大。

又θ不小于$\max\{X_1,\cdots,X_n\}$，故$\hat{\theta}_2=X_{(n)}=\max\{X_1,\cdots,X_n\}$为$\theta$的极大似然估计。

又$f_{X_{(n)}}(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{2n}{\theta^{2n}}x^{2n-1}, & 0\le x<\theta,\\ 0, & 其他。\end{cases}$,

故$EX_{(n)}=\int_0^\theta \dfrac{2n}{\theta^{2n}}x^{2n}dx=\dfrac{2n}{2n+1}\theta$

即$E\hat{\theta}_2=EX_{(n)}=\dfrac{2n}{2n+1}\theta$ 故$\hat{\theta}_2$为θ的有偏估计。

13、解 $E(X)=\int_0^\theta xf(x;\theta)dx=\dfrac{3\theta}{4}$，于是得$\theta$的矩估计量为：$\hat{\theta}=\dfrac{4\overline{X}}{3}$。

建立建立关于θ的似然函数：$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}(\dfrac{3X_i^2}{\theta^3})\ (\theta>X_i)$，若使其似然函数最大，

于是可以求出θ的极大似然估计值：$\hat{\theta}=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$。

(2)由$T_1=\dfrac{2}{3}(X_1+X_2)$，可计算$E(T_1)=\dfrac{2}{3}[E(X_1)+E(X_2)]=\theta$。

设$Z=\max(X_1,X_2)$，那么

$P\{Z<t\}=P(\max(X_1,X_2)<t)=P(X_1<t,X_2<t)=P(X_1<t)P(X_2<t)$，

当$t<0$时，$P\{Z<t\}=P(\max(X_1,X_2)<t)=0$，

于是$E(Z)=\int_0^\infty(1-F_Z(t))dt=\int_0^\infty(1-P(Z<t))dt=\int_0^\theta(1-\left(\dfrac{t^3}{\theta^3}\right)^2)dt=\theta-\dfrac{\theta}{7}=\dfrac{6\theta}{7}$

从而：$E(T_2)=E(\dfrac{7}{6}\max(X_1,X_2))=\dfrac{7}{6}E(\max(X_1,X_2))=\theta$

因此T_1和T_2都是θ的无偏估计量。

又$D(T_1)=D(\dfrac{2}{3}(X_1+X_2))=\dfrac{4}{9}[D(X_1)+D(X_2)]=\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{1}{15}\theta^2=\dfrac{4}{135}\theta^2$

$D(T_2)=D(\dfrac{7}{6}\max(X_1,X_2))=\dfrac{49}{36}D(\max(X_1,X_2))=\dfrac{49}{36}\cdot\dfrac{3}{196}\theta^2=\dfrac{1}{36}\theta^2$

由于$D(T_1)=\frac{4}{135}\theta^2 > D(T_2)=\frac{1}{36}\theta^2$，所以$T_2$比$T_1$更有效。

14、(1) $L(\mu)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\mu)=e^{-\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)}$，

$l(\mu)=\ln L(\mu)=-\sum_{i=1}^{n} X_i + n\mu$，

$l(\mu)$为μ的单调递增函数，故μ取最大值时$l(\mu)$取最大值。

又μ不大于$\min\{X_1,\cdots,X_n\}$，故$\hat{\mu}_1=X_{(1)}=\min\{X_1,\cdots,X_n\}$为$\mu$的极大似然估计。

因$F(x,\mu)=\int_{\mu}^{x} e^{-(t-\mu)}dt=1-e^{-(x-\mu)}$

易知$f_{X_{(1)}}(x_i,\mu)=\begin{cases} ne^{-n(x-\mu)}, & x\ge\mu, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$

所以$E\hat{\mu}_1=EX_{(1)}=\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X_{(1)}}(x_i,\mu)dx=\mu+\frac{1}{n}$，即$\hat{\mu}_1$是$\mu$的有偏估计。

$\hat{\mu}_1^*=\hat{\mu}_1-\frac{1}{n}$是$\mu$的无偏估计。

(2) $EX=\int_{\mu}^{\infty} xe^{-(x-\mu)}dx=\mu+1$，则$\hat{\mu}_2=\overline{X}-1$是$\mu$的矩估计量且为无偏估计。

(3) $D(\hat{\mu}_1^*)=D\left(\hat{\mu}_1-\frac{1}{n}\right)=D(\hat{\mu}_1)=EX_{(1)}^2-(EX_{(1)})^2=\frac{1}{n^2}$

$D(\hat{\mu}_2)=D(\overline{X}-1)=D(\overline{X})=\frac{1}{n}>D(\hat{\mu}_1^*)$，故$\hat{\mu}_1^*$比$\hat{\mu}_2$更有效。

(4)由切比雪夫不等式知，$\forall\varepsilon>0$，$P\{|\hat{\mu}_1^*-\mu|<\varepsilon\}\ge 1-\frac{D(\hat{\mu}_1^*)}{\varepsilon^2}=1-\frac{1}{n^2\varepsilon^2}\to 1$

$P\{|\hat{\mu}_2-\mu|<\varepsilon\}\ge 1-\frac{D(\hat{\mu}_2)}{\varepsilon^2}=1-\frac{1}{n\varepsilon^2}\to 1$

故$\hat{\mu}_1^*$与$\hat{\mu}_2$为μ的相合估计。

15、解 由于$E(X)=\int_0^{\infty} xf(x;\lambda)dx=\lambda$，可求出$\lambda$的矩估计量为：$\hat{\lambda}=\overline{X}$

又根据λ的似然函数：$L(\lambda)=\Pi_{i=1}^{n} f(X_i;\lambda)=\lambda^{-n}e^{-\sum_{i=1}^{n}X_i/\lambda}$，

令$\frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial\lambda}=\frac{-n}{\lambda}+\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{\lambda^2}=0$，得到$\lambda$的极大似然估计量：$\hat{\lambda}=\overline{X}$

因此$\overline{X}$既是λ的矩估计量，也是极大似然估计量。

（2） $E(c\cdot\sum_{i=1}^{n}X_i)=cn\lambda$，以及$D(c\cdot\sum_{i=1}^{n}X_i)=c^2n\lambda^2$。用$c\cdot\sum_{i=1}^{n}X_i$作为$\lambda$的估计量，其均方误差为：

$$Mse(c\sum_{i=1}^{n}X_i)=E[(c\sum_{i=1}^{n}X_i-\lambda)^2]=E[c^2n^2\left(\overline{X}\right)^2-2cn\overline{X}\lambda+\lambda^2]=\lambda^2\left(c^2n(1+n)-2cn+1\right)$$

于是，取$c=\dfrac{1}{n+1}$时，在均方误差准则下，$c\cdot\sum_{i=1}^{n}X_i$比$\overline{X}$更有效。

16、(1) $EX=\int_0^\theta x\dfrac{2x}{\theta^2}dx=\dfrac{2\theta}{3}$，故$\hat{\theta}_1=\dfrac{3}{2}\overline{X}$为$\theta$的矩估计量，且为无偏估计。

$$DX=EX^2-\left(EX\right)^2=\int_0^\theta x^2\frac{2x}{\theta^2}dx-\left(\frac{2\theta}{3}\right)^2=\frac{\theta^2}{18}$$

$$D\hat{\theta}_1=\frac{9}{4}D\overline{X}=\frac{9}{4n}DX=\frac{\theta^2}{8n}$$

故$P\left\{\left|\hat{\theta}_1-\mu\right|<\varepsilon\right\}\geq 1-\dfrac{D\left(\hat{\theta}_1\right)}{\varepsilon^2}=1-\dfrac{\theta^2}{8n}\to 1$，故$\hat{\theta}_1$为$\theta$的相合估计。

(2) $L\left(\theta\right)=\prod_{i=1}^{n}f\left(x_i,\theta\right)=\dfrac{2^n}{\theta^{2n}}\prod_{i=1}^{n}x_i$

易知$L\left(\theta\right)$为θ的单调递减函数，故θ取最小值时，$L\left(\theta\right)$取最大值。

又θ不小于$\max\left\{X_1,\cdots,X_n\right\}$，故$\hat{\theta}_2=X_{(n)}=\max\left\{X_1,\cdots,X_n\right\}$为$\theta$的极大似然估计。

$$f_{X_{(n)}}\left(x,\theta\right)=\begin{cases}\dfrac{2n}{\theta^{2n}}x^{2n-1}, & 0\leq x<\theta,\\ 0, & 其他。\end{cases}$$

故$E\hat{\theta}_2=EX_{(n)}=\dfrac{2n}{2n+1}\theta$，故$\hat{\theta}_2$为$\theta$的有偏估计。

$$D\hat{\theta}_2=DX_{(n)}=EX_{(n)}{}^2-\left(EX_{(n)}\right)^2=\frac{n\theta^2}{\left(n+1\right)\left(2n+1\right)^2}$$

所以$P\left\{\left|\hat{\theta}_2-\theta\right|<\varepsilon\right\}\geq 1-\dfrac{D\left(\hat{\theta}_2\right)}{\varepsilon^2}=1-\dfrac{n\theta^2}{\left(n+1\right)\left(2n+1\right)^2\varepsilon^2}\to 1$

故$\hat{\theta}_2$为θ的相合估计。

17、解 （1）只对 X 做一次观察。由题意得：X 的条件联合概率密度函数以及其联合概率密度函数分别为：

$P(X=2\,|\,\theta)=\theta(1-\theta)^2$，$P(X=2,\theta)=\theta(1-\theta)^2$，$0\le\theta\le1$

从而 $P(X=2)=\int_0^1 P(X=2,\theta)d\theta=\int_0^1\theta(1-\theta)^2d\theta=\dfrac{1}{12}$

θ 的条件概率密度函数为 $\pi(\theta\,|\,X=2)=\dfrac{P(X=2,\theta)}{P(X=2)}=12\theta(1-\theta)^2$，

于是 θ 的贝叶斯估计为：$\hat{\theta}_B=\int_0^1\theta\pi(\theta\,|\,X=2)d\theta=\int_0^1 12\theta^2(1-\theta)^2d\theta=\dfrac{2}{5}$

（2）对 X 做三次观察。由题意得：X_1,X_2,X_3 的条件联合概率密度函数以及其联合概率密度函数分别为：

$P(X_1=2,X_2=3,X_3=5\,|\,\theta)=\theta^3(1-\theta)^{10}$，

$P(X_1=2,X_2=3,X_3=5;\theta)=P(X_1=2,X_2=3,X_3=5\,|\,\theta)\pi(\theta)=\theta^3(1-\theta)^{10}$，$0\le\theta\le1$

从而

$P(X_1=2,X_2=3,X_3=5)=\int_0^1P(X_1=2,X_2=3,X_3=5;\theta)d\theta=\int_0^1\theta^3(1-\theta)^{10}d\theta=\dfrac{1}{4004}$

θ 的条件概率密度函数为：

$\pi(\theta\,|\,X_1=2,X_2=3,X_3=5)=\dfrac{P(X_1=2,X_2=3,X_3=5;,\theta)}{P(X_1=2,X_2=3,X_3=5)}=4004\theta^3(1-\theta)^{10}$，

于是 θ 的贝叶斯估计为：

$\hat{\theta}_B=\int_0^1\theta\pi(\theta\,|X_1=2,X_2=3,X_3=5)d\theta=\int_0^1 4004\theta^4(1-\theta)^{10}d\theta=\dfrac{4}{15}$

18、(1)因 $F_{X_{(1)}-\mu}(x)=P\left\{X_{(1)}-\mu<x\right\}=P\left\{X_{(1)}<\mu+x\right\}=1-e^{-nx}$ 与参数 μ 无关，故可取 $X_{(1)}-\mu$ 为关于 μ 的区间估计问题的枢轴量。

(2)设常数 $a<b$，满足 $P\left\{a<X_{(1)}-\mu<b\right\}=1-\alpha$，即 $P\left\{X_{(1)}-b<\mu<X_{(1)}-a\right\}=1-\alpha$

此时，区间的平均长度为 $L=b-a$，易知，取 $a=-\dfrac{1}{n}\ln\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)$，$b=-\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{\alpha}{2}$ 时，区间的长度最短，从而 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$\left(X_{(1)}+\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{\alpha}{2},X_{(1)}+\dfrac{1}{n}\ln\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)\right)$。

19、解 由题意得: $E(X)=\int_0^{\infty} xf(x;\lambda)dx=\frac{1}{\lambda}$，由题意得: $\hat{\lambda}$ 的矩估计量为: $\hat{\lambda}=\frac{1}{\overline{X}}$。

由题意得：$2\lambda\sum_{i=1}^{7} X_i \sim \chi^2(14)$，设存在两个数 a 和 b，使得：

$P(a<2\lambda\sum_{i=1}^{7} X_i<b)=0.8$，即 $P(\frac{a}{14\overline{X}}<\lambda<\frac{b}{14\overline{X}})=0.8$，经查表得到

$a=\chi^2{}_{0.9}(14)=7.7895$，$b=\chi^2_{0.1}(14)=21.0641$，于是 λ 的置信水平为 80%的双侧置信区间为：（$\left(\frac{0.56}{\overline{X}},\frac{1.50}{\overline{X}}\right)$

20、易知 μ 的置信水平为 95%的置信区间为 $\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.025},\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.025}\right)$

将 $z_{0.025}=1.96$，$\sigma=10$，$n=25$，$\overline{X}=140$ 代入得

μ 的置信水平为 95%的置信区间为 $(136.08,143.92)$。

21、解设 $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{10}}\sim t(10-1)$， 由题意得，$\bar{x}=5.68$，$s=0.29$，由给定的置信水平 95%，利用 Excel 得到 $t_{0.025}(9)=2.2622$，所以 μ 的置信水平为 95%的置信区间为：

$(\bar{x}-t_{0.025}(9)\cdot 0.29/\sqrt{10},\bar{x}+t_{0.025}(9)\cdot 0.29/\sqrt{10})=(5.473,5.887)$

22、 σ^2 的置信水平为 99%的置信区间为 $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.005}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.095}(n-1)}\right)$

将 $n=16$，$S=2.2$，$\chi^2_{0.005}(15)$ 及 $\chi^2_{0.095}(15)$ 的值代人得

σ^2 的置信水平为 99%的置信区间为 $(2.213,15.779)$。

23、解 由题意得，$\frac{(12-1)s^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(11)$，于是 σ^2 的置信水平为 90%的置信区间为：

$(\frac{11s^2}{\chi^2{}_{0.05}(11)},\frac{11s^2}{\chi^2{}_{0.95}(11)})=(\frac{11s^2}{19.6751},\frac{11s^2}{4.5748})=(0.022,0.096)$

24 、已知 $n_1=12$，$\overline{X}=13.8$，$S_1=1.2$，$n_2=15$，$\overline{Y}=12.9$，$S_2=1.5$，$\sigma_1^2=\sigma_2^2$

(1) $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 95%的置信区间为$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm t_{0.025}\left(n_1+n_2-1\right)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$

其中 $S_w^2=\frac{\left(n_1-1\right)S_1^2+\left(n_2-1\right)S_2^2}{n_1+n_2-2}$，查 EXCEL 表得 $t_{0.025}\left(26\right)$ 的值，将各值代人得

$\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 95%的置信区间为$\left(-0.198,1.998\right)$

(2)依题 $\bar{X}-\bar{Y}=13.8-12.9=0.9\in\left(-0.198,1.998\right)$，故可认为无显著差异。

25、解 （1）设 μ_1 和 μ_2 分别是第一种和第二种机器的平均分钟，取 $\mu_1-\mu_2$ 的无偏估计为 $\overline{X_1}-\overline{X_2}$，由于两个总体的方差相等，所以有

$$\frac{\overline{X_1}-\overline{X_2}-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$，

根据已知条件知 $n_1=n_2=60$，$s_1=19.4$，$s_2=18.8$，$\overline{x_1}=80.7$，$\overline{x_2}=88.1$，可以求得

$$S_w{}^2=\frac{(n_1-1)s_1{}^2+(n_2-1)s_2{}^2}{n_1+n_2-2}=361.2$$

于是，$\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 95%的置信区间为：

$$\left(\overline{x_1}-\overline{x_2}-t_{0.025}(120-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\overline{x_1}-\overline{x_2}+t_{0.025}(120-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)=(-14.306,-0.494)$$

（2）从第一问的结果可以看出有显著差异。

26、$n_1=16$，$S_1=55.7$，$n_2=20$，$S_2=31.4$，$1-\alpha=0.95$

(1) $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信水平为 95%的置信区间为$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{0.025}\left(15,19\right)},\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{0.975}\left(15,19\right)}\right)$

查 EXCEL 表得 $F_{0.025}\left(15,19\right)$ 和 $F_{0.975}\left(15,19\right)$ 的值，将各值代人得

$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信水平为 95%的置信区间为$\left(0.678,4.919\right)$

(2)这些资料不足于说明 σ_1^2 不同于 σ_2^2。

28 易知 P 置信水平为 $1-\alpha=0.95$ 的置信区间为

$\left(\frac{1}{2a}\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right),\frac{1}{2a}\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\right)$ 由 已 知 资 料 计 算 得

$a=n+z_{0.025}^2=60+1.96^2=63.8416$，

$b=-\left(2n\bar{x}+z_{0.025}^2\right)=-\left(2\times60\times\frac{20}{60}+1.96^2\right)=-43.8416$，

$c=n\bar{x}^2=60\times\left(\frac{20}{60}\right)^2\approx6.67$，故所求的置信区间为$\left(0.227,0.459\right)$。

27、解 （1）设σ_1和σ_2分别是郊区 A 和郊区 B 的居民收入方差，则：

$\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$，

根据已知条件知 $n_1=n_2=52$， $s_1=203.52$， $s_2=358.12$， $\overline{x_1}=5760.35$，

$\overline{x_2}=6570.20$，

于是，σ_1/σ_2的置信水平为 95%的置信区间为：

$\left(\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{F_{0.025}(n_1-1,n_2-1)},\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{F_{1-0.025}(n_1-1,n_2-1)}\right)=(0.185,0.563)$

可见两郊区居民收入的方差有显著差异，郊区 B 居民的贫富差距程度比郊区 A 居民严重。

（2）设μ_1和μ_2分别是郊区 A 和郊区 B 的居民平均收入，取$\mu_1-\mu_2$的无偏估计为$\overline{X_1}-\overline{X_2}$，由于两个总体的方差相等，所以有

$\frac{\overline{X_1}-\overline{X_2}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$，

可以求得$S_w=[\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}]^{0.5}=291.265$

于是，$\mu_1-\mu_2$的置信水平为 95%的置信区间为：

$\left(\overline{x_1}-\overline{x_2}-t_{0.025}(104-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\overline{x_1}-\overline{x_2}+t_{0.025}(104-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)=(-921.809,-697.891)$，

可见，两郊区居民的平均收入方差有显著差异，郊区 A 居民平均收入比郊区 B 居民低。

第八章 假设检验

注意： 这是第一稿（存在一些错误）

1 、解 由题意知：$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

（1）对参数μ提出假设：

$H_0:\mu \le 2.3$， $H_1:\mu > 2.3$

（2）当H_0为真时，检验统计量$\dfrac{\overline{X}-2.3}{0.29/\sqrt{35}} \sim N(0,1)$，又样本实测得$\bar{x}=2.4$，于是

$$P_- = P_{H_0}(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \ge \frac{2.4-2.3}{0.29/\sqrt{35}}) = P_{H_0}(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \ge 2.04) = 1-\Phi(2.04) = 0.0207$$

（3）由（2）知，犯第 I 类错误的概率为 0.0207

（4）如果$\alpha=0.05$时，经查表得$z_\alpha=1.645$，于是

$$W\{\frac{\overline{X}-2.3}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha\} = W\{\frac{\overline{X}-2.3}{0.29/\sqrt{35}} > 1.645\}$$

（5）是。

2、 $\bar{x}=14.55<15$故将希望得到支持的假设“$\mu>15$”作为原假设，即考虑假设问题 H_0：$\mu \ge 15$，H_1：$\mu<15$

因σ^2未知，取检验统计量为$T=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$，由样本资料$n=10$，$\bar{x}=14.55$，$s=\sqrt{1.2445}$和$\mu_0=15$代入得观察值$t_0=-1.2857$，拒绝域为

$$W=\left\{T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \le -t_{0.05}(9)\right\}$$，查分布表得$t_{0.05}(9)=1.8331$，$t_0>-t_{0.05}(9)$

故接受原假设H_0，即认为该广告是真实的。

3、 解（1）由题意得，检验统计量$Z=\dfrac{\overline{X}-1}{\sigma/\sqrt{n}}$，其拒绝域为

$$W=\{Z=\frac{\overline{X}-1}{\sigma/\sqrt{n}}\geq z_{\alpha}\}=W\{\overline{X}\geq 1.66\}$$

当$\mu=2$时，犯第 II 类错误的概率为：

$$\beta=P\{接受H_0\mid H_0是错误的\}=P\{\overline{X}\leq 1.66\mid\mu=2\}=\mathrm{P}\{\frac{\overline{X}-2}{\sigma/\sqrt{n}}\leq\frac{1.66-2}{\sigma/\sqrt{n}}\}=0.198$$

（2）$\dfrac{(\mathrm{n}-1)\mathrm{S}^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(\mathrm{n}-1)$，当$\sigma^2$未知时，检验统计量$24\mathrm{S}^2$，其拒绝域为：

$$\mathrm{W}=\{24\mathrm{S}^2<\chi^2{}_{1-\alpha}(24)\}=\{\mathrm{S}^2<0.577\}$$

当$\sigma^2=1.25$时，检验犯第 I 类错误的概率为：

$$\alpha=P\{拒绝H_0\mid H_0是正确的\}=P\{\mathrm{S}^2<0.577\mid\sigma^2=1.25\}=\mathrm{P}\{\frac{24\mathrm{S}^2}{1.25}<\frac{24\cdot 0.577}{1.25}\}=0.012$$

4、 (1)提出假设H_0：$\mu=3000$，H_1：$\mu\neq 3000$

建立检验统计量$T=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$，其中$\mu_0=3000$

在显著水平$\alpha=0.05$下，检验的拒绝域为$W=\left\{|T|=\left|\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|\geq t_{0.025}(7)=2.3646\right\}$，由样本资料得观察值$|t_0|=\left|\dfrac{2958.75-3000}{\sqrt{1348.4375}/\sqrt{8}}\right|=2.972>t_{0.025}(7)$，故有显著差异。

(2) μ 的 95%的置信区间为$\left(\bar{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\bar{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$，由样本资料得 μ 的 95%的置信区间为$(2925.93,2991.57)$

(3) $P=2P\{t(n-1)\geq|t_0|\}=2P\{t(7)\geq 2.972\}=0.0207$。

5、 解 （1）$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\mathrm{S}/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$。由题意得，样本测得的值为$\bar{x}=167.2$，$s=4.1$，

$n=100$，经查表得 $t_{\alpha/2}(99)=1.984$，于是均值 μ 的 95%的置信区间为：

$(\bar{x}+t_{\alpha/2}(99)\mathrm{s}/\sqrt{n},\bar{x}-t_{\alpha/2}(99)\mathrm{s}/\sqrt{n})=(166.4,168.0)$

（2）全国男子身高的平均值是 169.7，从（1）中的结果中，可以看出该地区男子的身高明显低于全国水平。

6、 假设两组数据均来自正态总体，设 μ_d 表示服用减肥药前后体重均值的差，将减肥药无效即“$\mu_d \le 0$”作为原假设，即考虑假设问题 H_0：$\mu_d \le 0$，H_1：$\mu_d > 0$

由数据资料可知减肥前后数据分散程度变化不大，故可以为两总体方差相等，因此可采用检验。

检验统计量为 $T=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$，其中 $S_\omega^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{(n_1+n_2-2)}$，

由样本资料得，$\bar{x}=61.6$，$\bar{y}=58.6$，$s_1^2=87.04$，$s_2^2=76.44$，t 分布自由度为 $n_1+n_2-2=18$，检验统计量的观察值为 $t_0=0.75$，

$P\_$ 值为 $P\_=P\{t(18)>t_0=0.75\}=0.0056<\alpha=0.05$，故拒绝原假设，即认为该药的减肥效果明显。

7、 解 由题意得，建立检验的原假设和备择建设：

$H_0:\sigma^2 \ge 8^2$， $H_1:\sigma^2<8^2$

又 $\dfrac{(\mathrm{n}-1)\mathrm{S}^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(\mathrm{n}-1)$。当 σ^2 未知时，检验统计量 $24\mathrm{S}^2$，又样本实测得 $s=4.98$，于是

$$\chi_0^2=\frac{4.98^2*14}{8^2}=5.421$$

利用 Excel 计算得 $P\_=P\{\chi^2(14)>5.421\}=0.021<0.05$

所以有充分的理由拒绝原假设，不需要退货。

8、 (1) 因检验统计量 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$： $\chi^2(n-1)$，故 σ^2 的置信水平为 95%的置信区间为

$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi_{0.025}^2(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi_{0.975}^2(n-1)}\right)$，将 $n=16$，$s=2.2$ 代入得，$(2.641,11.593)$ 即为所求。

(2) $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{{\sigma_0}^2}$，当$H_0$成立时，$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{{\sigma_0}^2}$: $\chi^2(n-1)$，拒绝域为

$\chi^2\ge\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$或$\chi^2\le\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$，将$n=16$，$s=2.2$，$\sigma_0^2=4.5$代入得，观察值

$\chi_0^2=16.133\in\left(\chi^2_{0.975}(15),\chi^2_{0.025}(15)\right)$，故接受$H_0$。

9、 解 （1）由样本资料$\bar{x}=505.2>500$。建立检验的原假设和备择假设：

$H_0:\mu\le 500$， $H_1:\mu>500$

由于σ^2未知，取检验量$T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$，将样本资料有：

$n=10,\bar{x}=505.2,s=6.321,\mu_0=500$得到观察值$t_0=2.601$。

利用 Excel 计算得$P_-=P\{t(n-1)\ge t_0\}=0.0143$。

由P_-的值没有充分的理由拒绝原假设，即没有充分的理由认为$\mu>500$

（2）由题意知$\frac{(\mathrm{n}-1)\mathrm{S}^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(\mathrm{n}-1)$，于是$\sigma^2$的 95%的置信区间为：

$$(\frac{9s^2}{\chi^2_{0.05/2}(9)},\frac{9s^2}{\chi^2_{1-0.05/2}(9)})=(18.903,133.185)$$

10、 假设H_0：$\mu_A\le\mu_B$，H_1：$\mu_A>\mu_B$

取检验统计量为$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$，其中$S_\omega^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{(n_1+n_2-2)}$。

当H_0成立时，T: $t(n_1+n_2-2)$，由样本资料得，检验统计量的观察值为t_0，

P_-值为$P_-=P\{t(8)>t_0\}=0.0267<\alpha=0.05$，故拒绝原假设，即认为$\mu_A>\mu_B$。

11、 解 (1)相同

设X和Y分别是甲、乙两人页出错字数，并且分别服从正态分布$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$和

$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$。建立检验的原假设和备择假设：

$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$， $H_1:\sigma_1^2\ne\sigma_2^2$

取检验统计量为 $F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$，当 H_0 成立时， $F\sim F(n_1-1,n_2-1)$。

根据样本资料计算结果如下：

$n_1=8,\bar{x}=\dfrac{19}{8},s_1=1.598,n_2=9,\bar{y}=\dfrac{32}{9},s_2=1.667,$ 检验统计量的观察值为

$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}f_0=\dfrac{s_1^2}{s_2^2}=0.919$。利用 Excel 得 $F_{\alpha/2}(7,8)=4.529$， $F_{1-\alpha/2}(7,8)=0.204$，即

$F_{\alpha/2}(7,8)>f_0>F_{1-\alpha/2}(7,8)$，因此不拒绝 H_0，可以认为甲、乙两人页出错字数的方差是相同的。

（2）在接受方差相等的假设下，我们采用精确 t 检验对两组均值进行比较，考率两总体的右边检验：

$H_0:\mu_1\le\mu_2$， $H_1:\mu_1>\mu_2$

两组合样本方差为 $s_w^2=\dfrac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1-1+n_2-1}=1.642$，检验统计量的观察值为

$t_0=\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}=-1.983$，$P_-$ 的值 $P_-=P(|t(15)|>t_0)=0.033<0.05$，因此我们拒绝原假设的判断，从而甲页均出错不是显著少于乙的。

12、 (1) 取检验统计量为 $F=\dfrac{S_A^2}{S_B^2}$，当 H_0 成立时，F: $F\left(n_1-1,n_2-1\right)$，拒绝域为

$W=\left\{F\ge F_{\alpha/2}\left(n_1-1,n_2-1\right)\text{或}F\le F_{1-\alpha/2}\left(n_1-1,n_2-1\right)\right\}$，检验统计量的观察值

$f_0=\dfrac{s_A^2}{s_B^2}=1.21$，查表得 $F_{0.025}\left(30,30\right)=2.07$， $F_{0.975}\left(30,30\right)=\dfrac{1}{F_{0.025}\left(30,30\right)}=0.48$，即

$F_{0.975}\left(30,30\right)<f_0<F_{0.025}\left(30,30\right)$，故接受 H_0。

(2) 由 (1) 知，接受 $\sigma_A^2=\sigma_B^2$，此时 $\mu_A-\mu_B$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 置信区间为

$\left(\left(\bar{X}_A-\bar{X}_B\right)\pm t_{\alpha/2}\left(n_1+n_2-2\right)S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right)$，其中 $S_\omega^2=\dfrac{\left(n_1-1\right)S_1^2+\left(n_2-1\right)S_2^2}{\left(n_1+n_2-2\right)}$，将样本数据代入得 $\left(-0.642,-0.558\right)$ 即为所求。

13、 解 （1）设“一周内去过教堂”的人的比例为 p。由 0—1 分布性质和中心极限定理，知 $\dfrac{n\overline{X}-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ 近似服从 $N(0,1)$，于是

$$P\{-z_{\alpha/2}<\frac{n\overline{X}-np}{\sqrt{np(1-p)}}<z_{\alpha/2}\}\approx 1-\alpha,$$

由题意得样本的观察值为 $n=1785, \overline{x}=750$，从而求得 p 的置信区间为

$(0.397, 0.443)$

（详细步骤见 133 页）

（2）设 $H_0: p<0.5$， $H_1: p\geq 0.5$

由（1）的结果我们有充分的理由接受原假设，即认为不足一半的人去过教堂。

14、 考虑假设问题 H_0：$X \sim \pi(\lambda)$

在 H_0 中参数 λ 未知，由极大似然法求得参数 λ 的估计为 $\hat{\lambda}=\overline{x}=\dfrac{233}{90}\approx 2.59$，则 $\hat{p}_i=\hat{p}\{X=i\}=\dfrac{\hat{\lambda}^2}{i!}e^{-\hat{\lambda}}$，$i=0,1,\cdots,7$，$\hat{p}_8=\hat{p}\{X\geq 8\}=\sum\limits_{j=8}^{\infty}\dfrac{\hat{\lambda}^j}{j!}e^{-\hat{\lambda}}$，列表求出检验统计量取值为 $\chi_0^2=\sum\limits_{i=0}^{8}\dfrac{(n_i-n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i}=2.683$，查 χ^2 分布表得

$\chi_{0.05}^2(9-1-1)=\chi_{0.05}^2(7)=14.067>\chi_0^2=2.683$，故没有充分理由拒绝原假设，即可认为符合泊松分布。

15、 解 记 p_i 为数字 i 的概率，n_i 为检验过程中数字 i 出现的频数，n 为总试验次数。考虑假设问题：

$$H_0: p_i=\frac{1}{8}\quad (i=1,2,\cdots,8)$$

这时检验统计量的取值为 $\chi^2=\sum\limits_{i=1}^{8}\dfrac{(n_i-np_i)^2}{np_i}=\sum\limits_{i=1}^{8}\dfrac{n_i^2}{np_i}-n=6$

查表得 $\chi_{0.05}^2(7)=14.067>6$，因此接受 H_0

16、假设 H_0：$X \sim p(X=k)=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-1}$，$k=1,2,\cdots$

则 $p_i = p\left\{X = i\right\} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}$，$i = 1,2,3$，$p_4 = p\left\{X \geq 4\right\} = \sum_{k=4}^{\infty}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{27}$，则检验统计量取值为 χ_0^2，利用 EXCEL 计算得 $P_- = P\left\{\chi^2\left(4-1\right) > \chi_0^2\right\} = 0.309 > \alpha = 0.05$，故接受假设，即认为服从几何分布。

17、 解 考虑假设问题：

$H_0 : X \sim e(X;\lambda)$

利用极大似然法求得参数 λ 的估计为 $\hat{\lambda} = 1/\bar{x} = \frac{1}{2}$。

当原假设成立，X 的分布函数为：

$$F_0(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0 \end{cases}$$

根据已知条件计算 $n = 100$

$$p_1 = F_0(1) = 1 - e^{-0.5}, p_2 = F_0(2) - F_0(1) = e^{-0.5} - e^{-1}, p_3 = F_0(3) - F_0(2) = e^{-1} - e^{-1.5}$$

$$p_4 = F_0(4) - F_0(3) = e^{-1.5} - e^{-2}, p_5 = 1 - F_0(4) = e^{-2}$$

则检验统计量的取值为

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{4}\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^{4}\frac{n_i^2}{np_i} - n = 103.7354\text{-}100 = 3.7354$$

查表得 $\chi^2_{0.05}(3) = 7.815 > 3.7354$，因此接受 H_0

18、 (1)取检验统计量为 $W = \frac{\left\{\sum_{i=1}^{[n/2]} a_i \cdot \left[X_{(n+i-1)} - X_{(i)}\right]\right\}^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}$，当 $W \leq W_{1-\alpha}\left(n\right)$ 时，拒绝样本来自正态分布总体的假设。

对新药组：$n_1 = 12$，查附表 8 得 $a_i\left(1 \leq i \leq 6\right)$ 的值，由样本数据得统计量的观察值 $W_0 > W_{0.95}\left(12\right)$，故接受新药品样本来自正态总体。

对对照组：$n_2 = 10$，查附表 8 得 $a_i\left(1 \leq i \leq 5\right)$ 的值，由样本数据得统计量的观察值为 $W_0 > W_{0.95}\left(10\right)$，故接受对照组样本来自正态总体。

(2) 由(1)知可认为两组数据均服从正态分布，设 X：$N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$，$Y$：$N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$，考虑假

设检验问题 H_0：$\sigma_1^2=\sigma_2^2$，H_1：$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$，取检验统计量为 $F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$，当 H_0 成立时，

$F: F(n_1-1,n_2-1)$，拒绝域为

$W=\left\{F\geq F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\text{或}F\leq F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\right\}$，检验统计量的观察值

$f_0=\dfrac{s_1^2}{s_2^2}$，$P_-=P\left\{F(11,9)>f_0\right\}=0.116>\alpha=0.05$ 故接受 H_0。

即认为两样本来自方差相同的总体。

(3) 在(2)情况下，考虑假设检验问题 H_0：$\mu_1=\mu_2$，H_1：$\mu_1\neq\mu_2$

检验统计量 $T=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$，其中 $S_\omega^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{(n_1+n_2-2)}$。当 H_0 成立时，

$T: t(n_1+n_2-2)$，检验的拒绝域为 $W=\left\{|T|\geq t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\right\}$ 由样本数据得检验统计量

的观察值为 $|t_0|=\left|\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{s_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\right|>t_{0.025}(20)=2.086$，故拒绝原假设，即认为有显著差异。

19　解 D 的检验的统计量为

$$D=\frac{\sum_{i=1}^{168}(i-\frac{168+1}{2})\cdot X_{(i)}}{n^{\frac{3}{2}}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}\text{，其中 } n=168$$

分别计算 D 和 $Y=\dfrac{\sqrt{n}(D-0.28209479)}{0.02998598}$，当 $Y\leq Y_{1-\alpha/2}$ 或 $Y\geq Y_{\alpha/2}$ 时，拒绝样本来自整台分布总体的假设。

经过计算有 $Y_{1-\alpha/2}\leq Y\leq Y_{\alpha/2}$，可以判断新生女婴的体重数据是服从正态分布

第九章 方差分析与回归分析

注意：　这是第一稿（存在一些错误）

1．解：

$$L\left(\alpha,\beta,\sigma^2\right)=\prod_{i=1}^{n}f\left(y=y_i\right)=\prod_{i=1}^{n}f\left(\varepsilon_i=y_i-\alpha-\beta x_i\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\left(y_i-\alpha-\beta x_i\right)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\alpha-\beta x_i\right)^2}{2\sigma^2}}$$

$$l\left(\alpha,\beta,\sigma^2\right)=\ln L\left(\alpha,\beta,\sigma^2\right)=-n\ln\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)-\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\alpha-\beta x_i\right)^2}{2\sigma^2}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial l\left(\alpha,\beta,\sigma^2\right)}{\partial\alpha}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\alpha-\beta x_i\right)}{\sigma^2}=0\\[2ex]\dfrac{\partial l\left(\alpha,\beta,\sigma^2\right)}{\partial\beta}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\alpha-\beta x_i\right)x_i}{\sigma^2}=0\\[2ex]\dfrac{\partial l\left(\alpha,\beta,\sigma^2\right)}{\partial\sigma^2}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\alpha-\beta x_i\right)^2}{2\sigma^4}-\dfrac{n}{2}\dfrac{1}{\sigma^2}=0\end{cases}$$

解得$\begin{cases}\hat{\alpha}=\overline{y}-\hat{\beta}\overline{x},\\ \hat{\beta}=\dfrac{s_{xy}}{s_{xx}},\\ \hat{\sigma}^2=\dfrac{SSE}{n}.\end{cases}$ 则α、β的极大似然估计与最小二乘估计一致。σ^2的极大似然估计为 $\frac{SSE}{n}$，最小二乘估计为$\frac{SSE}{n-2}$，为σ^2的无偏估计。

2．

解：（1）由题意，知

$H_0:\mu_1=\mu_2=\mu_3$，$H_1:\mu_1,\mu_2,\mu_3$不全相等

计算有 $\overline{x}=\frac{1}{n_1+n_2+n_3}\sum_{i=1}^{n} n_i x_{i\cdot}=2.54$

$S_A=\sum_{i=1}^{3} n_i(\overline{x}_{i\cdot}-\overline{x})^2=0.738$， $S_T=\sum_{i=1}^{3}\sum_{i=j}^{n_i}(x_{ij}-\overline{x})^2=5.534$

$S_E=S_T-S_A=4.796$， $MS_A=S_A/(3-1)=0.369$

$MS_E=S_E/(n_1+n_2+n_3-3)=0.178$， $F=MS_A/MS_E=2.077$

所以单因素方差分析表为：

方差来源	自由度	平方和	均方	**F** 比
因素 **A**	2	0.738	0.369	2.077
误差	27	4.796	0.178	
总和	29	5.534		

由于 $F=2.077 < F_\alpha(2,27)=3.3541$，接受 H_0

（2）σ^2 的无偏估计量为：$MS_E=S_E/(n_1+n_2+n_3-3)=0.178$

3.

解：

(1) $n=61$， $r=4$,

(2) $F_{0.05}(3,57)\approx 2.76<3.564$,则拒绝原假设，即认为不同年级学生的月生活费水平有显著差异。

4.

解： （1）利用 Excel

差异源	SS	df	MS	F
组间	18.65733	2	9.328667	13.59203
组内	8.236	12	0.686333	
总计	26.89333	14		

从表中可以看出，三个车间生产的低脂肪奶的脂肪含量有显著差异；

（2）由（1）中的表，可知 $MS_E=0.686$

（3）由于 σ^2 未知，用 t 统计量，即 $\frac{\overline{X_2}-\mu_2}{S_2/\sqrt{n_2}}\sim t(n_2-2)$， μ_2 得置信水平为 0.95 的双侧置信区间为：

$$\left(\overline{X_2}-S_2t_{\alpha/2}(n_2-1)/\sqrt{n_2},\overline{X_2}+S_2t_{\alpha/2}(n_2-1)/\sqrt{n_2}\right)=(5.593,7.207)$$

（4）利用 130 页（二）（b），可以知道：$\mu_2-\mu_3$ 德置信水平为 0.95 的置信区间为：

$$(\overline{X_2}-\overline{X_3}\pm t_{\alpha/2}(n_2+n_3-2)S_\omega\sqrt{\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}})$$

其中：$S_\omega^2=\dfrac{(n_2-1)S_2^2+(n_3-1)S_3^2}{n_2+n_3-2}$

经查表及计算得到：$\mu_2-\mu_3$ 德置信水平为 0.95 的双侧置信区间为：

$(-3.862,-1.578)$

5．

解：$r=4$，$n=10$，$\overline{X}_{i.}=\dfrac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}X_{ij}$，$n_i=\begin{cases}2, & i=1,\\ 3, & i=2,\\ 3, & i=3,\\ 2, & i=4.\end{cases}$，$\overline{X}=\dfrac{1}{10}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{n_i}X_{ij}$，

$$S_A=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\overline{X}_{i.}-\overline{X}\right)^2=\sum_{i=1}^{4}n_i\left(\overline{X}_{i.}-\overline{X}\right)^2=502,$$

$$S_T=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\left(X_{ij}-\overline{X}\right)^2=\sum_{i=1}^{4}n_i\left(\overline{X}_{ij}-\overline{X}\right)^2=654,$$

$S_E=S_T-S_A=152$，

$MS_A=S_A/(r-1)=167.33$，$MS_E=S_E/(n-r)=25.33$，则

$F=MS_A/MS_E=6.61$，查表得 $F_{0.05}(3,6)\approx 4.76<6.61$

故拒绝原假设，即认为四种新外观对销量有显著差异。

6．
解：　可以通过 Excel 来做

7．

解：(1) $n=8$，$r=\dfrac{s_{xy}}{\sqrt{s_{xx}s_{yy}}}$，$s_{xx}=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2$，$\overline{x}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$，

$s_{yy}=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2$，$\overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$，

$s_{xy}=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)$，代入数据得$r=0.7985$，不为 0，即相关。

(2) $\hat{\beta}=\frac{s_{xy}}{s_{xx}}=16.428$，$\hat{\alpha}=\overline{y}-\hat{\beta}\overline{x}=135.362$，则$\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x=135.362+16.428x$。

(3) σ^2的无偏估计为$s^2=\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}e_i^2=\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\hat{y}_i\right)^2=87928$。

(4) $SSR=\hat{\beta}^2S_{xx}=928404$，$SSE=S_{yy}-\hat{\beta}S_{xy}=527568$，$SST=S_{yy}=1455972$，

$F=\frac{SSR}{SSE/(n-2)}=10.56$，查表得$F_{0.05}(1,6)\approx 5.99<F$，

故拒绝原假设，即认为回归方差显著。

$t=\frac{\hat{\beta}\sqrt{S_{xx}}}{s}=3.249$，查表得$t_{\alpha/2}\left(n-2\right)=t_{0.025}\left(6\right)=2.4469<|t|$，

故拒绝原假设，即认为回归系数检验显著。

(5) $E\left(y\right)$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为$\left(\hat{y}\pm t_{\alpha/2}\left(n-2\right)s\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{\left(x-\overline{x}\right)^2}{s_{xx}}}\right)$，

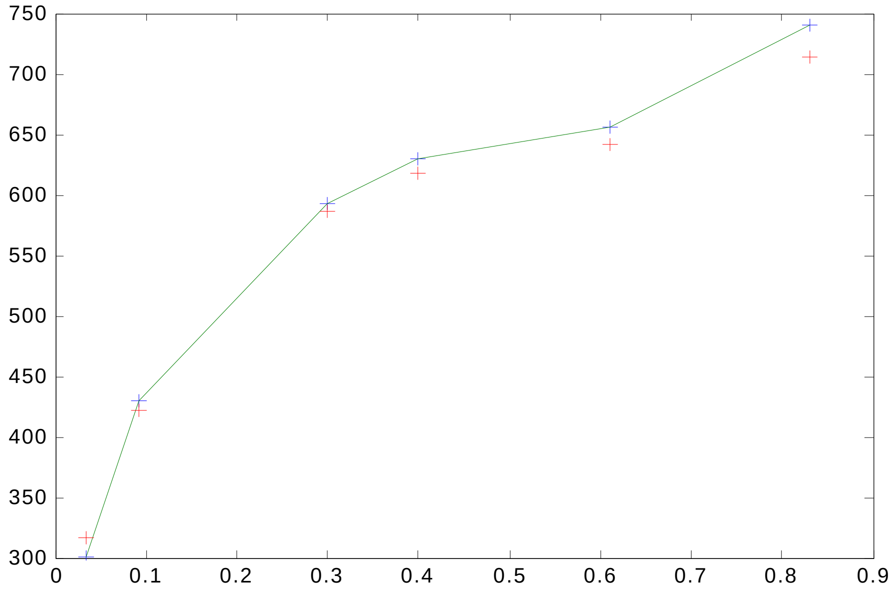
由已知条件得，$E\left(y\right)$的置信区间为$\left(843,1399\right)$，估计值为$\frac{843+1399}{2}=1121$。

(6) y的预测区间为$\left(\hat{y}\pm t_{\alpha/2}\left(n-2\right)s\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{\left(x-\overline{x}\right)^2}{s_{xx}}}\right)$，由已知条件得，

y的预测区间为$\left(344,1898\right)$，预测值为$\frac{344+1898}{2}=1121$。

8.

解：（1）用 Matlab 可以画出 Y 与 X 的散点图，



不

从图中可以看出不是线性关系

（2）由题意得：

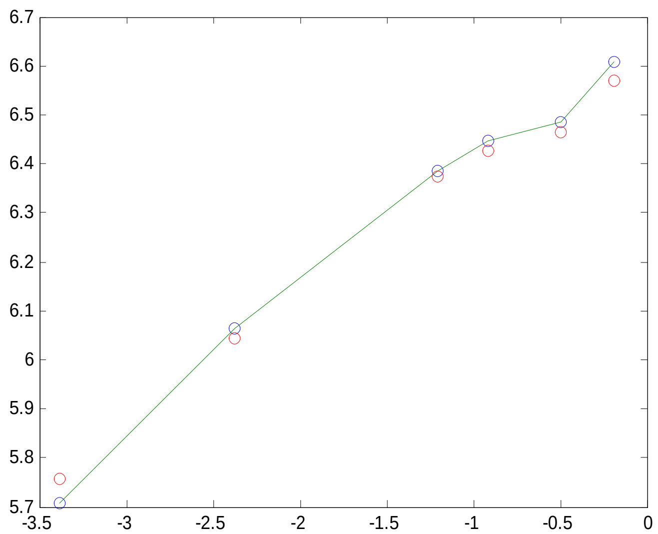
$$\begin{cases} \ln y_i = \alpha + \beta \ln x_i + \varepsilon_i \\ \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \end{cases}$$

利用最小二乘估计，得到：

$$\begin{cases} \hat{\alpha} = \overline{y} - \hat{\beta}\, \overline{\ln x} \\ \hat{\beta} = s_{xy} / s_{xx} \end{cases}$$

从而可以求出 lnY 的线性回归方程。

用 Matlab 也可以作出 lnY 关于 lnX 的线性关系：



从图形上也可以判断出采用 Y 比采用 lnY 结果要好。

9.

解：(1)线性回归模型为

$$\begin{cases} y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \varepsilon_i, i = 1, 2, \cdots, 16, \\ \qquad \varepsilon_i \sim N\left(0, \sigma^2\right) \text{且相互独立。} \end{cases}$$

，其中 β_j， $j = 0,1,2$，和 σ 为未知参数。

采用最小二乘法得 $\hat{\beta} = \left(X'X\right)^{-1} X'Y$，其中 $X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} \\ 1 & x_{21} & x_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} \end{pmatrix}$， $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$，

代入数据得回归方程为 $\hat{y} = 33.85 + 5.15x_1 + 4.38x_2$。

(2) $SSR = \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i - \overline{y}\right)^2$， $SST = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2$， $SSE = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2$， $n = 16$， $p = 2$

代入数据得 $F = \dfrac{SSR/p}{SSE/(n-p-1)}$，查表得 $F_{0.05}(2,13) = 3.81 < F$，故拒绝原假设，即认为回归方程显著。

$t_j = \dfrac{\hat{\beta}_j}{\sqrt{c_{jj}}s}$， $j = 1, 2$， $s = \sqrt{\dfrac{SSE}{n-p-1}}$，代入数据分别得 t_1 和 t_2 的值，查表得 $t_{0.025}(13) = 2.1604 < |t|$，故拒绝原假设，即认为回归系数检验显著。

(3)线性假设成立，方差齐性，独立性满足。