概率论与数理统计习题精解

萝卜（宿永杰） 编

V1.0

Tel/WeChat: 13919939165
QQ: 1271357684

第一章　概率论的基本概念

1.为了解吸烟对人体健康是否有影响, 对一社区居民进行抽样调查, 分别用$0,1,2$表示不吸烟、少量吸烟及吸烟较多, 再用a,b,c表示身体健康、一般及有病. 例如: $(0,a)$就表示抽到的居民是不吸烟的健康者.

(1)问试验的样本空间共有多少个样本点?

(2)设$A=\{$抽到的居民身体健康$\}$, 试写出A所包含的样本点;

(3)设$B=\{$抽到的居民不吸烟$\}$, 试写出B所包含的样本点.

2.设A,B,C为3个随机事件, 请用事件的运算关系式表示:

(1)A,B,C至少有2个发生;

(2)A,B,C最多有1个发生;

(3)A,B,C恰有1个不发生;

(4)A,B,C至少有1个不发生.

3.设A,B为两个随机事件, 且A,B中至少有一个发生的概率为0.9.

(1)若B发生的同时A不发生的概率为0.4, 求$P(A)$;

(2)已知$P(B)=0.6$, 求A发生的同时B不发生的概率.

4.设事件A与B不相容, $P(A)=0.3, P(B)=0.5$. 求:

(1)A与B至少有一个发生的概率;

(2)A与B都不发生的概率;

(3)A不发生的同时B发生的概率.

5.设A,B,C为三个随机事件, $P(A)=P(B)=0.3, P(C)=0.4$, 且当A发生时C必然发生, 而B与C不相容, 求:

(1)C发生的同时A不发生的概率;

(2)A与B至少有一个发生的概率;

(3)A,B,C都不发生的概率.

6.一袋中有10个球, 其中8个是红球. 每次摸一球, 共摸2次, 在放回与不放回抽样两种方式下, 分别求:

(1)“两次均为红球”的概率;

(2)“恰有1个红球”的概率;

(3)“第2次是红球”的概率.

7.一30人的班级中有两个“王姓”学生, 将全班学生随机排成一排, 求:

(1)两个“王姓”学生正好中间隔一个位置的概率;

(2)两个“王姓”学生正好排在最中间的概率.

8.一盒子中有2个红球, 3个黑球, 2个白球 (共7个球). 每次摸一球 (不放回), 共摸3次. 求:

(1)摸到球恰是1红1黑1白的概率;

(2)摸到的全是黑球的概率;

(3)第1次为红球、第2次为黑球且第3次为白球的概率.

9.编号为$1,2,\cdots,9$的9辆车, 随机地停入编号为$1,2,\cdots,9$的9个车位中, 若车号与车位号一样称该车配对. 求:

(1)1号车配对的概率;

(2)1号车配对而9号车不配对的概率.

10.依次将5个不同的球随机放入3个不同的盒子中, 盒子容量不限, 求3号盒子恰好有两个球的概率.

11.在某卫视的一档节目中, 有这样一个项目: 舞台现场摆放了50张脸谱, 嘉宾从中随机挑选两张脸谱, 电脑将两张脸谱进行合成产生一张新的脸谱, 挑战者要根据合成的脸谱, 将原先的两张脸谱找出来. 如果是猜的话, 求他能够猜中的概率.

12.设A, B为两随机事件, 且已知$P(A) = 0.7, P(\overline{B}) = 0.6, P(A\overline{B}) = 0.5$, 求:

(1)$P(A|A \cup B)$;

(2)$P(A|\overline{A} \cup B)$;

(3)$P(AB|A \cup B)$.

13.设一社区订A,B,C报的家庭分别占50%, 30%, 40%. 且已知一家庭订了A报的条件下再订B报的概率为20%, 订了C报的条件下又订A报或B报的概率为60%. 随机找一家庭, 求该家庭至少订A, B, C报中的一种的概率.

14.某企业中有45%为女职工, 10%的职工在管理 (技术、质量、行政) 岗位, 5%的职工为管理岗位的女职工. 在该企业中随机找一位职工.

(1)已知该职工为女职工的条件下, 求该职工在管理岗位的概率;

(2)已知该职工在管理岗位, 求该职工为男职工的概率.

15.一架子上有4把枪, 其中3把是调试好的, 1把未调试. 设某人用调试好的枪射击命中率为60%, 用未调试的枪射击命中率为5%. 此人从4把枪中随机地取一把进行设计.

(1)求命中的概率;

(2)已知此人命中了, 求取到的是未调试的枪的概率.

16.某一时刻对某证券营业点进行统计. 得知入市时间在1年以内的股民赢、平、亏的概率分别为10%, 20%, 70%; 入市时间在1年以上但不到4年的股民赢、平、亏的规律分别为20%, 30%, 50%; 入市时间大于4年的股民赢、平、亏的概率分别为50%, 30%, 20%. 入市时间不同的股民数分别占40%, 40%, 20%. 今在该营业点随机找一股民.

(1)求其有赢利的概率;

(2)若已知其亏损了, 问他为新股民的概率有多大?

17.吸烟有害健康是众所周知的事实. 研究结果还发现丈夫每天的吸烟量与胎儿产前的死亡率和先天畸形儿的出生率成正比. 设在父亲不吸烟、每天吸烟1~10支、每天吸烟10支以上条件下, 子女先天畸形的概率分别为0.8%, 1.4%, 2.1%. 设男性吸烟率为0.6, 在吸烟的男性中每天1~10支和每天吸烟10支以上的概率分别为0.3, 0.7, 并假设父亲的吸烟率与男性的吸烟率相同.

(1)求先天畸形儿出现的概率;

(2)若某新生儿出现先天畸形, 求他的父亲每天吸烟10支以上的概率.

18.某产品12个一箱, 成箱出售, 某人购买时随机从中取2个检查, 如果没有发现次品就买下. 假设一箱中有0个、1个、2个次品的概率分别为0.8, 0.15, 0.05, 求他买下的一箱中的确没有次品的概率.

19.有两组同类产品, 第一组有30件, 其中有10件为优质品; 第二组有20件, 其中有15件为优质品. 今从两组中任选一组, 然后从该组中任取2次(每次取1件, 不放回抽样).

(1)求第1次取到的是优质品的概率;

(2)在已知第1次取到的是优质品的条件下, 求第2次取到的不是优质品的概率.

20.某电视台为吸引观众, 对打进电话参与的观众设特等奖一名. 设每个参与观众得奖概率相等. 已知参与观众年龄分布如下表:

年龄X	$X \geq 40$	$20 \leq X < 40$	$X < 20$
概率	10%	70%	20%

且各年龄段中女性比例分别为30%, 50%, 60%. 现知一名女性观众得奖, 求其小于20岁的概率.

21.试证: 当$0 < P(B) < 1$时, 两事件A, B相互独立的充要条件为

$$P(A|B) = P(A|\overline{B})$$

22.设A, B, C为随机事件, $P(A) > 0, P(B) > 0, P(C) > 0$. 请说明以下说法对或错:

(1)A, B相互独立, 则A, B相容;

(2)$P(A) = 0.6, P(B) = 0.7$, 则A, B相互独立;

(3)$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$, 则$A, B, C$相互独立;

(4)A, B不相容, 则A, B不独立.

23.由4个独立部件组成的一个系统, 第i个部件工作正常的概率为$p_i, i = 1, 2, 3, 4$, 且已知至少有3个部件工作正常时系统工作正常.

(1)求系统工作正常的概率α;

(2)在系统正常工作的条件下求4个部件均正常工作的概率β;

(3)对系统独立观察3次, 求系统恰有2次工作正常的概率γ.

24.连续抛一枚硬币, p表示每次出现正面的概率, 记$A_i = \{$首次出现正面在第i次抛掷$\}, i = 1, 2, \cdots, B_j = \{$首次出现连续两次正面在第$j-1$次抛掷和第$j$次抛掷$\}, j = 2, 3, \cdots$.求:

(1)$P(A_i)$及$P(B_4), i = 1, 2, \cdots$;

(2)$P(B_4|A_1)$;

(3)$P(A_1|B_4)$.

25.已知一批照明用灯管使用寿命大于1000小时的概率为95%, 大于2000小时的概率为30%, 大于4000小时的概率为5%.

(1)已知一灯管使用了1000小时没有坏, 求其使用寿命大于4000小时的概率;

(2)取10个灯管独立地装在一大厅内, 过了2000小时, 求至少有3个损坏的概率.

26.某玩家独立地向一目标物扔飞镖, 设他命中目标物的概率为0.05, 他需要扔多少次才能使至少一次命中目标物的概率超过0.5?

27.设某地出现雾霾的概率为0.4, 在雾霾天, 该地居民独立戴口罩的概率为0.2; 在非雾霾天, 该地居民独立戴口罩的概率为0.01.

(1)在该地随机选一居民, 求其戴口罩的概率;

(2)若在该地同时选3个居民, 求至少有一居民戴口罩的概率.

第一章　概率论的基本概念课后题详解

1. (1)9个

   (2)$A=\{(0,a),(1,a),(2,a)\}$

   (3)$B=\{(0,a),(0,b),(0,c)\}$

2. (1)“至少有2个发生” $\rightarrow$ ①其中任意两个同时发生, 第三个发生与否无所谓

   $\Rightarrow AB\cup BC\cup AC$

   ②其中只有两个同时发生+三个都同时发生

   $\Rightarrow AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$

   (2)“最多有1个发生” $\rightarrow$ ①其中任意两个都不发生, 第三个发生与否无所谓

   $\Rightarrow \overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{C}$

   ②只有一个发生+都不发生

   $\Rightarrow A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

   (3)“恰有1个发生” $\rightarrow A$发生, B,C不发生+B发生, A,C不发生+C发生, A,B不发生

   $\Rightarrow A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}B\overline{C}$

   (4)“至少有1个不发生” $\rightarrow$ ①其中任意一个不发生, 其他2个发生与否无所谓

   $\Rightarrow \overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$

   ②“三个都发生”的对立事件

   $\Rightarrow \overline{ABC}$

3. 由题: $P(A\cup B)=0.9\Rightarrow P(\overline{A\cup B})=P(\overline{A}\,\overline{B})=0.1$

   (1)$P(\overline{A}B)=0.4, P(\overline{A}\,\overline{B})=0.1\Rightarrow P(\overline{A})=P(\overline{A}B)+P(\overline{A}\,\overline{B})=0.5\Rightarrow P(A)=0.5$

   (2)$P(B)=0.6\Rightarrow P(\overline{B})=0.4=P(A\overline{B})+P(\overline{A}\,\overline{B})=P(A\overline{B})+0.1\Rightarrow P(A\overline{B})=0.3$

   注: A,B不一定独立(根据计算结果可知确实不独立), 故$P(\overline{A}\,\overline{B})\neq P(\overline{A})P(\overline{B})$, 即积事件的概率不等于概率之积

4. 由题: A,B不相容$\Rightarrow P(AB)=0\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

   (1)$P(A\text{与}B\text{至少有一个发生})=P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.3+0.5=0.8$

   (2)$P(A\text{与}B\text{都不发生})=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.8=0.2$

   (3)$P(A\text{不发生的同时}B\text{发生})=P(\overline{A}B)=P(\overline{A})-P(\overline{A}\,\overline{B})=[1-P(A)]-P(\overline{A}\,\overline{B})=1-0.3-0.2=0.5$

5. 依题: $A\subset C, P(BC)=0$

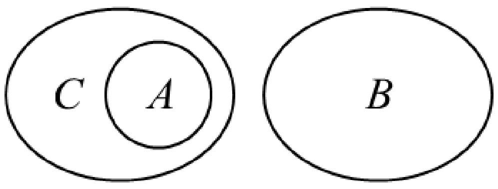
(1)$P(\overline{A}C)=P(C)-P(AC)=P(C)-P(A)=0.4-0.3=0.1$

或$P(\overline{A}C)=1-P(\overline{\overline{A}C})=1-P(A\cup\overline{C})=1-[P(A)+\overset{\overset{0.6}{\|}}{P(\overline{C})}-\overset{\overset{0}{\|}}{P(A\overline{C})}]=1-0.3-0.6=0.1$

(2)$P(AB)=P(AC\cdot B)=0$

$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.3+0.3=0.6$

注: A,B,C的关系用Venn图表示:



(3)$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=1-P(A\cup B\cup C)=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)]=1-(0.3+0.3+0.4-0.3)=0.3$

6. (1)

$$\left.\begin{aligned}&\text{放回: } P(A)=\frac{8}{10}\times\frac{8}{10}=\frac{16}{25}\\&\text{不放回: } P(A)=\frac{8}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{28}{45}\end{aligned}\right\}\text{1红}\times\text{2红}$$

(2)

$$\left.\begin{aligned}&\text{放回: } P(B)=\frac{8}{10}\times\frac{2}{10}+\frac{2}{10}\times\frac{8}{10}=\frac{8}{25}\\&\text{不放回: } P(B)=\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{2}{10}\times\frac{8}{9}=\frac{16}{45}\end{aligned}\right\}\text{1红}\times\text{2白+1白}\times\text{2红}$$

(3)

$$\left.\begin{aligned}&\text{放回: } P(C)=\frac{8}{10}\times\frac{8}{10}+\frac{2}{10}\times\frac{8}{10}=\frac{4}{5}\\&\text{不放回: } P(C)=\frac{8}{10}\times\frac{7}{9}+\frac{2}{10}\times\frac{8}{9}=\frac{4}{5}\end{aligned}\right\}\text{1红}\times\text{2红+1白}\times\text{2红}$$

7. (1)$P(A)=\dfrac{2\times 28\times 28\times A_{27}^{27}}{A_{30}^{30}}=\dfrac{2\times 28}{30\times 29}=\dfrac{28}{435}$

注: “王1”和“王2”的先后顺序有2种可能, 两人中间的人有28种可能, 三个人组成的组合在整个队列中的位置有28种可能, 其余27个人的排列有A_{27}^{27}种可能, 全排列为A_{30}^{30}

(2)$P(B)=\dfrac{2\times A_{28}^{28}}{A_{30}^{30}}=\dfrac{1}{435}$

注: “王1”和“王2”的先后顺序有2种可能, 其余28个人的排列有A_{28}^{28}种可能, 全排列为A_{30}^{30}

8. (1)$P(A)=\dfrac{C_2^1C_3^1C_2^1}{C_7^3}=\dfrac{12}{35}$

(2)$P(B)=\dfrac{C_3^3}{C_7^3}=\dfrac{1}{35}$

(3)$P(C)=\dfrac{2}{7}\times\dfrac{3}{6}\dfrac{2}{5}=\dfrac{2}{35}$

9. (1)“配对”两两不相容, 故$P(A)=\dfrac{1}{9}$, 为等可能概型

(2)$P(B)=\dfrac{1}{9}\times\dfrac{7}{8}=\dfrac{7}{72}$

10.$P=\dfrac{C_5^2\cdot 2^3}{3^5}=\dfrac{10\times 8}{243}=\dfrac{80}{243}$

11.$P=\dfrac{1}{C_{50}^2}=\dfrac{1}{1225}$

12. $P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{B}) - P(A\overline{B}) = 0.6 - 0.5 = 0.1 \Rightarrow P(A \cup B) = P(\overline{\overline{A}\,\overline{B}}) = 1 - P(\overline{A}\,\overline{B}) = 1 - 0.1 = 0.9$

$P(\overline{B}) = 0.6 \Rightarrow P(B) = 0.4; P(A) = 0.7 \Rightarrow P(\overline{A}) = 0.3$

$(1)P(A|A \cup B) = \dfrac{P(A \cup B|A)P(A)}{P(A \cup B)} = \dfrac{P(A)}{P(A \cup B)} = \dfrac{0.7}{0.9} = \dfrac{7}{9}$

$(2)P(A|\overline{A} \cup B) = \dfrac{P[A(\overline{A} \cup B)]}{P(\overline{A} \cup B)} = \dfrac{P[(A\overline{A}) \cup (AB)]}{P(\overline{A}) + P(B) - P(\overline{A}B)} = \dfrac{P(AB)}{P(\overline{A}) + P(B) - [P(\overline{A}) - P(\overline{A}\,\overline{B})]}$

$= \dfrac{P(A) + P(B) - P(A \cup B)}{P(B) + P(\overline{A}\,\overline{B})} = \dfrac{0.7 + 0.4 - 0.9}{0.4 + 0.1} = \dfrac{2}{5}$

$(3)P(AB|A \cup B) = \dfrac{P(AB)}{P(A \cup B)} = \dfrac{0.2}{0.9} = \dfrac{2}{9}$

13. $P(\text{至少订一种}) = P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) = P(A) + P(B) + P(C) - P(B|A)P(A) - P(A \cup B|C)P(C)$

由题: $P(A) = 50\%, P(B) = 30\%, P(C) = 40\%, P(B|A) = 20\%, P(A \cup B|C) = 60\%$

代入上式得: $P(A \cup B \cup C) = 50\% + 30\% + 40\% - 20\% \times 50\% - 60\% \times 40\% = 86\%$

14. 由题:

$P(\text{管理岗位}|\text{女职工})=\dfrac{P(\text{管理岗位的女职工})}{P(\text{女职工})} = \dfrac{5\%}{45\%} = \dfrac{1}{9}$

$P(\text{男职工}|\text{管理岗位})=\dfrac{P(\text{管理岗位的男职工})}{P(\text{管理岗位})} = \dfrac{P(\text{管理岗位}) - P(\text{管理岗位的女职工})}{P(\text{管理岗位})} = \dfrac{10\% - 5\%}{10\%} = \dfrac{1}{2}$

15. 设命中为事件A, 调试过为事件B, 则由题$P(A|B) = 60\%, P(A|\overline{B}) = 5\%, P(B) = \dfrac{3}{4}$

$(1)P(A) = \dfrac{3}{4} \times 60\% + \dfrac{1}{4} \times 5\% = 46.25\%$

$(2)P(\overline{B}|A) = \dfrac{P(A\overline{B})}{P(A)} = \dfrac{P(A|\overline{B}) \cdot P(\overline{B})}{P(A)} = \dfrac{5\% \times \frac{1}{4}}{46.25\%} = \dfrac{1}{37} \doteq 2.7\%$

16. 设赢、平、亏分别为事件A, B, C, 入市1年以内、1~4年、4年以上分别为事件X, Y, Z, 则由题: $P(A|X) = 10\%, P(B|X) = 20\%, P(C|X) = 70\%, \cdots, P(X) = 40\%, P(Y) = 40\%, P(Z) = 20\%$

$(1)P(A) = P(A|X)P(X) + P(A|Y)P(Y) + P(A|Z)P(Z) = 10\% \times 40\% + 20\% \times 40\% + 50\% \times 20\% = 22\%$

$(2)P(X|C) = \dfrac{P(CX)}{P(C)} = \dfrac{P(C|X)P(X)}{\Sigma P(C|\cdot)P(\cdot)} = \dfrac{70\% \times 40\%}{70\% \times 40\% + 50\% \times 40\% + 20\% \times 20\%} = \dfrac{7}{13} \doteq 53.8\%$

17. 设不吸烟、1~10支、10支以上分别为事件A, B, C, 畸形儿为事件X, 则$P(A) = 1 - 0.6 = 0.4, P(B) = 0.6 \times 0.3 = 0.18, P(C) = 0.6 \times 0.7 = 0.42, P(X|A) = 0.8\%, P(X|B) = 1.4\%, P(X|C) = 2.1\%$

$(1)P(X) = \Sigma P(X|\cdot)P(\cdot) = 0.8\% \times 0.4 + 1.4\% \times 0.18 + 2.1\% \times 0.42 = 1.454\%$

$(2)P(C|X) = \dfrac{P(CX)}{P(X)} = \dfrac{P(X|C)P(C)}{P(X)} = \dfrac{2.1\% \times 0.42}{1.454\%} \doteq 60.66\%$

18. 设箱中有0个、1个、2个次品分别为事件A, B, C, 没有发现次品为事件X, 则由题: $P(A) = 0.8, P(B) = 0.15, P(C) = 0.05, P(X|A) = \dfrac{C_{12}^2}{C_{12}^2} = 1, P(X|B) = \dfrac{C_{11}^2 C_1^0}{C_{12}^2} = \dfrac{5}{6}, P(X|C) = \dfrac{C_{10}^2 C_2^0}{C_{12}^2} = \dfrac{15}{22}$

则$P(X) = \Sigma P(X|\cdot)P(\cdot) = 1 \times 0.8 + \dfrac{5}{6} \times 0.15 + \dfrac{15}{22} \times 0.05 = 95.5\%$

进而$P(A|X) = \dfrac{P(AX)}{P(X)} = \dfrac{P(X|A)P(A)}{P(X)} = \dfrac{1 \times 0.8}{95.9\%} = 83.4\%$

19. 选到第1组、第2组为等可能的, 设第i次取到优质品为A_i

$(1)P(A_1) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{C_{10}^1}{C_{30}^1} + \dfrac{C_{15}^1}{C_{20}^1}\right) = \dfrac{13}{24}$

$(2)P(\overline{A_2}|A_1) = \dfrac{P(A_1\overline{A_2})}{P(A_1)} = \dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{C_{10}^1 C_{20}^1}{C_{30}^1 C_{29}^1} + \frac{C_{15}^1 C_5^1}{C_{20}^1 C_{19}^1}\right)}{\frac{13}{24}} \doteq 39.44\%$

20. 先计算女性观众得奖的概率: P(女性观众得奖)=P(观众为女性)$= 30\% \times 10\% + 50\% \times 70\% + 60\%20\% = 0.5$

再得: 得奖的女性观众小于20岁: P(小于20岁|女性观众)=$\frac{P(\text{小于20岁的女性观众})}{P(\text{女性观众})} = \frac{0.2 \times 0.6}{0.5} = 0.24$

21. A, B相互独立, 即$P(AB) = P(A)P(B)$

充分性: $P(A|B) = P(A|\overline{B}) \Rightarrow \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})} \Rightarrow \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A) - P(AB)}{1 - P(B)} \Rightarrow P(A)P(B) - P(AB)P(B) = P(AB) - P(AB)P(B) \Rightarrow$

$P(AB) = P(A)P(B)$

必要性: 由充分性证明过程逆向推导可证必要性

故充要性得证

22. (1)A, B相互独立$\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$, 由于P(A)¿0, P(B)¿0, 故$P(AB) > 0$, 故$A, B$相容

(2)条件不足, 无法判别

(3)由A, B, C相互独立的定义可知, 相互独立的条件是两两独立且$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$, 故题意中条件不足, 说法错误

(4)该命题与(1)互为逆否命题, 故也正确

23. (1)$\alpha = p_1p_2p_3(1 - p_4) + p_1p_2(1 - p_3)p_4 + p_1(1 - p_2)p_3p_4 + p_1p_2p_3p_4$

(2)$\beta = \frac{1}{\alpha}(p_1p_2p_3p_4)$

(3)$\gamma = C_3^2\alpha^2(1 - \alpha)$

24. (1)$P(A_i) = P$(前$i-1$次反面, 第i次正面)$= (1 - p)^{i-1}p$

$P(B_4) = P$(第2次为反面, 第3, 4次为正面)$= (1 - p)p^2$

(2)$P(B_4|A_1) = \frac{P(A_1B_4)}{P(A_1)} = \frac{P(\text{第1, 3, 4次为正面, 第2次为反面})}{P(\text{第1次为正面})} = \frac{(1 - p)p^3}{p} = (1 - p)p^2$

(3)$P(A_1|B_4) = \frac{P(A_1B_4)}{P(B_4)} = \frac{(1 - p)p^3}{(1 - p)p^2} = p$

25. 设寿命>1000小时、>2000小时、>4000小时分别为事件A, B, C, 则$P(A) = 95\%, P(B) = 30\%, P(C) = 5\%$

(1)$P(C|A) = \frac{P(AC)}{P(A)} = \frac{5\%}{95\%} = \frac{1}{19}$

(2)P(至少3个损坏)$= 1 - P$(无损坏)$- P$(有1个损坏)$- P$(有2个损坏)$= 1 - (0.3)^{10} - C_{10}^1(0.3)^9(0.7) - C_{10}^2(0.3)^8(0.7)^2 = 99.8\%$

26. 设需扔x次, 第i次扔中目标为事件A_i, 则$P(A_i) = 0.05$

P(至少命中1次)$= 1 - P$(都不命中)$= 1 - 0.95^x > 0.5 \Rightarrow 0.95^x < 0.5 \Rightarrow x > 13.5$

故需要扔14次

27. (1)P(戴口罩)$= 0.4 \times 0.2 + 0.6 \times 0.01 = 0.086$

(2)P(至少有一居民戴口罩)$= 1 - P$(都不戴口罩)$= 1 - (0.4 \times 0.8 + 0.6 \times 0.99)^3 = 0.236$

第二章　随机变量及其概率分布

1.从$1,2,3,4,5,6,7$这7个数中随机抽取3个数(不放回抽样), 并将其从小到大排队, 设排在中间的数为X, 求X的概率分布律.

2.某电脑小游戏要依次独立地过3关, 如果过不了关就结束. 并规定过了第$1,2$关各得1分, 过了第3关得4分, 第1关未过得0分. 若设一玩家每关通过的概率为20%.

(1)写出此人的分数X的概率分布律;

(2)求此人得分数大于2分的概率;

(3)已知此人得分不低于2分, 求此人得4分的概率.

3.一口袋中有6个球, 其中3个红球, 2个白球, 1个黑球. 从中摸2次, 每次摸1个球(采用不放回抽样). 设摸到每一球的概率相等, 记X为摸到的红球的个数, 试写出X的概率分布律.

4.有人买一种数字型体育彩票, 每一注号码中大奖的概率为10^{-7}.

(1)若每期买1注, 共买了n期, 求没有中大奖的概率;

(2)若每期买10注(号码不同), 共买了n期, 求没有中大奖的概率.

5.某医院男婴的出生率为0.51, 如果在该医院随机找3名新生儿, 求:

(1)至少有1名男婴的概率;

(2)恰有1名男婴的概率;

(3)第1、2名是男婴, 第3名是女婴的概率;

(4)第1、2名是男婴的概率.

6.一系统由5个独立的同类元件组成, 每个元件正常工作的概率为0.8, 求:

(1)恰有3个元件正常工作的概率;

(2)至少有4个元件正常工作的概率;

(3)至多有2个元件正常工作的概率.

7.一车辆从A地到B地要经过3个特殊地段, 经过这3个地段时车辆发生故障的概率分别为p_1,p_2,p_3. 设其他地段车辆不发生故障, 且记X为从A地到B地发生的故障数, Y为首次发生故障时已通过的特殊地段数(如没有发生故障, 则记$Y=3$). 试分别写出X和Y的概率分布律.

8.从一批不合格品率为$p(0<p<1)$的产品中随机抽查产品, 如果查到不合格品就停止检查且最多查5件产品. 设停止时已检查了X件产品, 求:

(1)X的概率分布律;

(2)$P\{X\leq 2.5\}$的值.

9.设银行ATM机在单位时间内服务的顾客数X服从参数为1的泊松分布.

(1)求单位时间内至少有2位顾客接受服务的概率;

(2)若已知单位时间内至少有2位顾客接受服务, 求至多有3位顾客接受服务的概率.

10.设某地每年生吃鱼胆的人数X服从参数为10的泊松分布, 吃鱼胆而中毒致死的人数Y服从参数为0.5的泊松分布, 求明年该地:

(1)至少有2人生吃鱼胆的概率;

(2)没有人因生吃鱼胆致死的概率.

11.某公交车站单位时间内候车人数服从参数为λ的泊松分布.

(1)若已知单位时间内至少有1人候车的概率为$(1-\mathrm{e}^{-4.5})$, 求单位时间内至少有2人候车的概率;

(2)若$\lambda = 3.2$, 且已知有1人在此候车, 求该车站就他1人候车的概率.

12.设某手机在早上9:00至晚上9:00的任一长度为t(分钟)的时间区间内收到的短信数X服从参数为λt的泊松分布, $\lambda = \frac{1}{20}$, 且与时间起点无关.

(1)求10:00到12:00期间恰好收到6条短信的概率;

(2)已知在10:00到12:00期间至少收到5条短信, 求在该时段恰好收到6条短信的概率.

13.某大学每年5月份组织教职工体检, 根据以往的情况知, 通过体检发现1‰的被检者患有重大疾病. 已知有3000人参加今年的体检, 求至少有2人被检出重大疾病的概率(可用泊松分布近似计算).

14.袋中有10个球, 编号为$0, 1, 2, \cdots, 9$.

(1)采用不放回抽样取3次, 每次取1球, X表示所取球的号码大于6的个数, 求X的概率分布律;

(2)采用放回抽样取3次, 每次取1球, Y表示所取球的号码为偶数的个数, 求Y的概率分布律;

(3)采用放回抽样取球, 直到取到号码9为止, Z表示取球次数, 求Z的概率分布律;

(4)采用放回抽样取球, 求第5次恰好取到第3个奇数号码球的概率.

15.设随机变量X具有以下性质:

$$当0 \le x \le 1时,\ P\{0 < X \le x\} = \frac{x}{2};\ 当2 \le x \le 3时,\ P\{2 \le X \le x\} = \frac{x-2}{2}.$$

(1)试写出X的分布函数;　　(2)求$P\{X \le 2.5\}$的值.

16.设随机变量X的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} c(4-x^2), & 0 < x < 2, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

(1)求常数c的值;

(2)求X的分布函数$F(x)$;

(3)求$P\{-1 < X < 1\}$的值;

(4)对X独立观察5次, 求事件$\{-1 < X < 1\}$恰好发生2次的概率.

17.设连续型随机变量X的分布函数为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ ax^2, & 0 \le x < 1, \\ bx, & 1 \le x < 2, \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

(1)求常数a, b;

(2)求X的密度函数$f(x)$;

(3)求$P\{0.5 < X < 1.5\}$.

18.已知在早上7:00-8:00有两班车从A校区到B校区, 出发时间分别是7:30和7:50, 一学生在7:20-7:45随机到达车站乘这两辆车.

(1)求该学生等车时间小于10分钟的概率;

(2)该学生等车时间大于5分钟又小于15分钟的概率;

(3)已知其候车时间大于5分钟的条件下, 求其乘上7:30的班车的概率.

19.从区间$(-1, 3)$中随机取一数X, 试写出X的密度函数. 若在该区间随机取n个数, 设其中有Y个数大于0, 求$P\{Y = k\}, k = 0, 1, 2, \cdots, n$的值.

20.设随机变量X服从$N(\mu, \sigma^2)$, 其中$\mu = 5, \sigma = 1$, 求:

(1)$P\{X > 2.5\}$;　(2)$P\{X < 3.52\}$;　(3)$P\{4 < X < 6\}$;　(4)$P\{|X - 5| > 2\}$.

21.设A君的年收入扣除日常必须花费后的余额(以万元计)X服从$N(6.5,1)$, 且往年没有积蓄, 也不打算借贷, 今年他计划至少花7万元买些中高档家电及生活开销, 问他能实现自己计划的概率有多大?

22.设一地区的青年男子身高(单位: cm)X服从$N(179,5.0^2)$. 今在这地区随机找一青年男子测身高. 求:

(1)身高大于170cm的概率;

(2)身高大于165cm且小于175cm的概率;

(3)身高小于172cm的概率.

23.设某群体的体质指标BMI值$X\sim N(22.5,2.5^2)$(单位: kg/m^2), 医学研究发现身体肥胖者患高血压可能性增大, 当$X\leq 25$时, 患高血压概率为10%; 当$25<X\leq 27.5$时, 患高血压概率为15%; 当$X>27.5$时, 患高血压的概率为30%.

(1)从该群体中随机选出1人, 求他患高血压的概率;

(2)若他患有高血压, 求他的BMI值超过25的概率;

(3)随机独立地选出3人, 求至少有1人患高血压的概率.

24.设系统电压(单位: V)小于200, 在区间[200,240]之间和超过240这三种情况下, 系统中某种电子元件不能正常工作的概率分别为0.1, 0.001, 0.2. 设系统电压X服从$N(220,25^2)$.

(1)求该电子元件不能正常工作的概率α;

(2)该电子元件不能正常工作时, 求系统电压超过240V的概率β;

(3)若一系统有3个这种元件, 且至少有2只正常工作时系统运行正常, 求该系统运行正常的概率θ.

25.设一高速公路某处双休日一天车流量$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 有30%的天数车流量小于12800辆, 有95%的天数车流量大于10000辆, 试求μ,σ.

26.设随机变量X服从$N(15,4)$, X落在区间$(\infty,x_1),(x_1,x_2),(x_2,+\infty)$中的概率之比为$50:34:16$, 求$x_1,x_2$的值.

27.设随机变量X的密度函数为

$$f(x)=a\cdot \mathrm{e}^{-x^2},\quad |x|<+\infty$$

试求:(1)常数a的值; (2)$P\left\{X>\frac{1}{2}\right\}$.

28.设银行某一柜台一位顾客的服务时间(以分钟计)服从参数$\lambda=\frac{1}{8}$的指数分布, 在A到达时恰好有1人先于其到达, 设A的等待时间为X.

(1)写出X的密度函数;

(2)求A等待时间超过10分钟的概率;

(3)求等待时间大于8分钟且小于16分钟的概率.

29.设甲、乙两厂生产的同类型产品寿命(以年计)分别服从参数为$\frac{1}{3}$和$\frac{1}{6}$的指数分布, 将两厂的产品混在一起, 其中甲厂的产品数占40%. 现从这批混合产品中随机取一件产品.

(1)求该产品寿命大于6年的概率;

(2)若已知取到的是甲厂产品, 在已用了4个月没有坏的条件下, 求用到1年还不坏的概率;

30.以X表示某商店早晨开门后直到第一个顾客到达的等待时间(以分钟计), X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-0.2x}, & x>0,\\ 0, & x\leq 0.\end{cases}$$

(1)求X的密度函数$f(x)$;

(2)求$P\{5<X<10\}$的值;

(3)求某一周(7天)至少有6天等待时间不超过5分钟的概率.

31.设一批电子元件寿命X(以小时计)的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} 0.01\mathrm{e}^{-0.01x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$$

某人买了3只元件试用. 若至少有2只寿命大于150小时, 则下次再买此类元件. 求:

(1)这3只元件中恰好有2只寿命大于150小时的概率;

(2)这个人会再买的概率.

32.某次游戏向每个玩者发5个球, 向目标投掷, 投中2次就结束投球. 若每次投中的概率均为$p=0.7$, 且每次投掷是相互独立的. 设X为结束时的投球次数, 规定当$X=2$时得10分, $X=3$时得8分, $X\ge 4$时得2分, 记Y为得分数. 试写出Y的概率分布律.

33.已知随机变量X的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} c(4-x^2), & -1<x<2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1)求常数c的值;

(2)设$Y=3X$, 求Y的密度函数;

(3)设$Z=|X|$, 求Z的分布函数及密度函数.

34.设在$(0,t]$时间区间内进入某商店的顾客数$N(t)$服从参数为λt的泊松分布, 且设第1个顾客到达时间为T.

(1)求T的分布函数;

(2)求$P\{T>t_0+t|T>t_0\}$, 其中$t>0, t_0>0$.

35.从区间$(0,1)$上随机取一数X, 记$Y=X^n$($n>1$, 为自然数), 求Y的密度函数.

36.设随机变量X服从$\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$上的均匀分布, $Y=\cos X$, 求Y的分布函数.

37.设随机变量$X\sim N(\mu,\sigma^2)$. 求$Y=X^2$的密度函数.

38.设随机变量X的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} ax+b, & 0<x<2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

且已知$P\{X<1\}=\dfrac{1}{3}$.

(1)求常数a,b;

(2)设$Y=\sqrt{X}$, 求Y的密度函数$f_Y(y)$.

39.设随机变量$X\sim N(0,1)$. 记$Y=\mathrm{e}^X, Z=\ln|X|$.

(1)求Y的密度函数;

(2)求Z的密度函数.

第二章　随机变量及其概率分布课后题详解

1. 排在中间的数可能为$2,3,4,5,6$

若2排在中间，则最小的数只能是1，最大的数可能为$3,4,5,6,7$，故$P\{X=2\}=\frac{5}{C_7^3}=\frac{1}{7}$

若3排在中间，则最小的数可能为$1,2$，最大的数可能为$4,5,6,7$，故$P\{X=3\}=\frac{2\times 4}{C_7^3}=\frac{8}{35}$

以此类推，$P\{X=4\}=\frac{9}{35},P\{X=5\}=\frac{8}{35},P\{X=6\}=\frac{1}{7}$，故$X$的概率分布律:

X	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{7}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{1}{7}$

2. X可能的取值为$0,1,2,4$，易得:

(1)

X	0	1	2	4
P	0.8	0.16	0.032	0.008

(2)$P\{X>2\}=P\{X=4\}=0.008$

(3)$P\{X=4|X\geq 2\}=\frac{P\{X=4\}}{P\{X\geq 2\}}=\frac{0.008}{0.04}=20\%$

3. X可能的取值为$0,1,2$，易得:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

计算过程: $P\{X=0\}=\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5},P\{X=1\}=\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{5},P\{X=2\}=\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$

4. (1)$P\{\text{没有中大奖}\}=(1-10^{-7})^n$

(2)$P\{\text{没有中大奖}\}=(1-10\times 10^{-7})^n=(1-10^{-6})^n$

注: 此题相当于每期彩票10^7注中有1注能中大奖，买10张则中奖的概率为原来的10倍

5. (1)$P\{\text{至少有1名男婴}\}=1-P\{\text{没有男婴}\}=1-0.49^3=88.24\%$

(2)$P\{\text{恰有1名男婴}\}=C_3^1(0.51)(0.49)^2=36.74\%$

(3)$P\{\text{1、2名是男婴, 3名是女婴}\}=(0.51)^2\times 0.49=12.74\%$

(4)$P\{\text{1、2名是男婴}\}=(0.51)^2=26.01\%$

6. (1)$P\{\text{恰有3个元件正常工作}\}=C_5^3(0.8)^3(0.6)^2=20.48\%$

(2)$P\{\text{至少有4个元件正常工作}\}=P\{\text{恰有4个元件正常工作}\}+P\{\text{5个元件都正常工作}\}=C_5^4(0.8)^4(0.2)+(0.8)^5=73.73\%$

(3)$P\{\text{至多有2个元件正常工作}\}=P\{\text{都不正常}\}+P\{\text{恰有1个正常}\}+P\{\text{恰有2个正常}\}=(0.2)^5+C_5^1(0.2)^4(0.8)+C_5^2(0.2)^3(0.8)^2=5.79\%$

7.依题: $P\{X=0\}=(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$

$P\{X=1\}=p_1(1-p_2)(1-p_3)+(1-p_1)p_2(1-p_3)+(1-p_1)(1-p_2)p_3$

$P\{X=2\}=p_1p_2(1-p_3)+p_1(1-p_2)p_3+(1-p_1)p_2p_3$

$P\{X=3\}=p_1p_2p_3$

将上述结果列表即得X的分布律

$P\{Y=1\}=p_1\quad P\{Y=1\}=(1-p_1)p_2\quad P\{Y=2\}=(1-p_1)(1-p_2)p_3\quad P\{Y=3\}=(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$

将上述结果列表即得Y的分布律

8. 依题易得: $P\{X=1\}=p,P\{X=2\}=(1-p)p,P\{X=3\}=(1-p)^2p,P\{X=4\}(1-p)^4p,P\{X=5\}=(1-p)^4p+(1-p)^5=(1-p)^4$

9. 参数为1的Poisson分布: $P\{X=k\}=\dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}$

(1)$P\{\text{至少有2位顾客}\}=1-P\{\text{没有顾客}\}-P\{\text{只有1位顾客}\}=1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}=1-\dfrac{2}{\mathrm{e}}$

(2)$P\{\text{至多有3位顾客}|\text{至少有2位顾客}\}=\dfrac{P\{\text{2位顾客}\}+P\{\text{3位顾客}\}}{P\{\text{至少有2位顾客}\}}=\dfrac{1}{1-\frac{2}{\mathrm{e}}}\left(\dfrac{1}{2\mathrm{e}}+\dfrac{1}{6\mathrm{e}}\right)=\dfrac{2}{3(\mathrm{e}-2)}$

10. 参数为10的Poisson分布: $P\{X=k\}=\dfrac{\mathrm{e}^{-10}\cdot 10^k}{k!}$

参数为0.5的Poisson分布: $P\{Y=k\}=\dfrac{\mathrm{e}^{-0.5}\cdot 0.5^k}{k!}$

(1)$P\{X\geq 2\}=1-P\{X<2\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}=1-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{10}}-\dfrac{10}{\mathrm{e}^{10}}\doteq 99.95\%$

(2)$P\{Y=0\}=\mathrm{e}^{-0.5}=60.65\%$

11. 参数为λ的Poisson分布: $P\{X=k\}=\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!}$

(1)$P\{X\geq 1\}=1-P\{X<1\}=1-P\{X=0\}=1-\mathrm{e}^{-\lambda}=1-\mathrm{e}^{-4.5}$

故$\lambda=4.5$, 进而$P\{X\geq 2\}=1-P\{X<2\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}=1-\mathrm{e}^{-4.5}-4.5\mathrm{e}^{-4.5}=1-5.5\mathrm{e}^{-4.5}$

(2)“已有1人候车”意为“至少1人候车”,“就1人候车”意为“恰有1人候车”, 故

$P\{X=1|X\geq 1\}=\dfrac{P\{X=1\}}{1-P\{X<1\}}=\dfrac{P\{X=1\}}{1-P\{X=0\}}=\dfrac{3.2\mathrm{e}^{-3.2}}{1-\mathrm{e}^{-3.2}}=\dfrac{16}{5(\mathrm{e}^{3.2}-1)}$

12. (1)10:00-12:00共120分钟, 即$t=120$, 故$\lambda t=6$, 参数为λt的Poisson分布: $P\{X=k\}=\dfrac{\mathrm{e}^{-6}\cdot 6^k}{k!}$

$\therefore P\{X=6\}=\dfrac{\mathrm{e}^{-6}\cdot 6^6}{6!}\doteq 16.06\%$

(2)$P\{X=6|X\geq 5\}=\dfrac{P\{X=6\}}{1-P\{X<5\}}=\dfrac{\frac{6^6}{720\mathrm{e}^6}}{1-\frac{1}{\mathrm{e}^6}-\frac{6}{\mathrm{e}^6}-\frac{36}{2\mathrm{e}^6}-\frac{216}{6\mathrm{e}^6}-\frac{1296}{24\mathrm{e}^6}}\doteq 22.47\%$

13. 题设条件为: n重伯努利实验, 当n足够大(n=3000), p足够小(p=1‰)时, 以参数为n,p的Poisson分布对参数为(n,p)的二项分布做近似,

故$\lambda=np=3$, 得: $P\{X\geq 2\}=1-P\{X<2\}=1-\dfrac{1}{\mathrm{e}^3}-\dfrac{3}{\mathrm{e}^3}=1-\dfrac{4}{\mathrm{e}^3}\doteq 80.09\%$

14. (1)大于6的球编号可能为7, 8, 9三种, 根据抽样原理得分布律: $P\{X=k\}=\dfrac{C_7^{3-k}C_3^k}{C_{10}^3}(k=0,1,2,3)$

(2)偶数球可能为0, 2, 4, 6, 8五种, 根据抽样原理得分布律: $P\{Y=k\}=C_3^k\left(\dfrac{5}{10}\right)^k\left(\dfrac{5}{10}\right)^{3-k}=C_3^k\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}C_3^k(k=0,1,2,3)$

(3)由题意知: 前$Z-1$次球的编号均不为9, 第Z次为9, 故分布律: $P\{Z=k\}=\left(\dfrac{9}{10}\right)^{k-1}\cdot\dfrac{1}{10},k\in\mathbb{N}^*$

(4)由题意知: 前4次球的编号为两奇两偶, 第5次为奇数, 由(2)类推得: $P=C_4^2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^4\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{16}$

15. (1)根据分布函数的特点易知:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x}{2}, & 0\leq x\leq 1,\\ \dfrac{1}{2}, & 1<x<2,\\ \dfrac{x-1}{2}, & 2\leq x\leq 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

注: $2\leq x\leq 3$时, 给出的概率为$P\{2\leq X\leq x\}=\dfrac{x-2}{2}$, 等价于$2\leq x\leq 3$时, $P\{X\leq x\}=\dfrac{x-2}{2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{x-1}{2}$, 故$F(x)=\dfrac{x-1}{2},2\leq x\leq 3$. 这一点也可从分布函数图象的连续性获知.

(2)由于$2\leq 2.5\leq 3$, 故由(1)易知: $F(2.5)=P\{X\leq 2.5\}=\dfrac{2.5-1}{2}=\dfrac{3}{4}$

16. (1)根据密度函数的归一性可知:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 c(4-x^2)\mathrm{d}x = \frac{16}{3}c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{3}{16}$$

(2)$x \leq 0$时, $F(x) = 0$; $x \geq 2$时, $F(x) = 1$; $0 < x < 2$时, $F(x) = \int_0^x \frac{3}{16}(4-x^2)\mathrm{d}x = \frac{3}{4}x - \frac{1}{16}x^3$, 即$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{3}{4}x - \frac{1}{16}x^3, & 0 < x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$

(3) $P\{-1 < X < 1\} = \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{3}{16}(4-x^2)\mathrm{d}x = \frac{11}{16}$

或$= F(1) - F(-1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{16} - 0 = \frac{11}{16}$

(4)$P\{\text{恰好发生2次}\} = C_5^2 \cdot \left(\frac{11}{16}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{16}\right)^3 = 14.42\%$

17. (1)根据分布函数图象的连续性易知:

$$\begin{cases} a \cdot 1^2 = b \cdot 1 \\ b \cdot 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}, \text{故} F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}x^2, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{2}x, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

(2)$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq x < 2, \\ 0, & x \geq 2. \end{cases}$

(3) $P\{0.5 < X < 1.5\} = \int_{0.5}^{1.5} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0.5}^{1} \frac{1}{2}x^2\mathrm{d}x + \int_1^{1.5} \frac{1}{2}x\mathrm{d}x = \frac{5}{8}$

或$= F(1.5) - F(0.5) = \frac{1}{2} \times 1.5 - \frac{1}{2} \times 0.5^2 = \frac{5}{8}$

18. (1)$P\{\text{等车时间小于10min}\} = P\{\text{7:20-7:30到车站}\} + P\{\text{7:40-7:45到车站}\} = \frac{10}{25} + \frac{5}{25} = \frac{3}{5}$

(2)$P\{\text{大于5分钟, 小于15分钟}\} = P\{\text{7:20-7:25到车站}\} + P\{\text{7:35-7:45到车站}\} = \frac{3}{5}$

(3)$P\{\text{大于5分钟}\} = P\{\text{7:20-7:25到车站}\} + P\{\text{7:30-7:45到车站}\} = \frac{4}{5}$

$P\{\text{乘上7:30班车}|\text{大于5分钟}\} = \frac{P\{\text{7:20-7:25到车站}\}}{P\{\text{大于5分钟}\}} = \frac{1/5}{4/5} = \frac{1}{4}$

注: 此题也可仿例2.4.4做

19. 依题:

$X \sim U(-1,3)$, 故$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x \in (-1,3), \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

$Y \sim B\left(n, \frac{3}{4}\right)$, 故$P\{Y = k\} = C_n^k \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}$

20. (1)$P\{X > 2.5\} = P\left\{\frac{X-5}{1} > -2.5\right\} = 1 - P\left\{\frac{X-5}{1} \leq -2.5\right\} = 1 - \Phi(-2.5) = \Phi(2.5) = 0.9938$

(2)$P\{X < 3.52\} = P\left\{\frac{X-5}{1} < -1.48\right\} = \Phi(-1.48) = 1 - \Phi(1.48) = 1 - 0.9306 = 0.0694$

(3)$P\{4 < X < 6\} = 2\Phi(1) - 1 = 0.6826$

(4)$P\{|X-5| > 2\} = 1 - P\{|X-5| \leq 2\} = 1 - [2\Phi(2) - 1] = 1 - 0.9544 = 0.0456$

21.$P\{X \geq 7\} = 1 - P\left\{\frac{X-6.5}{1} < 0.5\right\} = 1 - \Phi(0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085$

22. (1)$P\{X > 170\} = 1 - \Phi(0) = 0.5$

(2)$P\{165 < X < 175\} = P\left\{-1 < \frac{X-170}{5} < 1\right\} = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0.6826$

(3)$P\{X < 172\} = P\left\{\frac{X-170}{5} < 0.4\right\} = \Phi(0.4) = 0.6554$

23. $P\{X\le 25\}=P\left\{\dfrac{X-22.5}{2.5}\le 1\right\}=\Phi(1)=0.8413$

$P\{25<X\le 27.5\}=P\left\{1<\dfrac{X-22.5}{2.5}\le 2\right\}=\Phi(2)-\Phi(1)=0.9772-0.8413=0.1359$

$P\{X>27.5\}=P\left\{\dfrac{X-22.5}{2.5}>2\right\}=1-\Phi(2)=1-0.9772=0.0228$

(1)$P\{\text{患高血压}\}=0.8413\times 10\%+0.1359\times 15\%+0.0228\times 30\%=0.1114$

(2)$P\{\text{BMI超过25}|\text{患高血压}\}=\dfrac{P\{\text{患高血压且BMI超过25}\}}{P\{\text{患高血压}\}}=\dfrac{0.1359\times 15\%+0.0228\times 30\%}{0.1114}=0.2445$

(3) $P\{\text{至少有1人患高血压}\}=1-P\{\text{无人患高血压}\}$=$1-(0.8413\times 90\%+0.1359\times 85\%+0.0228\times 70\%)^3=0.2982$

或=$1-(1-0.1114)^3=0.2982$

24. $P\{X<200\}=P\left\{\dfrac{X-220}{25}<-0.8\right\}=\Phi(-0.8)=1-\Phi(0.8)=1-0.7881=0.2119$

$P\{200\le X\le 240\}=P\left\{-0.8<\dfrac{X-220}{25}\le 0.8\right\}=2\Phi(0.8)-1=2\times 0.7881-1=0.5762$

$P\{X>240\}=P\left\{\dfrac{X-220}{25}>0.8\right\}=1-\Phi(0.8)=0.2119$或$P\{X>240\}=1-P\{X<200\}-P\{200\le X\le 240\}=0.2119$

(1)$\alpha=0.2119\times 0.1+0.5762\times 0.001+0.2119\times 0.2=0.0641$

(2)$\beta=\dfrac{1}{0.0641}(0.2119\times 0.2)=0.6607$

(3)$\theta=0.2119\times[C_3^2(0.9)^2(0.1)+(0.9)^3]+0.5762\times[C_3^2(0.999)^2(0.001)+(0.999)^3]+0.2119\times[C_3^2(0.8)^2(0.2)+(0.8)^3]=0.9772$

附: 常见的一种错误解法: 每个电子元件能正常工作的概率$\overline{\alpha}=1-\alpha=0.9359$

$\therefore \theta=C_3^2\overline{\alpha}^2\alpha+\overline{\alpha}^3=0.9882$

错误原因: 应注意这3个元件在同一系统下, 电压相同, 即彼此的工作状态(也就是正常工作的概率)不是独立的.

25. 依题: $P\{X<12800\}=P\left\{\dfrac{x-\mu}{\sigma}<\dfrac{12800-\mu}{\sigma}\right\}=\Phi\left(\dfrac{12800-\mu}{\sigma}\right)=0.3$

$P\{X>10000\}=P\left\{\dfrac{x-\mu}{\sigma}>\dfrac{10000-\mu}{\sigma}\right\}=1-\Phi\left(\dfrac{10000-\mu}{\sigma}\right)=0.95$

查表知: $\begin{cases}\dfrac{12800-\mu}{\sigma}=-0.524\\ \dfrac{10000-\mu}{\sigma}=-1.645\end{cases}$ (或借助EXCEL, 利用“NORM.S.INV”函数也可求出)

解得: $\mu\doteq 14100,\sigma\doteq 2500$

26. 依题: X落在$(-\infty,x_1)$的概率为50%, 故可直接得: $x_1=\mu=15$

又$P\{X<x_2\}=P\left\{\dfrac{X-15}{2}<\dfrac{x_2-15}{2}\right\}=\Phi\left(\dfrac{x_2-15}{2}\right)=84\%$

查表或由EXCEL求得: $\dfrac{x_2-15}{2}=0.9945\Rightarrow x_2=16.989$

注: $X\sim N(15,4),\sigma^2=4,\sigma=2$

27. (1)根据密度函数的归一性可知:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}a\cdot \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=a\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\xlongequal[\text{知识可知}]{\text{由微积分}}a\sqrt{\pi}=1\Leftrightarrow a=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

附: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$的求解:

令$I=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$, 则

$$\begin{aligned}I^2&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\iint\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\xlongequal{\text{转为极坐标}}\iint\mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}(r^2)\xlongequal{\text{令}t=r^2}\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\pi\end{aligned}$$

$\therefore I=\sqrt{\pi}$, 即$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$

另解：由于正态分布的密度函数为$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$，题设随机变量密度函数符合这一形式，故可得$\sigma=0,\mu^2=\dfrac{1}{2},\sigma=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，进而$a=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$

注："另解"可行的原因是正态分布的密度函数是已知归一的，故可直接套用. 就本题而言，推荐"另解"，但应掌握归一性的解法.

(2)$P\left\{X>\dfrac{1}{2}\right\}=1-P\left\{X<\dfrac{1}{2}\right\}=1-P\left\{\dfrac{X-0}{\frac{1}{\sqrt{2}}}<\dfrac{1}{\sqrt{2}}\doteq 0.7071\right\}=1-\Phi(0.7071)=0.2398$

另解：概率论与数理统计中常用的误差函数$erf(x)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta$

$P\left\{X>\dfrac{1}{2}\right\}=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\left[1-erf\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]$

由EXCEL利用"ERF.PRECISE"函数可得$erf\left(\dfrac{1}{2}\right)=0.5205$

故$P\left\{X>\dfrac{1}{2}\right\}=\dfrac{1}{2}[1-0.5205]=0.2398$

28. 参数$\lambda=\dfrac{1}{8}$的指数分布：$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{8}\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$

(1)如上.

(2)$P\{X>10\}=\displaystyle\int_{10}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{10}^{+\infty}\dfrac{1}{8}\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-1.25}\doteq 0.2865$

(3)$P\{8<X<16\}=\displaystyle\int_8^{16}f(x)\mathrm{d}x=\int_8^{16}\dfrac{1}{8}\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-2}\doteq 0.2325$

29. 甲厂产品寿命：$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$，乙厂产品寿命：$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{6}\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$

(1)$P\{\text{大于6年}\}=0.4\displaystyle\int_6^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x+0.6\int_6^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x=0.4\int_6^{+\infty}\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}\mathrm{d}x+0.6\int_6^{+\infty}\dfrac{1}{6}\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}x}\mathrm{d}x\doteq 0.2749$

(2)$P\{X>1|X>\dfrac{1}{3}\}=\dfrac{P\{X>1\}}{P\{X>\frac{1}{3}\}}=\dfrac{\int_1^{+\infty}\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}\mathrm{d}x}{\int_{\frac{1}{3}}^{+\infty}\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}\mathrm{d}x}\doteq 0.8007$

30. (1)$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0.2\mathrm{e}^{-0.2x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$，可知：$X\sim E(0.2)$

(2) $P\{5<X<10\}=\displaystyle\int_5^{10}0.2\mathrm{e}^{-0.2x}\mathrm{d}x=0.2325$

或$=F(10)-F(5)=[1-\mathrm{e}^{-0.2\times 10}]-[1-\mathrm{e}^{-0.2\times 5}]=0.2325$

(3)$P\{X\le 5\}=\displaystyle\int_0^5 0.2\mathrm{e}^{-0.2x}\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-1}\doteq 0.6321$

$\therefore P\{\text{至少6天不超过5分钟}\}=C_7^6(1-\mathrm{e}^{-1})^6\cdot\mathrm{e}^{-1}+(1-\mathrm{e}^{-1})^7=(1-\mathrm{e}^{-1})^6(6\mathrm{e}^{-1}+1)$

31. (1)$P\{X>150\}=\displaystyle\int_{150}^{+\infty}0.01\mathrm{e}^{-0.01x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-1.5}$

$\therefore P\{\text{恰有2只寿命大于150小时}\}=C_3^2(\mathrm{e}^{-1.5})^2(1-\mathrm{e}^{-1.5})=3\mathrm{e}^{-3}(1-\mathrm{e}^{-1.5})$

(2)$P\{\text{会再买}\}=P\{\text{至少2只寿命大于150小时}\}=3\mathrm{e}^{-3}(1-\mathrm{e}^{-1.5})+(\mathrm{e}^{-1.5})^3=\mathrm{e}^{-3}(3-2\mathrm{e}^{-1.5})$

32. $P\{Y=10\}=P\{X=2\}=(0.7)^2=0.49$

$P\{Y=8\}=P\{X=3\}=(0.3)(0.7)^2+(0.7)(0.3)(0.7)=0.294$

$P\{Y=2\}=1-P\{Y=10\}-P\{Y=8\}=0.216$

故分布律：

Y	10	8	2
P	0.49	0.294	0.216

33. (1)根据归一性：$\displaystyle\int_{-1}^{2}c(4-x^2)\mathrm{d}x=9c=1\Leftrightarrow c=\dfrac{1}{9}$

$$(2)F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ \displaystyle\int_{-1}^{x}\frac{1}{9}(4-x^2)\mathrm{d}x, & -1<x<2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ \dfrac{4}{9}x-\dfrac{1}{27}x^3+\dfrac{11}{27}, & -1<x<2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$

$$Y=3X\Leftrightarrow P\{Y\le y\}=P\{3X\le y\}=P\left\{X\le\frac{y}{3}\right\}=\begin{cases}0, & x\le -3,\\ \dfrac{4}{27}x-\dfrac{1}{729}x^3+\dfrac{11}{27}, & -3<x<6,\\ 1, & x\ge 6.\end{cases}$$

$$\therefore g(y)=G'(y)=\begin{cases}\dfrac{4}{27}-\dfrac{1}{243}y^2, & -3<y<6,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$(3)H(z)=P\{Z\le z\}=P\{|X|\le z\}=P\{-z\le x\le z\}$

当$0\le z\le 1$时, $H(z)=\displaystyle\int_{-z}^{z}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-z}^{z}\frac{1}{9}(4-x^2)\mathrm{d}x=\frac{8}{9}z-\frac{2}{27}z^3$

当$1<z\le 2$时, $H(z)=\displaystyle\int_{-1}^{z}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{z}\frac{1}{9}(4-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4}{9}z-\frac{1}{27}z^3+\frac{11}{27}$

$$\therefore H(z)=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ \dfrac{8}{9}z-\dfrac{2}{27}x^3, & 0<z\le 1,\\ \dfrac{4}{9}z-\dfrac{1}{27}z^3+\dfrac{11}{27}, & 1<z<2,\\ 1, & z\ge 2.\end{cases}\qquad h(z)=H'(z)=\begin{cases}\dfrac{8}{9}-\dfrac{2}{9}x^2, & 0<z\le 1,\\ \dfrac{4}{9}-\dfrac{1}{9}z^2, & 1<z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

注: 本题的难点在于积分区间的确定, 可结合$f(x)$的图象进行分析.

34. (1)当$t>0$时, 第一个顾客于T到达, 即$t<T$时到达的顾客数$N(t)=0$, 而$N(t)\sim P(\lambda t)$, 即$P\{N(t)=k\}=\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$, 故$P\{N(t)=0\}=\mathrm{e}^{-\lambda t}$, 即$P\{T>t\}=\mathrm{e}^{-\lambda t}$(该式的意义即在区间$(0,t]$内没有顾客到达的概率), 故$P\{T<t\}=1-\mathrm{e}^{-\lambda t}$; 当$t\le 0$时, 时间区间无意义, 故$P\{T<t\}=0$, 综上: $F(T)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda t}, & t>0,\\ 0, & t\le 0.\end{cases}$

$(2)P\{T>t_0+t|T>t_0\}=\dfrac{P\{T>t_0+t\}}{P\{T>t_0\}}=\dfrac{1-(1-\mathrm{e}^{-\lambda(t_0+t)})}{1-(1-\mathrm{e}^{-\lambda t_0})}=\mathrm{e}^{-\lambda t}$

注: 该题的难点在于由泊松分布这一离散型随机变量向关于时间t的连续型随机变量的转化.

35. 由题: $X\sim U(0,1)$, 故$F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x, & 0<x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$

$$\therefore F_Y(y)=P\{Y<y\}=P\{X^n<y\}=P\{X<\sqrt[n]{y}\}=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ \sqrt[n]{y}, & 0<y<1,\\ 1, & y\ge 1.\end{cases}$$

故Y的密度函数为: $f_Y(y)=F'_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

36. 由题$X\sim\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$, 故$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3\pi}, & 0<x<\dfrac{3\pi}{2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

当$y<-1$时, $F_Y(y)=P\{Y<y\}=P\{\cos X<y\}=0$(利用函数本身的值域);

当$-1\le y<0$时, $F_Y(y)=P\{Y<y\}=P\{\cos X<y\}=P\{X<\arccos y\}=\displaystyle\int_{\arccos y}^{2\pi-\arccos y}\frac{2}{3\pi}\mathrm{d}x=\frac{4(\pi-\arccos y)}{3\pi}$(积分区间可由$y=\cos x$在$(0,\dfrac{3\pi}{2})$上的图象确定);

当$0\le y<1$时, $F_Y(y)=P\{Y<y\}=P\{\cos X<y\}=P\{X<\arccos y\}=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{2}{3\pi}\mathrm{d}x+\int_{\arccos y}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{3\pi}\mathrm{d}x=1-\frac{2\arccos y}{3\pi}$(积分区间的确定同上);

当$y\ge 1$时, $F_Y(y)=P\{Y<y\}=P\{\cos X<y\}=1$(利用函数本身的值域).

综上: $F_Y(y)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \dfrac{4(\pi-\arccos y)}{3\pi}, & -1\le y<0, \\ 1-\dfrac{2\arccos y}{3\pi}, & 0\le y<1, \\ 1, & y\ge 1. \end{cases}$

注: 本题的难点在于: 1. 对y进行区间划分; 2. 根据函数性质或图象确定积分区间.

37. $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 则$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$

故当$y>0$时, $F_Y(y)=P\{Y<y\}=P\{X^2<y\}=P\{-\sqrt{y}<X<\sqrt{y}\}=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})=\int_{-\infty}^{\sqrt{y}}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{-\sqrt{y}}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$

进而$f_Y(y)=F_Y'(y)=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(\sqrt{y}-\mu)^2}{2\sigma^2}}+\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(-\sqrt{y}-\mu)^2}{2\sigma^2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi y}\sigma}\left[\mathrm{e}^{-\frac{(\sqrt{y}-\mu)^2}{2\sigma^2}}+\mathrm{e}^{-\frac{(\sqrt{y}+\mu)^2}{2\sigma^2}}\right]$

故: $f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi y}\sigma}\left[\mathrm{e}^{-\frac{(\sqrt{y}-\mu)^2}{2\sigma^2}}+\mathrm{e}^{-\frac{(\sqrt{y}+\mu)^2}{2\sigma^2}}\right], & y>0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

38. (1)根据归一性: $\int_0^2(ax+b)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}ax^2+bx\Big|_0^2=2a+2b=1$

由$P\{X<1\}=\dfrac{1}{3}$得: $\int_0^1(ax+b)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}ax^2+bx\Big|_0^1=\dfrac{1}{2}a+b=\dfrac{1}{3}$

联立上两式解得: $a=\dfrac{1}{3},b=\dfrac{1}{6}$

(2)由(1): $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{6}, & 0<x<2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$, 故$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \dfrac{1}{6}x^2+\dfrac{1}{6}x, & 0<x<2, \\ 1, & x\ge 2. \end{cases}$

进而$F_Y(y)=P\{Y<y\}=P\{\sqrt{X}<y\}=P\{X<y^2\}=\begin{cases} 0, & y\le 0, \\ \dfrac{1}{6}x^4+\dfrac{1}{6}y^2, & 0<x<\sqrt{2}, \\ 1, & y\ge\sqrt{2}. \end{cases}$

故$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases} \dfrac{2}{3}y^3+\dfrac{1}{3}y, & 0<y<\sqrt{2}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

39. $X\sim N(0,1)$, 则$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$

(1)$Y=\mathrm{e}^X$, 则$F_Y(y)=P\{Y<y\}=P\{\mathrm{e}^X<y\}=P\{X<\ln y\}=\int_{-\infty}^{\ln y}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$

进而当$y>0$时, $f_Y(y)=F_Y'(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}y}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}$, 故: $f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}y}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}, & y>0, \\ 0, & y\le 0. \end{cases}$

(2)$Z=\ln|X|$, 则$F_Z(z)=P\{Z<z\}=P\{\ln|X|<z\}=P\{-\mathrm{e}^z<X<\mathrm{e}^z\}=\int_{-\infty}^{\mathrm{e}^z}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{-\mathrm{e}^z}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$

故$f_Z(z)=F_Z'(z)=\dfrac{2\mathrm{e}^z}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{e}^{2z}}{2}}=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{z-\frac{\mathrm{e}^{2z}}{2}}$

第三章　多元随机变量及其分布

1.有两个口袋均放着3个红球，2个白球，今从两口袋中同时各摸出1球互换(设每个口袋摸到每个球的概率相等). 记X, Y分别为两袋中互换球后的红球数，求(X, Y)的联合分布律及关于X的边际分布律.

2.设二元随机变量(X, Y)的联合分布律为

		Y	
		0	1
X	0	0.3	a
	1	b	0.2

且已知事件$\{X = 0\}$与事件$\{X + Y = 1\}$相互独立，求常数a, b的值.

3.设二元随机变量(X, Y)的联合分布律为

		Y		
		-1	0	1
X	1	a	0.1	b
	2	0.1	0.1	c

已知$P\{Y \le 0 | X < 2\} = 0.5, P\{Y = 1\} = 0.5$，求$a, b, c$的值及$X, Y$的边际分布律.

4.设随机变量X, Y的概率分布律分别为

X	0	1
p	0.4	0.6

X	0	1	2
p	0.2	0.5	0.3

且已知$P\{X = 0, Y = 0\} = P\{X = 1, Y = 2\} = 0.2$.

(1)试写出(X, Y)的联合分布律;

(2)写出在$\{X = 0\}$的条件下Y的条件分布律.

5.将一枚均匀的骰子抛2次，记X为第1次出现的点数，Y为2次点数的最大值.

(1)求(X, Y)的联合分布律及边际分布律;

(2)写出$\{Y = 6\}$的条件下X的条件分布律.

6.某公司出钱为职工订报，每位职工可以从A, B, C3份报中任订一份，已知有$\frac{2}{3}$的女职工决定订A报，有$\frac{3}{5}$的男职工决定订B报，余下的人在3份报中随机选一份. 公司男、女职工各占一半. 从该公司中随机找一职工，记

$$X = \begin{cases} 1, & \text{此人为女职工}, \\ 0, & \text{此人为男职工}, \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 1, & \text{此人订A报}, \\ 2, & \text{此人订B报}, \\ 3, & \text{此人订C报}. \end{cases}$$

(1)试写出(X, Y)的联合分布律;

(2)求Y的边际分布律;

(3)求$\{Y = 1\}$的条件下，X的条件分布律.

7.设某路段单位时间内发生的交通事故数X服从参数为λ的泊松分布，其中事故原因是超速的概率为0.1. 记因超速引发的事故数为Y.

(1)求(X, Y)的联合分布律;

(2)求Y的边际分布律.

8.略

9.设二元离散型随机变量(X,Y)具有边际分布函数

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ 0.3, & 1\le x<2,\\ 1, & x\ge 2,\end{cases}\qquad F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ 0.4, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1,\end{cases}$$

且已知$P\{X=1,Y=0\}=0.1$.

(1)求(X,Y)的联合分布律;

(2)求给定$\{Y=0\}$的条件下X的条件分布函数.

10.设A,B为两随机事件, 已知$P(A)=0.3, P(B|\overline{A})=0.5, P(B)=0.4$. 引入随机变量$X,Y$, 分别为

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生},\\ 0, & A\text{不发生},\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生},\\ 0, & B\text{不发生}.\end{cases}$$

(1)求(X,Y)的联合分布律;

(2)求X的边际分布函数;

(3)在已知$\{X=1\}$的条件下求Y的条件下求Y的条件分布函数.

11.设(X,Y)为二元随机变量, 已知$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=1,Y=1\}=0.1$, 现知$(X,Y)$落在$D=\{(x,y):0<x<1,0<y<1\}$的任一小区域内的概率与该小区域面积成正比, 且$(X,Y)$只能落在点$(0,0),(1,1)$及$D$内, 求$(X,Y)$的联合分布函数.

12.设二元随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}c(y-x), & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1)求常数c;

(2)求$P\{X+Y\le 1\}$的值;

(3)求$P\{X<0.5\}$的值.

13.设二元连续型随机变量(X,Y)具有联合密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}x, & 0<x<1,0<y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1)分别求X及Y的边际密度函数;

(2)求$P\{Y\le 2X\}$的值.

14.二元随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}c(x-1), & 1<x<2,2<y<4-x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1)求常数c;(2)求X,Y的边际密度函数$f_X(x),f_Y(y)$.

15.二元随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & 0<y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1)求X,Y的边际密度函数$f_X(x),f_Y(y)$;

(2)求条件密度函数$f_{Y|X}(y|x)$;

(3)当已知$\{X=x\}$时, 问Y的条件分布是均匀分布吗? 为什么?

16.设(X,Y)为二元随机变量, X的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda^2 x\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

其中$\lambda > 0$. 当$x > 0$时, Y的条件密度函数为

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{-y/x}, & y > 0, \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$$

(1)求(X, Y)的联合密度函数;

(2)求当$x > 0$时, 在给定$\{X = x\}$的条件下Y的条件分布函数;

(3)求$P\{Y > 1|X = 1\}$的值.

17.设二元随机变量(X, Y)的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{5}{4}x, & y^2 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1)求Y的边际密度函数$f_Y(y)$;

(2)求条件密度函数$f_{X|Y}(x|y)$;

(3)计算$P\left\{X > \dfrac{1}{2}\middle| Y = \dfrac{1}{2}\right\}$.

18.在区间$(0, 1)$内随机取一数X, 当$\{X = x\}$时在区间$(x, 1)$内随机取一数Y.

(1)求(X, Y)的联合密度函数;

(2)在已知$\{Y = y\}(0 < y < 1)$的条件下求X的条件密度函数.

19.有一件工作需要甲、乙两人接力完成, 完成时间不超过4小时. 设甲先干了X小时, 再由乙完成, 加起来共用Y小时. 若$X \sim U(1, 2)$, 在$\{X = x\}$条件下, Y的条件密度函数

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \dfrac{2(4-y)}{(3-x)^2}, & x + 1 < y < 4, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1)求(X, Y)的联合密度函数$f(x, y)$及$P\{Y < 3\}$;

(2)求Y的边际密度函数;

(3)已知两人完成工作共花了3小时, 求甲的工作时间不超过1.5小时的概率.

20.在A地至B地(距离为m公里)的公路上, 事故发生地在离A地X公里处, 事故处理车在离A地Y公里处, X与Y均服从$(0, m)$上均匀分布, 且设X与Y相互独立. 求事故车与处理车的距离Z的密度函数.

21.在半圆$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le, x > 0\}$内随机投点$A$, 设点$A$的坐标为$(X, Y)$.

(1)求X的边际密度函数$f_X(x)$;

(2)求$P\left\{X < \dfrac{1}{2}\right\}$的值;

(3)X与Y相互独立吗? 为什么?

22.设二元随机变量(X, Y)服从$N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$分布, 其中$\mu_1 = 0, \mu_2 = 1, \sigma_1^2 = 1, \sigma_2^2 = 2, \rho = -\dfrac{1}{2}$.

(1)试写出X, Y的边际密度函数;

(2)写出在$\{X = 0\}$的条件下Y的条件密度函数;

(3)求$P\{Y \le 1|X = 0\}$的值.

23.设二元随机变量(X, Y)的联合密度函数为

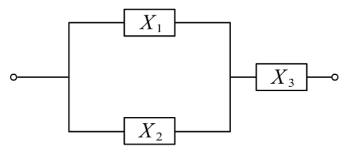
$$f(x, y) = \frac{1}{2}[f_1(x, y) + f_2(x, y)],$$

其中$f_1(x, y)$与$f_2(x, y)$分别为二元正态变量(X_1, Y_1)与(X_2, Y_2)的联合密度函数, 且已知$(X_i, Y_i)(i = 1, 2)$的边际分布均为标准正态分布.

(1)求X, Y的边际密度函数$f_X(x), f_Y(y)$;

(2)问当(X_i, Y_i)的分布中的参数$\rho_i = 0(i = 1, 2)$时, X与Y相互独立吗?

24.设一系统由3个独立的、正常工作时间分别为X_1, X_2, X_3的子系统组成(如图1). 且设$X_i, i = 1, 2, 3$均服从参数为λ的指数分布. 求该系统正常工作时间T的分布函数$F_T(t)$及密度函数$f_T(t)$.



25.(1)设随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立且均服从参数为$p(0 < p < 1)$的0-1分布, 记$Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$, 求Z的概率分布律;

(2)设$X \sim B(n, p), Y \sim B(n, p)$, X与Y相互独立. 记$W = X + Y$, 求W的概率分布律.

26.设随机变量X服从区间$(-a, a)$上均匀分布, 其中$a > 0$, $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, X与Y相互独立, $Z = X + Y$, 求Z的密度函数.

27.设二元随机变量(X, Y)的联合密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3-x-y}{3}, & 0 < x < 1, 0 < y < 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

若$Z = X + Y$, 求Z的密度函数.

28.某人连续参加2场比赛, 第1,2场比赛可得的奖金数分别为X, Y, 且已知

X	0	1000	5000
p	0.5	0.3	0.2

Y具有密度函数$f_Y(y)$, X与Y相互独立. 求此人奖金总数Z的密度函数.

29.市场近期某种蔬菜的价格(单位: 元/公斤)$X \sim U(6, 8)$(均匀分布), 某餐馆近期购买该种蔬菜的数量Y为8公斤和10公斤的概率均为0.5. 求:

(1)购买金额Z不大于60元的概率p;

(2)购买金额Z的分布函数$F_Z(z)$.

30.设一本书一页的错误个数X服从参数为λ的泊松分布, 且各页错误数相互独立. 现随机选10页, 其错误数分别记为$X_1, X_2, \cdots, X_{10}$.

(1)求$P\left\{\sum_{i=1}^{10} X_i \geq 2\right\}$;　　(2)求$P\{\max_{1\leq i\leq 10} X_i \geq 2\}$;

(3)求$P\left\{\max_{1\leq i\leq 10} X_i \geq 2 \,\middle|\, \min_{1\leq i\leq 10} X_i = 0\right\}$

31.设随机变量X, Y相互独立, 且具有以下概率分布律:

X	0	1	2
p	0.2	0.3	0.5

X	1	2	3
p	0.2	0.4	0.4

记$Z = X + Y, M = \max(X, Y), N = \min(X, Y)$, 分别求$Z, M, N$的概率分布律.

32.设一系统由2个独立的子系统组成, 分别以X, Y记两个子系统的正常工作时间, 且设X, Y分别服从参数为λ_1与λ_2的指数分布. 当这2个子系统(1)串联, (2)并联, (3)有备份(当一个损坏时另一个接着工作)时, 分别求系统正常工作时间T的密度函数.

33.设二元随机变量(X, Y)的联合密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}, & 0 < x < 2, 0 < y < 2x, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

记$Z = 2X - Y$, 求Z的密度函数.

34.设随机变量X与Y相互独立且都服从$B(1, p)$分布$(0 < p < 1)$. 定义

$$Z = \begin{cases} 1, & X + Y = 1, \\ 0, & X + Y \neq 1. \end{cases}$$

(1)对X独立观察n次, 求n次观察值之和W的概率分布律;

(2)求(X, Z)的联合分布律.

35.设随机变量$X \sim U(0, 1)$, Y的密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

X, Y相互独立, 记$M = \max(X, Y), N = \min(X, Y)$, 分别求$M, N$的密度函数.

第三章　多元随机变量及其分布课后题详解

1. (X,Y)的联合分布律: $P\{X=2,Y=4\}=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25}=P\{X=4,Y=2\},P\{X=3,Y=3\}=\frac{13}{25}$

或

		Y		
		2	3	4
X	2	0	0	$\frac{6}{25}$
	3	0	$\frac{13}{25}$	0
	4	$\frac{6}{25}$	0	0

X的边际分布律: $P\{X=2\}=P\{X=4\}=\frac{6}{25},P\{X=3\}=\frac{13}{25}$

2. $\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立$\Leftrightarrow P\{X=0\}\cdot P\{X+Y=1\}=P\{X=0,X+Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}\Leftrightarrow(0.3+a)\cdot(a+b)=a$

又: $0.3+0.2+a+b=1\Leftrightarrow a+b=0.5$

联立解得: $a=0.3,b=0.2$

3. $P\{Y\geq 0|X<2\}=\frac{P\{Y\leq 0,X<2\}}{P\{X<2\}}=\frac{P\{Y\leq 0,X=1\}}{P\{X=1\}}=\frac{a+0.1}{a+b+0.1}=0.5$, $P\{Y=1\}=b+c=0.5$

又: $a+b+c+0.3=1\Leftrightarrow a+b+c=0.7$

联立解得: $a=0.2,b=0.3,c=0.2$

故X的边际分布律: $P\{X=1\}=0.2+0.1+0.3=0.6,P\{X=2\}=0.1+0.1+0.2=0.4$

Y的边际分布律: $P\{Y=-1\}=0.2+0.1=0.3,P\{Y=0\}=0.1+0.1=0.2,P\{Y=1\}=0.3+0.2=0.5$

4. (1)

$$\left.\begin{aligned}&P\{X=0,Y=0\}=0.2\text{和}P\{Y=0\}=0.2\Leftrightarrow P\{X=1,Y=0\}=0\\&P\{X=1,Y=2\}=0.2\text{和}P\{Y=2\}=0.3\Leftrightarrow P\{X=0,Y=2\}=0.1\\&P\{X=0\}=0.4\Leftrightarrow P\{X=0,Y=1\}=0.1\\&P\{X=1\}=0.6\Leftrightarrow P\{X=1,Y=1\}=0.4\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow$$

		Y		
		0	1	2
X	0	0.2	0.1	0.1
	1	0	0.4	0.2

(2)$P\{Y=j,X=0\}=\begin{cases}0.5, & j=0,\\ 0.25, & j=1,\\ 0.25, & j=2.\end{cases}$ 或

Y	0	1	2
$P\{Y=j\|X=0\}$	0.5	0.25	0.25

5. (1) 联合分布律:

		Y					
		1	2	3	4	5	6
X	1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
	2		$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
	3			$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
	4				$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
	5		0			$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$
	6						$\frac{1}{6}$

边际分布律: $P\{X=i\}=\frac{1}{6}(i=1,2,3,4,5,6),P\{X=j\}=\frac{2j-1}{36}(j=1,2,3,4,5,6)$

(2)$P\{X=k|Y=6\}=\begin{cases}\frac{1}{11}, & k=1,2,3,4,5,\\ \frac{6}{11}, & k=6.\end{cases}$

6. (1)联合分布律:

		Y		
		1	2	3
X	1	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
	0	$\frac{1}{15}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{1}{15}$

(2)边际分布律:

Y	1	2	3
P	$\frac{7}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

(3)条件分布律:

X	1	0
$P\{X=i\|Y=1\}$	$\frac{35}{41}$	$\frac{6}{41}$

7. $(1)X \sim \pi(\lambda) \Leftrightarrow P\{X=k\} = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$, $P\{X=k, Y=h\} = C_k^h(0.1)^h(0.9)^{k-h} \cdot \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$即为联合分布律

$(2)P\{Y=h\} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} P\{X=k, Y=h\} = \dfrac{\mathrm{e}^{-0.1\lambda}(0.1\lambda)^h}{h!}$

注: 推导过程可参考例3.1.4, 需运用级数求和的知识.

8.略

9. (1)由边际分布函数可得X, Y的边际分布律: $P\{X=1\}=0.3, P\{X=2\}=0.7; P\{Y=0\}=0.4, P\{Y=1\}=0.6$

由$P\{X=1, Y=0\}=0.1$结合边际分布律可得: $P\{X=1, Y=1\}=0.2, P\{X=2, Y=0\}=0.3, P\{X=2, Y=1\}=0.4$, 即:

		Y	
		0	1
X	1	0.1	0.2
	2	0.3	0.4

(2)$\{Y=0\}$条件下X的条件分布律: $P\{X=1|Y=0\} = \dfrac{0.1}{0.4} = 0.25, P\{X=2|Y=0\} = \dfrac{0.3}{0.4} = 0.75$

故条件分布函数: $F_{X|Y}(x|0) = \begin{cases} 0, & x<1, \\ 0.25, & 1 \le x < 2, \\ 1, & x \ge 2. \end{cases}$

10. (1)由$P(A)=0.3$可得$P(\overline{A})=0.7$; 由$P(B|\overline{A}) = \dfrac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})} = 0.5 \Leftrightarrow P(\overline{A}B)=0.35$; 进而$P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A}) - P(\overline{A}B) = 0.7-0.35=0.35$; $P(AB) = P(B) - P(\overline{A}B) = 0.4-0.35=0.05$, 及$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = 0.3-0.05=0.25$, 故联合分布律:

		Y	
		0	1
X	0	0.35	0.35
	1	0.25	0.05

(2)由(1)可知X的边际分布律: $P\{X=0\} = P(\overline{A}) = 0.7, P\{X=1\} = P(A) = 0.3$, 故边际分布函数: $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x<0, \\ 0.7, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$

(3)$\{X=1\}$条件下Y的条件分布律: $P\{Y=0|X=1\} = \dfrac{0.25}{0.3} = \dfrac{5}{6}, P\{Y=1|X=1\} = \dfrac{0.05}{0.2} = \dfrac{1}{6}$

故条件分布函数: $F_{Y|X}(y|1) = \begin{cases} 0, & x<0, \\ \dfrac{5}{6}, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$

11. 由于$P\{X=0, Y=0\} = P\{X=1, Y=1\} = 0.1$, 故$(X, Y)$落在$D$内的总概率为$1-0.1-0.1=0.8$, 而$(X, Y)$落在$D$中任一小区域的概率与区域面积成正比, 故落在任一面积为A的区域的概率为$0.8\dfrac{A}{1 \times 1} = 0.8A$

当$x<0, y<0$时, $P(X \le x, Y \le y) = 0$;

当$0 \le x < 1, 0 \le y < 1$时, $P(X \le x, Y \le y) = 0.1 + 0.8xy$;

当$0 \le x < 1, y \ge 1$时, $P(X \le x, Y \le y) = 0.1 + 0.8x$;

当$x \ge 1, 0 \le y < 1$时, $P(X \le x, Y \le y) = 0.1 + 0.8y$;

当$x \ge 1, y \ge 1$时, $P(X \le x, Y \le y) = 1$;

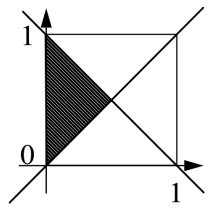
故(X, Y)的联合分布函数: $F(x, y) = \begin{cases} 0, & x<0, y<0, \\ 0.1+0.8xy, & 0 \le x < 1, 0 \le y < 1, \\ 0.1+0.8x, & 0 \le x < 1, y \ge 1, \\ 0.1+0.8y, & x \ge 1, 0 \le y < 1, \\ 1, & x \ge 1, y \ge 1. \end{cases}$

12. (1)由归一性: $\iint_D c(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\int_0^y c(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\left(cxy-\frac{1}{2}cx^2\right)_0^y\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{1}{2}cy^2\mathrm{d}y=\frac{1}{6}cy^3\Big|_0^1=\frac{1}{6}c=1\Leftrightarrow c=6$

或$\iint_D c(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\int_x^1 c(y-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{1}{2}cy^2-cxy\right)_x^1\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{2}c-cx+\frac{1}{2}cx^2\mathrm{d}x=\frac{1}{6}cx^3-\frac{1}{2}cx^2+\frac{1}{2}cx\Big|_0^1=\frac{1}{6}c=1\Leftrightarrow c=6$

(2)$P\{X+Y\le 1\}=P\{Y\le 1-X\}$, 故积分范围为$0<x<\frac{1}{2},x\le y\le 1-x$的三角形范围(如附图所示)

故$P\{X+Y\le 1\}=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_x^{1-x}6(y-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(3y^2-6xy\right)_x^{1-x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}12x^2-12x+3\mathrm{d}x=4x^3-6x^2+3x\big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$



或:

$P\{X+Y\le 1\}=P\{X\le 1-Y\}=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^y 6(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{2}}^1\int_0^{1-y}6(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}(6xy-3x^2)_0^y\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{2}}^1(6xy-3x^2)_0^{1-y}\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}3y^2\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{2}}^1(-9y^2+12y-3)\mathrm{d}y=y^3\big|_0^{\frac{1}{2}}+(-3y^3+6y^2-3y)\big|_{\frac{1}{2}}^1=\frac{1}{2}$

(3)$P\{X<0.5\}=\int_0^{0.5}\int_x^1 6(y-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_0^{0.5}3y^2-6xy\big|_x^1\mathrm{d}x=\int_0^{0.5}3x^2-6x+3\mathrm{d}x=x^3-3x^2+3x\big|_0^{0.5}=\frac{7}{8}$

注: 1.第(1)(2)题的关键都在于积分区间的确定, 通常需要运用二重积分的知识结合图象判断, 其中第(2)题尽管两种积分区间的选法是等价的, 但明显第一种方法计算量小, 从图上可以看出, 该积分区域中每个y值只对应一个x值, 而存在x值对应两个y值, 故先判断x的范围, 再用x界定y的范围较为简单;

2.第(3)题也可先求出X的边际密度函数, 即$f_X(x)=\int_x^1 6(y-x)\mathrm{d}y=3x^2-6x+3$, 再利用其积分求概率.

13. (1)当$0<x<1$时, $f_X(x)=\int_0^2 x\mathrm{d}y=2x$, 故$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

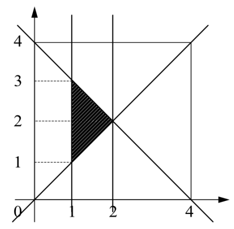
当$0<y<2$时, $f_Y(y)=\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$, 故$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(2)$P\{Y\le 2X\}=\int_0^1\int_0^{2x}x\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_0^1 2x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$

14. (1)由归一性: $\int_1^2\int_x^{4-x}c(x-1)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_1^2 cxy-cy\big|_x^{4-x}\mathrm{d}x=\int_1^2(-2cx^2+6cx-4c)\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}cx^3+3cx^2-4cx\Big|_1^2=\frac{1}{3}c=1\Leftrightarrow c=3$

(2)根据密度函数可得密度不为0的区域如附图阴影所示, 故:

当$1<x<2$时, $f_X(x)=\int_x^{4-x}3(x-1)\mathrm{d}y=-6x^2+18x-12$, 故$f_X(x)=\begin{cases}-6x^2+18x-12, & 1<x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$



当$1<y\le 2$时, $f_Y(y)=\int_0^y 3(x-1)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}y^2-3y$; 当$2<y<3$时, $f_Y(y)=\int_0^{4-y}3(x-1)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}y^2-3y+12$,

故$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{2}y^2-3y, & 1<y\le 2,\\ \frac{3}{2}y^2-3y+12, & 2<y<3\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

15. (1)当$x>0$时, $f_X(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-x}y\big|_0^x=x\mathrm{e}^{-x}$, 故$f_X(x)=\begin{cases}x\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

当$y>0$时, $f_Y(y)=\int_y^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}\big|_y^{+\infty}=\mathrm{e}^{-y}$, 故$f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(2)当$x>0$时, $f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x\mathrm{e}^{-x}}=\frac{1}{x}$, 故$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0<y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(3)由(2)可知, 当$0<y<x$时, $f_{Y|X}(y|x)=\frac{1}{x}$, 该密度函数符合均匀分布的特点, 即Y的条件分布是$(0,x)$上的均匀分布

16. (1)对X的边际密度函数, 由归一性可知$\int_0^{+\infty}\lambda^2x\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}\lambda x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-\lambda x})=-\lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}\big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x=0-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\big|_0^{+\infty}=\lambda=1$

当$x>0,y>0$时, $f(x,y)=f_{Y|X}(y|x)\cdot f_X(x)=\mathrm{e}^{-(x+y/x)}$, 故$f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-(x+y/x)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(2)当$y>0$时, $F_{Y|X}(y|x)=\int_0^y\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-y/x}\mathrm{d}y=-\mathrm{e}^{-y/x}\big|_0^y=1-\mathrm{e}^{-y/x}$

(3)$P\{Y>1|X=1\}=1-P\{Y\le 1|X=1\}=1-(1-\mathrm{e}^{-1})=\mathrm{e}^{-1}$

17. (1)当$-1<y<1$时, $f_Y(y)=\displaystyle\int_{y^2}^{1}\frac{5}{4}x\mathrm{d}x=\frac{5}{8}x^2\Big|_{y^2}^{1}=\frac{5}{8}-\frac{5}{8}y^4$, 故$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{5}{8}-\dfrac{5}{8}y^4, & -1<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

(2)当$-1<y<1$时, $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\dfrac{5x/4}{5/8-5/8y^4}=\dfrac{2x}{1-y^4}$, 故$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{2x}{1-y^4}, & y^2<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

(3)当$-1<y<1$时, $F_{X|Y}(x|y)=\displaystyle\int_{y^2}^{x}\frac{2x}{1-y^4}\mathrm{d}x=\frac{x^2-y^4}{1-y^4}$, 故$F_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^4}{1-y^4}, & y^2<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

故$P\left\{X>\dfrac{1}{2}\middle|Y=\dfrac{1}{2}\right\}=1-P\left\{X\le\dfrac{1}{2}\middle|Y=\dfrac{1}{2}\right\}=1-\dfrac{1/4-1/16}{1-1/16}=\dfrac{4}{5}$

注: 第(3)题亦可不求条件分布函数而直接将$\dfrac{1}{2}$和y^2代入上下限求定积分, 再令$y=\dfrac{1}{2}$得到结果, 还可直接将积分的下限和表达式中的y代为$\dfrac{1}{2}$, 结果相同.

18. (1)由题得: $X\sim U(0,1)$, 在$\{X=x\}$的条件下, $Y\sim U(x,1)$, 故$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$, $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$, 故

当$0<x<y<1$时, $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{1}{1-x}$, 故$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

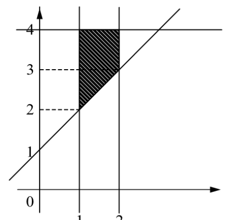
(2)当$0<y<1$时, $f_Y(y)=\displaystyle\int_0^y\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=-\ln(1-y)$, 进而$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\dfrac{-1}{(1-x)\ln(1-y)}$

故$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{-1}{(1-x)\ln(1-y)}, & 0<x<y,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

19. (1)由题: $f_X(x)=\begin{cases}1, & 1<x<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$, 故当$1<x<2, x+1<y<4$时, $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{2(4-y)}{(3-x)^2}$, 即$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2(4-y)}{(3-x)^2}, & 1<x<2, x+1<y<4,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

$P\{Y<3\}=\displaystyle\int_1^2\int_{x+1}^3\frac{2(4-y)}{(3-x)^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{2(4-y)}{(3-x)^2}\Big|_{x+1}^{3}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}\mathrm{d}x=\int_1^2 1-\frac{1}{(x-3)^2}\mathrm{d}x=x+\frac{1}{x-3}\Big|_1^2=\frac{1}{2}$

(2)根据密度函数可得密度不为0的区域如附图阴影所示, 故:



当$2<y\le 3$时, $f_Y(y)=\displaystyle\int_1^{y-1}\frac{2(4-y)}{(x-3)^2}\mathrm{d}x=\frac{2(y-4)}{x-3}\Big|_1^{y-1}=y-2$

当$3<y<4$时, $f_Y(y)=\displaystyle\int_1^2\frac{2(4-y)}{(x-3)^2}\mathrm{d}x=\frac{2(y-4)}{x-3}\Big|_1^2=4-y$

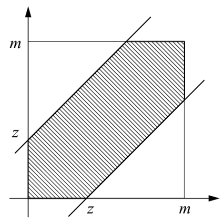
故$f_Y(y)=\begin{cases}y-2, & 2<y\le 3,\\ 4-y, & 3<y<4,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

(3)$P\{X\le 1.5|Y=3\}=\displaystyle\int_1^{1.5}f_{X|Y}(x|3)\mathrm{d}x=\int_1^{1.5}\frac{f(x,3)}{f_Y(3)}\mathrm{d}x=\int_1^{1.5}\frac{2}{(x-3)^2}\mathrm{d}x=\frac{-2}{x-3}\Big|_1^{1.5}=\frac{1}{3}$

20. 依题:

Z的分布函数为$F_Z(z)=P\{Z<z\}=P\{|Y-X|<z\}=P\{-z<Y-X<z\}=P\{X-z<Y<X+z\}$, 故

当$0<x<1, 0<y<1$时, 上述分布函数表示的区域如附图阴影部分所示;



由于X, Y为独立同分布, 且均为均匀分布, 故概率即阴影部分面积和整个密度函数不为零的区域面积之比, 即$F_Z(z)=\dfrac{m^2-(m-z)^2}{m^2}=\dfrac{2mz-z^2}{m^2}, 0<z<m$

故$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{m}\left(1-\dfrac{z}{m}\right), & 0<z<m,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

21. (1)由题: (X,Y)服从半圆D上的均匀分布, 故$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}, & x^2+y^2\le 1, x>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

故当$0<x<1$时, $f_X(x)=\displaystyle\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{2}{\pi}\mathrm{d}y=\frac{4}{\pi}\sqrt{1-x^2}$, 故$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

(2)$P\left\{X<\dfrac{1}{2}\right\}=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{4}{\pi}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \xlongequal{\text{查积分表}} \frac{4}{\pi}\left(\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}+\frac{1}{3}$

(3)当$-1<y<1$时, $f_Y(y)=\displaystyle\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\frac{2}{\pi}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}$, 故当$x^2+y^2\le 1, x>0$时, $f(x,y)\ne f_X(x)\cdot f_Y(x)$, 故$X,Y$不相互独立.

22. (1)根据二元正态分布的性质可知, 其边际分布也为正态分布, 即$X\sim N(0,1), Y\sim N(1,2)$, 故$f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, f_Y(y)=\dfrac{1}{\sqrt{4\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-1)^2}{4}}$

(2)根据二元正态分布的性质可知, 当$\{X=x\}$时, Y的条件分布也为正态分布, 且$Y\sim N\left(\mu_2+\rho\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),(\sqrt{1-\rho^2}\sigma_2)^2\right)$, 故当$\{X=0\}$时, $Y\sim N\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$, 即$f_{Y|X}(y|0)=\dfrac{1}{\sqrt{3\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-1)^2}{3}}$

(3)由(2): $\{X=0\}$时, $Y\sim N\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$, 故易知$P\{Y\le 1|X=0\}=50\%$

23. 依题: $f_{X_1}(x)=f_{X_2}(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, f_{Y_1}(y)=f_{Y_2}(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}$

(1)$f_X(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}[f_1(x,y)+f_2(x,y)]\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x,y)\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(x,y)\mathrm{d}y\right]=\frac{1}{2}[f_{X_1}(x)+f_{X_2}(x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, 同理$f_Y(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}$

(2)$\rho_i=0(i=1,2)$, 则$f_1(x,y)=f_2(x,y)=\dfrac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$, 故$f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=f_X(x)\cdot f_Y(y)$, 故$X,Y$相互独立.

24. 系统正常工作, 即X_3正常工作且X_1,X_2至少有一个正常工作; 分布函数$F_T(t)=P\{T\le t\}=1-P\{T>t\}$, 其中$P\{T>t\}$即系统寿命大于$t$的概率, 也即$X_3$寿命大于$t$且$X_1,X_2$至少有一个寿命大于$t$的概率, 故当$t>0$时:

$F_T(t)=P\{T\le t\}=1-P\{T>t\}=1-\mathrm{e}^{-\lambda t}\underbrace{[1-(1-\mathrm{e}^{-\lambda t})^2]}_{X_1,X_2\text{寿命都小于}t\text{的对立}}=1-2\mathrm{e}^{-2\lambda t}+\mathrm{e}^{-3\lambda t}$, 即$F_T(t)=\begin{cases}1-2\mathrm{e}^{-2\lambda t}+\mathrm{e}^{-3\lambda t}, & t>0,\\ 0, & t\le 0.\end{cases}$

进而$f_T(t)=F_T'(t)=\begin{cases}4\mathrm{e}^{-2\lambda t}-3\mathrm{e}^{-3\lambda t}, & t>0,\\ 0, & t\le 0.\end{cases}$

25. (1)$P\{Z=k\}=P\{\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i=k\}$即$X_i$中有$k$个为1, $n-k$个为0的概率, 故$P\{Z=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

或: $X\sim 0-1(p)\Leftrightarrow Z\sim B(n,p)$, 故$P\{Z=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

(2)$P\{W=k\}=P\{X+Y=k\}=\displaystyle\sum_{l=0}^k P\{X=l\}P\{Y=k-l\}=\sum_{l=0}^k C_m^l p^l(1-p)^{m-l}\cdot C_n^{k-l}p^{k-l}(1-p)^{n-k+l}=p^k(1-p)^{m+n-k}\sum_{l=0}^k C_m^l C_n^{k-l}=C_{m+n}^k p^k(1-p)^{m+n-k}*$

$*\displaystyle\sum_{l=0}^k C_m^l C_n^{k-l}=C_{m+n}^k$的证明:

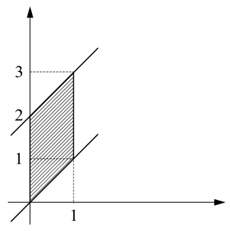
考虑恒等式$(1+x)^m(1+x)^n=(1+x)^{m+n}$, 对等式两边做二项展开, 其中$x^k(k<m,k<n)$的系数: 左边为$\displaystyle\sum_{l=0}^k C_m^l C_n^{k-l}$, 右边为$C_{m+n}^k$, 故两者相等.

26. 由于X,Y相互独立, 故$f_Z(z)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y$, 其中$X\sim U(-a,a)$, 故$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}, & -a<x<a,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

进而$f_X(z-y)=\dfrac{1}{2a}(z-a<y<z+a)$, 故$f_Z(z)=\displaystyle\int_{z-a}^{z+a}\frac{1}{2a}f_Y(y)\mathrm{d}y$; 由于$Y\sim N(\mu,\sigma^2)$, 故$\displaystyle\int_{z-a}^{z+a}f_Y(y)\mathrm{d}y=\Phi\left(\frac{z+a-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{z-a-\mu}{\sigma}\right)$, 故$f_Z(z)=\dfrac{1}{2a}\left[\Phi\left(\dfrac{z+a-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{z-a-\mu}{\sigma}\right)\right]$

27. 由于$Z=X+Y$, 故当$0<x<1$时, $0<y<2\Leftrightarrow 0<z-x<2\Leftrightarrow x<z<x+2$, 由$0<x<1, x<z<x+2$围成的区域如附图阴影区域所示, 故:

当$0<x<1, x<z<x+2$时, $f(x,z-x)=\dfrac{3-z}{3}$, 故:



当$0<z\le 1$时, $f_Z(z)=\displaystyle\int_0^z \frac{3-z}{3}\mathrm{d}x=\frac{(3-z)z}{3}$; 当$1<z\le 2$时, $f_Z(z)=\displaystyle\int_0^1 \frac{3-z}{3}\mathrm{d}x=\frac{3-z}{3}$;

当$2<z<3$时, $f_Z(z)=\displaystyle\int_{z-2}^1 \frac{3-z}{3}\mathrm{d}x=\frac{(3-z)^2}{3}$

综上: $f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{(3-z)z}{3}, & 0<z\le 1,\\ \dfrac{3-z}{3}, & 1<z\le 2,\\ \dfrac{(3-z)^2}{3}, & 2<z<3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

28. 由题易知: $Z=X+Y$, 且X,Y相互独立, 故由全概率公式:

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}\\&=P\{X=0\}P\{X+Y\le z|X=0\}+P\{X=1000\}P\{X+Y\le z|X=1000\}+P\{X=5000\}P\{X+Y\le z|X=5000\}\\&=P\{X=0\}P\{Y\le z\}+P\{X=1000\}P\{Y\le z-1000\}+P\{X=5000\}P\{Y\le z-5000\}\\&=0.5P\{Y\le z\}+0.3P\{Y\le z-1000\}+0.2P\{Y\le z-5000\}\\&=0.5F_Y(z)+0.3F_Y(z-1000)+0.2F_Y(z-5000)\end{aligned}$$

故$f_Z(z)=F_Z'(z)=0.5f(z)+0.3f(z-1000)+0.2f(z-5000)$

29. 由题: $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 6<x<8,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$, $P\{Y=8\}=P\{Y=10\}=0.5$, X,Y相互独立, $Z=X\cdot Y$

(1)由全概率公式: $p=P\{Z\le 60\}=P\{XY\le 60\}=P\{Y=8\}P\{XY\le 60|Y=8\}+P\{Y=10\}P\{XY\le 60|Y=10\}=0.5(P\{Y\le \dfrac{15}{2}\}+P\{Y\le 6\})\xlongequal{P\{Y\le 6\}=0}0.5\displaystyle\int_6^{\frac{15}{2}}\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{3}{8}$

(2)由于$6<x<8, y\in\{8,10\}$时, z的概率密度不为0, 故:

当$z\le 48$时, $F_Z(z)=0$;

当$48<z<60$时, $F_Z(z)=0.5\displaystyle\int_6^{z/8}\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{z-48}{32}$;

当$60\le z<64$时, $F_Z(z)=0.5\displaystyle\int_6^{z/8}\frac{1}{2}\mathrm{d}x+0.5\int_6^{z/10}\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{z-48}{32}+\frac{z-60}{40}=\frac{9z-480}{160}$;

当$64\le z<80$时, $F_Z(z)=0.5\displaystyle\int_6^{z/10}\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{z-60}{40}$;

当$z\ge 80$时, $F_Z(z)=1$.

综上: $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le 48,\\ \dfrac{z-48}{32}, & 48<z<60,\\ \dfrac{9z-480}{160}, & 60\le z<64,\\ \dfrac{z-60}{40}, & 64\le z<80,\\ 1, & z\ge 80.\end{cases}$

30. $X_i\sim P(\lambda)\Leftrightarrow P\{X_i=k\}=\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

(1)$P\left\{\displaystyle\sum_{i=1}^{10}X_i\ge 2\right\}=1-P\left\{\sum_{i=1}^{10}X_i<2\right\}=1-\left(P\left\{\sum_{i=1}^{10}X_i=0\right\}+P\left\{\sum_{i=1}^{10}X_i=1\right\}\right)$

其中$P\left\{\displaystyle\sum_{i=1}^{10}X_i=0\right\}=P\{X_i\text{都为}0\}=(\mathrm{e}^{-\lambda})^{10}=\mathrm{e}^{-10\lambda}$, $P\left\{\displaystyle\sum_{i=1}^{10}X_i=1\right\}=P\{X_i\text{中仅有一个为}1\}=C_{10}^1(\lambda\mathrm{e}^{-\lambda})(\mathrm{e}^{-\lambda})^9=10\lambda\mathrm{e}^{-10\lambda}$

故$P\left\{\displaystyle\sum_{i=1}^{10}X_i\ge 2\right\}=1-\mathrm{e}^{-10\lambda}+10\lambda\mathrm{e}^{-10\lambda}$

(2)$P\{\max\limits_{1\le i\le 10}X_i\ge 2\}=P\{\exists i, X_i\ge 2\}=1-P\{\forall i, X_i<2\}=1-(P\{X_i=0\text{或}X_i=1\})^{10}=1-(\mathrm{e}^{-\lambda}+\lambda\mathrm{e}^{-\lambda})^{10}=1-\mathrm{e}^{-10\lambda}(1+\lambda)^{10}$

(3)首先$P\{\min\limits_{1\le i\le 10}X_i=0\}=P\{\exists i, X_i=0\}=1-P\{\forall i, X_i>0\}=1-(P\{X_i>0\})^{10}=1-(1-P\{X_i=0\})^{10}=1-(1-\mathrm{e}^{-\lambda})^{10}$

其次$P\{\min\limits_{1\le i\le 10}X_i=0\text{且}\max\limits_{1\le i\le 10}X_i<2\}=P\{\min\limits_{1\le i\le 10}X_i=0\text{且}\max\limits_{1\le i\le 10}X_i=0\}+P\{\min\limits_{1\le i\le 10}X_i=0\text{且}\max\limits_{1\le i\le 10}X_i=1\}$

$=P\{\text{全为}0\}+\sum\limits_{j=1}^{9}P\{j\text{个}X_i\text{为}0,10-j\text{个}X_i\text{为}1\}=(\mathrm{e}^{-\lambda})^{10}+\sum\limits_{j=1}^{9}C_{10}^{j}(\mathrm{e}^{-\lambda})^{j}(\lambda\mathrm{e}^{-\lambda})^{10-j}\xlongequal{\text{由二项式定理}}(\mathrm{e}^{-\lambda})^{10}+(\mathrm{e}^{-\lambda}+\lambda\mathrm{e}^{-\lambda})^{10}-(\mathrm{e}^{-\lambda})^{10}-(\lambda\mathrm{e}^{-\lambda})^{10}=\mathrm{e}^{-10\lambda}[(1+\lambda)^{10}-\lambda^{10}]$

故$P\left\{\max\limits_{1\le i\le 10}X_i\ge 2\middle|\min\limits_{1\le i\le 10}X_i=0\right\}=1-P\left\{\max\limits_{1\le i\le 10}X_i<2\middle|\min\limits_{1\le i\le 10}X_i=0\right\}=1-\dfrac{P\{\min\limits_{1\le i\le 10}X_i=0\text{且}\max\limits_{1\le i\le 10}X_i<2\}}{P\{\min\limits_{1\le i\le 10}X_i=0\}}=1-\dfrac{\mathrm{e}^{-10\lambda}[(1+\lambda)^{10}-\lambda^{10}]}{1-(1-\mathrm{e}^{-\lambda})^{10}}$

31. (1)Z的可能取值: $1(0+1),2(0+2,1+1),3(0+3,1+2,2+1),4(1+3,2+2),5(2+3)$, 故易得$Z$的分布律:

Z	1	2	3	4	5
P	0.04	0.14	0.3	0.32	0.2

(2)M的可能取值: $1[(0,1),(1,1)],2[(0,2),(1,2),(2,1),(2,2)],3[(0,3),(1,3),(2,3)]$, 故易得$M$的分布律:

M	1	2	3
P	0.1	0.5	0.4

(3)N的可能取值: $0[(0,1),(0,2),(0,3)],1[(1,1),(1,2),(1,3),(2,1)],2[(2,2),(2,3)]$, 故易得$N$的分布律:

N	0	1	2
P	0.2	0.4	0.4

32. (1)串联工作时，只要有一个子系统损坏，系统便损坏，因此系统正常工作的时间取决于两个子系统中工作时间较短的那个，即$Z_1=\min(X,Y)$,

故$F_{Z_1}(t)=1-[1-F_X(t)]\cdot[1-F_Y(t)]=1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}=1-\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$, 进而$f_{Z_1}(t)=F'_{Z_1}(t)=(\lambda_1+\lambda_2)\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)t},t>0$

即$f_{Z_1}(t)=\begin{cases}(\lambda_1+\lambda_2)\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}, & t>0,\\ 0, & t\le 0.\end{cases}$

(2)并联工作时，两个子系统都损坏时，系统才损坏，因此系统正常工作的时间取决于两个子系统中工作时间较长的那个，即$Z_2=\max(X,Y)$,

故$F_{Z_2}(t)=F_X(t)\cdot F_Y(t)=1-(\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}+\mathrm{e}^{-\lambda_2 t})+\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$, 进而$f_{Z_2}(t)=F'_{Z_2}(t)=\lambda_1\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}+\lambda_2\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}-(\lambda_1+\lambda_2)\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)t},t>0$

即$f_{Z_2}(t)=\begin{cases}\lambda_1\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}+\lambda_2\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}-(\lambda_1+\lambda_2)\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}, & t>0,\\ 0, & t\le 0.\end{cases}$

(3)有备份时，主要子系统（假设为X）损坏后备份子系统（假设为Y）开始工作，备份也损坏后系统损坏，故$Z_3=X+Y$; $f_X(x)\cdot f_Y(t-x)=\lambda_1\lambda_2\mathrm{e}^{-(\lambda_1-\lambda_2)x}\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}$, 故:

当$\lambda_1\ne\lambda_2$时, $f_{Z_3}(t)=\int_0^t\lambda_1\lambda_2\mathrm{e}^{-(\lambda_1-\lambda_2)x}\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\mathrm{d}x=\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}(\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}-\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}),t>0$, 即$f_{Z_3}(t)=\begin{cases}\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}(\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}-\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}), & t>0,\\ 0, & t\le 0.\end{cases}$;

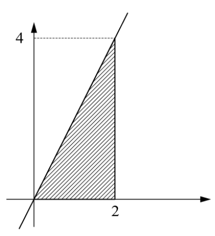
当$\lambda_1=\lambda_2=\lambda$时, $f_{Z_3}(t)=\int_0^t\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}x=\lambda^2 t\mathrm{e}^{-\lambda t},t>0$, 即$f_{Z_3}(t)=\begin{cases}\lambda^2 t\mathrm{e}^{-\lambda t}, & t>0,\\ 0, & t\le 0.\end{cases}$

33. 由于$Z=2X-Y$, 故当$0<x<2$时, $0<y<2x\Leftrightarrow 0<2x-z<2x\Leftrightarrow 0<z<2x$, 由$0<x<2,0<z<2x$围成的区域如附图所示, 故:

当$0<x<2,0<z<2x$时, $f(x,2x-z)=\dfrac{1}{4}$, 故:

当$z\le 0$或$z\ge 4$时, $f_Z(z)=0$; 当$0<z<4$时, $f_Z(z)=\int_{z/2}^{2}\dfrac{1}{4}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{z}{8}$;

综上: $f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}-\dfrac{z}{8}, & 0<z<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$



34. (1)X为两点分布, 故易知$W\sim B(n,p)$, 故$P\{W=k\}=C_n^k p^k(1-p)^k$

(2)当$X=0,Y=0$时, $Z=0$, 故$P\{X=0,Z=0\}=P\{X=0,Y=0\}=(1-p)^2$;

当$X=1,Y=0$时, $Z=1$, 故$P\{X=1,Z=1\}=P\{X=1,Y=0\}=p(1-p)$;

当$X=0,Y=1$时, $Z=1$, 故$P\{X=0,Z=1\}=P\{X=0,Y=1\}=p(1-p)$;

当$X=1,Y=1$时, $Z=0$, 故$P\{X=1,Z=0\}=P\{X=1,Y=1\}=p^2$

综上:

		Z	
		0	1
X	0	$(1-p)^2$	$p(1-p)$
	1	p^2	$p(1-p)$

35. 依题: $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$, $F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x, & 0<x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$; $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ y^2, & 0<y<1,\\ 1, & y\ge 1.\end{cases}$

故$F_M(t)=F_X(t)\cdot F_Y(t)=\begin{cases}0, & t\le 0,\\ t^3, & 0<t<1,\\ 1, & t\ge 1.\end{cases}$, 进而$f_M(t)=F_M'(t)=\begin{cases}3t^2, & 0<t<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

$F_N(t)=F_X(t)+F_Y(t)-F_X(t)\cdot F_Y(t)=\begin{cases}0, & t\le 0,\\ t+t^2-t^3, & 0<t<1,\\ 1, & t\ge 1.\end{cases}$, 进而$f_N(t)=F_N'(t)=\begin{cases}1+2t-3t^2, & 0<t<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

第四章　随机变量的数字特征

1.某批产品共有M件, 其中正品N件($0 \le N \le M$). 从整批产品中随机地进行放回抽样, 每次抽取一件, 记录产品是正品还是次品后放回, 抽取了n次($n \ge 1$). 试求这n次中抽到正品的平均次数.

2.一位即将毕业的大学生有意向与某企业签订就业合同. 该企业给他两个年薪方案供选择. 方案1: 年薪3万元; 方案二: 底薪1.2万元, 如果业绩到达到公司要求, 则再可获得业绩津贴3万元, 如果达不到, 则没有业绩津贴, 一般约有80%的可能性可以达到公司的业绩要求. 问: 他应当采用哪种方案? 并说明理由.

3.一袋中有8个球, 分别编号为$1 \sim 8$号, 现随机从袋中取出2球, 记其中最大号码的球号为X, 求$E(X)$.

4.直线上一质点在时刻0从原点出发, 每经过一个单位时间向左或者向右移动一个单位, 若每次移动是相互独立的, 并且向右移动的概率为$p(0 < p < 1)$. η_n表示到时刻n为止质点向右移动的次数, S_n表示在时刻n时质点的位置, $n \ge 1$. 求η_n与S_n的数学期望.

5.抛一枚均匀的硬币, 直到正、反两面都出现后停止试验, 求试验的平均次数.

6.设二元随机变量(X, Y)的联合密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2}{x}\mathrm{e}^{-2x}, & 0 < x < +\infty, 0 < y < x, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求: (1)$E(X)$; (2)$E(3X-1)$; (3)$E(XY)$的值.

7.已知一根长度为1的棍子上有个标志点Q, 现随机地将此棍子折成两端.

(1)求包含Q点的那一段棍子的平均长度(若截点刚好在Q点, 则认为Q包含在较短的一截内);

(2)当Q位于棍子何处时, 包含Q点的棍子平均长度达到最大?

8.甲、乙两人约定上午8:00-9:00在某地见面, 两人均在该时段随机到达, 且到达时间独立. 求两人中先到的人需要等待的平均时间.

9.为诊断500人是否有人患有某种疾病, 抽血化验. 可用两种方法: (1)每个人化验一次; (2)分成k人一组$\left(共\dfrac{500}{k}组, 假设\dfrac{500}{k}为正整数, k > 1\right)$. 将每组$k$人的血样集中起来一起检验, 如果化验结果为阴性, 则说明组内的每人都是阴性, 就无需分别化验; 若检验结果为阳性, 则说明这k人中至少有一人患病, 那么就对该组内的k人再单独化验. 如果此病的得病率为20%, 试问哪种方法的平均检验次数相对少些?

10.某设备无故障运行的时间T(以小时计)服从数学期望为$\dfrac{1}{\lambda}(\lambda > 0)$的指数分布. 若设备在一天8个小时的工作时间内发生故障就自动停止运行待次日检修, 否则就运行8小时候停止. 求该设备每天运行的平均时间.

11.某电子监视器的圆形屏幕半径为$r(r > 0)$, 若目标出现的位置点A服从均匀分布. 设A的平面直角坐标为(X, Y).

(1)求$E(X)$与$E(Y)$;　　(2)求点A与屏幕中心位置$(0, 0)$的平均距离.

12.一个袋子中有15个均匀的球, 其中a个是白球, 其他的是黑球. 不放回的随机抽取n次(每次取一球), 记取到的白球数为ξ_n. 当$n = 2$时, 已知$E(\xi_2) = \dfrac{4}{3}$.

(1)求a;　　(2)当$n = 9$时, 求$E(\xi_9)$.

13.在区间$(0, 1)$中随机地取n个点($n \ge 2$), 求相距最远的两个点间距离的数学期望.

14.设进入大型购物中心的顾客有可能去其中的一家冷饮店购买冷饮, 购买的概率为$p(0 < p < 1)$. 若在一天的营业时间内进入该购物中心的顾客数X服从参数为$\lambda(\lambda > 0)$的泊松分布, 求这一天去该冷饮店购买冷饮的顾客数Y的分布及数学期望.

15.接第12题. 当$n = 2$时, 求$\mathrm{Var}(\xi_2)$.

16.随机变量X服从Γ分布, 密度函数为

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}, \quad x > 0,$$

其中, $\alpha > 0$称为“形状参数”, $\lambda > 0$称为“尺寸参数”. 求$E(X^k)(k \ge 1)$和$\mathrm{Var}(X)$.

17.设随机变量X服从拉普拉斯分布, 密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|},\quad -\infty<x<+\infty,$$

计算X与$|X|$的方差.

18.机器处于不同状态时制造产品的质量有所差异. 如果机器运作正常, 则产品的正品率为98%; 如果机器老化, 则产品的正品率为90%; 如果机器处于需要维修的状态, 则产品的正品率为74%. 机器正常运作的概率为0.7, 老化的概率为0.2, 需要维修的概率为0.1. 先随机抽取了100件产品(假设生产这些产品的机器的状态相互独立).

(1)求产品中非正品数的数学期望和方差;

(2)在已知这些产品都是正常机器制造出来的情况下, 求正品数的数学期望和方差.

19.随机变量X与Y独立同分布, 都服从参数为$\frac{1}{2}$的0-1分布.

(1)求$P\{X+Y\geq 1\}$;　　(2)计算$E(X\cdot(-1)^Y)$及$\mathrm{Var}(X\cdot(-1)^Y)$.

20.设系统L由两个相互独立的子系统L_1和L_2构成, L_1和L_2的寿命X与Y分别服从期望为$\frac{1}{2},\frac{1}{4}$的指数分布. 试就下列三种连接方式写出系统L寿命Z的数学期望和变异系数:

(1)L_1和L_2串联;　　(2)L_1和L_2并联;　　(3)L_2为L_1的备用.

21.(接第17题)(1)求X与$|X|$的相关系数, 并判断两者是否相关?

(2)判断X与$|X|$是否独立?

22.设随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}(1+xy), & 若|x|<1,|y|<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(1)计算X与Y的相关系数, 并判断它们的独立性和相关性;

(2)计算X^2与Y^2的相关系数, 并判断它们的独立性和相关性.

23.独立地抛一枚均匀的骰子n次$(n\geq 2)$. 记X,Y分别表示试验中"1点朝上"以及"6点朝上"出现的次数, 求X与Y的相关系数, 并判断两者的相关关系.

24.随机三角形ABC, 角A与角B独立同分布, 其概率分布律均为

A	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$
p	λ	θ	$1-\lambda-\theta$

其中$\lambda>0,\theta>0$, 且满足$\lambda+\theta<1$. 已知$E(\sin A)=E(\cos A)=\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}+1}{8}$.

(1)写出(A,B)的联合分布律;

(2)求$E(\sin C)$.

(3)求角A与角C的相关系数, 并由此判断它们的相关性(若相关, 要求说明是正相关还是负相关).

25.设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$均服从标准正态分布并且相互独立. 记$S_k=\sum\limits_{i=1}^{k}X_i,T_k=\sum\limits_{j=n_0+1}^{n_0+k}X_j$, 其中$1\leq n_0<k<n_0+k\leq n$, 求$S_k$与$T_k$的相关系数.

26.设$X\sim N(0,1)$, Y的可能取值为±1, 且$P\{Y=1\}=p(0<p<1)$. 若X与Y相互独立, 并记$\xi=X\cdot Y$.

(1)证明: $\xi\sim N(0,1)$;

(2)计算$\rho_{X\xi}$, 并判断X与ξ的相对性和独立性.

27.设甲、乙两个盒子中都装有2个白球, 3个黑球. 先从甲盒中任取1个球放入乙盒, 再从乙盒中随机地取出一球. 用X与Y分别表示从甲、乙盒中取得的白球数.

(1)求(X,Y)的联合分布律, 并判断X与Y是否独立;

(2)求出$\mathrm{Cov}(X,Y)$, 并由此判断X与Y的相关性.

28.设二元随机变量(X,Y)服从正态分布$N(0,1,1,4,\rho)$. 令$\xi=aX-bY,\eta=aY-bY$, 其中a,b为实数, $a\neq b$且$ab\neq 0$.

(1)当$\rho=0$时, 分别写出ξ与η的分布(要求写出参数)及它们各自的标准化变量, 并计算ξ与η相关系数;

(2)当$\rho=\dfrac{1}{2}$时, 计算ξ的变异系数;

(3)当$\rho=\dfrac{1}{2}$时, 计算η的中位数;

(4)当$\rho=-1$时, 判断ξ与η的独立性和相关性.

29.三元正态变量$\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,X_3)^{\mathrm{T}}\sim N(\boldsymbol{a},\boldsymbol{B})$, 其中

$$\boldsymbol{a}=(0,0,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&16&0\\-1&0&4\end{pmatrix}.$$

(1)写出$\boldsymbol{X}$的每个变量的分布;

(2)判别X_1,X_2,X_3的相关性和独立性;

(3)若$Y_1=X_1-X_2,Y_2=X_3-X_1$, 求$\boldsymbol{Y}=(Y_1,Y_2)^{\mathrm{T}}$的分布.

30.设有一煤矿一天的产煤量X(以万吨计)服从$N(1.5,0.1^2)$分布. 设每天产量相互独立, 一个月按30天计, 求一月总产量超46万吨的概率.

31.某地区成年男子身高X(单位: cm)服从正态分布$N(170,144)$, 从该地区独立抽选4人, 求4人平均身高超过176cm的概率.

第四章　随机变量的数字特征课后题详解

1. 法一: 每次抽到正品的概率为$p=\dfrac{M}{N}$, 设抽到正品的次数为X, 则$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

故由数学期望的定义:

$$\begin{aligned}E(X)&=\sum_{k=0}^{n}kC_n^k p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}k\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}\\&=\sum_{k=1}^{n}n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}npC_{n-1}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}\\&\xlongequal[\text{或二项分布的归一性}]{\text{由二项式定理}}np=\frac{nM}{N}\end{aligned}$$

法二: 由题: $X\sim B(n,p)$, 由二项分布的数学期望可知: $E(X)=np=\dfrac{nM}{N}$ (见例4.1.15).

2. 设方案二的年薪为X, 则由数学期望的定义: $E(X)=\sum\limits_{i=1}^{+\infty}x_ip_i=1.2\times 20\%+4.2\times 80\%=3.6>3$

故选方案二.

3. X的可能取值为$2,3,4,5,6,7,8$, 分布律如下:

X	2	3	4	5	6	7	8
P	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{4}$

故由数学期望的定义: $E(X)=\sum\limits_{i=1}^{+\infty}x_ip_i=6$.

4. 依题: $\eta_n\sim B(n,p)$, 故$E(\eta_n)=np$;

η_n表示向右移动的次数, 故$n-\eta_n$表示向左移动的次数, 进而$S_n=\eta_n-(n-\eta_n)=2\eta_n-n$, 故$E(S_n)=E(2\eta_n-n)=2E(\eta_n)-n=2np-n$.

5. 设试验次数为X, 则$P\{X=n\}=P\{$前$n-1$次均为正面, 第n次为反面$\}+P\{$前$n-1$次均为反面, 第n次为正面$\}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\dfrac{1}{2}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}, n\geq 2$

故由数学期望的定义: $E(X)=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}nP\{X=n\}=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}n\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=3$.

附: 上述级数的和可用错位相减法求得, 如下:

设数列通项$a_n=n\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}, n\geq 2$, 则该数列的前$n$项和为:

$$S_n=2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{4}+\cdots+(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

故

$$2S_n=2\times 1+3\times\frac{1}{2}+\cdots+(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

进而

$$S_n=2S_n-S_n=2+\underline{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}-n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\xlongequal{\text{由等比数列求和公式}}3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}-n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

当$n\to+\infty$时, $S_n\to 3$, 即$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}n\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=3$.

6. (1)当$x>0$时, $f_X(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{2}{x}e^{-2x}dy=2e^{-2x}$, 故$E(X)=\displaystyle\int_0^{+\infty}2xe^{-2x}dx=\frac{1}{2}$.

(2)由数学期望的性质: $E(3X-1)=3E(X)-1=\dfrac{1}{2}$.

(3)由二元随机变量的数学期望定义: $E(XY)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}\int_0^x 2ye^{-2x}dydx=\int_0^{+\infty}x^2e^{-2x}dx=\frac{1}{4}$.

注: 第(3)问可参考例4.1.12.

7. (1)设截断点位置为X, 可知$X\sim U(0,1)$, 故$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

设标志点Q位置为a, 则包含Q的棍子长度$Y=g(X,a)=\begin{cases} X, & X>a, \\ 1-X, & X<a. \end{cases}$

故$E(Y)=E(g(X,a))=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,a)f_X(x)\mathrm{d}x=\int_0^a (1-x)\mathrm{d}x+\int_a^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+a(1-a)$.

(2)由(1): $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}E(Y)=1-2a$, 令该导数等于0, 解得$a=\frac{1}{2}$, 故结合二次函数的单调性可知, Q点在中点时平均长度最大.

注: 1. 第(1)问之所以设截断点位置为X, 标志点位置为a, 而不是反过来, 是因为第(2)问考察的是平均长度随Q点位置的变化情况, 即参变量a应为Q的位置;

2. 本题可参考例4.1.13

8. 设8:00为零时刻, 甲到的时刻为X分钟, 乙到的时刻为Y分钟, 则$X\sim U(0,60), Y\sim U(0,60)$, 先到的人等待的时间$Z=g(X,Y)=|X-Y|$

故$g(x,y)=\begin{cases} y-x, & 0<x<y<60, \\ x-y, & 0<y<x<60, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

X,Y的密度函数分别为:

$$f_X(x)=\begin{cases} \frac{1}{60}, & 0<x<60, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases} \frac{1}{60}, & 0<y<60, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

由于X,Y相互独立, 故X,Y的联合密度函数为:

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases} \frac{1}{3600}, & 0<x<60, 0<y<60, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

故

$$\begin{aligned} E(Z)&=E(g(X,Y))=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &=\int_0^{60}\int_0^x \frac{x-y}{3600}\mathrm{d}y\mathrm{d}x+\int_0^{60}\int_x^{60}\frac{y-x}{3600}\mathrm{d}y\mathrm{d}x=20 \end{aligned}$$

即先到的人需要等待的平均时间为20分钟.

9. 对方法(2), 小组阴性的概率为0.8^k, 故小组阳性的概率为$1-0.8^k$, 设需要二次化验的小组数为X, 则$X\sim B\left(\frac{500}{k}, 1-0.8^k\right)$, 由二项分布的数学期望可知: $E(X)=\frac{500}{k}(1-0.8^k)$, 即需要二次化验的小组数平均为$E(X)$; 由于每个小组$k$人, 故需要二次化验的平均人数为$kE(X)=500(1-0.8^k)$, 由此, 采用方法(2)需要化验的总次数的平均值为$\frac{500}{k}+500(1-0.8^k)$

令$\frac{500}{k}+500(1-0.8^k)=500\Leftrightarrow\frac{1}{k}-0.8^k=0$

可解得$k=10.57\approx 11$, 故当$k\le 10$时, 采用方法(2)检验次数少, 当$k>11$时, 采用方法(1)检验次数少.

10. $E(T)=\frac{1}{\lambda}\Leftrightarrow T\sim E(\lambda)$, 故$f_T(t)=\begin{cases} \lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}, & t>0, \\ 0, & t\le 0. \end{cases}$ 设每天运行的平均时间为X, 由题易知$X=\min(T,8)=\begin{cases} T, & T<8, \\ 8, & T\ge 8. \end{cases}$

故$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\min(t,8)f_T(t)\mathrm{d}t=\int_0^8 \lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t+\int_8^{+\infty} 8\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t=\frac{1-\mathrm{e}^{-8\lambda}}{\lambda}$.

11. (1)由题易知X,Y的联合密度函数为: $f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{\pi r^2}, & x^2+y^2<r^2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

故X的边际分布函数为$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases} \frac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}, & -1<x<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

故$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{2x\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}\mathrm{d}x$, 根据奇函数在对称区间上的定积分性质可知$E(X)=0$; 同理$E(Y)=0$.

(2)点A到屏幕中心的距离$Z=g(X,Y)=\sqrt{X^2+Y^2}$, 故$g(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, 进而

$$E(Z)=E(g(X,Y))=\iint\limits_{x^2+y^2<r^2} g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\xlongequal{\text{转为极坐标}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^r \frac{l\cdot l}{\pi r^2}\mathrm{d}l=\frac{2r}{3}.$$

12. (1)由超几何分布易知: $P\{\xi_n=k\}=\dfrac{C_a^kC_{15-a}^{n-k}}{C_{15}^n}$, 故$E(\xi_2)=\displaystyle\sum_{k=0}^{2}k\frac{C_a^kC_{15-a}^{2-k}}{C_{15}^2}=\frac{C_a^1C_{15-a}^1}{C_{15}^2}+2\frac{C_a^2}{C_{15}^2}=\frac{a(15-a)+a(a-1)}{105}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow a=10.$

(2)由(1)可知: 白球有个10, 黑球有5个, 故$n=9$时, 最多抽到9个白球, 最少抽到4个白球, 故: $E(\xi_9)=\displaystyle\sum_{k=4}^{9}k\frac{C_{10}^kC_5^{9-k}}{C_{15}^9}=6.$

注: 超几何分布见教材2.2（四）.

13. 每个点的值$X_i\sim U(0,1), 1\le i\le n$, 故$F_i(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x, & 0<x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$

相距最远的两个点的距离即值最大的点和值最小的点的距离, 即$Y=\max\limits_{1\le i\le n}X_i-\min\limits_{1\le i\le n}X_i=M-N$

其中M的分布函数$F_M(x)=\displaystyle\prod_{i=1}^{n}F_i(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x^n, & 0<x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$, N的分布函数$F_N(x)=1-\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[1-F_i(x)]=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 1-(1-x)^n, & 0<x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$

进而M和N的密度函数$f_M(x)=\begin{cases}nx^{n-1}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$, $f_N(x)=\begin{cases}n(1-x)^{n-1}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

故$E(M)=\displaystyle\int_0^1 nx^n\mathrm{d}x=\frac{n}{n+1}$, $E(N)=\displaystyle\int_0^1 nx(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}$, 进而$E(Y)=E(M)-E(N)=\dfrac{n-1}{n+1}$.

14. 当进入购物中心的人数为n时, $Y\sim B(n,p)$, 故

$$\begin{aligned}P\{Y=k\}&=\sum_{n=k}^{\infty}P\{X=n\}C_n^kp^k(1-p)^{n-k}=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}\\&=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}p^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^n(1-p)^{(n-k)}}{(n-k)!}=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^n}{n!}\\&\xlongequal{\text{对照}\mathrm{e}^x\text{的麦克劳林级数}}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!}\mathrm{e}^{\lambda(1-p)}=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda p}(\lambda p)^k}{k!}\end{aligned}$$

可知$Y\sim P(\lambda p)$, 故$E(Y)=\lambda p$.

15. $E(\xi_2^2)=\displaystyle\sum_{k=0}^{2}k^2\frac{C_{10}^kC_5^{2-k}}{C_{15}^2}=\frac{C_{10}^1C_5^1}{C_{15}^2}+4\frac{C_{10}^2}{C_{15}^2}=\frac{46}{21}$, 故$\mathrm{Var}(\xi_2)=E(\xi_2^2)-(E(\xi_2))^2=\dfrac{46}{21}-\left(\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{26}{63}$.

16.

$$\begin{aligned}E(X^k)&=\int_0^{+\infty}x^kf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha+k-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x\\&=\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\lambda^k\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}\frac{\lambda^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k)}x^{\alpha+k-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x\\&\xlongequal[\text{可知积分项等于1}]{\text{由}\Gamma\text{分布的归一性}}\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\lambda^k\Gamma(\alpha)}\end{aligned}$$

由上式可得: $E(X)=\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda\Gamma(\alpha)}=\dfrac{\alpha}{\lambda}$, $E(X^2)=\dfrac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^2\Gamma(\alpha)}=\dfrac{(\alpha+1)\alpha}{\lambda^2}$, 故$\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\dfrac{\alpha}{\lambda^2}$.

注: Γ分布见教材2.4（四）.

17. 为计算$D(X)$和$D(|X|)$, 首先$E(X)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x$, 根据奇函数在对称区间上的定积分性质可知$E(X)=0$;

$E(X^2)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x$, 根据偶函数在对称区间上的定积分性质可知$E(X^2)=\displaystyle\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2$

$E(|X|)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}|x|\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x$, 根据偶函数在对称区间上的定积分性质可知$E(|X|)=\displaystyle\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1$

故$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=2$, $D(|X|)=E(|X|^2)-(E(|X|))^2=E(X^2)-(E(|X|))^2=1$

18. (1)法一: 设非正品数为X, 易知$X\sim B(100,p)$, 其中$p=1-98\%\times 0.7+90\%\times 0.2+74\%\times 0.1=0.06$, 故数学期望$E(X)=100\times 0.06=6$

方差$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2$, 其中

$$\begin{aligned}E(X^2)&=\sum_{k=0}^{100}k^2C_{100}^k0.06^k0.94^{100-k}=\sum_{k=1}^{100}k^2\frac{100!}{k!(100-k)!}0.06^k0.94^{100-k}\\&=100\sum_{k=1}^{100}k\frac{99!}{(k-1)!(100-k)!}0.06^k0.94^{100-k}\end{aligned}$$

$$= 100\sum_{k=1}^{100}\left[(k-1)\frac{99!}{(k-1)!(100-k)!}0.06^k0.94^{100-k}+\frac{99!}{(k-1)!(100-k)!}0.06^k0.94^{100-k}\right]$$

$$= 100\times 99\sum_{k=2}^{100}\frac{98!}{(k-2)!(100-k)!}0.06^k0.94^{100-k}+100\sum_{k=1}^{100}\frac{99!}{(k-1)!(100-k)!}0.06^k0.94^{100-k}$$

$$= 9900\times 0.06^2\sum_{k=2}^{100}C_{98}^{k-2}0.06^{k-2}0.94^{100-k}+100\times 0.06\sum_{k=1}^{100}C_{99}^{k-1}0.06^{k-1}0.94^{100-k}$$

$$\xlongequal[\text{或二项分布的归一性}]{\text{由二项式定理}} 41.64$$

故$D(X)=41.64-6^2=5.64$

法二: 数学期望同法一; 方差由二项分布的方差可知: $D(X)=np(1-p)=100\times 0.94\times 0.06=5.64$ (见例4.2.6)

(2)这些产品都是正常机器制造出来的, 设正品数为Y, 则$Y\sim B(100,0.98)$, 故数学期望$E(X)=100\times 0.98=98$, 方差$D(X)=100\times 0.98\times 0.02=1.96$.

19. (1)$P\{X+Y\geq 1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}+P\{X=1,Y=1\}=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

或$P\{X+Y\geq 1\}=1-P\{X+Y<1\}=1-P\{X=0,Y=0\}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

(2)$Z=X\cdot(-1)^Y$的分布律如下:

X	0	0	1	1
Y	0	1	0	1
Z	0	0	1	-1
P	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

故$E(X\cdot(-1)^Y)=E(Z)=0, E(Z^2)=\frac{1}{2}, \mathrm{Var}(X\cdot(-1)^Y)=\mathrm{Var}(Z)=E(Z^2)-(E(Z))^2=\frac{1}{2}$

20. X的期望为$\frac{1}{2}$, 故$X\sim E(2)$; 同理$Y\sim E(4)$. 故X和Y的分布函数: $F_X(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\leq 0.\end{cases}$, $F_Y(y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-4y}, & y>0,\\ 0, & y\leq 0.\end{cases}$

(1)法一:

串联时, $Z=\min(X,Y)$, 故$F_Z(t)=1-[1-F_X(t)][1-F_Y(t)]=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-6t}, & t>0,\\ 0, & t\leq 0.\end{cases}$

故$f_Z(t)=F_Z'(t)=\begin{cases}6\mathrm{e}^{-6t}, & t>0,\\ 0, & t\leq 0.\end{cases}$

进而$E(Z)=\int_0^{+\infty}tf_Z(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{6}, E(Z^2)=\int_0^{+\infty}t^2f_Z(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{18}$, 故$D(Z)=E(Z^2)-(E(Z))^2=\frac{1}{36}$, 进而变异系数$Cv(Z)=\frac{\sqrt{D(X)}}{E(X)}=1$

法二:

由法一得到Z的分布函数后, 可知$Z\sim E(6)$, 故根据指数分布的数学特征性质可知: $E(Z)=\frac{1}{6}, D(Z)=\frac{1}{36}$, 进而$Cv(Z)=\frac{\sqrt{D(X)}}{E(X)}=1$

(2)并联时, $Z=\max(X,Y)$, 故$F_Z(t)=F_X(t)\cdot F_Y(t)=\begin{cases}1-(\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-4t})+\mathrm{e}^{-6t}, & t>0,\\ 0, & t\leq 0.\end{cases}$

故$f_Z(t)=F_Z'(t)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2t}+4\mathrm{e}^{-4t}-6\mathrm{e}^{-6t}, & t>0,\\ 0, & t\leq 0.\end{cases}$

进而$E(Z)=\int_0^{+\infty}tf_Z(t)\mathrm{d}t=\frac{7}{12}, E(Z^2)=\int_0^{+\infty}t^2f_Z(t)\mathrm{d}t=\frac{41}{72}$, 故$D(Z)=E(Z^2)-(E(Z))^2=\frac{11}{48}$, 进而变异系数$Cv(Z)=\frac{\sqrt{D(X)}}{E(X)}=\frac{\sqrt{33}}{7}$

(3)L_2为L_1的备用时, $Z=X+Y$, 由第3章第32题第(3)问可知: $f_Z(t)=\begin{cases}4(\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-4t}), & t>0,\\ 0, & t\leq 0.\end{cases}$

进而$E(Z)=\int_0^{+\infty}tf_Z(t)\mathrm{d}t=\frac{3}{4}, E(Z^2)=\int_0^{+\infty}t^2f_Z(t)\mathrm{d}t=\frac{7}{8}$, 故$D(Z)=E(Z^2)-(E(Z))^2=\frac{5}{16}$, 进而变异系数$Cv(Z)=\frac{\sqrt{D(X)}}{E(X)}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

21. (1)首先, 为计算相关系数$\rho_{X|X|}$, 需得到协方差$\mathrm{Cov}(X,|X|)$; 由公式$\mathrm{Cov}(X,|X|)=E(X|X|)-E(X)E(|X|)$知需计算$E(X|X|)$

$E(X|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}x|x|\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x$, 根据奇函数在对称区间上的定积分性质可知$E(X|X|)=0$, 故$\mathrm{Cov}(X,|X|)=0$;

故相关系数$\rho_{X|X|}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,|X|)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(|X|)}}=0$, 可知$X$和$|X|$不相关.

(2)由X的密度函数可知, X的分布函数$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|t|}\mathrm{d}t=\begin{cases}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t, & x\le 0,\\ \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t, & x>0.\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}, & x\le 0,\\ 1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}, & x>0.\end{cases}$

$Y=|X|$的分布函数$F_Y(y)=P\{|X|\le y\}=P\{-y\le X\le y\}=\begin{cases}\int_{-y}^{y}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|t|}\mathrm{d}t, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}=\begin{cases}\int_{-y}^{0}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t+\int_{0}^{y}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$

$=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$

而(X,Y)的联合分布函数$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}=P\{X\le x,-y\le X\le y\}$

当$y\le 0$或$x<-y<0$时, $F(x,y)=P\{X\le x,-y\le X\le y\}=0$;

当$-y<x\le 0$时, $F(x,y)=P\{X\le x,-y\le X\le y\}=P\{-y\le X\le x\le 0\}=\int_{-y}^{x}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y}$;

当$0<x<y$时, $F(x,y)=P\{X\le x,-y\le X\le y\}=P\{-y\le X<0\}+P\{0\le X\le x\}=\int_{-y}^{0}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y}$;

当$0<y\le x$时, $F(x,y)=P\{X\le x,-y\le X\le y\}=P\{-y\le X<y\}=1-\mathrm{e}^{-y}$

可知$F(x,y)\ne F_X(x)\cdot F_Y(y)$, 故$X$和$Y$不独立, 即$X$和$|X|$不独立.

22. (1)为求X和Y的相关系数, 需计算(X,Y)的协方差和X,Y各自的方差, 计算如下:

X的边际密度函数$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}(1+xy)\mathrm{d}y, & |x|<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}, & |x|<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

Y的边际密度函数$f_Y(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}(1+xy)\mathrm{d}x, & |y|<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}, & |y|<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

可知X和Y不独立

$E(X)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x\mathrm{d}x=0$, $E(Y)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}y\mathrm{d}y=0$, $E(X^2)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$, $E(Y^2)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}y^2\mathrm{d}y=\frac{1}{3}$

$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{1}{3}$, $D(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=\frac{1}{3}$

$E(XY)=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}xy(1+xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{9}$

$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{9}$, 故$\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{1}{3}$, 可知$X$和$Y$相关.

(2)$E(X^4)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^4\mathrm{d}x=\frac{1}{5}$, $E(Y^4)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}y^4\mathrm{d}y=\frac{1}{5}$

$D(X^2)=E(X^4)-(E(X^2))^2=\frac{4}{45}$, $D(Y^2)=E(Y^4)-(E(Y^2))^2=\frac{4}{45}$

$E(X^2Y^2)=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}x^2y^2(1+xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{9}$

$\mathrm{Cov}(X^2,Y^2)=E(X^2Y^2)-E(X^2)E(Y^2)=0$, 故$\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=0$, 可知$X$和$Y$不相关.

X的边际分布函数$F_{X^2}(x)=P\{X^2\le x\}$

当$x\le 0$时, $F_{X^2}(x)=P\{X^2\le x\}=0$

当$0<x<1$时, $F_{X^2}(x)=P\{X^2\le x\}=P\{-\sqrt{x}\le X\le\sqrt{x}\}=\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\frac{1}{2}\mathrm{d}t=\sqrt{x}$

当$x\ge 1$时, $F_{X^2}(x)=P\{X^2\le x\}=1$

综上$F_{X^2}(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \sqrt{x}, & 0<x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$, 同理$f_{Y^2}(y)=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ \sqrt{y}, & 0<y<1,\\ 1, & y\ge 1.\end{cases}$

(X^2,Y^2)的联合分布函数$F_{X^2,Y^2}(x,y)=P\{X^2\le x,Y^2\le y\}$

当$x\le 0$或$y\le 0$时, $F_{X^2,Y^2}(x,y)=P\{X^2\le x,Y^2\le y\}=0$

当$0<x<1,0<y<1$时, $F_{X^2,Y^2}(x,y)=P\{X^2\le x,Y^2\le y\}=P\{-\sqrt{x}\le X\le\sqrt{x},-\sqrt{y}\le Y\le\sqrt{y}\}=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\frac{1}{4}(1+xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{xy}$

当$0<x<1,y\ge 1$时, $F_{X^2,Y^2}(x,y)=P\{X^2\le x,Y^2\le y\}=P\{-\sqrt{x}\le X\le\sqrt{x},-\sqrt{y}\le Y\le\sqrt{y}\}=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\frac{1}{4}(1+xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{x}$

当$x\ge 1,0<y<1$时, $F_{X^2,Y^2}(x,y)=P\{X^2\le x,Y^2\le y\}=P\{-\sqrt{x}\le X\le\sqrt{x},-\sqrt{y}\le Y\le\sqrt{y}\}=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}(1+xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{y}$

当$x\ge 1,y\ge 1$时, $F_{X^2,Y^2}(x,y)=P\{X^2\le x,Y^2\le y\}=1$

因此$F_{X^2,Y^2}(x,y)=F_{X^2}(x)\cdot F_{Y^2}(y)$, 可知$X^2$和$Y^2$相互独立.

23. 抛n次骰子可以视作n重伯努利试验, 故$X\sim B\left(n,\frac{1}{6}\right),Y\sim B\left(n,\frac{1}{6}\right)$

故$E(X)=E(Y)=\frac{1}{6}n,D(X)=D(Y)=\frac{5}{36}n$

设n次中1点朝上次数为$i(0\le i\le n)$, 6点朝上次数为$j(0\le j\le n-i)$, 故$P\{X=i\}=C_n^i\left(\frac{1}{6}\right)^i\left(\frac{5}{6}\right)^{n-i},P\{Y=j\}=C_{n-i}^j\left(\frac{1}{5}\right)^j\left(\frac{4}{5}\right)^{n-i-j}$, 进而

$$\begin{aligned}
E(XY)&=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}ijC_n^i\left(\frac{1}{6}\right)^i\left(\frac{5}{6}\right)^{n-i}C_{n-i}^j\left(\frac{1}{5}\right)^j\left(\frac{4}{5}\right)^{n-i-j}\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-i}\frac{n(n-i)}{30}C_{n-1}^{i-1}\left(\frac{1}{6}\right)^{i-1}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-i}C_{n-i-1}^{j-1}\left(\frac{1}{5}\right)^{j-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-i-j}\\
&=\frac{n}{30}\sum_{i=1}^{n}(n-i)C_{n-1}^{i-1}\left(\frac{1}{6}\right)^{i-1}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-i}\sum_{j=1}^{n-i}C_{n-i-1}^{j-1}\left(\frac{1}{5}\right)^{j-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-i-j}\\
&\xlongequal[\text{可知后一求和式等于1}]{\text{根据二项式定理或二项分布的归一性}}\frac{5n}{180}\sum_{i=1}^{n}(n-1)C_{n-2}^{i-1}\left(\frac{1}{6}\right)^{i-1}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-i-1}\\
&=\frac{n(n-1)}{36}\sum_{i=2}^{n}C_{n-2}^{i-1}\left(\frac{1}{6}\right)^{i-1}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-i-1}\\
&\xlongequal[\text{或二项分布的归一性}]{\text{由二项式定理}}\frac{n(n-1)}{36}
\end{aligned}$$

故$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-\frac{n}{36}$, 进而$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=-\frac{n/36}{5n/36}=-\frac{1}{5}$, 可知$X$和$Y$负相关.

24. (1)由$E(\sin A)=E(\cos A)=\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}+1}{8}$可得:

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda+\frac{\sqrt{2}}{2}\theta+\frac{1}{2}(1-\lambda-\theta)=\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}+1}{8}\\ \frac{1}{2}\lambda+\frac{\sqrt{2}}{2}\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\lambda-\theta)=\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}+1}{8}\end{cases}$$

解得: $\lambda=\frac{1}{4},\theta=\frac{1}{2}$, 故$(A,B)$的联合分布律为:

		B		
		$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$
A	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

(2)由(1)的联合分布律易得C的概率分布律:

C	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$
p	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

故$\sin C$的概率分布律:

$\sin C$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	1
p	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$

故$E(\sin C)=\frac{6+\sqrt{3}+2\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{16}$

(3)由A的分布律和(2)中C的分布律易得: $E(A)=\frac{\pi}{4},E(C)=\frac{\pi}{2};E(A^2)=\frac{19\pi^2}{288},E(C^2)=\frac{37\pi^2}{144}$, 故$D(A)=E(A^2)-(E(A))^2=\frac{\pi^2}{288},D(C)=E(C^2)-(E(C))^2=\frac{\pi^2}{144}$. 而

$$E(AC)=E(A(\pi-A-B))=\pi E(A)-E(A^2)-E(AB)$$

故只需求出$E(AB)$即可. 由(1)中(A,B)的联合分布律易知:

$$E(AB)=\sum ABp(A,B)=\frac{\pi^2}{16}$$

故$E(AC)=\dfrac{35\pi^2}{288}$, 进而$\mathrm{Cov}(A,C)=E(AC)-E(A)E(C)=-\dfrac{\pi^2}{288}$, 故$\rho_{AC}=\dfrac{\mathrm{Cov}(A,C)}{\sqrt{D(A)}\sqrt{D(C)}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 故$A$和$C$负相关.

25. 由题: $X_i\sim N(0,1), 1\le i\le n$, 故$E(X_i)=0, D(X_i)=1$

由数学期望的性质易得: $E(S_k)=E\left(\sum\limits_{i=1}^{k}X_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{k}E(X_i)=0$, 同理$E(T_k)=0$

由方差的性质易得: $D(S_k)=D\left(\sum\limits_{i=1}^{k}X_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{k}D(X_i)=k$, 同理$D(T_k)=k$

为求相关系数, 还需求得$E(S_kT_k)$: $E(S_kT_k)=E\left(\sum\limits_{i=1}^{k}X_i\sum\limits_{j=n_0+1}^{n_0+k}X_j\right)$. 由于$X_i, 1\le i\le n$相互独立, 故$E(X_iX_j)=E(X_i)E(X_j)=0, i\ne j$;

$E(X_i^2)=D(X_i)-(E(X_i))^2=1$, 故$E\left(\sum\limits_{i=1}^{k}X_i\sum\limits_{j=n_0+1}^{n_0+k}X_j\right)=\sum\limits_{i=n_0+1}^{k}E(X_i^2)=k-n_0$

故$\mathrm{Cov}(S_k,T_k)=E(S_kT_k)-E(S_k)E(T_k)=k-n_0$, 进而$\rho_{S_kT_k}=\dfrac{\mathrm{Cov}(S_k,T_k)}{\sqrt{D(S_k)}\sqrt{D(T_k)}}=\dfrac{k-n_0}{k}$

26. (1)证明: 由全概率公式:

$$\begin{aligned}P\{\xi\le t\}&=P\{X\cdot Y\le t\}=P\{X\cdot Y\le t|Y=1\}P\{Y=1\}+P\{X\cdot Y\le t|Y=-1\}P\{Y=-1\}\\&=pP\{X\le t\}+(1-p)P\{-X\le t\}=pP\{X\le t\}+(1-p)P\{X\ge -t\}\\&\xlongequal{\text{由标准正态分布性质}}pP\{X\le t\}+(1-p)P\{X\le t\}=P\{X\le t\}\end{aligned}$$

故ξ和X同分布, 即$\xi\sim N(0,1)$

(2)由(1)易知: $E(X)=E(\xi)=0, D(X)=D(\xi)=1$

而$E(X\xi)=E(XXY)\xlongequal{X\text{和}Y\text{相互独立}}E(X^2)E(Y)=\{D(X)-[E(X)]^2\}E(Y)=p-(1-p)=2p-1$

故$\mathrm{Cov}(X,\xi)=E(X\xi)-E(X)E(\xi)=2p-1$, 进而$\rho_{X\xi}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,\xi)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(\xi)}}=2p-1$

可知当$0<p<0.5$时, X和ξ负相关; 当$p=0.5$时, X和ξ不相关; 当$0.5<p<1$时, X和ξ正相关

由于$P\{X\le x,\xi\le t\}=P\{X\le x\}P\{\xi\le t|X\le x\}=P\{X\le x\}P\{X\cdot Y\le t|X\le x\}\xlongequal{\text{由(1)}}P\{X\le x\}P\{X\le t|X\le x\}$

当$t>x$时, $P\{X\le x,\xi\le t\}=P\{X\le x\}\ne P\{X\le x\}P\{\xi\le t\}=P\{X\le x\}P\{X\le t\}$, 故$X$和$\xi$不独立.

27. (1)$P\{X=0,Y=0\}=P\{$从甲盒中摸出并放入乙盒的为黑球, 此时乙盒中有2个白球和4个黑球, 从乙盒摸出的是黑球$\}=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{5}$

$P\{X=1,Y=0\}=P\{$从甲盒中摸出并放入乙盒的为白球, 此时乙盒中有3个白球和3个黑球, 从乙盒摸出的是黑球$\}=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{5}$

$P\{X=0,Y=1\}=P\{$从甲盒中摸出并放入乙盒的为黑球, 此时乙盒中有2个白球和4个黑球, 从乙盒摸出的是白球$\}=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{5}$

$P\{X=1,Y=1\}=P\{$从甲盒中摸出并放入乙盒的为白球, 此时乙盒中有3个白球和3个黑球, 从乙盒摸出的是白球$\}=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{5}$

故(X,Y)的联合分布律:

		Y	
		0	1
X	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

可得: $P\{X=0\}=\dfrac{3}{5}, P\{X=1\}=\dfrac{2}{5}; P\{Y=0\}=\dfrac{3}{5}, P\{Y=1\}=\dfrac{2}{5}$, 可知$P\{X=i,Y=j\}\ne P\{X=i\}P\{Y=j\}$, 故$X$和$Y$不独立

(2)由(1)易得: $E(X)=E(Y)=\dfrac{2}{5}, E(XY)=\dfrac{1}{5}$

故$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\dfrac{1}{25}$, 可知$X$和$Y$正相关.

28. (1)由于$(X,Y)\sim N(0,1,1,4,0)$, 且ξ和η均为X和Y的线性组合, 故$\mu_\xi=E(aX-bY)=-b,\mu_\eta=E(aY-bX)=a$

由于$\rho=0$, 故$\sigma_\xi^2=D(aX-bY)=a^2+4b^2,\sigma_\eta^2=D(aY-bX)=4a^2+b^2$, 故$\xi\sim N(-b,a^2+4b^2),\eta\sim N(a,4a^2+b^2)$

进而$\xi^*=\dfrac{\xi+b}{\sqrt{a^2+4b^2}},\eta^*=\dfrac{\eta-a}{\sqrt{4a^2+b^2}}$, 又由于$\rho=0$, 故$E(XY)=E(X)E(Y)=0$

另$E(X^2)=D(X)-(E(X))^2=1,E(Y^2)=D(Y)-(E(Y))^2=3$, 故:

$E(\xi\eta)=E[(aX-bY)(aY-bX)]=a^2E(XY)-abE(X^2)-abE(Y^2)+b^2E(XY)=-4ab$, 故$\mathrm{Cov}(\xi,\eta)=E(\xi\eta)-E(\xi)E(\eta)=-5ab$, 进而$\rho_{\xi\eta}=\dfrac{\mathrm{Cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D(\xi)}\sqrt{D(\eta)}}=-\dfrac{5ab}{\sqrt{(a^2+4b^2)(4a^2+b^2)}}$

(2)$\rho=\dfrac{1}{2}$, 故$\sigma_\xi^2=D(aX-bY)=a^2D(X)+b^2D(Y)+2\mathrm{Cov}(aX,-bY)=a^2+4b^2+2\rho\sqrt{D(aX)D(-bY)}=a^2+4b^2+2ab$

故$Cv(\xi)=\dfrac{\sqrt{D(\xi)}}{E(\xi)}=-\dfrac{\sqrt{a^2+4b^2+2ab}}{b}$

(3)由于η服从正态分布, 故η的中位数即其数学期望, 即$\eta_{1/2}=a$

(4)$\rho=-1$时, $\sigma_\xi^2=D(aX-bY)=a^2D(X)+b^2D(Y)+2\mathrm{Cov}(aX,-bY)=a^2+4b^2+2\rho\sqrt{D(aX)D(-bY)}=a^2+4b^2-4ab=(a-2b)^2$

$\sigma_\eta^2=D(aY-bX)=a^2D(Y)+b^2D(X)+2\mathrm{Cov}(aY,-bX)=4a^2+b^2+2\rho\sqrt{D(aY)D(-bX)}=4a^2+b^2-4ab=(2a-b)^2$

由于$\mathrm{Cov}(X,Y)=\rho\sqrt{D(X)D(Y)}=-2$, 故$\mathrm{Cov}(\xi,\eta)=\mathrm{Cov}(aX-bY,aY-bX)=\mathrm{Cov}(aX,aY)+\mathrm{Cov}(aX,-bX)+\mathrm{Cov}(-bY,aY)+\mathrm{Cov}(-bY,-bX)=a^2\mathrm{Cov}(X,Y)-abD(X)-abD(Y)+b^2\mathrm{Cov}(X,Y)=-2a^2-5ab-2b^2=-(2a+b)(a+2b)$

故$\rho_{\xi\eta}=\dfrac{\mathrm{Cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D(\xi)}\sqrt{D(\eta)}}=-\dfrac{(2a+b)(a+2b)}{(a-2b)(2a-b)}$, 故当$a=-\dfrac{b}{2}$或$a=-2b$时, ξ和η不相关且独立; 其他情况下, ξ和η相关且不独立.

29. (1)由题易得: $E(X_1)=0,E(X_2)=0,E(X_3)=1;D(X_1)=1,D(X_2)=16,D(X_3)=4$, 故$X_1\sim N(0,1),X_2\sim N(0,16),X_3\sim N(1,4)$

(2)由题易得: $\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=2,\mathrm{Cov}(X_1,X_3)=-1,\mathrm{Cov}(X_2,X_3)=0$, 故$X_1$和$X_2$正相关且不独立, X_1和X_3负相关且不独立, X_2和X_3不相关且独立

(3)由于Y_1是X_1和X_2的线性组合, Y_2是X_1和X_3的线性组合, 故Y_1和Y_2均服从正态分布, 且$E(Y_1)=E(X_1-X_2)=E(X_1)-E(X_2)=0,E(Y_2)=E(X_3-X_1)=E(X_3)-E(X_1)=1$

$D(Y_1)=D(X_1-X_2)=D(X_1)+D(X_2)+2\mathrm{Cov}(X_1,-X_2)=1+16-2\times2=13,D(Y_2)=D(X_3-X_1)=D(X_3)+D(X_1)+2\mathrm{Cov}(X_3,-X_1)=4+1-2\times(-1)=7$

另$E(X_1^2)=D(X_1)-(E(X_1))^2=1,E(X_1X_2)=\mathrm{Cov}(X_1,X_2)+E(X_1)E(X_2)=2,E(X_1X_3)=\mathrm{Cov}(X_1,X_3)+E(X_1)E(X_3)=-1,E(X_2X_3)=\mathrm{Cov}(X_2,X_3)+E(X_2)E(X_3)=0$, 故$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_2)=E(Y_1Y_2)-E(Y_1)E(Y_2)=E((X_1-X_2)(X_3-X_1))=E(X_1X_3)-E(X_1^2)-E(X_2X_3)+E(X_1X_2)=0$

故$\boldsymbol{Y}=(Y_1,Y_2)^{\mathrm{T}}$的分布为$N(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{B}')$, 其中$\boldsymbol{a}'=(0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}'=\begin{pmatrix}13&0\\0&7\end{pmatrix}$

30. 由于$X_i\sim N(1.5,0.1^2),1\le i\le 30$, 且$X_i$相互独立, 故总产量$Y=\sum\limits_{i=1}^{30}X_i\sim N(1.5\times30,0.1^2\times30)$, 即$Y\sim N(45,0.3)$, 故$P\{Y\ge46\}=P\{\dfrac{Y-45}{\sqrt{0.3}}\ge\dfrac{46-45}{\sqrt{0.3}}\}=1-\Phi(1.83)=0.0336$

31. 设抽取的4人的身高分别为X_1,X_2,X_3,X_4, 故平均身高$Y=\dfrac{1}{4}(X_1+X_2+X_3+X_4)$, 进而$P\{Y\ge176\}=P\left\{\dfrac{1}{4}\sum\limits_{i=1}^{4}X_i\ge176\right\}=P\left\{\sum\limits_{i=1}^{4}X_i\ge704\right\}$

由于$X_i\sim N(170,144)$, 且X_i相互独立, 故$\sum\limits_{i=1}^{4}X_i\sim N(170\times4,144\times4)$, 即$\sum\limits_{i=1}^{4}X_i\sim N(680,576)$, 故$P\{Y\ge176\}=P\left\{\sum\limits_{i=1}^{4}X_i\ge704\right\}=P\left\{\dfrac{\sum_{i=1}^{4}X_i-680}{24}\ge\dfrac{704-680}{24}\right\}=1-\Phi(1)=0.1587$

第五章　大数定律及中心极限定理

1.某种类的昆虫每周产卵数为随机变量X(以个计), 若已知其平均周产卵数为36个.

(1)求一周内该昆虫产卵数不少于50个的概率至多有多少?

(2)若又已知该昆虫每周产卵数的标准差为2个, 那么一周内产卵数在范围(32, 40)内的概率至少有多大?

2.一种遗传病的隔代发病率为10%, 在得病家庭中选取500户进行研究, 试用切比雪夫不等式估计这500户中隔代发病的比例与发病率之差的绝对值小于5%的概率下界.

3.抛掷一枚均匀的硬币, 直至硬币的两面均出现为止, 记ξ为抛掷的次数. 利用切比雪夫不等式找一个区间(a, b), 使得$P\{a < \xi < b\} \geq 75\%$成立.

4.设随机变量序列$\{X_n, n \geq 1\}$独立同分布, 都服从$U(0, a)$, 其中$a > 0$. 令$X_{(n)} = \max\limits_{1 \leq i \leq n}\{X_i\}$, 证明: $X_{(n)} \xrightarrow{P} a$, 当$n \to +\infty$.

5.设随机变量序列$\{X_i, i \geq 1\}$独立同分布, 数学期望与方差均存在. 证明:

$$\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i \cdot X_i \xrightarrow{P} E(X_1), \quad 当n \to +\infty.$$

6.$\{X_i, i \geq 1\}$为独立同分布的正态随机变量序列, 若$X_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中$\sigma > 0$. 问一下的随机变量当$n \to +\infty$时依概率收敛吗? 若收敛, 请给出收敛的极限值, 否则请说明理由.

(1)$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$;

(2)$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$;

(3)$\dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2}$;

(4)$\dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{\sqrt{n\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2}}$.

7.设随机变量序列$\{X_i, i \geq 1\}$独立同分布, 都服从期望为$\dfrac{1}{\lambda}$的指数分布, 其中$\lambda > 0$.

(1)若对任意的$\varepsilon > 0$, 均有$\lim\limits_{n \to +\infty} P\left\{\left|\dfrac{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2}{n} - a\right| < \varepsilon\right\} = 1$成立, 求$a$的值;

(2)给出$\dfrac{1}{50}\sum\limits_{i=1}^{100} X_i$的近似分布;

(3)求$P\left\{\dfrac{1}{100}\sum\limits_{i=1}^{100} X_i^2 \leq \dfrac{2}{\lambda^2}\right\}$的近似值.

8.抛掷一枚硬币10000次, 出现了5325次“正面”, 是否可以断言此硬币是不均匀的呢?

9.设随机变量X服从辛普森分布(亦称三角分布), 密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ 2 - x, & 1 \leq x < 2, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

(1)对X进行100次独立观察, 事件$\{0.95 < X < 1.05\}$出现的次数记为Y, 试用三种方法(Y的精确分布, 用泊松分布来作为Y的近似分布, 中心极限定理)分别求出$P\{Y > 2\}$;

(2)要保证至少有95%的把握使得事件$\left\{\dfrac{1}{2} < X < \dfrac{3}{2}\right\}$出现的次数不少于80次, 问至少需要进行多少次观察?

10.某企业庆祝百年华诞, 邀请了一些社会名流及企业的相关人士来参加庆典. 被邀请者独自一人或携伴(一位同伴)出席, 也有可能因故缺席, 这三种情况的可能性分别为0.3, 0.5, 0.2. 若此次庆典事先发出了800份邀请函, 若每位被邀请人参加庆典的行为相互独立, 问有超过千人出席该庆典的可能性大概有多大?

11.某次“知识竞赛”规则如下: 参赛者最多可抽取3个独立的问题一一回答, 若答错就被淘汰, 进而失去回答下一题的资格. 每答对一题得1分, 若3题都答对则再加1分(即共得4分). 现有100名参赛选手参赛, 每人独立答题.

(1)若每人至少答对一题的概率为0.7, 用中心极限定理计算“最多有35人得0分”的概率近似值;

(2)若题目的难易程度类似, 每人答对每题的概率均为0.8, 求这100名参赛选手的总分超过220分的概率近似值.

第五章　大数定律及中心极限定理课后题详解

1. (1)依题$E(X)=36$, 故由Markov不等式可得: $P\{X\geq 50\}\leq\dfrac{E(X)}{50}=\dfrac{36}{50}=72\%$, 即概率至多为72%

(2)依题$\sigma=2$, 故由Chebyshev不等式可得: $P\{32<X<40\}=P\{-4<X-36<4\}=P\{|X-36|<4\}\geq 1-\dfrac{2^2}{4^2}=75\%$, 即概率至少为75%

2. 用X_i表示第i户隔代发病的情况, 即$X=\begin{cases}1, & 隔代发病,\\ 0, & 隔代不发病.\end{cases}$, 由题可知$X_i\sim B(1,0.1)$, 故$\mu=0.1,\sigma^2=0.09$, 进而由Chebyshev不等式可得: $P\left\{\left|\dfrac{1}{500}\sum_{i=1}^{500}X_i-0.1\right|<0.05\right\}\geq 1-\dfrac{0.09/500}{0.05^2}=0.928$, 即概率下界为0.928.

注: 本题可参考例5.1.3.

3. 依题(结合第4章第5题)易得: $P\{\xi=k\}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$, 故$E(\xi)=\sum\limits_{k=2}^{+\infty}k\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}=3, E(\xi^2)=\sum\limits_{k=2}^{+\infty}k^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}=11, D(\xi)=E(\xi^2)-(E(\xi))^2=2$

利用Chebyshev不等式: $P\{|\xi-3|<\varepsilon\}\geq 1-\dfrac{2}{\varepsilon^2}\Leftrightarrow P\{3-\varepsilon<\xi<3+\varepsilon\}\geq 1-\dfrac{2}{\varepsilon^2}=75\%$, 可得$\varepsilon=2\sqrt{2}$, 故所求区间可以为$(3-2\sqrt{2},3+2\sqrt{2})$.

附: $E(\xi^2)$中级数的和可连用两次错位相减法求得, 如下:

设数列通项$a_n=n^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}, n\geq 2$, 则该数列的前$n$项和为:

$$S_n=4\times\frac{1}{2}+9\times\frac{1}{4}+\cdots+(n-1)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+n^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

故

$$2S_n=4\times 1+9\times\frac{1}{2}+\cdots+(n-1)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}+n^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

进而

$$S_n=2S_n-S_n=4+5\times\frac{1}{2}+7\times\frac{1}{4}+\cdots+(2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}-n^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

故

$$2S_n=8+5+7\times\frac{1}{2}+9\times\frac{1}{4}+\cdots+(2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}-n^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

进而

$$\begin{aligned}S_n&=2S_n-S_n=9+2\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right]-(n^2+2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+n^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\&\xlongequal{\text{由等比数列求和公式}}11-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}-(n^2+2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+n^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

当$n\to+\infty$时, $S_n\to 11$, 即$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}n^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=11.$

4. 证明: 法一:

根据以概率收敛的定义:

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty}P\{|X_{(n)}-a|\geq\varepsilon\}\\&=\lim_{n\to+\infty}P\{|\max_{1\leq i\leq n}\{X_i\}-a|\geq\varepsilon\}\\&\xlongequal{\forall X_i\leq a}\lim_{n\to+\infty}P\{a-\max_{1\leq i\leq n}\{X_i\}\geq\varepsilon\}\\&=\lim_{n\to+\infty}P\{\max_{1\leq i\leq n}\{X_i\}\leq a-\varepsilon\}\\&=P\{a\leq a-\varepsilon\}\xlongequal{\text{对任意}\varepsilon>0}0\end{aligned}$$

故当$n\to+\infty$时, $X_{(n)}\xrightarrow{P}a$.

法二:

由于$X_i\sim U(0,a), 1\leq i\leq n$, 故$X_i$的分布函数$F_i(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0,\\ \dfrac{x}{a}, & 0<x<a,\\ 1, & x\geq a.\end{cases}$

故$X_{(n)}=\max\limits_{1\le i\le n}\{X_i\}$的分布函数$F_M(x)=\prod\limits_{i=1}^{n}F_i(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \left(\dfrac{x}{a}\right)^n, & 0<x<a,\\ 1, & x\ge a.\end{cases}$，进而$f_M(x)=F_M'(x)=\begin{cases}\dfrac{n}{a}\left(\dfrac{x}{a}\right)^{n-1}, & 0<x<a,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

故$E(X_{(n)})=\displaystyle\int_0^a\frac{nx}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{an}{n+1}, E(X_{(n)}^2)=\int_0^a\frac{nx^2}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{a^2n}{n+2}$, 故$D(X_{(n)})=E(X_{(n)}^2)-(E(X_{(n)}))^2=\dfrac{a^2n}{(n+1)^2(n+2)}$

由Chebyshev不等式：$P\left\{\left|X_{(n)}-\dfrac{an}{n+1}\right|\ge\varepsilon\right\}\le\dfrac{a^2n}{\varepsilon^2(n+1)^2(n+2)}$, 当$n\to+\infty$时, 该不等式变为$\lim\limits_{n\to+\infty}P\{|X_{(n)}-a|\ge\varepsilon\}\le 0$, 结合概率的非负性可知$\lim\limits_{n\to+\infty}P\{|X_{(n)}-a|\ge\varepsilon\}=0$, 即当$n\to+\infty$时, $X_{(n)}\xrightarrow{P}a$.

5. 令$Y=\sum\limits_{i=1}^{n}i\cdot X_i$, 则:

$$E(Y)=E\left(\sum_{i=1}^{n}i\cdot X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}E(i\cdot X_i)=\sum_{i=1}^{n}i\cdot E(X_i)\xlongequal{X_i同分布}E(X_1)\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2}E(X_1)$$

$$E(Y^2)=E\left[\left(\sum_{i=1}^{n}i\cdot X_i\right)^2\right]=E\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}ijX_iX_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}ijE(X_iX_j)\xlongequal{X_i同分布}E^2(X_1)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}ij=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

故$D(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=0$, 进而由Chebyshev不等式:

$$P\{|Y-E(Y)|\ge\varepsilon\}\le\frac{D(Y)}{\varepsilon^2}=0\Leftrightarrow P\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}i\cdot X_i-\frac{n(n+1)}{2}E(X_1)\right|\ge\varepsilon\right\}=0\Leftrightarrow P\left\{\left|\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}i\cdot X_i-E(X_1)\right|\ge\frac{2\varepsilon}{n(n+1)}\right\}=0$$

令$\varepsilon'=\dfrac{2\varepsilon}{n(n+1)}$, 由于$\varepsilon>0$, 故当$n\to+\infty$时, $\varepsilon'>0$, 有$\lim\limits_{n\to+\infty}P\left\{\left|\dfrac{2}{n(n+1)}\sum\limits_{i=1}^{n}i\cdot X_i-E(X_1)\right|\ge\varepsilon'\right\}=0$

即当$n\to+\infty$时, $\dfrac{2}{n(n+1)}\sum\limits_{i=1}^{n}i\cdot X_i\xrightarrow{P}E(X_1)$.

6. (1)令$Y_i=X_i^2$, 则$E(Y_i)=E(X_i^2)=D(X_i)+(E(X_i))^2=\sigma^2+\mu^2$, 故由Khinchin大数定律可得: $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left\{\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-(\sigma^2+\mu^2)\right|\ge\varepsilon\right\}=0$, 即$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2\xrightarrow{P}\sigma^2+\mu^2$, 当$n\to+\infty$

(2)$E((X_i-\mu)^2)=E(X_i^2-2\mu X_i+\mu^2)=E(X_i^2)-2\mu E(X_i)+\mu^2=\sigma^2+\mu^2-2\mu^2+\mu^2=\sigma^2$

故由Khinchin大数定律可得: $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left\{\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-\sigma^2\right|\ge\varepsilon\right\}=0$, 即$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\xrightarrow{P}\sigma^2$, 当$n\to+\infty$

(3)由于$E(X_i)=\mu$, 故由Khinchin大数定律可得: $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}\mu$, 当$n\to+\infty$, 又由(1): $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2\xrightarrow{P}\sigma^2+\mu^2$, 当$n\to+\infty$

根据依概率收敛的性质：$X_n\xrightarrow{P}a, Y_n\xrightarrow{P}b$, $g(x,y)$在(a,b)连续, 则$g(X_n,Y_n)\xrightarrow{P}g(a,b)$可得: $\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2}=\dfrac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2}\xrightarrow{P}\dfrac{\mu}{\sigma^2+\mu^2}$, 当$n\to+\infty$

(4)由(2)(3)分别有: $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\xrightarrow{P}\sigma^2$, 当$n\to+\infty$; $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}\mu$, 当$n\to+\infty$

故根据依概率收敛的性质: $\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{\sqrt{n\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}}=\dfrac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}}\xrightarrow{P}\dfrac{\mu}{\sigma}$, 当$n\to+\infty$.

注: 第(1)问也可根据推论5.1.1或参照例5.1.5的结论做.

7. (1)由题意，根据Khinchin大数定律可得: $E(X_i^2)=a$; 由于X_i服从期望为$\dfrac{1}{\lambda}$的指数分布, 即$E(X_i)=\dfrac{1}{\lambda}, X_i\sim E(\lambda)$, 进而$D(X_i)=\dfrac{1}{\lambda^2}$, 故$E(X_i^2)=D(X_i)+(E(X_i))^2=\dfrac{2}{\lambda^2}$, 即$a=\dfrac{2}{\lambda^2}$

(2)根据Lindeberg-Lévy中心极限定理: $\dfrac{\frac{1}{100}\sum\limits_{i=1}^{100}X_i-\frac{1}{\lambda}}{1/(10\lambda)}\overset{近似地}{\sim}N(0,1)\Leftrightarrow\dfrac{\frac{1}{50}\sum\limits_{i=1}^{100}X_i-\frac{2}{\lambda}}{1/(5\lambda)}\overset{近似地}{\sim}N(0,1)\Leftrightarrow\dfrac{1}{50}\sum\limits_{i=1}^{100}X_i\overset{近似地}{\sim}N\left(\dfrac{2}{\lambda},\dfrac{1}{25\lambda^2}\right)$

(3)根据Lindeberg-Lévy中心极限定理: $\dfrac{\frac{1}{100}\sum\limits_{i=1}^{100}X_i^2-\frac{2}{\lambda^2}}{\sigma/10}\overset{近似地}{\sim}N(0,1)$, 其中$\sigma$为$X_i^2$的标准差, 进而$\dfrac{1}{100}\sum\limits_{i=1}^{100}X_i^2\overset{近似地}{\sim}N\left(\dfrac{2}{\lambda^2},\dfrac{\sigma^2}{100}\right)$

故$P\left\{\dfrac{1}{100}\sum\limits_{i=1}^{100}X_i^2\le\dfrac{2}{\lambda^2}\right\}\approx 0.5$

8. 记n_A为抛掷硬币10000次时出现“正面”的次数. 假设硬币是均匀的, 则$n_A \sim B(10000, 0.5)$, 故根据De Moivre-Laplace中心极限定理可知:

$$\frac{n_A - 10000 \times 0.5}{\sqrt{10000 \times 0.5 \times 0.5}} = \frac{n_A - 5000}{50} \overset{\text{近似地}}{\sim} N(0,1)$$

故$P\{n_A \geq 5325\} \approx 1 - \Phi\left(\frac{5325 - 5000}{50}\right) = 1 - \Phi(6.5) \approx 0$, 即硬币均匀的情况下, 出现“正面”5325次几乎是不可能的, 故可知硬币是不均匀的.

注: 本题可参考例5.2.3.

9. (1)由辛普森分布的密度函数易得: $P\{0.95 < X < 1.05\} = \int_{0.95}^{1} x\mathrm{d}x + \int_{1}^{1.05} (2-x)\mathrm{d}x = 0.0975$, 故$Y \sim B(100, 0.0975)$

Y的精确分布: $P\{Y > 2\} = 1 - P\{Y \leq 2\} = 1 - (P\{Y = 0\} + P\{Y = 1\} + P\{Y = 2\}) = 1 - [(1-0.0975)^{100} + C_{100}^{1}(0.0975)(1-0.0975)^{99} + C_{100}^{2}(0.0975)^2(1-0.0975)^{98}] = 0.99756$

用泊松分布作近似: 泊松分布的参数$\lambda = np = 9.75$, 故$P\{Y = k\} = \frac{\mathrm{e}^{-9.75}9.75^k}{k!}$

进而$P\{Y > 2\} \approx 1 - \left(\mathrm{e}^{-9.75} + 9.75\mathrm{e}^{-9.75} + \frac{9.75^2\mathrm{e}^{-9.75}}{2}\right) = 0.9966$

中心极限定理: 根据De Moivre-Laplace中心极限定理可知: $\frac{Y - 100 \times 0.0975}{\sqrt{100 \times 0.0975 \times (1-0.0975)}} = \frac{Y - 9.75}{2.966} \overset{\text{近似地}}{\sim} N(0,1)$

故$P\{Y > 2\} \approx 1 - \Phi\left(\frac{2 - 9.75}{2.966}\right) = 0.9955$

(2)设观察n次时事件$\left\{\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right\}$发生的次数为$Z$, 由于$P\left\{\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right\} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} x\mathrm{d}x + \int_{1}^{\frac{3}{2}} (2-x)\mathrm{d}x = 0.75$, 故$Z \sim B(n, 0.75)$

根据De Moivre-Laplace中心极限定理可知: $\frac{Z - 0.75n}{\sqrt{0.1875n}} \overset{\text{近似地}}{\sim} N(0,1)$

依题有: $P\{Z \geq 80\} = \frac{80 - 0.75n}{\sqrt{0.1875n}} = 1 - \Phi\left(\frac{80 - 0.75n}{\sqrt{0.1875n}}\right) \geq 95\% \Leftrightarrow \frac{0.75n - 80}{\sqrt{0.1875n}} \geq 1.65 \Leftrightarrow n \geq 117$, 故至少需进行117次观察.

注: 本题第(1)问中的$\Phi\left(\frac{2 - 9.75}{2.966}\right)$的值可以查附录表或借助EXCEL的“NORM.S.DIST”函数求解; 第(2)问中$\frac{80 - 0.75n}{\sqrt{0.1875n}}$的值可以查附录表或借助EXCEL的“NORM.S.INV”函数求解, 以下题目类似.

10. 依题, 800份邀请函对应的出席情况独立同分布, 设每份邀请函对应的出席人数为$X_i, 1 \leq i \leq 800$, 则分布律为$P\{X_i = 0\} = 0.2, P\{X_i = 1\} = 0.3, P\{X_i = 2\} = 0.5$, 故$E(X_i) = 1.3, D(X_i) = 0.61$

根据Lindeberg-Lévy中心极限定理: $\frac{\frac{1}{800}\sum\limits_{i=1}^{800} X_i - 1.3}{\sqrt{0.61/800}} = \frac{\frac{1}{800}\sum\limits_{i=1}^{800} X_i - 1.3}{0.0276} \overset{\text{近似地}}{\sim} N(0,1)$, 故$P\left\{\sum\limits_{i=1}^{800} \geq 1000\right\} \approx 1 - \Phi\left(\frac{1000/800 - 1.3}{0.0276}\right) = 0.9649$

11. (1)设得0分的人数为n_A, 则$n_A \sim B(100, 0.3)$, 故根据De Moivre-Laplace中心极限定理可知: $\frac{n_A - 30}{\sqrt{21}} \overset{\text{近似地}}{\sim} N(0,1)$, 故$P\{n_A \leq 35\} \approx \Phi\left(\frac{35 - 30}{\sqrt{21}}\right) = 0.8621$

(2)设每人的得分为X_i, 则其分布律为$P\{X_i = 0\} = 0.2, P\{X_i = 1\} = 0.16, P\{X_i = 2\} = 0.128, P\{X_i = 4\} = 0.512$

进而$E(X_i) = 2.464, D(X_i) = 2.793$

根据Lindeberg-Lévy中心极限定理: $\frac{\sum\limits_{i=1}^{100} X_i - 2.464 \times 100}{\sqrt{2.793 \times 100}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{100} X_i - 246.4}{16.7} \overset{\text{近似地}}{\sim} N(0,1)$, 故$P\left\{\sum\limits_{i=1}^{100} X_i \geq 220\right\} \approx 1 - \Phi\left(\frac{220 - 246.4}{16.7}\right) = 0.9429$.

第六章　统计量与抽样分布

1.设总体$X\sim N(\mu,1)$, μ未知, $X_1,\cdots,X_5$是来自总体X的简单随机样本, 判断下列哪些是统计量, 哪些不是统计量:

(1)$\sum\limits_{i=1}^{5}X_i$;　　(2)$\sum\limits_{i=1}^{5}X_i^2-5\mu^2$;　　(3)$\sum\limits_{i=1}^{5}(X_i-\mu)$;　　(4)$X_1-X_2$.

2.从总体X中抽取容量是5的样本, 其观察值为$2.6,4.1,3.2,3.6,2.9$, 计算样本的值、样本方差和样本二阶中心矩.

3.设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2),X_1,X_2,\cdots,X_{25}$是来自总体$X$的简单随机样本, $\overline{X}$是样本均值.

(1)求$P\{|\overline{X}-\mu|<0.2\sigma\}$的值;

(2)若$P\{\overline{X}>\mu-c\sigma\}=0.95$, 求$c$的值.

4.设总体X服从标准正态分布, $X_1,X_2,\cdots,X_{16}$是来自总体X的简单随机样本, 写出下列统计量的分布:

(1)样本均值$\overline{X}$;　　(2)$\sum\limits_{i=1}^{16}X_i^2$;　　(3)$\dfrac{3X_1}{\sqrt{\sum\limits_{i=2}^{10}X_i^2}}$;　　(4)$\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}}$;　　(5)$\overline{X}-X_1$.

5.略

6.对一重量为a的物体独立重复称n次, 现准备用这n次读数的平均值去估计a. 假设这批读数来自均值为a, 标准差为2.5的正态总体, 至少要称多少次才能使估计值与a之差的绝对值不大于0.5的概率(1)超过90%; (2)超过95%。

7.设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2),X_1,X_2,\cdots,X_9$是来自总体$X$的简单随机样本, $\overline{X}$是样本均值, S^2是样本方差, 写出下列抽样分布:

(1)$\dfrac{3(\overline{X}-\mu)}{\sigma}$;　　(2)$\dfrac{3(\overline{X}-\mu)}{S}$;　　(3)$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{9}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}$;

(4)$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{9}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}$;　　(5)$\dfrac{9(\overline{X}-\mu)^2}{\sigma^2}$;　　(6)$\dfrac{9(\overline{X}-\mu)^2}{S^2}$;

(7)$\dfrac{2(X_1-X_2)^2}{(X_3-X_4)^2+(X_5-X_6)^2}$;

(8)$\dfrac{(X_1-Y_1)^2+(X_2-Y_1)^2+(X_3-Y_1)^2}{(X_4-Y_2)^2+(X_5-Y_2)^2+(X_6-Y_2)^2}$, 其中$Y_1=\dfrac{X_1+X_2+X_3}{3},Y_2=\dfrac{X_4+X_5+X_6}{3}$.

8.设总体X的密度函数

$$f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|},\quad -\infty<x<+\infty,$$

从总体中抽取容量为10的样本, $\overline{X}$和S^2分别是样本均值和样本方差, 求:

(1)$\overline{X}$的数学期望和方差;　　(2)S^2的数学期望.

9.设总体$X\sim U(0,\theta),X_1,\cdots,X_5$是来自总体$X$的简单随机样本, $\overline{X}$是样本均值, S^2是样本方差, 求$E(\overline{X}),E(\overline{X}^2)$和$E(S^2)$.

10.设总体X的密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

从总体中抽取容量为10的样本.

(1)求样本均值的数学期望和方差;

(2)记$X_{(1)}=\min\{X_1,\cdots,X_{10}\}$, 求$X_{(1)}$的数学期望和方差.

11.设$X_1,\cdots,X_8$是来自标准正态总体的样本, $\overline{X}=\dfrac{1}{8}\sum\limits_{i=1}^{8}X_i,S^2=\dfrac{1}{7}\sum\limits_{i=1}^{8}(X_i-\overline{X})^2$, X_9是新增的样本, 试确定$Y=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\dfrac{X_9-\overline{X}}{S}$的分布.

12.设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2),X_1,X_2,\cdots,X_5$和$Y_1,Y_2,\cdots,Y_9$是来自总体$X$的两个独立样本, $\overline{X}$和$\overline{Y}$分别是两个样本的样本均值, S_1^2和X_2^2分别是两个样本的样本方差.

(1)若$\dfrac{a(\overline{X}-\overline{Y})}{\sigma}\sim N(0,1)$, 求$a$;

(2)若$\dfrac{b(\overline{X}-\overline{Y})}{\sqrt{S_1^2+2S_2^2}}\sim t(12)$, 求$b$.

13.在两个等方差的正态总体中, 独立地各抽取一个容量为7的样本, 它们的样本方差分别为S_1^2,S_2^2, 若$P\left\{\max\left(\dfrac{S_1^2}{S_2^2},\dfrac{S_2^2}{S_1^2}\right)>c\right\}=0.05$, 求$c$的值.

14.设总体$X \sim \chi^2(n), X_1, X_2, \cdots, X_{16}$是来自总体$X$的简单随机样本, 求$P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{8} X_i}{\sum\limits_{i=9}^{16} X_i} \leq 1\right\}$和$P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{8} X_i}{\sum\limits_{i=9}^{16} X_i} = 1\right\}$的值.

第六章　统计量与抽样分布课后题详解

1. 根据统计量的定义, 由于(1)(4)中不包含未知量, (2)(3)中包含未知量, 故(1)(4)为统计量, (2)(3)不是统计量.

2. $\overline{X}=\frac{1}{5}(2.6+4.1+3.2+3.6+2.9)=3.28, S^2=\frac{1}{4}[(2.6-3.28)^2+(4.1-3.28)^2+(3.2-3.28)^2+(3.6-3.28)^2+(2.9-3.28)^2]=0.347$

$B_2=\frac{1}{5}[(2.6-3.28)^2+(4.1-3.28)^2+(3.2-3.28)^2+(3.6-3.28)^2+(2.9-3.28)^2]=0.2776$

3. (1)由于$X_1,\cdots,X_{25}$是总体X的随机样本, 故$X_1,\cdots,X_{25}$独立同分布, 且都和X同分布, 故$X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$, 进而$\overline{X}=\frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25}X_i\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{25}\right)$,

即$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/5}\sim N(0,1)$

故$P\{|\overline{X}-\mu|<0.2\sigma\}=P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/5}\right|<1\right\}=2\Phi(1)-1=0.6826.$

(2)$P\{\overline{X}>\mu-c\sigma\}=P\{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/5}>-5c\}=\Phi(5c)=0.95\Leftrightarrow c=0.33.$

4. (1)$X_i\sim N(0,1)$, 故$\overline{X}=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}X_i\sim N\left(0,\frac{1}{16}\right)$

(2)根据χ^2分布的定义可知: $\sum_{i=1}^{16}X_i^2\sim\chi^2(16)$

(3)根据χ^2分布的定义可知: $\sum_{i=2}^{10}X_i^2\sim\chi^2(9)$, 再根据$t$分布的定义可知: $\frac{3X_1}{\sqrt{\sum_{i=2}^{10}X_i^2}}=\frac{X_1}{\sqrt{\frac{1}{9}\sum_{i=2}^{10}X_i^2}}\sim t(9)$

(4)根据χ^2分布的定义可知: $X_3^2+X_4^2\sim\chi^2(2)$, 而$\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)$, 再根据$t$分布的定义可知: $\frac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}}=\frac{(X_1+X_2)/\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}(X_3^2+X_4^2)}}\sim t(2)$

(5)$\overline{X}-X_1=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}X_i-X_1=\frac{1}{16}\left(\sum_{i=1}^{16}X_i-16X_1\right)=\frac{1}{16}\left(\sum_{i=2}^{16}X_i-15X_1\right)$

由于$E\left(\frac{1}{16}\left(\sum_{i=2}^{16}X_i-15X_1\right)\right)=0, D\left(\frac{1}{16}\left(\sum_{i=2}^{16}X_i-15X_1\right)\right)=\frac{1}{16^2}\left(\sum_{i=2}^{16}D(X_i)+15^2D(X_1)\right)=\frac{15}{16}$, 故$\overline{X}-X_1\sim N\left(0,\frac{15}{16}\right)$

注: 第(5)问容易犯的错误之一是认为$\overline{X}$和X_1相互独立从而得到$D(\overline{X}-X_1)=D(\overline{X})+D(X_1)$的错误结论, 实际上由于$\overline{X}$中包含了$X_1$, 故$\overline{X}$和$X_1$并不独立; 容易犯的错误之二是认为$X_i-X_1, 2\le i\le 16$相互独立从而得到$D\left(\sum_{i=2}^{16}X_i-15X_1\right)=D\left(\sum_{i=2}^{16}(X_i-X_1)\right)=\sum_{i=2}^{16}D(X_i-X_1)$的错误结论, 实际上例如$E((X_2-X_1)(X_3-X_1))=1\neq E(X_2-X_1)E(X_3-X_1)=0$, 可知$X_2-X_1$和$X_3-X_1$相关不独立, i取其他值时类似.

5.略

6. 设第i次称的读数为X_i, 故$X_i\sim N(a,2.5^2)$, 进而$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N\left(a,\frac{2.5^2}{n}\right)$

故$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-a\right|\le 0.5\right\}=P\left\{\left|\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-a}{2.5/\sqrt{n}}\right|\le 0.2\sqrt{n}\right\}=2\Phi(0.2\sqrt{n})-1$

令$2\Phi(0.2\sqrt{n})-1\ge 0.9\Leftrightarrow n\ge 68$; 令$2\Phi(0.2\sqrt{n})-1\ge 0.95\Leftrightarrow n\ge 97$, 即概率超过90%和95%需要称的次数分别为68和97次.

7. (1)由定理6.3.1: $\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{9}\right)\Leftrightarrow\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/3}\sim N(0,1)\Leftrightarrow\frac{3(\overline{X}-\mu)}{\sigma}\sim N(0,1)$

(2)由定理6.3.3: $\frac{\overline{X}-\mu}{S/3}\sim t(8)\Leftrightarrow\frac{3(\overline{X}-\mu)}{S}\sim t(8)$

(3)由定理6.3.2: $\frac{\sum_{i=1}^{9}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}=\frac{8S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(8)$

(4)由于$\frac{X_i-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$, 故由$\chi^2$分布的定义: $\frac{\sum_{i=1}^{9}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{9}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(9)$

(5)由(1): $\frac{3(\overline{X}-\mu)}{\sigma}\sim N(0,1)$, 故由$\chi^2$分布的定义: $\frac{9(\overline{X}-\mu)^2}{\sigma^2}=\left[\frac{3(\overline{X}-\mu)}{\sigma}\right]^2\sim\chi^2(1)$

(6)由(2): $\frac{3(\overline{X}-\mu)}{S}\sim t(8)$, 故由$F$分布的性质2可知: $\frac{9(\overline{X}-\mu)^2}{S^2}=\left[\frac{3(\overline{X}-\mu)}{S}\right]^2\sim F(1,8)$

(7)同例6.3.2(2)

(8)Y_1为X_1, X_2, X_3的样本均值, 故样本方差$S_1^2 = \frac{1}{2}[(X_1-Y_1)^2+(X_2-Y_1)^2+(X_3-Y_1)^2]$, 同理$S_2^2 = \frac{1}{2}[(X_4-Y_2)^2+(X_5-Y_2)^2+(X_6-Y_2)^2]$

故由定理6.3.4: $\frac{(X_1-Y_1)^2+(X_2-Y_1)^2+(X_3-Y_1)^2}{(X_4-Y_2)^2+(X_5-Y_2)^2+(X_6-Y_2)^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{S_1^2/\sigma^2}{S_2^2/\sigma^2} \sim F(2,2)$.

8. (1)由题结合第4章第17题的结论可知: $E(X_i)=0, E(X_i^2)=2, D(X_i)=2$

$$E(\overline{X}) = E\left(\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i\right) = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} E(X_i) = 0$$

$$E(\overline{X}^2) = E\left(\left(\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i\right)^2\right) = \frac{1}{100}\left(\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{10} E(X_iX_j)\right) = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{10} E(X_i^2) = \frac{1}{5}$$

$$D(\overline{X}) = E(\overline{X}^2) - (E(\overline{X}))^2 = \frac{1}{5}$$

(2)$E(S^2) = E\left(\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(X_i-\overline{X})^2\right) = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10} E(X_i^2) - 2E(X_i\overline{X}) + E(\overline{X}^2)$, 其中$E(X_i\overline{X}) = E\left(\frac{1}{10}\sum_{j=1}^{10} X_iX_j\right) = \frac{1}{5}$, 故$E(S^2)=2$.

注: 本题也可直接用例6.3.1的结论: $E(\overline{X})=\mu, D(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}, E(S^2)=\sigma^2$.

9. 由题易得: $E(X_i) = \frac{\theta}{2}, E(X_i^2) = \frac{\theta^2}{3}, D(X_i) = \frac{\theta^2}{12}$

故由例6.3.1可得: $E(\overline{X}) = \frac{\theta}{2}, D(\overline{X}) = \frac{\theta^2}{60}, E(\overline{X}^2) = \frac{4}{15}\theta^2, E(S^2) = \frac{\theta^2}{12}$.

10. (1)由密度函数可知: $E(X_i) = \frac{1}{\lambda}, D(X_i) = \frac{1}{\lambda^2}$, 故$E(\overline{X}) = \frac{1}{\lambda}, D(\overline{X}) = \frac{1}{10\lambda^2}$

(2)易知$X_{(1)}$的分布函数$F_N(x) = \begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-10\lambda x}, & x>0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$, 即$X_{(1)} \sim E(10\lambda)$, 故$E(X_{(1)}) = \frac{1}{10\lambda}, D(X_{(1)}) = \frac{1}{100\lambda^2}$.

11. $X_9 - \overline{X} = X_9 - \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} X_i = \frac{1}{8}\left(8X_9 - \sum_{i=1}^{8} X_i\right)$, 易知$E\left(\frac{1}{8}\left(8X_9 - \sum_{i=1}^{8} X_i\right)\right) = 0, D\left(\frac{1}{8}\left(8X_9 - \sum_{i=1}^{8} X_i\right)\right) = \frac{9}{8}$

故$X_9 - \overline{X} \sim N\left(0, \frac{9}{8}\right)$, 进而$\frac{X_9-\overline{X}}{3/2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}(X_9-\overline{X}) \sim N(0,1)$

另由定理6.3.2可知: $7S^2 \sim \chi^2(7)$, 故根据t分布的定义可知: $Y = \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{X_9-\overline{X}}{S} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}(X_9-\overline{X})}{\sqrt{7S^2/7}} \sim t(7)$.

12. (1)依题: $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{5}\right), \overline{Y} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{9}\right)$, 由正态随机变量的性质知: $\overline{X}-\overline{Y} \sim N\left(0, \frac{14}{45}\sigma^2\right)$, 进而$\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{14/45}\sigma} \sim N(0,1)$, 对比可得: $a = \sqrt{\frac{45}{14}}$

(2)由定理6.3.2, $\frac{4S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(4), \frac{8S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(8)$, 由$\chi^2$分布的性质可知$4S_1^2+8S_2^2 \sim \chi^2(12)$

根据t分布的定义可知: $\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{14/45}\sqrt{(4S_1^2+8S_2^2)/12}} = \frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{14/135}\sqrt{S_1^2+2S_2^2}} \sim t(12)$, 对比可知: $b = \sqrt{\frac{135}{14}}$.

13. 由定理6.3.4可知: $F_1 = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{S_1^2/\sigma^2}{S_2^2/\sigma^2} \sim F(6,6), F_2 = \frac{S_2^2}{S_1^2} \sim F(6,6)$, 故$\max\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}, \frac{S_2^2}{S_1^2}\right) = \max(F_1, F_2)$, 进而$P\left\{\max\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}, \frac{S_2^2}{S_1^2}\right) > c\right\} = P\{\max(F_1,F_2) > c\} = P\{F_1 > c或F_2 > c\} = 0.05$, 由于$F_1$和$F_2$独立同分布, 故由概率的加法公式: $P\{F_1 > c或F_2 > c\} = P\{F_1 > c\} + P\{F_2 > c\} - P\{F_1 > c\}P\{F_2 > c\} = 2P\{F_1 > c\} - P^2\{F_1 > c\} = 0.05 \Leftrightarrow P\{F_1 > c\} = 0.025$, 查表或借助EXCEL的“F.INV.RT”函数可得$c = 5.82$.

14. 由χ^2分布的性质可知: $\sum_{i=1}^{8} X_i \sim \chi^2(8), \sum_{i=9}^{16} X_i \sim \chi^2(8)$, 且两者相互独立, 故由$F$分布的定义可知$\frac{\sum_{i=1}^{8} X_i}{\sum_{i=9}^{16} X_i} = \frac{\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} X_i}{\frac{1}{8}\sum_{i=9}^{16} X_i} \sim F(8,8)$, 故查表或借助EXCEL的“F.DIST”函数可得$P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{8} X_i}{\sum_{i=9}^{16} X_i} \le 1\right\} = 0.5$; 另由连续性随机变量的性质可知: $P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{8} X_i}{\sum_{i=9}^{16} X_i} = 1\right\} = 0$.

第七章　参数估计

1.设总体X的密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{6x(\theta-x)}{\theta^3}, & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中$\theta>0$未知, $X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的简单随机样本, 求θ的矩估计值$\hat{\theta}$, 并计算$E(\hat{\theta})$和$\mathrm{Var}(\hat{\theta})$.

2.设湖中有N条鱼(N未知), 现钓出r条, 做上记号后放回湖中, 一段时间后, 再钓出S条($S\ge r$), 结果发现其中t条有记号, 试用极大似然法估计湖中鱼的数量N.

3.设总体X的取值为$0,1,2$, 从总体取得容量是n的样本$X_1,\cdots,X_n$, 记其中取$0,1,2$的个数分别为$n_0,n_1,n_2,n_0+n_1+n_2=n$, 求下列总体概率分布律中未知参数的矩估计量和极大似然估计量. 特别地, 当样本值是$0,2,2,2,1,0,0,0,1,1$时, 求相应参数的矩估计值和极大似然估计值.

(1)θ未知, $0<\theta<1$

X	0	1	2
p	θ	$\dfrac{1-\theta}{2}$	$\dfrac{1-\theta}{2}$

(2)θ未知, $0<\theta<1$

X	0	1	2
p	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

(3)θ,λ未知, $0<\theta<1,0<\lambda<1,0<\theta+\lambda<1$

X	0	1	2
p	θ	λ	$1-\theta-\lambda$

4.设$X_1,\cdots,X_n$是来自总体X的简单随机样本, 求下列总体X的密度函数中未知参数θ的矩估计量和极大似然估计量, 并对总体所获得的样本值, 求相应分布参数θ的矩估计值和极大似然估计值.

(1)$f(x;\theta)=\begin{cases}2^{-\theta}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\quad \theta>0;$

样本值: 0.45　0.2　0.5　0.47　0.35　1.63　0.14　0.06　0.89　0.34

(2)$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2-\theta}, & 0\le x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\quad \theta<2;$

样本值: 0.95　0.63　1.69　0.97　1.84　1.81　0.53　0.35　1.34　0.82

(3)$f(x;\theta)=\dfrac{1}{2\theta}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\theta}},-\infty<x<+\infty,\theta>0;$

样本值: -0.05　-0.47　0.01　-0.03　-0.18　1.65　-0.64　-1.05　0.41　-0.19

5.设总体X的密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{x}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\theta}}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中$\theta>0$未知, $X_1,\cdots,X_n$是来自总体X的简单随机样本, 求:

(1)θ的极大似然估计量;

(2)$E(X^2)$的极大似然估计量;

(3)$P\{X>1\}$的极大似然估计量.

6.设总体X具有均值μ, 方差$\sigma^2,X_1,\cdots,X_{10}$为$X$的简单随机样本.

(1)a取什么值时, $a\sum\limits_{i=1}^{9}(X_{i+1}-X_i)^2$是$\sigma^2$的无偏估计量?

(2)b取什么值时, $b\sum\limits_{i=1}^{5}(X_i-X_{i+5})^2$是$\sigma^2$的无偏估计量?

7.设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2),\mu,\sigma^2$未知, X_1,X_2,X_3是X的简单随机样本, 用

$$\hat{\mu}_1=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{1}{4}X_3,\quad \hat{\mu}_2=2X_1-2X_2+X_3,\quad \hat{\mu}_3=\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{3}X_3$$

估计参数μ, 它们都是无偏估计量吗? 如果是, 哪个更有效? 如果不是, 在均方误差准则下, 哪个更优?

8.设总体$X \sim N(\mu, \sigma^2), \mu, \sigma^2$未知, 抽取三个独立样本$(X_1, X_2), (Y_1, Y_2, Y_3), (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)$, S_1^2, S_2^2, S_3^2分别是对应的样本方差. 设$T = aS_1^2 + bS_2^2 + cS_3^2$, 其中$a, b, c$是实数.

(1)求T是σ^2的无偏估计量的充要条件;

(2)问a, b, c取何值才是最有效估计量?

9.设总体X的密度函数为

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{2x}{\theta^2}, & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中$\theta > 0$未知, $X_1, \cdots, X_n (n \geq 4)$是来自总体$X$的简单随机样本.

(1)求θ的矩估计量$\hat{\theta}_1$和极大似然估计量$\hat{\theta}_2$;

(2)在均方误差准则下, 判断哪个估计量更优?

(3)判断两个估计量是否为θ的相合估计量?

10.设总体X的密度函数为

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} \mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中$\theta > 0$未知, $X_1, \cdots, X_n$是来自总体X的简单随机样本.

(1)证明: 样本均值是θ的矩估计量, 也是极大似然估计量;

(2)在形如$c\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$的估计中求$c$, 使其在均方误差准则下最优;

(3)判断由(2)得到的估计量是否为θ的相合估计量?

11.设总体X的密度函数为

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-(x-\theta)}, & x \geq \theta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中θ未知, $X_1, \cdots, X_n$是来自总体X的简单随机样本.

(1)求θ的极大似然估计量$\hat{\theta}$;

(2)求$\hat{\theta} - \theta$的密度函数;

(3)判断$\hat{\theta} - \theta$是否可以取为关于θ的区间估计问题的枢轴量;

(4)求θ的置信水平为$1 - \alpha$的单侧置信下限.

12.某机器生产的螺杆直径X(单位: mm)服从正态分布$N(\mu, 0.3^2)$. 现随机抽取5只, 测得直径为: 22.3, 21.5, 21.8, 21.4, 22.1. 试以95%的置信水平计算该机器所生产螺杆的平均直径μ的置信区间.

13.某厂生产的灯泡寿命X(单位: h)服从$N(\mu, \sigma^2), \mu, \sigma^2$未知, 从已生产的一批灯泡中随机抽取15只, 测得其寿命如下:

4040	2990	2964	3245	3026	3633	3387	4136
3595	3194	3714	2831	3845	3410	3004	

(1)求μ的置信水平为95%的置信区间;

(2)求μ的置信水平为95%的单侧置信下限.

14.为比较甲、乙两种肥料对产量的影响, 研究者选择了10块田地, 将每块田地分成大小相同的两块, 随机选择一块用甲肥料, 另一块用乙肥料, 其他条件保持相同, 得到的产量(单位: kg)数据如下:

甲肥料x_i:	109	98	97	100	104	102	94	99	103	108
乙肥料y_i:	107	105	110	118	109	113	111	95	112	101

假设成对数据差服从正态分布, 求均值差的置信水平为95%的置信区间.

15.求13题中总体方差σ^2置信水平为95%的置信区间和单侧置信上限.

16.下面16个数字来自计算机的正态随机数生成器:

8.801	3.817	8.223	6.374	9.252	7.352	13.781	7.599
13.134	4.465	6.533	7.021	9.015	7.325	7.041	9.560

(1)你认为生成的正态分布的均值和方差是多少?

(2)求均值的置信水平为95%的置信区间;

(3)求方差的置信水平为95%的置信区间.

17.已知某种电子管使用寿命(单位: h)服从正态分布$N(\mu,\sigma^2),\mu,\sigma^2$未知, 从一批电子管中随机抽取16只, 检测结果得样本标准差为300h. 试求:

(1)σ的置信水平为95%的置信区间;

(2)σ的置信水平为95%的单侧置信上限.

18.为了解某市两所高校学生的消费情况, 在两所高校各随机调查100人, 调查结果为: 甲校学生月平均消费803元, 标准差75元; 乙校学生月平均消费938元, 标准差102元. 假设甲校学生月平均消费额(单位: 元)$X\sim N(\mu_1,\sigma^2)$, 乙校学生月平均消费额(单位: 元)$Y\sim N(\mu_2,\sigma^2),\mu_1,\mu_2,\sigma^2$未知, 两样本相互独立. 求两校学生月平均消费额差值$\mu_1-\mu_2$的置信水平为95%的置信区间和单侧置信上限.

19.某厂的一台瓶装灌装机, 每瓶的净重量X服从正态分布$N(\mu_1,\sigma_1^2)$, 从中随机抽出16瓶, 称得其净重的平均值为456.64g, 标准差为12.8g; 现引进一台新灌装机, 其每瓶的净重量Y服从正态分布$N(\mu_2,\sigma_2^2)$, 抽取产品12件, 称得其净重的平均值为451.34g, 标准差为11.3g.

(1)假设$\sigma_1=13,\sigma_2=12$, 求$\mu_1-\mu_2$的置信水平为95%的置信区间;

(2)假设$\sigma_1=\sigma_2$未知, 求$\mu_1-\mu_2$的置信水平为95%的置信区间;

(3)求$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信水平为95%的置信区间.

20.某超市负责人需要比较郊区A和郊区B居民的平均收入来确定合适的分店地址. 假设两郊区居民的收入均服从正态分布, 对两个郊区的居民分别进行抽样调查, 各抽取64户家庭, 计算得郊区A居民的年人均收入为3.276万元, 标准差为0.203万元; 郊区B居民的年人均收入为3.736万元, 标准差为0.421万元. 假设两个正态总体的方差不相等, 求两郊区居民年人均收入差的置信水平为95%的近似置信区间.

21.某餐厅为了解顾客对餐厅新开发的菜品的满意程度, 随机调查来餐厅就餐的顾客80人, 结果发现有55人满意, 求满意比例p的置信水平为95%的置信区间.

第七章　参数估计课后题详解

1. 由$\mu_1=E(X)=\int_0^\theta \frac{6x^2(\theta-x)}{\theta^3}\mathrm{d}x=\frac{\theta}{2}$可得: $\theta=2\mu_1$, 用A_1代替μ_1得θ的矩估计量$\hat{\theta}=2A_1=2\overline{X}$, 另$E(X^2)=\int_0^\theta \frac{6x^3(\theta-x)}{\theta^3}\mathrm{d}x=\frac{3\theta^2}{10}$

进而$E(\hat{\theta})=E(2\overline{X})=2E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^n E(X_i)=\frac{2}{n}\times\frac{n\theta}{2}=\theta, E(\hat{\theta}^2)=E(4\overline{X}^2)=4E\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right)^2\right]=\frac{4}{n^2}\left[\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n E(X_iX_j)\right]=$ $\frac{4}{n^2}\left[\frac{3n\theta^2}{10}+\frac{n(n-1)\theta^2}{4}\right]=\frac{4}{n^2}\times\left(\frac{n^2}{4}+\frac{n}{20}\right)\theta^2=\left(\frac{1}{5n}+1\right)\theta^2$, 故$\mathrm{Var}(\hat{\theta})=E(\hat{\theta}^2)-(E(\hat{\theta}))^2=\frac{\theta^2}{5n}$.

2. 第一次钓完并做完记号后, 湖中每条鱼带有记号的概率为$p=\frac{r}{N}$, 故第二次钓出的鱼有记号的数量$X\sim B\left(S,\frac{r}{N}\right)$

由上述分析可知, S为总体N的一个样本, 且$P\{X=t\}=C_S^t\left(\frac{r}{N}\right)^t\left(1-\frac{r}{N}\right)^{S-t}$, 故似然函数$L(N)=P\{X=t\}$

进而对数似然函数$l(N)=\ln C_S^t+t(\ln r-\ln N)+(S-t)[\ln(N-r)-\ln N]$, 令$\left.\frac{\mathrm{d}l(N)}{\mathrm{d}N}\right|_{N=\hat{N}}=0\Leftrightarrow-\frac{S}{\hat{N}}+\frac{S-t}{\hat{N}-r}-\frac{S-t}{\hat{N}}=0\Leftrightarrow\hat{N}=\frac{Sr}{t}$

由于鱼的数量应为整数, 故对$\hat{N}$取整得: $\hat{N}=\left[\frac{Sr}{t}\right]$.

3. (1)矩估计量: 由$\mu_1=E(X)=\frac{3}{2}(1-\theta)$可得: $\theta=1-\frac{2}{3}\mu_1$, 用$A_1$代替$\mu_1$得: $\hat{\theta}=1-\frac{2}{3}A_1=1-\frac{2}{3}\overline{X}$

极大似然估计量: 由题可得似然函数: $L(\theta)=C_n^{n_0}\theta^{n_0}C_{n-n_0}^{n_1}\left(\frac{1-\theta}{2}\right)^{n_1}\left(\frac{1-\theta}{2}\right)^{n-n_0-n_1}$, 进而对数似然函数: $l(\theta)=\ln C_n^{n_0}+\ln C_{n-n_0}^{n_1}+n_0\ln\theta+$ $(n-n_0)\ln\left(\frac{1-\theta}{2}\right)$, 令$\left.\frac{\mathrm{d}l(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}}=0\Leftrightarrow\frac{n_0}{\hat{\theta}}-\frac{n-n_0}{1-\hat{\theta}}=0\Leftrightarrow\hat{\theta}=\frac{n_0}{n}$

故样本值取题设情况时, 矩估计值$\hat{\theta}=1-\frac{2}{3}\times\frac{9}{10}=\frac{2}{5}$, 极大似然估计值$\hat{\theta}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

(2)矩估计量: 由$\mu_1=E(X)=2-2\theta$可得: $\theta=1-\frac{1}{2}\mu_1$, 用$A_1$代替$\mu_1$得: $\hat{\theta}=1-\frac{1}{2}A_1=1-\frac{1}{2}\overline{X}$

极大似然估计量: 由题可得似然函数: $L(\theta)=C_n^{n_0}(\theta^2)^{n_0}C_{n-n_0}^{n_1}[2\theta(1-\theta)]^{n_1}[(1-\theta)^2]^{n-n_0-n_1}$, 进而对数似然函数: $l(\theta)=\ln C_n^{n_0}+\ln C_{n-n_0}^{n_1}+$ $2n_0\ln\theta+n_1\ln[2\theta(1-\theta)]+2(n-n_0-n_1)\ln(1-\theta)$, 令$\left.\frac{\mathrm{d}l(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}}=0\Leftrightarrow\frac{2n_0}{\hat{\theta}}+\frac{n_1(1-2\hat{\theta})}{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})}-\frac{2(n-n_0-n_1)}{1-\hat{\theta}}=0\Leftrightarrow\hat{\theta}=\frac{2n_0+n_1}{2n}$

故样本值取题设情况时, 矩估计值$\hat{\theta}=1-\frac{1}{2}\times\frac{9}{10}=\frac{11}{20}$, 极大似然估计值$\hat{\theta}=\frac{11}{20}$

(3)矩估计量: 由$\mu_1=E(X)=2-2\theta-\lambda, \mu_2=E(X^2)=\lambda+4(1-\theta-\lambda)$可得: $\theta=-\frac{3}{2}\mu_1+\frac{1}{2}\mu_2+1, \lambda=2\mu_1-\mu_2$

用A_1代替μ_1、A_2代替μ_2得: $\hat{\theta}=-\frac{3}{2}\overline{X}+\frac{1}{2}A_2+1, \hat{\lambda}=2\overline{X}-A_2$

极大似然估计量: 由题可得似然函数: $L(\theta,\lambda)=C_n^{n_0}\theta^{n_0}C_{n-n_0}^{n_1}\lambda^{n_1}(1-\theta-\lambda)^{n-n_0-n_1}$, 进而对数似然函数: $l(\theta,\lambda)=\ln C_n^{n_0}+\ln C_{n-n_0}^{n_1}+n_0\ln\theta+$ $n_1\ln\lambda+(n-n_0-n_1)\ln(1-\theta-\lambda)$, 令$\begin{cases}\left.\frac{\partial l(\theta,\lambda)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\hat{\theta},\lambda=\hat{\lambda}}=0,\\ \left.\frac{\partial l(\theta,\lambda)}{\partial\lambda}\right|_{\theta=\hat{\theta},\lambda=\hat{\lambda}}=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{n_0}{\hat{\theta}}-\frac{n-n_0-n_1}{1-\hat{\theta}-\hat{\lambda}}=0,\\ \frac{n_1}{\hat{\lambda}}-\frac{n-n_0-n_1}{1-\hat{\theta}-\hat{\lambda}}=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\hat{\theta}=\frac{n_0}{n},\\ \hat{\lambda}=\frac{n_1}{n},\end{cases}$

故样本值取题设情况时, 矩估计值$\hat{\theta}=-\frac{3}{2}\times\frac{9}{10}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}+1=\frac{2}{5}, \hat{\lambda}=2\times\frac{9}{10}-\frac{3}{2}=\frac{3}{10}$; 极大似然估计值$\hat{\theta}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}, \hat{\lambda}=\frac{3}{10}$.

注: 本题所附答案有误, 当题设样本值为$2,2,2,1,0,0,0,1,1,1$时, 答案正确.

4. (1)矩估计量: 由$\mu_1=E(X)=\int_0^2 2^{-\theta}\theta x^\theta\mathrm{d}x=\frac{2\theta}{\theta+1}$可得: $\theta=\frac{\mu_1}{2-\mu_1}$, 用$A_1$代替$\mu_1$得: $\hat{\theta}=\frac{A_1}{2-A_1}=\frac{\overline{X}}{2-\overline{X}}$

极大似然估计量: 由题可得似然函数: $L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(x_i;\theta)=\begin{cases}2^{-n\theta}\theta^n\prod_{i=1}^n x_i^{\theta-1}, & 0<x_i<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

进而对数似然函数: $l(\theta)=\begin{cases}-n\theta\ln2+n\ln\theta+(\theta-1)\sum_{i=1}^n\ln x_i, & 0<x_i<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

令$\left.\frac{\mathrm{d}l(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}}=0\Leftrightarrow-n\ln2+\frac{n}{\hat{\theta}}+\sum_{i=1}^n\ln x_i=0\Leftrightarrow\hat{\theta}=\frac{1}{\ln2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\ln x_i}$

故样本值取题设情况时, 矩估计值$\hat{\theta}=\frac{0.503}{2-0.503}=0.336$, 极大似然估计值$\hat{\theta}=\frac{1}{\ln2-(-1.039)}=0.577$

(2)矩估计量: 由$\mu_1=E(X)=\int_\theta^2\frac{x}{2-\theta}\mathrm{d}x=\frac{\theta+2}{2}$可得: $\theta=2\mu_1-2$, 用A_1代替μ_1得: $\hat{\theta}=2A_1-2=2\overline{X}-2$

极大似然估计量: 由题可得似然函数: $L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(x_i;\theta)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2-\theta}\right)^n, & \theta\le x_i<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 根据极大似然估计的定义, 为使$L(\theta)$达到最大, 则θ应该尽可能大, 但不能大于$\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, 否则$L(\theta)=0$, 故$\hat{\theta}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$

故样本值取题设情况时, 矩估计值$\hat{\theta} = 2 \times 1.093 - 2 = 0.186$, 极大似然估计值$\hat{\theta} = 0.35$

(3)矩估计量: 由$\mu_2 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{2\theta} \mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\theta}} \mathrm{d}x = 2\theta^2$可得: $\theta = \sqrt{\frac{\mu_2}{2}}$, 用$A_2$代替$\mu_2$得: $\hat{\theta} = \sqrt{\frac{A_2}{2}} = \sqrt{\frac{\overline{X^2}}{2}}$

极大似然估计量: 由题可得似然函数: $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \frac{1}{2^n \theta^n} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{-\frac{|x_i|}{\theta}}$, 进而对数似然函数: $l(\theta) = -n\ln 2 - n\ln\theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$

令$\left.\frac{\mathrm{d}l(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = 0 \Leftrightarrow -\frac{n}{\hat{\theta}} + \frac{1}{\hat{\theta}^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i| = 0 \Leftrightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

故样本值取题设情况时, 矩估计值$\hat{\theta} = \sqrt{\frac{0.47}{2}} = 0.485$, 极大似然估计值$\hat{\theta} = 0.468$.

注: 1.本题第(2)问可参考例7.1.8;

2.本题第(3)问没有使用一阶原点矩(即μ_1)的原因在于, 该总体密度函数对应的一阶原点矩恒为0, 不含有参数θ, 无法用作矩估计.

5. (1)由题可得似然函数: $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n}\prod_{i=1}^{n} x_i \mathrm{e}^{-\frac{x_i^2}{2\theta}}, & x_i > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 进而对数似然函数: $l(\theta) = \begin{cases} -n\ln\theta + \sum_{i=1}^{n}\left(\ln x_i - \frac{x_i^2}{2\theta}\right), & x_i > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$

令$\left.\frac{\mathrm{d}l(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = 0 \Leftrightarrow -\frac{n}{\hat{\theta}} + \frac{1}{\hat{\theta}^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \Leftrightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$

(2)$E(X^2) = \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\theta}}\mathrm{d}x = 2\theta$, 故$\widehat{E(X^2)} = 2\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$

(3)$P\{X > 1\} = \int_1^{+\infty} \frac{x}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\theta}}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\theta}}$, 故$P\widehat{\{X > 1\}} = \mathrm{e}^{-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}$.

6. (1)由于:

$$
\begin{aligned}
E\left(a\sum_{i=1}^{9}(X_{i+1} - X_i)^2\right) &= aE\left(\sum_{i=1}^{n}(X_{i+1}^2 - 2X_{i+1}X_i + X_i^2)\right) \\
&= a\sum_{i=1}^{9}[E(X_{i+1}^2) - 2E(X_{i+1})E(X_i) + E(X_i^2)] \\
&= a\sum_{i=1}^{9}(\sigma^2 + \mu^2) - 2\mu^2 + (\sigma^2 + \mu^2) = a\sum_{i=1}^{9} 2\sigma^2 = 18a\sigma^2
\end{aligned}
$$

而$a\sum_{i=1}^{9}(X_{i+1} - X_i)^2$是$\sigma^2$是无偏估计量, 故$E\left(a\sum_{i=1}^{9}(X_{i+1} - X_i)^2\right) = \sigma^2 \Leftrightarrow 18a\sigma^2 = \sigma^2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{18}$

(2)同(1)理易得: $E\left(b\sum_{i=1}^{5}(X_i - X_{i+5})^2\right) = \sigma^2 \Leftrightarrow 10b\sigma^2 = \sigma^2 \Leftrightarrow b = \frac{1}{10}$.

7. 由于$E(\hat{\mu}_1) = \frac{1}{2}E(X_1) + \frac{1}{4}E(X_2) + \frac{1}{4}E(X_3) = \mu, E(\hat{\mu}_2) = 2E(X_1) - 2E(X_2) + E(X_3) = \mu, E(\hat{\mu}_3) = \frac{1}{3}E(X_1) + \frac{1}{3}E(X_2) + \frac{1}{3}E(X_3) = \mu$,

故$\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3$均为无偏估计量

而$D(\hat{\mu}_1) = \frac{1}{4}D(X_1) + \frac{1}{16}D(X_2) + \frac{1}{16}D(X_3) = \frac{3}{8}\sigma^2, D(\hat{\mu}_2) = 4D(X_1) + 4D(X_2) + D(X_3) = 9\sigma^2, D(\hat{\mu}_3) = \frac{1}{9}D(X_1) + \frac{1}{9}D(X_2) + \frac{1}{9}D(X_3) = \frac{1}{3}\sigma^2$,

故$\hat{\mu}_3$是最有效的.

8. (1)为使T是σ^2的无偏估计量, 应有$E(T) = \sigma^2 \Leftrightarrow aE(S_1^2) + bE(S_2^2) + cE(S_3^2) = \sigma^2$, 由于$S_i^2$是$\sigma^2$的无偏估计量(例7.2.1), 故$E(S_1^2) = \sigma^2$, 进而$(a + b + c)\sigma^2 = \sigma^2$, 故$a + b + c = 1$

(2)$D(T) = a^2D(S_1^2) + b^2D(S_2^2) + c^2D(S_3^2)$, 其中$D(S_i^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$(例6.3.1(3)), 即$D(T) = \left(2a^2 + b^2 + \frac{2}{3}c^2\right)\sigma^4$, 为使$T$最有效, 则$2a^2 + b^2 + \frac{2}{3}c^2$最小

由柯西不等式可知: $\left(2a^2 + b^2 + \frac{2}{3}c^2\right)\left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2}\right) \geq (a + b + c)^2 = 1 \Leftrightarrow 2a^2 + b^2 + \frac{2}{3}c^2 \geq \frac{1}{3}$, 当且仅当$2a = b = \frac{2}{3}c$时等号成立, 而由(1): $a + b + c = 1$, 故解得: $a = \frac{1}{6}, b = \frac{1}{3}, c = \frac{1}{2}$

9. (1)矩估计量: 由$\mu_1 = E(X) = \int_0^{\theta}\frac{2x^2}{\theta^2}\mathrm{d}x = \frac{2\theta}{3}$可得: $\theta = \frac{3\mu_1}{2}$, 用$A_1$代替$\mu_1$得: $\hat{\theta}_1 = \frac{3A_1}{2} = \frac{3\overline{X}}{2}$

极大似然估计量: 由题可得似然函数: $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \begin{cases} \frac{2^n}{\theta^{2n}}\prod_{i=1}^{n} x_i, & 0 < x_i < \theta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 根据极大似然估计的定义, 为使$L(\theta)$达到最大, 则θ应该尽可能小, 但不能小于$\max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, 否则$L(\theta) = 0$, 故$\hat{\theta}_2 = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$

(2)对矩估计量: 由于$E(\hat{\theta}_1) = E\left(\frac{3\overline{X}}{2}\right) = \frac{3}{2}E(X) = \theta$, 故$\hat{\theta}_1$是无偏估计量, 又$E(X^2) = \int_0^{\theta}\frac{2x^3}{\theta^2}\mathrm{d}x = \frac{\theta^2}{2}$, 故$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{\theta^2}{18}$

进而$\mathrm{Mse}(\hat{\theta}_1)=D(\hat{\theta}_1)=D\left(\dfrac{3\overline{X}}{2}\right)=\dfrac{9}{4n}D(X)=\dfrac{9}{4n}\times\dfrac{\theta^2}{18}=\dfrac{\theta^2}{8n}$

对极大似然估计量: 由题易知X的分布函数为$F(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{\theta^2}, & 0<x<\theta,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 故$\hat{\theta}_2$的分布函数$F_M(x;\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}F(x;\theta)=\begin{cases}\left(\dfrac{x^2}{\theta^2}\right)^n, & 0<x<\theta,\\ 0, & 其他,\end{cases}$

进而$\hat{\theta}_2$的密度函数$f_M(x;\theta)=F_M'(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2n}{\theta^{2n}}x^{2n-1}, & 0<x<\theta,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

故$E(\hat{\theta}_2)=\displaystyle\int_0^{\theta}\frac{2n}{\theta^{2n}}x^{2n}\mathrm{d}x=\frac{2n}{2n+1}\theta, E(\hat{\theta}_2^2)=\int_0^{\theta}\frac{2n}{\theta^{2n}}x^{2n+1}\mathrm{d}x=\frac{n}{n+1}\theta^2$, 故$\mathrm{Mse}(\hat{\theta}_2)=E[(\hat{\theta}-\theta)^2]=E(\hat{\theta}^2)-2\theta E(\hat{\theta})+\theta^2=\dfrac{\theta^2}{(n+1)(2n+1)}$

分析易知$\mathrm{Mse}(\hat{\theta}_1)>\mathrm{Mse}(\hat{\theta}_2)$, 故在均方误差准则下, $\hat{\theta}_2$更优

(3)由Khinchin大数定律: $\overline{X}\xrightarrow{P}E(X)=\dfrac{2\theta}{3}$, 故$\hat{\theta}_1=\dfrac{3\overline{X}}{2}\xrightarrow{P}\theta$, 即$\hat{\theta}_1$是$\theta$的相合估计量

由(2)可知: $D(\hat{\theta}_2)=E(\hat{\theta}_2^2)-(E(\hat{\theta}_2))^2=\dfrac{n\theta^2}{(n+1)(2n+1)^2}$, 故对任意$\varepsilon>0$, 由Chebyshev不等式:

$$1\geq P\{|\hat{\theta}_2-\theta|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{D(\hat{\theta}_2)}{\varepsilon^2}=1-\frac{n\theta^2}{\varepsilon^2(n+1)(2n+1)^2}\to 1,\quad n\to+\infty$$

故$\hat{\theta}_2$是θ的相合估计量

10. (1)证明:

矩估计量: 由$\mu_1=E(X)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}\mathrm{d}x=\theta$可得: $\theta=\mu_1$, 用A_1代替μ_1得: $\hat{\theta}_1=A_1=\overline{X}$

极大似然估计量: 由题可得似然函数: $L(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}\prod\limits_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-\frac{x_i}{\theta}}, & x_i>0,\\ 0, & 其他\end{cases}$, 进而对数似然函数: $l(\theta)=\begin{cases}-n\ln\theta-\dfrac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i, & x_i>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}$

令$\left.\dfrac{\mathrm{d}l(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}_2}=0\Leftrightarrow-\dfrac{n}{\hat{\theta}_2}+\dfrac{1}{\hat{\theta}_2^2}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0\Leftrightarrow\hat{\theta}_2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\overline{X}$

证毕.

(2)由于$E(X^2)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}\mathrm{d}x=2\theta^2$, 故

$$E(\hat{\theta}^2)=E\left(\left(c\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2\right)=c^2E\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}X_iX_j=c^2[nE(X^2)+n(n-1)E^2(X)]=(n+1)nc^2\theta^2$$

又:

$$E(\hat{\theta})=E\left(c\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=cE(n\overline{X})=cn\theta$$

故:

$$\mathrm{Mse}(\hat{\theta})=E[(\hat{\theta}-\theta)^2]=E(\hat{\theta}^2)-2\theta E(\hat{\theta})+\theta^2=[(n+1)nc^2-2cn+1]\theta^2$$

为使$\hat{\theta}$在均方误差准则下最优, 则$\mathrm{Mse}(\hat{\theta})$应最小, 分析易知当$c=\dfrac{1}{n+1}$时满足条件

(3)由(2)得: 此时$\hat{\theta}=\dfrac{1}{n+1}\theta^2$, 另$E(\hat{\theta})=\dfrac{n}{n+1}\theta, E(\hat{\theta}^2)=\dfrac{n}{n+1}\theta^2$, 故$D(\hat{\theta})=\dfrac{n\theta^2}{(n+1)^2}$, 进而对于任意$\varepsilon>0$, 由Chebyshev不等式:

$$1\geq P\{|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{D(\hat{\theta}_2)}{\varepsilon^2}=1-\frac{n\theta^2}{\varepsilon^2(n+1)^2}\to 1,\quad n\to+\infty$$

故$\hat{\theta}$是θ的相合估计量

11. (1)由题可得似然函数: $L(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\begin{cases}\prod\limits_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-(x_i-\theta)}, & x_i\geq\theta,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 根据极大似然估计的定义, 为使$L(\theta)$达到最大, 则θ应该尽可能大, 但不能大于$\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, 否则$L(\theta)=0$, 故$\hat{\theta}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$

(2)由题可知: $F(x;\theta)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-(x-\theta)}, & x\geq\theta,\\ 0, & 其他,\end{cases}$, 由(1)易得$\hat{\theta}$的分布函数$F_N(x)=1-\prod\limits_{i=1}^{n}1-F(x;\theta)=1-\mathrm{e}^{-n(x-\theta)}$

故$\hat{\theta}-\theta$的分布$G(x)=P\{\hat{\theta}-\theta<x\}=P\{\hat{\theta}<x+\theta\}=F_N(x+\theta)=1-\mathrm{e}^{-nx}, x\geq 0$, 进而其密度函数$g(x)=G'(x)=\begin{cases} n\mathrm{e}^{-nx}, & x\geq 0, \\ 0, & x<0. \end{cases}$

(3)由(2)可知, $\hat{\theta}-\theta$的分布不依赖于θ且完全已知, 故$\hat{\theta}-\theta$可以取为关于θ的区间估计问题的枢轴量

(4)$P\{\theta>\hat{\theta}_L\}=1-\alpha\Leftrightarrow P\{\hat{\theta}-\theta<\hat{\theta}-\hat{\theta}_L\}=1-\alpha\Leftrightarrow 1-\mathrm{e}^{-n(\hat{\theta}-\hat{\theta}_L)}=1-\alpha\Leftrightarrow \hat{\theta}_L=\hat{\theta}+\dfrac{\ln\alpha}{n}=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}+\dfrac{\ln\alpha}{n}$.

12. 取枢轴量$G(X_1,\cdots,X_5;\mu)=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$, 设常数$a<b$, 且$P\left\{a<\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<b\right\}=1-\alpha=0.95\Leftrightarrow P\left\{\overline{X}-b\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\overline{X}-a\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}=0.95$, 根据正态分布的对称性可知取$a=-b=-z_{\alpha/2}=-z_{0.025}$时, 区间长度最短, 故置信区间为$\left(\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.025},\overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.025}\right)$

查表并由题设数据可得: $z_{0.025}=1.96,\overline{X}=21.82,\sigma=0.3,n=5$, 代入得置信区间为$(21.557,22.083)$.

注: 1.本题的分析过程参照式(7.4.1)和(7.4.2)的推导过程, 实际可略去, 直接引用表7.4.1的结论;

2.本题也可使用EXCEL进行求解: 在工作表中输入数据, 用AVERAGE函数求出数据平均值(即$\overline{X}$), 用CONFIDENCE.NORM函数求出误差限(即$\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}$).

13. (1)由题设数据可得$n=15,\overline{X}=3400.933,S=412.795$, 查表得$t_{0.025}(14)=2.1448$, 故置信区间$\left(\overline{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{0.025}(n-1),\overline{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{0.025}(n-1)\right)$, 代入得置信区间为$(3172.333,3629.533)$

(2)查表得$t_{0.05}(14)=1.7613$, 故单侧置信下限为$\hat{\mu}_L=\overline{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{0.05}(n-1)$, 代入得$\hat{\mu}_L=3213.208$.

14. 由题可得成对数据差$d_i=x_i-y_i$的值: $2\quad -7\quad -13\quad -18\quad -5\quad -11\quad -17\quad 4\quad -9\quad 7$

由以上数据可得: $n=10,\overline{D}=-6.7,\ S_D=8.68$; 查表得$t_{0.025}(9)=2.2622$, 故置信区间$\left(\overline{D}-\dfrac{S_D}{\sqrt{n}}t_{0.025}(n-1),\overline{D}+\dfrac{S_D}{\sqrt{n}}t_{0.025}(n-1)\right)$, 代入得置信区间为$(-12.91,-0.49)$.

15. 查表得$\chi^2_{0.025}(14)=26.119,\chi^2_{0.975}(14)=5.629,\chi^2_{0.95}(14)=6.571$

故置信区间$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.025}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.975}(n-1)}\right)$, 代入得置信区间为$(91335.65,423804.6)$; 单侧置信上限$\hat{\sigma}^2_U=\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.95}(n-1)}$, 代入得$\hat{\sigma}^2_U=363049.2$.

16. (1)均值取样本均值$\overline{X}=8.080813$, 方差取样本方差$S^2=6.873348$

(2)查表得$t_{0.025}(15)=2.1315$, 故置信区间$\left(\overline{X}-\sqrt{\dfrac{S^2}{n}}t_{0.025}(n-1),\overline{X}+\sqrt{\dfrac{S}{n}}t_{0.025}(n-1)\right)$, 代入得置信区间为$(6.684,9.478)$

(3)查表得$\chi^2_{0.025}(15)=27.488,\chi^2_{0.975}(15)=6.262$, 故置信区间$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.025}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.975}(n-1)}\right)$, 代入得置信区间为$(3.751,16.464)$

17. (1)由题$S=300$, 查表得$\chi^2_{0.025}(15)=27.488,\chi^2_{0.975}(15)=6.262$, 故$\sigma^2$的置信水平为95%的置信区间为$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.025}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.975}(n-1)}\right)$, 代入得置信区间为$(49112.34,215586.1)$, 故$\sigma$的置信水平为95%的置信区间为$(221.613,464.312)$

(2)查表得$\chi^2_{0.95}(15)=7.261$, 故σ^2的置信水平为95%的单侧置信上限为$\hat{\sigma}^2_U=\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.95}(n-1)}$, 代入得$\hat{\sigma}^2_U=185924.8$, 故$\hat{\sigma}_U=431.19$

18. 依题可得$S_w=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}=89.524$, 利用EXCEL的T.INV函数可得$t_{0.025}(198)=1.972$, 故$\mu_1-\mu_2$的置信水平为95%的置信区间为$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm t_{0.025}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right)$, 代入得置信区间为$(-159.97,-110.03)$

再利用EXCEL的T.INV函数可得$t_{0.05}(198)=1.653$, 故$\mu_1-\mu_2$的置信水平为95%的单侧置信上限为$(\widehat{\mu_1-\mu_2})_U=\overline{X}-\overline{Y}+t_{0.05}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}$, 代入得$(\widehat{\mu_1-\mu_2})_U=-114.07$

19. (1)查表得$z_{0.025}=1.96$, 故$\mu_1-\mu_2$的置信水平为95%的置信区间为$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm z_{0.025}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$, 代入得置信区间$(-4.01,14.61)$

(2)依题可得$S_w=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}=12.188$, 查表得$t_{0.025}(26)=2.0555$

故$\mu_1-\mu_2$的置信水平为95%的置信区间为$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm t_{0.025}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$, 代入得置信区间为$(-4.267, 14.867)$

(3)查表得$F_{0.025}(15,11) = 3.33, F_{0.025}(11,15) = 3.01^*$, 故$F_{0.975}(15,11) = \frac{1}{F_{0.025}(11,15)} = 0.332$, 故$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信水平为95%的置信区间为$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{0.025}(n_1-1,n_2-1)}, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{0.975}(n_1-1,n_2-1)}\right)$, 代入得置信区间为$(0.385, 3.865)$

*这里的$F_{0.025}(11,15)$是由书中附表数据线性内插得到的, 若利用EXCEL的F.INV.RT函数计算, 所得值内插值相差很小.

20. 由于$n_1, n_2 > 50$, 故$t = \frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$, $\mu_1-\mu_2$的置信水平为95%的置信区间为$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm z_{0.025}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}\right)$

查表得$z_{0.025}=1.96$, 代入得置信区间为$(-0.5745, -0.3455)$

21. 法一: 由已知资料计算得:

$$\begin{aligned}
a &= n + z_{0.025}^2 = 80 + 1.96^2 = 83.8416 \\
b &= -(2n\overline{x} + z_{0.025}^2) = -(2\times 80\times \frac{55}{80} + 1.96^2) = -113.8416 \\
c &= n\overline{x}^2 = 80\times\left(\frac{55}{80}\right)^2 = 37.8125
\end{aligned}$$

代入$\left(\frac{1}{2a}(-b-\sqrt{b^2-4ac}), \frac{1}{2a}(-b+\sqrt{b^2-4ac})\right)$得$p$的置信水平为95%的置信区间为$(0.5793, 0.7785)$

法二: 取$p(1-p)$的估计量为$\hat{p}(1-\hat{p})$, 其中$\hat{p}=\frac{55}{80}=0.6875$, 代入$\left(\overline{X}-z_{0.025}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \overline{X}+z_{0.025}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$得$p$的置信水平为95%的置信区间为$(0.5859, 0.7891)$

第八章　假设检验

1.电视机显像管的质量标准是平均使用寿命为15000h, 标准差为1500h. 某电视机厂宣称其生产的显像管平均寿命大大高于规定的标准. 为了对此说法进行验证, 随机抽取了100件该厂产品为样本, 测得平均使用寿命为15525h. 能否说该厂的显像管平均寿命显著地高于规定的标准? 取$\alpha = 0.05$, 假设显像管的寿命$X \sim N(\mu, 1500^2)$.

(1)给出检验的原假设和备择假设;

(2)求检验的拒绝域;

(3)求$P_$值;

(4)根据样本判断是否可以认为该厂的显像管平均寿命显著高于规定的标准?

2.某汽车厂商宣称他们生产的汽车平均每公升汽油可行驶15km以上. 为验证该广告的真实性, 随机选取10辆车, 并且记录下每辆车每公升汽油行驶的千米数, 得到如下的观察值:

14.8　15.1　16.9　14.8　13.7　12.9　13.5　14.9　15.4　13.5

假设数据来自正态分布, 请检验该广告的真实性(取$\alpha = 0.05$).

3.设总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 从总体中抽取容量为16的简单随机样本, 样本均值为$\overline{X}$, 样本方差为S^2.

(1)若$\sigma^2 = 1$, 在显著水平为0.05下对于假设: $H_0: \mu = 1, H_1: \mu \neq 1$, 求出拒绝域; 并计算在$\mu = 2$时犯第II类错误的概率;

(2)若μ未知, 在显著水平为0.05下对于假设: $H_0: \sigma^2 = 1, H_1: \sigma^2 > 1$, 求出拒绝域; 并计算在$\sigma^2 = 4$时犯第II类错误的概率;

(3)若根据样本值得$\bar{x} = 1.54, s^2 = 1.44$, 求(1)和(2)中的$P_$值.

4.火药生产厂家设计出一种新的火药生产方案, 要求使子弹发射的枪口速度达到900m/s. 假设枪口速度X(m/s)服从$N(\mu, \sigma^2)$, 现做了8次试验, 其速度分别为

893　886　897　903　901　898　909　889

(1)试问这些数据是否足以说明其枪口速度的均值μ与900m/s存在显著差异(取$\alpha = 0.05$)?

(2)求μ的置信水平为95%的置信区间;

(3)求$P_$值.

5.根据《中国居民营养与慢性病状况报告(2015)》, 全国18岁及以上成年男性和女性的平均身高分别为167.1cm和155.8cm, 平均体重分别为66.2kg和57.3kg. 今从我国某东部地区随机抽选400名成年男子, 测得身高的平均值为169.7cm, 标准差为4.2cm. 设样本来自总体$N(\mu, \sigma^2)$, 问该地区男子的身高是否明显高于全国平均水平(取$\alpha = 0.05$).

6.为调查某减肥药的成效, 随机选取10位使用者, 记录其服用减肥药前、后的体重(单位: kg).

编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
服药前体重	66	70	56	58	49	75	63	56	48	75
服药后体重	68	65	54	59	45	70	60	50	47	68

设服药前后体重差服从正态分布. 试用假设检验方法分析该减肥药的效果(取$\alpha = 0.05$).

7.为了解某种犬类疫苗注射后是否会使得犬的体温升高, 随机选择9只狗, 记录它们注射疫苗前、后的体温(单位: °C):

编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
注射前体温/°C	37.5	37.7	38.1	37.9	38.3	38.5	38.1	37.6	38.4
注射后体温/°C	37.7	38.0	38.2	37.9	38.2	38.8	38.0	37.5	38.8

设注射疫苗前、后体温差服从正态分布, 问是否可以认为注射疫苗前后狗的体温有显著升高($\alpha = 0.05$)?

8.某经销代理商在和乳液公司的合约里要求生产的225mL盒装牛奶中, 容量标准差不可超过8mL, 否则就予以退货. 现随机抽取15盒牛奶, 测得容量(单位: mL)分别为

230	223	228	229	220	215	217	231
220	223	230	224	226	228	227	

假设样本来自正态总体, 在显著水平$\alpha = 0.05$下, 检验假设$H_0 : \sigma \geq 8, H_1 : \sigma < 8$, 并计算$P_$值.

9.某一灌装机灌装每瓶550mL的饮料, 假设饮料的容量X(单位: mL)服从$N(\mu, \sigma^2)$, 要求标准差不超过5.5mL. 为判断该灌装机工作是否正常, 从已灌装的饮料中随机取9瓶, 测得样本均值$\overline{x} = 553.5$, 样本标准差为$s = 6.3$. 在显著水平0.05下,

(1)检验假设$H_0 : \mu = 550, H_1 : \mu \neq 550$, 计算$P_$值, 作出结论;

(2)检验假设$H_0 : \sigma \leq 5.5, H_1 : \sigma > 5.5$, 计算$P_$值, 作出结论.

10.已知某种零件的长度X(单位: cm)服从正态分布, 现从一批零件中随机抽取16只, 测得其长度如下:

15.1	14.9	14.8	14.6	15.2	14.8	14.9	14.6
14.8	15.1	15.3	14.7	15.0	15.2	15.1	14.7

(1)若要求该种零件的标准长度应为15cm, 检验这批零件是否符合标准要求(取$\alpha = 0.05$);

(2)若要求方差不超过0.04, 问该批零件是否符合标准要求(取$\alpha = 0.05$).

11.现对某论坛的日发帖量进行为期2周(14天)的调查, 测得各日的日发帖量为$x_1, \cdots, x_{14}$, 并计算得$\sum\limits_{i=1}^{14} x_i = 7077, \sum\limits_{i=1}^{14}(x_i - \overline{x})^2 = 359.58$. 若假定该论坛的日发帖量$X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

(1)通过计算$P_$值说明是否有充分的理由认为$\mu > 500$?

(2)通过计算$P_$值说明是否有充分的理由认为$\sigma^2 \neq 30$(取$\alpha = 0.05$).

12.下列数据为两个煤矿开采的每吨煤产生的热量记录(单位: 4.186×10^3J):

矿A:	8500	8330	8480	7960	8030
矿B:	7710	7890	7920	8270	7860

假设这些数据来自两个方差相等且相互独立的正态总体, 是否可以认为A矿的煤产生的热量要显著地大于B矿的煤(取$\alpha = 0.05$)?

13.为比较甲、乙两位电脑打字员的出错情况, 随机抽查甲输入的文件8页, 各页出错字数为

$$5 \quad 3 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 4$$

抽查乙输入的文件9页, 各页出错字数为

$$5 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 2 \quad 5$$

假设甲、乙两人页出错字数都服从正态分布, 试检验

(1)甲、乙两人页出错数的方差是否相等(取$\alpha = 0.05$)?

(2)甲页均出错数是否显著少于乙(取$\alpha = 0.05$)?

14.为了研究男性长跑运动员的心率是否低于一般健康男性心率, 现从省长跑队随机抽取了10名运动员, 并从某高校随机抽取25名学生. 测得运动员心率的平均值为60次/分, 标准差为6次/分, 大学生心率的平均值为73次/分, 标准差为13次/分. 假设心率次数服从正态分布, 根据上面的资料检验

(1)两个群体心率的方差是否相等(取$\alpha = 0.05$)?

(2)若假设两个群体心率的方差不相等, 是否有理由认为男性长跑运动员每分钟的心率显著低于一般年轻男性(取$\alpha = 0.05$)?

15.为研究某种新药对抗凝血酶活力的影响, 随机安排新药组病人12例, 对照组病人10例, 分别测定其抗凝血酶活力(单位: mm^3), 假设数据来自正态总体, 结果如下:

新药组:	136	127	128	128	133	138	142	116	110	108	115	140
对照组:	163	165	177	170	175	152	157	159	160	164		

试在显著水平0.05下检验

(1)两个总体的方差是否相等?

(2)新药组和对照组病人的平均抗凝血酶活力有无显著差异?

16.一盒中有10个球, 其中红球有a个(未知), 其余是白球, 采用放回抽样取3个球作为一次试验, 这样的试验总共进行200次, 发现有40次没有取到红球, 有85次取到1个红球, 有63次取到2个红球, 有12次取到3个红球, 请在显著水平0.05下, 检验假设$H_0: a = 3$.

17.某个八面体各面分别标有数字$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, 为检验它各面是否匀称, 即各面出现的概率是否均相等, 作600次投掷实验, 各数字朝上的次数如下:

数字:	1	2	3	4	5	6	7	8
频数:	72	83	78	90	70	71	64	72

在显著水平0.05下, 检验假设H_0 : 该八面体是匀称的.

18.对某公交车站观察从12点到15点这3个小时前来等车的乘客情况, 将2分钟作为一个单位时间, 记录90个单位时间等车的情况, 数据如下:

乘客数:	0	1	2	3	4	5	7	8
频数:	5	12	18	21	16	13	3	2

问这些数据是否来自泊松分布的总体(取$\alpha = 0.05$)?

19.某ATM机等候一个乘客来到的时间为X(单位: min), 现观察了100次, 获得如下数据:

等候时间X:	$0 \le X \le 5$	$5 < X \le 10$	$10 < X \le 20$	$20 < X \le 30$	$X > 30$
频数:	30	28	20	15	7

在显著水平0.05下, 检验假设H_0: 等候时间X服从均值为10的指数分布.

20.对某地区成年男子身高X(单位: cm)进行观察, 随机抽取200名男子, 得到样本均值和样本标准差分别为$\overline{x} = 169.9, s = 9.6$, 其他资料如下:

身高x:	$x \le 163$	$163 < x \le 167$	$167 < x \le 171$	$171 < x \le 175$	$175 < x \le 179$	$179 < x \le 183$	$x > 183$
频数:	41	34	40	33	27	16	9

在显著水平0.05下, 检验假设H_0: 该地区成年男子身高服从正态分布.

第八章　假设检验课后题详解

1. (1)根据假设选择的原则: 备择假设是我们根据样本资料想得到支持的假设, 结合题干可得原假设与备择假设: $H_0: \mu = 15000, H_1: \mu > 15000$

(2)对于(1)中的右侧假设问题, 查表得$z_{0.05} = 1.645$, 故拒绝域$W = \{Z \geq 1.645\}$

(3)检验统计量$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, 其观察值$z_0 = \dfrac{15525 - 15000}{1500/10} = 3.5$, 由EXCEL的NORM.S.DIST函数可得$\Phi(z_0) = 0.999767$, 故$P_- = 1 - \Phi(z_0) = 0.000233$

(4)法一: 由于(3)中检验统计量的观察值落在(2)的拒绝域中, 故拒绝原假设H_0, 即可以认为该厂的显像管平均寿命显著高于规定的标准.

法二: 由于(3)中的P_-值小于显著水平$\alpha = 0.05$, 故拒绝原假设H_0, 即可以认为该厂的显像管平均寿命显著高于规定的标准.

2. 由题可得观察值的均值$\overline{x} = 14.55$, 标准差$s = 1.176$, 假设问题为: $H_0: \mu \geq 15, H_1: \mu < 15$

查表得$t_{0.05}(9) = 1.8331$, 故拒绝域$W = \{T \leq -1.8331\}$, 检验统计量的观察值$t_0 = \dfrac{14.55 - 15}{1.176/\sqrt{10}} = -1.21$, 落在拒绝域外, 故接受原假设$H_0$, 即该广告是真实的.

3. (1)$\sigma^2 = 1$已知, 查表得$z_{0.025} = 1.96$, 故拒绝域$W = \{|Z| \geq 1.96\} = \{4|\overline{X} - 1| \geq 1.96\} = \{\overline{X} \geq 1.49\} \cup \{\overline{X} \leq 0.51\}$

即当$\overline{x} \geq 1.49$或$\overline{x} \leq 0.51$时, 拒绝原假设, 故当$\mu = 2$时犯第II类错误、即当$\mu = 2$时有$0.51 < \overline{x} < 1.49$的概率

$$\beta(C) = \Phi\left(\frac{1.49 - 2}{1/\sqrt{16}}\right) - \Phi\left(\frac{0.51 - 2}{1/\sqrt{16}}\right) = \Phi(-2.04) - \Phi(-5.96) \xlongequal[\text{近似为0}]{\text{第2项}} 1 - \Phi(2.04) \xlongequal{\text{查表}} 1 - 0.9793 = 0.0207$$

(2)μ未知, 查表得$\chi^2_{0.05}(15) = 24.996$, 故拒绝域$W = \{\chi^2 \geq 24.996\} = \{15S^2 \geq 24.996\} = \{S^2 \geq 1.6664\}$

即当$s^2 \geq 1.6664$时拒绝原假设, 故当$\sigma^2 = 4$时犯第II类错误、即当$\sigma^2 = 4$时有$s^2 < 1.6664$的概率

$$\beta(C) = 1 - P\left\{\chi^2(n) > \frac{15 \times 1.6664}{4}\right\} = 1 - P\left\{\chi^2(n) > 6.249\right\} \xlongequal[\text{CHISQ.DIST.RT函数}]{\text{由EXCEL的}} 1 - 0.9753 = 0.0247$$

(3)由题可知(1)(2)中检验统计量的观察值分别为$z_0 = \dfrac{1.54 - 1}{1/\sqrt{4}} = 2.16, \chi_0^2 = \dfrac{15 \times 1.44}{1} = 21.6$

故(1)中的P_-值为$2(1 - \Phi(|z_0|) = 2(1 - \Phi(2.16)) \xlongequal{\text{查表}} 2(1 - 0.9846) = 0.0308$

(2)中的P_-值为$P(\chi^2(15) \geq \chi_0^2) = P(\chi^2(15) \geq 21.6) \xlongequal[\text{CHISQ.DIST.RT函数}]{\text{由EXCEL的}} 0.1187$.

注: 1. (1)(2)这类题目的基本思路是先求出拒绝域, 如果要计算犯第I类错误, 即弃真错误的概率, 说明原假设正确, 但误认为它不正确了, 说明拒绝了原假设, 表明研究者根据实验数据得到的检验统计量观察值(或统计量的观察值)落在了拒绝域内, 接着计算真实情况下该事件发生的概率, 即所求的犯错概率; 类似地, 如果要计算犯第II类错误, 即存伪错误的概率(如本题所示), 说明原假设错误, 但误认为它正确了, 说明接受了原假设, 表明研究者根据实验数据得到的检验统计量观察值(或统计量的观察值)落在了拒绝域外, 接着计算真实情况下该事件发生的概率, 即所求的犯错概率;

2. (2)中对这种右侧检验问题, 之所以没有采用$\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$的拒绝域形式, 是因为教材P212所说的“(2)与(2)’仅在计算犯第I类错误的概率时有区别”.

4. (1)由题可得原假设和备择假设: $H_0: \mu \neq 900, H_1: \mu = 900$, 题设数据的样本均值$\overline{x} = 897$, 样本标准差$s = 7.54$, 进而检验统计量的观察值$t_0 = \dfrac{897 - 900}{7.54/\sqrt{8}} = -1.1254$

查表得$t_{0.025}(7) = 2.3646$, 故拒绝域$W = \{|T| \geq 2.3646\}$, 可知观察值落在拒绝域外, 故接受原假设H_0, 即不足以说明枪口速度的均值μ与900m/s存在显著差异

(2)置信区间$\left(\overline{X} - \dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{0.025}(n-1), \overline{X} + \dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{0.025}(n-1)\right)$, 代入得置信区间为$(890.7, 903.3)$

(3)P_-值为$2P(t(7) \geq 1.1254) \xlongequal[\text{T.DIST.RT函数}]{\text{由EXCEL的}} 0.2975$.

5. 由题可得原假设和备择假设: $H_0:\mu\leq 167.1, H_1:\mu>167.1$, 检验统计量的观察值$t_0=\dfrac{169.7-167.1}{4.2/\sqrt{400}}=12.38$

由EXCEL的T.INV函数可得$t_{0.05}(399)=1.6487$, 可知观察值落在拒绝域内, 故拒绝原假设H_0, 即该地区男子的身高明显高于全国平均水平.

(也可计算P_{-}值, 和题设显著水平相比较, 进行假设检验: $P_{-}=P(t(399)\geq 12.38)\xlongequal[\text{T.DIST.RT函数}]{\text{由EXCEL的}}0<0.05$, 故拒绝原假设$H_0$)

6. 由题可得原假设和备择假设: $H_0:\mu_D\geq 0, H_1:\mu_D<0$, 题设数据成对数据差的均值$\overline{d}=-3$, 标准差$s_d=2.98$, 进而检验统计量的观察值$t_0=\dfrac{-3}{2.98/\sqrt{10}}=-3.18$

查表得$t_{0.05}(9)=1.8331$, 故拒绝域$W=\{T\leq -1.8331\}$, 可知观察值落在拒绝域内, 故拒绝原假设H_0, 即该减肥药有明显成效.

(或$P_{-}=P(t(9)\leq -3.18)\xlongequal[\text{T.DIST函数}]{\text{由EXCEL的}}0.006<0.05$, 故拒绝原假设$H_0$)

7. 由题可得原假设和备择假设: $H_0:\mu_D\geq 0, H_1:\mu_D<0$, 题设数据成对数据差的均值$\overline{d}=0.111$, 标准差$s_d=0.196$, 进而检验统计量的观察值$t_0=\dfrac{0.111}{0.196/\sqrt{9}}=1.699$

查表得$t_{0.05}(8)=1.8595$, 故拒绝域$W=\{T\leq -1.8595\}$, 可知观察值落在拒绝域外, 故接受原假设H_0, 即可以认为注射疫苗后狗的体温有显著升高.

(或$P_{-}=P(t(8)\leq 1.699)\xlongequal[\text{T.DIST函数}]{\text{由EXCEL的}}0.936>0.05$, 故接受原假设$H_0$)

8. 题设数据的样本方差$s^2=24.78$, 进而检验统计量的观察值$\chi_0^2=\dfrac{14\times 24.78}{8^2}=5.42$

查表得$\chi^2_{0.95}(14)=6.571$, 故拒绝域$W=\{\chi^2\leq 6.571\}$, 可知观察值落在拒绝域内, 故拒绝原假设H_0, 即所生产的盒装牛奶合格

P_{-}值为$P(\chi^2(14)\leq 5.42)\xlongequal[\text{CHISQ.DIST函数}]{\text{由EXCEL的}}0.0209$.

9. (1)检验统计量的观察值$t_0=\dfrac{553.5-550}{6.3/\sqrt{9}}=1.667$, P_{-}值为$2P(t(8)\geq 1.667)\xlongequal[\text{T.DIST.RT函数}]{\text{由EXCEL的}}0.134>0.05$, 故接受原假设$H_0$

(2)检验统计量的观察值$\chi_0^2=\dfrac{8\times 6.3^2}{5.5^2}=10.5$, P_{-}值为$P(\chi^2(8)\geq 10.5)\xlongequal[\text{CHISQ.DIST.RT函数}]{\text{由EXCEL的}}0.23>0.05$, 故接受原假设$H_0$.

10. (1)由题可得原假设和备择假设: $H_0:\mu=15, H_1:\mu\neq 0$, 题设数据的样本均值$\overline{x}=14.925$, 样本标准差$s=0.224$, 进而检验统计量的观察值$t_0=\dfrac{14.925-15}{0.224/\sqrt{16}}=-1.339$

查表得$t_{0.025}(15)=2.1315$, 故拒绝域$W=\{|T|\geq 2.1315\}$, 可知观察值落在拒绝域外, 故接受原假设H_0, 即这批零件符合标准要求

(或$P_{-}=2P(t(15)\geq 1.339)\xlongequal[\text{T.DIST函数}]{\text{由EXCEL的}}0.9>0.05$, 故接受原假设$H_0$)

(2)由题可得原假设和备择假设: $H_0:\sigma\geq 0.04, H_1:\mu<0.04$, 检验统计量的观察值$\chi_0^2=\dfrac{15\times 0.224^2}{0.04}=18.816$

查表得$\chi^2_{0.95}(15)=7.261$, 故拒绝域$W=\{\chi^2\leq 7.261\}$, 可知观察值落在拒绝域外, 故接受原假设H_0, 即这批零件符合标准要求.

(或$P_{-}=P(\chi^2(15)\leq 18.816)\xlongequal[\text{CHISQ.DIST函数}]{\text{由EXCEL的}}0.78>0.05$, 故接受原假设$H_0$)

11. (1)取原假设和备择假设: $H_0:\mu\leq 500, H_1:\mu>500$, 由题易得样本均值$\overline{x}=505.5$, 样本方差$s=27.66$

进而检验统计量的观察值$t_0=\dfrac{505.5-500}{\sqrt{27.66/14}}=3.913$

故$P_{-}=P(t(13)\geq 3.913)\xlongequal[\text{T.DIST.RT函数}]{\text{由EXCEL的}}0.000891<0.05$, 故拒绝原假设$H_0$, 即可以认为$\mu>500$

(2)取原假设和备择假设: $H_0:\sigma^2=30, H_1:\sigma^2\neq 30$, 检验统计量的观察值$\chi_0^2=\dfrac{13\times 27.66}{30}=11.986$

故$P_{-}=2\min(p_0,1-p_0)=2\min(P(\chi^2(13)\leq 11.986),1-P(\chi^2(13)\leq 11.986))\xlongequal[\text{CHISQ.DIST函数}]{\text{由EXCEL的}}0.942>0.05$, 故接受原假设$H_0$, 即不能认为$\sigma^2\neq 30$.

12. 取原假设和备择假设: $H_0:\mu_1\leq\mu_2, H_1:\mu_1>\mu_2$, 题设数据的样本均值$\overline{x}=8260, \overline{y}=7930$, 样本方差$s_1^2=63450, s_2^2=42650$, 故$s_w^2=\dfrac{4\times 63450+4\times 42560}{5+5-2}=53005$, 进而检验统计量的观察值$t_0=\dfrac{8260-7930}{\sqrt{53005\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}\right)}}=2.266$

查表得$t_{0.05}(8)=1.8595$，故拒绝域$W=\{T\geq 1.8595\}$，可知观察值落在拒绝域内，故拒绝原假设H_0，即可以认为A矿的煤产生的热量显著地大于B矿的煤.

(或$P_-=P(t(8)\geq 2.266)\xlongequal[\text{T.DIST.RT函数}]{\text{由EXCEL的}}0.0266<0.05$，故拒绝原假设$H_0$)

13. (1)由题易得样本均值$\overline{x}=2.375,\overline{y}=3.556$，样本方差$s_1^2=2.55,s_2^2=1.67$，取原假设和备择假设：$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2,H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$，检验统计量的观察值$f_0=\dfrac{2.55}{1.67}=1.53$

故$P_-=2\min(p_0,1-p_0)=2\min(P(F(7,8)\leq 1.53),1-P(F(7,8)\leq 1.53))\xlongequal[\text{F.DIST函数}]{\text{由EXCEL的}}0.56>0.05$，故接受原假设$H_0$，即认为甲、乙两人页出错数的方差相等

(2)取原假设和备择假设：$H_0:\mu_1\geq\mu_2,H_1:\mu_1<\mu_2$，检验统计量的观察值$t_0=\dfrac{2.375-3.556}{\sqrt{\dfrac{2.55}{8}+\dfrac{1.67}{9}}}=-1.663$

故$P_-=P(t(7)\leq -1.663)\xlongequal[\text{T.DIST函数}]{\text{由EXCEL的}}0.07>0.05$，故接受原假设$H_0$，即认为甲页出错数并不明显少于乙.

14. (1)取原假设和备择假设：$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2,H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$，检验统计量的观察值$f_0=\dfrac{6^2}{13^2}=0.213$

故$P_-=2\min(p_0,1-p_0)=2\min(P(F(9,24)\leq 0.213),1-P(F(9,24)\leq 0.213))\xlongequal[\text{F.DIST函数}]{\text{由EXCEL的}}0.02<0.05$，故拒绝原假设$H_0$，即认为两个群体心率的方差不相等

(2)取原假设和备择假设：$H_0:\mu_1\geq\mu_2,H_1:\mu_1<\mu_2$，检验统计量的观察值$t_0=\dfrac{60-73}{\sqrt{\dfrac{6^2}{10}+\dfrac{13^2}{25}}}=-4.039$

故$P_-=P(t(9)\leq -4.039)\xlongequal[\text{T.DIST函数}]{\text{由EXCEL的}}0.0015<0.05$，故拒绝原假设$H_0$，即认为男性长跑运动员每分钟的心率显著低于一般年轻男性.

15. (1)由题易得样本均值$\overline{x}=126.75,\overline{y}=164.2$，样本方差$s_1^2=140.75,s_2^2=62.4$，取原假设和备择假设：$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2,H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$，检验统计量的观察值$f_0=\dfrac{140.75}{62.4}=2.256$

故$P_-=2\min(p_0,1-p_0)=2\min(P(F(11,9)\leq 2.256),1-P(F(11,9)\leq 2.256))\xlongequal[\text{F.DIST函数}]{\text{由EXCEL的}}0.232>0.05$，故接受原假设$H_0$，即认为两个总体的方差相等

(2)取原假设和备择假设：$H_0:\mu_1=\mu_2,H_1:\mu_1\neq\mu_2$，检验统计量的观察值$t_0=\dfrac{126.75-164.2}{\sqrt{\dfrac{140.75}{12}+\dfrac{62.4}{10}}}=-8.835$

故$P_-=2P(t(9)\geq 8.835)\xlongequal[\text{T.DIST.RT函数}]{\text{由EXCEL的}}0<0.05$，故拒绝原假设$H_0$，即认为新药组和对照组病人的平均抗凝血酶活力有显著差异.

16. 由题得到该问题的χ^2检验计算表如下:

i	n_i	np_i	$\dfrac{n_i^2}{np_i}$	i	n_i	np_i	$\dfrac{n_i^2}{np_i}$
1(没有红球)	40	58.3	27.4	3(2个红球)	63	35	113.4
2(1个红球)	85	105	68.8	4(3个红球)	12	1.67	86.2

故检验统计量的取值为$\chi^2=\sum\limits_{i=1}^{4}\dfrac{n_i^2}{np_i}-n=295.8-200=95.8$

进而$P_-=P\{\chi^2(4-0-1)>95.8\}\xlongequal[\text{CHISQ.DIST.RT函数}]{\text{由EXCEL的}}0<0.05$，故拒绝原假设.

17. 由题易得$np_i=75$，故检验统计量的取值为$\chi^2=\sum\limits_{i=1}^{8}\dfrac{(n_i-np_i)^2}{np_i}=6.37$

进而$P_-=P\{\chi^2(8-0-1)>6.37\}\xlongequal[\text{CHISQ.DIST.RT函数}]{\text{由EXCEL的}}0.497>0.05$，故接受原假设.

18. 依题得原假设$H_0:X\sim P(\lambda)$，易得样本均值：$\overline{x}=3.078$，并以此采用极大似然法估计参数λ：$\hat{\lambda}=\overline{x}=3.078$

则$\hat{p}_i=\hat{P}\{X=i\}=\dfrac{\hat{\lambda}^i}{i!}\mathrm{e}^{-\hat{\lambda}},i=0,1,\cdots,5,\quad \hat{p}_6=\hat{P}\{X>6\}=\sum\limits_{j=7}^{+\infty}\dfrac{\hat{\lambda}^j}{j!}\mathrm{e}^{-\hat{\lambda}}$ 进而可得χ^2检验计算表如下:

乘客数X	0	1	2	3	4	5	>6
频数n_i	5	12	18	21	16	13	5
概率估计$\hat{p}_i$	0.046	0.142	0.218	0.224	0.172	0.106	0.092
理论频数$n\hat{p}_i$	4.14	12.78	19.62	20.16	15.46	9.54	8.82

注意到$\{X=0\}$的理论频数小于5, 将$\{X=0\}$与$\{X=1\}$合并, 最后分为6组, 故检验统计量的取值为$\chi^2=\sum_{i=1}^{7}\frac{n_i^2}{n\hat{p}_i}-n=92.58-90=2.58$

进而$P_-=P\{\chi^2(6-1-1)>2.58\}\xlongequal[\text{CHISQ.DIST.RT函数}]{\text{由EXCEL的}}0.63>0.05$, 故接受原假设.

19. 由题得到该问题的χ^2检验计算表如下:

等候时间X	$0\le X\le 5$	$5<X\le 10$	$10<X\le 20$	$20<X\le 30$	$X>30$
频数n_i	30	28	20	15	7
概率估计$\hat{p}_i$	0.393	0.239	0.233	0.086	0.049
理论频数$n\hat{p}_i$	39.3	23.9	23.3	8.6	4.9

注意到$\{X>30\}$的理论频数略小于5, 试计算表明是否将其与$\{20<X\le 30\}$合并会影响最终结果, 因此以下针对两种处理方法分别讨论:

(1)不合并

检验统计量的取值为$\chi^2=\sum_{i=1}^{5}\frac{n_i^2}{n\hat{p}_i}-n=109.03-100=9.03$

进而$P_-=P\{\chi^2(5-0-1)>9.03\}\xlongequal[\text{CHISQ.DIST.RT函数}]{\text{由EXCEL的}}0.06>0.05$, 故接受原假设.

(2)合并

检验统计量的取值为$\chi^2=\sum_{i=1}^{5}\frac{n_i^2}{n\hat{p}_i}-n=108.72-100=8.72$

进而$P_-=P\{\chi^2(4-0-1)>8.72\}\xlongequal[\text{CHISQ.DIST.RT函数}]{\text{由EXCEL的}}0.03<0.05$, 故拒绝原假设.

20. 取区间$[159,187]$, 等分为7个小区间, 小区间长度$\Delta=4$, 对题设范围全覆盖, 且不影响题设数据区间

给出原假设$H_0: X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 用极大似然估计得到$\hat{\mu}=\overline{x}=170.1, \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=48.95=6.996^2$

由此估计概率并求出理论频数如下表:

身高x	$x\le 163$	$163<x\le 167$	$167<x\le 171$	$171<x\le 175$	$175<x\le 179$	$179<x\le 183$	$x>183$
频数n_i	41	34	40	33	27	16	9
概率估计$\hat{p}_i$	0.155	0.174	0.222	0.207	0.140	0.069	0.033
理论频数$n\hat{p}_i$	31	34.8	44.4	41.4	28	13.8	6.6

检验统计量的取值为$\chi^2=\sum_{i=1}^{7}\frac{n_i^2}{n\hat{p}_i}-n=206.64-200=6.64$

进而$P_-=P\{\chi^2(7-2-1)>6.64\}\xlongequal[\text{CHISQ.DIST.RT函数}]{\text{由EXCEL的}}0.156>0.05$, 故接受原假设.

注: 本题在求均值和方差的时候采用了以区间中点值代替区间的方法.