点集拓扑名词汇总（期末）

烯烃不饱和

二〇二四年一月十日

文章导航

1 前言

笔者为了更全面地总结复习本学期拓扑学相关内容，故编写此文档。文档内所有名词及其解释均参考自《基础拓扑学讲义》[1]。本文档仅给出了《基础拓扑学讲义》第一、二章中相关名词的文字描述和公式描述，相关定理定义的证明在本文档中并未给出。由于笔者水平有限，文档内容难以尽善尽美，如有错误请读者见谅，在此恳请各位批评指正。

2 引言部分

定理 2.1: De Morgan 公式

- $B\backslash\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(B\backslash A_\lambda)$;
- $B\backslash\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(B\backslash A_\lambda)$.

  特别当 $B=X$ 为全集时，上述两式变为

- $(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)^c=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^c$;
- $(\bigcap_{\lambda\in A}A_\lambda)^c=\bigcup_{\lambda\in A}A_\lambda^c$.

定义 2.1: 映射

映射 $f:X\to Y$ 是一个对应关系，s.t.$\forall x\in X$，对应 Y 中的一点 $f(x)$（称为 x 的像点）.

命题 2.1: 像与原像

f 下的像与原像有如下规律：

(1) $f^{-1}(\bigcup\limits_{\lambda\in A}B_\lambda)=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}(B_\lambda)$;

(2) $f^{-1}(\bigcap\limits_{\lambda\in A}B_\lambda)=\bigcap\limits_{\lambda\in A}f^{-1}(B_\lambda)$;

(3) $f^{-1}(B^c)=(f^{-1}(B))^c$;

(4) $f^{-1}(B\backslash D)=f^{-1}(B)\backslash f^{-1}(D)$;

(5) $f(\bigcup\limits_{\lambda\in A}A_\lambda)=\bigcup\limits_{\lambda\in A}f(A_\lambda)$;

(6)$f(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)\subset\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}f(A_\lambda)$, 当$f$单时为相等;

(7)$f(f^{-1}(B))\subset B$, 当f满时为相等;

(8)$f^{-1}(f(A))\supset A$, 当f单时为相等.

[1] 尤承业, 数学家. 基础拓扑学讲义 [M]. 北京大学出版社, 1997.

定义 2.2: 恒同映射

集合 X 到自身的**恒同映射**（保持每一点不变）记作 $\mathrm{id}_X : X \to X$.

定义 2.3: 包含映射

若 $f : X \to Y$ 是映射，$A \subset X$，规定 f 在 A 上的限制为 $f|A : A \to Y, \forall x \in A, f|A(x) = f(x)$. 记 $i : A \to X$ 为**包含映射**，即 $\forall x \in A, i(x) = x$. 于是，$i = \mathrm{id}\,|A, f|A = f \circ i$.

定义 2.4: 笛卡尔积

设 X_1 和 X_2 都是集合，称集合

$$X_1 \times X_2 := \{\text{有序偶}(x, y)|x \in X, y \in Y\}$$

为 X_1 与 X_2 的**笛卡尔积**. 称 x 和 y 为 (x, y) 的**坐标**.

n 个集合的笛卡尔积 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 可类似地定义.

记 $X^n = \overbrace{X \times X \times \cdots \times X}^{n\text{个}}$. 例如 $R^n = \{(x_1, \cdots, x_n)|x_i \in \mathbb{R}\}$.

定义 2.5: 对角子集

称 $X^2 = X \times X$ 的子集

$$\Delta(X) := \{(x, x)|\forall x \in X\}$$

为**对角子集**（常简记作 Δ）.

3 拓扑空间与连续性

3.1 拓扑空间

设 X 为非空集合，则存在如下定义.

定义 3.1: 幂集

记 2^X 为 X 的**幂集**，其中

$$2^X = \{A|A \subset X\}$$

即以 X 的所有子集（包括空集 $\varnothing$ 和 X 自己）为成员的集合.

定义 3.2: 子集族

把 2^X 的自己（即以 X 的一部分自己为成员的集合）称为 X 的**子集族**.

定义 3.3: 拓扑公理

对于非空集合 X，其子集族 τ 称为 X 的一个**拓扑**，如果它满足

(1) $X, \varnothing$ 都包含于 τ;

(2) τ 中**任意**多个成员的并集仍在 τ 中;

(3) τ 中**有限**多个成员的交集仍在 τ 中.

这三个定义拓扑的条件称为**拓扑公理**.(3) 等价于 (3') τ 中两个成员的交集仍在 τ 中.

定义 3.4: 拓扑空间

集合 X 和它的**某一个**拓扑 τ 一起称为一个**拓扑空间**，记作 (X, τ).

定义 3.5: 开集

我们称 τ 中的成员为这个**拓扑空间**的**开集**.

注意： 首先，开集的元素为 X 的子集，也就是说开集的元素仍为集合. 其次，开集的定义是相对于拓扑的定义而言. 对于拓扑 τ_1 的一个开集 A，它在另一个拓扑 τ_2 中可能不是开集.

命题 3.1: 常见拓扑

- **离散拓扑**：称 X 的子集族 2^X 为 X 上的**离散拓扑**；
- **平凡拓扑**：称 $\{X, \varnothing\}$ 为 X 上的**平凡拓扑**；
- **余有限拓扑**：设 X 是无穷集合，称 $\tau_f = \{A^c \mid A \text{ 是} X \text{ 的有限子集}\} \cup \{\varnothing\}$ 为 X 上的**余有限拓扑**；
- **余可数拓扑**：设 X 是不可数无穷集合，称 $\tau_f = \{A^c \mid A \text{ 是} X \text{ 的可数子集}\} \cup \{\varnothing\}$ 为 X 上的**余可数拓扑**；
- **欧式拓扑**：规定 $\tau_e = \big\{U | U \text{是若干个开区间的并集}\big\}$，则 τ_e 为 $\mathbb{R}$ 上的**欧式拓扑**. 记作 $\mathbb{E}^1 = (\mathbb{R}, \tau_e)$.

定义 3.6: 度量

称一个映射 $d: X \times X \to R$ 为度量，如果它满足下面三个条件

(1) 正定性：$\begin{aligned} & d(x,x) = 0, \forall x \in X, \\ & d(x,y) > 0, \text{当} x \neq y; \end{aligned}$

(2) 对称性：$d(x,y) = d(y,x), \forall x, y \in X$;

(3) 三角不等式：$d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z), \quad \forall x, y, z \in X$.

定义 3.7: 度量空间

集合 X 上规定一个度量 d 之后称为**度量空间**，记作 (X,d).

定义 3.8: n 维欧氏空间

记 $R^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbb{R},i=1,\cdots,n\}$. 规定 $\mathbb{R}$ 上的度量 d 为：

$$d((x_1,\cdots,x_n),(y_1,\cdots,y_n))=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2},$$

记 $\mathbb{E}^n=(\mathbb{R}^n,d)$，称为 n **维欧氏空间**.

定义 3.9: 球形邻域

在度量空间 (X,d) 中，设 $x_0\in X,\varepsilon$ 是一正数，称 X 的子集

$$B(x_0,\boldsymbol{\varepsilon}):=\{x\in X|d(x_0,\boldsymbol{x})<\boldsymbol{\varepsilon}\}$$

为以 x_0 为心，ε 为半径的**球形邻域**.

定理 3.1

(X,d) 的任意两个球形邻域交集是若干球形邻域的并集.

定义 3.10: 度量拓扑

在上述条件下规定 X 的子集族 $\tau_d=\{U|U$ 是若干个球形邻域的并集$\}$. 称为 X 上的**度量拓扑**.

提示： 欧氏空间上的度量拓扑即为欧式拓扑.

定义 3.11: 闭集

开集的余集（补集）即为**闭集**. 对于开集 A，集合 A^c 为闭集.

结论 3.1: 闭集公理

拓扑空间的闭集满足：

(1) X 与 $\varnothing$ 都是闭集;

(2) 任意多个闭集的交是闭集;

(3) 有限个闭集的并是闭集.

定义 3.12: 邻域、内点和内部

设 A 为拓扑空间 X 的子集，点 $x \in A$.

若存在开集 U，使得 $x \in U \subset A$，则称 x 是 A 的一个**内点**，A 为点 x 的一个**邻域.**
A 所有的内点集合称为 A 的**内部**，记作 $\mathring{A}$(或A°).

定义 3.13: 聚点与闭包

设 A 是拓扑空间 X 的子集，$x \in X$. 称 x 为 A 的**聚点**，若 x 的每个邻域与集合 A 的交非空.A 所有聚点的集合称为 A 的**导集**，记作 A'. 称集合 $\overline{A} := A \cup A'$ 为 A 的**闭包.**

定义 3.14: 稠密

称拓扑空间 X 的子集 A **稠密**，若 $\overline{A} = X$.

定义 3.15: 可分拓扑空间

称 X 是**可分拓扑空间**，若 X 有**可数稠密子集**.

定义 3.16: 序列的收敛性

我们称序列 $\{x_n\}$ **收敛**于 $x_0 \in X$，当对于任意 x_0 的邻域 U，只有有限个 x_n 不在 U 中. 记作 $x_n \to x_0$.

注意： 拓扑空间中的序列可能收敛到多个点.
例 $(\mathbb{R}, \tau_f)$ 中，只要序列 $\{x_n\}$ 的项两两不同，则任一点 $x \in \mathbb{R}$ 的邻域包含 $\{x_n\}$ 的几乎所有项，从而 $x_n \to x$.

定义 3.17: 子空间拓扑

规定 A 的拓扑

$$\tau_A := \{U \cap A | U \in \tau\}.$$

称为 τ 导出的 A 上的**子空间拓扑.**

定义 3.18: 子空间

称 (A, τ_A) 为 (X, τ) 的**子空间.**

3.2 连续映射

定义 3.19: 连续

设 X 和 Y 是拓扑空间，存在映射

$$f : X \to Y, \quad x \in X,$$

我们称 f 在 x 处**连续**，若对 Y 在中 $f(X)$ 的任一邻域 V，$f^{-1}(V)$ 总是 x 的邻域.

定义 3.20: 连续映射

我们称映射 $f : X \to Y$ 为**连续映射**，当 f 在任一点 $x \in X$ 处都连续.

定理 3.2: 连续映射的等价条件

设 $f : X \to Y$ 是映射，则有如下等价条件

(1) Y 的任一开集在 f 下的原像是 X 的开集;

(2) Y 的任一闭集在 f 下的原像是 X 的闭集.

提醒： 复合映射的连续性具有**传递性**.

定义 3.21: 覆盖

称拓扑空间 X 的子集族 $\mathscr{C} \subset 2^x$ 为 X 的一个覆盖，当 $\bigcup\limits_{c \in \mathscr{C}} C = X$，即 $\forall x \in X$ 至少包含在 $\mathscr{C}$ 的一个成员中.

注意： 若 $\mathscr{C}$ 的每个成员都为开（闭）集，则称 $\mathscr{C}$ 为开（闭）覆盖：覆盖 $\mathscr{C}$ 只包含有限成员时，称 $\mathscr{C}$ 为**有限覆盖**.

定理 3.3: 粘结引理

设 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 是 X 的一个有限闭覆盖.
如果映射 $f : X \to Y$ 在每个 A_i 上的限制均连续，则 f 是连续映射.

3.3 同胚映射

定义 3.22: 同胚映射

我们称 $f : X \to Y$ 为一个**同胚映射**，若 f 一一对应且 f 及其逆 $f^{-1} : Y \to X$ 均连续. 当存在 X 到 Y 的同胚映射时，称 X 与 Y 同胚，记作 $X \cong Y$.

提醒： 同胚映射中条件 f^{-1} 连续不可忽视，其无法从一一对应和 f 连续推出.

定义 3.23: 拓扑概念

拓扑空间在**同胚映射**下保持不变的概念称为**拓扑概念.**

定义 3.24: 拓扑性质

拓扑空间在**同胚映射**下保持不变的性质称为**拓扑性质.**

3.4 乘积空间

命题 3.2: 子集族的生成关系

规定新子集族：

$$\begin{aligned}\overline{\mathscr{B}} &:= \{U \subset X | U \text{ 是}\mathscr{B}\text{中若干成员的并集}\} \\ &= \{U \subset X |\ \forall x \in U, \text{存在} B \in \mathscr{B}, \text{使得} x \in B \subset U\}.\end{aligned}$$

称 $\overline{\mathscr{B}}$ 为 $\mathscr{B}$ 所**生成**的子集族.

显然有 $\mathscr{B} \subset \overline{\mathscr{B}}, \varnothing \in \overline{\mathscr{B}}$.

定义 3.25: 投射

对于集合 X_1 和集合 X_2，记 $X_1 \times X_2$ 为它们的笛卡尔积：

$$X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) | x_i \in X_i\}.$$

规定 $j_i : X_1 \times X_2 \to X_i$ 为 $j_i(x_1, x_2) = x_i (i = 1, 2)$，称 j_i 为 $X_1 \times X_2$ 到 X_i 的**投射.**

提示： 此处的“投射”可以看作笛卡尔积到原空间的还原.

命题 3.3: 不等关系

如果 $A_i \subset X_i (i = 1, 2)$，则 $A_1 \times A_2 X_1 \times X_2$. 易验证当 $A_i \subset X_i, B_i \subset X_i (i = 1, 2)$ 时，

$$(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2).$$

对于并集的运算也有类似的等式，此处不再多作说明.

现在我们有两个拓扑空间 (X_1, τ_1) 和 (X_2, τ_2).

定义 3.26: 乘积拓扑

首先构造 $X_1 \times X_2$ 的子集族 $\mathscr{B} = \{U_1 \times U_2 | U_i \in \tau_i\}$，则 $\tau = \overline{\mathscr{B}}$ 为所需拓扑，称作**乘积拓扑.**

定义 3.27: 乘积空间

称 $(X_1\times X_2,\overline{\mathscr{B}})$ 为 (X_1,τ_1) 和 (X_2,τ_2) 的**乘积空间**. 简记为 $X_1\times X_2$. 类似地我们可以拓展出**有限个**拓扑空间的乘积空间，此处不作过多叙述.

定理 3.4: 乘积结合律

拓扑空间的“乘积”运算具有**结合律**，即

$$X_1\times X_2\times X_3=(X_1\times X_2)\times X_3=X_1\times(X_2\times X_3).$$

除了有限乘积拓扑，我们还可以定义无穷多个拓扑空间的乘积空间，由于该空间不在考试范围内，故略去该部分内容.

定理 3.5: 连续性

对于任何拓扑空间 Y 和映射 $f:Y\to X_1\times X_2$,f 连续 $\Longleftrightarrow$ f 的分量都连续.

3.5 拓扑基

定义 3.28: 拓扑基

称结合 X 的子集族 $\mathscr{B}$ 为**集合 X 的拓扑基，**如果 $\overline{\mathscr{B}}$ 是 X 的一个拓扑；
称拓扑空间 (X,τ) 的子集族 $\mathscr{B}$ 为该**拓扑空间的拓扑基**，若 $\overline{\mathscr{B}}=\tau$.

命题 3.4

$\mathscr{B}$ 是集合 X 的拓扑基的充要条件：

(1) $\bigcup\limits_{B\in\mathscr{B}} B=X$;

(2) 若 $B_1,B_2\in\mathscr{B}$，则 $B_1\bigcap B_2\in\overline{\mathscr{B}}$.

提示： 子集族 $\overline{\mathscr{B}}$ 的生成规则默认了其满足拓扑公理 (2)，且不难得知 $\varnothing$ 与 X 都包含于 $\overline{\mathscr{B}}$. 因此条件 (2) 的设置是为了使 $\overline{\mathscr{B}}$ 满足拓扑公理 (3).

定义 3.29: 拓扑基等价

一般地，当两个拓扑基生成相同的拓扑时，称它们是**等价的.**

命题 3.5

$\mathscr{B}$ 是拓扑空间 (X,τ) 的拓扑基的充要条件：

(1) $\mathscr{B}\subset\tau$, 即 $\mathscr{B}$ 的成员是开集;

(2) $\tau\subset\overline{\mathscr{B}}$，即每个开集都是 $\mathscr{B}$ 中一些成员之并.

4 重要的拓扑性质

4.1 分离公理

首先我们需要明确所谓 T_1-T_4 四个分离公理的共同目的，即分离公理都是关于**两个点 (或闭集)** 能否用**邻域**来**分隔**的性质，是对拓扑空间的附加要求. 带着这个目标去理解四个公理会相对变得容易.

定义 4.1: T_1 公理

任意两个不同点 x 与 y，x 有邻域不含 y，y 有邻域不含 x.

定义 4.2: T_2 公理

任何两个不同点有不相交的邻域.

提示： T_1 公理仅使用**一个邻域** (该邻域具有任意性) 分离**两个点**. 而 T_2 公理使用**两个邻域**分离**两个点**.

注意： 不难看出，T_1 公理是 T_2 公理的**必要不充分条件**，即 T_2 公理具备 T_1 公理的性质，但 T_1 公理并不完全具有 T_2 公理的性质.

$$T_2\text{公理} \Rightarrow T_1\text{公理}$$

定义 4.3: Housdorff Space

满足 T_2 公理的**拓扑空间**称为 **Hausdorff 空间.** 这是一个十分重要的空间，请各位务必熟练掌握.

命题 4.1: Hausdorff 空间收敛点的惟一性

Hausdorff 空间中，一个序列不会收敛到两个以上的点.

定义 4.4: T_3 公理

任意一点与不含它的任一闭集有不相交的 (开) 邻域.

提示： T_3 公理分离了一个**点**与空间中的**闭集.**

命题 4.2: T_3 公理等价条件

任意点 x 和它的开邻域 W，存在 x 的开邻域 U，使得 $\overline{U} \subset W$.

定义 4.5: T_4 公理

任意两个不相交的闭集有不相交的 (开) 邻域.
(当 $A \subset \mathring{U}$ 时，说 U 是集合 A 的邻域).

提示： T_4 公理分离了空间中的两个**闭集**.

命题 4.3: T_4 公理等价条件

任意闭集 A 和它的开邻域 W，有 A 的开邻域 U，使得 $\overline{U} \subset W$.

命题 4.4

度量空间 (X, d) 满足上述四个公理.

4.2 可数公理

定义 4.6: 邻域系与邻域基

设 $x \in X$. 把 x 的所有淋雨的集合称为 x 的**邻域系，**记作 $\mathscr{N}$.
$\mathscr{N}$ 的一个子集 (即 x 的一族邻域)$\mathscr{U}$ 称为 x 的一个**邻域基.**

命题 4.5

若 $\mathscr{B}$ 本身是拓扑空间 X 的拓扑基，则 $\mathscr{U} = \{B{\in}\mathscr{B}|x{\in}B\}$ 也是 x 的邻域基.

结论 4.1

对于度量空间 (X, d)，以 x 为心的全部球形邻域的集合 $\{B(x, \varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$ 是 x 的邻域基；$\big\{B(x, q) \mid q\text{为正有理数}\big\}$ 和 $\{B(x, 1/n) \mid n \text{ 为自然数}\}$ 也都是 x 的邻域基.

定义 4.7: C_1 公理

任一点都有可数的邻域基.

定义 4.8: C_2 公理

拓扑空间有可数拓扑基.

注意： C_2 公理是一个**很强**的要求，甚至并非所有度量空间都能够满足 C_2 公理.

例 在 $\mathbb{R}$ 中，规定度量 d 为

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

则 $(\mathbb{R}, d)$ 为离散拓扑空间，任一点为开集. 拓扑基包含所有开集，不可数.

命题 4.6

C_2 空间是可分空间. 设 X 有一可数拓扑基 $\{B_n\}$，在每个 B_n 中取一点 x_n，则集合 $\{x_n\}$ 是 X 的可数稠密子集.

简要证明 $\{x_n\}$ 的稠密性由于每个 x_n 都在拓扑基 B_n 中，故 $\forall x \in X$，任一 x 的开邻域 U，总存在拓扑基中元素 V，使得 $V \subset U$. 则 $a \in A, a \in V$，即 $a \in (U - \{x\}) \cap A, (U - \{x\}) \cap A \neq \varnothing$.

注意： 可分空间不一定是 C_2 空间.

例 记 S 是全体无理数的集合. 在实数集 $\mathbb{R}$ 上规定拓扑 $\tau = \left\{U \backslash A \mid U \text{ 是} \mathbb{E}^1 \text{ 的开集}, A \subset S\right\}$.
其中拓扑空间 $(\mathbb{R}, \tau)$ 是可分 C_1 空间，但不是 C_2 空间.

命题 4.7

可分度量空间是 C_2 空间.

定理 4.1: Yp 引理 (Urysohn 引理)

如果拓扑空间 X 满足 T_4 公理，则对于 X 的任意两个不相交闭集 A 和 B，存在 X 上的连续函数 f，其在 A 和 B 上分别取值为 0 和 1.

定理 4.2: Tietze 扩张定理

如果 X 满足 T_4 公理，则定义在 X 的闭子集 F 上的连续函数可连续地扩张到 X 上.

定理 4.3: 可度量化

一个拓扑空间 (X, τ) 称为**可度量化的**，如果可以在集合 X 上规定一个度量 d，使得 $\tau_d = \tau$.

命题 4.8

拓扑空间 X 可度量化 $\Leftrightarrow$ 存在从 X 到一个度量空间的**嵌入映射.**

定理 4.4: Yp 度量化定理 (Urysohn 度量化定理)

拓扑空间 X 如果满足 T_1, T_4 和 C_2 公理，则 X 可以嵌入到 Hilbert 空间 E^ω 中.

4.3 紧致性

定义 4.9: 列紧性

称拓扑空间**列紧的**，若它的每个序列都有**收敛子序列.**(即存在极限点)

命题 4.9

定义在列紧拓扑空间 X 上的连续函数 $f: X \to \mathbb{E}^1$ 有界，且达到最大、最小值.

定义 4.10: 紧致性

拓扑空间称为**紧致的**，如果它的每个开覆盖都有**有限子覆盖**.

命题 4.10

紧致 C_1 空间是列紧的.

定义 4.11: $\delta-$ 网

称度量空间 (X,d) 的子集 A 为 X 的一个δ-网，若 $\forall x{\in}X, d(x,A){<}\delta$，即 $\bigcup\limits_{a\in A} B(a,\delta) = X$.

提示： 我们可以把 δ-网中的 δ 视作网 A 的厚度，即子集 A 所生成的厚度为 δ 的“网边界”加上子集 A 本身可以覆盖 X.

结论 4.2

列紧度量空间一定有界.

定义 4.12: Lebesgue 数

设 $\mathscr{U}$ 是列紧度量空间 (X,d) 的一个开覆盖，且 $X{\in}\mathscr{U}$. 规定 X 上函数 $\varphi_{\mathscr{U}}: X \to \mathbb{E}^1$ 为

$$\varphi_{\mathscr{U}}(x) = \sup\{d(x,U^c) \mid U \in \mathscr{U}\}, \quad \forall x \in X.$$

于是我们称函数 $\varphi_{\mathscr{U}}$ 的最小值为 $\mathscr{U}$ 的 **Lebesgue 数**，记作 $L(\mathscr{U})$.

命题 4.11: Lebesgue 数的性质

$L(\mathscr{U})$. 是正数；并且当 $0<\delta<L(\mathscr{U})$ 时，$\forall x \in X, B(x,\delta)$ 必包含在 $\mathscr{U}$ 的某个开集 U 中.

4.4 连通性

定义 4.13: 连通性

拓扑空间 X 称为**连通的**，如果它不能分解为两个非空不相交开集的并. 换句话说，对于拓扑空间 X，它的任意两个开 (闭) 集之交非空，则称 (X,τ) 连通.

命题 4.12

如下命题与上述对连通性的定义等价：

1. X 不能分解为两个非空不相交闭集的并;
2. X 没有既开又闭的非空真子集;
3. X 的既开又闭的子集只要 X 与 $\varnothing$.

命题 4.13

连通空间在**连续映射**下的像也是连通的.

命题 4.14

若 X 有一个连通的**稠密子集**，则 X 连通.

命题 4.15

如果 X 有一个连通覆盖 $\mathscr{U}$($\mathscr{U}$ 中每个成员都连通)，并且 X 有一连通子集 A，它与 $\mathscr{U}$ 中每个成员都相交，则 X 连通.

定义 4.14: 连通分支

拓扑空间 X 的一个子集称为 X 的**连通分支**，如果它是连通的，并且不是 X 的其他连通子集的真子集.

命题 4.16

X 的每个非空连通子集包含在唯一的一个连通分支中.

命题 4.17

连通分支是闭集.

定义 4.15: 局部连通性

拓扑空间 X 称为**局部连通的**，如果 $\forall x \in X, x$ 的所有连通邻域构成 x 的邻域基.

> 提示： 按定义，当 X 局部连通时，如果 U 是点 x 的邻域，则必有 x 的连通邻域 $V \subset U$.

4.5 道路连通性

定义 4.16: 道路

设 X 是拓扑空间，从单位闭区间 $I=[0,1]$ 到 X 的一个连续映射 $a: I \to X$ 称为 X 上的一条**道路**. 点 $a(0)$ 和 $a(1)$ 分别称为 a 的**起点**和**终点**，统称**端点**.

注意： 道路指**映射本身**，而不是它的像集.

定义 4.17: 点道路

称常值映射道路 $a: I \to X$ 为**点道路**. 即 $a(I)$ 是一点. 点道路完全由像点 x 决定. 教材中记作 e_x.

定义 4.18: 闭路

起点与终点重合的道路称为**闭路**.

道路有两种运算：**逆**和**乘积**.

定义 4.19: 道路的逆

一条道路 $a: I \to X$ 的**逆**也是 X 上的道路，记作 $\bar{a}$，规定为 $\bar{a}(t)=a(1-t),\forall t\in I$.

定义 4.20: 道路的乘积

X 上的两条道路 a 与 b 如果满足 $a(1) = b(0)$，则可规定它们的**乘积** ab，它也是 X 上的道路，规定为

$$ab(t) = \begin{cases} a(2t), & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ b(2t-1), & 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

结论 4.3

下面有几个关于逆和乘积的性质：

(1) $\bar{e}_x = e_x$;

(2) $\overline{(\bar{a})} = a$;

(3) 当ab 有意义时,$\bar{b}\bar{a}$ 有意义, 且$\bar{b}\bar{a} = \overline{ab}$.

定义 4.21: 道路连通

拓扑空间 X 称为**道路连通**的，如果 $\forall x, y \in X$，存在 X 中分别以 x 和 y 为起点和终点的道路.

命题 4.18

道路连通空间一定连通.

命题 4.19

道路连通空间的连续映像是道路连通的.

定义 4.22: 道路等价关系

在拓扑空间 X 中，规定它的点之间的关系 $\sim$：若点 x 与 y 可用 X 上的道路连结，则说 x 与 y 相关，记作 $x \sim y$. 易证这是一个等价关系.

定义 4.23: 道路连通分支

拓扑空间在等价关系 $\sim$ 下分成的等价类称为 X 的**道路连通分支**，简称**道路分支**.

命题 4.20: 极大道路连通子集

拓扑空间的道路分支是它的极大道路连通子集.

定义 4.24: 局部道路连通

拓扑空间 X 称为**局部道路连通**的，如果 $\forall x \in X, x$ 的道路连通邻域构成 x 的邻域基.

4.6 拓扑性质与同胚

判断两个拓扑空间不同胚，只需要找到其有两个不相同的**拓扑性质**.

定理 4.5

$f : X \to Y$ 同胚，$D \subset X$，则 $f|_{X\setminus D} : X \setminus D \to Y \setminus f(D)$ 为同胚.

索引