In [1]:

```python
import numpy as np
```

1. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

вычтем из 2-й строки первую, умноженную на 2, а из 3-й первую

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

примем x_4 x_4 за с, тогда:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ -x_2 - 3x_3 - x_4 = -2, \\ -4x_3 - \text{c} = 4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ -x_2 - 3x_3 - x_4 = -2, \\ -4x_3 - \text{c} = 4. \end{cases}$$

x_3 x_3=-(c\4+1)

x_2 x_2 = -(-2+c-c\4-1)=3-3c\4=3(1-c\4)

x_1 x_1 = -3(1-c\4)+c\4+1+2c

при x_4 x_4=c=4 получим частное решение:

x_3 x_3=-2

x_2 x_2 = 0

x_1 x_1 = 10

2. Проверить на совместность и выяснить, сколько решений будет иметь система линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2, \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 5; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2, \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 = -2. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 = -2. \end{cases}$

а) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & -3 & -17 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & -3 & -17 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$

вычитаем из первой строки третью умноженную на 3 и из второй третью умноженную на 2, далее меняем местами первую и вторую и третью строки:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 4 \\ 0 & -7 & -1 & -17 \end{array}\right)$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 4 \\ 0 & -7 & -1 & -17 \end{array}\right)$

ранги расширенной и исходной матриц совпадают и число уравнений равно числу неизвестных, следовательно система будет совместна и определенна

решая систему уравнений получаем $x_1 x_1 = 1$, $x_2 x_2 = 2$, $x_3 x_3 = 3$

б) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & -6 & 9 & 5 \end{array}\right)$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & -6 & 9 & 5 \end{array}\right)$

из первой строки вычитаем вторую умноженную на -2 и потом меняем местами строки 1 и 2

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & -6 & 9 & 5 \end{array}\right)$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & -6 & 9 & 5 \end{array}\right)$

ранг расширенной матрицы больше исходной, система не совместна в) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & -8 & -2 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & -8 & -2 \end{array}\right)$

данная система совместна и недоопределена. в двумерном пространстве любая пара векторов может образовать базис по которому можно расложить любой вектор и так как коэффициенты 3 вектора будут заменены на параметр и этот параметр сможет принимать бесконечное число значений, то система будет также иметь бесконечное число решений

3. Проверить на совместность и выяснить, сколько решений будет иметь система линейных уравнений, заданная расширенной матрицей

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

ранги расширенной и ссходной матрицы совпадают, количество неизвестных также совпадает с количеством уравнений, следовательно матрица совместна и определена

при решении системы уравнений получаем следующие значения неизвестных:

x_1 x_1 = 7,26(6)

x_2 x_2 = 0,13(3)

x_3 x_3 = 1,33(3)

x_4 x_4 = 0,5

4. Дана система линейных уравнений, заданная расширенной матрицей

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array}\right).$$

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array}\right).$$

Найти соотношение между параметрами aa, bb и cc, при которых система является несовместной.

так как вектора матрицы A линейно зависимы, это значит система будет совместна и неопределенна только в том случае если вектор b будет лежать на одной прямой, образованной векторами матрицы A, это возможно если коэффициенты вектора b будут иметь следующее соотношение a=2b=6c, если коэффициенты будут иметь любое другое соотношение расширенная матрица будет несовместной.

In [ ]:

```

```