1) Исследовать ряд на сходимость по признаку Даламбера

$$\sum_{n=1}^{\infty} = \frac{n^n}{(n!)^2} \qquad a_n = \frac{n^n}{(n!)^2} \qquad a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot (n!)^2}{((n+1)!)^2 \cdot n^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n \cancel{(n+1)} \cdot \cancel{(1\cdot 2\cdot 3 \cdot \ldots \cdot n)^2}}{\cancel{(1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n)^2} \cdot (n+1)^{\cancel{2}} \cdot n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} \cdot \frac{1}{n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} = 0}{1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{=0}} =$$

$= e \cdot 0 = 0 < 1$ – ряд сходится

2) Исследовать на сходимость ряд по признаку Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{n}}}{2} \quad [\infty^0] \quad =$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = [\infty^0] = \lim_{n\to\infty} e^{\ln n^{\frac{1}{n}}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln n} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to} \frac{\ln n}{n}} = e^{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1}} = e^0 = 1$$

$= \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ ряд сходится

3) Исследовать ряд на сходимость, используя признак Лейбница

$$\sum_{n=1}^{\infty} = \frac{(-1)^n}{n + \ln n}$$

$a_1 = \frac{-1}{1 + \ln n}$

$a_2 = \frac{1}{2 + \ln 2}$

$a_3 = \frac{-1}{3 + \ln 3}$

1) ряд яв-ся знакочередующимся

2) члены ряда убывают по модулю

т.к. $|a_1| > |a_2| > |a_3|$ ряд сходится

4)

1) $\int (2x^2 - 2x - 1 + \sin x - \cos x + \ln x + e^x)\, dx =$

$= 2\int x^2 dx - 2\int x\, dx - \int 1\, dx + \int \sin x\, dx - \int \cos x\, dx + \int \ln x\, dx +$

$+ \int e^x dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} - x + (-\cos x) - \sin x + (x(\ln x - 1))$

$+ e^x + C$

$\int \ln x\, dx = \begin{vmatrix} \ln x = u \Rightarrow du = \frac{1}{x} \\ dx = dv \Rightarrow v = x \end{vmatrix} = x \cdot \ln x - \int \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} = x(\ln x - 1)$

2) $\int (2x + 6xz^2 - 5x^2y - 3\ln z)\, dx =$

$= 2\int x\, dx + 6z^2 \int x\, dx - 5y\int x^2 dx - 3\ln z \int 1\, dx =$

$= 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 6z^2 \frac{x^2}{2} - 5y\frac{x^3}{x^3} - (3\ln z) \cdot x + C$

4) $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{x})^2 + 1^2}}\, dx = \ln|\sqrt{x} + \sqrt{x+1}| + C$

Вычислить определённый интеграл

③ $$\int 3x^2 \sin 2x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = 3x^2 & dV = \sin 2x\,dx \\ du = (3x^2)'dx & V = \int \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\,d(2x) = \\ du = d\,6x\,dx & = \frac{1}{2}(-\cos 2x) \end{array} \right.$$

$$= 3x^2 \cdot \sin 2x - \frac{1}{2}\int(-\cos 2x)\cdot(6x\,dx) =$$

$$= 3x^2 \cdot \sin 2x + 3\int \cos 2x \cdot x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & dV = \cos 2x\,dx \\ du = dx & V = \int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x\,d(2x) = \\ & = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right.$$

$$= 3x^2 \cdot \sin 2x + 3\Big(x \cdot \frac{1}{2}\sin 2x -$$

$$- \int \frac{1}{2}\sin 2x\,dx\Big) =$$

$$= 3x^2 \cdot \sin 2x + 3\left(\frac{x}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}\int \sin 2x\,d(2x)\right) =$$

$$= 3x^2 \cdot \sin 2x + 3\left(\frac{x \sin 2x}{2} - \frac{1}{4}(-\cos 2x + C)\right) =$$

$$= 3\left(x^2 \cdot \sin 2x + \frac{x \sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C\right)$$

$$\int_0^{\pi} 3x^2 \sin 2x\,dx = 3\left(\pi^2 \cdot \overset{=0}{\sin 2\pi} + \frac{\pi \overset{=0}{\sin 2\pi}}{2} + \frac{\cos 2\pi}{4}\right) -$$

$$- 3\left(0 \cdot \overset{=0}{\sin 2\cdot 0} + \frac{0 \cdot \overset{=0}{\sin 2 \cdot 0}}{2} + \frac{\cos 2 \cdot 0}{4}\right) =$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0 \quad //$$