1) Предложить пример функции, не имеющей предела в нуле и в бесконечности:

$$f(x) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}$$

2) Привести пример функции, не имеющей предела в точке, но определённой в ней

$$f(x) = \begin{cases} x-1 \; ; & x < 2 \\ 2-x \; ; & x \geq 2 \end{cases}$$

исследовать функцию $y(x)=x^3-x^2$

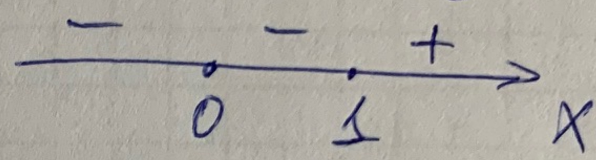
1) Область определения $-\infty;+\infty$

2) Нули и их кратность $x^3-x^2=0$

$x^2(x-1)=0 \Rightarrow x_1=0$

$x_2=1$

3) Отрезки знакопостоянства



4) интервалы монотонности

$1;+\infty$ — функция монотонно возрастает

$-\infty;0$ — функция монотонно убывает

$0;1$ — функция убывает, а потом возрастает

5) функция нечётна

6) функция неограниченна

7) функция непериодична

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^3-2x^2}{4x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{x^2}(3x-2)}{4\cancel{x^2}} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\overset{=0}{3x}-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$ //

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \Big|$

$(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1) = 1+x-1 = x$

$(\sqrt[3]{1+x}-1)(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1) = x+\cancel{1}-\cancel{1} = x$

$= \lim\limits_{x\to 0} \Big| \dfrac{\cancel{x}(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)}{\cancel{x}(\sqrt{1+x}+1)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1^2}+\sqrt[3]{1}+1}{\sqrt{1}+1} = \dfrac{3}{2}$

Теоремы о пределах

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{4x} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{2x} = \dfrac{1}{2}$ //

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{-1} = 1$ //

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\arcsin x} = \left| \begin{matrix} \arcsin x = t,\ x\to 0, t\to 0 \\ x = \sin t \end{matrix} \right| =$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$ //

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4x+3}{4x-3}\right)^{6x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4x+6-3}{4x-3}\right)^{6x} =$

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{6}{4x-3}\right)^{6x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\left(1 + \dfrac{\cancel{6}\,1}{\dfrac{4x-3}{6}}\right)^{\frac{4x-3}{6}}\right]^{\frac{6}{4x-3}\cdot 6x} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{36x}{4x-3}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{36x}{4x-3}} = \left| \begin{matrix} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{36x}{4x-3} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \\ = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{36}{4 - \frac{3}{x}_{\to 0}} = 9 \end{matrix} \right| =$

$= e^{9}$ //

5) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x + \ln x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{\ln x}{x} = \left| \begin{matrix} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \ln x^{\frac{1}{x}=0} = \\ = \lim\limits_{x\to\infty} \ln x^{0} = 0 \end{matrix} \right.$

$= 1 + 0 = 1$ //