Homework 2

陈远洋

Problem 1

Consider the least-squares problem

$$\min_x \frac{1}{2}\|Ax-b\|^2.$$

Please proof that the problem always has at least one optimal solution. You may use the property of coercive functions.

证明.

记 $f(x) = \|Av\|^2, g(x) = \frac{1}{2}\|Ax-b\|^2$, 并令 $A = \begin{pmatrix} \vec{a_1}^T \\ \cdots \\ \vec{a_n}^T \end{pmatrix}$ $\quad V = \mathrm{span}(\vec{a_1}, \cdots, \vec{a_n}) \quad B = V \bigcap \{\vec{v} | \|\vec{v}\| = 1\}$

1. $V = \{\vec{0}\}$

   则显然 $A = 0_{n\times m}, g(x) \equiv \frac{1}{2}\|b\|^2$, 显然至少存在一个全局最小解。

2. $V \neq \{\vec{0}\}$

   否则，B 是一个有界闭集，故 $f(v) = \|Av\|^2$ 在该取值集合上存在一个最小值，记为 $t^2, t \geq 0$. 并且由于 $v \in V$, 故 $t \neq 0$. 而对于 $\|Av-b\| \geq \|Av\| - \|b\| \geq \|v\|\|A\frac{v}{\|v\|}\| - \|b\| \geq t\|v\| - \|b\|$.

   $\forall v \in V \bigcap \{v | \|v\| > \frac{2\|b\|+1}{t}\}$. 有 $\|Av-b\| > \|b\|+1 > 0$. 故对于 $g(v) = \frac{1}{2}\|Av-b\|^2$, 有 $g(v) > \frac{1}{2}(\|b\|+1)^2 > g(\vec{0})$.

   而对于 $v \in V \bigcap \{v | \|v\| \leq \frac{2\|b\|+1}{t}\}$. 可知自变量 v 取值为一个有界闭集，故一定存在一个最优解 $v_0, s.t.$ 在该取值集合上 $g(v_0) \leq g(v)$，固有 $g(v_0) \leq g(\vec{0})$.

   而 $\forall v \in V \bigcap \{v | \|v\| > \frac{2\|b\|+1}{t}\}, g(v) > g(\vec{0})$. 故 v_0 就是一个在 V 上的全局最优解。

   令 $x = v_x + u_x$, 其中 $v_x \in V$，$u_x \in V^\perp$，则有:

   $$\|Ax-b\|^2 = \|A(v_x+u_x)-b\|^2 = \|Av_x-b\|^2$$

   故 $g(x) = g(v_x+u_x) = g(v_x)$. 由上面推导过程我们有：$\forall x \in \mathbb{R}^m, \forall u \in V^\perp, g(x) = g(v_x) \geq g(v_0) = g(v_0+u)$. 也即 v_0+u 是一个全局最优解。

综上所述，$g(x)$ 在 $\mathbb{R}^m$ 上一定至少存在一个全局最优解。 □