assignment-3 实验报告

实验目的

生成若干个二维的高斯分布数据

使用GMM模型对数据点属于那个高斯模型进行分类

GMM模型

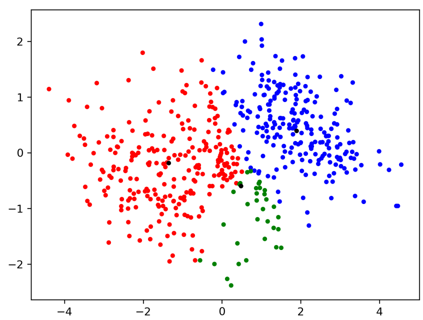
模型介绍

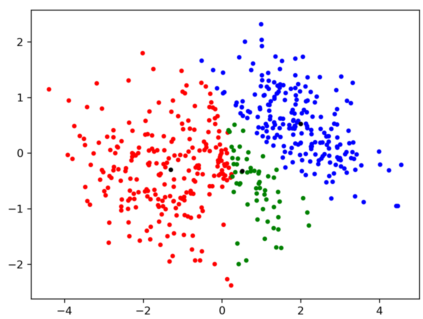
使用高斯会混合模型，对于预测的每个高斯分布，需要学习三个参数：平均值μ，协方差矩阵σ和分布的先验概率π。

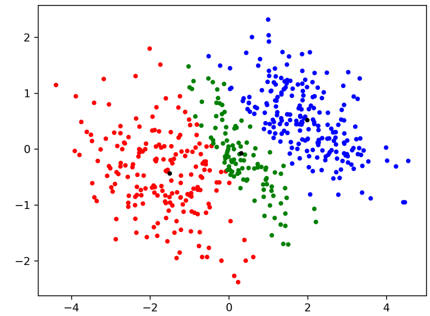
对于训练数据集，根据EM算法，按以下流程进行训练：

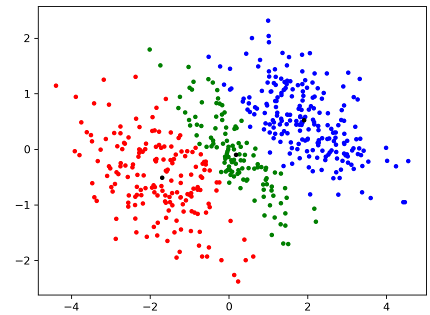
1. 初始化参数平均值μ，协方差矩阵σ和分布的先验概率π。这里令$\sigma = I$，$\pi = 1/k$，k为每个高斯分布的个数
2. E步，根据现有的μ，σ和π进行计算每个点的后验概率$\gamma_{n,k}$
3. M步，根据现有的后验概率$\gamma_{n,k}$计算使证据下界最大化时的参数μ，σ和π
4. 重复E步和M步，迭代若干次

基于EM算法，模型可以根据当前值向极小值收敛，最终达到局部最优。





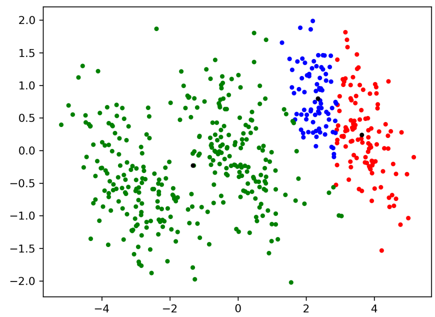


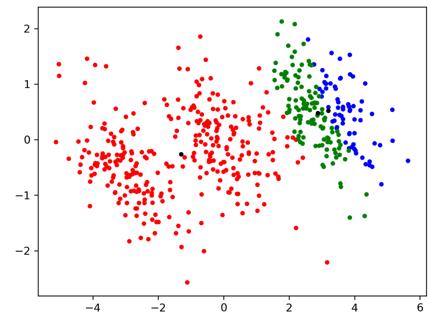


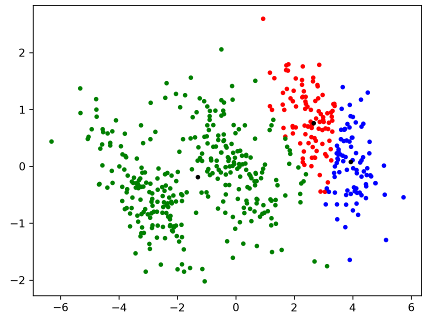
如图所示，随着迭代次数增加，每个分布的均值μ（黑色标注）会向着极小值点收敛，最终使得证据下界达到极小值。

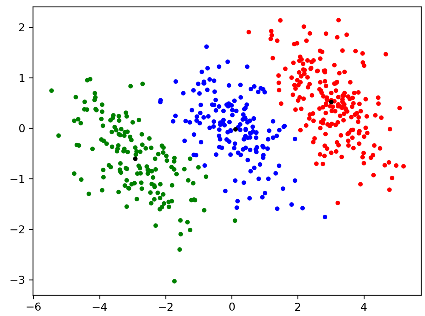
初值选取

在训练过程中，发现对于同样的分布数据，如果初值选取适当，较为分散，会有较好的训练结果；如果初值选在同一个聚类中，而且每个分布的均值之间又相隔较远，会出现很大的误差。









上图为执行100次迭代之后的分类结果，可以看出当三个均值的预测点都落在不同的聚类时，可以获得较好的效果；否则，如果某个聚类包含了多个初始均值点，很容易被预测成多个高斯分布，误差很大。

通过计算可知，在k个聚类中随机选取k个初始均值点，若每个聚类点数相同，只会有$\frac{k!}{k^k}$的概率使得选取的这些均值对应不同的分布。当k变大时，这个概率会迅速变小。

kmeans++

这里，使用kmeans++的方法进行初始化。先用k-means选出可能的均值点，在用GMM模型进行训练。

k-means也是运用EM算法，会先找出m个分布较分散的点作为初始的中心点，E步根据每个点到各中心点的距离对每个点进行分类，在M步根据分类好的结果更新每个分布的中心点。

这里，令初始化时先用k-means迭代10次，把迭代后的中心点当作GMM中初始的均值点，再按照原先的步骤进行训练。

令使用随机法和kmeans+的模型分别迭代50次，每10次迭代后输出准确率，取5次训练的平均值。

	随机	KMEANS++
epoch=0	0.6284	0.9795
epoch=10	0.7184	0.988
epoch=20	0.7472	0.988
epoch=30	0.7804	0.988
epoch=40	0.8136	0.988

	随机	KMEANS++
epoch=50	0.8240	0.988
epoch=60	0.8240	0.988

可见，使用kmeans++方法得到初始值，可以避免在同一个聚类中在初始化时被分到多个高斯分布中的情况，提高了分类效果。

为了测试k-means对于呈高斯分布的聚类的预测情况，令使用kmeans+的GMM模型和k-means模型分别迭代50次，每10次迭代后输出准确率，取5次训练的平均值。

	KMEANS++	K-MEANS
epoch=0	0.9795	0.9068
epoch=10	0.988	0.9556
epoch=20	0.988	0.9556
epoch=30	0.988	0.9556
epoch=40	0.988	0.9556
epoch=50	0.988	0.9556
epoch=60	0.988	0.9556

对于高斯分布的聚类，k-means的方法只能按照距离进行分类，对于某些分布较为分散的聚类并不能起到很好的分类作用。

代码运行说明

```
python source.py
```

默认情况下，会创建中心在$\{(0,0),(-3,0)(4,0)\}$，协方差为$\{[[1,0],[0,1]],[[1.5,0],[0,1.5]],[[0.8125,-0.325],[-0.325,0.4375]]\}$的高斯分布数据点共500 个，按照$epoch_{gmm}=100, epoch_{kmeans}=10$进行训练。

输出两张图片1.png和2.png，分别表示真实的数据和预测的数据。另外输出一个文件2.data，表示预测结果