

非定常热传导方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

初边值的有限差分求解，求解域为 $(x, t) \in [0, 1] \times [0, \infty]$

初始条件和边界条件为：

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(0, t) = a(t), \quad u(1, t) = b(t)$$

其中 $\nu = 1$ ，初值条件的具体取法为：

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < 0.3 \\ 1 & 0.3 \leq x \leq 0.7 \\ -\frac{10}{3}x + \frac{10}{3} & 0.7 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

取均匀网格点数：

$$M = 100, \quad a(t) = b(t) = 0, \quad \sigma = 0.1, 0.5, 1.0$$

一、题目说明

采用 FTCS 格式，BTCS 格式，CNCS 格式分别计算 $t = 0.01$ 时的数值解，计算的时间步长取法为：

$$\sigma = \frac{\nu \Delta t}{(\Delta x)^2}$$

网格点数目 $M = 100$ ，故 x 方向空间步长取法： $\Delta x = \frac{1}{M} = 0.01$ ；

时间步长 Δt 的取值由 σ 的定义式规定： $\Delta t = \sigma(\Delta x)^2$ ；

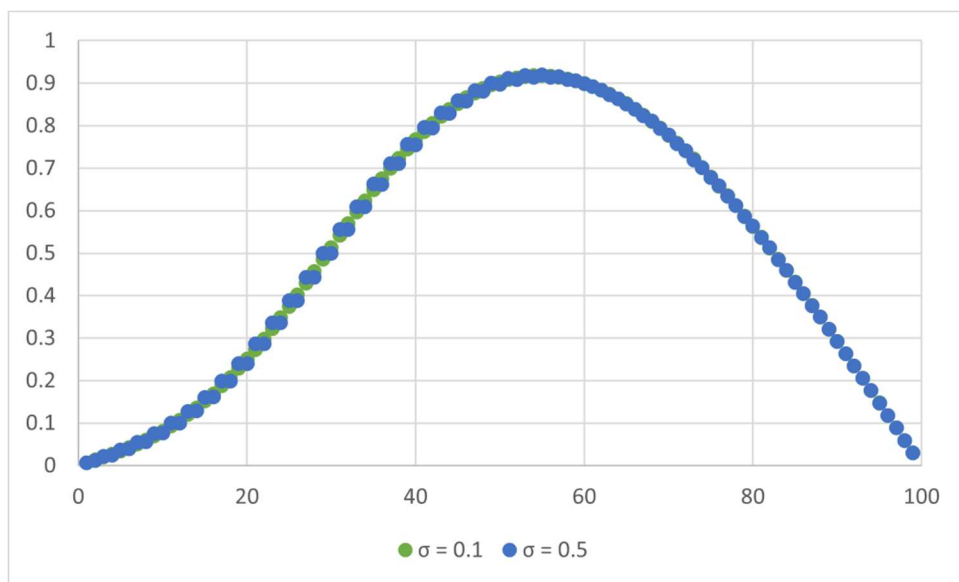
时间网格总数目 N 由计算时间 t 与时间步长 Δt 规定： $N = \frac{1}{\Delta t}$ ；

表 1. $t = 0.01$ ，时间步长 Δt ，所对应的时间网格数目 N

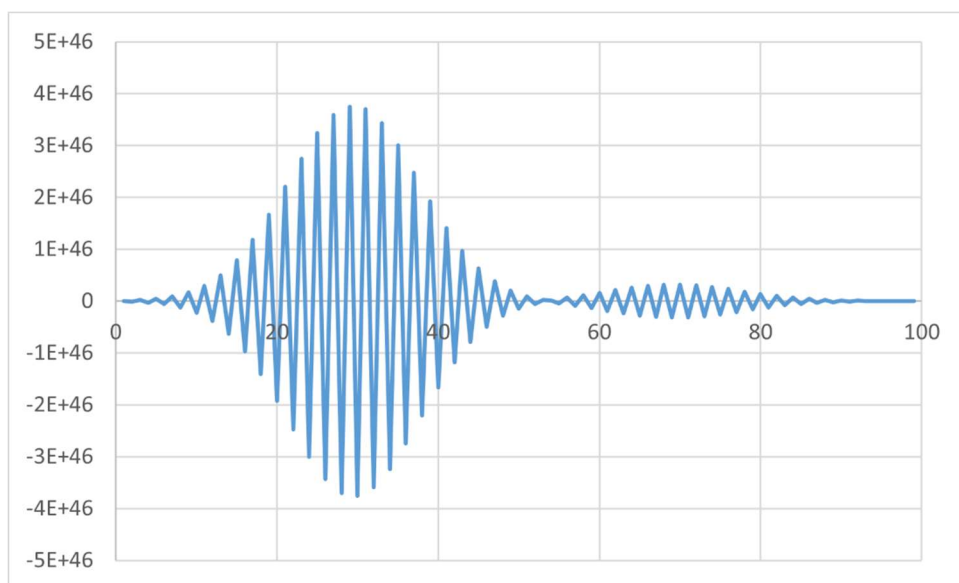
σ	0.1	0.5	1.0
Δt	1×10^{-5}	5×10^{-5}	1×10^{-4}
$t = 0.01$	1×10^3	200	100

二、计算结果

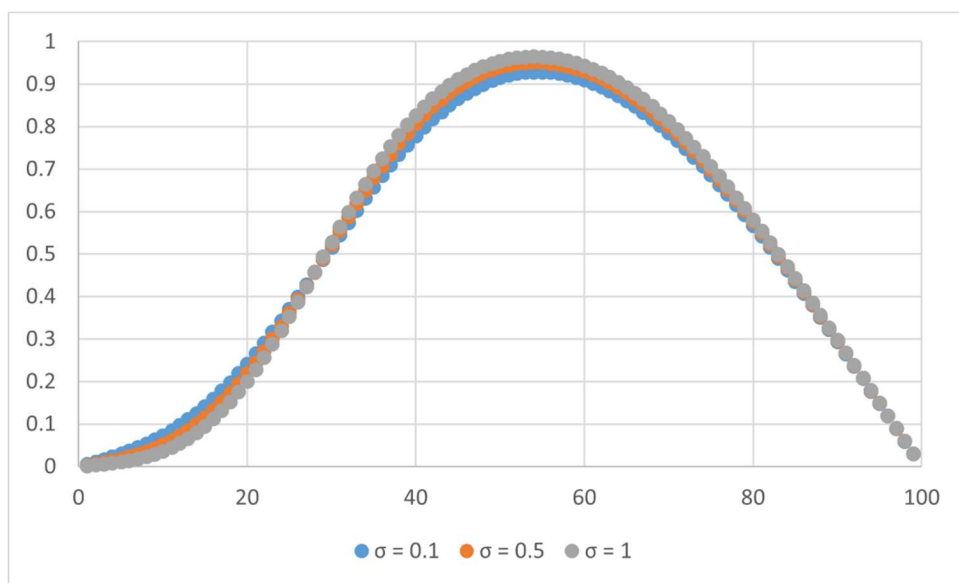
FTCS 格式:



计算时间 $t = 0.01$ ，时间步长 $\sigma = 1.0$ 时，方程的解出现震荡，差分方程得到稳定解的条件是方程中各项系数均大于零，当 $\sigma = 1.0$ 时， U_k^n 的系数 $1 - 2\sigma = -1$ ，出现震荡。



BTCS 格式:



CNCS 格式:

