Ejercicios clases 7

Ejemplos

Joaquin Cavieres G.

Introducción

El test U de Mann-Whitney (conocida también como U-test y equivalente a la prueba de los rangos sumados de Wilcoxon), es la prueba no paramétrica alternativa al t-test para muestras independientes.

Este test se utiliza cuando los datos son ordinales (que tienen un orden) pero de ellos no se puede asumir que provienen de una distribución Normal. Por tanto, cuando tenemos muestras pequeñas, se prefiere el U-test antes que el t-test. El U-test requiere de homogeneidad de varianzas (homocedasticidad) y en el contraste se compara medianas y no medias (como en el t-test). También es preferible cuando existen valores atípicos ya que trabajamos con valores numéricos y rangos.

Ejemplo 1

Se tienen dos muestras aleatorias y se quiere contrastar si hay diferencias entre las poblaciones de las que provienen.

Desarrollo

```
A = c( 1.1, 3.4, 4.3, 2.1, 7.0 , 2.5 )
B = c( 7.0, 8.0, 3.0, 5.0, 6.2 , 4.4 )
```

Primero debemos juntar las dos muestras y asignar a cada valor un número de orden, esto es, al valor más pequeño se le asigna un "1", al segundo más pequeño un "2", y así hasta el más grande (en este caso, el valor más grande es "8.0" y, por tanto, se le asigna un "12"). Si hubiera valores repetidos ("ties"), se les asigna la media (en este caso, el valor "7.0" está repetido y en lugar de asignarles "10" y "11" se les asigna "10.5" a cada uno).

```
m_Total  = c(A, B)
rangos   = rank(m_Total)
m_Total = cbind( m_Total, rangos)
m_Total
```

```
##       m_Total rangos
##  [1,]     1.1    1.0
##  [2,]     3.4    5.0
##  [3,]     4.3    6.0
##  [4,]     2.1    2.0
##  [5,]     7.0   10.5
##  [6,]     2.5    3.0
##  [7,]     7.0   10.5
##  [8,]     8.0   12.0
##  [9,]     3.0    4.0
## [10,]     5.0    8.0
## [11,]     6.2    9.0
## [12,]     4.4    7.0
```

Luego sumamos los números de orden en cada muestra (el mínimo de estos dos valores, que llamamos $\boldsymbol{R_1}$ y $\boldsymbol{R_2}$, es lo que se conoce como suma de rangos de Wilcoxon). Con n_1 y n_2 siendo los tamaños de las muestras A y B respectivamente, el estadístico U está definido como:

$$
\begin{aligned}
U_1 &= \boldsymbol{R_1} - \frac{n_1(n_1+1)}{2} \\
U_2 &= \boldsymbol{R_2} - \frac{n_2(n_2+1)}{2} \\
U &= \text{mín}(U_1, U_2)
\end{aligned}
$$

por tanto:

```
sum_rangos_A = sum( rangos[ 1:6 ] )
sum_rangos_B = sum( rangos[ 6:12 ] )
n1 = length(A)
n2 = length(B)
U1 = sum_rangos_A - n1 * ( n1 + 1 ) / 2
U2 = sum_rangos_B - n2 * ( n2 + 1 ) / 2
min(c( U1, U2 ))
```

```
## [1] 6.5
```

Cuando aparecen valores repetidos no se calcula el valor exacto del estadístico U sino que se calcula una aproximación.

Ya calculado el estadístico U entonces podemos calcular cual es la probabilidad de que adquiera un valor igual o más extremo que el observado. Si el tamaño de las muestras < 20, se compara el valor obtenido de U con los valores de una tabla U de Mann-Whitney. Si el U es menor que el valor correspondiente en la tabla, la diferencia es significativa. El valor tabla en este caso particular para un $\alpha = 0{,}05$, $n_1 = n_2 = 6$ es de 5. Como U > 5, entonces no es significativa la diferencia (No se rechaza H_0).

Mismo ejemplo en R

Los calculos "a mano" que acabamos de realizar se pueden hacer directamente con la función `wilcox.test()`

```r
wilcox.test(A, B, paired = FALSE)
```

```
##
##  Wilcoxon rank sum test with continuity correction
##
## data:  A and B
## W = 6.5, p-value = 0.07765
## alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
```

El estadístico U que aparece en los resultados de la consola de R se denomina W (como vimos en clases). En este ejemplo nos aparece un mensaje de aviso ("Warning") debido a que los valores repetidos no permiten calcular el p-valor exacto por lo que se usa una aproximación a la Normal.

Generalmente el estadístico U se aproxima a una distribución Normal cuando $n > 20$ y los valores observados son confiables. Nosotros podemos utilizar en R la función \texttt{wilcox_test()} de la librería `coin` (debe instalarse) la cual requiere una formula como argumento. Esta función se recomienda cuando hay valores repetidos en la muestra.

```r
# install.packages("coin")
library(coin)
grupo = factor(c(rep( "A", length(A)),
                 rep( "B", length(B))))
m_Total = c(A, B)
wilcox_test(m_Total ~ grupo, distribution = "exact" )
```

```
##
##  Exact Wilcoxon-Mann-Whitney Test
##
## data:  m_Total by grupo (A, B)
## Z = -1.8447, p-value = 0.06926
## alternative hypothesis: true mu is not equal to 0
```

Adicionalmente nosotros debemos calcular el tamaño del efecto. Este calculo se basa en el Z-factor asumiendo que $U \sim N(0, 1)$.

$$r = |\frac{Z}{\sqrt{N}}| \tag{1}$$

donde N es el tamaño total de la muestra ($N = n_1 + n_2$). La clasificación más utilizada es:

- $0.1 =$ Pequeño
- $0.3 =$ Mediano
- $0.5 \geq$ Grande

En este caso:

```
n1 = length(A)
n2 = length(B)
N = n1 + n2  # tamaño muestral
wilcoxTest = wilcox_test( m_Total ~ grupo, distribution = "exact" )
Efect_size = statistic(wilcoxTest)/sqrt(N)
Efect_size
```

```
## [1] -0.5325195
```

El tamaño del efecto observado es grande (0.53) pero no significativo.