Estadística No Paramétrica

Clase 6: Test de rachas (Wald-Wolfowitz)

Joaquin Cavieres G.

Ingeniería en Estadística

Facultad de Ciencias, Universidad de Valparaíso

Test de rachas (Wald-Wolfowitz)

Una "racha" es una sucesión de casos idénticos y, dentro del contexto diario, se puede hablar de tener "rachas buenas" o "rachas malas". Este tipo de "rachas" estan relacionadas a la repetición de situaciones buenas o malas respectivamente.

Test de rachas (Wald-Wolfowitz)

Rachas en datos binarios

Si los datos prensentan una caracteristica binaria (sólo dos categorías como resultado) entonces podemos definir una racha como una secuencia donde un valor específico es repetido una o más veces. Se produce una nueva racha cada vez que cambia el valor de los datos, por ejemplo, si consideramos a $n = 10$

$$1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1$$

donde hay 1 "racha" de 1 de largo 2, una racha de 0 de largo 4, una racha de 1 de largo 2, una racha de 0 de largo 1 y una racha de 1 de largo 1. En total tenemos 2 rachas de 0 y 3 rachas de 1 para un total de 5 rachas totales.

Test de rachas (Wald-Wolfowitz)

Rachas en datos categóricos

Si tenemos k distintas clases, entonces una racha esta definida como una secuencia donde un valor particular es repetido una o más veces. Por ejemplo, si tenemos $k = 4$ y $n = 10$

$$U, U, U, U, V, V, V, V, V, U$$

donde hay 1 "racha" de U de largo 4, una racha de V de largo 5 y una racha de U de largo 1. En total tenemos 2 rachas de U y 1 rachas de V para un total de 3 rachas totales.

Test de rachas (Wald-Wolfowitz)

Rachas en datos númericos

Para datos númericos existen dos formas de calcular las rachas:

- Rachas superiores e inferiores sobre un valor de referencia
- Rachas superiores e inferiores.

Rachas en datos númericos

Rachas superiores e inferiores sobre un valor de referencia

Se utiliza un valor de referencia para determinar la racha en un conjunto de datos de referencia. El valor de referencia comunmente es la media, la mediana o la moda y a partir de este se crean series binarias para el total de valor "por encima" y "por debajo" del valor de referencia. Por ejemplo, si $n = 5$:

$$30, 20, 25, 19, 21$$

la media es 23, por tanto la serie que se crea a partir de él que estan por encima y por debajo de el son:

$$1, 0, 1, 0, 0$$

Rachas en datos númericos

Rachas superiores e inferiores sobre un valor de referencia

Luego hacemos el siguiente procedimiento:

$$1, 0, 1, 0, 0$$

hay 1 "rachas" de 0 de largo 1 bajo el valor de referencia, dos rachas de 1 por encima del valor de referencia y una racha de 0 de largo 2 sobre el valor de referencia. En total tenemos 2 rachas de 1 por encima del valor de referencia y 2 rachas de 0 por debajo del valor de referencia de un total de 4 distintas rachas.

Test de rachas (Wald-Wolfowitz)

Rachas en datos númericos

Rachas superiores e inferiores

Para n valores re registra el signo de la diferencia entre el valor y el siguiente para diseñar una serie de $n-1$ signos binarios. Por ejemplo, considere $N = 5$:

$$30, 20, 25, 19, 21$$

por tanto la secuencia binaria $n - 1$ es:

$$-, +, -, +$$

Test de rachas (Wald-Wolfowitz)

Rachas en datos númericos

Rachas superiores e inferiores

Luego hacemos el siguiente procedimiento:

$$-, +, -, +$$

hay 2 "rachas" de -. La dos rachas son de largo 1. En cambio, hay 2 rachas de $+$, la primera racha $+$ es de largo 1 y la segunda racha $+$ es de largo 1. En total tenemos 4 distintas rachas.

Estadístico de prueba para resultados **binarios**

Para un n con sólo dos posibles resultados

Mínimo y máximo posible de rachas

Se tienen resultados de 0's y 1's (n_1 y n_2), entonces, el mínimo y máximo total de números de rachas son:

$$R_{min} = 2$$
$$R_{max} = 2min(n_1, n_2) + 1$$

El valor esperado de rachas, $\mathbb{E}(R)$, dado un n_1 y un n_2 es:

$$\mathbb{E}(R) = \frac{2(n_1 n_2)}{n} + 1$$

Estadístico de prueba para resultados **binarios**

Para un n con sólo dos posibles resultados

Test exacto

Para calcular el Test exacto de una seríe de rachas binaria debemos calcular la probabilidad de obtener esos números. Si la muestra es aleatoria, la probabilidad del número total de rachas R debería ser igual a algún número par $2u$, esto es:

$$P(R = 2u) = \frac{2\binom{n_1-1}{u-1}\binom{n_2-1}{u-1}}{\binom{n}{n_1}}$$

La probabilidad de que el número total de rachas R sea igual a algún número impar $2u+1$ es:

$$P(R = 2u+1) = \frac{\binom{n_1-1}{u-1}\binom{n_2-1}{u-1} + \binom{n_1-1}{u-1}\binom{n_2-1}{u-1}}{\binom{n}{n_1}}$$

Estadístico de prueba para resultados **binarios**

Para un n con sólo dos posibles resultados

Hipótesis alternativa ("muchas rachas")

p-value asociado con el número exacto superior de rachas r es:

$$P(R \geq r) = \sum_{i=r}^{R_{max}} P(R = i)$$

Hipótesis alternativa ("pocas rachas")

p-value asociado con el número exacto inferior de rachas r es:

$$P(R \leq r) = \sum_{i=r}^{R_{max}} P(R = i)$$

Estadístico de prueba para resultados **binarios**

Para un n con sólo dos posibles resultados

Hipótesis alternativa ambos lados

p-value para ambos lados (superior e inferior) de rachas r es:

$$P(|R - \mathbb{E}(R)| \geq |r - \mathbb{E}(R)|) = \sum_{i=R_{min}}^{\mathbb{E}(R)-|r-\mathbb{E}(R)|} P(R = i) \quad + \sum_{i=\mathbb{E}(R)+|r-\mathbb{E}(R)|}^{R_{max}} P(R = i)$$

Observación

El test exacto es más preciso que el test asintótico z y debería siempre ser utilizado si es posible. Este test no puede ser utilizado para datos categóricos con más de dos grupos.

Estadístico de prueba para resultados **binarios**

Para un n con sólo dos posibles resultados

Test asintótico Z

Para un valor grande de n, el test asintótico z es calculado como:

$$z = \frac{r - \mu_r}{\sigma_r}$$

donde:

$$\mu_r = \mathbb{E}(R) = \frac{2 * n_1 n_2}{n} + 1$$

y

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{2n_1 n_2(2 * n_1 n_2 - n)}{n^2(n-1)}}$$

Estadístico de prueba para resultados **numéricos**

Para n resultados númericos de una variable respuesta. Rechazamos H_0 cuando el número total de rachas superiores (+) o inferiores (-) son "pocas" o "muchas".

Mínimo y máximo posible de rachas

$$
\begin{aligned}
R_{+/-_{min}} &= 1 \\
R_{+/-_{max}} &= n - 1
\end{aligned}
$$

Número esperado de rachas $\mathbb{E}(R_{+/-})$

$$\mathbb{E}(R_{+/-}) = \frac{2n-1}{3}$$

Estadístico de prueba para resultados **numéricos**

Para un $n \leq 25$ revisar tabla en Bradley (1968)

Test exacto superior

p - value para el lado superior de las rachas númericas observadas:

$$P(R_{+/-} \geq r_{+/-}) = \sum_{i=r_{+/-}}^{R_{+/-\max}} P(R_{+/-} = i)$$

Test exacto inferior

p - value para el lado inferior de las rachas númericas observadas:

$$P(R_{+/-} \leq r_{+/-}) = \sum_{i=R_{+/-\min}}^{r_{+/-}} P(R_{+/-} = i)$$

Estadístico de prueba para resultados **numéricos**

Hipótesis alternativa ambos lados

p-value para ambos lados (superior e inferior) de rachas $r_{+/-}$ es:

$$P(|R_{+/-} - \mathbb{E}(R_{+/-})| \geq |r_{+/-} - \mathbb{E}(R_{+/-})|) = \sum_{i=R_{+/-_{\min}}}^{\mathbb{E}(R_{+/-}) - |r_{+/-} - \mathbb{E}(R_{+/-})|} P(R_{+/-} = i) + \sum_{i=\mathbb{E}(R_{+/-}) + |r_{+/-} - \mathbb{E}(R)|}^{R_{+/-_{\max}}} P(R_{+/-} = i)$$

Observación

El test exacto solamente se calcula cuando $n \leq 25$. Para una muesta con n grande se debería usar el test asintótico z.

Estadístico de prueba para resultados **numéricos**

Test asintótico z

Para un n grande el test asintótico z es calculado desde un total de $r_{+/-}$ rachas observadas como:

$$z = \frac{r_{+/-} - \mu_{r_{+/-}}}{\sigma_{r_{+/-}}}$$

donde:

$$\mu_{r_{+/-}} = \mathbb{E}(R_{+/-}) = \frac{2n_1 n_2}{n_1 + n_2} + 1$$

y

$$\sigma_{r_{+/-}} = \sqrt{\frac{2n_1 n_2(2n_1 n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)^2(n_1 + n_2 - 1)}}$$

Observación

Este test es menos preciso que el exacto.

Test de rachas (Wald-Wolfowitz)

Resumen para evaluar aleatoriedad en muestra con respuesta binaria

Test de rachas (Wald-Wolfowitz)

Resumen para evaluar aleatoriedad en muestra con respuesta binaria

$\boldsymbol{H_0}$: La muestra es aleatoria.

$\boldsymbol{H_1}$: La muestra no es aleatoria.

$$z = \frac{r - \mu_r}{\sigma_r}$$

donde:

$$\mu_r = \mathbb{E}(R) = \frac{2 n_1 n_2}{n} + 1$$

y

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{2 n_1 n_2 (2 n_1 n_2 - n)}{n^2 (n-1)}}$$

con r = número de rachas observadas

Test de rachas (Wald-Wolfowitz)

Resumen para evaluar aleatoriedad en muestra con respuesta númerica

Test de rachas (Wald-Wolfowitz)

Resumen para evaluar aleatoriedad en muestra con respuesta númerica

$\boldsymbol{H_0}$: La muestra es aleatoria.

$\boldsymbol{H_1}$: La muestra no es aleatoria.

$$z = \frac{r_{+/-} - \mu_{r_{+/-}}}{\sigma_{r_{+/-}}} = \frac{r - \bar{R}}{\sigma_R}$$

donde:

$$\mu_{r_{+/-}} = \bar{R} = \frac{2n_1 n_2}{n} + 1$$

y

$$\sigma_{r_{+/-}} = \sigma_R = \sqrt{\frac{2n_1 n_2(2n_1 n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)^2(n_1 + n_2 - 1)}}$$

con r = número de rachas observadas

Test de rachas (Wald-Wolfowitz)

Para ambos casos n_1 y n_2 son los valores positivos (+) y/o negativos (-) de la muestra.

Test de rachas (Wald-Wolfowitz)

Para ambos casos n_1 y n_2 son los valores positivos (+) y/o negativos (-) de la muestra.

Región de rechazo de H_0

Para una muestra de n grande, con un 5% de nivel de signifcancia α el test estadístico con un valor absoluto mayor que 1.96 indica que la muestra no es aleatoria, esto es:

$$\mid Z \mid > Z_{1-\alpha/2}$$

Observación

Para muestras pequeñas ver tablas (Mendenhall, 1982)

Ejemplo 1

Se desea saber si la fabricación de un prouducto defectuoso se produce de manera aleatoria o no. Para esto se van registrando los datos en una cadena de producción durante la última hora:

B: Buen estado D: Defectuoso

Las clasificaciones son las siguientes:

- BDBDBBBDDBDBDDBDBBBBDBDBDBBDDDBDBDBDBBDBBDBBBBDBDB

Ejemplo 1

Se desea saber si la fabricación de un prouducto defectuoso se produce de manera aleatoria o no. Para esto se van registrando los datos en una cadena de producción durante la última hora:

Test de Hipótesis (H_0)

H_0 : Hay aleatoriedad $\qquad$ H_1 : No hay aleatoriedad

r = 35, $n_1 = 29$, $n_2 = 21$, como $n_i > 20$ entonces $R \rightarrow N(\mu_r, \sigma_r)$, entonces:

$$\mu_{r_{+/-}} = \bar{R} = \frac{2n_1 n_2}{n} + 1$$

y

$$\sigma_{r_{+/-}} = \sigma_R = \sqrt{\frac{2n_1 n_2(2n_1 n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)^2(n_1 + n_2 - 1)}}$$

Ejemplo 1

Test de Hipótesis (H_0)

H_0 : Hay aleatoriedad $\qquad$ H_1 : No hay aleatoriedad

$$z = \frac{r - \mu_r}{\sigma_r} = \frac{35 - 25.36}{3.41} = 2.827$$

Región de rechazo de H_0

Para una muestra de n grande, con un 5% de nivel de signifcancia α el test estadístico con un valor absoluto mayor que 1.96 indica que la muestra no es aleatoria, esto es:

$$\mid Z \mid > Z_{1-\alpha/2}$$