

IOI2020 国家集训队第一阶段作业第一部分 解题报告

党星宇

2019.10

1 Coloring Balls

1.1 试题来源

AtCoder Regular Contest 089 F

1.2 题目大意

最开始有 N 个白球排成一排。有 K 次操作，每次给出红色或蓝色两种颜色中的一种，你可以选择任意一个区间将这个区间的球成这种染色。但是不能直接将白球染成蓝色。问 K 次操作完成后有多少种可能的不同球的序列。

答案对 $10^9 + 7$ 取模。

1.3 数据范围

$N, K \leq 70$

1.4 时空限制

时间限制：4秒

空间限制：256MB

1.5 解题过程

我们先考虑一个暴力做法： 3^N 枚举所有可能的颜色状态，依次判断每一种是否合法。

但是其实我们不需要枚举所有 3^N 的可能状态，因为其中有很多是等价的。

为了表示一个颜色序列，我们用 R, B, W 分别表示红色球、蓝色球和白色球。

我们以'WRRBRBBWWRRRRWRBBWWRRBBRR'为例。

首先，按照白色将原序列分成若干段：{'RRBRBB', 'RRRR', 'RBB', 'RRBBRR'}。

其次，我们将相同颜色的一段缩在一起：{'RBRB', 'R', 'RB', 'RBR'}。

然后，我们将给每一段按照'B'的个数标号：

Group 1: 'R'

Group 2: 'B', 'RB', 'BR', 'RBR'

Group 3: 'BRB', 'RBRB', 'BRBR', 'RBRBR'

Group 4: 'BRBRB', 'RBRBRB', 'BRBRBR', 'RBRBRBR'

...

考虑除了第一次和第二次操作只能分别为 r, b 之外，其余非平凡情况中，任意一次 r 或者 b 的操作都可以增加一个 B 。具体的，每一组的操作序列如下。

Group 1: 'r'

Group 2: 'rb'

Group 3: 'rb?'

Group 4: 'rb??'

Group 5: 'rb???'

...

我们用一个数字序列 f 表示一组颜色的等价类。由于各段显然是独立的，我们可以以任意顺序排列 f 中的元素。例如例子中的 $f=['3', '2', '2', '1']$ 。假设 $g(N)$ 表示 N 的拆分数，总的状态数个数是 $O(g(N) \times N)$ 的，对于 $N \leq 70$ ，至多为418662。

下面我们考虑如何检验一个颜色等价类是否合法，相当于是对于颜色序列中的每一段分配一个操作子序列符合他的Group的要求，显然，我们考虑贪心地分配：

- 首先将 f 按从大到小排序
- 对于每个 k ，将 S 中的第 k 个'r'（它的位置记为 r_k ）分配给 $f[k]$

- 对于每一个 $f[k] = x$, (我们从左到右依次考虑每一个 $f[i]$), 如果 $x \geq 2$, 那么将 r_k 右边最靠左的 b (它的位置记为 b_k) 分配给它。
- 对于每一个 $f[k] = x$, 如果 $x \geq 3$, 就把 b_k 右边未被使用的最近 $x - 2$ 个操作分配给它。

足以通过本题。

2 Spiders Evil Plan

2.1 试题来源

ZeptoLab Code Rush 2015 G

2.2 题目大意

有一棵 n 个点的树，边有边权 l_i 。有 q 次询问，每次给 x, y ，查询由任意 y 条链的并组成的所有包含点 x 联通块中边权和的最大值（强制在线）。

2.3 数据范围

$$1 \leq n, q \leq 10^5, 1 \leq l_i \leq 1000$$

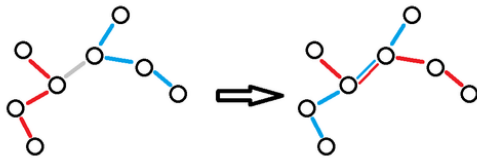
2.4 时空限制

时间限制：1秒

空间限制：256MB

2.5 解题过程

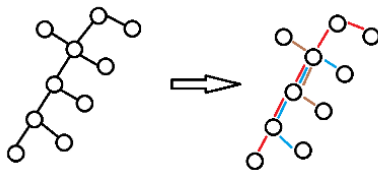
显然选择的所有链的两端一定为叶子，并且选择的链一定是一个连通块（如果不是可以调整使得答案不会变小，如下图）更进一步的，我们可



以得到下面这个结论：

Theorem 1 对于一个树，如果它有 $2k$ 个叶子，那么它就能被 k 条路径完全覆盖。

结论的正确性也非常显然。即如果有一条边没有被覆盖，可以通过调整两条路径得到。



于是询问 (x, y) 可以理解为：选择 $2y$ 个叶子，使得连通块包含 x 并且边权和最大。

我们可以考虑以 x 为根，现在的问题是如何选择叶子。

显而易见的是，如果一个节点 x 的子树中有一个叶子 u 被选择了，那么 x 所在长链包含的叶子一定也被选择了。

于是对于每一个叶子的贡献，我们单独考虑它们的贡献，贡献为它到它长链顶的距离，也就是说我们考虑一次加入长链。

于是我们按照贡献排序，依次选择即可。

但是每次都重新以 x 为根复杂度太高。我们考虑经过 x 的最长路径一定经过直径的其中一端，于是我们以直径两端分别为根做两边。

现在问题是如果 x 不被我们选择的前 $2y - 1$ 大的叶子包含怎么办？

有两种情况：一种是将贡献最小的长链去掉加入 x 所在长链，一种是找到离 x 最近的长链将下半部分替换成 x 所在长链。用倍增查找即可。

复杂度 $O((n + q) \log n)$