

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天这一节课的内容是基础通关。这里会用5道典型例题，让你巩固一下线性代数的基础知识，这也是进入应用篇学习之前的一次动手机会。从课程上线到现在快有一个月了，这期间我收到了不少同学的提问和建议，有些问题也是我没有想到的，非常有深度，说实话这让我感觉挺意外的，希望你再接再厉。

现在，你可以看一下基础通关的5道例题了，题目和解析都放在了正文中，你可以自己试着做一下。基础通关后，我们应用篇再见。

## 例题一

找到线性方程组 $Ax=b$ 的所有解，其中：

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法，你可以参考第4节的内容。

首先，形成增广矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

接着，分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-3和第二行相加。
2. 第一行和第三行相加。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

2. 第二行乘 $\frac{1}{3}$ 和第一行相加。
3. 第二行乘 $\frac{2}{3}$ 和第三行相加。
4. 第三行乘 $-\frac{1}{6}$ 。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

最后得出该线性方程组的唯一解：

$$$$

$$x=\left[\begin{array}{l} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

## 例题二

找到线性方程组  $Ax=b$  的所有解，其中：

$$A=\left[\begin{array}{lll} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right], b=\left[\begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array}\right]$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法。你可以参考第4节的内容，和例题一不同的是，例题二这里得到的会是无穷解。所以，这一题里找特殊解和通用解的方法是关键。

首先，形成增广矩阵：

$$\left[\begin{array}{lll|l} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

接着，形成增广矩阵：分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-1和第二行相加；
2. 第二行乘1/2。

$$\left[\begin{array}{lll|l} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

使用主元列，得到特殊解：

$$x=\left[\begin{array}{l} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{array}\right]$$

下一步，获取线性方程组  $Ax=0$  的通用解，从增广矩阵的左边，能够立即得出：

$$\lambda \left[\begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ -1 \end{array}\right]$$

最后，把特殊解和通用解组合起来就是：

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

### 例题三

计算矩阵乘 $AB$ 。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘无法完成，因为 $A$ 是2行3列矩阵， $B$ 也是2行3列矩阵， $A$ 和 $B$ 的邻居维度不同。

### 例题四

计算矩阵乘 $AB$ 。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘可以完成，因为两个矩阵的邻居维度相同，拿 $a_{11}$ 举例： $a_{11} = 1 \times 4 + 2 \times 2 + 3 \times 2 = 14$ ，结果：

$$AB = \begin{bmatrix} 14 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

### 例题五

假设 $R^3$ 和它的运算 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ， $x, y \in R^3$ ，我们有：

$$\langle x, y \rangle = x^T A y, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} 4 \times 2 + 1 \\ 0 \times 4 + (-1) \\ 1 \times (-1) + 5 \end{array}$$

那么， $\langle \cdot, \cdot \rangle$  是内积吗？

**解析：**

这里考察了内积，以及内积的性质之一：对称性，你可以参考第10节的内容。

选择  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，通过计算，能够得到：

$$\begin{array}{l} \langle x, y \rangle = 16 \\ \langle y, x \rangle = 14 \\ \langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle \end{array}$$

于是， $\langle \cdot, \cdot \rangle$  是不对称的。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天这一节课的内容是基础通关。这里会用5道典型例题，让你巩固一下线性代数的基础知识，这也是进入应用篇学习之前的一次动手机会。从课程上线到现在快有一个月了，这期间我收到了不少同学的提问和建议，有些问题也是我没有想到的，非常有深度，说实话这让我感觉挺意外的，希望你再接再厉。

现在，你可以看一下基础通关的5道例题了，题目和解析都放在了正文中，你可以自己试着做一下。基础通关后，我们应用篇再见。

## 例题一

找到线性方程组  $Ax=b$  的所有解，其中：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**解析：**

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法，你可以参考第4节的内容。

首先，形成增广矩阵：

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

接着，分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-3和第二行相加。

2. 第一行和第三行相加。

```

$$
\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 1 \\
0 & -6 & -3 \\
0 & 4 & 2
\end{array}\right]
$$

```

2. 第二行乘 $\frac{1}{3}$ 和第一行相加。
3. 第二行乘 $\frac{2}{3}$ 和第三行相加。
4. 第三行乘 $-\frac{1}{6}$ 。

```

$$
\left[\begin{array}{ccc}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

```

最后得出该线性方程组的唯一解：

```

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2}
\end{array}\right]
$$

```

## 例题二

找到线性方程组 $Ax=b$ 的所有解，其中：

```

$$
A=\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
0 & 2 & 2
\end{array}\right], b=\left[\begin{array}{l}
1 \\
1
\end{array}\right]
$$

```

**解析：**

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法。你可以参考第4节的内容，和例题一不同的是，例题二这里得到的会是无穷解。所以，这一题里找特殊解和通用解的方法是关键。

首先，形成增广矩阵：

```

$$
\left[\begin{array}{ccc|cc}
1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\
0 & 2 & 2 & 1 & 1
\end{array}\right]
$$

```

接着，形成增广矩阵：分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-1和第二行相加；
2. 第二行乘1/2。

```

$$
\left[\begin{array}{ccc|cc}
1 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}\right]

```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

使用主元列，得到特殊解：

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

下一步，获取线性方程组  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  的通用解，从增广矩阵的左边，能够立即得出：

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

最后，把特殊解和通用解组合起来就是：

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

### 例题三

计算矩阵乘  $\mathbf{AB}$ 。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘无法完成，因为  $\mathbf{A}$  是 2 行 3 列矩阵， $\mathbf{B}$  也是 2 行 3 列矩阵， $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  的维度不同。

### 例题四

计算矩阵乘  $\mathbf{AB}$ 。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘可以完成，因为两个矩阵的邻居维度相同，拿 $a_{11}$ 举例： $a_{11} = 1 \times 4 + 2 \times 2 + 3 \times 2 = 14$ ，结果：

$$AB = \begin{bmatrix} 14 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

## 例题五

假设 $R^3$ 和它的运算 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ， $x, y \in R^3$ ，我们有：

$$\langle x, y \rangle = x^T A y, A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

那么， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是内积吗？

解析：

这里考察了内积，以及内积的性质之一：对称性，你可以参考第10节的内容。

选择 $x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ ， $y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$ ，通过计算，能够得到：

$$\begin{array}{l} \langle x, y \rangle = 16 \\ \langle y, x \rangle = 14 \\ \langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle \end{array}$$

于是， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是不对称的。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天这一节课的内容是基础通关。这里会用5道典型例题，让你巩固一下线性代数的基础知识，这也是进入应用篇学习之前的一次动手机会。从课程上线到现在快有一个月了，这期间我收到了不少同学的提问和建议，有些问题也是我没有想到的，非常有深度，说实话这让我感觉挺意外的，希望你再接再厉。

现在，你可以看一下基础通关的5道例题了，题目和解析都放在了正文中，你可以自己试着做一下。基础通关后，我们应用篇再见。

## 例题一

找到线性方程组 $Ax=b$ 的所有解，其中：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法，你可以参考第4节的内容。

首先，形成增广矩阵：

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

接着，分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-3和第二行相加。
2. 第一行和第三行相加。

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \end{array} \right]$$

3. 第二行乘 $\frac{1}{3}$ 和第一行相加。
4. 第二行乘 $\frac{2}{3}$ 和第三行相加。
5. 第三行乘 $-\frac{1}{6}$ 。

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

最后得出该线性方程组的唯一解：

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

## 例题二

找到线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的所有解，其中：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



1  

$$\end{array}\right]$$

$$\\$\\$$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法。你可以参考第4节的内容，和例题一不同的是，例题二这里得到的会是无穷解。所以，这一题里找特殊解和通用解的方法是关键。

首先，形成增广矩阵：

$$\\$\\$$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\\$\\$$$

接着，形成增广矩阵：分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-1和第二行相加；
2. 第二行乘1/2。

$$\\$\\$$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\\$\\$$$

使用主元列，得到特殊解：

$$\\$\\$$$

$$x=\left[\begin{array}{l} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{array}\right]$$

$$\\$\\$$$

下一步，获取线性方程组 $Ax=0$ 的通用解，从增广矩阵的左边，能够立即得出：

$$\\$\\$$$

$$\lambda\left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ -1 \end{array}\right]$$

$$\\$\\$$$

最后，把特殊解和通用解组合起来就是：

$$\\$\\$$$

$$x=\left[\begin{array}{l} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{array}\right]+\lambda\left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ -1 \end{array}\right]$$

$$\\$\\$$$

## 例题三

计算矩阵乘 $SAB$ 。

$$\begin{aligned}
 & A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘无法完成，因为 $A$ 是2行3列矩阵， $B$ 也是2行3列矩阵， $A$ 和 $B$ 的邻居维度不同。

## 例题四

计算矩阵乘 $AB$ 。

$$\begin{aligned}
 & A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘可以完成，因为两个矩阵的邻居维度相同，拿 $a_{11}$ 举例： $a_{11} = 1 \times 4 + 2 \times 2 + 3 \times 2 = 14$ ，结果：

$$AB = \begin{bmatrix} 14 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

## 例题五

假设 $R^3$ 和它的运算 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ， $x, y \in R^3$ ，我们有：

$$\langle x, y \rangle = x^T A y, A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

那么， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是内积吗？

解析：

这里考察了内积，以及内积的性质之一：对称性，你可以参考第10节的内容。

选择 $x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ ， $y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$ ，通过计算，能够得到：

$$$$

$$\begin{array}{l} \angle x, y \neq \angle y, x \\ \end{array}$$

于是， $\angle \cdot \cdot \angle$ 是不对称的。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天这一节课的内容是基础通关。这里会用5道典型例题，让你巩固一下线性代数的基础知识，这也是进入应用篇学习之前的一次动手机会。从课程上线到现在快有一个月了，这期间我收到了不少同学的提问和建议，有些问题也是我没有想到的，非常有深度，说实话这让我感觉挺意外的，希望你再接再厉。

现在，你可以看一下基础通关的5道例题了，题目和解析都放在了正文中，你可以自己试着做一下。基础通关后，我们应用篇再见。

## 例题一

找到线性方程组  $Ax=b$  的所有解，其中：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法，你可以参考第4节的内容。

首先，形成增广矩阵：

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

接着，分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-3和第二行相加。
2. 第一行和第三行相加。

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \end{array} \right]$$

3. 第二行乘  $\frac{1}{3}$  和第一行相加。
4. 第二行乘  $\frac{2}{3}$  和第三行相加。
5. 第三行乘  $-\frac{1}{6}$ 。

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} 1 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 1 \ \frac{1}{2} \\ 0 \ 0 \ 0 \end{array}$$

最后得出该线性方程组的唯一解：

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 例题二

找到线性方程组  $Ax=b$  的所有解，其中：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法。你可以参考第4节的内容，和例题一不同的是，例题二这里得到的会是无穷解。所以，这一题里找特殊解和通用解的方法是关键。

首先，形成增广矩阵：

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

接着，形成增广矩阵：分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-1和第二行相加；
2. 第二行乘1/2。

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

使用主元列，得到特殊解：

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

下一步，获取线性方程组  $Ax=0$  的通用解，从增广矩阵的左边，能够立即得出：

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

最后，把特殊解和通用解组合起来就是：

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

### 例题三

计算矩阵乘 $AB$ 。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘无法完成，因为 $A$ 是2行3列矩阵， $B$ 也是2行3列矩阵， $A$ 和 $B$ 的邻居维度不同。

### 例题四

计算矩阵乘 $AB$ 。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘可以完成，因为两个矩阵的邻居维度相同，拿 $a_{11}$ 举例： $a_{11} = 1 \times 4 + 2 \times 2 + 3 \times 2 = 14$ ，结果：

$$AB = \begin{bmatrix} 14 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} 2 \times 2 \\ \end{array}$$

## 例题五

假设 $\mathbb{R}^3$ 和它的运算 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ， $x, y \in \mathbb{R}^3$ ，我们有：

$$\langle x, y \rangle = x^T A y, A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

那么， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是内积吗？

**解析：**

这里考察了内积，以及内积的性质之一：对称性，你可以参考第10节的内容。

选择 $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ， $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，通过计算，能够得到：

$$\begin{array}{l} \langle x, y \rangle = 16 \\ \langle y, x \rangle = 14 \\ \langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle \end{array}$$

于是， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是不对称的。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天这一节课的内容是基础通关。这里会用5道典型例题，让你巩固一下线性代数的基础知识，这也是进入应用篇学习之前的一次动手机会。从课程上线到现在快有一个月了，这期间我收到了不少同学的提问和建议，有些问题也是我没有想到的，非常有深度，说实话这让我感觉挺意外的，希望你再接再厉。

现在，你可以看一下基础通关的5道例题了，题目和解析都放在了正文中，你可以自己试着做一下。基础通关后，我们应用篇再见。

## 例题一

找到线性方程组 $Ax=b$ 的所有解，其中：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**解析：**

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法，你可以参考第4节的内容。

首先，形成增广矩阵：

$$[A|b]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

接着，分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-3和第二行相加。
2. 第一行和第三行相加。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

2. 第二行乘 $\frac{1}{3}$ 和第一行相加。
3. 第二行乘 $\frac{2}{3}$ 和第三行相加。
4. 第三行乘 $-\frac{1}{6}$ 。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

最后得出该线性方程组的唯一解：

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

## 例题二

找到线性方程组 $Ax=b$ 的所有解，其中：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法。你可以参考第4节的内容，和例题一不同的是，例题二这里得到的会是无穷解。所以，这一题里找特殊解和通用解的方法是关键。

首先，形成增广矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

\$\$

接着，形成增广矩阵：分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-1和第二行相加；
2. 第二行乘1/2。

\$\$

```
\left[\begin{array}{cccc}1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2}\end{array}\right]
```

\$\$

使用主元列，得到特殊解：

\$\$

```
x=\left[\begin{array}{l}0 \\ \frac{1}{2} \\ 0\end{array}\right]
```

\$\$

下一步，获取线性方程组 $Ax=0$ 的通用解，从增广矩阵的左边，能够立即得出：

\$\$

```
\lambda\left[\begin{array}{c}1 \\ 1 \\ -1\end{array}\right]
```

\$\$

最后，把特殊解和通用解组合起来就是：

\$\$

```
x=\left[\begin{array}{l}0 \\ \frac{1}{2} \\ 0\end{array}\right]+\lambda\left[\begin{array}{c}1 \\ 1 \\ -1\end{array}\right]
```

\$\$

## 例题三

计算矩阵乘 $AB$ 。

\$\$

```
A=\left[\begin{array}{ccc}1 & 2 & 3 \\0 & -1 & 2\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{ccc}4 & -1 & 2 \\0 & 2 & 1\end{array}\right]
```

\$\$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘无法完成，因为 $A$ 是2行3列矩阵， $B$ 也是2行3列矩阵， $A$ 和邻居维度不同。



## 例题四

计算矩阵乘 $AB$ 。

```
$$
A=\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 2
\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{cc}
4 & -1 \\
2 & 0 \\
2 & 1
\end{array}\right]
$$
```

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘可以完成，因为两个矩阵的邻居维度相同，拿 $a_{11}$ 举例： $a_{11}=1\times 4+2\times 2+3\times 2=14$ ，结果：

```
$$
A B=\left[\begin{array}{cc}
14 & 2 \\
2 & 2
\end{array}\right]
$$
```

## 例题五

假设 $R^3$ 和它的运算 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ， $x, y \in R^3$ ，我们有：

```
$$
\langle x, y \rangle = x^T A y, A=\left[\begin{array}{ccc}
4 & 2 & 1 \\
0 & 4 & -1 \\
1 & -1 & 5
\end{array}\right]
$$
```

那么， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是内积吗？

解析：

这里考察了内积，以及内积的性质之一：对称性，你可以参考第10节的内容。

选择 $x=\left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right]^T$ ， $y=\left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 0 \end{array}\right]^T$ ，通过计算，能够得到：

```
$$
\begin{array}{l}
\langle x, y \rangle = 16 \\
\langle y, x \rangle = 14 \\
\langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle
\end{array}
$$
```

于是， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是不对称的。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天这一节课的内容是基础通关。这里会用5道典型例题，让你巩固一下线性代数的基础知识，这也是进入应用篇学习之前的一次动手机会。从课程上线到现在快有一个月了，这期间我收到了不少同学的提问和建议，有些问题也是我没有想到的，非常有深度，说实话这让我感觉挺意外的，希望你再接再厉。

现在，你可以看一下基础通关的5道例题了，题目和解析都放在了正文中，你可以自己试着做一下。基础通关后，我们应用篇再见。

## 例题一

找到线性方程组 $Ax=b$ 的所有解，其中：

$$\begin{aligned} &A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\end{aligned}$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法，你可以参考第4节的内容。

首先，形成增广矩阵：

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &\end{aligned}$$

接着，分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-3和第二行相加。
2. 第一行和第三行相加。

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \\ &\end{aligned}$$

2. 第二行乘 $\frac{1}{3}$ 和第一行相加。
3. 第二行乘 $\frac{2}{3}$ 和第三行相加。
4. 第三行乘 $-\frac{1}{6}$ 。

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\end{aligned}$$

最后得出该线性方程组的唯一解：

$$\begin{aligned} &x=\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &\end{aligned}$$

## 例题二

找到线性方程组 $Ax=b$ 的所有解，其中：

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法。你可以参考第4节的内容，和例题一不同的是，例题二这里得到的会是无穷解。所以，这一题里找特殊解和通用解的方法是关键。

首先，形成增广矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

接着，形成增广矩阵：分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-1和第二行相加；
2. 第二行乘1/2。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

使用主元列，得到特殊解：

$$x=\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

下一步，获取线性方程组 $Ax=0$ 的通用解，从增广矩阵的左边，能够立即得出：

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

最后，把特殊解和通用解组合起来就是：

$$x=\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

```
1 \\\
-1
\end{array}\right]
$$
```

### 例题三

计算矩阵乘 $AB$ 。

```
$$
A=\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\\
0 & -1 & 2 \\
\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{ccc}
4 & -1 & 2 \\\
0 & 2 & 1 \\
\end{array}\right]
$$
```

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘无法完成，因为 $A$ 是2行3列矩阵， $B$ 也是2行3列矩阵， $A$ 和邻居维度不同。

### 例题四

计算矩阵乘 $AB$ 。

```
$$
A=\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\\
0 & -1 & 2 \\
\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{cc}
4 & -1 \\\
2 & 0 \\\
2 & 1 \\
\end{array}\right]
$$
```

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘可以完成，因为两个矩阵的邻居维度相同，拿 $a_{11}$ 举例： $a_{11}=1 \times 4+2 \times 2+3 \times 2=14$ ，结果：

```
$$
A B=\left[\begin{array}{cc}
14 & 2 \\\
2 & 2 \\
\end{array}\right]
$$
```

### 例题五

假设 $R^3$ 和它的运算 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ， $x, y \in R^3$ ，我们有：

```
$$
\langle x, y \rangle = x^T A y, A=\left[\begin{array}{ccc}
4 & 2 & 1 \\\
0 & 4 & -1 \\\
1 & -1 & 5 \\
\end{array}\right]
$$
```

那么， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是内积吗？

解析：

这里考察了内积，以及内积的性质之一：对称性，你可以参考第10节的内容。

选择  $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ，通过计算，能够得到：

```
$$
\begin{array}{l}
\angle x, y = 16 \\
\angle y, x = 14 \\
\angle x, y \neq \angle y, x
\end{array}
$$
```

于是， $\angle \cdot, \cdot$  是不对称的。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天这一节课的内容是基础通关。这里会用5道典型例题，让你巩固一下线性代数的基础知识，这也是进入应用篇学习之前的一次动手机会。从课程上线到现在快有一个月了，这期间我收到了不少同学的提问和建议，有些问题也是我没有想到的，非常有深度，说实话这让我感觉挺意外的，希望你再接再厉。

现在，你可以看一下基础通关的5道例题了，题目和解析都放在了正文中，你可以自己试着做一下。基础通关后，我们应用篇再见。

## 例题一

找到线性方程组  $Ax=b$  的所有解，其中：

```
$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$
```

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法，你可以参考第4节的内容。

首先，形成增广矩阵：

```
$$
\left[ \begin{array}{cc|c}
1 & 2 & 1 \\
3 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & 1
\end{array} \right]
$$
```

接着，分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-3和第二行相加。
2. 第一行和第三行相加。

```
$$
\left[ \begin{array}{cc|c}
1 & 2 & 1 \\
0 & -6 & -3 \\
0 & 4 & 2
\end{array} \right]

```

\$\$

2. 第二行乘 $\frac{1}{3}$ 和第一行相加。
3. 第二行乘 $\frac{2}{3}$ 和第三行相加。
4. 第三行乘 $-\frac{1}{6}$ 。

\$\$

```
\left[\begin{array}{l} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
```

最后得出该线性方程组的唯一解：

\$\$

```
x=\left[\begin{array}{l} 0 \\ \frac{1}{2} \end{array}\right]
```

## 例题二

找到线性方程组 $Ax=b$ 的所有解，其中：

\$\$

```
A=\left[\begin{array}{l} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right], b=\left[\begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array}\right]
```

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法。你可以参考第4节的内容，和例题一不同的是，例题二这里得到的会是无穷解。所以，这一题里找特殊解和通用解的方法是关键。

首先，形成增广矩阵：

\$\$

```
\left[\begin{array}{l} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]
```

接着，形成增广矩阵：分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-1和第二行相加；
2. 第二行乘1/2。

\$\$

```
\left[\begin{array}{l} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right]
```

使用主元列，得到特殊解：

\$\$

```
x=\left[\begin{array}{l} \end{array}\right]
```

$$\begin{array}{r} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{array}$$

下一步，获取线性方程组  $Ax=0$  的通用解，从增广矩阵的左边，能够立即得出：

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

最后，把特殊解和通用解组合起来就是：

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

### 例题三

计算矩阵乘  $AB$ 。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘无法完成，因为  $A$  是 2 行 3 列矩阵， $B$  也是 2 行 3 列矩阵， $A$  和  $B$  的维度不同。

### 例题四

计算矩阵乘  $AB$ 。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘可以完成，因为两个矩阵的邻居维度相同，拿 $a_{11}$ 举例： $a_{11}=1\times 4+2\times 2+3\times 2=14$ ，结果：

```
$$
A B=\left[\begin{array}{cc}
14 & 2 \\
2 & 2
\end{array}\right]
$$
```

## 例题五

假设 $R^3$ 和它的运算 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ， $x, y \in R^3$ ，我们有：

```
$$
\langle x, y \rangle = x^T A y, A=\left[\begin{array}{ccc}
4 & 2 & 1 \\
0 & 4 & -1 \\
1 & -1 & 5
\end{array}\right]
$$
```

那么， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是内积吗？

解析：

这里考察了内积，以及内积的性质之一：对称性，你可以参考第10节的内容。

选择 $x=\left[\begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right]^T$ ， $y=\left[\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 0 \end{array}\right]^T$ ，通过计算，能够得到：

```
$$
\begin{array}{l}
\langle x, y \rangle = 16 \\
\langle y, x \rangle = 14 \\
\langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle
\end{array}
$$
```

于是， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是不对称的。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天这一节课的内容是基础通关。这里会用5道典型例题，让你巩固一下线性代数的基础知识，这也是进入应用篇学习之前的一次动手机会。从课程上线到现在快有一个月了，这期间我收到了不少同学的提问和建议，有些问题也是我没有想到的，非常有深度，说实话这让我感觉挺意外的，希望你再接再厉。

现在，你可以看一下基础通关的5道例题了，题目和解析都放在了正文中，你可以自己试着做一下。基础通关后，我们应用篇再见。

## 例题一

找到线性方程组 $Ax=b$ 的所有解，其中：

```
$$
A=\left[\begin{array}{cc}
1 & 2 \\
3 & 0 \\
-1 & 2
\end{array}\right], b=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
1
\end{array}\right]
$$
```



解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法，你可以参考第4节的内容。

首先，形成增广矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

接着，分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-3和第二行相加。
2. 第一行和第三行相加。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

2. 第二行乘 $\frac{1}{3}$ 和第一行相加。
3. 第二行乘 $\frac{2}{3}$ 和第三行相加。
4. 第三行乘 $-\frac{1}{6}$ 。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

最后得出该线性方程组的唯一解：

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

## 例题二

找到线性方程组 $Ax=b$ 的所有解，其中：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法。你可以参考第4节的内容，和例题一不同的是，例题二这里得到的会是无穷解。所以，这一题里找特殊解和通用解的方法是关键。

首先，形成增广矩阵：

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}$$

接着，形成增广矩阵：分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-1和第二行相加；
2. 第二行乘1/2。

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}$$

使用主元列，得到特殊解：

$$\begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{array}$$

下一步，获取线性方程组 $Ax=0$ 的通用解，从增广矩阵的左边，能够立即得出：

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ -1 \end{array}$$

最后，把特殊解和通用解组合起来就是：

$$\begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ -1 \end{array}$$

### 例题三

计算矩阵乘 $AB$ 。

$$A = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}, B = \begin{array}{ccc} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}$$

\$\$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘无法完成，因为 $A$ 是2行3列矩阵， $B$ 也是2行3列矩阵， $A$ 和 $B$ 的邻居维度不同。

## 例题四

计算矩阵乘 $AB$ 。

\$\$

```
A=\left[\begin{array}{ccc}1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{cc}4 & -1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1\end{array}\right]
```

\$\$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘可以完成，因为两个矩阵的邻居维度相同，拿 $a_{11}$ 举例： $a_{11}=1 \times 4+2 \times 2+3 \times 2=14$ ，结果：

\$\$

```
A B=\left[\begin{array}{cc}14 & 2 \\ 2 & 2\end{array}\right]
```

\$\$

## 例题五

假设 $R^3$ 和它的运算 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ， $x, y \in R^3$ ，我们有：

\$\$

```
\langle x, y \rangle = x^T A y, A=\left[\begin{array}{ccc}4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 5\end{array}\right]
```

\$\$

那么， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是内积吗？

解析：

这里考察了内积，以及内积的性质之一：对称性，你可以参考第10节的内容。

选择 $x=\left[\begin{array}{l}1 \\ 1 \\ 0\end{array}\right]^T$ ， $y=\left[\begin{array}{l}1 \\ 2 \\ 0\end{array}\right]^T$ ，通过计算，能够得到：

\$\$

```
\begin{array}{l}\langle x, y \rangle = 16 \\ \langle y, x \rangle = 14 \\ \langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle\end{array}
```

\$\$

于是， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是不对称的。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天这一节课的内容是基础通关。这里会用5道典型例题，让你巩固一下线性代数的基础知识，这也是进入应用篇学习之前的一次动手机会。从课程上线到现在快有一个月了，这期间我收到了不少同学的提问和建议，有些问题也是我没有想到的，非常有深度，说实话这让我感觉挺意外的，希望你再接再厉。

现在，你可以看一下基础通关的5道例题了，题目和解析都放在了正文中，你可以自己试着做一下。基础通关后，我们应用篇再见。

## 例题一

找到线性方程组 $Ax=b$ 的所有解，其中：

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法，你可以参考第4节的内容。

首先，形成增广矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

接着，分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-3和第二行相加。
2. 第一行和第三行相加。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

2. 第二行乘 $\frac{1}{3}$ 和第一行相加。
3. 第二行乘 $\frac{2}{3}$ 和第三行相加。
4. 第三行乘 $-\frac{1}{6}$ 。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

最后得出该线性方程组的唯一解：

$$$$

$$x=\left[\begin{array}{l} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

## 例题二

找到线性方程组  $Ax=b$  的所有解，其中：

$$A=\left[\begin{array}{lll} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right], b=\left[\begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array}\right]$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法。你可以参考第4节的内容，和例题一不同的是，例题二这里得到的会是无穷解。所以，这一题里找特殊解和通用解的方法是关键。

首先，形成增广矩阵：

$$\left[\begin{array}{lll|l} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

接着，形成增广矩阵：分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-1和第二行相加；
2. 第二行乘1/2。

$$\left[\begin{array}{lll|l} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

使用主元列，得到特殊解：

$$x=\left[\begin{array}{l} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{array}\right]$$

下一步，获取线性方程组  $Ax=0$  的通用解，从增广矩阵的左边，能够立即得出：

$$\lambda \left[\begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ -1 \end{array}\right]$$

最后，把特殊解和通用解组合起来就是：

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

### 例题三

计算矩阵乘 $AB$ 。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘无法完成，因为 $A$ 是2行3列矩阵， $B$ 也是2行3列矩阵， $A$ 和 $B$ 的邻居维度不同。

### 例题四

计算矩阵乘 $AB$ 。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘可以完成，因为两个矩阵的邻居维度相同，拿 $a_{11}$ 举例： $a_{11} = 1 \times 4 + 2 \times 2 + 3 \times 2 = 14$ ，结果：

$$AB = \begin{bmatrix} 14 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

### 例题五

假设 $R^3$ 和它的运算 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ， $x, y \in R^3$ ，我们有：

$$\langle x, y \rangle = x^T A y, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{array}$$

那么， $\langle \cdot, \cdot \rangle$  是内积吗？

解析：

这里考察了内积，以及内积的性质之一：对称性，你可以参考第10节的内容。

选择  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，通过计算，能够得到：

$$\begin{array}{l} \langle x, y \rangle = 16 \\ \langle y, x \rangle = 14 \\ \langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle \end{array}$$

于是， $\langle \cdot, \cdot \rangle$  是不对称的。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天这一节课的内容是基础通关。这里会用5道典型例题，让你巩固一下线性代数的基础知识，这也是进入应用篇学习之前的一次动手机会。从课程上线到现在快有一个月了，这期间我收到了不少同学的提问和建议，有些问题也是我没有想到的，非常有深度，说实话这让我感觉挺意外的，希望你再接再厉。

现在，你可以看一下基础通关的5道例题了，题目和解析都放在了正文中，你可以自己试着做一下。基础通关后，我们应用篇再见。

## 例题一

找到线性方程组  $Ax=b$  的所有解，其中：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法，你可以参考第4节的内容。

首先，形成增广矩阵：

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

接着，分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-3和第二行相加。

2. 第一行和第三行相加。

```

$$
\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 1 \\
0 & -6 & -3 \\
0 & 4 & 2
\end{array}\right]
$$

```

2. 第二行乘 $\frac{1}{3}$ 和第一行相加。
3. 第二行乘 $\frac{2}{3}$ 和第三行相加。
4. 第三行乘 $-\frac{1}{6}$ 。

```

$$
\left[\begin{array}{ccc}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

```

最后得出该线性方程组的唯一解：

```

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2}
\end{array}\right]
$$

```

## 例题二

找到线性方程组 $Ax=b$ 的所有解，其中：

```

$$
A=\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
0 & 2 & 2
\end{array}\right], b=\left[\begin{array}{l}
1 \\
1
\end{array}\right]
$$

```

**解析：**

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法。你可以参考第4节的内容，和例题一不同的是，例题二这里得到的会是无穷解。所以，这一题里找特殊解和通用解的方法是关键。

首先，形成增广矩阵：

```

$$
\left[\begin{array}{ccc|cc}
1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\
0 & 2 & 2 & 1 & 1
\end{array}\right]
$$

```

接着，形成增广矩阵：分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-1和第二行相加；
2. 第二行乘1/2。

```

$$
\left[\begin{array}{ccc|cc}
1 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}\right]

```



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

使用主元列，得到特殊解：

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

下一步，获取线性方程组  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  的通用解，从增广矩阵的左边，能够立即得出：

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

最后，把特殊解和通用解组合起来就是：

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

### 例题三

计算矩阵乘  $\mathbf{AB}$ 。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘无法完成，因为  $\mathbf{A}$  是 2 行 3 列矩阵， $\mathbf{B}$  也是 2 行 3 列矩阵， $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  的维度不同。

### 例题四

计算矩阵乘  $\mathbf{AB}$ 。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘可以完成，因为两个矩阵的邻居维度相同，拿 $a_{11}$ 举例： $a_{11} = 1 \times 4 + 2 \times 2 + 3 \times 2 = 14$ ，结果：

$$AB = \begin{bmatrix} 14 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

## 例题五

假设 $R^3$ 和它的运算 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ， $x, y \in R^3$ ，我们有：

$$\langle x, y \rangle = x^T A y, A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

那么， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是内积吗？

解析：

这里考察了内积，以及内积的性质之一：对称性，你可以参考第10节的内容。

选择 $x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ ， $y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$ ，通过计算，能够得到：

$$\begin{array}{l} \langle x, y \rangle = 16 \\ \langle y, x \rangle = 14 \\ \langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle \end{array}$$

于是， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是不对称的。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天这一节课的内容是基础通关。这里会用5道典型例题，让你巩固一下线性代数的基础知识，这也是进入应用篇学习之前的一次动手机会。从课程上线到现在快有一个月了，这期间我收到了不少同学的提问和建议，有些问题也是我没有想到的，非常有深度，说实话这让我感觉挺意外的，希望你再接再厉。

现在，你可以看一下基础通关的5道例题了，题目和解析都放在了正文中，你可以自己试着做一下。基础通关后，我们应用篇再见。

## 例题一

找到线性方程组 $Ax=b$ 的所有解，其中：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法，你可以参考第4节的内容。

首先，形成增广矩阵：

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

接着，分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-3和第二行相加。
2. 第一行和第三行相加。

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \end{array} \right]$$

3. 第二行乘 $\frac{1}{3}$ 和第一行相加。
4. 第二行乘 $\frac{2}{3}$ 和第三行相加。
5. 第三行乘 $-\frac{1}{6}$ 。

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

最后得出该线性方程组的唯一解：

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

## 例题二

找到线性方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的所有解，其中：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1  

$$\end{array}\right]$$

$$\\$\\$$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法。你可以参考第4节的内容，和例题一不同的是，例题二这里得到的会是无穷解。所以，这一题里找特殊解和通用解的方法是关键。

首先，形成增广矩阵：

$$\\$\\$$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\\$\\$$$

接着，形成增广矩阵：分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-1和第二行相加；
2. 第二行乘1/2。

$$\\$\\$$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\\$\\$$$

使用主元列，得到特殊解：

$$\\$\\$$$

$$x=\left[\begin{array}{l} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{array}\right]$$

$$\\$\\$$$

下一步，获取线性方程组 $Ax=0$ 的通用解，从增广矩阵的左边，能够立即得出：

$$\\$\\$$$

$$\lambda\left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ -1 \end{array}\right]$$

$$\\$\\$$$

最后，把特殊解和通用解组合起来就是：

$$\\$\\$$$

$$x=\left[\begin{array}{l} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{array}\right]+\lambda\left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ -1 \end{array}\right]$$

$$\\$\\$$$

### 例题三

计算矩阵乘 $SAB$ 。

$$\begin{aligned}
 &A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘无法完成，因为 $A$ 是2行3列矩阵， $B$ 也是2行3列矩阵， $A$ 和 $B$ 的邻居维度不同。

## 例题四

计算矩阵乘 $AB$ 。

$$\begin{aligned}
 &A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘可以完成，因为两个矩阵的邻居维度相同，拿 $a_{11}$ 举例： $a_{11} = 1 \times 4 + 2 \times 2 + 3 \times 2 = 14$ ，结果：

$$AB = \begin{bmatrix} 14 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

## 例题五

假设 $R^3$ 和它的运算 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ， $x, y \in R^3$ ，我们有：

$$\langle x, y \rangle = x^T A y, A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

那么， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是内积吗？

解析：

这里考察了内积，以及内积的性质之一：对称性，你可以参考第10节的内容。

选择 $x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ ， $y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$ ，通过计算，能够得到：

$$$$

$$\begin{array}{l} \angle x, y \neq \angle y, x \\ \end{array}$$

于是， $\angle \cdot \cdot \angle$ 是不对称的。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天这一节课的内容是基础通关。这里会用5道典型例题，让你巩固一下线性代数的基础知识，这也是进入应用篇学习之前的一次动手机会。从课程上线到现在快有一个月了，这期间我收到了不少同学的提问和建议，有些问题也是我没有想到的，非常有深度，说实话这让我感觉挺意外的，希望你再接再厉。

现在，你可以看一下基础通关的5道例题了，题目和解析都放在了正文中，你可以自己试着做一下。基础通关后，我们应用篇再见。

## 例题一

找到线性方程组  $Ax=b$  的所有解，其中：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法，你可以参考第4节的内容。

首先，形成增广矩阵：

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

接着，分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-3和第二行相加。
2. 第一行和第三行相加。

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \end{array} \right]$$

3. 第二行乘  $\frac{1}{3}$  和第一行相加。
4. 第二行乘  $\frac{2}{3}$  和第三行相加。
5. 第三行乘  $-\frac{1}{6}$ 。

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} 1 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 1 \ \frac{1}{2} \\ 0 \ 0 \ 0 \end{array}$$

最后得出该线性方程组的唯一解：

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 例题二

找到线性方程组  $Ax=b$  的所有解，其中：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法。你可以参考第4节的内容，和例题一不同的是，例题二这里得到的会是无穷解。所以，这一题里找特殊解和通用解的方法是关键。

首先，形成增广矩阵：

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

接着，形成增广矩阵：分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-1和第二行相加；
2. 第二行乘1/2。

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

使用主元列，得到特殊解：

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

下一步，获取线性方程组  $Ax=0$  的通用解，从增广矩阵的左边，能够立即得出：

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

最后，把特殊解和通用解组合起来就是：

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

### 例题三

计算矩阵乘 $AB$ 。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘无法完成，因为 $A$ 是2行3列矩阵， $B$ 也是2行3列矩阵， $A$ 和 $B$ 的邻居维度不同。

### 例题四

计算矩阵乘 $AB$ 。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘可以完成，因为两个矩阵的邻居维度相同，拿 $a_{11}$ 举例： $a_{11} = 1 \times 4 + 2 \times 2 + 3 \times 2 = 14$ ，结果：

$$AB = \begin{bmatrix} 14 & 2 \end{bmatrix}$$



$$\begin{array}{r} 2 \times 2 \\ \end{array}$$

## 例题五

假设 $\mathbb{R}^3$ 和它的运算 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ， $x, y \in \mathbb{R}^3$ ，我们有：

$$\langle x, y \rangle = x^T A y, A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

那么， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是内积吗？

**解析：**

这里考察了内积，以及内积的性质之一：对称性，你可以参考第10节的内容。

选择 $x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ ， $y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T$ ，通过计算，能够得到：

$$\begin{array}{l} \langle x, y \rangle = 16 \\ \langle y, x \rangle = 14 \\ \langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle \end{array}$$

于是， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是不对称的。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天这一节课的内容是基础通关。这里会用5道典型例题，让你巩固一下线性代数的基础知识，这也是进入应用篇学习之前的一次动手机会。从课程上线到现在快有一个月了，这期间我收到了不少同学的提问和建议，有些问题也是我没有想到的，非常有深度，说实话这让我感觉挺意外的，希望你再接再厉。

现在，你可以看一下基础通关的5道例题了，题目和解析都放在了正文中，你可以自己试着做一下。基础通关后，我们应用篇再见。

## 例题一

找到线性方程组 $Ax=b$ 的所有解，其中：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**解析：**

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法，你可以参考第4节的内容。

首先，形成增广矩阵：

$$[A|b]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

接着，分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-3和第二行相加。
2. 第一行和第三行相加。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

2. 第二行乘 $\frac{1}{3}$ 和第一行相加。
3. 第二行乘 $\frac{2}{3}$ 和第三行相加。
4. 第三行乘 $-\frac{1}{6}$ 。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

最后得出该线性方程组的唯一解：

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

## 例题二

找到线性方程组 $Ax=b$ 的所有解，其中：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法。你可以参考第4节的内容，和例题一不同的是，例题二这里得到的会是无穷解。所以，这一题里找特殊解和通用解的方法是关键。

首先，形成增广矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

\$\$

接着，形成增广矩阵：分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-1和第二行相加；
2. 第二行乘1/2。

\$\$

```
\left[\begin{array}{cccc}1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2}\end{array}\right]
```

\$\$

使用主元列，得到特殊解：

\$\$

```
x=\left[\begin{array}{l}0 \\ \frac{1}{2} \\ 0\end{array}\right]
```

\$\$

下一步，获取线性方程组 $Ax=0$ 的通用解，从增广矩阵的左边，能够立即得出：

\$\$

```
\lambda\left[\begin{array}{c}1 \\ 1 \\ -1\end{array}\right]
```

\$\$

最后，把特殊解和通用解组合起来就是：

\$\$

```
x=\left[\begin{array}{l}0 \\ \frac{1}{2} \\ 0\end{array}\right]+\lambda\left[\begin{array}{c}1 \\ 1 \\ -1\end{array}\right]
```

\$\$

## 例题三

计算矩阵乘 $AB$ 。

\$\$

```
A=\left[\begin{array}{ccc}1 & 2 & 3 \\0 & -1 & 2\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{ccc}4 & -1 & 2 \\0 & 2 & 1\end{array}\right]
```

\$\$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘无法完成，因为 $A$ 是2行3列矩阵， $B$ 也是2行3列矩阵， $A$ 和邻居维度不同。

## 例题四

计算矩阵乘 $AB$ 。

```
$$
A=\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 2
\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{cc}
4 & -1 \\
2 & 0 \\
2 & 1
\end{array}\right]
$$
```

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘可以完成，因为两个矩阵的邻居维度相同，拿 $a_{11}$ 举例： $a_{11}=1\times 4+2\times 2+3\times 2=14$ ，结果：

```
$$
A B=\left[\begin{array}{cc}
14 & 2 \\
2 & 2
\end{array}\right]
$$
```

## 例题五

假设 $R^3$ 和它的运算 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ， $x, y \in R^3$ ，我们有：

```
$$
\langle x, y \rangle = x^T A y, A=\left[\begin{array}{ccc}
4 & 2 & 1 \\
0 & 4 & -1 \\
1 & -1 & 5
\end{array}\right]
$$
```

那么， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是内积吗？

解析：

这里考察了内积，以及内积的性质之一：对称性，你可以参考第10节的内容。

选择 $x=\left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right]^T$ ， $y=\left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 0 \end{array}\right]^T$ ，通过计算，能够得到：

```
$$
\begin{array}{l}
\langle x, y \rangle = 16 \\
\langle y, x \rangle = 14 \\
\langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle
\end{array}
$$
```

于是， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是不对称的。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天这一节课的内容是基础通关。这里会用5道典型例题，让你巩固一下线性代数的基础知识，这也是进入应用篇学习之前的一次动手机会。从课程上线到现在快有一个月了，这期间我收到了不少同学的提问和建议，有些问题也是我没有想到的，非常有深度，说实话这让我感觉挺意外的，希望你再接再厉。

现在，你可以看一下基础通关的5道例题了，题目和解析都放在了正文中，你可以自己试着做一下。基础通关后，我们应用篇再见。

## 例题一

找到线性方程组 $Ax=b$ 的所有解，其中：

$$\begin{aligned} &A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\end{aligned}$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法，你可以参考第4节的内容。

首先，形成增广矩阵：

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &\end{aligned}$$

接着，分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-3和第二行相加。
2. 第一行和第三行相加。

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \\ &\end{aligned}$$

2. 第二行乘 $\frac{1}{3}$ 和第一行相加。
3. 第二行乘 $\frac{2}{3}$ 和第三行相加。
4. 第三行乘 $-\frac{1}{6}$ 。

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\end{aligned}$$

最后得出该线性方程组的唯一解：

$$\begin{aligned} &x=\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &\end{aligned}$$

## 例题二

找到线性方程组 $Ax=b$ 的所有解，其中：

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法。你可以参考第4节的内容，和例题一不同的是，例题二这里得到的会是无穷解。所以，这一题里找特殊解和通用解的方法是关键。

首先，形成增广矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

接着，形成增广矩阵：分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-1和第二行相加；
2. 第二行乘1/2。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

使用主元列，得到特殊解：

$$x=\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

下一步，获取线性方程组 $Ax=0$ 的通用解，从增广矩阵的左边，能够立即得出：

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

最后，把特殊解和通用解组合起来就是：

$$x=\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

```
1 \\\
-1
\end{array}\right]
$$
```

### 例题三

计算矩阵乘 $AB$ 。

```
$$
A=\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\\
0 & -1 & 2 \\\
\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{ccc}
4 & -1 & 2 \\\
0 & 2 & 1 \\\
\end{array}\right]
$$
```

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘无法完成，因为 $A$ 是2行3列矩阵， $B$ 也是2行3列矩阵， $A$ 和邻居维度不同。

### 例题四

计算矩阵乘 $AB$ 。

```
$$
A=\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\\
0 & -1 & 2 \\\
\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{cc}
4 & -1 \\\
2 & 0 \\\
2 & 1 \\\
\end{array}\right]
$$
```

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘可以完成，因为两个矩阵的邻居维度相同，拿 $a_{11}$ 举例： $a_{11}=1 \times 4+2 \times 2+3 \times 2=14$ ，结果：

```
$$
AB=\left[\begin{array}{cc}
14 & 2 \\\
2 & 2 \\\
\end{array}\right]
$$
```

### 例题五

假设 $R^3$ 和它的运算 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ， $x, y \in R^3$ ，我们有：

```
$$
\langle x, y \rangle = x^T A y, A=\left[\begin{array}{ccc}
4 & 2 & 1 \\\
0 & 4 & -1 \\\
1 & -1 & 5 \\\
\end{array}\right]
$$
```

那么， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是内积吗？

解析：

这里考察了内积，以及内积的性质之一：对称性，你可以参考第10节的内容。

选择  $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ，通过计算，能够得到：

```
$$
\begin{array}{l}
\angle x, y = 16 \\
\angle y, x = 14 \\
\angle x, y \neq \angle y, x
\end{array}
$$
```

于是， $\angle \cdot, \cdot$  是不对称的。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天这一节课的内容是基础通关。这里会用5道典型例题，让你巩固一下线性代数的基础知识，这也是进入应用篇学习之前的一次动手机会。从课程上线到现在快有一个月了，这期间我收到了不少同学的提问和建议，有些问题也是我没有想到的，非常有深度，说实话这让我感觉挺意外的，希望你再接再厉。

现在，你可以看一下基础通关的5道例题了，题目和解析都放在了正文中，你可以自己试着做一下。基础通关后，我们应用篇再见。

## 例题一

找到线性方程组  $Ax=b$  的所有解，其中：

```
$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$
```

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法，你可以参考第4节的内容。

首先，形成增广矩阵：

```
$$
\left[ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{array} \right]
$$
```

接着，分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-3和第二行相加。
2. 第一行和第三行相加。

```
$$
\left[ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \end{array} \right]

```



\$\$

2. 第二行乘 $\frac{1}{3}$ 和第一行相加。
3. 第二行乘 $\frac{2}{3}$ 和第三行相加。
4. 第三行乘 $-\frac{1}{6}$ 。

\$\$

```
\left[\begin{array}{l} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
```

最后得出该线性方程组的唯一解：

\$\$

```
x=\left[\begin{array}{l} 0 \\ \frac{1}{2} \end{array}\right]
```

## 例题二

找到线性方程组 $Ax=b$ 的所有解，其中：

\$\$

```
A=\left[\begin{array}{l} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right], b=\left[\begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array}\right]
```

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法。你可以参考第4节的内容，和例题一不同的是，例题二这里得到的会是无穷解。所以，这一题里找特殊解和通用解的方法是关键。

首先，形成增广矩阵：

\$\$

```
\left[\begin{array}{l} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]
```

接着，形成增广矩阵：分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-1和第二行相加；
2. 第二行乘1/2。

\$\$

```
\left[\begin{array}{l} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right]
```

使用主元列，得到特殊解：

\$\$

```
x=\left[\begin{array}{l} \end{array}\right]
```

$$\begin{array}{r} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{array}$$

下一步，获取线性方程组  $Ax=0$  的通用解，从增广矩阵的左边，能够立即得出：

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

最后，把特殊解和通用解组合起来就是：

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

### 例题三

计算矩阵乘  $AB$ 。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘无法完成，因为  $A$  是 2 行 3 列矩阵， $B$  也是 2 行 3 列矩阵， $A$  和  $B$  的维度不同。

### 例题四

计算矩阵乘  $AB$ 。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘可以完成，因为两个矩阵的邻居维度相同，拿 $a_{11}$ 举例： $a_{11}=1\times 4+2\times 2+3\times 2=14$ ，结果：

```
$$
A B=\left[\begin{array}{cc}
14 & 2 \\
2 & 2
\end{array}\right]
$$
```

## 例题五

假设 $R^3$ 和它的运算 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ， $x, y \in R^3$ ，我们有：

```
$$
\langle x, y \rangle = x^T A y, A=\left[\begin{array}{ccc}
4 & 2 & 1 \\
0 & 4 & -1 \\
1 & -1 & 5
\end{array}\right]
$$
```

那么， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是内积吗？

解析：

这里考察了内积，以及内积的性质之一：对称性，你可以参考第10节的内容。

选择 $x=\left[\begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right]^T$ ， $y=\left[\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 0 \end{array}\right]^T$ ，通过计算，能够得到：

```
$$
\begin{array}{l}
\langle x, y \rangle = 16 \\
\langle y, x \rangle = 14 \\
\langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle
\end{array}
$$
```

于是， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是不对称的。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天这一节课的内容是基础通关。这里会用5道典型例题，让你巩固一下线性代数的基础知识，这也是进入应用篇学习之前的一次动手机会。从课程上线到现在快有一个月了，这期间我收到了不少同学的提问和建议，有些问题也是我没有想到的，非常有深度，说实话这让我感觉挺意外的，希望你再接再厉。

现在，你可以看一下基础通关的5道例题了，题目和解析都放在了正文中，你可以自己试着做一下。基础通关后，我们应用篇再见。

## 例题一

找到线性方程组 $Ax=b$ 的所有解，其中：

```
$$
A=\left[\begin{array}{cc}
1 & 2 \\
3 & 0 \\
-1 & 2
\end{array}\right], b=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
1
\end{array}\right]
$$
```

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法，你可以参考第4节的内容。

首先，形成增广矩阵：

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{array}$$

接着，分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-3和第二行相加。
2. 第一行和第三行相加。

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \end{array}$$

2. 第二行乘 $\frac{1}{3}$ 和第一行相加。
3. 第二行乘 $\frac{2}{3}$ 和第三行相加。
4. 第三行乘 $-\frac{1}{6}$ 。

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

最后得出该线性方程组的唯一解：

$$x = \begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{2} \end{array}$$

## 例题二

找到线性方程组 $Ax=b$ 的所有解，其中：

$$A = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}, b = \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法。你可以参考第4节的内容，和例题一不同的是，例题二这里得到的会是无穷解。所以，这一题里找特殊解和通用解的方法是关键。

首先，形成增广矩阵：

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}$$

接着，形成增广矩阵：分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-1和第二行相加；
2. 第二行乘1/2。

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}$$

使用主元列，得到特殊解：

$$\begin{array}{c} x= \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{array}$$

下一步，获取线性方程组 $Ax=0$ 的通用解，从增广矩阵的左边，能够立即得出：

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ -1 \end{array}$$

最后，把特殊解和通用解组合起来就是：

$$\begin{array}{c} x= \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ -1 \end{array}$$

### 例题三

计算矩阵乘 $AB$ 。

$$A = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}, B = \begin{array}{ccc} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}$$

\$\$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘无法完成，因为 $A$ 是2行3列矩阵， $B$ 也是2行3列矩阵， $A$ 和 $B$ 的邻居维度不同。

## 例题四

计算矩阵乘 $AB$ 。

\$\$

```
A=\left[\begin{array}{ccc}1 & 2 & 3 \\0 & -1 & 2\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{cc}4 & -1 \\2 & 0 \\2 & 1\end{array}\right]
```

\$\$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘可以完成，因为两个矩阵的邻居维度相同，拿 $a_{11}$ 举例： $a_{11}=1 \times 4+2 \times 2+3 \times 2=14$ ，结果：

\$\$

```
A B=\left[\begin{array}{cc}14 & 2 \\2 & 2\end{array}\right]
```

\$\$

## 例题五

假设 $R^3$ 和它的运算 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ， $x, y \in R^3$ ，我们有：

\$\$

```
\langle x, y \rangle = x^T A y, A=\left[\begin{array}{ccc}4 & 2 & 1 \\0 & 4 & -1 \\1 & -1 & 5\end{array}\right]
```

\$\$

那么， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是内积吗？

解析：

这里考察了内积，以及内积的性质之一：对称性，你可以参考第10节的内容。

选择 $x=\left[\begin{array}{l}1 \\1 \\0\end{array}\right]^T$ ， $y=\left[\begin{array}{l}1 \\2 \\0\end{array}\right]^T$ ，通过计算，能够得到：

\$\$

```
\begin{array}{l}\langle x, y \rangle = 16 \\ \langle y, x \rangle = 14 \\ \langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle\end{array}
```

\$\$

于是， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是不对称的。