你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天我要讲的内容是“如何通过有限向量空间加持的希尔密码，提高密码被破译的难度”。

这篇的内容会非常有趣，是和密码加密、解密有关的。不知道你有没有看过电影《模仿游戏》，故事描述的是阿兰·图灵在二战期间破译德军的恩尼格玛密码机（Enigma），很精彩，我看了很多遍。

不过电影毕竟是电影，有许多内容是不现实的，好在表达出来的破译恩尼格玛密码的核心观点是正确的。要破译一份被恩尼格玛机加密的密文，需要这三类信息：

1. 恩格玛机的工作原理及内部构造，包括每个转子的线路连接；
2. 德军对恩格玛机的操作守则；
3. 德军所使用的每日初始设置。恩格玛机的每日初始设置包含了三个信息：即转子的排列顺序、每个转子的初始位置，以及插线板的设置。这些信息被印刷在密码本上分发至德军全军，每24小时更换一次设置，每月更换一次密码本。

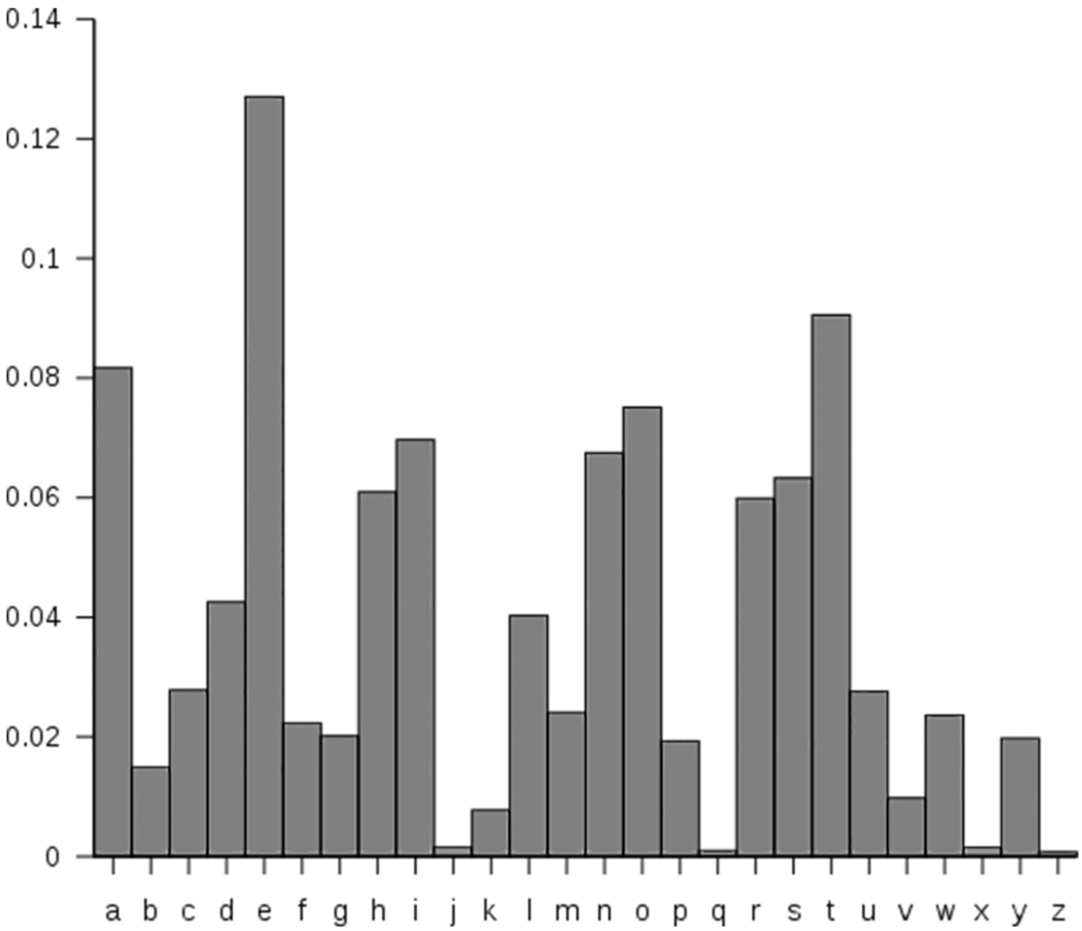
这些在电影里确实都交代了，我也不过多剧透了。其实，恩尼格玛密码机的本质就是**替换密码**。而今天我要讲的也是一种替换密码——希尔密码。因为我们专栏讲的是线性代数，所以，这篇应用我们会以矩阵论原理为基础，来进行讲解。

为什么需要希尔密码？

要讲密码，我们得先知道人们为什么需要它。

最古老、最原始的加密算法，会把明文的字母按照某种配对关系替换成其他的字母，从而得到一段别人看不懂的密文，许多谍战剧用到过这类方法。看起来，这个方法好像很难人为进行破解，但从语言和统计学角度看，它其实是漏洞百出的。

举个例子，在一篇普通英语文章中，各字母出现的概率有很大的不同。如果我们对足够多的文本进行分析，就可以统计出每一个字母在英文文本中出现的平均概率。



上面这张图来自维基百科，显示的是26个字母在普通的英文文本中出现的概率。

只要我们能够获取足够长的密文进行分析的话，通过字母出现的频率，我们同样能够猜到相应的原始字母，这并不安全。所以，随着安全性需求的提高，人们有必要寻找一种容易将字母的自然频度隐蔽或均匀化，并使得统计分析足够安全可靠的加密方法。而希尔密码能基本满足这一要求，那么希尔密码是怎么做到这一点的呢？

希尔密码原理

我们先来看一下希尔密码的原理。根据百度百科的定义，希尔密码（Hill Cipher）是运用基本矩阵论原理的替换密码，由Lester S. Hill在1929年发明。每个字母当作26进制数字：A=0，B=1，C=2…，把一串字母当成n维向量，和一个$n×n$的矩阵相乘，再将得出的结果和26进行模运算。

所以，希尔加密算法的基本思想是，通过线性变换将固定数量的明文字母转换为同样数量的密文字母，解密只要作一次逆变换就可以了，而密钥就是变换矩阵本身。

现在，我们再通过数学的方式来表达一下，希尔密码是如何通过三步来实现加密的。

第一步，设置加密矩阵E。

第二步，对照字母编码表（自行设定）得到数字，并把明文消息分割成大小为n的多个块：$v_{1},v_{2},…$，并且忽略空格。这里之所以忽略空格，是因为一般情况下密码传递的信息不会过于复杂。如果密码过于复杂，是可以分多次传递的。这里的n表示的密钥的阶数，密钥的阶数越高，也就是n越大的话，破译的难度也就越大，所需要的计算量也就越大。

第三步，每个消息块和加密矩阵E相乘：$Ev_{1}, Ev_{2},…$，并和26进行模运算，最后对照字母编码表得到密文。

同样，我们把这三步倒过来，就能实现解密了。

第一步，计算加密矩阵E的逆矩阵$D \equiv E^{-1}(\bmod 26)$。

第二步，对照字母编码表得到数字，把它和解密矩阵D相乘，并和26进行模运算。

第三步，对照编码表，得到原始明文。

这里你需要注意的是，加密矩阵很关键，它就是我们通常意义上所说的“密钥”，也就是打开密码的钥匙。

通过前面讲解的加密解密步骤，我们可以看出，希尔密码之所以很难被破译，是因为它设置了三道关卡：

1. 列矩阵的维度未知；
2. 对应字母表的排列未知；
3. 加密矩阵（或者说密钥）未知。

想要破解希尔密码，就需要同时获取到通过这三道关卡的钥匙，这谈何容易。

希尔密码实例

好了，原理都讲完了，现在我们通过一个例子来实际地看下希尔密码加密和解密的过程。

假设：A和B双方有一条重要消息要沟通，双方很早就建立了密钥沟通机制，每过一段时间都会更新密钥。在这次的密钥更新周期中，正确的密钥，也就是加密矩阵是一个3×3矩阵。

$$
E=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]
$$

这一次A要给B的消息是“ILIKEBODYCOMBAT”，我们用之前的三步在A方先来加密：

第一步，定义加密矩阵，也就是刚才的E矩阵。

字母编码表

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

第二步，对照字母编码表得到数字：8、11、8、10、4、1、14、3、24、2、14、12、1、0、19。接下来，把明文消息分割成大小为3的5个块，也就是维度为3的5个列矩阵。

$$
v_{1}=\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right], v_{2}=\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right], v_{3}=\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right], v_{4}=\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right], v_{5}=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]
$$

第三步，将每个消息块和加密矩阵E相乘：

$$
E v_{1}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
320 \\
360 \\
467
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
8 \\
22 \\
25
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{2}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
157 \\
204 \\
283
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
1 \\
22 \\
23
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{3}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
180 \\
470 \\
691
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
24 \\
2 \\
15
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{4}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
360 \\
370 \\
458
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
22 \\
6 \\
16
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{5}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
25 \\
203 \\
305
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
25 \\
21 \\
19
\end{array}\right]
$$

最后，对照字母编码表得到密文：“IWZBWXBCGWGQZVT”。

B拿到这个密文后，使用三步来解密：

第一步，计算加密矩阵E的逆矩阵D：

$$
D \equiv\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]^{-1}(\bmod 26) \equiv\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]
$$

第二步，对照字母编码表得到数字，把它和解密矩阵D相乘，并和26进行模运算，得到相应结果。

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
8 \\

$$
22 \\
25
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
424 \\
869 \\
632
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
1 \\
22 \\
23
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
348 \\
680 \\
469
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
24 \\
2 \\
15
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
352 \\
835 \\
648
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
22 \\
6 \\
16
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
366 \\
846 \\
662
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
25 \\
21 \\
19
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
495 \\
1092 \\
929
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]
$$

最后，B通过对照编码表，得到了原始明文：“ILIKEBODYCOMBAT”。

这里，你也许会问，密钥为什么用的是3×3的可逆矩阵？那是我为了例子方便而设置的，你完全可以设置更高阶的矩阵。就像之前说的，密钥的阶数越高，也就是n越大的话，破译的难度也就越大，所需要的计算量也就越大。

所以，从破译密码的角度来看，传统的密码有一个致命弱点，就是破译者可从统计出来的字符频率中找到规律，进而找出破译的突破口。尤其是在计算机技术高度发达的今天，破译的速度更快。而希尔密码算法则完全克服了这一缺陷，它通过采用线性代数中的矩阵乘法运算和逆运算，能够较好地抵抗频率分析，很难被攻破。

本节小结

这一节课的内容都和密码学有关，感觉像是搞谍战一样。但其实它的核心很简单，就是通过基础篇中学到的矩阵和逆矩阵的知识，来实现希尔密码。希尔密码的关键就是定义加密矩阵，或者说密钥、字母表排列方式和列矩阵的维度，通过线性变换将固定数量的明文字母转换为同样数量的密文字母，而解密则只要作一次逆变换就可以了。

当然，现实中还有更复杂的加密算法，其中最著名的，且用到线性代数的加密算法是AES，想必你平时也经常看到或用到过。AES是一个迭代的、对称密钥分组的密码，它可以使用128、192和256位密钥，并且用128、192和256位分组加密和解密数据，其中密钥长度与分组长度是独立的。

线性代数练习场

请你做一回“特工”，尝试使用希尔密码来给明文“MACHINELEARNING”做加密和解密。

> 提醒：你可以自行定义加密矩阵、字母表排列方式和列矩阵的维度。加密矩阵可以使用之前介绍的3×3可逆矩阵，也可以使用其它n×n的可逆矩阵。

欢迎在留言区晒出你的加密和解密过程，我会及时回复。同时，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友，一起讨论、学习。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天我要讲的内容是“如何通过有限向量空间加持的希尔密码，提高密码被破译的难度”。

这篇的内容会非常有趣，是和密码加密、解密有关的。不知道你有没有看过电影《模仿游戏》，故事描述的是阿兰·图灵在二战期间破译德军的恩尼格玛密码机（Enigma），很精彩，我看了很多遍。

不过电影毕竟是电影，有许多内容是不现实的，好在表达出来的破译恩尼格玛密码的核心观点是正确的。要破译一份被恩尼格玛机加密的密文，需要这三类信息：

1. 恩格玛机的工作原理及内部构造，包括每个转子的线路连接；
2. 德军对恩格玛机的操作守则；
3. 德军所使用的每日初始设置。恩格玛机的每日初始设置包含了三个信息：即转子的排列顺序、每个转子的初始位置，以及插线板的设置。这些信息被印刷在密码本上分发至德军全军，每24小时更换一次设置，每月更换一次密码本。

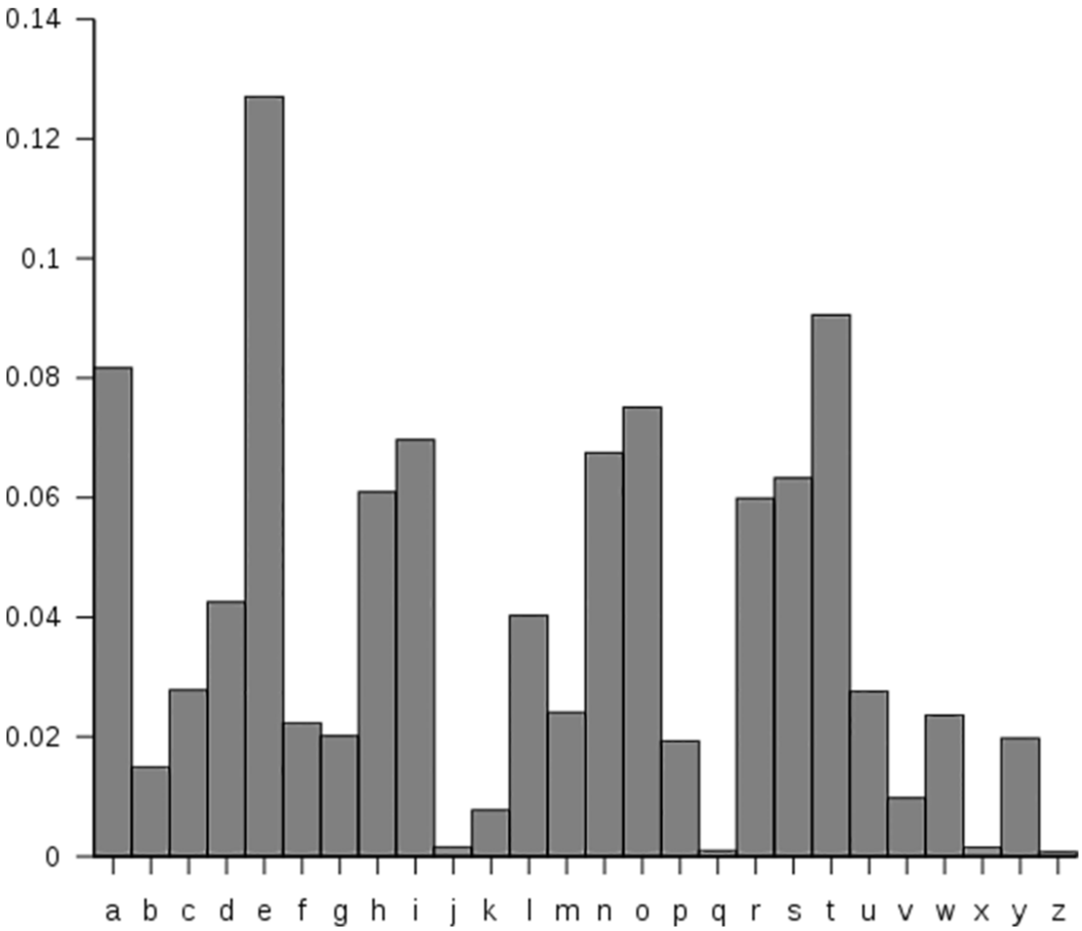
这些在电影里确实都交代了，我也不过多剧透了。其实，恩尼格玛密码机的本质就是**替换密码**。而今天我要讲的也是一种替换密码——希尔密码。因为我们专栏讲的是线性代数，所以，这篇应用我们会以矩阵论原理为基础，来进行讲解。

为什么需要希尔密码？

要讲密码，我们得先知道人们为什么需要它。

最古老、最原始的加密算法，会把明文的字母按照某种配对关系替换成其他的字母，从而得到一段别人看不懂的密文，许多谍战剧用到过这类方法。看起来，这个方法好像很难人为进行破解，但从语言和统计学角度看，它其实是漏洞百出的。

举个例子，在一篇普通英语文章中，各字母出现的概率有很大的不同。如果我们对足够多的文本进行分析，就可以统计出每一个字母在英文文本中出现的平均概率。



上面这张图来自维基百科，显示的是26个字母在普通的英文文本中出现的概率。

只要我们能够获取足够长的密文进行分析的话，通过字母出现的频率，我们同样能够猜到相应的原始字母，这并不安全。所以，随着安全性需求的提高，人们有必要寻找一种容易将字母的自然频度隐蔽或均匀化，并使得统计分析足够安全可靠的加密方法。而希尔密码能基本满足这一要求，那么希尔密码是怎么做到这一点的呢？

希尔密码原理

我们先来看一下希尔密码的原理。根据百度百科的定义，希尔密码（Hill Cipher）是运用基本矩阵论原理的替换密码，由Lester S. Hill在1929年发明。每个字母当作26进制数字：A=0，B=1，C=2…，把一串字母当成n维向量，和一个$n×n$的矩阵相乘，再将得出的结果和26进行模运算。

所以，希尔加密算法的基本思想是，通过线性变换将固定数量的明文字母转换为同样数量的密文字母，解密只要作一次逆变换就可以了，而密钥就是变换矩阵本身。

现在，我们再通过数学的方式来表达一下，希尔密码是如何通过三步来实现加密的。

第一步，设置加密矩阵E。

第二步，对照字母编码表（自行设定）得到数字，并把明文消息分割成大小为n的多个块：$v_{1},v_{2},…$，并且忽略空格。这里之所以忽略空格，是因为一般情况下密码传递的信息不会过于复杂。如果密码过于复杂，是可以分多次传递的。这里的n表示的密钥的阶数，密钥的阶数越高，也就是n越大的话，破译的难度也就越大，所需要的计算量也就越大。

第三步，每个消息块和加密矩阵E相乘：$Ev_{1}, Ev_{2},…$，并和26进行模运算，最后对照字母编码表得到密文。

同样，我们把这三步倒过来，就能实现解密了。

第一步，计算加密矩阵E的逆矩阵$D \equiv E^{-1}(\bmod 26)$。

第二步，对照字母编码表得到数字，把它和解密矩阵D相乘，并和26进行模运算。

第三步，对照编码表，得到原始明文。

这里你需要注意的是，加密矩阵很关键，它就是我们通常意义上所说的“密钥”，也就是打开密码的钥匙。

通过前面讲解的加密解密步骤，我们可以看出，希尔密码之所以很难被破译，是因为它设置了三道关卡：

1. 列矩阵的维度未知；
2. 对应字母表的排列未知；
3. 加密矩阵（或者说密钥）未知。

想要破解希尔密码，就需要同时获取到通过这三道关卡的钥匙，这谈何容易。

希尔密码实例

好了，原理都讲完了，现在我们通过一个例子来实际地看下希尔密码加密和解密的过程。

假设：A和B双方有一条重要消息要沟通，双方很早就建立了密钥沟通机制，每过一段时间都会更新密钥。在这次的密钥更新周期中，正确的密钥，也就是加密矩阵是一个3×3矩阵。

$$
E=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]
$$

这一次A要给B的消息是“ILIKEBODYCOMBAT”，我们用之前的三步在A方先来加密：

第一步，定义加密矩阵，也就是刚才的E矩阵。

字母编码表

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

第二步，对照字母编码表得到数字：8、11、8、10、4、1、14、3、24、2、14、12、1、0、19。接下来，把明文消息分割成大小为3的5个块，也就是维度为3的5个列矩阵。

$$
v_{1}=\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right], v_{2}=\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right], v_{3}=\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right], v_{4}=\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right], v_{5}=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]
$$

第三步，将每个消息块和加密矩阵E相乘：

$$
E v_{1}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
320 \\
360 \\
467
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
8 \\
22 \\
25
\end{array}\right]
$$

$$

$$
E v_{2}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
157 \\
204 \\
283
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
1 \\
22 \\
23
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{3}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
180 \\
470 \\
691
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
24 \\
2 \\
15
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{4}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
360 \\
370 \\
458
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
22 \\
6 \\
16
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{5}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
25 \\
203 \\
305
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
25 \\
21 \\
19
\end{array}\right]
$$

最后，对照字母编码表得到密文：“IWZBWXBCGWGQZVT”。

B拿到这个密文后，使用三步来解密：

第一步，计算加密矩阵E的逆矩阵D：

$$
D \equiv\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]^{-1}(\bmod 26) \equiv\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]
$$

第二步，对照字母编码表得到数字，把它和解密矩阵D相乘，并和26进行模运算，得到相应结果。

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
8 \\

22 \\
25
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
424 \\
869 \\
632
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
1 \\
22 \\
23
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
348 \\
680 \\
469
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
24 \\
2 \\
15
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
352 \\
835 \\
648
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
22 \\
6 \\
16
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
366 \\
846 \\
662
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
25 \\
21 \\
19
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
495 \\
1092 \\
929
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]
$$

最后，B通过对照编码表，得到了原始明文：“ILIKEBODYCOMBAT”。

这里，你也许会问，密钥为什么用的是3×3的可逆矩阵？那是我为了例子方便而设置的，你完全可以设置更高阶的矩阵。就像之前说的，密钥的阶数越高，也就是n越大的话，破译的难度也就越大，所需要的计算量也就越大。

所以，从破译密码的角度来看，传统的密码有一个致命弱点，就是破译者可从统计出来的字符频率中找到规律，进而找出破译的突破口。尤其是在计算机技术高度发达的今天，破译的速度更快。而希尔密码算法则完全克服了这一缺陷，它通过采用线性代数中的矩阵乘法运算和逆运算，能够较好地抵抗频率分析，很难被攻破。

本节小结

这一节课的内容都和密码学有关，感觉像是搞谍战一样。但其实它的核心很简单，就是通过基础篇中学到的矩阵和逆矩阵的知识，来实现希尔密码。希尔密码的关键就是定义加密矩阵，或者说密钥、字母表排列方式和列矩阵的维度，通过线性变换将固定数量的明文字母转换为同样数量的密文字母，而解密则只要作一次逆变换就可以了。

当然，现实中还有更复杂的加密算法，其中最著名的，且用到线性代数的加密算法是AES，想必你平时也经常看到或用到过。AES是一个迭代的、对称密钥分组的密码，它可以使用128、192和256位密钥，并且用128、192和256位分组加密和解密数据，其中密钥长度与分组长度是独立的。

线性代数练习场

请你做一回“特工”，尝试使用希尔密码来给明文“MACHINELEARNING”做加密和解密。

> 提醒：你可以自行定义加密矩阵、字母表排列方式和列矩阵的维度。加密矩阵可以使用之前介绍的3×3可逆矩阵，也可以使用其它n×n的可逆矩阵。

欢迎在留言区晒出你的加密和解密过程，我会及时回复。同时，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友，一起讨论、学习。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天我要讲的内容是“如何通过有限向量空间加持的希尔密码，提高密码被破译的难度”。

这篇的内容会非常有趣，是和密码加密、解密有关的。不知道你有没有看过电影《模仿游戏》，故事描述的是阿兰·图灵在二战期间破译德军的恩尼格玛密码机（Enigma），很精彩，我看了很多遍。

不过电影毕竟是电影，有许多内容是不现实的，好在表达出来的破译恩尼格玛密码的核心观点是正确的。要破译一份被恩尼格玛机加密的密文，需要这三类信息：

1. 恩格玛机的工作原理及内部构造，包括每个转子的线路连接；
2. 德军对恩格玛机的操作守则；
3. 德军所使用的每日初始设置。恩格玛机的每日初始设置包含了三个信息：即转子的排列顺序、每个转子的初始位置，以及插线板的设置。这些信息被印刷在密码本上分发至德军全军，每24小时更换一次设置，每月更换一次密码本。

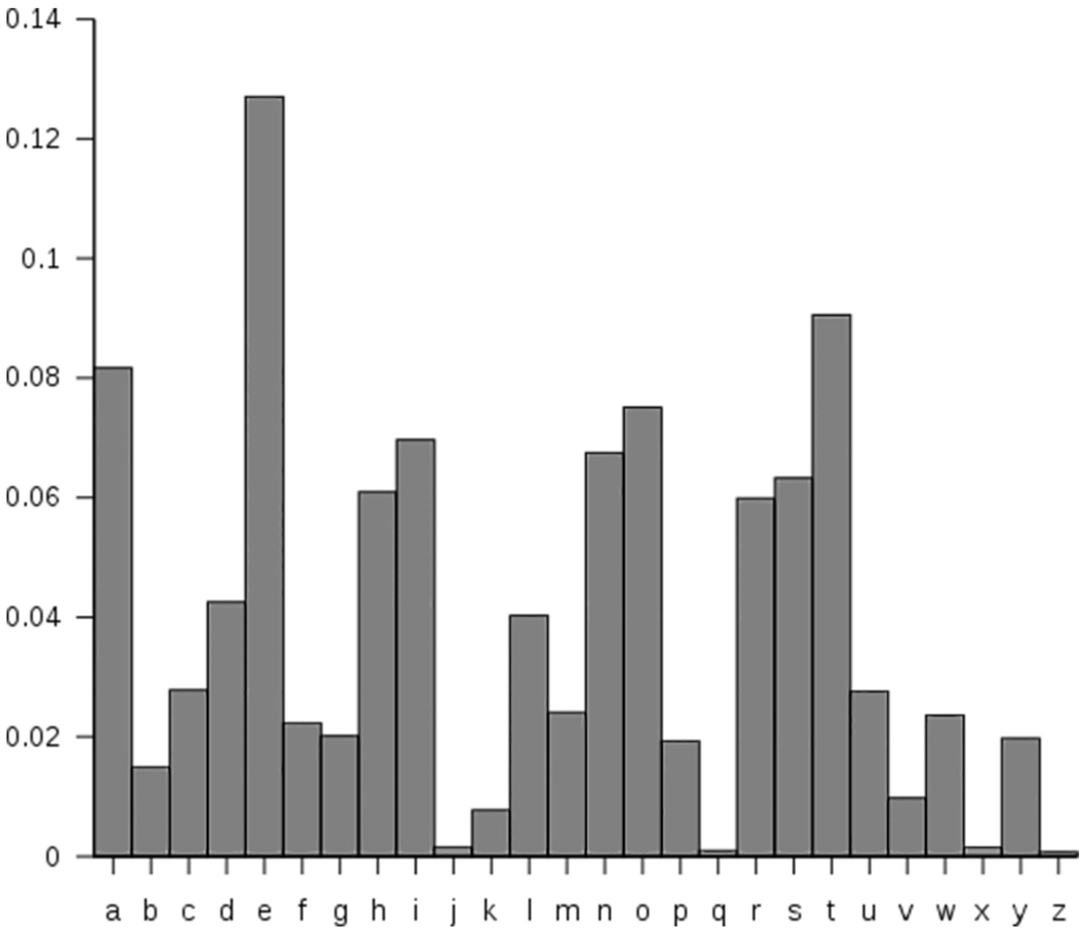
这些在电影里确实都交代了，我也不过多剧透了。其实，恩尼格玛密码机的本质就是**替换密码**。而今天我要讲的也是一种替换密码——希尔密码。因为我们专栏讲的是线性代数，所以，这篇应用我们会以矩阵论原理为基础，来进行讲解。

为什么需要希尔密码？

要讲密码，我们得先知道人们为什么需要它。

最古老、最原始的加密算法，会把明文的字母按照某种配对关系替换成其他的字母，从而得到一段别人看不懂的密文，许多谍战剧用到过这类方法。看起来，这个方法好像很难人为进行破解，但从语言和统计学角度看，它其实是漏洞百出的。

举个例子，在一篇普通英语文章中，各字母出现的概率有很大的不同。如果我们对足够多的文本进行分析，就可以统计出每一个字母在英文文本中出现的平均概率。



上面这张图来自维基百科，显示的是26个字母在普通的英文文本中出现的概率。

只要我们能够获取足够长的密文进行分析的话，通过字母出现的频率，我们同样能够猜到相应的原始字母，这并不安全。所以，随着安全性需求的提高，人们有必要寻找一种容易将字母的自然频度隐蔽或均匀化，并使得统计分析足够安全可靠的加密方法。而希尔密码能基本满足这一要求，那么希尔密码是怎么做到这一点的呢？

希尔密码原理

我们先来看一下希尔密码的原理。根据百度百科的定义，希尔密码（Hill Cipher）是运用基本矩阵论原理的替换密码，由Lester S. Hill在1929年发明。每个字母当作26进制数字：A=0，B=1，C=2...，把一串字母当成n维向量，和一个$n \times n$的矩阵相乘，再将得出的结果和26进行模运算。

所以，希尔加密算法的基本思想是，通过线性变换将固定数量的明文字母转换为同样数量的密文字母，解密只要作一次逆变换就可以了，而密钥就是变换矩阵本身。

现在，我们再通过数学的方式来表达一下，希尔密码是如何通过三步来实现加密的。

第一步，设置加密矩阵E。

第二步，对照字母编码表（自行设定）得到数字，并把明文消息分割成大小为n的多个块：$v_{1},v_{2},\ldots$，并且忽略空格。这里之所以忽略空格，是因为一般情况下密码传递的信息不会过于复杂。如果密码过于复杂，是可以分多次传递的。这里的n表示的密钥的阶数，密钥的阶数越高，也就是n越大的话，破译的难度也就越大，所需要的计算量也就越大。

第三步，每个消息块和加密矩阵E相乘：$Ev_{1}, Ev_{2},\ldots$，并和26进行模运算，最后对照字母编码表得到密文。

同样，我们把这三步倒过来，就能实现解密了。

第一步，计算加密矩阵E的逆矩阵$D \equiv E^{-1}(\bmod 26)$。

第二步，对照字母编码表得到数字，把它和解密矩阵D相乘，并和26进行模运算。

第三步，对照编码表，得到原始明文。

这里你需要注意的是，加密矩阵很关键，它就是我们通常意义上所说的"密钥"，也就是打开密码的钥匙。

通过前面讲解的加密解密步骤，我们可以看出，希尔密码之所以很难被破译，是因为它设置了三道关卡：

1. 列矩阵的维度未知；
2. 对应字母表的排列未知；
3. 加密矩阵（或者说密钥）未知。

想要破解希尔密码，就需要同时获取到通过这三道关卡的钥匙，这谈何容易。

希尔密码实例

好了，原理都讲完了，现在我们通过一个例子来实际地看下希尔密码加密和解密的过程。

假设：A和B双方有一条重要消息要沟通，双方很早就建立了密钥沟通机制，每过一段时间都会更新密钥。在这次的密钥更新周期中，正确的密钥，也就是加密矩阵是一个3×3矩阵。

$$
E=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]
$$

这一次A要给B的消息是"ILIKEBODYCOMBAT"，我们用之前的三步在A方先来加密：

第一步，定义加密矩阵，也就是刚才的E矩阵。

字母编码表

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

第二步，对照字母编码表得到数字：8、11、8、10、4、1、14、3、24、2、14、12、1、0、19。接下来，把明文消息分割成大小为3的5个块，也就是维度为3的5个列矩阵。

$$
v_{1}=\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right], v_{2}=\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right], v_{3}=\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right], v_{4}=\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right], v_{5}=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]
$$

第三步，将每个消息块和加密矩阵E相乘：

$$
E v_{1}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
320 \\
360 \\
467
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
8 \\
22 \\
25
\end{array}\right]
$$

$$

$$
E v_{2}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
157 \\
204 \\
283
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
1 \\
22 \\
23
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{3}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
180 \\
470 \\
691
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
24 \\
2 \\
15
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{4}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
360 \\
370 \\
458
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
22 \\
6 \\
16
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{5}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
25 \\
203 \\
305
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
25 \\
21 \\
19
\end{array}\right]
$$

最后，对照字母编码表得到密文：“IWZBWXBCGWGQZVT”。

B拿到这个密文后，使用三步来解密：

第一步，计算加密矩阵E的逆矩阵D：

$$
D \equiv\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]^{-1}(\bmod 26) \equiv\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]
$$

第二步，对照字母编码表得到数字，把它和解密矩阵D相乘，并和26进行模运算，得到相应结果。

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
8 \\

22 \\
25
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
424 \\
869 \\
632
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
1 \\
22 \\
23
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
348 \\
680 \\
469
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
24 \\
2 \\
15
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
352 \\
835 \\
648
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
22 \\
6 \\
16
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
366 \\
846 \\
662
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
25 \\
21 \\
19
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
495 \\
1092 \\
929
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]
$$

最后，B通过对照编码表，得到了原始明文："ILIKEBODYCOMBAT"。

这里，你也许会问，密钥为什么用的是3×3的可逆矩阵？那是我为了例子方便而设置的，你完全可以设置更高阶的矩阵。就像之前说的，密钥的阶数越高，也就是n越大的话，破译的难度也就越大，所需要的计算量也就越大。

所以，从破译密码的角度来看，传统的密码有一个致命弱点，就是破译者可从统计出来的字符频率中找到规律，进而找出破译的突破口。尤其是在计算机技术高度发达的今天，破译的速度更快。而希尔密码算法则完全克服了这一缺陷，它通过采用线性代数中的矩阵乘法运算和逆运算，能够较好地抵抗频率分析，很难被攻破。

本节小结

这一节课的内容都和密码学有关，感觉像是搞谍战一样。但其实它的核心很简单，就是通过基础篇中学到的矩阵和逆矩阵的知识，来实现希尔密码。希尔密码的关键就是定义加密矩阵，或者说密钥、字母表排列方式和列矩阵的维度，通过线性变换将固定数量的明文字母转换为同样数量的密文字母，而解密则只要作一次逆变换就可以了。

当然，现实中还有更复杂的加密算法，其中最著名的，且用到线性代数的加密算法是AES，想必你平时也经常看到或用到过。AES是一个迭代的、对称密钥分组的密码，它可以使用128、192和256位密钥，并且用128、192和256位分组加密和解密数据，其中密钥长度与分组长度是独立的。

线性代数练习场

请你做一回"特工"，尝试使用希尔密码来给明文"MACHINELEARNING"做加密和解密。

> 提醒：你可以自行定义加密矩阵、字母表排列方式和列矩阵的维度。加密矩阵可以使用之前介绍的3×3可逆矩阵，也可以使用其它n×n的可逆矩阵。

欢迎在留言区晒出你的加密和解密过程，我会及时回复。同时，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友，一起讨论、学习。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天我要讲的内容是"如何通过有限向量空间加持的希尔密码，提高密码被破译的难度"。

这篇的内容会非常有趣，是和密码加密、解密有关的。不知道你有没有看过电影《模仿游戏》，故事描述的是阿兰·图灵在二战期间破译德军的恩尼格玛密码机（Enigma），很精彩，我看了很多遍。

不过电影毕竟是电影，有许多内容是不现实的，好在表达出来的破译恩尼格玛密码的核心观点是正确的。要破译一份被恩尼格玛机加密的密文，需要这三类信息：

1. 恩格玛机的工作原理及内部构造，包括每个转子的线路连接；
2. 德军对恩格玛机的操作守则；
3. 德军所使用的每日初始设置。恩格玛机的每日初始设置包含了三个信息：即转子的排列顺序、每个转子的初始位置，以及插线板的设置。这些信息被印刷在密码本上分发至德军全军，每24小时更换一次设置，每月更换一次密码本。

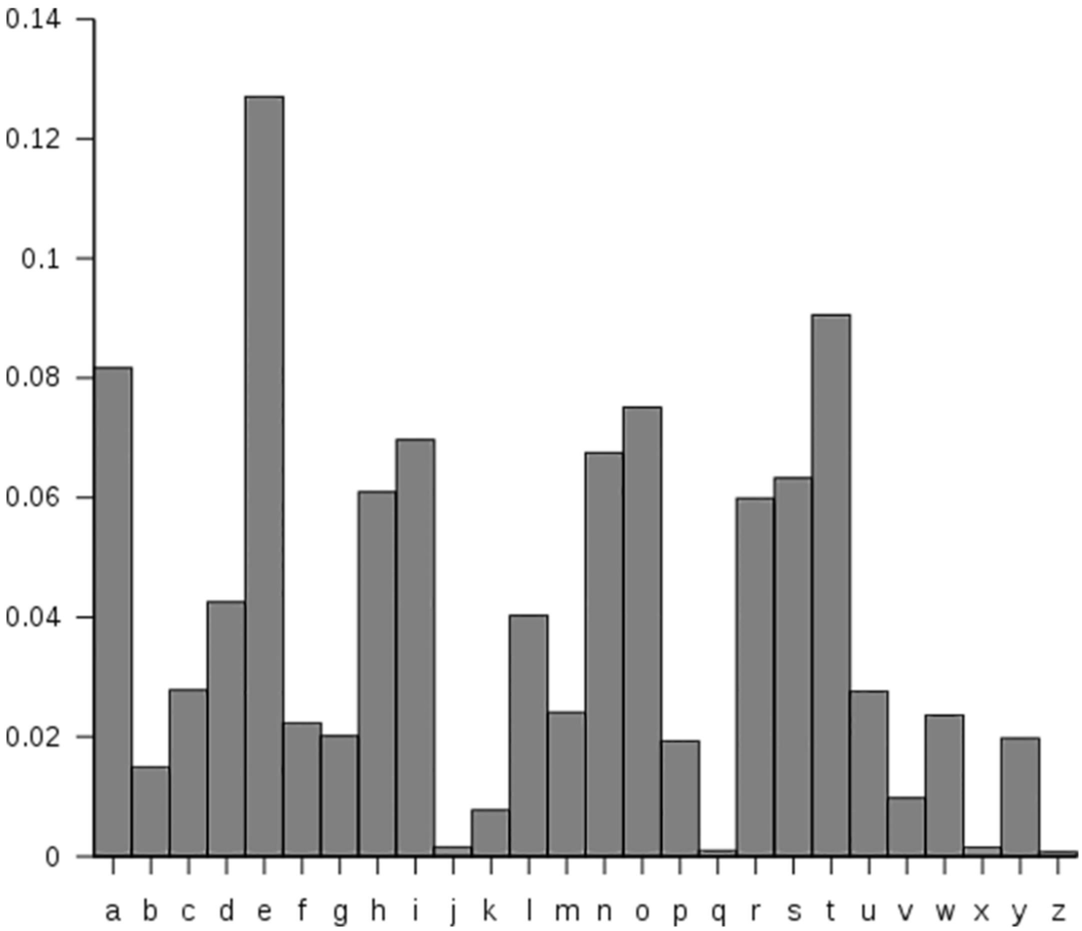
这些在电影里确实都交代了，我也不过多剧透了。其实，恩尼格玛密码机的本质就是**替换密码**。而今天我要讲的也是一种替换密码——希尔密码。因为我们专栏讲的是线性代数，所以，这篇应用我们会以矩阵论原理为基础，来进行讲解。

为什么需要希尔密码？

要讲密码，我们得先知道人们为什么需要它。

最古老、最原始的加密算法，会把明文的字母按照某种配对关系替换成其他的字母，从而得到一段别人看不懂的密文，许多谍战剧用到过这类方法。看起来，这个方法好像很难人为进行破解，但从语言和统计学角度看，它其实是漏洞百出的。

举个例子，在一篇普通英语文章中，各字母出现的概率有很大的不同。如果我们对足够多的文本进行分析，就可以统计出每一个字母在英文文本中出现的平均概率。



上面这张图来自维基百科，显示的是26个字母在普通的英文文本中出现的概率。

只要我们能够获取足够长的密文进行分析的话，通过字母出现的频率，我们同样能够猜到相应的原始字母，这并不安全。所以，随着安全性需求的提高，人们有必要寻找一种容易将字母的自然频度隐蔽或均匀化，并使得统计分析足够安全可靠的加密方法。而希尔密码能基本满足这一要求，那么希尔密码是怎么做到这一点的呢？

希尔密码原理

我们先来看一下希尔密码的原理。根据百度百科的定义，希尔密码（Hill Cipher）是运用基本矩阵论原理的替换密码，由Lester S. Hill在1929年发明。每个字母当作26进制数字：A=0，B=1，C=2…，把一串字母当成n维向量，和一个$n \times n$的矩阵相乘，再将得出的结果和26进行模运算。

所以，希尔加密算法的基本思想是，通过线性变换将固定数量的明文字母转换为同样数量的密文字母，解密只要作一次逆变换就可以了，而密钥就是变换矩阵本身。

现在，我们再通过数学的方式来表达一下，希尔密码是如何通过三步来实现加密的。

第一步，设置加密矩阵E。

第二步，对照字母编码表（自行设定）得到数字，并把明文消息分割成大小为n的多个块：$v_{1},v_{2},\ldots$，并且忽略空格。这里之所以忽略空格，是因为一般情况下密码传递的信息不会过于复杂。如果密码过于复杂，是可以分多次传递的。这里的n表示的密钥的阶数，密钥的阶数越高，也就是n越大的话，破译的难度也就越大，所需要的计算量也就越大。

第三步，每个消息块和加密矩阵E相乘：$Ev_{1}, Ev_{2},\ldots$，并和26进行模运算，最后对照字母编码表得到密文。

同样，我们把这三步倒过来，就能实现解密了。

第一步，计算加密矩阵E的逆矩阵$D \equiv E^{-1}(\bmod 26)$。

第二步，对照字母编码表得到数字，把它和解密矩阵D相乘，并和26进行模运算。

第三步，对照编码表，得到原始明文。

这里你需要注意的是，加密矩阵很关键，它就是我们通常意义上所说的“密钥”，也就是打开密码的钥匙。

通过前面讲解的加密解密步骤，我们可以看出，希尔密码之所以很难被破译，是因为它设置了三道关卡：

1. 列矩阵的维度未知；
2. 对应字母表的排列未知；
3. 加密矩阵（或者说密钥）未知。

想要破解希尔密码，就需要同时获取到通过这三道关卡的钥匙，这谈何容易。

希尔密码实例

好了，原理都讲完了，现在我们通过一个例子来实际地看下希尔密码加密和解密的过程。

假设：A和B双方有一条重要消息要沟通，双方很早就建立了密钥沟通机制，每过一段时间都会更新密钥。在这次的密钥更新周期中，正确的密钥，也就是加密矩阵是一个3×3矩阵。

$$
E=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]
$$

这一次A要给B的消息是“ILIKEBODYCOMBAT”，我们用之前的三步在A方先来加密：

第一步，定义加密矩阵，也就是刚才的E矩阵。

字母编码表

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

第二步，对照字母编码表得到数字：8、11、8、10、4、1、14、3、24、2、14、12、1、0、19。接下来，把明文消息分割成大小为3的5个块，也就是维度为3的5个列矩阵。

$$
v_{1}=\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right], v_{2}=\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right], v_{3}=\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right], v_{4}=\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right], v_{5}=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]
$$

第三步，将每个消息块和加密矩阵E相乘：

$$
E v_{1}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
320 \\
360 \\
467
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
8 \\
22 \\
25
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{2}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
157 \\
204 \\
283
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
1 \\
22 \\
23
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{3}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
180 \\
470 \\
691
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
24 \\
2 \\
15
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{4}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
360 \\
370 \\
458
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
22 \\
6 \\
16
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{5}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
25 \\
203 \\
305
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
25 \\
21 \\
19
\end{array}\right]
$$

最后，对照字母编码表得到密文：“IWZBWXBCGWGQZVT”。

B拿到这个密文后，使用三步来解密：

第一步，计算加密矩阵E的逆矩阵D：

$$
D \equiv\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]^{-1}(\bmod 26) \equiv\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]
$$

第二步，对照字母编码表得到数字，把它和解密矩阵D相乘，并和26进行模运算，得到相应结果。

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
8 \\

22 \\
25
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
424 \\
869 \\
632
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
1 \\
22 \\
23
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
348 \\
680 \\
469
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
24 \\
2 \\
15
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
352 \\
835 \\
648
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
22 \\
6 \\
16
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
366 \\
846 \\
662
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
25 \\
21 \\
19
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
495 \\
1092 \\
929
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]
$$

最后，B通过对照编码表，得到了原始明文：“ILIKEBODYCOMBAT”。

这里，你也许会问，密钥为什么用的是3×3的可逆矩阵？那是我为了例子方便而设置的，你完全可以设置更高阶的矩阵。就像之前说的，密钥的阶数越高，也就是n越大的话，破译的难度也就越大，所需要的计算量也就越大。

所以，从破译密码的角度来看，传统的密码有一个致命弱点，就是破译者可从统计出来的字符频率中找到规律，进而找出破译的突破口。尤其是在计算机技术高度发达的今天，破译的速度更快。而希尔密码算法则完全克服了这一缺陷，它通过采用线性代数中的矩阵乘法运算和逆运算，能够较好地抵抗频率分析，很难被攻破。

本节小结

这一节课的内容都和密码学有关，感觉像是搞谍战一样。但其实它的核心很简单，就是通过基础篇中学到的矩阵和逆矩阵的知识，来实现希尔密码。希尔密码的关键就是定义加密矩阵，或者说密钥、字母表排列方式和列矩阵的维度，通过线性变换将固定数量的明文字母转换为同样数量的密文字母，而解密则只要作一次逆变换就可以了。

当然，现实中还有更复杂的加密算法，其中最著名的，且用到线性代数的加密算法是AES，想必你平时也经常看到或用到过。AES是一个迭代的、对称密钥分组的密码，它可以使用128、192和256位密钥，并且用128、192和256位分组加密和解密数据，其中密钥长度与分组长度是独立的。

线性代数练习场

请你做一回“特工”，尝试使用希尔密码来给明文“MACHINELEARNING”做加密和解密。

> 提醒：你可以自行定义加密矩阵、字母表排列方式和列矩阵的维度。加密矩阵可以使用之前介绍的3×3可逆矩阵，也可以使用其它n×n的可逆矩阵。

欢迎在留言区晒出你的加密和解密过程，我会及时回复。同时，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友，一起讨论、学习。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天我要讲的内容是“如何通过有限向量空间加持的希尔密码，提高密码被破译的难度”。

这篇的内容会非常有趣，是和密码加密、解密有关的。不知道你有没有看过电影《模仿游戏》，故事描述的是阿兰·图灵在二战期间破译德军的恩尼格玛密码机（Enigma），很精彩，我看了很多遍。

不过电影毕竟是电影，有许多内容是不现实的，好在表达出来的破译恩尼格玛密码的核心观点是正确的。要破译一份被恩尼格玛机加密的密文，需要这三类信息：

1. 恩格玛机的工作原理及内部构造，包括每个转子的线路连接；
2. 德军对恩格玛机的操作守则；
3. 德军所使用的每日初始设置。恩格玛机的每日初始设置包含了三个信息：即转子的排列顺序、每个转子的初始位置，以及插线板的设置。这些信息被印刷在密码本上分发至德军全军，每24小时更换一次设置，每月更换一次密码本。

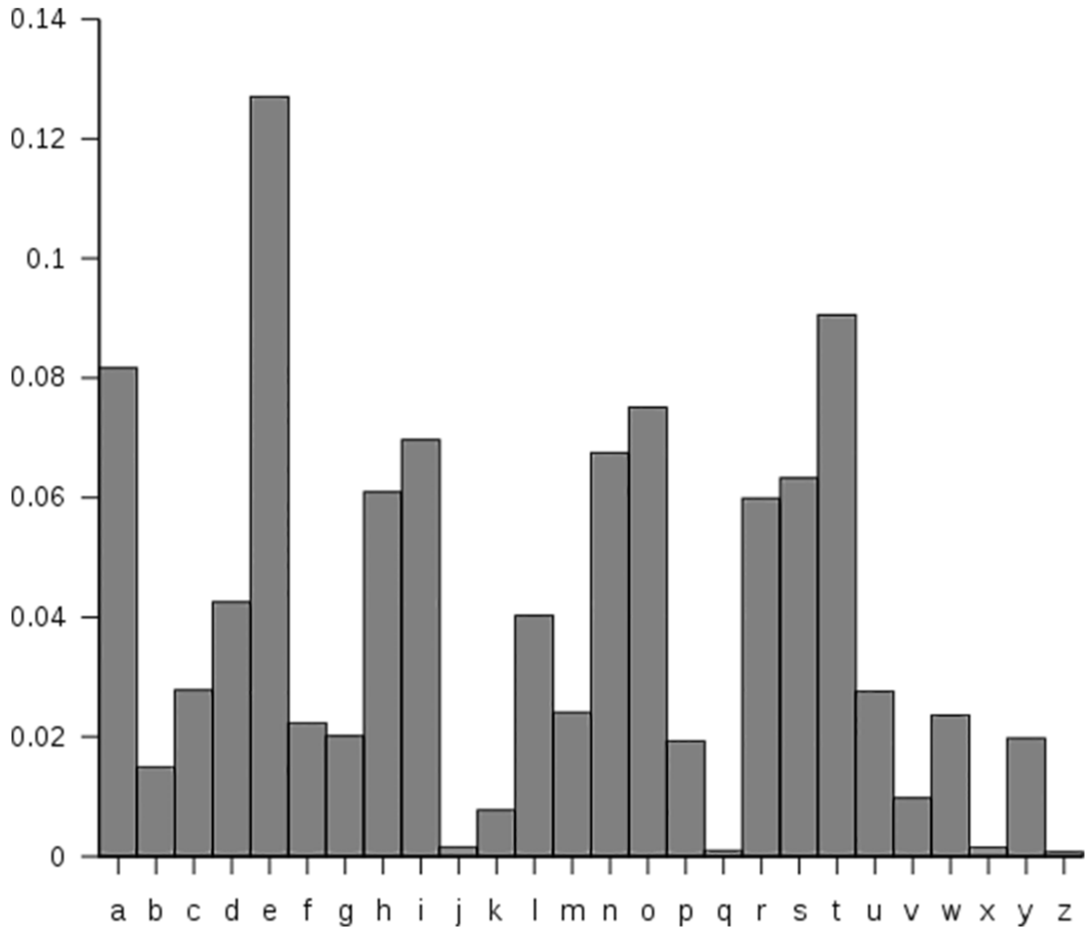
这些在电影里确实都交代了，我也不过多剧透了。其实，恩尼格玛密码机的本质就是**替换密码**。而今天我要讲的也是一种替换密码——希尔密码。因为我们专栏讲的是线性代数，所以，这篇应用我们会以矩阵论原理为基础，来进行讲解。

为什么需要希尔密码？

要讲密码，我们得先知道人们为什么需要它。

最古老、最原始的加密算法，会把明文的字母按照某种配对关系替换成其他的字母，从而得到一段别人看不懂的密文，许多谍战剧用到过这类方法。看起来，这个方法好像很难人为进行破解，但从语言和统计学角度看，它其实是漏洞百出的。

举个例子，在一篇普通英语文章中，各字母出现的概率有很大的不同。如果我们对足够多的文本进行分析，就可以统计出每一个字母在英文文本中出现的平均概率。



上面这张图来自维基百科，显示的是26个字母在普通的英文文本中出现的概率。

只要我们能够获取足够长的密文进行分析的话，通过字母出现的频率，我们同样能够猜到相应的原始字母，这并不安全。所以，随着安全性需求的提高，人们有必要寻找一种容易将字母的自然频度隐蔽或均匀化，并使得统计分析足够安全可靠的加密方法。而希尔密码能基本满足这一要求，那么希尔密码是怎么做到这一点的呢？

希尔密码原理

我们先来看一下希尔密码的原理。根据百度百科的定义，希尔密码（Hill Cipher）是运用基本矩阵论原理的替换密码，由Lester S. Hill在1929年发明。每个字母当作26进制数字：A=0，B=1，C=2…，把一串字母当成n维向量，和一个$n×n$的矩阵相乘，再将得出的结果和26进行模运算。

所以，希尔加密算法的基本思想是，通过线性变换将固定数量的明文字母转换为同样数量的密文字母，解密只要作一次逆变换就可以了，而密钥就是变换矩阵本身。

现在，我们再通过数学的方式来表达一下，希尔密码是如何通过三步来实现加密的。

第一步，设置加密矩阵E。

第二步，对照字母编码表（自行设定）得到数字，并把明文消息分割成大小为n的多个块：$v_{1},v_{2},…$，并且忽略空格。这里之所以忽略空格，是因为一般情况下密码传递的信息不会过于复杂。如果密码过于复杂，是可以分多次传递的。这里的n表示的密钥的阶数，密钥的阶数越高，也就是n越大的话，破译的难度也就越大，所需要的计算量也就越大。

第三步，每个消息块和加密矩阵E相乘：$Ev_{1}, Ev_{2},…$，并和26进行模运算，最后对照字母编码表得到密文。

同样，我们把这三步倒过来，就能实现解密了。

第一步，计算加密矩阵E的逆矩阵$D \equiv E^{-1}(\bmod 26)$。

第二步，对照字母编码表得到数字，把它和解密矩阵D相乘，并和26进行模运算。

第三步，对照编码表，得到原始明文。

这里你需要注意的是，加密矩阵很关键，它就是我们通常意义上所说的“密钥”，也就是打开密码的钥匙。

通过前面讲解的加密解密步骤，我们可以看出，希尔密码之所以很难被破译，是因为它设置了三道关卡：

1. 列矩阵的维度未知；
2. 对应字母表的排列未知；
3. 加密矩阵（或者说密钥）未知。

想要破解希尔密码，就需要同时获取到通过这三道关卡的钥匙，这谈何容易。

希尔密码实例

好了，原理都讲完了，现在我们通过一个例子来实际地看下希尔密码加密和解密的过程。

假设：A和B双方有一条重要消息要沟通，双方很早就建立了密钥沟通机制，每过一段时间都会更新密钥。在这次的密钥更新周期中，正确的密钥，也就是加密矩阵是一个3×3矩阵。

$$
E=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]
$$

这一次A要给B的消息是“ILIKEBODYCOMBAT”，我们用之前的三步在A方先来加密：

第一步，定义加密矩阵，也就是刚才的E矩阵。

字母编码表

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

第二步，对照字母编码表得到数字：8、11、8、10、4、1、14、3、24、2、14、12、1、0、19。接下来，把明文消息分割成大小为3的5个块，也就是维度为3的5个列矩阵。

$$
v_{1}=\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right], v_{2}=\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right], v_{3}=\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right], v_{4}=\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right], v_{5}=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]
$$

第三步，将每个消息块和加密矩阵E相乘：

$$
E v_{1}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
320 \\
360 \\
467
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
8 \\
22 \\
25
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{2}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
157 \\
204 \\
283
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
1 \\
22 \\
23
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{3}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
180 \\
470 \\
691
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
24 \\
2 \\
15
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{4}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
360 \\
370 \\
458
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
22 \\
6 \\
16
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{5}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
25 \\
203 \\
305
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
25 \\
21 \\
19
\end{array}\right]
$$

最后，对照字母编码表得到密文：“IWZBWXBCGWGQZVT”。

B拿到这个密文后，使用三步来解密：

第一步，计算加密矩阵E的逆矩阵D：

$$
D \equiv\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]^{-1}(\bmod 26) \equiv\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]
$$

第二步，对照字母编码表得到数字，把它和解密矩阵D相乘，并和26进行模运算，得到相应结果。

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
8 \\

22 \\
25
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
424 \\
869 \\
632
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
1 \\
22 \\
23
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
348 \\
680 \\
469
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
24 \\
2 \\
15
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
352 \\
835 \\
648
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
22 \\
6 \\
16
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
366 \\
846 \\
662
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
25 \\
21 \\
19
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
495 \\
1092 \\
929
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]
$$

最后，B通过对照编码表，得到了原始明文：“ILIKEBODYCOMBAT”。

这里，你也许会问，密钥为什么用的是3×3的可逆矩阵？那是我为了例子方便而设置的，你完全可以设置更高阶的矩阵。就像之前说的，密钥的阶数越高，也就是n越大的话，破译的难度也就越大，所需要的计算量也就越大。

所以，从破译密码的角度来看，传统的密码有一个致命弱点，就是破译者可从统计出来的字符频率中找到规律，进而找出破译的突破口。尤其是在计算机技术高度发达的今天，破译的速度更快。而希尔密码算法则完全克服了这一缺陷，它通过采用线性代数中的矩阵乘法运算和逆运算，能够较好地抵抗频率分析，很难被攻破。

本节小结

这一节课的内容都和密码学有关，感觉像是搞谍战一样。但其实它的核心很简单，就是通过基础篇中学到的矩阵和逆矩阵的知识，来实现希尔密码。希尔密码的关键就是定义加密矩阵，或者说密钥、字母表排列方式和列矩阵的维度，通过线性变换将固定数量的明文字母转换为同样数量的密文字母，而解密则只要作一次逆变换就可以了。

当然，现实中还有更复杂的加密算法，其中最著名的，且用到线性代数的加密算法是AES，想必你平时也经常看到或用到过。AES是一个迭代的、对称密钥分组的密码，它可以使用128、192和256位密钥，并且用128、192和256位分组加密和解密数据，其中密钥长度与分组长度是独立的。

线性代数练习场

请你做一回“特工”，尝试使用希尔密码来给明文“MACHINELEARNING”做加密和解密。

> 提醒：你可以自行定义加密矩阵、字母表排列方式和列矩阵的维度。加密矩阵可以使用之前介绍的3×3可逆矩阵，也可以使用其它n×n的可逆矩阵。

欢迎在留言区晒出你的加密和解密过程，我会及时回复。同时，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友，一起讨论、学习。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天我要讲的内容是“如何通过有限向量空间加持的希尔密码，提高密码被破译的难度”。

这篇的内容会非常有趣，是和密码加密、解密有关的。不知道你有没有看过电影《模仿游戏》，故事描述的是阿兰·图灵在二战期间破译德军的恩尼格玛密码机（Enigma），很精彩，我看了很多遍。

不过电影毕竟是电影，有许多内容是不现实的，好在表达出来的破译恩尼格玛密码的核心观点是正确的。要破译一份被恩尼格玛机加密的密文，需要这三类信息：

1. 恩格玛机的工作原理及内部构造，包括每个转子的线路连接；
2. 德军对恩格玛机的操作守则；
3. 德军所使用的每日初始设置。恩格玛机的每日初始设置包含了三个信息：即转子的排列顺序、每个转子的初始位置，以及插线板的设置。这些信息被印刷在密码本上分发至德军全军，每24小时更换一次设置，每月更换一次密码本。

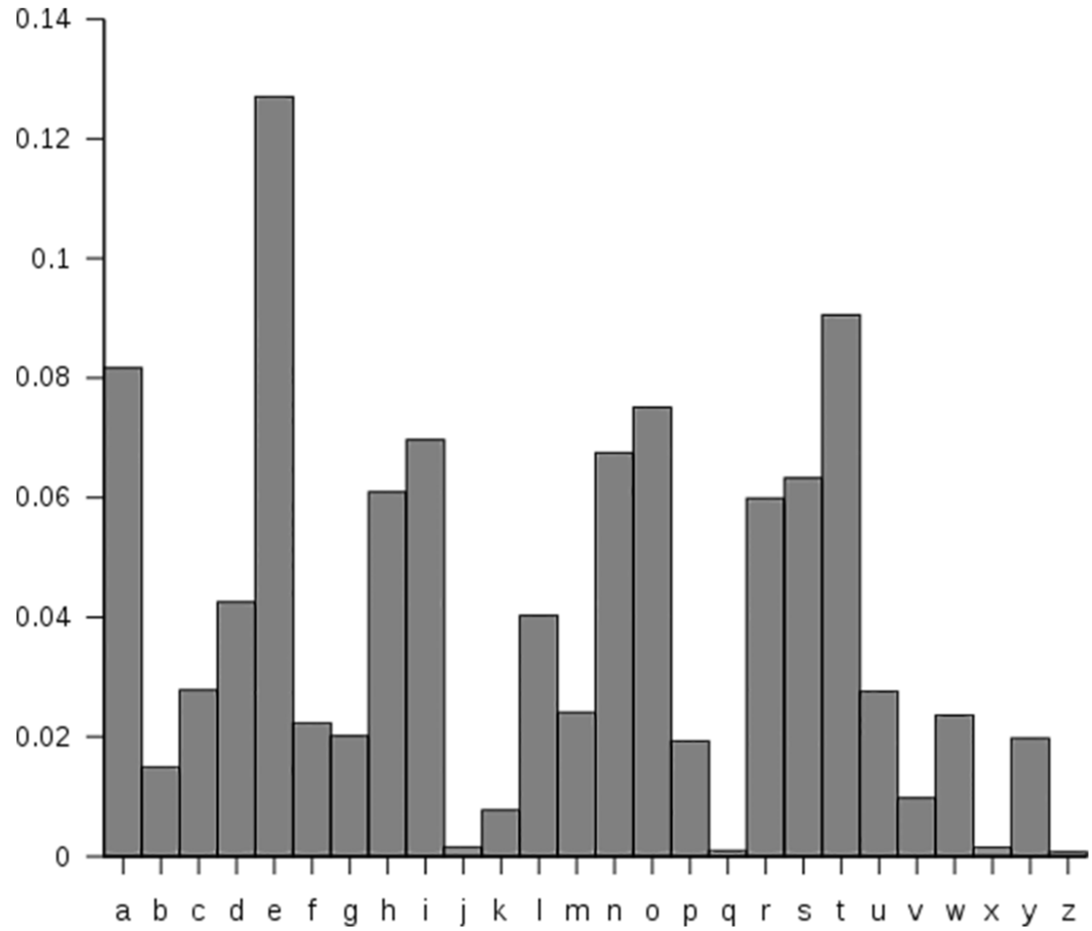
这些在电影里确实都交代了，我也不过多剧透了。其实，恩尼格玛密码机的本质就是**替换密码**。而今天我要讲的也是一种替换密码——希尔密码。因为我们专栏讲的是线性代数，所以，这篇应用我们会以矩阵论原理为基础，来进行讲解。

为什么需要希尔密码？

要讲密码，我们得先知道人们为什么需要它。

最古老、最原始的加密算法，会把明文的字母按照某种配对关系替换成其他的字母，从而得到一段别人看不懂的密文，许多谍战剧用到过这类方法。看起来，这个方法好像很难人为进行破解，但从语言和统计学角度看，它其实是漏洞百出的。

举个例子，在一篇普通英语文章中，各字母出现的概率有很大的不同。如果我们对足够多的文本进行分析，就可以统计出每一个字母在英文文本中出现的平均概率。



上面这张图来自维基百科，显示的是26个字母在普通的英文文本中出现的概率。

只要我们能够获取足够长的密文进行分析的话，通过字母出现的频率，我们同样能够猜到相应的原始字母，这并不安全。所以，随着安全性需求的提高，人们有必要寻找一种容易将字母的自然频度隐蔽或均匀化，并使得统计分析足够安全可靠的加密方法。而希尔密码能基本满足这一要求，那么希尔密码是怎么做到这一点的呢？

希尔密码原理

我们先来看一下希尔密码的原理。根据百度百科的定义，希尔密码（Hill Cipher）是运用基本矩阵论原理的替换密码，由Lester S. Hill在1929年发明。每个字母当作26进制数字：A=0，B=1，C=2…，把一串字母当成n维向量，和一个$n \times n$的矩阵相乘，再将得出的结果和26进行模运算。

所以，希尔加密算法的基本思想是，通过线性变换将固定数量的明文字母转换为同样数量的密文字母，解密只要作一次逆变换就可以了，而密钥就是变换矩阵本身。

现在，我们再通过数学的方式来表达一下，希尔密码是如何通过三步来实现加密的。

第一步，设置加密矩阵E。

第二步，对照字母编码表（自行设定）得到数字，并把明文消息分割成大小为n的多个块：$v_{1},v_{2},…$，并且忽略空格。这里之所以忽略空格，是因为一般情况下密码传递的信息不会过于复杂。如果密码过于复杂，是可以分多次传递的。这里的n表示的密钥的阶数，密钥的阶数越高，也就是n越大的话，破译的难度也就越大，所需要的计算量也就越大。

第三步，每个消息块和加密矩阵E相乘：$Ev_{1}, Ev_{2},…$，并和26进行模运算，最后对照字母编码表得到密文。

同样，我们把这三步倒过来，就能实现解密了。

第一步，计算加密矩阵E的逆矩阵$D \equiv E^{-1}(\bmod 26)$。

第二步，对照字母编码表得到数字，把它和解密矩阵D相乘，并和26进行模运算。

第三步，对照编码表，得到原始明文。

这里你需要注意的是，加密矩阵很关键，它就是我们通常意义上所说的“密钥”，也就是打开密码的钥匙。

通过前面讲解的加密解密步骤，我们可以看出，希尔密码之所以很难被破译，是因为它设置了三道关卡：

1. 列矩阵的维度未知；
2. 对应字母表的排列未知；
3. 加密矩阵（或者说密钥）未知。

想要破解希尔密码，就需要同时获取到通过这三道关卡的钥匙，这谈何容易。

希尔密码实例

好了，原理都讲完了，现在我们通过一个例子来实际地看下希尔密码加密和解密的过程。

假设：A和B双方有一条重要消息要沟通，双方很早就建立了密钥沟通机制，每过一段时间都会更新密钥。在这次的密钥更新周期中，正确的密钥，也就是加密矩阵是一个3×3矩阵。

$$
E=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]
$$

这一次A要给B的消息是“ILIKEBODYCOMBAT”，我们用之前的三步在A方先来加密：

第一步，定义加密矩阵，也就是刚才的E矩阵。

字母编码表

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

第二步，对照字母编码表得到数字：8、11、8、10、4、1、14、3、24、2、14、12、1、0、19。接下来，把明文消息分割成大小为3的5个块，也就是维度为3的5个列矩阵。

$$
v_{1}=\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right], v_{2}=\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right], v_{3}=\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right], v_{4}=\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right], v_{5}=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]
$$

第三步，将每个消息块和加密矩阵E相乘：

$$
E v_{1}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
320 \\
360 \\
467
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
8 \\
22 \\
25
\end{array}\right]
$$

$$

$$
E v_{2}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
157 \\
204 \\
283
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
1 \\
22 \\
23
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{3}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
180 \\
470 \\
691
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
24 \\
2 \\
15
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{4}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
360 \\
370 \\
458
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
22 \\
6 \\
16
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{5}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
25 \\
203 \\
305
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
25 \\
21 \\
19
\end{array}\right]
$$

最后，对照字母编码表得到密文：“IWZBWXBCGWGQZVT”。

B拿到这个密文后，使用三步来解密：

第一步，计算加密矩阵E的逆矩阵D：

$$
D \equiv\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]^{-1}(\bmod 26) \equiv\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]
$$

第二步，对照字母编码表得到数字，把它和解密矩阵D相乘，并和26进行模运算，得到相应结果。

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
8 \\
$$

22 \\
25
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
424 \\
869 \\
632
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
1 \\
22 \\
23
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
348 \\
680 \\
469
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
24 \\
2 \\
15
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
352 \\
835 \\
648
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
22 \\
6 \\
16
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
366 \\
846 \\
662
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
25 \\
21 \\
19
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
495 \\
1092 \\
929
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]
$$

最后，B通过对照编码表，得到了原始明文：“ILIKEBODYCOMBAT”。

这里，你也许会问，密钥为什么用的是3×3的可逆矩阵？那是我为了例子方便而设置的，你完全可以设置更高阶的矩阵。就像之前说的，密钥的阶数越高，也就是n越大的话，破译的难度也就越大，所需要的计算量也就越大。

所以，从破译密码的角度来看，传统的密码有一个致命弱点，就是破译者可从统计出来的字符频率中找到规律，进而找出破译的突破口。尤其是在计算机技术高度发达的今天，破译的速度更快。而希尔密码算法则完全克服了这一缺陷，它通过采用线性代数中的矩阵乘法运算和逆运算，能够较好地抵抗频率分析，很难被攻破。

本节小结

这一节课的内容都和密码学有关，感觉像是搞谍战一样。但其实它的核心很简单，就是通过基础篇中学到的矩阵和逆矩阵的知识，来实现希尔密码。希尔密码的关键就是定义加密矩阵，或者说密钥、字母表排列方式和列矩阵的维度，通过线性变换将固定数量的明文字母转换为同样数量的密文字母，而解密则只要作一次逆变换就可以了。

当然，现实中还有更复杂的加密算法，其中最著名的，且用到线性代数的加密算法是AES，想必你平时也经常看到或用到过。AES是一个迭代的、对称密钥分组的密码，它可以使用128、192和256位密钥，并且用128、192和256位分组加密和解密数据，其中密钥长度与分组长度是独立的。

线性代数练习场

请你做一回"特工"，尝试使用希尔密码来给明文"MACHINELEARNING"做加密和解密。

> 提醒：你可以自行定义加密矩阵、字母表排列方式和列矩阵的维度。加密矩阵可以使用之前介绍的3×3可逆矩阵，也可以使用其它n×n的可逆矩阵。

欢迎在留言区晒出你的加密和解密过程，我会及时回复。同时，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友，一起讨论、学习。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天我要讲的内容是"如何通过有限向量空间加持的希尔密码，提高密码被破译的难度"。

这篇的内容会非常有趣，是和密码加密、解密有关的。不知道你有没有看过电影《模仿游戏》，故事描述的是阿兰·图灵在二战期间破译德军的恩尼格玛密码机（Enigma），很精彩，我看了很多遍。

不过电影毕竟是电影，有许多内容是不现实的，好在表达出来的破译恩尼格玛密码的核心观点是正确的。要破译一份被恩尼格玛机加密的密文，需要这三类信息：

1. 恩格玛机的工作原理及内部构造，包括每个转子的线路连接；
2. 德军对恩格玛机的操作守则；
3. 德军所使用的每日初始设置。恩格玛机的每日初始设置包含了三个信息：即转子的排列顺序、每个转子的初始位置，以及插线板的设置。这些信息被印刷在密码本上分发至德军全军，每24小时更换一次设置，每月更换一次密码本。

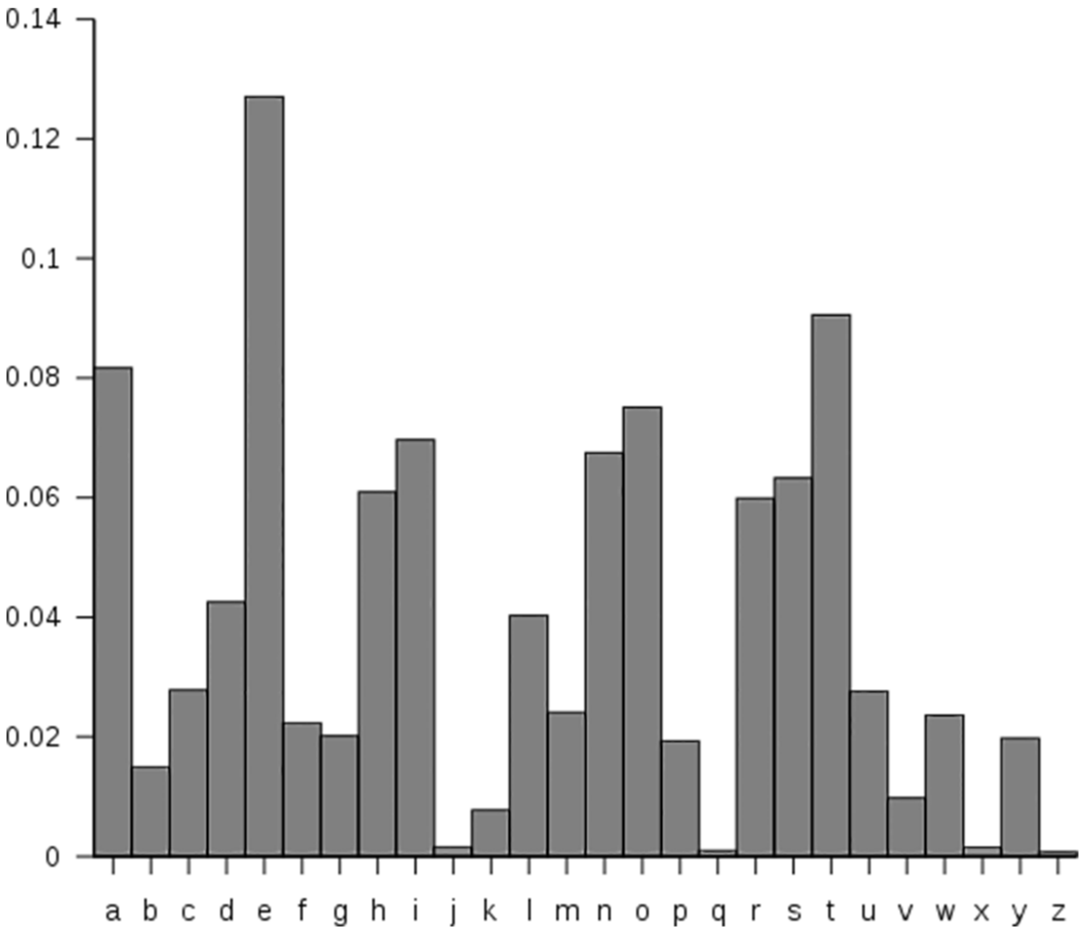
这些在电影里确实都交代了，我也不过多剧透了。其实，恩尼格玛密码机的本质就是**替换密码**。而今天我要讲的也是一种替换密码——希尔密码。因为我们专栏讲的是线性代数，所以，这篇应用我们会以矩阵论原理为基础，来进行讲解。

为什么需要希尔密码？

要讲密码，我们得先知道人们为什么需要它。

最古老、最原始的加密算法，会把明文的字母按照某种配对关系替换成其他的字母，从而得到一段别人看不懂的密文，许多谍战剧用到过这类方法。看起来，这个方法好像很难人为进行破解，但从语言和统计学角度看，它其实是漏洞百出的。

举个例子，在一篇普通英语文章中，各字母出现的概率有很大的不同。如果我们对足够多的文本进行分析，就可以统计出每一个字母在英文文本中出现的平均概率。



上面这张图来自维基百科，显示的是26个字母在普通的英文文本中出现的概率。

只要我们能够获取足够长的密文进行分析的话，通过字母出现的频率，我们同样能够猜到相应的原始字母，这并不安全。所以，随着安全性需求的提高，人们有必要寻找一种容易将字母的自然频度隐蔽或均匀化，并使得统计分析足够安全可靠的加密方法。而希尔密码能基本满足这一要求，那么希尔密码是怎么做到这一点的呢？

希尔密码原理

我们先来看一下希尔密码的原理。根据百度百科的定义，希尔密码（Hill Cipher）是运用基本矩阵论原理的替换密码，由Lester S. Hill在1929年发明。每个字母当作26进制数字：A=0，B=1，C=2…，把一串字母当成n维向量，和一个$n×n$的矩阵相乘，再将得出的结果和26进行模运算。

所以，希尔加密算法的基本思想是，通过线性变换将固定数量的明文字母转换为同样数量的密文字母，解密只要作一次逆变换就可以了，而密钥就是变换矩阵本身。

现在，我们再通过数学的方式来表达一下，希尔密码是如何通过三步来实现加密的。

第一步，设置加密矩阵E。

第二步，对照字母编码表（自行设定）得到数字，并把明文消息分割成大小为n的多个块：$v_{1},v_{2},…$，并且忽略空格。这里之所以忽略空格，是因为一般情况下密码传递的信息不会过于复杂。如果密码过于复杂，是可以分多次传递的。这里的n表示的密钥的阶数，密钥的阶数越高，也就是n越大的话，破译的难度也就越大，所需要的计算量也就越大。

第三步，每个消息块和加密矩阵E相乘：$Ev_{1}, Ev_{2},…$，并和26进行模运算，最后对照字母编码表得到密文。

同样，我们把这三步倒过来，就能实现解密了。

第一步，计算加密矩阵E的逆矩阵$D \equiv E^{-1}(\bmod 26)$。

第二步，对照字母编码表得到数字，把它和解密矩阵D相乘，并和26进行模运算。

第三步，对照编码表，得到原始明文。

这里你需要注意的是，加密矩阵很关键，它就是我们通常意义上所说的"密钥"，也就是打开密码的钥匙。

通过前面讲解的加密解密步骤，我们可以看出，希尔密码之所以很难被破译，是因为它设置了三道关卡：

1. 列矩阵的维度未知；
2. 对应字母表的排列未知；
3. 加密矩阵（或者说密钥）未知。

想要破解希尔密码，就需要同时获取到通过这三道关卡的钥匙，这谈何容易。

希尔密码实例

好了，原理都讲完了，现在我们通过一个例子来实际地看下希尔密码加密和解密的过程。

假设：A和B双方有一条重要消息要沟通，双方很早就建立了密钥沟通机制，每过一段时间都会更新密钥。在这次的密钥更新周期中，正确的密钥，也就是加密矩阵是一个3×3矩阵。

$$
E=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]
$$

这一次A要给B的消息是"ILIKEBODYCOMBAT"，我们用之前的三步在A方先来加密：

第一步，定义加密矩阵，也就是刚才的E矩阵。

字母编码表

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

第二步，对照字母编码表得到数字：8、11、8、10、4、1、14、3、24、2、14、12、1、0、19。接下来，把明文消息分割成大小为3的5个块，也就是维度为3的5个列矩阵。

$$
v_{1}=\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right], v_{2}=\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right], v_{3}=\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right], v_{4}=\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right], v_{5}=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]
$$

第三步，将每个消息块和加密矩阵E相乘：

$$
E v_{1}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
320 \\
360 \\
467
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
8 \\
22 \\
25
\end{array}\right]
$$

$$

$$
E v_{2}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
157 \\
204 \\
283
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
1 \\
22 \\
23
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{3}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
180 \\
470 \\
691
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
24 \\
2 \\
15
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{4}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
360 \\
370 \\
458
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
22 \\
6 \\
16
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{5}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
25 \\
203 \\
305
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
25 \\
21 \\
19
\end{array}\right]
$$

最后，对照字母编码表得到密文：“IWZBWXBCGWGQZVT”。

B拿到这个密文后，使用三步来解密：

第一步，计算加密矩阵E的逆矩阵D：

$$
D \equiv\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]^{-1}(\bmod 26) \equiv\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]
$$

第二步，对照字母编码表得到数字，把它和解密矩阵D相乘，并和26进行模运算，得到相应结果。

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
8 \\

22 \\\
25
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
424 \\\
869 \\\
632
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
8 \\\
11 \\\
8
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\\
21 & 8 & 21 \\\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
1 \\\
22 \\\
23
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
348 \\\
680 \\\
469
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
10 \\\
4 \\\
1
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\\
21 & 8 & 21 \\\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
24 \\\
2 \\\
15
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
352 \\\
835 \\\
648
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
14 \\\
3 \\\
24
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\\
21 & 8 & 21 \\\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
22 \\\
6 \\\
16
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
366 \\\
846 \\\
662
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
2 \\\
14 \\\
12
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\\
21 & 8 & 21 \\\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
25 \\\
21 \\\
19
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
495 \\\
1092 \\\
929
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
1 \\\
0 \\\
19
\end{array}\right]
$$

最后，B通过对照编码表，得到了原始明文：“ILIKEBODYCOMBAT”。

这里，你也许会问，密钥为什么用的是3×3的可逆矩阵？那是我为了例子方便而设置的，你完全可以设置更高阶的矩阵。就像之前说的，密钥的阶数越高，也就是n越大的话，破译的难度也就越大，所需要的计算量也就越大。

所以，从破译密码的角度来看，传统的密码有一个致命弱点，就是破译者可从统计出来的字符频率中找到规律，进而找出破译的突破口。尤其是在计算机技术高度发达的今天，破译的速度更快。而希尔密码算法则完全克服了这一缺陷，它通过采用线性代数中的矩阵乘法运算和逆运算，能够较好地抵抗频率分析，很难被攻破。

本节小结

这一节课的内容都和密码学有关，感觉像是搞谍战一样。但其实它的核心很简单，就是通过基础篇中学到的矩阵和逆矩阵的知识，来实现希尔密码。希尔密码的关键就是定义加密矩阵，或者说密钥、字母表排列方式和列矩阵的维度，通过线性变换将固定数量的明文字母转换为同样数量的密文字母，而解密则只要作一次逆变换就可以了。

当然，现实中还有更复杂的加密算法，其中最著名的，且用到线性代数的加密算法是AES，想必你平时也经常看到或用到过。AES是一个迭代的、对称密钥分组的密码，它可以使用128、192和256位密钥，并且用128、192和256位分组加密和解密数据，其中密钥长度与分组长度是独立的。

线性代数练习场

请你做一回“特工”，尝试使用希尔密码来给明文“MACHINELEARNING”做加密和解密。

> 提醒：你可以自行定义加密矩阵、字母表排列方式和列矩阵的维度。加密矩阵可以使用之前介绍的3×3可逆矩阵，也可以使用其它n×n的可逆矩阵。

欢迎在留言区晒出你的加密和解密过程，我会及时回复。同时，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友，一起讨论、学习。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天我要讲的内容是“如何通过有限向量空间加持的希尔密码，提高密码被破译的难度”。

这篇的内容会非常有趣，是和密码加密、解密有关的。不知道你有没有看过电影《模仿游戏》，故事描述的是阿兰·图灵在二战期间破译德军的恩尼格玛密码机（Enigma），很精彩，我看了很多遍。

不过电影毕竟是电影，有许多内容是不现实的，好在表达出来的破译恩尼格玛密码的核心观点是正确的。要破译一份被恩尼格玛机加密的密文，需要这三类信息：

1. 恩格玛机的工作原理及内部构造，包括每个转子的线路连接；
2. 德军对恩格玛机的操作守则；
3. 德军所使用的每日初始设置。恩格玛机的每日初始设置包含了三个信息：即转子的排列顺序、每个转子的初始位置，以及插线板的设置。这些信息被印刷在密码本上分发至德军全军，每24小时更换一次设置，每月更换一次密码本。

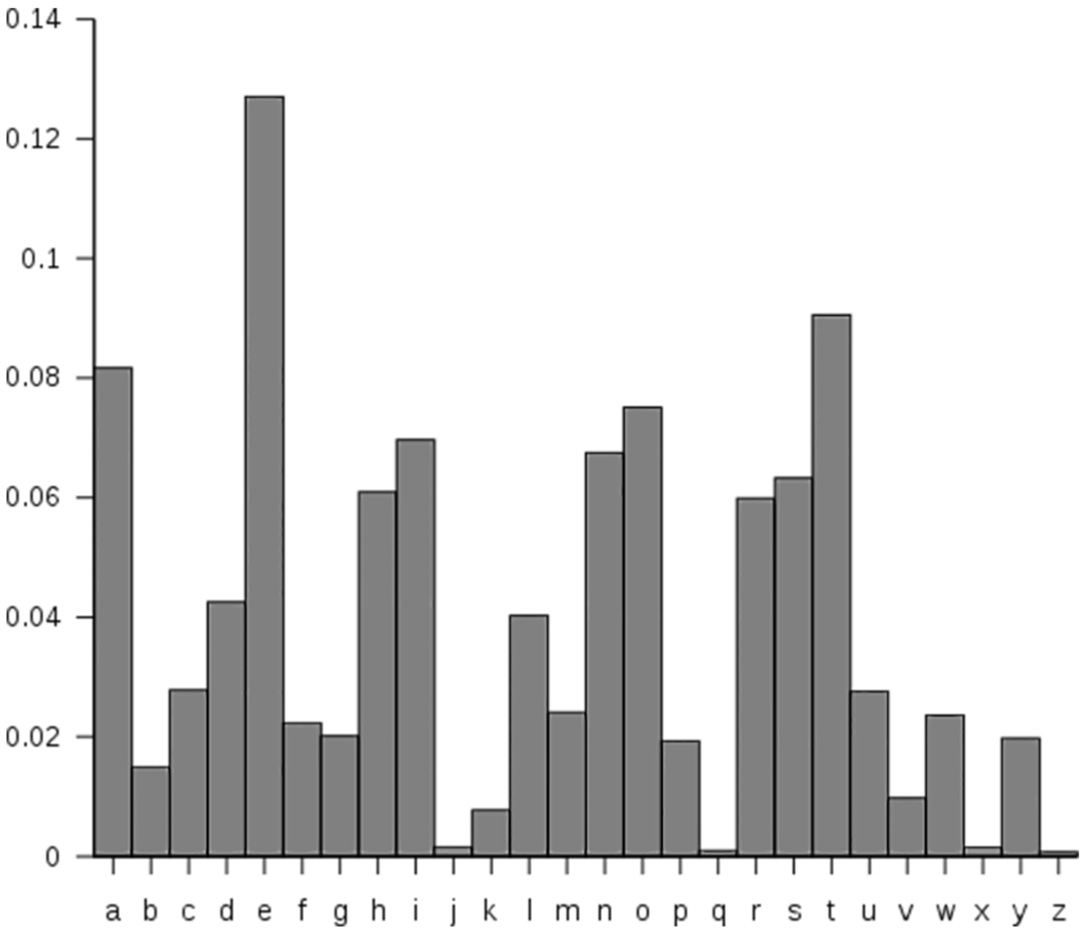
这些在电影里确实都交代了，我也不过多剧透了。其实，恩尼格玛密码机的本质就是**替换密码**。而今天我要讲的也是一种替换密码——希尔密码。因为我们专栏讲的是线性代数，所以，这篇应用我们会以矩阵论原理为基础，来进行讲解。

为什么需要希尔密码？

要讲密码，我们得先知道人们为什么需要它。

最古老、最原始的加密算法，会把明文的字母按照某种配对关系替换成其他的字母，从而得到一段别人看不懂的密文，许多谍战剧用到过这类方法。看起来，这个方法好像很难人为进行破解，但从语言和统计学角度看，它其实是漏洞百出的。

举个例子，在一篇普通英语文章中，各字母出现的概率有很大的不同。如果我们对足够多的文本进行分析，就可以统计出每一个字母在英文文本中出现的平均概率。



上面这张图来自维基百科，显示的是26个字母在普通的英文文本中出现的概率。

只要我们能够获取足够长的密文进行分析的话，通过字母出现的频率，我们同样能够猜到相应的原始字母，这并不安全。所以，随着安全性需求的提高，人们有必要寻找一种容易将字母的自然频度隐蔽或均匀化，并使得统计分析足够安全可靠的加密方法。而希尔密码能基本满足这一要求，那么希尔密码是怎么做到这一点的呢？

希尔密码原理

我们先来看一下希尔密码的原理。根据百度百科的定义，希尔密码（Hill Cipher）是运用基本矩阵论原理的替换密码，由Lester S. Hill在1929年发明。每个字母当作26进制数字：A=0，B=1，C=2…，把一串字母当成n维向量，和一个$n×n$的矩阵相乘，再将得出的结果和26进行模运算。

所以，希尔加密算法的基本思想是，通过线性变换将固定数量的明文字母转换为同样数量的密文字母，解密只要作一次逆变换就可以了，而密钥就是变换矩阵本身。

现在，我们再通过数学的方式来表达一下，希尔密码是如何通过三步来实现加密的。

第一步，设置加密矩阵E。

第二步，对照字母编码表（自行设定）得到数字，并把明文消息分割成大小为n的多个块：$v_{1},v_{2},…$，并且忽略空格。这里之所以忽略空格，是因为一般情况下密码传递的信息不会过于复杂。如果密码过于复杂，是可以分多次传递的。这里的n表示的密钥的阶数，密钥的阶数越高，也就是n越大的话，破译的难度也就越大，所需要的计算量也就越大。

第三步，每个消息块和加密矩阵E相乘：$Ev_{1}, Ev_{2},…$，并和26进行模运算，最后对照字母编码表得到密文。

同样，我们把这三步倒过来，就能实现解密了。

第一步，计算加密矩阵E的逆矩阵$D \equiv E^{-1}(\bmod 26)$。

第二步，对照字母编码表得到数字，把它和解密矩阵D相乘，并和26进行模运算。

第三步，对照编码表，得到原始明文。

这里你需要注意的是，加密矩阵很关键，它就是我们通常意义上所说的“密钥”，也就是打开密码的钥匙。

通过前面讲解的加密解密步骤，我们可以看出，希尔密码之所以很难被破译，是因为它设置了三道关卡：

1. 列矩阵的维度未知；
2. 对应字母表的排列未知；
3. 加密矩阵（或者说密钥）未知。

想要破解希尔密码，就需要同时获取到通过这三道关卡的钥匙，这谈何容易。

希尔密码实例

好了，原理都讲完了，现在我们通过一个例子来实际地看下希尔密码加密和解密的过程。

假设：A和B双方有一条重要消息要沟通，双方很早就建立了密钥沟通机制，每过一段时间都会更新密钥。在这次的密钥更新周期中，正确的密钥，也就是加密矩阵是一个3×3矩阵。

$$
E=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]
$$

这一次A要给B的消息是“ILIKEBODYCOMBAT”，我们用之前的三步在A方先来加密：

第一步，定义加密矩阵，也就是刚才的E矩阵。

字母编码表

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

第二步，对照字母编码表得到数字：8、11、8、10、4、1、14、3、24、2、14、12、1、0、19。接下来，把明文消息分割成大小为3的5个块，也就是维度为3的5个列矩阵。

$$
v_{1}=\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right], v_{2}=\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right], v_{3}=\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right], v_{4}=\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right], v_{5}=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]
$$

第三步，将每个消息块和加密矩阵E相乘：

$$
E v_{1}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
320 \\
360 \\
467
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
8 \\
22 \\
25
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{2}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
157 \\
204 \\
283
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
1 \\
22 \\
23
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{3}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
180 \\
470 \\
691
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
24 \\
2 \\
15
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{4}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
360 \\
370 \\
458
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
22 \\
6 \\
16
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{5}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
25 \\
203 \\
305
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
25 \\
21 \\
19
\end{array}\right]
$$

最后，对照字母编码表得到密文：“IWZBWXBCGWGQZVT”。

B拿到这个密文后，使用三步来解密：

第一步，计算加密矩阵E的逆矩阵D：

$$
D \equiv\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]^{-1}(\bmod 26) \equiv\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]
$$

第二步，对照字母编码表得到数字，把它和解密矩阵D相乘，并和26进行模运算，得到相应结果。

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
8 \\
$$

22 \\
25
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
424 \\
869 \\
632
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
1 \\
22 \\
23
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
348 \\
680 \\
469
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
24 \\
2 \\
15
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
352 \\
835 \\
648
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
22 \\
6 \\
16
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
366 \\
846 \\
662
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
25 \\
21 \\
19
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
495 \\
1092 \\
929
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]
$$

最后，B通过对照编码表，得到了原始明文："ILIKEBODYCOMBAT"。

这里，你也许会问，密钥为什么用的是3×3的可逆矩阵？那是我为了例子方便而设置的，你完全可以设置更高阶的矩阵。就像之前说的，密钥的阶数越高，也就是n越大的话，破译的难度也就越大，所需要的计算量也就越大。

所以，从破译密码的角度来看，传统的密码有一个致命弱点，就是破译者可从统计出来的字符频率中找到规律，进而找出破译的突破口。尤其是在计算机技术高度发达的今天，破译的速度更快。而希尔密码算法则完全克服了这一缺陷，它通过采用线性代数中的矩阵乘法运算和逆运算，能够较好地抵抗频率分析，很难被攻破。

本节小结

这一节课的内容都和密码学有关，感觉像是搞谍战一样。但其实它的核心很简单，就是通过基础篇中学到的矩阵和逆矩阵的知识，来实现希尔密码。希尔密码的关键就是定义加密矩阵，或者说密钥、字母表排列方式和列矩阵的维度，通过线性变换将固定数量的明文字母转换为同样数量的密文字母，而解密则只要作一次逆变换就可以了。

当然，现实中还有更复杂的加密算法，其中最著名的，且用到线性代数的加密算法是AES，想必你平时也经常看到或用到过。AES是一个迭代的、对称密钥分组的密码，它可以使用128、192和256位密钥，并且用128、192和256位分组加密和解密数据，其中密钥长度与分组长度是独立的。

线性代数练习场

请你做一回“特工”，尝试使用希尔密码来给明文“MACHINELEARNING”做加密和解密。

> 提醒：你可以自行定义加密矩阵、字母表排列方式和列矩阵的维度。加密矩阵可以使用之前介绍的3×3可逆矩阵，也可以使用其它n×n的可逆矩阵。

欢迎在留言区晒出你的加密和解密过程，我会及时回复。同时，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友，一起讨论、学习。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天我要讲的内容是“如何通过有限向量空间加持的希尔密码，提高密码被破译的难度”。

这篇的内容会非常有趣，是和密码加密、解密有关的。不知道你有没有看过电影《模仿游戏》，故事描述的是阿兰·图灵在二战期间破译德军的恩尼格玛密码机（Enigma），很精彩，我看了很多遍。

不过电影毕竟是电影，有许多内容是不现实的，好在表达出来的破译恩尼格玛密码的核心观点是正确的。要破译一份被恩尼格玛机加密的密文，需要这三类信息：

1. 恩格玛机的工作原理及内部构造，包括每个转子的线路连接；
2. 德军对恩格玛机的操作守则；
3. 德军所使用的每日初始设置。恩格玛机的每日初始设置包含了三个信息：即转子的排列顺序、每个转子的初始位置，以及插线板的设置。这些信息被印刷在密码本上分发至德军全军，每24小时更换一次设置，每月更换一次密码本。

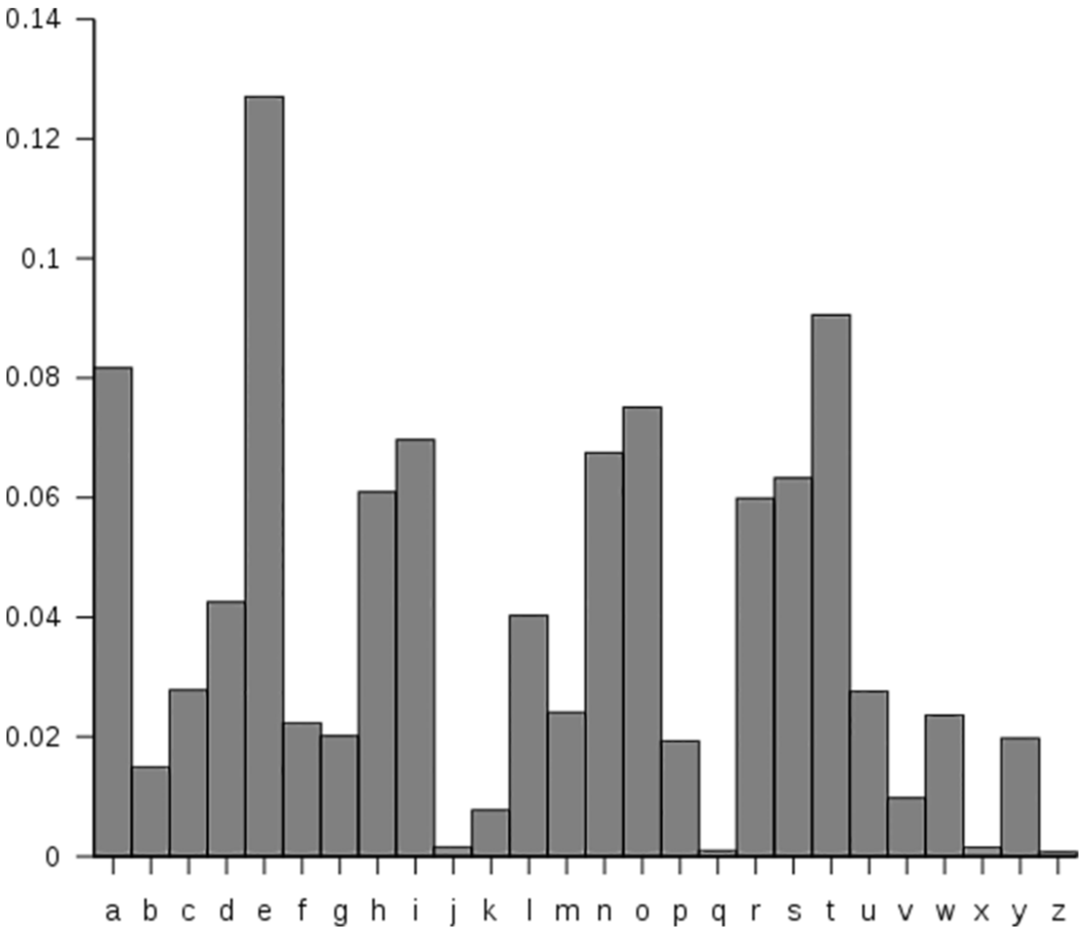
这些在电影里确实都交代了，我也不过多剧透了。其实，恩尼格玛密码机的本质就是**替换密码**。而今天我要讲的也是一种替换密码——希尔密码。因为我们专栏讲的是线性代数，所以，这篇应用我们会以矩阵论原理为基础，来进行讲解。

为什么需要希尔密码？

要讲密码，我们得先知道人们为什么需要它。

最古老、最原始的加密算法，会把明文的字母按照某种配对关系替换成其他的字母，从而得到一段别人看不懂的密文，许多谍战剧用到过这类方法。看起来，这个方法好像很难人为进行破解，但从语言和统计学角度看，它其实是漏洞百出的。

举个例子，在一篇普通英语文章中，各字母出现的概率有很大的不同。如果我们对足够多的文本进行分析，就可以统计出每一个字母在英文文本中出现的平均概率。



上面这张图来自维基百科，显示的是26个字母在普通的英文文本中出现的概率。

只要我们能够获取足够长的密文进行分析的话，通过字母出现的频率，我们同样能够猜到相应的原始字母，这并不安全。所以，随着安全性需求的提高，人们有必要寻找一种容易将字母的自然频度隐蔽或均匀化，并使得统计分析足够安全可靠的加密方法。而希尔密码能基本满足这一要求，那么希尔密码是怎么做到这一点的呢？

希尔密码原理

我们先来看一下希尔密码的原理。根据百度百科的定义，希尔密码（Hill Cipher）是运用基本矩阵论原理的替换密码，由Lester S. Hill在1929年发明。每个字母当作26进制数字：A=0，B=1，C=2…，把一串字母当成n维向量，和一个$n×n$的矩阵相乘，再将得出的结果和26进行模运算。

所以，希尔加密算法的基本思想是，通过线性变换将固定数量的明文字母转换为同样数量的密文字母，解密只要作一次逆变换就可以了，而密钥就是变换矩阵本身。

现在，我们再通过数学的方式来表达一下，希尔密码是如何通过三步来实现加密的。

第一步，设置加密矩阵E。

第二步，对照字母编码表（自行设定）得到数字，并把明文消息分割成大小为n的多个块：$v_{1},v_{2},\ldots$，并且忽略空格。这里之所以忽略空格，是因为一般情况下密码传递的信息不会过于复杂。如果密码过于复杂，是可以分多次传递的。这里的n表示的密钥的阶数，密钥的阶数越高，也就是n越大的话，破译的难度也就越大，所需要的计算量也就越大。

第三步，每个消息块和加密矩阵E相乘：$Ev_{1}, Ev_{2},\ldots$，并和26进行模运算，最后对照字母编码表得到密文。

同样，我们把这三步倒过来，就能实现解密了。

第一步，计算加密矩阵E的逆矩阵$D \equiv E^{-1}(\bmod 26)$。

第二步，对照字母编码表得到数字，把它和解密矩阵D相乘，并和26进行模运算。

第三步，对照编码表，得到原始明文。

这里你需要注意的是，加密矩阵很关键，它就是我们通常意义上所说的“密钥”，也就是打开密码的钥匙。

通过前面讲解的加密解密步骤，我们可以看出，希尔密码之所以很难被破译，是因为它设置了三道关卡：

1. 列矩阵的维度未知；
2. 对应字母表的排列未知；
3. 加密矩阵（或者说密钥）未知。

想要破解希尔密码，就需要同时获取到通过这三道关卡的钥匙，这谈何容易。

希尔密码实例

好了，原理都讲完了，现在我们通过一个例子来实际地看下希尔密码加密和解密的过程。

假设：A和B双方有一条重要消息要沟通，双方很早就建立了密钥沟通机制，每过一段时间都会更新密钥。在这次的密钥更新周期中，正确的密钥，也就是加密矩阵是一个3×3矩阵。

$$
E=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]
$$

这一次A要给B的消息是“ILIKEBODYCOMBAT”，我们用之前的三步在A方先来加密：

第一步，定义加密矩阵，也就是刚才的E矩阵。

字母编码表

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

第二步，对照字母编码表得到数字：8、11、8、10、4、1、14、3、24、2、14、12、1、0、19。接下来，把明文消息分割成大小为3的5个块，也就是维度为3的5个列矩阵。

$$
v_{1}=\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right], v_{2}=\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right], v_{3}=\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right], v_{4}=\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right], v_{5}=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]
$$

第三步，将每个消息块和加密矩阵E相乘：

$$
E v_{1}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
320 \\
360 \\
467
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
8 \\
22 \\
25
\end{array}\right]
$$

$$

$$
E v_{2}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
157 \\
204 \\
283
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
1 \\
22 \\
23
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{3}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
180 \\
470 \\
691
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
24 \\
2 \\
15
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{4}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
360 \\
370 \\
458
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
22 \\
6 \\
16
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{5}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
25 \\
203 \\
305
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
25 \\
21 \\
19
\end{array}\right]
$$

最后，对照字母编码表得到密文：“IWZBWXBCGWGQZVT”。

B拿到这个密文后，使用三步来解密：

第一步，计算加密矩阵E的逆矩阵D：

$$
D \equiv\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]^{-1}(\bmod 26) \equiv\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]
$$

第二步，对照字母编码表得到数字，把它和解密矩阵D相乘，并和26进行模运算，得到相应结果。

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
8 \\

22 \\
25
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
424 \\
869 \\
632
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
1 \\
22 \\
23
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
348 \\
680 \\
469
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
24 \\
2 \\
15
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
352 \\
835 \\
648
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
22 \\
6 \\
16
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
366 \\
846 \\
662
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
25 \\
21 \\
19
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
495 \\
1092 \\
929
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]
$$

最后，B通过对照编码表，得到了原始明文：“ILIKEBODYCOMBAT”。

这里，你也许会问，密钥为什么用的是3×3的可逆矩阵？那是我为了例子方便而设置的，你完全可以设置更高阶的矩阵。就像之前说的，密钥的阶数越高，也就是n越大的话，破译的难度也就越大，所需要的计算量也就越大。

所以，从破译密码的角度来看，传统的密码有一个致命弱点，就是破译者可从统计出来的字符频率中找到规律，进而找出破译的突破口。尤其是在计算机技术高度发达的今天，破译的速度更快。而希尔密码算法则完全克服了这一缺陷，它通过采用线性代数中的矩阵乘法运算和逆运算，能够较好地抵抗频率分析，很难被攻破。

本节小结

这一节课的内容都和密码学有关，感觉像是搞谍战一样。但其实它的核心很简单，就是通过基础篇中学到的矩阵和逆矩阵的知识，来实现希尔密码。希尔密码的关键就是定义加密矩阵，或者说密钥、字母表排列方式和列矩阵的维度，通过线性变换将固定数量的明文字母转换为同样数量的密文字母，而解密则只要作一次逆变换就可以了。

当然，现实中还有更复杂的加密算法，其中最著名的，且用到线性代数的加密算法是AES，想必你平时也经常看到或用到过。AES是一个迭代的、对称密钥分组的密码，它可以使用128、192和256位密钥，并且用128、192和256位分组加密和解密数据，其中密钥长度与分组长度是独立的。

线性代数练习场

请你做一回"特工"，尝试使用希尔密码来给明文"MACHINELEARNING"做加密和解密。

> 提醒：你可以自行定义加密矩阵、字母表排列方式和列矩阵的维度。加密矩阵可以使用之前介绍的3×3可逆矩阵，也可以使用其它n×n的可逆矩阵。

欢迎在留言区晒出你的加密和解密过程，我会及时回复。同时，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友，一起讨论、学习。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天我要讲的内容是"如何通过有限向量空间加持的希尔密码，提高密码被破译的难度"。

这篇的内容会非常有趣，是和密码加密、解密有关的。不知道你有没有看过电影《模仿游戏》，故事描述的是阿兰·图灵在二战期间破译德军的恩尼格玛密码机（Enigma），很精彩，我看了很多遍。

不过电影毕竟是电影，有许多内容是不现实的，好在表达出来的破译恩尼格玛密码的核心观点是正确的。要破译一份被恩尼格玛机加密的密文，需要这三类信息：

1. 恩格玛机的工作原理及内部构造，包括每个转子的线路连接；
2. 德军对恩格玛机的操作守则；
3. 德军所使用的每日初始设置。恩格玛机的每日初始设置包含了三个信息：即转子的排列顺序、每个转子的初始位置，以及插线板的设置。这些信息被印刷在密码本上分发至德军全军，每24小时更换一次设置，每月更换一次密码本。

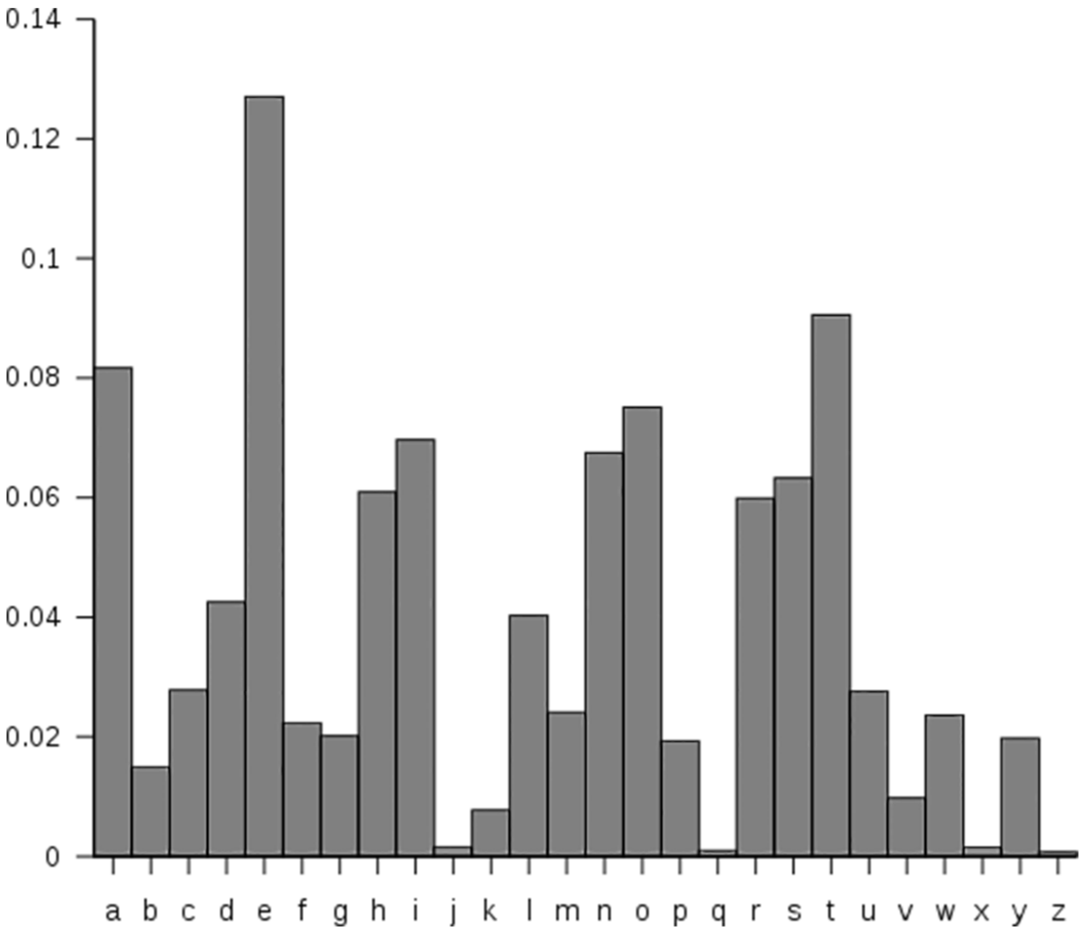
这些在电影里确实都交代了，我也不过多剧透了。其实，恩尼格玛密码机的本质就是**替换密码**。而今天我要讲的也是一种替换密码——希尔密码。因为我们专栏讲的是线性代数，所以，这篇应用我们会以矩阵论原理为基础，来进行讲解。

为什么需要希尔密码？

要讲密码，我们得先知道人们为什么需要它。

最古老、最原始的加密算法，会把明文的字母按照某种配对关系替换成其他的字母，从而得到一段别人看不懂的密文，许多谍战剧用到过这类方法。看起来，这个方法好像很难人为进行破解，但从语言和统计学角度看，它其实是漏洞百出的。

举个例子，在一篇普通英语文章中，各字母出现的概率有很大的不同。如果我们对足够多的文本进行分析，就可以统计出每一个字母在英文文本中出现的平均概率。



上面这张图来自维基百科，显示的是26个字母在普通的英文文本中出现的概率。

只要我们能够获取足够长的密文进行分析的话，通过字母出现的频率，我们同样能够猜到相应的原始字母，这并不安全。所以，随着安全性需求的提高，人们有必要寻找一种容易将字母的自然频度隐蔽或均匀化，并使得统计分析足够安全可靠的加密方法。而希尔密码能基本满足这一要求，那么希尔密码是怎么做到这一点的呢？

希尔密码原理

我们先来看一下希尔密码的原理。根据百度百科的定义，希尔密码（Hill Cipher）是运用基本矩阵论原理的替换密码，由Lester S. Hill在1929年发明。每个字母当作26进制数字：A=0，B=1，C=2…，把一串字母当成n维向量，和一个$n×n$的矩阵相乘，再将得出的结果和26进行模运算。

所以，希尔加密算法的基本思想是，通过线性变换将固定数量的明文字母转换为同样数量的密文字母，解密只要作一次逆变换就可以了，而密钥就是变换矩阵本身。

现在，我们再通过数学的方式来表达一下，希尔密码是如何通过三步来实现加密的。

第一步，设置加密矩阵E。

第二步，对照字母编码表（自行设定）得到数字，并把明文消息分割成大小为n的多个块：$v_{1},v_{2},…$，并且忽略空格。这里之所以忽略空格，是因为一般情况下密码传递的信息不会过于复杂。如果密码过于复杂，是可以分多次传递的。这里的n表示的密钥的阶数，密钥的阶数越高，也就是n越大的话，破译的难度也就越大，所需要的计算量也就越大。

第三步，每个消息块和加密矩阵E相乘：$Ev_{1}, Ev_{2},…$，并和26进行模运算，最后对照字母编码表得到密文。

同样，我们把这三步倒过来，就能实现解密了。

第一步，计算加密矩阵E的逆矩阵$D \equiv E^{-1}(\bmod 26)$。

第二步，对照字母编码表得到数字，把它和解密矩阵D相乘，并和26进行模运算。

第三步，对照编码表，得到原始明文。

这里你需要注意的是，加密矩阵很关键，它就是我们通常意义上所说的"密钥"，也就是打开密码的钥匙。

通过前面讲解的加密解密步骤，我们可以看出，希尔密码之所以很难被破译，是因为它设置了三道关卡：

1. 列矩阵的维度未知；
2. 对应字母表的排列未知；
3. 加密矩阵（或者说密钥）未知。

想要破解希尔密码，就需要同时获取到通过这三道关卡的钥匙，这谈何容易。

希尔密码实例

好了，原理都讲完了，现在我们通过一个例子来实际地看下希尔密码加密和解密的过程。

假设：A和B双方有一条重要消息要沟通，双方很早就建立了密钥沟通机制，每过一段时间都会更新密钥。在这次的密钥更新周期中，正确的密钥，也就是加密矩阵是一个3×3矩阵。

$$
E=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]
$$

这一次A要给B的消息是"ILIKEBODYCOMBAT"，我们用之前的三步在A方先来加密：

第一步，定义加密矩阵，也就是刚才的E矩阵。

字母编码表

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

第二步，对照字母编码表得到数字：8、11、8、10、4、1、14、3、24、2、14、12、1、0、19。接下来，把明文消息分割成大小为3的5个块，也就是维度为3的5个列矩阵。

$$
v_{1}=\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right], v_{2}=\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right], v_{3}=\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right], v_{4}=\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right], v_{5}=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]
$$

第三步，将每个消息块和加密矩阵E相乘：

$$
E v_{1}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
320 \\
360 \\
467
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
8 \\
22 \\
25
\end{array}\right]
$$

$$

$$
E v_{2}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
157 \\
204 \\
283
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
1 \\
22 \\
23
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{3}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
180 \\
470 \\
691
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
24 \\
2 \\
15
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{4}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
360 \\
370 \\
458
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
22 \\
6 \\
16
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{5}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
25 \\
203 \\
305
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
25 \\
21 \\
19
\end{array}\right]
$$

最后，对照字母编码表得到密文：“IWZBWXBCGWGQZVT”。

B拿到这个密文后，使用三步来解密：

第一步，计算加密矩阵E的逆矩阵D：

$$
D \equiv\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]^{-1}(\bmod 26) \equiv\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]
$$

第二步，对照字母编码表得到数字，把它和解密矩阵D相乘，并和26进行模运算，得到相应结果。

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
8 \\

22 \\
25
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
424 \\
869 \\
632
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
1 \\
22 \\
23
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
348 \\
680 \\
469
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
24 \\
2 \\
15
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
352 \\
835 \\
648
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
22 \\
6 \\
16
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
366 \\
846 \\
662
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
25 \\
21 \\
19
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
495 \\
1092 \\
929
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]
$$

最后，B通过对照编码表，得到了原始明文：“ILIKEBODYCOMBAT”。

这里，你也许会问，密钥为什么用的是3×3的可逆矩阵？那是我为了例子方便而设置的，你完全可以设置更高阶的矩阵。就像之前说的，密钥的阶数越高，也就是n越大的话，破译的难度也就越大，所需要的计算量也就越大。

所以，从破译密码的角度来看，传统的密码有一个致命弱点，就是破译者可从统计出来的字符频率中找到规律，进而找出破译的突破口。尤其是在计算机技术高度发达的今天，破译的速度更快。而希尔密码算法则完全克服了这一缺陷，它通过采用线性代数中的矩阵乘法运算和逆运算，能够较好地抵抗频率分析，很难被攻破。

本节小结

这一节课的内容都和密码学有关，感觉像是搞谍战一样。但其实它的核心很简单，就是通过基础篇中学到的矩阵和逆矩阵的知识，来实现希尔密码。希尔密码的关键就是定义加密矩阵，或者说密钥、字母表排列方式和列矩阵的维度，通过线性变换将固定数量的明文字母转换为同样数量的密文字母，而解密则只要作一次逆变换就可以了。

当然，现实中还有更复杂的加密算法，其中最著名的，且用到线性代数的加密算法是AES，想必你平时也经常看到或用到过。AES是一个迭代的、对称密钥分组的密码，它可以使用128、192和256位密钥，并且用128、192和256位分组加密和解密数据，其中密钥长度与分组长度是独立的。

线性代数练习场

请你做一回"特工"，尝试使用希尔密码来给明文"MACHINELEARNING"做加密和解密。

> 提醒：你可以自行定义加密矩阵、字母表排列方式和列矩阵的维度。加密矩阵可以使用之前介绍的3×3可逆矩阵，也可以使用其它n×n的可逆矩阵。

欢迎在留言区晒出你的加密和解密过程，我会及时回复。同时，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友，一起讨论、学习。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天我要讲的内容是"如何通过有限向量空间加持的希尔密码，提高密码被破译的难度"。

这篇的内容会非常有趣，是和密码加密、解密有关的。不知道你有没有看过电影《模仿游戏》，故事描述的是阿兰·图灵在二战期间破译德军的恩尼格玛密码机（Enigma），很精彩，我看了很多遍。

不过电影毕竟是电影，有许多内容是不现实的，好在表达出来的破译恩尼格玛密码的核心观点是正确的。要破译一份被恩尼格玛机加密的密文，需要这三类信息：

1. 恩格玛机的工作原理及内部构造，包括每个转子的线路连接；
2. 德军对恩格玛机的操作守则；
3. 德军所使用的每日初始设置。恩格玛机的每日初始设置包含了三个信息：即转子的排列顺序、每个转子的初始位置，以及插线板的设置。这些信息被印刷在密码本上分发至德军全军，每24小时更换一次设置，每月更换一次密码本。

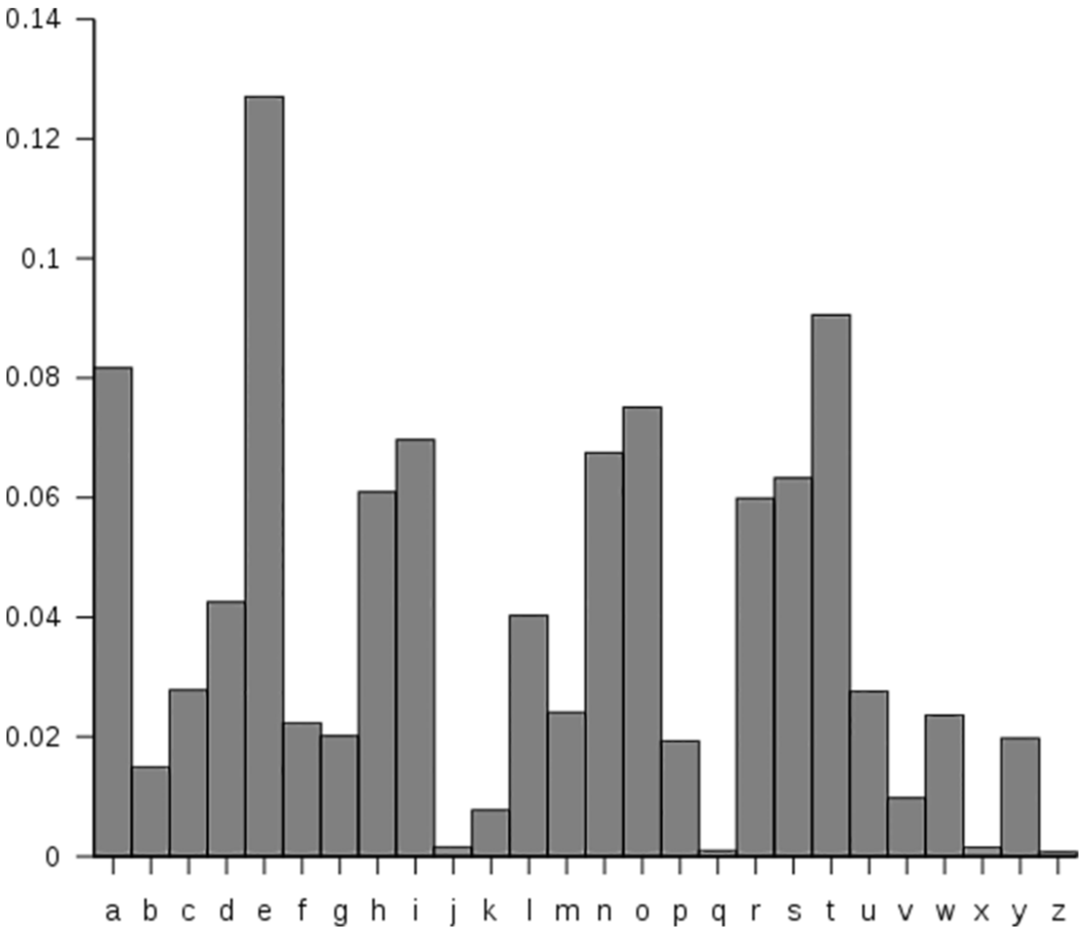
这些在电影里确实都交代了，我也不过多剧透了。其实，恩尼格玛密码机的本质就是**替换密码**。而今天我要讲的也是一种替换密码——希尔密码。因为我们专栏讲的是线性代数，所以，这篇应用我们会以矩阵论原理为基础，来进行讲解。

为什么需要希尔密码？

要讲密码，我们得先知道人们为什么需要它。

最古老、最原始的加密算法，会把明文的字母按照某种配对关系替换成其他的字母，从而得到一段别人看不懂的密文，许多谍战剧用到过这类方法。看起来，这个方法好像很难人为进行破解，但从语言和统计学角度看，它其实是漏洞百出的。

举个例子，在一篇普通英语文章中，各字母出现的概率有很大的不同。如果我们对足够多的文本进行分析，就可以统计出每一个字母在英文文本中出现的平均概率。



上面这张图来自维基百科，显示的是26个字母在普通的英文文本中出现的概率。

只要我们能够获取足够长的密文进行分析的话，通过字母出现的频率，我们同样能够猜到相应的原始字母，这并不安全。所以，随着安全性需求的提高，人们有必要寻找一种容易将字母的自然频度隐蔽或均匀化，并使得统计分析足够安全可靠的加密方法。而希尔密码能基本满足这一要求，那么希尔密码是怎么做到这一点的呢？

希尔密码原理

我们先来看一下希尔密码的原理。根据百度百科的定义，希尔密码（Hill Cipher）是运用基本矩阵论原理的替换密码，由Lester S. Hill在1929年发明。每个字母当作26进制数字：A=0，B=1，C=2…，把一串字母当成n维向量，和一个$n×n$的矩阵相乘，再将得出的结果和26进行模运算。

所以，希尔加密算法的基本思想是，通过线性变换将固定数量的明文字母转换为同样数量的密文字母，解密只要作一次逆变换就可以了，而密钥就是变换矩阵本身。

现在，我们再通过数学的方式来表达一下，希尔密码是如何通过三步来实现加密的。

第一步，设置加密矩阵E。

第二步，对照字母编码表（自行设定）得到数字，并把明文消息分割成大小为n的多个块：$v_{1},v_{2},…$，并且忽略空格。这里之所以忽略空格，是因为一般情况下密码传递的信息不会过于复杂。如果密码过于复杂，是可以分多次传递的。这里的n表示的密钥的阶数，密钥的阶数越高，也就是n越大的话，破译的难度也就越大，所需要的计算量也就越大。

第三步，每个消息块和加密矩阵E相乘：$Ev_{1}, Ev_{2},…$，并和26进行模运算，最后对照字母编码表得到密文。

同样，我们把这三步倒过来，就能实现解密了。

第一步，计算加密矩阵E的逆矩阵$D \equiv E^{-1}(\bmod 26)$。

第二步，对照字母编码表得到数字，把它和解密矩阵D相乘，并和26进行模运算。

第三步，对照编码表，得到原始明文。

这里你需要注意的是，加密矩阵很关键，它就是我们通常意义上所说的“密钥”，也就是打开密码的钥匙。

通过前面讲解的加密解密步骤，我们可以看出，希尔密码之所以很难被破译，是因为它设置了三道关卡：

1. 列矩阵的维度未知；
2. 对应字母表的排列未知；
3. 加密矩阵（或者说密钥）未知。

想要破解希尔密码，就需要同时获取到通过这三道关卡的钥匙，这谈何容易。

希尔密码实例

好了，原理都讲完了，现在我们通过一个例子来实际地看下希尔密码加密和解密的过程。

假设：A和B双方有一条重要消息要沟通，双方很早就建立了密钥沟通机制，每过一段时间都会更新密钥。在这次的密钥更新周期中，正确的密钥，也就是加密矩阵是一个3×3矩阵。

$$
E=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]
$$

这一次A要给B的消息是“ILIKEBODYCOMBAT”，我们用之前的三步在A方先来加密：

第一步，定义加密矩阵，也就是刚才的E矩阵。

字母编码表

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

第二步，对照字母编码表得到数字：8、11、8、10、4、1、14、3、24、2、14、12、1、0、19。接下来，把明文消息分割成大小为3的5个块，也就是维度为3的5个列矩阵。

$$
v_{1}=\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right], v_{2}=\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right], v_{3}=\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right], v_{4}=\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right], v_{5}=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]
$$

第三步，将每个消息块和加密矩阵E相乘：

$$
E v_{1}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
320 \\
360 \\
467
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
8 \\
22 \\
25
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{2}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
157 \\
204 \\
283
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
1 \\
22 \\
23
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{3}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
180 \\
470 \\
691
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
24 \\
2 \\
15
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{4}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
360 \\
370 \\
458
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
22 \\
6 \\
16
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{5}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
25 \\
203 \\
305
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
25 \\
21 \\
19
\end{array}\right]
$$

最后，对照字母编码表得到密文：“IWZBWXBCGWGQZVT”。

B拿到这个密文后，使用三步来解密：

第一步，计算加密矩阵E的逆矩阵D：

$$
D \equiv\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]^{-1}(\bmod 26) \equiv\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]
$$

第二步，对照字母编码表得到数字，把它和解密矩阵D相乘，并和26进行模运算，得到相应结果。

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
8 \\
$$

22 \\
25
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
424 \\
869 \\
632
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
1 \\
22 \\
23
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
348 \\
680 \\
469
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
24 \\
2 \\
15
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
352 \\
835 \\
648
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
22 \\
6 \\
16
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
366 \\
846 \\
662
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
25 \\
21 \\
19
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
495 \\
1092 \\
929
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]
$$

最后，B通过对照编码表，得到了原始明文：“ILIKEBODYCOMBAT”。

这里，你也许会问，密钥为什么用的是3×3的可逆矩阵？那是我为了例子方便而设置的，你完全可以设置更高阶的矩阵。就像之前说的，密钥的阶数越高，也就是n越大的话，破译的难度也就越大，所需要的计算量也就越大。

所以，从破译密码的角度来看，传统的密码有一个致命弱点，就是破译者可从统计出来的字符频率中找到规律，进而找出破译的突破口。尤其是在计算机技术高度发达的今天，破译的速度更快。而希尔密码算法则完全克服了这一缺陷，它通过采用线性代数中的矩阵乘法运算和逆运算，能够较好地抵抗频率分析，很难被攻破。

本节小结

这一节课的内容都和密码学有关，感觉像是搞谍战一样。但其实它的核心很简单，就是通过基础篇中学到的矩阵和逆矩阵的知识，来实现希尔密码。希尔密码的关键就是定义加密矩阵，或者说密钥、字母表排列方式和列矩阵的维度，通过线性变换将固定数量的明文字母转换为同样数量的密文字母，而解密则只要作一次逆变换就可以了。

当然，现实中还有更复杂的加密算法，其中最著名的，且用到线性代数的加密算法是AES，想必你平时也经常看到或用到过。AES是一个迭代的、对称密钥分组的密码，它可以使用128、192和256位密钥，并且用128、192和256位分组加密和解密数据，其中密钥长度与分组长度是独立的。

线性代数练习场

请你做一回“特工”，尝试使用希尔密码来给明文“MACHINELEARNING”做加密和解密。

> 提醒：你可以自行定义加密矩阵、字母表排列方式和列矩阵的维度。加密矩阵可以使用之前介绍的3×3可逆矩阵，也可以使用其它n×n的可逆矩阵。

欢迎在留言区晒出你的加密和解密过程，我会及时回复。同时，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友，一起讨论、学习。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天我要讲的内容是“如何通过有限向量空间加持的希尔密码，提高密码被破译的难度”。

这篇的内容会非常有趣，是和密码加密、解密有关的。不知道你有没有看过电影《模仿游戏》，故事描述的是阿兰·图灵在二战期间破译德军的恩尼格玛密码机（Enigma），很精彩，我看了很多遍。

不过电影毕竟是电影，有许多内容是不现实的，好在表达出来的破译恩尼格玛密码的核心观点是正确的。要破译一份被恩尼格玛机加密的密文，需要这三类信息：

1. 恩格玛机的工作原理及内部构造，包括每个转子的线路连接；
2. 德军对恩格玛机的操作守则；
3. 德军所使用的每日初始设置。恩格玛机的每日初始设置包含了三个信息：即转子的排列顺序、每个转子的初始位置，以及插线板的设置。这些信息被印刷在密码本上分发至德军全军，每24小时更换一次设置，每月更换一次密码本。

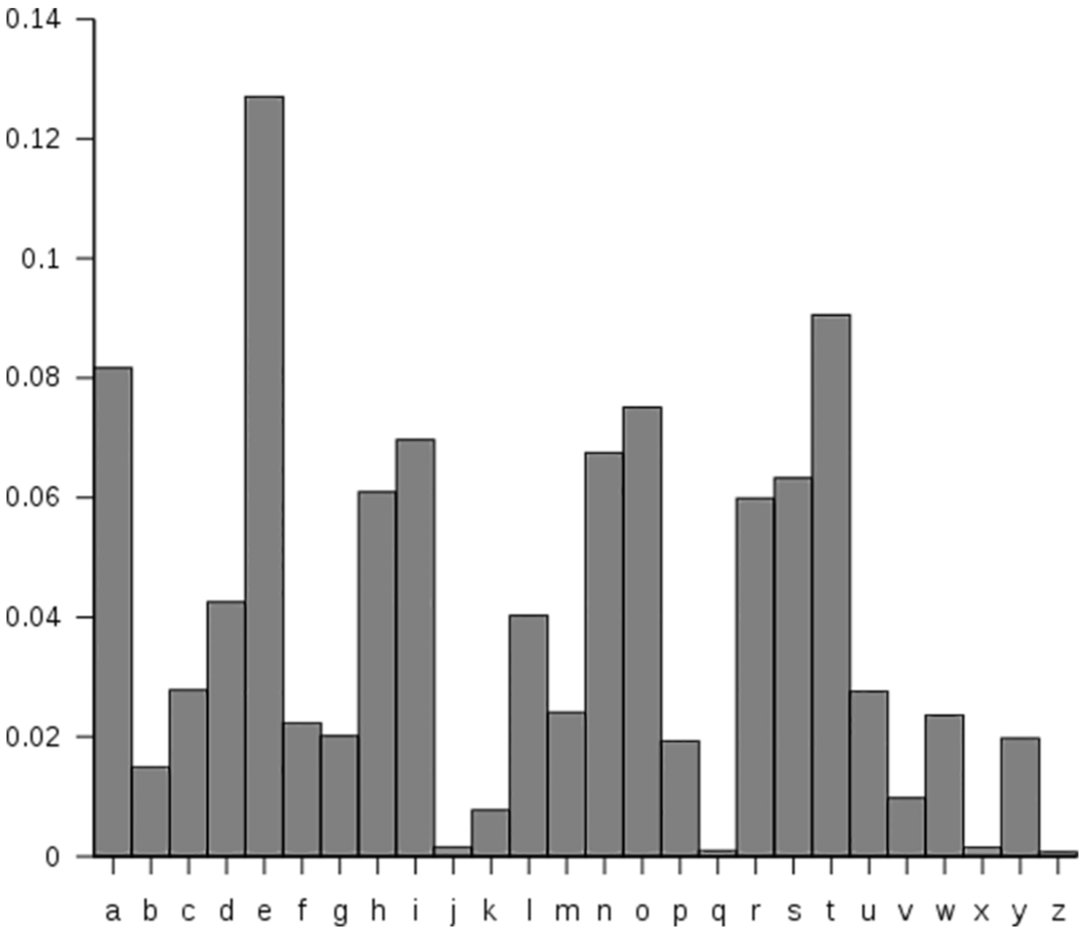
这些在电影里确实都交代了，我也不过多剧透了。其实，恩尼格玛密码机的本质就是**替换密码**。而今天我要讲的也是一种替换密码——希尔密码。因为我们专栏讲的是线性代数，所以，这篇应用我们会以矩阵论原理为基础，来进行讲解。

为什么需要希尔密码？

要讲密码，我们得先知道人们为什么需要它。

最古老、最原始的加密算法，会把明文的字母按照某种配对关系替换成其他的字母，从而得到一段别人看不懂的密文，许多谍战剧用到过这类方法。看起来，这个方法好像很难人为进行破解，但从语言和统计学角度看，它其实是漏洞百出的。

举个例子，在一篇普通英语文章中，各字母出现的概率有很大的不同。如果我们对足够多的文本进行分析，就可以统计出每一个字母在英文文本中出现的平均概率。



上面这张图来自维基百科，显示的是26个字母在普通的英文文本中出现的概率。

只要我们能够获取足够长的密文进行分析的话，通过字母出现的频率，我们同样能够猜到相应的原始字母，这并不安全。所以，随着安全性需求的提高，人们有必要寻找一种容易将字母的自然频度隐蔽或均匀化，并使得统计分析足够安全可靠的加密方法。而希尔密码能基本满足这一要求，那么希尔密码是怎么做到这一点的呢？

希尔密码原理

我们先来看一下希尔密码的原理。根据百度百科的定义，希尔密码（Hill Cipher）是运用基本矩阵论原理的替换密码，由Lester S. Hill在1929年发明。每个字母当作26进制数字：A=0，B=1，C=2…，把一串字母当成n维向量，和一个$n\times n$的矩阵相乘，再将得出的结果和26进行模运算。

所以，希尔加密算法的基本思想是，通过线性变换将固定数量的明文字母转换为同样数量的密文字母，解密只要作一次逆变换就可以了，而密钥就是变换矩阵本身。

现在，我们再通过数学的方式来表达一下，希尔密码是如何通过三步来实现加密的。

第一步，设置加密矩阵E。

第二步，对照字母编码表（自行设定）得到数字，并把明文消息分割成大小为n的多个块：$v_{1},v_{2},\ldots$，并且忽略空格。这里之所以忽略空格，是因为一般情况下密码传递的信息不会过于复杂。如果密码过于复杂，是可以分多次传递的。这里的n表示的密钥的阶数，密钥的阶数越高，也就是n越大的话，破译的难度也就越大，所需要的计算量也就越大。

第三步，每个消息块和加密矩阵E相乘：$Ev_{1}, Ev_{2},\ldots$，并和26进行模运算，最后对照字母编码表得到密文。

同样，我们把这三步倒过来，就能实现解密了。

第一步，计算加密矩阵E的逆矩阵$D \equiv E^{-1}(\bmod 26)$。

第二步，对照字母编码表得到数字，把它和解密矩阵D相乘，并和26进行模运算。

第三步，对照编码表，得到原始明文。

这里你需要注意的是，加密矩阵很关键，它就是我们通常意义上所说的“密钥”，也就是打开密码的钥匙。

通过前面讲解的加密解密步骤，我们可以看出，希尔密码之所以很难被破译，是因为它设置了三道关卡：

1. 列矩阵的维度未知；
2. 对应字母表的排列未知；
3. 加密矩阵（或者说密钥）未知。

想要破解希尔密码，就需要同时获取到通过这三道关卡的钥匙，这谈何容易。

希尔密码实例

好了，原理都讲完了，现在我们通过一个例子来实际地看下希尔密码加密和解密的过程。

假设：A和B双方有一条重要消息要沟通，双方很早就建立了密钥沟通机制，每过一段时间都会更新密钥。在这次的密钥更新周期中，正确的密钥，也就是加密矩阵是一个3×3矩阵。

$$
E=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]
$$

这一次A要给B的消息是“ILIKEBODYCOMBAT”，我们用之前的三步在A方先来加密：

第一步，定义加密矩阵，也就是刚才的E矩阵。

字母编码表

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

第二步，对照字母编码表得到数字：8、11、8、10、4、1、14、3、24、2、14、12、1、0、19。接下来，把明文消息分割成大小为3的5个块，也就是维度为3的5个列矩阵。

$$
v_{1}=\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right], v_{2}=\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right], v_{3}=\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right], v_{4}=\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right], v_{5}=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]
$$

第三步，将每个消息块和加密矩阵E相乘：

$$
E v_{1}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
320 \\
360 \\
467
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
8 \\
22 \\
25
\end{array}\right]
$$

$$

$$
E v_{2}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
157 \\
204 \\
283
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
1 \\
22 \\
23
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{3}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
180 \\
470 \\
691
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
24 \\
2 \\
15
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{4}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
360 \\
370 \\
458
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
22 \\
6 \\
16
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{5}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
25 \\
203 \\
305
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
25 \\
21 \\
19
\end{array}\right]
$$

最后，对照字母编码表得到密文：“IWZBWXBCGWGQZVT”。

B拿到这个密文后，使用三步来解密：

第一步，计算加密矩阵E的逆矩阵D：

$$
D \equiv\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]^{-1}(\bmod 26) \equiv\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]
$$

第二步，对照字母编码表得到数字，把它和解密矩阵D相乘，并和26进行模运算，得到相应结果。

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
8 \\

22 \\
25
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
424 \\
869 \\
632
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
1 \\
22 \\
23
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
348 \\
680 \\
469
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
24 \\
2 \\
15
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
352 \\
835 \\
648
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
22 \\
6 \\
16
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
366 \\
846 \\
662
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
25 \\
21 \\
19
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
495 \\
1092 \\
929
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]
$$

最后，B通过对照编码表，得到了原始明文：“ILIKEBODYCOMBAT”。

这里，你也许会问，密钥为什么用的是3×3的可逆矩阵？那是我为了例子方便而设置的，你完全可以设置更高阶的矩阵。就像之前说的，密钥的阶数越高，也就是n越大的话，破译的难度也就越大，所需要的计算量也就越大。

所以，从破译密码的角度来看，传统的密码有一个致命弱点，就是破译者可从统计出来的字符频率中找到规律，进而找出破译的突破口。尤其是在计算机技术高度发达的今天，破译的速度更快。而希尔密码算法则完全克服了这一缺陷，它通过采用线性代数中的矩阵乘法运算和逆运算，能够较好地抵抗频率分析，很难被攻破。

本节小结

这一节课的内容都和密码学有关，感觉像是搞谍战一样。但其实它的核心很简单，就是通过基础篇中学到的矩阵和逆矩阵的知识，来实现希尔密码。希尔密码的关键就是定义加密矩阵，或者说密钥、字母表排列方式和列矩阵的维度，通过线性变换将固定数量的明文字母转换为同样数量的密文字母，而解密则只要作一次逆变换就可以了。

当然，现实中还有更复杂的加密算法，其中最著名的，且用到线性代数的加密算法是AES，想必你平时也经常看到或用到过。AES是一个迭代的、对称密钥分组的密码，它可以使用128、192和256位密钥，并且用128、192和256位分组加密和解密数据，其中密钥长度与分组长度是独立的。

线性代数练习场

请你做一回"特工"，尝试使用希尔密码来给明文"MACHINELEARNING"做加密和解密。

> 提醒：你可以自行定义加密矩阵、字母表排列方式和列矩阵的维度。加密矩阵可以使用之前介绍的3×3可逆矩阵，也可以使用其它n×n的可逆矩阵。

欢迎在留言区晒出你的加密和解密过程，我会及时回复。同时，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友，一起讨论、学习。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天我要讲的内容是"如何通过有限向量空间加持的希尔密码，提高密码被破译的难度"。

这篇的内容会非常有趣，是和密码加密、解密有关的。不知道你有没有看过电影《模仿游戏》，故事描述的是阿兰·图灵在二战期间破译德军的恩尼格玛密码机（Enigma），很精彩，我看了很多遍。

不过电影毕竟是电影，有许多内容是不现实的，好在表达出来的破译恩尼格玛密码的核心观点是正确的。要破译一份被恩尼格玛机加密的密文，需要这三类信息：

1. 恩格玛机的工作原理及内部构造，包括每个转子的线路连接；
2. 德军对恩格玛机的操作守则；
3. 德军所使用的每日初始设置。恩格玛机的每日初始设置包含了三个信息：即转子的排列顺序、每个转子的初始位置，以及插线板的设置。这些信息被印刷在密码本上分发至德军全军，每24小时更换一次设置，每月更换一次密码本。

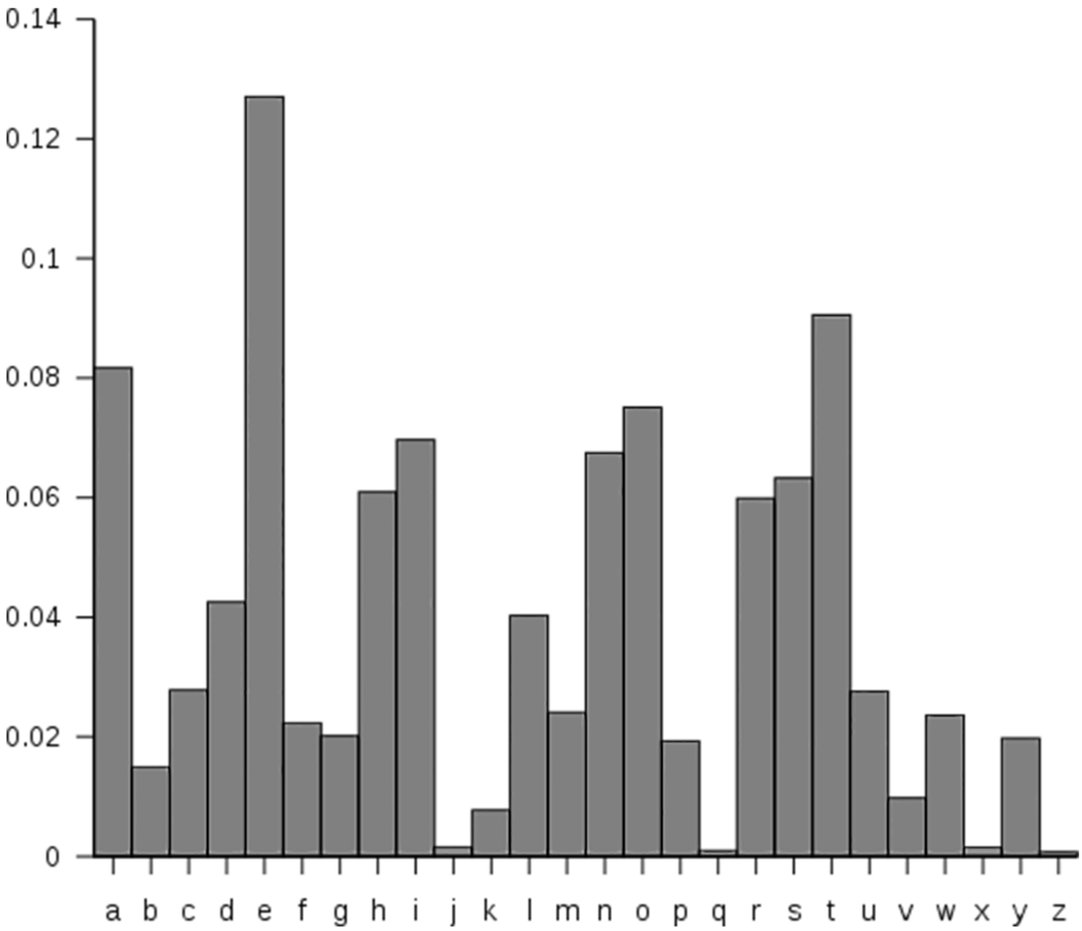
这些在电影里确实都交代了，我也不过多剧透了。其实，恩尼格玛密码机的本质就是**替换密码**。而今天我要讲的也是一种替换密码——希尔密码。因为我们专栏讲的是线性代数，所以，这篇应用我们会以矩阵论原理为基础，来进行讲解。

为什么需要希尔密码？

要讲密码，我们得先知道人们为什么需要它。

最古老、最原始的加密算法，会把明文的字母按照某种配对关系替换成其他的字母，从而得到一段别人看不懂的密文，许多谍战剧用到过这类方法。看起来，这个方法好像很难人为进行破解，但从语言和统计学角度看，它其实是漏洞百出的。

举个例子，在一篇普通英语文章中，各字母出现的概率有很大的不同。如果我们对足够多的文本进行分析，就可以统计出每一个字母在英文文本中出现的平均概率。



上面这张图来自维基百科，显示的是26个字母在普通的英文文本中出现的概率。

只要我们能够获取足够长的密文进行分析的话，通过字母出现的频率，我们同样能够猜到相应的原始字母，这并不安全。所以，随着安全性需求的提高，人们有必要寻找一种容易将字母的自然频度隐蔽或均匀化，并使得统计分析足够安全可靠的加密方法。而希尔密码能基本满足这一要求，那么希尔密码是怎么做到这一点的呢？

希尔密码原理

我们先来看一下希尔密码的原理。根据百度百科的定义，希尔密码（Hill Cipher）是运用基本矩阵论原理的替换密码，由Lester S. Hill在1929年发明。每个字母当作26进制数字：A=0，B=1，C=2…，把一串字母当成n维向量，和一个$n×n$的矩阵相乘，再将得出的结果和26进行模运算。

所以，希尔加密算法的基本思想是，通过线性变换将固定数量的明文字母转换为同样数量的密文字母，解密只要作一次逆变换就可以了，而密钥就是变换矩阵本身。

现在，我们再通过数学的方式来表达一下，希尔密码是如何通过三步来实现加密的。

第一步，设置加密矩阵E。

第二步，对照字母编码表（自行设定）得到数字，并把明文消息分割成大小为n的多个块：$v_{1},v_{2},…$，并且忽略空格。这里之所以忽略空格，是因为一般情况下密码传递的信息不会过于复杂。如果密码过于复杂，是可以分多次传递的。这里的n表示的密钥的阶数，密钥的阶数越高，也就是n越大的话，破译的难度也就越大，所需要的计算量也就越大。

第三步，每个消息块和加密矩阵E相乘：$Ev_{1}, Ev_{2},…$，并和26进行模运算，最后对照字母编码表得到密文。

同样，我们把这三步倒过来，就能实现解密了。

第一步，计算加密矩阵E的逆矩阵$D \equiv E^{-1}(\bmod 26)$。

第二步，对照字母编码表得到数字，把它和解密矩阵D相乘，并和26进行模运算。

第三步，对照编码表，得到原始明文。

这里你需要注意的是，加密矩阵很关键，它就是我们通常意义上所说的“密钥”，也就是打开密码的钥匙。

通过前面讲解的加密解密步骤，我们可以看出，希尔密码之所以很难被破译，是因为它设置了三道关卡：

1. 列矩阵的维度未知；
2. 对应字母表的排列未知；
3. 加密矩阵（或者说密钥）未知。

想要破解希尔密码，就需要同时获取到通过这三道关卡的钥匙，这谈何容易。

希尔密码实例

好了，原理都讲完了，现在我们通过一个例子来实际地看下希尔密码加密和解密的过程。

假设：A和B双方有一条重要消息要沟通，双方很早就建立了密钥沟通机制，每过一段时间都会更新密钥。在这次的密钥更新周期中，正确的密钥，也就是加密矩阵是一个3×3矩阵。

$$
E=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]
$$

这一次A要给B的消息是“ILIKEBODYCOMBAT”，我们用之前的三步在A方先来加密：

第一步，定义加密矩阵，也就是刚才的E矩阵。

字母编码表

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

第二步，对照字母编码表得到数字：8、11、8、10、4、1、14、3、24、2、14、12、1、0、19。接下来，把明文消息分割成大小为3的5个块，也就是维度为3的5个列矩阵。

$$
v_{1}=\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right], v_{2}=\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right], v_{3}=\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right], v_{4}=\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right], v_{5}=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]
$$

第三步，将每个消息块和加密矩阵E相乘：

$$
E v_{1}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
320 \\
360 \\
467
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
8 \\
22 \\
25
\end{array}\right]
$$

$$

E v_{2}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
157 \\
204 \\
283
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
1 \\
22 \\
23
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{3}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
180 \\
470 \\
691
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
24 \\
2 \\
15
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{4}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
360 \\
370 \\
458
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
22 \\
6 \\
16
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{5}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
25 \\
203 \\
305
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
25 \\
21 \\
19
\end{array}\right]
$$

最后，对照字母编码表得到密文：“IWZBWXBCGWGQZVT”。

B拿到这个密文后，使用三步来解密：

第一步，计算加密矩阵E的逆矩阵D：

$$
D \equiv\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]^{-1}(\bmod 26) \equiv\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]
$$

第二步，对照字母编码表得到数字，把它和解密矩阵D相乘，并和26进行模运算，得到相应结果。

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
8 \\

22 \\
25
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
424 \\
869 \\
632
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
1 \\
22 \\
23
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
348 \\
680 \\
469
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
24 \\
2 \\
15
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
352 \\
835 \\
648
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
22 \\
6 \\
16
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
366 \\
846 \\
662
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
25 \\
21 \\
19
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
495 \\
1092 \\
929
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]
$$

最后，B通过对照编码表，得到了原始明文：“ILIKEBODYCOMBAT”。

这里，你也许会问，密钥为什么用的是3×3的可逆矩阵？那是我为了例子方便而设置的，你完全可以设置更高阶的矩阵。就像之前说的，密钥的阶数越高，也就是n越大的话，破译的难度也就越大，所需要的计算量也就越大。

所以，从破译密码的角度来看，传统的密码有一个致命弱点，就是破译者可从统计出来的字符频率中找到规律，进而找出破译的突破口。尤其是在计算机技术高度发达的今天，破译的速度更快。而希尔密码算法则完全克服了这一缺陷，它通过采用线性代数中的矩阵乘法运算和逆运算，能够较好地抵抗频率分析，很难被攻破。

本节小结

这一节课的内容都和密码学有关，感觉像是搞谍战一样。但其实它的核心很简单，就是通过基础篇中学到的矩阵和逆矩阵的知识，来实现希尔密码。希尔密码的关键就是定义加密矩阵，或者说密钥、字母表排列方式和列矩阵的维度，通过线性变换将固定数量的明文字母转换为同样数量的密文字母，而解密则只要作一次逆变换就可以了。

当然，现实中还有更复杂的加密算法，其中最著名的，且用到线性代数的加密算法是AES，想必你平时也经常看到或用到过。AES是一个迭代的、对称密钥分组的密码，它可以使用128、192和256位密钥，并且用128、192和256位分组加密和解密数据，其中密钥长度与分组长度是独立的。

线性代数练习场

请你做一回"特工"，尝试使用希尔密码来给明文"MACHINELEARNING"做加密和解密。

> 提醒：你可以自行定义加密矩阵、字母表排列方式和列矩阵的维度。加密矩阵可以使用之前介绍的3×3可逆矩阵，也可以使用其它n×n的可逆矩阵。

欢迎在留言区晒出你的加密和解密过程，我会及时回复。同时，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友，一起讨论、学习。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天我要讲的内容是"如何通过有限向量空间加持的希尔密码，提高密码被破译的难度"。

这篇的内容会非常有趣，是和密码加密、解密有关的。不知道你有没有看过电影《模仿游戏》，故事描述的是阿兰·图灵在二战期间破译德军的恩尼格玛密码机（Enigma），很精彩，我看了很多遍。

不过电影毕竟是电影，有许多内容是不现实的，好在表达出来的破译恩尼格玛密码的核心观点是正确的。要破译一份被恩尼格玛机加密的密文，需要这三类信息：

1. 恩格玛机的工作原理及内部构造，包括每个转子的线路连接；
2. 德军对恩格玛机的操作守则；
3. 德军所使用的每日初始设置。恩格玛机的每日初始设置包含了三个信息：即转子的排列顺序、每个转子的初始位置，以及插线板的设置。这些信息被印刷在密码本上分发至德军全军，每24小时更换一次设置，每月更换一次密码本。

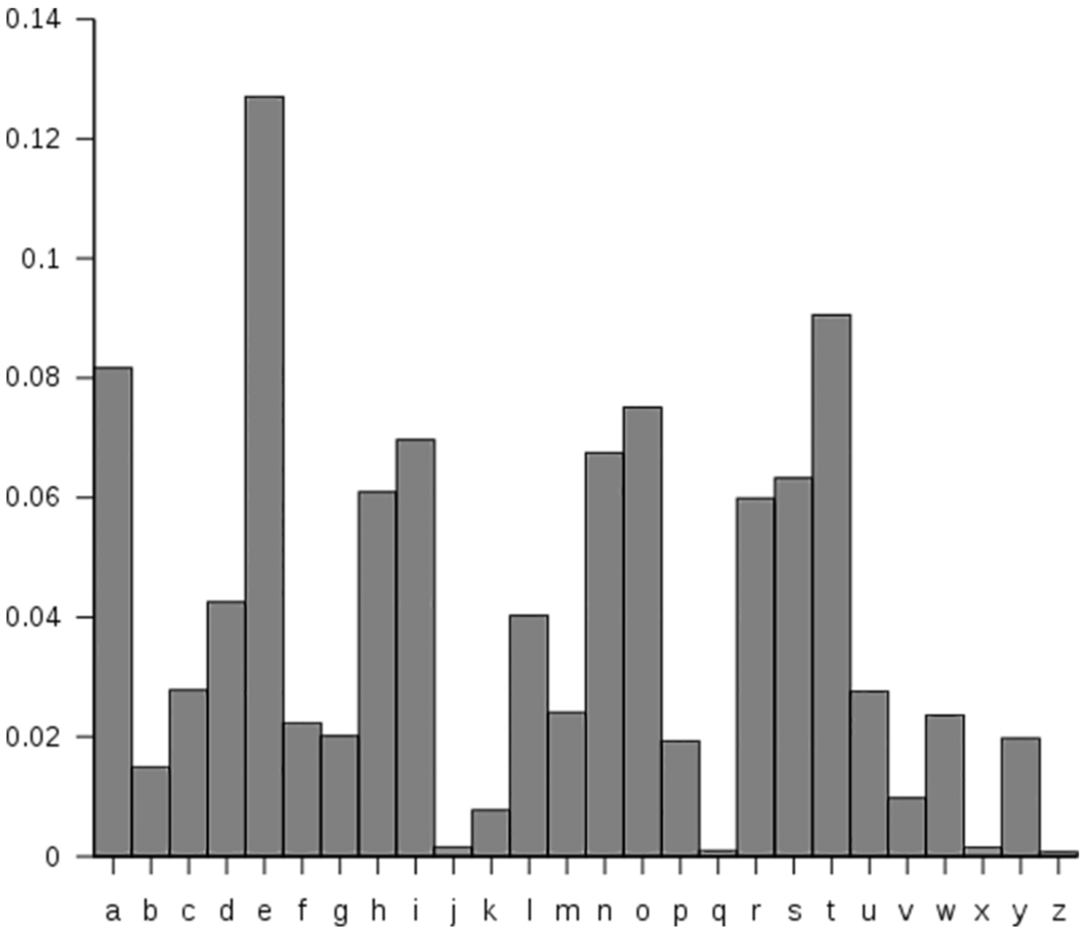
这些在电影里确实都交代了，我也不过多剧透了。其实，恩尼格玛密码机的本质就是**替换密码**。而今天我要讲的也是一种替换密码——希尔密码。因为我们专栏讲的是线性代数，所以，这篇应用我们会以矩阵论原理为基础，来进行讲解。

为什么需要希尔密码？

要讲密码，我们得先知道人们为什么需要它。

最古老、最原始的加密算法，会把明文的字母按照某种配对关系替换成其他的字母，从而得到一段别人看不懂的密文，许多谍战剧用到过这类方法。看起来，这个方法好像很难人为进行破解，但从语言和统计学角度看，它其实是漏洞百出的。

举个例子，在一篇普通英语文章中，各字母出现的概率有很大的不同。如果我们对足够多的文本进行分析，就可以统计出每一个字母在英文文本中出现的平均概率。



上面这张图来自维基百科，显示的是26个字母在普通的英文文本中出现的概率。

只要我们能够获取足够长的密文进行分析的话，通过字母出现的频率，我们同样能够猜到相应的原始字母，这并不安全。所以，随着安全性需求的提高，人们有必要寻找一种容易将字母的自然频度隐蔽或均匀化，并使得统计分析足够安全可靠的加密方法。而希尔密码能基本满足这一要求，那么希尔密码是怎么做到这一点的呢？

希尔密码原理

我们先来看一下希尔密码的原理。根据百度百科的定义，希尔密码（Hill Cipher）是运用基本矩阵论原理的替换密码，由Lester S. Hill在1929年发明。每个字母当作26进制数字：A=0，B=1，C=2…，把一串字母当成n维向量，和一个$n×n$的矩阵相乘，再将得出的结果和26进行模运算。

所以，希尔加密算法的基本思想是，通过线性变换将固定数量的明文字母转换为同样数量的密文字母，解密只要作一次逆变换就可以了，而密钥就是变换矩阵本身。

现在，我们再通过数学的方式来表达一下，希尔密码是如何通过三步来实现加密的。

第一步，设置加密矩阵E。

第二步，对照字母编码表（自行设定）得到数字，并把明文消息分割成大小为n的多个块：$v_{1},v_{2},…$，并且忽略空格。这里之所以忽略空格，是因为一般情况下密码传递的信息不会过于复杂。如果密码过于复杂，是可以分多次传递的。这里的n表示的密钥的阶数，密钥的阶数越高，也就是n越大的话，破译的难度也就越大，所需要的计算量也就越大。

第三步，每个消息块和加密矩阵E相乘：$Ev_{1}, Ev_{2},…$，并和26进行模运算，最后对照字母编码表得到密文。

同样，我们把这三步倒过来，就能实现解密了。

第一步，计算加密矩阵E的逆矩阵$D \equiv E^{-1}(\bmod 26)$。

第二步，对照字母编码表得到数字，把它和解密矩阵D相乘，并和26进行模运算。

第三步，对照编码表，得到原始明文。

这里你需要注意的是，加密矩阵很关键，它就是我们通常意义上所说的“密钥”，也就是打开密码的钥匙。

通过前面讲解的加密解密步骤，我们可以看出，希尔密码之所以很难被破译，是因为它设置了三道关卡：

1. 列矩阵的维度未知；
2. 对应字母表的排列未知；
3. 加密矩阵（或者说密钥）未知。

想要破解希尔密码，就需要同时获取到通过这三道关卡的钥匙，这谈何容易。

希尔密码实例

好了，原理都讲完了，现在我们通过一个例子来实际地看下希尔密码加密和解密的过程。

假设：A和B双方有一条重要消息要沟通，双方很早就建立了密钥沟通机制，每过一段时间都会更新密钥。在这次的密钥更新周期中，正确的密钥，也就是加密矩阵是一个3×3矩阵。

$$
E=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]
$$

这一次A要给B的消息是“ILIKEBODYCOMBAT”，我们用之前的三步在A方先来加密：

第一步，定义加密矩阵，也就是刚才的E矩阵。

字母编码表

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

第二步，对照字母编码表得到数字：8、11、8、10、4、1、14、3、24、2、14、12、1、0、19。接下来，把明文消息分割成大小为3的5个块，也就是维度为3的5个列矩阵。

$$
v_{1}=\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right], v_{2}=\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right], v_{3}=\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right], v_{4}=\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right], v_{5}=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]
$$

第三步，将每个消息块和加密矩阵E相乘：

$$
E v_{1}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
320 \\
360 \\
467
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
8 \\
22 \\
25
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{2}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
157 \\
204 \\
283
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
1 \\
22 \\
23
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{3}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
180 \\
470 \\
691
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
24 \\
2 \\
15
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{4}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
360 \\
370 \\
458
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
22 \\
6 \\
16
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{5}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
25 \\
203 \\
305
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
25 \\
21 \\
19
\end{array}\right]
$$

最后，对照字母编码表得到密文：“IWZBWXBCGWGQZVT”。

B拿到这个密文后，使用三步来解密：

第一步，计算加密矩阵E的逆矩阵D：

$$
D \equiv\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]^{-1}(\bmod 26) \equiv\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]
$$

第二步，对照字母编码表得到数字，把它和解密矩阵D相乘，并和26进行模运算，得到相应结果。

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
8 \\

22 \\
25
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
424 \\
869 \\
632
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
1 \\
22 \\
23
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
348 \\
680 \\
469
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
24 \\
2 \\
15
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
352 \\
835 \\
648
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
22 \\
6 \\
16
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
366 \\
846 \\
662
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
25 \\
21 \\
19
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
495 \\
1092 \\
929
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]
$$

最后，B通过对照编码表，得到了原始明文：“ILIKEBODYCOMBAT”。

这里，你也许会问，密钥为什么用的是3×3的可逆矩阵？那是我为了例子方便而设置的，你完全可以设置更高阶的矩阵。就像之前说的，密钥的阶数越高，也就是n越大的话，破译的难度也就越大，所需要的计算量也就越大。

所以，从破译密码的角度来看，传统的密码有一个致命弱点，就是破译者可从统计出来的字符频率中找到规律，进而找出破译的突破口。尤其是在计算机技术高度发达的今天，破译的速度更快。而希尔密码算法则完全克服了这一缺陷，它通过采用线性代数中的矩阵乘法运算和逆运算，能够较好地抵抗频率分析，很难被攻破。

本节小结

这一节课的内容都和密码学有关，感觉像是搞谍战一样。但其实它的核心很简单，就是通过基础篇中学到的矩阵和逆矩阵的知识，来实现希尔密码。希尔密码的关键就是定义加密矩阵，或者说密钥、字母表排列方式和列矩阵的维度，通过线性变换将固定数量的明文字母转换为同样数量的密文字母，而解密则只要作一次逆变换就可以了。

当然，现实中还有更复杂的加密算法，其中最著名的，且用到线性代数的加密算法是AES，想必你平时也经常看到或用到过。AES是一个迭代的、对称密钥分组的密码，它可以使用128、192和256位密钥，并且用128、192和256位分组加密和解密数据，其中密钥长度与分组长度是独立的。

线性代数练习场

请你做一回"特工"，尝试使用希尔密码来给明文"MACHINELEARNING"做加密和解密。

> 提醒：你可以自行定义加密矩阵、字母表排列方式和列矩阵的维度。加密矩阵可以使用之前介绍的3×3可逆矩阵，也可以使用其它n×n的可逆矩阵。

欢迎在留言区晒出你的加密和解密过程，我会及时回复。同时，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友，一起讨论、学习。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天我要讲的内容是"如何通过有限向量空间加持的希尔密码，提高密码被破译的难度"。

这篇的内容会非常有趣，是和密码加密、解密有关的。不知道你有没有看过电影《模仿游戏》，故事描述的是阿兰·图灵在二战期间破译德军的恩尼格玛密码机（Enigma），很精彩，我看了很多遍。

不过电影毕竟是电影，有许多内容是不现实的，好在表达出来的破译恩尼格玛密码的核心观点是正确的。要破译一份被恩尼格玛机加密的密文，需要这三类信息：

1. 恩格玛机的工作原理及内部构造，包括每个转子的线路连接；
2. 德军对恩格玛机的操作守则；
3. 德军所使用的每日初始设置。恩格玛机的每日初始设置包含了三个信息：即转子的排列顺序、每个转子的初始位置，以及插线板的设置。这些信息被印刷在密码本上分发至德军全军，每24小时更换一次设置，每月更换一次密码本。

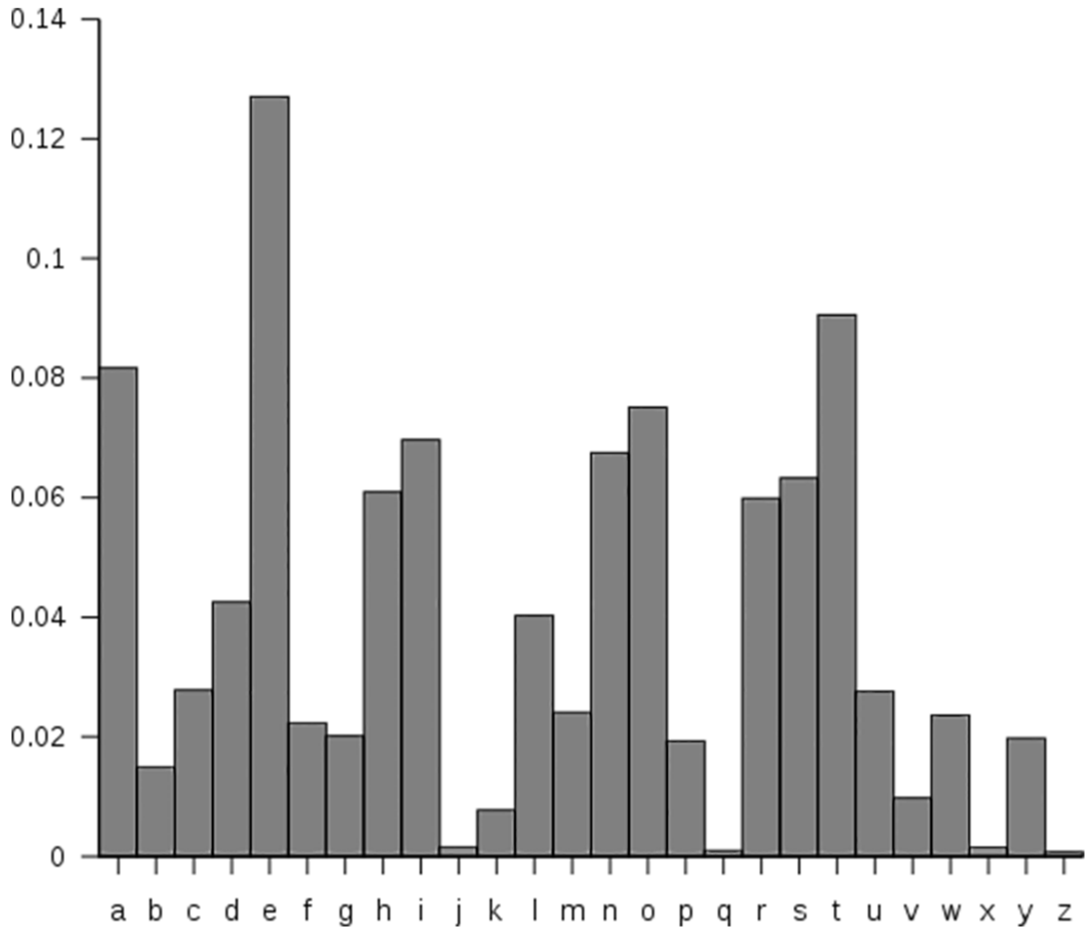
这些在电影里确实都交代了，我也不过多剧透了。其实，恩尼格玛密码机的本质就是**替换密码**。而今天我要讲的也是一种替换密码——希尔密码。因为我们专栏讲的是线性代数，所以，这篇应用我们会以矩阵论原理为基础，来进行讲解。

为什么需要希尔密码？

要讲密码，我们得先知道人们为什么需要它。

最古老、最原始的加密算法，会把明文的字母按照某种配对关系替换成其他的字母，从而得到一段别人看不懂的密文，许多谍战剧用到过这类方法。看起来，这个方法好像很难人为进行破解，但从语言和统计学角度看，它其实是漏洞百出的。

举个例子，在一篇普通英语文章中，各字母出现的概率有很大的不同。如果我们对足够多的文本进行分析，就可以统计出每一个字母在英文文本中出现的平均概率。



上面这张图来自维基百科，显示的是26个字母在普通的英文文本中出现的概率。

只要我们能够获取足够长的密文进行分析的话，通过字母出现的频率，我们同样能够猜到相应的原始字母，这并不安全。所以，随着安全性需求的提高，人们有必要寻找一种容易将字母的自然频度隐蔽或均匀化，并使得统计分析足够安全可靠的加密方法。而希尔密码能基本满足这一要求，那么希尔密码是怎么做到这一点的呢？

希尔密码原理

我们先来看一下希尔密码的原理。根据百度百科的定义，希尔密码（Hill Cipher）是运用基本矩阵论原理的替换密码，由Lester S. Hill在1929年发明。每个字母当作26进制数字：A=0，B=1，C=2…，把一串字母当成n维向量，和一个$n×n$的矩阵相乘，再将得出的结果和26进行模运算。

所以，希尔加密算法的基本思想是，通过线性变换将固定数量的明文字母转换为同样数量的密文字母，解密只要作一次逆变换就可以了，而密钥就是变换矩阵本身。

现在，我们再通过数学的方式来表达一下，希尔密码是如何通过三步来实现加密的。

第一步，设置加密矩阵E。

第二步，对照字母编码表（自行设定）得到数字，并把明文消息分割成大小为n的多个块：$v_{1},v_{2},…$，并且忽略空格。这里之所以忽略空格，是因为一般情况下密码传递的信息不会过于复杂。如果密码过于复杂，是可以分多次传递的。这里的n表示的密钥的阶数，密钥的阶数越高，也就是n越大的话，破译的难度也就越大，所需要的计算量也就越大。

第三步，每个消息块和加密矩阵E相乘：$Ev_{1}, Ev_{2},…$，并和26进行模运算，最后对照字母编码表得到密文。

同样，我们把这三步倒过来，就能实现解密了。

第一步，计算加密矩阵E的逆矩阵$D \equiv E^{-1}(\bmod 26)$。

第二步，对照字母编码表得到数字，把它和解密矩阵D相乘，并和26进行模运算。

第三步，对照编码表，得到原始明文。

这里你需要注意的是，加密矩阵很关键，它就是我们通常意义上所说的“密钥”，也就是打开密码的钥匙。

通过前面讲解的加密解密步骤，我们可以看出，希尔密码之所以很难被破译，是因为它设置了三道关卡：

1. 列矩阵的维度未知；
2. 对应字母表的排列未知；
3. 加密矩阵（或者说密钥）未知。

想要破解希尔密码，就需要同时获取到通过这三道关卡的钥匙，这谈何容易。

希尔密码实例

好了，原理都讲完了，现在我们通过一个例子来实际地看下希尔密码加密和解密的过程。

假设：A和B双方有一条重要消息要沟通，双方很早就建立了密钥沟通机制，每过一段时间都会更新密钥。在这次的密钥更新周期中，正确的密钥，也就是加密矩阵是一个3×3矩阵。

$$
E=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]
$$

这一次A要给B的消息是“ILIKEBODYCOMBAT”，我们用之前的三步在A方先来加密：

第一步，定义加密矩阵，也就是刚才的E矩阵。

字母编码表

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

第二步，对照字母编码表得到数字：8、11、8、10、4、1、14、3、24、2、14、12、1、0、19。接下来，把明文消息分割成大小为3的5个块，也就是维度为3的5个列矩阵。

$$
v_{1}=\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right], v_{2}=\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right], v_{3}=\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right], v_{4}=\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right], v_{5}=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]
$$

第三步，将每个消息块和加密矩阵E相乘：

$$
E v_{1}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
320 \\
360 \\
467
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
8 \\
22 \\
25
\end{array}\right]
$$

$$

$$
E v_{2}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
157 \\
204 \\
283
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
1 \\
22 \\
23
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{3}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
180 \\
470 \\
691
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
24 \\
2 \\
15
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{4}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
360 \\
370 \\
458
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
22 \\
6 \\
16
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{5}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
25 \\
203 \\
305
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
25 \\
21 \\
19
\end{array}\right]
$$

最后，对照字母编码表得到密文：“IWZBWXBCGWGQZVT”。

B拿到这个密文后，使用三步来解密：

第一步，计算加密矩阵E的逆矩阵D：

$$
D \equiv\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]^{-1}(\bmod 26) \equiv\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]
$$

第二步，对照字母编码表得到数字，把它和解密矩阵D相乘，并和26进行模运算，得到相应结果。

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
8 \\

22 \\
25
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
424 \\
869 \\
632
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
1 \\
22 \\
23
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
348 \\
680 \\
469
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
24 \\
2 \\
15
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
352 \\
835 \\
648
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
22 \\
6 \\
16
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
366 \\
846 \\
662
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
25 \\
21 \\
19
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
495 \\
1092 \\
929
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]
$$

最后，B通过对照编码表，得到了原始明文：“ILIKEBODYCOMBAT”。

这里，你也许会问，密钥为什么用的是3×3的可逆矩阵？那是我为了例子方便而设置的，你完全可以设置更高阶的矩阵。就像之前说的，密钥的阶数越高，也就是n越大的话，破译的难度也就越大，所需要的计算量也就越大。

所以，从破译密码的角度来看，传统的密码有一个致命弱点，就是破译者可从统计出来的字符频率中找到规律，进而找出破译的突破口。尤其是在计算机技术高度发达的今天，破译的速度更快。而希尔密码算法则完全克服了这一缺陷，它通过采用线性代数中的矩阵乘法运算和逆运算，能够较好地抵抗频率分析，很难被攻破。

本节小结

这一节课的内容都和密码学有关，感觉像是搞谍战一样。但其实它的核心很简单，就是通过基础篇中学到的矩阵和逆矩阵的知识，来实现希尔密码。希尔密码的关键就是定义加密矩阵，或者说密钥、字母表排列方式和列矩阵的维度，通过线性变换将固定数量的明文字母转换为同样数量的密文字母，而解密则只要作一次逆变换就可以了。

当然，现实中还有更复杂的加密算法，其中最著名的，且用到线性代数的加密算法是AES，想必你平时也经常看到或用到过。AES是一个迭代的、对称密钥分组的密码，它可以使用128、192和256位密钥，并且用128、192和256位分组加密和解密数据，其中密钥长度与分组长度是独立的。

线性代数练习场

请你做一回“特工”，尝试使用希尔密码来给明文“MACHINELEARNING”做加密和解密。

> 提醒：你可以自行定义加密矩阵、字母表排列方式和列矩阵的维度。加密矩阵可以使用之前介绍的3×3可逆矩阵，也可以使用其它n×n的可逆矩阵。

欢迎在留言区晒出你的加密和解密过程，我会及时回复。同时，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友，一起讨论、学习。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天我要讲的内容是“如何通过有限向量空间加持的希尔密码，提高密码被破译的难度”。

这篇的内容会非常有趣，是和密码加密、解密有关的。不知道你有没有看过电影《模仿游戏》，故事描述的是阿兰·图灵在二战期间破译德军的恩尼格玛密码机（Enigma），很精彩，我看了很多遍。

不过电影毕竟是电影，有许多内容是不现实的，好在表达出来的破译恩尼格玛密码的核心观点是正确的。要破译一份被恩尼格玛机加密的密文，需要这三类信息：

1. 恩格玛机的工作原理及内部构造，包括每个转子的线路连接；
2. 德军对恩格玛机的操作守则；
3. 德军所使用的每日初始设置。恩格玛机的每日初始设置包含了三个信息：即转子的排列顺序、每个转子的初始位置，以及插线板的设置。这些信息被印刷在密码本上分发至德军全军，每24小时更换一次设置，每月更换一次密码本。

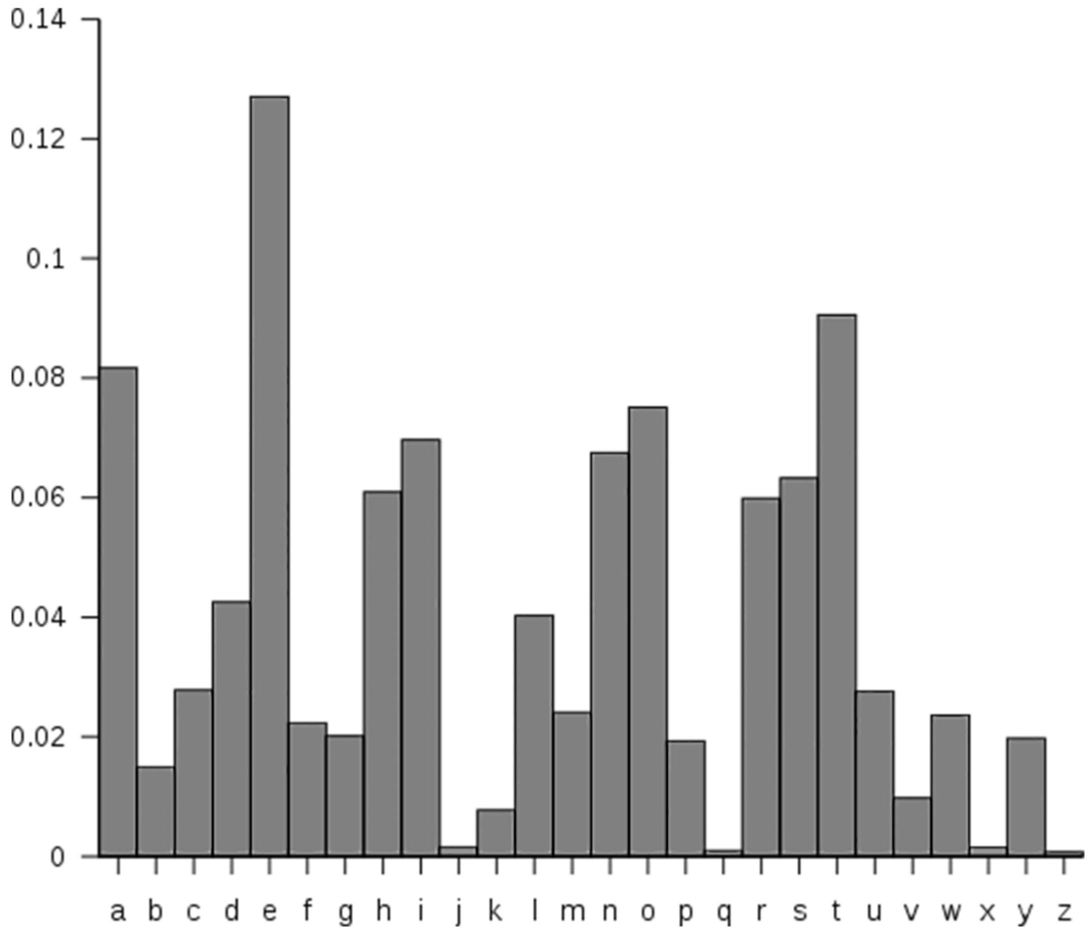
这些在电影里确实都交代了，我也不过多剧透了。其实，恩尼格玛密码机的本质就是**替换密码**。而今天我要讲的也是一种替换密码——希尔密码。因为我们专栏讲的是线性代数，所以，这篇应用我们会以矩阵论原理为基础，来进行讲解。

为什么需要希尔密码？

要讲密码，我们得先知道人们为什么需要它。

最古老、最原始的加密算法，会把明文的字母按照某种配对关系替换成其他的字母，从而得到一段别人看不懂的密文，许多谍战剧用到过这类方法。看起来，这个方法好像很难人为进行破解，但从语言和统计学角度看，它其实是漏洞百出的。

举个例子，在一篇普通英语文章中，各字母出现的概率有很大的不同。如果我们对足够多的文本进行分析，就可以统计出每一个字母在英文文本中出现的平均概率。



上面这张图来自维基百科，显示的是26个字母在普通的英文文本中出现的概率。

只要我们能够获取足够长的密文进行分析的话，通过字母出现的频率，我们同样能够猜到相应的原始字母，这并不安全。所以，随着安全性需求的提高，人们有必要寻找一种容易将字母的自然频度隐蔽或均匀化，并使得统计分析足够安全可靠的加密方法。而希尔密码能基本满足这一要求，那么希尔密码是怎么做到这一点的呢？

希尔密码原理

我们先来看一下希尔密码的原理。根据百度百科的定义，希尔密码（Hill Cipher）是运用基本矩阵论原理的替换密码，由Lester S. Hill在1929年发明。每个字母当作26进制数字：A=0，B=1，C=2…，把一串字母当成n维向量，和一个$n×n$的矩阵相乘，再将得出的结果和26进行模运算。

所以，希尔加密算法的基本思想是，通过线性变换将固定数量的明文字母转换为同样数量的密文字母，解密只要作一次逆变换就可以了，而密钥就是变换矩阵本身。

现在，我们再通过数学的方式来表达一下，希尔密码是如何通过三步来实现加密的。

第一步，设置加密矩阵E。

第二步，对照字母编码表（自行设定）得到数字，并把明文消息分割成大小为n的多个块：$v_{1},v_{2},…$，并且忽略空格。这里之所以忽略空格，是因为一般情况下密码传递的信息不会过于复杂。如果密码过于复杂，是可以分多次传递的。这里的n表示的密钥的阶数，密钥的阶数越高，也就是n越大的话，破译的难度也就越大，所需要的计算量也就越大。

第三步，每个消息块和加密矩阵E相乘：$Ev_{1}, Ev_{2},…$，并和26进行模运算，最后对照字母编码表得到密文。

同样，我们把这三步倒过来，就能实现解密了。

第一步，计算加密矩阵E的逆矩阵$D \equiv E^{-1}(\bmod 26)$。

第二步，对照字母编码表得到数字，把它和解密矩阵D相乘，并和26进行模运算。

第三步，对照编码表，得到原始明文。

这里你需要注意的是，加密矩阵很关键，它就是我们通常意义上所说的“密钥”，也就是打开密码的钥匙。

通过前面讲解的加密解密步骤，我们可以看出，希尔密码之所以很难被破译，是因为它设置了三道关卡：

1. 列矩阵的维度未知；
2. 对应字母表的排列未知；
3. 加密矩阵（或者说密钥）未知。

想要破解希尔密码，就需要同时获取到通过这三道关卡的钥匙，这谈何容易。

希尔密码实例

好了，原理都讲完了，现在我们通过一个例子来实际地看下希尔密码加密和解密的过程。

假设：A和B双方有一条重要消息要沟通，双方很早就建立了密钥沟通机制，每过一段时间都会更新密钥。在这次的密钥更新周期中，正确的密钥，也就是加密矩阵是一个3×3矩阵。

$$
E=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]
$$

这一次A要给B的消息是“ILIKEBODYCOMBAT”，我们用之前的三步在A方先来加密：

第一步，定义加密矩阵，也就是刚才的E矩阵。

字母编码表

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

第二步，对照字母编码表得到数字：8、11、8、10、4、1、14、3、24、2、14、12、1、0、19。接下来，把明文消息分割成大小为3的5个块，也就是维度为3的5个列矩阵。

$$
v_{1}=\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right], v_{2}=\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right], v_{3}=\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right], v_{4}=\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right], v_{5}=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]
$$

第三步，将每个消息块和加密矩阵E相乘：

$$
E v_{1}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
320 \\
360 \\
467
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
8 \\
22 \\
25
\end{array}\right]
$$

E v_{2}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
157 \\
204 \\
283
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
1 \\
22 \\
23
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{3}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
180 \\
470 \\
691
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
24 \\
2 \\
15
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{4}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
360 \\
370 \\
458
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
22 \\
6 \\
16
\end{array}\right]
$$

$$
E v_{5}=\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
25 \\
203 \\
305
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
25 \\
21 \\
19
\end{array}\right]
$$

最后，对照字母编码表得到密文：“IWZBWXBCGWGQZVT”。

B拿到这个密文后，使用三步来解密：

第一步，计算加密矩阵E的逆矩阵D：

$$
D \equiv\left[\begin{array}{ccc}
6 & 24 & 1 \\
13 & 16 & 10 \\
20 & 17 & 15
\end{array}\right]^{-1}(\bmod 26) \equiv\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]
$$

第二步，对照字母编码表得到数字，把它和解密矩阵D相乘，并和26进行模运算，得到相应结果。

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
8 \\

22 \\
25
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
424 \\
869 \\
632
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
8 \\
11 \\
8
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
1 \\
22 \\
23
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
348 \\
680 \\
469
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
10 \\
4 \\
1
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
24 \\
2 \\
15
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
352 \\
835 \\
648
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
14 \\
3 \\
24
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
22 \\
6 \\
16
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
366 \\
846 \\
662
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
2 \\
14 \\
12
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc}
8 & 5 & 10 \\
21 & 8 & 21 \\
21 & 12 & 8
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
25 \\
21 \\
19
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
495 \\
1092 \\
929
\end{array}\right] \bmod 26=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
19
\end{array}\right]
$$

最后，B通过对照编码表，得到了原始明文："ILIKEBODYCOMBAT"。

这里，你也许会问，密钥为什么用的是3×3的可逆矩阵？那是我为了例子方便而设置的，你完全可以设置更高阶的矩阵。就像之前说的，密钥的阶数越高，也就是n越大的话，破译的难度也就越大，所需要的计算量也就越大。

所以，从破译密码的角度来看，传统的密码有一个致命弱点，就是破译者可从统计出来的字符频率中找到规律，进而找出破译的突破口。尤其是在计算机技术高度发达的今天，破译的速度更快。而希尔密码算法则完全克服了这一缺陷，它通过采用线性代数中的矩阵乘法运算和逆运算，能够较好地抵抗频率分析，很难被攻破。

本节小结

这一节课的内容都和密码学有关，感觉像是搞谍战一样。但其实它的核心很简单，就是通过基础篇中学到的矩阵和逆矩阵的知识，来实现希尔密码。希尔密码的关键就是定义加密矩阵，或者说密钥、字母表排列方式和列矩阵的维度，通过线性变换将固定数量的明文字母转换为同样数量的密文字母，而解密则只要作一次逆变换就可以了。

当然，现实中还有更复杂的加密算法，其中最著名的，且用到线性代数的加密算法是AES，想必你平时也经常看到或用到过。AES是一个迭代的、对称密钥分组的密码，它可以使用128、192和256位密钥，并且用128、192和256位分组加密和解密数据，其中密钥长度与分组长度是独立的。

线性代数练习场

请你做一回"特工"，尝试使用希尔密码来给明文"MACHINELEARNING"做加密和解密。

> 提醒：你可以自行定义加密矩阵、字母表排列方式和列矩阵的维度。加密矩阵可以使用之前介绍的3×3可逆矩阵，也可以使用其它n×n的可逆矩阵。

欢迎在留言区晒出你的加密和解密过程，我会及时回复。同时，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友，一起讨论、学习。