你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数，今天我们要讲的内容是“解析几何”。

前面所有章节我们都是围绕向量、矩阵，以及向量空间来展开的。但这一节课有点不一样，我要讲的是解析几何，它使得向量从抽象走向了具象，让向量具有了几何的含义。比如，计算向量的长度、向量之间的距离和角度，这在机器学习的主成分分析PCA中是非常有用的。

范数

讲解析几何我们得从“范数”开始讲起。

因为很多人看到几何向量的第一反应就是，它是从原点开始的有向线段，并且向量的长度是这个有向线段的终端和起始端之间的距离。而范数，就是被用来度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小的。

现在，我们先来看一下范数的数学定义：一个向量空间V上的一个范数就是一个函数，它计算V中的每一个向量x的长度，用符号来表示的话就是：$\|x\| \in R$，它满足三种性质：

1. 正齐次性： 如果输入参数扩大正λ倍，其对应的函数也扩正大倍。设$\lambda \in R$，$x \in V$，$\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$；
2. 次可加性：类似三角不等式，两边之和大于第三边。设$x,y \in V$，$\|x+y\| \leq\|x\|+\|y\|$；
3. 正定性：向量x的长度一定大于等于零。$\|x\| \geq 0$。

看到这里，你也许会问，范数似乎和以前老师教的**向量的模**一样啊。先别急，它们还真有那么一点关系，你听我慢慢道来。由于范数是度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小的，所以它和向量空间维度是有关系的，于是，我们可以把范数写成这样的模式来区分不同维度的大小计算：$L_{1}, L_{2}, \ldots, L_{\infty}$。

- L_{1}范数：曼哈顿范数，也叫曼哈顿距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{1}=\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}\right|
$$

- L_{2}范数：欧式范数，也叫欧式距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2}}
$$

- L_{∞}范数：切比雪夫范数，也叫切比雪夫距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{\infty}=\max \left(\left|x_{1}\right|,\left|x_{2}\right|, \ldots,\left|x_{n}\right|\right)
$$

我们发现，向量的模和L_{2}范数的计算方式都是一样的，都表示的是欧氏距离，所以，我们可以简单地认为向量的模等于L_{2}范数。而其他的范数模式和向量的模则没有任何关系。

内积

学习解析几何时，我们必须掌握的第二个概念就是内积。

如果说范数是模式，是用来描述向量长度或大小的概念性表达，那么内积可以让我们很直观地了解一个向量的长度、两个向量之间的距离和角度，它的一个主要目的就是判断向量之间是否是正交的，正交这个概念我们会在后面讲解。

点积

我们从特殊到一般，先来看点积，它和第三篇矩阵中说的“普通矩阵乘”形式一样，点积是特殊的内积，为什么说它特殊呢？那是因为在表示两个向量之间的距离时，它就是大家熟悉的欧式距离，点积可以表示成这样的形式：

$$
x^{T} y=\sum_{i=1}^{n} x_{i} y_{i}
$$

其他内积

除了点积外，我们再来看另一个不同的内积：设内积空间V是R^{2}，定义内积$\langle x, y\rangle=x_{1} y_{1}-(x_{1} y_{2}+x_{2} y_{1})+2 x_{2} y_{2}$，一看便知这个和点积完全不同。

内积空间

最后，我们再来看一般内积和内积空间。因为解析几何关注的是向量的长度、两个向量之间的距离和角度，所以，我们要在原来向量空间上加一个额外的结构，这个额外结构就是内积，而加了内积的向量空间，我们就叫做内积空间。

为了表达方便，我们可以把内积写成$\langle\ \cdot,\cdot\ \rangle$这样的形式，那么内积空间$V$可以被表示成这样：$(V,\langle\ \cdot,\cdot\ \rangle)$。这时，如果一般内积由点积来表达，那这个向量空间就变成了更具体的欧式向量空间。

接下来看下内积空间有什么性质？我们定义一个内积空间V和它的元素x、y、z，以及一个$c \in R$：

- 满足对称性：x和y的内积等于y和x的内积，$\langle x, y\rangle=\langle y, x\rangle$；
- 满足线性性：x和$y+cz$的内积等于，x和y的内积，与x和z的内积乘以c后的和，$\langle x, y+c z\rangle=\langle x, y\rangle+c\langle x, z\rangle$；
- 满足正定性：x和y的内积大于等于零，$\langle x, y\rangle \geq 0$。

对称正定矩阵

内积还定义了一类矩阵，这类矩阵在机器学习中很重要，因为它可以被用来判定多元函数极值，而在深度学习中，它更是被用来获取最小化损失函数，我们把这类矩阵叫做对称正定矩阵。

对称正定矩阵的定义是：如果一个对称矩阵A属于方阵$R^{n×n}$，对任意非零向量x，都有$x^{T} A x>0$，那么A就是对称正定矩阵。

我们来看两个例子，判断它们是不是对称正定矩阵。

第一个例子，请你回答下面这个矩阵是对称正定矩阵吗？

$$
A=\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 5
\end{array}\right]
$$

答案：是的，它是对称正定矩阵。因为$x^{T} A x>0$。

$$
x^{T} A x=\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 5
\end{array}\right]\left[\begin{array}{l}
x_{1} \\

x_{2}
\end{array}\right]=(3 x_{1}+2 x_{2})^{2}+x_{2}^{2}>0
$$

第二个例子，请你看下面这个矩阵是对称正定矩阵吗？

$$
A=\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 3
\end{array}\right]
$$

答案：不是的，它只是对称矩阵。因为$x^{T} A x$可能小于0。

$$
x^{T} A x=\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 3
\end{array}\right]\left[\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right]=(3 x_{1}+2 x_{2})^{2}-x_{2}^{2}
$$

长度、距离和角度

前面我们通过范数讲了向量的长度，但从内积的角度来看，我们发现，内积和范数之间有着千丝万缕的关系。我们来看看下面这个等式。

$$
\|x\|=\sqrt{\langle x, x\rangle}
$$

从这个等式我们发现，内积可以用来产生范数，确实是这样。不过，不是每一个范数都能被一个内积产生的，比如：曼哈顿范数。接下来，我们还是来关注能由内积产生的范数上，从不同的角度来看看几何上的长度、距离和角度的概念。

我们先用内积来计算一个**向量的长度**，比如：向量$x=[\begin{array}{ll}1 & 1\end{array}]^{T}$，我们可以使用点积来计算，计算后得出$x$的范数是$\sqrt{2}$，具体计算过程是这样的：$\|x\|=\sqrt{x^{T} x}=\sqrt{1^{2}+1^{2}}=\sqrt{2}$。

接着，我们再来看一下**向量之间的距离**，一个内积空间V，$(V,\langle\ \cdot,\cdot\ \rangle)$，$x$和$y$是它的两个向量，那么$x$和$y$之间的距离就可以表示成：$d(x, y)=\|x-y\|=\sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$。

如果用点积来计算x和y之间的距离，那这个距离就叫做欧式距离。

再接着，来看看两个**向量之间的角度**。我们使用柯西-施瓦茨不等式（Cauchy-Schwarz Inequality）来表示内积空间中两个向量x和y之间的角度：a。

$$
-1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \leq 1
$$

取值是从-1到1之间，那么角度就是从0到π之间，我们用cos来表示就是：

$$
\cos (a)=\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}
$$

其中a就是角度，a的角度取值是0到π之间。我们很容易就能发现，其实两个向量之间的角度，就是告诉了我们两个向量之间方向的相似性。例如：x和$y=4x$，使用点积来计算它们之间的角度是0，也就是说它们的方向是一样的，y只是对x扩大了4倍而已。

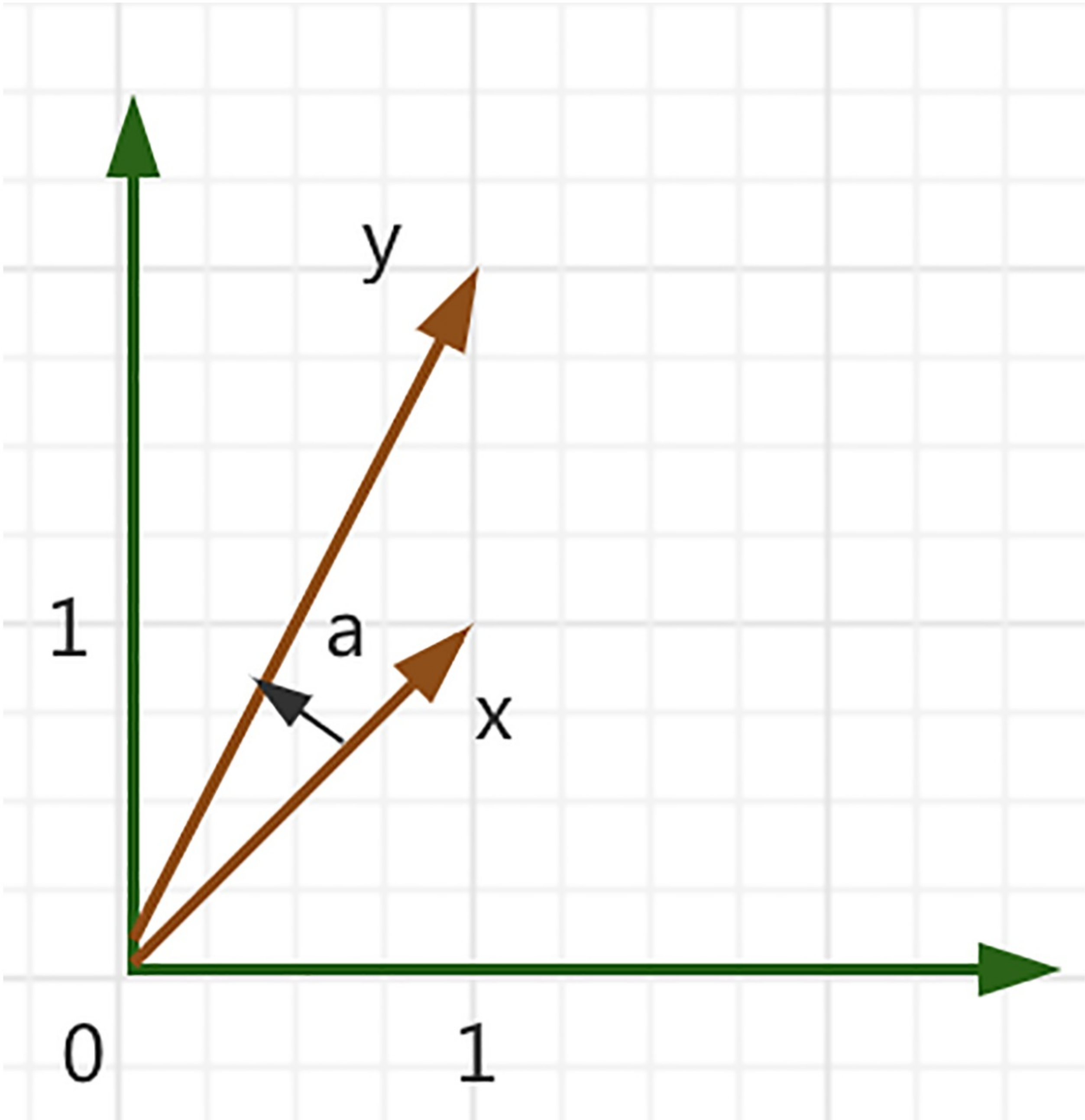
现在，我们通过一个例子，再来更清楚地看下两个向量之间角度的计算，设$x=[\begin{array}{ll}1 & 1\end{array}]^{T}$，$y=[\begin{array}{ll}1 & 2\end{array}]^{T}$，使用点积来计算，我们得出：

$$
\cos (a)=\frac{\langle x, y\rangle}{\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}}=\frac{x^{T} y}{\sqrt{x^{T} x y^{T} y}}=\frac{3}{\sqrt{10}}
$$

那么，这两个向量之间的角度如下。

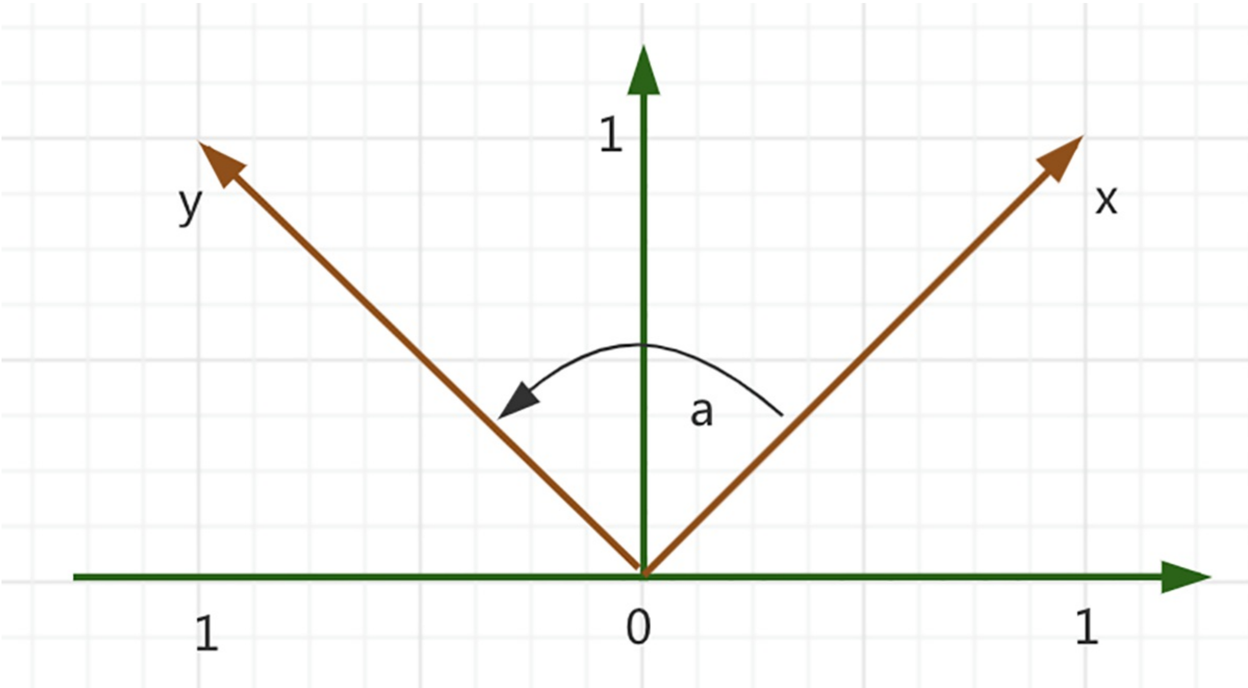
$$
\arccos \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \approx 0.32
$$

我们可以用图来更直观地表达一下。



于是，我们最后可以引出一个概念，也就是我们在一开始提到的**正交性**。如果两个向量x和y内积等于0，$\langle x, y\rangle=0$，那么x和y是正交的，这可以写成：$x \perp y$。再如果，x和y的范数都等于1，$\|x\|=\|y\|=1$，也就是说，如果它们都是单位向量，那么x和y就是标准正交的。

我们用图来更直观地表达一下。



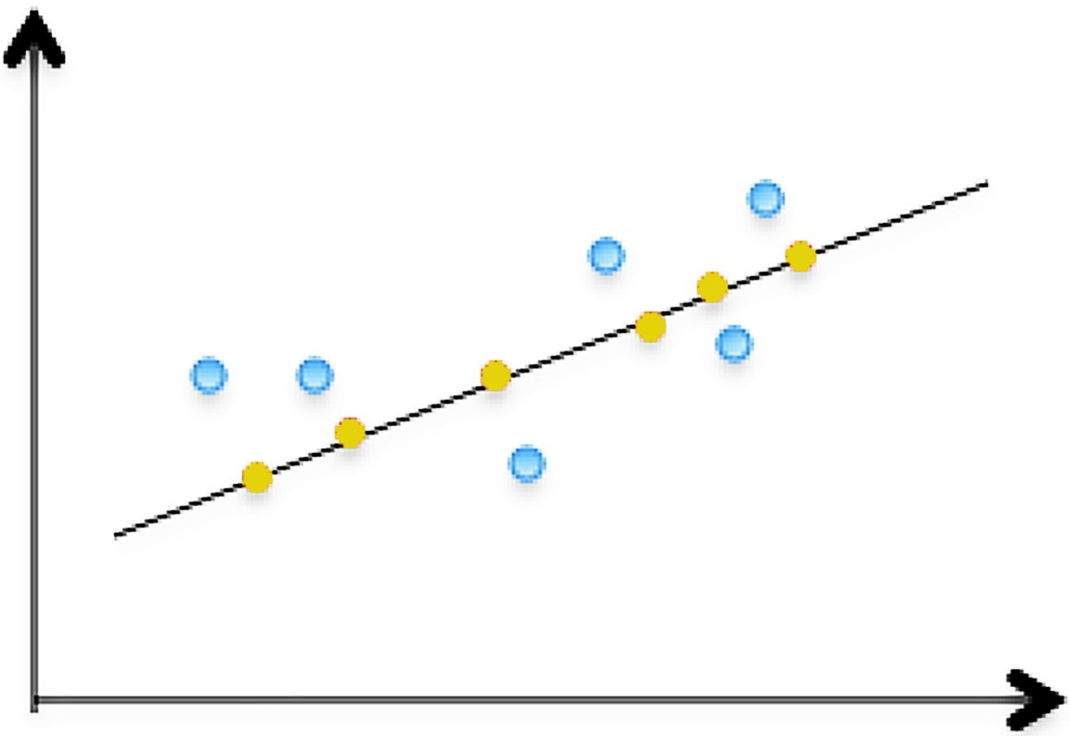
正交投影

在理论讲解之后，我们要来了解一下解析几何在实践中经常运用的概念——正交投影，它是一种重要的线性变换，在图形图像、编码理论、统计和机器学习中扮演了重要角色。

在机器学习中，数据一般都是高维的。众所周知，高维数据是很难来分析和可视化的。而且，不是所有的高维数据都是有用的，可能只有一些数据包含了大部分的重要信息。

正交投影就是高维到低维的数据投影，在第5节课线性空间中，我简单介绍了高维数据投影到低维后，我们就能在低维空间更多地了解数据集、提炼相关模式。而在机器学习中，最普遍的降维算法——PCA主成分分析，就是利用了降维的观点。

接下来，我开始讲解正交投影，在给出定义之前，先从一张图来了解会更直观。



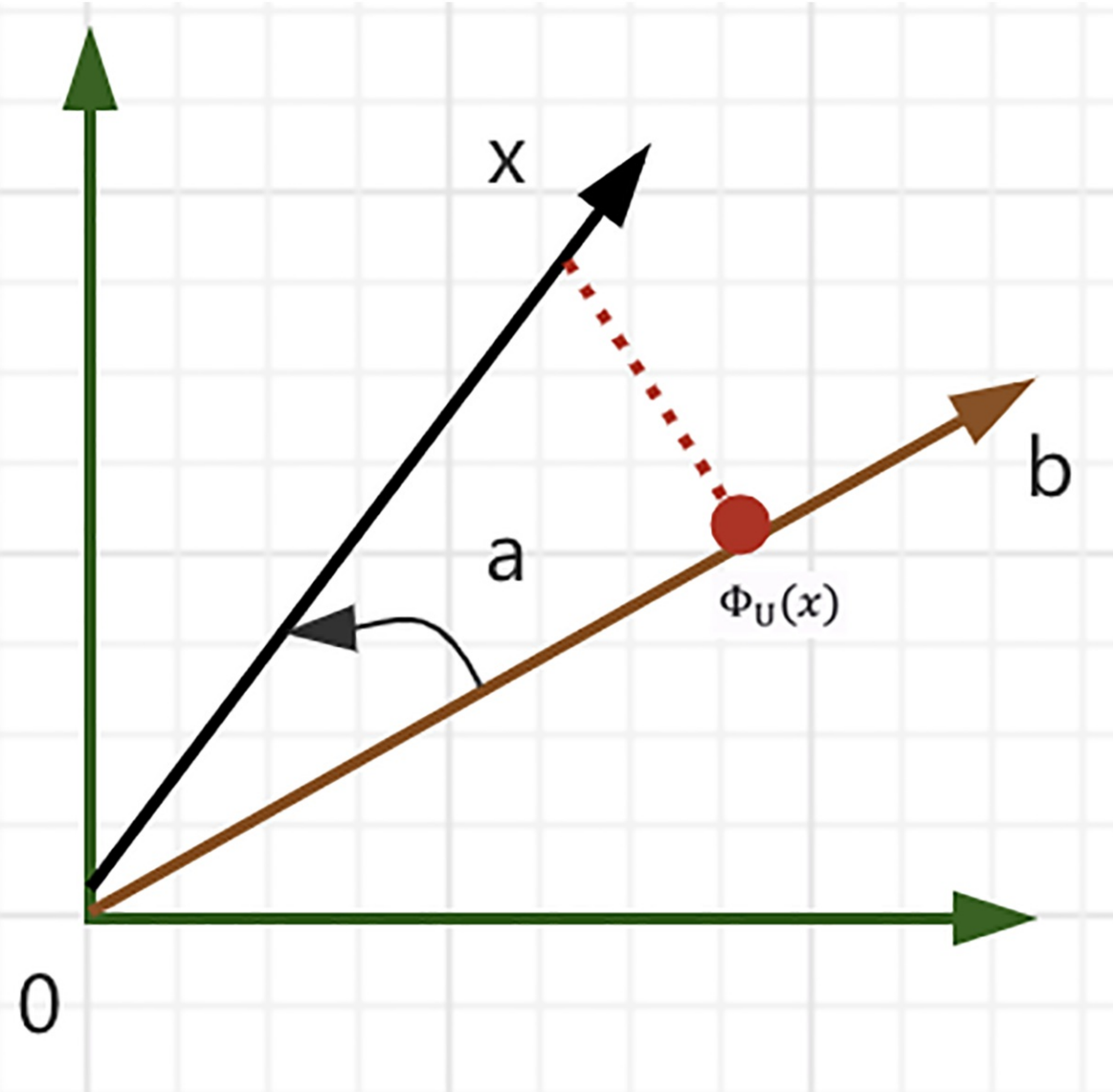
图中的蓝点是原二维数据，黄点是它们的正交投影。所以，实际降维后，在一维空间中就形成了这条黑线表示，它近似地表达了原来二维数据表示的信息。

现在我们可以来看一下投影的定义：V是一个向量空间，U是V的一个向量子空间，一个从V到U的线性映射Φ是一个投影，如果它满足：$\Phi^{2}=\Phi \circ \Phi=\Phi$。因为线性映射能够被变换矩阵表示，所以，这个定义同样适用于一个特殊类型变换矩阵：投影矩阵P_{Φ}，它也满足：$P_{\Phi}^{2}=P_{\Phi}$。

投影到一维子空间上（线）

接下来，我们来看看如何投影到一维子空间，也就是把内积空间的向量正交投影到子空间，这里我们使用点积作为内积。

假设有一条通过原点的线，这条线是由基向量b产生的一维子空间U，当我们把一个向量x投影到U时，需要寻找另一个最靠近x的向量$\Phi_{U}(x)$。还是老样子，我们通过图来看一下。



首先，投影$\Phi_{U}(x)$靠近x，也就是要找出x和$\Phi_{U}(x)$之间的$\left\|x-\Phi_{U}(x)\right\|$最小距离，从几何角度来说，就是线段$\Phi_{U}(x)-x$和$b$正交，满足等式：$\left\langle\Phi_{U}(x)-x, b\right\rangle=0$。其次，投影$\Phi_{U}(x)$必须是$U$的一个元素，也就是，基向量$b$的一个乘来产生$U$，$\Phi_{U}(x)=\lambda b$。

于是，我们可以通过三个步骤来分别得到λ、投影$\Phi_{U}(x)$和投影矩阵P_{Φ}，来把任意x映射到子空间U上。

第一步，计算λ，通过正交条件产生这样的等式：
$\left\langle x-\Phi_{U}(x), b\right\rangle=0$。因为$\Phi_{U}(x)=\lambda b$，所以它可以转变成：$\langle x-\lambda b, b\rangle=0$。

利用内积的双线性：$\langle x, b\rangle-\lambda\langle b, b\rangle=0$，我们得到：

$$
\lambda=\frac{\langle x, b\rangle}{\langle b, b\rangle}=\frac{\langle b, x\rangle}{\|b\|^{2}}
$$

然后，我们通过点积得到：

$$
\lambda=\frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}}
$$

如果$\|b\|=1$，那λ就等于$b^{T}x$。

接着第二步，是计算投影点$\Phi_{U}(x)$。从$\Phi_{U}(x)=\lambda b$，我们得到：

$$
\Phi_{U}(x)=\lambda b=\frac{\langle x, b\rangle}{\|b\|^{2}} b=\frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}} b
$$

通过点积来计算，我们就得到了$\Phi_{U}(x)$的长度：

$$
\left\|\Phi_{U}(x)\right\|=\frac{\left|b^{T} x\right|}{\|b\|^{2}}\|b\|=|\cos (a)|\|x\|\|b\| \frac{\|b\|}{\|b\|^{2}}=\mid \cos (a)\|x\|
$$

这里的a，是x和b之间的夹角。

最后第三步，是计算投影矩阵P_{Φ}，投影矩阵是一个线性映射。所以，我们可以得到：$\Phi_{U}(x)=P_{\Phi}x$，通过$\Phi_{U}(x)=\lambda b$，我们可以得到：

$$

\Phi_{U}(x)=\lambda b=b \lambda=b \frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}}=\frac{b b^{T}}{\|b\|^{2}} x
$$

这里，我们立即可以得到投影矩阵P_{Φ}的计算等式：

$$
P_{\Phi}=\frac{b b^{T}}{\|b\|^{2}}
$$

本节小结

这一节课覆盖的知识点有点多，因为要把解析几何的知识点，浓缩到核心的几个点来讲解是一项艰巨的任务。不过不要怕，前面的几个知识点都是为这一节的重点“正交投影”来铺垫的。范数，被用来度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小，而内积让我们很直观地了解一个向量的长度、两个向量之间的距离和角度，以及判断向量之间是否是正交的。

所以，希望你能掌握范数和内积的理论知识，并把它和正交投影结合，运用在一些实践应用场景中，比如：3D图形图像的坐标变换、数据压缩，以及机器学习的降维。

线性代数练习场

请用之前学到的正交投影的投影矩阵算法，来计算一条线上的投影矩阵P_{Φ}。

这条线通过原点，由基$b=\left[\begin{array}{lll}1 & 2 & 2\end{array}\right]^{T}$产生，$P_{\Phi}$计算后，再通过一个$x$来验证一下它是否在$b$产生的子空间中，我们取$x=\left[\begin{array}{lll}1 & 1 & 1\end{array}\right]^{T}$。

欢迎在留言区晒出你的运算结果，我会及时回复。同时，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友，一起讨论、学习。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数，今天我们要讲的内容是“解析几何”。

前面所有章节我们都是围绕向量、矩阵，以及向量空间来展开的。但这一节课有点不一样，我要讲的是解析几何，它使得向量从抽象走向了具象，让向量具有了几何的含义。比如，计算向量的长度、向量之间的距离和角度，这在机器学习的主成分分析PCA中是非常有用的。

范数

讲解析几何我们得从“范数”开始讲起。

因为很多人看到几何向量的第一反应就是，它是从原点开始的有向线段，并且向量的长度是这个有向线段的终端和起始端之间的距离。而范数，就是被用来度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小的。

现在，我们先来看一下范数的数学定义：一个向量空间V上的一个范数就是一个函数，它计算V中的每一个向量x的长度，用符号来表示的话就是：$\|x\| \in R$，它满足三种性质：

1. 正齐次性：如果输入参数扩大正$λ$倍，其对应的函数也扩正大倍。设$λ \in R$，$x \in V$，$\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$；
2. 次可加性：类似三角不等式，两边之和大于第三边。设$x,y \in V$，$\|x+y\| \leq\|x\|+\|y\|$；
3. 正定性：向量x的长度一定大于等于零。$\|x\| \geq 0$。

看到这里，你也许会问，范数似乎和以前老师教的**向量的模**一样啊。先别急，它们还真有那么一点关系，你听我慢慢道来。由于范数是度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小的，所以它和向量空间维度是有关系的，于是，我们可以把范数写成这样的模式来区分不同维度的大小计算：$L_{1}, L_{2}, \ldots, L_{\infty}$。

- L_{1}范数：曼哈顿范数，也叫曼哈顿距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{1}=\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}\right|
$$

- L_{2}范数：欧式范数，也叫欧式距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2}}
$$

- L_{∞}范数：切比雪夫范数，也叫切比雪夫距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{\infty}=\max \left(\left|x_{1}\right|,\left|x_{2}\right|, \ldots,\left|x_{n}\right|\right)
$$

我们发现，向量的模和L_{2}范数的计算方式都是一样的，都表示的是欧氏距离，所以，我们可以简单地认为向量的模等于L_{2}范数。而其他的范数模式和向量的模则没有任何关系。

内积

学习解析几何时，我们必须掌握的第二个概念就是内积。

如果说范数是模式，是用来描述向量长度或大小的概念性表达，那么内积可以让我们很直观地了解一个向量的长度、两个向量之间的距离和角度，它的一个主要目的就是判断向量之间是否是正交的，正交这个概念我们会在后面讲解。

点积

我们从特殊到一般，先来看点积，它和第三篇矩阵中说的“普通矩阵乘”形式一样，点积是特殊的内积，为什么说它特殊呢？那是因为在表示两个向量之间的距离时，它就是大家熟悉的欧式距离，点积可以表示成这样的形式：

$$
x^{T} y=\sum_{i=1}^{n} x_{i} y_{i}
$$

其他内积

除了点积外，我们再来看另一个不同的内积：设内积空间V是R^{2}，定义内积$\langle x, y\rangle=x_{1} y_{1}-(x_{1} y_{2}+x_{2} y_{1})+2 x_{2} y_{2}$，一看便知这个和点积完全不同。

内积空间

最后，我们再来看一般内积和内积空间。因为解析几何关注的是向量的长度、两个向量之间的距离和角度，所以，我们要在原来向量空间上加一个额外的结构，这个额外结构就是内积，而加了内积的向量空间，我们就叫做内积空间。

为了表达方便，我们可以把内积写成$\langle\ \cdot,\cdot\ \rangle$这样的形式，那么内积空间$V$可以被表示成这样：$(V,\langle\ \cdot,\cdot\ \rangle)$。这时，如果一般内积由点积来表达，那这个向量空间就变成了更具体的欧式向量空间。

接下来看下内积空间有什么性质？我们定义一个内积空间V和它的元素x、y、z，以及一个$c \in R$：

- 满足对称性：x和y的内积等于y和x的内积，$\langle x, y\rangle=\langle y, x\rangle$；
- 满足线性性：x和$y+cz$的内积等于，x和y的内积，与x和z的内积乘以c后的和，$\langle x, y+c z\rangle=\langle x, y\rangle+c\langle x, z\rangle$；
- 满足正定性：x和y的内积大于等于零，$\langle x, y\rangle \geq 0$。

对称正定矩阵

内积还定义了一类矩阵，这类矩阵在机器学习中很重要，因为它可以被用来判定多元函数极值，而在深度学习中，它更是被用来获取最小化损失函数，我们把这类矩阵叫做对称正定矩阵。

对称正定矩阵的定义是：如果一个对称矩阵A属于方阵$R^{n×n}$，对任意非零向量x，都有$x^{T} A x>0$，那么A就是对称正定矩阵。

我们来看两个例子，判断它们是不是对称正定矩阵。

第一个例子，请你回答下面这个矩阵是对称正定矩阵吗？

$$
A=\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 5
\end{array}\right]
$$

答案：是的，它是对称正定矩阵。因为$x^{T} A x>0$。

$$
x^{T} A x=\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 5
\end{array}\right]\left[\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right]=(3 x_{1}+2 x_{2})^{2}+x_{2}^{2}>0
$$

第二个例子，请你看下面这个矩阵是对称正定矩阵吗？

$$
A=\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 3
\end{array}\right]
$$

答案：不是的，它只是对称矩阵。因为$x^{T} A x$可能小于0。

$$
x^{T} A x=\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 3
\end{array}\right]\left[\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right]=(3 x_{1}+2 x_{2})^{2}-x_{2}^{2}
$$

长度、距离和角度

前面我们通过范数讲了向量的长度，但从内积的角度来看，我们发现，内积和范数之间有着千丝万缕的关系。我们来看看下面这个等式。

$$
\|x\|=\sqrt{\langle x, x\rangle}
$$

从这个等式我们发现，内积可以用来产生范数，确实是这样。不过，不是每一个范数都能被一个内积产生的，比如：曼哈顿范数。接下来，我们还是来关注能由内积产生的范数上，从不同的角度来看看几何上的长度、距离和角度的概念。

我们先用内积来计算一个**向量的长度**，比如：向量$x=[\begin{array}{ll}1 & 1\end{array}]^{T}$，我们可以使用点积来计算，计算后得出$x$的范数是$\sqrt{2}$，具体计算过程是这样的：$\|x\|=\sqrt{x^{T} x}=\sqrt{1^{2}+1^{2}}=\sqrt{2}$。

接着，我们再来看一下**向量之间的距离**，一个内积空间V，$(V,\langle\ ·,· \rangle)$，x和y是它的两个向量，那么x和y之间的距离就可以表示成：$d(x, y)=\|x-y\|=\sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$。

如果用点积来计算x和y之间的距离，那这个距离就叫做欧式距离。

再接着，来看看两个**向量之间的角度**。我们使用柯西-施瓦茨不等式（Cauchy-Schwarz Inequality）来表示内积空间中两个向量x和y之间的角度：a。

$$
-1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \leq 1
$$

取值是从-1到1之间，那么角度就是从0到$π$之间，我们用cos来表示就是：

$$
\cos (a)=\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}
$$

其中a就是角度，a的角度取值是0到$π$之间。我们很容易就能发现，其实两个向量之间的角度，就是告诉了我们两个向量之间方向的相似性。例如：x和$y=4x$，使用点积来计算它们之间的角度是0，也就是说它们的方向是一样的，y只是对x扩大了4倍而已。

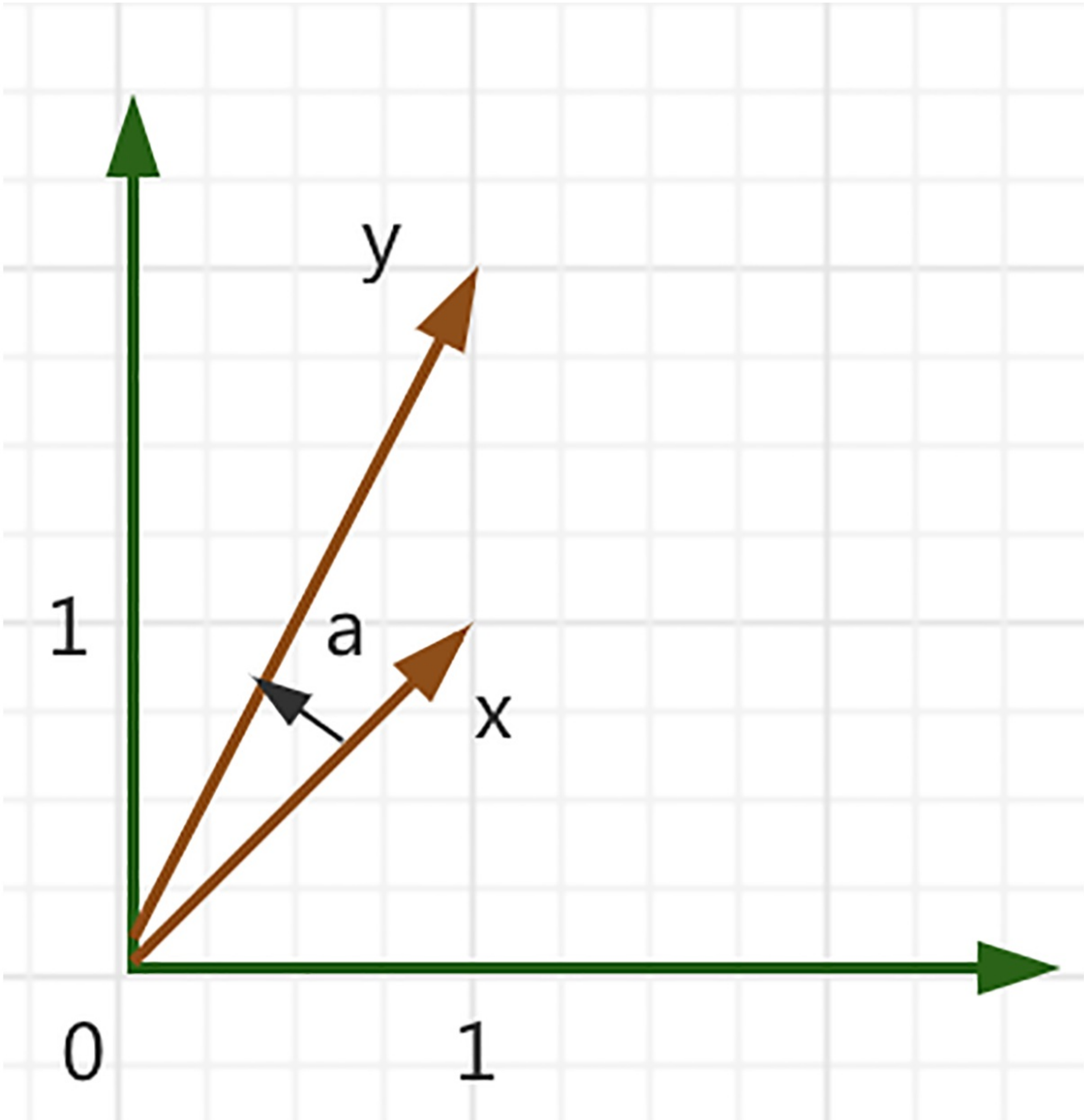
现在，我们通过一个例子，再来更清楚地看下两个向量之间角度的计算，设$x=[\begin{array}{ll}1 & 1\end{array}]^{T}$，$y=[\begin{array}{ll}1 & 2\end{array}]^{T}$，使用点积来计算，我们得出：

$$
\cos (a)=\frac{\langle x, y\rangle}{\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}}=\frac{x^{T} y}{\sqrt{x^{T} x y^{T} y}}=\frac{3}{\sqrt{10}}
$$

那么，这两个向量之间的角度如下。

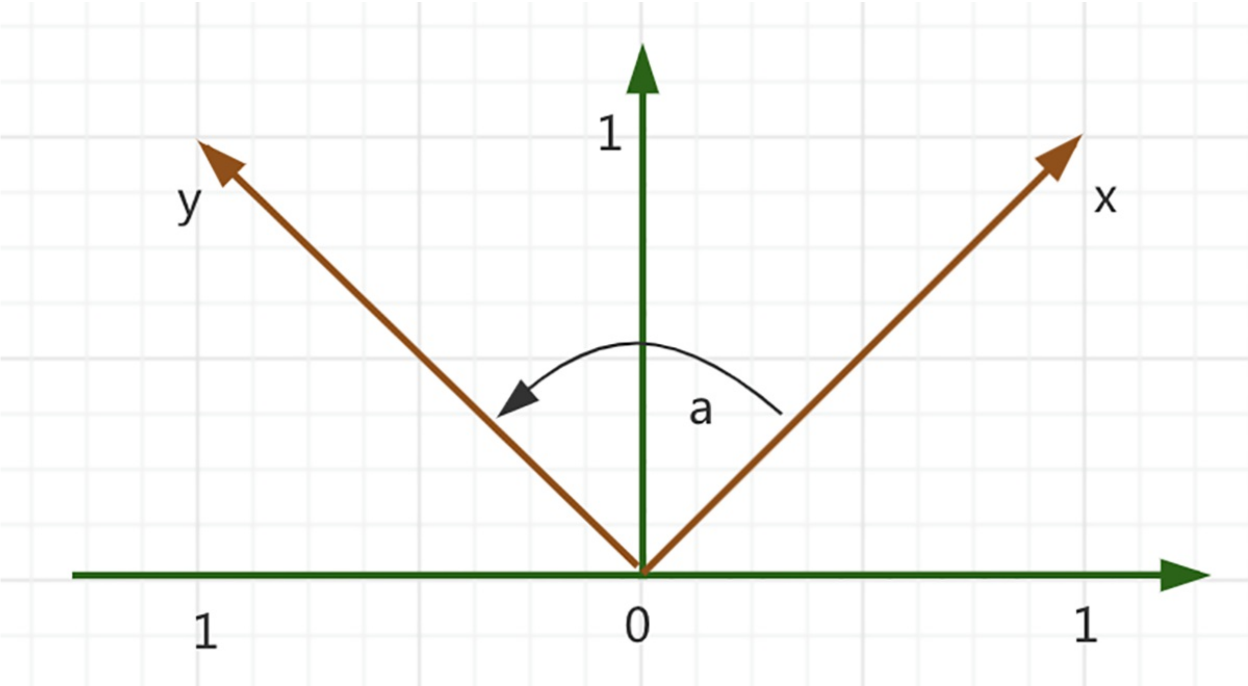
$$
\arccos \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \approx 0.32
$$

我们可以用图来更直观地表达一下。



于是，我们最后可以引出一个概念，也就是我们在一开始提到的**正交性**。如果两个向量x和y内积等于0，$\langle x, y\rangle=0$，那么x和y是正交的，这可以写成：$x \perp y$。再如果，x和y的范数都等于1，$\|x\|=\|y\|=1$，也就是说，如果它们都是单位向量，那么x和y就是标准正交的。

我们用图来更直观地表达一下。



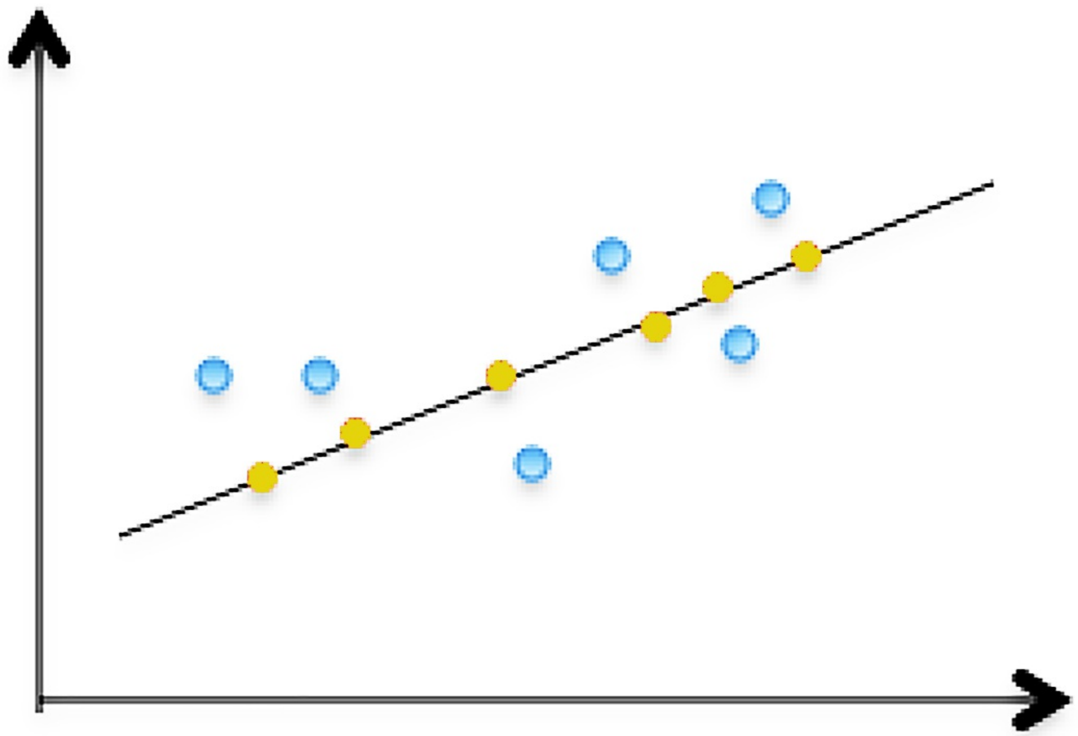
正交投影

在理论讲解之后，我们要来了解一下解析几何在实践中经常运用的概念——正交投影，它是一种重要的线性变换，在图形图像、编码理论、统计和机器学习中扮演了重要角色。

在机器学习中，数据一般都是高维的。众所周知，高维数据是很难来分析和可视化的。而且，不是所有的高维数据都是有用的，可能只有一些数据包含了大部分的重要信息。

正交投影就是高维到低维的数据投影，在第5节课线性空间中，我简单介绍了高维数据投影到低维后，我们就能在低维空间更多地了解数据集、提炼相关模式。而在机器学习中，最普遍的降维算法——PCA主成分分析，就是利用了降维的观点。

接下来，我开始讲解正交投影，在给出定义之前，先从一张图来了解会更直观。



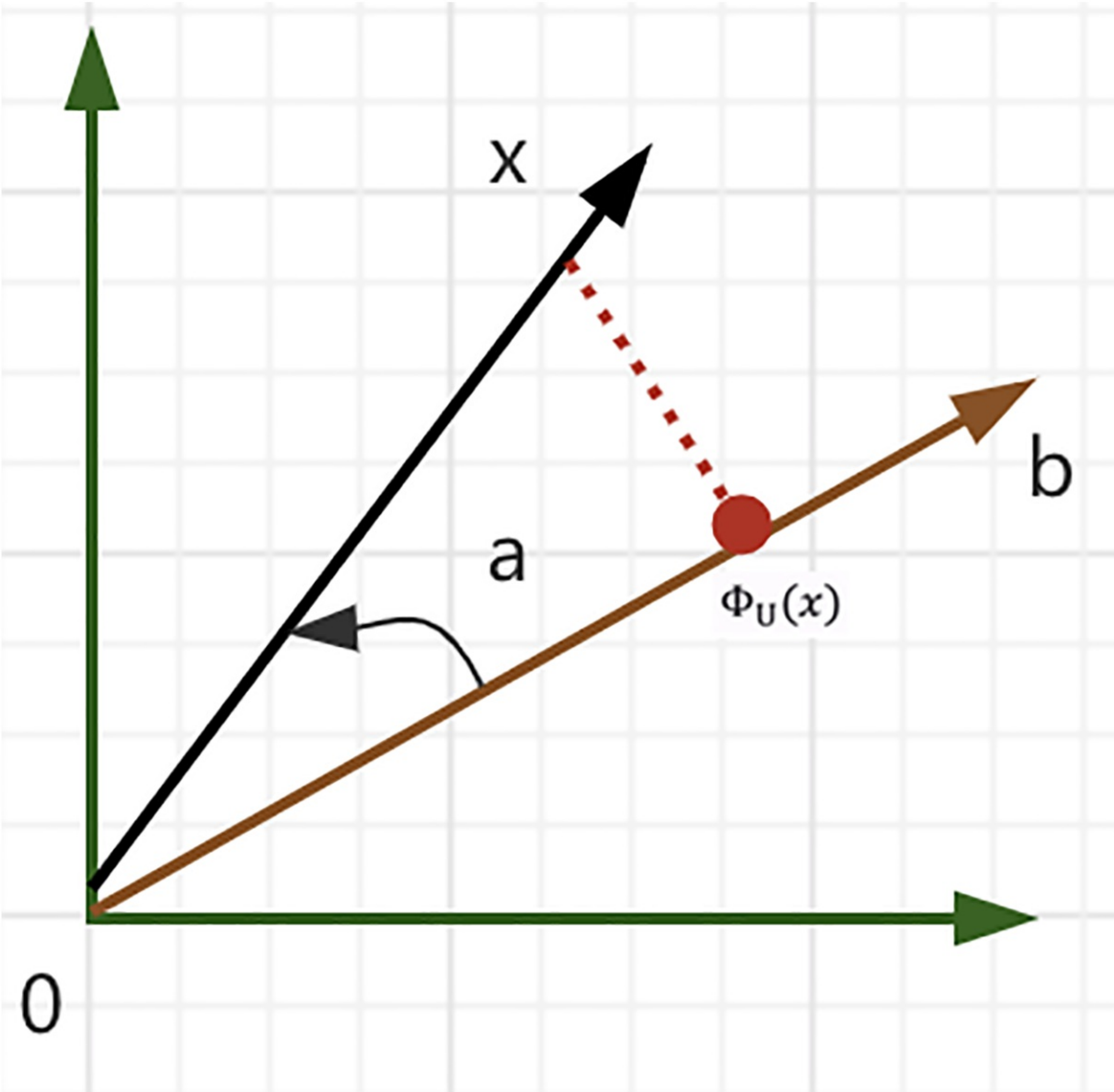
图中的蓝点是原二维数据，黄点是它们的正交投影。所以，实际降维后，在一维空间中就形成了这条黑线表示，它近似地表达了原来二维数据表示的信息。

现在我们可以来看一下投影的定义：V是一个向量空间，U是V的一个向量子空间，一个从V到U的线性映射Φ是一个投影，如果它满足：$\Phi^{2}=\Phi \circ \Phi=\Phi$。因为线性映射能够被变换矩阵表示，所以，这个定义同样适用于一个特殊类型变换矩阵：投影矩阵P_{Φ}，它也满足：$P_{\Phi}^{2}=P_{\Phi}$。

投影到一维子空间上（线）

接下来，我们来看看如何投影到一维子空间，也就是把内积空间的向量正交投影到子空间，这里我们使用点积作为内积。

假设有一条通过原点的线，这条线是由基向量b产生的一维子空间U，当我们把一个向量x投影到U时，需要寻找另一个最靠近x的向量$\Phi_{U}(x)$。还是老样子，我们通过图来看一下。



首先，投影$\Phi_{U}(x)$靠近x，也就是要找出x和$\Phi_{U}(x)$之间的$\left\|x-\Phi_{U}(x)\right\|$最小距离，从几何角度来说，就是线段$\Phi_{U}(x)-x$和$b$正交，满足等式：$\left\langle\Phi_{U}(x)-x, b\right\rangle=0$。其次，投影$\Phi_{U}(x)$必须是$U$的一个元素，也就是，基向量$b$的一个乘来产生$U$，$\Phi_{U}(x)=\lambda b$。

于是，我们可以通过三个步骤来分别得到λ、投影$\Phi_{U}(x)$和投影矩阵P_{Φ}，来把任意x映射到子空间U上。

第一步，计算λ，通过正交条件产生这样的等式：
$\left\langle x-\Phi_{U}(x), b\right\rangle=0$。因为$\Phi_{U}(x)=\lambda b$，所以它可以转变成：$\langle x-\lambda b, b\rangle=0$。

利用内积的双线性：$\langle x, b\rangle-\lambda\langle b, b\rangle=0$，我们得到：

$$
\lambda=\frac{\langle x, b\rangle}{\langle b, b\rangle}=\frac{\langle b, x\rangle}{\|b\|^{2}}
$$

然后，我们通过点积得到：

$$
\lambda=\frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}}
$$

如果$\|b\|=1$，那λ就等于$b^{T}x$。

接着第二步，是计算投影点$\Phi_{U}(x)$。从$\Phi_{U}(x)=\lambda b$，我们得到：

$$
\Phi_{U}(x)=\lambda b=\frac{\langle x, b\rangle}{\|b\|^{2}} b=\frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}} b
$$

通过点积来计算，我们就得到了$\Phi_{U}(x)$的长度：

$$
\left\|\Phi_{U}(x)\right\|=\frac{\left|b^{T} x\right|}{\|b\|^{2}}\|b\|=|\cos (a)|\|x\|\|b\| \frac{\|b\|}{\|b\|^{2}}=\mid \cos (a)\|x\|
$$

这里的a，是x和b之间的夹角。

最后第三步，是计算投影矩阵P_{Φ}，投影矩阵是一个线性映射。所以，我们可以得到：$\Phi_{U}(x)=P_{\Phi}x$，通过$\Phi_{U}(x)=\lambda b$，我们可以得到：

$$

$$
\Phi_{U}(x)=\lambda b=b \lambda=b \frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}}=\frac{b b^{T}}{\|b\|^{2}} x
$$

这里，我们立即可以得到投影矩阵P_{Φ}的计算等式：

$$
P_{\Phi}=\frac{b b^{T}}{\|b\|^{2}}
$$

本节小结

这一节课覆盖的知识点有点多，因为要把解析几何的知识点，浓缩到核心的几个点来讲解是一项艰巨的任务。不过不要怕，前面的几个知识点都是为这一节的重点“正交投影”来铺垫的。范数，被用来度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小，而内积让我们很直观地了解一个向量的长度、两个向量之间的距离和角度，以及判断向量之间是否是正交的。

所以，希望你能掌握范数和内积的理论知识，并把它和正交投影结合，运用在一些实践应用场景中，比如：3D图形图像的坐标变换、数据压缩，以及机器学习的降维。

线性代数练习场

请用之前学到的正交投影的投影矩阵算法，来计算一条线上的投影矩阵P_{Φ}。

这条线通过原点，由基$b=\left[\begin{array}{lll}1 & 2 & 2\end{array}\right]^{T}$产生，$P_{\Phi}$计算后，再通过一个$x$来验证一下它是否在$b$产生的子空间中，我们取$x=\left[\begin{array}{lll}1 & 1 & 1\end{array}\right]^{T}$。

欢迎在留言区晒出你的运算结果，我会及时回复。同时，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友，一起讨论、学习。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数，今天我们要讲的内容是“解析几何”。

前面所有章节我们都是围绕向量、矩阵，以及向量空间来展开的。但这一节课有点不一样，我要讲的是解析几何，它使得向量从抽象走向了具象，让向量具有了几何的含义。比如，计算向量的长度、向量之间的距离和角度，这在机器学习的主成分分析PCA中是非常有用的。

范数

讲解析几何我们得从“范数”开始讲起。

因为很多人看到几何向量的第一反应就是，它是从原点开始的有向线段，并且向量的长度是这个有向线段的终端和起始端之间的距离。而范数，就是被用来度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小的。

现在，我们先来看一下范数的数学定义：一个向量空间V上的一个范数就是一个函数，它计算V中的每一个向量x的长度，用符号来表示的话就是：$\|x\| \in R$，它满足三种性质：

1. 正齐次性： 如果输入参数扩大正$λ$倍，其对应的函数也扩正大倍。设$λ \in R$，$x \in V$，$\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$；
2. 次可加性：类似三角不等式，两边之和大于第三边。设$x,y \in V$，$\|x+y\| \leq\|x\|+\|y\|$；
3. 正定性：向量x的长度一定大于等于零。$\|x\| \geq 0$。

看到这里，你也许会问，范数似乎和以前老师教的**向量的模**一样啊。先别急，它们还真有那么一点关系，你听我慢慢道来。由于范数是度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小的，所以它和向量空间维度是有关系的，于是，我们可以把范数写成这样的模式来区分不同维度的大小计算：$L_{1}, L_{2}, \ldots, L_{\infty}$。

- L_{1}范数：曼哈顿范数，也叫曼哈顿距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{1}=\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}\right|
$$

- L_{2}范数：欧式范数，也叫欧式距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2}}
$$

- L_{∞}范数：切比雪夫范数，也叫切比雪夫距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{\infty}=\max \left(\left|x_{1}\right|,\left|x_{2}\right|, \ldots,\left|x_{n}\right|\right)
$$

我们发现，向量的模和L_{2}范数的计算方式都是一样的，都表示的是欧氏距离，所以，我们可以简单地认为向量的模等于L_{2}范数。而其他的范数模式和向量的模则没有任何关系。

内积

学习解析几何时，我们必须掌握的第二个概念就是内积。

如果说范数是模式，是用来描述向量长度或大小的概念性表达，那么内积可以让我们很直观地了解一个向量的长度、两个向量之间的距离和角度，它的一个主要目的就是判断向量之间是否是正交的，正交这个概念我们会在后面讲解。

点积

我们从特殊到一般，先来看点积，它和第三篇矩阵中说的“普通矩阵乘”形式一样，点积是特殊的内积，为什么说它特殊呢？那是因为在表示两个向量之间的距离时，它就是大家熟悉的欧式距离，点积可以表示成这样的形式：

$$
x^{T} y=\sum_{i=1}^{n} x_{i} y_{i}
$$

其他内积

除了点积外，我们再来看另一个不同的内积：设内积空间V是R^{2}，定义内积$\langle x, y\rangle=x_{1} y_{1}-(x_{1} y_{2}+x_{2} y_{1})+2 x_{2} y_{2}$，一看便知这个和点积完全不同。

内积空间

最后，我们再来看一般内积和内积空间。因为解析几何关注的是向量的长度、两个向量之间的距离和角度，所以，我们要在原来向量空间上加一个额外的结构，这个额外结构就是内积，而加了内积的向量空间，我们就叫做内积空间。

为了表达方便，我们可以把内积写成$\langle\ \cdot,\cdot\ \rangle$这样的形式，那么内积空间$V$可以被表示成这样：$(V,\langle\ \cdot,\cdot\ \rangle)$。这时，如果一般内积由点积来表达，那这个向量空间就变成了更具体的欧式向量空间。

接下来看下内积空间有什么性质？我们定义一个内积空间V和它的元素x、y、z，以及一个$c \in R$：

- 满足对称性：x和y的内积等于y和x的内积，$\langle x, y\rangle=\langle y, x\rangle$；
- 满足线性性：x和$y+cz$的内积等于，x和y的内积，与x和z的内积乘以c后的和，$\langle x, y+c z\rangle=\langle x, y\rangle+c\langle x, z\rangle$；
- 满足正定性：x和y的内积大于等于零，$\langle x, y\rangle \geq 0$。

对称正定矩阵

内积还定义了一类矩阵，这类矩阵在机器学习中很重要，因为它可以被用来判定多元函数极值，而在深度学习中，它更是被用来获取最小化损失函数，我们把这类矩阵叫做对称正定矩阵。

对称正定矩阵的定义是：如果一个对称矩阵A属于方阵$R^{n×n}$，对任意非零向量x，都有$x^{T} A x>0$，那么A就是对称正定矩阵。

我们来看两个例子，判断它们是不是对称正定矩阵。

第一个例子，请你回答下面这个矩阵是对称正定矩阵吗？

$$
A=\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 5
\end{array}\right]
$$

答案：是的，它是对称正定矩阵。因为$x^{T} A x>0$。

$$
x^{T} A x=\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 5
\end{array}\right]\left[\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right]=(3 x_{1}+2 x_{2})^{2}+x_{2}^{2}>0
$$

第二个例子，请你看下面这个矩阵是对称正定矩阵吗？

$$
A=\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 3
\end{array}\right]
$$

答案：不是的，它只是对称矩阵。因为$x^{T} A x$可能小于0。

$$
x^{T} A x=\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 3
\end{array}\right]\left[\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right]=(3 x_{1}+2 x_{2})^{2}-x_{2}^{2}
$$

长度、距离和角度

前面我们通过范数讲了向量的长度，但从内积的角度来看，我们发现，内积和范数之间有着千丝万缕的关系。我们来看看下面这个等式。

$$
\|x\|=\sqrt{\langle x, x\rangle}
$$

从这个等式我们发现，内积可以用来产生范数，确实是这样。不过，不是每一个范数都能被一个内积产生的，比如：曼哈顿范数。接下来，我们还是来关注能由内积产生的范数上，从不同的角度来看看几何上的长度、距离和角度的概念。

我们先用内积来计算一个**向量的长度**，比如：向量$x=[\begin{array}{ll}1 & 1\end{array}]^{T}$，我们可以使用点积来计算，计算后得出$x$的范数是$\sqrt{2}$，具体计算过程是这样的：$\|x\|=\sqrt{x^{T} x}=\sqrt{1^{2}+1^{2}}=\sqrt{2}$。

接着，我们再来看一下**向量之间的距离**，一个内积空间V，$(V,\langle\ \cdot,\cdot\ \rangle)$，$x$和$y$是它的两个向量，那么$x$和$y$之间的距离就可以表示成：$d(x, y)=\|x-y\|=\sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$。

如果用点积来计算x和y之间的距离，那这个距离就叫做欧式距离。

再接着，来看看两个**向量之间的角度**。我们使用柯西-施瓦茨不等式（Cauchy-Schwarz Inequality）来表示内积空间中两个向量x和y之间的角度：a。

$$
-1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \leq 1
$$

取值是从-1到1之间，那么角度就是从0到π之间，我们用cos来表示就是：

$$
\cos (a)=\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}
$$

其中a就是角度，a的角度取值是0到π之间。我们很容易就能发现，其实两个向量之间的角度，就是告诉了我们两个向量之间方向的相似性。例如：x和$y=4x$，使用点积来计算它们之间的角度是0，也就是说它们的方向是一样的，y只是对x扩大了4倍而已。

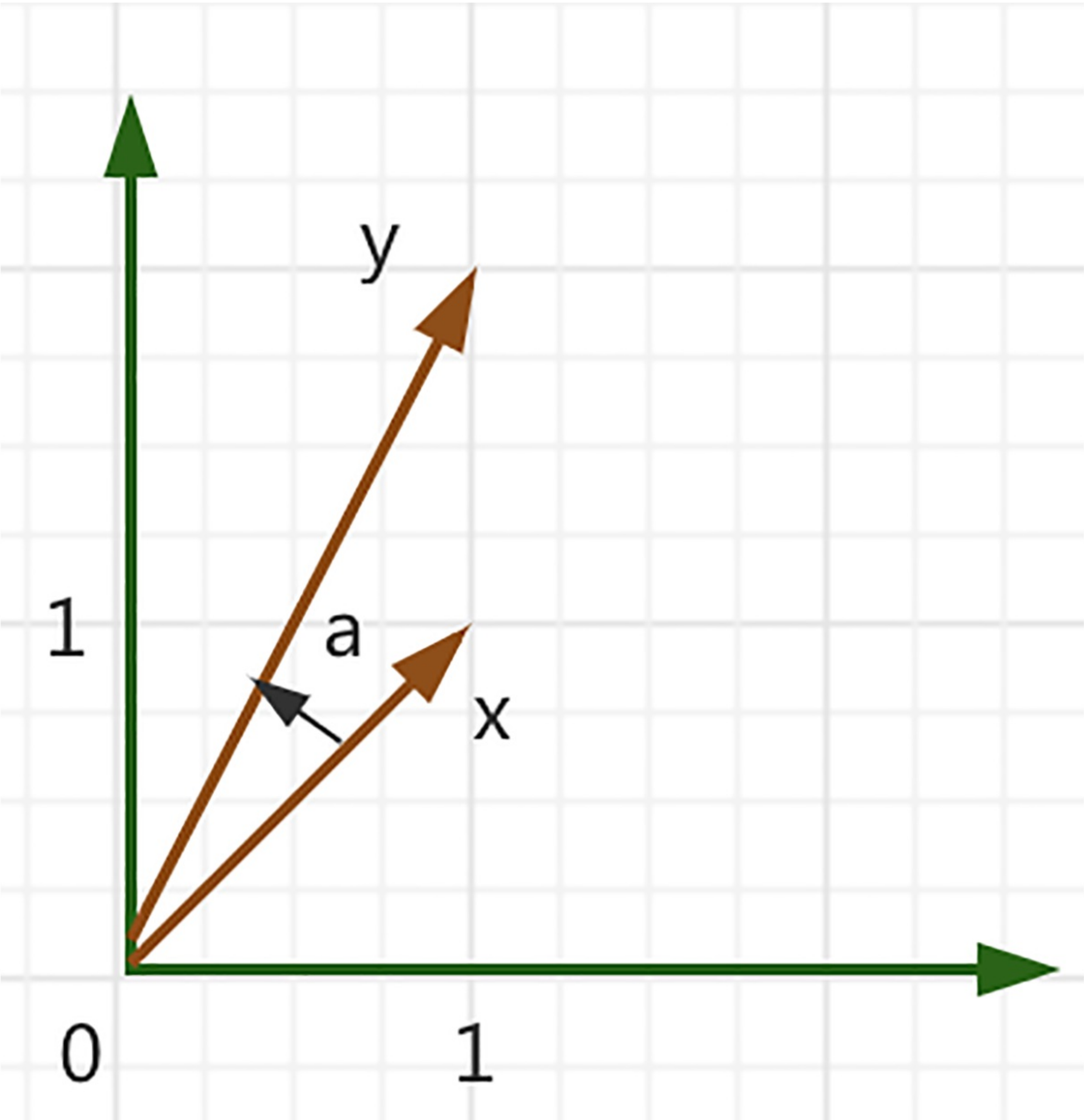
现在，我们通过一个例子，再来更清楚地看下两个向量之间角度的计算，设$x=[\begin{array}{ll}1 & 1\end{array}]^{T}$，$y=[\begin{array}{ll}1 & 2\end{array}]^{T}$，使用点积来计算，我们得出：

$$
\cos (a)=\frac{\langle x, y\rangle}{\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}}=\frac{x^{T} y}{\sqrt{x^{T} x y^{T} y}}=\frac{3}{\sqrt{10}}
$$

那么，这两个向量之间的角度如下。

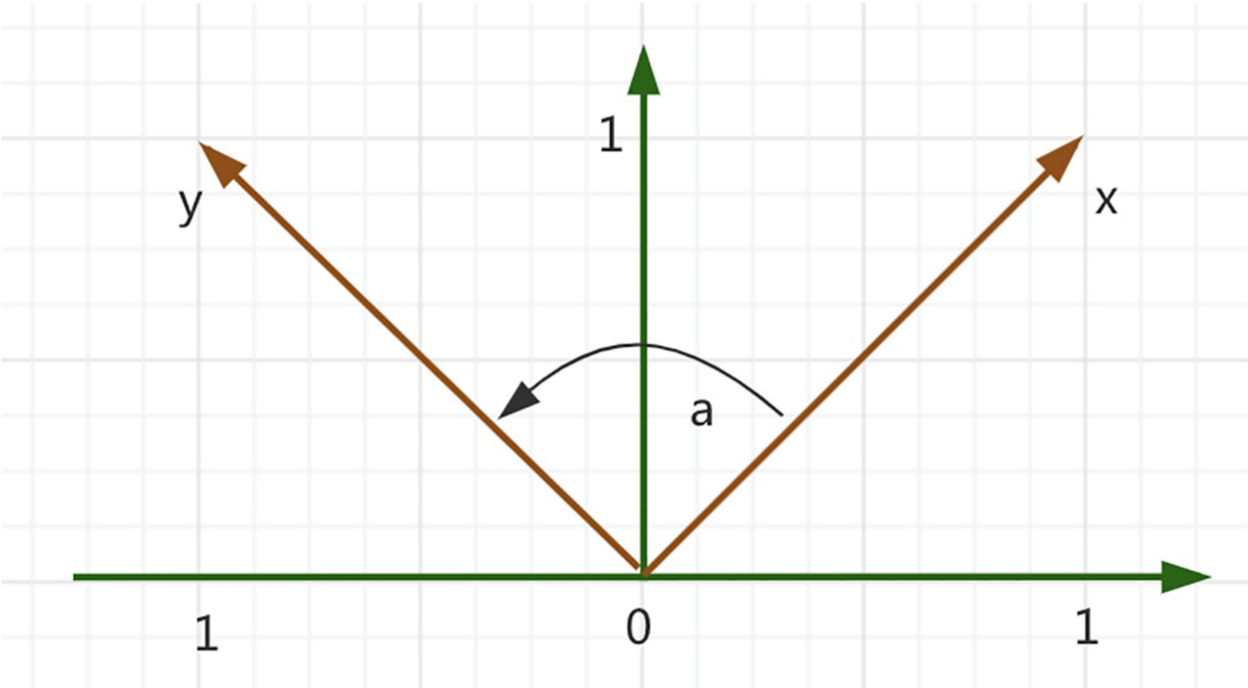
$$
\arccos \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \approx 0.32
$$

我们可以用图来更直观地表达一下。



于是，我们最后可以引出一个概念，也就是我们在一开始提到的**正交性**。如果两个向量x和y内积等于0，$\langle x, y\rangle=0$，那么x和y是正交的，这可以写成：$x \perp y$。再如果，x和y的范数都等于1，$\|x\|=\|y\|=1$，也就是说，如果它们都是单位向量，那么x和y就是标准正交的。

我们用图来更直观地表达一下。



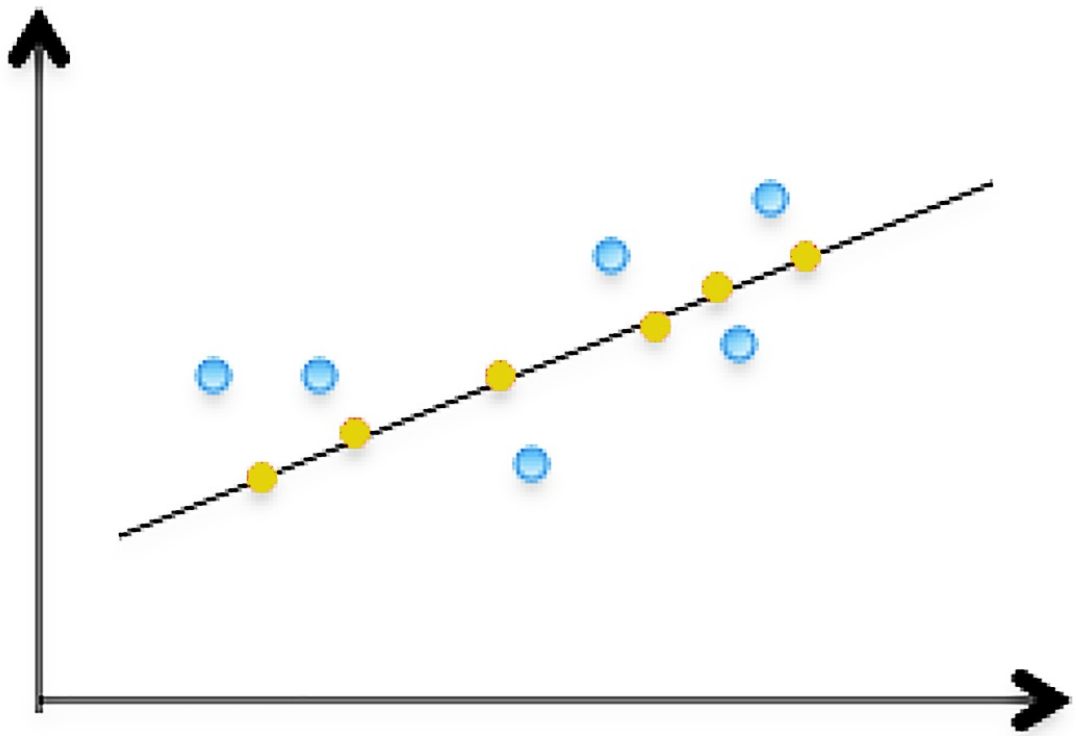
正交投影

在理论讲解之后，我们要来了解一下解析几何在实践中经常运用的概念——正交投影，它是一种重要的线性变换，在图形图像、编码理论、统计和机器学习中扮演了重要角色。

在机器学习中，数据一般都是高维的。众所周知，高维数据是很难来分析和可视化的。而且，不是所有的高维数据都是有用的，可能只有一些数据包含了大部分的重要信息。

正交投影就是高维到低维的数据投影，在第5节课线性空间中，我简单介绍了高维数据投影到低维后，我们就能在低维空间更多地了解数据集、提炼相关模式。而在机器学习中，最普遍的降维算法——PCA主成分分析，就是利用了降维的观点。

接下来，我开始讲解正交投影，在给出定义之前，先从一张图来了解会更直观。



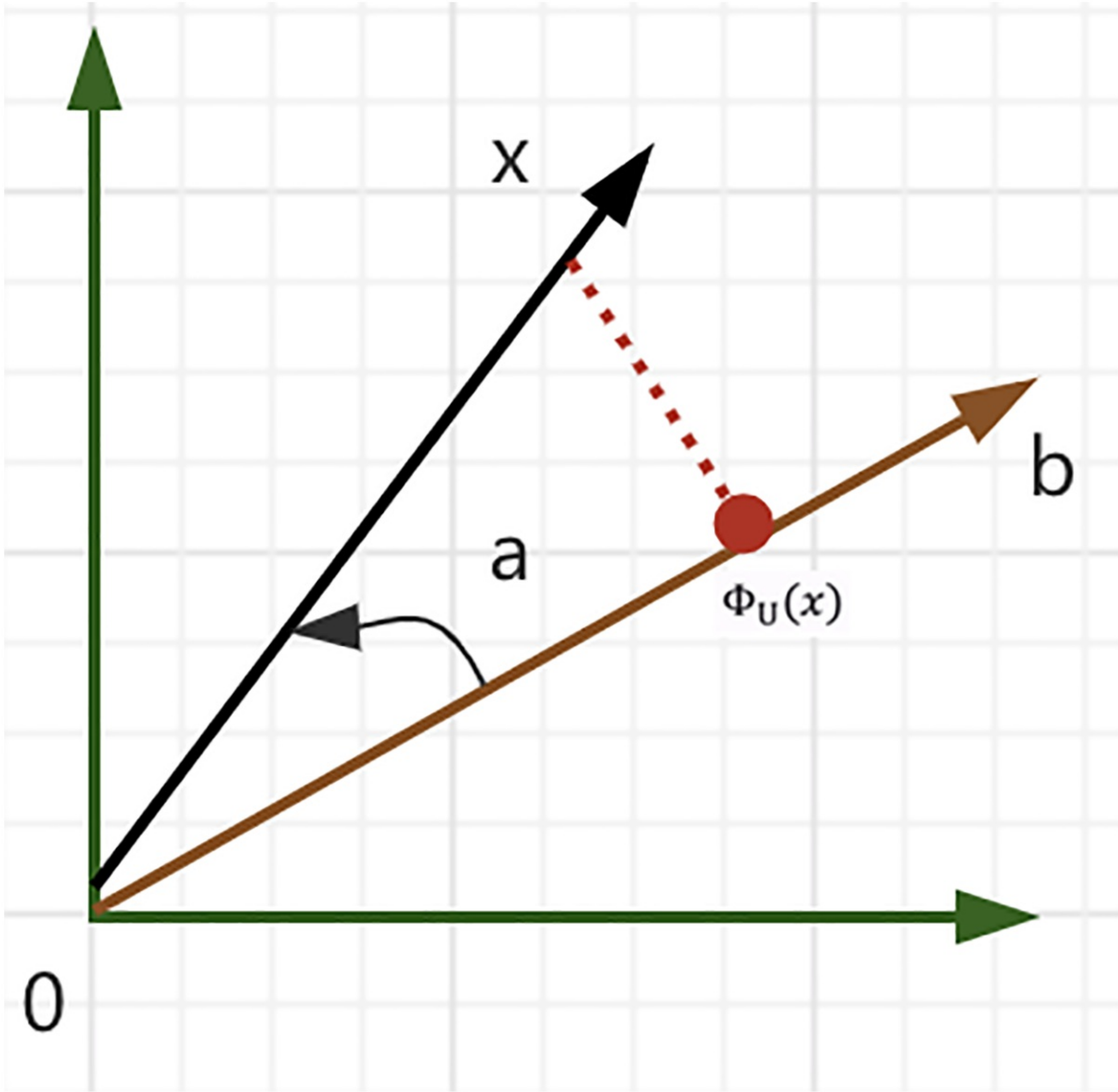
图中的蓝点是原二维数据，黄点是它们的正交投影。所以，实际降维后，在一维空间中就形成了这条黑线表示，它近似地表达了原来二维数据表示的信息。

现在我们可以来看一下投影的定义：V是一个向量空间，U是V的一个向量子空间，一个从V到U的线性映射Φ是一个投影，如果它满足：$\Phi^{2}=\Phi \circ \Phi=\Phi$。因为线性映射能够被变换矩阵表示，所以，这个定义同样适用于一个特殊类型变换矩阵：投影矩阵P_{Φ}，它也满足：$P_{\Phi}^{2}=P_{\Phi}$。

投影到一维子空间上（线）

接下来，我们来看看如何投影到一维子空间，也就是把内积空间的向量正交投影到子空间，这里我们使用点积作为内积。

假设有一条通过原点的线，这条线是由基向量b产生的一维子空间U，当我们把一个向量x投影到U时，需要寻找另一个最靠近x的向量$\Phi_{U}(x)$。还是老样子，我们通过图来看一下。



首先，投影$\Phi_{U}(x)$靠近x，也就是要找出x和$\Phi_{U}(x)$之间的$\left\|x-\Phi_{U}(x)\right\|$最小距离，从几何角度来说，就是线段$\Phi_{U}(x)-x$和$b$正交，满足等式：$\left\langle\Phi_{U}(x)-x, b\right\rangle=0$。其次，投影$\Phi_{U}(x)$必须是$U$的一个元素，也就是，基向量$b$的一个乘来产生$U$，$\Phi_{U}(x)=λb$。

于是，我们可以通过三个步骤来分别得到$λ$、投影$\Phi_{U}(x)$和投影矩阵P_{Φ}，来把任意x映射到子空间U上。

第一步，计算$λ$，通过正交条件产生这样的等式：
$\left\langle x-\Phi_{U}(x), b\right\rangle=0$。因为$\Phi_{U}(x)=λb$，所以它可以转变成：$\langle x-\lambda b, b\rangle=0$。

利用内积的双线性：$\langle x, b\rangle-\lambda\langle b, b\rangle=0$，我们得到：

$$
\lambda=\frac{\langle x, b\rangle}{\langle b, b\rangle}=\frac{\langle b, x\rangle}{\|b\|^{2}}
$$

然后，我们通过点积得到：

$$
\lambda=\frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}}
$$

如果$\|b\|=1$，那$λ$就等于$b^{T}x$。

接着第二步，是计算投影点$\Phi_{U}(x)$。从$\Phi_{U}(x)=λb$，我们得到：

$$
\Phi_{U}(x)=\lambda b=\frac{\langle x, b\rangle}{\|b\|^{2}} b=\frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}} b
$$

通过点积来计算，我们就得到了$\Phi_{U}(x)$的长度：

$$
\left\|\Phi_{U}(x)\right\|=\frac{\left|b^{T} x\right|}{\|b\|^{2}}\|b\|=|\cos (a)|\|x\|\|b\| \frac{\|b\|}{\|b\|^{2}}=\mid \cos (a)\|x\|
$$

这里的a，是x和b之间的夹角。

最后第三步，是计算投影矩阵P_{Φ}，投影矩阵是一个线性映射。所以，我们可以得到：$\Phi_{U}(x)=P_{\Phi}x$，通过$\Phi_{U}(x)=λb$，我们可以得到：

$$

$$
\Phi_{U}(x)=\lambda b=b \lambda=b \frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}}=\frac{b b^{T}}{\|b\|^{2}} x
$$

这里，我们立即可以得到投影矩阵P_{Φ}的计算等式：

$$
P_{\Phi}=\frac{b b^{T}}{\|b\|^{2}}
$$

本节小结

这一节课覆盖的知识点有点多，因为要把解析几何的知识点，浓缩到核心的几个点来讲解是一项艰巨的任务。不过不要怕，前面的几个知识点都是为这一节的重点"正交投影"来铺垫的。范数，被用来度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小，而内积让我们很直观地了解一个向量的长度、两个向量之间的距离和角度，以及判断向量之间是否是正交的。

所以，希望你能掌握范数和内积的理论知识，并把它和正交投影结合，运用在一些实践应用场景中，比如：3D图形图像的坐标变换、数据压缩，以及机器学习的降维。

线性代数练习场

请用之前学到的正交投影的投影矩阵算法，来计算一条线上的投影矩阵P_{Φ}。

这条线通过原点，由基$b=\left[\begin{array}{lll}1 & 2 & 2\end{array}\right]^{T}$产生，$P_{\Phi}$计算后，再通过一个$x$来验证一下它是否在$b$产生的子空间中，我们取$x=\left[\begin{array}{lll}1 & 1 & 1\end{array}\right]^{T}$。

欢迎在留言区晒出你的运算结果，我会及时回复。同时，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友，一起讨论、学习。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数，今天我们要讲的内容是"解析几何"。

前面所有章节我们都是围绕向量、矩阵，以及向量空间来展开的。但这一节课有点不一样，我要讲的是解析几何，它使得向量从抽象走向了具象，让向量具有了几何的含义。比如，计算向量的长度、向量之间的距离和角度，这在机器学习的主成分分析PCA中是非常有用的。

范数

讲解析几何我们得从"范数"开始讲起。

因为很多人看到几何向量的第一反应就是，它是从原点开始的有向线段，并且向量的长度是这个有向线段的终端和起始端之间的距离。而范数，就是被用来度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小的。

现在，我们先来看一下范数的数学定义：一个向量空间V上的一个范数就是一个函数，它计算V中的每一个向量x的长度，用符号来表示的话就是：$\|x\| \in R$，它满足三种性质：

1. 正齐次性：如果输入参数扩大正$λ$倍，其对应的函数也扩正大倍。设$λ \in R$，$x \in V$，$\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$；
2. 次可加性：类似三角不等式，两边之和大于第三边。设$x,y \in V$，$\|x+y\| \leq\|x\|+\|y\|$；
3. 正定性：向量x的长度一定大于等于零。$\|x\| \geq 0$。

看到这里，你也许会问，范数似乎和以前老师教的**向量的模**一样啊。先别急，它们还真有那么一点关系，你听我慢慢道来。由于范数是度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小的，所以它和向量空间维度是有关系的，于是，我们可以把范数写成这样的模式来区分不同维度的大小计算：$L_{1}, L_{2}, \ldots, L_{\infty}$。

- L_{1}范数：曼哈顿范数，也叫曼哈顿距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{1}=\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}\right|
$$

- L_{2}范数：欧式范数，也叫欧式距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2}}
$$

- L_{∞}范数：切比雪夫范数，也叫切比雪夫距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{\infty}=\max \left(\left|x_{1}\right|,\left|x_{2}\right|, \ldots,\left|x_{n}\right|\right)
$$

我们发现，向量的模和L_{2}范数的计算方式都是一样的，都表示的是欧氏距离，所以，我们可以简单地认为向量的模等于L_{2}范数。而其他的范数模式和向量的模则没有任何关系。

内积

学习解析几何时，我们必须掌握的第二个概念就是内积。

如果说范数是模式，是用来描述向量长度或大小的概念性表达，那么内积可以让我们很直观地了解一个向量的长度、两个向量之间的距离和角度，它的一个主要目的就是判断向量之间是否是正交的，正交这个概念我们会在后面讲解。

点积

我们从特殊到一般，先来看点积，它和第三篇矩阵中说的"普通矩阵乘"形式一样，点积是特殊的内积，为什么说它特殊呢？那是因为在表示两个向量之间的距离时，它就是大家熟悉的欧式距离，点积可以表示成这样的形式：

$$
x^{T} y=\sum_{i=1}^{n} x_{i} y_{i}
$$

其他内积

除了点积外，我们再来看另一个不同的内积：设内积空间V是R^{2}，定义内积$\langle x, y\rangle=x_{1} y_{1}-(x_{1} y_{2}+x_{2} y_{1})+2 x_{2} y_{2}$，一看便知这个和点积完全不同。

内积空间

最后，我们再来看一般内积和内积空间。因为解析几何关注的是向量的长度、两个向量之间的距离和角度，所以，我们要在原来向量空间上加一个额外的结构，这个额外结构就是内积，而加了内积的向量空间，我们就叫做内积空间。

为了表达方便，我们可以把内积写成$\langle\ \cdot, \cdot\ \rangle$这样的形式，那么内积空间$V$可以被表示成这样：$(V,\langle\ \cdot, \cdot\ \rangle)$。这时，如果一般内积由点积来表达，那这个向量空间就变成了更具体的欧式向量空间。

接下来看下内积空间有什么性质？我们定义一个内积空间V和它的元素x、y、z，以及一个$c \in R$：

- 满足对称性：x和y的内积等于y和x的内积，$\langle x, y\rangle=\langle y, x\rangle$；
- 满足线性性：x和$y+cz$的内积等于，x和y的内积，与x和z的内积乘以c后的和，$\langle x, y+c z\rangle=\langle x, y\rangle+c\langle x, z\rangle$；
- 满足正定性：x和y的内积大于等于零，$\langle x, y\rangle \geq 0$。

对称正定矩阵

内积还定义了一类矩阵，这类矩阵在机器学习中很重要，因为它可以被用来判定多元函数极值，而在深度学习中，它更是被用来获取最小化损失函数，我们把这类矩阵叫做对称正定矩阵。

对称正定矩阵的定义是：如果一个对称矩阵A属于方阵$R^{n×n}$，对任意非零向量x，都有$x^{T} A x>0$，那么A就是对称正定矩阵。

我们来看两个例子，判断它们是不是对称正定矩阵。

第一个例子，请你回答下面这个矩阵是对称正定矩阵吗？

$$
A=\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 5
\end{array}\right]
$$

答案：是的，它是对称正定矩阵。因为$x^{T} A x>0$。

$$
x^{T} A x=\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 5
\end{array}\right]\left[\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right]=(3 x_{1}+2 x_{2})^{2}+x_{2}^{2}>0
$$

第二个例子，请你看下面这个矩阵是对称正定矩阵吗？

$$
A=\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 3
\end{array}\right]
$$

答案：不是的，它只是对称矩阵。因为$x^{T} A x$可能小于0。

$$
x^{T} A x=\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 3
\end{array}\right]\left[\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right]=(3 x_{1}+2 x_{2})^{2}-x_{2}^{2}
$$

长度、距离和角度

前面我们通过范数讲了向量的长度，但从内积的角度来看，我们发现，内积和范数之间有着千丝万缕的关系。我们来看看下面这个等式。

$$
\|x\|=\sqrt{\langle x, x\rangle}
$$

从这个等式我们发现，内积可以用来产生范数，确实是这样。不过，不是每一个范数都能被一个内积产生的，比如：曼哈顿范数。接下来，我们还是来关注能由内积产生的范数上，从不同的角度来看看几何上的长度、距离和角度的概念。

我们先用内积来计算一个**向量的长度**，比如：向量$x=[\begin{array}{ll}1 & 1\end{array}]^{T}$，我们可以使用点积来计算，计算后得出$x$的范数是$\sqrt{2}$，具体计算过程是这样的：$\|x\|=\sqrt{x^{T} x}=\sqrt{1^{2}+1^{2}}=\sqrt{2}$。

接着，我们再来看一下**向量之间的距离**，一个内积空间V，$(V,\langle\ \cdot,\cdot\ \rangle)$，$x$和$y$是它的两个向量，那么$x$和$y$之间的距离就可以表示成：$d(x, y)=\|x-y\|=\sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$。

如果用点积来计算x和y之间的距离，那这个距离就叫做欧式距离。

再接着，来看看两个**向量之间的角度**。我们使用柯西-施瓦茨不等式（Cauchy-Schwarz Inequality）来表示内积空间中两个向量x和y之间的角度：a。

$$
-1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \leq 1
$$

取值是从-1到1之间，那么角度就是从0到$π$之间，我们用cos来表示就是：

$$
\cos (a)=\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}
$$

其中a就是角度，a的角度取值是0到$π$之间。我们很容易就能发现，其实两个向量之间的角度，就是告诉了我们两个向量之间方向的相似性。例如：x和$y=4x$，使用点积来计算它们之间的角度是0，也就是说它们的方向是一样的，y只是对x扩大了4倍而已。

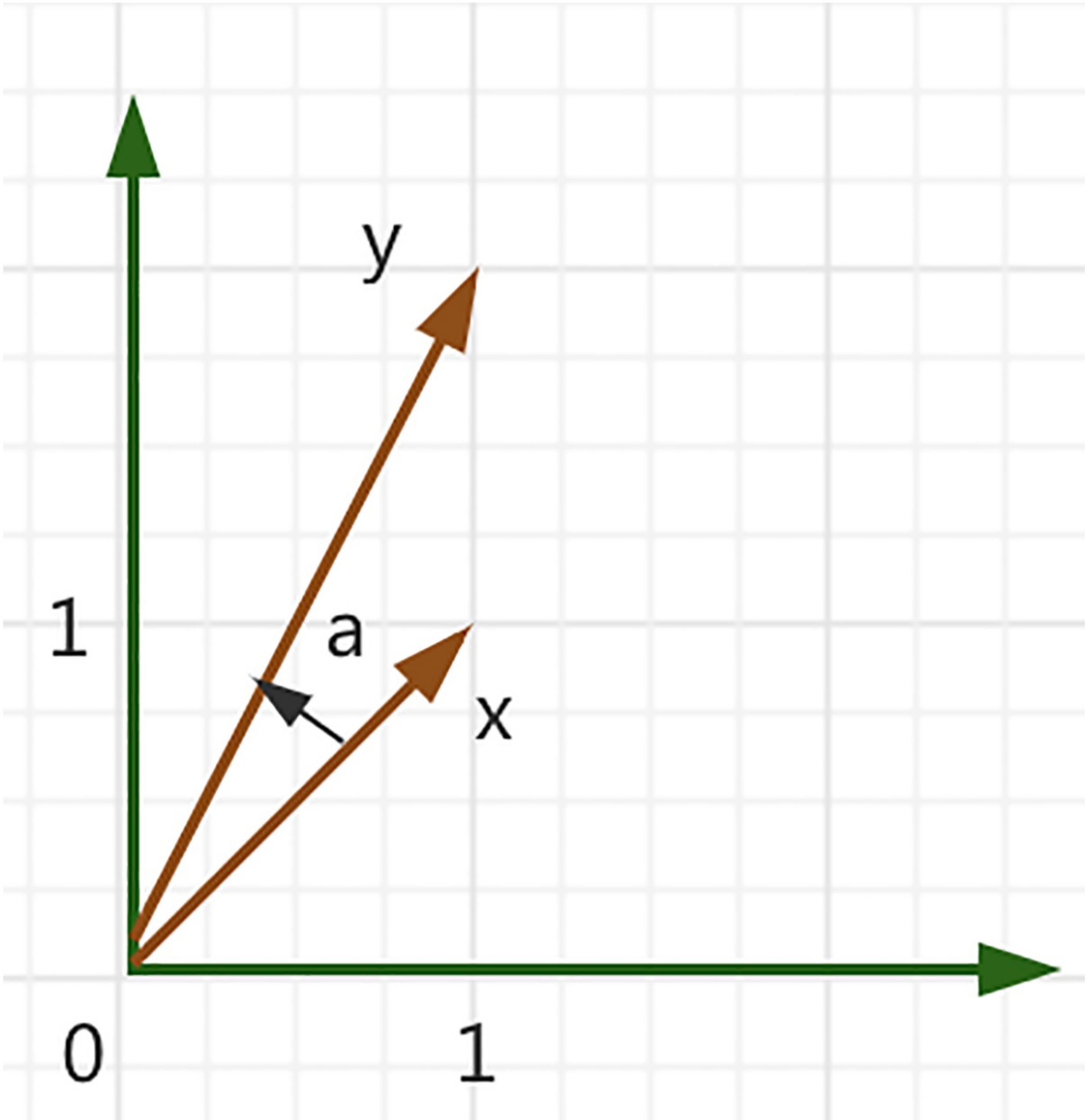
现在，我们通过一个例子，再来更清楚地看下两个向量之间角度的计算，设$x=[\begin{array}{ll}1 & 1\end{array}]^{T}$，$y=[\begin{array}{ll}1 & 2\end{array}]^{T}$，使用点积来计算，我们得出：

$$
\cos (a)=\frac{\langle x, y\rangle}{\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}}=\frac{x^{T} y}{\sqrt{x^{T} x y^{T} y}}=\frac{3}{\sqrt{10}}
$$

那么，这两个向量之间的角度如下。

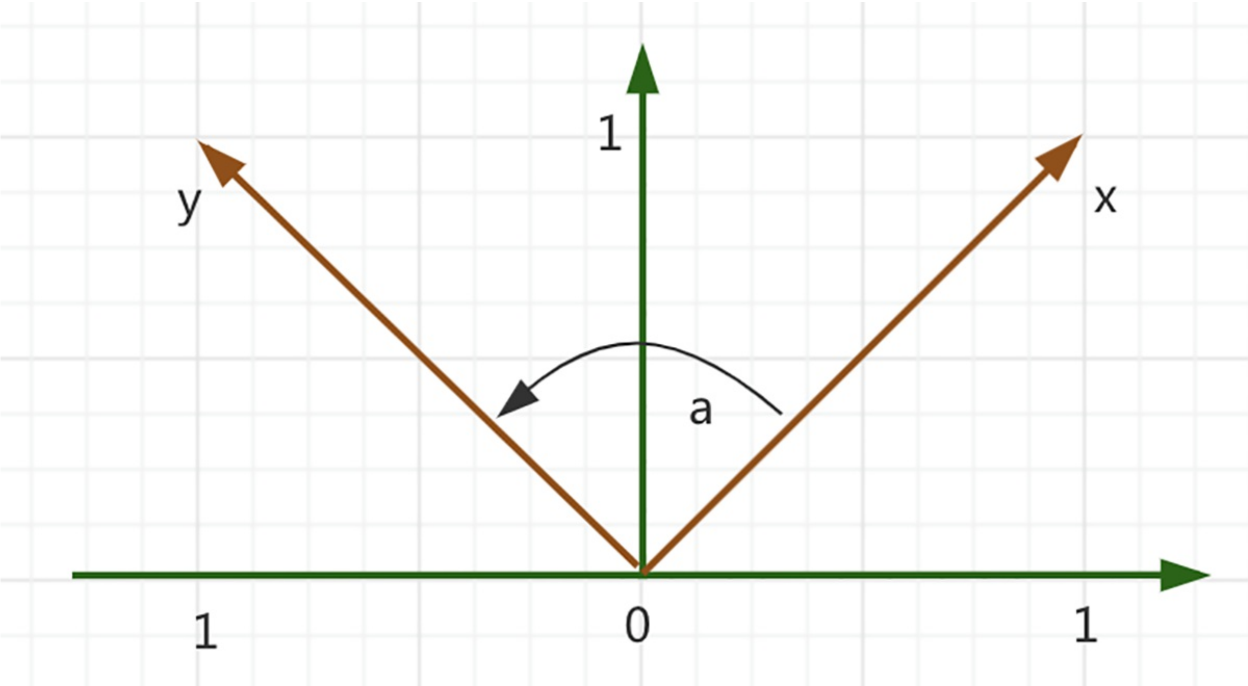
$$
\arccos \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \approx 0.32
$$

我们可以用图来更直观地表达一下。



于是，我们最后可以引出一个概念，也就是我们在一开始提到的**正交性**。如果两个向量x和y内积等于0，$\langle x, y\rangle=0$，那么x和y是正交的，这可以写成：$x \perp y$。再如果，x和y的范数都等于1，$\|x\|=\|y\|=1$，也就是说，如果它们都是单位向量，那么x和y就是标准正交的。

我们用图来更直观地表达一下。



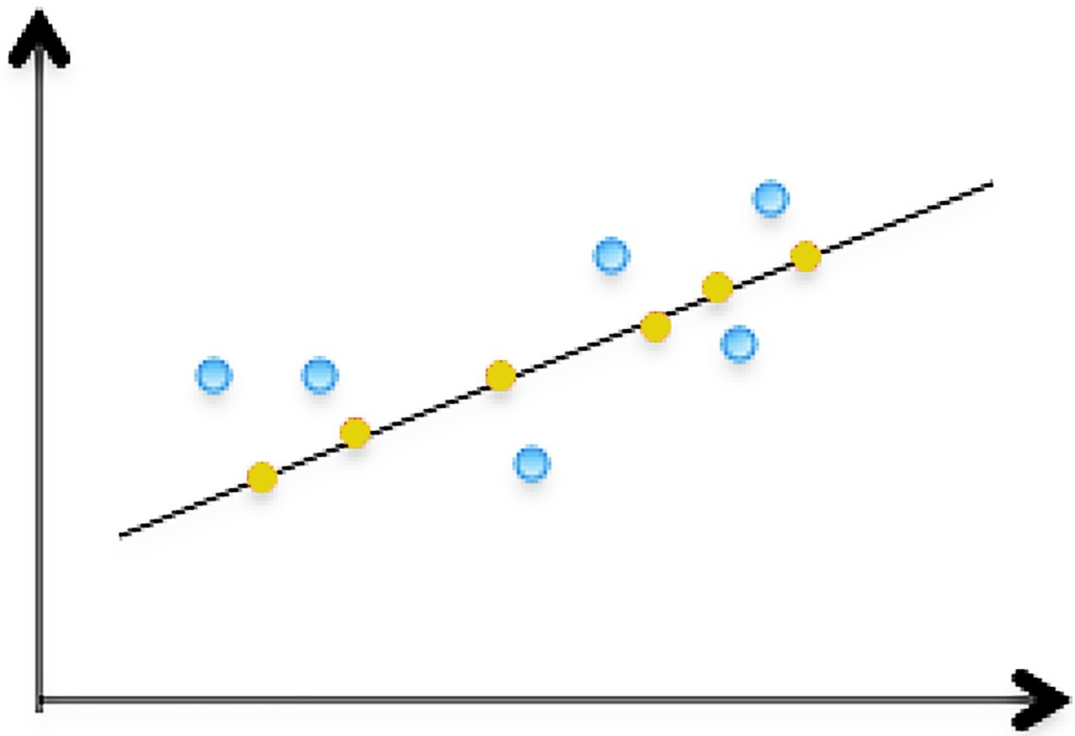
正交投影

在理论讲解之后，我们要来了解一下解析几何在实践中经常运用的概念——正交投影，它是一种重要的线性变换，在图形图像、编码理论、统计和机器学习中扮演了重要角色。

在机器学习中，数据一般都是高维的。众所周知，高维数据是很难来分析和可视化的。而且，不是所有的高维数据都是有用的，可能只有一些数据包含了大部分的重要信息。

正交投影就是高维到低维的数据投影，在第5节课线性空间中，我简单介绍了高维数据投影到低维后，我们就能在低维空间更多地了解数据集、提炼相关模式。而在机器学习中，最普遍的降维算法——PCA主成分分析，就是利用了降维的观点。

接下来，我开始讲解正交投影，在给出定义之前，先从一张图来了解会更直观。



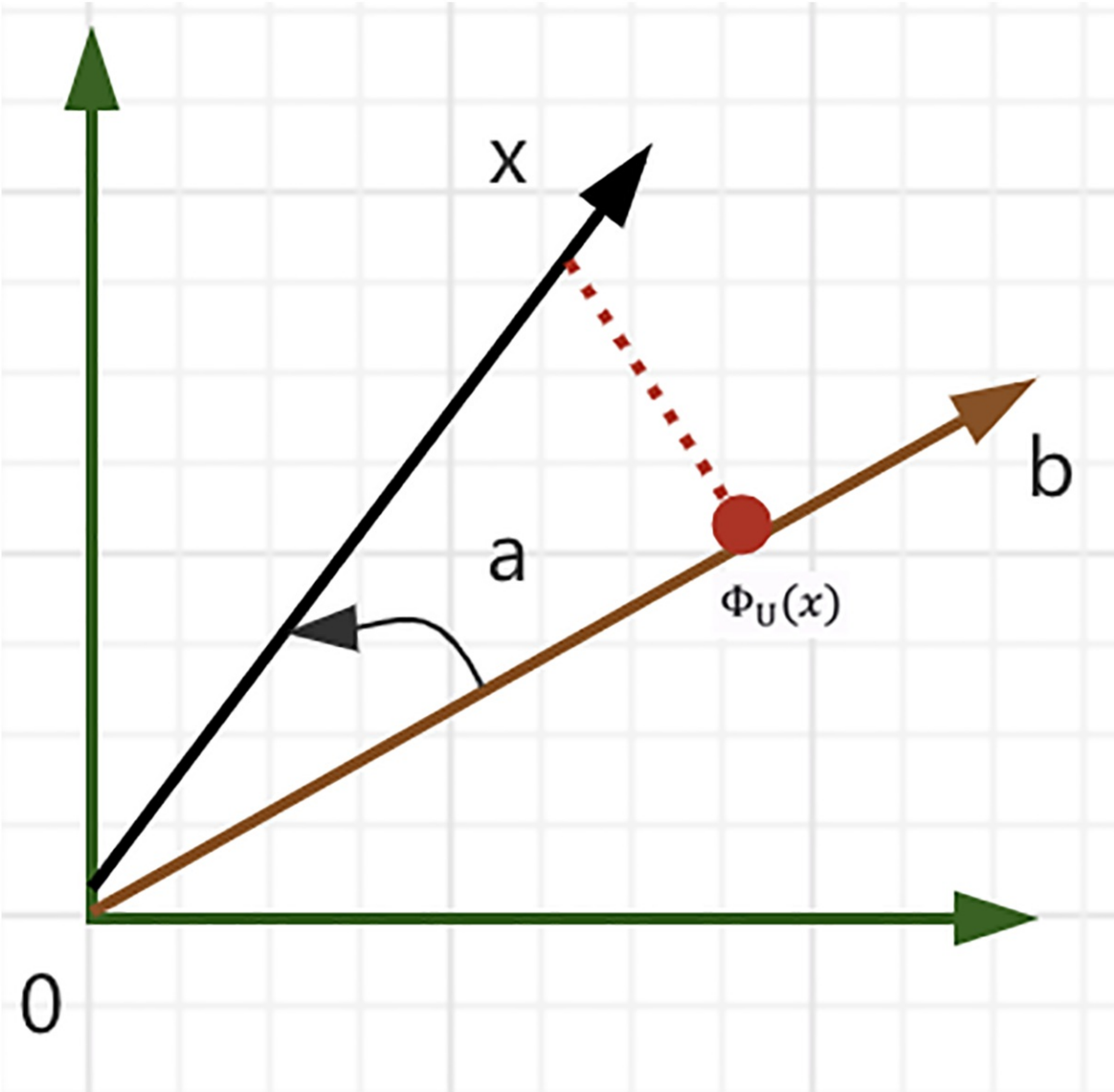
图中的蓝点是原二维数据，黄点是它们的正交投影。所以，实际降维后，在一维空间中就形成了这条黑线表示，它近似地表达了原来二维数据表示的信息。

现在我们可以来看一下投影的定义：V是一个向量空间，U是V的一个向量子空间，一个从V到U的线性映射Φ是一个投影，如果它满足：$\Phi^{2}=\Phi \circ \Phi=\Phi$。因为线性映射能够被变换矩阵表示，所以，这个定义同样适用于一个特殊类型变换矩阵：投影矩阵P_{Φ}，它也满足：$P_{\Phi}^{2}=P_{\Phi}$。

投影到一维子空间上（线）

接下来，我们来看看如何投影到一维子空间，也就是把内积空间的向量正交投影到子空间，这里我们使用点积作为内积。

假设有一条通过原点的线，这条线是由基向量b产生的一维子空间U，当我们把一个向量x投影到U时，需要寻找另一个最靠近x的向量$\Phi_{U}(x)$。还是老样子，我们通过图来看一下。



首先，投影$\Phi_{U}(x)$靠近x，也就是要找出x和$\Phi_{U}(x)$之间的$\left\|x-\Phi_{U}(x)\right\|$最小距离，从几何角度来说，就是线段$\Phi_{U}(x)-x$和$b$正交，满足等式：$\left\langle\Phi_{U}(x)-x, b\right\rangle=0$。其次，投影$\Phi_{U}(x)$必须是$U$的一个元素，也就是，基向量$b$的一个乘来产生$U$，$\Phi_{U}(x)=\lambda b$。

于是，我们可以通过三个步骤来分别得到λ、投影$\Phi_{U}(x)$和投影矩阵P_{Φ}，来把任意x映射到子空间U上。

第一步，计算λ，通过正交条件产生这样的等式：
$\left\langle x-\Phi_{U}(x), b\right\rangle=0$。因为$\Phi_{U}(x)=\lambda b$，所以它可以转变成：$\langle x-\lambda b, b\rangle=0$。

利用内积的双线性：$\langle x, b\rangle-\lambda\langle b, b\rangle=0$，我们得到：

$$
\lambda=\frac{\langle x, b\rangle}{\langle b, b\rangle}=\frac{\langle b, x\rangle}{\|b\|^{2}}
$$

然后，我们通过点积得到：

$$
\lambda=\frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}}
$$

如果$\|b\|=1$，那λ就等于$b^{T}x$。

接着第二步，是计算投影点$\Phi_{U}(x)$。从$\Phi_{U}(x)=\lambda b$，我们得到：

$$
\Phi_{U}(x)=\lambda b=\frac{\langle x, b\rangle}{\|b\|^{2}} b=\frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}} b
$$

通过点积来计算，我们就得到了$\Phi_{U}(x)$的长度：

$$
\left\|\Phi_{U}(x)\right\|=\frac{\left|b^{T} x\right|}{\|b\|^{2}}\|b\|=|\cos (a)|\|x\|\|b\| \frac{\|b\|}{\|b\|^{2}}=\mid \cos (a)\|x\|
$$

这里的a，是x和b之间的夹角。

最后第三步，是计算投影矩阵P_{Φ}，投影矩阵是一个线性映射。所以，我们可以得到：$\Phi_{U}(x)=P_{\Phi}x$，通过$\Phi_{U}(x)=\lambda b$，我们可以得到：

$$

$$
\Phi_{U}(x)=\lambda b=b \lambda=b \frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}}=\frac{b b^{T}}{\|b\|^{2}} x
$$

这里，我们立即可以得到投影矩阵P_{Φ}的计算等式：

$$
P_{\Phi}=\frac{b b^{T}}{\|b\|^{2}}
$$

本节小结

这一节课覆盖的知识点有点多，因为要把解析几何的知识点，浓缩到核心的几个点来讲解是一项艰巨的任务。不过不要怕，前面的几个知识点都是为这一节的重点“正交投影”来铺垫的。范数，被用来度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小，而内积让我们很直观地了解一个向量的长度、两个向量之间的距离和角度，以及判断向量之间是否是正交的。

所以，希望你能掌握范数和内积的理论知识，并把它和正交投影结合，运用在一些实践应用场景中，比如：3D图形图像的坐标变换、数据压缩，以及机器学习的降维。

线性代数练习场

请用之前学到的正交投影的投影矩阵算法，来计算一条线上的投影矩阵P_{Φ}。

这条线通过原点，由基$b=\left[\begin{array}{lll}1 & 2 & 2\end{array}\right]^{T}$产生，$P_{\Phi}$计算后，再通过一个$x$来验证一下它是否在$b$产生的子空间中，我们取$x=\left[\begin{array}{lll}1 & 1 & 1\end{array}\right]^{T}$。

欢迎在留言区晒出你的运算结果，我会及时回复。同时，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友，一起讨论、学习。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数，今天我们要讲的内容是“解析几何”。

前面所有章节我们都是围绕向量、矩阵，以及向量空间来展开的。但这一节课有点不一样，我要讲的是解析几何，它使得向量从抽象走向了具象，让向量具有了几何的含义。比如，计算向量的长度、向量之间的距离和角度，这在机器学习的主成分分析PCA中是非常有用的。

范数

讲解析几何我们得从“范数”开始讲起。

因为很多人看到几何向量的第一反应就是，它是从原点开始的有向线段，并且向量的长度是这个有向线段的终端和起始端之间的距离。而范数，就是被用来度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小的。

现在，我们先来看一下范数的数学定义：一个向量空间V上的一个范数就是一个函数，它计算V中的每一个向量x的长度，用符号来表示的话就是：$\|x\| \in R$，它满足三种性质：

1. 正齐次性： 如果输入参数扩大正$λ$倍，其对应的函数也扩正大倍。设$λ \in R$，$x \in V$，$\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$；
2. 次可加性：类似三角不等式，两边之和大于第三边。设$x,y \in V$，$\|x+y\| \leq\|x\|+\|y\|$；
3. 正定性：向量x的长度一定大于等于零。$\|x\| \geq 0$。

看到这里，你也许会问，范数似乎和以前老师教的**向量的模**一样啊。先别急，它们还真有那么一点关系，你听我慢慢道来。由于范数是度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小的，所以它和向量空间维度是有关系的，于是，我们可以把范数写成这样的模式来区分不同维度的大小计算：$L_{1}, L_{2}, \ldots, L_{\infty}$。

- L_{1}范数：曼哈顿范数，也叫曼哈顿距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{1}=\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}\right|
$$

- L_{2}范数：欧式范数，也叫欧式距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2}}
$$

- L_{∞}范数：切比雪夫范数，也叫切比雪夫距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{\infty}=\max \left(\left|x_{1}\right|,\left|x_{2}\right|, \ldots,\left|x_{n}\right|\right)
$$

我们发现，向量的模和L_{2}范数的计算方式都是一样的，都表示的是欧氏距离，所以，我们可以简单地认为向量的模等于L_{2}范数。而其他的范数模式和向量的模则没有任何关系。

内积

学习解析几何时，我们必须掌握的第二个概念就是内积。

如果说范数是模式，是用来描述向量长度或大小的概念性表达，那么内积可以让我们很直观地了解一个向量的长度、两个向量之间的距离和角度，它的一个主要目的就是判断向量之间是否是正交的，正交这个概念我们会在后面讲解。

点积

我们从特殊到一般，先来看点积，它和第三篇矩阵中说的“普通矩阵乘”形式一样，点积是特殊的内积，为什么说它特殊呢？那是因为在表示两个向量之间的距离时，它就是大家熟悉的欧式距离，点积可以表示成这样的形式：

$$
x^{T} y=\sum_{i=1}^{n} x_{i} y_{i}
$$

其他内积

除了点积外，我们再来看另一个不同的内积：设内积空间V是R^{2}，定义内积$\langle x, y\rangle=x_{1} y_{1}-(x_{1} y_{2}+x_{2} y_{1})+2 x_{2} y_{2}$，一看便知这个和点积完全不同。

内积空间

最后，我们再来看一般内积和内积空间。因为解析几何关注的是向量的长度、两个向量之间的距离和角度，所以，我们要在原来向量空间上加一个额外的结构，这个额外结构就是内积，而加了内积的向量空间，我们就叫做内积空间。

为了表达方便，我们可以把内积写成$\langle\ \cdot,\cdot\ \rangle$这样的形式，那么内积空间$V$可以被表示成这样：$(V,\langle\ \cdot,\cdot\ \rangle)$。这时，如果一般内积由点积来表达，那这个向量空间就变成了更具体的欧式向量空间。

接下来看下内积空间有什么性质？我们定义一个内积空间V和它的元素x、y、z，以及一个$c \in R$：

- 满足对称性：x和y的内积等于y和x的内积，$\langle x, y\rangle=\langle y, x\rangle$；
- 满足线性性：x和$y+cz$的内积等于，x和y的内积，与x和z的内积乘以c后的和，$\langle x, y+c z\rangle=\langle x, y\rangle+c\langle x, z\rangle$；
- 满足正定性：x和y的内积大于等于零，$\langle x, y\rangle \geq 0$。

对称正定矩阵

内积还定义了一类矩阵，这类矩阵在机器学习中很重要，因为它可以被用来判定多元函数极值，而在深度学习中，它更是被用来获取最小化损失函数，我们把这类矩阵叫做对称正定矩阵。

对称正定矩阵的定义是：如果一个对称矩阵A属于方阵$R^{n×n}$，对任意非零向量x，都有$x^{T} A x>0$，那么A就是对称正定矩阵。

我们来看两个例子，判断它们是不是对称正定矩阵。

第一个例子，请你回答下面这个矩阵是对称正定矩阵吗？

$$
A=\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 5
\end{array}\right]
$$

答案：是的，它是对称正定矩阵。因为$x^{T} A x>0$。

$$
x^{T} A x=\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 5
\end{array}\right]\left[\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right]=(3 x_{1}+2 x_{2})^{2}+x_{2}^{2}>0
$$

第二个例子，请你看下面这个矩阵是对称正定矩阵吗？

$$
A=\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 3
\end{array}\right]
$$

答案：不是的，它只是对称矩阵。因为$x^{T} A x$可能小于0。

$$
x^{T} A x=\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 3
\end{array}\right]\left[\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right]=(3 x_{1}+2 x_{2})^{2}-x_{2}^{2}
$$

长度、距离和角度

前面我们通过范数讲了向量的长度，但从内积的角度来看，我们发现，内积和范数之间有着千丝万缕的关系。我们来看看下面这个等式。

$$
\|x\|=\sqrt{\langle x, x\rangle}
$$

从这个等式我们发现，内积可以用来产生范数，确实是这样。不过，不是每一个范数都能被一个内积产生的，比如：曼哈顿范数。接下来，我们还是来关注能由内积产生的范数上，从不同的角度来看看几何上的长度、距离和角度的概念。

我们先用内积来计算一个**向量的长度**，比如：向量$x=[\begin{array}{ll}1 & 1\end{array}]^{T}$，我们可以使用点积来计算，计算后得出$x$的范数是$\sqrt{2}$，具体计算过程是这样的：$\|x\|=\sqrt{x^{T} x}=\sqrt{1^{2}+1^{2}}=\sqrt{2}$。

接着，我们再来看一下**向量之间的距离**，一个内积空间V，$(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$，$x$和$y$是它的两个向量，那么$x$和$y$之间的距离就可以表示成：$d(x, y)=\|x-y\|=\sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$。

如果用点积来计算x和y之间的距离，那这个距离就叫做欧式距离。

再接着，来看看两个**向量之间的角度**。我们使用柯西-施瓦茨不等式（Cauchy-Schwarz Inequality）来表示内积空间中两个向量x和y之间的角度：a。

$$
-1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \leq 1
$$

取值是从-1到1之间，那么角度就是从0到π之间，我们用cos来表示就是：

$$
\cos (a)=\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}
$$

其中a就是角度，a的角度取值是0到π之间。我们很容易就能发现，其实两个向量之间的角度，就是告诉了我们两个向量之间方向的相似性。例如：x和$y=4x$，使用点积来计算它们之间的角度是0，也就是说它们的方向是一样的，y只是对x扩大了4倍而已。

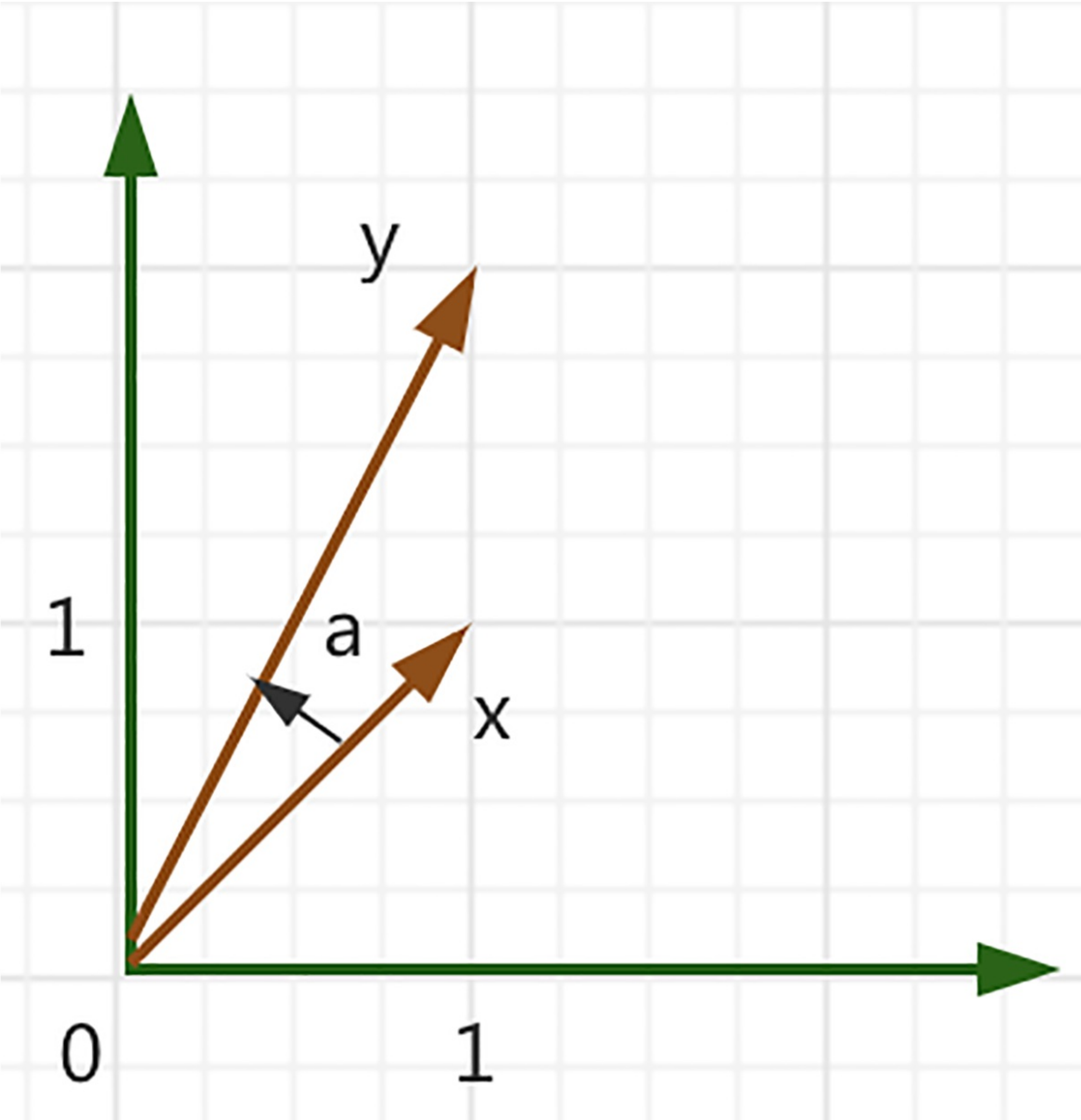
现在，我们通过一个例子，再来更清楚地看下两个向量之间角度的计算，设$x=[\begin{array}{ll}1 & 1\end{array}]^{T}$，$y=[\begin{array}{ll}1 & 2\end{array}]^{T}$，使用点积来计算，我们得出：

$$
\cos (a)=\frac{\langle x, y\rangle}{\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}}=\frac{x^{T} y}{\sqrt{x^{T} x y^{T} y}}=\frac{3}{\sqrt{10}}
$$

那么，这两个向量之间的角度如下。

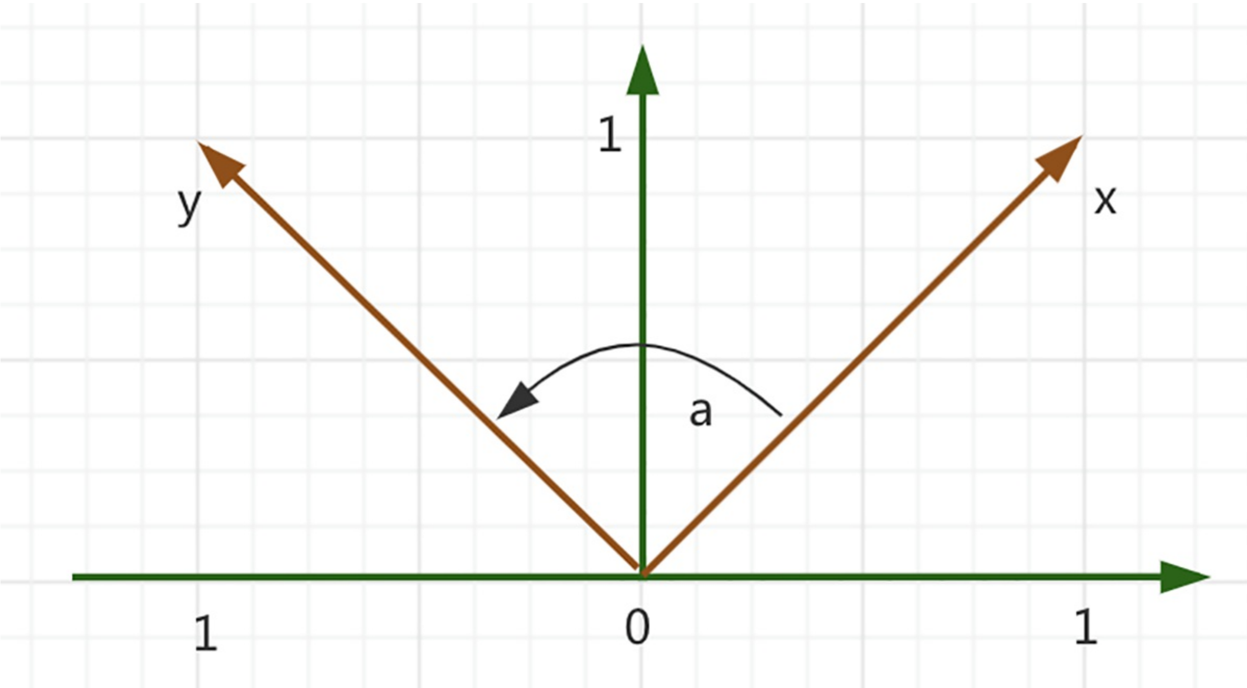
$$
\arccos \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \approx 0.32
$$

我们可以用图来更直观地表达一下。



于是，我们最后可以引出一个概念，也就是我们在一开始提到的**正交性**。如果两个向量x和y内积等于0，$\langle x, y\rangle=0$，那么x和y是正交的，这可以写成：$x \perp y$。再如果，x和y的范数都等于1，$\|x\|=\|y\|=1$，也就是说，如果它们都是单位向量，那么x和y就是标准正交的。

我们用图来更直观地表达一下。



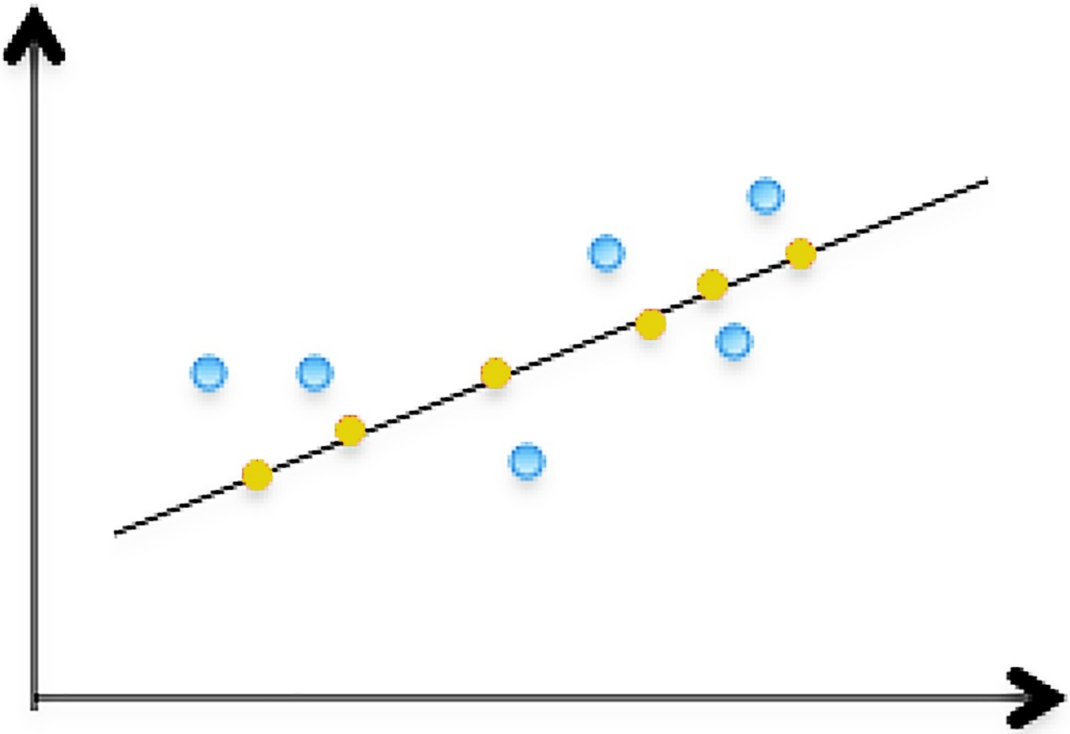
正交投影

在理论讲解之后，我们要来了解一下解析几何在实践中经常运用的概念——正交投影，它是一种重要的线性变换，在图形图像、编码理论、统计和机器学习中扮演了重要角色。

在机器学习中，数据一般都是高维的。众所周知，高维数据是很难来分析和可视化的。而且，不是所有的高维数据都是有用的，可能只有一些数据包含了大部分的重要信息。

正交投影就是高维到低维的数据投影，在[第5节课线性空间]中，我简单介绍了高维数据投影到低维后，我们就能在低维空间更多地了解数据集、提炼相关模式。而在机器学习中，最普遍的降维算法——PCA主成分分析，就是利用了降维的观点。

接下来，我开始讲解正交投影，在给出定义之前，先从一张图来了解会更直观。



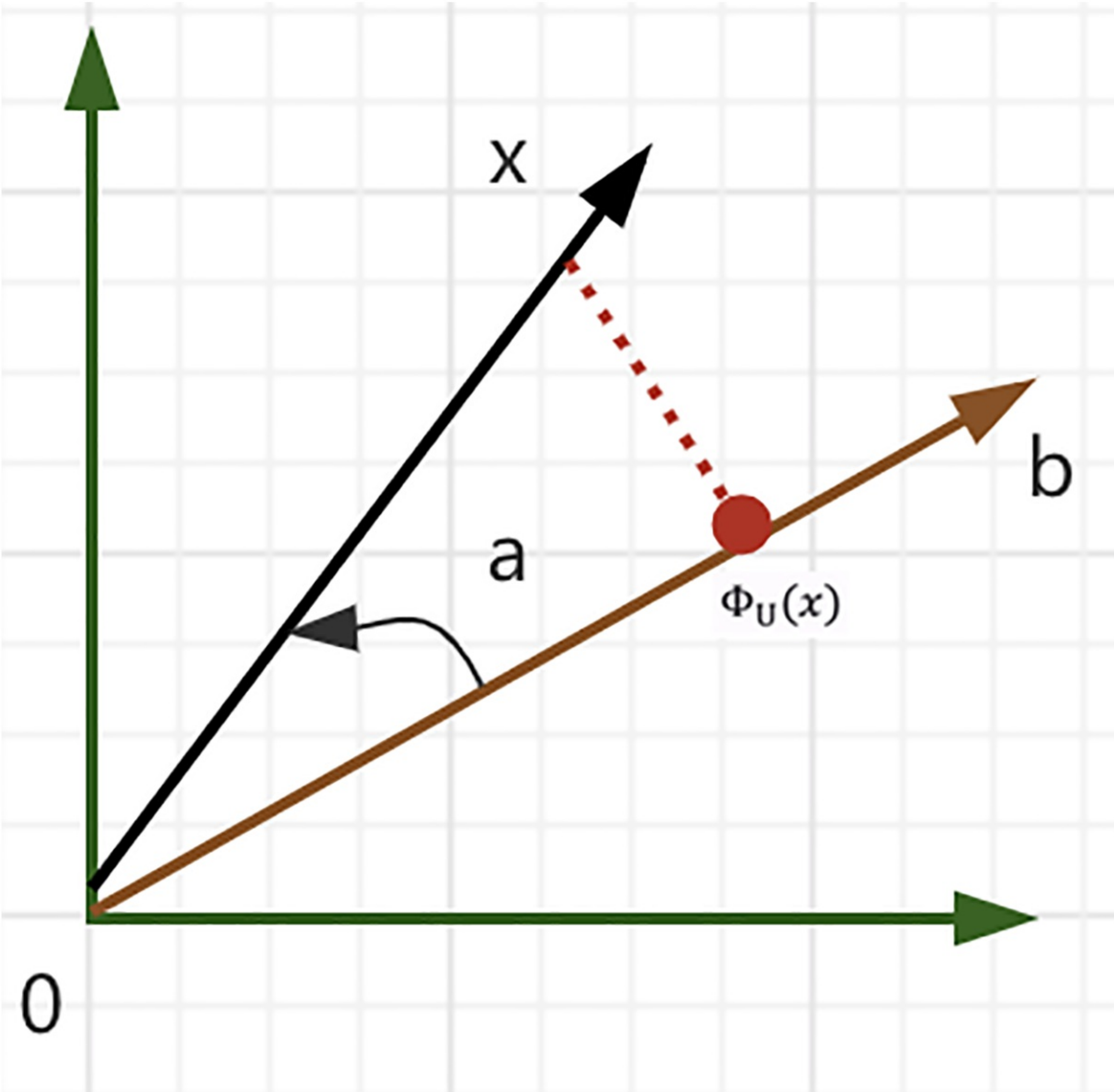
图中的蓝点是原二维数据，黄点是它们的正交投影。所以，实际降维后，在一维空间中就形成了这条黑线表示，它近似地表达了原来二维数据表示的信息。

现在我们可以来看一下投影的定义：V是一个向量空间，U是V的一个向量子空间，一个从V到U的线性映射Φ是一个投影，如果它满足：$\Phi^{2}=\Phi \circ \Phi=\Phi$。因为线性映射能够被变换矩阵表示，所以，这个定义同样适用于一个特殊类型变换矩阵：投影矩阵P_{Φ}，它也满足：$P_{\Phi}^{2}=P_{\Phi}$。

投影到一维子空间上（线）

接下来，我们来看看如何投影到一维子空间，也就是把内积空间的向量正交投影到子空间，这里我们使用点积作为内积。

假设有一条通过原点的线，这条线是由基向量b产生的一维子空间U，当我们把一个向量x投影到U时，需要寻找另一个最靠近x的向量$\Phi_{U}(x)$。还是老样子，我们通过图来看一下。



首先，投影$\Phi_{U}(x)$靠近x，也就是要找出x和$\Phi_{U}(x)$之间的$\left\|x-\Phi_{U}(x)\right\|$最小距离，从几何角度来说，就是线段$\Phi_{U}(x)-x$和$b$正交，满足等式：$\left\langle\Phi_{U}(x)-x, b\right\rangle=0$。其次，投影$\Phi_{U}(x)$必须是$U$的一个元素，也就是，基向量$b$的一个乘来产生$U$，$\Phi_{U}(x)=\lambda b$。

于是，我们可以通过三个步骤来分别得到λ、投影$\Phi_{U}(x)$和投影矩阵P_{Φ}，来把任意x映射到子空间U上。

第一步，计算λ，通过正交条件产生这样的等式：
$\left\langle x-\Phi_{U}(x), b\right\rangle=0$。因为$\Phi_{U}(x)=\lambda b$，所以它可以转变成：$\langle x-\lambda b, b\rangle=0$。

利用内积的双线性：$\langle x, b\rangle-\lambda\langle b, b\rangle=0$，我们得到：

$$
\lambda=\frac{\langle x, b\rangle}{\langle b, b\rangle}=\frac{\langle b, x\rangle}{\|b\|^{2}}
$$

然后，我们通过点积得到：

$$
\lambda=\frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}}
$$

如果$\|b\|=1$，那λ就等于$b^{T}x$。

接着第二步，是计算投影点$\Phi_{U}(x)$。从$\Phi_{U}(x)=\lambda b$，我们得到：

$$
\Phi_{U}(x)=\lambda b=\frac{\langle x, b\rangle}{\|b\|^{2}} b=\frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}} b
$$

通过点积来计算，我们就得到了$\Phi_{U}(x)$的长度：

$$
\left\|\Phi_{U}(x)\right\|=\frac{\left|b^{T} x\right|}{\|b\|^{2}}\|b\|=|\cos (a)|\|x\|\|b\| \frac{\|b\|}{\|b\|^{2}}=\mid \cos (a)\|x\|
$$

这里的a，是x和b之间的夹角。

最后第三步，是计算投影矩阵P_{Φ}，投影矩阵是一个线性映射。所以，我们可以得到：$\Phi_{U}(x)=P_{\Phi}x$，通过$\Phi_{U}(x)=\lambda b$，我们可以得到：

$$

$$
\Phi_{U}(x)=\lambda b=b \lambda=b \frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}}=\frac{b b^{T}}{\|b\|^{2}} x
$$

这里，我们立即可以得到投影矩阵P_{Φ}的计算等式：

$$
P_{\Phi}=\frac{b b^{T}}{\|b\|^{2}}
$$

本节小结

这一节课覆盖的知识点有点多，因为要把解析几何的知识点，浓缩到核心的几个点来讲解是一项艰巨的任务。不过不要怕，前面的几个知识点都是为这一节的重点“正交投影”来铺垫的。范数，被用来度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小，而内积让我们很直观地了解一个向量的长度、两个向量之间的距离和角度，以及判断向量之间是否是正交的。

所以，希望你能掌握范数和内积的理论知识，并把它和正交投影结合，运用在一些实践应用场景中，比如：3D图形图像的坐标变换、数据压缩，以及机器学习的降维。

线性代数练习场

请用之前学到的正交投影的投影矩阵算法，来计算一条线上的投影矩阵P_{Φ}。

这条线通过原点，由基$b=\left[\begin{array}{lll}1 & 2 & 2\end{array}\right]^{T}$产生，$P_{\Phi}$计算后，再通过一个$x$来验证一下它是否在$b$产生的子空间中，我们取$x=\left[\begin{array}{lll}1 & 1 & 1\end{array}\right]^{T}$。

欢迎在留言区晒出你的运算结果，我会及时回复。同时，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友，一起讨论、学习。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数，今天我们要讲的内容是“解析几何”。

前面所有章节我们都是围绕向量、矩阵，以及向量空间来展开的。但这一节课有点不一样，我要讲的是解析几何，它使得向量从抽象走向了具象，让向量具有了几何的含义。比如，计算向量的长度、向量之间的距离和角度，这在机器学习的主成分分析PCA中是非常有用的。

范数

讲解析几何我们得从“范数”开始讲起。

因为很多人看到几何向量的第一反应就是，它是从原点开始的有向线段，并且向量的长度是这个有向线段的终端和起始端之间的距离。而范数，就是被用来度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小的。

现在，我们先来看一下范数的数学定义：一个向量空间V上的一个范数就是一个函数，它计算V中的每一个向量x的长度，用符号来表示的话就是：$\|x\| \in R$，它满足三种性质：

1. 正齐次性： 如果输入参数扩大正$λ$倍，其对应的函数也扩正大倍。设$λ \in R$，$x \in V$，$\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$；
2. 次可加性：类似三角不等式，两边之和大于第三边。设$x,y \in V$，$\|x+y\| \leq\|x\|+\|y\|$；
3. 正定性：向量x的长度一定大于等于零。$\|x\| \geq 0$。

看到这里，你也许会问，范数似乎和以前老师教的**向量的模**一样啊。先别急，它们还真有那么一点关系，你听我慢慢道来。由于范数是度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小的，所以它和向量空间维度是有关系的，于是，我们可以把范数写成这样的模式来区分不同维度的大小计算：$L_{1}, L_{2}, \ldots, L_{\infty}$。

- L_{1}范数：曼哈顿范数，也叫曼哈顿距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{1}=\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}\right|
$$

- L_{2}范数：欧式范数，也叫欧式距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2}}
$$

- L_{∞}范数：切比雪夫范数，也叫切比雪夫距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{\infty}=\max \left(\left|x_{1}\right|,\left|x_{2}\right|, \ldots,\left|x_{n}\right|\right)
$$

我们发现，向量的模和L_{2}范数的计算方式都是一样的，都表示的是欧氏距离，所以，我们可以简单地认为向量的模等于L_{2}范数。而其他的范数模式和向量的模则没有任何关系。

内积

学习解析几何时，我们必须掌握的第二个概念就是内积。

如果说范数是模式，是用来描述向量长度或大小的概念性表达，那么内积可以让我们很直观地了解一个向量的长度、两个向量之间的距离和角度，它的一个主要目的就是判断向量之间是否是正交的，正交这个概念我们会在后面讲解。

点积

我们从特殊到一般，先来看点积，它和第三篇矩阵中说的“普通矩阵乘”形式一样，点积是特殊的内积，为什么说它特殊呢？那是因为在表示两个向量之间的距离时，它就是大家熟悉的欧式距离，点积可以表示成这样的形式：

$$
x^{T} y=\sum_{i=1}^{n} x_{i} y_{i}
$$

其他内积

除了点积外，我们再来看另一个不同的内积：设内积空间V是R^{2}，定义内积$\langle x, y\rangle=x_{1} y_{1}-(x_{1} y_{2}+x_{2} y_{1})+2 x_{2} y_{2}$，一看便知这个和点积完全不同。

内积空间

最后，我们再来看一般内积和内积空间。因为解析几何关注的是向量的长度、两个向量之间的距离和角度，所以，我们要在原来向量空间上加一个额外的结构，这个额外结构就是内积，而加了内积的向量空间，我们就叫做内积空间。

为了表达方便，我们可以把内积写成$\langle\ \cdot,\cdot\ \rangle$这样的形式，那么内积空间$V$可以被表示成这样：$(V,\langle\ \cdot,\cdot\ \rangle)$。这时，如果一般内积由点积来表达，那这个向量空间就变成了更具体的欧式向量空间。

接下来看下内积空间有什么性质？我们定义一个内积空间V和它的元素x、y、z，以及一个$c \in R$：

- 满足对称性：x和y的内积等于y和x的内积，$\langle x, y\rangle=\langle y, x\rangle$；
- 满足线性性：x和$y+cz$的内积等于，x和y的内积，与x和z的内积乘以c后的和，$\langle x, y+c z\rangle=\langle x, y\rangle+c\langle x, z\rangle$；
- 满足正定性：x和y的内积大于等于零，$\langle x, y\rangle \geq 0$。

对称正定矩阵

内积还定义了一类矩阵，这类矩阵在机器学习中很重要，因为它可以被用来判定多元函数极值，而在深度学习中，它更是被用来获取最小化损失函数，我们把这类矩阵叫做对称正定矩阵。

对称正定矩阵的定义是：如果一个对称矩阵A属于方阵$R^{n×n}$，对任意非零向量x，都有$x^{T} A x>0$，那么A就是对称正定矩阵。

我们来看两个例子，判断它们是不是对称正定矩阵。

第一个例子，请你回答下面这个矩阵是对称正定矩阵吗？

$$
A=\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 5
\end{array}\right]
$$

答案：是的，它是对称正定矩阵。因为$x^{T} A x>0$。

$$
x^{T} A x=\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 5
\end{array}\right]\left[\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right]=(3 x_{1}+2 x_{2})^{2}+x_{2}^{2}>0
$$

第二个例子，请你看下面这个矩阵是对称正定矩阵吗？

$$
A=\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 3
\end{array}\right]
$$

答案：不是的，它只是对称矩阵。因为$x^{T} A x$可能小于0。

$$
x^{T} A x=\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 3
\end{array}\right]\left[\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right]=(3 x_{1}+2 x_{2})^{2}-x_{2}^{2}
$$

长度、距离和角度

前面我们通过范数讲了向量的长度，但从内积的角度来看，我们发现，内积和范数之间有着千丝万缕的关系。我们来看看下面这个等式。

$$
\|x\|=\sqrt{\langle x, x\rangle}
$$

从这个等式我们发现，内积可以用来产生范数，确实是这样。不过，不是每一个范数都能被一个内积产生的，比如：曼哈顿范数。接下来，我们还是来关注能由内积产生的范数上，从不同的角度来看看几何上的长度、距离和角度的概念。

我们先用内积来计算一个**向量的长度**，比如：向量$x=[\begin{array}{ll}1 & 1\end{array}]^{T}$，我们可以使用点积来计算，计算后得出$x$的范数是$\sqrt{2}$，具体计算过程是这样的：$\|x\|=\sqrt{x^{T} x}=\sqrt{1^{2}+1^{2}}=\sqrt{2}$。

接着，我们再来看一下**向量之间的距离**，一个内积空间V，$(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$，$x$和$y$是它的两个向量，那么$x$和$y$之间的距离就可以表示成：$d(x, y)=\|x-y\|=\sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$。

如果用点积来计算x和y之间的距离，那这个距离就叫做欧式距离。

再接着，来看看两个**向量之间的角度**。我们使用柯西-施瓦茨不等式（Cauchy-Schwarz Inequality）来表示内积空间中两个向量x和y之间的角度：a。

$$
-1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \leq 1
$$

取值是从-1到1之间，那么角度就是从0到π之间，我们用cos来表示就是：

$$
\cos (a)=\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}
$$

其中a就是角度，a的角度取值是0到π之间。我们很容易就能发现，其实两个向量之间的角度，就是告诉了我们两个向量之间方向的相似性。例如：x和$y=4x$，使用点积来计算它们之间的角度是0，也就是说它们的方向是一样的，y只是对x扩大了4倍而已。

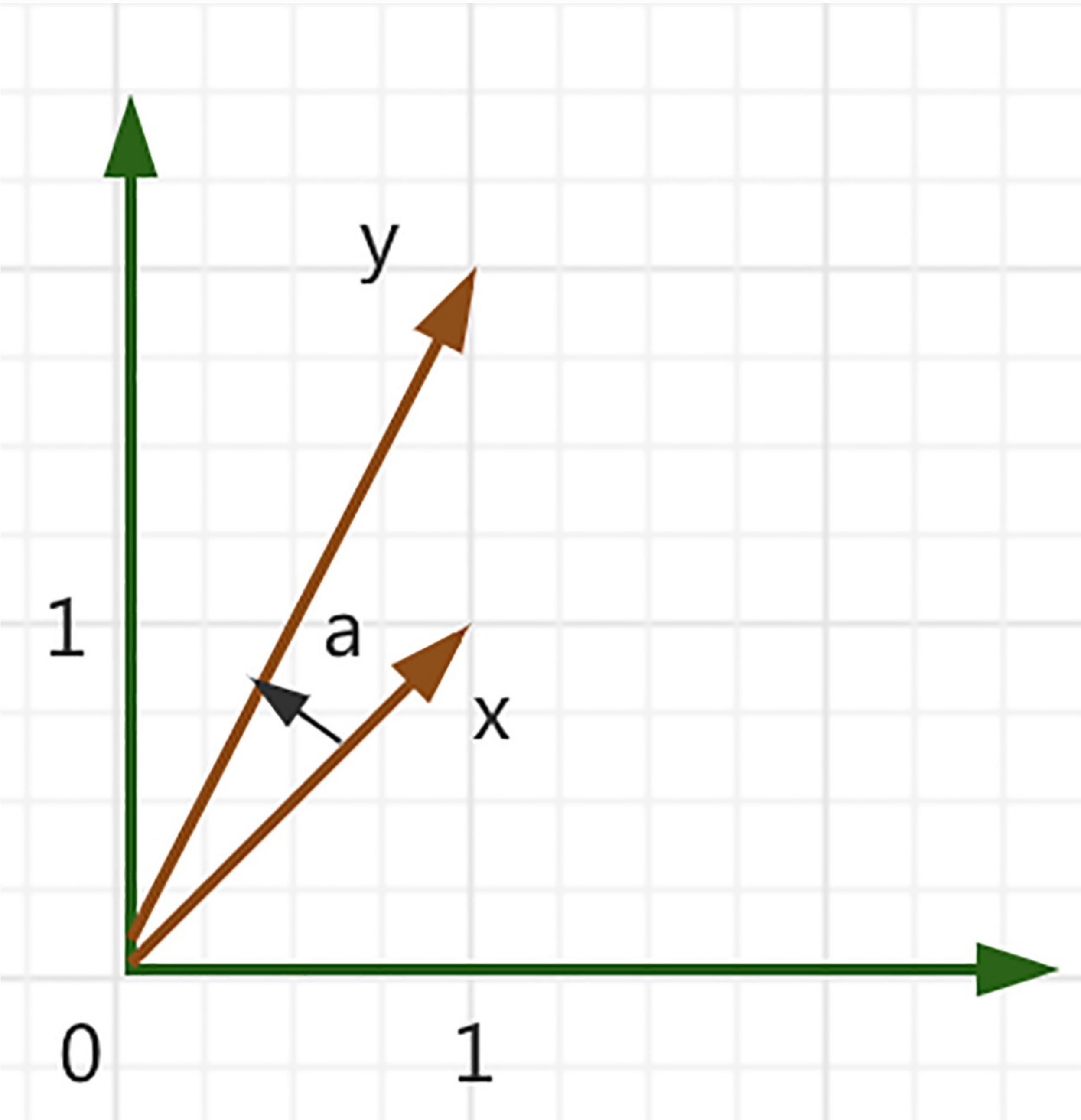
现在，我们通过一个例子，再来更清楚地看下两个向量之间角度的计算，设$x=[\begin{array}{ll}1 & 1\end{array}]^{T}$，$y=[\begin{array}{ll}1 & 2\end{array}]^{T}$，使用点积来计算，我们得出：

$$
\cos (a)=\frac{\langle x, y\rangle}{\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}}=\frac{x^{T} y}{\sqrt{x^{T} x y^{T} y}}=\frac{3}{\sqrt{10}}
$$

那么，这两个向量之间的角度如下。

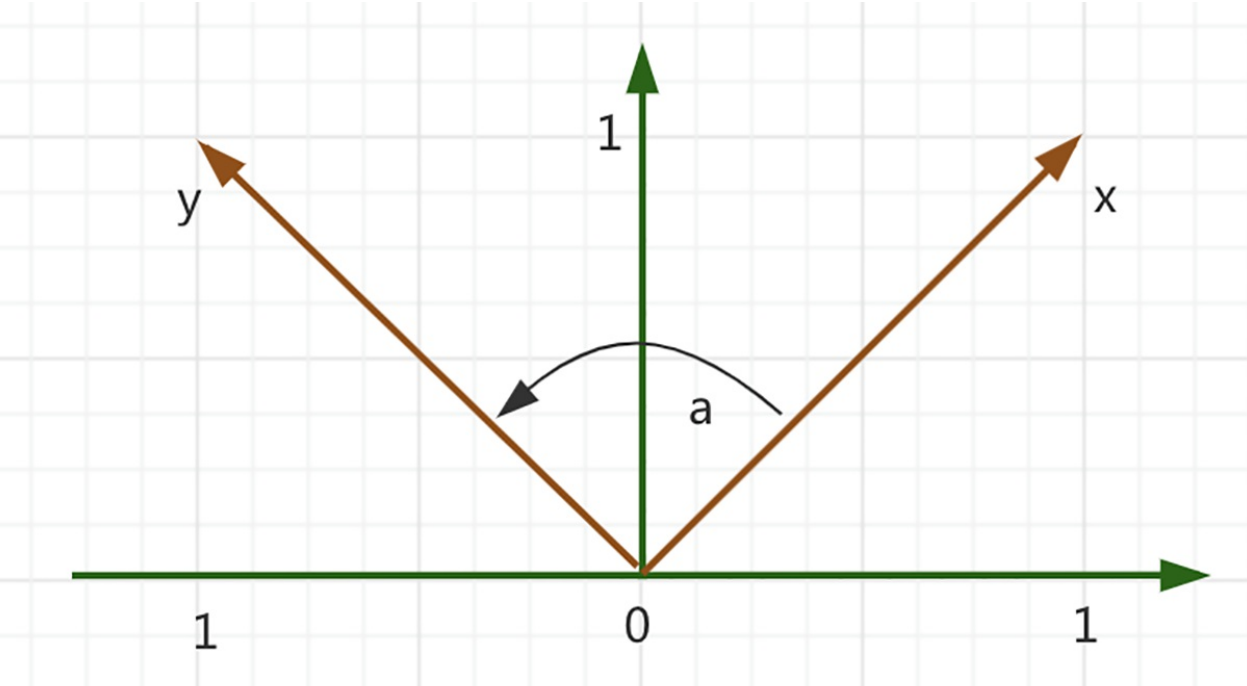
$$
\arccos \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \approx 0.32
$$

我们可以用图来更直观地表达一下。



于是，我们最后可以引出一个概念，也就是我们在一开始提到的**正交性**。如果两个向量x和y内积等于0，$\langle x, y\rangle=0$，那么x和y是正交的，这可以写成：$x \perp y$。再如果，x和y的范数都等于1，$\|x\|=\|y\|=1$，也就是说，如果它们都是单位向量，那么x和y就是标准正交的。

我们用图来更直观地表达一下。



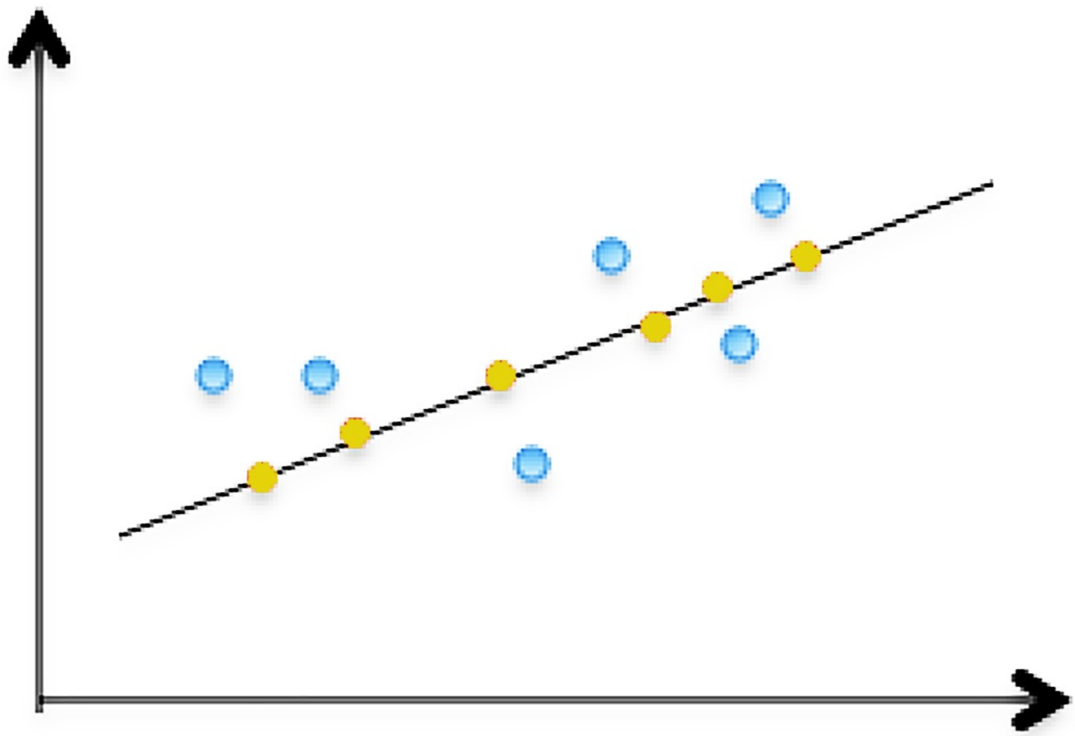
正交投影

在理论讲解之后，我们要来了解一下解析几何在实践中经常运用的概念——正交投影，它是一种重要的线性变换，在图形图像、编码理论、统计和机器学习中扮演了重要角色。

在机器学习中，数据一般都是高维的。众所周知，高维数据是很难来分析和可视化的。而且，不是所有的高维数据都是有用的，可能只有一些数据包含了大部分的重要信息。

正交投影就是高维到低维的数据投影，在第5节课线性空间中，我简单介绍了高维数据投影到低维后，我们就能在低维空间更多地了解数据集、提炼相关模式。而在机器学习中，最普遍的降维算法——PCA主成分分析，就是利用了降维的观点。

接下来，我开始讲解正交投影，在给出定义之前，先从一张图来了解会更直观。



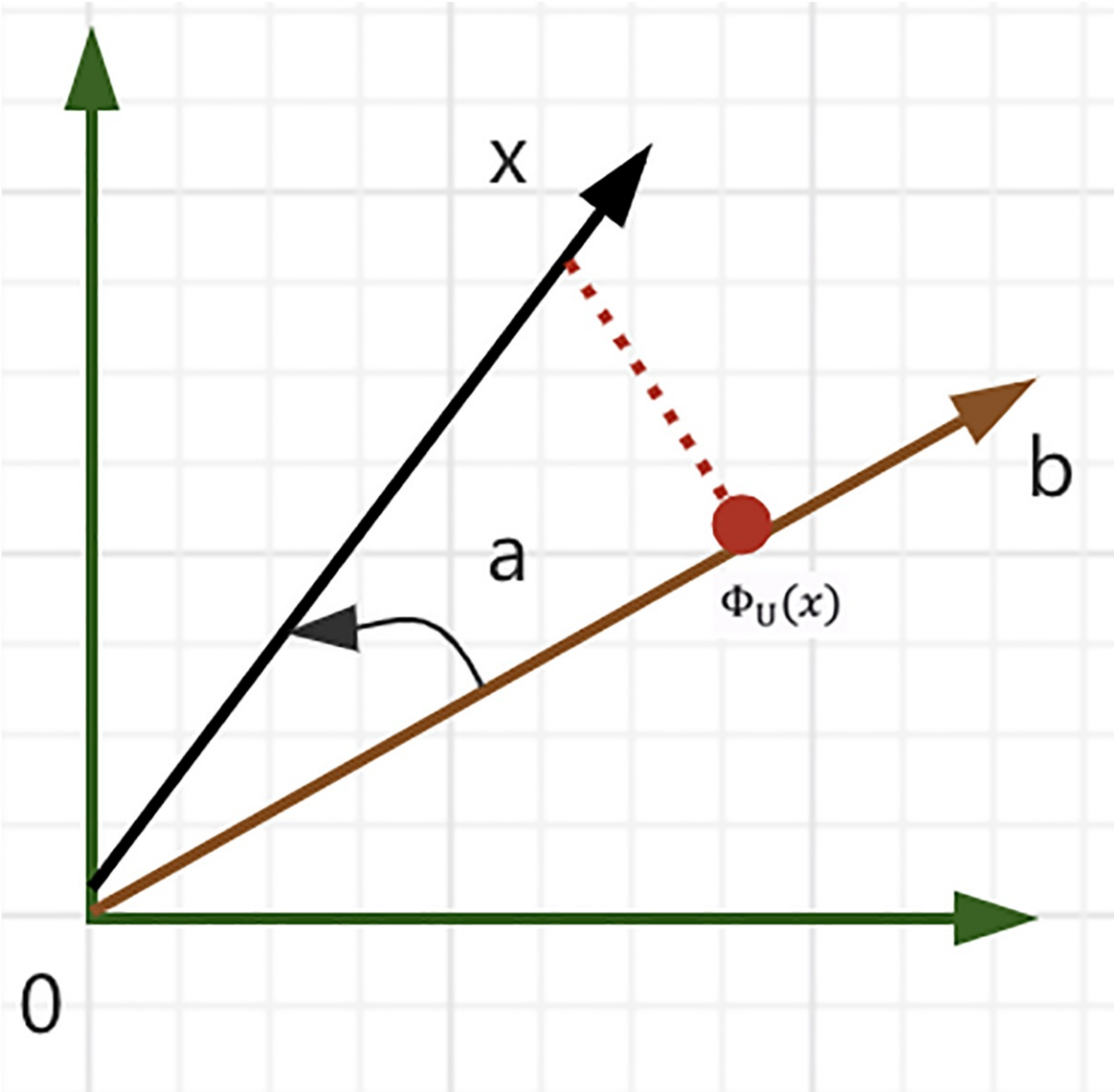
图中的蓝点是原二维数据，黄点是它们的正交投影。所以，实际降维后，在一维空间中就形成了这条黑线表示，它近似地表达了原来二维数据表示的信息。

现在我们可以来看一下投影的定义：V是一个向量空间，U是V的一个向量子空间，一个从V到U的线性映射Φ是一个投影，如果它满足：$\Phi^{2}=\Phi \circ \Phi=\Phi$。因为线性映射能够被变换矩阵表示，所以，这个定义同样适用于一个特殊类型变换矩阵：投影矩阵P_{Φ}，它也满足：$P_{\Phi}^{2}=P_{\Phi}$。

投影到一维子空间上（线）

接下来，我们来看看如何投影到一维子空间，也就是把内积空间的向量正交投影到子空间，这里我们使用点积作为内积。

假设有一条通过原点的线，这条线是由基向量b产生的一维子空间U，当我们把一个向量x投影到U时，需要寻找另一个最靠近x的向量$\Phi_{U}(x)$。还是老样子，我们通过图来看一下。



首先，投影$\Phi_{U}(x)$靠近x，也就是要找出x和$\Phi_{U}(x)$之间的$\left\|x-\Phi_{U}(x)\right\|$最小距离，从几何角度来说，就是线段$\Phi_{U}(x)-x$和$b$正交，满足等式：$\left\langle\Phi_{U}(x)-x, b\right\rangle=0$。其次，投影$\Phi_{U}(x)$必须是$U$的一个元素，也就是，基向量$b$的一个乘来产生$U$，$\Phi_{U}(x)=λb$。

于是，我们可以通过三个步骤来分别得到$λ$、投影$\Phi_{U}(x)$和投影矩阵P_{Φ}，来把任意x映射到子空间U上。

第一步，计算$λ$，通过正交条件产生这样的等式：
$\left\langle x-\Phi_{U}(x), b\right\rangle=0$。因为$\Phi_{U}(x)=λb$，所以它可以转变成：$\langle x-\lambda b, b\rangle=0$。

利用内积的双线性：$\langle x, b\rangle-\lambda\langle b, b\rangle=0$，我们得到：

$$
\lambda=\frac{\langle x, b\rangle}{\langle b, b\rangle}=\frac{\langle b, x\rangle}{\|b\|^{2}}
$$

然后，我们通过点积得到：

$$
\lambda=\frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}}
$$

如果$\|b\|=1$，那$λ$就等于$b^{T}x$。

接着第二步，是计算投影点$\Phi_{U}(x)$。从$\Phi_{U}(x)=λb$，我们得到：

$$
\Phi_{U}(x)=\lambda b=\frac{\langle x, b\rangle}{\|b\|^{2}} b=\frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}} b
$$

通过点积来计算，我们就得到了$\Phi_{U}(x)$的长度：

$$
\left\|\Phi_{U}(x)\right\|=\frac{\left|b^{T} x\right|}{\|b\|^{2}}\|b\|=|\cos (a)|\|x\|\|b\| \frac{\|b\|}{\|b\|^{2}}=\mid \cos (a)\|x\|
$$

这里的a，是x和b之间的夹角。

最后第三步，是计算投影矩阵P_{Φ}，投影矩阵是一个线性映射。所以，我们可以得到：$\Phi_{U}(x)=P_{\Phi}x$，通过$\Phi_{U}(x)=λb$，我们可以得到：

$$

$$
\Phi_{U}(x)=\lambda b=b \lambda=b \frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}}=\frac{b b^{T}}{\|b\|^{2}} x
$$

这里，我们立即可以得到投影矩阵P_{Φ}的计算等式：

$$
P_{\Phi}=\frac{b b^{T}}{\|b\|^{2}}
$$

本节小结

这一节课覆盖的知识点有点多，因为要把解析几何的知识点，浓缩到核心的几个点来讲解是一项艰巨的任务。不过不要怕，前面的几个知识点都是为这一节的重点“正交投影”来铺垫的。范数，被用来度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小，而内积让我们很直观地了解一个向量的长度、两个向量之间的距离和角度，以及判断向量之间是否是正交的。

所以，希望你能掌握范数和内积的理论知识，并把它和正交投影结合，运用在一些实践应用场景中，比如：3D图形图像的坐标变换、数据压缩，以及机器学习的降维。

线性代数练习场

请用之前学到的正交投影的投影矩阵算法，来计算一条线上的投影矩阵P_{Φ}。

这条线通过原点，由基$b=\left[\begin{array}{lll}1 & 2 & 2\end{array}\right]^{T}$产生，$P_{\Phi}$计算后，再通过一个$x$来验证一下它是否在$b$产生的子空间中，我们取$x=\left[\begin{array}{lll}1 & 1 & 1\end{array}\right]^{T}$。

欢迎在留言区晒出你的运算结果，我会及时回复。同时，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友，一起讨论、学习。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数，今天我们要讲的内容是“解析几何”。

前面所有章节我们都是围绕向量、矩阵，以及向量空间来展开的。但这一节课有点不一样，我要讲的是解析几何，它使得向量从抽象走向了具象，让向量具有了几何的含义。比如，计算向量的长度、向量之间的距离和角度，这在机器学习的主成分分析PCA中是非常有用的。

范数

讲解析几何我们得从“范数”开始讲起。

因为很多人看到几何向量的第一反应就是，它是从原点开始的有向线段，并且向量的长度是这个有向线段的终端和起始端之间的距离。而范数，就是被用来度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小的。

现在，我们先来看一下范数的数学定义：一个向量空间V上的一个范数就是一个函数，它计算V中的每一个向量x的长度，用符号来表示的话就是：$\|x\| \in R$，它满足三种性质：

1. 正齐次性：如果输入参数扩大正$λ$倍，其对应的函数也扩正大倍。设$λ \in R$，$x \in V$，$\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$；
2. 次可加性：类似三角不等式，两边之和大于第三边。设$x,y \in V$，$\|x+y\| \leq\|x\|+\|y\|$；
3. 正定性：向量x的长度一定大于等于零。$\|x\| \geq 0$。

看到这里，你也许会问，范数似乎和以前老师教的**向量的模**一样啊。先别急，它们还真有那么一点关系，你听我慢慢道来。由于范数是度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小的，所以它和向量空间维度是有关系的，于是，我们可以把范数写成这样的模式来区分不同维度的大小计算：$L_{1}, L_{2}, \ldots, L_{\infty}$。

- L_{1}范数：曼哈顿范数，也叫曼哈顿距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{1}=\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}\right|
$$

- L_{2}范数：欧式范数，也叫欧式距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2}}
$$

- L_{∞}范数：切比雪夫范数，也叫切比雪夫距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{\infty}=\max \left(\left|x_{1}\right|,\left|x_{2}\right|, \ldots,\left|x_{n}\right|\right)
$$

我们发现，向量的模和L_{2}范数的计算方式都是一样的，都表示的是欧氏距离，所以，我们可以简单地认为向量的模等于L_{2}范数。而其他的范数模式和向量的模则没有任何关系。

内积

学习解析几何时，我们必须掌握的第二个概念就是内积。

如果说范数是模式，是用来描述向量长度或大小的概念性表达，那么内积可以让我们很直观地了解一个向量的长度、两个向量之间的距离和角度，它的一个主要目的就是判断向量之间是否是正交的，正交这个概念我们会在后面讲解。

点积

我们从特殊到一般，先来看点积，它和第三篇矩阵中说的“普通矩阵乘”形式一样，点积是特殊的内积，为什么说它特殊呢？那是因为在表示两个向量之间的距离时，它就是大家熟悉的欧式距离，点积可以表示成这样的形式：

$$
x^{T} y=\sum_{i=1}^{n} x_{i} y_{i}
$$

其他内积

除了点积外，我们再来看另一个不同的内积：设内积空间V是R^{2}，定义内积$\langle x, y\rangle=x_{1} y_{1}-(x_{1} y_{2}+x_{2} y_{1})+2 x_{2} y_{2}$，一看便知这个和点积完全不同。

内积空间

最后，我们再来看一般内积和内积空间。因为解析几何关注的是向量的长度、两个向量之间的距离和角度，所以，我们要在原来向量空间上加一个额外的结构，这个额外结构就是内积，而加了内积的向量空间，我们就叫做内积空间。

为了表达方便，我们可以把内积写成$\langle\ \cdot,\cdot\ \rangle$这样的形式，那么内积空间$V$可以被表示成这样：$(V,\langle\ \cdot,\cdot\ \rangle)$。这时，如果一般内积由点积来表达，那这个向量空间就变成了更具体的欧式向量空间。

接下来看下内积空间有什么性质？我们定义一个内积空间V和它的元素x、y、z，以及一个$c \in R$：

- 满足对称性：x和y的内积等于y和x的内积，$\langle x, y\rangle=\langle y, x\rangle$；
- 满足线性性：x和$y+cz$的内积等于，x和y的内积，与x和z的内积乘以c后的和，$\langle x, y+c z\rangle=\langle x, y\rangle+c\langle x, z\rangle$；
- 满足正定性：x和y的内积大于等于零，$\langle x, y\rangle \geq 0$。

对称正定矩阵

内积还定义了一类矩阵，这类矩阵在机器学习中很重要，因为它可以被用来判定多元函数极值，而在深度学习中，它更是被用来获取最小化损失函数，我们把这类矩阵叫做对称正定矩阵。

对称正定矩阵的定义是：如果一个对称矩阵A属于方阵$R^{n×n}$，对任意非零向量x，都有$x^{T} A x>0$，那么A就是对称正定矩阵。

我们来看两个例子，判断它们是不是对称正定矩阵。

第一个例子，请你回答下面这个矩阵是对称正定矩阵吗？

$$
A=\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 5
\end{array}\right]
$$

答案：是的，它是对称正定矩阵。因为$x^{T} A x>0$。

$$
x^{T} A x=\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 5
\end{array}\right]\left[\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right]=(3 x_{1}+2 x_{2})^{2}+x_{2}^{2}>0
$$

第二个例子，请你看下面这个矩阵是对称正定矩阵吗？

$$
A=\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 3
\end{array}\right]
$$

答案：不是的，它只是对称矩阵。因为$x^{T} A x$可能小于0。

$$
x^{T} A x=\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 3
\end{array}\right]\left[\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right]=(3 x_{1}+2 x_{2})^{2}-x_{2}^{2}
$$

长度、距离和角度

前面我们通过范数讲了向量的长度，但从内积的角度来看，我们发现，内积和范数之间有着千丝万缕的关系。我们来看看下面这个等式。

$$
\|x\|=\sqrt{\langle x, x\rangle}
$$

从这个等式我们发现，内积可以用来产生范数，确实是这样。不过，不是每一个范数都能被一个内积产生的，比如：曼哈顿范数。接下来，我们还是来关注能由内积产生的范数上，从不同的角度来看看几何上的长度、距离和角度的概念。

我们先用内积来计算一个**向量的长度**，比如：向量$x=[\begin{array}{ll}1 & 1\end{array}]^{T}$，我们可以使用点积来计算，计算后得出$x$的范数是$\sqrt{2}$，具体计算过程是这样的：$\|x\|=\sqrt{x^{T} x}=\sqrt{1^{2}+1^{2}}=\sqrt{2}$。

接着，我们再来看一下**向量之间的距离**，一个内积空间V，$(V,\langle\ \cdot,\cdot \rangle)$，$x$和$y$是它的两个向量，那么$x$和$y$之间的距离就可以表示成：$d(x, y)=\|x-y\|=\sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$。

如果用点积来计算x和y之间的距离，那这个距离就叫做欧式距离。

再接着，来看看两个**向量之间的角度**。我们使用柯西-施瓦茨不等式（Cauchy-Schwarz Inequality）来表示内积空间中两个向量x和y之间的角度：a。

$$
-1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \leq 1
$$

取值是从-1到1之间，那么角度就是从0到π之间，我们用cos来表示就是：

$$
\cos (a)=\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}
$$

其中a就是角度，a的角度取值是0到π之间。我们很容易就能发现，其实两个向量之间的角度，就是告诉了我们两个向量之间方向的相似性。例如：x和$y=4x$，使用点积来计算它们之间的角度是0，也就是说它们的方向是一样的，y只是对x扩大了4倍而已。

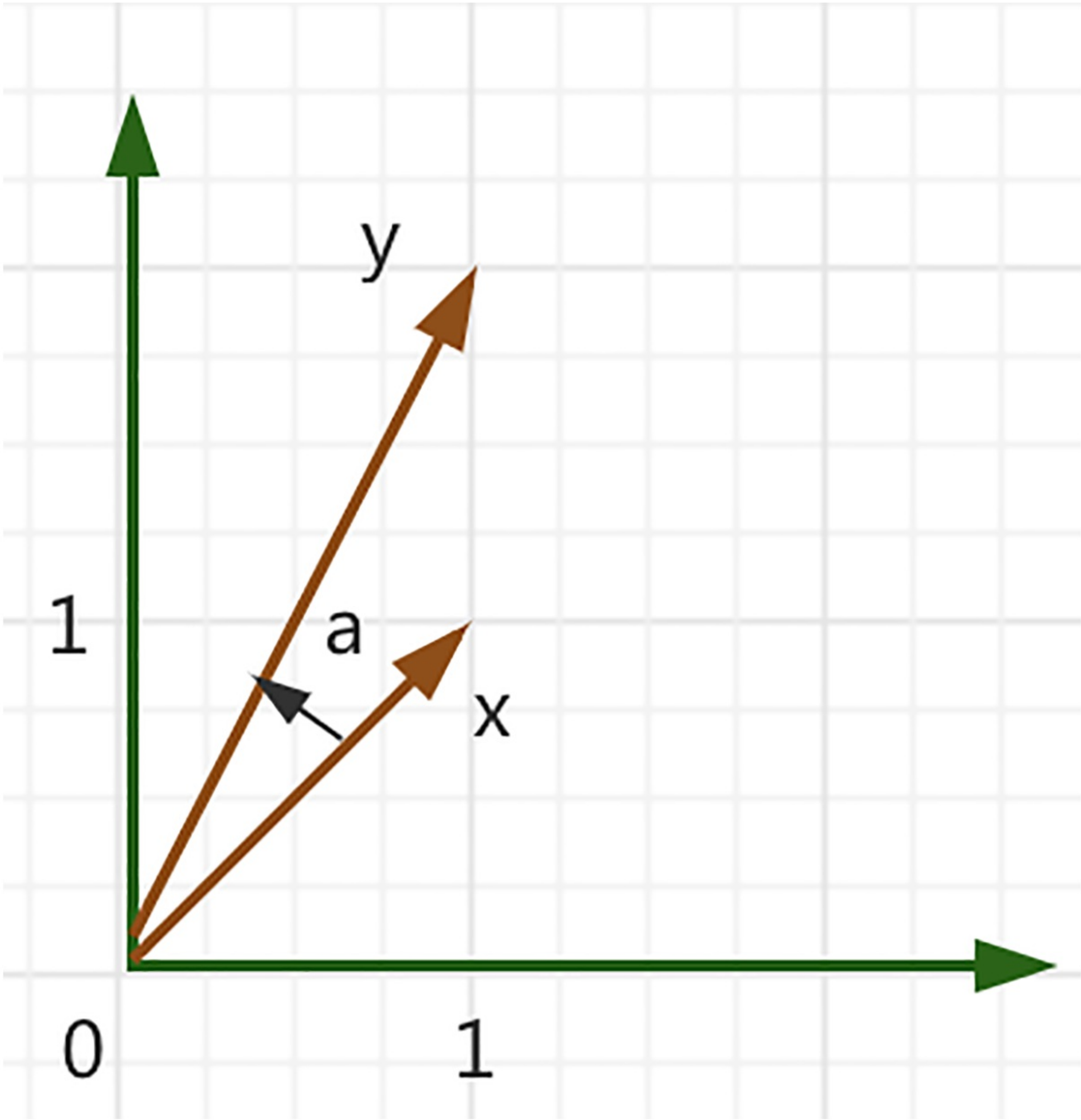
现在，我们通过一个例子，再来更清楚地看下两个向量之间角度的计算，设$x=[\begin{array}{ll}1 & 1\end{array}]^{T}$，$y=[\begin{array}{ll}1 & 2\end{array}]^{T}$，使用点积来计算，我们得出：

$$
\cos (a)=\frac{\langle x, y\rangle}{\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}}=\frac{x^{T} y}{\sqrt{x^{T} x y^{T} y}}=\frac{3}{\sqrt{10}}
$$

那么，这两个向量之间的角度如下。

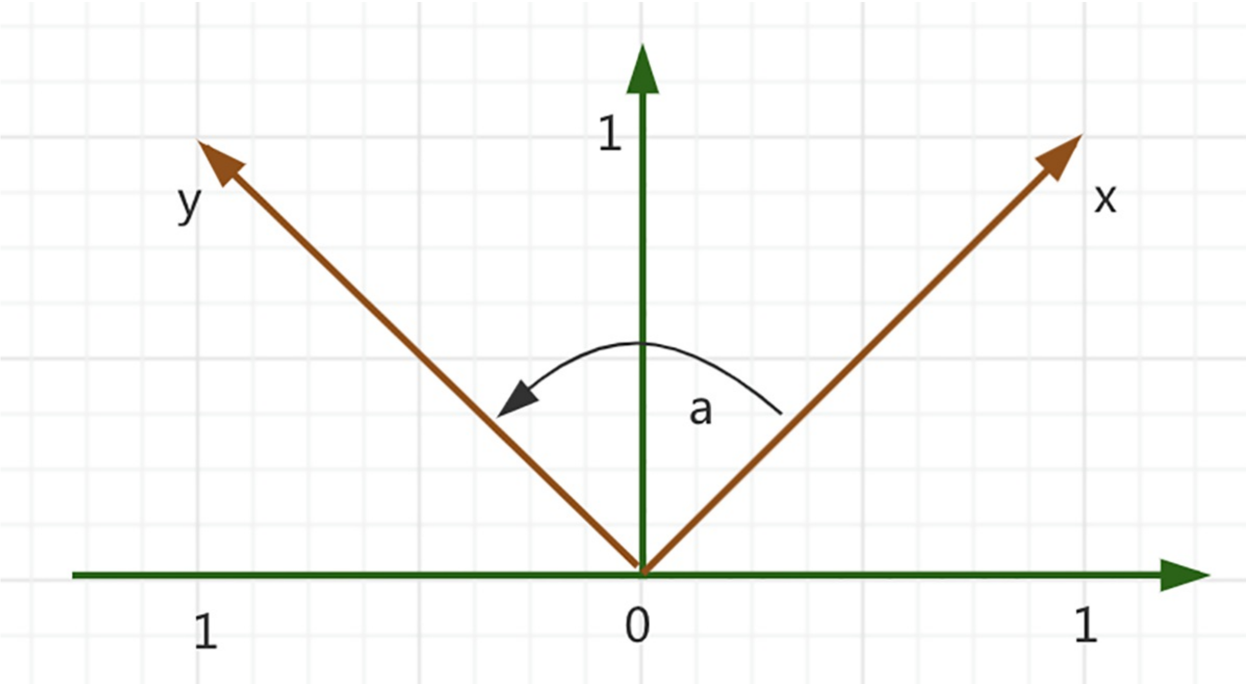
$$
\arccos \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \approx 0.32
$$

我们可以用图来更直观地表达一下。



于是，我们最后可以引出一个概念，也就是我们在一开始提到的**正交性**。如果两个向量x和y内积等于0，$\langle x, y\rangle=0$，那么x和y是正交的，这可以写成：$x \perp y$。再如果，x和y的范数都等于1，$\|x\|=\|y\|=1$，也就是说，如果它们都是单位向量，那么x和y就是标准正交的。

我们用图来更直观地表达一下。



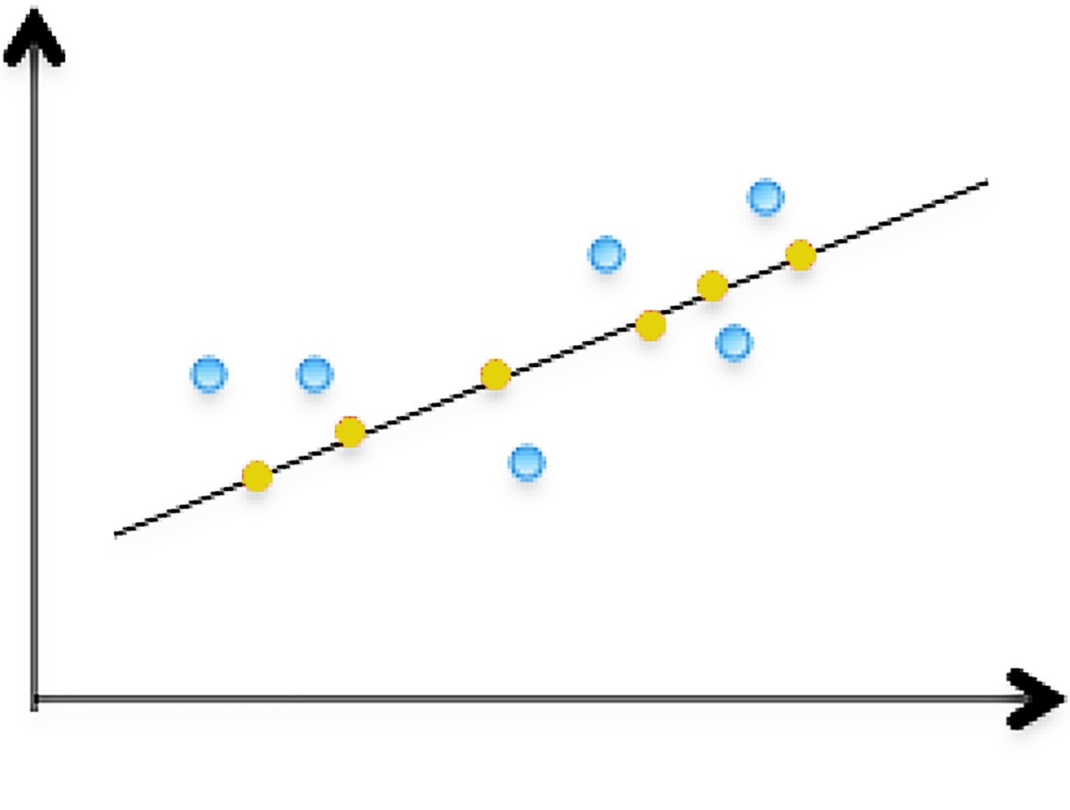
正交投影

在理论讲解之后，我们要来了解一下解析几何在实践中经常运用的概念——正交投影，它是一种重要的线性变换，在图形图像、编码理论、统计和机器学习中扮演了重要角色。

在机器学习中，数据一般都是高维的。众所周知，高维数据是很难来分析和可视化的。而且，不是所有的高维数据都是有用的，可能只有一些数据包含了大部分的重要信息。

正交投影就是高维到低维的数据投影，在第5节课线性空间中，我简单介绍了高维数据投影到低维后，我们就能在低维空间更多地了解数据集、提炼相关模式。而在机器学习中，最普遍的降维算法——PCA主成分分析，就是利用了降维的观点。

接下来，我开始讲解正交投影，在给出定义之前，先从一张图来了解会更直观。



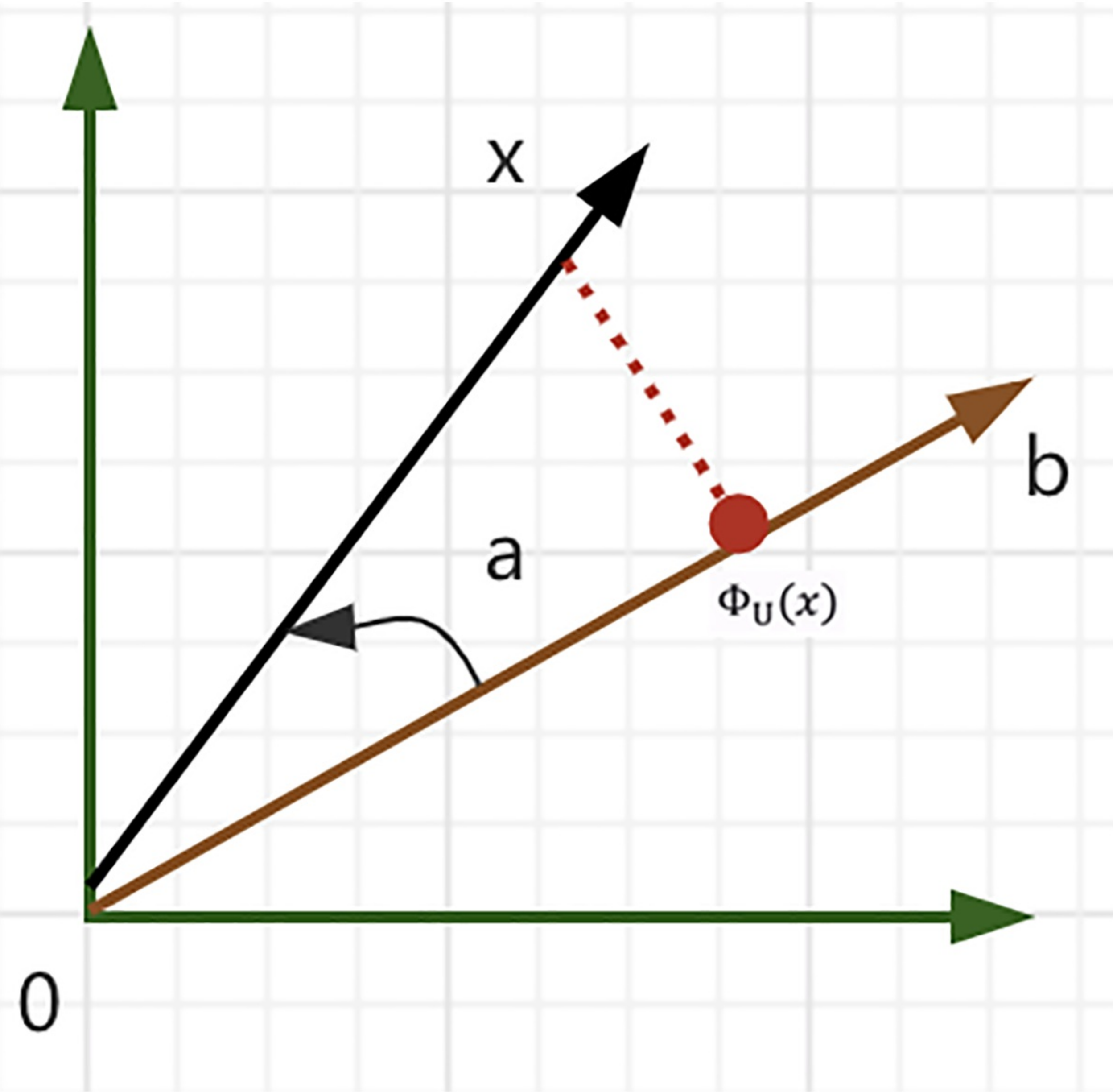
图中的蓝点是原二维数据，黄点是它们的正交投影。所以，实际降维后，在一维空间中就形成了这条黑线表示，它近似地表达了原来二维数据表示的信息。

现在我们可以来看一下投影的定义：V是一个向量空间，U是V的一个向量子空间，一个从V到U的线性映射Φ是一个投影，如果它满足：$\Phi^{2}=\Phi \circ \Phi=\Phi$。因为线性映射能够被变换矩阵表示，所以，这个定义同样适用于一个特殊类型变换矩阵：投影矩阵P_{Φ}，它也满足：$P_{\Phi}^{2}=P_{\Phi}$。

投影到一维子空间上（线）

接下来，我们来看看如何投影到一维子空间，也就是把内积空间的向量正交投影到子空间，这里我们使用点积作为内积。

假设有一条通过原点的线，这条线是由基向量b产生的一维子空间U，当我们把一个向量x投影到U时，需要寻找另一个最靠近x的向量$\Phi_{U}(x)$。还是老样子，我们通过图来看一下。



首先，投影$\Phi_{U}(x)$靠近x，也就是要找出x和$\Phi_{U}(x)$之间的$\left\|x-\Phi_{U}(x)\right\|$最小距离，从几何角度来说，就是线段$\Phi_{U}(x)-x$和$b$正交，满足等式：$\left\langle\Phi_{U}(x)-x, b\right\rangle=0$。其次，投影$\Phi_{U}(x)$必须是$U$的一个元素，也就是，基向量$b$的一个乘来产生$U$，$\Phi_{U}(x)=\lambda b$。

于是，我们可以通过三个步骤来分别得到λ、投影$\Phi_{U}(x)$和投影矩阵P_{Φ}，来把任意x映射到子空间U上。

第一步，计算λ，通过正交条件产生这样的等式：
$\left\langle x-\Phi_{U}(x), b\right\rangle=0$。因为$\Phi_{U}(x)=\lambda b$，所以它可以转变成：$\langle x-\lambda b, b\rangle=0$。

利用内积的双线性：$\langle x, b\rangle-\lambda\langle b, b\rangle=0$，我们得到：

$$
\lambda=\frac{\langle x, b\rangle}{\langle b, b\rangle}=\frac{\langle b, x\rangle}{\|b\|^{2}}
$$

然后，我们通过点积得到：

$$
\lambda=\frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}}
$$

如果$\|b\|=1$，那λ就等于$b^{T}x$。

接着第二步，是计算投影点$\Phi_{U}(x)$。从$\Phi_{U}(x)=\lambda b$，我们得到：

$$
\Phi_{U}(x)=\lambda b=\frac{\langle x, b\rangle}{\|b\|^{2}} b=\frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}} b
$$

通过点积来计算，我们就得到了$\Phi_{U}(x)$的长度：

$$
\left\|\Phi_{U}(x)\right\|=\frac{\left|b^{T} x\right|}{\|b\|^{2}}\|b\|=|\cos (a)|\|x\|\|b\| \frac{\|b\|}{\|b\|^{2}}=\mid \cos (a)\|x\|
$$

这里的a，是x和b之间的夹角。

最后第三步，是计算投影矩阵P_{Φ}，投影矩阵是一个线性映射。所以，我们可以得到：$\Phi_{U}(x)=P_{\Phi}x$，通过$\Phi_{U}(x)=\lambda b$，我们可以得到：

$$
\Phi_{U}(x)=\lambda b=b \lambda=b \frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}}=\frac{b b^{T}}{\|b\|^{2}} x
$$

这里，我们立即可以得到投影矩阵P_{Φ}的计算等式：

$$
P_{\Phi}=\frac{b b^{T}}{\|b\|^{2}}
$$

本节小结

这一节课覆盖的知识点有点多，因为要把解析几何的知识点，浓缩到核心的几个点来讲解是一项艰巨的任务。不过不要怕，前面的几个知识点都是为这一节的重点“正交投影”来铺垫的。范数，被用来度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小，而内积让我们很直观地了解一个向量的长度、两个向量之间的距离和角度，以及判断向量之间是否是正交的。

所以，希望你能掌握范数和内积的理论知识，并把它和正交投影结合，运用在一些实践应用场景中，比如：3D图形图像的坐标变换、数据压缩，以及机器学习的降维。

线性代数练习场

请用之前学到的正交投影的投影矩阵算法，来计算一条线上的投影矩阵P_{Φ}。

这条线通过原点，由基$b=\left[\begin{array}{lll}1 & 2 & 2\end{array}\right]^{T}$产生，$P_{\Phi}$计算后，再通过一个$x$来验证一下它是否在$b$产生的子空间中，我们取$x=\left[\begin{array}{lll}1 & 1 & 1\end{array}\right]^{T}$。

欢迎在留言区晒出你的运算结果，我会及时回复。同时，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友，一起讨论、学习。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数，今天我们要讲的内容是“解析几何”。

前面所有章节我们都是围绕向量、矩阵，以及向量空间来展开的。但这一节课有点不一样，我要讲的是解析几何，它使得向量从抽象走向了具象，让向量具有了几何的含义。比如，计算向量的长度、向量之间的距离和角度，这在机器学习的主成分分析PCA中是非常有用的。

范数

讲解析几何我们得从“范数”开始讲起。

因为很多人看到几何向量的第一反应就是，它是从原点开始的有向线段，并且向量的长度是这个有向线段的终端和起始端之间的距离。而范数，就是被用来度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小的。

现在，我们先来看一下范数的数学定义：一个向量空间V上的一个范数就是一个函数，它计算V中的每一个向量x的长度，用符号来表示的话就是：$\|x\| \in R$，它满足三种性质：

1. 正齐次性： 如果输入参数扩大正$λ$倍，其对应的函数也扩正大倍。设$λ \in R$，$x \in V$，$\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$；
2. 次可加性：类似三角不等式，两边之和大于第三边。设$x,y \in V$，$\|x+y\| \leq\|x\|+\|y\|$；
3. 正定性：向量x的长度一定大于等于零。$\|x\| \geq 0$。

看到这里，你也许会问，范数似乎和以前老师教的**向量的模**一样啊。先别急，它们还真有那么一点关系，你听我慢慢道来。由于范数是度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小的，所以它和向量空间维度是有关系的，于是，我们可以把范数写成这样的模式来区分不同维度的大小计算：$L_{1}, L_{2}, \ldots, L_{\infty}$。

- L_{1}范数：曼哈顿范数，也叫曼哈顿距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{1}=\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}\right|
$$

- L_{2}范数：欧式范数，也叫欧式距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2}}
$$

- L_{∞}范数：切比雪夫范数，也叫切比雪夫距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{\infty}=\max \left(\left|x_{1}\right|,\left|x_{2}\right|, \ldots,\left|x_{n}\right|\right)
$$

我们发现，向量的模和L_{2}范数的计算方式都是一样的，都表示的是欧氏距离，所以，我们可以简单地认为向量的模等于L_{2}范数。而其他的范数模式和向量的模则没有任何关系。

内积

学习解析几何时，我们必须掌握的第二个概念就是内积。

如果说范数是模式，是用来描述向量长度或大小的概念性表达，那么内积可以让我们很直观地了解一个向量的长度、两个向量之间的距离和角度，它的一个主要目的就是判断向量之间是否是正交的，正交这个概念我们会在后面讲解。

点积

我们从特殊到一般，先来看点积，它和第三篇矩阵中说的“普通矩阵乘”形式一样，点积是特殊的内积，为什么说它特殊呢？那是因为在表示两个向量之间的距离时，它就是大家熟悉的欧式距离，点积可以表示成这样的形式：

$$
x^{T} y=\sum_{i=1}^{n} x_{i} y_{i}
$$

其他内积

除了点积外，我们再来看另一个不同的内积：设内积空间V是R^{2}，定义内积$\langle x, y\rangle=x_{1} y_{1}-(x_{1} y_{2}+x_{2} y_{1})+2 x_{2} y_{2}$，一看便知这个和点积完全不同。

内积空间

最后，我们再来看一般内积和内积空间。因为解析几何关注的是向量的长度、两个向量之间的距离和角度，所以，我们要在原来向量空间上加一个额外的结构，这个额外结构就是内积，而加了内积的向量空间，我们就叫做内积空间。

为了表达方便，我们可以把内积写成$\langle\cdot,\cdot\rangle$这样的形式，那么内积空间$V$可以被表示成这样：$(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$。这时，如果一般内积由点积来表达，那这个向量空间就变成了更具体的欧式向量空间。

接下来看下内积空间有什么性质？我们定义一个内积空间V和它的元素x、y、z，以及一个$c \in R$：

- 满足对称性：x和y的内积等于y和x的内积，$\langle x, y\rangle=\langle y, x\rangle$；
- 满足线性性：x和$y+cz$的内积等于，x和y的内积，与x和z的内积乘以c后的和，$\langle x, y+c z\rangle=\langle x, y\rangle+c\langle x, z\rangle$；
- 满足正定性：x和y的内积大于等于零，$\langle x, y\rangle \geq 0$。

对称正定矩阵

内积还定义了一类矩阵，这类矩阵在机器学习中很重要，因为它可以被用来判定多元函数极值，而在深度学习中，它更是被用来获取最小化损失函数，我们把这类矩阵叫做对称正定矩阵。

对称正定矩阵的定义是：如果一个对称矩阵A属于方阵$R^{n×n}$，对任意非零向量x，都有$x^{T} A x>0$，那么A就是对称正定矩阵。

我们来看两个例子，判断它们是不是对称正定矩阵。

第一个例子，请你回答下面这个矩阵是对称正定矩阵吗？

$$
A=\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 5
\end{array}\right]
$$

答案：是的，它是对称正定矩阵。因为$x^{T} A x>0$。

$$
x^{T} A x=\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 5
\end{array}\right]\left[\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right]=(3 x_{1}+2 x_{2})^{2}+x_{2}^{2}>0
$$

第二个例子，请你看下面这个矩阵是对称正定矩阵吗？

$$
A=\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 3
\end{array}\right]
$$

答案：不是的，它只是对称矩阵。因为$x^{T} A x$可能小于0。

$$
x^{T} A x=\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 3
\end{array}\right]\left[\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right]=(3 x_{1}+2 x_{2})^{2}-x_{2}^{2}
$$

长度、距离和角度

前面我们通过范数讲了向量的长度，但从内积的角度来看，我们发现，内积和范数之间有着千丝万缕的关系。我们来看看下面这个等式。

$$
\|x\|=\sqrt{\langle x, x\rangle}
$$

从这个等式我们发现，内积可以用来产生范数，确实是这样。不过，不是每一个范数都能被一个内积产生的，比如：曼哈顿范数。接下来，我们还是来关注能由内积产生的范数上，从不同的角度来看看几何上的长度、距离和角度的概念。

我们先用内积来计算一个**向量的长度**，比如：向量$x=[\begin{array}{ll}1 & 1\end{array}]^{T}$，我们可以使用点积来计算，计算后得出$x$的范数是$\sqrt{2}$，具体计算过程是这样的：$\|x\|=\sqrt{x^{T} x}=\sqrt{1^{2}+1^{2}}=\sqrt{2}$。

接着，我们再来看一下**向量之间的距离**，一个内积空间V，$(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$，$x$和$y$是它的两个向量，那么$x$和$y$之间的距离就可以表示成：$d(x, y)=\|x-y\|=\sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$。

如果用点积来计算x和y之间的距离，那这个距离就叫做欧式距离。

再接着，来看看两个**向量之间的角度**。我们使用柯西-施瓦茨不等式（Cauchy-Schwarz Inequality）来表示内积空间中两个向量x和y之间的角度：a。

$$
-1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \leq 1
$$

取值是从-1到1之间，那么角度就是从0到π之间，我们用cos来表示就是：

$$
\cos (a)=\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}
$$

其中a就是角度，a的角度取值是0到π之间。我们很容易就能发现，其实两个向量之间的角度，就是告诉了我们两个向量之间方向的相似性。例如：x和$y=4x$，使用点积来计算它们之间的角度是0，也就是说它们的方向是一样的，y只是对x扩大了4倍而已。

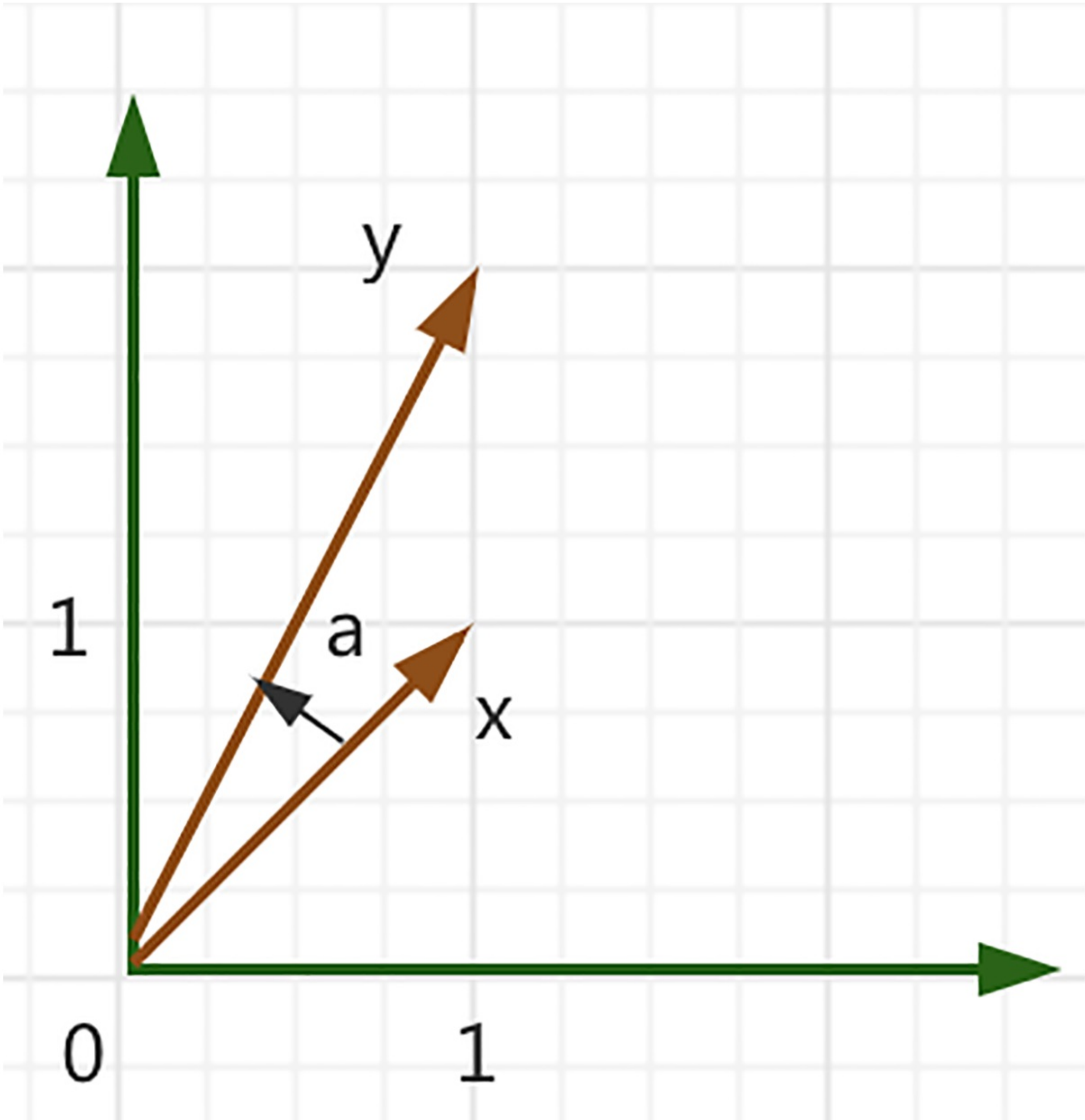
现在，我们通过一个例子，再来更清楚地看下两个向量之间角度的计算，设$x=[\begin{array}{ll}1 & 1\end{array}]^{T}$，$y=[\begin{array}{ll}1 & 2\end{array}]^{T}$，使用点积来计算，我们得出：

$$
\cos (a)=\frac{\langle x, y\rangle}{\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}}=\frac{x^{T} y}{\sqrt{x^{T} x y^{T} y}}=\frac{3}{\sqrt{10}}
$$

那么，这两个向量之间的角度如下。

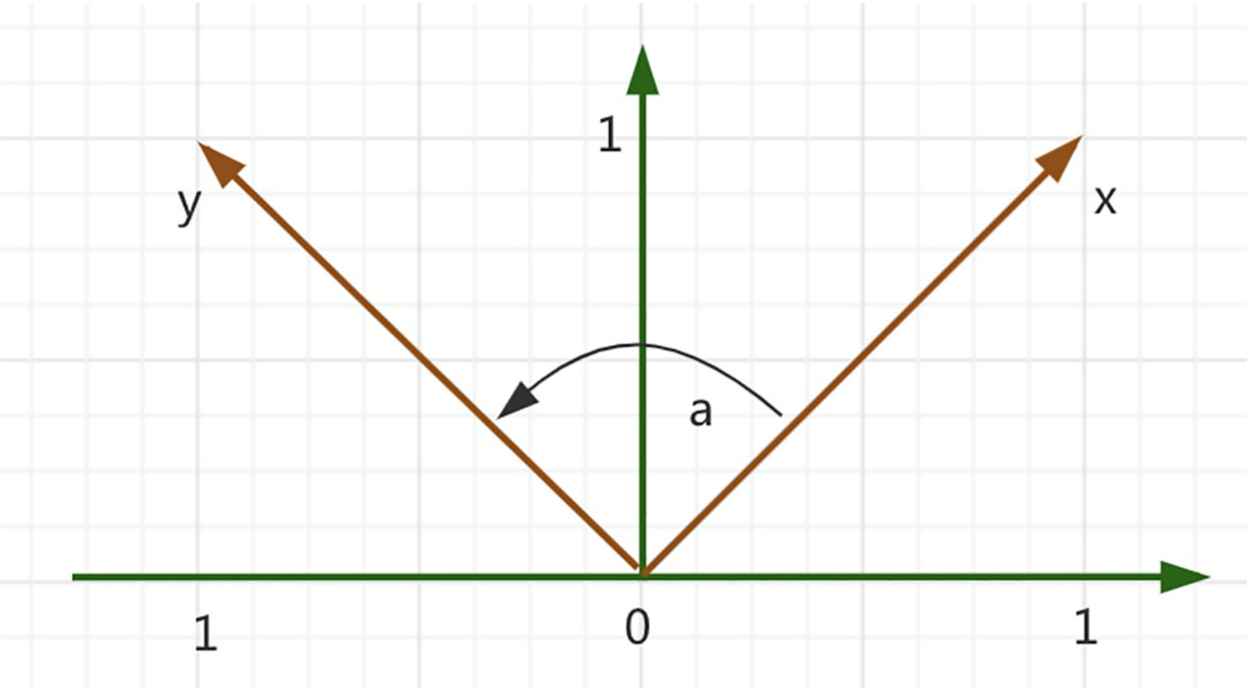
$$
\arccos \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \approx 0.32
$$

我们可以用图来更直观地表达一下。



于是，我们最后可以引出一个概念，也就是我们在一开始提到的**正交性**。如果两个向量x和y内积等于0，$\langle x, y\rangle=0$，那么x和y是正交的，这可以写成：$x \perp y$。再如果，x和y的范数都等于1，$\|x\|=\|y\|=1$，也就是说，如果它们都是单位向量，那么x和y就是标准正交的。

我们用图来更直观地表达一下。



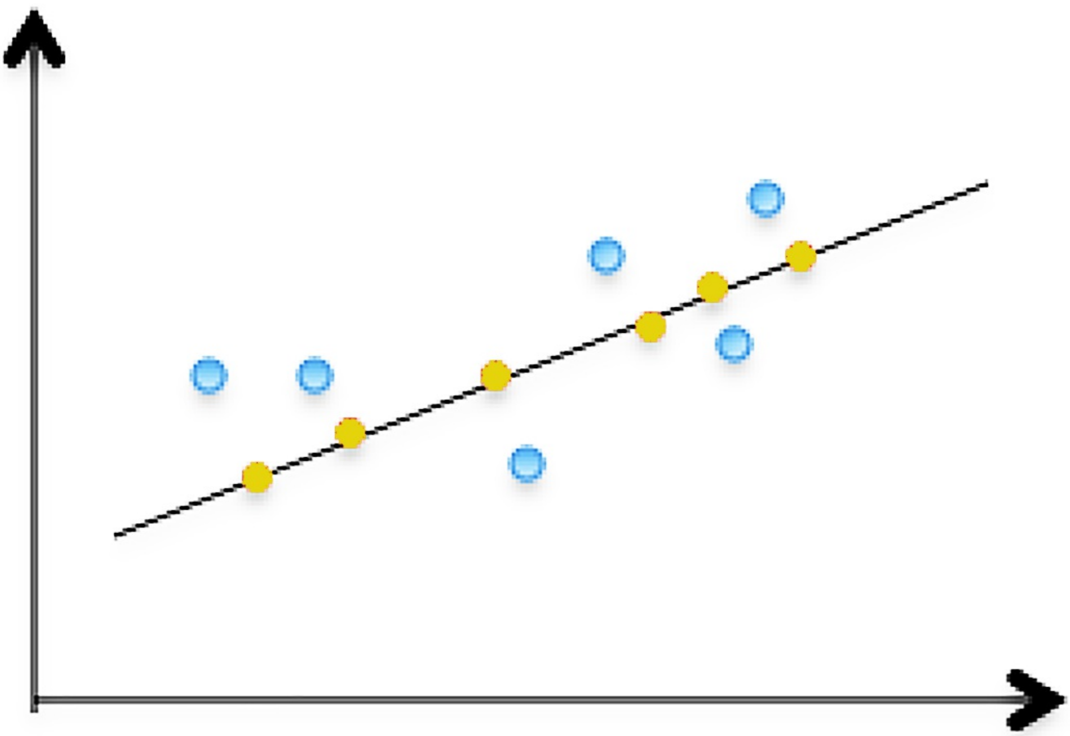
正交投影

在理论讲解之后，我们要来了解一下解析几何在实践中经常运用的概念——正交投影，它是一种重要的线性变换，在图形图像、编码理论、统计和机器学习中扮演了重要角色。

在机器学习中，数据一般都是高维的。众所周知，高维数据是很难来分析和可视化的。而且，不是所有的高维数据都是有用的，可能只有一些数据包含了大部分的重要信息。

正交投影就是高维到低维的数据投影，在[第5节课线性空间]中，我简单介绍了高维数据投影到低维后，我们就能在低维空间更多地了解数据集、提炼相关模式。而在机器学习中，最普遍的降维算法——PCA主成分分析，就是利用了降维的观点。

接下来，我开始讲解正交投影，在给出定义之前，先从一张图来了解会更直观。



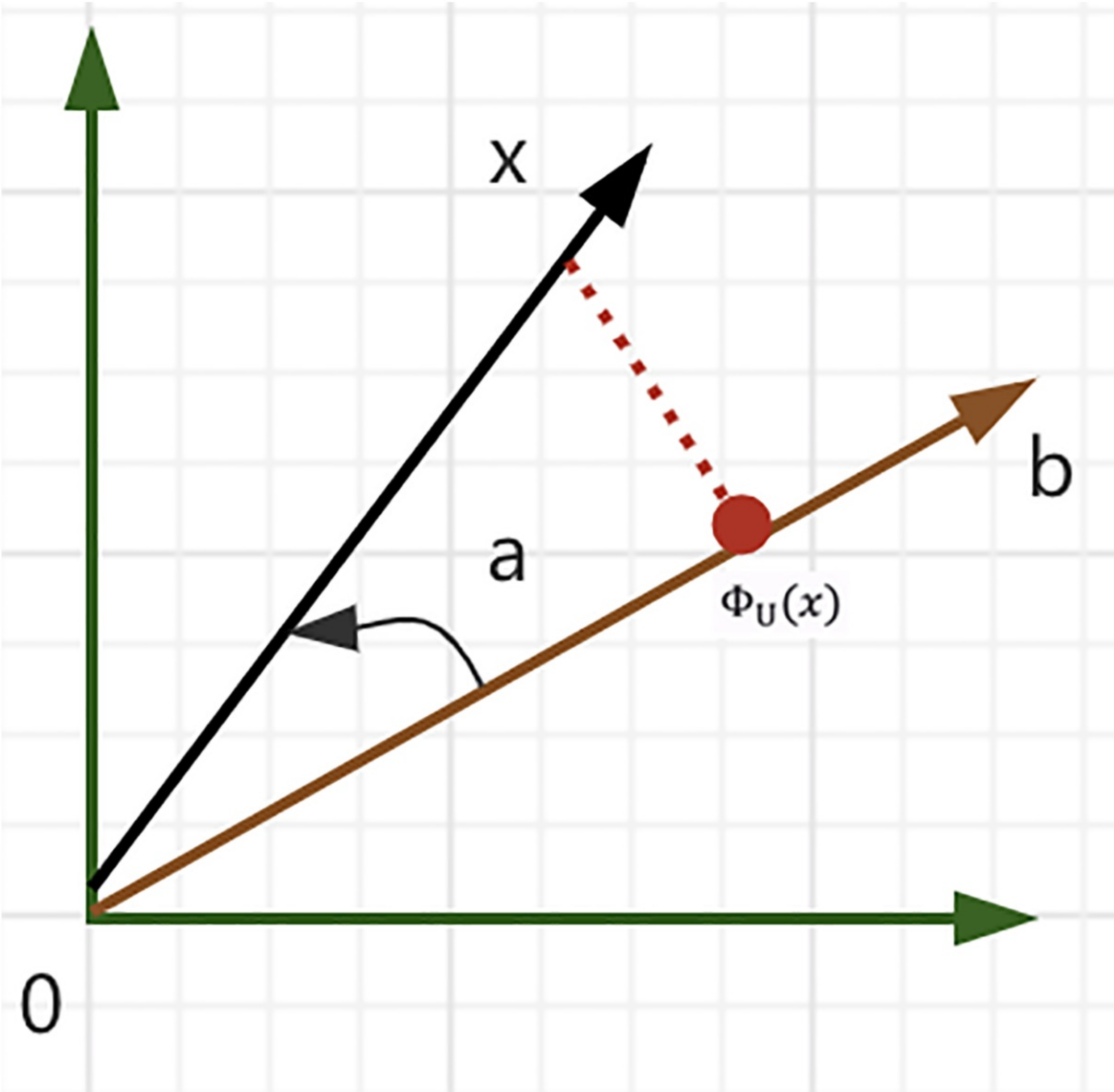
图中的蓝点是原二维数据，黄点是它们的正交投影。所以，实际降维后，在一维空间中就形成了这条黑线表示，它近似地表达了原来二维数据表示的信息。

现在我们可以来看一下投影的定义：V是一个向量空间，U是V的一个向量子空间，一个从V到U的线性映射Φ是一个投影，如果它满足：$\Phi^{2}=\Phi \circ \Phi=\Phi$。因为线性映射能够被变换矩阵表示，所以，这个定义同样适用于一个特殊类型变换矩阵：投影矩阵P_{Φ}，它也满足：$P_{\Phi}^{2}=P_{\Phi}$。

投影到一维子空间上（线）

接下来，我们来看看如何投影到一维子空间，也就是把内积空间的向量正交投影到子空间，这里我们使用点积作为内积。

假设有一条通过原点的线，这条线是由基向量b产生的一维子空间U，当我们把一个向量x投影到U时，需要寻找另一个最靠近x的向量$\Phi_{U}(x)$。还是老样子，我们通过图来看一下。



首先，投影$\Phi_{U}(x)$靠近x，也就是要找出x和$\Phi_{U}(x)$之间的$\left\|x-\Phi_{U}(x)\right\|$最小距离，从几何角度来说，就是线段$\Phi_{U}(x)-x$和$b$正交，满足等式：$\left\langle\Phi_{U}(x)-x, b\right\rangle=0$。其次，投影$\Phi_{U}(x)$必须是$U$的一个元素，也就是，基向量$b$的一个乘来产生$U$，$\Phi_{U}(x)=\lambda b$。

于是，我们可以通过三个步骤来分别得到λ、投影$\Phi_{U}(x)$和投影矩阵P_{Φ}，来把任意x映射到子空间U上。

第一步，计算λ，通过正交条件产生这样的等式：
$\left\langle x-\Phi_{U}(x), b\right\rangle=0$。因为$\Phi_{U}(x)=\lambda b$，所以它可以转变成：$\langle x-\lambda b, b\rangle=0$。

利用内积的双线性：$\langle x, b\rangle-\lambda\langle b, b\rangle=0$，我们得到：

$$
\lambda=\frac{\langle x, b\rangle}{\langle b, b\rangle}=\frac{\langle b, x\rangle}{\|b\|^{2}}
$$

然后，我们通过点积得到：

$$
\lambda=\frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}}
$$

如果$\|b\|=1$，那λ就等于$b^{T}x$。

接着第二步，是计算投影点$\Phi_{U}(x)$。从$\Phi_{U}(x)=\lambda b$，我们得到：

$$
\Phi_{U}(x)=\lambda b=\frac{\langle x, b\rangle}{\|b\|^{2}} b=\frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}} b
$$

通过点积来计算，我们就得到了$\Phi_{U}(x)$的长度：

$$
\left\|\Phi_{U}(x)\right\|=\frac{\left|b^{T} x\right|}{\|b\|^{2}}\|b\|=|\cos (a)|\|x\|\|b\| \frac{\|b\|}{\|b\|^{2}}=\mid \cos (a)\|x\|
$$

这里的a，是x和b之间的夹角。

最后第三步，是计算投影矩阵P_{Φ}，投影矩阵是一个线性映射。所以，我们可以得到：$\Phi_{U}(x)=P_{\Phi}x$，通过$\Phi_{U}(x)=\lambda b$，我们可以得到：

$$

$$
\Phi_{U}(x)=\lambda b=b \lambda=b \frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}}=\frac{b b^{T}}{\|b\|^{2}} x
$$

这里，我们立即可以得到投影矩阵P_{Φ}的计算等式：

$$
P_{\Phi}=\frac{b b^{T}}{\|b\|^{2}}
$$

本节小结

这一节课覆盖的知识点有点多，因为要把解析几何的知识点，浓缩到核心的几个点来讲解是一项艰巨的任务。不过不要怕，前面的几个知识点都是为这一节的重点“正交投影”来铺垫的。范数，被用来度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小，而内积让我们很直观地了解一个向量的长度、两个向量之间的距离和角度，以及判断向量之间是否是正交的。

所以，希望你能掌握范数和内积的理论知识，并把它和正交投影结合，运用在一些实践应用场景中，比如：3D图形图像的坐标变换、数据压缩，以及机器学习的降维。

线性代数练习场

请用之前学到的正交投影的投影矩阵算法，来计算一条线上的投影矩阵P_{Φ}。

这条线通过原点，由基$b=\left[\begin{array}{lll}1 & 2 & 2\end{array}\right]^{T}$产生，$P_{\Phi}$计算后，再通过一个$x$来验证一下它是否在$b$产生的子空间中，我们取$x=\left[\begin{array}{lll}1 & 1 & 1\end{array}\right]^{T}$。

欢迎在留言区晒出你的运算结果，我会及时回复。同时，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友，一起讨论、学习。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数，今天我们要讲的内容是“解析几何”。

前面所有章节我们都是围绕向量、矩阵，以及向量空间来展开的。但这一节课有点不一样，我要讲的是解析几何，它使得向量从抽象走向了具象，让向量具有了几何的含义。比如，计算向量的长度、向量之间的距离和角度，这在机器学习的主成分分析PCA中是非常有用的。

范数

讲解析几何我们得从“范数”开始讲起。

因为很多人看到几何向量的第一反应就是，它是从原点开始的有向线段，并且向量的长度是这个有向线段的终端和起始端之间的距离。而范数，就是被用来度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小的。

现在，我们先来看一下范数的数学定义：一个向量空间V上的一个范数就是一个函数，它计算V中的每一个向量x的长度，用符号来表示的话就是：$\|x\| \in R$，它满足三种性质：

1. 正齐次性： 如果输入参数扩大正$λ$倍，其对应的函数也扩大正大倍。设$λ \in R$，$x \in V$，$\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$；
2. 次可加性：类似三角不等式，两边之和大于第三边。设$x,y \in V$，$\|x+y\| \leq\|x\|+\|y\|$；
3. 正定性：向量x的长度一定大于等于零。$\|x\| \geq 0$。

看到这里，你也许会问，范数似乎和以前老师教的**向量的模**一样啊。先别急，它们还真有那么一点关系，你听我慢慢道来。由于范数是度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小的，所以它和向量空间维度是有关系的，于是，我们可以把范数写成这样的模式来区分不同维度的大小计算：$L_{1}, L_{2}, \ldots, L_{\infty}$。

- L_{1}范数：曼哈顿范数，也叫曼哈顿距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{1}=\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}\right|
$$

- L_{2}范数：欧式范数，也叫欧式距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2}}
$$

- L_{∞}范数：切比雪夫范数，也叫切比雪夫距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{\infty}=\max \left(\left|x_{1}\right|,\left|x_{2}\right|, \ldots,\left|x_{n}\right|\right)
$$

我们发现，向量的模和L_{2}范数的计算方式都是一样的，都表示的是欧氏距离，所以，我们可以简单地认为向量的模等于L_{2}范数。而其他的范数模式和向量的模则没有任何关系。

内积

学习解析几何时，我们必须掌握的第二个概念就是内积。

如果说范数是模式，是用来描述向量长度或大小的概念性表达，那么内积可以让我们很直观地了解一个向量的长度、两个向量之间的距离和角度，它的一个主要目的就是判断向量之间是否是正交的，正交这个概念我们会在后面讲解。

点积

我们从特殊到一般，先来看点积，它和第三篇矩阵中说的“普通矩阵乘”形式一样，点积是特殊的内积，为什么说它特殊呢？那是因为在表示两个向量之间的距离时，它就是大家熟悉的欧式距离，点积可以表示成这样的形式：

$$
x^{T} y=\sum_{i=1}^{n} x_{i} y_{i}
$$

其他内积

除了点积外，我们再来看另一个不同的内积：设内积空间V是R^{2}，定义内积$\langle x, y\rangle=x_{1} y_{1}-(x_{1} y_{2}+x_{2} y_{1})+2 x_{2} y_{2}$，一看便知这个和点积完全不同。

内积空间

最后，我们再来看一般内积和内积空间。因为解析几何关注的是向量的长度、两个向量之间的距离和角度，所以，我们要在原来向量空间上加一个额外的结构，这个额外结构就是内积，而加了内积的向量空间，我们就叫做内积空间。

为了表达方便，我们可以把内积写成$\langle\ \cdot,\cdot\ \rangle$这样的形式，那么内积空间$V$可以被表示成这样：$(V,\langle\ \cdot,\cdot\ \rangle)$。这时，如果一般内积由点积来表达，那这个向量空间就变成了更具体的欧式向量空间。

接下来看下内积空间有什么性质？我们定义一个内积空间V和它的元素x、y、z，以及一个$c \in R$：

- 满足对称性：x和y的内积等于y和x的内积，$\langle x, y\rangle=\langle y, x\rangle$；
- 满足线性性：x和$y+cz$的内积等于，x和y的内积，与x和z的内积乘以c后的和，$\langle x, y+c z\rangle=\langle x, y\rangle+c\langle x, z\rangle$；
- 满足正定性：x和y的内积大于等于零，$\langle x, y\rangle \geq 0$。

对称正定矩阵

内积还定义了一类矩阵，这类矩阵在机器学习中很重要，因为它可以被用来判定多元函数极值，而在深度学习中，它更是被用来获取最小化损失函数，我们把这类矩阵叫做对称正定矩阵。

对称正定矩阵的定义是：如果一个对称矩阵A属于方阵$R^{n×n}$，对任意非零向量x，都有$x^{T} A x>0$，那么A就是对称正定矩阵。

我们来看两个例子，判断它们是不是对称正定矩阵。

第一个例子，请你回答下面这个矩阵是对称正定矩阵吗？

$$
A=\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 5
\end{array}\right]
$$

答案：是的，它是对称正定矩阵。因为$x^{T} A x>0$。

$$
x^{T} A x=\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 5
\end{array}\right]\left[\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right]=(3 x_{1}+2 x_{2})^{2}+x_{2}^{2}>0
$$

第二个例子，请你看下面这个矩阵是对称正定矩阵吗？

$$
A=\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 3
\end{array}\right]
$$

答案：不是的，它只是对称矩阵。因为$x^{T} A x$可能小于0。

$$
x^{T} A x=\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 3
\end{array}\right]\left[\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right]=(3 x_{1}+2 x_{2})^{2}-x_{2}^{2}
$$

长度、距离和角度

前面我们通过范数讲了向量的长度，但从内积的角度来看，我们发现，内积和范数之间有着千丝万缕的关系。我们来看看下面这个等式。

$$
\|x\|=\sqrt{\langle x, x\rangle}
$$

从这个等式我们发现，内积可以用来产生范数，确实是这样。不过，不是每一个范数都能被一个内积产生的，比如：曼哈顿范数。接下来，我们还是来关注能由内积产生的范数上，从不同的角度来看看几何上的长度、距离和角度的概念。

我们先用内积来计算一个**向量的长度**，比如：向量$x=[\begin{array}{ll}1 & 1\end{array}]^{T}$，我们可以使用点积来计算，计算后得出$x$的范数是$\sqrt{2}$，具体计算过程是这样的：$\|x\|=\sqrt{x^{T} x}=\sqrt{1^{2}+1^{2}}=\sqrt{2}$。

接着，我们再来看一下**向量之间的距离**，一个内积空间V，$(V,\langle\ \cdot,\cdot\ \rangle)$，$x$和$y$是它的两个向量，那么$x$和$y$之间的距离就可以表示成：$d(x, y)=\|x-y\|=\sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$。

如果用点积来计算x和y之间的距离，那这个距离就叫做欧式距离。

再接着，来看看两个**向量之间的角度**。我们使用柯西-施瓦茨不等式（Cauchy-Schwarz Inequality）来表示内积空间中两个向量x和y之间的角度：a。

$$
-1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \leq 1
$$

取值是从-1到1之间，那么角度就是从0到$π$之间，我们用cos来表示就是：

$$
\cos (a)=\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}
$$

其中a就是角度，a的角度取值是0到$π$之间。我们很容易就能发现，其实两个向量之间的角度，就是告诉了我们两个向量之间方向的相似性。例如：x和$y=4x$，使用点积来计算它们之间的角度是0，也就是说它们的方向是一样的，y只是对x扩大了4倍而已。

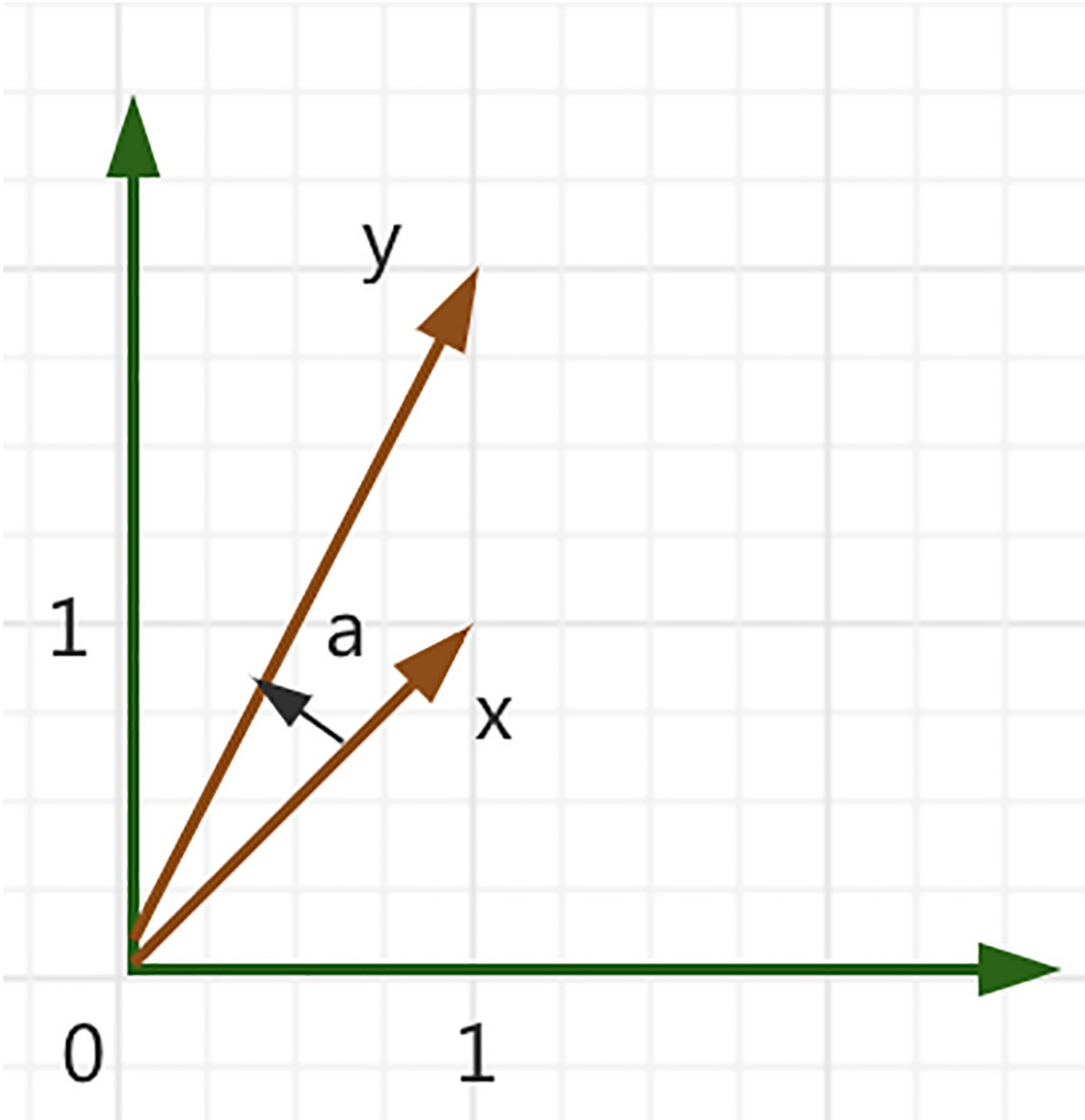
现在，我们通过一个例子，再来更清楚地看下两个向量之间角度的计算，设$x=[\begin{array}{ll}1 & 1\end{array}]^{T}$，$y=[\begin{array}{ll}1 & 2\end{array}]^{T}$，使用点积来计算，我们得出：

$$
\cos (a)=\frac{\langle x, y\rangle}{\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}}=\frac{x^{T} y}{\sqrt{x^{T} x y^{T} y}}=\frac{3}{\sqrt{10}}
$$

那么，这两个向量之间的角度如下。

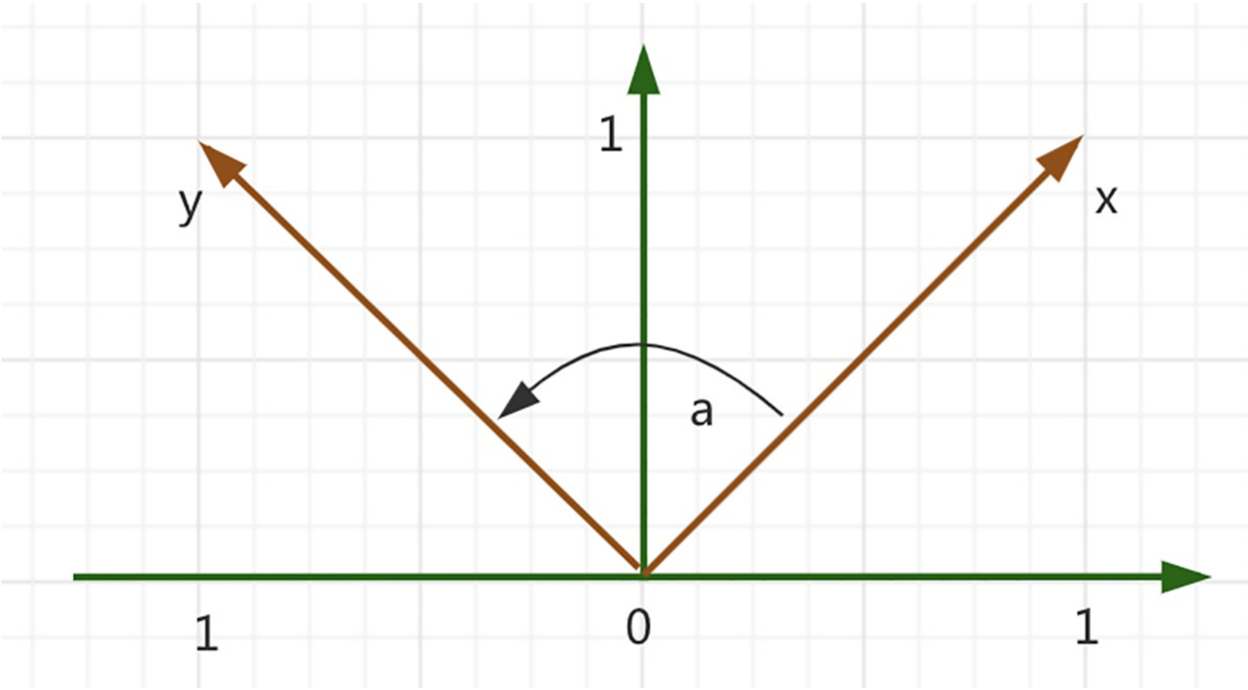
$$
\arccos \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \approx 0.32
$$

我们可以用图来更直观地表达一下。



于是，我们最后可以引出一个概念，也就是我们在一开始提到的**正交性**。如果两个向量x和y内积等于0，$\langle x, y\rangle=0$，那么x和y是正交的，这可以写成：$x \perp y$。再如果，x和y的范数都等于1，$\|x\|=\|y\|=1$，也就是说，如果它们都是单位向量，那么x和y就是标准正交的。

我们用图来更直观地表达一下。



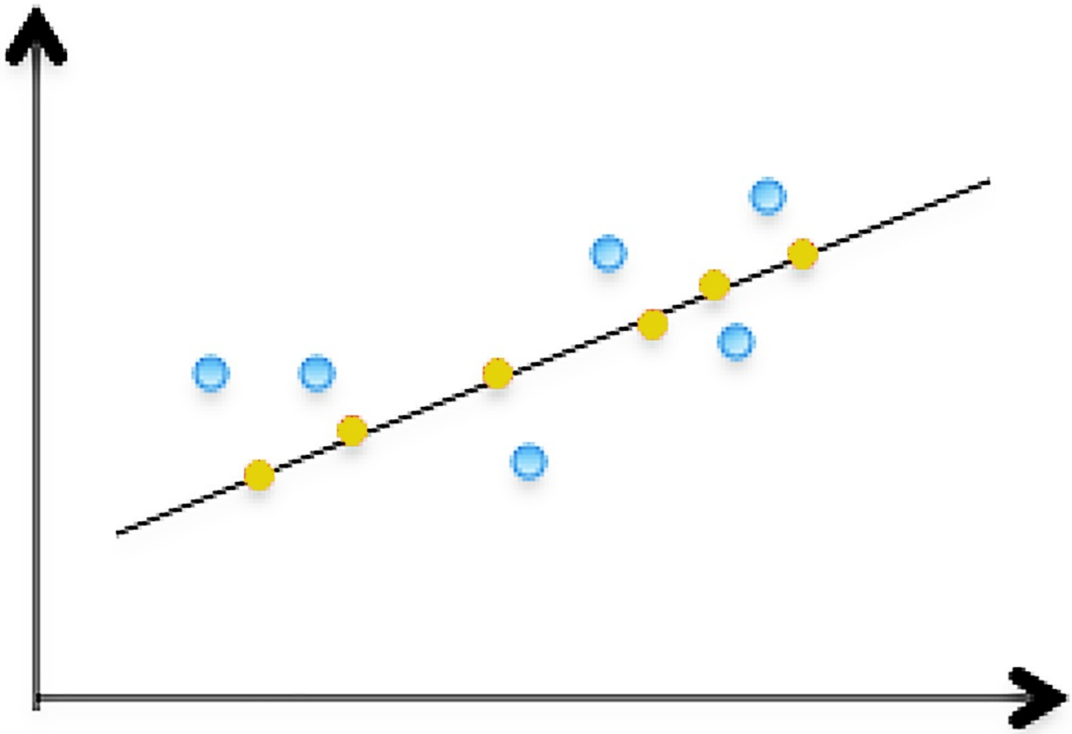
正交投影

在理论讲解之后，我们要来了解一下解析几何在实践中经常运用的概念——正交投影，它是一种重要的线性变换，在图形图像、编码理论、统计和机器学习中扮演了重要角色。

在机器学习中，数据一般都是高维的。众所周知，高维数据是很难来分析和可视化的。而且，不是所有的高维数据都是有用的，可能只有一些数据包含了大部分的重要信息。

正交投影就是高维到低维的数据投影，在[第5节课线性空间]中，我简单介绍了高维数据投影到低维后，我们就能在低维空间更多地了解数据集、提炼相关模式。而在机器学习中，最普遍的降维算法——PCA主成分分析，就是利用了降维的观点。

接下来，我开始讲解正交投影，在给出定义之前，先从一张图来了解会更直观。



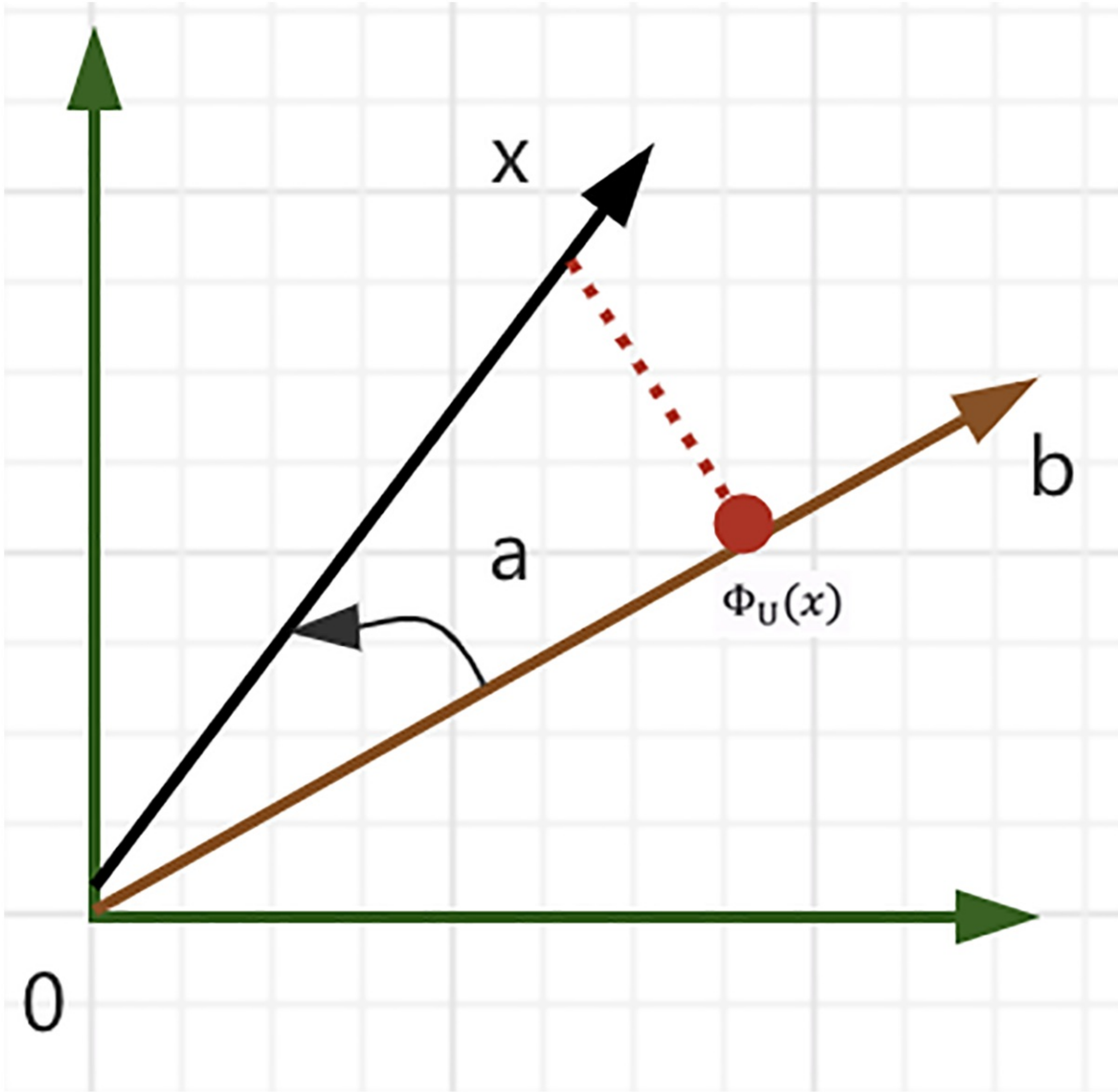
图中的蓝点是原二维数据，黄点是它们的正交投影。所以，实际降维后，在一维空间中就形成了这条黑线表示，它近似地表达了原来二维数据表示的信息。

现在我们可以来看一下投影的定义：V是一个向量空间，U是V的一个向量子空间，一个从V到U的线性映射Φ是一个投影，如果它满足：$\Phi^{2}=\Phi \circ \Phi=\Phi$。因为线性映射能够被变换矩阵表示，所以，这个定义同样适用于一个特殊类型变换矩阵：投影矩阵P_{Φ}，它也满足：$P_{\Phi}^{2}=P_{\Phi}$。

投影到一维子空间上（线）

接下来，我们来看看如何投影到一维子空间，也就是把内积空间的向量正交投影到子空间，这里我们使用点积作为内积。

假设有一条通过原点的线，这条线是由基向量b产生的一维子空间U，当我们把一个向量x投影到U时，需要寻找另一个最靠近x的向量$\Phi_{U}(x)$。还是老样子，我们通过图来看一下。



首先，投影$\Phi_{U}(x)$靠近x，也就是要找出x和$\Phi_{U}(x)$之间的$\left\|x-\Phi_{U}(x)\right\|$最小距离，从几何角度来说，就是线段$\Phi_{U}(x)-x$和$b$正交，满足等式：$\left\langle\Phi_{U}(x)-x, b\right\rangle=0$。其次，投影$\Phi_{U}(x)$必须是$U$的一个元素，也就是，基向量$b$的一个乘来产生$U$，$\Phi_{U}(x)=λb$。

于是，我们可以通过三个步骤来分别得到$λ$、投影$\Phi_{U}(x)$和投影矩阵P_{Φ}，来把任意x映射到子空间U上。

第一步，计算$λ$，通过正交条件产生这样的等式：
$\left\langle x-\Phi_{U}(x), b\right\rangle=0$。因为$\Phi_{U}(x)=λb$，所以它可以转变成：$\langle x-\lambda b, b\rangle=0$。

利用内积的双线性：$\langle x, b\rangle-\lambda\langle b, b\rangle=0$，我们得到：

$$
\lambda=\frac{\langle x, b\rangle}{\langle b, b\rangle}=\frac{\langle b, x\rangle}{\|b\|^{2}}
$$

然后，我们通过点积得到：

$$
\lambda=\frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}}
$$

如果$\|b\|=1$，那$λ$就等于$b^{T}x$。

接着第二步，是计算投影点$\Phi_{U}(x)$。从$\Phi_{U}(x)=λb$，我们得到：

$$
\Phi_{U}(x)=\lambda b=\frac{\langle x, b\rangle}{\|b\|^{2}} b=\frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}} b
$$

通过点积来计算，我们就得到了$\Phi_{U}(x)$的长度：

$$
\left\|\Phi_{U}(x)\right\|=\frac{\left|b^{T} x\right|}{\|b\|^{2}}\|b\|=|\cos (a)|\|x\|\|b\| \frac{\|b\|}{\|b\|^{2}}=\mid \cos (a)\|x\|
$$

这里的a，是x和b之间的夹角。

最后第三步，是计算投影矩阵P_{Φ}，投影矩阵是一个线性映射。所以，我们可以得到：$\Phi_{U}(x)=P_{\Phi}x$，通过$\Phi_{U}(x)=λb$，我们可以得到：

$$

\Phi_{U}(x)=\lambda b=b \lambda=b \frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}}=\frac{b b^{T}}{\|b\|^{2}} x
$$

这里，我们立即可以得到投影矩阵P_{Φ}的计算等式：

$$
P_{\Phi}=\frac{b b^{T}}{\|b\|^{2}}
$$

本节小结

这一节课覆盖的知识点有点多，因为要把解析几何的知识点，浓缩到核心的几个点来讲解是一项艰巨的任务。不过不要怕，前面的几个知识点都是为这一节的重点"正交投影"来铺垫的。范数，被用来度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小，而内积让我们很直观地了解一个向量的长度、两个向量之间的距离和角度，以及判断向量之间是否是正交的。

所以，希望你能掌握范数和内积的理论知识，并把它和正交投影结合，运用在一些实践应用场景中，比如：3D图形图像的坐标变换、数据压缩，以及机器学习的降维。

线性代数练习场

请用之前学到的正交投影的投影矩阵算法，来计算一条线上的投影矩阵P_{Φ}。

这条线通过原点，由基$b=\left[\begin{array}{lll}1 & 2 & 2\end{array}\right]^{T}$产生，$P_{\Phi}$计算后，再通过一个$x$来验证一下它是否在$b$产生的子空间中，我们取$x=\left[\begin{array}{lll}1 & 1 & 1\end{array}\right]^{T}$。

欢迎在留言区晒出你的运算结果，我会及时回复。同时，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友，一起讨论、学习。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数，今天我们要讲的内容是"解析几何"。

前面所有章节我们都是围绕向量、矩阵，以及向量空间来展开的。但这一节课有点不一样，我要讲的是解析几何，它使得向量从抽象走向了具象，让向量具有了几何的含义。比如，计算向量的长度、向量之间的距离和角度，这在机器学习的主成分分析PCA中是非常有用的。

范数

讲解析几何我们得从"范数"开始讲起。

因为很多人看到几何向量的第一反应就是，它是从原点开始的有向线段，并且向量的长度是这个有向线段的终端和起始端之间的距离。而范数，就是被用来度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小的。

现在，我们先来看一下范数的数学定义：一个向量空间V上的一个范数就是一个函数，它计算V中的每一个向量x的长度，用符号来表示的话就是：$\|x\| \in R$，它满足三种性质：

1. 正齐次性： 如果输入参数扩大正λ倍，其对应的函数也扩正大倍。设$\lambda \in R$，$x \in V$，$\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$；
2. 次可加性：类似三角不等式，两边之和大于第三边。设$x,y \in V$，$\|x+y\| \leq\|x\|+\|y\|$；
3. 正定性：向量x的长度一定大于等于零。$\|x\| \geq 0$。

看到这里，你也许会问，范数似乎和以前老师教的**向量的模**一样啊。先别急，它们还真有那么一点关系，你听我慢慢道来。由于范数是度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小的，所以它和向量空间维度是有关系的，于是，我们可以把范数写成这样的模式来区分不同维度的大小计算：$L_{1}, L_{2}, \ldots, L_{\infty}$。

- L_{1}范数：曼哈顿范数，也叫曼哈顿距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{1}=\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}\right|
$$

- L_{2}范数：欧式范数，也叫欧式距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2}}
$$

- L_{∞}范数：切比雪夫范数，也叫切比雪夫距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{\infty}=\max \left(\left|x_{1}\right|,\left|x_{2}\right|, \ldots,\left|x_{n}\right|\right)
$$

我们发现，向量的模和L_{2}范数的计算方式都是一样的，都表示的是欧氏距离，所以，我们可以简单地认为向量的模等于L_{2}范数。而其他的范数模式和向量的模则没有任何关系。

内积

学习解析几何时，我们必须掌握的第二个概念就是内积。

如果说范数是模式，是用来描述向量长度或大小的概念性表达，那么内积可以让我们很直观地了解一个向量的长度、两个向量之间的距离和角度，它的一个主要目的就是判断向量之间是否是正交的，正交这个概念我们会在后面讲解。

点积

我们从特殊到一般，先来看点积，它和第三篇矩阵中说的"普通矩阵乘"形式一样，点积是特殊的内积，为什么说它特殊呢？那是因为在表示两个向量之间的距离时，它就是大家熟悉的欧式距离，点积可以表示成这样的形式：

$$
x^{T} y=\sum_{i=1}^{n} x_{i} y_{i}
$$

其他内积

除了点积外，我们再来看另一个不同的内积：设内积空间V是R^{2}，定义内积$\langle x, y\rangle=x_{1} y_{1}-(x_{1} y_{2}+x_{2} y_{1})+2 x_{2} y_{2}$，一看便知这个和点积完全不同。

内积空间

最后，我们再来看一般内积和内积空间。因为解析几何关注的是向量的长度、两个向量之间的距离和角度，所以，我们要在原来向量空间上加一个额外的结构，这个额外结构就是内积，而加了内积的向量空间，我们就叫做内积空间。

为了表达方便，我们可以把内积写成$\langle\ \cdot,\cdot\ \rangle$这样的形式，那么内积空间$V$可以被表示成这样：$(V,\langle\ \cdot,\cdot\ \rangle)$。这时，如果一般内积由点积来表达，那这个向量空间就变成了更具体的欧式向量空间。

接下来看下内积空间有什么性质？我们定义一个内积空间V和它的元素x、y、z，以及一个$c \in R$：

- 满足对称性：x和y的内积等于y和x的内积，$\langle x, y\rangle=\langle y, x\rangle$；
- 满足线性性：x和$y+cz$的内积等于，x和y的内积，与x和z的内积乘以c后的和，$\langle x, y+c z\rangle=\langle x, y\rangle+c\langle x, z\rangle$；
- 满足正定性：x和y的内积大于等于零，$\langle x, y\rangle \geq 0$。

对称正定矩阵

内积还定义了一类矩阵，这类矩阵在机器学习中很重要，因为它可以被用来判定多元函数极值，而在深度学习中，它更是被用来获取最小化损失函数，我们把这类矩阵叫做对称正定矩阵。

对称正定矩阵的定义是：如果一个对称矩阵A属于方阵$R^{n×n}$，对任意非零向量x，都有$x^{T} A x>0$，那么A就是对称正定矩阵。

我们来看两个例子，判断它们是不是对称正定矩阵。

第一个例子，请你回答下面这个矩阵是对称正定矩阵吗？

$$
A=\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 5
\end{array}\right]
$$

答案：是的，它是对称正定矩阵。因为$x^{T} A x>0$。

$$
x^{T} A x=\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 5
\end{array}\right]\left[\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right]=(3 x_{1}+2 x_{2})^{2}+x_{2}^{2}>0
$$

第二个例子，请你看下面这个矩阵是对称正定矩阵吗？

$$
A=\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 3
\end{array}\right]
$$

答案：不是的，它只是对称矩阵。因为$x^{T} A x$可能小于0。

$$
x^{T} A x=\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 3
\end{array}\right]\left[\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right]=(3 x_{1}+2 x_{2})^{2}-x_{2}^{2}
$$

长度、距离和角度

前面我们通过范数讲了向量的长度，但从内积的角度来看，我们发现，内积和范数之间有着千丝万缕的关系。我们来看看下面这个等式。

$$
\|x\|=\sqrt{\langle x, x\rangle}
$$

从这个等式我们发现，内积可以用来产生范数，确实是这样。不过，不是每一个范数都能被一个内积产生的，比如：曼哈顿范数。接下来，我们还是来关注能由内积产生的范数上，从不同的角度来看看几何上的长度、距离和角度的概念。

我们先用内积来计算一个**向量的长度**，比如：向量$x=[\begin{array}{ll}1 & 1\end{array}]^{T}$，我们可以使用点积来计算，计算后得出$x$的范数是$\sqrt{2}$，具体计算过程是这样的：$\|x\|=\sqrt{x^{T} x}=\sqrt{1^{2}+1^{2}}=\sqrt{2}$。

接着，我们再来看一下**向量之间的距离**，一个内积空间V，$(V,\langle\ ·,· \rangle)$，x和y是它的两个向量，那么x和y之间的距离就可以表示成：$d(x, y)=\|x-y\|=\sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$。

如果用点积来计算x和y之间的距离，那这个距离就叫做欧式距离。

再接着，来看看两个**向量之间的角度**。我们使用柯西-施瓦茨不等式（Cauchy-Schwarz Inequality）来表示内积空间中两个向量x和y之间的角度：a。

$$
-1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \leq 1
$$

取值是从-1到1之间，那么角度就是从0到$π$之间，我们用cos来表示就是：

$$
\cos (a)=\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}
$$

其中a就是角度，a的角度取值是0到$π$之间。我们很容易就能发现，其实两个向量之间的角度，就是告诉了我们两个向量之间方向的相似性。例如：x和$y=4x$，使用点积来计算它们之间的角度是0，也就是说它们的方向是一样的，y只是对x扩大了4倍而已。

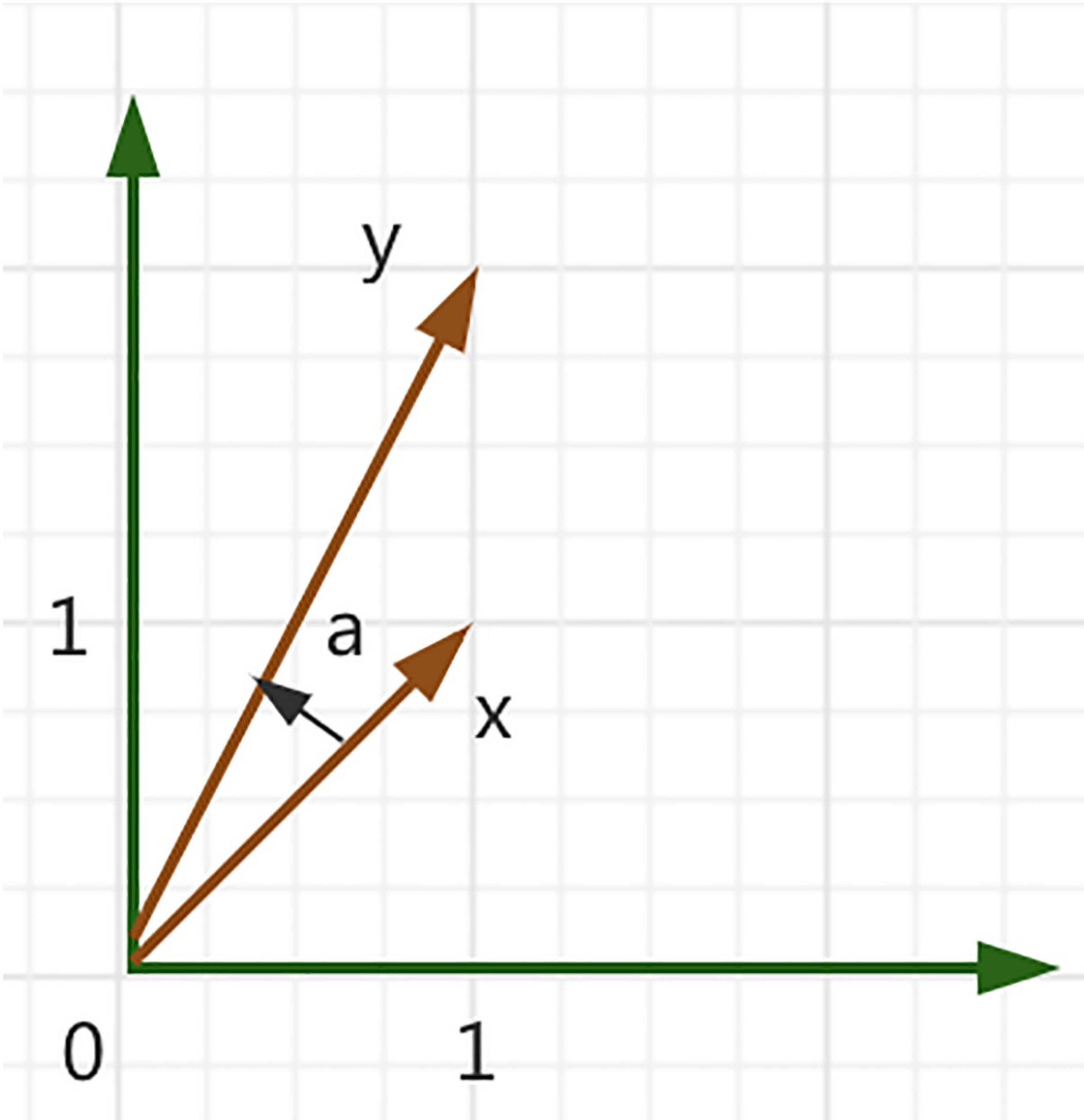
现在，我们通过一个例子，再来更清楚地看下两个向量之间角度的计算，设$x=[\begin{array}{ll}1 & 1\end{array}]^{T}$，$y=[\begin{array}{ll}1 & 2\end{array}]^{T}$，使用点积来计算，我们得出：

$$
\cos (a)=\frac{\langle x, y\rangle}{\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}}=\frac{x^{T} y}{\sqrt{x^{T} x y^{T} y}}=\frac{3}{\sqrt{10}}
$$

那么，这两个向量之间的角度如下。

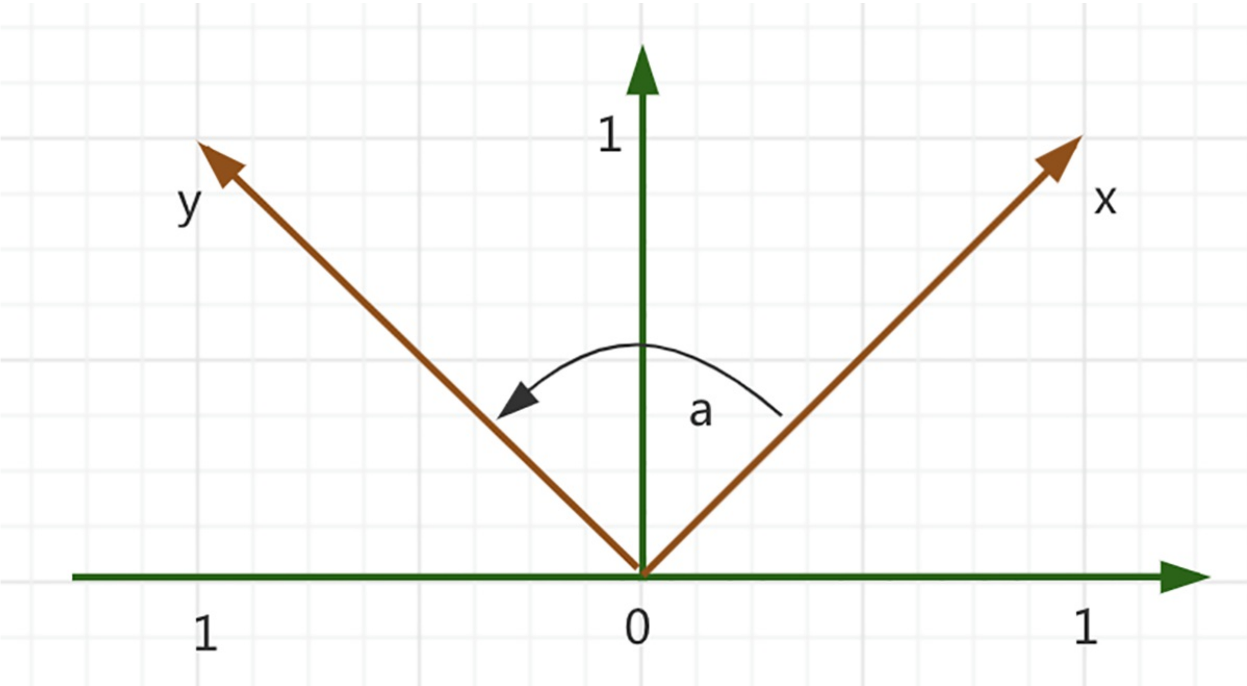
$$
\arccos \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \approx 0.32
$$

我们可以用图来更直观地表达一下。



于是，我们最后可以引出一个概念，也就是我们在一开始提到的**正交性**。如果两个向量x和y内积等于0，$\langle x, y\rangle=0$，那么x和y是正交的，这可以写成：$x \perp y$。再如果，x和y的范数都等于1，$\|x\|=\|y\|=1$，也就是说，如果它们都是单位向量，那么x和y就是标准正交的。

我们用图来更直观地表达一下。



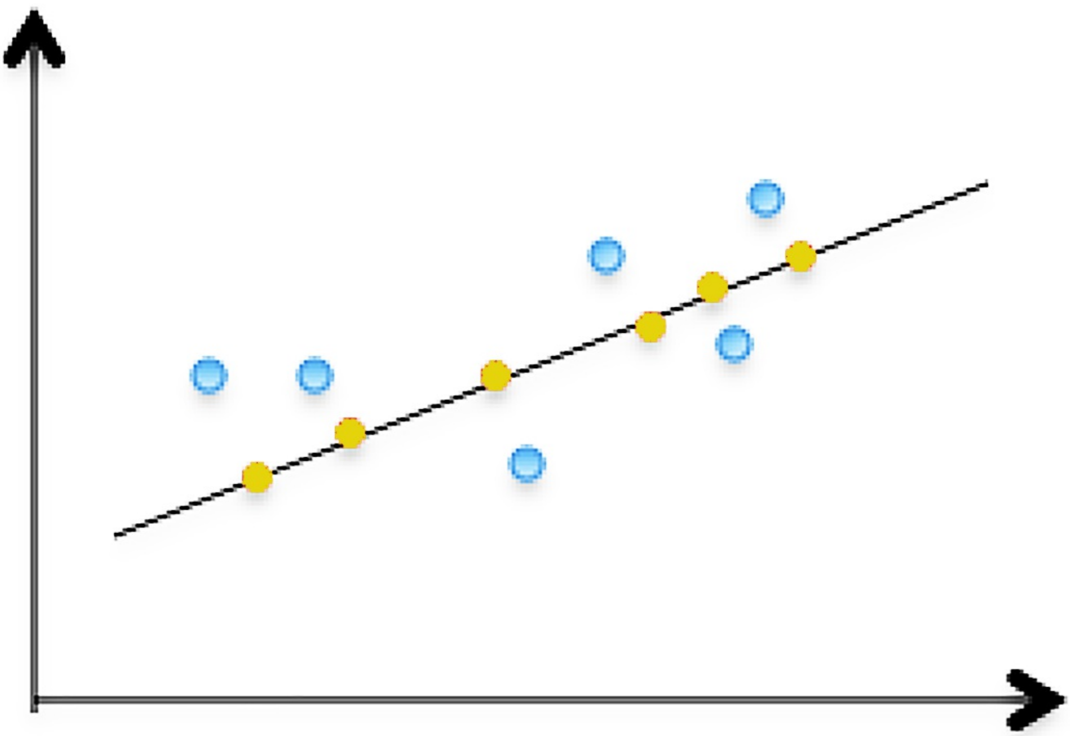
正交投影

在理论讲解之后，我们要来了解一下解析几何在实践中经常运用的概念——正交投影，它是一种重要的线性变换，在图形图像、编码理论、统计和机器学习中扮演了重要角色。

在机器学习中，数据一般都是高维的。众所周知，高维数据是很难来分析和可视化的。而且，不是所有的高维数据都是有用的，可能只有一些数据包含了大部分的重要信息。

正交投影就是高维到低维的数据投影，在第5节课线性空间中，我简单介绍了高维数据投影到低维后，我们就能在低维空间更多地了解数据集、提炼相关模式。而在机器学习中，最普遍的降维算法——PCA主成分分析，就是利用了降维的观点。

接下来，我开始讲解正交投影，在给出定义之前，先从一张图来了解会更直观。



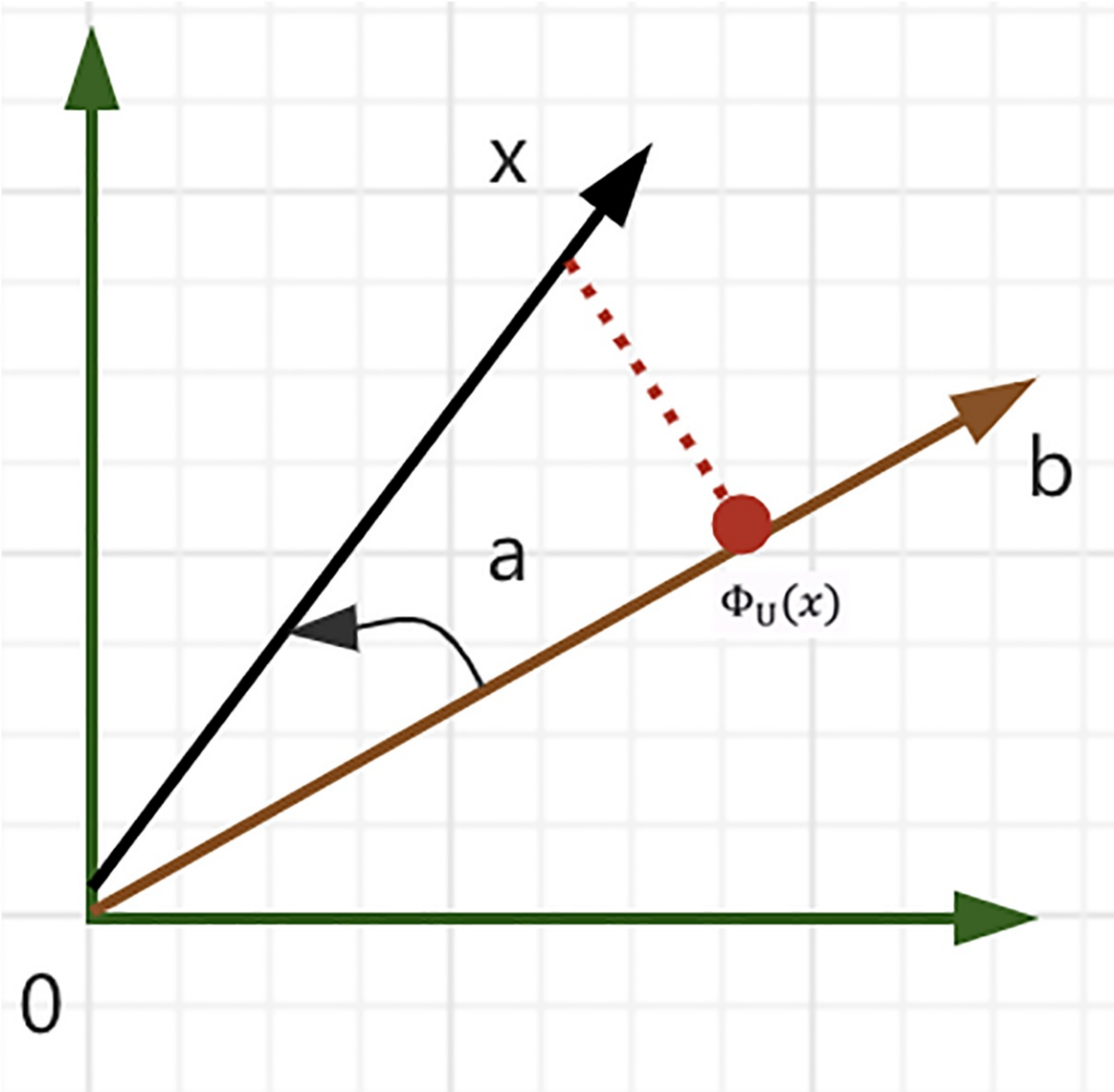
图中的蓝点是原二维数据，黄点是它们的正交投影。所以，实际降维后，在一维空间中就形成了这条黑线表示，它近似地表达了原来二维数据表示的信息。

现在我们可以来看一下投影的定义：V是一个向量空间，U是V的一个向量子空间，一个从V到U的线性映射Φ是一个投影，如果它满足：$\Phi^{2}=\Phi \circ \Phi=\Phi$。因为线性映射能够被变换矩阵表示，所以，这个定义同样适用于一个特殊类型变换矩阵：投影矩阵P_{Φ}，它也满足：$P_{\Phi}^{2}=P_{\Phi}$。

投影到一维子空间上（线）

接下来，我们来看看如何投影到一维子空间，也就是把内积空间的向量正交投影到子空间，这里我们使用点积作为内积。

假设有一条通过原点的线，这条线是由基向量b产生的一维子空间U，当我们把一个向量x投影到U时，需要寻找另一个最靠近x的向量$\Phi_{U}(x)$。还是老样子，我们通过图来看一下。



首先，投影$\Phi_{U}(x)$靠近x，也就是要找出x和$\Phi_{U}(x)$之间的$\left\|x-\Phi_{U}(x)\right\|$最小距离，从几何角度来说，就是线段$\Phi_{U}(x)-x$和$b$正交，满足等式：$\left\langle\Phi_{U}(x)-x, b\right\rangle=0$。其次，投影$\Phi_{U}(x)$必须是$U$的一个元素，也就是，基向量$b$的一个乘来产生$U$，$\Phi_{U}(x)=λb$。

于是，我们可以通过三个步骤来分别得到$λ$、投影$\Phi_{U}(x)$和投影矩阵P_{Φ}，来把任意x映射到子空间U上。

第一步，计算$λ$，通过正交条件产生这样的等式：
$\left\langle x-\Phi_{U}(x), b\right\rangle=0$。因为$\Phi_{U}(x)=λb$，所以它可以转变成：$\langle x-\lambda b, b\rangle=0$。

利用内积的双线性：$\langle x, b\rangle-\lambda\langle b, b\rangle=0$，我们得到：

$$
\lambda=\frac{\langle x, b\rangle}{\langle b, b\rangle}=\frac{\langle b, x\rangle}{\|b\|^{2}}
$$

然后，我们通过点积得到：

$$
\lambda=\frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}}
$$

如果$\|b\|=1$，那$λ$就等于$b^{T}x$。

接着第二步，是计算投影点$\Phi_{U}(x)$。从$\Phi_{U}(x)=λb$，我们得到：

$$
\Phi_{U}(x)=\lambda b=\frac{\langle x, b\rangle}{\|b\|^{2}} b=\frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}} b
$$

通过点积来计算，我们就得到了$\Phi_{U}(x)$的长度：

$$
\left\|\Phi_{U}(x)\right\|=\frac{\left|b^{T} x\right|}{\|b\|^{2}}\|b\|=|\cos (a)|\|x\|\|b\| \frac{\|b\|}{\|b\|^{2}}=\mid \cos (a)\|x\|
$$

这里的a，是x和b之间的夹角。

最后第三步，是计算投影矩阵P_{Φ}，投影矩阵是一个线性映射。所以，我们可以得到：$\Phi_{U}(x)=P_{\Phi}x$，通过$\Phi_{U}(x)=λb$，我们可以得到：

$$

\Phi_{U}(x)=\lambda b=b \lambda=b \frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}}=\frac{b b^{T}}{\|b\|^{2}} x
$$

这里，我们立即可以得到投影矩阵P_{Φ}的计算等式：

$$
P_{\Phi}=\frac{b b^{T}}{\|b\|^{2}}
$$

本节小结

这一节课覆盖的知识点有点多，因为要把解析几何的知识点，浓缩到核心的几个点来讲解是一项艰巨的任务。不过不要怕，前面的几个知识点都是为这一节的重点“正交投影”来铺垫的。范数，被用来度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小，而内积让我们很直观地了解一个向量的长度、两个向量之间的距离和角度，以及判断向量之间是否是正交的。

所以，希望你能掌握范数和内积的理论知识，并把它和正交投影结合，运用在一些实践应用场景中，比如：3D图形图像的坐标变换、数据压缩，以及机器学习的降维。

线性代数练习场

请用之前学到的正交投影的投影矩阵算法，来计算一条线上的投影矩阵P_{Φ}。

这条线通过原点，由基$b=\left[\begin{array}{lll}1 & 2 & 2\end{array}\right]^{T}$产生，$P_{\Phi}$计算后，再通过一个$x$来验证一下它是否在$b$产生的子空间中，我们取$x=\left[\begin{array}{lll}1 & 1 & 1\end{array}\right]^{T}$。

欢迎在留言区晒出你的运算结果，我会及时回复。同时，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友，一起讨论、学习。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数，今天我们要讲的内容是“解析几何”。

前面所有章节我们都是围绕向量、矩阵，以及向量空间来展开的。但这一节课有点不一样，我要讲的是解析几何，它使得向量从抽象走向了具象，让向量具有了几何的含义。比如，计算向量的长度、向量之间的距离和角度，这在机器学习的主成分分析PCA中是非常有用的。

范数

讲解析几何我们得从“范数”开始讲起。

因为很多人看到几何向量的第一反应就是，它是从原点开始的有向线段，并且向量的长度是这个有向线段的终端和起始端之间的距离。而范数，就是被用来度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小的。

现在，我们先来看一下范数的数学定义：一个向量空间V上的一个范数就是一个函数，它计算V中的每一个向量x的长度，用符号来表示的话就是：$\|x\| \in R$，它满足三种性质：

1. 正齐次性： 如果输入参数扩大正$λ$倍，其对应的函数也扩正大倍。设$λ \in R$，$x \in V$，$\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$；
2. 次可加性：类似三角不等式，两边之和大于第三边。设$x,y \in V$，$\|x+y\| \leq\|x\|+\|y\|$；
3. 正定性：向量x的长度一定大于等于零。$\|x\| \geq 0$。

看到这里，你也许会问，范数似乎和以前老师教的**向量的模**一样啊。先别急，它们还真有那么一点关系，你听我慢慢道来。由于范数是度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小的，所以它和向量空间维度是有关系的，于是，我们可以把范数写成这样的模式来区分不同维度的大小计算：$L_{1}, L_{2}, \ldots, L_{\infty}$。

- L_{1}范数：曼哈顿范数，也叫曼哈顿距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{1}=\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}\right|
$$

- L_{2}范数：欧式范数，也叫欧式距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2}}
$$

- L_{∞}范数：切比雪夫范数，也叫切比雪夫距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{\infty}=\max \left(\left|x_{1}\right|,\left|x_{2}\right|, \ldots,\left|x_{n}\right|\right)
$$

我们发现，向量的模和L_{2}范数的计算方式都是一样的，都表示的是欧氏距离，所以，我们可以简单地认为向量的模等于L_{2}范数。而其他的范数模式和向量的模则没有任何关系。

内积

学习解析几何时，我们必须掌握的第二个概念就是内积。

如果说范数是模式，是用来描述向量长度或大小的概念性表达，那么内积可以让我们很直观地了解一个向量的长度、两个向量之间的距离和角度，它的一个主要目的就是判断向量之间是否是正交的，正交这个概念我们会在后面讲解。

点积

我们从特殊到一般，先来看点积，它和第三篇矩阵中说的“普通矩阵乘”形式一样，点积是特殊的内积，为什么说它特殊呢？那是因为在表示两个向量之间的距离时，它就是大家熟悉的欧式距离，点积可以表示成这样的形式：

$$
x^{T} y=\sum_{i=1}^{n} x_{i} y_{i}
$$

其他内积

除了点积外，我们再来看另一个不同的内积：设内积空间V是R^{2}，定义内积$\langle x, y\rangle=x_{1} y_{1}-(x_{1} y_{2}+x_{2} y_{1})+2 x_{2} y_{2}$，一看便知这个和点积完全不同。

内积空间

最后，我们再来看一般内积和内积空间。因为解析几何关注的是向量的长度、两个向量之间的距离和角度，所以，我们要在原来向量空间上加一个额外的结构，这个额外结构就是内积，而加了内积的向量空间，我们就叫做内积空间。

为了表达方便，我们可以把内积写成$\langle\ \cdot,\cdot\ \rangle$这样的形式，那么内积空间$V$可以被表示成这样：$(V,\langle\ \cdot,\cdot\ \rangle)$。这时，如果一般内积由点积来表达，那这个向量空间就变成了更具体的欧式向量空间。

接下来看下内积空间有什么性质？我们定义一个内积空间V和它的元素x、y、z，以及一个$c \in R$：

- 满足对称性：x和y的内积等于y和x的内积，$\langle x, y\rangle=\langle y, x\rangle$；
- 满足线性性：x和$y+cz$的内积等于，x和y的内积，与x和z的内积乘以c后的和，$\langle x, y+c z\rangle=\langle x, y\rangle+c\langle x, z\rangle$；
- 满足正定性：x和y的内积大于等于零，$\langle x, y\rangle \geq 0$。

对称正定矩阵

内积还定义了一类矩阵，这类矩阵在机器学习中很重要，因为它可以被用来判定多元函数极值，而在深度学习中，它更是被用来获取最小化损失函数，我们把这类矩阵叫做对称正定矩阵。

对称正定矩阵的定义是：如果一个对称矩阵A属于方阵$R^{n×n}$，对任意非零向量x，都有$x^{T} A x>0$，那么A就是对称正定矩阵。

我们来看两个例子，判断它们是不是对称正定矩阵。

第一个例子，请你回答下面这个矩阵是对称正定矩阵吗？

$$
A=\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 5
\end{array}\right]
$$

答案：是的，它是对称正定矩阵。因为$x^{T} A x>0$。

$$
x^{T} A x=\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 5
\end{array}\right]\left[\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right]=(3 x_{1}+2 x_{2})^{2}+x_{2}^{2}>0
$$

第二个例子，请你看下面这个矩阵是对称正定矩阵吗？

$$
A=\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 3
\end{array}\right]
$$

答案：不是的，它只是对称矩阵。因为$x^{T} A x$可能小于0。

$$
x^{T} A x=\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 3
\end{array}\right]\left[\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right]=(3 x_{1}+2 x_{2})^{2}-x_{2}^{2}
$$

长度、距离和角度

前面我们通过范数讲了向量的长度，但从内积的角度来看，我们发现，内积和范数之间有着千丝万缕的关系。我们来看看下面这个等式。

$$
\|x\|=\sqrt{\langle x, x\rangle}
$$

从这个等式我们发现，内积可以用来产生范数，确实是这样。不过，不是每一个范数都能被一个内积产生的，比如：曼哈顿范数。接下来，我们还是来关注能由内积产生的范数上，从不同的角度来看看几何上的长度、距离和角度的概念。

我们先用内积来计算一个**向量的长度**，比如：向量$x=[\begin{array}{ll}1 & 1\end{array}]^{T}$，我们可以使用点积来计算，计算后得出$x$的范数是$\sqrt{2}$，具体计算过程是这样的：$\|x\|=\sqrt{x^{T} x}=\sqrt{1^{2}+1^{2}}=\sqrt{2}$。

接着，我们再来看一下**向量之间的距离**，一个内积空间V，$(V,\langle\ \cdot,\cdot \rangle)$，$x$和$y$是它的两个向量，那么$x$和$y$之间的距离就可以表示成：$d(x, y)=\|x-y\|=\sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$。

如果用点积来计算x和y之间的距离，那这个距离就叫做欧式距离。

再接着，来看看两个**向量之间的角度**。我们使用柯西-施瓦茨不等式（Cauchy-Schwarz Inequality）来表示内积空间中两个向量x和y之间的角度：a。

$$
-1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \leq 1
$$

取值是从-1到1之间，那么角度就是从0到$π$之间，我们用cos来表示就是：

$$
\cos (a)=\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}
$$

其中a就是角度，a的角度取值是0到$π$之间。我们很容易就能发现，其实两个向量之间的角度，就是告诉了我们两个向量之间方向的相似性。例如：x和$y=4x$，使用点积来计算它们之间的角度是0，也就是说它们的方向是一样的，y只是对x扩大了4倍而已。

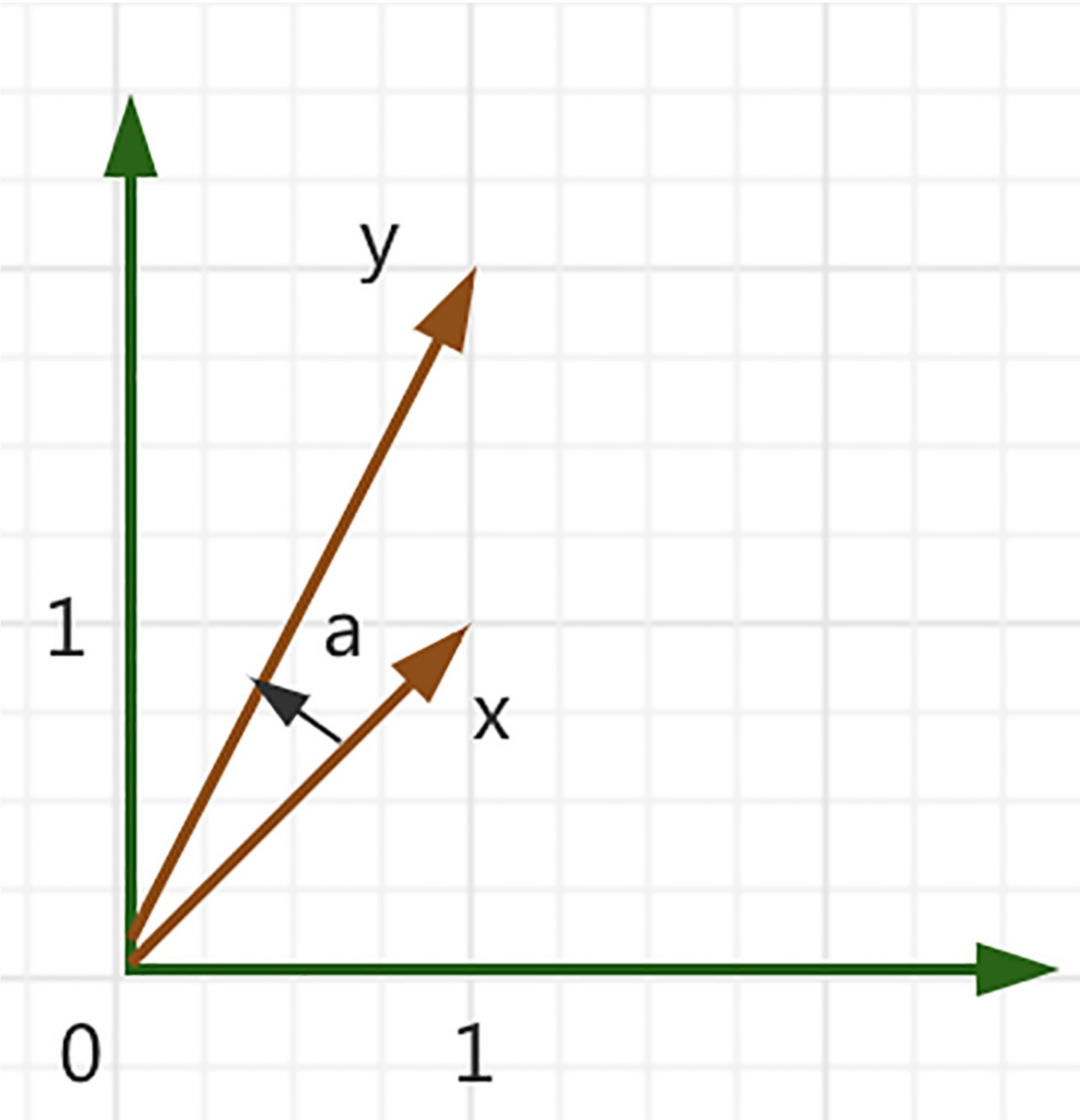
现在，我们通过一个例子，再来更清楚地看下两个向量之间角度的计算，设$x=[\begin{array}{ll}1 & 1\end{array}]^{T}$，$y=[\begin{array}{ll}1 & 2\end{array}]^{T}$，使用点积来计算，我们得出：

$$
\cos (a)=\frac{\langle x, y\rangle}{\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}}=\frac{x^{T} y}{\sqrt{x^{T} x y^{T} y}}=\frac{3}{\sqrt{10}}
$$

那么，这两个向量之间的角度如下。

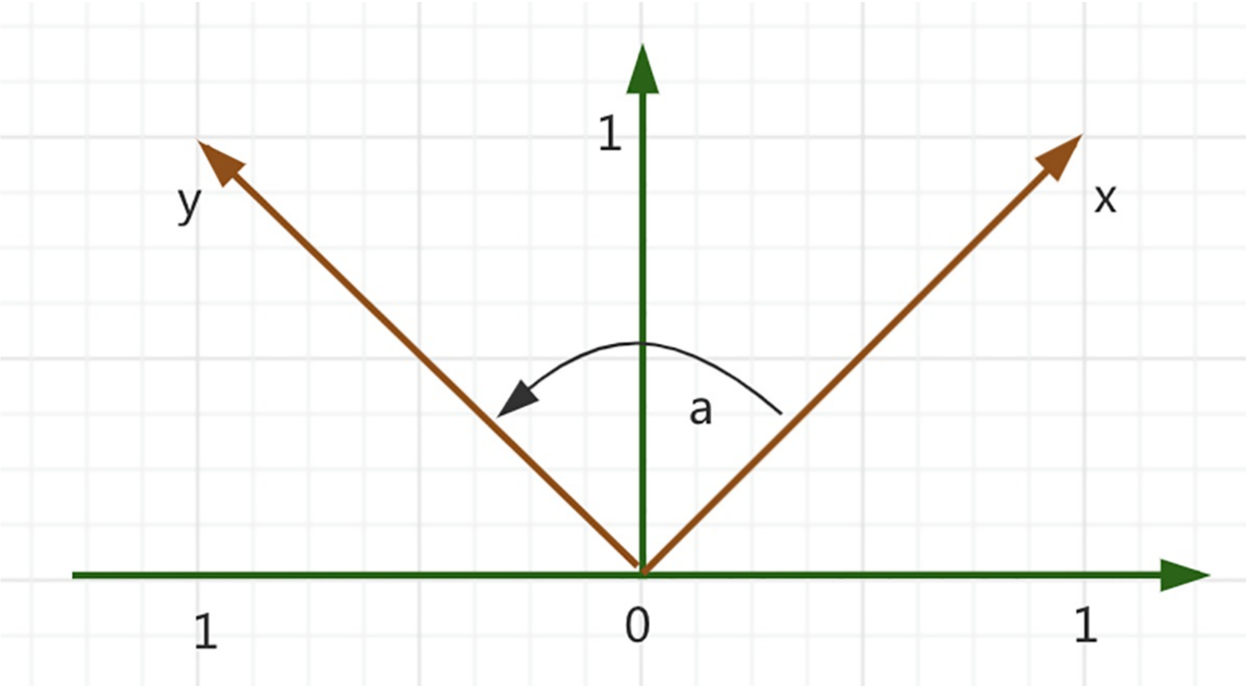
$$
\arccos \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \approx 0.32
$$

我们可以用图来更直观地表达一下。



于是，我们最后可以引出一个概念，也就是我们在一开始提到的**正交性**。如果两个向量x和y内积等于0，$\langle x, y\rangle=0$，那么x和y是正交的，这可以写成：$x \perp y$。再如果，x和y的范数都等于1，$\|x\|=\|y\|=1$，也就是说，如果它们都是单位向量，那么x和y就是标准正交的。

我们用图来更直观地表达一下。



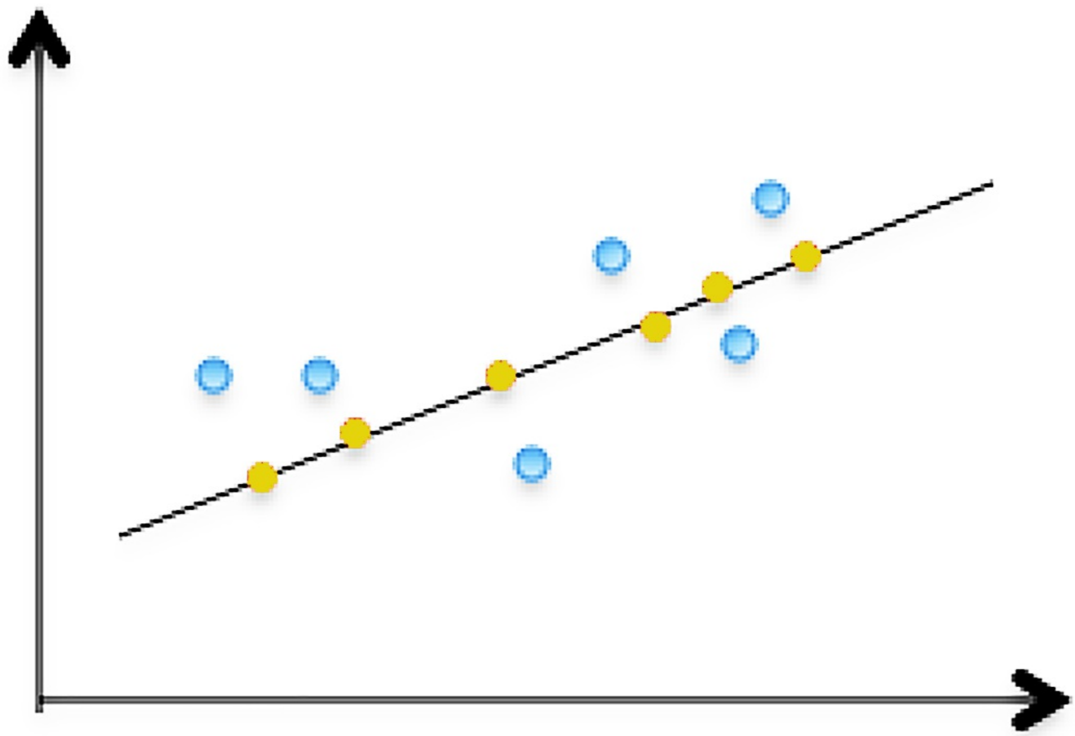
正交投影

在理论讲解之后，我们要来了解一下解析几何在实践中经常运用的概念——正交投影，它是一种重要的线性变换，在图形图像、编码理论、统计和机器学习中扮演了重要角色。

在机器学习中，数据一般都是高维的。众所周知，高维数据是很难来分析和可视化的。而且，不是所有的高维数据都是有用的，可能只有一些数据包含了大部分的重要信息。

正交投影就是高维到低维的数据投影，在第5节课线性空间中，我简单介绍了高维数据投影到低维后，我们就能在低维空间更多地了解数据集、提炼相关模式。而在机器学习中，最普遍的降维算法——PCA主成分分析，就是利用了降维的观点。

接下来，我开始讲解正交投影，在给出定义之前，先从一张图来了解会更直观。



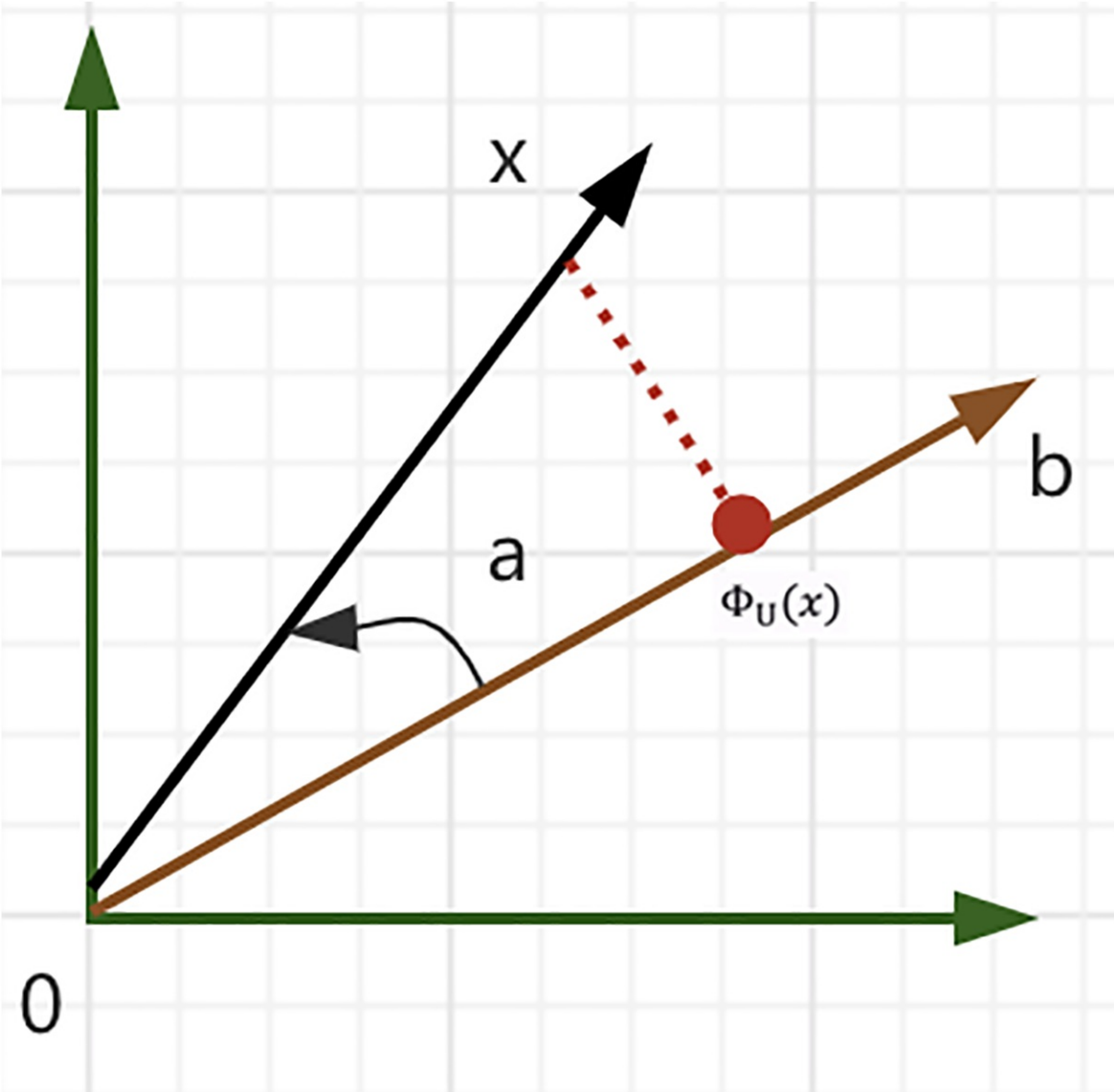
图中的蓝点是原二维数据，黄点是它们的正交投影。所以，实际降维后，在一维空间中就形成了这条黑线表示，它近似地表达了原来二维数据表示的信息。

现在我们可以来看一下投影的定义：V是一个向量空间，U是V的一个向量子空间，一个从V到U的线性映射Φ是一个投影，如果它满足：$\Phi^{2}=\Phi \circ \Phi=\Phi$。因为线性映射能够被变换矩阵表示，所以，这个定义同样适用于一个特殊类型变换矩阵：投影矩阵P_{Φ}，它也满足：$P_{\Phi}^{2}=P_{\Phi}$。

投影到一维子空间上（线）

接下来，我们来看看如何投影到一维子空间，也就是把内积空间的向量正交投影到子空间，这里我们使用点积作为内积。

假设有一条通过原点的线，这条线是由基向量b产生的一维子空间U，当我们把一个向量x投影到U时，需要寻找另一个最靠近x的向量$\Phi_{U}(x)$。还是老样子，我们通过图来看一下。



首先，投影$\Phi_{U}(x)$靠近x，也就是要找出x和$\Phi_{U}(x)$之间的$\left\|x-\Phi_{U}(x)\right\|$最小距离，从几何角度来说，就是线段$\Phi_{U}(x)-x$和$b$正交，满足等式：$\left\langle\Phi_{U}(x)-x, b\right\rangle=0$。其次，投影$\Phi_{U}(x)$必须是$U$的一个元素，也就是，基向量$b$的一个乘来产生$U$，$\Phi_{U}(x)=λb$。

于是，我们可以通过三个步骤来分别得到$λ$、投影$\Phi_{U}(x)$和投影矩阵P_{Φ}，来把任意x映射到子空间U上。

第一步，计算$λ$，通过正交条件产生这样的等式：
$\left\langle x-\Phi_{U}(x), b\right\rangle=0$。因为$\Phi_{U}(x)=λb$，所以它可以转变成：$\langle x-\lambda b, b\rangle=0$。

利用内积的双线性：$\langle x, b\rangle-\lambda\langle b, b\rangle=0$，我们得到：

$$
\lambda=\frac{\langle x, b\rangle}{\langle b, b\rangle}=\frac{\langle b, x\rangle}{\|b\|^{2}}
$$

然后，我们通过点积得到：

$$
\lambda=\frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}}
$$

如果$\|b\|=1$，那$λ$就等于$b^{T}x$。

接着第二步，是计算投影点$\Phi_{U}(x)$。从$\Phi_{U}(x)=λb$，我们得到：

$$
\Phi_{U}(x)=\lambda b=\frac{\langle x, b\rangle}{\|b\|^{2}} b=\frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}} b
$$

通过点积来计算，我们就得到了$\Phi_{U}(x)$的长度：

$$
\left\|\Phi_{U}(x)\right\|=\frac{\left|b^{T} x\right|}{\|b\|^{2}}\|b\|=|\cos (a)|\|x\|\|b\| \frac{\|b\|}{\|b\|^{2}}=\mid \cos (a)\|x\|
$$

这里的a，是x和b之间的夹角。

最后第三步，是计算投影矩阵P_{Φ}，投影矩阵是一个线性映射。所以，我们可以得到：$\Phi_{U}(x)=P_{\Phi}x$，通过$\Phi_{U}(x)=λb$，我们可以得到：

$$

\Phi_{U}(x)=\lambda b=b \lambda=b \frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}}=\frac{b b^{T}}{\|b\|^{2}} x
$$

这里，我们立即可以得到投影矩阵P_{Φ}的计算等式：

$$
P_{\Phi}=\frac{b b^{T}}{\|b\|^{2}}
$$

本节小结

这一节课覆盖的知识点有点多，因为要把解析几何的知识点，浓缩到核心的几个点来讲解是一项艰巨的任务。不过不要怕，前面的几个知识点都是为这一节的重点“正交投影”来铺垫的。范数，被用来度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小，而内积让我们很直观地了解一个向量的长度、两个向量之间的距离和角度，以及判断向量之间是否是正交的。

所以，希望你能掌握范数和内积的理论知识，并把它和正交投影结合，运用在一些实践应用场景中，比如：3D图形图像的坐标变换、数据压缩，以及机器学习的降维。

线性代数练习场

请用之前学到的正交投影的投影矩阵算法，来计算一条线上的投影矩阵P_{Φ}。

这条线通过原点，由基$b=\left[\begin{array}{lll}1 & 2 & 2\end{array}\right]^{T}$产生，$P_{\Phi}$计算后，再通过一个$x$来验证一下它是否在$b$产生的子空间中，我们取$x=\left[\begin{array}{lll}1 & 1 & 1\end{array}\right]^{T}$。

欢迎在留言区晒出你的运算结果，我会及时回复。同时，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友，一起讨论、学习。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数，今天我们要讲的内容是“解析几何”。

前面所有章节我们都是围绕向量、矩阵，以及向量空间来展开的。但这一节课有点不一样，我要讲的是解析几何，它使得向量从抽象走向了具象，让向量具有了几何的含义。比如，计算向量的长度、向量之间的距离和角度，这在机器学习的主成分分析PCA中是非常有用的。

范数

讲解析几何我们得从“范数”开始讲起。

因为很多人看到几何向量的第一反应就是，它是从原点开始的有向线段，并且向量的长度是这个有向线段的终端和起始端之间的距离。而范数，就是被用来度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小的。

现在，我们先来看一下范数的数学定义：一个向量空间V上的一个范数就是一个函数，它计算V中的每一个向量x的长度，用符号来表示的话就是：$\|x\| \in R$，它满足三种性质：

1. 正齐次性： 如果输入参数扩大正$λ$倍，其对应的函数也扩正大倍。设$λ \in R$，$x \in V$，$\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$；
2. 次可加性：类似三角不等式，两边之和大于第三边。设$x,y \in V$，$\|x+y\| \leq\|x\|+\|y\|$；
3. 正定性：向量x的长度一定大于等于零。$\|x\| \geq 0$。

看到这里，你也许会问，范数似乎和以前老师教的**向量的模**一样啊。先别急，它们还真有那么一点关系，你听我慢慢道来。由于范数是度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小的，所以它和向量空间维度是有关系的，于是，我们可以把范数写成这样的模式来区分不同维度的大小计算：$L_{1}, L_{2}, \ldots, L_{\infty}$。

- L_{1}范数：曼哈顿范数，也叫曼哈顿距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{1}=\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}\right|
$$

- L_{2}范数：欧式范数，也叫欧式距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2}}
$$

- L_{∞}范数：切比雪夫范数，也叫切比雪夫距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{\infty}=\max \left(\left|x_{1}\right|,\left|x_{2}\right|, \ldots,\left|x_{n}\right|\right)
$$

我们发现，向量的模和L_{2}范数的计算方式都是一样的，都表示的是欧氏距离，所以，我们可以简单地认为向量的模等于L_{2}范数。而其他的范数模式和向量的模则没有任何关系。

内积

学习解析几何时，我们必须掌握的第二个概念就是内积。

如果说范数是模式，是用来描述向量长度或大小的概念性表达，那么内积可以让我们很直观地了解一个向量的长度、两个向量之间的距离和角度，它的一个主要目的就是判断向量之间是否是正交的，正交这个概念我们会在后面讲解。

点积

我们从特殊到一般，先来看点积，它和第三篇矩阵中说的“普通矩阵乘”形式一样，点积是特殊的内积，为什么说它特殊呢？那是因为在表示两个向量之间的距离时，它就是大家熟悉的欧式距离，点积可以表示成这样的形式：

$$
x^{T} y=\sum_{i=1}^{n} x_{i} y_{i}
$$

其他内积

除了点积外，我们再来看另一个不同的内积：设内积空间V是R^{2}，定义内积$\langle x, y\rangle=x_{1} y_{1}-(x_{1} y_{2}+x_{2} y_{1})+2 x_{2} y_{2}$，一看便知这个和点积完全不同。

内积空间

最后，我们再来看一般内积和内积空间。因为解析几何关注的是向量的长度、两个向量之间的距离和角度，所以，我们要在原来向量空间上加一个额外的结构，这个额外结构就是内积，而加了内积的向量空间，我们就叫做内积空间。

为了表达方便，我们可以把内积写成$\langle\ \cdot,\cdot\ \rangle$这样的形式，那么内积空间$V$可以被表示成这样：$(V,\langle\ \cdot,\cdot\ \rangle)$。这时，如果一般内积由点积来表达，那这个向量空间就变成了更具体的欧式向量空间。

接下来看下内积空间有什么性质？我们定义一个内积空间V和它的元素x、y、z，以及一个$c \in R$：

- 满足对称性：x和y的内积等于y和x的内积，$\langle x, y\rangle=\langle y, x\rangle$；
- 满足线性性：x和$y+cz$的内积等于，x和y的内积，与x和z的内积乘以c后的和，$\langle x, y+c z\rangle=\langle x, y\rangle+c\langle x, z\rangle$；
- 满足正定性：x和y的内积大于等于零，$\langle x, y\rangle \geq 0$。

对称正定矩阵

内积还定义了一类矩阵，这类矩阵在机器学习中很重要，因为它可以被用来判定多元函数极值，而在深度学习中，它更是被用来获取最小化损失函数，我们把这类矩阵叫做对称正定矩阵。

对称正定矩阵的定义是：如果一个对称矩阵A属于方阵$R^{n \times n}$，对任意非零向量x，都有$x^{T} A x>0$，那么A就是对称正定矩阵。

我们来看两个例子，判断它们是不是对称正定矩阵。

第一个例子，请你回答下面这个矩阵是对称正定矩阵吗？

$$
A=\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 5
\end{array}\right]
$$

答案：是的，它是对称正定矩阵。因为$x^{T} A x>0$。

$$
x^{T} A x=\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 5
\end{array}\right]\left[\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right]=(3 x_{1}+2 x_{2})^{2}+x_{2}^{2}>0
$$

第二个例子，请你看下面这个矩阵是对称正定矩阵吗？

$$
A=\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 3
\end{array}\right]
$$

答案：不是的，它只是对称矩阵。因为$x^{T} A x$可能小于0。

$$
x^{T} A x=\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 3
\end{array}\right]\left[\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right]=(3 x_{1}+2 x_{2})^{2}-x_{2}^{2}
$$

长度、距离和角度

前面我们通过范数讲了向量的长度，但从内积的角度来看，我们发现，内积和范数之间有着千丝万缕的关系。我们来看看下面这个等式。

$$
\|x\|=\sqrt{\langle x, x\rangle}
$$

从这个等式我们发现，内积可以用来产生范数，确实是这样。不过，不是每一个范数都能被一个内积产生的，比如：曼哈顿范数。接下来，我们还是来关注能由内积产生的范数上，从不同的角度来看看几何上的长度、距离和角度的概念。

我们先用内积来计算一个**向量的长度**，比如：向量$x=[\begin{array}{ll}1 & 1\end{array}]^{T}$，我们可以使用点积来计算，计算后得出$x$的范数是$\sqrt{2}$，具体计算过程是这样的：$\|x\|=\sqrt{x^{T} x}=\sqrt{1^{2}+1^{2}}=\sqrt{2}$。

接着，我们再来看一下**向量之间的距离**，一个内积空间V，$(V,\langle\cdot, \cdot\rangle)$，$x$和$y$是它的两个向量，那么$x$和$y$之间的距离就可以表示成：$d(x, y)=\|x-y\|=\sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$。

如果用点积来计算x和y之间的距离，那这个距离就叫做欧式距离。

再接着，来看看两个**向量之间的角度**。我们使用柯西-施瓦茨不等式（Cauchy-Schwarz Inequality）来表示内积空间中两个向量x和y之间的角度：a。

$$
-1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \leq 1
$$

取值是从-1到1之间，那么角度就是从0到π之间，我们用cos来表示就是：

$$
\cos (a)=\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}
$$

其中a就是角度，a的角度取值是0到π之间。我们很容易就能发现，其实两个向量之间的角度，就是告诉了我们两个向量之间方向的相似性。例如：x和$y=4x$，使用点积来计算它们之间的角度是0，也就是说它们的方向是一样的，y只是对x扩大了4倍而已。

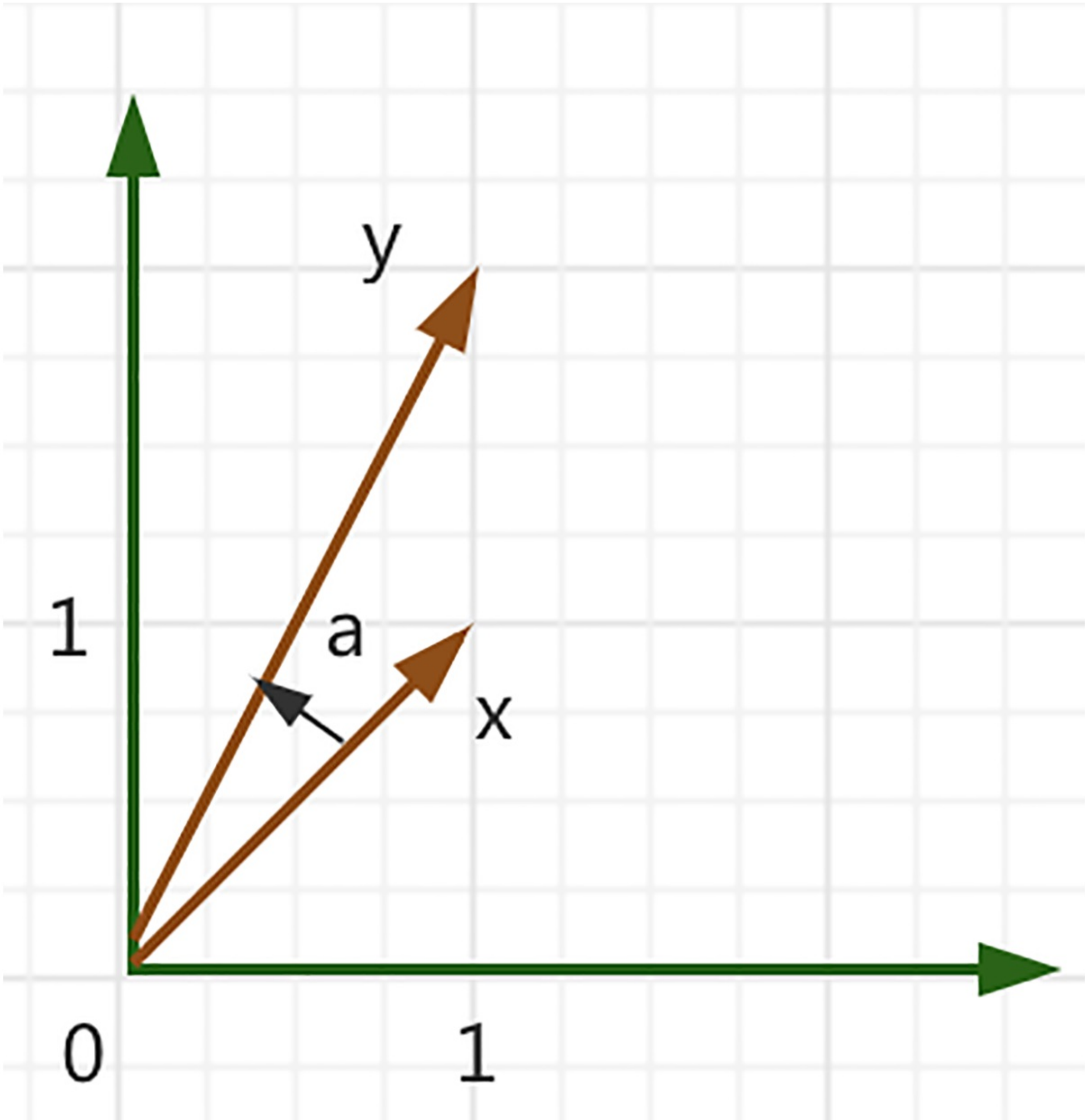
现在，我们通过一个例子，再来更清楚地看下两个向量之间角度的计算，设$x=[\begin{array}{ll}1 & 1\end{array}]^{T}$，$y=[\begin{array}{ll}1 & 2\end{array}]^{T}$，使用点积来计算，我们得出：

$$
\cos (a)=\frac{\langle x, y\rangle}{\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}}=\frac{x^{T} y}{\sqrt{x^{T} x y^{T} y}}=\frac{3}{\sqrt{10}}
$$

那么，这两个向量之间的角度如下。

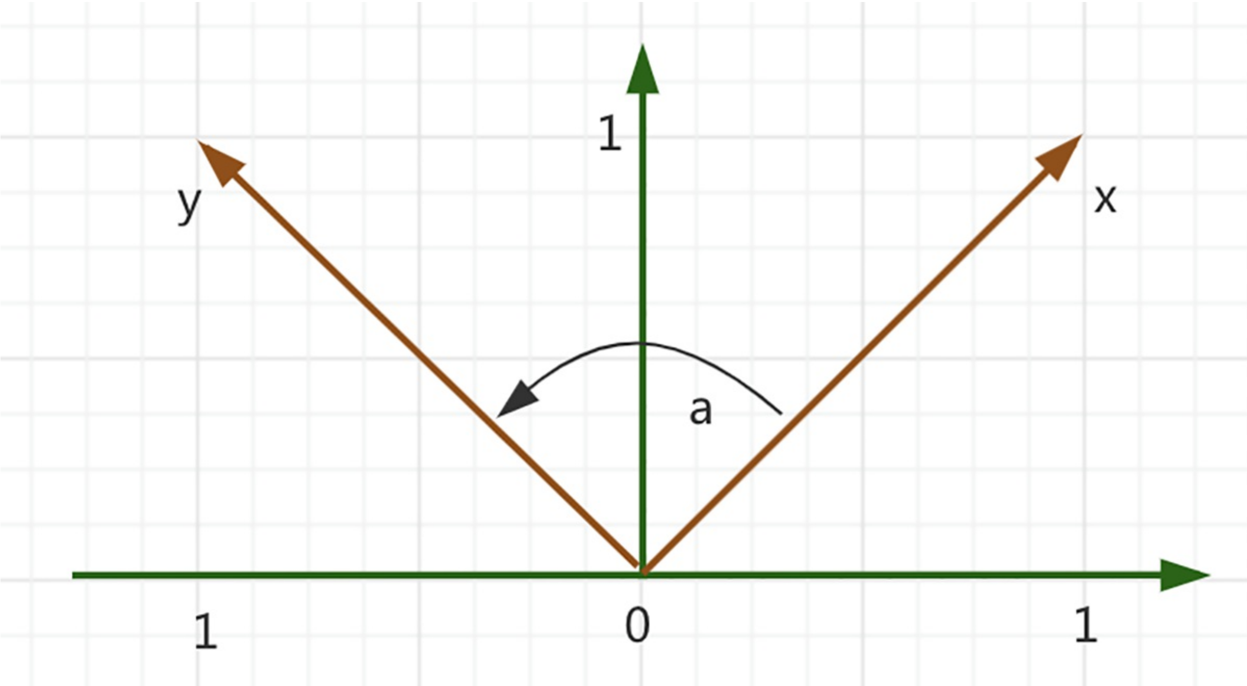
$$
\arccos \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \approx 0.32
$$

我们可以用图来更直观地表达一下。



于是，我们最后可以引出一个概念，也就是我们在一开始提到的**正交性**。如果两个向量x和y内积等于0，$\langle x, y\rangle=0$，那么x和y是正交的，这可以写成：$x \perp y$。再如果，x和y的范数都等于1，$\|x\|=\|y\|=1$，也就是说，如果它们都是单位向量，那么x和y就是标准正交的。

我们用图来更直观地表达一下。



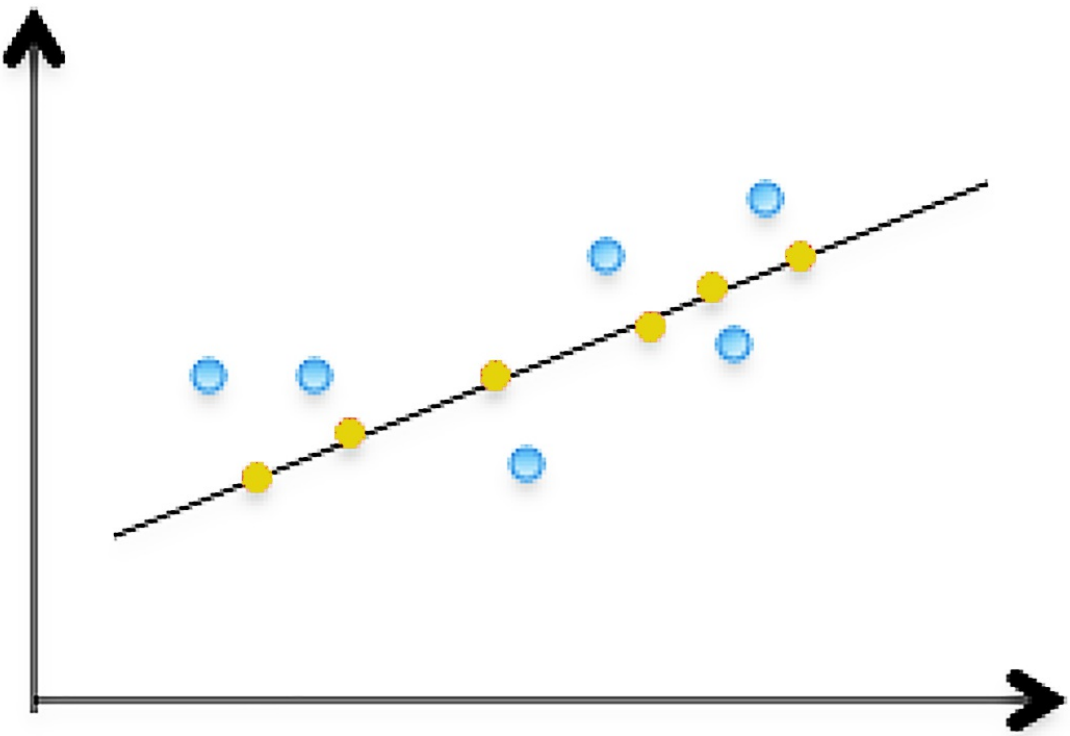
正交投影

在理论讲解之后，我们要来了解一下解析几何在实践中经常运用的概念——正交投影，它是一种重要的线性变换，在图形图像、编码理论、统计和机器学习中扮演了重要角色。

在机器学习中，数据一般都是高维的。众所周知，高维数据是很难来分析和可视化的。而且，不是所有的高维数据都是有用的，可能只有一些数据包含了大部分的重要信息。

正交投影就是高维到低维的数据投影，在第5节课线性空间中，我简单介绍了高维数据投影到低维后，我们就能在低维空间更多地了解数据集、提炼相关模式。而在机器学习中，最普遍的降维算法——PCA主成分分析，就是利用了降维的观点。

接下来，我开始讲解正交投影，在给出定义之前，先从一张图来了解会更直观。



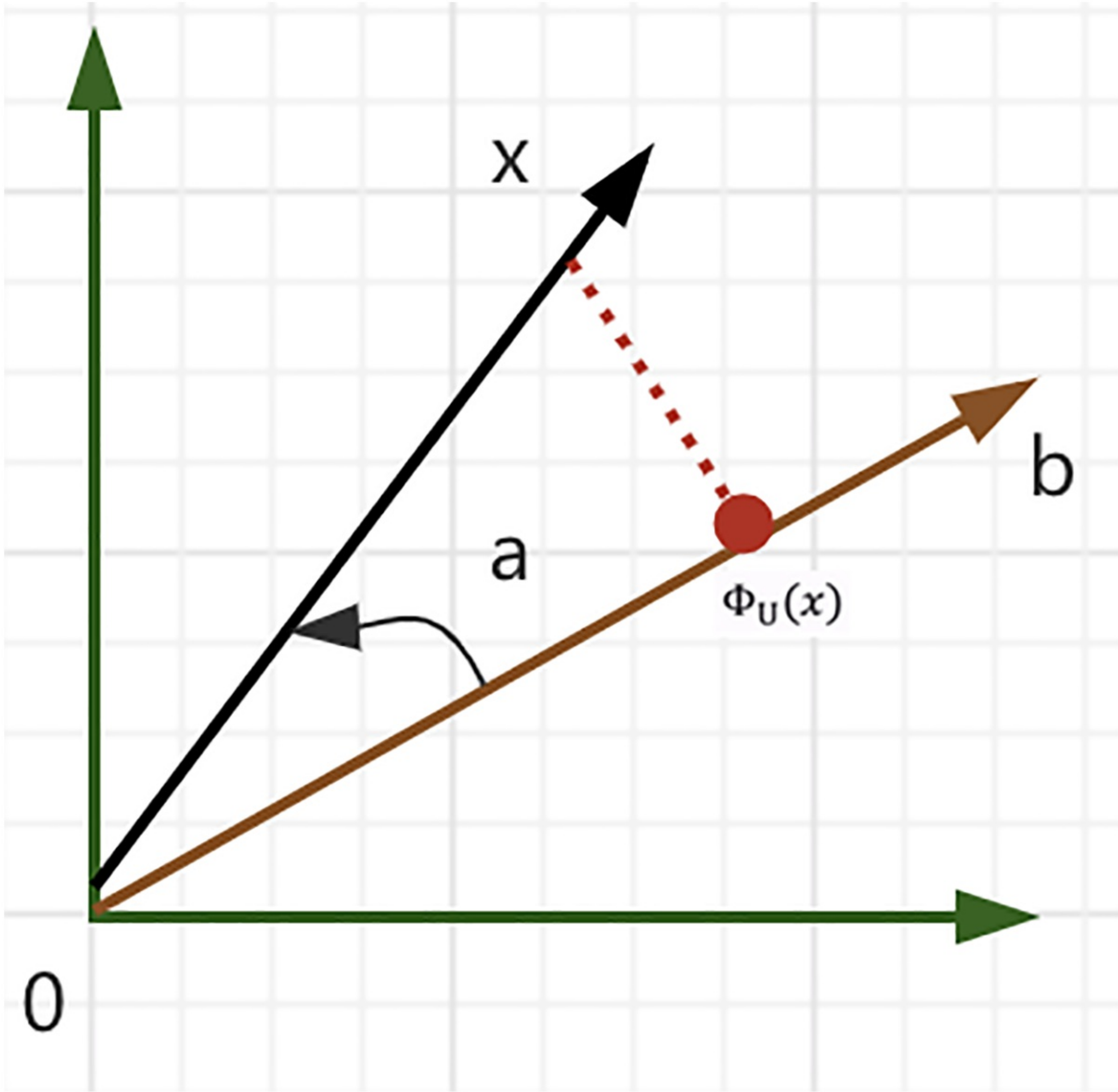
图中的蓝点是原二维数据，黄点是它们的正交投影。所以，实际降维后，在一维空间中就形成了这条黑线表示，它近似地表达了原来二维数据表示的信息。

现在我们可以来看一下投影的定义：V是一个向量空间，U是V的一个向量子空间，一个从V到U的线性映射Φ是一个投影，如果它满足：$\Phi^{2}=\Phi \circ \Phi=\Phi$。因为线性映射能够被变换矩阵表示，所以，这个定义同样适用于一个特殊类型变换矩阵：投影矩阵P_{Φ}，它也满足：$P_{\Phi}^{2}=P_{\Phi}$。

投影到一维子空间上（线）

接下来，我们来看看如何投影到一维子空间，也就是把内积空间的向量正交投影到子空间，这里我们使用点积作为内积。

假设有一条通过原点的线，这条线是由基向量b产生的一维子空间U，当我们把一个向量x投影到U时，需要寻找另一个最靠近x的向量$\Phi_{U}(x)$。还是老样子，我们通过图来看一下。



首先，投影$\Phi_{U}(x)$靠近x，也就是要找出x和$\Phi_{U}(x)$之间的$\left\|x-\Phi_{U}(x)\right\|$最小距离，从几何角度来说，就是线段$\Phi_{U}(x)-x$和$b$正交，满足等式：$\left\langle\Phi_{U}(x)-x, b\right\rangle=0$。其次，投影$\Phi_{U}(x)$必须是$U$的一个元素，也就是，基向量$b$的一个乘来产生$U$，$\Phi_{U}(x)=λb$。

于是，我们可以通过三个步骤来分别得到$λ$、投影$\Phi_{U}(x)$和投影矩阵P_{Φ}，来把任意x映射到子空间U上。

第一步，计算$λ$，通过正交条件产生这样的等式：
$\left\langle x-\Phi_{U}(x), b\right\rangle=0$。因为$\Phi_{U}(x)=λb$，所以它可以转变成：$\langle x-\lambda b, b\rangle=0$。

利用内积的双线性：$\langle x, b\rangle-\lambda\langle b, b\rangle=0$，我们得到：

$$
\lambda=\frac{\langle x, b\rangle}{\langle b, b\rangle}=\frac{\langle b, x\rangle}{\|b\|^{2}}
$$

然后，我们通过点积得到：

$$
\lambda=\frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}}
$$

如果$\|b\|=1$，那$λ$就等于$b^{T}x$。

接着第二步，是计算投影点$\Phi_{U}(x)$。从$\Phi_{U}(x)=λb$，我们得到：

$$
\Phi_{U}(x)=\lambda b=\frac{\langle x, b\rangle}{\|b\|^{2}} b=\frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}} b
$$

通过点积来计算，我们就得到了$\Phi_{U}(x)$的长度：

$$
\left\|\Phi_{U}(x)\right\|=\frac{\left|b^{T} x\right|}{\|b\|^{2}}\|b\|=|\cos (a)|\|x\|\|b\| \frac{\|b\|}{\|b\|^{2}}=\mid \cos (a)\|x\|
$$

这里的a，是x和b之间的夹角。

最后第三步，是计算投影矩阵P_{Φ}，投影矩阵是一个线性映射。所以，我们可以得到：$\Phi_{U}(x)=P_{\Phi}x$，通过$\Phi_{U}(x)=λb$，我们可以得到：

$$

$$
\Phi_{U}(x)=\lambda b=b \lambda=b \frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}}=\frac{b b^{T}}{\|b\|^{2}} x
$$

这里，我们立即可以得到投影矩阵P_{Φ}的计算等式：

$$
P_{\Phi}=\frac{b b^{T}}{\|b\|^{2}}
$$

本节小结

这一节课覆盖的知识点有点多，因为要把解析几何的知识点，浓缩到核心的几个点来讲解是一项艰巨的任务。不过不要怕，前面的几个知识点都是为这一节的重点"正交投影"来铺垫的。范数，被用来度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小，而内积让我们很直观地了解一个向量的长度、两个向量之间的距离和角度，以及判断向量之间是否是正交的。

所以，希望你能掌握范数和内积的理论知识，并把它和正交投影结合，运用在一些实践应用场景中，比如：3D图形图像的坐标变换、数据压缩，以及机器学习的降维。

线性代数练习场

请用之前学到的正交投影的投影矩阵算法，来计算一条线上的投影矩阵P_{Φ}。

这条线通过原点，由基$b=\left[\begin{array}{lll}1 & 2 & 2\end{array}\right]^{T}$产生，$P_{\Phi}$计算后，再通过一个$x$来验证一下它是否在$b$产生的子空间中，我们取$x=\left[\begin{array}{lll}1 & 1 & 1\end{array}\right]^{T}$。

欢迎在留言区晒出你的运算结果，我会及时回复。同时，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友，一起讨论、学习。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数，今天我们要讲的内容是"解析几何"。

前面所有章节我们都是围绕向量、矩阵，以及向量空间来展开的。但这一节课有点不一样，我要讲的是解析几何，它使得向量从抽象走向了具象，让向量具有了几何的含义。比如，计算向量的长度、向量之间的距离和角度，这在机器学习的主成分分析PCA中是非常有用的。

范数

讲解析几何我们得从"范数"开始讲起。

因为很多人看到几何向量的第一反应就是，它是从原点开始的有向线段，并且向量的长度是这个有向线段的终端和起始端之间的距离。而范数，就是被用来度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小的。

现在，我们先来看一下范数的数学定义：一个向量空间V上的一个范数就是一个函数，它计算V中的每一个向量x的长度，用符号来表示的话就是：$\|x\| \in R$，它满足三种性质：

1. 正齐次性： 如果输入参数扩大正$λ$倍，其对应的函数也扩正大倍。设$λ \in R$，$x \in V$，$\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$；
2. 次可加性：类似三角不等式，两边之和大于第三边。设$x,y \in V$，$\|x+y\| \leq\|x\|+\|y\|$；
3. 正定性：向量x的长度一定大于等于零。$\|x\| \geq 0$。

看到这里，你也许会问，范数似乎和以前老师教的**向量的模**一样啊。先别急，它们还真有那么一点关系，你听我慢慢道来。由于范数是度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小的，所以它和向量空间维度是有关系的，于是，我们可以把范数写成这样的模式来区分不同维度的大小计算：$L_{1}, L_{2}, \ldots, L_{\infty}$。

- L_{1}范数：曼哈顿范数，也叫曼哈顿距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{1}=\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}\right|
$$

- L_{2}范数：欧式范数，也叫欧式距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2}}
$$

- L_{∞}范数：切比雪夫范数，也叫切比雪夫距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{\infty}=\max \left(\left|x_{1}\right|,\left|x_{2}\right|, \ldots,\left|x_{n}\right|\right)
$$

我们发现，向量的模和L_{2}范数的计算方式都是一样的，都表示的是欧氏距离，所以，我们可以简单地认为向量的模等于L_{2}范数。而其他的范数模式和向量的模则没有任何关系。

内积

学习解析几何时，我们必须掌握的第二个概念就是内积。

如果说范数是模式，是用来描述向量长度或大小的概念性表达，那么内积可以让我们很直观地了解一个向量的长度、两个向量之间的距离和角度，它的一个主要目的就是判断向量之间是否是正交的，正交这个概念我们会在后面讲解。

点积

我们从特殊到一般，先来看点积，它和第三篇矩阵中说的"普通矩阵乘"形式一样，点积是特殊的内积，为什么说它特殊呢？那是因为在表示两个向量之间的距离时，它就是大家熟悉的欧式距离，点积可以表示成这样的形式：

$$
x^{T} y=\sum_{i=1}^{n} x_{i} y_{i}
$$

其他内积

除了点积外，我们再来看另一个不同的内积：设内积空间V是R^{2}，定义内积$\langle x, y\rangle=x_{1} y_{1}-(x_{1} y_{2}+x_{2} y_{1})+2 x_{2} y_{2}$，一看便知这个和点积完全不同。

内积空间

最后，我们再来看一般内积和内积空间。因为解析几何关注的是向量的长度、两个向量之间的距离和角度，所以，我们要在原来向量空间上加一个额外的结构，这个额外结构就是内积，而加了内积的向量空间，我们就叫做内积空间。

为了表达方便，我们可以把内积写成$\langle\ \cdot,\cdot\ \rangle$这样的形式，那么内积空间$V$可以被表示成这样：$(V,\langle\ \cdot,\cdot\ \rangle)$。这时，如果一般内积由点积来表达，那这个向量空间就变成了更具体的欧式向量空间。

接下来看下内积空间有什么性质？我们定义一个内积空间V和它的元素x、y、z，以及一个$c \in R$：

- 满足对称性：x和y的内积等于y和x的内积，$\langle x, y\rangle=\langle y, x\rangle$；
- 满足线性性：x和$y+cz$的内积等于，x和y的内积，与x和z的内积乘以c后的和，$\langle x, y+c z\rangle=\langle x, y\rangle+c\langle x, z\rangle$；
- 满足正定性：x和y的内积大于等于零，$\langle x, y\rangle \geq 0$。

对称正定矩阵

内积还定义了一类矩阵，这类矩阵在机器学习中很重要，因为它可以被用来判定多元函数极值，而在深度学习中，它更是被用来获取最小化损失函数，我们把这类矩阵叫做对称正定矩阵。

对称正定矩阵的定义是：如果一个对称矩阵A属于方阵$R^{n \times n}$，对任意非零向量x，都有$x^{T} A x>0$，那么A就是对称正定矩阵。

我们来看两个例子，判断它们是不是对称正定矩阵。

第一个例子，请你回答下面这个矩阵是对称正定矩阵吗？

$$
A=\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 5
\end{array}\right]
$$

答案：是的，它是对称正定矩阵。因为$x^{T} A x>0$。

$$
x^{T} A x=\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 5
\end{array}\right]\left[\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right]=(3 x_{1}+2 x_{2})^{2}+x_{2}^{2}>0
$$

第二个例子，请你看下面这个矩阵是对称正定矩阵吗？

$$
A=\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 3
\end{array}\right]
$$

答案：不是的，它只是对称矩阵。因为$x^{T} A x$可能小于0。

$$
x^{T} A x=\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 3
\end{array}\right]\left[\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right]=(3 x_{1}+2 x_{2})^{2}-x_{2}^{2}
$$

长度、距离和角度

前面我们通过范数讲了向量的长度，但从内积的角度来看，我们发现，内积和范数之间有着千丝万缕的关系。我们来看看下面这个等式。

$$
\|x\|=\sqrt{\langle x, x\rangle}
$$

从这个等式我们发现，内积可以用来产生范数，确实是这样。不过，不是每一个范数都能被一个内积产生的，比如：曼哈顿范数。接下来，我们还是来关注能由内积产生的范数上，从不同的角度来看看几何上的长度、距离和角度的概念。

我们先用内积来计算一个**向量的长度**，比如：向量$x=[\begin{array}{ll}1 & 1\end{array}]^{T}$，我们可以使用点积来计算，计算后得出$x$的范数是$\sqrt{2}$，具体计算过程是这样的：$\|x\|=\sqrt{x^{T} x}=\sqrt{1^{2}+1^{2}}=\sqrt{2}$。

接着，我们再来看一下**向量之间的距离**，一个内积空间V，$(V,\langle\ \cdot,\cdot \rangle)$，$x$和$y$是它的两个向量，那么$x$和$y$之间的距离就可以表示成：$d(x, y)=\|x-y\|=\sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$。

如果用点积来计算x和y之间的距离，那这个距离就叫做欧式距离。

再接着，来看看两个**向量之间的角度**。我们使用柯西-施瓦茨不等式（Cauchy-Schwarz Inequality）来表示内积空间中两个向量x和y之间的角度：a。

$$
-1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \leq 1
$$

取值是从-1到1之间，那么角度就是从0到π之间，我们用cos来表示就是：

$$
\cos (a)=\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}
$$

其中a就是角度，a的角度取值是0到π之间。我们很容易就能发现，其实两个向量之间的角度，就是告诉了我们两个向量之间方向的相似性。例如：x和$y=4x$，使用点积来计算它们之间的角度是0，也就是说它们的方向是一样的，y只是对x扩大了4倍而已。

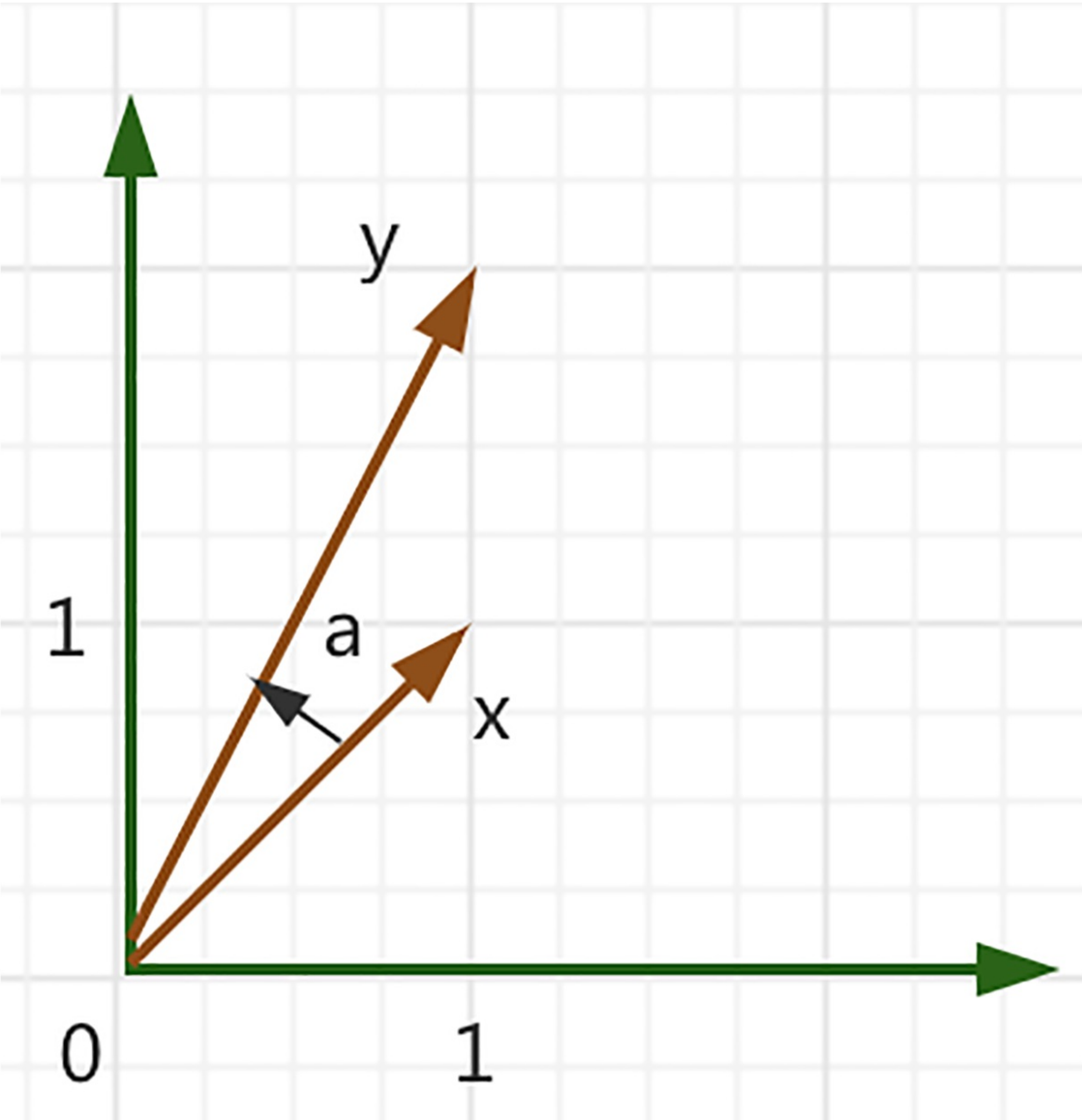
现在，我们通过一个例子，再来更清楚地看下两个向量之间角度的计算，设$x=[\begin{array}{ll}1 & 1\end{array}]^{T}$，$y=[\begin{array}{ll}1 & 2\end{array}]^{T}$，使用点积来计算，我们得出：

$$
\cos (a)=\frac{\langle x, y\rangle}{\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}}=\frac{x^{T} y}{\sqrt{x^{T} x y^{T} y}}=\frac{3}{\sqrt{10}}
$$

那么，这两个向量之间的角度如下。

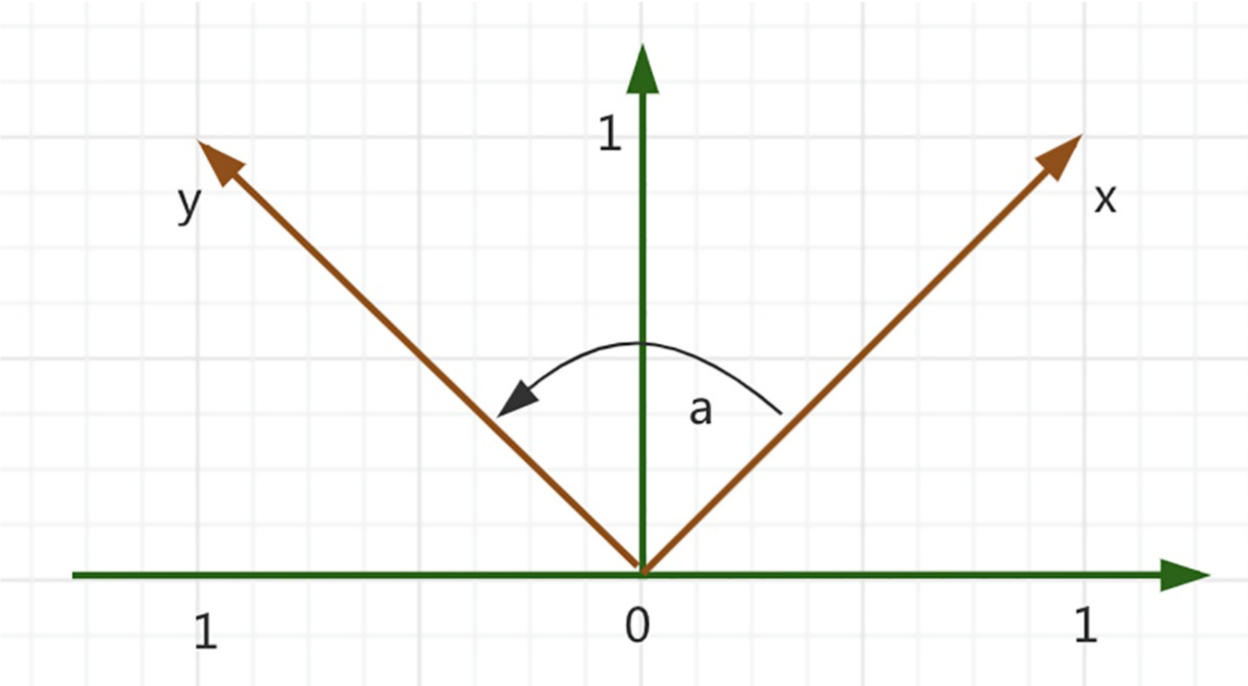
$$
\arccos \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \approx 0.32
$$

我们可以用图来更直观地表达一下。



于是，我们最后可以引出一个概念，也就是我们在一开始提到的**正交性**。如果两个向量x和y内积等于0，$\langle x, y\rangle=0$，那么x和y是正交的，这可以写成：$x \perp y$。再如果，x和y的范数都等于1，$\|x\|=\|y\|=1$，也就是说，如果它们都是单位向量，那么x和y就是标准正交的。

我们用图来更直观地表达一下。



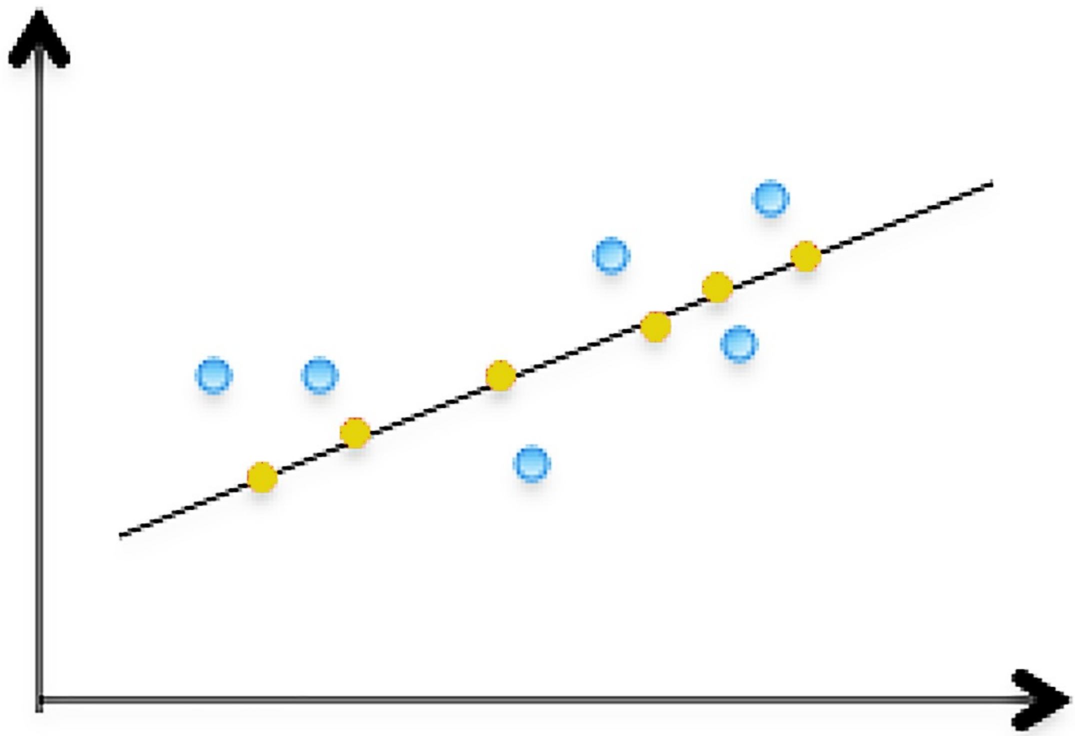
正交投影

在理论讲解之后，我们要来了解一下解析几何在实践中经常运用的概念——正交投影，它是一种重要的线性变换，在图形图像、编码理论、统计和机器学习中扮演了重要角色。

在机器学习中，数据一般都是高维的。众所周知，高维数据是很难来分析和可视化的。而且，不是所有的高维数据都是有用的，可能只有一些数据包含了大部分的重要信息。

正交投影就是高维到低维的数据投影，在第5节课线性空间中，我简单介绍了高维数据投影到低维后，我们就能在低维空间更多地了解数据集、提炼相关模式。而在机器学习中，最普遍的降维算法——PCA主成分分析，就是利用了降维的观点。

接下来，我开始讲解正交投影，在给出定义之前，先从一张图来了解会更直观。



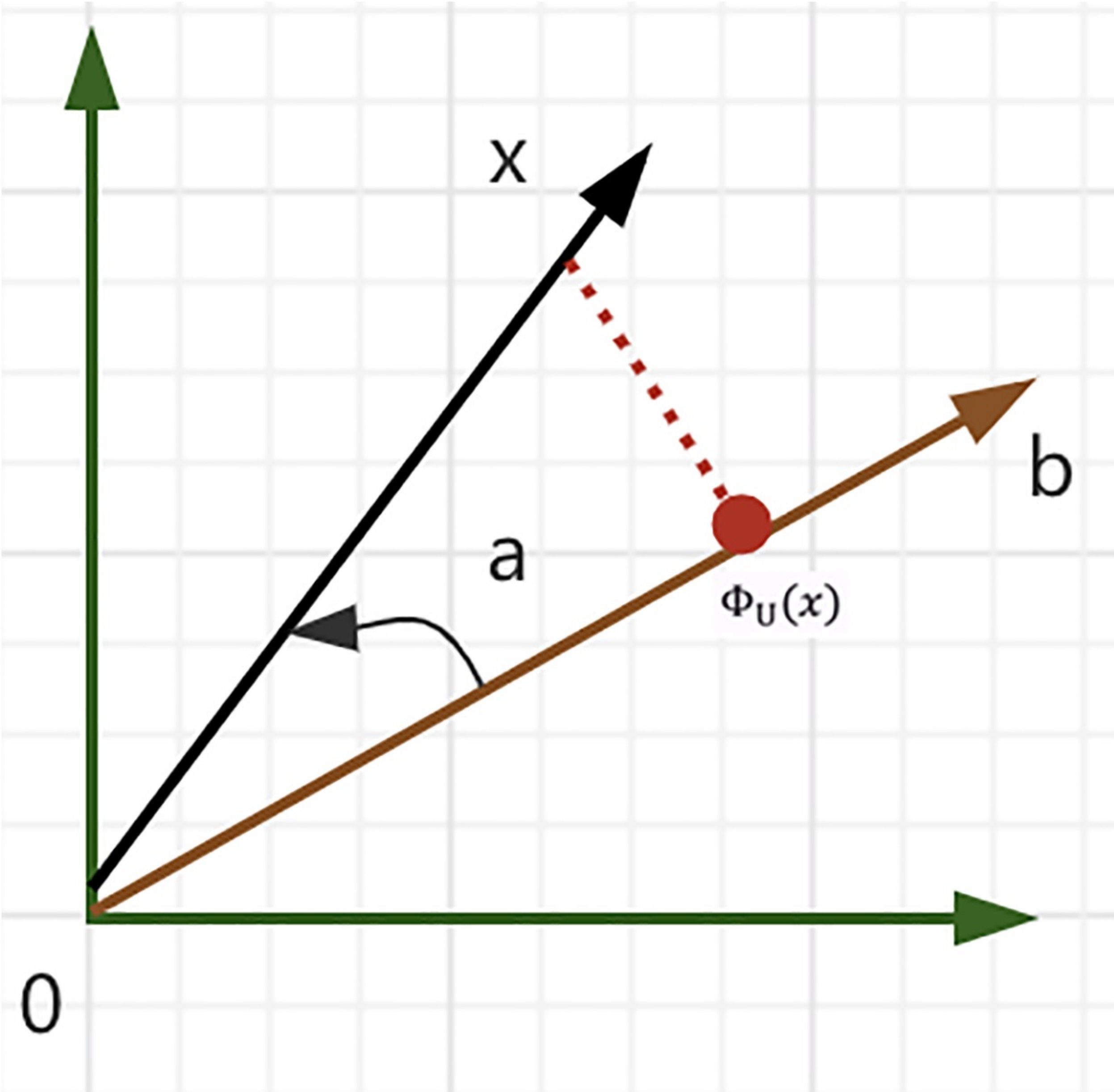
图中的蓝点是原二维数据，黄点是它们的正交投影。所以，实际降维后，在一维空间中就形成了这条黑线表示，它近似地表达了原来二维数据表示的信息。

现在我们可以来看一下投影的定义：V是一个向量空间，U是V的一个向量子空间，一个从V到U的线性映射Φ是一个投影，如果它满足：$\Phi^{2}=\Phi \circ \Phi=\Phi$。因为线性映射能够被变换矩阵表示，所以，这个定义同样适用于一个特殊类型变换矩阵：投影矩阵P_{Φ}，它也满足：$P_{\Phi}^{2}=P_{\Phi}$。

投影到一维子空间上（线）

接下来，我们来看看如何投影到一维子空间，也就是把内积空间的向量正交投影到子空间，这里我们使用点积作为内积。

假设有一条通过原点的线，这条线是由基向量b产生的一维子空间U，当我们把一个向量x投影到U时，需要寻找另一个最靠近x的向量$\Phi_{U}(x)$。还是老样子，我们通过图来看一下。



首先，投影$\Phi_{U}(x)$靠近x，也就是要找出x和$\Phi_{U}(x)$之间的$\left\|x-\Phi_{U}(x)\right\|$最小距离，从几何角度来说，就是线段$\Phi_{U}(x)-x$和$b$正交，满足等式：$\left\langle\Phi_{U}(x)-x, b\right\rangle=0$。其次，投影$\Phi_{U}(x)$必须是$U$的一个元素，也就是，基向量$b$的一个乘来产生$U$，$\Phi_{U}(x)=λb$。

于是，我们可以通过三个步骤来分别得到$λ$、投影$\Phi_{U}(x)$和投影矩阵P_{Φ}，来把任意x映射到子空间U上。

第一步，计算$λ$，通过正交条件产生这样的等式：
$\left\langle x-\Phi_{U}(x), b\right\rangle=0$。因为$\Phi_{U}(x)=λb$，所以它可以转变成：$\langle x-\lambda b, b\rangle=0$。

利用内积的双线性：$\langle x, b\rangle-\lambda\langle b, b\rangle=0$，我们得到：

$$
\lambda=\frac{\langle x, b\rangle}{\langle b, b\rangle}=\frac{\langle b, x\rangle}{\|b\|^{2}}
$$

然后，我们通过点积得到：

$$
\lambda=\frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}}
$$

如果$\|b\|=1$，那$λ$就等于$b^{T}x$。

接着第二步，是计算投影点$\Phi_{U}(x)$。从$\Phi_{U}(x)=λb$，我们得到：

$$
\Phi_{U}(x)=\lambda b=\frac{\langle x, b\rangle}{\|b\|^{2}} b=\frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}} b
$$

通过点积来计算，我们就得到了$\Phi_{U}(x)$的长度：

$$
\left\|\Phi_{U}(x)\right\|=\frac{\left|b^{T} x\right|}{\|b\|^{2}}\|b\|=|\cos (a)|\|x\|\|b\| \frac{\|b\|}{\|b\|^{2}}=\mid \cos (a)\|x\|
$$

这里的a，是x和b之间的夹角。

最后第三步，是计算投影矩阵P_{Φ}，投影矩阵是一个线性映射。所以，我们可以得到：$\Phi_{U}(x)=P_{\Phi}x$，通过$\Phi_{U}(x)=λb$，我们可以得到：

$$

$$
\Phi_{U}(x)=\lambda b=b \lambda=b \frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}}=\frac{b b^{T}}{\|b\|^{2}} x
$$

这里，我们立即可以得到投影矩阵P_{Φ}的计算等式：

$$
P_{\Phi}=\frac{b b^{T}}{\|b\|^{2}}
$$

本节小结

这一节课覆盖的知识点有点多，因为要把解析几何的知识点，浓缩到核心的几个点来讲解是一项艰巨的任务。不过不要怕，前面的几个知识点都是为这一节的重点"正交投影"来铺垫的。范数，被用来度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小，而内积让我们很直观地了解一个向量的长度、两个向量之间的距离和角度，以及判断向量之间是否是正交的。

所以，希望你能掌握范数和内积的理论知识，并把它和正交投影结合，运用在一些实践应用场景中，比如：3D图形图像的坐标变换、数据压缩，以及机器学习的降维。

线性代数练习场

请用之前学到的正交投影的投影矩阵算法，来计算一条线上的投影矩阵P_{Φ}。

这条线通过原点，由基$b=\left[\begin{array}{lll}1 & 2 & 2\end{array}\right]^{T}$产生，$P_{\Phi}$计算后，再通过一个$x$来验证一下它是否在$b$产生的子空间中，我们取$x=\left[\begin{array}{lll}1 & 1 & 1\end{array}\right]^{T}$。

欢迎在留言区晒出你的运算结果，我会及时回复。同时，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友，一起讨论、学习。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数，今天我们要讲的内容是"解析几何"。

前面所有章节我们都是围绕向量、矩阵，以及向量空间来展开的。但这一节课有点不一样，我要讲的是解析几何，它使得向量从抽象走向了具象，让向量具有了几何的含义。比如，计算向量的长度、向量之间的距离和角度，这在机器学习的主成分分析PCA中是非常有用的。

范数

讲解析几何我们得从"范数"开始讲起。

因为很多人看到几何向量的第一反应就是，它是从原点开始的有向线段，并且向量的长度是这个有向线段的终端和起始端之间的距离。而范数，就是被用来度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小的。

现在，我们先来看一下范数的数学定义：一个向量空间V上的一个范数就是一个函数，它计算V中的每一个向量x的长度，用符号来表示的话就是：$\|x\| \in R$，它满足三种性质：

1. 正齐次性： 如果输入参数扩大正$λ$倍，其对应的函数也扩正大倍。设$λ \in R$，$x \in V$，$\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$；
2. 次可加性：类似三角不等式，两边之和大于第三边。设$x,y \in V$，$\|x+y\| \leq\|x\|+\|y\|$；
3. 正定性：向量x的长度一定大于等于零。$\|x\| \geq 0$。

看到这里，你也许会问，范数似乎和以前老师教的**向量的模**一样啊。先别急，它们还真有那么一点关系，你听我慢慢道来。由于范数是度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小的，所以它和向量空间维度是有关系的，于是，我们可以把范数写成这样的模式来区分不同维度的大小计算：$L_{1}, L_{2}, \ldots, L_{\infty}$。

- L_{1}范数：曼哈顿范数，也叫曼哈顿距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{1}=\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}\right|
$$

- L_{2}范数：欧式范数，也叫欧式距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2}}
$$

- L_{∞}范数：切比雪夫范数，也叫切比雪夫距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{\infty}=\max \left(\left|x_{1}\right|,\left|x_{2}\right|, \ldots,\left|x_{n}\right|\right)
$$

我们发现，向量的模和L_{2}范数的计算方式都是一样的，都表示的是欧氏距离，所以，我们可以简单地认为向量的模等于L_{2}范数。而其他的范数模式和向量的模则没有任何关系。

内积

学习解析几何时，我们必须掌握的第二个概念就是内积。

如果说范数是模式，是用来描述向量长度或大小的概念性表达，那么内积可以让我们很直观地了解一个向量的长度、两个向量之间的距离和角度，它的一个主要目的就是判断向量之间是否是正交的，正交这个概念我们会在后面讲解。

点积

我们从特殊到一般，先来看点积，它和第三篇矩阵中说的"普通矩阵乘"形式一样，点积是特殊的内积，为什么说它特殊呢？那是因为在表示两个向量之间的距离时，它就是大家熟悉的欧式距离，点积可以表示成这样的形式：

$$
x^{T} y=\sum_{i=1}^{n} x_{i} y_{i}
$$

其他内积

除了点积外，我们再来看另一个不同的内积：设内积空间V是R^{2}，定义内积$\langle x, y\rangle=x_{1} y_{1}-(x_{1} y_{2}+x_{2} y_{1})+2 x_{2} y_{2}$，一看便知这个和点积完全不同。

内积空间

最后，我们再来看一般内积和内积空间。因为解析几何关注的是向量的长度、两个向量之间的距离和角度，所以，我们要在原来向量空间上加一个额外的结构，这个额外结构就是内积，而加了内积的向量空间，我们就叫做内积空间。

为了表达方便，我们可以把内积写成$\langle\ \cdot,\cdot\ \rangle$这样的形式，那么内积空间$V$可以被表示成这样：$(V,\langle\ \cdot,\cdot\ \rangle)$。这时，如果一般内积由点积来表达，那这个向量空间就变成了更具体的欧式向量空间。

接下来看下内积空间有什么性质？我们定义一个内积空间V和它的元素x、y、z，以及一个$c \in R$：

- 满足对称性：x和y的内积等于y和x的内积，$\langle x, y\rangle=\langle y, x\rangle$；
- 满足线性性：x和$y+cz$的内积等于，x和y的内积，与x和z的内积乘以c后的和，$\langle x, y+c z\rangle=\langle x, y\rangle+c\langle x, z\rangle$；
- 满足正定性：x和y的内积大于等于零，$\langle x, y\rangle \geq 0$。

对称正定矩阵

内积还定义了一类矩阵，这类矩阵在机器学习中很重要，因为它可以被用来判定多元函数极值，而在深度学习中，它更是被用来获取最小化损失函数，我们把这类矩阵叫做对称正定矩阵。

对称正定矩阵的定义是：如果一个对称矩阵A属于方阵$R^{n×n}$，对任意非零向量x，都有$x^{T} A x>0$，那么A就是对称正定矩阵。

我们来看两个例子，判断它们是不是对称正定矩阵。

第一个例子，请你回答下面这个矩阵是对称正定矩阵吗？

$$
A=\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 5
\end{array}\right]
$$

答案：是的，它是对称正定矩阵。因为$x^{T} A x>0$。

$$
x^{T} A x=\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 5
\end{array}\right]\left[\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right]=(3 x_{1}+2 x_{2})^{2}+x_{2}^{2}>0
$$

第二个例子，请你看下面这个矩阵是对称正定矩阵吗？

$$
A=\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 3
\end{array}\right]
$$

答案：不是的，它只是对称矩阵。因为$x^{T} A x$可能小于0。

$$
x^{T} A x=\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 3
\end{array}\right]\left[\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right]=(3 x_{1}+2 x_{2})^{2}-x_{2}^{2}
$$

长度、距离和角度

前面我们通过范数讲了向量的长度，但从内积的角度来看，我们发现，内积和范数之间有着千丝万缕的关系。我们来看看下面这个等式。

$$
\|x\|=\sqrt{\langle x, x\rangle}
$$

从这个等式我们发现，内积可以用来产生范数，确实是这样。不过，不是每一个范数都能被一个内积产生的，比如：曼哈顿范数。接下来，我们还是来关注能由内积产生的范数上，从不同的角度来看看几何上的长度、距离和角度的概念。

我们先用内积来计算一个**向量的长度**，比如：向量$x=[\begin{array}{ll}1 & 1\end{array}]^{T}$，我们可以使用点积来计算，计算后得出$x$的范数是$\sqrt{2}$，具体计算过程是这样的：$\|x\|=\sqrt{x^{T} x}=\sqrt{1^{2}+1^{2}}=\sqrt{2}$。

接着，我们再来看一下**向量之间的距离**，一个内积空间V，$(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$，$x$和$y$是它的两个向量，那么$x$和$y$之间的距离就可以表示成：$d(x, y)=\|x-y\|=\sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$。

如果用点积来计算x和y之间的距离，那这个距离就叫做欧式距离。

再接着，来看看两个**向量之间的角度**。我们使用柯西-施瓦茨不等式（Cauchy-Schwarz Inequality）来表示内积空间中两个向量x和y之间的角度：a。

$$
-1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \leq 1
$$

取值是从-1到1之间，那么角度就是从0到π之间，我们用cos来表示就是：

$$
\cos (a)=\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}
$$

其中a就是角度，a的角度取值是0到π之间。我们很容易就能发现，其实两个向量之间的角度，就是告诉了我们两个向量之间方向的相似性。例如：x和$y=4x$，使用点积来计算它们之间的角度是0，也就是说它们的方向是一样的，y只是对x扩大了4倍而已。

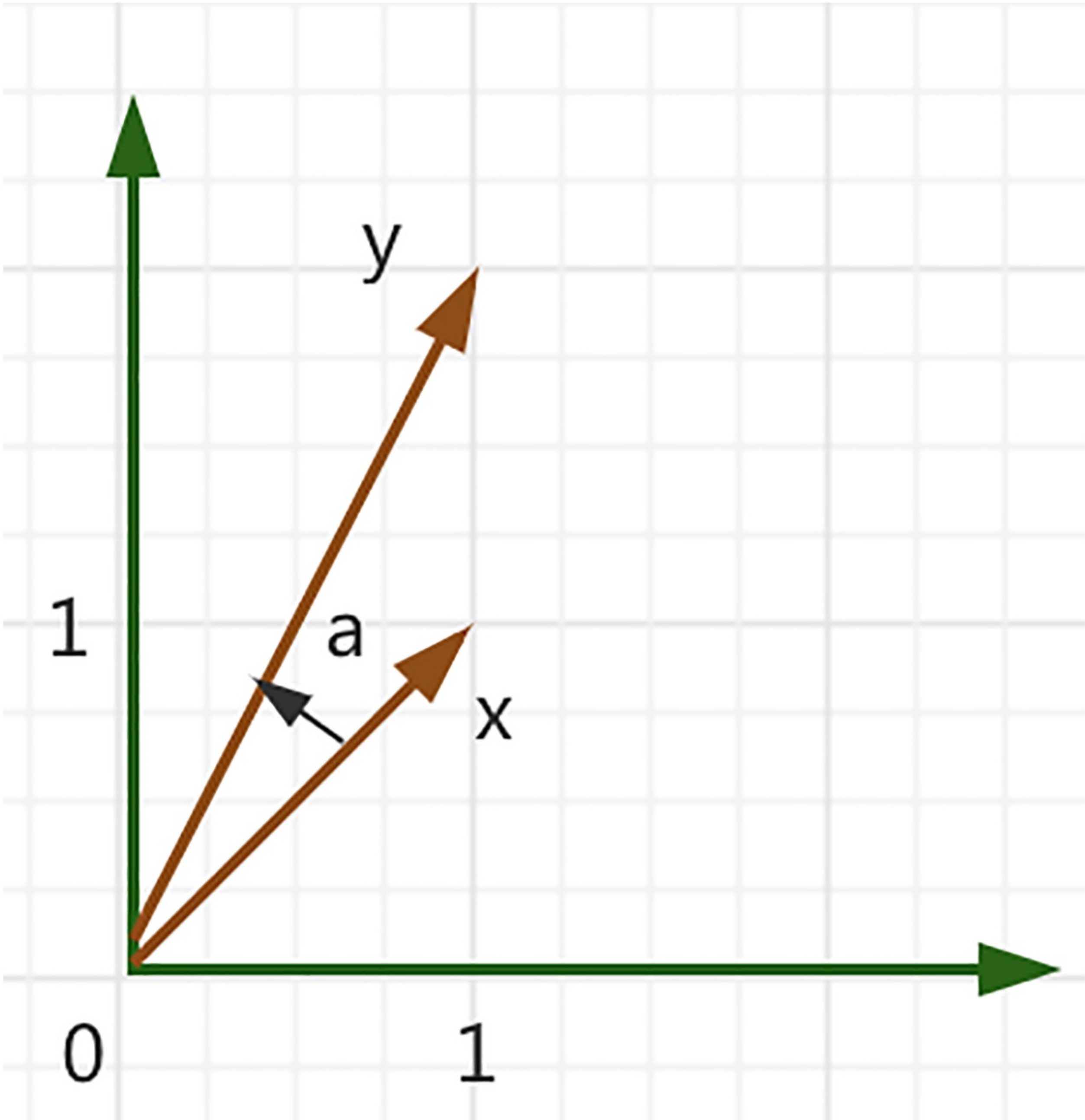
现在，我们通过一个例子，再来更清楚地看下两个向量之间角度的计算，设$x=[\begin{array}{ll}1 & 1\end{array}]^{T}$，$y=[\begin{array}{ll}1 & 2\end{array}]^{T}$，使用点积来计算，我们得出：

$$
\cos (a)=\frac{\langle x, y\rangle}{\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}}=\frac{x^{T} y}{\sqrt{x^{T} x y^{T} y}}=\frac{3}{\sqrt{10}}
$$

那么，这两个向量之间的角度如下。

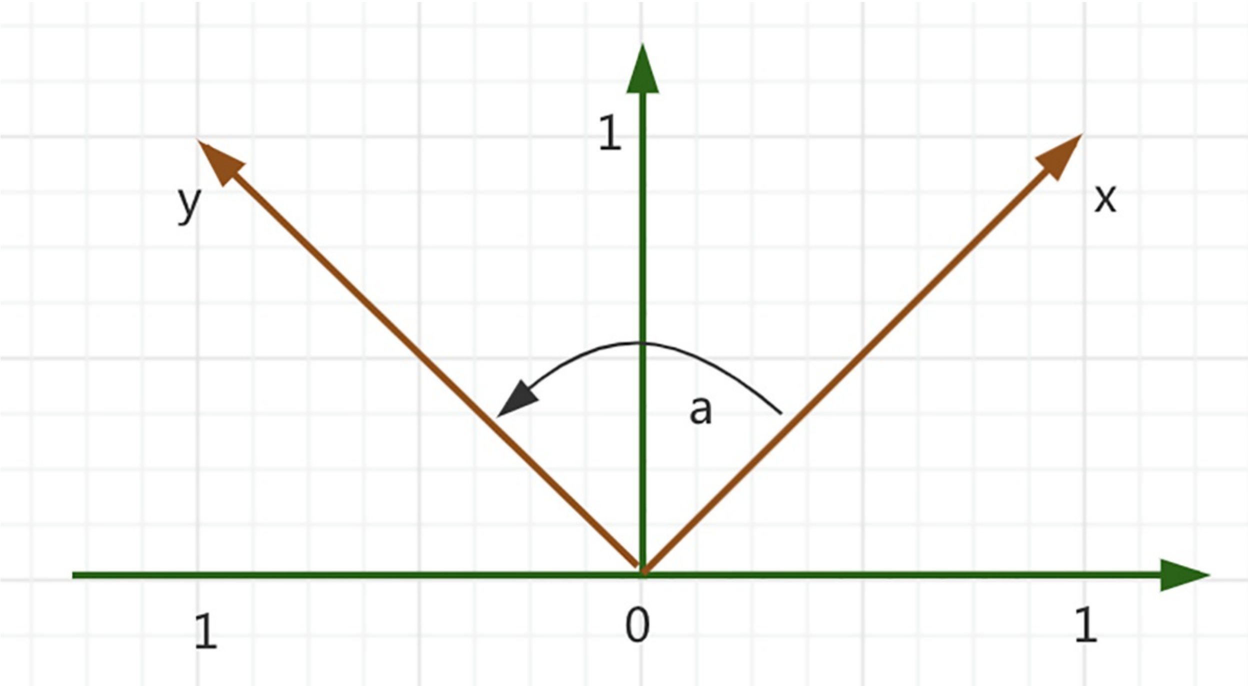
$$
\arccos \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \approx 0.32
$$

我们可以用图来更直观地表达一下。



于是，我们最后可以引出一个概念，也就是我们在一开始提到的**正交性**。如果两个向量x和y内积等于0，$\langle x, y\rangle=0$，那么x和y是正交的，这可以写成：$x \perp y$。再如果，x和y的范数都等于1，$\|x\|=\|y\|=1$，也就是说，如果它们都是单位向量，那么x和y就是标准正交的。

我们用图来更直观地表达一下。



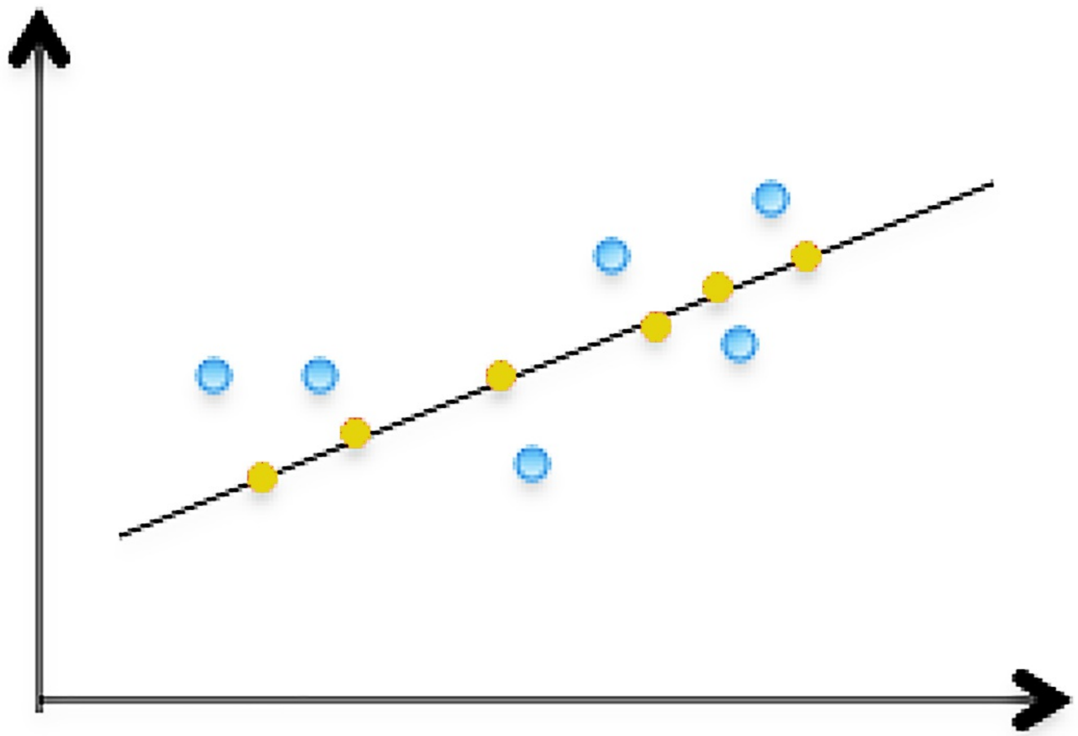
正交投影

在理论讲解之后，我们要来了解一下解析几何在实践中经常运用的概念——正交投影，它是一种重要的线性变换，在图形图像、编码理论、统计和机器学习中扮演了重要角色。

在机器学习中，数据一般都是高维的。众所周知，高维数据是很难来分析和可视化的。而且，不是所有的高维数据都是有用的，可能只有一些数据包含了大部分的重要信息。

正交投影就是高维到低维的数据投影，在第5节课线性空间中，我简单介绍了高维数据投影到低维后，我们就能在低维空间更多地了解数据集、提炼相关模式。而在机器学习中，最普遍的降维算法——PCA主成分分析，就是利用了降维的观点。

接下来，我开始讲解正交投影，在给出定义之前，先从一张图来了解会更直观。



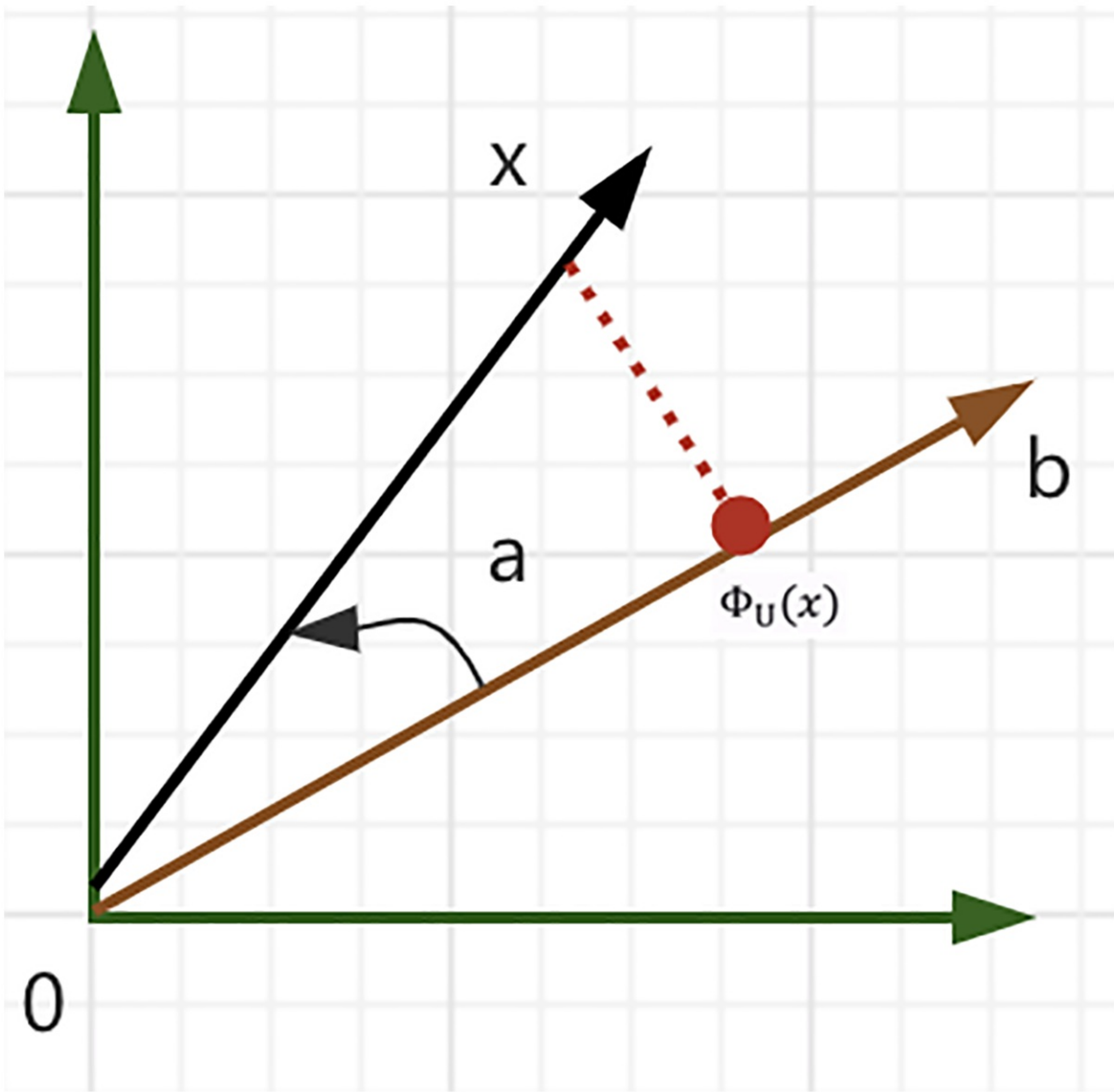
图中的蓝点是原二维数据，黄点是它们的正交投影。所以，实际降维后，在一维空间中就形成了这条黑线表示，它近似地表达了原来二维数据表示的信息。

现在我们可以来看一下投影的定义：V是一个向量空间，U是V的一个向量子空间，一个从V到U的线性映射Φ是一个投影，如果它满足：$\Phi^{2}=\Phi \circ \Phi=\Phi$。因为线性映射能够被变换矩阵表示，所以，这个定义同样适用于一个特殊类型变换矩阵：投影矩阵P_{Φ}，它也满足：$P_{\Phi}^{2}=P_{\Phi}$。

投影到一维子空间上（线）

接下来，我们来看看如何投影到一维子空间，也就是把内积空间的向量正交投影到子空间，这里我们使用点积作为内积。

假设有一条通过原点的线，这条线是由基向量b产生的一维子空间U，当我们把一个向量x投影到U时，需要寻找另一个最靠近x的向量$\Phi_{U}(x)$。还是老样子，我们通过图来看一下。



首先，投影$\Phi_{U}(x)$靠近x，也就是要找出x和$\Phi_{U}(x)$之间的$\left\|x-\Phi_{U}(x)\right\|$最小距离，从几何角度来说，就是线段$\Phi_{U}(x)-x$和$b$正交，满足等式：$\left\langle\Phi_{U}(x)-x, b\right\rangle=0$。其次，投影$\Phi_{U}(x)$必须是$U$的一个元素，也就是，基向量$b$的一个乘来产生$U$，$\Phi_{U}(x)=\lambda b$。

于是，我们可以通过三个步骤来分别得到λ、投影$\Phi_{U}(x)$和投影矩阵P_{Φ}，来把任意x映射到子空间U上。

第一步，计算λ，通过正交条件产生这样的等式：
$\left\langle x-\Phi_{U}(x), b\right\rangle=0$。因为$\Phi_{U}(x)=\lambda b$，所以它可以转变成：$\langle x-\lambda b, b\rangle=0$。

利用内积的双线性：$\langle x, b\rangle-\lambda\langle b, b\rangle=0$，我们得到：

$$
\lambda=\frac{\langle x, b\rangle}{\langle b, b\rangle}=\frac{\langle b, x\rangle}{\|b\|^{2}}
$$

然后，我们通过点积得到：

$$
\lambda=\frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}}
$$

如果$\|b\|=1$，那λ就等于$b^{T}x$。

接着第二步，是计算投影点$\Phi_{U}(x)$。从$\Phi_{U}(x)=\lambda b$，我们得到：

$$
\Phi_{U}(x)=\lambda b=\frac{\langle x, b\rangle}{\|b\|^{2}} b=\frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}} b
$$

通过点积来计算，我们就得到了$\Phi_{U}(x)$的长度：

$$
\left\|\Phi_{U}(x)\right\|=\frac{\left|b^{T} x\right|}{\|b\|^{2}}\|b\|=|\cos (a)|\|x\|\|b\| \frac{\|b\|}{\|b\|^{2}}=\mid \cos (a)\|x\|
$$

这里的a，是x和b之间的夹角。

最后第三步，是计算投影矩阵P_{Φ}，投影矩阵是一个线性映射。所以，我们可以得到：$\Phi_{U}(x)=P_{\Phi}x$，通过$\Phi_{U}(x)=\lambda b$，我们可以得到：

$$

\Phi_{U}(x)=\lambda b=b \lambda=b \frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}}=\frac{b b^{T}}{\|b\|^{2}} x
$$

这里，我们立即可以得到投影矩阵P_{Φ}的计算等式：

$$
P_{\Phi}=\frac{b b^{T}}{\|b\|^{2}}
$$

本节小结

这一节课覆盖的知识点有点多，因为要把解析几何的知识点，浓缩到核心的几个点来讲解是一项艰巨的任务。不过不要怕，前面的几个知识点都是为这一节的重点“正交投影”来铺垫的。范数，被用来度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小，而内积让我们很直观地了解一个向量的长度、两个向量之间的距离和角度，以及判断向量之间是否是正交的。

所以，希望你能掌握范数和内积的理论知识，并把它和正交投影结合，运用在一些实践应用场景中，比如：3D图形图像的坐标变换、数据压缩，以及机器学习的降维。

线性代数练习场

请用之前学到的正交投影的投影矩阵算法，来计算一条线上的投影矩阵P_{Φ}。

这条线通过原点，由基$b=\left[\begin{array}{lll}1 & 2 & 2\end{array}\right]^{T}$产生，$P_{\Phi}$计算后，再通过一个$x$来验证一下它是否在$b$产生的子空间中，我们取$x=\left[\begin{array}{lll}1 & 1 & 1\end{array}\right]^{T}$。

欢迎在留言区晒出你的运算结果，我会及时回复。同时，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友，一起讨论、学习。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数，今天我们要讲的内容是“解析几何”。

前面所有章节我们都是围绕向量、矩阵，以及向量空间来展开的。但这一节课有点不一样，我要讲的是解析几何，它使得向量从抽象走向了具象，让向量具有了几何的含义。比如，计算向量的长度、向量之间的距离和角度，这在机器学习的主成分分析PCA中是非常有用的。

范数

讲解析几何我们得从“范数”开始讲起。

因为很多人看到几何向量的第一反应就是，它是从原点开始的有向线段，并且向量的长度是这个有向线段的终端和起始端之间的距离。而范数，就是被用来度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小的。

现在，我们先来看一下范数的数学定义：一个向量空间V上的一个范数就是一个函数，它计算V中的每一个向量x的长度，用符号来表示的话就是：$\|x\| \in R$，它满足三种性质：

1. 正齐次性： 如果输入参数扩大正$λ$倍，其对应的函数也扩正大倍。设$λ \in R$，$x \in V$，$\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$；
2. 次可加性：类似三角不等式，两边之和大于第三边。设$x,y \in V$，$\|x+y\| \leq\|x\|+\|y\|$；
3. 正定性：向量x的长度一定大于等于零。$\|x\| \geq 0$。

看到这里，你也许会问，范数似乎和以前老师教的**向量的模**一样啊。先别急，它们还真有那么一点关系，你听我慢慢道来。由于范数是度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小的，所以它和向量空间维度是有关系的，于是，我们可以把范数写成这样的模式来区分不同维度的大小计算：$L_{1}, L_{2}, \ldots, L_{\infty}$。

- L_{1}范数：曼哈顿范数，也叫曼哈顿距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{1}=\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}\right|
$$

- L_{2}范数：欧式范数，也叫欧式距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2}}
$$

- L_{∞}范数：切比雪夫范数，也叫切比雪夫距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{\infty}=\max \left(\left|x_{1}\right|,\left|x_{2}\right|, \ldots,\left|x_{n}\right|\right)
$$

我们发现，向量的模和L_{2}范数的计算方式都是一样的，都表示的是欧氏距离，所以，我们可以简单地认为向量的模等于L_{2}范数。而其他的范数模式和向量的模则没有任何关系。

内积

学习解析几何时，我们必须掌握的第二个概念就是内积。

如果说范数是模式，是用来描述向量长度或大小的概念性表达，那么内积可以让我们很直观地了解一个向量的长度、两个向量之间的距离和角度，它的一个主要目的就是判断向量之间是否是正交的，正交这个概念我们会在后面讲解。

点积

我们从特殊到一般，先来看点积，它和第三篇矩阵中说的“普通矩阵乘”形式一样，点积是特殊的内积，为什么说它特殊呢？那是因为在表示两个向量之间的距离时，它就是大家熟悉的欧式距离，点积可以表示成这样的形式：

$$
x^{T} y=\sum_{i=1}^{n} x_{i} y_{i}
$$

其他内积

除了点积外，我们再来看另一个不同的内积：设内积空间V是R^{2}，定义内积$\langle x, y\rangle=x_{1} y_{1}-(x_{1} y_{2}+x_{2} y_{1})+2 x_{2} y_{2}$，一看便知这个和点积完全不同。

内积空间

最后，我们再来看一般内积和内积空间。因为解析几何关注的是向量的长度、两个向量之间的距离和角度，所以，我们要在原来向量空间上加一个额外的结构，这个额外结构就是内积，而加了内积的向量空间，我们就叫做内积空间。

为了表达方便，我们可以把内积写成$\langle\ \cdot,\cdot\ \rangle$这样的形式，那么内积空间$V$可以被表示成这样：$(V,\langle\ \cdot,\cdot\ \rangle)$。这时，如果一般内积由点积来表达，那这个向量空间就变成了更具体的欧式向量空间。

接下来看下内积空间有什么性质？我们定义一个内积空间V和它的元素x、y、z，以及一个$c \in R$：

- 满足对称性：x和y的内积等于y和x的内积，$\langle x, y\rangle=\langle y, x\rangle$；
- 满足线性性：x和$y+cz$的内积等于，x和y的内积，与x和z的内积乘以c后的和，$\langle x, y+c z\rangle=\langle x, y\rangle+c\langle x, z\rangle$；
- 满足正定性：x和y的内积大于等于零，$\langle x, y\rangle \geq 0$。

对称正定矩阵

内积还定义了一类矩阵，这类矩阵在机器学习中很重要，因为它可以被用来判定多元函数极值，而在深度学习中，它更是被用来获取最小化损失函数，我们把这类矩阵叫做对称正定矩阵。

对称正定矩阵的定义是：如果一个对称矩阵A属于方阵$R^{n×n}$，对任意非零向量x，都有$x^{T} A x>0$，那么A就是对称正定矩阵。

我们来看两个例子，判断它们是不是对称正定矩阵。

第一个例子，请你回答下面这个矩阵是对称正定矩阵吗？

$$
A=\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 5
\end{array}\right]
$$

答案：是的，它是对称正定矩阵。因为$x^{T} A x>0$。

$$
x^{T} A x=\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 5
\end{array}\right]\left[\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right]=(3 x_{1}+2 x_{2})^{2}+x_{2}^{2}>0
$$

第二个例子，请你看下面这个矩阵是对称正定矩阵吗？

$$
A=\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 3
\end{array}\right]
$$

答案：不是的，它只是对称矩阵。因为$x^{T} A x$可能小于0。

$$
x^{T} A x=\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 3
\end{array}\right]\left[\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right]=(3 x_{1}+2 x_{2})^{2}-x_{2}^{2}
$$

长度、距离和角度

前面我们通过范数讲了向量的长度，但从内积的角度来看，我们发现，内积和范数之间有着千丝万缕的关系。我们来看看下面这个等式。

$$
\|x\|=\sqrt{\langle x, x\rangle}
$$

从这个等式我们发现，内积可以用来产生范数，确实是这样。不过，不是每一个范数都能被一个内积产生的，比如：曼哈顿范数。接下来，我们还是来关注能由内积产生的范数上，从不同的角度来看看几何上的长度、距离和角度的概念。

我们先用内积来计算一个**向量的长度**，比如：向量$x=[\begin{array}{ll}1 & 1\end{array}]^{T}$，我们可以使用点积来计算，计算后得出$x$的范数是$\sqrt{2}$，具体计算过程是这样的：$\|x\|=\sqrt{x^{T} x}=\sqrt{1^{2}+1^{2}}=\sqrt{2}$。

接着，我们再来看一下**向量之间的距离**，一个内积空间V，$(V,\langle\ ·,· \rangle)$，x和y是它的两个向量，那么x和y之间的距离就可以表示成：$d(x, y)=\|x-y\|=\sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$。

如果用点积来计算x和y之间的距离，那这个距离就叫做欧式距离。

再接着，来看看两个**向量之间的角度**。我们使用柯西-施瓦茨不等式（Cauchy-Schwarz Inequality）来表示内积空间中两个向量x和y之间的角度：a。

$$
-1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \leq 1
$$

取值是从-1到1之间，那么角度就是从0到$π$之间，我们用cos来表示就是：

$$
\cos (a)=\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}
$$

其中a就是角度，a的角度取值是0到$π$之间。我们很容易就能发现，其实两个向量之间的角度，就是告诉了我们两个向量之间方向的相似性。例如：x和$y=4x$，使用点积来计算它们之间的角度是0，也就是说它们的方向是一样的，y只是对x扩大了4倍而已。

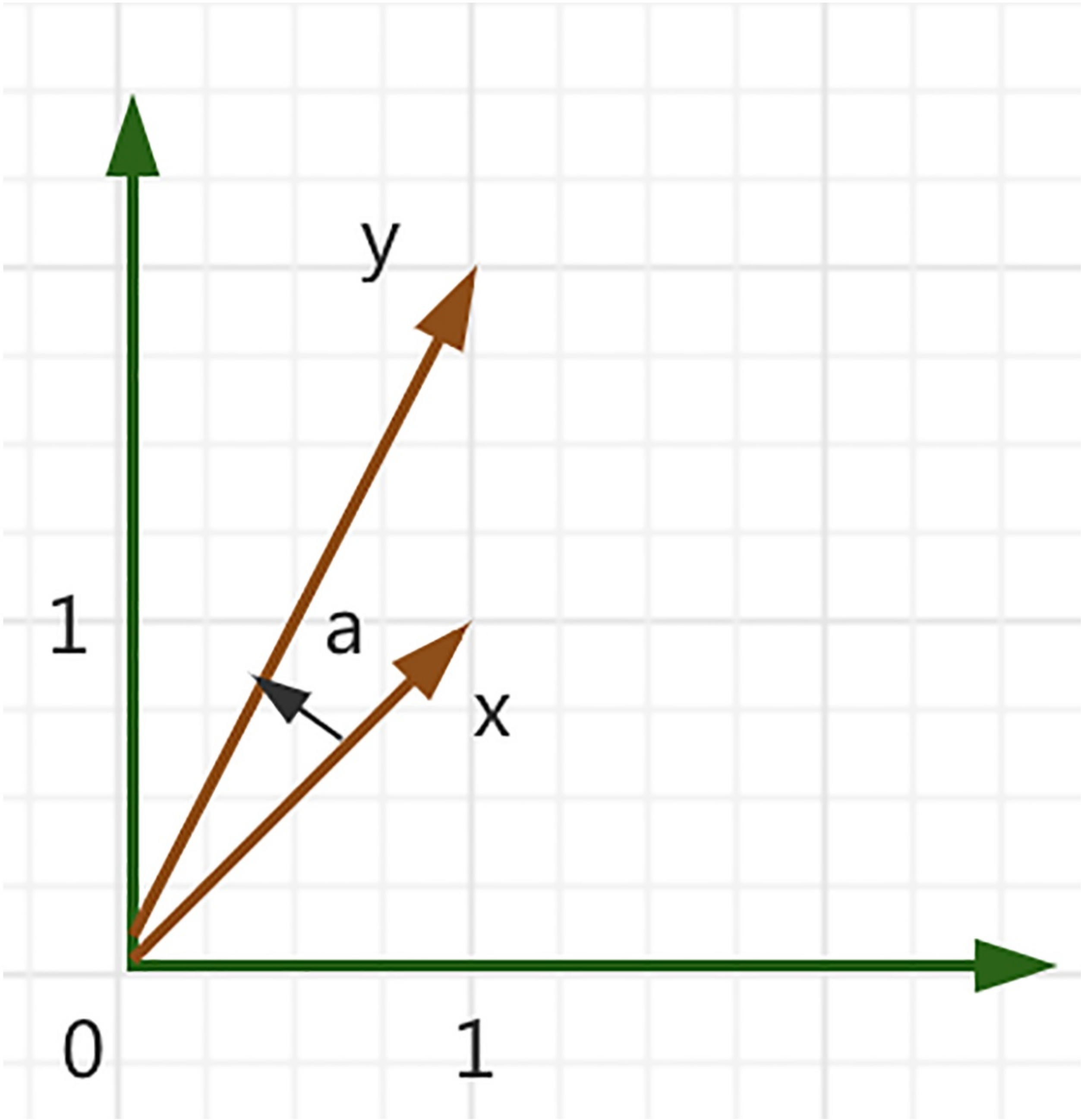
现在，我们通过一个例子，再来更清楚地看下两个向量之间角度的计算，设$x=[\begin{array}{ll}1 & 1\end{array}]^{T}$，$y=[\begin{array}{ll}1 & 2\end{array}]^{T}$，使用点积来计算，我们得出：

$$
\cos (a)=\frac{\langle x, y\rangle}{\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}}=\frac{x^{T} y}{\sqrt{x^{T} x y^{T} y}}=\frac{3}{\sqrt{10}}
$$

那么，这两个向量之间的角度如下。

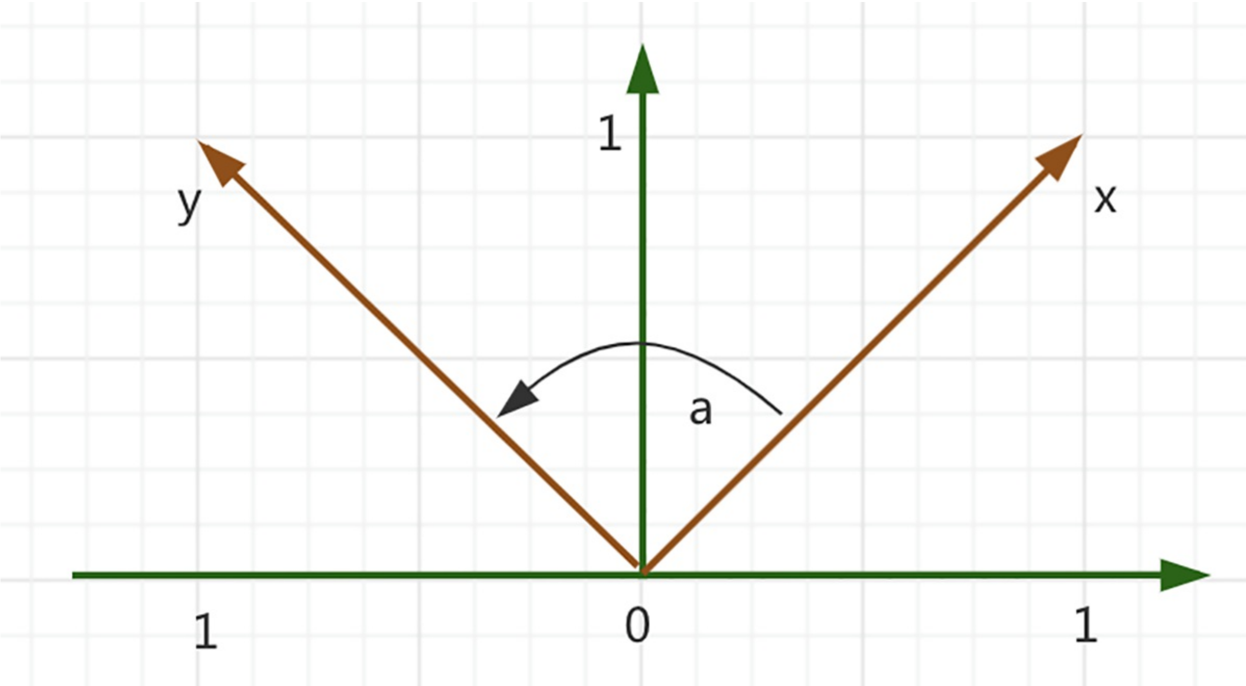
$$
\arccos \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \approx 0.32
$$

我们可以用图来更直观地表达一下。



于是，我们最后可以引出一个概念，也就是我们在一开始提到的**正交性**。如果两个向量x和y内积等于0，$\langle x, y\rangle=0$，那么x和y是正交的，这可以写成：$x \perp y$。再如果，x和y的范数都等于1，$\|x\|=\|y\|=1$，也就是说，如果它们都是单位向量，那么x和y就是标准正交的。

我们用图来更直观地表达一下。



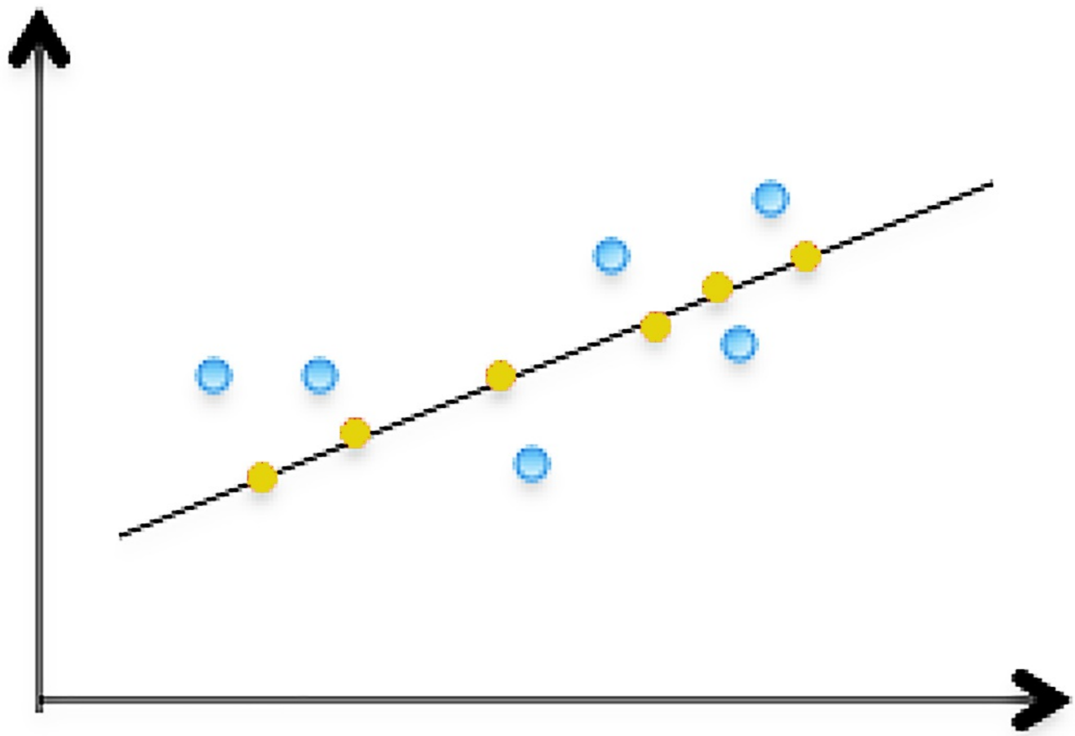
正交投影

在理论讲解之后，我们要来了解一下解析几何在实践中经常运用的概念——正交投影，它是一种重要的线性变换，在图形图像、编码理论、统计和机器学习中扮演了重要角色。

在机器学习中，数据一般都是高维的。众所周知，高维数据是很难来分析和可视化的。而且，不是所有的高维数据都是有用的，可能只有一些数据包含了大部分的重要信息。

正交投影就是高维到低维的数据投影，在第5节课线性空间中，我简单介绍了高维数据投影到低维后，我们就能在低维空间更多地了解数据集、提炼相关模式。而在机器学习中，最普遍的降维算法——PCA主成分分析，就是利用了降维的观点。

接下来，我开始讲解正交投影，在给出定义之前，先从一张图来了解会更直观。



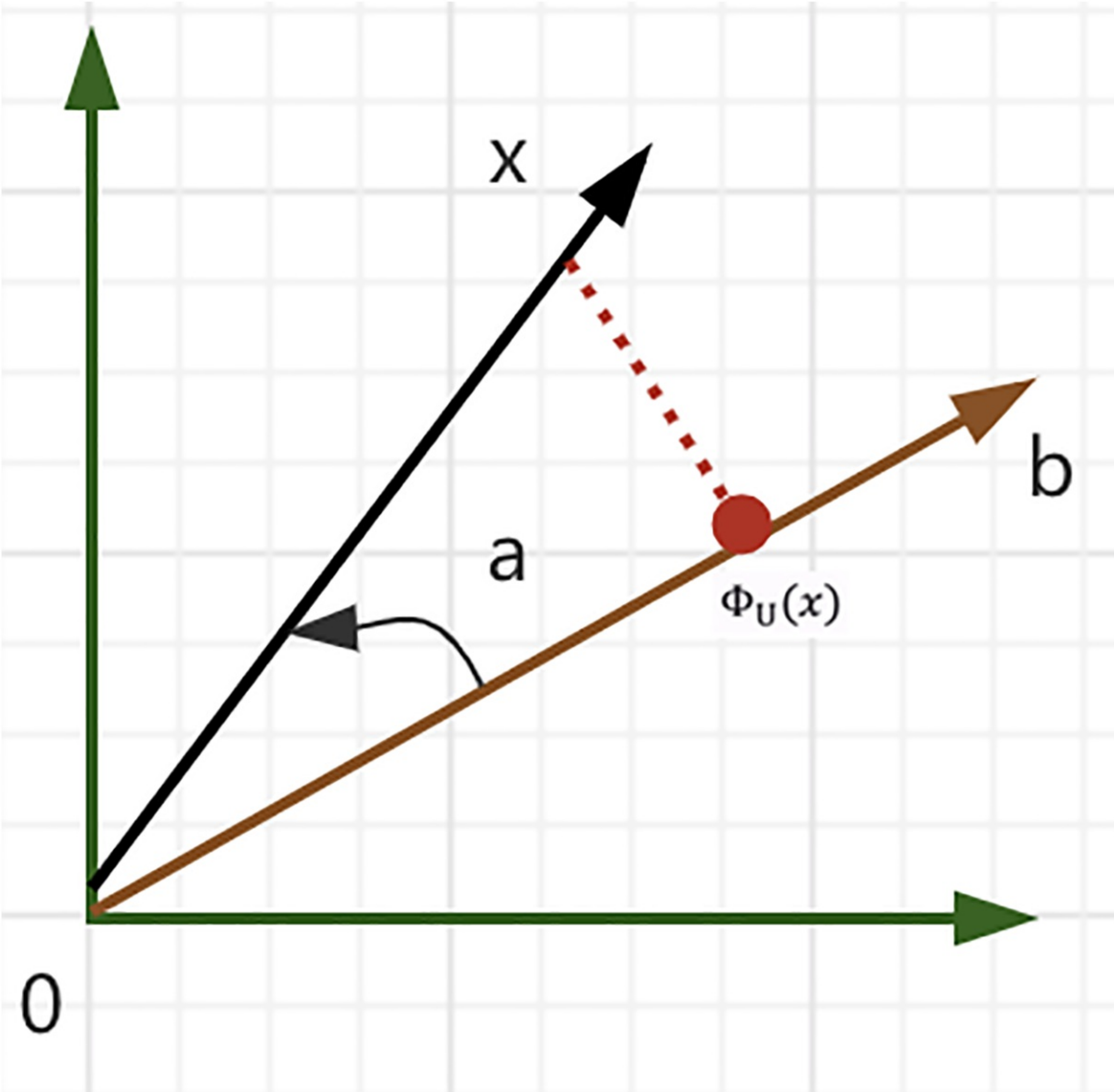
图中的蓝点是原二维数据，黄点是它们的正交投影。所以，实际降维后，在一维空间中就形成了这条黑线表示，它近似地表达了原来二维数据表示的信息。

现在我们可以来看一下投影的定义：V是一个向量空间，U是V的一个向量子空间，一个从V到U的线性映射Φ是一个投影，如果它满足：$\Phi^{2}=\Phi \circ \Phi=\Phi$。因为线性映射能够被变换矩阵表示，所以，这个定义同样适用于一个特殊类型变换矩阵：投影矩阵P_{Φ}，它也满足：$P_{\Phi}^{2}=P_{\Phi}$。

投影到一维子空间上（线）

接下来，我们来看看如何投影到一维子空间，也就是把内积空间的向量正交投影到子空间，这里我们使用点积作为内积。

假设有一条通过原点的线，这条线是由基向量b产生的一维子空间U，当我们把一个向量x投影到U时，需要寻找另一个最靠近x的向量$\Phi_{U}(x)$。还是老样子，我们通过图来看一下。



首先，投影$\Phi_{U}(x)$靠近x，也就是要找出x和$\Phi_{U}(x)$之间的$\left\|x-\Phi_{U}(x)\right\|$最小距离，从几何角度来说，就是线段$\Phi_{U}(x)-x$和$b$正交，满足等式：$\left\langle\Phi_{U}(x)-x, b\right\rangle=0$。其次，投影$\Phi_{U}(x)$必须是$U$的一个元素，也就是，基向量$b$的一个乘来产生$U$，$\Phi_{U}(x)=\lambda b$。

于是，我们可以通过三个步骤来分别得到λ、投影$\Phi_{U}(x)$和投影矩阵P_{Φ}，来把任意x映射到子空间U上。

第一步，计算λ，通过正交条件产生这样的等式：
$\left\langle x-\Phi_{U}(x), b\right\rangle=0$。因为$\Phi_{U}(x)=\lambda b$，所以它可以转变成：$\langle x-\lambda b, b\rangle=0$。

利用内积的双线性：$\langle x, b\rangle-\lambda\langle b, b\rangle=0$，我们得到：

$$
\lambda=\frac{\langle x, b\rangle}{\langle b, b\rangle}=\frac{\langle b, x\rangle}{\|b\|^{2}}
$$

然后，我们通过点积得到：

$$
\lambda=\frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}}
$$

如果$\|b\|=1$，那λ就等于$b^{T}x$。

接着第二步，是计算投影点$\Phi_{U}(x)$。从$\Phi_{U}(x)=\lambda b$，我们得到：

$$
\Phi_{U}(x)=\lambda b=\frac{\langle x, b\rangle}{\|b\|^{2}} b=\frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}} b
$$

通过点积来计算，我们就得到了$\Phi_{U}(x)$的长度：

$$
\left\|\Phi_{U}(x)\right\|=\frac{\left|b^{T} x\right|}{\|b\|^{2}}\|b\|=|\cos (a)|\|x\|\|b\| \frac{\|b\|}{\|b\|^{2}}=\mid \cos (a)\|x\|
$$

这里的a，是x和b之间的夹角。

最后第三步，是计算投影矩阵P_{Φ}，投影矩阵是一个线性映射。所以，我们可以得到：$\Phi_{U}(x)=P_{\Phi}x$，通过$\Phi_{U}(x)=\lambda b$，我们可以得到：

$$

\Phi_{U}(x)=\lambda b=b \lambda=b \frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}}=\frac{b b^{T}}{\|b\|^{2}} x
$$

这里，我们立即可以得到投影矩阵P_{Φ}的计算等式：

$$
P_{\Phi}=\frac{b b^{T}}{\|b\|^{2}}
$$

本节小结

这一节课覆盖的知识点有点多，因为要把解析几何的知识点，浓缩到核心的几个点来讲解是一项艰巨的任务。不过不要怕，前面的几个知识点都是为这一节的重点“正交投影”来铺垫的。范数，被用来度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小，而内积让我们很直观地了解一个向量的长度、两个向量之间的距离和角度，以及判断向量之间是否是正交的。

所以，希望你能掌握范数和内积的理论知识，并把它和正交投影结合，运用在一些实践应用场景中，比如：3D图形图像的坐标变换、数据压缩，以及机器学习的降维。

线性代数练习场

请用之前学到的正交投影的投影矩阵算法，来计算一条线上的投影矩阵P_{Φ}。

这条线通过原点，由基$b=\left[\begin{array}{lll}1 & 2 & 2\end{array}\right]^{T}$产生，$P_{\Phi}$计算后，再通过一个$x$来验证一下它是否在$b$产生的子空间中，我们取$x=\left[\begin{array}{lll}1 & 1 & 1\end{array}\right]^{T}$。

欢迎在留言区晒出你的运算结果，我会及时回复。同时，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友，一起讨论、学习。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数，今天我们要讲的内容是“解析几何”。

前面所有章节我们都是围绕向量、矩阵，以及向量空间来展开的。但这一节课有点不一样，我要讲的是解析几何，它使得向量从抽象走向了具象，让向量具有了几何的含义。比如，计算向量的长度、向量之间的距离和角度，这在机器学习的主成分分析PCA中是非常有用的。

范数

讲解析几何我们得从“范数”开始讲起。

因为很多人看到几何向量的第一反应就是，它是从原点开始的有向线段，并且向量的长度是这个有向线段的终端和起始端之间的距离。而范数，就是被用来度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小的。

现在，我们先来看一下范数的数学定义：一个向量空间V上的一个范数就是一个函数，它计算V中的每一个向量x的长度，用符号来表示的话就是：$\|x\| \in R$，它满足三种性质：

1. 正齐次性： 如果输入参数扩大正$λ$倍，其对应的函数也扩正大倍。设$λ \in R$，$x \in V$，$\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$；
2. 次可加性：类似三角不等式，两边之和大于第三边。设$x,y \in V$，$\|x+y\| \leq\|x\|+\|y\|$；
3. 正定性：向量x的长度一定大于等于零。$\|x\| \geq 0$。

看到这里，你也许会问，范数似乎和以前老师教的**向量的模**一样啊。先别急，它们还真有那么一点关系，你听我慢慢道来。由于范数是度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小的，所以它和向量空间维度是有关系的，于是，我们可以把范数写成这样的模式来区分不同维度的大小计算：$L_{1}, L_{2}, \ldots, L_{\infty}$。

- L_{1}范数：曼哈顿范数，也叫曼哈顿距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{1}=\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}\right|
$$

- L_{2}范数：欧式范数，也叫欧式距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2}}
$$

- L_{∞}范数：切比雪夫范数，也叫切比雪夫距离，设$x \in R^{n}$，得到下面这个表达式。

$$
\|x\|_{\infty}=\max \left(\left|x_{1}\right|,\left|x_{2}\right|, \ldots,\left|x_{n}\right|\right)
$$

我们发现，向量的模和L_{2}范数的计算方式都是一样的，都表示的是欧氏距离，所以，我们可以简单地认为向量的模等于L_{2}范数。而其他的范数模式和向量的模则没有任何关系。

内积

学习解析几何时，我们必须掌握的第二个概念就是内积。

如果说范数是模式，是用来描述向量长度或大小的概念性表达，那么内积可以让我们很直观地了解一个向量的长度、两个向量之间的距离和角度，它的一个主要目的就是判断向量之间是否是正交的，正交这个概念我们会在后面讲解。

点积

我们从特殊到一般，先来看点积，它和第三篇矩阵中说的“普通矩阵乘”形式一样，点积是特殊的内积，为什么说它特殊呢？那是因为在表示两个向量之间的距离时，它就是大家熟悉的欧式距离，点积可以表示成这样的形式：

$$
x^{T} y=\sum_{i=1}^{n} x_{i} y_{i}
$$

其他内积

除了点积外，我们再来看另一个不同的内积：设内积空间V是R^{2}，定义内积$\langle x, y\rangle=x_{1} y_{1}-(x_{1} y_{2}+x_{2} y_{1})+2 x_{2} y_{2}$，一看便知这个和点积完全不同。

内积空间

最后，我们再来看一般内积和内积空间。因为解析几何关注的是向量的长度、两个向量之间的距离和角度，所以，我们要在原来向量空间上加一个额外的结构，这个额外结构就是内积，而加了内积的向量空间，我们就叫做内积空间。

为了表达方便，我们可以把内积写成$\langle\ \cdot,\cdot \rangle$这样的形式，那么内积空间$V$可以被表示成这样：$(V,\langle\ \cdot,\cdot \rangle)$。这时，如果一般内积由点积来表达，那这个向量空间就变成了更具体的欧式向量空间。

接下来看下内积空间有什么性质？我们定义一个内积空间V和它的元素x、y、z，以及一个$c \in R$：

- 满足对称性：x和y的内积等于y和x的内积，$\langle x, y\rangle=\langle y, x\rangle$；

- 满足线性性：x和$y+cz$的内积等于，x和y的内积，与x和z的内积乘以c后的和，$\langle x, y+c z\rangle=\langle x, y\rangle+c\langle x, z\rangle$；

- 满足正定性：x和y的内积大于等于零，$\langle x, y\rangle \geq 0$。

对称正定矩阵

内积还定义了一类矩阵，这类矩阵在机器学习中很重要，因为它可以被用来判定多元函数极值，而在深度学习中，它更是被用来获取最小化损失函数，我们把这类矩阵叫做对称正定矩阵。

对称正定矩阵的定义是：如果一个对称矩阵A属于方阵$R^{n×n}$，对任意非零向量x，都有$x^{T} A x>0$，那么A就是对称正定矩阵。

我们来看两个例子，判断它们是不是对称正定矩阵。

第一个例子，请你回答下面这个矩阵是对称正定矩阵吗？

$$
A=\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 5
\end{array}\right]
$$

答案：是的，它是对称正定矩阵。因为$x^{T} A x>0$。

$$
x^{T} A x=\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 5
\end{array}\right]\left[\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right]=(3 x_{1}+2 x_{2})^{2}+x_{2}^{2}>0
$$

第二个例子，请你看下面这个矩阵是对称正定矩阵吗？

$$
A=\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 3
\end{array}\right]
$$

答案：不是的，它只是对称矩阵。因为$x^{T} A x$可能小于0。

$$
x^{T} A x=\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 3
\end{array}\right]\left[\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right]=(3 x_{1}+2 x_{2})^{2}-x_{2}^{2}
$$

长度、距离和角度

前面我们通过范数讲了向量的长度，但从内积的角度来看，我们发现，内积和范数之间有着千丝万缕的关系。我们来看看下面这个等式。

$$
\|x\|=\sqrt{\langle x, x\rangle}
$$

从这个等式我们发现，内积可以用来产生范数，确实是这样。不过，不是每一个范数都能被一个内积产生的，比如：曼哈顿范数。接下来，我们还是来关注能由内积产生的范数上，从不同的角度来看看几何上的长度、距离和角度的概念。

我们先用内积来计算一个**向量的长度**，比如：向量$x=[\begin{array}{ll}1 & 1\end{array}]^{T}$，我们可以使用点积来计算，计算后得出$x$的范数是$\sqrt{2}$，具体计算过程是这样的：$\|x\|=\sqrt{x^{T} x}=\sqrt{1^{2}+1^{2}}=\sqrt{2}$。

接着，我们再来看一下**向量之间的距离**，一个内积空间V，$(V,\langle\ \cdot,\cdot \rangle)$，$x$和$y$是它的两个向量，那么$x$和$y$之间的距离就可以表示成：$d(x, y)=\|x-y\|=\sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$。

如果用点积来计算x和y之间的距离，那这个距离就叫做欧式距离。

再接着，来看看两个**向量之间的角度**。我们使用柯西-施瓦茨不等式（Cauchy-Schwarz Inequality）来表示内积空间中两个向量x和y之间的角度：a。

$$
-1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \leq 1
$$

取值是从-1到1之间，那么角度就是从0到π之间，我们用cos来表示就是：

$$
\cos (a)=\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}
$$

其中a就是角度，a的角度取值是0到π之间。我们很容易就能发现，其实两个向量之间的角度，就是告诉了我们两个向量之间方向的相似性。例如：x和$y=4x$，使用点积来计算它们之间的角度是0，也就是说它们的方向是一样的，y只是对x扩大了4倍而已。

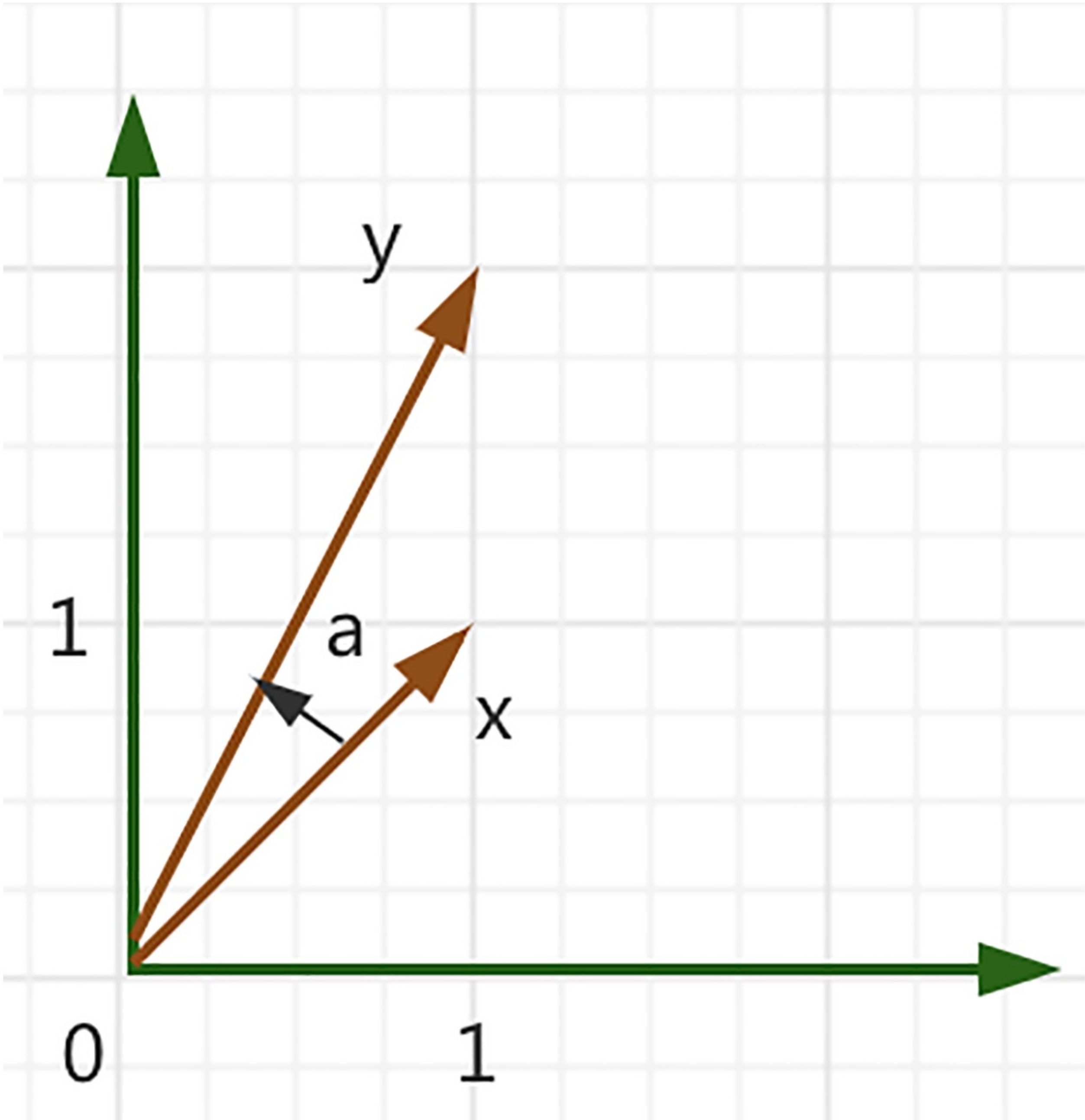
现在，我们通过一个例子，再来更清楚地看下两个向量之间角度的计算，设$x=[\begin{array}{ll}1 & 1\end{array}]^{T}$，$y=[\begin{array}{ll}1 & 2\end{array}]^{T}$，使用点积来计算，我们得出：

$$
\cos (a)=\frac{\langle x, y\rangle}{\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}}=\frac{x^{T} y}{\sqrt{x^{T} x y^{T} y}}=\frac{3}{\sqrt{10}}
$$

那么，这两个向量之间的角度如下。

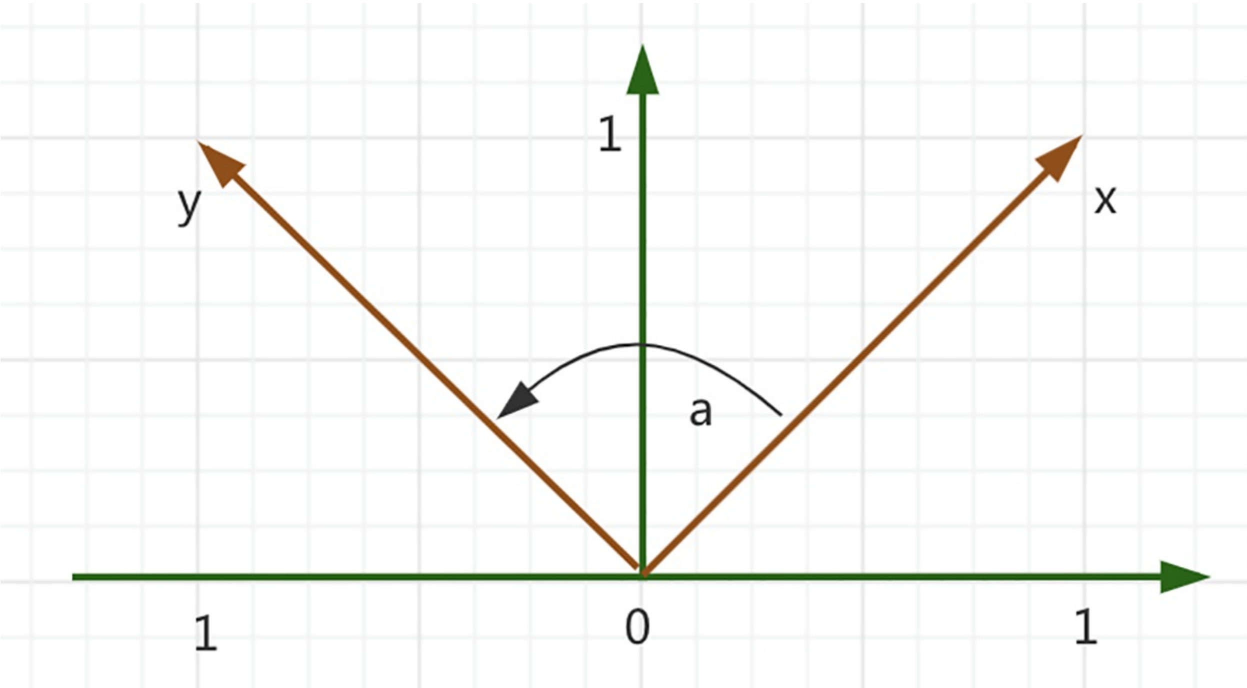
$$
\arccos \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \approx 0.32
$$

我们可以用图来更直观地表达一下。



于是，我们最后可以引出一个概念，也就是我们在一开始提到的**正交性**。如果两个向量x和y内积等于0，$\langle x, y\rangle=0$，那么x和y是正交的，这可以写成：$x \perp y$。再如果，x和y的范数都等于1，$\|x\|=\|y\|=1$，也就是说，如果它们都是单位向量，那么x和y就是标准正交的。

我们用图来更直观地表达一下。



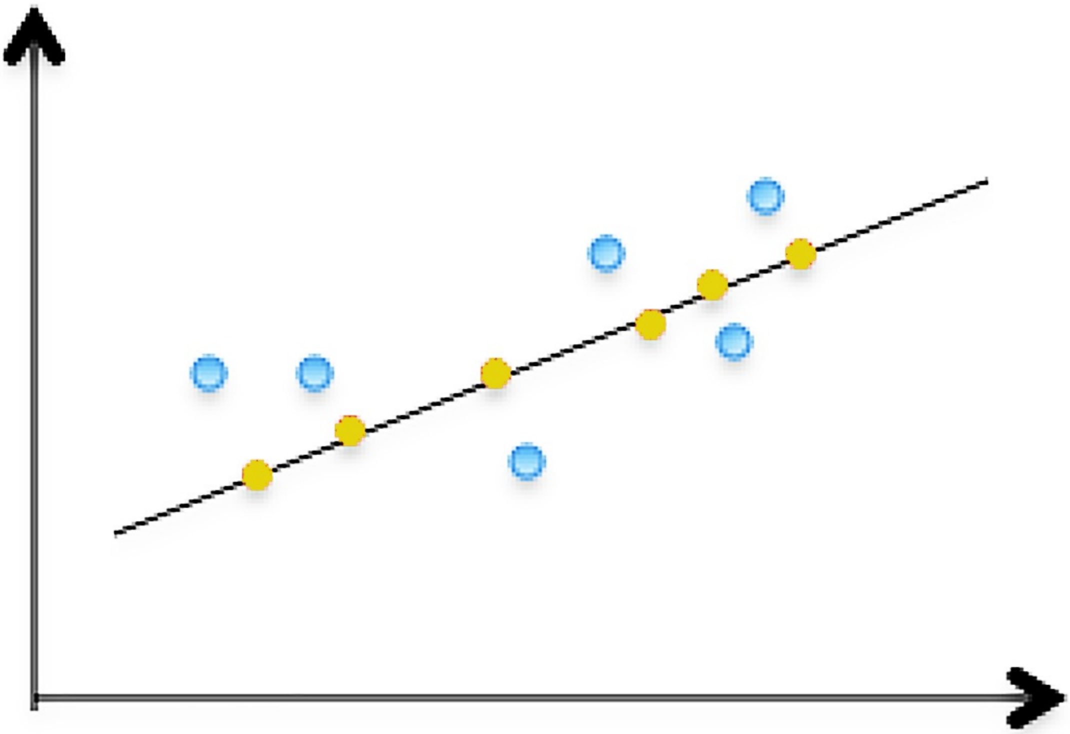
正交投影

在理论讲解之后，我们要来了解一下解析几何在实践中经常运用的概念——正交投影，它是一种重要的线性变换，在图形图像、编码理论、统计和机器学习中扮演了重要角色。

在机器学习中，数据一般都是高维的。众所周知，高维数据是很难来分析和可视化的。而且，不是所有的高维数据都是有用的，可能只有一些数据包含了大部分的重要信息。

正交投影就是高维到低维的数据投影，在第5节课线性空间中，我简单介绍了高维数据投影到低维后，我们就能在低维空间更多地了解数据集、提炼相关模式。而在机器学习中，最普遍的降维算法——PCA主成分分析，就是利用了降维的观点。

接下来，我开始讲解正交投影，在给出定义之前，先从一张图来了解会更直观。



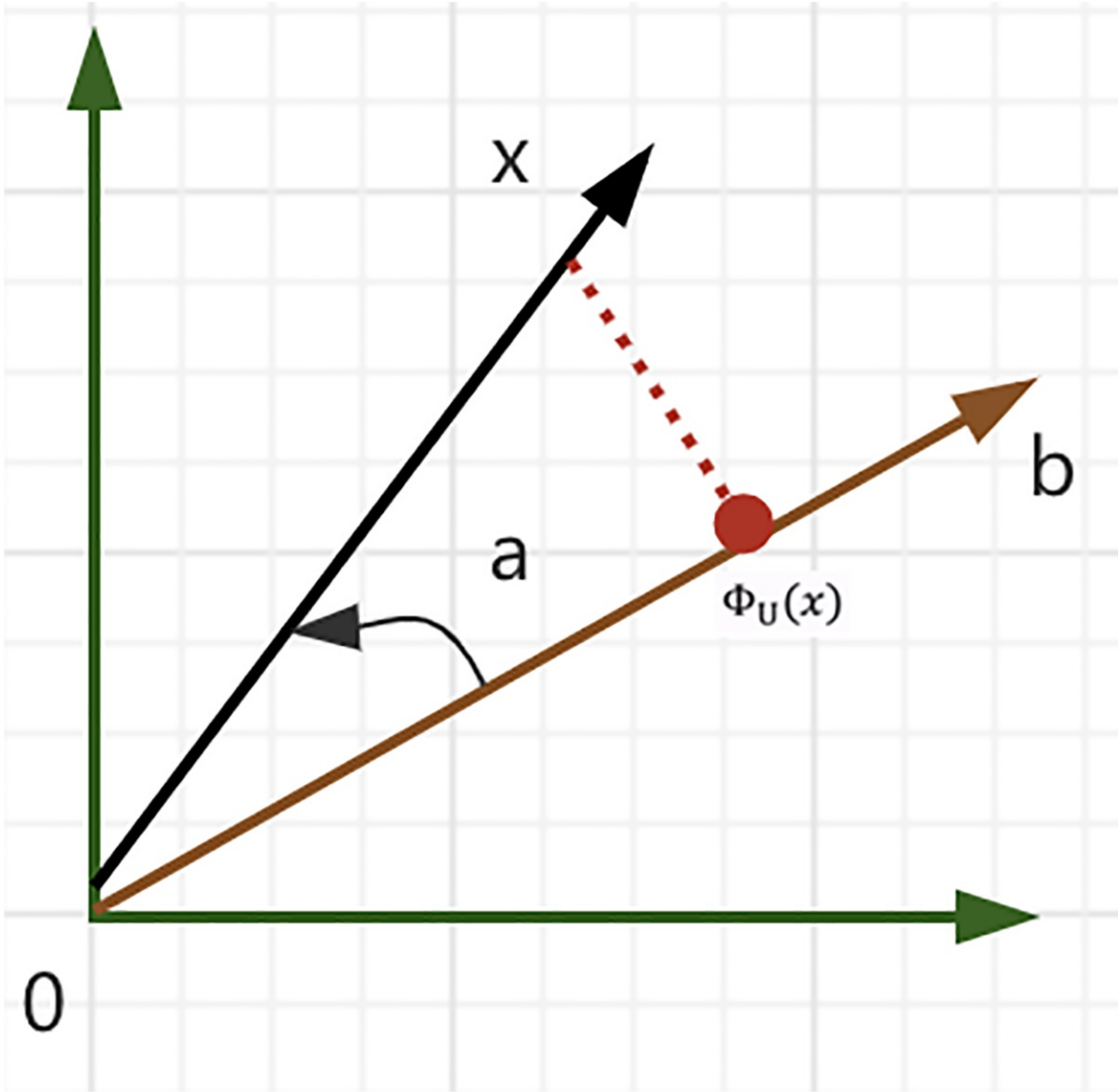
图中的蓝点是原二维数据，黄点是它们的正交投影。所以，实际降维后，在一维空间中就形成了这条黑线表示，它近似地表达了原来二维数据表示的信息。

现在我们可以来看一下投影的定义：V是一个向量空间，U是V的一个向量子空间，一个从V到U的线性映射Φ是一个投影，如果它满足：$\Phi^{2}=\Phi \circ \Phi=\Phi$。因为线性映射能够被变换矩阵表示，所以，这个定义同样适用于一个特殊类型变换矩阵：投影矩阵P_{Φ}，它也满足：$P_{\Phi}^{2}=P_{\Phi}$。

投影到一维子空间上（线）

接下来，我们来看看如何投影到一维子空间，也就是把内积空间的向量正交投影到子空间，这里我们使用点积作为内积。

假设有一条通过原点的线，这条线是由基向量b产生的一维子空间U，当我们把一个向量x投影到U时，需要寻找另一个最靠近x的向量$\Phi_{U}(x)$。还是老样子，我们通过图来看一下。



首先，投影$\Phi_{U}(x)$靠近x，也就是要找出x和$\Phi_{U}(x)$之间的$\left\|x-\Phi_{U}(x)\right\|$最小距离，从几何角度来说，就是线段$\Phi_{U}(x)-x$和$b$正交，满足等式：$\left\langle\Phi_{U}(x)-x, b\right\rangle=0$。其次，投影$\Phi_{U}(x)$必须是$U$的一个元素，也就是，基向量$b$的一个乘来产生$U$，$\Phi_{U}(x)=λb$。

于是，我们可以通过三个步骤来分别得到$λ$、投影$\Phi_{U}(x)$和投影矩阵P_{Φ}，来把任意x映射到子空间U上。

第一步，计算$λ$，通过正交条件产生这样的等式：
$\left\langle x-\Phi_{U}(x), b\right\rangle=0$。因为$\Phi_{U}(x)=λb$，所以它可以转变成：$\langle x-\lambda b, b\rangle=0$。

利用内积的双线性：$\langle x, b\rangle-\lambda\langle b, b\rangle=0$，我们得到：

$$
\lambda=\frac{\langle x, b\rangle}{\langle b, b\rangle}=\frac{\langle b, x\rangle}{\|b\|^{2}}
$$

然后，我们通过点积得到：

$$
\lambda=\frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}}
$$

如果$\|b\|=1$，那$λ$就等于$b^{T}x$。

接着第二步，是计算投影点$\Phi_{U}(x)$。从$\Phi_{U}(x)=λb$，我们得到：

$$
\Phi_{U}(x)=\lambda b=\frac{\langle x, b\rangle}{\|b\|^{2}} b=\frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}} b
$$

通过点积来计算，我们就得到了$\Phi_{U}(x)$的长度：

$$
\left\|\Phi_{U}(x)\right\|=\frac{\left|b^{T} x\right|}{\|b\|^{2}}\|b\|=|\cos (a)|\|x\|\|b\| \frac{\|b\|}{\|b\|^{2}}=\mid \cos (a)\|x\|
$$

这里的a，是x和b之间的夹角。

最后第三步，是计算投影矩阵P_{Φ}，投影矩阵是一个线性映射。所以，我们可以得到：$\Phi_{U}(x)=P_{\Phi}x$，通过$\Phi_{U}(x)=λb$，我们可以得到：

$$

$$\Phi_{U}(x)=\lambda b=b \lambda=b \frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}}=\frac{b b^{T}}{\|b\|^{2}} x$$

这里，我们立即可以得到投影矩阵P_{Φ}的计算等式：

$$P_{\Phi}=\frac{b b^{T}}{\|b\|^{2}}$$

本节小结

这一节课覆盖的知识点有点多，因为要把解析几何的知识点，浓缩到核心的几个点来讲解是一项艰巨的任务。不过不要怕，前面的几个知识点都是为这一节的重点“正交投影”来铺垫的。范数，被用来度量某个向量空间或矩阵中的每个向量的长度或大小，而内积让我们很直观地了解一个向量的长度、两个向量之间的距离和角度，以及判断向量之间是否是正交的。

所以，希望你能掌握范数和内积的理论知识，并把它和正交投影结合，运用在一些实践应用场景中，比如：3D图形图像的坐标变换、数据压缩，以及机器学习的降维。

线性代数练习场

请用之前学到的正交投影的投影矩阵算法，来计算一条线上的投影矩阵P_{Φ}。

这条线通过原点，由基$b=\left[\begin{array}{lll}1 & 2 & 2\end{array}\right]^{T}$产生，$P_{\Phi}$计算后，再通过一个$x$来验证一下它是否在$b$产生的子空间中，我们取$x=\left[\begin{array}{lll}1 & 1 & 1\end{array}\right]^{T}$。

欢迎在留言区晒出你的运算结果，我会及时回复。同时，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友，一起讨论、学习。