你好，我是朱维刚。欢迎你跟我学习线性代数。今天我们要讲的是“线性代数这门课的基本概念”。

线性代数可以运用在很多领域，比如：工程学、计算机科学、经济学、信号处理等等。我们来看一个在经济学中常见的例子：消费矩阵。

假设有n个行业，比如：化学、食品和石油。制造一单位的某化学品需要0.2单位的另一类化学品，0.3单位的食品，以及0.4单位的石油，而制造一单位的某食品和某石油也同样分别需要这三类产品的输入，于是，我们就能构造这样一个消费矩阵：

$$\left|\begin{array}{l}
\text{化学输出} \\
\text{食品输出} \\
\text{石油输出}
\end{array}\right|=\left[\begin{array}{lll}
0.2 & 0.3 & 0.4 \\
0.4 & 0.4 & 0.1 \\
0.5 & 0.1 & 0.3
\end{array}\right]\left|\begin{array}{l}
\text{化学输入} \\
\text{食品输入} \\
\text{石油输入}
\end{array}\right|$$

当然，我们也可以用一般的线性方程组$Ax=b$的形式来表达：

$$\left\{\begin{array}{l}
0.2 x_{1}+0.3 x_{2}+0.4 x_{3}=b_{1} \\
0.4 x_{1}+0.4 x_{2}+0.1 x_{3}=b_{2} \\
0.5 x_{1}+0.1 x_{2}+0.3 x_{3}=b_{3}
\end{array}\right.$$

从本质上来说，消费矩阵解决的是输入和输出之间的关系。不仅如此，线性代数在现实生活中的运用还有很多，比如，我们可以借用特征值和特征向量，预测若干年后的污水水平；在密码学中，可以使用矩阵及其逆矩阵对需发送的消息加密；在机器学习中，可以使用线性方程组的共轭迭代法来训练神经网络，等等。

刚才我分别用矩阵和线性方程组的形式给出了消费矩阵，当然，在实际生活中，你可以灵活选择最有效的方式来解决问题。

我们可以看到，线性方程组可以表示成一般形式，也就是你初中学到的$A x=b$的形式，也可以表示成矩阵形式。矩阵是由向量组合而成的，比如刚才例子中的系数矩阵的每一行都是一个**行向量**，每一列都是一个**列向量**。

$$\begin{array}{l}
\end{array}\left[\begin{array}{lll}
0.2 & 0.3 & 0.4 \\
0.4 & 0.4 & 0.1 \\
0.5 & 0.1 & 0.3
\end{array}\right] \begin{array}{l}
\end{array}$$

从这里我们能看出，**向量**其实就会是线性代数最基础的核心。数学对抽象思维要求很高，简单来说，抽象思维就是抽取同类事物的共性。所以，在进入具体的线性方程组的主题前，我要先从数学抽象的角度说一说代数和线性代数，这也是深入理解后面内容的前提。

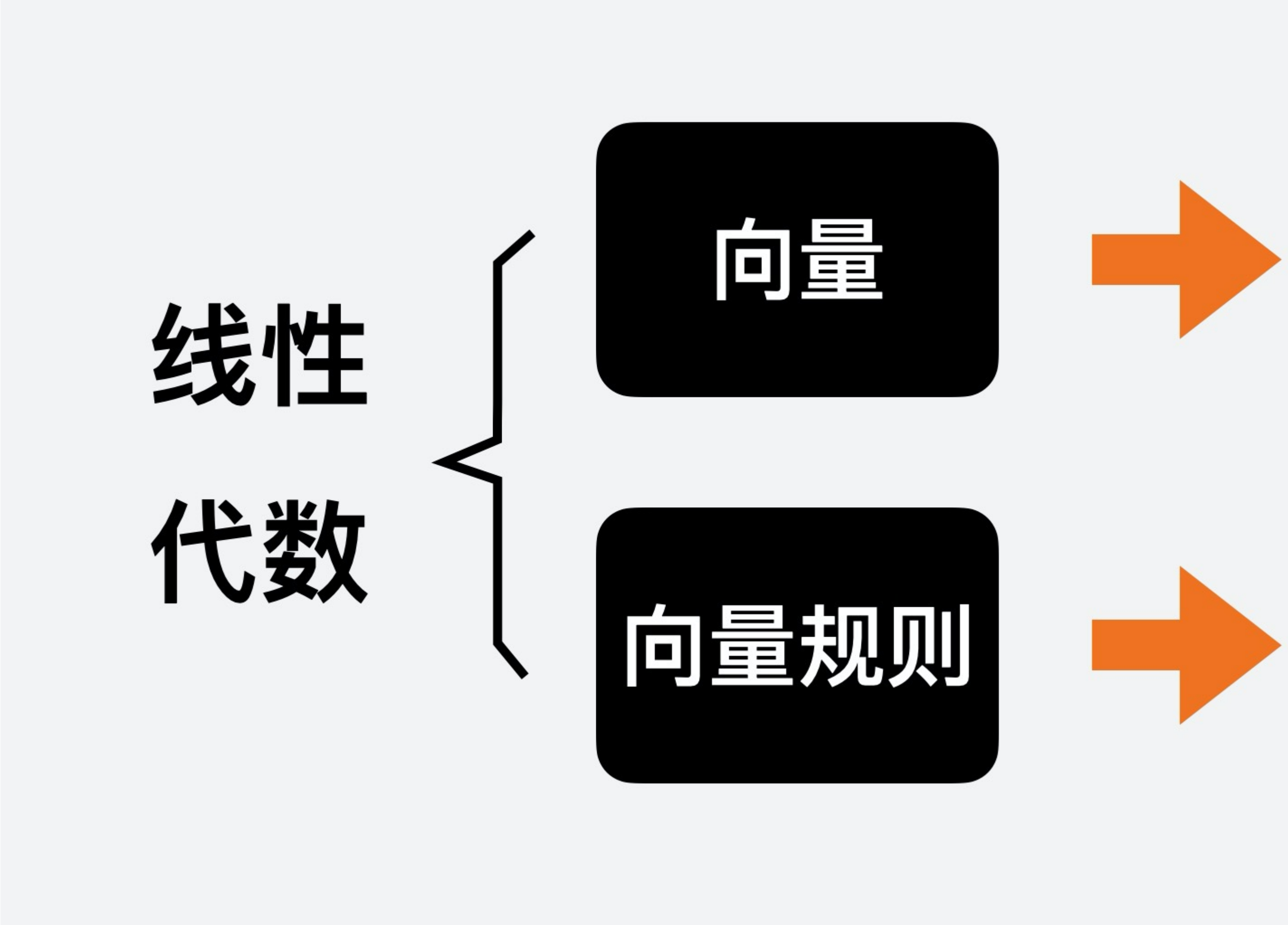
代数和线性代数的基本概念

那什么是代数呢？百度百科的解释是这样的：

> 代数是研究数、数量、关系、结构与代数方程（组）的通用解法及其性质的数学分支。

但我觉得这个解释其实没有说出**代数**这个概念的重点。我的理解是这样的：**代数是构造一系列对象和一系列操作这些对象的规则。**

所以你看，代数这个概念的核心就两点，**对象**和**操作对象的规则**，这样就很好理解了吧？那有了代数的定义，线性代数就很好定义了。我们类比来看，线性代数其实就是向量，以及操作这些向量的规则。这里，向量映射到对象，向量的规则映射到对象的规则，因此线性代数是代数的具像化表达。

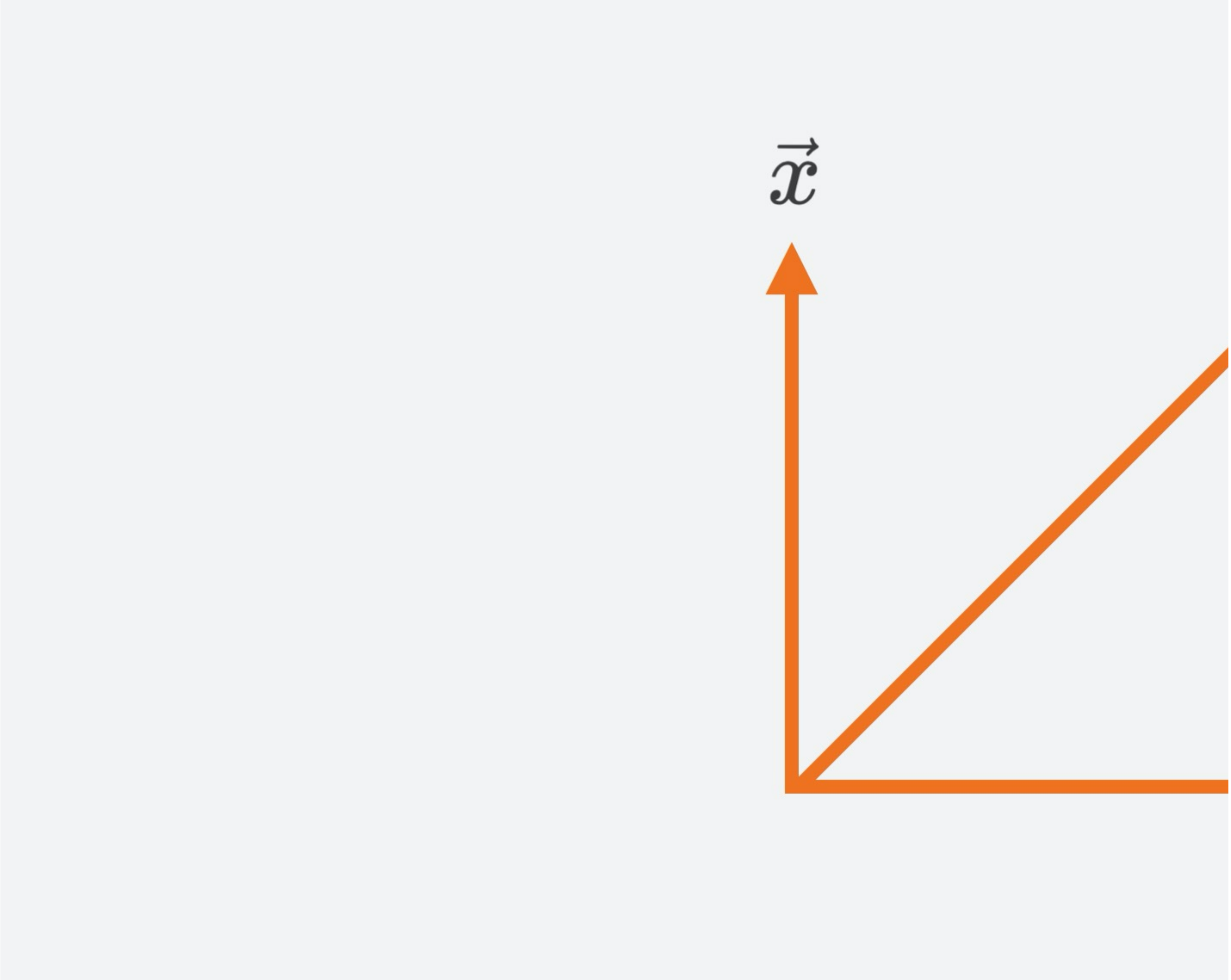


向量的基本概念

那什么是**向量**呢？从样子来看，向量其实就是由字母加上它上面的箭头来表示的，比如我们一版会写成$\vec{x}$。我估计你在高中或大学里已经接触过“几何向量”。那么，下面我用更抽象的数学观点来给你解释一下。

向量，也叫欧几里得向量（Euclidean Vector），其实就是能够互相相加、被标量乘的特殊对象。而标量也叫“无向量”，它只有数值大小，没有方向。怎么理解呢？我们来看一些向量的例子，通过这些例子来深入理解向量的概念。

几何向量是有向线段，在二维空间（也就是平面）中，两个几何向量能够相加，比如，向量x加上向量y等于向量z，$\vec{x}+\vec{y}=\vec{z}$，x向量也能被一个标量乘。再比如，标量λ乘向量x结果也是向量，$\lambda \vec{x}, \lambda \in R$。几何向量通过大小和方向来简化向量的表达，所以，一般数学课程一开始都会拿几何向量来进行举例。



多项式其实也是向量。两个多项式能够相加，它也能够被标量乘，结果也是多项式。

矩阵的一行或一列也是向量。就比如下面这样形式的向量。

$$x \in R^{3}: x=\left[\begin{array}{l}
1 \\
2 \\
3
\end{array}\right]$$

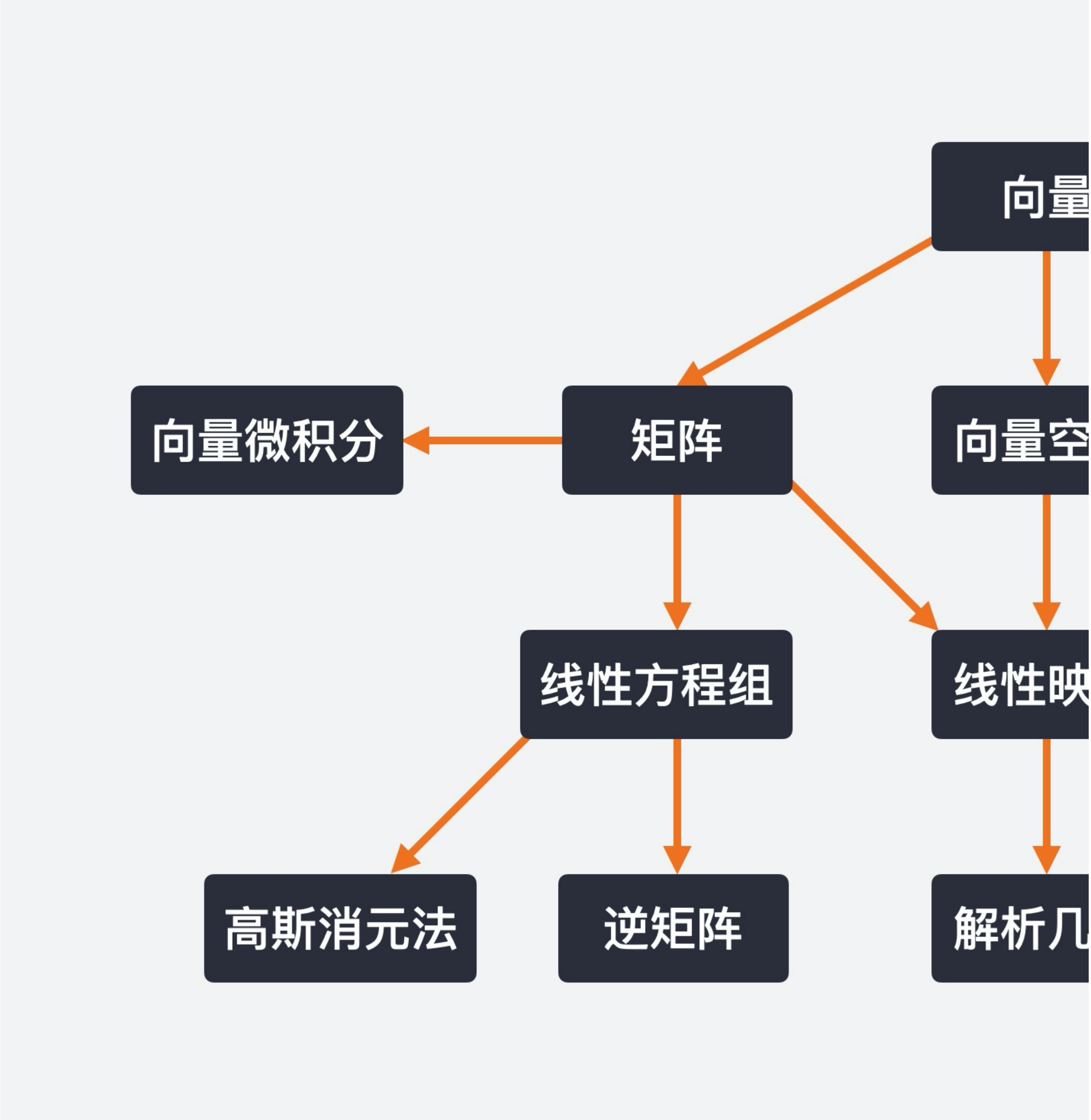
两个向量能够相加，它也能够被标量乘，结果也是向量。它和现代大部分的编程语言中的数组一致，而且数组的运算简化了向量操作的算法实施。

矢量图、音频信号也是向量。它们都能被一系列数字表示，比如，在音频信号处理中，常用到数据增强的方法，通过向量的操作就能到达目标。

看了这些向量例子，不知道你现在有点感觉了吗？其实，线性代数的本质就是**寻找向量之间的相似性**，比如在做分类时，我们常常需要估算不同样本之间的相似性度量（Similarity Measurement），这时通常采用的方法就是计算样本间的“距离”（Distance）。

可以看出来，向量非常重要，我们后面很多内容都是从向量延伸而来的，比如矩阵和求解线性方程组。

下面我用一张图来表达和向量有关的所有概念，也就是线性代数所有的核心内容，其中大部分内容你都会学到，希望通过这个图，你对线性代数有个大概的认知。相信学习完所有课程后，你再回过头来看时，肯定会有一些新的认知。



从图中最左侧这一列，我们可以看出，向量组合成矩阵，矩阵可以表示成线性方程组，而线性方程组可以通过高斯消元法求解，也可以求逆矩阵。

同时，向量又可以组合成向量空间，向量空间和矩阵都可以做线性映射或者线性变换，线性映射在实践中可以用在解析几何和分类问题中。

而且，向量和线性独立是强相关的，也就是说，线性独立指的是向量的线性独立，而线性独立又可以引出能够生成整个空间的基（Basis），基在实践中可以用在分类和降维中。

这里，我再额外提一个非常重要的、在数学中经常用到的概念——**封闭性**，或者俗称**闭包**（Closure）。封闭性的定义是，如果我们要对某个集合的成员进行一种运算，生成的仍然是这个集合的成员，那这个集合就可以称为在这个运算下闭合。

我为什么要提这个概念呢？这是因为，向量的线性运算是封闭的，也就是说向量的加法、数乘结果仍属于向量空间，即**向量的任意线性组合仍属于向量空间**。

线性方程组的应用

到这里，相信你已经对线性代数、向量这些基本概念有了一个应试教育之外的、新的认识，接下来我就切入本篇的最重点的内容了，那就是线性方程组。

线性方程组在线性代数中有着举足轻重的地位，许多现实生活中的问题都可以表达成线性方程组。关于线性方程组的概念，我想不用我多说了，这是初中的内容，你应该已经非常了解了。现在我举几个例子来说一说，线性方程组在现实生活中的运用，让你从应用的角度再理解下线性方程组。

第一个例子是计算旅游团人数。假设，一个旅游团由孩子和大人组成，去程时他们一起坐大巴，每个孩子的票价3元，大人票价3.2元，总共花费118.4元。回程时一起坐火车，每个孩子的票价3.5元，大人票价3.6元，总共花费135.2元。请问这个旅游团中有多少孩子和大人？

假设小孩人数为x_{1}，大人人数为x_{2}，于是我们得到了一个方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
3 x_{1}+3.2 x_{2}=118.4 \\
3.5 x_{1}+3.6 x_{2}=135.2
\end{array}\right.$$

使用初中的解二元一次方程组的知识，我们可以得出这个方程组的解是：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}=16 \\

x_{2}=22
\end{array}\right.$$

这个就是典型的线性方程组的现实例子。当然，我们也可以用矩阵来解这个方程组。你可能会说，这问题很简单啊，为什么还要用矩阵来解呢？整这么复杂有必要吗？别着急，这里我先卖个关子，具体我会在下一讲“矩阵篇”中进行讲解。

第二个例子是找出公司的最优生产计划。我们从公司的角度来看一看，假设生产苹果的几大主流产品：iPhone、Macbook、iMac，以及iWatch四款产品，需要用到芯片、摄像头模组、电池、IPS屏幕四大类资源，产品分别用 $N_{1}，N_{2}，N_{3}，N_{4}$来表示，资源分别用$R_{1}，R_{2}，R_{3}，R_{4}$来表示。

生产一单位的产品 N_{1}，也就是iPhone，需要$a_{11}，a_{21}，a_{31}，a_{41}$的资源，也就是芯片、摄像头模组、电池和IPS屏幕资源，其他产品也是一样。

我们的目标是在资源有限的情况下，找到一个最优生产计划，使每个产品的产出数量最大化。也就是说，在总共有b_{i}个单位资源R_{i}可用情况下，每个产品N_{i} 有多少单元 x_{i}应该被生产。因此，我们可以得到一个下面这样的线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+a_{13} x_{3}+a_{14} x_{4}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+a_{23} x_{3}+a_{24} x_{4}=b_{2} \\
a_{31} x_{1}+a_{32} x_{2}+a_{33} x_{3}+a_{34} x_{4}=b_{3} \\
a_{41} x_{1}+a_{42} x_{2}+a_{43} x_{3}+a_{44} x_{4}=b_{4}
\end{array}\right.$$

于是，我们得到线性方程组的通用表达方式，$x_{1}，\cdots ，x_{n}$ 是未知变量，每个满足方程组表达式的n元组$(x_{1}，\cdots ，x_{n})$都是它的解。

$$\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.$$

线性方程组的解是有几何意义的，从几何角度出发，有利于你理解和记忆线性方程组解的条件，接下来我们先来看看线性方程组解的几种情况，之后我再具体讲解线性方程组的几何表达。

首先我们来看**无解**的情况。假设有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
2 x_{1}+3 x_{3}=1
\end{array}\right.$$

第一行和第二行相加后，我们可以得到$2 x_{1}+3 x_{3}=5$，很明显，这个方程和第三行是矛盾的，所以，这个线性方程组无解。

其次是**只有一个解**的情况。假设有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
x_{2}+x_{3}=2
\end{array}\right.$$

这个方程组求解很简单，第一行乘以-1和第二行相加得到$-2x_{2}+x_{3}=-1$，再乘以-1后和第三行相加得到$x_{1}=1$，第一行和第二行相加，得到$2 x_{1}+3 x_{3}=5$，代入x_{1}后，得到$x_{3}=1$，最后，我们可以得到$(1,1,1)$是这个线性方程组的唯一解。

最后是**无穷解**的情况。我们有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
2 x_{1}+3 x_{3}=5
\end{array}\right.$$

方程组第一行和第二行相加等于第三行，从这个角度来说，我们就可以定义一个自由变量$x_{3}=a$，a属于实数，那方程组的解就是：

$$\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2} a, \frac{1}{2}+\frac{1}{2} a, a\right)$$

其中a属于实数，所以，这就包含了无穷多个解。

线性方程组的几何表达

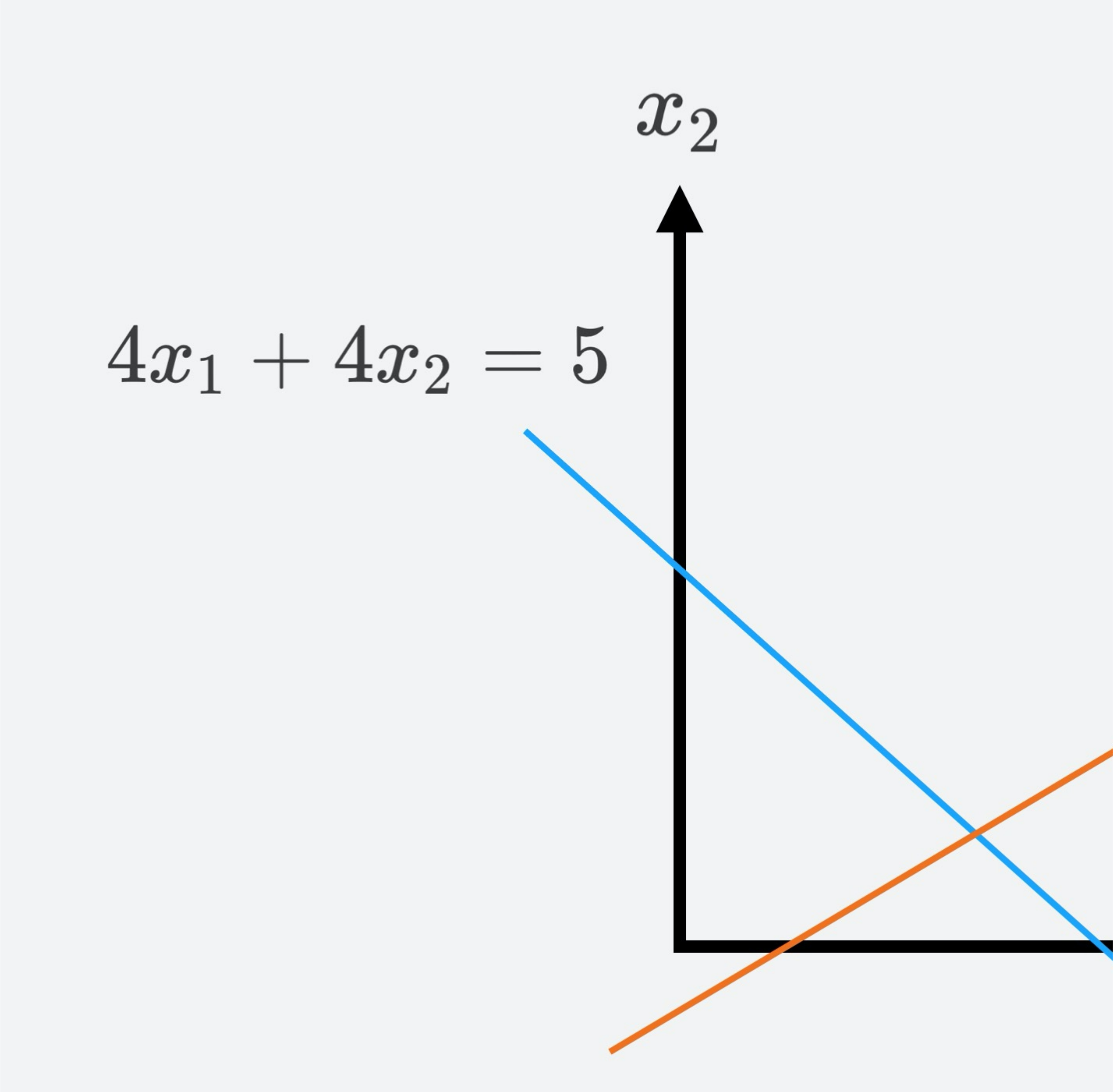
好了，了解了线性方程组解的三种情况，现在我们是时候从几何的角度来看一看线性方程组和它的解了，从几何意义出发有利于你更直观地理解线性方程组。

在一个只有两个变量x_{1},x_{2}的线性方程组中，我们定义一个x_{1},x_{2}平面。在这个平面中，每个线性方程都表达了一条直线。由于线性方程组的唯一解必须同时满足所有的等式，所以，线性方程组的唯一解其实就是线段的相交点，无穷解就是两线重合，而无解的情况，也就是两条线平行。

我拿一个例子来说明，设线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{l}
4 x_{1}+4 x_{2}=5 \\
2 x_{1}-4 x_{2}=1
\end{array}\right.$$

把其中的两个线性方程在x_{1},x_{2}平面中画出来后，我们可以得到两线段的交点$\left(1, \frac{1}{4}\right)$，也就是这个线性方程组的解。



我再把这个概念延伸一下，当遇到三个变量的情况时，每个线性方程在三维空间中表达了一个平面，由于线性方程组的一个解必须同时满足所有的等式，所以，**线性方程组的解其实就是平面，也可以是线、点或者空，空也就是没有共同的平面相交。**

其实还有一个更好的方法来表达和解线性方程组，这个方法就是下一篇要讲的矩阵，在这里我先简单提一下。我们把系数组合成向量，把向量组合成矩阵，也就是说，我们可以把线性方程组写成这样的形式：

$$x_{1}\left|\begin{array}{c}
a_{11} \\
\vdots \\
a_{m1}
\end{array}\right|+x_{2}\left|\begin{array}{c}
a_{12} \\
\vdots \\
c_{m2}
\end{array}\right|+\cdots+x_{n}\left|\begin{array}{c}
a_{1 n} \\
\vdots \\
a_{m n}
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{c}
b_{1} \\
\vdots \\
b_{m}
\end{array}\right|$$

再进一步最终可以写成矩阵的形式：

$$\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}
\end{array}\right]\left|\begin{array}{c}
x_{1} \\
\vdots \\
. \\

x_{n}
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{c}
b_{1} \\\
\vdots \\\
. \\\
b_{m}
\end{array}\right|$$

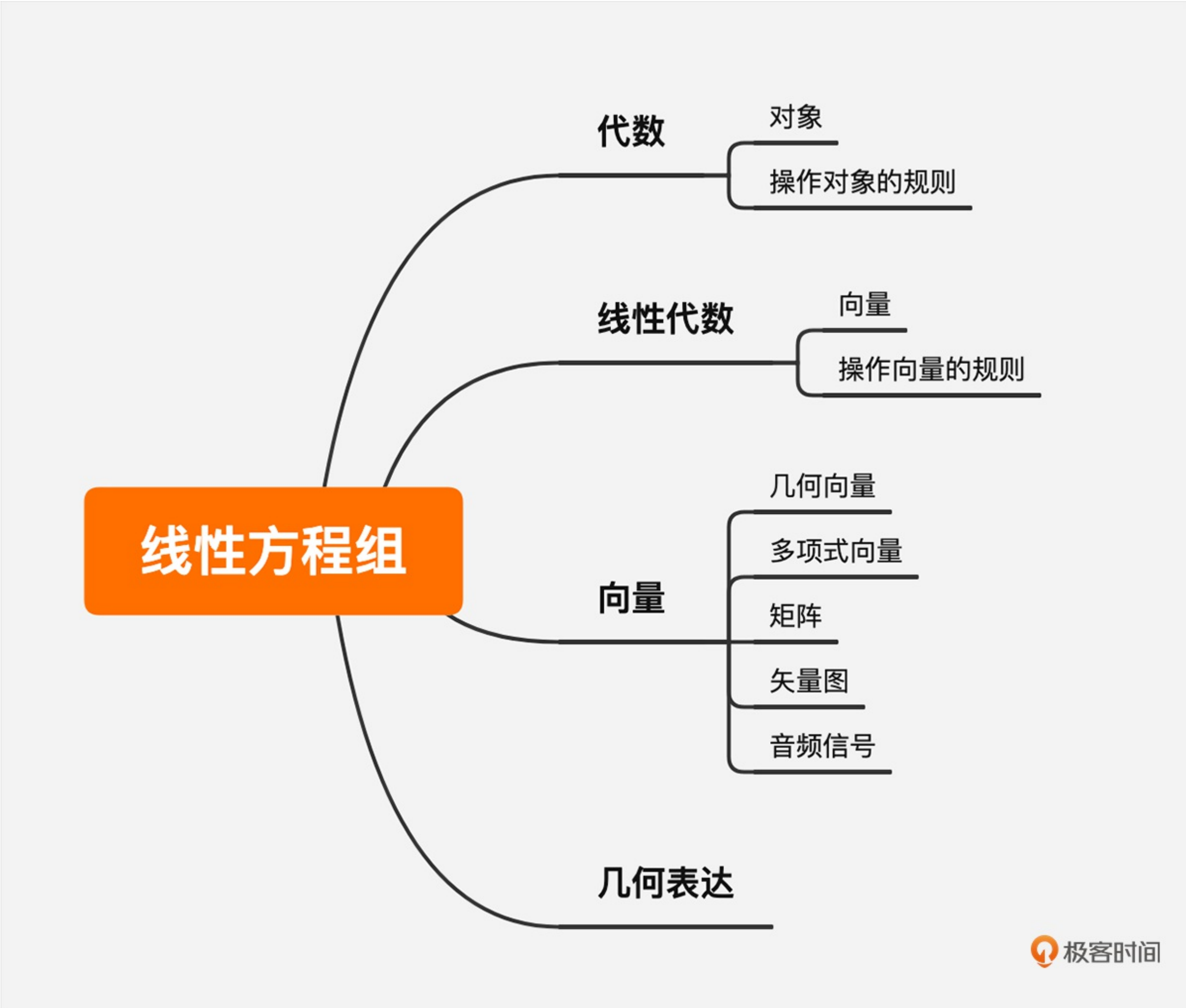
本节小结

好了，到这里这一讲就结束了，我带你总结一下前面讲解的内容。

这节课我带你重新认识了代数和线性代数的概念。代数是构造一系列对象和一系列操作这些对象的规则，线性代数是向量，以及操作这些向量的规则，所以，线性代数是代数的具像化表达。从线性代数，我们引出了向量的基本概念，我带你看了一个和向量有关的所有概念，即线性代数所有核心内容的图。

可以说，线性代数的一切皆从**向量**而来。

最后，我带你从二维平面几何角度，更直观地观察线性方程组和它几种解的情况，**而二维空间的线性方程组的解其实就是线、点或者空，也就是没有共同的线段相交**。你也可以自己试着把它扩展到三维空间几何中来观察，或许会更有趣哦！



线性代数练习场

我们一起来看一个练习题。这是一道极其简单的初中线性方程组题，你可以回顾一下，也为下一节课做好铺垫。

李大叔去年承包了10亩地，种植甲、乙两种蔬菜，共获利18000元。其中甲蔬菜每亩获利2000元，乙蔬菜每亩获利1500元。

请问，李大叔去年甲、乙两种蔬菜各种植了多少亩？

欢迎在留言区晒出你的运算过程和结果。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我学习线性代数。今天我们要讲的是"线性代数这门课的基本概念"。

线性代数可以运用在很多领域，比如：工程学、计算机科学、经济学、信号处理等等。我们来看一个在经济学中常见的例子：消费矩阵。

假设有n个行业，比如：化学、食品和石油。制造一单位的某化学品需要0.2单位的另一类化学品，0.3单位的食品，以及0.4单位的石油，而制造一单位的某食品和某石油也同样分别需要这三类产品的输入，于是，我们就能构造这样一个消费矩阵：

$$\left|\begin{array}{l}
化学输出 \\\
食品输出 \\\
石油输出
\end{array}\right|=\left[\begin{array}{lll}
0.2 & 0.3 & 0.4 \\\
0.4 & 0.4 & 0.1 \\\
0.5 & 0.1 & 0.3
\end{array}\right]\left|\begin{array}{l}
化学输入 \\\
食品输入 \\\
石油输入
\end{array}\right|$$

当然，我们也可以用一般的线性方程组$Ax=b$的形式来表达：

$$\left\{\begin{array}{l}

0.2 x_{1}+0.3 x_{2}+0.4 x_{3}=b_{1} \\\
0.4 x_{1}+0.4 x_{2}+0.1 x_{3}=b_{2} \\\
0.5 x_{1}+0.1 x_{2}+0.3 x_{3}=b_{3}
\end{array}\right.$$

从本质上来说，消费矩阵解决的是输入和输出之间的关系。不仅如此，线性代数在现实生活中的运用还有很多，比如，我们可以借用特征值和特征向量，预测若干年后的污水水平；在密码学中，可以使用矩阵及其逆矩阵对需发送的消息加密；在机器学习中，可以使用线性方程组的共轭迭代法来训练神经网络，等等。

刚才我分别用矩阵和线性方程组的形式给出了消费矩阵，当然，在实际生活中，你可以灵活选择最有效的方式来解决问题。

我们可以看到，线性方程组可以表示成一般形式，也就是你初中学到的$A x=b$的形式，也可以表示成矩阵形式。矩阵是由向量组合而成的，比如刚才例子中的系数矩阵的每一行都是一个**行向量**，每一列都是一个**列向量**。

$$\begin{array}{l}
\end{array}\left[\begin{array}{lll}
0.2 & 0.3 & 0.4 \\\
0.4 & 0.4 & 0.1 \\\
0.5 & 0.1 & 0.3
\end{array}\right] \begin{array}{l}
\end{array}$$

从这里我们能看出，**向量**其实就会是线性代数最基础的核心。数学对抽象思维要求很高，简单来说，抽象思维就是抽取同类事物的共性。所以，在进入具体的线性方程组的主题前，我要先从数学抽象的角度说一说代数和线性代数，这也是深入理解后面内容的前提。

代数和线性代数的基本概念

那什么是代数呢？百度百科的解释是这样的：

> 代数是研究数、数量、关系、结构与代数方程（组）的通用解法及其性质的数学分支。

但我觉得这个解释其实没有说出**代数**这个概念的重点。我的理解是这样的：**代数是构造一系列对象和一系列操作这些对象的规则。**

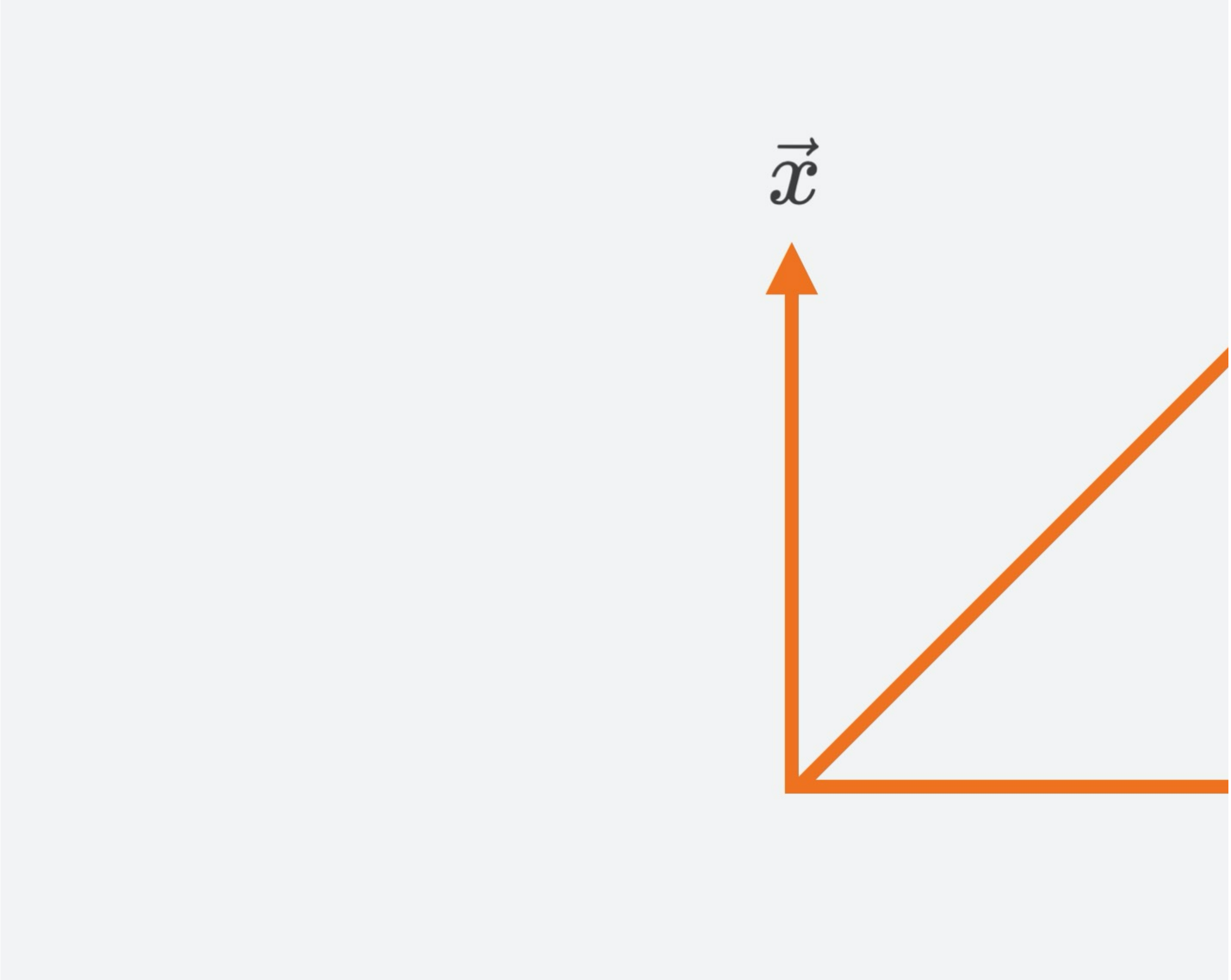
所以你看，代数这个概念的核心就两点，**对象**和**操作对象的规则**，这样就很好理解了吧？那有了代数的定义，线性代数就很好定义了。我们类比来看，线性代数其实就是向量，以及操作这些向量的规则。这里，向量映射到对象，向量的规则映射到对象的规则，因此线性代数是代数的具像化表达。

向量的基本概念

那什么是**向量**呢？从样子来看，向量其实就是由字母加上它上面的箭头来表示的，比如我们一版会写成$\vec{x}$。我估计你在高中或大学里已经接触过“几何向量”。那么，下面我用更抽象的数学观点来给你解释一下。

向量，也叫欧几里得向量（Euclidean Vector），其实就是能够互相相加、被标量乘的特殊对象。而标量也叫“无向量”，它只有数值大小，没有方向。怎么理解呢？我们来看一些向量的例子，通过这些例子来深入理解向量的概念。

几何向量是有向线段，在二维空间（也就是平面）中，两个几何向量能够相加，比如，向量x加上向量y等于向量z，$\vec{x}+\vec{y}=\vec{z}$，x向量也能被一个标量乘。再比如，标量λ乘向量x结果也是向量，$\lambda \vec{x}, \lambda \in R$。几何向量通过大小和方向来简化向量的表达，所以，一般数学课程一开始都会拿几何向量来进行举例。



多项式其实也是向量。两个多项式能够相加，它也能够被标量乘，结果也是多项式。

矩阵的一行或一列也是向量。就比如下面这样形式的向量。

$$x \in R^{3}: x=\left[\begin{array}{l}
1 \\
2 \\
3
\end{array}\right]$$

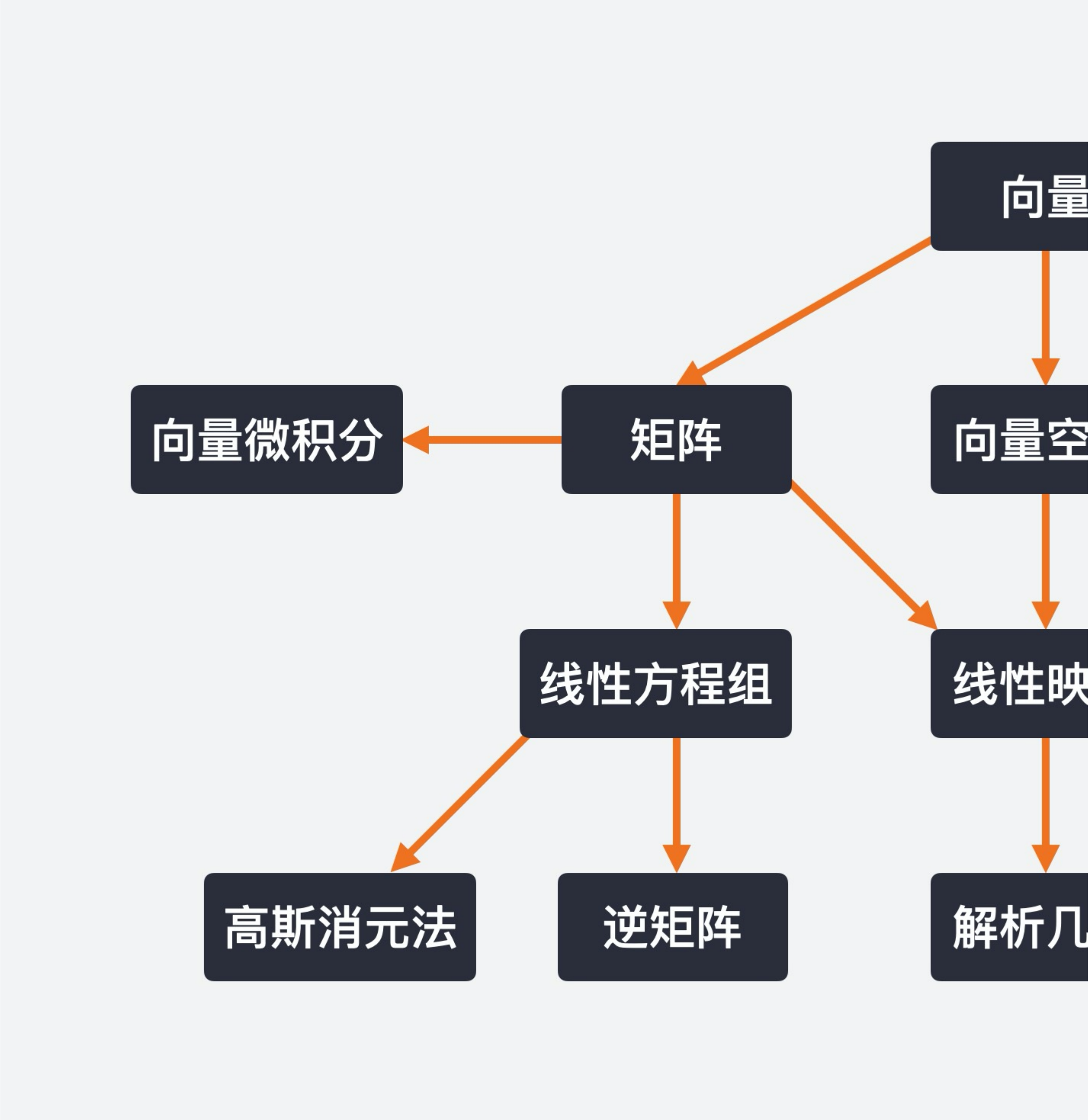
两个向量能够相加，它也能够被标量乘，结果也是向量。它和现代大部分的编程语言中的数组一致，而且数组的运算简化了向量操作的算法实施。

矢量图、音频信号也是向量。它们都能被一系列数字表示，比如，在音频信号处理中，常用到数据增强的方法，通过向量的操作就能到达目标。

看了这些向量例子，不知道你现在有点感觉了吗？其实，线性代数的本质就是**寻找向量之间的相似性**，比如在做分类时，我们常常需要估算不同样本之间的相似性度量（Similarity Measurement），这时通常采用的方法就是计算样本间的“距离”（Distance）。

可以看出来，向量非常重要，我们后面很多内容都是从向量延伸而来的，比如矩阵和求解线性方程组。

下面我用一张图来表达和向量有关的所有概念，也就是线性代数所有的核心内容，其中大部分内容你都会学到，希望通过这个图，你对线性代数有个大概的认知。相信学习完所有课程后，你再回过头来看时，肯定会有一些新的认知。



从图中最左侧这一列，我们可以看出，向量组合成矩阵，矩阵可以表示成线性方程组，而线性方程组可以通过高斯消元法求解，也可以求逆矩阵。

同时，向量又可以组合成向量空间，向量空间和矩阵都可以做线性映射或者线性变换，线性映射在实践中可以用在解析几何和分类问题中。

而且，向量和线性独立是强相关的，也就是说，线性独立指的是向量的线性独立，而线性独立又可以引出能够生成整个空间的基（Basis），基在实践中可以用在分类和降维中。

这里，我再额外提一个非常重要的、在数学中经常用到的概念——**封闭性**，或者俗称**闭包**（Closure）。封闭性的定义是，如果我们要对某个集合的成员进行一种运算，生成的仍然是这个集合的成员，那这个集合就可以称为在这个运算下闭合。

我为什么要提这个概念呢？这是因为，向量的线性运算是封闭的，也就是说向量的加法、数乘结果仍属于向量空间，即**向量的任意线性组合仍属于向量空间**。

线性方程组的应用

到这里，相信你已经对线性代数、向量这些基本概念有了一个应试教育之外的、新的认识，接下来我就切入本篇的最重点的内容了，那就是线性方程组。

线性方程组在线性代数中有着举足轻重的地位，许多现实生活中的问题都可以表达成线性方程组。关于线性方程组的概念，我想不用我多说了，这是初中的内容，你应该已经非常了解了。现在我举几个例子来说一说，线性方程组在现实生活中的运用，让你从应用的角度再理解下线性方程组。

第一个例子是计算旅游团人数。假设，一个旅游团由孩子和大人组成，去程时他们一起坐大巴，每个孩子的票价3元，大人票价3.2元，总共花费118.4元。回程时一起坐火车，每个孩子的票价3.5元，大人票价3.6元，总共花费135.2元。请问这个旅游团中有多少孩子和大人？

假设小孩人数为x_{1}，大人人数为x_{2}，于是我们得到了一个方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
3 x_{1}+3.2 x_{2}=118.4 \\
3.5 x_{1}+3.6 x_{2}=135.2
\end{array}\right.$$

使用初中的解二元一次方程组的知识，我们可以得出这个方程组的解是：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}=16 \\

x_{2}=22
\end{array}\right.$$

这个就是典型的线性方程组的现实例子。当然，我们也可以用矩阵来解这个方程组。你可能会说，这问题很简单啊，为什么还要用矩阵来解呢？整这么复杂有必要吗？别着急，这里我先卖个关子，具体我会在下一讲"矩阵篇"中进行讲解。

第二个例子是找出公司的最优生产计划。我们从公司的角度来看一看，假设生产苹果的几大主流产品：iPhone、Macbook、iMac，以及iWatch四款产品，需要用到芯片、摄像头模组、电池、IPS屏幕四大类资源，产品分别用 $N_{1}，N_{2}，N_{3}，N_{4}$来表示，资源分别用$R_{1}，R_{2}，R_{3}，R_{4}$来表示。

生产一单位的产品 N_{1}，也就是iPhone，需要$a_{11}，a_{21}，a_{31}，a_{41}$的资源，也就是芯片、摄像头模组、电池和IPS屏幕资源，其他产品也是一样。

我们的目标是在资源有限的情况下，找到一个最优生产计划，使每个产品的产出数量最大化。也就是说，在总共有b_{i}个单位资源R_{i}可用情况下，每个产品N_{i} 有多少单元 x_{i}应该被生产。因此，我们可以得到一个下面这样的线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+a_{13} x_{3}+a_{14} x_{4}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+a_{23} x_{3}+a_{24} x_{4}=b_{2} \\
a_{31} x_{1}+a_{32} x_{2}+a_{33} x_{3}+a_{34} x_{4}=b_{3} \\
a_{41} x_{1}+a_{42} x_{2}+a_{43} x_{3}+a_{44} x_{4}=b_{4}
\end{array}\right.$$

于是，我们得到线性方程组的通用表达方式，$x_{1}，\cdots，x_{n}$ 是未知变量，每个满足方程组表达式的n元组$(x_{1}，\cdots，x_{n})$都是它的解。

$$\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.$$

线性方程组的解是有几何意义的，从几何角度出发，有利于你理解和记忆线性方程组解的条件，接下来我们先来看看线性方程组解的几种情况，之后我再具体讲解线性方程组的几何表达。

首先我们来看**无解**的情况。假设有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
2 x_{1}+3 x_{3}=1
\end{array}\right.$$

第一行和第二行相加后，我们可以得到$2 x_{1}+3 x_{3}=5$，很明显，这个方程和第三行是矛盾的，所以，这个线性方程组无解。

其次是**只有一个解**的情况。假设有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
x_{2}+x_{3}=2
\end{array}\right.$$

这个方程组求解很简单，第一行乘以-1和第二行相加得到$-2x_{2}+x_{3}=-1$，再乘以-1后和第三行相加得到$x_{1}=1$，第一行和第二行相加，得到$2 x_{1}+3 x_{3}=5$，代入x_{1}后，得到$x_{3}=1$，最后，我们可以得到$(1,1,1)$是这个线性方程组的唯一解。

最后是**无穷解**的情况。我们有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
2 x_{1}+3 x_{3}=5
\end{array}\right.$$

方程组第一行和第二行相加等于第三行，从这个角度来说，我们就可以定义一个自由变量$x_{3}=a$，a属于实数，那方程组的解就是：

$$\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2} a, \frac{1}{2}+\frac{1}{2} a, a\right)$$

其中a属于实数，所以，这就包含了无穷多个解。

线性方程组的几何表达

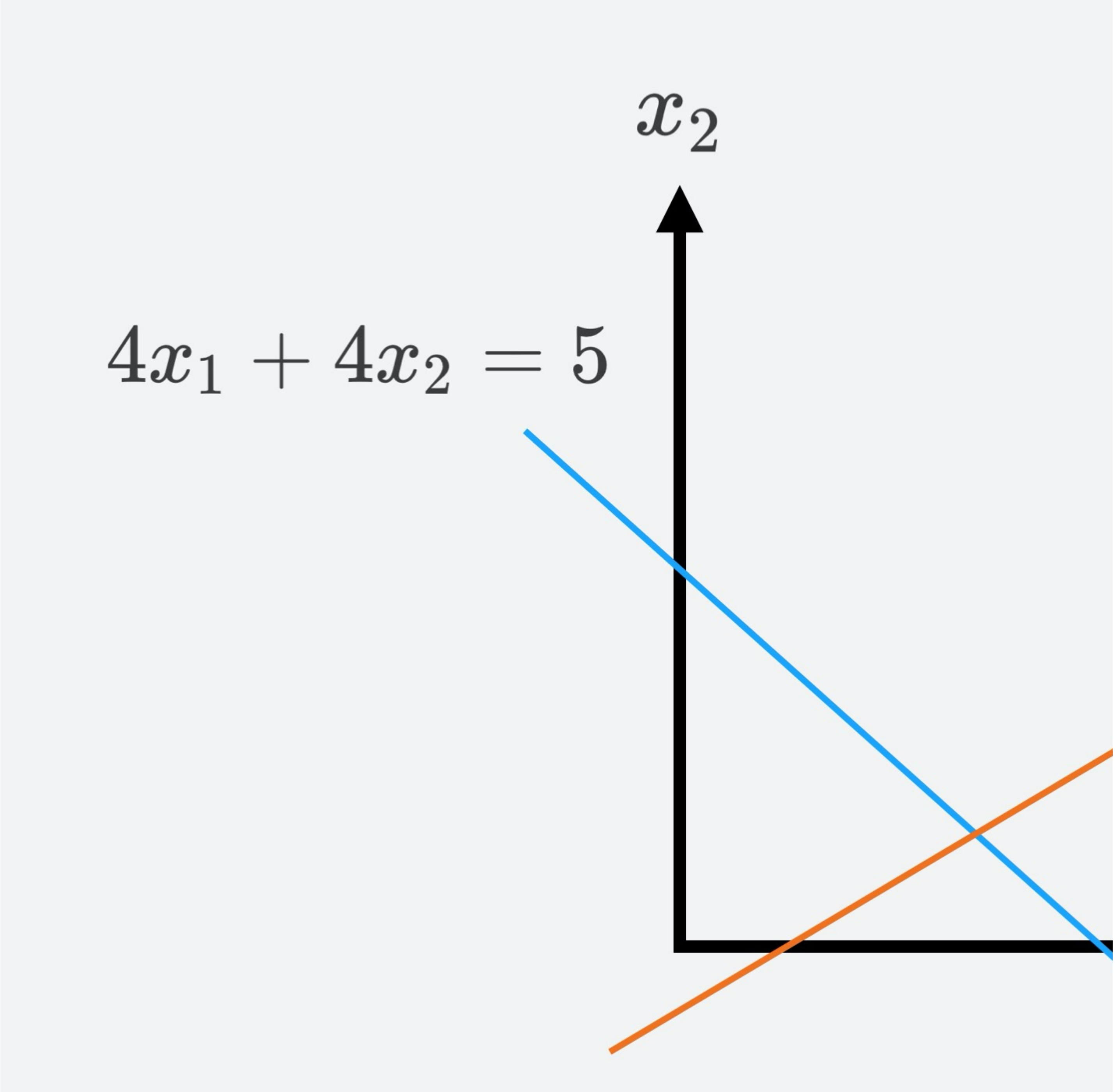
好了，了解了线性方程组解的三种情况，现在我们是时候从几何的角度来看一看线性方程组和它的解了，从几何意义出发有利于你更直观地理解线性方程组。

在一个只有两个变量x_{1},x_{2}的线性方程组中，我们定义一个x_{1},x_{2}平面。在这个平面中，每个线性方程都表达了一条直线。由于线性方程组的唯一解必须同时满足所有的等式，所以，线性方程组的唯一解其实就是线段的相交点，无穷解就是两线重合，而无解的情况，也就是两条线平行。

我拿一个例子来说明，设线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{l}
4 x_{1}+4 x_{2}=5 \\
2 x_{1}-4 x_{2}=1
\end{array}\right.$$

把其中的两个线性方程在x_{1},x_{2}平面中画出来后，我们可以得到两线段的交点$\left(1, \frac{1}{4}\right)$，也就是这个线性方程组的解。



我再把这个概念延伸一下，当遇到三个变量的情况时，每个线性方程在三维空间中表达了一个平面，由于线性方程组的一个解必须同时满足所有的等式，所以，**线性方程组的解其实就是平面，也可以是线、点或者空，空也就是没有共同的平面相交。**

其实还有一个更好的方法来表达和解线性方程组，这个方法就是下一篇要讲的矩阵，在这里我先简单提一下。我们把系数组合成向量，把向量组合成矩阵，也就是说，我们可以把线性方程组写成这样的形式：

$$x_{1}\left|\begin{array}{c}
a_{11} \\
\vdots \\
a_{m1}
\end{array}\right|+x_{2}\left|\begin{array}{c}
a_{12} \\
\vdots \\
c_{m2}
\end{array}\right|+\cdots+x_{n}\left|\begin{array}{c}
a_{1 n} \\
\vdots \\
a_{mn}
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{c}
b_{1} \\
\vdots \\
b_{m}
\end{array}\right|$$

再进一步最终可以写成矩阵的形式：
$$\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}
\end{array}\right]\left|\begin{array}{c}
x_{1} \\
\vdots \\
. \\

x_{n}
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{c}
b_{1} \\
\vdots \\
. \\
b_{m}
\end{array}\right|$$

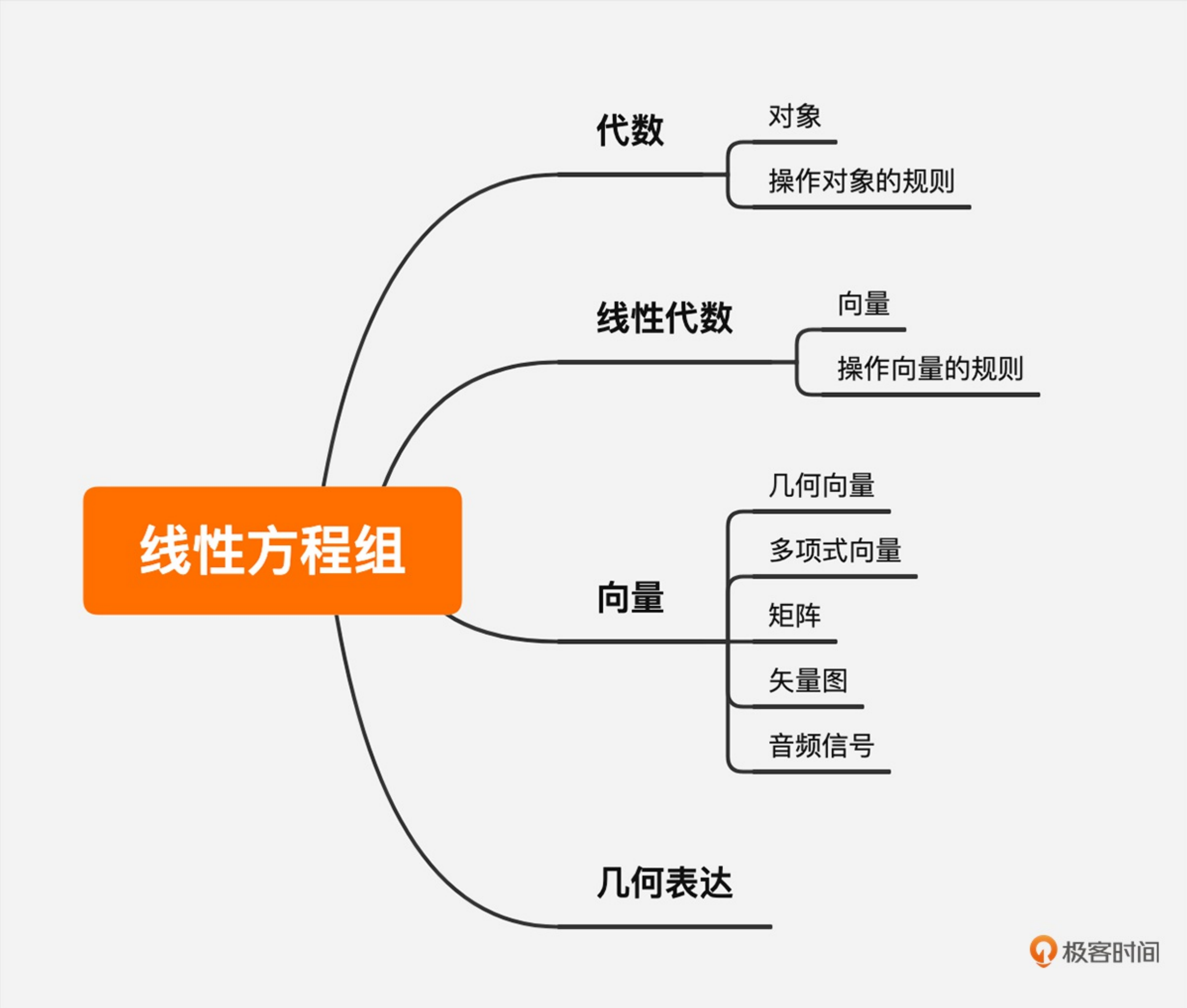
本节小结

好了，到这里这一讲就结束了，我带你总结一下前面讲解的内容。

这节课我带你重新认识了代数和线性代数的概念。代数是构造一系列对象和一系列操作这些对象的规则，线性代数是向量，以及操作这些向量的规则，所以，线性代数是代数的具像化表达。从线性代数，我们引出了向量的基本概念，我带你看了一个和向量有关的所有概念，即线性代数所有核心内容的图。

可以说，线性代数的一切皆从**向量**而来。

最后，我带你从二维平面几何角度，更直观地观察线性方程组和它几种解的情况，**而二维空间的线性方程组的解其实就是线、点或者空，也就是没有共同的线段相交**。你也可以自己试着把它扩展到三维空间几何中来观察，或许会更有趣哦！



线性代数练习场

我们一起来看一个练习题。这是一道极其简单的初中线性方程组题，你可以回顾一下，也为下一节课做好铺垫。

李大叔去年承包了10亩地，种植甲、乙两种蔬菜，共获利18000元。其中甲蔬菜每亩获利2000元，乙蔬菜每亩获利1500元。

请问，李大叔去年甲、乙两种蔬菜各种植了多少亩？

欢迎在留言区晒出你的运算过程和结果。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我学习线性代数。今天我们要讲的是"线性代数这门课的基本概念"。

线性代数可以运用在很多领域，比如：工程学、计算机科学、经济学、信号处理等等。我们来看一个在经济学中常见的例子：消费矩阵。

假设有n个行业，比如：化学、食品和石油。制造一单位的某化学品需要0.2单位的另一类化学品，0.3单位的食品，以及0.4单位的石油，而制造一单位的某食品和某石油也同样分别需要这三类产品的输入，于是，我们就能构造这样一个消费矩阵：

$$\left|\begin{array}{l}
化学输出 \\
食品输出 \\
石油输出
\end{array}\right|=\left[\begin{array}{lll}
0.2 & 0.3 & 0.4 \\
0.4 & 0.4 & 0.1 \\
0.5 & 0.1 & 0.3
\end{array}\right]\left|\begin{array}{l}
化学输入 \\
食品输入 \\
石油输入
\end{array}\right|$$

当然，我们也可以用一般的线性方程组$Ax=b$的形式来表达：

$$\left\{\begin{array}{l}

0.2 x_{1}+0.3 x_{2}+0.4 x_{3}=b_{1} \\
0.4 x_{1}+0.4 x_{2}+0.1 x_{3}=b_{2} \\
0.5 x_{1}+0.1 x_{2}+0.3 x_{3}=b_{3}
\end{array}\right.$$

从本质上来说，消费矩阵解决的是输入和输出之间的关系。不仅如此，线性代数在现实生活中的运用还有很多，比如，我们可以借用特征值和特征向量，预测若干年后的污水水平；在密码学中，可以使用矩阵及其逆矩阵对需发送的消息加密；在机器学习中，可以使用线性方程组的共轭迭代法来训练神经网络，等等。

刚才我分别用矩阵和线性方程组的形式给出了消费矩阵，当然，在实际生活中，你可以灵活选择最有效的方式来解决问题。

我们可以看到，线性方程组可以表示成一般形式，也就是你初中学到的$A x=b$的形式，也可以表示成矩阵形式。矩阵是由向量组合而成的，比如刚才例子中的系数矩阵的每一行都是一个**行向量**，每一列都是一个**列向量**。

$$\begin{array} {l}
\end{array}\left[\begin{array} {lll}
0.2 & 0.3 & 0.4 \\
0.4 & 0.4 & 0.1 \\
0.5 & 0.1 & 0.3
\end{array}\right] \begin{array} {l}
\end{array}$$

从这里我们能看出，**向量**其实就会是线性代数最基础的核心。数学对抽象思维要求很高，简单来说，抽象思维就是抽取同类事物的共性。所以，在进入具体的线性方程组的主题前，我要先从数学抽象的角度说一说代数和线性代数，这也是深入理解后面内容的前提。

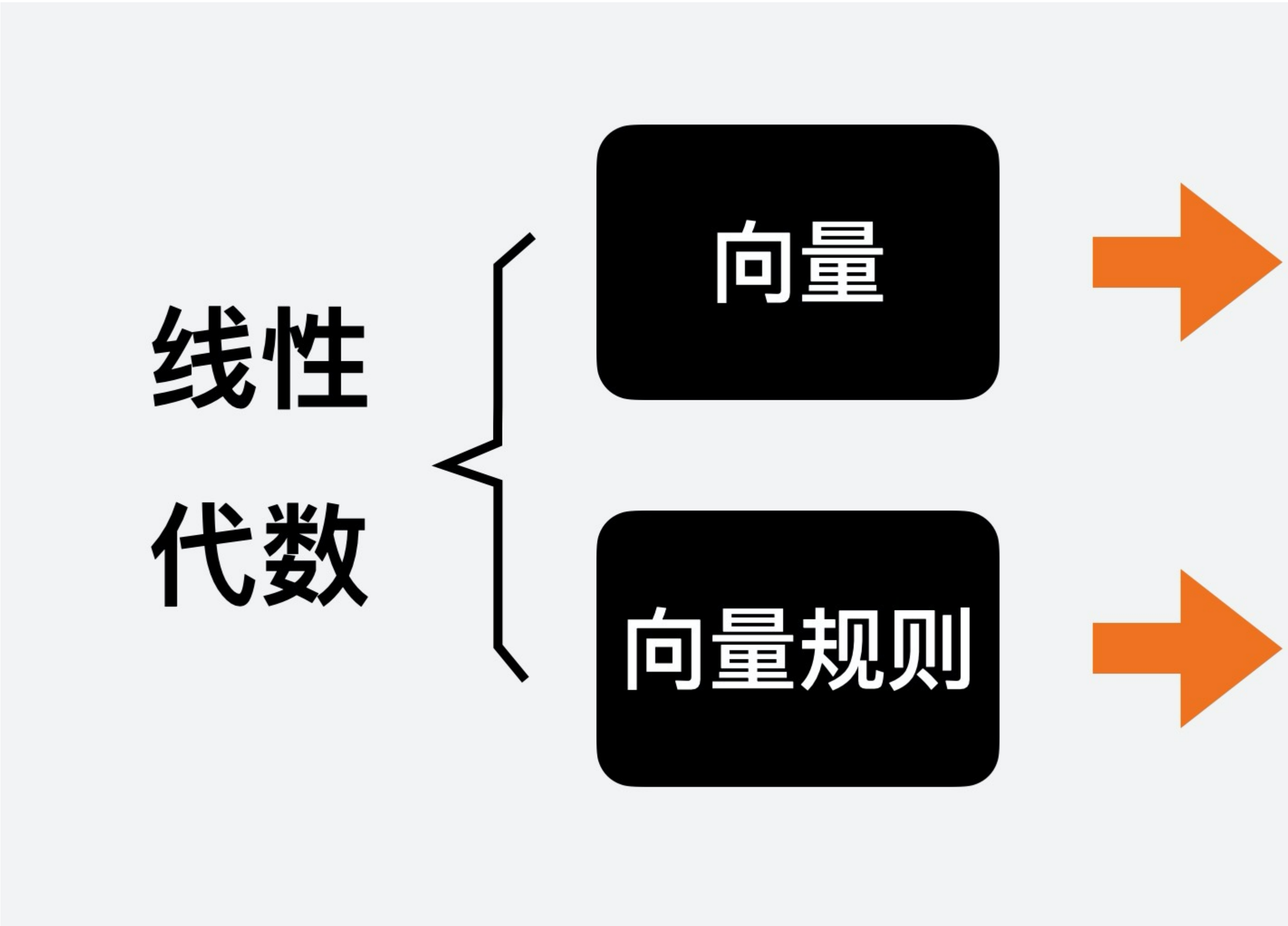
代数和线性代数的基本概念

那什么是代数呢？百度百科的解释是这样的：

> 代数是研究数、数量、关系、结构与代数方程（组）的通用解法及其性质的数学分支。

但我觉得这个解释其实没有说出**代数**这个概念的重点。我的理解是这样的：**代数是构造一系列对象和一系列操作这些对象的规则。**

所以你看，代数这个概念的核心就两点，**对象**和**操作对象的规则**，这样就很好理解了吧？那有了代数的定义，线性代数就很好定义了。我们类比来看，线性代数其实就是向量，以及操作这些向量的规则。这里，向量映射到对象，向量的规则映射到对象的规则，因此线性代数是代数的具像化表达。

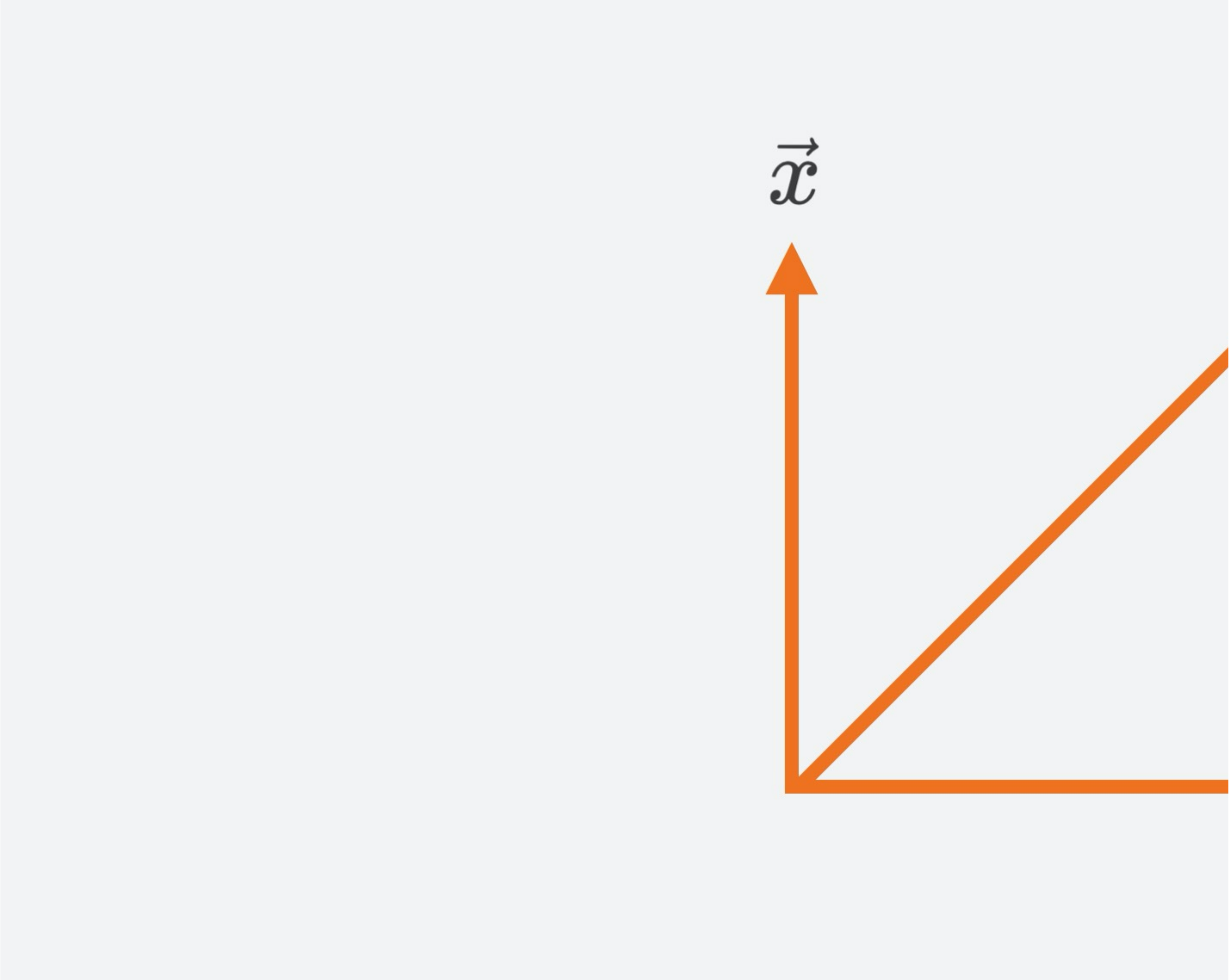


向量的基本概念

那什么是**向量**呢？从样子来看，向量其实就是由字母加上它上面的箭头来表示的，比如我们一般会写成$\vec{x}$。我估计你在高中或大学里已经接触过“几何向量”。那么，下面我用更抽象的数学观点来给你解释一下。

向量，也叫欧几里得向量（Euclidean Vector），其实就是能够互相相加、被标量乘的特殊对象。而标量也叫“无向量”，它只有数值大小，没有方向。怎么理解呢？我们来看一些向量的例子，通过这些例子来深入理解向量的概念。

几何向量是有向线段，在二维空间（也就是平面）中，两个几何向量能够相加，比如，向量x加上向量y等于向量z，$\vec{x}+\vec{y}=\vec{z}$，x向量也能被一个标量乘。再比如，标量λ乘向量x结果也是向量，$\lambda \vec{x}, \lambda \in R$。几何向量通过大小和方向来简化向量的表达，所以，一般数学课程一开始都会拿几何向量来进行举例。



多项式其实也是向量。两个多项式能够相加，它也能够被标量乘，结果也是多项式。

矩阵的一行或一列也是向量。就比如下面这样形式的向量。

$$x \in R^{3}: x=\left[\begin{array}{l}
1 \\
2 \\
3
\end{array}\right]$$

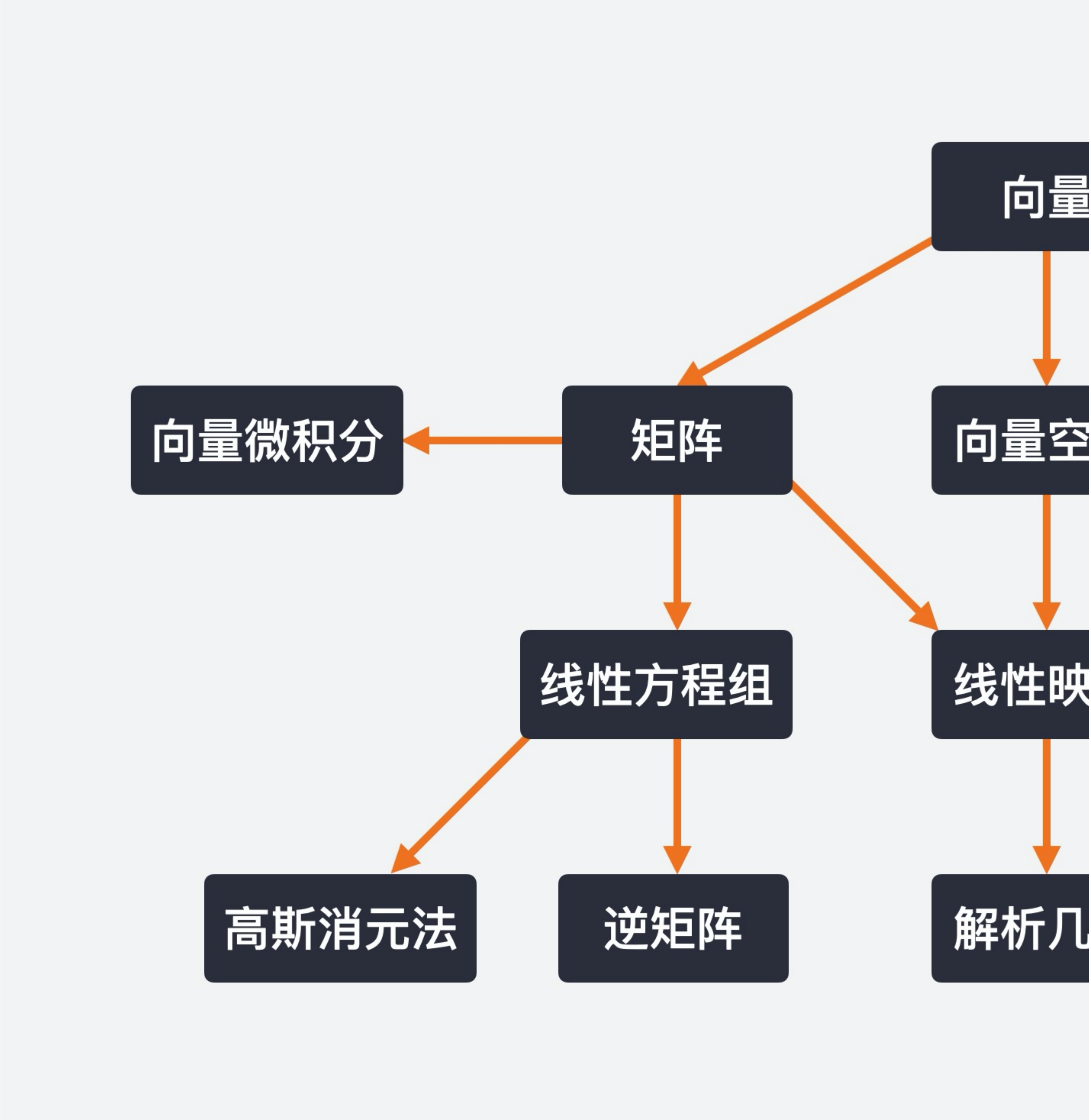
两个向量能够相加，它也能够被标量乘，结果也是向量。它和现代大部分的编程语言中的数组一致，而且数组的运算简化了向量操作的算法实施。

矢量图、音频信号也是向量。它们都能被一系列数字表示，比如，在音频信号处理中，常用到数据增强的方法，通过向量的操作就能到达目标。

看了这些向量例子，不知道你现在有点感觉了吗？其实，线性代数的本质就是**寻找向量之间的相似性**，比如在做分类时，我们常常需要估算不同样本之间的相似性度量（Similarity Measurement），这时通常采用的方法就是计算样本间的“距离”（Distance）。

可以看出来，向量非常重要，我们后面很多内容都是从向量延伸而来的，比如矩阵和求解线性方程组。

下面我用一张图来表达和向量有关的所有概念，也就是线性代数所有的核心内容，其中大部分内容你都会学到，希望通过这个图，你对线性代数有个大概的认知。相信学习完所有课程后，你再回过头来看时，肯定会有一些新的认知。



从图中最左侧这一列，我们可以看出，向量组合成矩阵，矩阵可以表示成线性方程组，而线性方程组可以通过高斯消元法求解，也可以求逆矩阵。

同时，向量又可以组合成向量空间，向量空间和矩阵都可以做线性映射或者线性变换，线性映射在实践中可以用在解析几何和分类问题中。

而且，向量和线性独立是强相关的，也就是说，线性独立指的是向量的线性独立，而线性独立又可以引出能够生成整个空间的基（Basis），基在实践中可以用在分类和降维中。

这里，我再额外提一个非常重要的、在数学中经常用到的概念——**封闭性**，或者俗称**闭包**（Closure）。封闭性的定义是，如果我们要对某个集合的成员进行一种运算，生成的仍然是这个集合的成员，那这个集合就可以称为在这个运算下闭合。

我为什么要提这个概念呢？这是因为，向量的线性运算是封闭的，也就是说向量的加法、数乘结果仍属于向量空间，即**向量的任意线性组合仍属于向量空间**。

线性方程组的应用

到这里，相信你已经对线性代数、向量这些基本概念有了一个应试教育之外的、新的认识，接下来我就切入本篇的最重点的内容了，那就是线性方程组。

线性方程组在线性代数中有着举足轻重的地位，许多现实生活中的问题都可以表达成线性方程组。关于线性方程组的概念，我想不用我多说了，这是初中的内容，你应该已经非常了解了。现在我举几个例子来说一说，线性方程组在现实生活中的运用，让你从应用的角度再理解下线性方程组。

第一个例子是计算旅游团人数。假设，一个旅游团由孩子和大人组成，去程时他们一起坐大巴，每个孩子的票价3元，大人票价3.2元，总共花费118.4元。回程时一起坐火车，每个孩子的票价3.5元，大人票价3.6元，总共花费135.2元。请问这个旅游团中有多少孩子和大人？

假设小孩人数为x_{1}，大人人数为x_{2}，于是我们得到了一个方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
3 x_{1}+3.2 x_{2}=118.4 \\
3.5 x_{1}+3.6 x_{2}=135.2
\end{array}\right.$$

使用初中的解二元一次方程组的知识，我们可以得出这个方程组的解是：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}=16 \\

x_{2}=22
\end{array}\right.$$

这个就是典型的线性方程组的现实例子。当然，我们也可以用矩阵来解这个方程组。你可能会说，这问题很简单啊，为什么还要用矩阵来解呢？整这么复杂有必要吗？别着急，这里我先卖个关子，具体我会在下一讲"矩阵篇"中进行讲解。

第二个例子是找出公司的最优生产计划。我们从公司的角度来看一看，假设生产苹果的几大主流产品：iPhone、Macbook、iMac，以及iWatch四款产品，需要用到芯片、摄像头模组、电池、IPS屏幕四大类资源，产品分别用 $N_{1}，N_{2}，N_{3}，N_{4}$来表示，资源分别用$R_{1}，R_{2}，R_{3}，R_{4}$来表示。

生产一单位的产品 N_{1}，也就是iPhone，需要$a_{11}，a_{21}，a_{31}，a_{41}$的资源，也就是芯片、摄像头模组、电池和IPS屏幕资源，其他产品也是一样。

我们的目标是在资源有限的情况下，找到一个最优生产计划，使每个产品的产出数量最大化。也就是说，在总共有b_{i}个单位资源R_{i}可用情况下，每个产品N_{i} 有多少单元 x_{i}应该被生产。因此，我们可以得到一个下面这样的线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+a_{13} x_{3}+a_{14} x_{4}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+a_{23} x_{3}+a_{24} x_{4}=b_{2} \\
a_{31} x_{1}+a_{32} x_{2}+a_{33} x_{3}+a_{34} x_{4}=b_{3} \\
a_{41} x_{1}+a_{42} x_{2}+a_{43} x_{3}+a_{44} x_{4}=b_{4}
\end{array}\right.$$

于是，我们得到线性方程组的通用表达方式，$x_{1}，\cdots ，x_{n}$ 是未知变量，每个满足方程组表达式的n元组$(x_{1}，\cdots ，x_{n})$都是它的解。

$$\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.$$

线性方程组的解是有几何意义的，从几何角度出发，有利于你理解和记忆线性方程组解的条件，接下来我们先来看看线性方程组解的几种情况，之后我再具体讲解线性方程组的几何表达。

首先我们来看**无解**的情况。假设有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
2 x_{1}+3 x_{3}=1
\end{array}\right.$$

第一行和第二行相加后，我们可以得到$2 x_{1}+3 x_{3}=5$，很明显，这个方程和第三行是矛盾的，所以，这个线性方程组无解。

其次是**只有一个解**的情况。假设有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
x_{2}+x_{3}=2
\end{array}\right.$$

这个方程组求解很简单，第一行乘以-1和第二行相加得到$-2x_{2}+x_{3}=-1$，再乘以-1后和第三行相加得到$x_{1}=1$，第一行和第二行相加，得到$2 x_{1}+3 x_{3}=5$，代入x_{1}后，得到$x_{3}=1$，最后，我们可以得到$(1,1,1)$是这个线性方程组的唯一解。

最后是**无穷解**的情况。我们有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
2 x_{1}+3 x_{3}=5
\end{array}\right.$$

方程组第一行和第二行相加等于第三行，从这个角度来说，我们就可以定义一个自由变量$x_{3}=a$，a属于实数，那方程组的解就是：

$$\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2} a, \frac{1}{2}+\frac{1}{2} a, a\right)$$

其中a属于实数，所以，这就包含了无穷多个解。

线性方程组的几何表达

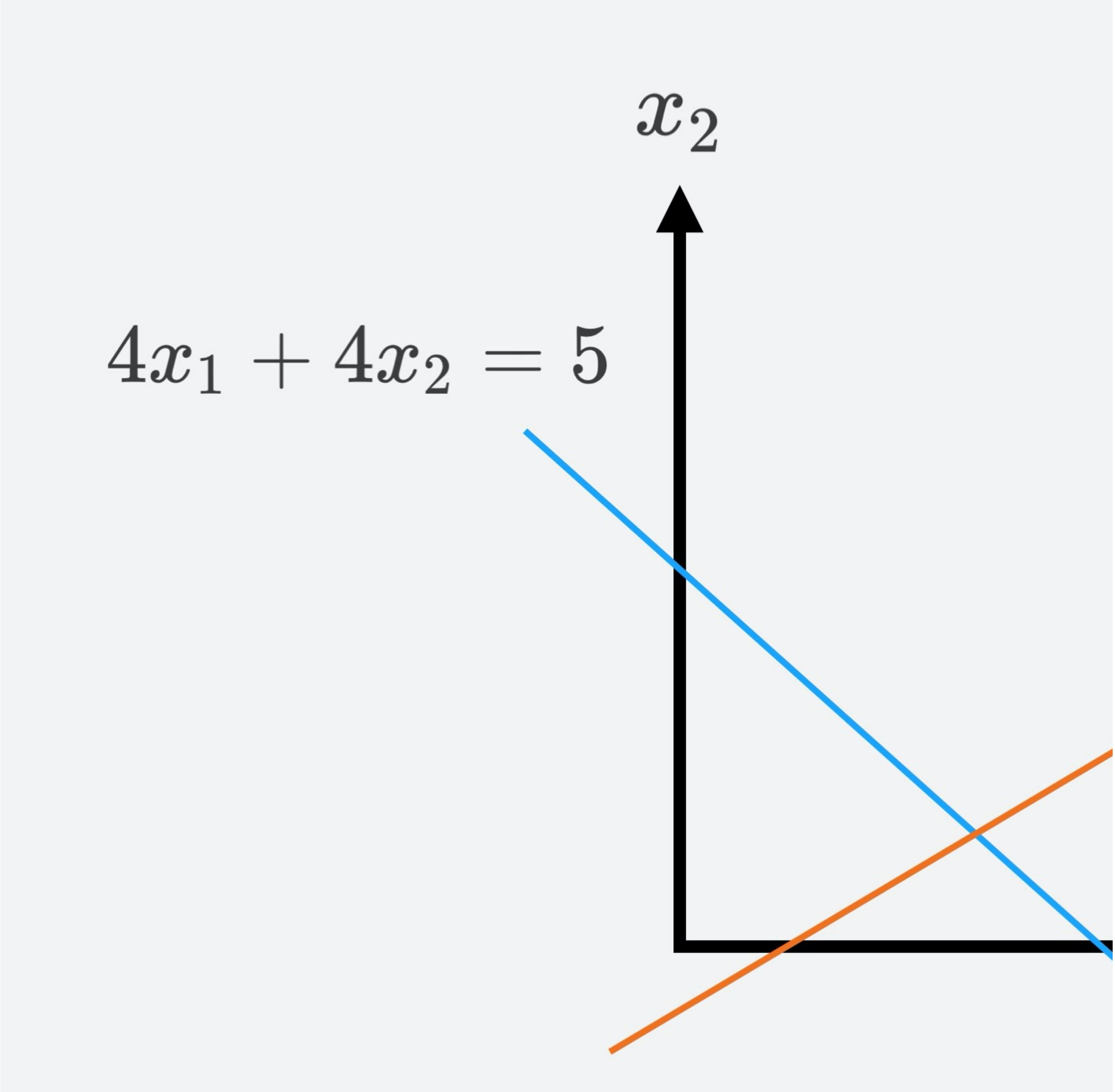
好了，了解了线性方程组解的三种情况，现在我们是时候从几何的角度来看一看线性方程组和它的解了，从几何意义出发有利于你更直观地理解线性方程组。

在一个只有两个变量x_{1},x_{2}的线性方程组中，我们定义一个x_{1},x_{2}平面。在这个平面中，每个线性方程都表达了一条直线。由于线性方程组的唯一解必须同时满足所有的等式，所以，线性方程组的唯一解其实就是线段的相交点，无穷解就是两线重合，而无解的情况，也就是两条线平行。

我拿一个例子来说明，设线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{l}
4 x_{1}+4 x_{2}=5 \\
2 x_{1}-4 x_{2}=1
\end{array}\right.$$

把其中的两个线性方程在x_{1},x_{2}平面中画出来后，我们可以得到两线段的交点$\left(1, \frac{1}{4}\right)$，也就是这个线性方程组的解。



我再把这个概念延伸一下，当遇到三个变量的情况时，每个线性方程在三维空间中表达了一个平面，由于线性方程组的一个解必须同时满足所有的等式，所以，**线性方程组的解其实就是平面，也可以是线、点或者空，空也就是没有共同的平面相交。**

其实还有一个更好的方法来表达和解线性方程组，这个方法就是下一篇要讲的矩阵，在这里我先简单提一下。我们把系数组合成向量，把向量组合成矩阵，也就是说，我们可以把线性方程组写成这样的形式：

$$x_{1}\left|\begin{array}{c}
a_{11} \\
\vdots \\
a_{m1}
\end{array}\right|+x_{2}\left|\begin{array}{c}
a_{12} \\
\vdots \\
c_{m2}
\end{array}\right|+\cdots+x_{n}\left|\begin{array}{c}
a_{1 n} \\
\vdots \\
a_{mn}
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{c}
b_{1} \\
\vdots \\
b_{m}
\end{array}\right|$$

再进一步最终可以写成矩阵的形式：
$$\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}
\end{array}\right]\left|\begin{array}{c}
x_{1} \\
\vdots \\
. \\

x_{n}
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{c}
b_{1} \\\
\vdots \\\
. \\\
b_{m}
\end{array}\right|$$

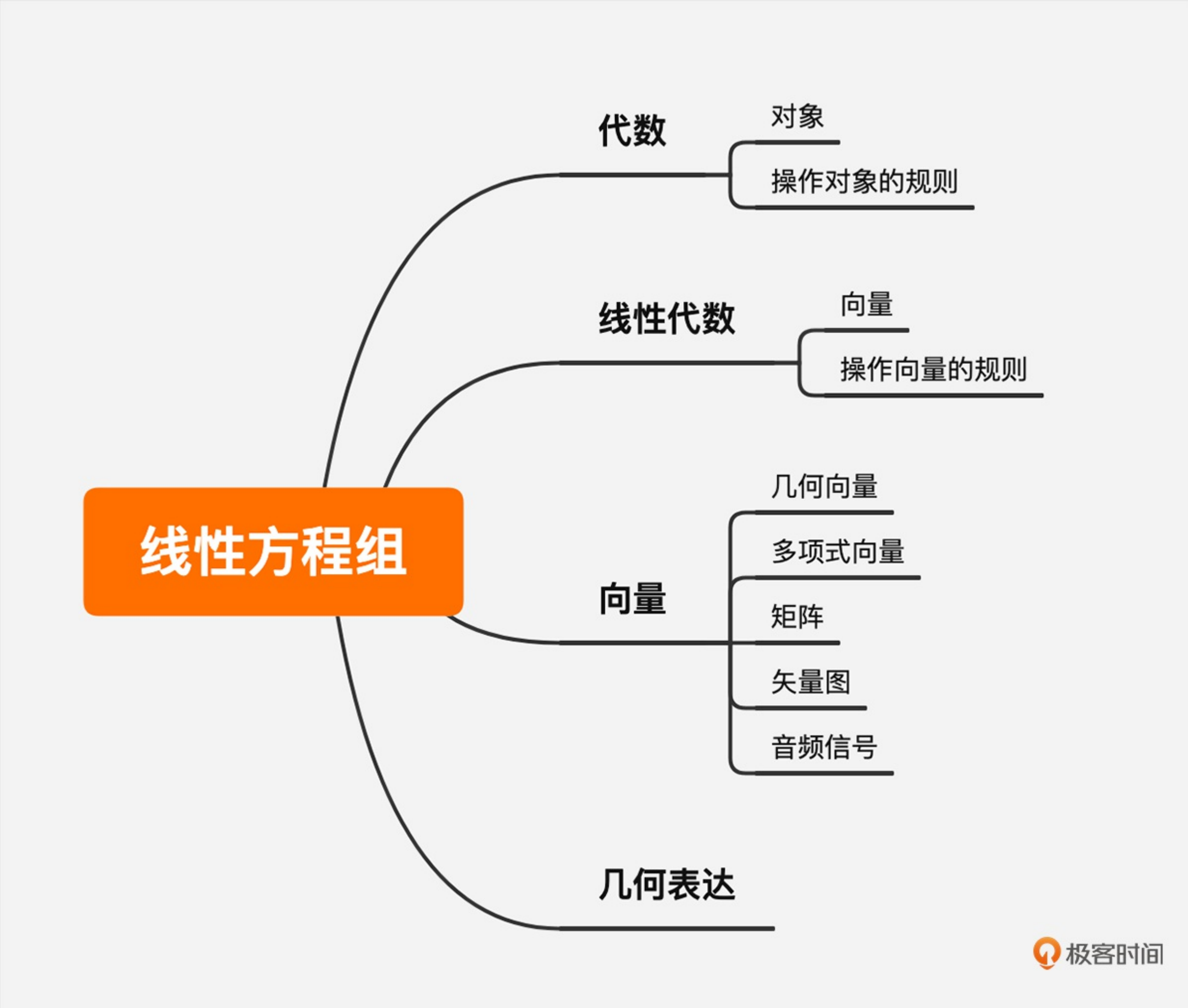
本节小结

好了，到这里这一讲就结束了，我带你总结一下前面讲解的内容。

这节课我带你重新认识了代数和线性代数的概念。代数是构造一系列对象和一系列操作这些对象的规则，线性代数是向量，以及操作这些向量的规则，所以，线性代数是代数的具像化表达。从线性代数，我们引出了向量的基本概念，我带你看了一个和向量有关的所有概念，即线性代数所有核心内容的图。

可以说，线性代数的一切皆从**向量**而来。

最后，我带你从二维平面几何角度，更直观地观察线性方程组和它几种解的情况，**而二维空间的线性方程组的解其实就是线、点或者空，也就是没有共同的线段相交**。你也可以自己试着把它扩展到三维空间几何中来观察，或许会更有趣哦！



线性代数练习场

我们一起来看一个练习题。这是一道极其简单的初中线性方程组题，你可以回顾一下，也为下一节课做好铺垫。

李大叔去年承包了10亩地，种植甲、乙两种蔬菜，共获利18000元。其中甲蔬菜每亩获利2000元，乙蔬菜每亩获利1500元。

请问，李大叔去年甲、乙两种蔬菜各种植了多少亩？

欢迎在留言区晒出你的运算过程和结果。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我学习线性代数。今天我们要讲的是"线性代数这门课的基本概念"。

线性代数可以运用在很多领域，比如：工程学、计算机科学、经济学、信号处理等等。我们来看一个在经济学中常见的例子：消费矩阵。

假设有n个行业，比如：化学、食品和石油。制造一单位的某化学品需要0.2单位的另一类化学品，0.3单位的食品，以及0.4单位的石油，而制造一单位的某食品和某石油也同样分别需要这三类产品的输入，于是，我们就能构造这样一个消费矩阵：

$$\left|\begin{array}{l}
化学输出 \\\
食品输出 \\\
石油输出
\end{array}\right|=\left[\begin{array}{lll}
0.2 & 0.3 & 0.4 \\\
0.4 & 0.4 & 0.1 \\\
0.5 & 0.1 & 0.3
\end{array}\right]\left|\begin{array}{l}
化学输入 \\\
食品输入 \\\
石油输入
\end{array}\right|$$

当然，我们也可以用一般的线性方程组$Ax=b$的形式来表达：

$$\left\{\begin{array}{l}

0.2 x_{1}+0.3 x_{2}+0.4 x_{3}=b_{1} \\\
0.4 x_{1}+0.4 x_{2}+0.1 x_{3}=b_{2} \\\
0.5 x_{1}+0.1 x_{2}+0.3 x_{3}=b_{3}
\end{array}\right.$$

从本质上来说，消费矩阵解决的是输入和输出之间的关系。不仅如此，线性代数在现实生活中的运用还有很多，比如，我们可以借用特征值和特征向量，预测若干年后的污水水平；在密码学中，可以使用矩阵及其逆矩阵对需发送的消息加密；在机器学习中，可以使用线性方程组的共轭迭代法来训练神经网络，等等。

刚才我分别用矩阵和线性方程组的形式给出了消费矩阵，当然，在实际生活中，你可以灵活选择最有效的方式来解决问题。

我们可以看到，线性方程组可以表示成一般形式，也就是你初中学到的$A x=b$的形式，也可以表示成矩阵形式。矩阵是由向量组合而成的，比如刚才例子中的系数矩阵的每一行都是一个**行向量**，每一列都是一个**列向量**。

$$\begin{array}{l}
\end{array}\left[\begin{array}{lll}
0.2 & 0.3 & 0.4 \\\
0.4 & 0.4 & 0.1 \\\
0.5 & 0.1 & 0.3
\end{array}\right] \begin{array}{l}
\end{array}$$

从这里我们能看出，**向量**其实就会是线性代数最基础的核心。数学对抽象思维要求很高，简单来说，抽象思维就是抽取同类事物的共性。所以，在进入具体的线性方程组的主题前，我要先从数学抽象的角度说一说代数和线性代数，这也是深入理解后面内容的前提。

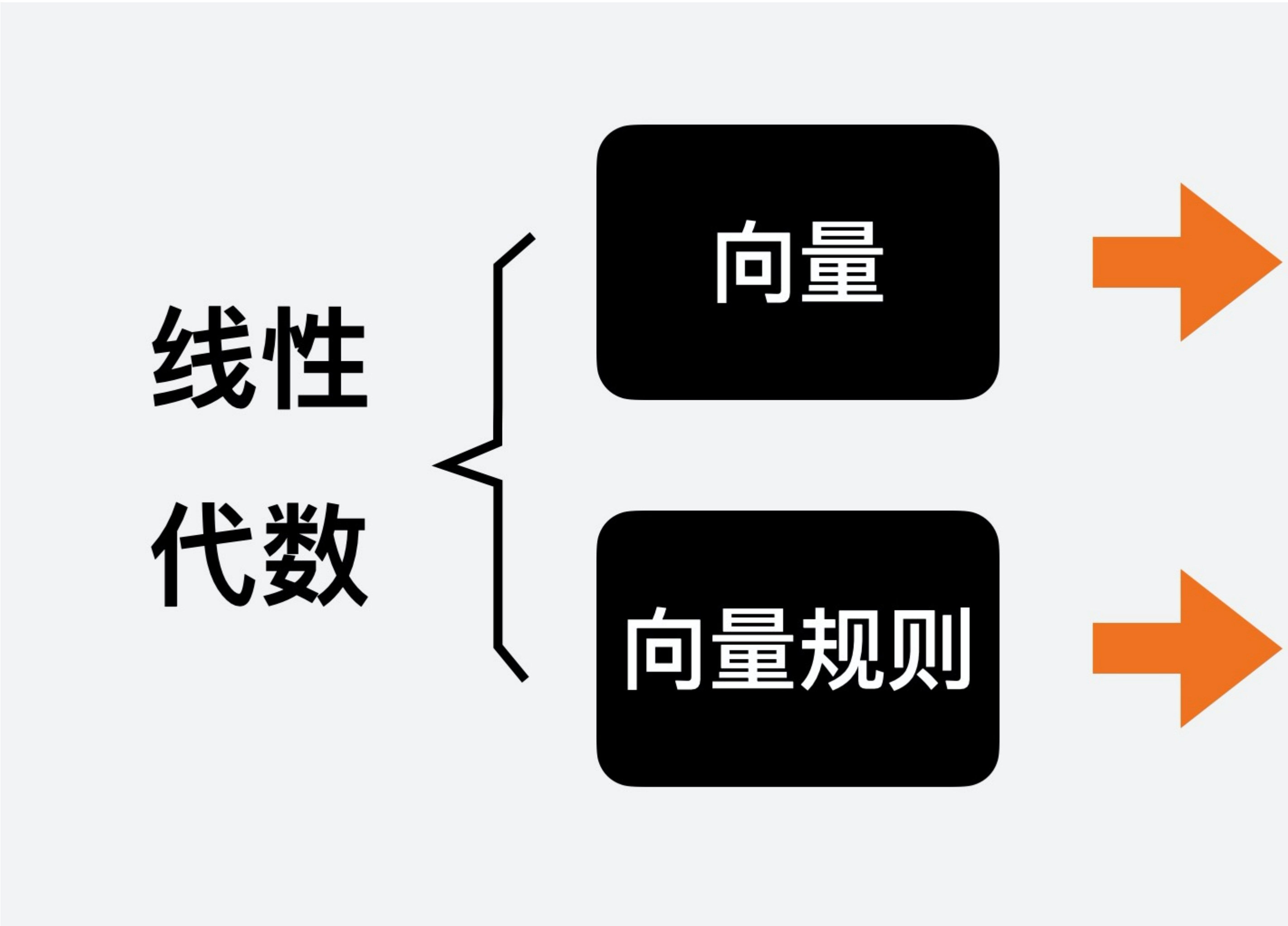
代数和线性代数的基本概念

那什么是代数呢？百度百科的解释是这样的：

> 代数是研究数、数量、关系、结构与代数方程（组）的通用解法及其性质的数学分支。

但我觉得这个解释其实没有说出**代数**这个概念的重点。我的理解是这样的：**代数是构造一系列对象和一系列操作这些对象的规则。**

所以你看，代数这个概念的核心就两点，**对象**和**操作对象的规则**，这样就很好理解了吧？那有了代数的定义，线性代数就很好定义了。我们类比来看，线性代数其实就是向量，以及操作这些向量的规则。这里，向量映射到对象，向量的规则映射到对象的规则，因此线性代数是代数的具像化表达。

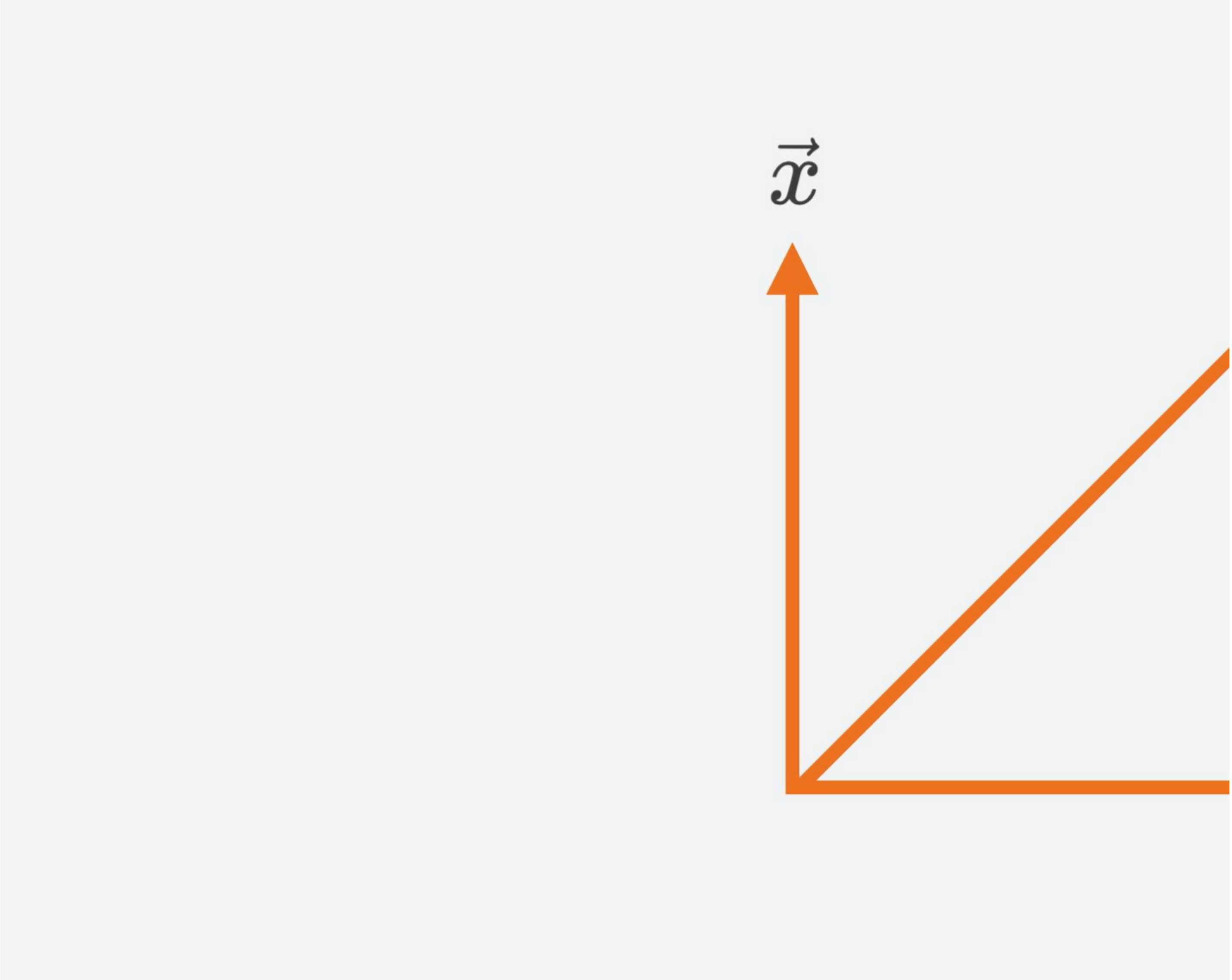


向量的基本概念

那什么是**向量**呢？从样子来看，向量其实就是由字母加上它上面的箭头来表示的，比如我们一版会写成$\vec{x}$。我估计你在高中或大学里已经接触过“几何向量”。那么，下面我用更抽象的数学观点来给你解释一下。

向量，也叫欧几里得向量（Euclidean Vector），其实就是能够互相相加、被标量乘的特殊对象。而标量也叫“无向量”，它只有数值大小，没有方向。怎么理解呢？我们来看一些向量的例子，通过这些例子来深入理解向量的概念。

几何向量是有向线段，在二维空间（也就是平面）中，两个几何向量能够相加，比如，向量x加上向量y等于向量z，$\vec{x}+\vec{y}=\vec{z}$，x向量也能被一个标量乘。再比如，标量λ乘向量x结果也是向量，$\lambda \vec{x}, \lambda \in R$。几何向量通过大小和方向来简化向量的表达，所以，一般数学课程一开始都会拿几何向量来进行举例。



多项式其实也是向量。两个多项式能够相加，它也能够被标量乘，结果也是多项式。

矩阵的一行或一列也是向量。就比如下面这样形式的向量。

$$x \in R^{3}: x=\left[\begin{array}{l}
1 \\
2 \\
3
\end{array}\right]$$

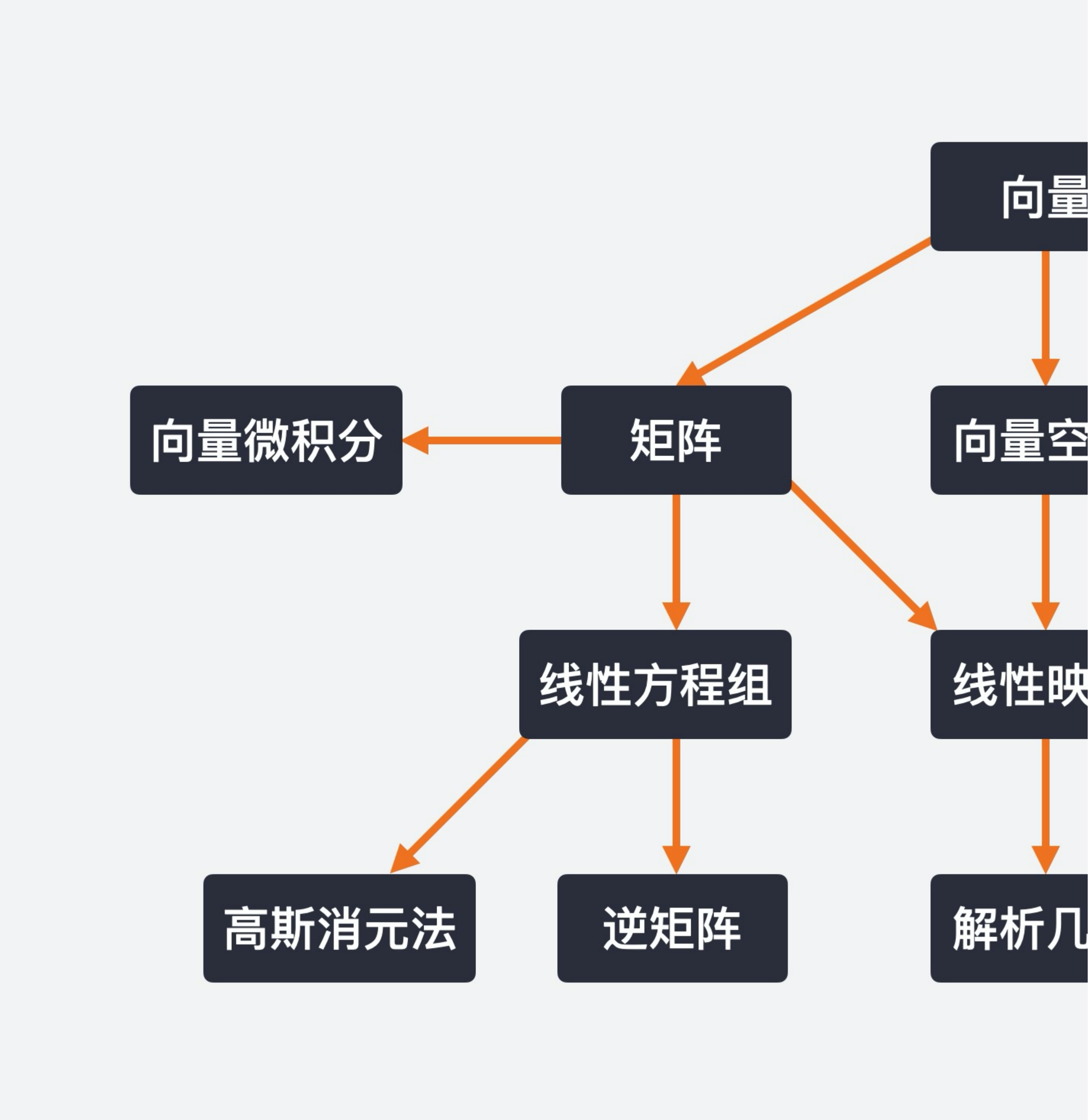
两个向量能够相加，它也能够被标量乘，结果也是向量。它和现代大部分的编程语言中的数组一致，而且数组的运算简化了向量操作的算法实施。

矢量图、音频信号也是向量。它们都能被一系列数字表示，比如，在音频信号处理中，常用到数据增强的方法，通过向量的操作就能到达目标。

看了这些向量例子，不知道你现在有点感觉了吗？其实，线性代数的本质就是**寻找向量之间的相似性**，比如在做分类时，我们常常需要估算不同样本之间的相似性度量（Similarity Measurement），这时通常采用的方法就是计算样本间的“距离”（Distance）。

可以看出来，向量非常重要，我们后面很多内容都是从向量延伸而来的，比如矩阵和求解线性方程组。

下面我用一张图来表达和向量有关的所有概念，也就是线性代数所有的核心内容，其中大部分内容你都会学到，希望通过这个图，你对线性代数有个大概的认知。相信学习完所有课程后，你再回过头来看时，肯定会有一些新的认知。



从图中最左侧这一列，我们可以看出，向量组合成矩阵，矩阵可以表示成线性方程组，而线性方程组可以通过高斯消元法求解，也可以求逆矩阵。

同时，向量又可以组合成向量空间，向量空间和矩阵都可以做线性映射或者线性变换，线性映射在实践中可以用在解析几何和分类问题中。

而且，向量和线性独立是强相关的，也就是说，线性独立指的是向量的线性独立，而线性独立又可以引出能够生成整个空间的基（Basis），基在实践中可以用在分类和降维中。

这里，我再额外提一个非常重要的、在数学中经常用到的概念——**封闭性**，或者俗称**闭包**（Closure）。封闭性的定义是，如果我们要对某个集合的成员进行一种运算，生成的仍然是这个集合的成员，那这个集合就可以称为在这个运算下闭合。

我为什么要提这个概念呢？这是因为，向量的线性运算是封闭的，也就是说向量的加法、数乘结果仍属于向量空间，即**向量的任意线性组合仍属于向量空间**。

线性方程组的应用

到这里，相信你已经对线性代数、向量这些基本概念有了一个应试教育之外的、新的认识，接下来我就切入本篇的最重点的内容了，那就是线性方程组。

线性方程组在线性代数中有着举足轻重的地位，许多现实生活中的问题都可以表达成线性方程组。关于线性方程组的概念，我想不用我多说了，这是初中的内容，你应该已经非常了解了。现在我举几个例子来说一说，线性方程组在现实生活中的运用，让你从应用的角度再理解下线性方程组。

第一个例子是计算旅游团人数。假设，一个旅游团由孩子和大人组成，去程时他们一起坐大巴，每个孩子的票价3元，大人票价3.2元，总共花费118.4元。回程时一起坐火车，每个孩子的票价3.5元，大人票价3.6元，总共花费135.2元。请问这个旅游团中有多少孩子和大人？

假设小孩人数为x_{1}，大人人数为x_{2}，于是我们得到了一个方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
3 x_{1}+3.2 x_{2}=118.4 \\
3.5 x_{1}+3.6 x_{2}=135.2
\end{array}\right.$$

使用初中的解二元一次方程组的知识，我们可以得出这个方程组的解是：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}=16 \\

x_{2}=22
\end{array}\right.$$

这个就是典型的线性方程组的现实例子。当然，我们也可以用矩阵来解这个方程组。你可能会说，这问题很简单啊，为什么还要用矩阵来解呢？整这么复杂有必要吗？别着急，这里我先卖个关子，具体我会在下一讲“矩阵篇”中进行讲解。

第二个例子是找出公司的最优生产计划。我们从公司的角度来看一看，假设生产苹果的几大主流产品：iPhone、Macbook、iMac，以及iWatch四款产品，需要用到芯片、摄像头模组、电池、IPS屏幕四大类资源，产品分别用 $N_{1}，N_{2}，N_{3}，N_{4}$来表示，资源分别用$R_{1}，R_{2}，R_{3}，R_{4}$来表示。

生产一单位的产品 N_{1}，也就是iPhone，需要$a_{11}，a_{21}，a_{31}，a_{41}$的资源，也就是芯片、摄像头模组、电池和IPS屏幕资源，其他产品也是一样。

我们的目标是在资源有限的情况下，找到一个最优生产计划，使每个产品的产出数量最大化。也就是说，在总共有b_{i}个单位资源R_{i}可用情况下，每个产品N_{i} 有多少单元 x_{i}应该被生产。因此，我们可以得到一个下面这样的线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+a_{13} x_{3}+a_{14} x_{4}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+a_{23} x_{3}+a_{24} x_{4}=b_{2} \\
a_{31} x_{1}+a_{32} x_{2}+a_{33} x_{3}+a_{34} x_{4}=b_{3} \\
a_{41} x_{1}+a_{42} x_{2}+a_{43} x_{3}+a_{44} x_{4}=b_{4}
\end{array}\right.$$

于是，我们得到线性方程组的通用表达方式，$x_{1}，\cdots，x_{n}$ 是未知变量，每个满足方程组表达式的n元组$(x_{1}，\cdots，x_{n})$都是它的解。

$$\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.$$

线性方程组的解是有几何意义的，从几何角度出发，有利于你理解和记忆线性方程组解的条件，接下来我们先来看看线性方程组解的几种情况，之后我再具体讲解线性方程组的几何表达。

首先我们来看**无解**的情况。假设有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
2 x_{1}+3 x_{3}=1
\end{array}\right.$$

第一行和第二行相加后，我们可以得到$2 x_{1}+3 x_{3}=5$，很明显，这个方程和第三行是矛盾的，所以，这个线性方程组无解。

其次是**只有一个解**的情况。假设有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
x_{2}+x_{3}=2
\end{array}\right.$$

这个方程组求解很简单，第一行乘以-1和第二行相加得到$-2x_{2}+x_{3}=-1$，再乘以-1后和第三行相加得到$x_{1}=1$，第一行和第二行相加，得到$2 x_{1}+3 x_{3}=5$，代入x_{1}后，得到$x_{3}=1$，最后，我们可以得到$(1,1,1)$是这个线性方程组的唯一解。

最后是**无穷解**的情况。我们有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
2 x_{1}+3 x_{3}=5
\end{array}\right.$$

方程组第一行和第二行相加等于第三行，从这个角度来说，我们就可以定义一个自由变量$x_{3}=a$，a属于实数，那方程组的解就是：

$$\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2} a, \frac{1}{2}+\frac{1}{2} a, a\right)$$

其中a属于实数，所以，这就包含了无穷多个解。

线性方程组的几何表达

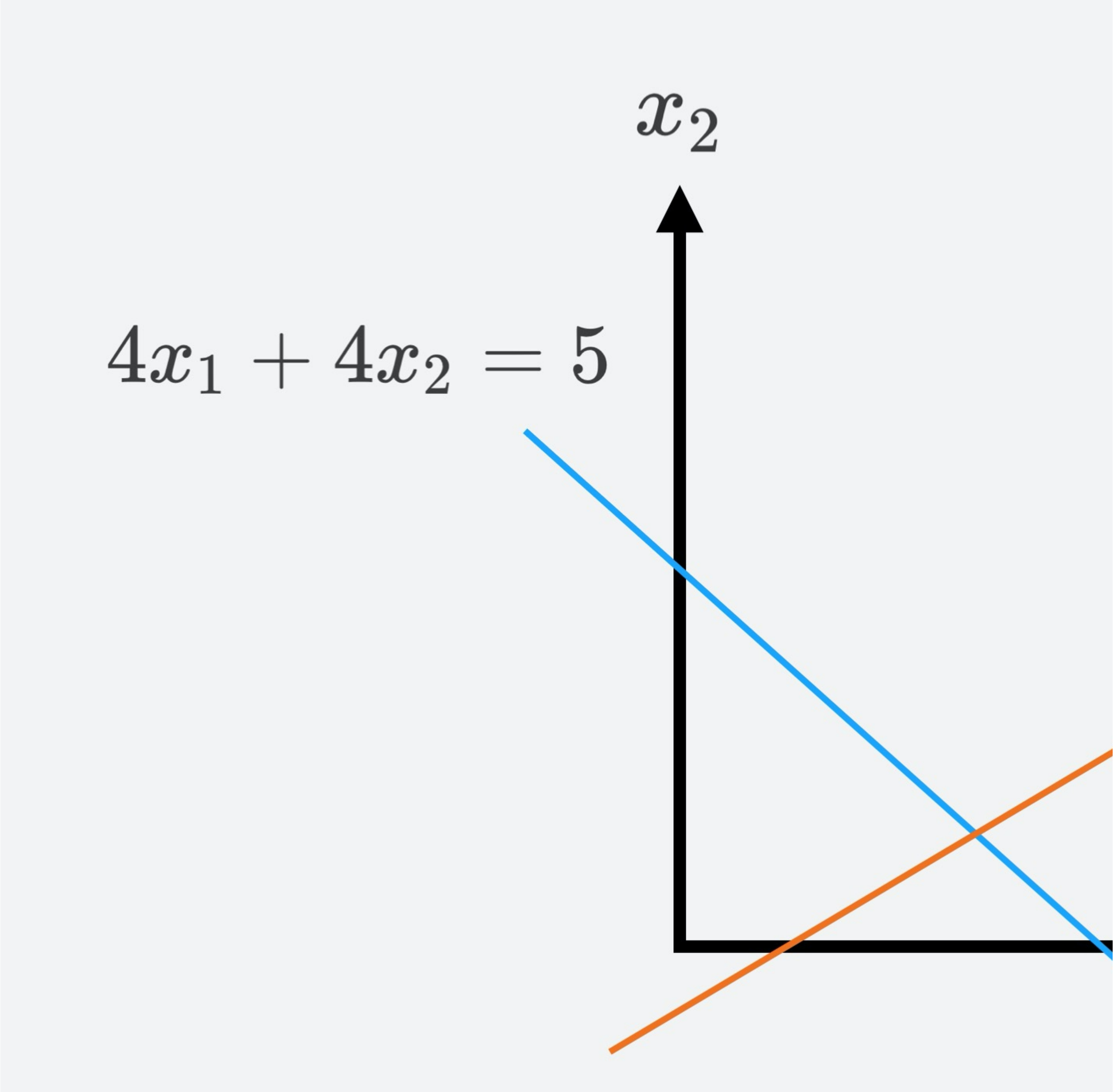
好了，了解了线性方程组解的三种情况，现在我们是时候从几何的角度来看一看线性方程组和它的解了，从几何意义出发有利于你更直观地理解线性方程组。

在一个只有两个变量x_{1},x_{2}的线性方程组中，我们定义一个x_{1},x_{2}平面。在这个平面中，每个线性方程都表达了一条直线。由于线性方程组的唯一解必须同时满足所有的等式，所以，线性方程组的唯一解其实就是线段的相交点，无穷解就是两线重合，而无解的情况，也就是两条线平行。

我拿一个例子来说明，设线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{l}
4 x_{1}+4 x_{2}=5 \\
2 x_{1}-4 x_{2}=1
\end{array}\right.$$

把其中的两个线性方程在x_{1},x_{2}平面中画出来后，我们可以得到两线段的交点$\left(1, \frac{1}{4}\right)$，也就是这个线性方程组的解。



我再把这个概念延伸一下，当遇到三个变量的情况时，每个线性方程在三维空间中表达了一个平面，由于线性方程组的一个解必须同时满足所有的等式，所以，**线性方程组的解其实就是平面，也可以是线、点或者空，空也就是没有共同的平面相交。**

其实还有一个更好的方法来表达和解线性方程组，这个方法就是下一篇要讲的矩阵，在这里我先简单提一下。我们把系数组合成向量，把向量组合成矩阵，也就是说，我们可以把线性方程组写成这样的形式：

$$x_{1}\left|\begin{array}{c}
a_{11} \\
\vdots \\
a_{m1}
\end{array}\right|+x_{2}\left|\begin{array}{c}
a_{12} \\
\vdots \\
c_{m2}
\end{array}\right|+\cdots+x_{n}\left|\begin{array}{c}
a_{1n} \\
\vdots \\
a_{mn}
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{c}
b_{1} \\
\vdots \\
b_{m}
\end{array}\right|$$

再进一步最终可以写成矩阵的形式：
$$\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}
\end{array}\right]\left|\begin{array}{c}
x_{1} \\
\vdots \\
. \\

x_{n}
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{c}
b_{1} \\\
\vdots \\\
. \\\
b_{m}
\end{array}\right|$$

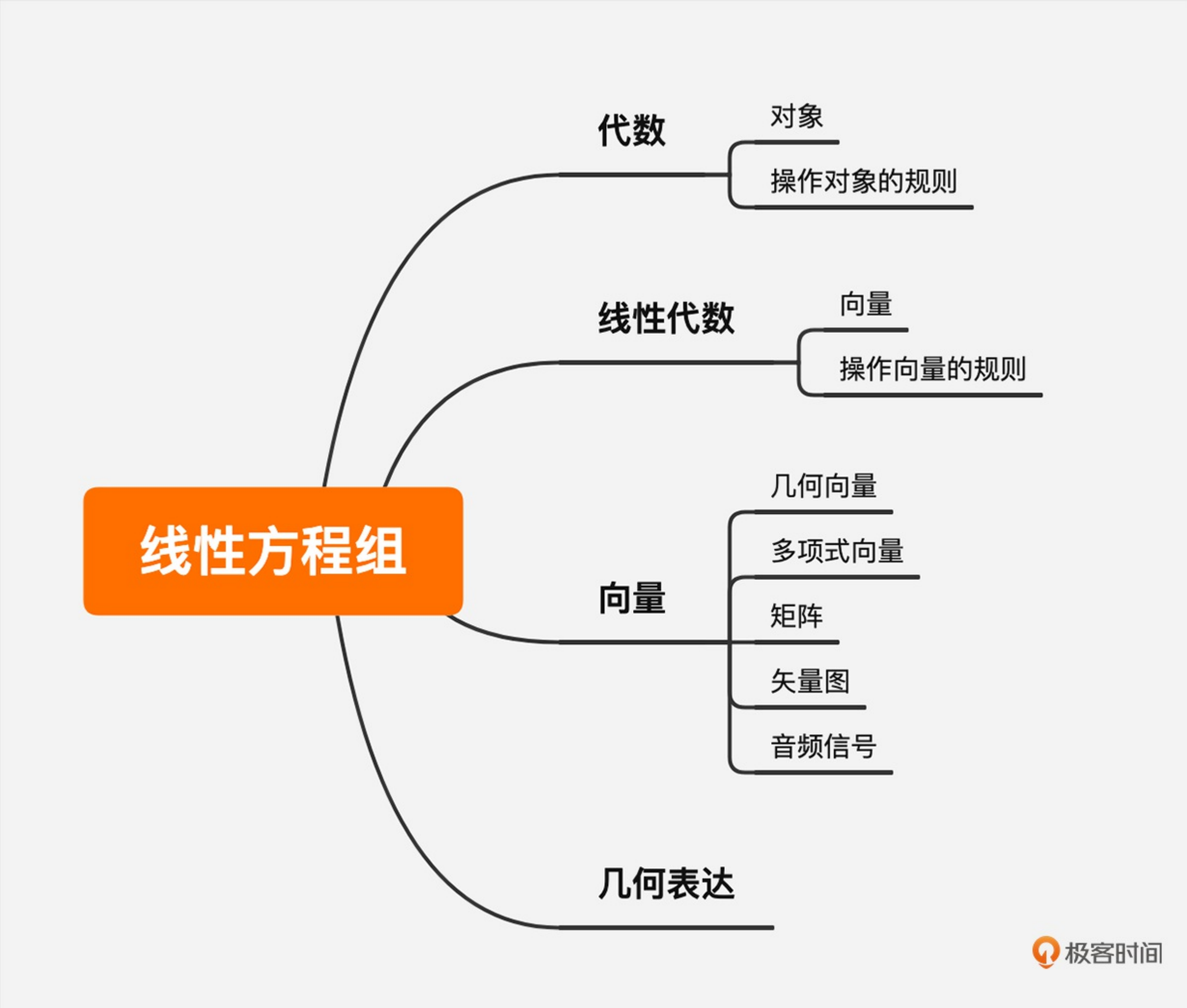
本节小结

好了，到这里这一讲就结束了，我带你总结一下前面讲解的内容。

这节课我带你重新认识了代数和线性代数的概念。代数是构造一系列对象和一系列操作这些对象的规则，线性代数是向量，以及操作这些向量的规则，所以，线性代数是代数的具像化表达。从线性代数，我们引出了向量的基本概念，我带你看了一个和向量有关的所有概念，即线性代数所有核心内容的图。

可以说，线性代数的一切皆从**向量**而来。

最后，我带你从二维平面几何角度，更直观地观察线性方程组和它几种解的情况，**而二维空间的线性方程组的解其实就是线、点或者空，也就是没有共同的线段相交**。你也可以自己试着把它扩展到三维空间几何中来观察，或许会更有趣哦！



线性代数练习场

我们一起来看一个练习题。这是一道极其简单的初中线性方程组题，你可以回顾一下，也为下一节课做好铺垫。

李大叔去年承包了10亩地，种植甲、乙两种蔬菜，共获利18000元。其中甲蔬菜每亩获利2000元，乙蔬菜每亩获利1500元。

请问，李大叔去年甲、乙两种蔬菜各种植了多少亩？

欢迎在留言区晒出你的运算过程和结果。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我学习线性代数。今天我们要讲的是“线性代数这门课的基本概念”。

线性代数可以运用在很多领域，比如：工程学、计算机科学、经济学、信号处理等等。我们来看一个在经济学中常见的例子：消费矩阵。

假设有n个行业，比如：化学、食品和石油。制造一单位的某化学品需要0.2单位的另一类化学品，0.3单位的食品，以及0.4单位的石油，而制造一单位的某食品和某石油也同样分别需要这三类产品的输入，于是，我们就能构造这样一个消费矩阵：

$$\left|\begin{array}{l}
化学输出 \\\
食品输出 \\\
石油输出
\end{array}\right|=\left[\begin{array}{lll}
0.2 & 0.3 & 0.4 \\\
0.4 & 0.4 & 0.1 \\\
0.5 & 0.1 & 0.3
\end{array}\right]\left|\begin{array}{l}
化学输入 \\\
食品输入 \\\
石油输入
\end{array}\right|$$

当然，我们也可以用一般的线性方程组$Ax=b$的形式来表达：

$$\left\{\begin{array}{l}

0.2 x_{1}+0.3 x_{2}+0.4 x_{3}=b_{1} \\
0.4 x_{1}+0.4 x_{2}+0.1 x_{3}=b_{2} \\
0.5 x_{1}+0.1 x_{2}+0.3 x_{3}=b_{3}
\end{array}\right.$$

从本质上来说，消费矩阵解决的是输入和输出之间的关系。不仅如此，线性代数在现实生活中的运用还有很多，比如，我们可以借用特征值和特征向量，预测若干年后的污水水平；在密码学中，可以使用矩阵及其逆矩阵对需发送的消息加密；在机器学习中，可以使用线性方程组的共轭迭代法来训练神经网络，等等。

刚才我分别用矩阵和线性方程组的形式给出了消费矩阵，当然，在实际生活中，你可以灵活选择最有效的方式来解决问题。

我们可以看到，线性方程组可以表示成一般形式，也就是你初中学到的$A x=b$的形式，也可以表示成矩阵形式。矩阵是由向量组合而成的，比如刚才例子中的系数矩阵的每一行都是一个**行向量**，每一列都是一个**列向量**。

$$\begin{array}{l}
\end{array}\left[\begin{array}{lll}
0.2 & 0.3 & 0.4 \\
0.4 & 0.4 & 0.1 \\
0.5 & 0.1 & 0.3
\end{array}\right] \begin{array}{l}
\end{array}$$

从这里我们能看出，**向量**其实就会是线性代数最基础的核心。数学对抽象思维要求很高，简单来说，抽象思维就是抽取同类事物的共性。所以，在进入具体的线性方程组的主题前，我要先从数学抽象的角度说一说代数和线性代数，这也是深入理解后面内容的前提。

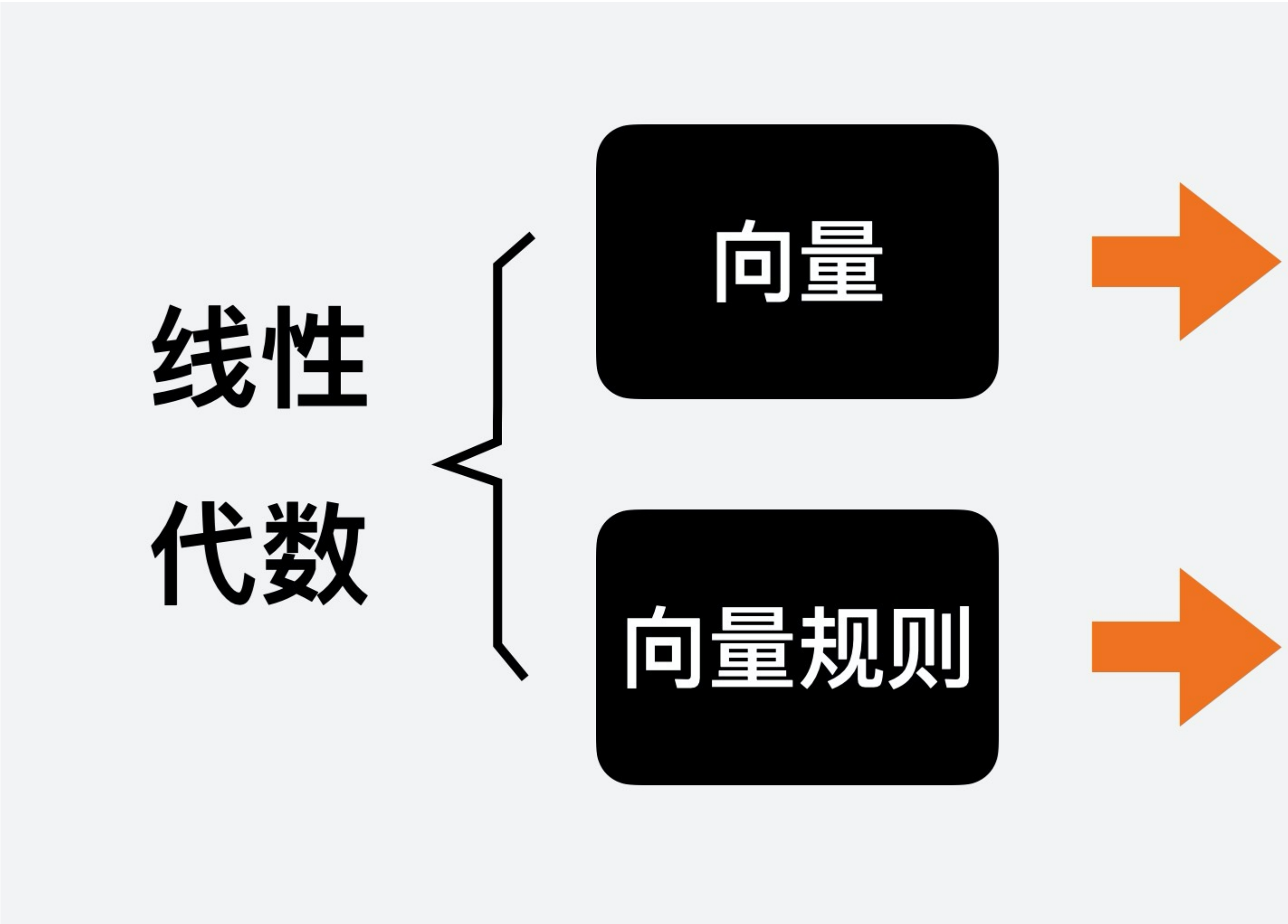
代数和线性代数的基本概念

那什么是代数呢？百度百科的解释是这样的：

> 代数是研究数、数量、关系、结构与代数方程（组）的通用解法及其性质的数学分支。

但我觉得这个解释其实没有说出**代数**这个概念的重点。我的理解是这样的：**代数是构造一系列对象和一系列操作这些对象的规则。**

所以你看，代数这个概念的核心就两点，**对象**和**操作对象的规则**，这样就很好理解了吧？那有了代数的定义，线性代数就很好定义了。我们类比来看，线性代数其实就是向量，以及操作这些向量的规则。这里，向量映射到对象，向量的规则映射到对象的规则，因此线性代数是代数的具像化表达。

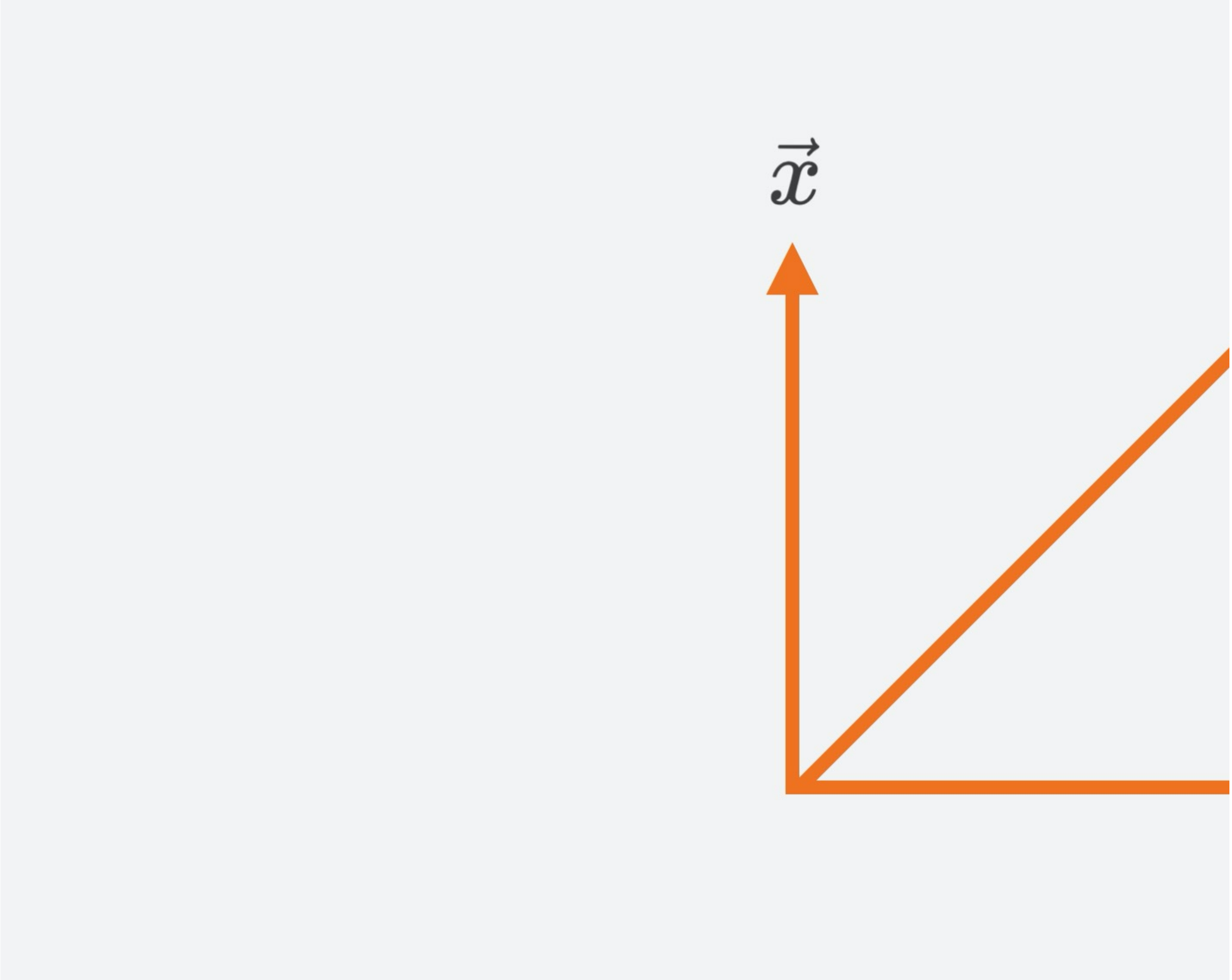


向量的基本概念

那什么是**向量**呢？从样子来看，向量其实就是由字母加上它上面的箭头来表示的，比如我们一版会写成$\vec{x}$。我估计你在高中或大学里已经接触过“几何向量”。那么，下面我用更抽象的数学观点来给你解释一下。

向量，也叫欧几里得向量（Euclidean Vector），其实就是能够互相相加、被标量乘的特殊对象。而标量也叫“无向量”，它只有数值大小，没有方向。怎么理解呢？我们来看一些向量的例子，通过这些例子来深入理解向量的概念。

几何向量是有向线段，在二维空间（也就是平面）中，两个几何向量能够相加，比如，向量x加上向量y等于向量z，$\vec{x}+\vec{y}=\vec{z}$，x向量也能被一个标量乘。再比如，标量λ乘向量x结果也是向量，$\lambda \vec{x}, \lambda \in R$。几何向量通过大小和方向来简化向量的表达，所以，一般数学课程一开始都会拿几何向量来进行举例。



多项式其实也是向量。两个多项式能够相加，它也能够被标量乘，结果也是多项式。

矩阵的一行或一列也是向量。就比如下面这样形式的向量。

$$x \in R^{3}: x=\left[\begin{array}{l}
1 \\
2 \\
3
\end{array}\right]$$

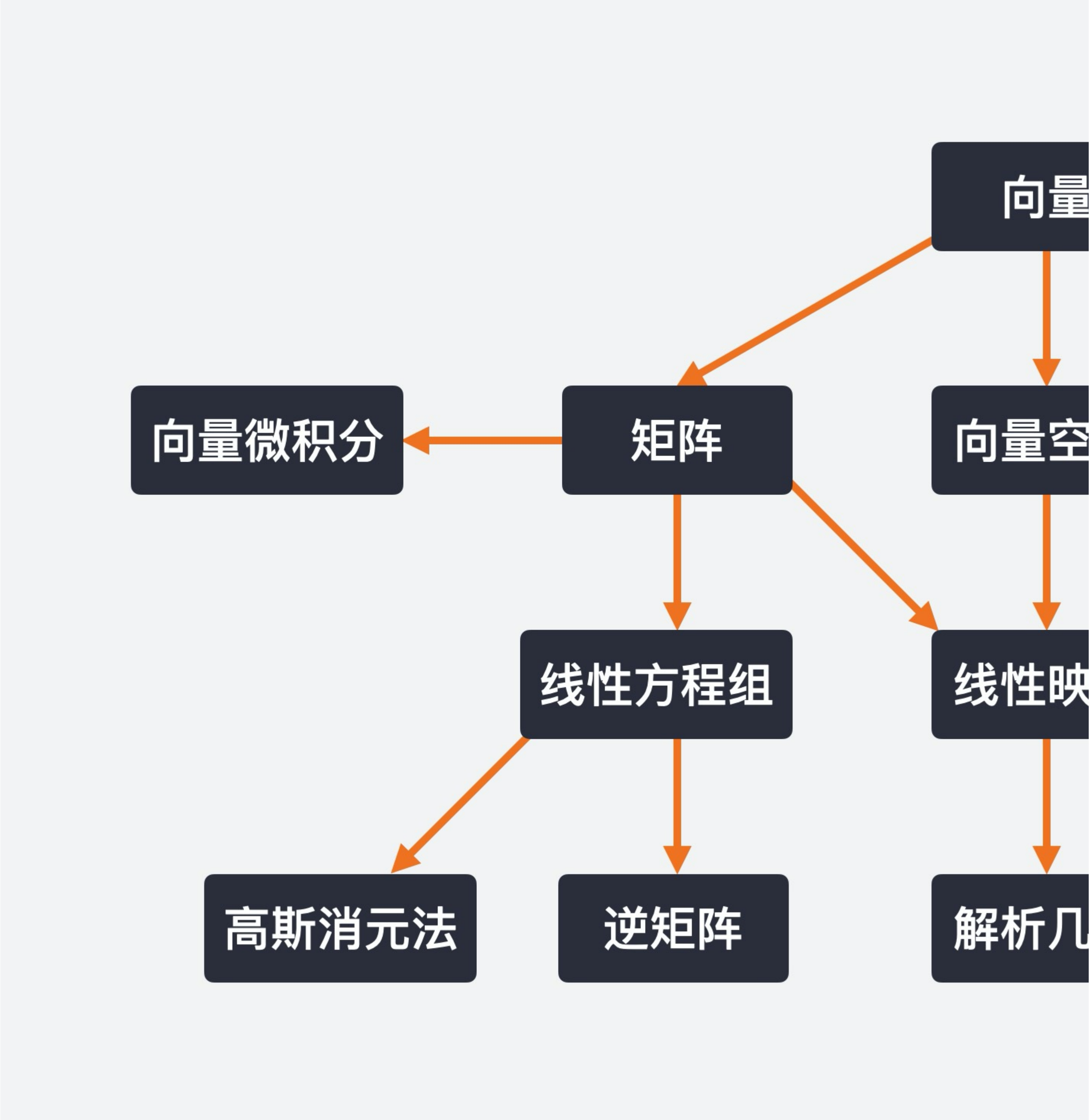
两个向量能够相加，它也能够被标量乘，结果也是向量。它和现代大部分的编程语言中的数组一致，而且数组的运算简化了向量操作的算法实施。

矢量图、音频信号也是向量。它们都能被一系列数字表示，比如，在音频信号处理中，常用到数据增强的方法，通过向量的操作就能到达目标。

看了这些向量例子，不知道你现在有点感觉了吗？其实，线性代数的本质就是**寻找向量之间的相似性**，比如在做分类时，我们常常需要估算不同样本之间的相似性度量（Similarity Measurement），这时通常采用的方法就是计算样本间的“距离”（Distance）。

可以看出来，向量非常重要，我们后面很多内容都是从向量延伸而来的，比如矩阵和求解线性方程组。

下面我用一张图来表达和向量有关的所有概念，也就是线性代数所有的核心内容，其中大部分内容你都会学到，希望通过这个图，你对线性代数有个大概的认知。相信学习完所有课程后，你再回过头来看时，肯定会有一些新的认知。



从图中最左侧这一列，我们可以看出，向量组合成矩阵，矩阵可以表示成线性方程组，而线性方程组可以通过高斯消元法求解，也可以求逆矩阵。

同时，向量又可以组合成向量空间，向量空间和矩阵都可以做线性映射或者线性变换，线性映射在实践中可以用在解析几何和分类问题中。

而且，向量和线性独立是强相关的，也就是说，线性独立指的是向量的线性独立，而线性独立又可以引出能够生成整个空间的基（Basis），基在实践中可以用在分类和降维中。

这里，我再额外提一个非常重要的、在数学中经常用到的概念——**封闭性**，或者俗称**闭包**（Closure）。封闭性的定义是，如果我们要对某个集合的成员进行一种运算，生成的仍然是这个集合的成员，那这个集合就可以称为在这个运算下闭合。

我为什么要提这个概念呢？这是因为，向量的线性运算是封闭的，也就是说向量的加法、数乘结果仍属于向量空间，即**向量的任意线性组合仍属于向量空间**。

线性方程组的应用

到这里，相信你已经对线性代数、向量这些基本概念有了一个应试教育之外的、新的认识，接下来我就切入本篇的最重点的内容了，那就是线性方程组。

线性方程组在线性代数中有着举足轻重的地位，许多现实生活中的问题都可以表达成线性方程组。关于线性方程组的概念，我想不用我多说了，这是初中的内容，你应该已经非常了解了。现在我举几个例子来说一说，线性方程组在现实生活中的运用，让你从应用的角度再理解下线性方程组。

第一个例子是计算旅游团人数。假设，一个旅游团由孩子和大人组成，去程时他们一起坐大巴，每个孩子的票价3元，大人票价3.2元，总共花费118.4元。回程时一起坐火车，每个孩子的票价3.5元，大人票价3.6元，总共花费135.2元。请问这个旅游团中有多少孩子和大人？

假设小孩人数为x_{1}，大人人数为x_{2}，于是我们得到了一个方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
3 x_{1}+3.2 x_{2}=118.4 \\
3.5 x_{1}+3.6 x_{2}=135.2
\end{array}\right.$$

使用初中的解二元一次方程组的知识，我们可以得出这个方程组的解是：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}=16 \\

x_{2}=22
\end{array}\right.$$

这个就是典型的线性方程组的现实例子。当然，我们也可以用矩阵来解这个方程组。你可能会说，这问题很简单啊，为什么还要用矩阵来解呢？整这么复杂有必要吗？别着急，这里我先卖个关子，具体我会在下一讲“矩阵篇”中进行讲解。

第二个例子是找出公司的最优生产计划。我们从公司的角度来看一看，假设生产苹果的几大主流产品：iPhone、Macbook、iMac，以及iWatch四款产品，需要用到芯片、摄像头模组、电池、IPS屏幕四大类资源，产品分别用 $N_{1}，N_{2}，N_{3}，N_{4}$来表示，资源分别用$R_{1}，R_{2}，R_{3}，R_{4}$来表示。

生产一单位的产品 N_{1}，也就是iPhone，需要$a_{11}，a_{21}，a_{31}，a_{41}$的资源，也就是芯片、摄像头模组、电池和IPS屏幕资源，其他产品也是一样。

我们的目标是在资源有限的情况下，找到一个最优生产计划，使每个产品的产出数量最大化。也就是说，在总共有b_{i}个单位资源R_{i}可用情况下，每个产品N_{i} 有多少单元 x_{i}应该被生产。因此，我们可以得到一个下面这样的线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+a_{13} x_{3}+a_{14} x_{4}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+a_{23} x_{3}+a_{24} x_{4}=b_{2} \\
a_{31} x_{1}+a_{32} x_{2}+a_{33} x_{3}+a_{34} x_{4}=b_{3} \\
a_{41} x_{1}+a_{42} x_{2}+a_{43} x_{3}+a_{44} x_{4}=b_{4}
\end{array}\right.$$

于是，我们得到线性方程组的通用表达方式，$x_{1}，\cdots ，x_{n}$ 是未知变量，每个满足方程组表达式的n元组$(x_{1}，\cdots ，x_{n})$都是它的解。

$$\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.$$

线性方程组的解是有几何意义的，从几何角度出发，有利于你理解和记忆线性方程组解的条件，接下来我们先来看看线性方程组解的几种情况，之后我再具体讲解线性方程组的几何表达。

首先我们来看**无解**的情况。假设有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
2 x_{1}+3 x_{3}=1
\end{array}\right.$$

第一行和第二行相加后，我们可以得到$2 x_{1}+3 x_{3}=5$，很明显，这个方程和第三行是矛盾的，所以，这个线性方程组无解。

其次是**只有一个解**的情况。假设有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
x_{2}+x_{3}=2
\end{array}\right.$$

这个方程组求解很简单，第一行乘以-1和第二行相加得到$-2x_{2}+x_{3}=-1$，再乘以-1后和第三行相加得到$x_{1}=1$，第一行和第二行相加，得到$2 x_{1}+3 x_{3}=5$，代入x_{1}后，得到$x_{3}=1$，最后，我们可以得到$(1,1,1)$是这个线性方程组的唯一解。

最后是**无穷解**的情况。我们有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
2 x_{1}+3 x_{3}=5
\end{array}\right.$$

方程组第一行和第二行相加等于第三行，从这个角度来说，我们就可以定义一个自由变量$x_{3}=a$，a属于实数，那方程组的解就是：

$$\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2} a, \frac{1}{2}+\frac{1}{2} a, a\right)$$

其中a属于实数，所以，这就包含了无穷多个解。

线性方程组的几何表达

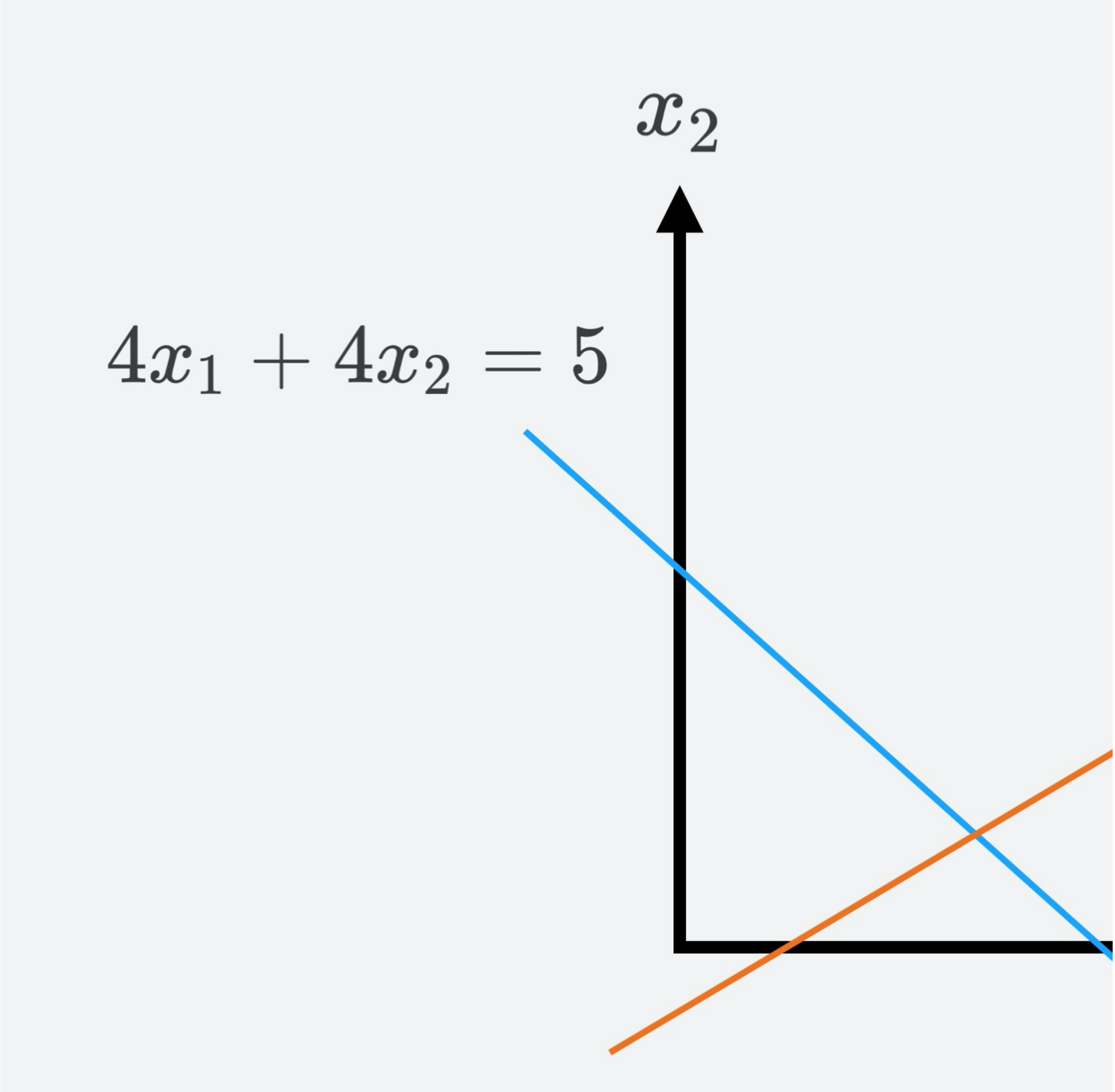
好了，了解了线性方程组解的三种情况，现在我们是时候从几何的角度来看一看线性方程组和它的解了，从几何意义出发有利于你更直观地理解线性方程组。

在一个只有两个变量x_{1},x_{2}的线性方程组中，我们定义一个x_{1},x_{2}平面。在这个平面中，每个线性方程都表达了一条直线。由于线性方程组的唯一解必须同时满足所有的等式，所以，线性方程组的唯一解其实就是线段的相交点，无穷解就是两线重合，而无解的情况，也就是两条线平行。

我拿一个例子来说明，设线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{l}
4 x_{1}+4 x_{2}=5 \\
2 x_{1}-4 x_{2}=1
\end{array}\right.$$

把其中的两个线性方程在x_{1},x_{2}平面中画出来后，我们可以得到两线段的交点$\left(1, \frac{1}{4}\right)$，也就是这个线性方程组的解。



我再把这个概念延伸一下，当遇到三个变量的情况时，每个线性方程在三维空间中表达了一个平面，由于线性方程组的一个解必须同时满足所有的等式，所以，**线性方程组的解其实就是平面，也可以是线、点或者空，空也就是没有共同的平面相交。**

其实还有一个更好的方法来表达和解线性方程组，这个方法就是下一篇要讲的矩阵，在这里我先简单提一下。我们把系数组合成向量，把向量组合成矩阵，也就是说，我们可以把线性方程组写成这样的形式：

$$x_{1}\left|\begin{array}{c}
a_{11} \\
\vdots \\
a_{m1}
\end{array}\right|+x_{2}\left|\begin{array}{c}
a_{12} \\
\vdots \\
c_{m2}
\end{array}\right|+\cdots+x_{n}\left|\begin{array}{c}
a_{1 n} \\
\vdots \\
a_{mn}
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{c}
b_{1} \\
\vdots \\
b_{m}
\end{array}\right|$$

再进一步最终可以写成矩阵的形式：
$$\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}
\end{array}\right]\left|\begin{array}{c}
x_{1} \\
\vdots \\
. \\

x_{n}
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{c}
b_{1} \\\
\vdots \\\
. \\\
b_{m}
\end{array}\right|$$

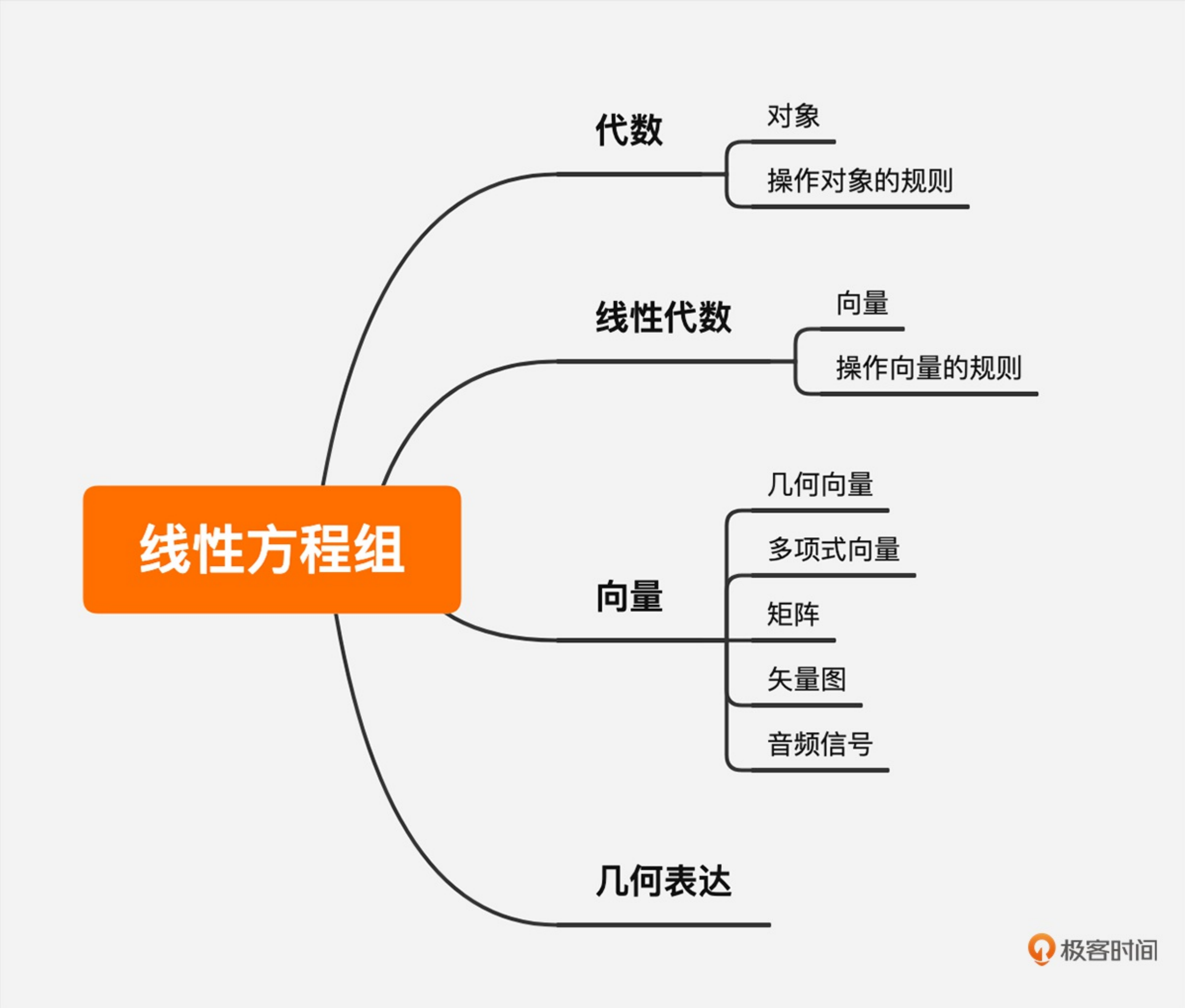
本节小结

好了，到这里这一讲就结束了，我带你总结一下前面讲解的内容。

这节课我带你重新认识了代数和线性代数的概念。代数是构造一系列对象和一系列操作这些对象的规则，线性代数是向量，以及操作这些向量的规则，所以，线性代数是代数的具像化表达。从线性代数，我们引出了向量的基本概念，我带你看了一个和向量有关的所有概念，即线性代数所有核心内容的图。

可以说，线性代数的一切皆从**向量**而来。

最后，我带你从二维平面几何角度，更直观地观察线性方程组和它几种解的情况，**而二维空间的线性方程组的解其实就是线、点或者空，也就是没有共同的线段相交**。你也可以自己试着把它扩展到三维空间几何中来观察，或许会更有趣哦！



线性代数练习场

我们一起来看一个练习题。这是一道极其简单的初中线性方程组题，你可以回顾一下，也为下一节课做好铺垫。

李大叔去年承包了10亩地，种植甲、乙两种蔬菜，共获利18000元。其中甲蔬菜每亩获利2000元，乙蔬菜每亩获利1500元。

请问，李大叔去年甲、乙两种蔬菜各种植了多少亩？

欢迎在留言区晒出你的运算过程和结果。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我学习线性代数。今天我们要讲的是"线性代数这门课的基本概念"。

线性代数可以运用在很多领域，比如：工程学、计算机科学、经济学、信号处理等等。我们来看一个在经济学中常见的例子：消费矩阵。

假设有n个行业，比如：化学、食品和石油。制造一单位的某化学品需要0.2单位的另一类化学品，0.3单位的食品，以及0.4单位的石油，而制造一单位的某食品和某石油也同样分别需要这三类产品的输入，于是，我们就能构造这样一个消费矩阵：

$$\left|\begin{array}{l}
化学输出 \\\
食品输出 \\\
石油输出
\end{array}\right|=\left[\begin{array}{lll}
0.2 & 0.3 & 0.4 \\\
0.4 & 0.4 & 0.1 \\\
0.5 & 0.1 & 0.3
\end{array}\right]\left|\begin{array}{l}
化学输入 \\\
食品输入 \\\
石油输入
\end{array}\right|$$

当然，我们也可以用一般的线性方程组$Ax=b$的形式来表达：

$$\left\{\begin{array}{l}

0.2 x_{1}+0.3 x_{2}+0.4 x_{3}=b_{1} \\
0.4 x_{1}+0.4 x_{2}+0.1 x_{3}=b_{2} \\
0.5 x_{1}+0.1 x_{2}+0.3 x_{3}=b_{3}
\end{array}\right.$$

从本质上来说，消费矩阵解决的是输入和输出之间的关系。不仅如此，线性代数在现实生活中的运用还有很多，比如，我们可以借用特征值和特征向量，预测若干年后的污水水平；在密码学中，可以使用矩阵及其逆矩阵对需发送的消息加密；在机器学习中，可以使用线性方程组的共轭迭代法来训练神经网络，等等。

刚才我分别用矩阵和线性方程组的形式给出了消费矩阵，当然，在实际生活中，你可以灵活选择最有效的方式来解决问题。

我们可以看到，线性方程组可以表示成一般形式，也就是你初中学到的$A x=b$的形式，也可以表示成矩阵形式。矩阵是由向量组合而成的，比如刚才例子中的系数矩阵的每一行都是一个**行向量**，每一列都是一个**列向量**。

$$\begin{array} {l}
\end{array} \left[\begin{array} {lll}
0.2 & 0.3 & 0.4 \\
0.4 & 0.4 & 0.1 \\
0.5 & 0.1 & 0.3
\end{array}\right] \begin{array} {l}
\end{array}$$

从这里我们能看出，**向量**其实就会是线性代数最基础的核心。数学对抽象思维要求很高，简单来说，抽象思维就是抽取同类事物的共性。所以，在进入具体的线性方程组的主题前，我要先从数学抽象的角度说一说代数和线性代数，这也是深入理解后面内容的前提。

代数和线性代数的基本概念

那什么是代数呢？百度百科的解释是这样的：

> 代数是研究数、数量、关系、结构与代数方程（组）的通用解法及其性质的数学分支。

但我觉得这个解释其实没有说出**代数**这个概念的重点。我的理解是这样的：**代数是构造一系列对象和一系列操作这些对象的规则。**

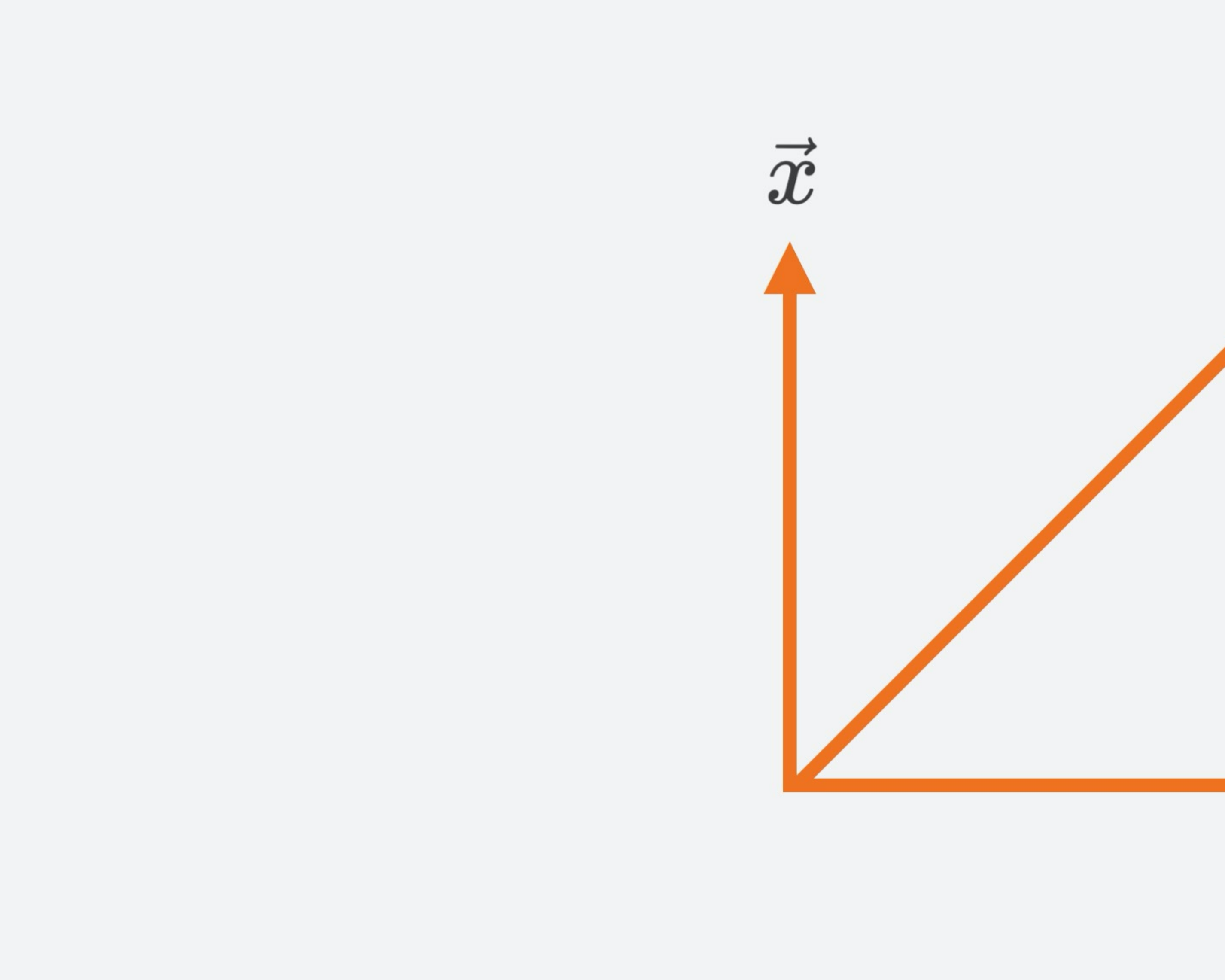
所以你看，代数这个概念的核心就两点，**对象**和**操作对象的规则**，这样就很好理解了吧？那有了代数的定义，线性代数就很好定义了。我们类比来看，线性代数其实就是向量，以及操作这些向量的规则。这里，向量映射到对象，向量的规则映射到对象的规则，因此线性代数是代数的具像化表达。

向量的基本概念

那什么是**向量**呢？从样子来看，向量其实就是由字母加上它上面的箭头来表示的，比如我们一版会写成$\vec{x}$。我估计你在高中或大学里已经接触过“几何向量”。那么，下面我用更抽象的数学观点来给你解释一下。

向量，也叫欧几里得向量（Euclidean Vector），其实就是能够互相相加、被标量乘的特殊对象。而标量也叫“无向量”，它只有数值大小，没有方向。怎么理解呢？我们来看一些向量的例子，通过这些例子来深入理解向量的概念。

几何向量是有向线段，在二维空间（也就是平面）中，两个几何向量能够相加，比如，向量x加上向量y等于向量z，$\vec{x}+\vec{y}=\vec{z}$，x向量也能被一个标量乘。再比如，标量λ乘向量x结果也是向量，$\lambda \vec{x}, \lambda \in R$。几何向量通过大小和方向来简化向量的表达，所以，一般数学课程一开始都会拿几何向量来进行举例。



多项式其实也是向量。两个多项式能够相加，它也能够被标量乘，结果也是多项式。

矩阵的一行或一列也是向量。就比如下面这样形式的向量。

$$x \in R^{3}: x=\left[\begin{array}{l}
1 \\
2 \\
3
\end{array}\right]$$

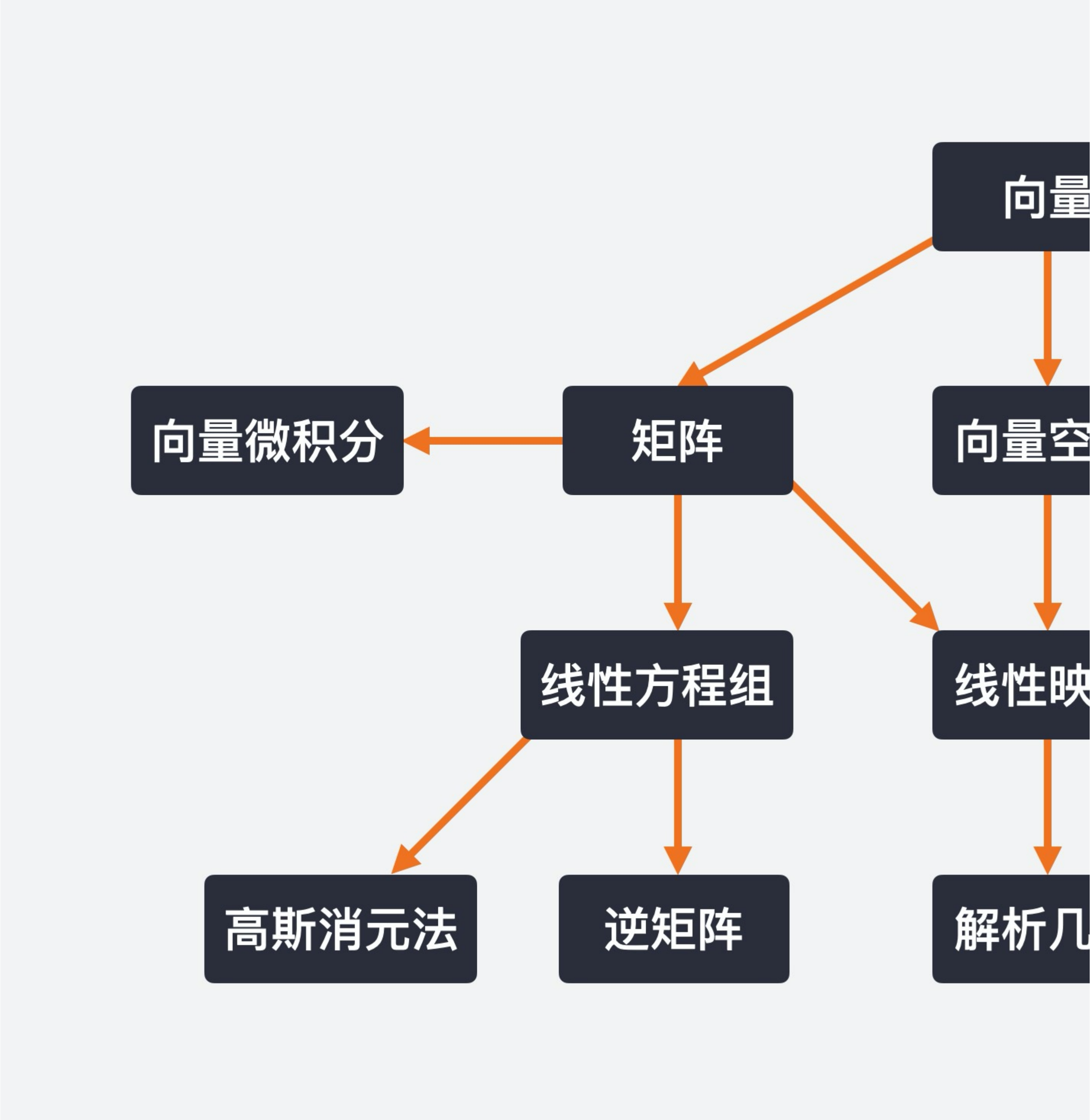
两个向量能够相加，它也能够被标量乘，结果也是向量。它和现代大部分的编程语言中的数组一致，而且数组的运算简化了向量操作的算法实施。

矢量图、音频信号也是向量。它们都能被一系列数字表示，比如，在音频信号处理中，常用到数据增强的方法，通过向量的操作就能到达目标。

看了这些向量例子，不知道你现在有点感觉了吗？其实，线性代数的本质就是**寻找向量之间的相似性**，比如在做分类时，我们常常需要估算不同样本之间的相似性度量（Similarity Measurement），这时通常采用的方法就是计算样本间的“距离”（Distance）。

可以看出来，向量非常重要，我们后面很多内容都是从向量延伸而来的，比如矩阵和求解线性方程组。

下面我用一张图来表达和向量有关的所有概念，也就是线性代数所有的核心内容，其中大部分内容你都会学到，希望通过这个图，你对线性代数有个大概的认知。相信学习完所有课程后，你再回过头来看时，肯定会有一些新的认知。



从图中最左侧这一列，我们可以看出，向量组合成矩阵，矩阵可以表示成线性方程组，而线性方程组可以通过高斯消元法求解，也可以求逆矩阵。

同时，向量又可以组合成向量空间，向量空间和矩阵都可以做线性映射或者线性变换，线性映射在实践中可以用在解析几何和分类问题中。

而且，向量和线性独立是强相关的，也就是说，线性独立指的是向量的线性独立，而线性独立又可以引出能够生成整个空间的基（Basis），基在实践中可以用在分类和降维中。

这里，我再额外提一个非常重要的、在数学中经常用到的概念——**封闭性**，或者俗称**闭包**（Closure）。封闭性的定义是，如果我们要对某个集合的成员进行一种运算，生成的仍然是这个集合的成员，那这个集合就可以称为在这个运算下闭合。

我为什么要提这个概念呢？这是因为，向量的线性运算是封闭的，也就是说向量的加法、数乘结果仍属于向量空间，即**向量的任意线性组合仍属于向量空间**。

线性方程组的应用

到这里，相信你已经对线性代数、向量这些基本概念有了一个应试教育之外的、新的认识，接下来我就切入本篇的最重点的内容了，那就是线性方程组。

线性方程组在线性代数中有着举足轻重的地位，许多现实生活中的问题都可以表达成线性方程组。关于线性方程组的概念，我想不用我多说了，这是初中的内容，你应该已经非常了解了。现在我举几个例子来说一说，线性方程组在现实生活中的运用，让你从应用的角度再理解下线性方程组。

第一个例子是计算旅游团人数。假设，一个旅游团由孩子和大人组成，去程时他们一起坐大巴，每个孩子的票价3元，大人票价3.2元，总共花费118.4元。回程时一起坐火车，每个孩子的票价3.5元，大人票价3.6元，总共花费135.2元。请问这个旅游团中有多少孩子和大人？

假设小孩人数为x_{1}，大人人数为x_{2}，于是我们得到了一个方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
3 x_{1}+3.2 x_{2}=118.4 \\
3.5 x_{1}+3.6 x_{2}=135.2
\end{array}\right.$$

使用初中的解二元一次方程组的知识，我们可以得出这个方程组的解是：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}=16 \\

x_{2}=22
\end{array}\right.$$

这个就是典型的线性方程组的现实例子。当然，我们也可以用矩阵来解这个方程组。你可能会说，这问题很简单啊，为什么还要用矩阵来解呢？整这么复杂有必要吗？别着急，这里我先卖个关子，具体我会在下一讲"矩阵篇"中进行讲解。

第二个例子是找出公司的最优生产计划。我们从公司的角度来看一看，假设生产苹果的几大主流产品：iPhone、Macbook、iMac，以及iWatch四款产品，需要用到芯片、摄像头模组、电池、IPS屏幕四大类资源，产品分别用 $N_{1}，N_{2}，N_{3}，N_{4}$来表示，资源分别用$R_{1}，R_{2}，R_{3}，R_{4}$来表示。

生产一单位的产品 N_{1}，也就是iPhone，需要$a_{11}，a_{21}，a_{31}，a_{41}$的资源，也就是芯片、摄像头模组、电池和IPS屏幕资源，其他产品也是一样。

我们的目标是在资源有限的情况下，找到一个最优生产计划，使每个产品的产出数量最大化。也就是说，在总共有b_{i}个单位资源R_{i}可用情况下，每个产品N_{i} 有多少单元 x_{i}应该被生产。因此，我们可以得到一个下面这样的线性方程组：

$$\left\{\begin{array} {l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+a_{13} x_{3}+a_{14} x_{4}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+a_{23} x_{3}+a_{24} x_{4}=b_{2} \\
a_{31} x_{1}+a_{32} x_{2}+a_{33} x_{3}+a_{34} x_{4}=b_{3} \\
a_{41} x_{1}+a_{42} x_{2}+a_{43} x_{3}+a_{44} x_{4}=b_{4}
\end{array}\right.$$

于是，我们得到线性方程组的通用表达方式，$x_{1}，\cdots，x_{n}$ 是未知变量，每个满足方程组表达式的n元组$(x_{1}，\cdots，x_{n})$都是它的解。

$$\left\{\begin{array} {l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.$$

线性方程组的解是有几何意义的，从几何角度出发，有利于你理解和记忆线性方程组解的条件，接下来我们先来看看线性方程组解的几种情况，之后我再具体讲解线性方程组的几何表达。

首先我们来看**无解**的情况。假设有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array} {c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
2 x_{1}+3 x_{3}=1
\end{array}\right.$$

第一行和第二行相加后，我们可以得到$2 x_{1}+3 x_{3}=5$，很明显，这个方程和第三行是矛盾的，所以，这个线性方程组无解。

其次是**只有一个解**的情况。假设有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array} {c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
x_{2}+x_{3}=2
\end{array}\right.$$

这个方程组求解很简单，第一行乘以-1和第二行相加得到$-2x_{2}+x_{3}=-1$，再乘以-1后和第三行相加得到$x_{1}=1$，第一行和第二行相加，得到$2 x_{1}+3 x_{3}=5$，代入x_{1}后，得到$x_{3}=1$，最后，我们可以得到$(1,1,1)$是这个线性方程组的唯一解。

最后是**无穷解**的情况。我们有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array} {c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
2 x_{1}+3 x_{3}=5
\end{array}\right.$$

方程组第一行和第二行相加等于第三行，从这个角度来说，我们就可以定义一个自由变量$x_{3}=a$，a属于实数，那方程组的解就是：

$$\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2} a, \frac{1}{2}+\frac{1}{2} a, a\right)$$

其中a属于实数，所以，这就包含了无穷多个解。

线性方程组的几何表达

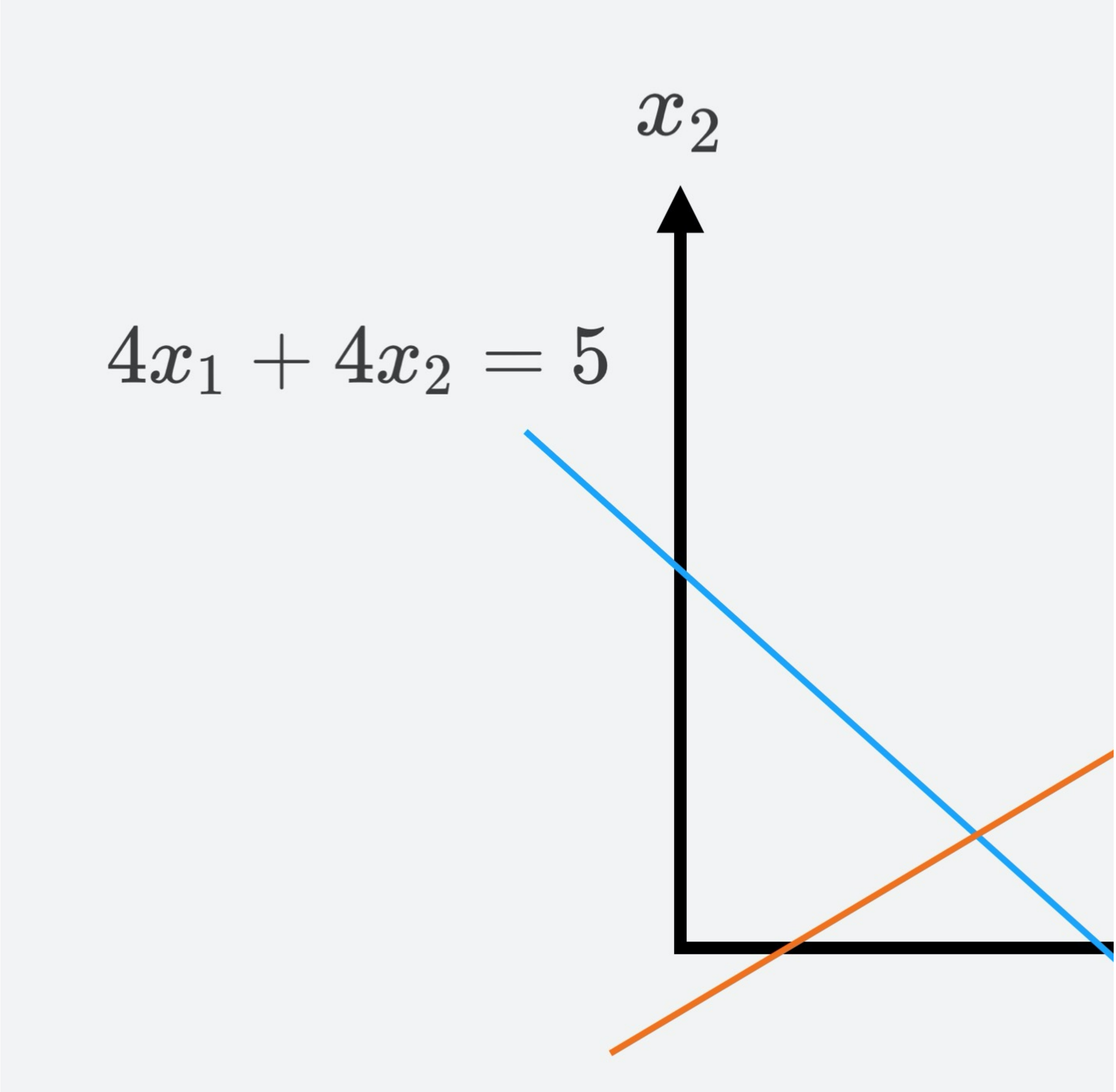
好了，了解了线性方程组解的三种情况，现在我们是时候从几何的角度来看一看线性方程组和它的解了，从几何意义出发有利于你更直观地理解线性方程组。

在一个只有两个变量x_{1},x_{2}的线性方程组中，我们定义一个x_{1},x_{2}平面。在这个平面中，每个线性方程都表达了一条直线。由于线性方程组的唯一解必须同时满足所有的等式，所以，线性方程组的唯一解其实就是线段的相交点，无穷解就是两线重合，而无解的情况，也就是两条线平行。

我拿一个例子来说明，设线性方程组：

$$\left\{\begin{array} {l}
4 x_{1}+4 x_{2}=5 \\
2 x_{1}-4 x_{2}=1
\end{array}\right.$$

把其中的两个线性方程在x_{1},x_{2}平面中画出来后，我们可以得到两线段的交点$\left(1, \frac{1}{4}\right)$，也就是这个线性方程组的解。



我再把这个概念延伸一下，当遇到三个变量的情况时，每个线性方程在三维空间中表达了一个平面，由于线性方程组的一个解必须同时满足所有的等式，所以，**线性方程组的解其实就是平面，也可以是线、点或者空，空也就是没有共同的平面相交。**

其实还有一个更好的方法来表达和解线性方程组，这个方法就是下一篇要讲的矩阵，在这里我先简单提一下。我们把系数组合成向量，把向量组合成矩阵，也就是说，我们可以把线性方程组写成这样的形式：

$$x_{1}\left|\begin{array}{c}
a_{11} \\
\vdots \\
a_{m1}
\end{array}\right|+x_{2}\left|\begin{array}{c}
a_{12} \\
\vdots \\
c_{m2}
\end{array}\right|+\cdots+x_{n}\left|\begin{array}{c}
a_{1 n} \\
\vdots \\
a_{mn}
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{c}
b_{1} \\
\vdots \\
b_{m}
\end{array}\right|$$

再进一步最终可以写成矩阵的形式：

$$\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}
\end{array}\right]\left|\begin{array}{c}
x_{1} \\
\vdots \\
. \\

x_{n}
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{c}
b_{1} \\\
\vdots \\\
. \\\
b_{m}
\end{array}\right|$$

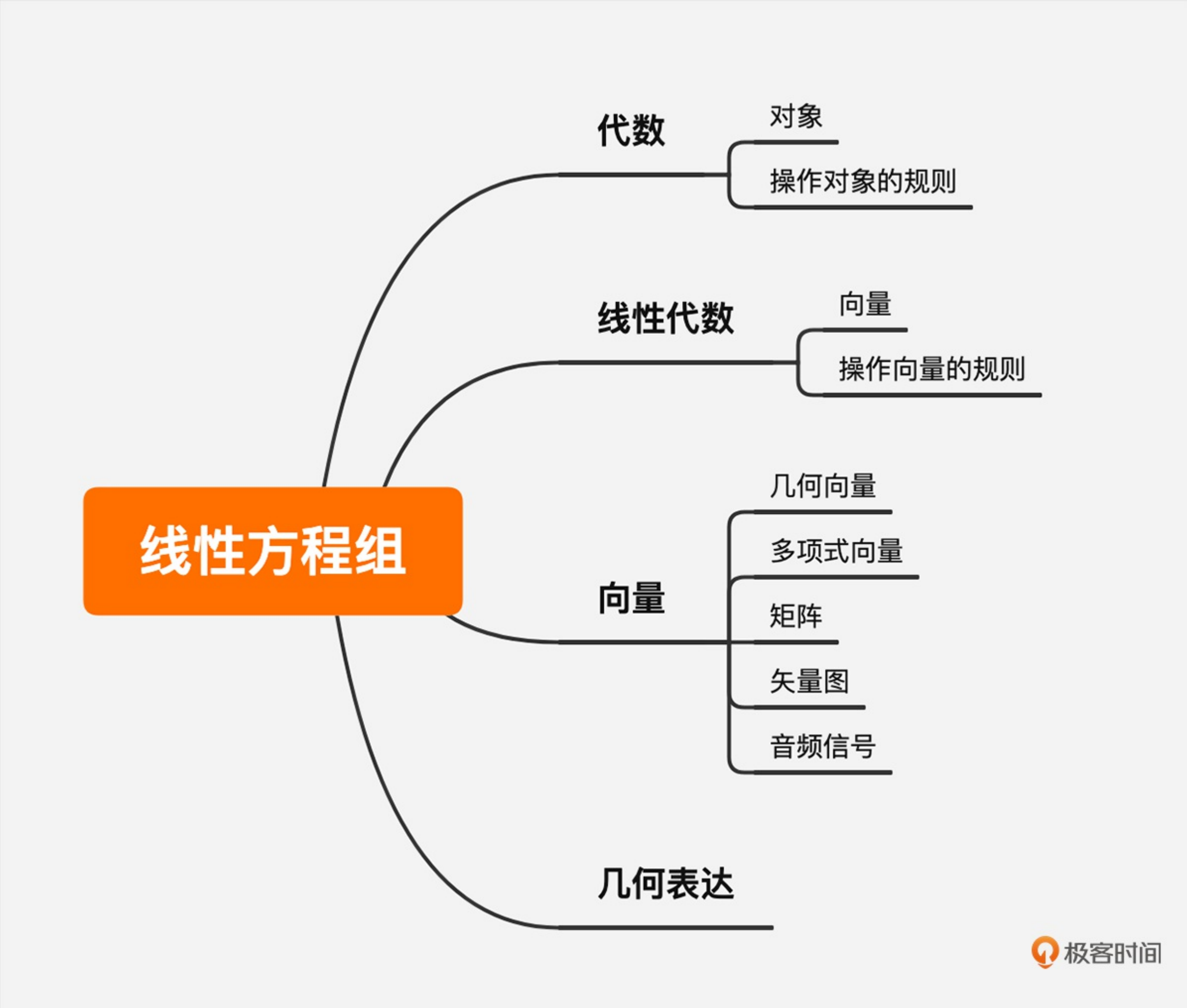
本节小结

好了，到这里这一讲就结束了，我带你总结一下前面讲解的内容。

这节课我带你重新认识了代数和线性代数的概念。代数是构造一系列对象和一系列操作这些对象的规则，线性代数是向量，以及操作这些向量的规则，所以，线性代数是代数的具像化表达。从线性代数，我们引出了向量的基本概念，我带你看了一个和向量有关的所有概念，即线性代数所有核心内容的图。

可以说，线性代数的一切皆从**向量**而来。

最后，我带你从二维平面几何角度，更直观地观察线性方程组和它几种解的情况，**而二维空间的线性方程组的解其实就是线、点或者空，也就是没有共同的线段相交**。你也可以自己试着把它扩展到三维空间几何中来观察，或许会更有趣哦！



线性代数练习场

我们一起来看一个练习题。这是一道极其简单的初中线性方程组题，你可以回顾一下，也为下一节课做好铺垫。

李大叔去年承包了10亩地，种植甲、乙两种蔬菜，共获利18000元。其中甲蔬菜每亩获利2000元，乙蔬菜每亩获利1500元。

请问，李大叔去年甲、乙两种蔬菜各种植了多少亩？

欢迎在留言区晒出你的运算过程和结果。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我学习线性代数。今天我们要讲的是“线性代数这门课的基本概念”。

线性代数可以运用在很多领域，比如：工程学、计算机科学、经济学、信号处理等等。我们来看一个在经济学中常见的例子：消费矩阵。

假设有n个行业，比如：化学、食品和石油。制造一单位的某化学品需要0.2单位的另一类化学品，0.3单位的食品，以及0.4单位的石油，而制造一单位的某食品和某石油也同样分别需要这三类产品的输入，于是，我们就能构造这样一个消费矩阵：

$$\left|\begin{array}{l}
化学输出 \\\
食品输出 \\\
石油输出
\end{array}\right|=\left[\begin{array}{lll}
0.2 & 0.3 & 0.4 \\\
0.4 & 0.4 & 0.1 \\\
0.5 & 0.1 & 0.3
\end{array}\right]\left|\begin{array}{l}
化学输入 \\\
食品输入 \\\
石油输入
\end{array}\right|$$

当然，我们也可以用一般的线性方程组$Ax=b$的形式来表达：

$$\left\{\begin{array}{l}

0.2 x_{1}+0.3 x_{2}+0.4 x_{3}=b_{1} \\
0.4 x_{1}+0.4 x_{2}+0.1 x_{3}=b_{2} \\
0.5 x_{1}+0.1 x_{2}+0.3 x_{3}=b_{3}
\end{array}\right.$$

从本质上来说，消费矩阵解决的是输入和输出之间的关系。不仅如此，线性代数在现实生活中的运用还有很多，比如，我们可以借用特征值和特征向量，预测若干年后的污水水平；在密码学中，可以使用矩阵及其逆矩阵对需发送的消息加密；在机器学习中，可以使用线性方程组的共轭迭代法来训练神经网络，等等。

刚才我分别用矩阵和线性方程组的形式给出了消费矩阵，当然，在实际生活中，你可以灵活选择最有效的方式来解决问题。

我们可以看到，线性方程组可以表示成一般形式，也就是你初中学到的$A x=b$的形式，也可以表示成矩阵形式。矩阵是由向量组合而成的，比如刚才例子中的系数矩阵的每一行都是一个**行向量**，每一列都是一个**列向量**。

$$\begin{array}{l}
\end{array}\left[\begin{array}{lll}
0.2 & 0.3 & 0.4 \\
0.4 & 0.4 & 0.1 \\
0.5 & 0.1 & 0.3
\end{array}\right] \begin{array}{l}
\end{array}$$

从这里我们能看出，**向量**其实就会是线性代数最基础的核心。数学对抽象思维要求很高，简单来说，抽象思维就是抽取同类事物的共性。所以，在进入具体的线性方程组的主题前，我要先从数学抽象的角度说一说代数和线性代数，这也是深入理解后面内容的前提。

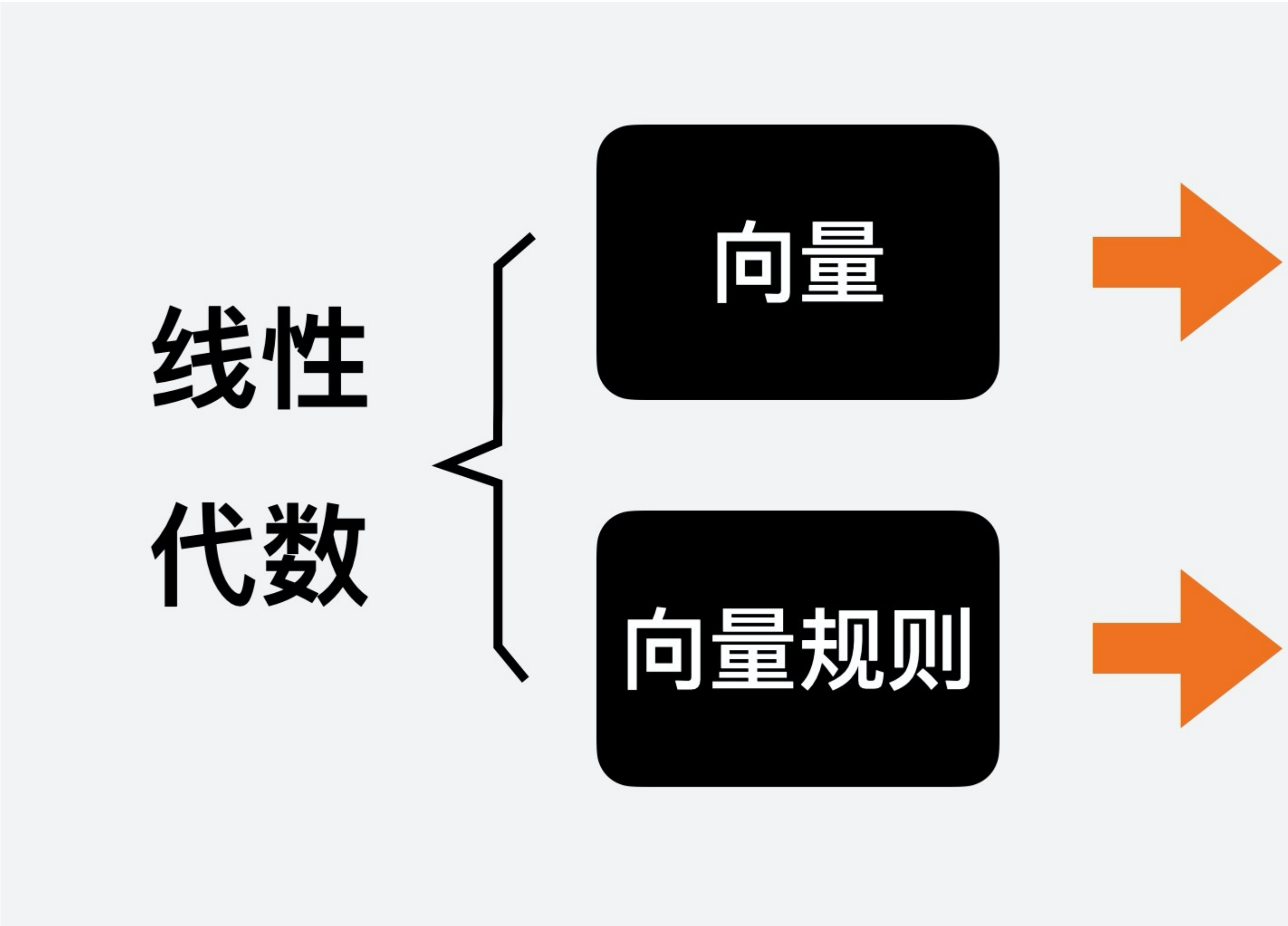
代数和线性代数的基本概念

那什么是代数呢？百度百科的解释是这样的：

> 代数是研究数、数量、关系、结构与代数方程（组）的通用解法及其性质的数学分支。

但我觉得这个解释其实没有说出**代数**这个概念的重点。我的理解是这样的：**代数是构造一系列对象和一系列操作这些对象的规则。**

所以你看，代数这个概念的核心就两点，**对象**和**操作对象的规则**，这样就很好理解了吧？那有了代数的定义，线性代数就很好定义了。我们类比来看，线性代数其实就是向量，以及操作这些向量的规则。这里，向量映射到对象，向量的规则映射到对象的规则，因此线性代数是代数的具像化表达。

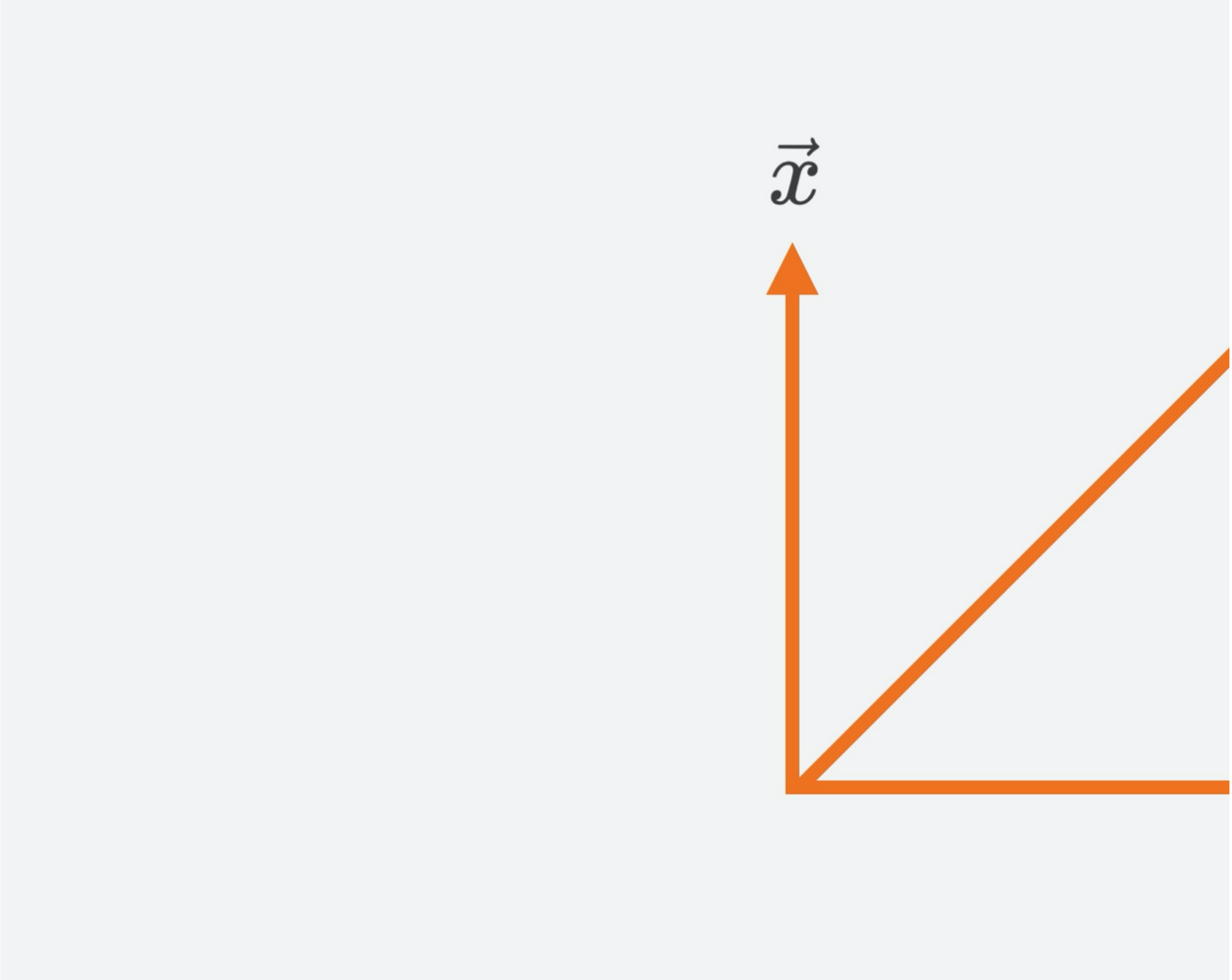


向量的基本概念

那什么是**向量**呢？从样子来看，向量其实就是由字母加上它上面的箭头来表示的，比如我们一版会写成$\vec{x}$。我估计你在高中或大学里已经接触过“几何向量”。那么，下面我用更抽象的数学观点来给你解释一下。

向量，也叫欧几里得向量（Euclidean Vector），其实就是能够互相相加、被标量乘的特殊对象。而标量也叫“无向量”，它只有数值大小，没有方向。怎么理解呢？我们来看一些向量的例子，通过这些例子来深入理解向量的概念。

几何向量是有向线段，在二维空间（也就是平面）中，两个几何向量能够相加，比如，向量x加上向量y等于向量z，$\vec{x}+\vec{y}=\vec{z}$，x向量也能被一个标量乘。再比如，标量λ乘向量x结果也是向量，$\lambda \vec{x}, \lambda \in R$。几何向量通过大小和方向来简化向量的表达，所以，一般数学课程一开始都会拿几何向量来进行举例。



多项式其实也是向量。两个多项式能够相加，它也能够被标量乘，结果也是多项式。

矩阵的一行或一列也是向量。就比如下面这样形式的向量。

$$x \in R^{3}: x=\left[\begin{array}{l}
1 \\
2 \\
3
\end{array}\right]$$

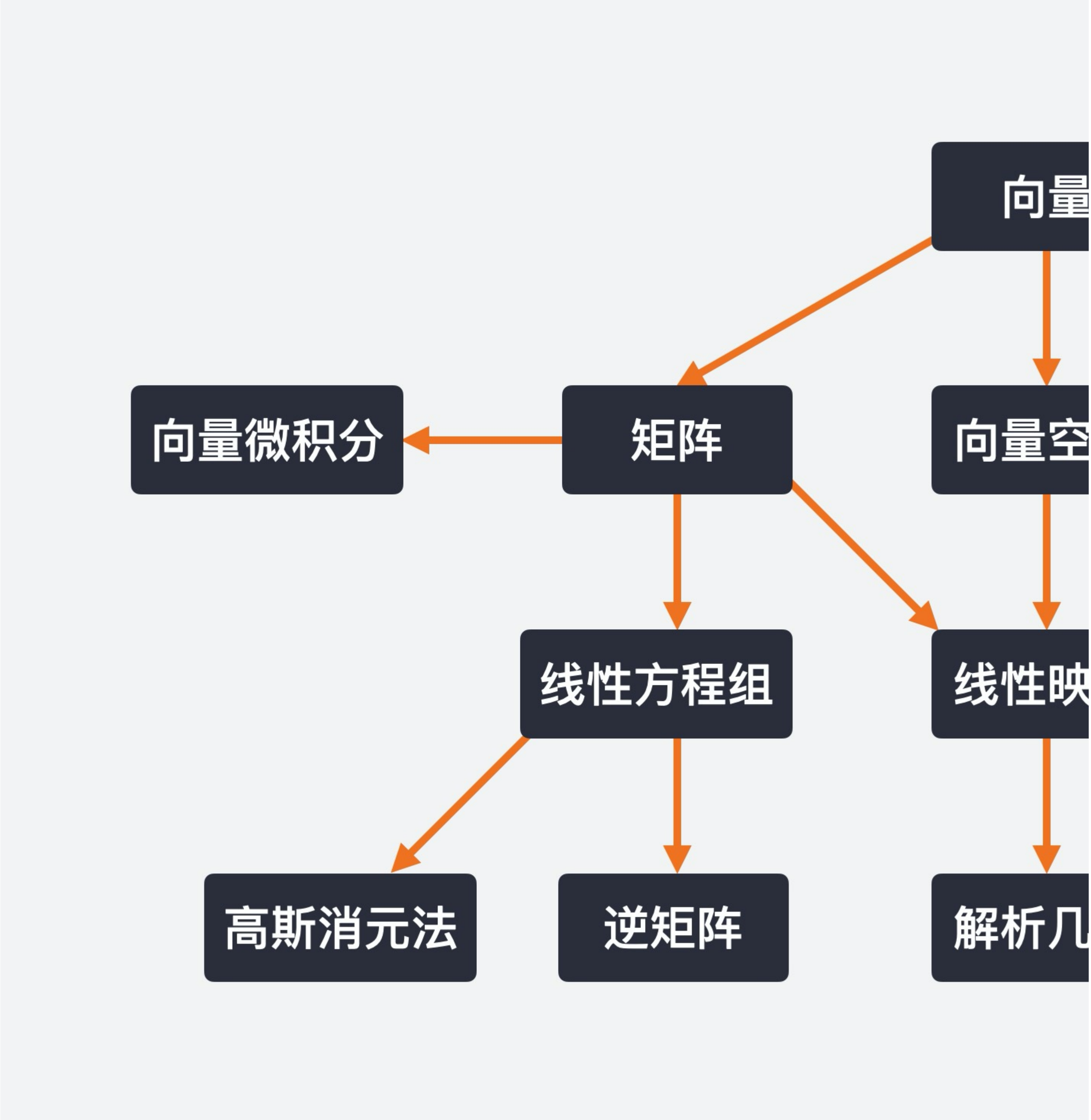
两个向量能够相加，它也能够被标量乘，结果也是向量。它和现代大部分的编程语言中的数组一致，而且数组的运算简化了向量操作的算法实施。

矢量图、音频信号也是向量。它们都能被一系列数字表示，比如，在音频信号处理中，常用到数据增强的方法，通过向量的操作就能到达目标。

看了这些向量例子，不知道你现在有点感觉了吗？其实，线性代数的本质就是**寻找向量之间的相似性**，比如在做分类时，我们常常需要估算不同样本之间的相似性度量（Similarity Measurement），这时通常采用的方法就是计算样本间的“距离”（Distance）。

可以看出来，向量非常重要，我们后面很多内容都是从向量延伸而来的，比如矩阵和求解线性方程组。

下面我用一张图来表达和向量有关的所有概念，也就是线性代数所有的核心内容，其中大部分内容你都会学到，希望通过这个图，你对线性代数有个大概的认知。相信学习完所有课程后，你再回过头来看时，肯定会有一些新的认知。



从图中最左侧这一列，我们可以看出，向量组合成矩阵，矩阵可以表示成线性方程组，而线性方程组可以通过高斯消元法求解，也可以求逆矩阵。

同时，向量又可以组合成向量空间，向量空间和矩阵都可以做线性映射或者线性变换，线性映射在实践中可以用在解析几何和分类问题中。

而且，向量和线性独立是强相关的，也就是说，线性独立指的是向量的线性独立，而线性独立又可以引出能够生成整个空间的基（Basis），基在实践中可以用在分类和降维中。

这里，我再额外提一个非常重要的、在数学中经常用到的概念——**封闭性**，或者俗称**闭包**（Closure）。封闭性的定义是，如果我们要对某个集合的成员进行一种运算，生成的仍然是这个集合的成员，那这个集合就可以称为在这个运算下闭合。

我为什么要提这个概念呢？这是因为，向量的线性运算是封闭的，也就是说向量的加法、数乘结果仍属于向量空间，即**向量的任意线性组合仍属于向量空间**。

线性方程组的应用

到这里，相信你已经对线性代数、向量这些基本概念有了一个应试教育之外的、新的认识，接下来我就切入本篇的最重点的内容了，那就是线性方程组。

线性方程组在线性代数中有着举足轻重的地位，许多现实生活中的问题都可以表达成线性方程组。关于线性方程组的概念，我想不用我多说了，这是初中的内容，你应该已经非常了解了。现在我举几个例子来说一说，线性方程组在现实生活中的运用，让你从应用的角度再理解下线性方程组。

第一个例子是计算旅游团人数。假设，一个旅游团由孩子和大人组成，去程时他们一起坐大巴，每个孩子的票价3元，大人票价3.2元，总共花费118.4元。回程时一起坐火车，每个孩子的票价3.5元，大人票价3.6元，总共花费135.2元。请问这个旅游团中有多少孩子和大人？

假设小孩人数为x_{1}，大人人数为x_{2}，于是我们得到了一个方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
3 x_{1}+3.2 x_{2}=118.4 \\
3.5 x_{1}+3.6 x_{2}=135.2
\end{array}\right.$$

使用初中的解二元一次方程组的知识，我们可以得出这个方程组的解是：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}=16 \\

$$\left.\begin{array}{l}
x_{2}=22
\end{array}\right.$$

这个就是典型的线性方程组的现实例子。当然，我们也可以用矩阵来解这个方程组。你可能会说，这问题很简单啊，为什么还要用矩阵来解呢？整这么复杂有必要吗？别着急，这里我先卖个关子，具体我会在下一讲"矩阵篇"中进行讲解。

第二个例子是找出公司的最优生产计划。我们从公司的角度来看一看，假设生产苹果的几大主流产品：iPhone、Macbook、iMac，以及iWatch四款产品，需要用到芯片、摄像头模组、电池、IPS屏幕四大类资源，产品分别用 $N_{1}，N_{2}，N_{3}，N_{4}$来表示，资源分别用$R_{1}，R_{2}，R_{3}，R_{4}$来表示。

生产一单位的产品 N_{1}，也就是iPhone，需要$a_{11}，a_{21}，a_{31}，a_{41}$的资源，也就是芯片、摄像头模组、电池和IPS屏幕资源，其他产品也是一样。

我们的目标是在资源有限的情况下，找到一个最优生产计划，使每个产品的产出数量最大化。也就是说，在总共有b_{i}个单位资源R_{i}可用情况下，每个产品N_{i} 有多少单元 x_{i}应该被生产。因此，我们可以得到一个下面这样的线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+a_{13} x_{3}+a_{14} x_{4}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+a_{23} x_{3}+a_{24} x_{4}=b_{2} \\
a_{31} x_{1}+a_{32} x_{2}+a_{33} x_{3}+a_{34} x_{4}=b_{3} \\
a_{41} x_{1}+a_{42} x_{2}+a_{43} x_{3}+a_{44} x_{4}=b_{4}
\end{array}\right.$$

于是，我们得到线性方程组的通用表达方式，$x_{1}，\cdots ，x_{n}$ 是未知变量，每个满足方程组表达式的n元组$(x_{1}，\cdots ，x_{n})$都是它的解。

$$\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.$$

线性方程组的解是有几何意义的，从几何角度出发，有利于你理解和记忆线性方程组解的条件，接下来我们先来看看线性方程组解的几种情况，之后我再具体讲解线性方程组的几何表达。

首先我们来看**无解**的情况。假设有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
2 x_{1}+3 x_{3}=1
\end{array}\right.$$

第一行和第二行相加后，我们可以得到$2 x_{1}+3 x_{3}=5$，很明显，这个方程和第三行是矛盾的，所以，这个线性方程组无解。

其次是**只有一个解**的情况。假设有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
x_{2}+x_{3}=2
\end{array}\right.$$

这个方程组求解很简单，第一行乘以-1和第二行相加得到$-2x_{2}+x_{3}=-1$，再乘以-1后和第三行相加得到$x_{1}=1$，第一行和第二行相加，得到$2 x_{1}+3 x_{3}=5$，代入x_{1}后，得到$x_{3}=1$，最后，我们可以得到$(1,1,1)$是这个线性方程组的唯一解。

最后是**无穷解**的情况。我们有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
2 x_{1}+3 x_{3}=5
\end{array}\right.$$

方程组第一行和第二行相加等于第三行，从这个角度来说，我们就可以定义一个自由变量$x_{3}=a$，a属于实数，那方程组的解就是：

$$\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2} a, \frac{1}{2}+\frac{1}{2} a, a\right)$$

其中a属于实数，所以，这就包含了无穷多个解。

线性方程组的几何表达

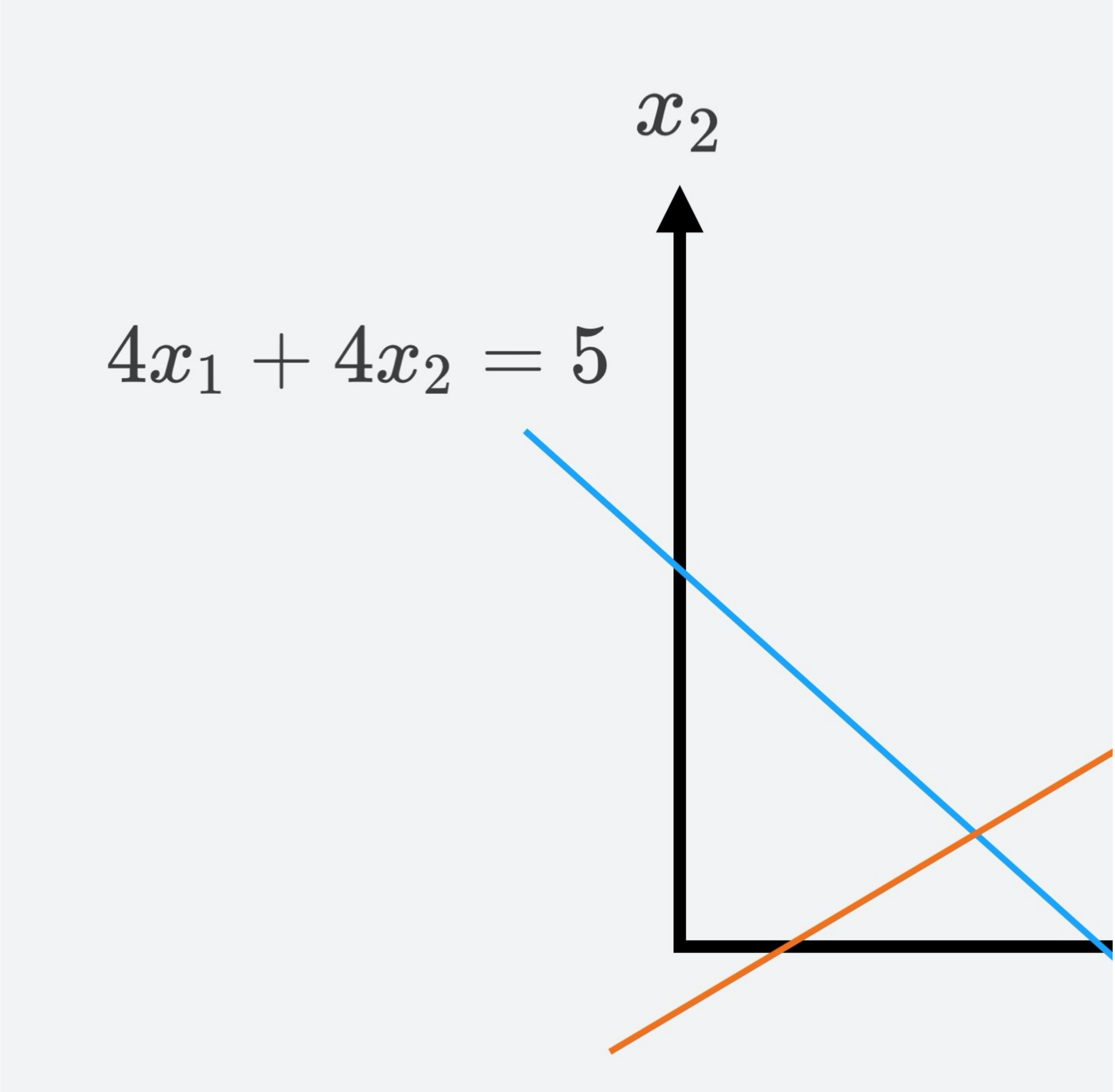
好了，了解了线性方程组解的三种情况，现在我们是时候从几何的角度来看一看线性方程组和它的解了，从几何意义出发有利于你更直观地理解线性方程组。

在一个只有两个变量x_{1},x_{2}的线性方程组中，我们定义一个x_{1},x_{2}平面。在这个平面中，每个线性方程都表达了一条直线。由于线性方程组的唯一解必须同时满足所有的等式，所以，线性方程组的唯一解其实就是线段的相交点，无穷解就是两线重合，而无解的情况，也就是两条线平行。

我拿一个例子来说明，设线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{l}
4 x_{1}+4 x_{2}=5 \\
2 x_{1}-4 x_{2}=1
\end{array}\right.$$

把其中的两个线性方程在x_{1},x_{2}平面中画出来后，我们可以得到两线段的交点$\left(1, \frac{1}{4}\right)$，也就是这个线性方程组的解。



我再把这个概念延伸一下，当遇到三个变量的情况时，每个线性方程在三维空间中表达了一个平面，由于线性方程组的一个解必须同时满足所有的等式，所以，**线性方程组的解其实就是平面，也可以是线、点或者空，空也就是没有共同的平面相交。**

其实还有一个更好的方法来表达和解线性方程组，这个方法就是下一篇要讲的矩阵，在这里我先简单提一下。我们把系数组合成向量，把向量组合成矩阵，也就是说，我们可以把线性方程组写成这样的形式：

$$x_{1}\left|\begin{array}{c}
a_{11} \\
\vdots \\
a_{m1}
\end{array}\right|+x_{2}\left|\begin{array}{c}
a_{12} \\
\vdots \\
c_{m2}
\end{array}\right|+\cdots+x_{n}\left|\begin{array}{c}
a_{1 n} \\
\vdots \\
a_{mn}
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{c}
b_{1} \\
\vdots \\
b_{m}
\end{array}\right|$$

再进一步最终可以写成矩阵的形式：
$$\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}
\end{array}\right]\left|\begin{array}{c}
x_{1} \\
\vdots \\
. \\

x_{n}
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{c}
b_{1} \\\
\vdots \\\
. \\\
b_{m}
\end{array}\right|$$

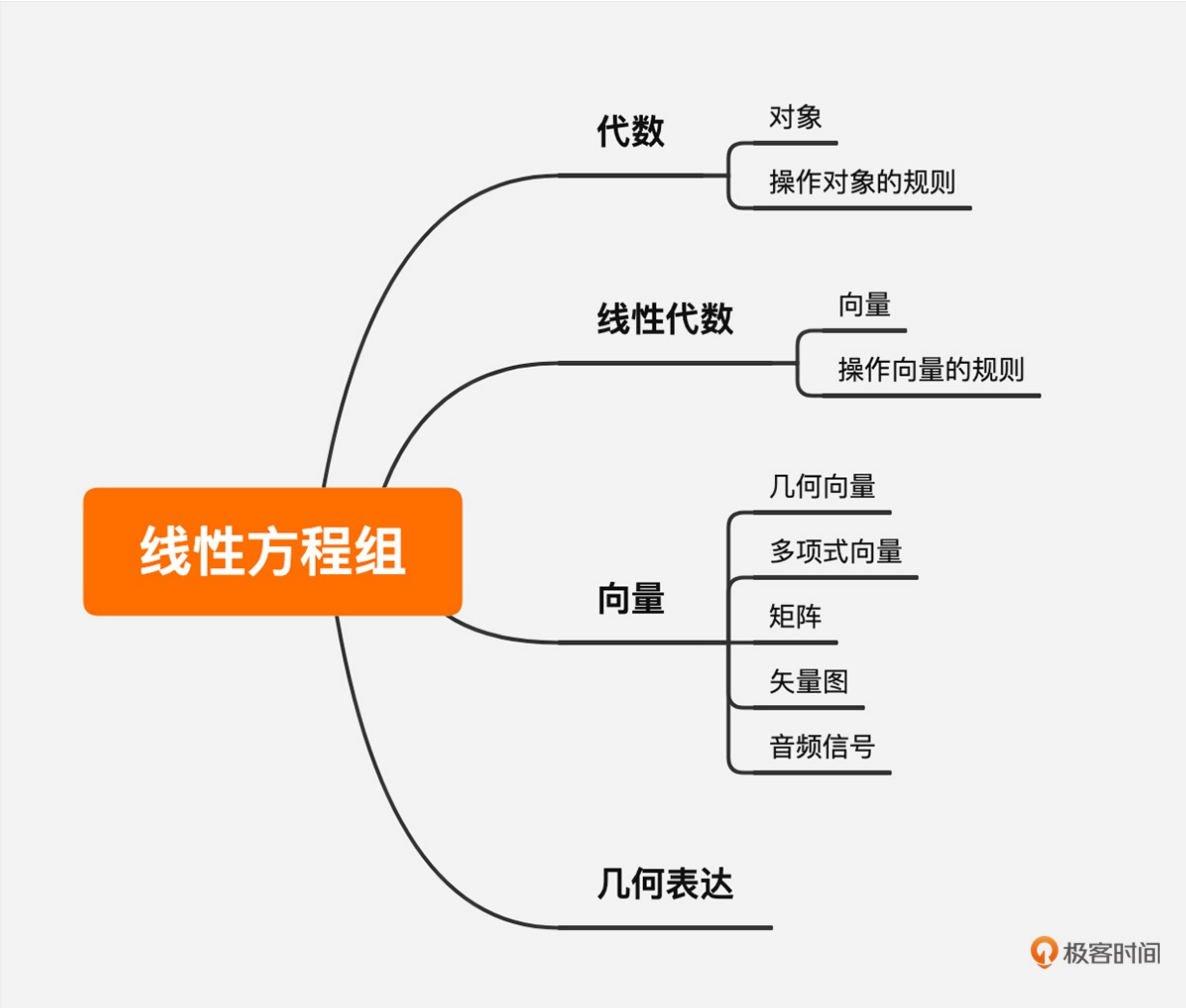
本节小结

好了，到这里这一讲就结束了，我带你总结一下前面讲解的内容。

这节课我带你重新认识了代数和线性代数的概念。代数是构造一系列对象和一系列操作这些对象的规则，线性代数是向量，以及操作这些向量的规则，所以，线性代数是代数的具像化表达。从线性代数，我们引出了向量的基本概念，我带你看了一个和向量有关的所有概念，即线性代数所有核心内容的图。

可以说，线性代数的一切皆从**向量**而来。

最后，我带你从二维平面几何角度，更直观地观察线性方程组和它几种解的情况，**而二维空间的线性方程组的解其实就是线、点或者空，也就是没有共同的线段相交**。你也可以自己试着把它扩展到三维空间几何中来观察，或许会更有趣哦！



线性代数练习场

我们一起来看一个练习题。这是一道极其简单的初中线性方程组题，你可以回顾一下，也为下一节课做好铺垫。

李大叔去年承包了10亩地，种植甲、乙两种蔬菜，共获利18000元。其中甲蔬菜每亩获利2000元，乙蔬菜每亩获利1500元。

请问，李大叔去年甲、乙两种蔬菜各种植了多少亩？

欢迎在留言区晒出你的运算过程和结果。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我学习线性代数。今天我们要讲的是"线性代数这门课的基本概念"。

线性代数可以运用在很多领域，比如：工程学、计算机科学、经济学、信号处理等等。我们来看一个在经济学中常见的例子：消费矩阵。

假设有n个行业，比如：化学、食品和石油。制造一单位的某化学品需要0.2单位的另一类化学品，0.3单位的食品，以及0.4单位的石油，而制造一单位的某食品和某石油也同样分别需要这三类产品的输入，于是，我们就能构造这样一个消费矩阵：

$$\left|\begin{array}{l}
化学输出 \\\
食品输出 \\\
石油输出
\end{array}\right|=\left[\begin{array}{lll}
0.2 & 0.3 & 0.4 \\\
0.4 & 0.4 & 0.1 \\\
0.5 & 0.1 & 0.3
\end{array}\right]\left|\begin{array}{l}
化学输入 \\\
食品输入 \\\
石油输入
\end{array}\right|$$

当然，我们也可以用一般的线性方程组$Ax=b$的形式来表达：

$$\left\{\begin{array}{l}

0.2 x_{1}+0.3 x_{2}+0.4 x_{3}=b_{1} \\\
0.4 x_{1}+0.4 x_{2}+0.1 x_{3}=b_{2} \\\
0.5 x_{1}+0.1 x_{2}+0.3 x_{3}=b_{3}
\end{array}\right.$$

从本质上来说，消费矩阵解决的是输入和输出之间的关系。不仅如此，线性代数在现实生活中的运用还有很多，比如，我们可以借用特征值和特征向量，预测若干年后的污水水平；在密码学中，可以使用矩阵及其逆矩阵对需发送的消息加密；在机器学习中，可以使用线性方程组的共轭迭代法来训练神经网络，等等。

刚才我分别用矩阵和线性方程组的形式给出了消费矩阵，当然，在实际生活中，你可以灵活选择最有效的方式来解决问题。

我们可以看到，线性方程组可以表示成一般形式，也就是你初中学到的$A x=b$的形式，也可以表示成矩阵形式。矩阵是由向量组合而成的，比如刚才例子中的系数矩阵的每一行都是一个**行向量**，每一列都是一个**列向量**。

$$\begin{array}{l}
\end{array}\left[\begin{array}{lll}
0.2 & 0.3 & 0.4 \\\
0.4 & 0.4 & 0.1 \\\
0.5 & 0.1 & 0.3
\end{array}\right] \begin{array}{l}
\end{array}$$

从这里我们能看出，**向量**其实就会是线性代数最基础的核心。数学对抽象思维要求很高，简单来说，抽象思维就是抽取同类事物的共性。所以，在进入具体的线性方程组的主题前，我要先从数学抽象的角度说一说代数和线性代数，这也是深入理解后面内容的前提。

代数和线性代数的基本概念

那什么是代数呢？百度百科的解释是这样的：

> 代数是研究数、数量、关系、结构与代数方程（组）的通用解法及其性质的数学分支。

但我觉得这个解释其实没有说出**代数**这个概念的重点。我的理解是这样的：**代数是构造一系列对象和一系列操作这些对象的规则。**

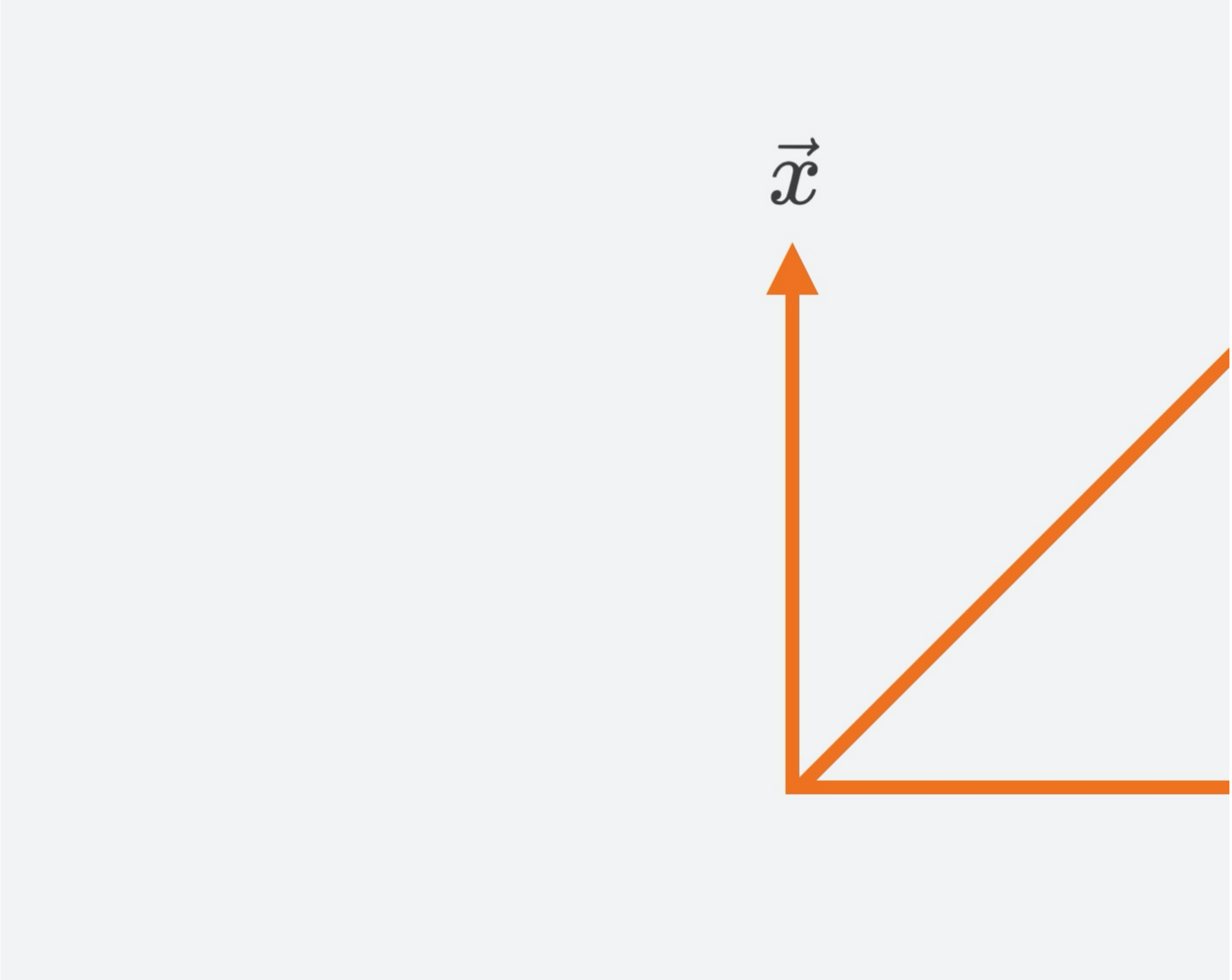
所以你看，代数这个概念的核心就两点，**对象**和**操作对象的规则**，这样就很好理解了吧？那有了代数的定义，线性代数就很好定义了。我们类比来看，线性代数其实就是向量，以及操作这些向量的规则。这里，向量映射到对象，向量的规则映射到对象的规则，因此线性代数是代数的具像化表达。

向量的基本概念

那什么是**向量**呢？从样子来看，向量其实就是由字母加上它上面的箭头来表示的，比如我们一版会写成$\vec{x}$。我估计你在高中或大学里已经接触过“几何向量”。那么，下面我用更抽象的数学观点来给你解释一下。

向量，也叫欧几里得向量（Euclidean Vector），其实就是能够互相相加、被标量乘的特殊对象。而标量也叫“无向量”，它只有数值大小，没有方向。怎么理解呢？我们来看一些向量的例子，通过这些例子来深入理解向量的概念。

几何向量是有向线段，在二维空间（也就是平面）中，两个几何向量能够相加，比如，向量x加上向量y等于向量z，$\vec{x}+\vec{y}=\vec{z}$，x向量也能被一个标量乘。再比如，标量λ乘向量x结果也是向量，$\lambda \vec{x}, \lambda \in R$。几何向量通过大小和方向来简化向量的表达，所以，一般数学课程一开始都会拿几何向量来进行举例。



多项式其实也是向量。两个多项式能够相加，它也能够被标量乘，结果也是多项式。

矩阵的一行或一列也是向量。就比如下面这样形式的向量。

$$x \in R^{3}: x=\left[\begin{array}{l}
1 \\
2 \\
3
\end{array}\right]$$

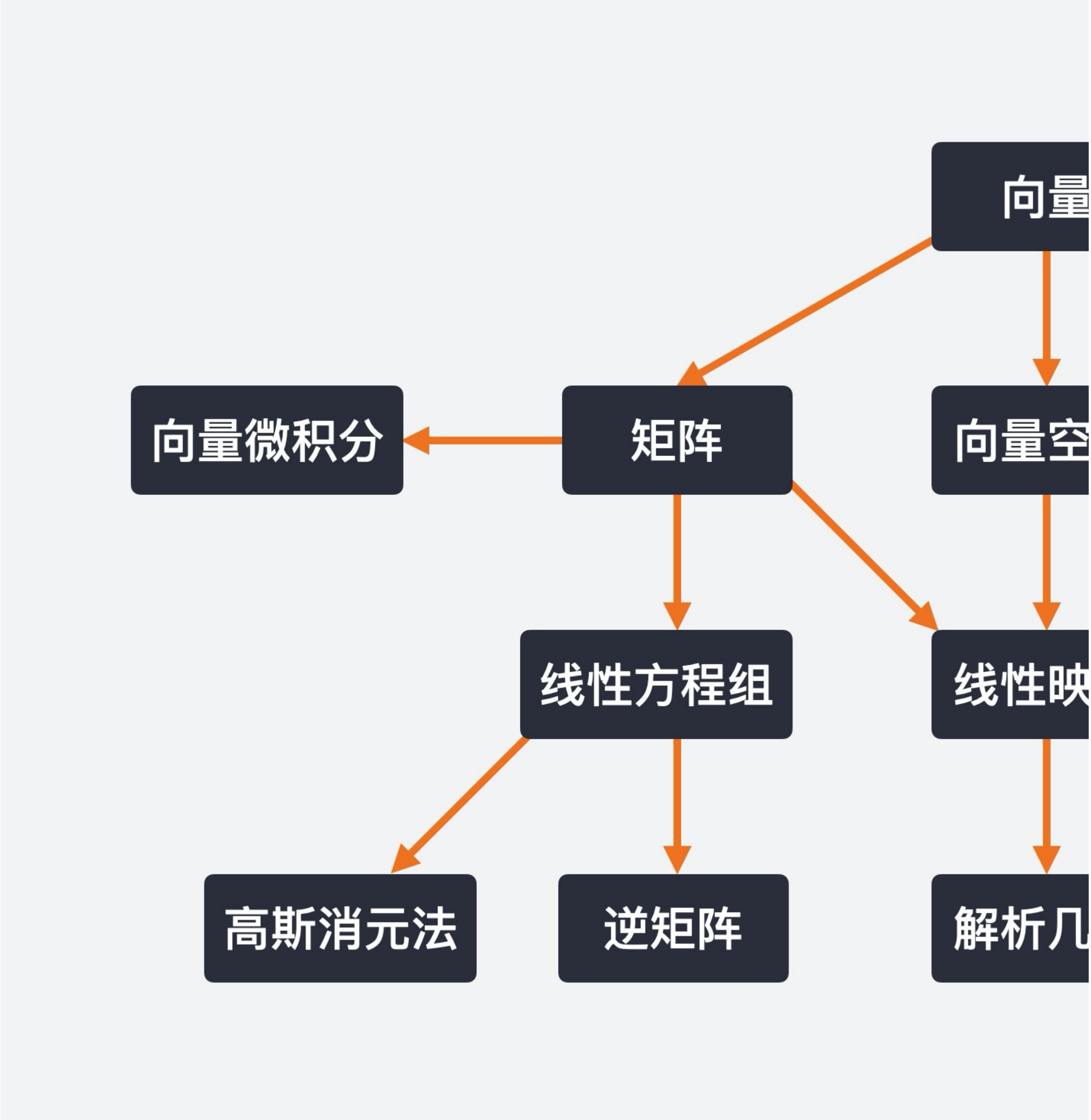
两个向量能够相加，它也能够被标量乘，结果也是向量。它和现代大部分的编程语言中的数组一致，而且数组的运算简化了向量操作的算法实施。

矢量图、音频信号也是向量。它们都能被一系列数字表示，比如，在音频信号处理中，常用到数据增强的方法，通过向量的操作就能到达目标。

看了这些向量例子，不知道你现在有点感觉了吗？其实，线性代数的本质就是**寻找向量之间的相似性**，比如在做分类时，我们常常需要估算不同样本之间的相似性度量（Similarity Measurement），这时通常采用的方法就是计算样本间的"距离"（Distance）。

可以看出来，向量非常重要，我们后面很多内容都是从向量延伸而来的，比如矩阵和求解线性方程组。

下面我用一张图来表达和向量有关的所有概念，也就是线性代数所有的核心内容，其中大部分内容你都会学到，希望通过这个图，你对线性代数有个大概的认知。相信学习完所有课程后，你再回过头来看时，肯定会有一些新的认知。



从图中最左侧这一列，我们可以看出，向量组合成矩阵，矩阵可以表示成线性方程组，而线性方程组可以通过高斯消元法求解，也可以求逆矩阵。

同时，向量又可以组合成向量空间，向量空间和矩阵都可以做线性映射或者线性变换，线性映射在实践中可以用在解析几何和分类问题中。

而且，向量和线性独立是强相关的，也就是说，线性独立指的是向量的线性独立，而线性独立又可以引出能够生成整个空间的基（Basis），基在实践中可以用在分类和降维中。

这里，我再额外提一个非常重要的、在数学中经常用到的概念——**封闭性**，或者俗称**闭包**（Closure）。封闭性的定义是，如果我们要对某个集合的成员进行一种运算，生成的仍然是这个集合的成员，那这个集合就可以称为在这个运算下闭合。

我为什么要提这个概念呢？这是因为，向量的线性运算是封闭的，也就是说向量的加法、数乘结果仍属于向量空间，即**向量的任意线性组合仍属于向量空间**。

线性方程组的应用

到这里，相信你已经对线性代数、向量这些基本概念有了一个应试教育之外的、新的认识，接下来我就切入本篇的最重点的内容了，那就是线性方程组。

线性方程组在线性代数中有着举足轻重的地位，许多现实生活中的问题都可以表达成线性方程组。关于线性方程组的概念，我想不用我多说了，这是初中的内容，你应该已经非常了解了。现在我举几个例子来说一说，线性方程组在现实生活中的运用，让你从应用的角度再理解下线性方程组。

第一个例子是计算旅游团人数。假设，一个旅游团由孩子和大人组成，去程时他们一起坐大巴，每个孩子的票价3元，大人票价3.2元，总共花费118.4元。回程时一起坐火车，每个孩子的票价3.5元，大人票价3.6元，总共花费135.2元。请问这个旅游团中有多少孩子和大人？

假设小孩人数为x_{1}，大人人数为x_{2}，于是我们得到了一个方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
3 x_{1}+3.2 x_{2}=118.4 \\
3.5 x_{1}+3.6 x_{2}=135.2
\end{array}\right.$$

使用初中的解二元一次方程组的知识，我们可以得出这个方程组的解是：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}=16 \\

x_{2}=22
\end{array}\right.$$

这个就是典型的线性方程组的现实例子。当然，我们也可以用矩阵来解这个方程组。你可能会说，这问题很简单啊，为什么还要用矩阵来解呢？整这么复杂有必要吗？别着急，这里我先卖个关子，具体我会在下一讲“矩阵篇”中进行讲解。

第二个例子是找出公司的最优生产计划。我们从公司的角度来看一看，假设生产苹果的几大主流产品：iPhone、Macbook、iMac，以及iWatch四款产品，需要用到芯片、摄像头模组、电池、IPS屏幕四大类资源，产品分别用 $N_{1}，N_{2}，N_{3}，N_{4}$来表示，资源分别用$R_{1}，R_{2}，R_{3}，R_{4}$来表示。

生产一单位的产品 N_{1}，也就是iPhone，需要$a_{11}，a_{21}，a_{31}，a_{41}$的资源，也就是芯片、摄像头模组、电池和IPS屏幕资源，其他产品也是一样。

我们的目标是在资源有限的情况下，找到一个最优生产计划，使每个产品的产出数量最大化。也就是说，在总共有b_{i}个单位资源R_{i}可用情况下，每个产品N_{i} 有多少单元 x_{i}应该被生产。因此，我们可以得到一个下面这样的线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+a_{13} x_{3}+a_{14} x_{4}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+a_{23} x_{3}+a_{24} x_{4}=b_{2} \\
a_{31} x_{1}+a_{32} x_{2}+a_{33} x_{3}+a_{34} x_{4}=b_{3} \\
a_{41} x_{1}+a_{42} x_{2}+a_{43} x_{3}+a_{44} x_{4}=b_{4}
\end{array}\right.$$

于是，我们得到线性方程组的通用表达方式，$x_{1}，\cdots ，x_{n}$ 是未知变量，每个满足方程组表达式的n元组$(x_{1}，\cdots ，x_{n})$都是它的解。

$$\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.$$

线性方程组的解是有几何意义的，从几何角度出发，有利于你理解和记忆线性方程组解的条件，接下来我们先来看看线性方程组解的几种情况，之后我再具体讲解线性方程组的几何表达。

首先我们来看**无解**的情况。假设有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
2 x_{1}+3 x_{3}=1
\end{array}\right.$$

第一行和第二行相加后，我们可以得到$2 x_{1}+3 x_{3}=5$，很明显，这个方程和第三行是矛盾的，所以，这个线性方程组无解。

其次是**只有一个解**的情况。假设有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
x_{2}+x_{3}=2
\end{array}\right.$$

这个方程组求解很简单，第一行乘以-1和第二行相加得到$-2x_{2}+x_{3}=-1$，再乘以-1后和第三行相加得到$x_{1}=1$，第一行和第二行相加，得到$2 x_{1}+3 x_{3}=5$，代入x_{1}后，得到$x_{3}=1$，最后，我们可以得到$(1,1,1)$是这个线性方程组的唯一解。

最后是**无穷解**的情况。我们有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
2 x_{1}+3 x_{3}=5
\end{array}\right.$$

方程组第一行和第二行相加等于第三行，从这个角度来说，我们就可以定义一个自由变量$x_{3}=a$，a属于实数，那方程组的解就是：

$$\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2} a, \frac{1}{2}+\frac{1}{2} a, a\right)$$

其中a属于实数，所以，这就包含了无穷多个解。

线性方程组的几何表达

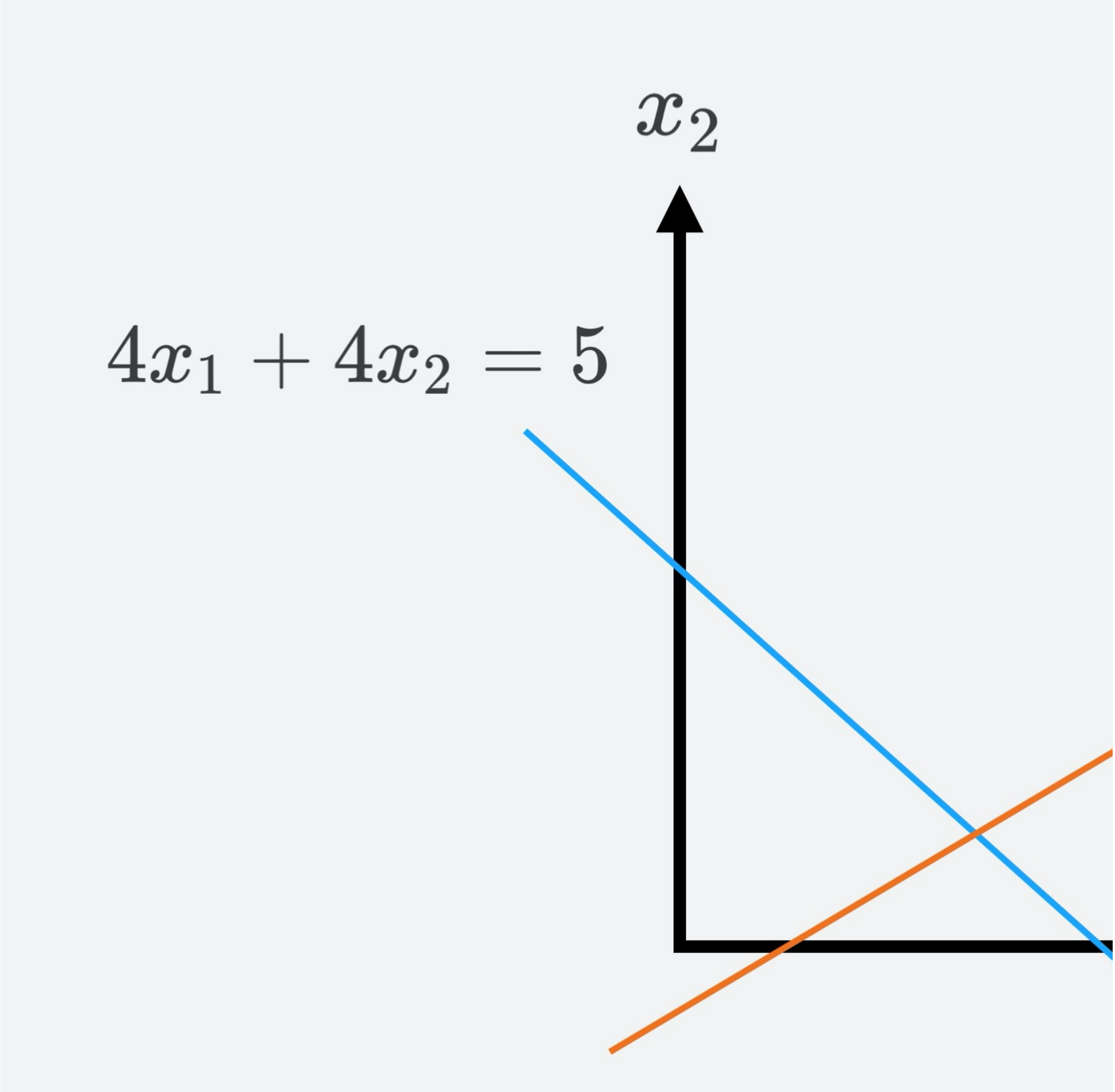
好了，了解了线性方程组解的三种情况，现在我们是时候从几何的角度来看一看线性方程组和它的解了，从几何意义出发有利于你更直观地理解线性方程组。

在一个只有两个变量x_{1},x_{2}的线性方程组中，我们定义一个x_{1},x_{2}平面。在这个平面中，每个线性方程都表达了一条直线。由于线性方程组的唯一解必须同时满足所有的等式，所以，线性方程组的唯一解其实就是线段的相交点，无穷解就是两线重合，而无解的情况，也就是两条线平行。

我拿一个例子来说明，设线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{l}
4 x_{1}+4 x_{2}=5 \\
2 x_{1}-4 x_{2}=1
\end{array}\right.$$

把其中的两个线性方程在x_{1},x_{2}平面中画出来后，我们可以得到两线段的交点$\left(1, \frac{1}{4}\right)$，也就是这个线性方程组的解。



我再把这个概念延伸一下，当遇到三个变量的情况时，每个线性方程在三维空间中表达了一个平面，由于线性方程组的一个解必须同时满足所有的等式，所以，**线性方程组的解其实就是平面，也可以是线、点或者空，空也就是没有共同的平面相交。**

其实还有一个更好的方法来表达和解线性方程组，这个方法就是下一篇要讲的矩阵，在这里我先简单提一下。我们把系数组合成向量，把向量组合成矩阵，也就是说，我们可以把线性方程组写成这样的形式：

$$x_{1}\left|\begin{array}{c}
a_{11} \\
\vdots \\
a_{m1}
\end{array}\right|+x_{2}\left|\begin{array}{c}
a_{12} \\
\vdots \\
c_{m2}
\end{array}\right|+\cdots+x_{n}\left|\begin{array}{c}
a_{1 n} \\
\vdots \\
a_{mn}
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{c}
b_{1} \\
\vdots \\
b_{m}
\end{array}\right|$$

再进一步最终可以写成矩阵的形式：
$$\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
x_{1} \\
\vdots \\
. \\

x_{n}
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{c}
b_{1} \\\
\vdots \\\
. \\\
b_{m}
\end{array}\right|$$

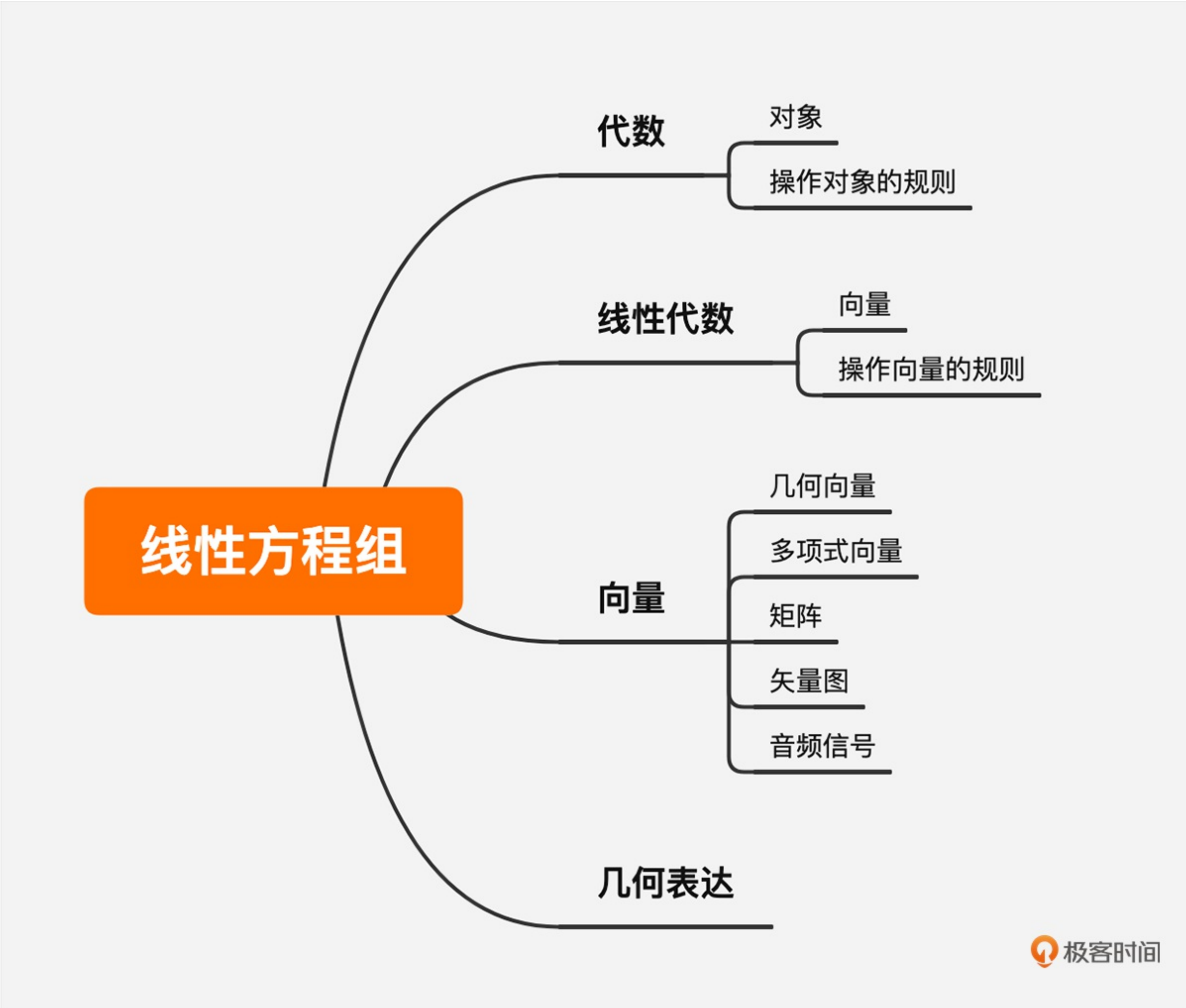
本节小结

好了，到这里这一讲就结束了，我带你总结一下前面讲解的内容。

这节课我带你重新认识了代数和线性代数的概念。代数是构造一系列对象和一系列操作这些对象的规则，线性代数是向量，以及操作这些向量的规则，所以，线性代数是代数的具像化表达。从线性代数，我们引出了向量的基本概念，我带你看了一个和向量有关的所有概念，即线性代数所有核心内容的图。

可以说，线性代数的一切皆从**向量**而来。

最后，我带你从二维平面几何角度，更直观地观察线性方程组和它几种解的情况，**而二维空间的线性方程组的解其实就是线、点或者空，也就是没有共同的线段相交**。你也可以自己试着把它扩展到三维空间几何中来观察，或许会更有趣哦！



线性代数练习场

我们一起来看一个练习题。这是一道极其简单的初中线性方程组题，你可以回顾一下，也为下一节课做好铺垫。

李大叔去年承包了10亩地，种植甲、乙两种蔬菜，共获利18000元。其中甲蔬菜每亩获利2000元，乙蔬菜每亩获利1500元。

请问，李大叔去年甲、乙两种蔬菜各种植了多少亩？

欢迎在留言区晒出你的运算过程和结果。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我学习线性代数。今天我们要讲的是"线性代数这门课的基本概念"。

线性代数可以运用在很多领域，比如：工程学、计算机科学、经济学、信号处理等等。我们来看一个在经济学中常见的例子：消费矩阵。

假设有n个行业，比如：化学、食品和石油。制造一单位的某化学品需要0.2单位的另一类化学品，0.3单位的食品，以及0.4单位的石油，而制造一单位的某食品和某石油也同样分别需要这三类产品的输入，于是，我们就能构造这样一个消费矩阵：

$$\left|\begin{array}{l}
化学输出 \\\
食品输出 \\\
石油输出
\end{array}\right|=\left[\begin{array}{lll}
0.2 & 0.3 & 0.4 \\\
0.4 & 0.4 & 0.1 \\\
0.5 & 0.1 & 0.3
\end{array}\right]\left|\begin{array}{l}
化学输入 \\\
食品输入 \\\
石油输入
\end{array}\right|$$

当然，我们也可以用一般的线性方程组$Ax=b$的形式来表达：

$$\left\{\begin{array}{l}

0.2 x_{1}+0.3 x_{2}+0.4 x_{3}=b_{1} \\\
0.4 x_{1}+0.4 x_{2}+0.1 x_{3}=b_{2} \\\
0.5 x_{1}+0.1 x_{2}+0.3 x_{3}=b_{3}
\end{array}\right.$$

从本质上来说，消费矩阵解决的是输入和输出之间的关系。不仅如此，线性代数在现实生活中的运用还有很多，比如，我们可以借用特征值和特征向量，预测若干年后的污水水平；在密码学中，可以使用矩阵及其逆矩阵对需发送的消息加密；在机器学习中，可以使用线性方程组的共轭迭代法来训练神经网络，等等。

刚才我分别用矩阵和线性方程组的形式给出了消费矩阵，当然，在实际生活中，你可以灵活选择最有效的方式来解决问题。

我们可以看到，线性方程组可以表示成一般形式，也就是你初中学到的$A x=b$的形式，也可以表示成矩阵形式。矩阵是由向量组合而成的，比如刚才例子中的系数矩阵的每一行都是一个**行向量**，每一列都是一个**列向量**。

$$\begin{array} {l}
\end{array} \left[\begin{array} {lll}
0.2 & 0.3 & 0.4 \\\
0.4 & 0.4 & 0.1 \\\
0.5 & 0.1 & 0.3
\end{array}\right] \begin{array} {l}
\end{array} $$

从这里我们能看出，**向量**其实就会是线性代数最基础的核心。数学对抽象思维要求很高，简单来说，抽象思维就是抽取同类事物的共性。所以，在进入具体的线性方程组的主题前，我要先从数学抽象的角度说一说代数和线性代数，这也是深入理解后面内容的前提。

代数和线性代数的基本概念

那什么是代数呢？百度百科的解释是这样的：

> 代数是研究数、数量、关系、结构与代数方程（组）的通用解法及其性质的数学分支。

但我觉得这个解释其实没有说出**代数**这个概念的重点。我的理解是这样的：**代数是构造一系列对象和一系列操作这些对象的规则。**

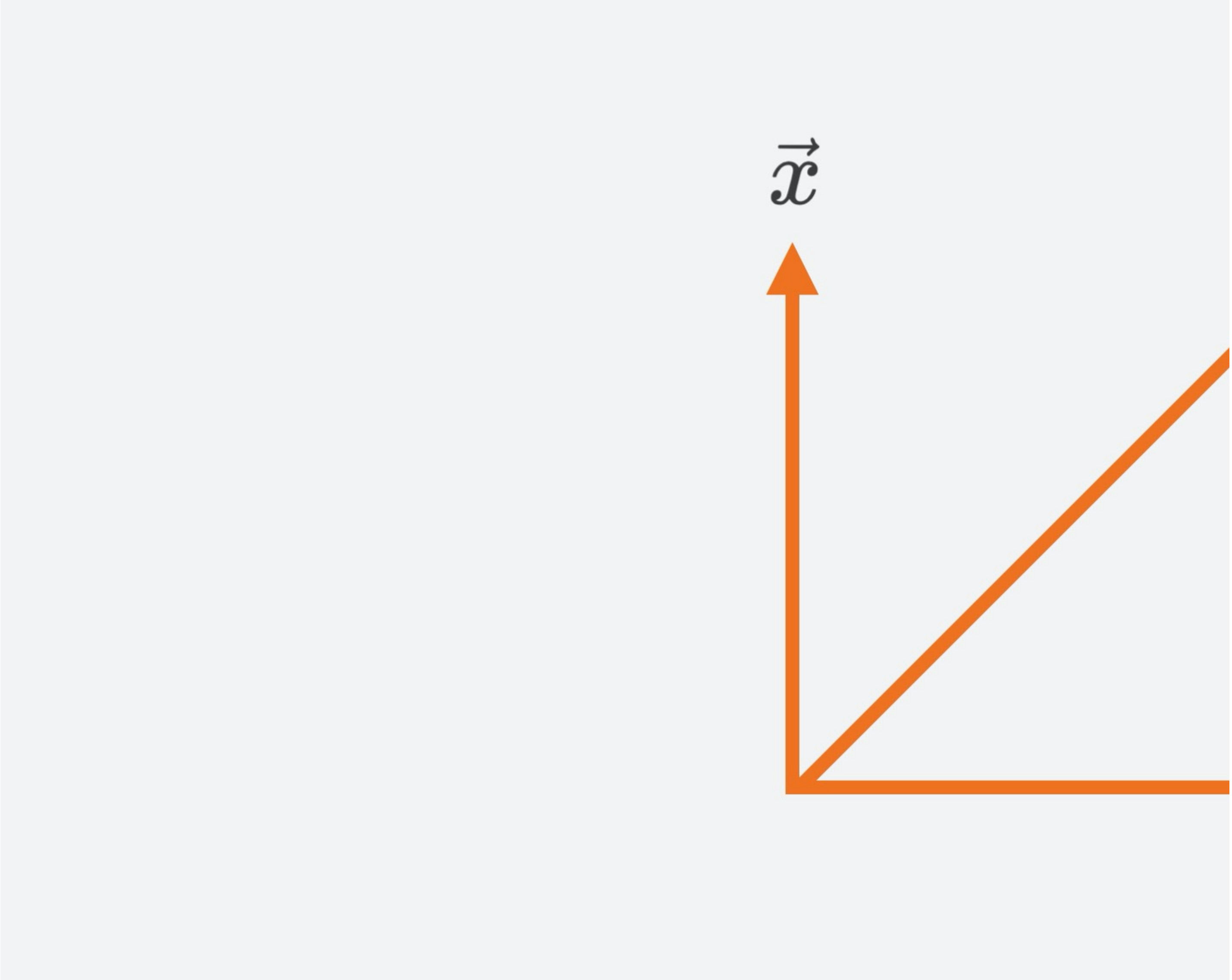
所以你看，代数这个概念的核心就两点，**对象**和**操作对象的规则**，这样就很好理解了吧？那有了代数的定义，线性代数就很好定义了。我们类比来看，线性代数其实就是向量，以及操作这些向量的规则。这里，向量映射到对象，向量的规则映射到对象的规则，因此线性代数是代数的具像化表达。

向量的基本概念

那什么是**向量**呢？从样子来看，向量其实就是由字母加上它上面的箭头来表示的，比如我们一版会写成$\vec{x}$。我估计你在高中或大学里已经接触过“几何向量”。那么，下面我用更抽象的数学观点来给你解释一下。

向量，也叫欧几里得向量（Euclidean Vector），其实就是能够互相相加、被标量乘的特殊对象。而标量也叫“无向量”，它只有数值大小，没有方向。怎么理解呢？我们来看一些向量的例子，通过这些例子来深入理解向量的概念。

几何向量是有向线段，在二维空间（也就是平面）中，两个几何向量能够相加，比如，向量x加上向量y等于向量z，$\vec{x}+\vec{y}=\vec{z}$，x向量也能被一个标量乘。再比如，标量λ乘向量x结果也是向量，$\lambda \vec{x}, \lambda \in R$。几何向量通过大小和方向来简化向量的表达，所以，一般数学课程一开始都会拿几何向量来进行举例。



多项式其实也是向量。两个多项式能够相加，它也能够被标量乘，结果也是多项式。

矩阵的一行或一列也是向量。就比如下面这样形式的向量。

$$x \in R^{3}: x=\left[\begin{array}{l}
1 \\
2 \\
3
\end{array}\right]$$

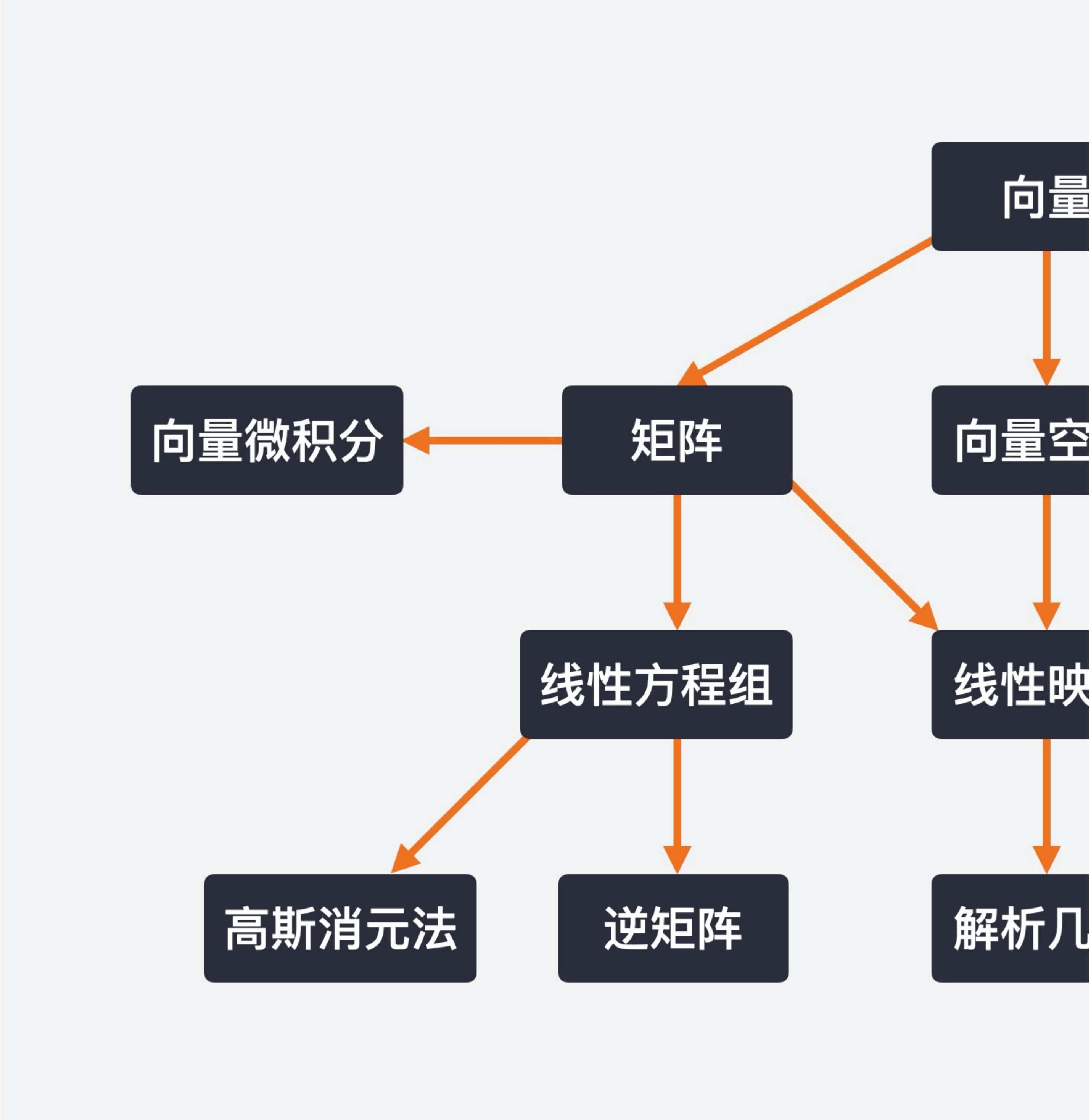
两个向量能够相加，它也能够被标量乘，结果也是向量。它和现代大部分的编程语言中的数组一致，而且数组的运算简化了向量操作的算法实施。

矢量图、音频信号也是向量。它们都能被一系列数字表示，比如，在音频信号处理中，常用到数据增强的方法，通过向量的操作就能到达目标。

看了这些向量例子，不知道你现在有点感觉了吗？其实，线性代数的本质就是**寻找向量之间的相似性**，比如在做分类时，我们常常需要估算不同样本之间的相似性度量（Similarity Measurement），这时通常采用的方法就是计算样本间的“距离”（Distance）。

可以看出来，向量非常重要，我们后面很多内容都是从向量延伸而来的，比如矩阵和求解线性方程组。

下面我用一张图来表达和向量有关的所有概念，也就是线性代数所有的核心内容，其中大部分内容你都会学到，希望通过这个图，你对线性代数有个大概的认知。相信学习完所有课程后，你再回过头来看时，肯定会有一些新的认知。



从图中最左侧这一列，我们可以看出，向量组合成矩阵，矩阵可以表示成线性方程组，而线性方程组可以通过高斯消元法求解，也可以求逆矩阵。

同时，向量又可以组合成向量空间，向量空间和矩阵都可以做线性映射或者线性变换，线性映射在实践中可以用在解析几何和分类问题中。

而且，向量和线性独立是强相关的，也就是说，线性独立指的是向量的线性独立，而线性独立又可以引出能够生成整个空间的基（Basis），基在实践中可以用在分类和降维中。

这里，我再额外提一个非常重要的、在数学中经常用到的概念——**封闭性**，或者俗称**闭包**（Closure）。封闭性的定义是，如果我们要对某个集合的成员进行一种运算，生成的仍然是这个集合的成员，那这个集合就可以称为在这个运算下闭合。

我为什么要提这个概念呢？这是因为，向量的线性运算是封闭的，也就是说向量的加法、数乘结果仍属于向量空间，即**向量的任意线性组合仍属于向量空间**。

线性方程组的应用

到这里，相信你已经对线性代数、向量这些基本概念有了一个应试教育之外的、新的认识，接下来我就切入本篇的最重点的内容了，那就是线性方程组。

线性方程组在线性代数中有着举足轻重的地位，许多现实生活中的问题都可以表达成线性方程组。关于线性方程组的概念，我想不用我多说了，这是初中的内容，你应该已经非常了解了。现在我举几个例子来说一说，线性方程组在现实生活中的运用，让你从应用的角度再理解下线性方程组。

第一个例子是计算旅游团人数。假设，一个旅游团由孩子和大人组成，去程时他们一起坐大巴，每个孩子的票价3元，大人票价3.2元，总共花费118.4元。回程时一起坐火车，每个孩子的票价3.5元，大人票价3.6元，总共花费135.2元。请问这个旅游团中有多少孩子和大人？

假设小孩人数为x_{1}，大人人数为x_{2}，于是我们得到了一个方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
3 x_{1}+3.2 x_{2}=118.4 \\
3.5 x_{1}+3.6 x_{2}=135.2
\end{array}\right.$$

使用初中的解二元一次方程组的知识，我们可以得出这个方程组的解是：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}=16 \\

x_{2}=22
\end{array}\right.$$

这个就是典型的线性方程组的现实例子。当然，我们也可以用矩阵来解这个方程组。你可能会说，这问题很简单啊，为什么还要用矩阵来解呢？整这么复杂有必要吗？别着急，这里我先卖个关子，具体我会在下一讲“矩阵篇”中进行讲解。

第二个例子是找出公司的最优生产计划。我们从公司的角度来看一看，假设生产苹果的几大主流产品：iPhone、Macbook、iMac，以及iWatch四款产品，需要用到芯片、摄像头模组、电池、IPS屏幕四大类资源，产品分别用 $N_{1}，N_{2}，N_{3}，N_{4}$来表示，资源分别用$R_{1}，R_{2}，R_{3}，R_{4}$来表示。

生产一单位的产品 N_{1}，也就是iPhone，需要$a_{11}，a_{21}，a_{31}，a_{41}$的资源，也就是芯片、摄像头模组、电池和IPS屏幕资源，其他产品也是一样。

我们的目标是在资源有限的情况下，找到一个最优生产计划，使每个产品的产出数量最大化。也就是说，在总共有b_{i}个单位资源R_{i}可用情况下，每个产品N_{i} 有多少单元 x_{i}应该被生产。因此，我们可以得到一个下面这样的线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+a_{13} x_{3}+a_{14} x_{4}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+a_{23} x_{3}+a_{24} x_{4}=b_{2} \\
a_{31} x_{1}+a_{32} x_{2}+a_{33} x_{3}+a_{34} x_{4}=b_{3} \\
a_{41} x_{1}+a_{42} x_{2}+a_{43} x_{3}+a_{44} x_{4}=b_{4}
\end{array}\right.$$

于是，我们得到线性方程组的通用表达方式，$x_{1}，\cdots ，x_{n}$ 是未知变量，每个满足方程组表达式的n元组$(x_{1}，\cdots ，x_{n})$都是它的解。

$$\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.$$

线性方程组的解是有几何意义的，从几何角度出发，有利于你理解和记忆线性方程组解的条件，接下来我们先来看看线性方程组解的几种情况，之后我再具体讲解线性方程组的几何表达。

首先我们来看**无解**的情况。假设有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
2 x_{1}+3 x_{3}=1
\end{array}\right.$$

第一行和第二行相加后，我们可以得到$2 x_{1}+3 x_{3}=5$，很明显，这个方程和第三行是矛盾的，所以，这个线性方程组无解。

其次是**只有一个解**的情况。假设有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
x_{2}+x_{3}=2
\end{array}\right.$$

这个方程组求解很简单，第一行乘以-1和第二行相加得到$-2x_{2}+x_{3}=-1$，再乘以-1后和第三行相加得到$x_{1}=1$，第一行和第二行相加，得到$2 x_{1}+3 x_{3}=5$，代入x_{1}后，得到$x_{3}=1$，最后，我们可以得到$(1,1,1)$是这个线性方程组的唯一解。

最后是**无穷解**的情况。我们有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
2 x_{1}+3 x_{3}=5
\end{array}\right.$$

方程组第一行和第二行相加等于第三行，从这个角度来说，我们就可以定义一个自由变量$x_{3}=a$，a属于实数，那方程组的解就是：

$$\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2} a, \frac{1}{2}+\frac{1}{2} a, a\right)$$

其中a属于实数，所以，这就包含了无穷多个解。

线性方程组的几何表达

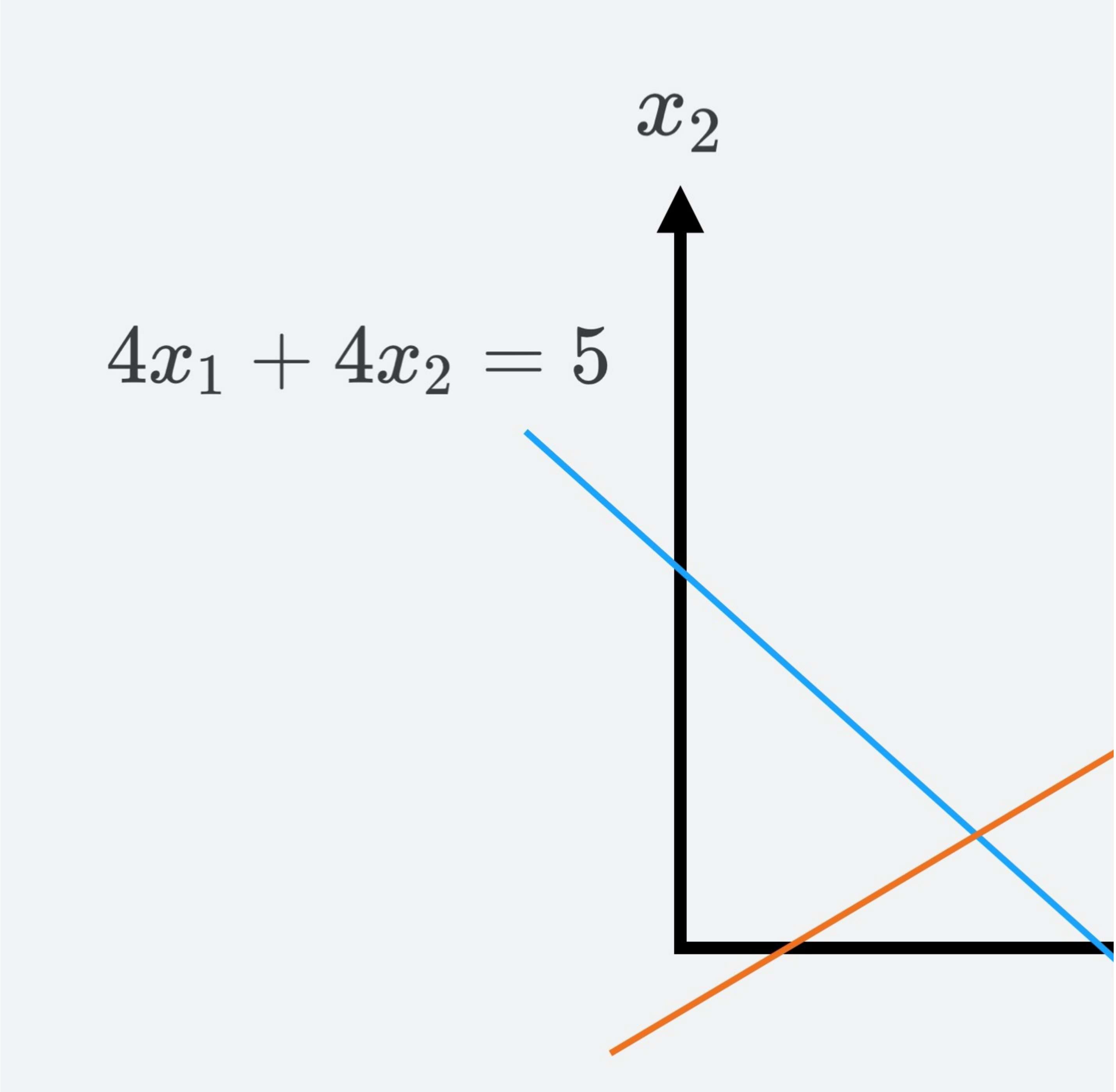
好了，了解了线性方程组解的三种情况，现在我们是时候从几何的角度来看一看线性方程组和它的解了，从几何意义出发有利于你更直观地理解线性方程组。

在一个只有两个变量x_{1},x_{2}的线性方程组中，我们定义一个x_{1},x_{2}平面。在这个平面中，每个线性方程都表达了一条直线。由于线性方程组的唯一解必须同时满足所有的等式，所以，线性方程组的唯一解其实就是线段的相交点，无穷解就是两线重合，而无解的情况，也就是两条线平行。

我拿一个例子来说明，设线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{l}
4 x_{1}+4 x_{2}=5 \\
2 x_{1}-4 x_{2}=1
\end{array}\right.$$

把其中的两个线性方程在x_{1},x_{2}平面中画出来后，我们可以得到两线段的交点$\left(1, \frac{1}{4}\right)$，也就是这个线性方程组的解。



我再把这个概念延伸一下，当遇到三个变量的情况时，每个线性方程在三维空间中表达了一个平面，由于线性方程组的一个解必须同时满足所有的等式，所以，**线性方程组的解其实就是平面，也可以是线、点或者空，空也就是没有共同的平面相交。**

其实还有一个更好的方法来表达和解线性方程组，这个方法就是下一篇要讲的矩阵，在这里我先简单提一下。我们把系数组合成向量，把向量组合成矩阵，也就是说，我们可以把线性方程组写成这样的形式：

$$x_{1}\left|\begin{array}{c}
a_{11} \\
\vdots \\
a_{m1}
\end{array}\right|+x_{2}\left|\begin{array}{c}
a_{12} \\
\vdots \\
c_{m2}
\end{array}\right|+\cdots+x_{n}\left|\begin{array}{c}
a_{1 n} \\
\vdots \\
a_{mn}
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{c}
b_{1} \\
\vdots \\
b_{m}
\end{array}\right|$$

再进一步最终可以写成矩阵的形式：
$$\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}
\end{array}\right]\left|\begin{array}{c}
x_{1} \\
\vdots \\
. \\

x_{n}
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{c}
b_{1} \\\
\vdots \\\
. \\\
b_{m}
\end{array}\right|$$

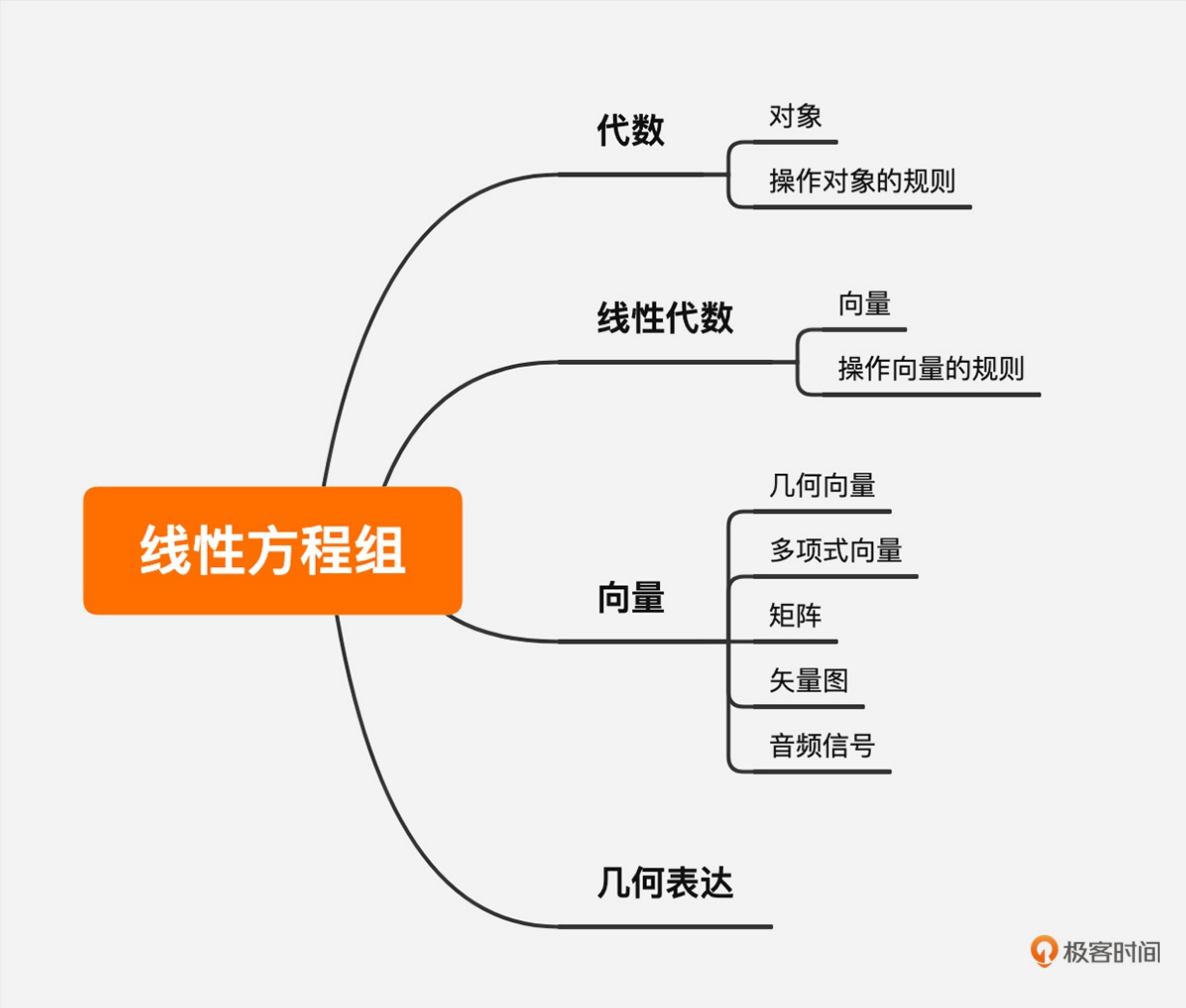
本节小结

好了，到这里这一讲就结束了，我带你总结一下前面讲解的内容。

这节课我带你重新认识了代数和线性代数的概念。代数是构造一系列对象和一系列操作这些对象的规则，线性代数是向量，以及操作这些向量的规则，所以，线性代数是代数的具像化表达。从线性代数，我们引出了向量的基本概念，我带你看了一个和向量有关的所有概念，即线性代数所有核心内容的图。

可以说，线性代数的一切皆从**向量**而来。

最后，我带你从二维平面几何角度，更直观地观察线性方程组和它几种解的情况，**而二维空间的线性方程组的解其实就是线、点或者空，也就是没有共同的线段相交**。你也可以自己试着把它扩展到三维空间几何中来观察，或许会更有趣哦！



线性代数练习场

我们一起来看一个练习题。这是一道极其简单的初中线性方程组题，你可以回顾一下，也为下一节课做好铺垫。

李大叔去年承包了10亩地，种植甲、乙两种蔬菜，共获利18000元。其中甲蔬菜每亩获利2000元，乙蔬菜每亩获利1500元。

请问，李大叔去年甲、乙两种蔬菜各种植了多少亩？

欢迎在留言区晒出你的运算过程和结果。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我学习线性代数。今天我们要讲的是"线性代数这门课的基本概念"。

线性代数可以运用在很多领域，比如：工程学、计算机科学、经济学、信号处理等等。我们来看一个在经济学中常见的例子：消费矩阵。

假设有n个行业，比如：化学、食品和石油。制造一单位的某化学品需要0.2单位的另一类化学品，0.3单位的食品，以及0.4单位的石油，而制造一单位的某食品和某石油也同样分别需要这三类产品的输入，于是，我们就能构造这样一个消费矩阵：

$$\left|\begin{array}{l}
化学输出 \\\
食品输出 \\\
石油输出
\end{array}\right|=\left[\begin{array}{lll}
0.2 & 0.3 & 0.4 \\\
0.4 & 0.4 & 0.1 \\\
0.5 & 0.1 & 0.3
\end{array}\right]\left|\begin{array}{l}
化学输入 \\\
食品输入 \\\
石油输入
\end{array}\right|$$

当然，我们也可以用一般的线性方程组$Ax=b$的形式来表达：

$$\left\{\begin{array}{l}

0.2 x_{1}+0.3 x_{2}+0.4 x_{3}=b_{1} \\
0.4 x_{1}+0.4 x_{2}+0.1 x_{3}=b_{2} \\
0.5 x_{1}+0.1 x_{2}+0.3 x_{3}=b_{3}
\end{array}\right.$$

从本质上来说，消费矩阵解决的是输入和输出之间的关系。不仅如此，线性代数在现实生活中的运用还有很多，比如，我们可以借用特征值和特征向量，预测若干年后的污水水平；在密码学中，可以使用矩阵及其逆矩阵对需发送的消息加密；在机器学习中，可以使用线性方程组的共轭迭代法来训练神经网络，等等。

刚才我分别用矩阵和线性方程组的形式给出了消费矩阵，当然，在实际生活中，你可以灵活选择最有效的方式来解决问题。

我们可以看到，线性方程组可以表示成一般形式，也就是你初中学到的$A x=b$的形式，也可以表示成矩阵形式。矩阵是由向量组合而成的，比如刚才例子中的系数矩阵的每一行都是一个**行向量**，每一列都是一个**列向量**。

$$\begin{array}{l}
\end{array}\left[\begin{array}{lll}
0.2 & 0.3 & 0.4 \\
0.4 & 0.4 & 0.1 \\
0.5 & 0.1 & 0.3
\end{array}\right] \begin{array}{l}
\end{array}$$

从这里我们能看出，**向量**其实就会是线性代数最基础的核心。数学对抽象思维要求很高，简单来说，抽象思维就是抽取同类事物的共性。所以，在进入具体的线性方程组的主题前，我要先从数学抽象的角度说一说代数和线性代数，这也是深入理解后面内容的前提。

代数和线性代数的基本概念

那什么是代数呢？百度百科的解释是这样的：

> 代数是研究数、数量、关系、结构与代数方程（组）的通用解法及其性质的数学分支。

但我觉得这个解释其实没有说出**代数**这个概念的重点。我的理解是这样的：**代数是构造一系列对象和一系列操作这些对象的规则。**

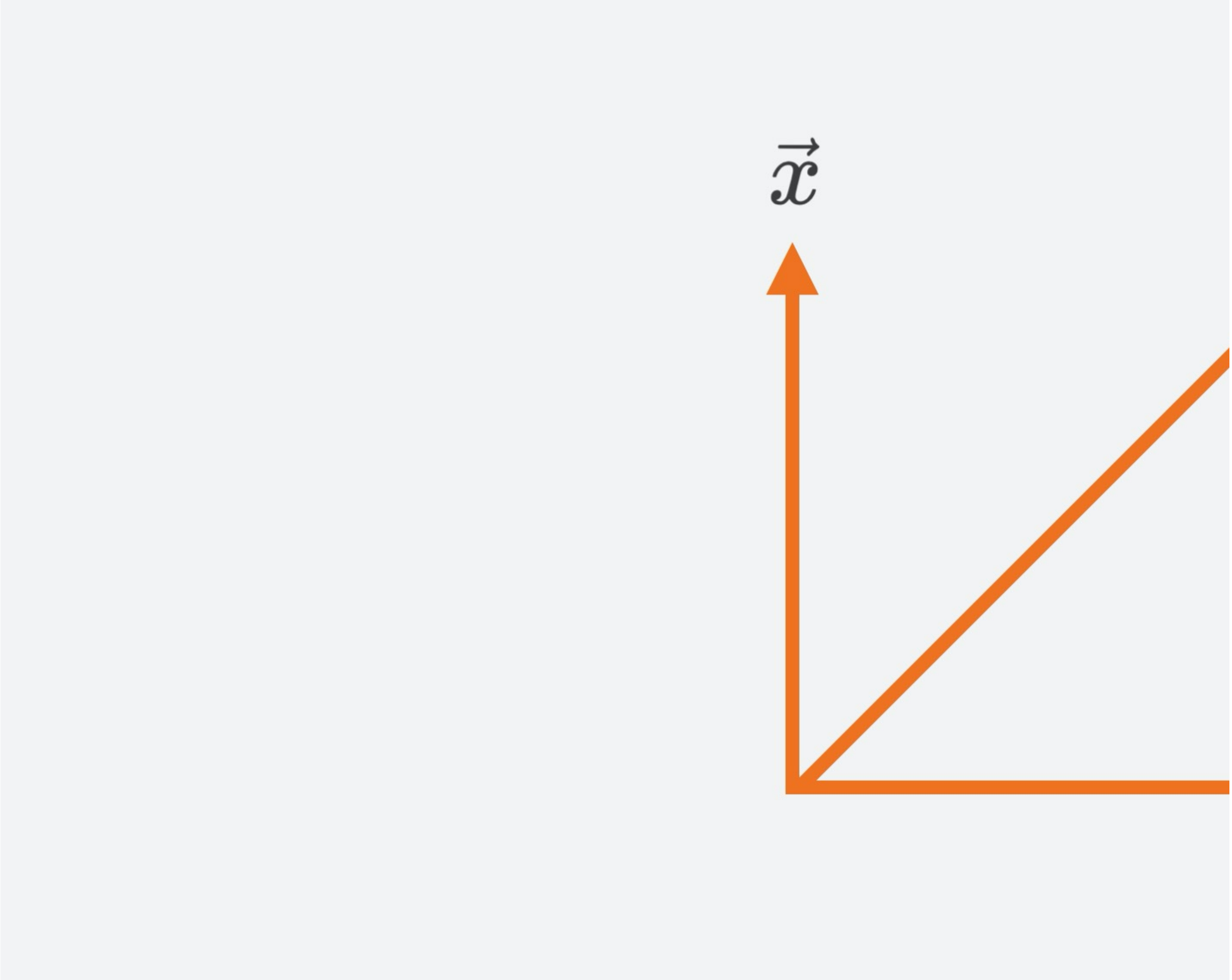
所以你看，代数这个概念的核心就两点，**对象**和**操作对象的规则**，这样就很好理解了吧？那有了代数的定义，线性代数就很好定义了。我们类比来看，线性代数其实就是向量，以及操作这些向量的规则。这里，向量映射到对象，向量的规则映射到对象的规则，因此线性代数是代数的具像化表达。

向量的基本概念

那什么是**向量**呢？从样子来看，向量其实就是由字母加上它上面的箭头来表示的，比如我们一般会写成$\vec{x}$。我估计你在高中或大学里已经接触过“几何向量”。那么，下面我用更抽象的数学观点来给你解释一下。

向量，也叫欧几里得向量（Euclidean Vector），其实就是能够互相相加、被标量乘的特殊对象。而标量也叫“无向量”，它只有数值大小，没有方向。怎么理解呢？我们来看一些向量的例子，通过这些例子来深入理解向量的概念。

几何向量是有向线段，在二维空间（也就是平面）中，两个几何向量能够相加，比如，向量x加上向量y等于向量z，$\vec{x}+\vec{y}=\vec{z}$，x向量也能被一个标量乘。再比如，标量λ乘向量x结果也是向量，$\lambda \vec{x}, \lambda \in R$。几何向量通过大小和方向来简化向量的表达，所以，一般数学课程一开始都会拿几何向量来进行举例。



多项式其实也是向量。两个多项式能够相加，它也能够被标量乘，结果也是多项式。

矩阵的一行或一列也是向量。就比如下面这样形式的向量。

$$x \in R^{3}: x=\left[\begin{array}{l}
1 \\
2 \\
3
\end{array}\right]$$

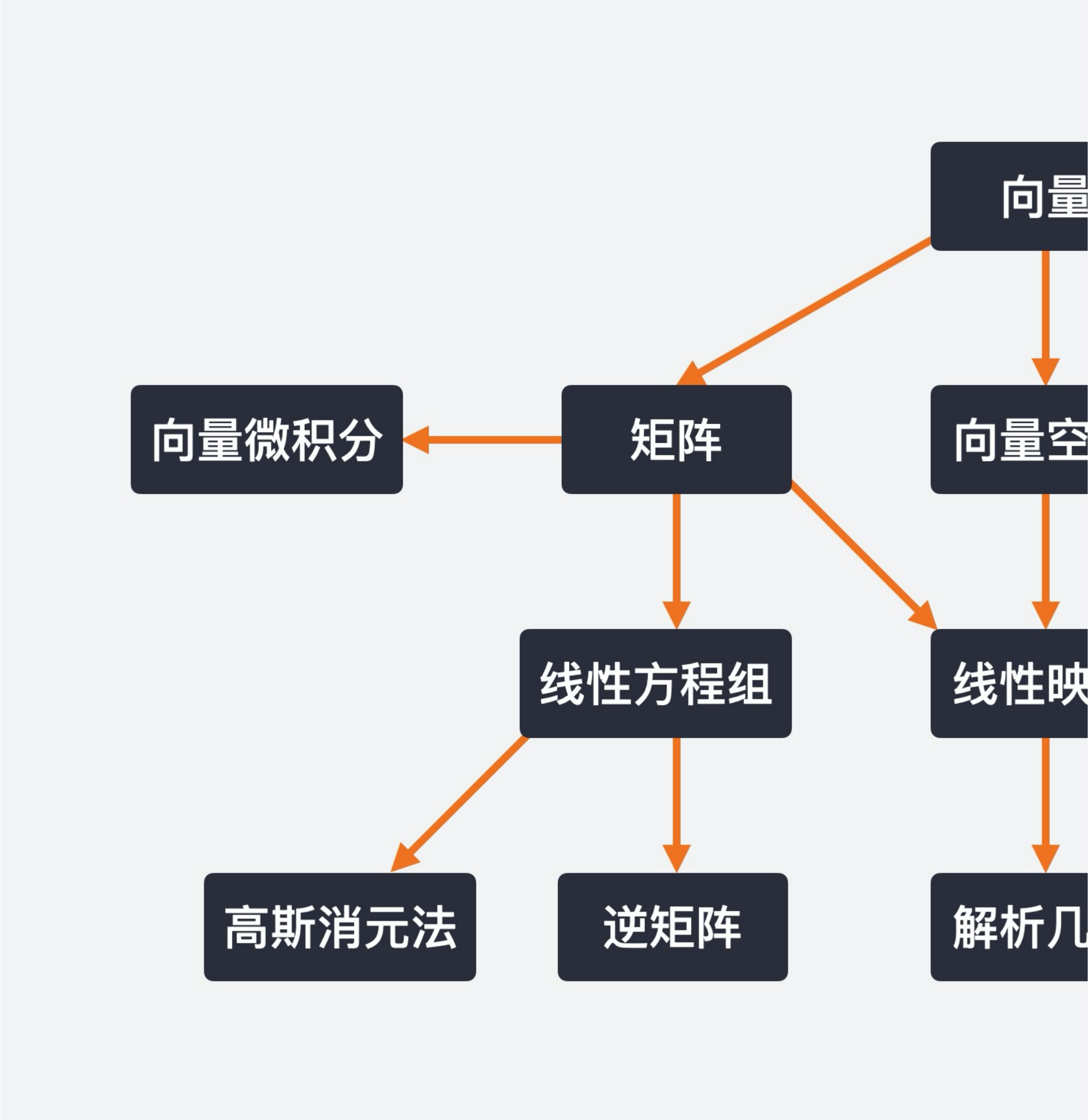
两个向量能够相加，它也能够被标量乘，结果也是向量。它和现代大部分的编程语言中的数组一致，而且数组的运算简化了向量操作的算法实施。

矢量图、音频信号也是向量。它们都能被一系列数字表示，比如，在音频信号处理中，常用到数据增强的方法，通过向量的操作就能到达目标。

看了这些向量例子，不知道你现在有点感觉了吗？其实，线性代数的本质就是**寻找向量之间的相似性**，比如在做分类时，我们常常需要估算不同样本之间的相似性度量（Similarity Measurement），这时通常采用的方法就是计算样本间的“距离”（Distance）。

可以看出来，向量非常重要，我们后面很多内容都是从向量延伸而来的，比如矩阵和求解线性方程组。

下面我用一张图来表达和向量有关的所有概念，也就是线性代数所有的核心内容，其中大部分内容你都会学到，希望通过这个图，你对线性代数有个大概的认知。相信学习完所有课程后，你再回过头来看时，肯定会有一些新的认知。



从图中最左侧这一列，我们可以看出，向量组合成矩阵，矩阵可以表示成线性方程组，而线性方程组可以通过高斯消元法求解，也可以求逆矩阵。

同时，向量又可以组合成向量空间，向量空间和矩阵都可以做线性映射或者线性变换，线性映射在实践中可以用在解析几何和分类问题中。

而且，向量和线性独立是强相关的，也就是说，线性独立指的是向量的线性独立，而线性独立又可以引出能够生成整个空间的基（Basis），基在实践中可以用在分类和降维中。

这里，我再额外提一个非常重要的、在数学中经常用到的概念——**封闭性**，或者俗称**闭包**（Closure）。封闭性的定义是，如果我们要对某个集合的成员进行一种运算，生成的仍然是这个集合的成员，那这个集合就可以称为在这个运算下闭合。

我为什么要提这个概念呢？这是因为，向量的线性运算是封闭的，也就是说向量的加法、数乘结果仍属于向量空间，即**向量的任意线性组合仍属于向量空间**。

线性方程组的应用

到这里，相信你已经对线性代数、向量这些基本概念有了一个应试教育之外的、新的认识，接下来我就切入本篇的最重点的内容了，那就是线性方程组。

线性方程组在线性代数中有着举足轻重的地位，许多现实生活中的问题都可以表达成线性方程组。关于线性方程组的概念，我想不用我多说了，这是初中的内容，你应该已经非常了解了。现在我举几个例子来说一说，线性方程组在现实生活中的运用，让你从应用的角度再理解下线性方程组。

第一个例子是计算旅游团人数。假设，一个旅游团由孩子和大人组成，去程时他们一起坐大巴，每个孩子的票价3元，大人票价3.2元，总共花费118.4元。回程时一起坐火车，每个孩子的票价3.5元，大人票价3.6元，总共花费135.2元。请问这个旅游团中有多少孩子和大人？

假设小孩人数为x_{1}，大人人数为x_{2}，于是我们得到了一个方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
3 x_{1}+3.2 x_{2}=118.4 \\
3.5 x_{1}+3.6 x_{2}=135.2
\end{array}\right.$$

使用初中的解二元一次方程组的知识，我们可以得出这个方程组的解是：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}=16 \\

x_{2}=22
\end{array}\right.$$

这个就是典型的线性方程组的现实例子。当然，我们也可以用矩阵来解这个方程组。你可能会说，这问题很简单啊，为什么还要用矩阵来解呢？整这么复杂有必要吗？别着急，这里我先卖个关子，具体我会在下一讲"矩阵篇"中进行讲解。

第二个例子是找出公司的最优生产计划。我们从公司的角度来看一看，假设生产苹果的几大主流产品：iPhone、Macbook、iMac，以及iWatch四款产品，需要用到芯片、摄像头模组、电池、IPS屏幕四大类资源，产品分别用 $N_{1}，N_{2}，N_{3}，N_{4}$来表示，资源分别用$R_{1}，R_{2}，R_{3}，R_{4}$来表示。

生产一单位的产品 N_{1}，也就是iPhone，需要$a_{11}，a_{21}，a_{31}，a_{41}$的资源，也就是芯片、摄像头模组、电池和IPS屏幕资源，其他产品也是一样。

我们的目标是在资源有限的情况下，找到一个最优生产计划，使每个产品的产出数量最大化。也就是说，在总共有b_{i}个单位资源R_{i}可用情况下，每个产品N_{i} 有多少单元 x_{i}应该被生产。因此，我们可以得到一个下面这样的线性方程组：

$$\left\{\begin{array} {l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+a_{13} x_{3}+a_{14} x_{4}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+a_{23} x_{3}+a_{24} x_{4}=b_{2} \\
a_{31} x_{1}+a_{32} x_{2}+a_{33} x_{3}+a_{34} x_{4}=b_{3} \\
a_{41} x_{1}+a_{42} x_{2}+a_{43} x_{3}+a_{44} x_{4}=b_{4}
\end{array}\right.$$

于是，我们得到线性方程组的通用表达方式，$x_{1}，\cdots ，x_{n}$ 是未知变量，每个满足方程组表达式的n元组$(x_{1}，\cdots ，x_{n})$都是它的解。

$$\left\{\begin{array} {l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.$$

线性方程组的解是有几何意义的，从几何角度出发，有利于你理解和记忆线性方程组解的条件，接下来我们先来看看线性方程组解的几种情况，之后我再具体讲解线性方程组的几何表达。

首先我们来看**无解**的情况。假设有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array} {c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
2 x_{1}+3 x_{3}=1
\end{array}\right.$$

第一行和第二行相加后，我们可以得到$2 x_{1}+3 x_{3}=5$，很明显，这个方程和第三行是矛盾的，所以，这个线性方程组无解。

其次是**只有一个解**的情况。假设有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array} {c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
x_{2}+x_{3}=2
\end{array}\right.$$

这个方程组求解很简单，第一行乘以-1和第二行相加得到$-2x_{2}+x_{3}=-1$，再乘以-1后和第三行相加得到$x_{1}=1$，第一行和第二行相加，得到$2 x_{1}+3 x_{3}=5$，代入x_{1}后，得到$x_{3}=1$，最后，我们可以得到$(1,1,1)$是这个线性方程组的唯一解。

最后是**无穷解**的情况。我们有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array} {c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
2 x_{1}+3 x_{3}=5
\end{array}\right.$$

方程组第一行和第二行相加等于第三行，从这个角度来说，我们就可以定义一个自由变量$x_{3}=a$，a属于实数，那方程组的解就是：

$$\left(\frac{5} {2}-\frac{3} {2} a, \frac{1} {2}+\frac{1} {2} a, a\right)$$

其中a属于实数，所以，这就包含了无穷多个解。

线性方程组的几何表达

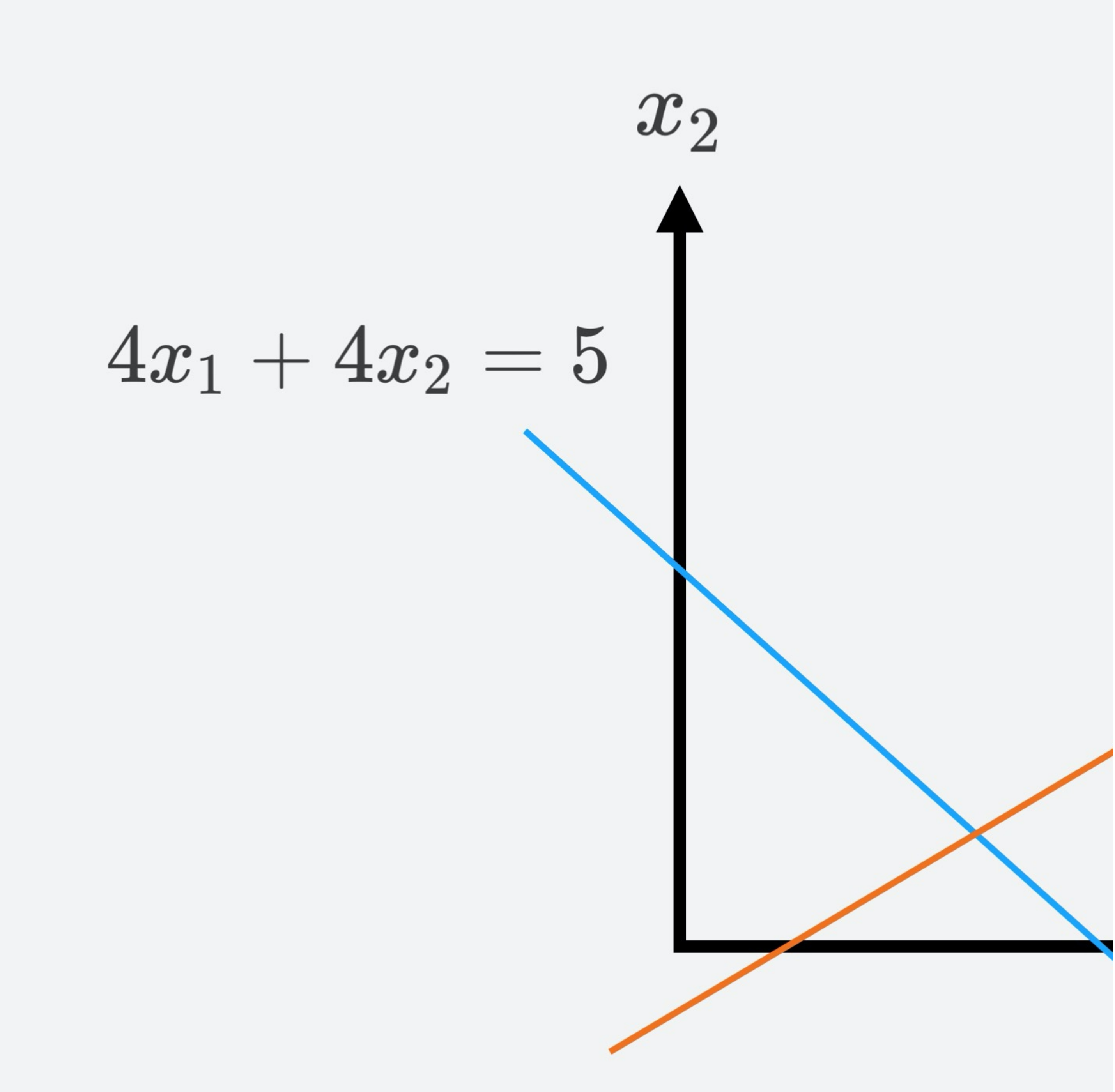
好了，了解了线性方程组解的三种情况，现在我们是时候从几何的角度来看一看线性方程组和它的解了，从几何意义出发有利于你更直观地理解线性方程组。

在一个只有两个变量x_{1},x_{2}的线性方程组中，我们定义一个x_{1},x_{2}平面。在这个平面中，每个线性方程都表达了一条直线。由于线性方程组的唯一解必须同时满足所有的等式，所以，线性方程组的唯一解其实就是线段的相交点，无穷解就是两线重合，而无解的情况，也就是两条线平行。

我拿一个例子来说明，设线性方程组：

$$\left\{\begin{array} {l}
4 x_{1}+4 x_{2}=5 \\
2 x_{1}-4 x_{2}=1
\end{array}\right.$$

把其中的两个线性方程在x_{1},x_{2}平面中画出来后，我们可以得到两线段的交点$\left(1, \frac{1} {4}\right)$，也就是这个线性方程组的解。



我再把这个概念延伸一下，当遇到三个变量的情况时，每个线性方程在三维空间中表达了一个平面，由于线性方程组的一个解必须同时满足所有的等式，所以，**线性方程组的解其实就是平面，也可以是线、点或者空，空也就是没有共同的平面相交。**

其实还有一个更好的方法来表达和解线性方程组，这个方法就是下一篇要讲的矩阵，在这里我先简单提一下。我们把系数组合成向量，把向量组合成矩阵，也就是说，我们可以把线性方程组写成这样的形式：

$$x_{1}\left|\begin{array}{c}
a_{11} \\
\vdots \\
a_{m1}
\end{array}\right|+x_{2}\left|\begin{array}{c}
a_{12} \\
\vdots \\
c_{m2}
\end{array}\right|+\cdots+x_{n}\left|\begin{array}{c}
a_{1 n} \\
\vdots \\
a_{mn}
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{c}
b_{1} \\
\vdots \\
b_{m}
\end{array}\right|$$

再进一步最终可以写成矩阵的形式：
$$\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}
\end{array}\right]\left|\begin{array}{c}
x_{1} \\
\vdots \\
. \\

x_{n}
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{c}
b_{1} \\\
\vdots \\\
. \\\
b_{m}
\end{array}\right|$$

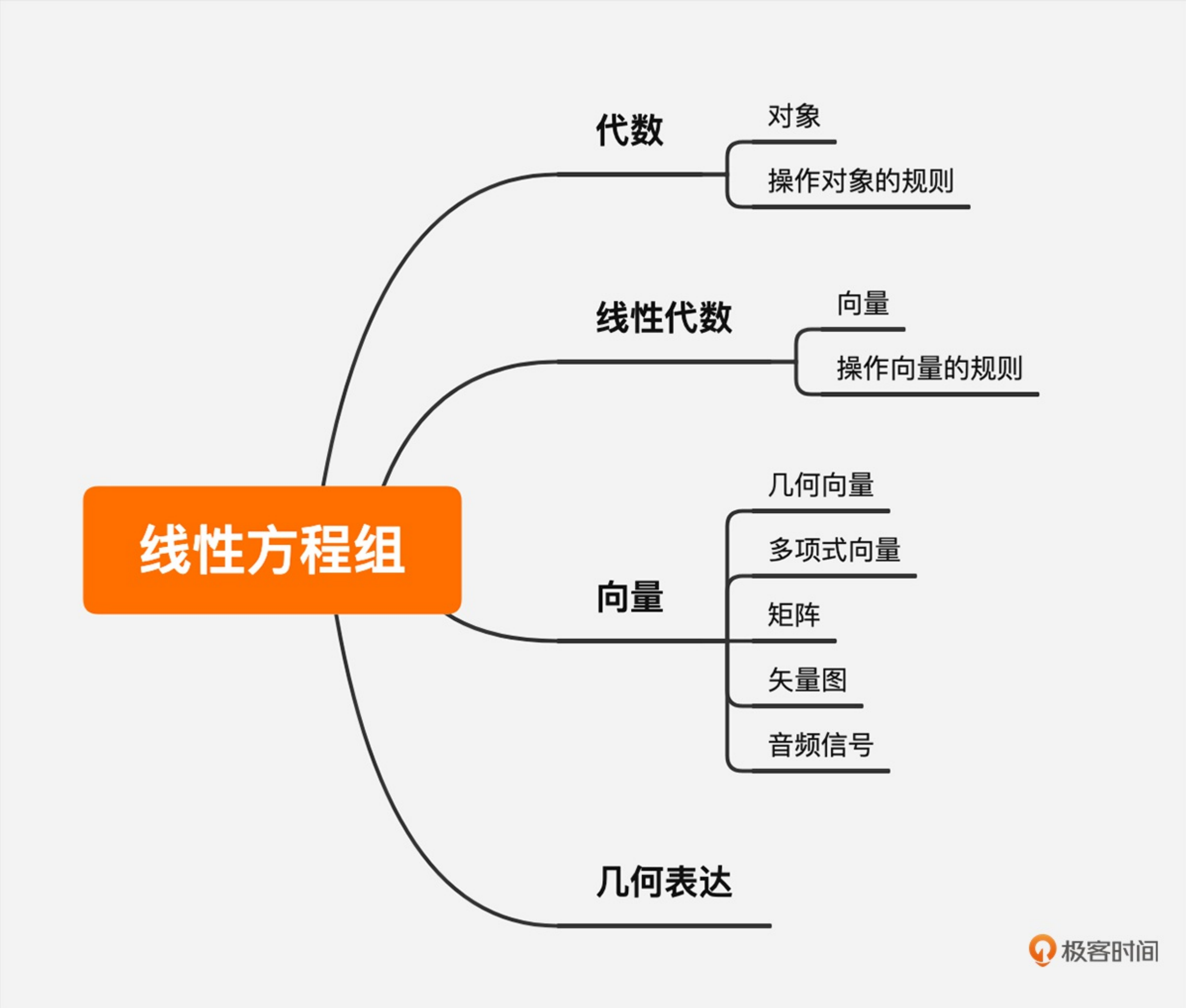
本节小结

好了，到这里这一讲就结束了，我带你总结一下前面讲解的内容。

这节课我带你重新认识了代数和线性代数的概念。代数是构造一系列对象和一系列操作这些对象的规则，线性代数是向量，以及操作这些向量的规则，所以，线性代数是代数的具像化表达。从线性代数，我们引出了向量的基本概念，我带你看了一个和向量有关的所有概念，即线性代数所有核心内容的图。

可以说，线性代数的一切皆从**向量**而来。

最后，我带你从二维平面几何角度，更直观地观察线性方程组和它几种解的情况，**而二维空间的线性方程组的解其实就是线、点或者空，也就是没有共同的线段相交**。你也可以自己试着把它扩展到三维空间几何中来观察，或许会更有趣哦！



线性代数练习场

我们一起来看一个练习题。这是一道极其简单的初中线性方程组题，你可以回顾一下，也为下一节课做好铺垫。

李大叔去年承包了10亩地，种植甲、乙两种蔬菜，共获利18000元。其中甲蔬菜每亩获利2000元，乙蔬菜每亩获利1500元。

请问，李大叔去年甲、乙两种蔬菜各种植了多少亩？

欢迎在留言区晒出你的运算过程和结果。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我学习线性代数。今天我们要讲的是“线性代数这门课的基本概念”。

线性代数可以运用在很多领域，比如：工程学、计算机科学、经济学、信号处理等等。我们来看一个在经济学中常见的例子：消费矩阵。

假设有n个行业，比如：化学、食品和石油。制造一单位的某化学品需要0.2单位的另一类化学品，0.3单位的食品，以及0.4单位的石油，而制造一单位的某食品和某石油也同样分别需要这三类产品的输入，于是，我们就能构造这样一个消费矩阵：

$$\left|\begin{array}{l}
化学输出 \\\
食品输出 \\\
石油输出
\end{array}\right|=\left[\begin{array}{lll}
0.2 & 0.3 & 0.4 \\\
0.4 & 0.4 & 0.1 \\\
0.5 & 0.1 & 0.3
\end{array}\right]\left|\begin{array}{l}
化学输入 \\\
食品输入 \\\
石油输入
\end{array}\right|$$

当然，我们也可以用一般的线性方程组$Ax=b$的形式来表达：

$$\left\{\begin{array}{l}

0.2 x_{1}+0.3 x_{2}+0.4 x_{3}=b_{1} \\\
0.4 x_{1}+0.4 x_{2}+0.1 x_{3}=b_{2} \\\
0.5 x_{1}+0.1 x_{2}+0.3 x_{3}=b_{3}
\end{array}\right.$$

从本质上来说，消费矩阵解决的是输入和输出之间的关系。不仅如此，线性代数在现实生活中的运用还有很多，比如，我们可以借用特征值和特征向量，预测若干年后的污水水平；在密码学中，可以使用矩阵及其逆矩阵对需发送的消息加密；在机器学习中，可以使用线性方程组的共轭迭代法来训练神经网络，等等。

刚才我分别用矩阵和线性方程组的形式给出了消费矩阵，当然，在实际生活中，你可以灵活选择最有效的方式来解决问题。

我们可以看到，线性方程组可以表示成一般形式，也就是你初中学到的$A x=b$的形式，也可以表示成矩阵形式。矩阵是由向量组合而成的，比如刚才例子中的系数矩阵的每一行都是一个**行向量**，每一列都是一个**列向量**。

$$\begin{array}{l}
\end{array}\left[\begin{array}{lll}
0.2 & 0.3 & 0.4 \\\
0.4 & 0.4 & 0.1 \\\
0.5 & 0.1 & 0.3
\end{array}\right] \begin{array}{l}
\end{array}$$

从这里我们能看出，**向量**其实就会是线性代数最基础的核心。数学对抽象思维要求很高，简单来说，抽象思维就是抽取同类事物的共性。所以，在进入具体的线性方程组的主题前，我要先从数学抽象的角度说一说代数和线性代数，这也是深入理解后面内容的前提。

代数和线性代数的基本概念

那什么是代数呢？百度百科的解释是这样的：

> 代数是研究数、数量、关系、结构与代数方程（组）的通用解法及其性质的数学分支。

但我觉得这个解释其实没有说出**代数**这个概念的重点。我的理解是这样的：**代数是构造一系列对象和一系列操作这些对象的规则。**

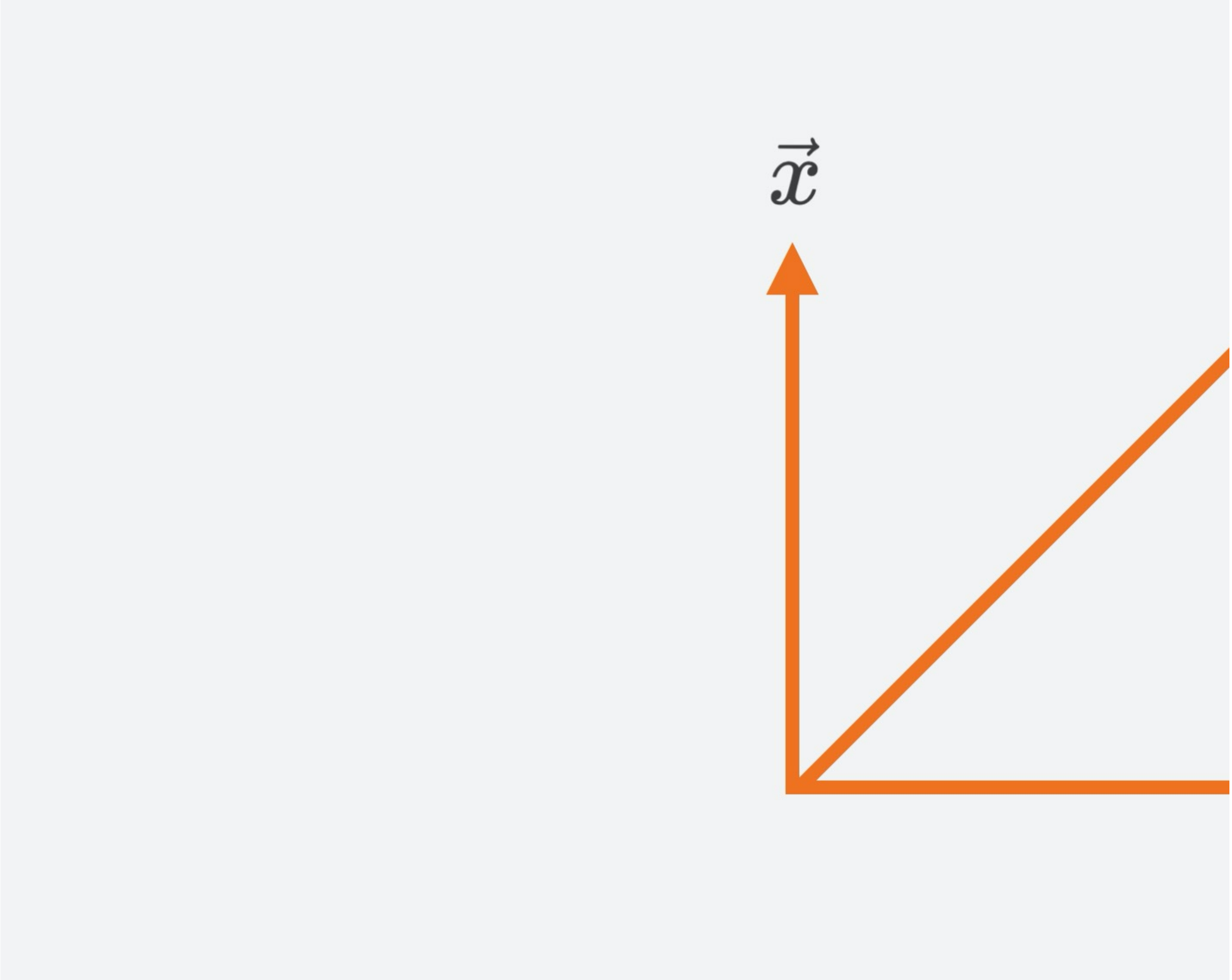
所以你看，代数这个概念的核心就两点，**对象**和**操作对象的规则**，这样就很好理解了吧？那有了代数的定义，线性代数就很好定义了。我们类比来看，线性代数其实就是向量，以及操作这些向量的规则。这里，向量映射到对象，向量的规则映射到对象的规则，因此线性代数是代数的具像化表达。

向量的基本概念

那什么是**向量**呢？从样子来看，向量其实就是由字母加上它上面的箭头来表示的，比如我们一般会写成$\vec{x}$。我估计你在高中或大学里已经接触过“几何向量”。那么，下面我用更抽象的数学观点来给你解释一下。

向量，也叫欧几里得向量（Euclidean Vector），其实就是能够互相相加、被标量乘的特殊对象。而标量也叫“无向量”，它只有数值大小，没有方向。怎么理解呢？我们来看一些向量的例子，通过这些例子来深入理解向量的概念。

几何向量是有向线段，在二维空间（也就是平面）中，两个几何向量能够相加，比如，向量x加上向量y等于向量z，$\vec{x}+\vec{y}=\vec{z}$，x向量也能被一个标量乘。再比如，标量λ乘向量x结果也是向量，$\lambda \vec{x}, \lambda \in R$。几何向量通过大小和方向来简化向量的表达，所以，一般数学课程一开始都会拿几何向量来进行举例。



多项式其实也是向量。两个多项式能够相加，它也能够被标量乘，结果也是多项式。

矩阵的一行或一列也是向量。就比如下面这样形式的向量。

$$x \in R^{3}: x=\left[\begin{array}{l}
1 \\
2 \\
3
\end{array}\right]$$

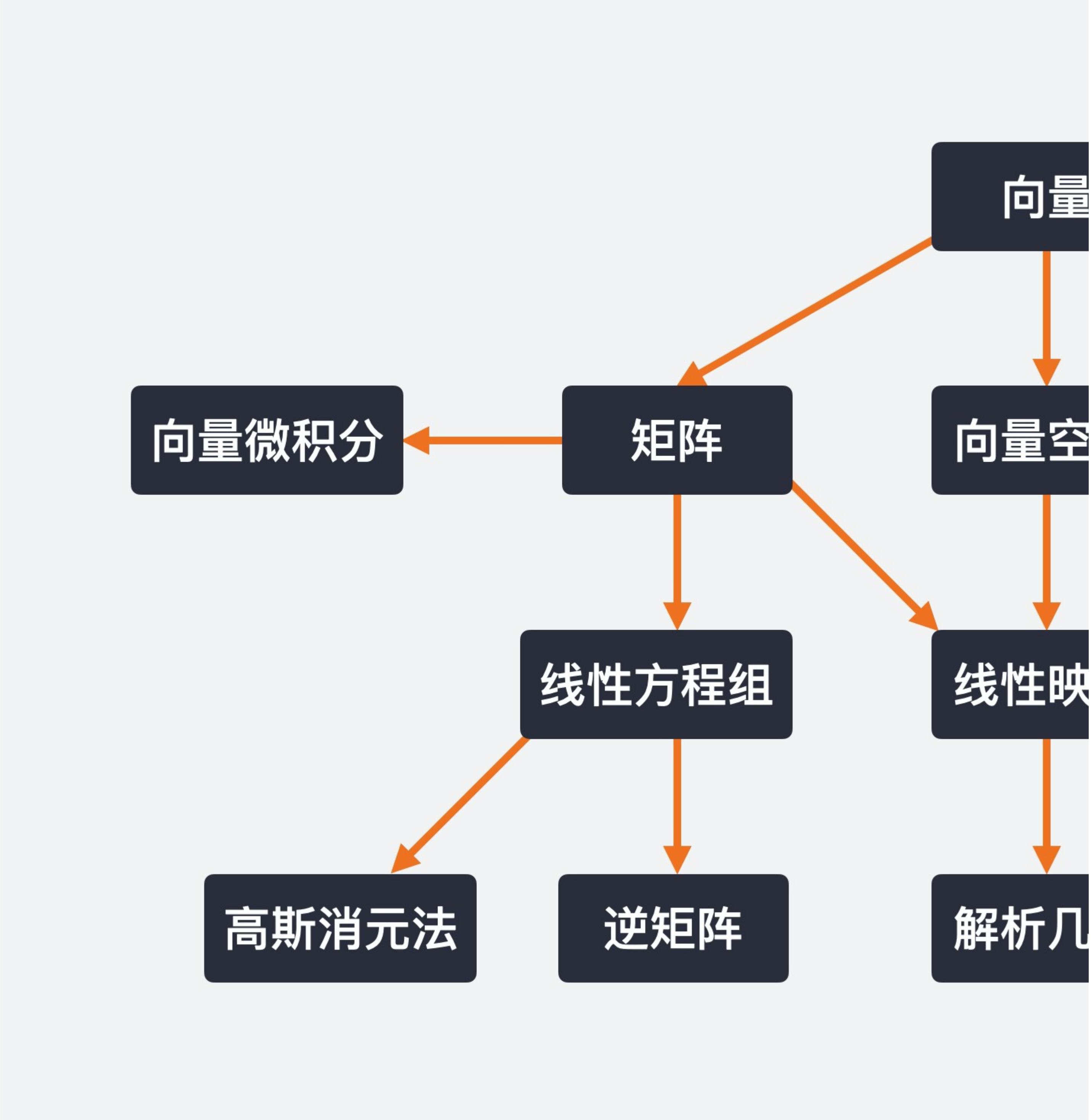
两个向量能够相加，它也能够被标量乘，结果也是向量。它和现代大部分的编程语言中的数组一致，而且数组的运算简化了向量操作的算法实施。

矢量图、音频信号也是向量。它们都能被一系列数字表示，比如，在音频信号处理中，常用到数据增强的方法，通过向量的操作就能到达目标。

看了这些向量例子，不知道你现在有点感觉了吗？其实，线性代数的本质就是**寻找向量之间的相似性**，比如在做分类时，我们常常需要估算不同样本之间的相似性度量（Similarity Measurement），这时通常采用的方法就是计算样本间的"距离"（Distance）。

可以看出来，向量非常重要，我们后面很多内容都是从向量延伸而来的，比如矩阵和求解线性方程组。

下面我用一张图来表达和向量有关的所有概念，也就是线性代数所有的核心内容，其中大部分内容你都会学到，希望通过这个图，你对线性代数有个大概的认知。相信学习完所有课程后，你再回过头来看时，肯定会有一些新的认知。



从图中最左侧这一列，我们可以看出，向量组合成矩阵，矩阵可以表示成线性方程组，而线性方程组可以通过高斯消元法求解，也可以求逆矩阵。

同时，向量又可以组合成向量空间，向量空间和矩阵都可以做线性映射或者线性变换，线性映射在实践中可以用在解析几何和分类问题中。

而且，向量和线性独立是强相关的，也就是说，线性独立指的是向量的线性独立，而线性独立又可以引出能够生成整个空间的基（Basis），基在实践中可以用在分类和降维中。

这里，我再额外提一个非常重要的、在数学中经常用到的概念——**封闭性**，或者俗称**闭包**（Closure）。封闭性的定义是，如果我们要对某个集合的成员进行一种运算，生成的仍然是这个集合的成员，那这个集合就可以称为在这个运算下闭合。

我为什么要提这个概念呢？这是因为，向量的线性运算是封闭的，也就是说向量的加法、数乘结果仍属于向量空间，即**向量的任意线性组合仍属于向量空间**。

线性方程组的应用

到这里，相信你已经对线性代数、向量这些基本概念有了一个应试教育之外的、新的认识，接下来我就切入本篇的最重点的内容了，那就是线性方程组。

线性方程组在线性代数中有着举足轻重的地位，许多现实生活中的问题都可以表达成线性方程组。关于线性方程组的概念，我想不用我多说了，这是初中的内容，你应该已经非常了解了。现在我举几个例子来说一说，线性方程组在现实生活中的运用，让你从应用的角度再理解下线性方程组。

第一个例子是计算旅游团人数。假设，一个旅游团由孩子和大人组成，去程时他们一起坐大巴，每个孩子的票价3元，大人票价3.2元，总共花费118.4元。回程时一起坐火车，每个孩子的票价3.5元，大人票价3.6元，总共花费135.2元。请问这个旅游团中有多少孩子和大人？

假设小孩人数为x_{1}，大人人数为x_{2}，于是我们得到了一个方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
3 x_{1}+3.2 x_{2}=118.4 \\
3.5 x_{1}+3.6 x_{2}=135.2
\end{array}\right.$$

使用初中的解二元一次方程组的知识，我们可以得出这个方程组的解是：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}=16 \\

x_{2}=22
\end{array}\right.$$

这个就是典型的线性方程组的现实例子。当然，我们也可以用矩阵来解这个方程组。你可能会说，这问题很简单啊，为什么还要用矩阵来解呢？整这么复杂有必要吗？别着急，这里我先卖个关子，具体我会在下一讲“矩阵篇”中进行讲解。

第二个例子是找出公司的最优生产计划。我们从公司的角度来看一看，假设生产苹果的几大主流产品：iPhone、Macbook、iMac，以及iWatch四款产品，需要用到芯片、摄像头模组、电池、IPS屏幕四大类资源，产品分别用 $N_{1}，N_{2}，N_{3}，N_{4}$来表示，资源分别用$R_{1}，R_{2}，R_{3}，R_{4}$来表示。

生产一单位的产品 N_{1}，也就是iPhone，需要$a_{11}，a_{21}，a_{31}，a_{41}$的资源，也就是芯片、摄像头模组、电池和IPS屏幕资源，其他产品也是一样。

我们的目标是在资源有限的情况下，找到一个最优生产计划，使每个产品的产出数量最大化。也就是说，在总共有b_{i}个单位资源R_{i}可用情况下，每个产品N_{i} 有多少单元 x_{i}应该被生产。因此，我们可以得到一个下面这样的线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+a_{13} x_{3}+a_{14} x_{4}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+a_{23} x_{3}+a_{24} x_{4}=b_{2} \\
a_{31} x_{1}+a_{32} x_{2}+a_{33} x_{3}+a_{34} x_{4}=b_{3} \\
a_{41} x_{1}+a_{42} x_{2}+a_{43} x_{3}+a_{44} x_{4}=b_{4}
\end{array}\right.$$

于是，我们得到线性方程组的通用表达方式，$x_{1}，\cdots，x_{n}$ 是未知变量，每个满足方程组表达式的n元组$(x_{1}，\cdots，x_{n})$都是它的解。

$$\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.$$

线性方程组的解是有几何意义的，从几何角度出发，有利于你理解和记忆线性方程组解的条件，接下来我们先来看看线性方程组解的几种情况，之后我再具体讲解线性方程组的几何表达。

首先我们来看**无解**的情况。假设有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
2 x_{1}+3 x_{3}=1
\end{array}\right.$$

第一行和第二行相加后，我们可以得到$2 x_{1}+3 x_{3}=5$，很明显，这个方程和第三行是矛盾的，所以，这个线性方程组无解。

其次是**只有一个解**的情况。假设有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
x_{2}+x_{3}=2
\end{array}\right.$$

这个方程组求解很简单，第一行乘以-1和第二行相加得到$-2x_{2}+x_{3}=-1$，再乘以-1后和第三行相加得到$x_{1}=1$，第一行和第二行相加，得到$2 x_{1}+3 x_{3}=5$，代入x_{1}后，得到$x_{3}=1$，最后，我们可以得到$(1,1,1)$是这个线性方程组的唯一解。

最后是**无穷解**的情况。我们有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
2 x_{1}+3 x_{3}=5
\end{array}\right.$$

方程组第一行和第二行相加等于第三行，从这个角度来说，我们就可以定义一个自由变量$x_{3}=a$，a属于实数，那方程组的解就是：

$$\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2} a, \frac{1}{2}+\frac{1}{2} a, a\right)$$

其中a属于实数，所以，这就包含了无穷多个解。

线性方程组的几何表达

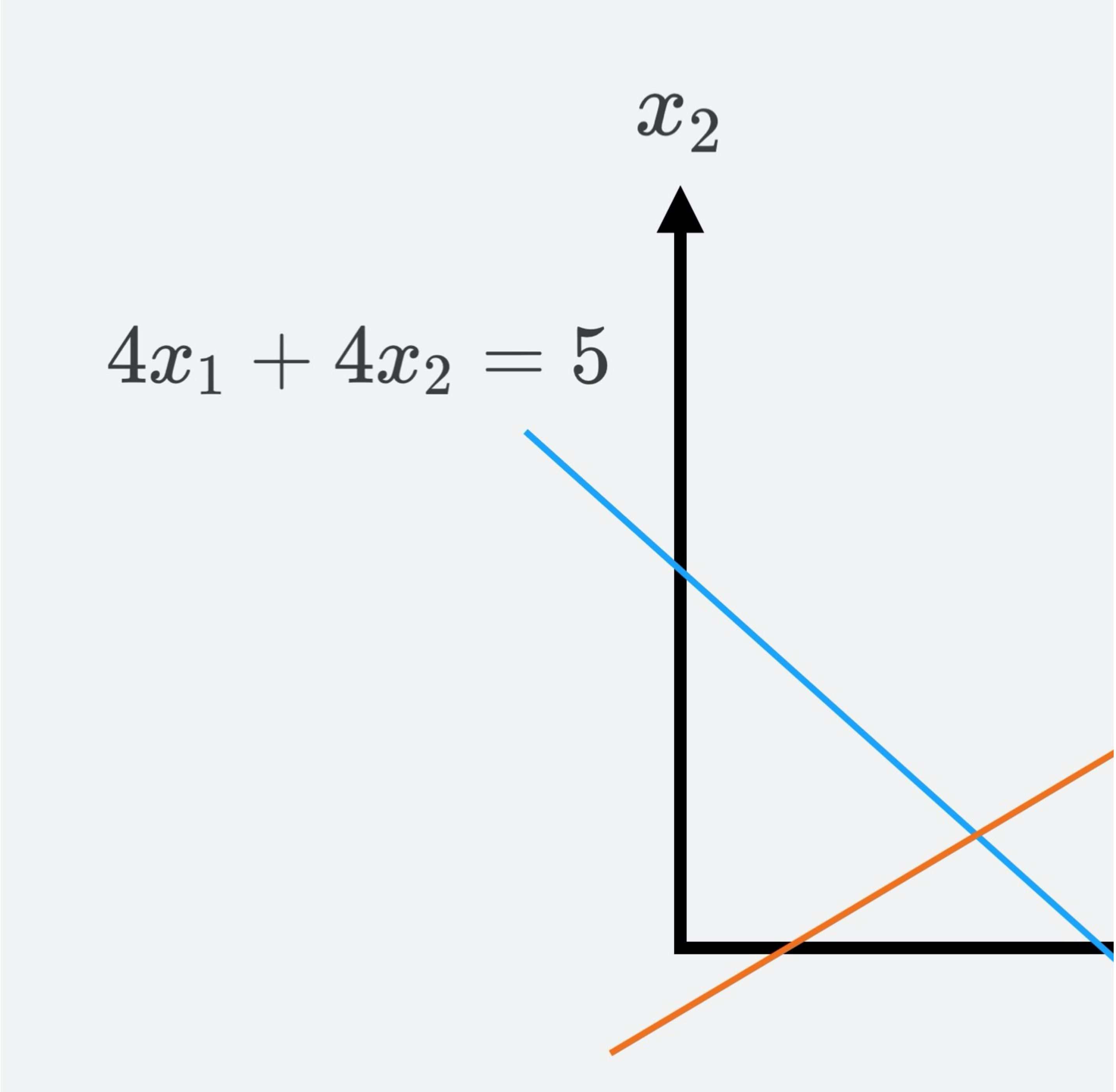
好了，了解了线性方程组解的三种情况，现在我们是时候从几何的角度来看一看线性方程组和它的解了，从几何意义出发有利于你更直观地理解线性方程组。

在一个只有两个变量x_{1},x_{2}的线性方程组中，我们定义一个x_{1},x_{2}平面。在这个平面中，每个线性方程都表达了一条直线。由于线性方程组的唯一解必须同时满足所有的等式，所以，线性方程组的唯一解其实就是线段的相交点，无穷解就是两线重合，而无解的情况，也就是两条线平行。

我拿一个例子来说明，设线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{l}
4 x_{1}+4 x_{2}=5 \\
2 x_{1}-4 x_{2}=1
\end{array}\right.$$

把其中的两个线性方程在x_{1},x_{2}平面中画出来后，我们可以得到两线段的交点$\left(1, \frac{1}{4}\right)$，也就是这个线性方程组的解。



我再把这个概念延伸一下，当遇到三个变量的情况时，每个线性方程在三维空间中表达了一个平面，由于线性方程组的一个解必须同时满足所有的等式，所以，**线性方程组的解其实就是平面，也可以是线、点或者空，空也就是没有共同的平面相交。**

其实还有一个更好的方法来表达和解线性方程组，这个方法就是下一篇要讲的矩阵，在这里我先简单提一下。我们把系数组合成向量，把向量组合成矩阵，也就是说，我们可以把线性方程组写成这样的形式：

$$x_{1}\left|\begin{array}{c}
a_{11} \\
\vdots \\
a_{m1}
\end{array}\right|+x_{2}\left|\begin{array}{c}
a_{12} \\
\vdots \\
c_{m2}
\end{array}\right|+\cdots+x_{n}\left|\begin{array}{c}
a_{1 n} \\
\vdots \\
a_{m n}
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{c}
b_{1} \\
\vdots \\
b_{m}
\end{array}\right|$$

再进一步最终可以写成矩阵的形式：
$$\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}
\end{array}\right]\left|\begin{array}{c}
x_{1} \\
\vdots \\
. \\

x_{n}
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{c}
b_{1} \\\
\vdots \\\
. \\\
b_{m}
\end{array}\right|$$

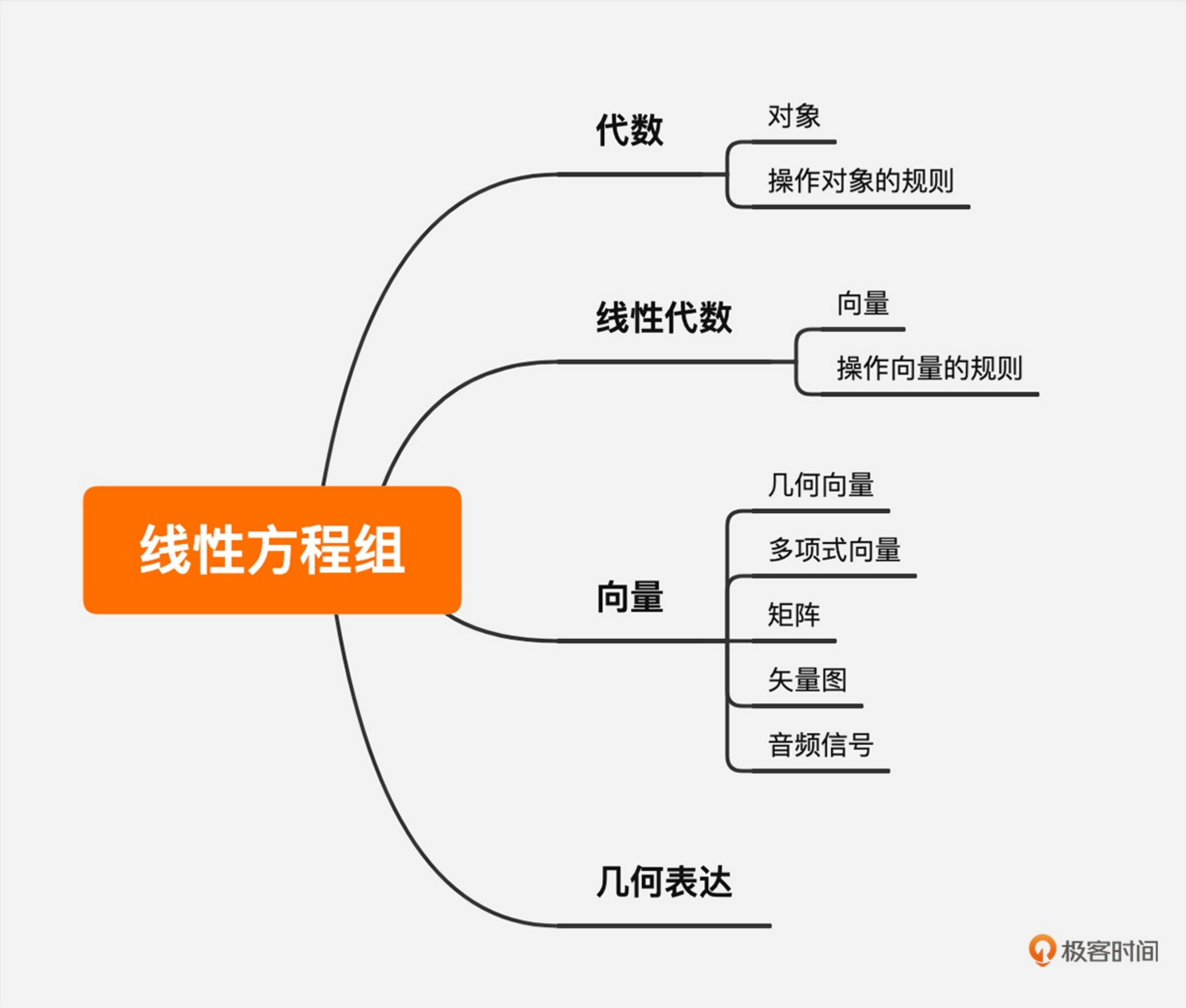
本节小结

好了，到这里这一讲就结束了，我带你总结一下前面讲解的内容。

这节课我带你重新认识了代数和线性代数的概念。代数是构造一系列对象和一系列操作这些对象的规则，线性代数是向量，以及操作这些向量的规则，所以，线性代数是代数的具像化表达。从线性代数，我们引出了向量的基本概念，我带你看了一个和向量有关的所有概念，即线性代数所有核心内容的图。

可以说，线性代数的一切皆从**向量**而来。

最后，我带你从二维平面几何角度，更直观地观察线性方程组和它几种解的情况，**而二维空间的线性方程组的解其实就是线、点或者空，也就是没有共同的线段相交**。你也可以自己试着把它扩展到三维空间几何中来观察，或许会更有趣哦！



线性代数练习场

我们一起来看一个练习题。这是一道极其简单的初中线性方程组题，你可以回顾一下，也为下一节课做好铺垫。

李大叔去年承包了10亩地，种植甲、乙两种蔬菜，共获利18000元。其中甲蔬菜每亩获利2000元，乙蔬菜每亩获利1500元。

请问，李大叔去年甲、乙两种蔬菜各种植了多少亩？

欢迎在留言区晒出你的运算过程和结果。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我学习线性代数。今天我们要讲的是“线性代数这门课的基本概念”。

线性代数可以运用在很多领域，比如：工程学、计算机科学、经济学、信号处理等等。我们来看一个在经济学中常见的例子：消费矩阵。

假设有n个行业，比如：化学、食品和石油。制造一单位的某化学品需要0.2单位的另一类化学品，0.3单位的食品，以及0.4单位的石油，而制造一单位的某食品和某石油也同样分别需要这三类产品的输入，于是，我们就能构造这样一个消费矩阵：

$$\left|\begin{array}{l}
化学输出 \\\
食品输出 \\\
石油输出
\end{array}\right|=\left[\begin{array}{lll}
0.2 & 0.3 & 0.4 \\\
0.4 & 0.4 & 0.1 \\\
0.5 & 0.1 & 0.3
\end{array}\right]\left|\begin{array}{l}
化学输入 \\\
食品输入 \\\
石油输入
\end{array}\right|$$

当然，我们也可以用一般的线性方程组$Ax=b$的形式来表达：

$$\left\{\begin{array}{l}

0.2 x_{1}+0.3 x_{2}+0.4 x_{3}=b_{1} \\\
0.4 x_{1}+0.4 x_{2}+0.1 x_{3}=b_{2} \\\
0.5 x_{1}+0.1 x_{2}+0.3 x_{3}=b_{3}
\end{array}\right.$$

从本质上来说，消费矩阵解决的是输入和输出之间的关系。不仅如此，线性代数在现实生活中的运用还有很多，比如，我们可以借用特征值和特征向量，预测若干年后的污水水平；在密码学中，可以使用矩阵及其逆矩阵对需发送的消息加密；在机器学习中，可以使用线性方程组的共轭迭代法来训练神经网络，等等。

刚才我分别用矩阵和线性方程组的形式给出了消费矩阵，当然，在实际生活中，你可以灵活选择最有效的方式来解决问题。

我们可以看到，线性方程组可以表示成一般形式，也就是你初中学到的$A x=b$的形式，也可以表示成矩阵形式。矩阵是由向量组合而成的，比如刚才例子中的系数矩阵的每一行都是一个**行向量**，每一列都是一个**列向量**。

$$\begin{array} {l}
\end{array}\left[\begin{array} {lll}
0.2 & 0.3 & 0.4 \\\
0.4 & 0.4 & 0.1 \\\
0.5 & 0.1 & 0.3
\end{array}\right] \begin{array} {l}
\end{array}$$

从这里我们能看出，**向量**其实就会是线性代数最基础的核心。数学对抽象思维要求很高，简单来说，抽象思维就是抽取同类事物的共性。所以，在进入具体的线性方程组的主题前，我要先从数学抽象的角度说一说代数和线性代数，这也是深入理解后面内容的前提。

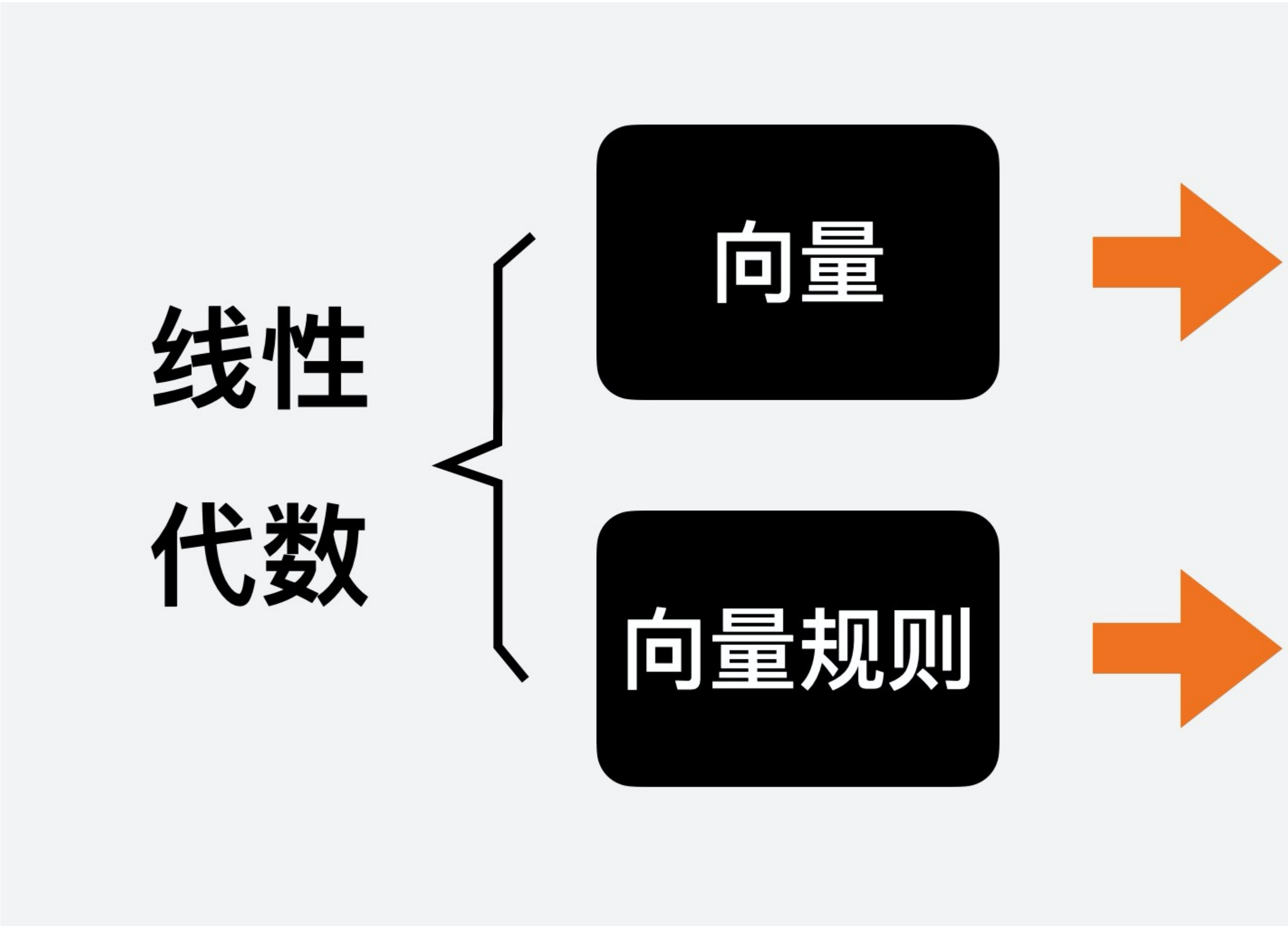
代数和线性代数的基本概念

那什么是代数呢？百度百科的解释是这样的：

> 代数是研究数、数量、关系、结构与代数方程（组）的通用解法及其性质的数学分支。

但我觉得这个解释其实没有说出**代数**这个概念的重点。我的理解是这样的：**代数是构造一系列对象和一系列操作这些对象的规则。**

所以你看，代数这个概念的核心就两点，**对象**和**操作对象的规则**，这样就很好理解了吧？那有了代数的定义，线性代数就很好定义了。我们类比来看，线性代数其实就是向量，以及操作这些向量的规则。这里，向量映射到对象，向量的规则映射到对象的规则，因此线性代数是代数的具像化表达。

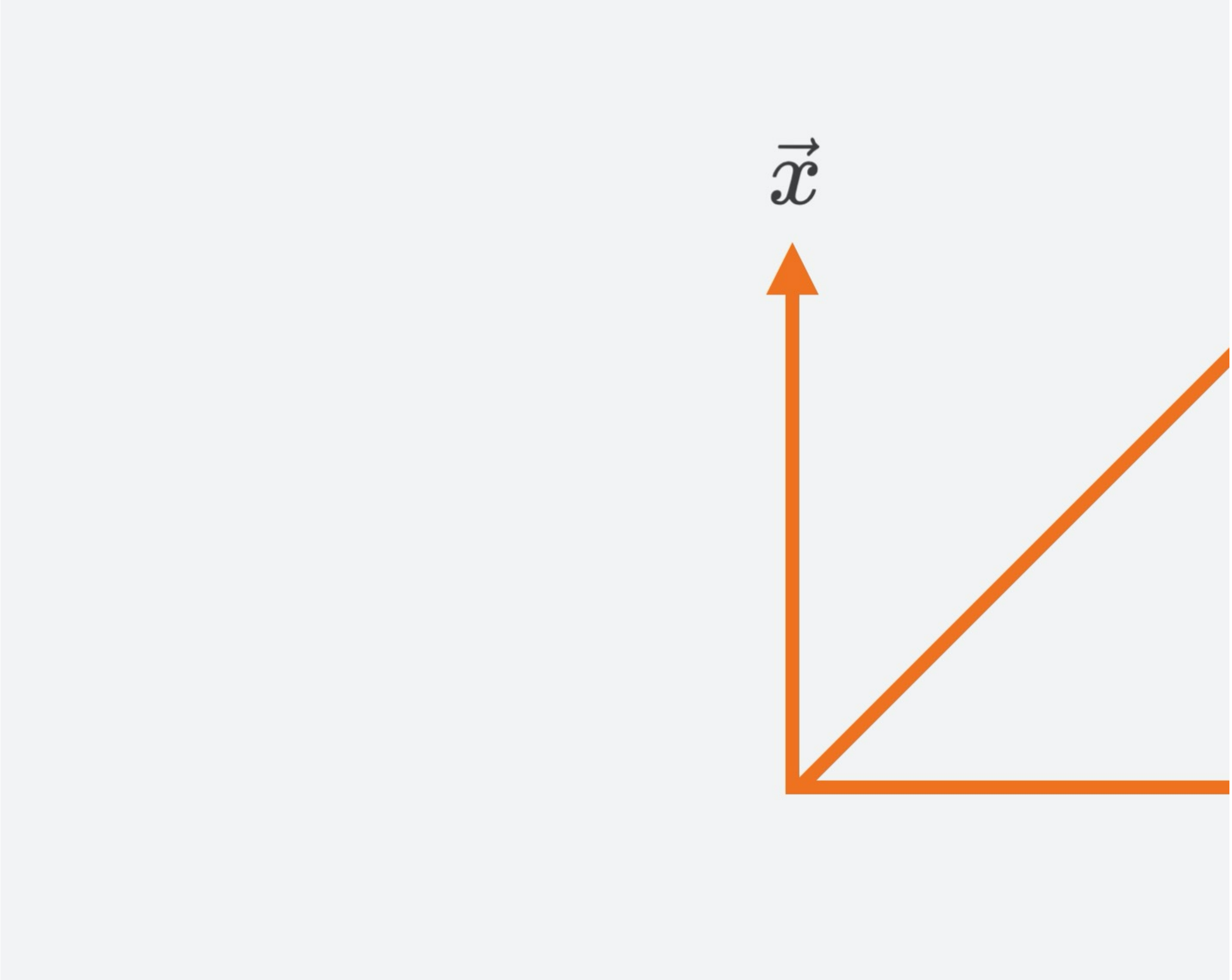


向量的基本概念

那什么是**向量**呢？从样子来看，向量其实就是由字母加上它上面的箭头来表示的，比如我们一版会写成$\vec{x}$。我估计你在高中或大学里已经接触过“几何向量”。那么，下面我用更抽象的数学观点来给你解释一下。

向量，也叫欧几里得向量（Euclidean Vector），其实就是能够互相相加、被标量乘的特殊对象。而标量也叫“无向量”，它只有数值大小，没有方向。怎么理解呢？我们来看一些向量的例子，通过这些例子来深入理解向量的概念。

几何向量是有向线段，在二维空间（也就是平面）中，两个几何向量能够相加，比如，向量x加上向量y等于向量z，$\vec{x}+\vec{y}=\vec{z}$，x向量也能被一个标量乘。再比如，标量λ乘向量x结果也是向量，$\lambda \vec{x}, \lambda \in R$。几何向量通过大小和方向来简化向量的表达，所以，一般数学课程一开始都会拿几何向量来进行举例。



多项式其实也是向量。两个多项式能够相加，它也能够被标量乘，结果也是多项式。

矩阵的一行或一列也是向量。就比如下面这样形式的向量。

$$x \in R^{3}: x=\left[\begin{array}{l}
1 \\
2 \\
3
\end{array}\right]$$

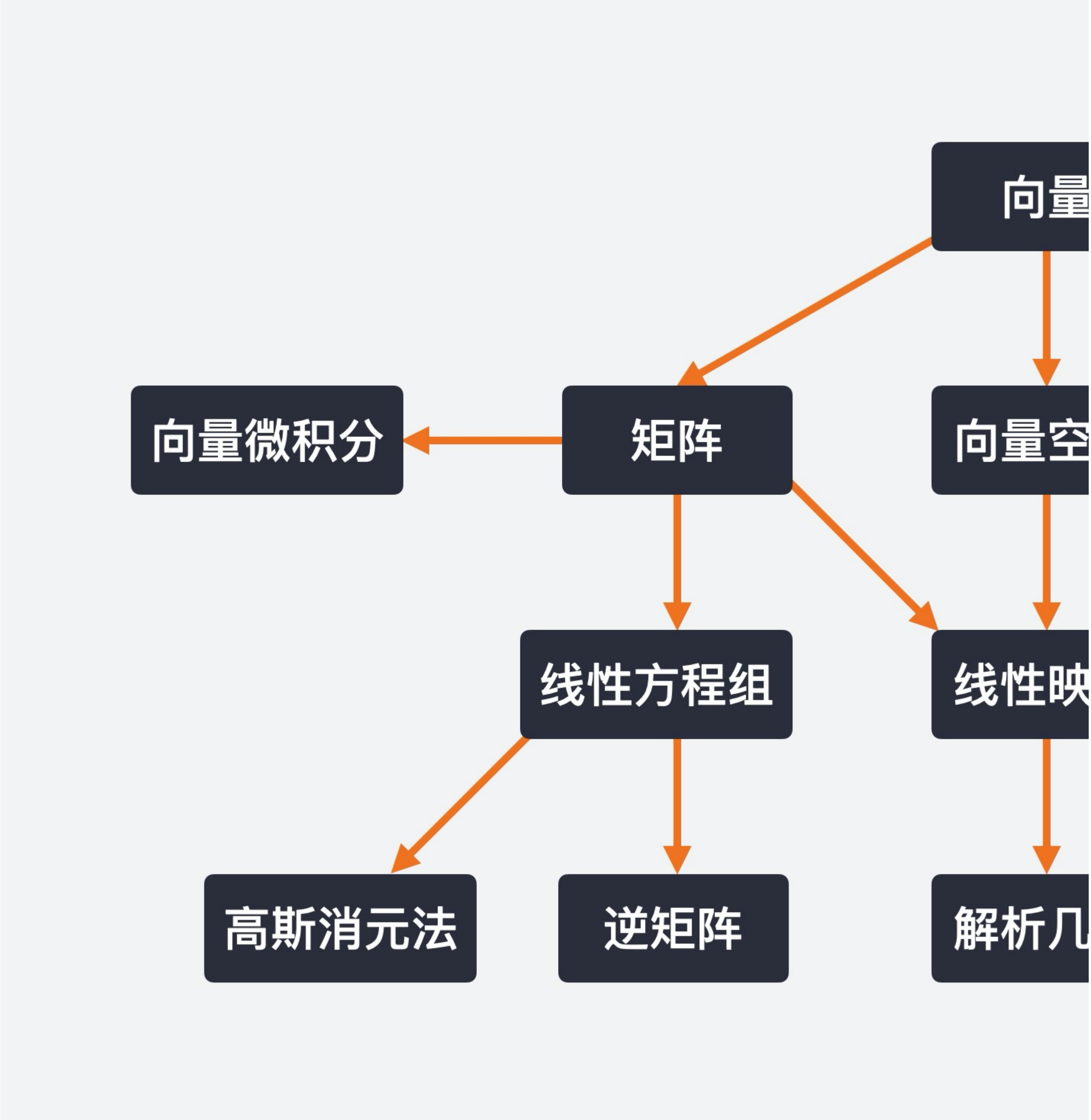
两个向量能够相加，它也能够被标量乘，结果也是向量。它和现代大部分的编程语言中的数组一致，而且数组的运算简化了向量操作的算法实施。

矢量图、音频信号也是向量。它们都能被一系列数字表示，比如，在音频信号处理中，常用到数据增强的方法，通过向量的操作就能到达目标。

看了这些向量例子，不知道你现在有点感觉了吗？其实，线性代数的本质就是**寻找向量之间的相似性**，比如在做分类时，我们常常需要估算不同样本之间的相似性度量（Similarity Measurement），这时通常采用的方法就是计算样本间的“距离”（Distance）。

可以看出来，向量非常重要，我们后面很多内容都是从向量延伸而来的，比如矩阵和求解线性方程组。

下面我用一张图来表达和向量有关的所有概念，也就是线性代数所有的核心内容，其中大部分内容你都会学到，希望通过这个图，你对线性代数有个大概的认知。相信学习完所有课程后，你再回过头来看时，肯定会有一些新的认知。



从图中最左侧这一列，我们可以看出，向量组合成矩阵，矩阵可以表示成线性方程组，而线性方程组可以通过高斯消元法求解，也可以求逆矩阵。

同时，向量又可以组合成向量空间，向量空间和矩阵都可以做线性映射或者线性变换，线性映射在实践中可以用在解析几何和分类问题中。

而且，向量和线性独立是强相关的，也就是说，线性独立指的是向量的线性独立，而线性独立又可以引出能够生成整个空间的基（Basis），基在实践中可以用在分类和降维中。

这里，我再额外提一个非常重要的、在数学中经常用到的概念——**封闭性**，或者俗称**闭包**（Closure）。封闭性的定义是，如果我们要对某个集合的成员进行一种运算，生成的仍然是这个集合的成员，那这个集合就可以称为在这个运算下闭合。

我为什么要提这个概念呢？这是因为，向量的线性运算是封闭的，也就是说向量的加法、数乘结果仍属于向量空间，即**向量的任意线性组合仍属于向量空间**。

线性方程组的应用

到这里，相信你已经对线性代数、向量这些基本概念有了一个应试教育之外的、新的认识，接下来我就切入本篇的最重点的内容了，那就是线性方程组。

线性方程组在线性代数中有着举足轻重的地位，许多现实生活中的问题都可以表达成线性方程组。关于线性方程组的概念，我想不用我多说了，这是初中的内容，你应该已经非常了解了。现在我举几个例子来说一说，线性方程组在现实生活中的运用，让你从应用的角度再理解下线性方程组。

第一个例子是计算旅游团人数。假设，一个旅游团由孩子和大人组成，去程时他们一起坐大巴，每个孩子的票价3元，大人票价3.2元，总共花费118.4元。回程时一起坐火车，每个孩子的票价3.5元，大人票价3.6元，总共花费135.2元。请问这个旅游团中有多少孩子和大人？

假设小孩人数为x_{1}，大人人数为x_{2}，于是我们得到了一个方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
3 x_{1}+3.2 x_{2}=118.4 \\
3.5 x_{1}+3.6 x_{2}=135.2
\end{array}\right.$$

使用初中的解二元一次方程组的知识，我们可以得出这个方程组的解是：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}=16 \\

$$x_{2}=22$$

这个就是典型的线性方程组的现实例子。当然，我们也可以用矩阵来解这个方程组。你可能会说，这问题很简单啊，为什么还要用矩阵来解呢？整这么复杂有必要吗？别着急，这里我先卖个关子，具体我会在下一讲“矩阵篇”中进行讲解。

第二个例子是找出公司的最优生产计划。我们从公司的角度来看一看，假设生产苹果的几大主流产品：iPhone、Macbook、iMac，以及iWatch四款产品，需要用到芯片、摄像头模组、电池、IPS屏幕四大类资源，产品分别用 $N_{1}，N_{2}，N_{3}，N_{4}$来表示，资源分别用$R_{1}，R_{2}，R_{3}，R_{4}$来表示。

生产一单位的产品 N_{1}，也就是iPhone，需要$a_{11}，a_{21}，a_{31}，a_{41}$的资源，也就是芯片、摄像头模组、电池和IPS屏幕资源，其他产品也是一样。

我们的目标是在资源有限的情况下，找到一个最优生产计划，使每个产品的产出数量最大化。也就是说，在总共有b_{i}个单位资源R_{i}可用情况下，每个产品N_{i} 有多少单元 x_{i}应该被生产。因此，我们可以得到一个下面这样的线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+a_{13} x_{3}+a_{14} x_{4}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+a_{23} x_{3}+a_{24} x_{4}=b_{2} \\
a_{31} x_{1}+a_{32} x_{2}+a_{33} x_{3}+a_{34} x_{4}=b_{3} \\
a_{41} x_{1}+a_{42} x_{2}+a_{43} x_{3}+a_{44} x_{4}=b_{4}
\end{array}\right.$$

于是，我们得到线性方程组的通用表达方式，$x_{1}，\cdots，x_{n}$ 是未知变量，每个满足方程组表达式的n元组$(x_{1}，\cdots，x_{n})$都是它的解。

$$\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.$$

线性方程组的解是有几何意义的，从几何角度出发，有利于你理解和记忆线性方程组解的条件，接下来我们先来看看线性方程组解的几种情况，之后我再具体讲解线性方程组的几何表达。

首先我们来看**无解**的情况。假设有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
2 x_{1}+3 x_{3}=1
\end{array}\right.$$

第一行和第二行相加后，我们可以得到$2 x_{1}+3 x_{3}=5$，很明显，这个方程和第三行是矛盾的，所以，这个线性方程组无解。

其次是**只有一个解**的情况。假设有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
x_{2}+x_{3}=2
\end{array}\right.$$

这个方程组求解很简单，第一行乘以-1和第二行相加得到$-2x_{2}+x_{3}=-1$，再乘以-1后和第三行相加得到$x_{1}=1$，第一行和第二行相加，得到$2 x_{1}+3 x_{3}=5$，代入x_{1}后，得到$x_{3}=1$，最后，我们可以得到$(1,1,1)$是这个线性方程组的唯一解。

最后是**无穷解**的情况。我们有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
2 x_{1}+3 x_{3}=5
\end{array}\right.$$

方程组第一行和第二行相加等于第三行，从这个角度来说，我们就可以定义一个自由变量$x_{3}=a$，a属于实数，那方程组的解就是：

$$\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2} a, \frac{1}{2}+\frac{1}{2} a, a\right)$$

其中a属于实数，所以，这就包含了无穷多个解。

线性方程组的几何表达

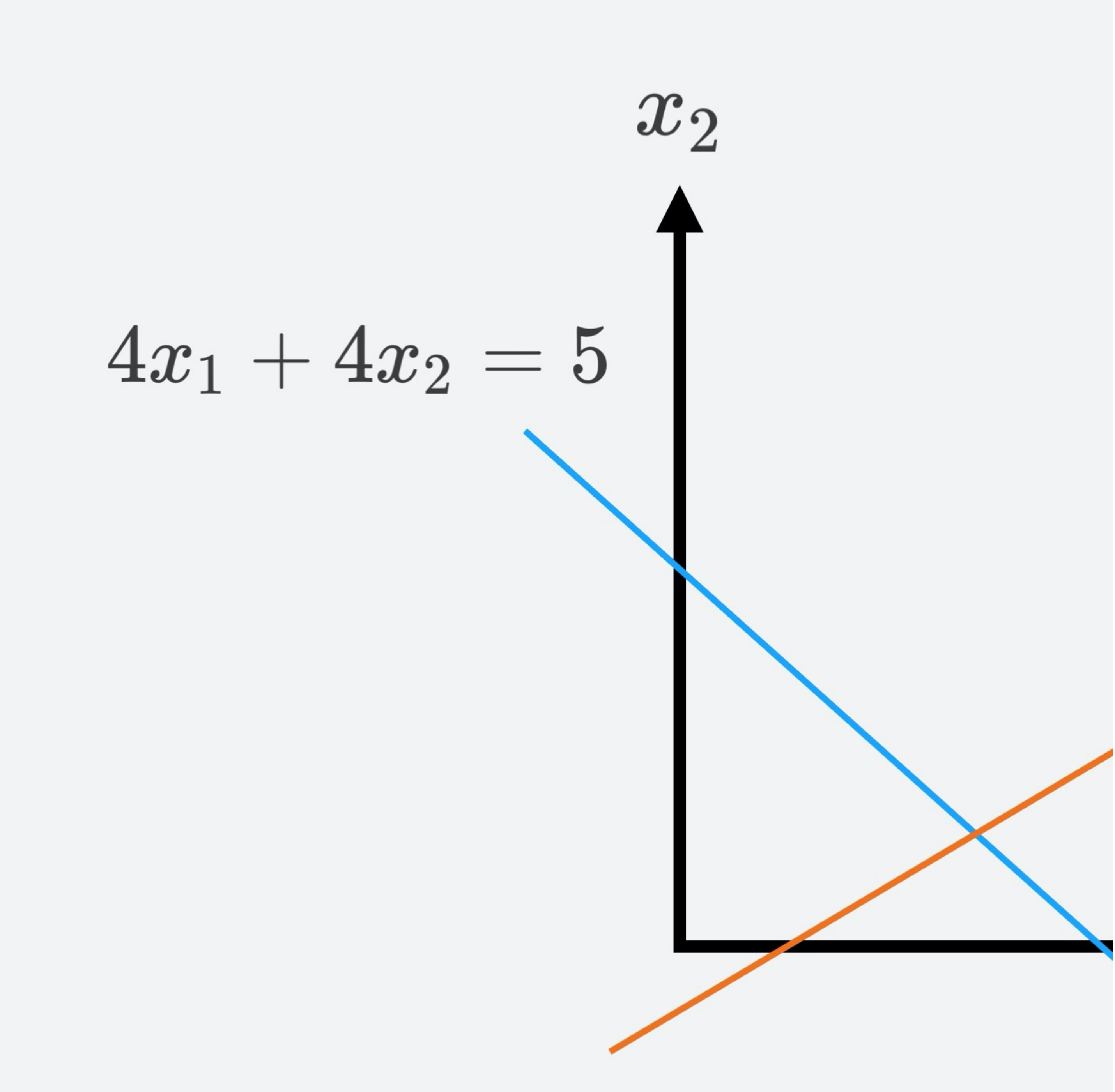
好了，了解了线性方程组解的三种情况，现在我们是时候从几何的角度来看一看线性方程组和它的解了，从几何意义出发有利于你更直观地理解线性方程组。

在一个只有两个变量x_{1},x_{2}的线性方程组中，我们定义一个x_{1},x_{2}平面。在这个平面中，每个线性方程都表达了一条直线。由于线性方程组的唯一解必须同时满足所有的等式，所以，线性方程组的唯一解其实就是线段的相交点，无穷解就是两线重合，而无解的情况，也就是两条线平行。

我拿一个例子来说明，设线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{l}
4 x_{1}+4 x_{2}=5 \\
2 x_{1}-4 x_{2}=1
\end{array}\right.$$

把其中的两个线性方程在x_{1},x_{2}平面中画出来后，我们可以得到两线段的交点$\left(1, \frac{1}{4}\right)$，也就是这个线性方程组的解。



我再把这个概念延伸一下，当遇到三个变量的情况时，每个线性方程在三维空间中表达了一个平面，由于线性方程组的一个解必须同时满足所有的等式，所以，**线性方程组的解其实就是平面，也可以是线、点或者空，空也就是没有共同的平面相交。**

其实还有一个更好的方法来表达和解线性方程组，这个方法就是下一篇要讲的矩阵，在这里我先简单提一下。我们把系数组合成向量，把向量组合成矩阵，也就是说，我们可以把线性方程组写成这样的形式：

$$x_{1}\left|\begin{array} {c}
a_{11} \\
\vdots \\
a_{m1}
\end{array}\right|+x_{2}\left|\begin{array} {c}
a_{12} \\
\vdots \\
c_{m2}
\end{array}\right|+\cdots+x_{n}\left|\begin{array} {c}
a_{1 n} \\
\vdots \\
a_{mn}
\end{array}\right|=\left|\begin{array} {c}
b_{1} \\
\vdots \\
b_{m}
\end{array}\right|$$

再进一步最终可以写成矩阵的形式：
$$\left[\begin{array} {cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}
\end{array}\right]\left|\begin{array} {c}
x_{1} \\
\vdots \\
. \\

x_{n}
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{c}
b_{1} \\
\vdots \\
. \\
b_{m}
\end{array}\right|$$

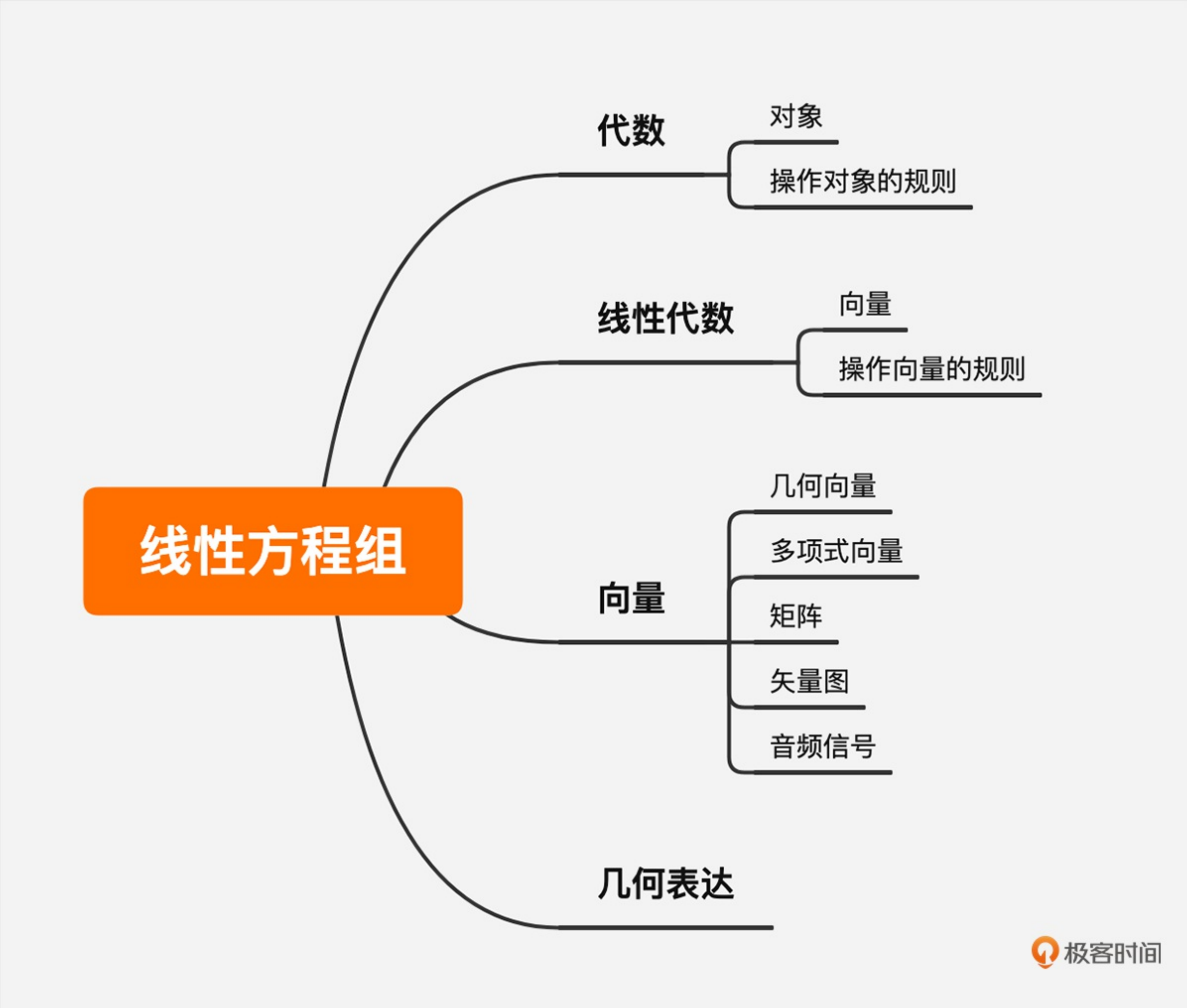
本节小结

好了，到这里这一讲就结束了，我带你总结一下前面讲解的内容。

这节课我带你重新认识了代数和线性代数的概念。代数是构造一系列对象和一系列操作这些对象的规则，线性代数是向量，以及操作这些向量的规则，所以，线性代数是代数的具像化表达。从线性代数，我们引出了向量的基本概念，我带你看了一个和向量有关的所有概念，即线性代数所有核心内容的图。

可以说，线性代数的一切皆从**向量**而来。

最后，我带你从二维平面几何角度，更直观地观察线性方程组和它几种解的情况，**而二维空间的线性方程组的解其实就是线、点或者空，也就是没有共同的线段相交**。你也可以自己试着把它扩展到三维空间几何中来观察，或许会更有趣哦！



线性代数练习场

我们一起来看一个练习题。这是一道极其简单的初中线性方程组题，你可以回顾一下，也为下一节课做好铺垫。

李大叔去年承包了10亩地，种植甲、乙两种蔬菜，共获利18000元。其中甲蔬菜每亩获利2000元，乙蔬菜每亩获利1500元。

请问，李大叔去年甲、乙两种蔬菜各种植了多少亩？

欢迎在留言区晒出你的运算过程和结果。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我学习线性代数。今天我们要讲的是“线性代数这门课的基本概念”。

线性代数可以运用在很多领域，比如：工程学、计算机科学、经济学、信号处理等等。我们来看一个在经济学中常见的例子：消费矩阵。

假设有n个行业，比如：化学、食品和石油。制造一单位的某化学品需要0.2单位的另一类化学品，0.3单位的食品，以及0.4单位的石油，而制造一单位的某食品和某石油也同样分别需要这三类产品的输入，于是，我们就能构造这样一个消费矩阵：

$$\left|\begin{array}{l}
化学输出 \\
食品输出 \\
石油输出
\end{array}\right|=\left[\begin{array}{lll}
0.2 & 0.3 & 0.4 \\
0.4 & 0.4 & 0.1 \\
0.5 & 0.1 & 0.3
\end{array}\right]\left|\begin{array}{l}
化学输入 \\
食品输入 \\
石油输入
\end{array}\right|$$

当然，我们也可以用一般的线性方程组$Ax=b$的形式来表达：

$$\left\{\begin{array}{l}

0.2 x_{1}+0.3 x_{2}+0.4 x_{3}=b_{1} \\\
0.4 x_{1}+0.4 x_{2}+0.1 x_{3}=b_{2} \\\
0.5 x_{1}+0.1 x_{2}+0.3 x_{3}=b_{3}
\end{array}\right.$$

从本质上来说，消费矩阵解决的是输入和输出之间的关系。不仅如此，线性代数在现实生活中的运用还有很多，比如，我们可以借用特征值和特征向量，预测若干年后的污水水平；在密码学中，可以使用矩阵及其逆矩阵对需发送的消息加密；在机器学习中，可以使用线性方程组的共轭迭代法来训练神经网络，等等。

刚才我分别用矩阵和线性方程组的形式给出了消费矩阵，当然，在实际生活中，你可以灵活选择最有效的方式来解决问题。

我们可以看到，线性方程组可以表示成一般形式，也就是你初中学到的$A x=b$的形式，也可以表示成矩阵形式。矩阵是由向量组合而成的，比如刚才例子中的系数矩阵的每一行都是一个**行向量**，每一列都是一个**列向量**。

$$\begin{array}{l}
\end{array}\left[\begin{array}{lll}
0.2 & 0.3 & 0.4 \\\
0.4 & 0.4 & 0.1 \\\
0.5 & 0.1 & 0.3
\end{array}\right] \begin{array}{l}
\end{array}$$

从这里我们能看出，**向量**其实就会是线性代数最基础的核心。数学对抽象思维要求很高，简单来说，抽象思维就是抽取同类事物的共性。所以，在进入具体的线性方程组的主题前，我要先从数学抽象的角度说一说代数和线性代数，这也是深入理解后面内容的前提。

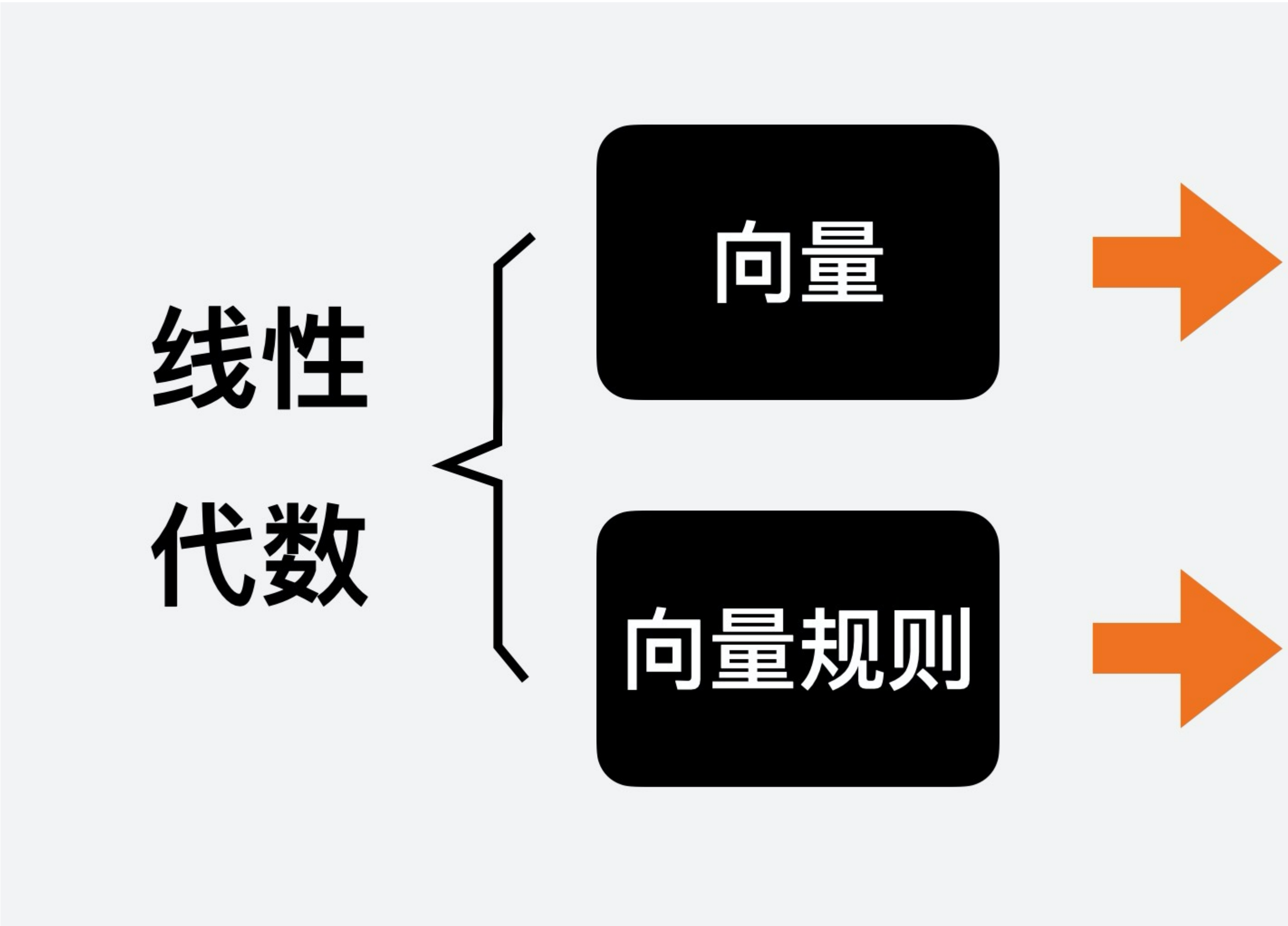
代数和线性代数的基本概念

那什么是代数呢？百度百科的解释是这样的：

> 代数是研究数、数量、关系、结构与代数方程（组）的通用解法及其性质的数学分支。

但我觉得这个解释其实没有说出**代数**这个概念的重点。我的理解是这样的：**代数是构造一系列对象和一系列操作这些对象的规则。**

所以你看，代数这个概念的核心就两点，**对象**和**操作对象的规则**，这样就很好理解了吧？那有了代数的定义，线性代数就很好定义了。我们类比来看，线性代数其实就是向量，以及操作这些向量的规则。这里，向量映射到对象，向量的规则映射到对象的规则，因此线性代数是代数的具像化表达。

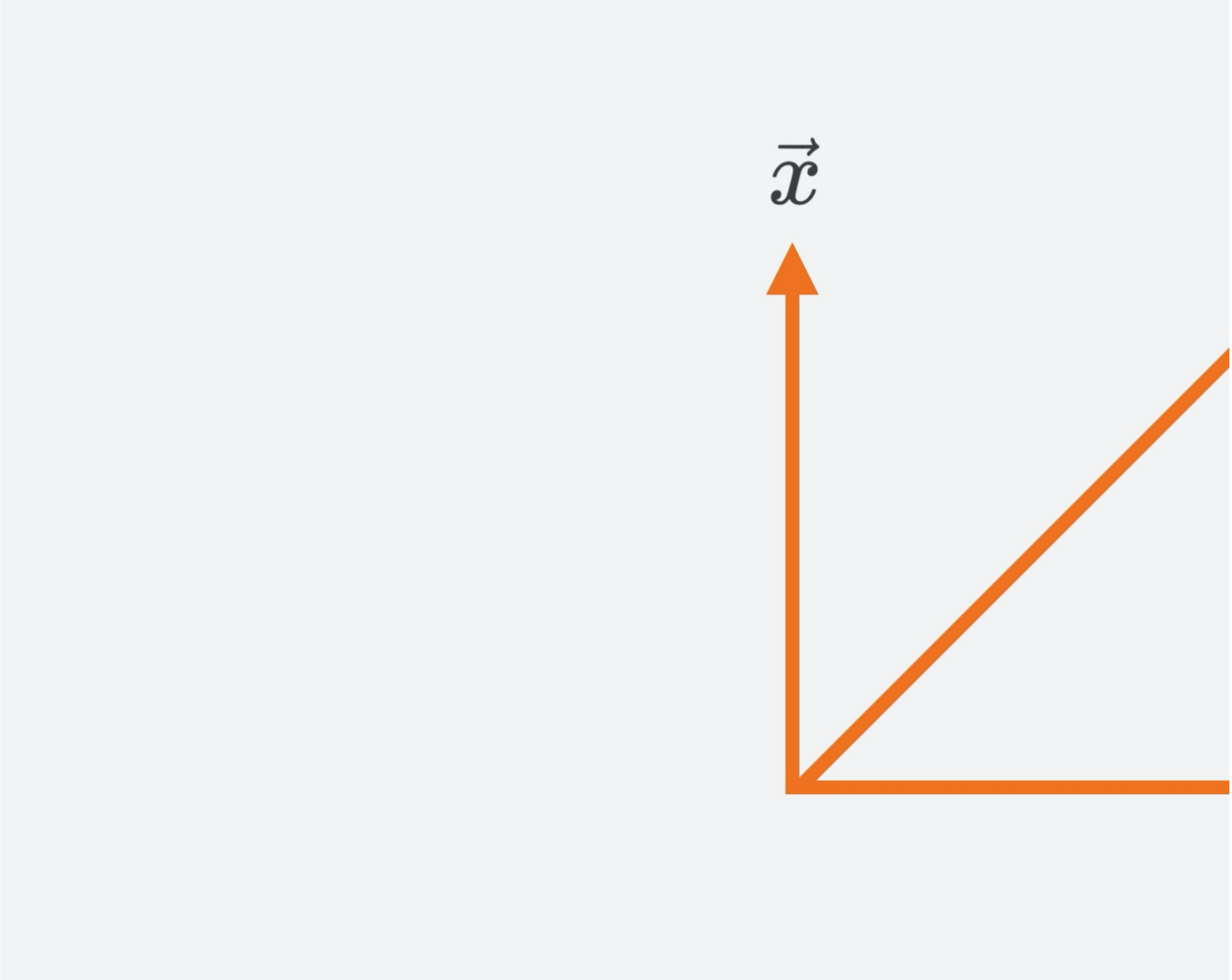


向量的基本概念

那什么是**向量**呢？从样子来看，向量其实就是由字母加上它上面的箭头来表示的，比如我们一般会写成$\vec{x}$。我估计你在高中或大学里已经接触过“几何向量”。那么，下面我用更抽象的数学观点来给你解释一下。

向量，也叫欧几里得向量（Euclidean Vector），其实就是能够互相相加、被标量乘的特殊对象。而标量也叫“无向量”，它只有数值大小，没有方向。怎么理解呢？我们来看一些向量的例子，通过这些例子来深入理解向量的概念。

几何向量是有向线段，在二维空间（也就是平面）中，两个几何向量能够相加，比如，向量x加上向量y等于向量z，$\vec{x}+\vec{y}=\vec{z}$，x向量也能被一个标量乘。再比如，标量λ乘向量x结果也是向量，$\lambda \vec{x}, \lambda \in R$。几何向量通过大小和方向来简化向量的表达，所以，一般数学课程一开始都会拿几何向量来进行举例。



多项式其实也是向量。两个多项式能够相加，它也能够被标量乘，结果也是多项式。

矩阵的一行或一列也是向量。就比如下面这样形式的向量。

$$x \in R^{3}: x=\left[\begin{array}{l}
1 \\
2 \\
3
\end{array}\right]$$

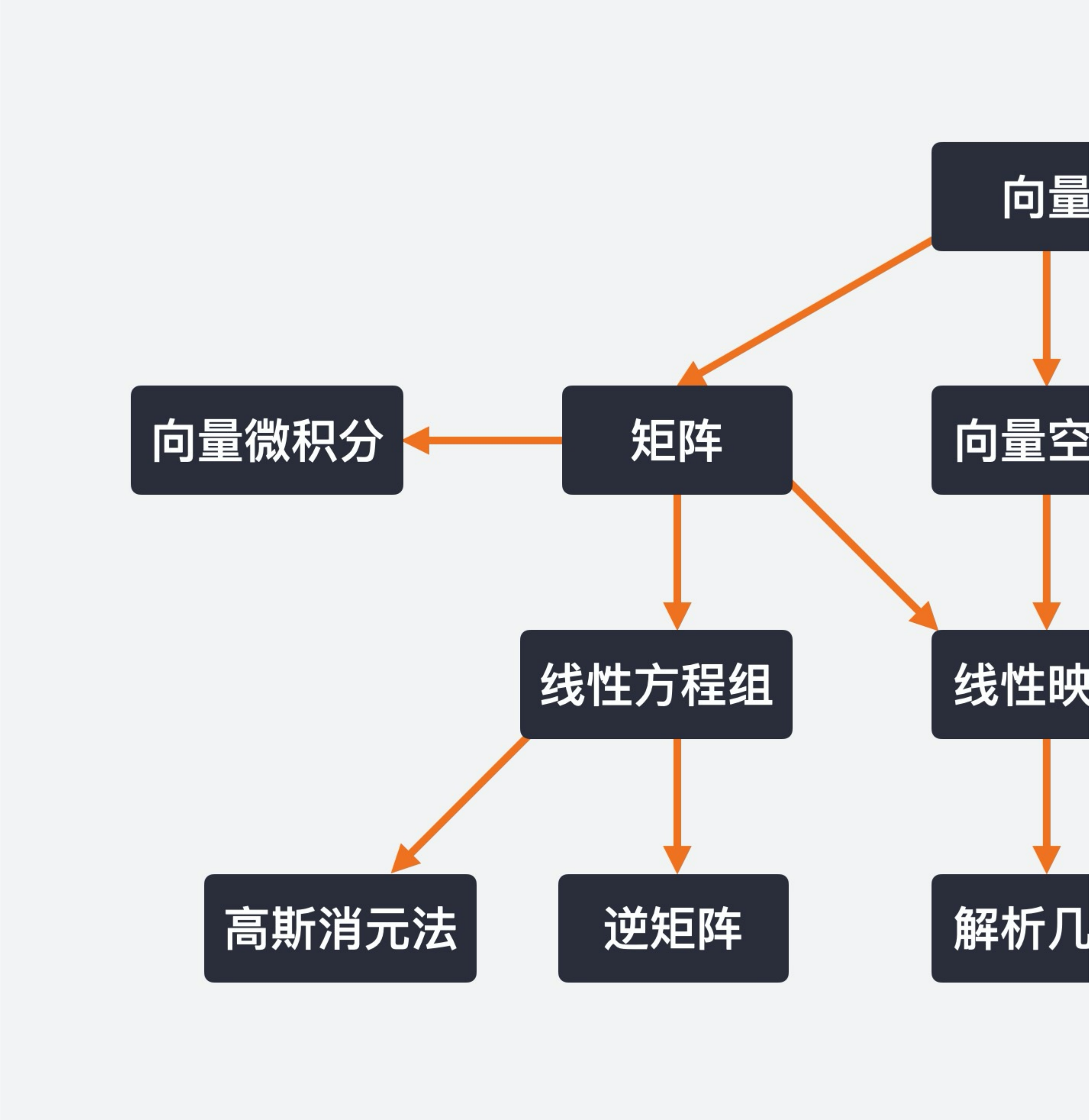
两个向量能够相加，它也能够被标量乘，结果也是向量。它和现代大部分的编程语言中的数组一致，而且数组的运算简化了向量操作的算法实施。

矢量图、音频信号也是向量。它们都能被一系列数字表示，比如，在音频信号处理中，常用到数据增强的方法，通过向量的操作就能到达目标。

看了这些向量例子，不知道你现在有点感觉了吗？其实，线性代数的本质就是**寻找向量之间的相似性**，比如在做分类时，我们常常需要估算不同样本之间的相似性度量（Similarity Measurement），这时通常采用的方法就是计算样本间的"距离"（Distance）。

可以看出来，向量非常重要，我们后面很多内容都是从向量延伸而来的，比如矩阵和求解线性方程组。

下面我用一张图来表达和向量有关的所有概念，也就是线性代数所有的核心内容，其中大部分内容你都会学到，希望通过这个图，你对线性代数有个大概的认知。相信学习完所有课程后，你再回过头来看时，肯定会有一些新的认知。



从图中最左侧这一列，我们可以看出，向量组合成矩阵，矩阵可以表示成线性方程组，而线性方程组可以通过高斯消元法求解，也可以求逆矩阵。

同时，向量又可以组合成向量空间，向量空间和矩阵都可以做线性映射或者线性变换，线性映射在实践中可以用在解析几何和分类问题中。

而且，向量和线性独立是强相关的，也就是说，线性独立指的是向量的线性独立，而线性独立又可以引出能够生成整个空间的基（Basis），基在实践中可以用在分类和降维中。

这里，我再额外提一个非常重要的、在数学中经常用到的概念——**封闭性**，或者俗称**闭包**（Closure）。封闭性的定义是，如果我们要对某个集合的成员进行一种运算，生成的仍然是这个集合的成员，那这个集合就可以称为在这个运算下闭合。

我为什么要提这个概念呢？这是因为，向量的线性运算是封闭的，也就是说向量的加法、数乘结果仍属于向量空间，即**向量的任意线性组合仍属于向量空间**。

线性方程组的应用

到这里，相信你已经对线性代数、向量这些基本概念有了一个应试教育之外的、新的认识，接下来我就切入本篇的最重点的内容了，那就是线性方程组。

线性方程组在线性代数中有着举足轻重的地位，许多现实生活中的问题都可以表达成线性方程组。关于线性方程组的概念，我想不用我多说了，这是初中的内容，你应该已经非常了解了。现在我举几个例子来说一说，线性方程组在现实生活中的运用，让你从应用的角度再理解下线性方程组。

第一个例子是计算旅游团人数。假设，一个旅游团由孩子和大人组成，去程时他们一起坐大巴，每个孩子的票价3元，大人票价3.2元，总共花费118.4元。回程时一起坐火车，每个孩子的票价3.5元，大人票价3.6元，总共花费135.2元。请问这个旅游团中有多少孩子和大人？

假设小孩人数为x_{1}，大人人数为x_{2}，于是我们得到了一个方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
3 x_{1}+3.2 x_{2}=118.4 \\
3.5 x_{1}+3.6 x_{2}=135.2
\end{array}\right.$$

使用初中的解二元一次方程组的知识，我们可以得出这个方程组的解是：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}=16 \\

x_{2}=22
\end{array}\right.$$

这个就是典型的线性方程组的现实例子。当然，我们也可以用矩阵来解这个方程组。你可能会说，这问题很简单啊，为什么还要用矩阵来解呢？整这么复杂有必要吗？别着急，这里我先卖个关子，具体我会在下一讲"矩阵篇"中进行讲解。

第二个例子是找出公司的最优生产计划。我们从公司的角度来看一看，假设生产苹果的几大主流产品：iPhone、Macbook、iMac，以及iWatch四款产品，需要用到芯片、摄像头模组、电池、IPS屏幕四大类资源，产品分别用 $N_{1}，N_{2}，N_{3}，N_{4}$来表示，资源分别用$R_{1}，R_{2}，R_{3}，R_{4}$来表示。

生产一单位的产品 N_{1}，也就是iPhone，需要$a_{11}，a_{21}，a_{31}，a_{41}$的资源，也就是芯片、摄像头模组、电池和IPS屏幕资源，其他产品也是一样。

我们的目标是在资源有限的情况下，找到一个最优生产计划，使每个产品的产出数量最大化。也就是说，在总共有b_{i}个单位资源R_{i}可用情况下，每个产品N_{i} 有多少单元 x_{i}应该被生产。因此，我们可以得到一个下面这样的线性方程组：

$$\left\{\begin{array} {l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+a_{13} x_{3}+a_{14} x_{4}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+a_{23} x_{3}+a_{24} x_{4}=b_{2} \\
a_{31} x_{1}+a_{32} x_{2}+a_{33} x_{3}+a_{34} x_{4}=b_{3} \\
a_{41} x_{1}+a_{42} x_{2}+a_{43} x_{3}+a_{44} x_{4}=b_{4}
\end{array}\right.$$

于是，我们得到线性方程组的通用表达方式，$x_{1}，\cdots，x_{n}$ 是未知变量，每个满足方程组表达式的n元组$(x_{1}，\cdots，x_{n})$都是它的解。

$$\left\{\begin{array} {l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.$$

线性方程组的解是有几何意义的，从几何角度出发，有利于你理解和记忆线性方程组解的条件，接下来我们先来看看线性方程组解的几种情况，之后我再具体讲解线性方程组的几何表达。

首先我们来看**无解**的情况。假设有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array} {c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
2 x_{1}+3 x_{3}=1
\end{array}\right.$$

第一行和第二行相加后，我们可以得到$2 x_{1}+3 x_{3}=5$，很明显，这个方程和第三行是矛盾的，所以，这个线性方程组无解。

其次是**只有一个解**的情况。假设有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array} {c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
x_{2}+x_{3}=2
\end{array}\right.$$

这个方程组求解很简单，第一行乘以-1和第二行相加得到$-2x_{2}+x_{3}=-1$，再乘以-1后和第三行相加得到$x_{1}=1$，第一行和第二行相加，得到$2 x_{1}+3 x_{3}=5$，代入x_{1}后，得到$x_{3}=1$，最后，我们可以得到$(1,1,1)$是这个线性方程组的唯一解。

最后是**无穷解**的情况。我们有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array} {c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
2 x_{1}+3 x_{3}=5
\end{array}\right.$$

方程组第一行和第二行相加等于第三行，从这个角度来说，我们就可以定义一个自由变量$x_{3}=a$，a属于实数，那方程组的解就是：

$$\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2} a, \frac{1}{2}+\frac{1}{2} a, a\right)$$

其中a属于实数，所以，这就包含了无穷多个解。

线性方程组的几何表达

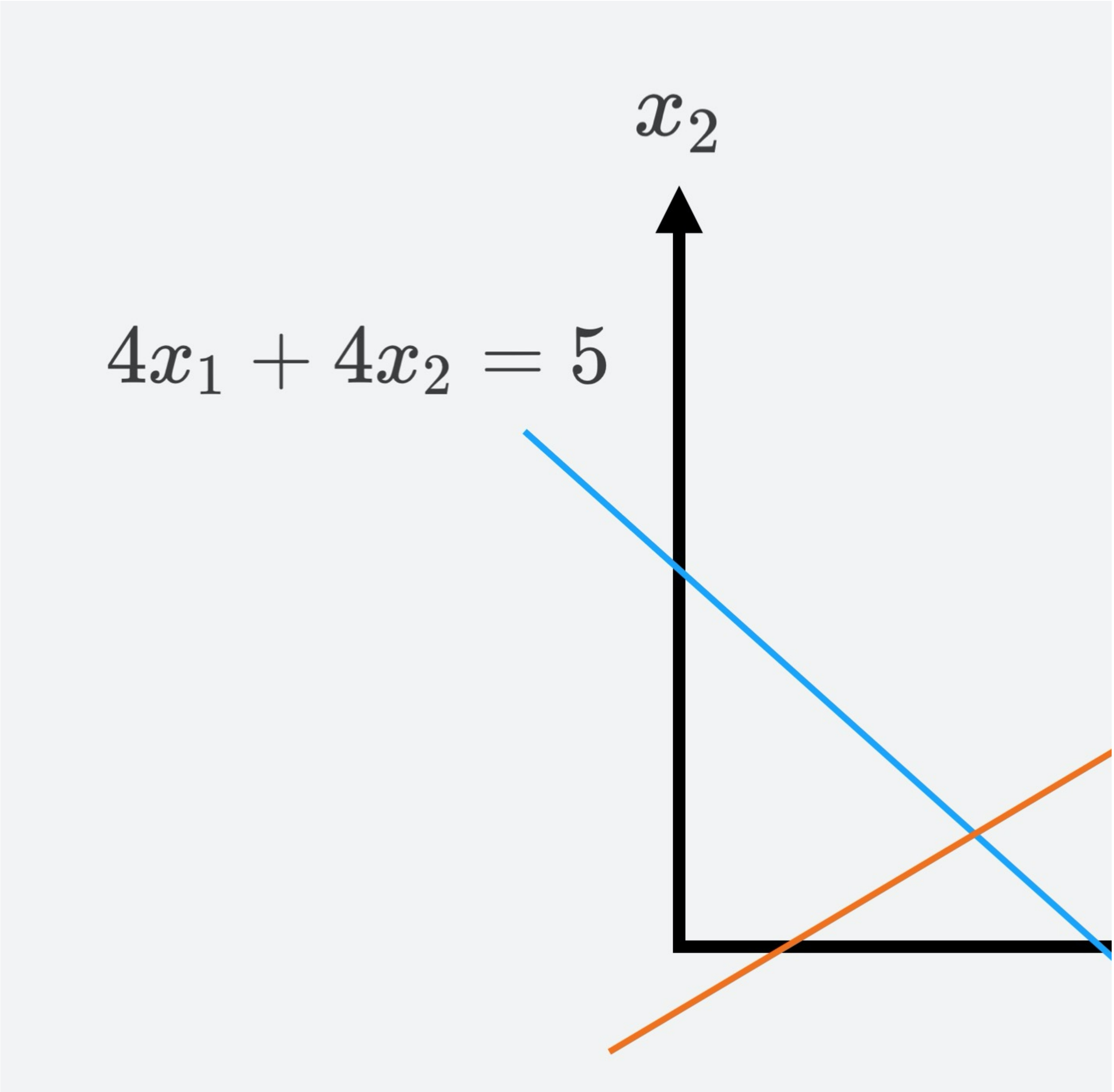
好了，了解了线性方程组解的三种情况，现在我们是时候从几何的角度来看一看线性方程组和它的解了，从几何意义出发有利于你更直观地理解线性方程组。

在一个只有两个变量x_{1},x_{2}的线性方程组中，我们定义一个x_{1},x_{2}平面。在这个平面中，每个线性方程都表达了一条直线。由于线性方程组的唯一解必须同时满足所有的等式，所以，线性方程组的唯一解其实就是线段的相交点，无穷解就是两线重合，而无解的情况，也就是两条线平行。

我拿一个例子来说明，设线性方程组：

$$\left\{\begin{array} {l}
4 x_{1}+4 x_{2}=5 \\
2 x_{1}-4 x_{2}=1
\end{array}\right.$$

把其中的两个线性方程在x_{1},x_{2}平面中画出来后，我们可以得到两线段的交点$\left(1, \frac{1}{4}\right)$，也就是这个线性方程组的解。



我再把这个概念延伸一下，当遇到三个变量的情况时，每个线性方程在三维空间中表达了一个平面，由于线性方程组的一个解必须同时满足所有的等式，所以，**线性方程组的解其实就是平面，也可以是线、点或者空，空也就是没有共同的平面相交。**

其实还有一个更好的方法来表达和解线性方程组，这个方法就是下一篇要讲的矩阵，在这里我先简单提一下。我们把系数组合成向量，把向量组合成矩阵，也就是说，我们可以把线性方程组写成这样的形式：

$$x_{1}\left|\begin{array}{c}
a_{11} \\
\vdots \\
a_{m1}
\end{array}\right|+x_{2}\left|\begin{array}{c}
a_{12} \\
\vdots \\
c_{m2}
\end{array}\right|+\cdots+x_{n}\left|\begin{array}{c}
a_{1 n} \\
\vdots \\
a_{mn}
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{c}
b_{1} \\
\vdots \\
b_{m}
\end{array}\right|$$

再进一步最终可以写成矩阵的形式：

$$\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}
\end{array}\right]\left|\begin{array}{c}
x_{1} \\
\vdots \\
. \\

x_{n}
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{c}
b_{1} \\\
\vdots \\\
. \\\
b_{m}
\end{array}\right|$$

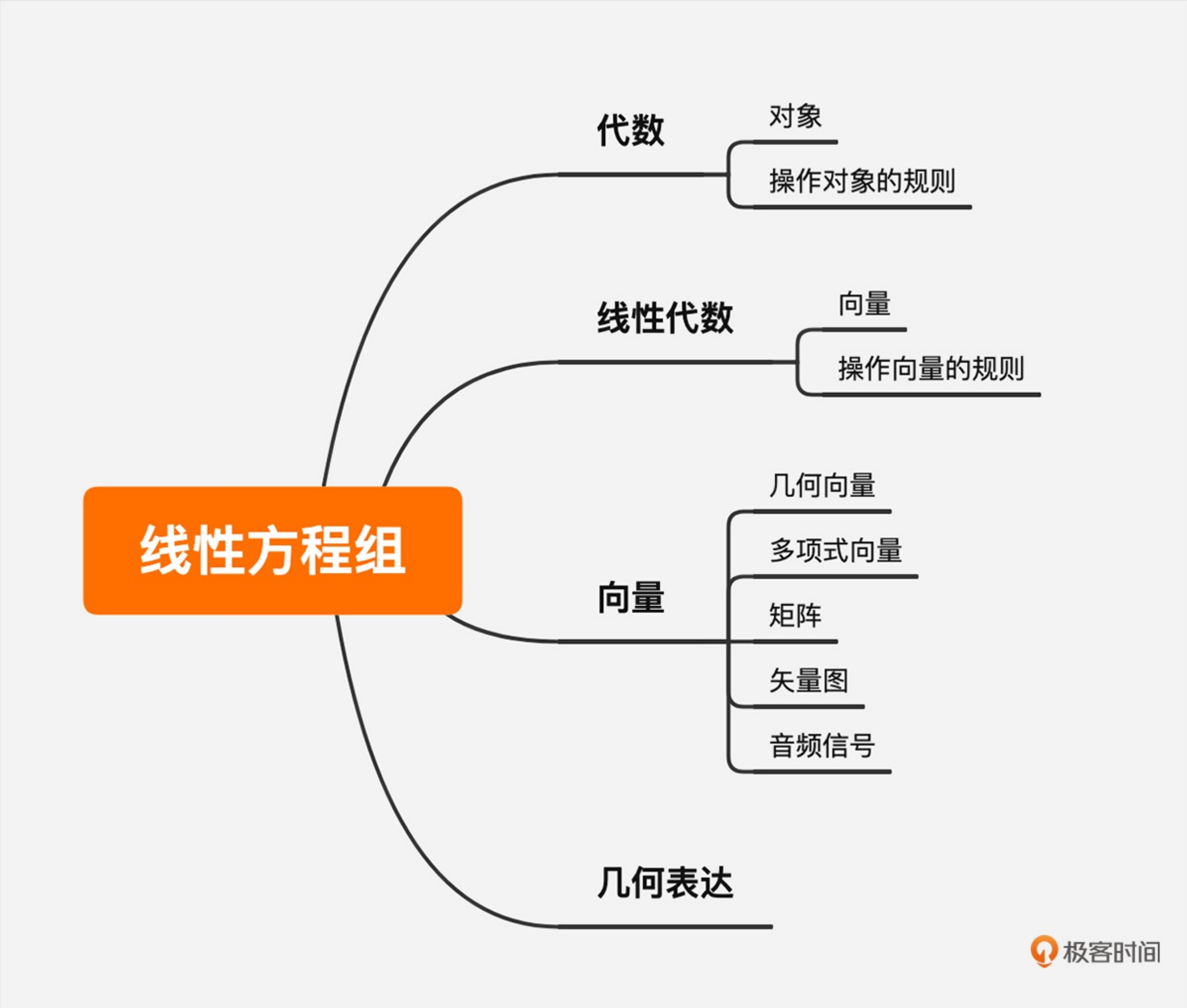
本节小结

好了，到这里这一讲就结束了，我带你总结一下前面讲解的内容。

这节课我带你重新认识了代数和线性代数的概念。代数是构造一系列对象和一系列操作这些对象的规则，线性代数是向量，以及操作这些向量的规则，所以，线性代数是代数的具像化表达。从线性代数，我们引出了向量的基本概念，我带你看了一个和向量有关的所有概念，即线性代数所有核心内容的图。

可以说，线性代数的一切皆从**向量**而来。

最后，我带你从二维平面几何角度，更直观地观察线性方程组和它几种解的情况，**而二维空间的线性方程组的解其实就是线、点或者空，也就是没有共同的线段相交**。你也可以自己试着把它扩展到三维空间几何中来观察，或许会更有趣哦！



线性代数练习场

我们一起来看一个练习题。这是一道极其简单的初中线性方程组题，你可以回顾一下，也为下一节课做好铺垫。

李大叔去年承包了10亩地，种植甲、乙两种蔬菜，共获利18000元。其中甲蔬菜每亩获利2000元，乙蔬菜每亩获利1500元。

请问，李大叔去年甲、乙两种蔬菜各种植了多少亩？

欢迎在留言区晒出你的运算过程和结果。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我学习线性代数。今天我们要讲的是“线性代数这门课的基本概念”。

线性代数可以运用在很多领域，比如：工程学、计算机科学、经济学、信号处理等等。我们来看一个在经济学中常见的例子：消费矩阵。

假设有n个行业，比如：化学、食品和石油。制造一单位的某化学品需要0.2单位的另一类化学品，0.3单位的食品，以及0.4单位的石油，而制造一单位的某食品和某石油也同样分别需要这三类产品的输入，于是，我们就能构造这样一个消费矩阵：

$$\left|\begin{array}{l}
化学输出 \\\
食品输出 \\\
石油输出
\end{array}\right|=\left[\begin{array}{lll}
0.2 & 0.3 & 0.4 \\\
0.4 & 0.4 & 0.1 \\\
0.5 & 0.1 & 0.3
\end{array}\right]\left|\begin{array}{l}
化学输入 \\\
食品输入 \\\
石油输入
\end{array}\right|$$

当然，我们也可以用一般的线性方程组$Ax=b$的形式来表达：

$$\left\{\begin{array}{l}

0.2 x_{1}+0.3 x_{2}+0.4 x_{3}=b_{1} \\\
0.4 x_{1}+0.4 x_{2}+0.1 x_{3}=b_{2} \\\
0.5 x_{1}+0.1 x_{2}+0.3 x_{3}=b_{3}
\end{array}\right.$$

从本质上来说，消费矩阵解决的是输入和输出之间的关系。不仅如此，线性代数在现实生活中的运用还有很多，比如，我们可以借用特征值和特征向量，预测若干年后的污水水平；在密码学中，可以使用矩阵及其逆矩阵对需发送的消息加密；在机器学习中，可以使用线性方程组的共轭迭代法来训练神经网络，等等。

刚才我分别用矩阵和线性方程组的形式给出了消费矩阵，当然，在实际生活中，你可以灵活选择最有效的方式来解决问题。

我们可以看到，线性方程组可以表示成一般形式，也就是你初中学到的$A x=b$的形式，也可以表示成矩阵形式。矩阵是由向量组合而成的，比如刚才例子中的系数矩阵的每一行都是一个**行向量**，每一列都是一个**列向量**。

$$\begin{array} {l}
\end{array}\left[\begin{array} {lll}
0.2 & 0.3 & 0.4 \\\
0.4 & 0.4 & 0.1 \\\
0.5 & 0.1 & 0.3
\end{array}\right] \begin{array} {l}
\end{array}$$

从这里我们能看出，**向量**其实就会是线性代数最基础的核心。数学对抽象思维要求很高，简单来说，抽象思维就是抽取同类事物的共性。所以，在进入具体的线性方程组的主题前，我要先从数学抽象的角度说一说代数和线性代数，这也是深入理解后面内容的前提。

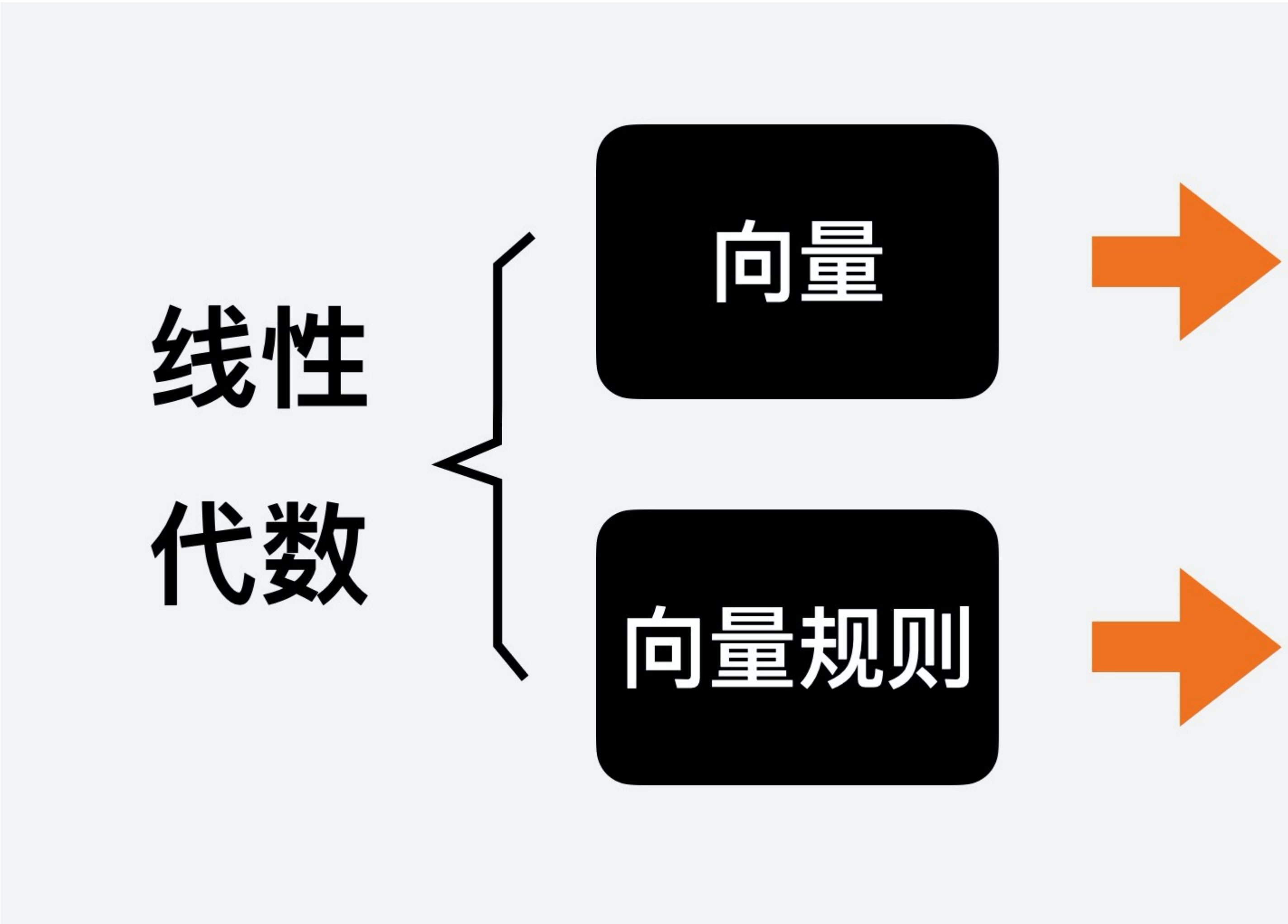
代数和线性代数的基本概念

那什么是代数呢？百度百科的解释是这样的：

> 代数是研究数、数量、关系、结构与代数方程（组）的通用解法及其性质的数学分支。

但我觉得这个解释其实没有说出**代数**这个概念的重点。我的理解是这样的：**代数是构造一系列对象和一系列操作这些对象的规则。**

所以你看，代数这个概念的核心就两点，**对象**和**操作对象的规则**，这样就很好理解了吧？那有了代数的定义，线性代数就很好定义了。我们类比来看，线性代数其实就是向量，以及操作这些向量的规则。这里，向量映射到对象，向量的规则映射到对象的规则，因此线性代数是代数的具像化表达。

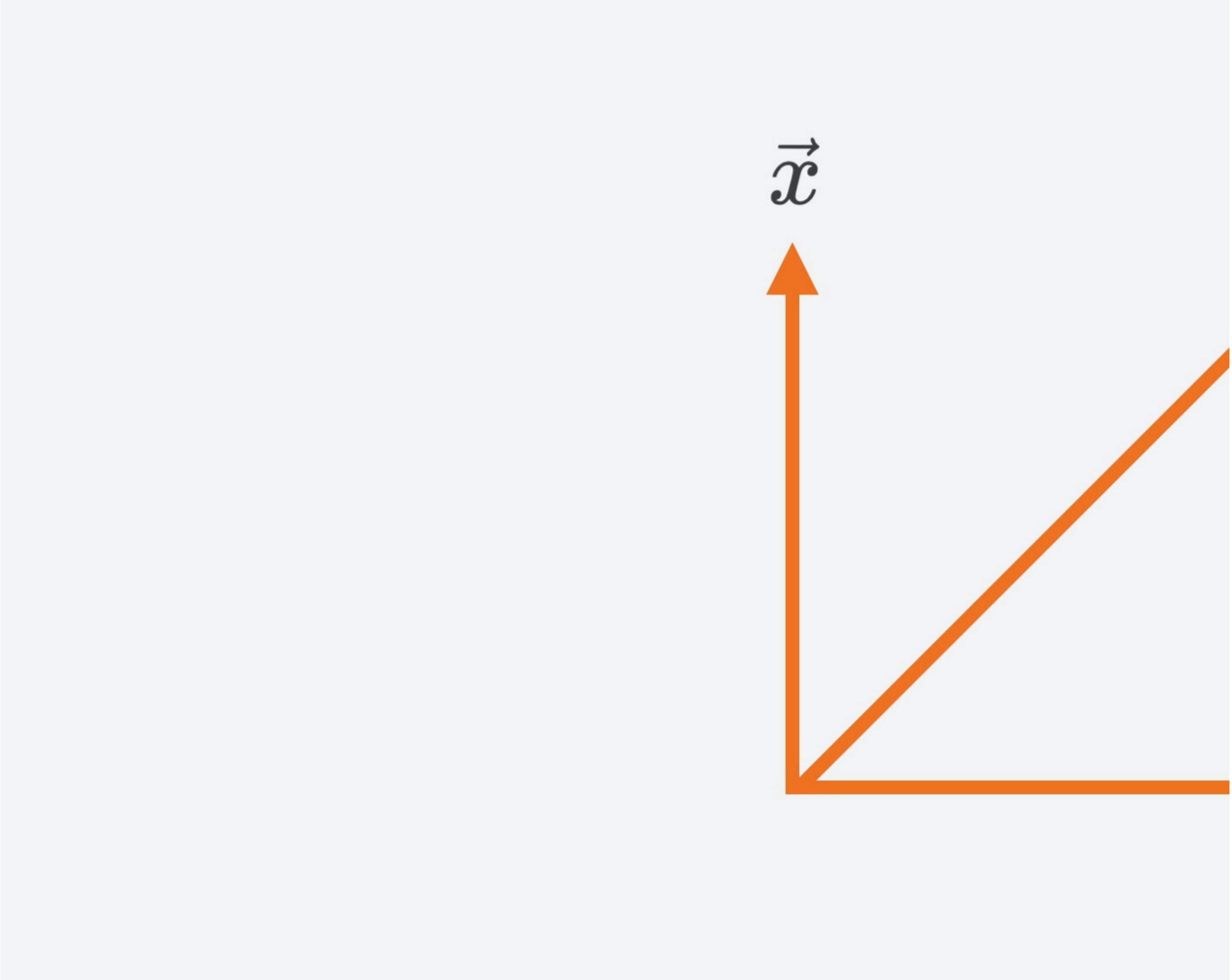


向量的基本概念

那什么是**向量**呢？从样子来看，向量其实就是由字母加上它上面的箭头来表示的，比如我们一版会写成$\vec{x}$。我估计你在高中或大学里已经接触过"几何向量"。那么，下面我用更抽象的数学观点来给你解释一下。

向量，也叫欧几里得向量（Euclidean Vector），其实就是能够互相相加、被标量乘的特殊对象。而标量也叫"无向量"，它只有数值大小，没有方向。怎么理解呢？我们来看一些向量的例子，通过这些例子来深入理解向量的概念。

几何向量是有向线段，在二维空间（也就是平面）中，两个几何向量能够相加，比如，向量x加上向量y等于向量z，$\vec{x}+\vec{y}=\vec{z}$，x向量也能被一个标量乘。再比如，标量λ乘向量x结果也是向量，$\lambda \vec{x}, \lambda \in R$。几何向量通过大小和方向来简化向量的表达，所以，一般数学课程一开始都会拿几何向量来进行举例。



多项式其实也是向量。两个多项式能够相加，它也能够被标量乘，结果也是多项式。

矩阵的一行或一列也是向量。就比如下面这样形式的向量。

$$x \in R^{3}: x=\left[\begin{array}{l}
1 \\
2 \\
3
\end{array}\right]$$

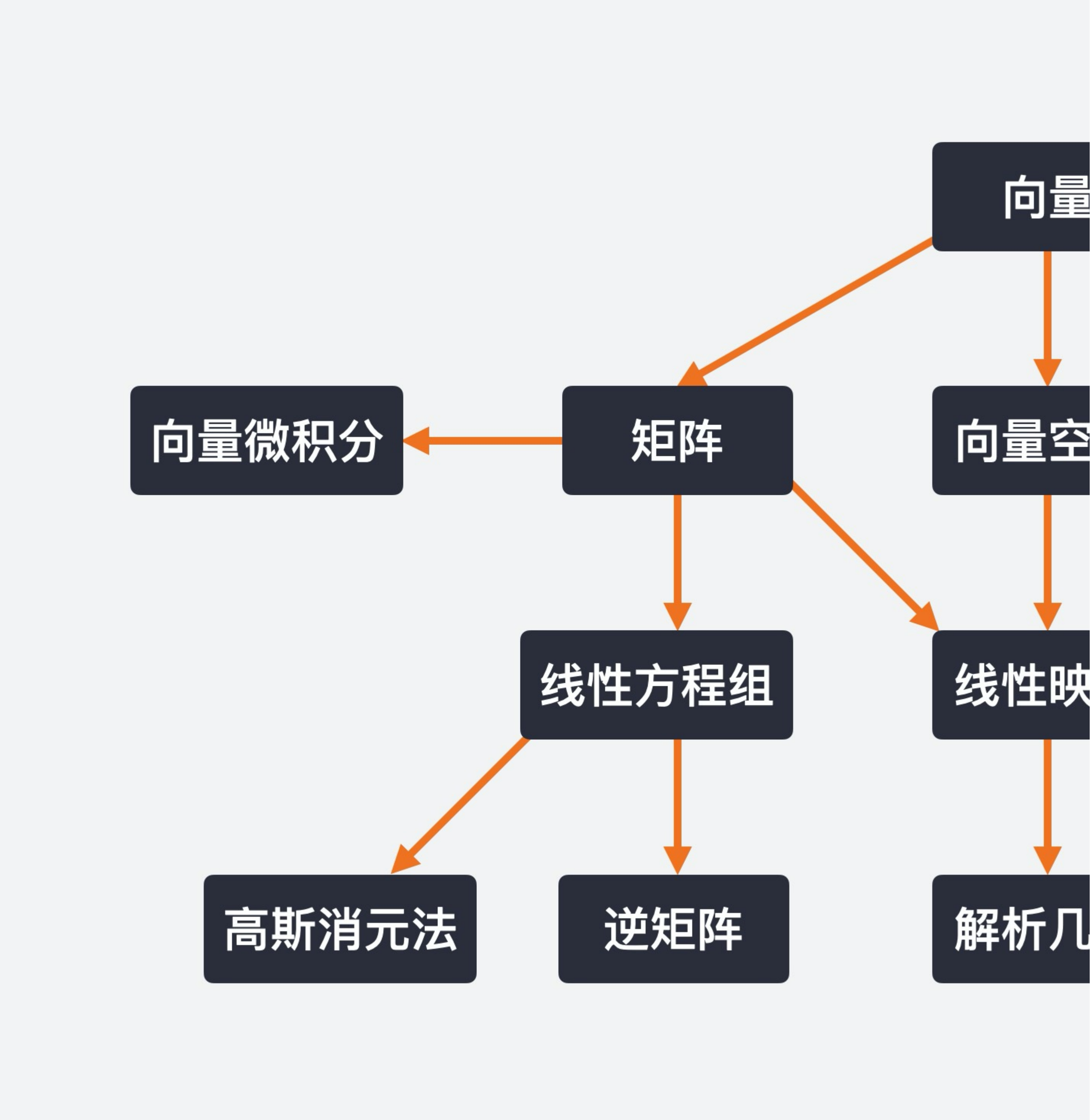
两个向量能够相加，它也能够被标量乘，结果也是向量。它和现代大部分的编程语言中的数组一致，而且数组的运算简化了向量操作的算法实施。

矢量图、音频信号也是向量。它们都能被一系列数字表示，比如，在音频信号处理中，常用到数据增强的方法，通过向量的操作就能到达目标。

看了这些向量例子，不知道你现在有点感觉了吗？其实，线性代数的本质就是**寻找向量之间的相似性**，比如在做分类时，我们常常需要估算不同样本之间的相似性度量（Similarity Measurement），这时通常采用的方法就是计算样本间的“距离”（Distance）。

可以看出来，向量非常重要，我们后面很多内容都是从向量延伸而来的，比如矩阵和求解线性方程组。

下面我用一张图来表达和向量有关的所有概念，也就是线性代数所有的核心内容，其中大部分内容你都会学到，希望通过这个图，你对线性代数有个大概的认知。相信学习完所有课程后，你再回过头来看时，肯定会有一些新的认知。



从图中最左侧这一列，我们可以看出，向量组合成矩阵，矩阵可以表示成线性方程组，而线性方程组可以通过高斯消元法求解，也可以求逆矩阵。

同时，向量又可以组合成向量空间，向量空间和矩阵都可以做线性映射或者线性变换，线性映射在实践中可以用在解析几何和分类问题中。

而且，向量和线性独立是强相关的，也就是说，线性独立指的是向量的线性独立，而线性独立又可以引出能够生成整个空间的基（Basis），基在实践中可以用在分类和降维中。

这里，我再额外提一个非常重要的、在数学中经常用到的概念——**封闭性**，或者俗称**闭包**（Closure）。封闭性的定义是，如果我们要对某个集合的成员进行一种运算，生成的仍然是这个集合的成员，那这个集合就可以称为在这个运算下闭合。

我为什么要提这个概念呢？这是因为，向量的线性运算是封闭的，也就是说向量的加法、数乘结果仍属于向量空间，即**向量的任意线性组合仍属于向量空间**。

线性方程组的应用

到这里，相信你已经对线性代数、向量这些基本概念有了一个应试教育之外的、新的认识，接下来我就切入本篇的最重点的内容了，那就是线性方程组。

线性方程组在线性代数中有着举足轻重的地位，许多现实生活中的问题都可以表达成线性方程组。关于线性方程组的概念，我想不用我多说了，这是初中的内容，你应该已经非常了解了。现在我举几个例子来说一说，线性方程组在现实生活中的运用，让你从应用的角度再理解下线性方程组。

第一个例子是计算旅游团人数。假设，一个旅游团由孩子和大人组成，去程时他们一起坐大巴，每个孩子的票价3元，大人票价3.2元，总共花费118.4元。回程时一起坐火车，每个孩子的票价3.5元，大人票价3.6元，总共花费135.2元。请问这个旅游团中有多少孩子和大人？

假设小孩人数为x_{1}，大人人数为x_{2}，于是我们得到了一个方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
3 x_{1}+3.2 x_{2}=118.4 \\
3.5 x_{1}+3.6 x_{2}=135.2
\end{array}\right.$$

使用初中的解二元一次方程组的知识，我们可以得出这个方程组的解是：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}=16 \\

$$\left\{\begin{array}{l}
\ldots \\
x_{2}=22
\end{array}\right.$$

这个就是典型的线性方程组的现实例子。当然，我们也可以用矩阵来解这个方程组。你可能会说，这问题很简单啊，为什么还要用矩阵来解呢？整这么复杂有必要吗？别着急，这里我先卖个关子，具体我会在下一讲"矩阵篇"中进行讲解。

第二个例子是找出公司的最优生产计划。我们从公司的角度来看一看，假设生产苹果的几大主流产品：iPhone、Macbook、iMac，以及iWatch四款产品，需要用到芯片、摄像头模组、电池、IPS屏幕四大类资源，产品分别用 $N_{1}，N_{2}，N_{3}，N_{4}$来表示，资源分别用$R_{1}，R_{2}，R_{3}，R_{4}$来表示。

生产一单位的产品 N_{1}，也就是iPhone，需要$a_{11}，a_{21}，a_{31}，a_{41}$的资源，也就是芯片、摄像头模组、电池和IPS屏幕资源，其他产品也是一样。

我们的目标是在资源有限的情况下，找到一个最优生产计划，使每个产品的产出数量最大化。也就是说，在总共有b_{i}个单位资源R_{i}可用情况下，每个产品N_{i} 有多少单元 x_{i}应该被生产。因此，我们可以得到一个下面这样的线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+a_{13} x_{3}+a_{14} x_{4}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+a_{23} x_{3}+a_{24} x_{4}=b_{2} \\
a_{31} x_{1}+a_{32} x_{2}+a_{33} x_{3}+a_{34} x_{4}=b_{3} \\
a_{41} x_{1}+a_{42} x_{2}+a_{43} x_{3}+a_{44} x_{4}=b_{4}
\end{array}\right.$$

于是，我们得到线性方程组的通用表达方式，$x_{1}，\cdots ，x_{n}$ 是未知变量，每个满足方程组表达式的n元组$(x_{1}，\cdots ，x_{n})$都是它的解。

$$\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.$$

线性方程组的解是有几何意义的，从几何角度出发，有利于你理解和记忆线性方程组解的条件，接下来我们先来看看线性方程组解的几种情况，之后我再具体讲解线性方程组的几何表达。

首先我们来看**无解**的情况。假设有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
2 x_{1}+3 x_{3}=1
\end{array}\right.$$

第一行和第二行相加后，我们可以得到$2 x_{1}+3 x_{3}=5$，很明显，这个方程和第三行是矛盾的，所以，这个线性方程组无解。

其次是**只有一个解**的情况。假设有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
x_{2}+x_{3}=2
\end{array}\right.$$

这个方程组求解很简单，第一行乘以-1和第二行相加得到$-2x_{2}+x_{3}=-1$，再乘以-1后和第三行相加得到$x_{1}=1$，第一行和第二行相加，得到$2 x_{1}+3 x_{3}=5$，代入x_{1}后，得到$x_{3}=1$，最后，我们可以得到$(1,1,1)$是这个线性方程组的唯一解。

最后是**无穷解**的情况。我们有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
2 x_{1}+3 x_{3}=5
\end{array}\right.$$

方程组第一行和第二行相加等于第三行，从这个角度来说，我们就可以定义一个自由变量$x_{3}=a$，a属于实数，那方程组的解就是：

$$\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2} a, \frac{1}{2}+\frac{1}{2} a, a\right)$$

其中a属于实数，所以，这就包含了无穷多个解。

线性方程组的几何表达

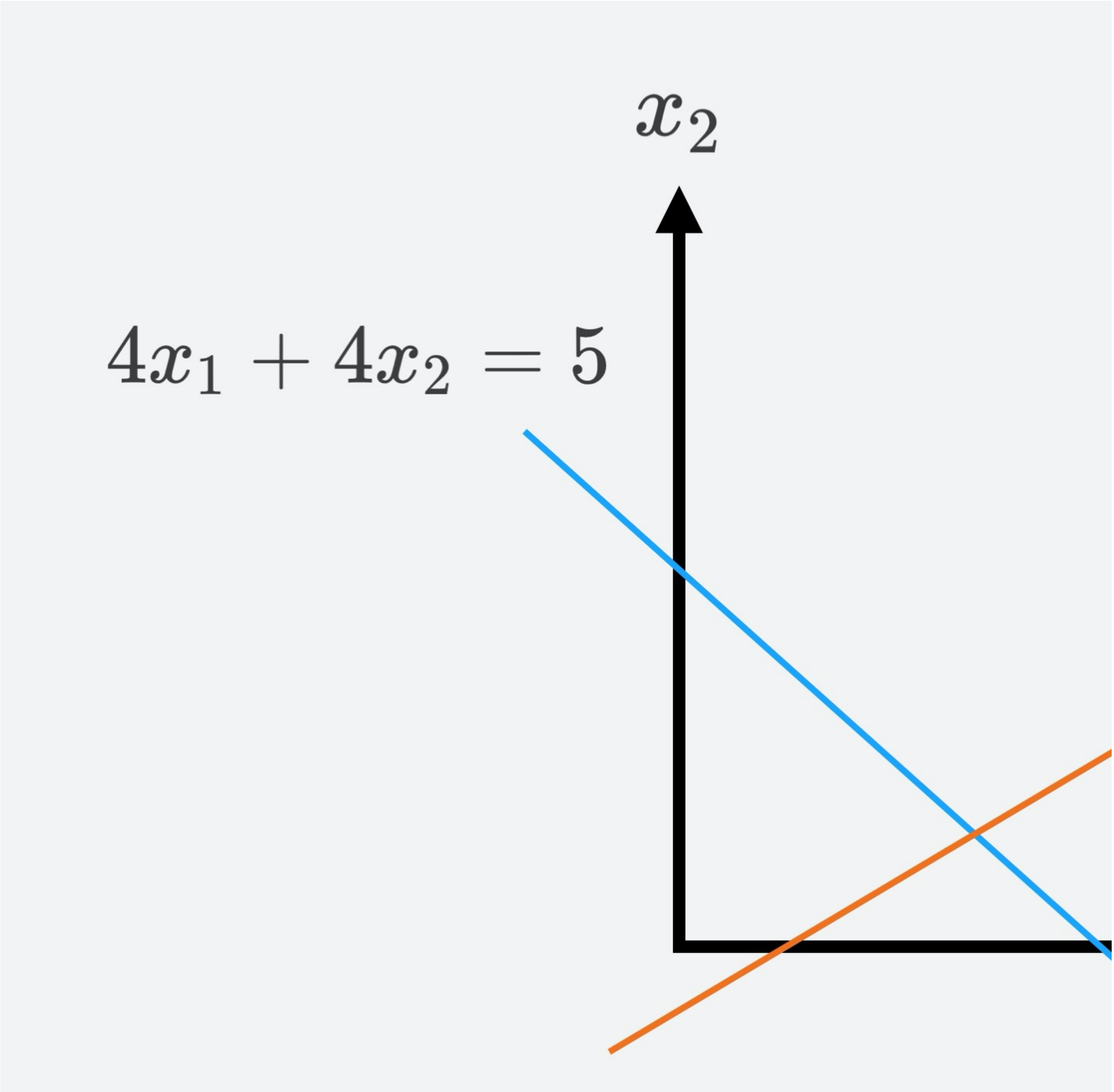
好了，了解了线性方程组解的三种情况，现在我们是时候从几何的角度来看一看线性方程组和它的解了，从几何意义出发有利于你更直观地理解线性方程组。

在一个只有两个变量x_{1},x_{2}的线性方程组中，我们定义一个x_{1},x_{2}平面。在这个平面中，每个线性方程都表达了一条直线。由于线性方程组的唯一解必须同时满足所有的等式，所以，线性方程组的唯一解其实就是线段的相交点，无穷解就是两线重合，而无解的情况，也就是两条线平行。

我拿一个例子来说明，设线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{l}
4 x_{1}+4 x_{2}=5 \\
2 x_{1}-4 x_{2}=1
\end{array}\right.$$

把其中的两个线性方程在x_{1},x_{2}平面中画出来后，我们可以得到两线段的交点$\left(1, \frac{1}{4}\right)$，也就是这个线性方程组的解。



我再把这个概念延伸一下，当遇到三个变量的情况时，每个线性方程在三维空间中表达了一个平面，由于线性方程组的一个解必须同时满足所有的等式，所以，**线性方程组的解其实就是平面，也可以是线、点或者空，空也就是没有共同的平面相交**。

其实还有一个更好的方法来表达和解线性方程组，这个方法就是下一篇要讲的矩阵，在这里我先简单提一下。我们把系数组合成向量，把向量组合成矩阵，也就是说，我们可以把线性方程组写成这样的形式：

$$x_{1}\left|\begin{array} {c}
a_{11} \\
\vdots \\
a_{m1}
\end{array}\right|+x_{2}\left|\begin{array} {c}
a_{12} \\
\vdots \\
c_{m2}
\end{array}\right|+\cdots+x_{n}\left|\begin{array} {c}
a_{1 n} \\
\vdots \\
a_{mn}
\end{array}\right|=\left|\begin{array} {c}
b_{1} \\
\vdots \\
b_{m}
\end{array}\right|$$

再进一步最终可以写成矩阵的形式：

```
$$\left[\begin{array} {cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}
\end{array}\right]\left|\begin{array} {c}
x_{1} \\
\vdots \\
. \\
```

x_{n}
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{c}
b_{1} \\\
\vdots \\\
. \\\
b_{m}
\end{array}\right|$$

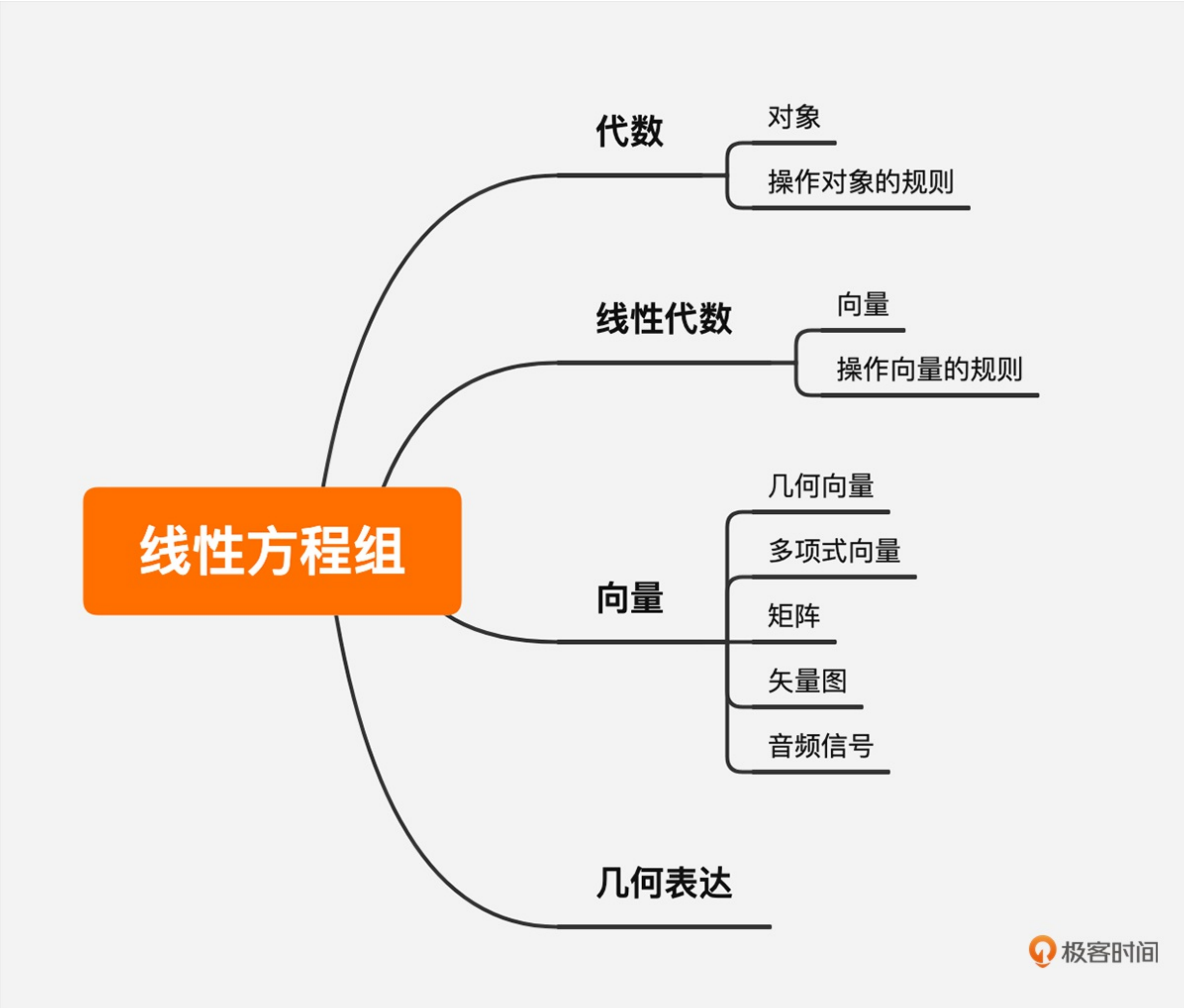
本节小结

好了，到这里这一讲就结束了，我带你总结一下前面讲解的内容。

这节课我带你重新认识了代数和线性代数的概念。代数是构造一系列对象和一系列操作这些对象的规则，线性代数是向量，以及操作这些向量的规则，所以，线性代数是代数的具像化表达。从线性代数，我们引出了向量的基本概念，我带你看了一个和向量有关的所有概念，即线性代数所有核心内容的图。

可以说，线性代数的一切皆从向量而来。

最后，我带你从二维平面几何角度，更直观地观察线性方程组和它几种解的情况，**而二维空间的线性方程组的解其实就是线、点或者空，也就是没有共同的线段相交**。你也可以自己试着把它扩展到三维空间几何中来观察，或许会更有趣哦！



线性代数练习场

我们一起来看一个练习题。这是一道极其简单的初中线性方程组题，你可以回顾一下，也为下一节课做好铺垫。

李大叔去年承包了10亩地，种植甲、乙两种蔬菜，共获利18000元。其中甲蔬菜每亩获利2000元，乙蔬菜每亩获利1500元。

请问，李大叔去年甲、乙两种蔬菜各种植了多少亩？

欢迎在留言区晒出你的运算过程和结果。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我学习线性代数。今天我们要讲的是“线性代数这门课的基本概念”。

线性代数可以运用在很多领域，比如：工程学、计算机科学、经济学、信号处理等等。我们来看一个在经济学中常见的例子：消费矩阵。

假设有n个行业，比如：化学、食品和石油。制造一单位的某化学品需要0.2单位的另一类化学品，0.3单位的食品，以及0.4单位的石油，而制造一单位的某食品和某石油也同样分别需要这三类产品的输入，于是，我们就能构造这样一个消费矩阵：

$$\left|\begin{array}{l}
化学输出 \\\
食品输出 \\\
石油输出
\end{array}\right|=\left[\begin{array}{lll}
0.2 & 0.3 & 0.4 \\\
0.4 & 0.4 & 0.1 \\\
0.5 & 0.1 & 0.3
\end{array}\right]\left|\begin{array}{l}
化学输入 \\\
食品输入 \\\
石油输入
\end{array}\right|$$

当然，我们也可以用一般的线性方程组$Ax=b$的形式来表达：

$$\left\{\begin{array}{l}

0.2 x_{1}+0.3 x_{2}+0.4 x_{3}=b_{1} \\
0.4 x_{1}+0.4 x_{2}+0.1 x_{3}=b_{2} \\
0.5 x_{1}+0.1 x_{2}+0.3 x_{3}=b_{3}
\end{array}\right.$$

从本质上来说，消费矩阵解决的是输入和输出之间的关系。不仅如此，线性代数在现实生活中的运用还有很多，比如，我们可以借用特征值和特征向量，预测若干年后的污水水平；在密码学中，可以使用矩阵及其逆矩阵对需发送的消息加密；在机器学习中，可以使用线性方程组的共轭迭代法来训练神经网络，等等。

刚才我分别用矩阵和线性方程组的形式给出了消费矩阵，当然，在实际生活中，你可以灵活选择最有效的方式来解决问题。

我们可以看到，线性方程组可以表示成一般形式，也就是你初中学到的$A x=b$的形式，也可以表示成矩阵形式。矩阵是由向量组合而成的，比如刚才例子中的系数矩阵的每一行都是一个**行向量**，每一列都是一个**列向量**。

$$\begin{array}{l}
\end{array}\left[\begin{array}{lll}
0.2 & 0.3 & 0.4 \\
0.4 & 0.4 & 0.1 \\
0.5 & 0.1 & 0.3
\end{array}\right] \begin{array}{l}
\end{array}$$

从这里我们能看出，**向量**其实就会是线性代数最基础的核心。数学对抽象思维要求很高，简单来说，抽象思维就是抽取同类事物的共性。所以，在进入具体的线性方程组的主题前，我要先从数学抽象的角度说一说代数和线性代数，这也是深入理解后面内容的前提。

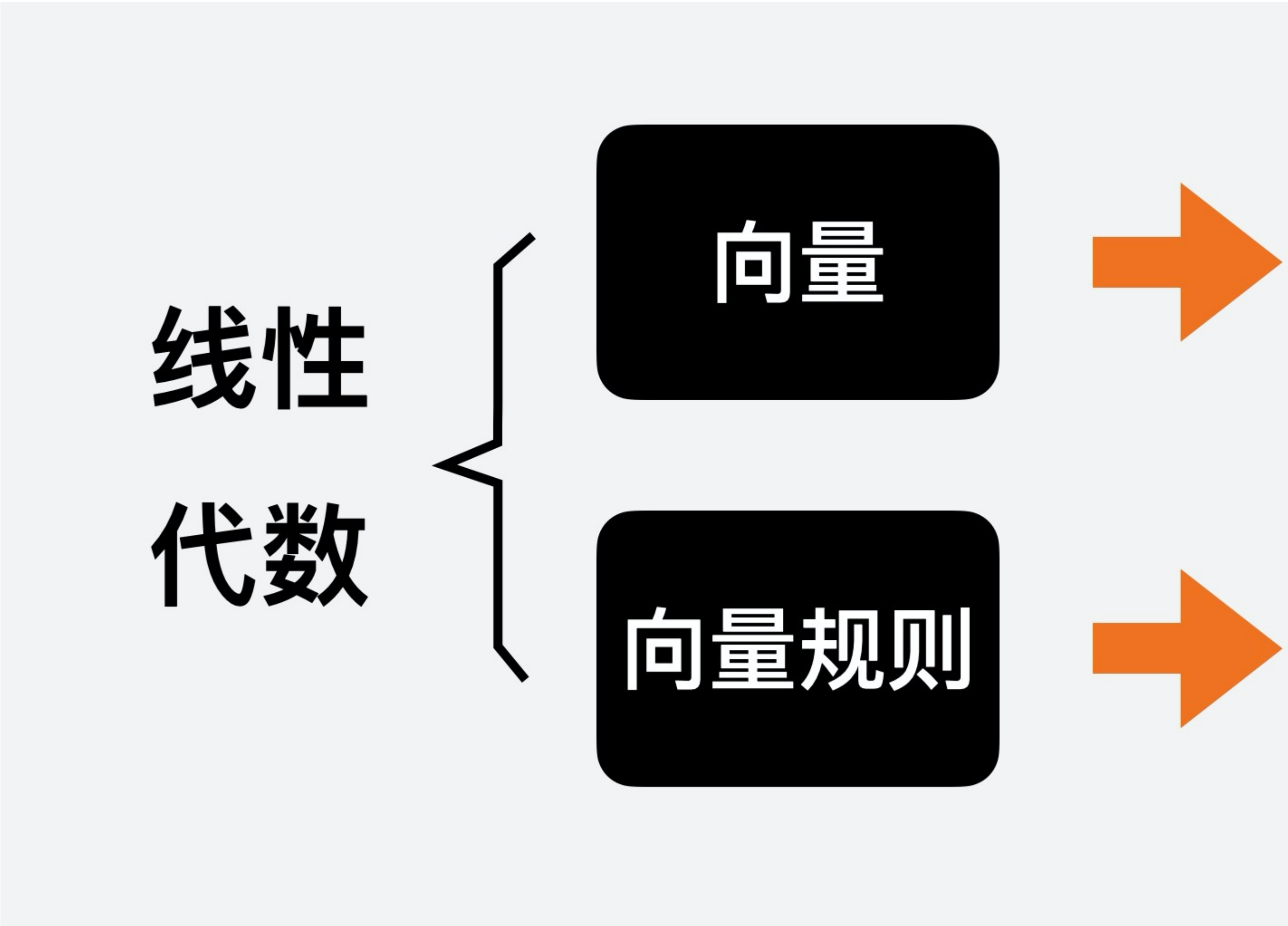
代数和线性代数的基本概念

那什么是代数呢？百度百科的解释是这样的：

> 代数是研究数、数量、关系、结构与代数方程（组）的通用解法及其性质的数学分支。

但我觉得这个解释其实没有说出**代数**这个概念的重点。我的理解是这样的：**代数是构造一系列对象和一系列操作这些对象的规则。**

所以你看，代数这个概念的核心就两点，**对象**和**操作对象的规则**，这样就很好理解了吧？那有了代数的定义，线性代数就很好定义了。我们类比来看，线性代数其实就是向量，以及操作这些向量的规则。这里，向量映射到对象，向量的规则映射到对象的规则，因此线性代数是代数的具像化表达。

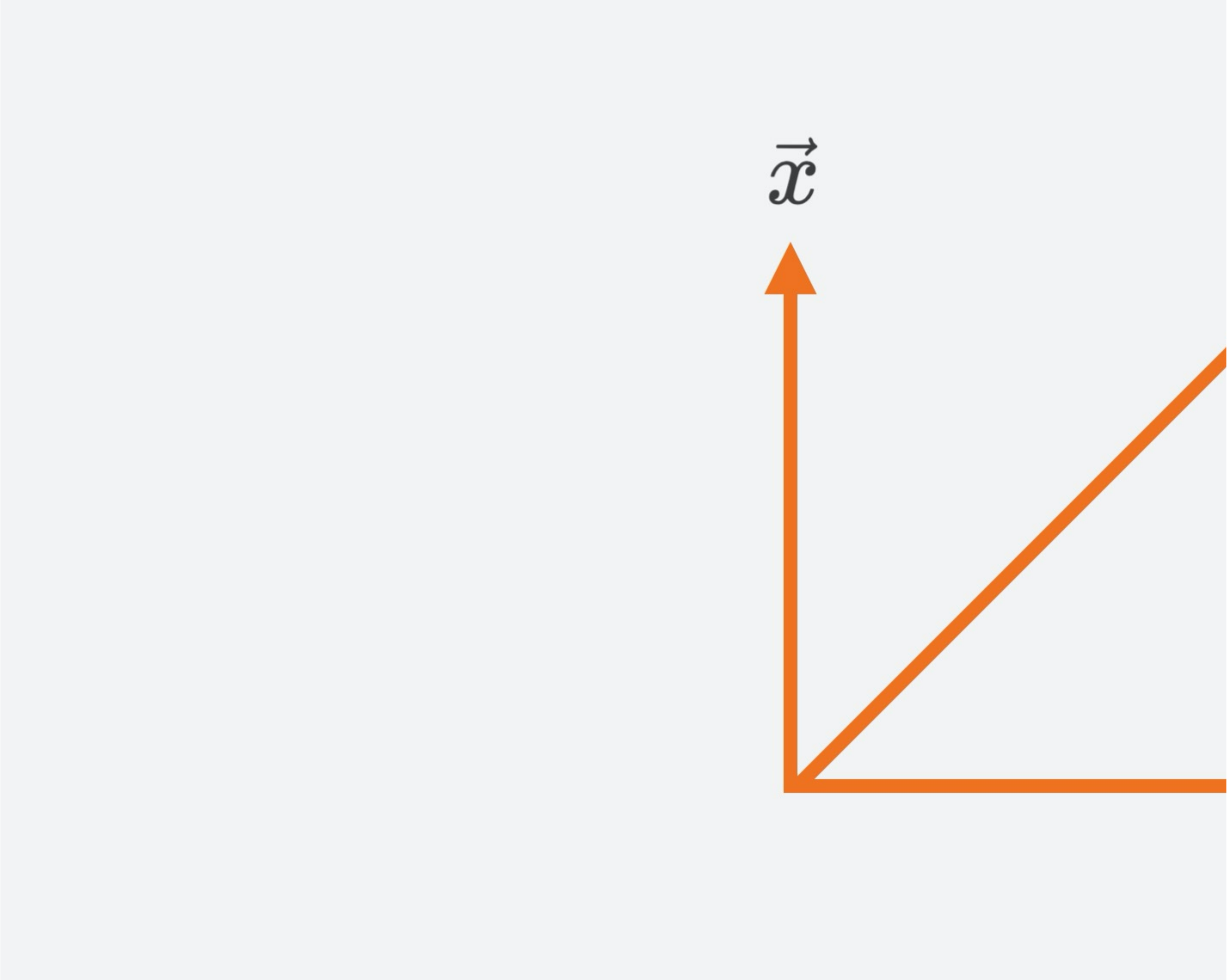


向量的基本概念

那什么是**向量**呢？从样子来看，向量其实就是由字母加上它上面的箭头来表示的，比如我们一般会写成$\vec{x}$。我估计你在高中或大学里已经接触过“几何向量”。那么，下面我用更抽象的数学观点来给你解释一下。

向量，也叫欧几里得向量（Euclidean Vector），其实就是能够互相相加、被标量乘的特殊对象。而标量也叫“无向量”，它只有数值大小，没有方向。怎么理解呢？我们来看一些向量的例子，通过这些例子来深入理解向量的概念。

几何向量是有向线段，在二维空间（也就是平面）中，两个几何向量能够相加，比如，向量x加上向量y等于向量z，$\vec{x}+\vec{y}=\vec{z}$，x向量也能被一个标量乘。再比如，标量λ乘向量x结果也是向量，$\lambda \vec{x}, \lambda \in R$。几何向量通过大小和方向来简化向量的表达，所以，一般数学课程一开始都会拿几何向量来进行举例。



多项式其实也是向量。两个多项式能够相加，它也能够被标量乘，结果也是多项式。

矩阵的一行或一列也是向量。就比如下面这样形式的向量。

$$x \in R^{3}: x=\left[\begin{array}{l}
1 \\
2 \\
3
\end{array}\right]$$

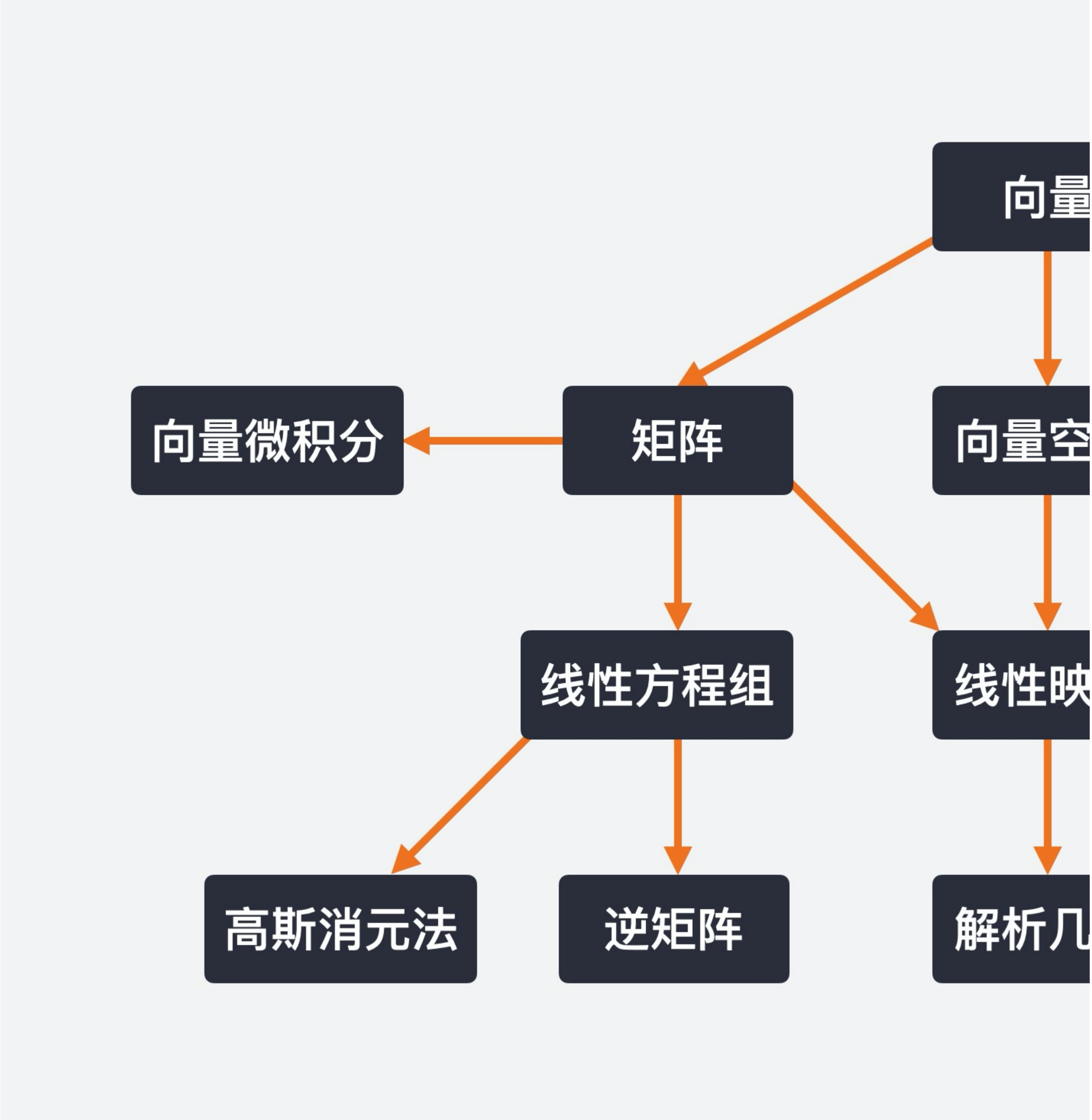
两个向量能够相加，它也能够被标量乘，结果也是向量。它和现代大部分的编程语言中的数组一致，而且数组的运算简化了向量操作的算法实施。

矢量图、音频信号也是向量。它们都能被一系列数字表示，比如，在音频信号处理中，常用到数据增强的方法，通过向量的操作就能到达目标。

看了这些向量例子，不知道你现在有点感觉了吗？其实，线性代数的本质就是**寻找向量之间的相似性**，比如在做分类时，我们常常需要估算不同样本之间的相似性度量（Similarity Measurement），这时通常采用的方法就是计算样本间的“距离”（Distance）。

可以看出来，向量非常重要，我们后面很多内容都是从向量延伸而来的，比如矩阵和求解线性方程组。

下面我用一张图来表达和向量有关的所有概念，也就是线性代数所有的核心内容，其中大部分内容你都会学到，希望通过这个图，你对线性代数有个大概的认知。相信学习完所有课程后，你再回过头来看时，肯定会有一些新的认知。



从图中最左侧这一列，我们可以看出，向量组合成矩阵，矩阵可以表示成线性方程组，而线性方程组可以通过高斯消元法求解，也可以求逆矩阵。

同时，向量又可以组合成向量空间，向量空间和矩阵都可以做线性映射或者线性变换，线性映射在实践中可以用在解析几何和分类问题中。

而且，向量和线性独立是强相关的，也就是说，线性独立指的是向量的线性独立，而线性独立又可以引出能够生成整个空间的基（Basis），基在实践中可以用在分类和降维中。

这里，我再额外提一个非常重要的、在数学中经常用到的概念——**封闭性**，或者俗称**闭包**（Closure）。封闭性的定义是，如果我们要对某个集合的成员进行一种运算，生成的仍然是这个集合的成员，那这个集合就可以称为在这个运算下闭合。

我为什么要提这个概念呢？这是因为，向量的线性运算是封闭的，也就是说向量的加法、数乘结果仍属于向量空间，即**向量的任意线性组合仍属于向量空间**。

线性方程组的应用

到这里，相信你已经对线性代数、向量这些基本概念有了一个应试教育之外的、新的认识，接下来我就切入本篇的最重点的内容了，那就是线性方程组。

线性方程组在线性代数中有着举足轻重的地位，许多现实生活中的问题都可以表达成线性方程组。关于线性方程组的概念，我想不用我多说了，这是初中的内容，你应该已经非常了解了。现在我举几个例子来说一说，线性方程组在现实生活中的运用，让你从应用的角度再理解下线性方程组。

第一个例子是计算旅游团人数。假设，一个旅游团由孩子和大人组成，去程时他们一起坐大巴，每个孩子的票价3元，大人票价3.2元，总共花费118.4元。回程时一起坐火车，每个孩子的票价3.5元，大人票价3.6元，总共花费135.2元。请问这个旅游团中有多少孩子和大人？

假设小孩人数为x_{1}，大人人数为x_{2}，于是我们得到了一个方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
3 x_{1}+3.2 x_{2}=118.4 \\
3.5 x_{1}+3.6 x_{2}=135.2
\end{array}\right.$$

使用初中的解二元一次方程组的知识，我们可以得出这个方程组的解是：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}=16 \\

x_{2}=22
\end{array}\right.$$

这个就是典型的线性方程组的现实例子。当然，我们也可以用矩阵来解这个方程组。你可能会说，这问题很简单啊，为什么还要用矩阵来解呢？整这么复杂有必要吗？别着急，这里我先卖个关子，具体我会在下一讲"矩阵篇"中进行讲解。

第二个例子是找出公司的最优生产计划。我们从公司的角度来看一看，假设生产苹果的几大主流产品：iPhone、Macbook、iMac，以及iWatch四款产品，需要用到芯片、摄像头模组、电池、IPS屏幕四大类资源，产品分别用 $N_{1}，N_{2}，N_{3}，N_{4}$来表示，资源分别用$R_{1}，R_{2}，R_{3}，R_{4}$来表示。

生产一单位的产品 N_{1}，也就是iPhone，需要$a_{11}，a_{21}，a_{31}，a_{41}$的资源，也就是芯片、摄像头模组、电池和IPS屏幕资源，其他产品也是一样。

我们的目标是在资源有限的情况下，找到一个最优生产计划，使每个产品的产出数量最大化。也就是说，在总共有b_{i}个单位资源R_{i}可用情况下，每个产品N_{i} 有多少单元 x_{i}应该被生产。因此，我们可以得到一个下面这样的线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+a_{13} x_{3}+a_{14} x_{4}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+a_{23} x_{3}+a_{24} x_{4}=b_{2} \\
a_{31} x_{1}+a_{32} x_{2}+a_{33} x_{3}+a_{34} x_{4}=b_{3} \\
a_{41} x_{1}+a_{42} x_{2}+a_{43} x_{3}+a_{44} x_{4}=b_{4}
\end{array}\right.$$

于是，我们得到线性方程组的通用表达方式，$x_{1}，\cdots ，x_{n}$ 是未知变量，每个满足方程组表达式的n元组$(x_{1}，\cdots ，x_{n})$都是它的解。

$$\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.$$

线性方程组的解是有几何意义的，从几何角度出发，有利于你理解和记忆线性方程组解的条件，接下来我们先来看看线性方程组解的几种情况，之后我再具体讲解线性方程组的几何表达。

首先我们来看**无解**的情况。假设有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
2 x_{1}+3 x_{3}=1
\end{array}\right.$$

第一行和第二行相加后，我们可以得到$2 x_{1}+3 x_{3}=5$，很明显，这个方程和第三行是矛盾的，所以，这个线性方程组无解。

其次是**只有一个解**的情况。假设有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
x_{2}+x_{3}=2
\end{array}\right.$$

这个方程组求解很简单，第一行乘以-1和第二行相加得到$-2x_{2}+x_{3}=-1$，再乘以-1后和第三行相加得到$x_{1}=1$，第一行和第二行相加，得到$2 x_{1}+3 x_{3}=5$，代入x_{1}后，得到$x_{3}=1$，最后，我们可以得到$(1,1,1)$是这个线性方程组的唯一解。

最后是**无穷解**的情况。我们有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
2 x_{1}+3 x_{3}=5
\end{array}\right.$$

方程组第一行和第二行相加等于第三行，从这个角度来说，我们就可以定义一个自由变量$x_{3}=a$，a属于实数，那方程组的解就是：

$$\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2} a, \frac{1}{2}+\frac{1}{2} a, a\right)$$

其中a属于实数，所以，这就包含了无穷多个解。

线性方程组的几何表达

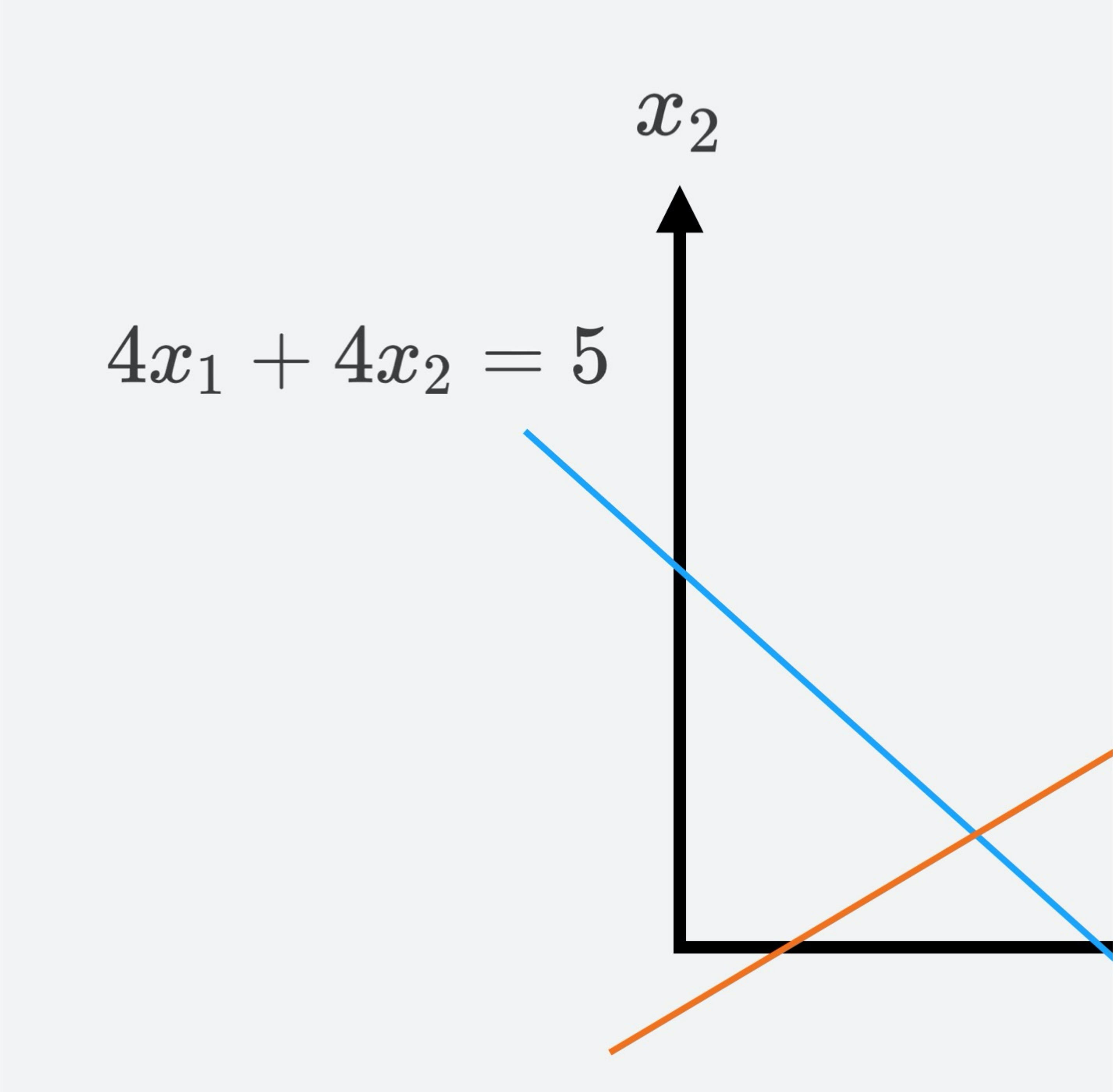
好了，了解了线性方程组解的三种情况，现在我们是时候从几何的角度来看一看线性方程组和它的解了，从几何意义出发有利于你更直观地理解线性方程组。

在一个只有两个变量x_{1},x_{2}的线性方程组中，我们定义一个x_{1},x_{2}平面。在这个平面中，每个线性方程都表达了一条直线。由于线性方程组的唯一解必须同时满足所有的等式，所以，线性方程组的唯一解其实就是线段的相交点，无穷解就是两线重合，而无解的情况，也就是两条线平行。

我拿一个例子来说明，设线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{l}
4 x_{1}+4 x_{2}=5 \\
2 x_{1}-4 x_{2}=1
\end{array}\right.$$

把其中的两个线性方程在x_{1},x_{2}平面中画出来后，我们可以得到两线段的交点$\left(1, \frac{1}{4}\right)$，也就是这个线性方程组的解。



我再把这个概念延伸一下，当遇到三个变量的情况时，每个线性方程在三维空间中表达了一个平面，由于线性方程组的一个解必须同时满足所有的等式，所以，**线性方程组的解其实就是平面，也可以是线、点或者空，空也就是没有共同的平面相交。**

其实还有一个更好的方法来表达和解线性方程组，这个方法就是下一篇要讲的矩阵，在这里我先简单提一下。我们把系数组合成向量，把向量组合成矩阵，也就是说，我们可以把线性方程组写成这样的形式：

```
$$x_{1}\left|\begin{array}{c}
a_{11} \\
\vdots \\
a_{m1}
\end{array}\right|+x_{2}\left|\begin{array}{c}
a_{12} \\
\vdots \\
c_{m2}
\end{array}\right|+\cdots+x_{n}\left|\begin{array}{c}
a_{1 n} \\
\vdots \\
a_{mn}
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{c}
b_{1} \\
\vdots \\
b_{m}
\end{array}\right|$$
```

再进一步最终可以写成矩阵的形式：

```
$$\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}
\end{array}\right]\left|\begin{array}{c}
x_{1} \\
\vdots \\
. \\
```

x_{n}
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{c}
b_{1} \\\
\vdots \\\
. \\\
b_{m}
\end{array}\right|$$

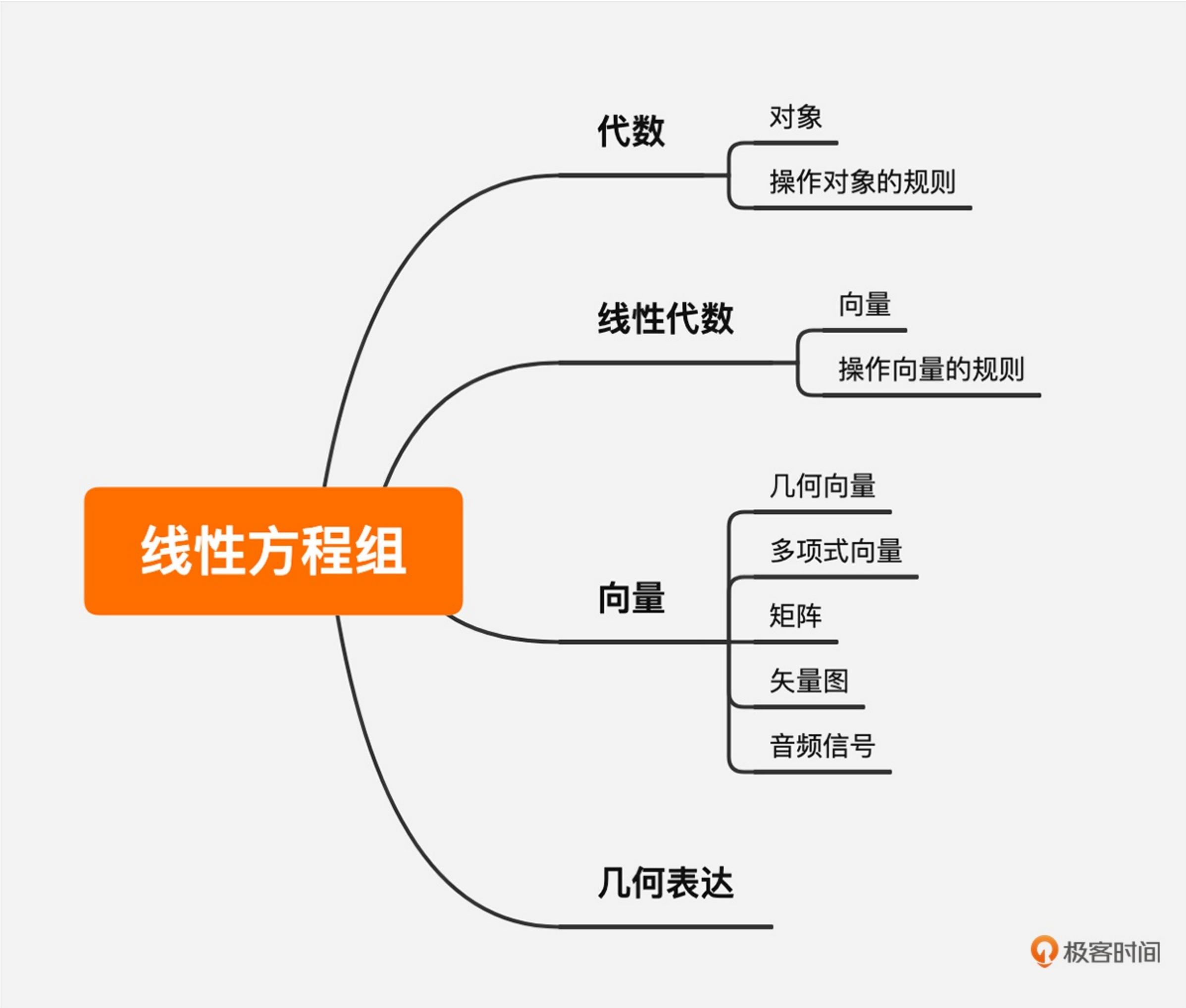
本节小结

好了，到这里这一讲就结束了，我带你总结一下前面讲解的内容。

这节课我带你重新认识了代数和线性代数的概念。代数是构造一系列对象和一系列操作这些对象的规则，线性代数是向量，以及操作这些向量的规则，所以，线性代数是代数的具像化表达。从线性代数，我们引出了向量的基本概念，我带你看了一个和向量有关的所有概念，即线性代数所有核心内容的图。

可以说，线性代数的一切皆从**向量**而来。

最后，我带你从二维平面几何角度，更直观地观察线性方程组和它几种解的情况，**而二维空间的线性方程组的解其实就是线、点或者空，也就是没有共同的线段相交**。你也可以自己试着把它扩展到三维空间几何中来观察，或许会更有趣哦！



线性代数练习场

我们一起来看一个练习题。这是一道极其简单的初中线性方程组题，你可以回顾一下，也为下一节课做好铺垫。

李大叔去年承包了10亩地，种植甲、乙两种蔬菜，共获利18000元。其中甲蔬菜每亩获利2000元，乙蔬菜每亩获利1500元。

请问，李大叔去年甲、乙两种蔬菜各种植了多少亩？

欢迎在留言区晒出你的运算过程和结果。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我学习线性代数。今天我们要讲的是"线性代数这门课的基本概念"。

线性代数可以运用在很多领域，比如：工程学、计算机科学、经济学、信号处理等等。我们来看一个在经济学中常见的例子：消费矩阵。

假设有n个行业，比如：化学、食品和石油。制造一单位的某化学品需要0.2单位的另一类化学品，0.3单位的食品，以及0.4单位的石油，而制造一单位的某食品和某石油也同样分别需要这三类产品的输入，于是，我们就能构造这样一个消费矩阵：

$$\left|\begin{array}{l}
化学输出 \\\
食品输出 \\\
石油输出
\end{array}\right|=\left[\begin{array}{lll}
0.2 & 0.3 & 0.4 \\\
0.4 & 0.4 & 0.1 \\\
0.5 & 0.1 & 0.3
\end{array}\right]\left|\begin{array}{l}
化学输入 \\\
食品输入 \\\
石油输入
\end{array}\right|$$

当然，我们也可以用一般的线性方程组$Ax=b$的形式来表达：

$$\left\{\begin{array}{l}

0.2 x_{1}+0.3 x_{2}+0.4 x_{3}=b_{1} \\\
0.4 x_{1}+0.4 x_{2}+0.1 x_{3}=b_{2} \\\
0.5 x_{1}+0.1 x_{2}+0.3 x_{3}=b_{3}
\end{array}\right.$$

从本质上来说，消费矩阵解决的是输入和输出之间的关系。不仅如此，线性代数在现实生活中的运用还有很多，比如，我们可以借用特征值和特征向量，预测若干年后的污水水平；在密码学中，可以使用矩阵及其逆矩阵对需发送的消息加密；在机器学习中，可以使用线性方程组的共轭迭代法来训练神经网络，等等。

刚才我分别用矩阵和线性方程组的形式给出了消费矩阵，当然，在实际生活中，你可以灵活选择最有效的方式来解决问题。

我们可以看到，线性方程组可以表示成一般形式，也就是你初中学到的$A x=b$的形式，也可以表示成矩阵形式。矩阵是由向量组合而成的，比如刚才例子中的系数矩阵的每一行都是一个**行向量**，每一列都是一个**列向量**。

$$\begin{array}{l}
\end{array}\left[\begin{array}{lll}
0.2 & 0.3 & 0.4 \\\
0.4 & 0.4 & 0.1 \\\
0.5 & 0.1 & 0.3
\end{array}\right] \begin{array}{l}
\end{array}$$

从这里我们能看出，**向量**其实就会是线性代数最基础的核心。数学对抽象思维要求很高，简单来说，抽象思维就是抽取同类事物的共性。所以，在进入具体的线性方程组的主题前，我要先从数学抽象的角度说一说代数和线性代数，这也是深入理解后面内容的前提。

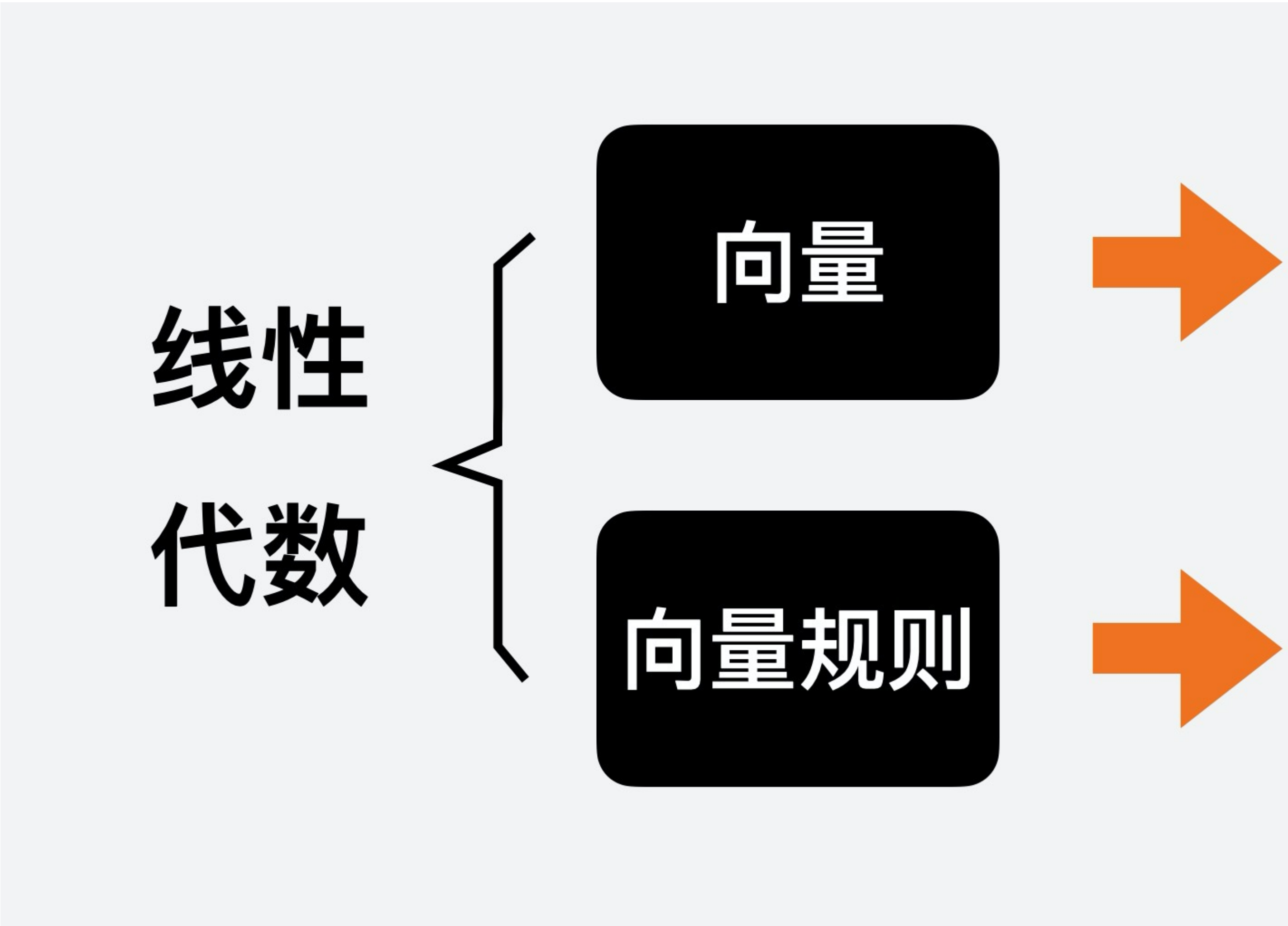
代数和线性代数的基本概念

那什么是代数呢？百度百科的解释是这样的：

> 代数是研究数、数量、关系、结构与代数方程（组）的通用解法及其性质的数学分支。

但我觉得这个解释其实没有说出**代数**这个概念的重点。我的理解是这样的：**代数是构造一系列对象和一系列操作这些对象的规则。**

所以你看，代数这个概念的核心就两点，**对象**和**操作对象的规则**，这样就很好理解了吧？那有了代数的定义，线性代数就很好定义了。我们类比来看，线性代数其实就是向量，以及操作这些向量的规则。这里，向量映射到对象，向量的规则映射到对象的规则，因此线性代数是代数的具像化表达。

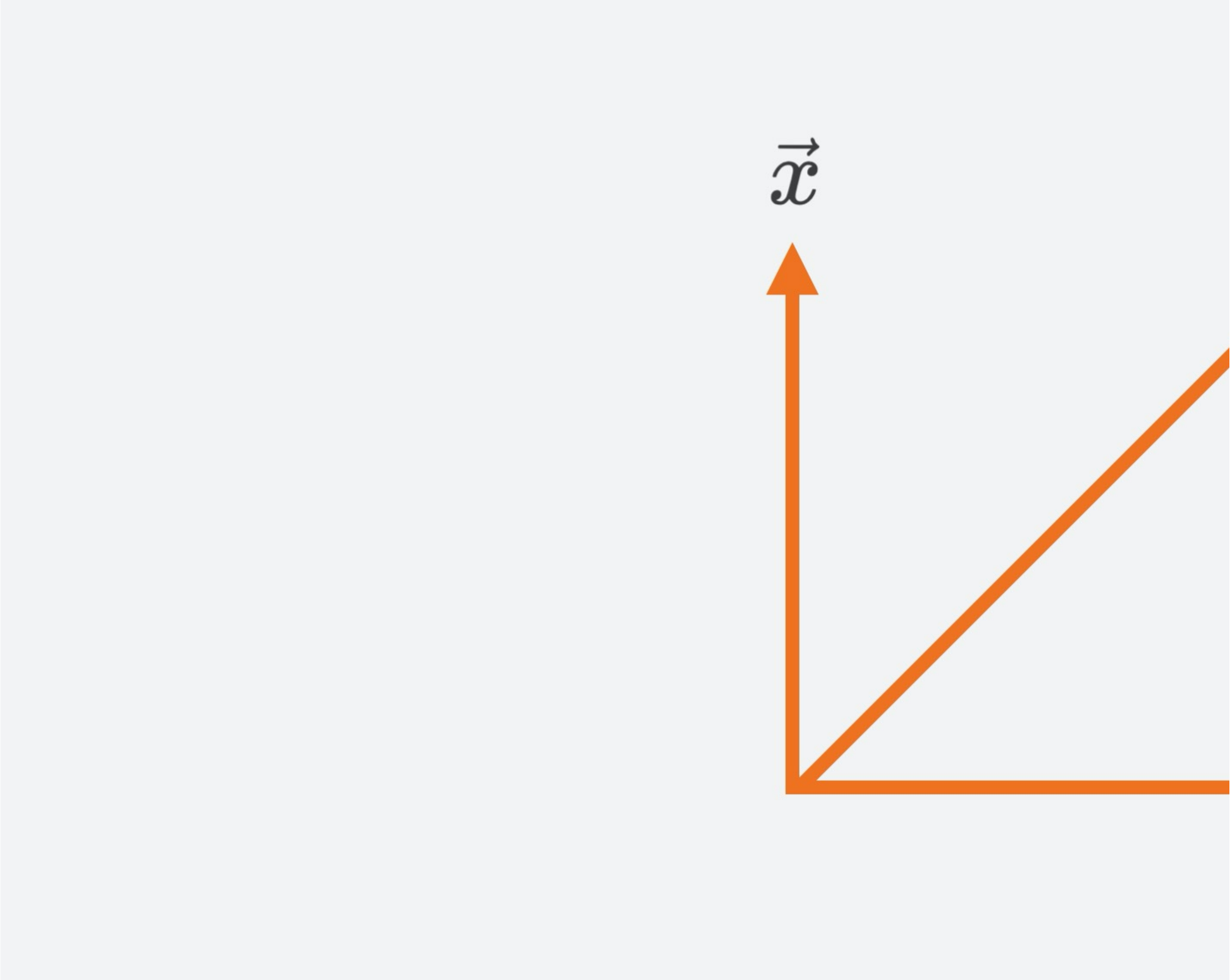


向量的基本概念

那什么是**向量**呢？从样子来看，向量其实就是由字母加上它上面的箭头来表示的，比如我们一版会写成$\vec{x}$。我估计你在高中或大学里已经接触过“几何向量”。那么，下面我用更抽象的数学观点来给你解释一下。

向量，也叫欧几里得向量（Euclidean Vector），其实就是能够互相相加、被标量乘的特殊对象。而标量也叫“无向量”，它只有数值大小，没有方向。怎么理解呢？我们来看一些向量的例子，通过这些例子来深入理解向量的概念。

几何向量是有向线段，在二维空间（也就是平面）中，两个几何向量能够相加，比如，向量x加上向量y等于向量z，$\vec{x}+\vec{y}=\vec{z}$，x向量也能被一个标量乘。再比如，标量λ乘向量x结果也是向量，$\lambda \vec{x}, \lambda \in R$。几何向量通过大小和方向来简化向量的表达，所以，一般数学课程一开始都会拿几何向量来进行举例。



多项式其实也是向量。两个多项式能够相加，它也能够被标量乘，结果也是多项式。

矩阵的一行或一列也是向量。就比如下面这样形式的向量。

$$x \in R^{3}: x=\left[\begin{array}{l}
1 \\
2 \\
3
\end{array}\right]$$

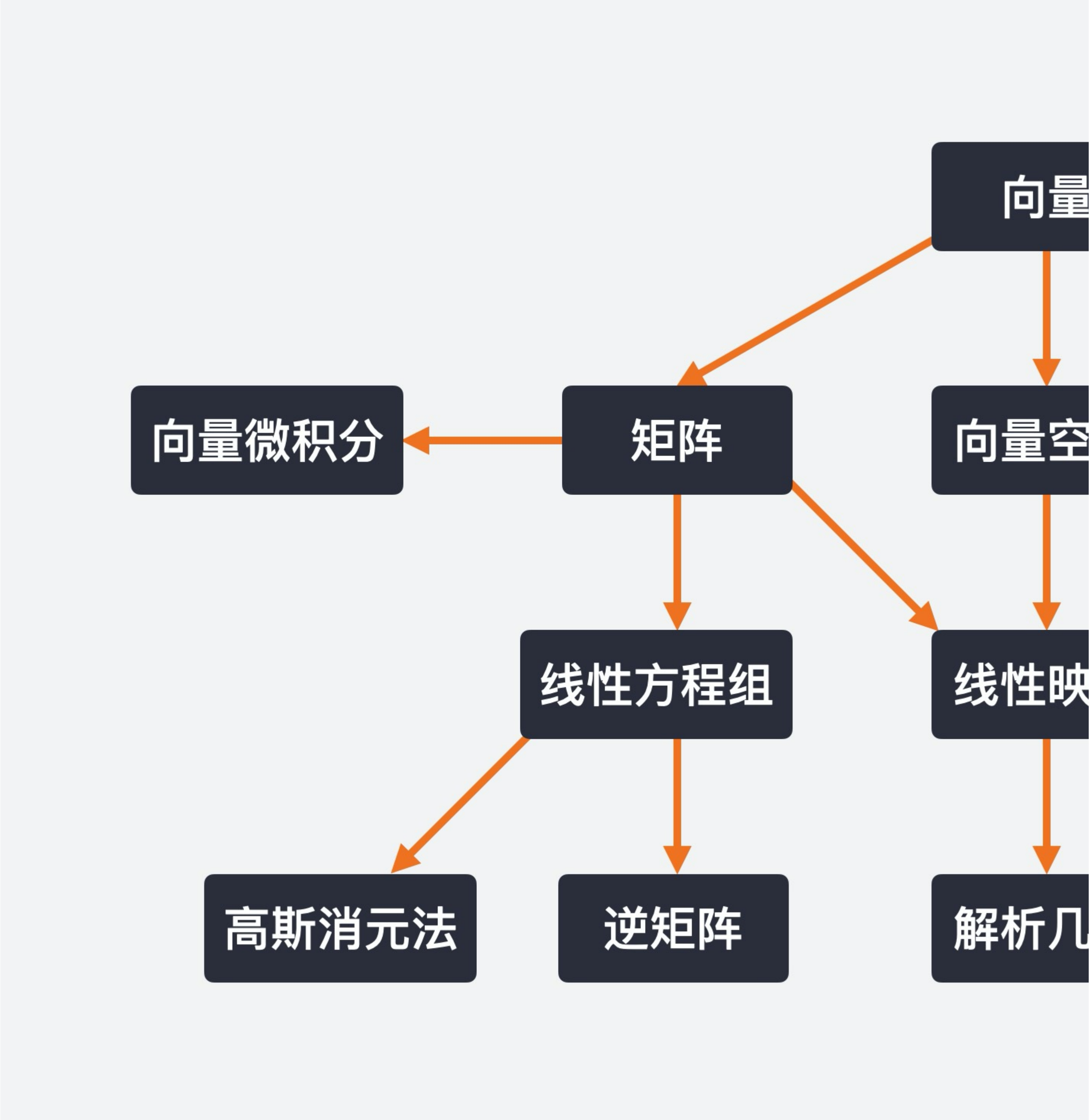
两个向量能够相加，它也能够被标量乘，结果也是向量。它和现代大部分的编程语言中的数组一致，而且数组的运算简化了向量操作的算法实施。

矢量图、音频信号也是向量。它们都能被一系列数字表示，比如，在音频信号处理中，常用到数据增强的方法，通过向量的操作就能到达目标。

看了这些向量例子，不知道你现在有点感觉了吗？其实，线性代数的本质就是**寻找向量之间的相似性**，比如在做分类时，我们常常需要估算不同样本之间的相似性度量（Similarity Measurement），这时通常采用的方法就是计算样本间的“距离”（Distance）。

可以看出来，向量非常重要，我们后面很多内容都是从向量延伸而来的，比如矩阵和求解线性方程组。

下面我用一张图来表达和向量有关的所有概念，也就是线性代数所有的核心内容，其中大部分内容你都会学到，希望通过这个图，你对线性代数有个大概的认知。相信学习完所有课程后，你再回过头来看时，肯定会有一些新的认知。



从图中最左侧这一列，我们可以看出，向量组合成矩阵，矩阵可以表示成线性方程组，而线性方程组可以通过高斯消元法求解，也可以求逆矩阵。

同时，向量又可以组合成向量空间，向量空间和矩阵都可以做线性映射或者线性变换，线性映射在实践中可以用在解析几何和分类问题中。

而且，向量和线性独立是强相关的，也就是说，线性独立指的是向量的线性独立，而线性独立又可以引出能够生成整个空间的基（Basis），基在实践中可以用在分类和降维中。

这里，我再额外提一个非常重要的、在数学中经常用到的概念——**封闭性**，或者俗称**闭包**（Closure）。封闭性的定义是，如果我们要对某个集合的成员进行一种运算，生成的仍然是这个集合的成员，那这个集合就可以称为在这个运算下闭合。

我为什么要提这个概念呢？这是因为，向量的线性运算是封闭的，也就是说向量的加法、数乘结果仍属于向量空间，即**向量的任意线性组合仍属于向量空间**。

线性方程组的应用

到这里，相信你已经对线性代数、向量这些基本概念有了一个应试教育之外的、新的认识，接下来我就切入本篇的最重点的内容了，那就是线性方程组。

线性方程组在线性代数中有着举足轻重的地位，许多现实生活中的问题都可以表达成线性方程组。关于线性方程组的概念，我想不用我多说了，这是初中的内容，你应该已经非常了解了。现在我举几个例子来说一说，线性方程组在现实生活中的运用，让你从应用的角度再理解下线性方程组。

第一个例子是计算旅游团人数。假设，一个旅游团由孩子和大人组成，去程时他们一起坐大巴，每个孩子的票价3元，大人票价3.2元，总共花费118.4元。回程时一起坐火车，每个孩子的票价3.5元，大人票价3.6元，总共花费135.2元。请问这个旅游团中有多少孩子和大人？

假设小孩人数为x_{1}，大人人数为x_{2}，于是我们得到了一个方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
3 x_{1}+3.2 x_{2}=118.4 \\
3.5 x_{1}+3.6 x_{2}=135.2
\end{array}\right.$$

使用初中的解二元一次方程组的知识，我们可以得出这个方程组的解是：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}=16 \\

x_{2}=22
\end{array}\right.$$

这个就是典型的线性方程组的现实例子。当然，我们也可以用矩阵来解这个方程组。你可能会说，这问题很简单啊，为什么还要用矩阵来解呢？整这么复杂有必要吗？别着急，这里我先卖个关子，具体我会在下一讲"矩阵篇"中进行讲解。

第二个例子是找出公司的最优生产计划。我们从公司的角度来看一看，假设生产苹果的几大主流产品：iPhone、Macbook、iMac，以及iWatch四款产品，需要用到芯片、摄像头模组、电池、IPS屏幕四大类资源，产品分别用 $N_{1}，N_{2}，N_{3}，N_{4}$来表示，资源分别用$R_{1}，R_{2}，R_{3}，R_{4}$来表示。

生产一单位的产品 N_{1}，也就是iPhone，需要$a_{11}，a_{21}，a_{31}，a_{41}$的资源，也就是芯片、摄像头模组、电池和IPS屏幕资源，其他产品也是一样。

我们的目标是在资源有限的情况下，找到一个最优生产计划，使每个产品的产出数量最大化。也就是说，在总共有b_{i}个单位资源R_{i}可用情况下，每个产品N_{i} 有多少单元 x_{i}应该被生产。因此，我们可以得到一个下面这样的线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+a_{13} x_{3}+a_{14} x_{4}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+a_{23} x_{3}+a_{24} x_{4}=b_{2} \\
a_{31} x_{1}+a_{32} x_{2}+a_{33} x_{3}+a_{34} x_{4}=b_{3} \\
a_{41} x_{1}+a_{42} x_{2}+a_{43} x_{3}+a_{44} x_{4}=b_{4}
\end{array}\right.$$

于是，我们得到线性方程组的通用表达方式，$x_{1}，\cdots ，x_{n}$ 是未知变量，每个满足方程组表达式的n元组$(x_{1}，\cdots ，x_{n})$都是它的解。

$$\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.$$

线性方程组的解是有几何意义的，从几何角度出发，有利于你理解和记忆线性方程组解的条件，接下来我们先来看看线性方程组解的几种情况，之后我再具体讲解线性方程组的几何表达。

首先我们来看**无解**的情况。假设有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
2 x_{1}+3 x_{3}=1
\end{array}\right.$$

第一行和第二行相加后，我们可以得到$2 x_{1}+3 x_{3}=5$，很明显，这个方程和第三行是矛盾的，所以，这个线性方程组无解。

其次是**只有一个解**的情况。假设有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
x_{2}+x_{3}=2
\end{array}\right.$$

这个方程组求解很简单，第一行乘以-1和第二行相加得到$-2x_{2}+x_{3}=-1$，再乘以-1后和第三行相加得到$x_{1}=1$，第一行和第二行相加，得到$2 x_{1}+3 x_{3}=5$，代入x_{1}后，得到$x_{3}=1$，最后，我们可以得到$(1,1,1)$是这个线性方程组的唯一解。

最后是**无穷解**的情况。我们有下面这样一个线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}+x_{3}=3 \\
x_{1}-x_{2}+2 x_{3}=2 \\
2 x_{1}+3 x_{3}=5
\end{array}\right.$$

方程组第一行和第二行相加等于第三行，从这个角度来说，我们就可以定义一个自由变量$x_{3}=a$，a属于实数，那方程组的解就是：

$$\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2} a, \frac{1}{2}+\frac{1}{2} a, a\right)$$

其中a属于实数，所以，这就包含了无穷多个解。

线性方程组的几何表达

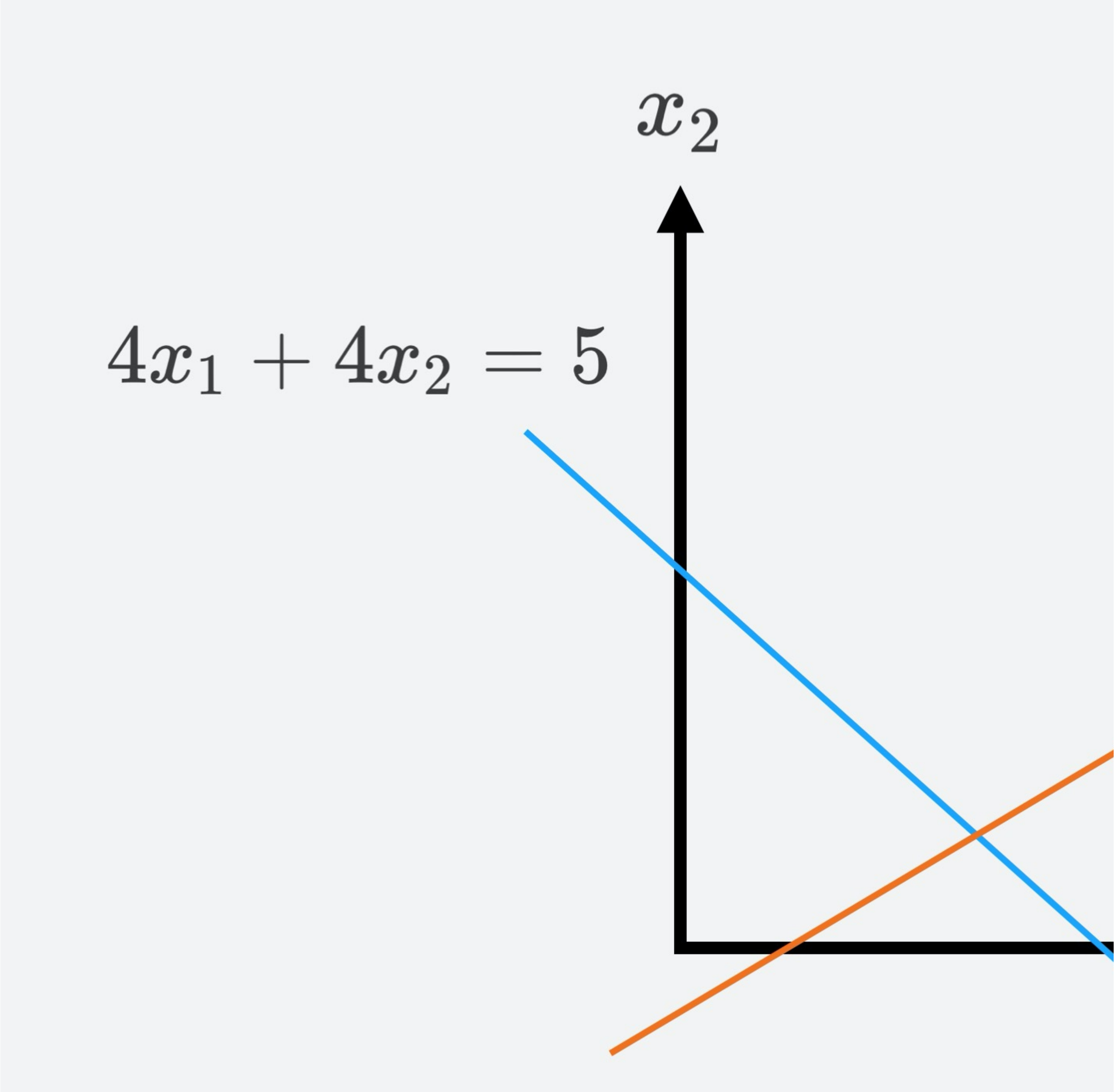
好了，了解了线性方程组解的三种情况，现在我们是时候从几何的角度来看一看线性方程组和它的解了，从几何意义出发有利于你更直观地理解线性方程组。

在一个只有两个变量x_{1},x_{2}的线性方程组中，我们定义一个x_{1},x_{2}平面。在这个平面中，每个线性方程都表达了一条直线。由于线性方程组的唯一解必须同时满足所有的等式，所以，线性方程组的唯一解其实就是线段的相交点，无穷解就是两线重合，而无解的情况，也就是两条线平行。

我拿一个例子来说明，设线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{l}
4 x_{1}+4 x_{2}=5 \\
2 x_{1}-4 x_{2}=1
\end{array}\right.$$

把其中的两个线性方程在x_{1},x_{2}平面中画出来后，我们可以得到两线段的交点$\left(1, \frac{1}{4}\right)$，也就是这个线性方程组的解。



我再把这个概念延伸一下，当遇到三个变量的情况时，每个线性方程在三维空间中表达了一个平面，由于线性方程组的一个解必须同时满足所有的等式，所以，**线性方程组的解其实就是平面，也可以是线、点或者空，空也就是没有共同的平面相交。**

其实还有一个更好的方法来表达和解线性方程组，这个方法就是下一篇要讲的矩阵，在这里我先简单提一下。我们把系数组合成向量，把向量组合成矩阵，也就是说，我们可以把线性方程组写成这样的形式：

$$x_{1}\left|\begin{array}{c}
a_{11} \\
\vdots \\
a_{m1}
\end{array}\right|+x_{2}\left|\begin{array}{c}
a_{12} \\
\vdots \\
c_{m2}
\end{array}\right|+\cdots+x_{n}\left|\begin{array}{c}
a_{1 n} \\
\vdots \\
a_{m n}
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{c}
b_{1} \\
\vdots \\
b_{m}
\end{array}\right|$$

再进一步最终可以写成矩阵的形式：

```
$$\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}
\end{array}\right]\left|\begin{array}{c}
x_{1} \\
\vdots \\
. \\
```

x_{n}
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{c}
b_{1} \\\
\vdots \\\
. \\\
b_{m}
\end{array}\right|$$

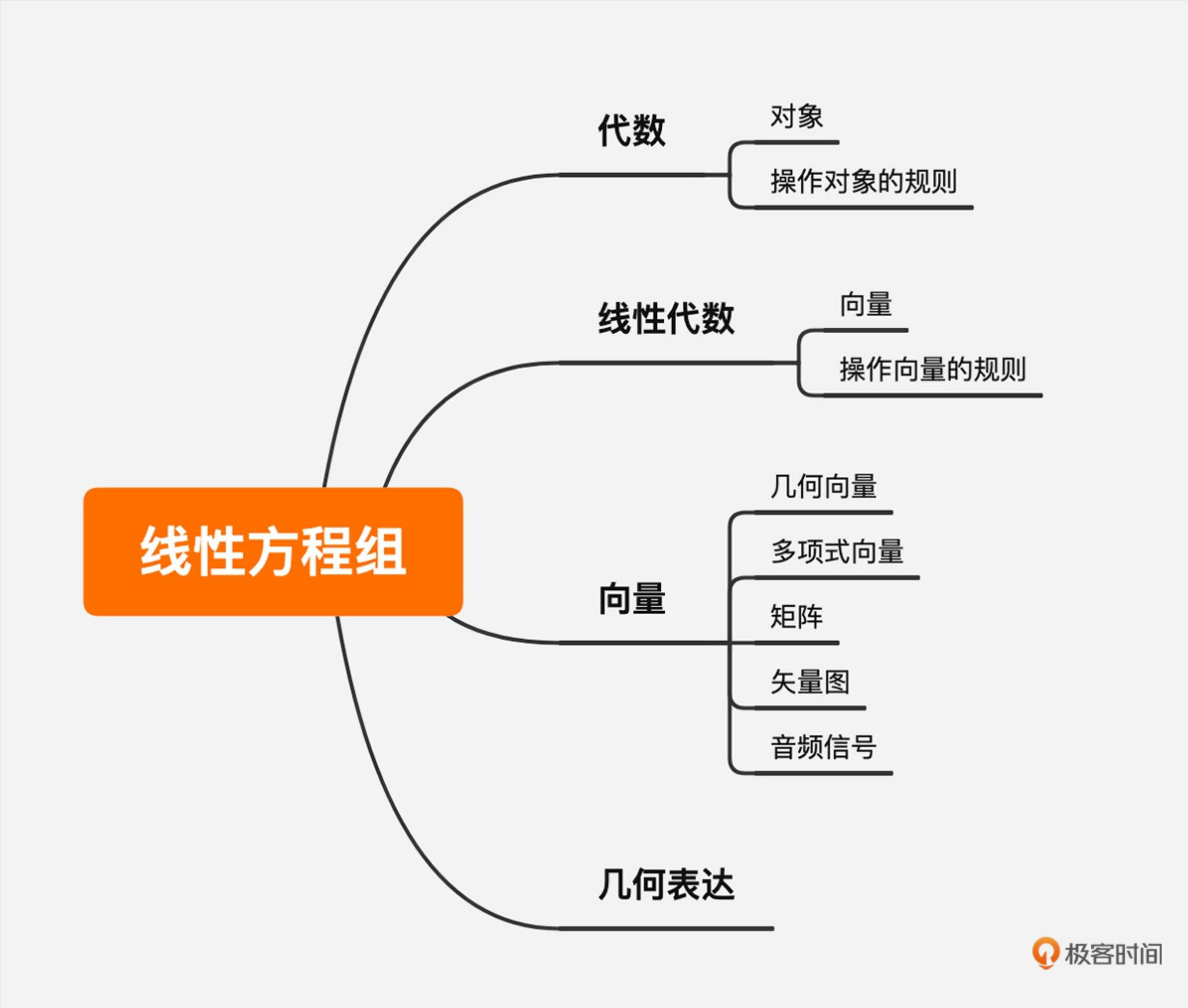
本节小结

好了，到这里这一讲就结束了，我带你总结一下前面讲解的内容。

这节课我带你重新认识了代数和线性代数的概念。代数是构造一系列对象和一系列操作这些对象的规则，线性代数是向量，以及操作这些向量的规则，所以，线性代数是代数的具像化表达。从线性代数，我们引出了向量的基本概念，我带你看了一个和向量有关的所有概念，即线性代数所有核心内容的图。

可以说，线性代数的一切皆从**向量**而来。

最后，我带你从二维平面几何角度，更直观地观察线性方程组和它几种解的情况，**而二维空间的线性方程组的解其实就是线、点或者空，也就是没有共同的线段相交**。你也可以自己试着把它扩展到三维空间几何中来观察，或许会更有趣哦！



线性代数练习场

我们一起来看一个练习题。这是一道极其简单的初中线性方程组题，你可以回顾一下，也为下一节课做好铺垫。

李大叔去年承包了10亩地，种植甲、乙两种蔬菜，共获利18000元。其中甲蔬菜每亩获利2000元，乙蔬菜每亩获利1500元。

请问，李大叔去年甲、乙两种蔬菜各种植了多少亩？

欢迎在留言区晒出你的运算过程和结果。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。