你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天这一节课的内容是基础通关。这里会用5道典型例题，让你巩固一下线性代数的基础知识，这也是进入应用篇学习之前的一次动手机会。从课程上线到现在快有一个月了，这期间我收到了不少同学的提问和建议，有些问题也是我没有想到的，非常有深度，说实话这让我感觉挺意外的，希望你再接再厉。

现在，你可以看一下基础通关的5道例题了，题目和解析都放在了正文中，你可以自己试着做一下。基础通关后，我们应用篇再见。

例题一

找到线性方程组$Ax=b$的所有解，其中：

$$
A=\left[\begin{array}{cc}
1 & 2 \\
3 & 0 \\
-1 & 2
\end{array}\right], b=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法，你可以参考第4节的内容。

首先，形成增广矩阵：

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 1 \\
3 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & 1
\end{array}\right]
$$

接着，分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-3和第二行相加。
2. 第一行和第三行相加。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 1 \\
0 & -6 & -3 \\
0 & 4 & 2
\end{array}\right]
$$

2. 第二行乘$\frac{1}{3}$和第一行相加。
3. 第二行乘$\frac{2}{3}$和第三行相加。
4. 第三行乘$-\frac{1}{6}$。

$$
\left[\begin{array}{llll}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

最后得出该线性方程组的唯一解：

$$

x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2}
\end{array}\right]
$$

例题二

找到线性方程组$Ax=b$的所有解，其中：

$$
A=\left[\begin{array}{lll}
1 & 2 & 3 \\
0 & 2 & 2
\end{array}\right], b=\left[\begin{array}{l}
1 \\
1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法。你可以参考第4节的内容，和例题一不同的是，例题二这里得到的会是无穷解。所以，这一题里找特殊解和通用解的方法是关键。

首先，形成增广矩阵：

$$
\left[\begin{array}{lllll}
1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\
0 & 2 & 2 & 1 & 1
\end{array}\right]
$$

接着，形成增广矩阵：分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-1和第二行相加；
2. 第二行乘1/2。

$$
\left[\begin{array}{lllll}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2}
\end{array}\right]
$$

使用主元列，得到特殊解：

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2} \\
0
\end{array}\right]
$$

下一步，获取线性方程组$Ax=0$的通用解，从增广矩阵的左边，能够立即得出：

$$
\lambda\left[\begin{array}{c}
1 \\
1 \\
-1
\end{array}\right]
$$

最后，把特殊解和通用解组合起来就是：

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2} \\
0
\end{array}\right]+\lambda\left[\begin{array}{c}
1 \\
1 \\
-1
\end{array}\right]
$$

例题三

计算矩阵乘AB。

$$
A=\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 2
\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{ccc}
4 & -1 & 2 \\
0 & 2 & 1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘无法完成，因为A是2行3列矩阵，B也是2行3列矩阵，A和邻居维度不同。

例题四

计算矩阵乘AB。

$$
A=\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 2
\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{cc}
4 & -1 \\
2 & 0 \\
2 & 1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘可以完成，因为两个矩阵的邻居维度相同，拿a_{11}举例：$a_{11}=1 \times 4+2 \times 2+3 \times 2=14$，结果：

$$
A B=\left[\begin{array}{cc}
14 & 2 \\
2 & 2
\end{array}\right]
$$

例题五

假设R^{3}和它的运算$\langle\ \cdot, \cdot \rangle$，$x, y \in R^{3}$，我们有：

$$
\langle x, y\rangle=x^{T} A y, A=\left[\begin{array}{ccc}

4 & 2 & 1 \\\
0 & 4 & -1 \\\
1 & -1 & 5
\end{array}\right]
$$

那么，$\langle\ ·,· \rangle$是内积吗？

解析：

这里考察了内积，以及内积的性质之一：对称性，你可以参考第10节的内容。

选择$x=\left[\begin{array}{lll}1 & 1 & 0\end{array}\right]^{T}$，$y=\left[\begin{array}{lll}1 & 2 & 0\end{array}\right]^{T}$，通过计算，能够得到：

$$
\begin{array}{l}
\langle x, y\rangle=16 \\\
\langle y, x\rangle=14 \\\
\langle x, y\rangle \neq\langle y, x\rangle
\end{array}
$$

于是，$\langle\ ·,· \rangle$是不对称的。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天这一节课的内容是基础通关。这里会用5道典型例题，让你巩固一下线性代数的基础知识，这也是进入应用篇学习之前的一次动手机会。从课程上线到现在快有一个月了，这期间我收到了不少同学的提问和建议，有些问题也是我没有想到的，非常有深度，说实话这让我感觉挺意外的，希望你再接再厉。

现在，你可以看一下基础通关的5道例题了，题目和解析都放在了正文中，你可以自己试着做一下。基础通关后，我们应用篇再见。

例题一

找到线性方程组$Ax=b$的所有解，其中：

$$
A=\left[\begin{array}{cc}
1 & 2 \\\
3 & 0 \\\
-1 & 2
\end{array}\right], b=\left[\begin{array}{c}
1 \\\
0 \\\
1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法，你可以参考第4节的内容。

首先，形成增广矩阵：

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 1 \\\
3 & 0 & 0 \\\
-1 & 2 & 1
\end{array}\right]
$$

接着，分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-3和第二行相加。

2. 第一行和第三行相加。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 1 \\
0 & -6 & -3 \\
0 & 4 & 2
\end{array}\right]
$$

2. 第二行乘$\frac{1}{3}$和第一行相加。
3. 第二行乘$\frac{2}{3}$和第三行相加。
4. 第三行乘$-\frac{1}{6}$。

$$
\left[\begin{array}{llll}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

最后得出该线性方程组的唯一解：

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2}
\end{array}\right]
$$

例题二

找到线性方程组$Ax=b$的所有解，其中：

$$
A=\left[\begin{array}{lll}
1 & 2 & 3 \\
0 & 2 & 2
\end{array}\right], b=\left[\begin{array}{l}
1 \\
1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法。你可以参考第4节的内容，和例题一不同的是，例题二这里得到的会是无穷解。所以，这一题里找特殊解和通用解的方法是关键。

首先，形成增广矩阵：

$$
\left[\begin{array}{lllll}
1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\
0 & 2 & 2 & 1 & 1
\end{array}\right]
$$

接着，形成增广矩阵：分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-1和第二行相加；
2. 第二行乘1/2。

$$
\left[\begin{array}{lllll}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\

0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2}
\end{array}\right]
$$

使用主元列，得到特殊解：

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2} \\
0
\end{array}\right]
$$

下一步，获取线性方程组$Ax=0$的通用解，从增广矩阵的左边，能够立即得出：

$$
\lambda\left[\begin{array}{c}
1 \\
1 \\
-1
\end{array}\right]
$$

最后，把特殊解和通用解组合起来就是：

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2} \\
0
\end{array}\right]+\lambda\left[\begin{array}{c}
1 \\
1 \\
-1
\end{array}\right]
$$

例题三

计算矩阵乘AB。

$$
A=\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 2
\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{ccc}
4 & -1 & 2 \\
0 & 2 & 1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘无法完成，因为A是2行3列矩阵，B也是2行3列矩阵，A和邻居维度不同。

例题四

计算矩阵乘AB。

$$
A=\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 2

\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{cc}
4 & -1 \\
2 & 0 \\
2 & 1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘可以完成，因为两个矩阵的邻居维度相同，拿a_{11}举例：$a_{11}=1 \times 4+2 \times 2+3 \times 2=14$，结果：

$$
A B=\left[\begin{array}{cc}
14 & 2 \\
2 & 2
\end{array}\right]
$$

例题五

假设R^{3}和它的运算$\langle\ \cdot, \cdot \rangle$，$x, y \in R^{3}$，我们有：

$$
\langle x, y\rangle=x^{T} A y, A=\left[\begin{array}{ccc}
4 & 2 & 1 \\
0 & 4 & -1 \\
1 & -1 & 5
\end{array}\right]
$$

那么，$\langle\ \cdot, \cdot \rangle$是内积吗？

解析：

这里考察了内积，以及内积的性质之一：对称性，你可以参考第10节的内容。

选择$x=\left[\begin{array}{lll}1 & 1 & 0\end{array}\right]^{T}$，$y=\left[\begin{array}{lll}1 & 2 & 0\end{array}\right]^{T}$，通过计算，能够得到：

$$
\begin{array}{l}
\langle x, y\rangle=16 \\
\langle y, x\rangle=14 \\
\langle x, y\rangle \neq\langle y, x\rangle
\end{array}
$$

于是，$\langle\ \cdot, \cdot \rangle$是不对称的。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天这一节课的内容是基础通关。这里会用5道典型例题，让你巩固一下线性代数的基础知识，这也是进入应用篇学习之前的一次动手机会。从课程上线到现在快有一个月了，这期间我收到了不少同学的提问和建议，有些问题也是我没有想到的，非常有深度，说实话这让我感觉挺意外的，希望你再接再厉。

现在，你可以看一下基础通关的5道例题了，题目和解析都放在了正文中，你可以自己试着做一下。基础通关后，我们应用篇再见。

例题一

找到线性方程组$Ax=b$的所有解，其中：

$$
A=\left[\begin{array}{cc}
1 & 2 \\

3 & 0 \\
-1 & 2
\end{array}\right], b=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法，你可以参考第4节的内容。

首先，形成增广矩阵：

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 1 \\
3 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & 1
\end{array}\right]
$$

接着，分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-3和第二行相加。
2. 第一行和第三行相加。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 1 \\
0 & -6 & -3 \\
0 & 4 & 2
\end{array}\right]
$$

2. 第二行乘$\frac{1}{3}$和第一行相加。
3. 第二行乘$\frac{2}{3}$和第三行相加。
4. 第三行乘$-\frac{1}{6}$。

$$
\left[\begin{array}{llll}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

最后得出该线性方程组的唯一解：

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2}
\end{array}\right]
$$

例题二

找到线性方程组$Ax=b$的所有解，其中：

$$
A=\left[\begin{array}{lll}
1 & 2 & 3 \\
0 & 2 & 2
\end{array}\right], b=\left[\begin{array}{l}
1 \\

1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法。你可以参考第4节的内容，和例题一不同的是，例题二这里得到的会是无穷解。所以，这一题里找特殊解和通用解的方法是关键。

首先，形成增广矩阵：

$$
\left[\begin{array}{lllll}
1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\
0 & 2 & 2 & 1 & 1
\end{array}\right]
$$

接着，形成增广矩阵：分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-1和第二行相加；
2. 第二行乘1/2。

$$
\left[\begin{array}{lllll}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2}
\end{array}\right]
$$

使用主元列，得到特殊解：

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2} \\
0
\end{array}\right]
$$

下一步，获取线性方程组$Ax=0$的通用解，从增广矩阵的左边，能够立即得出：

$$
\lambda\left[\begin{array}{c}
1 \\
1 \\
-1
\end{array}\right]
$$

最后，把特殊解和通用解组合起来就是：

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2} \\
0
\end{array}\right]+\lambda\left[\begin{array}{c}
1 \\
1 \\
-1
\end{array}\right]
$$

例题三

计算矩阵乘AB。

$$
A=\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 2
\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{ccc}
4 & -1 & 2 \\
0 & 2 & 1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘无法完成，因为A是2行3列矩阵，B也是2行3列矩阵，A和邻居维度不同。

例题四

计算矩阵乘AB。

$$
A=\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 2
\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{cc}
4 & -1 \\
2 & 0 \\
2 & 1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘可以完成，因为两个矩阵的邻居维度相同，拿a_{11}举例：$a_{11}=1 \times 4+2 \times 2+3 \times 2=14$，结果：

$$
A B=\left[\begin{array}{cc}
14 & 2 \\
2 & 2
\end{array}\right]
$$

例题五

假设R^{3}和它的运算$\langle\ \cdot,\cdot \rangle$，$x, y \in R^{3}$，我们有：

$$
\langle x, y\rangle=x^{T} A y, A=\left[\begin{array}{ccc}
4 & 2 & 1 \\
0 & 4 & -1 \\
1 & -1 & 5
\end{array}\right]
$$

那么，$\langle\ \cdot,\cdot \rangle$是内积吗？

解析：

这里考察了内积，以及内积的性质之一：对称性，你可以参考第10节的内容。

选择$x=\left[\begin{array}{lll}1 & 1 & 0\end{array}\right]^{T}$，$y=\left[\begin{array}{lll}1 & 2 & 0\end{array}\right]^{T}$，通过计算，能够得到：

$$

\begin{array}{l}
\langle x, y\rangle=16 \\
\langle y, x\rangle=14 \\
\langle x, y\rangle \neq\langle y, x\rangle
\end{array}
$$

于是，$\langle\ \cdot,\cdot\ \rangle$是不对称的。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天这一节课的内容是基础通关。这里会用5道典型例题，让你巩固一下线性代数的基础知识，这也是进入应用篇学习之前的一次动手机会。从课程上线到现在快有一个月了，这期间我收到了不少同学的提问和建议，有些问题也是我没有想到的，非常有深度，说实话这让我感觉挺意外的，希望你再接再厉。

现在，你可以看一下基础通关的5道例题了，题目和解析都放在了正文中，你可以自己试着做一下。基础通关后，我们应用篇再见。

例题一

找到线性方程组$Ax=b$的所有解，其中：

$$
A=\left[\begin{array}{cc}
1 & 2 \\
3 & 0 \\
-1 & 2
\end{array}\right], b=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法，你可以参考第4节的内容。

首先，形成增广矩阵：

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 1 \\
3 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & 1
\end{array}\right]
$$

接着，分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-3和第二行相加。
2. 第一行和第三行相加。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 1 \\
0 & -6 & -3 \\
0 & 4 & 2
\end{array}\right]
$$

2. 第二行乘$\frac{1}{3}$和第一行相加。
3. 第二行乘$\frac{2}{3}$和第三行相加。
4. 第三行乘$-\frac{1}{6}$。

$$
\left[\begin{array}{llll}

1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

最后得出该线性方程组的唯一解：

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2}
\end{array}\right]
$$

例题二

找到线性方程组$Ax=b$的所有解，其中：

$$
A=\left[\begin{array}{lll}
1 & 2 & 3 \\
0 & 2 & 2
\end{array}\right], b=\left[\begin{array}{l}
1 \\
1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法。你可以参考第4节的内容，和例题一不同的是，例题二这里得到的会是无穷解。所以，这一题里找特殊解和通用解的方法是关键。

首先，形成增广矩阵：

$$
\left[\begin{array}{lllll}
1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\
0 & 2 & 2 & 1 & 1
\end{array}\right]
$$

接着，形成增广矩阵：分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-1和第二行相加；
2. 第二行乘1/2。

$$
\left[\begin{array}{lllll}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2}
\end{array}\right]
$$

使用主元列，得到特殊解：

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2} \\
0
\end{array}\right]
$$

下一步，获取线性方程组$Ax=0$的通用解，从增广矩阵的左边，能够立即得出：

$$
\lambda\left[\begin{array}{c}
1 \\
1 \\
-1
\end{array}\right]
$$

最后，把特殊解和通用解组合起来就是：

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2} \\
0
\end{array}\right]+\lambda\left[\begin{array}{c}
1 \\
1 \\
-1
\end{array}\right]
$$

例题三

计算矩阵乘AB。

$$
A=\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 2
\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{ccc}
4 & -1 & 2 \\
0 & 2 & 1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘无法完成，因为A是2行3列矩阵，B也是2行3列矩阵，A和邻居维度不同。

例题四

计算矩阵乘AB。

$$
A=\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 2
\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{cc}
4 & -1 \\
2 & 0 \\
2 & 1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘可以完成，因为两个矩阵的邻居维度相同，拿a_{11}举例：$a_{11}=1 \times 4+2 \times 2+3 \times 2=14$，结果：

$$
A B=\left[\begin{array}{cc}
14 & 2 \\

2 & 2
\end{array}\right]
$$

例题五

假设R^{3}和它的运算$\langle\cdot,\cdot\rangle$，$x, y \in R^{3}$，我们有：

$$
\langle x, y\rangle=x^{T} A y, A=\left[\begin{array}{ccc}
4 & 2 & 1 \\
0 & 4 & -1 \\
1 & -1 & 5
\end{array}\right]
$$

那么，$\langle\cdot,\cdot\rangle$是内积吗？

解析：

这里考察了内积，以及内积的性质之一：对称性，你可以参考第10节的内容。

选择$x=\left[\begin{array}{lll}1 & 1 & 0\end{array}\right]^{T}$，$y=\left[\begin{array}{lll}1 & 2 & 0\end{array}\right]^{T}$，通过计算，能够得到：

$$
\begin{array}{l}
\langle x, y\rangle=16 \\
\langle y, x\rangle=14 \\
\langle x, y\rangle \neq\langle y, x\rangle
\end{array}
$$

于是，$\langle\cdot,\cdot\rangle$是不对称的。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天这一节课的内容是基础通关。这里会用5道典型例题，让你巩固一下线性代数的基础知识，这也是进入应用篇学习之前的一次动手机会。从课程上线到现在快有一个月了，这期间我收到了不少同学的提问和建议，有些问题也是我没有想到的，非常有深度，说实话这让我感觉挺意外的，希望你再接再厉。

现在，你可以看一下基础通关的5道例题了，题目和解析都放在了正文中，你可以自己试着做一下。基础通关后，我们应用篇再见。

例题一

找到线性方程组$Ax=b$的所有解，其中：

$$
A=\left[\begin{array}{cc}
1 & 2 \\
3 & 0 \\
-1 & 2
\end{array}\right], b=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法，你可以参考第4节的内容。

首先，形成增广矩阵：

$$

\left[\begin{array} {cccc}
1 & 2 & 1 \\
3 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & 1
\end{array}\right]
$$

接着，分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-3和第二行相加。
2. 第一行和第三行相加。

$$
\left[\begin{array} {cccc}
1 & 2 & 1 \\
0 & -6 & -3 \\
0 & 4 & 2
\end{array}\right]
$$

2. 第二行乘$\frac{1} {3}$和第一行相加。
3. 第二行乘$\frac{2} {3}$和第三行相加。
4. 第三行乘$-\frac{1} {6}$。

$$
\left[\begin{array} {llll}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \frac{1} {2} \\
0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

最后得出该线性方程组的唯一解：

$$
x=\left[\begin{array} {l}
0 \\
\frac{1} {2}
\end{array}\right]
$$

例题二

找到线性方程组$Ax=b$的所有解，其中：

$$
A=\left[\begin{array} {lll}
1 & 2 & 3 \\
0 & 2 & 2
\end{array}\right], b=\left[\begin{array} {l}
1 \\
1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法。你可以参考第4节的内容，和例题一不同的是，例题二这里得到的会是无穷解。所以，这一题里找特殊解和通用解的方法是关键。

首先，形成增广矩阵：

$$
\left[\begin{array} {lllll}
1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\
0 & 2 & 2 & 1 & 1
\end{array}\right]

$$

接着，形成增广矩阵：分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-1和第二行相加；
2. 第二行乘1/2。

$$
\left[\begin{array}{llll}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2}
\end{array}\right]
$$

使用主元列，得到特殊解：

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2} \\
0
\end{array}\right]
$$

下一步，获取线性方程组$Ax=0$的通用解，从增广矩阵的左边，能够立即得出：

$$
\lambda\left[\begin{array}{c}
1 \\
1 \\
-1
\end{array}\right]
$$

最后，把特殊解和通用解组合起来就是：

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2} \\
0
\end{array}\right]+\lambda\left[\begin{array}{c}
1 \\
1 \\
-1
\end{array}\right]
$$

例题三

计算矩阵乘AB。

$$
A=\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 2
\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{ccc}
4 & -1 & 2 \\
0 & 2 & 1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘无法完成，因为A是2行3列矩阵，B也是2行3列矩阵，A和邻居维度不同。

例题四

计算矩阵乘AB。

$$
A=\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 2
\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{cc}
4 & -1 \\
2 & 0 \\
2 & 1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘可以完成，因为两个矩阵的邻居维度相同，拿a_{11}举例：$a_{11}=1 \times 4+2 \times 2+3 \times 2=14$，结果：

$$
A B=\left[\begin{array}{cc}
14 & 2 \\
2 & 2
\end{array}\right]
$$

例题五

假设R^{3}和它的运算$\langle\ \cdot,\cdot \rangle$，$x, y \in R^{3}$，我们有：

$$
\langle x, y\rangle=x^{T} A y, A=\left[\begin{array}{ccc}
4 & 2 & 1 \\
0 & 4 & -1 \\
1 & -1 & 5
\end{array}\right]
$$

那么，$\langle\ \cdot,\cdot \rangle$是内积吗？

解析：

这里考察了内积，以及内积的性质之一：对称性，你可以参考第10节的内容。

选择$x=\left[\begin{array}{lll}1 & 1 & 0\end{array}\right]^{T}$，$y=\left[\begin{array}{lll}1 & 2 & 0\end{array}\right]^{T}$，通过计算，能够得到：

$$
\begin{array}{l}
\langle x, y\rangle=16 \\
\langle y, x\rangle=14 \\
\langle x, y\rangle \neq\langle y, x\rangle
\end{array}
$$

于是，$\langle\ \cdot,\cdot \rangle$是不对称的。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天这一节课的内容是基础通关。这里会用5道典型例题，让你巩固一下线性代数的基础知识，这也是进入应用篇学习之前的一次动手机会。从课程上线到现在快有一个月了，这期间我收到了不少同学的提问和建议，有些问题也是我没有想到的，非常有深度，说实话这让我感觉挺意外的，希望你再接再厉。

现在，你可以看一下基础通关的5道例题了，题目和解析都放在了正文中，你可以自己试着做一下。基础通关后，我们应用篇再见。

例题一

找到线性方程组$Ax=b$的所有解，其中：

$$
A=\left[\begin{array}{cc}
1 & 2 \\
3 & 0 \\
-1 & 2
\end{array}\right], b=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法，你可以参考第4节的内容。

首先，形成增广矩阵：

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 1 \\
3 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & 1
\end{array}\right]
$$

接着，分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-3和第二行相加。
2. 第一行和第三行相加。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 1 \\
0 & -6 & -3 \\
0 & 4 & 2
\end{array}\right]
$$

2. 第二行乘$\frac{1}{3}$和第一行相加。
3. 第二行乘$\frac{2}{3}$和第三行相加。
4. 第三行乘$-\frac{1}{6}$。

$$
\left[\begin{array}{llll}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

最后得出该线性方程组的唯一解：

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2}
\end{array}\right]
$$

例题二

找到线性方程组$Ax=b$的所有解，其中：

$$
A=\left[\begin{array}{lll}
1 & 2 & 3 \\
0 & 2 & 2
\end{array}\right], b=\left[\begin{array}{l}
1 \\
1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法。你可以参考第4节的内容，和例题一不同的是，例题二这里得到的会是无穷解。所以，这一题里找特殊解和通用解的方法是关键。

首先，形成增广矩阵：

$$
\left[\begin{array}{lllll}
1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\
0 & 2 & 2 & 1 & 1
\end{array}\right]
$$

接着，形成增广矩阵：分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-1和第二行相加；
2. 第二行乘1/2。

$$
\left[\begin{array}{lllll}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2}
\end{array}\right]
$$

使用主元列，得到特殊解：

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2} \\
0
\end{array}\right]
$$

下一步，获取线性方程组$Ax=0$的通用解，从增广矩阵的左边，能够立即得出：

$$
\lambda\left[\begin{array}{c}
1 \\
1 \\
-1
\end{array}\right]
$$

最后，把特殊解和通用解组合起来就是：

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2} \\
0
\end{array}\right]+\lambda\left[\begin{array}{c}
1 \\

1 \\
-1
\end{array}\right]
$$

例题三

计算矩阵乘AB。

$$
A=\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 2
\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{ccc}
4 & -1 & 2 \\
0 & 2 & 1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘无法完成，因为A是2行3列矩阵，B也是2行3列矩阵，A和邻居维度不同。

例题四

计算矩阵乘AB。

$$
A=\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 2
\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{cc}
4 & -1 \\
2 & 0 \\
2 & 1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘可以完成，因为两个矩阵的邻居维度相同，拿a_{11}举例：$a_{11}=1 \times 4+2 \times 2+3 \times 2=14$，结果：

$$
A B=\left[\begin{array}{cc}
14 & 2 \\
2 & 2
\end{array}\right]
$$

例题五

假设R^{3}和它的运算$\langle\ \cdot, \cdot \rangle$，$x, y \in R^{3}$，我们有：

$$
\langle x, y\rangle=x^{T} A y, A=\left[\begin{array}{ccc}
4 & 2 & 1 \\
0 & 4 & -1 \\
1 & -1 & 5
\end{array}\right]
$$

那么，$\langle\ \cdot, \cdot \rangle$是内积吗？

解析：

这里考察了内积，以及内积的性质之一：对称性，你可以参考第10节的内容。

选择$x=\left[\begin{array}{lll}1 & 1 & 0\end{array}\right]^{T}$，$y=\left[\begin{array}{lll}1 & 2 & 0\end{array}\right]^{T}$，通过计算，能够得到：

$$
\begin{array}{l}
\langle x, y\rangle=16 \\
\langle y, x\rangle=14 \\
\langle x, y\rangle \neq\langle y, x\rangle
\end{array}
$$

于是，$\langle\ \cdot,\cdot \rangle$是不对称的。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天这一节课的内容是基础通关。这里会用5道典型例题，让你巩固一下线性代数的基础知识，这也是进入应用篇学习之前的一次动手机会。从课程上线到现在快有一个月了，这期间我收到了不少同学的提问和建议，有些问题也是我没有想到的，非常有深度，说实话这让我感觉挺意外的，希望你再接再厉。

现在，你可以看一下基础通关的5道例题了，题目和解析都放在了正文中，你可以自己试着做一下。基础通关后，我们应用篇再见。

例题一

找到线性方程组$Ax=b$的所有解，其中：

$$
A=\left[\begin{array}{cc}
1 & 2 \\
3 & 0 \\
-1 & 2
\end{array}\right], b=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法，你可以参考第4节的内容。

首先，形成增广矩阵：

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 1 \\
3 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & 1
\end{array}\right]
$$

接着，分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-3和第二行相加。
2. 第一行和第三行相加。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 1 \\
0 & -6 & -3 \\
0 & 4 & 2
\end{array}\right]

$$

2. 第二行乘$\frac{1}{3}$和第一行相加。
3. 第二行乘$\frac{2}{3}$和第三行相加。
4. 第三行乘$-\frac{1}{6}$。

$$
\left[\begin{array}{llll}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

最后得出该线性方程组的唯一解：

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2}
\end{array}\right]
$$

例题二

找到线性方程组$Ax=b$的所有解，其中：

$$
A=\left[\begin{array}{lll}
1 & 2 & 3 \\
0 & 2 & 2
\end{array}\right], b=\left[\begin{array}{l}
1 \\
1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法。你可以参考第4节的内容，和例题一不同的是，例题二这里得到的会是无穷解。所以，这一题里找特殊解和通用解的方法是关键。

首先，形成增广矩阵：

$$
\left[\begin{array}{llll}
1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\
0 & 2 & 2 & 1 & 1
\end{array}\right]
$$

接着，形成增广矩阵：分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-1和第二行相加；
2. 第二行乘1/2。

$$
\left[\begin{array}{llll}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2}
\end{array}\right]
$$

使用主元列，得到特殊解：

$$
x=\left[\begin{array}{l}

0 \\
\frac{1}{2} \\
0
\end{array}\right]
$$

下一步，获取线性方程组$Ax=0$的通用解，从增广矩阵的左边，能够立即得出：

$$
\lambda\left[\begin{array}{c}
1 \\
1 \\
-1
\end{array}\right]
$$

最后，把特殊解和通用解组合起来就是：

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2} \\
0
\end{array}\right]+\lambda\left[\begin{array}{c}
1 \\
1 \\
-1
\end{array}\right]
$$

例题三

计算矩阵乘AB。

$$
A=\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 2
\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{ccc}
4 & -1 & 2 \\
0 & 2 & 1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘无法完成，因为A是2行3列矩阵，B也是2行3列矩阵，A和邻居维度不同。

例题四

计算矩阵乘AB。

$$
A=\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 2
\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{cc}
4 & -1 \\
2 & 0 \\
2 & 1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘可以完成，因为两个矩阵的邻居维度相同，拿a_{11}举例：$a_{11}=1 \times 4+2 \times 2+3 \times 2=14$，结果：

$$
A B=\left[\begin{array}{cc}
14 & 2 \\
2 & 2
\end{array}\right]
$$

例题五

假设R^{3}和它的运算$\langle\cdot,\cdot\rangle$，$x, y \in R^{3}$，我们有：

$$
\langle x, y\rangle=x^{T} A y, A=\left[\begin{array}{ccc}
4 & 2 & 1 \\
0 & 4 & -1 \\
1 & -1 & 5
\end{array}\right]
$$

那么，$\langle\cdot,\cdot\rangle$是内积吗？

解析：

这里考察了内积，以及内积的性质之一：对称性，你可以参考第10节的内容。

选择$x=\left[\begin{array}{lll}1 & 1 & 0\end{array}\right]^{T}$，$y=\left[\begin{array}{lll}1 & 2 & 0\end{array}\right]^{T}$，通过计算，能够得到：

$$
\begin{array}{l}
\langle x, y\rangle=16 \\
\langle y, x\rangle=14 \\
\langle x, y\rangle \neq\langle y, x\rangle
\end{array}
$$

于是，$\langle\cdot,\cdot\rangle$是不对称的。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天这一节课的内容是基础通关。这里会用5道典型例题，让你巩固一下线性代数的基础知识，这也是进入应用篇学习之前的一次动手机会。从课程上线到现在快有一个月了，这期间我收到了不少同学的提问和建议，有些问题也是我没有想到的，非常有深度，说实话这让我感觉挺意外的，希望你再接再厉。

现在，你可以看一下基础通关的5道例题了，题目和解析都放在了正文中，你可以自己试着做一下。基础通关后，我们应用篇再见。

例题一

找到线性方程组$Ax=b$的所有解，其中：

$$
A=\left[\begin{array}{cc}
1 & 2 \\
3 & 0 \\
-1 & 2
\end{array}\right], b=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法，你可以参考第4节的内容。

首先，形成增广矩阵：

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 1 \\
3 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & 1
\end{array}\right]
$$

接着，分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-3和第二行相加。
2. 第一行和第三行相加。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 1 \\
0 & -6 & -3 \\
0 & 4 & 2
\end{array}\right]
$$

2. 第二行乘$\frac{1}{3}$和第一行相加。
3. 第二行乘$\frac{2}{3}$和第三行相加。
4. 第三行乘$-\frac{1}{6}$。

$$
\left[\begin{array}{llll}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

最后得出该线性方程组的唯一解：

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2}
\end{array}\right]
$$

例题二

找到线性方程组$Ax=b$的所有解，其中：

$$
A=\left[\begin{array}{lll}
1 & 2 & 3 \\
0 & 2 & 2
\end{array}\right], b=\left[\begin{array}{l}
1 \\
1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法。你可以参考第4节的内容，和例题一不同的是，例题二这里得到的会是无穷解。所以，这一题里找特殊解和通用解的方法是关键。

首先，形成增广矩阵：

$$
\left[\begin{array}{lllll}
1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\
0 & 2 & 2 & 1 & 1
\end{array}\right]
$$

接着，形成增广矩阵：分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-1和第二行相加；
2. 第二行乘1/2。

$$
\left[\begin{array}{lllll}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2}
\end{array}\right]
$$

使用主元列，得到特殊解：

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2} \\
0
\end{array}\right]
$$

下一步，获取线性方程组$Ax=0$的通用解，从增广矩阵的左边，能够立即得出：

$$
\lambda\left[\begin{array}{c}
1 \\
1 \\
-1
\end{array}\right]
$$

最后，把特殊解和通用解组合起来就是：

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2} \\
0
\end{array}\right]+\lambda\left[\begin{array}{c}
1 \\
1 \\
-1
\end{array}\right]
$$

例题三

计算矩阵乘AB。

$$
A=\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 2
\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{ccc}
4 & -1 & 2 \\
0 & 2 & 1
\end{array}\right]

$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘无法完成，因为A是2行3列矩阵，B也是2行3列矩阵，A和邻居维度不同。

例题四

计算矩阵乘AB。

$$
A=\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 2
\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{cc}
4 & -1 \\
2 & 0 \\
2 & 1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘可以完成，因为两个矩阵的邻居维度相同，拿a_{11}举例：$a_{11}=1 \times 4+2 \times 2+3 \times 2=14$，结果：

$$
A B=\left[\begin{array}{cc}
14 & 2 \\
2 & 2
\end{array}\right]
$$

例题五

假设R^{3}和它的运算$\langle\ \cdot, \cdot \rangle$，$x, y \in R^{3}$，我们有：

$$
\langle x, y\rangle=x^{T} A y, A=\left[\begin{array}{ccc}
4 & 2 & 1 \\
0 & 4 & -1 \\
1 & -1 & 5
\end{array}\right]
$$

那么，$\langle\ \cdot, \cdot \rangle$是内积吗？

解析：

这里考察了内积，以及内积的性质之一：对称性，你可以参考第10节的内容。

选择$x=\left[\begin{array}{lll}1 & 1 & 0\end{array}\right]^{T}$，$y=\left[\begin{array}{lll}1 & 2 & 0\end{array}\right]^{T}$，通过计算，能够得到：

$$
\begin{array}{l}
\langle x, y\rangle=16 \\
\langle y, x\rangle=14 \\
\langle x, y\rangle \neq\langle y, x\rangle
\end{array}
$$

于是，$\langle\ \cdot, \cdot \rangle$是不对称的。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天这一节课的内容是基础通关。这里会用5道典型例题，让你巩固一下线性代数的基础知识，这也是进入应用篇学习之前的一次动手机会。从课程上线到现在快有一个月了，这期间我收到了不少同学的提问和建议，有些问题也是我没有想到的，非常有深度，说实话这让我感觉挺意外的，希望你再接再厉。

现在，你可以看一下基础通关的5道例题了，题目和解析都放在了正文中，你可以自己试着做一下。基础通关后，我们应用篇再见。

例题一

找到线性方程组$Ax=b$的所有解，其中：

$$
A=\left[\begin{array}{cc}
1 & 2 \\
3 & 0 \\
-1 & 2
\end{array}\right], b=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法，你可以参考第4节的内容。

首先，形成增广矩阵：

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 1 \\
3 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & 1
\end{array}\right]
$$

接着，分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-3和第二行相加。
2. 第一行和第三行相加。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 1 \\
0 & -6 & -3 \\
0 & 4 & 2
\end{array}\right]
$$

2. 第二行乘$\frac{1}{3}$和第一行相加。
3. 第二行乘$\frac{2}{3}$和第三行相加。
4. 第三行乘$-\frac{1}{6}$。

$$
\left[\begin{array}{llll}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

最后得出该线性方程组的唯一解：

$$

x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2}
\end{array}\right]
$$

例题二

找到线性方程组$Ax=b$的所有解，其中：

$$
A=\left[\begin{array}{lll}
1 & 2 & 3 \\
0 & 2 & 2
\end{array}\right], b=\left[\begin{array}{l}
1 \\
1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法。你可以参考第4节的内容，和例题一不同的是，例题二这里得到的会是无穷解。所以，这一题里找特殊解和通用解的方法是关键。

首先，形成增广矩阵：

$$
\left[\begin{array}{lllll}
1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\
0 & 2 & 2 & 1 & 1
\end{array}\right]
$$

接着，形成增广矩阵：分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-1和第二行相加；
2. 第二行乘1/2。

$$
\left[\begin{array}{lllll}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2}
\end{array}\right]
$$

使用主元列，得到特殊解：

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2} \\
0
\end{array}\right]
$$

下一步，获取线性方程组$Ax=0$的通用解，从增广矩阵的左边，能够立即得出：

$$
\lambda\left[\begin{array}{c}
1 \\
1 \\
-1
\end{array}\right]
$$

最后，把特殊解和通用解组合起来就是：

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2} \\
0
\end{array}\right]+\lambda\left[\begin{array}{c}
1 \\
1 \\
-1
\end{array}\right]
$$

例题三

计算矩阵乘AB。

$$
A=\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 2
\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{ccc}
4 & -1 & 2 \\
0 & 2 & 1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘无法完成，因为A是2行3列矩阵，B也是2行3列矩阵，A和邻居维度不同。

例题四

计算矩阵乘AB。

$$
A=\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 2
\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{cc}
4 & -1 \\
2 & 0 \\
2 & 1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘可以完成，因为两个矩阵的邻居维度相同，拿a_{11}举例：$a_{11}=1 \times 4+2 \times 2+3 \times 2=14$，结果：

$$
A B=\left[\begin{array}{cc}
14 & 2 \\
2 & 2
\end{array}\right]
$$

例题五

假设R^{3}和它的运算$\langle\ \cdot,\cdot \rangle$，$x, y \in R^{3}$，我们有：

$$
\langle x, y\rangle=x^{T} A y, A=\left[\begin{array}{ccc}

4 & 2 & 1 \\
0 & 4 & -1 \\
1 & -1 & 5
\end{array}\right]
$$

那么，$\langle\ \cdot,\cdot \rangle$是内积吗？

解析：

这里考察了内积，以及内积的性质之一：对称性，你可以参考第10节的内容。

选择$x=\left[\begin{array}{lll}1 & 1 & 0\end{array}\right]^{T}$，$y=\left[\begin{array}{lll}1 & 2 & 0\end{array}\right]^{T}$，通过计算，能够得到：

$$
\begin{array}{l}
\langle x, y\rangle=16 \\
\langle y, x\rangle=14 \\
\langle x, y\rangle \neq\langle y, x\rangle
\end{array}
$$

于是，$\langle\ \cdot,\cdot \rangle$是不对称的。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天这一节课的内容是基础通关。这里会用5道典型例题，让你巩固一下线性代数的基础知识，这也是进入应用篇学习之前的一次动手机会。从课程上线到现在快有一个月了，这期间我收到了不少同学的提问和建议，有些问题也是我没有想到的，非常有深度，说实话这让我感觉挺意外的，希望你再接再厉。

现在，你可以看一下基础通关的5道例题了，题目和解析都放在了正文中，你可以自己试着做一下。基础通关后，我们应用篇再见。

例题一

找到线性方程组$Ax=b$的所有解，其中：

$$
A=\left[\begin{array}{cc}
1 & 2 \\
3 & 0 \\
-1 & 2
\end{array}\right], b=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法，你可以参考第4节的内容。

首先，形成增广矩阵：

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 1 \\
3 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & 1
\end{array}\right]
$$

接着，分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-3和第二行相加。

2. 第一行和第三行相加。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 1 \\
0 & -6 & -3 \\
0 & 4 & 2
\end{array}\right]
$$

2. 第二行乘$\frac{1}{3}$和第一行相加。
3. 第二行乘$\frac{2}{3}$和第三行相加。
4. 第三行乘$-\frac{1}{6}$。

$$
\left[\begin{array}{llll}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

最后得出该线性方程组的唯一解：

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2}
\end{array}\right]
$$

例题二

找到线性方程组$Ax=b$的所有解，其中：

$$
A=\left[\begin{array}{lll}
1 & 2 & 3 \\
0 & 2 & 2
\end{array}\right], b=\left[\begin{array}{l}
1 \\
1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法。你可以参考第4节的内容，和例题一不同的是，例题二这里得到的会是无穷解。所以，这一题里找特殊解和通用解的方法是关键。

首先，形成增广矩阵：

$$
\left[\begin{array}{lllll}
1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\
0 & 2 & 2 & 1 & 1
\end{array}\right]
$$

接着，形成增广矩阵：分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-1和第二行相加；
2. 第二行乘1/2。

$$
\left[\begin{array}{lllll}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\

0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2}
\end{array}\right]
$$

使用主元列，得到特殊解：

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2} \\
0
\end{array}\right]
$$

下一步，获取线性方程组$Ax=0$的通用解，从增广矩阵的左边，能够立即得出：

$$
\lambda\left[\begin{array}{c}
1 \\
1 \\
-1
\end{array}\right]
$$

最后，把特殊解和通用解组合起来就是：

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2} \\
0
\end{array}\right]+\lambda\left[\begin{array}{c}
1 \\
1 \\
-1
\end{array}\right]
$$

例题三

计算矩阵乘AB。

$$
A=\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 2
\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{ccc}
4 & -1 & 2 \\
0 & 2 & 1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘无法完成，因为A是2行3列矩阵，B也是2行3列矩阵，A和邻居维度不同。

例题四

计算矩阵乘AB。

$$
A=\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 2

\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{cc}
4 & -1 \\
2 & 0 \\
2 & 1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘可以完成，因为两个矩阵的邻居维度相同，拿a_{11}举例：$a_{11}=1 \times 4+2 \times 2+3 \times 2=14$，结果：

$$
A B=\left[\begin{array}{cc}
14 & 2 \\
2 & 2
\end{array}\right]
$$

例题五

假设R^{3}和它的运算$\langle\ ·,· \rangle$，$x, y \in R^{3}$，我们有：

$$
\langle x, y\rangle=x^{T} A y, A=\left[\begin{array}{ccc}
4 & 2 & 1 \\
0 & 4 & -1 \\
1 & -1 & 5
\end{array}\right]
$$

那么，$\langle\ ·,· \rangle$是内积吗？

解析：

这里考察了内积，以及内积的性质之一：对称性，你可以参考第10节的内容。

选择$x=\left[\begin{array}{lll}1 & 1 & 0\end{array}\right]^{T}$，$y=\left[\begin{array}{lll}1 & 2 & 0\end{array}\right]^{T}$，通过计算，能够得到：

$$
\begin{array}{l}
\langle x, y\rangle=16 \\
\langle y, x\rangle=14 \\
\langle x, y\rangle \neq\langle y, x\rangle
\end{array}
$$

于是，$\langle\ ·,· \rangle$是不对称的。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天这一节课的内容是基础通关。这里会用5道典型例题，让你巩固一下线性代数的基础知识，这也是进入应用篇学习之前的一次动手机会。从课程上线到现在快有一个月了，这期间我收到了不少同学的提问和建议，有些问题也是我没有想到的，非常有深度，说实话这让我感觉挺意外的，希望你再接再厉。

现在，你可以看一下基础通关的5道例题了，题目和解析都放在了正文中，你可以自己试着做一下。基础通关后，我们应用篇再见。

例题一

找到线性方程组$Ax=b$的所有解，其中：

$$
A=\left[\begin{array}{cc}
1 & 2 \\

3 & 0 \\
-1 & 2
\end{array}\right], b=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法，你可以参考第4节的内容。

首先，形成增广矩阵：

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 1 \\
3 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & 1
\end{array}\right]
$$

接着，分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-3和第二行相加。
2. 第一行和第三行相加。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 1 \\
0 & -6 & -3 \\
0 & 4 & 2
\end{array}\right]
$$

2. 第二行乘$\frac{1}{3}$和第一行相加。
3. 第二行乘$\frac{2}{3}$和第三行相加。
4. 第三行乘$-\frac{1}{6}$。

$$
\left[\begin{array}{llll}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

最后得出该线性方程组的唯一解：

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2}
\end{array}\right]
$$

例题二

找到线性方程组$Ax=b$的所有解，其中：

$$
A=\left[\begin{array}{lll}
1 & 2 & 3 \\
0 & 2 & 2
\end{array}\right], b=\left[\begin{array}{l}
1 \\

1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法。你可以参考第4节的内容，和例题一不同的是，例题二这里得到的会是无穷解。所以，这一题里找特殊解和通用解的方法是关键。

首先，形成增广矩阵：

$$
\left[\begin{array}{lllll}
1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\
0 & 2 & 2 & 1 & 1
\end{array}\right]
$$

接着，形成增广矩阵：分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-1和第二行相加；
2. 第二行乘1/2。

$$
\left[\begin{array}{lllll}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2}
\end{array}\right]
$$

使用主元列，得到特殊解：

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2} \\
0
\end{array}\right]
$$

下一步，获取线性方程组$Ax=0$的通用解，从增广矩阵的左边，能够立即得出：

$$
\lambda\left[\begin{array}{c}
1 \\
1 \\
-1
\end{array}\right]
$$

最后，把特殊解和通用解组合起来就是：

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2} \\
0
\end{array}\right]+\lambda\left[\begin{array}{c}
1 \\
1 \\
-1
\end{array}\right]
$$

例题三

计算矩阵乘AB。

$$
A=\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 2
\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{ccc}
4 & -1 & 2 \\
0 & 2 & 1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘无法完成，因为A是2行3列矩阵，B也是2行3列矩阵，A和邻居维度不同。

例题四

计算矩阵乘AB。

$$
A=\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 2
\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{cc}
4 & -1 \\
2 & 0 \\
2 & 1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘可以完成，因为两个矩阵的邻居维度相同，拿a_{11}举例：$a_{11}=1 \times 4+2 \times 2+3 \times 2=14$，结果：

$$
A B=\left[\begin{array}{cc}
14 & 2 \\
2 & 2
\end{array}\right]
$$

例题五

假设R^{3}和它的运算$\langle\ \cdot,\cdot \rangle$，$x, y \in R^{3}$，我们有：

$$
\langle x, y\rangle=x^{T} A y, A=\left[\begin{array}{ccc}
4 & 2 & 1 \\
0 & 4 & -1 \\
1 & -1 & 5
\end{array}\right]
$$

那么，$\langle\ \cdot,\cdot \rangle$是内积吗？

解析：

这里考察了内积，以及内积的性质之一：对称性，你可以参考第10节的内容。

选择$x=\left[\begin{array}{lll}1 & 1 & 0\end{array}\right]^{T}$，$y=\left[\begin{array}{lll}1 & 2 & 0\end{array}\right]^{T}$，通过计算，能够得到：

$$

$$
\begin{array}{l}
\langle x, y\rangle=16 \\
\langle y, x\rangle=14 \\
\langle x, y\rangle \neq\langle y, x\rangle
\end{array}
$$

于是，$\langle\ \cdot,\cdot \rangle$是不对称的。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天这一节课的内容是基础通关。这里会用5道典型例题，让你巩固一下线性代数的基础知识，这也是进入应用篇学习之前的一次动手机会。从课程上线到现在快有一个月了，这期间我收到了不少同学的提问和建议，有些问题也是我没有想到的，非常有深度，说实话这让我感觉挺意外的，希望你再接再厉。

现在，你可以看一下基础通关的5道例题了，题目和解析都放在了正文中，你可以自己试着做一下。基础通关后，我们应用篇再见。

例题一

找到线性方程组$Ax=b$的所有解，其中：

$$
A=\left[\begin{array}{cc}
1 & 2 \\
3 & 0 \\
-1 & 2
\end{array}\right], b=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法，你可以参考第4节的内容。

首先，形成增广矩阵：

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 1 \\
3 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & 1
\end{array}\right]
$$

接着，分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-3和第二行相加。
2. 第一行和第三行相加。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 1 \\
0 & -6 & -3 \\
0 & 4 & 2
\end{array}\right]
$$

2. 第二行乘$\frac{1}{3}$和第一行相加。
3. 第二行乘$\frac{2}{3}$和第三行相加。
4. 第三行乘$-\frac{1}{6}$。

$$
\left[\begin{array}{llll}

1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

最后得出该线性方程组的唯一解：

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2}
\end{array}\right]
$$

例题二

找到线性方程组$Ax=b$的所有解，其中：

$$
A=\left[\begin{array}{lll}
1 & 2 & 3 \\
0 & 2 & 2
\end{array}\right], b=\left[\begin{array}{l}
1 \\
1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法。你可以参考第4节的内容，和例题一不同的是，例题二这里得到的会是无穷解。所以，这一题里找特殊解和通用解的方法是关键。

首先，形成增广矩阵：

$$
\left[\begin{array}{lllll}
1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\
0 & 2 & 2 & 1 & 1
\end{array}\right]
$$

接着，形成增广矩阵：分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-1和第二行相加；
2. 第二行乘1/2。

$$
\left[\begin{array}{lllll}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2}
\end{array}\right]
$$

使用主元列，得到特殊解：

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2} \\
0
\end{array}\right]
$$

下一步，获取线性方程组$Ax=0$的通用解，从增广矩阵的左边，能够立即得出：

$$
\lambda\left[\begin{array}{c}
1 \\
1 \\
-1
\end{array}\right]
$$

最后，把特殊解和通用解组合起来就是：

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2} \\
0
\end{array}\right]+\lambda\left[\begin{array}{c}
1 \\
1 \\
-1
\end{array}\right]
$$

例题三

计算矩阵乘AB。

$$
A=\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 2
\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{ccc}
4 & -1 & 2 \\
0 & 2 & 1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘无法完成，因为A是2行3列矩阵，B也是2行3列矩阵，A和邻居维度不同。

例题四

计算矩阵乘AB。

$$
A=\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 2
\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{cc}
4 & -1 \\
2 & 0 \\
2 & 1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘可以完成，因为两个矩阵的邻居维度相同，拿a_{11}举例：$a_{11}=1 \times 4+2 \times 2+3 \times 2=14$，结果：

$$
A B=\left[\begin{array}{cc}
14 & 2 \\

2 & 2
\end{array}\right]
$$

例题五

假设R^{3}和它的运算$\langle\ \cdot,\cdot\ \rangle$，$x, y \in R^{3}$，我们有：

$$
\langle x, y\rangle=x^{T} A y, A=\left[\begin{array}{ccc}
4 & 2 & 1 \\
0 & 4 & -1 \\
1 & -1 & 5
\end{array}\right]
$$

那么，$\langle\ \cdot,\cdot\ \rangle$是内积吗？

解析：

这里考察了内积，以及内积的性质之一：对称性，你可以参考第10节的内容。

选择$x=\left[\begin{array}{lll}1 & 1 & 0\end{array}\right]^{T}$，$y=\left[\begin{array}{lll}1 & 2 & 0\end{array}\right]^{T}$，通过计算，能够得到：

$$
\begin{array}{l}
\langle x, y\rangle=16 \\
\langle y, x\rangle=14 \\
\langle x, y\rangle \neq\langle y, x\rangle
\end{array}
$$

于是，$\langle\ \cdot,\cdot\ \rangle$是不对称的。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天这一节课的内容是基础通关。这里会用5道典型例题，让你巩固一下线性代数的基础知识，这也是进入应用篇学习之前的一次动手机会。从课程上线到现在快有一个月了，这期间我收到了不少同学的提问和建议，有些问题也是我没有想到的，非常有深度，说实话这让我感觉挺意外的，希望你再接再厉。

现在，你可以看一下基础通关的5道例题了，题目和解析都放在了正文中，你可以自己试着做一下。基础通关后，我们应用篇再见。

例题一

找到线性方程组$Ax=b$的所有解，其中：

$$
A=\left[\begin{array}{cc}
1 & 2 \\
3 & 0 \\
-1 & 2
\end{array}\right], b=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法，你可以参考第4节的内容。

首先，形成增广矩阵：

$$

\left[\begin{array} {cccc}
1 & 2 & 1 \\\
3 & 0 & 0 \\\
-1 & 2 & 1
\end{array}\right]
$$

接着，分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-3和第二行相加。
2. 第一行和第三行相加。

$$
\left[\begin{array} {cccc}
1 & 2 & 1 \\\
0 & -6 & -3 \\\
0 & 4 & 2
\end{array}\right]
$$

2. 第二行乘$\frac{1}{3}$和第一行相加。
3. 第二行乘$\frac{2}{3}$和第三行相加。
4. 第三行乘$-\frac{1}{6}$。

$$
\left[\begin{array} {llll}
1 & 0 & 0 \\\
0 & 1 & \frac{1}{2} \\\
0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

最后得出该线性方程组的唯一解：

$$
x=\left[\begin{array} {l}
0 \\\
\frac{1}{2}
\end{array}\right]
$$

例题二

找到线性方程组$Ax=b$的所有解，其中：

$$
A=\left[\begin{array} {lll}
1 & 2 & 3 \\\
0 & 2 & 2
\end{array}\right], b=\left[\begin{array} {l}
1 \\\
1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法。你可以参考第4节的内容，和例题一不同的是，例题二这里得到的会是无穷解。所以，这一题里找特殊解和通用解的方法是关键。

首先，形成增广矩阵：

$$
\left[\begin{array} {lllll}
1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\\
0 & 2 & 2 & 1 & 1
\end{array}\right]

$$

接着，形成增广矩阵：分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-1和第二行相加；
2. 第二行乘1/2。

$$
\left[\begin{array}{lllll}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2}
\end{array}\right]
$$

使用主元列，得到特殊解：

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2} \\
0
\end{array}\right]
$$

下一步，获取线性方程组$Ax=0$的通用解，从增广矩阵的左边，能够立即得出：

$$
\lambda\left[\begin{array}{c}
1 \\
1 \\
-1
\end{array}\right]
$$

最后，把特殊解和通用解组合起来就是：

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2} \\
0
\end{array}\right]+\lambda\left[\begin{array}{c}
1 \\
1 \\
-1
\end{array}\right]
$$

例题三

计算矩阵乘AB。

$$
A=\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 2
\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{ccc}
4 & -1 & 2 \\
0 & 2 & 1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘无法完成，因为A是2行3列矩阵，B也是2行3列矩阵，A和邻居维度不同。

例题四

计算矩阵乘AB。

$$
A=\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 2
\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{cc}
4 & -1 \\
2 & 0 \\
2 & 1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘可以完成，因为两个矩阵的邻居维度相同，拿a_{11}举例：$a_{11}=1 \times 4+2 \times 2+3 \times 2=14$，结果：

$$
A B=\left[\begin{array}{cc}
14 & 2 \\
2 & 2
\end{array}\right]
$$

例题五

假设R^{3}和它的运算$\langle\ \cdot, \cdot\ \rangle$，$x, y \in R^{3}$，我们有：

$$
\langle x, y\rangle=x^{T} A y, A=\left[\begin{array}{ccc}
4 & 2 & 1 \\
0 & 4 & -1 \\
1 & -1 & 5
\end{array}\right]
$$

那么，$\langle\ \cdot, \cdot\ \rangle$是内积吗？

解析：

这里考察了内积，以及内积的性质之一：对称性，你可以参考第10节的内容。

选择$x=\left[\begin{array}{lll}1 & 1 & 0\end{array}\right]^{T}$，$y=\left[\begin{array}{lll}1 & 2 & 0\end{array}\right]^{T}$，通过计算，能够得到：

$$
\begin{array}{l}
\langle x, y\rangle=16 \\
\langle y, x\rangle=14 \\
\langle x, y\rangle \neq\langle y, x\rangle
\end{array}
$$

于是，$\langle\ \cdot, \cdot\ \rangle$是不对称的。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天这一节课的内容是基础通关。这里会用5道典型例题，让你巩固一下线性代数的基础知识，这也是进入应用篇学习之前的一次动手机会。从课程上线到现在快有一个月了，这期间我收到了不少同学的提问和建议，有些问题也是我没有想到的，非常有深度，说实话这让我感觉挺意外的，希望你再接再厉。

现在，你可以看一下基础通关的5道例题了，题目和解析都放在了正文中，你可以自己试着做一下。基础通关后，我们应用篇再见。

例题一

找到线性方程组$Ax=b$的所有解，其中：

$$
A=\left[\begin{array}{cc}
1 & 2 \\
3 & 0 \\
-1 & 2
\end{array}\right], b=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法，你可以参考第4节的内容。

首先，形成增广矩阵：

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 1 \\
3 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & 1
\end{array}\right]
$$

接着，分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-3和第二行相加。
2. 第一行和第三行相加。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 1 \\
0 & -6 & -3 \\
0 & 4 & 2
\end{array}\right]
$$

2. 第二行乘$\frac{1}{3}$和第一行相加。
3. 第二行乘$\frac{2}{3}$和第三行相加。
4. 第三行乘$-\frac{1}{6}$。

$$
\left[\begin{array}{llll}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

最后得出该线性方程组的唯一解：

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2}
\end{array}\right]
$$

例题二

找到线性方程组$Ax=b$的所有解，其中：

$$
A=\left[\begin{array}{lll}
1 & 2 & 3 \\
0 & 2 & 2
\end{array}\right], b=\left[\begin{array}{l}
1 \\
1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法。你可以参考第4节的内容，和例题一不同的是，例题二这里得到的会是无穷解。所以，这一题里找特殊解和通用解的方法是关键。

首先，形成增广矩阵：

$$
\left[\begin{array}{lllll}
1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\
0 & 2 & 2 & 1 & 1
\end{array}\right]
$$

接着，形成增广矩阵：分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-1和第二行相加；
2. 第二行乘1/2。

$$
\left[\begin{array}{lllll}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2}
\end{array}\right]
$$

使用主元列，得到特殊解：

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2} \\
0
\end{array}\right]
$$

下一步，获取线性方程组$Ax=0$的通用解，从增广矩阵的左边，能够立即得出：

$$
\lambda\left[\begin{array}{c}
1 \\
1 \\
-1
\end{array}\right]
$$

最后，把特殊解和通用解组合起来就是：

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2} \\
0
\end{array}\right]+\lambda\left[\begin{array}{c}
1 \\

1 \\
-1
\end{array}\right]
$$

例题三

计算矩阵乘AB。

$$
A=\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 2
\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{ccc}
4 & -1 & 2 \\
0 & 2 & 1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘无法完成，因为A是2行3列矩阵，B也是2行3列矩阵，A和邻居维度不同。

例题四

计算矩阵乘AB。

$$
A=\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 2
\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{cc}
4 & -1 \\
2 & 0 \\
2 & 1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘可以完成，因为两个矩阵的邻居维度相同，拿a_{11}举例：$a_{11}=1 \times 4+2 \times 2+3 \times 2=14$，结果：

$$
A B=\left[\begin{array}{cc}
14 & 2 \\
2 & 2
\end{array}\right]
$$

例题五

假设R^{3}和它的运算$\langle\ \cdot,\cdot \rangle$，$x, y \in R^{3}$，我们有：

$$
\langle x, y\rangle=x^{T} A y, A=\left[\begin{array}{ccc}
4 & 2 & 1 \\
0 & 4 & -1 \\
1 & -1 & 5
\end{array}\right]
$$

那么，$\langle\ \cdot,\cdot \rangle$是内积吗？

解析：

这里考察了内积，以及内积的性质之一：对称性，你可以参考第10节的内容。

选择$x=\left[\begin{array}{lll}1 & 1 & 0\end{array}\right]^{T}$，$y=\left[\begin{array}{lll}1 & 2 & 0\end{array}\right]^{T}$，通过计算，能够得到：

$$
\begin{array}{l}
\langle x, y\rangle=16 \\
\langle y, x\rangle=14 \\
\langle x, y\rangle \neq\langle y, x\rangle
\end{array}
$$

于是，$\langle\cdot,\cdot\rangle$是不对称的。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天这一节课的内容是基础通关。这里会用5道典型例题，让你巩固一下线性代数的基础知识，这也是进入应用篇学习之前的一次动手机会。从课程上线到现在快有一个月了，这期间我收到了不少同学的提问和建议，有些问题也是我没有想到的，非常有深度，说实话这让我感觉挺意外的，希望你再接再厉。

现在，你可以看一下基础通关的5道例题了，题目和解析都放在了正文中，你可以自己试着做一下。基础通关后，我们应用篇再见。

例题一

找到线性方程组$Ax=b$的所有解，其中：

$$
A=\left[\begin{array}{cc}
1 & 2 \\
3 & 0 \\
-1 & 2
\end{array}\right], b=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法，你可以参考第4节的内容。

首先，形成增广矩阵：

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 1 \\
3 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & 1
\end{array}\right]
$$

接着，分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-3和第二行相加。
2. 第一行和第三行相加。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 1 \\
0 & -6 & -3 \\
0 & 4 & 2
\end{array}\right]
$$

$$

2. 第二行乘$\frac{1}{3}$和第一行相加。
3. 第二行乘$\frac{2}{3}$和第三行相加。
4. 第三行乘$-\frac{1}{6}$。

$$
\left[\begin{array}{lll}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

最后得出该线性方程组的唯一解：

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2}
\end{array}\right]
$$

例题二

找到线性方程组$Ax=b$的所有解，其中：

$$
A=\left[\begin{array}{lll}
1 & 2 & 3 \\
0 & 2 & 2
\end{array}\right], b=\left[\begin{array}{l}
1 \\
1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法。你可以参考第4节的内容，和例题一不同的是，例题二这里得到的会是无穷解。所以，这一题里找特殊解和通用解的方法是关键。

首先，形成增广矩阵：

$$
\left[\begin{array}{lllll}
1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\
0 & 2 & 2 & 1 & 1
\end{array}\right]
$$

接着，形成增广矩阵：分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-1和第二行相加；
2. 第二行乘1/2。

$$
\left[\begin{array}{lllll}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2}
\end{array}\right]
$$

使用主元列，得到特殊解：

$$
x=\left[\begin{array}{l}

0 \\
\frac{1}{2} \\
0
\end{array}\right]
$$

下一步，获取线性方程组$Ax=0$的通用解，从增广矩阵的左边，能够立即得出：

$$
\lambda\left[\begin{array}{c}
1 \\
1 \\
-1
\end{array}\right]
$$

最后，把特殊解和通用解组合起来就是：

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2} \\
0
\end{array}\right]+\lambda\left[\begin{array}{c}
1 \\
1 \\
-1
\end{array}\right]
$$

例题三

计算矩阵乘AB。

$$
A=\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 2
\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{ccc}
4 & -1 & 2 \\
0 & 2 & 1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘无法完成，因为A是2行3列矩阵，B也是2行3列矩阵，A和邻居维度不同。

例题四

计算矩阵乘AB。

$$
A=\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 2
\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{cc}
4 & -1 \\
2 & 0 \\
2 & 1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘可以完成，因为两个矩阵的邻居维度相同，拿a_{11}举例：$a_{11}=1 \times 4+2 \times 2+3 \times 2=14$，结果：

$$
A B=\left[\begin{array}{cc}
14 & 2 \\
2 & 2
\end{array}\right]
$$

例题五

假设R^{3}和它的运算$\langle\ \cdot, \cdot \rangle$，$x, y \in R^{3}$，我们有：

$$
\langle x, y\rangle=x^{T} A y, A=\left[\begin{array}{ccc}
4 & 2 & 1 \\
0 & 4 & -1 \\
1 & -1 & 5
\end{array}\right]
$$

那么，$\langle\ \cdot, \cdot \rangle$是内积吗？

解析：

这里考察了内积，以及内积的性质之一：对称性，你可以参考第10节的内容。

选择$x=\left[\begin{array}{lll}1 & 1 & 0\end{array}\right]^{T}$，$y=\left[\begin{array}{lll}1 & 2 & 0\end{array}\right]^{T}$，通过计算，能够得到：

$$
\begin{array}{l}
\langle x, y\rangle=16 \\
\langle y, x\rangle=14 \\
\langle x, y\rangle \neq\langle y, x\rangle
\end{array}
$$

于是，$\langle\ \cdot, \cdot \rangle$是不对称的。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天这一节课的内容是基础通关。这里会用5道典型例题，让你巩固一下线性代数的基础知识，这也是进入应用篇学习之前的一次动手机会。从课程上线到现在快有一个月了，这期间我收到了不少同学的提问和建议，有些问题也是我没有想到的，非常有深度，说实话这让我感觉挺意外的，希望你再接再厉。

现在，你可以看一下基础通关的5道例题了，题目和解析都放在了正文中，你可以自己试着做一下。基础通关后，我们应用篇再见。

例题一

找到线性方程组$Ax=b$的所有解，其中：

$$
A=\left[\begin{array}{cc}
1 & 2 \\
3 & 0 \\
-1 & 2
\end{array}\right], b=\left[\begin{array}{c}
1 \\
0 \\
1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法，你可以参考第4节的内容。

首先，形成增广矩阵：

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 1 \\
3 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & 1
\end{array}\right]
$$

接着，分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-3和第二行相加。
2. 第一行和第三行相加。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 1 \\
0 & -6 & -3 \\
0 & 4 & 2
\end{array}\right]
$$

2. 第二行乘$\frac{1}{3}$和第一行相加。
3. 第二行乘$\frac{2}{3}$和第三行相加。
4. 第三行乘$-\frac{1}{6}$。

$$
\left[\begin{array}{llll}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

最后得出该线性方程组的唯一解：

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2}
\end{array}\right]
$$

例题二

找到线性方程组$Ax=b$的所有解，其中：

$$
A=\left[\begin{array}{lll}
1 & 2 & 3 \\
0 & 2 & 2
\end{array}\right], b=\left[\begin{array}{l}
1 \\
1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法。你可以参考第4节的内容，和例题一不同的是，例题二这里得到的会是无穷解。所以，这一题里找特殊解和通用解的方法是关键。

首先，形成增广矩阵：

$$
\left[\begin{array}{lllll}
1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\
0 & 2 & 2 & 1 & 1
\end{array}\right]
$$

接着，形成增广矩阵：分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘-1和第二行相加；
2. 第二行乘1/2。

$$
\left[\begin{array}{llll}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2}
\end{array}\right]
$$

使用主元列，得到特殊解：

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2} \\
0
\end{array}\right]
$$

下一步，获取线性方程组$Ax=0$的通用解，从增广矩阵的左边，能够立即得出：

$$
\lambda\left[\begin{array}{c}
1 \\
1 \\
-1
\end{array}\right]
$$

最后，把特殊解和通用解组合起来就是：

$$
x=\left[\begin{array}{l}
0 \\
\frac{1}{2} \\
0
\end{array}\right]+\lambda\left[\begin{array}{c}
1 \\
1 \\
-1
\end{array}\right]
$$

例题三

计算矩阵乘AB。

$$
A=\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 2
\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{ccc}
4 & -1 & 2 \\
0 & 2 & 1
\end{array}\right]

$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘无法完成，因为A是2行3列矩阵，B也是2行3列矩阵，A和邻居维度不同。

例题四

计算矩阵乘AB。

$$
A=\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 2
\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{cc}
4 & -1 \\
2 & 0 \\
2 & 1
\end{array}\right]
$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，你可以参考第3节的内容。

矩阵乘可以完成，因为两个矩阵的邻居维度相同，拿a_{11}举例：$a_{11}=1 \times 4+2 \times 2+3 \times 2=14$，结果：

$$
A B=\left[\begin{array}{cc}
14 & 2 \\
2 & 2
\end{array}\right]
$$

例题五

假设R^{3}和它的运算$\langle\ \cdot,\cdot \rangle$，$x, y \in R^{3}$，我们有：

$$
\langle x, y\rangle=x^{T} A y, A=\left[\begin{array}{ccc}
4 & 2 & 1 \\
0 & 4 & -1 \\
1 & -1 & 5
\end{array}\right]
$$

那么，$\langle\ \cdot,\cdot \rangle$是内积吗？

解析：

这里考察了内积，以及内积的性质之一：对称性，你可以参考第10节的内容。

选择$x=\left[\begin{array}{lll}1 & 1 & 0\end{array}\right]^{T}$，$y=\left[\begin{array}{lll}1 & 2 & 0\end{array}\right]^{T}$，通过计算，能够得到：

$$
\begin{array}{l}
\langle x, y\rangle=16 \\
\langle y, x\rangle=14 \\
\langle x, y\rangle \neq\langle y, x\rangle
\end{array}
$$

于是，$\langle\ \cdot,\cdot \rangle$是不对称的。