你好，我是朱维刚。欢迎你跟我一起重学线性代数！

在上一节课中，我讲解了线性方程组的另一种表达——矩阵。那么今天，我们就来讲解一下如何使用矩阵来解线性方程组，也就是如何求线性方程组的特殊解和通用解。

简单的线性方程组，我们当然可以运用初中学过的知识来求解，那复杂的呢？硬来几乎是不可能的了，一方面是因为人工计算的错误率很高，另一方面，即使我们使用计算机，用类似for或while循环来实现算法，它的计算效率也是极低的。你需要用更科学的方式、方法，从另一个角度来看待和求解线性方程组。

而矩阵就是为我们打开高效之门的钥匙，从计算机科学的角度来说，使用矩阵的运算效率实在是高太多了，因为它可以利用计算机的并行能力，甚至在一些迭代法中，还能实现分布式并行计算（迭代法会在后面“应用篇”中讲解）。

线性方程组解的寻找

现在，就让我们开始去寻找线性方程组的解。在之前的课程中，我们已经引入了线性方程组的一般表达，你可以看看下面的例子。

$$
\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.
$$

其中，a_{ij}和 b_{i} 属于实数，而且是已知常数，而x_{j}是未知变量，i和j的取值范围分别是：$i=1,…,m$；$j=1,…,n$ 。如果我们用矩阵的简单表达方式来看的话，就是$Ax=B$。

要搞清楚概念，我们还是要多看具体的例子。让我们先来看一个实例，来加深一下理解。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
x_{1} \\
x_{2} \\
x_{3} \\
x_{4}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8
\end{array}\right]
$$

很明显，这是一个矩阵表达方式。它的一般线性方程组表达方式是中学的基础知识，你应该很熟悉了。

$$
\left\{\begin{array}{l}
1 \times x_{1}+0 \times x_{2}+8 \times x_{3}+(-4) \times x_{4}=42 \\
0 \times x_{1}+1 \times x_{2}+2 \times x_{3}+12 \times x_{4}=8
\end{array}\right.
$$

在这个一般线性方程组中，有四个未知变量，但只有两个等式，这就意味着这个线性方程组有无穷多个解（这个是中学数学的范畴）。通过细心观察，我们可以发现第一列和第二列都是由0和1组成的，因此你很容易就能发现其中一个解。

$$
42\left[\begin{array}{l}
1 \\
0
\end{array}\right]+8\left[\begin{array}{l}
0 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8
\end{array}\right]
$$

这个解就是$\left[\begin{array}{llll}42 & 8 & 0 & 0\end{array}\right]^{T}$，也就是说四个未知变量分别为$42$、$8$、$0$、$0$。

$$
\left\{\begin{array}{l}
x_{1}=42 \\
x_{2}=8 \\
x_{3}=0 \\
x_{4}=0
\end{array}\right.
$$

这个解也叫做特殊解。我们刚才已经说过，这个线性方程组有无穷多个解，那我们确实需要一个聪明的方式来找到其他的解，最直观的方式就是通过矩阵的列来构造0。例如，对于第三列来说，我们可以使用第一和第二列的组合形式来表达。

$$
8\left[\begin{array}{l}
1 \\
0
\end{array}\right]+2\left[\begin{array}{l}
0 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{l}
8 \\
2
\end{array}\right]
$$

通过计算$Ax=0$，我们得出解$\left[\begin{array}{llll}8 & 2 & -1 & 0\end{array}\right]^{T}$。而事实上，这个解可以乘以任何实数$λ_{1}$，使得$Ax=0$成立。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]
\left(\begin{array}{l}
\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
8 \\
2 \\
-1 \\
0

\end{array}\right]
\end{array}\right)=0
$$

同理，对于第四列来说，我们可以使用第一和第二列的组合形式来表达，得出另一套解，使得$Ax=0$。

$$
\left[\begin{array} {cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]
\left(\begin{array} {l}
\lambda_{2}\left[\begin{array} {l}
-4 \\
12 \\
0 \\
-1
\end{array}\right]
\end{array}\right)=0
$$

现在，我们可以把之前的特殊解与刚得出的两套解相组合，得出最终解，这个解也就是我们所说的通用解了。

$$
x \in R^{4}: x=\left[\begin{array} {c}
42 \\
8 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{1}\left[\begin{array} {c}
8 \\
2 \\
-1 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array} {c}
-4 \\
12 \\
0 \\
-1
\end{array}\right], \lambda_{1}, \lambda_{2} \in R
$$

我来总结一下寻找通用解的过程，这个过程分为三步：

1. 我们要寻找一个特殊解，使得$Ax=b$；
2. 找到$Ax=0$的所有解；
3. 组合第一和第二步的解形成通用解。

看到了这里，你有没有发现有些奇怪呢？或者说，有没有觉得哪里有点别扭？是的，好像有点太顺利了。那是因为这个线性方程组比较特别，第一列和第二列是由1和0组成的。所以，我们只通过观察就能得出特殊解和通用解。

然而，你不可能每次都行大运，就像我们在现实中碰到的这类线性方程组，一般都比这个复杂得多。不过不要慌，有一个算法可以来帮助我们转换任意线性方程组，形成类似的特殊形式，这个算法叫做**高斯消元法**。

高斯消元法的核心就是**线性方程组的初等变换**，于是，我们可以通过高斯消元法，得到围绕初等变换形成的简单矩阵表达形式，接下来我们就可以运用之前的三个步骤来寻找通用解了。

初等变换的一般形式

既然高斯消元法的核心就是线性方程组的初等变换，那为了方便你使用高斯消元法，我就有必要来讲一讲初等变换的一般形式有哪些：

1. 两个等式的交换，也就是矩阵行交换；
2. 一个等式，或者说矩阵行乘以一个实数常量；
3. 两个等式相加，或者说矩阵的两行相加。

道理是这样的道理，那我们通过一个例子来看看，究竟该怎么做线性方程组的初等变换。假设a属于实数，现在我们试着来寻找下面这个线性方程组的所有解。我把这个过程细细地拆解为11个步骤，建议你仔细看过并理解后，再进入下一阶段的学习。

$$
\left\{\begin{array} {c}
-2 x_{1}+4 x_{2}-2 x_{3}-x_{4}+4 x_{5}=-3 \\
4 x_{1}-8 x_{2}+3 x_{3}-3 x_{4}+x_{5}=2 \\
x_{1}-2 x_{2}+x_{3}-x_{4}+x_{5}=0 \\
x_{1}-2 x_{2}-3 x_{4}+4 x_{5}=a
\end{array}\right.
$$

1.我们要把这个线性方程组转换成矩阵的表达形式，$Ax=b$。

$$
\left[\begin{array} {ccccccc}
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
4 & -8 & 3 & -3 & 1 & \mid & 2 \\
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

2.接着我们来交换第一和第三行。

$$
\left[\begin{array} {ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
4 & -8 & 3 & -3 & 1 & \mid & 2 \\
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

注意，你知道我们为什么选择第一行和第三行交换吗？其实，这是为了便于计算。而具体交换哪一行是有个小技巧的，如果某行的第一个元素有1，我们就可以把这一行移到第一行。

3.我们以第一行为基础，开始执行乘和加变换，将第一行乘以-4的结果和第二行相加，从而获得了下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array} {ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a

$$
\end{array}\right]
$$

4.然后，我们用同样的方法，将第一行乘以2的结果，再和第三行相加，得到了下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

5.以此类推，我们将第一行乘以-1的结果，和第四行相加，继续获得新矩阵。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & -1 & -2 & 3 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

6.将第二行乘以-1的结果，和第四行相加，得到下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & a-2
\end{array}\right]
$$

7.将第三行乘以-1的结果，和第四行相加。
$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & a+1
\end{array}\right]
$$

8.第二行乘以-1，第三行乘以$-\frac{1}{3}$。
$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 3 & \mid & -2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \mid & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & a+1
\end{array}\right]
$$

9.现在，这个矩阵就是一个简单形式的矩阵，也叫做**行阶梯形矩阵**（Row-Echelon Form，REF）。

$$
\left\{\begin{array}{r}
x_{1}-2 x_{2}+x_{3}-x_{4}+x_{5}=0 \\
x_{3}-x_{4}+3 x_{5}=-2 \\
x_{4}-2 x_{5}=1 \\
0=a+1
\end{array}\right.
$$

一个矩阵成为行阶梯形矩阵需满足两个条件：

- 如果它既有零行，又有非零行，则零行在下，非零行在上；
- 如果它有非零行，则每个非零行的第一个非零元素所在列号自上而下严格单调上升，正如之前的这个矩阵，列号自上而下是1、3、4，是严格单调上升的。

10.你可以看出，只有在$a=-1$的情况下，这个线性方程组才有解，特殊解是$\left[\begin{array}{lllll}2 & 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right]^{\mathrm{T}}$。

11.最后，我们得出这个线性方程组的通用解，如下图所示。

$$
x \in R^{5}: x=\left[\begin{array}{c}
2 \\
0 \\
-1 \\
1 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
2 \\
1 \\
0 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{c}
2 \\
0 \\
-1 \\
2 \\
1
\end{array}\right], \lambda_{1}, \lambda_{2} \in R
$$

注意，这里有一个概念很重要，那就是**主元**。主元就是在矩阵消元过程中，每列要保留的非零元素，我们可以用它把该列其他元素消去。在阶梯型矩阵中，每个非零行第一个非零元素就是主元。

拿之前的第8步计算后的结果来举例，第一行的第一个元素1就是主元，第二行第三个元素1是主元，第三行的第四个元素1也是主元。

$$
\begin{bmatrix}
1 & -2 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

对应行阶梯形矩阵主元的变量叫做基本变量，而其他的变量叫做自由变量，这个例子中，x_{1}、x_{3}、x_{4}就是基本变量，x_{2}、x_{5}则是自由变量。使用行阶梯形矩阵能更简单地得出特殊解，所以我们可以使用主元列来表达线性方程组：

$$
b=\sum_{i=1}^{P} \lambda_{i} \mathrm{p}_{i}, i=1, \ldots, P
$$

在之前的例子中，我们使用主元列来表达成下面这样的矩阵形式：

$$
\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
1 \\
0 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{l}
1 \\
1 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{3}\left[\begin{array}{c}
-1 \\
-1 \\
1 \\
0
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
0 \\
-2 \\
1 \\
0
\end{array}\right]
$$

于是，我们最终得出 $\lambda_{3}=1$，$\lambda_{2}=-1$，$\lambda_{1}=2$ ，分别对应于x_{4}、x_{3}、x_{1}。不要忘了，对于非主元列，我们已经隐式地把系数设置成了0，所以这个线性方程组的特殊解是$x=\left[\begin{array}{lllll}2 & 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right]^{\mathrm{T}}$。

简化行阶梯形矩阵

这里我们再引入一个概念，简化行阶梯形矩阵，因为引入简化行阶梯形矩阵对于线性方程组的求解来说会更简单。其实，高斯消元法的核心就是通过初等变换，把线性方程组转换成简化行阶梯形矩阵。那么一个方程组是简化行阶梯形矩阵，必须满足哪几个条件呢？

1. 这个方程组必须是行阶梯形矩阵；
2. 方程组的每一个主元都是1；
3. 主元在它的列中是唯一的非0元素。

现在，我们再通过一个实例，看看该如何通过高斯消元法计算一个矩阵的逆矩阵。设矩阵A如下图：

$$

$$
A=\left[\begin{array}{llll}
1 & 0 & 2 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right]
$$

首先，我们形成A的增广矩阵（具体方法参见上一节）。

$$
\left[\begin{array}{llllllll}
1 & 0 & 2 & 0 & \mid & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & \mid & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 1 & \mid & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & \mid & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

其次，使用我们前面刚刚讲过的高斯消元法计算出简化行阶梯形矩阵。

$$
\left[\begin{array}{ccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \mid & -1 & 2 & -2 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \mid & 1 & -1 & 2 & -2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \mid & 1 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \mid & -1 & 0 & -1 & 2
\end{array}\right]
$$

最后，我们就得到A的逆矩阵，如下图所示。

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{cccc}
-1 & 2 & -2 & 2 \\
1 & -1 & 2 & -2 \\
1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & 0 & -1 & 2
\end{array}\right]
$$

接下来，我们只要使用公式$A A^{-1}=I$ 就可以对结果进行验证了。

更多解线性方程组的方法

到目前为止，相信你已经了解了如何解线性方程组，包括特殊解和通用解，以及如何使用高斯消元法来解线性方程组。最后，我再总结一些解方法来作为你的知识扩展。

第一个方法，假设一个矩阵A是方阵（行数与列数相等的矩阵），并且可逆，$Ax=B$ ，那x解就可以写成$x=A^{-1}B$，但如果A矩阵不可逆，也不是方阵，那我们就只能使用下面这个变换来求x解了。

$$Ax=B \Leftrightarrow A^{T}Ax=A^{T}B \Leftrightarrow x=(A^{T}A)^{-1}A^{T}B$$

其中，矩阵A的转置矩阵和A相乘的逆矩阵，再和A的转置矩阵相乘，我们把它叫做穆尔彭罗斯伪逆矩阵（Moore-Penrose pseudo inverse），简称伪逆。

$$(A^{T}A)^{-1}A^{T}$$

这个方法有两个弊端：第一，矩阵乘和逆矩阵的计算太复杂；第二，数值精确度不高。因此，从实践角度来说，我一般不推荐使用。

第二个方法是高斯消元法。高斯消元法是非常直观的，它在很多计算中都起到了关键的作用，比如：

1. 计算行列式；
2. 检查向量是否是线性独立的；
3. 计算矩阵的逆矩阵；
4. 计算矩阵的秩；
5. 决定向量空间的基。

但当高斯消元法面对百万、千万级别的变量时，就捉襟见肘了。而这类级别的计算才是我们在实践中经常会遇到的，因此从实践角度来说，我也一般不推荐使用。因为高斯消元法属于直接法，直接法是经历有限次的运算得到方程组精确解的方法。但是，学习直接法是有意义的，虽然直接法在实际工作中不常用，但是它也能处理一些日常小问题，更重要的是，它稳固了我们进一步学习其它方法的基础。

我要讲的第三种方法，就是与直接法对应的间接法了。在实践中，线性方程组的求解都是间接的，也就是运用迭代法。

迭代法是采用极限过程，用线性方程组的近似解逐步逼近精确解的方法。所以，迭代法的关键在于每次迭代残余错误的减少，以及如何能够收敛到解。常见的迭代法有两类，定常迭代法（Stationary iterative method）和Krylov子空间方法（我会在应用篇中讲解）。

> 定常迭代法：理查德森迭代法（Richardson method）、雅可比方法（Jacobi method）、Gauß-Seidel方法、逐次超松弛法（Successive over-relaxation method，简称SOR）。
> Krylov子空间方法：共轭梯度法（Conjugate gradient）、广义极小残余算法（Generalized minimal residual）、双共轭梯度法（Biconjugate gradient）。

这里提到的几种迭代法都是在实践中比较常用的，也是计算机编程中经常实现的算法，但由于迭代法更多属于微分和极限领域，所以这里就不详细介绍了，我会在线性代数应用篇的"数值线性代数"那节课中再做讲解。

如果在课程内容结束后，你还有余力学习更多的内容，这里我先推荐两本书给你作参考，一本是《Introduction to Numerical Analysis》，另一本是《Linear Algebra》。这两本书里面都有进一步地讲解了线性方程组的迭代法求解的内容。

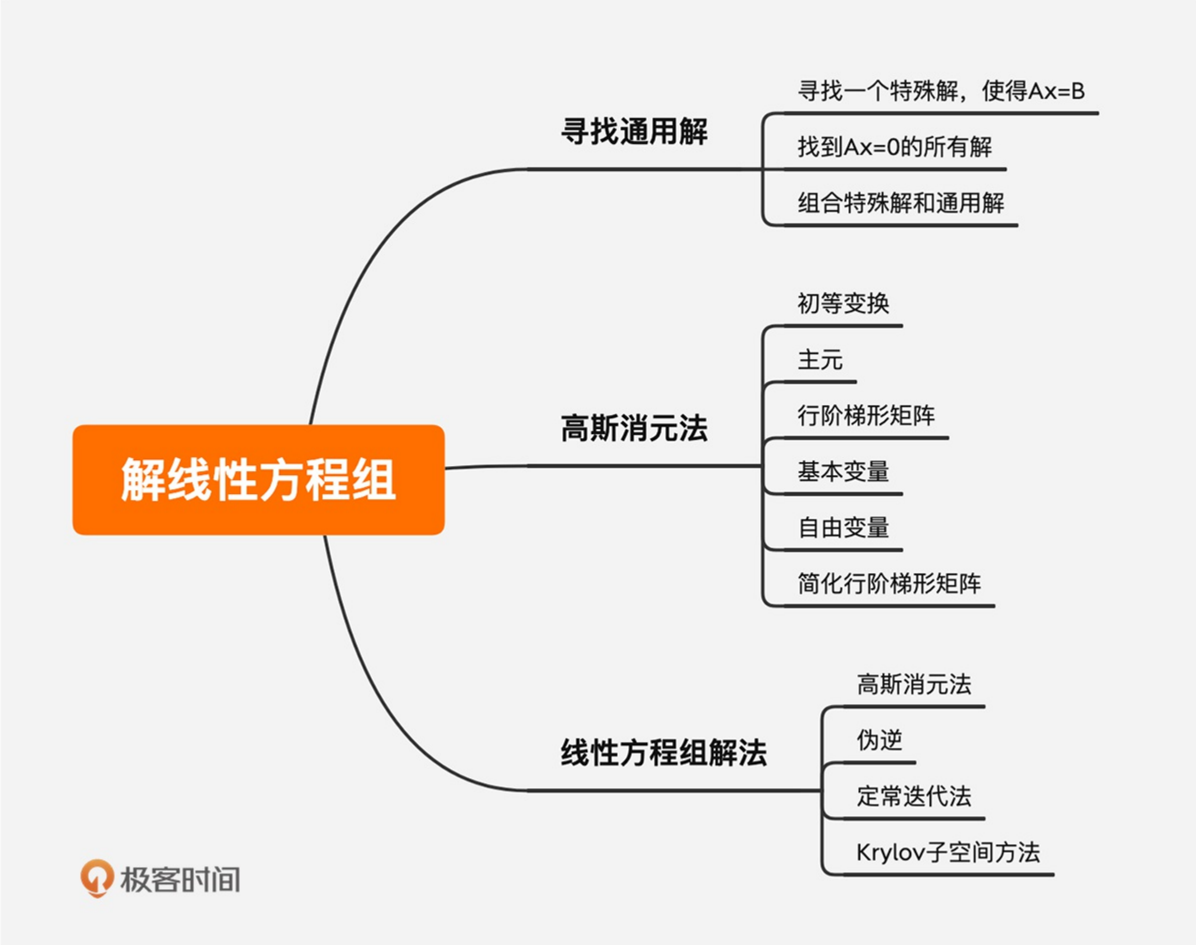
> 1.《Introduction to Numerical Analysis》
> 作者：Stoer, Josef, Bulirsch, R.
> 2002年出版
> 2.《Linear Algebra》
> 作者：Liesen, Jörg, Mehrmann, Volker
> 2015年出版

本节小结

好了，到这里解线性方程组这一讲就结束了，最后我再总结一下前面讲解的内容。

首先，我用一个简单的线性方程组，通过直接观察的方法来计算这个方程组的特殊解和通用解，接着通过实例详细地介绍了高斯消元法，最后我给出了一些在实践中常用的线性方程组解方法。只有弄清楚这些基础知识的本质，你才能更进一步，去了解其他计算方法。

线性方程组的求解已经成为了世界上最快计算机的测试标准，因为通过矩阵运算，计算机的并行计算能力暴露无遗。希望你能够在这些基础之上，阅读我推荐的两本书，并且把这些方法运用到实践中，特别是机器学习，因为机器学习也用到了很多迭代方法。



线性代数练习场

练习时刻到了，今天的练习题比较简单，请你用高斯消元法求下面的线性方程组。

$$
\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}-2 x_{3}-x_{4}=-1 \\
x_{1}+5 x_{2}-3 x_{3}-2 x_{4}=0 \\
3 x_{1}-x_{2}+x_{3}+4 x_{4}=2 \\
-2 x_{1}+2 x_{2}+x_{3}-x_{4}=1
\end{array}\right.
$$

欢迎在留言区和部落里晒出你的运算过程和结果，留下你的学习痕迹。如果你有所收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我一起重学线性代数！

在上一节课中，我讲解了线性方程组的另一种表达——矩阵。那么今天，我们就来讲解一下如何使用矩阵来解线性方程组，也就是如何求线性方程组的特殊解和通用解。

简单的线性方程组，我们当然可以运用初中学过的知识来求解，那复杂的呢？硬来几乎是不可能的了，一方面是因为人工计算的错误率很高，另一方面，即使我们使用计算机，用类似for或while循环来实现算法，它的计算效率也是极低的。你需要用更科学的方式、方法，从另一个角度来看待和求解线性方程组。

而矩阵就是为我们打开高效之门的钥匙，从计算机科学的角度来说，使用矩阵的运算效率实在是高太多了，因为它可以利用计算机的并行能力，甚至在一些迭代法中，还能实现分布式并行计算（迭代法会在后面"应用篇"中讲解）。

线性方程组解的寻找

现在，就让我们开始去寻找线性方程组的解。在之前的课程中，我们已经引入了线性方程组的一般表达，你可以看看下面的例子。

$$
\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.
$$

其中，a_{ij}和 b_{i} 属于实数，而且是已知常数，而x_{j}是未知变量，i和j的取值范围分别是：$i=1,\ldots,m$；$j=1,\ldots,n$ 。如果我们用矩阵的简单表达方式来看的话，就是$Ax=B$。

要搞清楚概念，我们还是要多看具体的例子。让我们先来看一个实例，来加深一下理解。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
x_{1} \\
x_{2} \\
x_{3} \\
x_{4}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8
\end{array}\right]
$$

很明显，这是一个矩阵表达方式。它的一般线性方程组表达方式是中学的基础知识，你应该很熟悉了。

$$
\left\{\begin{array}{l}
1 \times x_{1}+0 \times x_{2}+8 \times x_{3}+(-4) \times x_{4}=42 \\
0 \times x_{1}+1 \times x_{2}+2 \times x_{3}+12 \times x_{4}=8
\end{array}\right.
$$

在这个一般线性方程组中，有四个未知变量，但只有两个等式，这就意味着这个线性方程组有无穷多个解（这个是中学数学的范畴）。通过细心观察，我们可以发现第一列和第二列都是由0和1组成的，因此你很容易就能发现其中一个解。

$$
42\left[\begin{array}{l}
1 \\
0
\end{array}\right]+8\left[\begin{array}{l}
0 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8
\end{array}\right]
$$

这个解就是$\left[\begin{array}{llll}42 & 8 & 0 & 0\end{array}\right]^{T}$，也就是说四个未知变量分别为$42$、$8$、$0$、$0$。

$$
\left\{\begin{array}{l}
x_{1}=42 \\
x_{2}=8 \\
x_{3}=0 \\
x_{4}=0
\end{array}\right.
$$

这个解也叫做特殊解。我们刚才已经说过，这个线性方程组有无穷多个解，那我们确实需要一个聪明的方式来找到其他的解，最直观的方式就是通过矩阵的列来构造0。例如，对于第三列来说，我们可以使用第一和第二列的组合形式来表达。

$$
8\left[\begin{array}{l}
1 \\
0
\end{array}\right]+2\left[\begin{array}{l}
0 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{l}
8 \\
2
\end{array}\right]
$$

通过计算$Ax=0$，我们得出解$\left[\begin{array}{llll}8 & 2 & -1 & 0\end{array}\right]^{T}$。而事实上，这个解可以乘以任何实数$\lambda_{1}$，使得$Ax=0$成立。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]
\left(\begin{array}{l}
\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
8 \\
2 \\
-1 \\
0
\end{array}\right]
\end{array}\right)=0
$$

同理，对于第四列来说，我们可以使用第一和第二列的组合形式来表达，得出另一套解，使得$Ax=0$。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]
\left(\begin{array}{l}
\lambda_{2}\left[\begin{array}{l}
-4 \\
12 \\
0 \\
-1
\end{array}\right]
\end{array}\right)=0
$$

现在，我们可以把之前的特殊解与刚得出的两套解相组合，得出最终解，这个解也就是我们所说的通用解了。

$$
x \in R^{4}: x=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{1}\left[\begin{array}{c}
8 \\
2 \\
-1 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{c}
-4 \\
12 \\
0 \\
-1
\end{array}\right], \lambda_{1}, \lambda_{2} \in R
$$

我来总结一下寻找通用解的过程，这个过程分为三步：

1. 我们要寻找一个特殊解，使得$Ax=b$；
2. 找到$Ax=0$的所有解；
3. 组合第一和第二步的解形成通用解。

看到了这里，你有没有发现有些奇怪呢？或者说，有没有觉得哪里有点别扭？是的，好像有点太顺利了。那是因为这个线性方程组比较特别，第一列和第二列是由1和0组成的。所以，我们只通过观察就能得出特殊解和通用解。

然而，你不可能每次都行大运，就像我们在现实中碰到的这类线性方程组，一般都比这个复杂得多。不过不要慌，有一个算法可以来帮助我们转换任意线性方程组，形成类似的特殊形式，这个算法叫做**高斯消元法**。

高斯消元法的核心就是**线性方程组的初等变换**，于是，我们可以通过高斯消元法，得到围绕初等变换形成的简单矩阵表达形式，接下来我们就可以运用之前的三个步骤来寻找通用解了。

初等变换的一般形式

既然高斯消元法的核心就是线性方程组的初等变换，那为了方便你使用高斯消元法，我就有必要来讲一讲初等变换的一般形式有哪些：

1. 两个等式的交换，也就是矩阵行交换；
2. 一个等式，或者说矩阵行乘以一个实数常量；
3. 两个等式相加，或者说矩阵的两行相加。

道理是这样的道理，那我们通过一个例子来看看，究竟该怎么做线性方程组的初等变换。假设a属于实数，现在我们试着来寻找下面这个线性方程组的所有解。我把这个过程细细地拆解为11个步骤，建议你仔细看过并理解后，再进入下一阶段的学习。

$$
\left\{\begin{array}{c}
-2 x_{1}+4 x_{2}-2 x_{3}-x_{4}+4 x_{5}=-3 \\
4 x_{1}-8 x_{2}+3 x_{3}-3 x_{4}+x_{5}=2 \\
x_{1}-2 x_{2}+x_{3}-x_{4}+x_{5}=0 \\
x_{1}-2 x_{2}-3 x_{4}+4 x_{5}=a
\end{array}\right.
$$

1.我们要把这个线性方程组转换成矩阵的表达形式，$Ax=b$。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
4 & -8 & 3 & -3 & 1 & \mid & 2 \\
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

2.接着我们来交换第一和第三行。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
4 & -8 & 3 & -3 & 1 & \mid & 2 \\
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

注意，你知道我们为什么选择第一行和第三行交换吗？其实，这是为了便于计算。而具体交换哪一行是有个小技巧的，如果某行的第一个元素有1，我们就可以把这一行移到第一行。

3.我们以第一行为基础，开始执行乘和加变换，将第一行乘以-4的结果和第二行相加，从而获得了下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

4.然后，我们用同样的方法，将第一行乘以2的结果，再和第三行相加，得到了下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

5.以此类推，我们将第一行乘以-1的结果，和第四行相加，继续获得新矩阵。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & -1 & -2 & 3 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

6.将第二行乘以-1的结果，和第四行相加，得到下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & a-2
\end{array}\right]
$$

7.将第三行乘以-1的结果，和第四行相加。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & a+1
\end{array}\right]
$$

$$

8.第二行乘以-1，第三行乘以$-\frac{1}{3}$。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 3 & \mid & -2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \mid & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & a+1
\end{array}\right]
$$

9.现在，这个矩阵就是一个简单形式的矩阵，也叫做**行阶梯形矩阵**（Row-Echelon Form，REF）。

$$
\left\{\begin{array}{r}
x_{1}-2 x_{2}+x_{3}-x_{4}+x_{5}=0 \\
x_{3}-x_{4}+3 x_{5}=-2 \\
x_{4}-2 x_{5}=1 \\
0=a+1
\end{array}\right.
$$

一个矩阵成为行阶梯形矩阵需满足两个条件：

- 如果它既有零行，又有非零行，则零行在下，非零行在上；
- 如果它有非零行，则每个非零行的第一个非零元素所在列号自上而下严格单调上升，正如之前的这个矩阵，列号自上而下是1、3、4，是严格单调上升的。

10.你可以看出，只有在$a=-1$的情况下，这个线性方程组才有解，特殊解是$\left[\begin{array}{lllll}2 & 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right]^{\mathrm{T}}$。

11.最后，我们得出这个线性方程组的通用解，如下图所示。

$$
x \in R^{5}: x=\left[\begin{array}{c}
2 \\
0 \\
-1 \\
1 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
2 \\
1 \\
0 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{c}
2 \\
0 \\
-1 \\
2 \\
1
\end{array}\right], \lambda_{1}, \lambda_{2} \in R
$$

注意，这里有一个概念很重要，那就是**主元**。主元就是在矩阵消元过程中，每列要保留的非零元素，我们可以用它把该列其他元素消去。在阶梯型矩阵中，每个非零行第一个非零元素就是主元。

拿之前的第8步计算后的结果来举例，第一行的第一个元素1就是主元，第二行第三个元素1是主元，第三行的第四个元素1也是主元。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & -2 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

对应行阶梯形矩阵主元的变量叫做基本变量，而其他的变量叫做自由变量，这个例子中，x_{1}、x_{3}、x_{4}就是基本变量，x_{2}、x_{5}则是自由变量。使用行阶梯形矩阵能更简单地得出特殊解，所以我们可以使用主元列来表达线性方程组：

$$
b=\sum_{i=1}^{P} \lambda_{i} \mathrm{p}_{i}, i=1, \ldots, P
$$

在之前的例子中，我们使用主元列来表达成下面这样的矩阵形式：

$$
\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
1 \\
0 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{l}
1 \\
1 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{3}\left[\begin{array}{c}
-1 \\
-1 \\
1 \\
0
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
0 \\
-2 \\
1 \\
0
\end{array}\right]
$$

于是，我们最终得出 $\lambda_{3}=1$，$\lambda_{2}=-1$，$\lambda_{1}=2$ ，分别对应于x_{4}、x_{3}、x_{1}。不要忘了，对于非主元列，我们已经隐式地把系数设置成了0，所以这个线性方程组的特殊解是$x=\left[\begin{array}{lllll}2 & 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right]^{\mathrm{T}}$。

简化行阶梯形矩阵

这里我们再引入一个概念，简化行阶梯形矩阵，因为引入简化行阶梯形矩阵对于线性方程组的求解来说会更简单。其实，高斯消元法的核心就是通过初等变换，把线性方程组转换成简化行阶梯形矩阵。那么一个方程组是简化行阶梯形矩阵，必须满足哪几个条件呢？

1. 这个方程组必须是行阶梯形矩阵；
2. 方程组的每一个主元都是1；
3. 主元在它的列中是唯一的非0元素。

现在，我们再通过一个实例，看看该如何通过高斯消元法计算一个矩阵的逆矩阵。设矩阵A如下图：

$$

$$
A=\left[\begin{array}{llll}
1 & 0 & 2 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right]
$$

首先，我们形成A的增广矩阵（具体方法参见上一节）。

$$
\left[\begin{array}{llllllll}
1 & 0 & 2 & 0 & \mid & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & \mid & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 1 & \mid & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & \mid & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

其次，使用我们前面刚刚讲过的高斯消元法计算出简化行阶梯形矩阵。

$$
\left[\begin{array}{ccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \mid & -1 & 2 & -2 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \mid & 1 & -1 & 2 & -2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \mid & 1 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \mid & -1 & 0 & -1 & 2
\end{array}\right]
$$

最后，我们就得到A的逆矩阵，如下图所示。

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{cccc}
-1 & 2 & -2 & 2 \\
1 & -1 & 2 & -2 \\
1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & 0 & -1 & 2
\end{array}\right]
$$

接下来，我们只要使用公式$A A^{-1}=I$ 就可以对结果进行验证了。

更多解线性方程组的方法

到目前为止，相信你已经了解了如何解线性方程组，包括特殊解和通用解，以及如何使用高斯消元法来解线性方程组。最后，我再总结一些解方法来作为你的知识扩展。

第一个方法，假设一个矩阵A是方阵（行数与列数相等的矩阵），并且可逆，$Ax=B$ ，那x解就可以写成$x=A^{-1}B$，但如果A矩阵不可逆，也不是方阵，那我们就只能使用下面这个变换来求x解了。

$$Ax=B⇔A^{T}Ax=A^{T}B⇔x=(A^{T}A)^{-1}A^{T}B$$

其中，矩阵A的转置矩阵和A相乘的逆矩阵，再和A的转置矩阵相乘，我们把它叫做穆尔彭罗斯伪逆矩阵（Moore-Penrose pseudo inverse），简称伪逆。

$$(A^{T}A)^{-1}A^{T}$$

这个方法有两个弊端：第一，矩阵乘和逆矩阵的计算太复杂；第二，数值精确度不高。因此，从实践角度来说，我一般不推荐使用。

第二个方法是高斯消元法。高斯消元法是非常直观的，它在很多计算中都起到了关键的作用，比如：

1. 计算行列式；
2. 检查向量是否是线性独立的；
3. 计算矩阵的逆矩阵；
4. 计算矩阵的秩；
5. 决定向量空间的基。

但当高斯消元法面对百万、千万级别的变量时，就捉襟见肘了。而这类级别的计算才是我们在实践中经常会遇到的，因此从实践角度来说，我也一般不推荐使用。因为高斯消元法属于直接法，直接法是经历有限次的运算得到方程组精确解的方法。但是，学习直接法是有意义的，虽然直接法在实际工作中不常用，但是它也能处理一些日常小问题，更重要的是，它稳固了我们进一步学习其它方法的基础。

我要讲的第三种方法，就是与直接法对应的间接法了。在实践中，线性方程组的求解都是间接的，也就是运用迭代法。

迭代法是采用极限过程，用线性方程组的近似解逐步逼近精确解的方法。所以，迭代法的关键在于每次迭代残余错误的减少，以及如何能够收敛到解。常见的迭代法有两类，定常迭代法（Stationary iterative method）和Krylov子空间方法（我会在应用篇中讲解）。

> 定常迭代法：理查德森迭代法（Richardson method）、雅可比方法（Jacobi method）、Gauß-Seidel方法、逐次超松弛法（Successive over-relaxation method，简称SOR）。
> Krylov子空间方法：共轭梯度法（Conjugate gradient）、广义极小残余算法（Generalized minimal residual）、双共轭梯度法（Biconjugate gradient）。

这里提到的几种迭代法都是在实践中比较常用的，也是计算机编程中经常实现的算法，但由于迭代法更多属于微分和极限领域，所以这里就不详细介绍了，我会在线性代数应用篇的“数值线性代数”那节课中再做讲解。

如果在课程内容结束后，你还有余力学习更多的内容，这里我先推荐两本书给你作参考，一本是《Introduction to Numerical Analysis》，另一本是《Linear Algebra》。这两本书里面都有进一步地讲解了线性方程组的迭代法求解的内容。

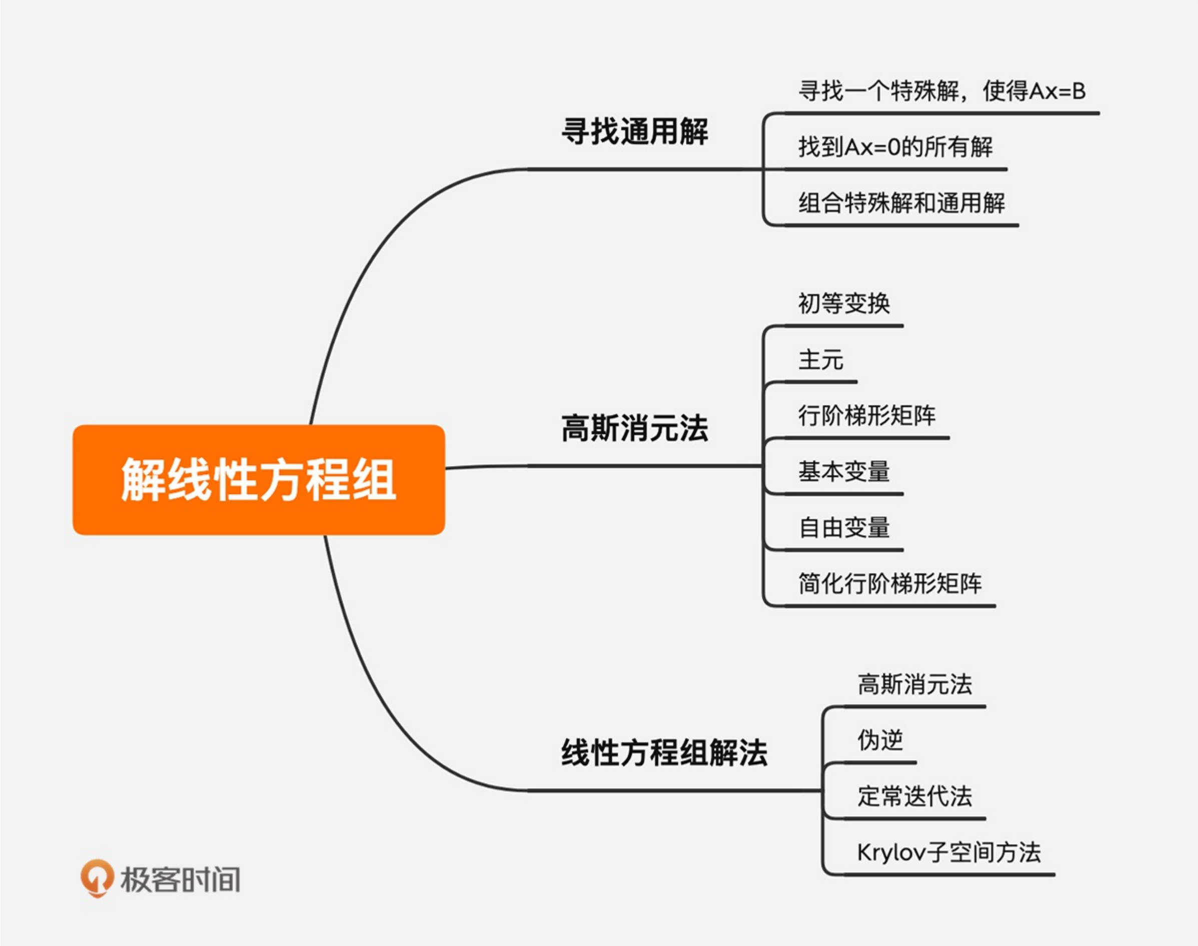
> 1.《Introduction to Numerical Analysis》
> 作者：Stoer, Josef, Bulirsch, R.
> 2002年出版
> 2.《Linear Algebra》
> 作者：Liesen, Jörg, Mehrmann, Volker
> 2015年出版

本节小结

好了，到这里解线性方程组这一讲就结束了，最后我再总结一下前面讲解的内容。

首先，我用一个简单的线性方程组，通过直接观察的方法来计算这个方程组的特殊解和通用解，接着通过实例详细地介绍了高斯消元法，最后我给出了一些在实践中常用的线性方程组解方法。只有弄清楚这些基础知识的本质，你才能更进一步，去了解其他计算方法。

线性方程组的求解已经成为了世界上最快计算机的测试标准，因为通过矩阵运算，计算机的并行计算能力暴露无遗。希望你能够在这些基础之上，阅读我推荐的两本书，并且把这些方法运用到实践中，特别是机器学习，因为机器学习也用到了很多迭代方法。



线性代数练习场

练习时刻到了，今天的练习题比较简单，请你用高斯消元法求下面的线性方程组。

$$
\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}-2 x_{3}-x_{4}=-1 \\
x_{1}+5 x_{2}-3 x_{3}-2 x_{4}=0 \\
3 x_{1}-x_{2}+x_{3}+4 x_{4}=2 \\
-2 x_{1}+2 x_{2}+x_{3}-x_{4}=1
\end{array}\right.
$$

欢迎在留言区和部落里晒出你的运算过程和结果，留下你的学习痕迹。如果你有所收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我一起重学线性代数！

在上一节课中，我讲解了线性方程组的另一种表达——矩阵。那么今天，我们就来讲解一下如何使用矩阵来解线性方程组，也就是如何求线性方程组的特殊解和通用解。

简单的线性方程组，我们当然可以运用初中学过的知识来求解，那复杂的呢？硬来几乎是不可能的了，一方面是因为人工计算的错误率很高，另一方面，即使我们使用计算机，用类似for或while循环来实现算法，它的计算效率也是极低的。你需要用更科学的方式、方法，从另一个角度来看待和求解线性方程组。

而矩阵就是为我们打开高效之门的钥匙，从计算机科学的角度来说，使用矩阵的运算效率实在是高太多了，因为它可以利用计算机的并行能力，甚至在一些迭代法中，还能实现分布式并行计算（迭代法会在后面"应用篇"中讲解）。

线性方程组解的寻找

现在，就让我们开始去寻找线性方程组的解。在之前的课程中，我们已经引入了线性方程组的一般表达，你可以看看下面的例子。

$$
\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.
$$

其中，a_{ij}和 b_{i} 属于实数，而且是已知常数，而x_{j}是未知变量，i和j的取值范围分别是：$i=1,…,m$；$j=1,…,n$ 。如果我们用矩阵的简单表达方式来看的话，就是$Ax=B$。

要搞清楚概念，我们还是要多看具体的例子。让我们先来看一个实例，来加深一下理解。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
x_{1} \\
x_{2} \\
x_{3} \\
x_{4}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8
\end{array}\right]
$$

很明显，这是一个矩阵表达方式。它的一般线性方程组表达方式是中学的基础知识，你应该很熟悉了。

$$
\left\{\begin{array}{l}
1 \times x_{1}+0 \times x_{2}+8 \times x_{3}+(-4) \times x_{4}=42 \\
0 \times x_{1}+1 \times x_{2}+2 \times x_{3}+12 \times x_{4}=8
\end{array}\right.
$$

在这个一般线性方程组中，有四个未知变量，但只有两个等式，这就意味着这个线性方程组有无穷多个解（这个是中学数学的范畴）。通过细心观察，我们可以发现第一列和第二列都是由0和1组成的，因此你很容易就能发现其中一个解。

$$
42\left[\begin{array}{l}
1 \\
0
\end{array}\right]+8\left[\begin{array}{l}
0 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8
\end{array}\right]
$$

这个解就是$\left[\begin{array}{llll}42 & 8 & 0 & 0\end{array}\right]^{T}$，也就是说四个未知变量分别为$42$、$8$、$0$、$0$。

$$
\left\{\begin{array}{l}
x_{1}=42 \\
x_{2}=8 \\
x_{3}=0 \\
x_{4}=0
\end{array}\right.
$$

这个解也叫做特殊解。我们刚才已经说过，这个线性方程组有无穷多个解，那我们确实需要一个聪明的方式来找到其他的解，最直观的方式就是通过矩阵的列来构造0。例如，对于第三列来说，我们可以使用第一和第二列的组合形式来表达。

$$
8\left[\begin{array}{l}
1 \\
0
\end{array}\right]+2\left[\begin{array}{l}
0 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{l}
8 \\
2
\end{array}\right]
$$

通过计算$Ax=0$，我们得出解$\left[\begin{array}{llll}8 & 2 & -1 & 0\end{array}\right]^{T}$。而事实上，这个解可以乘以任何实数$λ_{1}$，使得$Ax=0$成立。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]
\left(\begin{array}{l}
\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
8 \\
2 \\
-1 \\
0
\end{array}\right]
\end{array}\right)=0
$$

同理，对于第四列来说，我们可以使用第一和第二列的组合形式来表达，得出另一套解，使得$Ax=0$。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]
\left(\begin{array}{l}
\lambda_{2}\left[\begin{array}{l}
-4 \\
12 \\
0 \\
-1
\end{array}\right]
\end{array}\right)=0
$$

现在，我们可以把之前的特殊解与刚得出的两套解相组合，得出最终解，这个解也就是我们所说的通用解了。

$$
x \in R^{4}: x=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{1}\left[\begin{array}{c}
8 \\
2 \\
-1 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{c}
-4 \\
12 \\
0 \\
-1
\end{array}\right], \lambda_{1}, \lambda_{2} \in R
$$

我来总结一下寻找通用解的过程，这个过程分为三步：

1. 我们要寻找一个特殊解，使得$Ax=b$；
2. 找到$Ax=0$的所有解；
3. 组合第一和第二步的解形成通用解。

看到了这里，你有没有发现有些奇怪呢？或者说，有没有觉得哪里有点别扭？是的，好像有点太顺利了。那是因为这个线性方程组比较特别，第一列和第二列是由1和0组成的。所以，我们只通过观察就能得出特殊解和通用解。

然而，你不可能每次都行大运，就像我们在现实中碰到的这类线性方程组，一般都比这个复杂得多。不过不要慌，有一个算法可以来帮助我们转换任意线性方程组，形成类似的特殊形式，这个算法叫做**高斯消元法**。

高斯消元法的核心就是**线性方程组的初等变换**，于是，我们可以通过高斯消元法，得到围绕初等变换形成的简单矩阵表达形式，接下来我们就可以运用之前的三个步骤来寻找通用解了。

初等变换的一般形式

既然高斯消元法的核心就是线性方程组的初等变换，那为了方便你使用高斯消元法，我就有必要来讲一讲初等变换的一般形式有哪些：

1. 两个等式的交换，也就是矩阵行交换；
2. 一个等式，或者说矩阵行乘以一个实数常量；
3. 两个等式相加，或者说矩阵的两行相加。

道理是这样的道理，那我们通过一个例子来看看，究竟该怎么做线性方程组的初等变换。假设a属于实数，现在我们试着来寻找下面这个线性方程组的所有解。我把这个过程细细地拆解为11个步骤，建议你仔细看过并理解后，再进入下一阶段的学习。

$$
\left\{\begin{array}{c}
-2 x_{1}+4 x_{2}-2 x_{3}-x_{4}+4 x_{5}=-3 \\
4 x_{1}-8 x_{2}+3 x_{3}-3 x_{4}+x_{5}=2 \\
x_{1}-2 x_{2}+x_{3}-x_{4}+x_{5}=0 \\
x_{1}-2 x_{2}-3 x_{4}+4 x_{5}=a
\end{array}\right.
$$

1.我们要把这个线性方程组转换成矩阵的表达形式，$Ax=b$。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
4 & -8 & 3 & -3 & 1 & \mid & 2 \\
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

2.接着我们来交换第一和第三行。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
4 & -8 & 3 & -3 & 1 & \mid & 2 \\
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

注意，你知道我们为什么选择第一行和第三行交换吗？其实，这是为了便于计算。而具体交换哪一行是有个小技巧的，如果某行的第一个元素有1，我们就可以把这一行移到第一行。

3.我们以第一行为基础，开始执行乘和加变换，将第一行乘以-4的结果和第二行相加，从而获得了下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

4.然后，我们用同样的方法，将第一行乘以2的结果，再和第三行相加，得到了下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

5.以此类推，我们将第一行乘以-1的结果，和第四行相加，继续获得新矩阵。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & -1 & -2 & 3 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

6.将第二行乘以-1的结果，和第四行相加，得到下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & a-2
\end{array}\right]
$$

7.将第三行乘以-1的结果，和第四行相加。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & a+1
\end{array}\right]
$$

$$

8.第二行乘以-1，第三行乘以$-\frac{1}{3}$。
$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 3 & \mid & -2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \mid & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & a+1
\end{array}\right]
$$

9.现在，这个矩阵就是一个简单形式的矩阵，也叫做**行阶梯形矩阵**（Row-Echelon Form，REF）。

$$
\left\{\begin{array}{r}
x_{1}-2 x_{2}+x_{3}-x_{4}+x_{5}=0 \\
x_{3}-x_{4}+3 x_{5}=-2 \\
x_{4}-2 x_{5}=1 \\
0=a+1
\end{array}\right.
$$

一个矩阵成为行阶梯形矩阵需满足两个条件：

- 如果它既有零行，又有非零行，则零行在下，非零行在上；
- 如果它有非零行，则每个非零行的第一个非零元素所在列号自上而下严格单调上升，正如之前的这个矩阵，列号自上而下是1、3、4，是严格单调上升的。

10.你可以看出，只有在$a=-1$的情况下，这个线性方程组才有解，特殊解是$\left[\begin{array}{lllll}2 & 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right]^{\mathrm{T}}$。

11.最后，我们得出这个线性方程组的通用解，如下图所示。

$$
x \in R^{5}: x=\left[\begin{array}{c}
2 \\
0 \\
-1 \\
1 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
2 \\
1 \\
0 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{c}
2 \\
0 \\
-1 \\
2 \\
1
\end{array}\right], \lambda_{1}, \lambda_{2} \in R
$$

注意，这里有一个概念很重要，那就是**主元**。主元就是在矩阵消元过程中，每列要保留的非零元素，我们可以用它把该列其他元素消去。在阶梯型矩阵中，每个非零行第一个非零元素就是主元。

拿之前的第8步计算后的结果来举例，第一行的第一个元素1就是主元，第二行第三个元素1是主元，第三行的第四个元素1也是主元。

$$
\begin{bmatrix}
1 & -2 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

对应行阶梯形矩阵主元的变量叫做基本变量，而其他的变量叫做自由变量，这个例子中，x_{1}、x_{3}、x_{4}就是基本变量，x_{2}、x_{5}则是自由变量。使用行阶梯形矩阵能更简单地得出特殊解，所以我们可以使用主元列来表达线性方程组：

$$
b=\sum_{i=1}^{P} \lambda_{i} \mathrm{p}_{i}, i=1, \ldots, P
$$

在之前的例子中，我们使用主元列来表达成下面这样的矩阵形式：

$$
\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
1 \\
0 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{l}
1 \\
1 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{3}\left[\begin{array}{c}
-1 \\
-1 \\
1 \\
0
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
0 \\
-2 \\
1 \\
0
\end{array}\right]
$$

于是，我们最终得出 $\lambda_{3}=1$，$\lambda_{2}=-1$，$\lambda_{1}=2$，分别对应于x_{4}、x_{3}、x_{1}。不要忘了，对于非主元列，我们已经隐式地把系数设置成了0，所以这个线性方程组的特殊解是$x=\left[\begin{array}{lllll}2 & 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right]^{\mathrm{T}}$。

简化行阶梯形矩阵

这里我们再引入一个概念，简化行阶梯形矩阵，因为引入简化行阶梯形矩阵对于线性方程组的求解来说会更简单。其实，高斯消元法的核心就是通过初等变换，把线性方程组转换成简化行阶梯形矩阵。那么一个方程组是简化行阶梯形矩阵，必须满足哪几个条件呢？

1. 这个方程组必须是行阶梯形矩阵；
2. 方程组的每一个主元都是1；
3. 主元在它的列中是唯一的非0元素。

现在，我们再通过一个实例，看看该如何通过高斯消元法计算一个矩阵的逆矩阵。设矩阵A如下图：

$$

$$
A=\left[\begin{array}{llll}
1 & 0 & 2 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right]
$$

首先，我们形成A的增广矩阵（具体方法参见上一节）。

$$
\left[\begin{array}{lllllllll}
1 & 0 & 2 & 0 & \mid & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & \mid & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 1 & \mid & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & \mid & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

其次，使用我们前面刚刚讲过的高斯消元法计算出简化行阶梯形矩阵。

$$
\left[\begin{array}{ccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \mid & -1 & 2 & -2 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \mid & 1 & -1 & 2 & -2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \mid & 1 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \mid & -1 & 0 & -1 & 2
\end{array}\right]
$$

最后，我们就得到A的逆矩阵，如下图所示。

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{cccc}
-1 & 2 & -2 & 2 \\
1 & -1 & 2 & -2 \\
1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & 0 & -1 & 2
\end{array}\right]
$$

接下来，我们只要使用公式$A A^{-1}=I$ 就可以对结果进行验证了。

更多解线性方程组的方法

到目前为止，相信你已经了解了如何解线性方程组，包括特殊解和通用解，以及如何使用高斯消元法来解线性方程组。最后，我再总结一些解方法来作为你的知识扩展。

第一个方法，假设一个矩阵A是方阵（行数与列数相等的矩阵），并且可逆，$Ax=B$ ，那x解就可以写成$x=A^{-1}B$，但如果A矩阵不可逆，也不是方阵，那我们就只能使用下面这个变换来求x解了。

$$Ax=B \Leftrightarrow A^{T}Ax=A^{T}B \Leftrightarrow x=(A^{T}A)^{-1}A^{T}B$$

其中，矩阵A的转置矩阵和A相乘的逆矩阵，再和A的转置矩阵相乘，我们把它叫做穆尔彭罗斯伪逆矩阵（Moore-Penrose pseudo inverse），简称伪逆。

$$(A^{T}A)^{-1}A^{T}$$

这个方法有两个弊端：第一，矩阵乘和逆矩阵的计算太复杂；第二，数值精确度不高。因此，从实践角度来说，我一般不推荐使用。

第二个方法是高斯消元法。高斯消元法是非常直观的，它在很多计算中都起到了关键的作用，比如：

1. 计算行列式；
2. 检查向量是否是线性独立的；
3. 计算矩阵的逆矩阵；
4. 计算矩阵的秩；
5. 决定向量空间的基。

但当高斯消元法面对百万、千万级别的变量时，就捉襟见肘了。而这类级别的计算才是我们在实践中经常会遇到的，因此从实践角度来说，我也一般不推荐使用。因为高斯消元法属于直接法，直接法是经历有限次的运算得到方程组精确解的方法。但是，学习直接法是有意义的，虽然直接法在实际工作中不常用，但是它也能处理一些日常小问题，更重要的是，它稳固了我们进一步学习其它方法的基础。

我要讲的第三种方法，就是与直接法对应的间接法了。在实践中，线性方程组的求解都是间接的，也就是运用迭代法。

迭代法是采用极限过程，用线性方程组的近似解逐步逼近精确解的方法。所以，迭代法的关键在于每次迭代残余错误的减少，以及如何能够收敛到解。常见的迭代法有两类，定常迭代法（Stationary iterative method）和Krylov子空间方法（我会在应用篇中讲解）。

> 定常迭代法：理查德森迭代法（Richardson method）、雅可比方法（Jacobi method）、Gauß-Seidel方法、逐次超松弛法（Successive over-relaxation method，简称SOR）。
> Krylov子空间方法：共轭梯度法（Conjugate gradient）、广义极小残余算法（Generalized minimal residual）、双共轭梯度法（Biconjugate gradient）。

这里提到的几种迭代法都是在实践中比较常用的，也是计算机编程中经常实现的算法，但由于迭代法更多属于微分和极限领域，所以这里就不详细介绍了，我会在线性代数应用篇的"数值线性代数"那节课中再做讲解。

如果在课程内容结束后，你还有余力学习更多的内容，这里我先推荐两本书给你作参考，一本是《Introduction to Numerical Analysis》，另一本是《Linear Algebra》。这两本书里面都有进一步地讲解了线性方程组的迭代法求解的内容。

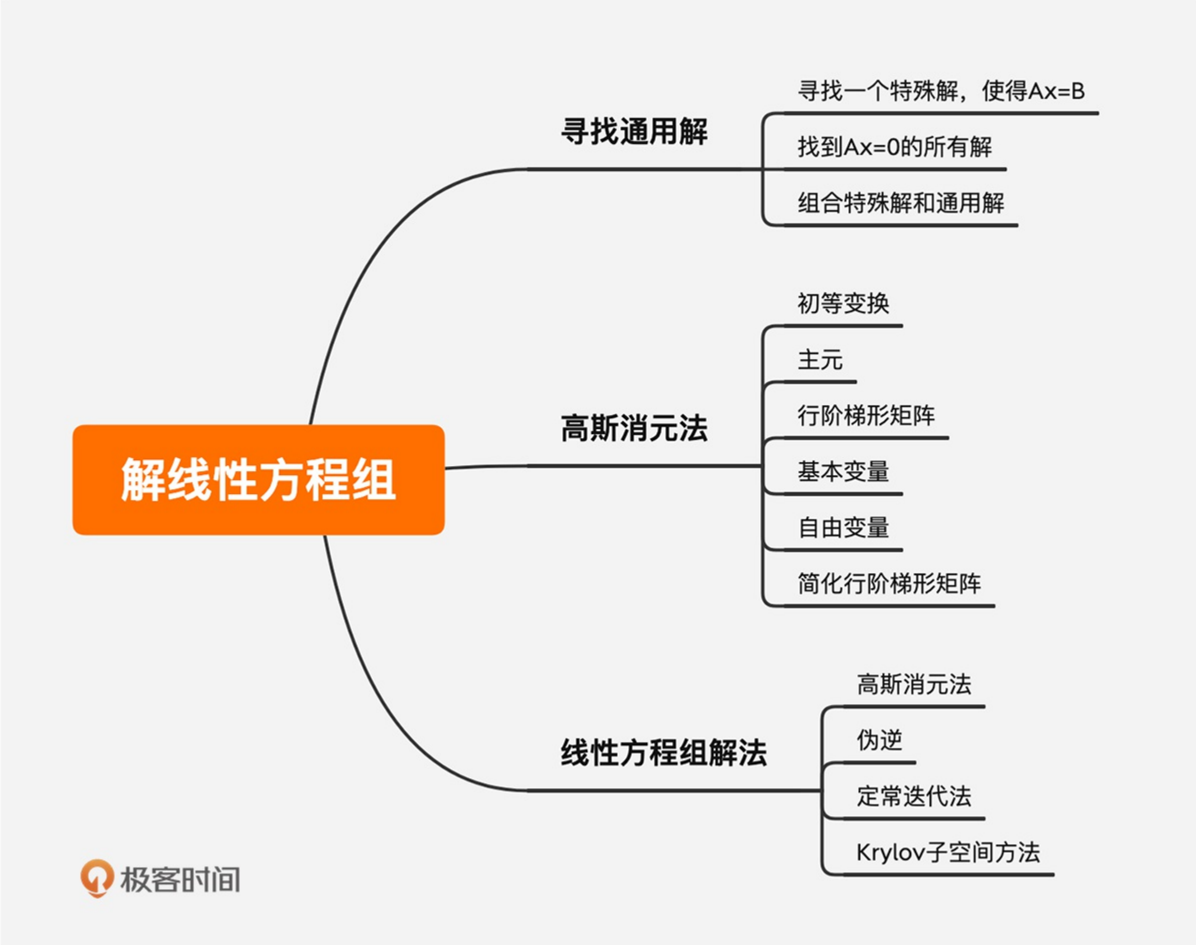
> 1.《Introduction to Numerical Analysis》
> 作者：Stoer, Josef, Bulirsch, R.
> 2002年出版
> 2.《Linear Algebra》
> 作者：Liesen, Jörg, Mehrmann, Volker
> 2015年出版

本节小结

好了，到这里解线性方程组这一讲就结束了，最后我再总结一下前面讲解的内容。

首先，我用一个简单的线性方程组，通过直接观察的方法来计算这个方程组的特殊解和通用解，接着通过实例详细地介绍了高斯消元法，最后我给出了一些在实践中常用的线性方程组解方法。只有弄清楚这些基础知识的本质，你才能更进一步，去了解其他计算方法。

线性方程组的求解已经成为了世界上最快计算机的测试标准，因为通过矩阵运算，计算机的并行计算能力暴露无遗。希望你能够在这些基础之上，阅读我推荐的两本书，并且把这些方法运用到实践中，特别是机器学习，因为机器学习也用到了很多迭代方法。



线性代数练习场

练习时刻到了，今天的练习题比较简单，请你用高斯消元法求下面的线性方程组。

$$
\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}-2 x_{3}-x_{4}=-1 \\
x_{1}+5 x_{2}-3 x_{3}-2 x_{4}=0 \\
3 x_{1}-x_{2}+x_{3}+4 x_{4}=2 \\
-2 x_{1}+2 x_{2}+x_{3}-x_{4}=1
\end{array}\right.
$$

欢迎在留言区和部落里晒出你的运算过程和结果，留下你的学习痕迹。如果你有所收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我一起重学线性代数！

在上一节课中，我讲解了线性方程组的另一种表达——矩阵。那么今天，我们就来讲解一下如何使用矩阵来解线性方程组，也就是如何求线性方程组的特殊解和通用解。

简单的线性方程组，我们当然可以运用初中学过的知识来求解，那复杂的呢？硬来几乎是不可能的了，一方面是因为人工计算的错误率很高，另一方面，即使我们使用计算机，用类似for或while循环来实现算法，它的计算效率也是极低的。你需要用更科学的方式、方法，从另一个角度来看待和求解线性方程组。

而矩阵就是为我们打开高效之门的钥匙，从计算机科学的角度来说，使用矩阵的运算效率实在是高太多了，因为它可以利用计算机的并行能力，甚至在一些迭代法中，还能实现分布式并行计算（迭代法会在后面"应用篇"中讲解）。

线性方程组解的寻找

现在，就让我们开始去寻找线性方程组的解。在之前的课程中，我们已经引入了线性方程组的一般表达，你可以看看下面的例子。

$$
\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.
$$

其中，a_{ij}和 b_{i} 属于实数，而且是已知常数，而x_{j}是未知变量，i和j的取值范围分别是：$i=1,…,m$；$j=1,…,n$ 。如果我们用矩阵的简单表达方式来看的话，就是$Ax=B$。

要搞清楚概念，我们还是要多看具体的例子。让我们先来看一个实例，来加深一下理解。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
x_{1} \\
x_{2} \\
x_{3} \\
x_{4}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8
\end{array}\right]
$$

很明显，这是一个矩阵表达方式。它的一般线性方程组表达方式是中学的基础知识，你应该很熟悉了。

$$
\left\{\begin{array}{l}
1 \times x_{1}+0 \times x_{2}+8 \times x_{3}+(-4) \times x_{4}=42 \\
0 \times x_{1}+1 \times x_{2}+2 \times x_{3}+12 \times x_{4}=8
\end{array}\right.
$$

在这个一般线性方程组中，有四个未知变量，但只有两个等式，这就意味着这个线性方程组有无穷多个解（这个是中学数学的范畴）。通过细心观察，我们可以发现第一列和第二列都是由0和1组成的，因此你很容易就能发现其中一个解。

$$
42\left[\begin{array}{l}
1 \\
0
\end{array}\right]+8\left[\begin{array}{l}
0 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8
\end{array}\right]
$$

这个解就是$\left[\begin{array}{llll}42 & 8 & 0 & 0\end{array}\right]^{T}$，也就是说四个未知变量分别为$42$、$8$、$0$、$0$。

$$
\left\{\begin{array}{l}
x_{1}=42 \\
x_{2}=8 \\
x_{3}=0 \\
x_{4}=0
\end{array}\right.
$$

这个解也叫做特殊解。我们刚才已经说过，这个线性方程组有无穷多个解，那我们确实需要一个聪明的方式来找到其他的解，最直观的方式就是通过矩阵的列来构造0。例如，对于第三列来说，我们可以使用第一和第二列的组合形式来表达。

$$
8\left[\begin{array}{l}
1 \\
0
\end{array}\right]+2\left[\begin{array}{l}
0 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{l}
8 \\
2
\end{array}\right]
$$

通过计算$Ax=0$，我们得出解$\left[\begin{array}{llll}8 & 2 & -1 & 0\end{array}\right]^{T}$。而事实上，这个解可以乘以任何实数$\lambda_{1}$，使得$Ax=0$成立。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]
\left(\begin{array}{l}
\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
8 \\
2 \\
-1 \\
0
\end{array}\right]
\end{array}\right)=0
$$

同理，对于第四列来说，我们可以使用第一和第二列的组合形式来表达，得出另一套解，使得$Ax=0$。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]
\left(\begin{array}{l}
\lambda_{2}\left[\begin{array}{l}
-4 \\
12 \\
0 \\
-1
\end{array}\right]
\end{array}\right)=0
$$

现在，我们可以把之前的特殊解与刚得出的两套解相组合，得出最终解，这个解也就是我们所说的通用解了。

$$
x \in R^{4}: x=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{1}\left[\begin{array}{c}
8 \\
2 \\
-1 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{c}
-4 \\
12 \\
0 \\
-1
\end{array}\right], \lambda_{1}, \lambda_{2} \in R
$$

我来总结一下寻找通用解的过程，这个过程分为三步：

1. 我们要寻找一个特殊解，使得$Ax=b$；
2. 找到$Ax=0$的所有解；
3. 组合第一和第二步的解形成通用解。

看到了这里，你有没有发现有些奇怪呢？或者说，有没有觉得哪里有点别扭？是的，好像有点太顺利了。那是因为这个线性方程组比较特别，第一列和第二列是由1和0组成的。所以，我们只通过观察就能得出特殊解和通用解。

然而，你不可能每次都行大运，就像我们在现实中碰到的这类线性方程组，一般都比这个复杂得多。不过不要慌，有一个算法可以来帮助我们转换任意线性方程组，形成类似的特殊形式，这个算法叫做**高斯消元法**。

高斯消元法的核心就是**线性方程组的初等变换**，于是，我们可以通过高斯消元法，得到围绕初等变换形成的简单矩阵表达形式，接下来我们就可以运用之前的三个步骤来寻找通用解了。

初等变换的一般形式

既然高斯消元法的核心就是线性方程组的初等变换，那为了方便你使用高斯消元法，我就有必要来讲一讲初等变换的一般形式有哪些：

1. 两个等式的交换，也就是矩阵行交换；
2. 一个等式，或者说矩阵行乘以一个实数常量；
3. 两个等式相加，或者说矩阵的两行相加。

道理是这样的道理，那我们通过一个例子来看看，究竟该怎么做线性方程组的初等变换。假设a属于实数，现在我们试着来寻找下面这个线性方程组的所有解。我把这个过程细细地拆解为11个步骤，建议你仔细看过并理解后，再进入下一阶段的学习。

$$
\left\{\begin{array}{c}
-2 x_{1}+4 x_{2}-2 x_{3}-x_{4}+4 x_{5}=-3 \\
4 x_{1}-8 x_{2}+3 x_{3}-3 x_{4}+x_{5}=2 \\
x_{1}-2 x_{2}+x_{3}-x_{4}+x_{5}=0 \\
x_{1}-2 x_{2}-3 x_{4}+4 x_{5}=a
\end{array}\right.
$$

1.我们要把这个线性方程组转换成矩阵的表达形式，$Ax=b$。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
4 & -8 & 3 & -3 & 1 & \mid & 2 \\
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

2.接着我们来交换第一和第三行。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
4 & -8 & 3 & -3 & 1 & \mid & 2 \\
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

注意，你知道我们为什么选择第一行和第三行交换吗？其实，这是为了便于计算。而具体交换哪一行是有个小技巧的，如果某行的第一个元素有1，我们就可以把这一行移到第一行。

3.我们以第一行为基础，开始执行乘和加变换，将第一行乘以-4的结果和第二行相加，从而获得了下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

4.然后，我们用同样的方法，将第一行乘以2的结果，再和第三行相加，得到了下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

5.以此类推，我们将第一行乘以-1的结果，和第四行相加，继续获得新矩阵。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & -1 & -2 & 3 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

6.将第二行乘以-1的结果，和第四行相加，得到下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & a-2
\end{array}\right]
$$

7.将第三行乘以-1的结果，和第四行相加。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & a+1
\end{array}\right]

$$

8.第二行乘以-1，第三行乘以$-\frac{1}{3}$。
$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 3 & \mid & -2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \mid & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & a+1
\end{array}\right]
$$

9.现在，这个矩阵就是一个简单形式的矩阵，也叫做**行阶梯形矩阵**（Row-Echelon Form，REF）。

$$
\left\{\begin{array}{r}
x_{1}-2 x_{2}+x_{3}-x_{4}+x_{5}=0 \\
x_{3}-x_{4}+3 x_{5}=-2 \\
x_{4}-2 x_{5}=1 \\
0=a+1
\end{array}\right.
$$

一个矩阵成为行阶梯形矩阵需满足两个条件：

- 如果它既有零行，又有非零行，则零行在下，非零行在上；
- 如果它有非零行，则每个非零行的第一个非零元素所在列号自上而下严格单调上升，正如之前的这个矩阵，列号自上而下是1、3、4，是严格单调上升的。

10.你可以看出，只有在$a=-1$的情况下，这个线性方程组才有解，特殊解是$\left[\begin{array}{lllll}2 & 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right]^{\mathrm{T}}$。

11.最后，我们得出这个线性方程组的通用解，如下图所示。

$$
x \in R^{5}: x=\left[\begin{array}{c}
2 \\
0 \\
-1 \\
1 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
2 \\
1 \\
0 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{c}
2 \\
0 \\
-1 \\
2 \\
1
\end{array}\right], \lambda_{1}, \lambda_{2} \in R
$$

注意，这里有一个概念很重要，那就是**主元**。主元就是在矩阵消元过程中，每列要保留的非零元素，我们可以用它把该列其他元素消去。在阶梯型矩阵中，每个非零行第一个非零元素就是主元。

拿之前的第8步计算后的结果来举例，第一行的第一个元素1就是主元，第二行第三个元素1是主元，第三行的第四个元素1也是主元。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & -2 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

对应行阶梯形矩阵主元的变量叫做基本变量，而其他的变量叫做自由变量，这个例子中，x_{1}、x_{3}、x_{4}就是基本变量，x_{2}、x_{5}则是自由变量。使用行阶梯形矩阵能更简单地得出特殊解，所以我们可以使用主元列来表达线性方程组：

$$
b=\sum_{i=1}^{P} \lambda_{i} \mathrm{p}_{i}, i=1, \ldots, P
$$

在之前的例子中，我们使用主元列来表达成下面这样的矩阵形式：

$$
\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
1 \\
0 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{l}
1 \\
1 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{3}\left[\begin{array}{c}
-1 \\
-1 \\
1 \\
0
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
0 \\
-2 \\
1 \\
0
\end{array}\right]
$$

于是，我们最终得出 $\lambda_{3}=1$，$\lambda_{2}=-1$，$\lambda_{1}=2$，分别对应于x_{4}、x_{3}、x_{1}。不要忘了，对于非主元列，我们已经隐式地把系数设置成了0，所以这个线性方程组的特殊解是$x=\left[\begin{array}{lllll}2 & 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right]^{\mathrm{T}}$。

简化行阶梯形矩阵

这里我们再引入一个概念，简化行阶梯形矩阵，因为引入简化行阶梯形矩阵对于线性方程组的求解来说会更简单。其实，高斯消元法的核心就是通过初等变换，把线性方程组转换成简化行阶梯形矩阵。那么一个方程组是简化行阶梯形矩阵，必须满足哪几个条件呢？

1. 这个方程组必须是行阶梯形矩阵；
2. 方程组的每一个主元都是1；
3. 主元在它的列中是唯一的非0元素。

现在，我们再通过一个实例，看看该如何通过高斯消元法计算一个矩阵的逆矩阵。设矩阵A如下图：

$$

$$
A=\left[\begin{array}{llll}
1 & 0 & 2 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right]
$$

首先，我们形成A的增广矩阵（具体方法参见上一节）。

$$
\left[\begin{array}{llllllll}
1 & 0 & 2 & 0 & \mid & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & \mid & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 1 & \mid & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & \mid & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

其次，使用我们前面刚刚讲过的高斯消元法计算出简化行阶梯形矩阵。

$$
\left[\begin{array}{ccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \mid & -1 & 2 & -2 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \mid & 1 & -1 & 2 & -2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \mid & 1 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \mid & -1 & 0 & -1 & 2
\end{array}\right]
$$

最后，我们就得到A的逆矩阵，如下图所示。

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{cccc}
-1 & 2 & -2 & 2 \\
1 & -1 & 2 & -2 \\
1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & 0 & -1 & 2
\end{array}\right]
$$

接下来，我们只要使用公式$A A^{-1}=I$ 就可以对结果进行验证了。

更多解线性方程组的方法

到目前为止，相信你已经了解了如何解线性方程组，包括特殊解和通用解，以及如何使用高斯消元法来解线性方程组。最后，我再总结一些解方法来作为你的知识扩展。

第一个方法，假设一个矩阵A是方阵（行数与列数相等的矩阵），并且可逆，$Ax=B$，那x解就可以写成$x=A^{-1}B$，但如果A矩阵不可逆，也不是方阵，那我们就只能使用下面这个变换来求x解了。

$$Ax=B⇔A^{T}Ax=A^{T}B⇔x=(A^{T}A)^{-1}A^{T}B$$

其中，矩阵A的转置矩阵和A相乘的逆矩阵，再和A的转置矩阵相乘，我们把它叫做穆尔彭罗斯伪逆矩阵（Moore-Penrose pseudo inverse），简称伪逆。

$$(A^{T}A)^{-1}A^{T}$$

这个方法有两个弊端：第一，矩阵乘和逆矩阵的计算太复杂；第二，数值精确度不高。因此，从实践角度来说，我一般不推荐使用。

第二个方法是高斯消元法。高斯消元法是非常直观的，它在很多计算中都起到了关键的作用，比如：

1. 计算行列式；
2. 检查向量是否是线性独立的；
3. 计算矩阵的逆矩阵；
4. 计算矩阵的秩；
5. 决定向量空间的基。

但当高斯消元法面对百万、千万级别的变量时，就捉襟见肘了。而这类级别的计算才是我们在实践中经常会遇到的，因此从实践角度来说，我也一般不推荐使用。因为高斯消元法属于直接法，直接法是经历有限次的运算得到方程组精确解的方法。但是，学习直接法是有意义的，虽然直接法在实际工作中不常用，但是它也能处理一些日常小问题，更重要的是，它稳固了我们进一步学习其它方法的基础。

我要讲的第三种方法，就是与直接法对应的间接法了。在实践中，线性方程组的求解都是间接的，也就是运用迭代法。

迭代法是采用极限过程，用线性方程组的近似解逐步逼近精确解的方法。所以，迭代法的关键在于每次迭代残余错误的减少，以及如何能够收敛到解。常见的迭代法有两类，定常迭代法（Stationary iterative method）和Krylov子空间方法（我会在应用篇中讲解）。

> 定常迭代法：理查德森迭代法（Richardson method）、雅可比方法（Jacobi method）、Gauß-Seidel方法、逐次超松弛法（Successive over-relaxation method，简称SOR）。
> Krylov子空间方法：共轭梯度法（Conjugate gradient）、广义极小残余算法（Generalized minimal residual）、双共轭梯度法（Biconjugate gradient）。

这里提到的几种迭代法都是在实践中比较常用的，也是计算机编程中经常实现的算法，但由于迭代法更多属于微分和极限领域，所以这里就不详细介绍了，我会在线性代数应用篇的"数值线性代数"那节课中再做讲解。

如果在课程内容结束后，你还有余力学习更多的内容，这里我先推荐两本书给你作参考，一本是《Introduction to Numerical Analysis》，另一本是《Linear Algebra》。这两本书里面都有进一步地讲解了线性方程组的迭代法求解的内容。

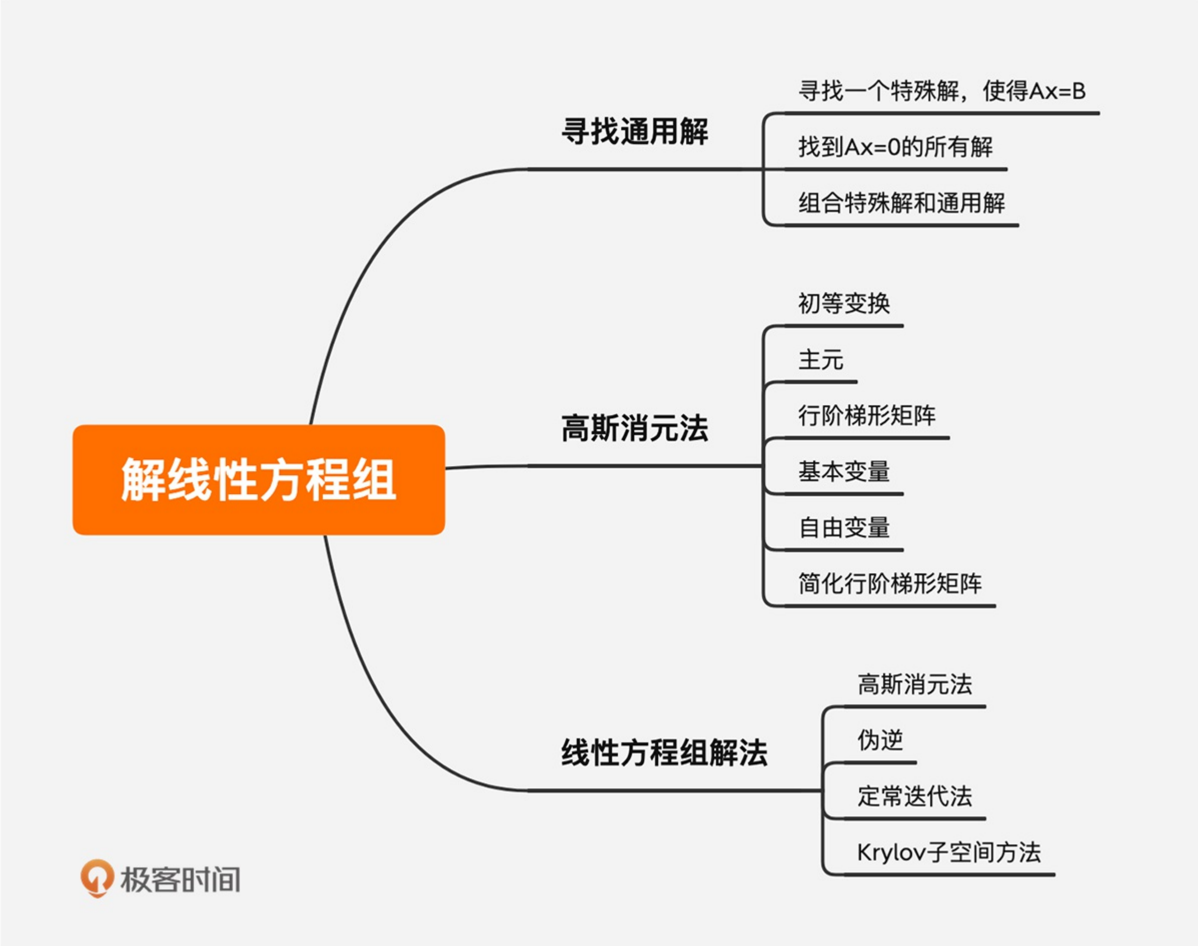
> 1.《Introduction to Numerical Analysis》
> 作者：Stoer, Josef, Bulirsch, R.
> 2002年出版
> 2.《Linear Algebra》
> 作者：Liesen, Jörg, Mehrmann, Volker
> 2015年出版

本节小结

好了，到这里解线性方程组这一讲就结束了，最后我再总结一下前面讲解的内容。

首先，我用一个简单的线性方程组，通过直接观察的方法来计算这个方程组的特殊解和通用解，接着通过实例详细地介绍了高斯消元法，最后我给出了一些在实践中常用的线性方程组解方法。只有弄清楚这些基础知识的本质，你才能更进一步，去了解其他计算方法。

线性方程组的求解已经成为了世界上最快计算机的测试标准，因为通过矩阵运算，计算机的并行计算能力暴露无遗。希望你能够在这些基础之上，阅读我推荐的两本书，并且把这些方法运用到实践中，特别是机器学习，因为机器学习也用到了很多迭代方法。



线性代数练习场

练习时刻到了，今天的练习题比较简单，请你用高斯消元法求下面的线性方程组。

$$
\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}-2 x_{3}-x_{4}=-1 \\
x_{1}+5 x_{2}-3 x_{3}-2 x_{4}=0 \\
3 x_{1}-x_{2}+x_{3}+4 x_{4}=2 \\
-2 x_{1}+2 x_{2}+x_{3}-x_{4}=1
\end{array}\right.
$$

欢迎在留言区和部落里晒出你的运算过程和结果，留下你的学习痕迹。如果你有所收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我一起重学线性代数！

在上一节课中，我讲解了线性方程组的另一种表达——矩阵。那么今天，我们就来讲解一下如何使用矩阵来解线性方程组，也就是如何求线性方程组的特殊解和通用解。

简单的线性方程组，我们当然可以运用初中学过的知识来求解，那复杂的呢？硬来几乎是不可能的了，一方面是因为人工计算的错误率很高，另一方面，即使我们使用计算机，用类似for或while循环来实现算法，它的计算效率也是极低的。你需要用更科学的方式、方法，从另一个角度来看待和求解线性方程组。

而矩阵就是为我们打开高效之门的钥匙，从计算机科学的角度来说，使用矩阵的运算效率实在是高太多了，因为它可以利用计算机的并行能力，甚至在一些迭代法中，还能实现分布式并行计算（迭代法会在后面“应用篇”中讲解）。

线性方程组解的寻找

现在，就让我们开始去寻找线性方程组的解。在之前的课程中，我们已经引入了线性方程组的一般表达，你可以看看下面的例子。

$$
\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.
$$

其中，a_{ij}和 b_{i} 属于实数，而且是已知常数，而x_{j}是未知变量，i和j的取值范围分别是：$i=1,…,m$；$j=1,…,n$ 。如果我们用矩阵的简单表达方式来看的话，就是$Ax=B$。

要搞清楚概念，我们还是要多看具体的例子。让我们先来看一个实例，来加深一下理解。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
x_{1} \\
x_{2} \\
x_{3} \\
x_{4}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8
\end{array}\right]
$$

很明显，这是一个矩阵表达方式。它的一般线性方程组表达方式是中学的基础知识，你应该很熟悉了。

$$
\left\{\begin{array}{l}
1 \times x_{1}+0 \times x_{2}+8 \times x_{3}+(-4) \times x_{4}=42 \\
0 \times x_{1}+1 \times x_{2}+2 \times x_{3}+12 \times x_{4}=8
\end{array}\right.
$$

在这个一般线性方程组中，有四个未知变量，但只有两个等式，这就意味着这个线性方程组有无穷多个解（这个是中学数学的范畴）。通过细心观察，我们可以发现第一列和第二列都是由0和1组成的，因此你很容易就能发现其中一个解。

$$
42\left[\begin{array}{l}
1 \\
0
\end{array}\right]+8\left[\begin{array}{l}
0 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8
\end{array}\right]
$$

这个解就是$\left[\begin{array}{llll}42 & 8 & 0 & 0\end{array}\right]^{T}$，也就是说四个未知变量分别为$42$、$8$、$0$、$0$。

$$
\left\{\begin{array}{l}
x_{1}=42 \\
x_{2}=8 \\
x_{3}=0 \\
x_{4}=0
\end{array}\right.
$$

这个解也叫做特殊解。我们刚才已经说过，这个线性方程组有无穷多个解，那我们确实需要一个聪明的方式来找到其他的解，最直观的方式就是通过矩阵的列来构造0。例如，对于第三列来说，我们可以使用第一和第二列的组合形式来表达。

$$
8\left[\begin{array}{l}
1 \\
0
\end{array}\right]+2\left[\begin{array}{l}
0 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{l}
8 \\
2
\end{array}\right]
$$

通过计算$Ax=0$，我们得出解$\left[\begin{array}{llll}8 & 2 & -1 & 0\end{array}\right]^{T}$。而事实上，这个解可以乘以任何实数$λ_{1}$，使得$Ax=0$成立。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]
\left(\begin{array}{l}
\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
8 \\
2 \\
-1 \\
0
\end{array}\right]
\end{array}\right)=0
$$

同理，对于第四列来说，我们可以使用第一和第二列的组合形式来表达，得出另一套解，使得$Ax=0$。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]
\left(\begin{array}{l}
\lambda_{2}\left[\begin{array}{l}
-4 \\
12 \\
0 \\
-1
\end{array}\right]
\end{array}\right)=0
$$

现在，我们可以把之前的特殊解与刚得出的两套解相组合，得出最终解，这个解也就是我们所说的通用解了。

$$
x \in R^{4}: x=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{1}\left[\begin{array}{c}
8 \\
2 \\
-1 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{c}
-4 \\
12 \\
0 \\
-1
\end{array}\right], \lambda_{1}, \lambda_{2} \in R
$$

我来总结一下寻找通用解的过程，这个过程分为三步：

1. 我们要寻找一个特殊解，使得$Ax=b$；
2. 找到$Ax=0$的所有解；
3. 组合第一和第二步的解形成通用解。

看到了这里，你有没有发现有些奇怪呢？或者说，有没有觉得哪里有点别扭？是的，好像有点太顺利了。那是因为这个线性方程组比较特别，第一列和第二列是由1和0组成的。所以，我们只通过观察就能得出特殊解和通用解。

然而，你不可能每次都行大运，就像我们在现实中碰到的这类线性方程组，一般都比这个复杂得多。不过不要慌，有一个算法可以来帮助我们转换任意线性方程组，形成类似的特殊形式，这个算法叫做**高斯消元法**。

高斯消元法的核心就是**线性方程组的初等变换**，于是，我们可以通过高斯消元法，得到围绕初等变换形成的简单矩阵表达形式，接下来我们就可以运用之前的三个步骤来寻找通用解了。

初等变换的一般形式

既然高斯消元法的核心就是线性方程组的初等变换，那为了方便你使用高斯消元法，我就有必要来讲一讲初等变换的一般形式有哪些：

1. 两个等式的交换，也就是矩阵行交换；
2. 一个等式，或者说矩阵行乘以一个实数常量；
3. 两个等式相加，或者说矩阵的两行相加。

道理是这样的道理，那我们通过一个例子来看看，究竟该怎么做线性方程组的初等变换。假设a属于实数，现在我们试着来寻找下面这个线性方程组的所有解。我把这个过程细细地拆解为11个步骤，建议你仔细看过并理解后，再进入下一阶段的学习。

$$
\left\{\begin{array}{c}
-2 x_{1}+4 x_{2}-2 x_{3}-x_{4}+4 x_{5}=-3 \\
4 x_{1}-8 x_{2}+3 x_{3}-3 x_{4}+x_{5}=2 \\
x_{1}-2 x_{2}+x_{3}-x_{4}+x_{5}=0 \\
x_{1}-2 x_{2}-3 x_{4}+4 x_{5}=a
\end{array}\right.
$$

1.我们要把这个线性方程组转换成矩阵的表达形式，$Ax=b$。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
4 & -8 & 3 & -3 & 1 & \mid & 2 \\
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

2.接着我们来交换第一和第三行。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
4 & -8 & 3 & -3 & 1 & \mid & 2 \\
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

注意，你知道我们为什么选择第一行和第三行交换吗？其实，这是为了便于计算。而具体交换哪一行是有个小技巧的，如果某行的第一个元素有1，我们就可以把这一行移到第一行。

3.我们以第一行为基础，开始执行乘和加变换，将第一行乘以-4的结果和第二行相加，从而获得了下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

4.然后，我们用同样的方法，将第一行乘以2的结果，再和第三行相加，得到了下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

5.以此类推，我们将第一行乘以-1的结果，和第四行相加，继续获得新矩阵。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & -1 & -2 & 3 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

6.将第二行乘以-1的结果，和第四行相加，得到下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & a-2
\end{array}\right]
$$

7.将第三行乘以-1的结果，和第四行相加。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & a+1
\end{array}\right]

8.第二行乘以-1，第三行乘以$-\frac{1}{3}$。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 3 & \mid & -2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \mid & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & a+1
\end{array}\right]
$$

9.现在，这个矩阵就是一个简单形式的矩阵，也叫做**行阶梯形矩阵**（Row-Echelon Form，REF）。

$$
\left\{\begin{array}{r}
x_{1}-2 x_{2}+x_{3}-x_{4}+x_{5}=0 \\
x_{3}-x_{4}+3 x_{5}=-2 \\
x_{4}-2 x_{5}=1 \\
0=a+1
\end{array}\right.
$$

一个矩阵成为行阶梯形矩阵需满足两个条件：

- 如果它既有零行，又有非零行，则零行在下，非零行在上；
- 如果它有非零行，则每个非零行的第一个非零元素所在列号自上而下严格单调上升，正如之前的这个矩阵，列号自上而下是1、3、4，是严格单调上升的。

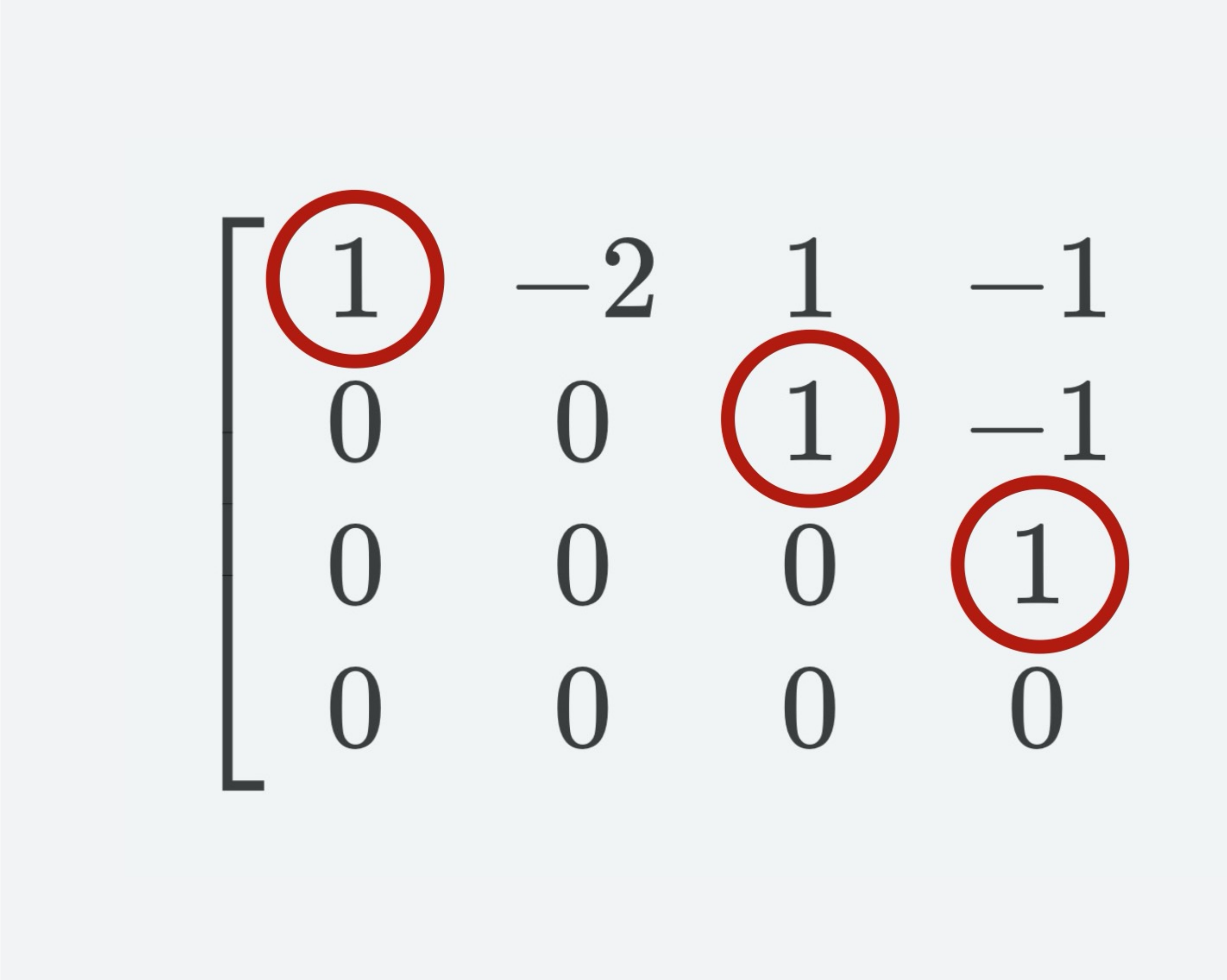
10.你可以看出，只有在$a=-1$的情况下，这个线性方程组才有解，特殊解是$\left[\begin{array}{lllll}2 & 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right]^{\mathrm{T}}$。

11.最后，我们得出这个线性方程组的通用解，如下图所示。

$$
x \in R^{5}: x=\left[\begin{array}{c}
2 \\
0 \\
-1 \\
1 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
2 \\
1 \\
0 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{c}
2 \\
0 \\
-1 \\
2 \\
1
\end{array}\right], \lambda_{1}, \lambda_{2} \in R
$$

注意，这里有一个概念很重要，那就是**主元**。主元就是在矩阵消元过程中，每列要保留的非零元素，我们可以用它把该列其他元素消去。在阶梯型矩阵中，每个非零行第一个非零元素就是主元。

拿之前的第8步计算后的结果来举例，第一行的第一个元素1就是主元，第二行第三个元素1是主元，第三行的第四个元素1也是主元。



对应行阶梯形矩阵主元的变量叫做基本变量，而其他的变量叫做自由变量，这个例子中，x_{1}、x_{3}、x_{4}就是基本变量，x_{2}、x_{5}则是自由变量。使用行阶梯形矩阵能更简单地得出特殊解，所以我们可以使用主元列来表达线性方程组：

$$
b=\sum_{i=1}^{P} \lambda_{i} \mathrm{p}_{i}, i=1, \ldots, P
$$

在之前的例子中，我们使用主元列来表达成下面这样的矩阵形式：

$$
\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
1 \\
0 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{l}
1 \\
1 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{3}\left[\begin{array}{c}
-1 \\
-1 \\
1 \\
0
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
0 \\
-2 \\
1 \\
0
\end{array}\right]
$$

于是，我们最终得出 $λ_{3}=1$，$λ_{2}=-1$，$λ_{1}=2$，分别对应于x_{4}、x_{3}、x_{1}。不要忘了，对于非主元列，我们已经隐式地把系数设置成了0，所以这个线性方程组的特殊解是$x=\left[\begin{array}{lllll}2 & 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right]^{\mathrm{T}}$。

简化行阶梯形矩阵

这里我们再引入一个概念，简化行阶梯形矩阵，因为引入简化行阶梯形矩阵对于线性方程组的求解来说会更简单。其实，高斯消元法的核心就是通过初等变换，把线性方程组转换成简化行阶梯形矩阵。那么一个方程组是简化行阶梯形矩阵，必须满足哪几个条件呢？

1. 这个方程组必须是行阶梯形矩阵；
2. 方程组的每一个主元都是1；
3. 主元在它的列中是唯一的非0元素。

现在，我们再通过一个实例，看看该如何通过高斯消元法计算一个矩阵的逆矩阵。设矩阵A如下图：

$$

$$
A=\left[\begin{array}{llll}
1 & 0 & 2 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right]
$$

首先，我们形成A的增广矩阵（具体方法参见上一节）。

$$
\left[\begin{array}{llllllll}
1 & 0 & 2 & 0 & \mid & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & \mid & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 1 & \mid & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & \mid & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

其次，使用我们前面刚刚讲过的高斯消元法计算出简化行阶梯形矩阵。

$$
\left[\begin{array}{ccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \mid & -1 & 2 & -2 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \mid & 1 & -1 & 2 & -2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \mid & 1 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \mid & -1 & 0 & -1 & 2
\end{array}\right]
$$

最后，我们就得到A的逆矩阵，如下图所示。

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{cccc}
-1 & 2 & -2 & 2 \\
1 & -1 & 2 & -2 \\
1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & 0 & -1 & 2
\end{array}\right]
$$

接下来，我们只要使用公式$A A^{-1}=I$ 就可以对结果进行验证了。

更多解线性方程组的方法

到目前为止，相信你已经了解了如何解线性方程组，包括特殊解和通用解，以及如何使用高斯消元法来解线性方程组。最后，我再总结一些解方法来作为你的知识扩展。

第一个方法，假设一个矩阵A是方阵（行数与列数相等的矩阵），并且可逆，$Ax=B$ ，那x解就可以写成$x=A^{-1}B$，但如果A矩阵不可逆，也不是方阵，那我们就只能使用下面这个变换来求x解了。

$$Ax=B\Leftrightarrow A^{T}Ax=A^{T}B\Leftrightarrow x=(A^{T}A)^{-1}A^{T}B$$

其中，矩阵A的转置矩阵和A相乘的逆矩阵，再和A的转置矩阵相乘，我们把它叫做穆尔彭罗斯伪逆矩阵（Moore-Penrose pseudo inverse），简称伪逆。

$$(A^{T}A)^{-1}A^{T}$$

这个方法有两个弊端：第一，矩阵乘和逆矩阵的计算太复杂；第二，数值精确度不高。因此，从实践角度来说，我一般不推荐使用。

第二个方法是高斯消元法。高斯消元法是非常直观的，它在很多计算中都起到了关键的作用，比如：

1. 计算行列式；
2. 检查向量是否是线性独立的；
3. 计算矩阵的逆矩阵；
4. 计算矩阵的秩；
5. 决定向量空间的基。

但当高斯消元法面对百万、千万级别的变量时，就捉襟见肘了。而这类级别的计算才是我们在实践中经常会遇到的，因此从实践角度来说，我也一般不推荐使用。因为高斯消元法属于直接法，直接法是经历有限次的运算得到方程组精确解的方法。但是，学习直接法是有意义的，虽然直接法在实际工作中不常用，但是它也能处理一些日常小问题，更重要的是，它稳固了我们进一步学习其它方法的基础。

我要讲的第三种方法，就是与直接法对应的间接法了。在实践中，线性方程组的求解都是间接的，也就是运用迭代法。

迭代法是采用极限过程，用线性方程组的近似解逐步逼近精确解的方法。所以，迭代法的关键在于每次迭代残余错误的减少，以及如何能够收敛到解。常见的迭代法有两类，定常迭代法（Stationary iterative method）和Krylov子空间方法（我会在应用篇中讲解）。

> 定常迭代法：理查德森迭代法（Richardson method）、雅可比方法（Jacobi method）、Gauß-Seidel方法、逐次超松弛法（Successive over-relaxation method，简称SOR）。
> Krylov子空间方法：共轭梯度法（Conjugate gradient）、广义极小残余算法（Generalized minimal residual）、双共轭梯度法（Biconjugate gradient）。

这里提到的几种迭代法都是在实践中比较常用的，也是计算机编程中经常实现的算法，但由于迭代法更多属于微分和极限领域，所以这里就不详细介绍了，我会在线性代数应用篇的"数值线性代数"那节课中再做讲解。

如果在课程内容结束后，你还有余力学习更多的内容，这里我先推荐两本书给你作参考，一本是《Introduction to Numerical Analysis》，另一本是《Linear Algebra》。这两本书里面都有进一步地讲解了线性方程组的迭代法求解的内容。

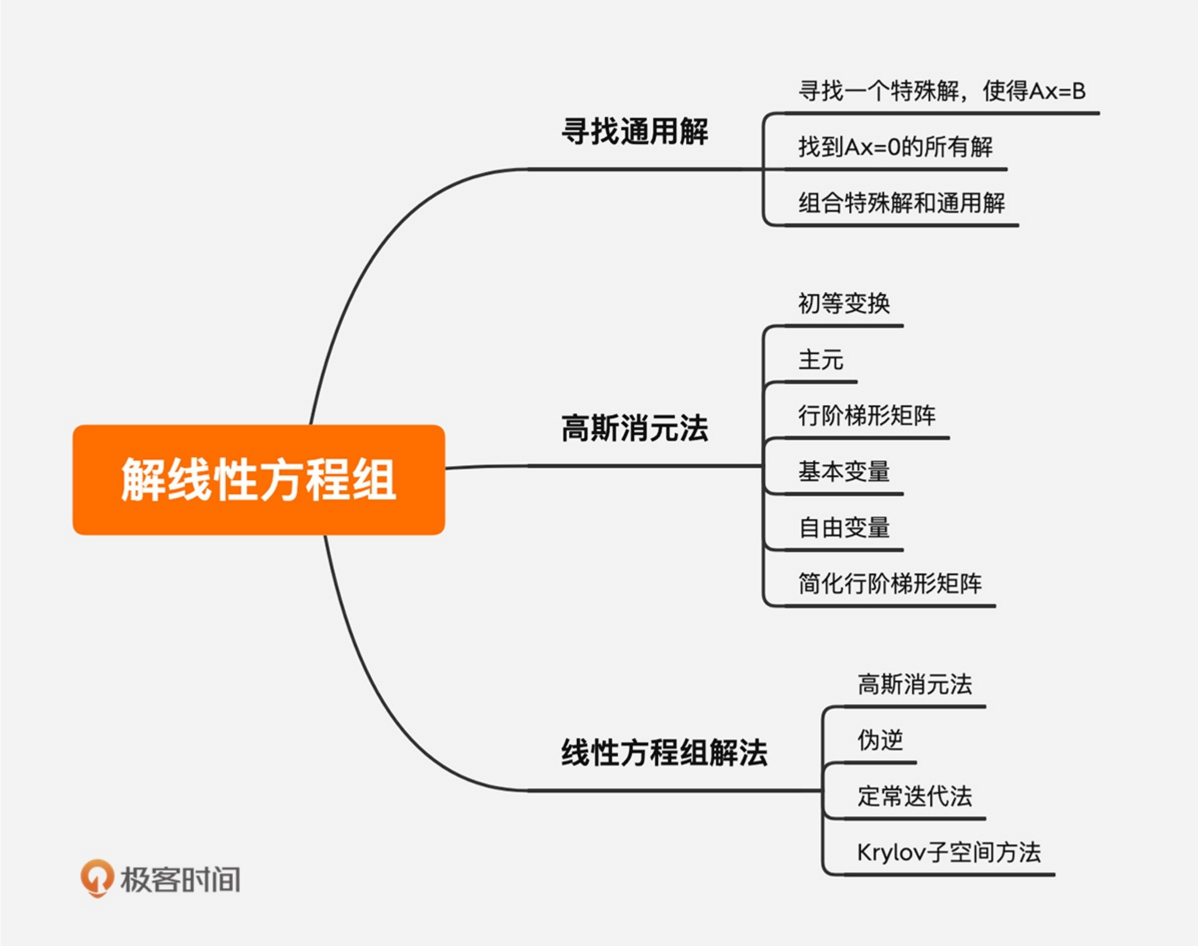
> 1.《Introduction to Numerical Analysis》
> 作者：Stoer, Josef, Bulirsch, R.
> 2002年出版
> 2.《Linear Algebra》
> 作者：Liesen, Jörg, Mehrmann, Volker
> 2015年出版

本节小结

好了，到这里解线性方程组这一讲就结束了，最后我再总结一下前面讲解的内容。

首先，我用一个简单的线性方程组，通过直接观察的方法来计算这个方程组的特殊解和通用解，接着通过实例详细地介绍了高斯消元法，最后我给出了一些在实践中常用的线性方程组解方法。只有弄清楚这些基础知识的本质，你才能更进一步，去了解其他计算方法。

线性方程组的求解已经成为了世界上最快计算机的测试标准，因为通过矩阵运算，计算机的并行计算能力暴露无遗。希望你能够在这些基础之上，阅读我推荐的两本书，并且把这些方法运用到实践中，特别是机器学习，因为机器学习也用到了很多迭代方法。



线性代数练习场

练习时刻到了，今天的练习题比较简单，请你用高斯消元法求下面的线性方程组。

$$
\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}-2 x_{3}-x_{4}=-1 \\
x_{1}+5 x_{2}-3 x_{3}-2 x_{4}=0 \\
3 x_{1}-x_{2}+x_{3}+4 x_{4}=2 \\
-2 x_{1}+2 x_{2}+x_{3}-x_{4}=1
\end{array}\right.
$$

欢迎在留言区和部落里晒出你的运算过程和结果，留下你的学习痕迹。如果你有所收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我一起重学线性代数！

在上一节课中，我讲解了线性方程组的另一种表达——矩阵。那么今天，我们就来讲解一下如何使用矩阵来解线性方程组，也就是如何求线性方程组的特殊解和通用解。

简单的线性方程组，我们当然可以运用初中学过的知识来求解，那复杂的呢？硬来几乎是不可能的了，一方面是因为人工计算的错误率很高，另一方面，即使我们使用计算机，用类似for或while循环来实现算法，它的计算效率也是极低的。你需要用更科学的方式、方法，从另一个角度来看待和求解线性方程组。

而矩阵就是为我们打开高效之门的钥匙，从计算机科学的角度来说，使用矩阵的运算效率实在是高太多了，因为它可以利用计算机的并行能力，甚至在一些迭代法中，还能实现分布式并行计算（迭代法会在后面"应用篇"中讲解）。

线性方程组解的寻找

现在，就让我们开始去寻找线性方程组的解。在之前的课程中，我们已经引入了线性方程组的一般表达，你可以看看下面的例子。

$$
\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.
$$

其中，a_{ij}和 b_{i} 属于实数，而且是已知常数，而x_{j}是未知变量，i和j的取值范围分别是：$i=1,…,m$；$j=1,…,n$ 。如果我们用矩阵的简单表达方式来看的话，就是$Ax=B$。

要搞清楚概念，我们还是要多看具体的例子。让我们先来看一个实例，来加深一下理解。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
x_{1} \\
x_{2} \\
x_{3} \\
x_{4}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8
\end{array}\right]
$$

很明显，这是一个矩阵表达方式。它的一般线性方程组表达方式是中学的基础知识，你应该很熟悉了。

$$
\left\{\begin{array}{l}
1 \times x_{1}+0 \times x_{2}+8 \times x_{3}+(-4) \times x_{4}=42 \\
0 \times x_{1}+1 \times x_{2}+2 \times x_{3}+12 \times x_{4}=8
\end{array}\right.
$$

在这个一般线性方程组中，有四个未知变量，但只有两个等式，这就意味着这个线性方程组有无穷多个解（这个是中学数学的范畴）。通过细心观察，我们可以发现第一列和第二列都是由0和1组成的，因此你很容易就能发现其中一个解。

$$
42\left[\begin{array}{l}
1 \\
0
\end{array}\right]+8\left[\begin{array}{l}
0 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8
\end{array}\right]
$$

这个解就是$\left[\begin{array}{llll}42 & 8 & 0 & 0\end{array}\right]^{T}$，也就是说四个未知变量分别为$42$、$8$、$0$、$0$。

$$
\left\{\begin{array}{l}
x_{1}=42 \\
x_{2}=8 \\
x_{3}=0 \\
x_{4}=0
\end{array}\right.
$$

这个解也叫做特殊解。我们刚才已经说过，这个线性方程组有无穷多个解，那我们确实需要一个聪明的方式来找到其他的解，最直观的方式就是通过矩阵的列来构造0。例如，对于第三列来说，我们可以使用第一和第二列的组合形式来表达。

$$
8\left[\begin{array}{l}
1 \\
0
\end{array}\right]+2\left[\begin{array}{l}
0 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{l}
8 \\
2
\end{array}\right]
$$

通过计算$Ax=0$，我们得出解$\left[\begin{array}{llll}8 & 2 & -1 & 0\end{array}\right]^{T}$。而事实上，这个解可以乘以任何实数$\lambda_{1}$，使得$Ax=0$成立。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]
\left(\begin{array}{l}
\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
8 \\
2 \\
-1 \\
0
\end{array}\right]
\end{array}\right)=0
$$

同理，对于第四列来说，我们可以使用第一和第二列的组合形式来表达，得出另一套解，使得$Ax=0$。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]
\left(\begin{array}{l}
\lambda_{2}\left[\begin{array}{l}
-4 \\
12 \\
0 \\
-1
\end{array}\right]
\end{array}\right)=0
$$

现在，我们可以把之前的特殊解与刚得出的两套解相组合，得出最终解，这个解也就是我们所说的通用解了。

$$
x \in R^{4}: x=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{1}\left[\begin{array}{c}
8 \\
2 \\
-1 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{c}
-4 \\
12 \\
0 \\
-1
\end{array}\right], \lambda_{1}, \lambda_{2} \in R
$$

我来总结一下寻找通用解的过程，这个过程分为三步：

1. 我们要寻找一个特殊解，使得$Ax=b$；
2. 找到$Ax=0$的所有解；
3. 组合第一和第二步的解形成通用解。

看到了这里，你有没有发现有些奇怪呢？或者说，有没有觉得哪里有点别扭？是的，好像有点太顺利了。那是因为这个线性方程组比较特别，第一列和第二列是由1和0组成的。所以，我们只通过观察就能得出特殊解和通用解。

然而，你不可能每次都行大运，就像我们在现实中碰到的这类线性方程组，一般都比这个复杂得多。不过不要慌，有一个算法可以来帮助我们转换任意线性方程组，形成类似的特殊形式，这个算法叫做**高斯消元法**。

高斯消元法的核心就是**线性方程组的初等变换**，于是，我们可以通过高斯消元法，得到围绕初等变换形成的简单矩阵表达形式，接下来我们就可以运用之前的三个步骤来寻找通用解了。

初等变换的一般形式

既然高斯消元法的核心就是线性方程组的初等变换，那为了方便你使用高斯消元法，我就有必要来讲一讲初等变换的一般形式有哪些：

1. 两个等式的交换，也就是矩阵行交换；
2. 一个等式，或者说矩阵行乘以一个实数常量；
3. 两个等式相加，或者说矩阵的两行相加。

道理是这样的道理，那我们通过一个例子来看看，究竟该怎么做线性方程组的初等变换。假设a属于实数，现在我们试着来寻找下面这个线性方程组的所有解。我把这个过程细细地拆解为11个步骤，建议你仔细看过并理解后，再进入下一阶段的学习。

$$
\left\{\begin{array}{c}
-2 x_{1}+4 x_{2}-2 x_{3}-x_{4}+4 x_{5}=-3 \\
4 x_{1}-8 x_{2}+3 x_{3}-3 x_{4}+x_{5}=2 \\
x_{1}-2 x_{2}+x_{3}-x_{4}+x_{5}=0 \\
x_{1}-2 x_{2}-3 x_{4}+4 x_{5}=a
\end{array}\right.
$$

1.我们要把这个线性方程组转换成矩阵的表达形式，$Ax=b$。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
4 & -8 & 3 & -3 & 1 & \mid & 2 \\
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

2.接着我们来交换第一和第三行。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
4 & -8 & 3 & -3 & 1 & \mid & 2 \\
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

注意，你知道我们为什么选择第一行和第三行交换吗？其实，这是为了便于计算。而具体交换哪一行是有个小技巧的，如果某行的第一个元素有1，我们就可以把这一行移到第一行。

3.我们以第一行为基础，开始执行乘和加变换，将第一行乘以-4的结果和第二行相加，从而获得了下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

4.然后，我们用同样的方法，将第一行乘以2的结果，再和第三行相加，得到了下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

5.以此类推，我们将第一行乘以-1的结果，和第四行相加，继续获得新矩阵。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & -1 & -2 & 3 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

6.将第二行乘以-1的结果，和第四行相加，得到下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & a-2
\end{array}\right]
$$

7.将第三行乘以-1的结果，和第四行相加。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & a+1
\end{array}\right]

8.第二行乘以-1，第三行乘以$-\frac{1}{3}$。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 3 & \mid & -2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \mid & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & a+1
\end{array}\right]
$$

9.现在，这个矩阵就是一个简单形式的矩阵，也叫做**行阶梯形矩阵**（Row-Echelon Form，REF）。

$$
\left\{\begin{array}{r}
x_{1}-2 x_{2}+x_{3}-x_{4}+x_{5}=0 \\
x_{3}-x_{4}+3 x_{5}=-2 \\
x_{4}-2 x_{5}=1 \\
0=a+1
\end{array}\right.
$$

一个矩阵成为行阶梯形矩阵需满足两个条件：

- 如果它既有零行，又有非零行，则零行在下，非零行在上；
- 如果它有非零行，则每个非零行的第一个非零元素所在列号自上而下严格单调上升，正如之前的这个矩阵，列号自上而下是1、3、4，是严格单调上升的。

10.你可以看出，只有在$a=-1$的情况下，这个线性方程组才有解，特殊解是$\left[\begin{array}{lllll}2 & 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right]^{\mathrm{T}}$。

11.最后，我们得出这个线性方程组的通用解，如下图所示。

$$
x \in R^{5}: x=\left[\begin{array}{c}
2 \\
0 \\
-1 \\
1 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
2 \\
1 \\
0 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{c}
2 \\
0 \\
-1 \\
2 \\
1
\end{array}\right], \lambda_{1}, \lambda_{2} \in R
$$

注意，这里有一个概念很重要，那就是**主元**。主元就是在矩阵消元过程中，每列要保留的非零元素，我们可以用它把该列其他元素消去。在阶梯型矩阵中，每个非零行第一个非零元素就是主元。

拿之前的第8步计算后的结果来举例，第一行的第一个元素1就是主元，第二行第三个元素1是主元，第三行的第四个元素1也是主元。

$$
\begin{bmatrix}
1 & -2 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

对应行阶梯形矩阵主元的变量叫做基本变量，而其他的变量叫做自由变量，这个例子中，x_{1}、x_{3}、x_{4}就是基本变量，x_{2}、x_{5}则是自由变量。使用行阶梯形矩阵能更简单地得出特殊解，所以我们可以使用主元列来表达线性方程组：

$$
b=\sum_{i=1}^{P} \lambda_{i} \mathrm{p}_{i}, i=1, \ldots, P
$$

在之前的例子中，我们使用主元列来表达成下面这样的矩阵形式：

$$
\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
1 \\
0 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{l}
1 \\
1 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{3}\left[\begin{array}{c}
-1 \\
-1 \\
1 \\
0
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
0 \\
-2 \\
1 \\
0
\end{array}\right]
$$

于是，我们最终得出 $\lambda_{3}=1$，$\lambda_{2}=-1$，$\lambda_{1}=2$，分别对应于x_{4}、x_{3}、x_{1}。不要忘了，对于非主元列，我们已经隐式地把系数设置成了0，所以这个线性方程组的特殊解是$x=\left[\begin{array}{lllll}2 & 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right]^{\mathrm{T}}$。

简化行阶梯形矩阵

这里我们再引入一个概念，简化行阶梯形矩阵，因为引入简化行阶梯形矩阵对于线性方程组的求解来说会更简单。其实，高斯消元法的核心就是通过初等变换，把线性方程组转换成简化行阶梯形矩阵。那么一个方程组是简化行阶梯形矩阵，必须满足哪几个条件呢？

1. 这个方程组必须是行阶梯形矩阵；
2. 方程组的每一个主元都是1；
3. 主元在它的列中是唯一的非0元素。

现在，我们再通过一个实例，看看该如何通过高斯消元法计算一个矩阵的逆矩阵。设矩阵A如下图：

$$

$$
A=\left[\begin{array}{llll}
1 & 0 & 2 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right]
$$

首先，我们形成A的增广矩阵（具体方法参见上一节）。

$$
\left[\begin{array}{llllllll}
1 & 0 & 2 & 0 & \mid & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & \mid & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 1 & \mid & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & \mid & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

其次，使用我们前面刚刚讲过的高斯消元法计算出简化行阶梯形矩阵。

$$
\left[\begin{array}{ccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \mid & -1 & 2 & -2 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \mid & 1 & -1 & 2 & -2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \mid & 1 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \mid & -1 & 0 & -1 & 2
\end{array}\right]
$$

最后，我们就得到A的逆矩阵，如下图所示。

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{cccc}
-1 & 2 & -2 & 2 \\
1 & -1 & 2 & -2 \\
1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & 0 & -1 & 2
\end{array}\right]
$$

接下来，我们只要使用公式$A A^{-1}=I$ 就可以对结果进行验证了。

更多解线性方程组的方法

到目前为止，相信你已经了解了如何解线性方程组，包括特殊解和通用解，以及如何使用高斯消元法来解线性方程组。最后，我再总结一些解方法来作为你的知识扩展。

第一个方法，假设一个矩阵A是方阵（行数与列数相等的矩阵），并且可逆，$Ax=B$，那x解就可以写成$x=A^{-1}B$，但如果A矩阵不可逆，也不是方阵，那我们就只能使用下面这个变换来求x解了。

$$Ax=B \Leftrightarrow A^{T}Ax=A^{T}B \Leftrightarrow x=(A^{T}A)^{-1}A^{T}B$$

其中，矩阵A的转置矩阵和A相乘的逆矩阵，再和A的转置矩阵相乘，我们把它叫做穆尔彭罗斯伪逆矩阵（Moore-Penrose pseudo inverse），简称伪逆。

$$(A^{T}A)^{-1}A^{T}$$

这个方法有两个弊端：第一，矩阵乘和逆矩阵的计算太复杂；第二，数值精确度不高。因此，从实践角度来说，我一般不推荐使用。

第二个方法是高斯消元法。高斯消元法是非常直观的，它在很多计算中都起到了关键的作用，比如：

1. 计算行列式；
2. 检查向量是否是线性独立的；
3. 计算矩阵的逆矩阵；
4. 计算矩阵的秩；
5. 决定向量空间的基。

但当高斯消元法面对百万、千万级别的变量时，就捉襟见肘了。而这类级别的计算才是我们在实践中经常会遇到的，因此从实践角度来说，我也一般不推荐使用。因为高斯消元法属于直接法，直接法是经历有限次的运算得到方程组精确解的方法。但是，学习直接法是有意义的，虽然直接法在实际工作中不常用，但是它也能处理一些日常小问题，更重要的是，它稳固了我们进一步学习其它方法的基础。

我要讲的第三种方法，就是与直接法对应的间接法了。在实践中，线性方程组的求解都是间接的，也就是运用迭代法。

迭代法是采用极限过程，用线性方程组的近似解逐步逼近精确解的方法。所以，迭代法的关键在于每次迭代残余错误的减少，以及如何能够收敛到解。常见的迭代法有两类，定常迭代法（Stationary iterative method）和Krylov子空间方法（我会在应用篇中讲解）。

> 定常迭代法：理查德森迭代法（Richardson method）、雅可比方法（Jacobi method）、Gauß-Seidel方法、逐次超松弛法（Successive over-relaxation method，简称SOR）。
> Krylov子空间方法：共轭梯度法（Conjugate gradient）、广义极小残余算法（Generalized minimal residual）、双共轭梯度法（Biconjugate gradient）。

这里提到的几种迭代法都是在实践中比较常用的，也是计算机编程中经常实现的算法，但由于迭代法更多属于微分和极限领域，所以这里就不详细介绍了，我会在线性代数应用篇的“数值线性代数”那节课中再做讲解。

如果在课程内容结束后，你还有余力学习更多的内容，这里我先推荐两本书给你作参考，一本是《Introduction to Numerical Analysis》，另一本是《Linear Algebra》。这两本书里面都有进一步地讲解了线性方程组的迭代法求解的内容。

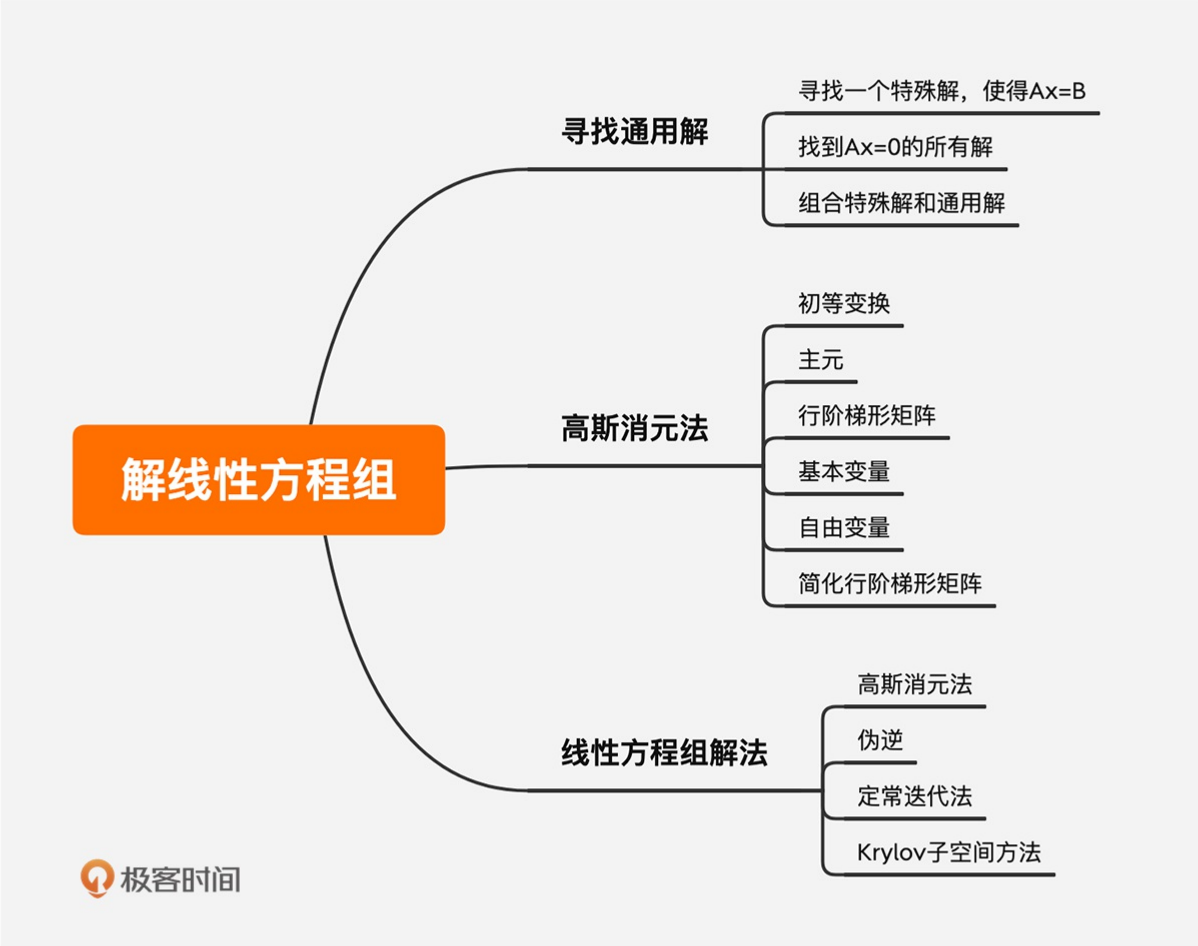
> 1.《Introduction to Numerical Analysis》
> 作者：Stoer, Josef, Bulirsch, R.
> 2002年出版
> 2.《Linear Algebra》
> 作者：Liesen, Jörg, Mehrmann, Volker
> 2015年出版

本节小结

好了，到这里解线性方程组这一讲就结束了，最后我再总结一下前面讲解的内容。

首先，我用一个简单的线性方程组，通过直接观察的方法来计算这个方程组的特殊解和通用解，接着通过实例详细地介绍了高斯消元法，最后我给出了一些在实践中常用的线性方程组解方法。只有弄清楚这些基础知识的本质，你才能更进一步，去了解其他计算方法。

线性方程组的求解已经成为了世界上最快计算机的测试标准，因为通过矩阵运算，计算机的并行计算能力暴露无遗。希望你能够在这些基础之上，阅读我推荐的两本书，并且把这些方法运用到实践中，特别是机器学习，因为机器学习也用到了很多迭代方法。



线性代数练习场

练习时刻到了，今天的练习题比较简单，请你用高斯消元法求下面的线性方程组。

$$
\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}-2 x_{3}-x_{4}=-1 \\
x_{1}+5 x_{2}-3 x_{3}-2 x_{4}=0 \\
3 x_{1}-x_{2}+x_{3}+4 x_{4}=2 \\
-2 x_{1}+2 x_{2}+x_{3}-x_{4}=1
\end{array}\right.
$$

欢迎在留言区和部落里晒出你的运算过程和结果，留下你的学习痕迹。如果你有所收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我一起重学线性代数！

在上一节课中，我讲解了线性方程组的另一种表达——矩阵。那么今天，我们就来讲解一下如何使用矩阵来解线性方程组，也就是如何求线性方程组的特殊解和通用解。

简单的线性方程组，我们当然可以运用初中学过的知识来求解，那复杂的呢？硬来几乎是不可能的了，一方面是因为人工计算的错误率很高，另一方面，即使我们使用计算机，用类似for或while循环来实现算法，它的计算效率也是极低的。你需要用更科学的方式、方法，从另一个角度来看待和求解线性方程组。

而矩阵就是为我们打开高效之门的钥匙，从计算机科学的角度来说，使用矩阵的运算效率实在是高太多了，因为它可以利用计算机的并行能力，甚至在一些迭代法中，还能实现分布式并行计算（迭代法会在后面"应用篇"中讲解）。

线性方程组解的寻找

现在，就让我们开始去寻找线性方程组的解。在之前的课程中，我们已经引入了线性方程组的一般表达，你可以看看下面的例子。

$$
\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.
$$

其中，a_{ij}和 b_{i} 属于实数，而且是已知常数，而x_{j}是未知变量，i和j的取值范围分别是：$i=1,…,m$；$j=1,…,n$ 。如果我们用矩阵的简单表达方式来看的话，就是$Ax=B$。

要搞清楚概念，我们还是要多看具体的例子。让我们先来看一个实例，来加深一下理解。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
x_{1} \\
x_{2} \\
x_{3} \\
x_{4}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8
\end{array}\right]
$$

很明显，这是一个矩阵表达方式。它的一般线性方程组表达方式是中学的基础知识，你应该很熟悉了。

$$
\left\{\begin{array}{l}
1 \times x_{1}+0 \times x_{2}+8 \times x_{3}+(-4) \times x_{4}=42 \\
0 \times x_{1}+1 \times x_{2}+2 \times x_{3}+12 \times x_{4}=8
\end{array}\right.
$$

在这个一般线性方程组中，有四个未知变量，但只有两个等式，这就意味着这个线性方程组有无穷多个解（这个是中学数学的范畴）。通过细心观察，我们可以发现第一列和第二列都是由0和1组成的，因此你很容易就能发现其中一个解。

$$
42\left[\begin{array}{l}
1 \\
0
\end{array}\right]+8\left[\begin{array}{l}
0 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8
\end{array}\right]
$$

这个解就是$\left[\begin{array}{llll}42 & 8 & 0 & 0\end{array}\right]^{T}$，也就是说四个未知变量分别为$42$、$8$、$0$、$0$。

$$
\left\{\begin{array}{l}
x_{1}=42 \\
x_{2}=8 \\
x_{3}=0 \\
x_{4}=0
\end{array}\right.
$$

这个解也叫做特殊解。我们刚才已经说过，这个线性方程组有无穷多个解，那我们确实需要一个聪明的方式来找到其他的解，最直观的方式就是通过矩阵的列来构造0。例如，对于第三列来说，我们可以使用第一和第二列的组合形式来表达。

$$
8\left[\begin{array}{l}
1 \\
0
\end{array}\right]+2\left[\begin{array}{l}
0 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{l}
8 \\
2
\end{array}\right]
$$

通过计算$Ax=0$，我们得出解$\left[\begin{array}{llll}8 & 2 & -1 & 0\end{array}\right]^{T}$。而事实上，这个解可以乘以任何实数$\lambda_{1}$，使得$Ax=0$成立。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]
\left(\begin{array}{l}
\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
8 \\
2 \\
-1 \\
0
\end{array}\right]
\end{array}\right)=0
$$

同理，对于第四列来说，我们可以使用第一和第二列的组合形式来表达，得出另一套解，使得$Ax=0$。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]
\left(\begin{array}{l}
\lambda_{2}\left[\begin{array}{l}
-4 \\
12 \\
0 \\
-1
\end{array}\right]
\end{array}\right)=0
$$

现在，我们可以把之前的特殊解与刚得出的两套解相组合，得出最终解，这个解也就是我们所说的通用解了。

$$
x \in R^{4}: x=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{1}\left[\begin{array}{c}
8 \\
2 \\
-1 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{c}
-4 \\
12 \\
0 \\
-1
\end{array}\right], \lambda_{1}, \lambda_{2} \in R
$$

我来总结一下寻找通用解的过程，这个过程分为三步：

1. 我们要寻找一个特殊解，使得$Ax=b$；
2. 找到$Ax=0$的所有解；
3. 组合第一和第二步的解形成通用解。

看到了这里，你有没有发现有些奇怪呢？或者说，有没有觉得哪里有点别扭？是的，好像有点太顺利了。那是因为这个线性方程组比较特别，第一列和第二列是由1和0组成的。所以，我们只通过观察就能得出特殊解和通用解。

然而，你不可能每次都行大运，就像我们在现实中碰到的这类线性方程组，一般都比这个复杂得多。不过不要慌，有一个算法可以来帮助我们转换任意线性方程组，形成类似的特殊形式，这个算法叫做**高斯消元法**。

高斯消元法的核心就是**线性方程组的初等变换**，于是，我们可以通过高斯消元法，得到围绕初等变换形成的简单矩阵表达形式，接下来我们就可以运用之前的三个步骤来寻找通用解了。

初等变换的一般形式

既然高斯消元法的核心就是线性方程组的初等变换，那为了方便你使用高斯消元法，我就有必要来讲一讲初等变换的一般形式有哪些：

1. 两个等式的交换，也就是矩阵行交换；
2. 一个等式，或者说矩阵行乘以一个实数常量；
3. 两个等式相加，或者说矩阵的两行相加。

道理是这样的道理，那我们通过一个例子来看看，究竟该怎么做线性方程组的初等变换。假设a属于实数，现在我们试着来寻找下面这个线性方程组的所有解。我把这个过程细细地拆解为11个步骤，建议你仔细看过并理解后，再进入下一阶段的学习。

$$
\left\{\begin{array}{c}
-2 x_{1}+4 x_{2}-2 x_{3}-x_{4}+4 x_{5}=-3 \\
4 x_{1}-8 x_{2}+3 x_{3}-3 x_{4}+x_{5}=2 \\
x_{1}-2 x_{2}+x_{3}-x_{4}+x_{5}=0 \\
x_{1}-2 x_{2}-3 x_{4}+4 x_{5}=a
\end{array}\right.
$$

1.我们要把这个线性方程组转换成矩阵的表达形式，$Ax=b$。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
4 & -8 & 3 & -3 & 1 & \mid & 2 \\
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

2.接着我们来交换第一和第三行。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
4 & -8 & 3 & -3 & 1 & \mid & 2 \\
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

注意，你知道我们为什么选择第一行和第三行交换吗？其实，这是为了便于计算。而具体交换哪一行是有个小技巧的，如果某行的第一个元素有1，我们就可以把这一行移到第一行。

3.我们以第一行为基础，开始执行乘和加变换，将第一行乘以-4的结果和第二行相加，从而获得了下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

4.然后，我们用同样的方法，将第一行乘以2的结果，再和第三行相加，得到了下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

5.以此类推，我们将第一行乘以-1的结果，和第四行相加，继续获得新矩阵。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & -1 & -2 & 3 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

6.将第二行乘以-1的结果，和第四行相加，得到下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & a-2
\end{array}\right]
$$

7.将第三行乘以-1的结果，和第四行相加。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & a+1
\end{array}\right]

8.第二行乘以-1，第三行乘以$-\frac{1}{3}$。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 3 & \mid & -2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \mid & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & a+1
\end{array}\right]
$$

9.现在，这个矩阵就是一个简单形式的矩阵，也叫做**行阶梯形矩阵**（Row-Echelon Form，REF）。

$$
\left\{\begin{array}{r}
x_{1}-2 x_{2}+x_{3}-x_{4}+x_{5}=0 \\
x_{3}-x_{4}+3 x_{5}=-2 \\
x_{4}-2 x_{5}=1 \\
0=a+1
\end{array}\right.
$$

一个矩阵成为行阶梯形矩阵需满足两个条件：

- 如果它既有零行，又有非零行，则零行在下，非零行在上；
- 如果它有非零行，则每个非零行的第一个非零元素所在列号自上而下严格单调上升，正如之前的这个矩阵，列号自上而下是1、3、4，是严格单调上升的。

10.你可以看出，只有在$a=-1$的情况下，这个线性方程组才有解，特殊解是$\left[\begin{array}{lllll}2 & 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right]^{\mathrm{T}}$。

11.最后，我们得出这个线性方程组的通用解，如下图所示。

$$
x \in R^{5}: x=\left[\begin{array}{c}
2 \\
0 \\
-1 \\
1 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
2 \\
1 \\
0 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{c}
2 \\
0 \\
-1 \\
2 \\
1
\end{array}\right], \lambda_{1}, \lambda_{2} \in R
$$

注意，这里有一个概念很重要，那就是**主元**。主元就是在矩阵消元过程中，每列要保留的非零元素，我们可以用它把该列其他元素消去。在阶梯型矩阵中，每个非零行第一个非零元素就是主元。

拿之前的第8步计算后的结果来举例，第一行的第一个元素1就是主元，第二行第三个元素1是主元，第三行的第四个元素1也是主元。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & -2 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right.
$$

对应行阶梯形矩阵主元的变量叫做基本变量，而其他的变量叫做自由变量，这个例子中，x_{1}、x_{3}、x_{4}就是基本变量，x_{2}、x_{5}则是自由变量。使用行阶梯形矩阵能更简单地得出特殊解，所以我们可以使用主元列来表达线性方程组：

$$
b=\sum_{i=1}^{P} \lambda_{i} \mathrm{p}_{i}, i=1, \ldots, P
$$

在之前的例子中，我们使用主元列来表达成下面这样的矩阵形式：

$$
\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
1 \\
0 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{l}
1 \\
1 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{3}\left[\begin{array}{c}
-1 \\
-1 \\
1 \\
0
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
0 \\
-2 \\
1 \\
0
\end{array}\right]
$$

于是，我们最终得出 $\lambda_{3}=1$，$\lambda_{2}=-1$，$\lambda_{1}=2$，分别对应于x_{4}、x_{3}、x_{1}。不要忘了，对于非主元列，我们已经隐式地把系数设置成了0，所以这个线性方程组的特殊解是$x=\left[\begin{array}{lllll}2 & 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right]^{\mathrm{T}}$。

简化行阶梯形矩阵

这里我们再引入一个概念，简化行阶梯形矩阵，因为引入简化行阶梯形矩阵对于线性方程组的求解来说会更简单。其实，高斯消元法的核心就是通过初等变换，把线性方程组转换成简化行阶梯形矩阵。那么一个方程组是简化行阶梯形矩阵，必须满足哪几个条件呢？

1. 这个方程组必须是行阶梯形矩阵；
2. 方程组的每一个主元都是1；
3. 主元在它的列中是唯一的非0元素。

现在，我们再通过一个实例，看看该如何通过高斯消元法计算一个矩阵的逆矩阵。设矩阵A如下图：

$$

A=\left[\begin{array}{llll}
1 & 0 & 2 & 0 \\\
1 & 1 & 0 & 0 \\\
1 & 2 & 0 & 1 \\\
1 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right]
$$

首先，我们形成A的增广矩阵（具体方法参见上一节）。

$$
\left[\begin{array}{llllllll}
1 & 0 & 2 & 0 & \mid & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & \mid & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 1 & \mid & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & \mid & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

其次，使用我们前面刚刚讲过的高斯消元法计算出简化行阶梯形矩阵。

$$
\left[\begin{array}{ccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \mid & -1 & 2 & -2 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \mid & 1 & -1 & 2 & -2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \mid & 1 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \mid & -1 & 0 & -1 & 2
\end{array}\right]
$$

最后，我们就得到A的逆矩阵，如下图所示。

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{cccc}
-1 & 2 & -2 & 2 \\
1 & -1 & 2 & -2 \\
1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & 0 & -1 & 2
\end{array}\right]
$$

接下来，我们只要使用公式$A A^{-1}=I$ 就可以对结果进行验证了。

更多解线性方程组的方法

到目前为止，相信你已经了解了如何解线性方程组，包括特殊解和通用解，以及如何使用高斯消元法来解线性方程组。最后，我再总结一些解方法来作为你的知识扩展。

第一个方法，假设一个矩阵A是方阵（行数与列数相等的矩阵），并且可逆，$Ax=B$ ，那x解就可以写成$x=A^{-1}B$，但如果A矩阵不可逆，也不是方阵，那我们就只能使用下面这个变换来求x解了。

$$Ax=B⇔A^{T}Ax=A^{T}B⇔x=(A^{T}A)^{-1}A^{T}B$$

其中，矩阵A的转置矩阵和A相乘的逆矩阵，再和A的转置矩阵相乘，我们把它叫做穆尔彭罗斯伪逆矩阵（Moore-Penrose pseudo inverse），简称伪逆。

$$(A^{T}A)^{-1}A^{T}$$

这个方法有两个弊端：第一，矩阵乘和逆矩阵的计算太复杂；第二，数值精确度不高。因此，从实践角度来说，我一般不推荐使用。

第二个方法是高斯消元法。高斯消元法是非常直观的，它在很多计算中都起到了关键的作用，比如：

1. 计算行列式；
2. 检查向量是否是线性独立的；
3. 计算矩阵的逆矩阵；
4. 计算矩阵的秩；
5. 决定向量空间的基。

但当高斯消元法面对百万、千万级别的变量时，就捉襟见肘了。而这类级别的计算才是我们在实践中经常会遇到的，因此从实践角度来说，我也一般不推荐使用。因为高斯消元法属于直接法，直接法是经历有限次的运算得到方程组精确解的方法。但是，学习直接法是有意义的，虽然直接法在实际工作中不常用，但是它也能处理一些日常小问题，更重要的是，它稳固了我们进一步学习其它方法的基础。

我要讲的第三种方法，就是与直接法对应的间接法了。在实践中，线性方程组的求解都是间接的，也就是运用迭代法。

迭代法是采用极限过程，用线性方程组的近似解逐步逼近精确解的方法。所以，迭代法的关键在于每次迭代残余错误的减少，以及如何能够收敛到解。常见的迭代法有两类，定常迭代法（Stationary iterative method）和Krylov子空间方法（我会在应用篇中讲解）。

> 定常迭代法：理查德森迭代法（Richardson method）、雅可比方法（Jacobi method）、Gauß-Seidel方法、逐次超松弛法（Successive over-relaxation method，简称SOR）。
> Krylov子空间方法：共轭梯度法（Conjugate gradient）、广义极小残余算法（Generalized minimal residual）、双共轭梯度法（Biconjugate gradient）。

这里提到的几种迭代法都是在实践中比较常用的，也是计算机编程中经常实现的算法，但由于迭代法更多属于微分和极限领域，所以这里就不详细介绍了，我会在线性代数应用篇的"数值线性代数"那节课中再做讲解。

如果在课程内容结束后，你还有余力学习更多的内容，这里我先推荐两本书给你作参考，一本是《Introduction to Numerical Analysis》，另一本是《Linear Algebra》。这两本书里面都有进一步地讲解了线性方程组的迭代法求解的内容。

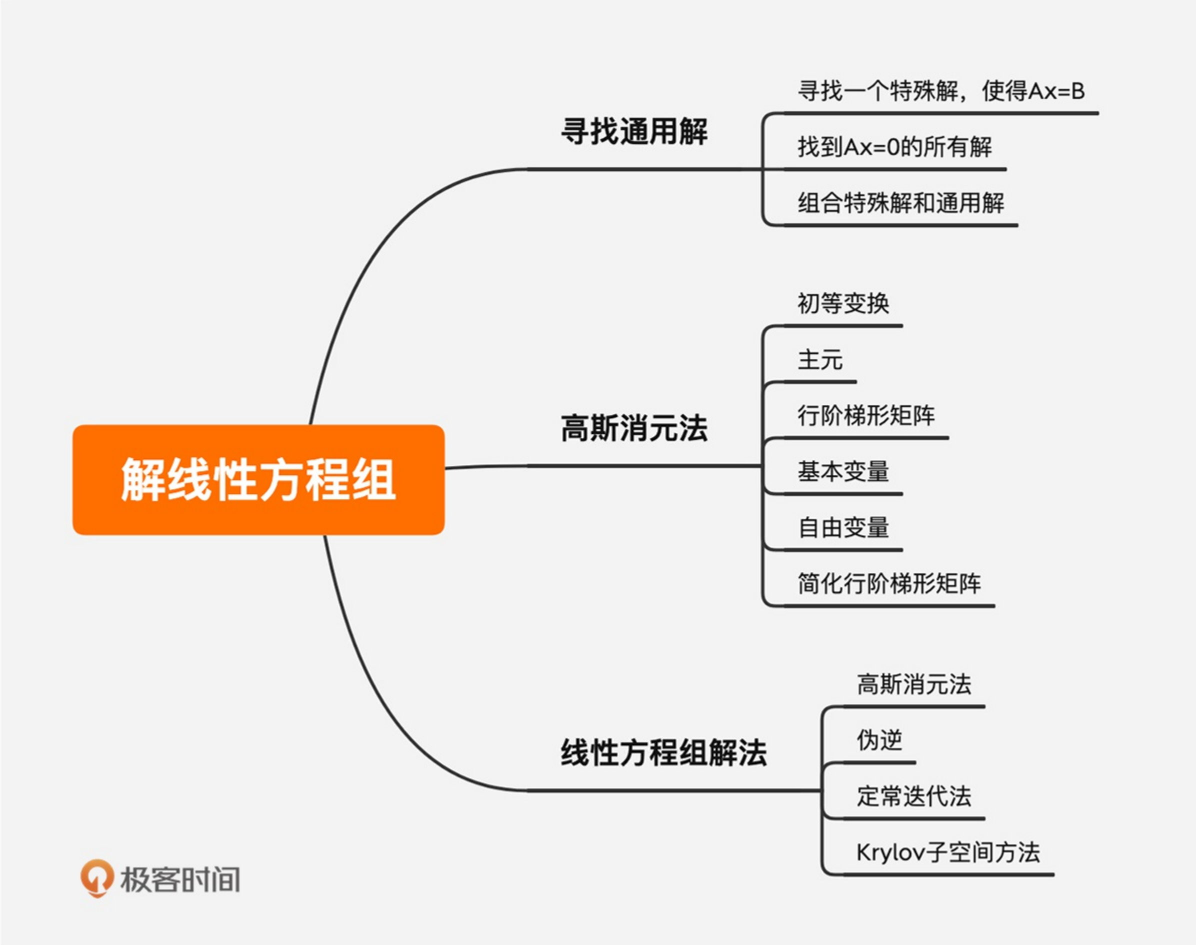
> 1.《Introduction to Numerical Analysis》
> 作者：Stoer, Josef, Bulirsch, R.
> 2002年出版
> 2.《Linear Algebra》
> 作者：Liesen, Jörg, Mehrmann, Volker
> 2015年出版

本节小结

好了，到这里解线性方程组这一讲就结束了，最后我再总结一下前面讲解的内容。

首先，我用一个简单的线性方程组，通过直接观察的方法来计算这个方程组的特殊解和通用解，接着通过实例详细地介绍了高斯消元法，最后我给出了一些在实践中常用的线性方程组解方法。只有弄清楚这些基础知识的本质，你才能更进一步，去了解其他计算方法。

线性方程组的求解已经成为了世界上最快计算机的测试标准，因为通过矩阵运算，计算机的并行计算能力暴露无遗。希望你能够在这些基础之上，阅读我推荐的两本书，并且把这些方法运用到实践中，特别是机器学习，因为机器学习也用到了很多迭代方法。



线性代数练习场

练习时刻到了，今天的练习题比较简单，请你用高斯消元法求下面的线性方程组。

$$
\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}-2 x_{3}-x_{4}=-1 \\
x_{1}+5 x_{2}-3 x_{3}-2 x_{4}=0 \\
3 x_{1}-x_{2}+x_{3}+4 x_{4}=2 \\
-2 x_{1}+2 x_{2}+x_{3}-x_{4}=1
\end{array}\right.
$$

欢迎在留言区和部落里晒出你的运算过程和结果，留下你的学习痕迹。如果你有所收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我一起重学线性代数！

在上一节课中，我讲解了线性方程组的另一种表达——矩阵。那么今天，我们就来讲解一下如何使用矩阵来解线性方程组，也就是如何求线性方程组的特殊解和通用解。

简单的线性方程组，我们当然可以运用初中学过的知识来求解，那复杂的呢？硬来几乎是不可能的了，一方面是因为人工计算的错误率很高，另一方面，即使我们使用计算机，用类似for或while循环来实现算法，它的计算效率也是极低的。你需要用更科学的方式、方法，从另一个角度来看待和求解线性方程组。

而矩阵就是为我们打开高效之门的钥匙，从计算机科学的角度来说，使用矩阵的运算效率实在是高太多了，因为它可以利用计算机的并行能力，甚至在一些迭代法中，还能实现分布式并行计算（迭代法会在后面"应用篇"中讲解）。

线性方程组解的寻找

现在，就让我们开始去寻找线性方程组的解。在之前的课程中，我们已经引入了线性方程组的一般表达，你可以看看下面的例子。

$$
\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.
$$

其中，a_{ij}和 b_{i} 属于实数，而且是已知常数，而x_{j}是未知变量，i和j的取值范围分别是：$i=1,…,m$；$j=1,…,n$ 。如果我们用矩阵的简单表达方式来看的话，就是$Ax=B$。

要搞清楚概念，我们还是要多看具体的例子。让我们先来看一个实例，来加深一下理解。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
x_{1} \\
x_{2} \\
x_{3} \\
x_{4}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8
\end{array}\right]
$$

很明显，这是一个矩阵表达方式。它的一般线性方程组表达方式是中学的基础知识，你应该很熟悉了。

$$
\left\{\begin{array}{l}
1 \times x_{1}+0 \times x_{2}+8 \times x_{3}+(-4) \times x_{4}=42 \\
0 \times x_{1}+1 \times x_{2}+2 \times x_{3}+12 \times x_{4}=8
\end{array}\right.
$$

在这个一般线性方程组中，有四个未知变量，但只有两个等式，这就意味着这个线性方程组有无穷多个解（这个是中学数学的范畴）。通过细心观察，我们可以发现第一列和第二列都是由0和1组成的，因此你很容易就能发现其中一个解。

$$
42\left[\begin{array}{l}
1 \\
0
\end{array}\right]+8\left[\begin{array}{l}
0 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8
\end{array}\right]
$$

这个解就是$\left[\begin{array}{llll}42 & 8 & 0 & 0\end{array}\right]^{T}$，也就是说四个未知变量分别为$42$、$8$、$0$、$0$。

$$
\left\{\begin{array}{l}
x_{1}=42 \\
x_{2}=8 \\
x_{3}=0 \\
x_{4}=0
\end{array}\right.
$$

这个解也叫做特殊解。我们刚才已经说过，这个线性方程组有无穷多个解，那我们确实需要一个聪明的方式来找到其他的解，最直观的方式就是通过矩阵的列来构造0。例如，对于第三列来说，我们可以使用第一和第二列的组合形式来表达。

$$
8\left[\begin{array}{l}
1 \\
0
\end{array}\right]+2\left[\begin{array}{l}
0 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{l}
8 \\
2
\end{array}\right]
$$

通过计算$Ax=0$，我们得出解$\left[\begin{array}{llll}8 & 2 & -1 & 0\end{array}\right]^{T}$。而事实上，这个解可以乘以任何实数$\lambda_{1}$，使得$Ax=0$成立。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]
\left(\begin{array}{l}
\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
8 \\
2 \\
-1 \\
0
\end{array}\right]
\end{array}\right)=0
$$

同理，对于第四列来说，我们可以使用第一和第二列的组合形式来表达，得出另一套解，使得$Ax=0$。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]
\left(\begin{array}{l}
\lambda_{2}\left[\begin{array}{l}
-4 \\
12 \\
0 \\
-1
\end{array}\right]
\end{array}\right)=0
$$

现在，我们可以把之前的特殊解与刚得出的两套解相组合，得出最终解，这个解也就是我们所说的通用解了。

$$
x \in R^{4}: x=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{1}\left[\begin{array}{c}
8 \\
2 \\
-1 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{c}
-4 \\
12 \\
0 \\
-1
\end{array}\right], \lambda_{1}, \lambda_{2} \in R
$$

我来总结一下寻找通用解的过程，这个过程分为三步：

1. 我们要寻找一个特殊解，使得$Ax=b$；
2. 找到$Ax=0$的所有解；
3. 组合第一和第二步的解形成通用解。

看到了这里，你有没有发现有些奇怪呢？或者说，有没有觉得哪里有点别扭？是的，好像有点太顺利了。那是因为这个线性方程组比较特别，第一列和第二列是由1和0组成的。所以，我们只通过观察就能得出特殊解和通用解。

然而，你不可能每次都行大运，就像我们在现实中碰到的这类线性方程组，一般都比这个复杂得多。不过不要慌，有一个算法可以来帮助我们转换任意线性方程组，形成类似的特殊形式，这个算法叫做**高斯消元法**。

高斯消元法的核心就是**线性方程组的初等变换**，于是，我们可以通过高斯消元法，得到围绕初等变换形成的简单矩阵表达形式，接下来我们就可以运用之前的三个步骤来寻找通用解了。

初等变换的一般形式

既然高斯消元法的核心就是线性方程组的初等变换，那为了方便你使用高斯消元法，我就有必要来讲一讲初等变换的一般形式有哪些：

1. 两个等式的交换，也就是矩阵行交换；
2. 一个等式，或者说矩阵行乘以一个实数常量；
3. 两个等式相加，或者说矩阵的两行相加。

道理是这样的道理，那我们通过一个例子来看看，究竟该怎么做线性方程组的初等变换。假设a属于实数，现在我们试着来寻找下面这个线性方程组的所有解。我把这个过程细细地拆解为11个步骤，建议你仔细看过并理解后，再进入下一阶段的学习。

$$
\left\{\begin{array}{c}
-2 x_{1}+4 x_{2}-2 x_{3}-x_{4}+4 x_{5}=-3 \\
4 x_{1}-8 x_{2}+3 x_{3}-3 x_{4}+x_{5}=2 \\
x_{1}-2 x_{2}+x_{3}-x_{4}+x_{5}=0 \\
x_{1}-2 x_{2}-3 x_{4}+4 x_{5}=a
\end{array}\right.
$$

1.我们要把这个线性方程组转换成矩阵的表达形式，$Ax=b$。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
4 & -8 & 3 & -3 & 1 & \mid & 2 \\
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

2.接着我们来交换第一和第三行。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
4 & -8 & 3 & -3 & 1 & \mid & 2 \\
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

注意，你知道我们为什么选择第一行和第三行交换吗？其实，这是为了便于计算。而具体交换哪一行是有个小技巧的，如果某行的第一个元素有1，我们就可以把这一行移到第一行。

3.我们以第一行为基础，开始执行乘和加变换，将第一行乘以-4的结果和第二行相加，从而获得了下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

4.然后，我们用同样的方法，将第一行乘以2的结果，再和第三行相加，得到了下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

5.以此类推，我们将第一行乘以-1的结果，和第四行相加，继续获得新矩阵。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & -1 & -2 & 3 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

6.将第二行乘以-1的结果，和第四行相加，得到下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & a-2
\end{array}\right]
$$

7.将第三行乘以-1的结果，和第四行相加。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & a+1
\end{array}\right]
$$

$$

8.第二行乘以-1，第三行乘以$-\frac{1}{3}$。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 3 & \mid & -2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \mid & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & a+1
\end{array}\right]
$$

9.现在，这个矩阵就是一个简单形式的矩阵，也叫做**行阶梯形矩阵**（Row-Echelon Form，REF）。

$$
\left\{\begin{array}{r}
x_{1}-2 x_{2}+x_{3}-x_{4}+x_{5}=0 \\
x_{3}-x_{4}+3 x_{5}=-2 \\
x_{4}-2 x_{5}=1 \\
0=a+1
\end{array}\right.
$$

一个矩阵成为行阶梯形矩阵需满足两个条件：

- 如果它既有零行，又有非零行，则零行在下，非零行在上；
- 如果它有非零行，则每个非零行的第一个非零元素所在列号自上而下严格单调上升，正如之前的这个矩阵，列号自上而下是1、3、4，是严格单调上升的。

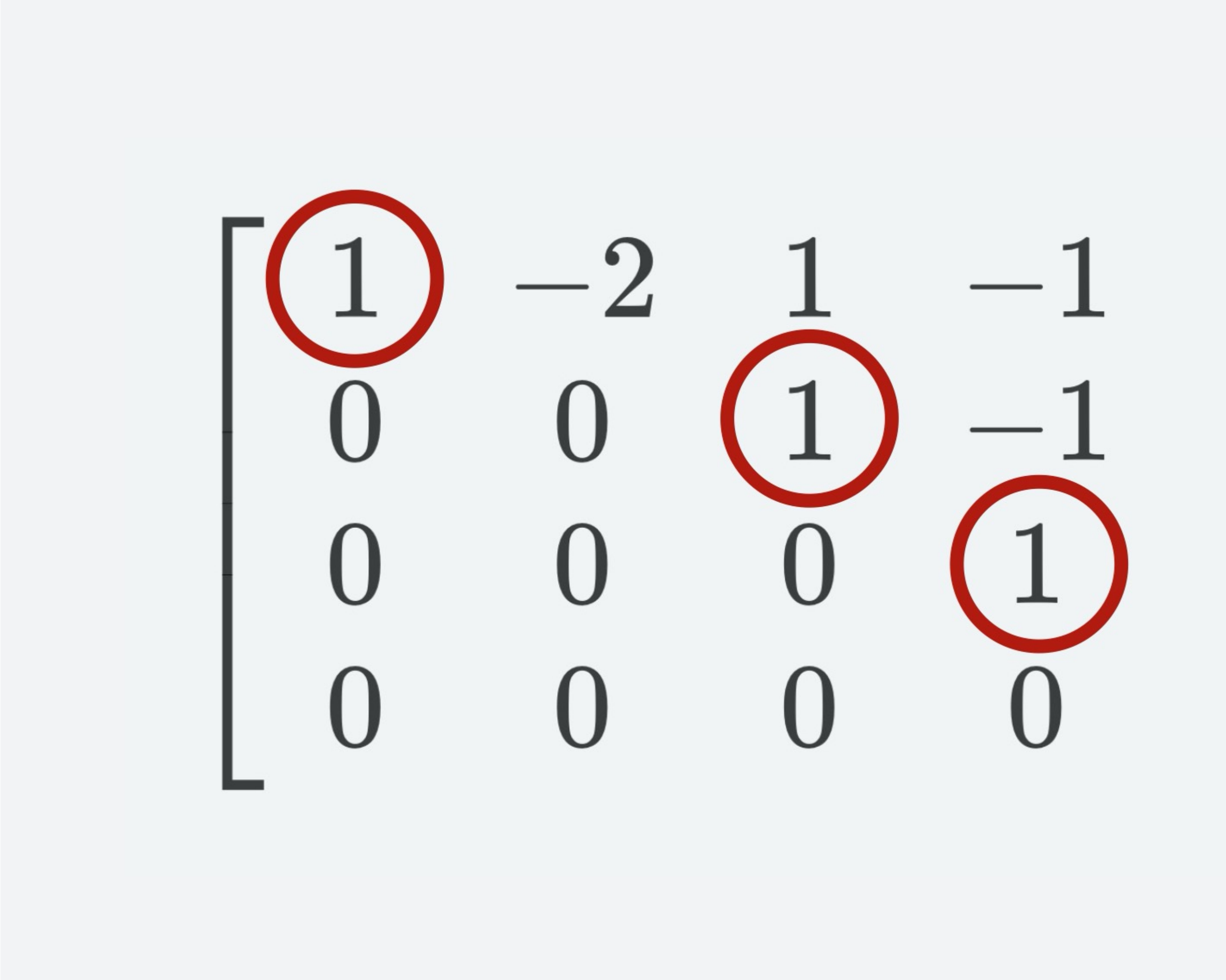
10.你可以看出，只有在$a=-1$的情况下，这个线性方程组才有解，特殊解是$\left[\begin{array}{lllll}2 & 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right]^{\mathrm{T}}$。

11.最后，我们得出这个线性方程组的通用解，如下图所示。

$$
x \in R^{5}: x=\left[\begin{array}{c}
2 \\
0 \\
-1 \\
1 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
2 \\
1 \\
0 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{c}
2 \\
0 \\
-1 \\
2 \\
1
\end{array}\right], \lambda_{1}, \lambda_{2} \in R
$$

注意，这里有一个概念很重要，那就是**主元**。主元就是在矩阵消元过程中，每列要保留的非零元素，我们可以用它把该列其他元素消去。在阶梯型矩阵中，每个非零行第一个非零元素就是主元。

拿之前的第8步计算后的结果来举例，第一行的第一个元素1就是主元，第二行第三个元素1是主元，第三行的第四个元素1也是主元。



对应行阶梯形矩阵主元的变量叫做基本变量，而其他的变量叫做自由变量，这个例子中，x_{1}、x_{3}、x_{4}就是基本变量，x_{2}、x_{5}则是自由变量。使用行阶梯形矩阵能更简单地得出特殊解，所以我们可以使用主元列来表达线性方程组：

$$
b=\sum_{i=1}^{P} \lambda_{i} \mathrm{p}_{i}, i=1, \ldots, P
$$

在之前的例子中，我们使用主元列来表达成下面这样的矩阵形式：

$$
\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
1 \\
0 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{l}
1 \\
1 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{3}\left[\begin{array}{c}
-1 \\
-1 \\
1 \\
0
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
0 \\
-2 \\
1 \\
0
\end{array}\right]
$$

于是，我们最终得出 $\lambda_{3}=1$，$\lambda_{2}=-1$，$\lambda_{1}=2$，分别对应于x_{4}、x_{3}、x_{1}。不要忘了，对于非主元列，我们已经隐式地把系数设置成了0，所以这个线性方程组的特殊解是$x=\left[\begin{array}{lllll}2 & 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right]^{\mathrm{T}}$。

简化行阶梯形矩阵

这里我们再引入一个概念，简化行阶梯形矩阵，因为引入简化行阶梯形矩阵对于线性方程组的求解来说会更简单。其实，高斯消元法的核心就是通过初等变换，把线性方程组转换成简化行阶梯形矩阵。那么一个方程组是简化行阶梯形矩阵，必须满足哪几个条件呢？

1. 这个方程组必须是行阶梯形矩阵；
2. 方程组的每一个主元都是1；
3. 主元在它的列中是唯一的非0元素。

现在，我们再通过一个实例，看看该如何通过高斯消元法计算一个矩阵的逆矩阵。设矩阵A如下图：

$$

$$
A=\left[\begin{array}{llll}
1 & 0 & 2 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right]
$$

首先，我们形成A的增广矩阵（具体方法参见上一节）。

$$
\left[\begin{array}{llllllll}
1 & 0 & 2 & 0 & \mid & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & \mid & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 1 & \mid & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & \mid & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

其次，使用我们前面刚刚讲过的高斯消元法计算出简化行阶梯形矩阵。

$$
\left[\begin{array}{ccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \mid & -1 & 2 & -2 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \mid & 1 & -1 & 2 & -2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \mid & 1 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \mid & -1 & 0 & -1 & 2
\end{array}\right]
$$

最后，我们就得到A的逆矩阵，如下图所示。

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{cccc}
-1 & 2 & -2 & 2 \\
1 & -1 & 2 & -2 \\
1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & 0 & -1 & 2
\end{array}\right]
$$

接下来，我们只要使用公式$A A^{-1}=I$ 就可以对结果进行验证了。

更多解线性方程组的方法

到目前为止，相信你已经了解了如何解线性方程组，包括特殊解和通用解，以及如何使用高斯消元法来解线性方程组。最后，我再总结一些解方法来作为你的知识扩展。

第一个方法，假设一个矩阵A是方阵（行数与列数相等的矩阵），并且可逆，$Ax=B$ ，那x解就可以写成$x=A^{-1}B$，但如果A矩阵不可逆，也不是方阵，那我们就只能使用下面这个变换来求x解了。

$$Ax=B⇔A^{T}Ax=A^{T}B⇔x=(A^{T}A)^{-1}A^{T}B$$

其中，矩阵A的转置矩阵和A相乘的逆矩阵，再和A的转置矩阵相乘，我们把它叫做穆尔彭罗斯伪逆矩阵（Moore-Penrose pseudo inverse），简称伪逆。

$$(A^{T}A)^{-1}A^{T}$$

这个方法有两个弊端：第一，矩阵乘和逆矩阵的计算太复杂；第二，数值精确度不高。因此，从实践角度来说，我一般不推荐使用。

第二个方法是高斯消元法。高斯消元法是非常直观的，它在很多计算中都起到了关键的作用，比如：

1. 计算行列式；
2. 检查向量是否是线性独立的；
3. 计算矩阵的逆矩阵；
4. 计算矩阵的秩；
5. 决定向量空间的基。

但当高斯消元法面对百万、千万级别的变量时，就捉襟见肘了。而这类级别的计算才是我们在实践中经常会遇到的，因此从实践角度来说，我也一般不推荐使用。因为高斯消元法属于直接法，直接法是经历有限次的运算得到方程组精确解的方法。但是，学习直接法是有意义的，虽然直接法在实际工作中不常用，但是它也能处理一些日常小问题，更重要的是，它稳固了我们进一步学习其它方法的基础。

我要讲的第三种方法，就是与直接法对应的间接法了。在实践中，线性方程组的求解都是间接的，也就是运用迭代法。

迭代法是采用极限过程，用线性方程组的近似解逐步逼近精确解的方法。所以，迭代法的关键在于每次迭代残余错误的减少，以及如何能够收敛到解。常见的迭代法有两类，定常迭代法（Stationary iterative method）和Krylov子空间方法（我会在应用篇中讲解）。

> 定常迭代法：理查德森迭代法（Richardson method）、雅可比方法（Jacobi method）、Gauß-Seidel方法、逐次超松弛法（Successive over-relaxation method，简称SOR）。
> Krylov子空间方法：共轭梯度法（Conjugate gradient）、 广义极小残余算法（Generalized minimal residual）、双共轭梯度法（Biconjugate gradient）。

这里提到的几种迭代法都是在实践中比较常用的，也是计算机编程中经常实现的算法，但由于迭代法更多属于微分和极限领域，所以这里就不详细介绍了，我会在线性代数应用篇的“数值线性代数”那节课中再做讲解。

如果在课程内容结束后，你还有余力学习更多的内容，这里我先推荐两本书给你作参考，一本是《Introduction to Numerical Analysis》，另一本是《Linear Algebra》。这两本书里面都有进一步地讲解了线性方程组的迭代法求解的内容。

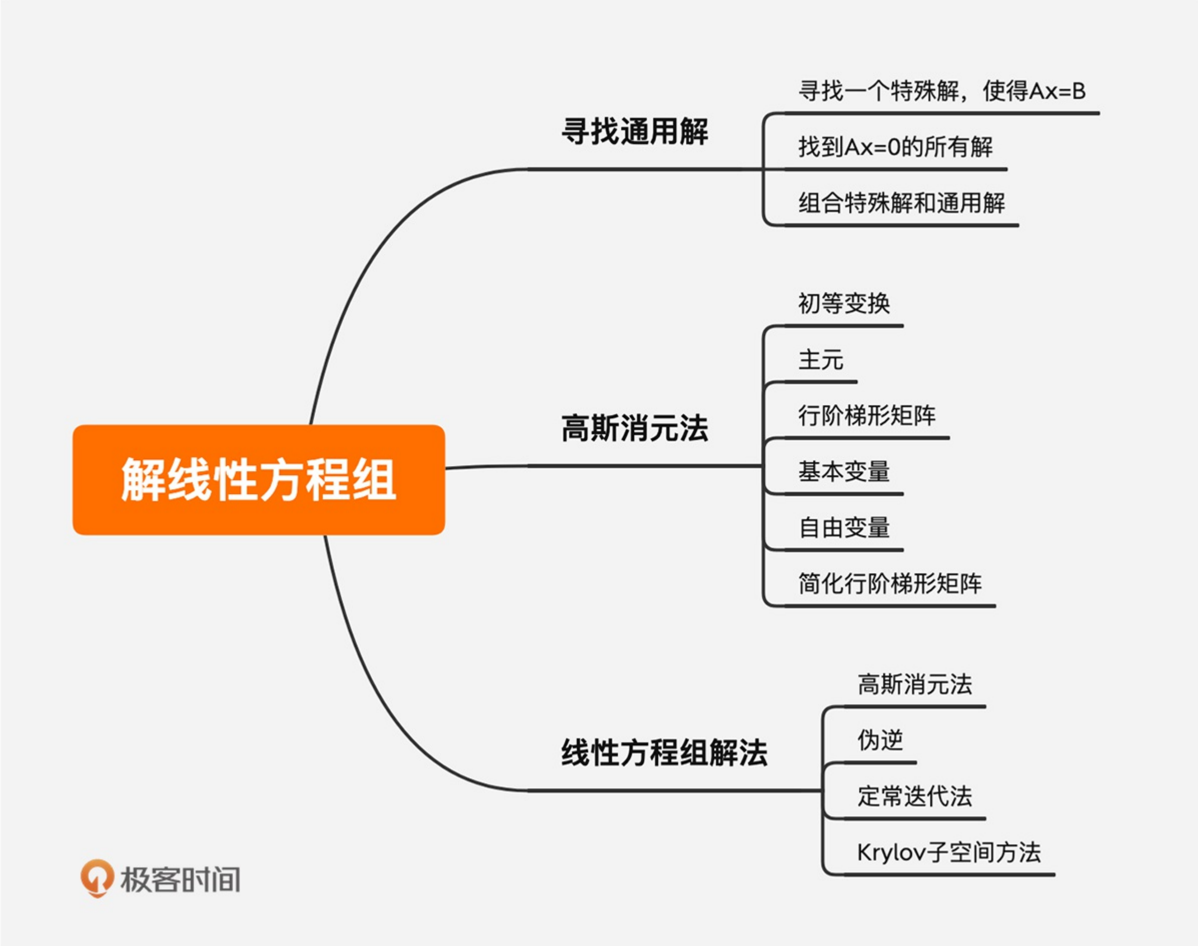
> 1.《Introduction to Numerical Analysis》
> 作者：Stoer, Josef, Bulirsch, R.
> 2002年出版
> 2.《Linear Algebra》
> 作者：Liesen, Jörg, Mehrmann, Volker
> 2015年出版

本节小结

好了，到这里解线性方程组这一讲就结束了，最后我再总结一下前面讲解的内容。

首先，我用一个简单的线性方程组，通过直接观察的方法来计算这个方程组的特殊解和通用解，接着通过实例详细地介绍了高斯消元法，最后我给出了一些在实践中常用的线性方程组解方法。只有弄清楚这些基础知识的本质，你才能更进一步，去了解其他计算方法。

线性方程组的求解已经成为了世界上最快计算机的测试标准，因为通过矩阵运算，计算机的并行计算能力暴露无遗。希望你能够在这些基础之上，阅读我推荐的两本书，并且把这些方法运用到实践中，特别是机器学习，因为机器学习也用到了很多迭代方法。



线性代数练习场

练习时刻到了，今天的练习题比较简单，请你用高斯消元法求下面的线性方程组。

$$
\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}-2 x_{3}-x_{4}=-1 \\
x_{1}+5 x_{2}-3 x_{3}-2 x_{4}=0 \\
3 x_{1}-x_{2}+x_{3}+4 x_{4}=2 \\
-2 x_{1}+2 x_{2}+x_{3}-x_{4}=1
\end{array}\right.
$$

欢迎在留言区和部落里晒出你的运算过程和结果，留下你的学习痕迹。如果你有所收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我一起重学线性代数！

在上一节课中，我讲解了线性方程组的另一种表达——矩阵。那么今天，我们就来讲解一下如何使用矩阵来解线性方程组，也就是如何求线性方程组的特殊解和通用解。

简单的线性方程组，我们当然可以运用初中学过的知识来求解，那复杂的呢？硬来几乎是不可能的了，一方面是因为人工计算的错误率很高，另一方面，即使我们使用计算机，用类似for或while循环来实现算法，它的计算效率也是极低的。你需要用更科学的方式、方法，从另一个角度来看待和求解线性方程组。

而矩阵就是为我们打开高效之门的钥匙，从计算机科学的角度来说，使用矩阵的运算效率实在是高太多了，因为它可以利用计算机的并行能力，甚至在一些迭代法中，还能实现分布式并行计算（迭代法会在后面"应用篇"中讲解）。

线性方程组解的寻找

现在，就让我们开始去寻找线性方程组的解。在之前的课程中，我们已经引入了线性方程组的一般表达，你可以看看下面的例子。

$$
\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.
$$

其中，a_{ij}和 b_{i} 属于实数，而且是已知常数，而x_{j}是未知变量，i和j的取值范围分别是：$i=1,…,m$；$j=1,…,n$ 。如果我们用矩阵的简单表达方式来看的话，就是$Ax=B$。

要搞清楚概念，我们还是要多看具体的例子。让我们先来看一个实例，来加深一下理解。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
x_{1} \\
x_{2} \\
x_{3} \\
x_{4}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8
\end{array}\right]
$$

很明显，这是一个矩阵表达方式。它的一般线性方程组表达方式是中学的基础知识，你应该很熟悉了。

$$
\left\{\begin{array}{l}
1 \times x_{1}+0 \times x_{2}+8 \times x_{3}+(-4) \times x_{4}=42 \\
0 \times x_{1}+1 \times x_{2}+2 \times x_{3}+12 \times x_{4}=8
\end{array}\right.
$$

在这个一般线性方程组中，有四个未知变量，但只有两个等式，这就意味着这个线性方程组有无穷多个解（这个是中学数学的范畴）。通过细心观察，我们可以发现第一列和第二列都是由0和1组成的，因此你很容易就能发现其中一个解。

$$
42\left[\begin{array}{l}
1 \\
0
\end{array}\right]+8\left[\begin{array}{l}
0 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8
\end{array}\right]
$$

这个解就是$\left[\begin{array}{llll}42 & 8 & 0 & 0\end{array}\right]^{T}$，也就是说四个未知变量分别为$42$、$8$、$0$、$0$。

$$
\left\{\begin{array}{l}
x_{1}=42 \\
x_{2}=8 \\
x_{3}=0 \\
x_{4}=0
\end{array}\right.
$$

这个解也叫做特殊解。我们刚才已经说过，这个线性方程组有无穷多个解，那我们确实需要一个聪明的方式来找到其他的解，最直观的方式就是通过矩阵的列来构造0。例如，对于第三列来说，我们可以使用第一和第二列的组合形式来表达。

$$
8\left[\begin{array}{l}
1 \\
0
\end{array}\right]+2\left[\begin{array}{l}
0 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{l}
8 \\
2
\end{array}\right]
$$

通过计算$Ax=0$，我们得出解$\left[\begin{array}{llll}8 & 2 & -1 & 0\end{array}\right]^{T}$。而事实上，这个解可以乘以任何实数$\lambda_{1}$，使得$Ax=0$成立。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]
\left(\begin{array}{l}
\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
8 \\
2 \\
-1 \\
0
\end{array}\right]
\end{array}\right)=0
$$

同理，对于第四列来说，我们可以使用第一和第二列的组合形式来表达，得出另一套解，使得$Ax=0$。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]
\left(\begin{array}{l}
\lambda_{2}\left[\begin{array}{l}
-4 \\
12 \\
0 \\
-1
\end{array}\right]
\end{array}\right)=0
$$

现在，我们可以把之前的特殊解与刚得出的两套解相组合，得出最终解，这个解也就是我们所说的通用解了。

$$
x \in R^{4}: x=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{1}\left[\begin{array}{c}
8 \\
2 \\
-1 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{c}
-4 \\
12 \\
0 \\
-1
\end{array}\right], \lambda_{1}, \lambda_{2} \in R
$$

我来总结一下寻找通用解的过程，这个过程分为三步：

1. 我们要寻找一个特殊解，使得$Ax=b$；
2. 找到$Ax=0$的所有解；
3. 组合第一和第二步的解形成通用解。

看到了这里，你有没有发现有些奇怪呢？或者说，有没有觉得哪里有点别扭？是的，好像有点太顺利了。那是因为这个线性方程组比较特别，第一列和第二列是由1和0组成的。所以，我们只通过观察就能得出特殊解和通用解。

然而，你不可能每次都行大运，就像我们在现实中碰到的这类线性方程组，一般都比这个复杂得多。不过不要慌，有一个算法可以来帮助我们转换任意线性方程组，形成类似的特殊形式，这个算法叫做**高斯消元法**。

高斯消元法的核心就是**线性方程组的初等变换**，于是，我们可以通过高斯消元法，得到围绕初等变换形成的简单矩阵表达形式，接下来我们就可以运用之前的三个步骤来寻找通用解了。

初等变换的一般形式

既然高斯消元法的核心就是线性方程组的初等变换，那为了方便你使用高斯消元法，我就有必要来讲一讲初等变换的一般形式有哪些：

1. 两个等式的交换，也就是矩阵行交换；
2. 一个等式，或者说矩阵行乘以一个实数常量；
3. 两个等式相加，或者说矩阵的两行相加。

道理是这样的道理，那我们通过一个例子来看看，究竟该怎么做线性方程组的初等变换。假设a属于实数，现在我们试着来寻找下面这个线性方程组的所有解。我把这个过程细细地拆解为11个步骤，建议你仔细看过并理解后，再进入下一阶段的学习。

$$
\left\{\begin{array}{c}
-2 x_{1}+4 x_{2}-2 x_{3}-x_{4}+4 x_{5}=-3 \\
4 x_{1}-8 x_{2}+3 x_{3}-3 x_{4}+x_{5}=2 \\
x_{1}-2 x_{2}+x_{3}-x_{4}+x_{5}=0 \\
x_{1}-2 x_{2}-3 x_{4}+4 x_{5}=a
\end{array}\right.
$$

1.我们要把这个线性方程组转换成矩阵的表达形式，$Ax=b$。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
4 & -8 & 3 & -3 & 1 & \mid & 2 \\
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

2.接着我们来交换第一和第三行。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
4 & -8 & 3 & -3 & 1 & \mid & 2 \\
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

注意，你知道我们为什么选择第一行和第三行交换吗？其实，这是为了便于计算。而具体交换哪一行是有个小技巧的，如果某行的第一个元素有1，我们就可以把这一行移到第一行。

3.我们以第一行为基础，开始执行乘和加变换，将第一行乘以-4的结果和第二行相加，从而获得了下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

4.然后，我们用同样的方法，将第一行乘以2的结果，再和第三行相加，得到了下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

5.以此类推，我们将第一行乘以-1的结果，和第四行相加，继续获得新矩阵。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & -1 & -2 & 3 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

6.将第二行乘以-1的结果，和第四行相加，得到下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & a-2
\end{array}\right]
$$

7.将第三行乘以-1的结果，和第四行相加。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & a+1
\end{array}\right]

$$

8.第二行乘以-1，第三行乘以$-\frac{1}{3}$。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 3 & \mid & -2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \mid & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & a+1
\end{array}\right]
$$

9.现在，这个矩阵就是一个简单形式的矩阵，也叫做**行阶梯形矩阵**（Row-Echelon Form，REF）。

$$
\left\{\begin{array}{r}
x_{1}-2 x_{2}+x_{3}-x_{4}+x_{5}=0 \\
x_{3}-x_{4}+3 x_{5}=-2 \\
x_{4}-2 x_{5}=1 \\
0=a+1
\end{array}\right.
$$

一个矩阵成为行阶梯形矩阵需满足两个条件：

- 如果它既有零行，又有非零行，则零行在下，非零行在上；
- 如果它有非零行，则每个非零行的第一个非零元素所在列号自上而下严格单调上升，正如之前的这个矩阵，列号自上而下是1、3、4，是严格单调上升的。

10.你可以看出，只有在$a=-1$的情况下，这个线性方程组才有解，特殊解是$\left[\begin{array}{lllll}2 & 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right]^{\mathrm{T}}$。

11.最后，我们得出这个线性方程组的通用解，如下图所示。

$$
x \in R^{5}: x=\left[\begin{array}{c}
2 \\
0 \\
-1 \\
1 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
2 \\
1 \\
0 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{c}
2 \\
0 \\
-1 \\
2 \\
1
\end{array}\right], \lambda_{1}, \lambda_{2} \in R
$$

注意，这里有一个概念很重要，那就是**主元**。主元就是在矩阵消元过程中，每列要保留的非零元素，我们可以用它把该列其他元素消去。在阶梯型矩阵中，每个非零行第一个非零元素就是主元。

拿之前的第8步计算后的结果来举例，第一行的第一个元素1就是主元，第二行第三个元素1是主元，第三行的第四个元素1也是主元。

$$
\begin{bmatrix}
1 & -2 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

对应行阶梯形矩阵主元的变量叫做基本变量，而其他的变量叫做自由变量，这个例子中，x_{1}、x_{3}、x_{4}就是基本变量，x_{2}、x_{5}则是自由变量。使用行阶梯形矩阵能更简单地得出特殊解，所以我们可以使用主元列来表达线性方程组：

$$
b=\sum_{i=1}^{P} \lambda_{i} \mathrm{p}_{i}, i=1, \ldots, P
$$

在之前的例子中，我们使用主元列来表达成下面这样的矩阵形式：

$$
\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
1 \\
0 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{l}
1 \\
1 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{3}\left[\begin{array}{c}
-1 \\
-1 \\
1 \\
0
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
0 \\
-2 \\
1 \\
0
\end{array}\right]
$$

于是，我们最终得出 $\lambda_{3}=1$，$\lambda_{2}=-1$，$\lambda_{1}=2$，分别对应于x_{4}、x_{3}、x_{1}。不要忘了，对于非主元列，我们已经隐式地把系数设置成了0，所以这个线性方程组的特殊解是$x=\left[\begin{array}{lllll}2 & 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right]^{\mathrm{T}}$。

简化行阶梯形矩阵

这里我们再引入一个概念，简化行阶梯形矩阵，因为引入简化行阶梯形矩阵对于线性方程组的求解来说会更简单。其实，高斯消元法的核心就是通过初等变换，把线性方程组转换成简化行阶梯形矩阵。那么一个方程组是简化行阶梯形矩阵，必须满足哪几个条件呢？

1. 这个方程组必须是行阶梯形矩阵；
2. 方程组的每一个主元都是1；
3. 主元在它的列中是唯一的非0元素。

现在，我们再通过一个实例，看看该如何通过高斯消元法计算一个矩阵的逆矩阵。设矩阵A如下图：

$$

$$
A=\left[\begin{array}{llll}
1 & 0 & 2 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right]
$$

首先，我们形成A的增广矩阵（具体方法参见上一节）。

$$
\left[\begin{array}{lllllllll}
1 & 0 & 2 & 0 & \mid & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & \mid & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 1 & \mid & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & \mid & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

其次，使用我们前面刚刚讲过的高斯消元法计算出简化行阶梯形矩阵。

$$
\left[\begin{array}{ccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \mid & -1 & 2 & -2 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \mid & 1 & -1 & 2 & -2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \mid & 1 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \mid & -1 & 0 & -1 & 2
\end{array}\right]
$$

最后，我们就得到A的逆矩阵，如下图所示。

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{cccc}
-1 & 2 & -2 & 2 \\
1 & -1 & 2 & -2 \\
1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & 0 & -1 & 2
\end{array}\right]
$$

接下来，我们只要使用公式$A A^{-1}=I$ 就可以对结果进行验证了。

更多解线性方程组的方法

到目前为止，相信你已经了解了如何解线性方程组，包括特殊解和通用解，以及如何使用高斯消元法来解线性方程组。最后，我再总结一些解方法来作为你的知识扩展。

第一个方法，假设一个矩阵A是方阵（行数与列数相等的矩阵），并且可逆，$Ax=B$ ，那x解就可以写成$x=A^{-1}B$，但如果A矩阵不可逆，也不是方阵，那我们就只能使用下面这个变换来求x解了。

$$Ax=B \Leftrightarrow A^{T}Ax=A^{T}B \Leftrightarrow x=(A^{T}A)^{-1}A^{T}B$$

其中，矩阵A的转置矩阵和A相乘的逆矩阵，再和A的转置矩阵相乘，我们把它叫做穆尔彭罗斯伪逆矩阵（Moore-Penrose pseudo inverse），简称伪逆。

$$(A^{T}A)^{-1}A^{T}$$

这个方法有两个弊端：第一，矩阵乘和逆矩阵的计算太复杂；第二，数值精确度不高。因此，从实践角度来说，我一般不推荐使用。

第二个方法是高斯消元法。高斯消元法是非常直观的，它在很多计算中都起到了关键的作用，比如：

1. 计算行列式；
2. 检查向量是否是线性独立的；
3. 计算矩阵的逆矩阵；
4. 计算矩阵的秩；
5. 决定向量空间的基。

但当高斯消元法面对百万、千万级别的变量时，就捉襟见肘了。而这类级别的计算才是我们在实践中经常会遇到的，因此从实践角度来说，我也一般不推荐使用。因为高斯消元法属于直接法，直接法是经历有限次的运算得到方程组精确解的方法。但是，学习直接法是有意义的，虽然直接法在实际工作中不常用，但是它也能处理一些日常小问题，更重要的是，它稳固了我们进一步学习其它方法的基础。

我要讲的第三种方法，就是与直接法对应的间接法了。在实践中，线性方程组的求解都是间接的，也就是运用迭代法。

迭代法是采用极限过程，用线性方程组的近似解逐步逼近精确解的方法。所以，迭代法的关键在于每次迭代残余错误的减少，以及如何能够收敛到解。常见的迭代法有两类，定常迭代法（Stationary iterative method）和Krylov子空间方法（我会在应用篇中讲解）。

> 定常迭代法：理查德森迭代法（Richardson method）、雅可比方法（Jacobi method）、Gauß-Seidel方法、逐次超松弛法（Successive over-relaxation method，简称SOR）。
> Krylov子空间方法：共轭梯度法（Conjugate gradient）、广义极小残余算法（Generalized minimal residual）、双共轭梯度法（Biconjugate gradient）。

这里提到的几种迭代法都是在实践中比较常用的，也是计算机编程中经常实现的算法，但由于迭代法更多属于微分和极限领域，所以这里就不详细介绍了，我会在线性代数应用篇的"数值线性代数"那节课中再做讲解。

如果在课程内容结束后，你还有余力学习更多的内容，这里我先推荐两本书给你作参考，一本是《Introduction to Numerical Analysis》，另一本是《Linear Algebra》。这两本书里面都有进一步地讲解了线性方程组的迭代法求解的内容。

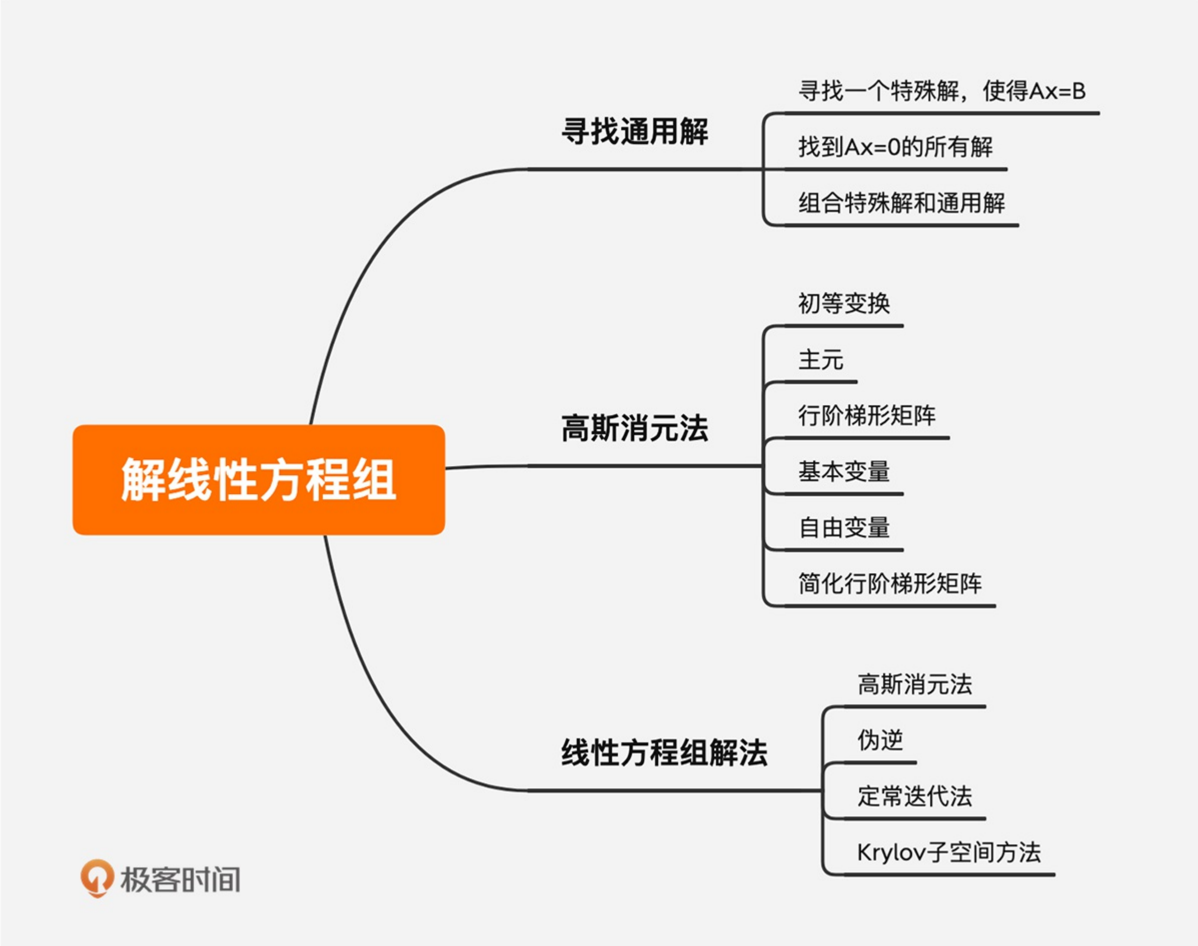
> 1.《Introduction to Numerical Analysis》
> 作者：Stoer, Josef, Bulirsch, R.
> 2002年出版
> 2.《Linear Algebra》
> 作者：Liesen, Jörg, Mehrmann, Volker
> 2015年出版

本节小结

好了，到这里解线性方程组这一讲就结束了，最后我再总结一下前面讲解的内容。

首先，我用一个简单的线性方程组，通过直接观察的方法来计算这个方程组的特殊解和通用解，接着通过实例详细地介绍了高斯消元法，最后我给出了一些在实践中常用的线性方程组解方法。只有弄清楚这些基础知识的本质，你才能更进一步，去了解其他计算方法。

线性方程组的求解已经成为了世界上最快计算机的测试标准，因为通过矩阵运算，计算机的并行计算能力暴露无遗。希望你能够在这些基础之上，阅读我推荐的两本书，并且把这些方法运用到实践中，特别是机器学习，因为机器学习也用到了很多迭代方法。



线性代数练习场

练习时刻到了，今天的练习题比较简单，请你用高斯消元法求下面的线性方程组。

$$
\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}-2 x_{3}-x_{4}=-1 \\
x_{1}+5 x_{2}-3 x_{3}-2 x_{4}=0 \\
3 x_{1}-x_{2}+x_{3}+4 x_{4}=2 \\
-2 x_{1}+2 x_{2}+x_{3}-x_{4}=1
\end{array}\right.
$$

欢迎在留言区和部落里晒出你的运算过程和结果，留下你的学习痕迹。如果你有所收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我一起重学线性代数！

在上一节课中，我讲解了线性方程组的另一种表达——矩阵。那么今天，我们就来讲解一下如何使用矩阵来解线性方程组，也就是如何求线性方程组的特殊解和通用解。

简单的线性方程组，我们当然可以运用初中学过的知识来求解，那复杂的呢？硬来几乎是不可能的了，一方面是因为人工计算的错误率很高，另一方面，即使我们使用计算机，用类似for或while循环来实现算法，它的计算效率也是极低的。你需要用更科学的方式、方法，从另一个角度来看待和求解线性方程组。

而矩阵就是为我们打开高效之门的钥匙，从计算机科学的角度来说，使用矩阵的运算效率实在是高太多了，因为它可以利用计算机的并行能力，甚至在一些迭代法中，还能实现分布式并行计算（迭代法会在后面"应用篇"中讲解）。

线性方程组解的寻找

现在，就让我们开始去寻找线性方程组的解。在之前的课程中，我们已经引入了线性方程组的一般表达，你可以看看下面的例子。

$$
\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.
$$

其中，a_{ij}和 b_{i} 属于实数，而且是已知常数，而x_{j}是未知变量，i和j的取值范围分别是：$i=1,…,m$；$j=1,…,n$ 。如果我们用矩阵的简单表达方式来看的话，就是$Ax=B$。

要搞清楚概念，我们还是要多看具体的例子。让我们先来看一个实例，来加深一下理解。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
x_{1} \\
x_{2} \\
x_{3} \\
x_{4}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8
\end{array}\right]
$$

很明显，这是一个矩阵表达方式。它的一般线性方程组表达方式是中学的基础知识，你应该很熟悉了。

$$
\left\{\begin{array}{l}
1 \times x_{1}+0 \times x_{2}+8 \times x_{3}+(-4) \times x_{4}=42 \\
0 \times x_{1}+1 \times x_{2}+2 \times x_{3}+12 \times x_{4}=8
\end{array}\right.
$$

在这个一般线性方程组中，有四个未知变量，但只有两个等式，这就意味着这个线性方程组有无穷多个解（这个是中学数学的范畴）。通过细心观察，我们可以发现第一列和第二列都是由0和1组成的，因此你很容易就能发现其中一个解。

$$
42\left[\begin{array}{l}
1 \\
0
\end{array}\right]+8\left[\begin{array}{l}
0 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8
\end{array}\right]
$$

这个解就是$\left[\begin{array}{llll}42 & 8 & 0 & 0\end{array}\right]^{T}$，也就是说四个未知变量分别为$42$、$8$、$0$、$0$。

$$
\left\{\begin{array}{l}
x_{1}=42 \\
x_{2}=8 \\
x_{3}=0 \\
x_{4}=0
\end{array}\right.
$$

这个解也叫做特殊解。我们刚才已经说过，这个线性方程组有无穷多个解，那我们确实需要一个聪明的方式来找到其他的解，最直观的方式就是通过矩阵的列来构造0。例如，对于第三列来说，我们可以使用第一和第二列的组合形式来表达。

$$
8\left[\begin{array}{l}
1 \\
0
\end{array}\right]+2\left[\begin{array}{l}
0 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{l}
8 \\
2
\end{array}\right]
$$

通过计算$Ax=0$，我们得出解$\left[\begin{array}{llll}8 & 2 & -1 & 0\end{array}\right]^{T}$。而事实上，这个解可以乘以任何实数$λ_{1}$，使得$Ax=0$成立。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]
\left(\begin{array}{l}
\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
8 \\
2 \\
-1 \\
0
\end{array}\right]
\end{array}\right)=0
$$

同理，对于第四列来说，我们可以使用第一和第二列的组合形式来表达，得出另一套解，使得$Ax=0$。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]
\left(\begin{array}{l}
\lambda_{2}\left[\begin{array}{l}
-4 \\
12 \\
0 \\
-1
\end{array}\right]
\end{array}\right)=0
$$

现在，我们可以把之前的特殊解与刚得出的两套解相组合，得出最终解，这个解也就是我们所说的通用解了。

$$
x \in R^{4}: x=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{1}\left[\begin{array}{c}
8 \\
2 \\
-1 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{c}
-4 \\
12 \\
0 \\
-1
\end{array}\right], \lambda_{1}, \lambda_{2} \in R
$$

我来总结一下寻找通用解的过程，这个过程分为三步：

1. 我们要寻找一个特殊解，使得$Ax=b$；
2. 找到$Ax=0$的所有解；
3. 组合第一和第二步的解形成通用解。

看到了这里，你有没有发现有些奇怪呢？或者说，有没有觉得哪里有点别扭？是的，好像有点太顺利了。那是因为这个线性方程组比较特别，第一列和第二列是由1和0组成的。所以，我们只通过观察就能得出特殊解和通用解。

然而，你不可能每次都行大运，就像我们在现实中碰到的这类线性方程组，一般都比这个复杂得多。不过不要慌，有一个算法可以来帮助我们转换任意线性方程组，形成类似的特殊形式，这个算法叫做**高斯消元法**。

高斯消元法的核心就是**线性方程组的初等变换**，于是，我们可以通过高斯消元法，得到围绕初等变换形成的简单矩阵表达形式，接下来我们就可以运用之前的三个步骤来寻找通用解了。

初等变换的一般形式

既然高斯消元法的核心就是线性方程组的初等变换，那为了方便你使用高斯消元法，我就有必要来讲一讲初等变换的一般形式有哪些：

1. 两个等式的交换，也就是矩阵行交换；
2. 一个等式，或者说矩阵行乘以一个实数常量；
3. 两个等式相加，或者说矩阵的两行相加。

道理是这样的道理，那我们通过一个例子来看看，究竟该怎么做线性方程组的初等变换。假设a属于实数，现在我们试着来寻找下面这个线性方程组的所有解。我把这个过程细细地拆解为11个步骤，建议你仔细看过并理解后，再进入下一阶段的学习。

$$
\left\{\begin{array}{c}
-2 x_{1}+4 x_{2}-2 x_{3}-x_{4}+4 x_{5}=-3 \\
4 x_{1}-8 x_{2}+3 x_{3}-3 x_{4}+x_{5}=2 \\
x_{1}-2 x_{2}+x_{3}-x_{4}+x_{5}=0 \\
x_{1}-2 x_{2}-3 x_{4}+4 x_{5}=a
\end{array}\right.
$$

1.我们要把这个线性方程组转换成矩阵的表达形式，$Ax=b$。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
4 & -8 & 3 & -3 & 1 & \mid & 2 \\
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

2.接着我们来交换第一和第三行。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
4 & -8 & 3 & -3 & 1 & \mid & 2 \\
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

注意，你知道我们为什么选择第一行和第三行交换吗？其实，这是为了便于计算。而具体交换哪一行是有个小技巧的，如果某行的第一个元素有1，我们就可以把这一行移到第一行。

3.我们以第一行为基础，开始执行乘和加变换，将第一行乘以-4的结果和第二行相加，从而获得了下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

4.然后，我们用同样的方法，将第一行乘以2的结果，再和第三行相加，得到了下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

5.以此类推，我们将第一行乘以-1的结果，和第四行相加，继续获得新矩阵。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & -1 & -2 & 3 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

6.将第二行乘以-1的结果，和第四行相加，得到下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & a-2
\end{array}\right]
$$

7.将第三行乘以-1的结果，和第四行相加。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & a+1
\end{array}\right]

8.第二行乘以-1，第三行乘以$-\frac{1}{3}$。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 3 & \mid & -2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \mid & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & a+1
\end{array}\right]
$$

9.现在，这个矩阵就是一个简单形式的矩阵，也叫做**行阶梯形矩阵**（Row-Echelon Form，REF）。

$$
\left\{\begin{array}{r}
x_{1}-2 x_{2}+x_{3}-x_{4}+x_{5}=0 \\
x_{3}-x_{4}+3 x_{5}=-2 \\
x_{4}-2 x_{5}=1 \\
0=a+1
\end{array}\right.
$$

一个矩阵成为行阶梯形矩阵需满足两个条件：

- 如果它既有零行，又有非零行，则零行在下，非零行在上；
- 如果它有非零行，则每个非零行的第一个非零元素所在列号自上而下严格单调上升，正如之前的这个矩阵，列号自上而下是1、3、4，是严格单调上升的。

10.你可以看出，只有在$a=-1$的情况下，这个线性方程组才有解，特殊解是$\left[\begin{array}{lllll}2 & 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right]^{\mathrm{T}}$。

11.最后，我们得出这个线性方程组的通用解，如下图所示。

$$
x \in R^{5}: x=\left[\begin{array}{c}
2 \\
0 \\
-1 \\
1 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
2 \\
1 \\
0 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{c}
2 \\
0 \\
-1 \\
2 \\
1
\end{array}\right], \lambda_{1}, \lambda_{2} \in R
$$

注意，这里有一个概念很重要，那就是**主元**。主元就是在矩阵消元过程中，每列要保留的非零元素，我们可以用它把该列其他元素消去。在阶梯型矩阵中，每个非零行第一个非零元素就是主元。

拿之前的第8步计算后的结果来举例，第一行的第一个元素1就是主元，第二行第三个元素1是主元，第三行的第四个元素1也是主元。

$$
\begin{bmatrix}
1 & -2 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

对应行阶梯形矩阵主元的变量叫做基本变量，而其他的变量叫做自由变量，这个例子中，x_{1}、x_{3}、x_{4}就是基本变量，x_{2}、x_{5}则是自由变量。使用行阶梯形矩阵能更简单地得出特殊解，所以我们可以使用主元列来表达线性方程组：

$$
b=\sum_{i=1}^{P} \lambda_{i} \mathrm{p}_{i}, i=1, \ldots, P
$$

在之前的例子中，我们使用主元列来表达成下面这样的矩阵形式：

$$
\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
1 \\
0 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{l}
1 \\
1 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{3}\left[\begin{array}{c}
-1 \\
-1 \\
1 \\
0
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
0 \\
-2 \\
1 \\
0
\end{array}\right]
$$

于是，我们最终得出 $\lambda_{3}=1$，$\lambda_{2}=-1$，$\lambda_{1}=2$，分别对应于x_{4}、x_{3}、x_{1}。不要忘了，对于非主元列，我们已经隐式地把系数设置成了0，所以这个线性方程组的特殊解是$x=\left[\begin{array}{lllll}2 & 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right]^{\mathrm{T}}$。

简化行阶梯形矩阵

这里我们再引入一个概念，简化行阶梯形矩阵，因为引入简化行阶梯形矩阵对于线性方程组的求解来说会更简单。其实，高斯消元法的核心就是通过初等变换，把线性方程组转换成简化行阶梯形矩阵。那么一个方程组是简化行阶梯形矩阵，必须满足哪几个条件呢？

1. 这个方程组必须是行阶梯形矩阵；
2. 方程组的每一个主元都是1；
3. 主元在它的列中是唯一的非0元素。

现在，我们再通过一个实例，看看该如何通过高斯消元法计算一个矩阵的逆矩阵。设矩阵A如下图：

$$

$$
A=\left[\begin{array}{llll}
1 & 0 & 2 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right]
$$

首先，我们形成A的增广矩阵（具体方法参见上一节）。

$$
\left[\begin{array}{llllllll}
1 & 0 & 2 & 0 & \mid & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & \mid & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 1 & \mid & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & \mid & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

其次，使用我们前面刚刚讲过的高斯消元法计算出简化行阶梯形矩阵。

$$
\left[\begin{array}{ccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \mid & -1 & 2 & -2 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \mid & 1 & -1 & 2 & -2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \mid & 1 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \mid & -1 & 0 & -1 & 2
\end{array}\right]
$$

最后，我们就得到A的逆矩阵，如下图所示。

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{cccc}
-1 & 2 & -2 & 2 \\
1 & -1 & 2 & -2 \\
1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & 0 & -1 & 2
\end{array}\right]
$$

接下来，我们只要使用公式$A A^{-1}=I$ 就可以对结果进行验证了。

更多解线性方程组的方法

到目前为止，相信你已经了解了如何解线性方程组，包括特殊解和通用解，以及如何使用高斯消元法来解线性方程组。最后，我再总结一些解方法来作为你的知识扩展。

第一个方法，假设一个矩阵A是方阵（行数与列数相等的矩阵），并且可逆，$Ax=B$，那x解就可以写成$x=A^{-1}B$，但如果A矩阵不可逆，也不是方阵，那我们就只能使用下面这个变换来求x解了。

$$Ax=B⇔A^{T}Ax=A^{T}B⇔x=(A^{T}A)^{-1}A^{T}B$$

其中，矩阵A的转置矩阵和A相乘的逆矩阵，再和A的转置矩阵相乘，我们把它叫做穆尔彭罗斯伪逆矩阵（Moore-Penrose pseudo inverse），简称伪逆。

$$(A^{T}A)^{-1}A^{T}$$

这个方法有两个弊端：第一，矩阵乘和逆矩阵的计算太复杂；第二，数值精确度不高。因此，从实践角度来说，我一般不推荐使用。

第二个方法是高斯消元法。高斯消元法是非常直观的，它在很多计算中都起到了关键的作用，比如：

1. 计算行列式；
2. 检查向量是否是线性独立的；
3. 计算矩阵的逆矩阵；
4. 计算矩阵的秩；
5. 决定向量空间的基。

但当高斯消元法面对百万、千万级别的变量时，就捉襟见肘了。而这类级别的计算才是我们在实践中经常会遇到的，因此从实践角度来说，我也一般不推荐使用。因为高斯消元法属于直接法，直接法是经历有限次的运算得到方程组精确解的方法。但是，学习直接法是有意义的，虽然直接法在实际工作中不常用，但是它也能处理一些日常小问题，更重要的是，它稳固了我们进一步学习其它方法的基础。

我要讲的第三种方法，就是与直接法对应的间接法了。在实践中，线性方程组的求解都是间接的，也就是运用迭代法。

迭代法是采用极限过程，用线性方程组的近似解逐步逼近精确解的方法。所以，迭代法的关键在于每次迭代残余错误的减少，以及如何能够收敛到解。常见的迭代法有两类，定常迭代法（Stationary iterative method）和Krylov子空间方法（我会在应用篇中讲解）。

> 定常迭代法：理查德森迭代法（Richardson method）、雅可比方法（Jacobi method）、Gauß-Seidel方法、逐次超松弛法（Successive over-relaxation method，简称SOR）。
> Krylov子空间方法：共轭梯度法（Conjugate gradient）、广义极小残余算法（Generalized minimal residual）、双共轭梯度法（Biconjugate gradient）。

这里提到的几种迭代法都是在实践中比较常用的，也是计算机编程中经常实现的算法，但由于迭代法更多属于微分和极限领域，所以这里就不详细介绍了，我会在线性代数应用篇的“数值线性代数”那节课中再做讲解。

如果在课程内容结束后，你还有余力学习更多的内容，这里我先推荐两本书给你作参考，一本是《Introduction to Numerical Analysis》，另一本是《Linear Algebra》。这两本书里面都有进一步地讲解了线性方程组的迭代法求解的内容。

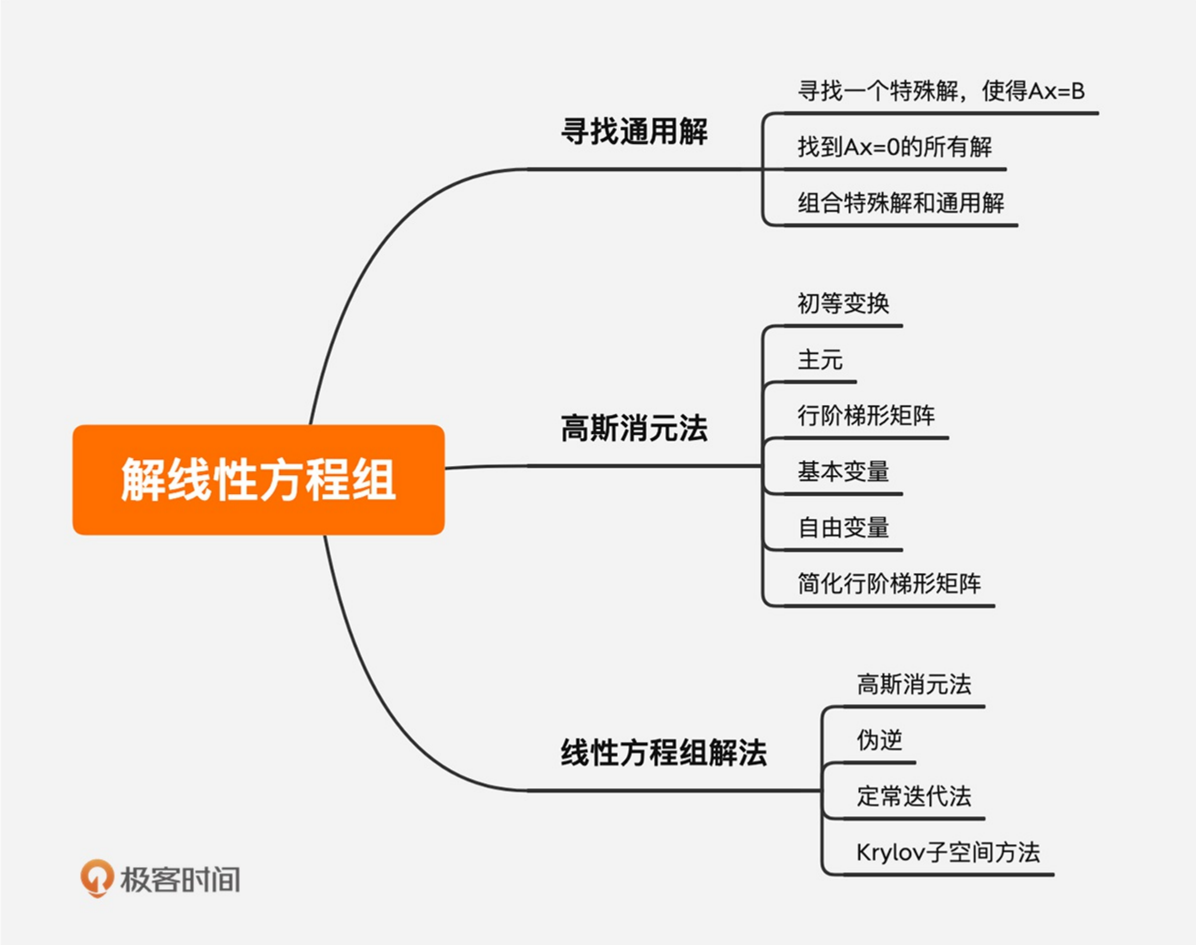
> 1.《Introduction to Numerical Analysis》
> 作者：Stoer, Josef, Bulirsch, R.
> 2002年出版
> 2.《Linear Algebra》
> 作者：Liesen, Jörg, Mehrmann, Volker
> 2015年出版

本节小结

好了，到这里解线性方程组这一讲就结束了，最后我再总结一下前面讲解的内容。

首先，我用一个简单的线性方程组，通过直接观察的方法来计算这个方程组的特殊解和通用解，接着通过实例详细地介绍了高斯消元法，最后我给出了一些在实践中常用的线性方程组解方法。只有弄清楚这些基础知识的本质，你才能更进一步，去了解其他计算方法。

线性方程组的求解已经成为了世界上最快计算机的测试标准，因为通过矩阵运算，计算机的并行计算能力暴露无遗。希望你能够在这些基础之上，阅读我推荐的两本书，并且把这些方法运用到实践中，特别是机器学习，因为机器学习也用到了很多迭代方法。



线性代数练习场

练习时刻到了，今天的练习题比较简单，请你用高斯消元法求下面的线性方程组。

$$
\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}-2 x_{3}-x_{4}=-1 \\
x_{1}+5 x_{2}-3 x_{3}-2 x_{4}=0 \\
3 x_{1}-x_{2}+x_{3}+4 x_{4}=2 \\
-2 x_{1}+2 x_{2}+x_{3}-x_{4}=1
\end{array}\right.
$$

欢迎在留言区和部落里晒出你的运算过程和结果，留下你的学习痕迹。如果你有所收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我一起重学线性代数！

在上一节课中，我讲解了线性方程组的另一种表达——矩阵。那么今天，我们就来讲解一下如何使用矩阵来解线性方程组，也就是如何求线性方程组的特殊解和通用解。

简单的线性方程组，我们当然可以运用初中学过的知识来求解，那复杂的呢？硬来几乎是不可能的了，一方面是因为人工计算的错误率很高，另一方面，即使我们使用计算机，用类似for或while循环来实现算法，它的计算效率也是极低的。你需要用更科学的方式、方法，从另一个角度来看待和求解线性方程组。

而矩阵就是为我们打开高效之门的钥匙，从计算机科学的角度来说，使用矩阵的运算效率实在是高太多了，因为它可以利用计算机的并行能力，甚至在一些迭代法中，还能实现分布式并行计算（迭代法会在后面“应用篇”中讲解）。

线性方程组解的寻找

现在，就让我们开始去寻找线性方程组的解。在之前的课程中，我们已经引入了线性方程组的一般表达，你可以看看下面的例子。

$$
\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.
$$

其中，a_{ij}和 b_{i} 属于实数，而且是已知常数，而x_{j}是未知变量，i和j的取值范围分别是：$i=1,…,m$；$j=1,…,n$ 。如果我们用矩阵的简单表达方式来看的话，就是$Ax=B$。

要搞清楚概念，我们还是要多看具体的例子。让我们先来看一个实例，来加深一下理解。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
x_{1} \\
x_{2} \\
x_{3} \\
x_{4}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8
\end{array}\right]
$$

很明显，这是一个矩阵表达方式。它的一般线性方程组表达方式是中学的基础知识，你应该很熟悉了。

$$
\left\{\begin{array}{l}
1 \times x_{1}+0 \times x_{2}+8 \times x_{3}+(-4) \times x_{4}=42 \\
0 \times x_{1}+1 \times x_{2}+2 \times x_{3}+12 \times x_{4}=8
\end{array}\right.
$$

在这个一般线性方程组中，有四个未知变量，但只有两个等式，这就意味着这个线性方程组有无穷多个解（这个是中学数学的范畴）。通过细心观察，我们可以发现第一列和第二列都是由0和1组成的，因此你很容易就能发现其中一个解。

$$
42\left[\begin{array}{l}
1 \\
0
\end{array}\right]+8\left[\begin{array}{l}
0 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8
\end{array}\right]
$$

这个解就是$\left[\begin{array}{llll}42 & 8 & 0 & 0\end{array}\right]^{T}$，也就是说四个未知变量分别为$42$、$8$、$0$、$0$。

$$
\left\{\begin{array}{l}
x_{1}=42 \\
x_{2}=8 \\
x_{3}=0 \\
x_{4}=0
\end{array}\right.
$$

这个解也叫做特殊解。我们刚才已经说过，这个线性方程组有无穷多个解，那我们确实需要一个聪明的方式来找到其他的解，最直观的方式就是通过矩阵的列来构造0。例如，对于第三列来说，我们可以使用第一和第二列的组合形式来表达。

$$
8\left[\begin{array}{l}
1 \\
0
\end{array}\right]+2\left[\begin{array}{l}
0 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{l}
8 \\
2
\end{array}\right]
$$

通过计算$Ax=0$，我们得出解$\left[\begin{array}{llll}8 & 2 & -1 & 0\end{array}\right]^{T}$。而事实上，这个解可以乘以任何实数$λ_{1}$，使得$Ax=0$成立。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]
\left(\begin{array}{l}
\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
8 \\
2 \\
-1 \\
0
\end{array}\right]
\end{array}\right)=0
$$

同理，对于第四列来说，我们可以使用第一和第二列的组合形式来表达，得出另一套解，使得$Ax=0$。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]
\left(\begin{array}{l}
\lambda_{2}\left[\begin{array}{l}
-4 \\
12 \\
0 \\
-1
\end{array}\right]
\end{array}\right)=0
$$

现在，我们可以把之前的特殊解与刚得出的两套解相组合，得出最终解，这个解也就是我们所说的通用解了。

$$
x \in R^{4}: x=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{1}\left[\begin{array}{c}
8 \\
2 \\
-1 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{c}
-4 \\
12 \\
0 \\
-1
\end{array}\right], \lambda_{1}, \lambda_{2} \in R
$$

我来总结一下寻找通用解的过程，这个过程分为三步：

1. 我们要寻找一个特殊解，使得$Ax=b$；
2. 找到$Ax=0$的所有解；
3. 组合第一和第二步的解形成通用解。

看到了这里，你有没有发现有些奇怪呢？或者说，有没有觉得哪里有点别扭？是的，好像有点太顺利了。那是因为这个线性方程组比较特别，第一列和第二列是由1和0组成的。所以，我们只通过观察就能得出特殊解和通用解。

然而，你不可能每次都行大运，就像我们在现实中碰到的这类线性方程组，一般都比这个复杂得多。不过不要慌，有一个算法可以来帮助我们转换任意线性方程组，形成类似的特殊形式，这个算法叫做**高斯消元法**。

高斯消元法的核心就是**线性方程组的初等变换**，于是，我们可以通过高斯消元法，得到围绕初等变换形成的简单矩阵表达形式，接下来我们就可以运用之前的三个步骤来寻找通用解了。

初等变换的一般形式

既然高斯消元法的核心就是线性方程组的初等变换，那为了方便你使用高斯消元法，我就有必要来讲一讲初等变换的一般形式有哪些：

1. 两个等式的交换，也就是矩阵行交换；
2. 一个等式，或者说矩阵行乘以一个实数常量；
3. 两个等式相加，或者说矩阵的两行相加。

道理是这样的道理，那我们通过一个例子来看看，究竟该怎么做线性方程组的初等变换。假设a属于实数，现在我们试着来寻找下面这个线性方程组的所有解。我把这个过程细细地拆解为11个步骤，建议你仔细看过并理解后，再进入下一阶段的学习。

$$
\left\{\begin{array}{c}
-2 x_{1}+4 x_{2}-2 x_{3}-x_{4}+4 x_{5}=-3 \\
4 x_{1}-8 x_{2}+3 x_{3}-3 x_{4}+x_{5}=2 \\
x_{1}-2 x_{2}+x_{3}-x_{4}+x_{5}=0 \\
x_{1}-2 x_{2}-3 x_{4}+4 x_{5}=a
\end{array}\right.
$$

1.我们要把这个线性方程组转换成矩阵的表达形式，$Ax=b$。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
4 & -8 & 3 & -3 & 1 & \mid & 2 \\
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

2.接着我们来交换第一和第三行。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
4 & -8 & 3 & -3 & 1 & \mid & 2 \\
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

注意，你知道我们为什么选择第一行和第三行交换吗？其实，这是为了便于计算。而具体交换哪一行是有个小技巧的，如果某行的第一个元素有1，我们就可以把这一行移到第一行。

3.我们以第一行为基础，开始执行乘和加变换，将第一行乘以-4的结果和第二行相加，从而获得了下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

4.然后，我们用同样的方法，将第一行乘以2的结果，再和第三行相加，得到了下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

5.以此类推，我们将第一行乘以-1的结果，和第四行相加，继续获得新矩阵。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & -1 & -2 & 3 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

6.将第二行乘以-1的结果，和第四行相加，得到下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & a-2
\end{array}\right]
$$

7.将第三行乘以-1的结果，和第四行相加。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & a+1
\end{array}\right]

$$

8.第二行乘以-1，第三行乘以$-\frac{1}{3}$。
$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 3 & \mid & -2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \mid & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & a+1
\end{array}\right]
$$

9.现在，这个矩阵就是一个简单形式的矩阵，也叫做**行阶梯形矩阵**（Row-Echelon Form，REF）。

$$
\left\{\begin{array}{r}
x_{1}-2 x_{2}+x_{3}-x_{4}+x_{5}=0 \\
x_{3}-x_{4}+3 x_{5}=-2 \\
x_{4}-2 x_{5}=1 \\
0=a+1
\end{array}\right.
$$

一个矩阵成为行阶梯形矩阵需满足两个条件：

- 如果它既有零行，又有非零行，则零行在下，非零行在上；
- 如果它有非零行，则每个非零行的第一个非零元素所在列号自上而下严格单调上升，正如之前的这个矩阵，列号自上而下是1、3、4，是严格单调上升的。

10.你可以看出，只有在$a=-1$的情况下，这个线性方程组才有解，特殊解是$\left[\begin{array}{lllll}2 & 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right]^{\mathrm{T}}$。

11.最后，我们得出这个线性方程组的通用解，如下图所示。

$$
x \in R^{5}: x=\left[\begin{array}{c}
2 \\
0 \\
-1 \\
1 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
2 \\
1 \\
0 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{c}
2 \\
0 \\
-1 \\
2 \\
1
\end{array}\right], \lambda_{1}, \lambda_{2} \in R
$$

注意，这里有一个概念很重要，那就是**主元**。主元就是在矩阵消元过程中，每列要保留的非零元素，我们可以用它把该列其他元素消去。在阶梯型矩阵中，每个非零行第一个非零元素就是主元。

拿之前的第8步计算后的结果来举例，第一行的第一个元素1就是主元，第二行第三个元素1是主元，第三行的第四个元素1也是主元。

$$
\begin{bmatrix}
1 & -2 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

对应行阶梯形矩阵主元的变量叫做基本变量，而其他的变量叫做自由变量，这个例子中，x_{1}、x_{3}、x_{4}就是基本变量，x_{2}、x_{5}则是自由变量。使用行阶梯形矩阵能更简单地得出特殊解，所以我们可以使用主元列来表达线性方程组：

$$
b=\sum_{i=1}^{P} \lambda_{i} \mathrm{p}_{i}, i=1, \ldots, P
$$

在之前的例子中，我们使用主元列来表达成下面这样的矩阵形式：

$$
\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
1 \\
0 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{l}
1 \\
1 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{3}\left[\begin{array}{c}
-1 \\
-1 \\
1 \\
0
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
0 \\
-2 \\
1 \\
0
\end{array}\right]
$$

于是，我们最终得出 $\lambda_{3}=1$，$\lambda_{2}=-1$，$\lambda_{1}=2$，分别对应于x_{4}、x_{3}、x_{1}。不要忘了，对于非主元列，我们已经隐式地把系数设置成了0，所以这个线性方程组的特殊解是$x=\left[\begin{array}{lllll}2 & 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right]^{\mathrm{T}}$。

简化行阶梯形矩阵

这里我们再引入一个概念，简化行阶梯形矩阵，因为引入简化行阶梯形矩阵对于线性方程组的求解来说会更简单。其实，高斯消元法的核心就是通过初等变换，把线性方程组转换成简化行阶梯形矩阵。那么一个方程组是简化行阶梯形矩阵，必须满足哪几个条件呢？

1. 这个方程组必须是行阶梯形矩阵；
2. 方程组的每一个主元都是1；
3. 主元在它的列中是唯一的非0元素。

现在，我们再通过一个实例，看看该如何通过高斯消元法计算一个矩阵的逆矩阵。设矩阵A如下图：

$$

$$
A=\left[\begin{array}{llll}
1 & 0 & 2 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right]
$$

首先，我们形成A的增广矩阵（具体方法参见上一节）。

$$
\left[\begin{array}{llllllll}
1 & 0 & 2 & 0 & \mid & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & \mid & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 1 & \mid & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & \mid & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

其次，使用我们前面刚刚讲过的高斯消元法计算出简化行阶梯形矩阵。

$$
\left[\begin{array}{ccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \mid & -1 & 2 & -2 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \mid & 1 & -1 & 2 & -2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \mid & 1 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \mid & -1 & 0 & -1 & 2
\end{array}\right]
$$

最后，我们就得到A的逆矩阵，如下图所示。

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{cccc}
-1 & 2 & -2 & 2 \\
1 & -1 & 2 & -2 \\
1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & 0 & -1 & 2
\end{array}\right]
$$

接下来，我们只要使用公式$A A^{-1}=I$ 就可以对结果进行验证了。

更多解线性方程组的方法

到目前为止，相信你已经了解了如何解线性方程组，包括特殊解和通用解，以及如何使用高斯消元法来解线性方程组。最后，我再总结一些解方法来作为你的知识扩展。

第一个方法，假设一个矩阵A是方阵（行数与列数相等的矩阵），并且可逆，$Ax=B$，那x解就可以写成$x=A^{-1}B$，但如果A矩阵不可逆，也不是方阵，那我们就只能使用下面这个变换来求x解了。

$$Ax=B⇔A^{T}Ax=A^{T}B⇔x=(A^{T}A)^{-1}A^{T}B$$

其中，矩阵A的转置矩阵和A相乘的逆矩阵，再和A的转置矩阵相乘，我们把它叫做穆尔彭罗斯伪逆矩阵（Moore-Penrose pseudo inverse），简称伪逆。

$$(A^{T}A)^{-1}A^{T}$$

这个方法有两个弊端：第一，矩阵乘和逆矩阵的计算太复杂；第二，数值精确度不高。因此，从实践角度来说，我一般不推荐使用。

第二个方法是高斯消元法。高斯消元法是非常直观的，它在很多计算中都起到了关键的作用，比如：

1. 计算行列式；
2. 检查向量是否是线性独立的；
3. 计算矩阵的逆矩阵；
4. 计算矩阵的秩；
5. 决定向量空间的基。

但当高斯消元法面对百万、千万级别的变量时，就捉襟见肘了。而这类级别的计算才是我们在实践中经常会遇到的，因此从实践角度来说，我也一般不推荐使用。因为高斯消元法属于直接法，直接法是经历有限次的运算得到方程组精确解的方法。但是，学习直接法是有意义的，虽然直接法在实际工作中不常用，但是它也能处理一些日常小问题，更重要的是，它稳固了我们进一步学习其它方法的基础。

我要讲的第三种方法，就是与直接法对应的间接法了。在实践中，线性方程组的求解都是间接的，也就是运用迭代法。

迭代法是采用极限过程，用线性方程组的近似解逐步逼近精确解的方法。所以，迭代法的关键在于每次迭代残余错误的减少，以及如何能够收敛到解。常见的迭代法有两类，定常迭代法（Stationary iterative method）和Krylov子空间方法（我会在应用篇中讲解）。

> 定常迭代法：理查德森迭代法（Richardson method）、雅可比方法（Jacobi method）、Gauß-Seidel方法、逐次超松弛法（Successive over-relaxation method，简称SOR）。
> Krylov子空间方法：共轭梯度法（Conjugate gradient）、广义极小残余算法（Generalized minimal residual）、双共轭梯度法（Biconjugate gradient）。

这里提到的几种迭代法都是在实践中比较常用的，也是计算机编程中经常实现的算法，但由于迭代法更多属于微分和极限领域，所以这里就不详细介绍了，我会在线性代数应用篇的“数值线性代数”那节课中再做讲解。

如果在课程内容结束后，你还有余力学习更多的内容，这里我先推荐两本书给你作参考，一本是《Introduction to Numerical Analysis》，另一本是《Linear Algebra》。这两本书里面都有进一步地讲解了线性方程组的迭代法求解的内容。

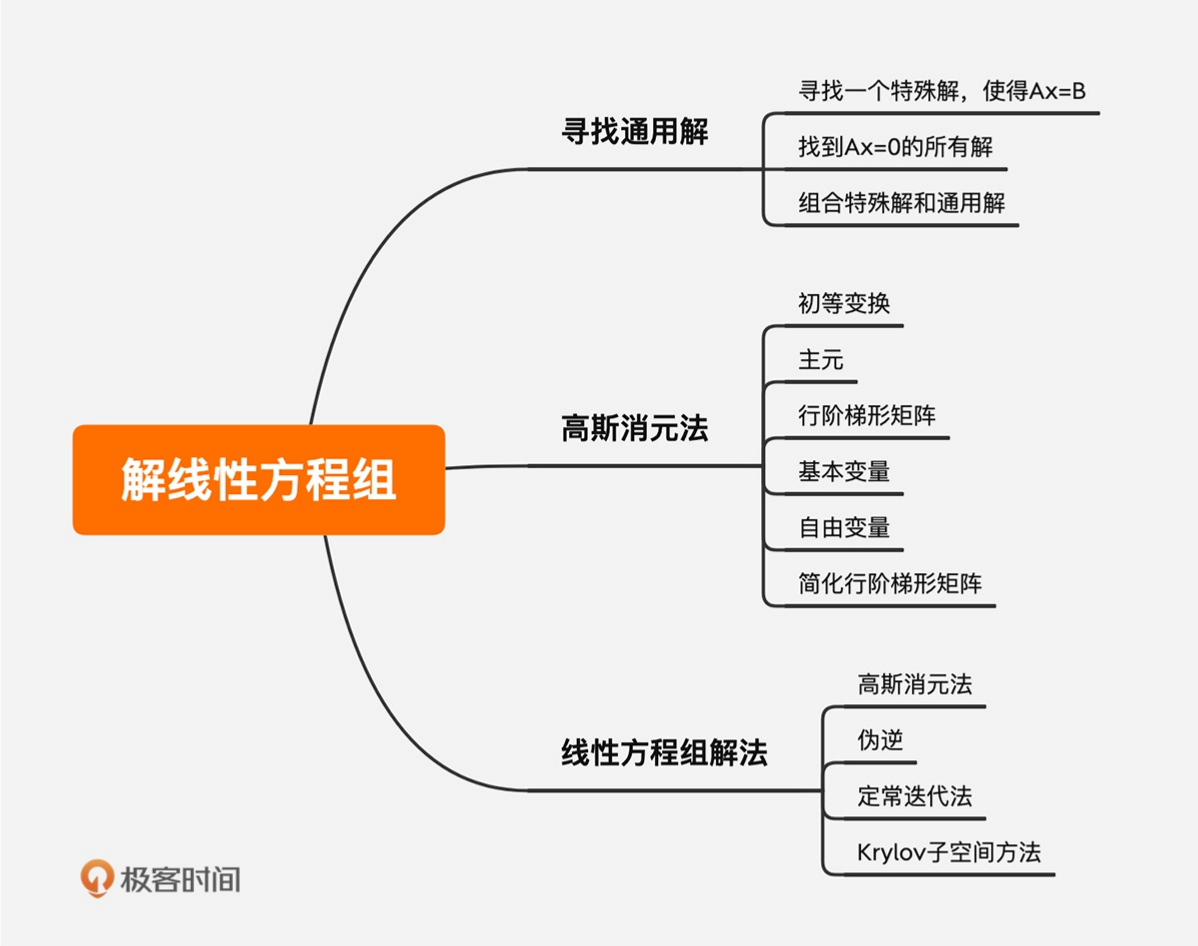
> 1.《Introduction to Numerical Analysis》
> 作者：Stoer, Josef, Bulirsch, R.
> 2002年出版
> 2.《Linear Algebra》
> 作者：Liesen, Jörg, Mehrmann, Volker
> 2015年出版

本节小结

好了，到这里解线性方程组这一讲就结束了，最后我再总结一下前面讲解的内容。

首先，我用一个简单的线性方程组，通过直接观察的方法来计算这个方程组的特殊解和通用解，接着通过实例详细地介绍了高斯消元法，最后我给出了一些在实践中常用的线性方程组解方法。只有弄清楚这些基础知识的本质，你才能更进一步，去了解其他计算方法。

线性方程组的求解已经成为了世界上最快计算机的测试标准，因为通过矩阵运算，计算机的并行计算能力暴露无遗。希望你能够在这些基础之上，阅读我推荐的两本书，并且把这些方法运用到实践中，特别是机器学习，因为机器学习也用到了很多迭代方法。



线性代数练习场

练习时刻到了，今天的练习题比较简单，请你用高斯消元法求下面的线性方程组。

$$
\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}-2 x_{3}-x_{4}=-1 \\
x_{1}+5 x_{2}-3 x_{3}-2 x_{4}=0 \\
3 x_{1}-x_{2}+x_{3}+4 x_{4}=2 \\
-2 x_{1}+2 x_{2}+x_{3}-x_{4}=1
\end{array}\right.
$$

欢迎在留言区和部落里晒出你的运算过程和结果，留下你的学习痕迹。如果你有所收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我一起重学线性代数！

在上一节课中，我讲解了线性方程组的另一种表达——矩阵。那么今天，我们就来讲解一下如何使用矩阵来解线性方程组，也就是如何求线性方程组的特殊解和通用解。

简单的线性方程组，我们当然可以运用初中学过的知识来求解，那复杂的呢？硬来几乎是不可能的了，一方面是因为人工计算的错误率很高，另一方面，即使我们使用计算机，用类似for或while循环来实现算法，它的计算效率也是极低的。你需要用更科学的方式、方法，从另一个角度来看待和求解线性方程组。

而矩阵就是为我们打开高效之门的钥匙，从计算机科学的角度来说，使用矩阵的运算效率实在是高太多了，因为它可以利用计算机的并行能力，甚至在一些迭代法中，还能实现分布式并行计算（迭代法会在后面"应用篇"中讲解）。

线性方程组解的寻找

现在，就让我们开始去寻找线性方程组的解。在之前的课程中，我们已经引入了线性方程组的一般表达，你可以看看下面的例子。

$$
\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.
$$

其中，a_{ij}和 b_{i} 属于实数，而且是已知常数，而x_{j}是未知变量，i和j的取值范围分别是：$i=1,…,m$；$j=1,…,n$ 。如果我们用矩阵的简单表达方式来看的话，就是$Ax=B$。

要搞清楚概念，我们还是要多看具体的例子。让我们先来看一个实例，来加深一下理解。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
x_{1} \\
x_{2} \\
x_{3} \\
x_{4}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8
\end{array}\right]
$$

很明显，这是一个矩阵表达方式。它的一般线性方程组表达方式是中学的基础知识，你应该很熟悉了。

$$
\left\{\begin{array}{l}
1 \times x_{1}+0 \times x_{2}+8 \times x_{3}+(-4) \times x_{4}=42 \\
0 \times x_{1}+1 \times x_{2}+2 \times x_{3}+12 \times x_{4}=8
\end{array}\right.
$$

在这个一般线性方程组中，有四个未知变量，但只有两个等式，这就意味着这个线性方程组有无穷多个解（这个是中学数学的范畴）。通过细心观察，我们可以发现第一列和第二列都是由0和1组成的，因此你很容易就能发现其中一个解。

$$
42\left[\begin{array}{l}
1 \\
0
\end{array}\right]+8\left[\begin{array}{l}
0 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8
\end{array}\right]
$$

这个解就是$\left[\begin{array}{llll}42 & 8 & 0 & 0\end{array}\right]^{T}$，也就是说四个未知变量分别为$42$、$8$、$0$、$0$。

$$
\left\{\begin{array}{l}
x_{1}=42 \\
x_{2}=8 \\
x_{3}=0 \\
x_{4}=0
\end{array}\right.
$$

这个解也叫做特殊解。我们刚才已经说过，这个线性方程组有无穷多个解，那我们确实需要一个聪明的方式来找到其他的解，最直观的方式就是通过矩阵的列来构造0。例如，对于第三列来说，我们可以使用第一和第二列的组合形式来表达。

$$
8\left[\begin{array}{l}
1 \\
0
\end{array}\right]+2\left[\begin{array}{l}
0 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{l}
8 \\
2
\end{array}\right]
$$

通过计算$Ax=0$，我们得出解$\left[\begin{array}{llll}8 & 2 & -1 & 0\end{array}\right]^{T}$。而事实上，这个解可以乘以任何实数$λ_{1}$，使得$Ax=0$成立。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]
\left(\begin{array}{l}
\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
8 \\
2 \\
-1 \\
0
\end{array}\right]
\end{array}\right)=0
$$

同理，对于第四列来说，我们可以使用第一和第二列的组合形式来表达，得出另一套解，使得$Ax=0$。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]
\left(\begin{array}{l}
\lambda_{2}\left[\begin{array}{l}
-4 \\
12 \\
0 \\
-1
\end{array}\right]
\end{array}\right)=0
$$

现在，我们可以把之前的特殊解与刚得出的两套解相组合，得出最终解，这个解也就是我们所说的通用解了。

$$
x \in R^{4}: x=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{1}\left[\begin{array}{c}
8 \\
2 \\
-1 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{c}
-4 \\
12 \\
0 \\
-1
\end{array}\right], \lambda_{1}, \lambda_{2} \in R
$$

我来总结一下寻找通用解的过程，这个过程分为三步：

1. 我们要寻找一个特殊解，使得$Ax=b$；
2. 找到$Ax=0$的所有解；
3. 组合第一和第二步的解形成通用解。

看到了这里，你有没有发现有些奇怪呢？或者说，有没有觉得哪里有点别扭？是的，好像有点太顺利了。那是因为这个线性方程组比较特别，第一列和第二列是由1和0组成的。所以，我们只通过观察就能得出特殊解和通用解。

然而，你不可能每次都行大运，就像我们在现实中碰到的这类线性方程组，一般都比这个复杂得多。不过不要慌，有一个算法可以来帮助我们转换任意线性方程组，形成类似的特殊形式，这个算法叫做**高斯消元法**。

高斯消元法的核心就是**线性方程组的初等变换**，于是，我们可以通过高斯消元法，得到围绕初等变换形成的简单矩阵表达形式，接下来我们就可以运用之前的三个步骤来寻找通用解了。

初等变换的一般形式

既然高斯消元法的核心就是线性方程组的初等变换，那为了方便你使用高斯消元法，我就有必要来讲一讲初等变换的一般形式有哪些：

1. 两个等式的交换，也就是矩阵行交换；
2. 一个等式，或者说矩阵行乘以一个实数常量；
3. 两个等式相加，或者说矩阵的两行相加。

道理是这样的道理，那我们通过一个例子来看看，究竟该怎么做线性方程组的初等变换。假设a属于实数，现在我们试着来寻找下面这个线性方程组的所有解。我把这个过程细细地拆解为11个步骤，建议你仔细看过并理解后，再进入下一阶段的学习。

$$
\left\{\begin{array}{c}
-2 x_{1}+4 x_{2}-2 x_{3}-x_{4}+4 x_{5}=-3 \\
4 x_{1}-8 x_{2}+3 x_{3}-3 x_{4}+x_{5}=2 \\
x_{1}-2 x_{2}+x_{3}-x_{4}+x_{5}=0 \\
x_{1}-2 x_{2}-3 x_{4}+4 x_{5}=a
\end{array}\right.
$$

1.我们要把这个线性方程组转换成矩阵的表达形式，$Ax=b$。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
4 & -8 & 3 & -3 & 1 & \mid & 2 \\
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

2.接着我们来交换第一和第三行。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
4 & -8 & 3 & -3 & 1 & \mid & 2 \\
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

注意，你知道我们为什么选择第一行和第三行交换吗？其实，这是为了便于计算。而具体交换哪一行是有个小技巧的，如果某行的第一个元素有1，我们就可以把这一行移到第一行。

3.我们以第一行为基础，开始执行乘和加变换，将第一行乘以-4的结果和第二行相加，从而获得了下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

4.然后，我们用同样的方法，将第一行乘以2的结果，再和第三行相加，得到了下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

5.以此类推，我们将第一行乘以-1的结果，和第四行相加，继续获得新矩阵。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & -1 & -2 & 3 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

6.将第二行乘以-1的结果，和第四行相加，得到下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & a-2
\end{array}\right]
$$

7.将第三行乘以-1的结果，和第四行相加。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & a+1
\end{array}\right]
$$

8.第二行乘以-1，第三行乘以$-\frac{1}{3}$。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 3 & \mid & -2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \mid & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & a+1
\end{array}\right]
$$

9.现在，这个矩阵就是一个简单形式的矩阵，也叫做**行阶梯形矩阵**（Row-Echelon Form，REF）。

$$
\left\{\begin{array}{r}
x_{1}-2 x_{2}+x_{3}-x_{4}+x_{5}=0 \\
x_{3}-x_{4}+3 x_{5}=-2 \\
x_{4}-2 x_{5}=1 \\
0=a+1
\end{array}\right.
$$

一个矩阵成为行阶梯形矩阵需满足两个条件：

- 如果它既有零行，又有非零行，则零行在下，非零行在上；
- 如果它有非零行，则每个非零行的第一个非零元素所在列号自上而下严格单调上升，正如之前的这个矩阵，列号自上而下是1、3、4，是严格单调上升的。

10.你可以看出，只有在$a=-1$的情况下，这个线性方程组才有解，特殊解是$\left[\begin{array}{lllll}2 & 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right]^{\mathrm{T}}$。

11.最后，我们得出这个线性方程组的通用解，如下图所示。

$$
x \in R^{5}: x=\left[\begin{array}{c}
2 \\
0 \\
-1 \\
1 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
2 \\
1 \\
0 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{c}
2 \\
0 \\
-1 \\
2 \\
1
\end{array}\right], \lambda_{1}, \lambda_{2} \in R
$$

注意，这里有一个概念很重要，那就是**主元**。主元就是在矩阵消元过程中，每列要保留的非零元素，我们可以用它把该列其他元素消去。在阶梯型矩阵中，每个非零行第一个非零元素就是主元。

拿之前的第8步计算后的结果来举例，第一行的第一个元素1就是主元，第二行第三个元素1是主元，第三行的第四个元素1也是主元。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & -2 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right.
$$

对应行阶梯形矩阵主元的变量叫做基本变量，而其他的变量叫做自由变量，这个例子中，x_{1}、x_{3}、x_{4}就是基本变量，x_{2}、x_{5}则是自由变量。使用行阶梯形矩阵能更简单地得出特殊解，所以我们可以使用主元列来表达线性方程组：

$$
b=\sum_{i=1}^{P} \lambda_{i} \mathrm{p}_{i}, i=1, \ldots, P
$$

在之前的例子中，我们使用主元列来表达成下面这样的矩阵形式：

$$
\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
1 \\
0 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{l}
1 \\
1 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{3}\left[\begin{array}{c}
-1 \\
-1 \\
1 \\
0
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
0 \\
-2 \\
1 \\
0
\end{array}\right]
$$

于是，我们最终得出 $\lambda_{3}=1$，$\lambda_{2}=-1$，$\lambda_{1}=2$，分别对应于x_{4}、x_{3}、x_{1}。不要忘了，对于非主元列，我们已经隐式地把系数设置成了0，所以这个线性方程组的特殊解是$x=\left[\begin{array}{lllll}2 & 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right]^{\mathrm{T}}$。

简化行阶梯形矩阵

这里我们再引入一个概念，简化行阶梯形矩阵，因为引入简化行阶梯形矩阵对于线性方程组的求解来说会更简单。其实，高斯消元法的核心就是通过初等变换，把线性方程组转换成简化行阶梯形矩阵。那么一个方程组是简化行阶梯形矩阵，必须满足哪几个条件呢？

1. 这个方程组必须是行阶梯形矩阵；
2. 方程组的每一个主元都是1；
3. 主元在它的列中是唯一的非0元素。

现在，我们再通过一个实例，看看该如何通过高斯消元法计算一个矩阵的逆矩阵。设矩阵A如下图：

A=\left[\begin{array}{llll}
1 & 0 & 2 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right]
$$

首先，我们形成A的增广矩阵（具体方法参见上一节）。

$$
\left[\begin{array}{llllllll}
1 & 0 & 2 & 0 & \mid & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & \mid & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 1 & \mid & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & \mid & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

其次，使用我们前面刚刚讲过的高斯消元法计算出简化行阶梯形矩阵。

$$
\left[\begin{array}{ccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \mid & -1 & 2 & -2 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \mid & 1 & -1 & 2 & -2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \mid & 1 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \mid & -1 & 0 & -1 & 2
\end{array}\right]
$$

最后，我们就得到A的逆矩阵，如下图所示。

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{cccc}
-1 & 2 & -2 & 2 \\
1 & -1 & 2 & -2 \\
1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & 0 & -1 & 2
\end{array}\right]
$$

接下来，我们只要使用公式$A A^{-1}=I$ 就可以对结果进行验证了。

更多解线性方程组的方法

到目前为止，相信你已经了解了如何解线性方程组，包括特殊解和通用解，以及如何使用高斯消元法来解线性方程组。最后，我再总结一些解方法来作为你的知识扩展。

第一个方法，假设一个矩阵A是方阵（行数与列数相等的矩阵），并且可逆，$Ax=B$ ，那x解就可以写成$x=A^{-1}B$，但如果A矩阵不可逆，也不是方阵，那我们就只能使用下面这个变换来求x解了。

$$Ax=B⇔A^{T}Ax=A^{T}B⇔x=(A^{T}A)^{-1}A^{T}B$$

其中，矩阵A的转置矩阵和A相乘的逆矩阵，再和A的转置矩阵相乘，我们把它叫做穆尔彭罗斯伪逆矩阵（Moore-Penrose pseudo inverse），简称伪逆。

$$(A^{T}A)^{-1}A^{T}$$

这个方法有两个弊端：第一，矩阵乘和逆矩阵的计算太复杂；第二，数值精确度不高。因此，从实践角度来说，我一般不推荐使用。

第二个方法是高斯消元法。高斯消元法是非常直观的，它在很多计算中都起到了关键的作用，比如：

1. 计算行列式；
2. 检查向量是否是线性独立的；
3. 计算矩阵的逆矩阵；
4. 计算矩阵的秩；
5. 决定向量空间的基。

但当高斯消元法面对百万、千万级别的变量时，就捉襟见肘了。而这类级别的计算才是我们在实践中经常会遇到的，因此从实践角度来说，我也一般不推荐使用。因为高斯消元法属于直接法，直接法是经历有限次的运算得到方程组精确解的方法。但是，学习直接法是有意义的，虽然直接法在实际工作中不常用，但是它也能处理一些日常小问题，更重要的是，它稳固了我们进一步学习其它方法的基础。

我要讲的第三种方法，就是与直接法对应的间接法了。在实践中，线性方程组的求解都是间接的，也就是运用迭代法。

迭代法是采用极限过程，用线性方程组的近似解逐步逼近精确解的方法。所以，迭代法的关键在于每次迭代残余错误的减少，以及如何能够收敛到解。常见的迭代法有两类，定常迭代法（Stationary iterative method）和Krylov子空间方法（我会在应用篇中讲解）。

> 定常迭代法：理查德森迭代法（Richardson method）、雅可比方法（Jacobi method）、Gauß-Seidel方法、逐次超松弛法（Successive over-relaxation method，简称SOR）。
> Krylov子空间方法：共轭梯度法（Conjugate gradient）、广义极小残余算法（Generalized minimal residual）、双共轭梯度法（Biconjugate gradient）。

这里提到的几种迭代法都是在实践中比较常用的，也是计算机编程中经常实现的算法，但由于迭代法更多属于微分和极限领域，所以这里就不详细介绍了，我会在线性代数应用篇的"数值线性代数"那节课中再做讲解。

如果在课程内容结束后，你还有余力学习更多的内容，这里我先推荐两本书给你作参考，一本是《Introduction to Numerical Analysis》，另一本是《Linear Algebra》。这两本书里面都有进一步地讲解了线性方程组的迭代法求解的内容。

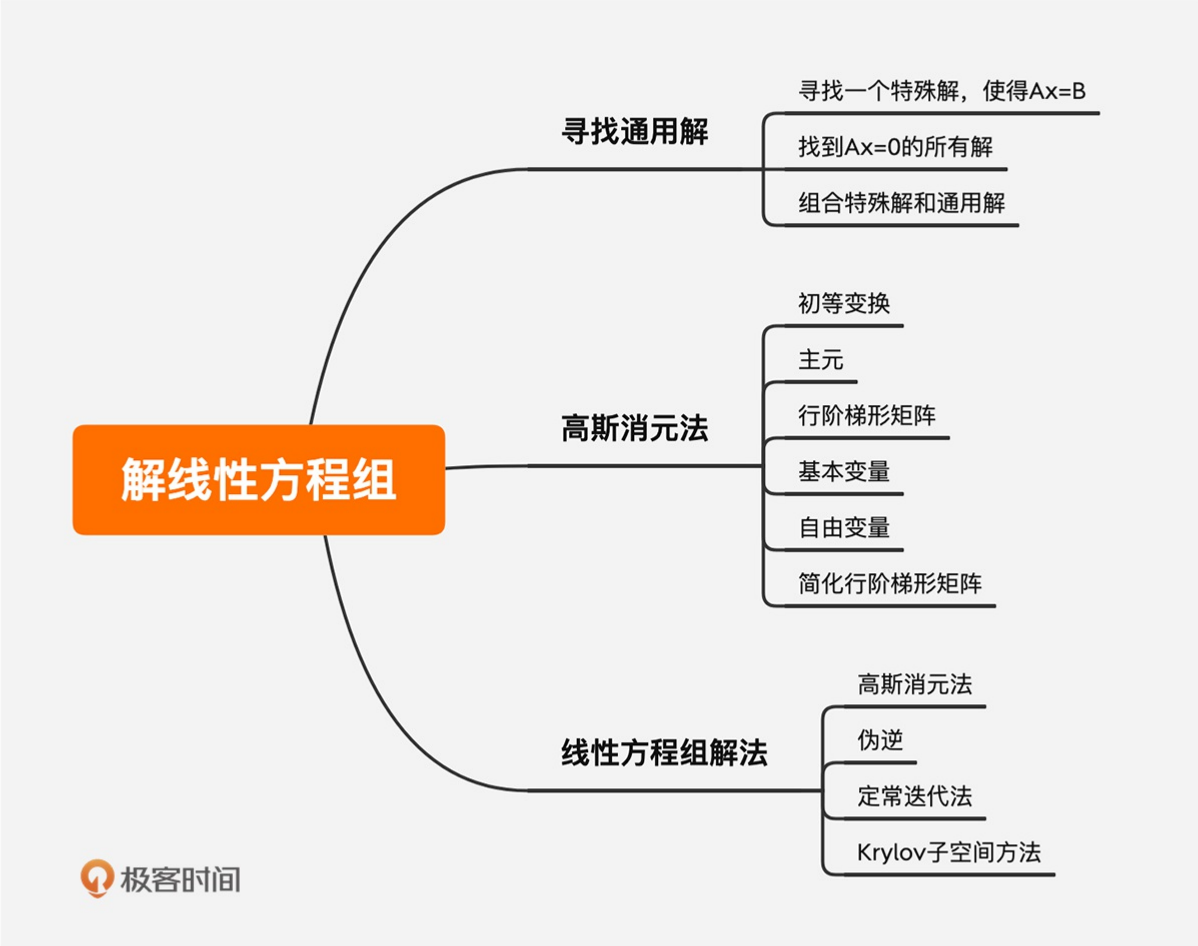
> 1.《Introduction to Numerical Analysis》
> 作者：Stoer, Josef, Bulirsch, R.
> 2002年出版
> 2.《Linear Algebra》
> 作者：Liesen, Jörg, Mehrmann, Volker
> 2015年出版

本节小结

好了，到这里解线性方程组这一讲就结束了，最后我再总结一下前面讲解的内容。

首先，我用一个简单的线性方程组，通过直接观察的方法来计算这个方程组的特殊解和通用解，接着通过实例详细地介绍了高斯消元法，最后我给出了一些在实践中常用的线性方程组解方法。只有弄清楚这些基础知识的本质，你才能更进一步，去了解其他计算方法。

线性方程组的求解已经成为了世界上最快计算机的测试标准，因为通过矩阵运算，计算机的并行计算能力暴露无遗。希望你能够在这些基础之上，阅读我推荐的两本书，并且把这些方法运用到实践中，特别是机器学习，因为机器学习也用到了很多迭代方法。



线性代数练习场

练习时刻到了，今天的练习题比较简单，请你用高斯消元法求下面的线性方程组。

$$
\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}-2 x_{3}-x_{4}=-1 \\
x_{1}+5 x_{2}-3 x_{3}-2 x_{4}=0 \\
3 x_{1}-x_{2}+x_{3}+4 x_{4}=2 \\
-2 x_{1}+2 x_{2}+x_{3}-x_{4}=1
\end{array}\right.
$$

欢迎在留言区和部落里晒出你的运算过程和结果，留下你的学习痕迹。如果你有所收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我一起重学线性代数！

在上一节课中，我讲解了线性方程组的另一种表达——矩阵。那么今天，我们就来讲解一下如何使用矩阵来解线性方程组，也就是如何求线性方程组的特殊解和通用解。

简单的线性方程组，我们当然可以运用初中学过的知识来求解，那复杂的呢？硬来几乎是不可能的了，一方面是因为人工计算的错误率很高，另一方面，即使我们使用计算机，用类似for或while循环来实现算法，它的计算效率也是极低的。你需要用更科学的方式、方法，从另一个角度来看待和求解线性方程组。

而矩阵就是为我们打开高效之门的钥匙，从计算机科学的角度来说，使用矩阵的运算效率实在是高太多了，因为它可以利用计算机的并行能力，甚至在一些迭代法中，还能实现分布式并行计算（迭代法会在后面"应用篇"中讲解）。

线性方程组解的寻找

现在，就让我们开始去寻找线性方程组的解。在之前的课程中，我们已经引入了线性方程组的一般表达，你可以看看下面的例子。

$$
\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.
$$

其中，a_{ij}和 b_{i} 属于实数，而且是已知常数，而x_{j}是未知变量，i和j的取值范围分别是：$i=1,…,m$；$j=1,…,n$ 。如果我们用矩阵的简单表达方式来看的话，就是$Ax=B$。

要搞清楚概念，我们还是要多看具体的例子。让我们先来看一个实例，来加深一下理解。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
x_{1} \\
x_{2} \\
x_{3} \\
x_{4}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8
\end{array}\right]
$$

很明显，这是一个矩阵表达方式。它的一般线性方程组表达方式是中学的基础知识，你应该很熟悉了。

$$
\left\{\begin{array}{l}
1 \times x_{1}+0 \times x_{2}+8 \times x_{3}+(-4) \times x_{4}=42 \\
0 \times x_{1}+1 \times x_{2}+2 \times x_{3}+12 \times x_{4}=8
\end{array}\right.
$$

在这个一般线性方程组中，有四个未知变量，但只有两个等式，这就意味着这个线性方程组有无穷多个解（这个是中学数学的范畴）。通过细心观察，我们可以发现第一列和第二列都是由0和1组成的，因此你很容易就能发现其中一个解。

$$
42\left[\begin{array}{l}
1 \\
0
\end{array}\right]+8\left[\begin{array}{l}
0 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8
\end{array}\right]
$$

这个解就是$\left[\begin{array}{llll}42 & 8 & 0 & 0\end{array}\right]^{T}$，也就是说四个未知变量分别为$42$、$8$、$0$、$0$。

$$
\left\{\begin{array}{l}
x_{1}=42 \\
x_{2}=8 \\
x_{3}=0 \\
x_{4}=0
\end{array}\right.
$$

这个解也叫做特殊解。我们刚才已经说过，这个线性方程组有无穷多个解，那我们确实需要一个聪明的方式来找到其他的解，最直观的方式就是通过矩阵的列来构造0。例如，对于第三列来说，我们可以使用第一和第二列的组合形式来表达。

$$
8\left[\begin{array}{l}
1 \\
0
\end{array}\right]+2\left[\begin{array}{l}
0 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{l}
8 \\
2
\end{array}\right]
$$

通过计算$Ax=0$，我们得出解$\left[\begin{array}{llll}8 & 2 & -1 & 0\end{array}\right]^{T}$。而事实上，这个解可以乘以任何实数$λ_{1}$，使得$Ax=0$成立。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]
\left(\begin{array}{l}
\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
8 \\
2 \\
-1 \\
0
\end{array}\right]
\end{array}\right)=0
$$

同理，对于第四列来说，我们可以使用第一和第二列的组合形式来表达，得出另一套解，使得$Ax=0$。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]
\left(\begin{array}{l}
\lambda_{2}\left[\begin{array}{l}
-4 \\
12 \\
0 \\
-1
\end{array}\right]
\end{array}\right)=0
$$

现在，我们可以把之前的特殊解与刚得出的两套解相组合，得出最终解，这个解也就是我们所说的通用解了。

$$
x \in R^{4}: x=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{1}\left[\begin{array}{c}
8 \\
2 \\
-1 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{c}
-4 \\
12 \\
0 \\
-1
\end{array}\right], \lambda_{1}, \lambda_{2} \in R
$$

我来总结一下寻找通用解的过程，这个过程分为三步：

1. 我们要寻找一个特殊解，使得$Ax=b$；
2. 找到$Ax=0$的所有解；
3. 组合第一和第二步的解形成通用解。

看到了这里，你有没有发现有些奇怪呢？或者说，有没有觉得哪里有点别扭？是的，好像有点太顺利了。那是因为这个线性方程组比较特别，第一列和第二列是由1和0组成的。所以，我们只通过观察就能得出特殊解和通用解。

然而，你不可能每次都行大运，就像我们在现实中碰到的这类线性方程组，一般都比这个复杂得多。不过不要慌，有一个算法可以来帮助我们转换任意线性方程组，形成类似的特殊形式，这个算法叫做**高斯消元法**。

高斯消元法的核心就是**线性方程组的初等变换**，于是，我们可以通过高斯消元法，得到围绕初等变换形成的简单矩阵表达形式，接下来我们就可以运用之前的三个步骤来寻找通用解了。

初等变换的一般形式

既然高斯消元法的核心就是线性方程组的初等变换，那为了方便你使用高斯消元法，我就有必要来讲一讲初等变换的一般形式有哪些：

1. 两个等式的交换，也就是矩阵行交换；
2. 一个等式，或者说矩阵行乘以一个实数常量；
3. 两个等式相加，或者说矩阵的两行相加。

道理是这样的道理，那我们通过一个例子来看看，究竟该怎么做线性方程组的初等变换。假设a属于实数，现在我们试着来寻找下面这个线性方程组的所有解。我把这个过程细细地拆解为11个步骤，建议你仔细看过并理解后，再进入下一阶段的学习。

$$
\left\{\begin{array}{c}
-2 x_{1}+4 x_{2}-2 x_{3}-x_{4}+4 x_{5}=-3 \\
4 x_{1}-8 x_{2}+3 x_{3}-3 x_{4}+x_{5}=2 \\
x_{1}-2 x_{2}+x_{3}-x_{4}+x_{5}=0 \\
x_{1}-2 x_{2}-3 x_{4}+4 x_{5}=a
\end{array}\right.
$$

1.我们要把这个线性方程组转换成矩阵的表达形式，$Ax=b$。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
4 & -8 & 3 & -3 & 1 & \mid & 2 \\
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

2.接着我们来交换第一和第三行。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
4 & -8 & 3 & -3 & 1 & \mid & 2 \\
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

注意，你知道我们为什么选择第一行和第三行交换吗？其实，这是为了便于计算。而具体交换哪一行是有个小技巧的，如果某行的第一个元素有1，我们就可以把这一行移到第一行。

3.我们以第一行为基础，开始执行乘和加变换，将第一行乘以-4的结果和第二行相加，从而获得了下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

4.然后，我们用同样的方法，将第一行乘以2的结果，再和第三行相加，得到了下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

5.以此类推，我们将第一行乘以-1的结果，和第四行相加，继续获得新矩阵。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & -1 & -2 & 3 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

6.将第二行乘以-1的结果，和第四行相加，得到下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & a-2
\end{array}\right]
$$

7.将第三行乘以-1的结果，和第四行相加。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & a+1
\end{array}\right]
$$

8.第二行乘以-1，第三行乘以$-\frac{1}{3}$。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 3 & \mid & -2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \mid & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & a+1
\end{array}\right]
$$

9.现在，这个矩阵就是一个简单形式的矩阵，也叫做**行阶梯形矩阵**（Row-Echelon Form，REF）。

$$
\left\{\begin{array}{r}
x_{1}-2 x_{2}+x_{3}-x_{4}+x_{5}=0 \\
x_{3}-x_{4}+3 x_{5}=-2 \\
x_{4}-2 x_{5}=1 \\
0=a+1
\end{array}\right.
$$

一个矩阵成为行阶梯形矩阵需满足两个条件：

- 如果它既有零行，又有非零行，则零行在下，非零行在上；
- 如果它有非零行，则每个非零行的第一个非零元素所在列号自上而下严格单调上升，正如之前的这个矩阵，列号自上而下是1、3、4，是严格单调上升的。

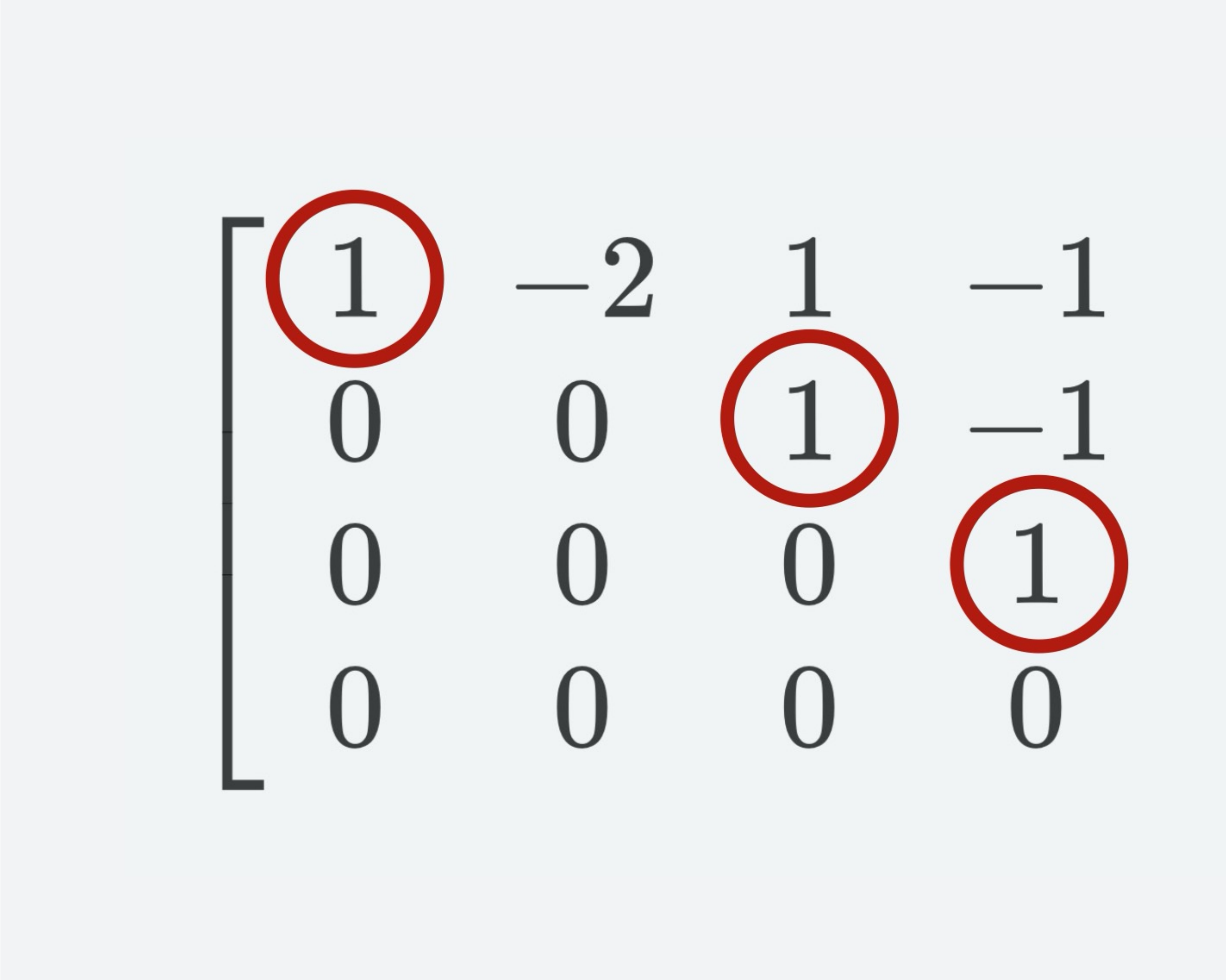
10.你可以看出，只有在$a=-1$的情况下，这个线性方程组才有解，特殊解是$\left[\begin{array}{lllll}2 & 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right]^{\mathrm{T}}$。

11.最后，我们得出这个线性方程组的通用解，如下图所示。

$$
x \in R^{5}: x=\left[\begin{array}{c}
2 \\
0 \\
-1 \\
1 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
2 \\
1 \\
0 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{c}
2 \\
0 \\
-1 \\
2 \\
1
\end{array}\right], \lambda_{1}, \lambda_{2} \in R
$$

注意，这里有一个概念很重要，那就是**主元**。主元就是在矩阵消元过程中，每列要保留的非零元素，我们可以用它把该列其他元素消去。在阶梯型矩阵中，每个非零行第一个非零元素就是主元。

拿之前的第8步计算后的结果来举例，第一行的第一个元素1就是主元，第二行第三个元素1是主元，第三行的第四个元素1也是主元。



对应行阶梯形矩阵主元的变量叫做基本变量，而其他的变量叫做自由变量，这个例子中，x_{1}、x_{3}、x_{4}就是基本变量，x_{2}、x_{5}则是自由变量。使用行阶梯形矩阵能更简单地得出特殊解，所以我们可以使用主元列来表达线性方程组：

$$
b=\sum_{i=1}^{P} \lambda_{i} \mathrm{p}_{i}, i=1, \ldots, P
$$

在之前的例子中，我们使用主元列来表达成下面这样的矩阵形式：

$$
\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
1 \\
0 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{l}
1 \\
1 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{3}\left[\begin{array}{c}
-1 \\
-1 \\
1 \\
0
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
0 \\
-2 \\
1 \\
0
\end{array}\right]
$$

于是，我们最终得出 $\lambda_{3}=1$，$\lambda_{2}=-1$，$\lambda_{1}=2$，分别对应于x_{4}、x_{3}、x_{1}。不要忘了，对于非主元列，我们已经隐式地把系数设置成了0，所以这个线性方程组的特殊解是$x=\left[\begin{array}{lllll}2 & 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right]^{\mathrm{T}}$。

简化行阶梯形矩阵

这里我们再引入一个概念，简化行阶梯形矩阵，因为引入简化行阶梯形矩阵对于线性方程组的求解来说会更简单。其实，高斯消元法的核心就是通过初等变换，把线性方程组转换成简化行阶梯形矩阵。那么一个方程组是简化行阶梯形矩阵，必须满足哪几个条件呢？

1. 这个方程组必须是行阶梯形矩阵；
2. 方程组的每一个主元都是1；
3. 主元在它的列中是唯一的非0元素。

现在，我们再通过一个实例，看看该如何通过高斯消元法计算一个矩阵的逆矩阵。设矩阵A如下图：

$$

A=\left[\begin{array}{llll}
1 & 0 & 2 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right]
$$

首先，我们形成A的增广矩阵（具体方法参见上一节）。

$$
\left[\begin{array}{llllllll}
1 & 0 & 2 & 0 & \mid & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & \mid & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 1 & \mid & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & \mid & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

其次，使用我们前面刚刚讲过的高斯消元法计算出简化行阶梯形矩阵。

$$
\left[\begin{array}{ccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \mid & -1 & 2 & -2 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \mid & 1 & -1 & 2 & -2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \mid & 1 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \mid & -1 & 0 & -1 & 2
\end{array}\right]
$$

最后，我们就得到A的逆矩阵，如下图所示。

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{cccc}
-1 & 2 & -2 & 2 \\
1 & -1 & 2 & -2 \\
1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & 0 & -1 & 2
\end{array}\right]
$$

接下来，我们只要使用公式$A A^{-1}=I$ 就可以对结果进行验证了。

更多解线性方程组的方法

到目前为止，相信你已经了解了如何解线性方程组，包括特殊解和通用解，以及如何使用高斯消元法来解线性方程组。最后，我再总结一些解方法来作为你的知识扩展。

第一个方法，假设一个矩阵A是方阵（行数与列数相等的矩阵），并且可逆，$Ax=B$，那x解就可以写成$x=A^{-1}B$，但如果A矩阵不可逆，也不是方阵，那我们就只能使用下面这个变换来求x解了。

$$Ax=B⇔A^{T}Ax=A^{T}B⇔x=(A^{T}A)^{-1}A^{T}B$$

其中，矩阵A的转置矩阵和A相乘的逆矩阵，再和A的转置矩阵相乘，我们把它叫做穆尔彭罗斯伪逆矩阵（Moore-Penrose pseudo inverse），简称伪逆。

$$(A^{T}A)^{-1}A^{T}$$

这个方法有两个弊端：第一，矩阵乘和逆矩阵的计算太复杂；第二，数值精确度不高。因此，从实践角度来说，我一般不推荐使用。

第二个方法是高斯消元法。高斯消元法是非常直观的，它在很多计算中都起到了关键的作用，比如：

1. 计算行列式；
2. 检查向量是否是线性独立的；
3. 计算矩阵的逆矩阵；
4. 计算矩阵的秩；
5. 决定向量空间的基。

但当高斯消元法面对百万、千万级别的变量时，就捉襟见肘了。而这类级别的计算才是我们在实践中经常会遇到的，因此从实践角度来说，我也一般不推荐使用。因为高斯消元法属于直接法，直接法是经历有限次的运算得到方程组精确解的方法。但是，学习直接法是有意义的，虽然直接法在实际工作中不常用，但是它也能处理一些日常小问题，更重要的是，它稳固了我们进一步学习其它方法的基础。

我要讲的第三种方法，就是与直接法对应的间接法了。在实践中，线性方程组的求解都是间接的，也就是运用迭代法。

迭代法是采用极限过程，用线性方程组的近似解逐步逼近精确解的方法。所以，迭代法的关键在于每次迭代残余错误的减少，以及如何能够收敛到解。常见的迭代法有两类，定常迭代法（Stationary iterative method）和Krylov子空间方法（我会在应用篇中讲解）。

> 定常迭代法：理查德森迭代法（Richardson method）、雅可比方法（Jacobi method）、Gauß-Seidel方法、逐次超松弛法（Successive over-relaxation method，简称SOR）。
> Krylov子空间方法：共轭梯度法（Conjugate gradient）、广义极小残余算法（Generalized minimal residual）、双共轭梯度法（Biconjugate gradient）。

这里提到的几种迭代法都是在实践中比较常用的，也是计算机编程中经常实现的算法，但由于迭代法更多属于微分和极限领域，所以这里就不详细介绍了，我会在线性代数应用篇的“数值线性代数”那节课中再做讲解。

如果在课程内容结束后，你还有余力学习更多的内容，这里我先推荐两本书给你作参考，一本是《Introduction to Numerical Analysis》，另一本是《Linear Algebra》。这两本书里面都有进一步地讲解了线性方程组的迭代法求解的内容。

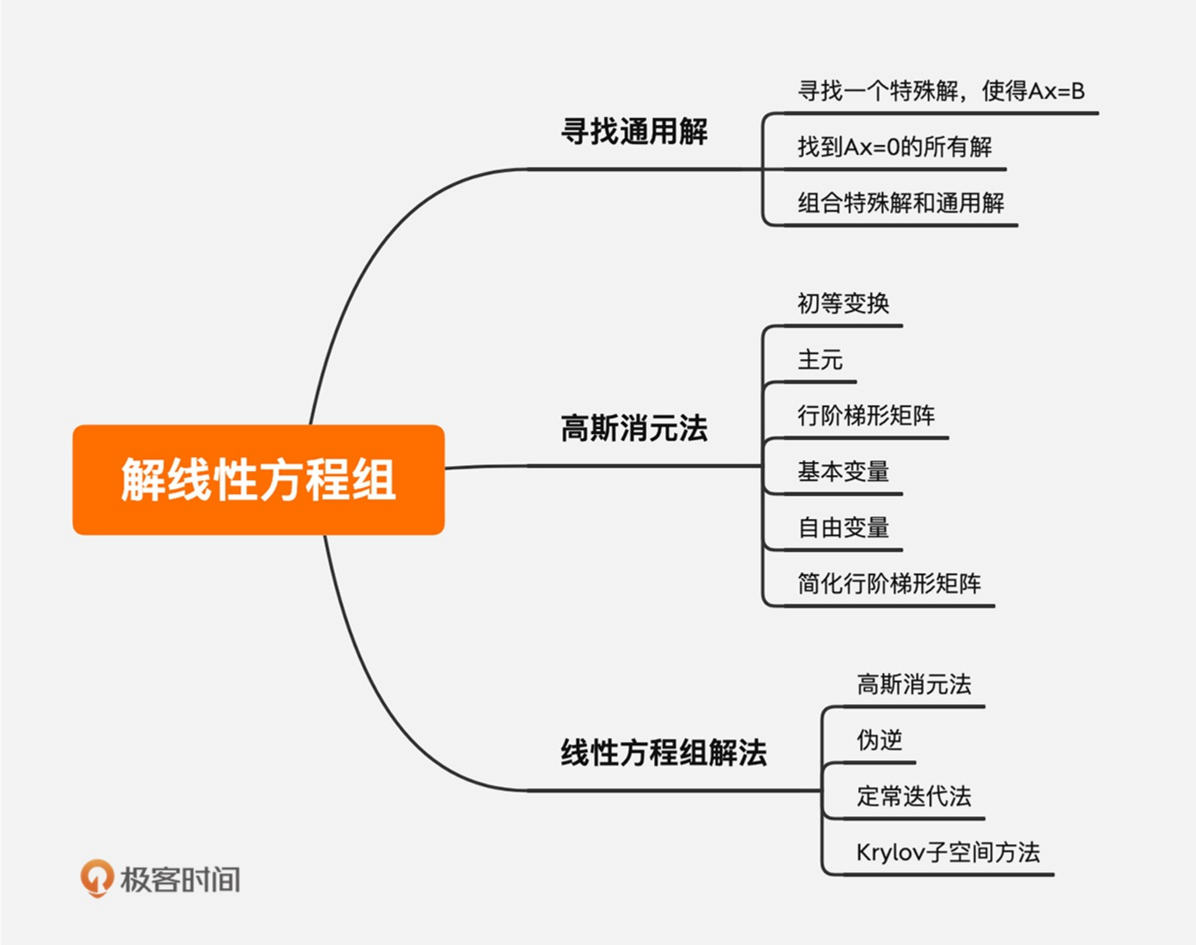
> 1.《Introduction to Numerical Analysis》
> 作者：Stoer, Josef, Bulirsch, R.
> 2002年出版
> 2.《Linear Algebra》
> 作者：Liesen, Jörg, Mehrmann, Volker
> 2015年出版

本节小结

好了，到这里解线性方程组这一讲就结束了，最后我再总结一下前面讲解的内容。

首先，我用一个简单的线性方程组，通过直接观察的方法来计算这个方程组的特殊解和通用解，接着通过实例详细地介绍了高斯消元法，最后我给出了一些在实践中常用的线性方程组解方法。只有弄清楚这些基础知识的本质，你才能更进一步，去了解其他计算方法。

线性方程组的求解已经成为了世界上最快计算机的测试标准，因为通过矩阵运算，计算机的并行计算能力暴露无遗。希望你能够在这些基础之上，阅读我推荐的两本书，并且把这些方法运用到实践中，特别是机器学习，因为机器学习也用到了很多迭代方法。



线性代数练习场

练习时刻到了，今天的练习题比较简单，请你用高斯消元法求下面的线性方程组。

$$
\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}-2 x_{3}-x_{4}=-1 \\
x_{1}+5 x_{2}-3 x_{3}-2 x_{4}=0 \\
3 x_{1}-x_{2}+x_{3}+4 x_{4}=2 \\
-2 x_{1}+2 x_{2}+x_{3}-x_{4}=1
\end{array}\right.
$$

欢迎在留言区和部落里晒出你的运算过程和结果，留下你的学习痕迹。如果你有所收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我一起重学线性代数！

在上一节课中，我讲解了线性方程组的另一种表达——矩阵。那么今天，我们就来讲解一下如何使用矩阵来解线性方程组，也就是如何求线性方程组的特殊解和通用解。

简单的线性方程组，我们当然可以运用初中学过的知识来求解，那复杂的呢？硬来几乎是不可能的了，一方面是因为人工计算的错误率很高，另一方面，即使我们使用计算机，用类似for或while循环来实现算法，它的计算效率也是极低的。你需要用更科学的方式、方法，从另一个角度来看待和求解线性方程组。

而矩阵就是为我们打开高效之门的钥匙，从计算机科学的角度来说，使用矩阵的运算效率实在是高太多了，因为它可以利用计算机的并行能力，甚至在一些迭代法中，还能实现分布式并行计算（迭代法会在后面"应用篇"中讲解）。

线性方程组解的寻找

现在，就让我们开始去寻找线性方程组的解。在之前的课程中，我们已经引入了线性方程组的一般表达，你可以看看下面的例子。

$$
\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.
$$

其中，a_{ij}和 b_{i} 属于实数，而且是已知常数，而x_{j}是未知变量，i和j的取值范围分别是：$i=1,…,m$；$j=1,…,n$ 。如果我们用矩阵的简单表达方式来看的话，就是$Ax=B$。

要搞清楚概念，我们还是要多看具体的例子。让我们先来看一个实例，来加深一下理解。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
x_{1} \\
x_{2} \\
x_{3} \\
x_{4}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8
\end{array}\right]
$$

很明显，这是一个矩阵表达方式。它的一般线性方程组表达方式是中学的基础知识，你应该很熟悉了。

$$
\left\{\begin{array}{l}
1 \times x_{1}+0 \times x_{2}+8 \times x_{3}+(-4) \times x_{4}=42 \\
0 \times x_{1}+1 \times x_{2}+2 \times x_{3}+12 \times x_{4}=8
\end{array}\right.
$$

在这个一般线性方程组中，有四个未知变量，但只有两个等式，这就意味着这个线性方程组有无穷多个解（这个是中学数学的范畴）。通过细心观察，我们可以发现第一列和第二列都是由0和1组成的，因此你很容易就能发现其中一个解。

$$
42\left[\begin{array}{l}
1 \\
0
\end{array}\right]+8\left[\begin{array}{l}
0 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8
\end{array}\right]
$$

这个解就是$\left[\begin{array}{llll}42 & 8 & 0 & 0\end{array}\right]^{T}$，也就是说四个未知变量分别为$42$、$8$、$0$、$0$。

$$
\left\{\begin{array}{l}
x_{1}=42 \\
x_{2}=8 \\
x_{3}=0 \\
x_{4}=0
\end{array}\right.
$$

这个解也叫做特殊解。我们刚才已经说过，这个线性方程组有无穷多个解，那我们确实需要一个聪明的方式来找到其他的解，最直观的方式就是通过矩阵的列来构造0。例如，对于第三列来说，我们可以使用第一和第二列的组合形式来表达。

$$
8\left[\begin{array}{l}
1 \\
0
\end{array}\right]+2\left[\begin{array}{l}
0 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{l}
8 \\
2
\end{array}\right]
$$

通过计算$Ax=0$，我们得出解$\left[\begin{array}{llll}8 & 2 & -1 & 0\end{array}\right]^{T}$。而事实上，这个解可以乘以任何实数$λ_{1}$，使得$Ax=0$成立。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]
\left(\begin{array}{l}
\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
8 \\
2 \\
-1 \\
0
\end{array}\right]
\end{array}\right)=0
$$

同理，对于第四列来说，我们可以使用第一和第二列的组合形式来表达，得出另一套解，使得$Ax=0$。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]
\left(\begin{array}{l}
\lambda_{2}\left[\begin{array}{l}
-4 \\
12 \\
0 \\
-1
\end{array}\right]
\end{array}\right)=0
$$

现在，我们可以把之前的特殊解与刚得出的两套解相组合，得出最终解，这个解也就是我们所说的通用解了。

$$
x \in R^{4}: x=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{1}\left[\begin{array}{c}
8 \\
2 \\
-1 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{c}
-4 \\
12 \\
0 \\
-1
\end{array}\right], \lambda_{1}, \lambda_{2} \in R
$$

我来总结一下寻找通用解的过程，这个过程分为三步：

1. 我们要寻找一个特殊解，使得$Ax=b$；
2. 找到$Ax=0$的所有解；
3. 组合第一和第二步的解形成通用解。

看到了这里，你有没有发现有些奇怪呢？或者说，有没有觉得哪里有点别扭？是的，好像有点太顺利了。那是因为这个线性方程组比较特别，第一列和第二列是由1和0组成的。所以，我们只通过观察就能得出特殊解和通用解。

然而，你不可能每次都行大运，就像我们在现实中碰到的这类线性方程组，一般都比这个复杂得多。不过不要慌，有一个算法可以来帮助我们转换任意线性方程组，形成类似的特殊形式，这个算法叫做**高斯消元法**。

高斯消元法的核心就是**线性方程组的初等变换**，于是，我们可以通过高斯消元法，得到围绕初等变换形成的简单矩阵表达形式，接下来我们就可以运用之前的三个步骤来寻找通用解了。

初等变换的一般形式

既然高斯消元法的核心就是线性方程组的初等变换，那为了方便你使用高斯消元法，我就有必要来讲一讲初等变换的一般形式有哪些：

1. 两个等式的交换，也就是矩阵行交换；
2. 一个等式，或者说矩阵行乘以一个实数常量；
3. 两个等式相加，或者说矩阵的两行相加。

道理是这样的道理，那我们通过一个例子来看看，究竟该怎么做线性方程组的初等变换。假设a属于实数，现在我们试着来寻找下面这个线性方程组的所有解。我把这个过程细细地拆解为11个步骤，建议你仔细看过并理解后，再进入下一阶段的学习。

$$
\left\{\begin{array}{c}
-2 x_{1}+4 x_{2}-2 x_{3}-x_{4}+4 x_{5}=-3 \\
4 x_{1}-8 x_{2}+3 x_{3}-3 x_{4}+x_{5}=2 \\
x_{1}-2 x_{2}+x_{3}-x_{4}+x_{5}=0 \\
x_{1}-2 x_{2}-3 x_{4}+4 x_{5}=a
\end{array}\right.
$$

1.我们要把这个线性方程组转换成矩阵的表达形式，$Ax=b$。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
4 & -8 & 3 & -3 & 1 & \mid & 2 \\
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

2.接着我们来交换第一和第三行。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
4 & -8 & 3 & -3 & 1 & \mid & 2 \\
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

注意，你知道我们为什么选择第一行和第三行交换吗？其实，这是为了便于计算。而具体交换哪一行是有个小技巧的，如果某行的第一个元素有1，我们就可以把这一行移到第一行。

3.我们以第一行为基础，开始执行乘和加变换，将第一行乘以-4的结果和第二行相加，从而获得了下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

4.然后，我们用同样的方法，将第一行乘以2的结果，再和第三行相加，得到了下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

5.以此类推，我们将第一行乘以-1的结果，和第四行相加，继续获得新矩阵。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & -1 & -2 & 3 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

6.将第二行乘以-1的结果，和第四行相加，得到下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & a-2
\end{array}\right]
$$

7.将第三行乘以-1的结果，和第四行相加。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & a+1
\end{array}\right]

$$

8.第二行乘以-1，第三行乘以$-\frac{1}{3}$。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 3 & \mid & -2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \mid & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & a+1
\end{array}\right]
$$

9.现在，这个矩阵就是一个简单形式的矩阵，也叫做**行阶梯形矩阵**（Row-Echelon Form，REF）。

$$
\left\{\begin{array}{r}
x_{1}-2 x_{2}+x_{3}-x_{4}+x_{5}=0 \\
x_{3}-x_{4}+3 x_{5}=-2 \\
x_{4}-2 x_{5}=1 \\
0=a+1
\end{array}\right.
$$

一个矩阵成为行阶梯形矩阵需满足两个条件：

- 如果它既有零行，又有非零行，则零行在下，非零行在上；
- 如果它有非零行，则每个非零行的第一个非零元素所在列号自上而下严格单调上升，正如之前的这个矩阵，列号自上而下是1、3、4，是严格单调上升的。

10.你可以看出，只有在$a=-1$的情况下，这个线性方程组才有解，特殊解是$\left[\begin{array}{lllll}2 & 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right]^{\mathrm{T}}$。

11.最后，我们得出这个线性方程组的通用解，如下图所示。

$$
x \in R^{5}: x=\left[\begin{array}{c}
2 \\
0 \\
-1 \\
1 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
2 \\
1 \\
0 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{c}
2 \\
0 \\
-1 \\
2 \\
1
\end{array}\right], \lambda_{1}, \lambda_{2} \in R
$$

注意，这里有一个概念很重要，那就是**主元**。主元就是在矩阵消元过程中，每列要保留的非零元素，我们可以用它把该列其他元素消去。在阶梯型矩阵中，每个非零行第一个非零元素就是主元。

拿之前的第8步计算后的结果来举例，第一行的第一个元素1就是主元，第二行第三个元素1是主元，第三行的第四个元素1也是主元。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & -2 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right.
$$

对应行阶梯形矩阵主元的变量叫做基本变量，而其他的变量叫做自由变量，这个例子中，x_{1}、x_{3}、x_{4}就是基本变量，x_{2}、x_{5}则是自由变量。使用行阶梯形矩阵能更简单地得出特殊解，所以我们可以使用主元列来表达线性方程组：

$$
b=\sum_{i=1}^{P} \lambda_{i} \mathrm{p}_{i}, i=1, \ldots, P
$$

在之前的例子中，我们使用主元列来表达成下面这样的矩阵形式：

$$
\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
1 \\
0 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{l}
1 \\
1 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{3}\left[\begin{array}{c}
-1 \\
-1 \\
1 \\
0
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
0 \\
-2 \\
1 \\
0
\end{array}\right]
$$

于是，我们最终得出 $\lambda_{3}=1$，$\lambda_{2}=-1$，$\lambda_{1}=2$，分别对应于x_{4}、x_{3}、x_{1}。不要忘了，对于非主元列，我们已经隐式地把系数设置成了0，所以这个线性方程组的特殊解是$x=\left[\begin{array}{lllll}2 & 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right]^{\mathrm{T}}$。

简化行阶梯形矩阵

这里我们再引入一个概念，简化行阶梯形矩阵，因为引入简化行阶梯形矩阵对于线性方程组的求解来说会更简单。其实，高斯消元法的核心就是通过初等变换，把线性方程组转换成简化行阶梯形矩阵。那么一个方程组是简化行阶梯形矩阵，必须满足哪几个条件呢？

1. 这个方程组必须是行阶梯形矩阵；
2. 方程组的每一个主元都是1；
3. 主元在它的列中是唯一的非0元素。

现在，我们再通过一个实例，看看该如何通过高斯消元法计算一个矩阵的逆矩阵。设矩阵A如下图：

$$

$$
A=\left[\begin{array}{llll}
1 & 0 & 2 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right]
$$

首先，我们形成A的增广矩阵（具体方法参见上一节）。

$$
\left[\begin{array}{lllllllll}
1 & 0 & 2 & 0 & \mid & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & \mid & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 1 & \mid & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & \mid & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

其次，使用我们前面刚刚讲过的高斯消元法计算出简化行阶梯形矩阵。

$$
\left[\begin{array}{ccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \mid & -1 & 2 & -2 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \mid & 1 & -1 & 2 & -2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \mid & 1 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \mid & -1 & 0 & -1 & 2
\end{array}\right]
$$

最后，我们就得到A的逆矩阵，如下图所示。

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{cccc}
-1 & 2 & -2 & 2 \\
1 & -1 & 2 & -2 \\
1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & 0 & -1 & 2
\end{array}\right]
$$

接下来，我们只要使用公式$A A^{-1}=I$ 就可以对结果进行验证了。

更多解线性方程组的方法

到目前为止，相信你已经了解了如何解线性方程组，包括特殊解和通用解，以及如何使用高斯消元法来解线性方程组。最后，我再总结一些解方法来作为你的知识扩展。

第一个方法，假设一个矩阵A是方阵（行数与列数相等的矩阵），并且可逆，$Ax=B$ ，那x解就可以写成$x=A^{-1}B$，但如果A矩阵不可逆，也不是方阵，那我们就只能使用下面这个变换来求x解了。

$$Ax=B \Leftrightarrow A^{T}Ax=A^{T}B \Leftrightarrow x=(A^{T}A)^{-1}A^{T}B$$

其中，矩阵A的转置矩阵和A相乘的逆矩阵，再和A的转置矩阵相乘，我们把它叫做穆尔彭罗斯伪逆矩阵（Moore-Penrose pseudo inverse），简称伪逆。

$$(A^{T}A)^{-1}A^{T}$$

这个方法有两个弊端：第一，矩阵乘和逆矩阵的计算太复杂；第二，数值精确度不高。因此，从实践角度来说，我一般不推荐使用。

第二个方法是高斯消元法。高斯消元法是非常直观的，它在很多计算中都起到了关键的作用，比如：

1. 计算行列式；
2. 检查向量是否是线性独立的；
3. 计算矩阵的逆矩阵；
4. 计算矩阵的秩；
5. 决定向量空间的基。

但当高斯消元法面对百万、千万级别的变量时，就捉襟见肘了。而这类级别的计算才是我们在实践中经常会遇到的，因此从实践角度来说，我也一般不推荐使用。因为高斯消元法属于直接法，直接法是经历有限次的运算得到方程组精确解的方法。但是，学习直接法是有意义的，虽然直接法在实际工作中不常用，但是它也能处理一些日常小问题，更重要的是，它稳固了我们进一步学习其它方法的基础。

我要讲的第三种方法，就是与直接法对应的间接法了。在实践中，线性方程组的求解都是间接的，也就是运用迭代法。

迭代法是采用极限过程，用线性方程组的近似解逐步逼近精确解的方法。所以，迭代法的关键在于每次迭代残余错误的减少，以及如何能够收敛到解。常见的迭代法有两类，定常迭代法（Stationary iterative method）和Krylov子空间方法（我会在应用篇中讲解）。

> 定常迭代法：理查德森迭代法（Richardson method）、雅可比方法（Jacobi method）、Gauß-Seidel方法、逐次超松弛法（Successive over-relaxation method，简称SOR）。
> Krylov子空间方法：共轭梯度法（Conjugate gradient）、 广义极小残余算法（Generalized minimal residual）、双共轭梯度法（Biconjugate gradient）。

这里提到的几种迭代法都是在实践中比较常用的，也是计算机编程中经常实现的算法，但由于迭代法更多属于微分和极限领域，所以这里就不详细介绍了，我会在线性代数应用篇的"数值线性代数"那节课中再做讲解。

如果在课程内容结束后，你还有余力学习更多的内容，这里我先推荐两本书给你作参考，一本是《Introduction to Numerical Analysis》，另一本是《Linear Algebra》。这两本书里面都有进一步地讲解了线性方程组的迭代法求解的内容。

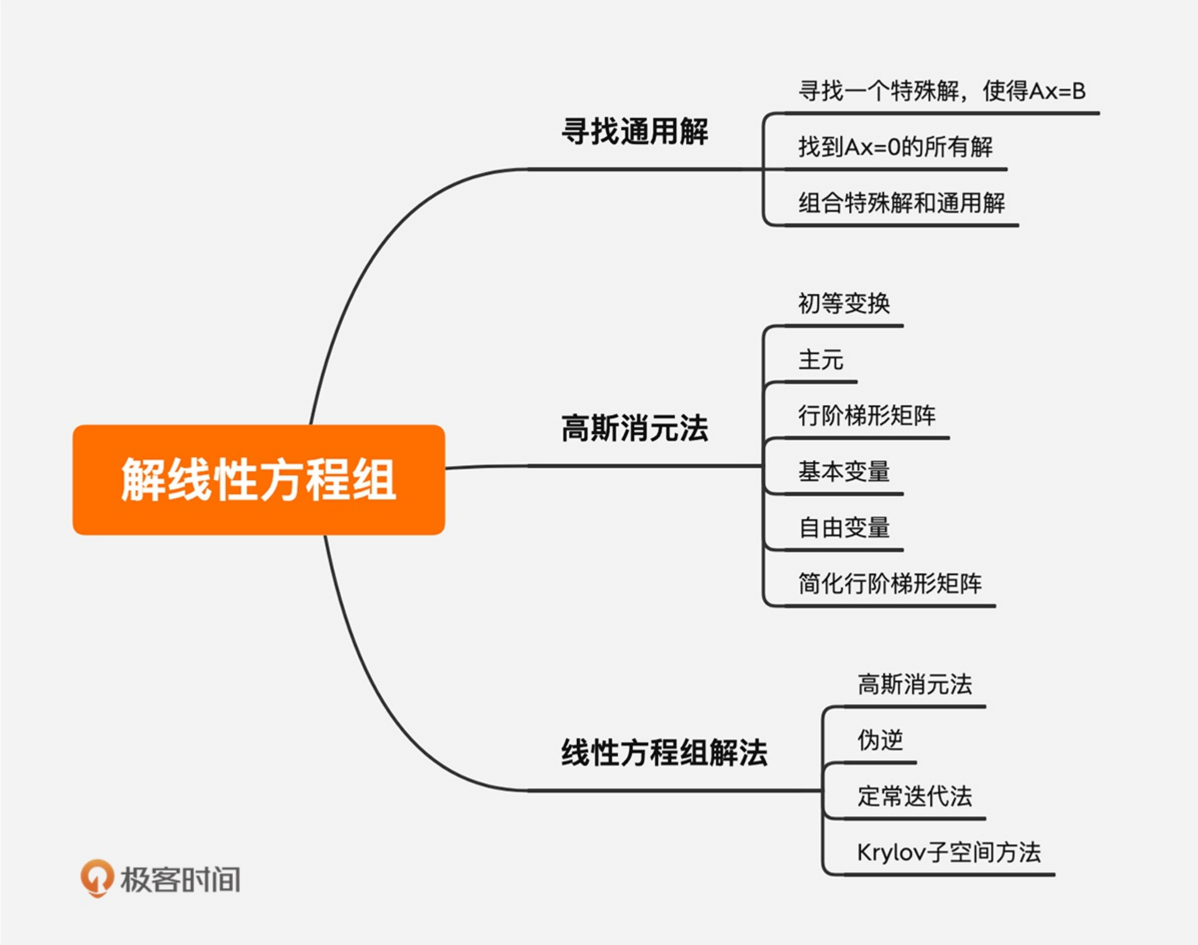
> 1.《Introduction to Numerical Analysis》
> 作者：Stoer, Josef, Bulirsch, R.
> 2002年出版
> 2.《Linear Algebra》
> 作者：Liesen, Jörg, Mehrmann, Volker
> 2015年出版

本节小结

好了，到这里解线性方程组这一讲就结束了，最后我再总结一下前面讲解的内容。

首先，我用一个简单的线性方程组，通过直接观察的方法来计算这个方程组的特殊解和通用解，接着通过实例详细地介绍了高斯消元法，最后我给出了一些在实践中常用的线性方程组解方法。只有弄清楚这些基础知识的本质，你才能更进一步，去了解其他计算方法。

线性方程组的求解已经成为了世界上最快计算机的测试标准，因为通过矩阵运算，计算机的并行计算能力暴露无遗。希望你能够在这些基础之上，阅读我推荐的两本书，并且把这些方法运用到实践中，特别是机器学习，因为机器学习也用到了很多迭代方法。



线性代数练习场

练习时刻到了，今天的练习题比较简单，请你用高斯消元法求下面的线性方程组。

$$
\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}-2 x_{3}-x_{4}=-1 \\
x_{1}+5 x_{2}-3 x_{3}-2 x_{4}=0 \\
3 x_{1}-x_{2}+x_{3}+4 x_{4}=2 \\
-2 x_{1}+2 x_{2}+x_{3}-x_{4}=1
\end{array}\right.
$$

欢迎在留言区和部落里晒出你的运算过程和结果，留下你的学习痕迹。如果你有所收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我一起重学线性代数！

在上一节课中，我讲解了线性方程组的另一种表达——矩阵。那么今天，我们就来讲解一下如何使用矩阵来解线性方程组，也就是如何求线性方程组的特殊解和通用解。

简单的线性方程组，我们当然可以运用初中学过的知识来求解，那复杂的呢？硬来几乎是不可能的了，一方面是因为人工计算的错误率很高，另一方面，即使我们使用计算机，用类似for或while循环来实现算法，它的计算效率也是极低的。你需要用更科学的方式、方法，从另一个角度来看待和求解线性方程组。

而矩阵就是为我们打开高效之门的钥匙，从计算机科学的角度来说，使用矩阵的运算效率实在是高太多了，因为它可以利用计算机的并行能力，甚至在一些迭代法中，还能实现分布式并行计算（迭代法会在后面"应用篇"中讲解）。

线性方程组解的寻找

现在，就让我们开始去寻找线性方程组的解。在之前的课程中，我们已经引入了线性方程组的一般表达，你可以看看下面的例子。

$$
\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.
$$

其中，a_{ij}和 b_{i} 属于实数，而且是已知常数，而x_{j}是未知变量，i和j的取值范围分别是：$i=1,…,m$；$j=1,…,n$ 。如果我们用矩阵的简单表达方式来看的话，就是$Ax=B$。

要搞清楚概念，我们还是要多看具体的例子。让我们先来看一个实例，来加深一下理解。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
x_{1} \\
x_{2} \\
x_{3} \\
x_{4}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8
\end{array}\right]
$$

很明显，这是一个矩阵表达方式。它的一般线性方程组表达方式是中学的基础知识，你应该很熟悉了。

$$
\left\{\begin{array}{l}
1 \times x_{1}+0 \times x_{2}+8 \times x_{3}+(-4) \times x_{4}=42 \\
0 \times x_{1}+1 \times x_{2}+2 \times x_{3}+12 \times x_{4}=8
\end{array}\right.
$$

在这个一般线性方程组中，有四个未知变量，但只有两个等式，这就意味着这个线性方程组有无穷多个解（这个是中学数学的范畴）。通过细心观察，我们可以发现第一列和第二列都是由0和1组成的，因此你很容易就能发现其中一个解。

$$
42\left[\begin{array}{l}
1 \\
0
\end{array}\right]+8\left[\begin{array}{l}
0 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8
\end{array}\right]
$$

这个解就是$\left[\begin{array}{llll}42 & 8 & 0 & 0\end{array}\right]^{T}$，也就是说四个未知变量分别为$42$、$8$、$0$、$0$。

$$
\left\{\begin{array}{l}
x_{1}=42 \\
x_{2}=8 \\
x_{3}=0 \\
x_{4}=0
\end{array}\right.
$$

这个解也叫做特殊解。我们刚才已经说过，这个线性方程组有无穷多个解，那我们确实需要一个聪明的方式来找到其他的解，最直观的方式就是通过矩阵的列来构造0。例如，对于第三列来说，我们可以使用第一和第二列的组合形式来表达。

$$
8\left[\begin{array}{l}
1 \\
0
\end{array}\right]+2\left[\begin{array}{l}
0 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{l}
8 \\
2
\end{array}\right]
$$

通过计算$Ax=0$，我们得出解$\left[\begin{array}{llll}8 & 2 & -1 & 0\end{array}\right]^{T}$。而事实上，这个解可以乘以任何实数$\lambda_{1}$，使得$Ax=0$成立。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]
\left(\begin{array}{l}
\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
8 \\
2 \\
-1 \\
0
\end{array}\right]
\end{array}\right)=0
$$

同理，对于第四列来说，我们可以使用第一和第二列的组合形式来表达，得出另一套解，使得$Ax=0$。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]
\left(\begin{array}{l}
\lambda_{2}\left[\begin{array}{l}
-4 \\
12 \\
0 \\
-1
\end{array}\right]
\end{array}\right)=0
$$

现在，我们可以把之前的特殊解与刚得出的两套解相组合，得出最终解，这个解也就是我们所说的通用解了。

$$
x \in R^{4}: x=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{1}\left[\begin{array}{c}
8 \\
2 \\
-1 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{c}
-4 \\
12 \\
0 \\
-1
\end{array}\right], \lambda_{1}, \lambda_{2} \in R
$$

我来总结一下寻找通用解的过程，这个过程分为三步：

1. 我们要寻找一个特殊解，使得$Ax=b$；
2. 找到$Ax=0$的所有解；
3. 组合第一和第二步的解形成通用解。

看到了这里，你有没有发现有些奇怪呢？或者说，有没有觉得哪里有点别扭？是的，好像有点太顺利了。那是因为这个线性方程组比较特别，第一列和第二列是由1和0组成的。所以，我们只通过观察就能得出特殊解和通用解。

然而，你不可能每次都行大运，就像我们在现实中碰到的这类线性方程组，一般都比这个复杂得多。不过不要慌，有一个算法可以来帮助我们转换任意线性方程组，形成类似的特殊形式，这个算法叫做**高斯消元法**。

高斯消元法的核心就是**线性方程组的初等变换**，于是，我们可以通过高斯消元法，得到围绕初等变换形成的简单矩阵表达形式，接下来我们就可以运用之前的三个步骤来寻找通用解了。

初等变换的一般形式

既然高斯消元法的核心就是线性方程组的初等变换，那为了方便你使用高斯消元法，我就有必要来讲一讲初等变换的一般形式有哪些：

1. 两个等式的交换，也就是矩阵行交换；
2. 一个等式，或者说矩阵行乘以一个实数常量；
3. 两个等式相加，或者说矩阵的两行相加。

道理是这样的道理，那我们通过一个例子来看看，究竟该怎么做线性方程组的初等变换。假设a属于实数，现在我们试着来寻找下面这个线性方程组的所有解。我把这个过程细细地拆解为11个步骤，建议你仔细看过并理解后，再进入下一阶段的学习。

$$
\left\{\begin{array}{c}
-2 x_{1}+4 x_{2}-2 x_{3}-x_{4}+4 x_{5}=-3 \\
4 x_{1}-8 x_{2}+3 x_{3}-3 x_{4}+x_{5}=2 \\
x_{1}-2 x_{2}+x_{3}-x_{4}+x_{5}=0 \\
x_{1}-2 x_{2}-3 x_{4}+4 x_{5}=a
\end{array}\right.
$$

1.我们要把这个线性方程组转换成矩阵的表达形式，$Ax=b$。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
4 & -8 & 3 & -3 & 1 & \mid & 2 \\
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

2.接着我们来交换第一和第三行。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
4 & -8 & 3 & -3 & 1 & \mid & 2 \\
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

注意，你知道我们为什么选择第一行和第三行交换吗？其实，这是为了便于计算。而具体交换哪一行是有个小技巧的，如果某行的第一个元素有1，我们就可以把这一行移到第一行。

3.我们以第一行为基础，开始执行乘和加变换，将第一行乘以-4的结果和第二行相加，从而获得了下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

4.然后，我们用同样的方法，将第一行乘以2的结果，再和第三行相加，得到了下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

5.以此类推，我们将第一行乘以-1的结果，和第四行相加，继续获得新矩阵。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & -1 & -2 & 3 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

6.将第二行乘以-1的结果，和第四行相加，得到下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & a-2
\end{array}\right]
$$

7.将第三行乘以-1的结果，和第四行相加。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & a+1
\end{array}\right]

8.第二行乘以-1，第三行乘以$-\frac{1}{3}$。

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 3 & \mid & -2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \mid & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & a+1
\end{array}\right]
$$

9.现在，这个矩阵就是一个简单形式的矩阵，也叫做**行阶梯形矩阵**（Row-Echelon Form，REF）。

$$
\left\{\begin{array}{r}
x_{1}-2 x_{2}+x_{3}-x_{4}+x_{5}=0 \\
x_{3}-x_{4}+3 x_{5}=-2 \\
x_{4}-2 x_{5}=1 \\
0=a+1
\end{array}\right.
$$

一个矩阵成为行阶梯形矩阵需满足两个条件：

- 如果它既有零行，又有非零行，则零行在下，非零行在上；
- 如果它有非零行，则每个非零行的第一个非零元素所在列号自上而下严格单调上升，正如之前的这个矩阵，列号自上而下是1、3、4，是严格单调上升的。

10.你可以看出，只有在$a=-1$的情况下，这个线性方程组才有解，特殊解是$\left[\begin{array}{lllll}2 & 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right]^{\mathrm{T}}$。

11.最后，我们得出这个线性方程组的通用解，如下图所示。

$$
x \in R^{5}: x=\left[\begin{array}{c}
2 \\
0 \\
-1 \\
1 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
2 \\
1 \\
0 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{c}
2 \\
0 \\
-1 \\
2 \\
1
\end{array}\right], \lambda_{1}, \lambda_{2} \in R
$$

注意，这里有一个概念很重要，那就是**主元**。主元就是在矩阵消元过程中，每列要保留的非零元素，我们可以用它把该列其他元素消去。在阶梯型矩阵中，每个非零行第一个非零元素就是主元。

拿之前的第8步计算后的结果来举例，第一行的第一个元素1就是主元，第二行第三个元素1是主元，第三行的第四个元素1也是主元。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & -2 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right.
$$

对应行阶梯形矩阵主元的变量叫做基本变量，而其他的变量叫做自由变量，这个例子中，x_{1}、x_{3}、x_{4}就是基本变量，x_{2}、x_{5}则是自由变量。使用行阶梯形矩阵能更简单地得出特殊解，所以我们可以使用主元列来表达线性方程组：

$$
b=\sum_{i=1}^{P} \lambda_{i} \mathrm{p}_{i}, i=1, \ldots, P
$$

在之前的例子中，我们使用主元列来表达成下面这样的矩阵形式：

$$
\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
1 \\
0 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{l}
1 \\
1 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{3}\left[\begin{array}{c}
-1 \\
-1 \\
1 \\
0
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
0 \\
-2 \\
1 \\
0
\end{array}\right]
$$

于是，我们最终得出 $λ_{3}=1$，$λ_{2}=-1$，$λ_{1}=2$，分别对应于x_{4}、x_{3}、x_{1}。不要忘了，对于非主元列，我们已经隐式地把系数设置成了0，所以这个线性方程组的特殊解是$x=\left[\begin{array}{lllll}2 & 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right]^{\mathrm{T}}$。

简化行阶梯形矩阵

这里我们再引入一个概念，简化行阶梯形矩阵，因为引入简化行阶梯形矩阵对于线性方程组的求解来说会更简单。其实，高斯消元法的核心就是通过初等变换，把线性方程组转换成简化行阶梯形矩阵。那么一个方程组是简化行阶梯形矩阵，必须满足哪几个条件呢？

1. 这个方程组必须是行阶梯形矩阵；
2. 方程组的每一个主元都是1；
3. 主元在它的列中是唯一的非0元素。

现在，我们再通过一个实例，看看该如何通过高斯消元法计算一个矩阵的逆矩阵。设矩阵A如下图：

$$

$$
A=\left[\begin{array}{llll}
1 & 0 & 2 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right]
$$

首先，我们形成A的增广矩阵（具体方法参见上一节）。

$$
\left[\begin{array}{llllllll}
1 & 0 & 2 & 0 & \mid & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & \mid & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 1 & \mid & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & \mid & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

其次，使用我们前面刚刚讲过的高斯消元法计算出简化行阶梯形矩阵。

$$
\left[\begin{array}{ccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \mid & -1 & 2 & -2 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \mid & 1 & -1 & 2 & -2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \mid & 1 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \mid & -1 & 0 & -1 & 2
\end{array}\right]
$$

最后，我们就得到A的逆矩阵，如下图所示。

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{cccc}
-1 & 2 & -2 & 2 \\
1 & -1 & 2 & -2 \\
1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & 0 & -1 & 2
\end{array}\right]
$$

接下来，我们只要使用公式$A A^{-1}=I$ 就可以对结果进行验证了。

更多解线性方程组的方法

到目前为止，相信你已经了解了如何解线性方程组，包括特殊解和通用解，以及如何使用高斯消元法来解线性方程组。最后，我再总结一些解方法来作为你的知识扩展。

第一个方法，假设一个矩阵A是方阵（行数与列数相等的矩阵），并且可逆，$Ax=B$ ，那x解就可以写成$x=A^{-1}B$，但如果A矩阵不可逆，也不是方阵，那我们就只能使用下面这个变换来求x解了。

$$Ax=B\Leftrightarrow A^{T}Ax=A^{T}B\Leftrightarrow x=(A^{T}A)^{-1}A^{T}B$$

其中，矩阵A的转置矩阵和A相乘的逆矩阵，再和A的转置矩阵相乘，我们把它叫做穆尔彭罗斯伪逆矩阵（Moore-Penrose pseudo inverse），简称伪逆。

$$(A^{T}A)^{-1}A^{T}$$

这个方法有两个弊端：第一，矩阵乘和逆矩阵的计算太复杂；第二，数值精确度不高。因此，从实践角度来说，我一般不推荐使用。

第二个方法是高斯消元法。高斯消元法是非常直观的，它在很多计算中都起到了关键的作用，比如：

1. 计算行列式；
2. 检查向量是否是线性独立的；
3. 计算矩阵的逆矩阵；
4. 计算矩阵的秩；
5. 决定向量空间的基。

但当高斯消元法面对百万、千万级别的变量时，就捉襟见肘了。而这类级别的计算才是我们在实践中经常会遇到的，因此从实践角度来说，我也一般不推荐使用。因为高斯消元法属于直接法，直接法是经历有限次的运算得到方程组精确解的方法。但是，学习直接法是有意义的，虽然直接法在实际工作中不常用，但是它也能处理一些日常小问题，更重要的是，它稳固了我们进一步学习其它方法的基础。

我要讲的第三种方法，就是与直接法对应的间接法了。在实践中，线性方程组的求解都是间接的，也就是运用迭代法。

迭代法是采用极限过程，用线性方程组的近似解逐步逼近精确解的方法。所以，迭代法的关键在于每次迭代残余错误的减少，以及如何能够收敛到解。常见的迭代法有两类，定常迭代法（Stationary iterative method）和Krylov子空间方法（我会在应用篇中讲解）。

> 定常迭代法：理查德森迭代法（Richardson method）、雅可比方法（Jacobi method）、Gauß-Seidel方法、逐次超松弛法（Successive over-relaxation method，简称SOR）。
> Krylov子空间方法：共轭梯度法（Conjugate gradient）、广义极小残余算法（Generalized minimal residual）、双共轭梯度法（Biconjugate gradient）。

这里提到的几种迭代法都是在实践中比较常用的，也是计算机编程中经常实现的算法，但由于迭代法更多属于微分和极限领域，所以这里就不详细介绍了，我会在线性代数应用篇的"数值线性代数"那节课中再做讲解。

如果在课程内容结束后，你还有余力学习更多的内容，这里我先推荐两本书给你作参考，一本是《Introduction to Numerical Analysis》，另一本是《Linear Algebra》。这两本书里面都有进一步地讲解了线性方程组的迭代法求解的内容。

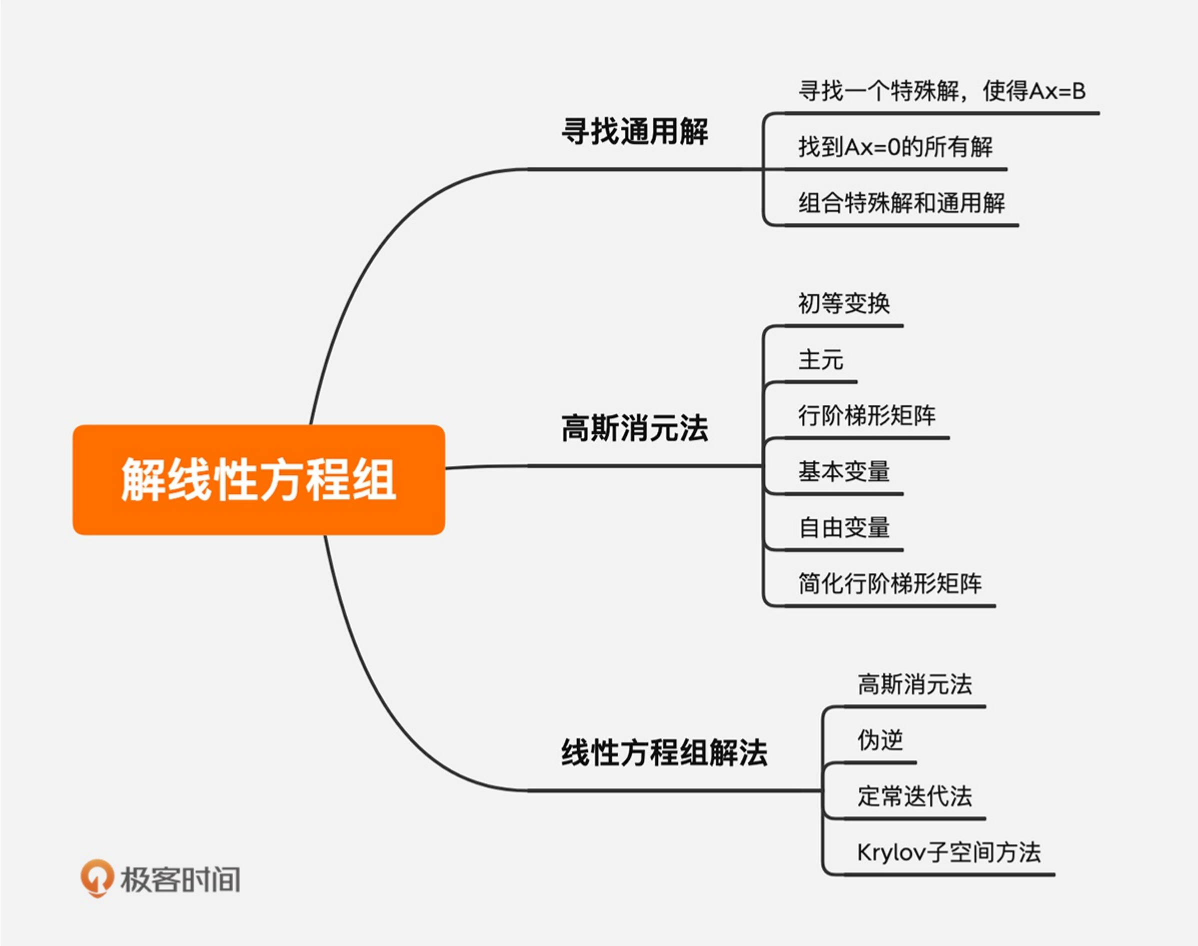
> 1.《Introduction to Numerical Analysis》
> 作者：Stoer, Josef, Bulirsch, R.
> 2002年出版
> 2.《Linear Algebra》
> 作者：Liesen, Jörg, Mehrmann, Volker
> 2015年出版

本节小结

好了，到这里解线性方程组这一讲就结束了，最后我再总结一下前面讲解的内容。

首先，我用一个简单的线性方程组，通过直接观察的方法来计算这个方程组的特殊解和通用解，接着通过实例详细地介绍了高斯消元法，最后我给出了一些在实践中常用的线性方程组解方法。只有弄清楚这些基础知识的本质，你才能更进一步，去了解其他计算方法。

线性方程组的求解已经成为了世界上最快计算机的测试标准，因为通过矩阵运算，计算机的并行计算能力暴露无遗。希望你能够在这些基础之上，阅读我推荐的两本书，并且把这些方法运用到实践中，特别是机器学习，因为机器学习也用到了很多迭代方法。



线性代数练习场

练习时刻到了，今天的练习题比较简单，请你用高斯消元法求下面的线性方程组。

$$
\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}-2 x_{3}-x_{4}=-1 \\
x_{1}+5 x_{2}-3 x_{3}-2 x_{4}=0 \\
3 x_{1}-x_{2}+x_{3}+4 x_{4}=2 \\
-2 x_{1}+2 x_{2}+x_{3}-x_{4}=1
\end{array}\right.
$$

欢迎在留言区和部落里晒出你的运算过程和结果，留下你的学习痕迹。如果你有所收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我一起重学线性代数！

在上一节课中，我讲解了线性方程组的另一种表达——矩阵。那么今天，我们就来讲解一下如何使用矩阵来解线性方程组，也就是如何求线性方程组的特殊解和通用解。

简单的线性方程组，我们当然可以运用初中学过的知识来求解，那复杂的呢？硬来几乎是不可能的了，一方面是因为人工计算的错误率很高，另一方面，即使我们使用计算机，用类似for或while循环来实现算法，它的计算效率也是极低的。你需要用更科学的方式、方法，从另一个角度来看待和求解线性方程组。

而矩阵就是为我们打开高效之门的钥匙，从计算机科学的角度来说，使用矩阵的运算效率实在是高太多了，因为它可以利用计算机的并行能力，甚至在一些迭代法中，还能实现分布式并行计算（迭代法会在后面"应用篇"中讲解）。

线性方程组解的寻找

现在，就让我们开始去寻找线性方程组的解。在之前的课程中，我们已经引入了线性方程组的一般表达，你可以看看下面的例子。

$$
\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.
$$

其中，a_{ij}和 b_{i} 属于实数，而且是已知常数，而x_{j}是未知变量，i和j的取值范围分别是：$i=1,…,m$；$j=1,…,n$ 。如果我们用矩阵的简单表达方式来看的话，就是$Ax=B$。

要搞清楚概念，我们还是要多看具体的例子。让我们先来看一个实例，来加深一下理解。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}
x_{1} \\
x_{2} \\
x_{3} \\
x_{4}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8
\end{array}\right]
$$

很明显，这是一个矩阵表达方式。它的一般线性方程组表达方式是中学的基础知识，你应该很熟悉了。

$$
\left\{\begin{array}{l}
1 \times x_{1}+0 \times x_{2}+8 \times x_{3}+(-4) \times x_{4}=42 \\
0 \times x_{1}+1 \times x_{2}+2 \times x_{3}+12 \times x_{4}=8
\end{array}\right.
$$

在这个一般线性方程组中，有四个未知变量，但只有两个等式，这就意味着这个线性方程组有无穷多个解（这个是中学数学的范畴）。通过细心观察，我们可以发现第一列和第二列都是由0和1组成的，因此你很容易就能发现其中一个解。

$$
42\left[\begin{array}{l}
1 \\
0
\end{array}\right]+8\left[\begin{array}{l}
0 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8
\end{array}\right]
$$

这个解就是$\left[\begin{array}{llll}42 & 8 & 0 & 0\end{array}\right]^{T}$，也就是说四个未知变量分别为$42$、$8$、$0$、$0$。

$$
\left\{\begin{array}{l}
x_{1}=42 \\
x_{2}=8 \\
x_{3}=0 \\
x_{4}=0
\end{array}\right.
$$

这个解也叫做特殊解。我们刚才已经说过，这个线性方程组有无穷多个解，那我们确实需要一个聪明的方式来找到其他的解，最直观的方式就是通过矩阵的列来构造0。例如，对于第三列来说，我们可以使用第一和第二列的组合形式来表达。

$$
8\left[\begin{array}{l}
1 \\
0
\end{array}\right]+2\left[\begin{array}{l}
0 \\
1
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{l}
8 \\
2
\end{array}\right]
$$

通过计算$Ax=0$，我们得出解$\left[\begin{array}{llll}8 & 2 & -1 & 0\end{array}\right]^{T}$。而事实上，这个解可以乘以任何实数$\lambda_{1}$，使得$Ax=0$成立。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]
\left(\begin{array}{l}
\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
8 \\
2 \\
-1 \\
0
\end{array}\right]
\end{array}\right)=0
$$

同理，对于第四列来说，我们可以使用第一和第二列的组合形式来表达，得出另一套解，使得$Ax=0$。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 8 & -4 \\
0 & 1 & 2 & 12
\end{array}\right]
\left(\begin{array}{l}
\lambda_{2}\left[\begin{array}{l}
-4 \\
12 \\
0 \\
-1
\end{array}\right]
\end{array}\right)=0
$$

现在，我们可以把之前的特殊解与刚得出的两套解相组合，得出最终解，这个解也就是我们所说的通用解了。

$$
x \in R^{4}: x=\left[\begin{array}{c}
42 \\
8 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{1}\left[\begin{array}{c}
8 \\
2 \\
-1 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{c}
-4 \\
12 \\
0 \\
-1
\end{array}\right], \lambda_{1}, \lambda_{2} \in R
$$

我来总结一下寻找通用解的过程，这个过程分为三步：

1. 我们要寻找一个特殊解，使得$Ax=b$；
2. 找到$Ax=0$的所有解；
3. 组合第一和第二步的解形成通用解。

看到了这里，你有没有发现有些奇怪呢？或者说，有没有觉得哪里有点别扭？是的，好像有点太顺利了。那是因为这个线性方程组比较特别，第一列和第二列是由1和0组成的。所以，我们只通过观察就能得出特殊解和通用解。

然而，你不可能每次都行大运，就像我们在现实中碰到的这类线性方程组，一般都比这个复杂得多。不过不要慌，有一个算法可以来帮助我们转换任意线性方程组，形成类似的特殊形式，这个算法叫做**高斯消元法**。

高斯消元法的核心就是**线性方程组的初等变换**，于是，我们可以通过高斯消元法，得到围绕初等变换形成的简单矩阵表达形式，接下来我们就可以运用之前的三个步骤来寻找通用解了。

初等变换的一般形式

既然高斯消元法的核心就是线性方程组的初等变换，那为了方便你使用高斯消元法，我就有必要来讲一讲初等变换的一般形式有哪些：

1. 两个等式的交换，也就是矩阵行交换；
2. 一个等式，或者说矩阵行乘以一个实数常量；
3. 两个等式相加，或者说矩阵的两行相加。

道理是这样的道理，那我们通过一个例子来看看，究竟该怎么做线性方程组的初等变换。假设a属于实数，现在我们试着来寻找下面这个线性方程组的所有解。我把这个过程细细地拆解为11个步骤，建议你仔细看过并理解后，再进入下一阶段的学习。

$$
\left\{\begin{array} {c}
-2 x_{1}+4 x_{2}-2 x_{3}-x_{4}+4 x_{5}=-3 \\
4 x_{1}-8 x_{2}+3 x_{3}-3 x_{4}+x_{5}=2 \\
x_{1}-2 x_{2}+x_{3}-x_{4}+x_{5}=0 \\
x_{1}-2 x_{2}-3 x_{4}+4 x_{5}=a
\end{array}\right.
$$

1.我们要把这个线性方程组转换成矩阵的表达形式，$Ax=b$。

$$
\left[\begin{array} {ccccccc}
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
4 & -8 & 3 & -3 & 1 & \mid & 2 \\
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

2.接着我们来交换第一和第三行。

$$
\left[\begin{array} {ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
4 & -8 & 3 & -3 & 1 & \mid & 2 \\
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

注意，你知道我们为什么选择第一行和第三行交换吗？其实，这是为了便于计算。而具体交换哪一行是有个小技巧的，如果某行的第一个元素有1，我们就可以把这一行移到第一行。

3.我们以第一行为基础，开始执行乘和加变换，将第一行乘以-4的结果和第二行相加，从而获得了下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array} {ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
-2 & 4 & -2 & -1 & 4 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

4.然后，我们用同样的方法，将第一行乘以2的结果，再和第三行相加，得到了下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array} {ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
1 & -2 & 0 & -3 & 4 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

5.以此类推，我们将第一行乘以-1的结果，和第四行相加，继续获得新矩阵。

$$
\left[\begin{array} {ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & -1 & -2 & 3 & \mid & a
\end{array}\right]
$$

6.将第二行乘以-1的结果，和第四行相加，得到下面这样的结果。

$$
\left[\begin{array} {ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & a-2
\end{array}\right]
$$

7.将第三行乘以-1的结果，和第四行相加。

$$
\left[\begin{array} {ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -3 & \mid & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & \mid & -3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & a+1
\end{array}\right]

8.第二行乘以-1，第三行乘以$-\frac{1}{3}$。

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & \mid & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 3 & \mid & -2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \mid & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & a+1
\end{array}\right]
$$

9.现在，这个矩阵就是一个简单形式的矩阵，也叫做**行阶梯形矩阵**（Row-Echelon Form，REF）。

$$
\left\{\begin{array}{r}
x_{1}-2 x_{2}+x_{3}-x_{4}+x_{5}=0 \\
x_{3}-x_{4}+3 x_{5}=-2 \\
x_{4}-2 x_{5}=1 \\
0=a+1
\end{array}\right.
$$

一个矩阵成为行阶梯形矩阵需满足两个条件：

- 如果它既有零行，又有非零行，则零行在下，非零行在上；
- 如果它有非零行，则每个非零行的第一个非零元素所在列号自上而下严格单调上升，正如之前的这个矩阵，列号自上而下是1、3、4，是严格单调上升的。

10.你可以看出，只有在$a=-1$的情况下，这个线性方程组才有解，特殊解是$\left[\begin{array}{lllll}2 & 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right]^{\mathrm{T}}$。

11.最后，我们得出这个线性方程组的通用解，如下图所示。

$$
x \in R^{5}: x=\left[\begin{array}{c}
2 \\
0 \\
-1 \\
1 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
2 \\
1 \\
0 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{c}
2 \\
0 \\
-1 \\
2 \\
1
\end{array}\right], \lambda_{1}, \lambda_{2} \in R
$$

注意，这里有一个概念很重要，那就是**主元**。主元就是在矩阵消元过程中，每列要保留的非零元素，我们可以用它把该列其他元素消去。在阶梯型矩阵中，每个非零行第一个非零元素就是主元。

拿之前的第8步计算后的结果来举例，第一行的第一个元素1就是主元，第二行第三个元素1是主元，第三行的第四个元素1也是主元。

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & -2 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right.
$$

对应行阶梯形矩阵主元的变量叫做基本变量，而其他的变量叫做自由变量，这个例子中，x_{1}、x_{3}、x_{4}就是基本变量，x_{2}、x_{5}则是自由变量。使用行阶梯形矩阵能更简单地得出特殊解，所以我们可以使用主元列来表达线性方程组：

$$
b=\sum_{i=1}^{P} \lambda_{i} \mathrm{p}_{i}, i=1, \ldots, P
$$

在之前的例子中，我们使用主元列来表达成下面这样的矩阵形式：

$$
\lambda_{1}\left[\begin{array}{l}
1 \\
0 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{2}\left[\begin{array}{l}
1 \\
1 \\
0 \\
0
\end{array}\right]+\lambda_{3}\left[\begin{array}{c}
-1 \\
-1 \\
1 \\
0
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}
0 \\
-2 \\
1 \\
0
\end{array}\right]
$$

于是，我们最终得出 $\lambda_{3}=1$，$\lambda_{2}=-1$，$\lambda_{1}=2$，分别对应于x_{4}、x_{3}、x_{1}。不要忘了，对于非主元列，我们已经隐式地把系数设置成了0，所以这个线性方程组的特殊解是$x=\left[\begin{array}{lllll}2 & 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right]^{\mathrm{T}}$。

简化行阶梯形矩阵

这里我们再引入一个概念，简化行阶梯形矩阵，因为引入简化行阶梯形矩阵对于线性方程组的求解来说会更简单。其实，高斯消元法的核心就是通过初等变换，把线性方程组转换成简化行阶梯形矩阵。那么一个方程组是简化行阶梯形矩阵，必须满足哪几个条件呢？

1. 这个方程组必须是行阶梯形矩阵；
2. 方程组的每一个主元都是1；
3. 主元在它的列中是唯一的非0元素。

现在，我们再通过一个实例，看看该如何通过高斯消元法计算一个矩阵的逆矩阵。设矩阵A如下图：

$$

A=\left[\begin{array}{llll}
1 & 0 & 2 & 0 \\\
1 & 1 & 0 & 0 \\\
1 & 2 & 0 & 1 \\\
1 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right]
$$

首先，我们形成A的增广矩阵（具体方法参见上一节）。
$$
\left[\begin{array}{llllllll}
1 & 0 & 2 & 0 & \mid & 1 & 0 & 0 & 0 \\\
1 & 1 & 0 & 0 & \mid & 0 & 1 & 0 & 0 \\\
1 & 2 & 0 & 1 & \mid & 0 & 0 & 1 & 0 \\\
1 & 1 & 1 & 1 & \mid & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

其次，使用我们前面刚刚讲过的高斯消元法计算出简化行阶梯形矩阵。

$$
\left[\begin{array}{ccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \mid & -1 & 2 & -2 & 2 \\\
0 & 1 & 0 & 0 & \mid & 1 & -1 & 2 & -2 \\\
0 & 0 & 1 & 0 & \mid & 1 & -1 & 1 & -1 \\\
0 & 0 & 0 & 1 & \mid & -1 & 0 & -1 & 2
\end{array}\right]
$$

最后，我们就得到A的逆矩阵，如下图所示。

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{cccc}
-1 & 2 & -2 & 2 \\\
1 & -1 & 2 & -2 \\\
1 & -1 & 1 & -1 \\\
-1 & 0 & -1 & 2
\end{array}\right]
$$

接下来，我们只要使用公式$A A^{-1}=I$ 就可以对结果进行验证了。

更多解线性方程组的方法

到目前为止，相信你已经了解了如何解线性方程组，包括特殊解和通用解，以及如何使用高斯消元法来解线性方程组。最后，我再总结一些解方法来作为你的知识扩展。

第一个方法，假设一个矩阵A是方阵（行数与列数相等的矩阵），并且可逆，$Ax=B$，那x解就可以写成$x=A^{-1}B$，但如果A矩阵不可逆，也不是方阵，那我们就只能使用下面这个变换来求x解了。

$$Ax=B⇔A^{T}Ax=A^{T}B⇔x=(A^{T}A)^{-1}A^{T}B$$

其中，矩阵A的转置矩阵和A相乘的逆矩阵，再和A的转置矩阵相乘，我们把它叫做穆尔彭罗斯伪逆矩阵（Moore-Penrose pseudo inverse），简称伪逆。

$$(A^{T}A)^{-1}A^{T}$$

这个方法有两个弊端：第一，矩阵乘和逆矩阵的计算太复杂；第二，数值精确度不高。因此，从实践角度来说，我一般不推荐使用。

第二个方法是高斯消元法。高斯消元法是非常直观的，它在很多计算中都起到了关键的作用，比如：

1. 计算行列式；
2. 检查向量是否是线性独立的；
3. 计算矩阵的逆矩阵；
4. 计算矩阵的秩；
5. 决定向量空间的基。

但当高斯消元法面对百万、千万级别的变量时，就捉襟见肘了。而这类级别的计算才是我们在实践中经常会遇到的，因此从实践角度来说，我也一般不推荐使用。因为高斯消元法属于直接法，直接法是经历有限次的运算得到方程组精确解的方法。但是，学习直接法是有意义的，虽然直接法在实际工作中不常用，但是它也能处理一些日常小问题，更重要的是，它稳固了我们进一步学习其它方法的基础。

我要讲的第三种方法，就是与直接法对应的间接法了。在实践中，线性方程组的求解都是间接的，也就是运用迭代法。

迭代法是采用极限过程，用线性方程组的近似解逐步逼近精确解的方法。所以，迭代法的关键在于每次迭代残余错误的减少，以及如何能够收敛到解。常见的迭代法有两类，定常迭代法（Stationary iterative method）和Krylov子空间方法（我会在应用篇中讲解）。

> 定常迭代法：理查德森迭代法（Richardson method）、雅可比方法（Jacobi method）、Gauß-Seidel方法、逐次超松弛法（Successive over-relaxation method，简称SOR）。
> Krylov子空间方法：共轭梯度法（Conjugate gradient）、广义极小残余算法（Generalized minimal residual）、双共轭梯度法（Biconjugate gradient）。

这里提到的几种迭代法都是在实践中比较常用的，也是计算机编程中经常实现的算法，但由于迭代法更多属于微分和极限领域，所以这里就不详细介绍了，我会在线性代数应用篇的"数值线性代数"那节课中再做讲解。

如果在课程内容结束后，你还有余力学习更多的内容，这里我先推荐两本书给你作参考，一本是《Introduction to Numerical Analysis》，另一本是《Linear Algebra》。这两本书里面都有进一步地讲解了线性方程组的迭代法求解的内容。

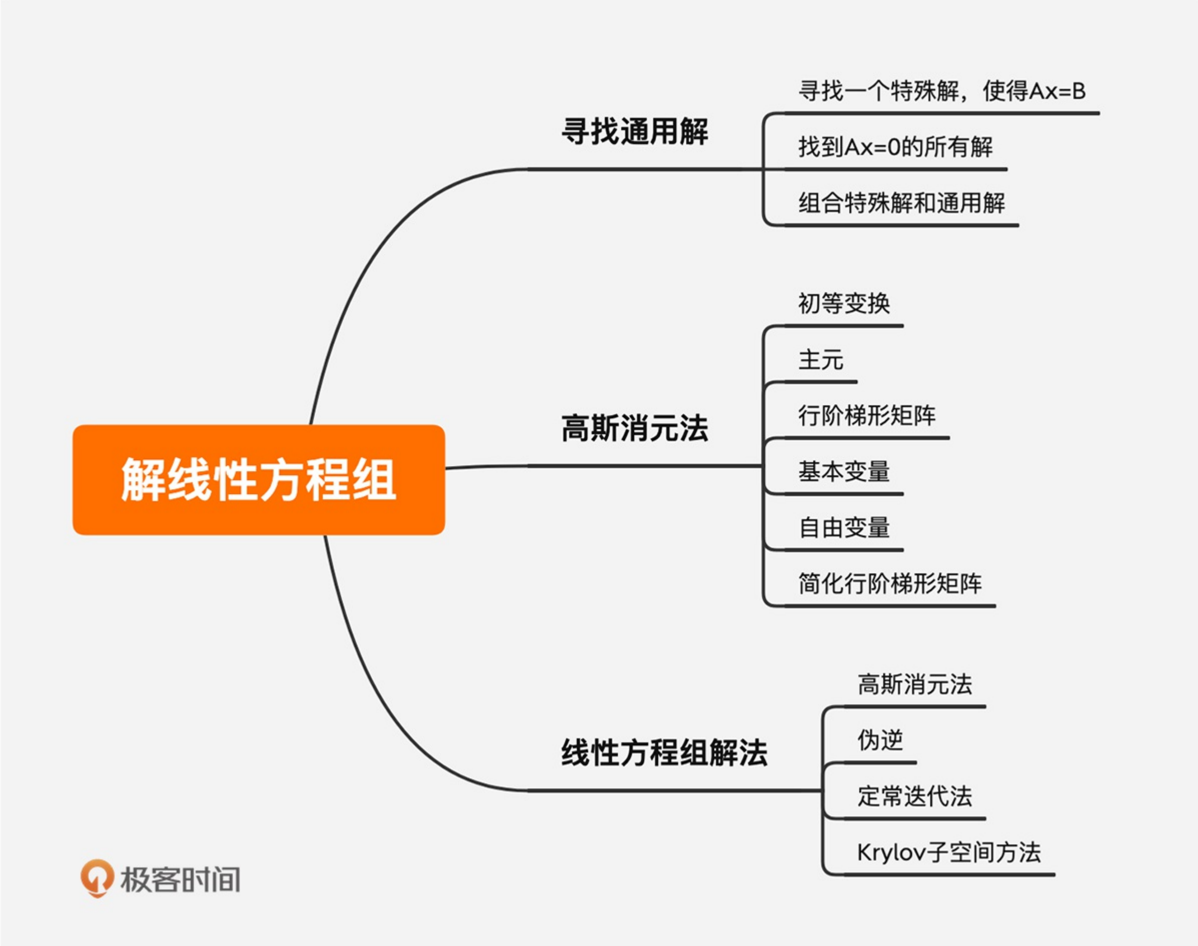
> 1.《Introduction to Numerical Analysis》
> 作者：Stoer, Josef, Bulirsch, R.
> 2002年出版
> 2.《Linear Algebra》
> 作者：Liesen, Jörg, Mehrmann, Volker
> 2015年出版

本节小结

好了，到这里解线性方程组这一讲就结束了，最后我再总结一下前面讲解的内容。

首先，我用一个简单的线性方程组，通过直接观察的方法来计算这个方程组的特殊解和通用解，接着通过实例详细地介绍了高斯消元法，最后我给出了一些在实践中常用的线性方程组解方法。只有弄清楚这些基础知识的本质，你才能更进一步，去了解其他计算方法。

线性方程组的求解已经成为了世界上最快计算机的测试标准，因为通过矩阵运算，计算机的并行计算能力暴露无遗。希望你能够在这些基础之上，阅读我推荐的两本书，并且把这些方法运用到实践中，特别是机器学习，因为机器学习也用到了很多迭代方法。



线性代数练习场

练习时刻到了，今天的练习题比较简单，请你用高斯消元法求下面的线性方程组。

$$
\left\{\begin{array}{c}
x_{1}+x_{2}-2 x_{3}-x_{4}=-1 \\
x_{1}+5 x_{2}-3 x_{3}-2 x_{4}=0 \\
3 x_{1}-x_{2}+x_{3}+4 x_{4}=2 \\
-2 x_{1}+2 x_{2}+x_{3}-x_{4}=1
\end{array}\right.
$$

欢迎在留言区和部落里晒出你的运算过程和结果，留下你的学习痕迹。如果你有所收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。