你好，我是朱维刚。欢迎你跟我一起重学线性代数！

今天我们来聊一聊“线性空间”。在“基本概念”那一节课中，我讲到了向量，你也看到了，线性方程组是能够通过矩阵或向量来表达的。那为什么我们还要学习线性空间呢？

说到线性空间，其实你可以通过“空间”这个词把线性空间和我们的生活做个类比。就像我们生活在三维世界中，在这个空间中，一切物质都是运动的，而运动也是有一定规律的。这么来看的话，空间其实就是一个具有实际意义的集合，其中包含了**对象**和**运动**。

把这个理解平移到线性空间也是一样的，向量就是对象，如果把**向量**看成是**线性空间中的点**，那**向量的变换**就是**点在空间中的运动**。所以，线性空间也是一个集合，它的意义在于，赋予了向量生命和活力，只有掌握了线性空间，我们才能真正在实际运用中有的放矢。因为所有的活动都要在这个空间中发生，比如：线性空间中用到的傅立叶变换。

组（群）

还是老样子，我们要先从学习线性空间会用到的基础知识开始讲起。

我们先来讲一下“组”，组也可以叫成大家习惯的“群”（以下均以“组”称呼）。说到“组”，它其实是一个通用的概念，和线性空间没有什么关系，但我之所以要先说组，是因为组（群）和空间是类似的，也是集合，性质也差不多，如果你了解了组，就更容易理解线性空间了。而且，组在计算机科学中是得到了广泛应用的，特别是在计算机密码学和图形图像处理中。

说了这么多，“组”到底是什么呢？组，其实就是包含一系列元素的集合，在对这些集合元素实施某类运算后，这个集合仍然保持着封闭性。可能这么说你会有些疑惑，我还是通过数学方法来定义组，可能会让你的思路更加清晰一些。

我们先来定义一个集合G和集合上的某一类运算，比如：乘$\otimes$，使得 $G \otimes G$ 的结果还是属于G，如果我们要$G:=(G, \otimes)$是一个组，则需要满足以下这些条件：

1.G在$\otimes$运算中是封闭的，也就是：$\forall x, y \in G: x \otimes y \in G$。
2. 满足结合律，也就是：$\forall x, y, z \in G:(x \otimes y) \otimes z=x \otimes(y \otimes z)$。
3. 恒等元素（或者叫做中性元素）e，满足：$\exists \mathrm{e} \in G, \forall x \in G: x \otimes e=x, e \otimes x=x$，这里的恒等元素e在一般数字中你可以认为是$1$，而在矩阵中就可以认为是单位矩阵。
4. 有x的逆元素y，使得：$\forall \mathrm{e} \in G, \exists x \in G: x \otimes y=e, y \otimes x=e$，其中$e$是恒等元素。

再补充一点，如果满足$\forall x, y \in G: x \otimes y=y \otimes x$，则$G:=(G, \otimes)$就叫作交换组。

现在我们来做个测试，看看你是否理解了组的定义。

一个$n×n$的实数矩阵A和它的乘法运算是一个组吗？通过符号表达就是：$\left(A^{n \times n}, \quad \cdot\right)$。

想要知道这个问题的答案，我们就需要用前面满足组的这几个条件来分析一下。

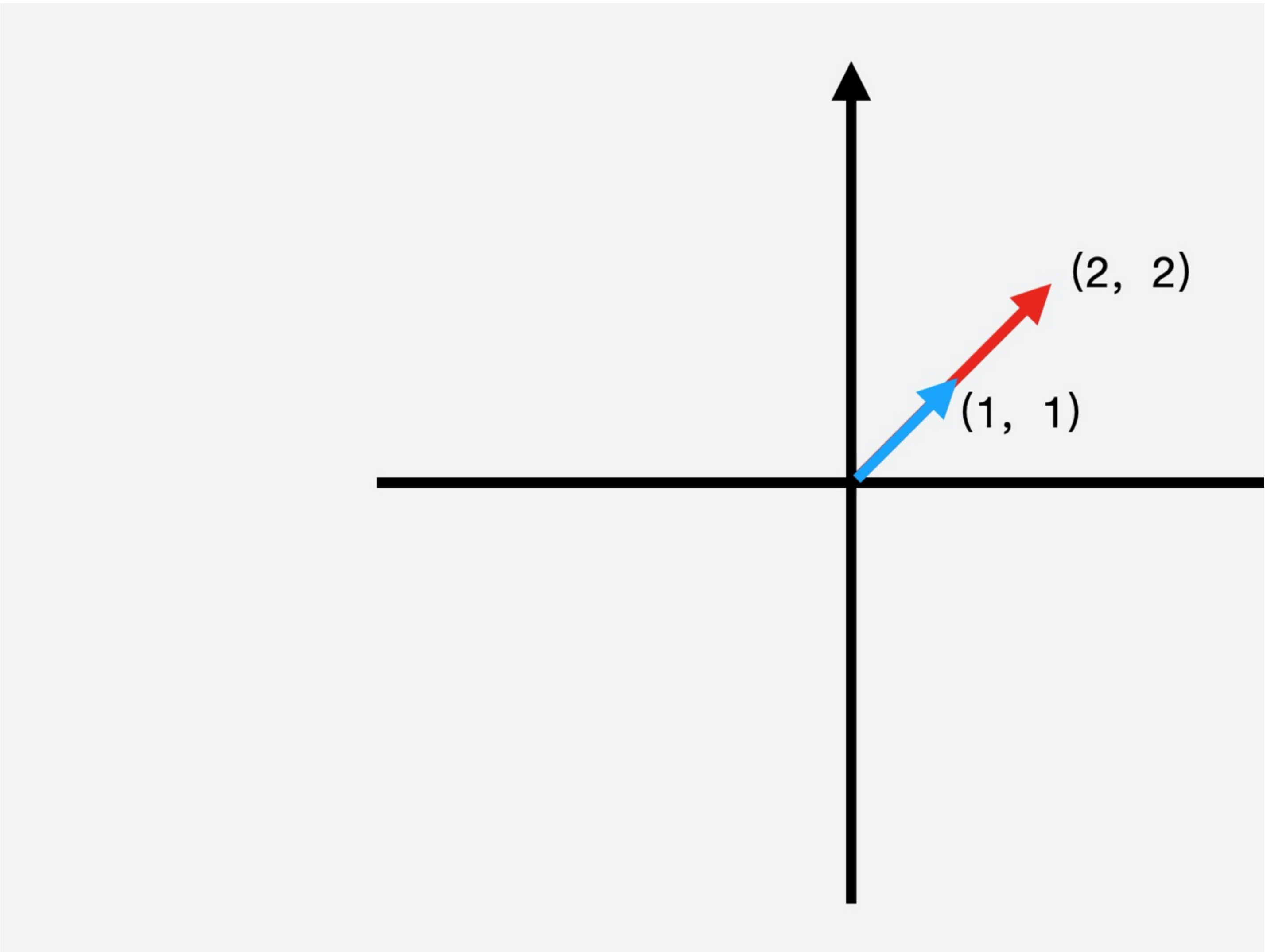
首先，是封闭性和结合律，从矩阵乘的定义就能直接看出来，它们是满足的；其次，我们来看恒等元素，单位矩阵就是矩阵元素，也满足组条件；最后，我们看看逆元素，假设A矩阵的逆矩阵A^{-1}存在，那很明显，满足$AA^{-1}=I$，这里I就是恒等元素。

于是，我们可以说$\left(A^{n \times n}, \quad \cdot\right)$是一个组，而矩阵乘不符合交换律，所以这个组并不是交换组。

向量空间

如果我们在“组”的基础上再扩展一下，就能够很顺利地来到“线性空间”。说起线性空间，它也叫作向量空间，它在一些书本和网络上的解释都是比较晦涩难懂的，但如果我们在“组”的基础上来解释它，你应该会比较容易理解了。

刚才我们说的组只包含了某一类运算，这类运算是在集合元素上的内部运算，我们把它定义为加$（+）$运算，现在再引入一类外部运算，标量乘$（·）$。于是，你可以想象一下，我们可以把内部运算看成是加法，把外部运算看成是“缩放”，因为标量乘就是一个标量和向量相乘。如果从二维坐标系的角度来看一下，点$(1, 1)$和标量2相乘就是$(2, 2)$，这个就是放大效果。



在通过“组”来认识向量空间后，再从数学角度去看向量空间的定义，你应该就能完全理解了。

一个实数向量空间V是一个集合，它包含了两类运算，一类是加，一类是标量乘，而且运算都满足V的封闭性，也就是说，V中元素的运算结果还是属于V。

$$
\begin{array}{l}
+: V+V \rightarrow V \\
\cdot : \lambda \cdot V \rightarrow V
\end{array}
$$

这个向量空间可以表示成$V:=(V,+,\cdot)$，其中：

1.向量空间V的$(V,+)$是一个交换组。
2.V满足分配律：$\forall \lambda \in R, x, y \in V: \lambda \cdot(x+y)=\lambda \cdot x+\lambda \cdot y$；以及$\forall \lambda, \varphi \in R, x \in V:(\lambda+\varphi) \cdot x=\lambda \cdot x+\varphi \cdot x$。
3.V外部运算满足结合律：$\forall \lambda, \varphi \in R, x \in V: \lambda \cdot(\varphi \cdot x)=(\lambda \cdot \varphi) \cdot x$。
4.V外部运算的恒等元素满足：$\forall x \in V: 1 \cdot x=x$。

在向量空间V中的元素x是向量，向量空间加运算$(V,+)$的恒等元素是零向量$0=\left[\begin{array}{lll}0, & \ldots & , 0\end{array}\right]^{T}$。这里的加运算是内部运算，也叫做向量加，元素$λ$属于实数，叫做标量，外部运算乘$·$是标量乘。

好了，我给出了向量空间的一般描述和数学定义，如果你还是有一些不理解，也没有关系，我再举两个例子来加深你对向量空间的理解。

例1：进一步理解向量加和标量乘

对于向量空间的向量加和标量乘：我们定义一个实数向量空间R^{n}，n表示向量元素：

- “加”定义为向量之间的加：$x+y=\left(x_{1}, \ldots, x_{n}\right)+\left(y_{1}, \ldots, y_{n}\right)=\left(x_{1}+y_{1}, \ldots, x_{n}+y_{n}\right)$。 加的结果还是属于向量空间$R^{n}$。

- 标量乘就是向量乘标量：$\lambda x=\lambda\left(x_{1}, \ldots, x_{n}\right)=\left(\lambda x_{1}, \ldots, \lambda x_{n}\right)$。
  标量乘的结果还是属于向量空间R^{n}。

例2：进一步理解矩阵加和标量乘

对于向量空间的矩阵加和标量乘：我们定义一个实数向量空间$R^{m×n}$，用$m×n$表示m行n列矩阵元素：

我们把“加”定义为矩阵之间的加。加的结果还是属于向量空间$R^{m×n}$。

$$
A+B=\left[\begin{array}{ccc}
a_{11}+b_{11} & \ldots & a_{1 n}+b_{1 n} \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
a_{m 1}+b_{m 1} & \ldots & a_{m n}+b_{m n}
\end{array}\right]
$$

而标量乘就是矩阵乘标量。标量乘的结果还是属于向量空间$R^{m×n}$。

$$
\lambda A=\left[\begin{array}{ccc}
\lambda a_{11} & \ldots & \lambda a_{1 n} \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\lambda_{m 1} & \ldots & \lambda \dot{a}_{m n}
\end{array}\right]
$$

到这里，相信你应该了解了向量空间的基本概念，接下来这一讲的重头戏就要来了，它就是向量子空间。

向量子空间

为什么说向量子空间是重头戏？那是因为它在机器学习中的地位相当重要，被用在了**降维算法**中。这里我会分两步来讲解，先讲向量子空间的基本概念，再通过一个机器学习的例子，能让你更了解它，并灵活运用在工作实践中。

什么是向量子空间？

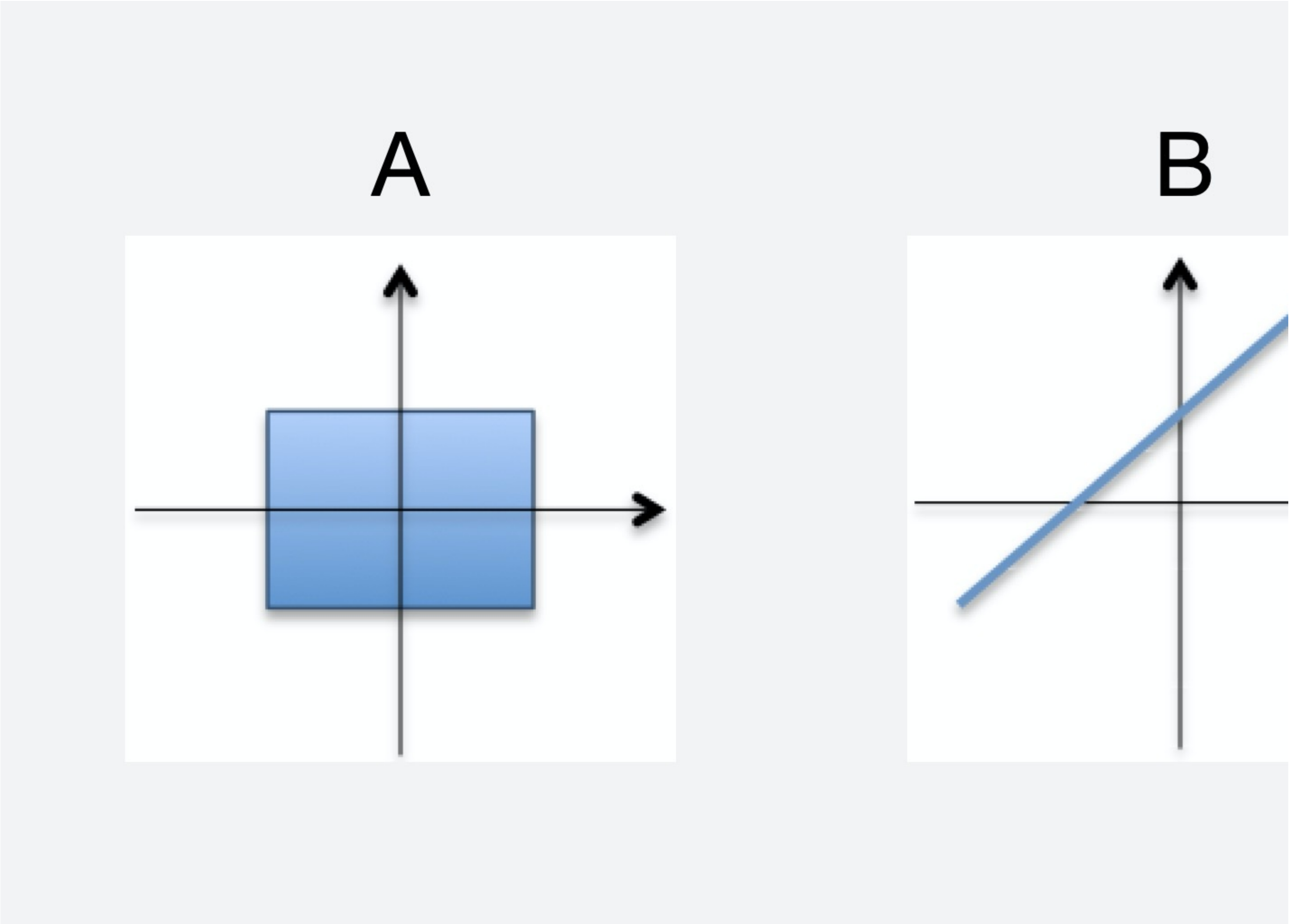
从“子”这个字，我们可以很直观地想到，它是被包含在向量空间中的，事实也确实如此。

已知$V:=(V,+,\cdot)$是一个向量空间，如果$U \subseteq V, U \neq 0$，那么$U:=(U,+,\cdot)$就是V的向量子空间，或者叫做线性子空间。向量子空间U自然继承V的许多属性，其中包括：交换组的属性、分配律、结合律和中性元素。除此以外，要判断U是不是向量子空间，我们还需要这两个条件：

1.$U \neq 0$，但$0 \in U$。
2. U的封闭性满足外部运算：$\forall \lambda \in R, \forall x \in U: \lambda x \in U$，同时满足内部运算：$\forall x, y \in U: x+y \in U$。

介绍完向量子空间基本概念后，我们一起来通过一个例子来巩固一下所学的知识，看看你是否已经掌握了向量子空间。

请你观察下面列举的A、B、C三张图像，里面有 R^{2}的向量子空间吗？



这里我不会给出答案，你可以自己思考一下，友情提醒：A、B、C中只有一个是向量子空间。

机器学习中的向量子空间

结合实践来看向量子空间的时候到了。在机器学习中，直接计算高维数据困难重重，一方面是数据处理和分析困难，使得数据可视化几乎不可能；另一方面是因为数据存储量太大，计算要付出的代价太高。

所以，我们要从向量空间中去除冗余数据，形成向量子空间。这样数据存储量就被极大地压缩了，处理和分析数据也简单了很多。因为高维数据中其实有很多维是冗余的，它们可以被其它维组合表示，也就是“降维”。

降维就是利用结构化和相关性，在尽量保证信息不损失的情况下，转换数据表现形式，让数据更“紧凑”。换句话说，你可以把降维看成是数据压缩技术，类似图像的jpeg和音频的MP3压缩算法。或者简单地说，降维就是将数据投射到一个低维子空间，比如：三维数据集可以降成二维，也就是把数据映射到平面上。

机器学习中运用最多的降维算法就是主成分分析，简称PCA（Principal Component Analysis），也叫做卡尔胡宁-勒夫变换（Karhunen-Loeve Transform）。它是一种用于探索高维数据结构的技术，已经存在超过100年了，但至今仍然广泛被使用在数据压缩和可视化中。

我们来看一个例子：假设你负责的是机器学习算法，而你的应用场景是车辆的牌照识别，也就是OCR（Optical Character Recognition）光学字符识别。在这个场景中，大街上的摄像头必须实时捕捉运动车辆的牌照，一旦发现问题车辆就需要快速识别牌照，并移交交警监管部门来做进一步处理。你会怎么处理呢？

牌照被拍下后就是图片，为了减小图像原始数据量，减少后续处理时的计算量，这些图片首先需要进行经过灰度处理（牌照只需要数字，不需要对彩色图像的RGB三个分量都进行处理），处理后就会变成类似这样的形式：

假定每个数字是一个$28*28$尺寸的灰度图片，包含784个像素，那每张灰度数字图片就是一个向量，这个向量就有784个维度，可以表示成$x \in R^{784}$，而你的样本库少说也有几十万个样本数据，如果按一般的方法是不可能做到实时识别的。所以，这样的场景就需要使用PCA来压缩数据，进行大幅度降维。

这里我们简单一些，从二维的角度来看看PCA。在PCA中，最关键的就是寻找数据点x_{n}的相似低维投影y_{n}，而y_{n}就是子向量空间。

考虑R^{2}和它的两个基，$e_{1}=[1,0]^{T}$、$e_{2}=[0,1]^{T}$，$x \in R^{2}$能够表示成这两个基的线性组合（“基”会在第7节课中详细介绍）。

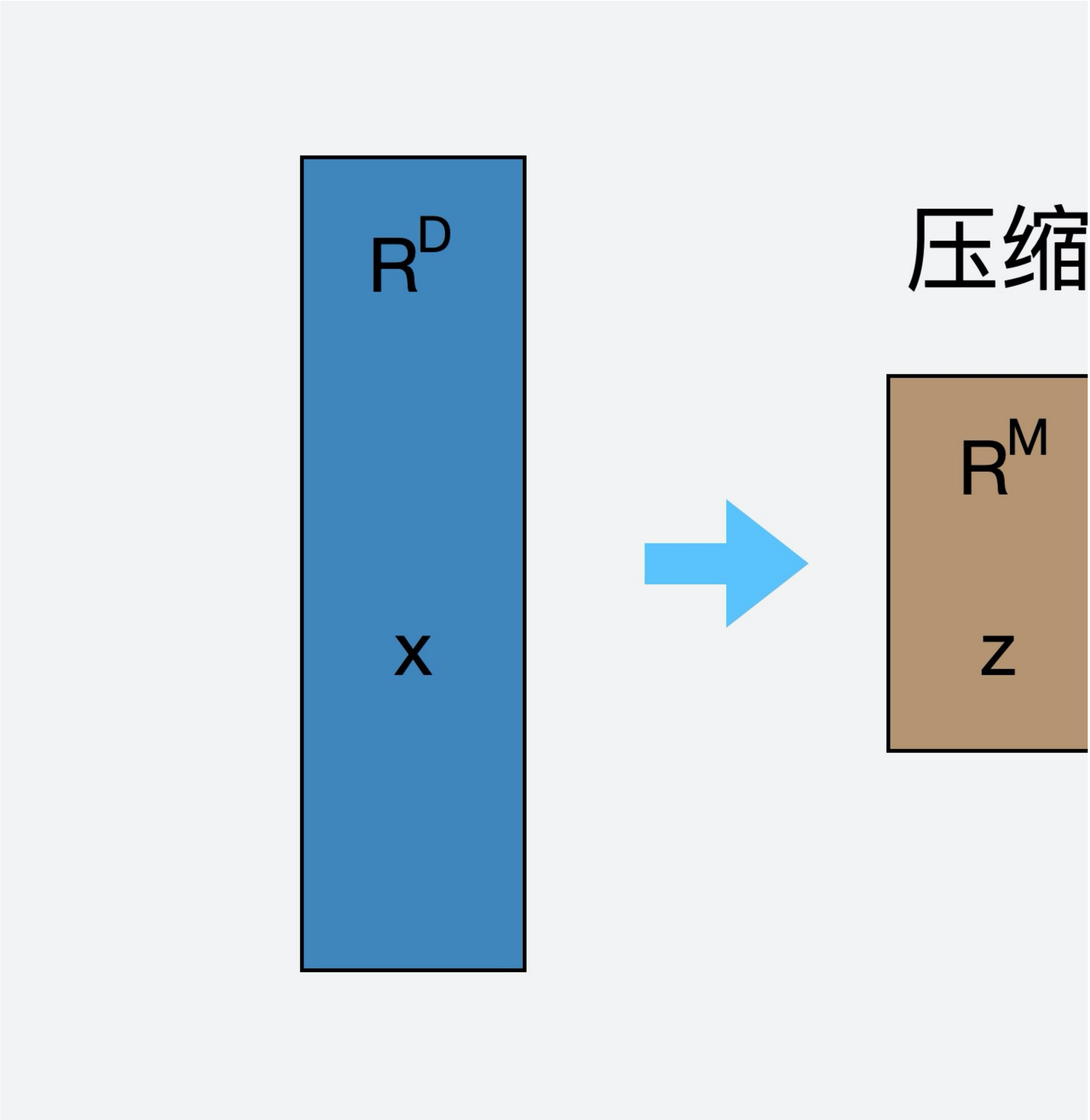
$$
\left[\begin{array}{l}
5 \\
3
\end{array}\right]=5 e_{1}+3 e_{2}
$$

于是，相似低维投影y_{n}就可以表示成下面这种形式。

$$
y_{n}=\left[\begin{array}{l}
0 \\
z
\end{array}\right] \in R^{2}, z \in R
$$

同时，y_{n}也可以写成这样的形式：$y_{n}=0 e_{1}+z e_{2}$。

这里的z就是我们要找的值，而y_{n}就是一个向量子空间U，它的维度是一维。最后，我们再通过下图来更直观地说明一下PCA的过程。



图的左边是原始向量空间x，经过压缩后，我们找到了子向量空间z，z经过重构后，形成了最终的向量空间y，y还是属于原来的向量空间，但y却拥有比x更低的维度表现。

从数学的角度看，我们其实就是在寻找x和z之间的线性关系，使得$z=B^{T}x$，以及$y=Bz$，其中B是矩阵。如果我们从数据压缩技术方向来看就更容易理解了，图中的左边箭头是编码过程，也就是压缩，右边的箭头是解码过程，也就是映射，而矩阵B就是把属于R^{M}向量空间的低维的z，映射回原来的向量空间R^{D}。同理，矩阵B^{T}就是把属于原来R^{D}向量空间的高维x压缩成低维的z。

本节小结

好了，到这里线性空间这一讲就结束了，最后我再总结一下前面讲解的内容。

今天的知识很重要，实践中都是围绕向量空间展开的，也就是说向量空间是实践的基本单位，你也一定要掌握子向量空间，因为现实中数据都是高维度的，从向量空间降维后找到子向量空间，这样就能大大提高数据运算和分析的效率。

再次特别提醒：这一讲非常重要，因为后面几讲都是围绕向量空间展开的，如果你哪里没看懂，一定要多看几次，确保完全明白了。有任何问题，你也可以随时在留言区向我提问。

线性代数练习场

之前我讲了一个现实的向量空间降维场景：车辆的牌照识别，这里，我们通过另一个现实场景，来练习一下向量空间降维的思维。

目前市场上语音识别的应用有很多，比如：天猫精灵、苹果Siri、小爱等等，而语音识别涉及的技术有很多，有语言建模、声学建模、语音信号处理等等。在语音信号处理中，语音声波通过空气传播，并被麦克风捕获，麦克风将压力波转换为可捕获的电活动。我们对电活动进行采样，用以创建描述信号的一系列波形采样。

采样是数据收集的过程，数据收集后需要做数据预处理，而预处理的关键一步就是特征提取，现在请你从"特征提取"的方向上思考下，有哪些和目前所学到的数学知识有关？

> 友情提醒：特征提取就是数字化过程，也是向量化后形成向量空间的过程。

欢迎在留言区写出你的思考，我会及时回复。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我一起重学线性代数！

今天我们来聊一聊“线性空间”。在“基本概念”那一节课中，我讲到了向量，你也看到了，线性方程组是能够通过矩阵或向量来表达的。那为什么我们还要学习线性空间呢？

说到线性空间，其实你可以通过“空间”这个词把线性空间和我们的生活做个类比。就像我们生活在三维世界中，在这个空间中，一切物质都是运动的，而运动也是有一定规律的。这么来看的话，空间其实就是一个具有实际意义的集合，其中包含了**对象**和**运动**。

把这个理解平移到线性空间也是一样的，向量就是对象，如果把**向量**看成是**线性空间中的点**，那**向量的变换**就是**点在空间中的运动**。所以，线性空间也是一个集合，它的意义在于，赋予了向量生命和活力，只有掌握了线性空间，我们才能真正在实际运用中有的放矢。因为所有的活动都要在这个空间中发生，比如：线性空间中用到的傅立叶变换。

组（群）

还是老样子，我们要先从学习线性空间会用到的基础知识开始讲起。

我们先来讲一下“组”，组也可以叫成大家习惯的“群”（以下均以“组”称呼）。说到“组”，它其实是一个通用的概念，和线性空间没有什么关系，但我之所以要先说组，是因为组（群）和空间是类似的，也是集合，性质也差不多，如果你了解了组，就更容易理解线性空间了。而且，组在计算机科学中是得到了广泛应用的，特别是在计算机密码学和图形图像处理中。

说了这么多，“组”到底是什么呢？组，其实就是包含一系列元素的集合，在对这些集合元素实施某类运算后，这个集合仍然保持着封闭性。可能这么说你会有些疑惑，我还是通过数学方法来定义组，可能会让你的思路更加清晰一些。

我们先来定义一个集合G和集合上的某一类运算，比如：乘$\otimes$，使得 $G \otimes G$ 的结果还是属于G，如果我们要$G:=(G, \otimes)$是一个组，则需要满足以下这些条件：

1.G在$\otimes$运算中是封闭的，也就是：$\forall x, y \in G: x \otimes y \in G$。
2. 满足结合律，也就是：$\forall x, y, z \in G:(x \otimes y) \otimes z=x \otimes(y \otimes z)$。
3. 恒等元素（或者叫做中性元素）e，满足：$\exists \mathrm{e} \in G, \forall x \in G: x \otimes e=x, e \otimes x=x$，这里的恒等元素e在一般数字中你可以认为是$1$，而在矩阵中就可以认为是单位矩阵。
4. 有x的逆元素y，使得：$\forall \mathrm{e} \in G, \exists x \in G: x \otimes y=e, y \otimes x=e$，其中$e$是恒等元素。

再补充一点，如果满足$\forall x, y \in G: x \otimes y=y \otimes x$，则$G:=(G, \otimes)$就叫作交换组。

现在我们来做个测试，看看你是否理解了组的定义。

一个$n×n$的实数矩阵A和它的乘法运算是一个组吗？通过符号表达就是：$\left(A^{n \times n}, \quad \cdot\right)$。

想要知道这个问题的答案，我们就需要用前面满足组的这几个条件来分析一下。

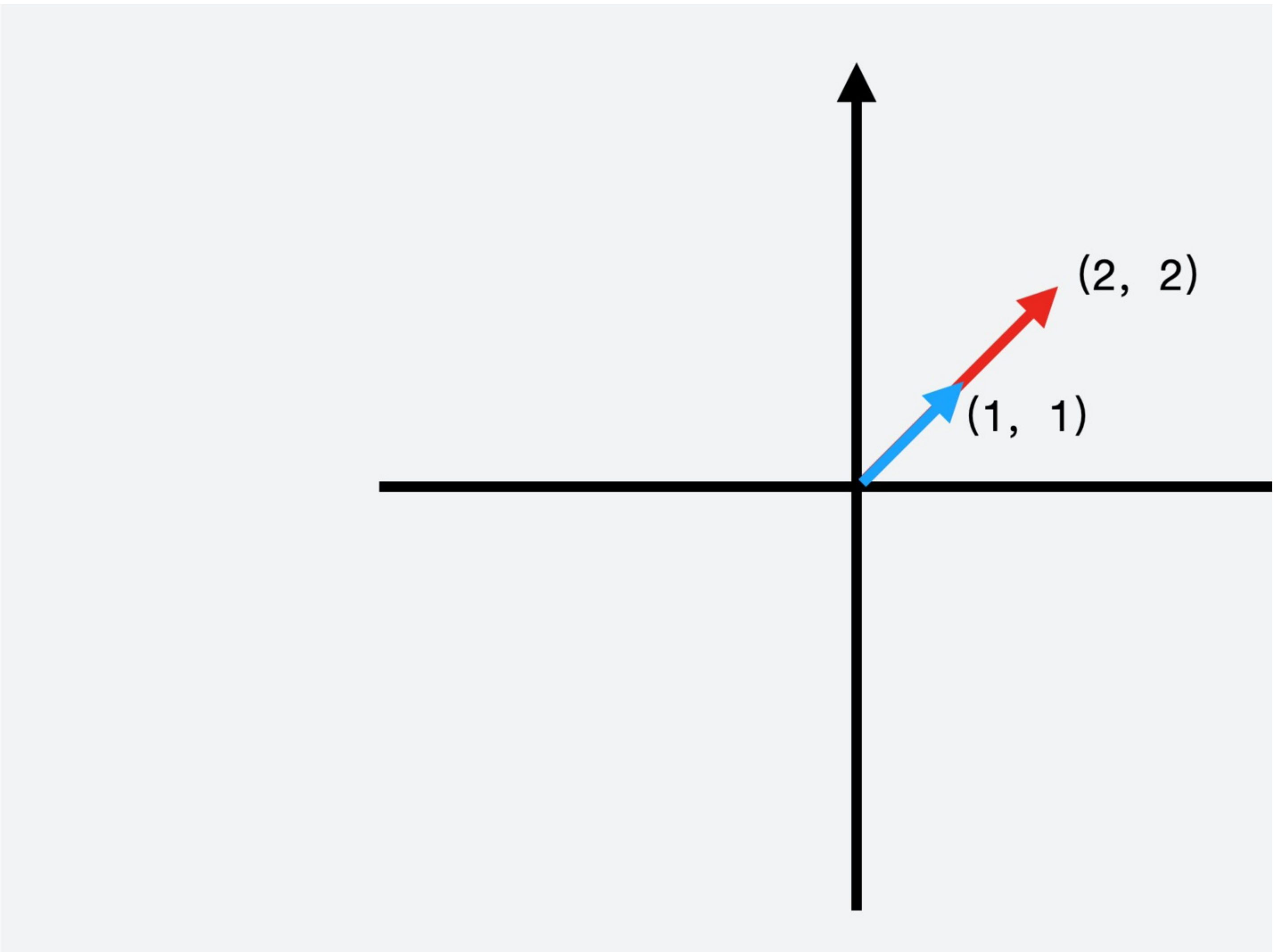
首先，是封闭性和结合律，从矩阵乘的定义就能直接看出来，它们是满足的；其次，我们来看恒等元素，单位矩阵就是矩阵元素，也满足组条件；最后，我们看看逆元素，假设A矩阵的逆矩阵A^{-1}存在，那很明显，满足$AA^{-1}=I$，这里I就是恒等元素。

于是，我们可以说$\left(A^{n \times n}, \quad \cdot\right)$是一个组，而矩阵乘不符合交换律，所以这个组并不是交换组。

向量空间

如果我们在“组”的基础上再扩展一下，就能够很顺利地来到“线性空间”。说起线性空间，它也叫作向量空间，它在一些书本和网络上的解释都是比较晦涩难懂的，但如果我们在“组”的基础上来解释它，你应该会比较容易理解了。

刚才我们说的组只包含了某一类运算，这类运算是在集合元素上的内部运算，我们把它定义为加$（+）$运算，现在再引入一类外部运算，标量乘$（·）$。于是，你可以想象一下，我们可以把内部运算看成是加法，把外部运算看成是“缩放”，因为标量乘就是一个标量和向量相乘。如果从二维坐标系的角度来看一下，点$(1, 1)$和标量2相乘就是$(2, 2)$，这个就是放大效果。



在通过“组”来认识向量空间后，再从数学角度去看向量空间的定义，你应该就能完全理解了。

一个实数向量空间V是一个集合，它包含了两类运算，一类是加，一类是标量乘，而且运算都满足V的封闭性，也就是说，V中元素的运算结果还是属于V。

$$
\begin{array} {l}

+: V+V \rightarrow V \\\
\cdot : \lambda \cdot V \rightarrow V
\end{array}
$$

这个向量空间可以表示成$V:=(V,+,\cdot)$，其中：

1.向量空间V的$(V,+)$是一个交换组。
2.V满足分配律：$\forall \lambda \in R, x, y \in V: \lambda \cdot(x+y)=\lambda \cdot x+\lambda \cdot y$；以及$\forall \lambda, \varphi \in R, x \in V:(\lambda+\varphi) \cdot x=\lambda \cdot x+\varphi \cdot x$。
3.V外部运算满足结合律：$\forall \lambda, \varphi \in R, x \in V: \lambda \cdot(\varphi \cdot x)=(\lambda \cdot \varphi) \cdot x$。
4.V外部运算的恒等元素满足：$\forall x \in V: 1 \cdot x=x$。

在向量空间V中的元素x是向量，向量空间加运算$(V,+)$的恒等元素是零向量$0=\left[\begin{array}{lll}0, & \ldots & , 0\end{array}\right]^{T}$。这里的加运算是内部运算，也叫做向量加，元素$λ$属于实数，叫做标量，外部运算乘$·$是标量乘。

好了，我给出了向量空间的一般描述和数学定义，如果你还是有一些不理解，也没有关系，我再举两个例子来加深你对向量空间的理解。

例1：进一步理解向量加和标量乘

对于向量空间的向量加和标量乘：我们定义一个实数向量空间R^{n}，n表示向量元素：

- “加”定义为向量之间的加：$x+y=\left(x_{1}, \ldots, x_{n}\right)+\left(y_{1}, \ldots, y_{n}\right)=\left(x_{1}+y_{1}, \ldots, x_{n}+y_{n}\right)$。 加的结果还是属于向量空间$R^{n}$。
- 标量乘就是向量乘标量：$\lambda x=\lambda\left(x_{1}, \ldots, x_{n}\right)=\left(\lambda x_{1}, \ldots, \lambda x_{n}\right)$。
  标量乘的结果还是属于向量空间R^{n}。

例2：进一步理解矩阵加和标量乘

对于向量空间的矩阵加和标量乘：我们定义一个实数向量空间$R^{m×n}$，用$m×n$表示m行n列矩阵元素：

我们把“加”定义为矩阵之间的加。加的结果还是属于向量空间$R^{m×n}$。

$$
A+B=\left[\begin{array}{ccc}
a_{11}+b_{11} & \ldots & a_{1 n}+b_{1 n} \\\
\cdot & & \cdot \\\
\cdot & & \cdot \\\
\cdot & & \cdot \\\
a_{m 1}+b_{m 1} & \ldots & a_{m n}+b_{m n}
\end{array}\right]
$$

而标量乘就是矩阵乘标量。标量乘的结果还是属于向量空间$R^{m×n}$。

$$
\lambda A=\left[\begin{array}{ccc}
\lambda a_{11} & \ldots & \lambda a_{1 n} \\\
\cdot & & \cdot \\\
\cdot & & \cdot \\\
\lambda_{m 1} & \ldots & \lambda \dot{a}_{m n}
\end{array}\right]
$$

到这里，相信你应该了解了向量空间的基本概念，接下来这一讲的重头戏就要来了，它就是向量子空间。

向量子空间

为什么说向量子空间是重头戏？那是因为它在机器学习中的地位相当重要，被用在了**降维算法**中。这里我会分两步来讲解，先讲向量子空间的基本概念，再通过一个机器学习的例子，能让你更了解它，并灵活运用在工作实践中。

什么是向量子空间？

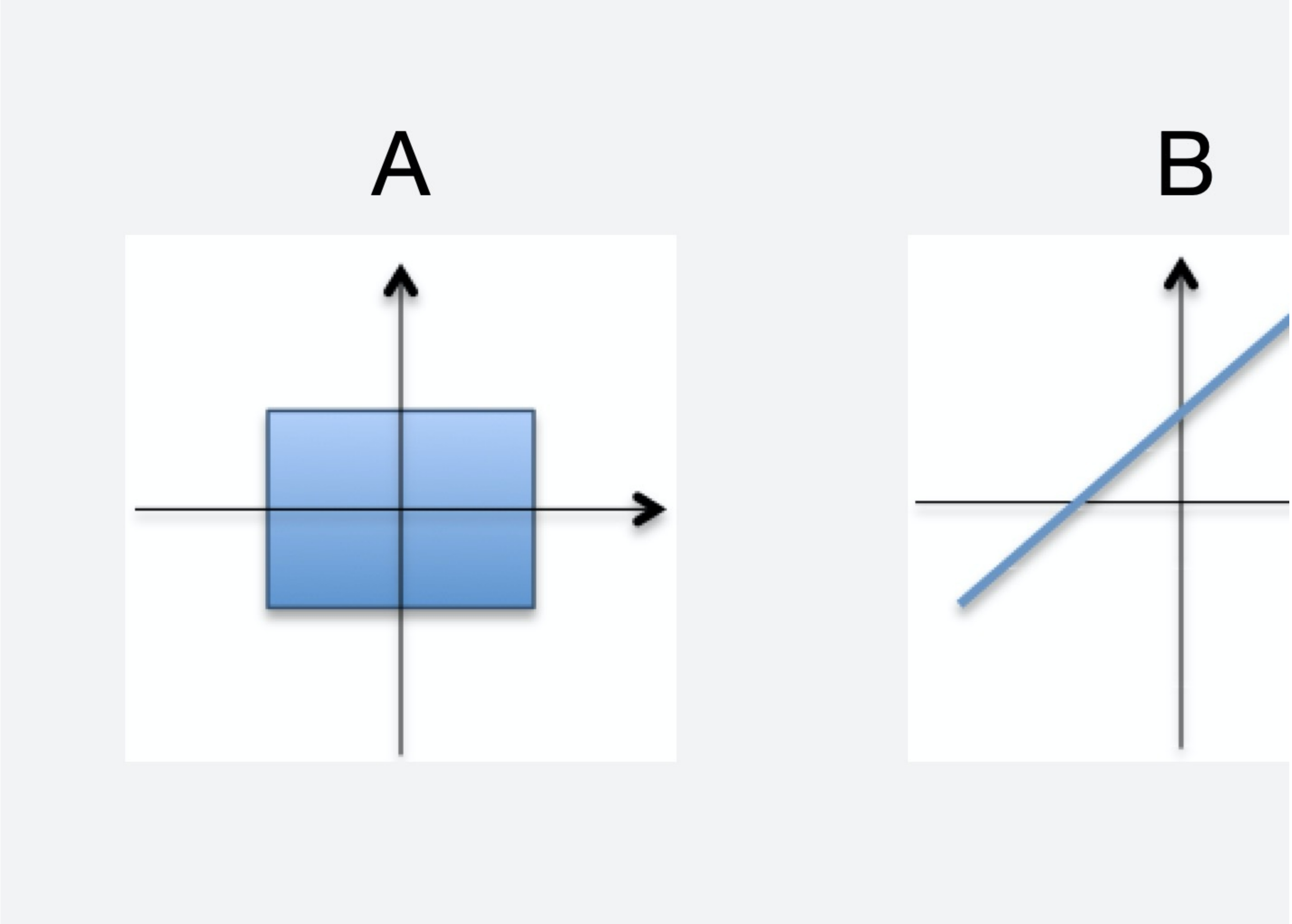
从“子”这个字，我们可以很直观地想到，它是被包含在向量空间中的，事实也确实如此。

已知$V:=(V,+,\cdot)$是一个向量空间，如果$U \subseteq V, U \neq 0$，那么$U:=(U,+,\cdot)$就是V的向量子空间，或者叫做线性子空间。向量子空间U自然继承V的许多属性，其中包括：交换组的属性、分配律、结合律和中性元素。除此以外，要判断U是不是向量子空间，我们还需要这两个条件：

1.$U \neq 0$，但$0 \in U$。
2. U的封闭性满足外部运算：$\forall \lambda \in R, \forall x \in U: \lambda x \in U$，同时满足内部运算：$\forall x, y \in U: x+y \in U$。

介绍完向量子空间基本概念后，我们一起来通过一个例子来巩固一下所学的知识，看看你是否已经掌握了向量子空间。

请你观察下面列举的A、B、C三张图像，里面有 R^{2}的向量子空间吗？



这里我不会给出答案，你可以自己思考一下，友情提醒：A、B、C中只有一个是向量子空间。

机器学习中的向量子空间

结合实践来看向量子空间的时候到了。在机器学习中，直接计算高维数据困难重重，一方面是数据处理和分析困难，使得数据可视化几乎不可能；另一方面是因为数据存储量太大，计算要付出的代价太高。

所以，我们要从向量空间中去除冗余数据，形成向量子空间。这样数据存储量就被极大地压缩了，处理和分析数据也简单了很多。因为高维数据中其实有很多维是冗余的，它们可以被其它维组合表示，也就是“降维”。

降维就是利用结构化和相关性，在尽量保证信息不损失的情况下，转换数据表现形式，让数据更“紧凑”。换句话说，你可以把降维看成是数据压缩技术，类似图像的jpeg和音频的MP3压缩算法。或者简单地说，降维就是将数据投射到一个低维子空间，比如：三维数据集可以降成二维，也就是把数据映射到平面上。

机器学习中运用最多的降维算法就是主成分分析，简称PCA（Principal Component Analysis），也叫做卡尔胡宁-勒夫变换（Karhunen-Loeve Transform）。它是一种用于探索高维数据结构的技术，已经存在超过100年了，但至今仍然广泛被使用在数据压缩和可视化中。

我们来看一个例子：假设你负责的是机器学习算法，而你的应用场景是车辆的牌照识别，也就是OCR（Optical Character Recognition）光学字符识别。在这个场景中，大街上的摄像头必须实时捕捉运动车辆的牌照，一旦发现问题车辆就需要快速识别牌照，并移交交警监管部门来做进一步处理。你会怎么处理呢？

牌照被拍下后就是图片，为了减小图像原始数据量，减少后续处理时的计算量，这些图片首先需要进行经过灰度处理（牌照只需要数字，不需要对彩色图像的RGB三个分量都进行处理），处理后就会变成类似这样的形式：

假定每个数字是一个$28*28$尺寸的灰度图片，包含784个像素，那每张灰度数字图片就是一个向量，这个向量就有784个维度，可以表示成$x \in R^{784}$，而你的样本库少说也有几十万个样本数据，如果按一般的方法是不可能做到实时识别的。所以，这样的场景就需要使用PCA来压缩数据，进行大幅度降维。

这里我们简单一些，从二维的角度来看看PCA。在PCA中，最关键的就是寻找数据点x_{n}的相似低维投影y_{n}，而y_{n}就是子向量空间。

考虑R^{2}和它的两个基，$e_{1}=[1,0]^{T}$、$e_{2}=[0,1]^{T}$，$x \in R^{2}$能够表示成这两个基的线性组合（“基”会在第7节课中详细介绍）。

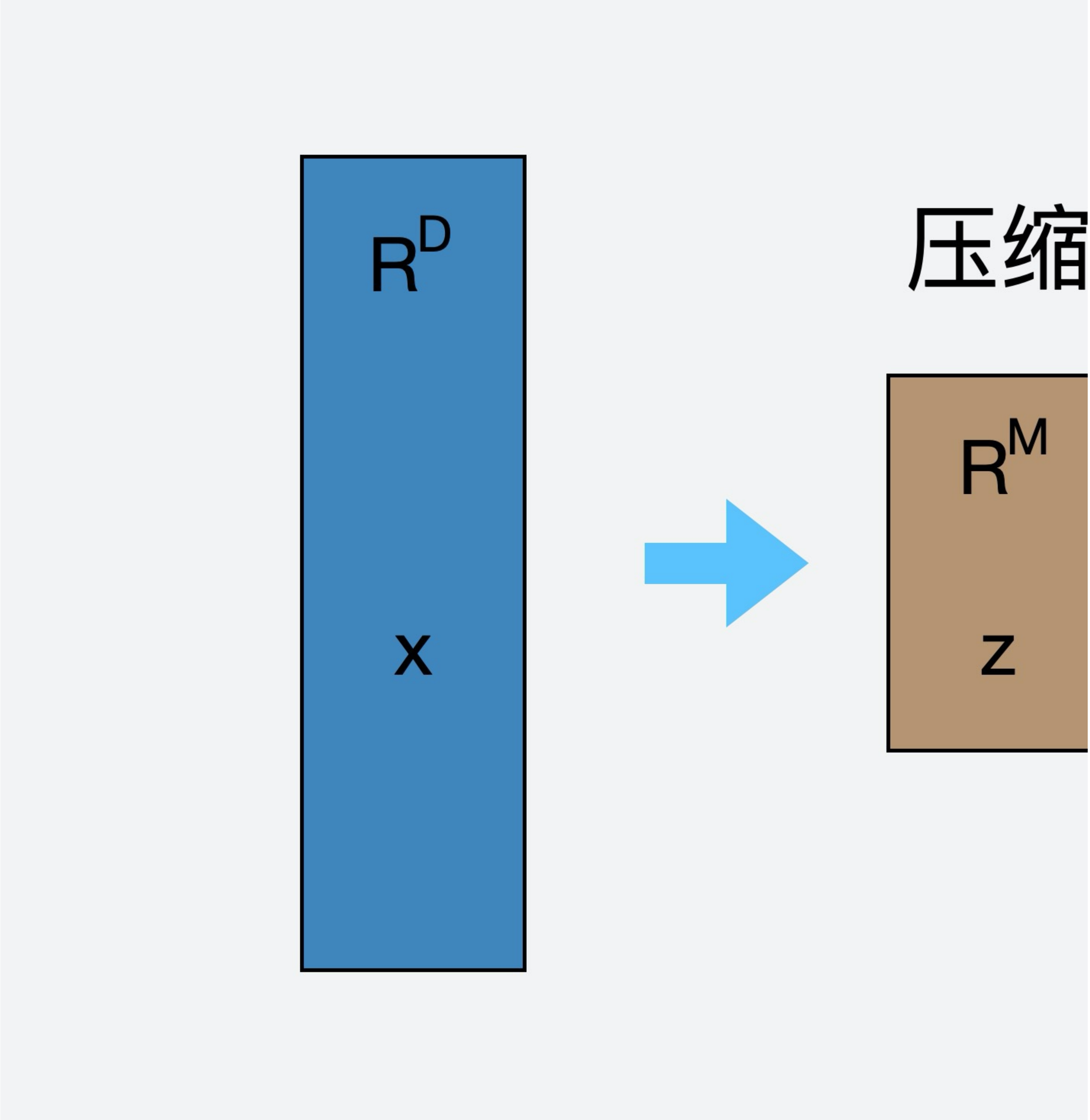
$$
\left[\begin{array}{l}
5 \\
3
\end{array}\right]=5 e_{1}+3 e_{2}
$$

于是，相似低维投影y_{n}就可以表示成下面这种形式。

$$
y_{n}=\left[\begin{array}{l}
0 \\
z
\end{array}\right] \in R^{2}, z \in R
$$

同时，y_{n}也可以写成这样的形式：$y_{n}=0 e_{1}+z e_{2}$。

这里的z就是我们要找的值，而y_{n}就是一个向量子空间U，它的维度是一维。最后，我们再通过下图来更直观地说明一下PCA的过程。



图的左边是原始向量空间x，经过压缩后，我们找到了子向量空间z，z经过重构后，形成了最终的向量空间y，y还是属于原来的向量空间，但y却拥有比x更低的维度表现。

从数学的角度看，我们其实就是在寻找x和z之间的线性关系，使得$z=B^{T}x$，以及$y=Bz$，其中B是矩阵。如果我们从数据压缩技术方向来看就更容易理解了，图中的左边箭头是编码过程，也就是压缩，右边的箭头是解码过程，也就是映射，而矩阵B就是把属于R^{M}向量空间的低维的z，映射回原来的向量空间R^{D}。同理，矩阵B^{T}就是把属于原来R^{D}向量空间的高维x压缩成低维的z。

本节小结

好了，到这里线性空间这一讲就结束了，最后我再总结一下前面讲解的内容。

今天的知识很重要，实践中都是围绕向量空间展开的，也就是说向量空间是实践的基本单位，你也一定要掌握子向量空间，因为现实中数据都是高维度的，从向量空间降维后找到子向量空间，这样就能大大提高数据运算和分析的效率。

再次特别提醒：这一讲非常重要，因为后面几讲都是围绕向量空间展开的，如果你哪里没看懂，一定要多看几次，确保完全明白了。有任何问题，你也可以随时在留言区向我提问。

线性代数练习场

之前我讲了一个现实的向量空间降维场景：车辆的牌照识别，这里，我们通过另一个现实场景，来练习一下向量空间降维的思维。

目前市场上语音识别的应用有很多，比如：天猫精灵、苹果Siri、小爱等等，而语音识别涉及的技术有很多，有语言建模、声学建模、语音信号处理等等。在语音信号处理中，语音声波通过空气传播，并被麦克风捕获，麦克风将压力波转换为可捕获的电活动。我们对电活动进行采样，用以创建描述信号的一系列波形采样。

采样是数据收集的过程，数据收集后需要做数据预处理，而预处理的关键一步就是特征提取，现在请你从“特征提取”的方向上思考下，有哪些和目前所学到的数学知识有关？

> 友情提醒：特征提取就是数字化过程，也是向量化后形成向量空间的过程。

欢迎在留言区写出你的思考，我会及时回复。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我一起重学线性代数！

今天我们来聊一聊“线性空间”。在“基本概念”那一节课中，我讲到了向量，你也看到了，线性方程组是能够通过矩阵或向量来表达的。那为什么我们还要学习线性空间呢？

说到线性空间，其实你可以通过“空间”这个词把线性空间和我们的生活做个类比。就像我们生活在三维世界中，在这个空间中，一切物质都是运动的，而运动也是有一定规律的。这么来看的话，空间其实就是一个具有实际意义的集合，其中包含了**对象**和**运动**。

把这个理解平移到线性空间也是一样的，向量就是对象，如果把**向量**看成是**线性空间中的点**，那**向量的变换**就是**点在空间中的运动**。所以，线性空间也是一个集合，它的意义在于，赋予了向量生命和活力，只有掌握了线性空间，我们才能真正在实际运用中有的放矢。因为所有的活动都要在这个空间中发生，比如：线性空间中用到的傅立叶变换。

组（群）

还是老样子，我们要先从学习线性空间会用到的基础知识开始讲起。

我们先来讲一下“组”，组也可以叫成大家习惯的“群”（以下均以“组”称呼）。说到“组”，它其实是一个通用的概念，和线性空间没有什么关系，但我之所以要先说组，是因为组（群）和空间是类似的，也是集合，性质也差不多，如果你了解了组，就更容易理解线性空间了。而且，组在计算机科学中是得到了广泛应用的，特别是在计算机密码学和图形图像处理中。

说了这么多，“组”到底是什么呢？组，其实就是包含一系列元素的集合，在对这些集合元素实施某类运算后，这个集合仍然保持着封闭性。可能这么说你会有些疑惑，我还是通过数学方法来定义组，可能会让你的思路更加清晰一些。

我们先来定义一个集合G和集合上的某一类运算，比如：乘$\otimes$，使得 $G \otimes G$ 的结果还是属于G，如果我们要$G:=(G, \otimes)$是一个组，则需要满足以下这些条件：

1.G在$\otimes$运算中是封闭的，也就是：$\forall x, y \in G: x \otimes y \in G$。
2. 满足结合律，也就是：$\forall x, y, z \in G:(x \otimes y) \otimes z=x \otimes(y \otimes z)$。
3. 恒等元素（或者叫做中性元素）e，满足：$\exists \mathrm{e} \in G, \forall x \in G: x \otimes e=x, e \otimes x=x$，这里的恒等元素e在一般数字中你可以认为是$1$，而在矩阵中就可以认为是单位矩阵。
4. 有x的逆元素y，使得：$\forall \mathrm{e} \in G, \exists x \in G: x \otimes y=e, y \otimes x=e$，其中$e$是恒等元素。

再补充一点，如果满足$\forall x, y \in G: x \otimes y=y \otimes x$，则$G:=(G, \otimes)$就叫作交换组。

现在我们来做个测试，看看你是否理解了组的定义。

一个$n×n$的实数矩阵A和它的乘法运算是一个组吗？通过符号表达就是：$\left(A^{n \times n}, \quad \cdot\right)$。

想要知道这个问题的答案，我们就需要用前面满足组的这几个条件来分析一下。

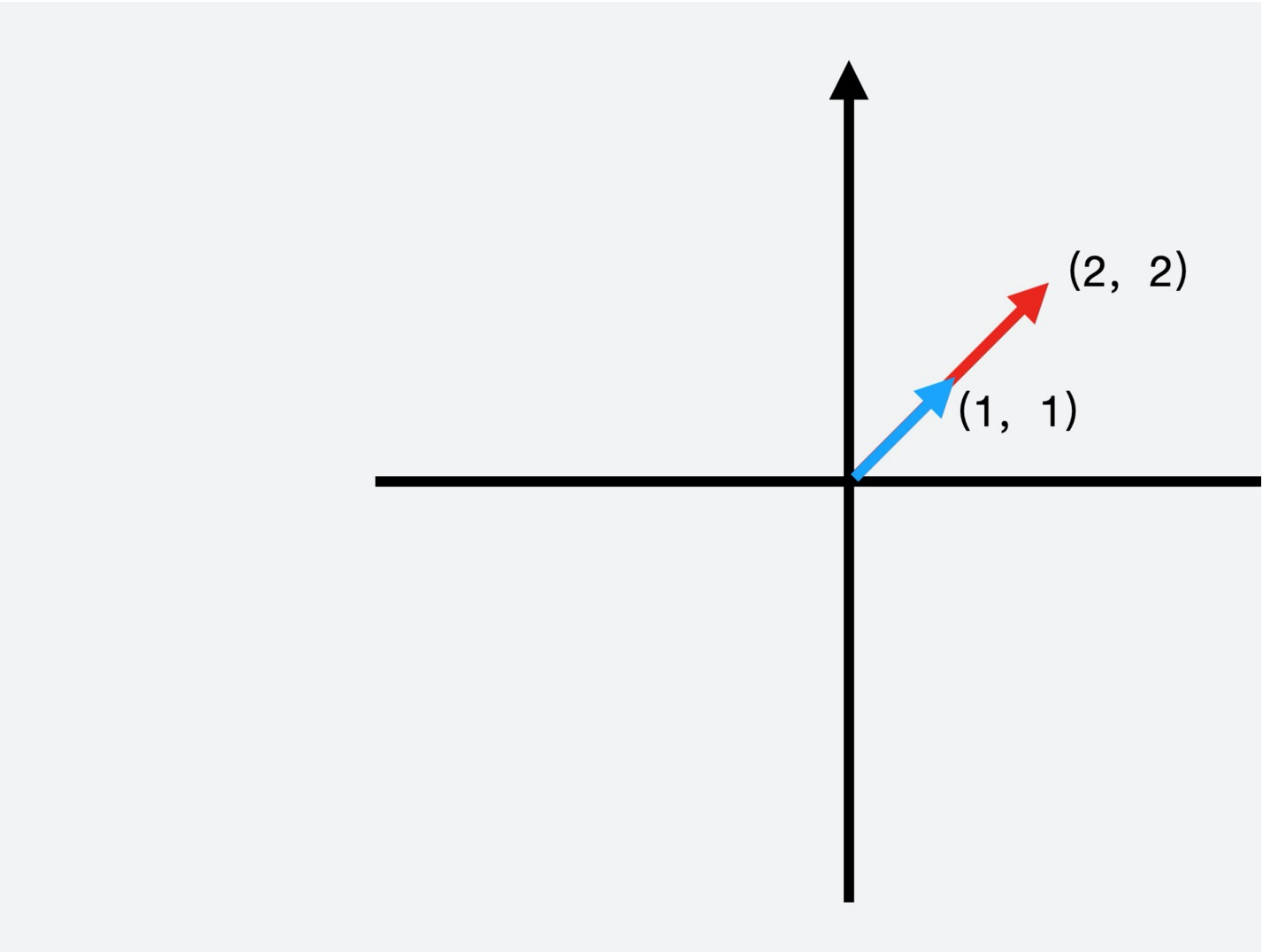
首先，是封闭性和结合律，从矩阵乘的定义就能直接看出来，它们是满足的；其次，我们来看恒等元素，单位矩阵就是矩阵元素，也满足组条件；最后，我们看看逆元素，假设A矩阵的逆矩阵A^{-1}存在，那很明显，满足$AA^{-1}=I$，这里I就是恒等元素。

于是，我们可以说$\left(A^{n \times n}, \quad \cdot\right)$是一个组，而矩阵乘不符合交换律，所以这个组并不是交换组。

向量空间

如果我们在“组”的基础上再扩展一下，就能够很顺利地来到“线性空间”。说起线性空间，它也叫作向量空间，它在一些书本和网络上的解释都是比较晦涩难懂的，但如果我们在“组”的基础上来解释它，你应该会比较容易理解了。

刚才我们说的组只包含了某一类运算，这类运算是在集合元素上的内部运算，我们把它定义为加$（+）$运算，现在再引入一类外部运算，标量乘$（·）$。于是，你可以想象一下，我们可以把内部运算看成是加法，把外部运算看成是“缩放”，因为标量乘就是一个标量和向量相乘。如果从二维坐标系的角度来看一下，点$(1, 1)$和标量2相乘就是$(2, 2)$，这个就是放大效果。



在通过“组”来认识向量空间后，再从数学角度去看向量空间的定义，你应该就能完全理解了。

一个实数向量空间V是一个集合，它包含了两类运算，一类是加，一类是标量乘，而且运算都满足V的封闭性，也就是说，V中元素的运算结果还是属于V。

$$
\begin{array} {l}

+: V+V \rightarrow V \\\
\cdot : \lambda \cdot V \rightarrow V
\end{array}
$$

这个向量空间可以表示成$V:=(V,+,\cdot)$，其中：

1.向量空间V的$(V,+)$是一个交换组。
2.V满足分配律：$\forall \lambda \in R, x, y \in V: \lambda \cdot(x+y)=\lambda \cdot x+\lambda \cdot y$；以及$\forall \lambda, \varphi \in R, x \in V:(\lambda+\varphi) \cdot x=\lambda \cdot x+\varphi \cdot x$。
3.V外部运算满足结合律：$\forall \lambda, \varphi \in R, x \in V: \lambda \cdot(\varphi \cdot x)=(\lambda \cdot \varphi) \cdot x$。
4.V外部运算的恒等元素满足：$\forall x \in V: 1 \cdot x=x$。

在向量空间V中的元素x是向量，向量空间加运算$(V,+)$的恒等元素是零向量$0=\left[\begin{array} {lll} 0, & \ldots & , 0\end{array} \right]^{T}$。这里的加运算是内部运算，也叫做向量加，元素$λ$属于实数，叫做标量，外部运算乘$·$是标量乘。

好了，我给出了向量空间的一般描述和数学定义，如果你还是有一些不理解，也没有关系，我再举两个例子来加深你对向量空间的理解。

例1：进一步理解向量加和标量乘

对于向量空间的向量加和标量乘：我们定义一个实数向量空间R^{n}，n表示向量元素：

- “加”定义为向量之间的加：$x+y=\left(x_{1}, \ldots, x_{n}\right)+\left(y_{1}, \ldots, y_{n}\right)=\left(x_{1}+y_{1}, \ldots, x_{n}+y_{n}\right)$。 加的结果还是属于向量空间$R^{n}$。
- 标量乘就是向量乘标量：$\lambda x=\lambda\left(x_{1}, \ldots, x_{n}\right)=\left(\lambda x_{1}, \ldots, \lambda x_{n}\right)$。
  标量乘的结果还是属于向量空间R^{n}。

例2：进一步理解矩阵加和标量乘

对于向量空间的矩阵加和标量乘：我们定义一个实数向量空间$R^{m×n}$，用$m×n$表示m行n列矩阵元素：

我们把“加”定义为矩阵之间的加。加的结果还是属于向量空间$R^{m×n}$。

$$
A+B=\left[\begin{array} {ccc}
a_{11}+b_{11} & \ldots & a_{1 n}+b_{1 n} \\\
\cdot & & \cdot \\\
\cdot & & \cdot \\\
\cdot & & \cdot \\\
a_{m 1}+b_{m 1} & \ldots & a_{m n}+b_{m n}
\end{array} \right]
$$

而标量乘就是矩阵乘标量。标量乘的结果还是属于向量空间$R^{m×n}$。

$$
\lambda A=\left[\begin{array} {ccc}
\lambda a_{11} & \ldots & \lambda a_{1 n} \\\
\cdot & & \cdot \\\
\cdot & & \cdot \\\
\lambda_{m 1} & \ldots & \lambda \dot{a}_{m n}
\end{array} \right]
$$

到这里，相信你应该了解了向量空间的基本概念，接下来这一讲的重头戏就要来了，它就是向量子空间。

向量子空间

为什么说向量子空间是重头戏？那是因为它在机器学习中的地位相当重要，被用在了**降维算法**中。这里我会分两步来讲解，先讲向量子空间的基本概念，再通过一个机器学习的例子，能让你更了解它，并灵活运用在工作实践中。

什么是向量子空间？

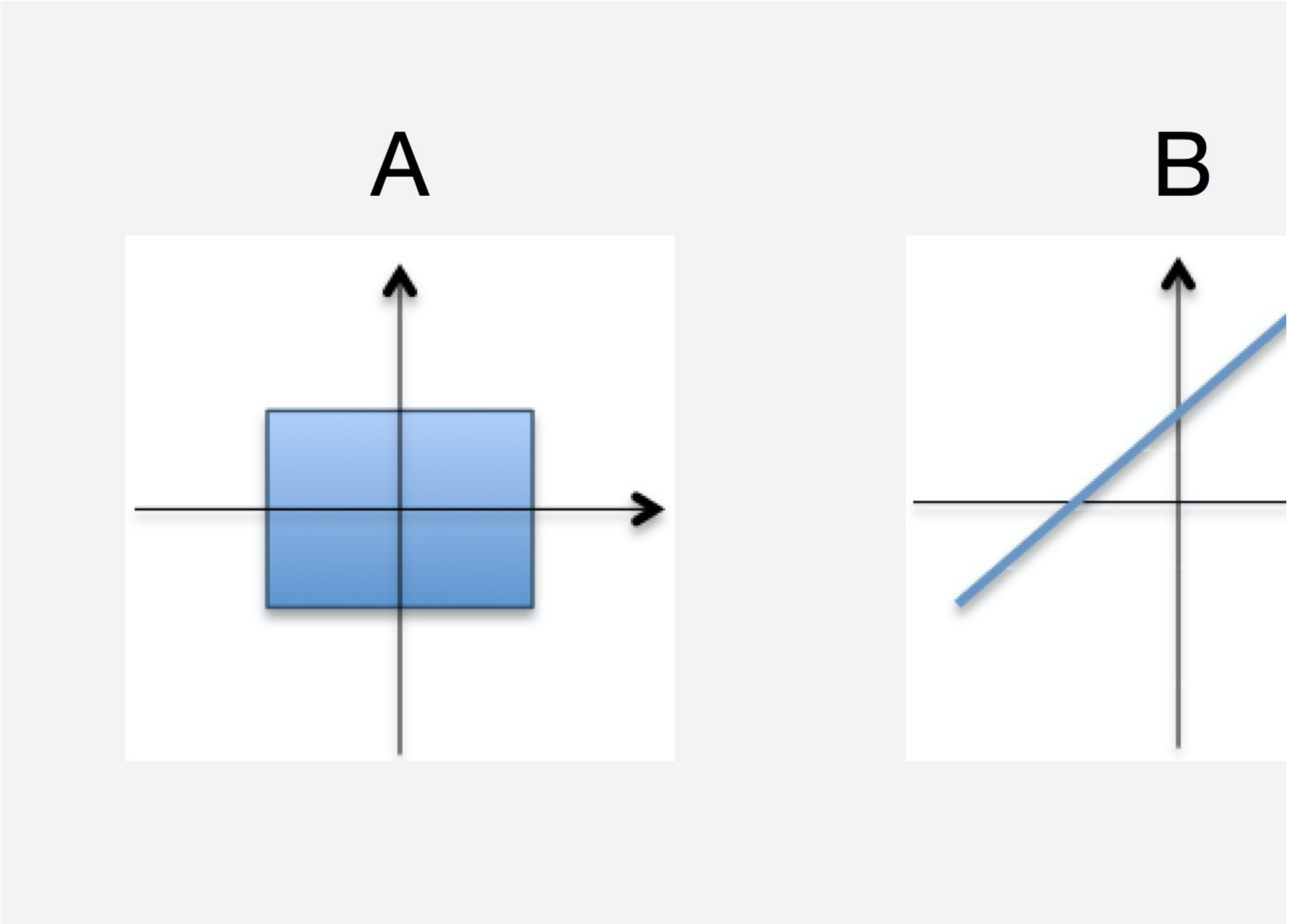
从“子”这个字，我们可以很直观地想到，它是被包含在向量空间中的，事实也确实如此。

已知$V:=(V,+,\cdot)$是一个向量空间，如果$U \subseteq V, U \neq 0$，那么$U:=(U,+,\cdot)$就是V的向量子空间，或者叫做线性子空间。向量子空间U自然继承V的许多属性，其中包括：交换组的属性、分配律、结合律和中性元素。除此以外，要判断U是不是向量子空间，我们还需要这两个条件：

1.$U \neq 0$，但$0 \in U$。
2. U的封闭性满足外部运算：$\forall \lambda \in R, \forall x \in U: \lambda x \in U$，同时满足内部运算：$\forall x, y \in U: x+y \in U$。

介绍完向量子空间基本概念后，我们一起来通过一个例子来巩固一下所学的知识，看看你是否已经掌握了向量子空间。

请你观察下面列举的A、B、C三张图像，里面有 R^{2}的向量子空间吗？



这里我不会给出答案，你可以自己思考一下，友情提醒：A、B、C中只有一个是向量子空间。

机器学习中的向量子空间

结合实践来看向量子空间的时候到了。在机器学习中，直接计算高维数据困难重重，一方面是数据处理和分析困难，使得数据可视化几乎不可能；另一方面是因为数据存储量太大，计算要付出的代价太高。

所以，我们要从向量空间中去除冗余数据，形成向量子空间。这样数据存储量就被极大地压缩了，处理和分析数据也简单了很多。因为高维数据中其实有很多维是冗余的，它们可以被其它维组合表示，也就是“降维”。

降维就是利用结构化和相关性，在尽量保证信息不损失的情况下，转换数据表现形式，让数据更“紧凑”。换句话说，你可以把降维看成是数据压缩技术，类似图像的jpeg和音频的MP3压缩算法。或者简单地说，降维就是将数据投射到一个低维子空间，比如：三维数据集可以降成二维，也就是把数据映射到平面上。

机器学习中运用最多的降维算法就是主成分分析，简称PCA（Principal Component Analysis），也叫做卡尔胡宁-勒夫变换（Karhunen-Loeve Transform）。它是一种用于探索高维数据结构的技术，已经存在超过100年了，但至今仍然广泛被使用在数据压缩和可视化中。

我们来看一个例子：假设你负责的是机器学习算法，而你的应用场景是车辆的牌照识别，也就是OCR（Optical Character Recognition）光学字符识别。在这个场景中，大街上的摄像头必须实时捕捉运动车辆的牌照，一旦发现问题车辆就需要快速识别牌照，并移交交警监管部门来做进一步处理。你会怎么处理呢？

牌照被拍下后就是图片，为了减小图像原始数据量，减少后续处理时的计算量，这些图片首先需要进行经过灰度处理（牌照只需要数字，不需要对彩色图像的RGB三个分量都进行处理），处理后就会变成类似这样的形式：

假定每个数字是一个$28*28$尺寸的灰度图片，包含784个像素，那每张灰度数字图片就是一个向量，这个向量就有784个维度，可以表示成$x \in R^{784}$，而你的样本库少说也有几十万个样本数据，如果按一般的方法是不可能做到实时识别的。所以，这样的场景就需要使用PCA来压缩数据，进行大幅度降维。

这里我们简单一些，从二维的角度来看看PCA。在PCA中，最关键的就是寻找数据点x_{n}的相似低维投影y_{n}，而y_{n}就是子向量空间。

考虑R^{2}和它的两个基，$e_{1}=[1,0]^{T}$、$e_{2}=[0,1]^{T}$，$x \in R^{2}$能够表示成这两个基的线性组合（“基”会在第7节课中详细介绍）。

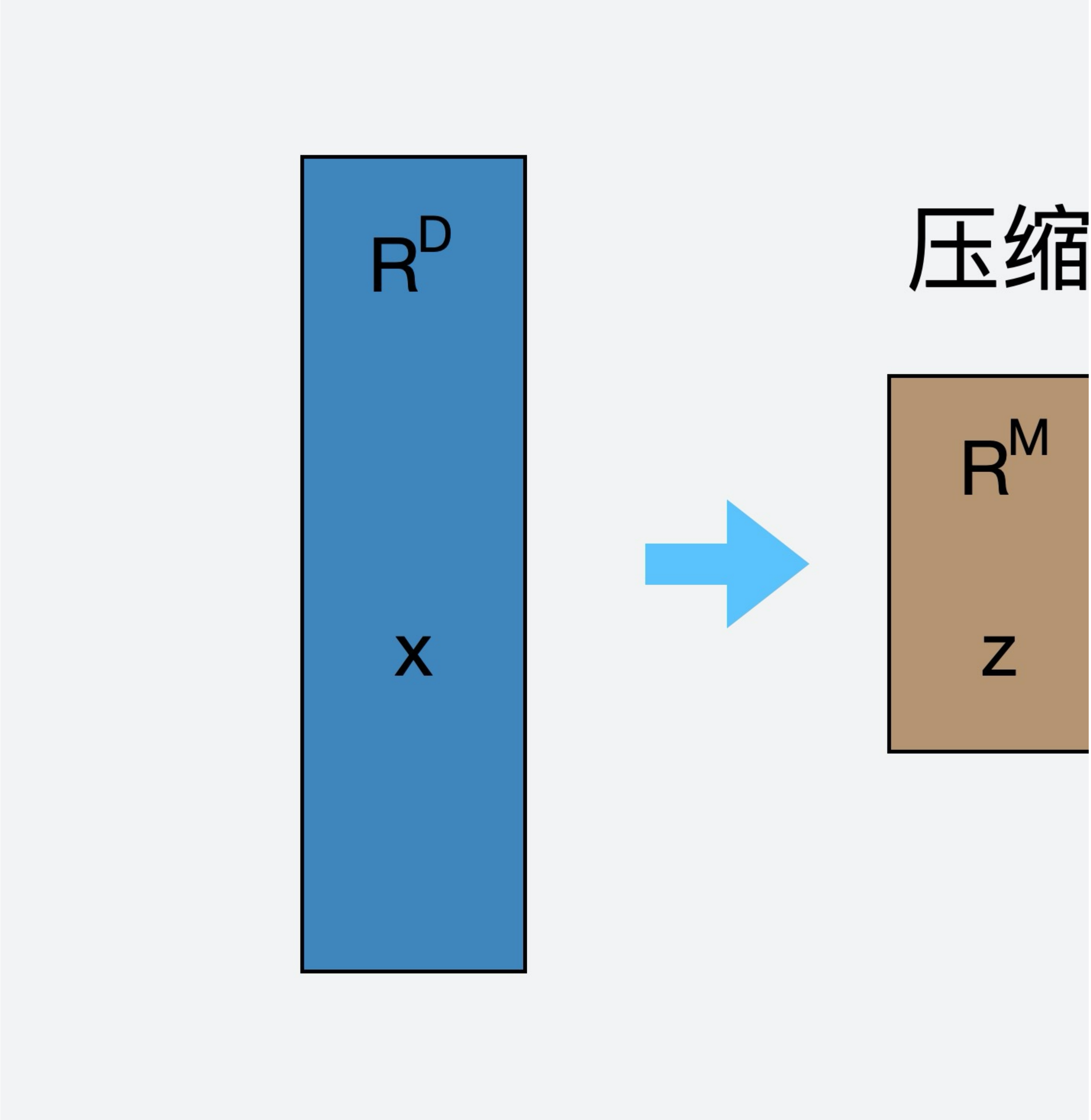
$$
\left[\begin{array}{l}
5 \\
3
\end{array}\right]=5 e_{1}+3 e_{2}
$$

于是，相似低维投影y_{n}就可以表示成下面这种形式。

$$
y_{n}=\left[\begin{array}{l}
0 \\
z
\end{array}\right] \in R^{2}, z \in R
$$

同时，y_{n}也可以写成这样的形式：$y_{n}=0 e_{1}+z e_{2}$。

这里的z就是我们要找的值，而y_{n}就是一个向量子空间U，它的维度是一维。最后，我们再通过下图来更直观地说明一下PCA的过程。



图的左边是原始向量空间x，经过压缩后，我们找到了子向量空间z，z经过重构后，形成了最终的向量空间y，y还是属于原来的向量空间，但y却拥有比x更低的维度表现。

从数学的角度看，我们其实就是在寻找x和z之间的线性关系，使得$z=B^{T}x$，以及$y=Bz$，其中B是矩阵。如果我们从数据压缩技术方向来看就更容易理解了，图中的左边箭头是编码过程，也就是压缩，右边的箭头是解码过程，也就是映射，而矩阵B就是把属于R^{M}向量空间的低维的z，映射回原来的向量空间R^{D}。同理，矩阵B^{T}就是把属于原来R^{D}向量空间的高维x压缩成低维的z。

本节小结

好了，到这里线性空间这一讲就结束了，最后我再总结一下前面讲解的内容。

今天的知识很重要，实践中都是围绕向量空间展开的，也就是说向量空间是实践的基本单位，你也一定要掌握子向量空间，因为现实中数据都是高维度的，从向量空间降维后找到子向量空间，这样就能大大提高数据运算和分析的效率。

再次特别提醒：这一讲非常重要，因为后面几讲都是围绕向量空间展开的，如果你哪里没看懂，一定要多看几次，确保完全明白了。有任何问题，你也可以随时在留言区向我提问。

线性代数练习场

之前我讲了一个现实的向量空间降维场景：车辆的牌照识别，这里，我们通过另一个现实场景，来练习一下向量空间降维的思维。

目前市场上语音识别的应用有很多，比如：天猫精灵、苹果Siri、小爱等等，而语音识别涉及的技术有很多，有语言建模、声学建模、语音信号处理等等。在语音信号处理中，语音声波通过空气传播，并被麦克风捕获，麦克风将压力波转换为可捕获的电活动。我们对电活动进行采样，用以创建描述信号的一系列波形采样。

采样是数据收集的过程，数据收集后需要做数据预处理，而预处理的关键一步就是特征提取，现在请你从“特征提取”的方向上思考下，有哪些和目前所学到的数学知识有关？

> 友情提醒：特征提取就是数字化过程，也是向量化后形成向量空间的过程。

欢迎在留言区写出你的思考，我会及时回复。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我一起重学线性代数！

今天我们来聊一聊“线性空间”。在“基本概念”那一节课中，我讲到了向量，你也看到了，线性方程组是能够通过矩阵或向量来表达的。那为什么我们还要学习线性空间呢？

说到线性空间，其实你可以通过“空间”这个词把线性空间和我们的生活做个类比。就像我们生活在三维世界中，在这个空间中，一切物质都是运动的，而运动也是有一定规律的。这么来看的话，空间其实就是一个具有实际意义的集合，其中包含了**对象**和**运动**。

把这个理解平移到线性空间也是一样的，向量就是对象，如果把**向量**看成是**线性空间中的点**，那**向量的变换**就是**点在空间中的运动**。所以，线性空间也是一个集合，它的意义在于，赋予了向量生命和活力，只有掌握了线性空间，我们才能真正在实际运用中有的放矢。因为所有的活动都要在这个空间中发生，比如：线性空间中用到的傅立叶变换。

组（群）

还是老样子，我们要先从学习线性空间会用到的基础知识开始讲起。

我们先来讲一下“组”，组也可以叫成大家习惯的“群”（以下均以“组”称呼）。说到“组”，它其实是一个通用的概念，和线性空间没有什么关系，但我之所以要先说组，是因为组（群）和空间是类似的，也是集合，性质也差不多，如果你了解了组，就更容易理解线性空间了。而且，组在计算机科学中是得到了广泛应用的，特别是在计算机密码学和图形图像处理中。

说了这么多，“组”到底是什么呢？组，其实就是包含一系列元素的集合，在对这些集合元素实施某类运算后，这个集合仍然保持着封闭性。可能这么说你会有些疑惑，我还是通过数学方法来定义组，可能会让你的思路更加清晰一些。

我们先来定义一个集合G和集合上的某一类运算，比如：乘$\otimes$，使得 $G \otimes G$ 的结果还是属于G，如果我们要$G:=(G, \otimes)$是一个组，则需要满足以下这些条件：

1.G在$\otimes$运算中是封闭的，也就是：$\forall x, y \in G: x \otimes y \in G$。
2. 满足结合律，也就是：$\forall x, y, z \in G:(x \otimes y) \otimes z=x \otimes(y \otimes z)$。
3. 恒等元素（或者叫做中性元素）e，满足：$\exists \mathrm{e} \in G, \forall x \in G: x \otimes e=x, e \otimes x=x$，这里的恒等元素e在一般数字中你可以认为是$1$，而在矩阵中就可以认为是单位矩阵。
4. 有x的逆元素y，使得：$\forall \mathrm{e} \in G, \exists x \in G: x \otimes y=e, y \otimes x=e$，其中$e$是恒等元素。

再补充一点，如果满足$\forall x, y \in G: x \otimes y=y \otimes x$，则$G:=(G, \otimes)$就叫作交换组。

现在我们来做个测试，看看你是否理解了组的定义。

一个$n×n$的实数矩阵A和它的乘法运算是一个组吗？通过符号表达就是：$\left(A^ {n \times n}, \quad \cdot\right)$。

想要知道这个问题的答案，我们就需要用前面满足组的这几个条件来分析一下。

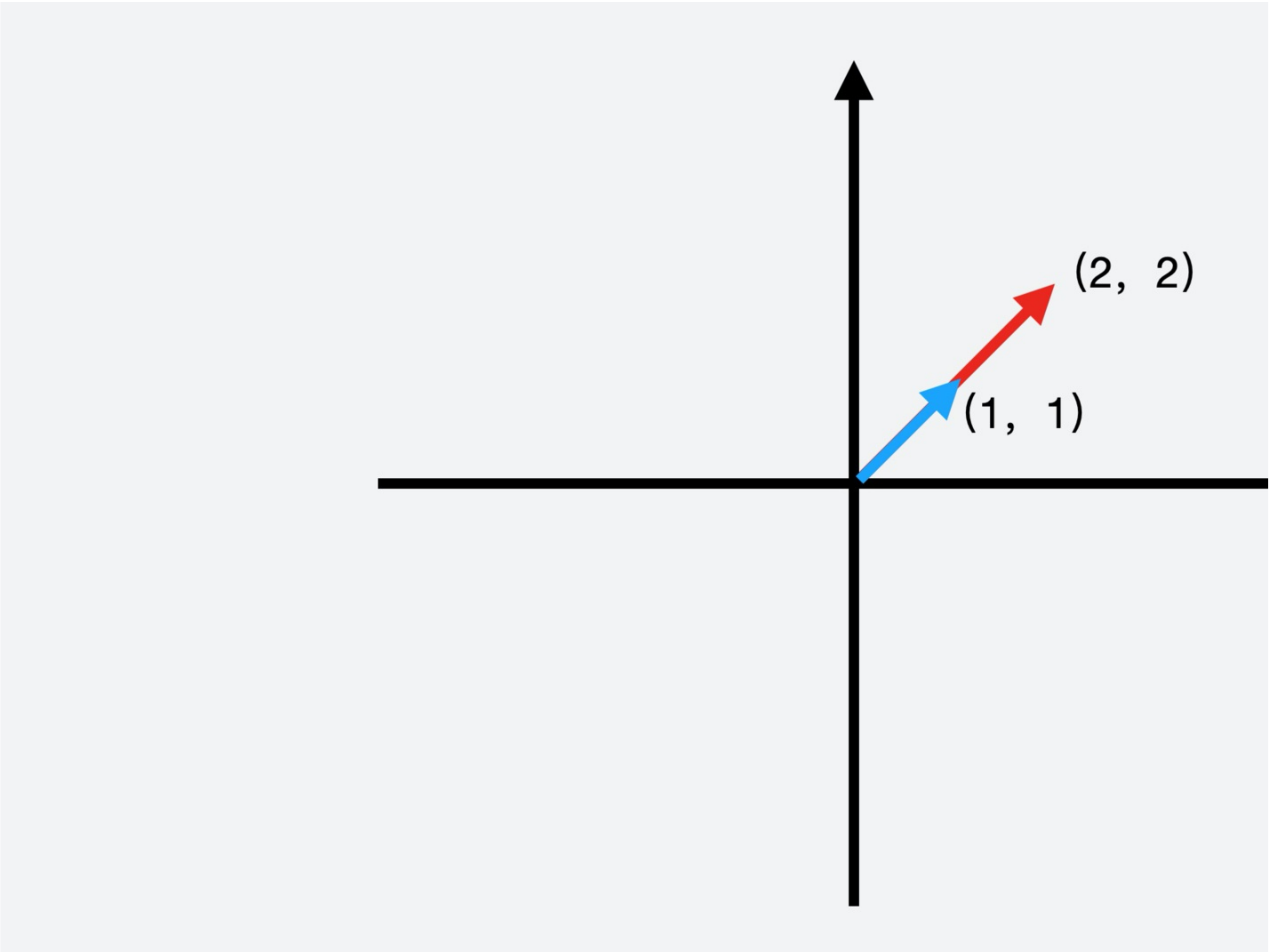
首先，是封闭性和结合律，从矩阵乘的定义就能直接看出来，它们是满足的；其次，我们来看恒等元素，单位矩阵就是矩阵元素，也满足组条件；最后，我们看看逆元素，假设A矩阵的逆矩阵A^{-1}存在，那很明显，满足$AA^{-1}=I$，这里I就是恒等元素。

于是，我们可以说$\left(A^ {n \times n}, \quad \cdot\right)$是一个组，而矩阵乘不符合交换律，所以这个组并不是交换组。

向量空间

如果我们在“组”的基础上再扩展一下，就能够很顺利地来到“线性空间”。说起线性空间，它也叫作向量空间，它在一些书本和网络上的解释都是比较晦涩难懂的，但如果我们在“组”的基础上来解释它，你应该会比较容易理解了。

刚才我们说的组只包含了某一类运算，这类运算是在集合元素上的内部运算，我们把它定义为加$（+）$运算，现在再引入一类外部运算，标量乘$（·）$。于是，你可以想象一下，我们可以把内部运算看成是加法，把外部运算看成是“缩放”，因为标量乘就是一个标量和向量相乘。如果从二维坐标系的角度来看一下，点$(1, 1)$和标量2相乘就是$(2, 2)$，这个就是放大效果。



在通过“组”来认识向量空间后，再从数学角度去看向量空间的定义，你应该就能完全理解了。

一个实数向量空间V是一个集合，它包含了两类运算，一类是加，一类是标量乘，而且运算都满足V的封闭性，也就是说，V中元素的运算结果还是属于V。

$$
\begin{array} {l}

+: V+V \rightarrow V \\\
\cdot : \lambda \cdot V \rightarrow V
\end{array}
$$

这个向量空间可以表示成$V:=(V,+,\cdot)$，其中：

1.向量空间V的$(V,+)$是一个交换组。
2.V满足分配律：$\forall \lambda \in R, x, y \in V: \lambda \cdot(x+y)=\lambda \cdot x+\lambda \cdot y$；以及$\forall \lambda, \varphi \in R, x \in V:(\lambda+\varphi) \cdot x=\lambda \cdot x+\varphi \cdot x$。
3.V外部运算满足结合律：$\forall \lambda, \varphi \in R, x \in V: \lambda \cdot(\varphi \cdot x)=(\lambda \cdot \varphi) \cdot x$。
4.V外部运算的恒等元素满足：$\forall x \in V: 1 \cdot x=x$。

在向量空间V中的元素x是向量，向量空间加运算$(V,+)$的恒等元素是零向量$0=\left[\begin{array}{lll}0, & \ldots & , 0\end{array}\right]^{T}$。这里的加运算是内部运算，也叫做向量加，元素$λ$属于实数，叫做标量，外部运算乘$·$是标量乘。

好了，我给出了向量空间的一般描述和数学定义，如果你还是有一些不理解，也没有关系，我再举两个例子来加深你对向量空间的理解。

例1：进一步理解向量加和标量乘

对于向量空间的向量加和标量乘：我们定义一个实数向量空间R^{n}，n表示向量元素：

- "加"定义为向量之间的加：$x+y=\left(x_{1}, \ldots, x_{n}\right)+\left(y_{1}, \ldots, y_{n}\right)=\left(x_{1}+y_{1}, \ldots, x_{n}+y_{n}\right)$。 加的结果还是属于向量空间$R^{n}$。
- 标量乘就是向量乘标量：$\lambda x=\lambda\left(x_{1}, \ldots, x_{n}\right)=\left(\lambda x_{1}, \ldots, \lambda x_{n}\right)$。
  标量乘的结果还是属于向量空间R^{n}。

例2：进一步理解矩阵加和标量乘

对于向量空间的矩阵加和标量乘：我们定义一个实数向量空间$R^{m×n}$，用$m×n$表示m行n列矩阵元素：

我们把"加"定义为矩阵之间的加。加的结果还是属于向量空间$R^{m×n}$。

$$
A+B=\left[\begin{array}{ccc}
a_{11}+b_{11} & \ldots & a_{1 n}+b_{1 n} \\\
\cdot & & \cdot \\\
\cdot & & \cdot \\\
\cdot & & \cdot \\\
a_{m 1}+b_{m 1} & \ldots & a_{m n}+b_{m n}
\end{array}\right]
$$

而标量乘就是矩阵乘标量。标量乘的结果还是属于向量空间$R^{m×n}$。

$$
\lambda A=\left[\begin{array}{ccc}
\lambda a_{11} & \ldots & \lambda a_{1 n} \\\
\cdot & & \cdot \\\
\cdot & & \cdot \\\
\lambda_{m 1} & \ldots & \lambda \dot{a}_{m n}
\end{array}\right]
$$

到这里，相信你应该了解了向量空间的基本概念，接下来这一讲的重头戏就要来了，它就是向量子空间。

向量子空间

为什么说向量子空间是重头戏？那是因为它在机器学习中的地位相当重要，被用在了**降维算法**中。这里我会分两步来讲解，先讲向量子空间的基本概念，再通过一个机器学习的例子，能让你更了解它，并灵活运用在工作实践中。

什么是向量子空间？

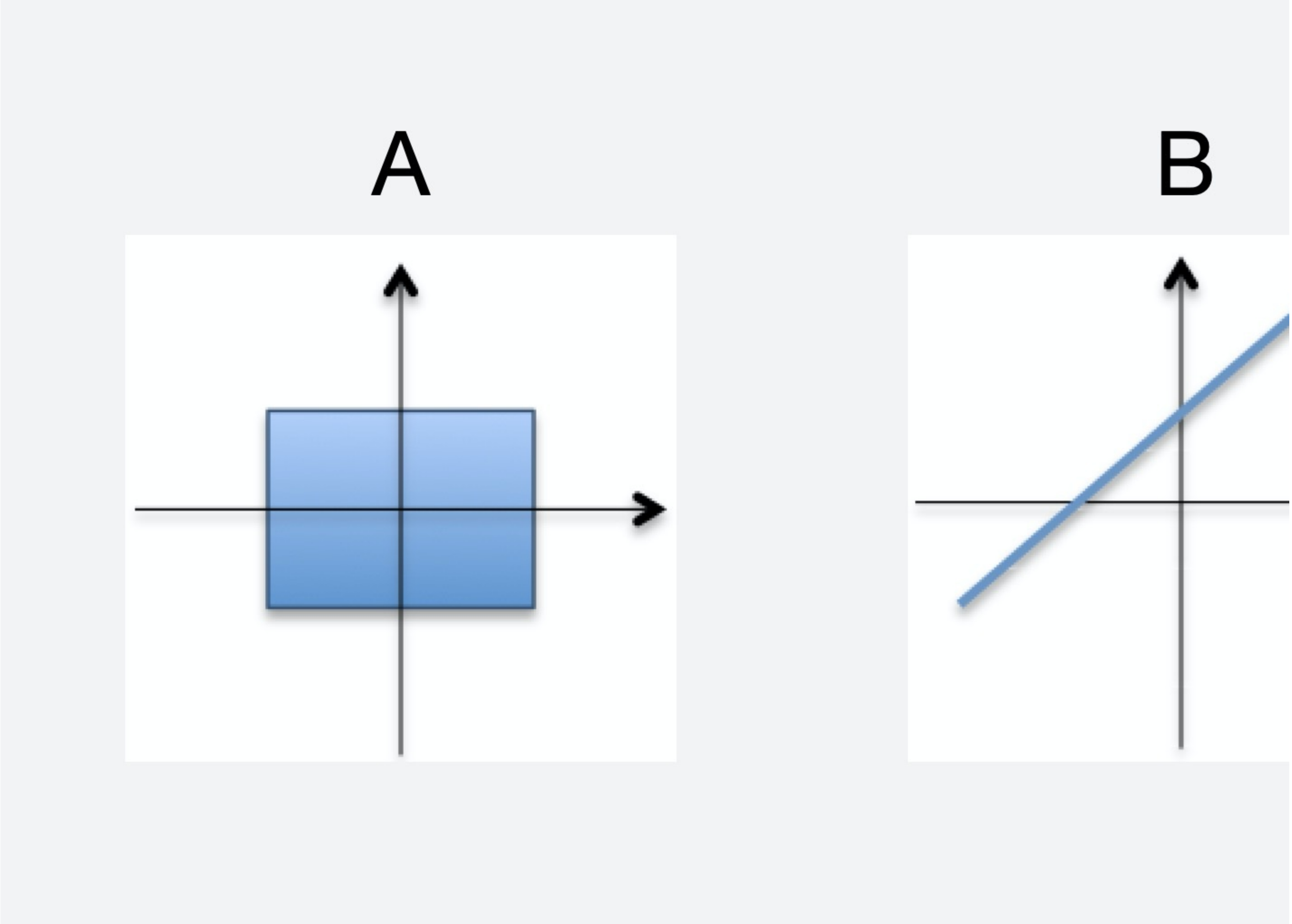
从"子"这个字，我们可以很直观地想到，它是被包含在向量空间中的，事实也确实如此。

已知$V:=(V,+,\cdot)$是一个向量空间，如果$U \subseteq V, U \neq 0$，那么$U:=(U,+,\cdot)$就是V的向量子空间，或者叫做线性子空间。向量子空间U自然继承V的许多属性，其中包括：交换组的属性、分配律、结合律和中性元素。除此以外，要判断U是不是向量子空间，我们还需要这两个条件：

1.$U \neq 0$，但$0 \in U$。
2. U的封闭性满足外部运算：$\forall \lambda \in R, \forall x \in U: \lambda x \in U$，同时满足内部运算：$\forall x, y \in U: x+y \in U$。

介绍完向量子空间基本概念后，我们一起来通过一个例子来巩固一下所学的知识，看看你是否已经掌握了向量子空间。

请你观察下面列举的A、B、C三张图像，里面有 R^{2}的向量子空间吗？



这里我不会给出答案，你可以自己思考一下，友情提醒：A、B、C中只有一个是向量子空间。

机器学习中的向量子空间

结合实践来看向量子空间的时候到了。在机器学习中，直接计算高维数据困难重重，一方面是数据处理和分析困难，使得数据可视化几乎不可能；另一方面是因为数据存储量太大，计算要付出的代价太高。

所以，我们要从向量空间中去除冗余数据，形成向量子空间。这样数据存储量就被极大地压缩了，处理和分析数据也简单了很多。因为高维数据中其实有很多维是冗余的，它们可以被其它维组合表示，也就是“降维”。

降维就是利用结构化和相关性，在尽量保证信息不损失的情况下，转换数据表现形式，让数据更“紧凑”。换句话说，你可以把降维看成是数据压缩技术，类似图像的jpeg和音频的MP3压缩算法。或者简单地说，降维就是将数据投射到一个低维子空间，比如：三维数据集可以降成二维，也就是把数据映射到平面上。

机器学习中运用最多的降维算法就是主成分分析，简称PCA（Principal Component Analysis），也叫做卡尔胡宁-勒夫变换（Karhunen-Loeve Transform）。它是一种用于探索高维数据结构的技术，已经存在超过100年了，但至今仍然广泛被使用在数据压缩和可视化中。

我们来看一个例子：假设你负责的是机器学习算法，而你的应用场景是车辆的牌照识别，也就是OCR（Optical Character Recognition）光学字符识别。在这个场景中，大街上的摄像头必须实时捕捉运动车辆的牌照，一旦发现问题车辆就需要快速识别牌照，并移交交警监管部门来做进一步处理。你会怎么处理呢？

牌照被拍下后就是图片，为了减小图像原始数据量，减少后续处理时的计算量，这些图片首先需要进行经过灰度处理（牌照只需要数字，不需要对彩色图像的RGB三个分量都进行处理），处理后就会变成类似这样的形式：

假定每个数字是一个$28*28$尺寸的灰度图片，包含784个像素，那每张灰度数字图片就是一个向量，这个向量就有784个维度，可以表示成$x \in R^{784}$，而你的样本库少说也有几十万个样本数据，如果按一般的方法是不可能做到实时识别的。所以，这样的场景就需要使用PCA来压缩数据，进行大幅度降维。

这里我们简单一些，从二维的角度来看看PCA。在PCA中，最关键的就是寻找数据点x_{n}的相似低维投影y_{n}，而y_{n}就是子向量空间。

考虑R^{2}和它的两个基，$e_{1}=[1,0]^{T}$、$e_{2}=[0,1]^{T}$，$x \in R^{2}$能够表示成这两个基的线性组合（“基”会在第7节课中详细介绍）。

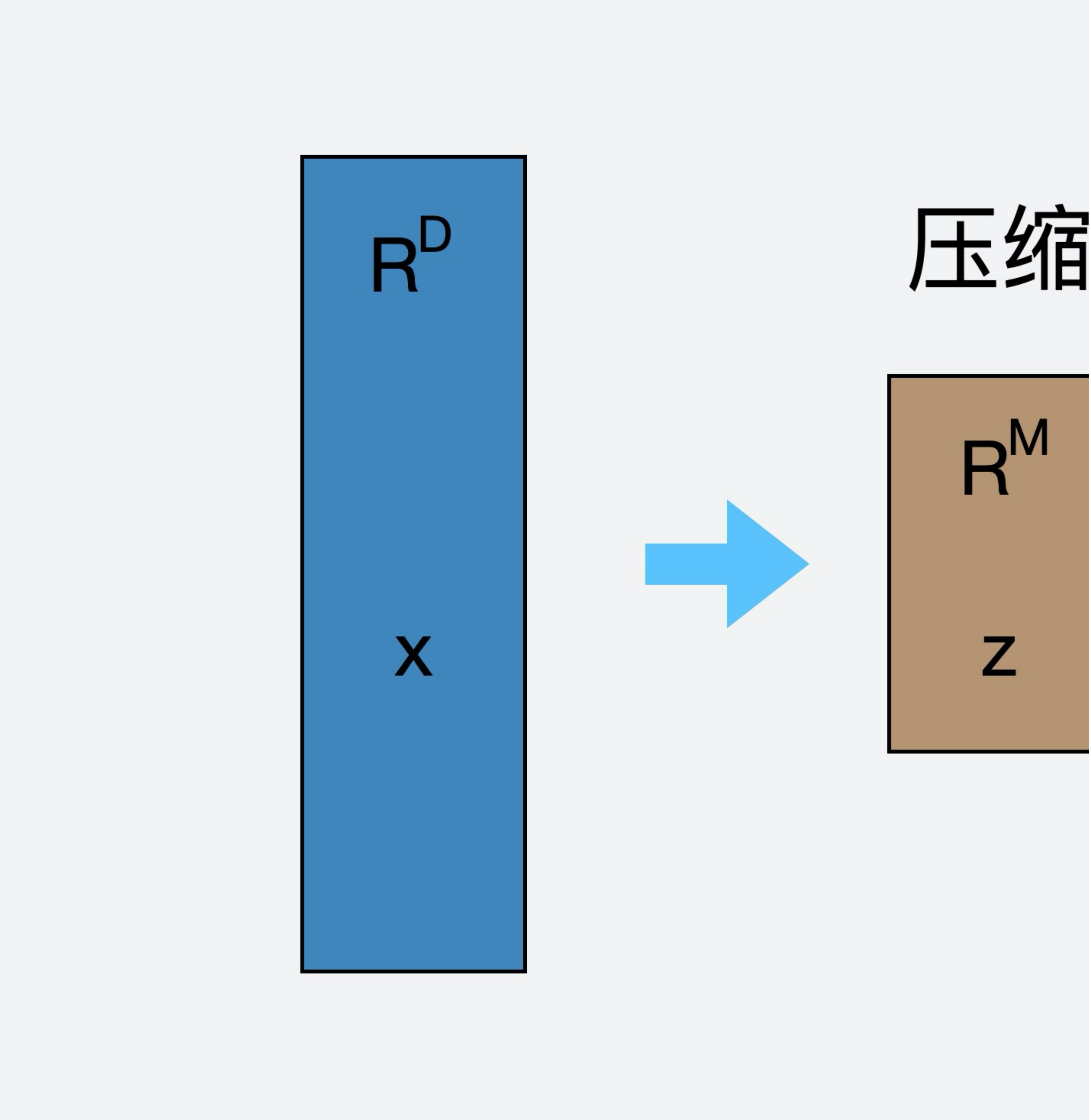
$$
\left[\begin{array} {l}
5 \\
3
\end{array}\right]=5 e_{1}+3 e_{2}
$$

于是，相似低维投影y_{n}就可以表示成下面这种形式。

$$
y_{n}=\left[\begin{array} {l}
0 \\
z
\end{array}\right] \in R^{2}, z \in R
$$

同时，y_{n}也可以写成这样的形式：$y_{n}=0 e_{1}+z e_{2}$。

这里的z就是我们要找的值，而y_{n}就是一个向量子空间U，它的维度是一维。最后，我们再通过下图来更直观地说明一下PCA的过程。



图的左边是原始向量空间x，经过压缩后，我们找到了子向量空间z，z经过重构后，形成了最终的向量空间y，y还是属于原来的向量空间，但y却拥有比x更低的维度表现。

从数学的角度看，我们其实就是在寻找x和z之间的线性关系，使得$z=B^{T}x$，以及$y=Bz$，其中B是矩阵。如果我们从数据压缩技术方向来看就更容易理解了，图中的左边箭头是编码过程，也就是压缩，右边的箭头是解码过程，也就是映射，而矩阵B就是把属于R^{M}向量空间的低维的z，映射回原来的向量空间R^{D}。同理，矩阵B^{T}就是把属于原来R^{D}向量空间的高维x压缩成低维的z。

本节小结

好了，到这里线性空间这一讲就结束了，最后我再总结一下前面讲解的内容。

今天的知识很重要，实践中都是围绕向量空间展开的，也就是说向量空间是实践的基本单位，你也一定要掌握子向量空间，因为现实中数据都是高维度的，从向量空间降维后找到子向量空间，这样就能大大提高数据运算和分析的效率。

再次特别提醒：这一讲非常重要，因为后面几讲都是围绕向量空间展开的，如果你哪里没看懂，一定要多看几次，确保完全明白了。有任何问题，你也可以随时在留言区向我提问。

线性代数练习场

之前我讲了一个现实的向量空间降维场景：车辆的牌照识别，这里，我们通过另一个现实场景，来练习一下向量空间降维的思维。

目前市场上语音识别的应用有很多，比如：天猫精灵、苹果Siri、小爱等等，而语音识别涉及的技术有很多，有语言建模、声学建模、语音信号处理等等。在语音信号处理中，语音声波通过空气传播，并被麦克风捕获，麦克风将压力波转换为可捕获的电活动。我们对电活动进行采样，用以创建描述信号的一系列波形采样。

采样是数据收集的过程，数据收集后需要做数据预处理，而预处理的关键一步就是特征提取，现在请你从“特征提取”的方向上思考下，有哪些和目前所学到的数学知识有关？

> 友情提醒：特征提取就是数字化过程，也是向量化后形成向量空间的过程。

欢迎在留言区写出你的思考，我会及时回复。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我一起重学线性代数！

今天我们来聊一聊“线性空间”。在“[基本概念]”那一节课中，我讲到了向量，你也看到了，线性方程组是能够通过矩阵或向量来表达的。那为什么我们还要学习线性空间呢？

说到线性空间，其实你可以通过“空间”这个词把线性空间和我们的生活做个类比。就像我们生活在三维世界中，在这个空间中，一切物质都是运动的，而运动也是有一定规律的。这么来看的话，空间其实就是一个具有实际意义的集合，其中包含了**对象**和**运动**。

把这个理解平移到线性空间也是一样的，向量就是对象，如果把**向量**看成是**线性空间中的点**，那**向量的变换**就是**点在空间中的运动**。所以，线性空间也是一个集合，它的意义在于，赋予了向量生命和活力，只有掌握了线性空间，我们才能真正在实际运用中有的放矢。因为所有的活动都要在这个空间中发生，比如：线性空间中用到的傅立叶变换。

组（群）

还是老样子，我们要先从学习线性空间会用到的基础知识开始讲起。

我们先来讲一下“组”，组也可以叫成大家习惯的“群”（以下均以“组”称呼）。说到“组”，它其实是一个通用的概念，和线性空间没有什么关系，但我之所以要先说组，是因为组（群）和空间是类似的，也是集合，性质也差不多，如果你了解了组，就更容易理解线性空间了。而且，组在计算机科学中是得到了广泛应用的，特别是在计算机密码学和图形图像处理中。

说了这么多，“组”到底是什么呢？组，其实就是包含一系列元素的集合，在对这些集合元素实施某类运算后，这个集合仍然保持着封闭性。可能这么说你会有些疑惑，我还是通过数学方法来定义组，可能会让你的思路更加清晰一些。

我们先来定义一个集合G和集合上的某一类运算，比如：乘$\otimes$，使得 $G \otimes G$ 的结果还是属于G，如果我们要$G:=(G, \otimes)$是一个组，则需要满足以下这些条件：

1.G在$\otimes$运算中是封闭的，也就是：$\forall x, y \in G: x \otimes y \in G$。
2. 满足结合律，也就是：$\forall x, y, z \in G:(x \otimes y) \otimes z=x \otimes(y \otimes z)$。
3. 恒等元素（或者叫做中性元素）e，满足：$\exists \mathrm{e} \in G, \forall x \in G: x \otimes e=x, e \otimes x=x$，这里的恒等元素e在一般数字中你可以认为是$1$，而在矩阵中就可以认为是单位矩阵。
4. 有x的逆元素y，使得：$\forall \mathrm{e} \in G, \exists x \in G: x \otimes y=e, y \otimes x=e$，其中$e$是恒等元素。

再补充一点，如果满足$\forall x, y \in G: x \otimes y=y \otimes x$，则$G:=(G, \otimes)$就叫作交换组。

现在我们来做个测试，看看你是否理解了组的定义。

一个$n×n$的实数矩阵A和它的乘法运算是一个组吗？通过符号表达就是：$\left(A^{n \times n}, \quad \cdot\right)$。

想要知道这个问题的答案，我们就需要用前面满足组的这几个条件来分析一下。

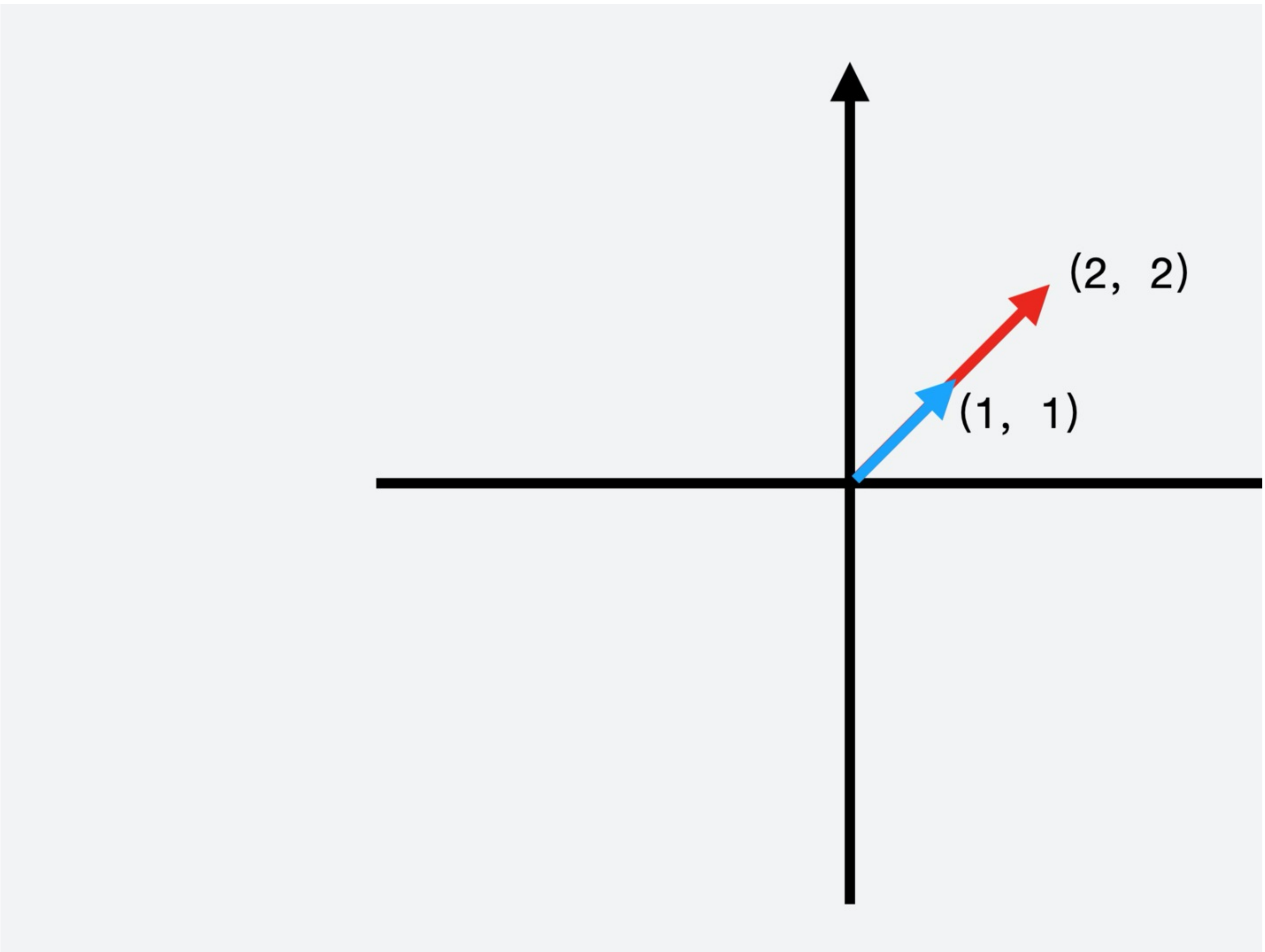
首先，是封闭性和结合律，从矩阵乘的定义就能直接看出来，它们是满足的；其次，我们来看恒等元素，单位矩阵就是矩阵元素，也满足组条件；最后，我们看看逆元素，假设A矩阵的逆矩阵A^{-1}存在，那很明显，满足$AA^{-1}=I$，这里I就是恒等元素。

于是，我们可以说$\left(A^{n \times n}, \quad \cdot\right)$是一个组，而矩阵乘不符合交换律，所以这个组并不是交换组。

向量空间

如果我们在“组”的基础上再扩展一下，就能够很顺利地来到“线性空间”。说起线性空间，它也叫作向量空间，它在一些书本和网络上的解释都是比较晦涩难懂的，但如果我们在“组”的基础上来解释它，你应该会比较容易理解了。

刚才我们说的组只包含了某一类运算，这类运算是在集合元素上的内部运算，我们把它定义为加$（+）$运算，现在再引入一类外部运算，标量乘$（·）$。于是，你可以想象一下，我们可以把内部运算看成是加法，把外部运算看成是“缩放”，因为标量乘就是一个标量和向量相乘。如果从二维坐标系的角度来看一下，点$(1, 1)$和标量2相乘就是$(2, 2)$，这个就是放大效果。



在通过“组”来认识向量空间后，再从数学角度去看向量空间的定义，你应该就能完全理解了。

一个实数向量空间V是一个集合，它包含了两类运算，一类是加，一类是标量乘，而且运算都满足V的封闭性，也就是说，V中元素的运算结果还是属于V。

$$
\begin{array} {l}

+: V+V \rightarrow V \\\
\cdot : \lambda \cdot V \rightarrow V
\end{array}
$$

这个向量空间可以表示成$V:=(V,+,\cdot)$，其中：

1.向量空间V的$(V,+)$是一个交换组。
2.V满足分配律：$\forall \lambda \in R, x, y \in V: \lambda \cdot(x+y)=\lambda \cdot x+\lambda \cdot y$；以及$\forall \lambda, \varphi \in R, x \in V:(\lambda+\varphi) \cdot x=\lambda \cdot x+\varphi \cdot x$。
3.V外部运算满足结合律：$\forall \lambda, \varphi \in R, x \in V: \lambda \cdot(\varphi \cdot x)=(\lambda \cdot \varphi) \cdot x$。
4.V外部运算的恒等元素满足：$\forall x \in V: 1 \cdot x=x$。

在向量空间V中的元素x是向量，向量空间加运算$(V,+)$的恒等元素是零向量$0=\left[\begin{array}{lll}0, & \ldots & , 0\end{array}\right]^{T}$。这里的加运算是内部运算，也叫做向量加，元素$λ$属于实数，叫做标量，外部运算乘$·$是标量乘。

好了，我给出了向量空间的一般描述和数学定义，如果你还是有一些不理解，也没有关系，我再举两个例子来加深你对向量空间的理解。

例1：进一步理解向量加和标量乘

对于向量空间的向量加和标量乘：我们定义一个实数向量空间R^{n}，n表示向量元素：

- “加”定义为向量之间的加：$x+y=\left(x_{1}, \ldots, x_{n}\right)+\left(y_{1}, \ldots, y_{n}\right)=\left(x_{1}+y_{1}, \ldots, x_{n}+y_{n}\right)$。 加的结果还是属于向量空间$R^{n}$。

- 标量乘就是向量乘标量：$\lambda x=\lambda\left(x_{1}, \ldots, x_{n}\right)=\left(\lambda x_{1}, \ldots, \lambda x_{n}\right)$。
  标量乘的结果还是属于向量空间R^{n}。

例2：进一步理解矩阵加和标量乘

对于向量空间的矩阵加和标量乘：我们定义一个实数向量空间$R^{m×n}$，用$m×n$表示m行n列矩阵元素：

我们把“加”定义为矩阵之间的加。加的结果还是属于向量空间$R^{m×n}$。

$$
A+B=\left[\begin{array}{ccc}
a_{11}+b_{11} & \ldots & a_{1 n}+b_{1 n} \\\
\cdot & & \cdot \\\
\cdot & & \cdot \\\
\cdot & & \cdot \\\
a_{m 1}+b_{m 1} & \ldots & a_{m n}+b_{m n}
\end{array}\right]
$$

而标量乘就是矩阵乘标量。标量乘的结果还是属于向量空间$R^{m×n}$。

$$
\lambda A=\left[\begin{array}{ccc}
\lambda a_{11} & \ldots & \lambda a_{1 n} \\\
\cdot & & \cdot \\\
\cdot & & \cdot \\\
\lambda_{m 1} & \ldots & \lambda \dot{a}_{m n}
\end{array}\right]
$$

到这里，相信你应该了解了向量空间的基本概念，接下来这一讲的重头戏就要来了，它就是向量子空间。

向量子空间

为什么说向量子空间是重头戏？那是因为它在机器学习中的地位相当重要，被用在了**降维算法**中。这里我会分两步来讲解，先讲向量子空间的基本概念，再通过一个机器学习的例子，能让你更了解它，并灵活运用在工作实践中。

什么是向量子空间？

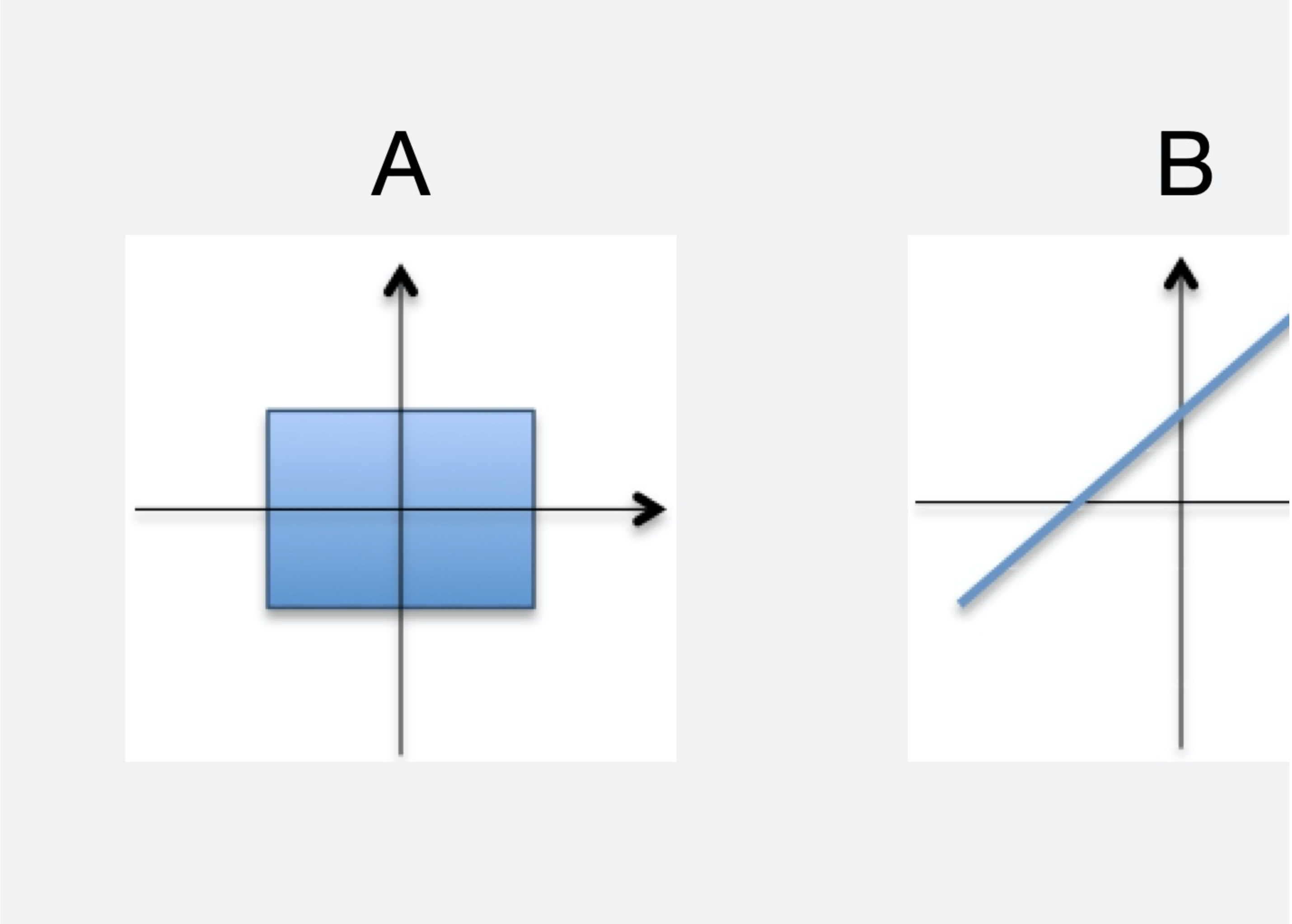
从“子”这个字，我们可以很直观地想到，它是被包含在向量空间中的，事实也确实如此。

已知$V:=(V,+,\cdot)$是一个向量空间，如果$U \subseteq V, U \neq 0$，那么$U:=(U,+,\cdot)$就是V的向量子空间，或者叫做线性子空间。向量子空间U自然继承V的许多属性，其中包括：交换组的属性、分配律、结合律和中性元素。除此以外，要判断U是不是向量子空间，我们还需要这两个条件：

1.$U \neq 0$，但$0 \in U$。
2. U的封闭性满足外部运算：$\forall \lambda \in R, \forall x \in U: \lambda x \in U$，同时满足内部运算：$\forall x, y \in U: x+y \in U$。

介绍完向量子空间基本概念后，我们一起来通过一个例子来巩固一下所学的知识，看看你是否已经掌握了向量子空间。

请你观察下面列举的A、B、C三张图像，里面有 R^{2}的向量子空间吗？



这里我不会给出答案，你可以自己思考一下，友情提醒：A、B、C中只有一个是向量子空间。

机器学习中的向量子空间

结合实践来看向量子空间的时候到了。在机器学习中，直接计算高维数据困难重重，一方面是数据处理和分析困难，使得数据可视化几乎不可能；另一方面是因为数据存储量太大，计算要付出的代价太高。

所以，我们要从向量空间中去除冗余数据，形成向量子空间。这样数据存储量就被极大地压缩了，处理和分析数据也简单了很多。因为高维数据中其实有很多维是冗余的，它们可以被其它维组合表示，也就是“降维”。

降维就是利用结构化和相关性，在尽量保证信息不损失的情况下，转换数据表现形式，让数据更“紧凑”。换句话说，你可以把降维看成是数据压缩技术，类似图像的jpeg和音频的MP3压缩算法。或者简单地说，降维就是将数据投射到一个低维子空间，比如：三维数据集可以降成二维，也就是把数据映射到平面上。

机器学习中运用最多的降维算法就是主成分分析，简称PCA（Principal Component Analysis），也叫做卡尔胡宁-勒夫变换（Karhunen-Loeve Transform）。它是一种用于探索高维数据结构的技术，已经存在超过100年了，但至今仍然广泛被使用在数据压缩和可视化中。

我们来看一个例子：假设你负责的是机器学习算法，而你的应用场景是车辆的牌照识别，也就是OCR（Optical Character Recognition）光学字符识别。在这个场景中，大街上的摄像头必须实时捕捉运动车辆的牌照，一旦发现问题车辆就需要快速识别牌照，并移交交警监管部门来做进一步处理。你会怎么处理呢？

牌照被拍下后就是图片，为了减小图像原始数据量，减少后续处理时的计算量，这些图片首先需要进行经过灰度处理（牌照只需要数字，不需要对彩色图像的RGB三个分量都进行处理），处理后就会变成类似这样的形式：

假定每个数字是一个$28*28$尺寸的灰度图片，包含784个像素，那每张灰度数字图片就是一个向量，这个向量就有784个维度，可以表示成$x \in R^{784}$，而你的样本库少说也有几十万个样本数据，如果按一般的方法是不可能做到实时识别的。所以，这样的场景就需要使用PCA来压缩数据，进行大幅度降维。

这里我们简单一些，从二维的角度来看看PCA。在PCA中，最关键的就是寻找数据点x_{n}的相似低维投影y_{n}，而y_{n}就是子向量空间。

考虑R^{2}和它的两个基，$e_{1}=[1,0]^{T}$、$e_{2}=[0,1]^{T}$，$x \in R^{2}$能够表示成这两个基的线性组合（“基”会在第7节课中详细介绍）。

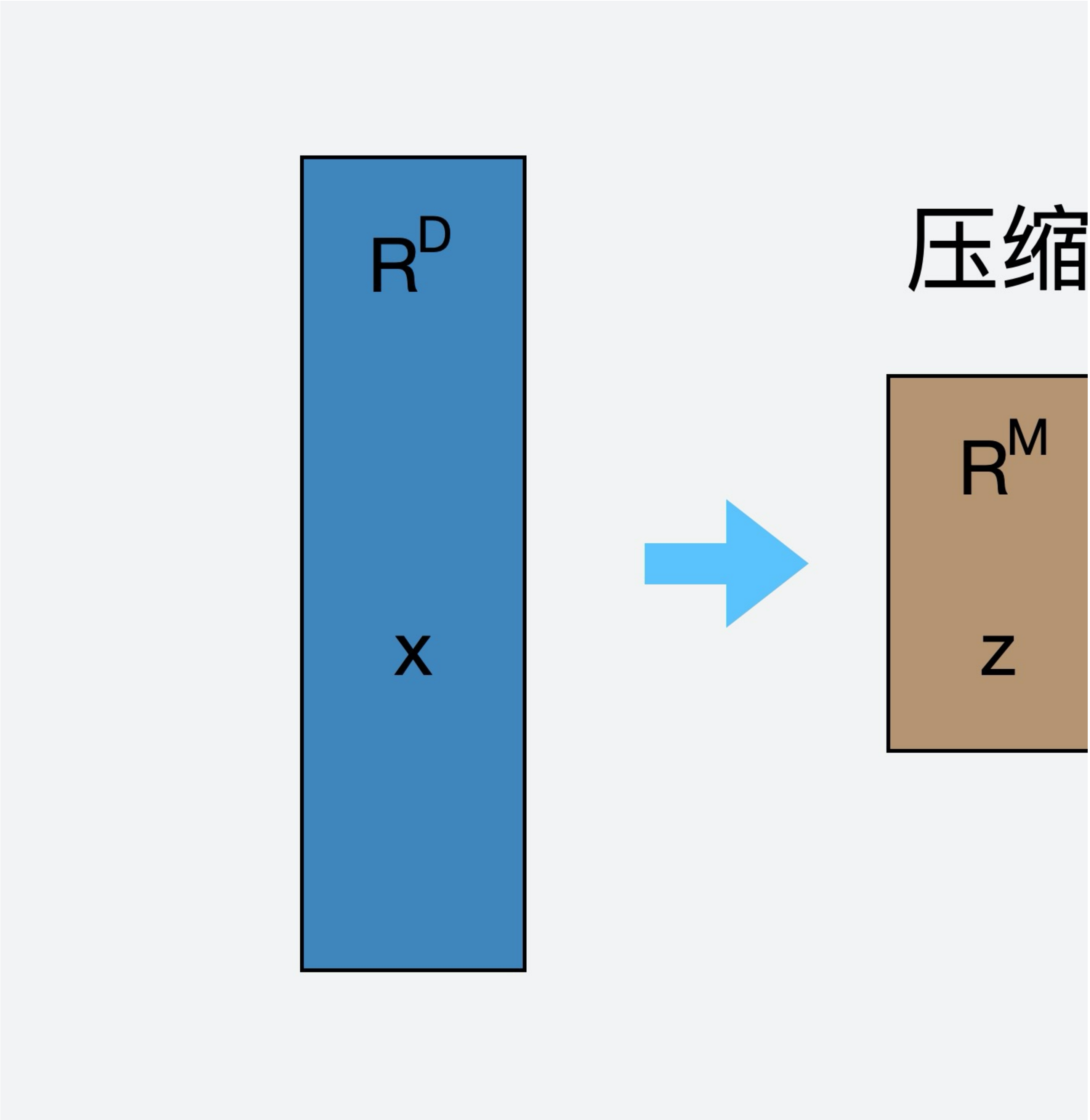
$$
\left[\begin{array}{l}
5 \\
3
\end{array}\right]=5 e_{1}+3 e_{2}
$$

于是，相似低维投影y_{n}就可以表示成下面这种形式。

$$
y_{n}=\left[\begin{array}{l}
0 \\
z
\end{array}\right] \in R^{2}, z \in R
$$

同时，y_{n}也可以写成这样的形式：$y_{n}=0 e_{1}+z e_{2}$。

这里的z就是我们要找的值，而y_{n}就是一个向量子空间U，它的维度是一维。最后，我们再通过下图来更直观地说明一下PCA的过程。



图的左边是原始向量空间x，经过压缩后，我们找到了子向量空间z，z经过重构后，形成了最终的向量空间y，y还是属于原来的向量空间，但y却拥有比x更低的维度表现。

从数学的角度看，我们其实就是在寻找x和z之间的线性关系，使得$z=B^{T}x$，以及$y=Bz$，其中B是矩阵。如果我们从数据压缩技术方向来看就更容易理解了，图中的左边箭头是编码过程，也就是压缩，右边的箭头是解码过程，也就是映射，而矩阵B就是把属于R^{M}向量空间的低维的z，映射回原来的向量空间R^{D}。同理，矩阵B^{T}就是把属于原来R^{D}向量空间的高维x压缩成低维的z。

本节小结

好了，到这里线性空间这一讲就结束了，最后我再总结一下前面讲解的内容。

今天的知识很重要，实践中都是围绕向量空间展开的，也就是说向量空间是实践的基本单位，你也一定要掌握子向量空间，因为现实中数据都是高维度的，从向量空间降维后找到子向量空间，这样就能大大提高数据运算和分析的效率。

再次特别提醒：这一讲非常重要，因为后面几讲都是围绕向量空间展开的，如果你哪里没看懂，一定要多看几次，确保完全明白了。有任何问题，你也可以随时在留言区向我提问。

线性代数练习场

之前我讲了一个现实的向量空间降维场景：车辆的牌照识别，这里，我们通过另一个现实场景，来练习一下向量空间降维的思维。

目前市场上语音识别的应用有很多，比如：天猫精灵、苹果Siri、小爱等等，而语音识别涉及的技术有很多，有语言建模、声学建模、语音信号处理等等。在语音信号处理中，语音声波通过空气传播，并被麦克风捕获，麦克风将压力波转换为可捕获的电活动。我们对电活动进行采样，用以创建描述信号的一系列波形采样。

采样是数据收集的过程，数据收集后需要做数据预处理，而预处理的关键一步就是特征提取，现在请你从“特征提取”的方向上思考下，有哪些和目前所学到的数学知识有关？

> 友情提醒：特征提取就是数字化过程，也是向量化后形成向量空间的过程。

欢迎在留言区写出你的思考，我会及时回复。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我一起重学线性代数！

今天我们来聊一聊“线性空间”。在“基本概念”那一节课中，我讲到了向量，你也看到了，线性方程组是能够通过矩阵或向量来表达的。那为什么我们还要学习线性空间呢？

说到线性空间，其实你可以通过“空间”这个词把线性空间和我们的生活做个类比。就像我们生活在三维世界中，在这个空间中，一切物质都是运动的，而运动也是有一定规律的。这么来看的话，空间其实就是一个具有实际意义的集合，其中包含了**对象**和**运动**。

把这个理解平移到线性空间也是一样的，向量就是对象，如果把**向量**看成是**线性空间中的点**，那**向量的变换**就是**点在空间中的运动**。所以，线性空间也是一个集合，它的意义在于，赋予了向量生命和活力，只有掌握了线性空间，我们才能真正在实际运用中有的放矢。因为所有的活动都要在这个空间中发生，比如：线性空间中用到的傅立叶变换。

组（群）

还是老样子，我们要先从学习线性空间会用到的基础知识开始讲起。

我们先来讲一下“组”，组也可以叫成大家习惯的“群”（以下均以“组”称呼）。说到“组”，它其实是一个通用的概念，和线性空间没有什么关系，但我之所以要先说组，是因为组（群）和空间是类似的，也是集合，性质也差不多，如果你了解了组，就更容易理解线性空间了。而且，组在计算机科学中是得到了广泛应用的，特别是在计算机密码学和图形图像处理中。

说了这么多，“组”到底是什么呢？组，其实就是包含一系列元素的集合，在对这些集合元素实施某类运算后，这个集合仍然保持着封闭性。可能这么说你会有些疑惑，我还是通过数学方法来定义组，可能会让你的思路更加清晰一些。

我们先来定义一个集合G和集合上的某一类运算，比如：乘$\otimes$，使得 $G \otimes G$ 的结果还是属于G，如果我们要$G:=(G, \otimes)$是一个组，则需要满足以下这些条件：

1.G在$\otimes$运算中是封闭的，也就是：$\forall x, y \in G: x \otimes y \in G$。
2. 满足结合律，也就是：$\forall x, y, z \in G:(x \otimes y) \otimes z=x \otimes(y \otimes z)$。
3. 恒等元素（或者叫做中性元素）e，满足：$\exists \mathrm{e} \in G, \forall x \in G: x \otimes e=x, e \otimes x=x$，这里的恒等元素e在一般数字中你可以认为是$1$，而在矩阵中就可以认为是单位矩阵。
4. 有x的逆元素y，使得：$\forall \mathrm{e} \in G, \exists x \in G: x \otimes y=e, y \otimes x=e$，其中$e$是恒等元素。

再补充一点，如果满足$\forall x, y \in G: x \otimes y=y \otimes x$，则$G:=(G, \otimes)$就叫作交换组。

现在我们来做个测试，看看你是否理解了组的定义。

一个$n×n$的实数矩阵A和它的乘法运算是一个组吗？通过符号表达就是：$\left(A^{n \times n}, \quad \cdot\right)$。

想要知道这个问题的答案，我们就需要用前面满足组的这几个条件来分析一下。

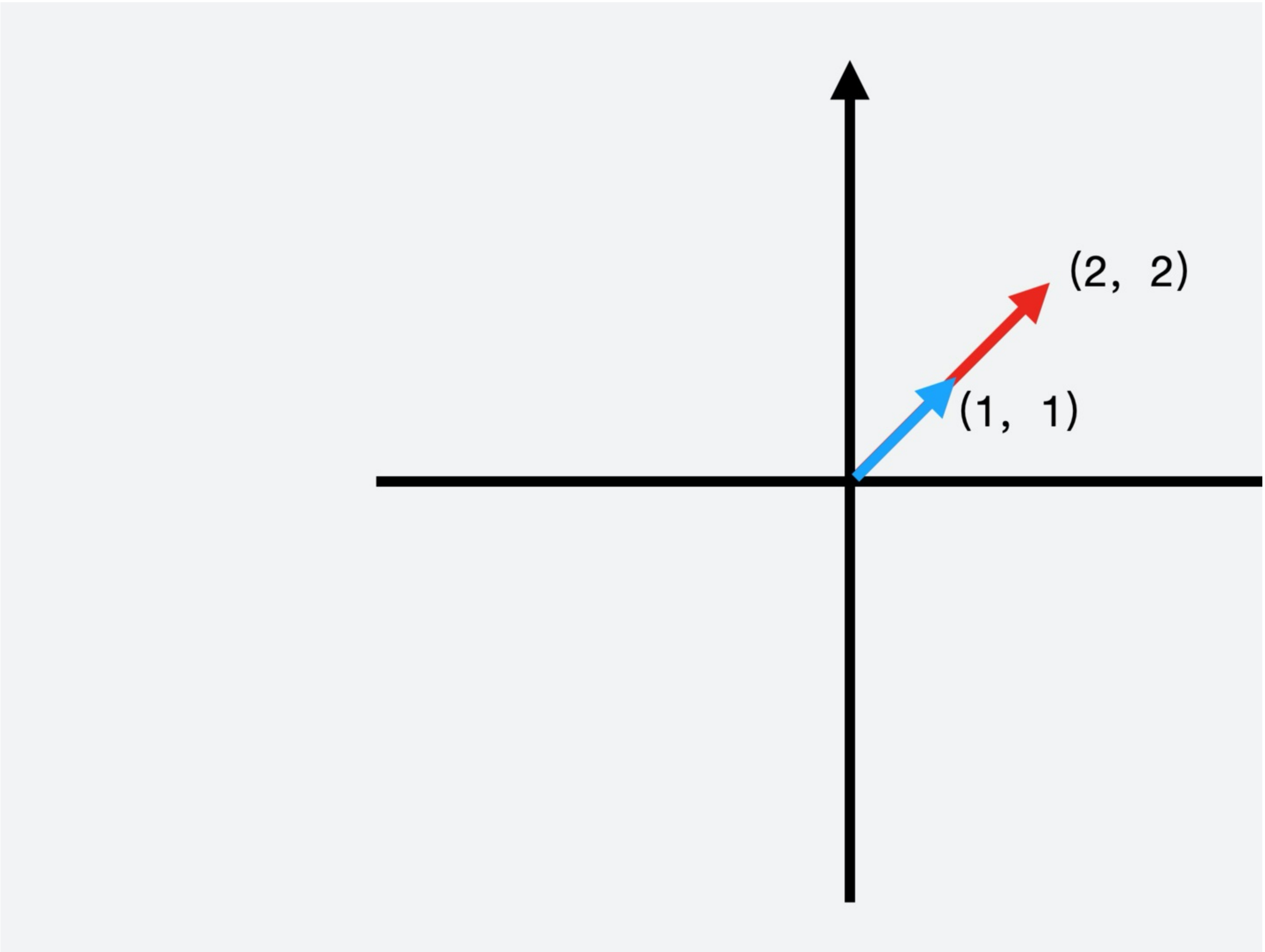
首先，是封闭性和结合律，从矩阵乘的定义就能直接看出来，它们是满足的；其次，我们来看恒等元素，单位矩阵就是矩阵元素，也满足组条件；最后，我们看看逆元素，假设A矩阵的逆矩阵A^{-1}存在，那很明显，满足$AA^{-1}=I$，这里I就是恒等元素。

于是，我们可以说$\left(A^{n \times n}, \quad \cdot\right)$是一个组，而矩阵乘不符合交换律，所以这个组并不是交换组。

向量空间

如果我们在“组”的基础上再扩展一下，就能够很顺利地来到“线性空间”。说起线性空间，它也叫作向量空间，它在一些书本和网络上的解释都是比较晦涩难懂的，但如果我们在“组”的基础上来解释它，你应该会比较容易理解了。

刚才我们说的组只包含了某一类运算，这类运算是在集合元素上的内部运算，我们把它定义为加$（+）$运算，现在再引入一类外部运算，标量乘$（·）$。于是，你可以想象一下，我们可以把内部运算看成是加法，把外部运算看成是“缩放”，因为标量乘就是一个标量和向量相乘。如果从二维坐标系的角度来看一下，点$(1, 1)$和标量2相乘就是$(2, 2)$，这个就是放大效果。



在通过“组”来认识向量空间后，再从数学角度去看向量空间的定义，你应该就能完全理解了。

一个实数向量空间V是一个集合，它包含了两类运算，一类是加，一类是标量乘，而且运算都满足V的封闭性，也就是说，V中元素的运算结果还是属于V。

$$
\begin{array} {l}

+: V+V \rightarrow V \\\
\cdot : \lambda \cdot V \rightarrow V
\end{array}
$$

这个向量空间可以表示成$V:=(V,+,\cdot)$，其中：

1.向量空间V的$(V,+)$是一个交换组。
2.V满足分配律：$\forall \lambda \in R, x, y \in V: \lambda \cdot(x+y)=\lambda \cdot x+\lambda \cdot y$；以及$\forall \lambda, \varphi \in R, x \in V:(\lambda+\varphi) \cdot x=\lambda \cdot x+\varphi \cdot x$。
3.V外部运算满足结合律：$\forall \lambda, \varphi \in R, x \in V: \lambda \cdot(\varphi \cdot x)=(\lambda \cdot \varphi) \cdot x$。
4.V外部运算的恒等元素满足：$\forall x \in V: 1 \cdot x=x$。

在向量空间V中的元素x是向量，向量空间加运算$(V,+)$的恒等元素是零向量$0=\left[\begin{array}{lll}0, & \ldots & , 0\end{array}\right]^{T}$。这里的加运算是内部运算，也叫做向量加，元素$λ$属于实数，叫做标量，外部运算乘$·$是标量乘。

好了，我给出了向量空间的一般描述和数学定义，如果你还是有一些不理解，也没有关系，我再举两个例子来加深你对向量空间的理解。

例1：进一步理解向量加和标量乘

对于向量空间的向量加和标量乘：我们定义一个实数向量空间R^{n}，n表示向量元素：

- “加”定义为向量之间的加：$x+y=\left(x_{1}, \ldots, x_{n}\right)+\left(y_{1}, \ldots, y_{n}\right)=\left(x_{1}+y_{1}, \ldots, x_{n}+y_{n}\right)$。 加的结果还是属于向量空间$R^{n}$。
- 标量乘就是向量乘标量：$\lambda x=\lambda\left(x_{1}, \ldots, x_{n}\right)=\left(\lambda x_{1}, \ldots, \lambda x_{n}\right)$。
  标量乘的结果还是属于向量空间R^{n}。

例2：进一步理解矩阵加和标量乘

对于向量空间的矩阵加和标量乘：我们定义一个实数向量空间$R^{m×n}$，用$m×n$表示m行n列矩阵元素：

我们把“加”定义为矩阵之间的加。加的结果还是属于向量空间$R^{m×n}$。

$$
A+B=\left[\begin{array}{ccc}
a_{11}+b_{11} & \ldots & a_{1 n}+b_{1 n} \\\
\cdot & & \cdot \\\
\cdot & & \cdot \\\
\cdot & & \cdot \\\
a_{m 1}+b_{m 1} & \ldots & a_{m n}+b_{m n}
\end{array}\right]
$$

而标量乘就是矩阵乘标量。标量乘的结果还是属于向量空间$R^{m×n}$。

$$
\lambda A=\left[\begin{array}{ccc}
\lambda a_{11} & \ldots & \lambda a_{1 n} \\\
\cdot & & \cdot \\\
\cdot & & \cdot \\\
\lambda_{m 1} & \ldots & \lambda \dot{a}_{m n}
\end{array}\right]
$$

到这里，相信你应该了解了向量空间的基本概念，接下来这一讲的重头戏就要来了，它就是向量子空间。

向量子空间

为什么说向量子空间是重头戏？那是因为它在机器学习中的地位相当重要，被用在了**降维算法**中。这里我会分两步来讲解，先讲向量子空间的基本概念，再通过一个机器学习的例子，能让你更了解它，并灵活运用在工作实践中。

什么是向量子空间？

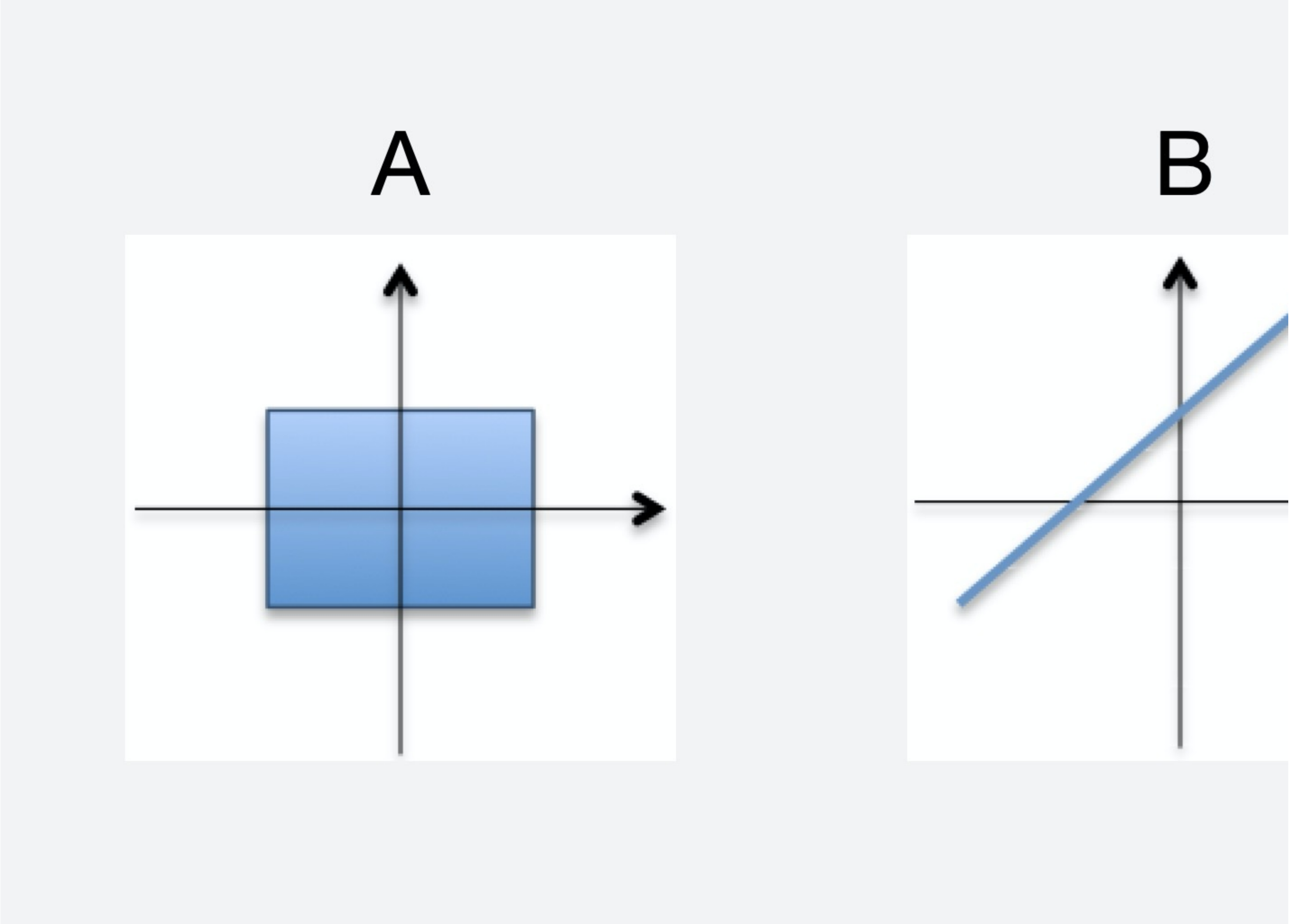
从“子”这个字，我们可以很直观地想到，它是被包含在向量空间中的，事实也确实如此。

已知$V:=(V,+,\cdot)$是一个向量空间，如果$U \subseteq V, U \neq 0$，那么$U:=(U,+,\cdot)$就是V的向量子空间，或者叫做线性子空间。向量子空间U自然继承V的许多属性，其中包括：交换组的属性、分配律、结合律和中性元素。除此以外，要判断U是不是向量子空间，我们还需要这两个条件：

1.$U \neq 0$，但$0 \in U$。
2. U的封闭性满足外部运算：$\forall \lambda \in R, \forall x \in U: \lambda x \in U$，同时满足内部运算：$\forall x, y \in U: x+y \in U$。

介绍完向量子空间基本概念后，我们一起来通过一个例子来巩固一下所学的知识，看看你是否已经掌握了向量子空间。

请你观察下面列举的A、B、C三张图像，里面有 R^{2}的向量子空间吗？



这里我不会给出答案，你可以自己思考一下，友情提醒：A、B、C中只有一个是向量子空间。

机器学习中的向量子空间

结合实践来看向量子空间的时候到了。在机器学习中，直接计算高维数据困难重重，一方面是数据处理和分析困难，使得数据可视化几乎不可能；另一方面是因为数据存储量太大，计算要付出的代价太高。

所以，我们要从向量空间中去除冗余数据，形成向量子空间。这样数据存储量就被极大地压缩了，处理和分析数据也简单了很多。因为高维数据中其实有很多维是冗余的，它们可以被其它维组合表示，也就是“降维”。

降维就是利用结构化和相关性，在尽量保证信息不损失的情况下，转换数据表现形式，让数据更“紧凑”。换句话说，你可以把降维看成是数据压缩技术，类似图像的jpeg和音频的MP3压缩算法。或者简单地说，降维就是将数据投射到一个低维子空间，比如：三维数据集可以降成二维，也就是把数据映射到平面上。

机器学习中运用最多的降维算法就是主成分分析，简称PCA（Principal Component Analysis），也叫做卡尔胡宁-勒夫变换（Karhunen-Loeve Transform）。它是一种用于探索高维数据结构的技术，已经存在超过100年了，但至今仍然广泛被使用在数据压缩和可视化中。

我们来看一个例子：假设你负责的是机器学习算法，而你的应用场景是车辆的牌照识别，也就是OCR（Optical Character Recognition）光学字符识别。在这个场景中，大街上的摄像头必须实时捕捉运动车辆的牌照，一旦发现问题车辆就需要快速识别牌照，并移交交警监管部门来做进一步处理。你会怎么处理呢？

牌照被拍下后就是图片，为了减小图像原始数据量，减少后续处理时的计算量，这些图片首先需要进行经过灰度处理（牌照只需要数字，不需要对彩色图像的RGB三个分量都进行处理），处理后就会变成类似这样的形式：

假定每个数字是一个$28*28$尺寸的灰度图片，包含784个像素，那每张灰度数字图片就是一个向量，这个向量就有784个维度，可以表示成$x \in R^{784}$，而你的样本库少说也有几十万个样本数据，如果按一般的方法是不可能做到实时识别的。所以，这样的场景就需要使用PCA来压缩数据，进行大幅度降维。

这里我们简单一些，从二维的角度来看看PCA。在PCA中，最关键的就是寻找数据点x_{n}的相似低维投影y_{n}，而y_{n}就是子向量空间。

考虑R^{2}和它的两个基，$e_{1}=[1,0]^{T}$、$e_{2}=[0,1]^{T}$，$x \in R^{2}$能够表示成这两个基的线性组合（“基”会在第7节课中详细介绍）。

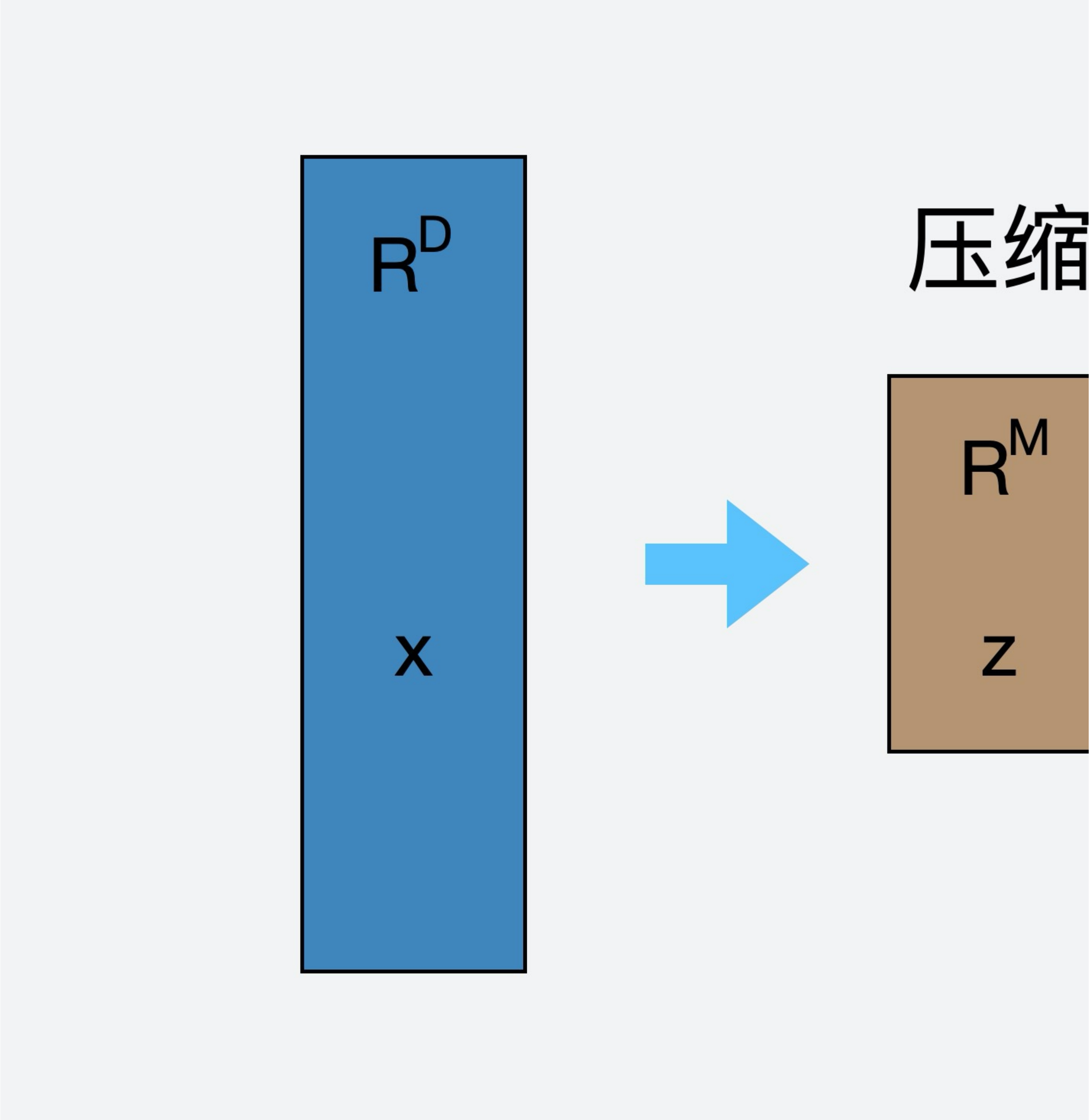
$$
\left[\begin{array}{l}
5 \\
3
\end{array}\right]=5 e_{1}+3 e_{2}
$$

于是，相似低维投影y_{n}就可以表示成下面这种形式。

$$
y_{n}=\left[\begin{array}{l}
0 \\
z
\end{array}\right] \in R^{2}, z \in R
$$

同时，y_{n}也可以写成这样的形式：$y_{n}=0 e_{1}+z e_{2}$。

这里的z就是我们要找的值，而y_{n}就是一个向量子空间U，它的维度是一维。最后，我们再通过下图来更直观地说明一下PCA的过程。



图的左边是原始向量空间x，经过压缩后，我们找到了子向量空间z，z经过重构后，形成了最终的向量空间y，y还是属于原来的向量空间，但y却拥有比x更低的维度表现。

从数学的角度看，我们其实就是在寻找x和z之间的线性关系，使得$z=B^{T}x$，以及$y=Bz$，其中B是矩阵。如果我们从数据压缩技术方向来看就更容易理解了，图中的左边箭头是编码过程，也就是压缩，右边的箭头是解码过程，也就是映射，而矩阵B就是把属于R^{M}向量空间的低维的z，映射回原来的向量空间R^{D}。同理，矩阵B^{T}就是把属于原来R^{D}向量空间的高维x压缩成低维的z。

本节小结

好了，到这里线性空间这一讲就结束了，最后我再总结一下前面讲解的内容。

今天的知识很重要，实践中都是围绕向量空间展开的，也就是说向量空间是实践的基本单位，你也一定要掌握子向量空间，因为现实中数据都是高维度的，从向量空间降维后找到子向量空间，这样就能大大提高数据运算和分析的效率。

再次特别提醒：这一讲非常重要，因为后面几讲都是围绕向量空间展开的，如果你哪里没看懂，一定要多看几次，确保完全明白了。有任何问题，你也可以随时在留言区向我提问。

线性代数练习场

之前我讲了一个现实的向量空间降维场景：车辆的牌照识别，这里，我们通过另一个现实场景，来练习一下向量空间降维的思维。

目前市场上语音识别的应用有很多，比如：天猫精灵、苹果Siri、小爱等等，而语音识别涉及的技术有很多，有语言建模、声学建模、语音信号处理等等。在语音信号处理中，语音声波通过空气传播，并被麦克风捕获，麦克风将压力波转换为可捕获的电活动。我们对电活动进行采样，用以创建描述信号的一系列波形采样。

采样是数据收集的过程，数据收集后需要做数据预处理，而预处理的关键一步就是特征提取，现在请你从“特征提取”的方向上思考下，有哪些和目前所学到的数学知识有关？

> 友情提醒：特征提取就是数字化过程，也是向量化后形成向量空间的过程。

欢迎在留言区写出你的思考，我会及时回复。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我一起重学线性代数！

今天我们来聊一聊“线性空间”。在“基本概念”那一节课中，我讲到了向量，你也看到了，线性方程组是能够通过矩阵或向量来表达的。那为什么我们还要学习线性空间呢？

说到线性空间，其实你可以通过“空间”这个词把线性空间和我们的生活做个类比。就像我们生活在三维世界中，在这个空间中，一切物质都是运动的，而运动也是有一定规律的。这么来看的话，空间其实就是一个具有实际意义的集合，其中包含了**对象**和**运动**。

把这个理解平移到线性空间也是一样的，向量就是对象，如果把**向量**看成是**线性空间中的点**，那**向量的变换**就是**点在空间中的运动**。所以，线性空间也是一个集合，它的意义在于，赋予了向量生命和活力，只有掌握了线性空间，我们才能真正在实际运用中有的放矢。因为所有的活动都要在这个空间中发生，比如：线性空间中用到的傅立叶变换。

组（群）

还是老样子，我们要先从学习线性空间会用到的基础知识开始讲起。

我们先来讲一下“组”，组也可以叫成大家习惯的“群”（以下均以“组”称呼）。说到“组”，它其实是一个通用的概念，和线性空间没有什么关系，但我之所以要先说组，是因为组（群）和空间是类似的，也是集合，性质也差不多，如果你了解了组，就更容易理解线性空间了。而且，组在计算机科学中是得到了广泛应用的，特别是在计算机密码学和图形图像处理中。

说了这么多，“组”到底是什么呢？组，其实就是包含一系列元素的集合，在对这些集合元素实施某类运算后，这个集合仍然保持着封闭性。可能这么说你会有些疑惑，我还是通过数学方法来定义组，可能会让你的思路更加清晰一些。

我们先来定义一个集合G和集合上的某一类运算，比如：乘$\otimes$，使得 $G \otimes G$ 的结果还是属于G，如果我们要$G:=(G, \otimes)$是一个组，则需要满足以下这些条件：

1.G在$\otimes$运算中是封闭的，也就是：$\forall x, y \in G: x \otimes y \in G$。
2. 满足结合律，也就是：$\forall x, y, z \in G:(x \otimes y) \otimes z=x \otimes(y \otimes z)$。
3. 恒等元素（或者叫做中性元素）e，满足：$\exists \mathrm{e} \in G, \forall x \in G: x \otimes e=x, e \otimes x=x$，这里的恒等元素e在一般数字中你可以认为是$1$，而在矩阵中就可以认为是单位矩阵。
4. 有x的逆元素y，使得：$\forall \mathrm{e} \in G, \exists x \in G: x \otimes y=e, y \otimes x=e$，其中$e$是恒等元素。

再补充一点，如果满足$\forall x, y \in G: x \otimes y=y \otimes x$，则$G:=(G, \otimes)$就叫作交换组。

现在我们来做个测试，看看你是否理解了组的定义。

一个$n×n$的实数矩阵A和它的乘法运算是一个组吗？通过符号表达就是：$\left(A^{n \times n}, \quad \cdot\right)$。

想要知道这个问题的答案，我们就需要用前面满足组的这几个条件来分析一下。

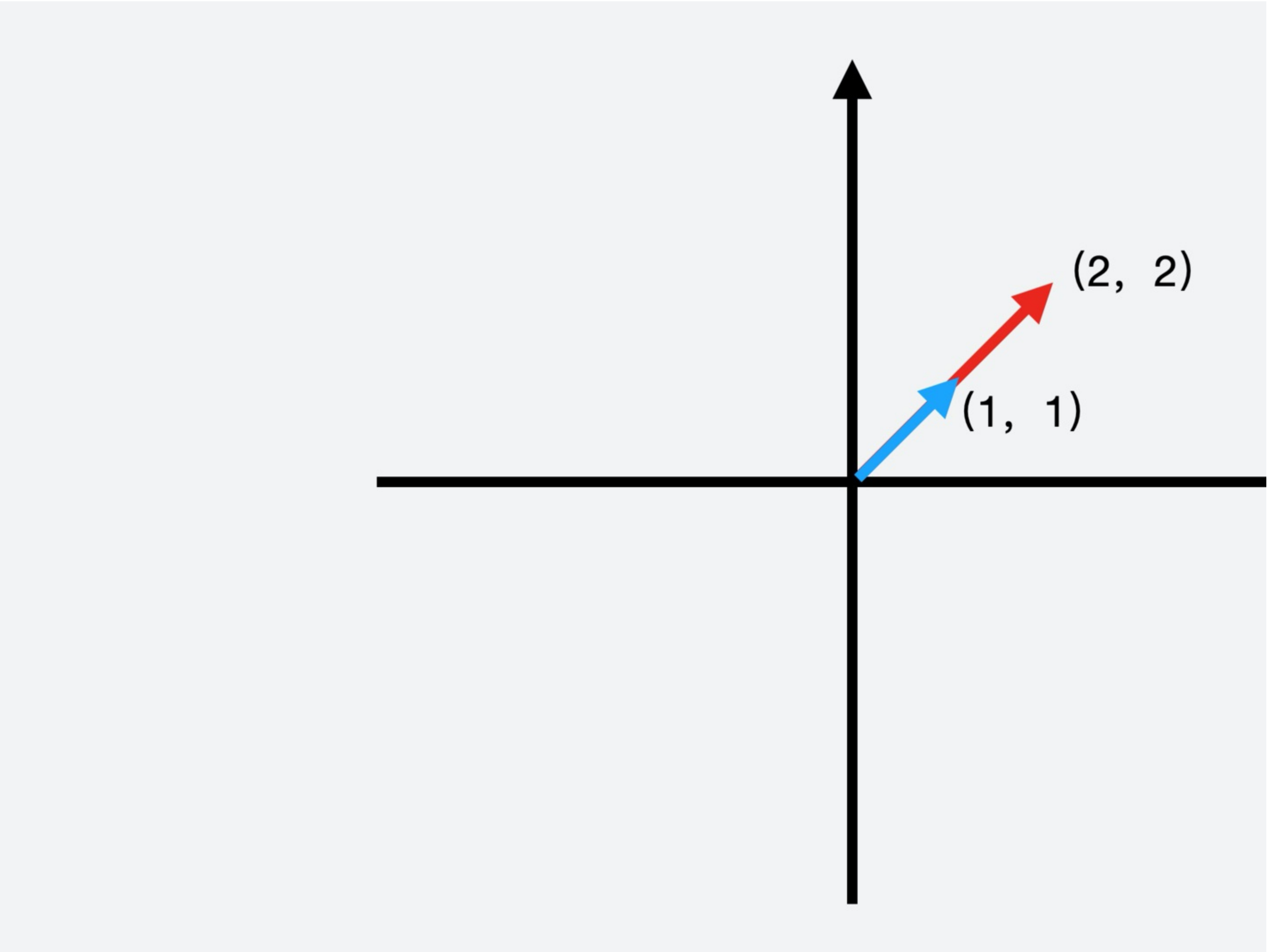
首先，是封闭性和结合律，从矩阵乘的定义就能直接看出来，它们是满足的；其次，我们来看恒等元素，单位矩阵就是矩阵元素，也满足组条件；最后，我们看看逆元素，假设A矩阵的逆矩阵A^{-1}存在，那很明显，满足$AA^{-1}=I$，这里I就是恒等元素。

于是，我们可以说$\left(A^{n \times n}, \quad \cdot\right)$是一个组，而矩阵乘不符合交换律，所以这个组并不是交换组。

向量空间

如果我们在“组”的基础上再扩展一下，就能够很顺利地来到“线性空间”。说起线性空间，它也叫作向量空间，它在一些书本和网络上的解释都是比较晦涩难懂的，但如果我们在“组”的基础上来解释它，你应该会比较容易理解了。

刚才我们说的组只包含了某一类运算，这类运算是在集合元素上的内部运算，我们把它定义为加$（+）$运算，现在再引入一类外部运算，标量乘$（·）$。于是，你可以想象一下，我们可以把内部运算看成是加法，把外部运算看成是“缩放”，因为标量乘就是一个标量和向量相乘。如果从二维坐标系的角度来看一下，点$(1, 1)$和标量2相乘就是$(2, 2)$，这个就是放大效果。



在通过“组”来认识向量空间后，再从数学角度去看向量空间的定义，你应该就能完全理解了。

一个实数向量空间V是一个集合，它包含了两类运算，一类是加，一类是标量乘，而且运算都满足V的封闭性，也就是说，V中元素的运算结果还是属于V。

$$
\begin{array} {l}

+: V+V \rightarrow V \\\
\cdot : \lambda \cdot V \rightarrow V
\end{array}
$$

这个向量空间可以表示成$V:=(V,+,\cdot)$，其中：

1.向量空间V的$(V,+)$是一个交换组。
2.V满足分配律：$\forall \lambda \in R, x, y \in V: \lambda \cdot(x+y)=\lambda \cdot x+\lambda \cdot y$；以及$\forall \lambda, \varphi \in R, x \in V:(\lambda+\varphi) \cdot x=\lambda \cdot x+\varphi \cdot x$。
3.V外部运算满足结合律：$\forall \lambda, \varphi \in R, x \in V: \lambda \cdot(\varphi \cdot x)=(\lambda \cdot \varphi) \cdot x$。
4.V外部运算的恒等元素满足：$\forall x \in V: 1 \cdot x=x$。

在向量空间V中的元素x是向量，向量空间加运算$(V,+)$的恒等元素是零向量$0=\left[\begin{array}{lll}0, & \ldots & , 0\end{array}\right]^{T}$。这里的加运算是内部运算，也叫做向量加，元素$λ$属于实数，叫做标量，外部运算乘$·$是标量乘。

好了，我给出了向量空间的一般描述和数学定义，如果你还是有一些不理解，也没有关系，我再举两个例子来加深你对向量空间的理解。

例1：进一步理解向量加和标量乘

对于向量空间的向量加和标量乘：我们定义一个实数向量空间R^{n}，n表示向量元素：

- "加"定义为向量之间的加：$x+y=\left(x_{1}, \ldots, x_{n}\right)+\left(y_{1}, \ldots, y_{n}\right)=\left(x_{1}+y_{1}, \ldots, x_{n}+y_{n}\right)$。 加的结果还是属于向量空间$R^{n}$。
- 标量乘就是向量乘标量：$\lambda x=\lambda\left(x_{1}, \ldots, x_{n}\right)=\left(\lambda x_{1}, \ldots, \lambda x_{n}\right)$。
  标量乘的结果还是属于向量空间R^{n}。

例2：进一步理解矩阵加和标量乘

对于向量空间的矩阵加和标量乘：我们定义一个实数向量空间$R^{m×n}$，用$m×n$表示m行n列矩阵元素：

我们把"加"定义为矩阵之间的加。加的结果还是属于向量空间$R^{m×n}$。

$$
A+B=\left[\begin{array}{ccc}
a_{11}+b_{11} & \ldots & a_{1 n}+b_{1 n} \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
a_{m 1}+b_{m 1} & \ldots & a_{m n}+b_{m n}
\end{array}\right]
$$

而标量乘就是矩阵乘标量。标量乘的结果还是属于向量空间$R^{m×n}$。

$$
\lambda A=\left[\begin{array}{ccc}
\lambda a_{11} & \ldots & \lambda a_{1 n} \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\lambda_{m 1} & \ldots & \lambda \dot{a}_{m n}
\end{array}\right]
$$

到这里，相信你应该了解了向量空间的基本概念，接下来这一讲的重头戏就要来了，它就是向量子空间。

向量子空间

为什么说向量子空间是重头戏？那是因为它在机器学习中的地位相当重要，被用在了**降维算法**中。这里我会分两步来讲解，先讲向量子空间的基本概念，再通过一个机器学习的例子，能让你更了解它，并灵活运用在工作实践中。

什么是向量子空间？

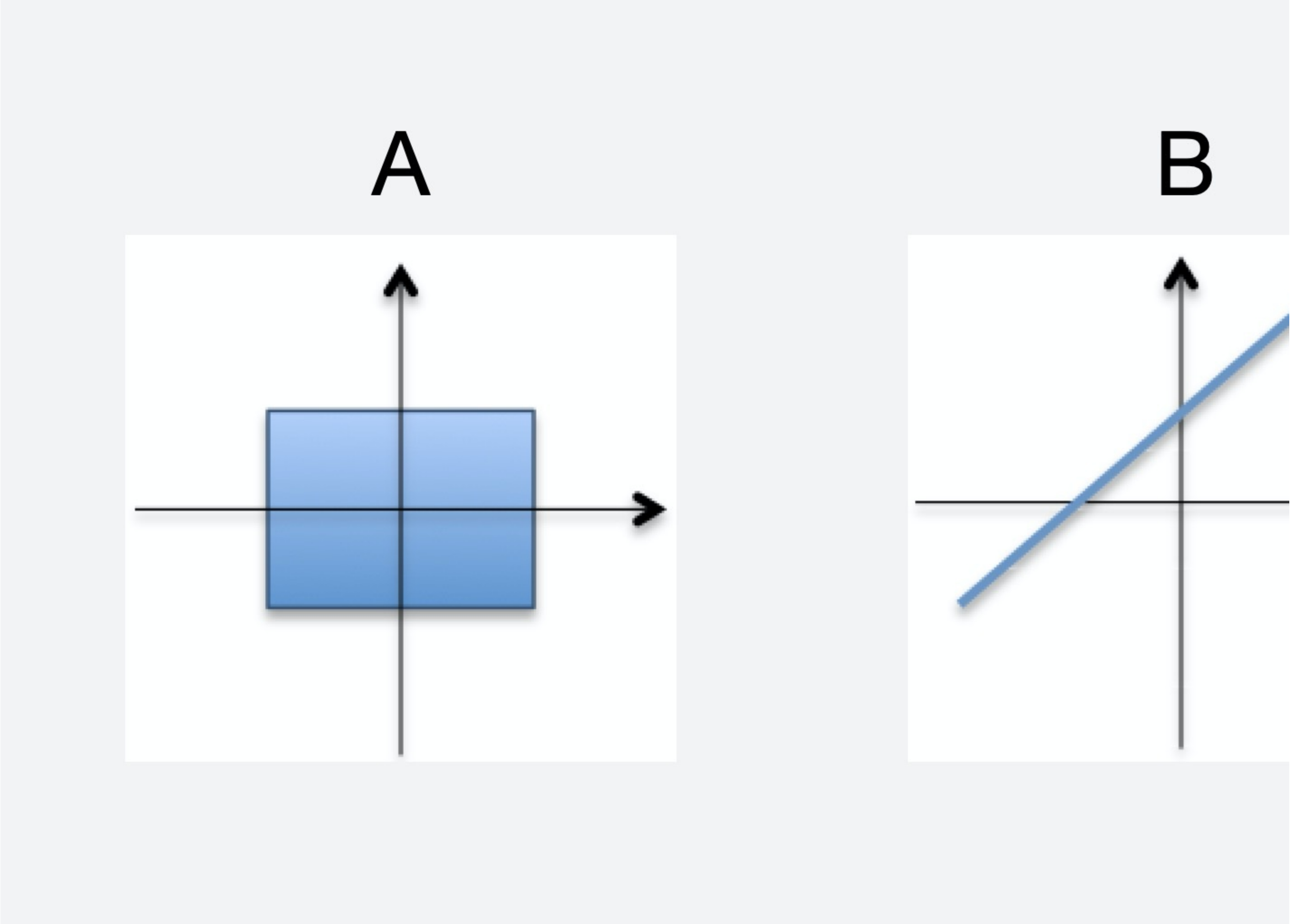
从"子"这个字，我们可以很直观地想到，它是被包含在向量空间中的，事实也确实如此。

已知$V:=(V,+,\cdot)$是一个向量空间，如果$U \subseteq V, U \neq 0$，那么$U:=(U,+,\cdot)$就是V的向量子空间，或者叫做线性子空间。向量子空间U自然继承V的许多属性，其中包括：交换组的属性、分配律、结合律和中性元素。除此以外，要判断U是不是向量子空间，我们还需要这两个条件：

1.$U \neq 0$，但$0 \in U$。
2. U的封闭性满足外部运算：$\forall \lambda \in R, \forall x \in U: \lambda x \in U$，同时满足内部运算：$\forall x, y \in U: x+y \in U$。

介绍完向量子空间基本概念后，我们一起来通过一个例子来巩固一下所学的知识，看看你是否已经掌握了向量子空间。

请你观察下面列举的A、B、C三张图像，里面有 R^{2}的向量子空间吗？



这里我不会给出答案，你可以自己思考一下，友情提醒：A、B、C中只有一个是向量子空间。

机器学习中的向量子空间

结合实践来看向量子空间的时候到了。在机器学习中，直接计算高维数据困难重重，一方面是数据处理和分析困难，使得数据可视化几乎不可能；另一方面是因为数据存储量太大，计算要付出的代价太高。

所以，我们要从向量空间中去除冗余数据，形成向量子空间。这样数据存储量就被极大地压缩了，处理和分析数据也简单了很多。因为高维数据中其实有很多维是冗余的，它们可以被其它维组合表示，也就是"降维"。

降维就是利用结构化和相关性，在尽量保证信息不损失的情况下，转换数据表现形式，让数据更"紧凑"。换句话说，你可以把降维看成是数据压缩技术，类似图像的jpeg和音频的MP3压缩算法。或者简单地说，降维就是将数据投射到一个低维子空间，比如：三维数据集可以降成二维，也就是把数据映射到平面上。

机器学习中运用最多的降维算法就是主成分分析，简称PCA（Principal Component Analysis），也叫做卡尔胡宁-勒夫变换（Karhunen-Loeve Transform）。它是一种用于探索高维数据结构的技术，已经存在超过100年了，但至今仍然广泛被使用在数据压缩和可视化中。

我们来看一个例子：假设你负责的是机器学习算法，而你的应用场景是车辆的牌照识别，也就是OCR（Optical Character Recognition）光学字符识别。在这个场景中，大街上的摄像头必须实时捕捉运动车辆的牌照，一旦发现问题车辆就需要快速识别牌照，并移交交警监管部门来做进一步处理。你会怎么处理呢？

牌照被拍下后就是图片，为了减小图像原始数据量，减少后续处理时的计算量，这些图片首先需要进行经过灰度处理（牌照只需要数字，不需要对彩色图像的RGB三个分量都进行处理），处理后就会变成类似这样的形式：

假定每个数字是一个$28*28$尺寸的灰度图片，包含784个像素，那每张灰度数字图片就是一个向量，这个向量就有784个维度，可以表示成$x \in R^{784}$，而你的样本库少说也有几十万个样本数据，如果按一般的方法是不可能做到实时识别的。所以，这样的场景就需要使用PCA来压缩数据，进行大幅度降维。

这里我们简单一些，从二维的角度来看看PCA。在PCA中，最关键的就是寻找数据点x_{n}的相似低维投影y_{n}，而y_{n}就是子向量空间。

考虑R^{2}和它的两个基，$e_{1}=[1,0]^{T}$、$e_{2}=[0,1]^{T}$，$x \in R^{2}$能够表示成这两个基的线性组合（"基"会在第7节课中详细介绍）。

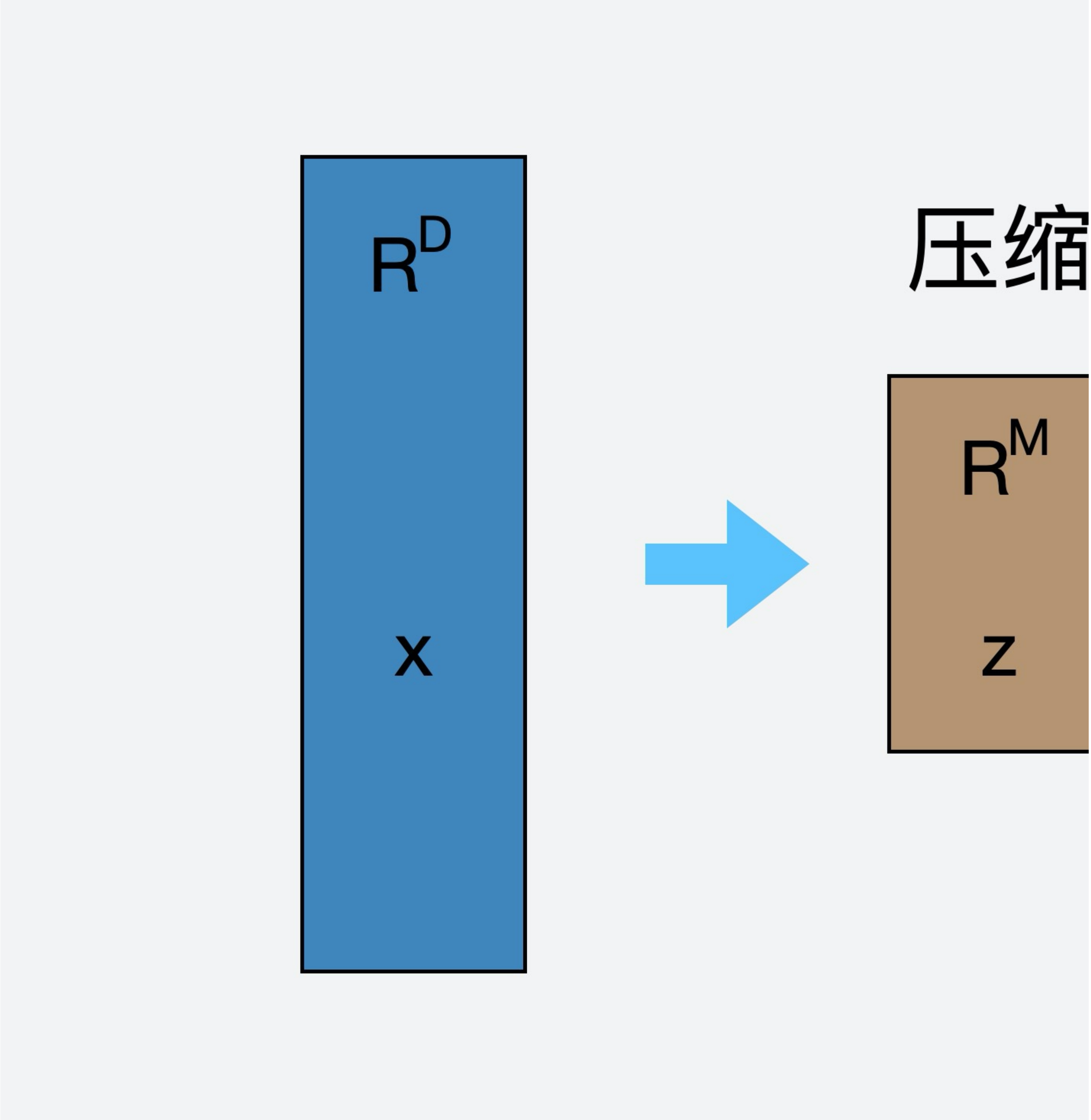
$$
\left[\begin{array}{l}
5 \\
3
\end{array}\right]=5 e_{1}+3 e_{2}
$$

于是，相似低维投影y_{n}就可以表示成下面这种形式。

$$
y_{n}=\left[\begin{array}{l}
0 \\
z
\end{array}\right] \in R^{2}, z \in R
$$

同时，y_{n}也可以写成这样的形式：$y_{n}=0 e_{1}+z e_{2}$。

这里的z就是我们要找的值，而y_{n}就是一个向量子空间U，它的维度是一维。最后，我们再通过下图来更直观地说明一下PCA的过程。



图的左边是原始向量空间x，经过压缩后，我们找到了子向量空间z，z经过重构后，形成了最终的向量空间y，y还是属于原来的向量空间，但y却拥有比x更低的维度表现。

从数学的角度看，我们其实就是在寻找x和z之间的线性关系，使得$z=B^{T}x$，以及$y=Bz$，其中B是矩阵。如果我们从数据压缩技术方向来看就更容易理解了，图中的左边箭头是编码过程，也就是压缩，右边的箭头是解码过程，也就是映射，而矩阵B就是把属于R^{M}向量空间的低维的z，映射回原来的向量空间R^{D}。同理，矩阵B^{T}就是把属于原来R^{D}向量空间的高维x压缩成低维的z。

本节小结

好了，到这里线性空间这一讲就结束了，最后我再总结一下前面讲解的内容。

今天的知识很重要，实践中都是围绕向量空间展开的，也就是说向量空间是实践的基本单位，你也一定要掌握子向量空间，因为现实中数据都是高维度的，从向量空间降维后找到子向量空间，这样就能大大提高数据运算和分析的效率。

再次特别提醒：这一讲非常重要，因为后面几讲都是围绕向量空间展开的，如果你哪里没看懂，一定要多看几次，确保完全明白了。有任何问题，你也可以随时在留言区向我提问。

线性代数练习场

之前我讲了一个现实的向量空间降维场景：车辆的牌照识别，这里，我们通过另一个现实场景，来练习一下向量空间降维的思维。

目前市场上语音识别的应用有很多，比如：天猫精灵、苹果Siri、小爱等等，而语音识别涉及的技术有很多，有语言建模、声学建模、语音信号处理等等。在语音信号处理中，语音声波通过空气传播，并被麦克风捕获，麦克风将压力波转换为可捕获的电活动。我们对电活动进行采样，用以创建描述信号的一系列波形采样。

采样是数据收集的过程，数据收集后需要做数据预处理，而预处理的关键一步就是特征提取，现在请你从“特征提取”的方向上思考下，有哪些和目前所学到的数学知识有关？

> 友情提醒：特征提取就是数字化过程，也是向量化后形成向量空间的过程。

欢迎在留言区写出你的思考，我会及时回复。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我一起重学线性代数！

今天我们来聊一聊“线性空间”。在“基本概念”那一节课中，我讲到了向量，你也看到了，线性方程组是能够通过矩阵或向量来表达的。那为什么我们还要学习线性空间呢？

说到线性空间，其实你可以通过“空间”这个词把线性空间和我们的生活做个类比。就像我们生活在三维世界中，在这个空间中，一切物质都是运动的，而运动也是有一定规律的。这么来看的话，空间其实就是一个具有实际意义的集合，其中包含了**对象**和**运动**。

把这个理解平移到线性空间也是一样的，向量就是对象，如果把**向量**看成是**线性空间中的点**，那**向量的变换**就是**点在空间中的运动**。所以，线性空间也是一个集合，它的意义在于，赋予了向量生命和活力，只有掌握了线性空间，我们才能真正在实际运用中有的放矢。因为所有的活动都要在这个空间中发生，比如：线性空间中用到的傅立叶变换。

组（群）

还是老样子，我们要先从学习线性空间会用到的基础知识开始讲起。

我们先来讲一下“组”，组也可以叫成大家习惯的“群”（以下均以“组”称呼）。说到“组”，它其实是一个通用的概念，和线性空间没有什么关系，但我之所以要先说组，是因为组（群）和空间是类似的，也是集合，性质也差不多，如果你了解了组，就更容易理解线性空间了。而且，组在计算机科学中是得到了广泛应用的，特别是在计算机密码学和图形图像处理中。

说了这么多，“组”到底是什么呢？组，其实就是包含一系列元素的集合，在对这些集合元素实施某类运算后，这个集合仍然保持着封闭性。可能这么说你会有些疑惑，我还是通过数学方法来定义组，可能会让你的思路更加清晰一些。

我们先来定义一个集合G和集合上的某一类运算，比如：乘$\otimes$，使得 $G \otimes G$ 的结果还是属于G，如果我们要$G:=(G, \otimes)$是一个组，则需要满足以下这些条件：

1.G在$\otimes$运算中是封闭的，也就是：$\forall x, y \in G: x \otimes y \in G$。
2. 满足结合律，也就是：$\forall x, y, z \in G:(x \otimes y) \otimes z=x \otimes(y \otimes z)$。
3. 恒等元素（或者叫做中性元素）e，满足：$\exists \mathrm{e} \in G, \forall x \in G: x \otimes e=x, e \otimes x=x$，这里的恒等元素e在一般数字中你可以认为是$1$，而在矩阵中就可以认为是单位矩阵。
4. 有x的逆元素y，使得：$\forall \mathrm{e} \in G, \exists x \in G: x \otimes y=e, y \otimes x=e$，其中$e$是恒等元素。

再补充一点，如果满足$\forall x, y \in G: x \otimes y=y \otimes x$，则$G:=(G, \otimes)$就叫作交换组。

现在我们来做个测试，看看你是否理解了组的定义。

一个$n×n$的实数矩阵A和它的乘法运算是一个组吗？通过符号表达就是：$\left(A^{n \times n}, \quad \cdot\right)$。

想要知道这个问题的答案，我们就需要用前面满足组的这几个条件来分析一下。

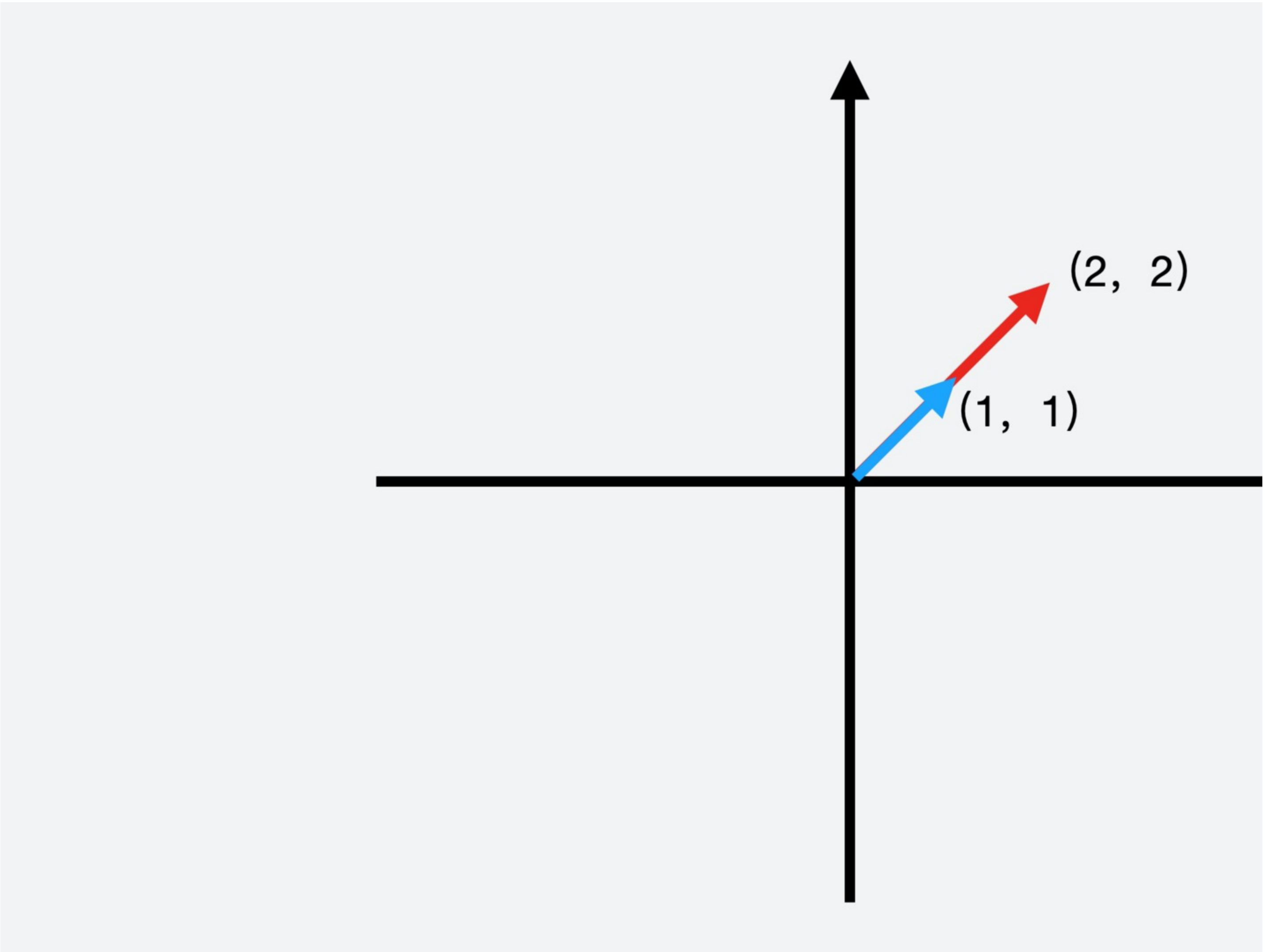
首先，是封闭性和结合律，从矩阵乘的定义就能直接看出来，它们是满足的；其次，我们来看恒等元素，单位矩阵就是矩阵元素，也满足组条件；最后，我们看看逆元素，假设A矩阵的逆矩阵A^{-1}存在，那很明显，满足$AA^{-1}=I$，这里I就是恒等元素。

于是，我们可以说$\left(A^{n \times n}, \quad \cdot\right)$是一个组，而矩阵乘不符合交换律，所以这个组并不是交换组。

向量空间

如果我们在“组”的基础上再扩展一下，就能够很顺利地来到“线性空间”。说起线性空间，它也叫作向量空间，它在一些书本和网络上的解释都是比较晦涩难懂的，但如果我们在“组”的基础上来解释它，你应该会比较容易理解了。

刚才我们说的组只包含了某一类运算，这类运算是在集合元素上的内部运算，我们把它定义为加$（+）$运算，现在再引入一类外部运算，标量乘$（·）$。于是，你可以想象一下，我们可以把内部运算看成是加法，把外部运算看成是“缩放”，因为标量乘就是一个标量和向量相乘。如果从二维坐标系的角度来看一下，点$(1, 1)$和标量2相乘就是$(2, 2)$，这个就是放大效果。



在通过“组”来认识向量空间后，再从数学角度去看向量空间的定义，你应该就能完全理解了。

一个实数向量空间V是一个集合，它包含了两类运算，一类是加，一类是标量乘，而且运算都满足V的封闭性，也就是说，V中元素的运算结果还是属于V。

$$
\begin{array} {l}

+: V+V \rightarrow V \\\
\cdot : \lambda \cdot V \rightarrow V
\end{array}
$$

这个向量空间可以表示成$V:=(V,+,\cdot)$，其中：

1.向量空间V的$(V,+)$是一个交换组。
2.V满足分配律：$\forall \lambda \in R, x, y \in V: \lambda \cdot(x+y)=\lambda \cdot x+\lambda \cdot y$；以及$\forall \lambda, \varphi \in R, x \in V:(\lambda+\varphi) \cdot x=\lambda \cdot x+\varphi \cdot x$。
3.V外部运算满足结合律：$\forall \lambda, \varphi \in R, x \in V: \lambda \cdot(\varphi \cdot x)=(\lambda \cdot \varphi) \cdot x$。
4.V外部运算的恒等元素满足：$\forall x \in V: 1 \cdot x=x$。

在向量空间V中的元素x是向量，向量空间加运算$(V,+)$的恒等元素是零向量$0=\left[\begin{array}{lll}0, & \ldots & , 0\end{array}\right]^{T}$。这里的加运算是内部运算，也叫做向量加，元素$λ$属于实数，叫做标量，外部运算乘$·$是标量乘。

好了，我给出了向量空间的一般描述和数学定义，如果你还是有一些不理解，也没有关系，我再举两个例子来加深你对向量空间的理解。

例1：进一步理解向量加和标量乘

对于向量空间的向量加和标量乘：我们定义一个实数向量空间R^{n}，n表示向量元素：

- “加”定义为向量之间的加：$x+y=\left(x_{1}, \ldots, x_{n}\right)+\left(y_{1}, \ldots, y_{n}\right)=\left(x_{1}+y_{1}, \ldots, x_{n}+y_{n}\right)$。加的结果还是属于向量空间$R^{n}$。
- 标量乘就是向量乘标量：$\lambda x=\lambda\left(x_{1}, \ldots, x_{n}\right)=\left(\lambda x_{1}, \ldots, \lambda x_{n}\right)$。
  标量乘的结果还是属于向量空间R^{n}。

例2：进一步理解矩阵加和标量乘

对于向量空间的矩阵加和标量乘：我们定义一个实数向量空间$R^{m×n}$，用$m×n$表示m行n列矩阵元素：

我们把“加”定义为矩阵之间的加。加的结果还是属于向量空间$R^{m×n}$。

$$
A+B=\left[\begin{array}{ccc}
a_{11}+b_{11} & \ldots & a_{1 n}+b_{1 n} \\\
\cdot & & \cdot \\\
\cdot & & \cdot \\\
\cdot & & \cdot \\\
a_{m 1}+b_{m 1} & \ldots & a_{m n}+b_{m n}
\end{array}\right]
$$

而标量乘就是矩阵乘标量。标量乘的结果还是属于向量空间$R^{m×n}$。

$$
\lambda A=\left[\begin{array}{ccc}
\lambda a_{11} & \ldots & \lambda a_{1 n} \\\
\cdot & & \cdot \\\
\cdot & & \cdot \\\
\lambda_{m 1} & \ldots & \lambda \dot{a}_{m n}
\end{array}\right]
$$

到这里，相信你应该了解了向量空间的基本概念，接下来这一讲的重头戏就要来了，它就是向量子空间。

向量子空间

为什么说向量子空间是重头戏？那是因为它在机器学习中的地位相当重要，被用在了**降维算法**中。这里我会分两步来讲解，先讲向量子空间的基本概念，再通过一个机器学习的例子，能让你更了解它，并灵活运用在工作实践中。

什么是向量子空间？

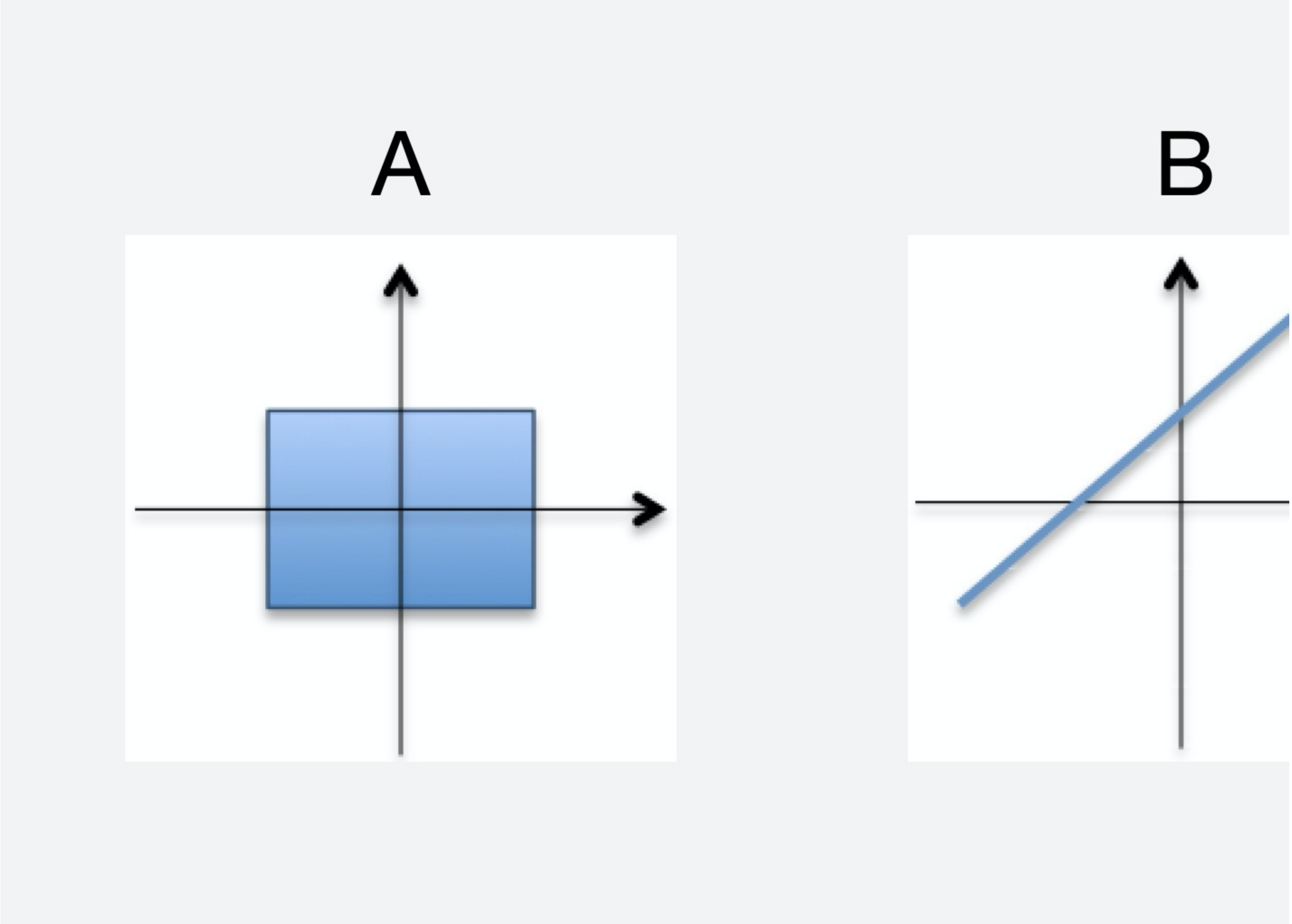
从“子”这个字，我们可以很直观地想到，它是被包含在向量空间中的，事实也确实如此。

已知$V:=(V,+,\cdot)$是一个向量空间，如果$U \subseteq V, U \neq 0$，那么$U:=(U,+,\cdot)$就是V的向量子空间，或者叫做线性子空间。向量子空间U自然继承V的许多属性，其中包括：交换组的属性、分配律、结合律和中性元素。除此以外，要判断U是不是向量子空间，我们还需要这两个条件：

1.$U \neq 0$，但$0 \in U$。
2. U的封闭性满足外部运算：$\forall \lambda \in R, \forall x \in U: \lambda x \in U$，同时满足内部运算：$\forall x, y \in U: x+y \in U$。

介绍完向量子空间基本概念后，我们一起来通过一个例子来巩固一下所学的知识，看看你是否已经掌握了向量子空间。

请你观察下面列举的A、B、C三张图像，里面有 R^{2}的向量子空间吗？



这里我不会给出答案，你可以自己思考一下，友情提醒：A、B、C中只有一个是向量子空间。

机器学习中的向量子空间

结合实践来看向量子空间的时候到了。在机器学习中，直接计算高维数据困难重重，一方面是数据处理和分析困难，使得数据可视化几乎不可能；另一方面是因为数据存储量太大，计算要付出的代价太高。

所以，我们要从向量空间中去除冗余数据，形成向量子空间。这样数据存储量就被极大地压缩了，处理和分析数据也简单了很多。因为高维数据中其实有很多维是冗余的，它们可以被其它维组合表示，也就是“降维”。

降维就是利用结构化和相关性，在尽量保证信息不损失的情况下，转换数据表现形式，让数据更“紧凑”。换句话说，你可以把降维看成是数据压缩技术，类似图像的jpeg和音频的MP3压缩算法。或者简单地说，降维就是将数据投射到一个低维子空间，比如：三维数据集可以降成二维，也就是把数据映射到平面上。

机器学习中运用最多的降维算法就是主成分分析，简称PCA（Principal Component Analysis），也叫做卡尔胡宁-勒夫变换（Karhunen-Loeve Transform）。它是一种用于探索高维数据结构的技术，已经存在超过100年了，但至今仍然广泛被使用在数据压缩和可视化中。

我们来看一个例子：假设你负责的是机器学习算法，而你的应用场景是车辆的牌照识别，也就是OCR（Optical Character Recognition）光学字符识别。在这个场景中，大街上的摄像头必须实时捕捉运动车辆的牌照，一旦发现问题车辆就需要快速识别牌照，并移交交警监管部门来做进一步处理。你会怎么处理呢？

牌照被拍下后就是图片，为了减小图像原始数据量，减少后续处理时的计算量，这些图片首先需要进行经过灰度处理（牌照只需要数字，不需要对彩色图像的RGB三个分量都进行处理），处理后就会变成类似这样的形式：

假定每个数字是一个$28*28$尺寸的灰度图片，包含784个像素，那每张灰度数字图片就是一个向量，这个向量就有784个维度，可以表示成$x \in R^{784}$，而你的样本库少说也有几十万个样本数据，如果按一般的方法是不可能做到实时识别的。所以，这样的场景就需要使用PCA来压缩数据，进行大幅度降维。

这里我们简单一些，从二维的角度来看看PCA。在PCA中，最关键的就是寻找数据点x_{n}的相似低维投影y_{n}，而y_{n}就是子向量空间。

考虑R^{2}和它的两个基，$e_{1}=[1,0]^{T}$、$e_{2}=[0,1]^{T}$，$x \in R^{2}$能够表示成这两个基的线性组合（“基”会在第7节课中详细介绍）。

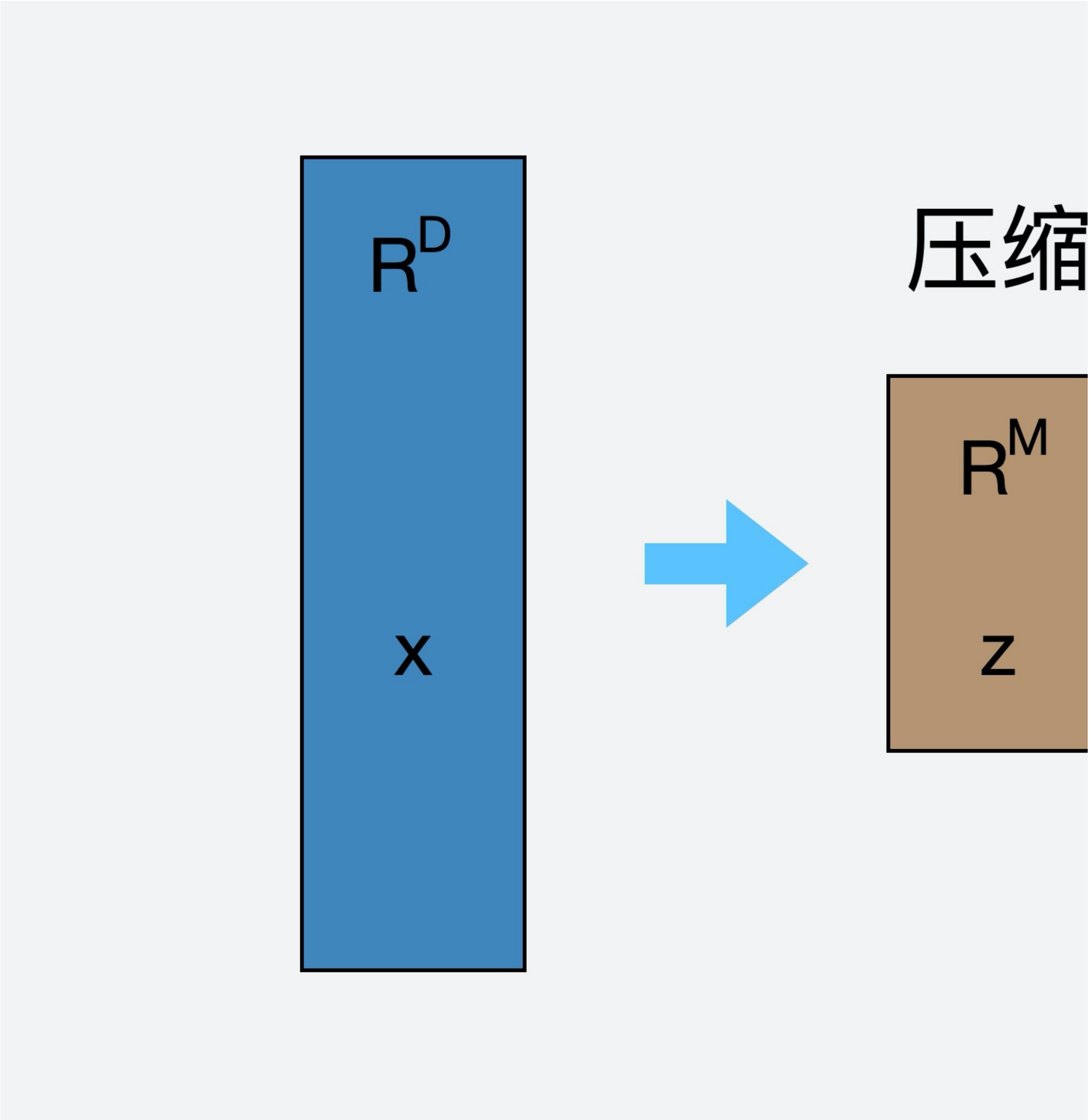
$$
\left[\begin{array}{l}
5 \\
3
\end{array}\right]=5 e_{1}+3 e_{2}
$$

于是，相似低维投影y_{n}就可以表示成下面这种形式。

$$
y_{n}=\left[\begin{array}{l}
0 \\
z
\end{array}\right] \in R^{2}, z \in R
$$

同时，y_{n}也可以写成这样的形式：$y_{n}=0 e_{1}+z e_{2}$。

这里的z就是我们要找的值，而y_{n}就是一个向量子空间U，它的维度是一维。最后，我们再通过下图来更直观地说明一下PCA的过程。



图的左边是原始向量空间x，经过压缩后，我们找到了子向量空间z，z经过重构后，形成了最终的向量空间y，y还是属于原来的向量空间，但y却拥有比x更低的维度表现。

从数学的角度看，我们其实就是在寻找x和z之间的线性关系，使得$z=B^{T}x$，以及$y=Bz$，其中B是矩阵。如果我们从数据压缩技术方向来看就更容易理解了，图中的左边箭头是编码过程，也就是压缩，右边的箭头是解码过程，也就是映射，而矩阵B就是把属于R^{M}向量空间的低维的z，映射回原来的向量空间R^{D}。同理，矩阵B^{T}就是把属于原来R^{D}向量空间的高维x压缩成低维的z。

本节小结

好了，到这里线性空间这一讲就结束了，最后我再总结一下前面讲解的内容。

今天的知识很重要，实践中都是围绕向量空间展开的，也就是说向量空间是实践的基本单位，你也一定要掌握子向量空间，因为现实中数据都是高维度的，从向量空间降维后找到子向量空间，这样就能大大提高数据运算和分析的效率。

再次特别提醒：这一讲非常重要，因为后面几讲都是围绕向量空间展开的，如果你哪里没看懂，一定要多看几次，确保完全明白了。有任何问题，你也可以随时在留言区向我提问。

线性代数练习场

之前我讲了一个现实的向量空间降维场景：车辆的牌照识别，这里，我们通过另一个现实场景，来练习一下向量空间降维的思维。

目前市场上语音识别的应用有很多，比如：天猫精灵、苹果Siri、小爱等等，而语音识别涉及的技术有很多，有语言建模、声学建模、语音信号处理等等。在语音信号处理中，语音声波通过空气传播，并被麦克风捕获，麦克风将压力波转换为可捕获的电活动。我们对电活动进行采样，用以创建描述信号的一系列波形采样。

采样是数据收集的过程，数据收集后需要做数据预处理，而预处理的关键一步就是特征提取，现在请你从“特征提取”的方向上思考下，有哪些和目前所学到的数学知识有关？

> 友情提醒：特征提取就是数字化过程，也是向量化后形成向量空间的过程。

欢迎在留言区写出你的思考，我会及时回复。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我一起重学线性代数！

今天我们来聊一聊“线性空间”。在“基本概念”那一节课中，我讲到了向量，你也看到了，线性方程组是能够通过矩阵或向量来表达的。那为什么我们还要学习线性空间呢？

说到线性空间，其实你可以通过“空间”这个词把线性空间和我们的生活做个类比。就像我们生活在三维世界中，在这个空间中，一切物质都是运动的，而运动也是有一定规律的。这么来看的话，空间其实就是一个具有实际意义的集合，其中包含了**对象**和**运动**。

把这个理解平移到线性空间也是一样的，向量就是对象，如果把**向量**看成是**线性空间中的点**，那**向量的变换**就是**点在空间中的运动**。所以，线性空间也是一个集合，它的意义在于，赋予了向量生命和活力，只有掌握了线性空间，我们才能真正在实际运用中有的放矢。因为所有的活动都要在这个空间中发生，比如：线性空间中用到的傅立叶变换。

组（群）

还是老样子，我们要先从学习线性空间会用到的基础知识开始讲起。

我们先来讲一下“组”，组也可以叫成大家习惯的“群”（以下均以“组”称呼）。说到“组”，它其实是一个通用的概念，和线性空间没有什么关系，但我之所以要先说组，是因为组（群）和空间是类似的，也是集合，性质也差不多，如果你了解了组，就更容易理解线性空间了。而且，组在计算机科学中是得到了广泛应用的，特别是在计算机密码学和图形图像处理中。

说了这么多，“组”到底是什么呢？组，其实就是包含一系列元素的集合，在对这些集合元素实施某类运算后，这个集合仍然保持着封闭性。可能这么说你会有些疑惑，我还是通过数学方法来定义组，可能会让你的思路更加清晰一些。

我们先来定义一个集合G和集合上的某一类运算，比如：乘$\otimes$，使得 $G \otimes G$ 的结果还是属于G，如果我们要$G:=(G, \otimes)$是一个组，则需要满足以下这些条件：

1.G在$\otimes$运算中是封闭的，也就是：$\forall x, y \in G: x \otimes y \in G$。
2. 满足结合律，也就是：$\forall x, y, z \in G:(x \otimes y) \otimes z=x \otimes(y \otimes z)$。
3. 恒等元素（或者叫做中性元素）e，满足：$\exists \mathrm{e} \in G, \forall x \in G: x \otimes e=x, e \otimes x=x$，这里的恒等元素e在一般数字中你可以认为是$1$，而在矩阵中就可以认为是单位矩阵。
4. 有x的逆元素y，使得：$\forall \mathrm{e} \in G, \exists x \in G: x \otimes y=e, y \otimes x=e$，其中$e$是恒等元素。

再补充一点，如果满足$\forall x, y \in G: x \otimes y=y \otimes x$，则$G:=(G, \otimes)$就叫作交换组。

现在我们来做个测试，看看你是否理解了组的定义。

一个$n×n$的实数矩阵A和它的乘法运算是一个组吗？通过符号表达就是：$\left(A^ {n \times n}, \quad \cdot\right)$。

想要知道这个问题的答案，我们就需要用前面满足组的这几个条件来分析一下。

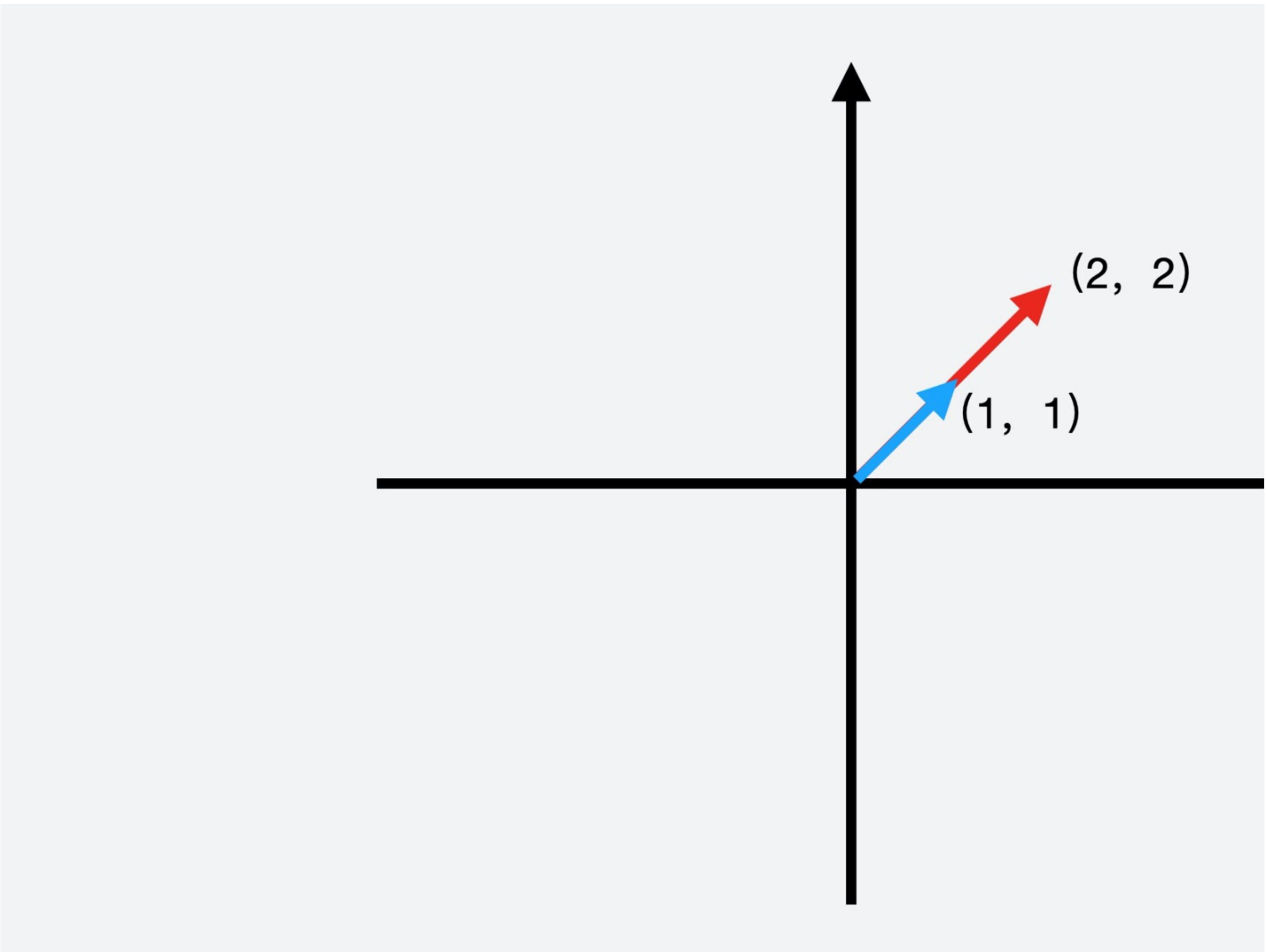
首先，是封闭性和结合律，从矩阵乘的定义就能直接看出来，它们是满足的；其次，我们来看恒等元素，单位矩阵就是矩阵元素，也满足组条件；最后，我们看看逆元素，假设A矩阵的逆矩阵A^{-1}存在，那很明显，满足$AA^{-1}=I$，这里I就是恒等元素。

于是，我们可以说$\left(A^ {n \times n}, \quad \cdot\right)$是一个组，而矩阵乘不符合交换律，所以这个组并不是交换组。

向量空间

如果我们在“组”的基础上再扩展一下，就能够很顺利地来到“线性空间”。说起线性空间，它也叫作向量空间，它在一些书本和网络上的解释都是比较晦涩难懂的，但如果我们在“组”的基础上来解释它，你应该会比较容易理解了。

刚才我们说的组只包含了某一类运算，这类运算是在集合元素上的内部运算，我们把它定义为加$（+）$运算，现在再引入一类外部运算，标量乘$（·）$。于是，你可以想象一下，我们可以把内部运算看成是加法，把外部运算看成是“缩放”，因为标量乘就是一个标量和向量相乘。如果从二维坐标系的角度来看一下，点$(1, 1)$和标量2相乘就是$(2, 2)$，这个就是放大效果。



在通过“组”来认识向量空间后，再从数学角度去看向量空间的定义，你应该就能完全理解了。

一个实数向量空间V是一个集合，它包含了两类运算，一类是加，一类是标量乘，而且运算都满足V的封闭性，也就是说，V中元素的运算结果还是属于V。

$$
\begin{array} {l}

+: V+V \rightarrow V \\
\cdot : \lambda \cdot V \rightarrow V
\end{array}
$$

这个向量空间可以表示成$V:=(V,+,\cdot)$，其中：

1.向量空间V的$(V,+)$是一个交换组。
2.V满足分配律：$\forall \lambda \in R, x, y \in V: \lambda \cdot(x+y)=\lambda \cdot x+\lambda \cdot y$；以及$\forall \lambda, \varphi \in R, x \in V:(\lambda+\varphi) \cdot x=\lambda \cdot x+\varphi \cdot x$。
3.V外部运算满足结合律：$\forall \lambda, \varphi \in R, x \in V: \lambda \cdot(\varphi \cdot x)=(\lambda \cdot \varphi) \cdot x$。
4.V外部运算的恒等元素满足：$\forall x \in V: 1 \cdot x=x$。

在向量空间V中的元素x是向量，向量空间加运算$(V,+)$的恒等元素是零向量$0=\left[\begin{array}{lll}0, & \ldots & , 0\end{array}\right]^{T}$。这里的加运算是内部运算，也叫做向量加，元素$λ$属于实数，叫做标量，外部运算乘$·$是标量乘。

好了，我给出了向量空间的一般描述和数学定义，如果你还是有一些不理解，也没有关系，我再举两个例子来加深你对向量空间的理解。

例1：进一步理解向量加和标量乘

对于向量空间的向量加和标量乘：我们定义一个实数向量空间R^{n}，n表示向量元素：

- "加"定义为向量之间的加：$x+y=\left(x_{1}, \ldots, x_{n}\right)+\left(y_{1}, \ldots, y_{n}\right)=\left(x_{1}+y_{1}, \ldots, x_{n}+y_{n}\right)$。 加的结果还是属于向量空间$R^{n}$。
- 标量乘就是向量乘标量：$\lambda x=\lambda\left(x_{1}, \ldots, x_{n}\right)=\left(\lambda x_{1}, \ldots, \lambda x_{n}\right)$。
  标量乘的结果还是属于向量空间R^{n}。

例2：进一步理解矩阵加和标量乘

对于向量空间的矩阵加和标量乘：我们定义一个实数向量空间$R^{m×n}$，用$m×n$表示m行n列矩阵元素：

我们把"加"定义为矩阵之间的加。加的结果还是属于向量空间$R^{m×n}$。

$$
A+B=\left[\begin{array}{ccc}
a_{11}+b_{11} & \ldots & a_{1 n}+b_{1 n} \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
a_{m 1}+b_{m 1} & \ldots & a_{m n}+b_{m n}
\end{array}\right]
$$

而标量乘就是矩阵乘标量。标量乘的结果还是属于向量空间$R^{m×n}$。

$$
\lambda A=\left[\begin{array}{ccc}
\lambda a_{11} & \ldots & \lambda a_{1 n} \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\lambda_{m 1} & \ldots & \lambda \dot{a}_{m n}
\end{array}\right]
$$

到这里，相信你应该了解了向量空间的基本概念，接下来这一讲的重头戏就要来了，它就是向量子空间。

向量子空间

为什么说向量子空间是重头戏？那是因为它在机器学习中的地位相当重要，被用在了**降维算法**中。这里我会分两步来讲解，先讲向量子空间的基本概念，再通过一个机器学习的例子，能让你更了解它，并灵活运用在工作实践中。

什么是向量子空间？

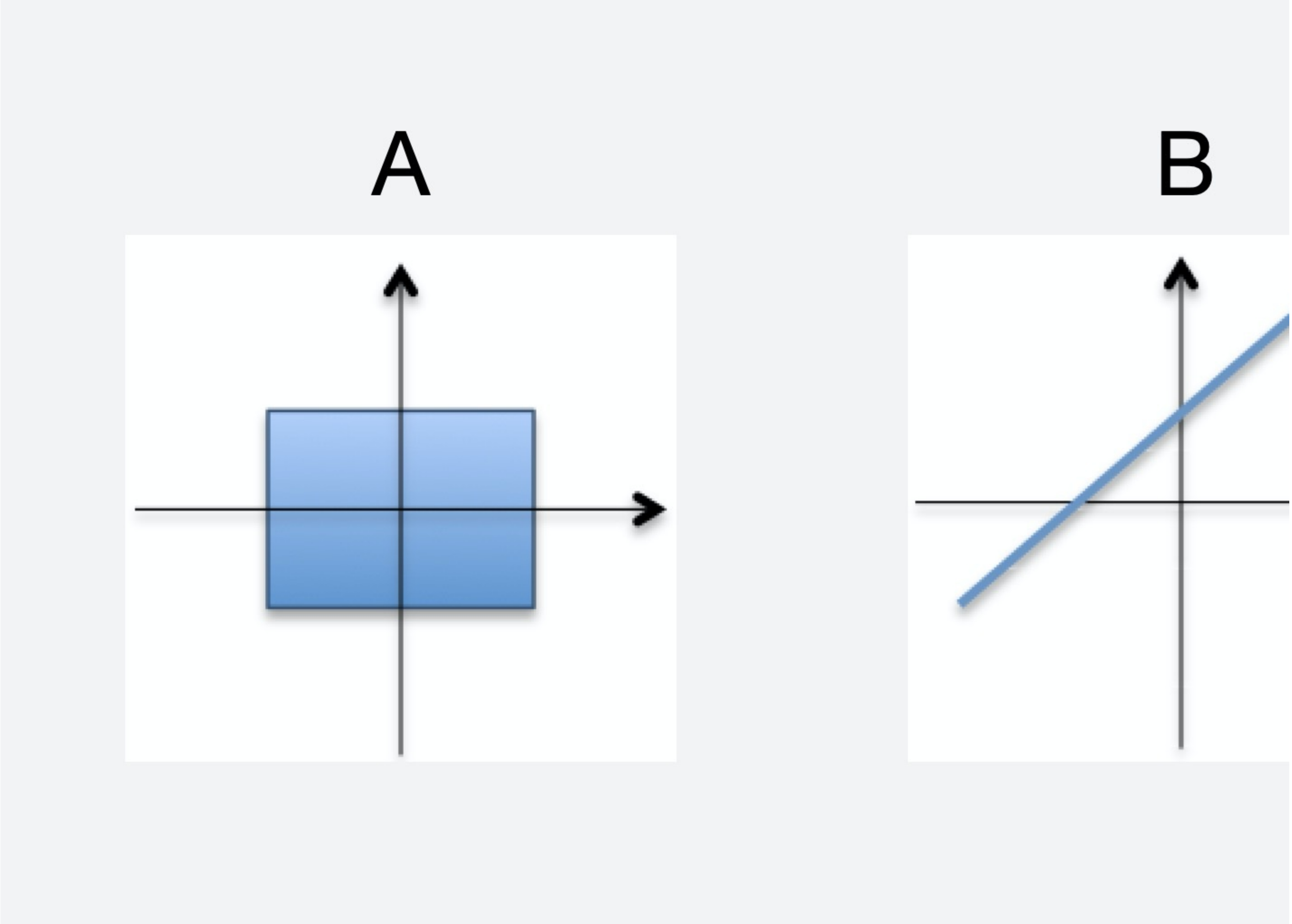
从"子"这个字，我们可以很直观地想到，它是被包含在向量空间中的，事实也确实如此。

已知$V:=(V,+,\cdot)$是一个向量空间，如果$U \subseteq V, U \neq 0$，那么$U:=(U,+,\cdot)$就是V的向量子空间，或者叫做线性子空间。向量子空间U自然继承V的许多属性，其中包括：交换组的属性、分配律、结合律和中性元素。除此以外，要判断U是不是向量子空间，我们还需要这两个条件：

1.$U \neq 0$，但$0 \in U$。
2. U的封闭性满足外部运算：$\forall \lambda \in R, \forall x \in U: \lambda x \in U$，同时满足内部运算：$\forall x, y \in U: x+y \in U$。

介绍完向量子空间基本概念后，我们一起来通过一个例子来巩固一下所学的知识，看看你是否已经掌握了向量子空间。

请你观察下面列举的A、B、C三张图像，里面有 R^{2}的向量子空间吗？



这里我不会给出答案，你可以自己思考一下，友情提醒：A、B、C中只有一个是向量子空间。

机器学习中的向量子空间

结合实践来看向量子空间的时候到了。在机器学习中，直接计算高维数据困难重重，一方面是数据处理和分析困难，使得数据可视化几乎不可能；另一方面是因为数据存储量太大，计算要付出的代价太高。

所以，我们要从向量空间中去除冗余数据，形成向量子空间。这样数据存储量就被极大地压缩了，处理和分析数据也简单了很多。因为高维数据中其实有很多维是冗余的，它们可以被其它维组合表示，也就是“降维”。

降维就是利用结构化和相关性，在尽量保证信息不损失的情况下，转换数据表现形式，让数据更“紧凑”。换句话说，你可以把降维看成是数据压缩技术，类似图像的jpeg和音频的MP3压缩算法。或者简单地说，降维就是将数据投射到一个低维子空间，比如：三维数据集可以降成二维，也就是把数据映射到平面上。

机器学习中运用最多的降维算法就是主成分分析，简称PCA（Principal Component Analysis），也叫做卡尔胡宁-勒夫变换（Karhunen-Loeve Transform）。它是一种用于探索高维数据结构的技术，已经存在超过100年了，但至今仍然广泛被使用在数据压缩和可视化中。

我们来看一个例子：假设你负责的是机器学习算法，而你的应用场景是车辆的牌照识别，也就是OCR（Optical Character Recognition）光学字符识别。在这个场景中，大街上的摄像头必须实时捕捉运动车辆的牌照，一旦发现问题车辆就需要快速识别牌照，并移交交警监管部门来做进一步处理。你会怎么处理呢？

牌照被拍下后就是图片，为了减小图像原始数据量，减少后续处理时的计算量，这些图片首先需要进行经过灰度处理（牌照只需要数字，不需要对彩色图像的RGB三个分量都进行处理），处理后就会变成类似这样的形式：

假定每个数字是一个$28*28$尺寸的灰度图片，包含784个像素，那每张灰度数字图片就是一个向量，这个向量就有784个维度，可以表示成$x \in R^{784}$，而你的样本库少说也有几十万个样本数据，如果按一般的方法是不可能做到实时识别的。所以，这样的场景就需要使用PCA来压缩数据，进行大幅度降维。

这里我们简单一些，从二维的角度来看看PCA。在PCA中，最关键的就是寻找数据点x_{n}的相似低维投影y_{n}，而y_{n}就是子向量空间。

考虑R^{2}和它的两个基，$e_{1}=[1,0]^{T}$、$e_{2}=[0,1]^{T}$，$x \in R^{2}$能够表示成这两个基的线性组合（“基”会在第7节课中详细介绍）。

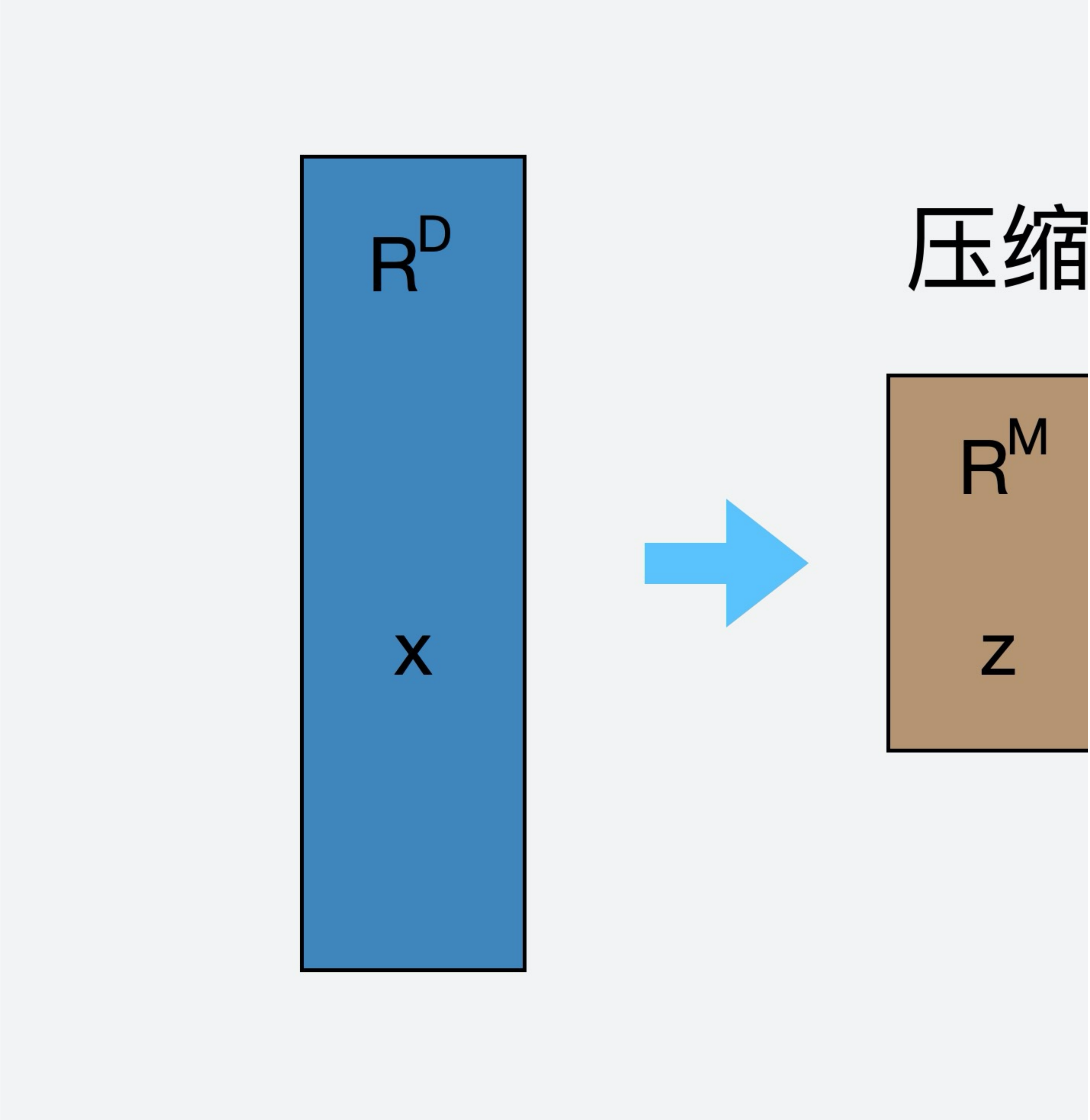
$$
\left[\begin{array}{l}
5 \\
3
\end{array}\right]=5 e_{1}+3 e_{2}
$$

于是，相似低维投影y_{n}就可以表示成下面这种形式。

$$
y_{n}=\left[\begin{array}{l}
0 \\
z
\end{array}\right] \in R^{2}, z \in R
$$

同时，y_{n}也可以写成这样的形式：$y_{n}=0 e_{1}+z e_{2}$。

这里的z就是我们要找的值，而y_{n}就是一个向量子空间U，它的维度是一维。最后，我们再通过下图来更直观地说明一下PCA的过程。



图的左边是原始向量空间x，经过压缩后，我们找到了子向量空间z，z经过重构后，形成了最终的向量空间y，y还是属于原来的向量空间，但y却拥有比x更低的维度表现。

从数学的角度看，我们其实就是在寻找x和z之间的线性关系，使得$z=B^{T}x$，以及$y=Bz$，其中B是矩阵。如果我们从数据压缩技术方向来看就更容易理解了，图中的左边箭头是编码过程，也就是压缩，右边的箭头是解码过程，也就是映射，而矩阵B就是把属于R^{M}向量空间的低维的z，映射回原来的向量空间R^{D}。同理，矩阵B^{T}就是把属于原来R^{D}向量空间的高维x压缩成低维的z。

本节小结

好了，到这里线性空间这一讲就结束了，最后我再总结一下前面讲解的内容。

今天的知识很重要，实践中都是围绕向量空间展开的，也就是说向量空间是实践的基本单位，你也一定要掌握子向量空间，因为现实中数据都是高维度的，从向量空间降维后找到子向量空间，这样就能大大提高数据运算和分析的效率。

再次特别提醒：这一讲非常重要，因为后面几讲都是围绕向量空间展开的，如果你哪里没看懂，一定要多看几次，确保完全明白了。有任何问题，你也可以随时在留言区向我提问。

线性代数练习场

之前我讲了一个现实的向量空间降维场景：车辆的牌照识别，这里，我们通过另一个现实场景，来练习一下向量空间降维的思维。

目前市场上语音识别的应用有很多，比如：天猫精灵、苹果Siri、小爱等等，而语音识别涉及的技术有很多，有语言建模、声学建模、语音信号处理等等。在语音信号处理中，语音声波通过空气传播，并被麦克风捕获，麦克风将压力波转换为可捕获的电活动。我们对电活动进行采样，用以创建描述信号的一系列波形采样。

采样是数据收集的过程，数据收集后需要做数据预处理，而预处理的关键一步就是特征提取，现在请你从“特征提取”的方向上思考下，有哪些和目前所学到的数学知识有关？

> 友情提醒：特征提取就是数字化过程，也是向量化后形成向量空间的过程。

欢迎在留言区写出你的思考，我会及时回复。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我一起重学线性代数！

今天我们来聊一聊“线性空间”。在“基本概念”那一节课中，我讲到了向量，你也看到了，线性方程组是能够通过矩阵或向量来表达的。那为什么我们还要学习线性空间呢？

说到线性空间，其实你可以通过“空间”这个词把线性空间和我们的生活做个类比。就像我们生活在三维世界中，在这个空间中，一切物质都是运动的，而运动也是有一定规律的。这么来看的话，空间其实就是一个具有实际意义的集合，其中包含了**对象**和**运动**。

把这个理解平移到线性空间也是一样的，向量就是对象，如果把**向量**看成是**线性空间中的点**，那**向量的变换**就是**点在空间中的运动**。所以，线性空间也是一个集合，它的意义在于，赋予了向量生命和活力，只有掌握了线性空间，我们才能真正在实际运用中有的放矢。因为所有的活动都要在这个空间中发生，比如：线性空间中用到的傅立叶变换。

组（群）

还是老样子，我们要先从学习线性空间会用到的基础知识开始讲起。

我们先来讲一下“组”，组也可以叫成大家习惯的“群”（以下均以“组”称呼）。说到“组”，它其实是一个通用的概念，和线性空间没有什么关系，但我之所以要先说组，是因为组（群）和空间是类似的，也是集合，性质也差不多，如果你了解了组，就更容易理解线性空间了。而且，组在计算机科学中是得到了广泛应用的，特别是在计算机密码学和图形图像处理中。

说了这么多，“组”到底是什么呢？组，其实就是包含一系列元素的集合，在对这些集合元素实施某类运算后，这个集合仍然保持着封闭性。可能这么说你会有些疑惑，我还是通过数学方法来定义组，可能会让你的思路更加清晰一些。

我们先来定义一个集合G和集合上的某一类运算，比如：乘$\otimes$，使得 $G \otimes G$ 的结果还是属于G，如果我们要$G:=(G, \otimes)$是一个组，则需要满足以下这些条件：

1.G在$\otimes$运算中是封闭的，也就是：$\forall x, y \in G: x \otimes y \in G$。
2. 满足结合律，也就是：$\forall x, y, z \in G:(x \otimes y) \otimes z=x \otimes(y \otimes z)$。
3. 恒等元素（或者叫做中性元素）e，满足：$\exists \mathrm{e} \in G, \forall x \in G: x \otimes e=x, e \otimes x=x$，这里的恒等元素e在一般数字中你可以认为是$1$，而在矩阵中就可以认为是单位矩阵。
4. 有x的逆元素y，使得：$\forall \mathrm{e} \in G, \exists x \in G: x \otimes y=e, y \otimes x=e$，其中$e$是恒等元素。

再补充一点，如果满足$\forall x, y \in G: x \otimes y=y \otimes x$，则$G:=(G, \otimes)$就叫作交换组。

现在我们来做个测试，看看你是否理解了组的定义。

一个$n×n$的实数矩阵A和它的乘法运算是一个组吗？通过符号表达就是：$\left(A^{n \times n}, \quad \cdot\right)$。

想要知道这个问题的答案，我们就需要用前面满足组的这几个条件来分析一下。

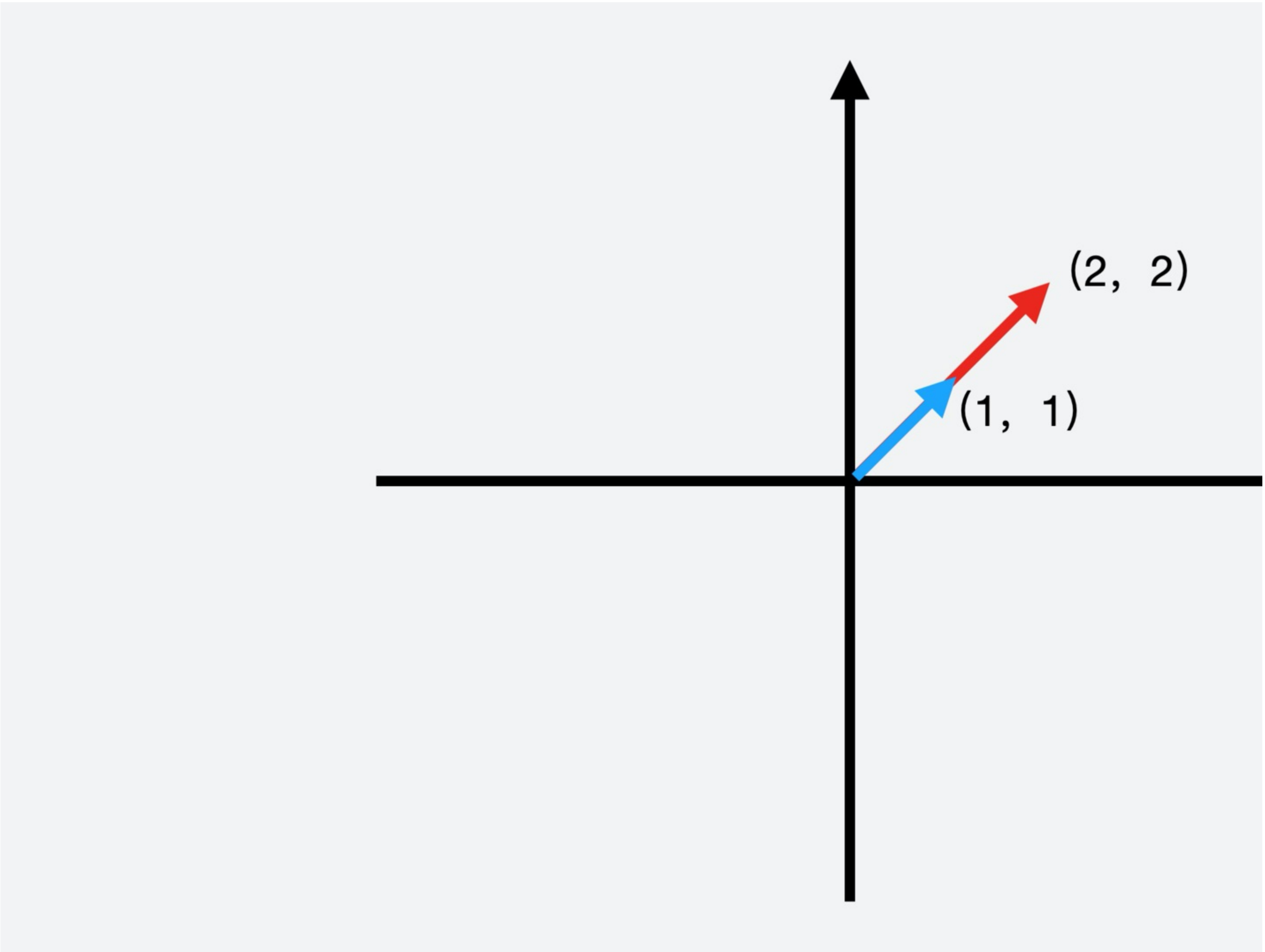
首先，是封闭性和结合律，从矩阵乘的定义就能直接看出来，它们是满足的；其次，我们来看恒等元素，单位矩阵就是矩阵元素，也满足组条件；最后，我们看看逆元素，假设A矩阵的逆矩阵A^{-1}存在，那很明显，满足$AA^{-1}=I$，这里I就是恒等元素。

于是，我们可以说$\left(A^{n \times n}, \quad \cdot\right)$是一个组，而矩阵乘不符合交换律，所以这个组并不是交换组。

向量空间

如果我们在“组”的基础上再扩展一下，就能够很顺利地来到“线性空间”。说起线性空间，它也叫作向量空间，它在一些书本和网络上的解释都是比较晦涩难懂的，但如果我们在“组”的基础上来解释它，你应该会比较容易理解了。

刚才我们说的组只包含了某一类运算，这类运算是在集合元素上的内部运算，我们把它定义为加$（+）$运算，现在再引入一类外部运算，标量乘$（·）$。于是，你可以想象一下，我们可以把内部运算看成是加法，把外部运算看成是“缩放”，因为标量乘就是一个标量和向量相乘。如果从二维坐标系的角度来看一下，点$(1, 1)$和标量2相乘就是$(2, 2)$，这个就是放大效果。



在通过“组”来认识向量空间后，再从数学角度去看向量空间的定义，你应该就能完全理解了。

一个实数向量空间V是一个集合，它包含了两类运算，一类是加，一类是标量乘，而且运算都满足V的封闭性，也就是说，V中元素的运算结果还是属于V。

$$
\begin{array} {l}

+: V+V \rightarrow V \\\
\cdot : \lambda \cdot V \rightarrow V
\end{array}
$$

这个向量空间可以表示成$V:=(V,+,\cdot)$，其中：

1.向量空间V的$(V,+)$是一个交换组。
2.V满足分配律：$\forall \lambda \in R, x, y \in V: \lambda \cdot(x+y)=\lambda \cdot x+\lambda \cdot y$；以及$\forall \lambda, \varphi \in R, x \in V:(\lambda+\varphi) \cdot x=\lambda \cdot x+\varphi \cdot x$。
3.V外部运算满足结合律：$\forall \lambda, \varphi \in R, x \in V: \lambda \cdot(\varphi \cdot x)=(\lambda \cdot \varphi) \cdot x$。
4.V外部运算的恒等元素满足：$\forall x \in V: 1 \cdot x=x$。

在向量空间V中的元素x是向量，向量空间加运算$(V,+)$的恒等元素是零向量$0=\left[\begin{array}{lll}0, & \ldots & , 0\end{array}\right]^{T}$。这里的加运算是内部运算，也叫做向量加，元素$λ$属于实数，叫做标量，外部运算乘$·$是标量乘。

好了，我给出了向量空间的一般描述和数学定义，如果你还是有一些不理解，也没有关系，我再举两个例子来加深你对向量空间的理解。

例1：进一步理解向量加和标量乘

对于向量空间的向量加和标量乘：我们定义一个实数向量空间R^{n}，n表示向量元素：

- “加”定义为向量之间的加：$x+y=\left(x_{1}, \ldots, x_{n}\right)+\left(y_{1}, \ldots, y_{n}\right)=\left(x_{1}+y_{1}, \ldots, x_{n}+y_{n}\right)$。 加的结果还是属于向量空间$R^{n}$。
- 标量乘就是向量乘标量：$\lambda x=\lambda\left(x_{1}, \ldots, x_{n}\right)=\left(\lambda x_{1}, \ldots, \lambda x_{n}\right)$。
  标量乘的结果还是属于向量空间R^{n}。

例2：进一步理解矩阵加和标量乘

对于向量空间的矩阵加和标量乘：我们定义一个实数向量空间$R^{m×n}$，用$m×n$表示m行n列矩阵元素：

我们把“加”定义为矩阵之间的加。加的结果还是属于向量空间$R^{m×n}$。

$$
A+B=\left[\begin{array}{ccc}
a_{11}+b_{11} & \ldots & a_{1 n}+b_{1 n} \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
a_{m 1}+b_{m 1} & \ldots & a_{m n}+b_{m n}
\end{array}\right]
$$

而标量乘就是矩阵乘标量。标量乘的结果还是属于向量空间$R^{m×n}$。

$$
\lambda A=\left[\begin{array}{ccc}
\lambda a_{11} & \ldots & \lambda a_{1 n} \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\lambda_{m 1} & \ldots & \lambda \dot{a}_{m n}
\end{array}\right]
$$

到这里，相信你应该了解了向量空间的基本概念，接下来这一讲的重头戏就要来了，它就是向量子空间。

向量子空间

为什么说向量子空间是重头戏？那是因为它在机器学习中的地位相当重要，被用在了**降维算法**中。这里我会分两步来讲解，先讲向量子空间的基本概念，再通过一个机器学习的例子，能让你更了解它，并灵活运用在工作实践中。

什么是向量子空间？

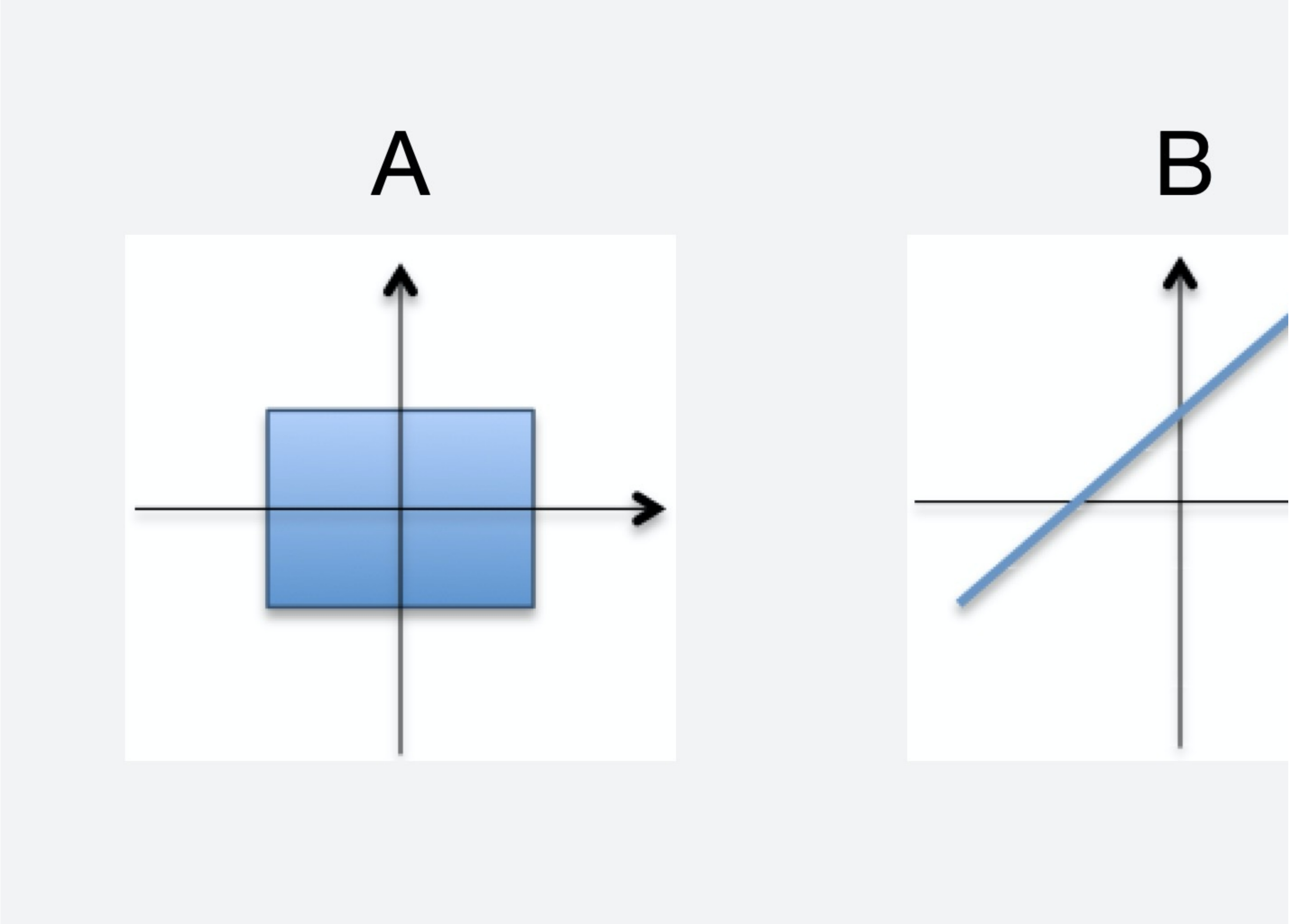
从“子”这个字，我们可以很直观地想到，它是被包含在向量空间中的，事实也确实如此。

已知$V:=(V,+,\cdot)$是一个向量空间，如果$U \subseteq V, U \neq 0$，那么$U:=(U,+,\cdot)$就是V的向量子空间，或者叫做线性子空间。向量子空间U自然继承V的许多属性，其中包括：交换组的属性、分配律、结合律和中性元素。除此以外，要判断U是不是向量子空间，我们还需要这两个条件：

1.$U \neq 0$，但$0 \in U$。
2. U的封闭性满足外部运算：$\forall \lambda \in R, \forall x \in U: \lambda x \in U$，同时满足内部运算：$\forall x, y \in U: x+y \in U$。

介绍完向量子空间基本概念后，我们一起来通过一个例子来巩固一下所学的知识，看看你是否已经掌握了向量子空间。

请你观察下面列举的A、B、C三张图像，里面有 R^{2}的向量子空间吗？



这里我不会给出答案，你可以自己思考一下，友情提醒：A、B、C中只有一个是向量子空间。

机器学习中的向量子空间

结合实践来看向量子空间的时候到了。在机器学习中，直接计算高维数据困难重重，一方面是数据处理和分析困难，使得数据可视化几乎不可能；另一方面是因为数据存储量太大，计算要付出的代价太高。

所以，我们要从向量空间中去除冗余数据，形成向量子空间。这样数据存储量就被极大地压缩了，处理和分析数据也简单了很多。因为高维数据中其实有很多维是冗余的，它们可以被其它维组合表示，也就是"降维"。

降维就是利用结构化和相关性，在尽量保证信息不损失的情况下，转换数据表现形式，让数据更"紧凑"。换句话说，你可以把降维看成是数据压缩技术，类似图像的jpeg和音频的MP3压缩算法。或者简单地说，降维就是将数据投射到一个低维子空间，比如：三维数据集可以降成二维，也就是把数据映射到平面上。

机器学习中运用最多的降维算法就是主成分分析，简称PCA（Principal Component Analysis），也叫做卡尔胡宁-勒夫变换（Karhunen-Loeve Transform）。它是一种用于探索高维数据结构的技术，已经存在超过100年了，但至今仍然广泛被使用在数据压缩和可视化中。

我们来看一个例子：假设你负责的是机器学习算法，而你的应用场景是车辆的牌照识别，也就是OCR（Optical Character Recognition）光学字符识别。在这个场景中，大街上的摄像头必须实时捕捉运动车辆的牌照，一旦发现问题车辆就需要快速识别牌照，并移交交警监管部门来做进一步处理。你会怎么处理呢？

牌照被拍下后就是图片，为了减小图像原始数据量，减少后续处理时的计算量，这些图片首先需要进行经过灰度处理（牌照只需要数字，不需要对彩色图像的RGB三个分量都进行处理），处理后就会变成类似这样的形式：

假定每个数字是一个$28*28$尺寸的灰度图片，包含784个像素，那每张灰度数字图片就是一个向量，这个向量就有784个维度，可以表示成$x \in R^{784}$，而你的样本库少说也有几十万个样本数据，如果按一般的方法是不可能做到实时识别的。所以，这样的场景就需要使用PCA来压缩数据，进行大幅度降维。

这里我们简单一些，从二维的角度来看看PCA。在PCA中，最关键的就是寻找数据点x_{n}的相似低维投影y_{n}，而y_{n}就是子向量空间。

考虑R^{2}和它的两个基，$e_{1}=[1,0]^{T}$、$e_{2}=[0,1]^{T}$，$x \in R^{2}$能够表示成这两个基的线性组合（"基"会在第7节课中详细介绍）。

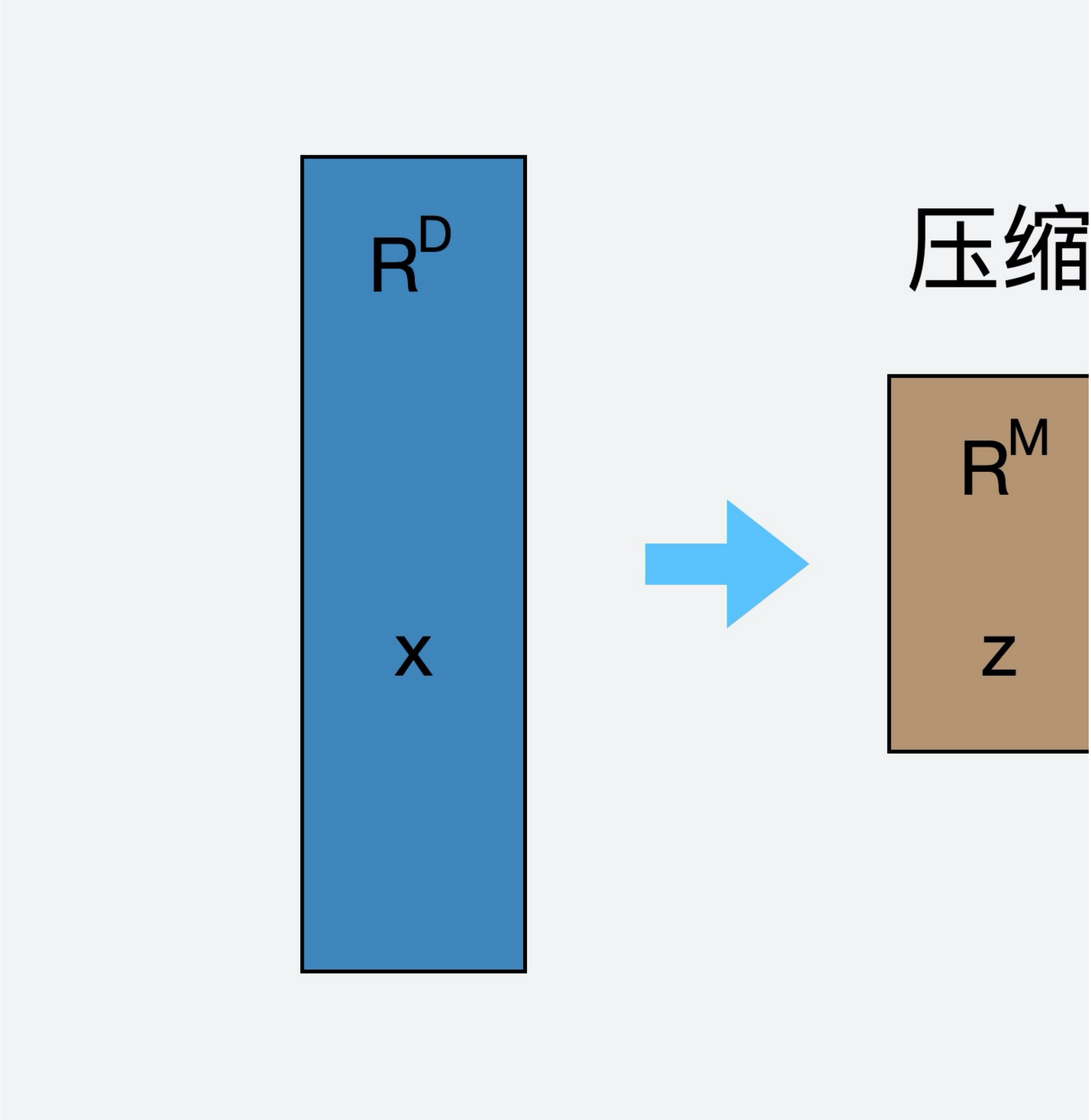
$$
\left[\begin{array}{l}
5 \\
3
\end{array}\right]=5 e_{1}+3 e_{2}
$$

于是，相似低维投影y_{n}就可以表示成下面这种形式。

$$
y_{n}=\left[\begin{array}{l}
0 \\
z
\end{array}\right] \in R^{2}, z \in R
$$

同时，y_{n}也可以写成这样的形式：$y_{n}=0 e_{1}+z e_{2}$。

这里的z就是我们要找的值，而y_{n}就是一个向量子空间U，它的维度是一维。最后，我们再通过下图来更直观地说明一下PCA的过程。



图的左边是原始向量空间x，经过压缩后，我们找到了子向量空间z，z经过重构后，形成了最终的向量空间y，y还是属于原来的向量空间，但y却拥有比x更低的维度表现。

从数学的角度看，我们其实就是在寻找x和z之间的线性关系，使得$z=B^{T}x$，以及$y=Bz$，其中B是矩阵。如果我们从数据压缩技术方向来看就更容易理解了，图中的左边箭头是编码过程，也就是压缩，右边的箭头是解码过程，也就是映射，而矩阵B就是把属于R^{M}向量空间的低维的z，映射回原来的向量空间R^{D}。同理，矩阵B^{T}就是把属于原来R^{D}向量空间的高维x压缩成低维的z。

本节小结

好了，到这里线性空间这一讲就结束了，最后我再总结一下前面讲解的内容。

今天的知识很重要，实践中都是围绕向量空间展开的，也就是说向量空间是实践的基本单位，你也一定要掌握子向量空间，因为现实中数据都是高维度的，从向量空间降维后找到子向量空间，这样就能大大提高数据运算和分析的效率。

再次特别提醒：这一讲非常重要，因为后面几讲都是围绕向量空间展开的，如果你哪里没看懂，一定要多看几次，确保完全明白了。有任何问题，你也可以随时在留言区向我提问。

线性代数练习场

之前我讲了一个现实的向量空间降维场景：车辆的牌照识别，这里，我们通过另一个现实场景，来练习一下向量空间降维的思维。

目前市场上语音识别的应用有很多，比如：天猫精灵、苹果Siri、小爱等等，而语音识别涉及的技术有很多，有语言建模、声学建模、语音信号处理等等。在语音信号处理中，语音声波通过空气传播，并被麦克风捕获，麦克风将压力波转换为可捕获的电活动。我们对电活动进行采样，用以创建描述信号的一系列波形采样。

采样是数据收集的过程，数据收集后需要做数据预处理，而预处理的关键一步就是特征提取，现在请你从“特征提取”的方向上思考下，有哪些和目前所学到的数学知识有关？

> 友情提醒：特征提取就是数字化过程，也是向量化后形成向量空间的过程。

欢迎在留言区写出你的思考，我会及时回复。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我一起重学线性代数！

今天我们来聊一聊“线性空间”。在“基本概念”那一节课中，我讲到了向量，你也看到了，线性方程组是能够通过矩阵或向量来表达的。那为什么我们还要学习线性空间呢？

说到线性空间，其实你可以通过“空间”这个词把线性空间和我们的生活做个类比。就像我们生活在三维世界中，在这个空间中，一切物质都是运动的，而运动也是有一定规律的。这么来看的话，空间其实就是一个具有实际意义的集合，其中包含了**对象**和**运动**。

把这个理解平移到线性空间也是一样的，向量就是对象，如果把**向量**看成是**线性空间中的点**，那**向量的变换**就是**点在空间中的运动**。所以，线性空间也是一个集合，它的意义在于，赋予了向量生命和活力，只有掌握了线性空间，我们才能真正在实际运用中有的放矢。因为所有的活动都要在这个空间中发生，比如：线性空间中用到的傅立叶变换。

组（群）

还是老样子，我们要先从学习线性空间会用到的基础知识开始讲起。

我们先来讲一下“组”，组也可以叫成大家习惯的“群”（以下均以“组”称呼）。说到“组”，它其实是一个通用的概念，和线性空间没有什么关系，但我之所以要先说组，是因为组（群）和空间是类似的，也是集合，性质也差不多，如果你了解了组，就更容易理解线性空间了。而且，组在计算机科学中是得到了广泛应用的，特别是在计算机密码学和图形图像处理中。

说了这么多，“组”到底是什么呢？组，其实就是包含一系列元素的集合，在对这些集合元素实施某类运算后，这个集合仍然保持着封闭性。可能这么说你会有些疑惑，我还是通过数学方法来定义组，可能会让你的思路更加清晰一些。

我们先来定义一个集合G和集合上的某一类运算，比如：乘$\otimes$，使得 $G \otimes G$ 的结果还是属于G，如果我们要$G:=(G, \otimes)$是一个组，则需要满足以下这些条件：

1.G在$\otimes$运算中是封闭的，也就是：$\forall x, y \in G: x \otimes y \in G$。
2. 满足结合律，也就是：$\forall x, y, z \in G:(x \otimes y) \otimes z=x \otimes(y \otimes z)$。
3. 恒等元素（或者叫做中性元素）e，满足：$\exists \mathrm{e} \in G, \forall x \in G: x \otimes e=x, e \otimes x=x$，这里的恒等元素e在一般数字中你可以认为是$1$，而在矩阵中就可以认为是单位矩阵。
4. 有x的逆元素y，使得：$\forall \mathrm{e} \in G, \exists x \in G: x \otimes y=e, y \otimes x=e$，其中$e$是恒等元素。

再补充一点，如果满足$\forall x, y \in G: x \otimes y=y \otimes x$，则$G:=(G, \otimes)$就叫作交换组。

现在我们来做个测试，看看你是否理解了组的定义。

一个$n×n$的实数矩阵A和它的乘法运算是一个组吗？通过符号表达就是：$\left(A^{n \times n}, \quad \cdot\right)$。

想要知道这个问题的答案，我们就需要用前面满足组的这几个条件来分析一下。

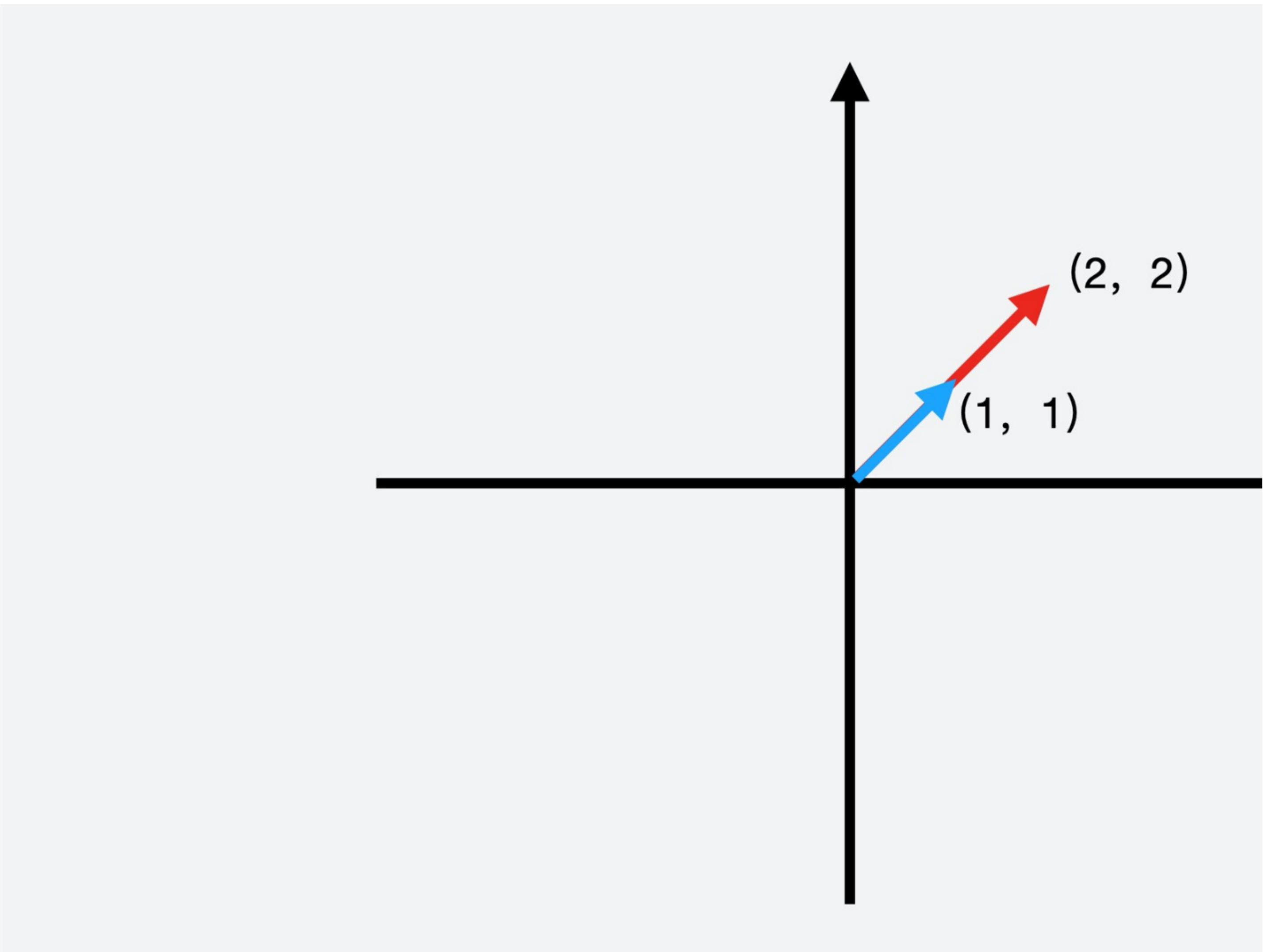
首先，是封闭性和结合律，从矩阵乘的定义就能直接看出来，它们是满足的；其次，我们来看恒等元素，单位矩阵就是矩阵元素，也满足组条件；最后，我们看看逆元素，假设A矩阵的逆矩阵A^{-1}存在，那很明显，满足$AA^{-1}=I$，这里I就是恒等元素。

于是，我们可以说$\left(A^{n \times n}, \quad \cdot\right)$是一个组，而矩阵乘不符合交换律，所以这个组并不是交换组。

向量空间

如果我们在“组”的基础上再扩展一下，就能够很顺利地来到“线性空间”。说起线性空间，它也叫作向量空间，它在一些书本和网络上的解释都是比较晦涩难懂的，但如果我们在“组”的基础上来解释它，你应该会比较容易理解了。

刚才我们说的组只包含了某一类运算，这类运算是在集合元素上的内部运算，我们把它定义为加$（+）$运算，现在再引入一类外部运算，标量乘$（·）$。于是，你可以想象一下，我们可以把内部运算看成是加法，把外部运算看成是“缩放”，因为标量乘就是一个标量和向量相乘。如果从二维坐标系的角度来看一下，点$(1, 1)$和标量2相乘就是$(2, 2)$，这个就是放大效果。



在通过“组”来认识向量空间后，再从数学角度去看向量空间的定义，你应该就能完全理解了。

一个实数向量空间V是一个集合，它包含了两类运算，一类是加，一类是标量乘，而且运算都满足V的封闭性，也就是说，V中元素的运算结果还是属于V。

$$
\begin{array} {l}

+: V+V \rightarrow V \\
\cdot : \lambda \cdot V \rightarrow V
\end{array}
$$

这个向量空间可以表示成$V:=(V,+,\cdot)$，其中：

1.向量空间V的$(V,+)$是一个交换组。
2.V满足分配律：$\forall \lambda \in R, x, y \in V: \lambda \cdot(x+y)=\lambda \cdot x+\lambda \cdot y$；以及$\forall \lambda, \varphi \in R, x \in V:(\lambda+\varphi) \cdot x=\lambda \cdot x+\varphi \cdot x$。
3.V外部运算满足结合律：$\forall \lambda, \varphi \in R, x \in V: \lambda \cdot(\varphi \cdot x)=(\lambda \cdot \varphi) \cdot x$。
4.V外部运算的恒等元素满足：$\forall x \in V: 1 \cdot x=x$。

在向量空间V中的元素x是向量，向量空间加运算$(V,+)$的恒等元素是零向量$0=\left[\begin{array}{lll}0, & \ldots & , 0\end{array}\right]^{T}$。这里的加运算是内部运算，也叫做向量加，元素$λ$属于实数，叫做标量，外部运算乘$·$是标量乘。

好了，我给出了向量空间的一般描述和数学定义，如果你还是有一些不理解，也没有关系，我再举两个例子来加深你对向量空间的理解。

例1：进一步理解向量加和标量乘

对于向量空间的向量加和标量乘：我们定义一个实数向量空间R^{n}，n表示向量元素：

- “加”定义为向量之间的加：$x+y=\left(x_{1}, \ldots, x_{n}\right)+\left(y_{1}, \ldots, y_{n}\right)=\left(x_{1}+y_{1}, \ldots, x_{n}+y_{n}\right)$。加的结果还是属于向量空间$R^{n}$。
- 标量乘就是向量乘标量：$\lambda x=\lambda\left(x_{1}, \ldots, x_{n}\right)=\left(\lambda x_{1}, \ldots, \lambda x_{n}\right)$。
标量乘的结果还是属于向量空间R^{n}。

例2：进一步理解矩阵加和标量乘

对于向量空间的矩阵加和标量乘：我们定义一个实数向量空间$R^{m×n}$，用$m×n$表示m行n列矩阵元素：

我们把“加”定义为矩阵之间的加。加的结果还是属于向量空间$R^{m×n}$。

$$
A+B=\left[\begin{array}{ccc}
a_{11}+b_{11} & \ldots & a_{1 n}+b_{1 n} \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
a_{m 1}+b_{m 1} & \ldots & a_{m n}+b_{m n}
\end{array}\right]
$$

而标量乘就是矩阵乘标量。标量乘的结果还是属于向量空间$R^{m×n}$。

$$
\lambda A=\left[\begin{array}{ccc}
\lambda a_{11} & \ldots & \lambda a_{1 n} \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\lambda_{m 1} & \ldots & \lambda \dot{a}_{m n}
\end{array}\right]
$$

到这里，相信你应该了解了向量空间的基本概念，接下来这一讲的重头戏就要来了，它就是向量子空间。

向量子空间

为什么说向量子空间是重头戏？那是因为它在机器学习中的地位相当重要，被用在了**降维算法**中。这里我会分两步来讲解，先讲向量子空间的基本概念，再通过一个机器学习的例子，能让你更了解它，并灵活运用在工作实践中。

什么是向量子空间？

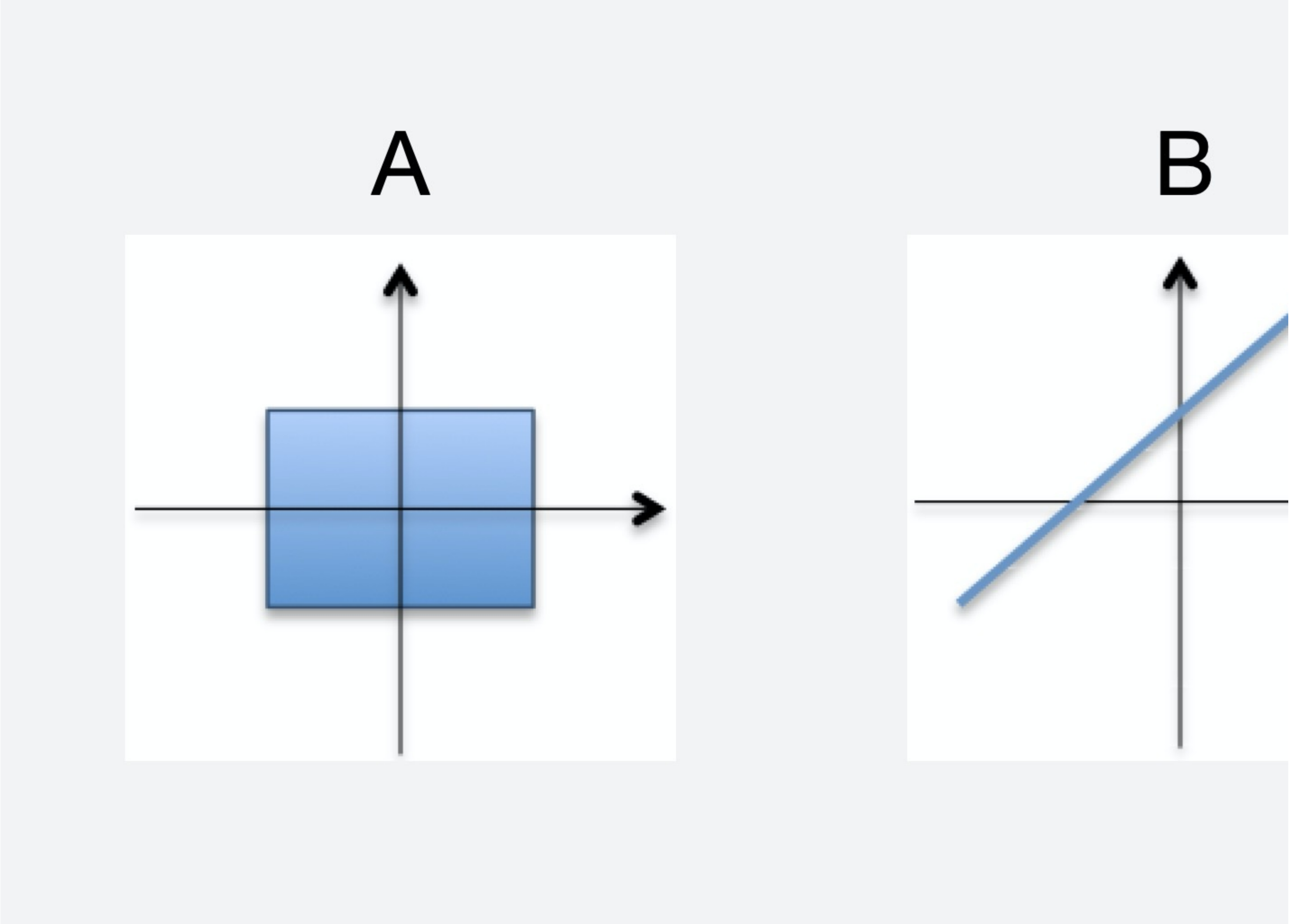
从“子”这个字，我们可以很直观地想到，它是被包含在向量空间中的，事实也确实如此。

已知$V:=(V,+,\cdot)$是一个向量空间，如果$U \subseteq V, U \neq 0$，那么$U:=(U,+,\cdot)$就是V的向量子空间，或者叫做线性子空间。向量子空间U自然继承V的许多属性，其中包括：交换组的属性、分配律、结合律和中性元素。除此以外，要判断U是不是向量子空间，我们还需要这两个条件：

1.$U \neq 0$，但$0 \in U$。
2. U的封闭性满足外部运算：$\forall \lambda \in R, \forall x \in U: \lambda x \in U$，同时满足内部运算：$\forall x, y \in U: x+y \in U$。

介绍完向量子空间基本概念后，我们一起来通过一个例子来巩固一下所学的知识，看看你是否已经掌握了向量子空间。

请你观察下面列举的A、B、C三张图像，里面有 R^{2}的向量子空间吗？



这里我不会给出答案，你可以自己思考一下，友情提醒：A、B、C中只有一个是向量子空间。

机器学习中的向量子空间

结合实践来看向量子空间的时候到了。在机器学习中，直接计算高维数据困难重重，一方面是数据处理和分析困难，使得数据可视化几乎不可能；另一方面是因为数据存储量太大，计算要付出的代价太高。

所以，我们要从向量空间中去除冗余数据，形成向量子空间。这样数据存储量就被极大地压缩了，处理和分析数据也简单了很多。因为高维数据中其实有很多维是冗余的，它们可以被其它维组合表示，也就是“降维”。

降维就是利用结构化和相关性，在尽量保证信息不损失的情况下，转换数据表现形式，让数据更“紧凑”。换句话说，你可以把降维看成是数据压缩技术，类似图像的jpeg和音频的MP3压缩算法。或者简单地说，降维就是将数据投射到一个低维子空间，比如：三维数据集可以降成二维，也就是把数据映射到平面上。

机器学习中运用最多的降维算法就是主成分分析，简称PCA（Principal Component Analysis），也叫做卡尔胡宁-勒夫变换（Karhunen-Loeve Transform）。它是一种用于探索高维数据结构的技术，已经存在超过100年了，但至今仍然广泛被使用在数据压缩和可视化中。

我们来看一个例子：假设你负责的是机器学习算法，而你的应用场景是车辆的牌照识别，也就是OCR（Optical Character Recognition）光学字符识别。在这个场景中，大街上的摄像头必须实时捕捉运动车辆的牌照，一旦发现问题车辆就需要快速识别牌照，并移交交警监管部门来做进一步处理。你会怎么处理呢？

牌照被拍下后就是图片，为了减小图像原始数据量，减少后续处理时的计算量，这些图片首先需要进行经过灰度处理（牌照只需要数字，不需要对彩色图像的RGB三个分量都进行处理），处理后就会变成类似这样的形式：

假定每个数字是一个$28*28$尺寸的灰度图片，包含784个像素，那每张灰度数字图片就是一个向量，这个向量就有784个维度，可以表示成$x \in R^{784}$，而你的样本库少说也有几十万个样本数据，如果按一般的方法是不可能做到实时识别的。所以，这样的场景就需要使用PCA来压缩数据，进行大幅度降维。

这里我们简单一些，从二维的角度来看看PCA。在PCA中，最关键的就是寻找数据点x_{n}的相似低维投影y_{n}，而y_{n}就是子向量空间。

考虑R^{2}和它的两个基，$e_{1}=[1,0]^{T}$、$e_{2}=[0,1]^{T}$，$x \in R^{2}$能够表示成这两个基的线性组合（“基”会在第7节课中详细介绍）。

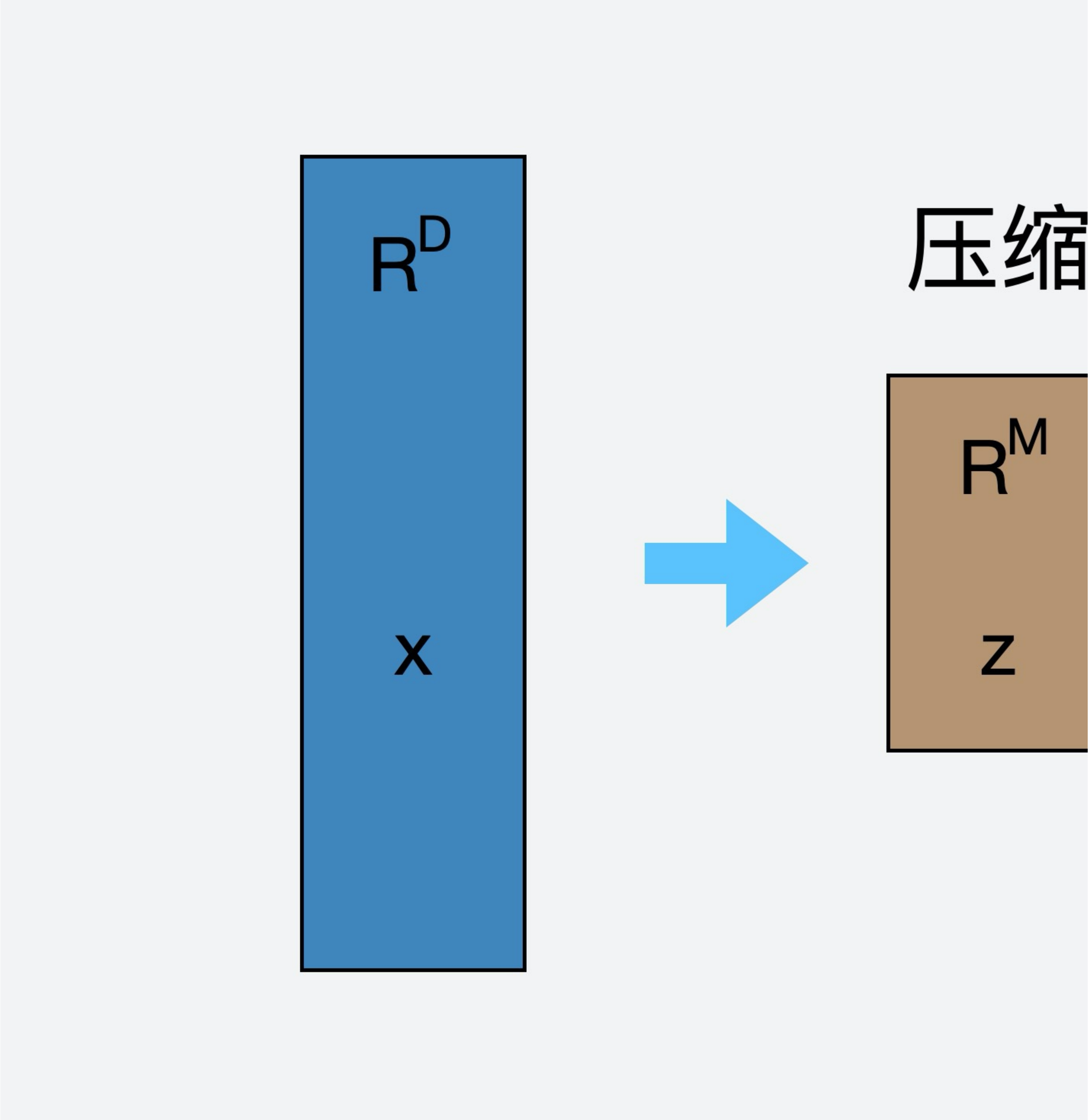
$$
\left[\begin{array}{l}
5 \\
3
\end{array}\right]=5 e_{1}+3 e_{2}
$$

于是，相似低维投影y_{n}就可以表示成下面这种形式。

$$
y_{n}=\left[\begin{array}{l}
0 \\
z
\end{array}\right] \in R^{2}, z \in R
$$

同时，y_{n}也可以写成这样的形式：$y_{n}=0 e_{1}+z e_{2}$。

这里的z就是我们要找的值，而y_{n}就是一个向量子空间U，它的维度是一维。最后，我们再通过下图来更直观地说明一下PCA的过程。



图的左边是原始向量空间x，经过压缩后，我们找到了子向量空间z，z经过重构后，形成了最终的向量空间y，y还是属于原来的向量空间，但y却拥有比x更低的维度表现。

从数学的角度看，我们其实就是在寻找x和z之间的线性关系，使得$z=B^{T}x$，以及$y=Bz$，其中B是矩阵。如果我们从数据压缩技术方向来看就更容易理解了，图中的左边箭头是编码过程，也就是压缩，右边的箭头是解码过程，也就是映射，而矩阵B就是把属于R^{M}向量空间的低维的z，映射回原来的向量空间R^{D}。同理，矩阵B^{T}就是把属于原来R^{D}向量空间的高维x压缩成低维的z。

本节小结

好了，到这里线性空间这一讲就结束了，最后我再总结一下前面讲解的内容。

今天的知识很重要，实践中都是围绕向量空间展开的，也就是说向量空间是实践的基本单位，你也一定要掌握子向量空间，因为现实中数据都是高维度的，从向量空间降维后找到子向量空间，这样就能大大提高数据运算和分析的效率。

再次特别提醒：这一讲非常重要，因为后面几讲都是围绕向量空间展开的，如果你哪里没看懂，一定要多看几次，确保完全明白了。有任何问题，你也可以随时在留言区向我提问。

线性代数练习场

之前我讲了一个现实的向量空间降维场景：车辆的牌照识别，这里，我们通过另一个现实场景，来练习一下向量空间降维的思维。

目前市场上语音识别的应用有很多，比如：天猫精灵、苹果Siri、小爱等等，而语音识别涉及的技术有很多，有语言建模、声学建模、语音信号处理等等。在语音信号处理中，语音声波通过空气传播，并被麦克风捕获，麦克风将压力波转换为可捕获的电活动。我们对电活动进行采样，用以创建描述信号的一系列波形采样。

采样是数据收集的过程，数据收集后需要做数据预处理，而预处理的关键一步就是特征提取，现在请你从“特征提取”的方向上思考下，有哪些和目前所学到的数学知识有关？

> 友情提醒：特征提取就是数字化过程，也是向量化后形成向量空间的过程。

欢迎在留言区写出你的思考，我会及时回复。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我一起重学线性代数！

今天我们来聊一聊“线性空间”。在“基本概念”那一节课中，我讲到了向量，你也看到了，线性方程组是能够通过矩阵或向量来表达的。那为什么我们还要学习线性空间呢？

说到线性空间，其实你可以通过“空间”这个词把线性空间和我们的生活做个类比。就像我们生活在三维世界中，在这个空间中，一切物质都是运动的，而运动也是有一定规律的。这么来看的话，空间其实就是一个具有实际意义的集合，其中包含了**对象**和**运动**。

把这个理解平移到线性空间也是一样的，向量就是对象，如果把**向量**看成是**线性空间中的点**，那**向量的变换**就是**点在空间中的运动**。所以，线性空间也是一个集合，它的意义在于，赋予了向量生命和活力，只有掌握了线性空间，我们才能真正在实际运用中有的放矢。因为所有的活动都要在这个空间中发生，比如：线性空间中用到的傅立叶变换。

组（群）

还是老样子，我们要先从学习线性空间会用到的基础知识开始讲起。

我们先来讲一下“组”，组也可以叫成大家习惯的“群”（以下均以“组”称呼）。说到“组”，它其实是一个通用的概念，和线性空间没有什么关系，但我之所以要先说组，是因为组（群）和空间是类似的，也是集合，性质也差不多，如果你了解了组，就更容易理解线性空间了。而且，组在计算机科学中是得到了广泛应用的，特别是在计算机密码学和图形图像处理中。

说了这么多，“组”到底是什么呢？组，其实就是包含一系列元素的集合，在对这些集合元素实施某类运算后，这个集合仍然保持着封闭性。可能这么说你会有些疑惑，我还是通过数学方法来定义组，可能会让你的思路更加清晰一些。

我们先来定义一个集合G和集合上的某一类运算，比如：乘$\otimes$，使得 $G \otimes G$ 的结果还是属于G，如果我们要$G:=(G, \otimes)$是一个组，则需要满足以下这些条件：

1.G在$\otimes$运算中是封闭的，也就是：$\forall x, y \in G: x \otimes y \in G$。
2. 满足结合律，也就是：$\forall x, y, z \in G:(x \otimes y) \otimes z=x \otimes(y \otimes z)$。
3. 恒等元素（或者叫做中性元素）e，满足：$\exists \mathrm{e} \in G, \forall x \in G: x \otimes e=x, e \otimes x=x$，这里的恒等元素e在一般数字中你可以认为是$1$，而在矩阵中就可以认为是单位矩阵。
4. 有x的逆元素y，使得：$\forall \mathrm{e} \in G, \exists x \in G: x \otimes y=e, y \otimes x=e$，其中$e$是恒等元素。

再补充一点，如果满足$\forall x, y \in G: x \otimes y=y \otimes x$，则$G:=(G, \otimes)$就叫作交换组。

现在我们来做个测试，看看你是否理解了组的定义。

一个$n×n$的实数矩阵A和它的乘法运算是一个组吗？通过符号表达就是：$\left(A^ {n \times n}, \quad \cdot\right)$。

想要知道这个问题的答案，我们就需要用前面满足组的这几个条件来分析一下。

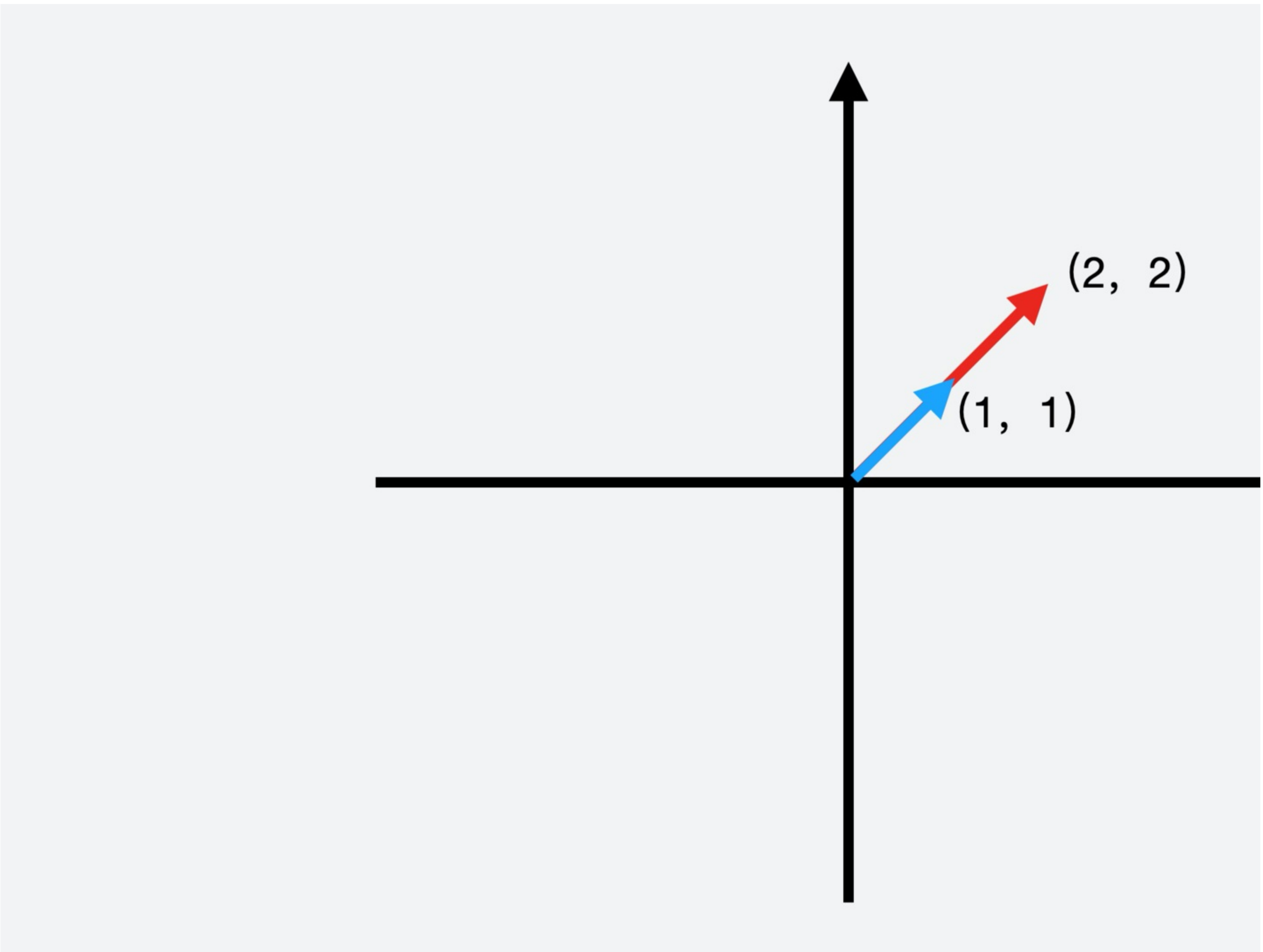
首先，是封闭性和结合律，从矩阵乘的定义就能直接看出来，它们是满足的；其次，我们来看恒等元素，单位矩阵就是矩阵元素，也满足组条件；最后，我们看看逆元素，假设A矩阵的逆矩阵A^{-1}存在，那很明显，满足$AA^{-1}=I$，这里I就是恒等元素。

于是，我们可以说$\left(A^ {n \times n}, \quad \cdot\right)$是一个组，而矩阵乘不符合交换律，所以这个组并不是交换组。

向量空间

如果我们在“组”的基础上再扩展一下，就能够很顺利地来到“线性空间”。说起线性空间，它也叫作向量空间，它在一些书本和网络上的解释都是比较晦涩难懂的，但如果我们在“组”的基础上来解释它，你应该会比较容易理解了。

刚才我们说的组只包含了某一类运算，这类运算是在集合元素上的内部运算，我们把它定义为加$（+）$运算，现在再引入一类外部运算，标量乘$（·）$。于是，你可以想象一下，我们可以把内部运算看成是加法，把外部运算看成是“缩放”，因为标量乘就是一个标量和向量相乘。如果从二维坐标系的角度来看一下，点$(1, 1)$和标量2相乘就是$(2, 2)$，这个就是放大效果。



在通过“组”来认识向量空间后，再从数学角度去看向量空间的定义，你应该就能完全理解了。

一个实数向量空间V是一个集合，它包含了两类运算，一类是加，一类是标量乘，而且运算都满足V的封闭性，也就是说，V中元素的运算结果还是属于V。

$$
\begin{array} {l}

+: V+V \rightarrow V \\\
\cdot : \lambda \cdot V \rightarrow V
\end{array}
$$

这个向量空间可以表示成$V:=(V,+,\cdot)$，其中：

1.向量空间V的$(V,+)$是一个交换组。
2.V满足分配律：$\forall \lambda \in R, x, y \in V: \lambda \cdot(x+y)=\lambda \cdot x+\lambda \cdot y$；以及$\forall \lambda, \varphi \in R, x \in V:(\lambda+\varphi) \cdot x=\lambda \cdot x+\varphi \cdot x$。
3.V外部运算满足结合律：$\forall \lambda, \varphi \in R, x \in V: \lambda \cdot(\varphi \cdot x)=(\lambda \cdot \varphi) \cdot x$。
4.V外部运算的恒等元素满足：$\forall x \in V: 1 \cdot x=x$。

在向量空间V中的元素x是向量，向量空间加运算$(V,+)$的恒等元素是零向量$0=\left[\begin{array}{lll}0, & \ldots & , 0\end{array}\right]^{T}$。这里的加运算是内部运算，也叫做向量加，元素$λ$属于实数，叫做标量，外部运算乘$·$是标量乘。

好了，我给出了向量空间的一般描述和数学定义，如果你还是有一些不理解，也没有关系，我再举两个例子来加深你对向量空间的理解。

例1：进一步理解向量加和标量乘

对于向量空间的向量加和标量乘：我们定义一个实数向量空间R^{n}，n表示向量元素：

- “加”定义为向量之间的加：$x+y=\left(x_{1}, \ldots, x_{n}\right)+\left(y_{1}, \ldots, y_{n}\right)=\left(x_{1}+y_{1}, \ldots, x_{n}+y_{n}\right)$。 加的结果还是属于向量空间$R^{n}$。
- 标量乘就是向量乘标量：$\lambda x=\lambda\left(x_{1}, \ldots, x_{n}\right)=\left(\lambda x_{1}, \ldots, \lambda x_{n}\right)$。
  标量乘的结果还是属于向量空间R^{n}。

例2：进一步理解矩阵加和标量乘

对于向量空间的矩阵加和标量乘：我们定义一个实数向量空间$R^{m×n}$，用$m×n$表示m行n列矩阵元素：

我们把“加”定义为矩阵之间的加。加的结果还是属于向量空间$R^{m×n}$。

$$
A+B=\left[\begin{array}{ccc}
a_{11}+b_{11} & \ldots & a_{1 n}+b_{1 n} \\\
\cdot & & \cdot \\\
\cdot & & \cdot \\\
\cdot & & \cdot \\\
a_{m 1}+b_{m 1} & \ldots & a_{m n}+b_{m n}
\end{array}\right]
$$

而标量乘就是矩阵乘标量。标量乘的结果还是属于向量空间$R^{m×n}$。

$$
\lambda A=\left[\begin{array}{ccc}
\lambda a_{11} & \ldots & \lambda a_{1 n} \\\
\cdot & & \cdot \\\
\cdot & & \cdot \\\
\lambda_{m 1} & \ldots & \lambda \dot{a}_{m n}
\end{array}\right]
$$

到这里，相信你应该了解了向量空间的基本概念，接下来这一讲的重头戏就要来了，它就是向量子空间。

向量子空间

为什么说向量子空间是重头戏？那是因为它在机器学习中的地位相当重要，被用在了**降维算法**中。这里我会分两步来讲解，先讲向量子空间的基本概念，再通过一个机器学习的例子，能让你更了解它，并灵活运用在工作实践中。

什么是向量子空间？

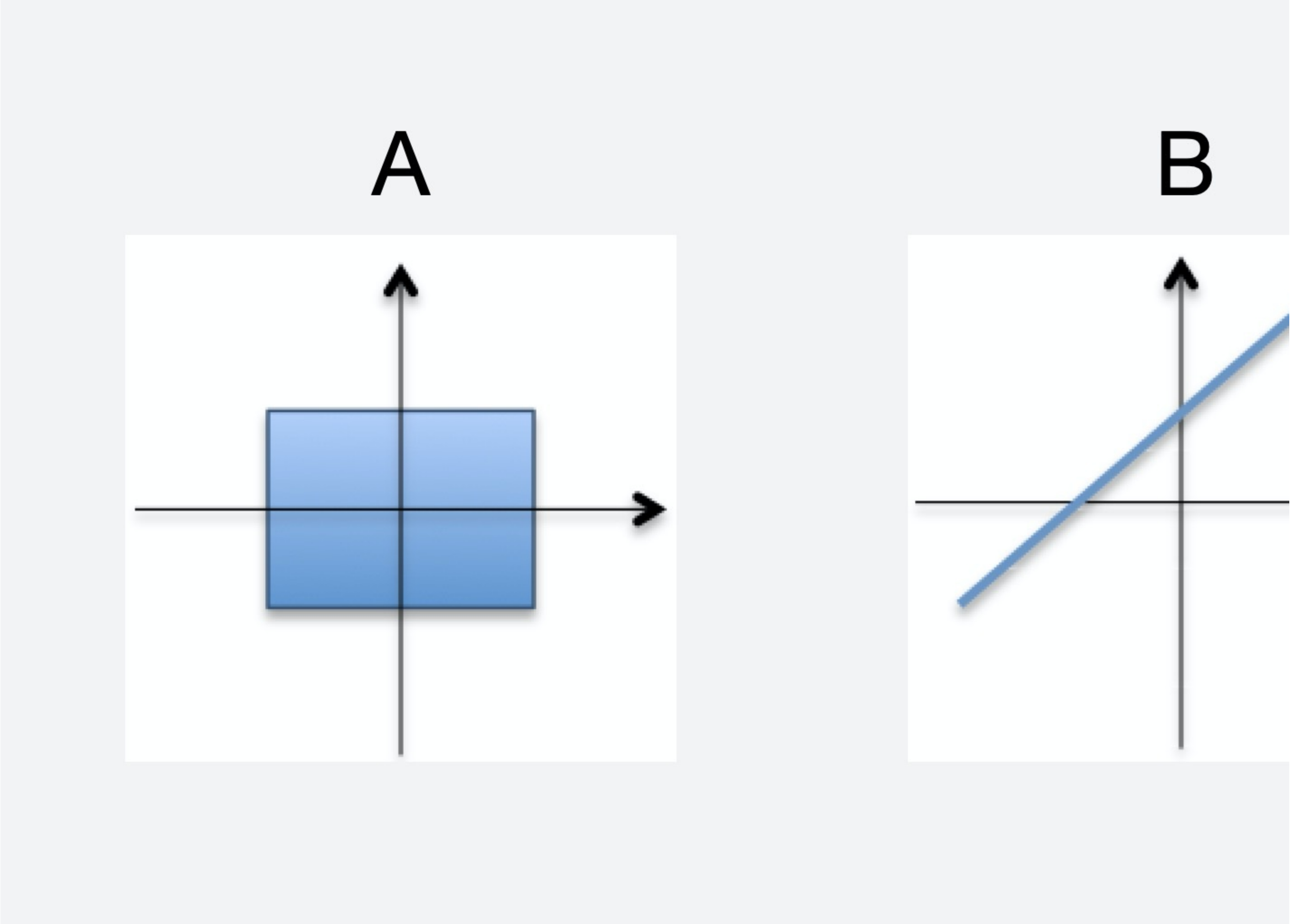
从“子”这个字，我们可以很直观地想到，它是被包含在向量空间中的，事实也确实如此。

已知$V:=(V,+,\cdot)$是一个向量空间，如果$U \subseteq V, U \neq 0$，那么$U:=(U,+,\cdot)$就是V的向量子空间，或者叫做线性子空间。向量子空间U自然继承V的许多属性，其中包括：交换组的属性、分配律、结合律和中性元素。除此以外，要判断U是不是向量子空间，我们还需要这两个条件：

1.$U \neq 0$，但$0 \in U$。
2. U的封闭性满足外部运算：$\forall \lambda \in R, \forall x \in U: \lambda x \in U$，同时满足内部运算：$\forall x, y \in U: x+y \in U$。

介绍完向量子空间基本概念后，我们一起来通过一个例子来巩固一下所学的知识，看看你是否已经掌握了向量子空间。

请你观察下面列举的A、B、C三张图像，里面有 R^{2}的向量子空间吗？



这里我不会给出答案，你可以自己思考一下，友情提醒：A、B、C中只有一个是向量子空间。

机器学习中的向量子空间

结合实践来看向量子空间的时候到了。在机器学习中，直接计算高维数据困难重重，一方面是数据处理和分析困难，使得数据可视化几乎不可能；另一方面是因为数据存储量太大，计算要付出的代价太高。

所以，我们要从向量空间中去除冗余数据，形成向量子空间。这样数据存储量就被极大地压缩了，处理和分析数据也简单了很多。因为高维数据中其实有很多维是冗余的，它们可以被其它维组合表示，也就是“降维”。

降维就是利用结构化和相关性，在尽量保证信息不损失的情况下，转换数据表现形式，让数据更“紧凑”。换句话说，你可以把降维看成是数据压缩技术，类似图像的jpeg和音频的MP3压缩算法。或者简单地说，降维就是将数据投射到一个低维子空间，比如：三维数据集可以降成二维，也就是把数据映射到平面上。

机器学习中运用最多的降维算法就是主成分分析，简称PCA（Principal Component Analysis），也叫做卡尔胡宁-勒夫变换（Karhunen-Loeve Transform）。它是一种用于探索高维数据结构的技术，已经存在超过100年了，但至今仍然广泛被使用在数据压缩和可视化中。

我们来看一个例子：假设你负责的是机器学习算法，而你的应用场景是车辆的牌照识别，也就是OCR（Optical Character Recognition）光学字符识别。在这个场景中，大街上的摄像头必须实时捕捉运动车辆的牌照，一旦发现问题车辆就需要快速识别牌照，并移交交警监管部门来做进一步处理。你会怎么处理呢？

牌照被拍下后就是图片，为了减小图像原始数据量，减少后续处理时的计算量，这些图片首先需要进行经过灰度处理（牌照只需要数字，不需要对彩色图像的RGB三个分量都进行处理），处理后就会变成类似这样的形式：

假定每个数字是一个$28*28$尺寸的灰度图片，包含784个像素，那每张灰度数字图片就是一个向量，这个向量就有784个维度，可以表示成$x \in R^{784}$，而你的样本库少说也有几十万个样本数据，如果按一般的方法是不可能做到实时识别的。所以，这样的场景就需要使用PCA来压缩数据，进行大幅度降维。

这里我们简单一些，从二维的角度来看看PCA。在PCA中，最关键的就是寻找数据点x_{n}的相似低维投影y_{n}，而y_{n}就是子向量空间。

考虑R^{2}和它的两个基，$e_{1}=[1,0]^{T}$、$e_{2}=[0,1]^{T}$，$x \in R^{2}$能够表示成这两个基的线性组合（“基”会在第7节课中详细介绍）。

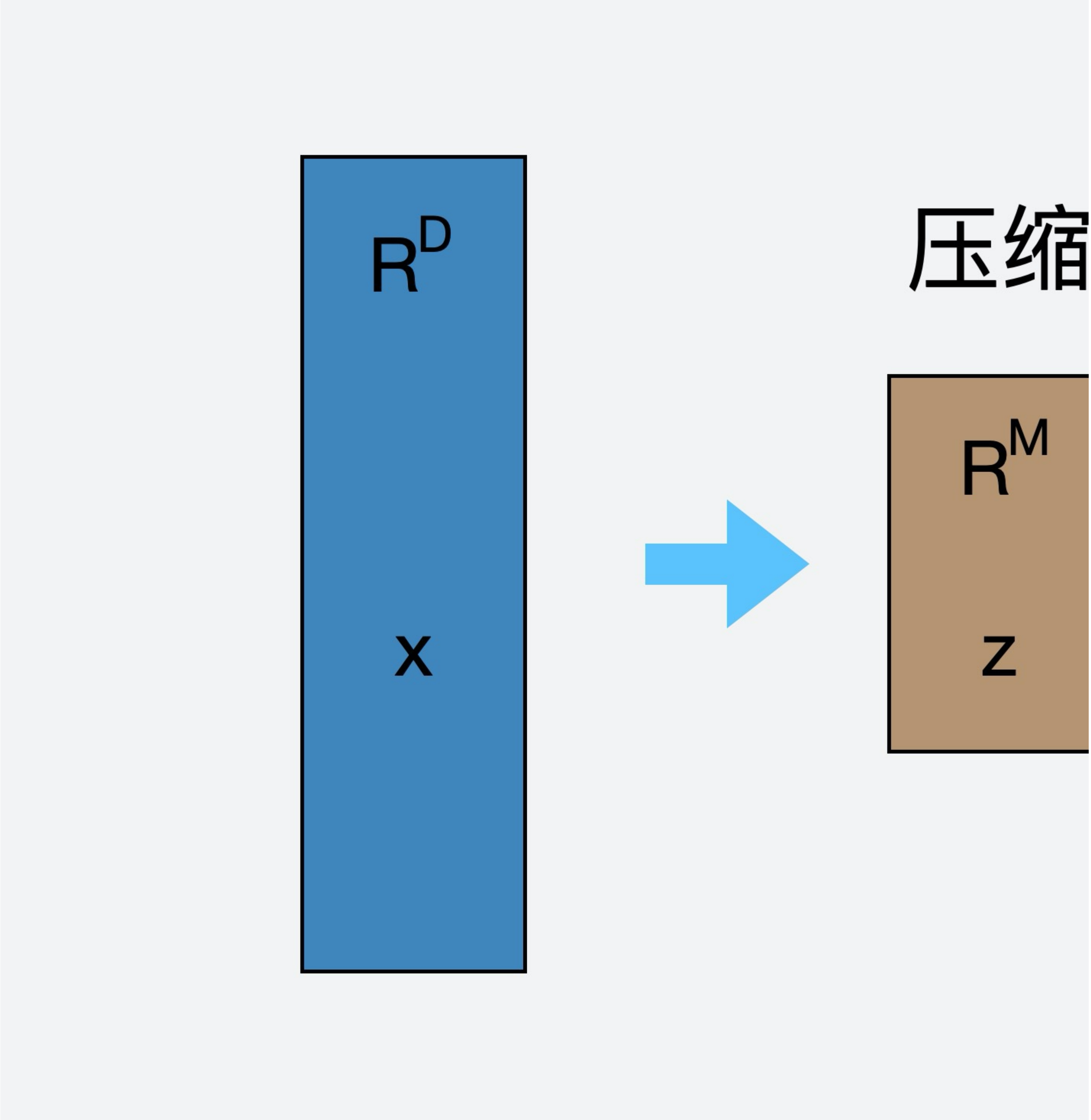
$$
\left[\begin{array}{l}
5 \\
3
\end{array}\right]=5 e_{1}+3 e_{2}
$$

于是，相似低维投影y_{n}就可以表示成下面这种形式。

$$
y_{n}=\left[\begin{array}{l}
0 \\
z
\end{array}\right] \in R^{2}, z \in R
$$

同时，y_{n}也可以写成这样的形式：$y_{n}=0 e_{1}+z e_{2}$。

这里的z就是我们要找的值，而y_{n}就是一个向量子空间U，它的维度是一维。最后，我们再通过下图来更直观地说明一下PCA的过程。



图的左边是原始向量空间x，经过压缩后，我们找到了子向量空间z，z经过重构后，形成了最终的向量空间y，y还是属于原来的向量空间，但y却拥有比x更低的维度表现。

从数学的角度看，我们其实就是在寻找x和z之间的线性关系，使得$z=B^{T}x$，以及$y=Bz$，其中B是矩阵。如果我们从数据压缩技术方向来看就更容易理解了，图中的左边箭头是编码过程，也就是压缩，右边的箭头是解码过程，也就是映射，而矩阵B就是把属于R^{M}向量空间的低维的z，映射回原来的向量空间R^{D}。同理，矩阵B^{T}就是把属于原来R^{D}向量空间的高维x压缩成低维的z。

本节小结

好了，到这里线性空间这一讲就结束了，最后我再总结一下前面讲解的内容。

今天的知识很重要，实践中都是围绕向量空间展开的，也就是说向量空间是实践的基本单位，你也一定要掌握子向量空间，因为现实中数据都是高维度的，从向量空间降维后找到子向量空间，这样就能大大提高数据运算和分析的效率。

再次特别提醒：这一讲非常重要，因为后面几讲都是围绕向量空间展开的，如果你哪里没看懂，一定要多看几次，确保完全明白了。有任何问题，你也可以随时在留言区向我提问。

线性代数练习场

之前我讲了一个现实的向量空间降维场景：车辆的牌照识别，这里，我们通过另一个现实场景，来练习一下向量空间降维的思维。

目前市场上语音识别的应用有很多，比如：天猫精灵、苹果Siri、小爱等等，而语音识别涉及的技术有很多，有语言建模、声学建模、语音信号处理等等。在语音信号处理中，语音声波通过空气传播，并被麦克风捕获，麦克风将压力波转换为可捕获的电活动。我们对电活动进行采样，用以创建描述信号的一系列波形采样。

采样是数据收集的过程，数据收集后需要做数据预处理，而预处理的关键一步就是特征提取，现在请你从"特征提取"的方向上思考下，有哪些和目前所学到的数学知识有关？

> 友情提醒：特征提取就是数字化过程，也是向量化后形成向量空间的过程。

欢迎在留言区写出你的思考，我会及时回复。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我一起重学线性代数！

今天我们来聊一聊“线性空间”。在“基本概念”那一节课中，我讲到了向量，你也看到了，线性方程组是能够通过矩阵或向量来表达的。那为什么我们还要学习线性空间呢？

说到线性空间，其实你可以通过“空间”这个词把线性空间和我们的生活做个类比。就像我们生活在三维世界中，在这个空间中，一切物质都是运动的，而运动也是有一定规律的。这么来看的话，空间其实就是一个具有实际意义的集合，其中包含了**对象**和**运动**。

把这个理解平移到线性空间也是一样的，向量就是对象，如果把**向量**看成是**线性空间中的点**，那**向量的变换**就是**点在空间中的运动**。所以，线性空间也是一个集合，它的意义在于，赋予了向量生命和活力，只有掌握了线性空间，我们才能真正在实际运用中有的放矢。因为所有的活动都要在这个空间中发生，比如：线性空间中用到的傅立叶变换。

组（群）

还是老样子，我们要先从学习线性空间会用到的基础知识开始讲起。

我们先来讲一下“组”，组也可以叫成大家习惯的“群”（以下均以“组”称呼）。说到“组”，它其实是一个通用的概念，和线性空间没有什么关系，但我之所以要先说组，是因为组（群）和空间是类似的，也是集合，性质也差不多，如果你了解了组，就更容易理解线性空间了。而且，组在计算机科学中是得到了广泛应用的，特别是在计算机密码学和图形图像处理中。

说了这么多，“组”到底是什么呢？组，其实就是包含一系列元素的集合，在对这些集合元素实施某类运算后，这个集合仍然保持着封闭性。可能这么说你会有些疑惑，我还是通过数学方法来定义组，可能会让你的思路更加清晰一些。

我们先来定义一个集合G和集合上的某一类运算，比如：乘$\otimes$，使得 $G \otimes G$ 的结果还是属于G，如果我们要$G:=(G, \otimes)$是一个组，则需要满足以下这些条件：

1.G在$\otimes$运算中是封闭的，也就是：$\forall x, y \in G: x \otimes y \in G$。
2. 满足结合律，也就是：$\forall x, y, z \in G:(x \otimes y) \otimes z=x \otimes(y \otimes z)$。
3. 恒等元素（或者叫做中性元素）e，满足：$\exists \mathrm{e} \in G, \forall x \in G: x \otimes e=x, e \otimes x=x$，这里的恒等元素e在一般数字中你可以认为是$1$，而在矩阵中就可以认为是单位矩阵。
4. 有x的逆元素y，使得：$\forall \mathrm{e} \in G, \exists x \in G: x \otimes y=e, y \otimes x=e$，其中$e$是恒等元素。

再补充一点，如果满足$\forall x, y \in G: x \otimes y=y \otimes x$，则$G:=(G, \otimes)$就叫作交换组。

现在我们来做个测试，看看你是否理解了组的定义。

一个$n×n$的实数矩阵A和它的乘法运算是一个组吗？通过符号表达就是：$\left(A^{n \times n}, \quad \cdot\right)$。

想要知道这个问题的答案，我们就需要用前面满足组的这几个条件来分析一下。

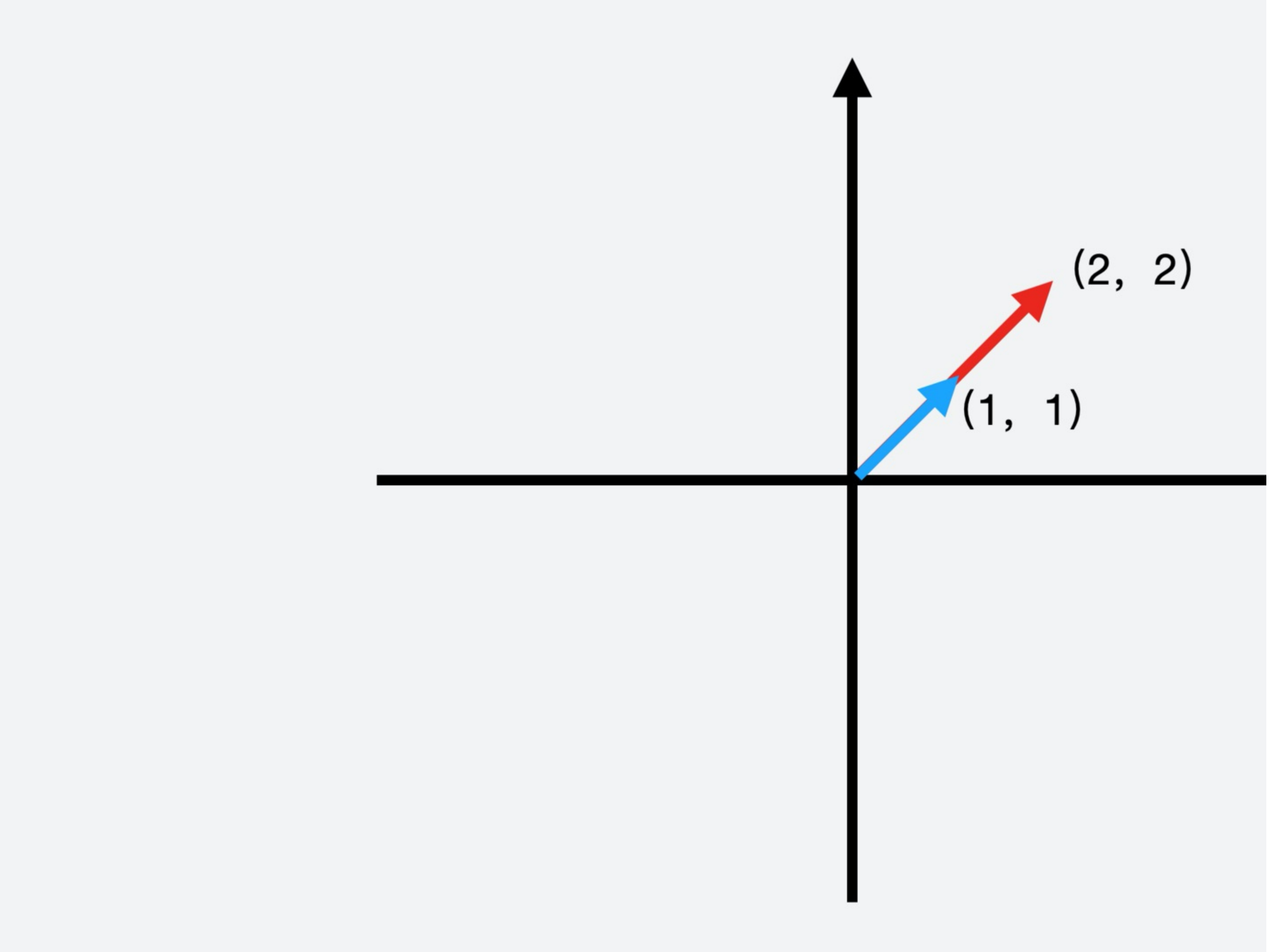
首先，是封闭性和结合律，从矩阵乘的定义就能直接看出来，它们是满足的；其次，我们来看恒等元素，单位矩阵就是矩阵元素，也满足组条件；最后，我们看看逆元素，假设A矩阵的逆矩阵A^{-1}存在，那很明显，满足$AA^{-1}=I$，这里I就是恒等元素。

于是，我们可以说$\left(A^{n \times n}, \quad \cdot\right)$是一个组，而矩阵乘不符合交换律，所以这个组并不是交换组。

向量空间

如果我们在“组”的基础上再扩展一下，就能够很顺利地来到“线性空间”。说起线性空间，它也叫作向量空间，它在一些书本和网络上的解释都是比较晦涩难懂的，但如果我们在“组”的基础上来解释它，你应该会比较容易理解了。

刚才我们说的组只包含了某一类运算，这类运算是在集合元素上的内部运算，我们把它定义为加$（+）$运算，现在再引入一类外部运算，标量乘$（·）$。于是，你可以想象一下，我们可以把内部运算看成是加法，把外部运算看成是“缩放”，因为标量乘就是一个标量和向量相乘。如果从二维坐标系的角度来看一下，点$(1, 1)$和标量2相乘就是$(2, 2)$，这个就是放大效果。



在通过“组”来认识向量空间后，再从数学角度去看向量空间的定义，你应该就能完全理解了。

一个实数向量空间V是一个集合，它包含了两类运算，一类是加，一类是标量乘，而且运算都满足V的封闭性，也就是说，V中元素的运算结果还是属于V。

$$
\begin{array} {l}

+: V+V \rightarrow V \\\
\cdot : \lambda \cdot V \rightarrow V
\end{array}
$$

这个向量空间可以表示成$V:=(V,+,\cdot)$，其中：

1.向量空间V的$(V,+)$是一个交换组。
2.V满足分配律：$\forall \lambda \in R, x, y \in V: \lambda \cdot(x+y)=\lambda \cdot x+\lambda \cdot y$；以及$\forall \lambda, \varphi \in R, x \in V:(\lambda+\varphi) \cdot x=\lambda \cdot x+\varphi \cdot x$。
3.V外部运算满足结合律：$\forall \lambda, \varphi \in R, x \in V: \lambda \cdot(\varphi \cdot x)=(\lambda \cdot \varphi) \cdot x$。
4.V外部运算的恒等元素满足：$\forall x \in V: 1 \cdot x=x$。

在向量空间V中的元素x是向量，向量空间加运算$(V,+)$的恒等元素是零向量$0=\left[\begin{array}{lll} 0, & \ldots & , 0\end{array}\right]^{T}$。这里的加运算是内部运算，也叫做向量加，元素$λ$属于实数，叫做标量，外部运算乘$·$是标量乘。

好了，我给出了向量空间的一般描述和数学定义，如果你还是有一些不理解，也没有关系，我再举两个例子来加深你对向量空间的理解。

例1：进一步理解向量加和标量乘

对于向量空间的向量加和标量乘：我们定义一个实数向量空间R^{n}，n表示向量元素：

- “加”定义为向量之间的加：$x+y=\left(x_{1}, \ldots, x_{n}\right)+\left(y_{1}, \ldots, y_{n}\right)=\left(x_{1}+y_{1}, \ldots, x_{n}+y_{n}\right)$。 加的结果还是属于向量空间$R^{n}$。
- 标量乘就是向量乘标量：$\lambda x=\lambda\left(x_{1}, \ldots, x_{n}\right)=\left(\lambda x_{1}, \ldots, \lambda x_{n}\right)$。
  标量乘的结果还是属于向量空间R^{n}。

例2：进一步理解矩阵加和标量乘

对于向量空间的矩阵加和标量乘：我们定义一个实数向量空间$R^{m×n}$，用$m×n$表示m行n列矩阵元素：

我们把“加”定义为矩阵之间的加。加的结果还是属于向量空间$R^{m×n}$。

$$
A+B=\left[\begin{array}{ccc}
a_{11}+b_{11} & \ldots & a_{1 n}+b_{1 n} \\\
\cdot & & \cdot \\\
\cdot & & \cdot \\\
\cdot & & \cdot \\\
a_{m 1}+b_{m 1} & \ldots & a_{m n}+b_{m n}
\end{array}\right]
$$

而标量乘就是矩阵乘标量。标量乘的结果还是属于向量空间$R^{m×n}$。

$$
\lambda A=\left[\begin{array}{ccc}
\lambda a_{11} & \ldots & \lambda a_{1 n} \\\
\cdot & & \cdot \\\
\cdot & & \cdot \\\
\lambda_{m 1} & \ldots & \lambda \dot{a}_{m n}
\end{array}\right]
$$

到这里，相信你应该了解了向量空间的基本概念，接下来这一讲的重头戏就要来了，它就是向量子空间。

向量子空间

为什么说向量子空间是重头戏？那是因为它在机器学习中的地位相当重要，被用在了**降维算法**中。这里我会分两步来讲解，先讲向量子空间的基本概念，再通过一个机器学习的例子，能让你更了解它，并灵活运用在工作实践中。

什么是向量子空间？

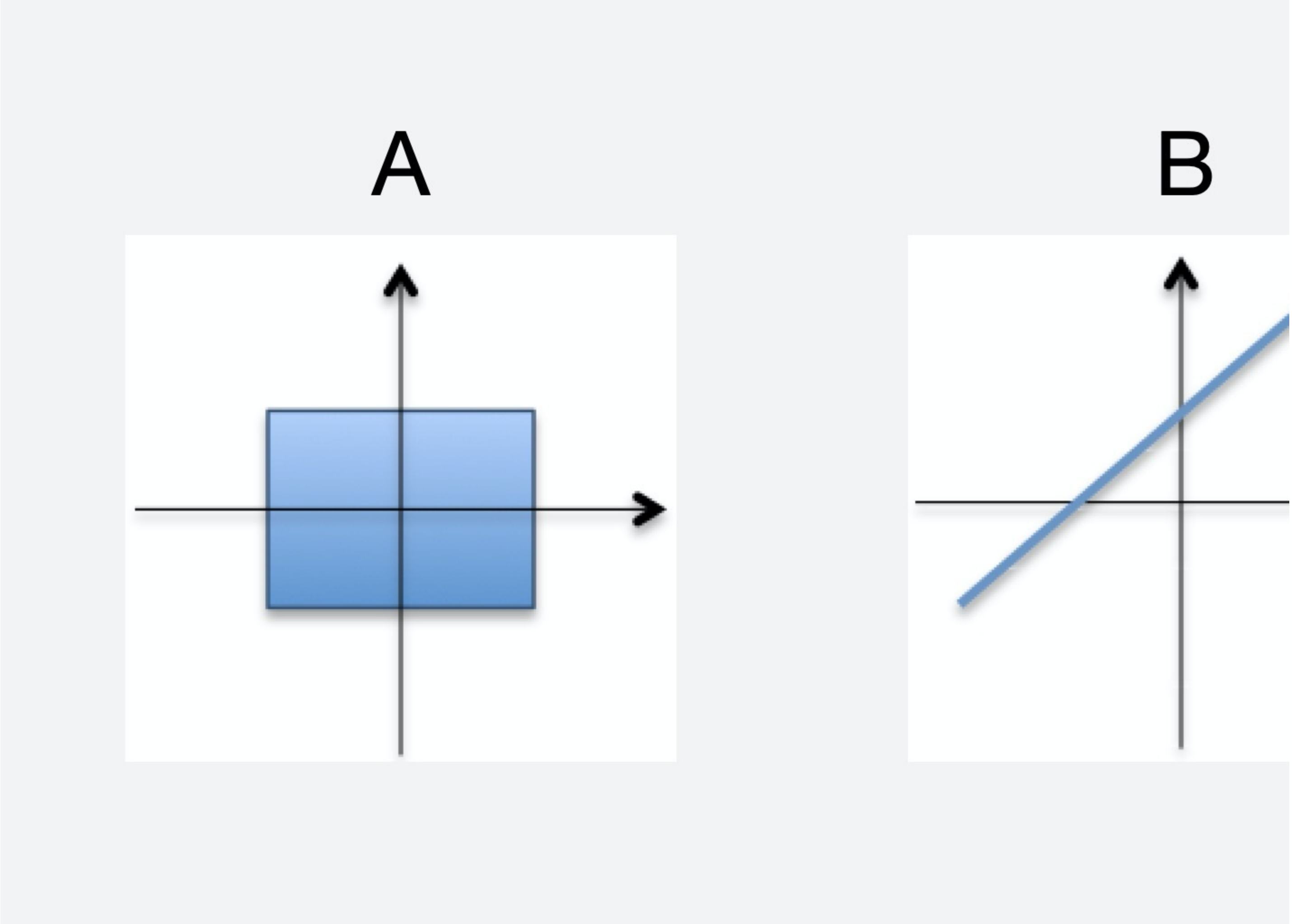
从“子”这个字，我们可以很直观地想到，它是被包含在向量空间中的，事实也确实如此。

已知$V:=(V,+,\cdot)$是一个向量空间，如果$U \subseteq V, U \neq 0$，那么$U:=(U,+,\cdot)$就是V的向量子空间，或者叫做线性子空间。向量子空间U自然继承V的许多属性，其中包括：交换组的属性、分配律、结合律和中性元素。除此以外，要判断U是不是向量子空间，我们还需要这两个条件：

1.$U \neq 0$，但$0 \in U$。
2. U的封闭性满足外部运算：$\forall \lambda \in R, \forall x \in U: \lambda x \in U$，同时满足内部运算：$\forall x, y \in U: x+y \in U$。

介绍完向量子空间基本概念后，我们一起来通过一个例子来巩固一下所学的知识，看看你是否已经掌握了向量子空间。

请你观察下面列举的A、B、C三张图像，里面有 R^{2}的向量子空间吗？



这里我不会给出答案，你可以自己思考一下，友情提醒：A、B、C中只有一个是向量子空间。

机器学习中的向量子空间

结合实践来看向量子空间的时候到了。在机器学习中，直接计算高维数据困难重重，一方面是数据处理和分析困难，使得数据可视化几乎不可能；另一方面是因为数据存储量太大，计算要付出的代价太高。

所以，我们要从向量空间中去除冗余数据，形成向量子空间。这样数据存储量就被极大地压缩了，处理和分析数据也简单了很多。因为高维数据中其实有很多维是冗余的，它们可以被其它维组合表示，也就是“降维”。

降维就是利用结构化和相关性，在尽量保证信息不损失的情况下，转换数据表现形式，让数据更“紧凑”。换句话说，你可以把降维看成是数据压缩技术，类似图像的jpeg和音频的MP3压缩算法。或者简单地说，降维就是将数据投射到一个低维子空间，比如：三维数据集可以降成二维，也就是把数据映射到平面上。

机器学习中运用最多的降维算法就是主成分分析，简称PCA（Principal Component Analysis），也叫做卡尔胡宁-勒夫变换（Karhunen-Loeve Transform）。它是一种用于探索高维数据结构的技术，已经存在超过100年了，但至今仍然广泛被使用在数据压缩和可视化中。

我们来看一个例子：假设你负责的是机器学习算法，而你的应用场景是车辆的牌照识别，也就是OCR（Optical Character Recognition）光学字符识别。在这个场景中，大街上的摄像头必须实时捕捉运动车辆的牌照，一旦发现问题车辆就需要快速识别牌照，并移交交警监管部门来做进一步处理。你会怎么处理呢？

牌照被拍下后就是图片，为了减小图像原始数据量，减少后续处理时的计算量，这些图片首先需要进行经过灰度处理（牌照只需要数字，不需要对彩色图像的RGB三个分量都进行处理），处理后就会变成类似这样的形式：

假定每个数字是一个$28*28$尺寸的灰度图片，包含784个像素，那每张灰度数字图片就是一个向量，这个向量就有784个维度，可以表示成$x \in R^{784}$，而你的样本库少说也有几十万个样本数据，如果按一般的方法是不可能做到实时识别的。所以，这样的场景就需要使用PCA来压缩数据，进行大幅度降维。

这里我们简单一些，从二维的角度来看看PCA。在PCA中，最关键的就是寻找数据点x_{n}的相似低维投影y_{n}，而y_{n}就是子向量空间。

考虑R^{2}和它的两个基，$e_{1}=[1,0]^{T}$、$e_{2}=[0,1]^{T}$，$x \in R^{2}$能够表示成这两个基的线性组合（“基”会在第7节课中详细介绍）。

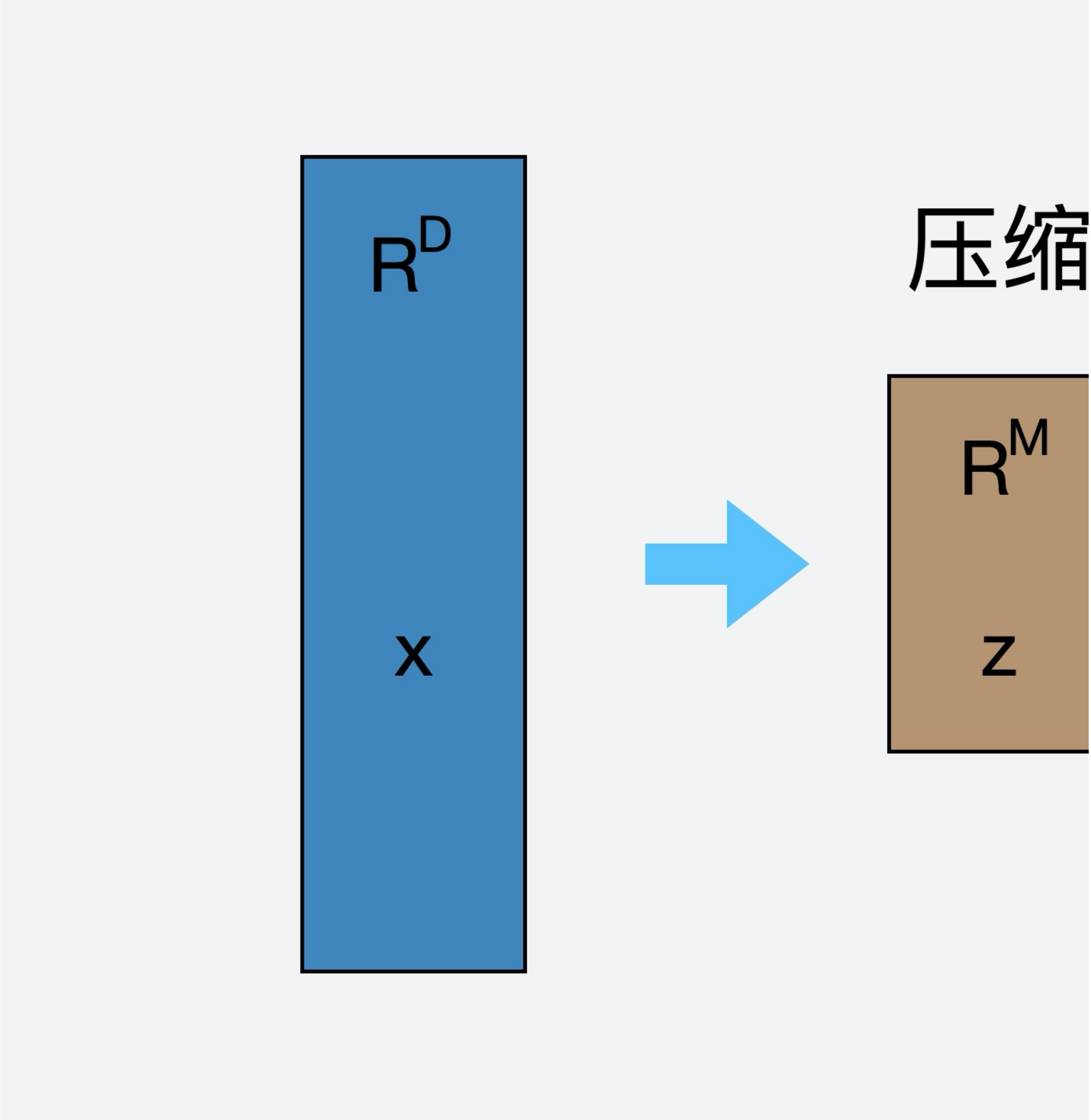
$$
\left[\begin{array}{l}
5 \\
3
\end{array}\right]=5 e_{1}+3 e_{2}
$$

于是，相似低维投影y_{n}就可以表示成下面这种形式。

$$
y_{n}=\left[\begin{array}{l}
0 \\
z
\end{array}\right] \in R^{2}, z \in R
$$

同时，y_{n}也可以写成这样的形式：$y_{n}=0 e_{1}+z e_{2}$。

这里的z就是我们要找的值，而y_{n}就是一个向量子空间U，它的维度是一维。最后，我们再通过下图来更直观地说明一下PCA的过程。



图的左边是原始向量空间x，经过压缩后，我们找到了子向量空间z，z经过重构后，形成了最终的向量空间y，y还是属于原来的向量空间，但y却拥有比x更低的维度表现。

从数学的角度看，我们其实就是在寻找x和z之间的线性关系，使得$z=B^{T}x$，以及$y=Bz$，其中B是矩阵。如果我们从数据压缩技术方向来看就更容易理解了，图中的左边箭头是编码过程，也就是压缩，右边的箭头是解码过程，也就是映射，而矩阵B就是把属于R^{M}向量空间的低维的z，映射回原来的向量空间R^{D}。同理，矩阵B^{T}就是把属于原来R^{D}向量空间的高维x压缩成低维的z。

本节小结

好了，到这里线性空间这一讲就结束了，最后我再总结一下前面讲解的内容。

今天的知识很重要，实践中都是围绕向量空间展开的，也就是说向量空间是实践的基本单位，你也一定要掌握子向量空间，因为现实中数据都是高维度的，从向量空间降维后找到子向量空间，这样就能大大提高数据运算和分析的效率。

再次特别提醒：这一讲非常重要，因为后面几讲都是围绕向量空间展开的，如果你哪里没看懂，一定要多看几次，确保完全明白了。有任何问题，你也可以随时在留言区向我提问。

线性代数练习场

之前我讲了一个现实的向量空间降维场景：车辆的牌照识别，这里，我们通过另一个现实场景，来练习一下向量空间降维的思维。

目前市场上语音识别的应用有很多，比如：天猫精灵、苹果Siri、小爱等等，而语音识别涉及的技术有很多，有语言建模、声学建模、语音信号处理等等。在语音信号处理中，语音声波通过空气传播，并被麦克风捕获，麦克风将压力波转换为可捕获的电活动。我们对电活动进行采样，用以创建描述信号的一系列波形采样。

采样是数据收集的过程，数据收集后需要做数据预处理，而预处理的关键一步就是特征提取，现在请你从“特征提取”的方向上思考下，有哪些和目前所学到的数学知识有关？

> 友情提醒：特征提取就是数字化过程，也是向量化后形成向量空间的过程。

欢迎在留言区写出你的思考，我会及时回复。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我一起重学线性代数！

今天我们来聊一聊“线性空间”。在“基本概念”那一节课中，我讲到了向量，你也看到了，线性方程组是能够通过矩阵或向量来表达的。那为什么我们还要学习线性空间呢？

说到线性空间，其实你可以通过“空间”这个词把线性空间和我们的生活做个类比。就像我们生活在三维世界中，在这个空间中，一切物质都是运动的，而运动也是有一定规律的。这么来看的话，空间其实就是一个具有实际意义的集合，其中包含了**对象**和**运动**。

把这个理解平移到线性空间也是一样的，向量就是对象，如果把**向量**看成是**线性空间中的点**，那**向量的变换**就是**点在空间中的运动**。所以，线性空间也是一个集合，它的意义在于，赋予了向量生命和活力，只有掌握了线性空间，我们才能真正在实际运用中有的放矢。因为所有的活动都要在这个空间中发生，比如：线性空间中用到的傅立叶变换。

组（群）

还是老样子，我们要先从学习线性空间会用到的基础知识开始讲起。

我们先来讲一下“组”，组也可以叫成大家习惯的“群”（以下均以“组”称呼）。说到“组”，它其实是一个通用的概念，和线性空间没有什么关系，但我之所以要先说组，是因为组（群）和空间是类似的，也是集合，性质也差不多，如果你了解了组，就更容易理解线性空间了。而且，组在计算机科学中是得到了广泛应用的，特别是在计算机密码学和图形图像处理中。

说了这么多，“组”到底是什么呢？组，其实就是包含一系列元素的集合，在对这些集合元素实施某类运算后，这个集合仍然保持着封闭性。可能这么说你会有些疑惑，我还是通过数学方法来定义组，可能会让你的思路更加清晰一些。

我们先来定义一个集合G和集合上的某一类运算，比如：乘$\otimes$，使得 $G \otimes G$ 的结果还是属于G，如果我们要$G:=(G, \otimes)$是一个组，则需要满足以下这些条件：

1.G在$\otimes$运算中是封闭的，也就是：$\forall x, y \in G: x \otimes y \in G$。
2. 满足结合律，也就是：$\forall x, y, z \in G:(x \otimes y) \otimes z=x \otimes(y \otimes z)$。
3. 恒等元素（或者叫做中性元素）e，满足：$\exists \mathrm{e} \in G, \forall x \in G: x \otimes e=x, e \otimes x=x$，这里的恒等元素e在一般数字中你可以认为是$1$，而在矩阵中就可以认为是单位矩阵。
4. 有x的逆元素y，使得：$\forall \mathrm{e} \in G, \exists x \in G: x \otimes y=e, y \otimes x=e$，其中$e$是恒等元素。

再补充一点，如果满足$\forall x, y \in G: x \otimes y=y \otimes x$，则$G:=(G, \otimes)$就叫作交换组。

现在我们来做个测试，看看你是否理解了组的定义。

一个$n×n$的实数矩阵A和它的乘法运算是一个组吗？通过符号表达就是：$\left(A^{n \times n}, \quad \cdot\right)$。

想要知道这个问题的答案，我们就需要用前面满足组的这几个条件来分析一下。

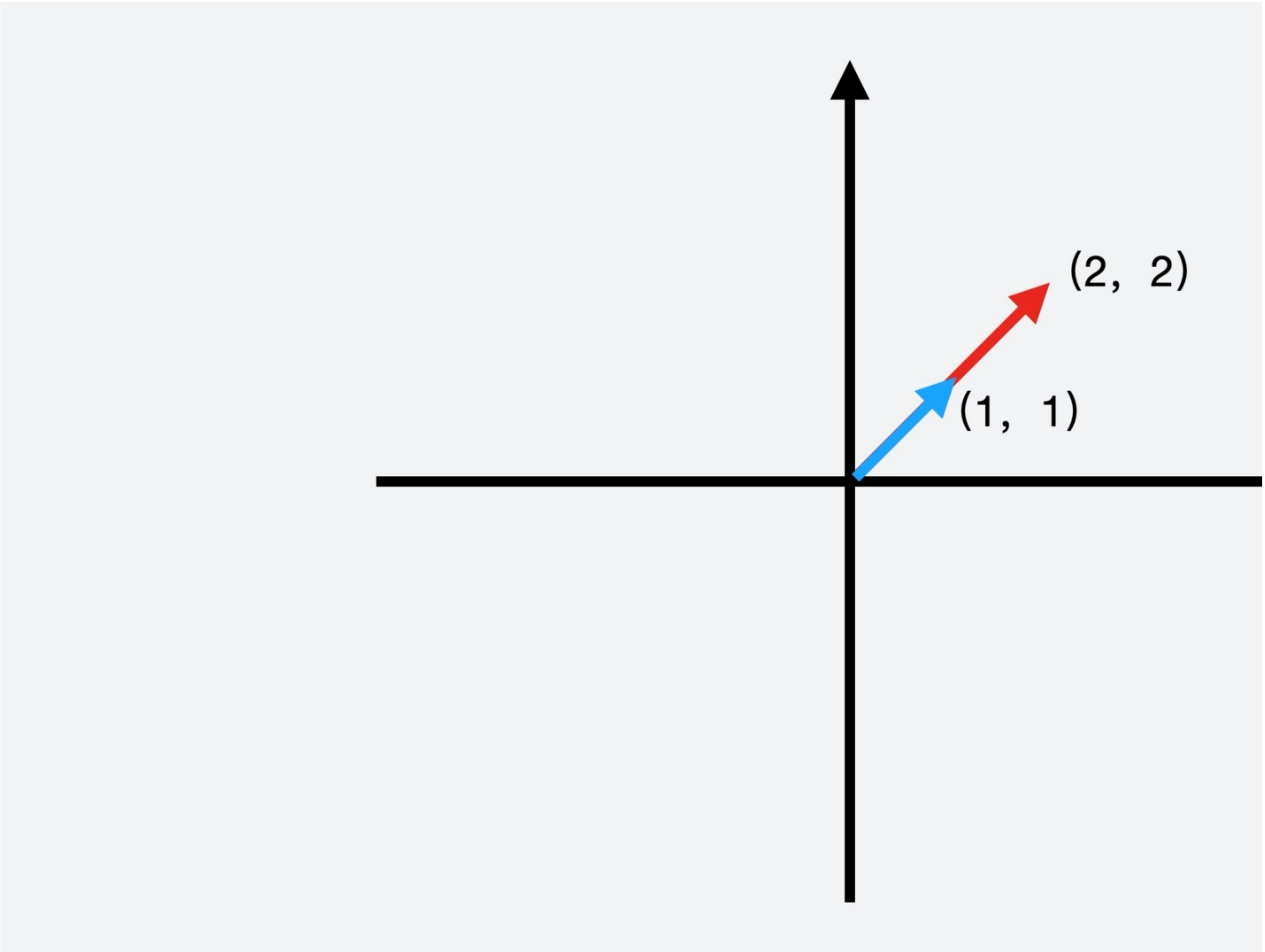
首先，是封闭性和结合律，从矩阵乘的定义就能直接看出来，它们是满足的；其次，我们来看恒等元素，单位矩阵就是矩阵元素，也满足组条件；最后，我们看看逆元素，假设A矩阵的逆矩阵A^{-1}存在，那很明显，满足$AA^{-1}=I$，这里I就是恒等元素。

于是，我们可以说$\left(A^{n \times n}, \quad \cdot\right)$是一个组，而矩阵乘不符合交换律，所以这个组并不是交换组。

向量空间

如果我们在“组”的基础上再扩展一下，就能够很顺利地来到“线性空间”。说起线性空间，它也叫作向量空间，它在一些书本和网络上的解释都是比较晦涩难懂的，但如果我们在“组”的基础上来解释它，你应该会比较容易理解了。

刚才我们说的组只包含了某一类运算，这类运算是在集合元素上的内部运算，我们把它定义为加$（+）$运算，现在再引入一类外部运算，标量乘$（·）$。于是，你可以想象一下，我们可以把内部运算看成是加法，把外部运算看成是“缩放”，因为标量乘就是一个标量和向量相乘。如果从二维坐标系的角度来看一下，点$(1, 1)$和标量2相乘就是$(2, 2)$，这个就是放大效果。



在通过“组”来认识向量空间后，再从数学角度去看向量空间的定义，你应该就能完全理解了。

一个实数向量空间V是一个集合，它包含了两类运算，一类是加，一类是标量乘，而且运算都满足V的封闭性，也就是说，V中元素的运算结果还是属于V。

$$
\begin{array} {l}

+: V+V \rightarrow V \\
\cdot : \lambda \cdot V \rightarrow V
\end{array}
$$

这个向量空间可以表示成$V:=(V,+,\cdot)$，其中：

1.向量空间V的$(V,+)$是一个交换组。
2.V满足分配律：$\forall \lambda \in R, x, y \in V: \lambda \cdot(x+y)=\lambda \cdot x+\lambda \cdot y$；以及$\forall \lambda, \varphi \in R, x \in V:(\lambda+\varphi) \cdot x=\lambda \cdot x+\varphi \cdot x$。
3.V外部运算满足结合律：$\forall \lambda, \varphi \in R, x \in V: \lambda \cdot(\varphi \cdot x)=(\lambda \cdot \varphi) \cdot x$。
4.V外部运算的恒等元素满足：$\forall x \in V: 1 \cdot x=x$。

在向量空间V中的元素x是向量，向量空间加运算$(V,+)$的恒等元素是零向量$0=\left[\begin{array}{lll} 0, & \ldots & , 0\end{array}\right]^{T}$。这里的加运算是内部运算，也叫做向量加，元素$\lambda$属于实数，叫做标量，外部运算乘$\cdot$是标量乘。

好了，我给出了向量空间的一般描述和数学定义，如果你还是有一些不理解，也没有关系，我再举两个例子来加深你对向量空间的理解。

例1：进一步理解向量加和标量乘

对于向量空间的向量加和标量乘：我们定义一个实数向量空间R^{n}，n表示向量元素：

- “加”定义为向量之间的加：$x+y=\left(x_{1}, \ldots, x_{n}\right)+\left(y_{1}, \ldots, y_{n}\right)=\left(x_{1}+y_{1}, \ldots, x_{n}+y_{n}\right)$。 加的结果还是属于向量空间$R^{n}$。
- 标量乘就是向量乘标量：$\lambda x=\lambda\left(x_{1}, \ldots, x_{n}\right)=\left(\lambda x_{1}, \ldots, \lambda x_{n}\right)$。
标量乘的结果还是属于向量空间R^{n}。

例2：进一步理解矩阵加和标量乘

对于向量空间的矩阵加和标量乘：我们定义一个实数向量空间$R^{m×n}$，用$m×n$表示m行n列矩阵元素：

我们把“加”定义为矩阵之间的加。加的结果还是属于向量空间$R^{m×n}$。

$$
A+B=\left[\begin{array}{ccc}
a_{11}+b_{11} & \ldots & a_{1 n}+b_{1 n} \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
a_{m 1}+b_{m 1} & \ldots & a_{m n}+b_{m n}
\end{array}\right]
$$

而标量乘就是矩阵乘标量。标量乘的结果还是属于向量空间$R^{m×n}$。

$$
\lambda A=\left[\begin{array}{ccc}
\lambda a_{11} & \ldots & \lambda a_{1 n} \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\lambda_{m 1} & \ldots & \lambda \dot{a}_{m n}
\end{array}\right]
$$

到这里，相信你应该了解了向量空间的基本概念，接下来这一讲的重头戏就要来了，它就是向量子空间。

向量子空间

为什么说向量子空间是重头戏？那是因为它在机器学习中的地位相当重要，被用在了**降维算法**中。这里我会分两步来讲解，先讲向量子空间的基本概念，再通过一个机器学习的例子，能让你更了解它，并灵活运用在工作实践中。

什么是向量子空间？

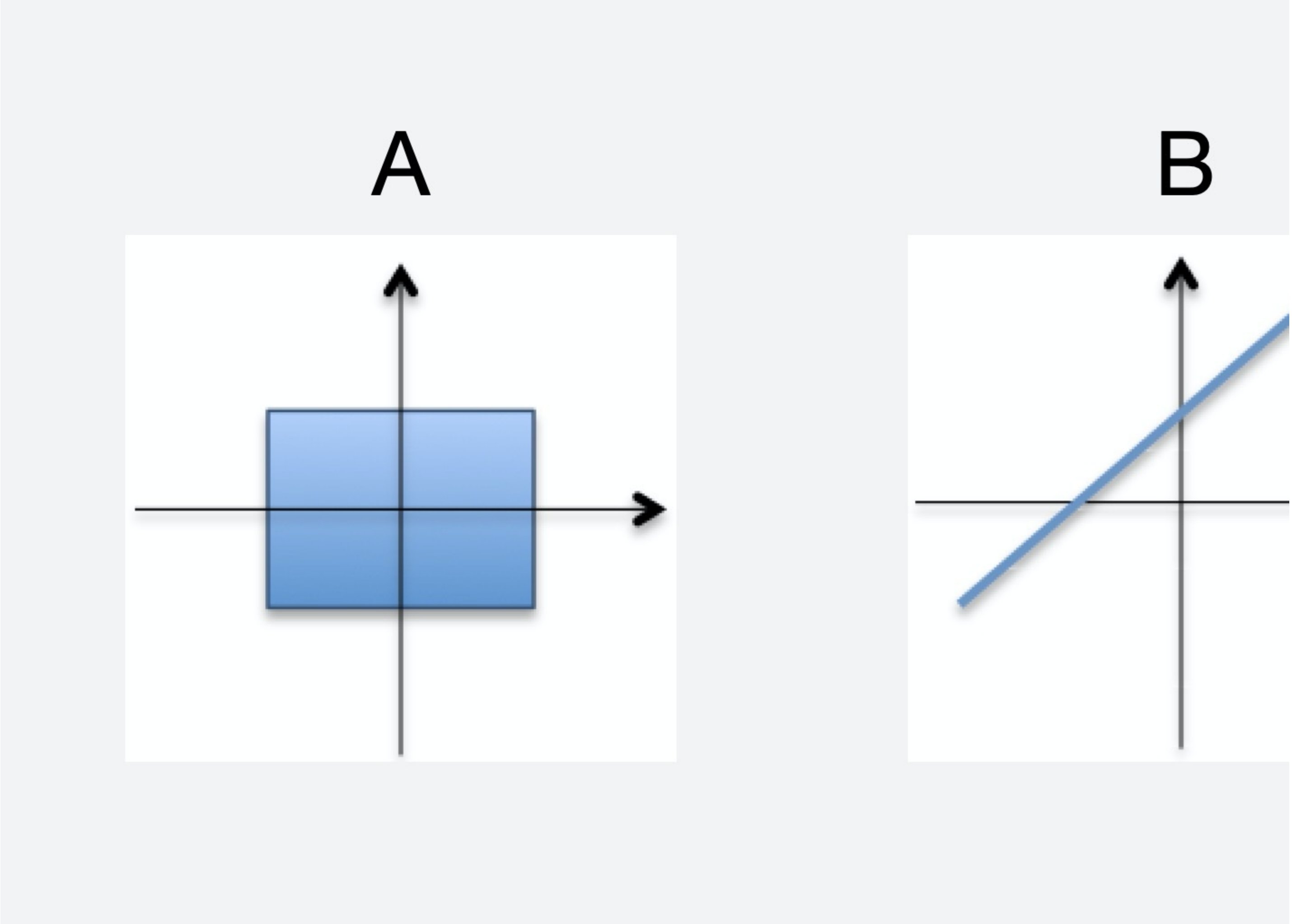
从“子”这个字，我们可以很直观地想到，它是被包含在向量空间中的，事实也确实如此。

已知$V:=(V,+,\cdot)$是一个向量空间，如果$U \subseteq V, U \neq 0$，那么$U:=(U,+,\cdot)$就是V的向量子空间，或者叫做线性子空间。向量子空间U自然继承V的许多属性，其中包括：交换组的属性、分配律、结合律和中性元素。除此以外，要判断U是不是向量子空间，我们还需要这两个条件：

1.$U \neq 0$，但$0 \in U$。
2. U的封闭性满足外部运算：$\forall \lambda \in R, \forall x \in U: \lambda x \in U$，同时满足内部运算：$\forall x, y \in U: x+y \in U$。

介绍完向量子空间基本概念后，我们一起来通过一个例子来巩固一下所学的知识，看看你是否已经掌握了向量子空间。

请你观察下面列举的A、B、C三张图像，里面有 R^{2}的向量子空间吗？



这里我不会给出答案，你可以自己思考一下，友情提醒：A、B、C中只有一个是向量子空间。

机器学习中的向量子空间

结合实践来看向量子空间的时候到了。在机器学习中，直接计算高维数据困难重重，一方面是数据处理和分析困难，使得数据可视化几乎不可能；另一方面是因为数据存储量太大，计算要付出的代价太高。

所以，我们要从向量空间中去除冗余数据，形成向量子空间。这样数据存储量就被极大地压缩了，处理和分析数据也简单了很多。因为高维数据中其实有很多维是冗余的，它们可以被其它维组合表示，也就是“降维”。

降维就是利用结构化和相关性，在尽量保证信息不损失的情况下，转换数据表现形式，让数据更“紧凑”。换句话说，你可以把降维看成是数据压缩技术，类似图像的jpeg和音频的MP3压缩算法。或者简单地说，降维就是将数据投射到一个低维子空间，比如：三维数据集可以降成二维，也就是把数据映射到平面上。

机器学习中运用最多的降维算法就是主成分分析，简称PCA（Principal Component Analysis），也叫做卡尔胡宁-勒夫变换（Karhunen-Loeve Transform）。它是一种用于探索高维数据结构的技术，已经存在超过100年了，但至今仍然广泛被使用在数据压缩和可视化中。

我们来看一个例子：假设你负责的是机器学习算法，而你的应用场景是车辆的牌照识别，也就是OCR（Optical Character Recognition）光学字符识别。在这个场景中，大街上的摄像头必须实时捕捉运动车辆的牌照，一旦发现问题车辆就需要快速识别牌照，并移交交警监管部门来做进一步处理。你会怎么处理呢？

牌照被拍下后就是图片，为了减小图像原始数据量，减少后续处理时的计算量，这些图片首先需要进行经过灰度处理（牌照只需要数字，不需要对彩色图像的RGB三个分量都进行处理），处理后就会变成类似这样的形式：

假定每个数字是一个$28*28$尺寸的灰度图片，包含784个像素，那每张灰度数字图片就是一个向量，这个向量就有784个维度，可以表示成$x \in R^{784}$，而你的样本库少说也有几十万个样本数据，如果按一般的方法是不可能做到实时识别的。所以，这样的场景就需要使用PCA来压缩数据，进行大幅度降维。

这里我们简单一些，从二维的角度来看看PCA。在PCA中，最关键的就是寻找数据点x_{n}的相似低维投影y_{n}，而y_{n}就是子向量空间。

考虑R^{2}和它的两个基，$e_{1}=[1,0]^{T}$、$e_{2}=[0,1]^{T}$，$x \in R^{2}$能够表示成这两个基的线性组合（“基”会在第7节课中详细介绍）。

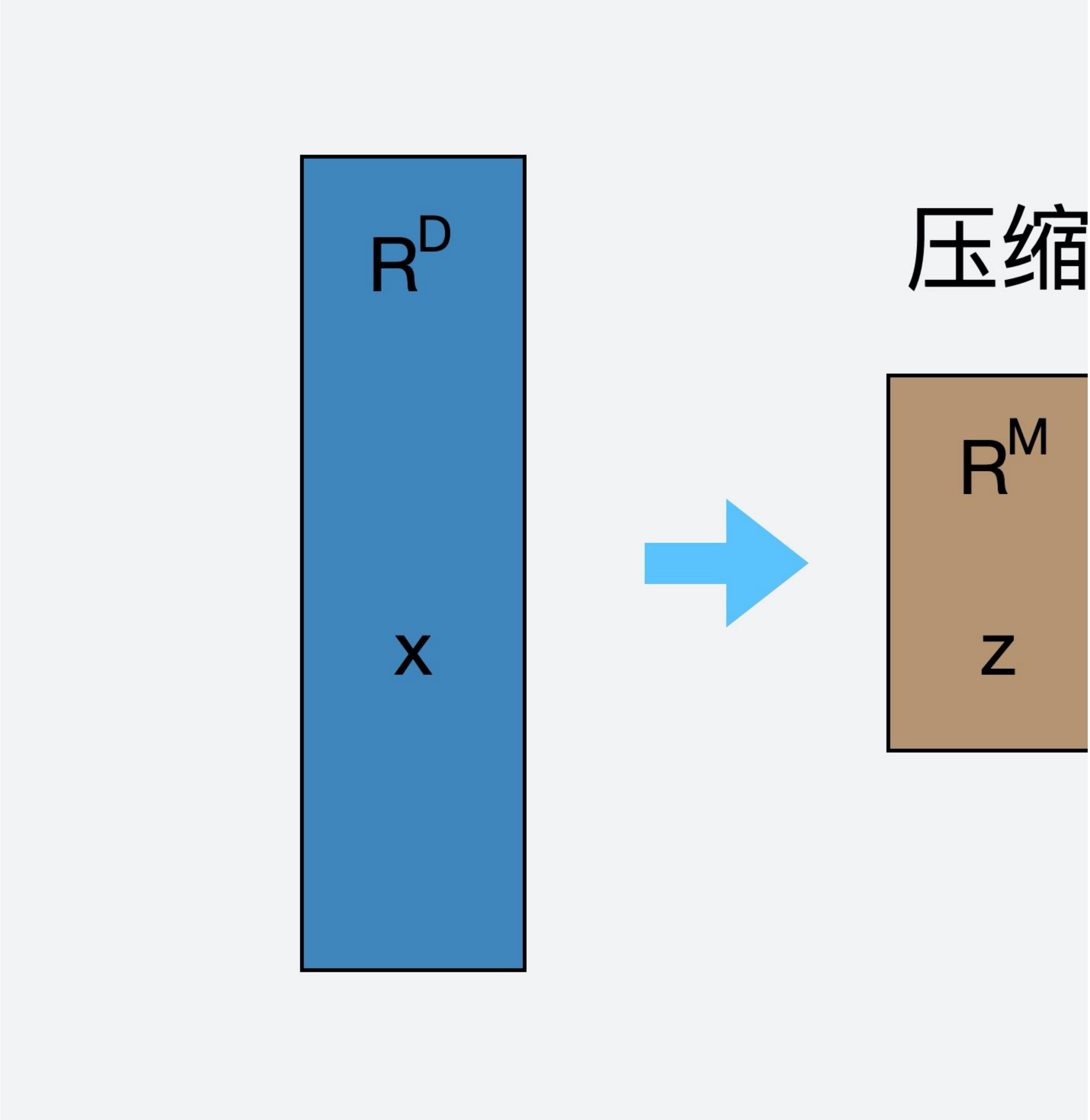
$$
\left[\begin{array}{l}
5 \\
3
\end{array}\right]=5 e_{1}+3 e_{2}
$$

于是，相似低维投影y_{n}就可以表示成下面这种形式。

$$
y_{n}=\left[\begin{array}{l}
0 \\
z
\end{array}\right] \in R^{2}, z \in R
$$

同时，y_{n}也可以写成这样的形式：$y_{n}=0 e_{1}+z e_{2}$。

这里的z就是我们要找的值，而y_{n}就是一个向量子空间U，它的维度是一维。最后，我们再通过下图来更直观地说明一下PCA的过程。



图的左边是原始向量空间x，经过压缩后，我们找到了子向量空间z，z经过重构后，形成了最终的向量空间y，y还是属于原来的向量空间，但y却拥有比x更低的维度表现。

从数学的角度看，我们其实就是在寻找x和z之间的线性关系，使得$z=B^{T}x$，以及$y=Bz$，其中B是矩阵。如果我们从数据压缩技术方向来看就更容易理解了，图中的左边箭头是编码过程，也就是压缩，右边的箭头是解码过程，也就是映射，而矩阵B就是把属于R^{M}向量空间的低维的z，映射回原来的向量空间R^{D}。同理，矩阵B^{T}就是把属于原来R^{D}向量空间的高维x压缩成低维的z。

本节小结

好了，到这里线性空间这一讲就结束了，最后我再总结一下前面讲解的内容。

今天的知识很重要，实践中都是围绕向量空间展开的，也就是说向量空间是实践的基本单位，你也一定要掌握子向量空间，因为现实中数据都是高维度的，从向量空间降维后找到子向量空间，这样就能大大提高数据运算和分析的效率。

再次特别提醒：这一讲非常重要，因为后面几讲都是围绕向量空间展开的，如果你哪里没看懂，一定要多看几次，确保完全明白了。有任何问题，你也可以随时在留言区向我提问。

线性代数练习场

之前我讲了一个现实的向量空间降维场景：车辆的牌照识别，这里，我们通过另一个现实场景，来练习一下向量空间降维的思维。

目前市场上语音识别的应用有很多，比如：天猫精灵、苹果Siri、小爱等等，而语音识别涉及的技术有很多，有语言建模、声学建模、语音信号处理等等。在语音信号处理中，语音声波通过空气传播，并被麦克风捕获，麦克风将压力波转换为可捕获的电活动。我们对电活动进行采样，用以创建描述信号的一系列波形采样。

采样是数据收集的过程，数据收集后需要做数据预处理，而预处理的关键一步就是特征提取，现在请你从“特征提取”的方向上思考下，有哪些和目前所学到的数学知识有关？

> 友情提醒：特征提取就是数字化过程，也是向量化后形成向量空间的过程。

欢迎在留言区写出你的思考，我会及时回复。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我一起重学线性代数！

今天我们来聊一聊“线性空间”。在“基本概念”那一节课中，我讲到了向量，你也看到了，线性方程组是能够通过矩阵或向量来表达的。那为什么我们还要学习线性空间呢？

说到线性空间，其实你可以通过“空间”这个词把线性空间和我们的生活做个类比。就像我们生活在三维世界中，在这个空间中，一切物质都是运动的，而运动也是有一定规律的。这么来看的话，空间其实就是一个具有实际意义的集合，其中包含了**对象**和**运动**。

把这个理解平移到线性空间也是一样的，向量就是对象，如果把**向量**看成是**线性空间中的点**，那**向量的变换**就是**点在空间中的运动**。所以，线性空间也是一个集合，它的意义在于，赋予了向量生命和活力，只有掌握了线性空间，我们才能真正在实际运用中有的放矢。因为所有的活动都要在这个空间中发生，比如：线性空间中用到的傅立叶变换。

组（群）

还是老样子，我们要先从学习线性空间会用到的基础知识开始讲起。

我们先来讲一下“组”，组也可以叫成大家习惯的“群”（以下均以“组”称呼）。说到“组”，它其实是一个通用的概念，和线性空间没有什么关系，但我之所以要先说组，是因为组（群）和空间是类似的，也是集合，性质也差不多，如果你了解了组，就更容易理解线性空间了。而且，组在计算机科学中是得到了广泛应用的，特别是在计算机密码学和图形图像处理中。

说了这么多，“组”到底是什么呢？组，其实就是包含一系列元素的集合，在对这些集合元素实施某类运算后，这个集合仍然保持着封闭性。可能这么说你会有些疑惑，我还是通过数学方法来定义组，可能会让你的思路更加清晰一些。

我们先来定义一个集合G和集合上的某一类运算，比如：乘$\otimes$，使得 $G \otimes G$ 的结果还是属于G，如果我们要$G:=(G, \otimes)$是一个组，则需要满足以下这些条件：

1.G在$\otimes$运算中是封闭的，也就是：$\forall x, y \in G: x \otimes y \in G$。
2. 满足结合律，也就是：$\forall x, y, z \in G:(x \otimes y) \otimes z=x \otimes(y \otimes z)$。
3. 恒等元素（或者叫做中性元素）e，满足：$\exists \mathrm{e} \in G, \forall x \in G: x \otimes e=x, e \otimes x=x$，这里的恒等元素e在一般数字中你可以认为是$1$，而在矩阵中就可以认为是单位矩阵。
4. 有x的逆元素y，使得：$\forall \mathrm{e} \in G, \exists x \in G: x \otimes y=e, y \otimes x=e$，其中$e$是恒等元素。

再补充一点，如果满足$\forall x, y \in G: x \otimes y=y \otimes x$，则$G:=(G, \otimes)$就叫作交换组。

现在我们来做个测试，看看你是否理解了组的定义。

一个$n \times n$的实数矩阵A和它的乘法运算是一个组吗？通过符号表达就是：$\left(A^{n \times n}, \quad \cdot\right)$。

想要知道这个问题的答案，我们就需要用前面满足组的这几个条件来分析一下。

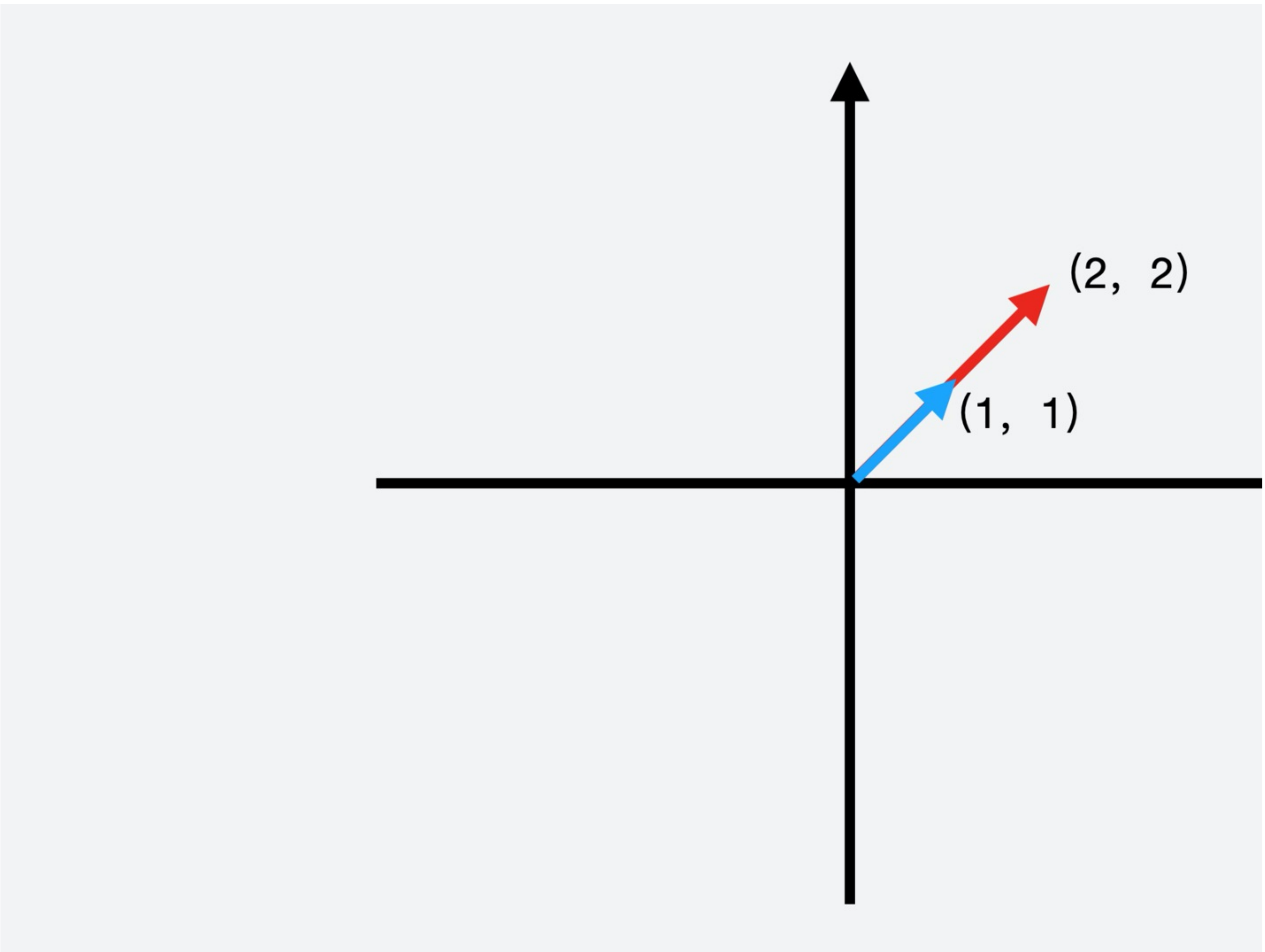
首先，是封闭性和结合律，从矩阵乘的定义就能直接看出来，它们是满足的；其次，我们来看恒等元素，单位矩阵就是矩阵元素，也满足组条件；最后，我们看看逆元素，假设A矩阵的逆矩阵A^{-1}存在，那很明显，满足$AA^{-1}=I$，这里I就是恒等元素。

于是，我们可以说$\left(A^{n \times n}, \quad \cdot\right)$是一个组，而矩阵乘不符合交换律，所以这个组并不是交换组。

向量空间

如果我们在“组”的基础上再扩展一下，就能够很顺利地来到“线性空间”。说起线性空间，它也叫作向量空间，它在一些书本和网络上的解释都是比较晦涩难懂的，但如果我们在“组”的基础上来解释它，你应该会比较容易理解了。

刚才我们说的组只包含了某一类运算，这类运算是在集合元素上的内部运算，我们把它定义为加$(+)$运算，现在再引入一类外部运算，标量乘$(\cdot)$。于是，你可以想象一下，我们可以把内部运算看成是加法，把外部运算看成是“缩放”，因为标量乘就是一个标量和向量相乘。如果从二维坐标系的角度来看一下，点$(1, 1)$和标量2相乘就是$(2, 2)$，这个就是放大效果。



在通过“组”来认识向量空间后，再从数学角度去看向量空间的定义，你应该就能完全理解了。

一个实数向量空间V是一个集合，它包含了两类运算，一类是加，一类是标量乘，而且运算都满足V的封闭性，也就是说，V中元素的运算结果还是属于V。

$$
\begin{array} {l}

+: V+V \rightarrow V \\\
\cdot : \lambda \cdot V \rightarrow V
\end{array}
$$

这个向量空间可以表示成$V:=(V,+,\cdot)$，其中：

1.向量空间V的$(V,+)$是一个交换组。
2.V满足分配律：$\forall \lambda \in R, x, y \in V: \lambda \cdot(x+y)=\lambda \cdot x+\lambda \cdot y$；以及$\forall \lambda, \varphi \in R, x \in V:(\lambda+\varphi) \cdot x=\lambda \cdot x+\varphi \cdot x$。
3.V外部运算满足结合律：$\forall \lambda, \varphi \in R, x \in V: \lambda \cdot(\varphi \cdot x)=(\lambda \cdot \varphi) \cdot x$。
4.V外部运算的恒等元素满足：$\forall x \in V: 1 \cdot x=x$。

在向量空间V中的元素x是向量，向量空间加运算$(V,+)$的恒等元素是零向量$0=\left[\begin{array}{lll}0, & \ldots & , 0\end{array}\right]^{T}$。这里的加运算是内部运算，也叫做向量加，元素$λ$属于实数，叫做标量，外部运算乘$·$是标量乘。

好了，我给出了向量空间的一般描述和数学定义，如果你还是有一些不理解，也没有关系，我再举两个例子来加深你对向量空间的理解。

例1：进一步理解向量加和标量乘

对于向量空间的向量加和标量乘：我们定义一个实数向量空间R^{n}，n表示向量元素：

- “加”定义为向量之间的加：$x+y=\left(x_{1}, \ldots, x_{n}\right)+\left(y_{1}, \ldots, y_{n}\right)=\left(x_{1}+y_{1}, \ldots, x_{n}+y_{n}\right)$。加的结果还是属于向量空间$R^{n}$。
- 标量乘就是向量乘标量：$\lambda x=\lambda\left(x_{1}, \ldots, x_{n}\right)=\left(\lambda x_{1}, \ldots, \lambda x_{n}\right)$。
  标量乘的结果还是属于向量空间R^{n}。

例2：进一步理解矩阵加和标量乘

对于向量空间的矩阵加和标量乘：我们定义一个实数向量空间$R^{m×n}$，用$m×n$表示m行n列矩阵元素：

我们把“加”定义为矩阵之间的加。加的结果还是属于向量空间$R^{m×n}$。

$$
A+B=\left[\begin{array}{ccc}
a_{11}+b_{11} & \ldots & a_{1 n}+b_{1 n} \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
a_{m 1}+b_{m 1} & \ldots & a_{m n}+b_{m n}
\end{array}\right]
$$

而标量乘就是矩阵乘标量。标量乘的结果还是属于向量空间$R^{m×n}$。

$$
\lambda A=\left[\begin{array}{ccc}
\lambda a_{11} & \ldots & \lambda a_{1 n} \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\lambda_{m 1} & \ldots & \lambda \dot{a}_{m n}
\end{array}\right]
$$

到这里，相信你应该了解了向量空间的基本概念，接下来这一讲的重头戏就要来了，它就是向量子空间。

向量子空间

为什么说向量子空间是重头戏？那是因为它在机器学习中的地位相当重要，被用在了**降维算法**中。这里我会分两步来讲解，先讲向量子空间的基本概念，再通过一个机器学习的例子，能让你更了解它，并灵活运用在工作实践中。

什么是向量子空间？

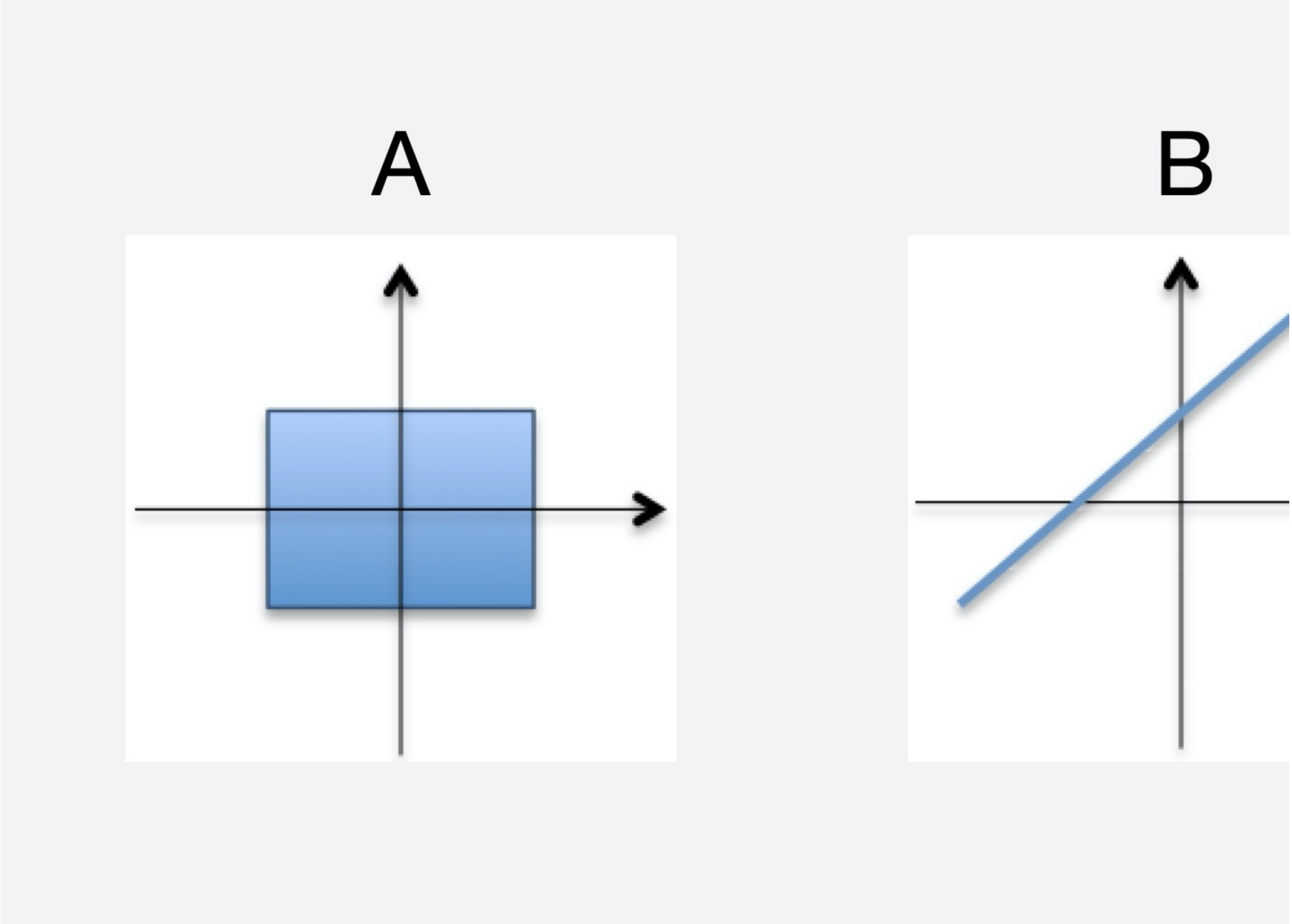
从“子”这个字，我们可以很直观地想到，它是被包含在向量空间中的，事实也确实如此。

已知$V:=(V,+,\cdot)$是一个向量空间，如果$U \subseteq V, U \neq 0$，那么$U:=(U,+,\cdot)$就是V的向量子空间，或者叫做线性子空间。向量子空间U自然继承V的许多属性，其中包括：交换组的属性、分配律、结合律和中性元素。除此以外，要判断U是不是向量子空间，我们还需要这两个条件：

1.$U \neq 0$，但$0 \in U$。
2. U的封闭性满足外部运算：$\forall \lambda \in R, \forall x \in U: \lambda x \in U$，同时满足内部运算：$\forall x, y \in U: x+y \in U$。

介绍完向量子空间基本概念后，我们一起来通过一个例子来巩固一下所学的知识，看看你是否已经掌握了向量子空间。

请你观察下面列举的A、B、C三张图像，里面有 R^{2}的向量子空间吗？



这里我不会给出答案，你可以自己思考一下，友情提醒：A、B、C中只有一个是向量子空间。

机器学习中的向量子空间

结合实践来看向量子空间的时候到了。在机器学习中，直接计算高维数据困难重重，一方面是数据处理和分析困难，使得数据可视化几乎不可能；另一方面是因为数据存储量太大，计算要付出的代价太高。

所以，我们要从向量空间中去除冗余数据，形成向量子空间。这样数据存储量就被极大地压缩了，处理和分析数据也简单了很多。因为高维数据中其实有很多维是冗余的，它们可以被其它维组合表示，也就是“降维”。

降维就是利用结构化和相关性，在尽量保证信息不损失的情况下，转换数据表现形式，让数据更“紧凑”。换句话说，你可以把降维看成是数据压缩技术，类似图像的jpeg和音频的MP3压缩算法。或者简单地说，降维就是将数据投射到一个低维子空间，比如：三维数据集可以降成二维，也就是把数据映射到平面上。

机器学习中运用最多的降维算法就是主成分分析，简称PCA（Principal Component Analysis），也叫做卡尔胡宁-勒夫变换（Karhunen-Loeve Transform）。它是一种用于探索高维数据结构的技术，已经存在超过100年了，但至今仍然广泛被使用在数据压缩和可视化中。

我们来看一个例子：假设你负责的是机器学习算法，而你的应用场景是车辆的牌照识别，也就是OCR（Optical Character Recognition）光学字符识别。在这个场景中，大街上的摄像头必须实时捕捉运动车辆的牌照，一旦发现问题车辆就需要快速识别牌照，并移交交警监管部门来做进一步处理。你会怎么处理呢？

牌照被拍下后就是图片，为了减小图像原始数据量，减少后续处理时的计算量，这些图片首先需要进行经过灰度处理（牌照只需要数字，不需要对彩色图像的RGB三个分量都进行处理），处理后就会变成类似这样的形式：

假定每个数字是一个$28*28$尺寸的灰度图片，包含784个像素，那每张灰度数字图片就是一个向量，这个向量就有784个维度，可以表示成$x \in R^{784}$，而你的样本库少说也有几十万个样本数据，如果按一般的方法是不可能做到实时识别的。所以，这样的场景就需要使用PCA来压缩数据，进行大幅度降维。

这里我们简单一些，从二维的角度来看看PCA。在PCA中，最关键的就是寻找数据点x_{n}的相似低维投影y_{n}，而y_{n}就是子向量空间。

考虑R^{2}和它的两个基，$e_{1}=[1,0]^{T}$、$e_{2}=[0,1]^{T}$，$x \in R^{2}$能够表示成这两个基的线性组合（“基”会在第7节课中详细介绍）。

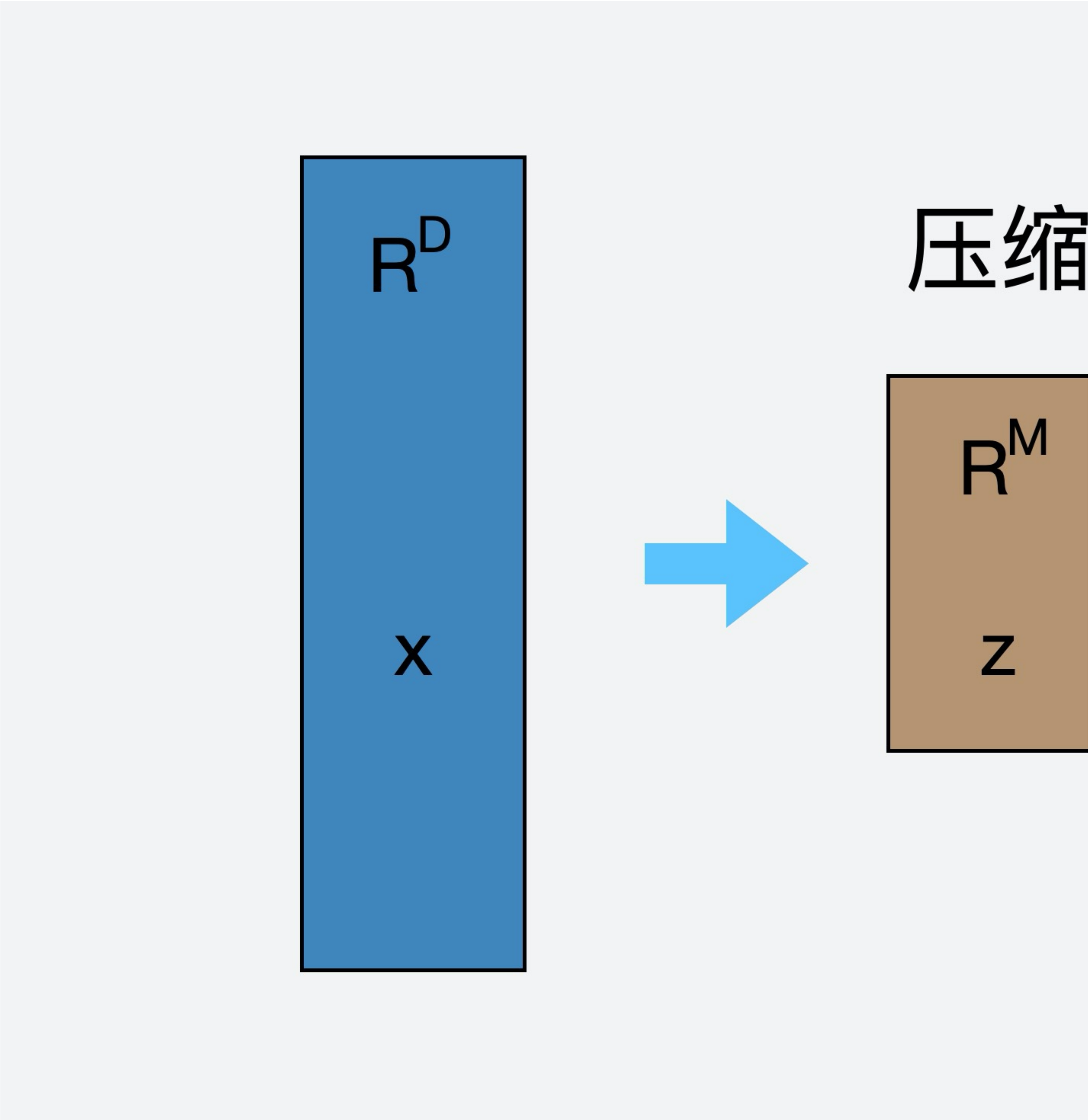
$$
\left[\begin{array}{l}
5 \\
3
\end{array}\right]=5 e_{1}+3 e_{2}
$$

于是，相似低维投影y_{n}就可以表示成下面这种形式。

$$
y_{n}=\left[\begin{array}{l}
0 \\
z
\end{array}\right] \in R^{2}, z \in R
$$

同时，y_{n}也可以写成这样的形式：$y_{n}=0 e_{1}+z e_{2}$。

这里的z就是我们要找的值，而y_{n}就是一个向量子空间U，它的维度是一维。最后，我们再通过下图来更直观地说明一下PCA的过程。



图的左边是原始向量空间x，经过压缩后，我们找到了子向量空间z，z经过重构后，形成了最终的向量空间y，y还是属于原来的向量空间，但y却拥有比x更低的维度表现。

从数学的角度看，我们其实就是在寻找x和z之间的线性关系，使得$z=B^{T}x$，以及$y=Bz$，其中B是矩阵。如果我们从数据压缩技术方向来看就更容易理解了，图中的左边箭头是编码过程，也就是压缩，右边的箭头是解码过程，也就是映射，而矩阵B就是把属于R^{M}向量空间的低维的z，映射回原来的向量空间R^{D}。同理，矩阵B^{T}就是把属于原来R^{D}向量空间的高维x压缩成低维的z。

本节小结

好了，到这里线性空间这一讲就结束了，最后我再总结一下前面讲解的内容。

今天的知识很重要，实践中都是围绕向量空间展开的，也就是说向量空间是实践的基本单位，你也一定要掌握子向量空间，因为现实中数据都是高维度的，从向量空间降维后找到子向量空间，这样就能大大提高数据运算和分析的效率。

再次特别提醒：这一讲非常重要，因为后面几讲都是围绕向量空间展开的，如果你哪里没看懂，一定要多看几次，确保完全明白了。有任何问题，你也可以随时在留言区向我提问。

线性代数练习场

之前我讲了一个现实的向量空间降维场景：车辆的牌照识别，这里，我们通过另一个现实场景，来练习一下向量空间降维的思维。

目前市场上语音识别的应用有很多，比如：天猫精灵、苹果Siri、小爱等等，而语音识别涉及的技术有很多，有语言建模、声学建模、语音信号处理等等。在语音信号处理中，语音声波通过空气传播，并被麦克风捕获，麦克风将压力波转换为可捕获的电活动。我们对电活动进行采样，用以创建描述信号的一系列波形采样。

采样是数据收集的过程，数据收集后需要做数据预处理，而预处理的关键一步就是特征提取，现在请你从“特征提取”的方向上思考下，有哪些和目前所学到的数学知识有关？

> 友情提醒：特征提取就是数字化过程，也是向量化后形成向量空间的过程。

欢迎在留言区写出你的思考，我会及时回复。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你跟我一起重学线性代数！

今天我们来聊一聊“线性空间”。在“基本概念”那一节课中，我讲到了向量，你也看到了，线性方程组是能够通过矩阵或向量来表达的。那为什么我们还要学习线性空间呢？

说到线性空间，其实你可以通过“空间”这个词把线性空间和我们的生活做个类比。就像我们生活在三维世界中，在这个空间中，一切物质都是运动的，而运动也是有一定规律的。这么来看的话，空间其实就是一个具有实际意义的集合，其中包含了**对象**和**运动**。

把这个理解平移到线性空间也是一样的，向量就是对象，如果把**向量**看成是**线性空间中的点**，那**向量的变换**就是**点在空间中的运动**。所以，线性空间也是一个集合，它的意义在于，赋予了向量生命和活力，只有掌握了线性空间，我们才能真正在实际运用中有的放矢。因为所有的活动都要在这个空间中发生，比如：线性空间中用到的傅立叶变换。

组（群）

还是老样子，我们要先从学习线性空间会用到的基础知识开始讲起。

我们先来讲一下“组”，组也可以叫成大家习惯的“群”（以下均以“组”称呼）。说到“组”，它其实是一个通用的概念，和线性空间没有什么关系，但我之所以要先说组，是因为组（群）和空间是类似的，也是集合，性质也差不多，如果你了解了组，就更容易理解线性空间了。而且，组在计算机科学中是得到了广泛应用的，特别是在计算机密码学和图形图像处理中。

说了这么多，“组”到底是什么呢？组，其实就是包含一系列元素的集合，在对这些集合元素实施某类运算后，这个集合仍然保持着封闭性。可能这么说你会有些疑惑，我还是通过数学方法来定义组，可能会让你的思路更加清晰一些。

我们先来定义一个集合G和集合上的某一类运算，比如：乘$\otimes$，使得 $G \otimes G$ 的结果还是属于G，如果我们要$G:=(G, \otimes)$是一个组，则需要满足以下这些条件：

1.G在$\otimes$运算中是封闭的，也就是：$\forall x, y \in G: x \otimes y \in G$。
2. 满足结合律，也就是：$\forall x, y, z \in G:(x \otimes y) \otimes z=x \otimes(y \otimes z)$。
3. 恒等元素（或者叫做中性元素）e，满足：$\exists \mathrm{e} \in G, \forall x \in G: x \otimes e=x, e \otimes x=x$，这里的恒等元素e在一般数字中你可以认为是$1$，而在矩阵中就可以认为是单位矩阵。
4. 有x的逆元素y，使得：$\forall \mathrm{e} \in G, \exists x \in G: x \otimes y=e, y \otimes x=e$，其中$e$是恒等元素。

再补充一点，如果满足$\forall x, y \in G: x \otimes y=y \otimes x$，则$G:=(G, \otimes)$就叫作交换组。

现在我们来做个测试，看看你是否理解了组的定义。

一个$n×n$的实数矩阵A和它的乘法运算是一个组吗？通过符号表达就是：$\left(A^{n \times n}, \quad \cdot\right)$。

想要知道这个问题的答案，我们就需要用前面满足组的这几个条件来分析一下。

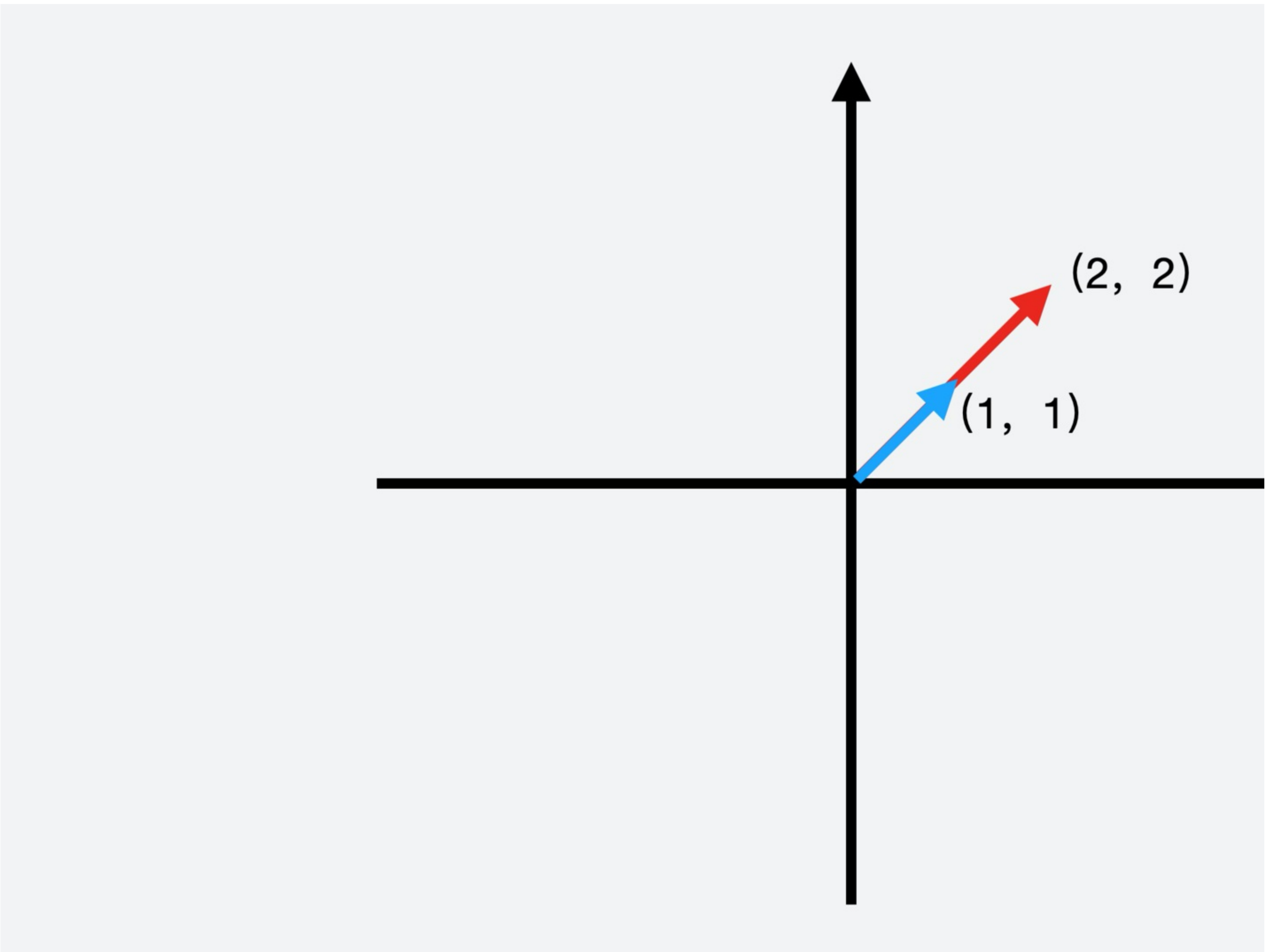
首先，是封闭性和结合律，从矩阵乘的定义就能直接看出来，它们是满足的；其次，我们来看恒等元素，单位矩阵就是矩阵元素，也满足组条件；最后，我们看看逆元素，假设A矩阵的逆矩阵A^{-1}存在，那很明显，满足$AA^{-1}=I$，这里I就是恒等元素。

于是，我们可以说$\left(A^{n \times n}, \quad \cdot\right)$是一个组，而矩阵乘不符合交换律，所以这个组并不是交换组。

向量空间

如果我们在“组”的基础上再扩展一下，就能够很顺利地来到“线性空间”。说起线性空间，它也叫作向量空间，它在一些书本和网络上的解释都是比较晦涩难懂的，但如果我们在“组”的基础上来解释它，你应该会比较容易理解了。

刚才我们说的组只包含了某一类运算，这类运算是在集合元素上的内部运算，我们把它定义为加$（+）$运算，现在再引入一类外部运算，标量乘$（·）$。于是，你可以想象一下，我们可以把内部运算看成是加法，把外部运算看成是“缩放”，因为标量乘就是一个标量和向量相乘。如果从二维坐标系的角度来看一下，点$(1, 1)$和标量2相乘就是$(2, 2)$，这个就是放大效果。



在通过“组”来认识向量空间后，再从数学角度去看向量空间的定义，你应该就能完全理解了。

一个实数向量空间V是一个集合，它包含了两类运算，一类是加，一类是标量乘，而且运算都满足V的封闭性，也就是说，V中元素的运算结果还是属于V。

$$
\begin{array} {l}

+: V+V \rightarrow V \\
\cdot : \lambda \cdot V \rightarrow V
\end{array}
$$

这个向量空间可以表示成$V:=(V,+,\cdot)$，其中：

1.向量空间V的$(V,+)$是一个交换组。
2.V满足分配律：$\forall \lambda \in R, x, y \in V: \lambda \cdot(x+y)=\lambda \cdot x+\lambda \cdot y$；以及$\forall \lambda, \varphi \in R, x \in V:(\lambda+\varphi) \cdot x=\lambda \cdot x+\varphi \cdot x$。
3.V外部运算满足结合律：$\forall \lambda, \varphi \in R, x \in V: \lambda \cdot(\varphi \cdot x)=(\lambda \cdot \varphi) \cdot x$。
4.V外部运算的恒等元素满足：$\forall x \in V: 1 \cdot x=x$。

在向量空间V中的元素x是向量，向量空间加运算$(V,+)$的恒等元素是零向量$0=\left[\begin{array}{lll}0, & \ldots & , 0\end{array}\right]^{T}$。这里的加运算是内部运算，也叫做向量加，元素$λ$属于实数，叫做标量，外部运算乘$·$是标量乘。

好了，我给出了向量空间的一般描述和数学定义，如果你还是有一些不理解，也没有关系，我再举两个例子来加深你对向量空间的理解。

例1：进一步理解向量加和标量乘

对于向量空间的向量加和标量乘：我们定义一个实数向量空间R^{n}，n表示向量元素：

- “加”定义为向量之间的加：$x+y=\left(x_{1}, \ldots, x_{n}\right)+\left(y_{1}, \ldots, y_{n}\right)=\left(x_{1}+y_{1}, \ldots, x_{n}+y_{n}\right)$。加的结果还是属于向量空间$R^{n}$。
- 标量乘就是向量乘标量：$\lambda x=\lambda\left(x_{1}, \ldots, x_{n}\right)=\left(\lambda x_{1}, \ldots, \lambda x_{n}\right)$。
  标量乘的结果还是属于向量空间R^{n}。

例2：进一步理解矩阵加和标量乘

对于向量空间的矩阵加和标量乘：我们定义一个实数向量空间$R^{m×n}$，用$m×n$表示m行n列矩阵元素：

我们把“加”定义为矩阵之间的加。加的结果还是属于向量空间$R^{m×n}$。

$$
A+B=\left[\begin{array}{ccc}
a_{11}+b_{11} & \ldots & a_{1 n}+b_{1 n} \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
a_{m 1}+b_{m 1} & \ldots & a_{m n}+b_{m n}
\end{array}\right]
$$

而标量乘就是矩阵乘标量。标量乘的结果还是属于向量空间$R^{m×n}$。

$$
\lambda A=\left[\begin{array}{ccc}
\lambda a_{11} & \ldots & \lambda a_{1 n} \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\lambda_{m 1} & \ldots & \lambda \dot{a}_{m n}
\end{array}\right]
$$

到这里，相信你应该了解了向量空间的基本概念，接下来这一讲的重头戏就要来了，它就是向量子空间。

向量子空间

为什么说向量子空间是重头戏？那是因为它在机器学习中的地位相当重要，被用在了**降维算法**中。这里我会分两步来讲解，先讲向量子空间的基本概念，再通过一个机器学习的例子，能让你更了解它，并灵活运用在工作实践中。

什么是向量子空间？

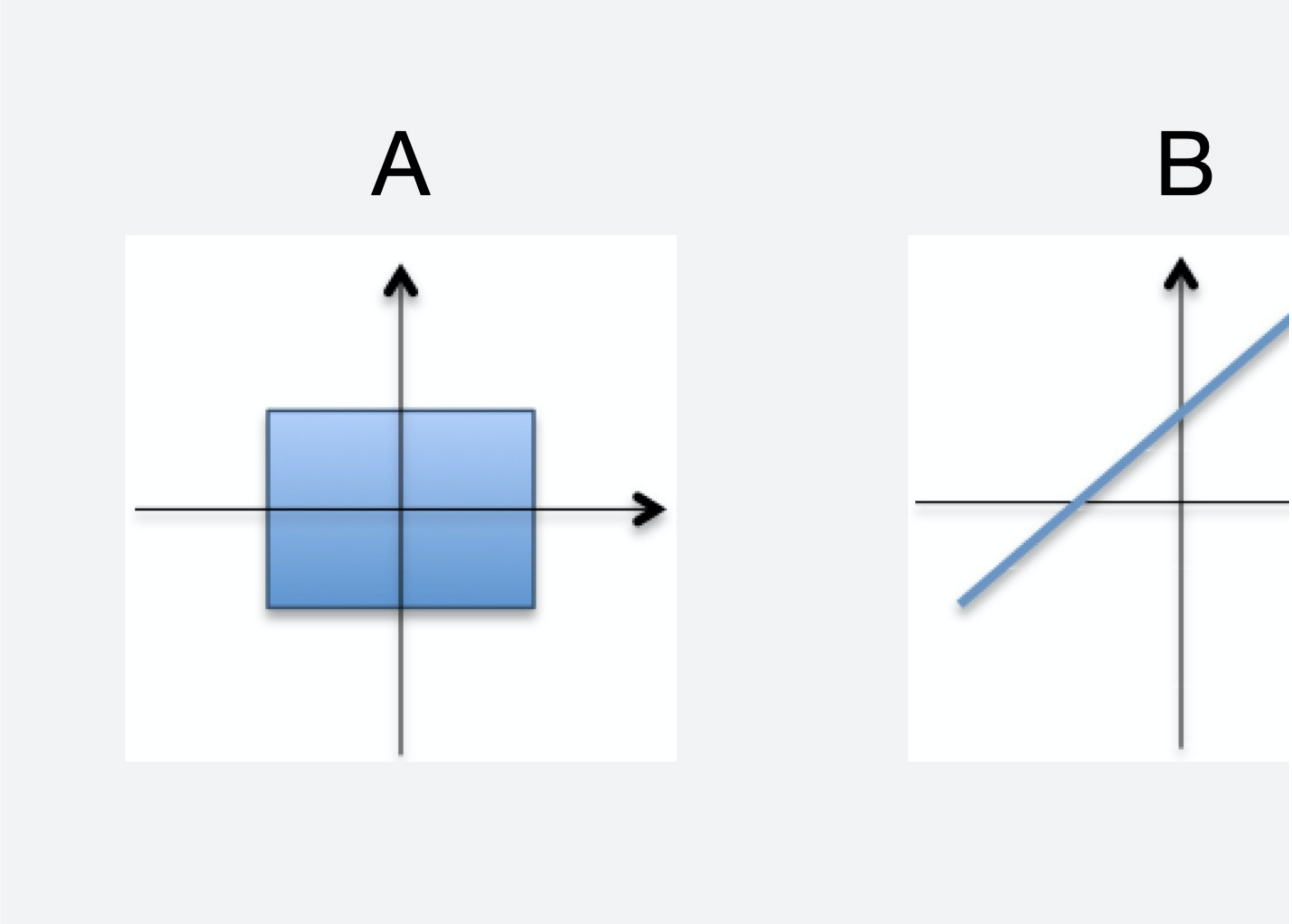
从“子”这个字，我们可以很直观地想到，它是被包含在向量空间中的，事实也确实如此。

已知$V:=(V,+,\cdot)$是一个向量空间，如果$U \subseteq V, U \neq 0$，那么$U:=(U,+,\cdot)$就是V的向量子空间，或者叫做线性子空间。向量子空间U自然继承V的许多属性，其中包括：交换组的属性、分配律、结合律和中性元素。除此以外，要判断U是不是向量子空间，我们还需要这两个条件：

1.$U \neq 0$，但$0 \in U$。
2. U的封闭性满足外部运算：$\forall \lambda \in R, \forall x \in U: \lambda x \in U$，同时满足内部运算：$\forall x, y \in U: x+y \in U$。

介绍完向量子空间基本概念后，我们一起来通过一个例子来巩固一下所学的知识，看看你是否已经掌握了向量子空间。

请你观察下面列举的A、B、C三张图像，里面有 R^{2}的向量子空间吗？



这里我不会给出答案，你可以自己思考一下，友情提醒：A、B、C中只有一个是向量子空间。

机器学习中的向量子空间

结合实践来看向量子空间的时候到了。在机器学习中，直接计算高维数据困难重重，一方面是数据处理和分析困难，使得数据可视化几乎不可能；另一方面是因为数据存储量太大，计算要付出的代价太高。

所以，我们要从向量空间中去除冗余数据，形成向量子空间。这样数据存储量就被极大地压缩了，处理和分析数据也简单了很多。因为高维数据中其实有很多维是冗余的，它们可以被其它维组合表示，也就是“降维”。

降维就是利用结构化和相关性，在尽量保证信息不损失的情况下，转换数据表现形式，让数据更“紧凑”。换句话说，你可以把降维看成是数据压缩技术，类似图像的jpeg和音频的MP3压缩算法。或者简单地说，降维就是将数据投射到一个低维子空间，比如：三维数据集可以降成二维，也就是把数据映射到平面上。

机器学习中运用最多的降维算法就是主成分分析，简称PCA（Principal Component Analysis），也叫做卡尔胡宁-勒夫变换（Karhunen-Loeve Transform）。它是一种用于探索高维数据结构的技术，已经存在超过100年了，但至今仍然广泛被使用在数据压缩和可视化中。

我们来看一个例子：假设你负责的是机器学习算法，而你的应用场景是车辆的牌照识别，也就是OCR（Optical Character Recognition）光学字符识别。在这个场景中，大街上的摄像头必须实时捕捉运动车辆的牌照，一旦发现问题车辆就需要快速识别牌照，并移交交警监管部门来做进一步处理。你会怎么处理呢？

牌照被拍下后就是图片，为了减小图像原始数据量，减少后续处理时的计算量，这些图片首先需要进行经过灰度处理（牌照只需要数字，不需要对彩色图像的RGB三个分量都进行处理），处理后就会变成类似这样的形式：

假定每个数字是一个$28*28$尺寸的灰度图片，包含784个像素，那每张灰度数字图片就是一个向量，这个向量就有784个维度，可以表示成$x \in R^{784}$，而你的样本库少说也有几十万个样本数据，如果按一般的方法是不可能做到实时识别的。所以，这样的场景就需要使用PCA来压缩数据，进行大幅度降维。

这里我们简单一些，从二维的角度来看看PCA。在PCA中，最关键的就是寻找数据点x_{n}的相似低维投影y_{n}，而y_{n}就是子向量空间。

考虑R^{2}和它的两个基，$e_{1}=[1,0]^{T}$、$e_{2}=[0,1]^{T}$，$x \in R^{2}$能够表示成这两个基的线性组合（“基”会在第7节课中详细介绍）。

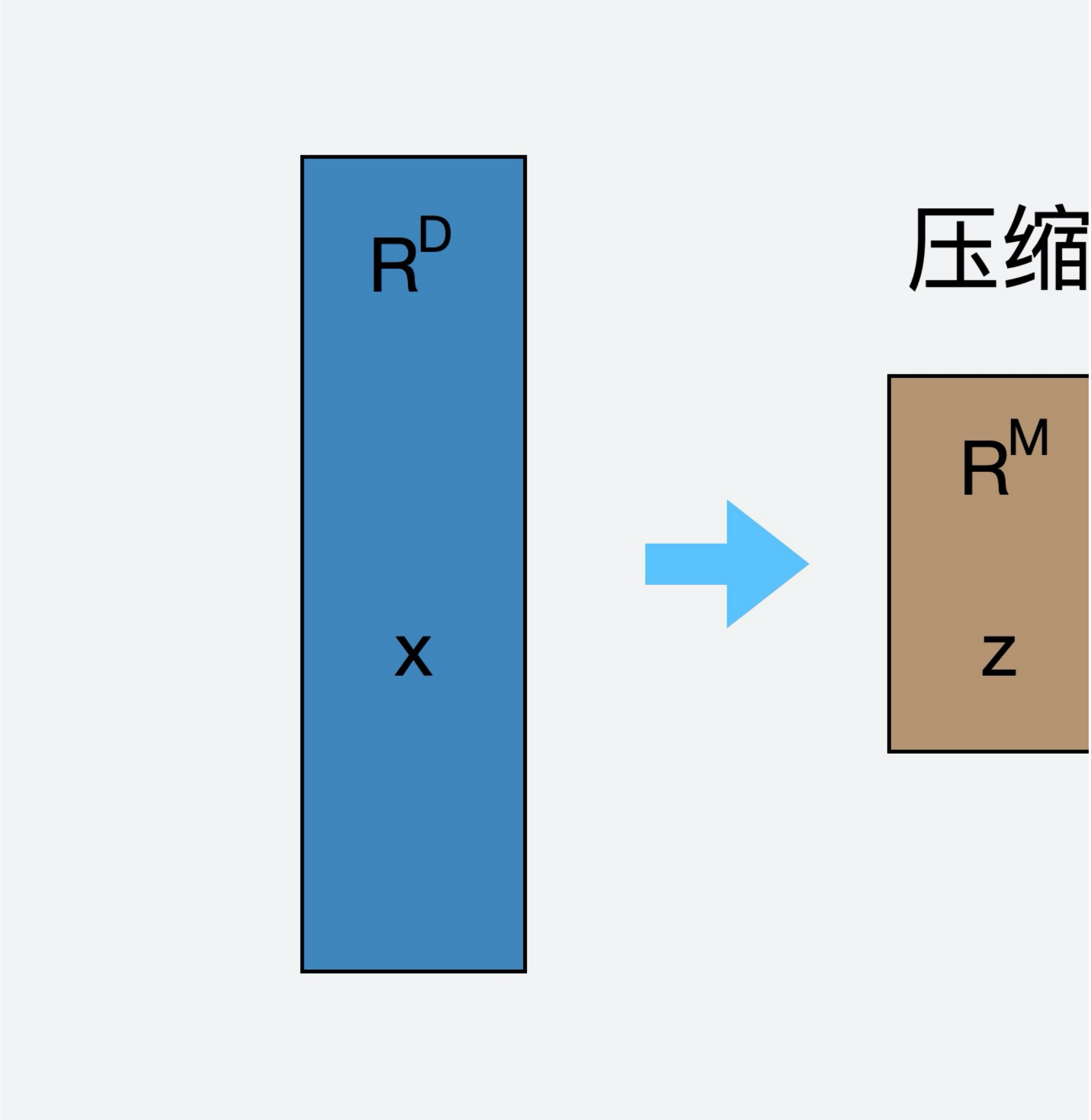
$$
\left[\begin{array}{l}
5 \\
3
\end{array}\right]=5 e_{1}+3 e_{2}
$$

于是，相似低维投影y_{n}就可以表示成下面这种形式。

$$
y_{n}=\left[\begin{array}{l}
0 \\
z
\end{array}\right] \in R^{2}, z \in R
$$

同时，y_{n}也可以写成这样的形式：$y_{n}=0 e_{1}+z e_{2}$。

这里的z就是我们要找的值，而y_{n}就是一个向量子空间U，它的维度是一维。最后，我们再通过下图来更直观地说明一下PCA的过程。



图的左边是原始向量空间x，经过压缩后，我们找到了子向量空间z，z经过重构后，形成了最终的向量空间y，y还是属于原来的向量空间，但y却拥有比x更低的维度表现。

从数学的角度看，我们其实就是在寻找x和z之间的线性关系，使得$z=B^{T}x$，以及$y=Bz$，其中B是矩阵。如果我们从数据压缩技术方向来看就更容易理解了，图中的左边箭头是编码过程，也就是压缩，右边的箭头是解码过程，也就是映射，而矩阵B就是把属于R^{M}向量空间的低维的z，映射回原来的向量空间R^{D}。同理，矩阵B^{T}就是把属于原来R^{D}向量空间的高维x压缩成低维的z。

本节小结

好了，到这里线性空间这一讲就结束了，最后我再总结一下前面讲解的内容。

今天的知识很重要，实践中都是围绕向量空间展开的，也就是说向量空间是实践的基本单位，你也一定要掌握子向量空间，因为现实中数据都是高维度的，从向量空间降维后找到子向量空间，这样就能大大提高数据运算和分析的效率。

再次特别提醒：这一讲非常重要，因为后面几讲都是围绕向量空间展开的，如果你哪里没看懂，一定要多看几次，确保完全明白了。有任何问题，你也可以随时在留言区向我提问。

线性代数练习场

之前我讲了一个现实的向量空间降维场景：车辆的牌照识别，这里，我们通过另一个现实场景，来练习一下向量空间降维的思维。

目前市场上语音识别的应用有很多，比如：天猫精灵、苹果Siri、小爱等等，而语音识别涉及的技术有很多，有语言建模、声学建模、语音信号处理等等。在语音信号处理中，语音声波通过空气传播，并被麦克风捕获，麦克风将压力波转换为可捕获的电活动。我们对电活动进行采样，用以创建描述信号的一系列波形采样。

采样是数据收集的过程，数据收集后需要做数据预处理，而预处理的关键一步就是特征提取，现在请你从“特征提取”的方向上思考下，有哪些和目前所学到的数学知识有关？

> 友情提醒：特征提取就是数字化过程，也是向量化后形成向量空间的过程。

欢迎在留言区写出你的思考，我会及时回复。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。