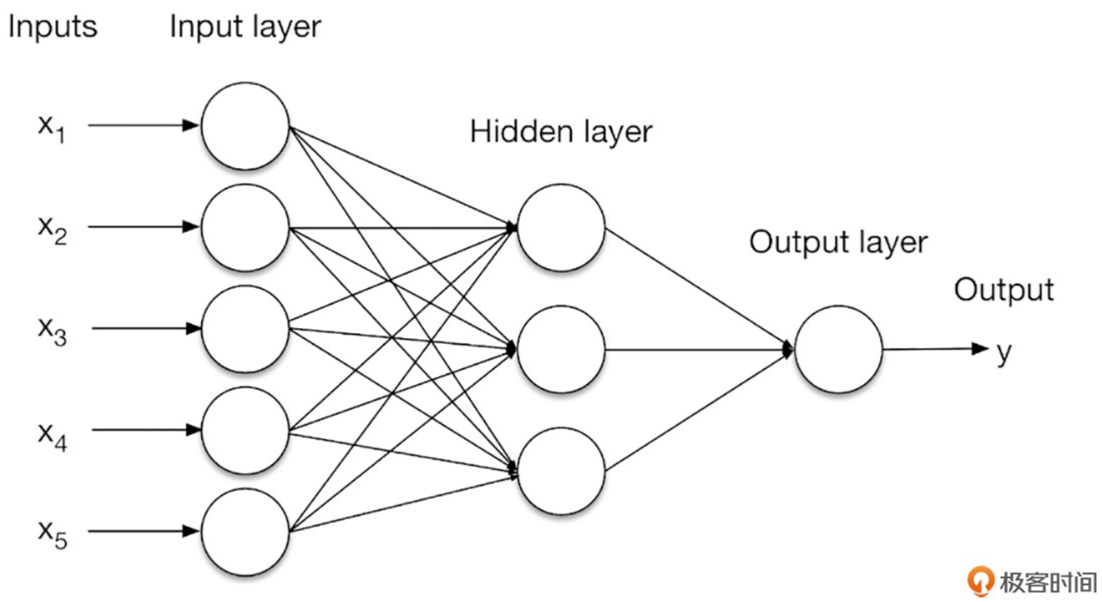
你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数，今天我们要讲的内容是“矩阵”。

在开始学习之前，我想先问你个问题，你觉得，学习矩阵有什么用呢？你可以先自己想一想。之后我们讲任何一个知识的时候，你都可以从这个角度出发，自己先思考一下，这样有助于你对所学内容理解得更深刻。

对于刚才那个问题，我的答案很简单，就一句话，从我们程序员的角度去理解的话，**矩阵可以极大地提高计算机的运算效率**。怎么说呢？我给你举一个例子。在机器学习中（特别是深度学习，或者更具体一点，神经网络），并行计算是非常昂贵的。



上图是一个典型的神经网络架构，在这时候，矩阵就能发挥用武之地了，计算H隐藏层输出的公式是：$H = f(W.x + b)$，其中W是权重矩阵，f是激活函数，b是偏差，x是输入层矩阵。而这个计算过程就叫做**向量化**（Vectorization），这也是GPU在深度学习中非常重要的原因，因为GPU非常擅长做类似矩阵乘之类的运算。

$$
X=\left|\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right|
$$

$$
W=\left|\begin{array}{ll}
w_{1} & w_{2} \\
w_{4} & w_{5} \\
x_{3} & w_{6}
\end{array}\right|
$$

$$
H=f\left(\left|\begin{array}{ll}
w_{1} & w_{2} \\
w_{4} & w_{5} \\
x_{3} & w_{6}
\end{array}\right|\left|\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right|+b\right)
$$

不过，矩阵也不仅仅局限于神经网络的应用，同时它也可以用在计算机图形图像的应用中，比如，三维物体从取景到屏幕的显示，就需要经历一系列的空间变换，才能生成二维图像显示在显示器上。在这个计算过程中，我们都需要用到矩阵。

矩阵是非常实用的，但它正式作为数学中的研究对象出现，其实是在行列式的研究发展起来之后。英国数学家 Arthur Cayley 被公认为矩阵论的创立人，他提出的矩阵概念可能来自于行列式。但我相信另一种说法，提出矩阵是为了更简单地表达线性方程组，也就是说，矩阵是线性方程组的另一种表达。

矩阵的基本概念

线性方程组的概念很简单，上节我们已经简单提过。你在小学或中学肯定也学过二元一次方程和二元一次方程组。

$$ax+by=c$$

$$
\left\{\begin{array}{l}
a_{1} x+b_{1} y+C_{1}=0 \\
a_{2} x+b_{2} y+C_{2}=0
\end{array}\right.
$$

在这样一个方程组中，$a1$、$a2$、$b1$、$b2$不能同时为0。当我们把二元一次方程组再扩展一下，变成多元一次方程组时，我们就能得到线性方程组的一般表达，即$AX=B$。

$$
\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.
$$

于是，这个线性方程组的所有系数就构成了一个$m×n$的m行n列矩阵：

$$
A=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\

\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}
\end{array}\right]
$$

我们把A称为该方程组的系数矩阵，而当我们把等式右边的常数b放入矩阵后，就是下面这样：

$$
\widetilde{A}=\left[\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_{1} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_{2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_{m}
\end{array}\right]
$$

这样我们就得到了A矩阵的增广矩阵$\widetilde{A}$，可以表示为(A, B)，这里的B表示的是方程组常数项所构成的列向量，也就是$m\times1$的m行1列矩阵：

$$
B=\left|\begin{array}{l}
b_{1} \\
b_{2} \\
\cdots \\
b_{m}
\end{array}\right|
$$

如果设X为$n\times1$的n行1列矩阵：

$$
X=\left|\begin{array}{c}
x_{1} \\
x_{2} \\
\cdots \\
x_{n}
\end{array}\right|
$$

那么线性方程组A，就可以表示为$AX=B$的矩阵形式。如果我们再换一种表示形式，设：$a_{1}, a_{2}, \ldots, a_{n}, \beta$表示增广矩阵$\widetilde{A}$的列向量，则线性方程组$A$又可表示为$a_{1} x_{1}+a_{2} x_{2}+\cdots+a_{n} x_{n}=\beta$。

线性方程组的矩阵和向量形式都是线性方程组的其他表达形式。在工作中，你可以用它们来简化求解，甚至可以提升计算效率，就如之前提到的神经网络的隐藏层的输出计算、图形图像的三维空间变换。在数学中也是同样的，你可以经常运用它们来简化求解。具体线性方程组求解的内容比较多，我们下一节课再来详细讲解求解过程。

通过前面的讲解，我相信你对矩阵有了一定的了解，现在我们再回头来看看矩阵的定义吧。

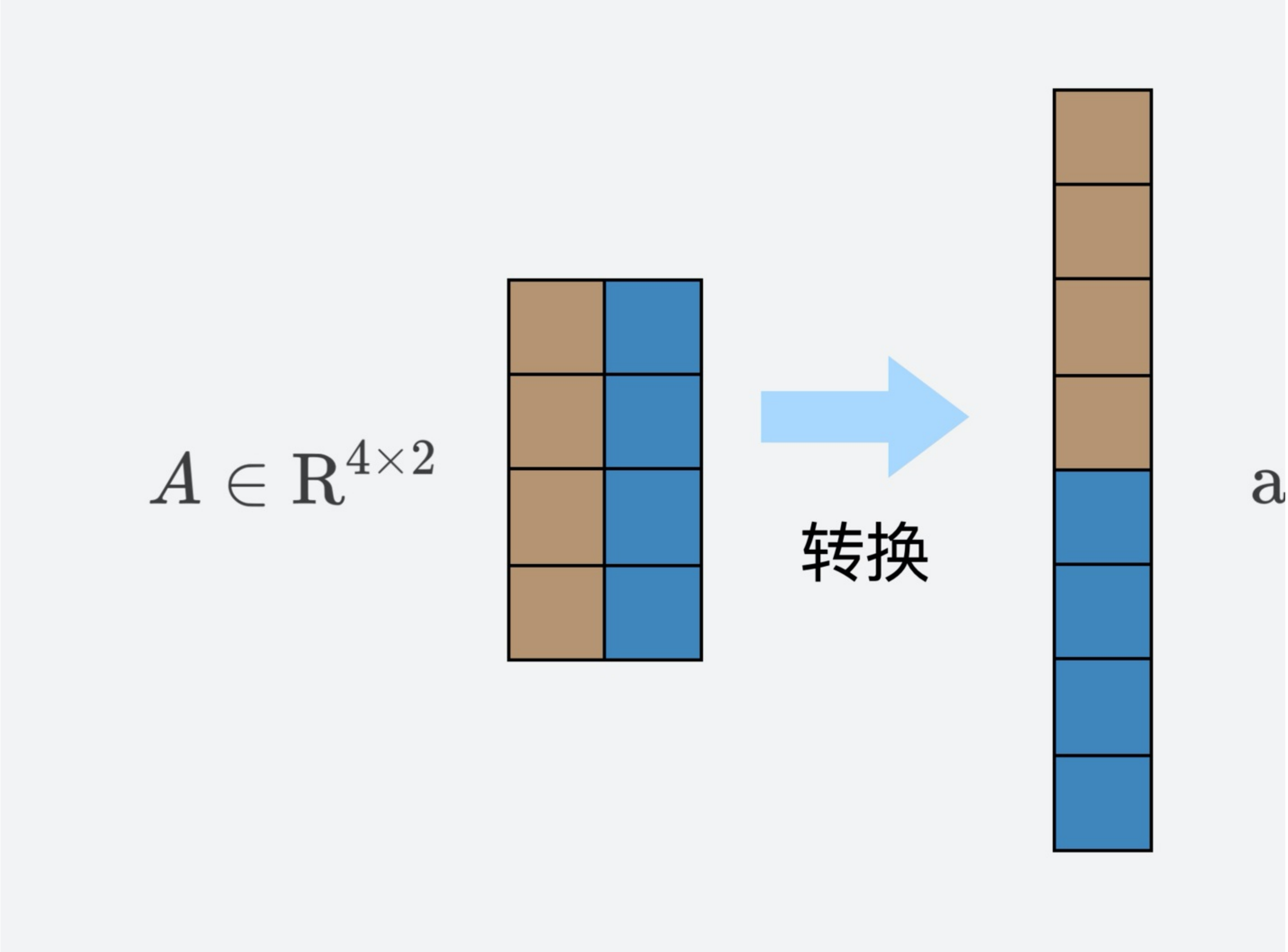
矩阵的定义是：一个(m, n)矩阵A，是由$m\times n$个元素组成，m和n是实数，其中元素$a_{ij}, \mathrm{i}=1, \ldots, \mathrm{m}, \mathrm{j}=1, \ldots, \mathrm{n}$按$m$行$n$列的矩形排布方式后可以形成矩阵$A$：

$$
A=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}
\end{array}\right]
$$

其中a_{ij}属于实数或复数，在我们的场景中是实数R，按通常的惯例，$(1, n)$矩阵叫做行，$(m, 1)$矩阵叫做列，这些特殊的矩阵叫做行或列向量。

定义完矩阵后，我接着讲一个比较有趣的概念，矩阵转换（Matrix transformation）。矩阵转换经常被用在计算机图形图像的转换中，比如，一张彩色图片从RGB角度来说是三维的，如果要转换成灰度图片，也就是一维图片，那就要做矩阵转换。

我们来看一下矩阵转换的过程。设$\mathrm{R}^{m \times n}$是实数矩阵(m, n)的集合，$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$可以表示成另一种形式 $a \in \mathrm{R}^{mn}$。我们把矩阵的n列堆叠成一个长向量后完成转换。这个转换也叫做reshape，其实就是重新调整原矩阵的行数、列数和维数，但是元素个数不变。



矩阵的运算

了解了矩阵的基本定义后，我们才能进入矩阵的运算环节，就是矩阵的加和乘。

加运算很简单，两个矩阵$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$，$B \in \mathrm{R}^{m \times n}$的加运算其实就是矩阵各自元素的加。

$$
A+B=\left[\begin{array}{ccc}
a_{11}+b_{11} & \ldots & a_{1 n}+b_{1 n} \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
a_{m 1}+b_{m 1} & \ldots & a_{m n}+b_{m n}
\end{array}\right] \in R^{m \times n}
$$

我推荐你使用NumPy的einsum来高效地做这类运算，因为它在速度和内存效率方面通常可以超越我们常见的array函数。

```
C= np.einsum('il, lj', A, B)
```

接下来，我们一起来看看矩阵的乘。这里你需要注意，矩阵的乘和通常意义上“数之间的乘”不同，矩阵的乘有多种类型，这里我讲三种最普遍，也是在各领域里用得最多的矩阵乘。

1.普通矩阵乘

普通矩阵乘是应用最广泛的矩阵乘，两个矩阵$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$，$B \in \mathrm{R}^{n \times k}$，普通矩阵则乘可以表示为$C=A B \in R^{m \times k}$，$C$中元素的计算规则是矩阵$A$、$B$对应两两元素乘积之和。

$$
c_{i j}=\sum_{k=1}^{n} a_{i k} b_{k j}, i=1, \ldots, m, j=1, \ldots, l
$$

我们举例来说明。C的第一个元素$c_{11}=a_{11} \times b_{11}+a_{12} \times b_{21}+a_{13} \times b_{31}=1 \times 1+2 \times 2+3 \times 3$。

$$
C=A B=\left[\begin{array}{lll}
1 & 2 & 3 \\
4 & 5 & 6
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
1 & 4 \\
2 & 5 \\
3 & 6
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{lll}
1 \times 1+2 \times 2+3 \times 3 & 1 \times 4+2 \times 5+3 \times 6 \\
4 \times 1+5 \times 2+6 \times 3 & 4 \times 4+5 \times 5+6 \times 6
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
14 & 32 \\
32 & 77
\end{array}\right]
$$

这里需要特别注意的是，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，例如，一个$n \times k$矩阵A和一个$k \times m$矩阵B相乘，最后得出$n \times m$矩阵C，而这里的k就是相邻阶数。

$$AB=C$$

但反过来B和A相乘就不行了，因为相邻阶数m不等于n。

2.哈达玛积

哈达玛积理解起来就很简单了，就是矩阵各对应元素的乘积，$c_{i j}=a_{i j} \times b_{i j}$ 。举个例子：

$$
C=A^{*} B=\left[\begin{array}{ll}
1 & 2 \\
4 & 5
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
1 & 4 \\
2 & 5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
1 * 1 & 2 * 4 \\
4 * 2 & 5 * 5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
1 & 8 \\
8 & 25
\end{array}\right]
$$

哈达玛积其实在数学中不常看到，不过，在编程中哈达玛积非常有用，因为它可以用来同时计算多组数据的乘积，计算效率很高。

3.克罗内克积

克罗内克积是以德国数学家利奥波德·克罗内克（Leopold Kronecker）的名字命名的。它可以应用在解线性矩阵方程和图像处理方面，当然从更时髦的角度说，它还能用在量子信息领域，我们也称之为直积或张量积。

和普通矩阵乘和哈达玛积不同的是，克罗内克积是两个任意大小矩阵间的运算，表示为$A×B$，如果A是一个$m × n$的矩阵，而B是一个$p×q$的矩阵，克罗内克积则是一个$mp×nq$的矩阵。

接下来我们需要定义一个**在矩阵的乘法中起着特殊作用**的矩阵，它就是**单位矩阵**。高等代数中，在求解相应的矩阵时，若添加单位矩阵，通过初等变换进行求解，往往可以使问题变得简单。按照百度百科的解释，单位矩阵如同数的乘法中的1，这种矩阵就被称为单位矩阵。它是个方阵，从左上角到右下角的对角线，也就是主对角线上的元素均为1，除此以外全都为0。

在线性代数中，大小为n的单位矩阵就是在主对角线上均为1，而其他地方都是0的$n×n$的方阵，它用I_{n}表示，表达时为了方便可以忽略阶数，直接用I来表示：

$$
I_{1}=[1], I_{2}=\left[\begin{array}{ll}
1 & 0 \\
0 & 1
\end{array}\right], I_{3}=\left[\begin{array}{lll}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{array}\right], \ldots, I_{n}=\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 1 & \ldots & 0 \\
. & . & \ldots & . \\
. & . & . & . \\
0 & 0 & \ldots & 1
\end{array}\right]
$$

矩阵的性质

在了解了矩阵加和乘，以及单位矩阵后，我们是时候来看一看矩阵的性质了。了解矩阵的性质是进行矩阵计算的前提，就像我们小时候学加减乘除四则运算法则时那样。所以，这块内容对你来说应该不难，你作为了解就好，重点是之后的运算。

1.结合律

任意实数$m×n$矩阵A，$n×p$矩阵B，$p×q$矩阵C之间相乘，满足结合律$(AB)C=A(BC)$。这个很好理解，我就不多说了。

$$\forall A \in R^{m \times n}, B \in R^{n \times p}, C \in R^{p \times q}:(A B) C=A(B C)$$

2.分配律

任意实数$m×n$矩阵A和B，$n×p$矩阵C和D之间相乘满足分配律$(A+B)C=AC+BC$，$A(C+D)=AC+AD$。

$$
\forall \mathrm{A}, B \in \mathrm{R}^{m \times n}, C, D \in \mathrm{R}^{n \times p}:(A+B) C=A C+B C, A(C+D)=A C+A D
$$

3.单位矩阵乘

任意实数$m×n$矩阵A和单位矩阵之间的乘，等于它本身A。

$$
\forall A \in R^{m \times n}: I_{m} A=A I_{n}=A
$$

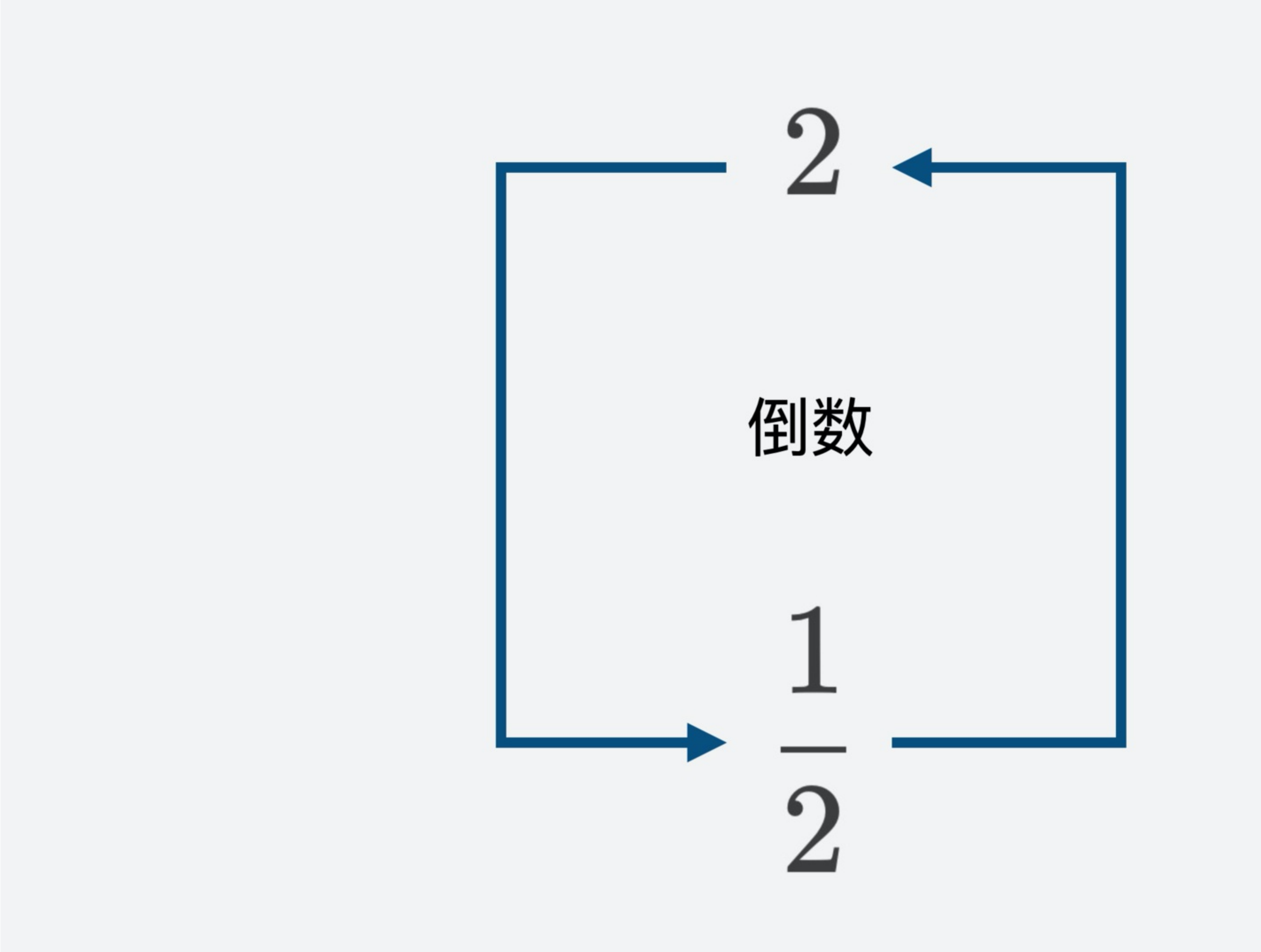
注意，这里的行和列不同，$m \neq n$意味着，根据矩阵乘，左乘和右乘单位矩阵也不同，也就是$I_{m} \neq I_{n}$。

逆矩阵与转置矩阵

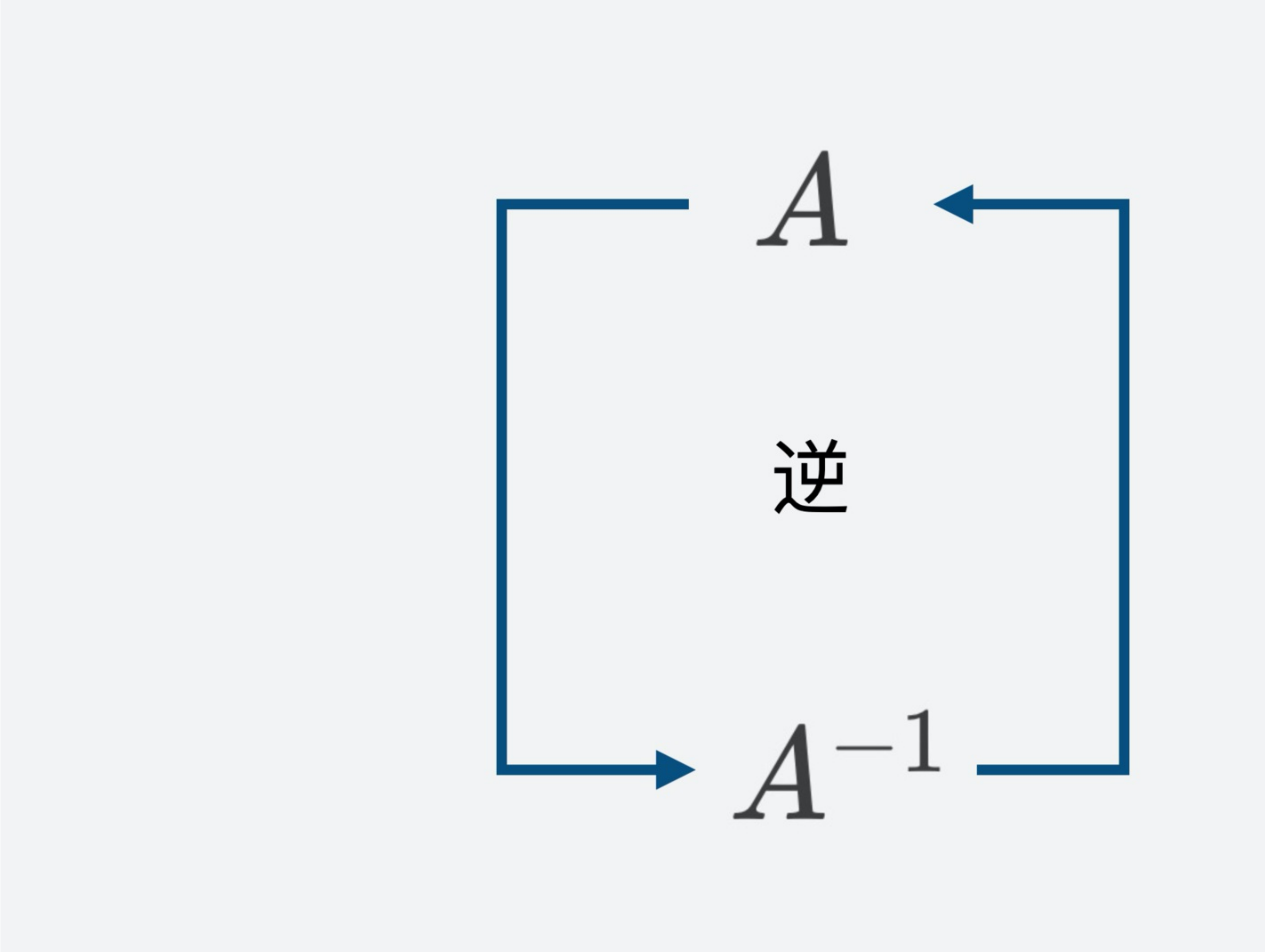
了解矩阵基本概念、运算，以及性质后，我来讲一讲矩阵应用中的两个核心内容——逆矩阵和转置矩阵。逆矩阵和转置矩阵在实际应用中大有用处，比如：坐标系中的图形变换运算。我们先来看下什么是逆矩阵。

逆矩阵

下面这个图你应该非常熟悉了，图中表现的是数字的倒数，2的倒数是$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$的倒数是2。



其实逆矩阵也有着类似的概念，只不过是写法不一样，我们会把逆矩阵写成A^{-1}。那为什么不是$\frac{1}{A}$呢？那是因为数字1无法被矩阵除。



我们知道，2乘以它的倒数$\frac{1}{2}$等于1。同样的道理，A乘以它的逆矩阵A^{-1}就等于单位矩阵，即$\mathrm{A} \times A^{-1}=\mathrm{I}$（$I$即单位矩阵），反过来也一样，$\mathrm{A}^{-1} \times A=\mathrm{I}$。

为方便你理解，我用一个2×2矩阵A来解释一下逆矩阵的算法。首先，我们交换a_{11}和a_{22}的位置，然后在a_{12}和a_{21}前加上负号，最后除以行列式$a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}$。

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]^{-1}=\frac{1}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}\left[\begin{array}{cc}
a_{22} & -a_{12} \\
-a_{21} & a_{11}
\end{array}\right]
$$

那我们该如何验证这是不是正解呢？

方法其实很简单，记得刚才的公式就行，$\mathrm{A} \times A^{-1}=\mathrm{I}$。现在我们就代入公式来验证一下，$A$和它的逆矩阵相乘，通过刚才的算法最终得出的结果是单位矩阵。

$$
A \times A^{-1}=\left[\begin{array}{llll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]^{-1}=\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{lll}
\frac{a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{-a_{12}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} \\
\frac{-a_{21}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
\frac{a_{11} \times a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{12} ×(-a_{21})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{11} ×(-a_{12})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{12} \times a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} \\
\frac{a_{21} \times a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{22} ×(-a_{21})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{21} ×(-a_{12})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{22} × a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{lll}
1 & 0 \\
0 & 1
\end{array}\right]
$$

这里有一点需要特别说明，不是每一个矩阵都是可逆的。如果一个矩阵是可逆的，那这个矩阵我们叫做**非奇异矩阵**，如果一个矩阵是不可逆的，那这个矩阵我们就叫做**奇异矩阵**，而且如果一个矩阵可逆，那它的逆矩阵必然是唯一的。

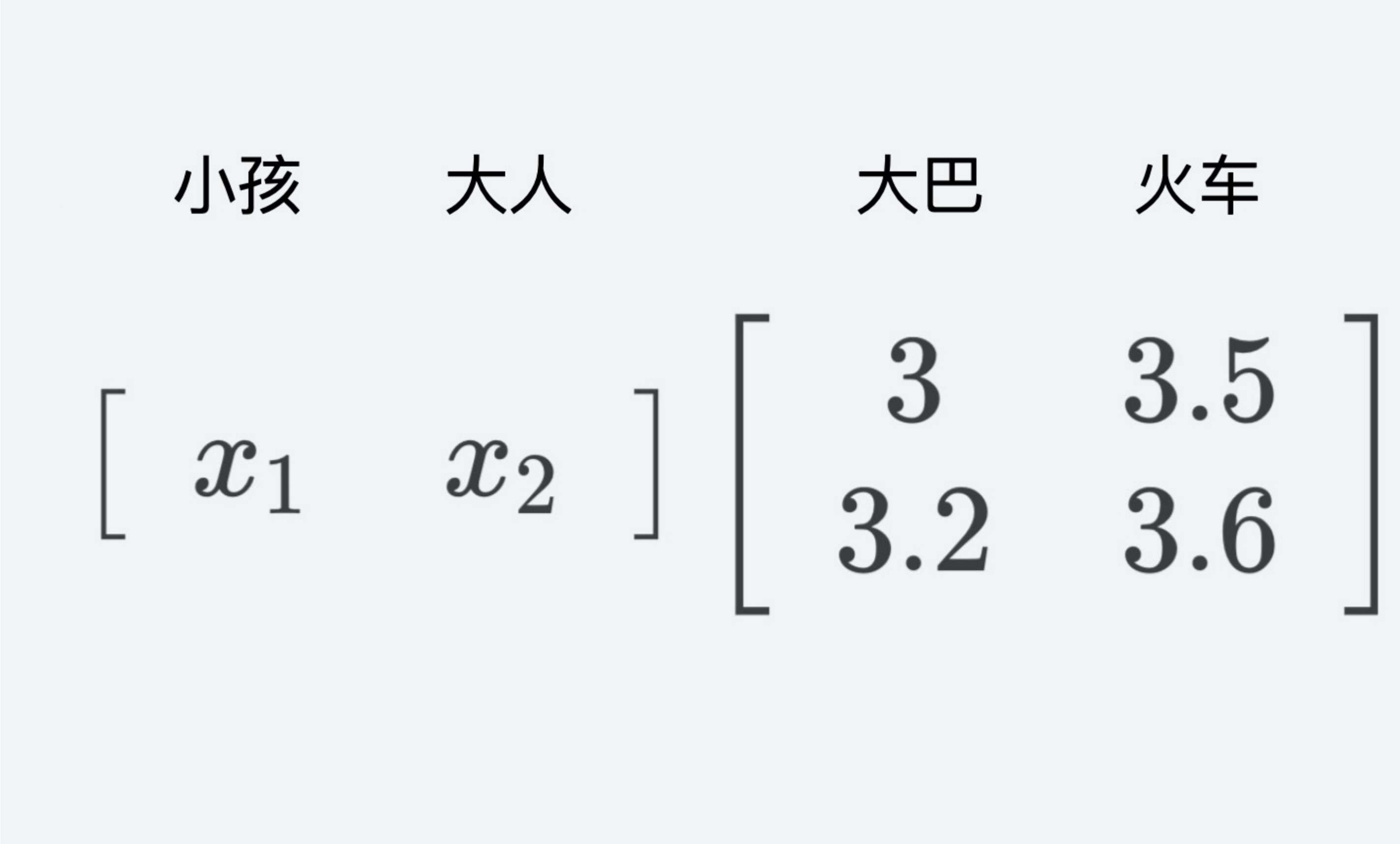
还记得行列式$a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}$吗？如果我们要证明矩阵是可逆的，只要证明行列式不等于零就行。更高阶的逆矩阵的算法也是一样的原理。

最后，我想通过一个现实生活中的案例来让你更多地了解逆矩阵。

一个旅游团由孩子和大人组成，去程他们一起做大巴，每个孩子的票价3元，大人票价3.2元，总共花费118.4元。回程一起做火车，每个孩子的票价3.5元，大人票价3.6元，总共花费

135.2元。请问旅游团里有多少小孩和大人？

首先，我们设置一些矩阵，组成线性方程$XA=B$。



要解X，我们就要先计算A的逆矩阵A^{-1}：

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{cc}
3 & 3.5 \\
3.2 & 3.6
\end{array}\right]^{-1}=\frac{1}{3 \times 3.6-3.5 \times 3.2}\left[\begin{array}{cc}
3.6 & -3.5 \\
-3.2 & 3
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
-9 & 8.75 \\
8 & -7.5
\end{array}\right]
$$

接下来再计算$X=B A^{-1}$：

$$
\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
118.4 & 135.2
\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}
-9 & 8.75 \\
8 & -7.5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
16 & 22
\end{array}\right]
$$

最终，我们得出这个旅游团有16个小孩和22个大人。

这也是解线性方程组的一种方法，类似这样的计算被广泛应用在各领域中，比如建筑工程、游戏和动画的3D效果上。虽然现在有很多程序包封装了这类数学计算的底层实现，但如果你能很好地理解这些概念，就可以为编程或算法调优打下坚实的基础。

Last but not least，方程次序很重要，也就是说，$AX=B$和$XA=B$的结果是不同的，这个一定要牢记哦！

转置矩阵

一般伴随逆矩阵之后出现的就是转置矩阵。在计算机图形图像处理中，如果要对一个物体进行旋转、平移、缩放等操作，就要对描述这个物体的所有矩阵进行运算，矩阵转置就是这类运算之一，而矩阵的转置在三维空间中的解释就相当于“得到关于某个点对称的三维立体”。所以，转置矩阵的定义很简单。

将矩阵的行列互换，得到的新矩阵就叫做转置矩阵（transpose）。转置矩阵的行列式不变。我们把$m×n$矩阵A的行列互换，得到转置矩阵A^{T}。

$$
A=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

$$
A^{T}=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m 1} \\
a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m 2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{1 n} & a_{2 n} & \ldots & a_{m n}

\end{array}\right]
$$

最后，为了方便你理解，我们再总结一下逆矩阵和转置矩阵的性质。你不用死记硬背，重在理解。

1. 矩阵和自身逆矩阵相乘得道单位矩阵，$A A^{-1}=I=A^{-1} A$；
2. $A$$B$两矩阵相乘的逆，等于逆矩阵$B$和逆矩阵$A$相乘，这里强调一下乘的顺序很重要，$(A B)^{-1}=B^{-1} A^{-1}$；
3. AB两矩阵相加后的逆矩阵，不等于各自逆矩阵的相加， $(A+B)^{-1} \neq A^{-1}+B^{-1}$；
4. 矩阵转置的转置还是它本身，$\left(A^{T}\right)^{\mathrm{T}}=A$；
5. AB两矩阵相加后的转置矩阵，等于各自转置矩阵的相加，$(A+B)^{T}=A^{T}+B^{T}$；
6. AB两矩阵相乘后的转置矩阵，等于转置矩阵B和转置矩阵A的相乘，这里再次强调乘的顺序很重要，$(A B)^{T}=B^{T} A^{T}$。

本节小结

好了，到这里矩阵这一讲就结束了，最后我再带你总结一下前面讲解的内容。

今天的知识，你只需要知道矩阵是线性方程组的另一种表达，了解和掌握矩阵的定义和性质就足够了。当然，矩阵还有很多内容，但我认为掌握了我讲的这些内容后，就为以后的一些矩阵应用场景打下了坚实的数学基础，也是下一讲的解线性方程组的前置知识。

线性代数练习场

对于10维列向量$x=\left(x_{1}, \ldots, x_{10}\right)^{T}$， $v=\left(v_{1}, \ldots, v_{10}\right)^{T}$，如果要计算$y=x x^{T}\left(I+v v^{T}\right) x$，其中$I$是10阶单位矩阵。你会怎么做？

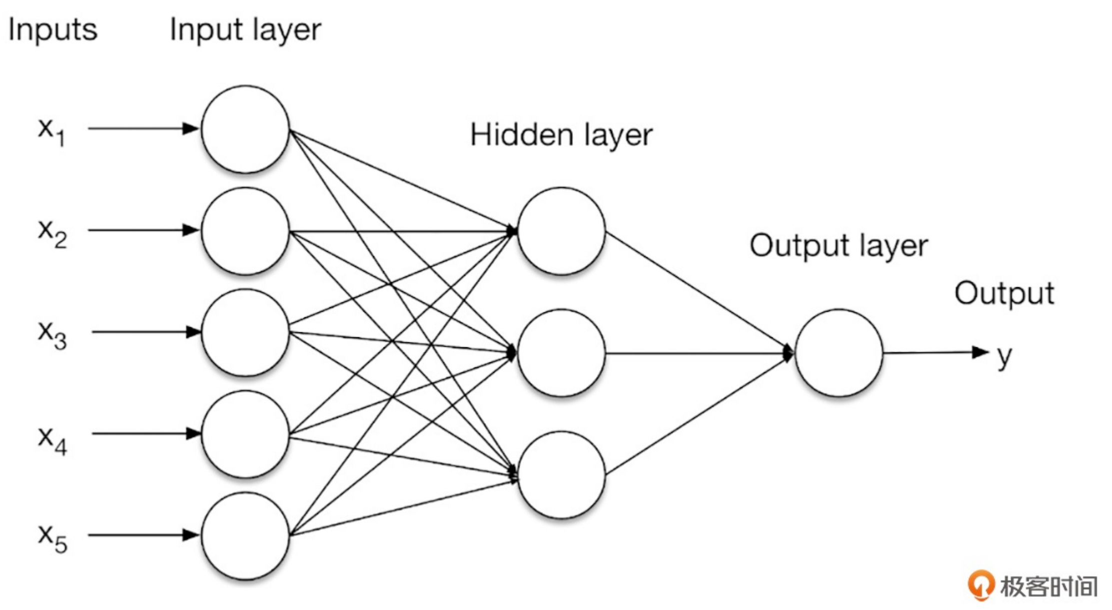
友情提醒，这里有多种方式解题。你能不能找到一个最简单的方法来解这道题？虽然结果很重要，但我想说的是过程更重要，而且往往解题过程不同，从计算机角度来说，运算的效率会有极大的不同。

欢迎你在留言区晒出你的运算过程和结果。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数，今天我们要讲的内容是“矩阵”。

在开始学习之前，我想先问你个问题，你觉得，学习矩阵有什么用呢？你可以先自己想一想。之后我们讲任何一个知识的时候，你都可以从这个角度出发，自己先思考一下，这样有助于你对所学内容理解得更深刻。

对于刚才那个问题，我的答案很简单，就一句话，从我们程序员的角度去理解的话，**矩阵可以极大地提高计算机的运算效率**。怎么说呢？我给你举一个例子。在机器学习中（特别是深度学习，或者更具体一点，神经网络），并行计算是非常昂贵的。



上图是一个典型的神经网络架构，在这时候，矩阵就能发挥用武之地了，计算H隐藏层输出的公式是：$H = f(W.x + b)$，其中W是权重矩阵，f是激活函数，b是偏差，x是输入层矩阵。而这个计算过程就叫做**向量化**（Vectorization），这也是GPU在深度学习中非常重要的原因，因为GPU非常擅长做类似矩阵乘之类的运算。

$$
X=\left|\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right|
$$

$$
W=\left|\begin{array}{ll}
w_{1} & w_{2} \\
w_{4} & w_{5} \\
x_{3} & w_{6}
\end{array}\right|
$$

$$
H=f\left(\left|\begin{array}{ll}
w_{1} & w_{2} \\
w_{4} & w_{5} \\
x_{3} & w_{6}
\end{array}\right|\left|\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right|+b\right)
$$

不过，矩阵也不仅仅局限于神经网络的应用，同时它也可以用在计算机图形图像的应用中，比如，三维物体从取景到屏幕的显示，就需要经历一系列的空间变换，才能生成二维图像显示在显示器上。在这个计算过程中，我们都需要用到矩阵。

矩阵是非常实用的，但它正式作为数学中的研究对象出现，其实是在行列式的研究发展起来之后。英国数学家 Arthur Cayley 被公认为矩阵论的创立人，他提出的矩阵概念可能来自于行列式。但我相信另一种说法，提出矩阵是为了更简单地表达线性方程组，也就是说，矩阵是线性方程组的另一种表达。

矩阵的基本概念

线性方程组的概念很简单，上节我们已经简单提过。你在小学或中学肯定也学过二元一次方程和二元一次方程组。

$$ax+by=c$$

$$
\left\{\begin{array}{l}
a_{1} x+b_{1} y+C_{1}=0 \\
a_{2} x+b_{2} y+C_{2}=0
\end{array}\right.
$$

在这样一个方程组中，$a1$、$a2$、$b1$、$b2$不能同时为0。当我们把二元一次方程组再扩展一下，变成多元一次方程组时，我们就能得到线性方程组的一般表达，即$AX=B$。

$$
\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.
$$

于是，这个线性方程组的所有系数就构成了一个$m×n$的m行n列矩阵：

$$
A=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

我们把A称为该方程组的系数矩阵，而当我们把等式右边的常数b放入矩阵后，就是下面这样：

$$

$$
\widetilde{A}=\left[\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} & b_{1} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} & b_{2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n} & b_{m}
\end{array}\right]
$$

这样我们就得到了A矩阵的增广矩阵$\widetilde{A}$，可以表示为(A, B)，这里的B表示的是方程组常数项所构成的列向量，也就是$m\times 1$的m行1列矩阵：

$$
B=\left|\begin{array}{l}
b_{1} \\
b_{2} \\
\cdots \\
b_{m}
\end{array}\right|
$$

如果设X为$n\times 1$的n行1列矩阵：

$$
X=\left|\begin{array}{c}
x_{1} \\
x_{2} \\
\cdots \\
x_{n}
\end{array}\right|
$$

那么线性方程组A，就可以表示为$AX=B$的矩阵形式。如果我们再换一种表示形式，设：$a_{1} ,a_{2},\ldots, a_{n},\beta$表示增广矩阵$\widetilde{A}$的列向量，则线性方程组$A$又可表示为$a_{1} x_{1}+a_{2} x_{2}+\cdots+a_{n} x_{n}=\beta$。

线性方程组的矩阵和向量形式都是线性方程组的其他表达形式。在工作中，你可以用它们来简化求解，甚至可以提升计算效率，就如之前提到的神经网络的隐藏层的输出计算、图形图像的三维空间变换。在数学中也是同样的，你可以经常运用它们来简化求解。具体线性方程组求解的内容比较多，我们下一节课再来详细讲解求解过程。

通过前面的讲解，我相信你对矩阵有了一定的了解，现在我们再回头来看看矩阵的定义吧。

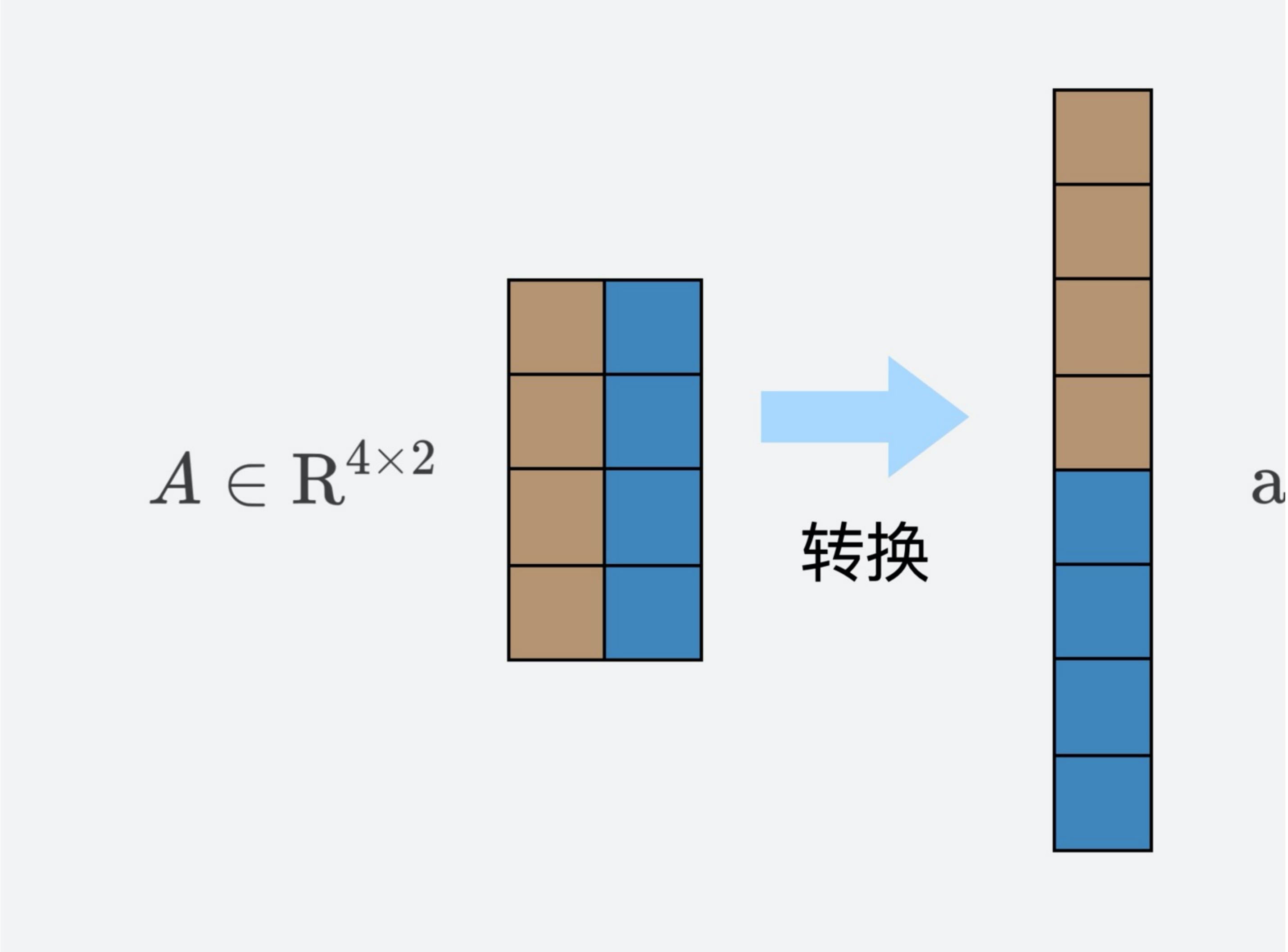
矩阵的定义是：一个(m, n)矩阵A，是由$m\times n$个元素组成，m和n是实数，其中元素$a_{i j}, \mathrm{i}=1, \ldots, \mathrm{m}, \mathrm{j}=1, \ldots, \mathrm{n}$按$m$行$n$列的矩形排布方式后可以形成矩阵$A$：

$$
A=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

其中$a_{i j}$属于实数或复数，在我们的场景中是实数R，按通常的惯例，$(1, n)$矩阵叫做行，$(m, 1)$矩阵叫做列，这些特殊的矩阵叫做行或列向量。

定义完矩阵后，我接着讲一个比较有趣的概念，矩阵转换（Matrix transformation）。矩阵转换经常被用在计算机图形图像的转换中，比如，一张彩色图片从RGB角度来说是三维的，如果要转换成灰度图片，也就是一维图片，那就要做矩阵转换。

我们来看一下矩阵转换的过程。设$\mathrm{R}^{m \times n}$是实数矩阵(m, n)的集合，$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$可以表示成另一种形式 $a \in \mathrm{R}^{mn}$。我们把矩阵的n列堆叠成一个长向量后完成转换。这个转换也叫做reshape，其实就是重新调整原矩阵的行数、列数和维数，但是元素个数不变。



矩阵的运算

了解了矩阵的基本定义后，我们才能进入矩阵的运算环节，就是矩阵的加和乘。

加运算很简单，两个矩阵$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$，$B \in \mathrm{R}^{m \times n}$的加运算其实就是矩阵各自元素的加。

$$
A+B=\left[\begin{array}{ccc}
a_{11}+b_{11} & \ldots & a_{1 n}+b_{1 n} \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
a_{m 1}+b_{m 1} & \ldots & a_{m n}+b_{m n}
\end{array}\right] \in R^{m \times n}
$$

我推荐你使用NumPy的einsum来高效地做这类运算，因为它在速度和内存效率方面通常可以超越我们常见的array函数。

```
C= np.einsum('il, lj', A, B)
```

接下来，我们一起来看看矩阵的乘。这里你需要注意，矩阵的乘和通常意义上"数之间的乘"不同，矩阵的乘有多种类型，这里我讲三种最普遍，也是在各领域里用得最多的矩阵乘。

1.普通矩阵乘

普通矩阵乘是应用最广泛的矩阵乘，两个矩阵$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$，$B \in \mathrm{R}^{n \times k}$，普通矩阵则乘可以表示为$C=A B \in R^{m \times k}$，$C$中元素的计算规则是矩阵$A$、$B$对应两两元素乘积之和。

$$
c_{i j}=\sum_{k=1}^{n} a_{i k} b_{k j}, i=1, \ldots, m, j=1, \ldots, l
$$

我们举例来说明。C的第一个元素$c_{11}=a_{11} \times b_{11}+a_{12} \times b_{21}+a_{13} \times b_{31}=1 \times 1+2 \times 2+3 \times 3$。

$$
C=A B=\left[\begin{array}{lll}
1 & 2 & 3 \\
4 & 5 & 6
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
1 & 4 \\
2 & 5 \\
3 & 6
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{lll}
1 \times 1+2 \times 2+3 \times 3 & 1 \times 4+2 \times 5+3 \times 6 \\
4 \times 1+5 \times 2+6 \times 3 & 4 \times 4+5 \times 5+6 \times 6
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
14 & 32 \\
32 & 77
\end{array}\right]
$$

这里需要特别注意的是，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，例如，一个$n×k$矩阵A和一个$k×m$矩阵B相乘，最后得出$n×m$矩阵C，而这里的k就是相邻阶数。

$$AB=C$$

但反过来B和A相乘就不行了，因为相邻阶数m不等于n。

2.哈达玛积

哈达玛积理解起来就很简单了，就是矩阵各对应元素的乘积，$c_{ij}=a_{ij} \times b_{ij}$ 。举个例子：

$$
C=A^{*} B=\left[\begin{array}{ll}
1 & 2 \\
4 & 5
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
1 & 4 \\
2 & 5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
1 * 1 & 2 * 4 \\
4 * 2 & 5 * 5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
1 & 8 \\
8 & 25
\end{array}\right]
$$

哈达玛积其实在数学中不常看到，不过，在编程中哈达玛积非常有用，因为它可以用来同时计算多组数据的乘积，计算效率很高。

3.克罗内克积

克罗内克积是以德国数学家利奥波德·克罗内克（Leopold Kronecker）的名字命名的。它可以应用在解线性矩阵方程和图像处理方面，当然从更时髦的角度说，它还能用在量子信息领域，我们也称之为直积或张量积。

和普通矩阵乘和哈达玛积不同的是，克罗内克积是两个任意大小矩阵间的运算，表示为$A×B$，如果A是一个$m × n$的矩阵，而B是一个$p×q$的矩阵，克罗内克积则是一个$mp×nq$的矩阵。

接下来我们需要定义一个**在矩阵的乘法中起着特殊作用**的矩阵，它就是**单位矩阵**。高等代数中，在求解相应的矩阵时，若添加单位矩阵，通过初等变换进行求解，往往可以使问题变得简单。按照百度百科的解释，单位矩阵如同数的乘法中的1，这种矩阵就被称为单位矩阵。它是个方阵，从左上角到右下角的对角线，也就是主对角线上的元素均为1，除此以外全都为0。

在线性代数中，大小为n的单位矩阵就是在主对角线上均为1，而其他地方都是0的$n×n$的方阵，它用I_{n}表示，表达时为了方便可以忽略阶数，直接用I来表示：

$$
I_{1}=[1], I_{2}=\left[\begin{array}{ll}
1 & 0 \\
0 & 1
\end{array}\right], I_{3}=\left[\begin{array}{lll}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{array}\right], \ldots, I_{n}=\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 1 & \ldots & 0 \\
. & . & \ldots & . \\
. & . & . & . \\
0 & 0 & \ldots & 1
\end{array}\right]
$$

矩阵的性质

在了解了矩阵加和乘，以及单位矩阵后，我们是时候来看一看矩阵的性质了。了解矩阵的性质是进行矩阵计算的前提，就像我们小时候学加减乘除四则运算法则时那样。所以，这块内容对你来说应该不难，你作为了解就好，重点是之后的运算。

1.结合律

任意实数$m×n$矩阵A，$n×p$矩阵B，$p×q$矩阵C之间相乘，满足结合律$(AB)C=A(BC)$。这个很好理解，我就不多说了。

$$\forall A \in R^{m \times n}, B \in R^{n \times p}, C \in R^{p \times q}:(A B) C=A(B C)$$

2.分配律

任意实数$m×n$矩阵A和B，$n×p$矩阵C和D之间相乘满足分配律$(A+B)C=AC+BC$，$A(C+D)=AC+AD$。

$$
\forall \mathrm{A}, B \in \mathrm{R}^{m \times n}, C, D \in \mathrm{R}^{n \times p}:(A+B) C=A C+B C, A(C+D)=A C+A D
$$

3.单位矩阵乘

任意实数$m×n$矩阵A和单位矩阵之间的乘，等于它本身A。

$$
\forall A \in R^{m \times n}: I_{m} A=A I_{n}=A
$$

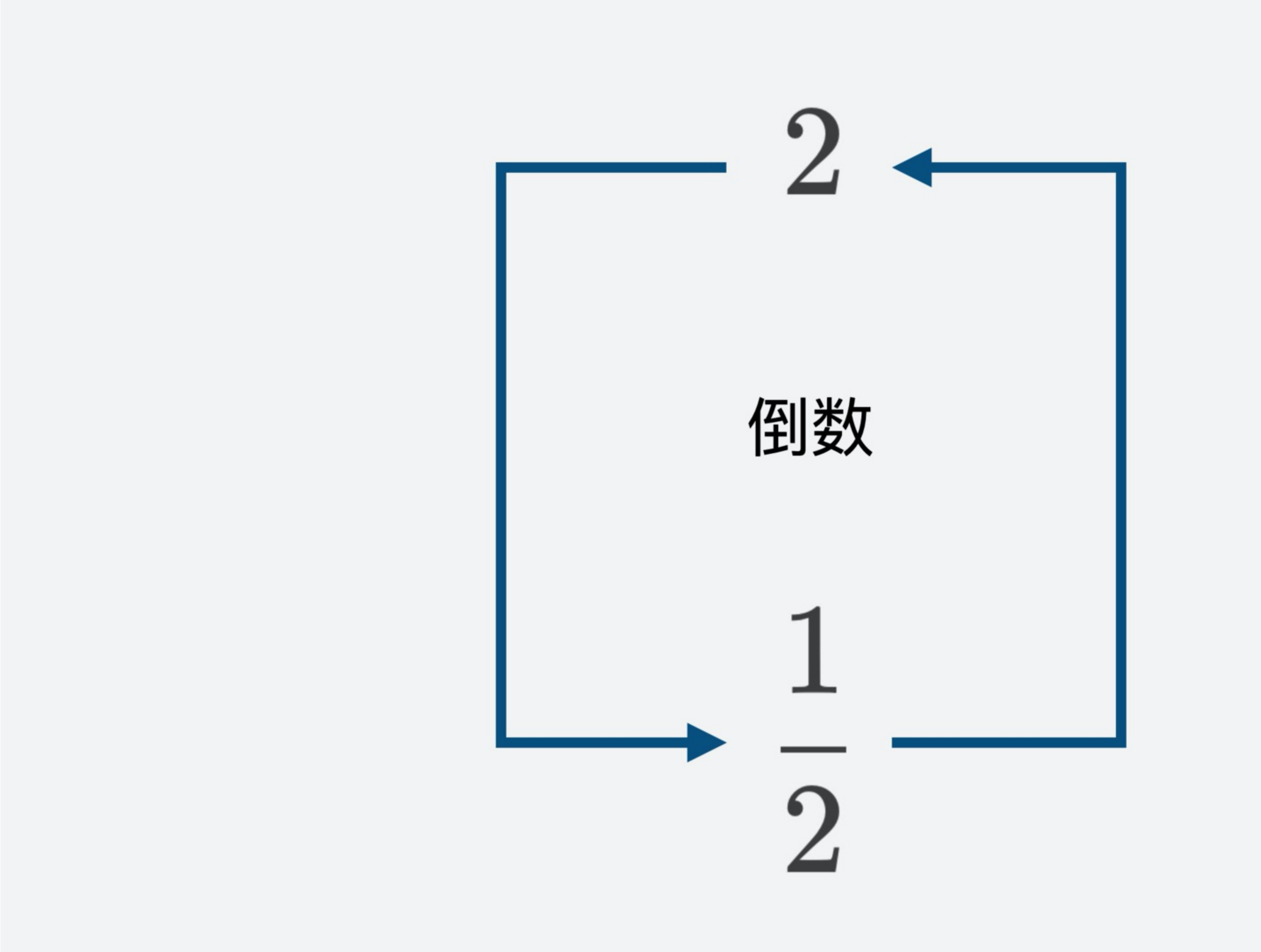
注意，这里的行和列不同，$m \neq n$意味着，根据矩阵乘，左乘和右乘单位矩阵也不同，也就是$I_{m} \neq I_{n}$。

逆矩阵与转置矩阵

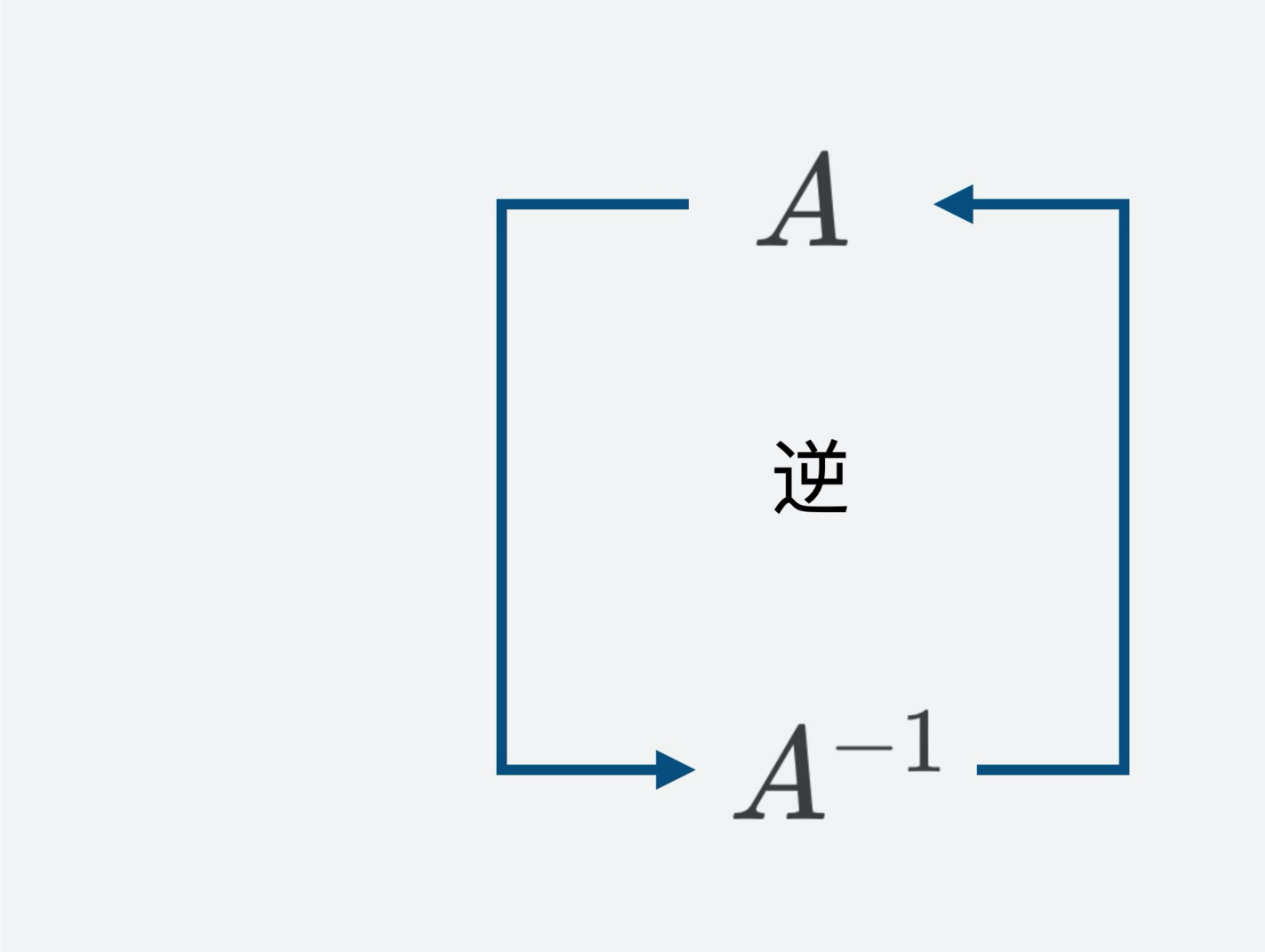
了解矩阵基本概念、运算，以及性质后，我来讲一讲矩阵应用中的两个核心内容——逆矩阵和转置矩阵。逆矩阵和转置矩阵在实际应用中大有用处，比如：坐标系中的图形变换运算。我们先来看下什么是逆矩阵。

逆矩阵

下面这个图你应该非常熟悉了，图中表现的是数字的倒数，2的倒数是$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$的倒数是2。



其实逆矩阵也有着类似的概念，只不过是写法不一样，我们会把逆矩阵写成A^{-1}。那为什么不是$\frac{1}{A}$呢？那是因为数字1无法被矩阵除。



我们知道，2乘以它的倒数$\frac{1}{2}$等于1。同样的道理，A乘以它的逆矩阵A^{-1}就等于单位矩阵，即$\mathrm{A} \times A^{-1}=\mathrm{I}$（$I$即单位矩阵），反过来也一样，$\mathrm{A}^{-1} \times A=\mathrm{I}$。

为方便你理解，我用一个2×2矩阵A来解释一下逆矩阵的算法。首先，我们交换a_{11}和a_{22}的位置，然后在a_{12}和a_{21}前加上负号，最后除以行列式$a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}$。

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]^{-1}=\frac{1}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}\left[\begin{array}{cc}
a_{22} & -a_{12} \\
-a_{21} & a_{11}
\end{array}\right]
$$

那我们该如何验证这是不是正解呢？

方法其实很简单，记得刚才的公式就行，$\mathrm{A} \times A^{-1}=\mathrm{I}$。现在我们就代入公式来验证一下，$A$和它的逆矩阵相乘，通过刚才的算法最终得出的结果是单位矩阵。

$$
A \times A^{-1}=\left[\begin{array}{llll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]^{-1}=\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{lll}
\frac{a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{-a_{12}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} \\
\frac{-a_{21}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
\frac{a_{11} \times a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{12} \times(-a_{21})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{11} \times(-a_{12})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{12} \times a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} \\
\frac{a_{21} \times a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{22} \times(-a_{21})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{21} \times(-a_{12})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{22} \times a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{lll}
1 & 0 \\
0 & 1
\end{array}\right]
$$

这里有一点需要特别说明，不是每一个矩阵都是可逆的。如果一个矩阵是可逆的，那这个矩阵我们叫做**非奇异矩阵**，如果一个矩阵是不可逆的，那这个矩阵我们就叫做**奇异矩阵**，而且如果一个矩阵可逆，那它的逆矩阵必然是唯一的。

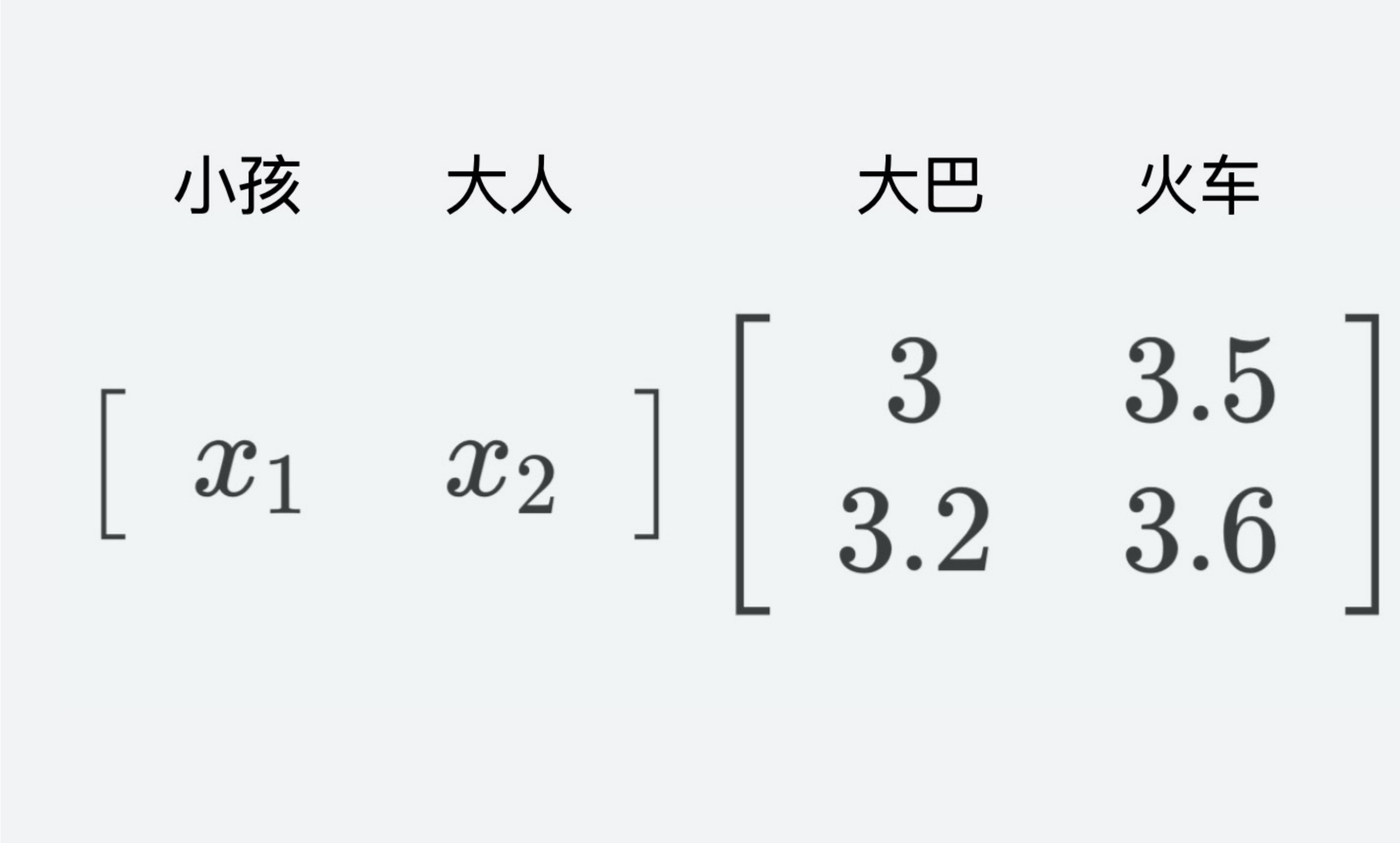
还记得行列式$a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}$吗？如果我们要证明矩阵是可逆的，只要证明行列式不等于零就行。更高阶的逆矩阵的算法也是一样的原理。

最后，我想通过一个现实生活中的案例来让你更多地了解逆矩阵。

一个旅游团由孩子和大人组成，去程他们一起做大巴，每个孩子的票价3元，大人票价3.2元，总共花费118.4元。回程一起做火车，每个孩子的票价3.5元，大人票价3.6元，总共花费

135.2元。请问旅游团里有多少小孩和大人？

首先，我们设置一些矩阵，组成线性方程$XA=B$。



要解X，我们就要先计算A的逆矩阵A^{-1}：

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{cc}
3 & 3.5 \\
3.2 & 3.6
\end{array}\right]^{-1}=\frac{1}{3 \times 3.6-3.5 \times 3.2}\left[\begin{array}{cc}
3.6 & -3.5 \\
-3.2 & 3
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
-9 & 8.75 \\
8 & -7.5
\end{array}\right]
$$

接下来再计算$X=B A^{-1}$：

$$
\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
118.4 & 135.2
\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}
-9 & 8.75 \\
8 & -7.5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
16 & 22
\end{array}\right]
$$

最终，我们得出这个旅游团有16个小孩和22个大人。

这也是解线性方程组的一种方法，类似这样的计算被广泛应用在各领域中，比如建筑工程、游戏和动画的3D效果上。虽然现在有很多程序包封装了这类数学计算的底层实现，但如果你能很好地理解这些概念，就可以为编程或算法调优打下坚实的基础。

Last but not least，方程次序很重要，也就是说，$AX=B$和$XA=B$的结果是不同的，这个一定要牢记哦！

转置矩阵

一般伴随逆矩阵之后出现的就是转置矩阵。在计算机图形图像处理中，如果要对一个物体进行旋转、平移、缩放等操作，就要对描述这个物体的所有矩阵进行运算，矩阵转置就是这类运算之一，而矩阵的转置在三维空间中的解释就相当于“得到关于某个点对称的三维立体”。所以，转置矩阵的定义很简单。

将矩阵的行列互换，得到的新矩阵就叫做转置矩阵（transpose）。转置矩阵的行列式不变。我们把$m×n$矩阵A的行列互换，得到转置矩阵A^{T}。

$$
A=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

$$
A^{T}=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m 1} \\
a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m 2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{1 n} & a_{2 n} & \ldots & a_{m n}

\end{array}\right]
$$

最后，为了方便你理解，我们再总结一下逆矩阵和转置矩阵的性质。你不用死记硬背，重在理解。

1. 矩阵和自身逆矩阵相乘得道单位矩阵，$A A^{-1}=I=A^{-1} A$；
2. $A$$B$两矩阵相乘的逆，等于逆矩阵$B$和逆矩阵$A$相乘，这里强调一下乘的顺序很重要，$(A B)^{-1}=B^{-1} A^{-1}$；
3. AB两矩阵相加后的逆矩阵，不等于各自逆矩阵的相加， $(A+B)^{-1} \neq A^{-1}+B^{-1}$；
4. 矩阵转置的转置还是它本身，$\left(A^{T}\right)^{\mathrm{T}}=A$；
5. AB两矩阵相加后的转置矩阵，等于各自转置矩阵的相加，$(A+B)^{T}=A^{T}+B^{T}$；
6. AB两矩阵相乘后的转置矩阵，等于转置矩阵B和转置矩阵A的相乘，这里再次强调乘的顺序很重要，$(A B)^{T}=B^{T} A^{T}$。

本节小结

好了，到这里矩阵这一讲就结束了，最后我再带你总结一下前面讲解的内容。

今天的知识，你只需要知道矩阵是线性方程组的另一种表达，了解和掌握矩阵的定义和性质就足够了。当然，矩阵还有很多内容，但我认为掌握了我讲的这些内容后，就为以后的一些矩阵应用场景打下了坚实的数学基础，也是下一讲的解线性方程组的前置知识。

线性代数练习场

对于10维列向量$x=\left(x_{1}, \ldots, x_{10}\right)^{T}$， $v=\left(v_{1}, \ldots, v_{10}\right)^{T}$，如果要计算$y=x x^{T}\left(I+v v^{T}\right) x$，其中$I$是10阶单位矩阵。你会怎么做？

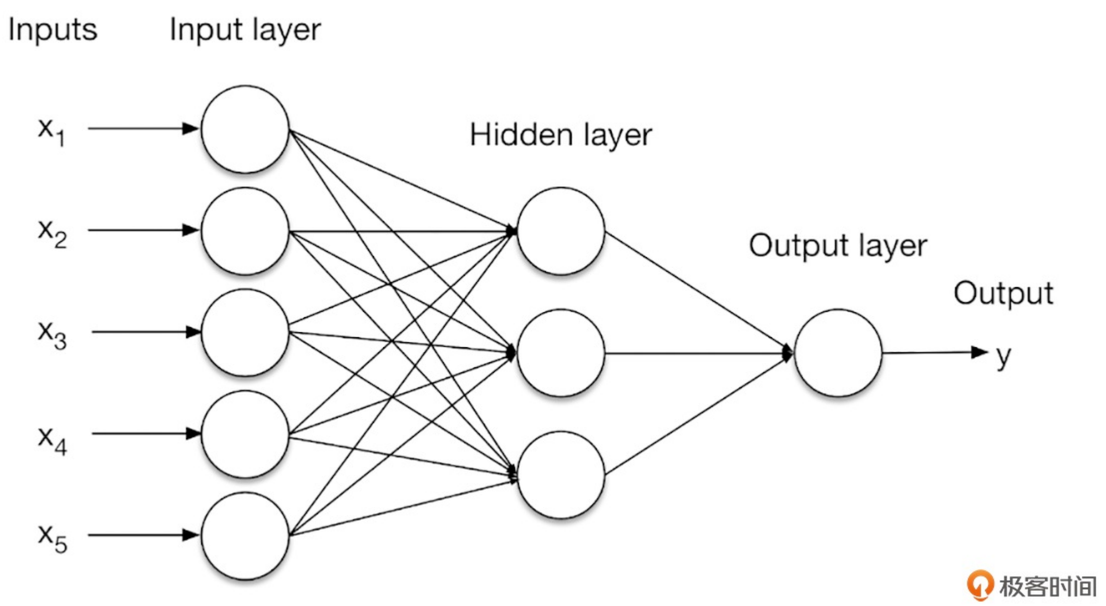
友情提醒，这里有多种方式解题。你能不能找到一个最简单的方法来解这道题？虽然结果很重要，但我想说的是过程更重要，而且往往解题过程不同，从计算机角度来说，运算的效率会有极大的不同。

欢迎你在留言区晒出你的运算过程和结果。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数，今天我们要讲的内容是“矩阵”。

在开始学习之前，我想先问你个问题，你觉得，学习矩阵有什么用呢？你可以先自己想一想。之后我们讲任何一个知识的时候，你都可以从这个角度出发，自己先思考一下，这样有助于你对所学内容理解得更深刻。

对于刚才那个问题，我的答案很简单，就一句话，从我们程序员的角度去理解的话，**矩阵可以极大地提高计算机的运算效率**。怎么说呢？我给你举一个例子。在机器学习中（特别是深度学习，或者更具体一点，神经网络），并行计算是非常昂贵的。



上图是一个典型的神经网络架构，在这时候，矩阵就能发挥用武之地了，计算H隐藏层输出的公式是：$H = f(W.x + b)$，其中W是权重矩阵，f是激活函数，b是偏差，x是输入层矩阵。而这个计算过程就叫做**向量化**（Vectorization），这也是GPU在深度学习中非常重要的原因，因为GPU非常擅长做类似矩阵乘之类的运算。

$$
X=\left|\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right|
$$

$$
W=\left|\begin{array}{ll}
w_{1} & w_{2} \\
w_{4} & w_{5} \\
x_{3} & w_{6}
\end{array}\right|
$$

$$
H=f\left(\left|\begin{array}{ll}
w_{1} & w_{2} \\
w_{4} & w_{5} \\
x_{3} & w_{6}
\end{array}\right|\left|\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right|+b\right)
$$

不过，矩阵也不仅仅局限于神经网络的应用，同时它也可以用在计算机图形图像的应用中，比如，三维物体从取景到屏幕的显示，就需要经历一系列的空间变换，才能生成二维图像显示在显示器上。在这个计算过程中，我们都需要用到矩阵。

矩阵是非常实用的，但它正式作为数学中的研究对象出现，其实是在行列式的研究发展起来之后。英国数学家 Arthur Cayley 被公认为矩阵论的创立人，他提出的矩阵概念可能来自于行列式。但我相信另一种说法，提出矩阵是为了更简单地表达线性方程组，也就是说，矩阵是线性方程组的另一种表达。

矩阵的基本概念

线性方程组的概念很简单，上节我们已经简单提过。你在小学或中学肯定也学过二元一次方程和二元一次方程组。

$$ax+by=c$$

$$
\left\{\begin{array}{l}
a_{1} x+b_{1} y+C_{1}=0 \\
a_{2} x+b_{2} y+C_{2}=0
\end{array}\right.
$$

在这样一个方程组中，$a1$、$a2$、$b1$、$b2$不能同时为0。当我们把二元一次方程组再扩展一下，变成多元一次方程组时，我们就能得到线性方程组的一般表达，即$AX=B$。

$$
\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.
$$

于是，这个线性方程组的所有系数就构成了一个$m×n$的m行n列矩阵：

$$
A=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

我们把A称为该方程组的系数矩阵，而当我们把等式右边的常数b放入矩阵后，就是下面这样：

$$

$$
\widetilde{A}=\left[\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} & b_{1} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} & b_{2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n} & b_{m}
\end{array}\right]
$$

这样我们就得到了A矩阵的增广矩阵$\widetilde{A}$，可以表示为(A, B)，这里的B表示的是方程组常数项所构成的列向量，也就是$m×1$的m行1列矩阵：

$$
B=\left|\begin{array}{l}
b_{1} \\
b_{2} \\
\cdots \\
b_{m}
\end{array}\right|
$$

如果设X为$n×1$的n行1列矩阵：

$$
X=\left|\begin{array}{c}
x_{1} \\
x_{2} \\
\cdots \\
x_{n}
\end{array}\right|
$$

那么线性方程组A，就可以表示为$AX=B$的矩阵形式。如果我们再换一种表示形式，设：$a_{1} ,a_{2},\ldots, a_{n},\beta$表示增广矩阵$\widetilde{A}$的列向量，则线性方程组$A$又可表示为$a_{1} x_{1}+a_{2} x_{2}+\cdots+a_{n} x_{n}=β$。

线性方程组的矩阵和向量形式都是线性方程组的其他表达形式。在工作中，你可以用它们来简化求解，甚至可以提升计算效率，就如之前提到的神经网络的隐藏层的输出计算、图形图像的三维空间变换。在数学中也是同样的，你可以经常运用它们来简化求解。具体线性方程组求解的内容比较多，我们下一节课再来详细讲解求解过程。

通过前面的讲解，我相信你对矩阵有了一定的了解，现在我们再回头来看看矩阵的定义吧。

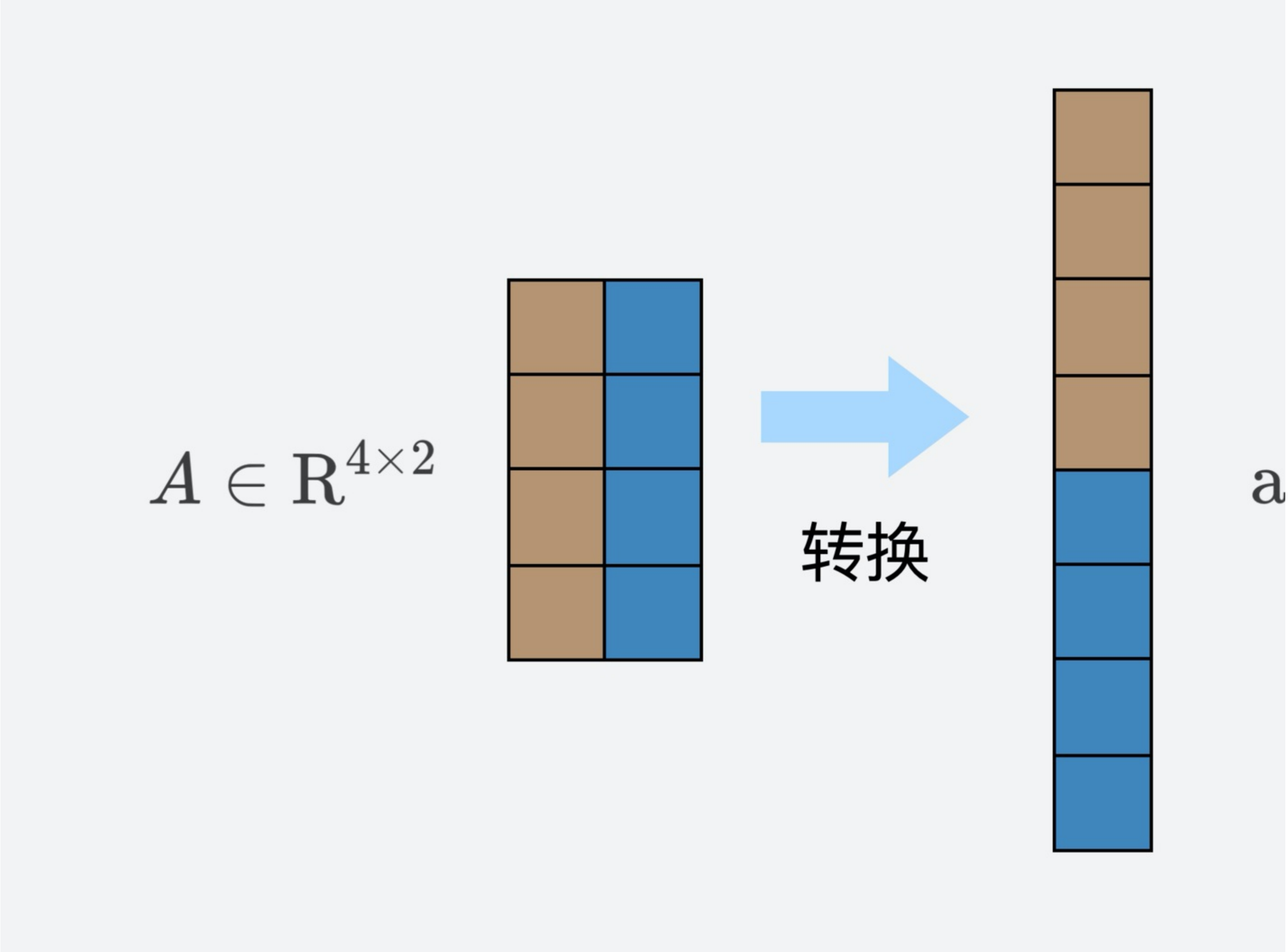
矩阵的定义是：一个(m, n)矩阵A，是由$m×n$个元素组成，m和n是实数，其中元素$a_{i j}, \mathrm{i}=1, \ldots, \mathrm{m}, \mathrm{j}=1, \ldots, \mathrm{n}$按$m$行$n$列的矩形排布方式后可以形成矩阵$A$：

$$
A=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

其中$a_{i j}$属于实数或复数，在我们的场景中是实数R，按通常的惯例，$(1, n)$矩阵叫做行，$(m, 1)$矩阵叫做列，这些特殊的矩阵叫做行或列向量。

定义完矩阵后，我接着讲一个比较有趣的概念，矩阵转换（Matrix transformation）。矩阵转换经常被用在计算机图形图像的转换中，比如，一张彩色图片从RGB角度来说是三维的，如果要转换成灰度图片，也就是一维图片，那就要做矩阵转换。

我们来看一下矩阵转换的过程。设$\mathrm{R}^{m \times n}$是实数矩阵(m, n)的集合，$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$可以表示成另一种形式 $a \in \mathrm{R}^{mn}$。我们把矩阵的n列堆叠成一个长向量后完成转换。这个转换也叫做reshape，其实就是重新调整原矩阵的行数、列数和维数，但是元素个数不变。



矩阵的运算

了解了矩阵的基本定义后，我们才能进入矩阵的运算环节，就是矩阵的加和乘。

加运算很简单，两个矩阵$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$，$B \in \mathrm{R}^{m \times n}$的加运算其实就是矩阵各自元素的加。

$$
A+B=\left[\begin{array}{ccc}
a_{11}+b_{11} & \ldots & a_{1 n}+b_{1 n} \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
a_{m 1}+b_{m 1} & \ldots & a_{m n}+b_{m n}
\end{array}\right] \in R^{m \times n}
$$

我推荐你使用NumPy的einsum来高效地做这类运算，因为它在速度和内存效率方面通常可以超越我们常见的array函数。

```
C= np.einsum('il, lj', A, B)
```

接下来，我们一起来看看矩阵的乘。这里你需要注意，矩阵的乘和通常意义上"数之间的乘"不同，矩阵的乘有多种类型，这里我讲三种最普遍，也是在各领域里用得最多的矩阵乘。

1.普通矩阵乘

普通矩阵乘是应用最广泛的矩阵乘，两个矩阵$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$，$B \in \mathrm{R}^{n \times k}$，普通矩阵则乘可以表示为$C=A B \in R^{m \times k}$，$C$中元素的计算规则是矩阵$A$、$B$对应两两元素乘积之和。

$$
c_{i j}=\sum_{k=1}^{n} a_{i k} b_{k j}, i=1, \ldots, m, j=1, \ldots, l
$$

我们举例来说明。C的第一个元素$c_{11}=a_{11} \times b_{11}+a_{12} \times b_{21}+a_{13} \times b_{31}=1 \times 1+2 \times 2+3 \times 3$。

$$
C=A B=\left[\begin{array}{lll}
1 & 2 & 3 \\
4 & 5 & 6
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
1 & 4 \\
2 & 5 \\
3 & 6
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{lll}
1 \times 1+2 \times 2+3 \times 3 & 1 \times 4+2 \times 5+3 \times 6 \\
4 \times 1+5 \times 2+6 \times 3 & 4 \times 4+5 \times 5+6 \times 6
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
14 & 32 \\
32 & 77
\end{array}\right]
$$

这里需要特别注意的是，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，例如，一个$n×k$矩阵A和一个$k×m$矩阵B相乘，最后得出$n×m$矩阵C，而这里的k就是相邻阶数。

$$AB=C$$

但反过来B和A相乘就不行了，因为相邻阶数m不等于n。

2.哈达玛积

哈达玛积理解起来就很简单了，就是矩阵各对应元素的乘积，$c_{i j}=a_{i j} \times b_{i j}$ 。举个例子：

$$
C=A^{*} B=\left[\begin{array}{ll}
1 & 2 \\
4 & 5
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
1 & 4 \\
2 & 5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
1 * 1 & 2 * 4 \\
4 * 2 & 5 * 5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
1 & 8 \\
8 & 25
\end{array}\right]
$$

哈达玛积其实在数学中不常看到，不过，在编程中哈达玛积非常有用，因为它可以用来同时计算多组数据的乘积，计算效率很高。

3.克罗内克积

克罗内克积是以德国数学家利奥波德·克罗内克（Leopold Kronecker）的名字命名的。它可以应用在解线性矩阵方程和图像处理方面，当然从更时髦的角度说，它还能用在量子信息领域，我们也称之为直积或张量积。

和普通矩阵乘和哈达玛积不同的是，克罗内克积是两个任意大小矩阵间的运算，表示为$A×B$，如果A是一个$m × n$的矩阵，而B是一个$p×q$的矩阵，克罗内克积则是一个$mp×nq$的矩阵。

接下来我们需要定义一个**在矩阵的乘法中起着特殊作用**的矩阵，它就是**单位矩阵**。高等代数中，在求解相应的矩阵时，若添加单位矩阵，通过初等变换进行求解，往往可以使问题变得简单。按照百度百科的解释，单位矩阵如同数的乘法中的1，这种矩阵就被称为单位矩阵。它是个方阵，从左上角到右下角的对角线，也就是主对角线上的元素均为1，除此以外全都为0。

在线性代数中，大小为n的单位矩阵就是在主对角线上均为1，而其他地方都是0的$n×n$的方阵，它用I_{n}表示，表达时为了方便可以忽略阶数，直接用I来表示：

$$
I_{1}=[1], I_{2}=\left[\begin{array}{ll}
1 & 0 \\
0 & 1
\end{array}\right], I_{3}=\left[\begin{array}{lll}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{array}\right], \ldots, I_{n}=\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 1 & \ldots & 0 \\
. & . & \ldots & . \\
. & . & . & . \\
0 & 0 & \ldots & 1
\end{array}\right]
$$

矩阵的性质

在了解了矩阵加和乘，以及单位矩阵后，我们是时候来看一看矩阵的性质了。了解矩阵的性质是进行矩阵计算的前提，就像我们小时候学加减乘除四则运算法则时那样。所以，这块内容对你来说应该不难，你作为了解就好，重点是之后的运算。

1.结合律

任意实数$m×n$矩阵A，$n×p$矩阵B，$p×q$矩阵C之间相乘，满足结合律$(AB)C=A(BC)$。这个很好理解，我就不多说了。

$$\forall A \in R^{m \times n}, B \in R^{n \times p}, C \in R^{p \times q}:(A B) C=A(B C)$$

2.分配律

任意实数$m×n$矩阵A和B，$n×p$矩阵C和D之间相乘满足分配律$(A+B)C=AC+BC$，$A(C+D)=AC+AD$。

$$
\forall \mathrm{A}, B \in \mathrm{R}^{m \times n}, C, D \in \mathrm{R}^{n \times p}:(A+B) C=A C+B C, A(C+D)=A C+A D
$$

3.单位矩阵乘

任意实数$m×n$矩阵A和单位矩阵之间的乘，等于它本身A。

$$
\forall A \in R^{m \times n}: I_{m} A=A I_{n}=A
$$

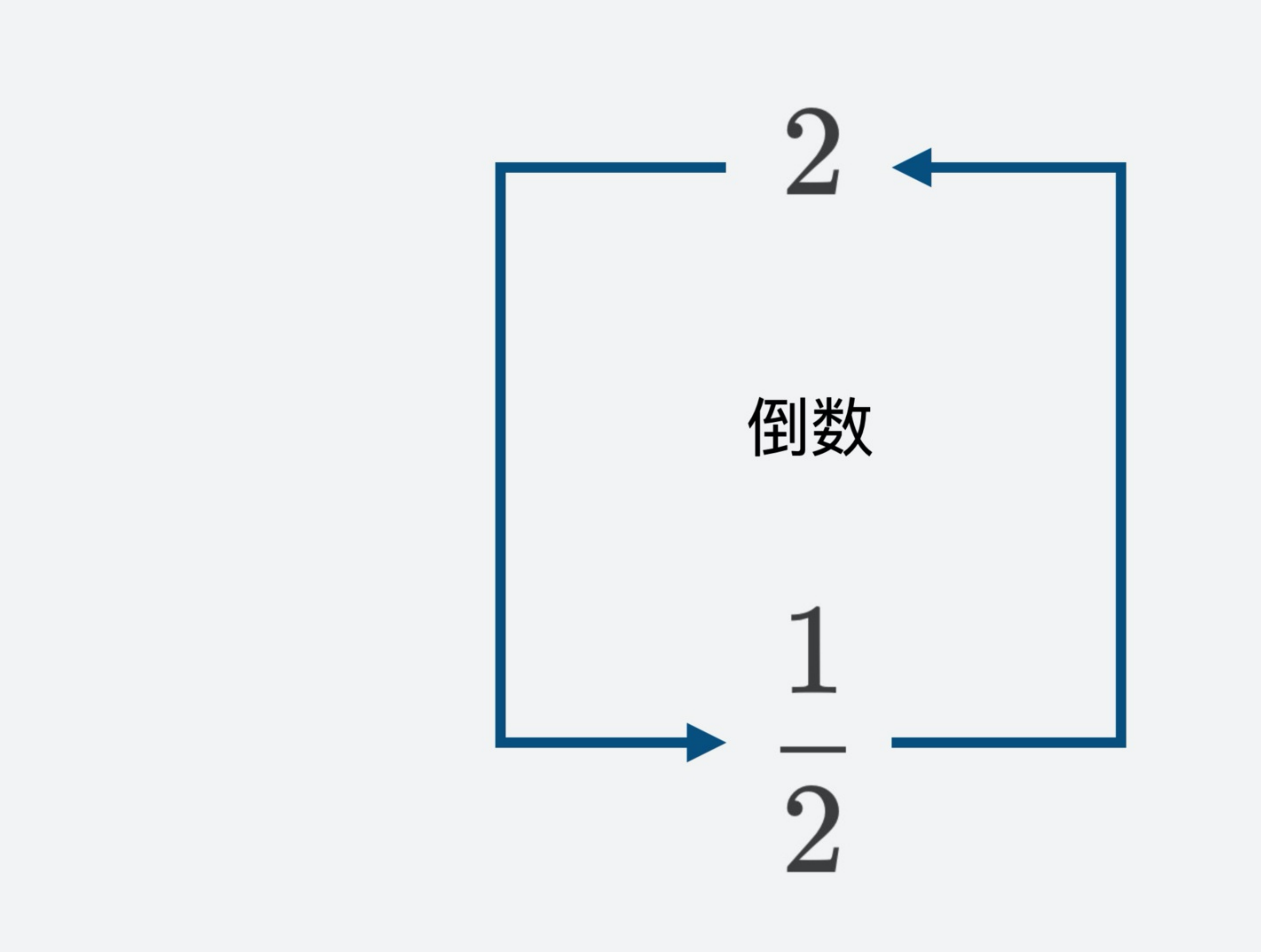
注意，这里的行和列不同，$m \neq n$意味着，根据矩阵乘，左乘和右乘单位矩阵也不同，也就是$I_{m} \neq I_{n}$。

逆矩阵与转置矩阵

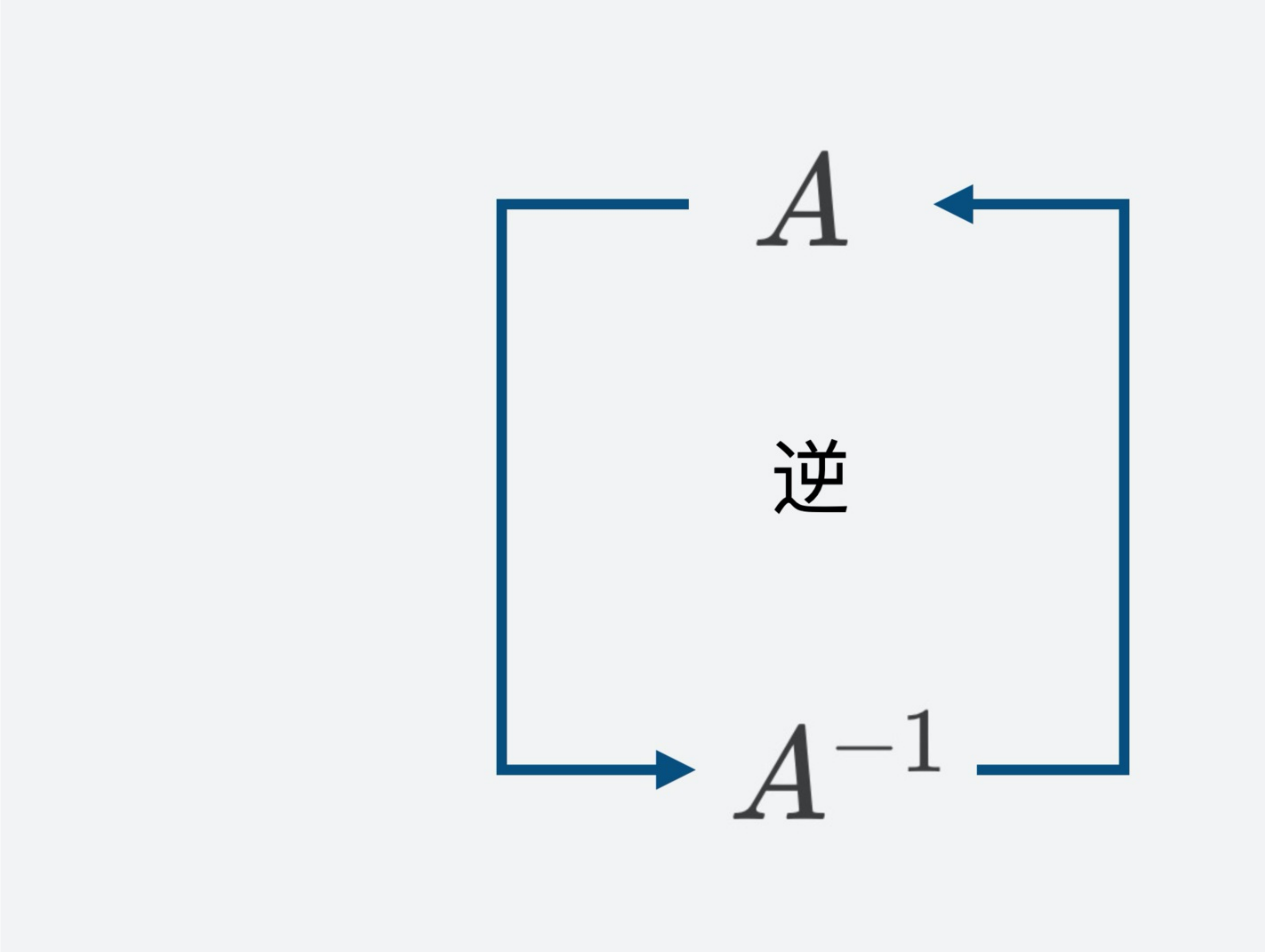
了解矩阵基本概念、运算，以及性质后，我来讲一讲矩阵应用中的两个核心内容——逆矩阵和转置矩阵。逆矩阵和转置矩阵在实际应用中大有用处，比如：坐标系中的图形变换运算。我们先来看下什么是逆矩阵。

逆矩阵

下面这个图你应该非常熟悉了，图中表现的是数字的倒数，2的倒数是$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$的倒数是2。



其实逆矩阵也有着类似的概念，只不过是写法不一样，我们会把逆矩阵写成A^{-1}。那为什么不是$\frac{1}{A}$呢？那是因为数字1无法被矩阵除。



我们知道，2乘以它的倒数$\frac{1}{2}$等于1。同样的道理，A乘以它的逆矩阵A^{-1}就等于单位矩阵，即$\mathrm{A} \times A^{-1}=\mathrm{I}$（$I$即单位矩阵），反过来也一样，$\mathrm{A}^{-1} \times A=\mathrm{I}$。

为方便你理解，我用一个2×2矩阵A来解释一下逆矩阵的算法。首先，我们交换a_{11}和a_{22}的位置，然后在a_{12}和a_{21}前加上负号，最后除以行列式$a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}$。

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]^{-1}=\frac{1}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}\left[\begin{array}{cc}
a_{22} & -a_{12} \\
-a_{21} & a_{11}
\end{array}\right]
$$

那我们该如何验证这是不是正解呢？

方法其实很简单，记得刚才的公式就行，$\mathrm{A} \times A^{-1}=\mathrm{I}$。现在我们就代入公式来验证一下，$A$和它的逆矩阵相乘，通过刚才的算法最终得出的结果是单位矩阵。

$$
A \times A^{-1}=\left[\begin{array}{llll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]^{-1}=\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{lll}
\frac{a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{-a_{12}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} \\
\frac{-a_{21}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
\frac{a_{11} \times a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{12} ×(-a_{21})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{11} ×(-a_{12})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{12} \times a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} \\
\frac{a_{21} \times a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{22} ×(-a_{21})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{21} ×(-a_{12})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{22} × a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{lll}
1 & 0 \\
0 & 1
\end{array}\right]
$$

这里有一点需要特别说明，不是每一个矩阵都是可逆的。如果一个矩阵是可逆的，那这个矩阵我们叫做**非奇异矩阵**，如果一个矩阵是不可逆的，那这个矩阵我们就叫做**奇异矩阵**，而且如果一个矩阵可逆，那它的逆矩阵必然是唯一的。

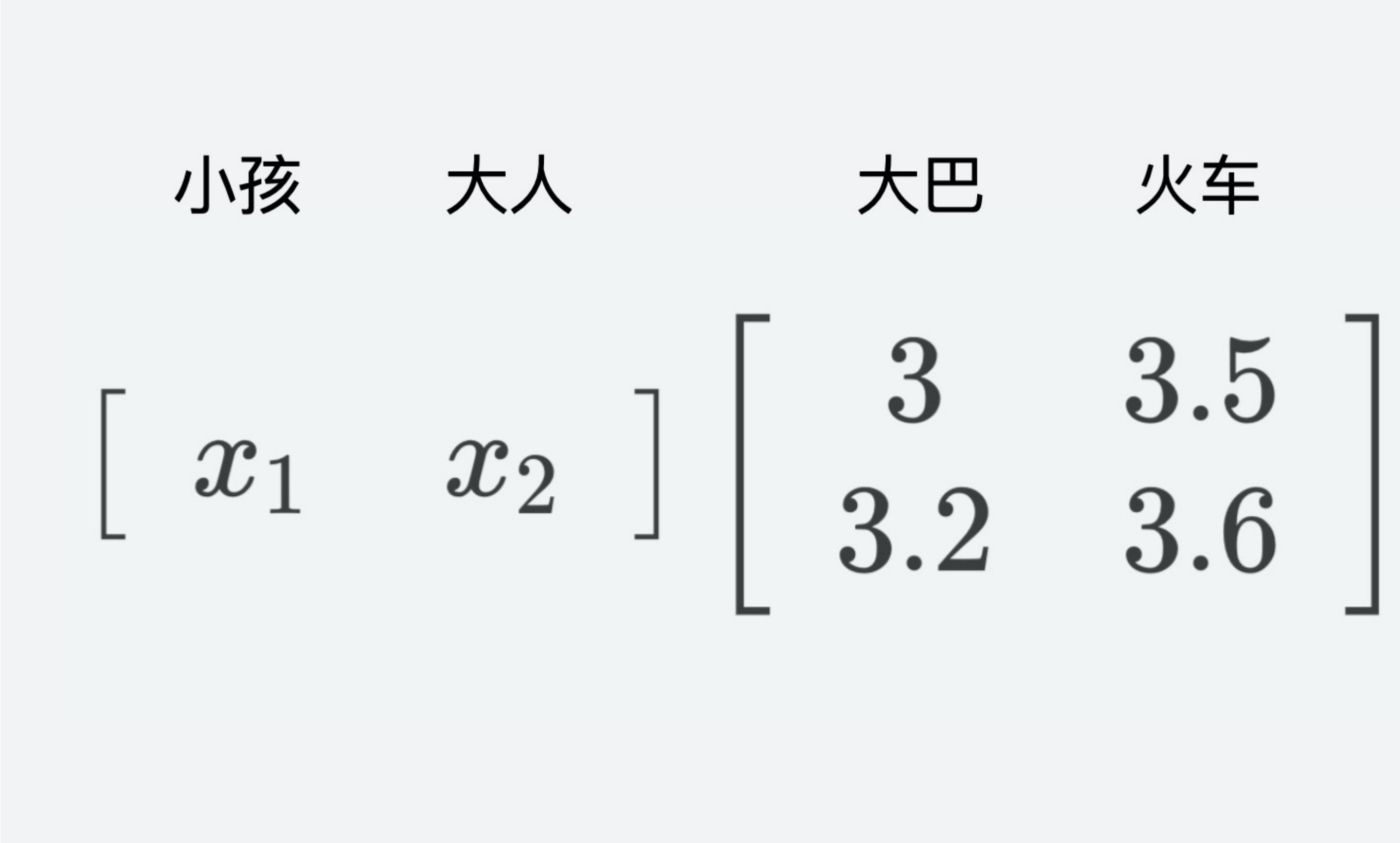
还记得行列式$a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}$吗？如果我们要证明矩阵是可逆的，只要证明行列式不等于零就行。更高阶的逆矩阵的算法也是一样的原理。

最后，我想通过一个现实生活中的案例来让你更多地了解逆矩阵。

一个旅游团由孩子和大人组成，去程他们一起做大巴，每个孩子的票价3元，大人票价3.2元，总共花费118.4元。回程一起做火车，每个孩子的票价3.5元，大人票价3.6元，总共花费

135.2元。请问旅游团里有多少小孩和大人？

首先，我们设置一些矩阵，组成线性方程$XA=B$。



要解X，我们就要先计算A的逆矩阵A^{-1}：

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{cc}
3 & 3.5 \\
3.2 & 3.6
\end{array}\right]^{-1}=\frac{1}{3 \times 3.6-3.5 \times 3.2}\left[\begin{array}{cc}
3.6 & -3.5 \\
-3.2 & 3
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
-9 & 8.75 \\
8 & -7.5
\end{array}\right]
$$

接下来再计算$X=B A^{-1}$：

$$
\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
118.4 & 135.2
\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}
-9 & 8.75 \\
8 & -7.5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
16 & 22
\end{array}\right]
$$

最终，我们得出这个旅游团有16个小孩和22个大人。

这也是解线性方程组的一种方法，类似这样的计算被广泛应用在各领域中，比如建筑工程、游戏和动画的3D效果上。虽然现在有很多程序包封装了这类数学计算的底层实现，但如果你能很好地理解这些概念，就可以为编程或算法调优打下坚实的基础。

Last but not least，方程次序很重要，也就是说，$AX=B$和$XA=B$的结果是不同的，这个一定要牢记哦！

转置矩阵

一般伴随逆矩阵之后出现的就是转置矩阵。在计算机图形图像处理中，如果要对一个物体进行旋转、平移、缩放等操作，就要对描述这个物体的所有矩阵进行运算，矩阵转置就是这类运算之一，而矩阵的转置在三维空间中的解释就相当于“得到关于某个点对称的三维立体”。所以，转置矩阵的定义很简单。

将矩阵的行列互换，得到的新矩阵就叫做转置矩阵（transpose）。转置矩阵的行列式不变。我们把$m×n$矩阵A的行列互换，得到转置矩阵A^{T}。

$$
A=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

$$
A^{T}=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m 1} \\
a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m 2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{1 n} & a_{2 n} & \ldots & a_{m n}

\end{array}\right]
$$

最后，为了方便你理解，我们再总结一下逆矩阵和转置矩阵的性质。你不用死记硬背，重在理解。

1. 矩阵和自身逆矩阵相乘得道单位矩阵，$A A^{-1}=I=A^{-1} A$；
2. $A$$B$两矩阵相乘的逆，等于逆矩阵$B$和逆矩阵$A$相乘，这里强调一下乘的顺序很重要，$(A B)^{-1}=B^{-1} A^{-1}$；
3. AB两矩阵相加后的逆矩阵，不等于各自逆矩阵的相加， $(A+B)^{-1} \neq A^{-1}+B^{-1}$；
4. 矩阵转置的转置还是它本身，$\left(A^{T}\right)^{\mathrm{T}}=A$；
5. AB两矩阵相加后的转置矩阵，等于各自转置矩阵的相加，$(A+B)^{T}=A^{T}+B^{T}$；
6. AB两矩阵相乘后的转置矩阵，等于转置矩阵B和转置矩阵A的相乘，这里再次强调乘的顺序很重要，$(A B)^{T}=B^{T} A^{T}$。

本节小结

好了，到这里矩阵这一讲就结束了，最后我再带你总结一下前面讲解的内容。

今天的知识，你只需要知道矩阵是线性方程组的另一种表达，了解和掌握矩阵的定义和性质就足够了。当然，矩阵还有很多内容，但我认为掌握了我讲的这些内容后，就为以后的一些矩阵应用场景打下了坚实的数学基础，也是下一讲的解线性方程组的前置知识。

线性代数练习场

对于10维列向量$x=\left(x_{1}, \ldots, x_{10}\right)^{T}$， $v=\left(v_{1}, \ldots, v_{10}\right)^{T}$，如果要计算$y=x x^{T}\left(I+v v^{T}\right) x$，其中$I$是10阶单位矩阵。你会怎么做？

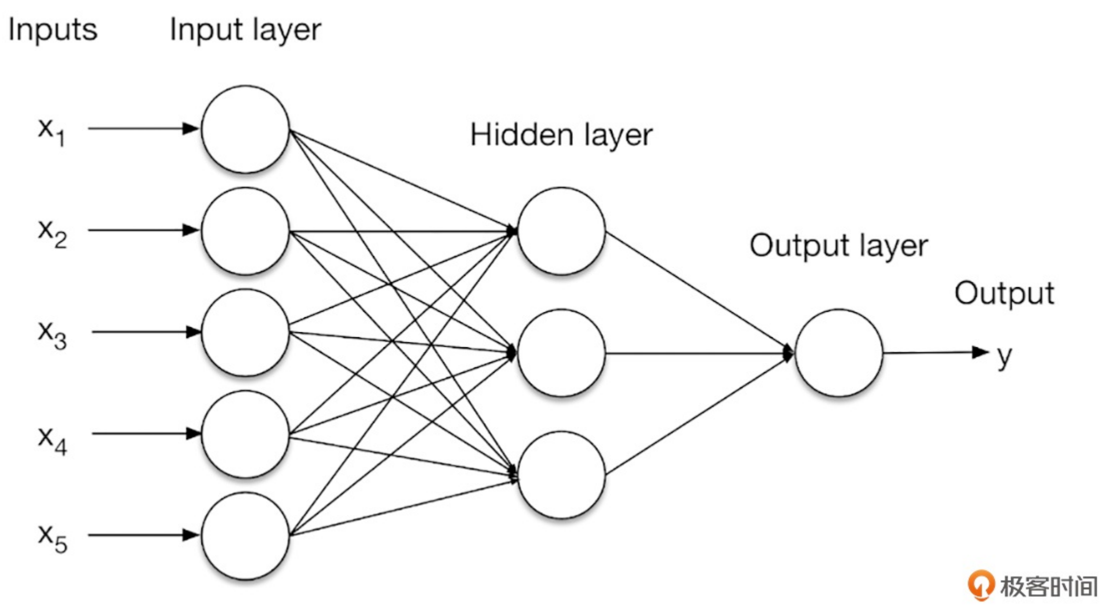
友情提醒，这里有多种方式解题。你能不能找到一个最简单的方法来解这道题？虽然结果很重要，但我想说的是过程更重要，而且往往解题过程不同，从计算机角度来说，运算的效率会有极大的不同。

欢迎你在留言区晒出你的运算过程和结果。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数，今天我们要讲的内容是“矩阵”。

在开始学习之前，我想先问你个问题，你觉得，学习矩阵有什么用呢？你可以先自己想一想。之后我们讲任何一个知识的时候，你都可以从这个角度出发，自己先思考一下，这样有助于你对所学内容理解得更深刻。

对于刚才那个问题，我的答案很简单，就一句话，从我们程序员的角度去理解的话，**矩阵可以极大地提高计算机的运算效率**。怎么说呢？我给你举一个例子。在机器学习中（特别是深度学习，或者更具体一点，神经网络），并行计算是非常昂贵的。



上图是一个典型的神经网络架构，在这时候，矩阵就能发挥用武之地了，计算H隐藏层输出的公式是：$H = f(W.x + b)$，其中W是权重矩阵，f是激活函数，b是偏差，x是输入层矩阵。而这个计算过程就叫做**向量化**（Vectorization），这也是GPU在深度学习中非常重要的原因，因为GPU非常擅长做类似矩阵乘之类的运算。

$$
X=\left|\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right|
$$

$$
W=\left|\begin{array}{ll}
w_{1} & w_{2} \\
w_{4} & w_{5} \\
x_{3} & w_{6}
\end{array}\right|
$$

$$
H=f\left(\left|\begin{array}{ll}
w_{1} & w_{2} \\
w_{4} & w_{5} \\
x_{3} & w_{6}
\end{array}\right|\left|\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right|+b\right)
$$

不过，矩阵也不仅仅局限于神经网络的应用，同时它也可以用在计算机图形图像的应用中，比如，三维物体从取景到屏幕的显示，就需要经历一系列的空间变换，才能生成二维图像显示在显示器上。在这个计算过程中，我们都需要用到矩阵。

矩阵是非常实用的，但它正式作为数学中的研究对象出现，其实是在行列式的研究发展起来之后。英国数学家 Arthur Cayley 被公认为矩阵论的创立人，他提出的矩阵概念可能来自于行列式。但我相信另一种说法，提出矩阵是为了更简单地表达线性方程组，也就是说，矩阵是线性方程组的另一种表达。

矩阵的基本概念

线性方程组的概念很简单，上节我们已经简单提过。你在小学或中学肯定也学过二元一次方程和二元一次方程组。

$$ax+by=c$$

$$
\left\{\begin{array}{l}
a_{1} x+b_{1} y+C_{1}=0 \\
a_{2} x+b_{2} y+C_{2}=0
\end{array}\right.
$$

在这样一个方程组中，$a1$、$a2$、$b1$、$b2$不能同时为0。当我们把二元一次方程组再扩展一下，变成多元一次方程组时，我们就能得到线性方程组的一般表达，即$AX=B$。

$$
\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.
$$

于是，这个线性方程组的所有系数就构成了一个$m×n$的m行n列矩阵：

$$
A=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

我们把A称为该方程组的系数矩阵，而当我们把等式右边的常数b放入矩阵后，就是下面这样：

$$

\widetilde{A}=\left[\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} & b_{1} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} & b_{2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n} & b_{m}
\end{array}\right]
$$

这样我们就得到了A矩阵的增广矩阵$\widetilde{A}$，可以表示为(A, B)，这里的B表示的是方程组常数项所构成的列向量，也就是$m\times 1$的m行1列矩阵：

$$
B=\left|\begin{array}{l}
b_{1} \\
b_{2} \\
\cdots \\
b_{m}
\end{array}\right|
$$

如果设X为$n\times 1$的n行1列矩阵：

$$
X=\left|\begin{array}{c}
x_{1} \\
x_{2} \\
\cdots \\
x_{n}
\end{array}\right|
$$

那么线性方程组A，就可以表示为$AX=B$的矩阵形式。如果我们再换一种表示形式，设：$a_{1},a_{2},\ldots, a_{n},\beta$表示增广矩阵$\widetilde{A}$的列向量，则线性方程组$A$又可表示为$a_{1} x_{1}+a_{2} x_{2}+\cdots+a_{n} x_{n}=\beta$。

线性方程组的矩阵和向量形式都是线性方程组的其他表达形式。在工作中，你可以用它们来简化求解，甚至可以提升计算效率，就如之前提到的神经网络的隐藏层的输出计算、图形图像的三维空间变换。在数学中也是同样的，你可以经常运用它们来简化求解。具体线性方程组求解的内容比较多，我们下一节课再来详细讲解求解过程。

通过前面的讲解，我相信你对矩阵有了一定的了解，现在我们再回头来看看矩阵的定义吧。

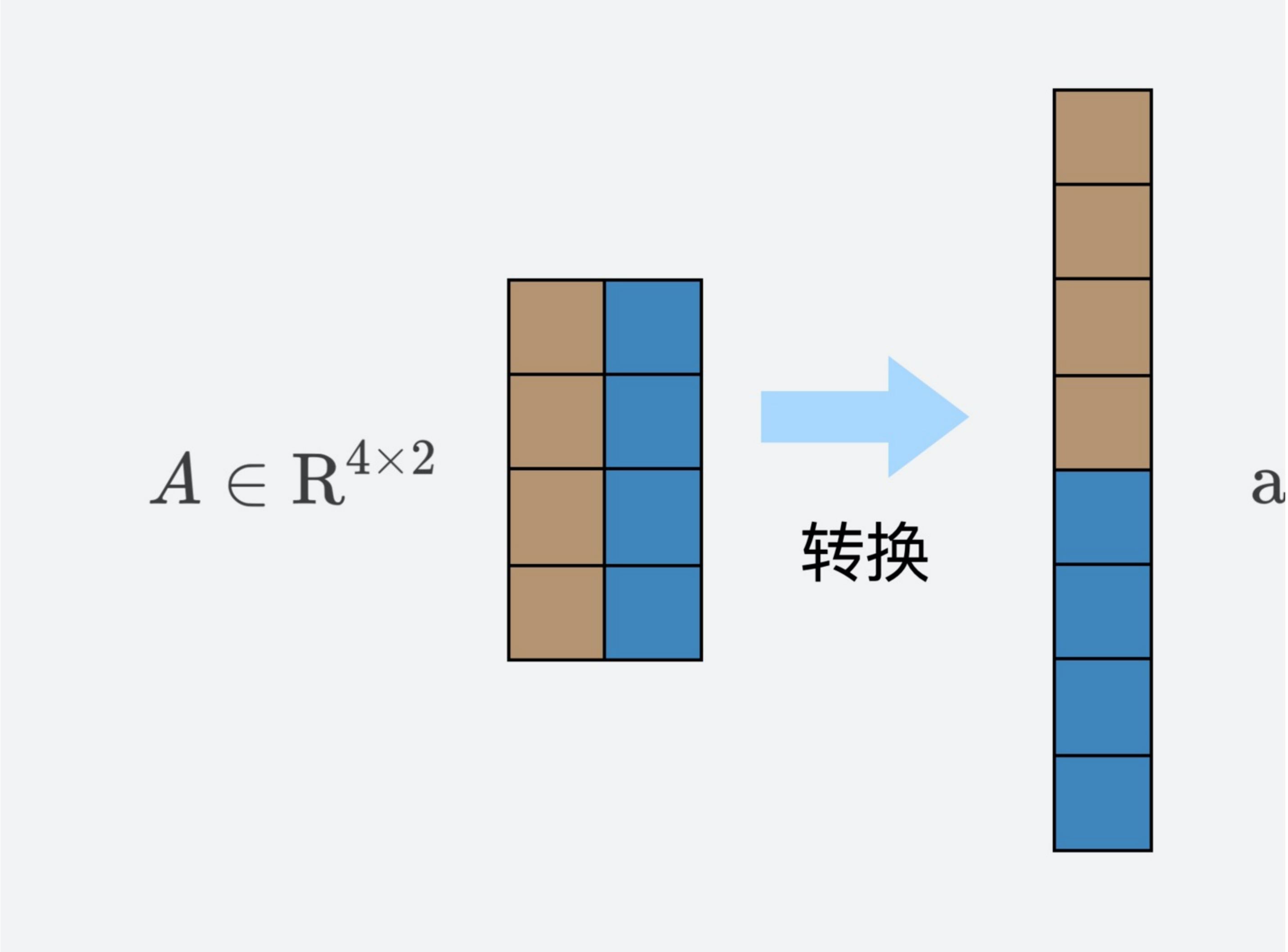
矩阵的定义是：一个(m, n)矩阵A，是由$m\times n$个元素组成，m和n是实数，其中元素$a_{i j}, \mathrm{i}=1, \ldots, \mathrm{m}, \mathrm{j}=1, \ldots, \mathrm{n}$按$m$行$n$列的矩形排布方式后可以形成矩阵$A$：

$$
A=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

其中$a_{i j}$属于实数或复数，在我们的场景中是实数R，按通常的惯例，$(1, n)$矩阵叫做行，$(m, 1)$矩阵叫做列，这些特殊的矩阵叫做行或列向量。

定义完矩阵后，我接着讲一个比较有趣的概念，矩阵转换（Matrix transformation）。矩阵转换经常被用在计算机图形图像的转换中，比如，一张彩色图片从RGB角度来说是三维的，如果要转换成灰度图片，也就是一维图片，那就要做矩阵转换。

我们来看一下矩阵转换的过程。设$\mathrm{R}^{m \times n}$是实数矩阵(m, n)的集合，$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$可以表示成另一种形式 $a \in \mathrm{R}^{mn}$。我们把矩阵的n列堆叠成一个长向量后完成转换。这个转换也叫做reshape，其实就是重新调整原矩阵的行数、列数和维数，但是元素个数不变。



矩阵的运算

了解了矩阵的基本定义后，我们才能进入矩阵的运算环节，就是矩阵的加和乘。

加运算很简单，两个矩阵$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$，$B \in \mathrm{R}^{m \times n}$的加运算其实就是矩阵各自元素的加。

$$
A+B=\left[\begin{array}{ccc}
a_{11}+b_{11} & \ldots & a_{1 n}+b_{1 n} \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
a_{m 1}+b_{m 1} & \ldots & a_{m n}+b_{m n}
\end{array}\right] \in R^{m \times n}
$$

我推荐你使用NumPy的einsum来高效地做这类运算，因为它在速度和内存效率方面通常可以超越我们常见的array函数。

```
C= np.einsum('il, lj', A, B)
```

接下来，我们一起来看看矩阵的乘。这里你需要注意，矩阵的乘和通常意义上"数之间的乘"不同，矩阵的乘有多种类型，这里我讲三种最普遍，也是在各领域里用得最多的矩阵乘。

1.普通矩阵乘

普通矩阵乘是应用最广泛的矩阵乘，两个矩阵$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$，$B \in \mathrm{R}^{n \times k}$，普通矩阵则乘可以表示为$C=A B \in R^{m \times k}$，$C$中元素的计算规则是矩阵$A$、$B$对应两两元素乘积之和。

$$
c_{i j}=\sum_{k=1}^{n} a_{i k} b_{k j}, i=1, \ldots, m, j=1, \ldots, l
$$

我们举例来说明。C的第一个元素$c_{11}=a_{11} \times b_{11}+a_{12} \times b_{21}+a_{13} \times b_{31}=1 \times 1+2 \times 2+3 \times 3$。

$$
C=A B=\left[\begin{array}{lll}
1 & 2 & 3 \\
4 & 5 & 6
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
1 & 4 \\
2 & 5 \\
3 & 6
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{lll}
1 \times 1+2 \times 2+3 \times 3 & 1 \times 4+2 \times 5+3 \times 6 \\
4 \times 1+5 \times 2+6 \times 3 & 4 \times 4+5 \times 5+6 \times 6
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
14 & 32 \\
32 & 77
\end{array}\right]
$$

这里需要特别注意的是，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，例如，一个$n \times k$矩阵A和一个$k \times m$矩阵B相乘，最后得出$n \times m$矩阵C，而这里的k就是相邻阶数。

$$AB=C$$

但反过来B和A相乘就不行了，因为相邻阶数m不等于n。

2.哈达玛积

哈达玛积理解起来就很简单了，就是矩阵各对应元素的乘积，$c_{i j}=a_{i j} \times b_{i j}$ 。举个例子：

$$
C=A^{*} B=\left[\begin{array}{ll}
1 & 2 \\
4 & 5
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
1 & 4 \\
2 & 5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
1 * 1 & 2 * 4 \\
4 * 2 & 5 * 5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
1 & 8 \\
8 & 25
\end{array}\right]
$$

哈达玛积其实在数学中不常看到，不过，在编程中哈达玛积非常有用，因为它可以用来同时计算多组数据的乘积，计算效率很高。

3.克罗内克积

克罗内克积是以德国数学家利奥波德·克罗内克（Leopold Kronecker）的名字命名的。它可以应用在解线性矩阵方程和图像处理方面，当然从更时髦的角度说，它还能用在量子信息领域，我们也称之为直积或张量积。

和普通矩阵乘和哈达玛积不同的是，克罗内克积是两个任意大小矩阵间的运算，表示为$A×B$，如果A是一个$m × n$的矩阵，而B是一个$p×q$的矩阵，克罗内克积则是一个$mp×nq$的矩阵。

接下来我们需要定义一个**在矩阵的乘法中起着特殊作用**的矩阵，它就是**单位矩阵**。高等代数中，在求解相应的矩阵时，若添加单位矩阵，通过初等变换进行求解，往往可以使问题变得简单。按照百度百科的解释，单位矩阵如同数的乘法中的1，这种矩阵就被称为单位矩阵。它是个方阵，从左上角到右下角的对角线，也就是主对角线上的元素均为1，除此以外全都为0。

在线性代数中，大小为n的单位矩阵就是在主对角线上均为1，而其他地方都是0的$n×n$的方阵，它用I_{n}表示，表达时为了方便可以忽略阶数，直接用I来表示：

$$
I_{1}=[1], I_{2}=\left[\begin{array}{ll}
1 & 0 \\
0 & 1
\end{array}\right], I_{3}=\left[\begin{array}{lll}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{array}\right], \ldots, I_{n}=\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 1 & \ldots & 0 \\
. & . & \ldots & . \\
. & . & . & . \\
0 & 0 & \ldots & 1
\end{array}\right]
$$

矩阵的性质

在了解了矩阵加和乘，以及单位矩阵后，我们是时候来看一看矩阵的性质了。了解矩阵的性质是进行矩阵计算的前提，就像我们小时候学加减乘除四则运算法则时那样。所以，这块内容对你来说应该不难，你作为了解就好，重点是之后的运算。

1.结合律

任意实数$m×n$矩阵A，$n×p$矩阵B，$p×q$矩阵C之间相乘，满足结合律$(AB)C=A(BC)$。这个很好理解，我就不多说了。

$$\forall A \in R^{m \times n}, B \in R^{n \times p}, C \in R^{p \times q}:(A B) C=A(B C)$$

2.分配律

任意实数$m×n$矩阵A和B，$n×p$矩阵C和D之间相乘满足分配律$(A+B)C=AC+BC$，$A(C+D)=AC+AD$。

$$
\forall \mathrm{A}, B \in \mathrm{R}^{m \times n}, C, D \in \mathrm{R}^{n \times p}:(A+B) C=A C+B C, A(C+D)=A C+A D
$$

3.单位矩阵乘

任意实数$m×n$矩阵A和单位矩阵之间的乘，等于它本身A。

$$
\forall A \in R^{m \times n}: I_{m} A=A I_{n}=A
$$

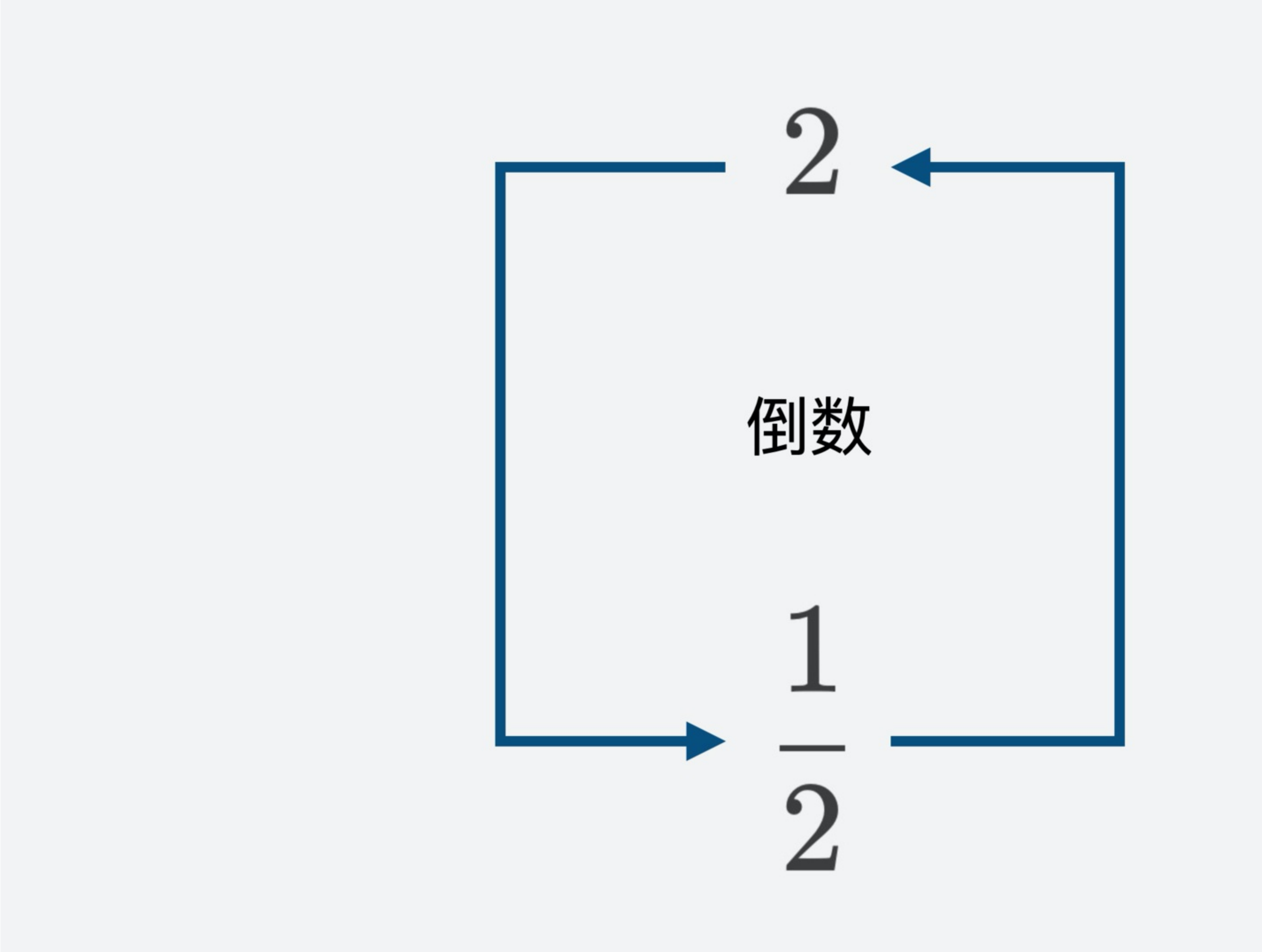
注意，这里的行和列不同，$m \neq n$意味着，根据矩阵乘，左乘和右乘单位矩阵也不同，也就是$I_{m} \neq I_{n}$。

逆矩阵与转置矩阵

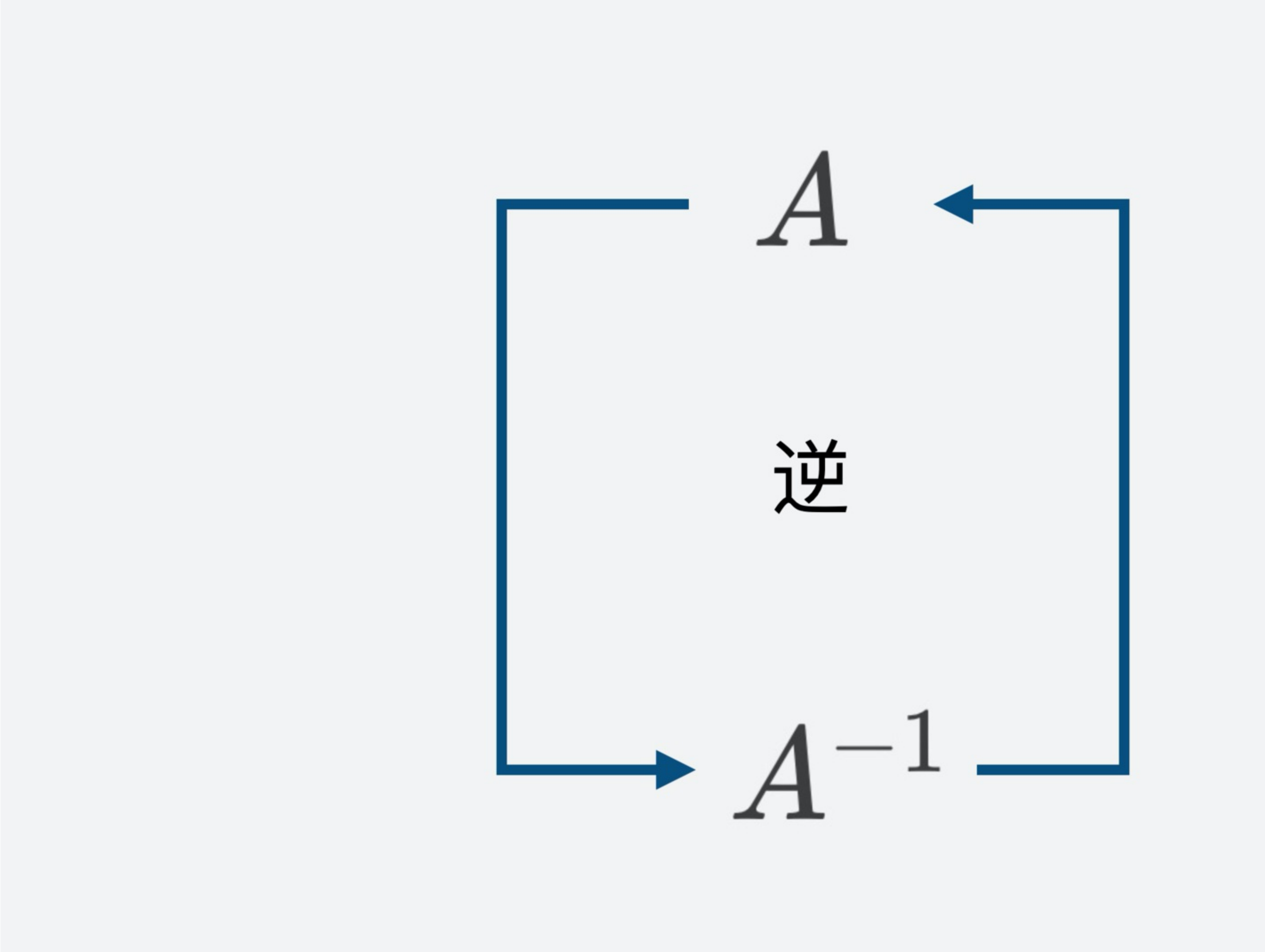
了解矩阵基本概念、运算，以及性质后，我来讲一讲矩阵应用中的两个核心内容——逆矩阵和转置矩阵。逆矩阵和转置矩阵在实际应用中大有用处，比如：坐标系中的图形变换运算。我们先来看下什么是逆矩阵。

逆矩阵

下面这个图你应该非常熟悉了，图中表现的是数字的倒数，2的倒数是$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$的倒数是2。



其实逆矩阵也有着类似的概念，只不过是写法不一样，我们会把逆矩阵写成A^{-1}。那为什么不是$\frac{1}{A}$呢？那是因为数字1无法被矩阵除。



我们知道，2乘以它的倒数$\frac{1}{2}$等于1。同样的道理，A乘以它的逆矩阵A^{-1}就等于单位矩阵，即$\mathrm{A} \times A^{-1}=\mathrm{I}$（$I$即单位矩阵），反过来也一样，$\mathrm{A}^{-1} \times A=\mathrm{I}$。

为方便你理解，我用一个2×2矩阵A来解释一下逆矩阵的算法。首先，我们交换a_{11}和a_{22}的位置，然后在a_{12}和a_{21}前加上负号，最后除以行列式$a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}$。

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]^{-1}=\frac{1}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}\left[\begin{array}{cc}
a_{22} & -a_{12} \\
-a_{21} & a_{11}
\end{array}\right]
$$

那我们该如何验证这是不是正解呢？

方法其实很简单，记得刚才的公式就行，$\mathrm{A} \times A^{-1}=\mathrm{I}$。现在我们就代入公式来验证一下，$A$和它的逆矩阵相乘，通过刚才的算法最终得出的结果是单位矩阵。

$$
A \times A^{-1}=\left[\begin{array}{llll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]^{-1}=\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{lll}
\frac{a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{-a_{12}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} \\
\frac{-a_{21}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
\frac{a_{11} \times a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{12} \times(-a_{21})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{11} \times(-a_{12})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{12} \times a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} \\
\frac{a_{21} \times a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{22} \times(-a_{21})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{21} \times(-a_{12})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{22} \times a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{lll}
1 & 0 \\
0 & 1
\end{array}\right]
$$

这里有一点需要特别说明，不是每一个矩阵都是可逆的。如果一个矩阵是可逆的，那这个矩阵我们叫做**非奇异矩阵**，如果一个矩阵是不可逆的，那这个矩阵我们就叫做**奇异矩阵**，而且如果一个矩阵可逆，那它的逆矩阵必然是唯一的。

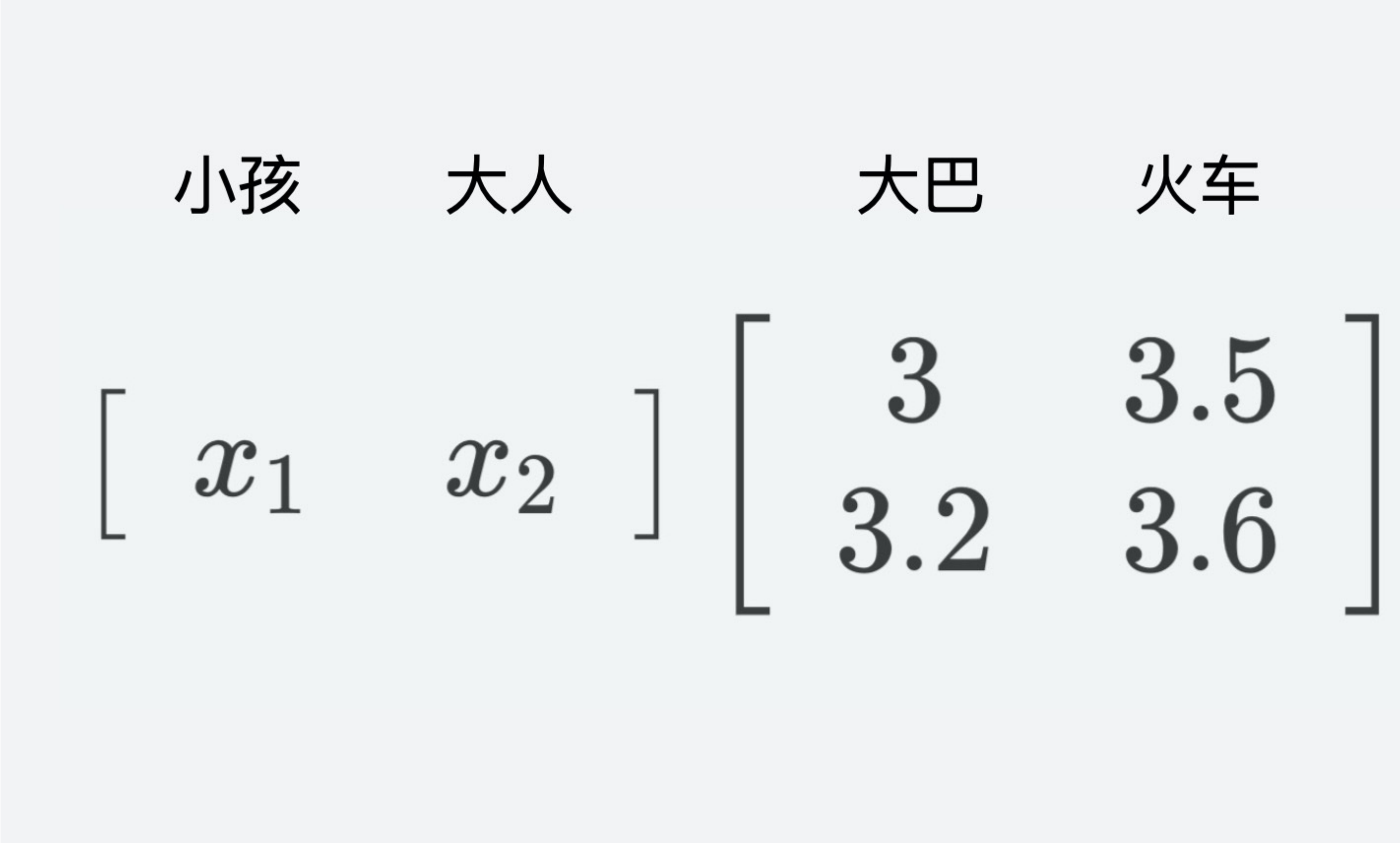
还记得行列式$a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}$吗？如果我们要证明矩阵是可逆的，只要证明行列式不等于零就行。更高阶的逆矩阵的算法也是一样的原理。

最后，我想通过一个现实生活中的案例来让你更多地了解逆矩阵。

一个旅游团由孩子和大人组成，去程他们一起做大巴，每个孩子的票价3元，大人票价3.2元，总共花费118.4元。回程一起做火车，每个孩子的票价3.5元，大人票价3.6元，总共花费

135.2元。请问旅游团里有多少小孩和大人？

首先，我们设置一些矩阵，组成线性方程$XA=B$。



要解X，我们就要先计算A的逆矩阵A^{-1}：

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{cc}
3 & 3.5 \\
3.2 & 3.6
\end{array}\right]^{-1}=\frac{1}{3 \times 3.6-3.5 \times 3.2}\left[\begin{array}{cc}
3.6 & -3.5 \\
-3.2 & 3
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
-9 & 8.75 \\
8 & -7.5
\end{array}\right]
$$

接下来再计算$X=B A^{-1}$：

$$
\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
118.4 & 135.2
\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}
-9 & 8.75 \\
8 & -7.5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
16 & 22
\end{array}\right]
$$

最终，我们得出这个旅游团有16个小孩和22个大人。

这也是解线性方程组的一种方法，类似这样的计算被广泛应用在各领域中，比如建筑工程、游戏和动画的3D效果上。虽然现在有很多程序包封装了这类数学计算的底层实现，但如果你能很好地理解这些概念，就可以为编程或算法调优打下坚实的基础。

Last but not least，方程次序很重要，也就是说，$AX=B$和$XA=B$的结果是不同的，这个一定要牢记哦！

转置矩阵

一般伴随逆矩阵之后出现的就是转置矩阵。在计算机图形图像处理中，如果要对一个物体进行旋转、平移、缩放等操作，就要对描述这个物体的所有矩阵进行运算，矩阵转置就是这类运算之一，而矩阵的转置在三维空间中的解释就相当于“得到关于某个点对称的三维立体”。所以，转置矩阵的定义很简单。

将矩阵的行列互换，得到的新矩阵就叫做转置矩阵（transpose）。转置矩阵的行列式不变。我们把$m×n$矩阵A的行列互换，得到转置矩阵A^{T}。

$$
A=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

$$
A^{T}=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m 1} \\
a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m 2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{1 n} & a_{2 n} & \ldots & a_{m n}

\end{array}\right]
$$

最后，为了方便你理解，我们再总结一下逆矩阵和转置矩阵的性质。你不用死记硬背，重在理解。

1. 矩阵和自身逆矩阵相乘得道单位矩阵，$A A^{-1}=I=A^{-1} A$；
2. $A$$B$两矩阵相乘的逆，等于逆矩阵$B$和逆矩阵$A$相乘，这里强调一下乘的顺序很重要，$(A B)^{-1}=B^{-1} A^{-1}$；
3. AB两矩阵相加后的逆矩阵，不等于各自逆矩阵的相加， $(A+B)^{-1} \neq A^{-1}+B^{-1}$；
4. 矩阵转置的转置还是它本身，$\left(A^{T}\right)^{\mathrm{T}}=A$；
5. AB两矩阵相加后的转置矩阵，等于各自转置矩阵的相加，$(A+B)^{T}=A^{T}+B^{T}$；
6. AB两矩阵相乘后的转置矩阵，等于转置矩阵B和转置矩阵A的相乘，这里再次强调乘的顺序很重要，$(A B)^{T}=B^{T} A^{T}$。

本节小结

好了，到这里矩阵这一讲就结束了，最后我再带你总结一下前面讲解的内容。

今天的知识，你只需要知道矩阵是线性方程组的另一种表达，了解和掌握矩阵的定义和性质就足够了。当然，矩阵还有很多内容，但我认为掌握了我讲的这些内容后，就为以后的一些矩阵应用场景打下了坚实的数学基础，也是下一讲的解线性方程组的前置知识。

线性代数练习场

对于10维列向量$x=\left(x_{1}, \ldots, x_{10}\right)^{T}$， $v=\left(v_{1}, \ldots, v_{10}\right)^{T}$，如果要计算$y=x x^{T}\left(I+v v^{T}\right) x$，其中$I$是10阶单位矩阵。你会怎么做？

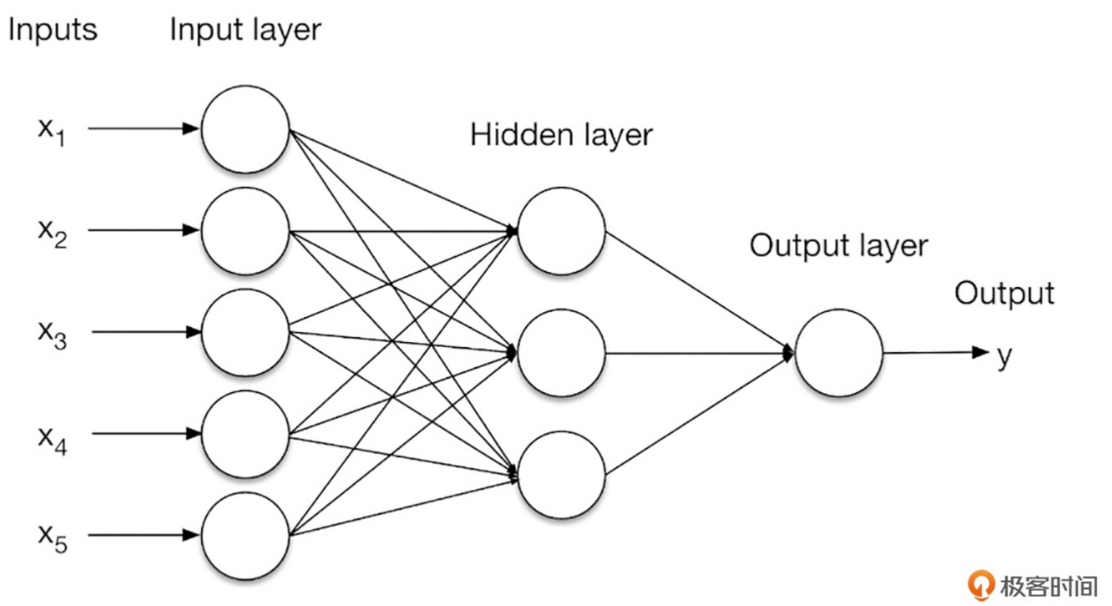
友情提醒，这里有多种方式解题。你能不能找到一个最简单的方法来解这道题？虽然结果很重要，但我想说的是过程更重要，而且往往解题过程不同，从计算机角度来说，运算的效率会有极大的不同。

欢迎你在留言区晒出你的运算过程和结果。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数，今天我们要讲的内容是“矩阵”。

在开始学习之前，我想先问你个问题，你觉得，学习矩阵有什么用呢？你可以先自己想一想。之后我们讲任何一个知识的时候，你都可以从这个角度出发，自己先思考一下，这样有助于你对所学内容理解得更深刻。

对于刚才那个问题，我的答案很简单，就一句话，从我们程序员的角度去理解的话，**矩阵可以极大地提高计算机的运算效率**。怎么说呢？我给你举一个例子。在机器学习中（特别是深度学习，或者更具体一点，神经网络），并行计算是非常昂贵的。



上图是一个典型的神经网络架构，在这时候，矩阵就能发挥用武之地了，计算H隐藏层输出的公式是：$H = f(W.x + b)$，其中W是权重矩阵，f是激活函数，b是偏差，x是输入层矩阵。而这个计算过程就叫做**向量化**（Vectorization），这也是GPU在深度学习中非常重要的原因，因为GPU非常擅长做类似矩阵乘之类的运算。

$$
X=\left|\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right|
$$

$$
W=\left|\begin{array}{ll}
w_{1} & w_{2} \\
w_{4} & w_{5} \\
x_{3} & w_{6}
\end{array}\right|
$$

$$
H=f\left(\left|\begin{array}{ll}
w_{1} & w_{2} \\
w_{4} & w_{5} \\
x_{3} & w_{6}
\end{array}\right|\left|\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right|+b\right)
$$

不过，矩阵也不仅仅局限于神经网络的应用，同时它也可以用在计算机图形图像的应用中，比如，三维物体从取景到屏幕的显示，就需要经历一系列的空间变换，才能生成二维图像显示在显示器上。在这个计算过程中，我们都需要用到矩阵。

矩阵是非常实用的，但它正式作为数学中的研究对象出现，其实是在行列式的研究发展起来之后。英国数学家 Arthur Cayley 被公认为矩阵论的创立人，他提出的矩阵概念可能来自于行列式。但我相信另一种说法，提出矩阵是为了更简单地表达线性方程组，也就是说，矩阵是线性方程组的另一种表达。

矩阵的基本概念

线性方程组的概念很简单，上节我们已经简单提过。你在小学或中学肯定也学过二元一次方程和二元一次方程组。

$$ax+by=c$$

$$
\left\{\begin{array}{l}
a_{1} x+b_{1} y+C_{1}=0 \\
a_{2} x+b_{2} y+C_{2}=0
\end{array}\right.
$$

在这样一个方程组中，$a1$、$a2$、$b1$、$b2$不能同时为0。当我们把二元一次方程组再扩展一下，变成多元一次方程组时，我们就能得到线性方程组的一般表达，即$AX=B$。

$$
\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.
$$

于是，这个线性方程组的所有系数就构成了一个$m×n$的m行n列矩阵：

$$
A=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

我们把A称为该方程组的系数矩阵，而当我们把等式右边的常数b放入矩阵后，就是下面这样：

$$

$$
\widetilde{A}=\left[\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} & b_{1} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} & b_{2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n} & b_{m}
\end{array}\right]
$$

这样我们就得到了A矩阵的增广矩阵$\widetilde{A}$，可以表示为(A, B)，这里的B表示的是方程组常数项所构成的列向量，也就是$m×1$的m行1列矩阵：

$$
B=\left|\begin{array}{l}
b_{1} \\
b_{2} \\
\cdots \\
b_{m}
\end{array}\right|
$$

如果设X为$n×1$的n行1列矩阵：

$$
X=\left|\begin{array}{c}
x_{1} \\
x_{2} \\
\cdots \\
x_{n}
\end{array}\right|
$$

那么线性方程组A，就可以表示为$AX=B$的矩阵形式。如果我们再换一种表示形式，设：$a_{1} ,a_{2},\ldots, a_{n},\beta$表示增广矩阵$\widetilde{A}$的列向量，则线性方程组$A$又可表示为$a_{1} x_{1}+a_{2} x_{2}+\cdots+a_{n} x_{n}=β$。

线性方程组的矩阵和向量形式都是线性方程组的其他表达形式。在工作中，你可以用它们来简化求解，甚至可以提升计算效率，就如之前提到的神经网络的隐藏层的输出计算、图形图像的三维空间变换。在数学中也是同样的，你可以经常运用它们来简化求解。具体线性方程组求解的内容比较多，我们下一节课再来详细讲解求解过程。

通过前面的讲解，我相信你对矩阵有了一定的了解，现在我们再回头来看看矩阵的定义吧。

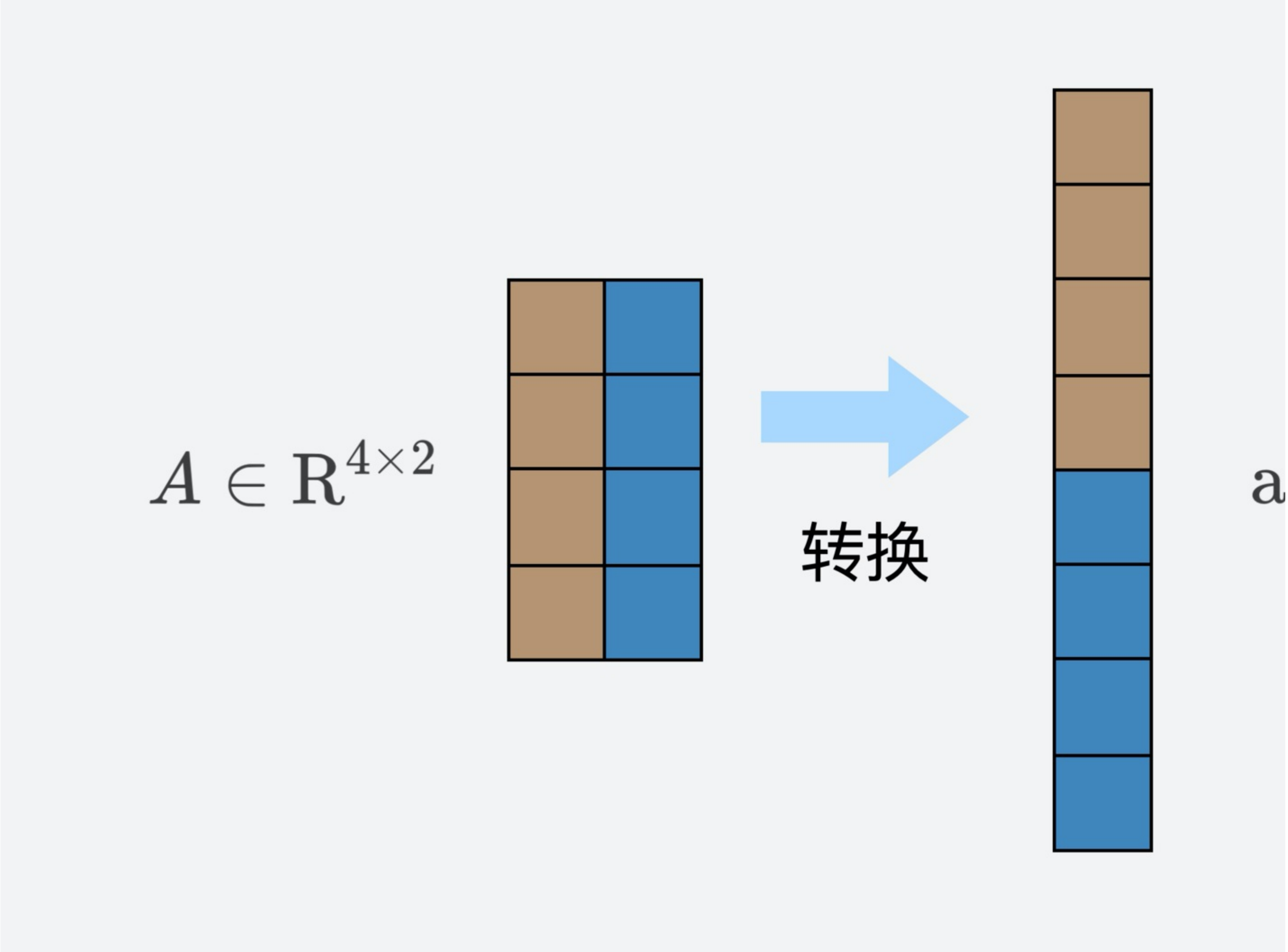
矩阵的定义是：一个(m, n)矩阵A，是由$m×n$个元素组成，m和n是实数，其中元素$a_{i j}, \mathrm{i}=1, \ldots, \mathrm{m}, \mathrm{j}=1, \ldots, \mathrm{n}$按$m$行$n$列的矩形排布方式后可以形成矩阵$A$：

$$
A=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

其中$a_{i j}$属于实数或复数，在我们的场景中是实数R，按通常的惯例，$(1, n)$矩阵叫做行，$(m, 1)$矩阵叫做列，这些特殊的矩阵叫做行或列向量。

定义完矩阵后，我接着讲一个比较有趣的概念，矩阵转换（Matrix transformation）。矩阵转换经常被用在计算机图形图像的转换中，比如，一张彩色图片从RGB角度来说是三维的，如果要转换成灰度图片，也就是一维图片，那就要做矩阵转换。

我们来看一下矩阵转换的过程。设$\mathrm{R}^{m \times n}$是实数矩阵(m, n)的集合，$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$可以表示成另一种形式 $a \in \mathrm{R}^{mn}$。我们把矩阵的n列堆叠成一个长向量后完成转换。这个转换也叫做reshape，其实就是重新调整原矩阵的行数、列数和维数，但是元素个数不变。



矩阵的运算

了解了矩阵的基本定义后，我们才能进入矩阵的运算环节，就是矩阵的加和乘。

加运算很简单，两个矩阵$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$，$B \in \mathrm{R}^{m \times n}$的加运算其实就是矩阵各自元素的加。

$$
A+B=\left[\begin{array}{ccc}
a_{11}+b_{11} & \ldots & a_{1 n}+b_{1 n} \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
a_{m 1}+b_{m 1} & \ldots & a_{m n}+b_{m n}
\end{array}\right] \in R^{m \times n}
$$

我推荐你使用NumPy的einsum来高效地做这类运算，因为它在速度和内存效率方面通常可以超越我们常见的array函数。

```
C= np.einsum('il, lj', A, B)
```

接下来，我们一起来看看矩阵的乘。这里你需要注意，矩阵的乘和通常意义上“数之间的乘”不同，矩阵的乘有多种类型，这里我讲三种最普遍，也是在各领域里用得最多的矩阵乘。

1.普通矩阵乘

普通矩阵乘是应用最广泛的矩阵乘，两个矩阵$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$，$B \in \mathrm{R}^{n \times k}$，普通矩阵则乘可以表示为$C=A B \in R^{m \times k}$，$C$中元素的计算规则是矩阵$A$、$B$对应两两元素乘积之和。

$$
c_{i j}=\sum_{k=1}^{n} a_{i k} b_{k j}, i=1, \ldots, m, j=1, \ldots, l
$$

我们举例来说明。C的第一个元素$c_{11}=a_{11} \times b_{11}+a_{12} \times b_{21}+a_{13} \times b_{31}=1 \times 1+2 \times 2+3 \times 3$。

$$
C=A B=\left[\begin{array}{lll}
1 & 2 & 3 \\
4 & 5 & 6
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
1 & 4 \\
2 & 5 \\
3 & 6
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{lll}
1 \times 1+2 \times 2+3 \times 3 & 1 \times 4+2 \times 5+3 \times 6 \\
4 \times 1+5 \times 2+6 \times 3 & 4 \times 4+5 \times 5+6 \times 6
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
14 & 32 \\
32 & 77
\end{array}\right]
$$

这里需要特别注意的是，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，例如，一个$n×k$矩阵A和一个$k×m$矩阵B相乘，最后得出$n×m$矩阵C，而这里的k就是相邻阶数。

$$AB=C$$

但反过来B和A相乘就不行了，因为相邻阶数m不等于n。

2.哈达玛积

哈达玛积理解起来就很简单了，就是矩阵各对应元素的乘积，$c_{ij}=a_{ij} \times b_{ij}$ 。举个例子：

$$
C=A^{*} B=\left[\begin{array}{ll}
1 & 2 \\
4 & 5
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
1 & 4 \\
2 & 5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
1 * 1 & 2 * 4 \\
4 * 2 & 5 * 5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
1 & 8 \\
8 & 25
\end{array}\right]
$$

哈达玛积其实在数学中不常看到，不过，在编程中哈达玛积非常有用，因为它可以用来同时计算多组数据的乘积，计算效率很高。

3.克罗内克积

克罗内克积是以德国数学家利奥波德·克罗内克（Leopold Kronecker）的名字命名的。它可以应用在解线性矩阵方程和图像处理方面，当然从更时髦的角度说，它还能用在量子信息领域，我们也称之为直积或张量积。

和普通矩阵乘和哈达玛积不同的是，克罗内克积是两个任意大小矩阵间的运算，表示为$A×B$，如果A是一个$m × n$的矩阵，而B是一个$p×q$的矩阵，克罗内克积则是一个$mp×nq$的矩阵。

接下来我们需要定义一个**在矩阵的乘法中起着特殊作用**的矩阵，它就是**单位矩阵**。高等代数中，在求解相应的矩阵时，若添加单位矩阵，通过初等变换进行求解，往往可以使问题变得简单。按照百度百科的解释，单位矩阵如同数的乘法中的1，这种矩阵就被称为单位矩阵。它是个方阵，从左上角到右下角的对角线，也就是主对角线上的元素均为1，除此以外全都为0。

在线性代数中，大小为n的单位矩阵就是在主对角线上均为1，而其他地方都是0的$n×n$的方阵，它用I_{n}表示，表达时为了方便可以忽略阶数，直接用I来表示：

$$
I_{1}=[1], I_{2}=\left[\begin{array}{ll}
1 & 0 \\
0 & 1
\end{array}\right], I_{3}=\left[\begin{array}{lll}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{array}\right], \ldots, I_{n}=\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 1 & \ldots & 0 \\
. & . & \ldots & . \\
. & . & . & . \\
0 & 0 & \ldots & 1
\end{array}\right]
$$

矩阵的性质

在了解了矩阵加和乘，以及单位矩阵后，我们是时候来看一看矩阵的性质了。了解矩阵的性质是进行矩阵计算的前提，就像我们小时候学加减乘除四则运算法则时那样。所以，这块内容对你来说应该不难，你作为了解就好，重点是之后的运算。

1.结合律

任意实数$m×n$矩阵A，$n×p$矩阵B，$p×q$矩阵C之间相乘，满足结合律$(AB)C=A(BC)$。这个很好理解，我就不多说了。

$$\forall A \in R^{m \times n}, B \in R^{n \times p}, C \in R^{p \times q}:(A B) C=A(B C)$$

2.分配律

任意实数$m×n$矩阵A和B，$n×p$矩阵C和D之间相乘满足分配律$(A+B)C=AC+BC$，$A(C+D)=AC+AD$。

$$
\forall \mathrm{A}, B \in \mathrm{R}^{m \times n}, C, D \in \mathrm{R}^{n \times p}:(A+B) C=A C+B C, A(C+D)=A C+A D
$$

3.单位矩阵乘

任意实数$m×n$矩阵A和单位矩阵之间的乘，等于它本身A。

$$
\forall A \in R^{m \times n}: I_{m} A=A I_{n}=A
$$

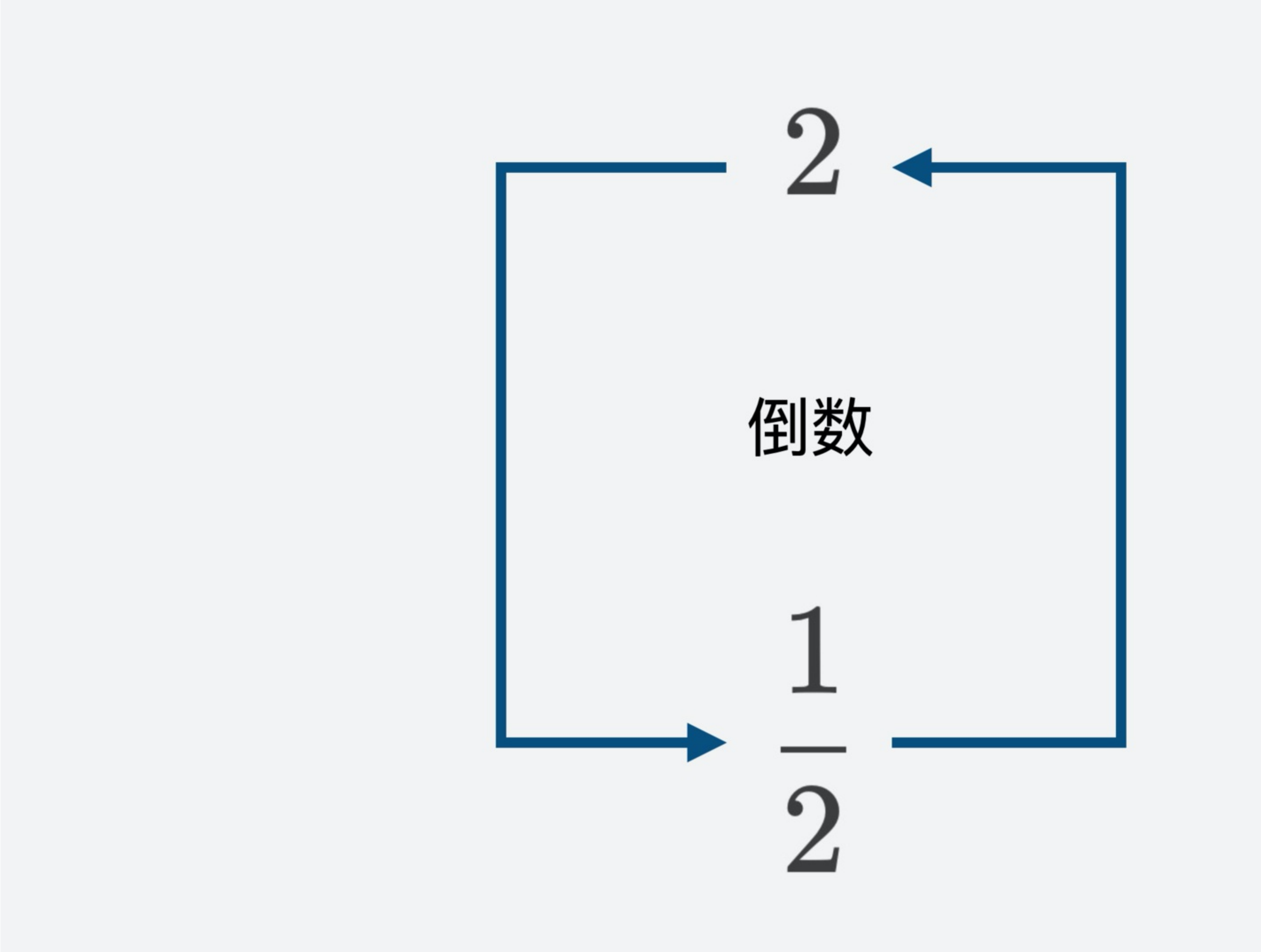
注意，这里的行和列不同，$m \neq n$意味着，根据矩阵乘，左乘和右乘单位矩阵也不同，也就是$I_{m} \neq I_{n}$。

逆矩阵与转置矩阵

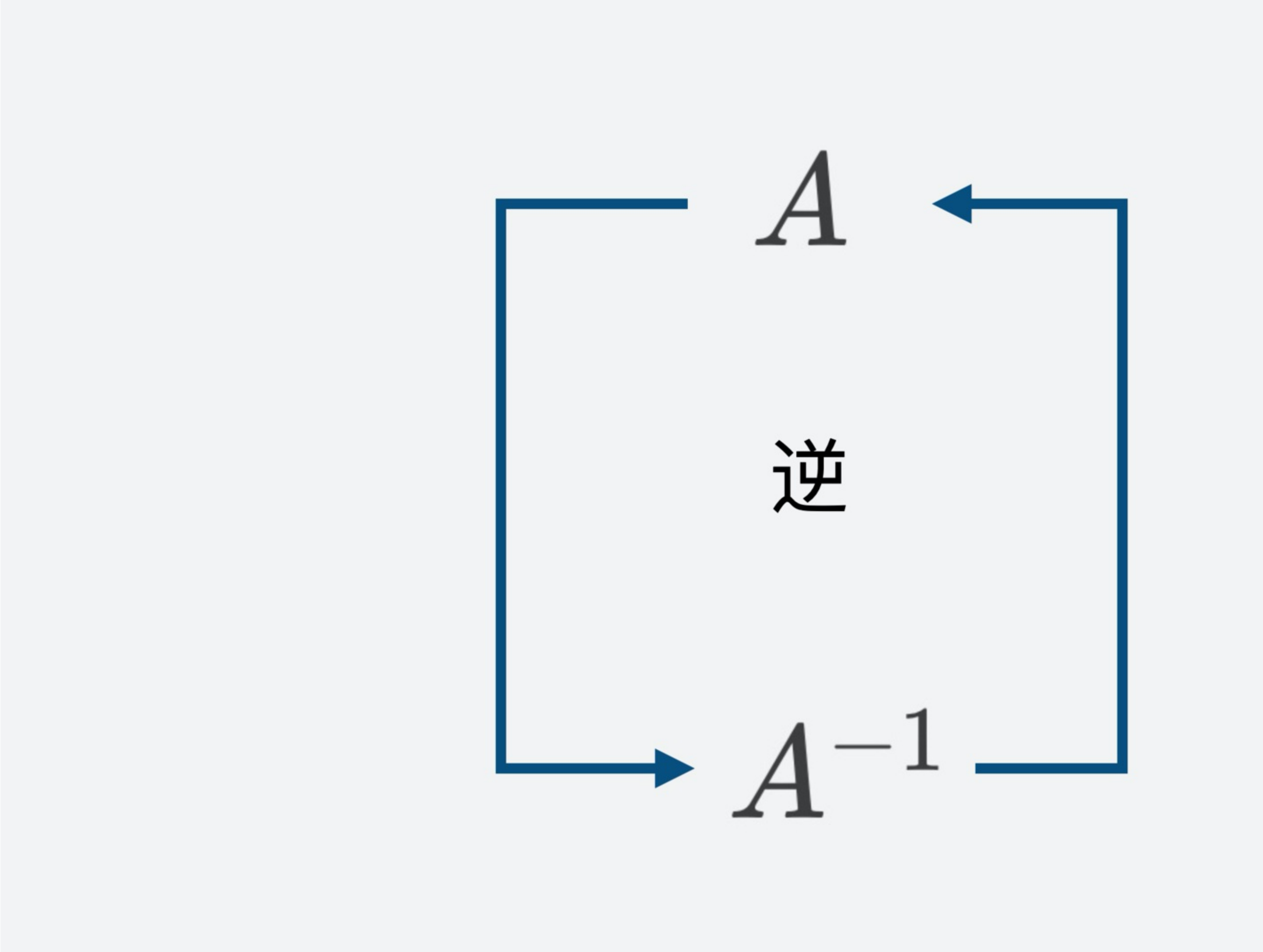
了解矩阵基本概念、运算，以及性质后，我来讲一讲矩阵应用中的两个核心内容——逆矩阵和转置矩阵。逆矩阵和转置矩阵在实际应用中大有用处，比如：坐标系中的图形变换运算。我们先来看下什么是逆矩阵。

逆矩阵

下面这个图你应该非常熟悉了，图中表现的是数字的倒数，2的倒数是$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$的倒数是2。



其实逆矩阵也有着类似的概念，只不过是写法不一样，我们会把逆矩阵写成A^{-1}。那为什么不是$\frac{1}{A}$呢？那是因为数字1无法被矩阵除。



我们知道，2乘以它的倒数$\frac{1}{2}$等于1。同样的道理，A乘以它的逆矩阵A^{-1}就等于单位矩阵，即$\mathrm{A} \times A^{-1}=\mathrm{I}$（$I$即单位矩阵），反过来也一样，$\mathrm{A}^{-1} \times A=\mathrm{I}$。

为方便你理解，我用一个2×2矩阵A来解释一下逆矩阵的算法。首先，我们交换a_{11}和a_{22}的位置，然后在a_{12}和a_{21}前加上负号，最后除以行列式$a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}$。

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]^{-1}=\frac{1}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}\left[\begin{array}{cc}
a_{22} & -a_{12} \\
-a_{21} & a_{11}
\end{array}\right]
$$

那我们该如何验证这是不是正解呢？

方法其实很简单，记得刚才的公式就行，$\mathrm{A} \times A^{-1}=\mathrm{I}$。现在我们就代入公式来验证一下，$A$和它的逆矩阵相乘，通过刚才的算法最终得出的结果是单位矩阵。

$$
A \times A^{-1}=\left[\begin{array}{llll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]^{-1}=\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{lll}
\frac{a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{-a_{12}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} \\
\frac{-a_{21}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
\frac{a_{11} \times a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{12} \times(-a_{21})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{11} \times(-a_{12})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{12} \times a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} \\
\frac{a_{21} \times a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{22} \times(-a_{21})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{21} \times(-a_{12})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{22} \times a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{lll}
1 & 0 \\
0 & 1
\end{array}\right]
$$

这里有一点需要特别说明，不是每一个矩阵都是可逆的。如果一个矩阵是可逆的，那这个矩阵我们叫做**非奇异矩阵**，如果一个矩阵是不可逆的，那这个矩阵我们就叫做**奇异矩阵**，而且如果一个矩阵可逆，那它的逆矩阵必然是唯一的。

还记得行列式$a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}$吗？如果我们要证明矩阵是可逆的，只要证明行列式不等于零就行。更高阶的逆矩阵的算法也是一样的原理。

最后，我想通过一个现实生活中的案例来让你更多地了解逆矩阵。

一个旅游团由孩子和大人组成，去程他们一起做大巴，每个孩子的票价3元，大人票价3.2元，总共花费118.4元。回程一起做火车，每个孩子的票价3.5元，大人票价3.6元，总共花费

135.2元。请问旅游团里有多少小孩和大人？

首先，我们设置一些矩阵，组成线性方程$XA=B$。

$$
\begin{array}{cc}
\text{小孩} & \text{大人}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
\text{大巴} & \text{火车}
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}
3 & 3.5 \\
3.2 & 3.6
\end{array}\right]
$$

要解X，我们就要先计算A的逆矩阵A^{-1}：

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{cc}
3 & 3.5 \\
3.2 & 3.6
\end{array}\right]^{-1}=\frac{1}{3 \times 3.6-3.5 \times 3.2}\left[\begin{array}{cc}
3.6 & -3.5 \\
-3.2 & 3
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
-9 & 8.75 \\
8 & -7.5
\end{array}\right]
$$

接下来再计算$X=B A^{-1}$：

$$
\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
118.4 & 135.2
\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}
-9 & 8.75 \\
8 & -7.5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
16 & 22
\end{array}\right]
$$

最终，我们得出这个旅游团有16个小孩和22个大人。

这也是解线性方程组的一种方法，类似这样的计算被广泛应用在各领域中，比如建筑工程、游戏和动画的3D效果上。虽然现在有很多程序包封装了这类数学计算的底层实现，但如果你能很好地理解这些概念，就可以为编程或算法调优打下坚实的基础。

Last but not least，方程次序很重要，也就是说，$AX=B$和$XA=B$的结果是不同的，这个一定要牢记哦！

转置矩阵

一般伴随逆矩阵之后出现的就是转置矩阵。在计算机图形图像处理中，如果要对一个物体进行旋转、平移、缩放等操作，就要对描述这个物体的所有矩阵进行运算，矩阵转置就是这类运算之一，而矩阵的转置在三维空间中的解释就相当于"得到关于某个点对称的三维立体"。所以，转置矩阵的定义很简单。

将矩阵的行列互换，得到的新矩阵就叫做转置矩阵（transpose）。转置矩阵的行列式不变。我们把$m×n$矩阵A的行列互换，得到转置矩阵A^{T}。

$$
A=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

$$
A^{T}=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m 1} \\
a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m 2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{1 n} & a_{2 n} & \ldots & a_{m n}

\end{array}\right]
$$

最后，为了方便你理解，我们再总结一下逆矩阵和转置矩阵的性质。你不用死记硬背，重在理解。

1. 矩阵和自身逆矩阵相乘得道单位矩阵，$A A^{-1}=I=A^{-1} A$；
2. $A$$B$两矩阵相乘的逆，等于逆矩阵$B$和逆矩阵$A$相乘，这里强调一下乘的顺序很重要，$(A B)^{-1}=B^{-1} A^{-1}$；
3. AB两矩阵相加后的逆矩阵，不等于各自逆矩阵的相加， $(A+B)^{-1} \neq A^{-1}+B^{-1}$；
4. 矩阵转置的转置还是它本身，$\left(A^{T}\right)^{\mathrm{T}}=A$；
5. AB两矩阵相加后的转置矩阵，等于各自转置矩阵的相加，$(A+B)^{T}=A^{T}+B^{T}$；
6. AB两矩阵相乘后的转置矩阵，等于转置矩阵B和转置矩阵A的相乘，这里再次强调乘的顺序很重要，$(A B)^{T}=B^{T} A^{T}$。

本节小结

好了，到这里矩阵这一讲就结束了，最后我再带你总结一下前面讲解的内容。

今天的知识，你只需要知道矩阵是线性方程组的另一种表达，了解和掌握矩阵的定义和性质就足够了。当然，矩阵还有很多内容，但我认为掌握了我讲的这些内容后，就为以后的一些矩阵应用场景打下了坚实的数学基础，也是下一讲的解线性方程组的前置知识。

线性代数练习场

对于10维列向量$x=\left(x_{1}, \ldots, x_{10}\right)^{T}$， $v=\left(v_{1}, \ldots, v_{10}\right)^{T}$，如果要计算$y=x x^{T}\left(I+v v^{T}\right) x$，其中$I$是10阶单位矩阵。你会怎么做？

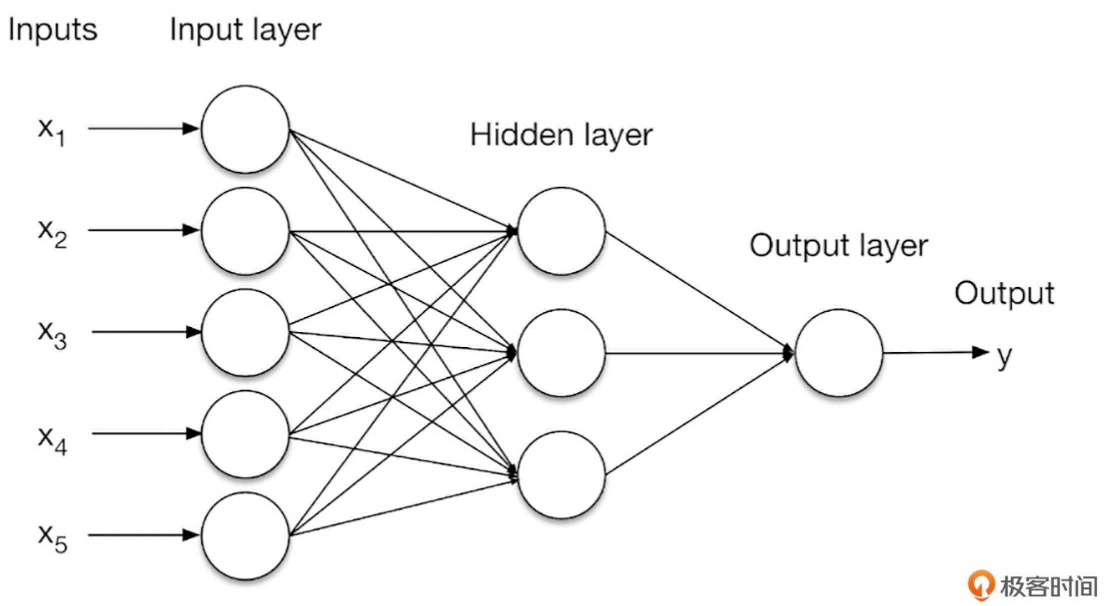
友情提醒，这里有多种方式解题。你能不能找到一个最简单的方法来解这道题？虽然结果很重要，但我想说的是过程更重要，而且往往解题过程不同，从计算机角度来说，运算的效率会有极大的不同。

欢迎你在留言区晒出你的运算过程和结果。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数，今天我们要讲的内容是“矩阵”。

在开始学习之前，我想先问你个问题，你觉得，学习矩阵有什么用呢？你可以先自己想一想。之后我们讲任何一个知识的时候，你都可以从这个角度出发，自己先思考一下，这样有助于你对所学内容理解得更深刻。

对于刚才那个问题，我的答案很简单，就一句话，从我们程序员的角度去理解的话，**矩阵可以极大地提高计算机的运算效率**。怎么说呢？我给你举一个例子。在机器学习中（特别是深度学习，或者更具体一点，神经网络），并行计算是非常昂贵的。



上图是一个典型的神经网络架构，在这时候，矩阵就能发挥用武之地了，计算H隐藏层输出的公式是：$H = f(W.x + b)$，其中W是权重矩阵，f是激活函数，b是偏差，x是输入层矩阵。而这个计算过程就叫做**向量化**（Vectorization），这也是GPU在深度学习中非常重要的原因，因为GPU非常擅长做类似矩阵乘之类的运算。

$$
X=\left|\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right|
$$

$$
W=\left|\begin{array}{ll}
w_{1} & w_{2} \\
w_{4} & w_{5} \\
x_{3} & w_{6}
\end{array}\right|
$$

$$
H=f\left(\left|\begin{array}{ll}
w_{1} & w_{2} \\
w_{4} & w_{5} \\
x_{3} & w_{6}
\end{array}\right|\left|\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right|+b\right)
$$

不过，矩阵也不仅仅局限于神经网络的应用，同时它也可以用在计算机图形图像的应用中，比如，三维物体从取景到屏幕的显示，就需要经历一系列的空间变换，才能生成二维图像显示在显示器上。在这个计算过程中，我们都需要用到矩阵。

矩阵是非常实用的，但它正式作为数学中的研究对象出现，其实是在行列式的研究发展起来之后。英国数学家 Arthur Cayley 被公认为矩阵论的创立人，他提出的矩阵概念可能来自于行列式。但我相信另一种说法，提出矩阵是为了更简单地表达线性方程组，也就是说，矩阵是线性方程组的另一种表达。

矩阵的基本概念

线性方程组的概念很简单，上节我们已经简单提过。你在小学或中学肯定也学过二元一次方程和二元一次方程组。

$$ax+by=c$$

$$
\left\{\begin{array}{l}
a_{1} x+b_{1} y+C_{1}=0 \\
a_{2} x+b_{2} y+C_{2}=0
\end{array}\right.
$$

在这样一个方程组中，$a1$、$a2$、$b1$、$b2$不能同时为0。当我们把二元一次方程组再扩展一下，变成多元一次方程组时，我们就能得到线性方程组的一般表达，即$AX=B$。

$$
\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.
$$

于是，这个线性方程组的所有系数就构成了一个$m×n$的m行n列矩阵：

$$
A=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

我们把A称为该方程组的系数矩阵，而当我们把等式右边的常数b放入矩阵后，就是下面这样：

$$

$$
\widetilde{A}=\left[\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} & b_{1} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} & b_{2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n} & b_{m}
\end{array}\right]
$$

这样我们就得到了A矩阵的增广矩阵$\widetilde{A}$，可以表示为(A, B)，这里的B表示的是方程组常数项所构成的列向量，也就是$m \times 1$的m行1列矩阵：

$$
B=\left|\begin{array}{l}
b_{1} \\
b_{2} \\
\cdots \\
b_{m}
\end{array}\right|
$$

如果设X为$n \times 1$的n行1列矩阵：

$$
X=\left|\begin{array}{c}
x_{1} \\
x_{2} \\
\cdots \\
x_{n}
\end{array}\right|
$$

那么线性方程组A，就可以表示为$AX=B$的矩阵形式。如果我们再换一种表示形式，设：$a_{1} ,a_{2},\ldots, a_{n},\beta$表示增广矩阵$\widetilde{A}$的列向量，则线性方程组$A$又可表示为$a_{1} x_{1}+a_{2} x_{2}+\cdots+a_{n} x_{n}=\beta$。

线性方程组的矩阵和向量形式都是线性方程组的其他表达形式。在工作中，你可以用它们来简化求解，甚至可以提升计算效率，就如之前提到的神经网络的隐藏层的输出计算、图形图像的三维空间变换。在数学中也是同样的，你可以经常运用它们来简化求解。具体线性方程组求解的内容比较多，我们下一节课再来详细讲解求解过程。

通过前面的讲解，我相信你对矩阵有了一定的了解，现在我们再回头来看看矩阵的定义吧。

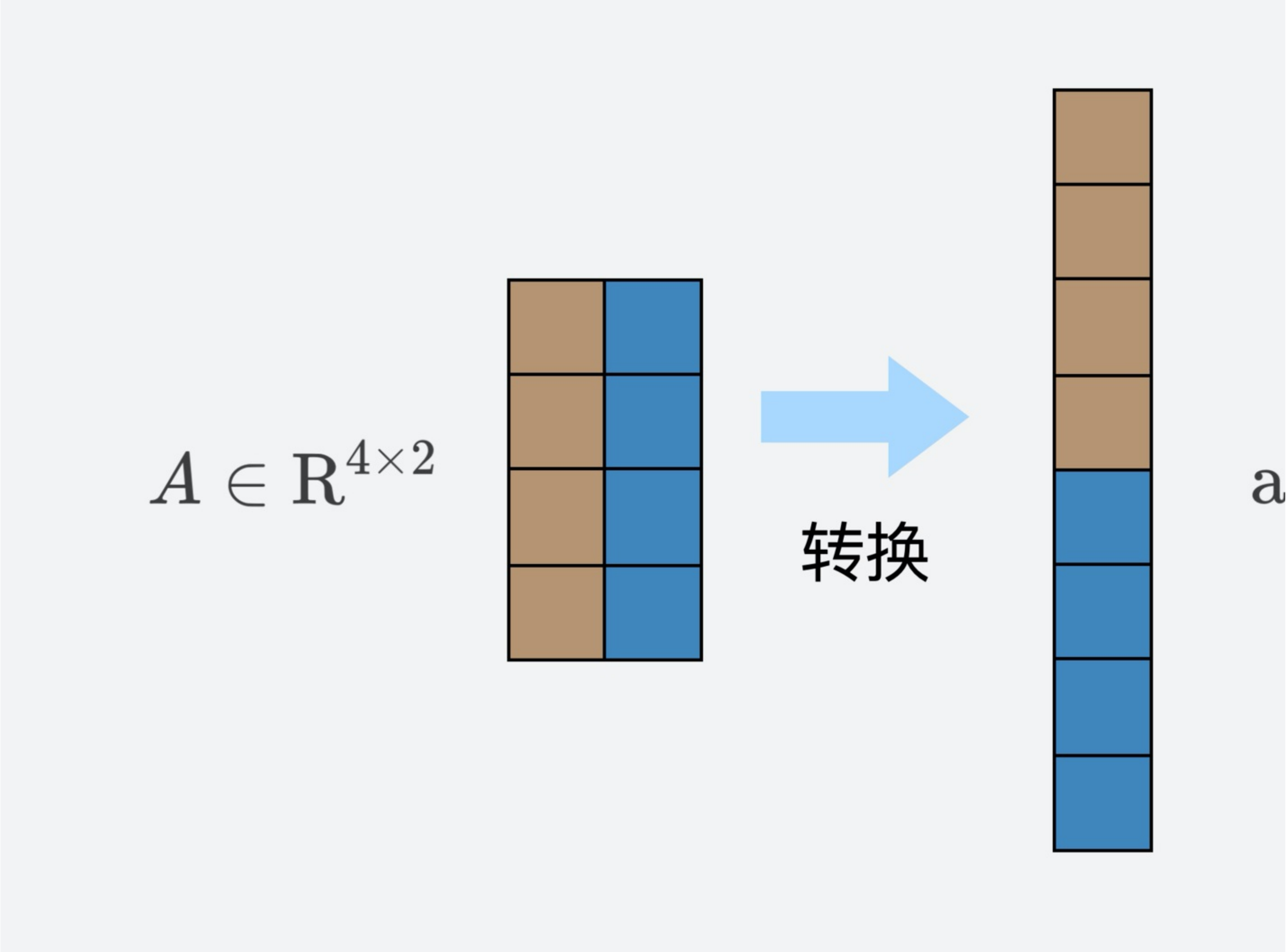
矩阵的定义是：一个(m, n)矩阵A，是由$m \times n$个元素组成，m和n是实数，其中元素$a_{i j}, \mathrm{i}=1, \ldots, \mathrm{m}, \mathrm{j}=1, \ldots, \mathrm{n}$按$m$行$n$列的矩形排布方式后可以形成矩阵$A$：

$$
A=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

其中$a_{i j}$属于实数或复数，在我们的场景中是实数R，按通常的惯例，$(1, n)$矩阵叫做行，$(m, 1)$矩阵叫做列，这些特殊的矩阵叫做行或列向量。

定义完矩阵后，我接着讲一个比较有趣的概念，矩阵转换（Matrix transformation）。矩阵转换经常被用在计算机图形图像的转换中，比如，一张彩色图片从RGB角度来说是三维的，如果要转换成灰度图片，也就是一维图片，那就要做矩阵转换。

我们来看一下矩阵转换的过程。设$\mathrm{R}^{m \times n}$是实数矩阵(m, n)的集合，$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$可以表示成另一种形式 $a \in \mathrm{R}^{mn}$。我们把矩阵的n列堆叠成一个长向量后完成转换。这个转换也叫做reshape，其实就是重新调整原矩阵的行数、列数和维数，但是元素个数不变。



矩阵的运算

了解了矩阵的基本定义后，我们才能进入矩阵的运算环节，就是矩阵的加和乘。

加运算很简单，两个矩阵$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$，$B \in \mathrm{R}^{m \times n}$的加运算其实就是矩阵各自元素的加。

$$
A+B=\left[\begin{array}{ccc}
a_{11}+b_{11} & \ldots & a_{1 n}+b_{1 n} \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
a_{m 1}+b_{m 1} & \ldots & a_{m n}+b_{m n}
\end{array}\right] \in R^{m \times n}
$$

我推荐你使用NumPy的einsum来高效地做这类运算，因为它在速度和内存效率方面通常可以超越我们常见的array函数。

```
C= np.einsum('il, lj', A, B)
```

接下来，我们一起来看看矩阵的乘。这里你需要注意，矩阵的乘和通常意义上"数之间的乘"不同，矩阵的乘有多种类型，这里我讲三种最普遍，也是在各领域里用得最多的矩阵乘。

1.普通矩阵乘

普通矩阵乘是应用最广泛的矩阵乘，两个矩阵$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$，$B \in \mathrm{R}^{n \times k}$，普通矩阵则乘可以表示为$C=A B \in R^{m \times k}$，$C$中元素的计算规则是矩阵$A$、$B$对应两两元素乘积之和。

$$
c_{i j}=\sum_{k=1}^{n} a_{i k} b_{k j}, i=1, \ldots, m, j=1, \ldots, l
$$

我们举例来说明。C的第一个元素$c_{11}=a_{11} \times b_{11}+a_{12} \times b_{21}+a_{13} \times b_{31}=1 \times 1+2 \times 2+3 \times 3$。

$$
C=A B=\left[\begin{array}{lll}
1 & 2 & 3 \\
4 & 5 & 6
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
1 & 4 \\
2 & 5 \\
3 & 6
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{lll}
1 \times 1+2 \times 2+3 \times 3 & 1 \times 4+2 \times 5+3 \times 6 \\
4 \times 1+5 \times 2+6 \times 3 & 4 \times 4+5 \times 5+6 \times 6
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
14 & 32 \\
32 & 77
\end{array}\right]
$$

这里需要特别注意的是，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，例如，一个$n×k$矩阵A和一个$k×m$矩阵B相乘，最后得出$n×m$矩阵C，而这里的k就是相邻阶数。

$$AB=C$$

但反过来B和A相乘就不行了，因为相邻阶数m不等于n。

2.哈达玛积

哈达玛积理解起来就很简单了，就是矩阵各对应元素的乘积，$c_{i j}=a_{i j} \times b_{i j}$ 。举个例子：

$$
C=A^{*} B=\left[\begin{array}{ll}
1 & 2 \\
4 & 5
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
1 & 4 \\
2 & 5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
1 * 1 & 2 * 4 \\
4 * 2 & 5 * 5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
1 & 8 \\
8 & 25
\end{array}\right]
$$

哈达玛积其实在数学中不常看到，不过，在编程中哈达玛积非常有用，因为它可以用来同时计算多组数据的乘积，计算效率很高。

3.克罗内克积

克罗内克积是以德国数学家利奥波德·克罗内克（Leopold Kronecker）的名字命名的。它可以应用在解线性矩阵方程和图像处理方面，当然从更时髦的角度说，它还能用在量子信息领域，我们也称之为直积或张量积。

和普通矩阵乘和哈达玛积不同的是，克罗内克积是两个任意大小矩阵间的运算，表示为$A \times B$，如果A是一个$m \times n$的矩阵，而B是一个$p \times q$的矩阵，克罗内克积则是一个$mp \times nq$的矩阵。

接下来我们需要定义一个**在矩阵的乘法中起着特殊作用**的矩阵，它就是**单位矩阵**。高等代数中，在求解相应的矩阵时，若添加单位矩阵，通过初等变换进行求解，往往可以使问题变得简单。按照百度百科的解释，单位矩阵如同数的乘法中的1，这种矩阵就被称为单位矩阵。它是个方阵，从左上角到右下角的对角线，也就是主对角线上的元素均为1，除此以外全都为0。

在线性代数中，大小为n的单位矩阵就是在主对角线上均为1，而其他地方都是0的$n \times n$的方阵，它用I_{n}表示，表达时为了方便可以忽略阶数，直接用I来表示：

$$
I_{1}=[1], I_{2}=\left[\begin{array}{ll}
1 & 0 \\
0 & 1
\end{array}\right], I_{3}=\left[\begin{array}{lll}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{array}\right], \ldots, I_{n}=\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 1 & \ldots & 0 \\
. & . & \ldots & . \\
. & . & . & . \\
0 & 0 & \ldots & 1
\end{array}\right]
$$

矩阵的性质

在了解了矩阵加和乘，以及单位矩阵后，我们是时候来看一看矩阵的性质了。了解矩阵的性质是进行矩阵计算的前提，就像我们小时候学加减乘除四则运算法则时那样。所以，这块内容对你来说应该不难，你作为了解就好，重点是之后的运算。

1.结合律

任意实数$m \times n$矩阵A，$n \times p$矩阵B，$p \times q$矩阵C之间相乘，满足结合律$(AB)C=A(BC)$。这个很好理解，我就不多说了。

$$\forall A \in R^{m \times n}, B \in R^{n \times p}, C \in R^{p \times q}:(A B) C=A(B C)$$

2.分配律

任意实数$m \times n$矩阵A和B，$n \times p$矩阵C和D之间相乘满足分配律$(A+B)C=AC+BC$，$A(C+D)=AC+AD$。

$$
\forall \mathrm{A}, B \in \mathrm{R}^{m \times n}, C, D \in \mathrm{R}^{n \times p}:(A+B) C=A C+B C, A(C+D)=A C+A D
$$

3.单位矩阵乘

任意实数$m \times n$矩阵A和单位矩阵之间的乘，等于它本身A。

$$
\forall A \in R^{m \times n}: I_{m} A=A I_{n}=A
$$

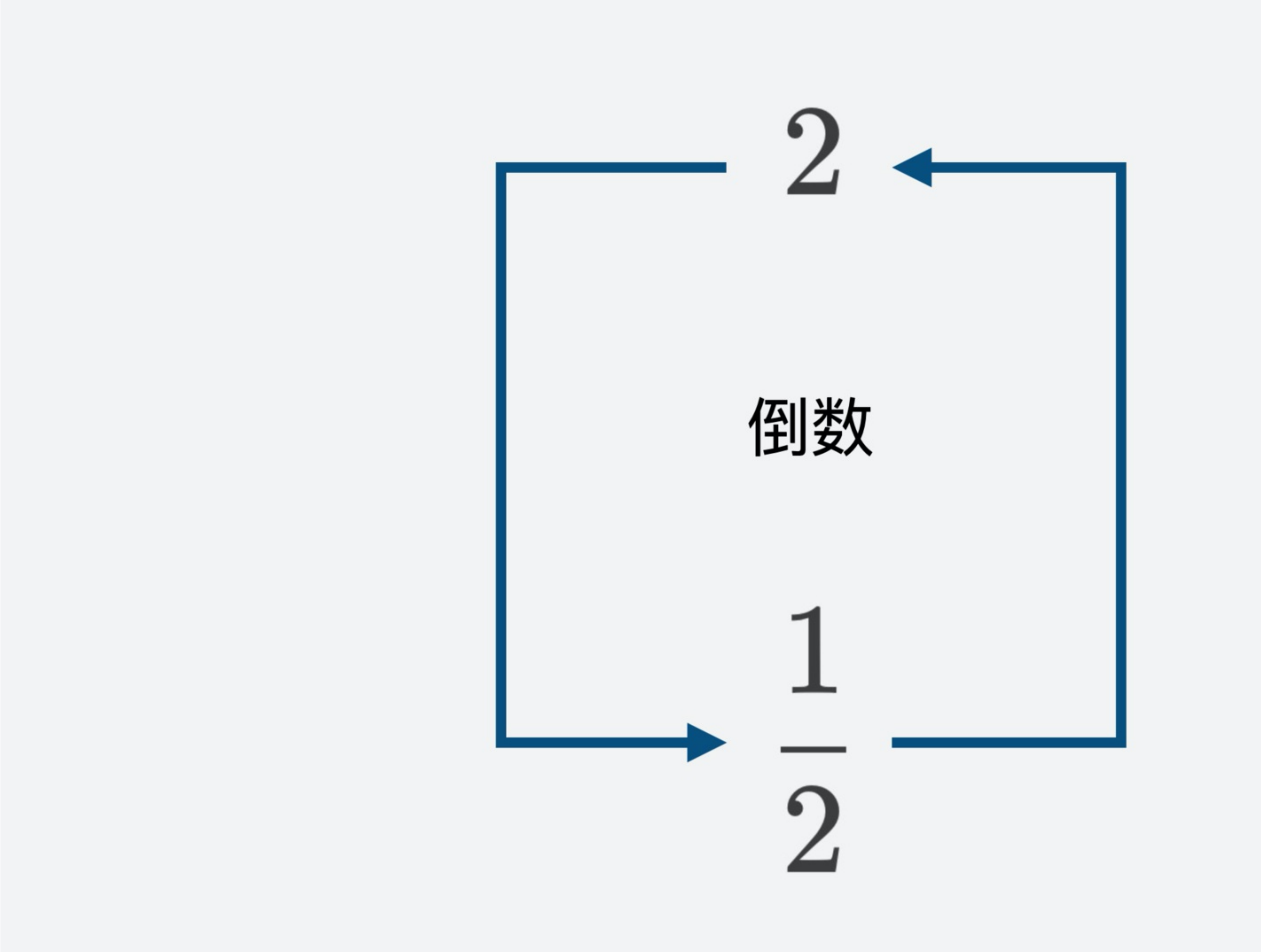
注意，这里的行和列不同，$m \neq n$意味着，根据矩阵乘，左乘和右乘单位矩阵也不同，也就是$I_{m} \neq I_{n}$。

逆矩阵与转置矩阵

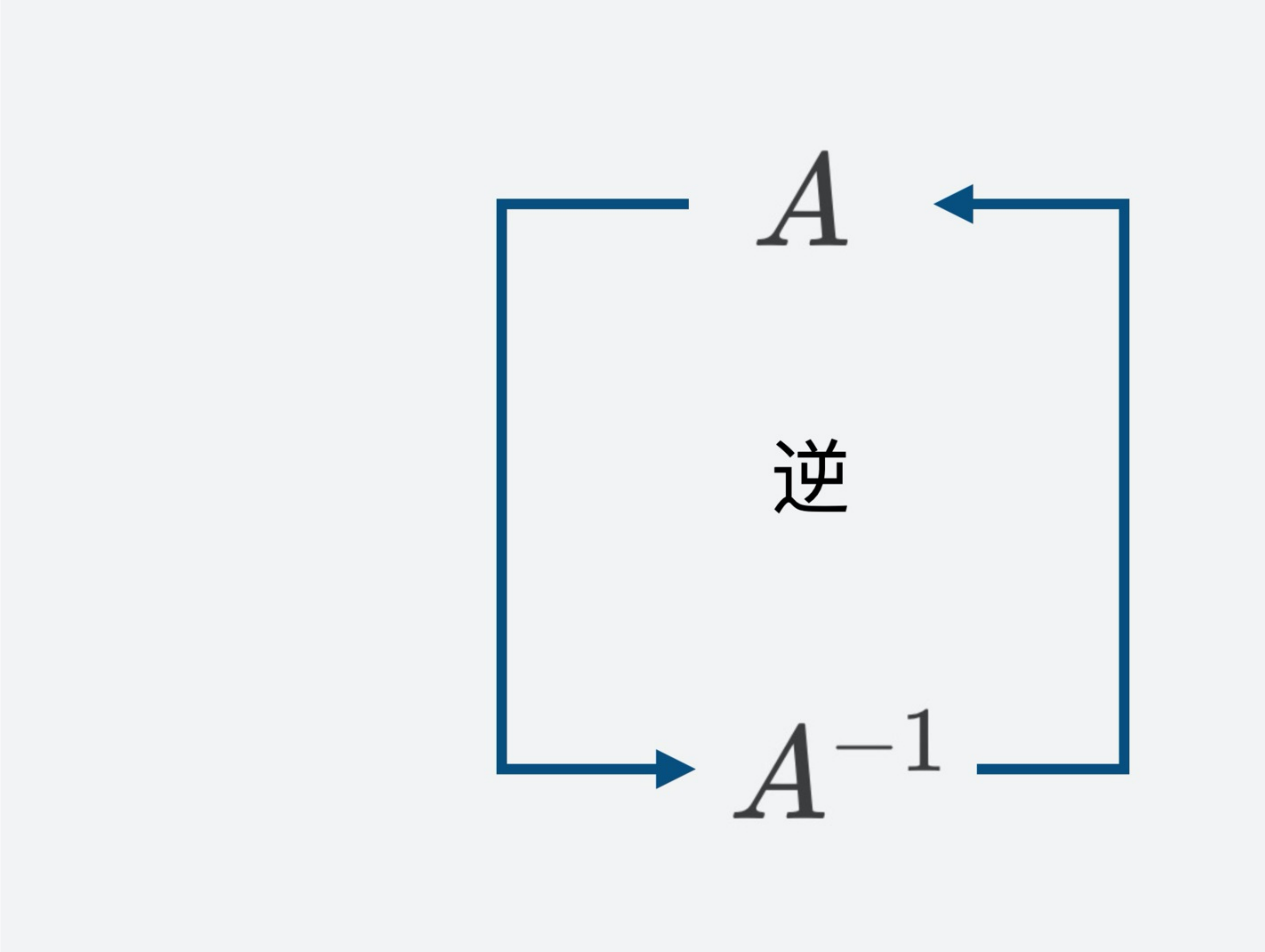
了解矩阵基本概念、运算，以及性质后，我来讲一讲矩阵应用中的两个核心内容——逆矩阵和转置矩阵。逆矩阵和转置矩阵在实际应用中大有用处，比如：坐标系中的图形变换运算。我们先来看下什么是逆矩阵。

逆矩阵

下面这个图你应该非常熟悉了，图中表现的是数字的倒数，2的倒数是$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$的倒数是2。



其实逆矩阵也有着类似的概念，只不过是写法不一样，我们会把逆矩阵写成A^{-1}。那为什么不是$\frac{1}{A}$呢？那是因为数字1无法被矩阵除。



我们知道，2乘以它的倒数$\frac{1}{2}$等于1。同样的道理，A乘以它的逆矩阵A^{-1}就等于单位矩阵，即$\mathrm{A} \times A^{-1}=\mathrm{I}$（$I$即单位矩阵），反过来也一样，$\mathrm{A}^{-1} \times A=\mathrm{I}$。

为方便你理解，我用一个2×2矩阵A来解释一下逆矩阵的算法。首先，我们交换a_{11}和a_{22}的位置，然后在a_{12}和a_{21}前加上负号，最后除以行列式$a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}$。

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]^{-1}=\frac{1}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}\left[\begin{array}{cc}
a_{22} & -a_{12} \\
-a_{21} & a_{11}
\end{array}\right]
$$

那我们该如何验证这是不是正解呢？

方法其实很简单，记得刚才的公式就行，$\mathrm{A} \times A^{-1}=\mathrm{I}$。现在我们就代入公式来验证一下，$A$和它的逆矩阵相乘，通过刚才的算法最终得出的结果是单位矩阵。

$$
A \times A^{-1}=\left[\begin{array}{llll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]^{-1}=\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{lll}
\frac{a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{-a_{12}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} \\
\frac{-a_{21}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
\frac{a_{11} \times a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{12} \times(-a_{21})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{11} \times(-a_{12})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{12} \times a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} \\
\frac{a_{21} \times a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{22} \times(-a_{21})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{21} \times(-a_{12})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{22} \times a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{lll}
1 & 0 \\
0 & 1
\end{array}\right]
$$

这里有一点需要特别说明，不是每一个矩阵都是可逆的。如果一个矩阵是可逆的，那这个矩阵我们叫做**非奇异矩阵**，如果一个矩阵是不可逆的，那这个矩阵我们就叫做**奇异矩阵**，而且如果一个矩阵可逆，那它的逆矩阵必然是唯一的。

还记得行列式$a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}$吗？如果我们要证明矩阵是可逆的，只要证明行列式不等于零就行。更高阶的逆矩阵的算法也是一样的原理。

最后，我想通过一个现实生活中的案例来让你更多地了解逆矩阵。

一个旅游团由孩子和大人组成，去程他们一起做大巴，每个孩子的票价3元，大人票价3.2元，总共花费118.4元。回程一起做火车，每个孩子的票价3.5元，大人票价3.6元，总共花费

135.2元。请问旅游团里有多少小孩和大人？

首先，我们设置一些矩阵，组成线性方程$XA=B$。

$$
\begin{array}{cc}
\text{小孩} & \text{大人} \\
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
\text{大巴} & \text{火车} \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}
3 & 3.5 \\
3.2 & 3.6
\end{array}\right]
$$

要解X，我们就要先计算A的逆矩阵A^{-1}：

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{cc}
3 & 3.5 \\
3.2 & 3.6
\end{array}\right]^{-1}=\frac{1}{3 \times 3.6-3.5 \times 3.2}\left[\begin{array}{cc}
3.6 & -3.5 \\
-3.2 & 3
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
-9 & 8.75 \\
8 & -7.5
\end{array}\right]
$$

接下来再计算$X=B A^{-1}$：

$$
\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
118.4 & 135.2
\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}
-9 & 8.75 \\
8 & -7.5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
16 & 22
\end{array}\right]
$$

最终，我们得出这个旅游团有16个小孩和22个大人。

这也是解线性方程组的一种方法，类似这样的计算被广泛应用在各领域中，比如建筑工程、游戏和动画的3D效果上。虽然现在有很多程序包封装了这类数学计算的底层实现，但如果你能很好地理解这些概念，就可以为编程或算法调优打下坚实的基础。

Last but not least，方程次序很重要，也就是说，$AX=B$和$XA=B$的结果是不同的，这个一定要牢记哦！

转置矩阵

一般伴随逆矩阵之后出现的就是转置矩阵。在计算机图形图像处理中，如果要对一个物体进行旋转、平移、缩放等操作，就要对描述这个物体的所有矩阵进行运算，矩阵转置就是这类运算之一，而矩阵的转置在三维空间中的解释就相当于"得到关于某个点对称的三维立体"。所以，转置矩阵的定义很简单。

将矩阵的行列互换，得到的新矩阵就叫做转置矩阵（transpose）。转置矩阵的行列式不变。我们把$m×n$矩阵A的行列互换，得到转置矩阵A^{T}。

$$
A=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

$$
A^{T}=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m 1} \\
a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m 2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{1 n} & a_{2 n} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right.
$$

\end{array}\right]
$$

最后，为了方便你理解，我们再总结一下逆矩阵和转置矩阵的性质。你不用死记硬背，重在理解。

1. 矩阵和自身逆矩阵相乘得道单位矩阵，$A A^{-1}=I=A^{-1} A$；
2. A B两矩阵相乘的逆，等于逆矩阵B和逆矩阵A相乘，这里强调一下乘的顺序很重要，$(A B)^{-1}=B^{-1} A^{-1}$；
3. AB两矩阵相加后的逆矩阵，不等于各自逆矩阵的相加， $(A+B)^{-1} \neq A^{-1}+B^{-1}$；
4. 矩阵转置的转置还是它本身，$\left(A^{T}\right)^{\mathrm{T}}=A$；
5. AB两矩阵相加后的转置矩阵，等于各自转置矩阵的相加，$(A+B)^{T}=A^{T}+B^{T}$；
6. AB两矩阵相乘后的转置矩阵，等于转置矩阵B和转置矩阵A的相乘，这里再次强调乘的顺序很重要，$(A B)^{T}=B^{T} A^{T}$。

本节小结

好了，到这里矩阵这一讲就结束了，最后我再带你总结一下前面讲解的内容。

今天的知识，你只需要知道矩阵是线性方程组的另一种表达，了解和掌握矩阵的定义和性质就足够了。当然，矩阵还有很多内容，但我认为掌握了我讲的这些内容后，就为以后的一些矩阵应用场景打下了坚实的数学基础，也是下一讲的解线性方程组的前置知识。

线性代数练习场

对于10维列向量$x=\left(x_{1}, \ldots, x_{10}\right)^{T}$， $v=\left(v_{1}, \ldots, v_{10}\right)^{T}$，如果要计算$y=x x^{T}\left(I+v v^{T}\right) x$，其中$I$是10阶单位矩阵。你会怎么做？

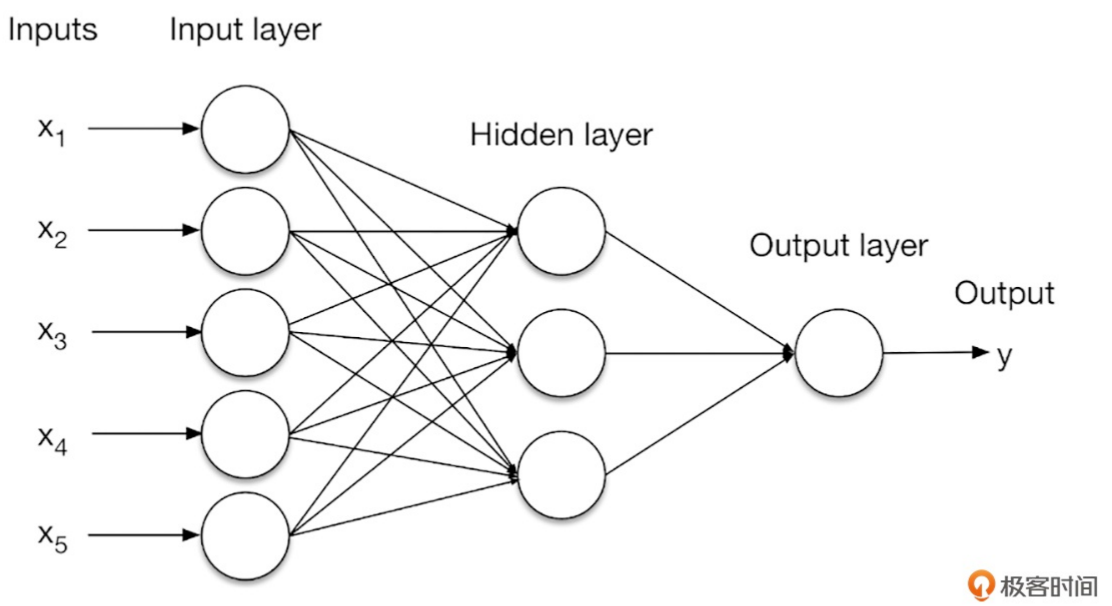
友情提醒，这里有多种方式解题。你能不能找到一个最简单的方法来解这道题？虽然结果很重要，但我想说的是过程更重要，而且往往解题过程不同，从计算机角度来说，运算的效率会有极大的不同。

欢迎你在留言区晒出你的运算过程和结果。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数，今天我们要讲的内容是“矩阵”。

在开始学习之前，我想先问你个问题，你觉得，学习矩阵有什么用呢？你可以先自己想一想。之后我们讲任何一个知识的时候，你都可以从这个角度出发，自己先思考一下，这样有助于你对所学内容理解得更深刻。

对于刚才那个问题，我的答案很简单，就一句话，从我们程序员的角度去理解的话，**矩阵可以极大地提高计算机的运算效率**。怎么说呢？我给你举一个例子。在机器学习中（特别是深度学习，或者更具体一点，神经网络），并行计算是非常昂贵的。



上图是一个典型的神经网络架构，在这时候，矩阵就能发挥用武之地了，计算H隐藏层输出的公式是：$H = f(W.x + b)$，其中W是权重矩阵，f是激活函数，b是偏差，x是输入层矩阵。而这个计算过程就叫做**向量化**（Vectorization），这也是GPU在深度学习中非常重要的原因，因为GPU非常擅长做类似矩阵乘之类的运算。

$$
X=\left|\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right|
$$

$$
W=\left|\begin{array}{ll}
w_{1} & w_{2} \\
w_{4} & w_{5} \\
x_{3} & w_{6}
\end{array}\right|
$$

$$
H=f\left(\left|\begin{array}{ll}
w_{1} & w_{2} \\
w_{4} & w_{5} \\
x_{3} & w_{6}
\end{array}\right|\left|\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right|+b\right)
$$

不过，矩阵也不仅仅局限于神经网络的应用，同时它也可以用在计算机图形图像的应用中，比如，三维物体从取景到屏幕的显示，就需要经历一系列的空间变换，才能生成二维图像显示在显示器上。在这个计算过程中，我们都需要用到矩阵。

矩阵是非常实用的，但它正式作为数学中的研究对象出现，其实是在行列式的研究发展起来之后。英国数学家 Arthur Cayley 被公认为矩阵论的创立人，他提出的矩阵概念可能来自于行列式。但我相信另一种说法，提出矩阵是为了更简单地表达线性方程组，也就是说，矩阵是线性方程组的另一种表达。

矩阵的基本概念

线性方程组的概念很简单，上节我们已经简单提过。你在小学或中学肯定也学过二元一次方程和二元一次方程组。

$$ax+by=c$$

$$
\left\{\begin{array}{l}
a_{1} x+b_{1} y+C_{1}=0 \\
a_{2} x+b_{2} y+C_{2}=0
\end{array}\right.
$$

在这样一个方程组中，$a1$、$a2$、$b1$、$b2$不能同时为0。当我们把二元一次方程组再扩展一下，变成多元一次方程组时，我们就能得到线性方程组的一般表达，即$AX=B$。

$$
\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.
$$

于是，这个线性方程组的所有系数就构成了一个$m×n$的m行n列矩阵：

$$
A=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

我们把A称为该方程组的系数矩阵，而当我们把等式右边的常数b放入矩阵后，就是下面这样：

$$

\widetilde{A}=\left[\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} & b_{1} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} & b_{2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n} & b_{m}
\end{array}\right]
$$

这样我们就得到了A矩阵的增广矩阵$\widetilde{A}$，可以表示为(A, B)，这里的B表示的是方程组常数项所构成的列向量，也就是$m×1$的m行1列矩阵：

$$
B=\left|\begin{array}{l}
b_{1} \\
b_{2} \\
\cdots \\
b_{m}
\end{array}\right|
$$

如果设X为$n×1$的n行1列矩阵：

$$
X=\left|\begin{array}{c}
x_{1} \\
x_{2} \\
\cdots \\
x_{n}
\end{array}\right|
$$

那么线性方程组A，就可以表示为$AX=B$的矩阵形式。如果我们再换一种表示形式，设：$a_{1} ,a_{2},\ldots, a_{n},\beta$表示增广矩阵$\widetilde{A}$的列向量，则线性方程组$A$又可表示为$a_{1} x_{1}+a_{2} x_{2}+\cdots+a_{n} x_{n}=β$。

线性方程组的矩阵和向量形式都是线性方程组的其他表达形式。在工作中，你可以用它们来简化求解，甚至可以提升计算效率，就如之前提到的神经网络的隐藏层的输出计算、图形图像的三维空间变换。在数学中也是同样的，你可以经常运用它们来简化求解。具体线性方程组求解的内容比较多，我们下一节课再来详细讲解求解过程。

通过前面的讲解，我相信你对矩阵有了一定的了解，现在我们再回头来看看矩阵的定义吧。

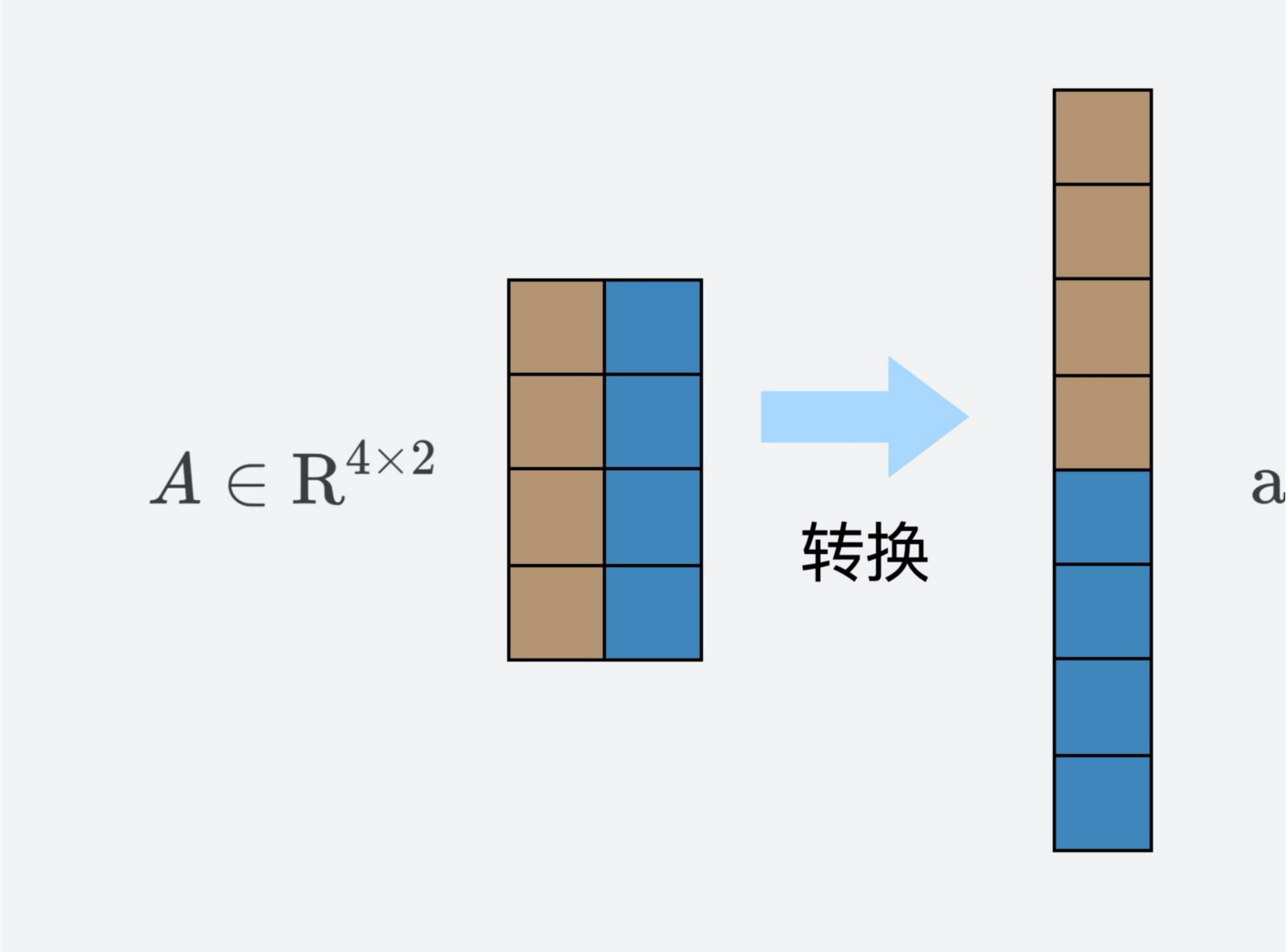
矩阵的定义是：一个(m, n)矩阵A，是由$m×n$个元素组成，m和n是实数，其中元素$a_{i j}, \mathrm{i}=1, \ldots, \mathrm{m}, \mathrm{j}=1, \ldots, \mathrm{n}$按$m$行$n$列的矩形排布方式后可以形成矩阵$A$：

$$
A=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

其中$a_{i j}$属于实数或复数，在我们的场景中是实数R，按通常的惯例，$(1, n)$矩阵叫做行，$(m, 1)$矩阵叫做列，这些特殊的矩阵叫做行或列向量。

定义完矩阵后，我接着讲一个比较有趣的概念，矩阵转换（Matrix transformation）。矩阵转换经常被用在计算机图形图像的转换中，比如，一张彩色图片从RGB角度来说是三维的，如果要转换成灰度图片，也就是一维图片，那就要做矩阵转换。

我们来看一下矩阵转换的过程。设$\mathrm{R}^{m \times n}$是实数矩阵(m, n)的集合，$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$可以表示成另一种形式 $a \in \mathrm{R}^{mn}$。我们把矩阵的n列堆叠成一个长向量后完成转换。这个转换也叫做reshape，其实就是重新调整原矩阵的行数、列数和维数，但是元素个数不变。



矩阵的运算

了解了矩阵的基本定义后，我们才能进入矩阵的运算环节，就是矩阵的加和乘。

加运算很简单，两个矩阵$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$，$B \in \mathrm{R}^{m \times n}$的加运算其实就是矩阵各自元素的加。

$$
A+B=\left[\begin{array}{ccc}
a_{11}+b_{11} & \ldots & a_{1 n}+b_{1 n} \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
a_{m 1}+b_{m 1} & \ldots & a_{m n}+b_{m n}
\end{array}\right] \in R^{m \times n}
$$

我推荐你使用NumPy的einsum来高效地做这类运算，因为它在速度和内存效率方面通常可以超越我们常见的array函数。

```
C= np.einsum('il, lj', A, B)
```

接下来，我们一起来看看矩阵的乘。这里你需要注意，矩阵的乘和通常意义上"数之间的乘"不同，矩阵的乘有多种类型，这里我讲三种最普遍，也是在各领域里用得最多的矩阵乘。

1.普通矩阵乘

普通矩阵乘是应用最广泛的矩阵乘，两个矩阵$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$，$B \in \mathrm{R}^{n \times k}$，普通矩阵则乘可以表示为$C=A B \in R^{m \times k}$，$C$中元素的计算规则是矩阵$A$、$B$对应两两元素乘积之和。

$$
c_{i j}=\sum_{k=1}^{n} a_{i k} b_{k j}, i=1, \ldots, m, j=1, \ldots, l
$$

我们举例来说明。C的第一个元素$c_{11}=a_{11} \times b_{11}+a_{12} \times b_{21}+a_{13} \times b_{31}=1 \times 1+2 \times 2+3 \times 3$。

$$
C=A B=\left[\begin{array}{lll}
1 & 2 & 3 \\
4 & 5 & 6
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
1 & 4 \\
2 & 5 \\
3 & 6
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{lll}
1 \times 1+2 \times 2+3 \times 3 & 1 \times 4+2 \times 5+3 \times 6 \\
4 \times 1+5 \times 2+6 \times 3 & 4 \times 4+5 \times 5+6 \times 6
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
14 & 32 \\
32 & 77
\end{array}\right]
$$

这里需要特别注意的是，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，例如，一个$n \times k$矩阵A和一个$k \times m$矩阵B相乘，最后得出$n \times m$矩阵C，而这里的k就是相邻阶数。

$$AB=C$$

但反过来B和A相乘就不行了，因为相邻阶数m不等于n。

2.哈达玛积

哈达玛积理解起来就很简单了，就是矩阵各对应元素的乘积，$c_{i j}=a_{i j} \times b_{i j}$ 。举个例子：

$$
C=A^{*} B=\left[\begin{array}{ll}
1 & 2 \\
4 & 5
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
1 & 4 \\
2 & 5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
1 * 1 & 2 * 4 \\
4 * 2 & 5 * 5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
1 & 8 \\
8 & 25
\end{array}\right]
$$

哈达玛积其实在数学中不常看到，不过，在编程中哈达玛积非常有用，因为它可以用来同时计算多组数据的乘积，计算效率很高。

3.克罗内克积

克罗内克积是以德国数学家利奥波德·克罗内克（Leopold Kronecker）的名字命名的。它可以应用在解线性矩阵方程和图像处理方面，当然从更时髦的角度说，它还能用在量子信息领域，我们也称之为直积或张量积。

和普通矩阵乘和哈达玛积不同的是，克罗内克积是两个任意大小矩阵间的运算，表示为$A×B$，如果A是一个$m × n$的矩阵，而B是一个$p×q$的矩阵，克罗内克积则是一个$mp×nq$的矩阵。

接下来我们需要定义一个**在矩阵的乘法中起着特殊作用**的矩阵，它就是**单位矩阵**。高等代数中，在求解相应的矩阵时，若添加单位矩阵，通过初等变换进行求解，往往可以使问题变得简单。按照百度百科的解释，单位矩阵如同数的乘法中的1，这种矩阵就被称为单位矩阵。它是个方阵，从左上角到右下角的对角线，也就是主对角线上的元素均为1，除此以外全都为0。

在线性代数中，大小为n的单位矩阵就是在主对角线上均为1，而其他地方都是0的$n×n$的方阵，它用I_{n}表示，表达时为了方便可以忽略阶数，直接用I来表示：

$$
I_{1}=[1], I_{2}=\left[\begin{array}{ll}
1 & 0 \\
0 & 1
\end{array}\right], I_{3}=\left[\begin{array}{lll}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{array}\right], \ldots, I_{n}=\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 1 & \ldots & 0 \\
. & . & \ldots & . \\
. & . & . & . \\
0 & 0 & \ldots & 1
\end{array}\right]
$$

矩阵的性质

在了解了矩阵加和乘，以及单位矩阵后，我们是时候来看一看矩阵的性质了。了解矩阵的性质是进行矩阵计算的前提，就像我们小时候学加减乘除四则运算法则时那样。所以，这块内容对你来说应该不难，你作为了解就好，重点是之后的运算。

1.结合律

任意实数$m×n$矩阵A，$n×p$矩阵B，$p×q$矩阵C之间相乘，满足结合律$(AB)C=A(BC)$。这个很好理解，我就不多说了。

$$\forall A \in R^{m \times n}, B \in R^{n \times p}, C \in R^{p \times q}:(A B) C=A(B C)$$

2.分配律

任意实数$m×n$矩阵A和B，$n×p$矩阵C和D之间相乘满足分配律$(A+B)C=AC+BC$，$A(C+D)=AC+AD$。

$$
\forall \mathrm{A}, B \in \mathrm{R}^{m \times n}, C, D \in \mathrm{R}^{n \times p}:(A+B) C=A C+B C, A(C+D)=A C+A D
$$

3.单位矩阵乘

任意实数$m×n$矩阵A和单位矩阵之间的乘，等于它本身A。

$$
\forall A \in R^{m \times n}: I_{m} A=A I_{n}=A
$$

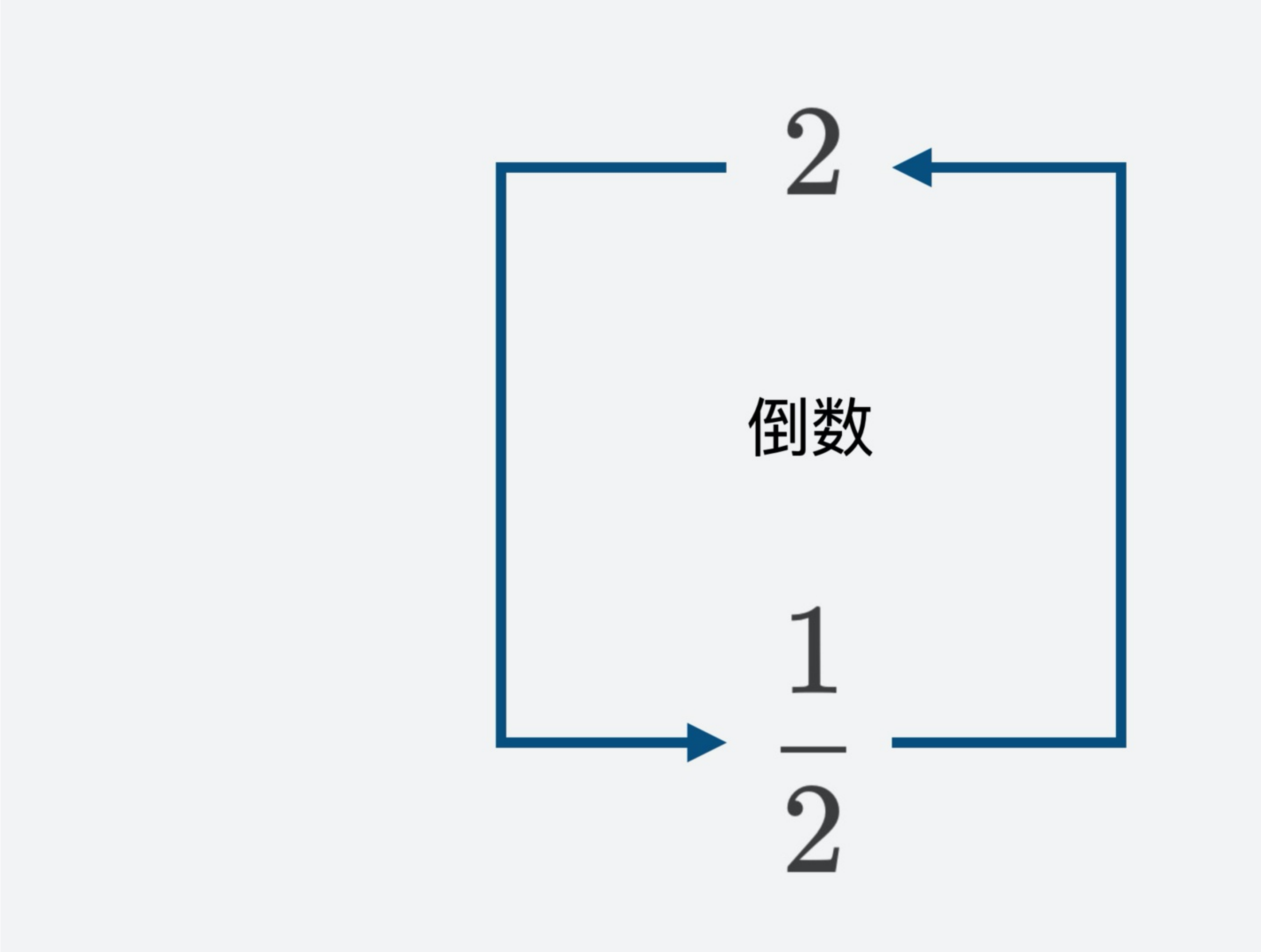
注意，这里的行和列不同，$m \neq n$意味着，根据矩阵乘，左乘和右乘单位矩阵也不同，也就是$I_{m} \neq I_{n}$。

逆矩阵与转置矩阵

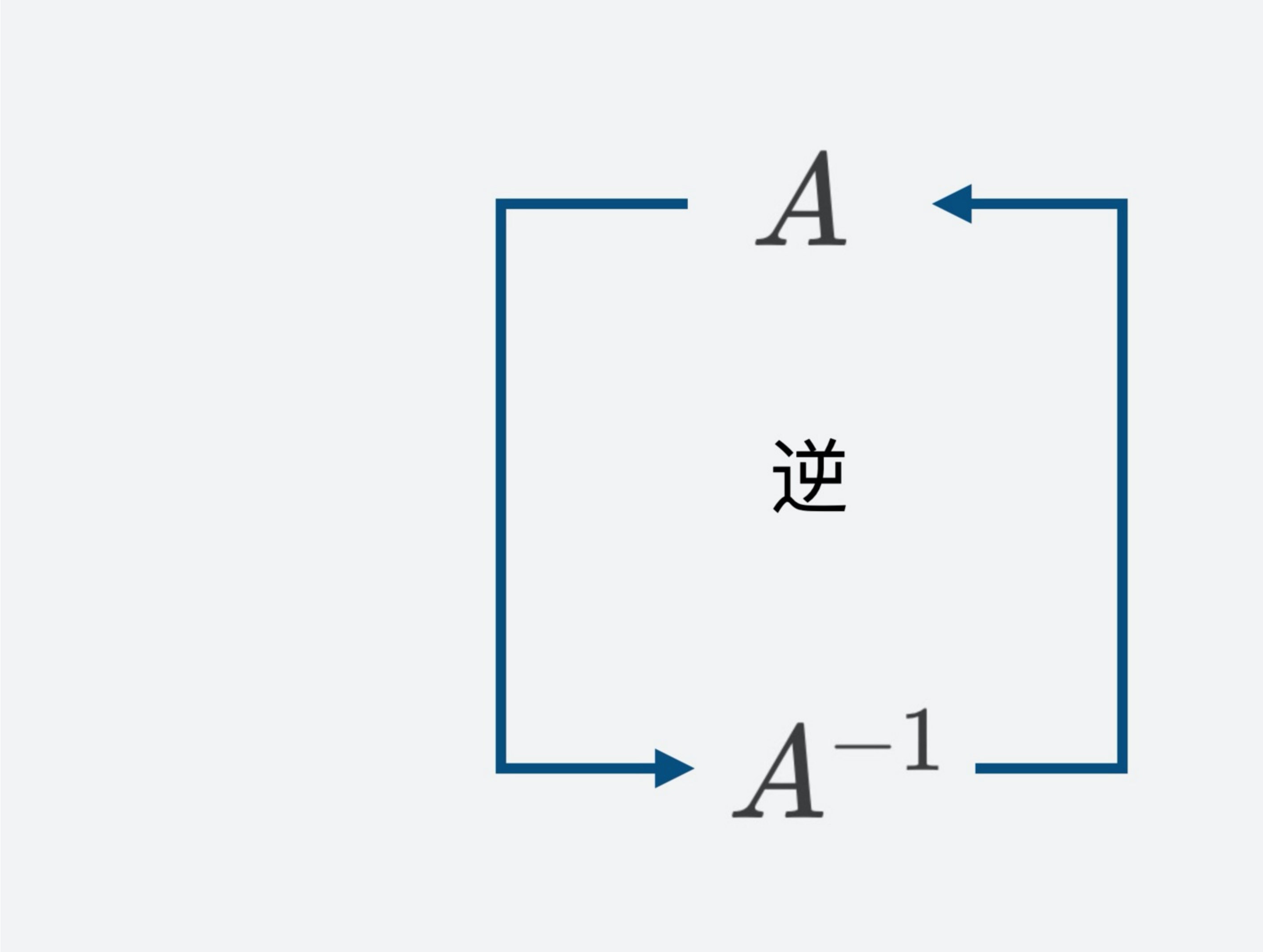
了解矩阵基本概念、运算，以及性质后，我来讲一讲矩阵应用中的两个核心内容——逆矩阵和转置矩阵。逆矩阵和转置矩阵在实际应用中大有用处，比如：坐标系中的图形变换运算。我们先来看下什么是逆矩阵。

逆矩阵

下面这个图你应该非常熟悉了，图中表现的是数字的倒数，2的倒数是$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$的倒数是2。



其实逆矩阵也有着类似的概念，只不过是写法不一样，我们会把逆矩阵写成A^{-1}。那为什么不是$\frac{1}{A}$呢？那是因为数字1无法被矩阵除。



我们知道，2乘以它的倒数$\frac{1}{2}$等于1。同样的道理，A乘以它的逆矩阵A^{-1}就等于单位矩阵，即$\mathrm{A} \times A^{-1}=\mathrm{I}$（$I$即单位矩阵），反过来也一样，$\mathrm{A}^{-1} \times A=\mathrm{I}$。

为方便你理解，我用一个2×2矩阵A来解释一下逆矩阵的算法。首先，我们交换a_{11}和a_{22}的位置，然后在a_{12}和a_{21}前加上负号，最后除以行列式$a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}$。

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]^{-1}=\frac{1}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}\left[\begin{array}{cc}
a_{22} & -a_{12} \\
-a_{21} & a_{11}
\end{array}\right]
$$

那我们该如何验证这是不是正解呢？

方法其实很简单，记得刚才的公式就行，$\mathrm{A} \times A^{-1}=\mathrm{I}$。现在我们就代入公式来验证一下，$A$和它的逆矩阵相乘，通过刚才的算法最终得出的结果是单位矩阵。

$$
A \times A^{-1}=\left[\begin{array}{llll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]^{-1}=\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{lll}
\frac{a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{-a_{12}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} \\
\frac{-a_{21}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
\frac{a_{11} \times a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{12} \times(-a_{21})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{11} \times(-a_{12})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{12} \times a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} \\
\frac{a_{21} \times a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{22} \times(-a_{21})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{21} \times(-a_{12})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{22} \times a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{lll}
1 & 0 \\
0 & 1
\end{array}\right]
$$

这里有一点需要特别说明，不是每一个矩阵都是可逆的。如果一个矩阵是可逆的，那这个矩阵我们叫做**非奇异矩阵**，如果一个矩阵是不可逆的，那这个矩阵我们就叫做**奇异矩阵**，而且如果一个矩阵可逆，那它的逆矩阵必然是唯一的。

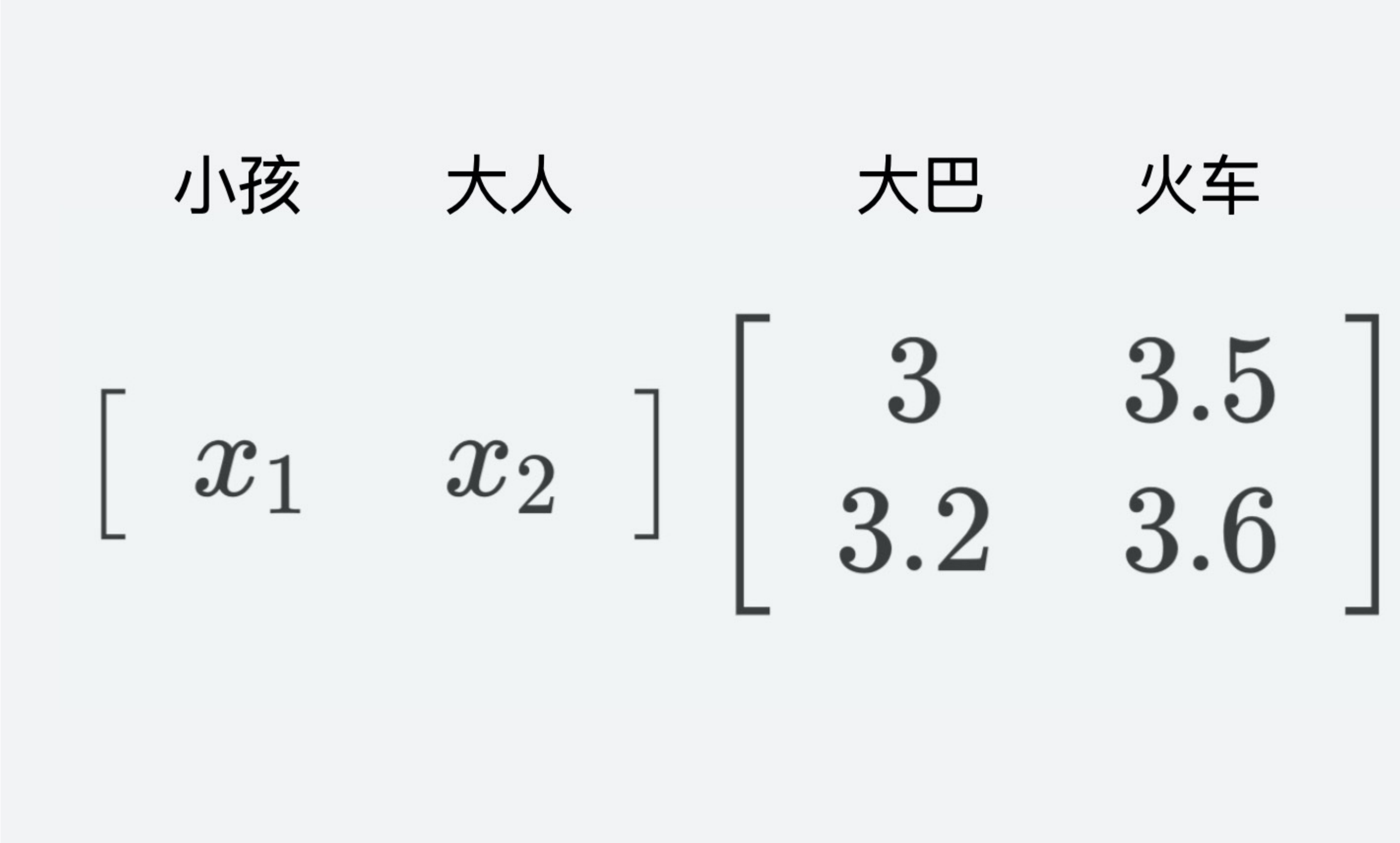
还记得行列式$a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}$吗？如果我们要证明矩阵是可逆的，只要证明行列式不等于零就行。更高阶的逆矩阵的算法也是一样的原理。

最后，我想通过一个现实生活中的案例来让你更多地了解逆矩阵。

一个旅游团由孩子和大人组成，去程他们一起做大巴，每个孩子的票价3元，大人票价3.2元，总共花费118.4元。回程一起做火车，每个孩子的票价3.5元，大人票价3.6元，总共花费

135.2元。请问旅游团里有多少小孩和大人？

首先，我们设置一些矩阵，组成线性方程$XA=B$。



要解X，我们就要先计算A的逆矩阵A^{-1}：

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{cc}
3 & 3.5 \\
3.2 & 3.6
\end{array}\right]^{-1}=\frac{1}{3 \times 3.6-3.5 \times 3.2}\left[\begin{array}{cc}
3.6 & -3.5 \\
-3.2 & 3
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
-9 & 8.75 \\
8 & -7.5
\end{array}\right]
$$

接下来再计算$X=B A^{-1}$：

$$
\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
118.4 & 135.2
\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}
-9 & 8.75 \\
8 & -7.5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
16 & 22
\end{array}\right]
$$

最终，我们得出这个旅游团有16个小孩和22个大人。

这也是解线性方程组的一种方法，类似这样的计算被广泛应用在各领域中，比如建筑工程、游戏和动画的3D效果上。虽然现在有很多程序包封装了这类数学计算的底层实现，但如果你能很好地理解这些概念，就可以为编程或算法调优打下坚实的基础。

Last but not least，方程次序很重要，也就是说，$AX=B$和$XA=B$的结果是不同的，这个一定要牢记哦！

转置矩阵

一般伴随逆矩阵之后出现的就是转置矩阵。在计算机图形图像处理中，如果要对一个物体进行旋转、平移、缩放等操作，就要对描述这个物体的所有矩阵进行运算，矩阵转置就是这类运算之一，而矩阵的转置在三维空间中的解释就相当于“得到关于某个点对称的三维立体”。所以，转置矩阵的定义很简单。

将矩阵的行列互换，得到的新矩阵就叫做转置矩阵（transpose）。转置矩阵的行列式不变。我们把$m×n$矩阵A的行列互换，得到转置矩阵A^{T}。

$$
A=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

$$
A^{T}=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m 1} \\
a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m 2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{1 n} & a_{2 n} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

\end{array}\right]
$$

最后，为了方便你理解，我们再总结一下逆矩阵和转置矩阵的性质。你不用死记硬背，重在理解。

1. 矩阵和自身逆矩阵相乘得道单位矩阵，$A A^{-1}=I=A^{-1} A$；
2. $A$$B$两矩阵相乘的逆，等于逆矩阵$B$和逆矩阵$A$相乘，这里强调一下乘的顺序很重要，$(A B)^{-1}=B^{-1} A^{-1}$；
3. AB两矩阵相加后的逆矩阵，不等于各自逆矩阵的相加，$(A+B)^{-1} \neq A^{-1}+B^{-1}$；
4. 矩阵转置的转置还是它本身，$\left(A^{T}\right)^{\mathrm{T}}=A$；
5. AB两矩阵相加后的转置矩阵，等于各自转置矩阵的相加，$(A+B)^{T}=A^{T}+B^{T}$；
6. AB两矩阵相乘后的转置矩阵，等于转置矩阵B和转置矩阵A的相乘，这里再次强调乘的顺序很重要，$(A B)^{T}=B^{T} A^{T}$。

本节小结

好了，到这里矩阵这一讲就结束了，最后我再带你总结一下前面讲解的内容。

今天的知识，你只需要知道矩阵是线性方程组的另一种表达，了解和掌握矩阵的定义和性质就足够了。当然，矩阵还有很多内容，但我认为掌握了我讲的这些内容后，就为以后的一些矩阵应用场景打下了坚实的数学基础，也是下一讲的解线性方程组的前置知识。

线性代数练习场

对于10维列向量$x=\left(x_{1}, \ldots, x_{10}\right)^{T}$，$v=\left(v_{1}, \ldots, v_{10}\right)^{T}$，如果要计算$y=x x^{T}\left(I+v v^{T}\right) x$，其中$I$是10阶单位矩阵。你会怎么做？

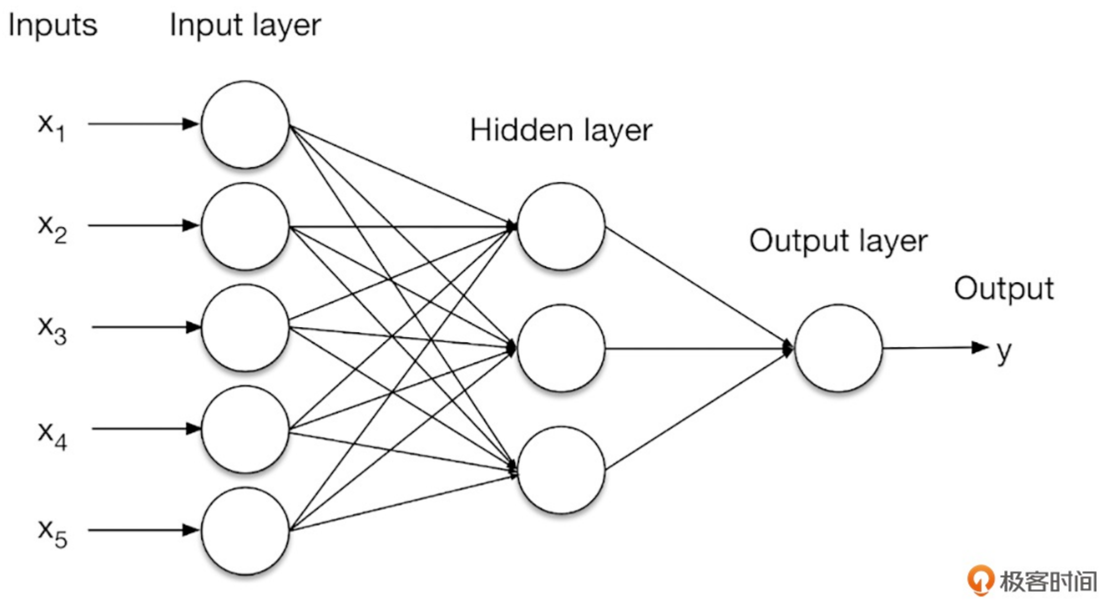
友情提醒，这里有多种方式解题。你能不能找到一个最简单的方法来解这道题？虽然结果很重要，但我想说的是过程更重要，而且往往解题过程不同，从计算机角度来说，运算的效率会有极大的不同。

欢迎你在留言区晒出你的运算过程和结果。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数，今天我们要讲的内容是“矩阵”。

在开始学习之前，我想先问你个问题，你觉得，学习矩阵有什么用呢？你可以先自己想一想。之后我们讲任何一个知识的时候，你都可以从这个角度出发，自己先思考一下，这样有助于你对所学内容理解得更深刻。

对于刚才那个问题，我的答案很简单，就一句话，从我们程序员的角度去理解的话，**矩阵可以极大地提高计算机的运算效率**。怎么说呢？我给你举一个例子。在机器学习中（特别是深度学习，或者更具体一点，神经网络），并行计算是非常昂贵的。



上图是一个典型的神经网络架构，在这时候，矩阵就能发挥用武之地了，计算H隐藏层输出的公式是：$H = f(W.x + b)$，其中W是权重矩阵，f是激活函数，b是偏差，x是输入层矩阵。而这个计算过程就叫做**向量化**（Vectorization），这也是GPU在深度学习中非常重要的原因，因为GPU非常擅长做类似矩阵乘之类的运算。

$$
X=\left|\begin{array} {l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right|
$$

$$
W=\left|\begin{array} {ll}
w_{1} & w_{2} \\
w_{4} & w_{5} \\
x_{3} & w_{6}
\end{array}\right|
$$

$$
H=f\left(\left|\begin{array} {ll}
w_{1} & w_{2} \\
w_{4} & w_{5} \\
x_{3} & w_{6}
\end{array}\right|\left|\begin{array} {l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right|+b\right)
$$

不过，矩阵也不仅仅局限于神经网络的应用，同时它也可以用在计算机图形图像的应用中，比如，三维物体从取景到屏幕的显示，就需要经历一系列的空间变换，才能生成二维图像显示在显示器上。在这个计算过程中，我们都需要用到矩阵。

矩阵是非常实用的，但它正式作为数学中的研究对象出现，其实是在行列式的研究发展起来之后。英国数学家 Arthur Cayley 被公认为矩阵论的创立人，他提出的矩阵概念可能来自于行列式。但我相信另一种说法，提出矩阵是为了更简单地表达线性方程组，也就是说，矩阵是线性方程组的另一种表达。

矩阵的基本概念

线性方程组的概念很简单，上节我们已经简单提过。你在小学或中学肯定也学过二元一次方程和二元一次方程组。

$$ax+by=c$$

$$
\left\{\begin{array} {l}
a_{1} x+b_{1} y+C_{1}=0 \\
a_{2} x+b_{2} y+C_{2}=0
\end{array}\right.
$$

在这样一个方程组中，$a1$、$a2$、$b1$、$b2$不能同时为0。当我们把二元一次方程组再扩展一下，变成多元一次方程组时，我们就能得到线性方程组的一般表达，即$AX=B$。

$$
\left\{\begin{array} {l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.
$$

于是，这个线性方程组的所有系数就构成了一个$m×n$的m行n列矩阵：

$$
A=\left[\begin{array} {cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

我们把A称为该方程组的系数矩阵，而当我们把等式右边的常数b放入矩阵后，就是下面这样：

$$

$$
\widetilde{A}=\left[\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} & b_{1} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} & b_{2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n} & b_{m}
\end{array}\right]
$$

这样我们就得到了A矩阵的增广矩阵$\widetilde{A}$，可以表示为(A, B)，这里的B表示的是方程组常数项所构成的列向量，也就是$m \times 1$的m行1列矩阵：

$$
B=\left|\begin{array}{l}
b_{1} \\
b_{2} \\
\cdots \\
b_{m}
\end{array}\right|
$$

如果设X为$n \times 1$的n行1列矩阵：

$$
X=\left|\begin{array}{c}
x_{1} \\
x_{2} \\
\cdots \\
x_{n}
\end{array}\right|
$$

那么线性方程组A，就可以表示为$AX=B$的矩阵形式。如果我们再换一种表示形式，设：$a_{1} ,a_{2},\ldots, a_{n},\beta$表示增广矩阵$\widetilde{A}$的列向量，则线性方程组$A$又可表示为$a_{1} x_{1}+a_{2} x_{2}+\cdots+a_{n} x_{n}=\beta$。

线性方程组的矩阵和向量形式都是线性方程组的其他表达形式。在工作中，你可以用它们来简化求解，甚至可以提升计算效率，就如之前提到的神经网络的隐藏层的输出计算、图形图像的三维空间变换。在数学中也是同样的，你可以经常运用它们来简化求解。具体线性方程组求解的内容比较多，我们下一节课再来详细讲解求解过程。

通过前面的讲解，我相信你对矩阵有了一定的了解，现在我们再回头来看看矩阵的定义吧。

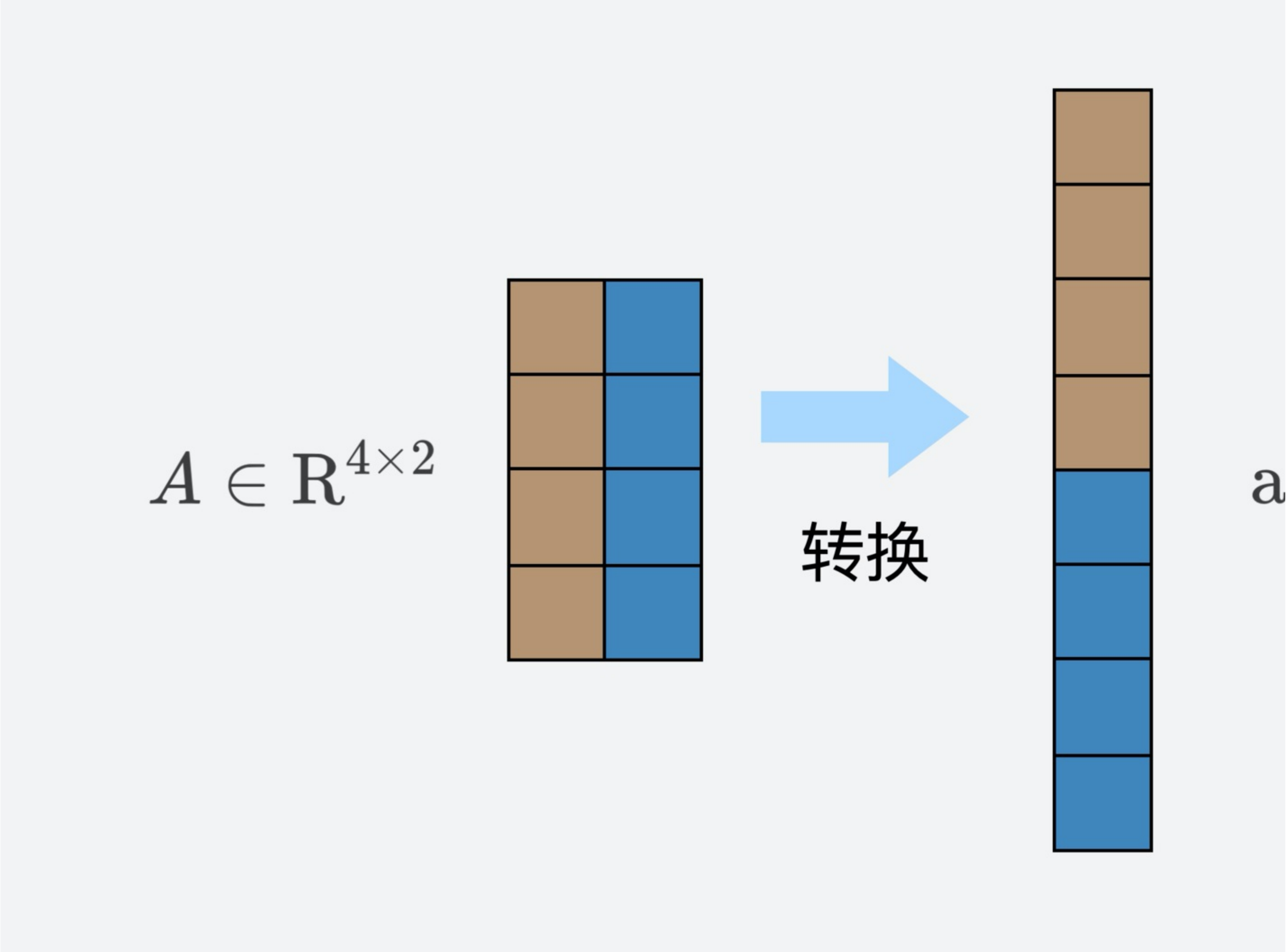
矩阵的定义是：一个(m, n)矩阵A，是由$m \times n$个元素组成，m和n是实数，其中元素$a_{i j}, \mathrm{i}=1, \ldots, \mathrm{m}, \mathrm{j}=1, \ldots, \mathrm{n}$按$m$行$n$列的矩形排布方式后可以形成矩阵$A$：

$$
A=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

其中$a_{i j}$属于实数或复数，在我们的场景中是实数R，按通常的惯例，$(1, n)$矩阵叫做行，$(m, 1)$矩阵叫做列，这些特殊的矩阵叫做行或列向量。

定义完矩阵后，我接着讲一个比较有趣的概念，矩阵转换（Matrix transformation）。矩阵转换经常被用在计算机图形图像的转换中，比如，一张彩色图片从RGB角度来说是三维的，如果要转换成灰度图片，也就是一维图片，那就要做矩阵转换。

我们来看一下矩阵转换的过程。设$\mathrm{R}^{m \times n}$是实数矩阵(m, n)的集合，$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$可以表示成另一种形式 $a \in \mathrm{R}^{mn}$。我们把矩阵的n列堆叠成一个长向量后完成转换。这个转换也叫做reshape，其实就是重新调整原矩阵的行数、列数和维数，但是元素个数不变。



矩阵的运算

了解了矩阵的基本定义后，我们才能进入矩阵的运算环节，就是矩阵的加和乘。

加运算很简单，两个矩阵$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$，$B \in \mathrm{R}^{m \times n}$的加运算其实就是矩阵各自元素的加。

$$
A+B=\left[\begin{array}{ccc}
a_{11}+b_{11} & \ldots & a_{1 n}+b_{1 n} \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
a_{m 1}+b_{m 1} & \ldots & a_{m n}+b_{m n}
\end{array}\right] \in R^{m \times n}
$$

我推荐你使用NumPy的einsum来高效地做这类运算，因为它在速度和内存效率方面通常可以超越我们常见的array函数。

```
C= np.einsum('il, lj', A, B)
```

接下来，我们一起来看看矩阵的乘。这里你需要注意，矩阵的乘和通常意义上"数之间的乘"不同，矩阵的乘有多种类型，这里我讲三种最普遍，也是在各领域里用得最多的矩阵乘。

1.普通矩阵乘

普通矩阵乘是应用最广泛的矩阵乘，两个矩阵$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$，$B \in \mathrm{R}^{n \times k}$，普通矩阵则乘可以表示为$C=A B \in R^{m \times k}$，$C$中元素的计算规则是矩阵$A$、$B$对应两两元素乘积之和。

$$
c_{i j}=\sum_{k=1}^{n} a_{i k} b_{k j}, i=1, \ldots, m, j=1, \ldots, l
$$

我们举例来说明。C的第一个元素$c_{11}=a_{11} \times b_{11}+a_{12} \times b_{21}+a_{13} \times b_{31}=1 \times 1+2 \times 2+3 \times 3$。

$$
C=A B=\left[\begin{array}{lll}
1 & 2 & 3 \\
4 & 5 & 6
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
1 & 4 \\
2 & 5 \\
3 & 6
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{lll}
1 \times 1+2 \times 2+3 \times 3 & 1 \times 4+2 \times 5+3 \times 6 \\
4 \times 1+5 \times 2+6 \times 3 & 4 \times 4+5 \times 5+6 \times 6
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
14 & 32 \\
32 & 77
\end{array}\right]
$$

这里需要特别注意的是，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，例如，一个$n×k$矩阵A和一个$k×m$矩阵B相乘，最后得出$n×m$矩阵C，而这里的k就是相邻阶数。

$$AB=C$$

但反过来B和A相乘就不行了，因为相邻阶数m不等于n。

2.哈达玛积

哈达玛积理解起来就很简单了，就是矩阵各对应元素的乘积，$c_{i j}=a_{i j} \times b_{i j}$ 。举个例子：

$$
C=A^{*} B=\left[\begin{array}{ll}
1 & 2 \\
4 & 5
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
1 & 4 \\
2 & 5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
1 * 1 & 2 * 4 \\
4 * 2 & 5 * 5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
1 & 8 \\
8 & 25
\end{array}\right]
$$

哈达玛积其实在数学中不常看到，不过，在编程中哈达玛积非常有用，因为它可以用来同时计算多组数据的乘积，计算效率很高。

3.克罗内克积

克罗内克积是以德国数学家利奥波德·克罗内克（Leopold Kronecker）的名字命名的。它可以应用在解线性矩阵方程和图像处理方面，当然从更时髦的角度说，它还能用在量子信息领域，我们也称之为直积或张量积。

和普通矩阵乘和哈达玛积不同的是，克罗内克积是两个任意大小矩阵间的运算，表示为$A×B$，如果A是一个$m × n$的矩阵，而B是一个$p×q$的矩阵，克罗内克积则是一个$mp×nq$的矩阵。

接下来我们需要定义一个**在矩阵的乘法中起着特殊作用**的矩阵，它就是**单位矩阵**。高等代数中，在求解相应的矩阵时，若添加单位矩阵，通过初等变换进行求解，往往可以使问题变得简单。按照百度百科的解释，单位矩阵如同数的乘法中的1，这种矩阵就被称为单位矩阵。它是个方阵，从左上角到右下角的对角线，也就是主对角线上的元素均为1，除此以外全都为0。

在线性代数中，大小为n的单位矩阵就是在主对角线上均为1，而其他地方都是0的$n×n$的方阵，它用I_{n}表示，表达时为了方便可以忽略阶数，直接用I来表示：

$$
I_{1}=[1], I_{2}=\left[\begin{array}{ll}
1 & 0 \\
0 & 1
\end{array}\right], I_{3}=\left[\begin{array}{lll}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{array}\right], \ldots, I_{n}=\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 1 & \ldots & 0 \\
. & . & \ldots & . \\
. & . & . & . \\
0 & 0 & \ldots & 1
\end{array}\right]
$$

矩阵的性质

在了解了矩阵加和乘，以及单位矩阵后，我们是时候来看一看矩阵的性质了。了解矩阵的性质是进行矩阵计算的前提，就像我们小时候学加减乘除四则运算法则时那样。所以，这块内容对你来说应该不难，你作为了解就好，重点是之后的运算。

1.结合律

任意实数$m×n$矩阵A，$n×p$矩阵B，$p×q$矩阵C之间相乘，满足结合律$(AB)C=A(BC)$。这个很好理解，我就不多说了。

$$\forall A \in R^{m \times n}, B \in R^{n \times p}, C \in R^{p \times q}:(A B) C=A(B C)$$

2.分配律

任意实数$m×n$矩阵A和B，$n×p$矩阵C和D之间相乘满足分配律$(A+B)C=AC+BC$，$A(C+D)=AC+AD$。

$$
\forall \mathrm{A}, B \in \mathrm{R}^{m \times n}, C, D \in \mathrm{R}^{n \times p}:(A+B) C=A C+B C, A(C+D)=A C+A D
$$

3.单位矩阵乘

任意实数$m×n$矩阵A和单位矩阵之间的乘，等于它本身A。

$$
\forall A \in R^{m \times n}: I_{m} A=A I_{n}=A
$$

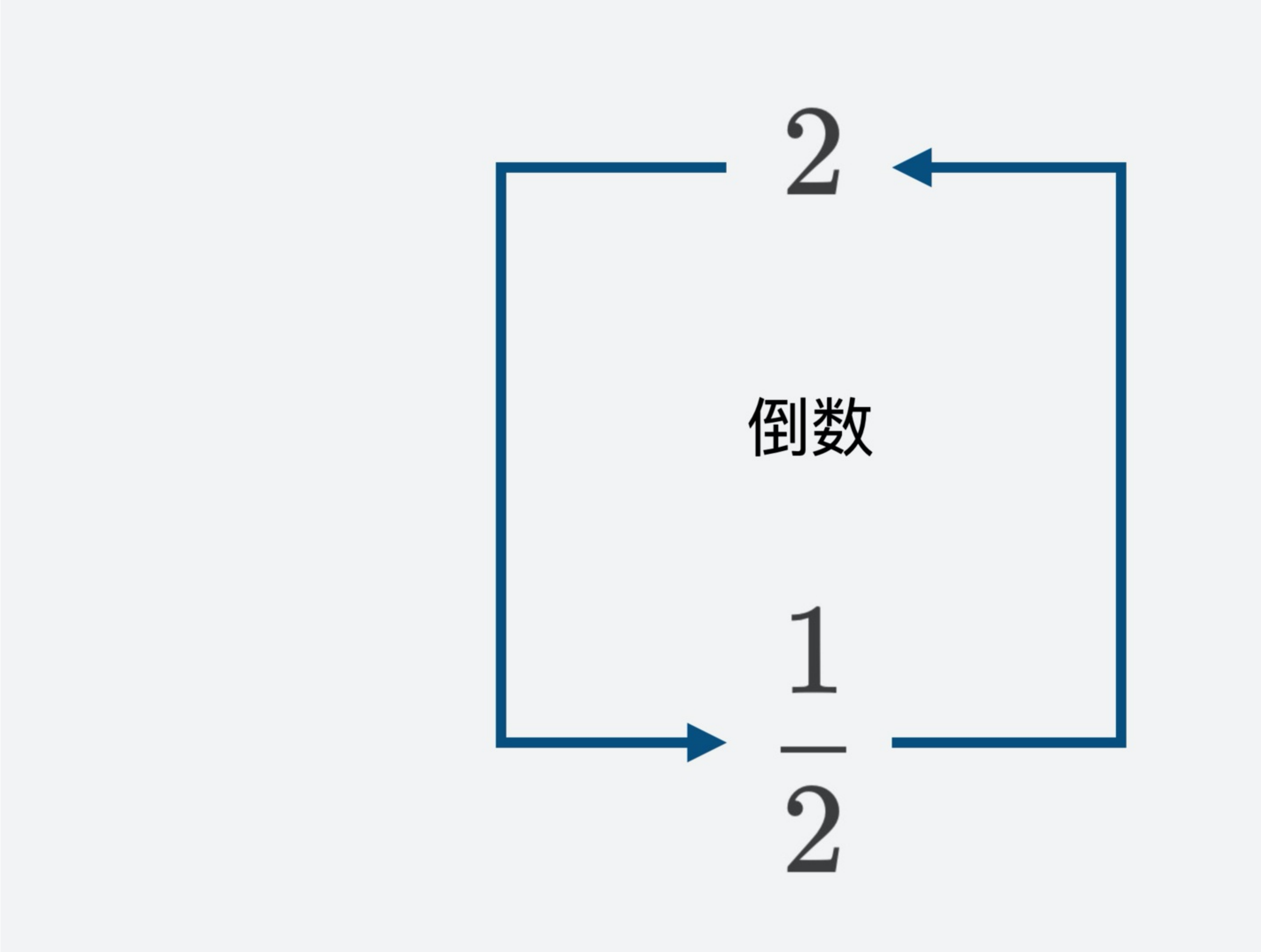
注意，这里的行和列不同，$m \neq n$意味着，根据矩阵乘，左乘和右乘单位矩阵也不同，也就是$I_{m} \neq I_{n}$。

逆矩阵与转置矩阵

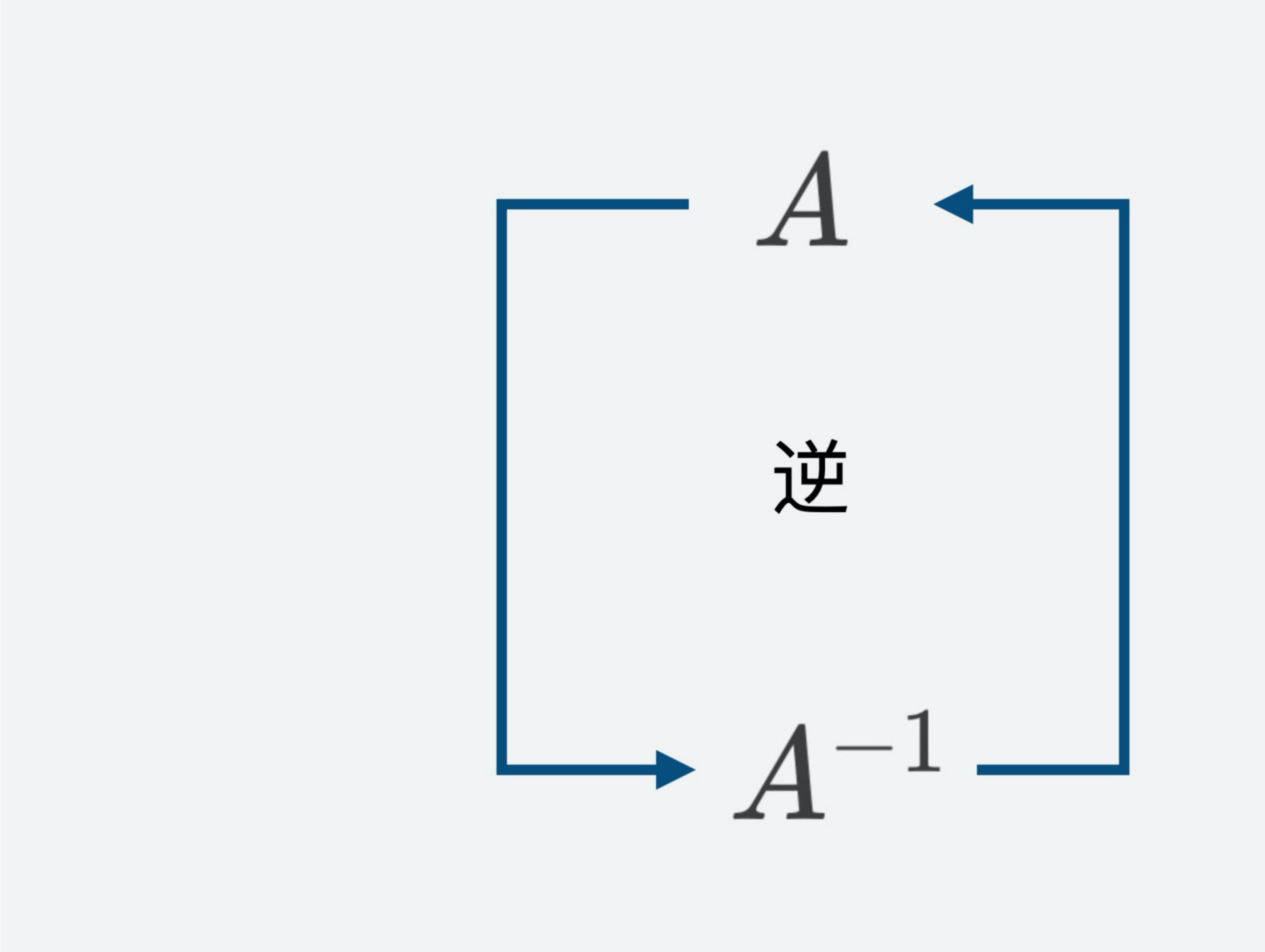
了解矩阵基本概念、运算，以及性质后，我来讲一讲矩阵应用中的两个核心内容——逆矩阵和转置矩阵。逆矩阵和转置矩阵在实际应用中大有用处，比如：坐标系中的图形变换运算。我们先来看下什么是逆矩阵。

逆矩阵

下面这个图你应该非常熟悉了，图中表现的是数字的倒数，2的倒数是$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$的倒数是2。



其实逆矩阵也有着类似的概念，只不过是写法不一样，我们会把逆矩阵写成A^{-1}。那为什么不是$\frac{1}{A}$呢？那是因为数字1无法被矩阵除。



我们知道，2乘以它的倒数$\frac{1}{2}$等于1。同样的道理，A乘以它的逆矩阵A^{-1}就等于单位矩阵，即$\mathrm{A} \times A^{-1}=\mathrm{I}$（$I$即单位矩阵），反过来也一样，$\mathrm{A}^{-1} \times A=\mathrm{I}$。

为方便你理解，我用一个2×2矩阵A来解释一下逆矩阵的算法。首先，我们交换a_{11}和a_{22}的位置，然后在a_{12}和a_{21}前加上负号，最后除以行列式$a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}$。

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]^{-1}=\frac{1}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}\left[\begin{array}{cc}
a_{22} & -a_{12} \\
-a_{21} & a_{11}
\end{array}\right]
$$

那我们该如何验证这是不是正解呢？

方法其实很简单，记得刚才的公式就行，$\mathrm{A} \times A^{-1}=\mathrm{I}$。现在我们就代入公式来验证一下，$A$和它的逆矩阵相乘，通过刚才的算法最终得出的结果是单位矩阵。

$$
A \times A^{-1}=\left[\begin{array}{llll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]^{-1}=\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{lll}
\frac{a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{-a_{12}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} \\
\frac{-a_{21}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
\frac{a_{11} \times a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{12} ×(-a_{21})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{11} ×(-a_{12})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{12} \times a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} \\
\frac{a_{21} \times a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{22} ×(-a_{21})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{21} ×(-a_{12})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{22} × a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{lll}
1 & 0 \\
0 & 1
\end{array}\right]
$$

这里有一点需要特别说明，不是每一个矩阵都是可逆的。如果一个矩阵是可逆的，那这个矩阵我们叫做**非奇异矩阵**，如果一个矩阵是不可逆的，那这个矩阵我们就叫做**奇异矩阵**，而且如果一个矩阵可逆，那它的逆矩阵必然是唯一的。

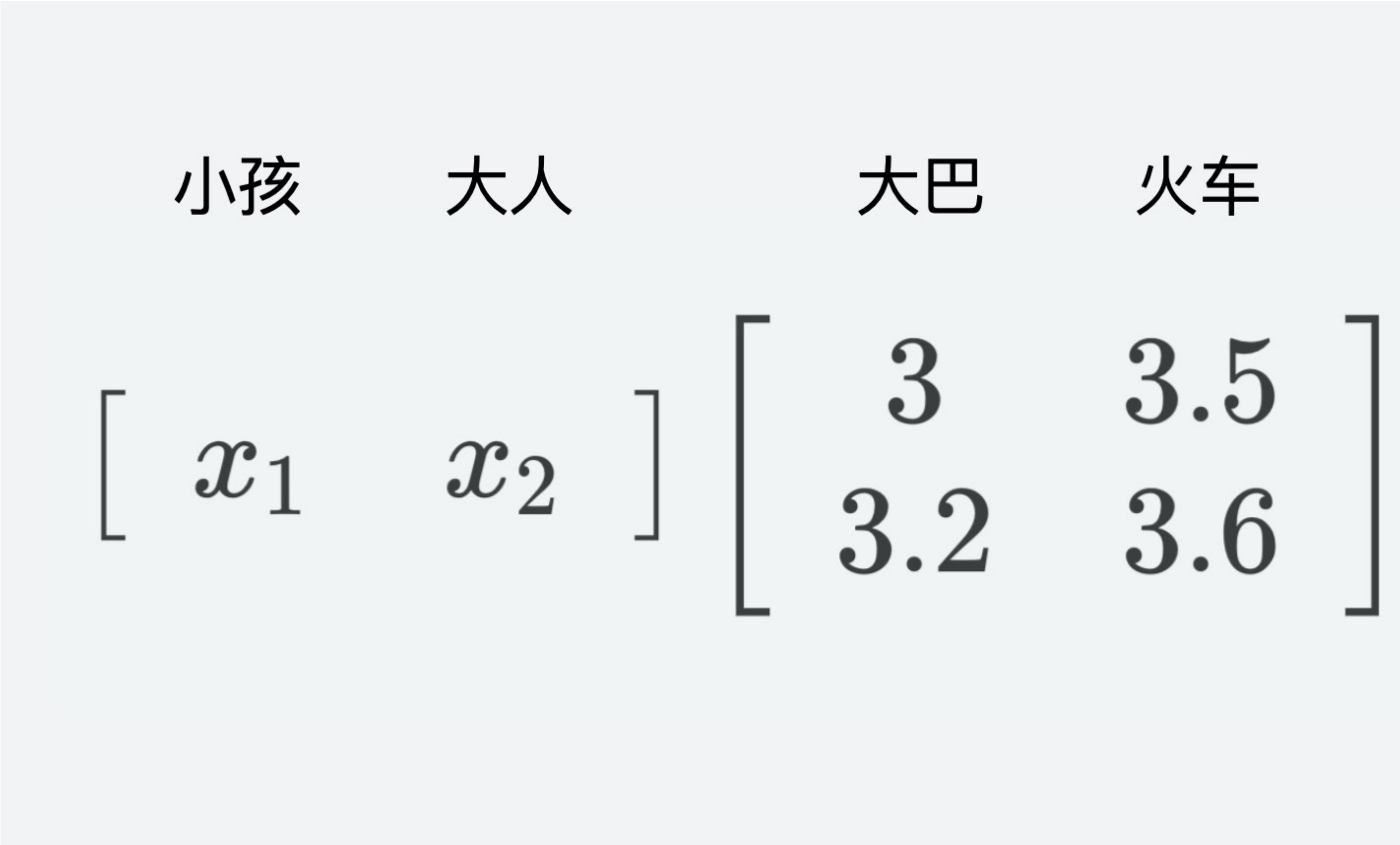
还记得行列式$a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}$吗？如果我们要证明矩阵是可逆的，只要证明行列式不等于零就行。更高阶的逆矩阵的算法也是一样的原理。

最后，我想通过一个现实生活中的案例来让你更多地了解逆矩阵。

一个旅游团由孩子和大人组成，去程他们一起做大巴，每个孩子的票价3元，大人票价3.2元，总共花费118.4元。回程一起做火车，每个孩子的票价3.5元，大人票价3.6元，总共花费

135.2元。请问旅游团里有多少小孩和大人？

首先，我们设置一些矩阵，组成线性方程$XA=B$。



要解X，我们就要先计算A的逆矩阵A^{-1}：

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{cc}
3 & 3.5 \\
3.2 & 3.6
\end{array}\right]^{-1}=\frac{1}{3 \times 3.6-3.5 \times 3.2}\left[\begin{array}{cc}
3.6 & -3.5 \\
-3.2 & 3
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
-9 & 8.75 \\
8 & -7.5
\end{array}\right]
$$

接下来再计算$X=B A^{-1}$：

$$
\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
118.4 & 135.2
\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}
-9 & 8.75 \\
8 & -7.5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
16 & 22
\end{array}\right]
$$

最终，我们得出这个旅游团有16个小孩和22个大人。

这也是解线性方程组的一种方法，类似这样的计算被广泛应用在各领域中，比如建筑工程、游戏和动画的3D效果上。虽然现在有很多程序包封装了这类数学计算的底层实现，但如果你能很好地理解这些概念，就可以为编程或算法调优打下坚实的基础。

Last but not least，方程次序很重要，也就是说，$AX=B$和$XA=B$的结果是不同的，这个一定要牢记哦！

转置矩阵

一般伴随逆矩阵之后出现的就是转置矩阵。在计算机图形图像处理中，如果要对一个物体进行旋转、平移、缩放等操作，就要对描述这个物体的所有矩阵进行运算，矩阵转置就是这类运算之一，而矩阵的转置在三维空间中的解释就相当于“得到关于某个点对称的三维立体”。所以，转置矩阵的定义很简单。

将矩阵的行列互换，得到的新矩阵就叫做转置矩阵（transpose）。转置矩阵的行列式不变。我们把$m×n$矩阵A的行列互换，得到转置矩阵A^{T}。

$$
A=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

$$
A^{T}=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m 1} \\
a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m 2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{1 n} & a_{2 n} & \ldots & a_{m n}

\end{array}\right]
$$

最后，为了方便你理解，我们再总结一下逆矩阵和转置矩阵的性质。你不用死记硬背，重在理解。

1. 矩阵和自身逆矩阵相乘得道单位矩阵，$A A^{-1}=I=A^{-1} A$；
2. $A$$B$两矩阵相乘的逆，等于逆矩阵$B$和逆矩阵$A$相乘，这里强调一下乘的顺序很重要，$(A B)^{-1}=B^{-1} A^{-1}$；
3. AB两矩阵相加后的逆矩阵，不等于各自逆矩阵的相加， $(A+B)^{-1} \neq A^{-1}+B^{-1}$；
4. 矩阵转置的转置还是它本身，$\left(A^{T}\right)^{\mathrm{T}}=A$；
5. AB两矩阵相加后的转置矩阵，等于各自转置矩阵的相加，$(A+B)^{T}=A^{T}+B^{T}$；
6. AB两矩阵相乘后的转置矩阵，等于转置矩阵B和转置矩阵A的相乘，这里再次强调乘的顺序很重要，$(A B)^{T}=B^{T} A^{T}$。

本节小结

好了，到这里矩阵这一讲就结束了，最后我再带你总结一下前面讲解的内容。

今天的知识，你只需要知道矩阵是线性方程组的另一种表达，了解和掌握矩阵的定义和性质就足够了。当然，矩阵还有很多内容，但我认为掌握了我讲的这些内容后，就为以后的一些矩阵应用场景打下了坚实的数学基础，也是下一讲的解线性方程组的前置知识。

线性代数练习场

对于10维列向量$x=\left(x_{1}, \ldots, x_{10}\right)^{T}$， $v=\left(v_{1}, \ldots, v_{10}\right)^{T}$，如果要计算$y=x x^{T}\left(I+v v^{T}\right) x$，其中$I$是10阶单位矩阵。你会怎么做？

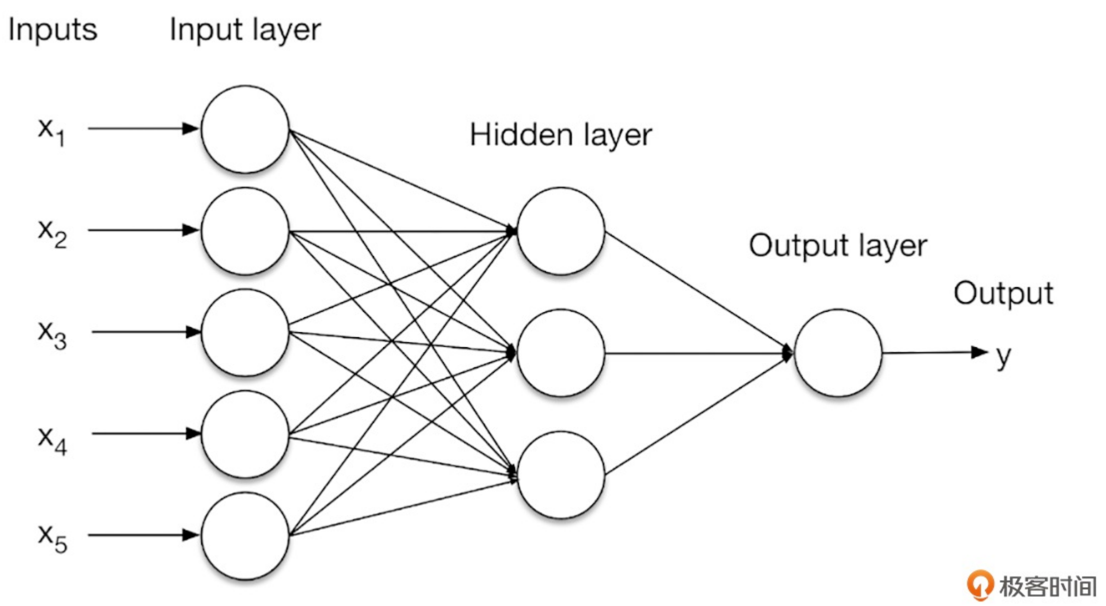
友情提醒，这里有多种方式解题。你能不能找到一个最简单的方法来解这道题？虽然结果很重要，但我想说的是过程更重要，而且往往解题过程不同，从计算机角度来说，运算的效率会有极大的不同。

欢迎你在留言区晒出你的运算过程和结果。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数，今天我们要讲的内容是“矩阵”。

在开始学习之前，我想先问你个问题，你觉得，学习矩阵有什么用呢？你可以先自己想一想。之后我们讲任何一个知识的时候，你都可以从这个角度出发，自己先思考一下，这样有助于你对所学内容理解得更深刻。

对于刚才那个问题，我的答案很简单，就一句话，从我们程序员的角度去理解的话，**矩阵可以极大地提高计算机的运算效率**。怎么说呢？我给你举一个例子。在机器学习中（特别是深度学习，或者更具体一点，神经网络），并行计算是非常昂贵的。



上图是一个典型的神经网络架构，在这时候，矩阵就能发挥用武之地了，计算H隐藏层输出的公式是：$H = f(W.x + b)$，其中W是权重矩阵，f是激活函数，b是偏差，x是输入层矩阵。而这个计算过程就叫做**向量化**（Vectorization），这也是GPU在深度学习中非常重要的原因，因为GPU非常擅长做类似矩阵乘之类的运算。

$$
X=\left|\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right|
$$

$$
W=\left|\begin{array}{ll}
w_{1} & w_{2} \\
w_{4} & w_{5} \\
x_{3} & w_{6}
\end{array}\right|
$$

$$
H=f\left(\left|\begin{array}{ll}
w_{1} & w_{2} \\
w_{4} & w_{5} \\
x_{3} & w_{6}
\end{array}\right|\left|\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right|+b\right)
$$

不过，矩阵也不仅仅局限于神经网络的应用，同时它也可以用在计算机图形图像的应用中，比如，三维物体从取景到屏幕的显示，就需要经历一系列的空间变换，才能生成二维图像显示在显示器上。在这个计算过程中，我们都需要用到矩阵。

矩阵是非常实用的，但它正式作为数学中的研究对象出现，其实是在行列式的研究发展起来之后。英国数学家 Arthur Cayley 被公认为矩阵论的创立人，他提出的矩阵概念可能来自于行列式。但我相信另一种说法，提出矩阵是为了更简单地表达线性方程组，也就是说，矩阵是线性方程组的另一种表达。

矩阵的基本概念

线性方程组的概念很简单，上节我们已经简单提过。你在小学或中学肯定也学过二元一次方程和二元一次方程组。

$$ax+by=c$$

$$
\left\{\begin{array}{l}
a_{1} x+b_{1} y+C_{1}=0 \\
a_{2} x+b_{2} y+C_{2}=0
\end{array}\right.
$$

在这样一个方程组中，$a1$、$a2$、$b1$、$b2$不能同时为0。当我们把二元一次方程组再扩展一下，变成多元一次方程组时，我们就能得到线性方程组的一般表达，即$AX=B$。

$$
\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.
$$

于是，这个线性方程组的所有系数就构成了一个$m×n$的m行n列矩阵：

$$
A=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

我们把A称为该方程组的系数矩阵，而当我们把等式右边的常数b放入矩阵后，就是下面这样：

$$

$$
\widetilde{A}=\left[\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} & b_{1} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} & b_{2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n} & b_{m}
\end{array}\right]
$$

这样我们就得到了A矩阵的增广矩阵$\widetilde{A}$，可以表示为(A, B)，这里的B表示的是方程组常数项所构成的列向量，也就是$m \times 1$的m行1列矩阵：

$$
B=\left|\begin{array}{l}
b_{1} \\
b_{2} \\
\cdots \\
b_{m}
\end{array}\right|
$$

如果设X为$n \times 1$的n行1列矩阵：

$$
X=\left|\begin{array}{c}
x_{1} \\
x_{2} \\
\cdots \\
x_{n}
\end{array}\right|
$$

那么线性方程组A，就可以表示为$AX=B$的矩阵形式。如果我们再换一种表示形式，设：$a_{1},a_{2},\ldots, a_{n},\beta$表示增广矩阵$\widetilde{A}$的列向量，则线性方程组$A$又可表示为$a_{1} x_{1}+a_{2} x_{2}+\cdots+a_{n} x_{n}=\beta$。

线性方程组的矩阵和向量形式都是线性方程组的其他表达形式。在工作中，你可以用它们来简化求解，甚至可以提升计算效率，就如之前提到的神经网络的隐藏层的输出计算、图形图像的三维空间变换。在数学中也是同样的，你可以经常运用它们来简化求解。具体线性方程组求解的内容比较多，我们下一节课再来详细讲解求解过程。

通过前面的讲解，我相信你对矩阵有了一定的了解，现在我们再回头来看看矩阵的定义吧。

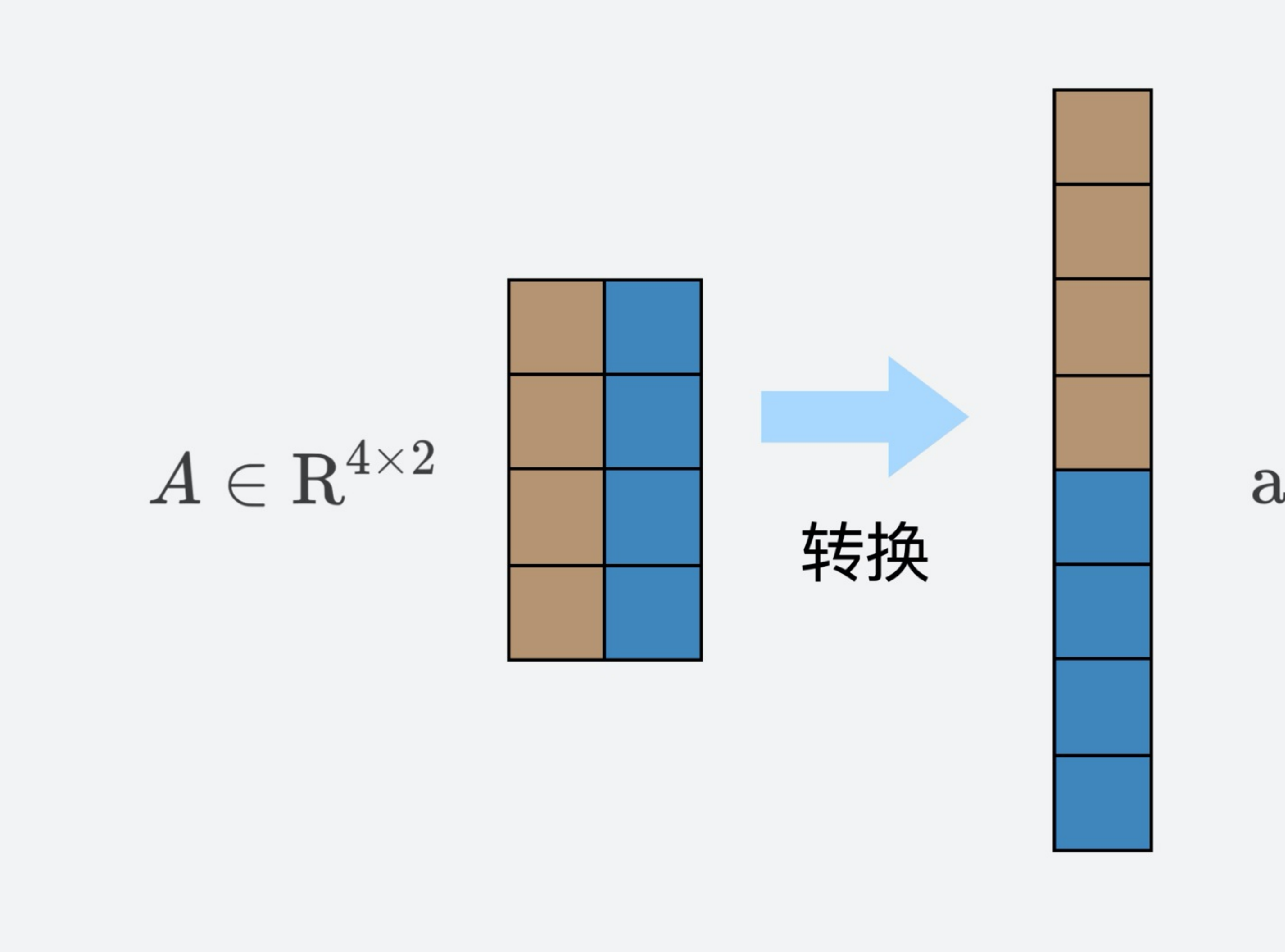
矩阵的定义是：一个(m, n)矩阵A，是由$m \times n$个元素组成，m和n是实数，其中元素$a_{i j}, \mathrm{i}=1, \ldots, \mathrm{m}, \mathrm{j}=1, \ldots, \mathrm{n}$按$m$行$n$列的矩形排布方式后可以形成矩阵$A$：

$$
A=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

其中$a_{i j}$属于实数或复数，在我们的场景中是实数R，按通常的惯例，$(1, n)$矩阵叫做行，$(m, 1)$矩阵叫做列，这些特殊的矩阵叫做行或列向量。

定义完矩阵后，我接着讲一个比较有趣的概念，矩阵转换（Matrix transformation）。矩阵转换经常被用在计算机图形图像的转换中，比如，一张彩色图片从RGB角度来说是三维的，如果要转换成灰度图片，也就是一维图片，那就要做矩阵转换。

我们来看一下矩阵转换的过程。设$\mathrm{R}^{m \times n}$是实数矩阵(m, n)的集合，$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$可以表示成另一种形式 $a \in \mathrm{R}^{mn}$。我们把矩阵的n列堆叠成一个长向量后完成转换。这个转换也叫做reshape，其实就是重新调整原矩阵的行数、列数和维数，但是元素个数不变。



矩阵的运算

了解了矩阵的基本定义后，我们才能进入矩阵的运算环节，就是矩阵的加和乘。

加运算很简单，两个矩阵$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$，$B \in \mathrm{R}^{m \times n}$的加运算其实就是矩阵各自元素的加。

$$
A+B=\left[\begin{array}{ccc}
a_{11}+b_{11} & \ldots & a_{1 n}+b_{1 n} \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
a_{m 1}+b_{m 1} & \ldots & a_{m n}+b_{m n}
\end{array}\right] \in R^{m \times n}
$$

我推荐你使用NumPy的einsum来高效地做这类运算，因为它在速度和内存效率方面通常可以超越我们常见的array函数。

```
C= np.einsum('il, lj', A, B)
```

接下来，我们一起来看看矩阵的乘。这里你需要注意，矩阵的乘和通常意义上“数之间的乘”不同，矩阵的乘有多种类型，这里我讲三种最普遍，也是在各领域里用得最多的矩阵乘。

1.普通矩阵乘

普通矩阵乘是应用最广泛的矩阵乘，两个矩阵$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$，$B \in \mathrm{R}^{n \times k}$，普通矩阵则乘可以表示为$C=A B \in R^{m \times k}$，$C$中元素的计算规则是矩阵$A$、$B$对应两两元素乘积之和。

$$
c_{i j}=\sum_{k=1}^{n} a_{i k} b_{k j}, i=1, \ldots, m, j=1, \ldots, l
$$

我们举例来说明。C的第一个元素$c_{11}=a_{11} \times b_{11}+a_{12} \times b_{21}+a_{13} \times b_{31}=1 \times 1+2 \times 2+3 \times 3$。

$$
C=A B=\left[\begin{array}{lll}
1 & 2 & 3 \\
4 & 5 & 6
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
1 & 4 \\
2 & 5 \\
3 & 6
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{lll}
1 \times 1+2 \times 2+3 \times 3 & 1 \times 4+2 \times 5+3 \times 6 \\
4 \times 1+5 \times 2+6 \times 3 & 4 \times 4+5 \times 5+6 \times 6
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
14 & 32 \\
32 & 77
\end{array}\right]
$$

这里需要特别注意的是，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，例如，一个$n \times k$矩阵A和一个$k \times m$矩阵B相乘，最后得出$n \times m$矩阵C，而这里的k就是相邻阶数。

$$AB=C$$

但反过来B和A相乘就不行了，因为相邻阶数m不等于n。

2.哈达玛积

哈达玛积理解起来就很简单了，就是矩阵各对应元素的乘积，$c_{i j}=a_{i j} \times b_{i j}$ 。举个例子：

$$
C=A^{*} B=\left[\begin{array}{ll}
1 & 2 \\
4 & 5
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
1 & 4 \\
2 & 5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
1 * 1 & 2 * 4 \\
4 * 2 & 5 * 5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
1 & 8 \\
8 & 25
\end{array}\right]
$$

哈达玛积其实在数学中不常看到，不过，在编程中哈达玛积非常有用，因为它可以用来同时计算多组数据的乘积，计算效率很高。

3.克罗内克积

克罗内克积是以德国数学家利奥波德·克罗内克（Leopold Kronecker）的名字命名的。它可以应用在解线性矩阵方程和图像处理方面，当然从更时髦的角度说，它还能用在量子信息领域，我们也称之为直积或张量积。

和普通矩阵乘和哈达玛积不同的是，克罗内克积是两个任意大小矩阵间的运算，表示为$A×B$，如果A是一个$m × n$的矩阵，而B是一个$p×q$的矩阵，克罗内克积则是一个$mp×nq$的矩阵。

接下来我们需要定义一个**在矩阵的乘法中起着特殊作用**的矩阵，它就是**单位矩阵**。高等代数中，在求解相应的矩阵时，若添加单位矩阵，通过初等变换进行求解，往往可以使问题变得简单。按照百度百科的解释，单位矩阵如同数的乘法中的1，这种矩阵就被称为单位矩阵。它是个方阵，从左上角到右下角的对角线，也就是主对角线上的元素均为1，除此以外全都为0。

在线性代数中，大小为n的单位矩阵就是在主对角线上均为1，而其他地方都是0的$n×n$的方阵，它用I_{n}表示，表达时为了方便可以忽略阶数，直接用I来表示：

$$
I_{1}=[1], I_{2}=\left[\begin{array}{ll}
1 & 0 \\
0 & 1
\end{array}\right], I_{3}=\left[\begin{array}{lll}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{array}\right], \ldots, I_{n}=\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 1 & \ldots & 0 \\
. & . & \ldots & . \\
. & . & . & . \\
0 & 0 & \ldots & 1
\end{array}\right]
$$

矩阵的性质

在了解了矩阵加和乘，以及单位矩阵后，我们是时候来看一看矩阵的性质了。了解矩阵的性质是进行矩阵计算的前提，就像我们小时候学加减乘除四则运算法则时那样。所以，这块内容对你来说应该不难，你作为了解就好，重点是之后的运算。

1.结合律

任意实数$m×n$矩阵A，$n×p$矩阵B，$p×q$矩阵C之间相乘，满足结合律$(AB)C=A(BC)$。这个很好理解，我就不多说了。

$$\forall A \in R^{m \times n}, B \in R^{n \times p}, C \in R^{p \times q}:(A B) C=A(B C)$$

2.分配律

任意实数$m×n$矩阵A和B，$n×p$矩阵C和D之间相乘满足分配律$(A+B)C=AC+BC$，$A(C+D)=AC+AD$。

$$
\forall \mathrm{A}, B \in \mathrm{R}^{m \times n}, C, D \in \mathrm{R}^{n \times p}:(A+B) C=A C+B C, A(C+D)=A C+A D
$$

3.单位矩阵乘

任意实数$m×n$矩阵A和单位矩阵之间的乘，等于它本身A。

$$
\forall A \in R^{m \times n}: I_{m} A=A I_{n}=A
$$

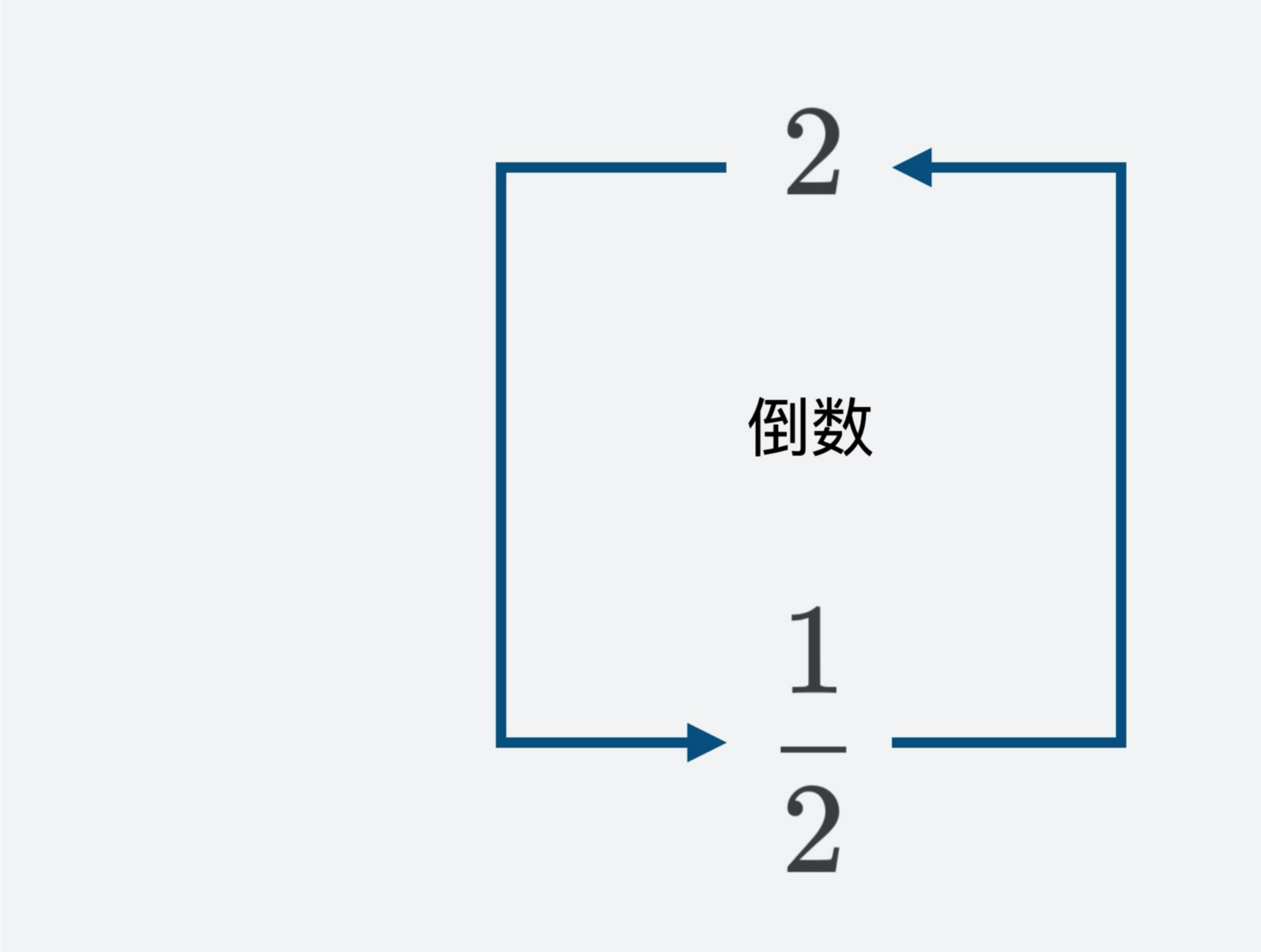
注意，这里的行和列不同，$m \neq n$意味着，根据矩阵乘，左乘和右乘单位矩阵也不同，也就是$I_{m} \neq I_{n}$。

逆矩阵与转置矩阵

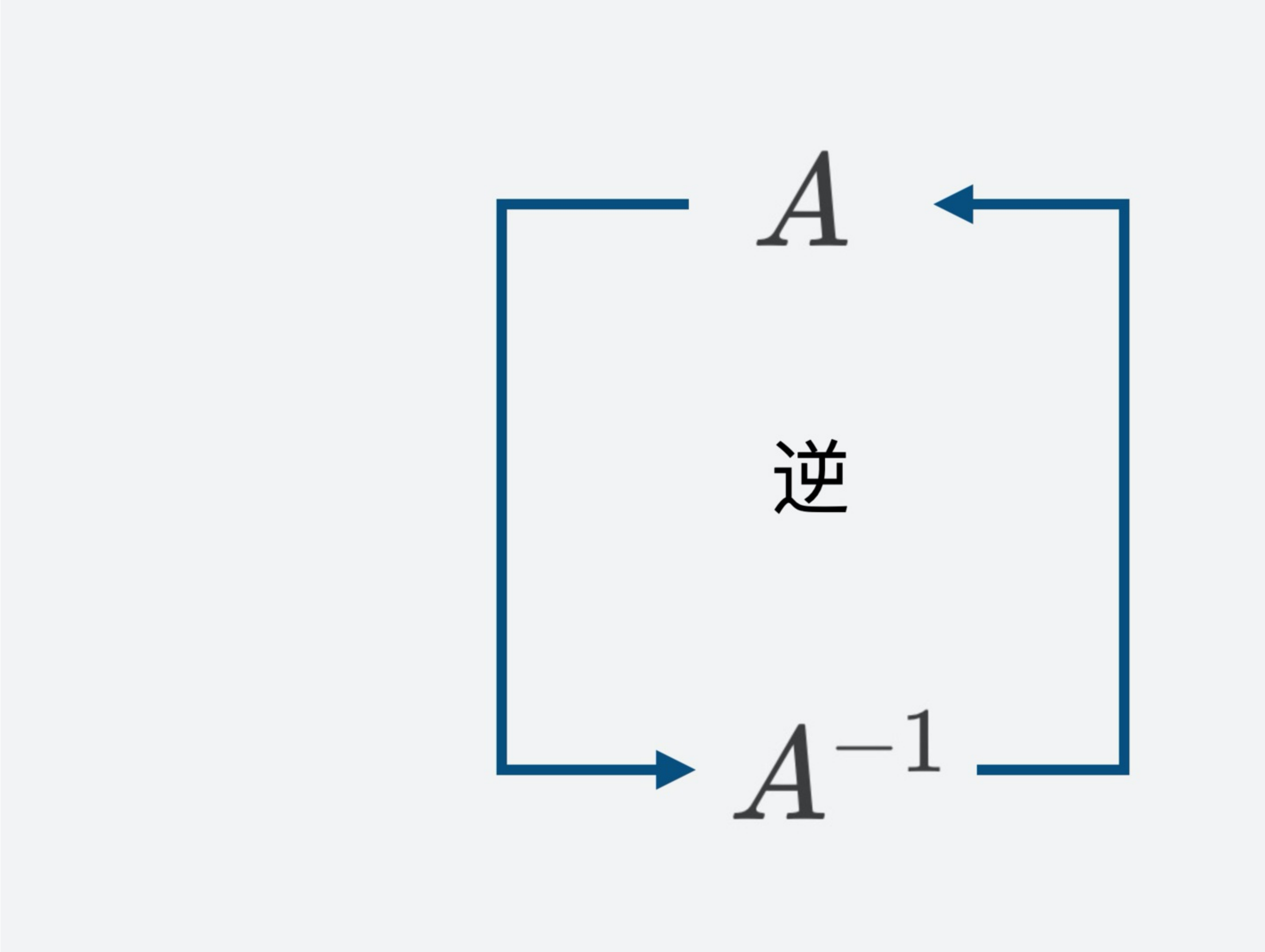
了解矩阵基本概念、运算，以及性质后，我来讲一讲矩阵应用中的两个核心内容——逆矩阵和转置矩阵。逆矩阵和转置矩阵在实际应用中大有用处，比如：坐标系中的图形变换运算。我们先来看下什么是逆矩阵。

逆矩阵

下面这个图你应该非常熟悉了，图中表现的是数字的倒数，2的倒数是$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$的倒数是2。



其实逆矩阵也有着类似的概念，只不过是写法不一样，我们会把逆矩阵写成A^{-1}。那为什么不是$\frac{1}{A}$呢？那是因为数字1无法被矩阵除。



我们知道，2乘以它的倒数$\frac{1}{2}$等于1。同样的道理，A乘以它的逆矩阵A^{-1}就等于单位矩阵，即$\mathrm{A} \times A^{-1}=\mathrm{I}$（$I$即单位矩阵），反过来也一样，$\mathrm{A}^{-1} \times A=\mathrm{I}$。

为方便你理解，我用一个2×2矩阵A来解释一下逆矩阵的算法。首先，我们交换a_{11}和a_{22}的位置，然后在a_{12}和a_{21}前加上负号，最后除以行列式$a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}$。

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]^{-1}=\frac{1}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}\left[\begin{array}{cc}
a_{22} & -a_{12} \\
-a_{21} & a_{11}
\end{array}\right]
$$

那我们该如何验证这是不是正解呢？

方法其实很简单，记得刚才的公式就行，$\mathrm{A} \times A^{-1}=\mathrm{I}$。现在我们就代入公式来验证一下，$A$和它的逆矩阵相乘，通过刚才的算法最终得出的结果是单位矩阵。

$$
A \times A^{-1}=\left[\begin{array}{llll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]^{-1}=\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{lll}
\frac{a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{-a_{12}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} \\
\frac{-a_{21}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
\frac{a_{11} \times a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{12} \times(-a_{21})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{11} \times(-a_{12})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{12} \times a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} \\
\frac{a_{21} \times a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{22} \times(-a_{21})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{21} \times(-a_{12})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{22} \times a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{lll}
1 & 0 \\
0 & 1
\end{array}\right]
$$

这里有一点需要特别说明，不是每一个矩阵都是可逆的。如果一个矩阵是可逆的，那这个矩阵我们叫做**非奇异矩阵**，如果一个矩阵是不可逆的，那这个矩阵我们就叫做**奇异矩阵**，而且如果一个矩阵可逆，那它的逆矩阵必然是唯一的。

还记得行列式$a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}$吗？如果我们要证明矩阵是可逆的，只要证明行列式不等于零就行。更高阶的逆矩阵的算法也是一样的原理。

最后，我想通过一个现实生活中的案例来让你更多地了解逆矩阵。

一个旅游团由孩子和大人组成，去程他们一起做大巴，每个孩子的票价3元，大人票价3.2元，总共花费118.4元。回程一起做火车，每个孩子的票价3.5元，大人票价3.6元，总共花费

135.2元。请问旅游团里有多少小孩和大人？

首先，我们设置一些矩阵，组成线性方程$XA=B$。

$$
\begin{array}{cc}
\text{小孩} & \text{大人} \\
\left[\begin{array}{ll} x_{1} & x_{2} \end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} \text{大巴} & \text{火车} \end{array} \\
\left[\begin{array}{cc} 3 & 3.5 \\ 3.2 & 3.6 \end{array}\right]
\end{array}
$$

要解X，我们就要先计算A的逆矩阵A^{-1}：

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{cc}
3 & 3.5 \\
3.2 & 3.6
\end{array}\right]^{-1}=\frac{1}{3 \times 3.6-3.5 \times 3.2}\left[\begin{array}{cc}
3.6 & -3.5 \\
-3.2 & 3
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
-9 & 8.75 \\
8 & -7.5
\end{array}\right]
$$

接下来再计算$X=B A^{-1}$：

$$
\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
118.4 & 135.2
\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}
-9 & 8.75 \\
8 & -7.5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
16 & 22
\end{array}\right]
$$

最终，我们得出这个旅游团有16个小孩和22个大人。

这也是解线性方程组的一种方法，类似这样的计算被广泛应用在各领域中，比如建筑工程、游戏和动画的3D效果上。虽然现在有很多程序包封装了这类数学计算的底层实现，但如果你能很好地理解这些概念，就可以为编程或算法调优打下坚实的基础。

Last but not least，方程次序很重要，也就是说，$AX=B$和$XA=B$的结果是不同的，这个一定要牢记哦！

转置矩阵

一般伴随逆矩阵之后出现的就是转置矩阵。在计算机图形图像处理中，如果要对一个物体进行旋转、平移、缩放等操作，就要对描述这个物体的所有矩阵进行运算，矩阵转置就是这类运算之一，而矩阵的转置在三维空间中的解释就相当于“得到关于某个点对称的三维立体”。所以，转置矩阵的定义很简单。

将矩阵的行列互换，得到的新矩阵就叫做转置矩阵（transpose）。转置矩阵的行列式不变。我们把$m×n$矩阵A的行列互换，得到转置矩阵A^{T}。

$$
A=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

$$
A^{T}=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m 1} \\
a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m 2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{1 n} & a_{2 n} & \ldots & a_{m n}

\end{array}\right]
$$

最后，为了方便你理解，我们再总结一下逆矩阵和转置矩阵的性质。你不用死记硬背，重在理解。

1. 矩阵和自身逆矩阵相乘得道单位矩阵，$A A^{-1}=I=A^{-1} A$;
2. $A$$B$两矩阵相乘的逆，等于逆矩阵$B$和逆矩阵$A$相乘，这里强调一下乘的顺序很重要，$(A B)^{-1}=B^{-1} A^{-1}$;
3. AB两矩阵相加后的逆矩阵，不等于各自逆矩阵的相加， $(A+B)^{-1} \neq A^{-1}+B^{-1}$;
4. 矩阵转置的转置还是它本身，$\left(A^{T}\right)^{\mathrm{T}}=A$;
5. AB两矩阵相加后的转置矩阵，等于各自转置矩阵的相加，$(A+B)^{T}=A^{T}+B^{T}$;
6. AB两矩阵相乘后的转置矩阵，等于转置矩阵B和转置矩阵A的相乘，这里再次强调乘的顺序很重要，$(A B)^{T}=B^{T} A^{T}$。

本节小结

好了，到这里矩阵这一讲就结束了，最后我再带你总结一下前面讲解的内容。

今天的知识，你只需要知道矩阵是线性方程组的另一种表达，了解和掌握矩阵的定义和性质就足够了。当然，矩阵还有很多内容，但我认为掌握了我讲的这些内容后，就为以后的一些矩阵应用场景打下了坚实的数学基础，也是下一讲的解线性方程组的前置知识。

线性代数练习场

对于10维列向量$x=\left(x_{1}, \ldots, x_{10}\right)^{T}$， $v=\left(v_{1}, \ldots, v_{10}\right)^{T}$，如果要计算$y=x x^{T}\left(I+v v^{T}\right) x$，其中$I$是10阶单位矩阵。你会怎么做？

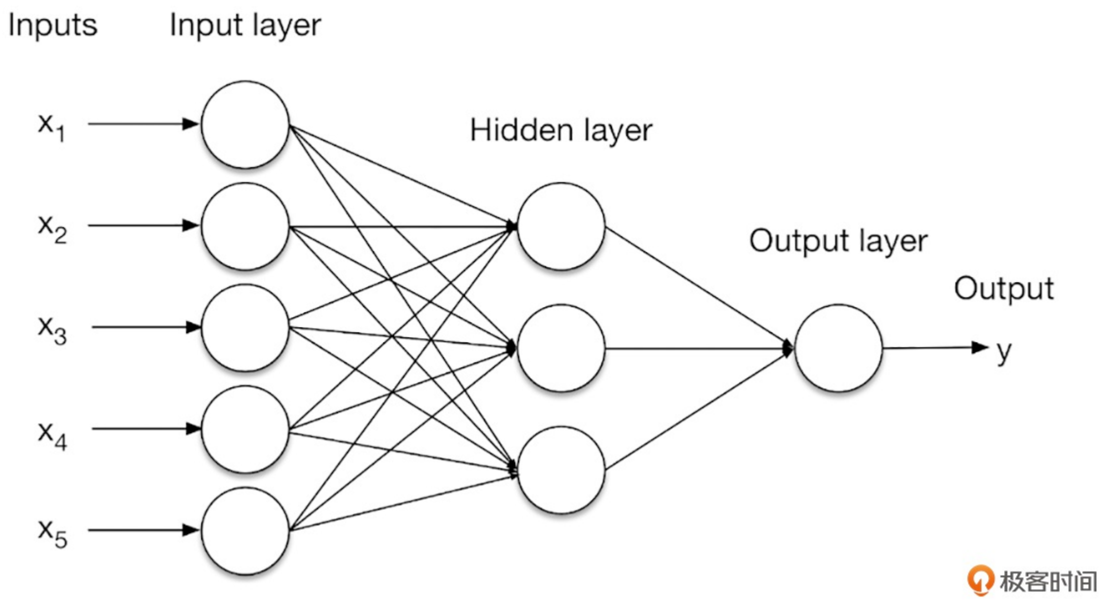
友情提醒，这里有多种方式解题。你能不能找到一个最简单的方法来解这道题？虽然结果很重要，但我想说的是过程更重要，而且往往解题过程不同，从计算机角度来说，运算的效率会有极大的不同。

欢迎你在留言区晒出你的运算过程和结果。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数，今天我们要讲的内容是“矩阵”。

在开始学习之前，我想先问你个问题，你觉得，学习矩阵有什么用呢？你可以先自己想一想。之后我们讲任何一个知识的时候，你都可以从这个角度出发，自己先思考一下，这样有助于你对所学内容理解得更深刻。

对于刚才那个问题，我的答案很简单，就一句话，从我们程序员的角度去理解的话，**矩阵可以极大地提高计算机的运算效率**。怎么说呢？我给你举一个例子。在机器学习中（特别是深度学习，或者更具体一点，神经网络），并行计算是非常昂贵的。



上图是一个典型的神经网络架构，在这时候，矩阵就能发挥用武之地了，计算H隐藏层输出的公式是：$H = f(W.x + b)$，其中W是权重矩阵，f是激活函数，b是偏差，x是输入层矩阵。而这个计算过程就叫做**向量化**（Vectorization），这也是GPU在深度学习中非常重要的原因，因为GPU非常擅长做类似矩阵乘之类的运算。

$$
X=\left|\begin{array} {l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right|
$$

$$
W=\left|\begin{array} {ll}
w_{1} & w_{2} \\
w_{4} & w_{5} \\
x_{3} & w_{6}
\end{array}\right|
$$

$$
H=f\left(\left|\begin{array} {ll}
w_{1} & w_{2} \\
w_{4} & w_{5} \\
x_{3} & w_{6}
\end{array}\right|\left|\begin{array} {l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right|+b\right)
$$

不过，矩阵也不仅仅局限于神经网络的应用，同时它也可以用在计算机图形图像的应用中，比如，三维物体从取景到屏幕的显示，就需要经历一系列的空间变换，才能生成二维图像显示在显示器上。在这个计算过程中，我们都需要用到矩阵。

矩阵是非常实用的，但它正式作为数学中的研究对象出现，其实是在行列式的研究发展起来之后。英国数学家 Arthur Cayley 被公认为矩阵论的创立人，他提出的矩阵概念可能来自于行列式。但我相信另一种说法，提出矩阵是为了更简单地表达线性方程组，也就是说，矩阵是线性方程组的另一种表达。

矩阵的基本概念

线性方程组的概念很简单，上节我们已经简单提过。你在小学或中学肯定也学过二元一次方程和二元一次方程组。

$$ax+by=c$$

$$
\left\{\begin{array} {l}
a_{1} x+b_{1} y+C_{1}=0 \\
a_{2} x+b_{2} y+C_{2}=0
\end{array}\right.
$$

在这样一个方程组中，$a1$、$a2$、$b1$、$b2$不能同时为0。当我们把二元一次方程组再扩展一下，变成多元一次方程组时，我们就能得到线性方程组的一般表达，即$AX=B$。

$$
\left\{\begin{array} {l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.
$$

于是，这个线性方程组的所有系数就构成了一个$m×n$的m行n列矩阵：

$$
A=\left[\begin{array} {cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

我们把A称为该方程组的系数矩阵，而当我们把等式右边的常数b放入矩阵后，就是下面这样：

$$

$$
\widetilde{A}=\left[\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} & b_{1} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} & b_{2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n} & b_{m}
\end{array}\right]
$$

这样我们就得到了A矩阵的增广矩阵$\widetilde{A}$，可以表示为(A, B)，这里的B表示的是方程组常数项所构成的列向量，也就是$m×1$的m行1列矩阵：

$$
B=\left|\begin{array}{l}
b_{1} \\
b_{2} \\
\cdots \\
b_{m}
\end{array}\right|
$$

如果设X为$n×1$的n行1列矩阵：

$$
X=\left|\begin{array}{c}
x_{1} \\
x_{2} \\
\cdots \\
x_{n}
\end{array}\right|
$$

那么线性方程组A，就可以表示为$AX=B$的矩阵形式。如果我们再换一种表示形式，设：$a_{1} ,a_{2},\ldots, a_{n},\beta$表示增广矩阵$\widetilde{A}$的列向量，则线性方程组$A$又可表示为$a_{1} x_{1}+a_{2} x_{2}+\cdots+a_{n} x_{n}=β$。

线性方程组的矩阵和向量形式都是线性方程组的其他表达形式。在工作中，你可以用它们来简化求解，甚至可以提升计算效率，就如之前提到的神经网络的隐藏层的输出计算、图形图像的三维空间变换。在数学中也是同样的，你可以经常运用它们来简化求解。具体线性方程组求解的内容比较多，我们下一节课再来详细讲解求解过程。

通过前面的讲解，我相信你对矩阵有了一定的了解，现在我们再回头来看看矩阵的定义吧。

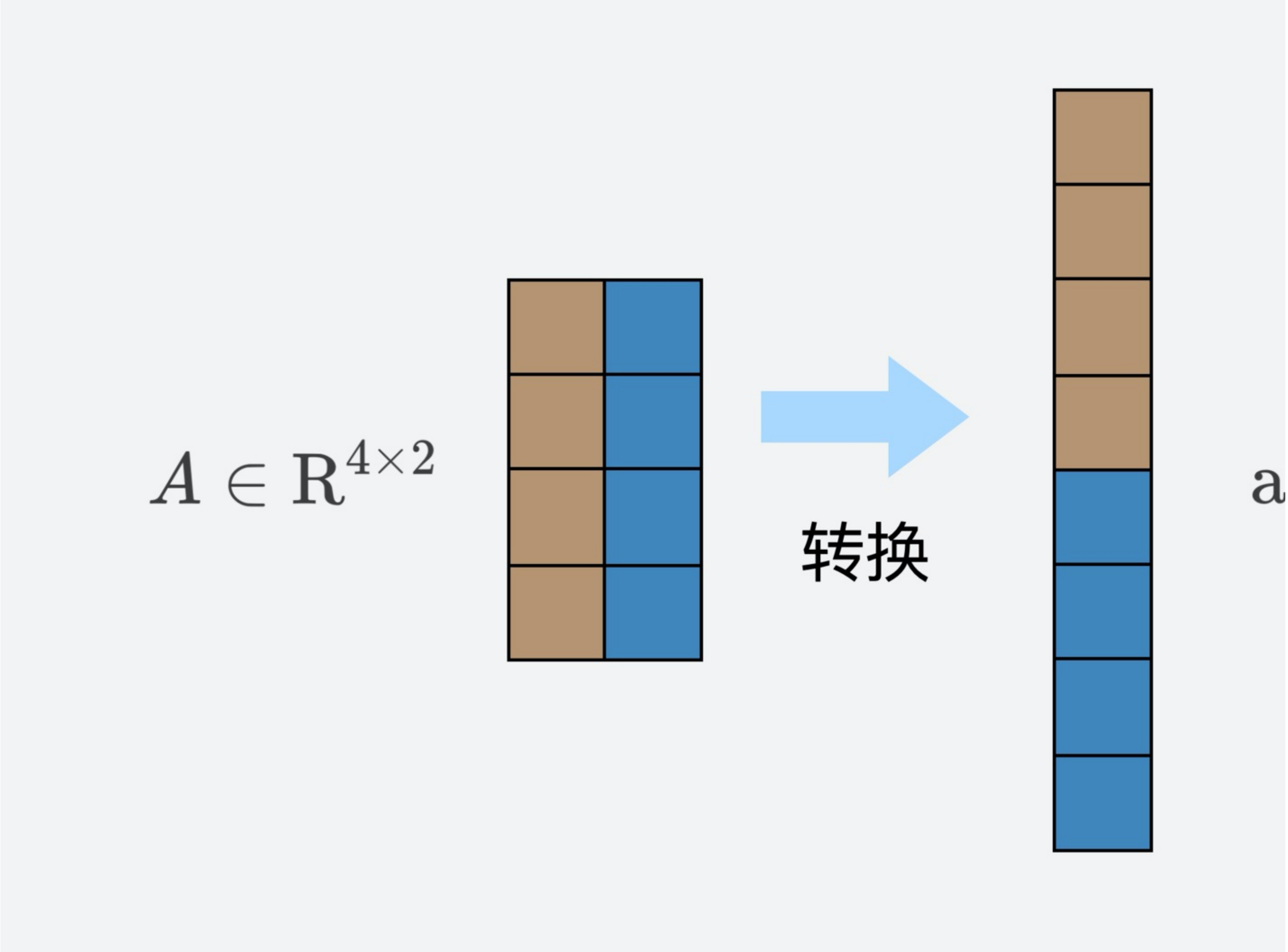
矩阵的定义是：一个(m, n)矩阵A，是由$m×n$个元素组成，m和n是实数，其中元素$a_{i j}, \mathrm{i}=1, \ldots, \mathrm{m}, \mathrm{j}=1, \ldots, \mathrm{n}$按$m$行$n$列的矩形排布方式后可以形成矩阵$A$：

$$
A=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

其中$a_{i j}$属于实数或复数，在我们的场景中是实数R，按通常的惯例，$(1, n)$矩阵叫做行，$(m, 1)$矩阵叫做列，这些特殊的矩阵叫做行或列向量。

定义完矩阵后，我接着讲一个比较有趣的概念，矩阵转换（Matrix transformation）。矩阵转换经常被用在计算机图形图像的转换中，比如，一张彩色图片从RGB角度来说是三维的，如果要转换成灰度图片，也就是一维图片，那就要做矩阵转换。

我们来看一下矩阵转换的过程。设$\mathrm{R}^{m \times n}$是实数矩阵(m, n)的集合，$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$可以表示成另一种形式 $a \in \mathrm{R}^{mn}$。我们把矩阵的n列堆叠成一个长向量后完成转换。这个转换也叫做reshape，其实就是重新调整原矩阵的行数、列数和维数，但是元素个数不变。



矩阵的运算

了解了矩阵的基本定义后，我们才能进入矩阵的运算环节，就是矩阵的加和乘。

加运算很简单，两个矩阵$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$，$B \in \mathrm{R}^{m \times n}$的加运算其实就是矩阵各自元素的加。

$$
A+B=\left[\begin{array}{ccc}
a_{11}+b_{11} & \ldots & a_{1 n}+b_{1 n} \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
a_{m 1}+b_{m 1} & \ldots & a_{m n}+b_{m n}
\end{array}\right] \in R^{m \times n}
$$

我推荐你使用NumPy的einsum来高效地做这类运算，因为它在速度和内存效率方面通常可以超越我们常见的array函数。

```
C= np.einsum('il, lj', A, B)
```

接下来，我们一起来看看矩阵的乘。这里你需要注意，矩阵的乘和通常意义上"数之间的乘"不同，矩阵的乘有多种类型，这里我讲三种最普遍，也是在各领域里用得最多的矩阵乘。

1.普通矩阵乘

普通矩阵乘是应用最广泛的矩阵乘，两个矩阵$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$，$B \in \mathrm{R}^{n \times k}$，普通矩阵则乘可以表示为$C=A B \in R^{m \times k}$，$C$中元素的计算规则是矩阵$A$、$B$对应两两元素乘积之和。

$$
c_{i j}=\sum_{k=1}^{n} a_{i k} b_{k j}, i=1, \ldots, m, j=1, \ldots, l
$$

我们举例来说明。C的第一个元素$c_{11}=a_{11} \times b_{11}+a_{12} \times b_{21}+a_{13} \times b_{31}=1 \times 1+2 \times 2+3 \times 3$。

$$
C=A B=\left[\begin{array}{lll}
1 & 2 & 3 \\
4 & 5 & 6
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
1 & 4 \\
2 & 5 \\
3 & 6
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{lll}
1 \times 1+2 \times 2+3 \times 3 & 1 \times 4+2 \times 5+3 \times 6 \\
4 \times 1+5 \times 2+6 \times 3 & 4 \times 4+5 \times 5+6 \times 6
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
14 & 32 \\
32 & 77
\end{array}\right]
$$

这里需要特别注意的是，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，例如，一个$n×k$矩阵A和一个$k×m$矩阵B相乘，最后得出$n×m$矩阵C，而这里的k就是相邻阶数。

$$AB=C$$

但反过来B和A相乘就不行了，因为相邻阶数m不等于n。

2.哈达玛积

哈达玛积理解起来就很简单了，就是矩阵各对应元素的乘积，$c_{i j}=a_{i j} \times b_{i j}$ 。举个例子：

$$
C=A^{*} B=\left[\begin{array}{ll}
1 & 2 \\
4 & 5
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
1 & 4 \\
2 & 5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
1 * 1 & 2 * 4 \\
4 * 2 & 5 * 5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
1 & 8 \\
8 & 25
\end{array}\right]
$$

哈达玛积其实在数学中不常看到，不过，在编程中哈达玛积非常有用，因为它可以用来同时计算多组数据的乘积，计算效率很高。

3.克罗内克积

克罗内克积是以德国数学家利奥波德·克罗内克（Leopold Kronecker）的名字命名的。它可以应用在解线性矩阵方程和图像处理方面，当然从更时髦的角度说，它还能用在量子信息领域，我们也称之为直积或张量积。

和普通矩阵乘和哈达玛积不同的是，克罗内克积是两个任意大小矩阵间的运算，表示为$A×B$，如果A是一个$m × n$的矩阵，而B是一个$p×q$的矩阵，克罗内克积则是一个$mp×nq$的矩阵。

接下来我们需要定义一个**在矩阵的乘法中起着特殊作用**的矩阵，它就是**单位矩阵**。高等代数中，在求解相应的矩阵时，若添加单位矩阵，通过初等变换进行求解，往往可以使问题变得简单。按照百度百科的解释，单位矩阵如同数的乘法中的1，这种矩阵就被称为单位矩阵。它是个方阵，从左上角到右下角的对角线，也就是主对角线上的元素均为1，除此以外全都为0。

在线性代数中，大小为n的单位矩阵就是在主对角线上均为1，而其他地方都是0的$n×n$的方阵，它用I_{n}表示，表达时为了方便可以忽略阶数，直接用I来表示：

$$
I_{1}=[1], I_{2}=\left[\begin{array}{ll}
1 & 0 \\
0 & 1
\end{array}\right], I_{3}=\left[\begin{array}{lll}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{array}\right], \ldots, I_{n}=\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 1 & \ldots & 0 \\
. & . & \ldots & . \\
. & . & . & . \\
0 & 0 & \ldots & 1
\end{array}\right]
$$

矩阵的性质

在了解了矩阵加和乘，以及单位矩阵后，我们是时候来看一看矩阵的性质了。了解矩阵的性质是进行矩阵计算的前提，就像我们小时候学加减乘除四则运算法则时那样。所以，这块内容对你来说应该不难，你作为了解就好，重点是之后的运算。

1.结合律

任意实数$m×n$矩阵A，$n×p$矩阵B，$p×q$矩阵C之间相乘，满足结合律$(AB)C=A(BC)$。这个很好理解，我就不多说了。

$$\forall A \in R^{m \times n}, B \in R^{n \times p}, C \in R^{p \times q}:(A B) C=A(B C)$$

2.分配律

任意实数$m×n$矩阵A和B，$n×p$矩阵C和D之间相乘满足分配律$(A+B)C=AC+BC$，$A(C+D)=AC+AD$。

$$
\forall \mathrm{A}, B \in \mathrm{R}^{m \times n}, C, D \in \mathrm{R}^{n \times p}:(A+B) C=A C+B C, A(C+D)=A C+A D
$$

3.单位矩阵乘

任意实数$m×n$矩阵A和单位矩阵之间的乘，等于它本身A。

$$
\forall A \in R^{m \times n}: I_{m} A=A I_{n}=A
$$

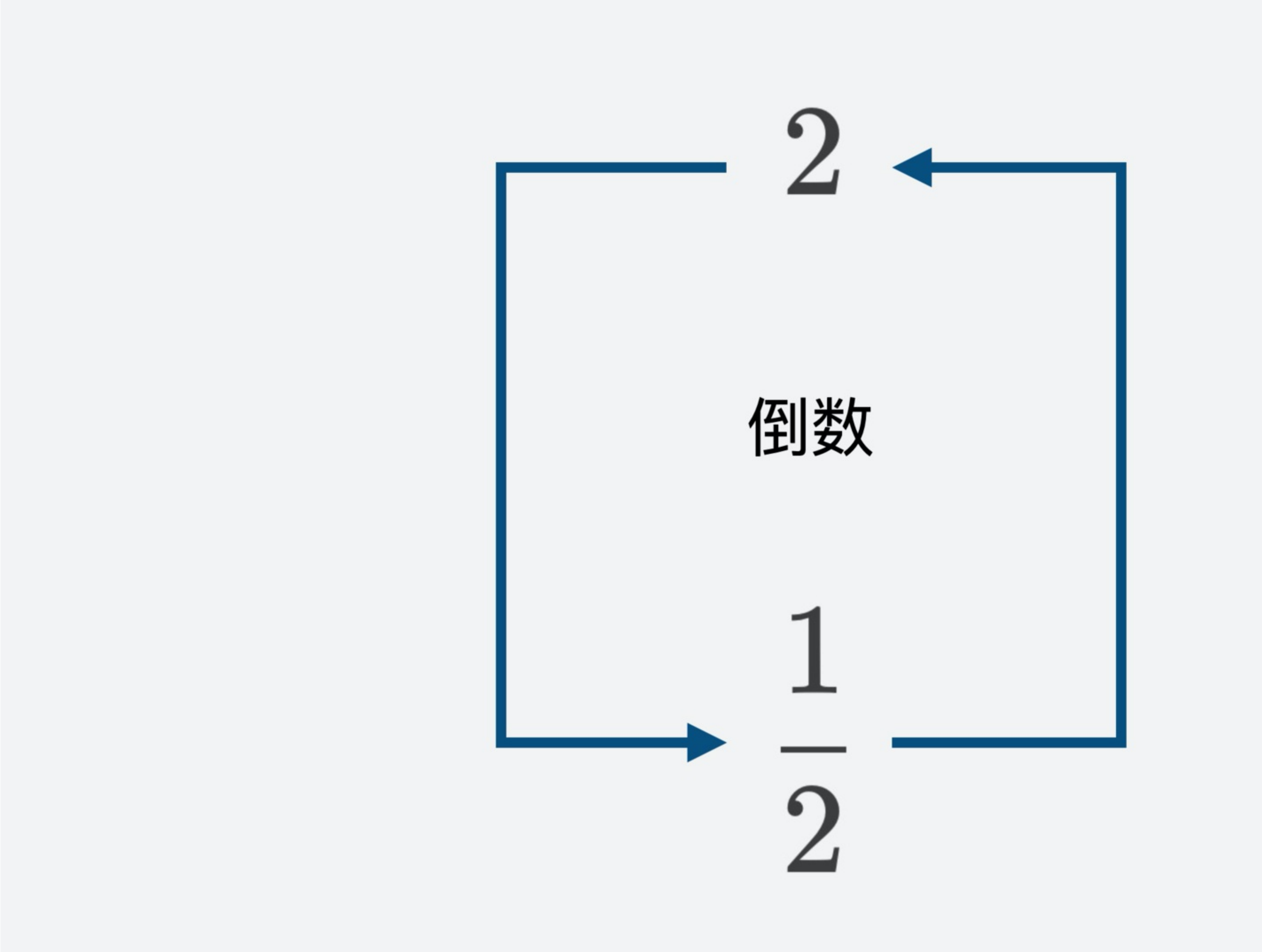
注意，这里的行和列不同，$m \neq n$意味着，根据矩阵乘，左乘和右乘单位矩阵也不同，也就是$I_{m} \neq I_{n}$。

逆矩阵与转置矩阵

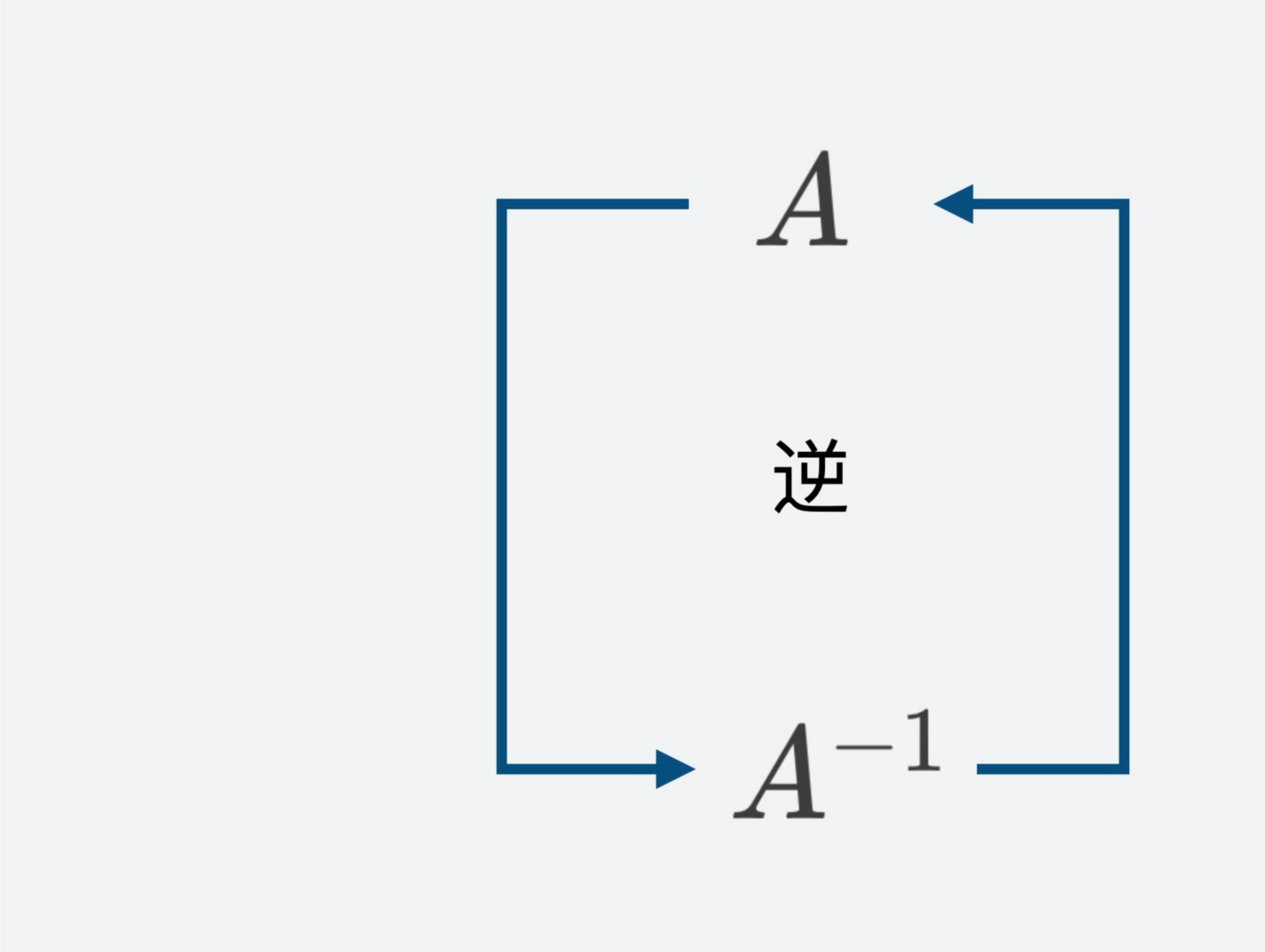
了解矩阵基本概念、运算，以及性质后，我来讲一讲矩阵应用中的两个核心内容——逆矩阵和转置矩阵。逆矩阵和转置矩阵在实际应用中大有用处，比如：坐标系中的图形变换运算。我们先来看下什么是逆矩阵。

逆矩阵

下面这个图你应该非常熟悉了，图中表现的是数字的倒数，2的倒数是$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$的倒数是2。



其实逆矩阵也有着类似的概念，只不过是写法不一样，我们会把逆矩阵写成A^{-1}。那为什么不是$\frac{1}{A}$呢？那是因为数字1无法被矩阵除。



我们知道，2乘以它的倒数$\frac{1}{2}$等于1。同样的道理，A乘以它的逆矩阵A^{-1}就等于单位矩阵，即$\mathrm{A} \times A^{-1}=\mathrm{I}$（$I$即单位矩阵），反过来也一样，$\mathrm{A}^{-1} \times A=\mathrm{I}$。

为方便你理解，我用一个2×2矩阵A来解释一下逆矩阵的算法。首先，我们交换a_{11}和a_{22}的位置，然后在a_{12}和a_{21}前加上负号，最后除以行列式$a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}$。

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]^{-1}=\frac{1}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}\left[\begin{array}{cc}
a_{22} & -a_{12} \\
-a_{21} & a_{11}
\end{array}\right]
$$

那我们该如何验证这是不是正解呢？

方法其实很简单，记得刚才的公式就行，$\mathrm{A} \times A^{-1}=\mathrm{I}$。现在我们就代入公式来验证一下，$A$和它的逆矩阵相乘，通过刚才的算法最终得出的结果是单位矩阵。

$$
A \times A^{-1}=\left[\begin{array}{llll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]^{-1}=\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{lll}
\frac{a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{-a_{12}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} \\
\frac{-a_{21}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
\frac{a_{11} \times a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{12} \times(-a_{21})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{11} \times(-a_{12})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{12} \times a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} \\
\frac{a_{21} \times a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{22} \times(-a_{21})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{21} \times(-a_{12})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{22} \times a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{lll}
1 & 0 \\
0 & 1
\end{array}\right]
$$

这里有一点需要特别说明，不是每一个矩阵都是可逆的。如果一个矩阵是可逆的，那这个矩阵我们叫做**非奇异矩阵**，如果一个矩阵是不可逆的，那这个矩阵我们就叫做**奇异矩阵**，而且如果一个矩阵可逆，那它的逆矩阵必然是唯一的。

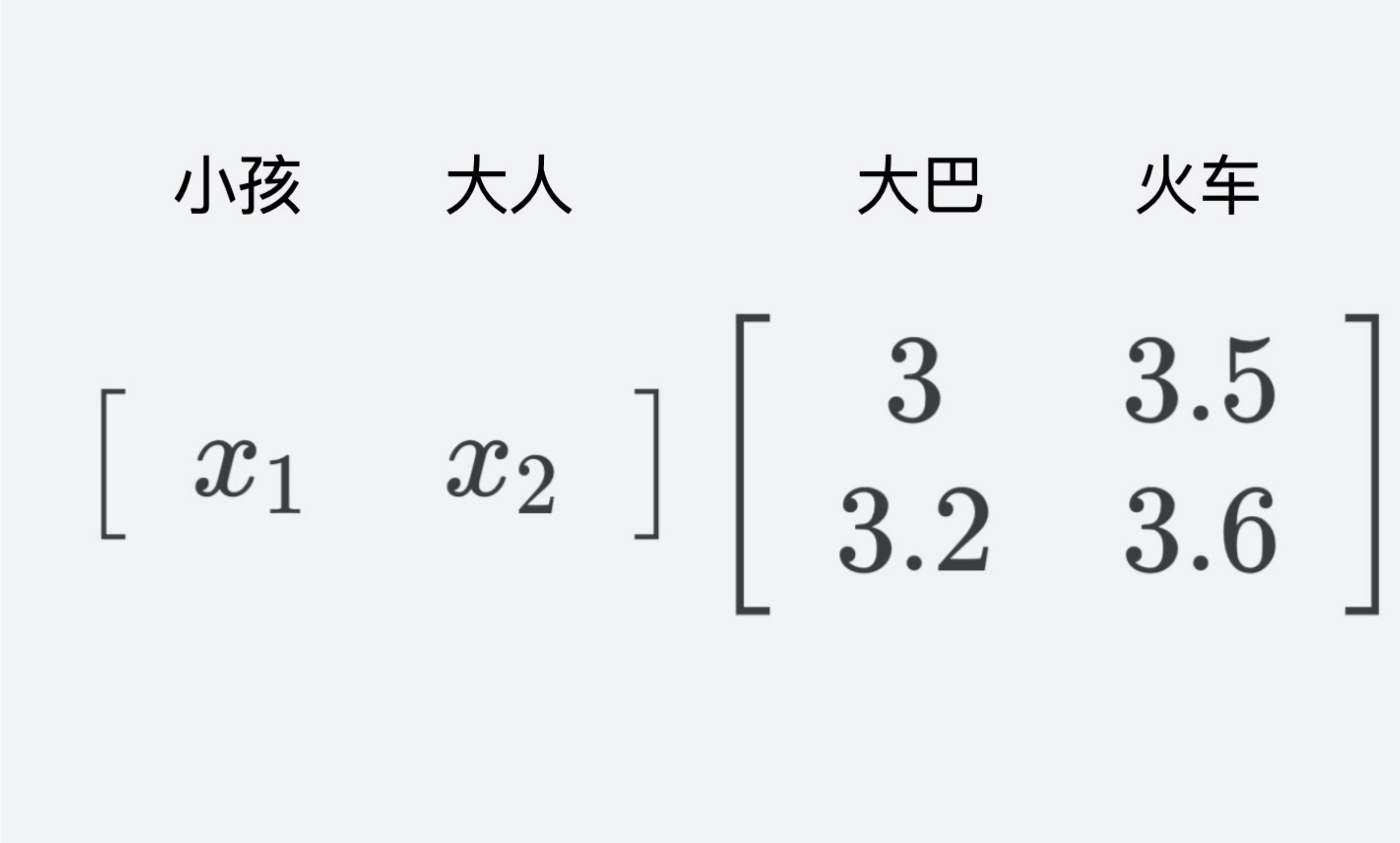
还记得行列式$a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}$吗？如果我们要证明矩阵是可逆的，只要证明行列式不等于零就行。更高阶的逆矩阵的算法也是一样的原理。

最后，我想通过一个现实生活中的案例来让你更多地了解逆矩阵。

一个旅游团由孩子和大人组成，去程他们一起做大巴，每个孩子的票价3元，大人票价3.2元，总共花费118.4元。回程一起做火车，每个孩子的票价3.5元，大人票价3.6元，总共花费

135.2元。请问旅游团里有多少小孩和大人？

首先，我们设置一些矩阵，组成线性方程$XA=B$。



要解X，我们就要先计算A的逆矩阵A^{-1}：

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{cc}
3 & 3.5 \\
3.2 & 3.6
\end{array}\right]^{-1}=\frac{1}{3 \times 3.6-3.5 \times 3.2}\left[\begin{array}{cc}
3.6 & -3.5 \\
-3.2 & 3
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
-9 & 8.75 \\
8 & -7.5
\end{array}\right]
$$

接下来再计算$X=B A^{-1}$：

$$
\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
118.4 & 135.2
\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}
-9 & 8.75 \\
8 & -7.5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
16 & 22
\end{array}\right]
$$

最终，我们得出这个旅游团有16个小孩和22个大人。

这也是解线性方程组的一种方法，类似这样的计算被广泛应用在各领域中，比如建筑工程、游戏和动画的3D效果上。虽然现在有很多程序包封装了这类数学计算的底层实现，但如果你能很好地理解这些概念，就可以为编程或算法调优打下坚实的基础。

Last but not least，方程次序很重要，也就是说，$AX=B$和$XA=B$的结果是不同的，这个一定要牢记哦！

转置矩阵

一般伴随逆矩阵之后出现的就是转置矩阵。在计算机图形图像处理中，如果要对一个物体进行旋转、平移、缩放等操作，就要对描述这个物体的所有矩阵进行运算，矩阵转置就是这类运算之一，而矩阵的转置在三维空间中的解释就相当于"得到关于某个点对称的三维立体"。所以，转置矩阵的定义很简单。

将矩阵的行列互换，得到的新矩阵就叫做转置矩阵（transpose）。转置矩阵的行列式不变。我们把$m×n$矩阵A的行列互换，得到转置矩阵A^{T}。

$$
A=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

$$
A^{T}=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m 1} \\
a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m 2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{1 n} & a_{2 n} & \ldots & a_{m n}

\end{array}\right]
$$

最后，为了方便你理解，我们再总结一下逆矩阵和转置矩阵的性质。你不用死记硬背，重在理解。

1. 矩阵和自身逆矩阵相乘得道单位矩阵，$A A^{-1}=I=A^{-1} A$；
2. $A$$B$两矩阵相乘的逆，等于逆矩阵$B$和逆矩阵$A$相乘，这里强调一下乘的顺序很重要，$(A B)^{-1}=B^{-1} A^{-1}$；
3. AB两矩阵相加后的逆矩阵，不等于各自逆矩阵的相加， $(A+B)^{-1} \neq A^{-1}+B^{-1}$；
4. 矩阵转置的转置还是它本身，$\left(A^{T}\right)^{\mathrm{T}}=A$；
5. AB两矩阵相加后的转置矩阵，等于各自转置矩阵的相加，$(A+B)^{T}=A^{T}+B^{T}$；
6. AB两矩阵相乘后的转置矩阵，等于转置矩阵B和转置矩阵A的相乘，这里再次强调乘的顺序很重要，$(A B)^{T}=B^{T} A^{T}$。

本节小结

好了，到这里矩阵这一讲就结束了，最后我再带你总结一下前面讲解的内容。

今天的知识，你只需要知道矩阵是线性方程组的另一种表达，了解和掌握矩阵的定义和性质就足够了。当然，矩阵还有很多内容，但我认为掌握了我讲的这些内容后，就为以后的一些矩阵应用场景打下了坚实的数学基础，也是下一讲的解线性方程组的前置知识。

线性代数练习场

对于10维列向量$x=\left(x_{1}, \ldots, x_{10}\right)^{T}$， $v=\left(v_{1}, \ldots, v_{10}\right)^{T}$，如果要计算$y=x x^{T}\left(I+v v^{T}\right) x$，其中$I$是10阶单位矩阵。你会怎么做？

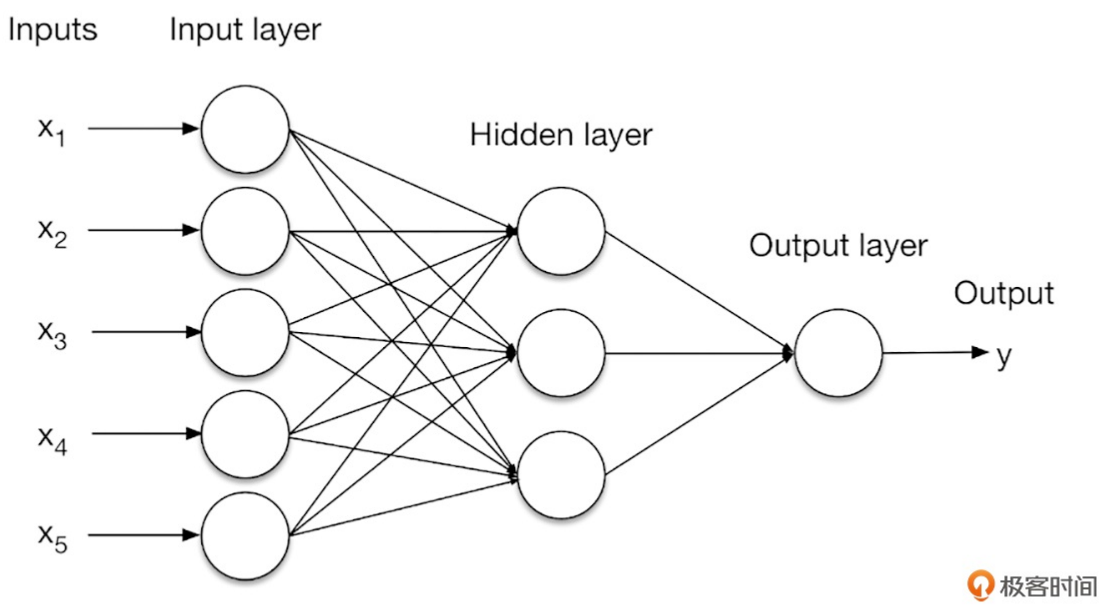
友情提醒，这里有多种方式解题。你能不能找到一个最简单的方法来解这道题？虽然结果很重要，但我想说的是过程更重要，而且往往解题过程不同，从计算机角度来说，运算的效率会有极大的不同。

欢迎你在留言区晒出你的运算过程和结果。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数，今天我们要讲的内容是“矩阵”。

在开始学习之前，我想先问你个问题，你觉得，学习矩阵有什么用呢？你可以先自己想一想。之后我们讲任何一个知识的时候，你都可以从这个角度出发，自己先思考一下，这样有助于你对所学内容理解得更深刻。

对于刚才那个问题，我的答案很简单，就一句话，从我们程序员的角度去理解的话，**矩阵可以极大地提高计算机的运算效率**。怎么说呢？我给你举一个例子。在机器学习中（特别是深度学习，或者更具体一点，神经网络），并行计算是非常昂贵的。



上图是一个典型的神经网络架构，在这时候，矩阵就能发挥用武之地了，计算H隐藏层输出的公式是：$H = f(W.x + b)$，其中W是权重矩阵，f是激活函数，b是偏差，x是输入层矩阵。而这个计算过程就叫做**向量化**（Vectorization），这也是GPU在深度学习中非常重要的原因，因为GPU非常擅长做类似矩阵乘之类的运算。

$$
X=\left|\begin{array} {l}
x_{1} \\\
x_{2}
\end{array}\right|
$$

$$
W=\left|\begin{array} {ll}
w_{1} & w_{2} \\\
w_{4} & w_{5} \\\
x_{3} & w_{6}
\end{array}\right|
$$

$$
H=f\left(\left|\begin{array} {ll}
w_{1} & w_{2} \\\
w_{4} & w_{5} \\\
x_{3} & w_{6}
\end{array}\right|\left|\begin{array} {l}
x_{1} \\\
x_{2}
\end{array}\right|+b\right)
$$

不过，矩阵也不仅仅局限于神经网络的应用，同时它也可以用在计算机图形图像的应用中，比如，三维物体从取景到屏幕的显示，就需要经历一系列的空间变换，才能生成二维图像显示在显示器上。在这个计算过程中，我们都需要用到矩阵。

矩阵是非常实用的，但它正式作为数学中的研究对象出现，其实是在行列式的研究发展起来之后。英国数学家 Arthur Cayley 被公认为矩阵论的创立人，他提出的矩阵概念可能来自于行列式。但我相信另一种说法，提出矩阵是为了更简单地表达线性方程组，也就是说，矩阵是线性方程组的另一种表达。

矩阵的基本概念

线性方程组的概念很简单，上节我们已经简单提过。你在小学或中学肯定也学过二元一次方程和二元一次方程组。

$$ax+by=c$$

$$
\left\{\begin{array} {l}
a_{1} x+b_{1} y+C_{1}=0 \\\
a_{2} x+b_{2} y+C_{2}=0
\end{array}\right.
$$

在这样一个方程组中，$a1$、$a2$、$b1$、$b2$不能同时为0。当我们把二元一次方程组再扩展一下，变成多元一次方程组时，我们就能得到线性方程组的一般表达，即$AX=B$。

$$
\left\{\begin{array} {l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.
$$

于是，这个线性方程组的所有系数就构成了一个$m×n$的m行n列矩阵：

$$
A=\left[\begin{array} {cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

我们把A称为该方程组的系数矩阵，而当我们把等式右边的常数b放入矩阵后，就是下面这样：

$$

\widetilde{A}=\left[\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} & b_{1} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} & b_{2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n} & b_{m}
\end{array}\right]
$$

这样我们就得到了A矩阵的增广矩阵$\widetilde{A}$，可以表示为(A, B)，这里的B表示的是方程组常数项所构成的列向量，也就是$m×1$的m行1列矩阵：

$$
B=\left|\begin{array}{l}
b_{1} \\
b_{2} \\
\cdots \\
b_{m}
\end{array}\right|
$$

如果设X为$n×1$的n行1列矩阵：

$$
X=\left|\begin{array}{c}
x_{1} \\
x_{2} \\
\cdots \\
x_{n}
\end{array}\right|
$$

那么线性方程组A，就可以表示为$AX=B$的矩阵形式。如果我们再换一种表示形式，设：$a_{1} ,a_{2},\ldots, a_{n},\beta$表示增广矩阵$\widetilde{A}$的列向量，则线性方程组$A$又可表示为$a_{1} x_{1}+a_{2} x_{2}+\cdots+a_{n} x_{n}=β$。

线性方程组的矩阵和向量形式都是线性方程组的其他表达形式。在工作中，你可以用它们来简化求解，甚至可以提升计算效率，就如之前提到的神经网络的隐藏层的输出计算、图形图像的三维空间变换。在数学中也是同样的，你可以经常运用它们来简化求解。具体线性方程组求解的内容比较多，我们下一节课再来详细讲解求解过程。

通过前面的讲解，我相信你对矩阵有了一定的了解，现在我们再回头来看看矩阵的定义吧。

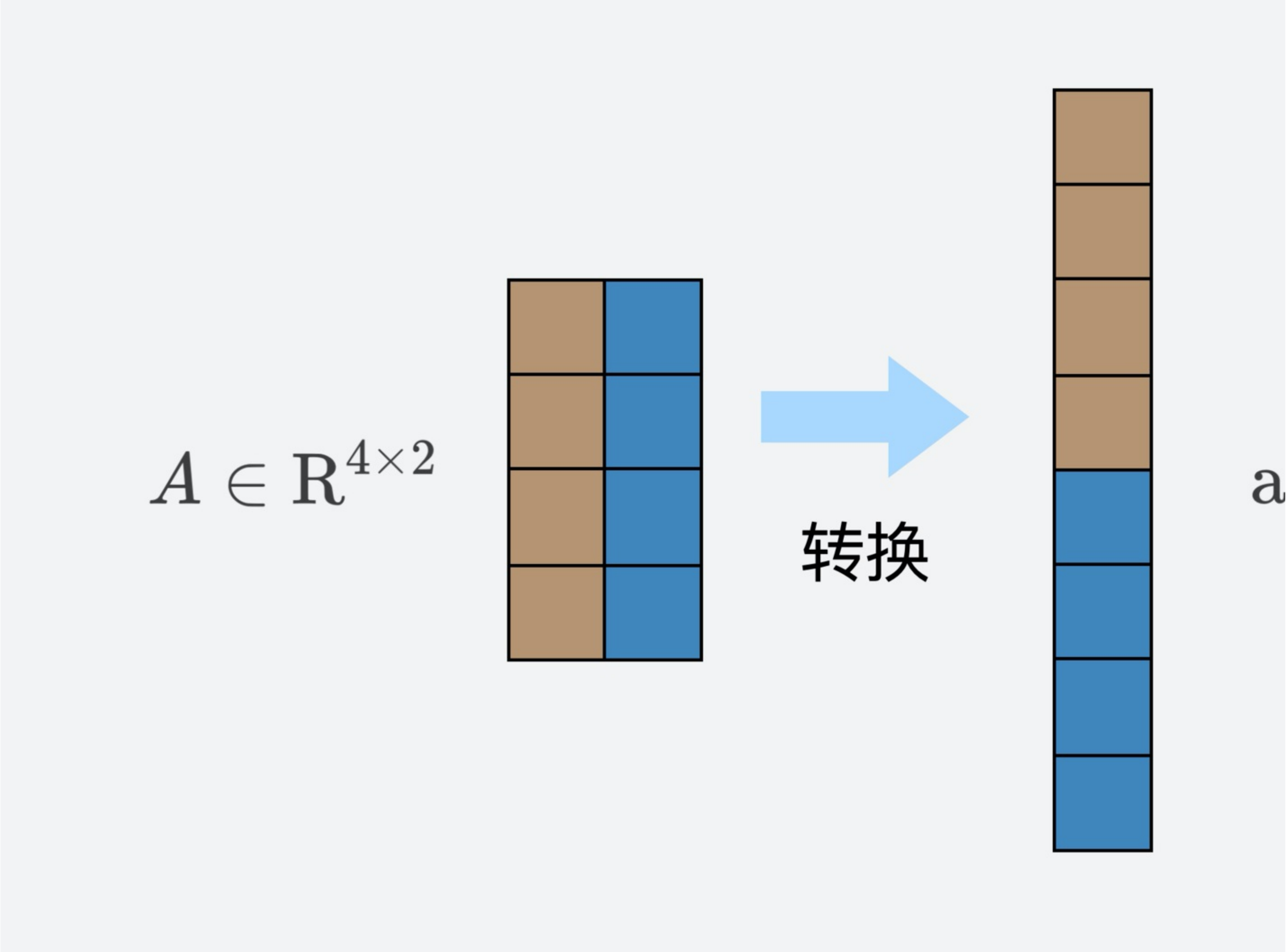
矩阵的定义是：一个(m, n)矩阵A，是由$m×n$个元素组成，m和n是实数，其中元素$a_{i j}, \mathrm{i}=1, \ldots, \mathrm{m}, \mathrm{j}=1, \ldots, \mathrm{n}$按$m$行$n$列的矩形排布方式后可以形成矩阵$A$：

$$
A=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

其中$a_{i j}$属于实数或复数，在我们的场景中是实数R，按通常的惯例，$(1, n)$矩阵叫做行，$(m, 1)$矩阵叫做列，这些特殊的矩阵叫做行或列向量。

定义完矩阵后，我接着讲一个比较有趣的概念，矩阵转换（Matrix transformation）。矩阵转换经常被用在计算机图形图像的转换中，比如，一张彩色图片从RGB角度来说是三维的，如果要转换成灰度图片，也就是一维图片，那就要做矩阵转换。

我们来看一下矩阵转换的过程。设$\mathrm{R}^{m \times n}$是实数矩阵(m, n)的集合，$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$可以表示成另一种形式 $a \in \mathrm{R}^{mn}$。我们把矩阵的n列堆叠成一个长向量后完成转换。这个转换也叫做reshape，其实就是重新调整原矩阵的行数、列数和维数，但是元素个数不变。



矩阵的运算

了解了矩阵的基本定义后，我们才能进入矩阵的运算环节，就是矩阵的加和乘。

加运算很简单，两个矩阵$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$，$B \in \mathrm{R}^{m \times n}$的加运算其实就是矩阵各自元素的加。

$$
A+B=\left[\begin{array}{ccc}
a_{11}+b_{11} & \ldots & a_{1 n}+b_{1 n} \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
a_{m 1}+b_{m 1} & \ldots & a_{m n}+b_{m n}
\end{array}\right] \in R^{m \times n}
$$

我推荐你使用NumPy的einsum来高效地做这类运算，因为它在速度和内存效率方面通常可以超越我们常见的array函数。

```
C= np.einsum('il, lj', A, B)
```

接下来，我们一起来看看矩阵的乘。这里你需要注意，矩阵的乘和通常意义上“数之间的乘”不同，矩阵的乘有多种类型，这里我讲三种最普遍，也是在各领域里用得最多的矩阵乘。

1.普通矩阵乘

普通矩阵乘是应用最广泛的矩阵乘，两个矩阵$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$，$B \in \mathrm{R}^{n \times k}$，普通矩阵则乘可以表示为$C=A B \in R^{m \times k}$，$C$中元素的计算规则是矩阵$A$、$B$对应两两元素乘积之和。

$$
c_{i j}=\sum_{k=1}^{n} a_{i k} b_{k j}, i=1, \ldots, m, j=1, \ldots, l
$$

我们举例来说明。C的第一个元素$c_{11}=a_{11} \times b_{11}+a_{12} \times b_{21}+a_{13} \times b_{31}=1 \times 1+2 \times 2+3 \times 3$。

$$
C=A B=\left[\begin{array}{lll}
1 & 2 & 3 \\
4 & 5 & 6
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
1 & 4 \\
2 & 5 \\
3 & 6
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{lll}
1 \times 1+2 \times 2+3 \times 3 & 1 \times 4+2 \times 5+3 \times 6 \\
4 \times 1+5 \times 2+6 \times 3 & 4 \times 4+5 \times 5+6 \times 6
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
14 & 32 \\
32 & 77
\end{array}\right]
$$

这里需要特别注意的是，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，例如，一个$n×k$矩阵A和一个$k×m$矩阵B相乘，最后得出$n×m$矩阵C，而这里的k就是相邻阶数。

$$AB=C$$

但反过来B和A相乘就不行了，因为相邻阶数m不等于n。

2.哈达玛积

哈达玛积理解起来就很简单了，就是矩阵各对应元素的乘积，$c_{i j}=a_{i j} \times b_{i j}$ 。举个例子：

$$
C=A^{*} B=\left[\begin{array}{ll}
1 & 2 \\
4 & 5
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
1 & 4 \\
2 & 5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
1 * 1 & 2 * 4 \\
4 * 2 & 5 * 5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
1 & 8 \\
8 & 25
\end{array}\right]
$$

哈达玛积其实在数学中不常看到，不过，在编程中哈达玛积非常有用，因为它可以用来同时计算多组数据的乘积，计算效率很高。

3.克罗内克积

克罗内克积是以德国数学家利奥波德·克罗内克（Leopold Kronecker）的名字命名的。它可以应用在解线性矩阵方程和图像处理方面，当然从更时髦的角度说，它还能用在量子信息领域，我们也称之为直积或张量积。

和普通矩阵乘和哈达玛积不同的是，克罗内克积是两个任意大小矩阵间的运算，表示为$A×B$，如果A是一个$m × n$的矩阵，而B是一个$p×q$的矩阵，克罗内克积则是一个$mp×nq$的矩阵。

接下来我们需要定义一个**在矩阵的乘法中起着特殊作用**的矩阵，它就是**单位矩阵**。高等代数中，在求解相应的矩阵时，若添加单位矩阵，通过初等变换进行求解，往往可以使问题变得简单。按照百度百科的解释，单位矩阵如同数的乘法中的1，这种矩阵就被称为单位矩阵。它是个方阵，从左上角到右下角的对角线，也就是主对角线上的元素均为1，除此以外全都为0。

在线性代数中，大小为n的单位矩阵就是在主对角线上均为1，而其他地方都是0的$n×n$的方阵，它用I_{n}表示，表达时为了方便可以忽略阶数，直接用I来表示：

$$
I_{1}=[1], I_{2}=\left[\begin{array}{ll}
1 & 0 \\
0 & 1
\end{array}\right], I_{3}=\left[\begin{array}{lll}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{array}\right], \ldots, I_{n}=\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 1 & \ldots & 0 \\
. & . & \ldots & . \\
. & . & . & . \\
0 & 0 & \ldots & 1
\end{array}\right]
$$

矩阵的性质

在了解了矩阵加和乘，以及单位矩阵后，我们是时候来看一看矩阵的性质了。了解矩阵的性质是进行矩阵计算的前提，就像我们小时候学加减乘除四则运算法则时那样。所以，这块内容对你来说应该不难，你作为了解就好，重点是之后的运算。

1.结合律

任意实数$m×n$矩阵A，$n×p$矩阵B，$p×q$矩阵C之间相乘，满足结合律$(AB)C=A(BC)$。这个很好理解，我就不多说了。

$$\forall A \in R^{m \times n}, B \in R^{n \times p}, C \in R^{p \times q}:(A B) C=A(B C)$$

2.分配律

任意实数$m×n$矩阵A和B，$n×p$矩阵C和D之间相乘满足分配律$(A+B)C=AC+BC$，$A(C+D)=AC+AD$。

$$
\forall \mathrm{A}, B \in \mathrm{R}^{m \times n}, C, D \in \mathrm{R}^{n \times p}:(A+B) C=A C+B C, A(C+D)=A C+A D
$$

3.单位矩阵乘

任意实数$m×n$矩阵A和单位矩阵之间的乘，等于它本身A。

$$
\forall A \in R^{m \times n}: I_{m} A=A I_{n}=A
$$

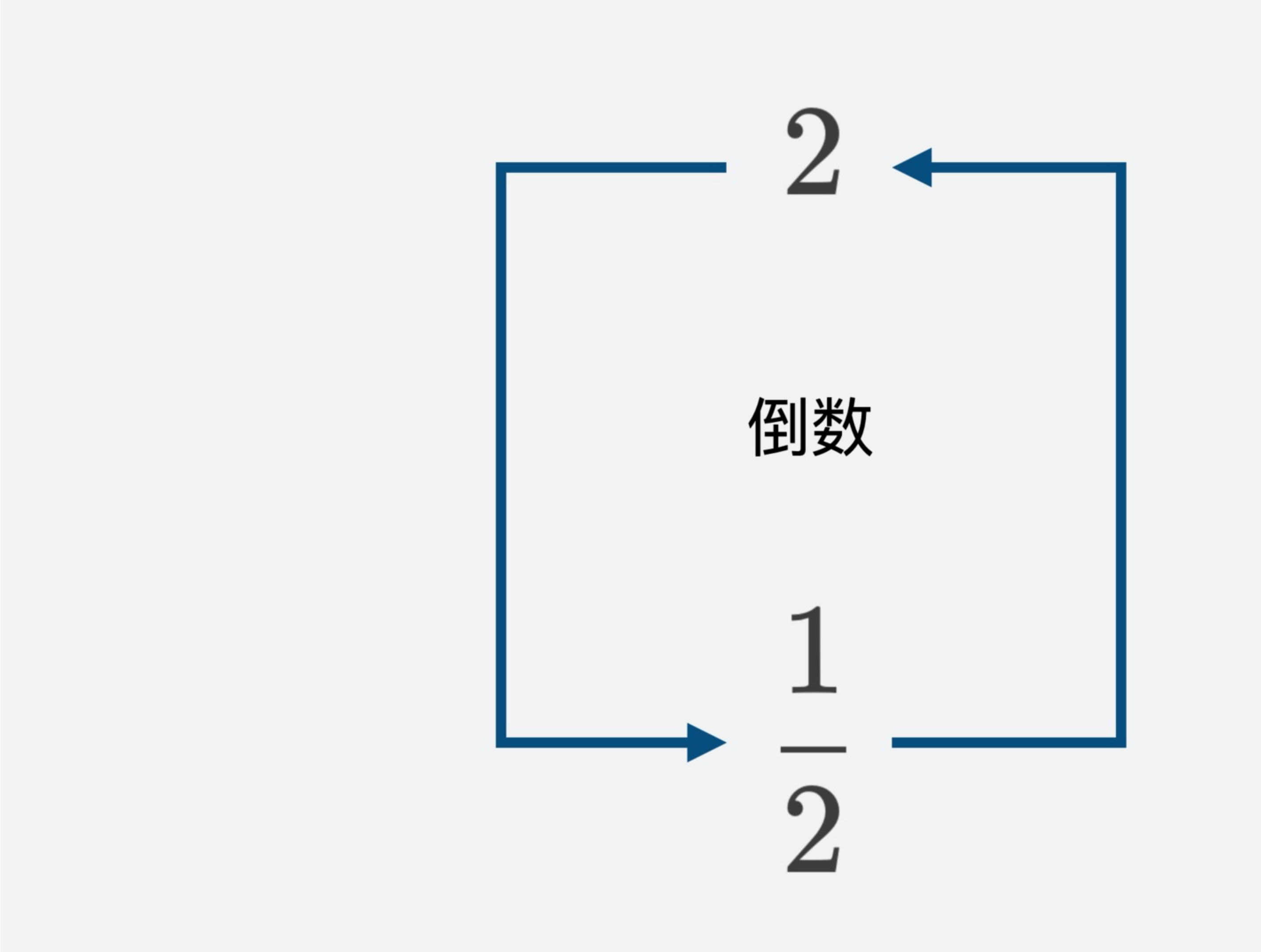
注意，这里的行和列不同，$m \neq n$意味着，根据矩阵乘，左乘和右乘单位矩阵也不同，也就是$I_{m} \neq I_{n}$。

逆矩阵与转置矩阵

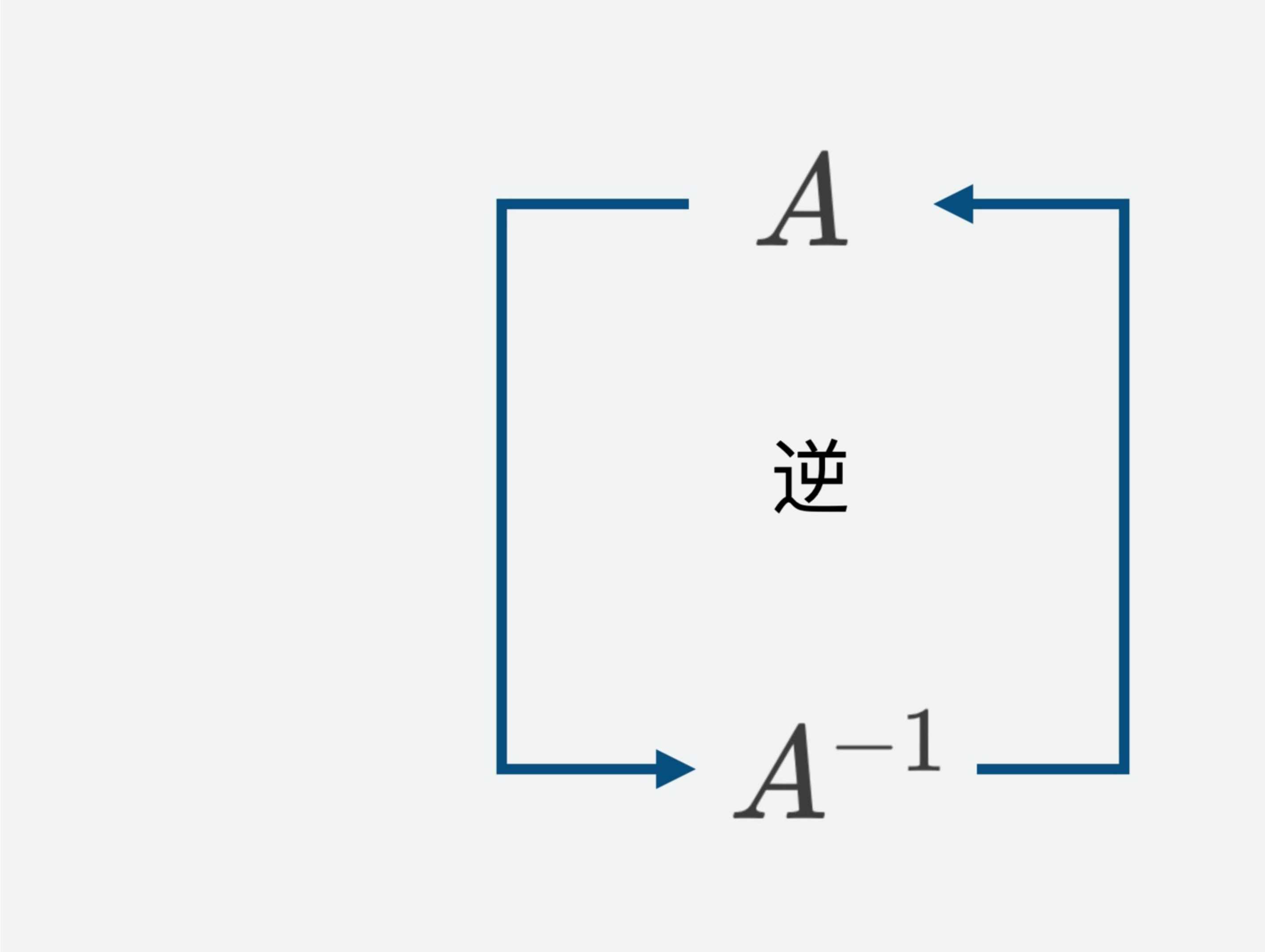
了解矩阵基本概念、运算，以及性质后，我来讲一讲矩阵应用中的两个核心内容——逆矩阵和转置矩阵。逆矩阵和转置矩阵在实际应用中大有用处，比如：坐标系中的图形变换运算。我们先来看下什么是逆矩阵。

逆矩阵

下面这个图你应该非常熟悉了，图中表现的是数字的倒数，2的倒数是$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$的倒数是2。



其实逆矩阵也有着类似的概念，只不过是写法不一样，我们会把逆矩阵写成A^{-1}。那为什么不是$\frac{1}{A}$呢？那是因为数字1无法被矩阵除。



我们知道，2乘以它的倒数$\frac{1}{2}$等于1。同样的道理，A乘以它的逆矩阵A^{-1}就等于单位矩阵，即$\mathrm{A} \times A^{-1}=\mathrm{I}$（$I$即单位矩阵），反过来也一样，$\mathrm{A}^{-1} \times A=\mathrm{I}$。

为方便你理解，我用一个2×2矩阵A来解释一下逆矩阵的算法。首先，我们交换a_{11}和a_{22}的位置，然后在a_{12}和a_{21}前加上负号，最后除以行列式$a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}$。

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]^{-1}=\frac{1}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}\left[\begin{array}{cc}
a_{22} & -a_{12} \\
-a_{21} & a_{11}
\end{array}\right]
$$

那我们该如何验证这是不是正解呢？

方法其实很简单，记得刚才的公式就行，$\mathrm{A} \times A^{-1}=\mathrm{I}$。现在我们就代入公式来验证一下，$A$和它的逆矩阵相乘，通过刚才的算法最终得出的结果是单位矩阵。

$$
A \times A^{-1}=\left[\begin{array}{llll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]^{-1}=\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{lll}
\frac{a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{-a_{12}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} \\
\frac{-a_{21}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
\frac{a_{11} \times a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{12} ×(-a_{21})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{11} ×(-a_{12})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{12} \times a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} \\
\frac{a_{21} \times a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{22} ×(-a_{21})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{21} ×(-a_{12})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{22} × a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{lll}
1 & 0 \\
0 & 1
\end{array}\right]
$$

这里有一点需要特别说明，不是每一个矩阵都是可逆的。如果一个矩阵是可逆的，那这个矩阵我们叫做**非奇异矩阵**，如果一个矩阵是不可逆的，那这个矩阵我们就叫做**奇异矩阵**，而且如果一个矩阵可逆，那它的逆矩阵必然是唯一的。

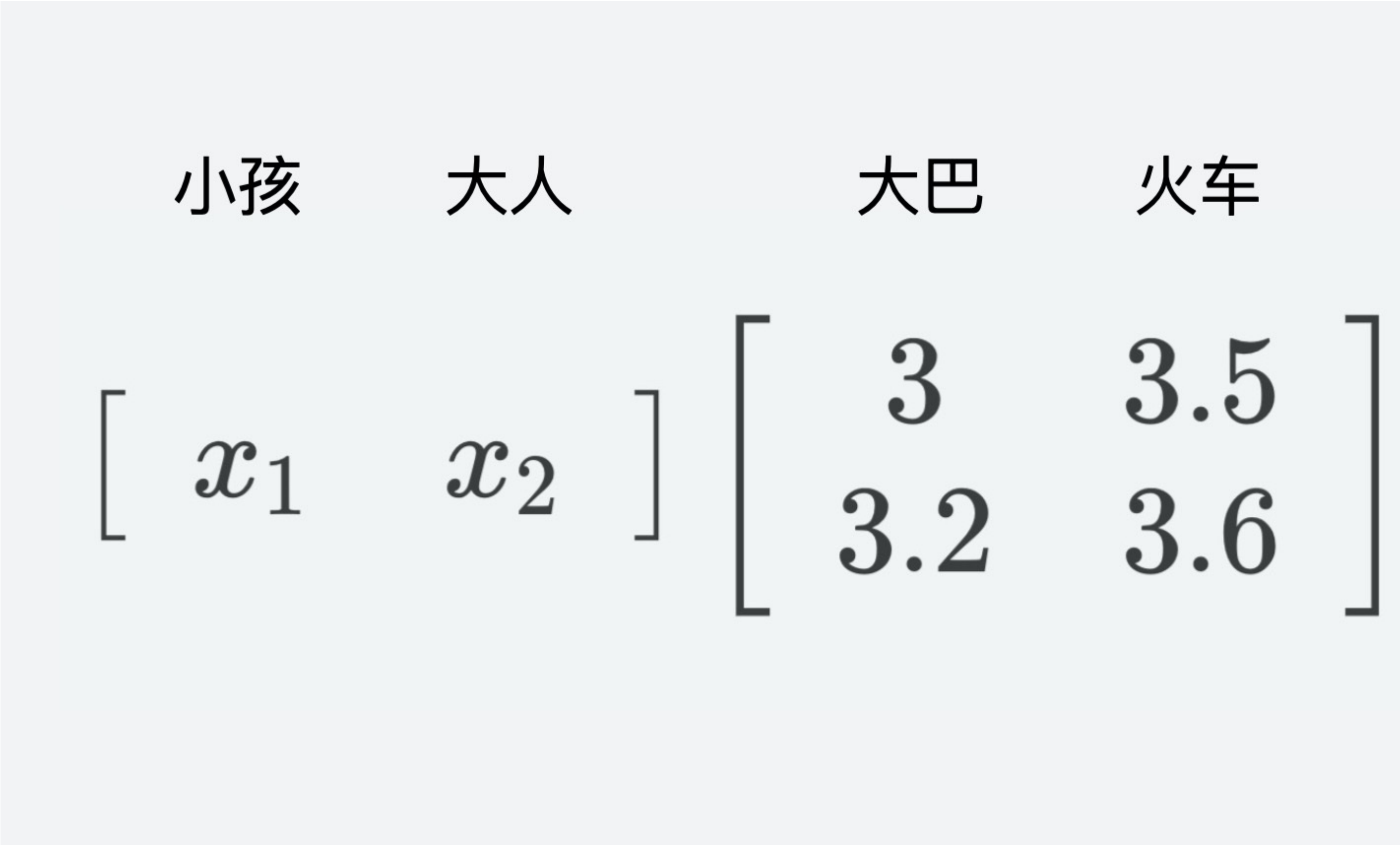
还记得行列式$a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}$吗？如果我们要证明矩阵是可逆的，只要证明行列式不等于零就行。更高阶的逆矩阵的算法也是一样的原理。

最后，我想通过一个现实生活中的案例来让你更多地了解逆矩阵。

一个旅游团由孩子和大人组成，去程他们一起做大巴，每个孩子的票价3元，大人票价3.2元，总共花费118.4元。回程一起做火车，每个孩子的票价3.5元，大人票价3.6元，总共花费

135.2元。请问旅游团里有多少小孩和大人？

首先，我们设置一些矩阵，组成线性方程$XA=B$。



要解X，我们就要先计算A的逆矩阵A^{-1}：

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{cc}
3 & 3.5 \\
3.2 & 3.6
\end{array}\right]^{-1}=\frac{1}{3 \times 3.6-3.5 \times 3.2}\left[\begin{array}{cc}
3.6 & -3.5 \\
-3.2 & 3
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
-9 & 8.75 \\
8 & -7.5
\end{array}\right]
$$

接下来再计算$X=B A^{-1}$：

$$
\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
118.4 & 135.2
\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}
-9 & 8.75 \\
8 & -7.5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
16 & 22
\end{array}\right]
$$

最终，我们得出这个旅游团有16个小孩和22个大人。

这也是解线性方程组的一种方法，类似这样的计算被广泛应用在各领域中，比如建筑工程、游戏和动画的3D效果上。虽然现在有很多程序包封装了这类数学计算的底层实现，但如果你能很好地理解这些概念，就可以为编程或算法调优打下坚实的基础。

Last but not least，方程次序很重要，也就是说，$AX=B$和$XA=B$的结果是不同的，这个一定要牢记哦！

转置矩阵

一般伴随逆矩阵之后出现的就是转置矩阵。在计算机图形图像处理中，如果要对一个物体进行旋转、平移、缩放等操作，就要对描述这个物体的所有矩阵进行运算，矩阵转置就是这类运算之一，而矩阵的转置在三维空间中的解释就相当于“得到关于某个点对称的三维立体”。所以，转置矩阵的定义很简单。

将矩阵的行列互换，得到的新矩阵就叫做转置矩阵（transpose）。转置矩阵的行列式不变。我们把$m×n$矩阵A的行列互换，得到转置矩阵A^{T}。

$$
A=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

$$
A^{T}=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m 1} \\
a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m 2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{1 n} & a_{2 n} & \ldots & a_{m n}

\end{array}\right]
$$

最后，为了方便你理解，我们再总结一下逆矩阵和转置矩阵的性质。你不用死记硬背，重在理解。

1. 矩阵和自身逆矩阵相乘得道单位矩阵，$A A^{-1}=I=A^{-1} A$；
2. $A$$B$两矩阵相乘的逆，等于逆矩阵$B$和逆矩阵$A$相乘，这里强调一下乘的顺序很重要，$(A B)^{-1}=B^{-1} A^{-1}$；
3. AB两矩阵相加后的逆矩阵，不等于各自逆矩阵的相加， $(A+B)^{-1} \neq A^{-1}+B^{-1}$；
4. 矩阵转置的转置还是它本身，$\left(A^{T}\right)^{\mathrm{T}}=A$；
5. AB两矩阵相加后的转置矩阵，等于各自转置矩阵的相加，$(A+B)^{T}=A^{T}+B^{T}$；
6. AB两矩阵相乘后的转置矩阵，等于转置矩阵B和转置矩阵A的相乘，这里再次强调乘的顺序很重要，$(A B)^{T}=B^{T} A^{T}$。

本节小结

好了，到这里矩阵这一讲就结束了，最后我再带你总结一下前面讲解的内容。

今天的知识，你只需要知道矩阵是线性方程组的另一种表达，了解和掌握矩阵的定义和性质就足够了。当然，矩阵还有很多内容，但我认为掌握了我讲的这些内容后，就为以后的一些矩阵应用场景打下了坚实的数学基础，也是下一讲的解线性方程组的前置知识。

线性代数练习场

对于10维列向量$x=\left(x_{1}, \ldots, x_{10}\right)^{T}$， $v=\left(v_{1}, \ldots, v_{10}\right)^{T}$，如果要计算$y=x x^{T}\left(I+v v^{T}\right) x$，其中$I$是10阶单位矩阵。你会怎么做？

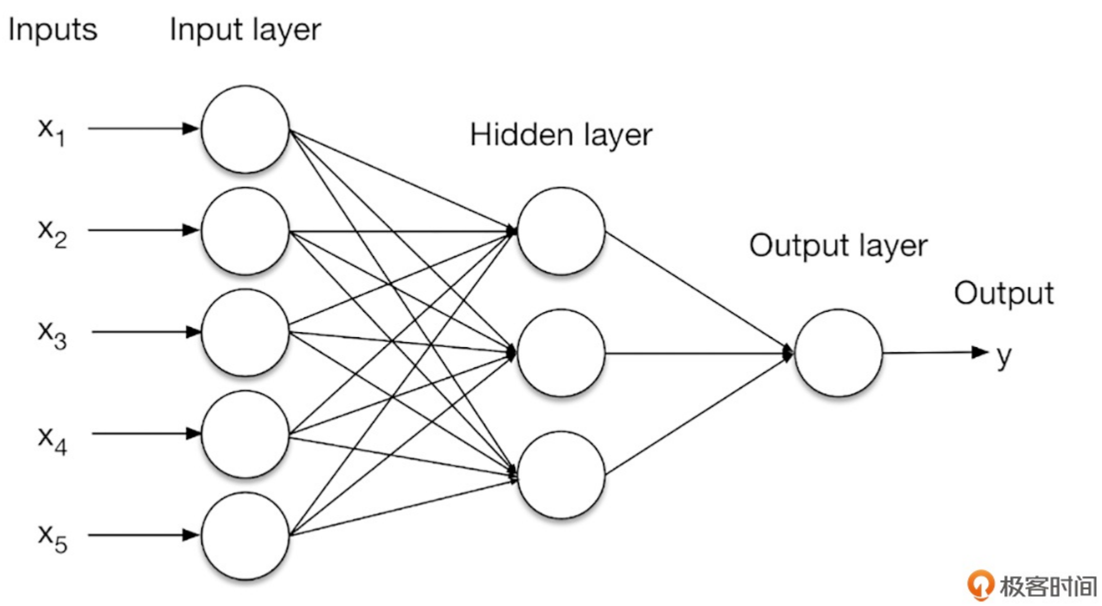
友情提醒，这里有多种方式解题。你能不能找到一个最简单的方法来解这道题？虽然结果很重要，但我想说的是过程更重要，而且往往解题过程不同，从计算机角度来说，运算的效率会有极大的不同。

欢迎你在留言区晒出你的运算过程和结果。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数，今天我们要讲的内容是“矩阵”。

在开始学习之前，我想先问你个问题，你觉得，学习矩阵有什么用呢？你可以先自己想一想。之后我们讲任何一个知识的时候，你都可以从这个角度出发，自己先思考一下，这样有助于你对所学内容理解得更深刻。

对于刚才那个问题，我的答案很简单，就一句话，从我们程序员的角度去理解的话，**矩阵可以极大地提高计算机的运算效率**。怎么说呢？我给你举一个例子。在机器学习中（特别是深度学习，或者更具体一点，神经网络），并行计算是非常昂贵的。



上图是一个典型的神经网络架构，在这时候，矩阵就能发挥用武之地了，计算H隐藏层输出的公式是：$H = f(W.x + b)$，其中W是权重矩阵，f是激活函数，b是偏差，x是输入层矩阵。而这个计算过程就叫做**向量化**（Vectorization），这也是GPU在深度学习中非常重要的原因，因为GPU非常擅长做类似矩阵乘之类的运算。

$$
X=\left|\begin{array} {l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right|
$$

$$
W=\left|\begin{array} {ll}
w_{1} & w_{2} \\
w_{4} & w_{5} \\
x_{3} & w_{6}
\end{array}\right|
$$

$$
H=f\left(\left|\begin{array} {ll}
w_{1} & w_{2} \\
w_{4} & w_{5} \\
x_{3} & w_{6}
\end{array}\right|\left|\begin{array} {l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right|+b\right)
$$

不过，矩阵也不仅仅局限于神经网络的应用，同时它也可以用在计算机图形图像的应用中，比如，三维物体从取景到屏幕的显示，就需要经历一系列的空间变换，才能生成二维图像显示在显示器上。在这个计算过程中，我们都需要用到矩阵。

矩阵是非常实用的，但它正式作为数学中的研究对象出现，其实是在行列式的研究发展起来之后。英国数学家 Arthur Cayley 被公认为矩阵论的创立人，他提出的矩阵概念可能来自于行列式。但我相信另一种说法，提出矩阵是为了更简单地表达线性方程组，也就是说，矩阵是线性方程组的另一种表达。

矩阵的基本概念

线性方程组的概念很简单，上节我们已经简单提过。你在小学或中学肯定也学过二元一次方程和二元一次方程组。

$$ax+by=c$$

$$
\left\{\begin{array} {l}
a_{1} x+b_{1} y+C_{1}=0 \\
a_{2} x+b_{2} y+C_{2}=0
\end{array}\right.
$$

在这样一个方程组中，$a1$、$a2$、$b1$、$b2$不能同时为0。当我们把二元一次方程组再扩展一下，变成多元一次方程组时，我们就能得到线性方程组的一般表达，即$AX=B$。

$$
\left\{\begin{array} {l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.
$$

于是，这个线性方程组的所有系数就构成了一个$m×n$的m行n列矩阵：

$$
A=\left[\begin{array} {cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

我们把A称为该方程组的系数矩阵，而当我们把等式右边的常数b放入矩阵后，就是下面这样：

$$

$$
\widetilde{A}=\left[\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} & b_{1} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} & b_{2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n} & b_{m}
\end{array}\right]
$$

这样我们就得到了A矩阵的增广矩阵$\widetilde{A}$，可以表示为(A, B)，这里的B表示的是方程组常数项所构成的列向量，也就是$m×1$的m行1列矩阵：

$$
B=\left|\begin{array}{l}
b_{1} \\
b_{2} \\
\cdots \\
b_{m}
\end{array}\right|
$$

如果设X为$n×1$的n行1列矩阵：

$$
X=\left|\begin{array}{c}
x_{1} \\
x_{2} \\
\cdots \\
x_{n}
\end{array}\right|
$$

那么线性方程组A，就可以表示为$AX=B$的矩阵形式。如果我们再换一种表示形式，设：$a_{1} ,a_{2},\ldots, a_{n},\beta$表示增广矩阵$\widetilde{A}$的列向量，则线性方程组$A$又可表示为$a_{1} x_{1}+a_{2} x_{2}+\cdots+a_{n} x_{n}=β$。

线性方程组的矩阵和向量形式都是线性方程组的其他表达形式。在工作中，你可以用它们来简化求解，甚至可以提升计算效率，就如之前提到的神经网络的隐藏层的输出计算、图形图像的三维空间变换。在数学中也是同样的，你可以经常运用它们来简化求解。具体线性方程组求解的内容比较多，我们下一节课再来详细讲解求解过程。

通过前面的讲解，我相信你对矩阵有了一定的了解，现在我们再回头来看看矩阵的定义吧。

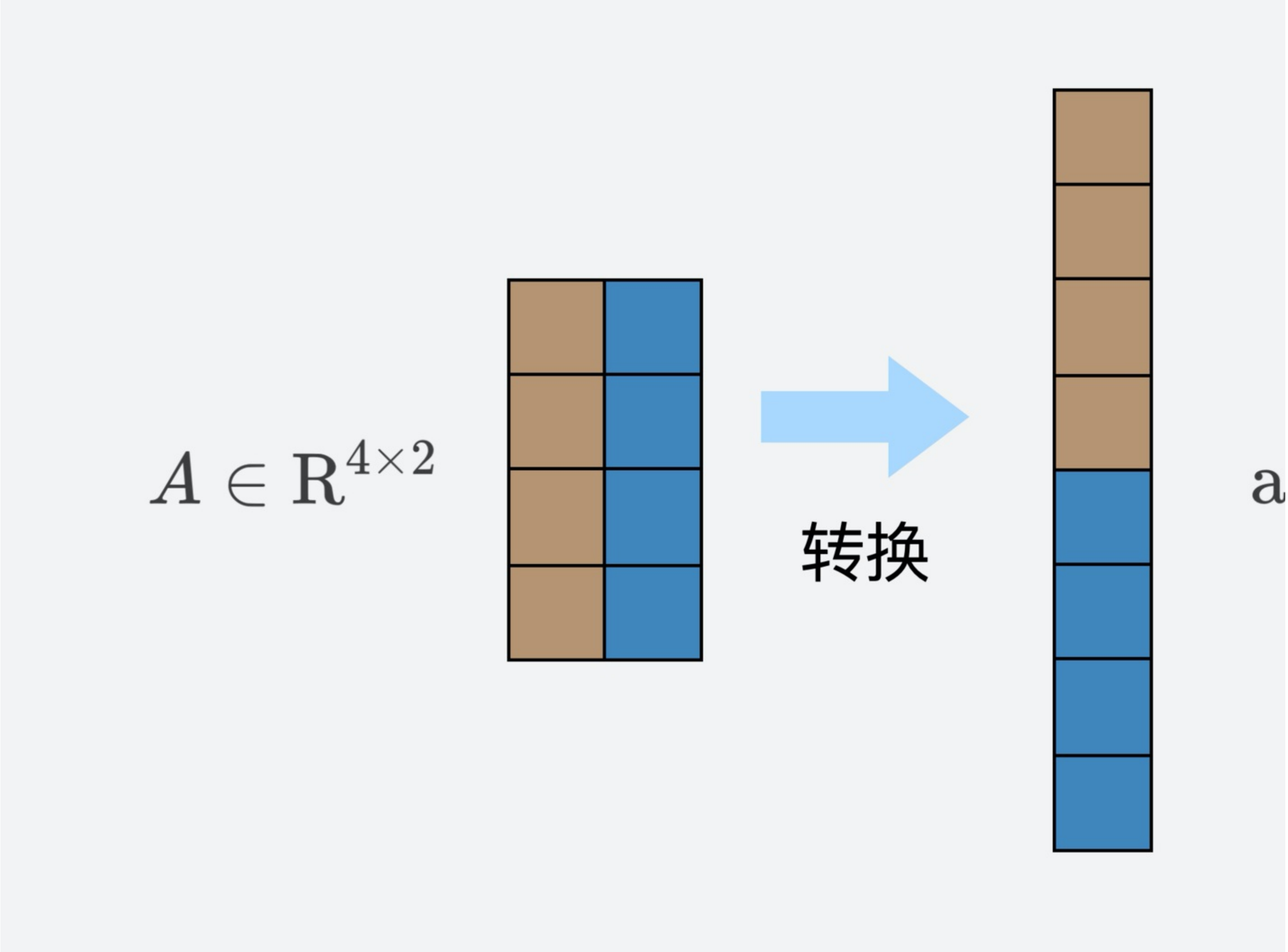
矩阵的定义是：一个(m, n)矩阵A，是由$m×n$个元素组成，m和n是实数，其中元素$a_{i j}, \mathrm{i}=1, \ldots, \mathrm{m}, \mathrm{j}=1, \ldots, \mathrm{n}$按$m$行$n$列的矩形排布方式后可以形成矩阵$A$：

$$
A=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

其中$a_{i j}$属于实数或复数，在我们的场景中是实数R，按通常的惯例，$(1, n)$矩阵叫做行，$(m, 1)$矩阵叫做列，这些特殊的矩阵叫做行或列向量。

定义完矩阵后，我接着讲一个比较有趣的概念，矩阵转换（Matrix transformation）。矩阵转换经常被用在计算机图形图像的转换中，比如，一张彩色图片从RGB角度来说是三维的，如果要转换成灰度图片，也就是一维图片，那就要做矩阵转换。

我们来看一下矩阵转换的过程。设$\mathrm{R}^{m \times n}$是实数矩阵(m, n)的集合，$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$可以表示成另一种形式 $a \in \mathrm{R}^{mn}$。我们把矩阵的n列堆叠成一个长向量后完成转换。这个转换也叫做reshape，其实就是重新调整原矩阵的行数、列数和维数，但是元素个数不变。



矩阵的运算

了解了矩阵的基本定义后，我们才能进入矩阵的运算环节，就是矩阵的加和乘。

加运算很简单，两个矩阵$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$，$B \in \mathrm{R}^{m \times n}$的加运算其实就是矩阵各自元素的加。

$$
A+B=\left[\begin{array}{ccc}
a_{11}+b_{11} & \ldots & a_{1 n}+b_{1 n} \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
a_{m 1}+b_{m 1} & \ldots & a_{m n}+b_{m n}
\end{array}\right] \in R^{m \times n}
$$

我推荐你使用NumPy的einsum来高效地做这类运算，因为它在速度和内存效率方面通常可以超越我们常见的array函数。

```
C= np.einsum('il, lj', A, B)
```

接下来，我们一起来看看矩阵的乘。这里你需要注意，矩阵的乘和通常意义上“数之间的乘”不同，矩阵的乘有多种类型，这里我讲三种最普遍，也是在各领域里用得最多的矩阵乘。

1.普通矩阵乘

普通矩阵乘是应用最广泛的矩阵乘，两个矩阵$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$，$B \in \mathrm{R}^{n \times k}$，普通矩阵则乘可以表示为$C=A B \in R^{m \times k}$，$C$中元素的计算规则是矩阵$A$、$B$对应两两元素乘积之和。

$$
c_{i j}=\sum_{k=1}^{n} a_{i k} b_{k j}, i=1, \ldots, m, j=1, \ldots, l
$$

我们举例来说明。C的第一个元素$c_{11}=a_{11} \times b_{11}+a_{12} \times b_{21}+a_{13} \times b_{31}=1 \times 1+2 \times 2+3 \times 3$。

$$
C=A B=\left[\begin{array}{lll}
1 & 2 & 3 \\
4 & 5 & 6
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
1 & 4 \\
2 & 5 \\
3 & 6
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{lll}
1 \times 1+2 \times 2+3 \times 3 & 1 \times 4+2 \times 5+3 \times 6 \\
4 \times 1+5 \times 2+6 \times 3 & 4 \times 4+5 \times 5+6 \times 6
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
14 & 32 \\
32 & 77
\end{array}\right]
$$

这里需要特别注意的是，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，例如，一个$n×k$矩阵A和一个$k×m$矩阵B相乘，最后得出$n×m$矩阵C，而这里的k就是相邻阶数。

$$AB=C$$

但反过来B和A相乘就不行了，因为相邻阶数m不等于n。

2.哈达玛积

哈达玛积理解起来就很简单了，就是矩阵各对应元素的乘积，$c_{ij}=a_{ij} \times b_{ij}$。举个例子：

$$
C=A^{*} B=\left[\begin{array}{ll}
1 & 2 \\
4 & 5
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
1 & 4 \\
2 & 5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
1 * 1 & 2 * 4 \\
4 * 2 & 5 * 5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
1 & 8 \\
8 & 25
\end{array}\right]
$$

哈达玛积其实在数学中不常看到，不过，在编程中哈达玛积非常有用，因为它可以用来同时计算多组数据的乘积，计算效率很高。

3.克罗内克积

克罗内克积是以德国数学家利奥波德·克罗内克（Leopold Kronecker）的名字命名的。它可以应用在解线性矩阵方程和图像处理方面，当然从更时髦的角度说，它还能用在量子信息领域，我们也称之为直积或张量积。

和普通矩阵乘和哈达玛积不同的是，克罗内克积是两个任意大小矩阵间的运算，表示为$A×B$，如果A是一个$m × n$的矩阵，而B是一个$p×q$的矩阵，克罗内克积则是一个$mp×nq$的矩阵。

接下来我们需要定义一个**在矩阵的乘法中起着特殊作用**的矩阵，它就是**单位矩阵**。高等代数中，在求解相应的矩阵时，若添加单位矩阵，通过初等变换进行求解，往往可以使问题变得简单。按照百度百科的解释，单位矩阵如同数的乘法中的1，这种矩阵就被称为单位矩阵。它是个方阵，从左上角到右下角的对角线，也就是主对角线上的元素均为1，除此以外全都为0。

在线性代数中，大小为n的单位矩阵就是在主对角线上均为1，而其他地方都是0的$n×n$的方阵，它用I_{n}表示，表达时为了方便可以忽略阶数，直接用I来表示：

$$
I_{1}=[1], I_{2}=\left[\begin{array}{ll}
1 & 0 \\
0 & 1
\end{array}\right], I_{3}=\left[\begin{array}{lll}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{array}\right], \ldots, I_{n}=\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 1 & \ldots & 0 \\
. & . & \ldots & . \\
. & . & . & . \\
0 & 0 & \ldots & 1
\end{array}\right]
$$

矩阵的性质

在了解了矩阵加和乘，以及单位矩阵后，我们是时候来看一看矩阵的性质了。了解矩阵的性质是进行矩阵计算的前提，就像我们小时候学加减乘除四则运算法则时那样。所以，这块内容对你来说应该不难，你作为了解就好，重点是之后的运算。

1.结合律

任意实数$m×n$矩阵A，$n×p$矩阵B，$p×q$矩阵C之间相乘，满足结合律$(AB)C=A(BC)$。这个很好理解，我就不多说了。

$$\forall A \in R^{m \times n}, B \in R^{n \times p}, C \in R^{p \times q}:(A B) C=A(B C)$$

2.分配律

任意实数$m×n$矩阵A和B，$n×p$矩阵C和D之间相乘满足分配律$(A+B)C=AC+BC$，$A(C+D)=AC+AD$。

$$
\forall \mathrm{A}, B \in \mathrm{R}^{m \times n}, C, D \in \mathrm{R}^{n \times p}:(A+B) C=A C+B C, A(C+D)=A C+A D
$$

3.单位矩阵乘

任意实数$m×n$矩阵A和单位矩阵之间的乘，等于它本身A。

$$
\forall A \in R^{m \times n}: I_{m} A=A I_{n}=A
$$

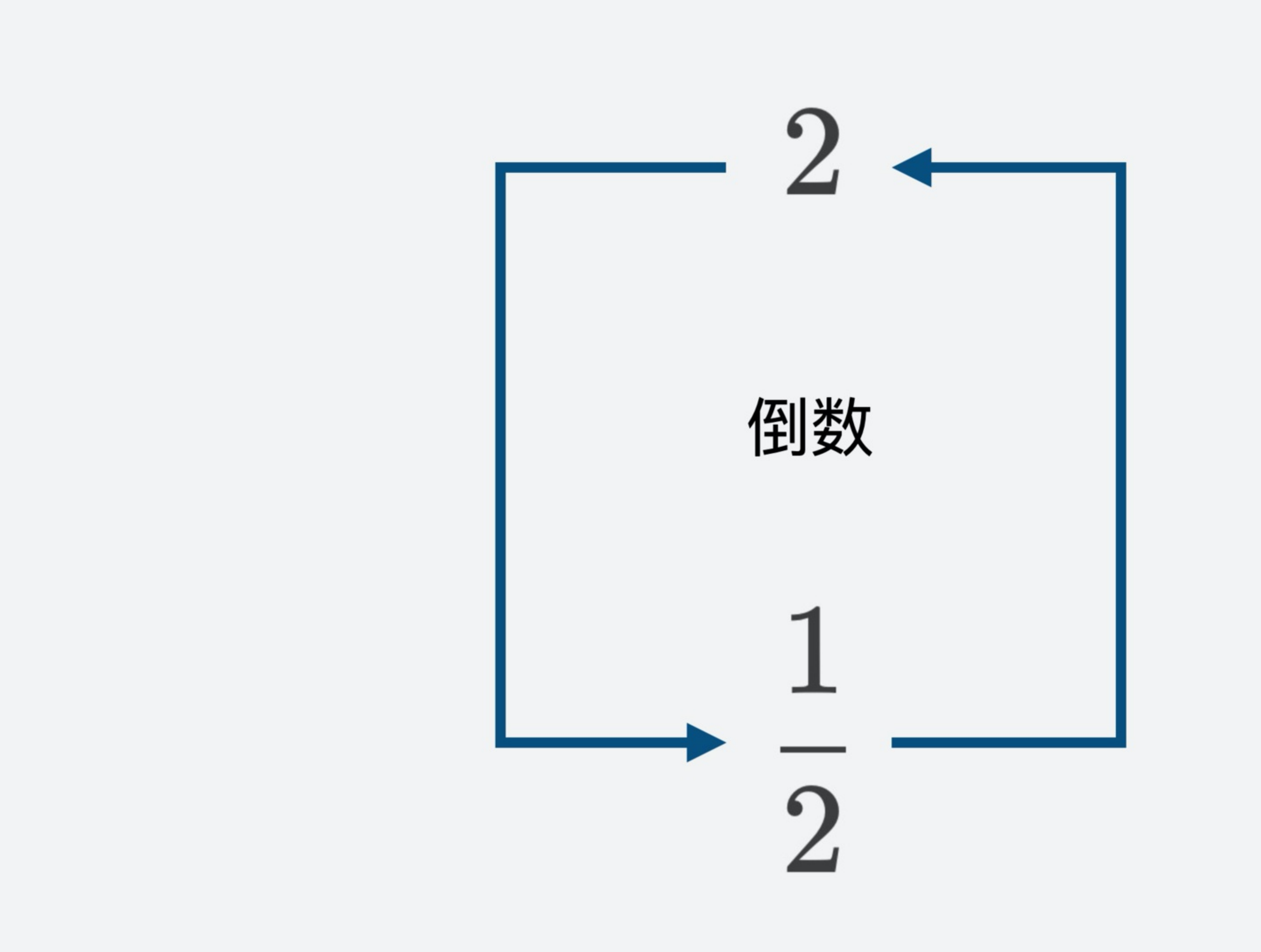
注意，这里的行和列不同，$m \neq n$意味着，根据矩阵乘，左乘和右乘单位矩阵也不同，也就是$I_{m} \neq I_{n}$。

逆矩阵与转置矩阵

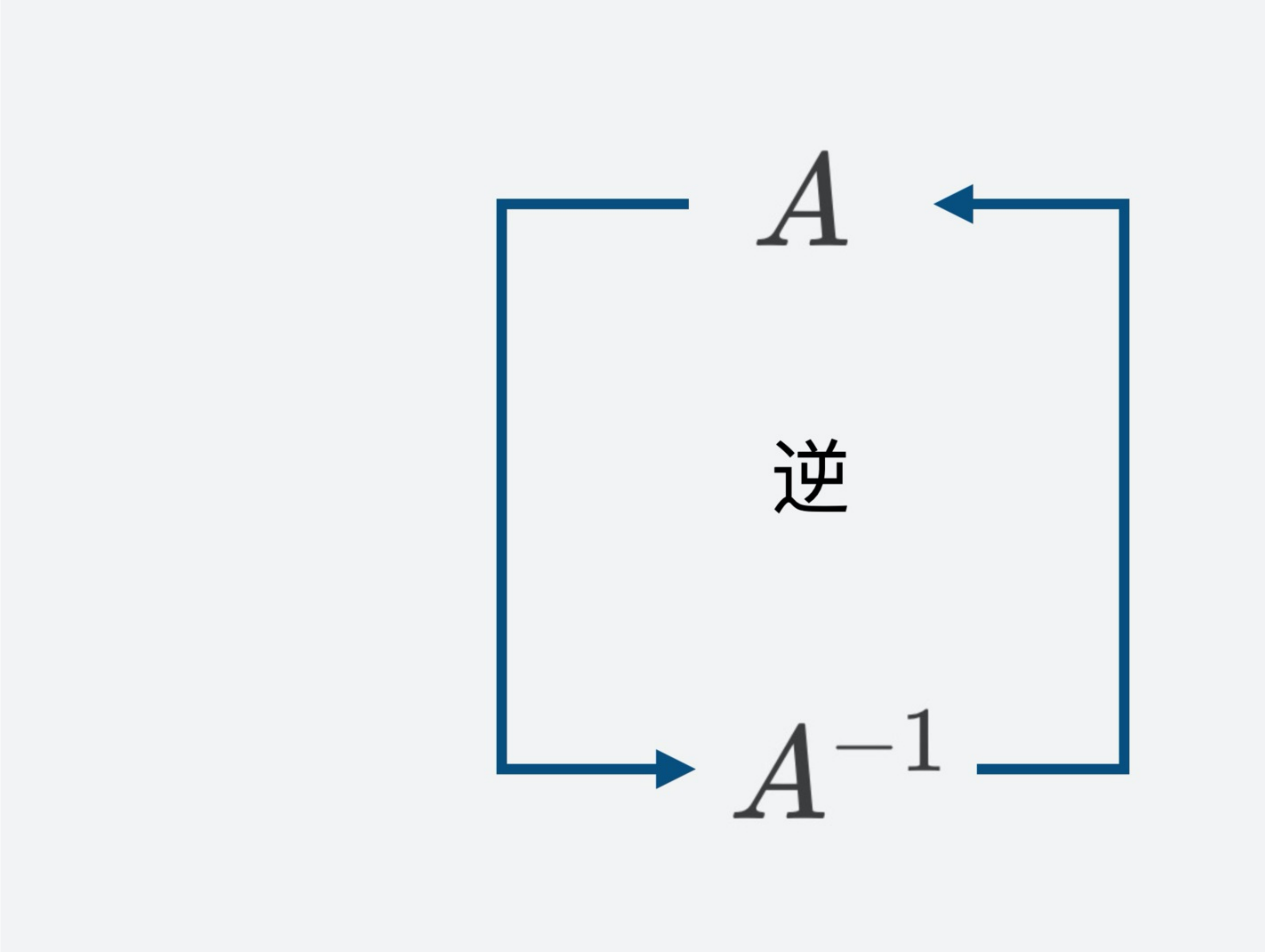
了解矩阵基本概念、运算，以及性质后，我来讲一讲矩阵应用中的两个核心内容——逆矩阵和转置矩阵。逆矩阵和转置矩阵在实际应用中大有用处，比如：坐标系中的图形变换运算。我们先来看下什么是逆矩阵。

逆矩阵

下面这个图你应该非常熟悉了，图中表现的是数字的倒数，2的倒数是$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$的倒数是2。



其实逆矩阵也有着类似的概念，只不过是写法不一样，我们会把逆矩阵写成A^{-1}。那为什么不是$\frac{1}{A}$呢？那是因为数字1无法被矩阵除。



我们知道，2乘以它的倒数$\frac{1}{2}$等于1。同样的道理，A乘以它的逆矩阵A^{-1}就等于单位矩阵，即$\mathrm{A} \times A^{-1}=\mathrm{I}$（$I$即单位矩阵），反过来也一样，$\mathrm{A}^{-1} \times A=\mathrm{I}$。

为方便你理解，我用一个2×2矩阵A来解释一下逆矩阵的算法。首先，我们交换a_{11}和a_{22}的位置，然后在a_{12}和a_{21}前加上负号，最后除以行列式$a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}$。

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]^{-1}=\frac{1}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}\left[\begin{array}{cc}
a_{22} & -a_{12} \\
-a_{21} & a_{11}
\end{array}\right]
$$

那我们该如何验证这是不是正解呢？

方法其实很简单，记得刚才的公式就行，$\mathrm{A} \times A^{-1}=\mathrm{I}$。现在我们就代入公式来验证一下，$A$和它的逆矩阵相乘，通过刚才的算法最终得出的结果是单位矩阵。

$$
A \times A^{-1}=\left[\begin{array}{llll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]^{-1}=\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{lll}
\frac{a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{-a_{12}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} \\
\frac{-a_{21}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
\frac{a_{11} \times a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{12} ×(-a_{21})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{11} ×(-a_{12})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{12} \times a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} \\
\frac{a_{21} \times a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{22} ×(-a_{21})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{21} ×(-a_{12})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{22} × a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{lll}
1 & 0 \\
0 & 1
\end{array}\right]
$$

这里有一点需要特别说明，不是每一个矩阵都是可逆的。如果一个矩阵是可逆的，那这个矩阵我们叫做**非奇异矩阵**，如果一个矩阵是不可逆的，那这个矩阵我们就叫做**奇异矩阵**，而且如果一个矩阵可逆，那它的逆矩阵必然是唯一的。

还记得行列式$a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}$吗？如果我们要证明矩阵是可逆的，只要证明行列式不等于零就行。更高阶的逆矩阵的算法也是一样的原理。

最后，我想通过一个现实生活中的案例来让你更多地了解逆矩阵。

一个旅游团由孩子和大人组成，去程他们一起做大巴，每个孩子的票价3元，大人票价3.2元，总共花费118.4元。回程一起做火车，每个孩子的票价3.5元，大人票价3.6元，总共花费

135.2元。请问旅游团里有多少小孩和大人？

首先，我们设置一些矩阵，组成线性方程$XA=B$。

$$
\begin{array}{cc} \text{小孩} & \text{大人} \\ \multicolumn{2}{c}{\left[\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array}\right]} \end{array}
\begin{array}{cc} \text{大巴} & \text{火车} \\ \multicolumn{2}{c}{\left[\begin{array}{cc} 3 & 3.5 \\ 3.2 & 3.6 \end{array}\right]} \end{array}
$$

要解X，我们就要先计算A的逆矩阵A^{-1}：

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{cc}
3 & 3.5 \\
3.2 & 3.6
\end{array}\right]^{-1}=\frac{1}{3 \times 3.6-3.5 \times 3.2}\left[\begin{array}{cc}
3.6 & -3.5 \\
-3.2 & 3
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
-9 & 8.75 \\
8 & -7.5
\end{array}\right]
$$

接下来再计算$X=B A^{-1}$：

$$
\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
118.4 & 135.2
\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}
-9 & 8.75 \\
8 & -7.5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
16 & 22
\end{array}\right]
$$

最终，我们得出这个旅游团有16个小孩和22个大人。

这也是解线性方程组的一种方法，类似这样的计算被广泛应用在各领域中，比如建筑工程、游戏和动画的3D效果上。虽然现在有很多程序包封装了这类数学计算的底层实现，但如果你能很好地理解这些概念，就可以为编程或算法调优打下坚实的基础。

Last but not least，方程次序很重要，也就是说，$AX=B$和$XA=B$的结果是不同的，这个一定要牢记哦！

转置矩阵

一般伴随逆矩阵之后出现的就是转置矩阵。在计算机图形图像处理中，如果要对一个物体进行旋转、平移、缩放等操作，就要对描述这个物体的所有矩阵进行运算，矩阵转置就是这类运算之一，而矩阵的转置在三维空间中的解释就相当于“得到关于某个点对称的三维立体”。所以，转置矩阵的定义很简单。

将矩阵的行列互换，得到的新矩阵就叫做转置矩阵（transpose）。转置矩阵的行列式不变。我们把$m×n$矩阵A的行列互换，得到转置矩阵A^{T}。

$$
A=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

$$
A^{T}=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m 1} \\
a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m 2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{1 n} & a_{2 n} & \ldots & a_{m n}

\end{array}\right]
$$

最后，为了方便你理解，我们再总结一下逆矩阵和转置矩阵的性质。你不用死记硬背，重在理解。

1. 矩阵和自身逆矩阵相乘得道单位矩阵，$A A^{-1}=I=A^{-1} A$；
2. $A$$B$两矩阵相乘的逆，等于逆矩阵$B$和逆矩阵$A$相乘，这里强调一下乘的顺序很重要，$(A B)^{-1}=B^{-1} A^{-1}$；
3. AB两矩阵相加后的逆矩阵，不等于各自逆矩阵的相加， $(A+B)^{-1} \neq A^{-1}+B^{-1}$；
4. 矩阵转置的转置还是它本身，$\left(A^{T}\right)^{\mathrm{T}}=A$；
5. AB两矩阵相加后的转置矩阵，等于各自转置矩阵的相加，$(A+B)^{T}=A^{T}+B^{T}$；
6. AB两矩阵相乘后的转置矩阵，等于转置矩阵B和转置矩阵A的相乘，这里再次强调乘的顺序很重要，$(A B)^{T}=B^{T} A^{T}$。

本节小结

好了，到这里矩阵这一讲就结束了，最后我再带你总结一下前面讲解的内容。

今天的知识，你只需要知道矩阵是线性方程组的另一种表达，了解和掌握矩阵的定义和性质就足够了。当然，矩阵还有很多内容，但我认为掌握了我讲的这些内容后，就为以后的一些矩阵应用场景打下了坚实的数学基础，也是下一讲的解线性方程组的前置知识。

线性代数练习场

对于10维列向量$x=\left(x_{1}, \ldots, x_{10}\right)^{T}$， $v=\left(v_{1}, \ldots, v_{10}\right)^{T}$，如果要计算$y=x x^{T}\left(I+v v^{T}\right) x$，其中$I$是10阶单位矩阵。你会怎么做？

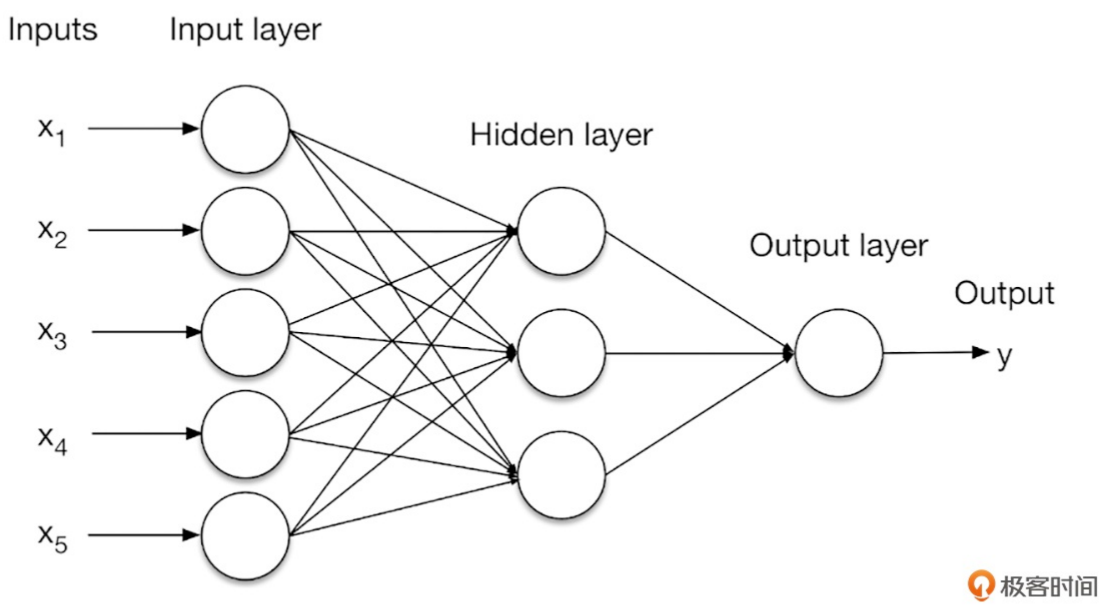
友情提醒，这里有多种方式解题。你能不能找到一个最简单的方法来解这道题？虽然结果很重要，但我想说的是过程更重要，而且往往解题过程不同，从计算机角度来说，运算的效率会有极大的不同。

欢迎你在留言区晒出你的运算过程和结果。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数，今天我们要讲的内容是“矩阵”。

在开始学习之前，我想先问你个问题，你觉得，学习矩阵有什么用呢？你可以先自己想一想。之后我们讲任何一个知识的时候，你都可以从这个角度出发，自己先思考一下，这样有助于你对所学内容理解得更深刻。

对于刚才那个问题，我的答案很简单，就一句话，从我们程序员的角度去理解的话，**矩阵可以极大地提高计算机的运算效率**。怎么说呢？我给你举一个例子。在机器学习中（特别是深度学习，或者更具体一点，神经网络），并行计算是非常昂贵的。



上图是一个典型的神经网络架构，在这时候，矩阵就能发挥用武之地了，计算H隐藏层输出的公式是：$H = f(W.x + b)$，其中W是权重矩阵，f是激活函数，b是偏差，x是输入层矩阵。而这个计算过程就叫做**向量化**（Vectorization），这也是GPU在深度学习中非常重要的原因，因为GPU非常擅长做类似矩阵乘之类的运算。

$$
X=\left|\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right|
$$

$$
W=\left|\begin{array}{ll}
w_{1} & w_{2} \\
w_{4} & w_{5} \\
x_{3} & w_{6}
\end{array}\right|
$$

$$
H=f\left(\left|\begin{array}{ll}
w_{1} & w_{2} \\
w_{4} & w_{5} \\
x_{3} & w_{6}
\end{array}\right|\left|\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right|+b\right)
$$

不过，矩阵也不仅仅局限于神经网络的应用，同时它也可以用在计算机图形图像的应用中，比如，三维物体从取景到屏幕的显示，就需要经历一系列的空间变换，才能生成二维图像显示在显示器上。在这个计算过程中，我们都需要用到矩阵。

矩阵是非常实用的，但它正式作为数学中的研究对象出现，其实是在行列式的研究发展起来之后。英国数学家 Arthur Cayley 被公认为矩阵论的创立人，他提出的矩阵概念可能来自于行列式。但我相信另一种说法，提出矩阵是为了更简单地表达线性方程组，也就是说，矩阵是线性方程组的另一种表达。

矩阵的基本概念

线性方程组的概念很简单，上节我们已经简单提过。你在小学或中学肯定也学过二元一次方程和二元一次方程组。

$$ax+by=c$$

$$
\left\{\begin{array}{l}
a_{1} x+b_{1} y+C_{1}=0 \\
a_{2} x+b_{2} y+C_{2}=0
\end{array}\right.
$$

在这样一个方程组中，$a1$、$a2$、$b1$、$b2$不能同时为0。当我们把二元一次方程组再扩展一下，变成多元一次方程组时，我们就能得到线性方程组的一般表达，即$AX=B$。

$$
\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.
$$

于是，这个线性方程组的所有系数就构成了一个$m×n$的m行n列矩阵：

$$
A=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

我们把A称为该方程组的系数矩阵，而当我们把等式右边的常数b放入矩阵后，就是下面这样：

$$

$$
\widetilde{A}=\left[\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} & b_{1} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} & b_{2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n} & b_{m}
\end{array}\right]
$$

这样我们就得到了A矩阵的增广矩阵$\widetilde{A}$，可以表示为(A, B)，这里的B表示的是方程组常数项所构成的列向量，也就是$m×1$的m行1列矩阵：

$$
B=\left|\begin{array}{l}
b_{1} \\
b_{2} \\
\cdots \\
b_{m}
\end{array}\right|
$$

如果设X为$n×1$的n行1列矩阵：

$$
X=\left|\begin{array}{c}
x_{1} \\
x_{2} \\
\cdots \\
x_{n}
\end{array}\right|
$$

那么线性方程组A，就可以表示为$AX=B$的矩阵形式。如果我们再换一种表示形式，设：$a_{1} ,a_{2},\ldots, a_{n},\beta$表示增广矩阵$\widetilde{A}$的列向量，则线性方程组$A$又可表示为$a_{1} x_{1}+a_{2} x_{2}+\cdots+a_{n} x_{n}=β$。

线性方程组的矩阵和向量形式都是线性方程组的其他表达形式。在工作中，你可以用它们来简化求解，甚至可以提升计算效率，就如之前提到的神经网络的隐藏层的输出计算、图形图像的三维空间变换。在数学中也是同样的，你可以经常运用它们来简化求解。具体线性方程组求解的内容比较多，我们下一节课再来详细讲解求解过程。

通过前面的讲解，我相信你对矩阵有了一定的了解，现在我们再回头来看看矩阵的定义吧。

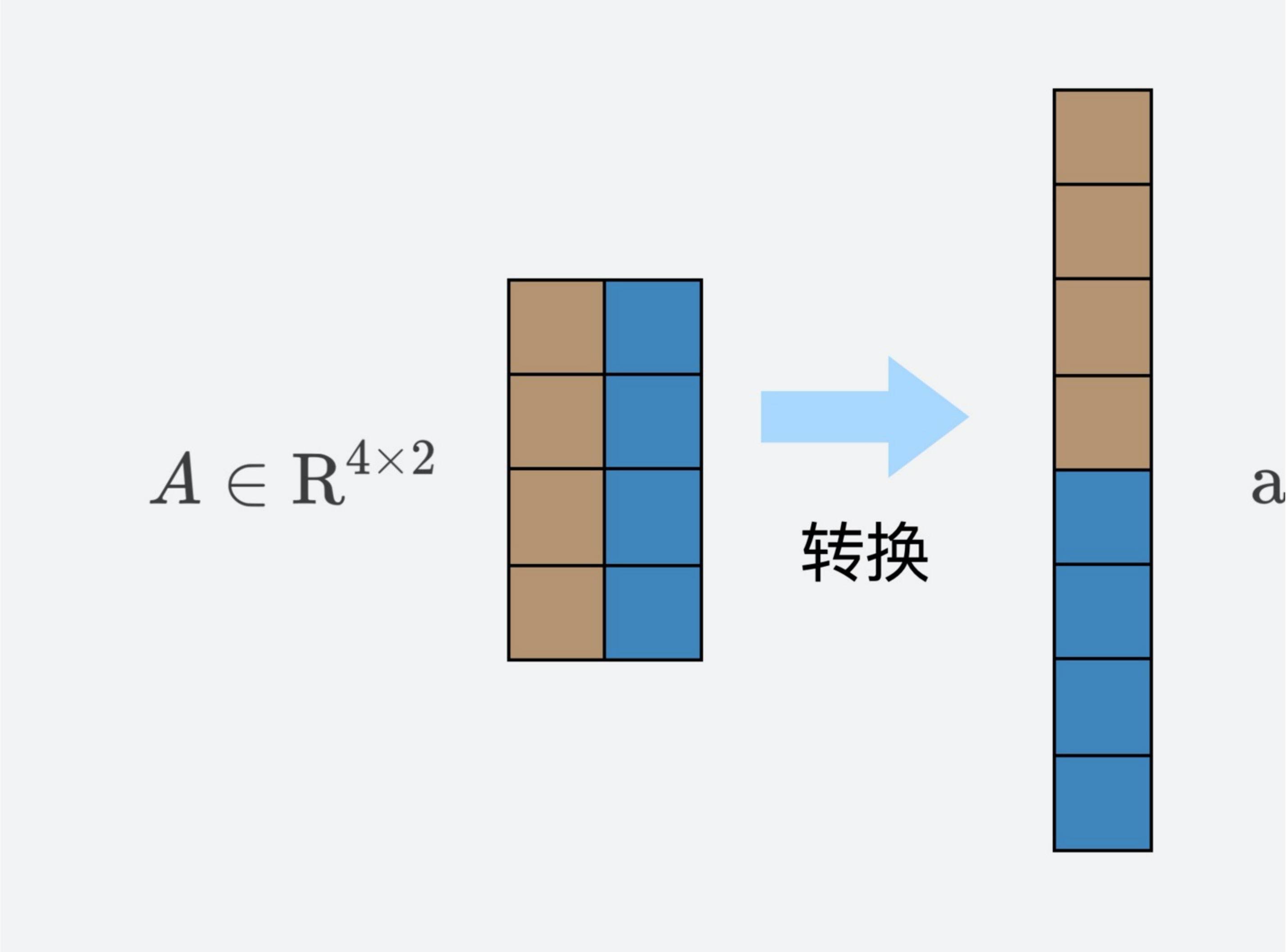
矩阵的定义是：一个(m, n)矩阵A，是由$m×n$个元素组成，m和n是实数，其中元素$a_{i j}, \mathrm{i}=1, \ldots, \mathrm{m}, \mathrm{j}=1, \ldots, \mathrm{n}$按$m$行$n$列的矩形排布方式后可以形成矩阵$A$：

$$
A=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

其中$a_{i j}$属于实数或复数，在我们的场景中是实数R，按通常的惯例，$(1, n)$矩阵叫做行，$(m, 1)$矩阵叫做列，这些特殊的矩阵叫做行或列向量。

定义完矩阵后，我接着讲一个比较有趣的概念，矩阵转换（Matrix transformation）。矩阵转换经常被用在计算机图形图像的转换中，比如，一张彩色图片从RGB角度来说是三维的，如果要转换成灰度图片，也就是一维图片，那就要做矩阵转换。

我们来看一下矩阵转换的过程。设$\mathrm{R}^{m \times n}$是实数矩阵(m, n)的集合，$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$可以表示成另一种形式 $a \in \mathrm{R}^{mn}$。我们把矩阵的n列堆叠成一个长向量后完成转换。这个转换也叫做reshape，其实就是重新调整原矩阵的行数、列数和维数，但是元素个数不变。



矩阵的运算

了解了矩阵的基本定义后，我们才能进入矩阵的运算环节，就是矩阵的加和乘。

加运算很简单，两个矩阵$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$，$B \in \mathrm{R}^{m \times n}$的加运算其实就是矩阵各自元素的加。

$$
A+B=\left[\begin{array}{ccc}
a_{11}+b_{11} & \ldots & a_{1 n}+b_{1 n} \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
a_{m 1}+b_{m 1} & \ldots & a_{m n}+b_{m n}
\end{array}\right] \in R^{m \times n}
$$

我推荐你使用NumPy的einsum来高效地做这类运算，因为它在速度和内存效率方面通常可以超越我们常见的array函数。

```
C= np.einsum('il, lj', A, B)
```

接下来，我们一起来看看矩阵的乘。这里你需要注意，矩阵的乘和通常意义上“数之间的乘”不同，矩阵的乘有多种类型，这里我讲三种最普遍，也是在各领域里用得最多的矩阵乘。

1.普通矩阵乘

普通矩阵乘是应用最广泛的矩阵乘，两个矩阵$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$，$B \in \mathrm{R}^{n \times k}$，普通矩阵则乘可以表示为$C=A B \in R^{m \times k}$，$C$中元素的计算规则是矩阵$A$、$B$对应两两元素乘积之和。

$$
c_{i j}=\sum_{k=1}^{n} a_{i k} b_{k j}, i=1, \ldots, m, j=1, \ldots, l
$$

我们举例来说明。C的第一个元素$c_{11}=a_{11} \times b_{11}+a_{12} \times b_{21}+a_{13} \times b_{31}=1 \times 1+2 \times 2+3 \times 3$。

$$
C=A B=\left[\begin{array}{lll}
1 & 2 & 3 \\
4 & 5 & 6
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
1 & 4 \\
2 & 5 \\
3 & 6
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{lll}
1 \times 1+2 \times 2+3 \times 3 & 1 \times 4+2 \times 5+3 \times 6 \\
4 \times 1+5 \times 2+6 \times 3 & 4 \times 4+5 \times 5+6 \times 6
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
14 & 32 \\
32 & 77
\end{array}\right]
$$

这里需要特别注意的是，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，例如，一个$n×k$矩阵A和一个$k×m$矩阵B相乘，最后得出$n×m$矩阵C，而这里的k就是相邻阶数。

$$AB=C$$

但反过来B和A相乘就不行了，因为相邻阶数m不等于n。

2.哈达玛积

哈达玛积理解起来就很简单了，就是矩阵各对应元素的乘积，$c_{i j}=a_{i j} \times b_{i j}$ 。举个例子：

$$
C=A^{*} B=\left[\begin{array}{ll}
1 & 2 \\
4 & 5
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
1 & 4 \\
2 & 5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
1 * 1 & 2 * 4 \\
4 * 2 & 5 * 5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
1 & 8 \\
8 & 25
\end{array}\right]
$$

哈达玛积其实在数学中不常看到，不过，在编程中哈达玛积非常有用，因为它可以用来同时计算多组数据的乘积，计算效率很高。

3.克罗内克积

克罗内克积是以德国数学家利奥波德·克罗内克（Leopold Kronecker）的名字命名的。它可以应用在解线性矩阵方程和图像处理方面，当然从更时髦的角度说，它还能用在量子信息领域，我们也称之为直积或张量积。

和普通矩阵乘和哈达玛积不同的是，克罗内克积是两个任意大小矩阵间的运算，表示为$A×B$，如果A是一个$m × n$的矩阵，而B是一个$p×q$的矩阵，克罗内克积则是一个$mp×nq$的矩阵。

接下来我们需要定义一个**在矩阵的乘法中起着特殊作用**的矩阵，它就是**单位矩阵**。高等代数中，在求解相应的矩阵时，若添加单位矩阵，通过初等变换进行求解，往往可以使问题变得简单。按照百度百科的解释，单位矩阵如同数的乘法中的1，这种矩阵就被称为单位矩阵。它是个方阵，从左上角到右下角的对角线，也就是主对角线上的元素均为1，除此以外全都为0。

在线性代数中，大小为n的单位矩阵就是在主对角线上均为1，而其他地方都是0的$n×n$的方阵，它用I_{n}表示，表达时为了方便可以忽略阶数，直接用I来表示：

$$
I_{1}=[1], I_{2}=\left[\begin{array}{ll}
1 & 0 \\
0 & 1
\end{array}\right], I_{3}=\left[\begin{array}{lll}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{array}\right], \ldots, I_{n}=\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 1 & \ldots & 0 \\
. & . & \ldots & . \\
. & . & . & . \\
0 & 0 & \ldots & 1
\end{array}\right]
$$

矩阵的性质

在了解了矩阵加和乘，以及单位矩阵后，我们是时候来看一看矩阵的性质了。了解矩阵的性质是进行矩阵计算的前提，就像我们小时候学加减乘除四则运算法则时那样。所以，这块内容对你来说应该不难，你作为了解就好，重点是之后的运算。

1.结合律

任意实数$m×n$矩阵A，$n×p$矩阵B，$p×q$矩阵C之间相乘，满足结合律$(AB)C=A(BC)$。这个很好理解，我就不多说了。

$$\forall A \in R^{m \times n}, B \in R^{n \times p}, C \in R^{p \times q}:(A B) C=A(B C)$$

2.分配律

任意实数$m×n$矩阵A和B，$n×p$矩阵C和D之间相乘满足分配律$(A+B)C=AC+BC$，$A(C+D)=AC+AD$。

$$
\forall \mathrm{A}, B \in \mathrm{R}^{m \times n}, C, D \in \mathrm{R}^{n \times p}:(A+B) C=A C+B C, A(C+D)=A C+A D
$$

3.单位矩阵乘

任意实数$m×n$矩阵A和单位矩阵之间的乘，等于它本身A。

$$
\forall A \in R^{m \times n}: I_{m} A=A I_{n}=A
$$

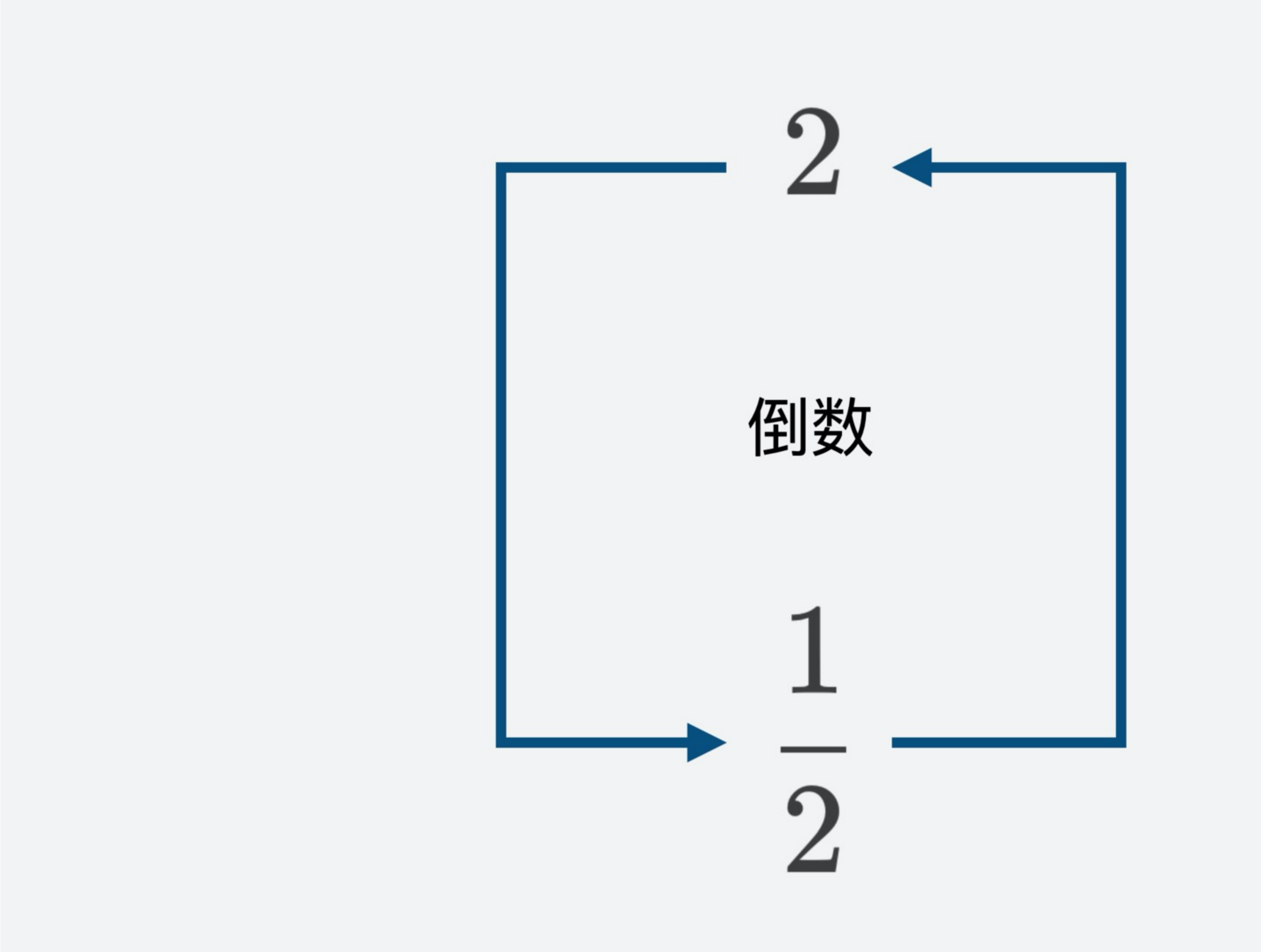
注意，这里的行和列不同，$m \neq n$意味着，根据矩阵乘，左乘和右乘单位矩阵也不同，也就是$I_{m} \neq I_{n}$。

逆矩阵与转置矩阵

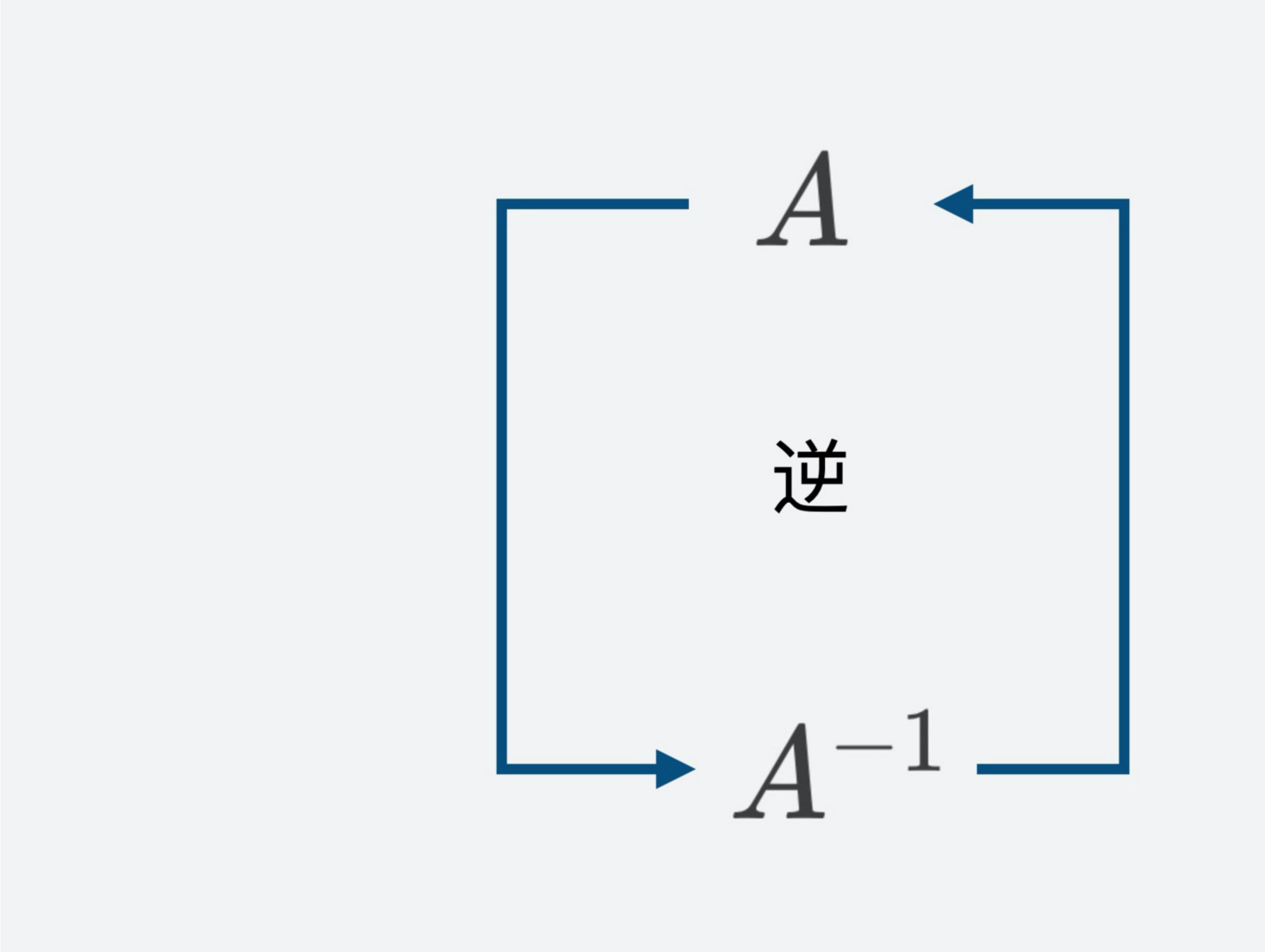
了解矩阵基本概念、运算，以及性质后，我来讲一讲矩阵应用中的两个核心内容——逆矩阵和转置矩阵。逆矩阵和转置矩阵在实际应用中大有用处，比如：坐标系中的图形变换运算。我们先来看下什么是逆矩阵。

逆矩阵

下面这个图你应该非常熟悉了，图中表现的是数字的倒数，2的倒数是$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$的倒数是2。



其实逆矩阵也有着类似的概念，只不过是写法不一样，我们会把逆矩阵写成A^{-1}。那为什么不是$\frac{1}{A}$呢？那是因为数字1无法被矩阵除。



我们知道，2乘以它的倒数$\frac{1}{2}$等于1。同样的道理，A乘以它的逆矩阵A^{-1}就等于单位矩阵，即$\mathrm{A} \times A^{-1}=\mathrm{I}$（$I$即单位矩阵），反过来也一样，$\mathrm{A}^{-1} \times A=\mathrm{I}$。

为方便你理解，我用一个2×2矩阵A来解释一下逆矩阵的算法。首先，我们交换a_{11}和a_{22}的位置，然后在a_{12}和a_{21}前加上负号，最后除以行列式$a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}$。

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]^{-1}=\frac{1}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}\left[\begin{array}{cc}
a_{22} & -a_{12} \\
-a_{21} & a_{11}
\end{array}\right]
$$

那我们该如何验证这是不是正解呢？

方法其实很简单，记得刚才的公式就行，$\mathrm{A} \times A^{-1}=\mathrm{I}$。现在我们就代入公式来验证一下，$A$和它的逆矩阵相乘，通过刚才的算法最终得出的结果是单位矩阵。

$$
A \times A^{-1}=\left[\begin{array}{llll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]^{-1}=\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{lll}
\frac{a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{-a_{12}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} \\
\frac{-a_{21}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
\frac{a_{11} \times a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{12} \times(-a_{21})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{11} \times(-a_{12})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{12} \times a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} \\
\frac{a_{21} \times a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{22} \times(-a_{21})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{21} \times(-a_{12})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{22} \times a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{lll}
1 & 0 \\
0 & 1
\end{array}\right]
$$

这里有一点需要特别说明，不是每一个矩阵都是可逆的。如果一个矩阵是可逆的，那这个矩阵我们叫做**非奇异矩阵**，如果一个矩阵是不可逆的，那这个矩阵我们就叫做**奇异矩阵**，而且如果一个矩阵可逆，那它的逆矩阵必然是唯一的。

还记得行列式$a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}$吗？如果我们要证明矩阵是可逆的，只要证明行列式不等于零就行。更高阶的逆矩阵的算法也是一样的原理。

最后，我想通过一个现实生活中的案例来让你更多地了解逆矩阵。

一个旅游团由孩子和大人组成，去程他们一起做大巴，每个孩子的票价3元，大人票价3.2元，总共花费118.4元。回程一起做火车，每个孩子的票价3.5元，大人票价3.6元，总共花费

135.2元。请问旅游团里有多少小孩和大人？

首先，我们设置一些矩阵，组成线性方程$XA=B$。

$$
\begin{array}{cc}
\text{小孩} \quad \text{大人} & \text{大巴} \quad \text{火车} \\
\left[\begin{array}{cc}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right] &
\left[\begin{array}{cc}
3 & 3.5 \\
3.2 & 3.6
\end{array}\right]
\end{array}
$$

要解X，我们就要先计算A的逆矩阵A^{-1}：

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{cc}
3 & 3.5 \\
3.2 & 3.6
\end{array}\right]^{-1}=\frac{1}{3 \times 3.6-3.5 \times 3.2}\left[\begin{array}{cc}
3.6 & -3.5 \\
-3.2 & 3
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
-9 & 8.75 \\
8 & -7.5
\end{array}\right]
$$

接下来再计算$X=B A^{-1}$：

$$
\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
118.4 & 135.2
\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}
-9 & 8.75 \\
8 & -7.5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
16 & 22
\end{array}\right]
$$

最终，我们得出这个旅游团有16个小孩和22个大人。

这也是解线性方程组的一种方法，类似这样的计算被广泛应用在各领域中，比如建筑工程、游戏和动画的3D效果上。虽然现在有很多程序包封装了这类数学计算的底层实现，但如果你能很好地理解这些概念，就可以为编程或算法调优打下坚实的基础。

Last but not least，方程次序很重要，也就是说，$AX=B$和$XA=B$的结果是不同的，这个一定要牢记哦！

转置矩阵

一般伴随逆矩阵之后出现的就是转置矩阵。在计算机图形图像处理中，如果要对一个物体进行旋转、平移、缩放等操作，就要对描述这个物体的所有矩阵进行运算，矩阵转置就是这类运算之一，而矩阵的转置在三维空间中的解释就相当于“得到关于某个点对称的三维立体”。所以，转置矩阵的定义很简单。

将矩阵的行列互换，得到的新矩阵就叫做转置矩阵（transpose）。转置矩阵的行列式不变。我们把$m×n$矩阵A的行列互换，得到转置矩阵A^{T}。

$$
A=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

$$
A^{T}=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m 1} \\
a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m 2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{1 n} & a_{2 n} & \ldots & a_{m n}

\end{array}\right]
$$

最后，为了方便你理解，我们再总结一下逆矩阵和转置矩阵的性质。你不用死记硬背，重在理解。

1. 矩阵和自身逆矩阵相乘得道单位矩阵，$A A^{-1}=I=A^{-1} A$;
2. $A$$B$两矩阵相乘的逆，等于逆矩阵$B$和逆矩阵$A$相乘，这里强调一下乘的顺序很重要，$(A B)^{-1}=B^{-1} A^{-1}$;
3. AB两矩阵相加后的逆矩阵，不等于各自逆矩阵的相加， $(A+B)^{-1} \neq A^{-1}+B^{-1}$;
4. 矩阵转置的转置还是它本身，$\left(A^{T}\right)^{\mathrm{T}}=A$;
5. AB两矩阵相加后的转置矩阵，等于各自转置矩阵的相加，$(A+B)^{T}=A^{T}+B^{T}$;
6. AB两矩阵相乘后的转置矩阵，等于转置矩阵B和转置矩阵A的相乘，这里再次强调乘的顺序很重要，$(A B)^{T}=B^{T} A^{T}$。

本节小结

好了，到这里矩阵这一讲就结束了，最后我再带你总结一下前面讲解的内容。

今天的知识，你只需要知道矩阵是线性方程组的另一种表达，了解和掌握矩阵的定义和性质就足够了。当然，矩阵还有很多内容，但我认为掌握了我讲的这些内容后，就为以后的一些矩阵应用场景打下了坚实的数学基础，也是下一讲的解线性方程组的前置知识。

线性代数练习场

对于10维列向量$x=\left(x_{1}, \ldots, x_{10}\right)^{T}$， $v=\left(v_{1}, \ldots, v_{10}\right)^{T}$，如果要计算$y=x x^{T}\left(I+v v^{T}\right) x$，其中$I$是10阶单位矩阵。你会怎么做？

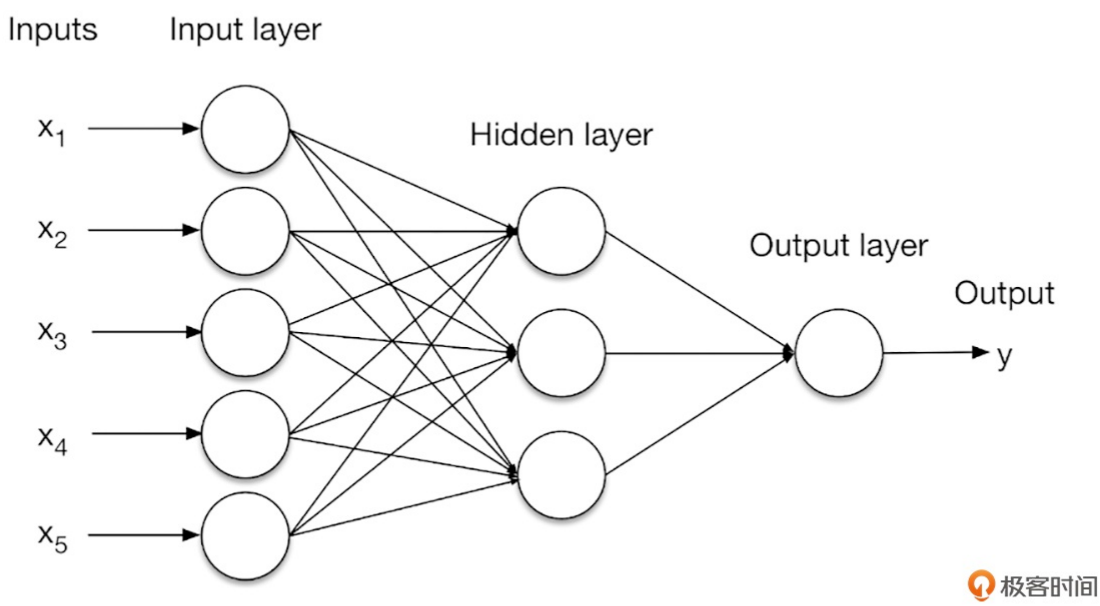
友情提醒，这里有多种方式解题。你能不能找到一个最简单的方法来解这道题？虽然结果很重要，但我想说的是过程更重要，而且往往解题过程不同，从计算机角度来说，运算的效率会有极大的不同。

欢迎你在留言区晒出你的运算过程和结果。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数，今天我们要讲的内容是“矩阵”。

在开始学习之前，我想先问你个问题，你觉得，学习矩阵有什么用呢？你可以先自己想一想。之后我们讲任何一个知识的时候，你都可以从这个角度出发，自己先思考一下，这样有助于你对所学内容理解得更深刻。

对于刚才那个问题，我的答案很简单，就一句话，从我们程序员的角度去理解的话，**矩阵可以极大地提高计算机的运算效率**。怎么说呢？我给你举一个例子。在机器学习中（特别是深度学习，或者更具体一点，神经网络），并行计算是非常昂贵的。



上图是一个典型的神经网络架构，在这时候，矩阵就能发挥用武之地了，计算H隐藏层输出的公式是：$H = f(W.x + b)$，其中W是权重矩阵，f是激活函数，b是偏差，x是输入层矩阵。而这个计算过程就叫做**向量化**（Vectorization），这也是GPU在深度学习中非常重要的原因，因为GPU非常擅长做类似矩阵乘之类的运算。

$$
X=\left|\begin{array} {l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right|
$$

$$
W=\left|\begin{array} {ll}
w_{1} & w_{2} \\
w_{4} & w_{5} \\
x_{3} & w_{6}
\end{array}\right|
$$

$$
H=f\left(\left|\begin{array} {ll}
w_{1} & w_{2} \\
w_{4} & w_{5} \\
x_{3} & w_{6}
\end{array}\right|\left|\begin{array} {l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right|+b\right)
$$

不过，矩阵也不仅仅局限于神经网络的应用，同时它也可以用在计算机图形图像的应用中，比如，三维物体从取景到屏幕的显示，就需要经历一系列的空间变换，才能生成二维图像显示在显示器上。在这个计算过程中，我们都需要用到矩阵。

矩阵是非常实用的，但它正式作为数学中的研究对象出现，其实是在行列式的研究发展起来之后。英国数学家 Arthur Cayley 被公认为矩阵论的创立人，他提出的矩阵概念可能来自于行列式。但我相信另一种说法，提出矩阵是为了更简单地表达线性方程组，也就是说，矩阵是线性方程组的另一种表达。

矩阵的基本概念

线性方程组的概念很简单，上节我们已经简单提过。你在小学或中学肯定也学过二元一次方程和二元一次方程组。

$$ax+by=c$$

$$
\left\{\begin{array} {l}
a_{1} x+b_{1} y+C_{1}=0 \\
a_{2} x+b_{2} y+C_{2}=0
\end{array}\right.
$$

在这样一个方程组中，$a1$、$a2$、$b1$、$b2$不能同时为0。当我们把二元一次方程组再扩展一下，变成多元一次方程组时，我们就能得到线性方程组的一般表达，即$AX=B$。

$$
\left\{\begin{array} {l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.
$$

于是，这个线性方程组的所有系数就构成了一个$m×n$的m行n列矩阵：

$$
A=\left[\begin{array} {cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

我们把A称为该方程组的系数矩阵，而当我们把等式右边的常数b放入矩阵后，就是下面这样：

$$

\widetilde{A}=\left[\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} & b_{1} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} & b_{2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n} & b_{m}
\end{array}\right]
$$

这样我们就得到了A矩阵的增广矩阵$\widetilde{A}$，可以表示为(A, B)，这里的B表示的是方程组常数项所构成的列向量，也就是$m×1$的m行1列矩阵：

$$
B=\left|\begin{array}{l}
b_{1} \\
b_{2} \\
\cdots \\
b_{m}
\end{array}\right|
$$

如果设X为$n×1$的n行1列矩阵：

$$
X=\left|\begin{array}{c}
x_{1} \\
x_{2} \\
\cdots \\
x_{n}
\end{array}\right|
$$

那么线性方程组A，就可以表示为$AX=B$的矩阵形式。如果我们再换一种表示形式，设：$a_{1} ,a_{2},\ldots, a_{n},\beta$表示增广矩阵$\widetilde{A}$的列向量，则线性方程组$A$又可表示为$a_{1} x_{1}+a_{2} x_{2}+\cdots+a_{n} x_{n}=β$。

线性方程组的矩阵和向量形式都是线性方程组的其他表达形式。在工作中，你可以用它们来简化求解，甚至可以提升计算效率，就如之前提到的神经网络的隐藏层的输出计算、图形图像的三维空间变换。在数学中也是同样的，你可以经常运用它们来简化求解。具体线性方程组求解的内容比较多，我们下一节课再来详细讲解求解过程。

通过前面的讲解，我相信你对矩阵有了一定的了解，现在我们再回头来看看矩阵的定义吧。

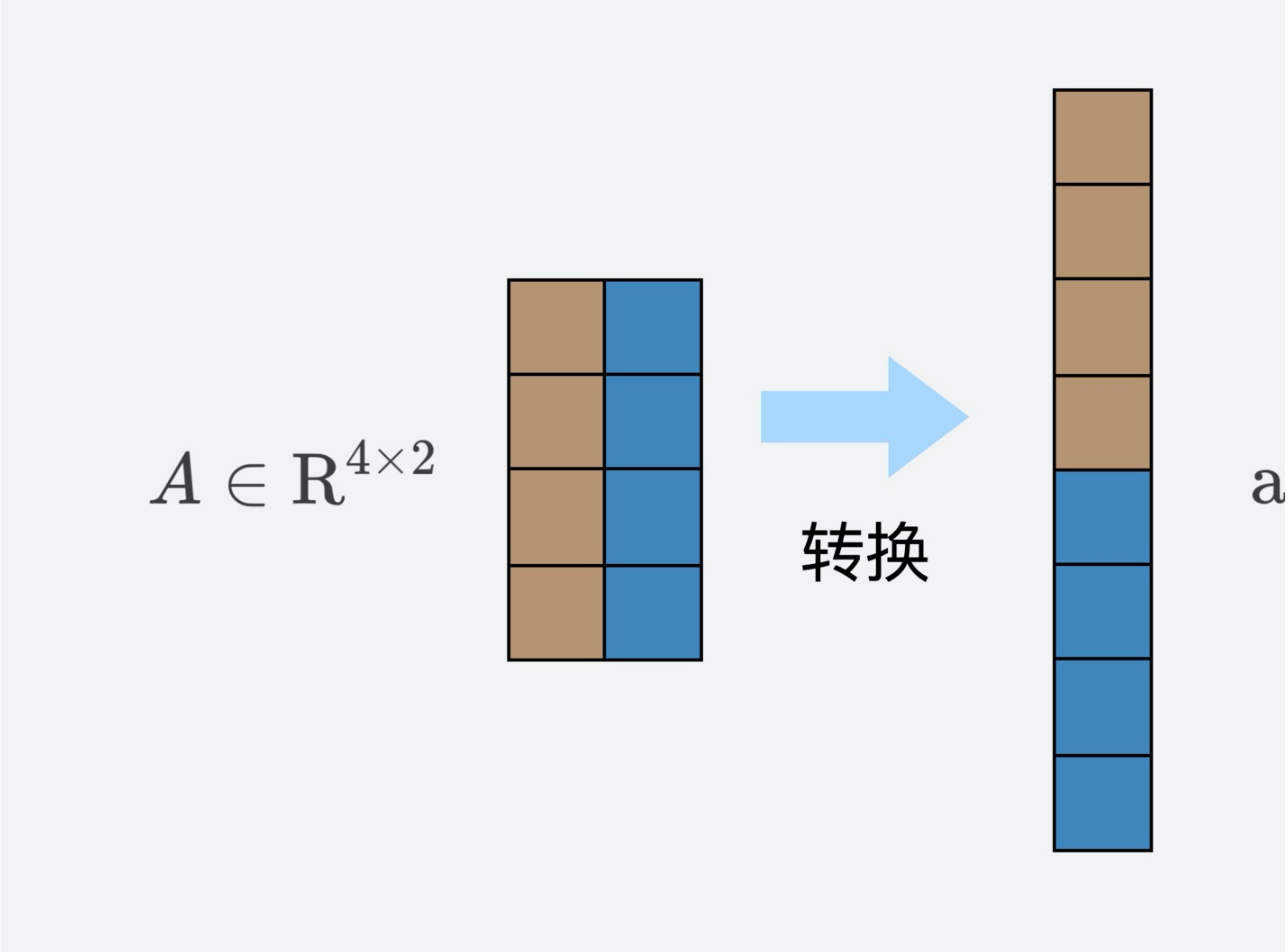
矩阵的定义是：一个(m, n)矩阵A，是由$m×n$个元素组成，m和n是实数，其中元素$a_{i j}, \mathrm{i}=1, \ldots, \mathrm{m}, \mathrm{j}=1, \ldots, \mathrm{n}$按$m$行$n$列的矩形排布方式后可以形成矩阵$A$：

$$
A=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

其中$a_{i j}$属于实数或复数，在我们的场景中是实数R，按通常的惯例，$(1, n)$矩阵叫做行，$(m, 1)$矩阵叫做列，这些特殊的矩阵叫做行或列向量。

定义完矩阵后，我接着讲一个比较有趣的概念，矩阵转换（Matrix transformation）。矩阵转换经常被用在计算机图形图像的转换中，比如，一张彩色图片从RGB角度来说是三维的，如果要转换成灰度图片，也就是一维图片，那就要做矩阵转换。

我们来看一下矩阵转换的过程。设$\mathrm{R}^{m \times n}$是实数矩阵(m, n)的集合，$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$可以表示成另一种形式 $a \in \mathrm{R}^{mn}$。我们把矩阵的n列堆叠成一个长向量后完成转换。这个转换也叫做reshape，其实就是重新调整原矩阵的行数、列数和维数，但是元素个数不变。



矩阵的运算

了解了矩阵的基本定义后，我们才能进入矩阵的运算环节，就是矩阵的加和乘。

加运算很简单，两个矩阵$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$，$B \in \mathrm{R}^{m \times n}$的加运算其实就是矩阵各自元素的加。

$$
A+B=\left[\begin{array}{ccc}
a_{11}+b_{11} & \ldots & a_{1 n}+b_{1 n} \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
a_{m 1}+b_{m 1} & \ldots & a_{m n}+b_{m n}
\end{array}\right] \in R^{m \times n}
$$

我推荐你使用NumPy的einsum来高效地做这类运算，因为它在速度和内存效率方面通常可以超越我们常见的array函数。

```
C= np.einsum('il, lj', A, B)
```

接下来，我们一起来看看矩阵的乘。这里你需要注意，矩阵的乘和通常意义上“数之间的乘”不同，矩阵的乘有多种类型，这里我讲三种最普遍，也是在各领域里用得最多的矩阵乘。

1.普通矩阵乘

普通矩阵乘是应用最广泛的矩阵乘，两个矩阵$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$，$B \in \mathrm{R}^{n \times k}$，普通矩阵则乘可以表示为$C=A B \in R^{m \times k}$，$C$中元素的计算规则是矩阵$A$、$B$对应两两元素乘积之和。

$$
c_{i j}=\sum_{k=1}^{n} a_{i k} b_{k j}, i=1, \ldots, m, j=1, \ldots, l
$$

我们举例来说明。C的第一个元素$c_{11}=a_{11} \times b_{11}+a_{12} \times b_{21}+a_{13} \times b_{31}=1 \times 1+2 \times 2+3 \times 3$。

$$
C=A B=\left[\begin{array}{lll}
1 & 2 & 3 \\
4 & 5 & 6
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
1 & 4 \\
2 & 5 \\
3 & 6
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{lll}
1 \times 1+2 \times 2+3 \times 3 & 1 \times 4+2 \times 5+3 \times 6 \\
4 \times 1+5 \times 2+6 \times 3 & 4 \times 4+5 \times 5+6 \times 6
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
14 & 32 \\
32 & 77
\end{array}\right]
$$

这里需要特别注意的是，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，例如，一个$n×k$矩阵A和一个$k×m$矩阵B相乘，最后得出$n×m$矩阵C，而这里的k就是相邻阶数。

$$AB=C$$

但反过来B和A相乘就不行了，因为相邻阶数m不等于n。

2.哈达玛积

哈达玛积理解起来就很简单了，就是矩阵各对应元素的乘积，$c_{i j}=a_{i j} \times b_{i j}$ 。举个例子：

$$
C=A^{*} B=\left[\begin{array}{ll}
1 & 2 \\
4 & 5
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
1 & 4 \\
2 & 5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
1 * 1 & 2 * 4 \\
4 * 2 & 5 * 5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
1 & 8 \\
8 & 25
\end{array}\right]
$$

哈达玛积其实在数学中不常看到，不过，在编程中哈达玛积非常有用，因为它可以用来同时计算多组数据的乘积，计算效率很高。

3.克罗内克积

克罗内克积是以德国数学家利奥波德·克罗内克（Leopold Kronecker）的名字命名的。它可以应用在解线性矩阵方程和图像处理方面，当然从更时髦的角度说，它还能用在量子信息领域，我们也称之为直积或张量积。

和普通矩阵乘和哈达玛积不同的是，克罗内克积是两个任意大小矩阵间的运算，表示为$A×B$，如果A是一个$m × n$的矩阵，而B是一个$p×q$的矩阵，克罗内克积则是一个$mp×nq$的矩阵。

接下来我们需要定义一个**在矩阵的乘法中起着特殊作用**的矩阵，它就是**单位矩阵**。高等代数中，在求解相应的矩阵时，若添加单位矩阵，通过初等变换进行求解，往往可以使问题变得简单。按照百度百科的解释，单位矩阵如同数的乘法中的1，这种矩阵就被称为单位矩阵。它是个方阵，从左上角到右下角的对角线，也就是主对角线上的元素均为1，除此以外全都为0。

在线性代数中，大小为n的单位矩阵就是在主对角线上均为1，而其他地方都是0的$n×n$的方阵，它用I_{n}表示，表达时为了方便可以忽略阶数，直接用I来表示：

$$
I_{1}=[1], I_{2}=\left[\begin{array}{ll}
1 & 0 \\
0 & 1
\end{array}\right], I_{3}=\left[\begin{array}{lll}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{array}\right], \ldots, I_{n}=\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 1 & \ldots & 0 \\
. & . & \ldots & . \\
. & . & . & . \\
0 & 0 & \ldots & 1
\end{array}\right]
$$

矩阵的性质

在了解了矩阵加和乘，以及单位矩阵后，我们是时候来看一看矩阵的性质了。了解矩阵的性质是进行矩阵计算的前提，就像我们小时候学加减乘除四则运算法则时那样。所以，这块内容对你来说应该不难，你作为了解就好，重点是之后的运算。

1.结合律

任意实数$m×n$矩阵A，$n×p$矩阵B，$p×q$矩阵C之间相乘，满足结合律$(AB)C=A(BC)$。这个很好理解，我就不多说了。

$$\forall A \in R^{m \times n}, B \in R^{n \times p}, C \in R^{p \times q}:(A B) C=A(B C)$$

2.分配律

任意实数$m×n$矩阵A和B，$n×p$矩阵C和D之间相乘满足分配律$(A+B)C=AC+BC$，$A(C+D)=AC+AD$。

$$
\forall \mathrm{A}, B \in \mathrm{R}^{m \times n}, C, D \in \mathrm{R}^{n \times p}:(A+B) C=A C+B C, A(C+D)=A C+A D
$$

3.单位矩阵乘

任意实数$m×n$矩阵A和单位矩阵之间的乘，等于它本身A。

$$
\forall A \in R^{m \times n}: I_{m} A=A I_{n}=A
$$

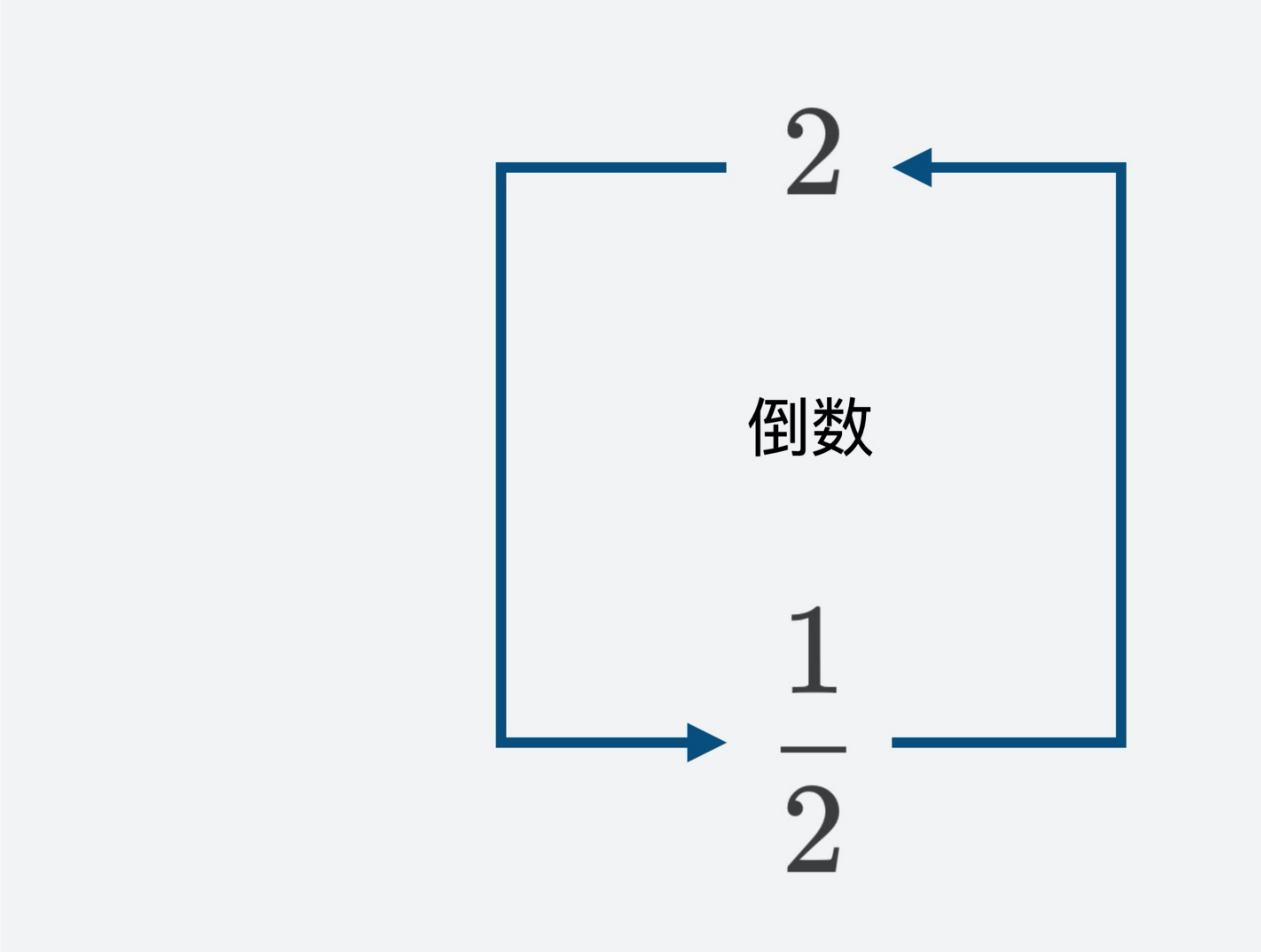
注意，这里的行和列不同，$m \neq n$意味着，根据矩阵乘，左乘和右乘单位矩阵也不同，也就是$I_{m} \neq I_{n}$。

逆矩阵与转置矩阵

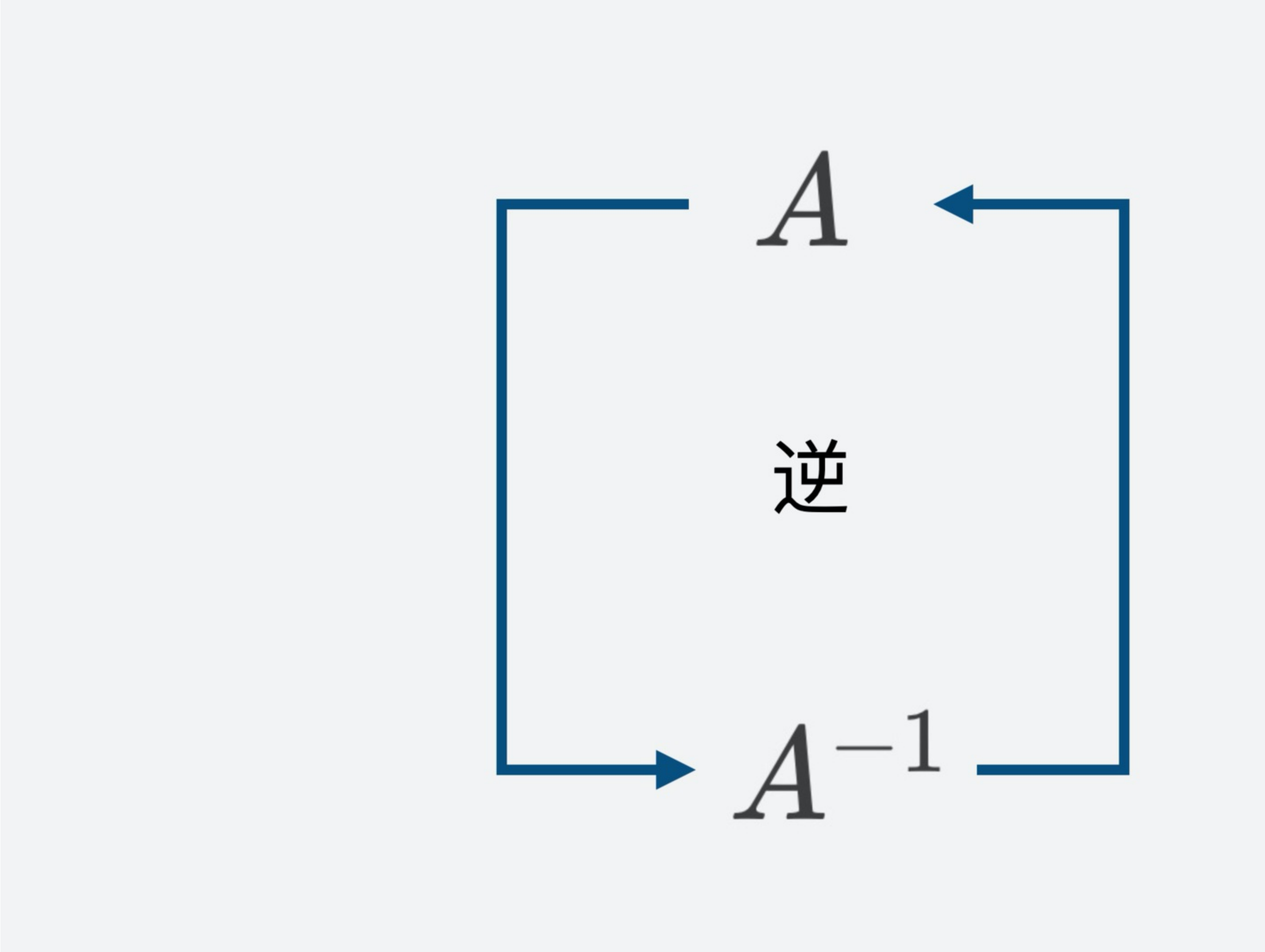
了解矩阵基本概念、运算，以及性质后，我来讲一讲矩阵应用中的两个核心内容——逆矩阵和转置矩阵。逆矩阵和转置矩阵在实际应用中大有用处，比如：坐标系中的图形变换运算。我们先来看下什么是逆矩阵。

逆矩阵

下面这个图你应该非常熟悉了，图中表现的是数字的倒数，2的倒数是$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$的倒数是2。



其实逆矩阵也有着类似的概念，只不过是写法不一样，我们会把逆矩阵写成A^{-1}。那为什么不是$\frac{1}{A}$呢？那是因为数字1无法被矩阵除。



我们知道，2乘以它的倒数$\frac{1}{2}$等于1。同样的道理，A乘以它的逆矩阵A^{-1}就等于单位矩阵，即$\mathrm{A} \times A^{-1}=\mathrm{I}$（$I$即单位矩阵），反过来也一样，$\mathrm{A}^{-1} \times A=\mathrm{I}$。

为方便你理解，我用一个2×2矩阵A来解释一下逆矩阵的算法。首先，我们交换a_{11}和a_{22}的位置，然后在a_{12}和a_{21}前加上负号，最后除以行列式$a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}$。

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]^{-1}=\frac{1}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}\left[\begin{array}{cc}
a_{22} & -a_{12} \\
-a_{21} & a_{11}
\end{array}\right]
$$

那我们该如何验证这是不是正解呢？

方法其实很简单，记得刚才的公式就行，$\mathrm{A} \times A^{-1}=\mathrm{I}$。现在我们就代入公式来验证一下，$A$和它的逆矩阵相乘，通过刚才的算法最终得出的结果是单位矩阵。

$$
A \times A^{-1}=\left[\begin{array}{llll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]^{-1}=\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{lll}
\frac{a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{-a_{12}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} \\
\frac{-a_{21}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
\frac{a_{11} \times a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{12} \times(-a_{21})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{11} \times(-a_{12})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{12} \times a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} \\
\frac{a_{21} \times a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{22} \times(-a_{21})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{21} \times(-a_{12})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{22} \times a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{lll}
1 & 0 \\
0 & 1
\end{array}\right]
$$

这里有一点需要特别说明，不是每一个矩阵都是可逆的。如果一个矩阵是可逆的，那这个矩阵我们叫做**非奇异矩阵**，如果一个矩阵是不可逆的，那这个矩阵我们就叫做**奇异矩阵**，而且如果一个矩阵可逆，那它的逆矩阵必然是唯一的。

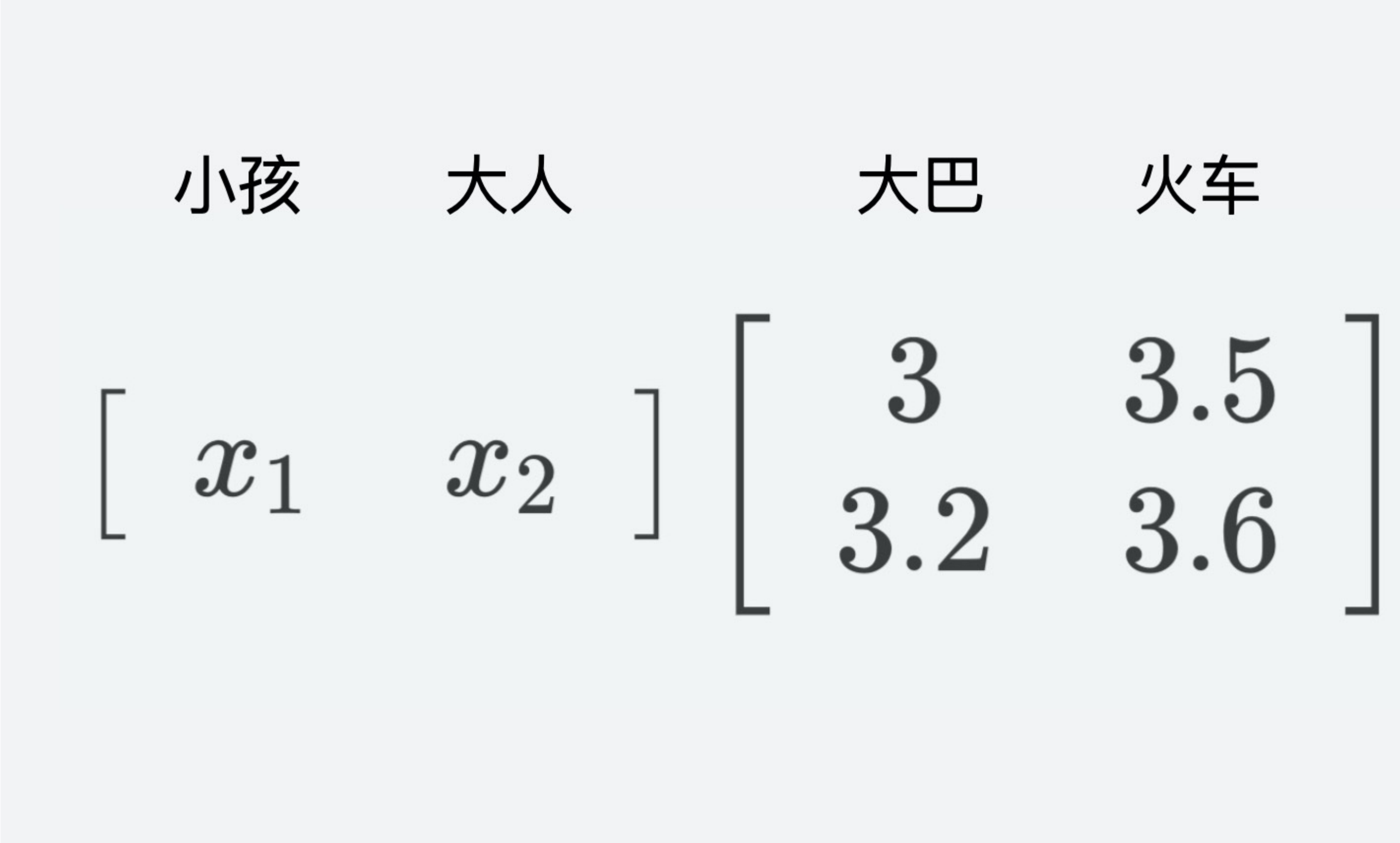
还记得行列式$a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}$吗？如果我们要证明矩阵是可逆的，只要证明行列式不等于零就行。更高阶的逆矩阵的算法也是一样的原理。

最后，我想通过一个现实生活中的案例来让你更多地了解逆矩阵。

一个旅游团由孩子和大人组成，去程他们一起做大巴，每个孩子的票价3元，大人票价3.2元，总共花费118.4元。回程一起做火车，每个孩子的票价3.5元，大人票价3.6元，总共花费

135.2元。请问旅游团里有多少小孩和大人？

首先，我们设置一些矩阵，组成线性方程$XA=B$。



要解X，我们就要先计算A的逆矩阵A^{-1}：

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{cc}
3 & 3.5 \\
3.2 & 3.6
\end{array}\right]^{-1}=\frac{1}{3 \times 3.6-3.5 \times 3.2}\left[\begin{array}{cc}
3.6 & -3.5 \\
-3.2 & 3
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
-9 & 8.75 \\
8 & -7.5
\end{array}\right]
$$

接下来再计算$X=B A^{-1}$：

$$
\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
118.4 & 135.2
\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}
-9 & 8.75 \\
8 & -7.5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
16 & 22
\end{array}\right]
$$

最终，我们得出这个旅游团有16个小孩和22个大人。

这也是解线性方程组的一种方法，类似这样的计算被广泛应用在各领域中，比如建筑工程、游戏和动画的3D效果上。虽然现在有很多程序包封装了这类数学计算的底层实现，但如果你能很好地理解这些概念，就可以为编程或算法调优打下坚实的基础。

Last but not least，方程次序很重要，也就是说，$AX=B$和$XA=B$的结果是不同的，这个一定要牢记哦！

转置矩阵

一般伴随逆矩阵之后出现的就是转置矩阵。在计算机图形图像处理中，如果要对一个物体进行旋转、平移、缩放等操作，就要对描述这个物体的所有矩阵进行运算，矩阵转置就是这类运算之一，而矩阵的转置在三维空间中的解释就相当于"得到关于某个点对称的三维立体"。所以，转置矩阵的定义很简单。

将矩阵的行列互换，得到的新矩阵就叫做转置矩阵（transpose）。转置矩阵的行列式不变。我们把$m×n$矩阵A的行列互换，得到转置矩阵A^{T}。

$$
A=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

$$
A^{T}=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m 1} \\
a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m 2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{1 n} & a_{2 n} & \ldots & a_{m n}

\end{array}\right]
$$

最后，为了方便你理解，我们再总结一下逆矩阵和转置矩阵的性质。你不用死记硬背，重在理解。

1. 矩阵和自身逆矩阵相乘得道单位矩阵，$A A^{-1}=I=A^{-1} A$；
2. $A$$B$两矩阵相乘的逆，等于逆矩阵$B$和逆矩阵$A$相乘，这里强调一下乘的顺序很重要，$(A B)^{-1}=B^{-1} A^{-1}$；
3. AB两矩阵相加后的逆矩阵，不等于各自逆矩阵的相加，$(A+B)^{-1} \neq A^{-1}+B^{-1}$；
4. 矩阵转置的转置还是它本身，$\left(A^{T}\right)^{\mathrm{T}}=A$；
5. AB两矩阵相加后的转置矩阵，等于各自转置矩阵的相加，$(A+B)^{T}=A^{T}+B^{T}$；
6. AB两矩阵相乘后的转置矩阵，等于转置矩阵B和转置矩阵A的相乘，这里再次强调乘的顺序很重要，$(A B)^{T}=B^{T} A^{T}$。

本节小结

好了，到这里矩阵这一讲就结束了，最后我再带你总结一下前面讲解的内容。

今天的知识，你只需要知道矩阵是线性方程组的另一种表达，了解和掌握矩阵的定义和性质就足够了。当然，矩阵还有很多内容，但我认为掌握了我讲的这些内容后，就为以后的一些矩阵应用场景打下了坚实的数学基础，也是下一讲的解线性方程组的前置知识。

线性代数练习场

对于10维列向量$x=\left(x_{1}, \ldots, x_{10}\right)^{T}$，$v=\left(v_{1}, \ldots, v_{10}\right)^{T}$，如果要计算$y=x x^{T}\left(I+v v^{T}\right) x$，其中$I$是10阶单位矩阵。你会怎么做？

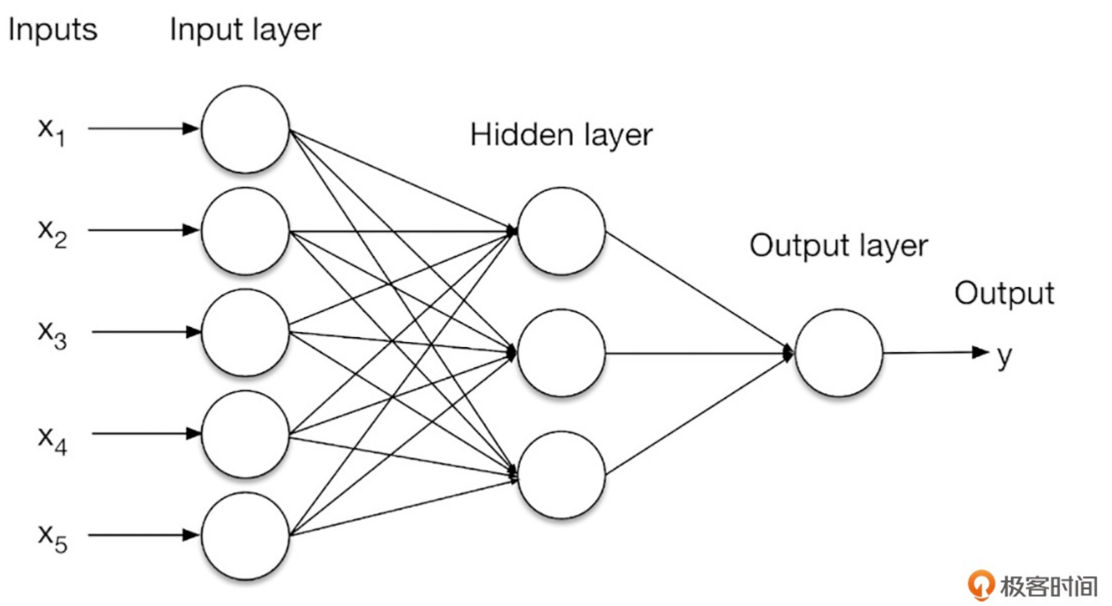
友情提醒，这里有多种方式解题。你能不能找到一个最简单的方法来解这道题？虽然结果很重要，但我想说的是过程更重要，而且往往解题过程不同，从计算机角度来说，运算的效率会有极大的不同。

欢迎你在留言区晒出你的运算过程和结果。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数，今天我们要讲的内容是“矩阵”。

在开始学习之前，我想先问你个问题，你觉得，学习矩阵有什么用呢？你可以先自己想一想。之后我们讲任何一个知识的时候，你都可以从这个角度出发，自己先思考一下，这样有助于你对所学内容理解得更深刻。

对于刚才那个问题，我的答案很简单，就一句话，从我们程序员的角度去理解的话，**矩阵可以极大地提高计算机的运算效率**。怎么说呢？我给你举一个例子。在机器学习中（特别是深度学习，或者更具体一点，神经网络），并行计算是非常昂贵的。



上图是一个典型的神经网络架构，在这时候，矩阵就能发挥用武之地了，计算H隐藏层输出的公式是：$H = f(W.x + b)$，其中W是权重矩阵，f是激活函数，b是偏差，x是输入层矩阵。而这个计算过程就叫做**向量化**（Vectorization），这也是GPU在深度学习中非常重要的原因，因为GPU非常擅长做类似矩阵乘之类的运算。

$$
X=\left|\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right|
$$

$$
W=\left|\begin{array}{ll}
w_{1} & w_{2} \\
w_{4} & w_{5} \\
x_{3} & w_{6}
\end{array}\right|
$$

$$
H=f\left(\left|\begin{array}{ll}
w_{1} & w_{2} \\
w_{4} & w_{5} \\
x_{3} & w_{6}
\end{array}\right|\left|\begin{array}{l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right|+b\right)
$$

不过，矩阵也不仅仅局限于神经网络的应用，同时它也可以用在计算机图形图像的应用中，比如，三维物体从取景到屏幕的显示，就需要经历一系列的空间变换，才能生成二维图像显示在显示器上。在这个计算过程中，我们都需要用到矩阵。

矩阵是非常实用的，但它正式作为数学中的研究对象出现，其实是在行列式的研究发展起来之后。英国数学家 Arthur Cayley 被公认为矩阵论的创立人，他提出的矩阵概念可能来自于行列式。但我相信另一种说法，提出矩阵是为了更简单地表达线性方程组，也就是说，矩阵是线性方程组的另一种表达。

矩阵的基本概念

线性方程组的概念很简单，上节我们已经简单提过。你在小学或中学肯定也学过二元一次方程和二元一次方程组。

$$ax+by=c$$

$$
\left\{\begin{array}{l}
a_{1} x+b_{1} y+C_{1}=0 \\
a_{2} x+b_{2} y+C_{2}=0
\end{array}\right.
$$

在这样一个方程组中，$a1$、$a2$、$b1$、$b2$不能同时为0。当我们把二元一次方程组再扩展一下，变成多元一次方程组时，我们就能得到线性方程组的一般表达，即$AX=B$。

$$
\left\{\begin{array}{l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.
$$

于是，这个线性方程组的所有系数就构成了一个$m×n$的m行n列矩阵：

$$
A=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

我们把A称为该方程组的系数矩阵，而当我们把等式右边的常数b放入矩阵后，就是下面这样：

$$

$$
\widetilde{A}=\left[\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} & b_{1} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} & b_{2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n} & b_{m}
\end{array}\right]
$$

这样我们就得到了A矩阵的增广矩阵$\widetilde{A}$，可以表示为(A, B)，这里的B表示的是方程组常数项所构成的列向量，也就是$m \times 1$的m行1列矩阵：

$$
B=\left|\begin{array}{l}
b_{1} \\
b_{2} \\
\cdots \\
b_{m}
\end{array}\right|
$$

如果设X为$n \times 1$的n行1列矩阵：

$$
X=\left|\begin{array}{c}
x_{1} \\
x_{2} \\
\cdots \\
x_{n}
\end{array}\right|
$$

那么线性方程组A，就可以表示为$AX=B$的矩阵形式。如果我们再换一种表示形式，设：$a_{1} ,a_{2},\ldots, a_{n},\beta$表示增广矩阵$\widetilde{A}$的列向量，则线性方程组$A$又可表示为$a_{1} x_{1}+a_{2} x_{2}+\cdots+a_{n} x_{n}=\beta$。

线性方程组的矩阵和向量形式都是线性方程组的其他表达形式。在工作中，你可以用它们来简化求解，甚至可以提升计算效率，就如之前提到的神经网络的隐藏层的输出计算、图形图像的三维空间变换。在数学中也是同样的，你可以经常运用它们来简化求解。具体线性方程组求解的内容比较多，我们下一节课再来详细讲解求解过程。

通过前面的讲解，我相信你对矩阵有了一定的了解，现在我们再回头来看看矩阵的定义吧。

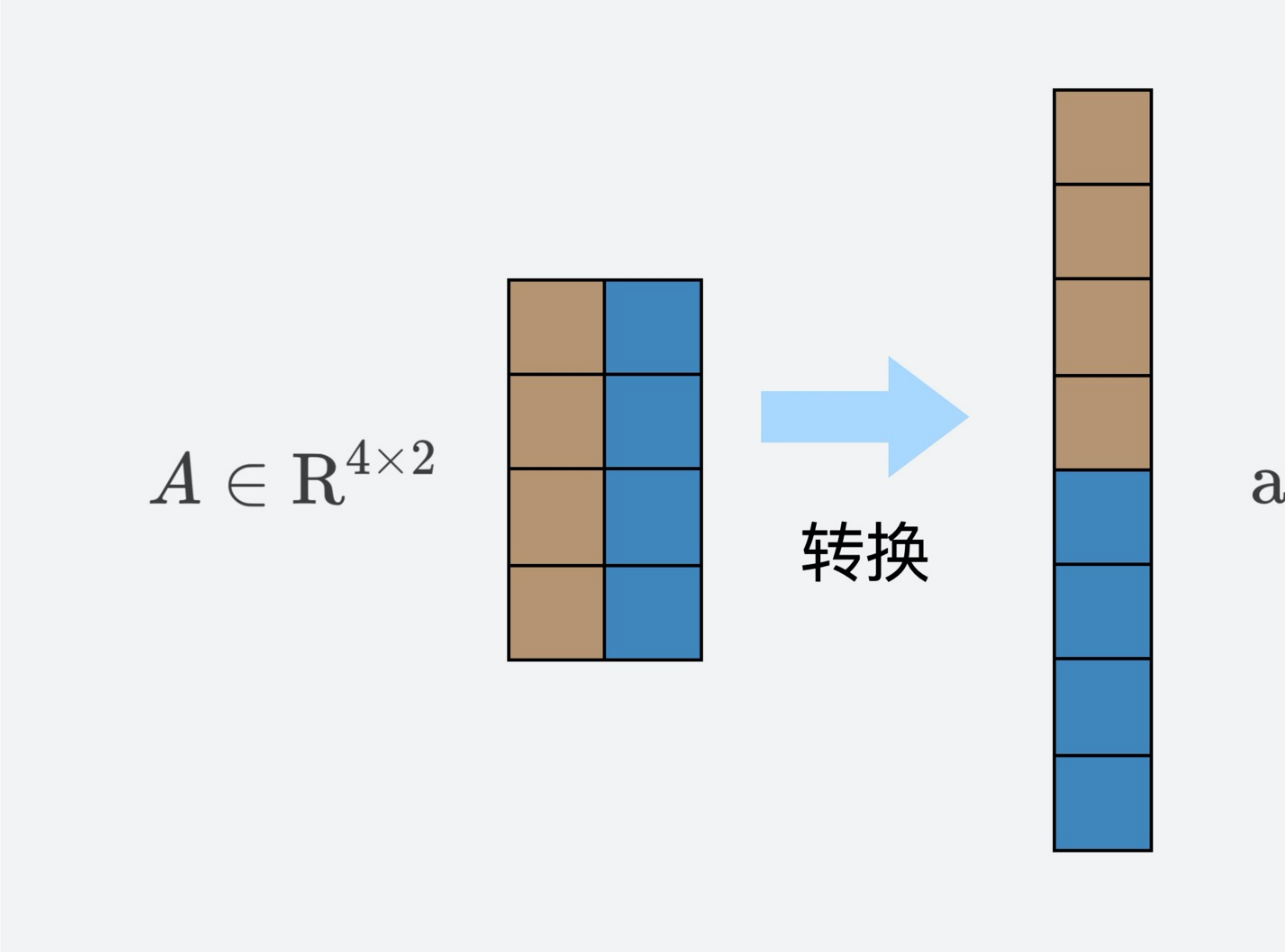
矩阵的定义是：一个(m, n)矩阵A，是由$m \times n$个元素组成，m和n是实数，其中元素$a_{i j}, \mathrm{i}=1, \ldots, \mathrm{m}, \mathrm{j}=1, \ldots, \mathrm{n}$按$m$行$n$列的矩形排布方式后可以形成矩阵$A$：

$$
A=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

其中$a_{i j}$属于实数或复数，在我们的场景中是实数R，按通常的惯例，$(1, n)$矩阵叫做行，$(m, 1)$矩阵叫做列，这些特殊的矩阵叫做行或列向量。

定义完矩阵后，我接着讲一个比较有趣的概念，矩阵转换（Matrix transformation）。矩阵转换经常被用在计算机图形图像的转换中，比如，一张彩色图片从RGB角度来说是三维的，如果要转换成灰度图片，也就是一维图片，那就要做矩阵转换。

我们来看一下矩阵转换的过程。设$\mathrm{R}^{m \times n}$是实数矩阵(m, n)的集合，$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$可以表示成另一种形式 $a \in \mathrm{R}^{mn}$。我们把矩阵的n列堆叠成一个长向量后完成转换。这个转换也叫做reshape，其实就是重新调整原矩阵的行数、列数和维数，但是元素个数不变。



矩阵的运算

了解了矩阵的基本定义后，我们才能进入矩阵的运算环节，就是矩阵的加和乘。

加运算很简单，两个矩阵$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$，$B \in \mathrm{R}^{m \times n}$的加运算其实就是矩阵各自元素的加。

$$
A+B=\left[\begin{array}{ccc}
a_{11}+b_{11} & \ldots & a_{1 n}+b_{1 n} \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
a_{m 1}+b_{m 1} & \ldots & a_{m n}+b_{m n}
\end{array}\right] \in R^{m \times n}
$$

我推荐你使用NumPy的einsum来高效地做这类运算，因为它在速度和内存效率方面通常可以超越我们常见的array函数。

```
C= np.einsum('il, lj', A, B)
```

接下来，我们一起来看看矩阵的乘。这里你需要注意，矩阵的乘和通常意义上“数之间的乘”不同，矩阵的乘有多种类型，这里我讲三种最普遍，也是在各领域里用得最多的矩阵乘。

1.普通矩阵乘

普通矩阵乘是应用最广泛的矩阵乘，两个矩阵$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$，$B \in \mathrm{R}^{n \times k}$，普通矩阵则乘可以表示为$C=A B \in R^{m \times k}$，$C$中元素的计算规则是矩阵$A$、$B$对应两两元素乘积之和。

$$
c_{i j}=\sum_{k=1}^{n} a_{i k} b_{k j}, i=1, \ldots, m, j=1, \ldots, l
$$

我们举例来说明。C的第一个元素$c_{11}=a_{11} \times b_{11}+a_{12} \times b_{21}+a_{13} \times b_{31}=1 \times 1+2 \times 2+3 \times 3$。

$$
C=A B=\left[\begin{array}{lll}
1 & 2 & 3 \\
4 & 5 & 6
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
1 & 4 \\
2 & 5 \\
3 & 6
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{lll}
1 \times 1+2 \times 2+3 \times 3 & 1 \times 4+2 \times 5+3 \times 6 \\
4 \times 1+5 \times 2+6 \times 3 & 4 \times 4+5 \times 5+6 \times 6
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
14 & 32 \\
32 & 77
\end{array}\right]
$$

这里需要特别注意的是，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，例如，一个$n×k$矩阵A和一个$k×m$矩阵B相乘，最后得出$n×m$矩阵C，而这里的k就是相邻阶数。

$$AB=C$$

但反过来B和A相乘就不行了，因为相邻阶数m不等于n。

2.哈达玛积

哈达玛积理解起来就很简单了，就是矩阵各对应元素的乘积，$c_{i j}=a_{i j} \times b_{i j}$ 。举个例子：

$$
C=A^{*} B=\left[\begin{array}{ll}
1 & 2 \\
4 & 5
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
1 & 4 \\
2 & 5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
1 * 1 & 2 * 4 \\
4 * 2 & 5 * 5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
1 & 8 \\
8 & 25
\end{array}\right]
$$

哈达玛积其实在数学中不常看到，不过，在编程中哈达玛积非常有用，因为它可以用来同时计算多组数据的乘积，计算效率很高。

3.克罗内克积

克罗内克积是以德国数学家利奥波德·克罗内克（Leopold Kronecker）的名字命名的。它可以应用在解线性矩阵方程和图像处理方面，当然从更时髦的角度说，它还能用在量子信息领域，我们也称之为直积或张量积。

和普通矩阵乘和哈达玛积不同的是，克罗内克积是两个任意大小矩阵间的运算，表示为$A×B$，如果A是一个$m × n$的矩阵，而B是一个$p×q$的矩阵，克罗内克积则是一个$mp×nq$的矩阵。

接下来我们需要定义一个**在矩阵的乘法中起着特殊作用**的矩阵，它就是**单位矩阵**。高等代数中，在求解相应的矩阵时，若添加单位矩阵，通过初等变换进行求解，往往可以使问题变得简单。按照百度百科的解释，单位矩阵如同数的乘法中的1，这种矩阵就被称为单位矩阵。它是个方阵，从左上角到右下角的对角线，也就是主对角线上的元素均为1，除此以外全都为0。

在线性代数中，大小为n的单位矩阵就是在主对角线上均为1，而其他地方都是0的$n×n$的方阵，它用I_{n}表示，表达时为了方便可以忽略阶数，直接用I来表示：

$$
I_{1}=[1], I_{2}=\left[\begin{array}{ll}
1 & 0 \\
0 & 1
\end{array}\right], I_{3}=\left[\begin{array}{lll}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{array}\right], \ldots, I_{n}=\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 1 & \ldots & 0 \\
. & . & \ldots & . \\
. & . & . & . \\
0 & 0 & \ldots & 1
\end{array}\right]
$$

矩阵的性质

在了解了矩阵加和乘，以及单位矩阵后，我们是时候来看一看矩阵的性质了。了解矩阵的性质是进行矩阵计算的前提，就像我们小时候学加减乘除四则运算法则时那样。所以，这块内容对你来说应该不难，你作为了解就好，重点是之后的运算。

1.结合律

任意实数$m×n$矩阵A，$n×p$矩阵B，$p×q$矩阵C之间相乘，满足结合律$(AB)C=A(BC)$。这个很好理解，我就不多说了。

$$\forall A \in R^{m \times n}, B \in R^{n \times p}, C \in R^{p \times q}:(A B) C=A(B C)$$

2.分配律

任意实数$m×n$矩阵A和B，$n×p$矩阵C和D之间相乘满足分配律$(A+B)C=AC+BC$，$A(C+D)=AC+AD$。

$$
\forall \mathrm{A}, B \in \mathrm{R}^{m \times n}, C, D \in \mathrm{R}^{n \times p}:(A+B) C=A C+B C, A(C+D)=A C+A D
$$

3.单位矩阵乘

任意实数$m×n$矩阵A和单位矩阵之间的乘，等于它本身A。

$$
\forall A \in R^{m \times n}: I_{m} A=A I_{n}=A
$$

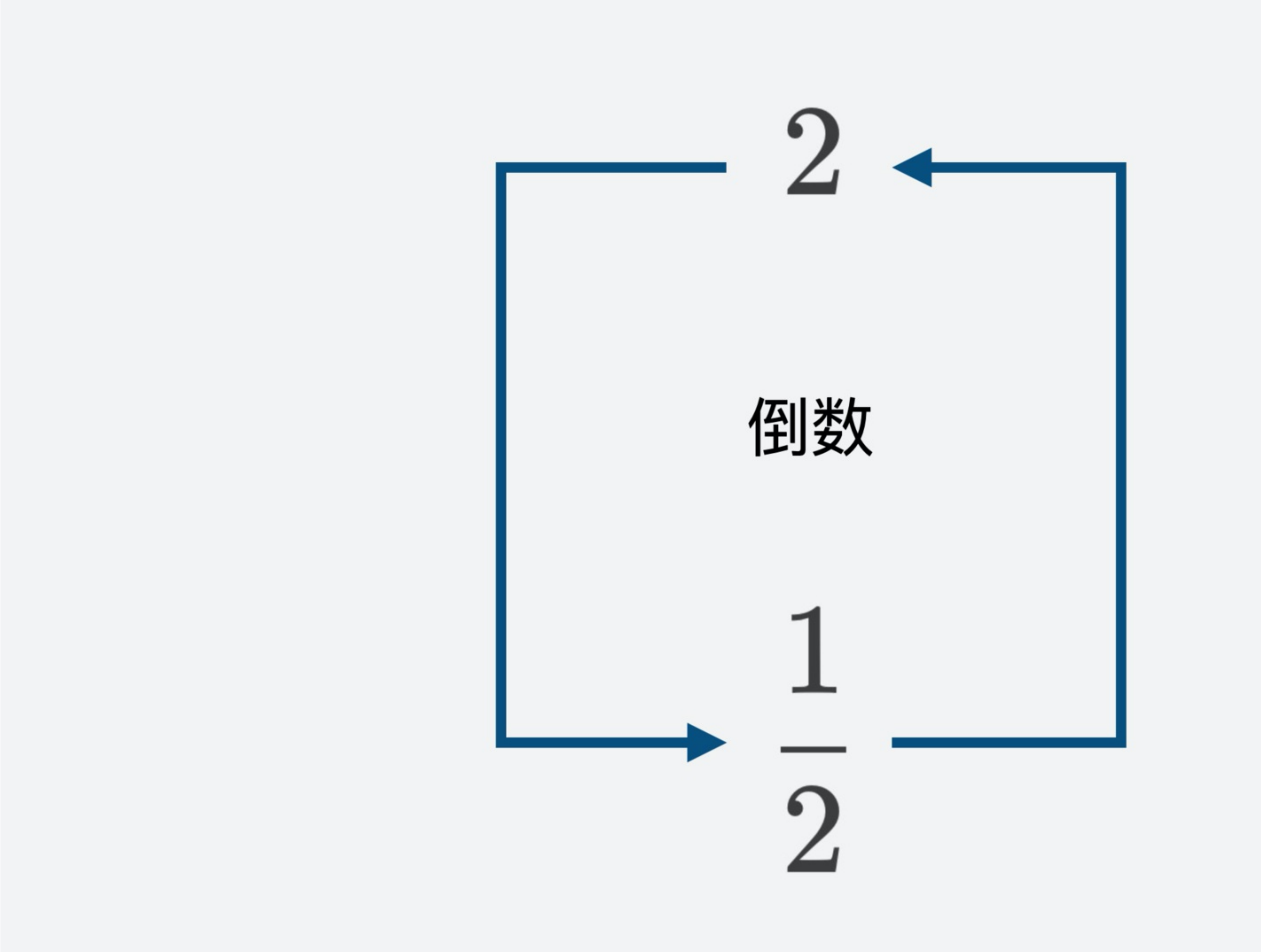
注意，这里的行和列不同，$m \neq n$意味着，根据矩阵乘，左乘和右乘单位矩阵也不同，也就是$I_{m} \neq I_{n}$。

逆矩阵与转置矩阵

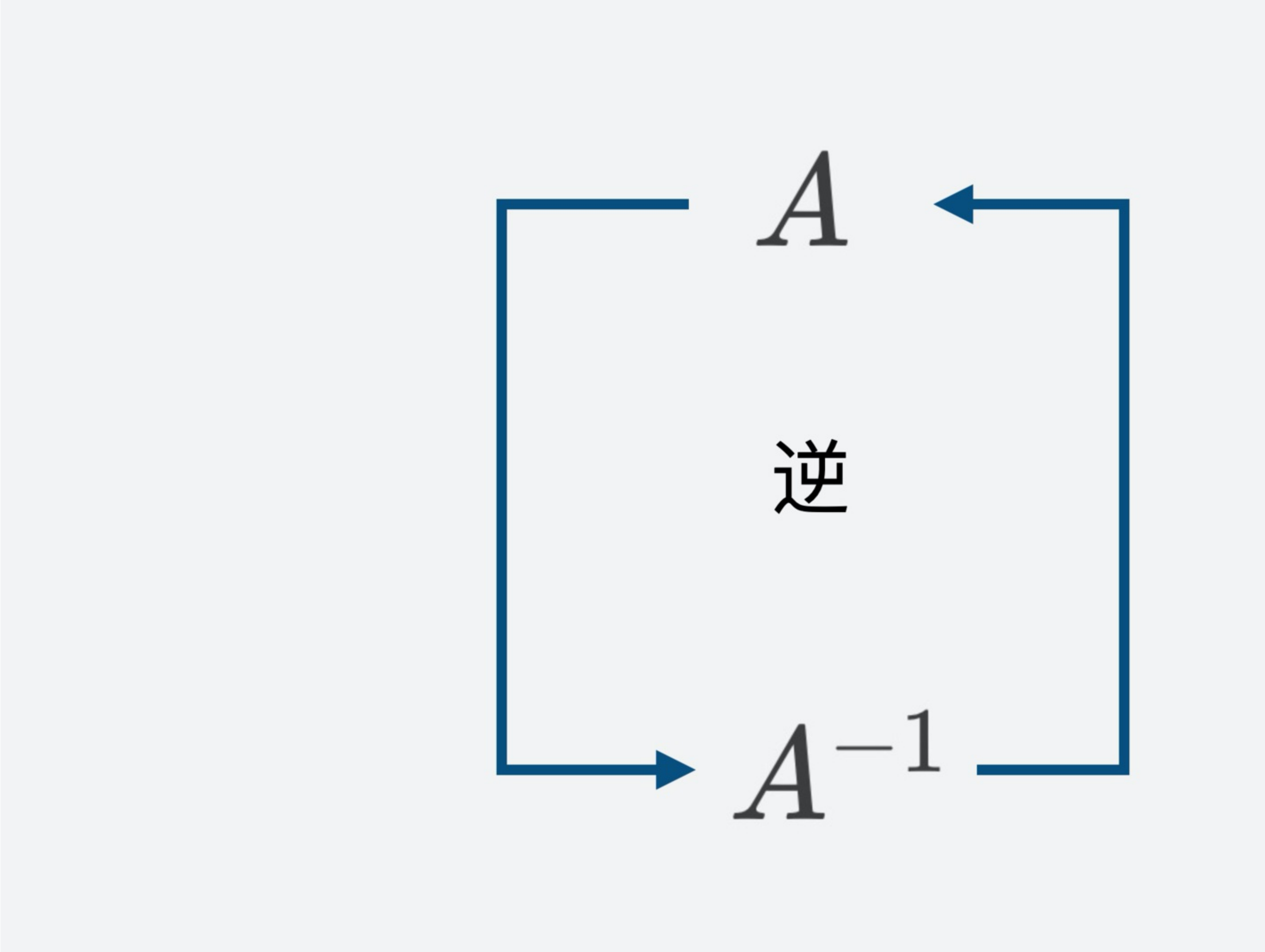
了解矩阵基本概念、运算，以及性质后，我来讲一讲矩阵应用中的两个核心内容——逆矩阵和转置矩阵。逆矩阵和转置矩阵在实际应用中大有用处，比如：坐标系中的图形变换运算。我们先来看下什么是逆矩阵。

逆矩阵

下面这个图你应该非常熟悉了，图中表现的是数字的倒数，2的倒数是$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$的倒数是2。



其实逆矩阵也有着类似的概念，只不过是写法不一样，我们会把逆矩阵写成A^{-1}。那为什么不是$\frac{1}{A}$呢？那是因为数字1无法被矩阵除。



我们知道，2乘以它的倒数$\frac{1}{2}$等于1。同样的道理，A乘以它的逆矩阵A^{-1}就等于单位矩阵，即$\mathrm{A} \times A^{-1}=\mathrm{I}$（$I$即单位矩阵），反过来也一样，$\mathrm{A}^{-1} \times A=\mathrm{I}$。

为方便你理解，我用一个2×2矩阵A来解释一下逆矩阵的算法。首先，我们交换a_{11}和a_{22}的位置，然后在a_{12}和a_{21}前加上负号，最后除以行列式$a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}$。

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]^{-1}=\frac{1}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}\left[\begin{array}{cc}
a_{22} & -a_{12} \\
-a_{21} & a_{11}
\end{array}\right]
$$

那我们该如何验证这是不是正解呢？

方法其实很简单，记得刚才的公式就行，$\mathrm{A} \times A^{-1}=\mathrm{I}$。现在我们就代入公式来验证一下，$A$和它的逆矩阵相乘，通过刚才的算法最终得出的结果是单位矩阵。

$$
A \times A^{-1}=\left[\begin{array}{llll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]^{-1}=\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{lll}
\frac{a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{-a_{12}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} \\
\frac{-a_{21}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
\frac{a_{11} \times a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{12} \times(-a_{21})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{11} \times(-a_{12})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{12} \times a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} \\
\frac{a_{21} \times a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{22} \times(-a_{21})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{21} \times(-a_{12})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{22} \times a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{lll}
1 & 0 \\
0 & 1
\end{array}\right]
$$

这里有一点需要特别说明，不是每一个矩阵都是可逆的。如果一个矩阵是可逆的，那这个矩阵我们叫做**非奇异矩阵**，如果一个矩阵是不可逆的，那这个矩阵我们就叫做**奇异矩阵**，而且如果一个矩阵可逆，那它的逆矩阵必然是唯一的。

还记得行列式$a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}$吗？如果我们要证明矩阵是可逆的，只要证明行列式不等于零就行。更高阶的逆矩阵的算法也是一样的原理。

最后，我想通过一个现实生活中的案例来让你更多地了解逆矩阵。

一个旅游团由孩子和大人组成，去程他们一起做大巴，每个孩子的票价3元，大人票价3.2元，总共花费118.4元。回程一起做火车，每个孩子的票价3.5元，大人票价3.6元，总共花费

135.2元。请问旅游团里有多少小孩和大人？

首先，我们设置一些矩阵，组成线性方程$XA=B$。

$$
\begin{array}{cccc}
\text{小孩} & \text{大人} & \text{大巴} & \text{火车}
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}
3 & 3.5 \\
3.2 & 3.6
\end{array}\right]
$$

要解X，我们就要先计算A的逆矩阵A^{-1}：

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{cc}
3 & 3.5 \\
3.2 & 3.6
\end{array}\right]^{-1}=\frac{1}{3 \times 3.6-3.5 \times 3.2}\left[\begin{array}{cc}
3.6 & -3.5 \\
-3.2 & 3
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
-9 & 8.75 \\
8 & -7.5
\end{array}\right]
$$

接下来再计算$X=B A^{-1}$：

$$
\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
118.4 & 135.2
\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}
-9 & 8.75 \\
8 & -7.5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
16 & 22
\end{array}\right]
$$

最终，我们得出这个旅游团有16个小孩和22个大人。

这也是解线性方程组的一种方法，类似这样的计算被广泛应用在各领域中，比如建筑工程、游戏和动画的3D效果上。虽然现在有很多程序包封装了这类数学计算的底层实现，但如果你能很好地理解这些概念，就可以为编程或算法调优打下坚实的基础。

Last but not least，方程次序很重要，也就是说，$AX=B$和$XA=B$的结果是不同的，这个一定要牢记哦！

转置矩阵

一般伴随逆矩阵之后出现的就是转置矩阵。在计算机图形图像处理中，如果要对一个物体进行旋转、平移、缩放等操作，就要对描述这个物体的所有矩阵进行运算，矩阵转置就是这类运算之一，而矩阵的转置在三维空间中的解释就相当于“得到关于某个点对称的三维立体”。所以，转置矩阵的定义很简单。

将矩阵的行列互换，得到的新矩阵就叫做转置矩阵（transpose）。转置矩阵的行列式不变。我们把$m×n$矩阵A的行列互换，得到转置矩阵A^{T}。

$$
A=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

$$
A^{T}=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m 1} \\
a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m 2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{1 n} & a_{2 n} & \ldots & a_{m n}

\end{array}\right]
$$

最后，为了方便你理解，我们再总结一下逆矩阵和转置矩阵的性质。你不用死记硬背，重在理解。

1. 矩阵和自身逆矩阵相乘得道单位矩阵，$A A^{-1}=I=A^{-1} A$；
2. $A$$B$两矩阵相乘的逆，等于逆矩阵$B$和逆矩阵$A$相乘，这里强调一下乘的顺序很重要，$(A B)^{-1}=B^{-1} A^{-1}$；
3. AB两矩阵相加后的逆矩阵，不等于各自逆矩阵的相加， $(A+B)^{-1} \neq A^{-1}+B^{-1}$；
4. 矩阵转置的转置还是它本身，$\left(A^{T}\right)^{\mathrm{T}}=A$；
5. AB两矩阵相加后的转置矩阵，等于各自转置矩阵的相加，$(A+B)^{T}=A^{T}+B^{T}$；
6. AB两矩阵相乘后的转置矩阵，等于转置矩阵B和转置矩阵A的相乘，这里再次强调乘的顺序很重要，$(A B)^{T}=B^{T} A^{T}$。

本节小结

好了，到这里矩阵这一讲就结束了，最后我再带你总结一下前面讲解的内容。

今天的知识，你只需要知道矩阵是线性方程组的另一种表达，了解和掌握矩阵的定义和性质就足够了。当然，矩阵还有很多内容，但我认为掌握了我讲的这些内容后，就为以后的一些矩阵应用场景打下了坚实的数学基础，也是下一讲的解线性方程组的前置知识。

线性代数练习场

对于10维列向量$x=\left(x_{1}, \ldots, x_{10}\right)^{T}$， $v=\left(v_{1}, \ldots, v_{10}\right)^{T}$，如果要计算$y=x x^{T}\left(I+v v^{T}\right) x$，其中$I$是10阶单位矩阵。你会怎么做？

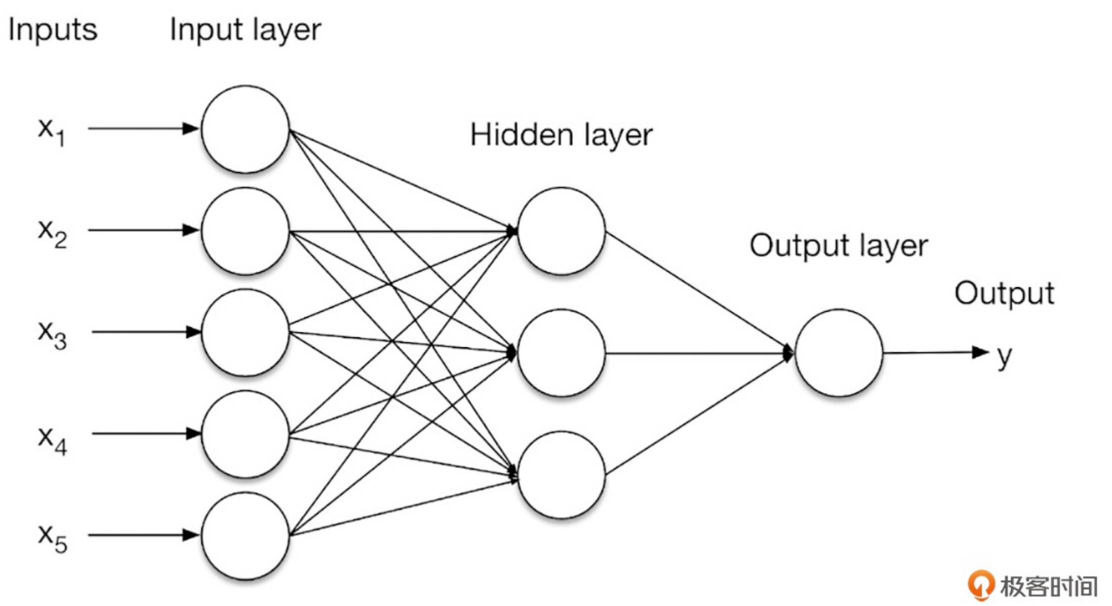
友情提醒，这里有多种方式解题。你能不能找到一个最简单的方法来解这道题？虽然结果很重要，但我想说的是过程更重要，而且往往解题过程不同，从计算机角度来说，运算的效率会有极大的不同。

欢迎你在留言区晒出你的运算过程和结果。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数，今天我们要讲的内容是“矩阵”。

在开始学习之前，我想先问你个问题，你觉得，学习矩阵有什么用呢？你可以先自己想一想。之后我们讲任何一个知识的时候，你都可以从这个角度出发，自己先思考一下，这样有助于你对所学内容理解得更深刻。

对于刚才那个问题，我的答案很简单，就一句话，从我们程序员的角度去理解的话，**矩阵可以极大地提高计算机的运算效率**。怎么说呢？我给你举一个例子。在机器学习中（特别是深度学习，或者更具体一点，神经网络），并行计算是非常昂贵的。



上图是一个典型的神经网络架构，在这时候，矩阵就能发挥用武之地了，计算H隐藏层输出的公式是：$H = f(W.x + b)$，其中W是权重矩阵，f是激活函数，b是偏差，x是输入层矩阵。而这个计算过程就叫做**向量化**（Vectorization），这也是GPU在深度学习中非常重要的原因，因为GPU非常擅长做类似矩阵乘之类的运算。

$$
X=\left|\begin{array} {l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right|
$$

$$
W=\left|\begin{array} {ll}
w_{1} & w_{2} \\
w_{4} & w_{5} \\
x_{3} & w_{6}
\end{array}\right|
$$

$$
H=f\left(\left|\begin{array} {ll}
w_{1} & w_{2} \\
w_{4} & w_{5} \\
x_{3} & w_{6}
\end{array}\right|\left|\begin{array} {l}
x_{1} \\
x_{2}
\end{array}\right|+b\right)
$$

不过，矩阵也不仅仅局限于神经网络的应用，同时它也可以用在计算机图形图像的应用中，比如，三维物体从取景到屏幕的显示，就需要经历一系列的空间变换，才能生成二维图像显示在显示器上。在这个计算过程中，我们都需要用到矩阵。

矩阵是非常实用的，但它正式作为数学中的研究对象出现，其实是在行列式的研究发展起来之后。英国数学家 Arthur Cayley 被公认为矩阵论的创立人，他提出的矩阵概念可能来自于行列式。但我相信另一种说法，提出矩阵是为了更简单地表达线性方程组，也就是说，矩阵是线性方程组的另一种表达。

矩阵的基本概念

线性方程组的概念很简单，上节我们已经简单提过。你在小学或中学肯定也学过二元一次方程和二元一次方程组。

$$ax+by=c$$

$$
\left\{\begin{array} {l}
a_{1} x+b_{1} y+C_{1}=0 \\
a_{2} x+b_{2} y+C_{2}=0
\end{array}\right.
$$

在这样一个方程组中，$a1$、$a2$、$b1$、$b2$不能同时为0。当我们把二元一次方程组再扩展一下，变成多元一次方程组时，我们就能得到线性方程组的一般表达，即$AX=B$。

$$
\left\{\begin{array} {l}
a_{11} x_{1}+a_{12} x_{2}+\cdots+a_{1 n} x_{n}=b_{1} \\
a_{21} x_{1}+a_{22} x_{2}+\cdots+a_{2 n} x_{n}=b_{2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m 1} x_{1}+a_{m 2} x_{2}+\cdots+a_{m n} x_{n}=b_{m}
\end{array}\right.
$$

于是，这个线性方程组的所有系数就构成了一个$m×n$的m行n列矩阵：

$$
A=\left[\begin{array} {cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

我们把A称为该方程组的系数矩阵，而当我们把等式右边的常数b放入矩阵后，就是下面这样：

$$

\widetilde{A}=\left[\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} & b_{1} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} & b_{2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n} & b_{m}
\end{array}\right]
$$

这样我们就得到了A矩阵的增广矩阵$\widetilde{A}$，可以表示为(A, B)，这里的B表示的是方程组常数项所构成的列向量，也就是$m×1$的m行1列矩阵：

$$
B=\left|\begin{array}{l}
b_{1} \\
b_{2} \\
\cdots \\
b_{m}
\end{array}\right|
$$

如果设X为$n×1$的n行1列矩阵：

$$
X=\left|\begin{array}{c}
x_{1} \\
x_{2} \\
\cdots \\
x_{n}
\end{array}\right|
$$

那么线性方程组A，就可以表示为$AX=B$的矩阵形式。如果我们再换一种表示形式，设：$a_{1} ,a_{2},\ldots, a_{n},\beta$表示增广矩阵$\widetilde{A}$的列向量，则线性方程组$A$又可表示为$a_{1} x_{1}+a_{2} x_{2}+\cdots+a_{n} x_{n}=β$。

线性方程组的矩阵和向量形式都是线性方程组的其他表达形式。在工作中，你可以用它们来简化求解，甚至可以提升计算效率，就如之前提到的神经网络的隐藏层的输出计算、图形图像的三维空间变换。在数学中也是同样的，你可以经常运用它们来简化求解。具体线性方程组求解的内容比较多，我们下一节课再来详细讲解求解过程。

通过前面的讲解，我相信你对矩阵有了一定的了解，现在我们再回头来看看矩阵的定义吧。

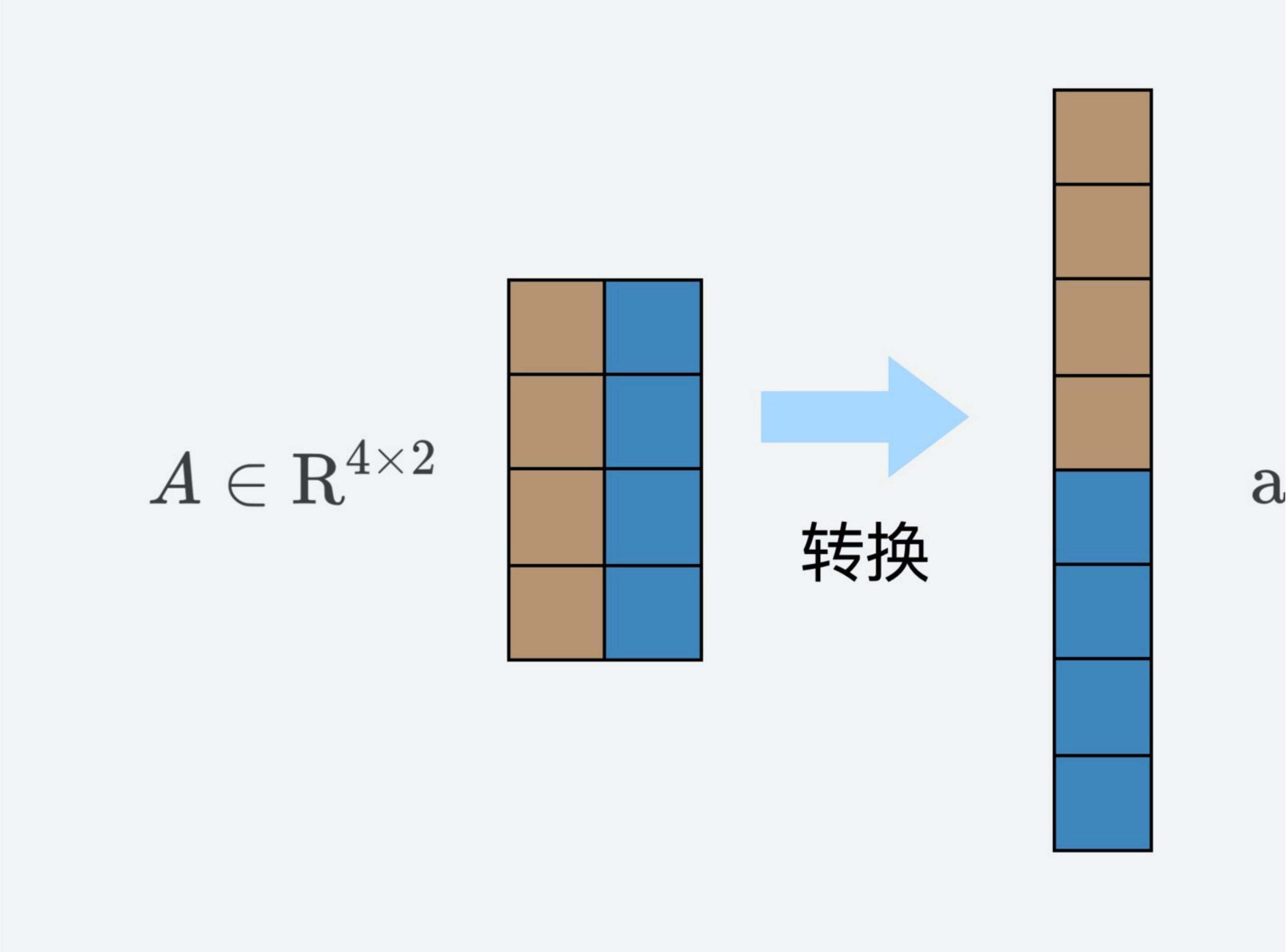
矩阵的定义是：一个(m, n)矩阵A，是由$m×n$个元素组成，m和n是实数，其中元素$a_{i j}, \mathrm{i}=1, \ldots, \mathrm{m}, \mathrm{j}=1, \ldots, \mathrm{n}$按$m$行$n$列的矩形排布方式后可以形成矩阵$A$：

$$
A=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

其中$a_{i j}$属于实数或复数，在我们的场景中是实数R，按通常的惯例，$(1, n)$矩阵叫做行，$(m, 1)$矩阵叫做列，这些特殊的矩阵叫做行或列向量。

定义完矩阵后，我接着讲一个比较有趣的概念，矩阵转换（Matrix transformation）。矩阵转换经常被用在计算机图形图像的转换中，比如，一张彩色图片从RGB角度来说是三维的，如果要转换成灰度图片，也就是一维图片，那就要做矩阵转换。

我们来看一下矩阵转换的过程。设$\mathrm{R}^{m \times n}$是实数矩阵(m, n)的集合，$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$可以表示成另一种形式 $a \in \mathrm{R}^{mn}$。我们把矩阵的n列堆叠成一个长向量后完成转换。这个转换也叫做reshape，其实就是重新调整原矩阵的行数、列数和维数，但是元素个数不变。



矩阵的运算

了解了矩阵的基本定义后，我们才能进入矩阵的运算环节，就是矩阵的加和乘。

加运算很简单，两个矩阵$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$，$B \in \mathrm{R}^{m \times n}$的加运算其实就是矩阵各自元素的加。

$$
A+B=\left[\begin{array}{ccc}
a_{11}+b_{11} & \ldots & a_{1 n}+b_{1 n} \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
a_{m 1}+b_{m 1} & \ldots & a_{m n}+b_{m n}
\end{array}\right] \in R^{m \times n}
$$

我推荐你使用NumPy的einsum来高效地做这类运算，因为它在速度和内存效率方面通常可以超越我们常见的array函数。

```
C= np.einsum('il, lj', A, B)
```

接下来，我们一起来看看矩阵的乘。这里你需要注意，矩阵的乘和通常意义上“数之间的乘”不同，矩阵的乘有多种类型，这里我讲三种最普遍，也是在各领域里用得最多的矩阵乘。

1.普通矩阵乘

普通矩阵乘是应用最广泛的矩阵乘，两个矩阵$A \in \mathrm{R}^{m \times n}$，$B \in \mathrm{R}^{n \times k}$，普通矩阵则乘可以表示为$C=A B \in R^{m \times k}$，$C$中元素的计算规则是矩阵$A$、$B$对应两两元素乘积之和。

$$
c_{i j}=\sum_{k=1}^{n} a_{i k} b_{k j}, i=1, \ldots, m, j=1, \ldots, l
$$

我们举例来说明。C的第一个元素$c_{11}=a_{11} \times b_{11}+a_{12} \times b_{21}+a_{13} \times b_{31}=1 \times 1+2 \times 2+3 \times 3$。

$$
C=A B=\left[\begin{array}{lll}
1 & 2 & 3 \\
4 & 5 & 6
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
1 & 4 \\
2 & 5 \\
3 & 6
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{lll}
1 \times 1+2 \times 2+3 \times 3 & 1 \times 4+2 \times 5+3 \times 6 \\
4 \times 1+5 \times 2+6 \times 3 & 4 \times 4+5 \times 5+6 \times 6
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
14 & 32 \\
32 & 77
\end{array}\right]
$$

这里需要特别注意的是，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，例如，一个$n×k$矩阵A和一个$k×m$矩阵B相乘，最后得出$n×m$矩阵C，而这里的k就是相邻阶数。

$$AB=C$$

但反过来B和A相乘就不行了，因为相邻阶数m不等于n。

2.哈达玛积

哈达玛积理解起来就很简单了，就是矩阵各对应元素的乘积，$c_{i j}=a_{i j} \times b_{i j}$ 。举个例子：

$$
C=A^{*} B=\left[\begin{array}{ll}
1 & 2 \\
4 & 5
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
1 & 4 \\
2 & 5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
1 * 1 & 2 * 4 \\
4 * 2 & 5 * 5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
1 & 8 \\
8 & 25
\end{array}\right]
$$

哈达玛积其实在数学中不常看到，不过，在编程中哈达玛积非常有用，因为它可以用来同时计算多组数据的乘积，计算效率很高。

3.克罗内克积

克罗内克积是以德国数学家利奥波德·克罗内克（Leopold Kronecker）的名字命名的。它可以应用在解线性矩阵方程和图像处理方面，当然从更时髦的角度说，它还能用在量子信息领域，我们也称之为直积或张量积。

和普通矩阵乘和哈达玛积不同的是，克罗内克积是两个任意大小矩阵间的运算，表示为$A×B$，如果A是一个$m × n$的矩阵，而B是一个$p×q$的矩阵，克罗内克积则是一个$mp×nq$的矩阵。

接下来我们需要定义一个**在矩阵的乘法中起着特殊作用**的矩阵，它就是**单位矩阵**。高等代数中，在求解相应的矩阵时，若添加单位矩阵，通过初等变换进行求解，往往可以使问题变得简单。按照百度百科的解释，单位矩阵如同数的乘法中的1，这种矩阵就被称为单位矩阵。它是个方阵，从左上角到右下角的对角线，也就是主对角线上的元素均为1，除此以外全都为0。

在线性代数中，大小为n的单位矩阵就是在主对角线上均为1，而其他地方都是0的$n×n$的方阵，它用I_{n}表示，表达时为了方便可以忽略阶数，直接用I来表示：

$$
I_{1}=[1], I_{2}=\left[\begin{array}{ll}
1 & 0 \\
0 & 1
\end{array}\right], I_{3}=\left[\begin{array}{lll}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{array}\right], \ldots, I_{n}=\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 1 & \ldots & 0 \\
. & . & \ldots & . \\
. & . & . & . \\
0 & 0 & \ldots & 1
\end{array}\right]
$$

矩阵的性质

在了解了矩阵加和乘，以及单位矩阵后，我们是时候来看一看矩阵的性质了。了解矩阵的性质是进行矩阵计算的前提，就像我们小时候学加减乘除四则运算法则时那样。所以，这块内容对你来说应该不难，你作为了解就好，重点是之后的运算。

1.结合律

任意实数$m×n$矩阵A，$n×p$矩阵B，$p×q$矩阵C之间相乘，满足结合律$(AB)C=A(BC)$。这个很好理解，我就不多说了。

$$\forall A \in R^{m \times n}, B \in R^{n \times p}, C \in R^{p \times q}:(A B) C=A(B C)$$

2.分配律

任意实数$m×n$矩阵A和B，$n×p$矩阵C和D之间相乘满足分配律$(A+B)C=AC+BC$，$A(C+D)=AC+AD$。

$$
\forall \mathrm{A}, B \in \mathrm{R}^{m \times n}, C, D \in \mathrm{R}^{n \times p}:(A+B) C=A C+B C, A(C+D)=A C+A D
$$

3.单位矩阵乘

任意实数$m×n$矩阵A和单位矩阵之间的乘，等于它本身A。

$$
\forall A \in R^{m \times n}: I_{m} A=A I_{n}=A
$$

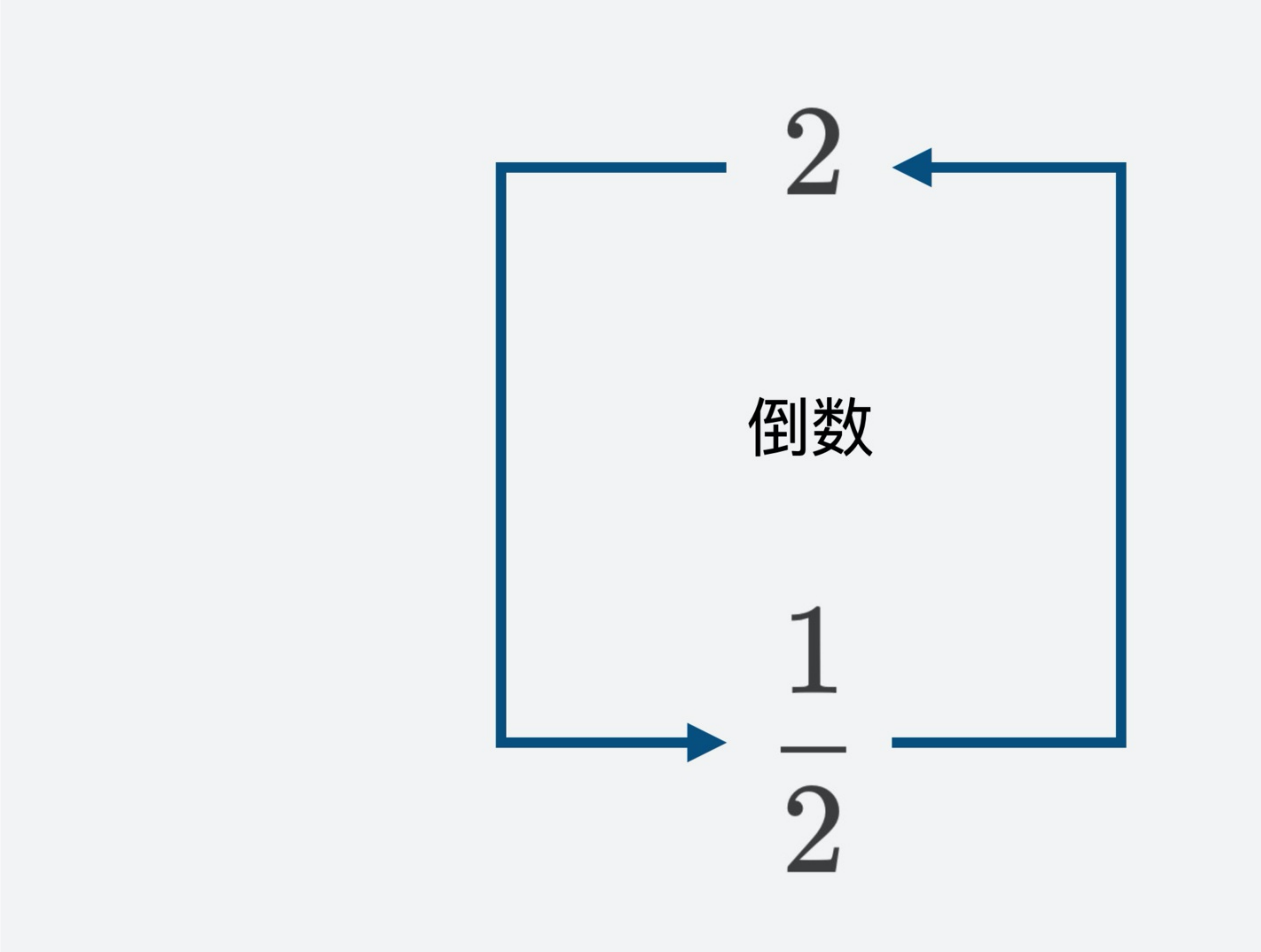
注意，这里的行和列不同，$m \neq n$意味着，根据矩阵乘，左乘和右乘单位矩阵也不同，也就是$I_{m} \neq I_{n}$。

逆矩阵与转置矩阵

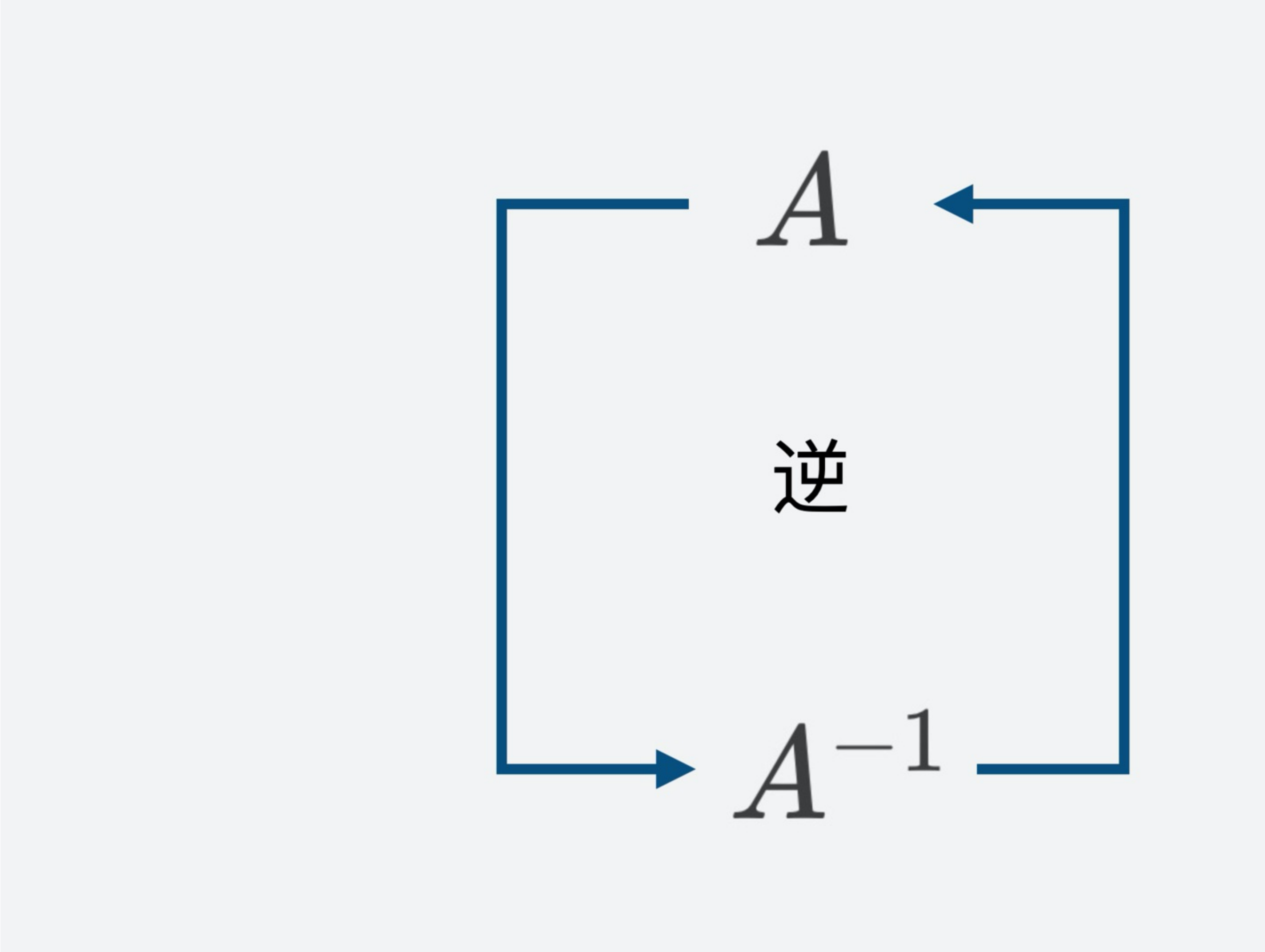
了解矩阵基本概念、运算，以及性质后，我来讲一讲矩阵应用中的两个核心内容——逆矩阵和转置矩阵。逆矩阵和转置矩阵在实际应用中大有用处，比如：坐标系中的图形变换运算。我们先来看下什么是逆矩阵。

逆矩阵

下面这个图你应该非常熟悉了，图中表现的是数字的倒数，2的倒数是$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$的倒数是2。



其实逆矩阵也有着类似的概念，只不过是写法不一样，我们会把逆矩阵写成A^{-1}。那为什么不是$\frac{1}{A}$呢？那是因为数字1无法被矩阵除。



我们知道，2乘以它的倒数$\frac{1}{2}$等于1。同样的道理，A乘以它的逆矩阵A^{-1}就等于单位矩阵，即$\mathrm{A} \times A^{-1}=\mathrm{I}$（$I$即单位矩阵），反过来也一样，$\mathrm{A}^{-1} \times A=\mathrm{I}$。

为方便你理解，我用一个2×2矩阵A来解释一下逆矩阵的算法。首先，我们交换a_{11}和a_{22}的位置，然后在a_{12}和a_{21}前加上负号，最后除以行列式$a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}$。

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]^{-1}=\frac{1}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}\left[\begin{array}{cc}
a_{22} & -a_{12} \\
-a_{21} & a_{11}
\end{array}\right]
$$

那我们该如何验证这是不是正解呢？

方法其实很简单，记得刚才的公式就行，$\mathrm{A} \times A^{-1}=\mathrm{I}$。现在我们就代入公式来验证一下，$A$和它的逆矩阵相乘，通过刚才的算法最终得出的结果是单位矩阵。

$$
A \times A^{-1}=\left[\begin{array}{llll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]^{-1}=\left[\begin{array}{ll}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{lll}
\frac{a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{-a_{12}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} \\
\frac{-a_{21}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
\frac{a_{11} \times a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{12} ×(-a_{21})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{11} ×(-a_{12})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{12} \times a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} \\
\frac{a_{21} \times a_{22}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{22} ×(-a_{21})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}} & \frac{a_{21} ×(-a_{12})}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}+\frac{a_{22} × a_{11}}{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{lll}
1 & 0 \\
0 & 1
\end{array}\right]
$$

这里有一点需要特别说明，不是每一个矩阵都是可逆的。如果一个矩阵是可逆的，那这个矩阵我们叫做**非奇异矩阵**，如果一个矩阵是不可逆的，那这个矩阵我们就叫做**奇异矩阵**，而且如果一个矩阵可逆，那它的逆矩阵必然是唯一的。

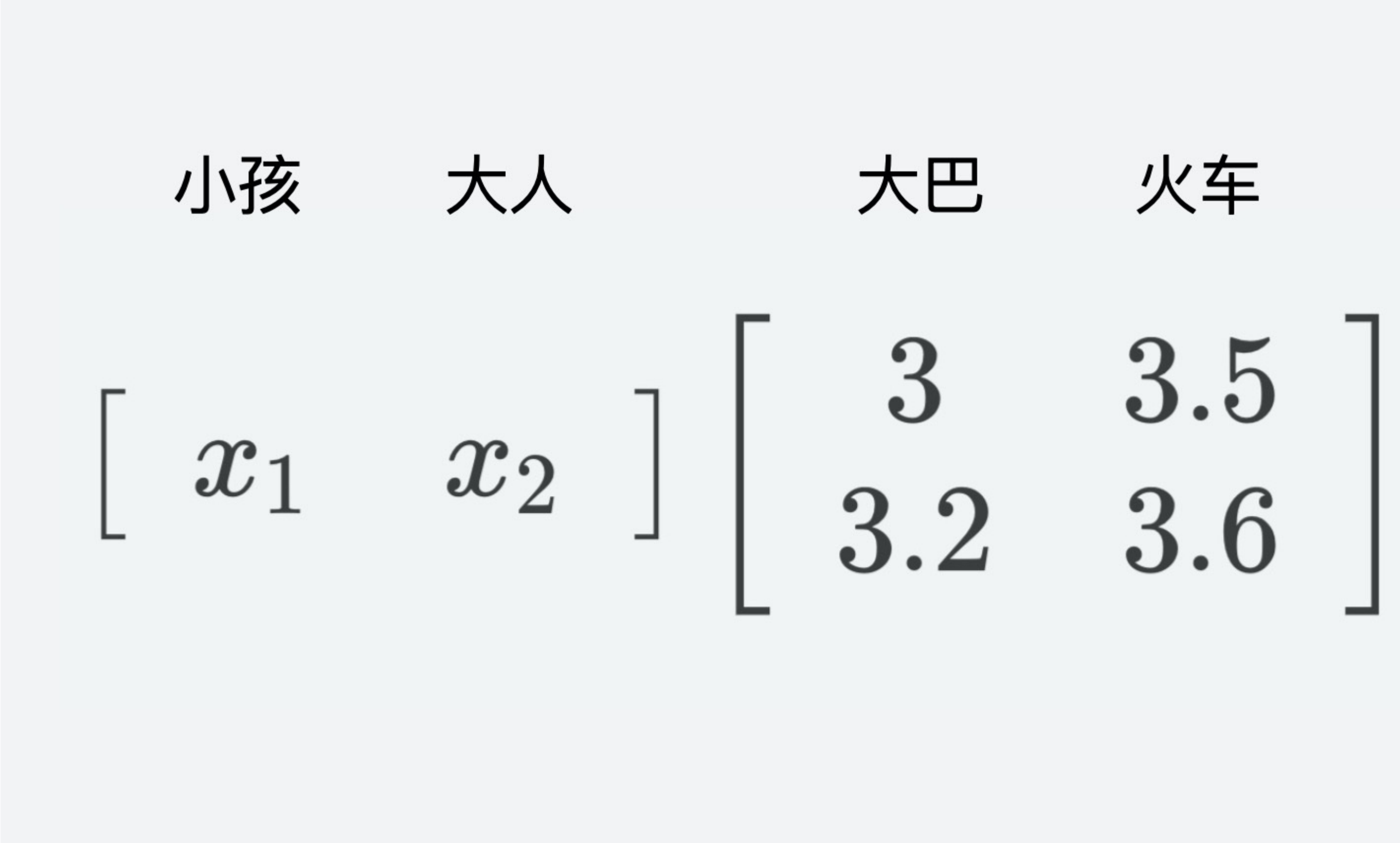
还记得行列式$a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}$吗？如果我们要证明矩阵是可逆的，只要证明行列式不等于零就行。更高阶的逆矩阵的算法也是一样的原理。

最后，我想通过一个现实生活中的案例来让你更多地了解逆矩阵。

一个旅游团由孩子和大人组成，去程他们一起做大巴，每个孩子的票价3元，大人票价3.2元，总共花费118.4元。回程一起做火车，每个孩子的票价3.5元，大人票价3.6元，总共花费

135.2元。请问旅游团里有多少小孩和大人？

首先，我们设置一些矩阵，组成线性方程$XA=B$。



要解X，我们就要先计算A的逆矩阵A^{-1}：

$$
A^{-1}=\left[\begin{array}{cc}
3 & 3.5 \\
3.2 & 3.6
\end{array}\right]^{-1}=\frac{1}{3 \times 3.6-3.5 \times 3.2}\left[\begin{array}{cc}
3.6 & -3.5 \\
-3.2 & 3
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}
-9 & 8.75 \\
8 & -7.5
\end{array}\right]
$$

接下来再计算$X=B A^{-1}$：

$$
\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
118.4 & 135.2
\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}
-9 & 8.75 \\
8 & -7.5
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ll}
16 & 22
\end{array}\right]
$$

最终，我们得出这个旅游团有16个小孩和22个大人。

这也是解线性方程组的一种方法，类似这样的计算被广泛应用在各领域中，比如建筑工程、游戏和动画的3D效果上。虽然现在有很多程序包封装了这类数学计算的底层实现，但如果你能很好地理解这些概念，就可以为编程或算法调优打下坚实的基础。

Last but not least，方程次序很重要，也就是说，$AX=B$和$XA=B$的结果是不同的，这个一定要牢记哦！

转置矩阵

一般伴随逆矩阵之后出现的就是转置矩阵。在计算机图形图像处理中，如果要对一个物体进行旋转、平移、缩放等操作，就要对描述这个物体的所有矩阵进行运算，矩阵转置就是这类运算之一，而矩阵的转置在三维空间中的解释就相当于“得到关于某个点对称的三维立体”。所以，转置矩阵的定义很简单。

将矩阵的行列互换，得到的新矩阵就叫做转置矩阵（transpose）。转置矩阵的行列式不变。我们把$m×n$矩阵A的行列互换，得到转置矩阵A^{T}。

$$
A=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1 n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2 n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m 1} & a_{m 2} & \ldots & a_{m n}
\end{array}\right]
$$

$$
A^{T}=\left[\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m 1} \\
a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m 2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{1 n} & a_{2 n} & \ldots & a_{m n}

\end{array}\right]
$$

最后，为了方便你理解，我们再总结一下逆矩阵和转置矩阵的性质。你不用死记硬背，重在理解。

1. 矩阵和自身逆矩阵相乘得道单位矩阵，$A A^{-1}=I=A^{-1} A$;
2. $A$$B$两矩阵相乘的逆，等于逆矩阵$B$和逆矩阵$A$相乘，这里强调一下乘的顺序很重要，$(A B)^{-1}=B^{-1} A^{-1}$;
3. AB两矩阵相加后的逆矩阵，不等于各自逆矩阵的相加， $(A+B)^{-1} \neq A^{-1}+B^{-1}$;
4. 矩阵转置的转置还是它本身，$\left(A^{T}\right)^{\mathrm{T}}=A$;
5. AB两矩阵相加后的转置矩阵，等于各自转置矩阵的相加，$(A+B)^{T}=A^{T}+B^{T}$;
6. AB两矩阵相乘后的转置矩阵，等于转置矩阵B和转置矩阵A的相乘，这里再次强调乘的顺序很重要，$(A B)^{T}=B^{T} A^{T}$。

本节小结

好了，到这里矩阵这一讲就结束了，最后我再带你总结一下前面讲解的内容。

今天的知识，你只需要知道矩阵是线性方程组的另一种表达，了解和掌握矩阵的定义和性质就足够了。当然，矩阵还有很多内容，但我认为掌握了我讲的这些内容后，就为以后的一些矩阵应用场景打下了坚实的数学基础，也是下一讲的解线性方程组的前置知识。

线性代数练习场

对于10维列向量$x=\left(x_{1}, \ldots, x_{10}\right)^{T}$， $v=\left(v_{1}, \ldots, v_{10}\right)^{T}$，如果要计算$y=x x^{T}\left(I+v v^{T}\right) x$，其中$I$是10阶单位矩阵。你会怎么做？

友情提醒，这里有多种方式解题。你能不能找到一个最简单的方法来解这道题？虽然结果很重要，但我想说的是过程更重要，而且往往解题过程不同，从计算机角度来说，运算的效率会有极大的不同。

欢迎你在留言区晒出你的运算过程和结果。如果有收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。