ä½ å¥½ï¼Œæˆ‘æ˜¯æœ±ç»´å˜šã€‚æ¬¢è¿Žä½ ç»§ç»è·Ÿæˆ‘å¦ä¹ çº¿æ€§ä»£æ•°ï¼Œä»Šå¤©æˆ‘ä»¬è¦è®²çš„å†…å®¹æ˜¯â€œè§£æžå‡ ä½•â€ã€‚

å‰é¢æ‰€æœ‰ç« èŠ‚æˆ‘ä»¬éƒ½æ˜¯å›´ç»•å‘é‡ã€çŸ©é˜µï¼Œä»¥åŠå‘é‡ç©ºé—´æ¥å±•å¼€çš„ã€‚ä½†è¿™ä¸€èŠ‚è¯¾æœ‰ç‚¹ä¸ä¸€æ ·ï¼Œæˆ‘è¦è®²çš„æ˜¯è§£æžå‡ ä½•ï¼Œå®ƒä½¿å¾—å‘é‡ä»Žæ›´å¤šç»´åº¦ä¸Šæœ‰äº†å…·ä½“çš„è¡¡é‡ã€‚æ¯"å¦‚ï¼Œè®¡ç®—å‘é‡çš„é•¿åº¦ã€å‘é‡ä¹‹é—´çš„è·ç¦»å'Œè§'åº¦ï¼Œè¿™åœ¨æœºå™¨å¦ä¹ ä¸æ˜¯éžå¸¸æœ‰ç"¨çš„ï¼Œä½ å¯ä»¥ç"¨å®ƒæ¥åšPCAä¸»æˆåˆ†åˆ†æžã€‚

èŒƒæ•°

è®²è§£æžå‡ ä½•æˆ'ä»¬å¾—ä»Žâ€œèŒƒæ•°â€å¼€å§‹è®²èµ·ã€‚

å› ä¸ºå¾ˆå¤šäººç¬¬ä¸€æ¬¡æŽ¥è§¦çš„æ—¶å€™ï¼Œè§'å¾—è¿™ä¸ªæ¦‚å¿µæ¯"è¾ƒæŠ½è±¡ï¼Œå…¶å®žä¸ä»…èŒƒæ•°æ˜¯ï¼Œåƒå‘é‡è¿™æ ·çš„è¿‘ä¹Žæ•°å¦æ¦‚å¿µï¼Œæ˜¯ä»Žå¤šç»´ç©ºé—´çš„è§'åº¦æ¥è§£é‡Šçš„ã€‚èŒƒæ•°ï¼Œå°±æ˜¯è¡¡é‡å‘é‡é•¿åº¦çš„ä¸€ä¸ªå‡½æ•°ï¼Œä¹Ÿå°±æ˜¯å‘é‡çš„é•¿åº¦ã€‚

çŽ°åœ¨ï¼Œæˆ'ä»¬å…ˆæ¥çœ‹ä¸€ä¸‹èŒƒæ•°çš„æ•°å¦å®šä¹‰ï¼šä¸€ä¸ªå'é‡ç©ºé—´Vä¸Šçš„ä¸€ä¸ªèŒƒæ•°å°±æ˜¯ä¸€ä¸ªå‡½æ•°ï¼Œå®ƒè®¡ç®—Vä¸çš„æ¯ä¸€ä¸ªå'é‡xçš„é•¿åº¦ï¼Œç"¨ç¬¦å·æ¥è¡¨ç¤ºçš„è¯å°±æ˜¯ï¼š$\|x\| \in R$ï¼Œå®ƒæ»¡è¶³ä¸‰ç§æ€§è´¨ï¼š

1. æ£é½æ¬¡æ€§ï¼š å¦‚æžœè¾"å…¥å¸æ•°æ‰©å¤§λå€ï¼Œå…¶å€¼ä¹Ÿæ‰©å¤§λå€ã€‚è®¾$\lambda \in R$ï¼Œ$x \in V$ï¼Œ$\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$ï¼›
2. æ¬¡å¯åŠ æ€§ï¼šç±»ä¼¼ä¸‰è§'ä¸ç‰å¼ï¼Œä¸¤è¾¹ä¹‹å'Œå¤§äºŽç¬¬ä¸‰è¾¹ã€‚è®¾$x,y \in V$ï¼Œ$\|x+y\| \leq\|x\|+\|y\|$ï¼›
3. æ£å®šæ€§ï¼šå'é‡xçš„é•¿åº¦ä¸€å®šå¤§äºŽç‰äºŽé›¶ã€‚$\|x\| \geq 0$ã€‚

çœ‹åˆ°è¿™é‡Œï¼Œä½ ä¹Ÿè®¸ä¼šé—®ï¼ŒèŒƒæ•°ä¼¼ä¹Žå'Œä»¥å‰è€å¸ˆæ•™çš„**å'é‡çš„æ¨¡**ä¸€æ ·å•Šã€‚å…¶å®žå«æ³•ä¸åŒï¼Œå®ƒä»¬è¯´çš„éƒ½æ˜¯ä¸€ä¸ªä¸œè¥¿ï¼Œå®ƒä»¬è®¡ç®—çš„éƒ½æ˜¯å'é‡é•¿åº¦ï¼Œæ¨¡åœ¨å'é‡ç©ºé—´ä¸è¢«æ›´ç›´æŽ¥åœ°ä½¿ç"¨ã€‚æˆ'ä»¬ä¹Ÿå¯ä»¥ç¨å¾®ç²¾ç¡®ä¸€ç‚¹ï¼Œå°±å'Œå'é‡ç©ºé—´ä¸€æ ·ï¼ŒèŒƒæ•°ä¹Ÿæœ‰ä¸åŒçš„ç±»åž‹ï¼Œä¸»è¦æ˜¯ä¸ºäº†è§£å†³ä¸åŒé—®é¢˜ã€‚æ‰€ä»¥ï¼Œæˆ'ä»¬æŽ¥ä¸‹æ¥ä»‹ç»å‡ ç§å¸¸ç"¨çš„èŒƒæ•°ï¼š$L_{1}, L_{2}, \ldots, L_{\infty}$ã€‚

- L_{1}èŒƒæ•°ï¼šæ›¼å“ˆé¡¿èŒƒæ•°ï¼Œä¹Ÿå«æ›¼å“ˆé¡¿è·ç¦»ï¼Œè®¾$x \in R^{n}$ï¼Œå¾—åˆ°ä¸‹é¢è¿™ä¸ªè¡¨è¾¾å¼ã€‚

$$
\|x\|_{1}=\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}\right|
$$

- L_{2}èŒƒæ•°ï¼šæ¬§å¼èŒƒæ•°ï¼Œä¹Ÿå«æ¬§å¼è·ç¦»ï¼Œè®¾$x \in R^{n}$ï¼Œå¾—åˆ°ä¸‹é¢è¿™ä¸ªè¡¨è¾¾å¼ã€‚

$$
\|x\|_{2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2}}
$$

- L_{∞}èŒƒæ•°ï¼šåˆ‡æ¯"é›ªå¤«èŒƒæ•°ï¼Œä¹Ÿå«åˆ‡æ¯"é›ªå¤«è·ç¦»ï¼Œè®¾$x \in R^{n}$ï¼Œå¾—åˆ°ä¸‹é¢è¿™ä¸ªè¡¨è¾¾å¼ã€‚

$$
\|x\|_{\infty}=\max \left(\left|x_{1}\right|,\left|x_{2}\right|, \ldots,\left|x_{n}\right|\right)
$$

æˆ'ä»¬å'çŽ°ï¼Œå'é‡çš„æ¨¡å'ŒL_{2}èŒƒæ•°çš„è®¡ç®—æ–¹å¼éƒ½æ˜¯ä¸€æ ·çš„ï¼Œéƒ½è¡¨ç¤ºçš„æ˜¯æ¬§æ°è·ç¦»ï¼Œæ‰€ä»¥ï¼Œæˆ'ä»¬å¯ä»¥ç®€å•åœ°è®¤ä¸ºå'é‡çš„æ¨¡ç‰äºŽL_{2}èŒƒæ•°ã€‚è€Œå…¶ä»–çš„èŒƒæ•°æ¨¡å¼å'Œå'é‡çš„æ¨¡å°±æ²¡æœ‰ä»»ä½•å…³ç³»ã€‚

å†…ç§¯

å¦‚ä½ è§£æžå‡ ä½•æ—¶ï¼Œæˆ'ä»¬å¿…é¡»æŽŒæ¡çš„ç¬¬äºŒä¸ªæ¦‚å¿µå°±æ˜¯å†…ç§¯ã€‚

å¦‚æžœè¯´èŒƒæ•°æ˜¯æ¨¡å¼ï¼Œæ˜¯ç"¨æ¥æè¿°å'é‡é•¿åº¦æˆ–å¤§å°çš„æ¦‚å¿µï¼Œé‚£ä¹ˆå†…ç§¯å¯ä»¥è®©æˆ'ä»¬å¾ˆç›´è§‚åœ°äº†è§£ä¸€ä¸ªå'é‡çš„é•¿åº¦ã€ä¸¤ä¸ªå'é‡ä¹‹é—´çš„è·ç¦»å'Œè§'åº¦ï¼Œå®ƒçš„ä¸€ä¸ªä¸»è¦ç›®çš„å°±æ˜¯åˆ¤æ–å'é‡ä¹‹é—´æ˜¯å¦æ˜¯æ£äº¤çš„ï¼Œæ£äº¤è¿™ä¸ªæ¦‚å¿µæˆ'ä»¬ä¼šåœ¨åŽé¢è®²è§£ã€‚

ç‚¹ç§¯

æˆ'ä»¬ä»Žç‰¹æ®Šåˆ°ä¸€èˆ¬ï¼Œå…ˆæ¥çœ‹ç‚¹ç§¯ï¼Œå®ƒå'Œç¬¬ä¸‰ç¯‡çŸ©é˜µä¸è¯´çš„â€œæ™®é€šçŸ©é˜µä¹˜â€å½¢å¼ä¸€æ ·ï¼Œç‚¹ç§¯æ˜¯ç‰¹æ®Šçš„å†…ç§¯ï¼Œä¸ºä»€ä¹ˆè¯´å®ƒç‰¹æ®Šå'¢ï¼Ÿé‚£æ˜¯å› ä¸ºåœ¨è¡¡é‡ä¸¤ä¸ªå'é‡ä¹‹é—´çš„è·ç¦»æ—¶ï¼Œå®ƒå°±æ˜¯å¤§å®¶ç†Ÿæ‚‰çš„æ¬§å¼è·ç¦»ï¼Œç‚¹ç§¯å¯ä»¥è¡¨ç¤ºæˆè¿™æ ·çš„å½¢å¼ï¼š

$$
x^{T} y=\sum_{i=1}^{n} x_{i} y_{i}
$$

å…¶ä»–å†…ç§¯

é™¤äº†ç‚¹ç§¯å¤–ï¼Œæˆ'ä»¬æ¥çœ‹ä¸€ä¸ªä¸åŒçš„å†…ç§¯ï¼šè®¾å†…ç§¯ç©ºé—´Væ˜¯R^{2}ï¼Œå®šä¹‰å†…ç§¯$\langle x, y\rangle=x_{1} y_{1}-(x_{1} y_{2}+x_{2} y_{1})+2 x_{2} y_{2}$ï¼Œä¸€çœ‹ä¾¿çŸ¥è¿™ä¸ªå'Œç‚¹ç§¯å®Œå…¨ä¸åŒã€‚

å†…ç§¯ç©ºé—´

æœ€åŽï¼Œæˆ'ä»¬å†æ¥çœ‹ä¸€ä¸‹å†…ç§¯å'Œå†…ç§¯ç©ºé—´ã€‚å› ä¸ºè§£æžå‡ ä½•å…³æ³¨çš„æ˜¯å'é‡çš„é•¿åº¦ã€ä¸¤ä¸ªå'é‡ä¹‹é—´çš„è·ç¦»å'Œè§'åº¦ï¼Œæ‰€ä»¥ï¼Œæˆ'ä»¬éœ€è¦åœ¨åŽŸæ¥å'é‡ç©ºé—´ä¸ŠåŠ ä¸€ä¸ªé¢å¤–çš„ç»"æž„ï¼Œè¿™ä¸ªé¢å¤–ç»"æž„å°±æ˜¯å†…ç§¯ï¼Œè€ŒåŠ äº†å†…ç§¯çš„å'é‡ç©ºé—´ï¼Œæˆ'ä»¬å°±å«åšå†…ç§¯ç©ºé—´ã€‚

ä¸ºäº†è¡¨è¾¾æ–¹ä¾¿ï¼Œæˆ'ä»¬å¯ä»¥æŠŠå†…ç§¯å†™æˆ$\langle\ Â·,Â· \rangle$è¿™æ ·çš„å½¢å¼ï¼Œé‚£ä¹ˆå†…ç§¯ç©ºé—´Vå°±å¯ä»¥è¢«è¡¨ç¤ºæˆè¿™æ ·ï¼š$(V,\langle\ Â·,Â· \rangle)$ã€‚è¿™æ—¶ï¼Œå¦‚æžœä¸€èˆ¬å†…ç§¯ç"±ç‚¹ç§¯æ¥è¡¨è¾¾ï¼Œé‚£è¿™ä¸ªå'é‡ç©ºé—´å°±å˜æˆäº†æ›´å…·ä½"çš„æ¬§å¼å'é‡ç©ºé—´ã€‚

æŽ¥ä¸‹æ¥ï¼Œå†…ç§¯ç©ºé—´æœ‰ä»€ä¹ˆæ€§è´¨ï¼Ÿæˆ'ä»¬å®šä¹‰ä¸€ä¸ªå†…ç§¯ç©ºé—´Vå'Œå®ƒçš„å…ƒç´ xã€yã€zï¼Œä»¥åŠä¸€ä¸ª$c \in R$ï¼š

- æ»¡è¶³å¯¹ç§°æ€§ï¼šxå'Œyçš„å†…ç§¯ç‰äºŽyå'Œxçš„å†…ç§¯ï¼Œ$\langle x, y\rangle=\langle y, x\rangle$ï¼›
- æ»¡è¶³çº¿æ€§æ€§ï¼šxå'Œ$y+cz$çš„å†…ç§¯ç‰äºŽï¼Œxå'Œyçš„å†…ç§¯ï¼Œä¸Žxå'Œzçš„å†…ç§¯ä¹˜ä»¥cåŽçš„å'Œï¼Œ
$\langle x, y+c z\rangle=\langle x, y\rangle+c\langle x, z\rangle$ï¼›
- æ»¡è¶³æ£å®šæ€§ï¼šxå'Œyçš„å†…ç§¯å¤§äºŽç‰äºŽé›¶ï¼Œ$\langle x, y\rangle \geq 0$ã€‚

å¯¹ç§°æ£å®šçŸ©é˜µ

å†…ç§¯è¿˜å®šä¹‰äº†ä¸€ç±»çŸ©é˜µï¼Œè¿™ç±»çŸ©é˜µåœ¨æœºå™¨å¦ä¹ ä¸è¾ƒä¸ºé‡è¦ï¼Œå› ä¸ºå®ƒå¯ä»¥è¢«ç"¨æ¥åˆ¤å®šå¤šå…ƒå‡½æ•°æžå€¼ï¼Œè€Œåœ¨æ·±åº¦å¦ä¹ ä¸ï¼Œå®ƒæ›´æ˜¯è¢«ç"¨æ¥èŽ·å–æœ€å°åŒ–æŸå¤±å‡½æ•°ï¼Œæˆ'ä»¬æŠŠè¿™ç±»çŸ©é˜µå«åšå¯¹ç§°æ£å®šçŸ©é˜µã€‚

å¯¹ç§°æ£å®šçŸ©é˜µçš„å®šä¹‰æ˜¯ï¼šå¦‚æžœä¸€ä¸ªå¯¹ç§°çŸ©é˜µAå±žäºŽæ–¹é˜µ$R^{nÃ—n}$ï¼Œå¯¹äºŽæ„é›¶å'é‡xï¼Œéƒ½æ»¡è¶³$x^{T} A x>0$ï¼Œé‚£ä¹ˆAå°±æ˜¯å¯¹ç§°æ£å®šçŸ©é˜µã€‚

æˆ'ä»¬æ¥çœ‹ä¸¤ä¸ªä¾‹åï¼Œåˆ¤æ–å®ƒä»¬æ˜¯ä¸æ˜¯å¯¹ç§°æ£å®šçŸ©é˜µã€‚

ç¬¬ä¸€ä¸ªä¾‹åï¼Œè¯·ä½ åˆ¤æ–ä¸‹é¢è¿™ä¸ªçŸ©é˜µæ˜¯å¯¹ç§°æ£å®šçŸ©é˜µå—ï¼Ÿ

$$
A=\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 5
\end{array}\right]
$$

ç"æ¡ˆæ˜¯çš„ï¼Œå®ƒæ˜¯å¯¹ç§°æ£å®šçŸ©é˜µã€‚å› ä¸º$x^{T} A x>0$ã€‚

$$
x^{T} A x=\left[\begin{array}{ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]\left[\begin{array}{ll}
9 & 6 \\
6 & 5
\end{array}\right]\left[\begin{array}{l}

x_{1} \\\
x_{2}
\end{array}\right]=(3 x_{1}+2 x_{2})^{2}+x_{2}^{2}>0
$$

ç¬¬äºŒä¸ªä¾‹åï¼Œè¯·ä½ çœ‹ä¸‹é¢è¿™ä¸ªçŸ©é˜µæ˜¯å¦å¯¹ç§°æ£å®šçŸ©é˜µå—ï¼Ÿ

$$
A=\left[\begin{array} {ll}
9 & 6 \\\
6 & 3
\end{array}\right]
$$

ç”æ¡ˆï¼šä¸æ˜¯çš„ï¼Œå®ƒåªæ˜¯å¯¹ç§°çŸ©é˜µã€‚å› ä¸º$x^{T} A x$å¯èƒ½å°äºŽ0ã€‚

$$
x^{T} A x=\left[\begin{array} {ll}
x_{1} & x_{2}
\end{array}\right]\left[\begin{array} {ll}
9 & 6 \\\
6 & 3
\end{array}\right]\left[\begin{array} {l}
x_{1} \\\
x_{2}
\end{array}\right]=(3 x_{1}+2 x_{2})^{2}-x_{2}^{2}
$$

é•¿åº¦ã€è·ç¦»å'Œè§'åº¦

å‰é¢æˆ'ä»¬é€šè¿‡èŒƒæ•°è®²äº†å'é‡çš„é•¿åº¦ï¼Œä½†æ˜¯å†…ç§¯çš„è§'åº¦æ¥çœ‹ï¼Œæˆ'ä»¬å'çŽ°ï¼Œå†…ç§¯å'ŒèŒƒæ•°ä¹‹é—´æœ‰ç€åƒä¸ªç¼•çš„å…³ç³»ã€‚æˆ'ä»¬æ¥çœ‹çœ‹ä¸‹é¢è¿™ä¸ªç‰ˆå¼ã€‚

$$
\|x\|=\sqrt{\langle x, x\rangle}
$$

ä»Žè¿™ä¸ªç‰ˆå¼æˆ'ä»¬å'çŽ°ï¼Œå†…ç§¯å¯ä»¥ç”¨æ¥äº§ç"ŸèŒƒæ•°ï¼Œç¡®å®žæ˜¯è¿™æ ·ã€‚ä¸è¿‡ï¼Œä¸æ˜¯æ¯ä¸€ä¸ªèŒƒæ•°éƒ½èƒ½è¢«ä¸€ä¸ªå†…ç§¯äº§ç"Ÿçš„ï¼Œæ¯"å¦‚ï¼šæ›¼å“ˆé¡¿èŒƒæ•°ã€‚æŽ¥ä¸‹æ¥ï¼Œæˆ'ä»¬è¿˜æ˜¯æ¥å…³æ³¨èƒ½ç"±å†…ç§¯äº§ç"Ÿçš„èŒƒæ•°ä¸Šï¼Œä»Žä¸åŒçš„è§'åº¦æ¥çœ‹çœ‹å‡ ä½•ä¸Šçš„é•¿åº¦ã€è·ç¦»å'Œè§'åº¦çš„æ¦‚å¿µã€‚

æˆ'ä»¬å…ˆç"¨å†…ç§¯æ¥è®¡ç®—ä¸€ä¸ª**å'é‡çš„é•¿åº¦**ï¼Œæ¯"å¦‚ï¼šå'é‡$x=[\begin{array} {ll} 1 & 1\end{array}]^{T}$ï¼Œæˆ'ä»¬å¯ä»¥ä½¿ç"¨ç‚¹ç§¯æ¥è®¡ç®—ï¼Œè®¡ç®—åŽå¾—å‡ºxçš„èŒƒæ•°æ˜¯$\sqrt{2}$ï¼Œå…·ä½"è®¡ç®—è¿‡ç¨‹æ˜¯è¿™æ ·çš„ï¼š$\|x\|=\sqrt{x^{T} x}=\sqrt{1^{2}+1^{2}}=\sqrt{2}$ã€‚

æŽ¥ç€ï¼Œæˆ'ä»¬å†æ¥çœ‹ä¸€ä¸‹**å'é‡ä¹‹é—´çš„è·ç¦»**ï¼Œä¸€ä¸ªå†…ç§¯ç©ºé—´Vï¼Œ$(V,\langle\ Â·,Â· \rangle)$ï¼Œ$x$å'Œ$y$æ˜¯å®ƒçš„ä¸¤ä¸ªå'é‡ï¼Œé‚£ä¹ˆxå'Œyä¹‹é—´çš„è·ç¦»å°±å¯ä»¥è¡¨ç¤ºæˆï¼š$d(x, y)=\|x-y\|=\sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$ã€‚

å¦‚æžœç"¨ç‚¹ç§¯æ¥è®¡ç®—xå'Œyä¹‹é—´çš„è·ç¦»ï¼Œé‚£è¿™ä¸ªè·ç¦»å°±å«åšæ¬§å¼è·ç¦»ã€‚

å†æŽ¥ç€ï¼Œæ¥çœ‹çœ‹ä¸¤ä¸ª**å'é‡ä¹‹é—´çš„è§'åº¦**ã€‚æˆ'ä»¬ä½¿ç"¨æŸ¯è¥¿-æ–½ç"¦èŒ¨ä¸ç‰ˆå¼ï¼ˆCauchy-Schwarz Inequalityï¼‰æ¥è¡¨ç¤ºå†…ç§¯ç©ºé—´ä¸ä¸¤ä¸ªå'é‡xå'Œyä¹‹é—´çš„è§'åº¦ï¼šaã€‚

$$
-1 \leq \frac{\langle x, y\rangle} {\|x\|\|y\|} \leq 1
$$

å–å€¼æ˜¯ä»Ž-1åˆ°1ä¹‹é—´ï¼Œé‚£ä¹ˆè§'åº¦å°±æ˜¯ä»Ž0åˆ°$Ï€$ä¹‹é—´ï¼Œæˆ'ä»¬ç"¨cosæ¥è¡¨ç¤ºå°±æ˜¯ï¼š

$$
\cos (a)=\frac{\langle x, y\rangle} {\|x\|\|y\|}
$$

å…¶ä¸aå°±æ˜¯è§'åº¦ï¼Œaçš„è§'åº¦å–å€¼æ˜¯0åˆ°$Ï€$ä¹‹é—´ã€‚æˆ'ä»¬å¾ˆå®¹æ˜"å°±èƒ½å'çŽ°ï¼Œå…¶å®žä¸¤ä¸ªå'é‡ä¹‹é—´çš„è§'åº¦ï¼Œå°±æ˜¯å'Šè¯‰äº†æˆ'ä»¬ä¸¤ä¸ªå'é‡ä¹‹é—´æ–¹å'çš„ç›¸ä¼¼æ€§ã€‚ä¾‹å¦‚ï¼šxå'Œ$y=4x$ï¼Œä½¿ç"¨ç‚¹ç§¯æ¥è®¡ç®—å®ƒä»¬ä¹‹é—´çš„è§'åº¦æ˜¯0ï¼Œä¹Ÿå°±æ˜¯è¯´å®ƒä»¬çš„æ–¹å'æ˜¯ä¸€æ ·çš„ï¼Œyåªæ˜¯å¯¹xæ‰©å¤§äº†4å€è€Œå·²ã€‚

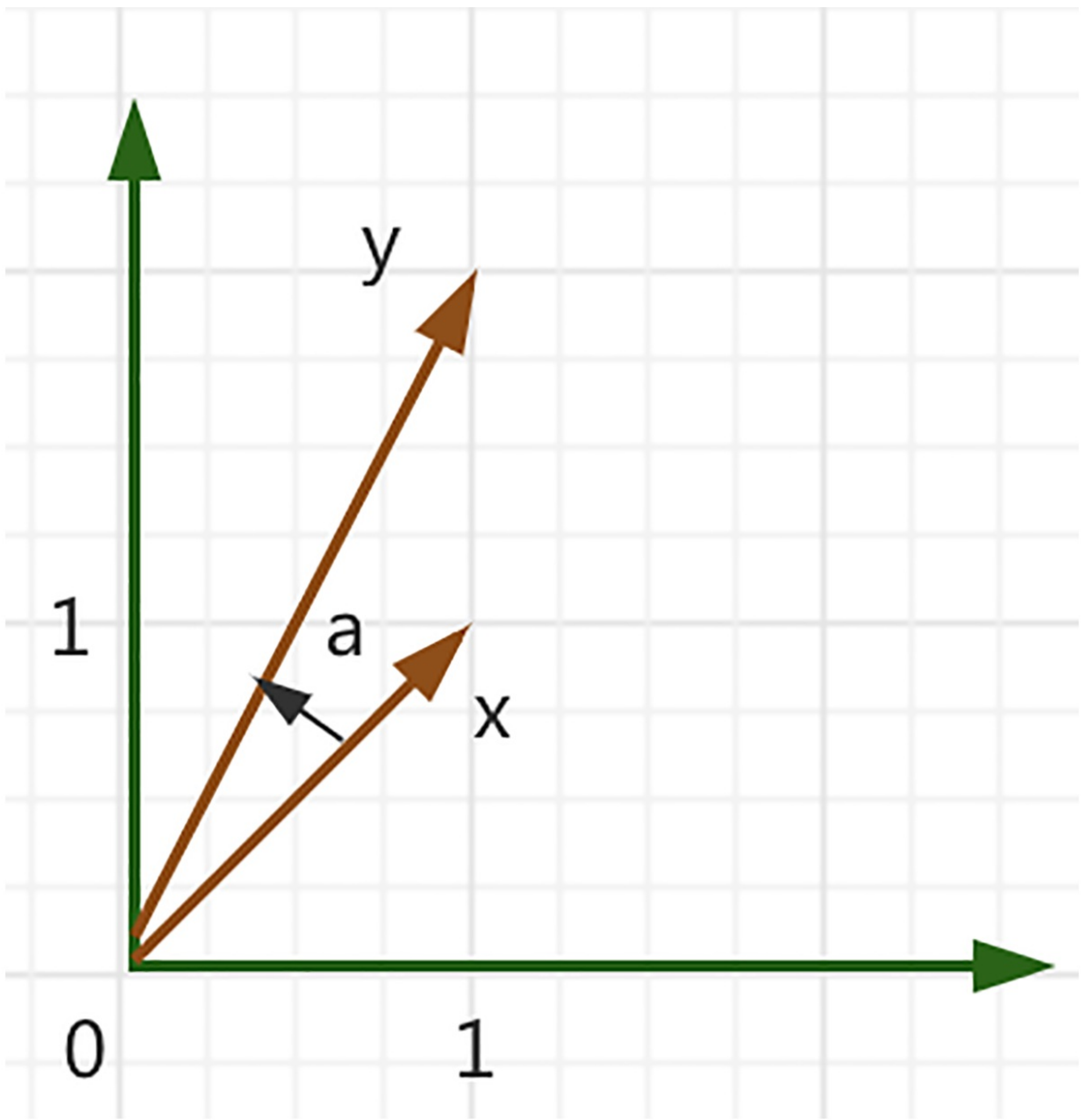
çŽ°åœ¨ï¼Œæˆ'ä»¬é€šè¿‡ä¸€ä¸ªä¾‹åï¼Œå†æ¥æ›´æ…ŽæŠ€œçœ‹ä¸€ä¸‹ä¸¤ä¸ªå'é‡ä¹‹é—´è§'åº¦çš„è®¡ç®—ï¼Œè®¾$x=[\begin{array} {ll} 1 & 1\end{array}]^{T}$ï¼Œ$y=[\begin{array} {ll} 1 & 2\end{array}]^{T}$ï¼Œä½¿ç"¨ç‚¹ç§¯æ¥è®¡ç®—ï¼Œæˆ'ä»¬å¾—å‡ºï¼š

$$
\cos (a)=\frac{\langle x, y\rangle} {\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle} }=\frac{x^{T} y} {\sqrt{x^{T} x y^{T} y} }=\frac{3} {\sqrt{10} }
$$

é‚£ä¹ˆï¼Œè¿™ä¸¤ä¸ªå'é‡ä¹‹é—´çš„è§'åº¦å¦‚ä¸‹ã€‚

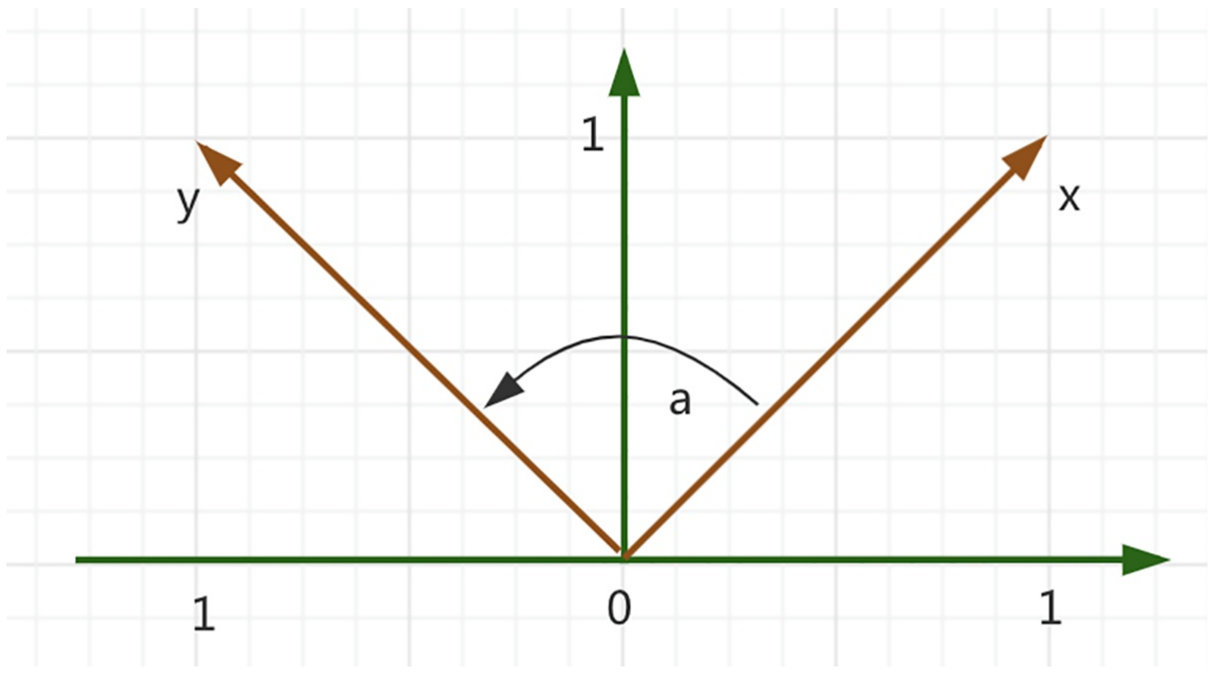
$$
\arccos \left(\frac{3} {\sqrt{10} }\right) \approx 0.32
$$

æˆ'ä»¬å¯ä»¥ç"¨å›¾æ¥æ›´ç›´è§‚åœ°è¡¨è¾¾ä¸€ä¸‹ã€‚



äºŽæ˜¯ï¼Œæˆ'ä»¬æœ€åŽå¯ä»¥å¾•å‡ºä¸€ä¸ªæ¦‚å¿µï¼Œä¹Ÿå°±æ˜¯æˆ'ä»¬åœ¨ä¸€å¼€å§‹æåˆ°çš„**æ£äº¤æ€§**ã€‚å¦‚æžœä¸¤ä¸ªå'é‡xå'Œyå†…ç§¯ä¸º0ï¼Œå³$\langle x, y\rangle=0$ï¼Œé‚£ä¹ˆxå'Œyæ˜¯æ£äº¤çš„ï¼Œè®°ä½œ$x \perp y$ã€‚å†å¦‚æžœï¼Œxå'Œyçš„èŒƒæ•°éƒ½ç‰äºŽ1ï¼Œå³$\|x\|=\|y\|=1$ï¼Œä¹Ÿå°±æ˜¯è¯´ï¼Œå¦‚æžœå®ƒä»¬éƒ½æ˜¯å•ä½å'é‡ï¼Œé‚£ä¹ˆxå'Œyå°±æ˜¯æ ‡å‡†æ£äº¤çš„ã€‚

æˆ'ä»¬ç"¨å›¾æ¥æ›´ç›´è§‚åœ°è¡¨ç¤ºä¸€ä¸‹ã€‚



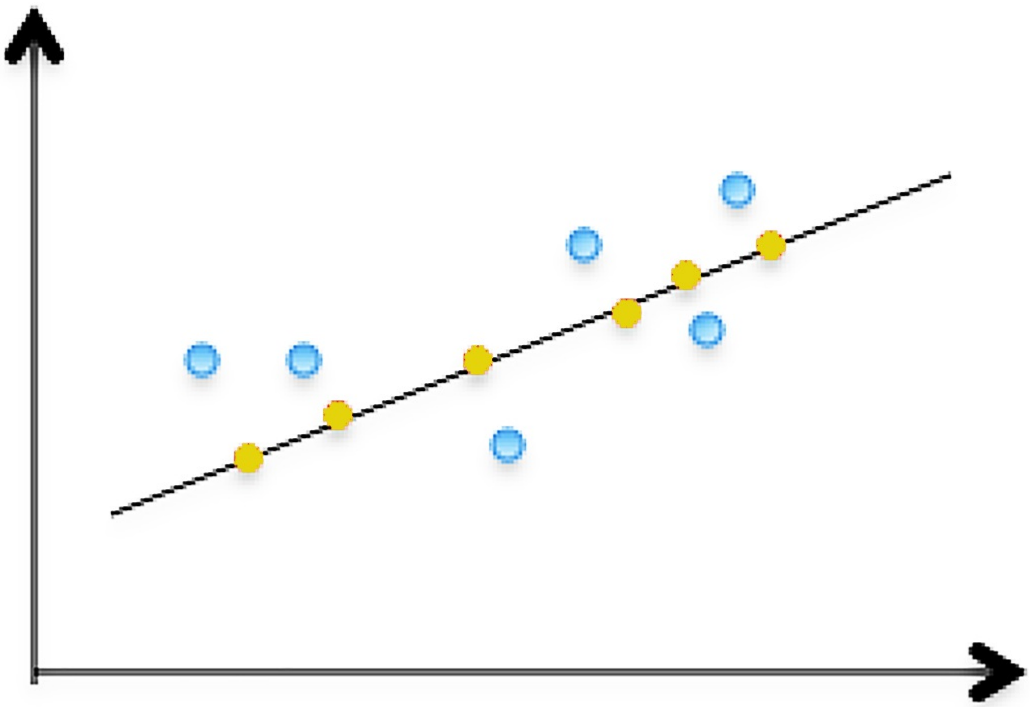
æ£äº¤æŠ•å½±

åœ¨ç†è®ºè®²è§£ä¹‹åŽï¼Œæˆ‘ä»¬è¦æ¥äº†è§£ä¸€ä¸‹è§£æžå‡ ä½•åœ¨å®žè·µä¸çš„å¸¸è¿ç”¨çš„æ¦‚å¿µâ€”â€”æ£äº¤æŠ•å½±ï¼Œå®ƒæ˜¯ä¸€ç§éžå¸¸é‡è¦çš„ç»´æ€§å˜æ¢ï¼Œåœ¨å›¾åƒåŽ‹ç¼©ã€ç†è®ºã€ç»Ÿè®¡å’Œæœºå™¨å¦ä¹ ä¸æœ‰ç€å¹¿æ³›çš„å®žé™…åº”ç”¨ã€‚

åœ¨æœºå™¨å¦ä¹ ä¸ï¼Œæ•°æ®ä¸€èˆ¬éƒ½æ˜¯é«˜ç»´çš„ã€‚ä½†æ˜¯å¾ˆå¤šæ—¶å€™ï¼Œé«˜ç»´æ•°æ®æ˜¯å¯ä»¥è¢«åŽ‹ç¼©çš„ï¼Œè€Œä¸”ï¼Œä¸æ˜¯æ‰€æœ‰ç»´åº¦çš„æ•°æ®éƒ½æ˜¯æœ‰ç”¨çš„ï¼Œå¯èƒ½åªæœ‰ä¸€äº›æ•°æ®åŒ…å«äº†å¤§éƒ¨åˆ†çš„é‡è¦ä¿¡æ¯ã€‚

æ£äº¤æŠ•å½±å°±æ˜¯é«˜ç»´å°ä½Žç»´çš„ä¸€ç§æ–¹æ³•ï¼Œå®ƒ[ç¬¬5èŠ‚è¯¾ç¨‹æ€§ç©ºé—´](#)ä¸ï¼Œæˆ‘ä»¬å·²ç»æŽ¥è§¦è¿‡çº¿æ€§å˜æ¢ä¸çš„æŠ•å½±ï¼Œç®€å•è€Œè¨€ï¼Œæˆ‘ä»¬å°±æ˜¯æŠŠé«˜ç»´æ•°æ®æŠ•å½±åˆ°ä½Žç»´åŽï¼Œæˆ‘ä»¬å°±æ˜¯æŠŠé«˜ç»´ç©ºé—´ä¸çš„æ•°æ®æŠ•å½±åˆ°ä½Žç»´ç©ºé—´ä¸ŠåŽ»ï¼ŒåŒæ—¶ä¿æŒå°½å¯èƒ½å¤šçš„ä¿¡æ¯ã€‚

æŽ¥ä¸‹æ¥ï¼Œæˆ‘ä»¬å°†è®²è§£æ£äº¤æŠ•å½±ï¼Œåœ¨ç»™å‡ºå®šä¹‰ä¹‹å‰ï¼Œå…ˆä»Žä¸€å¼ å›¾æ¥äº†è§£ä¸€ä¸‹ç›´è§‚ã€‚



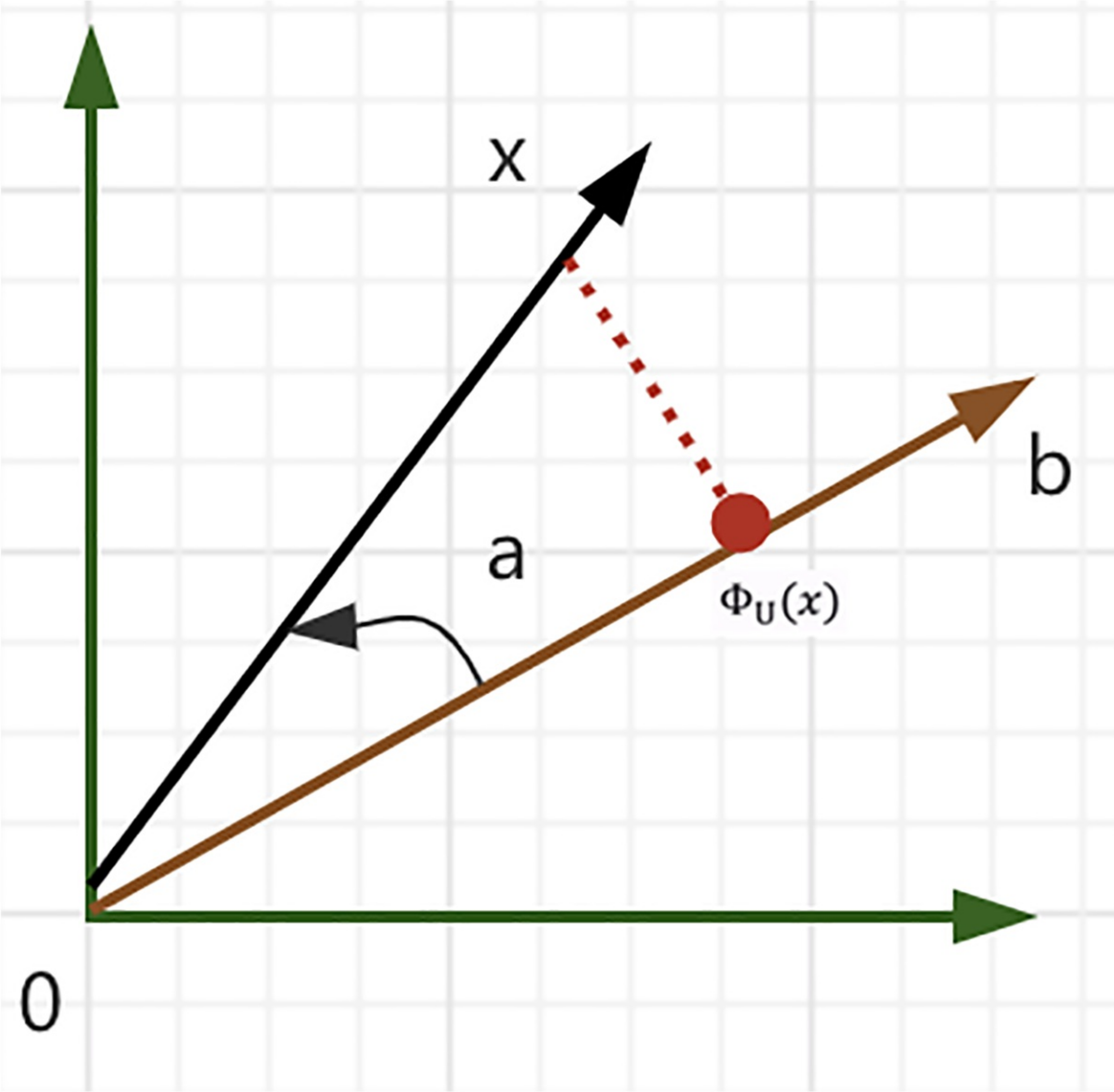
å›¾ä¸çš„è“ç‚¹æ˜¯åŽŸæ•°æ®ï¼Œé»„ç‚¹æ˜¯å®ƒä»¬çš„æ£äº¤æŠ•å½±ã€‚æ‰€ä»¥ï¼Œå®žé™…ä¸Šåœ¨ä¸€ç»´ç©ºé—´ä¸å°±åƒæ˜¯ä¸€å¼ å›¾ï¼Œå®ƒåœ¨åŽŸæ•°æ®ä¸çš„ä¿¡æ¯ã€‚

çŽ°åœ¨æˆ‘ä»¬æ¥çœ‹ä¸€ä¸‹æŠ•å½±çš„å®šä¹‰ï¼šVæ˜¯ä¸€ä¸ªå‘é‡ç©ºé—´ï¼ŒUæ˜¯Vçš„ä¸€ä¸ªåç©ºé—´ï¼Œä¸€ä¸ªä»ŽVåˆ°Uçš„çº¿æ€§æ˜ å°„Φæ˜¯ä¸€ä¸ªæŠ•å½±ï¼Œå¦‚æžœå®ƒæ»¡è¶³ï¼š$\Phi^{2}=\Phi \circ \Phi=\Phi$ã€‚å› ä¸ºçº¿æ€§æ˜ å°„å¯ä»¥ç”¨å˜æ¢çŸ©é˜µæ¥è¡¨ç¤ºï¼Œæ‰€ä»¥ï¼Œè¿™ä¸ªå®šä¹‰åŒæ ·é€‚ç”¨äºŽä¸€ä¸ªç‰¹æ®Šç±»åž‹çš„å˜æ¢çŸ©é˜µï¼šæŠ•å½±çŸ©é˜µP_{Φ}ï¼Œå®ƒä¹Ÿæ»¡è¶³ï¼š$P_{\Phi}^{2}=P_{\Phi}$ã

æŠ•å½±åˆ°ä¸€ç»´åç©ºé—´ä¸Šï¼ˆç›´çº¿ï¼‰

æŽ¥ä¸‹æ¥ï¼Œæˆ‘ä»¬æ¥çœ‹çœ‹å¦‚ä½•æŠ•å½±åˆ°ä¸€ç»´åç©ºé—´ï¼Œä¹Ÿå°±æ˜¯æŠŠå…ƒç´ ç©ºé—´çš„å‘é‡æ£äº¤æŠ•å½±åˆ°åç©ºé—´ï¼Œè¿™é‡Œæˆ‘ä»¬ä½¿ç”¨ç‚¹ç§¯ä½œä¸ºå†…ç§¯ã€‚

å‡è®¾æœ‰ä¸€æ¡é€šè¿‡åŽŸç‚¹çš„ç›´çº¿ï¼Œè¿™æ¡ç›´çº¿æ˜¯ç”±åŸºå‘é‡bäº§ç”Ÿçš„ä¸€ç»´åç©ºé—´Uï¼Œå½“æˆ‘ä»¬æŠŠä¸€ä¸ªå‘é‡xæŠ•å½±åˆ°Uæ—¶ï¼Œéœ€è¦å¯»æ‰¾ä¸€ä¸ªæœ€é è¿‘xçš„å‘é‡$\Phi_{U}(x)$ã€‚è¿˜æ˜¯è€æ ·åï¼Œæˆ‘ä»¬é€šè¿‡å›¾æ¥çœ‹ä¸€ä¸‹ã€‚



é¦–å…ˆï¼ŒæŠ•å½±$\Phi_{U}(x)$é è¿‘xï¼Œä¹Ÿå°±æ˜¯è¦æ‰¾å‡ºåxå’Œ$\Phi_{U}(x)$ä¹‹é—´çš„$\left\|x-\Phi_{U}(x)\right\|$æœ€å°è·ç¦»ï¼Œä»Žå‡ ä½•è§’åº¦æ¥è¯´ï¼Œå°±æ˜¯çº¿æ®µ$\Phi_{U}(x)-x$å’Œbæ£äº¤ï¼Œæ»¡è¶³ç‰¹å¼ï¼š$\left\langle\Phi_{U}(x)-x, b\right\rangle=0$ã€‚å…¶æ¬¡ï¼ŒæŠ•å½±$\Phi_{U}(x)$å¿…é¡»æ˜¯$U$çš„ä¸€ä¸ªå…ƒç´ ï¼Œä¹Ÿå°±æ˜¯ï¼ŒåŸºå‘é‡bçš„ä¸€ä¸ªå€æ•°ï¼ˆUï¼Œ$\Phi_{U}(x)=Î»b$ã€‚

äºŽæ˜¯ï¼Œæˆ‘ä»¬å¯ä»¥é€šè¿‡ä¸‹é¢ä¸‰ä¸ªæ¥éª¤æ¥åˆ†åˆ«å¾—åˆ°$Î»$ã€æŠ•å½±$\Phi_{U}(x)$å’ŒæŠ•å½±çŸ©é˜µP_{Φ}ï¼Œæ¥æŠŠä»»æ„xæ˜ å°„åˆ°åç©ºé—´Uä¸Šã€‚

ç¬¬ä¸€æ¥ï¼Œè®¡ç®—$Î»$ï¼Œé€šè¿‡æ£äº¤æ¡ä»¶äº§ç”Ÿè¿™æ ·çš„ç‰¹å¼ï¼š
$\left\langle x-\Phi_{U}(x), b\right\rangle=0$ã€‚å› ä¸º$\Phi_{U}(x)=Î»b$ï¼Œæ‰€ä»¥å®ƒå¯ä»¥è½¬åŒ–ä¸ºï¼š$\langle x-\lambda b, b\rangle=0$ã€‚

åˆ©ç”¨å†…ç§¯çš„åŒçº¿æ€§ï¼š$\langle x, b\rangle-\lambda\langle b, b\rangle=0$ï¼Œæˆ‘ä»¬å¾—åˆ°ï¼š

$$
\lambda=\frac{\langle x, b\rangle}{\langle b, b\rangle}=\frac{\langle b, x\rangle}{\|b\|^{2}}
$$

ç„¶åŽï¼Œæˆ‘ä»¬é€šè¿‡ç‚¹ç§¯å¾—åˆ°ï¼š

$$
\lambda=\frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}}
$$

å¦‚æžœ$\|b\|=1$ï¼Œé‚£$Î»$å°±ç‰äºŽ$b^{T}x$ã€‚

æŽ¥ç€ç¬¬äºŒæ¥ï¼Œæˆ‘ä»¬è®¡ç®—æŠ•å½±ç‚¹$\Phi_{U}(x)$ã€‚ä»Ž$\Phi_{U}(x)=Î»b$ï¼Œæˆ‘ä»¬å¾—åˆ°ï¼š

$$
\Phi_{U}(x)=\lambda b=\frac{\langle x, b\rangle}{\|b\|^{2}} b=\frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}} b
$$

é€šè¿‡ç‚¹ç§¯æ¥è®¡ç®—ï¼Œæˆ‘ä»¬å°±å¾—åˆ°äº†$\Phi_{U}(x)$çš„é•¿åº¦ï¼š

$$
\left\|\Phi_{U}(x)\right\|=\frac{\left|b^{T} x\right|}{\|b\|^{2}}\|b\|=|\cos (a)|\|x\|\|b\| \frac{\|b\|}{\|b\|^{2}}=\mid \cos (a)\|x\|
$$

è¿™é‡Œçš„aï¼Œæ˜¯xå’Œbä¹‹é—´çš„å¤¹è§’ã€‚

æœ€åŽç¬¬ä¸‰æ¥ï¼Œæˆ‘ä»¬è®¡ç®—æŠ•å½±çŸ©é˜µP_{Φ}ï¼ŒæŠ•å½±çŸ©é˜µæ˜¯ä¸€ä¸ªçº¿æ€§æ˜ å°„ã€‚æ‰€ä»¥ï¼Œæˆ‘ä»¬å¯ä»¥å¾—åˆ°ï¼š$\Phi_{U}(x)=P_{\Phi}x$ï¼Œé€šè¿‡$\Phi_{U}(x)=Î»b$ï¼Œæˆ‘ä»¬å¯ä»¥å¾—åˆ°ï¼š

$$
\Phi_{U}(x)=\lambda b=b \lambda=b \frac{b^{T} x}{\|b\|^{2}}=\frac{b b^{T}}{\|b\|^{2}} x
$$

è¿™é‡Œï¼Œæˆ‘ä»¬ç«‹å³å¯ä»¥å¾—åˆ°æŠ•å½±çŸ©é˜µP_{Φ}çš„è®¡ç®—ç‰å¼ï¼š

$$
P_{\Phi}=\frac{b b^{T}}{\|b\|^{2}}
$$

æœ¬èŠ‚å°ç»“

è¿™ä¸€èŠ‚è¯¾è¦†ç›–
çš„çŸ¥è¯†ç‚¹æœ‰ç‚¹å¤šï¼Œå› ä¸ºè¦æŠŠè§£æžå‡ ä½•çš„çŸ¥è¯†ç‚¹ï¼Œæµ‘ç¼©åˆ°æ ‚å¿ƒƒçš„å‡ ä¸ªç‚¹æ¥è®²è§£æ˜¯ä¸€é¡¹è‰°å·¨çš„ä»»åŠ¡ã€‚ä¸è¿‡ä¸è¦æ€•ï¼Œå‰é¢çš„å‡ ä¸ªçŸ¥è¯†ç‚¹éƒ½æ˜¯ä¸ºè¿™ä¸€èŠ‚çš„é‡ç‚¹â€œæ£ä¾‹æŠ•å½±â€æ¥å“ªå®«çš„ã€‚èŒƒæ•°ï¼Œè¢«ç§°ä¸ºæ¥åº¦é‡æŸä¸ªå‘é‡ç©ºé—´ä¸çš„æ¯ä¸ªå‘é‡çš„é•¿åº¦æˆ–å¤§å°ï¼Œè€Œå†…ç§¯è®©æˆ‘ä»¬å¾—ä»¥ç›´è§‚åœ°ç†è§£ä¸¤ä¸ªå‘é‡çš„é•¿åº¦ä¸Žä¸¤ä¸ªå‘é‡ä¹‹é—´çš„å¤¹è§’ï¼Œä»Žè€Œå¾—åˆ°ä¸¤ä¸ªå‘é‡ä¹‹é—´çš„æ£äº¤å…³ç³»ã€‚

æ‰€ä»¥ï¼Œå¸Œæœ›ä½ èƒ½æŽŒæ¡èŒƒæ•°å’Œå†…ç§¯çš„ç†è®ºçŸ¥è¯†ï¼Œå¹¶æŠŠå®ƒå’Œæ£äº¤æŠ•å½±ç»“åˆï¼Œè¿ç”¨åœ¨ä¸€äº›å®žè·µåº”ç”¨åœºæ™¯ä¸ï¼Œæ¯”å¦‚ï¼š3Då›¾å½¢å›¾åƒçš„æ¸²æŸ“ä¸æ•°å¦ï¼Œä»ŠåŽæœ‰æ—¶é—´æˆ‘ä¼šå†ç»†è®²ã€‚

çº¿æ€§ä»£æ•°ç»ƒä¹ åœº

è¯·ä½ ä½¿ç”¨æ£äº¤æŠ•å½±çŸ©é˜µæ¥è®¡ç®—ä¸€æ¡çº¿çš„æŠ•å½±çŸ©é˜µP_{Φ}ã€‚

è¿™æ¡çº¿é€šè¿‡åŽŸç‚¹ï¼Œç”±åŸº$b=\left[\begin{array}{lll}1 & 2 & 2\end{array}\right]^{T}$äº§ç”Ÿï¼Œ$P_{\Phi}$è®¡ç®—åŽï¼Œå†é€šè¿‡ä¸€ä¸ªxæ¥éªŒè¯ä¸€ä¸‹å®ƒæ˜¯å¦åœ¨bäº§ç”Ÿçš„çº¿ä¸Šï¼Œæˆ‘ä»¬å–$x=\left[\begin{array}{lll}1 & 1 & 1\end{array}\right]^{T}$ã€‚

æ¬¢è¿Žåœ¨ç•™è¨€åŒºæ™’å‡ºä½ çš„è¿ç®—ç»“æžœï¼Œæˆ‘ä¼šåŠæ—¶å›žå¤ã€‚åŒæ—¶ï¼Œä¹Ÿæ¬¢è¿Žä½ æŠŠè¿™ç¯‡æ–‡ç« åˆ†äº«ç»™ä½ çš„æœ‹å‹ï¼Œä¸€èµ·è®¨è®ºã€å¦ä¹ ã€‚