1) Carvê da Reis Barbosa Januciano 2025.1.08/035

1. Fórmula vetor diretor:

a) $A = (5, 4, 1)$ e $B = (-2, 3, 2)$

$$\vec{v} = B - A = (-2-5,\ 3-4,\ 2-1) = (-7, -1, 1) = \vec{v}$$

Equação paramétrica

Fórmula:

$$\begin{cases} x = 5 - 7t \\ y = 4 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

$$\frac{x-5}{-7} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-1}{1}$$

$$\begin{cases} x = A_1 + (\vec{v}_1) \cdot t \\ y = A_2 + (\vec{v}_2) \cdot t \\ z = A_3 + (\vec{v}_3) \cdot t \end{cases}$$

Fórmula: equação simétrica

$$\boxed{\frac{x-(A_1)}{(\vec{v}_1)} = \frac{y-A_2}{\vec{v}_2} = \frac{z-A_3}{\vec{v}_3}}$$

b) $A = (0, -1, 0)$ e $B = (1, 0, 0)$

$$\vec{v} = B - A = (1-0,\ 0+1,\ 0-0) = (1, 1, 0)$$

paramétrica

$$\begin{cases} x = 0 + t \\ y = -1 + t \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{y+1}{1},\ z = 0$$

não tem forma simétrica completa só constante

c) $A = (0, 1, -1)$, $B = (0, 0, 0)$

$$\vec{v} = (0-0,\ 0-1,\ 0+1) = (0, -1, 1)$$

paramétrica:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

simétrica:

$$z = 0,\ \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$$

Credeal

$\vec{v} = (6-3, 1-2, -4-1) = (3, -1, -5)$

paramétrica $\begin{cases} x = 3+3t \\ y = 2-t \\ z = 1-5t \end{cases}$ simétrica: $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-1}{5}$

2.

$x = 1-\lambda$
$y = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$
$z = 4+2\lambda$

a) $\lambda = 0$

$(x,y,z) = (1-0, 0, 4+0) = (1,0,4)$

$\lambda = 1$:

$(x,y,z) = (1-1, 1, 4+2) = (0,1,6)$

Dois pontos da reta

$A = (1,0,4)$, $B = (0,1,6)$

vetor diretor:

$\vec{v}_1 = B - A = (0-1, 1-0, 6-4) = (-1,1,2)$

$\vec{v} = (-1,1,2)$ ← direção da reta

b)

$P = (1,3,-3)$ e $Q = (-3,4,12)$ $\lambda \in \mathbb{R}$

$P = (1,3,-3)$:

$x = 1-\lambda \Rightarrow \lambda = 0$
$y = \lambda \Rightarrow \lambda = 3$
$z = 4+2\lambda \Rightarrow \lambda = -\dfrac{7}{2}$

$Q = (-3, 4, 12)$;

$x = 1 - \lambda \Rightarrow \lambda = 4$

$y = \lambda \Rightarrow \lambda = 4$

$z = 4 + 2\lambda = 4 + 8 = 12$

Todas as equações são satisfeitas para $\lambda = 4 \Rightarrow$ o ponto Q pertence à reta.

c)

$T = (1, 4, -7)$ $\vec{v} = (-1, 1, 2)$

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 4 + t \\ z = -7 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

3.

$A = (3, 6, -7)$

$B = (-5, 2, 3)$

$C = (4, -7, -6)$

a) A, B e C = Δ

vetor $\vec{AB} = B - A$:

$\vec{AB} = (-5 - 3, 2 - 6, 3 - (-7)) = (-8, -4, 10)$

vetor $\vec{AC} = C - A$:

$\vec{AC} = (4 - 3, -7 - 6, -6 - (-7)) = (1, -13, 1)$

$$(-8, -4, 10) = K(1, -13, 1) \Rightarrow \begin{cases} -8 = K \\ -4 = -13K \\ 10 = K \end{cases}$$

A, B, C formam um triângulo

/ /

b)

1: M de AB

$$M = \left(\frac{3+(-5)}{2}, \frac{6+2}{2}, \frac{-7+3}{2}\right) = (-1, 4, -2)$$

2: $\vec{v}$

$$\vec{v} = M - C = (-1-4, 4-(-7), -2-(-6)) = (-5, 11, 4)$$

3: $C = (4, -7, -6)$:

$$\vec{r}(t) = (4, -7, 6) + t(-5, 11, 4), t \in \mathbb{R}$$

Ou seja:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}$$

4.

a)

$A = (0, 1, 8)$
$B = (-3, 0, 9)$
$r: X = (1, 2, 0) + \lambda(1, 1, -3)$ $C \in r$ $\triangle ABC$

$C \in r$
$C(\lambda)$ $C = (1+\lambda, 2+\lambda, -3\lambda)$

$A\hat{C}B = 90°$, ou seja: $\vec{AC} \cdot \vec{BC} = 0$

$\vec{AC} = C - A = (1+\lambda, 2+\lambda-1, -3\lambda-8) = (1+\lambda, 1+\lambda, -3\lambda-8)$
$\vec{BC} = C - B = (1+\lambda+3, 2+\lambda-0, -3\lambda-9) = (\lambda+4, \lambda+2, -3\lambda-9)$

Produto escalar $\vec{AC} \cdot \vec{BC} = 0$

$(1+\lambda)(\lambda+4) + (1+\lambda)(\lambda+2) + (-3\lambda-8)(-3\lambda-9) = 0$

- $(1+\lambda)(\lambda+4) = \lambda+4+\lambda^2+4\lambda = \lambda^2+5\lambda+4$
- $(1+\lambda)(\lambda+2) = \lambda+2+\lambda^2+2\lambda = \lambda^2+3\lambda+2$
- $(-3\lambda-8)(-3\lambda-9) = 9\lambda^2+27\lambda+24\lambda+72 = 9\lambda^2+51\lambda+72$

$$(\lambda^2+5\lambda+4)+(\lambda^2+3\lambda+2)+(9\lambda^2+51\lambda+72) = 0$$
$$11\lambda^2+59\lambda+78 = 0$$

Equação quadrática:
$$11\lambda^2+59\lambda+78 = 0$$

$\Delta = 59^2 - 4 \cdot 11 \cdot 78 = 3481 - 3432 = 49$

$$\lambda = \frac{-59 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 11} = \frac{-59 \pm 7}{22} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{-52}{22} = \frac{-26}{11} \\ \lambda_2 = \frac{-66}{22} = -3 \end{cases}$$

para $\lambda = -3$:
$$C = (1-3, 2-3, 9) = (-2, -1, 9)$$

$A = (0,1,8)$, $B(-3,0,9)$ e $C = (-2,-1,9) = \Delta$

$$C \in r = (-2, -1, 9)$$

/ /

b)

$A=(1,1,1)$

$B=(0,0,1)$

Reta $r: X=(1,0,0)+\lambda(1,1,1)$

$P \in r$ tal que $PA = PB$ (equidistante)

$P \in r \quad P=(1+\lambda,\lambda,\lambda)$

distância $PA^2 = PB^2$

- $\vec{PA} = P-A = (1+\lambda-1,\lambda-1,\lambda-1) = (\lambda,\lambda-1,\lambda-1)$
- $\vec{PB} = P-B = (1+\lambda-0,\lambda-0,\lambda-1) = (1+\lambda,\lambda,\lambda-1)$

$$PA^2 = \lambda^2 + (\lambda-1)^2 + (\lambda-1)^2$$
$$PB^2 = (1+\lambda)^2 + \lambda^2 + (\lambda-1)^2$$

Igualando:

$$\lambda^2 + 2(\lambda-1)^2 = (1+\lambda)^2 + \lambda^2 + (\lambda-1)^2$$

Lado Esquerdo:

$$\lambda^2 + 2(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = \lambda^2 + 2\lambda^2 - 4\lambda + 2 = 3\lambda^2 - 4\lambda + 2$$

Lado Direito:

$$(1+2\lambda+\lambda^2) + \lambda^2 + (\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 3\lambda^2 + 0\lambda + 2$$

Igualando:

$$3\lambda^2 - 4\lambda + 2 = 3\lambda^2 + 2 \Rightarrow -4\lambda = 0 \quad \lambda = 0$$

$$P = (1+0,0,0) = (1,0,0)$$

Credeal

5.

$$\vec{r}(s,t) = \vec{A} + s\vec{u} + t\vec{v}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + s u_1 + t v_1 \\ y = y_0 + s u_2 + t v_2 \\ z = z_0 + s u_3 + t v_3 \end{cases}$$

a)

$A = (1,2,0)$, $\vec{u} = (1,1,0)$, $\vec{v} = (2,3,-1)$

Equações vetoriais:

$$\vec{r}(s,t) = (1,2,0) + s(1,1,0) + t(2,3,-1)$$

Equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 1 + s + 2t \\ y = 2 + s + 3t \\ z = -t \end{cases}$$

b)

$A = (1,1,0)$, $B = (1,-1,-1)$, vetor $\vec{v} = (2,1,0)$

$\vec{u} = B - A = (0,-2,-1)$

$$\vec{r}(s,t) = (1,1,0) + s(0,-2,-1) + t(2,1,0)$$

$$\begin{cases} x = 1 + 1t \\ y = 1 - 2s + t \\ z = -s \end{cases}$$

9

c)

$A = (1,0,1)$, $B = (2,1,-2)$ e $C = (1,-1,0)$

vetores:

$\vec{u} = B - A = (1,1,-3)$, $\vec{v} = C - A = (0,-1,-1)$

Equação vetorial:

$\vec{r}(s,t) = (1,0,1) + s(1,1,-3) + t(0,-1,-1)$

Equação paramétrica

$$\begin{cases} x = 1 + s \\ y = s - t \\ z = 1 - 3s - t \end{cases}$$

6..

$ax + by + cz + d = 0$

1. calcular vetor normal $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$
2. Usar ponto $A(x_0, y_0, z_0)$ aplicar:

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

a) $A = (9,-1,0)$, $\vec{u} = (0,1,0)$, $\vec{v} = (1,1,1)$

Produto vetorial $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1,0,-1)$$

$1(x-9) + 0(y+1) - 1(z-0) = 0 \Rightarrow x - z = 9 \Rightarrow \boxed{x - z - 9 = 0}$

b)

$A=(1,0,1), B=(-1,0,1), C=(2,1,2)$

$\vec{u}=B-A=(-2,0,0); \vec{v}=C-A=(1,1,1)$

Produto vetorial:

$$\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(0,2,-2)$$

Equação geral:

$$0(x-1)+2(y-0)-2(z-1)=0 \Rightarrow 2y-2z+2=0$$
$$\Rightarrow y-z+1=0$$

c)

$A=(1,1,0), B=(1,-1,1)$, vetor $\vec{u}=(2,1,0)$

$\vec{v}=B-A=(0,-2,1)$

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{vmatrix}=(1,-2,-4)$$

$$1(x-1)-2(y-1)-4(z-0)=0 \Rightarrow x-2y-4z+1+2=0 \Rightarrow x-2y-4z+3=0$$

d)

$P=(1,-1,1)$ $r: X=(0,2,2)+\lambda(1,1,-1)$; outro ponto da reta $\lambda=1$

- $\vec{u}=Q-P=(1-1, 3-(-1), 1-1)=(0,4,0)$ $Q=(1,3,1)$
- $\vec{v}=(1,1,-1)$ vetor diretor da reta

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 4 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=(-4,0,-4)$$

$$-4(x-1)+0(y+1)+4(z-1)=0 \Rightarrow -4x-4z+4+4=0$$
$$\Rightarrow \boxed{x+z=2}$$

/ /

7.

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\vec{r}(s,t) = \vec{P_0} + s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2$$

a)

$4x + 2y - z + 5 = 0$

(ponto: $x = 0, y = 0$)

$4(0) + 2(0) - z + 5 = 0 \Rightarrow z = 5 \Rightarrow P = (0,0,5)$

vetores diretores:

Valor 1: $x = 1, y = 0 \Rightarrow z = 4(1) + 5 = 9 \Rightarrow (1,0,9) - (0,0,5) = (1,0,4)$

Valor 2: $x = 0, y = 1 \Rightarrow z = 2(1) + 5 = 7 \Rightarrow (0,1,7) - (0,0,5) = (0,1,2)$

Equação paramétrica:

$\vec{r}(s,t) = (0,0,5) + s(1,0,4) + t(0,1,2)$

$$\begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = 5 + 4s + 2t \end{cases}$$

b) $5x - y - 1 = 0$

z não aparece $\Rightarrow$ qualquer valor de z $\Rightarrow y = 5x - 1$

Se $x = 0, z = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow P_1 = (0,-1,0)$

Se $x = 1, z = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow P_2 = (1,4,0)$

Se $x = 0, z = 1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow P_3 = (0,-1,1)$

vetores diretores:

$\vec{u} = P_2 - P_1 = (1,5,0), \vec{v} = P_3 - P_1 = (0,0,1)$

Equação paramétrica: $\vec{X} = (0,-1,0) + \lambda(1,5,0) + \mu(0,0,1)$

c) $z - 3 = 0 \Rightarrow z = 3$

Plano paralelo ao plano xy

Pontos no plano:

- $(0,0,3), (1,0,3), (0,1,3)$

Vetores diretores:

- $\vec{u} = (1,0,0), \vec{v} = (0,1,0)$

Equação paramétrica:

$$\vec{X} = (0,0,3) + \lambda(1,0,0) + \mu(0,1,0)$$

d) $y - z - 2 = 0 \Rightarrow y = z + 2$

x, z como parâmetros

- $x = 0, z = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow P_0 = (0,2,0)$
- $x = 1, z = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow \vec{u} = (1,0,0)$
- $x = 0, z = 1 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow \vec{v} = (0,1,1)$

$$\vec{X} = (0,2,0) + \lambda(1,0,0) + \mu(0,1,1)$$

8.

a)
$$\begin{cases} x = 1 + \lambda - \mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = 3 - \mu \end{cases}$$

$P = (1,0,3)$ quando $\lambda = \mu = 0$

Derivada em λ: $(1,2,0)$

Derivada em μ: $(-1,1,-1)$

Produto vetorial (normal):

$$\vec{n} = (1,2,0) \times (-1,1,-1) = (-2,1,3)$$

Equação geral:

$$-2(x-1) + 1(y-0) + 3(z-3) = 0 \Rightarrow -2x + 2 + y + 3z - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{-2x + y + 3z - 7 = 0}$$

Credeal

/ /

b)

$$x = 1 + \lambda$$
$$y = 2$$
$$z = 3 - \lambda + \mu$$

Ponto $(1,2,3)$, vetores diretores:

- $\lambda \to (1,0,-1)$
- $\mu \to (0,0,1)$

Produto vetorial:

$$(1,0,-1) \times (0,0,1) = (0,-1,0) \Rightarrow \text{normal} = (0,-1,0)$$

Plano paralelo ao eixo xz, portanto

$$y = 2 \Rightarrow y - 2 = 0$$

c)

$$\begin{cases} x = -2 + \lambda - \mu \\ y = 2\lambda + 2\mu \\ z = \lambda + \mu \end{cases}$$

Ponto $(-2,0,0)$
vetores:

- $\lambda \to (1,2,1)$
- $\mu \to (-1,2,1)$

Produto vetorial:

$$(1,2,1) \times (-1,2,1) = (0,-2,4) \Rightarrow \text{normal} = (0,-2,4)$$

Equação geral

$$-2(y-0) + 4(z-0) = 0 \Rightarrow \boxed{-2y + 4z = 0 \Rightarrow y = 2z}$$

9.

a) Reta r:

$$\begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1+3\lambda \end{cases}$$

Reta s:

$$\begin{cases} x = -1+4\mu \\ y = -1+2\mu \\ z = -2+6\mu \end{cases}$$

Igualando as coordenadas:

1. $1+2\lambda = -1+4\mu \Rightarrow 2\lambda - 4\mu = -2 \Rightarrow \lambda = 2\mu - 1$

2. Substituindo em y:

$\lambda = 2\mu - 1 \Rightarrow y = \lambda = 2\mu - 1 = -1+2\mu$ (confere com s)

3. Agora, $z = 1+3\lambda$ e $z = -2+6\mu$

Substituindo $\lambda = 2\mu - 1$ em r:

$z = 1+3(2\mu-1) = 1+6\mu-3 = -2+6\mu$

As retas são concorrentes

P (ponto de interseção): $\mu = 1 \Rightarrow \lambda = 2(1) - 1 = 1$

$x = 1+2(1) = 3$, $y = 1$, $z = 1+3(1) = 4 \Rightarrow \boxed{P = (3,1,4)}$

Plano gerado por r e s:

Dois vetores diretores

$\vec{v}_r = (2,1,3)$ Eles não são concorrentes, são coincidentes.

$\vec{v}_s = (4,2,6)$ Eles representam a mesma reta.

/ /

b)

Reta r:

$$X=(1,1,0)+\lambda(1,2,3)$$

Reta s:

$$X=(2,3,3)+\mu(3,2,1)$$

Montando o sistema:

$$1+\lambda=2+3\mu \Rightarrow \lambda=1+3\mu$$
$$1+2\lambda=3+2\mu$$
$$0+3\lambda=3+\mu$$

Usar $\lambda=1+3\mu$ na segunda equação

$$1+2(1+3\mu)=3+2\mu \Rightarrow 1+2+6\mu=3+2\mu \Rightarrow 6\mu-2\mu=3-3 \Rightarrow 4\mu=0$$

$$\Rightarrow \mu=0 \Rightarrow \lambda=1$$

Verifica em z:

- $z_r=3(1)=3$
- $z_s=3+0=3$ ← São concorrentes. Ponto de interseção:

$$X=(1+1,1+2,0+3)=\boxed{(2,3,3)}$$

Plano gerado:

- vetor $\vec{v_r}=(1,2,3)$
- vetor $\vec{v_s}=(3,2,1)$

Produto vetorial (normal do plano):

$$\vec{n}=(1,2,3)\times(3,2,1)=(-4,8,-4)$$

Equação do plano:

$$-4(x-2)+8(y-3)-4(z-3)=0 \Rightarrow \boxed{-4x+8y-4z=-2}$$

C)

Reta r:

$$x = 2 - 4\lambda$$
$$y = 4x + 5\lambda \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$
$$z = 11$$

Reta s:

$$\frac{x}{2} = \frac{(y-1)}{(-2)} = z$$ colocar s em paramétrica: alenotar $z = t$

$$x = 2t,$$
$$y = -2t + 1, \quad t \in \mathbb{R}$$
$$z = 11$$

igualar r:

$$z = 11 \Rightarrow t = 11$$

substituindo:

$$x = 2 \cdot 11 = 22$$
$$y = -22 + 1 = -21$$ verificar se está em r
$$z = 11$$

$$x = 2 - 4\lambda = 22 \Rightarrow -4\lambda = 20 \Rightarrow \lambda = -5$$
$$y = 4 + 5(-5) = 4 - 25 = -21$$ são concorda

Ponto de interseção $\boxed{22, -21, 11}$

vetores diretores

$$\vec{v}_r = (-4, 5, 0)$$
$$\vec{v}_s = (2, -2, 1)$$

Produto vetorial:

$$(-4, 5, 0) \times (2, -2, 1) = (5, 4, 2)$$

Equação do plano com ponto $P = (22, -21, 11)$:

$$5(x - 22) + 4(y + 21) + 2(z - 11) = 0 \Rightarrow \boxed{5x + 4y + 2z = 0}$$

d)

r:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{4} = z = t = \begin{cases} x = 3t+2 \\ y = 4t-2 \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

s:

$$x/4 = y/2 = (z-3)/2 = u \Rightarrow x = 4u, \; y = 2u, \; z = 2u+3$$

Igualar com r:

- $x = 3t + 2 = 4u \Rightarrow t = (4u-2)/3$
- $y = 4t - 2 = 2u \Rightarrow t = (2u+2)/4 = (u+1)/2$

$$\frac{4u-2}{3} = \frac{u+1}{2} \Rightarrow \text{multiplicando cruzado: } 2(4u-2) = 3(u+1) \Rightarrow 8u-4 = 3u+3 \Rightarrow 5u = 7 \Rightarrow u = \frac{7}{5}$$

Substituindo em z

- $z_r = t = \dfrac{4u-2}{3} = \dfrac{4 \cdot \frac{7}{5} - 2}{3} = \dfrac{28/5 - 2}{3} = \dfrac{18/5}{3} = \dfrac{6}{5}$
- $z_s = 2u$

Os valores não batem ⇒ retas são reversas (não se cruzam nem são paralelas)

10

Se: Plano 1: $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$
Plano 2: $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

Então o vetor da reta $\vec{r}$ é:
$\vec{v} = \vec{n_1} \times \vec{n_2}$

onde:
$\vec{n_1} = (a_1, b_1, c_1)$
$\vec{n_2} = (a_2, b_2, c_2)$

a) $\begin{cases} x + 2y + 3z - 1 = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$

$\vec{n_1} = (1, 2, 3)$
$\vec{n_2} = (1, -1, 2)$

Produto vetorial:

$$\vec{v} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{u}$$

$$\vec{v} = i(2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1)) - j(1 \cdot 2 - 3 \cdot 1) + \vec{k}(1 \cdot (-1) - 2 \cdot 1)$$

$$\vec{v} = i(4+3) - j(2-3) + k(-1-2)$$

$$\vec{v} = i(7) - j(-1) + k(-3)$$

$$\vec{v} = (7, 1, -3)$$

1° plano: $0 + 2y + 3z - 1 = 0 \rightarrow 2y + 3z = 1$
2° plano: $0 - y + 2z = 0 \rightarrow y = 2z$

Substituindo:

$$2(2z) + 3z = 1 \rightarrow 4z + 3z = 1 \rightarrow 7z = 1 \rightarrow z = \frac{1}{7}$$

$$y = 2z = \frac{2}{7}$$

Então ponto $P = (0, \frac{2}{7}, \frac{1}{7})$.

Equação da reta (a):

$$\vec{r}(t) = (0, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}) + t(7, 1, -3)$$

Credeal

b)

$$\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$$

Plano 1: $\vec{n_1}=(1,1,1)$

Plano 2: $\vec{n_2}=(1,1,-1)$

Produto vetorial:

$$\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{v}=i(1\cdot -1-1\cdot 1)-j(1\cdot -1-1\cdot 1)+k(1\cdot 1-1\cdot 1)$$

$\vec{v}=i(-1-1)-j(-1-1)+k(1-1)$ $\vec{v}=(-2,2,0)$ ← vetor diretor

Sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y-z=0 \end{cases}$$ somando as equações: $2(x+y)=1 \rightarrow x+y=\frac{1}{2}$

Somando a segunda:

$x+y-z=0 \rightarrow z=x+y=\frac{1}{2}$; Escolhendo $x=0$, então $y=\frac{1}{2}$

logo $z=\frac{1}{2}$

Equação vetorial da reta:

$\therefore X=(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})+t(-2,2,0)$

c)

$$\begin{cases} x=3 \\ 2x-z+1=0 \end{cases}$$ substituindo na segunda: $2(3)-z+1=0 \rightarrow 6-z+1=0$

$\rightarrow z=7$

Então, um ponto: $(3,y,7)$, com y livre.

O vetor diretor seria somente em y $\therefore$ $(0,1,0)$

$\vec{r}(t)=(3,0,7)+t(0,1,0)$

d) Sistema

$$\begin{cases} y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

x é livre: vetor diretor: $(1,0,0)$

d)

$$\vec{r}(t) = (0,2,0) + t(1,0,0)$$

11.

a) Reta r: ponto: $(1,-1,1)$ vetor diretor: $\vec{v}_r = (-2,1,-1)$

Reta 2: equações planos: $\begin{cases} y + z = 3 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$ direção de 2: produto vetorial dos dois planos:

$\vec{n}_1 = (0,1,1)$
$\vec{n}_2 = (1,1,-1)$

$$\vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \vec{v}_2 = \vec{i}(1 \cdot -1 - 1 \cdot 1) - \vec{j}(0 \cdot -1 - 1 \cdot 1) + \\ k(0 \cdot 1 - 1 \cdot 1) \\ \vec{v}_2 = i(-1-1) - j(0-1) + k(0-1) \\ \vec{v}_2 = (-2,1,-1) \end{array}$$

$\vec{v}_r = (-2,1,-1)$ = mesma direção → retas são paralelas ou coincidentes
$\vec{v}_2 = (-2,1,-1)$

Ponto de r: $(1,-1,1)$ Substituindo: 1ª: $-1+1 = 0 \neq$ Falso
Então, não pertence. Conclusão: Retas paralelas distintas

(b)

Reta 1:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{2} \rightarrow \vec{v}_1 = (2,3,2)$$

Reta 2:

$$(0,0,0) + \lambda(1,2,0)$$

Vetor diretor:

$$\vec{v}_2 = (1,2,0)$$

~~Dentro~~ Produto vetorial entre os vetores diretores:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & k \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad \vec{v} = i(3\cdot 0 - 2\cdot 2) - j(2\cdot 0 - 2\cdot 1) + k(2\cdot 2 - 3\cdot 1)$$

O produto vetorial não é nulo, as retas não são paralelas.

$$\vec{v} = i(-4) - j(-2) + k(4-3)$$

$$\vec{v} = (-4, 2, 1)$$

Testar interseção:

$$x_1 = -1 + 2t \quad \varepsilon \quad x_2 = \lambda$$

$$y_1 = 0 + 3t \qquad y_2 = 2\lambda$$

$$z_1 = -1 + 2t \qquad z_2 = 0$$

Igualando:

$$-1 + 2t = \lambda$$

$$3t = 2\lambda \qquad \text{de } -1 + 2t = 0 \rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$-1 + 2t = 0$$

Substituindo:

$$\lambda = -1 + 2t = 0$$

$$3t = 2\lambda \rightarrow \frac{3}{2} = 0 \rightarrow \text{Falso}$$

Retas reversas (não se cruzam e não são paralelas).

c)

$r: (8,1,9) + \lambda(2,-1,3)$

$s: (3,-4,4) + \mu(1,-2,2)$ vetores diretores:

$\vec{v}_r = (2,-1,3)$

$\vec{v}_s = (1,-2,2)$

Vetor Produto:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$\vec{v} = i((-1)\cdot 2 - 3(-2)) - j(2\cdot 2 - 3\cdot 1) + k(2\cdot(-2) - (-1)\cdot 1)$

$\vec{v} = i(-2+6) - j(4-3) + k(-4+1)$

$\vec{v} = (4,-1,-3)$ $\vec{v} \neq (0,0,0)$ não são paralelas.

Sistema:

$8 + 2\lambda = 3 + \mu$ (1)

$1 - \lambda = -4 - 2\mu$ (2)

$9 + 3\lambda = 4 + 2\mu$ (3)

Da equação (1):

$2\lambda - \mu = -5$

$\mu = 2\lambda + 5$ (4)

Substituindo (4) em (2):

$1 - \lambda = -4 - 2(2\lambda + 5)$

$1 - \lambda = -4 - 4\lambda - 10$

$1 - \lambda = -14 - 4\lambda$

$3\lambda = -15$

$\lambda = -5$

Agora da (4):

$\mu = 2(-5) + 5 = -5$

Testando na (3):

$9 + 3(-5) = 4 + 2(-5)$

Compatível: $-6 = -6$

Retas concorrentes com ponto de interseção quando $\lambda = -5$ e $\mu = -5$

Ponto de interseção em r: $(8,1,9) + (-5)(2,-1,3) = (8-10, 1+5, 9-15) = (-2,6,-6)$

/ /

d) Reta 1:

$$\frac{x+1}{2} = y = z \to \begin{cases} x = -1+2t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$ Vetor diretor: $\vec{v}_1 = (2,1,1)$

Reta 2: Interseção de planos

1. $x+y-3z=1$ normais: $\vec{n}_1 = (1,1,-3)$
2. $2x-y-2z=0$ $\vec{n}_2 = (2,-1,-2)$

Produto vetorial:

$$\vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$\vec{v}_2 = i(1\cdot -2 - (-3)\cdot(-1)) - j(1\cdot -2 - (-3)\cdot 2) + k(1\cdot -1 - 1\cdot 2)$

$\vec{v}_2 = i(-2-3) - j(-2-6) + k(-1-2)$

$\vec{v}_2 = (-5, 8, -3)$

Vetores diretores: $\vec{v}_1 = (2,1,1)$

$\vec{v}_2 = (-5,8,-3)$ $\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -5 & 8 & -3 \end{vmatrix}$

$\vec{v} = i(1\cdot -3 - 1\cdot 8) - j(2\cdot -3 - 1\cdot -5) + k(2\cdot 8 - 1\cdot -5)$

$\vec{v} = i(-3-8) - j(-6-5) + k(16+5)$

$\vec{v} = (-11, 11, 21)$

Produto vetorial não nulo $\to$ não são paralelas.

~~Reta 1:~~

~~Forma simétrica: $\frac{x+1}{2} = y = z$~~

$r: \frac{x+1}{2} = y = z \to \vec{x}_r(t) = (-1,0,0) + t(2,1,1)$

$$s: \begin{cases} x+y-3z=1 \\ 2x-y-2z=0 \end{cases}$$

Credeal

vetor diretor de 2:

normais: $(1,1,-3)$ e $(2,-1,-2)$

Produto vetorial:

$\vec{n}_{r_2} = (-5,-4,-3)$

Igualando ponto de retas:

$x = -1+2t$
$y = t$
$z = t$

Substituindo equação de 1:

$1.x + y - 3z = 1 \to (-1+2t)+t-3t = 1 \to -1 = 1 \to$ Falso

$\therefore$ As retas são reversas (não são paralelas e não se interceptam).

12.

a)

Reta r: $\vec{X_r} = (1,1,0) + \lambda(0,1,1)$, Plano π: $x-y-z=2$

vetor diretor da reta: $(0,1,1)$ Normal do plano: $(1,-1,-1)$

Produto escalar $0.1+1.(-1)+1.(-1) = -2 \neq 0$

A reta é transversal ao plano.

Ponto de interseção: Substituindo $(x,y,z) = (1, 1+\lambda, \lambda)$ na equação do plano:

$1-(1+\lambda)-\lambda = 2 \to -2\lambda = 2 \to \lambda = -1$

Ponto de interseção: $(1,0,-1)$

b)

Reta r:

$x = \frac{1}{2}+2\lambda, y = \lambda, z = \lambda$

Plano π:

$x = 3+t, y = 1+t, z = t$

Sistema de interseção é impossível (sem solução).

$\therefore$ Reta e plano são paralelos distintos.

c)

Reta r:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-2y=0 \end{cases}$$

Resolvendo:

$2^{o}: x=2y$

$1^{o}: 2y-y=1 \rightarrow y=1 \rightarrow x=2$

Vetor diretor:

Diferença dos coeficientes: $(1,1,0)\times(1,2,0)=(0,0,1)$

Plano $\pi: x+y=2$

Normal: $(1,1,0)$ Produto escalar com vetor da reta: $1+1=2\neq0$

Logo: transversal

Ponto de interseção: $x=2t, y=t, z=\lambda$; substituindo no plano:

$2t+t=2 \rightarrow t=\frac{2}{3}$

d)

Reta r: $x-2y=3-2z \rightarrow x-2y+2z=3$ e $y=2x-z \rightarrow -2x+y+z=0$

Plano $\pi: x-2x-z=0$

Resolvendo: montar sistema entre reta e o plano, ao resolver o sistema dá que a reta é transversal, com interseção em um ponto.

13a)

Reta: $r: \vec{X}=(1,1,1)+\lambda(2,m,1)$ Plano: $\pi: \vec{X}=(0,0,0)+\alpha(1,2,0)+\beta(1,0,1)$

Vetor diretor da reta: $(2,m,1)$

Vetores diretores do plano: $(1,2,0)$ e $(1,0,1)$

Normal do plano: produto vetorial

$$\vec{n}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(2,-1,-2)$$

Condição de paralelismo:

Produto escalar da direção da reta com a normal do plano igual a zero:

$(2,m,1)\cdot(2,-1,-2)=4-m-2=0 \rightarrow m=2$

b) Reta contida no plano

Reta: $r: X = (n, 2, 0) + \lambda(2, m, m)$

Plano: $x - 3y + z = 1$

Condição:

1. diretor da reta perpendicular ao normal do plano:

Normal do plano: $(1, -3, 1)$

~~Plano~~ 1 Produto escalar:

$$(2, m, m) \cdot (1, -3, 1) = 2 - 3m + m = 2 - 2m = 0 \to m = 1$$

2. Ponto da reta satisfazer o plano: Substituir $(n, 2, 0)$:

$$n - 3(2) + 0 = 1 \to n - 6 = 1 \to n = 7$$

$m = 1, n = 7$

c)

Reta (forma simétrica):

$$\frac{x - 1}{m} = \frac{y}{2} = \frac{z}{m}$$

Vetor diretor da reta: $(m, 2, m)$

Plano:

$$x + my + z = 0$$

Normal do plano: $(1, m, 1)$

Condição de transversalidade: Produto escalar diferente de zero:

$$(m, 2, m) \cdot (1, m, 1) = m + 2m + m = 4m \neq 0$$

14.2)

Planos dados por equações vetoriais:

Vetores diretores de cada plano:

· π_1: vetores: $(1,1,2)$ e $(3,3,1)$
· π_2: vetores: $(1,7,0)$ e $(1,0,4)$

Normais: Produtos vetoriais dos vetores de cada plano.
normais: $\pi_1: \vec{n_1}: (-5,5,0)$ $\pi_2: \vec{n_2}: (4,-4,-1)$
Se os normais não forem paralelos $\rightarrow$ Os planos são transversais
Os planos são transversais, interseção é uma reta.

$$\vec{v} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = (-5,-5,-40)/5 = \vec{v} = (-1,-1,-8)$$

b)

Plano π_1: forma geral: $\pi_1: x-y+2z-2=0$

$$\pi_2: \vec{X} = (0,0,1) + \lambda(4,0,3) + \mu(-1,1,1)$$

Plano π_2: Equação vetorial $\rightarrow$ calculamos a normal.
Verificação: normais não proporcionais $\rightarrow$ planos são transversais.
Resultado: Interseção é uma reta. normais: $\pi_1: (1,-1,2)$
$\pi_2 (-3,-4,1)$

c)

Planos com equações:

$$\pi_1: 2x-y+z-1=0$$
$$\pi_2: 4x-2y+2z-9=0$$

normais: $\vec{n_1} = (2,-1,1)$, $\vec{n_2} = (4,-2,2)$ são paralelos $\vec{n_2} = 2\vec{n_1}$

São coincidentes? Substituindo ponto $(0,0,1)$ de π_1 na π_2:

$$4(0)-2(0)+2(1)-9 = -7 \neq 0$$

São paralelos distintos.

d)

Plano π_1 por 3 pontos: $A=(0,1,6)$, $B=(5,0,1)$, $C=(4,0,0)$

Vetores do plano:

$$\vec{AB}=(5,-1,-5),\ \vec{AC}=(4,-1,-6)$$

Normal de π_1:

$$\vec{n_1}=\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -1 & -5 \\ 4 & -1 & -6 \end{vmatrix}=(1,10,-1)$$

Plano π_2:

$$4x+40-4z-16=0 \rightarrow (4,40,-4)$$

Normais não são múltiplos/iguais

$(1,10,-1)$ e $(4,40,-4)$ são proporcionais $\rightarrow \vec{n_2}=4\vec{n_1}$

Testando coincidência:

Substituindo ponto A na equação de π_2:

$$4(0)+40(1)-4(6)-16=40-24-16=0$$

Os planos são coincidentes

15.

a)

$$\pi_1:\begin{cases} x=-\lambda_1+2\mu_1 \\ y=m\lambda_1 \\ z=\lambda_1+\mu_1 \end{cases} \qquad \pi_2:\begin{cases} x=1+m\lambda_2+\mu_2 \\ y=2+\lambda_2 \\ z=3+m\mu_2 \end{cases}$$

Para o plano π_1:

Os vetores diretores são os coeficientes λ_1 e μ:

- vetor 1 (coeficientes de λ_1): $(-1,m,1)$
- vetor 2 (coeficientes de μ): $(2,0,1)$

Para o plano π_2:

Os vetores diretores são os coeficientes de λ_2 e μ_2:

- vetor 1 (coeficientes de λ_2): $(m,1,0)$
- vetor 2 (coeficientes de μ_2): $(1,0,m)$

Vetor normal de um plano é dado pelo produto vetorial dos seus dois vetores diretores.

Normal de π_1:

produto vetorial $(-1, m, 1)$ com $(2, 0, 1)$:

$$\vec{n_1} \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & m & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i(m \cdot 1 - 1 \cdot 0) - j(-1 \cdot 1 - 1 \cdot 2) + k(-1 \cdot 0 - m \cdot 2)$$

$$\vec{n_1} = (m, -(-1-2), -2m) = m, 3, -2m)$$

Normal de π_2:

$(m, 1, 0)$ com $(1, 0, m)$:

$$\vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix} = i(1 \cdot m - 0 \cdot 0) - j(m \cdot m - 0 \cdot 1) \; k(m \cdot 0 - 1 \cdot 1)$$

$$\vec{n_2} = (m, -m^2, -1)$$

Para os dois planos serem transversais, os vetores normais deles não podem ser paralelos, os vetores normais não podem ser múltiplos um do outro.

Normais de π_1 e π_2: $\pi_1: (m, 3, -2m)$ $\pi_2: (m, -m^2, -1)$

Se tentarmos dividir por coordenadas, não vai ser a mesma razão, não há um número real $\underline{k}$ tal que:

$$(m, 3, -2m) = k(m, -m^2, -1)$$

para qualquer valor de m, os vetores não são múltiplos.

Os planos são transversais, qualquer seja $\underline{m}$.

b)

$\pi_1: \vec{X} = (1,1,0) + \lambda(m,1,1) + \mu(1,1,m)$

$\pi_2: 2x+3y+2z+n=0$

vetores diretores de π_1: $\vec{v_1} = (m,1,1)$

$\vec{v_2} = (1,1,m)$

normal de π_1:

$$\vec{n_1} = \vec{v_1} \times \vec{v_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = i(1\cdot m - 1\cdot 1) - j(m\cdot m - 1\cdot 1) + k(m\cdot 1 - 1\cdot 1)$$

$\vec{n_1} = (m-1, -(m^2-1), m-1) = (m-1, -m^2+1, m-1)$

Normal de π_2: $2x+3y+2z+m=0$ tem normal: $\vec{n_2} = (2,3,2)$

Os planos serão paralelos se os normais forem proporcionais: $\vec{n_1} = k\vec{n_2}$

$m-1 = 2k$ (1)

$-m^2+1 = 3k$ (2)

$m-1 = 2k$ (repetindo) (3)

(1): $k = \dfrac{m-1}{2}$ na (2): $-m^2+1 = 3\left(\dfrac{m-1}{2}\right)$

$-2m^2+2 = 3m-3$

$-2m^2-3m+5=0$

Multiplicando por -1:

$2m^2+3m-5=0$

$\Delta = 9+40 = 49 \to m = \dfrac{-3 \pm \sqrt{49} = 7}{4} \to m_1 = 1$ ou $m_2 = -\dfrac{5}{2}$

Como $m=1$, a normal de $\pi_1 \to (0,0,0)$ então m_2 é a correta: $m = -\dfrac{5}{2}$

$\to -(2,5)$

Para ser distinto usamos o ponto inicial $(1,1,0) \to$

/ /

Π_2: $2(1)+3(1)+2(0)+n=0 \to 5+n=0 \to n=-5$

para ser distinto basta $n \neq -5$.

$$m = -\frac{5}{2},\ n \neq -5$$