Probabilidade e Estatística

Cayan Portela

UniCEUB

March 22, 2023

Probabilidade e Estatística

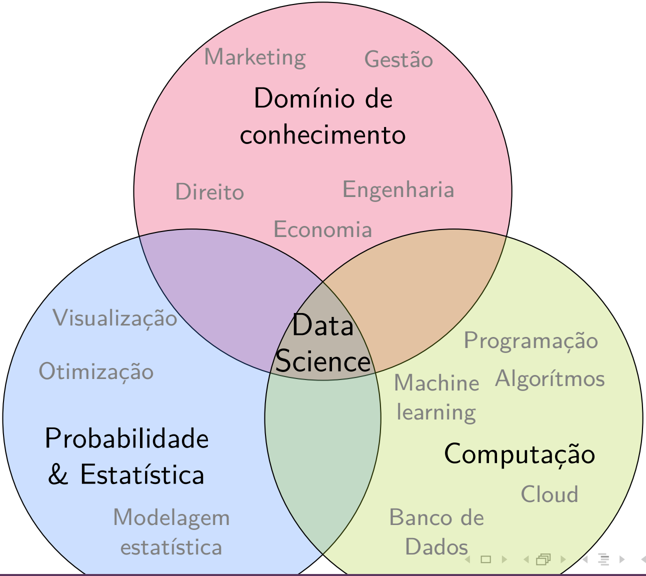
Cayan Portela

UniCEUB

March 22, 2023

Tópicos da aula

Campos de conhecimento



Modelos determinísticos X probabilísticos

Modelo é uma aproximação da realidade para ajudar no processo decisório

Modelos determinísticos X probabilísticos

Modelo é uma aproximação da realidade para ajudar no processo decisório

- Porém, a realidade é repleta de incertezas

Modelos determinísticos X probabilísticos

Modelo é uma aproximação da realidade para ajudar no processo decisório

- Porém, a realidade é repleta de incertezas
  - **O futuro é uma variável aleatória**

Modelos determinísticos X probabilísticos

Modelo é uma aproximação da realidade para ajudar no processo decisório

- Porém, a realidade é repleta de incertezas
  - **O futuro é uma variável aleatória**

Assim, as distribuições de probabilidades das variáveis de decisão e/ou das restrições também podem ser levadas em consideração

Campos distintos: ambos sobre processos aleatórios.

- Probabilidade
  - Lógica contida.
  - Algumas regras para o cálculo de probabilidades.
  - Única resposta correta
- Estatística
  - Estotástico/aleatório.
  - Conclusões probabilísticas a partir de dados experimentais.
  - Não possue uma única resposta correta

Exemplo

Qual a probabilidade de obtermos exatamente 1 ”cara” em 3 lançamentos de uma moeda justa?

Conjuntos

Conjuntos em Palavras.

- Meses do ano:
  - S = Todos os meses.
  - L = mês com 31 dias.
  - R = mês com 'r' no nome.

S = {Jan, Fev, Mar, Abr, Mai, Jun, Jul, Ago, Set, Out, Nov, Dez}

L = {Jan, Mar, Mai, Jul, Ago, Dez}

R = {Jan, Fev, Mar, Abr, Set, Out, Nov, Dez }

Conjuntos

Conjuntos em Palavras.

- Meses do ano:
    - S = Todos os meses.
    - L = mês com 31 dias.
    - R = mês com 'r' no nome.

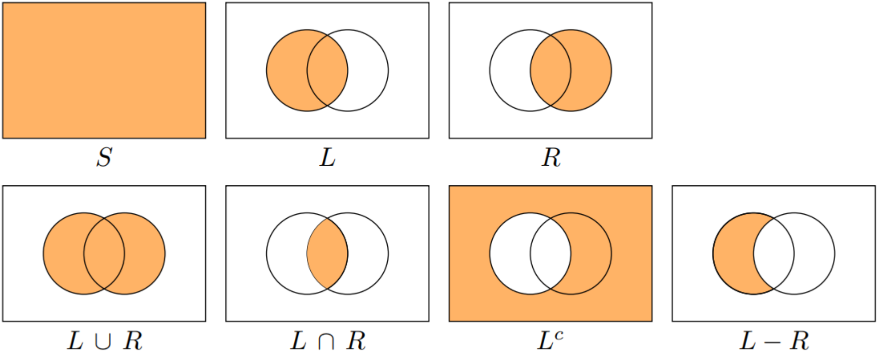
S = {Jan, Fev, Mar, Abr, Mai, Jun, Jul, Ago, Set, Out, Nov, Dez}

L = {Jan, Mar, Mai, Jul, Ago, Dez}

R = {Jan, Fev, Mar, Abr, Set, Out, Nov, Dez }

$L \cap R$ = {Jan, Mar, Out, Dez }

Conjuntos



Conjuntos

Conjunto

“Conjunto” é uma coleção de objetos (**numéricos ou não**)

Conjuntos

Conjunto

"Conjunto" é uma coleção de objetos (**numéricos ou não**)

- Os membros contidos num conjunto são chamados de "elementos"

Conjuntos

Conjunto

"Conjunto" é uma coleção de objetos (**numéricos ou não**)

- Os membros contidos num conjunto são chamados de "elementos"
  - Se **todos** os elementos de um conjunto A também forem elementos de outro conjunto B, diz-se que A está contido em B ($A \subset B$)

Conjuntos

Conjunto

"Conjunto" é uma coleção de objetos (**numéricos ou não**)

- Os membros contidos num conjunto são chamados de "elementos"
  - Se **todos** os elementos de um conjunto A também forem elementos de outro conjunto B, diz-se que A está contido em B ($A \subset B$)
- O conjunto que não contém sem nenhum elemento é chamado de "conjunto vazio" ($\varnothing$)

Exemplo

Uma banda possui vocalistas e guitarristas.

- 7 cantam.
- 4 tocam guitarra.
- 2 fazem ambos.

Quantas pessoas existem na banda?

Caminhos possíveis

Tenho 3 calças e 4 camisas.
Quantos trajes distintos posso usar?

Possibilidades

DNA é feito por sequências de nucleotídeos: A, C, G, T.

- Quantas sequências de tamanho 3 podemos ter?

Possibilidades

DNA é feito por sequências de nucleotídeos: A, C, G, T.

- Quantas sequências de tamanho 3 podemos ter?

  (i) 12 (ii) 24 (iii) 64 (iv) 128

Possibilidades

DNA é feito por sequências de nucleotídeos: A, C, G, T.

- Quantas sequências de tamanho 3 podemos ter?

  (i) 12 (ii) 24 (iii) 64 (iv) 128

$$[(?),(?),(?)]$$

Possibilidades

DNA é feito por sequências de nucleotídeos: A, C, G, T.

- Quantas sequências de tamanho 3 podemos ter?

  (i) 12 (ii) 24 (iii) 64 (iv) 128

$$[(?), (?), (?)]$$

- Quantas sequências de tamanho 3, sem repetição, podemos ter?

Permutação

- Permutações de k escolhidos de n

Permutação

- Permutações de k escolhidos de n

Quais permutações de $k = 3$ podemos ter de $n = \{a, b, c, d\}$?

Permutação

- Permutações de k escolhidos de n

Quais permutações de $k = 3$ podemos ter de $n = \{a, b, c, d\}$?

abc abd acb acd adb adc
bac bad bca bcd bda bdc
cab cad cba cbd cda cdb
dab dac dba dbc dca dcb

Combinação

Subconjuntos:

- Ordem não importa

Quantas combinações de 3 elementos podemos ter de $\{a, b, c, d\}$?

$$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$$

Permutação e Combinação

abc abd acb acd adb adc
bac bad bca bcd bda bdc
cab cad cba cbd cda cdb
dab dac dba dbc dca dcb

$$P_{(n,k)} = P_{(4,3)} = 4!$$

$$[(4) \times (3) \times (2)]$$

$\{a, b, c\}$
$\{a, b, d\}$
$\{a, c, d\}$
$\{b, c, d\}$

$$C_{(3,4)} = \frac{P_{(4,3)}}{3!} = \frac{4!}{3!}$$

Ordem não importa

Permutação e Combinação

abc abd acb acd adb adc
bac bad bca bcd bda bdc
cab cad cba cbd cda cdb
dab dac dba dbc dca dcb

$$P_{(n,k)} = P_{(4,3)} = 4!$$

$$[(4) \times (3) \times (2)]$$

{a, b, c}
{a, b, d}
{a, c, d}
{b, c, d}

$$C_{(3,4)} = \frac{P_{(4,3)}}{3!} = \frac{4!}{3!}$$

Ordem não importa

Permutação e Combinação

abc abd acb acd adb adc
bac bad bca bcd bda bdc
cab cad cba cbd cda cdb
dab dac dba dbc dca dcb

$$P_{(n,k)} = P_{(4,3)} = 4!$$

$$[(4) \times (3) \times (2)]$$

{a, b, c}
{a, b, d}
{a, c, d}
{b, c, d}

$$C_{(3,4)} = \frac{P_{(4,3)}}{3!} = \frac{4!}{3!}$$

Ordem não importa

$$C_{(n,k)} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

n elementos tomados k a k

Exemplo

Considere uma moeda justa.

- Quantas possíveis maneiras podemos obter exatamente 3 caras em 10 jogadas?

Exemplo

Considere uma moeda justa.

- Quantas possíveis maneiras podemos obter exatamente 3 caras em 10 jogadas?

- Qual a probabilidade de termos exatamente 3 caras em 10 jogadas?

Espaço amostral

Espaço amostral

Espaço amostral (Ω) é o conjunto de todos os possíveis resultados de um determinada variável aleatória

Espaço amostral

Espaço amostral

Espaço amostral (Ω) é o conjunto de todos os possíveis resultados de um determinada variável aleatória

- Os elementos e subconjuntos do espaço amostral representam os possíveis **eventos** associados à variável aleatória
  - Os eventos podem ser combinados de acordo com as operações de conjuntos para formar novos eventos

Variável aleatória

Etimologicamente, **Variável aleatória** é uma:

Variável aleatória

Variável aleatória

Etimologicamente, **Variável aleatória** é uma:

- **Variável**: Possui um valor desconhecido

Variável aleatória

Variável aleatória

Etimologicamente, **Variável aleatória** é uma:

- **Variável**: Possui um valor desconhecido
- **Aleatória**: Pode possuir valores diferentes, com diferentes probabilidades

Variável aleatória

Variável aleatória

Etimologicamente, **Variável aleatória** é uma:

- **Variável**: Possui um valor desconhecido
- **Aleatória**: Pode possuir valores diferentes, com diferentes probabilidades

Espaço amostral

Exemplo 6.01

Defina o espaço amostral das seguintes variáveis:

Espaço amostral

Exemplo 6.01

Defina o espaço amostral das seguintes variáveis:

- Resultado da conta $1 + 1$

Espaço amostral

Exemplo 6.01

Defina o espaço amostral das seguintes variáveis:

- Resultado da conta $1 + 1$
- Capital do Brasil

Exemplo 6.01

Defina o espaço amostral das seguintes variáveis:

- Resultado da conta $1 + 1$
- Capital do Brasil
- Número de SSs em Probabilide e Estatística

Espaço amostral

Exemplo 6.01

Defina o espaço amostral das seguintes variáveis:

- Resultado da conta $1 + 1$
- Capital do Brasil
- Número de SSs em Probabilide e Estatística
- Número de pessoas na nova turma do curso.

Espaço amostral

Exemplo 6.01

Defina o espaço amostral das seguintes variáveis:

- Resultado da conta $1 + 1$
- Capital do Brasil
- Número de SSs em Probabilide e Estatística
- Número de pessoas na nova turma do curso.
- Tempo até o lançamento de um novo filme, em uma sequencia.

Complementar de um conjunto

O complementar (ou complementar absoluto) funciona como o operador negação

Complementar de um conjunto

O complementar (ou complementar absoluto) funciona como o operador negação

- Dado um conjunto $A \in \Omega$, seu complementar (A^c) constitui nos elementos presentes no espaço amostral, mas não em A

$$A^c = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$$

Complementar de um conjunto

O complementar (ou complementar absoluto) funciona como o operador negação

- Dado um conjunto $A \in \Omega$, seu complementar (A^c) constitui nos elementos presentes no espaço amostral, mas não em A

$$A^c = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$$

- Veja A^c como **"NÃO"** A

Complementar de um conjunto

Exemplo 6.02 (a)

Seja X = Nota final em Probabilidade e Estatística:

- Defina o espaço amostral de X

Complementar de um conjunto

Exemplo 6.02 (a)

Seja X = Nota final em Probabilidade e Estatística:

- Defina o espaço amostral de X

Seja o evento A = Menção SS

- Descreva os eventos A e A^c

Interseção de dois conjuntos

A **interseção** (ou conjunção) entre os conjuntos A e B ($A \cap B$) constitui nos elementos pertencentes tanto a A quanto a B

$$A \cap B = \{x \in \Omega \mid x \in A; x \in B\}$$

Interseção de dois conjuntos

A **interseção** (ou conjunção) entre os conjuntos A e B ($A \cap B$) constitui nos elementos pertencentes tanto a A quanto a B

$$A \cap B = \{x \in \Omega \mid x \in A; x \in B\}$$

- Veja $A \cap B$ como A **"E"** B

Interseção de dois conjuntos

Exemplo 6.02 (b)

Sejam os eventos B = Aprovação; C = Menção MS

- Descreva os eventos $B \cap C$, C^c e $B^c \cap C$

Eventos mutuamente excludentes

Dois eventos A e B são ditos mutuamente excludentes quando $A \cap B = \varnothing$

Eventos mutuamente excludentes

Dois eventos A e B são ditos mutuamente excludentes quando $A \cap B = \varnothing$

- Se quando um acontece, o outro não acontece, é natural que A e B não possam acontecer ao mesmo tempo.

União de dois conjuntos

A **união** (ou disjunção) entre os conjuntos A e B ($A \cup B$) constitui nos elementos pertencentes a A, a B, ou a ambos

$$A \cup B = \{x \in \Omega \mid x \notin (A^c \cap B^c)\}$$

União de dois conjuntos

A **união** (ou disjunção) entre os conjuntos A e B ($A \cup B$) constitui nos elementos pertencentes a A, a B, ou a ambos

$$A \cup B = \{x \in \Omega \mid x \notin (A^c \cap B^c)\}$$

- Veja $A \cup B$ como A **"OU"** B

União de dois conjuntos

Exemplo 6.02 (c)

Sejam os eventos B = Aprovação; C = Menção MS

- Descreva os eventos $B \cup C$, $B \cup C^c$ e $(B^c \cap C^c)^c$

União exclusiva de dois conjuntos

A **união exclusiva** (ou disjunção exclusiva) entre os conjuntos A e B ($A \underline{\cup} B$) constitui nos elementos pertencentes a A ou a B, mas **não** a ambos

$$A \underline{\cup} B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$$

União exclusiva de dois conjuntos

A **união exclusiva** (ou disjunção exclusiva) entre os conjuntos A e B ($A \underline{\cup} B$) constitui nos elementos pertencentes a A ou a B, mas **não** a ambos

$$A \underline{\cup} B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$$

- Veja $A \underline{\cup} B$ como <u>**"OU"** A, **"OU"** B</u>

União exclusiva de dois conjuntos

Exemplo 6.02 (d)

Sejam os eventos A = Menção SS; D = Reprovação

- Descreva os eventos $A \underline{\cup} D$ e $A \underline{\cup} D^c$

Diferença de dois conjuntos

A **diferença** (ou complementar relativo) entre os conjuntos A e B ($A \setminus B$) constitui nos elementos pertencentes a A, mas não a B

$$A \setminus B = \{x \in \Omega \mid x \in A; x \notin B\}$$

Diferença de dois conjuntos

A **diferença** (ou complementar relativo) entre os conjuntos A e B ($A \setminus B$) constitui nos elementos pertencentes a A, mas não a B

$$A \setminus B = \{x \in \Omega \mid x \in A; x \notin B\}$$

- Note que $A^c = \Omega \setminus A$
- $A \setminus B \neq B \setminus A$**!**

Diferença de dois conjuntos

Exemplo 6.02 (e)

Sejam os eventos D = Reprovação; E = Menção MI

- Descreva os eventos $(D \setminus E)^c$ e $E \setminus D$

Exemplo 6.03

Seja $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. $A = \{2, 4, 7, 10\}$; $B = \{2, 3, 5, 7\}$; $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $D = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Forneça:

Exemplo 6.03

Seja $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. $A = \{2, 4, 7, 10\}$; $B = \{2, 3, 5, 7\}$; $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $D = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Forneça:

- $A \cap B^c$

Exemplo 6.03

Seja $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. $A = \{2, 4, 7, 10\}$; $B = \{2, 3, 5, 7\}$; $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $D = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Forneça:

- $A \cap B^c$
- $B \cup C^c$

Exercícios

Exemplo 6.03

Seja $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. $A = \{2, 4, 7, 10\}$; $B = \{2, 3, 5, 7\}$; $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $D = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Forneça:

- $A \cap B^c$
- $B \cup C^c$
- $A^c \; \underline{\cup} \; C$

Exercícios

Exemplo 6.03

Seja $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. $A = \{2, 4, 7, 10\}$; $B = \{2, 3, 5, 7\}$; $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $D = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Forneça:

- $A \cap B^c$
- $B \cup C^c$
- $A^c \; \underline{\cup} \; C$
- $(\Omega \backslash C)^c$

Exercícios

Exemplo 6.03

Seja $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. $A = \{2, 4, 7, 10\}$; $B = \{2, 3, 5, 7\}$; $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $D = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Forneça:

- $A \cap B^c$
- $B \cup C^c$
- $A^c \underline{\cup} C$
- $(\Omega \backslash C)^c$
- D^c

Exemplo 6.04

Sejam X = curso de um estudante do UniCEUB, e os eventos A = Ciência de Dados/Diurno; B = Ciência de dados/Noturno. Forneça a expressão do conjunto no qual se encaixam os seguintes casos:

Exemplo 6.04

Sejam X = curso de um estudante do UniCEUB, e os eventos A = Ciência de Dados/Diurno; B = Ciência de dados/Noturno. Forneça a expressão do conjunto no qual se encaixam os seguintes casos:

- Estudante de ciência de dados

Exemplo 6.04

Sejam X = curso de um estudante do UniCEUB, e os eventos A = Ciência de Dados/Diurno; B = Ciência de dados/Noturno. Forneça a expressão do conjunto no qual se encaixam os seguintes casos:

- Estudante de ciência de dados
- Não é estudante de ciência de dados.

Exercícios

Exemplo 6.04

Sejam X = curso de um estudante do UniCEUB, e os eventos A = Ciência de Dados/Diurno; B = Ciência de dados/Noturno. Forneça a expressão do conjunto no qual se encaixam os seguintes casos:

- Estudante de ciência de dados
- Não é estudante de ciência de dados.
- Estudante de outro curso

Exercícios

Exemplo 6.04

Sejam X = curso de um estudante do UniCEUB, e os eventos A = Ciência de Dados/Diurno; B = Ciência de dados/Noturno. Forneça a expressão do conjunto no qual se encaixam os seguintes casos:

- Estudante de ciência de dados
- Não é estudante de ciência de dados.
- Estudante de outro curso

Definição "clássica" de probabilidade

$$P(X) = \frac{\text{Nº de casos favoráveis}}{\text{Nº de casos possíveis}}$$

Definição “clássica” de probabilidade

$$P(X) = \frac{\text{Nº de casos favoráveis}}{\text{Nº de casos possíveis}}$$

Probabilidade

É o resultado numérico de uma **função** que associa cada elemento do espaço amostral de uma variável aleatória X a um número real entre 0 e 1

$$P : \Omega \longrightarrow [0,1]$$

$$P(\omega) = P(X = \omega), \omega \in \Omega$$

Probabilidade

É o resultado numérico de uma **função** que associa cada elemento do espaço amostral de uma variável aleatória X a um número real entre 0 e 1

$$P : \Omega \longrightarrow [0, 1]$$

$$P(\omega) = P(X = \omega), \omega \in \Omega$$

- Para cada **resultado possível** de uma variável aleatória, a função de probabilidade diz o quão provável é a ocorrência daquele **evento**

Axiomas de Kolmogorov

Axiomas de Kolmogorov

A probabilidade de ocorrência de eventos $A_1, A_2, \ldots \in \Omega$ segue três propriedades básicas:

Axiomas de Kolmogorov

Axiomas de Kolmogorov

A probabilidade de ocorrência de eventos $A_1, A_2, \ldots \in \Omega$ segue três propriedades básicas:

- $0 \leq P(A) \leq 1$

Axiomas de Kolmogorov

A probabilidade de ocorrência de eventos $A_1, A_2, \ldots \in \Omega$ segue três propriedades básicas:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$

Axiomas de Kolmogorov

Axiomas de Kolmogorov

A probabilidade de ocorrência de eventos $A_1, A_2, \ldots \in \Omega$ segue três propriedades básicas:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$
- Se $A_1, A_2, \ldots$ forem dois a dois disjuntos (i.e., $P(A_i \cap A_j) = 0, \forall i \neq j$), $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Probabilidade: propriedades

Sejam os eventos A e B subconjuntos de Ω, é válido que:

- $P(\varnothing) = 0$

Probabilidade: propriedades

Sejam os eventos A e B subconjuntos de Ω, é válido que:

- $P(\varnothing) = 0$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$

Probabilidade: propriedades

Sejam os eventos A e B subconjuntos de Ω, é válido que:

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- Se $A \subseteq B$, então $P(A) \leq P(B)$

Probabilidade: propriedades

Sejam os eventos A e B subconjuntos de Ω, é válido que:

- $P(\varnothing) = 0$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- Se $A \subseteq B$, então $P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Probabilidade: propriedades

Sejam os eventos A e B subconjuntos de Ω, é válido que:

- $P(\varnothing) = 0$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- Se $A \subseteq B$, então $P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Exercício

Dez alunos escolhem arbitrariamente um número natural entre 1 e 10. Qual é a probabilidade de um número qualquer ser escolhido mais de uma vez?

Exercício

Sejam A e B dois eventos em um dado espaço amostral, tais que $P(A) = 0,2$, $P(B) = p$, $P(A \cup B) = 0,5$ e $P(A \cap B) = 0,1$. Determine o valor de p.

Distribuição de probabilidade

A atribuição da probabilidade de ocorrência a cada elemento do espaço amostral define uma **distribuição de probabilidade**

Distribuição de probabilidade

A atribuição da probabilidade de ocorrência a cada elemento do espaço amostral define uma **distribuição de probabilidade**

- A distribuição de probabilidade fornece $P(X = \omega)$, **para todo** $\omega \in \Omega$

distri.png

Função de probabilidade

Caso a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória X seja conhecida, é fácil construir sua função de probabilidade

$$f(\omega) = P(X = \omega), \forall\ \omega \in \Omega$$

Função de probabilidade

Caso a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória X seja conhecida, é fácil construir sua função de probabilidade

$$f(\omega) = P(X = \omega), \forall\ \omega \in \Omega$$

- $f(\omega) \geq 0, \forall\ \omega \in \Omega$
- $\sum_{\Omega} f(\omega) = 1$

Exemplos

Exemplo 6.05

Forneça a distribuição de probabilidade e a função de probabilidade dos seguintes casos:

Exemplos

Exemplo 6.05

Forneça a distribuição de probabilidade e a função de probabilidade dos seguintes casos:

- Arremesso de um dado não viciado

Exemplos

Exemplo 6.05

Forneça a distribuição de probabilidade e a função de probabilidade dos seguintes casos:

- Arremesso de um dado não viciado
- Arremesso de um dado viciado no qual os números primos saem com probabilidade três vezes maior

Função de distribuição acumulada

A função de distribuição acumulada fornece a probabilidade acumulada de X até um ponto específico

$$F(\omega) = P(X \leq \omega), \forall \ \omega \in \Omega$$

Função de distribuição acumulada

A função de distribuição acumulada fornece a probabilidade acumulada de X até um ponto específico

$$F(\omega) = P(X \leq \omega), \forall \ \omega \in \Omega$$

- $P(k_1 < \omega \leq k_2) = F(k_2) - F(k_1)$

Exemplos

Exemplo 6.06

Forneça a função de distribuição acumulada dos seguintes casos:

Exemplos

Exemplo 6.06

Forneça a função de distribuição acumulada dos seguintes casos:

- Arremesso de um dado não viciado

Exemplos

Exemplo 6.06

Forneça a função de distribuição acumulada dos seguintes casos:

- Arremesso de um dado não viciado
- Arremesso de um dado viciado no qual os números primos saem com probabilidade três vezes maior

Probabilidade Condicional

Probabilidade é um conceito que modela a **incerteza**

Probabilidade Condicional

Probabilidade é um conceito que modela a **incerteza**

- A incerteza é consequência da falta de informações

Probabilidade Condicional

Probabilidade é um conceito que modela a **incerteza**

- A incerteza é consequência da <u>falta de informações</u>

Assim, à medida que mais informações estão disponíveis, a probabilidade de ocorrência de um evento pode mudar

Intuição da probabilidade condicional

Exemplo 7.01

Forneça uma estimativa da probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso ter uma altura superior a 2 metros, dadas as seguintes informações:

Intuição da probabilidade condicional

Exemplo 7.01

Forneça uma estimativa da probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso ter uma altura superior a 2 metros, dadas as seguintes informações:

- A pessoa escolhida é um homem

Intuição da probabilidade condicional

Exemplo 7.01

Forneça uma estimativa da probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso ter uma altura superior a 2 metros, dadas as seguintes informações:

- A pessoa escolhida é um homem
- A pessoa escolhida tem altura maior que 1.70 metro

Intuição da probabilidade condicional

Exemplo 7.01

Forneça uma estimativa da probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso ter uma altura superior a 2 metros, dadas as seguintes informações:

- A pessoa escolhida é um homem
- A pessoa escolhida tem altura maior que 1.70 metro
- A pessoa escolhida é um jogador de basquete

Intuição da probabilidade condicional

Exemplo 7.01

Forneça uma estimativa da probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso ter uma altura superior a 2 metros, dadas as seguintes informações:

- A pessoa escolhida é um homem
- A pessoa escolhida tem altura maior que 1.70 metro
- A pessoa escolhida é um jogador de basquete
- A pessoa escolhida joga como pivô

Intuição da probabilidade condicional

Exemplo 7.01

Forneça uma estimativa da probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso ter uma altura superior a 2 metros, dadas as seguintes informações:

- A pessoa escolhida é um homem
- A pessoa escolhida tem altura maior que 1.70 metro
- A pessoa escolhida é um jogador de basquete
- A pessoa escolhida joga como pivô
- A pessoa escolhida é a mais alta do seu time

Intuição da probabilidade condicional

Exemplo 7.01

Forneça uma estimativa da probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso ter uma altura superior a 2 metros, dadas as seguintes informações:

- A pessoa escolhida é um homem
- A pessoa escolhida tem altura maior que 1.70 metro
- A pessoa escolhida é um jogador de basquete
- A pessoa escolhida joga como pivô
- A pessoa escolhida é a mais alta do seu time

Acréscimos informacionais implicam em diminuição do espaço amostral associado!

Probabilidade condicional

Caso seja sabido que um evento A ocorreu, o espaço amostral original (em que A era uma incerteza) reduzir-se-à aos casos em que A passa a ser uma certeza

Probabilidade condicional

Caso seja sabido que um evento A ocorreu, o espaço amostral original (em que A era uma incerteza) reduzir-se-à aos casos em que A passa a ser uma certeza

- A probabilidade de ocorrência de B, dado que aconteceu A ($\boldsymbol{P(B|A)}$), equivale a calcular P(B) em relação ao espaço amostral reduzido onde A é uma certeza

Conheça Linda

Linda tem 31 anos de idade, é solteira, franca e muito inteligente. É formada em filosofia. Quando era estudante, preocupava-se profundamente com questões de discriminação e justiça social, e também participava de manifestações antinucleares

Conheça Linda

Conheça Linda

- Linda é professora numa escola primária.

Conheça Linda

- Linda é professora numa escola primária.
- Linda trabalha numa livraria e faz aula de ioga.

Conheça Linda

- Linda é professora numa escola primária.
- Linda trabalha numa livraria e faz aula de ioga.
- Linda é ativa no movimento feminista.

Conheça Linda

- Linda é professora numa escola primária.
- Linda trabalha numa livraria e faz aula de ioga.
- Linda é ativa no movimento feminista.
- Linda é assistente social de psiquiatria.

Conheça Linda

- Linda é professora numa escola primária.
- Linda trabalha numa livraria e faz aula de ioga.
- Linda é ativa no movimento feminista.
- Linda é assistente social de psiquiatria.
- Linda é caixa de banco.

Conheça Linda

- Linda é professora numa escola primária.
- Linda trabalha numa livraria e faz aula de ioga.
- Linda é ativa no movimento feminista.
- Linda é assistente social de psiquiatria.
- Linda é caixa de banco.
- Linda é vendedora de seguros.

Conheça Linda

- Linda é professora numa escola primária.
- Linda trabalha numa livraria e faz aula de ioga.
- Linda é ativa no movimento feminista.
- Linda é assistente social de psiquiatria.
- Linda é caixa de banco.
- Linda é vendedora de seguros.
- Linda é caixa de banco e ativa no movimento feminista.

Conheça Linda

- Qual alternativa é mais provavel?
  - → Linda é uma caixa de banco.
  - → Linda é uma caixa de banco e é ativa no movimento feminista.

Probabilidade condicional

ATENÇÃO!

Probabilidade condicional

ATENÇÃO!

- $P(B|A)$ **NÃO** precisa ser maior que $P(B)$!!!

Probabilidade condicional

ATENÇÃO!

- $P(B|A)$ **NÃO** precisa ser maior que $P(B)$!!!
  - O espaço amostral está associado à diminuição da incerteza; dada a ocorrência de A, a probabilidade de B ocorrer pode aumentar ou diminuir

Probabilidade condicional

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Probabilidade condicional

$$\boldsymbol{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Propriedades:

- $0 \leq P(B|A) \leq 1$

Probabilidade condicional

$$\boldsymbol{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Propriedades:

- $0 \leq P(B|A) \leq 1$
- $P(\Omega|A) = 1$

Probabilidade condicional

$$\boldsymbol{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Propriedades:

- $0 \leq P(B|A) \leq 1$
- $P(\Omega|A) = 1$
- $P(A|A) = 1$

Probabilidade condicional

$$\boldsymbol{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Propriedades:

- $P(\varnothing|A) = 0$

$$\boldsymbol{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Propriedades:

- $P(\varnothing|A) = 0$
- $P(A|\varnothing) = P(A)$

Probabilidade condicional

$$\boldsymbol{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Propriedades:

- $P(\varnothing|A) = 0$
- $P(A|\varnothing) = P(A)$
- Se $B_1 \cap B_2 = \varnothing$, $P(B_1 \cup B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A)$

Probabilidade condicional

Exemplo 7.02

100 alunos se inscreveram em um programa de intercâmbio, dentre os quais 60 falam inglês, 70 falam espanhol e 40 falam as duas línguas. Calcule:

- A probabilidade de se selecionar ao acaso um aluno que não fale nem inglês, nem espanhol
- Sabendo que se selecionou um aluno que não fala espanhol, qual a probabilidade de ele falar inglês?

Probabilidade condicional

Exemplo 7.03

Um cofre possui 50 moedas, 40 de 10 centavos e 10 de 5 centavos. Retirando aleatoriamente três moedas **sem reposição** e assumindo que todas as moedas possuem a mesma probabilidade de serem selecionados, calcule a probabilidade de:

- A soma do valor das três moedas ser igual a 20 centavos

Probabilidade condicional

Exemplo 7.03

Um cofre possui 50 moedas, 40 de 10 centavos e 10 de 5 centavos. Retirando aleatoriamente três moedas **sem reposição** e assumindo que todas as moedas possuem a mesma probabilidade de serem selecionados, calcule a probabilidade de:

- A soma do valor das três moedas ser igual a 20 centavos
- A soma do valor das três moedas ser igual a 20 centavos, sabendo que a primeira moeda retirada foi de 10 centavos

Probabilidade condicional

Exemplo 7.03

Um cofre possui 50 moedas, 40 de 10 centavos e 10 de 5 centavos. Retirando aleatoriamente três moedas **sem reposição** e assumindo que todas as moedas possuem a mesma probabilidade de serem selecionados, calcule a probabilidade de:

- A soma do valor das três moedas ser igual a 20 centavos
- A soma do valor das três moedas ser igual a 20 centavos, sabendo que a primeira moeda retirada foi de 10 centavos
- A soma do valor das três moedas ser igual a 15 centavos, sabendo que a primeira moeda retirada foi de 10 centavos

Probabilidade condicional

Exemplo 7.03

Um cofre possui 50 moedas, 40 de 10 centavos e 10 de 5 centavos. Retirando aleatoriamente três moedas **sem reposição** e assumindo que todas as moedas possuem a mesma probabilidade de serem selecionados, calcule a probabilidade de:

- A soma do valor das três moedas ser igual a 20 centavos
- A soma do valor das três moedas ser igual a 20 centavos, sabendo que a primeira moeda retirada foi de 10 centavos
- A soma do valor das três moedas ser igual a 15 centavos, sabendo que a primeira moeda retirada foi de 10 centavos

Eventos independentes

Dois eventos A e B são ditos **independentes** quando a probabilidade de ocorrência de um não influencia na probabilidade de ocorrência do outro.

Eventos independentes

Eventos independentes

Dois eventos A e B são ditos **independentes** quando a probabilidade de ocorrência de um não influencia na probabilidade de ocorrência do outro.

- A e B são independentes $\leftrightarrow P(A|B) = P(A)$ $\leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Eventos independentes

Eventos independentes

Dois eventos A e B são ditos **independentes** quando a probabilidade de ocorrência de um não influencia na probabilidade de ocorrência do outro.

- A e B são independentes $\leftrightarrow P(A|B) = P(A)$
  $\leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Eventos independentes e eventos mutuamente excludentes são duas coisas diferentes!

Eventos independentes

Exemplo 7.04

Ao lançar uma moeda não viciada 10 vezes, você tira 10 caras em sequência. Qual é a probabilidade de se obter mais uma cara no próximo lançamento?

Eventos independentes

Se A é independente de B, qualquer informação a respeito de B (incluindo o fato de B **não** ter acontecido) não deve alterar a probabilidade de A.

Eventos independentes

Se A é independente de B, qualquer informação a respeito de B (incluindo o fato de B **não** ter acontecido) não deve alterar a probabilidade de A.

- Se A e B são eventos independentes, A e B^c, A^c e B, e A^c e B^c também o são.

Eventos independentes

Se A é independente de B, qualquer informação a respeito de B (incluindo o fato de B **não** ter acontecido) não deve alterar a probabilidade de A.

- Se A e B são eventos independentes, A e B^c, A^c e B, e A^c e B^c também o são.

Partição do espaço amostral

Partição

n eventos $E_1, E_2, ..., E_n$ formam uma **partição** do espaço amostral Ω quando:

Partição do espaço amostral

Partição

n eventos $E_1, E_2, ..., E_n$ formam uma **partição** do espaço amostral Ω quando:

- $P(E_i) > 0, \ \forall \ i \in \{1, 2, ..., n\}$

Partição

n eventos $E_1, E_2, ..., E_n$ formam uma **partição** do espaço amostral Ω quando:

- $P(E_i) > 0, \ \forall \ i \in \{1, 2, ..., n\}$
- $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \Omega$

Partição

n eventos $E_1, E_2, ..., E_n$ formam uma **partição** do espaço amostral Ω quando:

- $P(E_i) > 0, \ \forall \ i \in \{1, 2, ..., n\}$
- $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \Omega$
- $P(E_i \cap E_j) = \varnothing, \ \forall \ i \neq j, \ i, j \in \{1, 2, ..., n\}$

Regra da probabilidade total

Regra da probabilidade total

Dado um espaço amostral Ω particionado em $E_1, E_2, ..., E_n$ e um evento $A \in \Omega$, a probabilidade de ocorrência de A pode ser expressa por:

$$P(A) = P(A|E_1) \cdot P(E_1) + P(A|E_2) \cdot P(E_2) + ... + P(A|E_n) \cdot P(E_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(A|E_i) \cdot P(E_i)$$

Regra da probabilidade total

Exemplo 7.06

Três carteiros dividiram entre si a tarefa de entregar 100 correspondências. O carteiro A ficou com 30, o carteiro B com 45, e o carteiro C com o restante. Para cada um dos carteiros A, B e C, a probabilidade de entregar uma correspondência para o endereço errado é de $1\%, 5\%$ e 3%, respectivamente. Qual é a probabilidade de uma correspondência qualquer ser entregue para o endereço errado?

Condicionamento reverso

Com a regra da probabilidade total, podemos enunciar $P(E_j|A)$ em termos de $P(A|E_j)$ e $P(E_j)$

- Lembre-se que $P(E_j|A) = \dfrac{P(E_j \cap A)}{P(A)}$

Teorema de Bayes

Teorema de Bayes

Dado um espaço amostral Ω particionado em $E_1, E_2, ..., E_n$ e um evento $A \in \Omega$, a probabilidade condicional de E_j dado A, para todo $j \in \{1, 2, ..., n\}$, é dada por:

$$P(E_j|A) = \frac{P(A|E_j) \cdot P(E_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|E_i) \cdot P(E_i)}$$

Exemplo 7.07

Uma das 100 correspondências do exemplo 7.06 foi entregue ao endereço errado. Qual é a probabilidade de ela ter sido entregue pelo carteiro C?

Exemplo 7.08

Três moedas são sorteadas e uma delas é escolhida aleatoriamente. A primeira moeda tem duas caras, a segunda tem duas coroas e a terceira tem uma cara e uma coroa. Sabendo que a moeda escolhida possui uma coroa, qual a probabilidade de a outra face também ser coroa?

Exemplo 7.09

Um laboratório de exame de DNA acerta o resultado em 95% das vezes. Um segundo laboratório é especializado em checar o resultado do primeiro exame, e identifica um exame equivocado corretamente em 99% das vezes; porém, tem 2% de chance de classificar um exame correto como equivocado:

- Qual a probabilidade de um exame do primeiro laboratório escolhido ao acaso ser identificado como equivocado pelo lab2?
- Se um exame do primeiro laboratório é identificado como correto pelo lab2, qual a probabilidade de que de fato esteja correto?

Exercícios

Exemplo

Em uma cidade em que os carros são testados para emissão de poluentes, 25% deles emitem quantidade considerada excessiva. O teste falha para 99% dos carros que emitem excesso de poluentes, mas resulta positivo para 17% dos carros que não emitem quantidade excessiva.

- Qual é a probabilidade de um carro que falha no teste realmente emitir quantidade excessiva de poluentes?

Variável aleatória discreta

Variável aleatória discreta

É uma variável aleatória X cujo espaço amostral é um conjunto **enumerável**

Variável aleatória discreta

Variável aleatória discreta

É uma variável aleatória X cujo espaço amostral é um conjunto **enumerável**

Exemplo 8.01

Espaços amostrais finitos:

Variáveis aleatórias discretas

Exemplo 8.01

Espaços amostrais finitos:

- Número observado após o arremesso de um dado

Variáveis aleatórias discretas

Exemplo 8.01

Espaços amostrais finitos:

- Número observado após o arremesso de um dado
- Combinaçõees de um sanduíche do Subway

Variáveis aleatórias discretas

Exemplo 8.01

Espaços amostrais finitos:

- Número observado após o arremesso de um dado
- Combinaçõees de um sanduíche do Subway
- Identificação de uma placa de carro

Exemplo 8.01

Espaços amostrais finitos:

- Número observado após o arremesso de um dado
- Combinaçõees de um sanduíche do Subway
- Identificação de uma placa de carro
- Placar final de uma partida de truco

Variáveis aleatórias discretas

Exemplo 8.02

Espaços amostrais infinitos e enumeráveis:

Variáveis aleatórias discretas

Exemplo 8.02

Espaços amostrais infinitos e enumeráveis:

- Número de carros que passam por um pedágio

Exemplo 8.02

Espaços amostrais infinitos e enumeráveis:

- Número de carros que passam por um pedágio
- Número de páginas de um livro escolhido aleatoriamente

Exemplo 8.02

Espaços amostrais infinitos e enumeráveis:

- Número de carros que passam por um pedágio
- Número de páginas de um livro escolhido aleatoriamente
- Habilitações a serem emitidas pelo DETRAN

Exemplo 8.02

Espaços amostrais infinitos e enumeráveis:

- Número de carros que passam por um pedágio
- Número de páginas de um livro escolhido aleatoriamente
- Habilitações a serem emitidas pelo DETRAN
- Placar final de uma partida de futebol

Distribuição de probabilidade

É o conjunto de pares ordenados $(\omega, P(X = \omega))$

- Para cada resultado possível que X pode assumir, associa-se uma probabilidade para que aquele resultado aconteça.

Função de probabilidade

A função $f(\omega)$ que associa cada $\omega \in \Omega$ à sua respectiva probabilidade $P(X = \omega)$ é chamada <u>função de probabilidade</u>

Função de probabilidade

A função $f(\omega)$ que associa cada $\omega \in \Omega$ à sua respectiva probabilidade $P(X = \omega)$ é chamada <u>função de probabilidade</u>

- $f(\omega) \geq 0, \forall\ \omega \in \Omega$
- $\sum_{\Omega} f(\omega) = 1$

Função de distribuição acumulada

A função de distribuição acumulada fornece a probabilidade acumulada de X até um ponto específico

$$F(\omega) = P(X \leq \omega) = \sum_{t \leq \omega} f(t), \forall \ \omega \in \Omega$$

Função de distribuição acumulada

A função de distribuição acumulada fornece a probabilidade acumulada de X até um ponto específico

$$F(\omega) = P(X \leq \omega) = \sum_{t \leq \omega} f(t), \forall \ \omega \in \Omega$$

- $\lim_{\omega \to \infty} F(\omega) = 1$

Função de distribuição acumulada

A função de distribuição acumulada fornece a probabilidade acumulada de X até um ponto específico

$$F(\omega) = P(X \leq \omega) = \sum_{t \leq \omega} f(t), \forall \omega \in \Omega$$

- $\lim_{\omega \to \infty} F(\omega) = 1$
- $\lim_{\omega \to -\infty} F(\omega) = 0$

A função de distribuição acumulada fornece a probabilidade acumulada de X até um ponto específico

$$F(\omega) = P(X \leq \omega) = \sum_{t \leq \omega} f(t), \forall \ \omega \in \Omega$$

- $\lim_{\omega \to \infty} F(\omega) = 1$
- $\lim_{\omega \to -\infty} F(\omega) = 0$

- $P(\omega_1 < X \leq \omega_2) = F(\omega_2) - F(\omega_1)$

Valor Esperado

O valor esperado (ou esperança) de uma variável aleatória X é um operador que fornece a **média** dos possíveis eventos de X **ponderada** pela sua respectiva **probabilidade de ocorrência**

Valor Esperado

O valor esperado (ou esperança) de uma variável aleatória X é um operador que fornece a **média** dos possíveis eventos de X **ponderada** pela sua respectiva **probabilidade de ocorrência**

$$E(X) = \sum_{\Omega} \omega \cdot f(\omega) = \sum_{\Omega} \omega \cdot P(X = \omega)$$

Valor Esperado

O valor esperado (ou esperança) de uma variável aleatória X é um operador que fornece a **média** dos possíveis eventos de X **ponderada** pela sua respectiva **probabilidade de ocorrência**

$$E(X) = \sum_{\Omega} \omega \cdot f(\omega) = \sum_{\Omega} \omega \cdot P(X = \omega)$$

A esperança de uma variável aleatória é um número!

Valor Esperado

Exemplo

- A função massa de probabilidade de X é dada por:

$$p(1) = \frac{1}{2} = p(2)$$

Valor Esperado

Exemplo

- A função massa de probabilidade de X é dada por:

$$p(1) = \frac{1}{2} = p(2)$$

então

$$E[X] = 1 \times (\frac{1}{2}) + 2 \times (\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$$

Valor Esperado

Exemplo

- A função massa de probabilidade de X é dada por:

$$p(1) = \frac{1}{3} \quad p(2) = \frac{2}{3}$$

Valor Esperado

Exemplo

- A função massa de probabilidade de X é dada por:

$$p(1) = \frac{1}{3} \quad p(2) = \frac{2}{3}$$

então

$$E[X] = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right) + 2 \times \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3}$$

Valor Esperado

Calcule $E(X)$ em que X representa o resultado de uma jogada de um dado justo.

Distribuição Uniforme Discreta (k)

É o caso da definição "clássica" de probabilidade

- Espaço amostral finito e eqüiprovável

Distribuição Uniforme Discreta (k)

É o caso da definição "clássica" de probabilidade

- Espaço amostral finito e eqüiprovável

$$f(\omega) = P(X = \omega) = \frac{1}{k}$$

Onde k = número de resultados possíveis

Distribuição Uniforme Discreta (k)

Exemplo 8.03

Um dado nao viciado é arremessado uma vez. Calcule a probabilidade de:

- Sair o número 5
- Sair um número par
- Sair um número ímpar ou primo

Distribuição de Bernoulli (p)

É a distribuição associada a **um** experimento aleatório com apenas dois resultados possíveis: 0, caso se observe A; e 1, caso se observe A^c

Distribuição de Bernoulli (p)

É a distribuição associada a **um** experimento aleatório com apenas dois resultados possíveis: 0, caso se observe A; e 1, caso se observe A^c

- X = Número de sucessos (espaço amostral finito)

Distribuição de Bernoulli (p)

É a distribuição associada a **um** experimento aleatório com apenas dois resultados possíveis: 0, caso se observe A; e 1, caso se observe A^c

- X = Número de sucessos (espaço amostral finito)

$$f(\omega) = P(X = \omega) = \begin{cases} 1 - p, & \omega = 0, \\ p, & \omega = 1. \end{cases}$$

Distribuição Bernoulli (p)

Calcule a esperança da distrbiuição Bernoulli com parâmetro p.

Distribuição Bernoulli (p)

Calcule a esperança da distrbiuição Bernoulli com parâmetro p.

então

Distribuição Bernoulli (p)

Calcule a esperança da distrbiuição Bernoulli com parâmetro p.

então

O número de sucessos esperados in um único experimento é a probabilidade que um único experimento seja um sucesso.

Distribuição de Bernoulli (p)

Exemplo 8.04

Uma moeda viciada com probabilidade de sair cara de 0.4 é arremessada uma vez. Você paga uma quantia X para arremessar a moeda, e ganha R$ 1.00 caso consiga uma cara. Qual é o preço justo para a entrada nesse jogo?

- Um "jogo justo" é aquele em que o ganho esperado é igual ao preço pago para a participação

Distribuição Binomial (n, p)

É a distribuição associada a n experimentos aleatórios **independentes** de Bernoulli

Distribuição Binomial (n, p)

É a distribuição associada a n experimentos aleatórios **independentes** de Bernoulli

- Em cada um das n vezes em que o experimento ocorre, a probabilidade de sucesso p (e, consequentemente, a probabilidade de fracasso $1 - p$) é sempre a mesma

Distribuição Binomial (n, p)

É a distribuição associada a n experimentos aleatórios **independentes** de Bernoulli

- Em cada um das n vezes em que o experimento ocorre, a probabilidade de sucesso p (e, consequentemente, a probabilidade de fracasso $1 - p$) é sempre a mesma
- X = Número de sucessos

Distribuição Binomial (n, p)

É a distribuição associada a n experimentos aleatórios **independentes** de Bernoulli

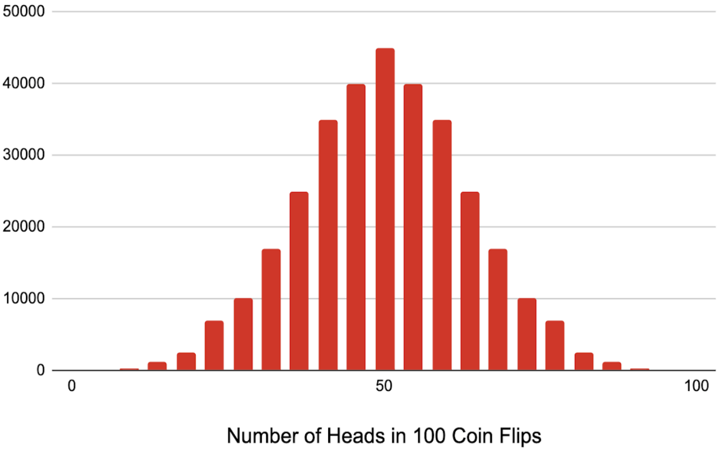
- Em cada um das n vezes em que o experimento ocorre, a probabilidade de sucesso p (e, consequentemente, a probabilidade de fracasso $1 - p$) é sempre a mesma
- X = Número de sucessos

Função massa de probabilidade é dada por:

$$f(\omega) = P(X = \omega) = \binom{n}{\omega} \cdot p^{\omega} \cdot (1 - p)^{n-\omega}, \omega = 0, 1, \dots, n$$

Distribuição Binomial (n, p)

[Função de probabilidade da distribuição binomial]



Distribuição Binomial (n, p)

Exemplo 8.05

Uma moeda viciada com probabilidade de sair cara de 0.4 é arremessada três vezes:

Exemplo 8.05

Uma moeda viciada com probabilidade de sair cara de 0.4 é arremessada três vezes:

- Qual a probabilidade de se tirar três caras?

Distribuição Binomial (n, p)

Exemplo 8.05

Uma moeda viciada com probabilidade de sair cara de 0.4 é arremessada três vezes:

- Qual a probabilidade de se tirar três caras?
- Qual a probabilidade de se tirar exatamente uma cara?

Distribuição Binomial (n, p)

Exemplo 8.05

Uma moeda viciada com probabilidade de sair cara de 0.4 é arremessada três vezes:

- Qual a probabilidade de se tirar três caras?
- Qual a probabilidade de se tirar exatamente uma cara?
- Suponha que você paga uma quantia X para realizar os três arremessos, e ganha R$ 1.00 caso para cada cara que conseguir. Qual é o preço justo para a entrada nesse jogo?

Exemplo 8.06

Retiram-se quatro bolas, **com reposição**, de uma urna com 3 bolas azuis e 7 bolas brancas.

Distribuição Binomial (n, p)

Exemplo 8.06

Retiram-se quatro bolas, **com reposição**, de uma urna com 3 bolas azuis e 7 bolas brancas.

- Qual a probabilidade de se retirar alguma bola azul?

Exemplo 8.06

Retiram-se quatro bolas, **com reposição**, de uma urna com 3 bolas azuis e 7 bolas brancas.

- Qual a probabilidade de se retirar alguma bola azul?
- Qual a probabilidade de a segunda bola retirada seja branca?

Distribuição Hipergeométrica (N, k, n)

É a distribuição associada à retirada, **sem reposição**, de n elementos de uma população finita de tamanho N, dentro da qual há k elementos pertencentes ao evento de interesse

Distribuição Hipergeométrica (N, k, n)

É a distribuição associada à retirada, **sem reposição**, de n elementos de uma população finita de tamanho N, dentro da qual há k elementos pertencentes ao evento de interesse

- X = Número de elementos de interesse retirados (espaço amostral finito)

Distribuição Hipergeométrica (N, k, n)

É a distribuição associada à retirada, **sem reposição**, de n elementos de uma população finita de tamanho N, dentro da qual há k elementos pertencentes ao evento de interesse

- X = Número de elementos de interesse retirados (espaço amostral finito)

$$f(\omega) = P(X = \omega) = \frac{\binom{k}{\omega} \cdot \binom{N-k}{n-\omega}}{\binom{N}{n}}, \omega = 0, 1, \ldots, n$$

Distribuição Hipergeométrica (N, k, n)

Caso a retirada fosse **com reposição**, seria usada a distribuição binomial, pois:

Distribuição Hipergeométrica (N, k, n)

Caso a retirada fosse **com reposição**, seria usada a distribuição binomial, pois:

- A cada retirada, a probabilidade de se obter o evento de interesse seria constante

Distribuição Hipergeométrica (N, k, n)

Caso a retirada fosse **com reposição**, seria usada a distribuição binomial, pois:

- A cada retirada, a probabilidade de se obter o evento de interesse seria constante
- Como o N e k são conhecidos, a probabilidade de se obter o evento de interesse seria simplesmente $\dfrac{k}{N}$

Distribuição Hipergeométrica (N, k, n)

Exemplo 8.07

Retiram-se quatro bolas, **sem reposição**, de uma urna com 3 bolas azuis e 7 bolas brancas.

- Qual a probabilidade de se retirar alguma bola azul?
- Qual a probabilidade de se retirar no máximo 2 bolas azuis?

Distribuição Hipergeométrica (N, k, n)

Exemplo 8.08

O mecanismo da mega-sena consiste em escolher 6 dos 60 números sorteados aleatoriamente. Assumindo que os números possuem igual probabilidade de serem selecionados, calcule:

Distribuição Hipergeométrica (N, k, n)

Exemplo 8.08

O mecanismo da mega-sena consiste em escolher 6 dos 60 números sorteados aleatoriamente. Assumindo que os números possuem igual probabilidade de serem selecionados, calcule:

- A probabilidade de se acertar pelo menos 5 números

Distribuição Hipergeométrica (N, k, n)

Exemplo 8.08

O mecanismo da mega-sena consiste em escolher 6 dos 60 números sorteados aleatoriamente. Assumindo que os números possuem igual probabilidade de serem selecionados, calcule:

- A probabilidade de se acertar pelo menos 5 números
- A probabilidade de não se acertar nenhum número

Distribuição Hipergeométrica (N, k, n)

Exemplo 8.08

O mecanismo da mega-sena consiste em escolher 6 dos 60 números sorteados aleatoriamente. Assumindo que os números possuem igual probabilidade de serem selecionados, calcule:

- A probabilidade de se acertar pelo menos 5 números
- A probabilidade de não se acertar nenhum número
- A probabilidade de se acertar exatamente 2 números

Distribuição de Poisson (λ)

É a distribuição que modela o número de eventos de interesse que ocorrem em um determinado período fixo de tempo, com base em uma taxa média de ocorrência do evento ($\lambda > 0$), que é **conhecida** e independente do tempo.

Distribuição de Poisson (λ)

É a distribuição que modela o número de eventos de interesse que ocorrem em um determinado período fixo de tempo, com base em uma taxa média de ocorrência do evento ($\lambda > 0$), que é **conhecida** e independente do tempo.

- X = Número ocorrências do evento de interesse (espaço amostral infinito enumerável)

Distribuição de Poisson (λ)

É a distribuição que modela o número de eventos de interesse que ocorrem em um determinado período fixo de tempo, com base em uma taxa média de ocorrência do evento ($\lambda > 0$), que é **conhecida** e independente do tempo.

- X = Número ocorrências do evento de interesse (espaço amostral infinito enumerável)

$$f(\omega) = P(X = \omega) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{\omega}}{\omega!}, \omega = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Distribuição de Poisson (λ)

A taxa média de ocorrência do evento (λ) é proporcional ao intervalo temporal considerado

- Se $\lambda = 3$ ocorrências por hora, a taxa média de ocorrência em 2 horas será **6**

Exemplo 8.10

Assumindo que a taxa média de buracos nas rodovias do DF é de 2.1 buracos por quilômetro, calcule:

Distribuição de Poisson (λ)

Exemplo 8.10

Assumindo que a taxa média de buracos nas rodovias do DF é de 2.1 buracos por quilômetro, calcule:

- A probabilidade de não se encontrar nenhum buraco num trecho de 5 quilômetros

Distribuição de Poisson (λ)

Exemplo 8.10

Assumindo que a taxa média de buracos nas rodovias do DF é de 2.1 buracos por quilômetro, calcule:

- A probabilidade de não se encontrar nenhum buraco num trecho de 5 quilômetros
- A probabilidade de se encontrar 4 buracos ou mais num trecho de 0.85 quilômetro

Exemplo 8.10

Assumindo que a taxa média de buracos nas rodovias do DF é de 2.1 buracos por quilômetro, calcule:

- A probabilidade de não se encontrar nenhum buraco num trecho de 5 quilômetros
- A probabilidade de se encontrar 4 buracos ou mais num trecho de 0.85 quilômetro
- A probabilidade de se encontrar no máximo 1 buraco num trecho de 10 quilômetros

Exemplo 8.10

Assumindo que a taxa média de buracos nas rodovias do DF é de 2.1 buracos por quilômetro, calcule:

- A probabilidade de não se encontrar nenhum buraco num trecho de 5 quilômetros
- A probabilidade de se encontrar 4 buracos ou mais num trecho de 0.85 quilômetro
- A probabilidade de se encontrar no máximo 1 buraco num trecho de 10 quilômetros