Probabilidade e Estatística

Cayan Portela

UniCEUB

March 2, 2023

Probabilidade e Estatística

Cayan Portela

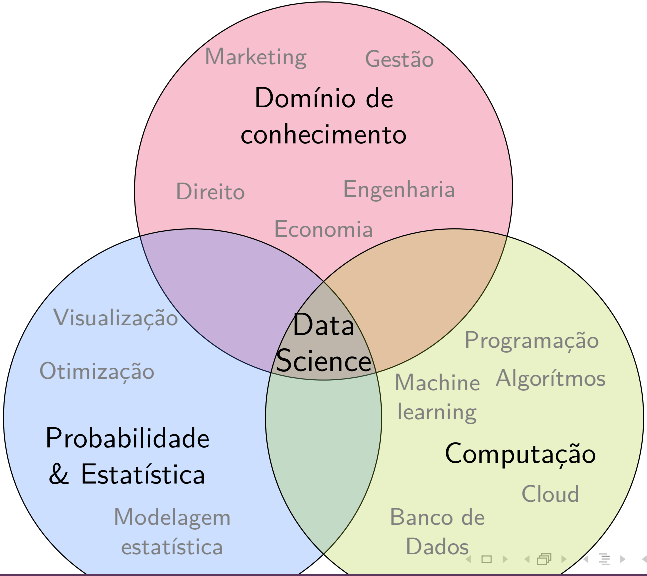
UniCEUB

March 2, 2023

Tópicos da aula

1. Conjuntos e espaço amostral
2. Operações com conjuntos
3. Probabilidade: axiomas e operações

Campos de conhecimento



Modelos determinísticos X probabilísticos

Modelo é uma aproximação da realidade para ajudar no processo decisório

Modelo é uma aproximação da realidade para ajudar no processo decisório

- Porém, a realidade é repleta de incertezas

Modelos determinísticos X probabilísticos

Modelo é uma aproximação da realidade para ajudar no processo decisório

- Porém, a realidade é repleta de incertezas
  - **O futuro é uma variável aleatória**

Modelos determinísticos X probabilísticos

Modelo é uma aproximação da realidade para ajudar no processo decisório

- Porém, a realidade é repleta de incertezas
  - **O futuro é uma variável aleatória**

Assim, as distribuições de probabilidades das variáveis de decisão e/ou das restrições também podem ser levadas em consideração

Probabilidade e Estatística

Campos distintos: ambos sobre processos aleatórios.

- Probabilidade
  - Lógica contida.
  - Algumas regras para o cálculo de probabilidades.
  - Única resposta correta

- Estatística
  - Estotástico/aleatório.
  - Conclusões probabilísticas a partir de dados experimentais.
  - Não possue uma única resposta correta

Exemplo

Qual a probabilidade de obtermos exatamente 1 ”cara” em 3 lançamentos de uma moeda justa?

Conjuntos

Conjuntos em Palavras.

- Meses do ano:
  - S = Todos os meses.
  - L = mês com 31 dias.
  - R = mês com 'r' no nome.

S = {Jan, Fev, Mar, Abr, Mai, Jun, Jul, Ago, Set, Out, Nov, Dez}

L = {Jan, Mar, Mai, Jul, Ago, Dez}

R = {Jan, Fev, Mar, Abr, Set, Out, Nov, Dez }

Conjuntos

Conjuntos em Palavras.

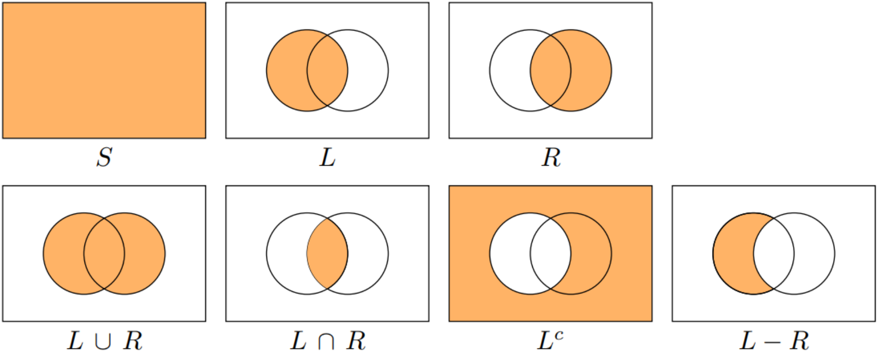
- Meses do ano:
  - S = Todos os meses.
  - L = mês com 31 dias.
  - R = mês com 'r' no nome.

S = {Jan, Fev, Mar, Abr, Mai, Jun, Jul, Ago, Set, Out, Nov, Dez}

L = {Jan, Mar, Mai, Jul, Ago, Dez}

R = {Jan, Fev, Mar, Abr, Set, Out, Nov, Dez }

$L \cap R$ = {Jan, Mar, Out, Dez }


S
L
R
$L \cup R$
$L \cap R$
L^c
$L - R$

Conjuntos

Conjunto

"Conjunto" é uma coleção de objetos (**numéricos ou não**)

Conjunto

"Conjunto" é uma coleção de objetos (**numéricos ou não**)

- Os membros contidos num conjunto são chamados de "elementos"

Conjuntos

Conjunto

"Conjunto" é uma coleção de objetos (**numéricos ou não**)

- Os membros contidos num conjunto são chamados de "elementos"
  - Se **todos** os elementos de um conjunto A também forem elementos de outro conjunto B, diz-se que A está contido em B ($A \subset B$)

Conjuntos

Conjunto

"Conjunto" é uma coleção de objetos (**numéricos ou não**)

- Os membros contidos num conjunto são chamados de "elementos"
  - Se **todos** os elementos de um conjunto A também forem elementos de outro conjunto B, diz-se que A está contido em B ($A \subset B$)
- O conjunto que não contém sem nenhum elemento é chamado de "conjunto vazio" ($\varnothing$)

Exemplo

Uma banda possui vocalistas e guitarristas.

- 7 cantam.
- 4 tocam guitarra.
- 2 fazem ambos.

Quantas pessoas existem na banda?

Caminhos possíveis

Tenho 3 calças e 4 camisas.
Quantos trajes distintos posso usar?

Possibilidades

DNA é feito por sequências de nucleotídeos: A, C, G, T.

- Quantas sequências de tamanho 3 podemos ter?

Possibilidades

DNA é feito por sequências de nucleotídeos: A, C, G, T.

- Quantas sequências de tamanho 3 podemos ter?

  (i) 12 (ii) 24 (iii) 64 (iv) 128

Possibilidades

DNA é feito por sequências de nucleotídeos: A, C, G, T.

- Quantas sequências de tamanho 3 podemos ter?

  (i) 12 (ii) 24 (iii) 64 (iv) 128

$$[(?), (?), (?)]$$

Possibilidades

DNA é feito por sequências de nucleotídeos: A, C, G, T.

- Quantas sequências de tamanho 3 podemos ter?

  (i) 12 (ii) 24 (iii) 64 (iv) 128

$$[(?),(?),(?)]$$

- Quantas sequências de tamanho 3, sem repetição, podemos ter?

Permutação

- Permutações de k escolhidos de n

Permutação

- Permutações de k escolhidos de n

Quais permutações de $k = 3$ podemos ter de $n = \{a, b, c, d\}$?

Permutação

- Permutações de k escolhidos de n

Quais permutações de $k = 3$ podemos ter de $n = \{a, b, c, d\}$?

abc abd acb acd adb adc
bac bad bca bcd bda bdc
cab cad cba cbd cda cdb
dab dac dba dbc dca dcb

Combinação

Subconjuntos:

- Ordem não importa

Quantas combinações de 3 elementos podemos ter de {a, b, c, d} ?

$$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$$

Permutação e Combinação

abc abd acb acd adb adc
bac bad bca bcd bda bdc
cab cad cba cbd cda cdb
dab dac dba dbc dca dcb

$$P_{(n,k)} = P_{(4,3)} = 4!$$

$$[(4) \times (3) \times (2)]$$

$\{a, b, c\}$
$\{a, b, d\}$
$\{a, c, d\}$
$\{b, c, d\}$

$$C_{(3,4)} = \frac{P_{(4,3)}}{3!} = \frac{4!}{3!}$$

Ordem não importa

Permutação e Combinação

abc abd acb acd adb adc
bac bad bca bcd bda bdc
cab cad cba cbd cda cdb
dab dac dba dbc dca dcb

$$P_{(n,k)} = P_{(4,3)} = 4!$$

$$[(4) \times (3) \times (2)]$$

{a, b, c}
{a, b, d}
{a, c, d}
{b, c, d}

$$C_{(3,4)} = \frac{P_{(4,3)}}{3!} = \frac{4!}{3!}$$

Ordem não importa

abc abd acb acd adb adc
bac bad bca bcd bda bdc
cab cad cba cbd cda cdb
dab dac dba dbc dca dcb

$$P_{(n,k)} = P_{(4,3)} = 4!$$

$$[(4) \times (3) \times (2)]$$

{a, b, c}
{a, b, d}
{a, c, d}
{b, c, d}

$$C_{(3,4)} = \frac{P_{(4,3)}}{3!} = \frac{4!}{3!}$$

Ordem não importa

$$C_{(n,k)} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

n elementos tomados k a k

Exemplo

Considere uma moeda justa.

- Quantas possíveis maneiras podemos obter exatamente 3 caras em 10 jogadas?

Exemplo

Considere uma moeda justa.

- Quantas possíveis maneiras podemos obter exatamente 3 caras em 10 jogadas?
- Qual a probabilidade de termos exatamente 3 caras em 10 jogadas?

Espaço amostral

Espaço amostral

Espaço amostral (Ω) é o conjunto de todos os possíveis resultados de um determinada variável aleatória

Espaço amostral

Espaço amostral

Espaço amostral (Ω) é o conjunto de todos os possíveis resultados de um determinada variável aleatória

- Os elementos e subconjuntos do espaço amostral representam os possíveis **eventos** associados à variável aleatória
  - Os eventos podem ser combinados de acordo com as operações de conjuntos para formar novos eventos

Variável aleatória

Etimologicamente, **Variável aleatória** é uma:

Variável aleatória

Variável aleatória

Etimologicamente, **Variável aleatória** é uma:

- **Variável**: Possui um valor desconhecido

Variável aleatória

Variável aleatória

Etimologicamente, **Variável aleatória** é uma:

- **Variável**: Possui um valor desconhecido
- **Aleatória**: Pode possuir valores diferentes, com diferentes probabilidades

Variável aleatória

Variável aleatória

Etimologicamente, **Variável aleatória** é uma:

- **Variável**: Possui um valor desconhecido
- **Aleatória**: Pode possuir valores diferentes, com diferentes probabilidades

Espaço amostral

Exemplo 6.01

Defina o espaço amostral das seguintes variáveis:

Espaço amostral

Exemplo 6.01

Defina o espaço amostral das seguintes variáveis:

- Resultado da conta $1 + 1$

Espaço amostral

Exemplo 6.01

Defina o espaço amostral das seguintes variáveis:

- Resultado da conta $1 + 1$
- Capital do Brasil

Exemplo 6.01

Defina o espaço amostral das seguintes variáveis:

- Resultado da conta $1 + 1$
- Capital do Brasil
- Número de SSs em Probabilide e Estatística

Espaço amostral

Exemplo 6.01

Defina o espaço amostral das seguintes variáveis:

- Resultado da conta $1 + 1$
- Capital do Brasil
- Número de SSs em Probabilide e Estatística
- Número de pessoas na nova turma do curso.

Espaço amostral

Exemplo 6.01

Defina o espaço amostral das seguintes variáveis:

- Resultado da conta $1 + 1$
- Capital do Brasil
- Número de SSs em Probabilide e Estatística
- Número de pessoas na nova turma do curso.
- Tempo até o lançamento de um novo filme, em uma sequencia.

Complementar de um conjunto

O complementar (ou complementar absoluto) funciona como o operador negação

Complementar de um conjunto

O complementar (ou complementar absoluto) funciona como o operador negação

- Dado um conjunto $A \in \Omega$, seu complementar (A^c) constitui nos elementos presentes no espaço amostral, mas não em A

$$A^c = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$$

Complementar de um conjunto

O complementar (ou complementar absoluto) funciona como o operador negação

- Dado um conjunto $A \in \Omega$, seu complementar (A^c) constitui nos elementos presentes no espaço amostral, mas não em A

$$A^c = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$$

- Veja A^c como **"NÃO"** A

Complementar de um conjunto

Exemplo 6.02 (a)

Seja X = Nota final em Probabilidade e Estatística:

- Defina o espaço amostral de X

Complementar de um conjunto

Exemplo 6.02 (a)

Seja X = Nota final em Probabilidade e Estatística:

- Defina o espaço amostral de X

Seja o evento A = Menção SS

- Descreva os eventos A e A^c

Interseção de dois conjuntos

A **interseção** (ou conjunção) entre os conjuntos A e B ($A \cap B$) constitui nos elementos pertencentes tanto a A quanto a B

$$A \cap B = \{x \in \Omega \mid x \in A; x \in B\}$$

Interseção de dois conjuntos

A **interseção** (ou conjunção) entre os conjuntos A e B ($A \cap B$) constitui nos elementos pertencentes tanto a A quanto a B

$$A \cap B = \{x \in \Omega \mid x \in A; x \in B\}$$

- Veja $A \cap B$ como A **"E"** B

Interseção de dois conjuntos

Exemplo 6.02 (b)

Sejam os eventos B = Aprovação; C = Menção MS

- Descreva os eventos $B \cap C$, C^c e $B^c \cap C$

Eventos mutuamente excludentes

Dois eventos A e B são ditos mutuamente excludentes quando $A \cap B = \varnothing$

Eventos mutuamente excludentes

Dois eventos A e B são ditos mutuamente excludentes quando $A \cap B = \varnothing$

- Se quando um acontece, o outro não acontece, é natural que A e B não possam acontecer ao mesmo tempo.

União de dois conjuntos

A **união** (ou disjunção) entre os conjuntos A e B ($A \cup B$) constitui nos elementos pertencentes a A, a B, ou a ambos

$$A \cup B = \{x \in \Omega \mid x \notin (A^c \cap B^c)\}$$

União de dois conjuntos

A **união** (ou disjunção) entre os conjuntos A e B ($A \cup B$) constitui nos elementos pertencentes a A, a B, ou a ambos

$$A \cup B = \{x \in \Omega \mid x \notin (A^c \cap B^c)\}$$

- Veja $A \cup B$ como A **"OU"** B

União de dois conjuntos

Exemplo 6.02 (c)

Sejam os eventos B = Aprovação; C = Menção MS

- Descreva os eventos $B \cup C$, $B \cup C^c$ e $(B^c \cap C^c)^c$

União exclusiva de dois conjuntos

A **união exclusiva** (ou disjunção exclusiva) entre os conjuntos A e B ($A \underline{\cup} B$) constitui nos elementos pertencentes a A ou a B, mas **não** a ambos

$$A \underline{\cup} B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$$

União exclusiva de dois conjuntos

A **união exclusiva** (ou disjunção exclusiva) entre os conjuntos A e B ($A \veebar B$) constitui nos elementos pertencentes a A ou a B, mas **não** a ambos

$$A \veebar B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$$

- Veja $A \veebar B$ como <u>**“OU”** A, **“OU”** B</u>

União exclusiva de dois conjuntos

Exemplo 6.02 (d)

Sejam os eventos A = Menção SS; D = Reprovação

- Descreva os eventos $A \underline{\cup} D$ e $A \underline{\cup} D^c$

Diferença de dois conjuntos

A **diferença** (ou complementar relativo) entre os conjuntos A e B ($A \setminus B$) constitui nos elementos pertencentes a A, mas não a B

$$A \setminus B = \{x \in \Omega \mid x \in A; x \notin B\}$$

Diferença de dois conjuntos

A **diferença** (ou complementar relativo) entre os conjuntos A e B ($A \setminus B$) constitui nos elementos pertencentes a A, mas não a B

$$A \setminus B = \{x \in \Omega \mid x \in A; x \notin B\}$$

- Note que $A^c = \Omega \setminus A$
- $A \setminus B \neq B \setminus A$**!**

Diferença de dois conjuntos

Exemplo 6.02 (e)

Sejam os eventos D = Reprovação; E = Menção MI

- Descreva os eventos $(D \setminus E)^c$ e $E \setminus D$

Exemplo 6.03

Seja $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. $A = \{2, 4, 7, 10\}$; $B = \{2, 3, 5, 7\}$; $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $D = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Forneça:

Exemplo 6.03

Seja $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. $A = \{2, 4, 7, 10\}$; $B = \{2, 3, 5, 7\}$; $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $D = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Forneça:

- $A \cap B^c$

Exercícios

Exemplo 6.03

Seja $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. $A = \{2, 4, 7, 10\}$; $B = \{2, 3, 5, 7\}$; $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $D = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Forneça:

- $A \cap B^c$
- $B \cup C^c$

Exemplo 6.03

Seja $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. $A = \{2, 4, 7, 10\}$; $B = \{2, 3, 5, 7\}$; $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $D = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Forneça:

- $A \cap B^c$
- $B \cup C^c$
- $A^c \; \underline{\cup} \; C$

Exemplo 6.03

Seja $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. $A = \{2, 4, 7, 10\}$; $B = \{2, 3, 5, 7\}$; $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $D = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Forneça:

- $A \cap B^c$
- $B \cup C^c$
- $A^c \ \underline{\cup}\ C$
- $(\Omega \backslash C)^c$

Exercícios

Exemplo 6.03

Seja $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. $A = \{2, 4, 7, 10\}$; $B = \{2, 3, 5, 7\}$; $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $D = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Forneça:

- $A \cap B^c$
- $B \cup C^c$
- $A^c \ \underline{\cup}\ C$
- $(\Omega \setminus C)^c$
- D^c

Exemplo 6.04

Sejam X = curso de um estudante do UniCEUB, e os eventos A = Ciência de Dados/Diurno; B = Ciência de dados/Noturno. Forneça a expressão do conjunto no qual se encaixam os seguintes casos:

Exercícios

Exemplo 6.04

Sejam X = curso de um estudante do UniCEUB, e os eventos A = Ciência de Dados/Diurno; B = Ciência de dados/Noturno. Forneça a expressão do conjunto no qual se encaixam os seguintes casos:

- Estudante de ciência de dados

Exercícios

Exemplo 6.04

Sejam X = curso de um estudante do UniCEUB, e os eventos A = Ciência de Dados/Diurno; B = Ciência de dados/Noturno. Forneça a expressão do conjunto no qual se encaixam os seguintes casos:

- Estudante de ciência de dados
- Não é estudante de ciência de dados.

Exercícios

Exemplo 6.04

Sejam X = curso de um estudante do UniCEUB, e os eventos A = Ciência de Dados/Diurno; B = Ciência de dados/Noturno. Forneça a expressão do conjunto no qual se encaixam os seguintes casos:

- Estudante de ciência de dados
- Não é estudante de ciência de dados.
- Estudante de outro curso

Exemplo 6.04

Sejam X = curso de um estudante do UniCEUB, e os eventos A = Ciência de Dados/Diurno; B = Ciência de dados/Noturno. Forneça a expressão do conjunto no qual se encaixam os seguintes casos:

- Estudante de ciência de dados
- Não é estudante de ciência de dados.
- Estudante de outro curso

Definição “clássica” de probabilidade

$$P(X) = \frac{\text{Nº de casos favoráveis}}{\text{Nº de casos possíveis}}$$

Definição “clássica” de probabilidade

$$P(X) = \frac{\text{Nº de casos favoráveis}}{\text{Nº de casos possíveis}}$$

É o resultado numérico de uma **função** que associa cada elemento do espaço amostral de uma variável aleatória X a um número real entre 0 e 1

$$P : \Omega \longrightarrow [0, 1]$$

$$P(\omega) = P(X = \omega), \omega \in \Omega$$

É o resultado numérico de uma **função** que associa cada elemento do espaço amostral de uma variável aleatória X a um número real entre 0 e 1

$$P : \Omega \longrightarrow [0, 1]$$

$$P(\omega) = P(X = \omega), \omega \in \Omega$$

- Para cada **resultado possível** de uma variável aleatória, a função de probabilidade diz o quão provável é a ocorrência daquele **evento**

Axiomas de Kolmogorov

Axiomas de Kolmogorov

A probabilidade de ocorrência de eventos $A_1, A_2, \ldots \in \Omega$ segue três propriedades básicas:

Axiomas de Kolmogorov

Axiomas de Kolmogorov

A probabilidade de ocorrência de eventos $A_1, A_2, \ldots \in \Omega$ segue três propriedades básicas:

- $0 \leq P(A) \leq 1$

Axiomas de Kolmogorov

Axiomas de Kolmogorov

A probabilidade de ocorrência de eventos $A_1, A_2, \ldots \in \Omega$ segue três propriedades básicas:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$

Axiomas de Kolmogorov

A probabilidade de ocorrência de eventos $A_1, A_2, \ldots \in \Omega$ segue três propriedades básicas:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$
- Se $A_1, A_2, \ldots$ forem dois a dois disjuntos (i.e., $P(A_i \cap A_j) = 0, \forall i \neq j$), $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Probabilidade: propriedades

Sejam os eventos A e B subconjuntos de Ω, é válido que:

- $P(\varnothing) = 0$

Probabilidade: propriedades

Sejam os eventos A e B subconjuntos de Ω, é válido que:

- $P(\varnothing) = 0$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$

Probabilidade: propriedades

Sejam os eventos A e B subconjuntos de Ω, é válido que:

- $P(\varnothing) = 0$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- Se $A \subseteq B$, então $P(A) \leq P(B)$

Probabilidade: propriedades

Sejam os eventos A e B subconjuntos de Ω, é válido que:

- $P(\varnothing) = 0$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- Se $A \subseteq B$, então $P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Probabilidade: propriedades

Sejam os eventos A e B subconjuntos de Ω, é válido que:

- $P(\varnothing) = 0$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- Se $A \subseteq B$, então $P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Exercício

Dez alunos escolhem arbitrariamente um número natural entre 1 e 10. Qual é a probabilidade de um número qualquer ser escolhido mais de uma vez?

Exercício

Sejam A e B dois eventos em um dado espaço amostral, tais que $P(A) = 0,2$, $P(B) = p$, $P(A \cup B) = 0,5$ e $P(A \cap B) = 0,1$. Determine o valor de p.

Distribuição de probabilidade

A atribuição da probabilidade de ocorrência a cada elemento do espaço amostral define uma **distribuição de probabilidade**

A atribuição da probabilidade de ocorrência a cada elemento do espaço amostral define uma **distribuição de probabilidade**

- A distribuição de probabilidade fornece $P(X = \omega)$, **para todo** $\omega \in \Omega$

distri.png

Função de probabilidade

Caso a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória X seja conhecida, é fácil construir sua função de probabilidade

$$f(\omega) = P(X = \omega), \forall\ \omega \in \Omega$$

Função de probabilidade

Caso a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória X seja conhecida, é fácil construir sua função de probabilidade

$$f(\omega) = P(X = \omega), \forall \ \omega \in \Omega$$

- $f(\omega) \geq 0, \forall \ \omega \in \Omega$
- $\sum_{\Omega} f(\omega) = 1$

Exemplos

Exemplo 6.05

Forneça a distribuição de probabilidade e a função de probabilidade dos seguintes casos:

Exemplos

Exemplo 6.05

Forneça a distribuição de probabilidade e a função de probabilidade dos seguintes casos:

- Arremesso de um dado não viciado

Exemplos

Exemplo 6.05

Forneça a distribuição de probabilidade e a função de probabilidade dos seguintes casos:

- Arremesso de um dado não viciado
- Arremesso de um dado viciado no qual os números primos saem com probabilidade três vezes maior

Função de distribuição acumulada

A função de distribuição acumulada fornece a probabilidade acumulada de X até um ponto específico

$$F(\omega) = P(X \leq \omega), \forall \ \omega \in \Omega$$

Função de distribuição acumulada

A função de distribuição acumulada fornece a probabilidade acumulada de X até um ponto específico

$$F(\omega) = P(X \leq \omega), \forall \ \omega \in \Omega$$

- $P(k_1 < \omega \leq k_2) = F(k_2) - F(k_1)$

Exemplo 6.06

Forneça a função de distribuição acumulada dos seguintes casos:

Exemplos

Exemplo 6.06

Forneça a função de distribuição acumulada dos seguintes casos:

- Arremesso de um dado não viciado

Exemplos

Exemplo 6.06

Forneça a função de distribuição acumulada dos seguintes casos:

- Arremesso de um dado não viciado
- Arremesso de um dado viciado no qual os números primos saem com probabilidade três vezes maior