

Probabilidade e Estatística

Cayan Portela

UniCEUB

March 9, 2023

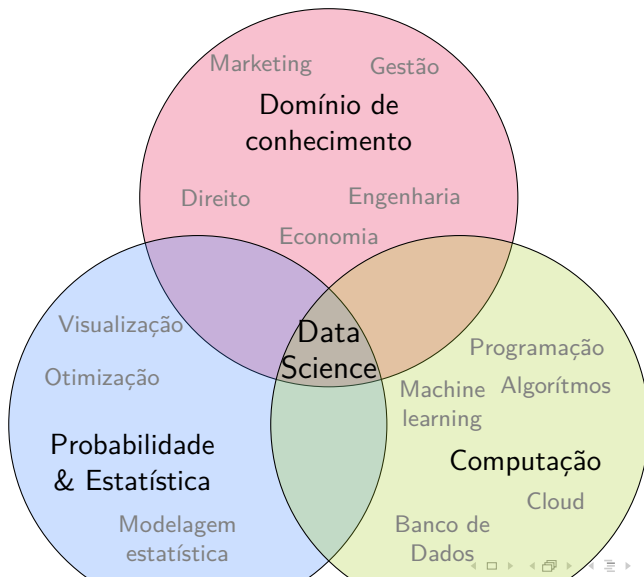
Probabilidade e Estatística

Cayan Portela

UniCEUB

March 9, 2023

- 1 Conjuntos e espaço amostral
- 2 Operações com conjuntos
- 3 Probabilidade: axiomas e operações
- 4 Regra da probabilidade total
- 5 Teorema de Bayes



Modelo é uma aproximação da realidade para ajudar no processo decisório

Modelo é uma aproximação da realidade para ajudar no processo decisório

- Porém, a realidade é repleta de incertezas

Modelo é uma aproximação da realidade para ajudar no processo decisório

- Porém, a realidade é repleta de incertezas
 - **O futuro é uma variável aleatória**

Modelo é uma aproximação da realidade para ajudar no processo decisório

- Porém, a realidade é repleta de incertezas

- **O futuro é uma variável aleatória**

Assim, as distribuições de probabilidades das variáveis de decisão e/ou das restrições também podem ser levadas em consideração

Campos distintos: ambos sobre processos aleatórios.

■ Probabilidade

- Lógica contida.
- Algumas regras para o cálculo de probabilidades.
- Única resposta correta

■ Estatística

- Estotástico/aleatório.
- Conclusões probabilísticas a partir de dados experimentais.
- Não possui uma única resposta correta

Qual a probabilidade de obtermos exatamente 1 "cara" em 3 lançamentos de uma moeda justa?

Conjuntos em Palavras.

- Meses do ano:

- S = Todos os meses.
- L = mês com 31 dias.
- R = mês com 'r' no nome.

$S = \{\text{Jan, Fev, Mar, Abr, Mai, Jun, Jul, Ago, Set, Out, Nov, Dez}\}$

$L = \{\text{Jan, Mar, Mai, Jul, Ago, Dez}\}$

$R = \{\text{Jan, Fev, Mar, Abr, Set, Out, Nov, Dez}\}$

Conjuntos em Palavras.

- Meses do ano:

- S = Todos os meses.
- L = mês com 31 dias.
- R = mês com 'r' no nome.

$S = \{\text{Jan, Fev, Mar, Abr, Mai, Jun, Jul, Ago, Set, Out, Nov, Dez}\}$

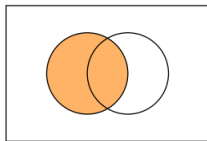
$L = \{\text{Jan, Mar, Mai, Jul, Ago, Dez}\}$

$R = \{\text{Jan, Fev, Mar, Abr, Set, Out, Nov, Dez}\}$

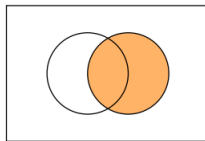
$L \cap R = \{\text{Jan, Mar, Out, Dez}\}$



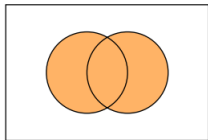
S



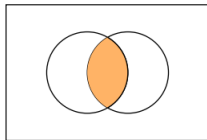
L



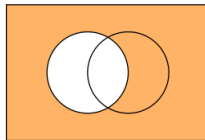
R



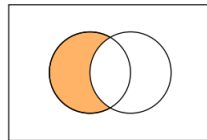
$L \cup R$



$L \cap R$



L^c



$L - R$

Conjunto

“Conjunto” é uma coleção de objetos (**numéricos ou não**)

Conjunto

“Conjunto” é uma coleção de objetos (**numéricos ou não**)

- Os membros contidos num conjunto são chamados de “elementos”

Conjunto

“Conjunto” é uma coleção de objetos (**numéricos ou não**)

- Os membros contidos num conjunto são chamados de “elementos”
 - Se **todos** os elementos de um conjunto A também forem elementos de outro conjunto B, diz-se que A está contido em B ($A \subset B$)

Conjunto

“Conjunto” é uma coleção de objetos (**numéricos ou não**)

- Os membros contidos num conjunto são chamados de “elementos”
 - Se **todos** os elementos de um conjunto A também forem elementos de outro conjunto B, diz-se que A está contido em B ($A \subset B$)
- O conjunto que não contém nenhum elemento é chamado de “conjunto vazio” (\emptyset)

Uma banda possui vocalistas e guitarristas.

- 7 cantam.
- 4 tocam guitarra.
- 2 fazem ambos.

Quantas pessoas existem na banda?

Tenho 3 calças e 4 camisas.
Quantos trajes distintos posso usar?

DNA é feito por sequências de nucleotídeos: A, C, G, T.

- Quantas sequências de tamanho 3 podemos ter?

DNA é feito por sequências de nucleotídeos: A, C, G, T.

■ Quantas sequências de tamanho 3 podemos ter?

(i) 12 (ii) 24 (iii) 64 (iv) 128

DNA é feito por sequências de nucleotídeos: A, C, G, T.

■ Quantas sequências de tamanho 3 podemos ter?

(i) 12 (ii) 24 (iii) 64 (iv) 128

$[(?), (?), (?)]$

DNA é feito por sequências de nucleotídeos: A, C, G, T.

- Quantas sequências de tamanho 3 podemos ter?

(i) 12 (ii) 24 (iii) 64 (iv) 128

$[(?), (?), (?)]$

- Quantas sequências de tamanho 3, sem repetição, podemos ter?

- Permutações de k escolhidos de n

- Permutações de k escolhidos de n

Quais permutações de $k = 3$ podemos ter de $n = \{a, b, c, d\}$?

■ Permutações de k escolhidos de n

Quais permutações de $k = 3$ podemos ter de $n = \{a, b, c, d\}$?

abc abd acb acd adb adc
bac bad bca bcd bda bdc
cab cad cba cbd cda cdb
dab dac dba dbc dca dcb

Subconjuntos:

- Ordem não importa

Quantas combinações de 3 elementos podemos ter de $\{a, b, c, d\}$?

$\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$

abc abd acb acd adb adc
bac bad bca bcd bda bdc
cab cad cba cbd cda cdb
dab dac dba dbc dca dcb

{a, b, c}

{a, b, d}

{a, c, d}

{b, c, d}

$$P_{(n,k)} = P_{(4,3)} = 4!$$

$$[(4) \times (3) \times (2)]$$

$$C_{(3,4)} = \frac{P_{(4,3)}}{3!} = \frac{4!}{3!}$$

Ordem não importa

abc abd acb acd adb adc
bac bad bca bcd bda bdc
cab cad cba cbd cda cdb
dab dac dba dbc dca dcb

$$P_{(n,k)} = P_{(4,3)} = 4!$$

$$[(4) \times (3) \times (2)]$$

{a, b, c}

{a, b, d}

{a, c, d}

{b, c, d}

$$C_{(3,4)} = \frac{P_{(4,3)}}{3!} = \frac{4!}{3!}$$

Ordem não importa

abc abd acb acd adb adc
bac bad bca bcd bda bdc
cab cad cba cbd cda cdb
dab dac dba dbc dca dcb

{a, b, c}

{a, b, d}

{a, c, d}

{b, c, d}

$$P_{(n,k)} = P_{(4,3)} = 4!$$

$$[(4) \times (3) \times (2)]$$

$$C_{(3,4)} = \frac{P_{(4,3)}}{3!} = \frac{4!}{3!}$$

Ordem não importa

$$C_{(n,k)} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

n elementos tomados k a k

Considere uma moeda justa.

- Quantas possíveis maneiras podemos obter exatamente 3 caras em 10 jogadas?

Considere uma moeda justa.

- Quantas possíveis maneiras podemos obter exatamente 3 caras em 10 jogadas?
- Qual a probabilidade de termos exatamente 3 caras em 10 jogadas?

Espaço amostral

Espaço amostral (Ω) é o conjunto de todos os possíveis resultados de um determinada variável aleatória

Espaço amostral

Espaço amostral (Ω) é o conjunto de todos os possíveis resultados de um determinada variável aleatória

- Os elementos e subconjuntos do espaço amostral representam os possíveis **eventos** associados à variável aleatória
 - Os eventos podem ser combinados de acordo com as operações de conjuntos para formar novos eventos

Variável aleatória

Etimologicamente, **Variável aleatória** é uma:

Variável aleatória

Etimologicamente, **Variável aleatória** é uma:

- **Variável:** Possui um valor desconhecido

Variável aleatória

Etimologicamente, **Variável aleatória** é uma:

- **Variável:** Possui um valor desconhecido
- **Aleatória:** Pode possuir valores diferentes, com diferentes probabilidades

Variável aleatória

Etimologicamente, **Variável aleatória** é uma:

- **Variável:** Possui um valor desconhecido
- **Aleatória:** Pode possuir valores diferentes, com diferentes probabilidades

Exemplo 6.01

Defina o espaço amostral das seguintes variáveis:

Exemplo 6.01

Defina o espaço amostral das seguintes variáveis:

- Resultado da conta $1 + 1$

Exemplo 6.01

Defina o espaço amostral das seguintes variáveis:

- Resultado da conta $1 + 1$
- Capital do Brasil

Exemplo 6.01

Defina o espaço amostral das seguintes variáveis:

- Resultado da conta $1 + 1$
- Capital do Brasil
- Número de SSs em Probabilidade e Estatística

Exemplo 6.01

Defina o espaço amostral das seguintes variáveis:

- Resultado da conta $1 + 1$
- Capital do Brasil
- Número de SSs em Probabilidade e Estatística
- Número de pessoas na nova turma do curso.

Exemplo 6.01

Defina o espaço amostral das seguintes variáveis:

- Resultado da conta $1 + 1$
- Capital do Brasil
- Número de SSs em Probabilidade e Estatística
- Número de pessoas na nova turma do curso.
- Tempo até o lançamento de um novo filme, em uma sequência.

O complementar (ou complementar absoluto) funciona como o operador negação

O complementar (ou complementar absoluto) funciona como o operador negação

- Dado um conjunto $A \in \Omega$, seu complementar (A^c) constitui nos elementos presentes no espaço amostral, mas não em A

$$A^c = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$$

O complementar (ou complementar absoluto) funciona como o operador negação

- Dado um conjunto $A \in \Omega$, seu complementar (A^c) constitui nos elementos presentes no espaço amostral, mas não em A

$$A^c = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$$

- Veja A^c como “NÃO” A

Exemplo 6.02 (a)

Seja X = Nota final em Probabilidade e Estatística:

- Defina o espaço amostral de X

Exemplo 6.02 (a)

Seja X = Nota final em Probabilidade e Estatística:

- Defina o espaço amostral de X

Seja o evento A = Menção SS

- Descreva os eventos A e A^c

A **interseção** (ou conjunção) entre os conjuntos A e B ($A \cap B$) constitui nos elementos pertencentes tanto a A quanto a B

$$A \cap B = \{x \in \Omega \mid x \in A; x \in B\}$$

A **interseção** (ou conjunção) entre os conjuntos A e B ($A \cap B$) constitui nos elementos pertencentes tanto a A quanto a B

$$A \cap B = \{x \in \Omega \mid x \in A; x \in B\}$$

- Veja $A \cap B$ como A “E” B

Exemplo 6.02 (b)

Sejam os eventos $B = \text{Aprovação}$; $C = \text{Menção MS}$

- Descreva os eventos $B \cap C$, C^c e $B^c \cap C$

Dois eventos A e B são ditos mutuamente excludentes quando $A \cap B = \emptyset$

Dois eventos A e B são ditos mutuamente excludentes quando $A \cap B = \emptyset$

- Se quando um acontece, o outro não acontece, é natural que A e B não possam acontecer ao mesmo tempo.

A **união** (ou disjunção) entre os conjuntos A e B ($A \cup B$) constitui nos elementos pertencentes a A , a B , ou a ambos

$$A \cup B = \{x \in \Omega \mid x \notin (A^c \cap B^c)\}$$

A **união** (ou disjunção) entre os conjuntos A e B ($A \cup B$) constitui nos elementos pertencentes a A , a B , ou a ambos

$$A \cup B = \{x \in \Omega \mid x \notin (A^c \cap B^c)\}$$

- Veja $A \cup B$ como A “OU” B

Exemplo 6.02 (c)

Sejam os eventos $B = \text{Aprovação}$; $C = \text{Menção MS}$

- Descreva os eventos $B \cup C$, $B \cup C^c$ e $(B^c \cap C^c)^c$

A **união exclusiva** (ou disjunção exclusiva) entre os conjuntos A e B ($A \underline{\cup} B$) constitui nos elementos pertencentes a A ou a B, mas **não** a ambos

$$A \underline{\cup} B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$$

A **união exclusiva** (ou disjunção exclusiva) entre os conjuntos A e B ($A \underline{\cup} B$) constitui nos elementos pertencentes a A ou a B, mas **não** a ambos

$$A \underline{\cup} B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$$

■ Veja $A \underline{\cup} B$ como “OU” A, “OU” B

Exemplo 6.02 (d)

Sejam os eventos $A =$ Menção SS; $D =$ Reprovação

- Descreva os eventos $A \cup D$ e $A \cup D^c$

A **diferença** (ou complementar relativo) entre os conjuntos A e B ($A \setminus B$) constitui nos elementos pertencentes a A, mas não a B

$$A \setminus B = \{x \in \Omega \mid x \in A; x \notin B\}$$

A **diferença** (ou complementar relativo) entre os conjuntos A e B ($A \setminus B$) constitui nos elementos pertencentes a A, mas não a B

$$A \setminus B = \{x \in \Omega \mid x \in A; x \notin B\}$$

- Note que $A^c = \Omega \setminus A$
- $A \setminus B \neq B \setminus A$!

Exemplo 6.02 (e)

Sejam os eventos $D = \text{Reprovação}$; $E = \text{Menção MI}$

- Descreva os eventos $(D \setminus E)^c$ e $E \setminus D$

Exemplo 6.03

Seja $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. $A = \{2, 4, 7, 10\}$; $B = \{2, 3, 5, 7\}$;
 $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $D = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Forneça:

Exemplo 6.03

Seja $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. $A = \{2, 4, 7, 10\}$; $B = \{2, 3, 5, 7\}$;
 $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $D = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Forneça:

■ $A \cap B^c$

Exemplo 6.03

Seja $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. $A = \{2, 4, 7, 10\}$; $B = \{2, 3, 5, 7\}$;
 $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $D = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Forneça:

- $A \cap B^c$
- $B \cup C^c$

Exemplo 6.03

Seja $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. $A = \{2, 4, 7, 10\}$; $B = \{2, 3, 5, 7\}$;
 $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $D = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Forneça:

- $A \cap B^c$
- $B \cup C^c$
- $A^c \underline{\cup} C$

Exemplo 6.03

Seja $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. $A = \{2, 4, 7, 10\}$; $B = \{2, 3, 5, 7\}$;
 $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $D = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Forneça:

- $A \cap B^c$
- $B \cup C^c$
- $A^c \cup C$
- $(\Omega \setminus C)^c$

Exemplo 6.03

Seja $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. $A = \{2, 4, 7, 10\}$; $B = \{2, 3, 5, 7\}$;
 $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $D = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Forneça:

- $A \cap B^c$
- $B \cup C^c$
- $A^c \underline{\cup} C$
- $(\Omega \setminus C)^c$
- D^c

Exemplo 6.04

Sejam X = curso de um estudante do UniCEUB, e os eventos A = Ciência de Dados/Diurno; B = Ciência de dados/Noturno. Forneça a expressão do conjunto no qual se encaixam os seguintes casos:

Exemplo 6.04

Sejam X = curso de um estudante do UniCEUB, e os eventos A = Ciência de Dados/Diurno; B = Ciência de dados/Noturno. Forneça a expressão do conjunto no qual se encaixam os seguintes casos:

- Estudante de ciência de dados

Exemplo 6.04

Sejam X = curso de um estudante do UniCEUB, e os eventos A = Ciência de Dados/Diurno; B = Ciência de dados/Noturno. Forneça a expressão do conjunto no qual se encaixam os seguintes casos:

- Estudante de ciência de dados
- Não é estudante de ciência de dados.

Exemplo 6.04

Sejam X = curso de um estudante do UniCEUB, e os eventos A = Ciência de Dados/Diurno; B = Ciência de dados/Noturno. Forneça a expressão do conjunto no qual se encaixam os seguintes casos:

- Estudante de ciência de dados
- Não é estudante de ciência de dados.
- Estudante de outro curso

Exemplo 6.04

Sejam X = curso de um estudante do UniCEUB, e os eventos A = Ciência de Dados/Diurno; B = Ciência de dados/Noturno. Forneça a expressão do conjunto no qual se encaixam os seguintes casos:

- Estudante de ciência de dados
- Não é estudante de ciência de dados.
- Estudante de outro curso

Definição “clássica” de probabilidade

$$P(X) = \frac{\text{Nº de casos favoráveis}}{\text{Nº de casos possíveis}}$$

Definição “clássica” de probabilidade

$$P(X) = \frac{\text{N}^{\circ} \text{ de casos favoráveis}}{\text{N}^{\circ} \text{ de casos possíveis}}$$

É o resultado numérico de uma função que associa cada elemento do espaço amostral de uma variável aleatória X a um número real entre 0 e 1

$$P : \Omega \longrightarrow [0, 1]$$

$$P(\omega) = P(X = \omega), \omega \in \Omega$$

É o resultado numérico de uma **função** que associa cada elemento do espaço amostral de uma variável aleatória X a um número real entre 0 e 1

$$P : \Omega \longrightarrow [0, 1]$$

$$P(\omega) = P(X = \omega), \omega \in \Omega$$

- Para cada **resultado possível** de uma variável aleatória, a função de probabilidade diz o quão provável é a ocorrência daquele **evento**

Axiomas de Kolmogorov

A probabilidade de ocorrência de eventos $A_1, A_2, \dots \in \Omega$ segue três propriedades básicas:

Axiomas de Kolmogorov

A probabilidade de ocorrência de eventos $A_1, A_2, \dots \in \Omega$ segue três propriedades básicas:

- $0 \leq P(A) \leq 1$

Axiomas de Kolmogorov

A probabilidade de ocorrência de eventos $A_1, A_2, \dots \in \Omega$ segue três propriedades básicas:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$

Axiomas de Kolmogorov

A probabilidade de ocorrência de eventos $A_1, A_2, \dots \in \Omega$ segue três propriedades básicas:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$
- Se A_1, A_2, \dots forem dois a dois disjuntos
(i.e., $P(A_i \cap A_j) = 0, \forall i \neq j$), $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Sejam os eventos A e B subconjuntos de Ω , é válido que:

- $P(\emptyset) = 0$

Sejam os eventos A e B subconjuntos de Ω , é válido que:

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$

Sejam os eventos A e B subconjuntos de Ω , é válido que:

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- Se $A \subseteq B$, então $P(A) \leq P(B)$

Sejam os eventos A e B subconjuntos de Ω , é válido que:

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- Se $A \subseteq B$, então $P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Sejam os eventos A e B subconjuntos de Ω , é válido que:

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- Se $A \subseteq B$, então $P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

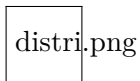
Dez alunos escolhem arbitrariamente um número natural entre 1 e 10. Qual é a probabilidade de um número qualquer ser escolhido mais de uma vez?

Sejam A e B dois eventos em um dado espaço amostral, tais que $P(A) = 0,2$, $P(B) = p$, $P(A \cup B) = 0,5$ e $P(A \cap B) = 0,1$. Determine o valor de p .

A atribuição da probabilidade de ocorrência a cada elemento do espaço amostral define uma **distribuição de probabilidade**

A atribuição da probabilidade de ocorrência a cada elemento do espaço amostral define uma **distribuição de probabilidade**

- A distribuição de probabilidade fornece $P(X = \omega)$, **para todo** $\omega \in \Omega$



Caso a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória X seja conhecida, é fácil construir sua função de probabilidade

$$f(\omega) = P(X = \omega), \forall \omega \in \Omega$$

Caso a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória X seja conhecida, é fácil construir sua função de probabilidade

$$f(\omega) = P(X = \omega), \forall \omega \in \Omega$$

- $f(\omega) \geq 0, \forall \omega \in \Omega$
- $\sum_{\Omega} f(\omega) = 1$

Exemplo 6.05

Forneça a distribuição de probabilidade e a função de probabilidade dos seguintes casos:

Exemplo 6.05

Forneça a distribuição de probabilidade e a função de probabilidade dos seguintes casos:

- Arremesso de um dado não viciado

Exemplo 6.05

Forneça a distribuição de probabilidade e a função de probabilidade dos seguintes casos:

- Arremesso de um dado não viciado
- Arremesso de um dado viciado no qual os números primos saem com probabilidade três vezes maior

A função de distribuição acumulada fornece a probabilidade acumulada de X até um ponto específico

$$F(\omega) = P(X \leq \omega), \forall \omega \in \Omega$$

A função de distribuição acumulada fornece a probabilidade acumulada de X até um ponto específico

$$F(\omega) = P(X \leq \omega), \forall \omega \in \Omega$$

■ $P(k_1 < \omega \leq k_2) = F(k_2) - F(k_1)$

Exemplo 6.06

Forneça a função de distribuição acumulada dos seguintes casos:

Exemplo 6.06

Forneça a função de distribuição acumulada dos seguintes casos:

- Arremesso de um dado não viciado

Exemplo 6.06

Forneça a função de distribuição acumulada dos seguintes casos:

- Arremesso de um dado não viciado
- Arremesso de um dado viciado no qual os números primos saem com probabilidade três vezes maior

Probabilidade é um conceito que modela a **incerteza**

Probabilidade é um conceito que modela a **incerteza**

- A incerteza é consequência da falta de informações

Probabilidade é um conceito que modela a **incerteza**

- A incerteza é consequência da falta de informações

Assim, à medida que mais informações estão disponíveis, a probabilidade de ocorrência de um evento pode mudar

Exemplo 7.01

Forneça uma estimativa da probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso ter uma altura superior a 2 metros, dadas as seguintes informações:

Exemplo 7.01

Forneça uma estimativa da probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso ter uma altura superior a 2 metros, dadas as seguintes informações:

- A pessoa escolhida é um homem

Exemplo 7.01

Forneça uma estimativa da probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso ter uma altura superior a 2 metros, dadas as seguintes informações:

- A pessoa escolhida é um homem
- A pessoa escolhida tem altura maior que 1.70 metro

Exemplo 7.01

Forneça uma estimativa da probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso ter uma altura superior a 2 metros, dadas as seguintes informações:

- A pessoa escolhida é um homem
- A pessoa escolhida tem altura maior que 1.70 metro
- A pessoa escolhida é um jogador de basquete

Exemplo 7.01

Forneça uma estimativa da probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso ter uma altura superior a 2 metros, dadas as seguintes informações:

- A pessoa escolhida é um homem
- A pessoa escolhida tem altura maior que 1.70 metro
- A pessoa escolhida é um jogador de basquete
- A pessoa escolhida joga como pivô

Exemplo 7.01

Forneça uma estimativa da probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso ter uma altura superior a 2 metros, dadas as seguintes informações:

- A pessoa escolhida é um homem
- A pessoa escolhida tem altura maior que 1.70 metro
- A pessoa escolhida é um jogador de basquete
- A pessoa escolhida joga como pivô
- A pessoa escolhida é a mais alta do seu time

Exemplo 7.01

Forneça uma estimativa da probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso ter uma altura superior a 2 metros, dadas as seguintes informações:

- A pessoa escolhida é um homem
- A pessoa escolhida tem altura maior que 1.70 metro
- A pessoa escolhida é um jogador de basquete
- A pessoa escolhida joga como pivô
- A pessoa escolhida é a mais alta do seu time

Acréscimos informacionais implicam em diminuição do espaço amostral associado!

Caso seja sabido que um evento A ocorreu, o espaço amostral original (em que A era uma incerteza) reduzir-se-à aos casos em que A passa a ser uma certeza

Caso seja sabido que um evento A ocorreu, o espaço amostral original (em que A era uma incerteza) reduzir-se-à aos casos em que A passa a ser uma certeza

- A probabilidade de ocorrência de B , dado que aconteceu A ($P(B|A)$), equivale a calcular $P(B)$ em relação ao espaço amostral reduzido onde A é uma certeza

Linda tem 31 anos de idade, é solteira, franca e muito inteligente. É formada em filosofia. Quando era estudante, preocupava-se profundamente com questões de discriminação e justiça social, e também participava de manifestações antinucleares

- Linda é professora numa escola primária.

- Linda é professora numa escola primária.
- Linda trabalha numa livraria e faz aula de ioga.

- Linda é professora numa escola primária.
- Linda trabalha numa livraria e faz aula de ioga.
- Linda é ativa no movimento feminista.

- Linda é professora numa escola primária.
- Linda trabalha numa livraria e faz aula de ioga.
- Linda é ativa no movimento feminista.
- Linda é assistente social de psiquiatria.

- Linda é professora numa escola primária.
- Linda trabalha numa livraria e faz aula de ioga.
- Linda é ativa no movimento feminista.
- Linda é assistente social de psiquiatria.
- Linda é caixa de banco.

- Linda é professora numa escola primária.
- Linda trabalha numa livraria e faz aula de ioga.
- Linda é ativa no movimento feminista.
- Linda é assistente social de psiquiatria.
- Linda é caixa de banco.
- Linda é vendedora de seguros.

- Linda é professora numa escola primária.
- Linda trabalha numa livraria e faz aula de ioga.
- Linda é ativa no movimento feminista.
- Linda é assistente social de psiquiatria.
- Linda é caixa de banco.
- Linda é vendedora de seguros.
- Linda é caixa de banco e ativa no movimento feminista.

- Qual alternativa é mais provável?
 - Linda é uma caixa de banco.
 - Linda é uma caixa de banco e é ativa no movimento feminista.

ATENÇÃO!

ATENÇÃO!

- $P(B|A)$ NÃO precisa ser maior que $P(B)$!!!

ATENÇÃO!

- $P(B|A)$ NÃO precisa ser maior que $P(B)$!!!
 - O espaço amostral está associado à diminuição da incerteza; dada a ocorrência de A, a probabilidade de B ocorrer pode aumentar ou diminuir

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Propriedades:

- $0 \leq P(B|A) \leq 1$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Propriedades:

- $0 \leq P(B|A) \leq 1$
- $P(\Omega|A) = 1$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Propriedades:

- $0 \leq P(B|A) \leq 1$
- $P(\Omega|A) = 1$
- $P(A|A) = 1$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Propriedades:

- $P(\emptyset|A) = 0$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Propriedades:

- $P(\emptyset|A) = 0$
- $P(A|\emptyset) = P(A)$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Propriedades:

- $P(\emptyset|A) = 0$
- $P(A|\emptyset) = P(A)$
- Se $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, $P(B_1 \cup B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A)$

Exemplo 7.02

100 alunos se inscreveram em um programa de intercâmbio, dentre os quais 60 falam inglês, 70 falam espanhol e 40 falam as duas línguas. Calcule:

- A probabilidade de se selecionar ao acaso um aluno que não fale nem inglês, nem espanhol
- Sabendo que se selecionou um aluno que não fala espanhol, qual a probabilidade de ele falar inglês?

Exemplo 7.03

Um cofre possui 50 moedas, 40 de 10 centavos e 10 de 5 centavos. Retirando aleatoriamente três moedas **sem reposição** e assumindo que todas as moedas possuem a mesma probabilidade de serem selecionados, calcule a probabilidade de:

- A soma do valor das três moedas ser igual a 20 centavos

Exemplo 7.03

Um cofre possui 50 moedas, 40 de 10 centavos e 10 de 5 centavos. Retirando aleatoriamente três moedas **sem reposição** e assumindo que todas as moedas possuem a mesma probabilidade de serem selecionados, calcule a probabilidade de:

- A soma do valor das três moedas ser igual a 20 centavos
- A soma do valor das três moedas ser igual a 20 centavos, sabendo que a primeira moeda retirada foi de 10 centavos

Exemplo 7.03

Um cofre possui 50 moedas, 40 de 10 centavos e 10 de 5 centavos. Retirando aleatoriamente três moedas **sem reposição** e assumindo que todas as moedas possuem a mesma probabilidade de serem selecionados, calcule a probabilidade de:

- A soma do valor das três moedas ser igual a 20 centavos
- A soma do valor das três moedas ser igual a 20 centavos, sabendo que a primeira moeda retirada foi de 10 centavos
- A soma do valor das três moedas ser igual a 15 centavos, sabendo que a primeira moeda retirada foi de 10 centavos

Exemplo 7.03

Um cofre possui 50 moedas, 40 de 10 centavos e 10 de 5 centavos. Retirando aleatoriamente três moedas **sem reposição** e assumindo que todas as moedas possuem a mesma probabilidade de serem selecionados, calcule a probabilidade de:

- A soma do valor das três moedas ser igual a 20 centavos
- A soma do valor das três moedas ser igual a 20 centavos, sabendo que a primeira moeda retirada foi de 10 centavos
- A soma do valor das três moedas ser igual a 15 centavos, sabendo que a primeira moeda retirada foi de 10 centavos

Eventos independentes

Dois eventos A e B são ditos **independentes** quando a probabilidade de ocorrência de um não influencia na probabilidade de ocorrência do outro.

Eventos independentes

Dois eventos A e B são ditos **independentes** quando a probabilidade de ocorrência de um não influencia na probabilidade de ocorrência do outro.

- A e B são independentes $\leftrightarrow P(A|B) = P(A)$
 $\leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Eventos independentes

Dois eventos A e B são ditos **independentes** quando a probabilidade de ocorrência de um não influencia na probabilidade de ocorrência do outro.

- A e B são independentes $\leftrightarrow P(A|B) = P(A)$
 $\leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Eventos independentes e eventos mutuamente excludentes são duas coisas diferentes!

Exemplo 7.04

Ao lançar uma moeda não viciada 10 vezes, você tira 10 caras em sequência. Qual é a probabilidade de se obter mais uma cara no próximo lançamento?

Se A é independente de B , qualquer informação a respeito de B (incluindo o fato de B **não** ter acontecido) não deve alterar a probabilidade de A .

Se A é independente de B , qualquer informação a respeito de B (incluindo o fato de B **não** ter acontecido) não deve alterar a probabilidade de A .

- Se A e B são eventos independentes, A e B^c , A^c e B , e A^c e B^c também o são.

Se A é independente de B , qualquer informação a respeito de B (incluindo o fato de B **não** ter acontecido) não deve alterar a probabilidade de A .

- Se A e B são eventos independentes, A e B^c , A^c e B , e A^c e B^c também o são.

Partição

n eventos E_1, E_2, \dots, E_n formam uma **partição** do espaço amostral Ω quando:

Partição

n eventos E_1, E_2, \dots, E_n formam uma **partição** do espaço amostral Ω quando:

- $P(E_i) > 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$

Partição

n eventos E_1, E_2, \dots, E_n formam uma **partição** do espaço amostral Ω quando:

- $P(E_i) > 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$

- $\bigcup_{i=1}^n E_i = \Omega$

Partição

n eventos E_1, E_2, \dots, E_n formam uma **partição** do espaço amostral Ω quando:

- $P(E_i) > 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$
- $\bigcup_{i=1}^n E_i = \Omega$
- $P(E_i \cap E_j) = \emptyset, \forall i \neq j, i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$

Regra da probabilidade total

Dado um espaço amostral Ω particionado em E_1, E_2, \dots, E_n e um evento $A \in \Omega$, a probabilidade de ocorrência de A pode ser expressa por:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|E_1) \cdot P(E_1) + P(A|E_2) \cdot P(E_2) + \dots + P(A|E_n) \cdot P(E_n) \\ &= \sum_{i=1}^n P(A|E_i) \cdot P(E_i) \end{aligned}$$

Exemplo 7.06

Três carteiros dividiram entre si a tarefa de entregar 100 correspondências. O carteiro A ficou com 30, o carteiro B com 45, e o carteiro C com o restante. Para cada um dos carteiros A, B e C, a probabilidade de entregar uma correspondência para o endereço errado é de 1%, 5% e 3%, respectivamente. Qual é a probabilidade de uma correspondência qualquer ser entregue para o endereço errado?

Com a regra da probabilidade total, podemos enunciar $P(E_j|A)$ em termos de $P(A|E_j)$ e $P(E_j)$

■ Lembre-se que
$$P(E_j|A) = \frac{P(E_j \cap A)}{P(A)}$$

Teorema de Bayes

Dado um espaço amostral Ω particionado em E_1, E_2, \dots, E_n e um evento $A \in \Omega$, a probabilidade condicional de E_j dado A , para todo $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, é dada por:

$$P(E_j|A) = \frac{P(A|E_j) \cdot P(E_j)}{\sum_{i=1}^n P(A|E_i) \cdot P(E_i)}$$

Exemplo 7.07

Uma das 100 correspondências do exemplo 7.06 foi entregue ao endereço errado. Qual é a probabilidade de ela ter sido entregue pelo carteiro C?

Exemplo 7.08

Três moedas são sorteadas e uma delas é escolhida aleatoriamente. A primeira moeda tem duas caras, a segunda tem duas coroas e a terceira tem uma cara e uma coroa. Sabendo que a moeda escolhida possui uma coroa, qual a probabilidade de a outra face também ser coroa?

Exemplo 7.09

Um laboratório de exame de DNA acerta o resultado em 95% das vezes. Um segundo laboratório é especializado em checar o resultado do primeiro exame, e identifica um exame equivocado corretamente em 99% das vezes; porém, tem 2% de chance de classificar um exame correto como equivocado:

- Qual a probabilidade de um exame do primeiro laboratório escolhido ao acaso ser identificado como equivocado?
- Se um exame do primeiro laboratório é identificado como correto, qual a probabilidade de que de fato esteja correto?