

**Ejercicio 14.** En cada uno de los siguientes casos construir un proyector  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que cumpla:

i)  $\text{Im}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$      $x_3 = -x_1 - x_2$

ii)  $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

iii)  $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / 3x_1 - x_3 = 0\}$  e  $\text{Im}(f) = \langle (1, 1, 1) \rangle$

$$i) \text{Im } f = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \langle (1, 0, -1), (0, 1, -1) \rangle$$

Como  $\dim(\text{Im } f \oplus \text{Nu } f) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$

y  $\dim \text{Im } f = 2$

$\Rightarrow \dim \text{Nu } f = 1$

$\Rightarrow \text{Nu } f = \langle (0, 1, 0) \rangle$      $\swarrow$  elijo uno li a los de  $\text{Im } f$

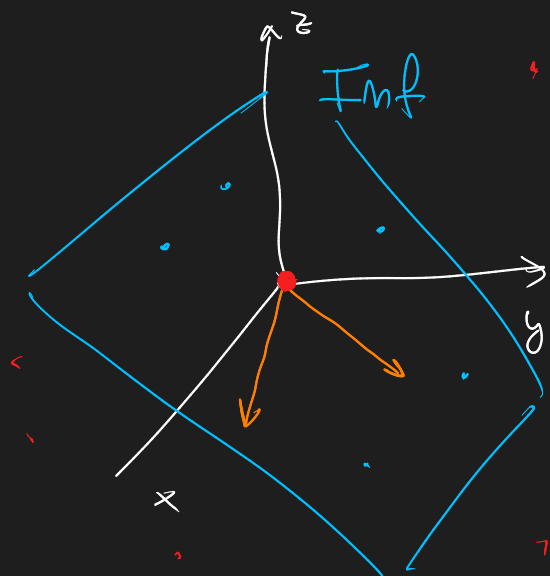
∴

$f \circ f = f$  para los elem. de  $\text{Im } f$

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$ii) \text{Nu } f = \langle (1, 0, -1), (0, 1, -1) \rangle$$

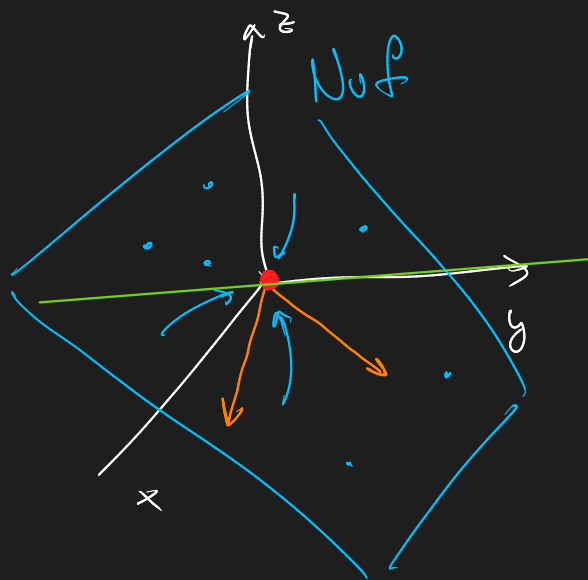
$$\Rightarrow \text{Im } f = \langle (0, 1, 0) \rangle$$

o.o

$$f(1, 0, -1) = (0, 0, 0)$$

$$f(0, 1, -1) = (0, 0, 0)$$

$$f(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$$



$$iii) \text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / 3x_1 - x_3 = 0\} \text{ e } \text{Im}(f) = \langle (1, 1, 1) \rangle$$

$$x_3 = 3x_1$$

$$\{(x_1, x_2, 3x_1)\}$$

$$\text{Nu } f = \langle (1, 0, 3), (0, 1, 0) \rangle$$

$$\text{Im } f = \langle (1, 1, 1) \rangle$$

$$f(1, 0, 3) = (0, 0, 0)$$

$$f(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$$

$$f(1, 1, 1) = (1, 1, 1)$$

### Ejercicio 15.

- (a) Sea  $B = \{(1, -1, 0), (0, 1, -1), (0, 0, 1)\}$  base de  $\mathbb{R}^3$  y sea  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación lineal tal que:

$$f(1, -1, 0) = (1, -1, 0), \quad f(0, 1, -1) = (0, 1, -1) \quad \text{y} \quad f(0, 0, 1) = (0, 0, 0).$$

Calcular  $[f]_B$  y comprobar que  $f$  es un proyector.

- (b) Construir un proyector  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $\text{Nu}(f) = \langle (1, 1, 1) \rangle$  e  $\text{Im}(f) = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 - 3x_3 = 0\}$ . ¿Es  $f$  una proyección ortogonal?

$$\text{Llamo } B = \left\{ \underset{\omega_1}{(1, -1, 0)}, \underset{\omega_2}{(0, 1, -1)}, \underset{\omega_3}{(0, 0, 1)} \right\}$$

$$f(\omega_1) = \omega_1 \qquad [f]_{BB} = [f]_{BB}$$

$$f(\omega_2) = \omega_2 \qquad [T]_{BB'} \cdot (v)_B = (T(v))_{B'}$$

$$f(\omega_3) = (0, 0, 0) \qquad [T]_{BB'} = \begin{bmatrix} | & & | \\ T(v_1) & \cdots & T(v_n) \\ | & & | \end{bmatrix}$$

∴

$$f((1, 0, 0)_B) = (1, 0, 0)_B$$

$$f((0, 1, 0)_B) = (0, 1, 0)_B$$

$$f((0, 0, 1)_B) = (0, 0, 0)_B$$

$$[f]_{BB} = \begin{bmatrix} | & & | \\ f(\omega_1) & \cdots & f(\omega_3) \\ | & & | \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [f]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f \text{ es Proyector } \Rightarrow [f]_{EE} = C_{BE} [f]_{BB} C_{BE}^{-1}$$

$$\bullet [f]_B^2 = [f]_B$$

$$[f]_{\mathcal{B}}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [f]_{\mathcal{B}} \checkmark$$

o.o  $f$  es Projector

(b) Construir un proyector  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $\text{Nu}(f) = \langle (1, 1, 1) \rangle$  e  $\text{Im}(f) = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 - 3x_3 = 0\}$ . ¿Es  $f$  una proyección ortogonal?

$$x_1 + x_2 = 3x_3$$

$$x_2 = 3x_3 - x_1$$

$$\text{Im } f = \langle (1, -1, 0), (0, 3, 1) \rangle$$

$$f(1, 1, 1) = (0, 0, 0)$$

$$f(1, -1, 0) = (1, -1, 0)$$

$$f(0, 3, 1) = (0, 3, 1)$$

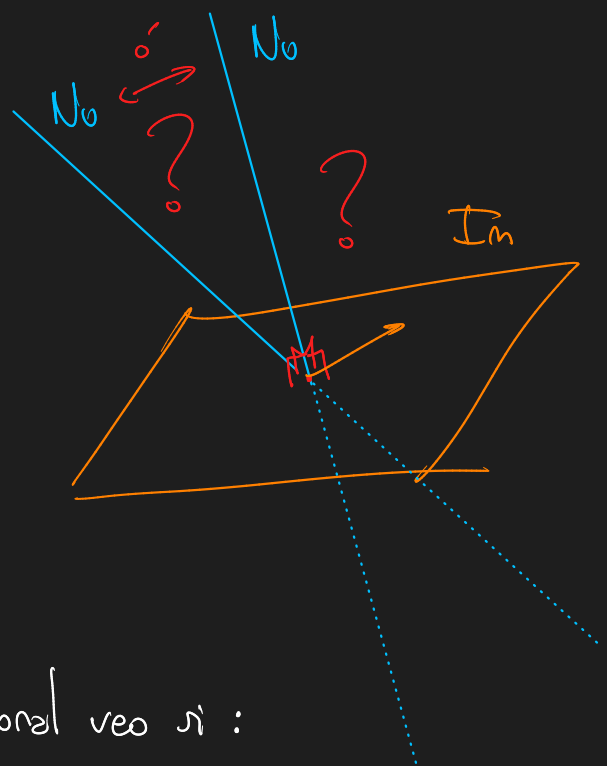
⏟

Para ver si es Proyección ortogonal veo si :

$$\text{Nu } f = \text{Im } f^\perp \quad (\text{complemento ortogonal})$$

$$S^\perp = \{v \in V : v \cdot \lambda = 0 \quad \forall \lambda \in S\}$$

$\Rightarrow$  Veo :



$$\begin{matrix} \in \text{Im} f \\ (1, -1, 0) \end{matrix} \begin{matrix} \in \text{Nul} f \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix} = 0 \quad \checkmark$$

$$\begin{matrix} \in \text{Im} f \\ (0, 3, 1) \end{matrix} \begin{matrix} \in \text{Nul} f \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix} = 4 \neq 0 \quad \therefore \underline{\text{no}} \text{ son ortogonales}$$

$\therefore \underline{\text{no}}$  es Proyección ortogonal.

**Ejercicio 16.** Sea  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$  un vector columna tal que  $\|\mathbf{v}\|_2 = 1$ . Probar que:

- (a) La transformación lineal definida por la matriz  $\mathbf{v}\mathbf{v}^*$  es la proyección ortogonal sobre  $\langle \mathbf{v} \rangle$ .
- (b) Si  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$  es una base ortonormal del subespacio  $S$ , entonces:  $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^m \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^*$  es la proyección ortogonal sobre  $S$ .
- (c) Si  $\mathbf{A}$  es como en el ítem anterior,  $\mathbf{I} - \mathbf{A}$  es la proyección ortogonal sobre  $S^\perp$ .
- (d) Eligiendo  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$  tal que  $\|\mathbf{v}\|_2 = 1$ , corroborar gráficamente en Python que  $\mathbf{R} = \mathbf{I} - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^*$  es la reflexión respecto de  $\langle \mathbf{v} \rangle^\perp$ .

$$a) \quad \mathbf{v}\mathbf{v}^* = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 & \dots & v_1 \cdot v_n \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 & \dots & v_2 \cdot v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n \cdot v_1 & v_n \cdot v_2 & \dots & v_n \cdot v_n \end{bmatrix}$$

Sea:

$$P_{\langle \mathbf{v} \rangle}(\omega) = \mathbf{v}^* \omega \cdot \mathbf{v}$$

Revisar y Seguir!

$$= \underbrace{(\mathbf{v}^* \omega)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \mathbf{v}$$

$$= \mathbf{v} (\mathbf{v}^* \omega)$$

$$= (\mathbf{v} \mathbf{v}^*) \omega \quad \checkmark$$

b)

$$c) \quad \mathbf{I} - \mathbf{A} = \mathbf{I} - \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^*$$

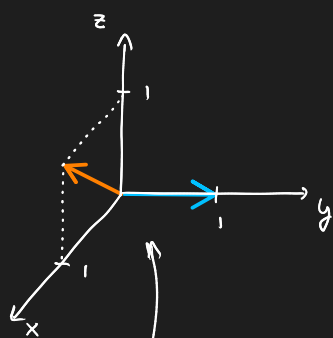
d) Ver notebook.

Ejercicio 17. Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Calcular la matriz de la proyección ortogonal sobre  $\text{Im}(A)$ .

$$\text{Im } A = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix}$$

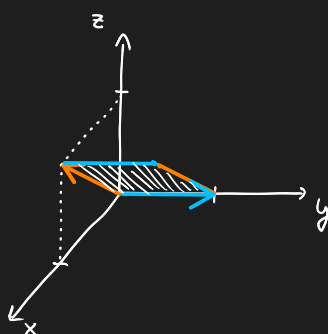
Prue

$$\text{Im } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$



Son ortogonales

Pero  $v_1$  tiene norma  $\sqrt{2}$



B B.O.N de  $\text{Im } A$ :

$$B = \left\langle \underbrace{\left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}_{q_1}, \underbrace{(0, 1, 0)}_{q_2} \right\rangle$$

Calcula matrices

↙ matriz de proy. ortogonal sobre  $\text{Im } A$

$$[P_B]_{EE} = q_1 q_1^* + q_2 q_2^*$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Ex: en plus

$$P_S(\omega) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

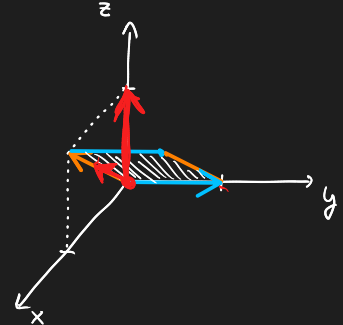
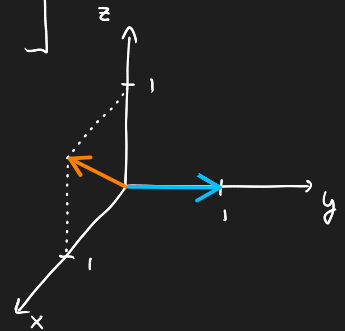
$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} v = w \in \text{Plano gerado por } B$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (-1, 0, 1)$$



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \vec{0}$$

**Ejercicio 18.** Sea  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Probar que son equivalentes:

- (a)  $Q^{-1} = Q^t$ .
- (b) Las columnas de  $Q$  forman un conjunto ortonormal.
- (c) Las filas de  $Q$  forman un conjunto ortonormal.
- (d)  $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Interpretar (d) geoméricamente.

*Sugerencia:* para demostrar la implicación  $(d \Rightarrow b)$  usar que  $x^t y = \frac{1}{4}(\|x + y\|_2^2 - \|x - y\|_2^2)$ .

(e)  $Q$ : matriz ortogonal (columnas ortonormales)

$$a) \quad Q^{-1} = Q^t$$

$$Q^{-1} Q = Q^t Q$$

$$I = \begin{bmatrix} - & q_1^t & - \\ & \vdots & \\ - & q_n^t & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & & | \\ q_1 & \dots & q_n \\ | & & | \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1^t q_1 & q_1^t q_2 & \dots & q_1^t q_n \\ q_2^t q_1 & q_2^t q_2 & \dots & q_2^t q_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_n^t q_1 & q_n^t q_2 & \dots & q_n^t q_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow q_i^t q_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\Rightarrow \|q_i\| = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$b) \quad \text{Si } (b) \Rightarrow (a) \quad \text{y} \quad \text{Si } (a) \Rightarrow (b)$$

$$c) \quad \text{Si } (c) \Rightarrow (b) \quad \text{y} \quad \text{Si } (b) \Rightarrow (c)$$

Pur

$$Q = \begin{bmatrix} - & q_1 & - \\ - & q_n & - \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Q^t = \begin{bmatrix} | & | \\ q_1 & q_n \\ | & | \end{bmatrix}$$

$Q^t$  complete (b) ✓

$$d) \|Qx\|_2^2 = (Qx)^t Qx$$

$$\stackrel{(a)}{=} x^t \underbrace{Q^t Q}_{=I} x$$

$$= x^t x$$

$$\|Qx\|_2^2 = \|x\|_2^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \checkmark$$

Ejercicio 19. Hallar la factorización  $QR$  de las siguientes matrices

$$a) A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}, \quad b) A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Algoritmo:

1. Uso G-S sobre cada una de las columnas de  $A$ , de esa forma obtengo vectores ortogonales entre sí, de norma 1
2. Estos vectores obtenidos serán las columnas de  $Q$ , que tiene la misma dimensionalidad de  $A$
3. Como  $Q$  es ortogonal (matriz con columnas ortonormales),  $Q$  es inversible pero ADEMÁS  $Q^t = Q^{-1}$
4.  $A = Q R$   
 $Q^{-1} A = Q^{-1} Q R$   
 $Q^t A = R$

Y con ese producto calculo  $R$

$R$  es Triangular sup puer

$$R = \overset{Q^t}{\begin{bmatrix} -q_1 & - \\ -q_2 & - \end{bmatrix}} \overset{A}{\begin{bmatrix} | & | \\ a_1 & a_2 \\ | & | \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$$

Como  $q_2$  es ortonormal a  $q_1$ ,

$\Rightarrow q_2$  es ortonormal a  $a_1$ ,

$$\Rightarrow \langle q_2, a_1 \rangle = 0$$

**Ejercicio 20.** Implementar dos programas que calculen la descomposición  $QR$  de una matriz:

1. Aplicando de manera directa el método de ortonormalización de Gram-Schmidt.
2. Utilizando transformaciones de Householder.

Generar algunas matrices aleatorias y comparar las descomposiciones arrojadas por estos programas con las dadas por el comando `np.linalg.qr`. ¿Qué se observa?

**Ejercicio 21.** Implementar un programa que resuelva un sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  a partir de la descomposición  $QR$  de  $\mathbf{A}$ .

$$Q \underbrace{R}_{\mathbf{g}} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\begin{cases} Q \mathbf{g} = \mathbf{b} \\ R \mathbf{x} = \mathbf{g} \end{cases}$$

$\uparrow$   
Sol.