Valores singulares

Ejercicio 7. Considerar la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Calcular una descomposición en valores singulares de $\boldsymbol{A}$.

(b) Dibujar el círculo unitario en $\mathbb{R}^2$ y la elipse $\{\boldsymbol{Ax} : \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \|\boldsymbol{x}\|_2 = 1\}$, señalando los valores singulares y los vectores singulares a izquierda y a derecha.

(c) Calcular $\|\boldsymbol{A}\|_2$ y $\text{cond}_2(\boldsymbol{A})$.

(d) Calcular $\boldsymbol{A}^{-1}$ usando la descomposición hallada.

a) $$A^t A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16+9 & 15 \\ 15 & 25 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 25 & 15 \\ 15 & 25 \end{bmatrix}$$

Avals de $A^t A$

$$\chi_{A^tA}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 25 & 15 \\ 15 & \lambda - 25 \end{vmatrix} = (\lambda - 25)^2 - 15^2 = 0$$

Entonces quiero

$$(\lambda - 25)^2 = 15^2$$

$$|\lambda - 25| = 15$$

$$\lambda_1 = 40 \Rightarrow \sigma_1 = 2\sqrt{10}$$

$$\lambda_2 = 10 \Rightarrow \sigma_2 = \sqrt{10}$$

Tengo Σ

Avecs

$$\text{Nu} \begin{bmatrix} 15 & 15 \\ 15 & 15 \end{bmatrix} \Rightarrow E_{40} = \langle (-1, 1) \rangle$$

$$\text{Nu} \begin{bmatrix} -15 & 15 \\ 15 & -15 \end{bmatrix} \Rightarrow E_{10} = \langle (1, 1) \rangle$$

Tengo V

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Falta U

$$A v_1 = \sigma_1 . u_1$$

CA

$$2\sqrt{10} . \sqrt{2} = 2 . 2\sqrt{5}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\sqrt{10} . u_1$$

$$\frac{1}{2\sqrt{10}\sqrt{2}} . \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = u_1 \Rightarrow u_1 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 1/2\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

con $\|u_1\| = \sqrt{\frac{4}{4.5} + \frac{1}{4.5}}$

$= \frac{1}{2}$

$$A v_2 = \sigma_2 . u_2$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \sqrt{10} . u_2$$

$$\frac{1}{\sqrt{10}\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} = u_2 \Rightarrow u_2 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 4/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

con $\|u_2\| = \sqrt{\frac{4}{5} + \frac{16}{5}}$

$= \sqrt{4} = 2$

- $$\frac{u_1}{\|u_1\|} = 2 . \begin{bmatrix} -2/2\sqrt{5} \\ 1/2\sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

- $$\frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 4/\sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Finalmente

$$A = U \Sigma V^*$$ Atenti ¡!

$$V = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} 2\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{bmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{V^*}$$

Reviso

singular value decomposition	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

Result

$M = U.\Sigma.V^\dagger$

where

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

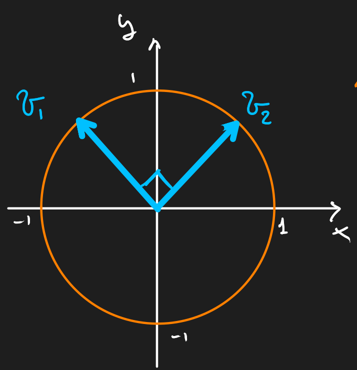
Usó el otro algoritmo con AA^t al comienzo

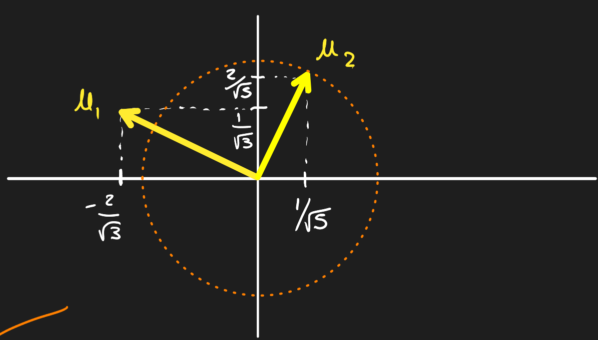
$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{pmatrix}$$

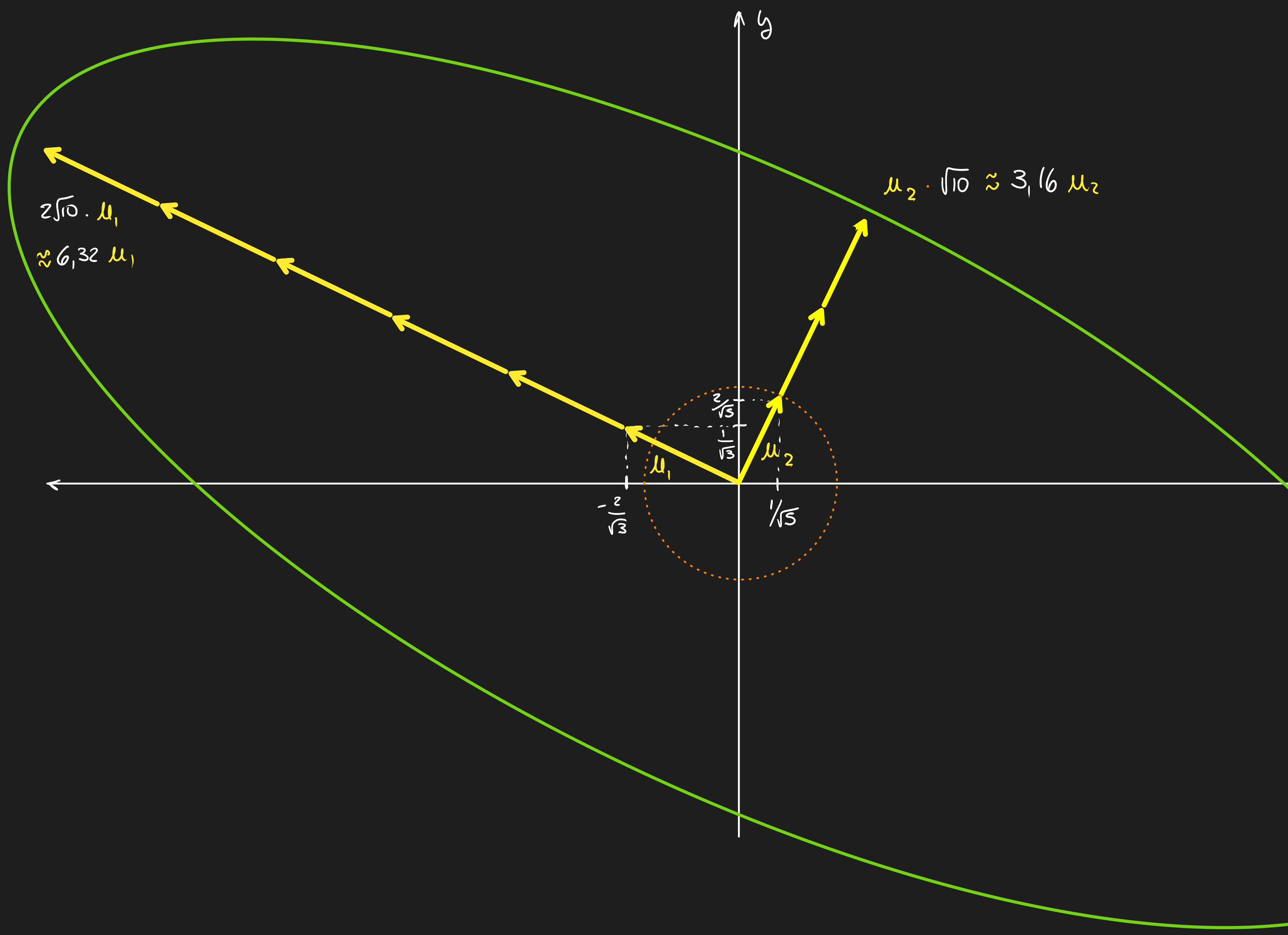
$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

(b) Dibujar el círculo unitario en $\mathbb{R}^2$ y la elipse $\{\boldsymbol{Ax} : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \|\boldsymbol{x}\|_2 = 1\}$, señalando los valores singulares y los vectores singulares a izquierda y a derecha.

$\sqrt{10} \approx 3{,}16$







(c) Calcular $\|\boldsymbol{A}\|_2$ y $\text{cond}_2(\boldsymbol{A})$.

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^tA)} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\frac{1}{\text{min aval } A^tA}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow \text{Cond}_2 A = 2\sqrt{10} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = 2$$

(d) Calcular $\boldsymbol{A}^{-1}$ usando la descomposición hallada.

Como $A = U \Sigma V^*$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} -2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} 2\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{bmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{V^*}$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = U \Sigma^{-1} V^*$$

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{10} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{10} \end{bmatrix}}_{\Sigma^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{V^*}$$

Ejercicio 8. Determinar una descomposición en valores singulares de las siguientes matrices:

$$(a)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad (b)\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{pmatrix}$$

Probar que para todo $v \in \mathbb{R}^2$ se tiene $\|Av\|_2 \geq 15\|v\|_2$.

Veo $A^t A$

Result

$M = U.\Sigma.V^\dagger$

where

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 15 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \min \sigma_i$$

$$V = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Sé que

$$\|A\|_2 = \max_{v} \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = \max \text{ valor singular de } A$$

$$\Rightarrow \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} \leq 30$$

$$\min_{v} \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = \min \text{ valor singular de } A$$

$$\Rightarrow \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} \geq 15$$

Ejercicio 10. Mostrar que $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tiene un valor singular nulo si y sólo si tiene un autovalor nulo.

Si $\lambda = 0$ es Avd de A

$\Rightarrow \chi_A = \lambda^j($ algo $)$ con $j \geq 1$

Ejercicio 11. Sea que $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, demostrar que los valores singulares de la matriz $\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n \\ \boldsymbol{A} \end{pmatrix}$ son $\sqrt{1+\sigma_i^2}$ donde $\boldsymbol{I}_n$ es la matriz identidad de $\mathbb{C}^{n\times n}$ y σ_i es el i-ésimo valor singular de $\boldsymbol{A}$.

Ejercicio 12. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $\sigma > 0$. Demostrar que σ es valor singular de $\boldsymbol{A}$ si y solo si la matriz $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^* & -\sigma \boldsymbol{I}_n \\ -\sigma \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}$ es singular, donde $\boldsymbol{I}_n$ es la matriz identidad de $\mathbb{C}^{n\times n}$.

Ejercicio 13. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, probar que los valores singulares de $\boldsymbol{A}^t$, $\bar{\boldsymbol{A}}$ y $\boldsymbol{A}^*$ son iguales a los de $\boldsymbol{A}$.

Los autovalores de AtA y de AAt son los mismos, pues ambos algoritmos son válidos para obtener los valores singulares de A.

Por lo tanto A y At tienen los mismos valores singulares.

A^tA tiene los mismos que A^*A si es que tiene los mismos que $\bar{A}^t\bar{A}$

$\bar{A}^t\bar{A} = \overline{A^tA}$ ← los avals son todos en $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $\overline{A^tA}$ tiene los mismos avals

Terminar ?

Ejercicio 14. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, de rango r, con valores singulares no nulos: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r$

(a) Probar que $\boldsymbol{A}$ puede escribirse como una suma de r matrices de rango 1.

(b) Probar que dado $s < r$ se pueden sumar s matrices de rango 1 matrices adecuadamente elegidas de manera de obtener una matriz $\boldsymbol{A}_s$ que satisface:

$$\|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}_s\|_2 = \sigma_{s+1}$$

Nota: $\boldsymbol{A}_s$ resulta ser la mejor aproximación a $\boldsymbol{A}$ (en norma 2), entre todas las matrices de rango s.

a) Escribo cada fila o columna li en una matriz diferente

b) Los valores singulares de la descomposición SVD quedan ordenados de mayor a menor en la diagonal de Sigma.

~~Ahora, por ejemplo, si solo veo el primer valor singular en Sigma, junto con la primer columna de U, y la primer fila de V*, entonces estaré reconstruyendo la primer fila del A original.~~

~~Lo mismo con el segundo valor singular y los respectivos vectores.~~

~~Armo As como la matriz que ignora el ultimo valor singular, entonces A-As solo dejará el último valor singular con los respectivos vectores.~~

La norma 2 de eso será el valor singular más grande, que en este caso es único, que es el sigma_s+1

Nota de Nota:
Que As resulte ser la mejor aproximación de A en norma 2, me da a entender que los valores singulares de mayor a menor se corresponden con la información contenida en la matriz original de mayor a menor.

En otras palabras, el primer valor singular con sus respectivos vectores la mayor cantidad de información de A.
Le sigue el segundo valor singular, y así hasta alcanzar el último valor singular, que es la parte de la descomposición que contiene la información menos significativa de A.

Ejercicio 15. Sea

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Hallar la matriz de rango 2 que mejor aproxima a $\boldsymbol{A}$ en norma 2.

(b) Hallar la matriz de rango 1 que mejor aproxima a $\boldsymbol{A}$ en norma 2.

Ejercicio 16. Dada una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, cuya descomposición en valores singulares reducida es $\boldsymbol{A} = \hat{\boldsymbol{U}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\hat{\boldsymbol{V}}^t$. Se define la pseudo-inversa de $\boldsymbol{A}$ como $\boldsymbol{A}^\dagger = \hat{\boldsymbol{V}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\hat{\boldsymbol{U}}^t$.

(a) Verificar que $\boldsymbol{A}^\dagger$ satisface las siguientes propiedades:

i. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$

ii. $\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\dagger = \boldsymbol{A}^\dagger$

iii. $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\dagger)^t = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\dagger$

iv. $(\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{A})^t = \boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{A}$

(b) Probar que si dos matrices $\boldsymbol{B}_1$ y $\boldsymbol{B}_2$ satisfacen las 4 propiedades del ítem anterior, entonces verifican $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_2$ y $\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{A}$.

(c) Probar que la pseudo inversa de A es única.

Ejercicio 17. Caracterizar geométricamente y graficar la imagen de la esfera unitaria

$$S_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\boldsymbol{x}\|_2 = 1\}$$

por la transformación $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, con

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ 2 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 18. Hallar, si existe, una matriz A con coeficientes reales y del tamaño adecuado para que los valores singulares no nulos de $\boldsymbol{A}$ sean $\left\{\frac{3}{2}, 3\right\}$,

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix}2 & 2 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$