

Ejercicio 12. Sean $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Probar que $\{v_1, \dots, v_k\}$ es linealmente independiente sobre \mathbb{R} si y solo si $\{v_1, \dots, v_k\}$ es linealmente independiente sobre \mathbb{C} .

$\Rightarrow \{v_i\}$ es li sobre \mathbb{R}

$$\Rightarrow \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \dots + \alpha_k \cdot v_k = 0 \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

Supongo que existen $\beta_i \neq 0$:

$$\beta_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot v_2 + \dots + \beta_k \cdot v_k = 0 \quad \text{con } \beta_i \in \mathbb{C}$$

Sea p. d. q:

$$\text{Si } \beta_1 \neq 0$$

$$\begin{array}{lcl} v_1 + \underbrace{\frac{\beta_2}{\beta_1} \cdot v_2 + \dots + \frac{\beta_k}{\beta_1} \cdot v_k}_{\in \mathbb{R}} = 0 & & \underbrace{i \cdot b_2 v_2 + i \cdot b_3 v_3 + i \cdot b_4 v_4}_{\in \mathbb{C}} \\ v_1 = - \underbrace{\frac{\beta_2}{\beta_1} \cdot v_2 - \dots - \frac{\beta_k}{\beta_1} \cdot v_k}_{\in \mathbb{R}} & & \underbrace{i \cdot b_2 v_2 + i \cdot b_3 v_3 + i \cdot b_4 v_4}_{=0} \end{array}$$

Si me que do con la parte Real de cada

$\frac{\beta_2}{\beta_1}$, tengo una comb. lineal en \mathbb{R} .

(deben existir pues $v_i \in \mathbb{R}$)

$$\Leftrightarrow \{v_i\} \text{ es li sobre } \mathbb{C} \quad \text{Diagrama: } \mathbb{C} \supset \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \beta_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot v_2 + \dots + \beta_k \cdot v_k = 0 \quad \text{con } \beta_i \in \mathbb{C}$$

$$\text{con } \beta_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

$$\Rightarrow \text{Como } \mathbb{R} \subset \mathbb{C}, \text{ cualquier } \alpha_i \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \dots + \alpha_k \cdot v_k = 0 \quad \forall \alpha_i \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 13. Sean m, n y $r \in \mathbb{N}$.

(a) Probar que si $A \in K^{m \times n}$ satisface que $Ax = 0 \forall x \in K^n$, entonces $A = 0$. Deducir que si $A, B \in K^{m \times n}$ satisfacen que $Ax = Bx \forall x \in K^n$, entonces $A = B$.

(b) Probar que si $A \in K^{m \times n}$, $B \in K^{n \times r}$ con $B = (b_{ij})$ y, para $1 \leq j \leq r$, $B_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$ es la columna j -ésima de B , entonces $AB = (AB_1 \mid \cdots \mid AB_r)$ (es decir, AB_j es la columna j -ésima de AB).

a) Supongo que no vale:

$Ax = 0 \forall x$ pero existe un a_{ij} en A que no es cero

$$\rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{a_{ij}}_{\neq 0} \underbrace{x_j}_{\substack{\uparrow \\ \text{debe ser cero} \\ (\text{no vale } \forall x)}} = 0$$

∴

$$\therefore Ax = 0 \forall x \Rightarrow A = 0 \quad \square$$

$$\left[\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \right]$$

$$ii) Ax = Bx \quad \forall x \Rightarrow A = B$$

$$Ax - Bx = 0$$

$$\underbrace{(A - B)}_{A - B} x = 0$$

$$A - B = 0 \Rightarrow A = B$$

b)

$$\underbrace{A \cdot B}_{m \times r} = \begin{bmatrix} AB_1 & AB_2 & \dots & AB_r \end{bmatrix}$$

$\begin{matrix} m \times n & n \times 1 & m \times n & n \times 1 & \dots & m \times n & n \times 1 \\ m \times 1 & m \times 1 & & & & & \end{matrix}$

Ejercicio 14. Sean las siguientes matrices de 3×3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

Y consideremos el producto $AB = C$ en bloques:

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array} \right)$$

Para cada una de las particiones en bloques mencionadas a continuación, indicar si es realizable el producto $C = AB$ en bloques. En caso de ser realizable, calcular cada bloque C_{ij} indicando sus dimensiones.

(a) $A_{11} = [a_{11}]$, $A_{12} = [a_{12}, a_{13}]$, $A_{21} = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$, $A_{22} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$
 $B_{11} = [b_{11}]$, $B_{12} = [b_{12}, b_{13}]$, $B_{21} = \begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}$, $B_{22} = \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$

(b) $A_{11} = [a_{11} \ a_{12}]$, $A_{12} = [a_{13}]$, $A_{21} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$, $A_{22} = \begin{bmatrix} a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$
 $B_{11} = [b_{11}]$, $B_{12} = [b_{12} \ b_{13}]$, $B_{21} = \begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}$, $B_{22} = \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$

(c) $A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$, $A_{12} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$, $A_{21} = [a_{31}]$, $A_{22} = [a_{32} \ a_{33}]$
 $B_{11} = [b_{11}]$, $B_{12} = [b_{12} \ b_{13}]$, $B_{21} = \begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}$, $B_{22} = \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$

¿Qué otras particiones válidas son posibles?

↳ ver pdf de particiones.

a) $\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$ Se puede
 (no voy a hacer la cuenta)

$$\begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} 1 \times 1 & 1 \times 1 \\ A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21} \end{array} & \begin{array}{cc} 1 \times 2 & 2 \times 1 \\ A_{11} \cdot B_{12} + A_{12} \cdot B_{22} \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} 2 \times 1 & 1 \times 1 \\ A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{21} \end{array} & \begin{array}{cc} 2 \times 2 & 2 \times 1 \\ A_{21} \cdot B_{12} + A_{22} \cdot B_{22} \end{array} \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

b) $\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$ $A_{11} \cdot B_{11} \times$ no funciona
 $1 \times 2 \quad 1 \times 1$

c) $\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$ Funciona!

Ejercicio 15. Dadas las bases de \mathbb{R}^3 , $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ y $B' = \{(-1, 1, 1), (2, 0, 1), (1, -1, 3)\}$

(a) Calcular $[(1, 1, 0)]_B$ y $[(1, 1, 0)]_{B'}$.

(b) Calcular la matriz de cambio de base $C(B, B')$.

(c) Comprobar que $C(B, B')[[(1, 1, 0)]_B] = [(1, 1, 0)]_{B'}$.

a) $(1, 1, 0)$ está en la base $E = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

Quiero escribir:

$$(1, 1, 0) = a \cdot (1, 1, 0) + b \cdot (0, 1, 1) + c \cdot (1, 0, 1)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Busco a, b, c : $C(B, E)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} F_1 - \frac{F_3}{2} \\ F_2 + \frac{F_3}{2} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{array}$$

$$(1, 1, 0) = 1 \cdot (1, 1, 0) + 0 \cdot (0, 1, 1) + 0 \cdot (1, 0, 1)$$

$$\therefore [(1, 1, 0)]_B = (1, 0, 0)$$

ii) $[(1, 1, 0)]_{B'}$

$$(1, 1, 0) = a \cdot (-1, 1, 1) + b \cdot (2, 0, 1) + c \cdot (1, -1, 3)$$

$C(B', E)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} +F_1 \\ +F_1 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right)$$

$$-3R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \\ c = -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(-1, 1, 1) + 1(2, 0, 1) + \left(-\frac{1}{2}\right)(1, -1, 3) = \\ & = \left(\underbrace{-\frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{2}}_{=1}, \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{=1}, \underbrace{\frac{1}{2} + 1 - \frac{3}{2}}_{=0} \right) = (1, 1, 0) \checkmark \end{aligned}$$

$$\therefore [(1, 1, 0)]_{\mathcal{B}'} = \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2} \right)$$

(b) Calcular la matriz de cambio de base $C(B, B')$.

Quiero C tal que

Si

$$[(1, 1, 0)]_{\mathcal{B}} = (1, 0, 0)$$

$$[(1, 1, 0)]_{\mathcal{B}'} = \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \underset{3 \times 3}{C_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}} \underset{3 \times 1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Tengo :

$$\underbrace{C(\mathcal{B}, \mathcal{E})}_{\text{Reescribe algo de base } \mathcal{B} \text{ en base } \mathcal{E}} \text{ y } \underbrace{C(\mathcal{B}', \mathcal{E})}_{\text{Reescribe algo de base } \mathcal{B}' \text{ en base } \mathcal{E}}$$

Reescribe algo de
base \mathcal{B} en base \mathcal{E}

Reescribe algo de
base \mathcal{B}' en base \mathcal{E}

Quiero

$C(B, B')$: Reescribe algo de B a B'

Esta matriz tiene como columnas los vectores v_i de B expresados en la base B'

\Rightarrow Para cada v_i de B quiero $(v_i)_{B'} = \omega_i$

$$C(B', E) \underbrace{\begin{bmatrix} | \\ \omega_i \\ | \end{bmatrix}}_{\text{incógnita}} = \underbrace{\begin{bmatrix} | \\ v_i \\ | \end{bmatrix}}_{\text{Columna } i \text{ de } B}$$

$$B = \{ \underbrace{(1, 1, 0)}_{v_1}, \underbrace{(0, 1, 1)}_{v_2}, \underbrace{(1, 0, 1)}_{v_3} \}$$

$$B' = \{(-1, 1, 1), (2, 0, 1), (1, -1, 3)\}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}}_{\text{Columnas de } B'} \underbrace{\begin{bmatrix} | \\ \omega_i \\ | \end{bmatrix}}_{\text{Columna } i \text{ de } B} = \underbrace{\begin{bmatrix} | \\ v_i \\ | \end{bmatrix}}_{\text{Columna } i \text{ de } B}$$

Como $C(B', E)$ es invertible

$$C(B', E) \begin{bmatrix} | \\ \omega_i \\ | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | \\ v_i \\ | \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} | \\ \omega_i \\ | \end{bmatrix} = C(B', E)^{-1} \begin{bmatrix} | \\ v_i \\ | \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & v_1 & v_2 & v_3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 0 & 1 & 0 & | & | & | \\ 0 & 0 & 1 & | & | & | \end{array} \right)$$

$C(B, B')$

Pero $C(B, B')$ tiene los ω_i como columnas

$$C(B, B') = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = C(B', E)^{-1} \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

Calc $C(B', E)^{-1}$

$$C(B', E)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_2 + F_1 \\ F_3 + F_1}]{F_2 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\frac{1}{2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\times 1/4]{\times -1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{array} \right) \xrightarrow{+F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{array} \right)$$

$$C(B', E)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = C(E, B')$$

Verifico que funciona

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{8} \\ 1 \\ -\frac{4}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

$$C(B, B') = \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ | & | & | \\ | & | & | \end{bmatrix} = C(B', E)^{-1} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$C(B, B') =$$

$$C(B, B') = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{(v_1)_{B'}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{(v_3)_{B'}}$

(c) Comprobar que $C(B, B')[(1, 1, 0)]_B = [(1, 1, 0)]_{B'}$.

$$[(1, 1, 0)]_B = (1, 0, 0)$$

$$[(1, 1, 0)]_{B'} = \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2} \right)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$[(1, 1, 0)]_B \quad [(1, 1, 0)]_{B'}$

Ejercicio 16. Sean $A, A' \in K^{m \times n}$; $B \in K^{n \times r}$; $D, D' \in K^{n \times n}$; $\alpha \in K$. Probar:

- (a) $(A + A')^t = A^t + (A')^t$ (e) $\text{tr}(D + D') = \text{tr}(D) + \text{tr}(D')$
 (b) $(\alpha A)^t = \alpha A^t$ (f) $\text{tr}(\alpha D) = \alpha \text{tr}(D)$
 (c) $(AB)^t = B^t A^t$ (g) $\text{tr}(DD') = \text{tr}(D'D)$
 (d) AA^t y $A^t A$ son matrices simétricas.

a) La suma es coordenada a coordenada,

trasponer "mueve" las coordenadas de la misma manera para cualquier matriz.

b) Lo mismo que a)

c) Sabemos

$$(AB)^t_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^n A_{jk} B_{ki}$$

Además

$$\begin{aligned} (B^t A^t)_{ij} &= \sum_{k=1}^n B^t_{ik} A^t_{kj} = \sum_{k=1}^n B_{ki} A_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^n A_{jk} B_{ki} \end{aligned} \quad \square$$

d) Por c) $(AA^t)^t = A^{tt} A^t = A A^t \quad \checkmark$

e) Lo mismo que a)

f) Lo mismo que a)

g)

by definition

$$\begin{aligned} \text{trace}(AB) &= (AB)_{11} + (AB)_{22} + \cdots + (AB)_{nn} \\ &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} \\ &\quad + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2} \\ &\quad + \vdots \\ &\quad + a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \cdots + a_{nn}b_{nn} \end{aligned}$$

if you view the sum according to the columns, then you see that it is the $\text{trace}(BA)$. therefore,

$$\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA).$$

Ejercicio 17. Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^{n \times n}$ como \mathbb{R} -espacio vectorial:

(a) $S_1 = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A \text{ es triangular inferior}\}$ (b) $S_2 = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A \text{ es simétrica}\}$

a) 1) $A + B \in S_1$? ✓

2) $\alpha \cdot A \in S_1$? ✓

3) $\vec{0} \in S_1$? ✓

b) También. ✓

✓

✓

Ejercicio 18. Calcular el determinante de A en cada uno de los siguientes casos:

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad (b) A = \begin{pmatrix} i & 0 & 2+i \\ -1 & 1-i & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(-1)^{0+1}$$

$$a) \det A = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} - 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$
$$\underbrace{-2 \cdot (0 + 8)}_{-16} + \underbrace{1 \cdot (12 + 1)}_{13} = -3 \quad \underbrace{+ 1 \cdot (4 - 3)}_{= 1}$$

$$\det A = -3 - 2 = -5$$

Ejercicio 19. Determinar si las siguientes matrices son inversibles y en caso afirmativo exhibir sus inversas. Cuando sea posible, verificar utilizando `Python`, con el comando `np.linalg.inv`.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{(b)} \quad A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{(c)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\ \text{(d)} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \text{(e)} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Si

b) Si

c) No: F_4 es cl de $F_1, 2$ y 3

d) No: Dos Filer iguales, no son li.

e) Si, si $a_{ii} \neq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$

Ejercicio 20. Sean $A, B, C, D \in K^{n \times n}$ y $M \in K^{2n \times 2n}$ la matriz de bloques

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Probar que si A es inversible, entonces

(a) $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$

(b) $\det(M) = \det(AD - ACA^{-1}B).$ Concluir que si $AC = CA$, $\det(M) = \det(AD - CB).$

a) $M = \begin{bmatrix} \overset{A}{A} \overset{I}{I} + 0 & \overset{B}{A} \overset{A^{-1}}{A^{-1}} \overset{B}{B} + 0 \\ \overset{C}{C} \overset{I}{I} + 0 & \overset{D}{CA^{-1}B + ID - I CA^{-1}B} \end{bmatrix} \checkmark$

b) "Complemento de Schur"

$$\begin{aligned} \det(AD - ACA^{-1}B) &= \det(A(D - CA^{-1}B)) \\ &= \det(A) \cdot \underbrace{\det(D - CA^{-1}B)}_{?} \end{aligned}$$

<https://www.statlect.com/matrix-algebra/determinant-of-block-matrix>

<https://www.statlect.com/matrix-algebra/Schur-complement>

<https://math.stackexchange.com/questions/1811433/let-m-big-beginsmallmatrix-a-b-c-d-endsmallmatrix-big-prove>

Uso

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = \det A \cdot \det D$$

$$\det \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} = \det A \cdot \det D$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \overset{M}{\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

$\det \left(\right.$

$$\det I \cdot \det I \cdot \det M = \det A \cdot \det(D - CA^{-1}B)$$

$$\det M = \det A \cdot \det (D - CA^{-1}B) \quad \square$$

Conclure que si $AC = CA$, $\det(M) = \det(AD - CB)$.

$$\begin{aligned} AD - \underbrace{ACA^{-1}B}_{\underbrace{CA A^{-1}B}_{\underbrace{CI B}}} \\ AD - CB \end{aligned}$$

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det M = \det (AD - CB)$$

Ejercicio 21. Escribir funciones de Python que realicen las siguientes operaciones:

- (a) Calcular la traza de una matriz.
- (b) Calcular la sumatoria de todos los elementos de una matriz.

$$a) \sum (A[i,i] \text{ for } i \text{ in range}(\text{len}(A)))$$

Si $A \in \text{numpy}$

$$A[\text{range}(\text{len}(A)), \text{range}(\text{len}(A))].\text{sum}()$$

$$b) A.\text{sum}()$$