Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática

Álgebra Lineal Computacional

2do Cuatrimestre 2023

Práctica N° 5: Matrices hermitianas. Valores singulares.

Matrices hermitianas

Ejercicio 1. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 8 & 8 \\ -1 & 7 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Hallar una descomposición de Schur $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{UTU}^*$, con $\boldsymbol{U}$ unitaria y $\boldsymbol{T}$ triangular superior con los autovalores de la matriz $\boldsymbol{A}$ en la diagonal.

(b) Descomponer a la matriz $\boldsymbol{T}$ hallada en el ítem anterior como suma de una matriz diagonal $\boldsymbol{D}$ y una matriz triangular superior $\boldsymbol{S}$ con ceros en la diagonal. Probar que $\boldsymbol{S}^j = 0$ para todo $j \geq 2$.

(c) Usar los ítems anteriores para calcular $\boldsymbol{A}^{10}$.

a) $A = UTU^*$

$$AU = UT$$

$$= U \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} | & | & | \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

$A q_1 = \lambda_1 \cdot q_1$ ← solo para $i = 1$

1°) Autovalores de A

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 13 & -8 & -8 \\ 1 & \lambda - 7 & 2 \\ 1 & 2 & \lambda - 7 \end{bmatrix}$$

$$= (\lambda-13)\underbrace{\begin{vmatrix} \lambda-7 & 2 \\ 2 & \lambda-7 \end{vmatrix}}_{(\lambda-7)^2-4} - 1.\underbrace{\begin{vmatrix} -8 & -8 \\ 2 & \lambda-7 \end{vmatrix}}_{-(-8.(\lambda-7)+16)} + 1.\underbrace{\begin{vmatrix} -8 & -8 \\ \lambda-7 & 2 \end{vmatrix}}_{-16+8(\lambda-7)}$$

$$\lambda^2 - 14\lambda + 49 - 4 \qquad -(-8\lambda+56+16) \qquad -16+8\lambda-56$$

$$(\lambda^2 - 14\lambda + 45) \qquad 8\lambda - 72 \qquad 8\lambda-72$$

$$\lambda^3 - 14\lambda^2 + 45\lambda - 13\lambda^2 + 13.14\lambda - 13.45$$

$$\lambda^3 - 27\lambda^2 + 227\lambda - 585$$

$$= \lambda^3 - 27\lambda^2 + 227\lambda - 585 + 8\lambda - 72 + 8\lambda - 72$$

$$= \lambda^3 - 27\lambda^2 + 243\lambda - 729 = 0$$

Raíces (calc)

λ: 9 (multiplicidad 3)

Avecs:

$$Nu\begin{bmatrix} 9-13 & -8 & -8 \\ 1 & 9-7 & 2 \\ 1 & 2 & 9-7 \end{bmatrix} = Nu\begin{bmatrix} -4 & -8 & -8 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$x-4$

iguales

$$\begin{pmatrix} -4 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad -4x - 8y - 8z = 0$$

$$\Rightarrow x + 2y + 2z = 0$$

$$x = -2y - 2z$$

$$(-2y-2z,\ y,\ z) = y(-2,1,0) + z(-2,0,1)$$

$$E_9 = \langle (-2,1,0),\ (-2,0,1) \rangle$$

$$\Rightarrow \quad q_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0)$$

$\Rightarrow$ Hasta ahora tengo

$$A = U T U^*$$

$$A = \begin{bmatrix} | & | & | \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & * & * \\ 0 & 9 & * \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - & q_1 & - \\ - & q_2 & - \\ - & q_3 & - \end{bmatrix}$$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} & | & | \\ 1/\sqrt{5} & q_2 & q_3 \\ 0 & | & | \end{bmatrix}}_{\text{Completo con una BON y llamo } U^1} \begin{bmatrix} 9 & * & * \\ 0 & 9 & * \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ - & q_2 & - \\ - & q_3 & - \end{bmatrix}$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\leftarrow$ elijo q_2 y q_3 a ojo, sino uso G.S.

$\langle q_1, q_2 \rangle = 0$ $\quad \langle q_1, q_3 \rangle = 0$

con $\langle q_2, q_3 \rangle = 0$

$$E_9 = \langle (-2,1,0) \, , \, (-2,0,1) \rangle$$

$$\Rightarrow q_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} (-2,1,0)$$

$$u_2 = (-2,0,1) - \frac{\langle (-2,1,0) \, , \, (-2,0,1) \rangle}{\underbrace{\|(-2,1,0)\|_2^2}_{=5}} \cdot (-2,1,0)$$

$$= (-2,0,1) - \frac{4}{5} \cdot (-2,1,0)$$

$$= \left(-2 + \frac{8}{5} \, , \, -\frac{4}{5} \, , \, 1\right)$$

$$-\frac{10}{5} + \frac{8}{5}$$

$$= \left(-\frac{2}{5} \, , \, -\frac{4}{5} \, , \, 1\right)$$

$$u_2 = (-2, -4, 5) \Rightarrow \|u_2\| = \sqrt{4 + 16 + 25} = 3\sqrt{5}$$

$$q_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}} \cdot (-2, -4, 5)$$

$$q_2 = \left(-\frac{2}{3\sqrt{5}} \, , \, -\frac{4}{3\sqrt{5}} \, , \, \frac{5}{3\sqrt{5}}\right)$$

Para q_3 no tengo v_3, entonces $\qquad q_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \underbrace{(-2,1,0)}_{u_1}$

$$q_3 = \frac{u_1 \times u_2}{\| u_1 \times u_2 \|} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$u_3 = \left(5,\ -(-10),\ 8+2\right)$$

$$u_3 = (5,\ 10,\ 10) \Rightarrow \|u_3\| = \sqrt{225}$$

$$= 15$$

$$q_3 = \frac{1}{15} \cdot (5,\ 10,\ 10)$$

$$q_3 = \left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$$

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \underbrace{(-2,\ 1,\ 0)}_{u_1}$$

$$q_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}} \cdot (-2,\ -4,\ 5)$$

$$q_3 = \left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} & -2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & -4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & 5/3\sqrt{5} & 2/3 \end{bmatrix}$$

Input interpretation

simplify	$\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^T . \begin{pmatrix} 13 & 8 & 8 \\ -1 & 7 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

Expanded form

$$\begin{pmatrix} -\frac{27}{\sqrt{5}} & -\frac{9}{\sqrt{5}} & -\frac{18}{\sqrt{5}} \\ -\frac{9}{\sqrt{5}} & -\frac{18}{\sqrt{5}} & \frac{9}{\sqrt{5}} \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Input interpretation

simplify	$\begin{pmatrix} -\frac{27}{\sqrt{5}} & -\frac{9}{\sqrt{5}} & -\frac{18}{\sqrt{5}} \\ -\frac{9}{\sqrt{5}} & -\frac{18}{\sqrt{5}} & \frac{9}{\sqrt{5}} \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Result

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & -\frac{21}{\sqrt{5}} \\ 0 & 9 & \frac{3}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Como $\quad A = U_1 T U_1^*$

$$U_1^* A U_1 = T$$

$$U_1^* A U_1 = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 & 8 & 8 \\ -1 & 7 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Input

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 13 & 8 & 8 \\ -1 & 7 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exact result

$$T = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 45 & -45 & -18\sqrt{5} \\ 0 & 55 & 4\sqrt{5} \\ 0 & -5\sqrt{5} & 35 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 9 & -9 & -18\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 11 & 4\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 & -\sqrt{5} & 7 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2. Probar que si $\boldsymbol{A} \in K^{n \times n}$ es hermitiana, entonces los elementos de la diagonal $a_{ii} \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 3. Dada $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ hermitiana, probar que existen matrices $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con $\boldsymbol{B}$ simétrica y $\boldsymbol{C}$ antisimétrica ($\boldsymbol{C}^t = -\boldsymbol{C}$) tales que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} + i\boldsymbol{C}$.

Ejercicio 4. Dada $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ hermitiana y $S \subset K^n$ un subespacio invariante por $\boldsymbol{A}$, es decir $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} \in S$ para todo $\boldsymbol{v} \in S$. Probar que $S^{\perp}$ es invariante por $\boldsymbol{A}$.

Ejercicio 5. Probar que $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ es hermitiana y definida positiva si y solo si $\boldsymbol{A}$ es unitariamente semejante a una matriz diagonal real positiva con elementos de la diagonal positivos.

Ejercicio 6. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & \alpha+2 & 2 \\ \alpha^2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Hallar los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que A sea simétrica y $\lambda = 0$ sea autovalor de A.

(b) Para el valor de α hallado en (a), diagonalizar ortonormalmente la matriz A.