

Ejercicio 14. En cada uno de los siguientes casos construir un proyector $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que cumpla:

i) $\text{Im}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ $x_3 = -x_1 - x_2$

ii) $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

iii) $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / 3x_1 - x_3 = 0\}$ e $\text{Im}(f) = \langle (1, 1, 1) \rangle$

$$i) \quad \text{Im } f = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \langle (1, 0, -1), (0, 1, -1) \rangle$$

$$\text{Como } \dim(\text{Im } f \oplus \text{Nu } f) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$$

$$\text{y } \dim \text{Im } f = 2$$

$$\Rightarrow \dim \text{Nu } f = 1$$

$$\Rightarrow \text{Nu } f = \langle (0, 1, 0) \rangle$$

↙ elijo uno li a los de $\text{Im } f$

∴

$f \circ f = f$ para los elem. de $\text{Im } f$

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \overset{\downarrow}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$ii) \text{Nu } f = \langle (1, 0, -1), (0, 1, -1) \rangle$$

$$\Rightarrow \text{Im } f = \langle (0, 1, 0) \rangle$$

◦◦

$$f(1, 0, -1) = (0, 0, 0)$$

$$f(0, 1, -1) = (0, 0, 0)$$

$$f(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$$

$$iii) \text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / 3x_1 - x_3 = 0\} \text{ e } \text{Im}(f) = \langle (1, 1, 1) \rangle$$

$$x_3 = 3x_1$$

$$\{(x_1, x_2, 3x_1)\}$$

$$\text{Nu } f = \langle (1, 0, 3), (0, 1, 0) \rangle$$

$$\text{Im } f = \langle (1, 1, 1) \rangle$$

$$f(1, 0, 3) = (0, 0, 0)$$

$$f(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$$

$$f(1, 1, 1) = (1, 1, 1)$$

Ejercicio 15.

- (a) Sea $B = \{(1, -1, 0), (0, 1, -1), (0, 0, 1)\}$ base de \mathbb{R}^3 y sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que:

$$f(1, -1, 0) = (1, -1, 0), \quad f(0, 1, -1) = (0, 1, -1) \quad \text{y} \quad f(0, 0, 1) = (0, 0, 0).$$

Calcular $[f]_B$ y comprobar que f es un proyector.

- (b) Construir un proyector $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\text{Nu}(f) = \langle (1, 1, 1) \rangle$ e $\text{Im}(f) = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 - 3x_3 = 0\}$. ¿Es f una proyección ortogonal?

$$\text{Llamo } B = \left\{ \underset{\omega_1}{(1, -1, 0)}, \underset{\omega_2}{(0, 1, -1)}, \underset{\omega_3}{(0, 0, 1)} \right\}$$

$$f(\omega_1) = \omega_1$$

$$f(\omega_2) = \omega_2$$

$$f(\omega_3) = (0, 0, 0)$$

∴

$$f((1, 0, 0)_B) = (1, 0, 0)_B$$

$$f((0, 1, 0)_B) = (0, 1, 0)_B$$

$$f((0, 0, 1)_B) = (0, 0, 0)_B$$

$$\Rightarrow [f]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

f es Proyector ∴

$$\bullet [f]_B^2 = [f]_B$$

$$[f]_{\mathcal{B}}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [f]_{\mathcal{B}} \checkmark$$

o.o f es Projector

(b) Construir un proyector $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\text{Nu}(f) = \langle (1, 1, 1) \rangle$ e $\text{Im}(f) = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 - 3x_3 = 0\}$. ¿Es f una proyección ortogonal?

$$x_1 + x_2 = 3x_3$$

$$x_2 = 3x_3 - x_1$$

$$\text{Im } f = \langle (1, -1, 0), (0, 3, 1) \rangle$$

$$f(1, 1, 1) = (0, 0, 0)$$

$$f(1, -1, 0) = (1, -1, 0)$$

$$f(0, 3, 1) = (0, 3, 1)$$

⌋

Para ver si es Proyección ortogonal veo si :

$$\text{Nu } f = \text{Im } f^\perp \quad (\text{complemento ortogonal})$$

$$S^\perp = \left\{ v \in V : v^* \lambda = 0 \quad \forall \lambda \in S \right\}$$

\Rightarrow Veo :

$$\begin{matrix} \in \text{Im} f \\ (1, -1, 0) \end{matrix} \begin{matrix} \in \text{Nul} f \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix} = 0 \quad \checkmark$$

$$\begin{matrix} \in \text{Im} f \\ (0, 3, 1) \end{matrix} \begin{matrix} \in \text{Nul} f \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix} = 4 \neq 0 \quad \therefore \underline{\text{no}} \text{ son ortogonales}$$

$\therefore \underline{\text{no}}$ es Proyección ortogonal.

Ejercicio 16. Sea $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ un vector columna tal que $\|\mathbf{v}\|_2 = 1$. Probar que:

- (a) La transformación lineal definida por la matriz $\mathbf{v}\mathbf{v}^*$ es la proyección ortogonal sobre $\langle \mathbf{v} \rangle$.
- (b) Si $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ es una base ortonormal del subespacio S , entonces: $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^m \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^*$ es la proyección ortogonal sobre S .
- (c) Si \mathbf{A} es como en el ítem anterior, $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ es la proyección ortogonal sobre S^\perp .
- (d) Eligiendo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|\mathbf{v}\|_2 = 1$, corroborar gráficamente en Python que $\mathbf{R} = \mathbf{I} - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^*$ es la reflexión respecto de $\langle \mathbf{v} \rangle^\perp$.

$$a) \quad \mathbf{v}\mathbf{v}^* = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 & \dots & v_1 \cdot v_n \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 & \dots & v_2 \cdot v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n \cdot v_1 & v_n \cdot v_2 & \dots & v_n \cdot v_n \end{bmatrix}$$

Sea:

$$P_{\langle \mathbf{v} \rangle}(\omega) = \mathbf{v}^* \omega \cdot \mathbf{v}$$

Revisar y Seguir!

$$= \underbrace{(\mathbf{v}^* \omega)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \mathbf{v}$$

$$= \mathbf{v} (\mathbf{v}^* \omega)$$

$$= (\mathbf{v} \mathbf{v}^*) \omega \quad \checkmark$$

Ejercicio 17. Sea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular la matriz de la proyección ortogonal sobre $\text{Im}(\mathbf{A})$.

Ejercicio 18. Sea $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Probar que son equivalentes:

- (a) $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^t$.
- (b) Las columnas de \mathbf{Q} forman un conjunto ortonormal.
- (c) Las filas de \mathbf{Q} forman un conjunto ortonormal.
- (d) $\|\mathbf{Q}\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Interpretar (d) geométicamente.

Sugerencia: para demostrar la implicación (d \Rightarrow b) usar que $\mathbf{x}^t \mathbf{y} = \frac{1}{4}(\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_2^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2)$.

Ejercicio 19. Hallar la factorización QR de las siguientes matrices

$$a) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}, \quad b) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 20. Implementar dos programas que calculen la descomposición QR de una matriz:

1. Aplicando de manera directa el método de ortonormalización de Gram-Schmidt.
2. Utilizando transformaciones de Householder.

Generar algunas matrices aleatorias y comparar las descomposiciones arrojadas por estos programas con las dadas por el comando `np.linalg.qr`. ¿Qué se observa?

Ejercicio 21. Implementar un programa que resuelva un sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ a partir de la descomposición QR de \mathbf{A} .