TRANSFORMACIONES LINEALES

$\mathbb{V}, \mathbb{W}$ K-e.v. $\quad f: \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es una t.l.

si: (a) $f(u+v) = f(u) + f(v) \quad (\forall u, v \in \mathbb{V})$

(b) $f(\lambda . u) = \lambda f(u) \quad (\forall \lambda \in K \ \forall u \in \mathbb{V})$

Prop: f es tl $\Rightarrow f(0) = 0$.

1) Decidir si las siguientes son t.l.

- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x,y) = (x+1, 2y+x, y)$

$f(0,0) = (1,0,0) \longrightarrow$ No cumple la prop
$\Rightarrow$ No es t.l.

USANDO la def.:

$f((1,0)+(0,1)) = f(1,1) = (2, 3, 1)$ $\neq$

$f(1,0) + f(0,1) = (2,1,0) + (1,2,1) = (3,3,1)$

$\to$ No se cumple (a) $\longrightarrow$ No es t.l.

2) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y,z) = (2x-3y, \ y+2z)$.

(a) $\underline{f((a,b,c)+(\alpha,\beta,\gamma))} = f(a+\alpha, b+\beta, c+\gamma) =$

$= (2(a+\alpha) - 3(b+\beta), \ b+\beta+2(c+\gamma))$

$= (2a+2\alpha-3b-3\beta, \ b+\beta+2c+2\gamma)$

$= (2a-3b, b+2c) + (2\alpha-3\beta, \beta+2\gamma)$

$= \underline{f(a,b,c) + f(\alpha,\beta,\gamma)}$

(b) $f(\lambda(a,b,c)) = f(\lambda a, \lambda b, \lambda c) =$

$= (2(\lambda a) - 3(\lambda b), \lambda b + 2\lambda c) =$

$= \lambda(2a - 3b, b + 2c)$

$= \lambda \cdot f(a,b,c)$ ✓

$\Rightarrow$ Es t.l.

<u>Conclusión</u>: los t.l de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ (ó $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^m$ o de $\mathbb{R}^{n\times m}$ en $\mathbb{R}^{k\times l}$)

vienen dados por ecuaciones lineales <u>sin</u> términos independientes.

$\Rightarrow$ Podemos representar las t.l como matrices.

<u>Ej</u>:

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, • $f(x,y,z) = (2x - 3y, y + 2z)$

Se puede representar por la matriz:

Como $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la matriz es de 2×3

$$f(x,y,z) = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{2\times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ y + 2z \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ la matriz de f es $M(f) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

<u>Ej</u>: Si queremos calcular $f(1,-2,3)$

$$\boxed{\underline{f(1,-2,3)} = \underline{\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

<u>Obs</u>: la derivada $D: C^1[0,1] \longrightarrow C[0,1]$ es una t.l.
$\qquad\qquad f \longmapsto f'$

D/ (a) $D(f+g) = (f+g)' = f'+g' = Df + Dg$ ✓

(b) $D(\lambda f) = (\lambda f)' = \lambda f' = \lambda Df$ ✓

Se puede definir una t.l sobre una base:
en efecto:

$\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ e.v.

$\{v_1, \dots, v_n\}$ es base de $\mathbb{V}$.

Supongamos que definimos
$$\begin{cases} f(v_1) = w_1 \\ f(v_2) = w_2 \\ \vdots \\ f(v_n) = w_n \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\underline{v \in \mathbb{V}} \longrightarrow \underbrace{v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n}_{\text{pues } \{v_1, \dots, v_n\} \text{ es base.}}$ con $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ números

$\Rightarrow f(v) = f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) \underset{(a)}{=} f(\alpha_1 v_1) + f(\alpha_2 v_2) + \dots + f(\alpha_n v_n)$

$\underset{(b)}{=} \alpha_1 \underline{f(v_1)} + \dots + \alpha_n \underline{f(v_n)} = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n$.

$\Rightarrow f(v)$ está unívocamente determinado para cualquier v.

2) Determinar si existe una t.l f y si es único en los siguientes casos:

a) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} f(1,2,1) = (1,1) \\ f(0,1,2) = (-1,-1) \\ f(1,2,0) = (0,2) \\ f(1,1,1) = (3,8) \end{cases}$$

Veamos los elementos de la izquierda.

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_3 - F_1 \\ F_4 - F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underline{F_4' + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} F_4'' + 2F_3' \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ \underline{\underline{0 \; 0 \; 0}} \end{pmatrix}$$

$$(0,0,0) = F_4'' + 2F_3' = F_4' + F_2 + 2F_3' = (F_4 - F_1) + F_2 + 2(F_3 - F_1)$$

$$(0,0,0) = F_4 - F_1 + F_2 + 2F_3 - 2F_1 = F_4 - 3F_1 + F_2 + 2F_3$$

$$F_4 = 3F_1 - F_2 - 2F_3.$$

$$(1,1,1) = 3(1\,2\,1) - (0\,1\,2) - 2(1\,2\,0)$$

→ Si f es una t.l.

$$f(1,1,1) = f(3(1\,2\,1) - (0\,1\,2) - 2(1\,2\,0)) =$$

$$= 3\underbrace{f(1\,2\,1)} - \underbrace{f(0\,1\,2)} - 2\underbrace{f(1\,2\,0)}$$

$$= 3(1,1) - (-1,-1) - 2(0,2)$$

$$= (4,0) \neq (3,8)$$

⇒ el 4^{TO} DATO es INCOMPATIBLE con los primeros tres.

→ NO EXISTE t.l que cumpla todo.

b) $\begin{cases} f(1,2,1) = (1,1) \\ f(0,1,3) = (-1,-1) \\ f(1,2,0) = (0,2) \\ f(1,1,1) = (4,0) \end{cases}$ $\rightarrow$ Por la cuenta de arriba está bien definido $\Rightarrow \exists$ una única tl que cumple esto, pero el 4to dato sobra.

c) $\begin{cases} f(1,0,1) = (0,3) \\ f(0,1,1) = (1,7) \end{cases}$

$\hookrightarrow$ $\{(1,0,1), (0,1,1)\}$ son li pero no generan todo $\mathbb{R}^3$.

$\Rightarrow$ No son base.

$\rightarrow$ ¿Cuánto vale $f(\underline{0,0},1)$? $\rightarrow$ No sé.

$\Rightarrow \exists$ infinitas tl que cumplen la tabla.

ejemplo: $\begin{cases} f(1,0,1) = (0,3) \\ f(0,1,1) = (1,7) \\ f(0,0,1) = (8,0) \end{cases}$ ó $\begin{cases} f(1,0,1) = (0,3) \\ f(0,1,1) = (1,7) \\ f(0,0,-7) = (32,\pi) \end{cases}$

son dos tl que cumplen la tabla original.

---

3) Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tl definida por

$\begin{cases} f(1,0,1) = (1,-1,3) \\ f(-1,1,0) = (0,1,2) \\ f(0,0,2) = (1,-2,1) \end{cases}$ Calcular $f(1,-1,4)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ son li ✓ → f está definida sobre una base ⇒ es única te.

$B = \{(1,0,1), (-1,1,0), (0,0,2)\}$

→ escribamos a $(1,-1,4)$ en términos de los vectores de B:

$$(1,-1,4) = \alpha(1\,0\,1) + \beta(-1,1,0) + \gamma(0,0,2)$$

;

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$\alpha - \beta = 1 \to \alpha = 0$.

$\beta = -1$

$\to \gamma = 2$

$\to (1,-1,4) = 0(1,0,1) + (-1)(-1,1,0) + 2(0,0,2)$

$$\Rightarrow \boxed{f(1,-1,4)} = 0\,\underbrace{f(1,0,1)} + (-1)\,\underbrace{f(-1,1,0)} + 2\,\underbrace{f(0,0,2)}$$

$$= 0\cdot(1,-1,3) - 1(0,1,2) + 2(1,-2,1)$$

$$= \boxed{(2,-5,0)}$$

Hallar la fórmula de f.

→ quiero calcular $f(x,y,z)$

↪ sigo el mismo procedimiento

$$(x,y,z) = \alpha(1,0,1) + \beta(-1,1,0) + \gamma(0,0,2)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 1 & 0 & 2 & z \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 2 & z-x \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 2 & z-x-y \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow 2\gamma = z - x - y \longrightarrow \boxed{\gamma = \frac{-x-y+z}{2}}$$

$$\boxed{\beta = y}$$

$$\alpha - \beta = x \longrightarrow \boxed{\alpha = x + y}$$

$$(x,y,z) = (x+y)(1,0,1) + y(-1,1,0) + \frac{-x-y+z}{2}(0,0,2)$$

$\downarrow$ aplico f

$$f(x,y,z) = (x+y)\underbrace{f(1,0,1)} + y\underbrace{f(-1,1,0)} + \frac{-x-y+z}{2}\underbrace{f(0,0,2)}$$

$$= (x+y)(1,-1,3) + y(0,1,2) + \frac{-x-y+z}{2}(1,-2,1)$$

$$= \left(x+y + \frac{-x-y+z}{2},\ -(x+y)+y - (-x-y+z),\ 3(x+y)+2y + \frac{-x-y+z}{2}\right)$$

$$\boxed{f(x,y,z) = \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2},\ y - z,\ \frac{5}{2}x + \frac{9}{2}y + \frac{z}{2}\right)}$$

Def. $f: V \to W$ t.l.

$$\text{Nu } f = \{v \in V \ / \ f(v) = 0\} \subset V$$

$$\text{Im } f = \{w \in W \ / \ \exists\, v,\ f(v) = w\} \subset W$$

<u>Props</u>: Nú f es subespacio de $\mathbb{V}$
Im f es subespacio de $\mathbb{W}$.

<u>Def</u>: $f: \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ tl.
- f es epimorfismo si Im f $= \mathbb{W}$
- f es monomorfismo si Nú f $= \{0\}$
- f es <u>isomorfismo</u> si es epi y es mono.
  ↳ es lo mismo que ser inversible.

4) Calcular el Nú y la Im de f /

$$\begin{cases} f(1,0,1) = (1,-1,3) \\ f(-1,1,0) = (0,1,2) \\ f(0,0,2) = (1,-2,1) \end{cases}$$

<u>Imf ?</u> → v en el espacio de salida

$\Rightarrow v = \alpha(1\,0\,1) + \beta(-1\,1\,0) + \gamma(0\,0\,2)$

$f(v) = \alpha f(1\,0\,1) + \beta f(-1\,1\,0) + \gamma f(0\,0\,2)$

$= \alpha(1\,-1\,3) + \beta(0,1,2) + \gamma(1\,-2\,1)$

$\Rightarrow$ Im f son combinaciones lineales de $(1,-1,3)$ $(0,1,2)$ $(1,-2,1)$

$$\Rightarrow \text{Im} f = \langle \underbrace{(1,-1,3)(0,1,2)(1,-2,1)}_{\text{pueden ser ld}} \rangle.$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3' + F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \text{es ld.}$$

$\Rightarrow$ Im f $= \langle \underline{(1,-1,3)(0,1,2)} \rangle$ → NO es EPIMORFISMO. pues Im f $\neq \mathbb{R}^3 (\mathbb{W})$

$\underline{\text{Nú f}}$: Busco $\underset{\in V}{v} \,/\, f(v) = 0$.

$$\longrightarrow v = \alpha(1\,0\,1) + \beta(-1,1,0) + \gamma(0\,0\,2)$$

$$f(v) = \alpha f(1 0 1) + \beta f(-1,1,0) + \gamma f(0,0,2)$$
$$= \alpha(1,-1,3) + \beta(0,1,2) + \gamma(1,-2,1) \underset{\text{quiero}}{=} (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 & \longrightarrow \alpha = -\gamma \\ \beta - \gamma = 0 & \longrightarrow \beta = \gamma \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{v} = -\gamma(1 0 1) + \gamma(-1\,1\,0) + \gamma(0\,0\,2) =$$
$$= \boxed{\gamma(-2,1,1)}$$

$$\Rightarrow \text{Nú } f = \langle \underline{(-2,1,1)} \rangle .$$

Comentarios:

$\underline{\text{Teo de la dim}}$: $f: V \rightarrow W$ tl.

$$\rightarrow \dim(V) = \dim(\text{Nú } f) + \dim(\text{Im } f)$$

$\underline{\text{Obs}}$: por ejemplo

- $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \Rightarrow f$ no puede ser monomorfismo.
- $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \Rightarrow f$ no puede ser epimorfismo.

Núcleo e Imagen con matrices

Ej: f dada por la matriz $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$$

$$f(x_1 x_2 x_3 x_4) = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{Im} f = \langle f(1000), f(0100), f(0010), f(0001) \rangle$

$= \langle$ columnas de la matriz $\rangle$.

$\operatorname{Im} f = \langle (1,-1,-1)\ (2,0,2)\ (-1,1,1)\ (3,-2,-1) \rangle$

(y veo si son l.i)

Nu f ? Busco (x_1, x_2, x_3, x_4) / $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (000)$

$\Rightarrow$ Nu f es la solución del sistema homogéneo.

$\Rightarrow$ Resuelvo $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$

CONSULTAS

12) c) $A \in K^{m \times n}$, $B = K^{n \times r}$

$$\Rightarrow (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

$$\left[(A \cdot B)^t\right]_{ij} = [AB]_{ji} = \boxed{(\text{fila } j \text{ de } A) \cdot (\text{col } i \text{ de } B)}$$

el casillero ij de la matriz $(AB)^t$

$$\left[B^t \cdot A^t\right]_{ij} = (\text{fila } i \text{ de } B^t) \cdot (\text{col } j \text{ de } A^t)$$

$$= \boxed{(\text{col } i \text{ de } B) \cdot (\text{fila } j \text{ de } A)}$$

$=$