Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática

Álgebra Lineal Computacional

2do Cuatrimestre 2023

Práctica N° 4: Autovalores y autovectores.

Ejercicio 1. Calcular el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de la matriz $\boldsymbol{A}$ en cada uno de los siguientes casos (analizar por separado los casos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$):

(a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ (b) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$

(d) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ (e) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (f) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Autovalores:

$$\underbrace{\chi_A}_{\text{P.C.}} = \det(\lambda I - A) = 0$$

↳ Calculo raíces para obtener λ_i

Autovectores:

Para cada λ_i, como sé que

autovec. asociado a λ_i

$$A v_i = \lambda_i v_i$$

$$A v_i - \lambda_i v_i = 0$$

$$(A - \lambda_i . I) . v_i = 0$$

Ejercicio 2. Para cada una de las matrices $\boldsymbol{A}$ del ejercicio anterior, sea $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ la tranformación lineal tal que $[f]_{\mathcal{E}\mathcal{E}} = \boldsymbol{A}$. Decidir si es posible encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ tal que $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ sea diagonal. En caso afirmativo, calcular $\mathbf{C}_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$.

(a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ (b) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$

(d) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ (e) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (f) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Diagonalización :

a)

Input

eigenvalues $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$

Results

$\lambda_1 = i\,a$

$\lambda_2 = -i\,a$

Corresponding eigenvectors

$v_1 = (-i, 1)$

$v_2 = (i, 1)$

Como la multiplicidad de los autovalores es 1, entonces A es diagonalizable.

$$A = C_{BE} \cdot D \cdot \underbrace{C_{EB}}_{C_{BE}^{-1}}$$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\det = -i - i = -2i} \underbrace{\begin{bmatrix} ia & 0 \\ 0 & -ia \end{bmatrix}}_{[f]_{BB}} \underbrace{\underbrace{\frac{1}{-2i}}_{= \frac{i}{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -1 & -i \end{bmatrix}}_{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{bmatrix}}$$

Input

$\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i\,a & 0 \\ 0 & -i\,a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Result

$a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Verificado ✓

Recordar:

$$[f]_{BB'} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ (f(v_1))_{B'} & (f(v_2))_{B'} & \cdots & (f(v_n))_{B'} \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

$$[f]_{BB'} (v)_B = (f(v))_{B'}$$

$$[f]_{EE} = C(B,E) \cdot [f]_{BB} \cdot \underbrace{C^{-1}(B,E)}_{C(E,B)}$$

Ejercicio 3. Considerar la sucesión de Fibonacci, dada por la recursión: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

(a) Hallar una matriz $\boldsymbol{A}$ tal que $\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix}$. Mostrar que $\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^n \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix}$

(b) Diagonalizar $\boldsymbol{A}$.

(c) Dar una fórmula cerrada para F_n.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} b = 1 \\ d = 1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a+b \\ c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a + 1 = 1$$
$$a = 0$$

$$\begin{bmatrix} F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$c + 1 = 1$$
$$c = 0$$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \times \; ?$$

Ejercicio 4. Recordando que la solución de la ecuación diferencial

$$x'(t) = ax(t), \quad a \in \mathbb{R}$$

con condición inicial $x(0) = c_0$ es $x(t) = c_0 e^{at}$, resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) &= 6\,x(t) + 2\,y(t) \\ y'(t) &= 2\,x(t) + 3\,y(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = 3$, $y(0) = -1$.

Sugerencia: Hallar una matriz $\boldsymbol{C}$ tal que $\boldsymbol{C}^{-1}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\boldsymbol{C}$ sea diagonal y hacer el cambio de variables $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}^{-1}.\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

Dej...

Ejercicio 5. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Probar que $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{A}^t$ tienen los mismos autovalores. Dar un ejemplo en el que los autovectores sean distintos.

Como $\det A = \det(A^t)$

$$\Rightarrow \det(\lambda I - A) = \det\left((\lambda I - A)^t\right)$$

$$= \det(\lambda . I^t - A^t)$$

$$= \det(\lambda I - A^t) \quad \checkmark$$

Mismos autovalores pues mismos polinomios característicos

$$(A - \lambda I) . v = 0$$

A — traspuesta — A^t

eigenvalues	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
Results	
$\lambda_1 = 2 + \sqrt{3}$	
$\lambda_2 = 2 - \sqrt{3}$	
Corresponding eigenvectors	
$v_1 = \left(-1 + \sqrt{3}, 1\right)$	
$v_2 = \left(-1 - \sqrt{3}, 1\right)$	

eigenvalues	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
Results	
$\lambda_1 = 2 + \sqrt{3}$	
$\lambda_2 = 2 - \sqrt{3}$	
Corresponding eigenvectors	
$v_1 = \left(\frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{3}\right), 1\right)$	
$v_2 = \left(\frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{3}\right), 1\right)$	

iguales (λ_1, λ_2)

distintos (v_1, v_2)

Ejercicio 6. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y λ un autovalor de $\boldsymbol{A}$. Probar que:

(a) Si $\boldsymbol{A}$ es triangular sus autovalores son los elementos de la diagonal.

(b) λ^k es autovalor de $\boldsymbol{A}^k$, con el mismo autovector.

(c) $\lambda + \mu$ es autovalor de $\boldsymbol{A} + \mu \boldsymbol{I}$, con el mismo autovector.

(d) Si p es un polinomio, $p(\lambda)$ es autovalor de $p(\boldsymbol{A})$.

Ejercicio 7. (a) Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ diagonalizable con $tr(\boldsymbol{A}) = -4$. Calcular los autovalores de $\boldsymbol{A}$ sabiendo que los autovalores de $\boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{A}$ son $-1, 3$ y 8.

(b) Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tal que $\det(\boldsymbol{A}) = 6$; 1 y -2 son autovalores de $\boldsymbol{A}$ y -4 es autovalor de la matriz $\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{I}$. Hallar los restantes autovalores de $\boldsymbol{A}$.

Ejercicio 6. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y λ un autovalor de $\boldsymbol{A}$. Probar que:

(a) Si $\boldsymbol{A}$ es triangular sus autovalores son los elementos de la diagonal.

(b) λ^k es autovalor de $\boldsymbol{A}^k$, con el mismo autovector.

(c) $\lambda + \mu$ es autovalor de $\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{I}$, con el mismo autovector.

(d) Si p es un polinomio, $p(\lambda)$ es autovalor de $p(\boldsymbol{A})$.

a) $p(A) = A^2 + 2A$

$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -4$

$$\left(A^2 + 2A\right) = A\left(A + 2I\right)$$

Como $p(\lambda)$ es avl de $p(A)$

y -1 es avl de $A^2 + 2A = A(A + 2I)$

$\Rightarrow \lambda_1^2 + 2\lambda_1 = -1 \Rightarrow \lambda_1^2 + 2\lambda_1 + 1 = 0$ $\lambda_{11} = -1$, $\lambda_{12} = -1$

$\lambda_2^2 + 2\lambda_1 = 3 \Rightarrow$ $\lambda_{21} = 1$, $\lambda_{22} = -3$

$\lambda_3^2 + 2\lambda_3 = 8 \rightarrow$ $\lambda_{31} = 2$, $\lambda_{32} = -4$

$\lambda_1 = -1$

Sé que $-1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -4$

$\Rightarrow \lambda_2 + \lambda_3 = -3$

Veo posibilidades

λ_{2i}	λ_{3i}	$\lambda_{2i} + \lambda_{3i}$
1	2	3
1	-4	$-3 \leftarrow$
-3	2	-1
-3	-4	-7

$\lambda_1 = -1$

$\lambda_2 = 1$

$\lambda_3 = -4$

b)

Ejercicio 7. (a) Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ diagonalizable con $tr(\boldsymbol{A}) = -4$. Calcular los autovalores de $\boldsymbol{A}$ sabiendo que los autovalores de $\boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{A}$ son $-1, 3$ y 8.

(b) Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tal que $\det(\boldsymbol{A}) = 6$; 1 y -2 son autovalores de $\boldsymbol{A}$ y -4 es autovalor de la matriz $\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{I}$. Hallar los restantes autovalores de $\boldsymbol{A}$.

$\det A = \lambda_1 . \lambda_2 . \lambda_3 . \lambda_4 = 6$

$= \lambda_1 . \lambda_2 . 1 . (-2) = 6$

$\lambda_1 . \lambda_2 = -3$

Ejercicio 6. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y λ un autovalor de $\boldsymbol{A}$. Probar que:

(a) Si $\boldsymbol{A}$ es triangular sus autovalores son los elementos de la diagonal.

(b) λ^k es autovalor de $\boldsymbol{A}^k$, con el mismo autovector.

(c) $\lambda + \mu$ es autovalor de $\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{I}$, con el mismo autovector.

(d) Si p es un polinomio, $p(\lambda)$ es autovalor de $p(\boldsymbol{A})$.

por (c) :

$\lambda_i - 3$ σ Avd de $A - 3I$

$\lambda_i - 3 = -4$

$\Rightarrow \lambda_i = -1$

$\Rightarrow \lambda_2 = -1$

$\lambda_1 \cdot (-1) = -3$

$\lambda_1 = 3$

Finalmente obtuve

$$\begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 1 \\ \lambda_4 = -2 \end{cases}$$

Ejercicio 8. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar:

(a) Si los autovalores de $\boldsymbol{A}$ son todos reales, sus autovectores pueden tomarse con coordenadas reales.

(b) Si $\boldsymbol{A}$ es simétrica, entonces sus autovalores son reales.

(c) Si $\boldsymbol{A}$ es simétrica y definida positiva (negativa), entonces todos sus autovalores son positivos (negativos)

(d) Si $\boldsymbol{A}$ es simétrica y λ_1 y λ_2 son autovalores distintos, entonces sus correspondientes autovectores son ortogonales entre sí.

Ejercicio 9. Una transformación lineal $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ se llama *proyector* si verifica $f(f(x)) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{K}^n$. Probar que los únicos autovalores de un proyector son 1 y 0.

$$f(x) = A \cdot x \qquad\qquad A v = \lambda \cdot v$$

$$f(f(x)) = A^2 \cdot x \overset{f \text{ proyector}}{=} A \cdot x$$

$$\Rightarrow A^2 = A$$

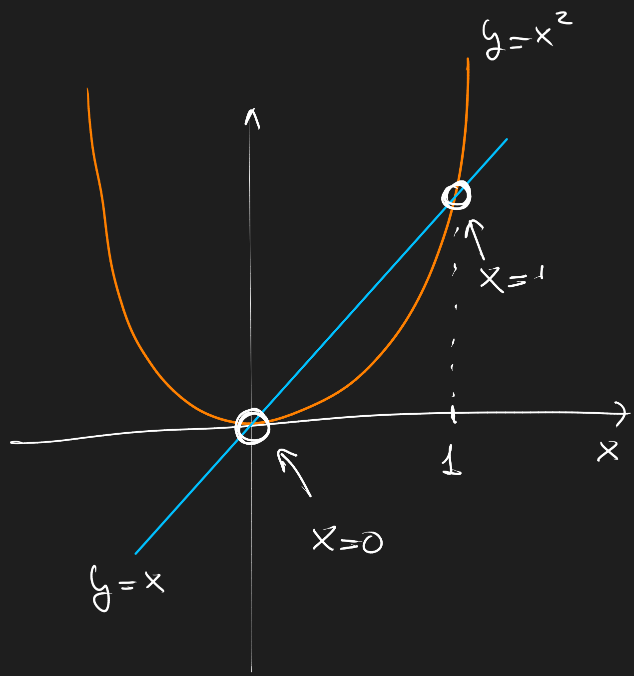
si λ es avl de A

$$\Rightarrow \lambda^2 \text{ es avl de } A^2$$

y como $A^2 = A$

$$\Rightarrow \lambda = \lambda^2$$

$$\Rightarrow \lambda \in \{0, 1\}$$



Ejercicio 10. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por:

$$[f] = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -6 & 4 & 0 \\ -9 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Probar que f es un proyector y hallar una base $\mathcal{B}$ tal que $[f]_{\mathcal{BB}}$ sea diagonal.

Las columnas de [f]=[f]_EE

me dicen que

```
f(1, 0, 0) = (-3,-6,-9)
f(0, 1, 0) = (2,4,6)
f(0, 0, 1) = (0,0,0)
```
← Nucleo

$$[f]_{EE} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ (f(e_1))_E & (f(e_2))_E & (f(e_3))_E \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

$$[f]_{EE}\,(v)_E = \left(T(v)\right)_E$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -6 & 4 & 0 \\ -9 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -6 & 4 & 0 \\ -9 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x + 2y \\ -6x + 4y \\ -9x + 6y \end{bmatrix}$$

$$= x \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ -9 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{Im} f = \left\langle \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ -9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -6 & 4 & 0 \\ -9 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-12 \\ 18-24 \\ 27-36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ -9 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -6 & 4 & 0 \\ -9 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6+8 \\ -12+16 \\ -18+24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \checkmark$$

Diagonalizo $[f]_{EE}$

eigenvalues	$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -6 & 4 & 0 \\ -9 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

Results

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 0$

$\lambda_3 = 0$

Corresponding eigenvectors

$v_1 = (1, 2, 3)$

$v_2 = (0, 0, 1)$

$v_3 = (2, 3, 0)$

$$[f]_{EE} = \underbrace{\overset{\text{Avecs}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}}}_{C(B,E)} \underbrace{\overset{\text{Avals}}{\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}}}_{} \overset{[\text{Avecs}]^{-1}}{\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 9 & -6 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}}$$

$C(E,B) = C(B,E)^{-1}$

Esta será la $[f]_{BB}$ con B base de Avecs.

Verifico

Input

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \right)$$

Result

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -6 & 4 & 0 \\ -9 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Uso $B = \{(1,2,3), (0,0,1), (2,3,0)\}$

Ejercicio 11. Considerar las matrices

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\varepsilon} \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\varepsilon} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde $\varepsilon \ll 1$ es arbitrario. Calcular los polinomios característicos y los autovalores de $\boldsymbol{A}$ y de $\boldsymbol{B}$. Concluir que pequeñas perturbaciones en los coeficientes de un polinomio pueden conducir a grandes variaciones en sus raíces (el problema está mal condicionado). En particular, esto afecta el cómputo de autovalores como raíces del polinomio característico.