Clase práctica 29/MAY/2025

Proyectores, Gram-Schmidt, QR, Householder.

(ESTO ES UN MINI-RESUMEN DE LA CLASE. NO LA REEMPLAZA).

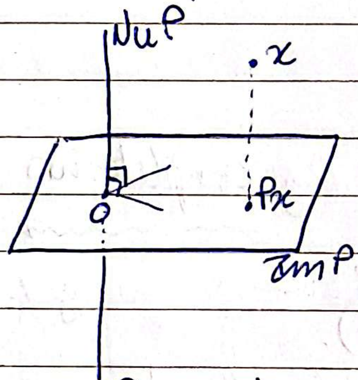
Proyectores, algunos resultados

Def: $P \in \mathbb{K}^{n\times n}$ se dice "proyector" sii $P^2 = P$

(también para transformaciones lineales $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ se dice "proyector" si $f \circ f = f$).

Propiedad: Si $P \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es un proyector $\Rightarrow Nu\,P \oplus Im\,P = \mathbb{K}^n$

Def: $P \in \mathbb{K}^{n\times n}$ se dice "proyector ortogonal" si $P^2 = P \wedge Nu\,P \perp Im\,P$



Prop: P proyector, P es ortogonal $\Leftrightarrow P^* = P$ (en $\mathbb{R}^{n\times n}$ $P = P^T$)

Lemitas: 1) Si P es un proyector entonces $Im(I-P) = Nu(P)$
2) Si P es un proyector, $P \neq I \Rightarrow I-P$ es proyector

Ejercicio: 1) Construir un proyector $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que cumpla $Im(f) = \{x \mid 2x_1 - x_2 = 0\}$.

Hallamos una base de $Im\,f$: $B_{Im(f)} = \{(1\,2\,0)(0\,0\,1)\}$ y completamos $B_{Im\,f}$ a una base de $\mathbb{R}^3$. Luego definimos f sobre esa base.

②

Sea $B = \{ (120)(001)(010) \}$ es claro que B es una base de $\mathbb{R}^3$ que contiene a una base de $\operatorname{Im} f$.

Ahora, si $y \in \operatorname{Im} f \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}^3 / \; f(x) = y \Rightarrow$

$f(f(x)) = f(y) \Rightarrow f^2(x) = f(y)$ pero $f^2 = f$, de modo que $f(x) = f(y)$ pero $f(x) = y$, así que $y = f(y)$.

Por lo tanto, si f es un proyector e $y \in \operatorname{Im}(f)$, entonces

$$f(y) = y.$$

Definimos

$$\begin{cases} f(120) = (120) \\ f(001) = (001) \\ f(010) = (000) \end{cases}$$

y completamos

cumple $f(f(010)) = f(0) = 0$ y $\therefore f^2(010) = f(010)$

y con esta definición nu $f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$ (verificar).

Una vez que tenemos definida f sobre una base podemos hacer explícita la expresión $f(x_1 x_2 x_3)$:

$$(x_1 x_2 x_3) = \lambda_1 (120) + \lambda_2 (001) + \lambda_3 (010)$$

Buscamos $\lambda_1, \lambda_2 \wedge \lambda_3$ en función de $x_1, x_2 \wedge x_3$

$$\begin{cases} \lambda_1 = x_1 \\ 2\lambda_1 + \lambda_3 = x_2 \\ \lambda_2 = x_3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 2 & 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 \end{array}\right) \underset{F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 & x_2-2x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 \end{array}\right) \underset{F_2 \leftrightarrow F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_2-2x_1 \end{array}\right)$$

luego $\begin{cases} \lambda_1 = x_1 \\ \lambda_2 = x_3 \\ \lambda_3 = x_2 - 2x_1 \end{cases}$

y por lo tanto:

$$(x_1\, x_2\, x_3) = x_1\,(1\,2\,0) + x_3\,(0\,0\,1) + (x_2 - 2x_1)\,(0\,1\,0)$$

$$\Rightarrow f(x_1\, x_2\, x_3) = f\big(x_1\,(1\,2\,0) + x_3\,(0\,0\,1) + (x_2 - 2x_1)\,(0\,1\,0)\big) =$$

f.t.l.

$$= x_1\, f(1\,2\,0) + x_3\, f(0\,0\,1) + (x_2 - 2x_1)\, f(0\,1\,0) =$$

$$= x_1\,(1\,2\,0) + x_3\,(0\,0\,1) + (x_2 - 2x_1)\,(0\,0\,0) =$$

$$= (x_1\,;\, 2x_1\,;\, x_3)$$

$$\therefore \boxed{f(x_1\, x_2\, x_3) = (x_1\,;\, 2x_1\,;\, x_3)}$$

Ejercicio 2: Construir un proyector ortogonal $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 /$ $Im(f) = \langle (1\,2\,0)(0\,0\,1) \rangle$.

Procedemos de forma similar a la resolución del Ejercicio 1 salvo que ahora, además de cumplirse $f^2 = f$ se tiene que cumplir que $Nu\, f \perp Im\, f$, de modo que completamos $B_{Im f}$ a una base de $\mathbb{R}^3$ agregando un generador ortogonal a $Im(f)$, por ejemplo: $(2,-1,0)$. (¿Cómo se puede hallar, dado un subespacio S, una base de $S^\perp$?)

En nuestro caso definimos f sobre los elementos de nuestra base de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} f(1\,2\,0) = (1\,2\,0) \\ f(0\,0\,1) = (0\,0\,1) \\ f(2\,-1\,0) = (0\,0\,0) \end{cases}$$

<u>Tarea</u>: hallar la expresión de $f(x_1 x_2 x_3)$.

Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.

Si $\{v_1 \ldots v_k\}$ es un conjunto de vectores li en un espacio vectorial V con producto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle \; V \times V \to \mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$), el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt retorna un conjunto de vectores $\{u_1 \ldots u_k\}$ ortogonal que cumple

$$\langle u_1 \rangle = \langle v_1 \rangle$$
$$\langle u_1\, u_2 \rangle = \langle v_1\, v_2 \rangle$$
$$\vdots$$
$$\langle u_1\, u_2 \ldots u_k \rangle = \langle v_1\, v_2 \ldots v_k \rangle .$$

El proceso es constructivo; resulta:

$$\begin{cases} u_1 \leftarrow v_1 \\ u_\ell \leftarrow v_\ell - \sum_{i=1}^{\ell-1} \dfrac{\langle u_i\, v_\ell \rangle}{\langle u_i\, u_i \rangle}\, u_i \end{cases} \quad \text{(con } \ell : 2 \ldots k)$$

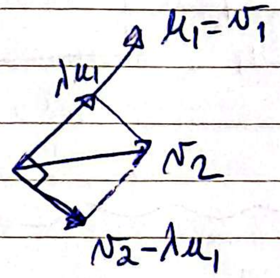
En un ejemplo con tres vectores:

Supongamos que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es li, definimos

$$\boxed{u_1 = v_1}$$

$$u_2 = v_2 - \lambda u_1$$ no conocemos λ todavía

pero buscamos que λu_1 resulte la proyección ortogonal de v_2 sobre $\langle u_1 \rangle$, con lo que la diferencia $v_2 - \lambda u_1$ resultará ortogonal a u_1



Para ello debe suceder que $u_1^* u_2 = 0$ y ∴

$$0 = u_1^* u_2 = u_1^* (v_2 - \lambda u_1) = u_1^* v_2 - \lambda u_1^* u_1 \Rightarrow$$

$$0 = u_1^* v_2 - \lambda u_1^* u_1 \Rightarrow$$

$$\lambda u_1^* u_1 = u_1^* v_2 \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{u_1^* v_2}{u_1^* u_1}}$$

∴ $$\boxed{u_2 = v_2 - \frac{u_1^* v_2}{u_1^* u_1} u_1}$$

Si seguimos con la misma idea, definimos

$$u_3 = v_3 - \lambda u_1 - \mu u_2$$

tiene que ser $u_1^* u_3 = 0 \wedge u_2^* u_3 = 0$ y así

$$0 = u_1^* u_3 = u_1^* (v_3 - \lambda u_1 - \mu u_2) = u_1^* v_3 - \lambda u_1^* u_1 - \mu \underbrace{u_1^* u_2}_{0}$$

$$0 = u_2^* u_3 = u_2^* (v_3 - \lambda u_1 - \mu u_2) = u_2^* v_3 - \lambda \underbrace{u_2^* u_1}_{0} - \mu u_2^* u_2$$

De donde

$$\boxed{\lambda = \frac{u_1^* v_3}{u_1^* u_1}} \wedge \boxed{\mu = \frac{u_2^* v_3}{u_2^* u_2}}$$

por lo que

$$\boxed{u_3 = v_3 - \frac{u_1^* v_3}{u_1^* u_1} u_1 - \frac{u_2^* v_3}{u_2^* u_2} u_2}$$

¿Cómo relacionamos este proceso de ortogonalización con la factorización QR de una matriz?

Supongamos que $A = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$ es nuestra matriz de

rango 3, que tiene a los vectores v_1, v_2, v_3 como columnas.

Según el resultado de Gram-Schmidt, tenemos que:

$$\begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 - \dfrac{u_1^* v_2}{u_1^* u_1} u_1 \\ u_3 = v_3 - \dfrac{u_1^* v_3}{u_1^* u_1} u_1 - \dfrac{u_2^* v_3}{u_2^* u_2} u_2 \end{cases}$$

con lo cual

$$\begin{cases} v_1 = u_1 \\ v_2 = u_2 + \dfrac{u_1^* v_2}{u_1^* u_1} u_1 \\ v_3 = u_3 + \dfrac{u_1^* v_3}{u_1^* u_1} u_1 + \dfrac{u_2^* v_3}{u_2^* u_2} u_2 \end{cases}$$

de donde:

$$A = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}}_{\overline{Q}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{u_1^* v_2}{u_1^* u_1} & \dfrac{u_1^* v_3}{u_1^* u_1} \\ 0 & 1 & \dfrac{u_2^* v_3}{u_2^* u_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\overline{R}}$$

Para "convencerse", $\overline{Q}\,\overline{R} = A \iff \overline{Q}\, c_i(\overline{R}) = c_i(A)$ para $i = 1, 2, 3$

Pero la factorización QR de esa matriz necesita una Q ortogonal (de columnas ortonormales) y nuestra $\bar{Q}$ no tiene por qué serlo, para ello:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{u_1^* v_2}{u_1^* u_1} & \frac{u_1^* v_3}{u_1^* u_1} \\ 0 & 1 & \frac{u_2^* v_3}{u_2^* u_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\bar{R}} =$$

$$= \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{u_1^* u_1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{u_2^* u_2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{u_3^* u_3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{u_1^* u_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{u_2^* u_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{u_3^* u_3} \end{pmatrix} \bar{R} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{u_1}{\sqrt{u_1^* u_1}} & \frac{u_2}{\sqrt{u_2^* u_2}} & \frac{u_3}{\sqrt{u_3^* u_3}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{u_1^* u_1} & \frac{u_1^* v_2}{\sqrt{u_1^* u_1}} & \frac{u_1^* v_3}{\sqrt{u_1^* u_1}} \\ 0 & \sqrt{u_2^* u_2} & \frac{u_2^* v_3}{\sqrt{u_2^* u_2}} \\ 0 & 0 & \sqrt{u_3^* u_3} \end{pmatrix}}_{R}$$

Q resulta ortogonal y R triangular superior.

$$\left(\|u_i\| = \sqrt{u_i^* u_i} \right)$$

Ejemplo numérico:

Sea $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$, buscamos Q ortogonal y R

triangular superior / $A=QR$ utilizando Gram-Schmidt.

· $v_1=cl_1(A)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $v_2=cl_2(A)=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ $v_3=cl_3(A)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

GS:

$u_1=\boxed{(1\,0\,1)}$

$u_2=v_2-\frac{\langle u_1 v_2\rangle}{\langle u_1 u_1\rangle}u_1=(0\,1\,1)-\frac{\langle(101)(011)\rangle}{\langle(101)(101)\rangle}(1\,0\,1)=$

$=(0\,1\,1)-\frac{1}{2}(1\,0\,1)=\boxed{(-\tfrac{1}{2}\;1\;\tfrac{1}{2})}$

$u_3=v_3-\frac{\langle u_1 v_3\rangle}{\langle u_1 u_1\rangle}u_1-\frac{\langle u_2 v_3\rangle}{\langle u_2 u_2\rangle}u_2=$

$=(0\,0\,1)-\frac{\langle(101)(001)\rangle}{\langle(101)(101)\rangle}(1\,0\,1)-\frac{\langle(-\frac{1}{2}\,1\,\frac{1}{2})(001)\rangle}{\langle(-\frac{1}{2}\,1\,\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}\,1\,\frac{1}{2})\rangle}(-\tfrac{1}{2}\;1\;\tfrac{1}{2})=$

$=(0\,0\,1)-\frac{1}{2}(1\,0\,1)-\frac{1/2}{3/2}(-\tfrac{1}{2}\;1\;\tfrac{1}{2})=(0\,0\,1)-\frac{1}{2}(1\,0\,1)-$

$-\frac{1}{3}(-\tfrac{1}{2}\;1\;\tfrac{1}{2})=\boxed{(-\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3})}$

Luego

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 1 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\langle u_1 v_2\rangle}{\langle u_1 u_1\rangle} & \frac{\langle u_1 v_3\rangle}{\langle u_1 u_1\rangle} \\ 0 & 1 & \frac{\langle u_2 v_3\rangle}{\langle u_2 u_2\rangle} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \circledast$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{matrix}$$

$$\|u_1\| = \sqrt{2}$$

$$\|u_2\| = \sqrt{6}/2$$

$$\|u_3\| = \sqrt{3}/3$$

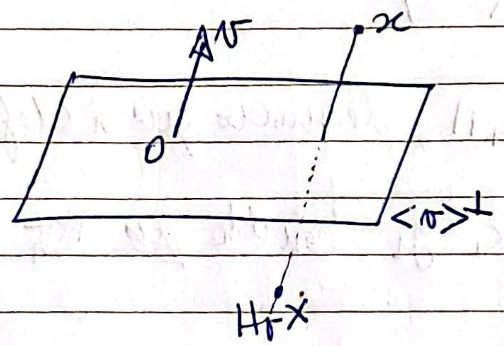
$$\circledast = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{u_1}{\|u_1\|} & \frac{u_2}{\|u_2\|} & \frac{u_3}{\|u_3\|} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \|u_1\| & \frac{\langle u_1 v_2\rangle}{\|u_1\|} & \frac{\langle u_1 v_3\rangle}{\|u_1\|} \\ 0 & \|u_2\| & \frac{\langle u_2 v_3\rangle}{\|u_2\|} \\ 0 & 0 & \|u_3\| \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 & -\sqrt{3}/3 \\ 0 & \sqrt{6}/3 & -\sqrt{3}/3 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{6}/2 & \sqrt{6}/6 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}.$$

Matriz de Householder.

Dado $v \in \mathbb{R}^n$, se define la matriz de Householder asociada a v como $H_v = I - 2\frac{vv^t}{v^tv}$.

Prop: • H_v resulta una reflexión con respecto al hiperplano ortogonal a v.

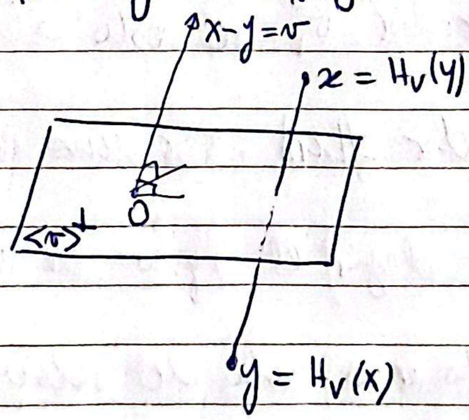


• H_v es ortogonal ($H_v^t H_v = I$)

• H_v es simétrica ($H_v^t = H_v$)

Teo: Si $\|x\| = \|y\|$, tomamos $v = x - y$ y $H_v = I - 2\frac{vv^t}{v^tv}$.

Resulta: $H_v x = y \wedge H_v y = x$.



Aplicación: (alternativa estable a GS para la factorización QR).

Supongamos que tenemos una matriz $A = \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{bmatrix}$

Llamemos x_1 a su primera columna y definimos

$$y_1 = \begin{pmatrix} \pm\|x_1\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se cumple $\|x_1\| = \|y_1\|$, de modo que si definimos

$v_1 = x_1 - y_1$ resulta que H_{v_1} cumple

$H_{v_1} x_1 = y_1 \;\wedge\; H_{v_1} y_1 = x_1$, por lo que

$$H_{v_1} A = \begin{bmatrix} \pm\|x_1\| & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \end{bmatrix}$$

Observación: para calcular v_1 se resta a la primera componente de x_1 el valor $\pm\|x_1\|$. Por una cuestión de estabilidad conviene elegir el signo de modo tal de no tener como resultado una resta de valores similares.
(es decir: tomar $y_1 = \begin{pmatrix} -\text{sg}(x_{11})\|x_1\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$)

13

Ahora $H_{v_1} A = \begin{bmatrix} X & X & X & X \\ 0 & \boxed{X} & X & X \\ 0 & \boxed{X} & X & X \\ 0 & \boxed{X} & X & X \end{bmatrix}$

↳ lo llamamos x_2 y definimos

$y_2 = \begin{pmatrix} \pm\|x_2\| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $v_2 = x_2 - y_2$. Si $H_{v_2} = I_3 - 2\frac{v_2 v_2^t}{v_2^t v_2}$,

entonces la matriz $H_2 = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0\ 0\ 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & H_{v_2} \\ 0 & \end{array}\right]$ produce:

$$H_2 H_{v_1} A = \begin{bmatrix} X & X & X & X \\ 0 & X & X & X \\ 0 & 0 & X & X \\ 0 & 0 & X & X \end{bmatrix}.$$

Siguiendo con esta misma idea:

$$H_3 H_2 H_{v_1} A = \underbrace{\begin{bmatrix} X & X & X & X \\ 0 & X & X & X \\ 0 & 0 & X & X \\ 0 & 0 & 0 & X \end{bmatrix}}_{R}$$ Triangular superior.

Por lo tanto: (multiplicando sucesivamente por H_3, H_2, H_{v_1} a izquierda) $A = \underbrace{H_{v_1} H_2 H_3}_{\text{lo llamamos } Q} R$ [pues $H_{v_1}^{-1} = H_{v_1}$, $H_2^{-1} = H_2$ ∧ $H_3^{-1} = H_3$]

Q resulta producto de ortogonales y por lo tanto ortogonal

$\therefore A = Q.R.$

Ejemplo numérico.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$x_1 = (0\,0\,2) \quad \|x_1\| = 2$

$y_1 = (2,0,0)$

$v_1 = x_1 - y_1 = (-2\;0\;2)$

$$H_{v_1} = I - 2\,\frac{vv^t}{v^tv} = I - 2\,\frac{\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}(-2\,0\,2)}{(-2\,0\,2)\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}} =$$

$$= I - \frac{2}{8}\begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_{v_1}A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad x_2 = (4,3) \qquad y_2 = (-5,0)$$

$v_2 = (9,3)$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\,\frac{\begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}(9\;3)}{(9\,3)\begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{90}\begin{pmatrix} 81 & 27 \\ 27 & 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 & -3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4/5 & -3/5 \\ 0 & -3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

$$H_2 H_{v_1} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4/5 & -3/5 \\ 0 & -3/5 & 4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 4/5 \end{pmatrix} = R$$

luego

$$A = H_{v_1} H_2 \, R = QR \quad \text{con}$$

$$Q = H_{v_1} H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4/5 & -3/5 \\ 0 & -3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -3/5 & 4/5 \\ 0 & -4/5 & -3/5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es decir

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3/5 & 4/5 \\ 0 & -4/5 & -3/5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 4/5 \end{pmatrix} = QR.$$