Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática

Álgebra Lineal Computacional

1er Cuatrimestre 2023

Práctica N° 3: Sistemas lineales.

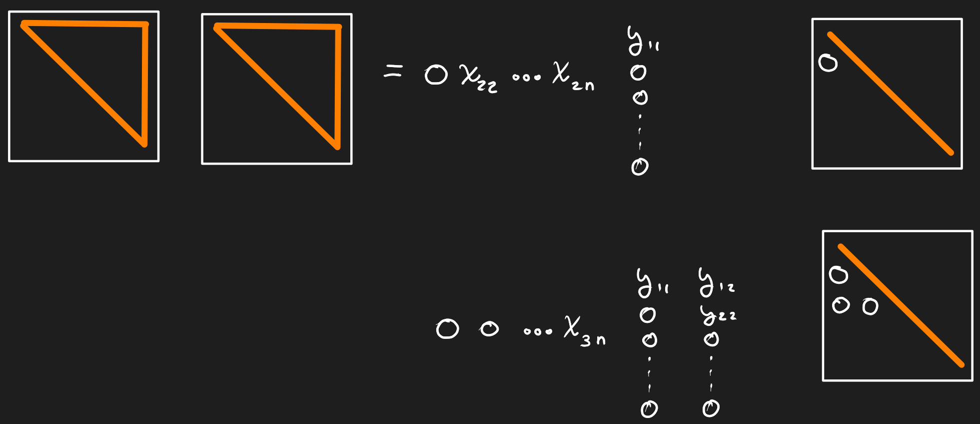
Ejercicio 1. Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B} \in K^{n \times n}$. Probar que:

(a) Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son triangulares superiores, $\boldsymbol{AB}$ es triangular superior.

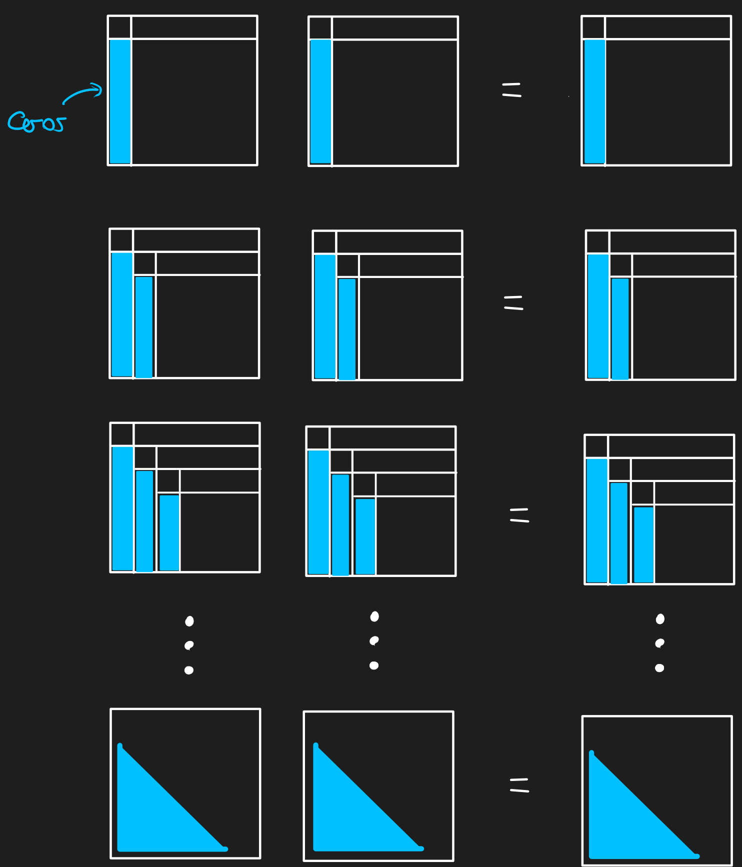
(b) Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son diagonales, $\boldsymbol{AB}$ es diagonal.

(c) Si $\boldsymbol{A}$ es estrictamente triangular superior (es decir, $a_{ij} = 0$ si $i \geq j$), $\boldsymbol{A}^n = 0$.

a) Idea

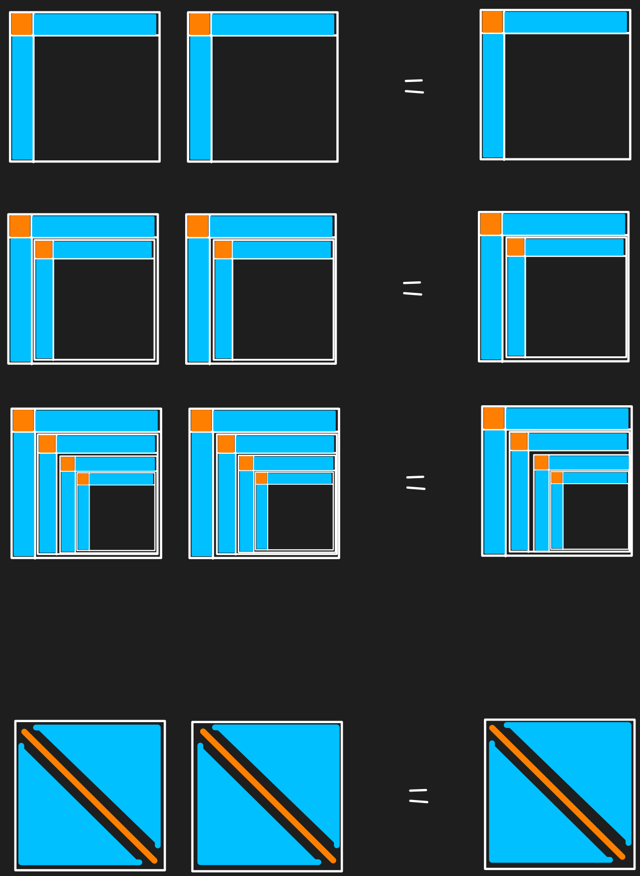


En Bloques (solo veo ceros inferiores)



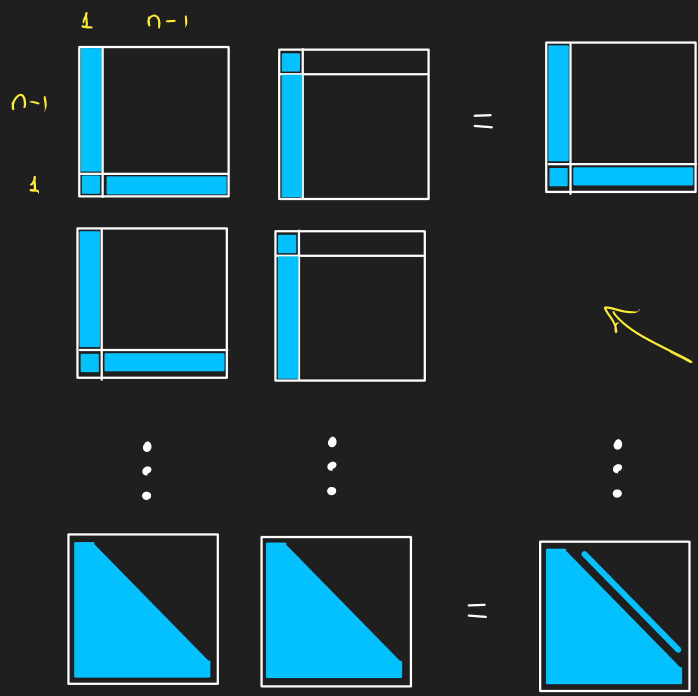
Ver Pdf de prod. de Matrices por Bloques en carpeta "Recursos"

b) Misma idea pero mas fácil

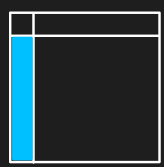


c) Como a) pero la diagonal es cero.

Veo última fila



del a)



Deberia encontrarme con que luego
de un producto de dos matrices de
este tipo, el resultado es una matriz
del mismo tipo PERO con
UNA DIAGONAL MÁS de ceros.

Input

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Input

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2$$

Result

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 9 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Input

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3$$

Result

$$2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Input

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^4$$

Result

$$24\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Input

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^5$$

Result

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. Sea $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

(a) Escalonar la matriz $\boldsymbol{A}$ multiplicándola a izquierda por matrices elementales $\boldsymbol{T}^{ij}(a)$, $a \in \mathbb{R}$, $1 \le i, j \le 4$, con $i \neq j$.

Recordar que $\boldsymbol{T}^{ij}(a) \in K^{n\times n}$ *se define como:*

$$\boldsymbol{T}^{ij}(a) = \boldsymbol{I}_n + a\boldsymbol{E}^{ij}, \quad 1 \le i, j \le n, \quad i \neq j, \quad a \in K,$$

siendo $\boldsymbol{E}^{ij}$ *las matrices canónicas de* $K^{n\times n}$.

(b) Hallar la descomposición $\boldsymbol{LU}$ de $\boldsymbol{A}$.

(c) Usando la descomposición del ítem anterior resolver el sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, para $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$T^{14}(a) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} & & & 4 \end{array} \\ 1 & \begin{bmatrix} 1 & & & a \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Input

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Result

$$\begin{pmatrix} 1-3a & 3a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

— Multiplica 4° Fila de A por a y suma a la 1° de A

Input

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Result

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Input

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Result

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Input

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Result

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Input

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Result

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Input

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Result

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Desc. LU

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ F_3 - 2F_1 \\ F_4 + 3F_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$F_3 - 1.F_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = U$$

Con

$$E_{31} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ -2 & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{pues} \quad F_3 - 2F_1$$

3° Fila + 1° Fila * (−2)

$$E_{41} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 3 & & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{pues} \quad F_4 + 3F_1$$

$$E_{32} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -1 & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{pues} \quad F_3 + 3F_2$$

$$\Rightarrow \; E_{32} \cdot E_{41} \cdot E_{31} \cdot A = U$$

$$A = \underbrace{E_{31}^{-1} \; E_{41}^{-1} \; E_{32}^{-1}}_{= L} \cdot U$$

Cambio signos pues inversa de triang.

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ +2 & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ -3 & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & +1 & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} U$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ +2 & & 1 & \\ -3 & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & +1 & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} U$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ 2 & 1 & 1 & \\ -3 & & & 1 \end{bmatrix} U$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 2 & 1 & 1 & \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Reviso :

Result

$A = L.U$

where

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \checkmark$$

c) $Ax = b$

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\overbrace{L\underbrace{U\;x}_{y}}^{A} = b$$

$$\begin{array}{cc} L & U \\ \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 2 & 1 & 1 & \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & 1 \\ 0 & 1 & & & -7 \\ 2 & 1 & 1 & & -5 \\ -3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & y_4 \end{array}\right)$$

Ejercicio 3. Escribir funciones de `Python` que calculen la solución de un sistema:

(a) $\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b}$, siendo $\boldsymbol{L}$ triangular inferior.

(b) $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y}$, siendo $\boldsymbol{U}$ triangular superior.

Ver TP 1.

Ejercicio 4. Escribir funciones de `Python` que realicen las siguientes tareas:

(a) Calcular la descomposición LU de una matriz dada $\boldsymbol{A}$, asumiendo que no es necesario realizar pivoteos.

(b) Resolver un sistema $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, utilizando la función del ítem anterior y las del ejercicio 3. Aplicar esta función para resolver el ítem c. del ejercicio 2

Vo TP 1.

Ejercicio 5. Considerar la matriz: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Probar que $\boldsymbol{A}$ no admite descomposición LU.

(b) Hallar la descomposición LU de $\boldsymbol{PA}$ para alguna matriz de permutación $\boldsymbol{P}$ adecuada.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \leftarrow$$ No puedo triangularla sin permutación!

Si $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Intercambia 1° y 2° fila.

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad E_{31} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ -1 & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 + F_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{U} \qquad E_{32} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{32} \cdot E_{31} \cdot P\,A = U$$

$$P\,A = E_{31}^{-1} E_{32}^{-1} U$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ +1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} U$$

$$PA = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{U}$$

Ejercicio 6. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible tal que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{S}$ donde $\boldsymbol{T} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es triangular inferior y $\boldsymbol{S} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es triangular superior. Probar:

(a) $\boldsymbol{T}$ y $\boldsymbol{S}$ son inversibles.

(b) $\boldsymbol{A}$ tiene factorización LU (con unos en la diagonal de $\boldsymbol{L}$).

(c) La matriz $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}^t & d \end{pmatrix}$ tiene factorización LU (con unos en la diagonal de $\boldsymbol{L}$), para cualquier $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ y $d \in \mathbb{R}$. Hallarla explícitamente en función de $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ y d.

a) $A = TS$ Como A es invertible

$\Rightarrow \det A \neq 0$

$\Rightarrow \det(TS) \neq 0$

$\det(TS) = \det T \cdot \det S \neq 0$

$\Rightarrow \det T \neq 0$ y $\det S \neq 0$

$\therefore$ T y S son invertibles.

b) $A = TS$

¿Opero sobre T y S para obtener L y U?

c) Es como la del TP:

Ejercicio 7. Se quiere calcular la solución del sistema lineal:

$$\begin{aligned} 10^{-3}x + 2y &= 8 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

utilizando eliminación gaussiana sin pivoteo, con aritmética de punto flotante de 3 dígitos y sistema de redondeo.

a) Analizar si el resultado difiere significativamente de la solución real.

b) Repetir el método de eliminación gaussiana eligiendo el pivote más conveniente.

$$10^{-3} = 0{,}1 \cdot 10^{-2}$$

$$2 = 0{,}2 \cdot 10^{1}$$

$$8 = 0{,}8 \cdot 10^{1}$$

$$1 = 0{,}1 \cdot 10^{1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0{,}1\cdot10^{-2} & 0{,}2\cdot10^{1} & 0{,}8\cdot10^{1} \\ 0{,}1\cdot10^{1} & 0{,}1\cdot10^{1} & 0{,}2\cdot10^{1} \end{array}\right) - F_1\cdot10^{3} \left(\begin{array}{cc|c} 0{,}1\cdot10^{-2} & 0{,}2\cdot10^{1} & 0{,}8\cdot10^{1} \\ 0 & \underbrace{0{,}1\cdot10^{1} - 0{,}2\cdot10^{4}} & \underbrace{0{,}2\cdot10^{1} - 0{,}8\cdot10^{4}} \end{array}\right)$$

$$= 0{,}2001\cdot10^{4} \qquad = -0{,}7998\cdot10^{4}$$

redondeo

$$= 0{,}2\cdot10^{4} \qquad = -0{,}8\cdot10^{4}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0{,}1\cdot10^{-2} & 0{,}2\cdot10^{1} & 0{,}8\cdot10^{1} \\ 0 & 0{,}2\cdot10^{4} & -0{,}8\cdot10^{4} \end{array}\right)$$

$$0{,}2\cdot10^{4}\, y = -0{,}8\cdot10^{4}$$

$$y = \frac{-0{,}8}{0{,}2} = -4$$

$$0{,}1\cdot10^{-2}\, x + 0{,}2\cdot10^{1}\, y = 0{,}8\cdot10^{1}$$

$$0{,}1\cdot10^{-2}\, x - 0{,}8\cdot10^{1} = 0{,}8\cdot10^{1}$$

$$0{,}1\cdot10^{-2}\, x = 0{,}16\cdot10^{2}$$

$$x = 0{,}16\cdot10^{2} \cdot 0{,}1\cdot10^{2}$$

$$x = 16000$$

$$sol = \begin{bmatrix} 16000 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Real :

```python
np.linalg.solve(np.array([[1e-3, 2],
                          [1,    1]]),
                np.array([8,
                          2]))
```
✓ 0.0s

```
array([-2.0010005,  4.0010005])
```

b)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0,1 \cdot 10^1 & 0,1 \cdot 10^1 & 0,2 \cdot 10^1 \\ 0,1 \cdot 10^{-2} & 0,2 \cdot 10^1 & 0,8 \cdot 10^1 \end{array}\right) - F_1 \cdot 10^{-3} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 0,1 \cdot 10^1 & 0,1 \cdot 10^1 & 0,2 \cdot 10^1 \\ 0 & \underbrace{0,2 \cdot 10^1 - 0,1 \cdot 10^{-2}} & \underbrace{0,8 \cdot 10^1 - 0,2 \cdot 10^{-2}} \end{array}\right)$$

$$= 0,1999 \cdot 10^1 \qquad = 0,7998 \cdot 10^1$$

redondeo

$$= 0,2 \cdot 10^1 \qquad = 0,8 \cdot 10^1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0,1 \cdot 10^1 & 0,1 \cdot 10^1 & 0,2 \cdot 10^1 \\ 0 & 0,2 \cdot 10^1 & 0,8 \cdot 10^1 \end{array}\right)$$

$$0,2 \cdot 10^1 \cdot y = 0,8 \cdot 10^1$$

$$y = 4$$

$$0,1 \cdot 10^1 \cdot x + 0,1 \cdot 10^1 \cdot y = 0,2 \cdot 10^1$$

$$0,1 \cdot 10^1 \cdot x + 0,1 \cdot 10^1 \cdot 4 = 0,2 \cdot 10^1$$

$$0,1 \cdot 10^1 \cdot x = -0,2 \cdot 10^1$$

$$x = -\frac{0,2}{0,1} = -2$$

$$Sol = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

```python
np.linalg.solve(np.array([[1e-3, 2],
                          [1,    1]]),
                np.array([8,
                          2]))
```
✓ 0.0s

```
array([-2.0010005,  4.0010005])
```

Ejercicio 8. Considerar la matriz

$$A \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 5 \\ -2 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

Mostrar que es definida positiva y calcular su descomposición de Cholesky.

Primero veo si se puede:

•) es simétrica ✓

•) es dp?:

+) $\det 4 = 4 > 0$ ✓

+) $\det \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 4 > 0$ ✓

+) $\det A = 16 > 0$ ✓

Calculo:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 5 \\ -2 & 5 & 11 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_2 - \frac{F_1}{2} \\ \\ F_2 + \frac{F_1}{2} \end{array} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 10 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L_1} A$$

$$F_3 - 3.\frac{F_2}{2} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}}_{L_2} L_1 . A$$

$$L_2 . L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{4} + \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{5}{4} & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{L}}$$

$$L_2 . L_1 . A = U$$

$$\tilde{L} . A = U$$

$$\tilde{L} . A \, \tilde{L}^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D$$

Si $\tilde{L}^{-1} = L$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{5}{4} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = L . D . L^t$$

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{5}{4} & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Verificado con calc online ✓

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\hat{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\hat{L}^t}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \hat{L} . \hat{L}^t$$

Ejercicio 9. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica. Probar que $\boldsymbol{A}$ es definida positiva si y sólo si existe un conjunto de vectores linealmente independientes $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $a_{ij} = \boldsymbol{x}_i^t \boldsymbol{x}_j$.

Uso Cholesky

$\Rightarrow$) Si A es spd $\Rightarrow A = LL^t$

$$LL^t = \begin{bmatrix} \overline{\quad x_i^t \quad} & \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Big| & \\ x_j & \end{bmatrix}$$

L triangular $\Rightarrow$ filas li y columnas li

Las filas de L son vectores li pues L triangular, y al hacer $x_i^t \cdot x_j$ obtengo cada uno de los a_ij de A

$\Leftarrow$) A simétrica y $\exists \{x_1, \ldots, x_n\}$ li / $a_{ij} = x_i^t x_j$

$$\Rightarrow a_{ij} = a_{ji} = x_i^t x_j = x_j^t x_i$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^t x_1 & x_1^t x_2 & \cdots & x_1^t x_n \\ x_2^t x_1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_n^t x_1 & \cdots & \cdots & x_n^t x_n \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} — & x_1^t & — \\ — & x_2^t & — \\ & \vdots & \\ — & x_n^t & — \end{bmatrix}}_{=:\tilde{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}}_{=:\tilde{L}^t}$$

Puedo diagonalizarla pues x_i son li (la llamo L)

$A = LL^t \Rightarrow A$ es sdp

$\boxed{\checkmark}$

Ejercicio 10. Sean las matrices $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Demostrar que $\boldsymbol{A}$ es simétrica definida positiva y $\boldsymbol{B}$ es no singular si y sólo si $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^t$ es simétrica definida positiva.

$\Rightarrow$) A es sdp y B es no singular

Simetría de BAB^t

$$(BAB^t)^t = BA^tB^t \overset{A=A^t}{=} BAB^t$$

$\therefore$ BAB^t es simétrica ✓

Def. pos de BAB^t

$$x^t . BAB^t . x = (x^t . BA)\underbrace{(B^t . x)}$$

Como B no singular

$\Rightarrow B^t$ no singular

$\Rightarrow B^t x \neq 0 \quad \forall x \neq 0$

$\Rightarrow$ llamo $v := B^t x$

$\Rightarrow v^t = x^t B$

B^t invertible

$$\langle x \rangle = \mathbb{R}^n \overset{\Downarrow}{=} \langle B^t . x \rangle = \langle v \rangle$$

$$\Rightarrow x^t B . A . B^t x = v^t . A . v$$

Como A es sdp

$$\Rightarrow v^t . A . v > 0 \qquad \forall v \neq \vec{0}$$

$$\Rightarrow x^t B A B x > 0 \qquad \forall x \neq 0$$

$\therefore$ BAB^t es dp ✓

$\Leftarrow)$ BAB^t es sdp $\Rightarrow x^t BAB^t x > 0$

y

$BAB^t = LL^t$

$= \tilde{L}\tilde{D}\tilde{D}\tilde{L}^t$

$\boxed{\text{qvq } A \text{ sdp y } B \text{ \underline{no} sing}}$

Primero

$x^t BAB^t x > 0$

Si B <u>no</u> es inversible

$\Rightarrow \exists v \neq 0 \;/\; B^t v = 0$

$\Rightarrow v^t . B . A . \underbrace{B^t v}_{=0} = 0$

$\Rightarrow$ <u>No</u> vale que $x^t BAB^t x > 0 \quad \forall x$

<u>Abs</u>

$\therefore$ B es inversible.

Sabiendo que B inversible

$$BAB^t \overset{\text{sime.}}{=} (BAB^t)^t$$

$$\Rightarrow BAB^t = BA^tB^t$$

$$B^{-1}BAB^tB^{-t} = B^{-1}BA^tB^tB^{-t}$$

$$\Rightarrow A = A^t \quad \therefore \; A \text{ es simétrica}$$

$$\underbrace{x^t BA}_{y^t}\underbrace{B^t x}_{y} > 0 \quad \forall x$$

$y^t . A . y > 0$ Para todo y?

- Como B inversible y $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\langle x \rangle = \langle B^t x \rangle = \langle y \rangle = \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow y^t . A . y > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

$\therefore$ A es d. p.

$\blacksquare$

Ejercicio 11. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $\|\boldsymbol{A}\|_2 < 1$, siendo $\|\cdot\|_2$ la norma matricial inducida por la norma 2 vectorial.

(a) Probar que $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A}$ es simétrica definida positiva.

(b) Probar que la matriz $\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A}^t & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$ es simétrica definida positiva.

$$\|A\|_2 < 1 \Rightarrow \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} < 1$$

$$x^t\ C\ x > 0$$

$$C = LL^t$$

a) Simetría

$$(I - A^t A)^t = I^t - (A^t A)^t$$

$$= I - A^t A \quad \checkmark$$

DP:

qvq

$$\underbrace{x^t (I - A^t A) \cdot x}_{} > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$x^t I x - x^t A^t A x$$

$$\underbrace{x^t x}_{} - (x^t A^t)(A x)$$

$$\|x\|_2^2 - \underbrace{(Ax)^t (Ax)}_{\|Ax\|_2^2}$$

Como $\|A\|_2 = \max\limits_{x} \dfrac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \Rightarrow \|A\|_2 \geqslant \dfrac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$

$$\overset{\|x\|_2 > 0}{\Rightarrow} \|Ax\|_2 \leqslant \|A\|_2 \cdot \|x\|_2$$

elevo a la 2 (vale pues $\|\cdot\| \geqslant 0$)

$$\Rightarrow \|Ax\|_2^2 \leqslant \|A\|_2^2 \cdot \|x\|_2^2$$

$$\Rightarrow \quad -\|Ax\|_2^2 \geqslant -\|A\|_2^2 \cdot \|x\|_2^2$$

$$\Rightarrow \|x\|_2^2 - \|Ax\|_2^2 \geqslant \|x\|_2^2 - \|A\|_2^2 \cdot \|x\|_2^2$$

$$\geqslant \underbrace{\|x\|_2^2}_{>0} \left(1 - \|A\|_2^2\right)$$

dato

Como $0 \leqslant \|A\|_2 < 1$

$$\Rightarrow 1 - \|A\|_2^2 > 0$$

$$\Rightarrow \|x\|_2^2 - \|Ax\|_2^2 > 0$$

$\therefore$

$$x^t \left(I - A^t A\right) \cdot x > 0 \quad \forall x \neq 0 \qquad \checkmark$$

b) Por ej 20 b:

Ejercicio 20. Sean $A, B, C, D \in K^{n\times n}$ y $M \in K^{2n\times 2n}$ la matriz de bloques

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Probar que si A es inversible, entonces

(a) $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$.

(b) $\det(M) = \det(AD - ACA^{-1}B)$. Concluir que si $AC = CA$, $\det(M) = \det(AD - CB)$.

(b) Probar que la matriz $\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A}^t & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$ es simétrica definida positiva.

$$I A^t = A^t I \quad \checkmark$$

ej 20b

$\Rightarrow$ Cumple que

$$\det M = \det\left(II - IA^t I^{-1} A\right)$$

$$= \det\left(I - A^t A\right) > 0$$

Si $C = I - A^t A$

Como C es sdp por a)

entonces todos sus menores principales

son mayores a cero.

$\Rightarrow \quad \det C(1:i, 1:i) > 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$

$\Rightarrow \quad \det M(1:i, 1:i) \overset{?}{>} 0$???

$\Rightarrow \begin{bmatrix} I & A \\ A^t & I \end{bmatrix}$ es sdp.