Normas vectoriales y sucesiones

Ejercicio 10. Si $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, probar que las constantes de equivalencia entre las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ y entre las normas $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ vienen dadas por:

- Vectorial

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\boldsymbol{x}\|_\infty$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{x}\|_1 \leq \|\boldsymbol{x}\|_2 \leq \|\boldsymbol{x}\|_1$$

- Matricial

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{A}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{A}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\boldsymbol{A}\|_\infty$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{A}\|_1 \leq \|\boldsymbol{A}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\boldsymbol{A}\|_1$$

- Calcular los coeficientes para la equivalencia vectorial y matricial entre las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$

Ejercicio 11. Para cada una de las siguientes sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, determinar si existe $\lim_{n\to\infty} x_n$, y en caso afirmativo hallarlo.

a) $x_n = \frac{1}{n}$,

b) $x_n = \frac{n^2+1}{n^2-1}$,

c) $x_n = (-1)^n$

d) $x_n = (-1)^n e^{-n}$

a) $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2-1} \overset{L'H}{=} \lim \frac{2n}{2n} = 1$

$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

c) No tiene límite

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{(-1)^n}_{\text{Acotado}} \cdot \underbrace{e^{-n}}_{\to 0} = 0$

$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Ejercicio 12. Para cada una de las siguientes sucesiones de vectores $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}^2$, determinar si existe $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n$, y en caso afirmativo hallarlo.

a) $\boldsymbol{x}_n = (1+\frac{1}{n}, 3)$,

b) $\boldsymbol{x}_n = ((-1)^n, e^{-n})$,

c) $\boldsymbol{x}_n = \begin{cases} (1/n, 0) & \text{si } n \text{ es par} \\ (0, -1/n) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$,

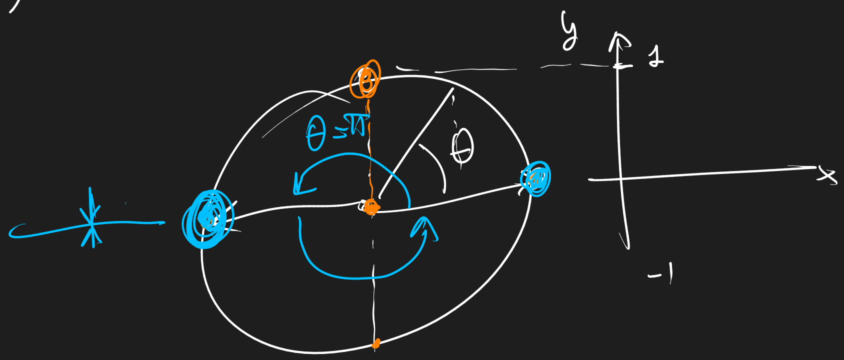
d) $\boldsymbol{x}_n = (\frac{1}{2^n}, 4, \operatorname{sen}(\pi n))$.

a) $x_n \longrightarrow (1, 3)$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} 1 + \underset{\to 0}{\frac{1}{n}} = 1$

b) x_n no tiene límite pues $(-1)^n$ no converge.

c) $\left.\begin{array}{l} \left(\frac{1}{n}, 0\right) \xrightarrow{n\to\infty} (0,0) \\ \left(0, -\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} (0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow x_n \longrightarrow (0,0)$

d) $\left(\underset{\to 0}{\frac{1}{2^n}}, \underset{=4}{4}, \underbrace{\sin(\pi n)}_{=0\,\forall n}\right) \longrightarrow (0, 4, 0)$



Ejercicio 13. Dada una sucesión de vectores $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^k$ y dos normas $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$ de $\mathbb{R}^k$, usando la equivalencia de normas, probar

$$\|\boldsymbol{x}_n\|_a \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \iff \qquad \|\boldsymbol{x}_n\|_b \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ejercicio 14. Dada una sucesión de vectores $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^k$ probar

$$\|\boldsymbol{x}_n\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\boldsymbol{x}_n)_i \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ para todo } 1 \leq i \leq k,$$

donde $(\boldsymbol{x}_n)_i$ es la i-ésima coordenada de $\boldsymbol{x}_n$.

Normas matriciales

Ejercicio 15. Si $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, probar que las constantes de equivalencia entre las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ y entre las normas $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ vienen dadas por:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{A}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{A}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\boldsymbol{A}\|_\infty$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{A}\|_1 \leq \|\boldsymbol{A}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\boldsymbol{A}\|_1$$

Calcular los coeficientes para la equivalencia vectorial y matricial entre las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$.

Ejercicio 16. Probar que para toda $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\text{(a) } ||\boldsymbol{A}||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{(b) } ||\boldsymbol{A}||_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Ejercicio 17. Se quiere estimar la norma 2 de una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ como el máximo del valor $\|\boldsymbol{Ax}\|_2/\|\boldsymbol{x}\|_2$ entre varios vectores $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ no nulos generados al azar. Hacer un programa que reciba una matriz A y luego

- genere los primeros 100 términos de la siguiente sucesión:

$$s_1 = 0, \quad s_{k+1} = \max\left\{s_k, \frac{\|\boldsymbol{Ax}_k\|_2}{\|\boldsymbol{x}_k\|_2}\right\}$$

  donde los $x_k \in \mathbb{R}^3$ son vectores no nulos generados al azar en la bola unitaria: $B = \{\boldsymbol{x} : \|\boldsymbol{x}\|_2 \leq 1\}$.

- grafique la sucesión calculada, junto con el valor exacto de la norma de la matriz.

$$\max_x \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \|A\|_2$$

Recordar que tanto la norma 2 puede calcularse con el comando np.linalg.norm. Tener en cuenta que los vectores generados al azar (comando np.random.random) tienen coordenadas en el intervalo $[0, 1]$.

```python
A = np.asarray([[10,0,0],
                [20,1,0],
                [30,0,1]])
A
```

✓ 0.0s

```
array([[10,  0,  0],
       [20,  1,  0],
       [30,  0,  1]])
```

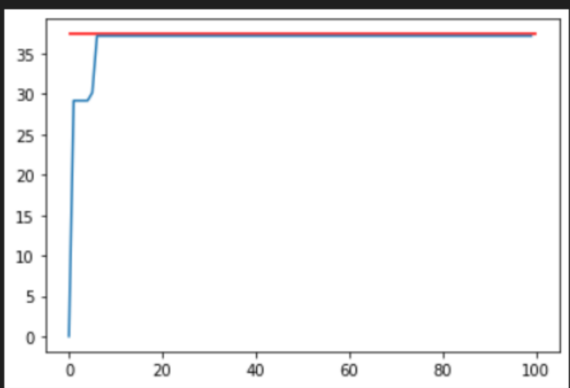
```python
def generador(A):
    n = 100
    s1 = 0
    sk = s1
    serie = []
    serie.append(sk)
    while len(serie) < n:
        x = np.random.rand(3, 1)
        norm_x = np.linalg.norm(x, ord=2)
        if norm_x > 1 or norm_x == 0:
            # genero otro x
            continue

        normA = np.linalg.norm(A @ x, ord=2) / norm_x
        sk = max(sk, normA)
        serie.append(sk)

    return serie

serie = generador(A)
```

$$\left\| \begin{bmatrix} 0{,}99 \\ 0{,}99 \\ 0{,}99 \end{bmatrix} \right\| \approx \sqrt{3} > 1$$

$$\leq 1 \checkmark$$

```python
plt.plot(serie)
plt.hlines(y=np.linalg.norm(A, ord=2), xmin=0, xmax=100, color='r')
plt.show()
```

✓ 0.2s



Condición de matrices

Ejercicio 18. Se tiene el sistema $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

a) Sea $\boldsymbol{x}$ la solución exacta y $\tilde{\boldsymbol{x}}$ la solución obtenida numéricamente. Se llama *residuo* al vector $\mathbf{r} := \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}$. Si notamos $\mathbf{e} = \boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}$, mostrar que:

$$\frac{1}{\operatorname{cond}(\boldsymbol{A})} \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \leq \frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \operatorname{cond}(\boldsymbol{A}) \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}.$$

¿Cómo se puede interpretar este resultado?

b) En lugar del dato exacto $\boldsymbol{b}$ se conoce una aproximación $\tilde{\boldsymbol{b}}$. $\tilde{\boldsymbol{x}}$ es tal que $\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{b}}$. Probar que:

$$\frac{1}{\operatorname{cond}(\boldsymbol{A})} \frac{\|\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \leq \frac{\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \operatorname{cond}(\boldsymbol{A}) \frac{\|\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}.$$

¿Cómo se puede interpretar este resultado?

Ejercicio 19. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

a) Calcular $\mathrm{cond}_\infty(A)$.

b) ¿Cuán chico debe ser el error relativo en los datos ($\frac{\|b-\tilde{b}\|}{\|b\|}$), si se desea que el error relativo en la aproximación de la solución ($\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|}$) sea menor que 10^{-4} (en $\|\cdot\|_\infty$)?

c) Realizar experimentos numéricos para verificar las estimaciones del ítem anterior. Considerar $b = (3,2,2)^t$, que se corresponde con la solución exacta $x = (1,1,1)^t$. Generar vectores de error aleatorios, normalizarlos para que su norma sea tan chica como la estimada en el item anterior y perturbar b obteniendo $\tilde{b}$. Finalmente, resolver $A\tilde{x} = \tilde{b}$ y verificar que $\|\tilde{x} - x\| < 10^{-4}$.

a) $\mathrm{Cond}_\infty A = \|A\|_\infty \, \|A^{-1}\|_\infty$

$= 3 \cdot 2$

$= 6$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 5/4 & -3/4 \\ 0 & -3/4 & 5/4 \end{bmatrix}$$

b) Sabemos

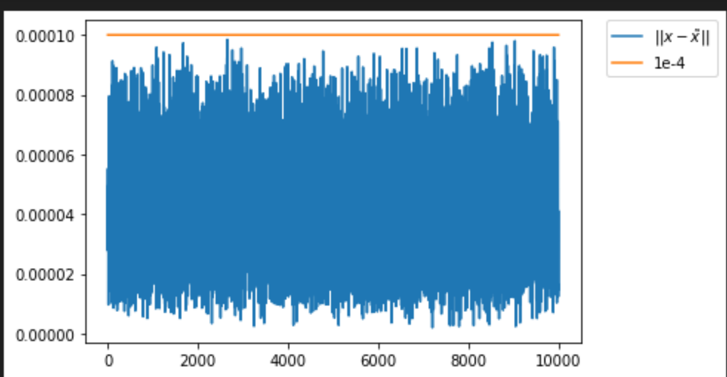
$$\frac{1}{\mathrm{cond}(A)} \frac{\|b-\tilde{b}\|}{\|b\|} \le \underbrace{\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|}}_{< 10^{-4}} \le \underbrace{\mathrm{cond}(A)}_{=6} \underbrace{\frac{\|b-\tilde{b}\|}{\|b\|}}_{?}.$$

$10^{-4} < 6 \cdot b_e$

$$\frac{10^{-4}}{6} < \frac{\|b-\tilde{b}\|}{\|(3,2,2)\|}$$

$$\frac{10^{-4}}{6} \cdot \sqrt{17} < \|b-\tilde{b}\|$$

c)



Ver notebook.

Ejercicio 20. Probar que si $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz inversible y $\|\cdot\|$ es una norma matricial, la condición de $\boldsymbol{A}$ verifica la desigualdad:

$$\frac{1}{\operatorname{cond}(\boldsymbol{A})} \leq \inf\left\{\frac{\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\|}{\|\boldsymbol{A}\|} : \boldsymbol{B} \text{ es singular}\right\}.$$

Deducir que

$$\operatorname{cond}(\boldsymbol{A}) \geq \sup\left\{\frac{\|\boldsymbol{A}\|}{\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\|} : \boldsymbol{B} \text{ es singular}\right\}.$$

Nota: En ambos casos, vale la igualdad, pero la otra desigualdad es un poco más complicada de probar. De la igualdad se puede concluir que $\operatorname{cond}(\boldsymbol{A})$ mide la distancia relativa de $\boldsymbol{A}$ a la matriz singular más próxima.

Ejercicio 21. (a) Estimar la $\text{cond}_\infty(\boldsymbol{A})$ de las siguientes matrices en función ε (cuando $\varepsilon \to 0$).

$$\text{(i)} \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(ii)} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+\varepsilon \\ 2 & 3 & 4 \\ 1-\varepsilon & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Concluir que la condición de las matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ del ítem anterior tienden a infinito, cualquiera sea la norma considerada.

a) i) $1 \ \varepsilon \ \varepsilon^2 \longrightarrow \underbrace{1 \ 0 \ 0}_{\text{ld}} \Rightarrow \text{cond } A \longrightarrow \infty$

ii) $1 \ 0 \ 1+\varepsilon \longrightarrow 1 \ 0 \ 1$

$1-\varepsilon \ 0 \ 1 \longrightarrow 1 \ 0 \ 1 \qquad \text{cond } A \to \infty$

b) Es indep. de la norma.

Ejercicio 22. Para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & n & 5n \\ 1 & 3n & 3n \\ 1 & n & 2n \end{pmatrix}$$

con $n \in \mathbb{N}$, probar que existe una constante $c > 0$ tal que $\mathrm{cond}_\infty(A) \geq cn$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y deducir que $\mathrm{cond}_\infty(A) \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

$$\|A\|_\infty = \max\begin{pmatrix} 1+n+5n \\ 1+3n+3n \\ 1+n+2n \end{pmatrix} = \max\begin{pmatrix} 1+6n \\ 1+6n \\ 1+3n \end{pmatrix} \quad n>0$$

$$\|A\|_\infty = 1+6n$$

A

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & n & 5n & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3n & 3n & 0 & 1 & 0 \\ 1 & n & 2n & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & n & 5n & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2n & -2n & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3n & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & n & 5n & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2n} & \frac{1}{2n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3n} & 0 & -\frac{1}{3n} \end{array}\right)$$

$\times n$
$$\begin{matrix} 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2n} & \frac{1}{2n} & 0 \\ 0 & n & -n & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6n & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2n} & \frac{1}{2n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3n} & 0 & -\frac{1}{3n} \end{array}\right)$$

$\times n$
$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3n} & 0 & -\frac{1}{3n} \\ 0 & 0 & n & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{matrix}$$

$\times -6$
$$\begin{matrix} 0 & 0 & -6n & -2 & 0 & 2 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2n} & \frac{1}{2n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3n} & 0 & -\frac{1}{3n} \end{array}\right)$$

$$\frac{2}{6n} - \frac{3}{6n}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6n} & \frac{1}{2n} & -\frac{1}{3n} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3n} & 0 & -\frac{1}{3n} \end{array}\right)$$

A^{-1}

Verifico

Input

$$\begin{pmatrix} 1 & n & 5n \\ 1 & 3n & 3n \\ 1 & n & 2n \end{pmatrix}^{-1} \quad \text{(matrix inverse)}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{1}{6n} & \frac{1}{2n} & -\frac{1}{3n} \\ \frac{1}{3n} & 0 & -\frac{1}{3n} \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{1}{6n} & \frac{1}{2n} & -\frac{1}{3n} \\ \frac{1}{3n} & 0 & -\frac{1}{3n} \end{bmatrix} \qquad \|A^{-1}\|_\infty = \max \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{6n} + \frac{3}{6n} + \frac{2}{6n} = \frac{1}{n} \\ \frac{2}{3n} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{n} \leq 1$$

$$\frac{2}{3n} \leq \frac{2}{3}$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = 3$$

$$\therefore \quad \text{Cond}_\infty A = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$$

$$= (1+6n) \cdot 3 \xrightarrow{n \to \infty} \infty$$

$$= 3 + 18n \underset{n>0}{\overset{\text{quiero}}{\geq}} C \cdot n$$

$$\Rightarrow \quad C \leq \frac{3}{n} + 18$$

$$\text{Como } \frac{3}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow \frac{3}{n} + 18 \xrightarrow{n \to \infty} 18$$

$$\Rightarrow \text{elijo } C = 17 \quad \left(\text{Podría elegir } C \in (0, 18]\right)$$

Ejercicio 23. Sea $\boldsymbol{D}_n = \frac{1}{10} I_n$. Verificar que $\det(\boldsymbol{D}_n) \to 0$ si $n \to \infty$. ¿$\boldsymbol{D}_n$ está mal condicionada? ¿Es el determinante un buen indicador de cuán cerca está una matriz de ser singular?

El determinante de una matriz diagonalizada es el producto de los elementos de su diagonal.

A medida que n aumenta, aumenta la cantidad de 1/10 que se involucran en ese producto, con lo cual, cuando n tiende a inf, ese producto tiende a cero.

$$\det D_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{10} = \frac{1}{10^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

No está mal condicionada, el determinante no me dice nada sobre la condición de la matriz, que en este caso es 1 pues:

$$\|D_n\|_\infty = \max_i |d_{ii}| = \max_i \left|\frac{1}{10}\right| = \frac{1}{10}$$

$$\|D_n^{-1}\|_\infty = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{d_{11}} & & \\ & \frac{1}{d_{22}} & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{d_{nn}} \end{matrix} \right\|_\infty = \max_j \left|\frac{1}{d_{jj}}\right| = \min_j |d_{jj}|$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{-1}$$

$$= \left\| \begin{matrix} 10 & & \\ & 10 & \\ & & \ddots & \\ & & & 10 \end{matrix} \right\|_\infty = 10$$

$$\operatorname{Cond} D_n = \|D_n\|_\infty \cdot \|D_n^{-1}\|_\infty = \frac{\max_i |d_{ii}|}{\min_j |d_{jj}|}$$

$$= \frac{1}{10} \cdot 10 = 1$$

Ejercicio 24. Sea $\boldsymbol{A}_n \in \mathbb{R}^n$ la matriz dada por $\boldsymbol{A}_n = (a_{i,j})$,

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \text{ o } j = 1 \\ 1/i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Probar que $\text{cond}_\infty(\boldsymbol{A}_n) \geq f(n)$ para alguna función $f(n) \in \mathcal{O}(n^2)$.

b) Probar que $\text{cond}_2(\boldsymbol{A}_n) \longrightarrow \infty$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

$n=2:$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix}$ $\quad n=3:$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$ $\quad n=4:$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$

a) qvq

$\text{cond}_\infty A_n \geqslant c . n^2$

Input

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1}$ (

Result

$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

Input

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^{-1}$ (ma

Result

$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$

Expanded form

$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

Input

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^{-1}$ (matrix inverse)

Result

$\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 12 & -6 & -8 \\ 3 & -6 & 15 & -12 \\ 4 & -8 & -12 & 16 \end{pmatrix}$

Expanded form

$\begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} & -1 \\ \frac{3}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{15}{8} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$

Input

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}^{-1}$ (matrix inver

Result

$\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 22 & -6 & -8 & -10 \\ 3 & -6 & 30 & -12 & -15 \\ 4 & -8 & -12 & 36 & -20 \\ 5 & -10 & -15 & -20 & 40 \end{pmatrix}$

Expanded form

$\begin{pmatrix} -\frac{1}{13} & \frac{2}{13} & \frac{3}{13} & \frac{4}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{22}{13} & -\frac{6}{13} & -\frac{8}{13} & -\frac{10}{13} \\ \frac{3}{13} & -\frac{6}{13} & \frac{30}{13} & -\frac{12}{13} & -\frac{15}{13} \\ \frac{4}{13} & -\frac{8}{13} & -\frac{12}{13} & \frac{36}{13} & -\frac{20}{13} \\ \frac{5}{13} & -\frac{10}{13} & -\frac{15}{13} & -\frac{20}{13} & \frac{40}{13} \end{pmatrix}$

Prop:

$$\text{Cond } A_n \geq \frac{\|A_n\|}{\|A_n - B\|} \quad \forall B \text{ singular.}$$

Como A_n es de la forma

$n=2$: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix}$ $n=3$: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$ $n=4$: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$

$$\|A_n\|_\infty = \|A_n\|_1 = n$$

Quiero un B singular /

$$\frac{\|A_n\|}{\|A_n - B\|} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

$$\frac{n}{\|A_n - B\|} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

$$\Rightarrow \quad \|A_n - B\| < n$$

Si $B = \left[\begin{array}{ccccc} & & A_{n-1:n} & & \\ 1 & 0 & \cdots & \frac{1}{n} & 0 \\ \hline 1 & 0 & \cdots & \frac{1}{n} & 0 \end{array}\right]$ repito fila anterior

$$\Rightarrow \quad A_n - B = \left[\begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ \hline 0 & 0 & \cdots & -1/n & 1/n \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \|A_n - B\|_\infty = \left|-\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{2}{n} \qquad n \geq 2$$

$$\Rightarrow \frac{n}{\|A_n - B\|} = n \cdot \frac{n}{2} = \underbrace{\frac{n^2}{2}}_{O(n^2)} \xrightarrow{n \to \infty} \infty$$

Con $\|\cdot\|_1$ elijo

$$B = \left[\begin{array}{c|c} A_{n:n-1} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1/n \\ 0 \end{matrix} \end{array} \right]$$

repito col.

y es todo igual.

Como

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \|A_n\|_1 \leq \|A_n\|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \|A_n\|_1$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \|A_n\|_\infty \leq \|A_n\|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \|A_n\|_\infty$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} n \leq \|A_n\|_2 \leq \sqrt{n} \cdot n$$

$$\underbrace{n^{1/2} \leq \|A_n\|_2}_{\|A_n\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} \infty} \leq n^{3/2}$$

Como

$$\operatorname{Cond}_2 A_n = \underbrace{\|A_n\|_2}_{\longrightarrow \infty} \cdot \underbrace{\|A_n^{-1}\|_2}_{?}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \cdot \|A_n\|_\infty \leq \|A_n\|_2 \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{n}} \cdot \|A_n^{-1}\|_\infty \leq \|A_n^{-1}\|_2 \end{cases}$$

$$\|A_n\|_2 \cdot \|A_n^{-1}\|_2 \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \|A_n\|_\infty \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \|A_n^{-1}\|_\infty$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\|A_n\|_\infty \cdot \|A_n^{-1}\|_\infty}_{\operatorname{Cond}_\infty A_n}$$

$$\|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 \geq \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\operatorname{Cond}_\infty A_n}_{\geq c \cdot n^2} \geq \frac{1}{n} \cdot c \cdot n^2$$

$$\|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 \geq c \cdot n$$

$$\Rightarrow \operatorname{Cond}_2 A_n \xrightarrow{n \to \infty} \infty$$