SISTEMAS

① Resolver el sistema:
$$\begin{cases} (1+i)\,x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1+i \\ i\,x_1 + (1-i)x_2 - x_3 = 1+i \\ 2x_1 + 2x_2 - i x_3 = 3-2i \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1+i & 2 & -2 & 1+i \\ i & 1-i & -1 & 1+i \\ 2 & 2 & -i & 3-2i \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{1+i}F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1-i & -1+i & 1 \\ i & 1-i & -1 & 1+i \\ 2 & 2 & -i & 3-2i \end{array}\right)$$

$$\left[\frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i}{2}\right.$$

$$1-i-i(1-i) = \underbrace{1-i-i+i^2}_{} = -2i$$
$$-1-i(-1+i) = -\cancel{1}+i-\cancel{i^2} = i$$
$$-i-2(-1+i) = -i+2-2i = 2-3i$$

$$\begin{array}{l} F_2 - iF_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1-i & -1+i & 1 \\ 0 & -2i & i & 1 \\ 0 & 2i & 2-3i & 1-2i \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1-i & -1+i & 1 \\ 0 & -2i & i & 1 \\ 0 & 0 & 2-2i & 2-2i \end{array}\right)$$

$$\leftrightarrow \quad (2-2i)\,x_3 = 2-2i \rightarrow \boxed{x_3 = 1}$$
$$-2i\,x_2 + i\cdot 1 = 1 \longrightarrow \boxed{x_2 = \frac{1-i}{-2i}\cdot\frac{\cancel{2}i}{\cancel{2}i} = \frac{i+1}{2} = \frac{1}{2}+\frac{i}{2}}$$
$$x_1 + (1-i)\,\frac{(1+i)}{2} + (-1+i)\cdot 1 = 1$$
$$x_1 + \cancel{1} - \cancel{1} + i = 1 \longrightarrow \boxed{x_1 = 1-i} \rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-i \\ \frac{1+i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}}$$

② Resolver el sistema:
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \longrightarrow x_1 - 2\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{5}x_3\right) + x_3 = 0 \\ 5x_2 - 3x_3 = 1 \longrightarrow \boxed{x_2 = \frac{1}{5} + \frac{3x_3}{5}} \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \rightarrow 0 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 - \frac{2}{5} - \frac{6}{5}x_3 + x_3 = 0$$
$$\boxed{x_1 = \frac{1}{5}x_3 + \frac{2}{5}}$$

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{5}x_3 + \frac{2}{5}, \frac{1}{5} + \frac{3}{5}x_3, x_3\right) = x_3\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1\right) + \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 0\right)$$

Sol: $\boxed{\lambda\left(\frac{1}{5},\frac{3}{5},1\right)+\left(\frac{2}{5},\frac{1}{5},0\right)}$

(3) Resolver el sistema:
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ \quad 5x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\rightarrow$ la 3^a ecuación dice: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1 \rightarrow 0 = 1$ Abs!

$\Rightarrow$ No tiene solución.

$\rightarrow$ (1) es COMPATIBLE DETERMINADO, (2) es COMPATIBLE INDETERMINADO. (3) es INCOMPATIBLE.

---

(4) Resolver el siguiente sistema y el sistema homogéneo asociado.

$\downarrow$ igualado a 0.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad\quad \mathrm{I} \quad \mathrm{II} \\ \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-3F_1}} \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & -3 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3-F_2} \begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad\quad \mathrm{I} \quad \mathrm{II} \\ \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & -3 & 5 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \end{array}$$

(I) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ -5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5 \end{cases} \longrightarrow \boxed{x_3 = \frac{5}{2} + \frac{5x_2}{2} + \frac{3x_4}{2}}$

$x_1 + 2x_2 - \left(\frac{5}{2} + \frac{5}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_4\right) + x_4 = -2$

$$x_1 + \underbrace{2x_2 - \frac{5}{2} - \frac{5}{2}x_2}_{-\frac{1}{2}x_2} \underbrace{-\frac{3}{2}x_4 + x_4}_{-\frac{1}{2}x_4} = -2$$

$$\boxed{x_1} = -2 + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4,\ x_2,\ \frac{5}{2} + \frac{5}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_4,\ x_4\right)$$
$$= x_2\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}, 0\right) + x_4\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}, 1\right) + \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{5}{2}, 0\right)$$

$\Rightarrow$ Podemos escribir la sol en forma paramétrica:

$$\text{Sol}: \lambda\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}, 0\right) + \mu\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}, 1\right) + \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{5}{2}, 0\right)$$

— x —

II $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$ $\rightarrow$ el despeje es igual

y queda: $\text{Sol}_H : \lambda\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}, 0\right) + \mu\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}, 1\right)$

$\hookrightarrow$ homogéneo

[Esto pasa siempre: la solución de un sistema (S) es: la solución del homogéneo asociado + una solución particular de (S)

En efecto: $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{5}{2}, 0\right)$ es UNA solución del sistema I

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + 2\cdot 0 - \frac{5}{2} + 0 = -2 \checkmark \\ \frac{1}{2} - 3\cdot 0 + \frac{5}{2} - 2\cdot 0 = 3 \checkmark \\ 3\cdot\frac{1}{2} + 0 - \frac{5}{2} = -1 \checkmark \end{cases}$$

Ejemplo: Resolver:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

A ojo puedo encontrar una solución: $\begin{cases} x_1 = 1 & x_2 = 0 \\ x_3 = 0 & x_4 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ La solución GENERAL es:

$$\underbrace{\lambda\left(\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{5}{2}, 0\right) + \mu\left(\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{3}{2}, 1\right)}_{\text{sol del Homogéneo}} + \underbrace{(1,0,0,0)}_{\text{una solución particular}}$$

——x——

Prop: Todo sistema homogéneo tiene SOLUCIÓN.

porque $\underbrace{x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0}$ siempre es solución

↳ se lo llama SOLUCIÓN TRIVIAL.

——x——

(5) Decidir para qué valores de a y k el siguiente sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

$$\begin{cases} x - y + iz = 1 \\ -x + (1+k)y - 2iz = 3a - 1 \\ -x + (1-i)z = -4 \end{cases}$$