Ejercicio 14. En cada uno de los siguientes casos construir un proyector $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que cumpla:

i) $\mathrm{Im}(f) = \{(x_1, x_2, x_3)/x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ $\quad x_3 = -x_1 - x_2$

ii) $\mathrm{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3)/x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

iii) $\mathrm{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3)/3.x_1 - x_3 = 0\}$ e $\mathrm{Im}(f) = \langle(1, 1, 1)\rangle$

$$\text{i)} \quad \mathrm{Im}\, f = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \langle (1,0,-1), (0,1,-1) \rangle$$

$$\text{Como} \quad \dim(\mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Nu}\, f) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$$

$$\text{y} \quad \dim \mathrm{Im}\, f = 2$$

$$\Rightarrow \dim \mathrm{Nu}\, f = 1$$

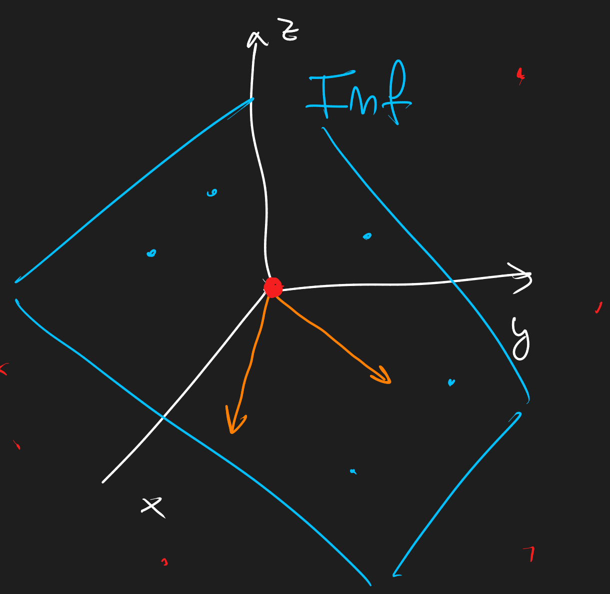
elijo uno li a los de Im f

$$\Rightarrow \mathrm{Nu}\, f = \langle (0,1,0) \rangle$$

$\therefore$

fof = f para los elem. de Im f

$$f(1,0,-1) = (1,0,-1)$$
$$f(0,1,-1) = (0,1,-1)$$
$$f(0,1,0) = (0,0,0)$$



ii) $Nu\, f = \langle (1,0,-1), (0,1,-1) \rangle$

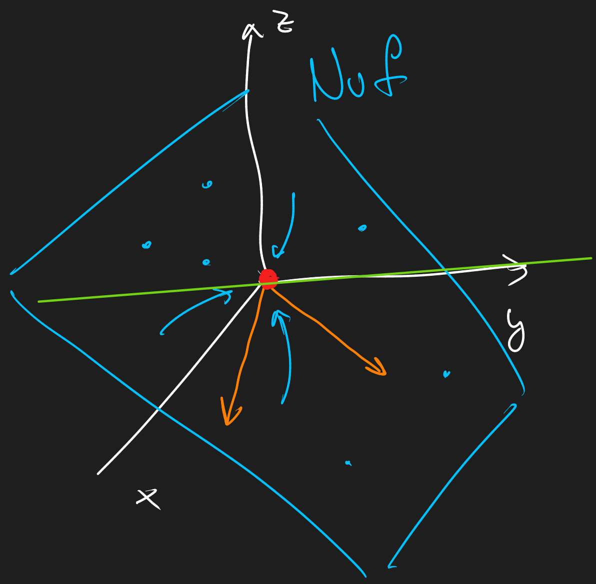
$\Rightarrow Im\, f = \langle (0,1,0) \rangle$

$\therefore$

$f(1,0,-1) = (0,0,0)$

$f(0,1,-1) = (0,0,0)$

$f(0,1,0) = (0,1,0)$



iii) $\mathrm{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3)/3.x_1 - x_3 = 0\}$ e $\mathrm{Im}(f) = \langle (1,1,1) \rangle$

$x_3 = 3x_1$ $\qquad \{(x_1, x_2, 3x_1)\}$

$Nu\, f = \langle (1,0,3), (0,1,0) \rangle$

$Im\, f = \langle (1,1,1) \rangle$

$f(1,0,3) = (0,0,0)$

$f(0,1,0) = (0,0,0)$

$f(1,1,1) = (1,1,1)$

Ejercicio 15.

(a) Sea $B = \{(1,-1,0),(0,1,-1),(0,0,1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$ y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que:

$$f(1,-1,0) = (1,-1,0), \quad f(0,1,-1) = (0,1,-1) \quad \text{y} \quad f(0,0,1) = (0,0,0).$$

Calcular $[f]_B$ y comprobar que f es un proyector.

(b) Construir un proyector $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Nu}(f) = \langle(1,1,1)\rangle$ e $\mathrm{Im}(f) = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 - 3x_3 = 0\}$. ¿Es f una proyección ortogonal?

Llamo $B = \{ \underbrace{(1,-1,0)}_{\omega_1}, \underbrace{(0,1,-1)}_{\omega_2}, \underbrace{(0,0,1)}_{\omega_3} \}$

$f(\omega_1) = \omega_1$

$f(\omega_2) = \omega_2$

$f(\omega_3) = (0,0,0)$

$[f]_B = [f]_{BB}$

$[T]_{BB'} \cdot (v)_B = (T(v))_{B'}$

$$[T]_{BB'} = \begin{bmatrix} | & & | \\ (T(v_1))_{B'} & \cdots & (T(v_n))_{B'} \\ | & & | \end{bmatrix}$$

$$[f]_{BB} = \begin{bmatrix} | & & | \\ (f(\omega_1))_{B} & \cdots & (f(\omega_3))_{B} \\ | & & | \end{bmatrix}$$

$\therefore$

$f((1,0,0)_B) = (1,0,0)_B$

$f((0,1,0)_B) = (0,1,0)_B$

$f((0,0,1)_B) = (0,0,0)_B$

$$\Rightarrow [f]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

f es Proyector si $\quad [f]_{EE} = C_{BE} [f]_{BB} C_{BE}^{-1}$

- $[f]_B^2 = [f]_B$

$$[f]_B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [f]_B \checkmark$$

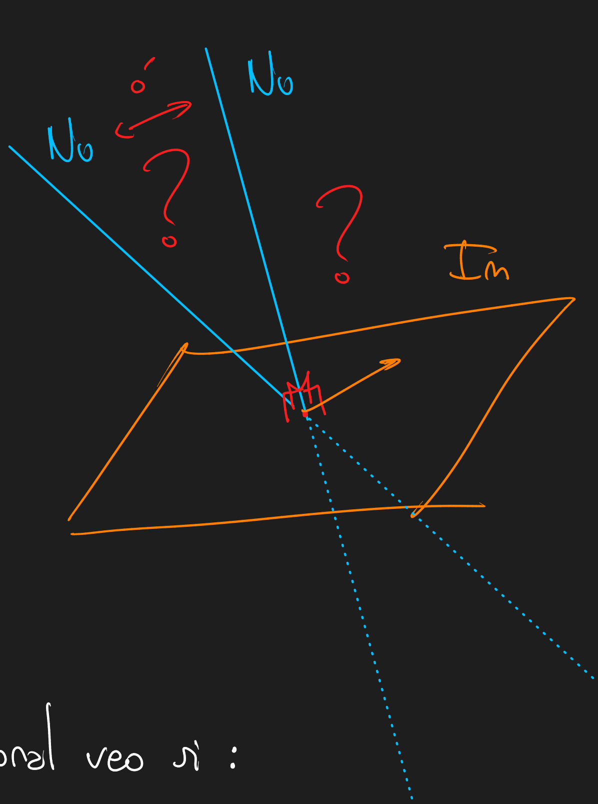
$\therefore$ f es Proyector

(b) Construir un proyector $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Nu}(f) = \langle(1,1,1)\rangle$ e $\mathrm{Im}(f) = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 - 3x_3 = 0\}$. ¿Es f una proyección ortogonal?

$$x_1 + x_2 = 3x_3$$

$$x_2 = 3x_3 - x_1$$

$$\mathrm{Im}\, f = \langle (1,-1,0), (0,3,1) \rangle$$



$$f(1,1,1) = (0,0,0)$$

$$f(1,-1,0) = (1,-1,0)$$

$$f(0,3,1) = (0,3,1)$$

Para ver si es Proyección ortogonal veo si:

$$\mathrm{Nu}\, f = \mathrm{Im}\, f^{\perp} \quad \text{(complemento ortogonal)}$$

$$S^{\perp} = \{ v \in V : v * s = 0 \quad \forall s \in S \}$$

$\Rightarrow$ Veo :

$$\begin{array}{cc} \in \operatorname{Im} f & \in \operatorname{Nu} f \\ (1,-1,0) & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} = 0 \quad \checkmark$$

$$\begin{array}{cc} \in \operatorname{Im} f & \in \operatorname{Nu} f \\ (0,3,1) & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} = 4 \neq 0 \quad \therefore \ \underline{\text{no}} \text{ son ortogonales}$$

$\therefore$ no es Proyección ortogonal.

Ejercicio 16. Sea $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ un vector columna tal que $\|\boldsymbol{v}\|_2 = 1$. Probar que:

(a) La transformación lineal definida por la matriz $\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^*$ es la proyección ortogonal sobre $\langle \boldsymbol{v} \rangle$.

(b) Si $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ es una base ortonormal del subespacio S, entonces: $\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^*$ es la proyección ortogonal sobre S.

(c) Si $\boldsymbol{A}$ es como en el ítem anterior, $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ es la proyección ortogonal sobre $S^\perp$.

(d) Eligiendo $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|\boldsymbol{v}\|_2 = 1$, corroborar gráficamente en Python que $R = \boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^*$ es la reflexión respecto de $\langle \boldsymbol{v} \rangle^\perp$.

a) $$v v^* = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 . v_1 & v_1 . v_2 & \cdots & v_1 . v_n \\ v_2 . v_1 & v_2 . v_2 & \cdots & v_2 . v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n . v_1 & v_n . v_2 & \cdots & v_n . v_n \end{bmatrix}$$

Sea:

$$P_{\langle v \rangle}(\omega) = v^* \omega . v$$

Revisar y Seguir ¡!

$$= \underbrace{\left(v^* \omega\right)}_{\in \mathbb{R}} . v$$

$$= v \left(v^* \omega\right)$$

$$= \left(v v^*\right) \omega \quad \checkmark$$

b)

c) $$I - A = I - \sum_{i=1}^{n} v_i v_i^*$$

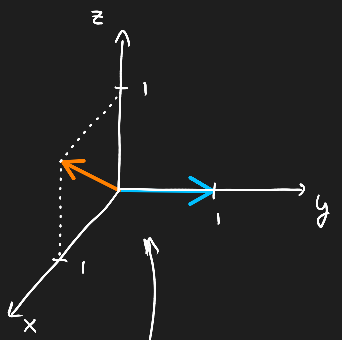
d) Ver notebook.

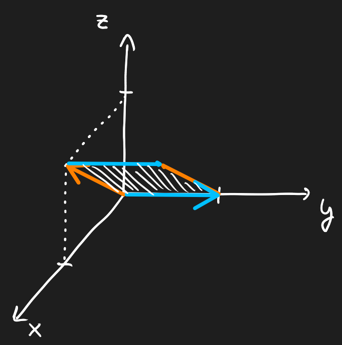
Ejercicio 17. Sea $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular la matriz de la proyección ortogonal sobre $\operatorname{Im}(\boldsymbol{A})$.

$$\operatorname{Im} A = \langle (1,0,1), (0,1,0) \rangle \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix}$$

Pues

$$\operatorname{Im} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$





Son ortogonales

Pero v_1 tiene norma $\sqrt{2}$

$\mathcal{B}$ BON de $\operatorname{Im} A$:

$$\mathcal{B} = \langle \underbrace{\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{q_1}, \underbrace{(0,1,0)}_{q_2} \rangle$$

Calculo matrices

matriz de proy. ortogonal sobre $\operatorname{Im} A$

$$[P_B]_{EE} = q_1 q_1^* + q_2 q_2^*$$

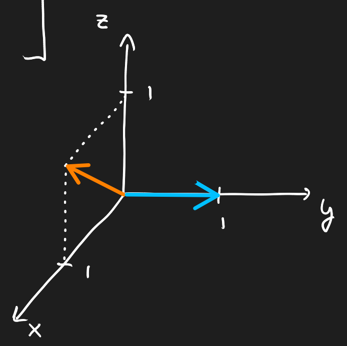
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

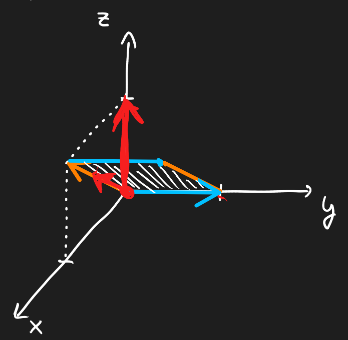
$$= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Ejemplos

$$P_S(\omega) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(-1, 0, 1)$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} v = \omega \in \text{Plano generado por } B$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \vec{0}$$

Ejercicio 18. Sea $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que son equivalentes:

(a) $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^t$.

(b) Las columnas de $\boldsymbol{Q}$ forman un conjunto ortonormal.

(c) Las filas de $\boldsymbol{Q}$ forman un conjunto ortonormal.

(d) $\|\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2$ para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

Interpretar (d) geométricamente.
Sugerencia: para demostrar la implicación (d $\Rightarrow$ b) usar que $\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{y} = \frac{1}{4}(\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_2^2 - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2^2)$.

(e) Q: matriz ortogonal (columnas ortonormales)

a) $Q^{-1} = Q^t$

$$Q^{-1} Q = Q^t Q$$

$$I = \begin{bmatrix} - & q_1^t & - \\ & \vdots & \\ - & q_n^t & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & & | \\ q_1 & \cdots & q_n \\ | & & | \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1^t q_1 & q_1^t q_2 & \cdots & q_1^t q_n \\ q_2^t q_1 & q_2^t q_2 & \cdots & q_2^t q_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_n^t q_1 & q_n^t q_2 & \cdots & q_n^t q_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad q_i^t q_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\Rightarrow \quad \| q_i \| = 1 \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$ ✓

b) Si (b) $\Rightarrow$ (a) y si (a) $\Rightarrow$ (b) ✓

c) Si (c) $\Rightarrow$ (b) y si (b) $\Rightarrow$ (c)

Pues

$$Q = \begin{bmatrix} — & q_1 & — \\ & & \\ — & q_n & — \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Q^t = \begin{bmatrix} | & & | \\ q_1 & & q_n \\ | & & | \end{bmatrix}$$

Q^t cumple (b) ✓

d) $\| Qx \|_2^2 = (Qx)^t Qx$

$$\overset{(a)}{=} x^t \underbrace{Q^t Q}_{=I} x$$

$$= x^t x$$

$\| Qx \|_2^2 = \| x \|_2^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ ✓

Ejercicio 19. Hallar la factorización QR de las siguientes matrices

$$a)\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}, \quad b)\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

```
Algoritmo:
1. Uso G-S sobre cada una de las columnas de A, de esa forma
   obtengo vectores ortogonales entre sí, de norma 1

2. Estos vectores obtenidos serán las columnas de Q, que tiene
   la misma dimensionalidad de A

3. Como Q es ortogonal (matriz con columnas ortoNORMALES),
   Q es inversible pero ADEMÁS Q^t = Q^-1

4.      A = Q R
   Q^-1 A = Q^-1 Q R
    Q^t A = R

   Y con ese producto calculo R
```

R es Triangular sup pues

$$R = \overset{Q^t}{\begin{bmatrix} - & q_1 & - \\ - & q_2 & - \end{bmatrix}} \overset{A}{\begin{bmatrix} | & | \\ a_1 & a_2 \\ | & | \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$$

Como q_2 es ortonormal a q_1

$\Rightarrow$ q_2 es ortonormal a a_1

$$\Rightarrow \langle q_2, a_1 \rangle = 0$$

Ejercicio 20. Implementar dos programas que calculen la descomposición QR de una matriz:

1. Aplicando de manera directa el método de ortonormalización de Gram-Schmidt.
2. Utilizando transformaciones de Householder.

Generar algunas matrices aleatorias y comparar las descomposiciones arrojadas por estos programa con las dadas por el comando np.linalg.qr. ¿Qué se observa?

Ejercicio 21. Implementar un programa que resuelva un sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ a partir de la descomposición QR de $\boldsymbol{A}$.

$$Q\underbrace{Rx}_{y} = b$$

$$\begin{cases} Qy = b \\ Rx = y \end{cases}$$

x ↑ Sol.