Álgebra Lineal Computacional - Clase Práctica 2 - Espacios Vectoriales, Bases y Matrices

Fausto Martínez

28 de Marzo de 2025

El objetivo de este documento es que sirva como guía para la clase práctica, repasando algunos contenidos teóricos necesarios para entender a los ejercicios, y resolviendo los mismos. Ojalá sirva para que puedan estudiar los contenidos de manera concisa, y de orientación si no sale algún ejercicio de la guía.

Definición

Un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ (también llamado $\mathbb{K}$-espacio vectorial) es un conjunto $\mathbb{V}$ y dos operaciones, que satisfacen determinados axiomas que se enunciarán en breve.
Las operaciones definidas en $\mathbb{V}$ son

- **Suma de vectores.** Es una operación $+ : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ que a cualquier par $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{V}$ de vectores le asigna un vector $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in \mathbb{V}$.
- **Producto por escalar.** Es una operación $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ que dados un escalar $a \in \mathbb{K}$ y un vector $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$, les asigna un vector $a\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$.

Ahora sí, estos son los axiomas de un espacio vectorial. Dados vectores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{V}$, y escalares $a, b \in \mathbb{K}$

1. $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$.
2. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$.
3. Existe un elemento $\boldsymbol{0} \in \mathbb{V}$, llamado *neutro*, tal que $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}$ para todo $\boldsymbol{v} \in V$.
4. Para todo $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$, existe un elemento $-\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$, llamado *inverso aditivo de* $\boldsymbol{v}$, tal que $\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = 0$.
5. $a(b\boldsymbol{v}) = (ab)\boldsymbol{v}$.
6. $1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$, donde 1 es el neutro de $\mathbb{K}$.
7. $a(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = a\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{v}$.
8. $(a + b)(\boldsymbol{v}) = a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{v}$.

Ejemplo 1. $\mathbb{R}^n$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Ejemplo 2. $\mathbb{R}^n$ **no** es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial

Ejemplo 3. $\mathbb{C}^n$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Ejemplo 4. $\mathbb{C}^n$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

Ejemplo 5. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, el espacio de sucesiones infinitas de reales, es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Definición

Dado $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, un subconjunto $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{V}$ se llama *subespacio* de $\mathbb{V}$ si verifica

- $0 \in \mathbb{S}$.
- Para todo par de vectores $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{S}$, vale $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in \mathbb{S}$.
- Para todo vector $\boldsymbol{v} \in \mathbb{S}$ y escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ vale $\alpha \boldsymbol{v} \in \mathbb{S}$.

Ejemplo 6. $\mathbb{S} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 0 \right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 7. $\mathbb{T} = \left\{ \begin{pmatrix} xb_1 \\ xb_2 \\ xb_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1 \right\}$ **no** es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, ya que $\mathbf{0} \notin \mathbb{T}$.

Definición

Dado un conjunto $\{\boldsymbol{v}_1, \dots \boldsymbol{v}_m\}$ de vectores en $\mathbb{V}$, decimos que es *linealmente independiente* (l.i.) si la única elección de coeficientes $(a_i)_{i=1,\dots,m} \in \mathbb{K}$ para los cuales

$$\sum_{i=1}^{m} a_i v_i = 0$$

es $a_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, m$.

Ejemplo 8. Si $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, el conjunto $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ es linealmente independiente.

Demostración. Ejercicio para el lector. □

Ejemplo 9. Si $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, el conjunto $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3\}$ no es linealmente independiente.

Demostración.

$$1 \cdot \boldsymbol{w}_1 + 2 \cdot \boldsymbol{w}_2 + (-1) \cdot \boldsymbol{w}_3 = 0\,.$$

□

Definición

Dado un conjunto de vectores $\{\boldsymbol{v}_1, \dots \boldsymbol{v}_m\}$, definimos el *subespacio generado* por ellos como

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m \rangle = \{a_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_m \boldsymbol{v}_m : a_i \in \mathbb{K}, i = 1, \dots, m\}\,.$$

Ejemplo 10. En $\mathbb{R}^2$, el generado por un vector $\{\boldsymbol{v}\}$, es decir, $\langle \boldsymbol{v} \rangle$, es la recta que tiene vector director $\boldsymbol{v}$ y pasa por $\mathbf{0}$.

Ejemplo 11. En $\mathbb{R}^3$, el generado por dos vectores $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$ linealmente independientes, es decir, $\langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \rangle$, es un plano, que tiene como vectores directores a $\boldsymbol{w}_1$ y $\boldsymbol{w}_2$ y pasa por $\mathbf{0}$.

Definición

Si $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ es un conjunto linealmente independiente, decimos que $\mathcal{B}$ es una base de su generado, $U = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$.

Proposición

Si $\{v_1, \ldots, v_m\}$ son base de $U = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$, cada elemento de U se escribe de forma *única* como combinación lineal de los elementos de la base.

Demostración. Supongamos que no, entonces dado w lo podemos escribir de dos formas distintas como $\sum_{i=1}^{m} a_i v_i$ y $\sum_{i=1}^{m} b_i v_i$, luego tenemos que

$$w - w = \sum_{i=1}^{m} (a_i - b_i) v_i = 0$$

que, debido a la independencia lineal, implica $a_i - b_i = 0$ y por ende $a_i = b_i$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Esto es absurdo pues asumimos que podíamos escribirlo de dos formas distintas. $\square$

Ejercicio 1

Determine si el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 3+\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1+2\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$ es linealmente independiente

(a) Como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial.

(b) Como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Solución: Para determinar la independencia lineal evaluamos la expresión $av_1 + bv_2 = 0$ y vemos qué condiciones deben cumplir los coeficientes (a y b) para que valga la igualdad.

$$a \begin{pmatrix} 3+\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 7 \\ 1+2\sqrt{2} \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} (3+\sqrt{2})\, a + 7b & = 0 \\ (1+\sqrt{2})\, a + (1+2\sqrt{2})\, b & = 0 \end{cases} .$$

De la primera ecuación, podemos obtener que

$$b = -\frac{3+\sqrt{2}}{7} a \,,$$

de donde podemos concluir que, para que la condición valga, a debe ser irracional o b debe serlo, con lo que el conjunto **es linealmente independiente como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial**. Para ver si lo es como $\mathbb{R}$-espacio vectorial, reemplazamos b en la segunda ecuación y resulta

$$(1+\sqrt{2})\, a - (1+2\sqrt{2}) \frac{3+\sqrt{2}}{7} a = 0$$
$$(1+\sqrt{2})\, a - (1+\sqrt{2})\, a = 0$$

lo cual vale siempre, por lo que la segunda ecuación no aporta información extra. Luego, eso quiere decir que podemos elegir cualquier valor para a y así obtener un valor de b que nos de una solución al sistema. Por ejemplo si elegimos $a = 7$, resulta $b = -(3+\sqrt{2})$, y podemos verificar que

$$7 \begin{pmatrix} 3+\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix} - (3+\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 7 \\ 1+2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \,,$$

por lo que resulta que el conjunto **no es linealmente independiente como $\mathbb{R}$-espacio vectorial**.

Definición

Dados subespacios $\mathbb{S}, \mathbb{T}$ de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbb{V}$, definimos

- La *suma* de ambos como el conjunto $\{\boldsymbol{s} + \boldsymbol{t} : \boldsymbol{s} \in \mathbb{S}, \boldsymbol{t} \in \mathbb{T}\}$, y la notamos como $\mathbb{S} + \mathbb{T}$.
- La *intersección* de ambos como el conjunto $\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{V} : \boldsymbol{v} \in \mathbb{S} \wedge \boldsymbol{v} \in \mathbb{T}\}$ y la notamos $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$.
- La *unión* de ambos como el conjunto $\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{V} : \boldsymbol{v} \in \mathbb{S} \vee \boldsymbol{v} \in \mathbb{T}\}$ y la notamos $\mathbb{S} \cup \mathbb{T}$.

Más aún, decimos que si $\mathbb{S} + \mathbb{T} = \mathbb{V}$ y $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} = \emptyset$, entonces $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ están en *suma directa* y lo notamos $\mathbb{S} \oplus \mathbb{T} = \mathbb{V}$.

Ejemplo 12. $\mathbb{S} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ y $\mathbb{T} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$, están en suma directa, vale que $\mathbb{S} \oplus \mathbb{T} = \mathbb{R}^2$.

Ejemplo 13. Dados $\mathbb{S} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ y $\mathbb{T} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, vale que $\mathbb{S} + \mathbb{T} = \mathbb{R}^3$, y, sin embargo, no están en suma directa, pues $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \neq \emptyset$.

Como siempre en esta materia, concentramos nuestra atención en el caso $\mathbb{V} = \mathbb{K}^n$. Dependiendo de si $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ vienen dados por generadores o ecuaciones puede ser más fácil o más díficil calcular estos subespacios. Sabiendo que

- Si $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ están dados por generadores, $\mathbb{S} + \mathbb{T}$ está generado por la unión de todos los generadores.
- Si $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ están dados por ecuaciones, $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$ viene dado por la unión de todas las ecuaciones.

Podríamos resumir los métodos para hallar los subespacios como

⋆ Para calcular $\mathbb{S} + \mathbb{T}$, si $\mathbb{S}$ y/o $\mathbb{T}$ vienen dados por ecuaciones, calculamos los generadores de ambos y tomamos la unión

⋆ Para calcular $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$, si $\mathbb{S}$ y/o $\mathbb{T}$ vienen dados por generadores, calculamos ecuaciones de ambos y tomamos la unión de las ecuaciones.

Disclaimer: Muchas veces esta puede no ser la manera más fácil, pero lo puse como algo que nunca fallaría para calcular $\mathbb{S} + \mathbb{T}$ o $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$.

La próxima definición ayudará para el próximo ejercicio:

Definición

Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$ un subespacio. Si $\mathbb{W}$ admite una base finita, le llamamos *dimensión* a la cantidad de elementos de la misma, y lo notamos $\dim(\mathbb{W})$.

Definición

Dada una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$, definimos su *rango* como la dimensión del espacio generado por los vectores en las columnas de la matriz, y lo notamos $\mathrm{rk}(\boldsymbol{A})$.

Proposición

Son equivalentes definiciones del rango de una matriz:

- El número máximo de columnas (o filas) linealmente independientes.
- El número de filas no nulas tras escalonar la matriz.

Proposición

Sea $\mathbb{V} = \mathbb{K}^n$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, y sea $\mathbb{W}$ un subespacio, definido como el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas dado por $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, donde $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$, entonces la dimensión de $\mathbb{W}$ está dada por

$$\dim(\mathbb{W}) = n - \operatorname{rk}(\boldsymbol{A})\,.$$

El rango es también útil para determinar la compatibilidad de un sistema de ecuaciones. Si $\operatorname{rk}(A)$ es igual a la cantidad de filas de $\boldsymbol{A}$, el sistema $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ siempre tiene solución. Si aparte la matriz $\boldsymbol{A}$ es cuadrada, el sistema tiene solución única para todo $\boldsymbol{b}$.

Ejercicio 2

Sean $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{S} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + ax_2 + bx_3 + ax_4 = 0 \right\}, \text{y}$$

$$\mathbb{T} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : -2x_1 + 3x_3 + x_4 = 0 \;\;,\;\; x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \right\}$$

subespacios de $\mathbb{R}^4$.

(a) Hallar todos los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para los que $\dim(\mathbb{S} \cap \mathbb{T}) = 1$.

(b) Para $a = -1, b = 0$, determinar si $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ pertenecen a $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$.

Solución:

(a) Sea $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, entonces $\boldsymbol{v} \in \mathbb{S} \cap \mathbb{T}$ si y solo si $\boldsymbol{v} \in \mathbb{S}$ y también $\boldsymbol{v} \in \mathbb{T}$, es decir, $\boldsymbol{v}$ cumple las restricciones impuestas por las ecuaciones asociadas a cada conjunto. Por ende, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{S} \cap \mathbb{T}$ si y solo si

$$\begin{cases} v_1 + av_2 + bv_3 + av_4 & = 0 \\ -2v_1 + 3v_3 + v_4 & = 0 \\ v_2 - v_3 + 4v_4 & = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & a & b & a \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = 0\,.$$

Para resolver este sistema, aplicamos eliminación gaussiana

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & a \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2 + 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & a & b & a \\ 0 & 2a & 2b+3 & 2a+1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Donde si $a \neq 0$

$$\xrightarrow{F_3 \to 2aF_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & a & b & a \\ 0 & 2a & 2b+3 & 2a+1 \\ 0 & 0 & -2a-2b-3 & 6a-1 \end{pmatrix}$$

Vemos que la única manera de que la última fila se anule es que $a = \frac{1}{6} \wedge b = -\frac{5}{3}$. Es importante, también, notar que la segunda fila nunca se va a poder anular completamente (pues están $2a$ y $2a+1$). Haciendo un rápido análisis, vemos que en tal caso quedarían 2 ecuaciones, o equivalentemente, que el rango de la matriz sería 2, y por tanto resultaría $\dim(\mathbb{S} \cap \mathbb{T}) = 4 - 2 = 2$.

De este modo, si $a \neq 0$, solo si $a \neq \frac{1}{6} \vee b \neq -\frac{5}{3}$ resulta que $\dim(\mathbb{S} \cap \mathbb{T}) = 1$.

Queda nomás ver que pasaría si $a = 0$. En tal caso la matriz luego del primer paso de la eliminación gaussiana quedaría

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 2b+3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2b+3 & 1 \end{pmatrix},$$

que es triangular y no se anula para ningún valor de $b \in \mathbb{R}$ (i.e. $\text{rk}(\boldsymbol{A}) = 3$, $\forall b \in \mathbb{R}$)

Por ende, los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ necesarios para que $\dim(\mathbb{S} \cap \mathbb{T}) = 1$ son $a \neq \frac{1}{6} \vee b \neq -\frac{5}{3}$.

(b) Reemplazando los valores dados para a y b en el último paso de la eliminación gaussiana, el problema se reduce a verificar si la multiplicación de la matriz triangulada con $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ es o no $\boldsymbol{0}$.

Para $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$, resulta $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -68 \end{pmatrix}$, y por ende, que $\boldsymbol{v} \notin \mathbb{S} \cap \mathbb{T}$.

Para $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$, resulta $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, por lo que $\boldsymbol{w} \in \mathbb{S} \cap \mathbb{T}$.

Definición

Dada una matriz $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, con $i = 1, \ldots, m$ y $j = 1, \ldots n$

- Su matriz traspuesta, $\boldsymbol{A}^T$ se obtiene como el resultado de intercambiar filas por columnas, es decir $\boldsymbol{A}^T = (\boldsymbol{a}_{ji}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Dada una matriz $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$, con $i = 1, \ldots, m$ y $j = 1, \ldots n$

- Su matriz traspuesta conjugada, A^* se obtiene como el resultado de intercambiar filas por columnas y conjugar los valores, es decir $\boldsymbol{A}^* = \overline{(a_{ji})} \in \mathbb{C}^{n \times m}$.

Claramente, si la matriz tiene componentes reales, la traspuesta es igual que la traspuesta conjugada.

Proposición

Dadas $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{K}^{n \times r}$, vale

- $(\boldsymbol{A}^T)^T = \boldsymbol{A}$.
- $(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$.
- $(\boldsymbol{A}^*)^* = \boldsymbol{A}$.
- $(\boldsymbol{AB})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$.
- $(a\boldsymbol{A} + b\boldsymbol{B})^* = \bar{a}\boldsymbol{A}^* + \bar{b}\boldsymbol{B}^*$.

Demostración. Ejercicio para el lector. □

Definición

Para cada $n \in \mathbb{N}$, la matriz identidad $\mathbf{I_n} \in \mathbb{K}^{\mathbf{n \times n}}$ es la que tiene unos en la diagonal y ceros en las otras posiciones, es decir $(a_{ii}) = 1$ para todo $i = 1, \ldots, n$, y $(a_{ij}) = 0$ para todo $i \neq j$.

Definición

Una matriz cuadrada $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ se dice

- **Diagonal:** si $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$.
- **Triangular superior:** si $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$. Las solemos llamar $\mathbf{U}$ del inglés *upper triangular*.
- **Triangular inferior:** si $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$. Las solemos llamar $\mathbf{L}$ del inglés *lower triangular*.
- **Simétrica:** si $\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$.
- **Hermitiana:** si $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}$.
- **Ortogonal:** si $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \mathbf{I_n}$.
- **Unitaria:** si $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \mathbf{I_n}$.

Definición

La traza de una matriz cuadrada $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ se denota $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})$ y es la suma de todos los elementos de su diagonal, es decir

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,.$$

Ejercicio 3

Sea $\mathbb{S}$ el subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ dado por

$$\mathbb{S} = \{\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T, \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = 0\}$$

(a) Describir a $\mathbb{S}$ a partir de generadores.

(b) Dado $\mathbb{T} = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\rangle$, determinar si $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{S}$.

Solución:

(a) Podemos ver de la condición $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$ que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \iff a_{12} = a_{21}\,.$$

A su vez, podemos obtener de $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = 0$ que

$$a_{11} + a_{22} = 0\,.$$

De ahí se deduce que una matriz pertenece a $\mathbb{S}$ si y solo si tiene la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & -a_{11} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es decir, que

$$\mathbb{S} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle\,.$$

(b) Dado $\mathbb{T} = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\rangle$, es sencillo determinar si $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{S}$. En general, cuando un subespacio viene dado por generadores, basta con ver que cada generador está en el otro conjunto para ver si uno está contenido en otro.

En este caso, eso se traduce en ver si $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{S}$, lo cual vale pues es simétrica y tiene traza 0, por lo cual cumple las ecuaciones de $\mathbb{S}$. Observen que esto es suficiente porque cualquier matriz proporcional a esta también cumplirá ser simétrica y de traza 0.

Definición

Sea $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz **cuadrada**. Definimos recursivamente su *determinante* como

$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{cases} a_{11} & \text{si } n = 1 \\ \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\boldsymbol{M}_{ij}) & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

donde $\boldsymbol{M}_{ij}$ es la submatriz de $(n-1)\times(n-1)$ que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j.

En el turno mañana me comí el término $(-1)^{i+j}$, mil disculpas. Corrijanlo en sus carpetas si lo copiaron

Ejemplo 14. $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$

Ejemplo 15. $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - 3\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = 7 - 33 = -26.$

Definición

Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz cuadrada, si existe una matriz cuadrada $\boldsymbol{B} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tal que

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{BA}$$

decimos que $\boldsymbol{A}$ es *inversible* y $\boldsymbol{B}$ es la *inversa* de $\boldsymbol{A}$, la cual es única y la notamos $\boldsymbol{A}^{-1}$. En caso de no existir la inversa, decimos que $\boldsymbol{A}$ es *singular*.

Proposición

Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz cuadrada. $\boldsymbol{A}$ es inversible si y solo si su determinante no es $\mathbf{0}$.

Proposición

Si $\boldsymbol{A}$ es singular, existe $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ tal que $\boldsymbol{Av} = \mathbf{0}$.

Ejercicio 4

Hallar, si existe, la inversa de $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -4 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución: Dado que calcular una inversa es muy costoso (i.e. son una banda de cuentas), si hago el determinante y veo que es 0, nos las ahorraríamos, así que intentémoslo:

$$\det(\boldsymbol{A}) = \det\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - 3\det\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = -4 - 3\cdot(-2) - 0 = 2\,.$$

Bueno, entonces no nos quedará otra que encontrarla. Para eso, utilizaremos el método de Gauss-Jordan:

Dada la matriz $\boldsymbol{A}$ y la matriz identidad $\boldsymbol{I}$, buscamos una matriz $\boldsymbol{B}$ tal que

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$$

es decir, que

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -4 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

Haciendo la multiplicación por columnas, tenemos que:

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es decir, que para encontrar la inversa tenemos que encontrar la solución a esos 3 sistemas de ecuaciones simultáneamente.

Para eso, formamos la *matriz aumentada* $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}]$:

$$[A|I] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Aplicamos operaciones elementales para convertir $\boldsymbol{A}$ en la matriz identidad:

$$\xrightarrow{F_2 \to F_2 - FR_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2 \to -\frac{1}{2} F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \to -F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2 \to F_2 - F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1 \to F_1 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1 \to F_1 - 3F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -\frac{1}{2} & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \end{array}\right).$$

Entonces, como resultado, la solución de los 3 sistemas de los que hablabamos es:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{11} \\ \boldsymbol{b}_{21} \\ \boldsymbol{b}_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{12} \\ \boldsymbol{b}_{22} \\ \boldsymbol{b}_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{13} \\ \boldsymbol{b}_{23} \\ \boldsymbol{b}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y, por ende, la matriz inversa de $\boldsymbol{A}$ es:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{1}{2} & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Definición

Dado un espacio vectorial $\mathbb{V}$ de dimensión n, llamamos base canónica de $\mathbb{V}$ al conjunto $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$, donde cada $\boldsymbol{e}_i$ tiene un 1 en la i-ésima coordenada y un 0 en las demás.

Ejemplo 16. La base canónica de $\mathbb{R}^3$ es $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Nos interesa dada otra base $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ del espacio vectorial $\mathbb{V}$, saber cómo escribir las coordenadas en base $\mathcal{B}$ de un vector $\boldsymbol{v}$ del cual conozcamos sus coordenadas en base $\mathcal{E}$, y viceversa.

Proposición

Dada una base $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n\}$ del espacio vectorial $\mathbb{V}$ de dimensión n

1. Construimos la matriz $C_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$.
2. Para pasar un vector en base $\mathcal{B}$ a base canónica, usamos $\boldsymbol{v}_{\mathcal{E}} = C_{\mathcal{B}\mathcal{E}} \boldsymbol{v}_{\mathcal{B}}$.
3. Para pasar un vector en base canónica a la base $\mathcal{B}$, definimos $C_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = (C_{\mathcal{B}\mathcal{E}})^{-1}$ y usamos $\boldsymbol{v}_{\mathcal{B}} = C_{\mathcal{E}\mathcal{B}} \boldsymbol{v}_{\mathcal{E}}$.

Ejercicio 5

Dada la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^3$,

(a) Dado el vector $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}^3$ de coordenadas $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ en la base $\mathcal{B}$, hallar las coordenadas de $\boldsymbol{v}$ en la base canónica.

(b) Dado el vector de la base canónica $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 10 \\ 24 \\ 13 \end{pmatrix}$, hallar su expresión en la base $\mathcal{B}$.

Solución:

(a) Siguiendo los pasos, creamos la matriz

$$C_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & -7 \\ 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y resulta entonces que la expresión de $\boldsymbol{v}$ en la base canónica es

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{E}} = C_{\mathcal{B}\mathcal{E}} \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & -7 \\ 7 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 38 \\ 9 \end{pmatrix}$$

(b) Ejercicio para el lector.

Proposición

Finalmente, como proposición, si alguna vez se encuentran con un problema donde deben encontrar un cambio de base entre dos bases tales que ninguna es la canónica, digamos $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$, les propongo para no complicarse la vida que si quieren pueden hallar $C_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ como

$$C_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = C_{\mathcal{E}\mathcal{B}'} C_{\mathcal{B}\mathcal{E}}\,.$$

Esto también sirve como oportunidad para no confundir las notaciones: observen que la matriz que primero multiplica, $C_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$,agarra un vector de la base $\mathcal{B}$ y lo cambia a base $\mathcal{E}$, luego la matriz $C_{\mathcal{E}\mathcal{B}'}$ lo agarra en $\mathcal{E}$ y lo manda a $\mathcal{B}'$. Resultado final: el vector pasó de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.
También sirve como otra demostración más de cómo la multiplicación de matrices actúa como una composición de funciones, pero eso ya queda para la semana que viene...

Comentario final: Las consultas, dudas, sugerencias son súper bienvenidas a `fmartinez@dm.uba.ar` o al campus de la materia.