Procesos de Markov

Ejercicio 12. Una matriz $\mathbf{P} = (p_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ se dice estocástica (o de Markov) si sus elementos son todos no negativos y sus columnas suman uno. Los elementos p_{ij} representan la proporción de individuos que pasan del estado j al estado i en cada iteración (también pueden interpretarse como la probabilidad de pasar de j a i).

(a) Probar que si λ es autovalor de $\mathbf{P}$, entonces $|\lambda| \leq 1$.

(b) Sea $\mathbf{1}$ es el vector con todas sus coordenadas iguales a 1. Mostrar que $\mathbf{1}^t\mathbf{P} = \mathbf{1}$. De hecho: $\mathbf{P}$ es estocástica si y sólo si sus elementos son no negativos y $\mathbf{1}^t\mathbf{P} = \mathbf{1}$.

(c) Probar que toda matriz estocástica tiene a 1 por autovalor.

Ejercicio 13. Probar que $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ son matrices estocásticas, entonces:

(a) $\mathbf{PQ}$ es estocástica.

(b) $\mathbf{P}^n$ es estocástica ($n \in \mathbb{N}$).

(c) $\mathbf{P}^n\mathbf{Q}^m$ es estocástica ($n, m \in \mathbb{N}$).

Estocásticas : $a_{ij} > 0$ y sum(col A) $= 1$

$$e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow e^t P = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{1 \times n} \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \end{bmatrix}}_{n \times n} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{e^t}$$

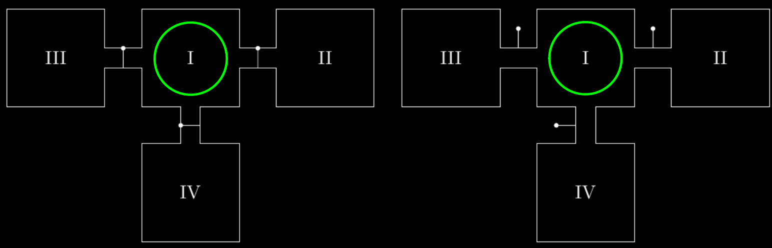
$$\Rightarrow \underbrace{e^t . P}_{= e^t} . Q = e^t . Q = e^t$$

$$\Rightarrow e^t \underbrace{(PQ)}_{\text{tiene columnas que suman } 1} = e^t$$

$\therefore$ PQ es estocástica

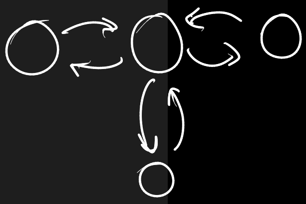
b) y c) se desprenden de a)

Ejercicio 14. En el instante inicial 20 ratones se encuentran en el compartimiento I (ver Figura 1). Las puertas que separan los compartimientos permanecen cerradas salvo durante



(a) Laberinto cerrado. (b) Laberinto abierto.

Figure 1: El laberinto se abre unos pocos segundos cada hora.



un breve lapso cada hora, donde los ratones pueden pasar a un comportamiento adyacente o permancer en el mismo. Se supone que nada distingue un compartimento de otro, es decir que es igualmente probable que un ratón pase a cualquiera de los adyacentes o se quede en el compartimiento en el que está. Se realizan observaciones cada hora y se registra el número de ratones en cada compartimiento.

(a) Determinar la matriz de transición del proceso **P**.

(b) Determinar cuántos ratones habrá en cada celda al cabo de 4 horas.

(c) Decidir si existe o no un estado de equilibrio.

(d) Decidir si existe $\mathbf{P}^\infty$ y en tal caso calcularla. ¿Qué aspecto tiene? ¿Por qué?

a) $$P = \begin{array}{c} \\ I \\ II \\ III \\ IV \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} I & II & III & IV \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Obs: Se asume que no puede moverse de dos compartimientos a la vez, ya que el tiempo de apertura y cierre de las compuertas es breve, y el problema habla de compartimientos adyacentes.

b) $$v^{(0)} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v^{(1)} = P\, v^{(0)}$$

$$v^{(2)} = P \cdot v^{(1)} = P \cdot P \cdot v^{(0)} = P^2 \cdot v^{(0)}$$

$$\Rightarrow v^{(4)} = P^4 \cdot v^{(0)}$$

$$\left(\text{pues } \begin{aligned} v^{(1)} &= P \cdot v^{(0)} \\ v^{(2)} &= P \cdot P \cdot v^{(0)} = P \cdot v^{(1)} \end{aligned} \right)$$

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Input

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^4$$

Result

$$\frac{1}{256}\begin{pmatrix} 103 & 102 & 102 & 102 \\ 51 & 62 & 46 & 46 \\ 51 & 46 & 62 & 46 \\ 51 & 46 & 46 & 62 \end{pmatrix}$$

Input

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^4 .\{20, 0, 0, 0\}$$

Result

$$\left(\frac{515}{64}, \frac{255}{64}, \frac{255}{64}, \frac{255}{64}\right)$$

Decimal approximation

{8.04688, 3.98438, 3.98438, 3.98438} ← Rta

Total

$$\frac{515}{64} + \frac{255}{64} + \frac{255}{64} + \frac{255}{64} = 20$$

Con 10 horas

Input

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{10} .\{20, 0, 0, 0\}$$

Result

$$\left(\frac{2097155}{262144}, \frac{1048575}{262144}, \frac{1048575}{262144}, \frac{1048575}{262144}\right)$$

Decimal approximation

{8.00001, 4., 4., 4.}

Total

$$\frac{2097155}{262144} + \frac{1048575}{262144} + \frac{1048575}{262144} + \frac{1048575}{262144} = 20$$

c) Calculo Avals y Avecs

Input

eigenvalues $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Results

$\lambda_1 = 1$ ← autovalor asociado al estado de equilibrio pues:

$$P^n \cdot v_1 = 1^n \cdot v_1$$
$$P^n \cdot v_1 = v_1$$

$\lambda_2 = \frac{1}{2}$

$\lambda_3 = \frac{1}{2}$

$\lambda_4 = -\frac{1}{4}$

no aparece el -1

Corresponding eigenvectors

$v_1 = (2, 1, 1, 1)$ ← autovector asociado al autoval 1

$v_2 = (0, -1, 0, 1)$

$v_3 = (0, -1, 1, 0)$

$v_4 = (-3, 1, 1, 1)$

Como el -1 no es autovalor $\Rightarrow$ existe siempre un estado de equilibrio, independientemente del $v^{(0)}$ con el que se inicie.

$$v^{(\infty)} = \frac{v_1}{\|v_1\|_1} = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right) = (0.4, 0.2, 0.2, 0.2)$$

Proporciones de ratones.

Estado de equil:

$$20 \cdot (0.4, 0.2, 0.2, 0.2) = (8, 4, 4, 4)$$

d) Como -1 no es autoval $\Rightarrow \exists P^{\infty}$

Como 1 tiene multiplicidad 1:

$$\Rightarrow P^{\infty} = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ v_1 & v_1 & v_1 & v_1 \\ | & | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 & 2/5 & 2/5 & 2/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

```python
P = np.array([[1/4, 1/2, 1/2, 1/2],
              [1/4, 1/2,   0,   0],
              [1/4,   0, 1/2,   0],
              [1/4,   0,   0, 1/2]])
P
```

✓ 0.0s

```
array([[0.25, 0.5 , 0.5 , 0.5 ],
       [0.25, 0.5 , 0.  , 0.  ],
       [0.25, 0.  , 0.5 , 0.  ],
       [0.25, 0.  , 0.  , 0.5 ]])
```

```python
Plim = P
for i in range(30):
    Plim = Plim @ P
Plim
```

✓ 0.0s

```
array([[0.4, 0.4, 0.4, 0.4],
       [0.2, 0.2, 0.2, 0.2],
       [0.2, 0.2, 0.2, 0.2],
       [0.2, 0.2, 0.2, 0.2]])
```

Demo esto fue vista en la teórica.

Caso 2 avals $= 1$:

$$P^k \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = C_{BE} \cdot D^k \cdot C_{BE}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$k \to \infty$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} | & | & | & | \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}}}$$

$$= v^{\infty}$$

Ejercicio 15. Un sujeto en evidente estado de ebriedad oscila entre su casa y el bar, separados por n pasos. En cada instante de tiempo da un paso hacia adelante (acercándose a su casa), con probabilidad p o hacia atrás (acercándose nuevamente al bar), con probabilidad $1-p$. Si llega a alguno de los dos extremos, se queda allí y no vuelve a moverse.

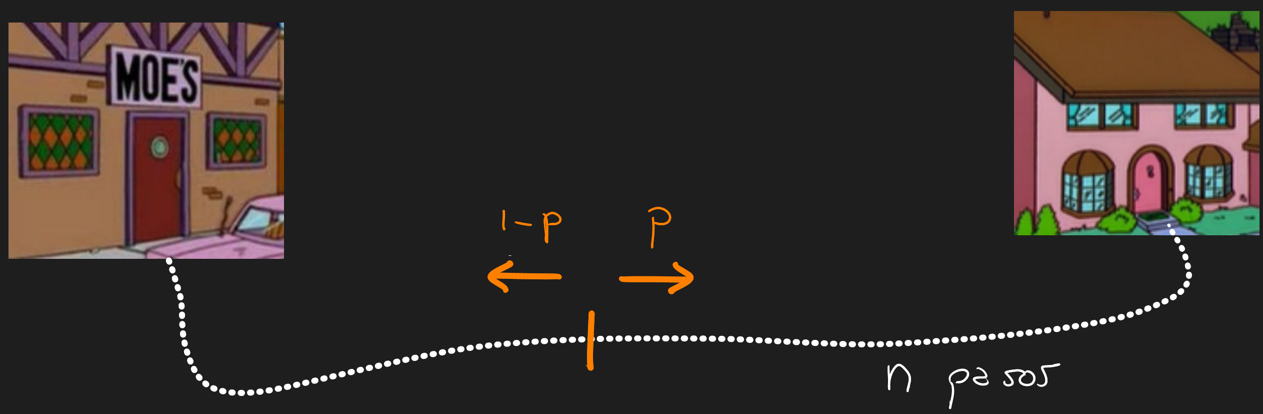
(a) Sin hacer ninguna cuenta, mostrar que el proceso admite al menos dos estados límite linealmente independientes entre sí. Implementar un programa que reciba como input la distancia entre la casa y el bar (n) y la probabilidad p y devuelva la matriz de transición del proceso. Verificar que el resultado sea correcto corriéndolo para $n = 5$ y $p = 0.5$.

(b) Para $n = 20$, tomar $p = 0.5$ y $\boldsymbol{v}^0$ el vector que corresponde a ubicar al sujeto en cualquiera de los puntos intermedios del trayecto con igual probabilidad. Realizar una simulación del proceso hasta que se estabilice. ¿Cuál es el estado límite? ¿Cómo se interpreta?

(c) Repetir la simulación tomando como vector inicial $\boldsymbol{v}^0 = \mathbf{e}_2$ (el segundo canónico). Interpretar el resultado.

(d) Repetir las simulaciones con $p = 0.8$. ¿Qué se observa?

(e) Explicar los resultados de todas las simulaciones a partir del análisis de los autovalores y autovectores de la matriz.



a) Partiendo de que n es finito, con p en (0,1) (no los extremos), se puede esperar que para una cantidad de pasos lo suficientemente grande, en algún momento la persona llegará a la casa o llegará al bar.

Ningún otro punto intermedio será estable.

Implementación en notebook correspondiente.

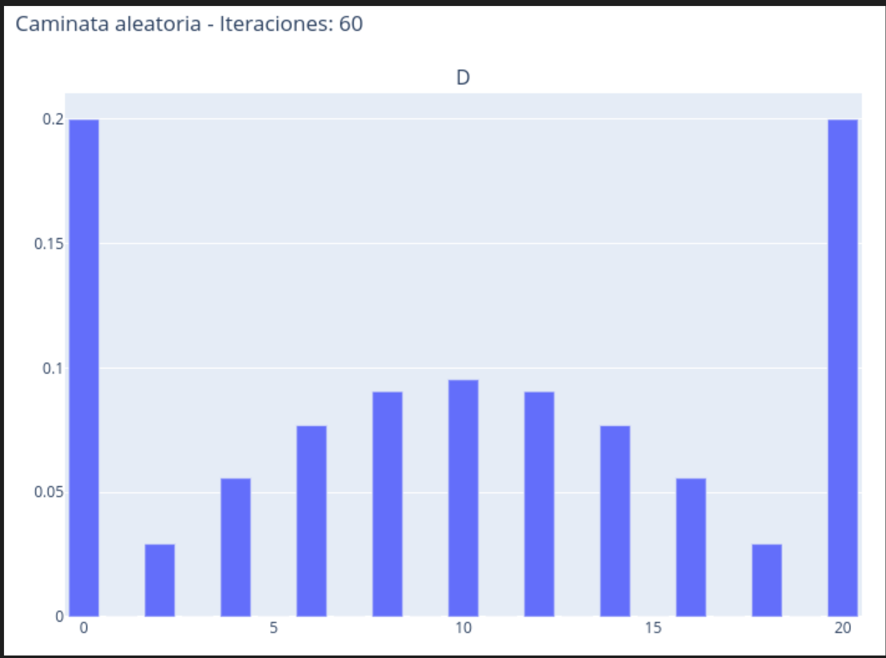
```
# Ejercicio 15: Caminata aleatoria

def crearMatrizTransicion(p=0.5, n=100):
    # Creo matriz de transicion como matriz con diagonales que envuelven a la principal
    # con probabilidad p en la inferior (volver un paso atrás hacia el bar)
    # y 1-p en la superior (avanzar 1 paso hacia la casa)
    P = np.eye(n + 1, k=-1) * p + np.eye(n + 1, k=1) * (1 - p)

    return P
```
✓ 0.0s

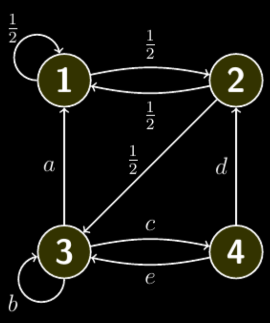
```
p = 0.75 # Probabilidad de dar un paso hacia su casa
n = 5
crearMatrizTransicion(p, n)
```
✓ 0.0s

```
array([[0.  , 0.25, 0.  , 0.  , 0.  , 0.  ],
       [0.75, 0.  , 0.25, 0.  , 0.  , 0.  ],
       [0.  , 0.75, 0.  , 0.25, 0.  , 0.  ],
       [0.  , 0.  , 0.75, 0.  , 0.25, 0.  ],
       [0.  , 0.  , 0.  , 0.75, 0.  , 0.25],
       [0.  , 0.  , 0.  , 0.  , 0.75, 0.  ]])
```



Caminata aleatoria - Iteraciones: 60
D
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
5
10
15
20

Ejercicio 16. El movimiento anual entre 4 ciudades está regido por el siguiente diagrama de transición:



Se sabe que $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ es un estado de equilibrio.

(a) Hallar la matriz de transición $\mathbf{P}$.

(b) Determinar la distribución de población después de 10 años, si la distribución inicial es $\boldsymbol{v}_0 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)^t$.

(c) ¿Existe un estado límite cualquiera sea el estado inicial? ¿Existe $\mathbf{P}^{\infty}$?

(d) ¿Existe estado límite para $\boldsymbol{v}_0 = (0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})^t$?

a) $P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & a & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & d \\ 0 & 1/2 & b & e \\ 0 & 0 & c & 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b+c = 1 \\ d+e = 1 \end{cases}$$

Como v es estado de equilibrio:

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & a & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & d \\ 0 & 1/2 & b & e \\ 0 & 0 & c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$\frac{1}{2} a = 0 \quad \Rightarrow a = 0$

$\frac{1}{2} d = 0 \quad \Rightarrow d = 0$

$\frac{1}{2} b + \frac{1}{2} e = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow b + e = 1 \quad \text{III}$

$\frac{1}{2} c = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow c = 1$

$$\text{Como} \begin{cases} a+b+c = 1 \\ a = 0 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow b = 0 \overset{\text{III}}{\Rightarrow} e = 1$$

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) $v_0 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Puedo escribir v_0 como cl de los autovectores de P
(debo ver si es posible)

$$\chi_P(\lambda) = \det(\lambda I - P) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\lambda \cdot \det \begin{bmatrix} \lambda - 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}}_{\lambda \cdot \begin{vmatrix} \lambda - 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & \lambda \end{vmatrix}} \overset{\cdot(-1)}{+} \underbrace{1 \cdot \det \begin{bmatrix} \lambda - 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & \lambda & 0 \\ 0 & -1/2 & -1 \end{bmatrix}}_{-1 \cdot \begin{vmatrix} \lambda - 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & \lambda \end{vmatrix}}$$

$$= \lambda^2 \cdot \left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{4}\right) - \left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{4}\right)$$

$$= (\lambda^2 - 1)\left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4}}}{2} = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{\frac{5}{4}}}{2}$$

$$= \frac{1}{4} \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{5}}{4}$$

Raíces: $1, -1, \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \frac{1-\sqrt{5}}{4}$

$\lambda = 1)$ vep dado: $E_1 = \langle (0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \rangle$

eigenvalues	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Results

$\lambda_1 = -1$

$\lambda_2 = 1$

$\lambda_3 = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$

$\lambda_4 = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{5})$

Corresponding eigenvectors

$v_1 = (0, 0, -1, 1)$

$v_2 = (0, 0, 1, 1)$

$v_3 = \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{4}(-5 + \sqrt{5}), \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}), 1\right)$

$v_4 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{4}(-5 - \sqrt{5}), \frac{1}{4}(1 - \sqrt{5}), 1\right)$

Escribo v_0 como:

menos fracciones

$$v_0 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_3 \cdot 4\, v_3 + \alpha_4 \cdot 4\, v_4$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & 4v_3 & 4v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2\sqrt{5} & 2\sqrt{5} \\ 0 & 0 & -5+\sqrt{5} & -5-\sqrt{5} \\ -1 & 1 & 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \\ 1 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -2\sqrt{5} & 2\sqrt{5} & 1/2 \\ 0 & 0 & -5+\sqrt{5} & -5-\sqrt{5} & 0 \\ -1 & 1 & 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} & 1/2 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$F_3 + F_4 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -2\sqrt{5} & 2\sqrt{5} & 1/2 \\ 0 & 0 & -5+\sqrt{5} & -5-\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2 & 5+\sqrt{5} & 5-\sqrt{5} & 1/2 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$(-5+\sqrt{5})\alpha_3 = (5+\sqrt{5})\,\alpha_4 \Rightarrow \alpha_4 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\alpha_3$$

$$-2\sqrt{5}\,\alpha_3 + 2\sqrt{5} \cdot \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\alpha_3 = \frac{1}{2}$$

$$5 - 5\sqrt{5}\,\alpha_3 = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_3 = \frac{-1-\sqrt{5}}{40}$$

$$\Rightarrow \alpha_4 = \frac{-1+\sqrt{5}}{40}$$

$$2\alpha_2 + (1+\sqrt{5})\alpha_3 + (1-\sqrt{5})\alpha_4 = \frac{1}{2}$$

Error de Cuentas

$$2\alpha_2 + \frac{-3-\sqrt{5}}{20} + \frac{-3+\sqrt{5}}{20} = \frac{1}{2}$$

$$2\alpha_2 - \frac{3}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_2 = \frac{2}{5}$$

1 1 4 4 0

$$\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 + 4\alpha_4 = 0$$

$$\alpha_1 + \frac{2}{5} + 4 \cdot \frac{-1-\sqrt{5}}{40} + 4 \cdot \frac{-1+\sqrt{5}}{40} = 0$$

$$\alpha_1 + \frac{1}{5} = 0$$

$$\alpha_1 = -\frac{1}{5}$$

$$\alpha_1 = -\frac{1}{5} \qquad \alpha_3 = \frac{-1-\sqrt{5}}{40}$$

$$\alpha_2 = \frac{2}{5} \qquad \alpha_4 = \frac{-1+\sqrt{5}}{40}$$

Verifico si:

$$v_0 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_3 \cdot 4 v_3 + \alpha_4 \cdot 4 v_4$$

Input

$$-\frac{1}{5}(0, 0, -1, 1) + \frac{2}{5}(0, 0, 1, 1) + \frac{1}{40}(-1-\sqrt{5})\,4\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{4}(-5+\sqrt{5}), \frac{1}{4}(1+\sqrt{5}), 1\right) + \frac{1}{40}(-1+\sqrt{5})\,4\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{4}(-5-\sqrt{5}), \frac{1}{4}(1-\sqrt{5}), 1\right)$$

Alternate form

$$\left\{\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{10}, 0\right\}$$

Decimal approxim

Casi, pero no.

Input interpretation

solve

$$2\sqrt{5}\,a - 2\sqrt{5}\,z = \frac{1}{2}$$
$$(-5-\sqrt{5})\,a + (-5+\sqrt{5})\,z = 0$$
$$(1-\sqrt{5})\,a - x + y + (1+\sqrt{5})\,z = \frac{1}{2}$$
$$4a + x + y + 4z = 0$$

Result

$$\underbrace{x = -\frac{3}{10} \text{ and } y = \frac{1}{2}}_{\text{Pifié acá}} \text{ and } \underbrace{z = \frac{1}{40}(-1-\sqrt{5}) \text{ and } a = \frac{1}{40}(\sqrt{5}-1)}_{\alpha_3 \text{ y } \alpha_4 \text{ ok}}$$

$$\alpha_1 = -\frac{3}{10} \qquad \alpha_3 = \frac{-1-\sqrt{5}}{40}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \qquad \alpha_4 = \frac{-1+\sqrt{5}}{40} \qquad \checkmark$$

Alternate form

$$\left\{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right\}$$

Tengo

$$v_0 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_3 \cdot 4\,v_3 + \alpha_4 \cdot 4\,v_4$$

$$A v_i = \lambda_i \cdot v_i$$

$$A^k \cdot v_0 = \alpha_1 \cdot \lambda_1^k \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot \lambda_2^k \cdot v_2 + 4\,\alpha_3 \cdot \lambda_3^k \cdot v_3 + 4\,\alpha_4 \cdot \lambda_4^k \cdot v_4$$

Piden $k = 10$, meto todo en una calculadora

$$A^{10} \cdot v_0 = (0.043457,\ 0.0268554,\ 0.768555,\ 0.161133)$$

$$= \underbrace{(0.043,\ 0.027,\ 0.769,\ 0.161)}_{\|o\|_1 = 1 \ \checkmark}$$

c) El estado limite SOLO existe si el vector inicial es combinación lineal de cualquiera de los autovectores de la matriz P MENOS del autovector asociado al -1

Es por eso que no existe Pinfinito, ya que hay vectores iniciales para los cuales el proceso no converge.
(ésto sucede porque el -1 es autovalor de la matriz)

d) $v_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ es cl de $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{asociado a } \lambda_1 = -1}}{v_1}$ y v_2 $\therefore$ no existe estado límite.

Obs:

Esto vale:

$$A^k \cdot v_0 = \alpha_1 \cdot \lambda_1^k \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot \lambda_2^k \cdot v_2 + 4\alpha_3 \cdot \lambda_3^k \cdot v_3 + 4\alpha_4 \cdot \lambda_4^k \cdot v_4$$

pues

$$A^k \cdot v_0 = A^k \cdot \left(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \tilde{\alpha}_3 v_3 + \tilde{\alpha}_4 v_4 \right)$$

$$= \alpha_1 \cdot \underbrace{A^k \cdot v_1}_{\lambda_1^k \cdot v_1} + \alpha_2 \cdot \underbrace{A^k \cdot v_2}_{\lambda_2^k \cdot v_2} + \tilde{\alpha}_3 \cdot \underbrace{A^k \cdot v_3}_{\lambda_3^k \cdot v_3} + \alpha_4 \cdot \underbrace{A^k \cdot v_4}_{\lambda_4^k \cdot v_4}$$

pues como v_i es autovector con autovalor λ_i

$$A v_i = \lambda_i \cdot v_i$$

$$A \cdot (A v_i) = A \cdot (\lambda_i \cdot v_i)$$

$$A^2 \cdot v_i = \lambda_i \cdot A v_i$$

$$A^2 \cdot v_i = \lambda_i \cdot \lambda_i \cdot v_i$$

$$A^2 \cdot v_i = \lambda_i^2 \cdot v_i$$

$\vdots$ generalizando (inducción)

$$A^k \cdot v_i = \lambda_i^k \cdot v_i$$