Álgebra Lineal Computacional

Primer Parcial – 27 de Mayo de 2022

Para aprobar el parcial deberá obtenerse un puntaje mayor o igual que 4 y al menos un ejercicio debe estar completamente correcto.

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proyección ortogonal sobre $S = \langle (1,1,1,1), (1,2,1,0) \rangle$ y sean $T = \{x \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \ -x_2 + x_4 = 0\}$ y $W = \langle (2,0,-2,0), (-2,1,0,1), (2,1,-4,1) \rangle$.

a) (2 pts.) Decidir si existe alguna transformación lineal g que cumpla simultáneamente:

$$g(W) = \langle (2,0,1,1), (0,-1,2,2) \rangle \qquad g(v) = f(v) \quad \forall v \in T$$

En caso afirmativo, exhibir un ejemplo. En caso negativo, explicar por qué.

b) (1 pt.) Sea $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$h(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + 4x_2 + 2x_3, -2x_1 + 4x_2 + 2x_3, 4x_4)$$

hallar una base de $\mathrm{Im}(h \circ f)$ y decidir si $h \circ f$ es epimorfismo. ¿Puede ser monomorfismo?

$f(v) = P_S(v)$ proyección ortogonal de v sobre S.

Armo B ortogonal a partir de S

a) 1°: $\tilde{a} = a = (1,1,1,1)$

$$\Rightarrow q_1 = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \leftarrow \|q_1\|_2 = 1$$

$$\langle \tilde{a}, b \rangle \cdot \tilde{a}$$

2°: $\tilde{b} = b - \dfrac{\tilde{a}^t \cdot b}{\|\tilde{a}\|^2} \cdot \tilde{a}$

$$= (1,2,1,0) - \frac{(1,1,1,1)^t \cdot (1,2,1,0)}{2^2} \cdot (1,1,1,1)$$

$$= (1,2,1,0) - \frac{1}{4}(1+2+1) \cdot (1,1,1,1)$$

$$= (1,2,1,0) - (1,1,1,1)$$

$$\tilde{b} = (0,1,0,-1)$$

$$\|\tilde{b}\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$q_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$B = \left\{ \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right), \left(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$$

↑ es BON

Busco matriz $[P_S]_{EE}$

$$[P_S]_{EE} = \sum_{i=1}^{2} v_i \cdot v_i^t$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$[P_S]_{EE} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 & 1/4 & 3/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$f(v) = [P_S]_{EE} \cdot v$$

g debe ser igual a f para todo v en T

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proyección ortogonal sobre $S = \langle (1,1,1,1), (1,2,1,0) \rangle$ y sean $T = \{x \in \mathbb{R}^4 \colon\ x_1 - x_2 + x_3 = 0,\ -x_2 + x_4 = 0\}$ y $W = \langle (2,0,-2,0), (-2,1,0,1), (2,1,-4,1) \rangle$.

a) (2 pts.) Decidir si existe alguna transformación lineal g que cumpla simultáneamente:

$$g(W) = \langle (2,0,1,1), (0,-1,2,2) \rangle \qquad g(v) = f(v) \quad \forall v \in T$$

$$\begin{cases} x_2 = x_4 \\ x_3 = x_2 - x_1 \end{cases}$$

$$(x_1, x_2, x_2 - x_1, x_2) =$$

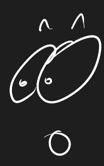
$$= x_1(1,0,-1,0) + x_2(0,1,1,1)$$

$$T = \langle \underbrace{(1,0,-1,0)}_{t_1}, \underbrace{(0,1,1,1)}_{t_2} \rangle$$

$$g(t_1) = f(t_1)$$

$$g(t_2) = f(t_2)$$

$$f(t_1) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$f(t_2) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$g(1,0,-1,0) = (0,0,0,0)$$

$$g(0,1,1,1) = \left(\frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{3}{4}, \frac{7}{4}\right)$$

Debe cumplirlo

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proyección ortogonal sobre $S = \langle(1,1,1,1),(1,2,1,0)\rangle$ y sean $T = \{x \in \mathbb{R}^4 :\ x_1 - x_2 + x_3 = 0,\ -x_2 + x_4 = 0\}$ y $W = \langle(2,0,-2,0),(-2,1,0,1),(2,1,-4,1)\rangle$.

a) (2 pts.) Decidir si existe alguna transformación lineal g que cumpla simultáneamente:

$$g(W) = \langle(2,0,1,1),(0,-1,2,2)\rangle \qquad g(v) = f(v) \quad \forall v \in T$$

Falta esto

Como $g(1,0,-1,0) = \vec{0}$

$$\Rightarrow g(2,0,-2,0) = \vec{0}$$

Escribo

$$(0,1,1,1) = \alpha_1\, w_1 + \alpha_2 \cdot w_2 + \alpha_3 \cdot w_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2F_2 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \leftarrow \text{Abs !}$$

no existen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

tal que

$$(0,1,1,1) = \alpha_1\, w_1 + \alpha_2 \cdot w_2 + \alpha_3 \cdot w_3$$

Pero $g(0,1,1,1)$ existía!

$\therefore$ no existe g que cumple lo pedido.

Ejercicio 2. Considerar las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & n & 5n \\ 1 & 3n & 3n \\ 1 & n & 2n \end{pmatrix} \quad \text{y } b = \begin{pmatrix} \frac{2n}{3} \\ \frac{2n}{3} \\ \frac{n}{3} \end{pmatrix},$$

con $n \in \mathbb{N}$.

a) (1.5 pts.) Probar que existe una constante $c > 0$ tal que $\mathrm{cond}_\infty(A) \geq cn$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y deducir que $\mathrm{cond}_\infty(A) \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

b) (1 pt.) Para $n = 10^4$, hallar la descomposición LU de A.

c) (1 pt.) Para $n = 10^4$, utilizar la descomposición LU hallada para resolver el sistema $Ax = b$ utilizando aritmética de 4 dígitos (en base 10).

d) (0.5 pt.) Verificar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, la solución exacta del sistema es $x = \left(0, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right)$ y calcular, para $n = 10^4$, el error relativo

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty},$$

donde $\tilde{x}$ es la solución aproximada hallada en el ítem anterior.