

Valores singulares

Ejercicio 7. Considerar la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

- (a) Calcular una descomposición en valores singulares de A .
- (b) Dibujar el círculo unitario en \mathbb{R}^2 y la elipse $\{Ax : x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_2 = 1\}$, señalando los valores singulares y los vectores singulares a izquierda y a derecha.
- (c) Calcular $\|A\|_2$ y $\text{cond}_2(A)$.
- (d) Calcular A^{-1} usando la descomposición hallada.

$$\begin{aligned} a) \quad A^t A &= \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16+9 & 15 \\ 15 & 25 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 25 & 15 \\ 15 & 25 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Avds de $A^t A$

$$\chi_{A^t A}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 25 & 15 \\ 15 & \lambda - 25 \end{vmatrix} = (\lambda - 25)^2 - 15^2 = 0$$

Entonces quiero

$$(\lambda - 25)^2 = 15^2$$

$$|\lambda - 25| = 15$$

$$\begin{aligned} \swarrow \quad \lambda_1 &= 40 \Rightarrow \sigma_1 = 2\sqrt{10} \\ \lambda_2 &= 10 \Rightarrow \sigma_2 = \sqrt{10} \end{aligned}$$

↑ Tengo Σ

Avecr

$$W_0 \begin{bmatrix} 15 & 15 \\ 15 & 15 \end{bmatrix} \Rightarrow E_{40} = \langle (-1, 1) \rangle$$

$$W_0 \begin{bmatrix} -15 & 15 \\ 15 & -15 \end{bmatrix} \Rightarrow E_{10} = \langle (1, 1) \rangle$$

↑ Tengo V

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Falte U

$$Av_1 = \sigma_1 \cdot \mu_1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\sqrt{10} \cdot \mu_1$$

CA

$$2\sqrt{10} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 2\sqrt{5}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{10}\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = \mu_1 \Rightarrow \mu_1 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 1/2\sqrt{5} \end{bmatrix} \quad \text{con } \|\mu_1\| = \sqrt{\frac{4}{4.5} + \frac{1}{4.5}} = \frac{1}{2}$$

$$Av_2 = \sigma_2 \cdot \mu_2$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \sqrt{10} \cdot \mu_2$$

$$\frac{1}{\sqrt{10}\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} = \mu_2 \Rightarrow \mu_2 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 4/\sqrt{5} \end{bmatrix} \quad \text{con } \|\mu_2\| = \sqrt{\frac{4}{5} + \frac{16}{5}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\bullet \frac{\mu_1}{\|\mu_1\|} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -2/2\sqrt{5} \\ 1/2\sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$\bullet \frac{\mu_2}{\|\mu_2\|} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 4/\sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Finalmente

Atenti!

$$V = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$A = U \Sigma V^*$$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}}_U \underbrace{\begin{bmatrix} 2\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{bmatrix}}_\Sigma \underbrace{\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{V^*}$$

Reviso

singular value decomposition

$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

Result

$M = U \cdot \Sigma \cdot V^T$

where

$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

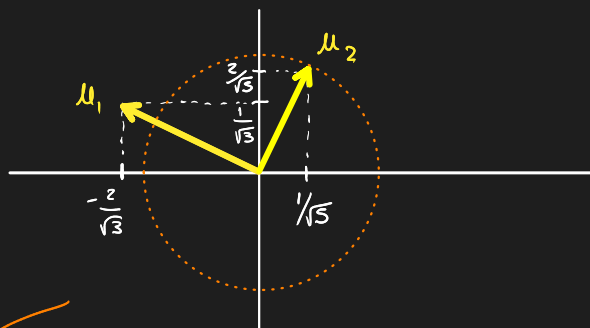
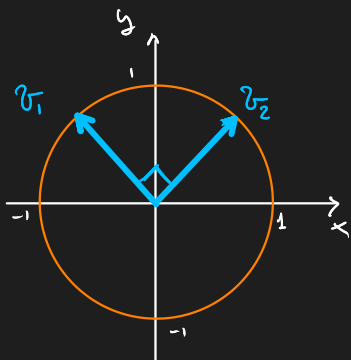
$\Sigma = \begin{pmatrix} 2\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{pmatrix}$

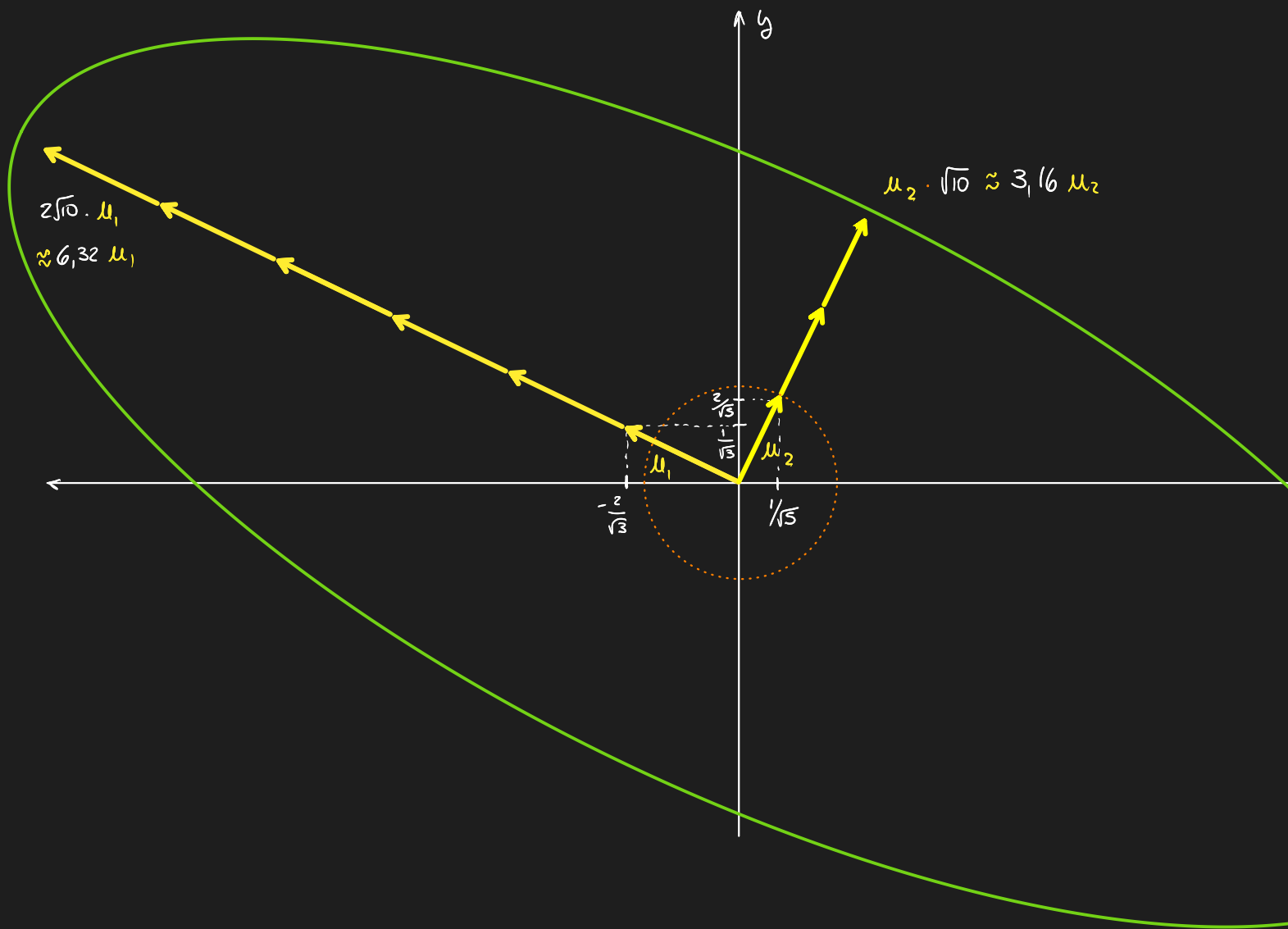
$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Usó el otro algoritmo con AA^T al comienzo

(b) Dibujar el círculo unitario en \mathbb{R}^2 y la elipse $\{Ax : x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_2 = 1\}$, señalando los valores singulares y los vectores singulares a izquierda y a derecha.

$$\sqrt{10} \approx 3,16$$





(c) Calcular $\|\mathbf{A}\|_2$ y $\text{cond}_2(\mathbf{A})$.

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^t \mathbf{A})} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$\|\mathbf{A}^{-1}\|_2 = \sqrt{\frac{1}{\min \text{eig } \mathbf{A}^t \mathbf{A}}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow \text{Cond}_2 \mathbf{A} = 2\sqrt{10} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = 2$$

(d) Calcular A^{-1} usando la descomposición hallada.

$$\text{Como } A = U \Sigma V^*$$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} -2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}}_U \underbrace{\begin{bmatrix} 2\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{bmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{V^*}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = U \Sigma^{-1} V^*$$

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{10} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}}_U \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{10} \end{bmatrix}}_{\Sigma^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{V^*}$$

Ejercicio 8. Determinar una descomposición en valores singulares de las siguientes matrices:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{pmatrix}$$

Probar que para todo $v \in \mathbb{R}^2$ se tiene $\|Av\|_2 \geq 15\|v\|_2$.

Veamos $A^t A$

Result

$$M = U \Sigma V^t$$

where

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{pmatrix}$$
$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$
$$\Sigma = \begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 15 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$V = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

← min σ_i

Sé que

$$\|A\|_2 = \max_v \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = \max \text{ valor singular de } A$$

$$\Rightarrow \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} \leq 30$$

$$\min_v \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = \min \text{ valor singular de } A$$

$$\Rightarrow \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} \geq 15$$

Ejercicio 10. Mostrar que $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tiene un valor singular nulo si y sólo si tiene un autovalor nulo.

Si $\lambda = 0$ es Aval de A

$$\Rightarrow \chi_A = \lambda^j (\text{algo}) \quad \text{con } j \geq 1$$

Ejercicio 11. Sea que $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, demostrar que los valores singulares de la matriz $\begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}$ son $\sqrt{1 + \sigma_i^2}$ donde \mathbf{I}_n es la matriz identidad de $\mathbb{C}^{n \times n}$ y σ_i es el i -ésimo valor singular de \mathbf{A} .

Ejercicio 12. Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y $\sigma > 0$. Demostrar que σ es valor singular de A si y solo si la matriz $\begin{pmatrix} A^* & -\sigma I_n \\ -\sigma I_n & A \end{pmatrix}$ es singular, donde I_n es la matriz identidad de $\mathbb{C}^{n \times n}$.

Ejercicio 13. Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, probar que los valores singulares de A^t , \bar{A} y A^* son iguales a los de A .

Los autovalores de $A^t A$ y de $A A^t$ son los mismos, pues ambos algoritmos son válidos para obtener los valores singulares de A .

Por lo tanto A y A^t tienen los mismos valores singulares.

$A^t A$ tiene los mismos que $A^* A$ si es que tiene los mismos que $\bar{A}^t \bar{A}$

$$\bar{A}^t \bar{A} = \overline{A^t A} \leftarrow \text{los avds son todos en } \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \overline{A^t A} \text{ tiene los mismos avds}$$

Terminar?

Ejercicio 14. Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, de rango r , con valores singulares no nulos: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r$

- (a) Probar que \mathbf{A} puede escribirse como una suma de r matrices de rango 1.
- (b) Probar que dado $s < r$ se pueden sumar s matrices de rango 1 matrices adecuadamente elegidas de manera de obtener una matriz \mathbf{A}_s que satisfice:

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_s\|_2 = \sigma_{s+1}$$

Nota: \mathbf{A}_s resulta ser la mejor aproximación a \mathbf{A} (en norma 2), entre todas las matrices de rango s .

a) Uso escritura de SVD vista en clase como:

$$\mathbf{A} = \sigma_1 \cdot \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_1^* + \sigma_2 \cdot \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_2^* + \dots + \sigma_r \cdot \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{v}_r^*$$

b) Hecho en clase.

La norma 2 de eso será el valor singular más grande, que en este caso es único, que es el σ_{s+1}

Nota de Nota:

Que \mathbf{A}_s resulte ser la mejor aproximación de \mathbf{A} en norma 2, me da a entender que los valores singulares de mayor a menor se corresponden con la información contenida en la matriz original de mayor a menor.

En otras palabras, el primer valor singular con sus respectivos vectores la mayor cantidad de información de \mathbf{A} .

Le sigue el segundo valor singular, y así hasta alcanzar el último valor singular, que es la parte de la descomposición que contiene la información menos significativa de \mathbf{A} .

Ejercicio 15. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Hallar la matriz de rango 2 que mejor aproxima a A en norma 2.

(b) Hallar la matriz de rango 1 que mejor aproxima a A en norma 2.

a)

$$A^t A =$$

Result

$$\begin{pmatrix} 17 & 8 & 0 \\ 8 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Eigenvalues

$$\lambda_1 = 25$$

$$\lambda_2 = 9$$

$$\lambda_3 = 4$$

Eigenvectors

$$v_1 = (1, 1, 0)$$

$$v_2 = (-1, 1, 0)$$

$$v_3 = (0, 0, 1)$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = 5$$

$$\Rightarrow \sigma_2 = 3$$

$$\Rightarrow \sigma_3 = 2$$

Quiero que desme solo con σ_1 y σ_2 (tiro σ_3)

$$\tilde{A}_2 = \sigma_1 \cdot u_1 \cdot v_1^* + \sigma_2 \cdot u_2 \cdot v_2^*$$

$$A \cdot v_i = \sigma_i \cdot u_i :$$

$$\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = u_1 = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = u_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_2 = \underset{\sigma_1}{5} \cdot \underset{\mu_1}{\frac{1}{2}} \underset{\nu_1^*}{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \underset{\sigma_2}{3} \cdot \underset{\mu_2}{\frac{1}{2}} \underset{\nu_2^*}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{5}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{3}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \\ -8 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_1 = \underset{\sigma_1}{5} \cdot \underset{\mu_1}{\frac{1}{2}} \underset{\nu_1^*}{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{5}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} 5/2 & 5/2 & 0 \\ -5/2 & -5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 16. Dada una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, cuya descomposición en valores singulares reducida es $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{U}} \hat{\Sigma} \hat{\mathbf{V}}^t$. Se define la pseudo-inversa de \mathbf{A} como $\mathbf{A}^\dagger = \hat{\mathbf{V}} \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mathbf{U}}^t$.

(a) Verificar que \mathbf{A}^\dagger satisface las siguientes propiedades:

i. $\mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} = \mathbf{A}$

iii. $(\mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger)^t = \mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger$

ii. $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^\dagger$

iv. $(\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A})^t = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}$

(b) Probar que si dos matrices \mathbf{B}_1 y \mathbf{B}_2 satisfacen las 4 propiedades del ítem anterior, entonces verifican $\mathbf{A} \mathbf{B}_1 = \mathbf{A} \mathbf{B}_2$ y $\mathbf{B}_1 \mathbf{A} = \mathbf{B}_2 \mathbf{A}$.

(c) Probar que la pseudo inversa de \mathbf{A} es única.

$$\begin{aligned} a) \ i) \quad \mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} &= \hat{\mathbf{U}} \hat{\Sigma} \hat{\mathbf{V}}^t \hat{\mathbf{V}} \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mathbf{U}}^t \hat{\mathbf{U}} \hat{\Sigma} \hat{\mathbf{V}}^t \\ &= \hat{\mathbf{U}} \hat{\Sigma} \hat{\mathbf{V}}^t \hat{\mathbf{V}} \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mathbf{U}}^t \hat{\mathbf{U}} \hat{\Sigma} \hat{\mathbf{V}}^t \\ &= \hat{\mathbf{U}} \hat{\Sigma} \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\Sigma} \hat{\mathbf{V}}^t \\ &= \hat{\mathbf{U}} \hat{\Sigma} \hat{\mathbf{V}}^t = \mathbf{A} \end{aligned}$$

ii) Lo mismo.

$$iii) \quad (\mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger)^t = (\mathbf{A}^\dagger)^t \mathbf{A}^t$$

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{U}} \hat{\Sigma} \hat{\mathbf{V}}^t$$

$$\mathbf{A}^\dagger = \hat{\mathbf{V}} \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mathbf{U}}^t$$

$$= \left(\hat{\mathbf{V}} \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mathbf{U}}^t \right)^t \left(\hat{\mathbf{U}} \hat{\Sigma} \hat{\mathbf{V}}^t \right)^t$$

$$= \hat{\mathbf{U}} \underbrace{\hat{\Sigma}^{-1}}_{\text{Diag}} \hat{\mathbf{V}}^t \hat{\mathbf{V}} \underbrace{\hat{\Sigma}}_{\text{Diag}} \hat{\mathbf{U}}^t$$

$$= \mathbf{I} \quad ?$$

b) ?
c) ?

Ejercicio 17. Caracterizar geoméricamente y graficar la imagen de la esfera unitaria

$$S_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\|_2 = 1\}$$

por la transformación $T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$, con

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ 2 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Notar que U y V^* no están normalizados, así que NO tengo una descomposición SVD (aunque sí son vectores ortogonales)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2/\sqrt{5} \\ 2 & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Input

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 2 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Exact result

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4(\sqrt{5} - 5) & 2(5 + 2\sqrt{5}) & 2(10 + \sqrt{5}) \\ 2(20 + \sqrt{5}) & -2(\sqrt{5} - 10) & 40 - \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

singular value decomposition

$$\begin{pmatrix} 4 - \frac{4}{\sqrt{5}} & 2 + \frac{4}{\sqrt{5}} & 4 + \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 8 + \frac{2}{\sqrt{5}} & 4 - \frac{2}{\sqrt{5}} & 8 - \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Result

$M = U \cdot \Sigma \cdot V^\dagger$

where

$$M = \begin{pmatrix} 2.21115 & 3.78885 & 4.89443 \\ 8.89443 & 3.10557 & 7.55279 \end{pmatrix}$$

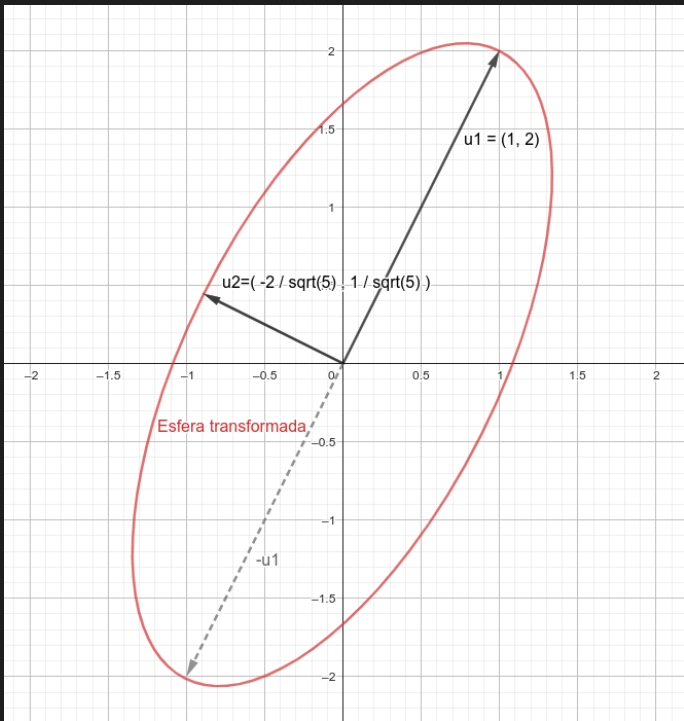
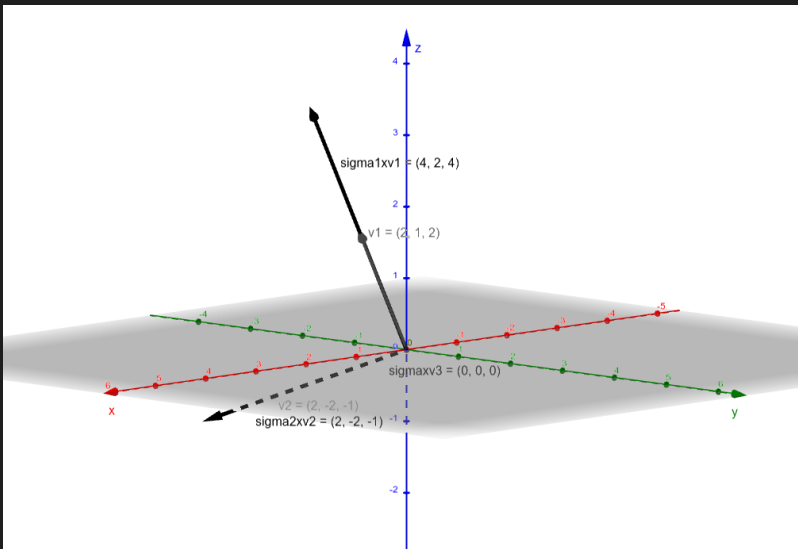
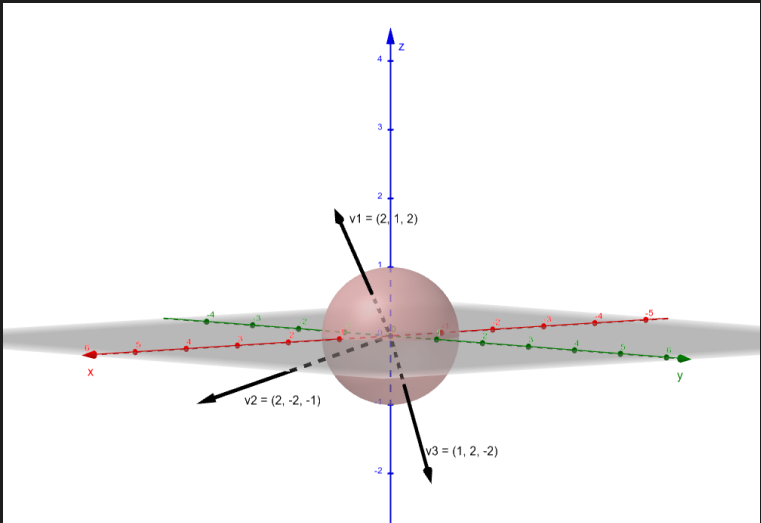
$$U = \begin{pmatrix} 0.447214 & -0.894427 \\ 0.894427 & 0.447214 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 13.4164 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 0.666667 & 0.666667 & -0.333333 \\ 0.333333 & -0.666667 & -0.666667 \\ 0.666667 & -0.333333 & 0.666667 \end{pmatrix}$$

?

Será que la interpretación geométrica puedo pensarla de la misma forma que con SVD? donde tengo los vectores v_i en \mathbb{R}^3 que definen mi espacio de entrada a los u_i en \mathbb{R}^2 que definen mi espacio de llegada, multiplicados por un factor de escalamiento definido por los elementos de la diagonal de la matriz del centro dada.



Ejercicio 18. Hallar, si existe, una matriz A con coeficientes reales y del tamaño adecuado para que los valores singulares no nulos de A sean $\{\frac{3}{2}, 3\}$,

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \quad (2 \ 2 \ 1) A = (0 \ 0 \ 0).$$

$$\underbrace{? \times ? \quad 3 \times 1}_{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}} = 3 \times 1$$

$$\underbrace{1 \times 3 \quad ? \times ?}_{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}} = 1 \times 3$$

$$A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

$$A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

$$A = U \Sigma V^*$$

$$A = U \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} V^*$$

3x3 pues $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

\Rightarrow L2 3º col de U no importa (pues $\sigma_3 = 0$)

\Rightarrow L2 3º fila de V^* no importa (pues $\sigma_3 = 0$)

$$\text{elijo} \Rightarrow U = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{elijo} \Rightarrow V = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= (\sigma_1 \cdot u_1 \cdot v_1^* + \sigma_2 \cdot u_2 \cdot v_2^*) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \left(3 \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & * \end{bmatrix} + \frac{3}{2} \cdot \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & * \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

el:jo

$$b_1^* = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

el:jo

$$b_2^* = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \left(3 \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} + \frac{3}{2} \cdot \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$3 \underbrace{\begin{bmatrix} * \\ * \\ * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}}_{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{3}{2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} * \\ * \\ * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}}_{\frac{3}{\sqrt{2}}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \end{bmatrix} + \frac{9}{2\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \frac{9}{2\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -\frac{3}{\sqrt{2}} a + \frac{9}{2\sqrt{2}} x = 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} b + \frac{9}{2\sqrt{2}} y = 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} c + \frac{9}{2\sqrt{2}} z = 0 \end{cases}$$

$$-\frac{3}{\sqrt{2}} a = -\frac{9}{2\sqrt{2}} x$$

$$a = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{9}{2\sqrt{2}} x$$

$$a = \frac{9}{6} x$$

$$a = \frac{3}{2} x$$

$$b = \frac{3}{2} y$$

$$c = \frac{3}{2} z$$

Uh, me tenían que quedar ortogonales...

Creo que debería haber agregado solo esa condición para los v_1 y v_2 en vez de elegir dos particulares, y lo mismo con u_1 y u_2 .

Lo otro que también queda es usar el segundo dato, que puede plantearse de manera parecida, y recién al final despejar las variables que quedaron.

Posiblemente haya una forma menos cuentosa de hacer ésto, debo consultar en clase.