

Taller de Álgebra I

Clase 11 - Complejos

Primer cuatrimestre 2022

Sabemos que no existe ningún real r que satisfaga $r^2 = -1$.

Introducimos un número i que cumple $i^2 = -1$. Se lo llama el número imaginario.

Definición

Llamamos al conjunto de los números complejos a

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$$

- ▶ Si $z = a + bi \in \mathbb{C}$, a es la parte real y b es la parte imaginaria de z .
- ▶ La suma y el producto de números complejos se dan de manera natural
 - ▶ $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
 - ▶ $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Nuevo tipo

Definamos un renombre de tipos para Complejos

```
type Complejo = (Float, Float)
```

donde el primer elemento es la parte real y el segundo es la parte imaginaria.

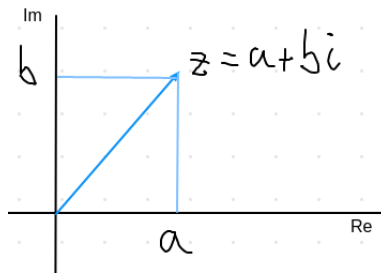
Ejercicio

Implementar las funciones

- 1 `re :: Complejo -> Float`
- 2 `im :: Complejo -> Float`
- 3 `conjugado :: Complejo -> Complejo`
- 4 `suma :: Complejo -> Complejo -> Complejo`
- 5 `producto :: Complejo -> Complejo -> Complejo`
- 6 `inverso :: Complejo -> Complejo`
- 7 `cociente :: Complejo -> Complejo -> Complejo`
- 8 `potencia :: Complejo -> Int -> Complejo`
- 9 Dada una función cuadrática $ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, definir la función que tome los coeficientes a , b y c y devuelve las dos raíces. En caso de haber una sola, devolverla dos veces.
`solucionesCuadratica :: Float -> Float -> Float -> (Complejo, Complejo)`

El Plano Complejo

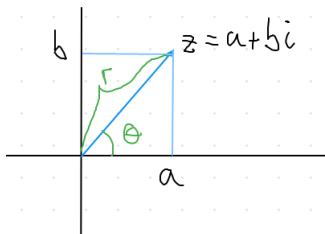
Podemos representar todos los números complejos en un plano. El plano complejo.



Si $z = a + bi \in \mathbb{C}$, lo representamos en el punto (a, b) del plano.

Coordenadas Polares

Podemos representar un numero complejo usando coordenadas polares



Si $z \in \mathbb{C}$, $z = (r, \theta)$ donde r es el módulo de z y θ su argumento.

Despejamos

► $a = r \cos \theta$

► $b = r \sin \theta$

Luego, $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

Más ejercicios

Implementar las funciones

- 1 `modulo :: Complejo -> Float`
- 2 `argumento :: Complejo -> Float`
- 3 implementar la función `pasarACartesianas` que toma $r \geq 0$ y $\theta \in [0, 2\pi)$ y devuelve el complejo z que tiene módulo r y argumento θ
`pasarACartesianas :: Float -> Float -> Complejo`
- 4 `raizCuadrada :: Complejo -> (Complejo, Complejo)`
Dado $z \in \mathbb{C}$, devuelve los dos complejos w que satisfacen $w^2 = z$
- 5 `SolucionesCuadraticaCoefComplejos :: Complejo -> Complejo -> Complejo -> (Complejo, Complejo)`
Dado un polinomio $az^2 + bz + c$, con $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, implementar la función que devuelve sus dos raíces.

Dado un número natural n , las raíces n -ésimas de la unidad están dadas por

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \quad 0 \leq k < n. \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ejercicios

Implementar las funciones

- 1 `raicesNEsimas :: Int -> [Complejo]` que, dado n natural, devuelve la lista con las raíces n -ésimas de la unidad.
- 2 `potenciasRaizNEsima :: Int -> Int -> [Complejo]` que, dados k y n enteros con $0 \leq k < n$, devuelve la lista con las potencias $0, 1, \dots, n-1$ de la raíz n -ésima asociada a k siguiendo la fórmula de arriba.