极限部分

泰勒展开式

泰勒公式

泰勒公式是将一个在$x=x_0$处具有n阶导数的函数f(x)利用关于(x-x_0)的n次多项式来逼近函数的方法。

$$f(x)=\frac{f(x_0)}{0!}+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

1、佩亚诺(Peano）余项： $R_n(x)=o[(x-x_0)^n]$

2、施勒米尔希-罗什(Schlomilch-Roche）余项：

$$R_n(x)=f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]\frac{(1-\theta)^{n+1-p}(x-x_0)^{n+1}}{n!p}$$ 其中θ∈(0,1)。

3、拉格朗日（Lagrange）余项：

$$R_n(x)=f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$ 其中θ∈(0,1)。

4、柯西（Cauchy）余项：

$$R_n(x)=f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]\frac{(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}}{n!}$$ 其中θ∈(0,1)。

5、积分余项：

$$R_n(x)=\frac{(-1)^n}{n!}\int_a^x(t-x)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

常用泰勒展开式

$$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+o\left(x^3\right)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+o\left(x^5\right)$$

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\times\frac{x^3}{3}+\frac{1\times3}{2\times4}\times\frac{x^5}{5}+\frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}\times\frac{x^7}{7}+o\left(x^7\right)$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o\left(x^4\right)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+o\left(x^3\right)$$

$$(1+x)^a=1+\frac{a}{1!}x+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3+o\left(x^3\right)$$

- 常见求导公式

基本初等函数求导公式

(1) $(C)'=0$　　(2) $(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$

(3) $(\sin x)'=\cos x$　　(4) $(\cos x)'=-\sin x$

(5) $(\tan x)'=\sec^2 x$　　(6) $(\cot x)'=-\csc^2 x$

(7) $(\sec x)'=\sec x\tan x$　　(8) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$

(9) $(a^x)'=a^x\ln a$　　(10) $(e^x)'=e^x$

(11) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$　　(12) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$,

(13) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　(14) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(15) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$　　(16) $(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

函数的和、差、积、商的求导法则

设 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 都可导，则

(1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$　　(2) $(Cu)'=Cu'$（C 是常数）

(3) $(uv)'=u'v+uv'$　　(4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

反函数求导法则

若函数 $x=\varphi(y)$ 在某区间 I_y 内可导、单调且 $\varphi'(y)\neq 0$，则它的反函数 $y=f(x)$ 在对应区间 I_x 内也可导，且

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)} \quad 或 \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

- 极限公式

当 $🐱 \to 0$ 时

$\sin 🐱 \sim 🐱$　　$\tan 🐱 \sim 🐱$

$\ln(1+🐱) \sim 🐱$　　$e^{🐱}-1 \sim 🐱$

$\arcsin 🐱 \sim 🐱$　　$\arctan 🐱 \sim 🐱$

$\log_a(1+🐱) \sim \frac{🐱}{\ln a}$　　$a^{🐱}-1 \sim 🐱 \ln a$

$1-\cos 🐱 \sim \frac{1}{2}🐱^2$　　$\sqrt[n]{1+🐱}-1 \sim \frac{🐱}{n}$

$🐱-\sin 🐱 \sim \frac{1}{6}🐱^3$　　$\tan 🐱-🐱 \sim \frac{1}{3}🐱^3$

$(1+🐱)^{\alpha}-1 \sim \alpha 🐱$　　$\arcsin 🐱-🐱 \sim \frac{1}{6}🐱^3$

$🐱-\arctan 🐱 \sim \frac{1}{3}🐱^3$　　$\tan 🐱-\sin 🐱 \sim \frac{1}{2}🐱^3$

- 积分区域对称