数值分析课程上机实验题目

实验一

第一章上机题1: 编程实现例 1. 4 , 绘出图 1-2 , 体会两种误差对结果的不同影响.

第一章上机题3: 编程观察无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

的求和计算.

(1) 采用 IEEE 单精度浮点数, 观察当 n 为何值时, 求和结果不再变化, 将它与理论分析的结论进行比较 (注: 在 MATLAB 中可用 single 命令将变量转成单精度浮点数).

(2) 用 IEEE 双精度浮点数再次计算 (1) 中得到的前 n 项, 评估 IEEE 单精度浮点数计算结果的误差.

(3) 采用 IEEE 双精度浮点数, 请估计当 n 为何值时上述无穷级数求和结果不再变化, 这在当前做实验的计算机上大概需要多长的计算时间？注意：编程时用简单的for循环，并假设程序顺序运行，也没有任何编译或运行时优化技术。

实验二

第二章上机题2: 编程实现牛顿法与牛顿下山法求解下面两个方程. 要求: (1) 设定合适的迭代判停准则; (2) 设置合适的下山因子序列; (3) 打印每个迭代步的近似解及下山因子; (4) 请用其他较准确的方法 (如MATLAB软件中的 fzero 函数) 验证牛顿法与牛顿下山法结果的正确性。最后，总结哪个问题需要用牛顿下山法求解，及采用它之后的效果.

(1) $x^3 - 2x + 2 = 0$, 取 $x_0 = 0$.

(2) $-x^3 + 5x = 0$, 取 $x_0 = 1.35$.

第二章上机题3: 利用 2. 6. 3 节给出的 fzerotx 程序，编程求第一类的零阶贝塞尔函数 $J_0(x)$ 的零点（$J_0(x)$ 在 MATLAB 中可通过 besselj(0,x) 得到）. 试求 $J_0(x)$ 的前10个正的零点, 并绘出函数曲线和零点的位置.

实验三

第三章上机题6: 编程生成 Hilbert 矩阵 $\mathbf{H}_n$ (见例 3. 4) , 以及 n 维向量 $\mathbf{b} = \mathbf{H}_n \mathbf{x}$, 其中 $\mathbf{x}$ 为所有分量都是 1 的向量. 编程实现 Cholesky 分解算法，并用它求解方程 $\mathbf{H}_n \mathbf{x} = \mathbf{b}$, 得到近似解 $\hat{\mathbf{x}}$, 计算残差 $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{H}_n \hat{\mathbf{x}}$ 和误差 $\Delta\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ 的 ∞-范数.

(1) 设 $n = 10$, 计算 $||\mathbf{r}||_\infty$ 、$||\Delta\mathbf{x}||_\infty$.

(2) 在右端项上施加大小为 10^{-7} 的随机扰动（相对变化量，用∞-范数度量）然后再解上述方程组, 观察残差和误差的变化情况.

(3) 改变 n 的值为 8 和 12、14 , 求解相应的方程, 观察 $||\mathbf{r}||_\infty$ 、$||\Delta\mathbf{x}||_\infty$ 的变化情况. 通过这个实验说明了什么问题?

实验四

第四章上机题2: 考虑常微分方程的两点边值问题:

$$
\begin{cases}
\varepsilon \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a, & (0 < a < 1) \\
y(0) = 0, \quad y(1) = 1
\end{cases}
$$

它的精确解为

$$
y(x) = \frac{1-a}{1-e^{-1/\varepsilon}}(1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}) + ax,
$$

为了把微分方程离散, 把 $[0,1]$ 区间 n 等分, 令 $h = \frac{1}{n}$,

$$
x_i = ih, \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1),
$$

得到对应的$y(x)$函数值近似值$\{y_i\}$满足的有限差分方程

$$
\varepsilon \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = a,
$$

简化为

$$
(\varepsilon + h/2)y_{i+1} - 2\varepsilon y_i + (\varepsilon - h/2)y_{i-1} = ah^2,
$$

联立后得到线性方程组$\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}$，其中

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
-2\varepsilon & \varepsilon + h/2 & & & \\
\varepsilon - h/2 & -2\varepsilon & \varepsilon + h/2 & & \\
& \varepsilon - h/2 & -2\varepsilon & \ddots & \\
& & \ddots & \ddots & \varepsilon + h/2 \\
& & & \varepsilon - h/2 & -2\varepsilon
\end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} ah^2 \\ \vdots \\ ah^2 - \varepsilon - h/2 \end{bmatrix}.
$$

(1) 对 $\varepsilon = 1$, $a = \frac{1}{2}$, $n = 1000$, 分别用雅可比, G-S 和 SOR 方法（自己编写程序）求上述线性方程组的解, 要求相邻迭代解的差的无穷范数不超过10^{-5}时停止迭代, 然后比较与精确解的误差. 在编程时，尽量采用稀疏矩阵的格式表示矩阵$\mathbf{A}$，并在算法实现中利用稀疏矩阵的特点。

(2) 对 $\varepsilon = 0.1$, $\varepsilon = 0.01$, $\varepsilon = 0.001$ 考虑上述同样的问题. 同时，观察变化n的值对解的准确度有何影响。

实验五

第五章上机题1: 编程实现幂法，用它求下列矩阵按模最大的特征值 λ_1 及其对应的特征向量 $\mathbf{x_1}$, 使 $|(\lambda_1)_{k+1} - (\lambda_1)_k| < 10^{-5}$.

(1) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix}$.

(2) $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}25 & -41 & 10 & -6\\ -41 & 68 & -17 & 10\\ 10 & -17 & 5 & -3\\ -6 & 10 & -3 & 2\end{bmatrix}$.

第五章上机题3: 编程实现基本的QR算法（其中QR分解可以调用现成的函数），用它计算 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5\\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5\\ 0.5 & -0.5 & 0.5 & -0.5\\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5\end{bmatrix}$ 的所有特征值, 观察迭代过程中矩阵序列收敛的情况, 然后解释观察到的现象.

第五章上机题4: 编程实现带原点位移的 QR 算法，计算 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5\\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5\\ 0.5 & -0.5 & 0.5 & -0.5\\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5\end{bmatrix}$ 的所有特征值, 观察迭代过程的收敛情况, 与上机题 3 的实验结果做比较.

实验六

第六章上机题3: 对物理实验中所得下列数据

t_i	1	1.5	2	2.5	3.0	3.5	4	
y_i	33.40	79.50	122.65	159.05	189.15	214.15	238.65	
t_i	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8
y_i	252.2	267.55	280.50	296.65	301.65	310.40	318.15	325.15

(1) 用二次函数 $y=a+bt+ct^2$ 做曲线拟合.

(2) 用指数函数 $y=ae^{bt}$ 做曲线拟合.

(3) 绘制出数据点与拟合曲线，比较上述两条拟合曲线, 哪条更好?

第六章上机题8: 已知直升飞机旋转机翼外形曲线的采样点坐标如下:

x	0.520	3.1	8.0	17.95	28.65	39.62	50.65	78	104.6	156.6
y	5.288	9.4	13.84	20.20	24.90	28.44	31.10	35	36.9	36.6
x	208.6	260.7	312.50	364.4	416.3	468	494	507	520	
y	34.6	31.0	26.34	20.9	14.8	7.8	3.7	1.5	0.2	

以及两端点的 1 阶导数值 $y'_0=1.865\,48$ 和 $y'_n=-0.046\,115$.

利用第一种边界条件的三次样条插值函数来近似机翼外形曲线，并计算翼型曲线在 $x=2,30,130,350,515$ 各点上的函数值及 1 阶导数、2 阶导数的近似值.

实验七

第七章上机题4: 用数值积分方法近似计算

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} \mathrm{d}x$$

及圆周率

$$\pi = 4 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x.$$

(1) 用复合 Simpson 求积公式计算, 要求绝对误差小于 $\frac{1}{2} \times 10^{-8}$, 试根据积分余项估计步长 h 的取值范围. 按要求选择一个步长进行计算, 观察数值结果与误差要求是否相符.

(提示: 可利用 MATLAB 的符号运算工具箱求函数的高阶导数表达式, 详见命令 diff、syms 的帮助文档.)

(2) 用下面的复合 Gauss 公式计算近似积分

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \mathrm{d}x = & \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \left[f\left(x_{i+\frac{1}{2}} - \frac{h}{2\sqrt{3}} \right) + f\left(x_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2\sqrt{3}} \right) \right] \\ & + \frac{(b-a)h^4}{4320} f^{(4)}(\xi_1), \quad \xi_1 \in (a,b), \end{aligned}$$

其中, $h = (b-a)/n$, $x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}$. 复合 Gauss 积分的思想是: 将 $[a,b]$ 做等距划分, 即 $x_i = a + ih,\ (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$, 然后在每个子区间内应用两点 Gauss 公式. 试对步长 h 做先验估计 (误差要求与 (1) 同), 并计算近似积分.