

# Experiment 3 Report

## 第三章上机题6

---

我们实现了三个函数：

- `cholesky(...)`：输入一对称正定矩阵 $A$ ，程序用平方根法计算其Cholesky分解 $A = LL^T$ ，并返回下三角矩阵 $L$ ；
- `hilbert(...)`：输入尺寸 $n$ ，程序输出 $n \times n$  Hilbert矩阵 $H_n$ ；
- `solve_hilbert_system(...)`：输入尺寸 $n$ 和（可选的）扰动 $\Delta b$ ，程序利用Cholesky分解求解对应的线性方程组，并给出双精度下的残差和误差。若未给定扰动，则视扰动为零。

之后，我们按照要求构造了对应阶数的Hilbert矩阵，并生成了对应的方程组，对Hilbert矩阵进行Cholesky分解后便捷地计算出了方程组的解（因为计算 $L$ 矩阵的逆很便捷），然后计算了 $\|\mathbf{r}\|_\infty$ 和 $\|\Delta \mathbf{x}\|_\infty$ 。

所有计算均在双精度浮点数下进行，运行结果如下：

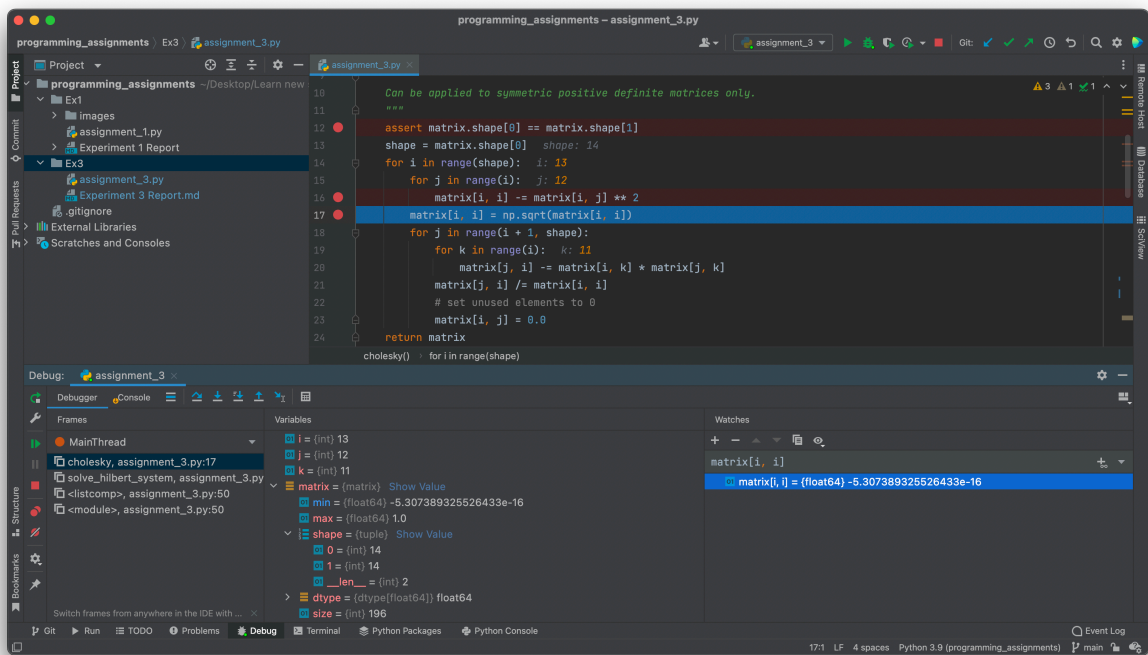
```
Ex3 — -zsh — 80x24
(base) casorazitora@allaxomai Ex3 % python assignment_3.py
(2.3283064365386963e-10, 7000466.5376583515)
(2.4361099359992975e-10, 6982259.716547754)
assignment_3.py:13: RuntimeWarning: invalid value encountered in sqrt
  matrix[i, i] = np.sqrt(matrix[i, i])
N = 8: residual = 7.275957614183426e-12, delta = 216214.9954189199
N = 12: residual = 7.450580596923828e-09, delta = 235953180.31323346
N = 13: residual = 1.4901161193847656e-08, delta = 739455857.1272514
N = 14: residual = nan, delta = nan
(base) casorazitora@allaxomai Ex3 %
```

条件	残差无穷范数	解的相对误差
N=10, 无扰动	2.3283e-10	7.00047e6
N=10, 有扰动	2.4361e-10	6.98226e6
N=8, 无扰动	7.2760e-12	2.16215e5
N=12, 无扰动	7.4506e-9	2.35953e8
N=13, 无扰动	1.4901e-8	7.39456e8
N=14, 无扰动	*	*

（表中有**扰动**一行的数据为100次随机选择扰动后结果平均值。扰动由 `numpy.random.rand()` 生成。）

可以发现，随着Hilbert矩阵阶数提升，尽管残差仍然（相对）较小（或者说残差的爆发式增长来得较晚），但解的相对误差已经非常巨大。这验证了Hilbert矩阵作为稀疏矩阵的病态性。随机扰动引发的解的相对误差变化量相对于扰动的大小（以无穷范数计）也是巨大的。

当N=14时，采用单纯的双精度浮点数计算已经导致计算出现错误：



在Cholesky分解的过程中，某一对角元素在减法过程中成为了负数，无法进行正常的平方根操作。这进一步说明了此问题的病态。