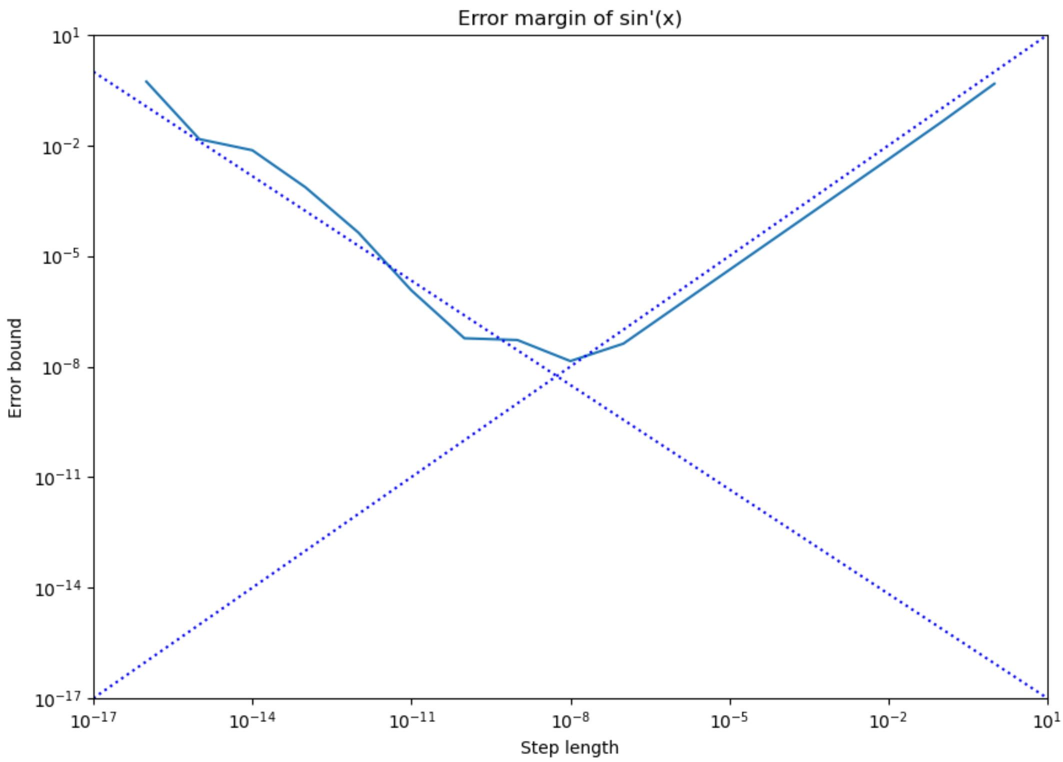
Experiment 1 Report

第一章上机题1

我们复现了课本例1.4，使用$\sin' 1 = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(1+h)-\sin 1}{h}$计算了$\sin x$在$x = 1$处的导数及绝对误差，并绘制了图1-2：



其中所有的计算都使用双精度浮点数进行。可以看出，舍入误差（由浮点数精度导致）近似地与步长成反比，这是因为在计算式中，分子部分的舍入误差基本是个定值，因而误差与分母（步长）成反比；而截断误差基本与步长成正比，这是因为由泰勒展开，上式的截断误差约为$\frac{h^2}{2}\sin''(1)$，与步长二次方基本成正比。两种误差之和为总误差，在10^{-9}左右达到最小值。

第一章上机题3

我们在不同精度下计算了$\sum \frac{1}{n}$.

使用单精度浮点数计算

单精度浮点数的机器精度$\epsilon_{mach} = 2^{-24}$，为估计何时求和值不再变化，我们用 $\ln n + \gamma, \gamma \approx 0.57721566$估算上述级数和，则有当$\frac{1/n}{\ln n+\gamma} \leq \frac{\epsilon_{mach}}{2}$时级数求和不再变化。利用计算软件求得$n \geq 2\ 209\ 628$。

我们使用 `numpy.float32` 做单精度浮点数计算，逐个计算$\frac{1}{n}$的值并加到答案上，直到**当前答案与上一步的答案相等**为止。程序显示，计算到$n = 2\ 097\ 152$时结果不再发生变化（与理论分析差别不大），固定为15.403683，共花费973.95毫秒。

使用双精度浮点数计算

我们使用 `numpy.float_` 做双精度浮点数计算，对前$2\ 097\ 152$项进行求和，得到结果为15.133306，共花费739.86毫秒。假如认为双精度浮点数的计算结果为真实值，那么绝对误差为0.2704，相对误差约1.787%。可以看出，单精度浮点数在本任务中的误差是不可忽略的。

假如像上一部分那样在双精度下求和直到结果不发生变化，由于双精度浮点数的机器精度$\epsilon_{mach} = 2^{-53}$，故使用相同方式计算得到$n \geq 5.22654 \times 10^{14}$。程序运行时间因此估算为$\frac{739.86}{2\ 097\ 152}\ ms * 5.22654 \times 10^{14} \approx 2134$天，可以认为是超过本问题计算限度的。

程序结果截图