Experiment 7 Report

第七章上机题4

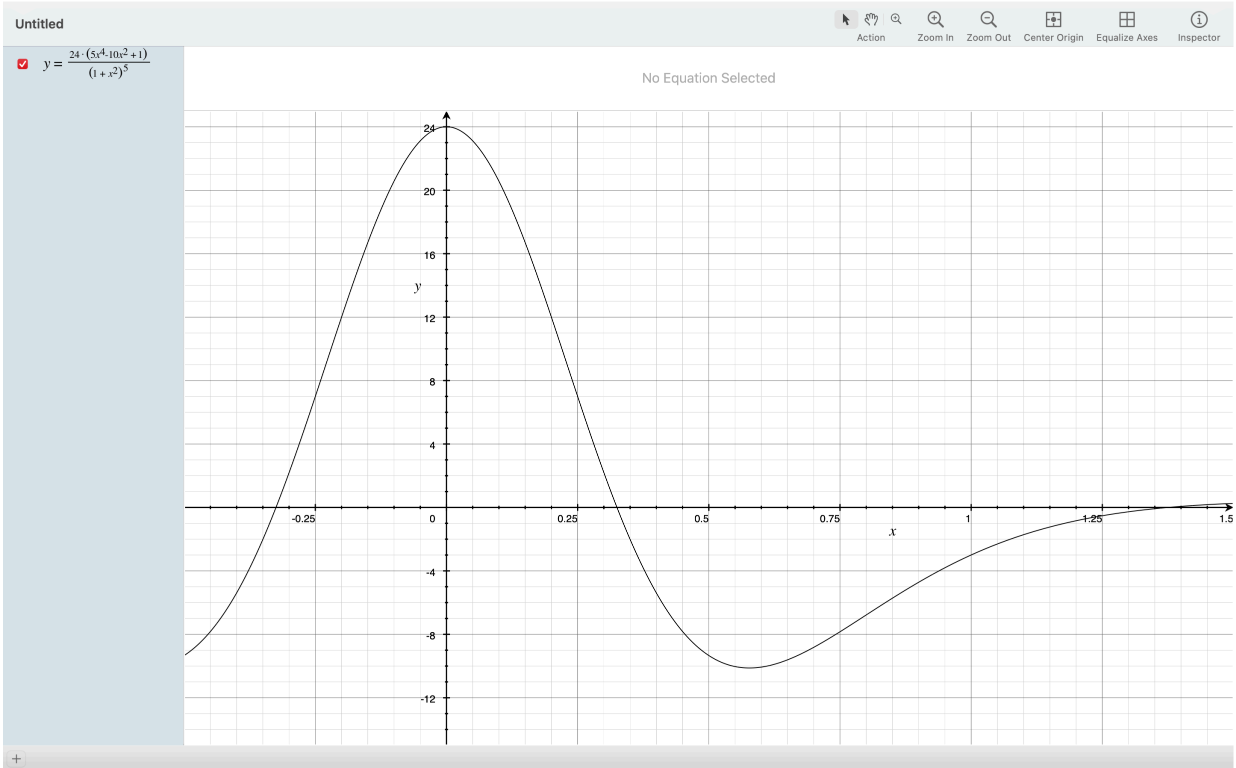
复合Simpson公式

复合Simpson公式的余项为$-\frac{h^4}{2880}(b-a)\cdot f^{(4)}(\eta)$. 现欲使绝对误差小于$0.5\times 10^{-8}$，代入上式并分别取$f_1(t)=\frac{1}{t}$, $f_1^{(4)}(t)=\frac{24}{t^5}\le 24$; $f_2(t)=\frac{1}{1+t^2}$, $f_2^{(4)}(t)=\frac{24(5t^4-10t^2+1)}{(1+t^2)^5}\le 24$, 求得$h_1\le 2.7832\times 10^{-2}$, $h_2\le 1.9680\times 10^{-2}$.

程序实现需要注意边界情况：由于我们选取的h不一定恰好等分积分区间，因此最后一小段的Simpson公式系数可能小于h，需要单独处理。

表达式	参考值	程序计算结果	绝对误差大小
ln2	0.6931471805599453	0.6931471817302685	1.1703e-09
pi	3.141592653589793	3.1415926535956142	5.8211e-12

$\ln 2$的误差基本与理论分析相符。π的误差相比理论分析小不少，但这是可以解释的：理论分析中，我们取$[0,1]$上四次导数最大值$f^{(4)}(0)=24$做估计，但实际上$\frac{1}{1+t^2}$在原点附近的变化非常剧烈：



因此由于估计余项时η不确定，很有可能绝对值远小于24。我们估计的步长只能保证误差一定小于给定的误差限制，不能保证误差一定和误差限制差不多。

复合Gauss公式

复合Gauss公式的余项为$\frac{h^4}{4320}(b-a)\cdot f^{(4)}(\xi_1)$. 现欲使绝对误差小于$0.5\times10^{-8}$，利用与上一部分相似的计算可得$h_1 \le 3.0801\times10^{-2}$，$h_2 \le 2.1779\times10^{-2}$，进而求出$n_1 \ge 32.467, n_2 \ge 45.915 \Rightarrow n_1 \ge 33, n_2 \ge 46$. 由于Gauss公式是等距分割，因此不需要担心边界情况。

表达式	参考值	程序计算结果	绝对误差大小
ln2	0.6931471805599453	0.6931471794626659	1.0973e-9
pi	3.141592653589793	3.1415926535898406	4.7518e-14

两个程序运行结果：

Ex7 — -zsh — 80×24

```
(base) casorazitora@allaxomai Ex7 % python assignment_7.py
Reference value: ln(2) = 0.6931471805599453, pi = 3.141592653589793

Composite simpson yields: ln(2) = 0.6931471817302685, pi = 3.1415926535956142
Absolute error: 1.1703231717064e-09 & 5.821121362714621e-12

Composite gaussian yields: ln(2) = 0.6931471794626659, pi = 3.1415926535898406
Absolute error: 1.0972793784702617e-09 & 4.75175454539567e-14
(base) casorazitora@allaxomai Ex7 %
```