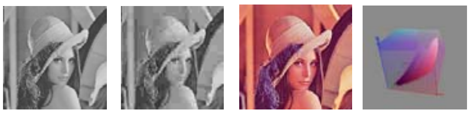
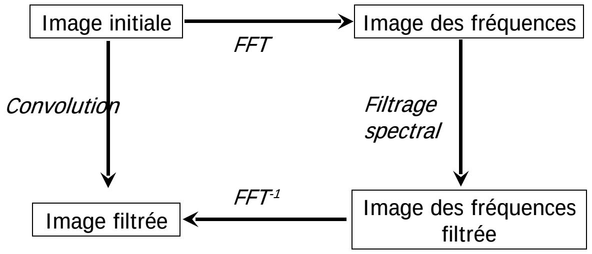
Traitement d'images

Convolution



Filtrage



Dans le ***domaine spatial****, le filtrage se fait par* ***convolution****.*
Dans le ***domaine spectral****, il se fait par* ***multiplication*** *(ou* ***masquage*** *de l'image).*

Convolution

Convolution de fonctions continues

En 1D

$$g(x) = f * h|_x = f(x) * h(x)$$

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)h(u)du$$

Réponse impulsionnelle : réponse du système à une impulsion de Dirac

$$\delta * h|_x \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-u,)h(u)du = h(x\ )$$

En 2D

$$g(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u,y-v)h(u,v)dudv$$

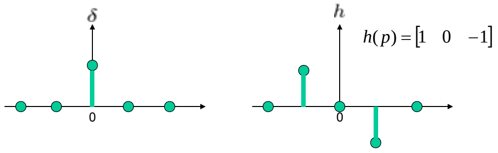
$$\delta * h|_{x,y} = g(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-u,y-v)h(u,v)dudv = h(x,y)$$

Convolution

Convolution de fonctions discretes

En 1D

$$g(p) = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} f(p-i)h(i)$$



Impulsion unité

Réponse impulsionnelle

En 2D

$$g(p,q) = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty}\sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} f(p-i,q-j)h(i,j)$$

Convolution

Convolution de fonctions discretes

$$g(p,q) = \sum_i \sum_j f(p-i,q-j)h(i,j)$$

Niveau de gris après convolution

Niveaux de gris initiaux

opérateur de convolution (noyau de convolution)

$$\delta * h|_{p,q} = g(p,q) = \sum_{(i,j)} \sum_{\in voisinage} \delta(p-i,q-j)h(i,j) = h(p,q)$$

Opération linéaire de voisinage

Masque ☞ *réponse impulsionnelle à support borné*

Convolution

Propriétés de la convolution

- Additivité/distributivité $(f * h_1) + (f * h_2) = f * (h_1 + h_2)$
- Commutativité
- Associativité du produit de convolution
- Norme d'un opérateur $\|h\| = \sum_{(p,q)} \sum_{\in voisinage} h(p,q)$
- Séparabilité d'un opérateur de convolution

Un filtre de convolution est dit séparable si $h(x,y) = h_x(x).h_y(y)$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' & ba' & cb' \\ ab' & bb' & cb' \\ ac' & bc' & cc' \end{bmatrix}$$

Traitement selon x

Traitement selon y

Convolution

Convolution de fonctions discretes

Elément neutre de la convolution

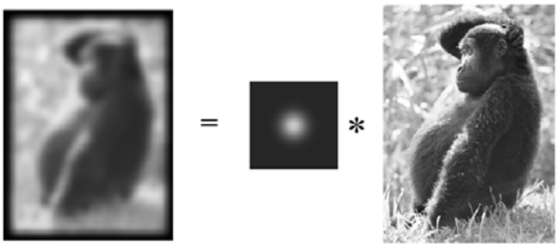
0	0	0
0	1	0
0	0	0

$$\delta * f|_{p,q} = f(p,q)$$

Masque de convolution

- Le masque de convolution est le plus souvent
  - Carré
  - De taille 3x3 ou 5x5 (ou plus, mais impair)
- Ce masque représente un filtre linéaire permettant de modifier l'image.
- La plupart du temps, on divisera le résultat de la convolution par la somme des coefficients du masque.
  - Pour éviter de modifier l'entropie de l'image, la somme des coefficients doit être égale à 1.
  - Dans le cas du Laplacien (plus loin), la somme sera égale à zéro.

Exemple de convolution 2D



Convolution

Convolution de fonctions discretes

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

h(p,q) ⇒

h(-2,-2)	h(-1,-2)	h0,-2)	h(1,-2)	h(2,-2)
h(-2,-1)	h(-1,-1)	h0,-1)	h(1,-1)	h(2,-1)
h(-2, 0)	h(-1,0)	h0,0)	h(1,0)	h(2,0)
h(-2,1)	h(-1,1)	h0,1)	h(1,1)	h(2,1)
H(-2,2)	h(-1,2)	h0,2)	h(1,2)	h(2,2)

Réponse impulsionnelle discrète

Convolution

Convolution de fonctions discretes

$$g(p,q) = \sum_i \sum_j f(p-i,q-j)h(i,j)$$

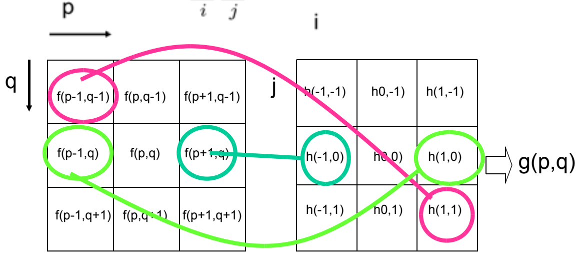


Image source

Réponse impulsionnelle

Convolution

Convolution de fonctions discretes

$$g(p,q) = \sum_i \sum_j f(p-i,q-j)h(i,j)$$

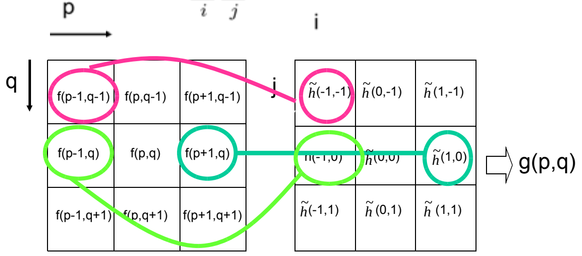


Image source

Masque de convolution

$$\tilde{h}(p,q) = h(-p,-q)$$

Convolution

Convolution de fonctions discretes

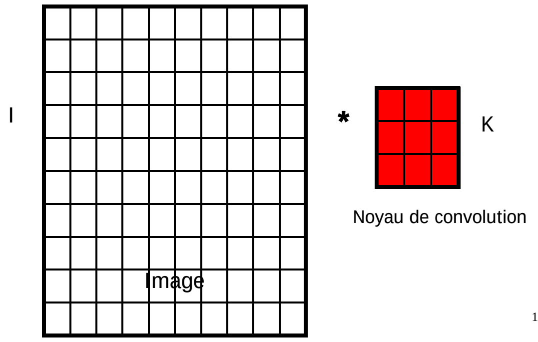
Exemple de convolution: le filtre moyenneur

1	1	1
1	1	1
1	1	1

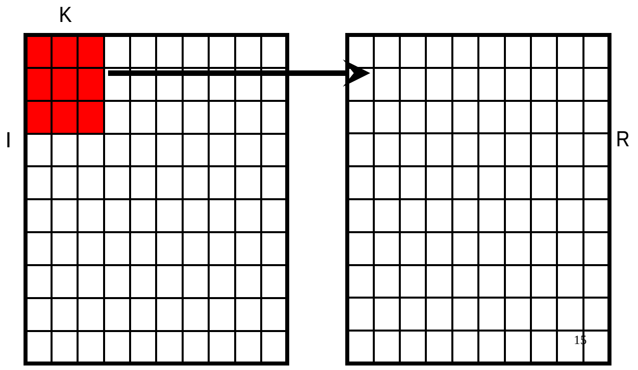
Filtre moyenneur

(au facteur de pondération 1/9 près)

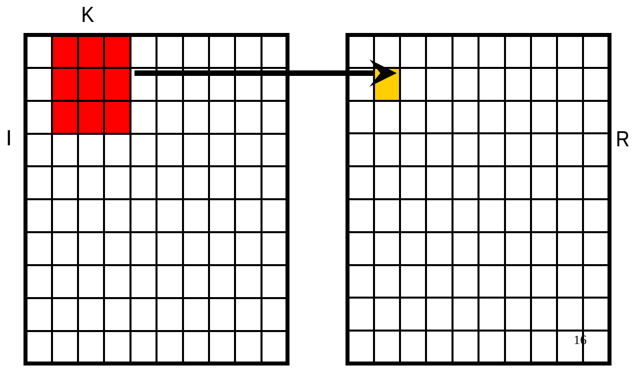
Convolution numérique R = I*K



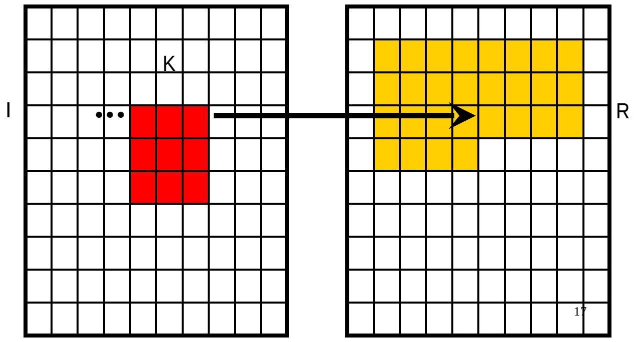
$$\begin{aligned} R(1,1) = {} & I(0,0)\ K(0,0) + I(1,0)\ K(1,0) + I(2,0)\ K(2,0) \\ & + I(0,1)\ K(0,1) + I(1,1)\ K(1,1) + I(2,1)\ K(2,1) \\ & + I(0,2)\ K(0,2) + I(1,2)\ K(1,2) + I(2,2)\ K(2,2) \end{aligned}$$



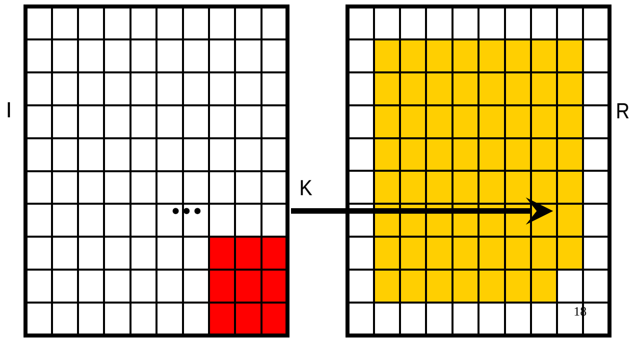
$$\begin{aligned} R(2,1) = {} & I(1,0)\ K(0,0) + I(2,0)\ K(1,0) + I(3,0)\ K(2,0) \\ & + I(1,1)\ K(0,1) + I(2,1)\ K(1,1) + I(3,1)\ K(2,1) \\ & + I(1,2)\ K(0,2) + I(2,2)\ K(1,2) + I(3,2)\ K(2,2) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} R(x,y) = {} & I(x-1,y-1)\ K(0,0) + I(x, y-1)\ K(1,0) + I(x+1, y-1)\ K(2,0) \\ & + I(x-1,y)\ K(0,1) + I(x,y)\ K(1,1) + I(x+1,y)\ K(2,1) \\ & + I(x-1,y+1)\ K(0,2) + I(x,y+1)\ K(1,2) + I(x+1,y+1)\ K(2,2) \end{aligned}$$

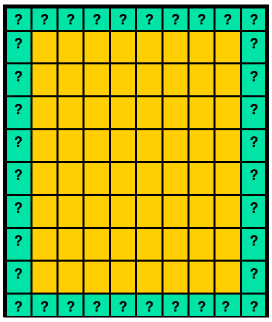


$$\begin{aligned} R(N-2,M-2) = {} & I(N-3,M-3)\ K(0,0) + I(N-2,M-3)\ K(0,1) + I(N-1,M-3)\ K(0,3) \\ & + I(N-3,M-2)\ K(1,0) + I(N-2,M-2)\ K(1,1) + I(N-1,M-2)\ K(1,2) \\ & + I(N-3,M-1)\ K(2,0) + I(N-2,M-1\ )K(2,1) + I(N-1,M-1)\ K(2,2) \end{aligned}$$



Convolution numérique

- Problème : Que faire avec les bords de l'image ?
  - Mettre à zéro (0)
  - Convolution partielle
    - Sur une portion du noyau
  - Miroir de l'image
    - f(x-1,y) = f(x+1,y)
  - ... (pas de solution miracle)



Le filtre moyenne

- Le filtre moyenne
  - Permet de lisser l'image (smoothing)
  - Remplace chaque pixel par la valeur moyenne de ses voisins
  - Réduit le bruit
  - Réduit les détails non-important
  - Brouille ou rend floue l'image (blur edges)

- Filtre dont tous les coefficients sont égaux.
- Exemple de filtres moyennes :

1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9

ou 1/9

1	1	1
1	1	1
1	1	1

3x3

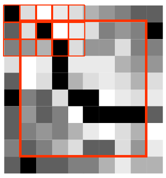
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

5x5

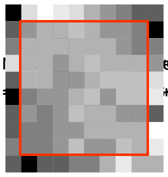
Filtre moyenneur

1/9

1	1	1
1	1	1
1	1	1



0	5	7	6	5	4	3	2	1	1
1	5	0	7	6	5	2	3	2	0
2	3	4	0	5	3	3	5	2	2
5	7	6	0	6	6	6	4	3	3
1	7	5	0	4	5	6	5	4	5
0	2	1	5	0	0	7	6	5	6
1	3	1	2	7	0	0	0	0	1
1	2	3	2	4	6	7	5	4	7
2	1	2	3	5	1	1	5	2	6
1	0	1	1	2	2	3	6	4	4



el central

+4)/9 = 4

0	5	7	6	5	4	3	2	1	1
1	3	4	4	5	4	3	3	2	0
2	4	4	4	4	4	4	3	2	2
5	4	4	3	4	5	4	4	4	3
1	4	4	3	3	4	5	5	5	5
0	2	3	3	4	5	3	5	5	6
1	3	2	3	5	4	4	3	3	1
1	2	2	3	3	4	4	4	4	7
2	2	2	3	5	3	3	5	4	6
1	0	1	1	2	2	3	6	4	4

Bords non traités

D'après M. Dai, Univ. Bordeaux 3

Filtre moyenneur

Image originale **Image moyennée (3x3)**

Filtre moyenneur

Image originale **Image moyennée (9x9)**

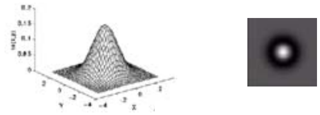
Effet de flou d'autant plus marqué
que la taille du filtre est grande

Filtre moyenneur

Image originale **Image moyennée (7x7)**

Filtres binomiaux et gaussiens

Filtrage gaussien 2D : $g(x,y,\sigma) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$



Réponse impulsionnelle
du filtre gaussien en 2D

Propriétés :

- Approche optimale
- Séparable (gaussienne 2D=produit de 2 gaussiennes 1D)
- Isotrope
- Approximation par masque de convolution
- σ facteur d’échelle spatiale → taille du filtre

Remarque : filtrage de type passe-bas

Filtres binomiaux et gaussiens

Filtre binomiaux → approximations de filtres gaussiens finis discrets

Triangle de Pascal	Niveau (n)	Somme	Variance σ_n^2
1	0	1	0
1 1	1	2	1/4
1 2 1	2	4	1/2
1 3 3 1	3	8	3/4
1 4 6 4 1	4	16	1
1 5 10 10 5 1	5	32	5/4

Construction des filtres : $h_n(p) = \underbrace{[1 \quad 1] * \ldots * [1 \quad 1]}_{n \text{ convolutions}}$

$$\sum h_n(p) = 2^n$$

$$\sigma_n^2 = \frac{n}{4}$$

$$h_2(p) = [1 \quad 2 \quad 1]$$

Filtres binomiaux et gaussiens

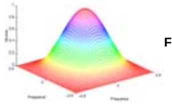
Exemples en 2D

$$h_2(p,q) = [1 \quad 2 \quad 1] * \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

1/16

1	2	1
2	4	2
1	2	1

Approximation de $g(x,y,\frac{\sqrt{2}}{2})$



Fonction de transfert du filtre binomial 3x3

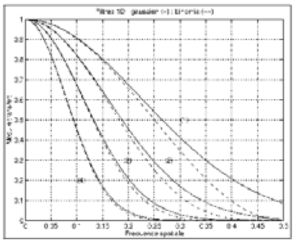
$$h_4(p,q) = [1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1] * \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

1/256

1	4	6	4	1
4	16	24	16	4
6	24	36	24	6
4	16	24	16	4
1	4	6	4	1

Approximation de $g(x,y,1)$

Filtres binomiaux et gaussiens



(1) Binomial $\alpha_2 h_2$ et filtre gaussien $g(x,\frac{\sqrt{2}}{2})$
(2) Binomial $\alpha_4 h_4$ et filtre gaussien $g(x,1)$
(3) Binomial $\alpha_8 h_8$ et filtre gaussien $g(x,\sqrt{2})$
(4) Binomial $\alpha_{16} h_{16}$ et filtre gaussien $g(x,2)$

Filtres binomiaux et gaussiens

Image originale

Image originale bruitée

Filtres binomiaux et gaussiens

Image originale bruitée

Image filtrée $\frac{1}{16}.h_2$

Image filtrée $\frac{1}{256}.h_4$

Image filtrée $g(x,y,1)$

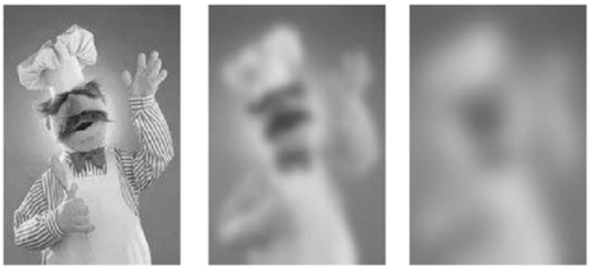
Filtres binomiaux et gaussiens

Image filtrée $\frac{1}{256}.h_4$

Image filtrée $g(x,y,1)$

Image de la différence

Exemples de filtres moyennes



Original Moyenne 5x5 Moyenne 11x11

Source : monkey.geog.ucsb.edu/mh/115b/filter.pdf

Exemples de filtres gaussiens

Original Gauss 5x5 Gauss 11x11

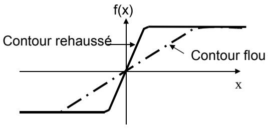
Décomposition d'un filtre

•Pour accélérer les traitements, il est possible de décomposer les filtres en sous-filtres équivalents qu'on passe un après l'autre.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Réhaussement de contraste

- **But du réhaussement de contraste :**
  - Diminuer l'étendue de la zone de transition sans affecter l'intensité moyenne des régions situées de part et d'autre de cette transition



  - Limite le risque de fusions intempestives de régions distinctes lors de la phase de segmentation
    - ➢ Réduire le bruit dans les zones stationnaires, et éviter les phénomènes de dépassement
- **Méthodes utilisées** :
    - ➢ Laplacien, filtrage d'ordre adaptatif, opérateurs morphologiques

---

- Le rehaussement de contraste
  - – Convolution de l'image avec un filtre rehausseur

-1/6	-2/3	-1/6
-2/3	26/6	-2/3
-1/6	-2/3	-1/6

Réhaussement de contraste par Laplacien

- **Approximations du Laplacien**

$$\frac{1}{4} \cdot \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -4 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline\end{array} \qquad \frac{1}{8} \cdot \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & -8 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array}$$

Laplacien : dérivée seconde

- **Principe du rehaussement**
  - Soustraction à l'image initiale d'une proportion de son Laplacien

$$f_a(p,q) = f(p,q) - \lambda \triangle f(p,q)$$

  - Si images bruitées, tendance à amplifier le bruit, alors :
    - ⇨ utilisation d'un opérateur Laplacien filtré Φ

$$f_a(p,q) = (1+\lambda) f(p,q) - \lambda \Phi(p,q)$$

(Φ : différenciation de 2 filtres passe-bas)

Exemple de réhaussement

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline & -1 & \\ \hline -1 & 5 & -1 \\ \hline & -1 & \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|c|}\hline & -1 & \\ \hline -1 & 4 & -1 \\ \hline & -1 & \\ \hline\end{array}$$

$$f_a(p,q) = f(p,q) - \triangle f(p,q)$$

3	5	3
7	6	5
6	5	4

Image originale

→

3	5	3
7	8	5
6	5	4

Image rehaussée

(5x6)-7-5-5-5=8

Exemple de réhaussement

Image originale

Image rehaussée

Image des différences

Exemples de réhaussement de contraste

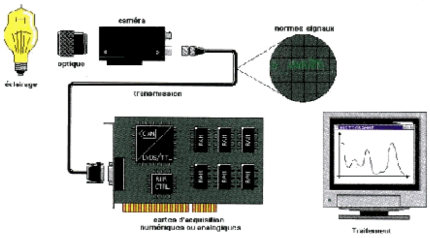
Image originale

Rehaussement
de contraste
par le laplacien

Rehaussement
de contraste
par morphologie

A propos du bruit

Bruit lié au contexte de l'acquisition
Bruit lié au capteur
Bruit lié à l'échantillonnage
Bruit lié à la nature de la scène



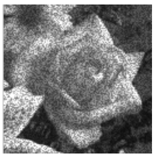
Dégradations subies par l'image

Plusieurs types de bruit :

- bruit "poivre-et-sel" (de type impulsionnel) ;
- bruit de "speckle " (bruit granulaire de type multiplicatif);
- bruit gaussien;

Salt and pepper

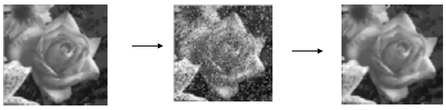
Gaussien



Speckle

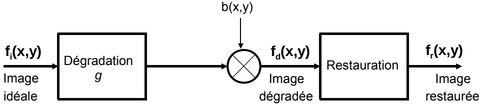
Objet : la réduction, voire l'élimination des distorsions introduites (bruits) par le système d'acquisition de l'image.

But : obtenir une image qui soit la plus proche possible de l'image idéale qui aurait été obtenue si le système d'acquisition était parfait.



Dégradations subies par l'image

Dans l'ensemble des dégradations possibles d'une image, il existe une classe intéressante : les *transformations linéaires*. Dans ce cas, on suppose les dégradations invariantes spatialement ce qui permet d'écrire le modèle suivant :



$$f_d(x,y) = [g * f_i](x,y) + b(x,y)$$

Image dégradée à restaurer

Image initiale

Bruit additif

réponse impulsionnelle du système linéaire modèle de la source de dégradation

---

Modèle de dégradation

$$f_d(x,y) = g\left(f_i(x,y)\right) + b(x,y)$$

Les méthodes de restauration sont alors basées sur la recherche de la fonction f_i , l'opérateur *g* et le bruit *b* étant connus.

Remarque :
Si *g* est l'identité, alors f_d est une version bruitée de f_i
☞ ***la restauration consiste alors à supprimer le bruit contenu dans l'image***

Filtre médian

- Pour nettoyer le bruit dans une image, il existe mieux que le filtre moyenne ou le filtre gaussien.
- Il s'agit du **filtre médian**.
- C'est un filtre non-linéaire, qui ne peut pas s'implémenter comme un produit de convolution.
- On remplace la valeur d'un pixel par la valeur médiane dans son voisinage NxN.

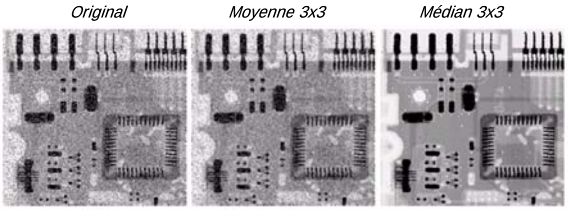
30	**10**	**20**
10	**250**	**20**
25	**10**	**30**

→ 10, 10, 10, 20, 20, 25, 30, 30, 250

bruit

médiane

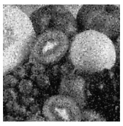
Exemple de filtre médian

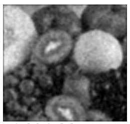

Original *Moyenne 3x3* *Médian 3x3*

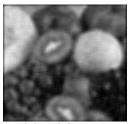
a b c

FIGURE 3.37 (a) X-ray image of circuit board corrupted by salt-and-pepper noise. (b) Noise reduction with a 3 × 3 averaging mask. (c) Noise reduction with a 3 × 3 median filter. (Original image courtesy of Mr. Joseph E. Pascente, Lixi, Inc.)

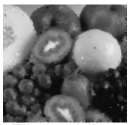
Nettoyage du bruit dans une image


Bruit "poivre et sel"


3 X 3 Moyenne


5 X 5 Moyenne


7 X 7 Moyenne


Filtre médian

Filtrage par petits noyaux

Cas 1

On se propose d'étudier les propriétés du filtre laplacien représenté par le masque de convolution g de taille 3x3 suivant :

$1/8$	$1/8$	$1/8$
$1/8$	-1	$1/8$
$1/8$	$1/8$	$1/8$

Ce filtre est appliqué deux fois sur une image de dimension M xN.
Calculer le masque de convolution de taille 5 x5 équivalent à l'application deux fois du masque g.

Cas 2

On applique les filtres H1 et H2 sur l'image dont les masques sont les suivants :

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \; H_2 = \begin{bmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & \end{bmatrix}.$$

- Déterminer le coefficient pondérateur à appliquer à H_1 et à H_2 pour normaliser le filtre.
- A quelles familles de filtres appartiennent H_1 et H_2 ?
- Donner le masque du filtre équivalent à la convolution successive de l'image par H_1 puis H_2.

Généralisation

- Montrer que l'on a l'équation suivante notée $g = h \star h'$ avec

$$\begin{bmatrix} a_5 & a_4 & a_2 & a_4 & a_5 \\ a_4 & a_3 & a_1 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_4 & a_3 & a_1 & a_3 & a_4 \\ a_5 & a_4 & a_2 & a_4 & a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & b & c \\ b & a & b \\ c & b & c \end{bmatrix} \star \begin{bmatrix} c' & b' & c' \\ b' & a' & b' \\ c' & b' & c' \end{bmatrix}.$$

- Déterminer les équations donnant a, b, c, a', b', c' en fonction de $a_0, .., a_5$.
- Montrer l'intérêt de cette méthode de convolution pour filtrer une image de dimension M x N à partir de noyaux 3 x 3.