第八章 玻色统计和费米统计

8.1 热力学量的统计表达式

由玻尔兹曼分布讨论了定域系统和满足经典极限条件（非简并条件）的近独立粒子系统平衡性质：

非简并条件为：$e^{\alpha} = \dfrac{V}{N}\left(\dfrac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2} >> 1$

或： $n\lambda^3 = \dfrac{N}{V}\left(\dfrac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2} << 1$

非简并气体条件！由玻尔兹曼分布处理

第八章 玻色统计和费米统计

8.1 热力学量的统计表达式

不满足简并条件的气体为非简并气体，需要用玻色和费米分布处理。

推导玻色系统和费米热力学量的统计表达式：

最概然分布之缺陷：$\ln N! = N(\ln N - 1)$

系综理论的观点：系统与源达到平衡，α，β，y已知

N，E未知

最概然分布和平均分布！

第八章 玻色统计和费米统计

8.1 热力学量的统计表达式

此处采用平均分布的观点处理：

1）α，β和y已知

2）热力学量表达为α，β和y的函数

玻色系统：

系统总粒子数： $\bar{N}=\sum_l a_l=\sum_l \frac{\omega_l}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l}-1}$

引入巨配分函数： $\Xi=\prod_l\left[1-e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}\right]^{-\omega_l}$

取对数有：$\ln\Xi=-\sum_l \omega_l \ln\left(1-e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}\right)$

第八章 玻色统计和费米统计

8.1 热力学量的统计表达式

系统平均总粒子数：

$$\overline{N} = -\frac{\partial}{\partial \alpha}\ln \Xi$$

内能为系统中粒子无规运动总能量的统计平均：

$$U = \sum_l \varepsilon_l a_l = \sum_l \frac{\varepsilon_l \omega_l}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l}-1}$$ 也可写为： $$U = -\frac{\partial}{\partial \beta}\ln \Xi$$

外界对系统的广义作用力：$$Y = \sum_l \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial y} a_l = \sum_l \frac{\omega_l}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l}-1}\frac{\partial \varepsilon_l}{\partial y}$$

也可表示为：$$Y = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial y}\ln \Xi$$

$$p = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial V}\ln \Xi$$

第八章 玻色统计和费米统计

8.1 热力学量的统计表达式

由上面的结果有：

$$\beta\left(dU - Ydy + \frac{\alpha}{\beta}d\overline{N}\right) = -\beta d\left(\frac{\partial \ln \Xi}{\partial \beta}\right) + \frac{\partial \ln \Xi}{\partial y}dy - \alpha d\left(\frac{\partial \ln \Xi}{\partial \alpha}\right)$$

$$d\ln \Xi = \frac{\partial \ln \Xi}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial \ln \Xi}{\partial \beta}d\beta + \frac{\partial \ln \Xi}{\partial y}dy$$

于是有：$\beta\left(dU - Ydy + \frac{\alpha}{\beta}d\overline{N}\right) = d\left(\ln \Xi - \alpha\frac{\partial}{\partial \alpha}\ln \Xi - \beta\frac{\partial}{\partial \beta}\ln \Xi\right)$

β为$\left(dU - Ydy + \frac{\alpha}{\beta}d\overline{N}\right)$的积分因子，在热力学中$dU - Ydy + \frac{\alpha}{\beta}d\overline{N}$的积分因子为$\frac{1}{T}$

$$\frac{1}{T}\left(dU - Ydy - \mu d\overline{N}\right) = dS$$

第八章 玻色统计和费米统计

8.1 热力学量的统计表达式

比较可知： $$\beta=\frac{1}{kT},\quad \alpha=-\frac{\mu}{kT}$$

所以： $$dS=kd\left(\ln\Xi-\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\Xi-\beta\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\Xi\right)$$

$$S=k\left(\ln\Xi-\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\Xi-\beta\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\Xi\right)$$
$$=k\left(\ln\Xi+\alpha\overline{N}+\beta U\right)$$

可得： $$S=k\ln\Omega$$

第八章 玻色统计和费米统计

8.1 热力学量的统计表达式

对于费米系统，只要将巨配分函数改为：

$$\Xi = \prod_l \Xi_l = \prod_l \left[1 + e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}\right]^{\omega_l}$$

取对数有：$\ln\Xi = \sum_l \omega_l \ln\left(1 + e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}\right)$

可得到热力学量的统计表达式。

- 由粒子能级和能级简并度，可以计算出巨配分函数
- 由巨配分函数得到系统热力学函数，确定平衡性质

$\ln\Xi$ 是以α，β，γ为自然变量的特性函数

第八章 玻色统计和费米统计

8.1 热力学量的统计表达式

以T,V,μ为自变量的特性函数为巨热力势：$J=U-TS-\overline{N}\mu$

$$J=-kT\ln\Xi$$

第八章 玻色统计和费米统计

8.2 弱简并理想玻色气体和费米气体

弱简并系统：

不考虑分子内部结构，只要平动自由度分子的能为：

$$\varepsilon = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right)$$

在体积V内，ε到$\varepsilon + d\varepsilon$的能量范围内，分子可能的微观状态数为：

$$D(\varepsilon)d\varepsilon = g\,\frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\varepsilon^{1/2}d\varepsilon$$

g为由于粒子可能具有自旋而引入的简并度。

第八章 玻色统计和费米统计

8.2 弱简并理想玻色气体和费米气体

系统分子总数满足：

$$N = g\frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}}{e^{\alpha+\beta\varepsilon}\pm 1}d\varepsilon \qquad (\text{可确定}\alpha)$$

系统内能为：

$$U = g\frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2}}{e^{\alpha+\beta\varepsilon}\pm 1}d\varepsilon$$

引入变量 $x = \beta\varepsilon$

$$N = g\frac{2\pi V}{h^3}(2mkT)^{3/2}\int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{e^{\alpha+x}\pm 1}d\varepsilon$$

$$U = g\frac{2\pi V}{h^3}(2mkT)^{3/2}\int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^{\alpha+x}\pm 1}d\varepsilon$$

第八章 玻色统计和费米统计

8.2 弱简并理想玻色气体和费米气体

两式被积函数分母为：

$$\frac{1}{e^{\alpha+x}\pm 1}=\frac{1}{e^{\alpha+x}\left(1\pm e^{-\alpha-x}\right)}\approx e^{-\alpha-x}\left(1\mp e^{-\alpha-x}\right)\qquad e^{-\alpha-x}\text{为小量时}$$

于是可求出：

$$N=g\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}Ve^{-\alpha}\left[1\mp\frac{1}{2^{3/2}e^{-\alpha}}\right]$$

$$U=\frac{3}{2}g\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}VkTe^{-\alpha}\left[1\mp\frac{1}{2^{5/2}e^{-\alpha}}\right]$$

两式相除有：

$$U=\frac{3}{2}NkT\left[1\pm\frac{1}{4\sqrt{2}}e^{-\alpha}\right]$$

第八章 玻色统计和费米统计

8.2 弱简并理想玻色气体和费米气体

$e^{-\alpha}$取零级近似，用玻耳兹曼分布的结果：

$$e^{-\alpha} = \frac{N}{V}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2}\frac{1}{g}$$

于是可以求得：

$$U = \frac{3}{2}NkT\left[1 \pm \frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{1}{g}\frac{N}{V}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2}\right]$$

$$U = \frac{3}{2}NkT\left[1 \pm \frac{1}{4\sqrt{2}g}n\lambda^3\right]$$

由玻耳兹曼分布得到的内能

由微观粒子全同性引起的量子关联所导致的内能。

第八章 玻色统计和费米统计

8.2 弱简并理想玻色气体和费米气体

费米气体的附加能量为正　　等效排斥作用

玻色气体的附加能量为负　　等效吸引作用

第八章 玻色统计和费米统计

8.3 玻色 - 爱因斯坦凝聚

量子统计关联对系统宏观性质的影响：

- 弱简并时，影响微弱
- 简并强时，玻色气体会出现BEC

由N个全同、近独立的玻色子组成的系统，温度为T、体积为V，设粒子自旋为零，由玻色分布有：

$$a_l = \frac{\omega_l}{e^{\frac{\varepsilon_l - \mu}{kT}} - 1} \qquad \left(\text{处在}\varepsilon_l\text{能级上的粒子数!}\right)$$

第八章 玻色统计和费米统计

8.3 玻色 - 爱因斯坦凝聚

由于处在任一能级的粒子数都不能取负值：

$$a_l > 0 \Rightarrow e^{\frac{\varepsilon_l - \mu}{kT}} > 1 \qquad \Rightarrow \varepsilon_l > \mu$$

理想玻色气体的化学势必须低于粒子最低能级的能量。

如果取最低能量为能量的零点有：

$$\mu < 0$$

化学势由下式确定：
$$\frac{1}{V}\sum_l \frac{\omega_l}{e^{\frac{\varepsilon_l - \mu}{kT}} - 1} = \frac{N}{V} = n$$

第八章 玻色统计和费米统计

8.3 玻色 - 爱因斯坦凝聚

在能级和简并度给定的情况下，温度越低，化学势越高！

$$\frac{2\pi}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}-1}=n$$

化学势随温度降低而升高，当温度降到临界温度时，

$$\mu \to -0 \qquad \Rightarrow e^{-\frac{\mu}{kT_c}} \to 1$$

临界温度由下式定出：

$$\frac{2\pi}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT_C}}-1}=n$$

第八章 玻色统计和费米统计

8.3 玻色 - 爱因斯坦凝聚

令： $x = \varepsilon / kT_c$

$$\frac{2\pi}{h^3}(2mkT_c)^{3/2}\int_0^\infty \frac{x^{1/2}dx}{e^x - 1} = n$$

可得：

$$T_c = \frac{2\pi}{(2.612)^{2/3}}\frac{\hbar^2}{mk}(n)^{2/3}$$

当$T < T_c$时会出现什么现象？

第八章 玻色统计和费米统计

8.3 玻色 - 爱因斯坦凝聚

当$T > T_c$用积分代替求和，误差可以忽略！

当$T < T_c$用积分代替求和，

$\varepsilon = 0$项引起的误差不可以忽略！

$$\frac{2\pi}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}-1} = n \quad \Rightarrow \quad n_0(T) + \frac{2\pi}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}}-1} = n$$

温度T时处在$\varepsilon = 0$的粒子数密度

温度T时处在激发能级$\varepsilon > 0$的粒子数密度：$n_{\varepsilon>0}$

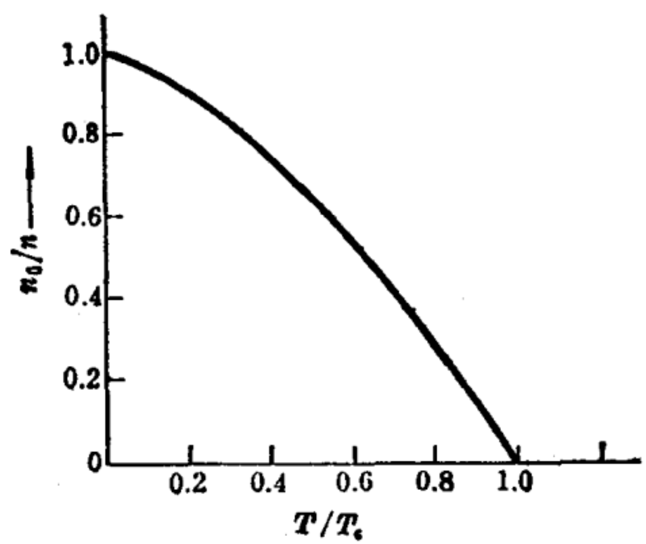
第八章 玻色统计和费米统计

8.3 玻色 - 爱因斯坦凝聚

$$n_{\varepsilon>0}=\frac{2\pi}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^\infty\frac{\varepsilon^{1/2}d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}}-1}=n\left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}$$

整理后可得，温度T时处在最低能级的粒子数密度为：

$$n_0(T)=n\left[1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}\right]$$



第八章 玻色统计和费米统计

8.3 玻色 - 爱因斯坦凝聚

- 绝对零度下粒子全部处在零点，**BEC**
- **BEC**粒子集合称为玻色凝聚体
- 玻色凝聚体能量、动量和熵都为零

当$T < T_C$时，理想玻色气体的内能处在能级$\varepsilon > 0$的粒子能量的统计平均值：

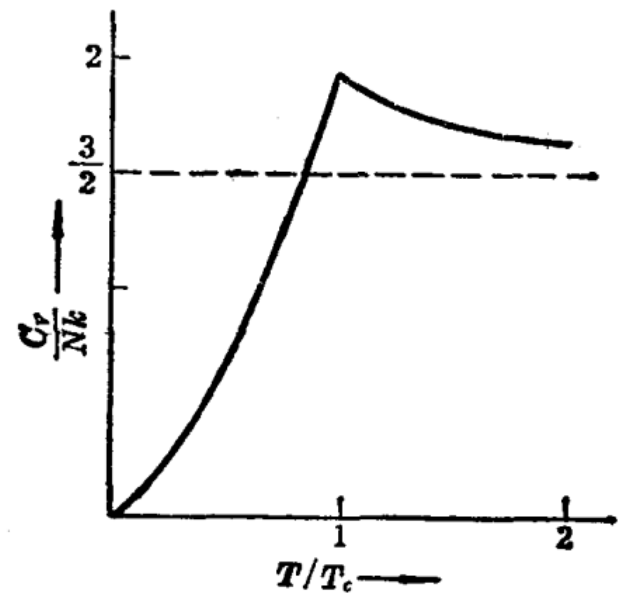
$$U = \frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2}d\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT}-1}$$

$$= 0.77NkT\left(\frac{T}{T_C}\right)^{3/2}$$

第八章 玻色统计和费米统计

8.3 玻色 - 爱因斯坦凝聚

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{5}{2}\frac{U}{T} = 1.925Nk\left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}$$



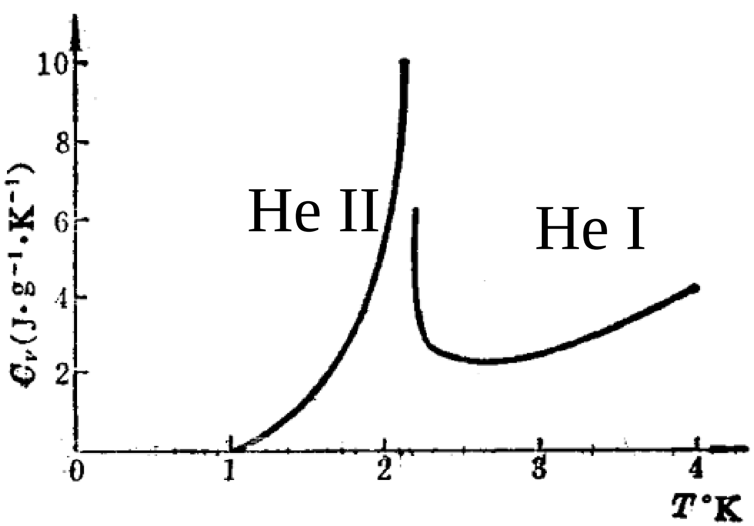
第八章 玻色统计和费米统计

8.3 玻色 - 爱因斯坦凝聚

^4He

T=2.17K发生一个相变，称为λ相变

Tc～3.13K



^{4}He

第八章 玻色统计和费米统计

8.3 玻色 - 爱因斯坦凝聚

$$T_c = \frac{2\pi}{(2.612)^{2/3}} \frac{\hbar^2}{mk} (n)^{2/3}$$ 可改写为：

$$n\left(\frac{h}{\sqrt{2\pi mkT_c}}\right)^3 = n\lambda^3 = 2.612$$

满足上式的原子热波长与平均间距具有相同的数量级！

量子统计关联起决定性作用： $n\lambda^3 \geq 2.612$

第八章 玻色统计和费米统计

8.4 光子气体

由玻色分布讨论平衡辐射问题。在平衡辐射中**光子数不守恒**！

内能密度和内能密度的频率分布只与温度有关、
内能密度与温度4次方成正比

经典统计存在困难

空窖内的辐射场看成光子气体：

$$\mathrm{p} = \hbar \mathrm{k} \qquad \omega = c\mathrm{k}$$

$$\varepsilon = \hbar \omega \qquad \varepsilon = cp$$

- 达到平衡后遵从玻色分布；
- 光子气体中光子数不守恒！

第八章 玻色统计和费米统计

8.4 光子气体

在推导玻色分布时，能量为常数，粒子数不确定只能引入一个拉氏乘子：

$$a_l = \frac{\omega_l}{e^{\beta\varepsilon_l} - 1}$$

在体积V的空窖内，p到$p + dp$的光子量子态数：

$$\frac{8\pi V}{h^3} p^2 dp \Longrightarrow \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega$$

在体积V的空窖内，ω到$\omega + d\omega$的平均光子数：

平均光子数为： $$\frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^2 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

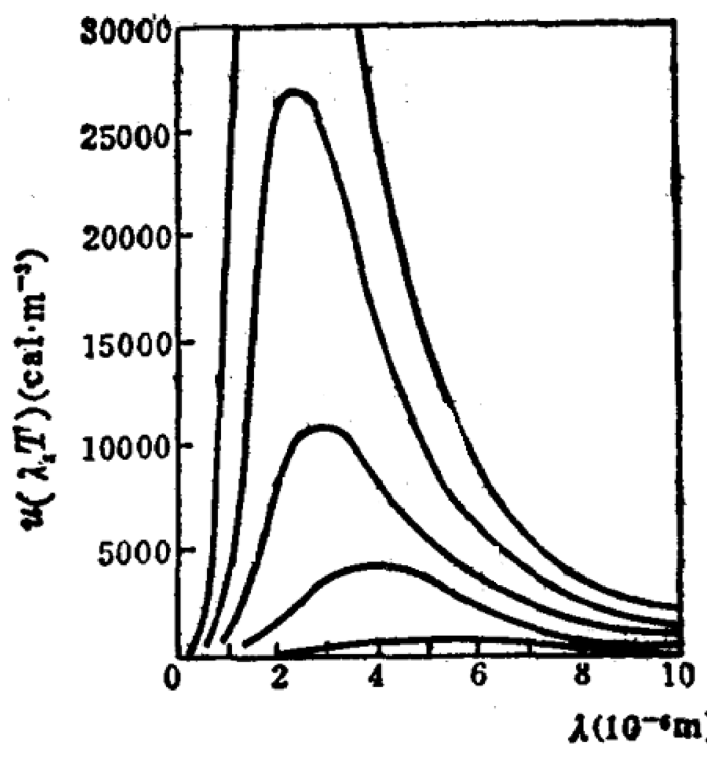
第八章 玻色统计和费米统计

8.4 光子气体

辐射场内能为：

$$U(\omega,T)d\omega=\frac{V}{\pi^2c^3}\frac{\hbar\omega^3}{e^{\hbar\omega/kT}-1}d\omega$$

普朗克公式！



第八章 玻色统计和费米统计

8.4 光子气体

两个极限：

$$\frac{\hbar\omega}{kT} << 1 \qquad e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} \approx 1 + \frac{\hbar\omega}{kT}$$

$$U(\omega,T)d\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3}\omega^2 kT d\omega$$ 瑞利-金斯公式

$$\frac{\hbar\omega}{kT} >> 1 \qquad e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} >> 1$$

$$U(\omega,T)d\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3}\hbar\omega^3 e^{-\hbar\omega/kT} d\omega$$ 维恩公式

第八章 玻色统计和费米统计

8.4 光子气体

普朗克公式的物理图象：

- 空窖内辐射场可以分解为无穷多单色平面波叠加！
- 每一个振动自由度得可能值为： $\varepsilon_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$
- 平面波、振动和光子状态相对应！

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

平均光子数 粒子

平均量子数 波动

$$\hbar\omega << (>>) kT$$

第八章 玻色统计和费米统计

8.4 光子气体

空窖辐射内能：

$$U = \frac{V}{\pi^2 c^3}\int_0^\infty \frac{\hbar\omega^3}{e^{\hbar\omega/kT}-1}d\omega$$

$$= \frac{\pi^2 k^4}{15c^3\hbar^3}VT^4$$

内能密度与温度四次方成正比！

内能分布有极大值：

$$\frac{\hbar\omega_m}{kT} \approx 2.822$$

极大点与温度成正比！

第八章 玻色统计和费米统计

8.4 光子气体

光子气体的热力学函数：

巨配分函数：

$$\ln \Xi = -\sum_l \omega_l \ln\left(1 - e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}\right)$$

$$= -\frac{V}{\pi^2 c^3}\int_0^\infty \omega^2 \ln\left(1 - e^{-\beta\varepsilon_l}\right) d\omega$$

$$x = \frac{\hbar\omega}{kT}$$

$$\ln \Xi = -\frac{V}{\pi^2 c^3}\frac{1}{(\beta\hbar)^3}\int_0^\infty x^2 \ln\left(1 - e^{-x}\right) dx = \frac{V}{3\pi^2 c^3}\frac{1}{(\beta\hbar)^3}\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

$$\ln \Xi = \frac{\pi^2 V}{45 c^3}\frac{1}{(\beta\hbar)^3}$$

第八章 玻色统计和费米统计

8.4 光子气体

光子气体内能： $U=-\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\Xi=\frac{\pi^2k^4V}{15c^3\hbar^3}T^4$

光子气体压强： $p=-\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial V}\ln\Xi=\frac{\pi^2k^4}{45c^3\hbar^3}T^4$

$$p=\frac{1}{3}\frac{U}{V}$$

光子气体熵： $S=k\left[\ln\Xi-\beta\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\Xi\right]=k\left[\ln\Xi+\beta U\right]=\frac{4\pi^2k^4}{45c^3\hbar^3}T^4V$

第八章 玻色统计和费米统计

8.5 金属中的自由电子气体

强简并费米气体性质？

金属模型：

- 离子形成规则点阵；
- 自由电子；
- 低温下电子和晶格对热容贡献大小不同。

第八章 玻色统计和费米统计

8.5 金属中的自由电子气体

金属中电子为强简并费米气体。

以铜为例：

$$n\lambda^3 = \frac{3.54\times10^7}{T^{3/2}}$$

当T＝300K时， $n\lambda^3 \approx 3400$ 很大！

说明金属中自由电子形成强简并的费米气体！

第八章 玻色统计和费米统计

8.5 金属中的自由电子气体

由费米分布，温度为T时，处在能量为ε的量子态的平均电子数为：

$$f = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}$$

考虑到电子自旋，在体积V内，$\varepsilon \sim \varepsilon + d\varepsilon$能量范围内电子填充数为：

$$\frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\varepsilon^{1/2}d\varepsilon$$

相应平均电子数为：$$\frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\frac{\varepsilon^{1/2}}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}d\varepsilon$$

第八章 玻色统计和费米统计

8.5 金属中的自由电子气体

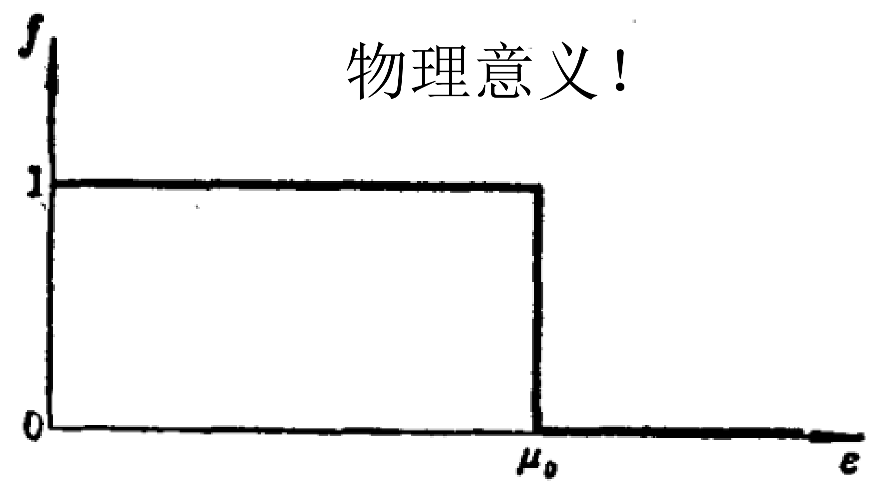
给定电子数N，温度T和体积V时，化学势由下式确定：

$$\frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}d\varepsilon = N$$

μ为温度T和电子密度N/V的函数！

T＝0K时的电子分布：

$$f = 1 \quad \varepsilon < \mu(0)$$
$$f = 0 \quad \varepsilon > \mu(0)$$



物理意义！

第八章 玻色统计和费米统计

8.5 金属中的自由电子气体

$$\frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^{\mu(0)}\varepsilon^{1/2}d\varepsilon = N$$

可得：

$$\mu(0)=\frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{2/3}=\varepsilon_F$$ 费米能级！

令 $\varepsilon_F=\dfrac{p_F^2}{2m}\Rightarrow p_F=\left(3\pi^2 n\right)^{1/3}\hbar$ 费米动量！

$$v_F=\frac{p_F}{m}$$ 费米速度！

费米温度！

$$kT_F=\mu(0)$$

第八章 玻色统计和费米统计

8.5 金属中的自由电子气体

代入铜的参数可知：铜 $T_F = 8.2\times10^4 K$

0K时电子内能为：

$$U(0) = \frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^{\mu(0)} \varepsilon^{3/2} d\varepsilon = \frac{3N}{5}\mu(0)$$

电子压强为：

$$p(0) = \frac{2}{3}\frac{U(0)}{V} = \frac{2}{5}n\mu(0)$$

铜的电子压强为$3.8\times10^{10} Pa$

- 泡利不相容原理，电子气体具有高密度；
- 被电子与离子的静电吸引力补偿。

第八章 玻色统计和费米统计

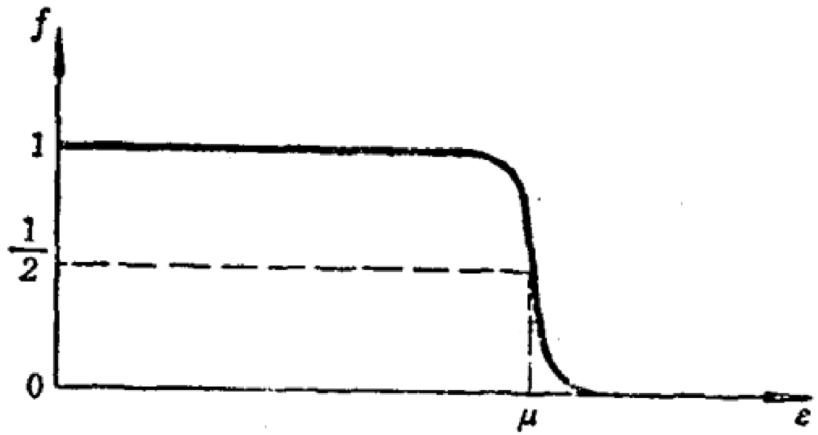
8.5 金属中的自由电子气体

T>0K时的电子分布：

$$f > \frac{1}{2} \quad \varepsilon < \mu$$

$$f = \frac{1}{2} \quad \varepsilon = \mu$$

$$f < \frac{1}{2} \quad \varepsilon > \mu$$

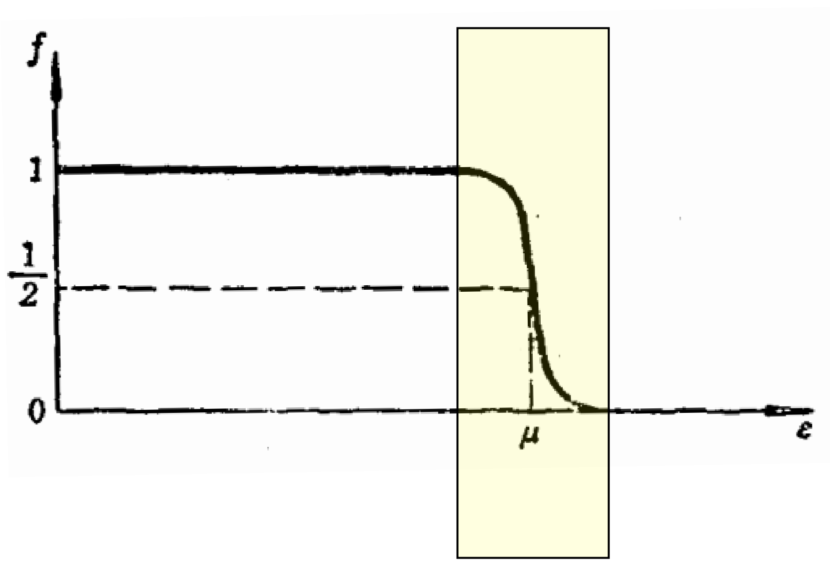


$kT << \mu(0)$即$T << T_F$的情况下，电子气体分布与0K时差别不大！

μ(T)与μ(0)差别也不大，$kT << \mu(0)$时有$e^{-\mu/kT} << 1$,
费米气体强简并条件也可以表述为$T << T_F$

第八章 玻色统计和费米统计

8.5 金属中的自由电子气体



只有能量在 μ 附近、量级为kT范围内的电子对热容有贡献！

对热容有贡献的电子数：

$$N_{有效} \approx \frac{kT}{\mu} N$$

有效电子对热容贡献为：$C_V = \frac{3}{2} Nk \left(\frac{kT}{\mu} \right) = \frac{3}{2} Nk \frac{T}{T_F}$

第八章 玻色统计和费米统计

8.5 金属中的自由电子气体

在室温下： $T/T_F \approx 1/270$

- 金属中自由电子对热容的贡献远小于经典理论值
- 与离子振动热容量相比，电子热容量可以忽略不计

对自由电子气热容量做 定理计算：

化学势：
$$N = \frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}$$

内能：
$$U = \frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2}d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}$$

第八章 玻色统计和费米统计

8.5 金属中的自由电子气体

两式积分中有下列形式：

$$I=\int_0^\infty \frac{\eta(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}$$

$\eta(\varepsilon)$分别为$C\varepsilon^{1/2}$和$C\varepsilon^{3/2}$

$$C=\frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}$$

引入变数变换： $\varepsilon-\mu=kTx$

$$I=\int_{-\frac{\mu}{kT}}^\infty \frac{\eta(\mu+kTx)}{e^x+1}kTdx$$

$$=kT\int_0^{\frac{\mu}{kT}} \frac{\eta(\mu-kTx)}{e^{-x}+1}dx+kT\int_0^\infty \frac{\eta(\mu+kTx)}{e^x+1}dx$$

第八章 玻色统计和费米统计

8.5 金属中的自由电子气体

因： $$\frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{e^{x}+1}$$

于是有： $$I=\int_0^{\mu}\eta(\varepsilon)d\varepsilon+kT\int_0^{\infty}\frac{\eta(\mu+kTx)-\eta(\mu-kTx)}{e^{x}+1}dx$$

将被积函数分子展开到x一阶项有：

$$N=\frac{2}{3}C\mu^{3/2}\left[1+\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\right]$$

$$U=\frac{2}{5}C\mu^{5/2}\left[1+\frac{5\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\right]$$

第八章 玻色统计和费米统计

8.5 金属中的自由电子气体

可得： $$\mu = \left(\frac{3N}{2C}\right)^{2/3}\left[1+\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\right]^{-2/3}$$

$\left(\frac{kT}{\mu}\right)$很小，可用$\left(\frac{kT}{\mu(0)}\right)$代替！

于是有：

$$\mu = \mu(0)\left[1+\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\right]^{-2/3}$$

$$\approx \mu(0)\left[1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\right]$$

第八章 玻色统计和费米统计

8.5 金属中的自由电子气体

于是：
$$U=\frac{2}{5}C\mu(0)^{5/2}\left[1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\mu(0)}\right)^2\right]^{5/2}\times\left[1+\frac{5\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{\mu(0)}\right)^2\right]$$
$$=\frac{3}{5}N\mu(0)^{5/2}\left[1+\frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\mu(0)}\right)^2\right]$$

由此可得电子气体定容热容：
$$C_V=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V=Nk\frac{\pi^2}{2}\frac{kT}{\mu(0)}=\gamma_0 T$$

- 在常温电子热容远小于离子振动热容
- 在低温范围内，离子振动热容按T^3减小，电子热容与温度成正比！

第八章 玻色统计和费米统计

8.5 金属中的自由电子气体

- 实验结果（见P316，图8.7）
- 准粒子的概念

作业：

1，2，3，4，5，6，7，8