Computational Engineering und Robotik

Prof. Jan Peters, J. Carvalho, P. Klink, P. Liu, S. Stark

Sommersemester 2020

Lösungsvorschlag der 5. Übung

1 Steuerung, Regelung und PD-Regler (9 Punkte)

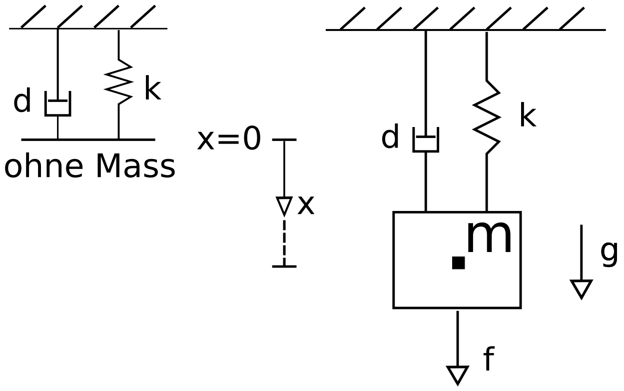

Abbildung 1: Masse-Feder-Dämpfer-System.

In der Vorlesung haben wir gesehen, wie man ein Pendel stabilisiert, nachdem es um einen Gleichgewichtspunkt linearisiert wurde. Wir haben gelernt, dass wir einen linearen Regler verwenden können, nämlich den Feder und Dämpfer Regler. Auf Englisch heißen solchen Regler PD-Controller (Proportional Derivative Controller). In dieser Aufgabe nutzen wir deshalb den Term PD-Regler statt Feder und Dämpfer Regler. Hier betrachten wir einen PD-Regler zur Stabilisierung eines einfachen Masse-Feder-Dämpfer-Systems.

In Abbildung 1 haben wir ein System, das aus einer aufgehängten Masse besteht, die von einer Feder und einem Dämpfer unterstützt wird. Die Gravitationskraft wirkt auf die Masse (g ist die Gravitationsbeschleunigung), sowie eine externe Kraft f. Wie in der linken Seite der Abbildung dargestellt, ist $x = 0$ die Ruheposition ohne die Masse m (am Ende der Feder). Auf der rechten Seite, wenn eine Masse hinzugefügt wird, ist x der Abstand zum Massenmittelpunkt von m.

a) Bevor wir das System modellieren, was ist der Unterschied zwischen Steuerung und Reglung? Nenne ein Szenario, in dem es sinnvoll ist, eine Reglung anstelle einer Steuerung zu verwenden.

Lösungsvorschlag: Steuerung ist Control mit offenem Regelkreis. Ein Steuersignal ist nur zeitabhängig und nicht zustandsabhängig.

Reglung ist Feedback Control. Die Steuerung wird unter Berücksichtigung des aktuellen Zustands bestimmt. (0.25 Punkte)

Wenn ein lineares System instabil ist, können wir es mit einer Reglung stabilisieren. (0.25 Punkte)

b) Im Allgemeinen, wenn du die Dynamik $\dot{x} = f(x, u)$ kennst, kannst du immer Systeme um die Gleichgewichtepunkte linearisieren?

Lösungsvorschlag: Fällt ein Arbeitspunkt mit einer Sprung- oder Knickstelle zusammen, so kann man um ihn nicht linearisieren (und auch nicht in der „engeren“ Umgebung). (0.5 Punkte)

c) Du erhältst ein lineares System $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$. Bei $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ ist das System instabil. Nun entwerfen wir einen Regler, der in dem Zustand linear ist $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$. Kannst du das System mit einem solchen Regler stabilisieren? Welche Eigenschaften müssen zutreffen, damit es stabil ist? Was sagt uns das über Regelsysteme mit Reglung?

Lösungsvorschlag: (1.0 Punkte)

$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}$

Wir können ein solches System stabilisieren, wenn die Eigenwerte von $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})$ die Eigenschaft $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$ haben.

Mit einem Regler können wir ein zuvor instabiles System stabilisieren.

d) Schreibe die Dynamikgleichung des Systems aus Abbildung 1 auf. Transformiere sie dann in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

Lösungsvorschlag: (1.5 Punkte)Gleichung dieses Systems

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - d\dot{x}(t) + mg + f(t) \tag{1}$$

Die Umwandlung in eine DGL erster Ordnung gibt

$x_1 = x, \; x_2 = \dot{x}$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -d/m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g + f(t)/m \end{pmatrix} \tag{2}$$

e) Was sind die Ruhelagen des Systems ohne zusätzliche Kraft ($f = 0$)? Was passiert, wenn die Federkonstante ins Unendliche geht? Und was passiert, wenn es keine Gravitationskraft gibt?

Lösungsvorschlag: (0.5 Punkte)Es gibt nur eine Ruhelage.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0} \tag{3}$$
$$x_1^* = mg/k \tag{4}$$
$$x_2^* = 0 \tag{5}$$

Falls $k \to \infty$, oder keine Gravitationskraft gibt ($g = 0$), die Masse bewegt sich nicht ($x_1 = 0, \; x_2 = 0$).

f) Angenommen $m = 1\mathrm{kg}$, $k = 1\mathrm{N/m}$ und $g = 9,8\mathrm{m/s^2}$. Nun wird eine konstante Kraft angewendet $f = F$. Was sind die Ruhelagen? Welche Kraft musst du aufbringen, um das System in einer allgemeinen Position x, mit null Geschwindigkeit, zu halten? Wenn du die Masse in die Position $x = 5\mathrm{m}$ halten wolltest, musst du eine nach oben oder nach unten gerichtete Kraft anwenden?

Lösungsvorschlag: (1.0 Punkte)Die Ruhelage ist jetzt

$$x_1^* = \frac{mg + F}{k}, \; x_2^* = 0 \tag{6}$$

Um das System in einer bestimmten Position x zu halten, haben wir

$$F = kx - mg \tag{7}$$

Um das System bei $x = 5\text{m}$ zu halten, müssen wir eine Kraft anwenden

$$F^* = x - g = 5 - 9.8 = -4.8\text{N} \tag{8}$$

Eine negative Kraft bedeutet, dass wir die Masse nach oben drücken, um der Gravitationskraft entgegenzuwirken.

g) **Nimm an, dass es von nun an (für diese und die folgenden Aufgaben) keine Schwerkraft mehr gibt,** $g = 0\text{m}/\text{s}^2$. Das System startet mit einer Anfangsposition und -geschwindigkeit und wir wollen nun den Zustand des Systems auf Nullposition und Nullgeschwindigkeit bringen. Dazu werden wir einen PD-Regler für die aufgebrachte externe Kraft verwenden, $f(t) = -k_p x(t) - k_v \dot{x}(t)$. Wie lautet die Dynamikgleichung bei dieser Art von Kraft? Transformiere sie in eine DGL erster Ordnung.

Lösungsvorschlag: (1.0 Punkte)Die Dynamik-Gleichung lautet

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - d\dot{x}(t) - k_p x(t) - k_v \dot{x}(t) \tag{9}$$

Die erste Ordnung DGL ist

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(k + k_p)/m & -(d + k_v)/m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{10}$$

h) Das lineare System aus Aufgabe g) hat zwei Eigenwerte. Welcher Zustand muss gelten, dass das System kritisch gedämpft ist, d.h. dass es keine Schwingungen mehr hat und der stationäre Fehler gleich Null ist? Schreibe die Gleichung für die beiden Eigenwerte symbolisch auf, d.h. in Abhängigkeit von den unbekannten Parametern.

Lösungsvorschlag: (0.5 Punkte)Die beiden Eigenwerte müssen negativ, Reelle, und gleich sein $\text{Re}(\lambda_i) < 0$, $\text{Im}(\lambda_i) = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2$

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0 \tag{11}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = -\frac{d + k_v}{2m} \pm \frac{\sqrt{(d + k_v)^2 - 4m(k + k_p)}}{2m} \tag{12}$$

i) Schreibe den *Derivative* Term des PD-Reglers als Funktion des *Proportional* Term, und den *Proportional* Term als Funktion des *Derivative* Term für ein kritisch gedämpftes System auf.

Lösungsvorschlag: (0.5 Punkte)

Kritisch gedämpftes System $\implies \lambda_1 = \lambda_2 \implies (d + k_v)^2 - 4(k + k_p)m = 0$

$$k_p = \frac{(d + k_v)^2}{4m} - k \tag{13}$$

$$k_v = -d \pm \sqrt{(k_p + k)4m} \tag{14}$$

j) Nehmen wir nun an, das System startet im Anfangszustand $x(0) = 5$ und $\dot{x}(0) = -5$, und wir wollen es auf einer kritisch gedämpften Trajektorie auf Null bringen. Nehmen wir als Parameter $d = 4\text{Ns/m}$, $k = 10\text{N/m}$, $m = 2.5\text{kg}$, und den *Proportional* Term des PD-Reglers $k_p = 8$. Zeichne die Position und Geschwindigkeit über die Zeit von $t = 0$ bis $t = 10$ sowie die auf die Masse wirkende äußere Kraft $f(t)$ für folgende Fälle: i) es wird kein PD-Regler verwendet; ii) es wird der abgeleitete PD-Regler verwendet. *Tipp: Du kannst die Python-Bibliothek* `odeint` *verwenden, um die numerische Lösung der Differentialgleichung zu berechnen, und* `matplotlib`*, um die Trajektorien zu zeichnen, wie im beigefügten Notebook* `PD-controller.ipynb` dargestellt.

Lösungsvorschlag: (2.0 Punkte)Es gibt zwei Lösungen für den abgeleiteten Begriff

$$k_v = -d \pm \sqrt{(k_p + k)4m} = 9.42 \text{ oder } -17.42 \tag{15}$$

-17.42 führt zu einem instabilen System, deshalb wählen wir $k_v = 9.42$. Wir prüfen, dass bei $k_v = -17.42$ die beiden Eigenwerte positiv sind, während bei $k_v = 9.42$ die beiden Eigenwerte negativ sind.

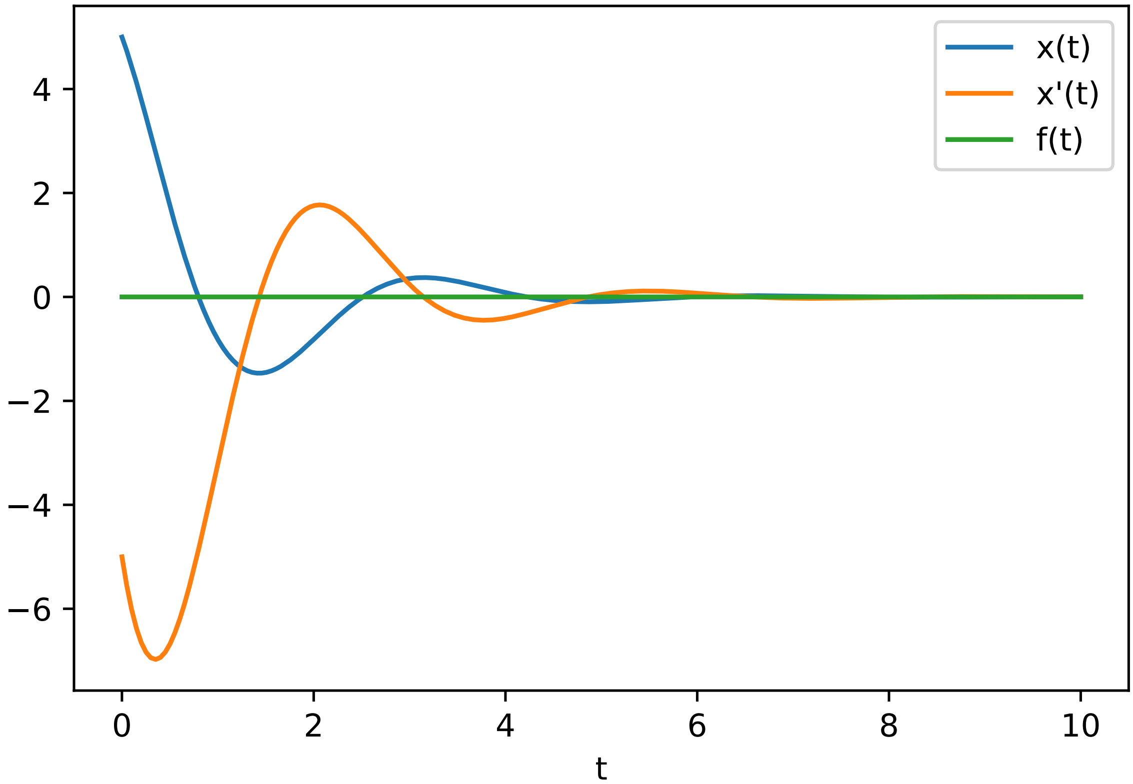

Abbildung 2: Ohne PD-Regler $f = 0$

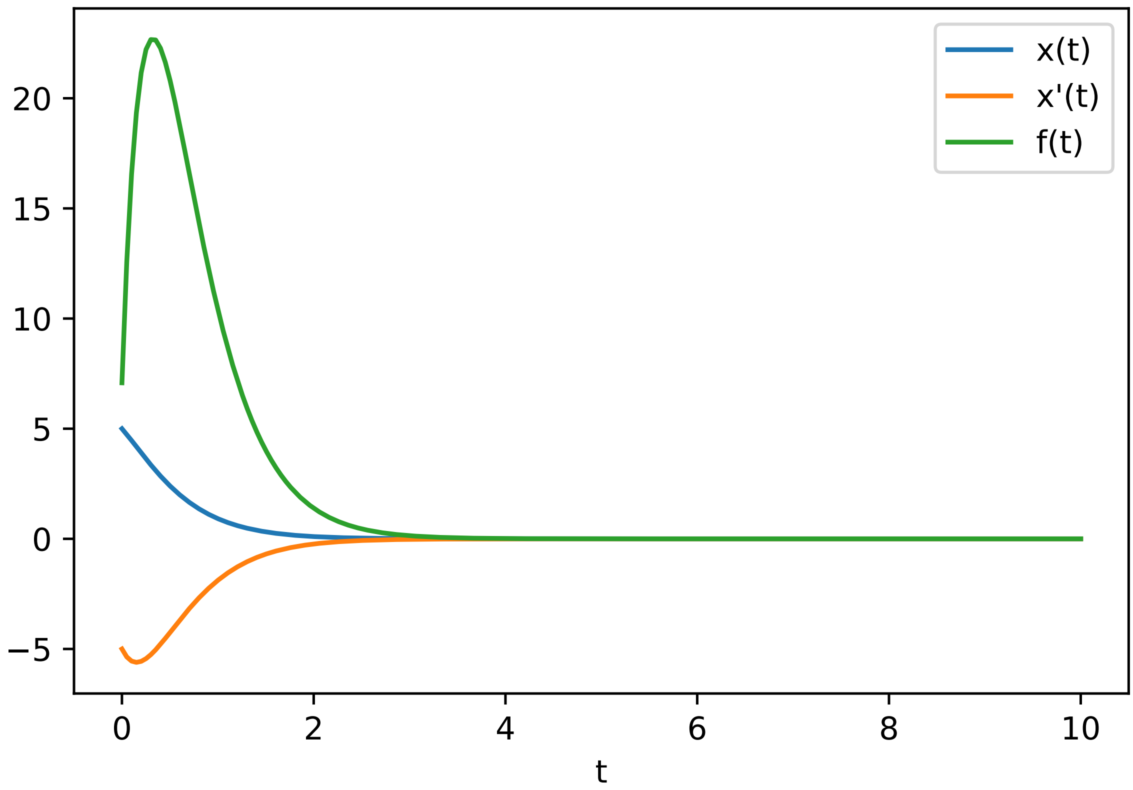

Abbildung 3: Mit PD-Regler