Computational Engineering und Robotik

Prof. Jan Peters, J. Carvalho, P. Klink, P. Liu, S. Stark

Sommersemester 2020

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Lösungsvorschlag der 0. Übung

Hinweise zu dieser Übung

- Für die Teilnahme an der Übung ist eine Anmeldung im **Moodle** notwendig. Dort sind auf der Kursseite zusätzliche Informationen zur Veranstaltung und die Regelungen zur Anrechnung der Übungsleistungen in die Endnote aufgeführt:

  `https://moodle.tu-darmstadt.de/course/view.php?id=20214`
- Inhaltliche Fragen zu dieser Übung werden in den Sprechstunden und dem Frage- und Antwortenforum im Moodle beantwortet.
- Organisatorische Fragen bitte im Moodle Forum stellen.
- Für diese Übung ist **keine Abgabe erforderlich**.

1 Rotationsmatrizen

Im $\mathbb{R}^3$ wird eine Rotation beschrieben durch die Multiplikation mit einer Matrix $\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{3\times3}$, deren Spalten paarweise orthogonale Einheitsvektoren sind und für die $\det(\boldsymbol{R}) = 1$ gilt.
Die Darstellungsmatrix einer Rotation um den Winkel θ gegen den Uhrzeigersinn, deren Rotationsachse durch den Einheitsvektor $\boldsymbol{u} = (a, b, c)^\top$ beschrieben ist, hat die allgemeine Form

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} a^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & ab(1-\cos\theta)-c\sin\theta & ac(1-\cos\theta)+b\sin\theta \\ ab(1-\cos\theta)+c\sin\theta & b^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & bc(1-\cos\theta)-a\sin\theta \\ ac(1-\cos\theta)-b\sin\theta & bc(1-\cos\theta)+a\sin\theta & c^2(1-\cos\theta)+\cos\theta \end{pmatrix}.$$

1. Gib die Darstellungsmatrizen der Rotation $\boldsymbol{R}_x$ um die x-Achse, $\boldsymbol{R}_y$ um die y-Achse und $\boldsymbol{R}_z$ um die z-Achse an.

   Lösungsvorschlag: Mit $\boldsymbol{u}_x = (1,0,0)^\top$, $\boldsymbol{u}_y = (0,1,0)^\top$ und $\boldsymbol{u}_z = (0,0,1)^\top$ ergeben sich:

$$\boldsymbol{R}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R}_y = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{R}_z = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Wegen der Orthogonalität gilt für Rotationsmatrizen $\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^\top = \boldsymbol{R}^\top\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$, wobei $\boldsymbol{I}$ die Einheitsmatrix darstellt. Zeige diesen Zusammenhang anhand der Rotationsmatrix $\boldsymbol{R}_x$ aus dem vorangegangen Aufgabenteil.

Lösungsvorschlag: Mit $\boldsymbol{R}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{R}_x^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ gilt:

$$\boldsymbol{R}_x\,\boldsymbol{R}_x^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\theta + \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta - \cos\theta\sin\theta \\ 0 & \cos\theta\sin\theta - cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{I} \qquad \text{sowie}$$

$$\boldsymbol{R}_x^\top\,\boldsymbol{R}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\theta + \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta - \cos\theta\sin\theta \\ 0 & \cos\theta\sin\theta - \cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}$$

3. Bestimme die Rotationsmatrix der folgenden nacheinander ausgeführten Operationen und zeige dadurch, dass Rotationsmatrizen nicht kommutativ sind:

   - $\boldsymbol{R}_{xy}$: Drehung $30°$ um die x-Achse, dann $90°$ um die y-Achse
   - $\boldsymbol{R}_{yx}$: Drehung $90°$ um die y-Achse, dann $30°$ um die x-Achse

Lösungsvorschlag: $30°$-Rotation um x-Achse: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, $\quad$ $90°$-Rotation um y-Achse: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{R}_{xy} = \boldsymbol{R}_y\,\boldsymbol{R}_x = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{R}_{yx} = \boldsymbol{R}_x\,\boldsymbol{R}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \boldsymbol{R}_{xy} \neq \boldsymbol{R}_{yx}$$

2 Differentialgleichungen lösen

1. Gegeben sei das inhomogene lineare Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = 2\,x(t) - 2t \qquad \text{mit} \quad x(0) = 1\,. \tag{*}$$

   Ermittle schrittweise die Lösung von (*), indem du die folgenden Teilaufgaben bearbeitest:

   (i) Wie lautet die homogene Differentialgleichungen zu (*)?
   Bestimme die dazugehörige homogene Lösung $x_h(t)$.

   (ii) Wie lautet der Ansatz für die partikuläre Lösung $x_p(t)$ des Problems?
   Setze diesen in (*) ein und bestimme $x_p(t)$.

   (iii) Addiere $x_h(t)$ und $x_p(t)$ um die allgemeine Lösung von (*) zu erhalten.
   Ermittle dann anhand der gegebenen Anfangsbedingung die spezielle Lösung.

Lösungsvorschlag:

(i) homogene Differentialgleichung: $\dot{x}_h(t) = 2\,x_h(t)$

homogene Lösung (nach Folie 13 DGL-Repetitorium): $x_h(t) = c \cdot e^{2t}$

(ii) Ansatz partikuläre Lösung nach Variation der Konstanten: $x_p(t) = c(t)\,e^{2t}$

einsetzen: $\dot{x}_p(t) = \dot{c}(t)\;e^{2t} + \cancel{c(t)\,2\,e^{2t}} \stackrel{!}{=} \cancel{2\,c(t)\,e^{2t}} - 2t \quad \Leftrightarrow \quad \dot{c}(t) = -2\,t\,e^{-2t}$

integrieren: c(t)
$$\begin{aligned}
&= c(0) + \int_0^t -2\,s\,e^{-2s} ds \\
&= c(0) + \left[\cancel{-2}\,s\,(\cancel{-\tfrac{1}{2}})\,e^{-2s}\right]_0^t - \int_0^t \cancel{-2}\,(\cancel{-\tfrac{1}{2}})\,e^{-2s} ds \\
&= c(0) + t\,e^{-2t} - \left[-\frac{1}{2}\,e^{-2s}\right]_0^t \\
&= c(0) + t\,e^{-2t} + \frac{1}{2}\,e^{-2t} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad x_p(t) = c(t)\,e^{2t} = \left(c(0) + (t + \frac{1}{2})\,e^{-2t} - \frac{1}{2}\right)\,e^{2t} = \left(c(0) - \frac{1}{2}\right)\,e^{2t} + t + \frac{1}{2}$$

(iii) allgemeine Lösung: $x(t) = x_h(t) + x_p(t) = \underbrace{\left(c + c(0) - \frac{1}{2}\right)}_{:=k}\,e^{2t} + t + \frac{1}{2}$

spezielle Lösung: $x(0) = k + \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 1 \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{1}{2} \qquad \rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2}\,e^{2t} + t + \frac{1}{2}$

2. Gegeben sei das inhomogene lineare DGL-System mit konstanten Koeffizienten

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{x}(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{b}(t)}\,. \tag{**}$$

(i) Wie lautet das homogene DGL-System zu (**)? Bestimme die homogene Lösung $\boldsymbol{x}_h(t)$.
Hinweis: Verwende das "Kochrezept" aus dem DGL-Repetitorium unter Beachtung des Sonderfalls komplexer Eigenwerte.

(ii) Der Ansatz der Variation der Konstanten lässt sich auch im Mehrdimensionalen anwenden. Bestimme damit die partikuläre Lösung $\boldsymbol{x}_p(t)$ von (**).

(iii) Wie lautet die allgemeine Lösung von (**)?

Lösungsvorschlag:

(i) homogenes DGL-System: $\dot{\boldsymbol{x}}_h(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t)$

Eigenwerte: $\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 \qquad \rightarrow \quad \lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i$

Eigenvektoren: $(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 \stackrel{!}{=} 0$

Gleichungssystem lösen: $\left.\begin{matrix} i & 1 \\ -1 & i \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \quad \left.\begin{matrix} i & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$

$\rightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \bar{\boldsymbol{v}}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \qquad$ (auch möglich: $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$)

Der Lösungsansatz $\quad \boldsymbol{x}_{\mathbb{C}}(t) = \boldsymbol{v}_1\, e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} (\cos t + i\, \sin t) = \begin{pmatrix} i\, \cos t - \sin t \\ \cos t + i\, \sin t \end{pmatrix}$

liefert die zwei reellen Lösungen $\quad \operatorname{Re}(\boldsymbol{x}_{\mathbb{C}}(t)) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ und $\operatorname{Im}(\boldsymbol{x}_{\mathbb{C}}(t)) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

Damit lautet die allgemeine homogene Lösung:

$$\boldsymbol{x}_h(t) = c_1 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

(ii) Ansatz für die partikuläre Lösung: $\quad \boldsymbol{x}_p(t) = \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$

in (**) einsetzen:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_p(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}_p(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cancel{\begin{pmatrix} -\cos t & -\sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \boldsymbol{c}(t)} + \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix} \dot{\boldsymbol{c}}(t) = \cancel{\begin{pmatrix} -\cos t & -\sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \boldsymbol{c}(t)} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \dot{\boldsymbol{c}}(t) = \frac{1}{-\sin^2 t - \cos^2 t} \begin{pmatrix} \sin t & -\cos t \\ -\cos t & -\sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\, \cos t \\ t\, \sin t \end{pmatrix}$$

integrieren:

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \int s\, \cos s\, ds = t\, \sin t - \int \sin s\, ds = t\, \sin t + \cos t + C_1 \\ c_2(t) &= \int s\, \sin s\, ds = -t\, \cos t - \int -\cos s\, ds = -t\, \cos t + \sin t + C_2 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad \boldsymbol{x}_p(t) = \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t\, \sin t + \cos t + C_1 \\ -t\, \cos t + \sin t + C_2 \end{pmatrix}$$

(iii) Die allgemeine Lösung von (**) lautet:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_h(t) + \boldsymbol{x}_p(t) &= \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t\, \sin t + \cos t + k_1 \\ -t\, \cos t + \sin t + k_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } k_i := c_i + C_i \\ &= \begin{pmatrix} -\sin t(t\, \sin t + \cos t + k_1) + \cos t(-t\, \cos t + \sin t + k_2) \\ \cos t(t\, \sin t + \cos t + k_1) + \sin t(-t\, \cos t + \sin t + k_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -t \sin^2 t - \cancel{\sin t \cos t} - k_1\, \sin t - t \cos^2 t + \cancel{\sin t \cos t} + k_2 \cos t \\ \cancel{t \cos t} \sin t + \cos^2 t + k_1\, \cos t - \cancel{t \sin t} \cos t + \sin^2 t + k_2 \sin t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -k_1\, \sin t + k_2\, \cos t - t \\ k_1\, \cos t + k_2 \sin t + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$