Yi Cui , 2758172

Aufgabe 1:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = f_1(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 4 \cdot \sin(t) \\ \sin(t) - 2 \cdot \cos(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = f_2(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} -400 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 400 \cdot \sin(t) \\ \sin(t) - 2 \cdot \cos(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0.$$

a) für $f_1(\underline{x})$: $\det(\lambda \cdot \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda+4 & 2 \\ -1 & \lambda+2 \end{vmatrix} \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow (\lambda+4)(\lambda+2) + 2 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3+i \\ \lambda_2 = -3-i \end{cases}$

$\Rightarrow T_{max} = \dfrac{2\pi}{|Im(\lambda_i)|} = 2\pi \qquad T_{min} = \dfrac{1}{|Re(\lambda_i)|} = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow$ Steitigkeit koeffizient : $\dfrac{T_{max}}{T_{min}} = 6\pi$

für $f_2(\underline{x})$: $\det(\lambda \cdot \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda+400 & 0 \\ -1 & \lambda+ \end{vmatrix} \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow (\lambda+400)(\lambda+2) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -400 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$

$\Rightarrow T_{max} = \dfrac{1}{|Re(\lambda_2)|} = \dfrac{1}{2} \qquad T_{min} = \dfrac{1}{|Re(\lambda_1)|} = \dfrac{1}{400}$

$\Rightarrow$ Steitigkeit koeffizient : $\dfrac{T_{max}}{T_{min}} = 200 \Rightarrow$ Steif ODE

b) autonome Probleme $\Rightarrow$ gewöhnliche DG

$\Rightarrow \hat{\underline{x}} = \begin{pmatrix} \underline{x} \\ t \end{pmatrix}$ $\quad \underline{\underline{A}}$ ist ein 2x2 Matrix $\Rightarrow \underline{x}$ ist ein 2x1 Vektor

$\Rightarrow \hat{\underline{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ mit $\hat{\underline{x}}_0 = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \dot{\hat{\underline{x}}} = \hat{f}_1(\hat{\underline{x}}) = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \cdot \sin(x_3) \\ \sin(x_3) - 2\cos(x_3) \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \dot{\hat{\underline{x}}} = \hat{f}_2(\hat{\underline{x}}) = \begin{bmatrix} -400 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 400 \cdot \sin(x_3) \\ \sin(x_3) - 2\cos(x_3) \\ 1 \end{pmatrix}$

c) explizite Eulerverfahren

$$\hat{\underline{x}}^1 = \hat{\underline{x}}^0 + h \cdot \dot{\hat{\underline{x}}} = \hat{\underline{x}}_0 + h \cdot \hat{f}_1(\hat{\underline{x}}_0)$$

$$= \begin{pmatrix} 0.1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.1 \cdot \left[\begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \cdot \sin(0) \\ \sin(0) - 2\cos(0) \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -0.94 \\ 3.81 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\underline{x}}^2 = \hat{\underline{x}}^1 + h \cdot \hat{f}_1(\hat{\underline{x}}^1)$$

$$= \begin{pmatrix} -0.94 \\ 3.81 \\ 0.1 \end{pmatrix} + 0.1 \cdot \left[\begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -0.94 \\ 3.81 \\ 0.1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \cdot \sin(0.1) \\ \sin(0.1) - 2\cos(0.1) \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -1,326 \\ 2,754 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

	$\hat{f}_1$			$\hat{f}_2$		
Schritt	x_1	x_2	t	x_1	x_2	t
0	0.1	5	0	0.1	5	0
1	-0,94	3.81	0.1	-3.9	3,81	0.1
2	-1,326	2,754	0.2	152,1	2,458	0,2
3	-1,3464	1,8706	0.3	-5931.9	16,9764	0,3

f_2 ist nicht geeignet für Schrittweite $h = 0.1$

da $\Delta t \lesssim \frac{1}{20} T_{min} = \frac{1}{8000}$ s sein soll

d)

Schritt	x_1	x_2	t
0	0.1	5	0
100	$6,5332 \cdot e^{-24}$	3,9116	0.1
200	$4.2683 \cdot e^{-46}$	3,0205	0.2
300	$2.7825 \cdot e^{-68}$	2,2910	0.3

Schrittweit reduziert

$\Rightarrow$ x_1 ist konvergenz

aber Rechenaufwand erhöht

e) Nullstellenproblem für implizite Eulerverfahren

$$F(\hat{\underline{x}}^k) = \hat{\underline{x}}^k + h \cdot \hat{f}_2(\hat{\underline{x}}^{k+1}) - \hat{\underline{x}}^{k+1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad = \hat{\underline{x}}^k + \begin{bmatrix} -400h-1 & 0 & 0 \\ h & -2h-1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \hat{\underline{x}}^{k+1} + h \cdot \begin{pmatrix} 400 \sin(x_3^{k+1}) \\ \sin(x_3^k) - 2\cos(x_3^{k+1}) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Newton-Verfahren:

$$\hat{\underline{x}}^{neu} = \hat{\underline{x}}^{alt} - \left(\frac{\partial F(\hat{\underline{x}}^{alt})}{\partial \hat{\underline{x}}^{k+1}}\right)^{-1} \cdot F(\hat{\underline{x}}^{alt}) \cancel{+ O(F^2(x^{alt}))}$$

$$\frac{\partial \hat{F}(\underline{x}^{alt})}{\partial \hat{\underline{x}}^{k+1}} = \begin{bmatrix} -400h-1 & 0 & 400h \cdot \cos(x_3^{alt}) \\ h & -2h-1 & h \cdot \cos(x_3^{alt}) + 2h \cdot \sin(x_3^{alt}) \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

mit $h = 0.1 \Rightarrow$
$$\frac{\partial \hat{F}(\underline{x}^{alt})}{\partial \hat{\underline{x}}^{k+1}} = \begin{bmatrix} -41 & 0 & 40 \cdot \cos(x_3^{alt}) \\ 0.1 & -1.2 & 0.1 \cos(x_3^{alt}) + 0.2 \sin(x_3^{alt}) \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{\underline{x}}^{neu} = \hat{\underline{x}}^{alt} - \begin{bmatrix} -41 & 0 & 40 \cdot \cos(x_3^{alt}) \\ 0.1 & -1.2 & 0.1 \cos(x_3^{alt}) + 0.2 \sin(x_3^{alt}) \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot F(\hat{\underline{x}}^{alt})$$

mit $\hat{\underline{x}}^{alt} = \hat{\underline{x}}^{0} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$F(\hat{\underline{x}}^{alt}) = \hat{\underline{x}}_0 + \begin{bmatrix} -41 & 0 & 0 \\ 0.1 & -1.2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \hat{\underline{x}}^{0} + 0.1 \cdot \begin{pmatrix} 400 \sin(0) \\ \sin(0) - 2\cos(0) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(\hat{\underline{x}}^{k} = \hat{\underline{x}}^{k+1} = \hat{\underline{x}}_0)$

$$= \begin{pmatrix} 0.1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -41 & 0 & 0 \\ 0.1 & -1.2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -0.2 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1,19 \\ 0,1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{\underline{x}}^{neu} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} -41 & 0 & 40 \\ 0.1 & -1.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -4 \\ -1,19 \\ 0,1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.1 \\ 4,0167 \\ 0,1 \end{pmatrix}$$