Computational Engineering und Robotik

Prof. Ph.D. Jan Peters, J. Carvalho, P. Klink, P. Liu, S. Stark

Sommersemester 2020

2. Übung

Hinweise zu dieser Übung

- Für die Teilnahme an der Übung ist eine Anmeldung beim **Moodle** notwendig. Dort sind auf der Kursseite zusätzliche Informationen zur Veranstaltung und die Regelungen zur Anrechnung der Übungsleistungen in die Endnote aufgeführt:

  `https://moodle.tu-darmstadt.de/course/view.php?id=20214`

- Von dieser Übung wird die **1. Aufgabe** bewertet.
- **Abgabe der schriftlichen Lösungen** zu den Übungsaufgaben bis **Montag, den 11.05.2020 um 12:00 Uhr** per Datei-Upload im Moodle.
- Inhaltliche Fragen zu dieser Übung werden in den Tutoren-Sprechstunden und dem Frage- und Antwort-Forum im Moodle beantwortet.
- Organisatorische Fragen bitte im Moodle Forum stellen.

1 Iterative Nullstellenapproximation (8 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = 3x + e^{-2x^2} + 3\sin(x).$$

Dem Plot in Abbildung 1 könnt ihr entnehmen, dass die Funktion eine Nullstelle bei $x_s \approx -0.2$ besitzt.

Die Nullstelle soll im Folgenden mithilfe der in der Vorlesung vorgestellten numerischen Lösungsverfahren für nichtlineare Gleichungen ermittelt werden.

Sofern in den folgenden Teilaufgaben Rechenergebnisse gefordert sind, dürfen diese rechnergestützt (mit double precision!) ermittelt werden, z.B. mit Python. Für die Abgabe genügt es, die Ergebnisse auf 8 Dezimalstellen genau zu notieren.

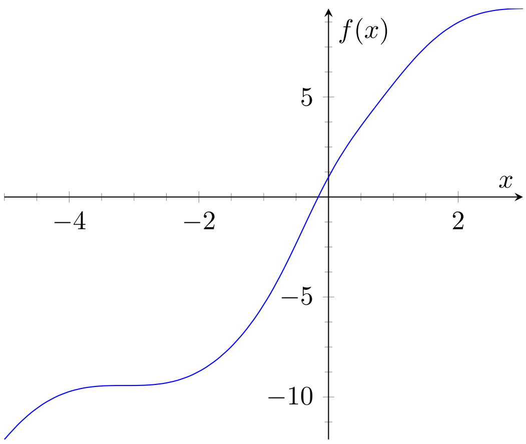

Abbildung 1: Plot von f(x)

a) Zunächst soll die Fixpunktiteration zur Nullstellensuche eingesetzt werden. Entscheidet anhand von Abbildung 1, ob für die triviale Fixpunktgleichung $g_1(x) = f(x) + x$ die lokale Konvergenzbedingung erfüllt ist.

b) Untersucht nun die relaxierte Fixpunktgleichung $g_2(x) = a \cdot f(x) + x$ mit $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Bestimmt zunächst den Relaxations-Koeffizient a mittels des in der Vorlesung vorgestellten Ansatzes. Nutzt hierfür noch den ungefähren Wert $x_s \approx -0.2$.
Entscheidet dann rechnerisch mit der genauen Nullstelle $x_s = -0.1588023735798893$, ob die Konvergenzbedingung für g_2 erfüllt ist.

c) Als zweites numerisches Iterationsverfahren habt ihr das Newton-Verfahren kennengelernt. Stellt dafür die Iterationsvorschrift zur Nullstellenberechnung von $f(x)$ auf.

d) Führt für das relaxierte Fixpunktverfahren und das Newton-Verfahren jeweils vier Schritte ausgehend von $x_0 = -1.5$ durch und notiert das Ergebnis zu jeder Iteration.

e) Welches der beiden Verfahren ist zu welchen Zeitpunkten das geeignetere? Begründet jeweils, warum das der Fall ist. Betrachtet dazu eure Ergebnisse aus der letzten Teilaufgabe und auch den theoretischen Hintergrund zu den Verfahren, wie er in der Vorlesung vorgestellt wurde.

f) Welches Konvergenzverhalten ist für die beiden Verfahren zu vermuten, wenn als Startwert $x_0 = -3$ gewählt wird? Begründet dies.

2 Inverse Kinematik eines ebenen 2-DOF-Roboterbeins

Betrachtet wird das in Abbildung 2 dargestellte vereinfachte Bein eines Humanoidroboters bestehend aus zwei Drehgelenken und zwei Gliedern der Länge $l_1 = l_2 = 30$. Die Basis des Beines befinde sich in der Hüfte des Roboters, deren Position ${}^B\boldsymbol{r}_0 = (40, 50, 0)^T$ bzgl. des Koordinatensystems S_B als fest angenommen wird. Der Roboter soll mit dem Fuß gegen einen Ball treten, dessen Mittelpunkt sich an der Stelle ${}^B\boldsymbol{p} = (60, 5, 0)^T$ befinde (vgl. Abbildung 2c).

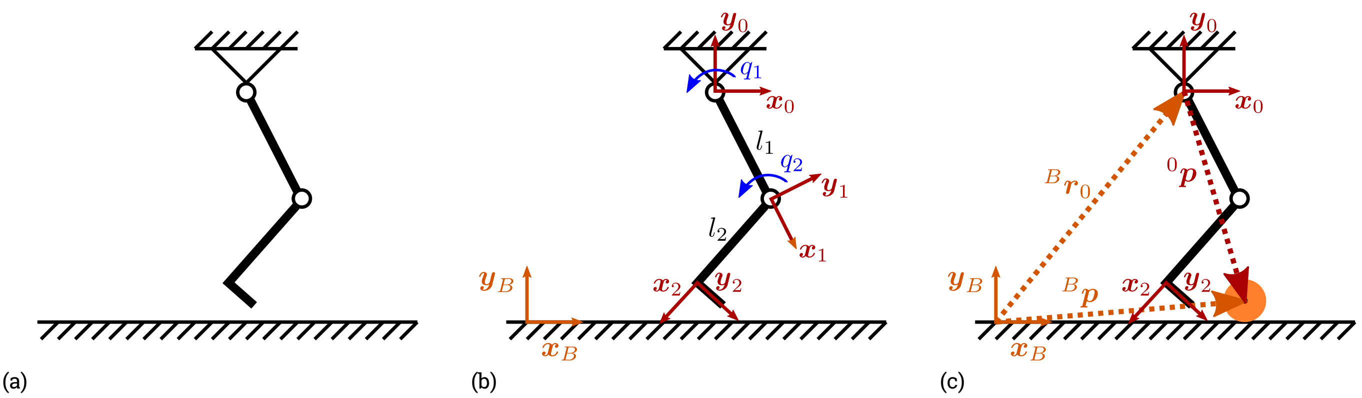

Abbildung 2: Vereinfachtes 2-DOF-Beinmodell eines Fußball spielenden Humanoidroboters

Mit waagerechter Nullstellung und lokalen Koordinatensystemen wie in Abbildung 2b ergibt sich als Vorwärtskinematikmodell des Beines die homogene Transformationsmatrix

$$
{}^0\boldsymbol{T}_2(q_1, q_2) = \begin{pmatrix} \cos(q_1+q_2) & -\sin(q_1+q_2) & 0 & l_1\cos q_1 + l_2\cos(q_1+q_2) \\ \sin(q_1+q_2) & \cos(q_1+q_2) & 0 & l_1\sin q_1 + l_2\sin(q_1+q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Es soll nun die inverse Kinematik des Beines betrachtet werden, um damit die Gelenkwinkel q_1 und q_2 zur gewünschten Fußposition zu bestimmen. Dazu ist die Lösung nichtlinearer Gleichungen nötig, die außer in Spezialfällen wie diesem im Allgemeinen sehr schwierig ist. Daher sollen numerische Lösungsverfahren zur Anwendung kommen.

a) Bestimmt mittels der Vorwärtskinematik und den gegebenen Parametern den Vektor ${}^0\boldsymbol{r}_2$ in Abhängigkeit von q_1, q_2.
Gebt außerdem die Position des Balles ${}^0\boldsymbol{p}$ in Bezug auf das Koordinatensystem S_0 an.

b) Stellt eine Zielfunktion $\mathbf{F}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^2$ mit $\boldsymbol{x} = (q_1, q_2)^T$ auf, so dass $\mathbf{F}(\boldsymbol{x}) = 0$ genau dann gilt, wenn ${}^0\boldsymbol{r}_2 = {}^0\boldsymbol{p}$. Die Orientierung des Endeffektors müsst ihr hierbei nicht berücksichtigen.

c) Löst die nichtlineare Gleichung $\mathbf{F}(\boldsymbol{x}) = 0$ mit Hilfe der Fixpunktiteration. Nutzt dabei die Relaxationsmatrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0.02 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{pmatrix}$, für die das Verfahren konvergiert. Startet mit dem Vektor $\boldsymbol{x}^{(0)} = (-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2})^T$ und führt zwei Iterationen durch. Berechnet die Iterierten auf vier Nachkommastellen genau.

d) Wendet nun das Newton-Verfahren für $\mathbf{F}(\boldsymbol{x}) = 0$ an. Berechnet dafür zunächst allgemein die Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_{\mathbf{F}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{x}}$ und löst dann in jedem Schritt das lineare Gleichungssystem $\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{x} = -\mathbf{F}(\boldsymbol{x})$. Führt ebenfalls beginnend mit dem Startvektor $\boldsymbol{x}^{(0)} = (-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2})^T$ zwei Iterationen mit einer Genauigkeit von vier Nachkommastellen aus.

e) Prüft abschließend, welche Endeffektorpositionen ${}^0\mathbf{r}_E$ tatsächlich zu den von euch berechneten Gelenkwinkelstellungen $\boldsymbol{x}_{\text{FPI}}^{(2)}$ (Aufgabe c)) und $\boldsymbol{x}_{\text{Newton}}^{(2)}$ (Aufgabe d)) gehören. Deutet die Ergebnisse.

Hinweis zu wissenschaftlichem Arbeiten

Es ist nicht gestattet, Lösungen anderer Personen als die der Gruppenmitglieder als Lösung der Aufgabe abzugeben. Des Weiteren müssen alle zur Lösungsfindung verwendeten, darüber hinausgehenden, relevanten Quellen explizit angegeben werden. Dem widersprechendes Handeln ist Plagiarismus und ist ein ernster Verstoß gegen die Grundlagen des wissenschaftlichen Arbeitens, das ernsthafte Konsequenzen bis hin zur Exmatrikulation haben kann.