Yi Cui , 2758172

Han Li , 2756970

Paul Galm , 2664282

Gruppe: 183

Aufgabe 1 $\quad m\ddot{z} = -d\dot{z} - kz + mg$

a): lassen $\underline{x} = \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix}$ $\quad u = \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix}$ $\quad y = z$

① $\Rightarrow$ $\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} + B\underline{u}$ $\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix}$

$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} \end{bmatrix}$ $\quad \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

② $\Rightarrow$ $y = z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix}$ $\quad \underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

b): Stationär $\longrightarrow$ $\dot{\underline{x}} = 0$

$\Rightarrow$ beweisen $0 = \underline{\underline{A}}\underline{x} + \underline{\underline{B}}\underline{u}$ lösbar

$\underline{\underline{B}}$ ist eine Einheitsmatrix

$\Rightarrow$ muss $\underline{\underline{A}}$ keinen Rangabfall haben

$\det|\underline{\underline{A}}| = \frac{k}{m} > 0 \Rightarrow$ keinen Rangabfall

$\Rightarrow$ Differentialgleichungssystem hat eine stationäre Lösung

c) i) homogenen Lösung: $\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\underline{x}$ $\quad$ Annahme: $\quad x_h(t) = \underline{c}\, e^{\lambda t}$

$\Rightarrow \quad (\lambda - \underline{\underline{A}})\underline{c}\, e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow (\lambda \cdot \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}) \overset{!}{=} 0$

$\det\left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} \end{bmatrix} \right| \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda^2 + \frac{d}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$

$\Downarrow$

$\lambda^2 + 100\lambda + 900 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = -10 \qquad \lambda_2 = -90$

$\Rightarrow$ Wenn $\lambda = -10 \Rightarrow \begin{bmatrix} -10 & -1 \\ 900 & 90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \overset{!}{=} \underline{0} \Rightarrow$ lassen $c_1 = 1 \Rightarrow c_2 = -10$

Wenn $\lambda = -90 \Rightarrow \begin{bmatrix} -90 & -1 \\ 900 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \overset{!}{=} \underline{0} \Rightarrow$ lassen $c_1 = 1 \Rightarrow c_2 = -90$

$\Rightarrow \underline{c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -10 & -90 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ homogene Lösung: $\underline{X} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \end{pmatrix} e^{-10t} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -90 \end{pmatrix} e^{-90t}$

2) Speziale Lösung: $\underline{\dot{X}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{X} + \underline{\underline{B}}\,\underline{u}$ mit $\underline{\underline{B}} \cdot \underline{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix}$ = konst.

$\Rightarrow$ $\underline{X_s}$ soll auch als konst $\Rightarrow$ $\underline{\dot{X}_s} = 0$

$\Rightarrow$ $\underline{X_s} = -\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{u} = -\begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{1}{900} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 9.81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0109 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung

$X(t) = X_h(t) + X_s(t)$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \end{pmatrix} e^{-10t} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -90 \end{pmatrix} e^{-90t} + \begin{pmatrix} 0.0109 \\ 0 \end{pmatrix}$

für $t = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} z(0) \\ \dot{z}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.01 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -90 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.0109 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $a_1 = -0.1373$
$a_2 = 0.1264$

$\Rightarrow z(t) = -0.1373\, e^{-10t} + 0.1264\, e^{-90t} + 0.0109$

$\lim_{t \to \infty} z(t) = 0.0109$

Aufgabe 2:

a): ① $\dot{x}(t) = -\sin x + e^{-2t}$ ⇒ F

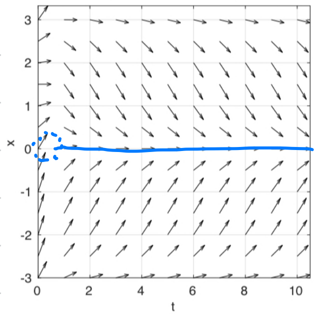


Abbildung 6: Richtungsfeld F

① Wenn $x = 0$
$x' = e^{-2t} > 0$
② wenn $x = 0$ $t \to 0$
$x' \to \infty$
③ Wenn $t = \text{konst}$
x' symmetrisch um $x = 0$

② $\dot{x}(t) = -x^3 + \cos(5t)$ ⇒ E

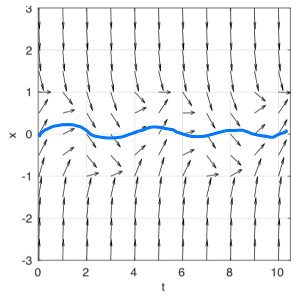


Abbildung 5: Richtungsfeld E

Wenn $x = 0$
$x' = \cos 5t$ → Welle wie blaue Linie

③ $\dot{x}(t) = 0.5x$ ⇒ keine   Wenn $x = 0$ $\dot{x} = 0$ ⇒ keine Pfeil auf $x = 0$ Linie

b)

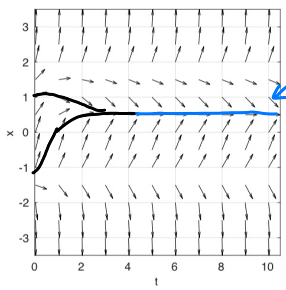


Abbildung 1: Richtungsfeld A

Gleichgewichtlösung : Mit Steigern von t bleibt x stabil auf 0.5

② ⇒ "Back Propagation"

Anfangwerte liegt im Bereich $[-1, 1]$

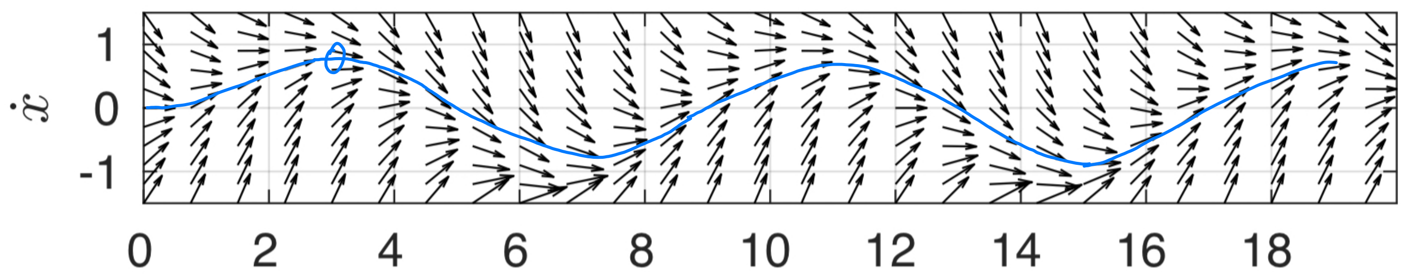
c): 1) nicht autonome → Zeitabhängig → Richtungsfelder ändert sich mit t
z.B.: $\dot{x}(t) = -\sin x + e^{-2t}$

autonome → zeitunabhängig z.B. $\dot{x}(t) = 0.5x$

2) Richtungsfelder von nicht-autonomen

A, C, E, F

d)



1) $\dot{x}_{max} \approx 1$ $t_{max} \approx 3$

d) Fixpunkt - Verfahren

$$\dot{x}^{k+1} = \dot{x}^{k} + \Delta\dot{x}^{k} \cdot \Delta t \qquad \text{mit} \quad \Delta\dot{x}^{k} = \ddot{x}^{k} \qquad \Delta t = 1$$

$$\Rightarrow \quad x' = 1 - 1^{0.8} + e^{-0.031 \cdot 3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot 3\right) \cdot 1$$

$$\approx 0.7050$$

e) $\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{b}$ mit

$$\frac{1}{2}\dot{x}_3 - \ddot{x}_2 + 5x_1 = 0$$

$$-2\ddot{x}_3 + x_1 + \dot{x}_2 - \frac{4}{5}t = 1$$

$$\dot{x}_3 - 3x_2 + \ddot{x}_1 + t = 0$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x}_2 = 5x_1 + \frac{1}{2}\dot{x}_3$$

$$\ddot{x}_3 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}\dot{x}_2 \underline{- \frac{2}{5}t - \frac{1}{2}}$$

$$\ddot{x}_1 = 3x_2 - \dot{x}_3 \underline{-t}$$

$$1 = 1$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ t \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$