Computational Engineering und Robotik

Prof. Jan Peters, J. Carvalho, P. Klink, P. Liu, S. Stark

Sommersemester 2020

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Lösungsvorschlag der 4. Übung

1 Inverses Pendel (5 Punkte)

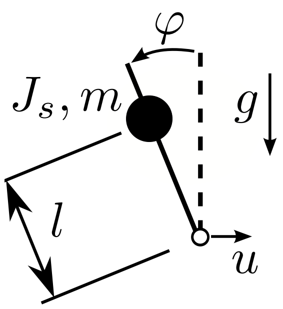

Abbildung 1: Modell des inversen Pendels

Das inverse Pendel ist in Abb. 1 dargestellt. Das Verhalten des Pendels lässt sich durch die Bewegungsgleichung

$$(J_s + ml^2)\ddot{\varphi} = ml(u\,\cos(\varphi) + g\,\sin(\varphi)) - c\dot{\varphi} \tag{1}$$

modellieren.

Hierbei bezeichnet l den Abstand des Schwerpunkts der Masse m des Pendels zur Drehachse. Die Trägheit des Pendels ist mit J_s, die viskose Reibkonstante mit c und die Gravitationsbeschleunigung mit g bezeichnet. Der Drehwinkel des Pendels ist mit φ angegeben. Zudem kann das Pendel mittels der horizontalen Beschleunigung u seiner Drehachse gesteuert werden.

1) Forme nun die Bewegungsgleichung in ein System erster Ordnung der Form $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u)$ um.

Lösungsvorschlag: Substitution:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{mit } x_1 = \varphi \text{ und } x_2 = \dot{\varphi} \tag{2}$$

Damit ergibt sich für das System erster Ordnung:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{ml(u\,\cos(x_1)+g\,\sin(x_1))-cx_2}{J_s+ml^2} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

(1 Punkt)

2) Zunächst sollen die Ruhelagen des Pendels betrachtet werden.

i) Bestimme dazu die Ruhelagen $\varphi_{s,i}$ des Pendels unter der Annahme einer Stellgröße $u_s = 0$.

Lösungsvorschlag: Für die Ruhelagen muss $\ddot{\varphi} = \dot{\varphi} = 0$ gelten.
Somit ergibt sich:

$$(J_s + ml^2) \cdot 0 = ml(u\cos(\varphi) + g\sin(\varphi)) - c \cdot 0 \Leftrightarrow \varphi_s = k\pi \text{ mit } k = 0, 1, 2, ... \tag{4}$$

(0.5 Punkt)

ii) Beschreibe (mit Worten) welchen Pendelkonfigurationen die erhaltenen Ruhelagen entsprechen.

Lösungsvorschlag:

- Fall $\varphi_{s,1} = 2k\pi$: Das Pendel steht senkrecht über seiner Drehachse.
- $\varphi_{s,2} = \pi + 2k\pi$: Das Pendel hängt senkrecht unter seiner Drehachse.

(0.5 Punkt)

3) Das in 1) erhaltene System ist nichtlinear. Da nichtlineare Systeme oft komplex zu regeln sind, soll das System nun um den Punkt $\boldsymbol{x_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ linearisiert werden. Gib das linearisierte System um $\boldsymbol{x_0}$ an. Nimm dazu wieder an, dass keine Steuerung anliegt ($u_0 = 0$).

Lösungsvorschlag: Sei $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$, so ergibt sich für die Jacobi-Matrix $\boldsymbol{J_x}$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0 \qquad \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\bigg|_{x_0,u_0} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{-mlu\sin(x_1) + mlg\cos(x_1)}{J_s + ml^2} \qquad \Rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\bigg|_{x_0,u_0} = \frac{gml}{J_s + ml^2} \tag{6}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1 \qquad \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\bigg|_{x_0,u_0} = 1 \tag{7}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{-c}{J_s + ml^2} \qquad \Rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\bigg|_{x_0,u_0} = \frac{-c}{J_s + ml^2} \tag{8}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{J_x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{gml}{J_s+ml^2} & \frac{-c}{J_s+ml^2} \end{pmatrix} \tag{9}$$

(1 Punkt)

und für die Jacobi-Matrix $\boldsymbol{J_u}$

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = 0 \qquad \Rightarrow \left.\frac{\partial f_1}{\partial u}\right|_{x_0,u_0} = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial u} = \frac{ml\cos(x_1)}{J_s + ml^2} \qquad \Rightarrow \left.\frac{\partial f_2}{\partial u}\right|_{x_0,u_0} = \frac{ml}{j_s + ml^2} \tag{11}$$

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{J_u} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{ml}{J_s+ml^2} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

(0.5 Punkt)

Daraus resultiert für das linearisierte System:

$$\boldsymbol{\Delta\dot{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{gml}{J_s+ml^2} & \frac{-c}{J_s+ml^2} \end{pmatrix} \boldsymbol{\Delta x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{ml}{J_s+ml^2} \end{pmatrix} \Delta u \tag{13}$$

(0.5 Punkt)

4) Abschließend soll ein konkretes System mit $l = 2.5\,\mathrm{m}$, $J_s = 0.05\,\mathrm{Nms}^2$, $m = 1.5\,\mathrm{kg}$, $g = 9.81\,\mathrm{m/s}^2$ und $c = 0.01\,\mathrm{Nms}$ betrachtet werden. Bestimme die Eigenwerte der in 3) berechneten Systemdynamik mit den gegebenen Werten. Runde gegebenenfalls auf vier Nachkommastellen. Welche Aussage über die Stabilität kannst du anhand dieser Eigenwerte treffen? Warum kannst du mit den Eigenwerten etwas über die Stabilität aussagen?

Lösungsvorschlag: Einsetzen führt auf

$$A = J_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3.9032 & -1.061 \times 10^{-3} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Daraus bestimmen sich das charakteristische Polynom zu

$$0 \stackrel{!}{=} \det(\lambda I - \boldsymbol{A}) = \lambda(\lambda + 1.061 \times 10^{-3}) - 3.9032 \tag{15}$$

und die Eigenwerte zu

$$\lambda_1 = 1.9751 \tag{16}$$

$$\lambda_2 = -1.9762. \tag{17}$$

(0.2 Punkt, 0.1 Punkte pro Eigenwert)

Das System weist folglich einen positiven Eigenwert auf, ist also im ungeregelten Zustand instabil.

Im Allgemeinen hat die Lösung einer linearen Differentialgleichung mit n verschiedenen reellen Eigenwerten die Form

$$\Delta\boldsymbol{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{v}_i e^{\lambda_i t}.$$

Ein System ist stabil, wenn $\Delta\boldsymbol{x}$ auf $\boldsymbol{0}$ zugeht. Bei mindestens einem positiven Eigenwert geht mindestens eine Dimension von $\Delta\boldsymbol{x}$ ins Unendliche.

(0.8 Punkte)