Computational Engineering und Robotik

Prof. Ph.D Jan Peters, J. Carvalho, P. Klink, P. Liu, S. Stark

Sommersemester 2020

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Lösungsvorschlag der 7. Übung

1 Steife Differentialgleichungen (8 Punkte)

Betrachte für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ und $t \geq 0$ die Anfangswertprobleme

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = f_1(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 4 \cdot \sin(t) \\ \sin(t) - 2 \cdot \cos(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{1}$$

und

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = f_2(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} -400 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 400 \cdot \sin(t) \\ \sin(t) - 2 \cdot \cos(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0. \tag{2}$$

mit dem Anfangswert $\boldsymbol{x}_0 = (0.1, 5)^T$.

a) Berechne die Steifigkeitskoeffizienten für beide Differentialgleichungen und interpretiere diese bezüglich der Steifheit der Differentialgleichungen.

Lösungsvorschlag: Die Eigenwerte der Jacobi-Matrix für (1) lauten:

$$\mathbf{0} = \det\left(\lambda \cdot \boldsymbol{I} - \frac{\partial \boldsymbol{f_1}}{\partial \boldsymbol{x}}\right) = \det\begin{pmatrix} \lambda - (-4) & -(-2) \\ -1 & \lambda - (-2) \end{pmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 10$$

$$\lambda_{1,2} = -3 \pm \frac{\sqrt{6^2 - 4 \times 10}}{2} = -3 \pm i \qquad \Rightarrow \lambda_1 = -3 - i \quad \lambda_2 = -3 + i$$

$$\Rightarrow T_1 = \min\left\{\frac{1}{|-3|}, \frac{2\pi}{|-1|}\right\} = \frac{1}{3}, \quad T_2 = \min\left\{\frac{1}{|-3|}, \frac{2\pi}{|1|}\right\} = \frac{1}{3}$$

Damit erhält man für (1) den Steifigkeitskoeffizient $T = \frac{T_{max}}{T_{min}} = 1$. (0.5 Punkt(e))
Die Eigenwerte der Jacobi-Matrix für (2) lauten:

$$\mathbf{0} = \det\left(\lambda \cdot \boldsymbol{I} - \frac{\partial \boldsymbol{f_2}}{\partial \boldsymbol{x}}\right) = \det\begin{pmatrix} \lambda - (-400) & 0 \\ -1 & \lambda - (-2) \end{pmatrix} = \lambda^2 + 402\lambda + 800$$

$$\lambda_{1,2} = -201 \pm \frac{\sqrt{402^2 - 4 \cdot 800}}{2} = -201 \pm 199 \qquad \Rightarrow \lambda_1 = -400 \quad \lambda_2 = -2$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{1}{|-400|} = \frac{1}{400}, \quad T_2 = \frac{1}{|-2|} = \frac{1}{2}$$

Damit erhält man für (2) den Steifigkeitskoeffizient $T = \frac{T_{max}}{T_{min}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{400}} = 200$. (0.5 Punkt(e))
Die zweite Differentialgleichung wird also ein sehr viel steiferes Verhalten als die erste aufweisen. (0.5 Punkt(e))

b) Autonomisiere die Anfangswertprobleme (1) und (2), um die Abhängigkeit von der Zeit aufzulösen und gib die autonomisierten Anfangswertprobleme an.

Lösungsvorschlag: Der ursprüngliche Systemzustand der Dinemsionalität n wird mit einer „Uhrzeitvariable“ $\tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_3$ erweitert zu:

$$\tilde{\boldsymbol{x}} := \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ t \end{pmatrix}.$$

Die autonomen Anfangswertprobleme lauten somit:

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \tilde{f}_1(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{x}} + \begin{pmatrix} 4 \cdot \sin(\tilde{x}_3) \\ \sin(\tilde{x}_3) - 2 \cdot \cos(\tilde{x}_3) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{x}}(0) = \tilde{\boldsymbol{x}}_0 \quad \color{red}{(0.5 Punkt(e))}$$

und

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \tilde{f}_2(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \begin{pmatrix} -400 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{x}} + \begin{pmatrix} 400 \cdot \sin(\tilde{x}_3) \\ \sin(\tilde{x}_3) - 2 \cdot \cos(\tilde{x}_3) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{x}}(0) = \tilde{\boldsymbol{x}}_0 \quad \color{red}{(0.5 Punkt(e))}$$

mit $\tilde{\boldsymbol{x}}_0 = (0.1, 5, 0)^T$.

c) Führe für beide autonomisierte Anfangswertprobleme drei Schritte des expliziten Eulerverfahrens mit Schrittweite $h = 0.1$ aus und gib die Ergebnisse an. Berechne die ersten beiden Schritte des autonomisierten Anfangswertproblems zu (1) handschriftlich. Für alle weiteren Berechnungsschritte kannst du *Python* oder ein anderes Numerikprogramm verwenden. Beurteile die Eignung des expliziten Eulerverfahrens für die Problemlösung.

Lösungsvorschlag: Der Lösungsweg für die erste Differentialgleichung lautet:

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{x}}_1 &= \tilde{\boldsymbol{x}}_0 + h \cdot \tilde{f}_1(\tilde{\boldsymbol{x}}_0) \\ &= \begin{pmatrix} 0.1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.1 \cdot \left(\begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \cdot \sin(0) \\ \sin(0) - 2 \cdot \cos(0) \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -0.94 \\ 3.81 \\ 0.1 \end{pmatrix} \quad \color{red}{(0.5 Punkt(e))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{x}}_2 &= \tilde{\boldsymbol{x}}_1 + h \cdot \tilde{f}_1(\tilde{\boldsymbol{x}}_1) \\ &= \tilde{\boldsymbol{x}}_1 + 0.1 \cdot \left(\begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \tilde{\boldsymbol{x}}_1 + \begin{pmatrix} 4 \cdot \sin(0.1) \\ \sin(t) - 2 \cdot \cos(0.1) \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1.2861 \\ 2.7650 \\ 0.2 \end{pmatrix} \quad \color{red}{(0.5 Punkt(e))} \end{aligned}$$

Auflistung der Ergebnisse:

	AWP 1			AWP 2		
k	$\tilde{x}_{k,1}$	$\tilde{x}_{k,2}$	$\tilde{x}_{k,3}$	$\tilde{x}_{k,1}$	$\tilde{x}_{k,2}$	$\tilde{x}_{k,3}$
0	0.1	5	0	0.1	5	0
1	-0.94	3.81	0.1	-3.9	3.81	0.1
2	-1.2861	2.7650	0.2	156.0933	2.4690	0.2
3	-1.2452	1.9072	0.3	-6079.6934	17.4084	0.3

(1 Punkt(e))

Das Lösungsverfahren und die Schrittweite sind entsprechend der hier berechneten Werte für die zweite Differentialgleichung ungeeignet. Anhand der in Teilaufgabe a) berechneten Steiffigkeitskoeffizienten war bereits ein steifes Verhalten für diese Differentialgleichung zu erwarten, was durch die berechneten Werte nun bestätigt wurde. (0.5 Punkt(e))

d) Löse jetzt das autonomisierte Anfangswertproblem zu (2) erneut indem du das explizite Eulerverfahren mit einer kleineren Schrittweite von $h = 0.001$ ausführst. Gib die Ergebnisse für die Zeitpunkte 0.1 s, 0.2 s und 0.3 s an. Beurteile erneut die Eignung des expliziten Eulerverfahrens zur Problemlösung. Für die Berechnung kannst du *Python* oder ein anderes Numerikprogramm verwenden.

Lösungsvorschlag: Die Lösung von (2), nun mit einer Schrittweite von $h = 0.001$ lautet nun:

k	$\widetilde{x}_{k,1}$	$\widetilde{x}_{k,2}$	$\widetilde{x}_{k,3}$
0	0.1	5	0
100	0.0973	3.9210	0.1
200	0.1962	3.0573	0.2
300	0.2931	2.3718	0.3

Mit der verringerten Schrittweite ist die Lösung mit dem expliziten Eulerverfahren nicht divergent, dies jedoch mit erheblich gesteigertem Rechenaufwand. (1 Punkt(e))

e) Ein Verfahrensschritt eines impliziten Lösungsverfahrens erfordert die Lösung eines nichtlinearen Nullstellenproblems. Stelle das Nullstellenproblem des autonomisierten Anfangswertproblems zu (2) für das implizite Eulerverfahren auf. Führe anschließend eine Iteration des Newton-Verfahrens zur Lösung des aufgestellten Nullstellenproblems mit Schrittweise $h = 0.1$ durch. Kannst du für dieses konkrete Problem das implizite Eulerverfahren auch analytisch, also ohne Verwendung des Newton-Verfahrens, lösen? Begründe deine Antwort.

Lösungsvorschlag: Das Nullstellenproblem für das implizite Eulerverfahren lautet hier:

$$
\begin{aligned}
0 = F(\widetilde{\boldsymbol{x}}_{k+1}) &= \boldsymbol{x}_k + h \cdot \widetilde{f}_2(\widetilde{\boldsymbol{x}}_{k+1}) - \widetilde{\boldsymbol{x}}_{k+1} \\
&= \widetilde{\boldsymbol{x}}_k + h \cdot \left(\begin{pmatrix} -400 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{x}}_{k+1} + \begin{pmatrix} 400 \cdot \sin(\widetilde{x}_{k+1,3}) \\ \sin(\widetilde{x}_{k+1,3}) - 2\cos(\widetilde{x}_{k+1,3}) \\ 1 \end{pmatrix} \right) - \widetilde{\boldsymbol{x}}_{k+1} \\
&= \widetilde{\boldsymbol{x}}_k + \begin{pmatrix} -400h - 1 & 0 & 0 \\ h & -2h - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{x}}_{k+1} + \begin{pmatrix} 400h \cdot \sin(\widetilde{x}_{k+1,3}) \\ h\sin(\widetilde{x}_{k+1,3}) - 2h \cdot \cos(\widetilde{x}_{k+1,3}) \\ h \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(0.5 Punkt(e))

Das Newton-Verfahren lautet hier

$$
\widetilde{\boldsymbol{x}}_{neu} = \widetilde{\boldsymbol{x}}_{alt} - \left[\frac{\partial F}{\partial \widetilde{\boldsymbol{x}}_{k+1}}(\widetilde{\boldsymbol{x}}_{alt}) \right]^{-1} \cdot F(\widetilde{\boldsymbol{x}}_{alt}),
$$

$$
\text{mit } \frac{\partial F}{\partial \widetilde{\boldsymbol{x}}_{k+1}}(\widetilde{\boldsymbol{x}}_{alt}) = \begin{pmatrix} -400h - 1 & 0 & 400h \cdot \cos(\widetilde{x}_{alt,3})) \\ h & -2h - 1 & h \cdot \cos(\widetilde{x}_{alt,3}) + 2h \cdot \sin(\widetilde{x}_{alt,3}) \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
$$

um $\widetilde{\boldsymbol{x}}_{k+1}$ schrittweise anzunähern.
Mit $h = 0.1$ ergibt sich:

$$\widetilde{\boldsymbol{x}}_{neu} = \widetilde{\boldsymbol{x}}_{alt} - \left[\begin{pmatrix} -41 & 0 & 40 \cdot \cos(\widetilde{x}_{alt,3}) \\ 0.1 & -1.2 & 0.1 \cdot \cos(\widetilde{x}_{alt,3}) + 0.2 \cdot \sin(\widetilde{x}_{alt,3}) \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right]^{-1} \cdot F(\widetilde{\boldsymbol{x}}_{alt}).$$

(0.5 Punkt(e))
Mit $\widetilde{\boldsymbol{x}}_{alt} = \widetilde{\boldsymbol{x}}_0 = (0.1, 5, 0)^T$ als Startschätzung für $\widetilde{\boldsymbol{x}}_{k+1}$ folgt die Lösung nach einer Newton-Iteration:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{x}}_{neu} &= \begin{pmatrix} 0.1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} -41 & 0 & 40 \cdot \cos(0) \\ 0.1 & -1.2 & 0.1 \cdot \cos(0) + 0.2 \cdot \sin(0) \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right]^{-1} \cdot F((3, 2, 0)^T) \\
&= \begin{pmatrix} 0.1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} -41 & 0 & 40 \\ 0.1 & -1.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right]^{-1} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0.1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -41 & 0 & 0 \\ 0.1 & -1.2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -0.2 \\ 0.1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 0.1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.0244 & 0.0 & -0.9756 \\ -0.0020 & -0.8333 & -0.1646 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4.0 \\ -1.19 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 4.0167 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \widetilde{\boldsymbol{x}}_1.
\end{aligned}$$

(0.5 Punkt(e))
Das implizite Eulerverfahren lässt sich hier auch analytisch lösen, da die Nichtlinearität der Differentialgleichung nur von der Zeitv ariable abhängt, welche im voraus bekannt ist wodurch der nichtlineare Anteil durch Einsetzten berechnet werden kann. (0.5 Punkt(e))

2 Geometrische und numerische Lösung von Differentialgleichungen

Die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = \sin\left(\frac{4}{3}t + 2\right) + \frac{1}{4}x(t) + \frac{2}{5}, \quad x(0) = x_0 = 0 \tag{3}$$

soll mit Hilfe der geforderten Integrationsverfahren geometrisch und numerisch bestimmt werden.

Verwende die Schrittweite $h = 2$ sowie für die geometrische Lösung das beigefügte Richtungsfeld der Differentialgleichung in (3). Mache in jedem Iterationsschritt die verwendeten Steigungen kenntlich. Runde die Zwischenergebnisse bei der numerischen Berechnung wenn notwendig auf mind. vier Nachkommastellen.

Lösungsvorschlag: Autonomisieren liefert

$\boldsymbol{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$ und $\tilde{f}(\boldsymbol{y}) := \begin{pmatrix} 1 \\ \sin\left(\frac{4}{3}y_1 + 2\right) + \frac{1}{4}y_2 + \frac{2}{5} \end{pmatrix}$ mit $\boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} y_{0,1} \\ y_{0,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Konstruiere geometrisch die zwei Lösungspunkte x_1 und x_2 mit dem expliziten Euler-Verfahren. Überprüfe deine geometrische Lösung und gib den rechnerisch ermittelten Wert für x_1 an.

Lösungsvorschlag: Die Iterationsvorschrift des expliziten Euler-Verfahren lautet: $\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + h\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)$

Anwendung der Iterationsvorschrift auf das autonome AWP liefert nach der ersten Iteration:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_1 &= \boldsymbol{y}_0 + h \cdot \tilde{f}(\boldsymbol{y}_0) \\ &= \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\ \sin(2) + \frac{2}{5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\1.3093\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}2\\2.6186\end{pmatrix} \\ &\Rightarrow x_1 \approx 2.6186\end{aligned}$$

Die geometrische Konstruktion des expliziten Euler-Verfahrens für das gegebene Anfangswertproblem ist in Abbilung 1 zu sehen.

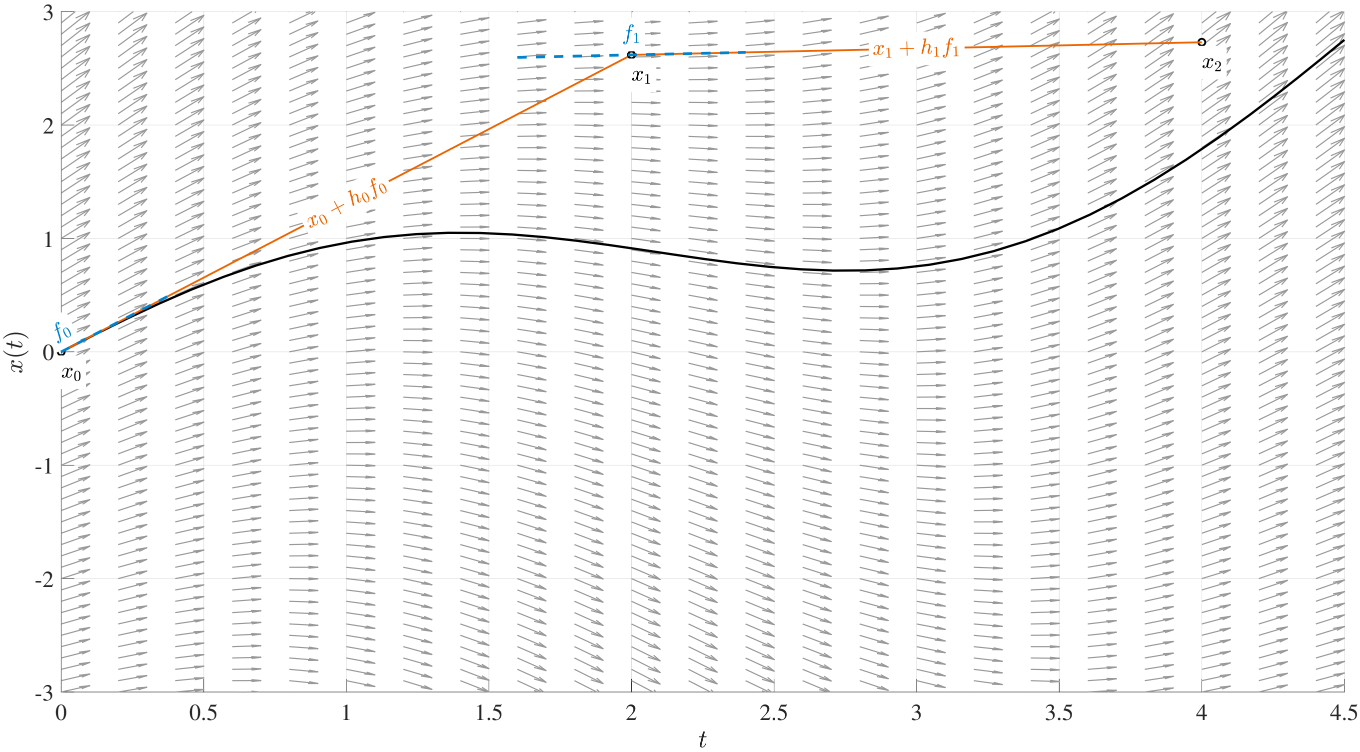

Abbildung 1: Geometrische Konstruktion des expliziten Euler-Verfahrens mit zwei Iterationsschritten.

b) Konstruiere geometrisch die Lösungspunkte x_1 und x_2 mit dem impliziten Euler-Verfahren. Gib auch hier den rechnerisch ermittelten Wert x_1 nach der ersten Iteration an.

Lösungsvorschlag: Die Iterationsvorschrift des impliziten Euler-Verfahren lautet: $\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + h\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{k+1})$

Anwendung der Iterationsvorschrift auf das autonome AWP liefert nach der ersten Iteration:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_1 &= \boldsymbol{y}_0 + h \cdot \tilde{f}(\boldsymbol{y}_1) \\ &= \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\ \sin\left(\frac{4}{3}y_{1,1} + 2\right) + \frac{1}{4}y_{1,2} + \frac{2}{5}\end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{matrix}\text{I:}\\ \text{II:}\end{matrix} \quad \begin{pmatrix}y_{1,1}\\y_{1,2}\end{pmatrix} &= 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\ \sin\left(\frac{4}{3}y_{1,1} + 2\right) + \frac{1}{4}y_{1,2} + \frac{2}{5}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

I in II liefert Lösung des GLS

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow y_{1,2} = 2\sin\left(\frac{8}{3}+\frac{6}{3}\right)+\frac{2}{4}y_{1,2}+\frac{4}{5}\\
&\Leftrightarrow y_{1,2} \approx -1.9979+\frac{2}{4}y_{1,2}+\frac{4}{5}\\
&\Leftrightarrow \frac{2}{4}y_{1,2} \approx -1.1979\\
&\Leftrightarrow y_{1,2} \approx -2.3958 \quad \Rightarrow x_1 \approx -2.3958
\end{aligned}
$$

Die geometrische Konstruktion des impliziten Euler-Verfahrens für das gegebene Anfangswertproblem ist in Abbilung 2 zu sehen. Die dort dargestellten Zwischenergebnisse aus der numerischen Nullstellensuche, dienen zur Vertiefung und sind für die geometrische Lösung nicht relevant.

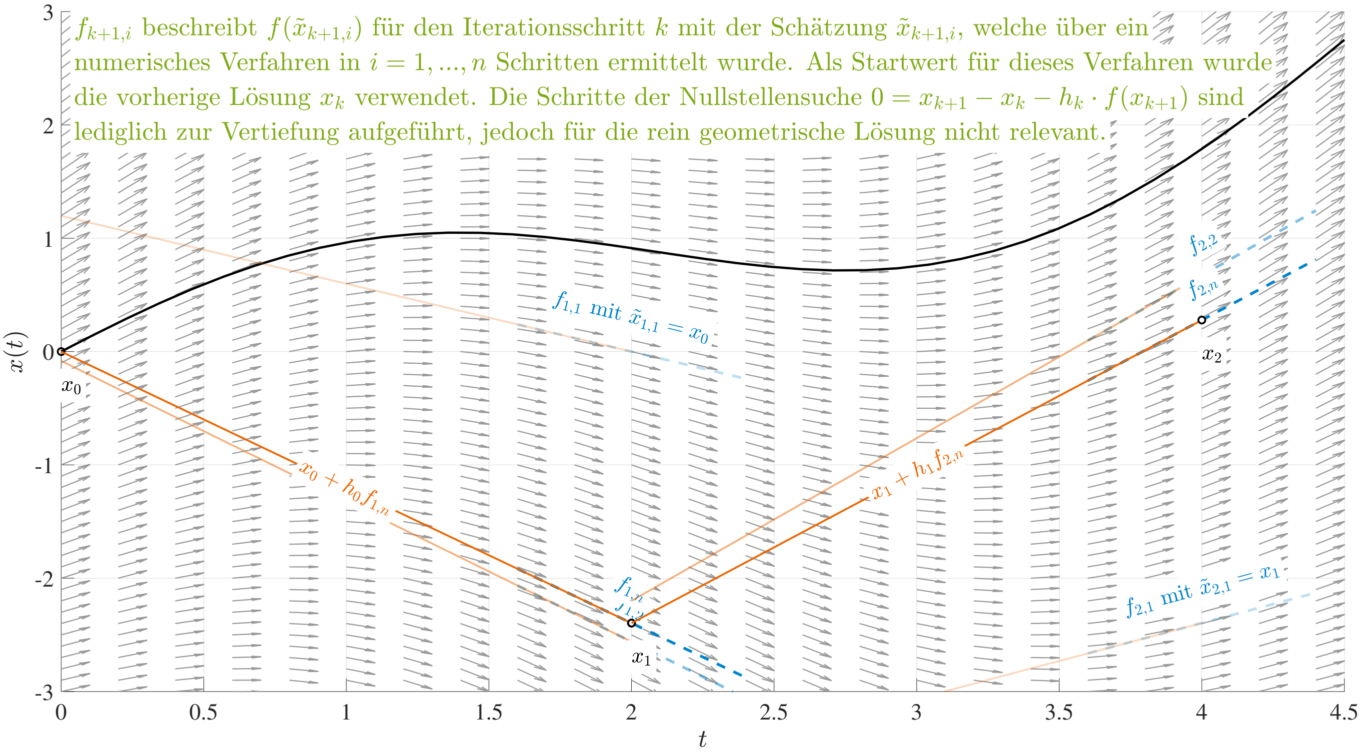

Abbildung 2: Geometrische Konstruktion des impliziten Euler-Verfahrens mit zwei Iterationsschritten. Zur Illustration des numerischen Lösung, sind zusätzlich einige Lösungsschritte der numerischen Nullstellensuche dargestellt.

c) Konstruiere geometrisch die zwei Punkte x_1 und x_2 mit dem Heun-Verfahren. Gib auch hier den rechnerisch ermittelten Wert x_1 sowie die Zwischenwerte s_1 und s_2 an.

Lösungsvorschlag: Die Iterationsvorschrift das Heun-Verfahrens lautet:

$$
\boldsymbol{s}_1 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k) \qquad \boldsymbol{s}_2 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k + h_k\boldsymbol{s}_1) \qquad \boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \frac{h}{2}(\boldsymbol{s}_1+\boldsymbol{s}_2)
$$

Anwendung der Iterationsvorschrift auf das autonome AWP liefert nach der ersten Iteration:

$$\boldsymbol{s}_1 = \tilde{f}(\boldsymbol{y}_0) = \tilde{f}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right) \approx \begin{pmatrix}1\\1.3093\end{pmatrix} \text{ (siehe expl. Euler Iteration)}$$

$$\boldsymbol{s}_2 = f(\boldsymbol{y}_0 + h\boldsymbol{s}_1) \approx \tilde{f}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}1\\1.3093\end{pmatrix}\right)$$

$$\approx \begin{pmatrix}1\\ \sin\left(\frac{4}{3}\cdot 2 + 2\right) + \frac{1}{4}\cdot 2.6186 + \frac{2}{5}\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}1\\ \sin\left(\frac{14}{3}\right) + \frac{1}{4}\cdot 2.6186 + \frac{2}{5}\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}1\\0.0557\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{y}_0 + \frac{h}{2}(\boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{s}_2) \approx \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1.3090\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0.0557\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1.3650\end{pmatrix} \quad \Rightarrow x_1 \approx 1.3650.$$

Die geometrische Konstruktion des Heun-Verfahrens für das gegebene Anfangswertproblem ist in Abbildung 3 zu sehen.

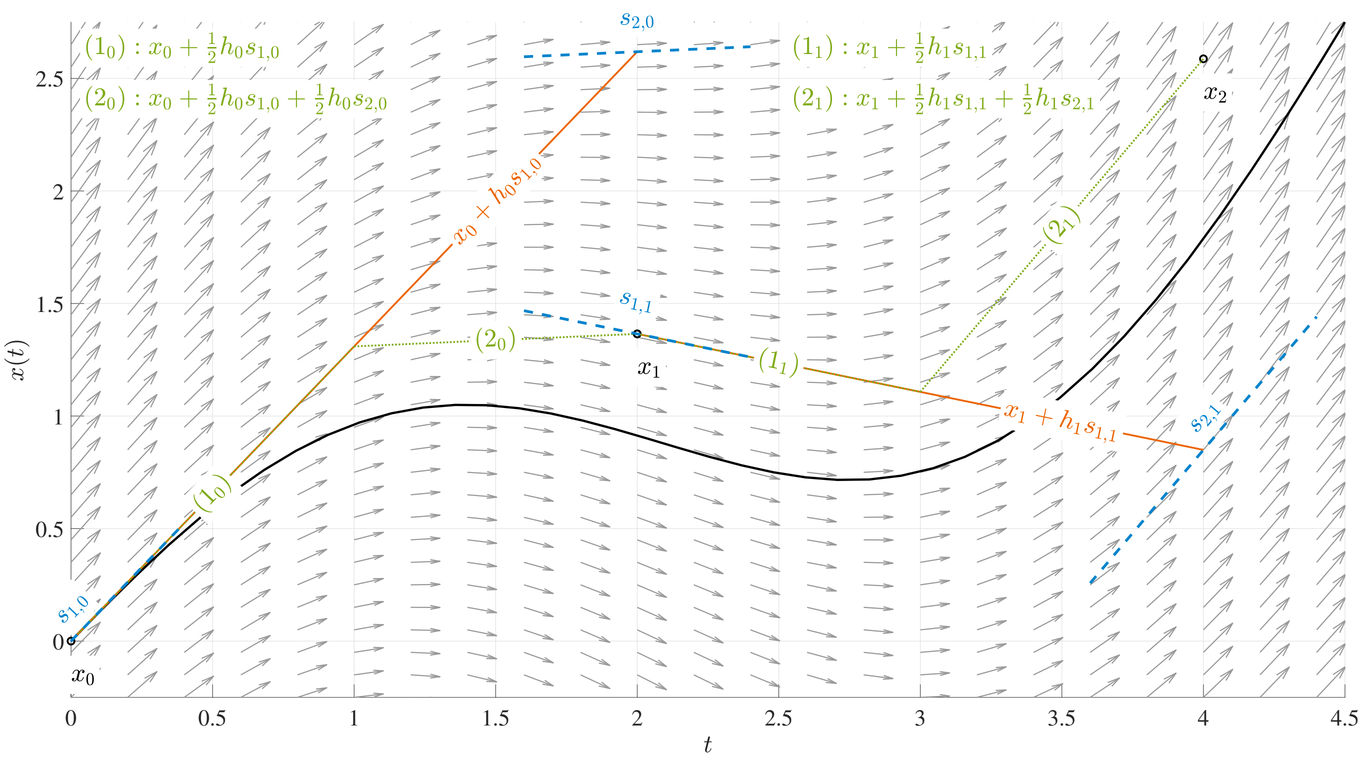

Abbildung 3: Geometrische Konstruktion des Heun-Verfahrens mit Iterationsschritten $k = 0, 1$ und allen ermittelten Steigungen $s_{i,k}, i = 1, 2$. Das Ergebnis nach Integration der einzelnen Steigungen s ist durch (j_k), $j = 1, 2$ gekennzeichnet.

d) Konstruiere geometrisch die Lösungspunkte mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung. Führe erneut geometrisch zwei Iterationsschritte aus und gib den rechnerisch ermittelten Wert x_1 sowie die Zwischenwerte s_1 bis s_4 an.

Lösungsvorschlag: Die Iterationsvorschrift das Runge-Kutta-Verfahrens lautet:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{s}_1 &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k) \\
\boldsymbol{s}_2 &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k + \frac{h}{2}\boldsymbol{s}_1) \\
\boldsymbol{s}_3 &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k + \frac{h}{2}\boldsymbol{s}_2) \\
\boldsymbol{s}_4 &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k + h\boldsymbol{s}_3) \\
\boldsymbol{x}_{k+1} &= \boldsymbol{x}_k + \frac{h}{6}(\boldsymbol{s}_1 + 2\boldsymbol{s}_2 + 2\boldsymbol{s}_3 + \boldsymbol{s}_4)
\end{aligned}
$$

Anwendung der Iterationsvorschrift auf das autonome AWP liefert nach der ersten Iteration:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{s}_1 &= \tilde{f}(\boldsymbol{y}_0) = \tilde{f}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right) \approx \begin{pmatrix}1\\1.3093\end{pmatrix} \text{(siehe expl. Euler Iteration)} \\
\boldsymbol{s}_2 &= \tilde{f}(\boldsymbol{y}_0 + \frac{h}{2}\boldsymbol{s}_1) \approx \tilde{f}\left(\begin{pmatrix}1\\1.3093\end{pmatrix}\right) \approx \begin{pmatrix}1\\ \sin\left(\frac{4}{3}\cdot 1 + 2\right) + \frac{1}{4}\cdot 1.3093 + \frac{2}{5}\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}1\\0.5368\end{pmatrix} \\
\boldsymbol{s}_3 &= \tilde{f}(\boldsymbol{y}_0 + \frac{h}{2}\boldsymbol{s}_2) \approx \tilde{f}\left(\begin{pmatrix}1\\0.5368\end{pmatrix}\right) \approx \begin{pmatrix}1\\ \sin\left(\frac{4}{3}\cdot 1 + 2\right) + \frac{1}{4}\cdot 0.5368 + \frac{2}{5}\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}1\\0.3436\end{pmatrix} \\
\boldsymbol{s}_4 &= \tilde{f}(\boldsymbol{y}_0 + h\boldsymbol{s}_3) \approx \tilde{f}\left(\begin{pmatrix}2\\0.6872\end{pmatrix}\right) \approx \begin{pmatrix}1\\ \sin\left(\frac{4}{3}\cdot 2 + 2\right) + \frac{1}{4}\cdot 0.6872 + \frac{2}{5}\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}1\\-0.4272\end{pmatrix} \\
\boldsymbol{y}_1 &= \boldsymbol{y}_0 + \frac{h}{6}(\boldsymbol{s}_1 + 2\boldsymbol{s}_2 + 2\boldsymbol{s}_3 + \boldsymbol{s}_4) \\
&\approx \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}1\\1.3093\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\0.5368\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\0.3436\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-0.4272\end{pmatrix}\right) \approx \begin{pmatrix}2\\0.8810\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Die geometrische Konstruktion des Runge-Kutta-Verfahrens für das gegebene Anfangswertproblem ist in Abbilung 4 zu sehen.

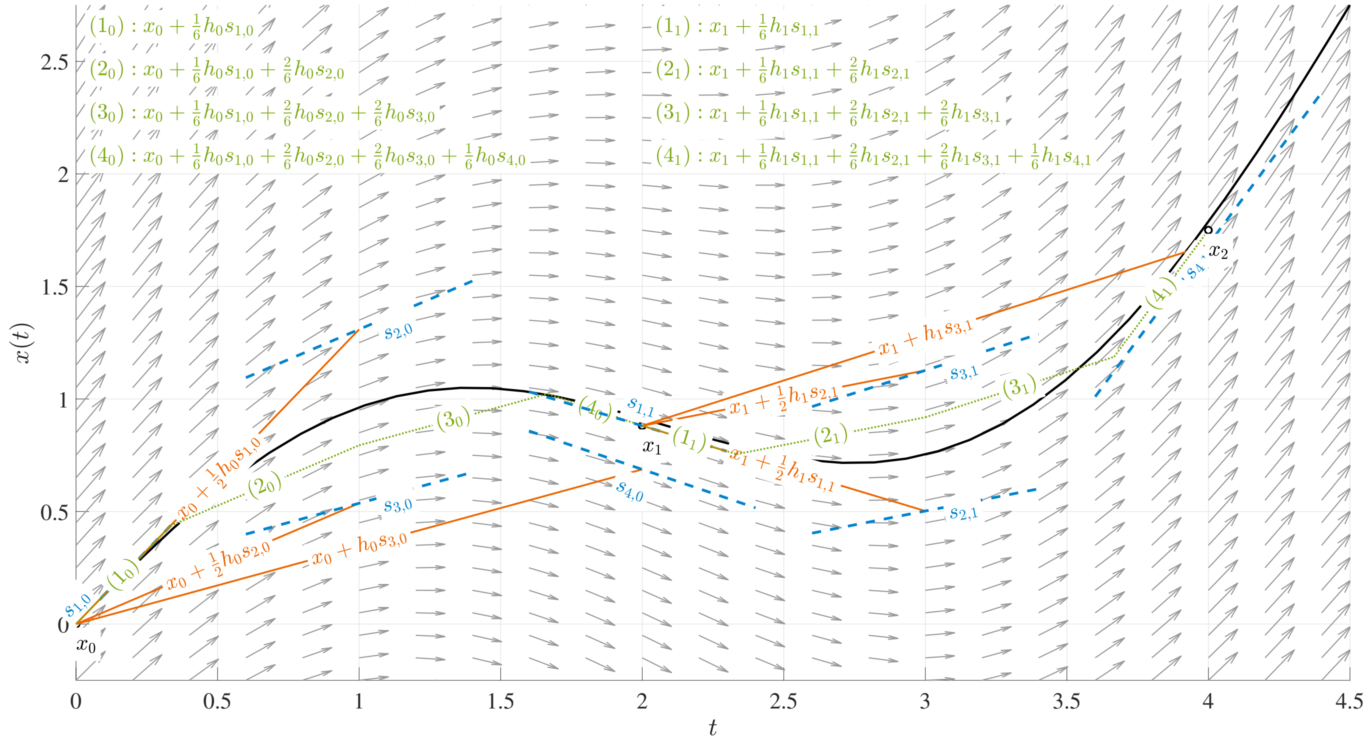

Abbildung 4: Geometrische Konstruktion des Runge-Kutta-Verfahrens mit Iterationsschritten $k = 0, 1$ und allen ermittelten Steigungen $s_{i,k}, i = 1, ..., 4$. Das Ergebnis nach Integration der einzelnen Steigungen s ist durch (j_k), $j = 1, ..., 4$ gekennzeichnet.