Computational Engineering und Robotik

Prof. Jan Peters, J. Carvalho, P. Klink, P. Liu, S. Stark

Sommersemester 2020

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

8. Übung

Hinweise zu dieser Übung

- Für die Teilnahme an der Übung ist eine Anmeldung beim **Moodle** notwendig. Dort sind auf der Kursseite zusätzliche Informationen zur Veranstaltung und die Regelungen zur Anrechnung der Übungsleistungen in die Endnote aufgeführt:

  `https://moodle.tu-darmstadt.de/course/view.php?id=20214`

- Von dieser Übung werden die **1. Aufgabe** und die **2. Aufgabe** bewertet.
- **Abgabe der schriftlichen Lösungen** zu den Übungsaufgaben bis **Montag, den 29.06.2019 um 12:00 Uhr** per Datei-Upload im Moodle.
- Lade im Moodle die Lösungen hoch als: **UebungXX.pdf** (z.B, für die Übung 04, Uebung04.pdf); **taskX.py** (z.B., für die zweite Programmieraufgabe task2.py). Gib deine Gruppenummer sowie die Namen und Matrikelnummern aller Beteiligten am Anfang der Datei an.
- Begründe alle deine Antworten. Falls du einen Scan deiner Antworten hochlädst, stelle sicher, dass sie lesbar sind.
- Stelle Fragen zu dieser Übung bitte im Moodle-Forum oder in den Sprechstunden.

1 Kondition und numerische Stabilität (6 Punkte)

a) Berechne für die folgenden Funktionen jeweils die Konditionszahlen. Gib an, in welchen Teilen der Wertebereiche die Funktionen Eingangsfehler stark bzw. schwach verstärken.
   - $f_1(x) = \cos(x),\ x \in [0, \pi/2)$
   - $f_2(x) = 1 + x,\ x \in \mathbb{R}$
   - $f_3(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$
   - $f_4(x) = e^{x-1},\ x \in (1, +\infty)$

b) Die `softmax` ist eine Funktion, die häufig beim maschinellen Lernen verwendet wird, um die Ausgabe eines neuronalen Netzes in eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung umzuwandeln. Wenn die Ausgabe eines neuronalen Netzes $\boldsymbol{x} \in R^d$ ist, dann ist der `softmax`-Operator, `softmax` $: R^d \to R^d$, und der k-te Eintrag des Ausgangsvektors ist

$$\text{softmax}(\boldsymbol{x})_k = \frac{e^{x_k}}{\sum_{j=1}^{d} e^{x_j}}$$

Typischerweise können die Einträge des Vektors $\boldsymbol{x}$ sehr groß sein, z.B. $10^4 < x_j < 10^6$. Die Implementierung des `softmax`, wie in der obigen Funktion angegeben, ist problematisch. Warum ist das der Fall?

Nehmen wir an, dass, obwohl die Einträge in $\boldsymbol{x}$ groß sind, die paarweise Differenz klein ist, d.h. $|x_i - x_j| \leq 1,\ \forall i, j \in \{1, \ldots, d\}$. Gib eine modifizierte Version des `softmax` an, so dass seine Berechnung immer noch korrekt, aber stabil ist.

Hinweis: Du brauchst die Begriffe Konditionszahlen oder Rundungsfehler nicht zu verwenden. Denke erst mal über Numerische Überläufe.

c) Wir vergleichen die numerische Stabilität der Funktionen $g_1(x) = x^n - x^{n-1}$ und $g_2(x) = x^{n-1}(x-1)$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und prüfen, welche Funktion für die numerische Auswertung an der Stelle $x \approx 1$ besser geeignet ist. Hier ist $x^n = x \cdot x \cdots x$. Betrachte dazu den relativen Fehler, der durch die Auswertung der Funktionen in Gleitpunktarithmetik rd$(g_i(x))$ für $i \in \{1, 2\}$ an der Stelle $x \to 1$ entsteht.

Verwende für die Rechenoperation $\diamondsuit$ den Ausdruck rd$(a \diamondsuit b) = (a \diamondsuit b)(1 + \varepsilon)$ zur Berechnung der Auswertung in Gleitpunktarithmetik.

2 Systemidentifikation (4 Punkte)

Betrachte im Folgenden einen mobilen Roboter, den wir modellieren werden, mit einem Punkt-Masse-System mit Masse $m = 1.0\,\mathrm{kg}$, und angenommen, dass **es gibt keine anderen Kräfte, wie z.B. Reibung**. Der Roboter verfügt über ein einziges Antriebssystem, das es ihm erlaubt, sich nur in x-Richtung zu bewegen. Dieses Antriebssystem wird mit einer konstanten Kraft $F > 0$ angetrieben.

Wir kennen den Wert der Kraft F nicht, aber wir werden versuchen, ihn mit Hilfe von Sensoren gesammelten Daten abzuschätzen. Dazu montieren wir auf dem Roboter einen IMU (Inertial Measurement Unit) Sensor, welche die einwirkenden Beschleunigungen misst. Durch Integration der Beschleunigungswerte wird die relative Position zu einem definierten Ursprung bestimmt.
Folgende Roboterpositionen $x(t_i)$ (Tabelle 1) wurden im Versuch ermittelt, bei dem der Roboter **zu Beginn still stand**:

Messwert i	0	1	2	3	4	5
t_i [s]	0	1	2	3	4	5
$x_{\text{IMU},i} = x_{\text{IMU}}(t_i)$ [m]	0	0.31	0.78	2.17	4.12	5.86

Tabelle 1: IMU Messungen in den ersten 5 Sekunden.

a) Stelle die Dynamikgleichung des Sytems auf. Danach, löst die für $x(t)$ im Allgemein (d.h. die Anfangswerte sind nicht immer Null).

b) Nun wollen wir die konstante Kraft F finden, die die Ergebnisse aus Tabelle 1 hervorgebracht hat. Die Gleichung aus Aufgabe a) setzt die modellierte Position $(\tilde{x}_i)$ zu jedem Zeitpunkt in Beziehung zu der aufgebrachten Kraft. Dazu definieren wir eine konvexe Kostenfunktion L. Finde F so, dass L minimiert wird.

$$F^* = \arg\min_F L(F) = \arg\min_F \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\tilde{x}(t_i, F) - x_{\text{IMU}}(t_i)\right)^2$$

c) Jetzt messen wir auch die Position mit einem Lasersensor, um sie mit den IMU-Messwerten zu vergleichen. Die Lasermesswerte sind in Tabelle 2 aufgeführt. Mit der in b) berechneten Kraft können wir die Position jederzeit mit der Model aus a) zu berechnen. Vergleiche die mit dem Modell erhaltene Position mit der des Lasersensors zu den 5 Zeitpunkten aus Tabelle 2. Berechne auch den Root-Mean-Square-Error (RMSE), um die durchschnittliche Abweichung der Modellschätzung von der Messung abzuschätzen.

$$\varepsilon_{\text{RMSE}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (\tilde{x}(t_i, F) - x_{\text{laser}}(t_i))^2}$$

Messwert i	0	1	2	3	4	5
t_i [s]	0	1	2	3	4	5
$x_{\text{laser},i} = x_{\text{laser}}(t_i)$ [m]	0	0.305	0.71	2.12	4.18	5.84

Tabelle 2: Lasermessungen in den ersten 5 Sekunden

d) Wenn jemand dich bitten würde, eine Vorhersage zu machen, in welcher Position sich den echten Roboter bei 100 Sekunden befinden wird, was würdest du sagen?

Hinweis zu wissenschaftlichem Arbeiten

Es ist nicht gestattet, Lösungen anderer Personen als die der Gruppenmitglieder als Lösung der Aufgabe abzugeben. Des Weiteren müssen alle zur Lösungsfindung verwendeten, darüber hinausgehenden, relevanten Quellen explizit angegeben werden. Dem widersprechendes Handeln ist Plagiarismus und ist ein ernster Verstoß gegen die Grundlagen des wissenschaftlichen Arbeitens, das ernsthafte Konsequenzen bis hin zur Exmatrikulation haben kann.