2. Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

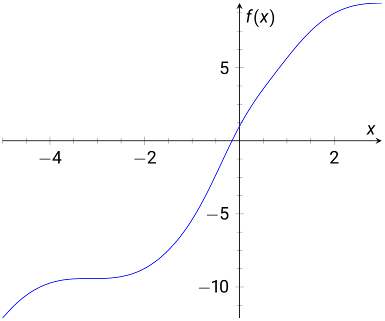
Computational Engineering und Robotik

Aufgabe 1: Iterative Nullstellenapproximation

Gegeben sei die Funktion

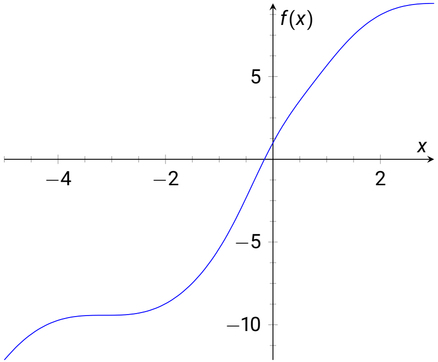
$$f(x) = 3x + e^{-2x^2} + 3\sin(x).$$

Dem Plot in die linke Abbildung können Sie entnehmen, dass die Funktion eine Nullstelle bei $x_s \approx -0.2$ besitzt.
Die Nullstelle soll im Folgenden mithilfe der in der Vorlesung vorgestellten numerischen Lösungsverfahren für nichtlineare Gleichungen ermittelt werden.
Sofern in den folgenden Teilaufgaben Rechenergebnisse gefordert sind, dürfen diese rechnergestützt (mit double precision!) ermittelt werden, z.B. mit Python. Für die Abgabe genügt es, die Ergebnisse auf 8 Dezimalstellen genau zu notieren.



Aufgabe 1: Iterative Nullstellenapproximation 1 a)

Zunächst soll die Fixpunktiteration zur Nullstellensuche eingesetzt werden. Entscheidet anhand des Plots, ob für die triviale Fixpunktgleichung $g_1(x) = f(x) + x$ die lokale Konvergenzbedingung erfüllt ist.

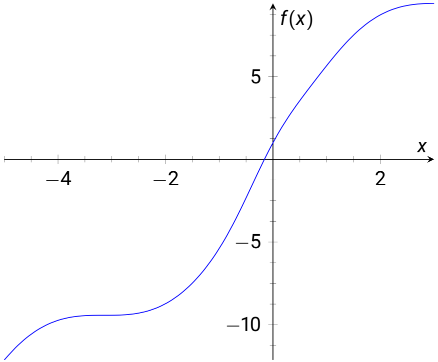


Aufgabe 1: Iterative Nullstellenapproximation 1 a)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Zunächst soll die Fixpunktiteration zur Nullstellensuche eingesetzt werden. Entscheidet anhand des Plots, ob für die triviale Fixpunktgleichung $g_1(x) = f(x) + x$ die lokale Konvergenzbedingung erfüllt ist.

Konvergenzbedingung:
$|\lambda_i| < 1, \forall$ Eigenwerte λ_i von $\boldsymbol{J_g}(x^*)$



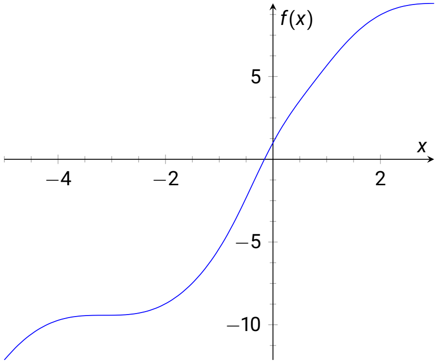
Aufgabe 1: Iterative Nullstellenapproximation
1 a)

Zunächst soll die Fixpunktiteration zur Nullstellensuche eingesetzt werden. Entscheidet anhand des Plots, ob für die triviale Fixpunktgleichung $g_1(x) = f(x) + x$ die lokale Konvergenzbedingung erfüllt ist.

Konvergenzbedingung:
$|\lambda_i| < 1, \forall$ Eigenwerte λ_i von $\boldsymbol{J_g}(x^*)$

Für eindimensionalen Fall
$|\lambda_i| = |\frac{\partial}{\partial x} g_1(x^*)| = |f'(x^*) + 1| < 1$

daraus folgt:
$f'(x^*) \in (-2, 0)$



Aufgabe 1: Iterative Nullstellenapproximation
1 a)

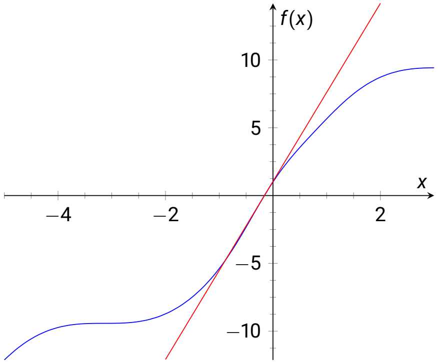
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Zunächst soll die Fixpunktiteration zur Nullstellensuche eingesetzt werden. Entscheidet anhand des Plots, ob für die triviale Fixpunktgleichung $g_1(x) = f(x) + x$ die lokale Konvergenzbedingung erfüllt ist.

Konvergenzbedingung:
$|\lambda_i| < 1, \forall \text{ Eigenwerte } \lambda_i \text{ von } \boldsymbol{J_g}(x^*)$

Für eindimensionalen Fall
$|\lambda_i| = |\frac{\partial}{\partial x} g_1(x^*)| = |f'(x^*) + 1| < 1$

daraus folgt:
$f'(x^*) \in (-2, 0)$



Aus der Abbildung, $f'(x_s) > 0$.
Die Konvergenzbedingung ist nicht erfüllt .

Aufgabe 1: Iterative Nullstellenapproximation 1 b)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Untersucht nun die Fixpunktgleichung $g_2(x) = a \cdot f(x) + x$ mit $a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Bestimmt zunächst den Relaxations-Koeffizient a mittels des in der Vorlesung vorgestellten Ansatzes. Nutzt hierfür noch den ungefähren Wert $x_s \approx -0.2$.
Entscheidet dann rechnerisch mit der genauen Nullstelle $x_s = -0.1588023735798893$, ob die Konvergenzbedingung für g_2 erfüllt ist.

Aufgabe 1: Iterative Nullstellenapproximation 1 b)

Untersucht nun die Fixpunktgleichung $g_2(x) = a \cdot f(x) + x$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Bestimmt zunächst den Relaxations-Koeffizient a mittels des in der Vorlesung vorgestellten Ansatzes. Nutzt hierfür noch den ungefähren Wert $x_s \approx -0.2$.
Entscheidet dann rechnerisch mit der genauen Nullstelle $x_s = -0.1588023735798893$, ob die Konvergenzbedingung für g_2 erfüllt ist.

optimale Relaxationsmatrix:

$$A = -\boldsymbol{J_f}(x^*)^{-1}$$

Aufgabe 1: Iterative Nullstellenapproximation
1 b)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Untersucht nun die Fixpunktgleichung $g_2(x) = a \cdot f(x) + x$ mit $a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Bestimmt zunächst den Relaxations-Koeffizient a mittels des in der Vorlesung vorgestellten Ansatzes. Nutzt hierfür noch den ungefähren Wert $x_s \approx -0.2$.
Entscheidet dann rechnerisch mit der genauen Nullstelle $x_s = -0.1588023735798893$, ob die Konvergenzbedingung für g_2 erfüllt ist.

optimale Relaxationsmatrix:

$$A = -\boldsymbol{J_f}(x^*)^{-1}$$

In diesem eindimensionalen Fall folgt daher:

$$a = -\frac{1}{f'(x_s)} = -\frac{1}{3 - 4 \cdot x_s \cdot e^{-2x_s^2} + 3\cos(x_s)} \approx -0.14972990$$

Aufgabe 1: Iterative Nullstellenapproximation 1 b)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Untersucht nun die Fixpunktgleichung $g_2(x) = a \cdot f(x) + x$ mit $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Bestimmt zunächst den Relaxations-Koeffizient a mittels des in der Vorlesung vorgestellten Ansatzes. Nutzt hierfür noch den ungefähren Wert $x_s \approx -0.2$.
Entscheidet dann rechnerisch mit der genauen Nullstelle $x_s = -0.1588023735798893$, ob die Konvergenzbedingung für g_2 erfüllt ist.

optimale Relaxationsmatrix:

$$A = -\boldsymbol{J_f}(x^*)^{-1}$$

In diesem eindimensionalen Fall folgt daher:

$$a = -\frac{1}{f'(x_s)} = -\frac{1}{3 - 4 \cdot x_s \cdot e^{-2x_s^2} + 3\cos(x_s)} \approx -0.14972990$$

Für genauen Nullstelle $x_s = -0.1588023735798893$, setze a ein.

$$g_2(x_s) = a \cdot f(x_s) + x_s \approx 0.01684077 < 1$$ Konvergenzbedingung erfüllt

Aufgabe 1: Iterative Nullstellenapproximation 1 c)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Als zweites numerisches Iterationsverfahren haben Sie das Newton-Verfahren kennen gelernt. Stellt dafür die Iterationsvorschrift zur Nullstellenberechnung von $f(x)$ auf.

$$f(x) = 3x + e^{-2x^2} + 3\sin(x)$$

Aufgabe 1: Iterative Nullstellenapproximation 1 c)

Als zweites numerisches Iterationsverfahren haben Sie das Newton-Verfahren kennen gelernt. Stellt dafür die Iterationsvorschrift zur Nullstellenberechnung von $f(x)$ auf.

$f(x) = 3x + e^{-2x^2} + 3\sin(x)$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

$$= x^{(k)} - \frac{3x^{(k)} + e^{-2(x^{(k)})^2} + 3\sin(x^{(k)})}{3 - 4 \cdot x^{(k)} \cdot e^{-2(x^{(k)})^2} + 3\cos(x^{(k)})}$$

Aufgabe 1: Iterative Nullstellenapproximation 1 d) & e)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Führt für das relaxierte Fixpunktverfahren und das Newton-Verfahren jeweils vier Schritte ausgehend von $x_0 = -1.5$ durch und notieren Sie das Ergebnis zu jeder Iteration.

Aufgabe 1: Iterative Nullstellenapproximation 1 d) & e)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Führt für das relaxierte Fixpunktverfahren und das Newton-Verfahren jeweils vier Schritte ausgehend von $x_0 = -1.5$ durch und notieren Sie das Ergebnis zu jeder Iteration.

k	$x^{(k)}$ (Newton)	$x^{(k)}$ (Fixpunkt)
0	-1.5	-1.5
1	0.7816964499095134	-0.3798143326246495
2	-0.3478628107785293	-0.1548730550361225
3	-0.1625196759626628	-0.1587327814879484
4	-0.1588054414098333	-0.1588012005274979

Aufgabe 1: Iterative Nullstellenapproximation 1 d) & e)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Führt für das relaxierte Fixpunktverfahren und das Newton-Verfahren jeweils vier Schritte ausgehend von $x_0 = -1.5$ durch und notieren Sie das Ergebnis zu jeder Iteration.

k	$x^{(k)}$ (Newton)	$x^{(k)}$ (Fixpunkt)
0	-1.5	-1.5
1	0.7816964499095134	-0.3798143326246495
2	-0.3478628107785293	-0.1548730550361225
3	-0.1625196759626628	-0.1587327814879484
4	-0.1588054414098333	-0.1588012005274979

Welches der beiden Verfahren ist zu welchen Zeitpunkten das geeignetere? Begründet jeweils, warum das der Fall ist. Betrachtet dazu eure Ergebnisse aus der letzten Teilaufgabe und auch den theoretischen Hintergrund zu den Verfahren, wie er in der Vorlesung vorgestellt wurde.

Aufgabe 1: Iterative Nullstellenapproximation 1 d) & e)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Führt für das relaxierte Fixpunktverfahren und das Newton-Verfahren jeweils vier Schritte ausgehend von $x_0 = -1.5$ durch und notieren Sie das Ergebnis zu jeder Iteration.

k	$x^{(k)}$ (Newton)	$x^{(k)}$ (Fixpunkt)
0	-1.5	-1.5
1	0.7816964499095134	-0.3798143326246495
2	-0.3478628107785293	-0.1548730550361225
3	-0.1625196759626628	-0.1587327814879484
4	-0.1588054414098333	-0.1588012005274979

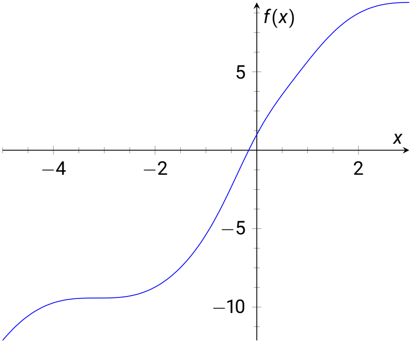
Welches der beiden Verfahren ist zu welchen Zeitpunkten das geeignetere? Begründet jeweils, warum das der Fall ist. Betrachtet dazu eure Ergebnisse aus der letzten Teilaufgabe und auch den theoretischen Hintergrund zu den Verfahren, wie er in der Vorlesung vorgestellt wurde.

$x_s = -0.1588023735798893$

Aufgabe 1: Iterative Nullstellenapproximation 1 f)

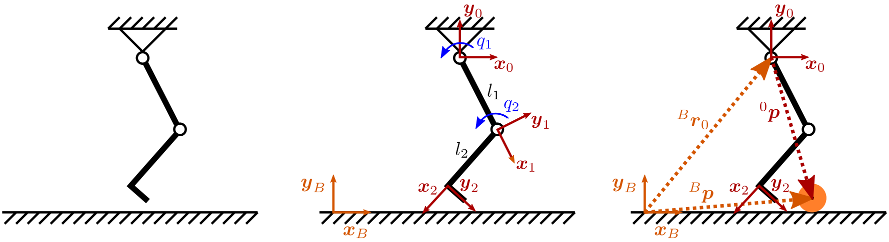
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Welches Konvergenzverhalten ist für die beiden Verfahren zu vermuten, wenn als Startwert $x_0 = -3$ gewählt wird? Begründet dies.



Aufgabe 2: Inverse Kinematik eines ebenen 2-DOF-Roboterbeins

Betrachtet wird das dargestellte vereinfachte Bein eines Humanoidroboters bestehend aus zwei Drehgelenken und zwei Gliedern der Länge $l_1 = l_2 = 30$. Die Basis des Beines befinde sich in der Hüfte des Roboters, deren Position ${}^B\boldsymbol{r}_0 = (40, 50, 0)^T$ bzgl. des Koordinatensystems S_B als fest angenommen wird. Der Roboter soll mit dem Fuß gegen einen Ball treten, dessen Mittelpunkt sich an der Stelle ${}^B\boldsymbol{p} = (60, 5, 0)^T$ befinde.



(a) (b) (c)

Aufgabe 2: Inverse Kinematik eines ebenen 2-DOF-Roboterbeins

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Mit waagerechter Nullstellung und lokalen Koordinatensystemen wie in Abbildung 1b ergibt sich als Vorwärtskinematikmodell des Beines die homogene Transformationsmatrix

$$^{0}\boldsymbol{T}_2(q_1, q_2) = \begin{pmatrix} \cos(q_1+q_2) & -\sin(q_1+q_2) & 0 & l_1\cos q_1 + l_2\cos(q_1+q_2) \\ \sin(q_1+q_2) & \cos(q_1+q_2) & 0 & l_1\sin q_1 + l_2\sin(q_1+q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es soll nun die inverse Kinematik des Beines betrachtet werden, um damit die Gelenkwinkel q_1 und q_2 zur gewünschten Fußposition zu bestimmen. Dazu ist die Lösung nichtlinearer Gleichungen nötig, die außer in Spezialfällen wie diesem im Allgemeinen sehr schwierig ist. Daher sollen numerische Lösungsverfahren zur Anwendung kommen.

Aufgabe 2: Inverse Kinematik eines ebenen 2-DOF-Roboterbeins
2 a)

$$
{}^{0}\boldsymbol{T}_2(q_1, q_2) = \begin{pmatrix} \cos(q_1+q_2) & -\sin(q_1+q_2) & 0 & l_1\cos q_1 + l_2\cos(q_1+q_2) \\ \sin(q_1+q_2) & \cos(q_1+q_2) & 0 & l_1\sin q_1 + l_2\sin(q_1+q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Bestimmt mittels der Vorwärtskinematik und den gegebenen Parametern den Vektor ${}^{0}\boldsymbol{r}_2$ in Abhängigkeit von q_1, q_2.

Aufgabe 2: Inverse Kinematik eines ebenen 2-DOF-Roboterbeins
2 a)

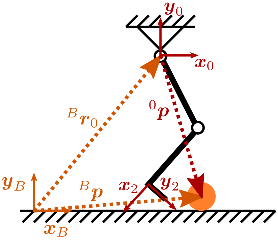
$$ {}^{0}\boldsymbol{T}_2(q_1, q_2) = \begin{pmatrix} \cos(q_1+q_2) & -\sin(q_1+q_2) & 0 & l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1+q_2) \\ \sin(q_1+q_2) & \cos(q_1+q_2) & 0 & l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1+q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

Bestimmt mittels der Vorwärtskinematik und den gegebenen Parametern den Vektor ${}^{0}\boldsymbol{r}_2$ in Abhängigkeit von q_1, q_2.

$$ {}^{0}\boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1+q_2) \\ l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1+q_2) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30\cos(q_1) + 30\cos(q_1+q_2) \\ 30\sin(q_1) + 30\sin(q_1+q_2) \\ 0 \end{pmatrix} $$

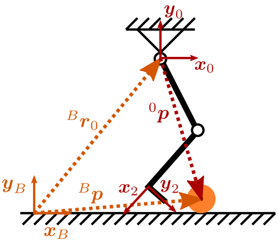
Aufgabe 2: Inverse Kinematik eines ebenen 2-DOF-Roboterbeins
2 a)

Gebt außerdem die Position des Balles ${}^{0}\boldsymbol{p}$ in Bezug auf das Koordinatensystem S_0 an.



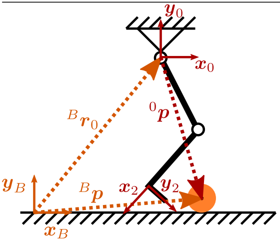
Aufgabe 2: Inverse Kinematik eines ebenen 2-DOF-Roboterbeins
2 a)

Gebt außerdem die Position des Balles ${}^{0}\boldsymbol{p}$ in Bezug auf das Koordinatensystem S_0 an.



$$
\begin{aligned}
{}^{0}\boldsymbol{p} &= {}^{0}\boldsymbol{T}_B\,{}^{B}\boldsymbol{p} = {}^{B}\boldsymbol{T}_0^{-1}\,{}^{B}\boldsymbol{p} \\
&= \begin{pmatrix} {}^{B}\boldsymbol{R}_0 & {}^{B}\boldsymbol{r}_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} {}^{B}\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} {}^{B}\boldsymbol{R}_0^{T} & -{}^{B}\boldsymbol{R}_0^{T\,B}\boldsymbol{r}_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} {}^{B}\boldsymbol{p} \\
&\overset{{}^{B}\boldsymbol{R}_0=\boldsymbol{I}}{=} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & -{}^{B}\boldsymbol{r}_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} {}^{B}\boldsymbol{p} = {}^{B}\boldsymbol{p} - {}^{B}\boldsymbol{r}_0 \\
&= \begin{pmatrix} 60 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -45 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

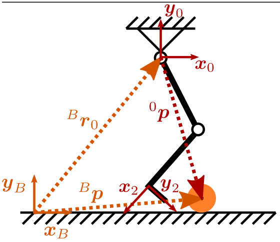
Aufgabe 2: Inverse Kinematik eines ebenen 2-DOF-Roboterbeins
2 b)



$$ {}^0\boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} 30\cos q_1 + 30\cos(q_1+q_2) \\ 30\sin q_1 + 30\sin(q_1+q_2) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad {}^0\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 20 \\ -45 \\ 0 \end{pmatrix} $$

Stellen Sie eine Zielfunktion $\mathbf{F}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^2$ mit $\boldsymbol{x} = (q_1, q_2)^T$ auf, so dass $\mathbf{F}(\boldsymbol{x}) = 0$ genau dann gilt, wenn ${}^0\boldsymbol{r}_2 = {}^0\boldsymbol{p}$. Die Orientierung des Endeffektors müssen Sie hierbei nicht berücksichtigen.

Aufgabe 2: Inverse Kinematik eines ebenen 2-DOF-Roboterbeins
2 b)

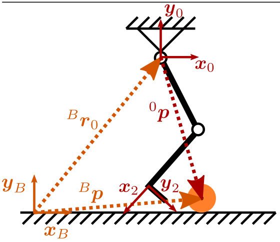


$$ {}^0\boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} 30\cos q_1 + 30\cos(q_1+q_2) \\ 30\sin q_1 + 30\sin(q_1+q_2) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad {}^0\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 20 \\ -45 \\ 0 \end{pmatrix} $$

Stellen Sie eine Zielfunktion $\mathbf{F}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^2$ mit $\boldsymbol{x} = (q_1, q_2)^T$ auf, so dass $\mathbf{F}(\boldsymbol{x}) = 0$ genau dann gilt, wenn ${}^0\boldsymbol{r}_2 = {}^0\boldsymbol{p}$. Die Orientierung des Endeffektors müssen Sie hierbei nicht berücksichtigen.

$$ \mathbf{F}(\boldsymbol{x}) = {}^0\boldsymbol{r}_2 - {}^0\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 30\cos q_1 + 30\cos(q_1+q_2) - 20 \\ 30\sin q_1 + 30\sin(q_1+q_2) + 45 \end{pmatrix} $$

Aufgabe 2: Inverse Kinematik eines ebenen 2-DOF-Roboterbeins
2 b)



$$^0\boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} 30\cos q_1 + 30\cos(q_1+q_2) \\ 30\sin q_1 + 30\sin(q_1+q_2) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad {}^0\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 20 \\ -45 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Stellen Sie eine Zielfunktion $\mathbf{F}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^2$ mit $\boldsymbol{x} = (q_1, q_2)^T$ auf, so dass $\mathbf{F}(\boldsymbol{x}) = 0$ genau dann gilt, wenn ${}^0\boldsymbol{r}_2 = {}^0\boldsymbol{p}$. Die Orientierung des Endeffektors müssen Sie hierbei nicht berücksichtigen.

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{x}) = {}^0\boldsymbol{r}_2 - {}^0\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 30\cos q_1 + 30\cos(q_1+q_2) - 20 \\ 30\sin q_1 + 30\sin(q_1+q_2) + 45 \end{pmatrix}$$

Hinweis 1: Weitere Alternativen möglich, z.B. $\mathbf{F}(\boldsymbol{x}) = -{}^0\boldsymbol{r}_2 + {}^0\boldsymbol{p}$.
Hinweis 2: z-Komponente ist immer erfüllt ($0 = 0$) und kann daher entfallen.

Aufgabe 2: Inverse Kinematik eines ebenen 2-DOF-Roboterbeins
2 c)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Lösen Sie die nichtlineare Gleichung $\mathbf{F}(\boldsymbol{x}) = 0$ mit Hilfe der Fixpunktiteration. Nutzen Sie dabei die Relaxationsmatrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0.02 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{pmatrix}$, für die das Verfahren konvergiert. Starten Sie mit dem Vektor $\boldsymbol{x}^{(0)} = (-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2})^T$ und führen Sie zwei Iterationen durch. Berechnen Sie die Iterierten auf vier Nachkommastellen genau.

Aufgabe 2: Inverse Kinematik eines ebenen 2-DOF-Roboterbeins
2 c)

Lösen Sie die nichtlineare Gleichung $\mathbf{F}(\boldsymbol{x}) = 0$ mit Hilfe der Fixpunktiteration. Nutzen Sie dabei die Relaxationsmatrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0.02 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{pmatrix}$, für die das Verfahren konvergiert. Starten Sie mit dem Vektor $\boldsymbol{x}^{(0)} = (-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2})^T$ und führen Sie zwei Iterationen durch. Berechnen Sie die Iterierten auf vier Nachkommastellen genau.

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \mathbf{g}(\boldsymbol{x}^{(k)}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{x}^{(k)}) + \boldsymbol{x}^{(k)}$$

Aufgabe 2: Inverse Kinematik eines ebenen 2-DOF-Roboterbeins
2 c)

Lösen Sie die nichtlineare Gleichung $\mathbf{F}(\boldsymbol{x}) = 0$ mit Hilfe der Fixpunktiteration. Nutzen Sie dabei die Relaxationsmatrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0.02 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{pmatrix}$, für die das Verfahren konvergiert. Starten Sie mit dem Vektor $\boldsymbol{x}^{(0)} = (-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2})^T$ und führen Sie zwei Iterationen durch. Berechnen Sie die Iterierten auf vier Nachkommastellen genau.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^{(k+1)} &= \mathbf{g}(\boldsymbol{x}^{(k)}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{x}^{(k)}) + \boldsymbol{x}^{(k)} \\
&= \begin{pmatrix} -0.02 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \cos q_1^{(k)} + 30 \cos(q_1^{(k)} + q_2^{(k)}) - 20 \\ 30 \sin q_1^{(k)} + 30 \sin(q_1^{(k)} + q_2^{(k)}) + 45 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1^{(k)} \\ q_2^{(k)} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Inverse Kinematik eines ebenen 2-DOF-Roboterbeins 2 c)

Lösen Sie die nichtlineare Gleichung $\mathbf{F}(\boldsymbol{x}) = 0$ mit Hilfe der Fixpunktiteration. Nutzen Sie dabei die Relaxationsmatrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0.02 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{pmatrix}$, für die das Verfahren konvergiert. Starten Sie mit dem Vektor $\boldsymbol{x}^{(0)} = (-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2})^T$ und führen Sie zwei Iterationen durch. Berechnen Sie die Iterierten auf vier Nachkommastellen genau.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^{(k+1)} &= \mathbf{g}(\boldsymbol{x}^{(k)}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{x}^{(k)}) + \boldsymbol{x}^{(k)} \\
&= \begin{pmatrix} -0.02 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30\cos q_1^{(k)} + 30\cos(q_1^{(k)} + q_2^{(k)}) - 20 \\ 30\sin q_1^{(k)} + 30\sin(q_1^{(k)} + q_2^{(k)}) + 45 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1^{(k)} \\ q_2^{(k)} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \mathbf{g}(\boldsymbol{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} -0.02 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30\cos\frac{\pi}{4} + 30\cos\frac{3\pi}{4} - 20 \\ -30\sin\frac{\pi}{4} - 30\sin\frac{3\pi}{4} + 45 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.3854 \\ -1.4421 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Inverse Kinematik eines ebenen 2-DOF-Roboterbeins 2 c)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Lösen Sie die nichtlineare Gleichung $\mathbf{F}(\boldsymbol{x}) = 0$ mit Hilfe der Fixpunktiteration. Nutzen Sie dabei die Relaxationsmatrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0.02 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{pmatrix}$, für die das Verfahren konvergiert. Starten Sie mit dem Vektor $\boldsymbol{x}^{(0)} = (-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2})^T$ und führen Sie zwei Iterationen durch. Berechnen Sie die Iterierten auf vier Nachkommastellen genau.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^{(k+1)} &= \mathbf{g}(\boldsymbol{x}^{(k)}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{x}^{(k)}) + \boldsymbol{x}^{(k)} \\
&= \begin{pmatrix} -0.02 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30\cos q_1^{(k)} + 30\cos(q_1^{(k)} + q_2^{(k)}) - 20 \\ 30\sin q_1^{(k)} + 30\sin(q_1^{(k)} + q_2^{(k)}) + 45 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1^{(k)} \\ q_2^{(k)} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{x}^{(1)} = \mathbf{g}(\boldsymbol{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} -0.02 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30\cos\frac{\pi}{4} + 30\cos\frac{3\pi}{4} - 20 \\ -30\sin\frac{\pi}{4} - 30\sin\frac{3\pi}{4} + 45 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.3854 \\ -1.4421 \end{pmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{x}^{(2)} = \mathbf{g}(\boldsymbol{x}^{(1)}) \approx \begin{pmatrix} -0.3890 \\ -1.2069 \end{pmatrix}
$$

Aufgabe 2: Inverse Kinematik eines ebenen 2-DOF-Roboterbeins 2 d)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wenden Sie nun das Newton-Verfahren für $\mathbf{F}(\boldsymbol{x}) = 0$ an. Berechnen Sie dafür zunächst allgemein die Jacobi-Matrix $\mathbf{J_F} = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}}$ und lösen Sie dann in jedem Schritt das lineare Gleichungssystem $\mathbf{J_F}(\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{x} = -\mathbf{F}(\boldsymbol{x})$. Führen Sie ebenfalls beginnend mit dem Startvektor $\boldsymbol{x}^{(0)} = (-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2})^T$ zwei Iterationen mit einer Genauigkeit von vier Nachkommastellen aus.

Aufgabe 2: Inverse Kinematik eines ebenen 2-DOF-Roboterbeins
2 d)

Wenden Sie nun das Newton-Verfahren für $\mathbf{F}(\boldsymbol{x}) = 0$ an. Berechnen Sie dafür zunächst allgemein die Jacobi-Matrix $\mathbf{J_F} = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}}$ und lösen Sie dann in jedem Schritt das lineare Gleichungssystem $\mathbf{J_F}(\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{x} = -\mathbf{F}(\boldsymbol{x})$. Führen Sie ebenfalls beginnend mit dem Startvektor $\boldsymbol{x}^{(0)} = (-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2})^T$ zwei Iterationen mit einer Genauigkeit von vier Nachkommastellen aus.

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}(q_1, q_2) = \begin{pmatrix} 30\cos q_1 + 30\cos(q_1 + q_2) - 20 \\ 30\sin q_1 + 30\sin(q_1 + q_2) + 45 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Inverse Kinematik eines ebenen 2-DOF-Roboterbeins
2 d)

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 30\cos q_1 + 30\cos(q_1+q_2) - 20 \\ 30\sin q_1 + 30\sin(q_1+q_2) + 45 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{J}_\mathbf{F}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} -30\sin q_1 - 30\sin(q_1+q_2) & -30\sin(q_1+q_2) \\ 30\cos q_1 + 30\cos(q_1+q_2) & 30\cos(q_1+q_2) \end{pmatrix}$$

Newton-Verfahren: $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \Delta\boldsymbol{x}^{(k)}$ mit $\Delta\boldsymbol{x}^{(k)} = -\mathbf{J}_\mathbf{F}(\boldsymbol{x}^{(k)})^{-1}\mathbf{F}(\boldsymbol{x}^{(k)})$

Aufgabe 2: Inverse Kinematik eines ebenen 2-DOF-Roboterbeins 2 d)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 30\cos q_1 + 30\cos(q_1+q_2) - 20 \\ 30\sin q_1 + 30\sin(q_1+q_2) + 45 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{J_F}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} -30\sin q_1 - 30\sin(q_1+q_2) & -30\sin(q_1+q_2) \\ 30\cos q_1 + 30\cos(q_1+q_2) & 30\cos(q_1+q_2) \end{pmatrix}$$

Newton-Verfahren: $\quad \boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \Delta\boldsymbol{x}^{(k)} \quad$ mit $\quad \Delta\boldsymbol{x}^{(k)} = -\mathbf{J_F}(\boldsymbol{x}^{(k)})^{-1}\mathbf{F}(\boldsymbol{x}^{(k)})$

1. Iteration:

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{4} \\ -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Inverse Kinematik eines ebenen 2-DOF-Roboterbeins
2 d)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 30\cos q_1 + 30\cos(q_1+q_2) - 20 \\ 30\sin q_1 + 30\sin(q_1+q_2) + 45 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{J_F}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} -30\sin q_1 - 30\sin(q_1+q_2) & -30\sin(q_1+q_2) \\ 30\cos q_1 + 30\cos(q_1+q_2) & 30\cos(q_1+q_2) \end{pmatrix}$$

Newton-Verfahren: $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \Delta\boldsymbol{x}^{(k)}$ mit $\Delta\boldsymbol{x}^{(k)} = -\mathbf{J_F}(\boldsymbol{x}^{(k)})^{-1}\mathbf{F}(\boldsymbol{x}^{(k)})$

1. Iteration:

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{4} \\ -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J_F}(\boldsymbol{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 42.4264 & 21.2132 \\ 0 & -21.2132 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\boldsymbol{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} -20 \\ 2.5736 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Inverse Kinematik eines ebenen 2-DOF-Roboterbeins
2 d)

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 30\cos q_1 + 30\cos(q_1+q_2) - 20 \\ 30\sin q_1 + 30\sin(q_1+q_2) + 45 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{J_F}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} -30\sin q_1 - 30\sin(q_1+q_2) & -30\sin(q_1+q_2) \\ 30\cos q_1 + 30\cos(q_1+q_2) & 30\cos(q_1+q_2) \end{pmatrix}$$

Newton-Verfahren: $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \Delta\boldsymbol{x}^{(k)} \quad \text{mit} \quad \Delta\boldsymbol{x}^{(k)} = -\mathbf{J_F}(\boldsymbol{x}^{(k)})^{-1}\mathbf{F}(\boldsymbol{x}^{(k)})$

1. Iteration:

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{4} \\ -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J_F}(\boldsymbol{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 42.4264 & 21.2132 \\ 0 & -21.2132 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\boldsymbol{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} -20 \\ 2.5736 \end{pmatrix}$$

$$\Delta\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 42.4264 & 21.2132 \\ 0 & -21.2132 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 20 \\ -2.5736 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Inverse Kinematik eines ebenen 2-DOF-Roboterbeins
2 d)

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 30\cos q_1 + 30\cos(q_1+q_2) - 20 \\ 30\sin q_1 + 30\sin(q_1+q_2) + 45 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} -30\sin q_1 - 30\sin(q_1+q_2) & -30\sin(q_1+q_2) \\ 30\cos q_1 + 30\cos(q_1+q_2) & 30\cos(q_1+q_2) \end{pmatrix}$$

Newton-Verfahren: $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \Delta\boldsymbol{x}^{(k)} \quad \text{mit} \quad \Delta\boldsymbol{x}^{(k)} = -\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(\boldsymbol{x}^{(k)})^{-1}\mathbf{F}(\boldsymbol{x}^{(k)})$

1. Iteration:

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{4} \\ -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(\boldsymbol{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 42.4264 & 21.2132 \\ 0 & -21.2132 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\boldsymbol{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} -20 \\ 2.5736 \end{pmatrix}$$

$$\Delta\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 42.4264 & 21.2132 \\ 0 & -21.2132 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 20 \\ -2.5736 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \Delta\boldsymbol{x}^{(0)} \approx \begin{pmatrix} 0.4107 \\ 0.1213 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Inverse Kinematik eines ebenen 2-DOF-Roboterbeins 2 d)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 30\cos q_1 + 30\cos(q_1+q_2) - 20 \\ 30\sin q_1 + 30\sin(q_1+q_2) + 45 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{J_F}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} -30\sin q_1 - 30\sin(q_1+q_2) & -30\sin(q_1+q_2) \\ 30\cos q_1 + 30\cos(q_1+q_2) & 30\cos(q_1+q_2) \end{pmatrix}$$

Newton-Verfahren: $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \Delta\boldsymbol{x}^{(k)} \quad \text{mit} \quad \Delta\boldsymbol{x}^{(k)} = -\mathbf{J_F}(\boldsymbol{x}^{(k)})^{-1}\mathbf{F}(\boldsymbol{x}^{(k)})$

1. Iteration:

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{4} \\ -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J_F}(\boldsymbol{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 42.4264 & 21.2132 \\ 0 & -21.2132 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\boldsymbol{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} -20 \\ 2.5736 \end{pmatrix}$$

$$\Delta\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 42.4264 & 21.2132 \\ 0 & -21.2132 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 20 \\ -2.5736 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \Delta\boldsymbol{x}^{(0)} \approx \begin{pmatrix} 0.4107 \\ 0.1213 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{x}^{(0)} + \Delta\boldsymbol{x}^{(0)} \approx \begin{pmatrix} -0.3746 \\ -1.4495 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Inverse Kinematik eines ebenen 2-DOF-Roboterbeins
2 d)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 30\cos q_1 + 30\cos(q_1+q_2) - 20 \\ 30\sin q_1 + 30\sin(q_1+q_2) + 45 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{J_F}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} -30\sin q_1 - 30\sin(q_1+q_2) & -30\sin(q_1+q_2) \\ 30\cos q_1 + 30\cos(q_1+q_2) & 30\cos(q_1+q_2) \end{pmatrix}$$

Newton-Verfahren: $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \Delta\boldsymbol{x}^{(k)}$ mit $\mathbf{J_F}(\boldsymbol{x}^{(k)})\Delta\boldsymbol{x}^{(k)} = -\mathbf{F}(\boldsymbol{x}^{(k)})$

2. Iteration: $\Delta\boldsymbol{x}^{(1)} = -\mathbf{J_F}(\boldsymbol{x}^{(1)})^{-1}\mathbf{F}(\boldsymbol{x}^{(1)}) \quad \rightarrow \quad \Delta\boldsymbol{x}^{(1)} \approx (-0.1652, 0.2139)^T$

$$\boldsymbol{x}^{(2)} = \boldsymbol{x}^{(1)} + \Delta\boldsymbol{x}^{(1)} \approx \begin{pmatrix} -0.5399 \\ -1.2356 \end{pmatrix}$$

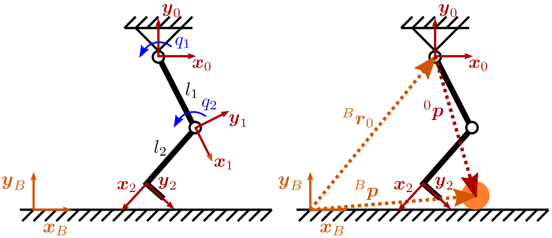
Aufgabe 2: Inverse Kinematik eines ebenen 2-DOF-Roboterbeins
2 e)

Prüft abschließend, welche Endeffektorpositionen ${}^{0}\mathbf{r}_E$ tatsächlich zu den von euch berechneten Gelenkwinkelstellungen $\boldsymbol{x}_{\mathrm{FPI}}^{(2)}$ (Aufgabe c)) und $\boldsymbol{x}_{\mathrm{Newton}}^{(2)}$ (Aufgabe d)) gehören. Deutet die Ergebnisse.

Aufgabe 2: Inverse Kinematik eines ebenen 2-DOF-Roboterbeins
2 e)

Prüft abschließend, welche Endeffektorpositionen ${}^0\mathbf{r}_E$ tatsächlich zu den von euch berechneten Gelenkwinkelstellungen $\boldsymbol{x}^{(2)}_{\text{FPI}}$ (Aufgabe c)) und $\boldsymbol{x}^{(2)}_{\text{Newton}}$ (Aufgabe d)) gehören. Deutet die Ergebnisse.

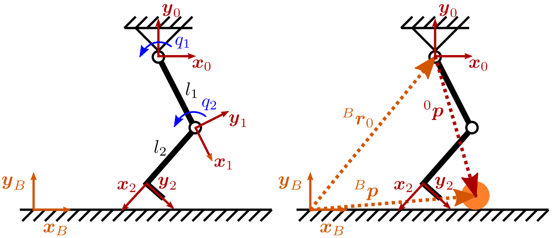
$$
{}^0\boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} 30\cos q_1 + 30\cos(q_1+q_2) \\ 30\sin q_1 + 30\sin(q_1+q_2) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}^{(2)}_{\text{FPI}} = \begin{pmatrix} -0.38904 \\ -1.2069 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}^{(2)}_{\text{Newton}} = \begin{pmatrix} -0.53988 \\ -1.2356 \end{pmatrix}, \quad {}^0\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 20 \\ -45 \end{pmatrix}
$$



Aufgabe 2: Inverse Kinematik eines ebenen 2-DOF-Roboterbeins
2 e)

Prüft abschließend, welche Endeffektorpositionen ${}^0\mathbf{r}_E$ tatsächlich zu den von euch berechneten Gelenkwinkelstellungen $\boldsymbol{x}^{(2)}_{\mathrm{FPI}}$ (Aufgabe c)) und $\boldsymbol{x}^{(2)}_{\mathrm{Newton}}$ (Aufgabe d)) gehören. Deutet die Ergebnisse.

$$
{}^0\boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} 30\cos q_1 + 30\cos(q_1+q_2) \\ 30\sin q_1 + 30\sin(q_1+q_2) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}^{(2)}_{\mathrm{FPI}} = \begin{pmatrix} -0.38904 \\ -1.2069 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}^{(2)}_{\mathrm{Newton}} = \begin{pmatrix} -0.53988 \\ -1.2356 \end{pmatrix}, \quad {}^0\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 20 \\ -45 \end{pmatrix}
$$



$$
{}^0\boldsymbol{r}_2(\boldsymbol{x}^{(2)}_{\mathrm{FPI}}) \approx \begin{pmatrix} 27.0053 \\ -41.3696 \end{pmatrix}
$$

$$
{}^0\boldsymbol{r}_2(\boldsymbol{x}^{(2)}_{\mathrm{Newton}}) \approx \begin{pmatrix} 19.6364 \\ -44.795 \end{pmatrix}
$$