Computational Engineering und Robotik

Prof. Jan Peters, J. Carvalho, P. Klink, P. Liu, S. Stark

Sommersemester 2020

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

5. Übung

Hinweise zu dieser Übung

- Für die Teilnahme an der Übung ist eine Anmeldung beim **Moodle** notwendig. Dort sind auf der Kursseite zusätzliche Informationen zur Veranstaltung und die Regelungen zur Anrechnung der Übungsleistungen in die Endnote aufgeführt:

  `https://moodle.tu-darmstadt.de/course/view.php?id=20214`

- Von dieser Übung wird die **1. Aufgabe** bewertet.
- **Abgabe der schriftlichen Lösungen** zu den Übungsaufgaben bis **Montag, den 08.06.2020 um 11:59 Uhr** per Datei-Upload im Moodle.
- Lade im Moodle die Lösungen hoch als: **UebungXX.pdf** (z.B, für die Übung 04, Uebung04.pdf); **taskX.py** (z.B., für die zweite Programmieraufgabe task2.py). Gib deine Gruppenummer sowie die Namen und Matrikelnummern aller Beteiligten am Anfang der Datei an.
- Begründe alle deine Antworten. Falls du einen Scan deiner Antworten hochlädst, stelle sicher, dass sie lesbar sind.
- Stellt Fragen zu dieser Übung bitte im Moodle-Forum oder in den Sprechstunden.

1 Steuerung, Regelung und PD-Regler (9 Punkte)

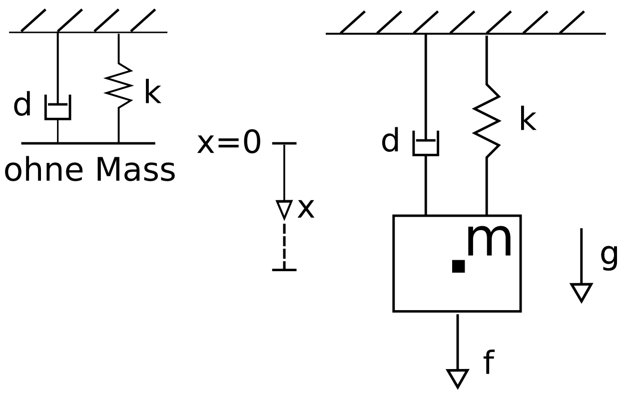

Abbildung 1: Masse-Feder-Dämpfer-System.

In der Vorlesung haben wir gesehen, wie man ein Pendel stabilisiert, nachdem es um einen Gleichgewichtspunkt linearisiert wurde. Wir haben gelernt, dass wir einen linearen Regler verwenden können, nämlich den Feder und Dämpfer Regler. Auf Englisch heißen solchen Regler PD-Controller (Proportional Derivative Controller). In dieser Aufgabe nutzen wir deshalb den Term PD-Regler statt Feder und Dämpfer Regler. Hier betrachten wir einen PD-Regler zur Stabilisierung eines einfachen Masse-Feder-Dämpfer-Systems.

In Abbildung 1 haben wir ein System, das aus einer aufgehängten Masse besteht, die von einer Feder und einem Dämpfer unterstützt wird. Die Gravitationskraft wirkt auf die Masse (g ist die Gravitationsbeschleunigung), sowie eine externe Kraft f. Wie in der linken Seite der Abbildung dargestellt, ist $x = 0$ die Ruheposition ohne die Masse m (am Ende der Feder). Auf der rechten Seite, wenn eine Masse hinzugefügt wird, ist x der Abstand zum Massenmittelpunkt von m.

a) Bevor wir das System modellieren, was ist der Unterschied zwischen Steurung und Reglung? Nenne ein Szenario, in dem es sinnvoll ist, eine Reglung anstelle einer Steurung zu verwenden.

b) Im Allgemeinen, wenn du die Dynamik $\dot{x} = f(x, u)$ kennst, kannst du immer Systeme um die Gleichgewichtepunkte linearisieren?

c) Du erhältst ein lineares System $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$. Bei $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ ist das System instabil. Nun entwerfen wir einen Regler, der in dem Zustand linear ist $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$. Kannst du das System mit einem solchen Regler stabilisieren? Welche Eigenschaften müssen zutreffen, damit es stabil ist? Was sagt uns das über Regelsysteme mit Reglung?

d) Schreibe die Dynamikgleichung des Systems aus Abbildung 1 auf. Transformiere sie dann in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

e) Was sind die Ruhelagen des Systems ohne zusätzliche Kraft ($f = 0$)? Was passiert, wenn die Federkonstante ins Unendliche geht? Und was passiert, wenn es keine Gravitationskraft gibt?

f) Angenommen $m = 1\text{kg}$, $k = 1\text{N/m}$ und $g = 9,8\text{m/s}^2$. Nun wird eine konstante Kraft angewendet $f = F$. Was sind die Ruhelagen? Welche Kraft musst du aufbringen, um das System in einer allgemeinen Position x, mit null Geschwindigkeit, zu halten? Wenn du die Masse in die Position $x = 5\text{m}$ halten wolltest, musst du eine nach oben oder nach unten gerichtete Kraft anwenden?

g) **Nimm an, dass es von nun an (für diese und die folgenden Aufgaben) keine Schwerkraft mehr gibt,** $g = 0\text{m/s}^2$. Das System startet mit einer Anfangsposition und -geschwindigkeit und wir wollen nun den Zustand des Systems auf Nullposition und Nullgeschwindigkeit bringen. Dazu werden wir einen PD-Regler für die aufgebrachte externe Kraft verwenden, $f(t) = -k_p x(t) - k_v \dot{x}(t)$. Wie lautet die Dynamikgleichung bei dieser Art von Kraft? Transformiere sie in eine DGL erster Ordnung.

h) Das lineare System aus Aufgabe g) hat zwei Eigenwerte. Welcher Zustand muss gelten, dass das System kritisch gedämpft ist, d.h. dass es keine Schwingungen mehr hat und der stationäre Fehler gleich Null ist? Schreibe die Gleichung für die beiden Eigenwerte symbolisch auf, d.h. in Abhängigkeit von den unbekannten Parametern.

i) Schreibe den *Derivative* Term des PD-Reglers als Funktion des *Proportional* Term, und den *Proportional* Term als Funktion des *Derivative* Term für ein kritisch gedämpftes System auf.

j) Nehmen wir nun an, das System startet im Anfangszustand $x(0) = 5$ und $\dot{x}(0) = -5$, und wir wollen es auf einer kritisch gedämpften Trajektorie auf Null bringen. Nehmen wir als Parameter $d = 4\text{Ns/m}$, $k = 10\text{N/m}$, $m = 2.5\text{kg}$, und den *Proportional* Term des PD-Reglers $K_p = 8$. Zeichne die Position und Geschwindigkeit über die Zeit von $t = 0$ bis $t = 10$ sowie die auf die Masse wirkende äußere Kraft $f(t)$ für folgende Fälle: i) es wird kein PD-Regler verwendet; ii) es wird der abgeleitete PD-Regler verwendet. *Tipp: Du kannst die Python-Bibliothek* `odeint` *verwenden, um die numerische Lösung der Differentialgleichung zu berechnen, und* `matplotlib`*, um die Trajektorien zu zeichnen, wie im beigefügten Notebook* `PD-controller.ipynb` dargestellt.

Hinweis zu wissenschaftlichem Arbeiten

Es ist nicht gestattet, Lösungen anderer Personen als die der Gruppenmitglieder als Lösung der Aufgabe abzugeben. Des Weiteren müssen alle zur Lösungsfindung verwendeten, darüber hinausgehenden, relevanten Quellen explizit angegeben werden. Dem widersprechendes Handeln ist Plagiarismus und ist ein ernster Verstoß gegen die Grundlagen des wissenschaftlichen Arbeitens, das ernsthafte Konsequenzen bis hin zur Exmatrikulation haben kann.