Computational Engineering und Robotik

Prof. Ph.D. Jan Peters, J. Carvalho, P. Klink, P. Liu, S. Stark

Sommersemester 2020

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

3. Übung

Hinweise zu dieser Übung

- Für die Teilnahme an der Übung ist eine Anmeldung beim **Moodle** notwendig. Dort sind auf der Kursseite zusätzliche Informationen zur Veranstaltung und die Regelungen zur Anrechnung der Übungsleistungen in die Endnote aufgeführt:

  `https://moodle.tu-darmstadt.de/course/view.php?id=20214`

- Von dieser Übung wird die **2. Aufgabe** bewertet.
- **Abgabe der schriftlichen Lösungen** zu den Übungsaufgaben bis **Montag, den 18.05.2020 um 11:59 Uhr** per Datei-Upload im Moodle.
- Inhaltliche Fragen zu dieser Übung werden in den Tutoren-Sprechstunden und dem Frage- und Antwort-Forum im Moodle beantwortet.
- Organisatorische Fragen bitte im Moodle Forum stellen.

1 Modellgleichungen

Laufroboter sollen in Zukunft für vielfältige Aufgaben, von der Bergung Verletzter aus Katastrophengebieten bis zur Erkundung fremder Planeten, eingesetzt werden. Die TU-Darmstadt möchte nun einen neuen Laufroboter entwickeln. Das Kontaktverhalten eines Fußes dieses Roboters mit dem Boden kann dabei durch eine Feder mit der Steifigkeit k, parallel zu einem Dämpfer mit der Dämpfungskonstante d, modelliert werden. Der Körper des Roboters weist die Masse m und den Abstand $z(t)$ vom Boden auf. Die Systemparameter m, d und k sind positiv. Die Gravitationsbeschleunigung beträgt $g = 9.81\mathrm{m/s}^2$. Die Dynamik zwischen Roboter und Untergrund lässt sich also durch die Differentialgleichung

$$m\ddot{z}(t) = -kz(t) - d\dot{z}(t) + mg \tag{1}$$

beschreiben. Über einen Sensor wird z gemessen.

a) Gebt zunächst ein passendes Zustandsraummodell für das gegebene System an. Transformiert dazu die gegebene Differentialgleichung in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung der Form $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$ und gebt die Ausgangsgleichung in der Form $y = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$ an.

b) Zeigt nun rechnerisch, dass das in Aufgabenteil a) ermittelte Differentialgleichungssystem eine eindeutige stationäre Lösung $\boldsymbol{x_s}$ aufweist.

c) Berechnet nun die Gleichgewichtslösung z_s für die Position mit den Parametern $k = 90000$ N/m, $d = 10000$ Ns/m und $m = 100$ kg sowie den Anfangswerten $z(0) = 0$ m und $\dot{z}(0) = 0.01$ m/s für die Position und Geschwindigkeit.

2 Nichtlineare Differentialgleichungen und deren Richtungsfelder (8 Punkte)

Betrachtet für die folgenden Teilaufgaben folgende Richtungsfelder:

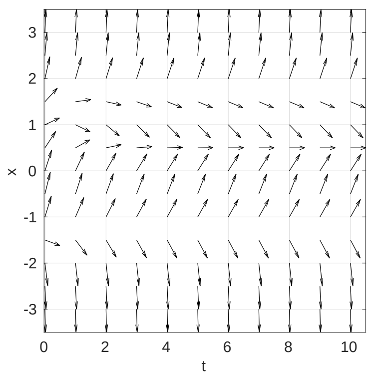

Abbildung 1: Richtungsfeld A

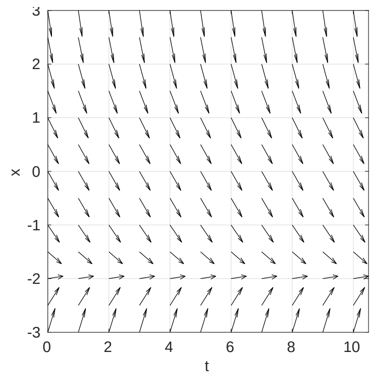

Abbildung 2: Richtungsfeld B

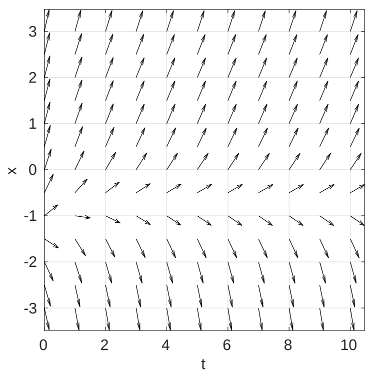

Abbildung 3: Richtungsfeld C

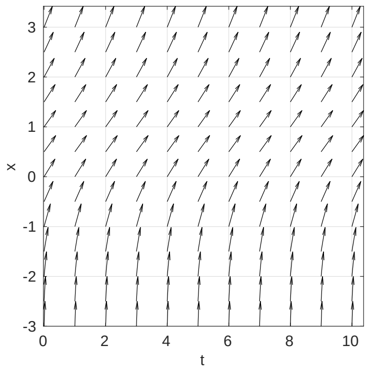

Abbildung 4: Richtungsfeld D

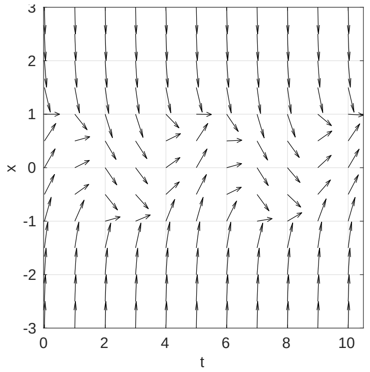

Abbildung 5: Richtungsfeld E

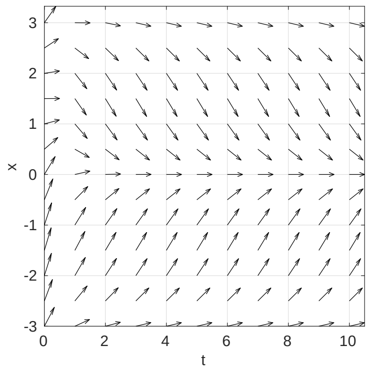

Abbildung 6: Richtungsfeld F

Betrachtet außerdem folgende Differentialgleichungen:

$$\dot{x}(t) = -\sin x + e^{-2\cdot t} \tag{2}$$

$$\dot{x}(t) = -x^3 + \cos(5 \cdot t) \tag{3}$$

$$\dot{x}(t) = 0.5 \cdot x \tag{4}$$

a) Welche der Richtungsfelder passen zu den Differentialgleichungen (2), (3), (4)? Begründet eure Zuordnung bzw. begründet, wenn es kein passendes Richtungsfeld gibt.

b) Betrachtet nun Richtungsfeld A: Für welche Anfangswerte mit $t = 0$ ergibt sich die Gleichgewichtslösung $x_s = 0.5$? Lest ab und beschreibt, wie ihr zu euer Lösung gelangt seid.

c) Wie lässt sich eine autonome von einer nicht-autonomen Differentialgleichung in einem Richtungsfeld unterscheiden? Welche der sechs Richtungsfelder sind Darstellungen von nicht-autonomen Differentialgleichungen?

d) Die Differentialgleichung $\ddot{x}(t) = -\dot{x} + \left[e^{-0.001\cdot t} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot t\right)\right]$ wird durch nachstehendes Richtungsfeld G visualisiert. Gesucht sei die maximal auftretende Geschwindigkeit für das Anfangswertproblem $\dot{x}(t = 0) = 0$. Lest zu diesem Zweck den Auftrittszeitpunkt t sowie einen geeigneten Startwert $\dot{x}$ aus dem Richtungsfeld ab und rundet beide auf die nächste ganze Zahl. Führt basierend auf diesen Werten einen Schritt des Fixpunktverfahrens zur genaueren Bestimmung der maximalen Geschwindigkeit zum konstanten abgelesenen Zeitpunkt durch. Schreibt das Ergebnis auf 4 Dezimalstellen genau auf.

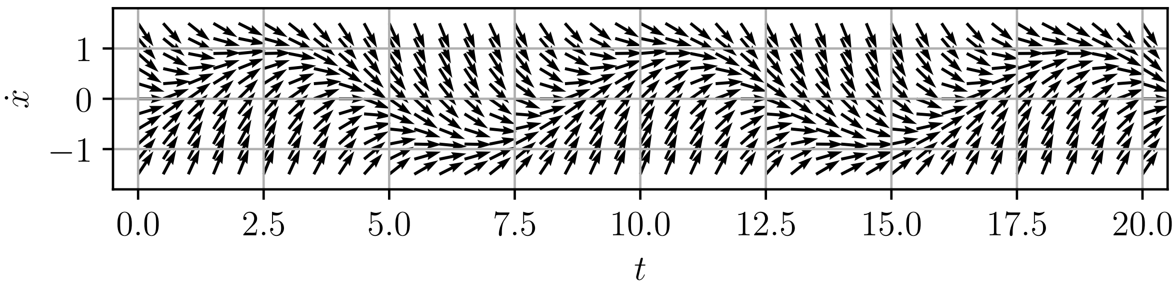

Abbildung 7: Richtungsfeld G

e) Transformiert das nachfolgend dargestellte Differentialgleichungssystem in ein autonomes lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung der Form $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$.

$$\frac{1}{2}\dot{x}_3 - \ddot{x}_2 + 5x_1 = 0 \tag{5}$$

$$-2\ddot{x}_3 + x_1 + \dot{x}_2 - \frac{4}{5}t = 1 \tag{6}$$

$$\dot{x}_3 - 3x_2 + \ddot{x}_1 + t = 0 \tag{7}$$

Hinweis zu wissenschaftlichem Arbeiten

Es ist nicht gestattet, Lösungen anderer Personen als die der Gruppenmitglieder als Lösung der Aufgabe abzugeben. Des Weiteren müssen alle zur Lösungsfindung verwendeten, darüber hinausgehenden, relevanten Quellen explizit angegeben werden. Dem widersprechendes Handeln ist Plagiarismus und ist ein ernster Verstoß gegen die Grundlagen des wissenschaftlichen Arbeitens, das ernsthafte Konsequenzen bis hin zur Exmatrikulation haben kann.