Computational Engineering und Robotik

Prof. Jan Peters, J. Carvalho, P. Klink, P. Liu, S. Stark

Sommersemester 2020

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

0. Übung

Hinweise zu dieser Übung

- Für die Teilnahme an der Übung ist eine Anmeldung im **Moodle** notwendig. Dort sind auf der Kursseite zusätzliche Informationen zur Veranstaltung und die Regelungen zur Anrechnung der Übungsleistungen in die Endnote aufgeführt:

  `https://moodle.tu-darmstadt.de/course/view.php?id=20214`
- Inhaltliche Fragen zu dieser Übung werden in den Sprechstunden und dem Frage- und Antwortenforum im Moodle beantwortet.
- Organisatorische Fragen bitte im Moodle Forum stellen.
- Für diese Übung ist **keine Abgabe erforderlich**.

1 Rotationsmatrizen

Im $\mathbb{R}^3$ wird eine Rotation beschrieben durch die Multiplikation mit einer Matrix $\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, deren Spalten paarweise orthogonale Einheitsvektoren sind und für die $\det(\boldsymbol{R}) = 1$ gilt.
Die Darstellungsmatrix einer Rotation um den Winkel θ gegen den Uhrzeigersinn, deren Rotationsachse durch den Einheitsvektor $\boldsymbol{u} = (a, b, c)^\top$ beschrieben ist, hat die allgemeine Form

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} a^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & ab(1-\cos\theta)-c\sin\theta & ac(1-\cos\theta)+b\sin\theta \\ ab(1-\cos\theta)+c\sin\theta & b^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & bc(1-\cos\theta)-a\sin\theta \\ ac(1-\cos\theta)-b\sin\theta & bc(1-\cos\theta)+a\sin\theta & c^2(1-\cos\theta)+\cos\theta \end{pmatrix}.$$

1. Gib die Darstellungsmatrizen der Rotation $\boldsymbol{R}_x$ um die x-Achse, $\boldsymbol{R}_y$ um die y-Achse und $\boldsymbol{R}_z$ um die z-Achse an.

2. Wegen der Orthogonalität gilt für Rotationsmatrizen $\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{R}^\top = \boldsymbol{R}^\top\,\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$, wobei $\boldsymbol{I}$ die Einheitsmatrix darstellt. Zeige diesen Zusammenhang anhand der Rotationsmatrix $\boldsymbol{R}_x$ aus dem vorangegangen Aufgabenteil.

3. Bestimme die Rotationsmatrix der folgenden nacheinander ausgeführten Operationen und zeige dadurch, dass Rotationsmatrizen nicht kommutativ sind:

   - $\boldsymbol{R}_{xy}$: Drehung $30°$ um die x-Achse, dann $90°$ um die y-Achse
   - $\boldsymbol{R}_{yx}$: Drehung $90°$ um die y-Achse, dann $30°$ um die x-Achse

2 Differentialgleichungen lösen

1. Gegeben sei das inhomogene lineare Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = 2\,x(t) - 2t \qquad \text{mit} \quad x(0) = 1\ . \tag{*}$$

   Ermittle schrittweise die Lösung von (*), indem du die folgenden Teilaufgaben bearbeitest:

   (i) Wie lautet die homogene Differentialgleichungen zu (*)?
   Bestimme die dazugehörige homogene Lösung $x_h(t)$.

   (ii) Wie lautet der Ansatz für die partikuläre Lösung $x_p(t)$ des Problems?
   Setze diesen in (*) ein und bestimme $x_p(t)$.

   (iii) Addiere $x_h(t)$ und $x_p(t)$ um die allgemeine Lösung von (*) zu erhalten.
   Ermittle dann anhand der gegebenen Anfangsbedingung die spezielle Lösung.

2. Gegeben sei das inhomogene lineare DGL-System mit konstanten Koeffizienten

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{x}(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{b}(t)}\ . \tag{**}$$

   (i) Wie lautet das homogene DGL-System zu (**)? Bestimme die homogene Lösung $\boldsymbol{x}_h(t)$.
   Hinweis: Verwende das "Kochrezept" aus dem DGL-Repetitorium unter Beachtung des Sonderfalls komplexer Eigenwerte.

   (ii) Der Ansatz der Variation der Konstanten lässt sich auch im Mehrdimensionalen anwenden. Bestimme damit die partikuläre Lösung $\boldsymbol{x}_p(t)$ von (**).

   (iii) Wie lautet die allgemeine Lösung von (**)?

Hinweis zu wissenschaftlichem Arbeiten

Es ist nicht gestattet, Lösungen anderer Personen als die der Gruppenmitglieder als Lösung der Aufgabe abzugeben. Des Weiteren müssen alle zur Lösungsfindung verwendeten, darüber hinausgehenden, relevanten Quellen explizit angegeben werden. Dem widersprechendes Handeln ist Plagiarismus und ist ein ernster Verstoß gegen die Grundlagen des wissenschaftlichen Arbeitens, das ernsthafte Konsequenzen bis hin zur Exmatrikulation haben kann.