Computational Engineering und Robotik

Prof. Ph.D. Jan Peters, J. Carvalho, P. Klink, P. Liu, S. Stark

Sommersemester 2020

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Lösungsvorschlag der 3. Übung

1 Modellgleichungen

Laufroboter sollen in Zukunft für vielfältige Aufgaben, von der Bergung Verletzter aus Katastrophengebieten bis zur Erkundung fremder Planeten, eingesetzt werden. Die TU-Darmstadt möchte nun einen neuen Laufroboter entwickeln. Das Kontaktverhalten eines Fußes dieses Roboters mit dem Boden kann dabei durch eine Feder mit der Steifigkeit k, parallel zu einem Dämpfer mit der Dämpfungskonstante d, modelliert werden. Der Körper des Roboters weist die Masse m und den Abstand $z(t)$ vom Boden auf. Die Systemparameter m, d und k sind positiv. Die Gravitationsbeschleunigung beträgt $g = 9.81\mathrm{m}/\mathrm{s}^2$. Die Dynamik zwischen Roboter und Untergrund lässt sich also durch die Differentialgleichung

$$m\ddot{z}(t) = -kz(t) - d\dot{z}(t) + mg \tag{1}$$

beschreiben. Über einen Sensor wird z gemessen.

a) Gebt zunächst ein passendes Zustandsraummodell für das gegebene System an. Transformiert dazu die gegebene Differentialgleichung in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung der Form $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$ und gebt die Ausgangsgleichung in der Form $y = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$ an.

Lösungsvorschlag: Für die Zustandsvariable $\boldsymbol{x}$, die Steuervariable $\boldsymbol{u}$ und die Ausgangsgröße y ergibt sich gemäß der Aufgabenstellung und nach Substitution mit $x_1 = z; x_2 = \dot{z}$:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \dot{z} \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} \qquad y = z. \tag{2}$$

Die Differentialgleichung wird transformiert

$$\ddot{z}(t) = -\frac{k}{m}z(t) - \frac{d}{m}\dot{z}(t) + g \tag{3}$$

Damit lautet die Systemfunktion:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -d/m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \dot{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} \quad . \tag{5}$$

Die Ausgangsgröße y umfasst die messbaren bzw. beobachtbaren Größen und berechnet sich mit der Ausgangsgleichung:

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \dot{z} \end{pmatrix} \tag{6}$$

b) Zeigt nun rechnerisch, dass das in Aufgabenteil a) ermittelte Differentialgleichungssystem eine eindeutige stationäre Lösung $\boldsymbol{x_s}$ aufweist.

Lösungsvorschlag: Die in Aufgabenteil a) ermittelte Gleichung ist im stationären Fall, also für $\dot{\boldsymbol{x}}$, linear: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x_s} = -\boldsymbol{B}\boldsymbol{u_s}$. Zudem ist $\boldsymbol{A}$ quadratisch. Das lineare Gleichungssystem ist also eindeutig lösbar, falls $\boldsymbol{A}$ regulär ist. Dies kann anhand der Bedingung $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$ nachgewiesen werden. Im vorliegenden Fall ergibt sich:

$$\det(\boldsymbol{A}) = 0 * \left(-\frac{d}{m}\right) - \left[1 * \left(-\frac{k}{m}\right)\right] = \frac{k}{m} \tag{7}$$

Folglich weist die in a) ermittelte Gleichung für $k \neq 0$ eine eindeutige Gleichgewichtslösung auf. Dies kann aufgrund der Aufgabenstellung ($k > 0$) angenommen werden.
Der Nachweis kann alternativ auch über den Rang der Matrix $\boldsymbol{A}$ erfolgen.

c) Berechnet nun die Gleichgewichtslösung z_s für die Position mit den Parametern $k = 90000$ N/m, $d = 10000$ Ns/m und $m = 100$ kg sowie den Anfangswerten $z(0) = 0$ m und $\dot{z}(0) = 0.01$ m/s für die Position und Geschwindigkeit.

Lösungsvorschlag: Gemäß Folie 48 in Vorlesung 4 ergibt sich:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{s}} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{x_s} = -\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \tag{8}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x_s} = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} = -\begin{pmatrix} -\frac{d}{k} & -\frac{m}{k} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{mg}{k} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Damit ergibt sich für die gefragte Gleichgewichtslösung $z_s = x_s(1) = 0.0109\mathrm{m}$.

Alternativer Lösungsweg:
Das Differentialgleichungssystem ist inhomogen, weshalb es zur Lösung in einen homogenen und einen partikulären Anteil zerlegt wird und diese getrennt gelöst werden.
Für den homogenen Teil $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ kann der Ansatz $\boldsymbol{x_h}(t) = \boldsymbol{c}e^{\lambda t}$ gewählt werden. Einsetzen ergibt:

$$\lambda \boldsymbol{c} e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} \end{pmatrix} \boldsymbol{c} e^{\lambda t} \tag{10}$$

Daraus resultiert für das charakteristische Polynom

$$0 \stackrel{!}{=} \det(\lambda I - A) = \lambda^2 + \frac{d}{m}\lambda + \frac{k}{m} \tag{11}$$

und somit für die Eigenwerte

$$\lambda_1 = \frac{-\frac{d}{m} + \sqrt{\frac{d^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}}}{2} = -10$$

$$\lambda_2 = \frac{-\frac{d}{m} - \sqrt{\frac{d^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}}}{2} = -90$$

und die Eigenvektoren

$$c_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$c_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 90 \end{pmatrix}.$$

Die homogene Lösung lautet also

$$\boldsymbol{x_h} = \alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix} e^{-10t} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 90 \end{pmatrix} e^{-90t} \tag{12}$$

Da $\boldsymbol{g(x)} = \boldsymbol{Bu} = \text{const.}$ kann die partikuläre Lösung mit dem Ansatz vom Typ der rechten Seite $\boldsymbol{x_p}(t) = \boldsymbol{c_3} = \begin{pmatrix} c_{3,1} & c_{3,2} \end{pmatrix}^T$ und $\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{p}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ gefunden werden.
Einsetzen ergibt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} c_{3,1} \\ c_{3,2} \end{pmatrix} + \boldsymbol{Bu} = \begin{pmatrix} c_{3,2} \\ -\frac{k}{m} c_{3,1} - \frac{d}{m} c_{3,2} + g \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{x_p}(t) = \begin{pmatrix} \frac{mg}{k} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0109 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich für die Gesamtlösung

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x_h} + \boldsymbol{x_p} = \alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix} e^{-10t} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 90 \end{pmatrix} e^{-90t} + \begin{pmatrix} 0.0109 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Für α_1 und α_2 ergibt sich mit Hilfe der Anfangswerte

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0.01 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 90 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.0109 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \alpha_1 = 0.0121, \alpha_2 = -0.0012$$

Die Gesamtlösung lautet also:

$$\boldsymbol{x}(t) = 0.0121 \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix} e^{-10t} - 0.0012 \begin{pmatrix} -1 \\ 90 \end{pmatrix} e^{-90t} + \begin{pmatrix} 0.0109 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Da beide Eigenwerte einen negativen Realteil aufweisen, ist das System stabil und schwingt sich auf einen stationären Endzustand ein. Die gesuchte Gleichgewichtslösung z_s für die Position bestimmt sich also zu

$$z_s = \lim_{t \to \infty} z(t) = \lim_{t \to \infty} x_1(t) = 0.0109\text{m} \tag{15}$$

2 Nichtlineare Differentialgleichungen und deren Richtungsfelder (8 Punkte)

Betrachtet für die folgenden Teilaufgaben folgende Richtungsfelder:

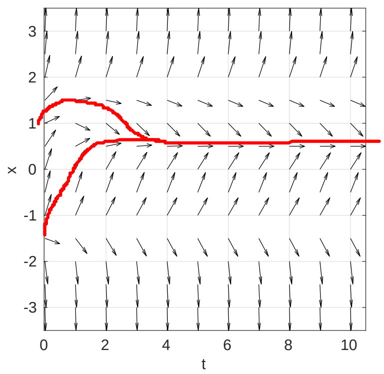


Abbildung 1: Richtungsfeld A

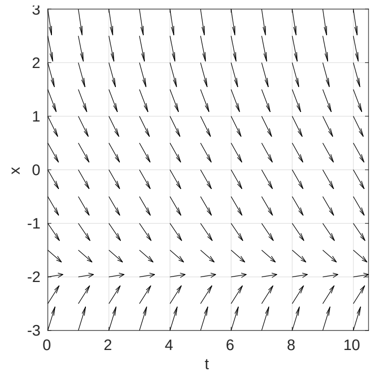


Abbildung 2: Richtungsfeld B

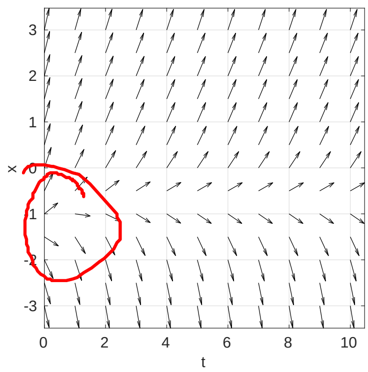


Abbildung 3: Richtungsfeld C

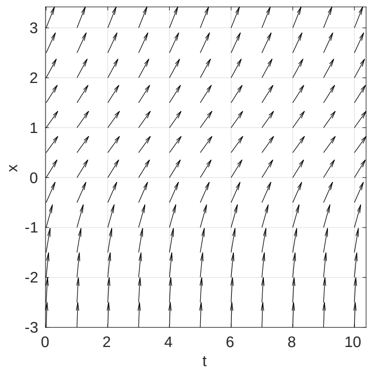


Abbildung 4: Richtungsfeld D

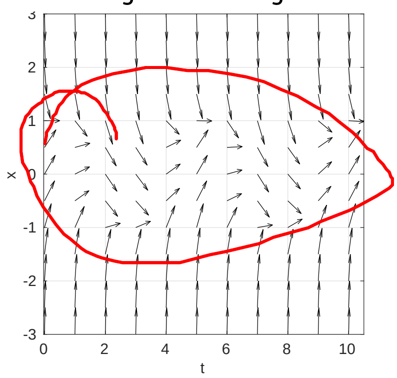


Abbildung 5: Richtungsfeld E

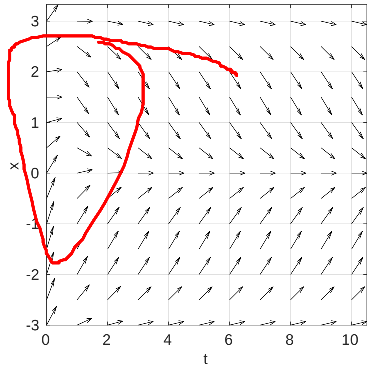


Abbildung 6: Richtungsfeld F

Betrachtet außerdem folgende Differentialgleichungen:

$$\dot{x}(t) = -\sin x + e^{-2\cdot t} \tag{16}$$

$$\dot{x}(t) = -x^3 + \cos(5 \cdot t) \tag{17}$$

$$\dot{x}(t) = 0.5 \cdot x \tag{18}$$

a) Welche der Richtungsfelder passen zu den Differentialgleichungen (16), (17), (18)? Begründet eure Zuordnung bzw. begründet, wenn es kein passendes Richtungsfeld gibt.

Lösungsvorschlag: Für Differentialgleichung (16) ist Feld F passend: Aus $\sin(0) = 0$, $e^{-2\cdot 0} = 1$ und $\lim_{t\to\infty} e^{-2\cdot t} \to 0$ ergibt sich, dass in einem passenden Richtungsfeld die als Pfeile aufgetragenen Ableitungen bei $x_s = 0$ für $t = 0 \to \infty$ eine asymptotische Annäherung mit $\dot{x}(x = 0, t = 0) = 1$ gegen $\dot{x}(x = 0, t \to \infty) \to 0$ zeigen müssen. Dies entspricht einer Gleichgewichtslösung. Damit kommt nur Feld F in Frage.

Für Differentialgleichung (17) ist Feld E passend: Dieses Richtungsfeld ist an dem von der Zeit abhängigen Schwingungsverlauf der Frequenz $\frac{2\cdot\pi}{5}$ mit der Amplitude eins sehr gut zu erkennen. Für $|x| > 1$ wird der Term $-x^3$ schnell dominant. Wie im Richtungsfeld ebenfalls leicht ersichtlich, gilt für $x \to \pm\infty$, dass $\dot{x} \to \mp\infty$.

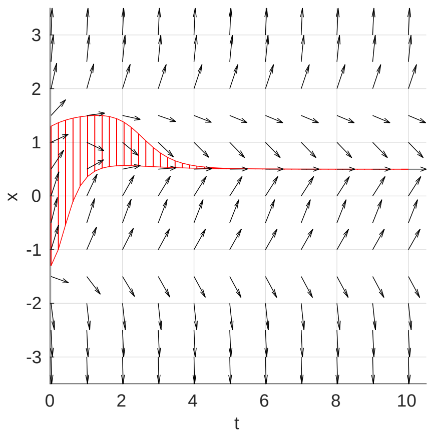
Für Differentialgleichung (18) ist kein Feld passend: Diese Differentialgleichung ist autonom (zeitunabhängig).

Zudem ist für $x = 0$ eine Gleichgewichtslösung ($\dot{x} = 0$) zu erwarten.

(Insgesamt 3.0 Punkte, davon je 0.5 Punkte pro Zuordnung und pro Begründung)

b) Betrachtet nun Richtungsfeld A: Für welche Anfangswerte mit $t = 0$ ergibt sich die Gleichgewichtslösung $x_s = 0.5$? Lest ab und beschreibt, wie ihr zu euer Lösung gelangt seid.

Lösungsvorschlag: Die möglichen Anfangswerte sind alle diejenigen, deren Trajektorie von $t = 0$ aus eine Konvergenz gegen $x_s = 0.5$ aufweisen. Die Lösung kann folglich durch Einzeichnen der Trajektorien "rückwärts", ausgehend von $x_s = 0.5$ und $\dot{x}_s = 0$ in das Richtungsfeld gefunden werden. (0.5 Punkt(e))
Für Richtungsfeld A ergeben die Anfangswerte $x_0 \in (-1.3, 1.3)$ Trajektorien, die zum Gleichgewicht $x_s = 0.5$ führen. Dies wird durch nebenstehende Abbildung verdeutlicht.
(0.5 Punkt(e))



c) Wie lässt sich eine autonome von einer nicht-autonomen Differentialgleichung in einem Richtungsfeld unterscheiden? Welche der sechs Richtungsfelder sind Darstellungen von nicht-autonomen Differentialgleichungen?

Lösungsvorschlag: Für eine nicht-autonome, also zeitabhängige, Differentialgleichung muss mindestens ein $t_1 \neq t_2$ existieren, sodass $f(x, t_1) \neq f(x, t_2)$ mit $x \in \mathbb{R}$. Hierbei ist $t_i \in \mathbb{R}$ ein beliebiger Zeitpunkt. Für die Richtungsfelder bedeutet dies, dass Richtungspfeile unterschiedlicher Steigung in t-Richtung enthalten sind. (0.5 Punkt(e))
Die Richtungsfelder A, C, E und F stellen zeitabhängige Differentialgleichungen dar.
(1 Punkt, jedes nicht oder falsch genannte Richtungsfeld führt zu 0.5 Punkten Abzug, minimal 0 Punkte)

d) Die Differentialgleichung $\ddot{x}(t) = -\dot{x} + \left[e^{-0.001 \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot t\right)\right]$ wird durch nachstehendes Richtungsfeld G visualisiert. Gesucht sei die maximal auftretende Geschwindigkeit für das Anfangswertproblem $\dot{x}(t = 0) = 0$. Lest zu diesem Zweck den Auftrittszeitpunkt t sowie einen geeigneten Startwert $\dot{x}$ aus dem Richtungsfeld ab und rundet beide auf die nächste ganze Zahl. Führt basierend auf diesen Werten einen Schritt des Fixpunktverfahrens zur genaueren Bestimmung der maximalen Geschwindigkeit zum konstanten abgelesenen Zeitpunkt durch. Schreibt das Ergebnis auf 4 Dezimalstellen genau auf.

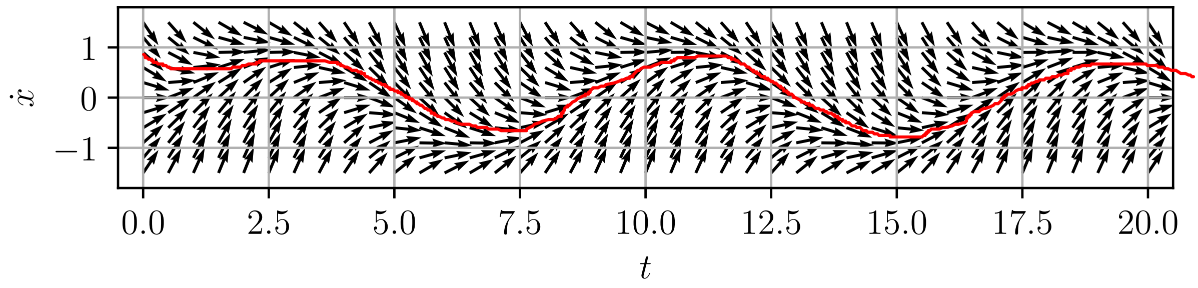


Abbildung 7: Richtungsfeld G

Lösungsvorschlag: Aus dem Richtungsfeld lassen sich Zeitpunkt und Startwert ablesen (0.5 Punkt(e)):

$$\dot{x}^{(0)} = 1$$
$$t^{(0)} = 3$$

Damit ergibt sich für die Gleichung für das Fixpunktverfahren (0.5 Punkt(e)):

$$\dot{x}^{(k+1)} = \dot{x}^{(k)} - \left(\dot{x}^{(k)}\right) + \left[e^{-0.001 \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot t\right)\right]$$

Das Ergebnis des ersten Schritts der Fixpunktiteration ergibt sich nach Einsetzen somit wie folgt (0.5 Punkt(e)):

$$\dot{x}^{(0)} = 1$$
$$\dot{x}^{(1)} = 0.7050$$

Wenn Mann die andere Zeitpunkt und Startwert ablesen:

$$\dot{x}^{(0)} = 1, t^{(0)} = 10$$

Die Ergebnis folgt:

$$\dot{x}^{(0)} = 1, \dot{x}^{(1)} = 0.9900$$

Wenn Mann die andere Zeitpunkt und Startwert ablesen:

$$\dot{x}^{(0)} = 1, t^{(0)} = 18$$

Die Ergebnis folgt:

$$\dot{x}^{(0)} = 1, \dot{x}^{(1)} = 0.9822$$

e) Transformiert das nachfolgend dargestellte Differentialgleichungssystem in ein autonomes lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung der Form $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$.

$$\frac{1}{2}\dot{x}_3 - \ddot{x}_2 + 5x_1 = 0 \tag{19}$$
$$-2\ddot{x}_3 + x_1 + \dot{x}_2 - \frac{4}{5}t = 1 \tag{20}$$
$$\dot{x}_3 - 3x_2 + \ddot{x}_1 + t = 0 \tag{21}$$

Lösungsvorschlag: Umformung in explizite DGL:

$$\ddot{x}_2 = \frac{1}{2}\dot{x}_3 + 5x_1$$
$$\ddot{x}_3 = 0.5x_1 + 0.5\dot{x}_2 - \frac{2}{5}t - 0.5$$
$$\ddot{x}_1 = -\dot{x}_3 + 3x_2 - t$$

Nachstehende Gleichungen verdeutlichen den Lösungsweg.

$$\hat{x}_1 = x_1 \tag{22}$$
$$\hat{x}_2 = x_2 \tag{23}$$
$$\hat{x}_3 = x_3 \tag{24}$$
$$\hat{x}_4 = \dot{x}_1 \tag{25}$$
$$\hat{x}_5 = \dot{x}_2 \tag{26}$$
$$\hat{x}_6 = \dot{x}_3 \tag{27}$$
$$\hat{x}_7 = t \tag{28}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \\ \dot{\hat{x}}_4 \\ \dot{\hat{x}}_5 \\ \dot{\hat{x}}_6 \\ \dot{\hat{x}}_7 \end{bmatrix}}_{\dot{\boldsymbol{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & -0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \\ \hat{x}_5 \\ \hat{x}_6 \\ \hat{x}_7 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.5 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}} \tag{29}$$

(1 Punkt(e))