Computational Engineering und Robotik

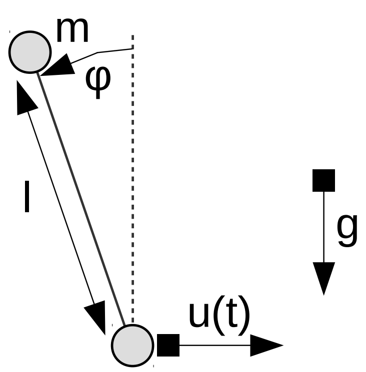
Prof. Ph.D Jan Peters, J. Carvalho, P. Klink, P. Liu, S. Stark

Sommersemester 2020

Lösungsvorschlag der 6. Übung

1 PD-Regelung eines inversen Pendels (8 Punkte)

Das inverse Pendel (siehe Abbildung) wird in der Regelungstechnik häufig als Fallbeispiel genutzt. Eine Punktmasse $m = 1$ kg wird an einem Stab der festen Länge $l = 1$ m drehbar um den Winkel φ gelagert. Das Lager ist reibungsbehaftet ($c = 0.01$ Nms/rad) und kann über die Motorbeschleunigung u translatorisch bewegt werden, um das Pendel auszubalancieren. Das System unterliegt der Gravitationsbeschleunigung $g = 9.81$ m/s^2. Insgesamt lässt sich das Verhalten des inversen Pendels durch folgende Differentialgleichung beschreiben:



$$ml^2\ddot{\varphi} = ml \cdot (u\cos\varphi + g\sin\varphi) - c\dot{\varphi}.$$

Das ungeregelte System weist eine instabile Ruhelage bei $\varphi_0 = 0$ rad auf. Es soll nun das Balancieren der Punktmasse in dieser Position senkrecht über dem Lager mittels eines PD-Positionsreglers untersucht werden. Unter der Annahme geringer Auslenkungen ergibt sich die approximierte lineare Bewegungsgleichung:

$$ml^2\ddot{\varphi} = ml \cdot (u + g\varphi) - c\dot{\varphi}.$$

a) Seien $k_p = 14.81$ und $k_v = 1.99$ die Reglerparameter. Ist das geregelte System dann stabil oder instabil? Ist es unterkritisch, kritisch oder überkritisch gedämpft?

Lösungsvorschlag: Das mit dem PD-Regler geregelte System mit $\varphi_{soll} = \varphi_0 = 0$ ergibt sich zu:

$$ml^2\ddot{\varphi} = ml \cdot (-k_p\varphi - k_v\dot{\varphi} + g\varphi) - c\dot{\varphi}$$
$$\Leftrightarrow \quad \ddot{\varphi} + \left(\frac{c}{ml^2} + \frac{k_v}{l}\right)\dot{\varphi} + \frac{(-g+k_p)}{l}\varphi = 0 \quad \text{(0.5 Punkt(e))}$$

Daraus resultiert das charakteristische Polynom:

$$\lambda^2 + \left(\frac{c}{ml^2} + \frac{k_v}{l}\right)\lambda + \frac{(-g+k_p)}{l} = 0. \quad \text{(0.5 Punkt(e))}$$

Einsetzen der angegebenen Werte führt für $\lambda_{1,2}$ auf:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-0.01 - k_v}{2} \pm \frac{\sqrt{(0.01 + k_v)^2 - 4(k_p - 9.81)}}{2}, \quad \text{(0.5 Punkt(e))}$$

bzw. mit $k_p = 14.81$ und $k_v = 1.99$ auf:

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i \quad \text{(0.5 Punkt(e))}$$

Das System ist also stabil geregelt und unterkritisch gedämpft. (0.5 Punkt(e)) Folglich ist mit Überschwingen des tatsächlichen Positionsverlaufs über den gewünschten zu rechnen.

b) Bestimme eine kritische Dämpfung mit $k_v = 1.99$.

Lösungsvorschlag: Der Term unter der Wurzel muss 0 sein, dh.

$$
\begin{aligned}
0 &= (0.01 + k_v)^2 - 4(k_p - 9.81)\text{(0.5 Punkt(e))} \\
k_p &= \frac{(0.01 + k_v)^2}{4} + 9.81 \quad (\text{mit } k_v = 2) \\
k_p &= 10.81\text{(0.5 Punkt(e))}
\end{aligned}
$$

Generell handelt es sich um eine stabile Regelung, da $\frac{-0.01-k_v}{2}$ für beide $\lambda_{1,2}$ negativ ist.

c) Bestimme analytisch die Lösung $\varphi(t)$ der linear approximierten Bewegungsgleichung für das Anfangswertproblem $\varphi(0) = 0\ \mathrm{rad}$, $\dot{\varphi}(0) = 1\ \mathrm{rad/s}$ mit dem PD-Regler aus Teilaufgabe a). Falls benötigt, darfst du die Eigenvektoren mit einem numerischen Werkzeug berechnen.

Lösungsvorschlag: In a) wurden bereits die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$ des Systems bestimmt. Die allgemeine Lösung der DGL ist mit

$$\varphi(t) = c_1 e^{-t} \cos(2t) + c_2 e^{-t} \sin(2t) \quad \text{(0.5 Punkt(e))}$$

gegeben. Die Werte c_i ergeben sich durch Einsetzen des Anfangswertproblems in $\varphi(t)$:

$$\varphi(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 \cdot 1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0 \quad \text{(0.5 Punkt(e))}$$

Daraus ergibt sich:

$$\varphi(t) = c_2 e^{-t} \sin(2t)$$

bzw.

$$\dot{\varphi}(t) = -c_2 e^{-t} \sin(2t) + 2c_2 e^{-t} \cos(2t) \quad \text{(0.5 Punkt(e))}$$

und

$$\dot{\varphi}(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad -c_2 \cdot 1 \cdot 0 + 2c_2 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0.5. \quad \text{(0.5 Punkt(e))}$$

Die spezifische, zum AWP gehörige Lösung der DGL ist folglich:

$$\varphi(t) = 0.5 e^{-t} \sin(2t).$$

d) Bestimme aus der analytischen Lösung aus c) den Zeitpunkt $t_{ü,max} > 0$ und den Betrag $\Delta\varphi_{max}$ der maximalen Überschwingweite des Pendels (von negativ bis positiv). Runde das Endergebnis auf 4 Nachkommastellen.

Lösungsvorschlag: An den Extremstellen gilt $\dot{\varphi}(t_{extrem}) = 0$, also:

$$\begin{aligned}
&\dot{\varphi}(t_{extrem}) = -0.5e^{-t_{extrem}} \sin(2t_{extrem}) + e^{-t_{extrem}} \cos(2t_{extrem}) \quad \text{(0.5 Punkt(e))}\\
\Leftrightarrow\quad & 0.5e^{-t_{extrem}} \sin(2t_{extrem}) = e^{-t_{extrem}} \cos(2t_{extrem})\\
\Rightarrow\quad & \tan(2t_{extrem}) = 2\\
\Rightarrow\quad & t_{extrem,i} = \frac{1}{2}(\arctan(2) + i\pi), \quad i = \{0, 1, 2, \cdots\},\ t_{extrem} \geq 0. \quad \text{(0.5 Punkt(e))}
\end{aligned}$$

Folglich weist $\dot{\varphi}(t)$ unendlich viele Extremstellen auf. Aufgrund der in a) festgestellten Stabilität bei unterkritischer Dämpfung (alternativ: aufgrund der wegen e^{-t} über die Zeit abnehmenden Amplitude der Schwingung von $\varphi(t)$) liegt der maximalen Überschwingweite zwischen die erste und zweite Extrempunkte:

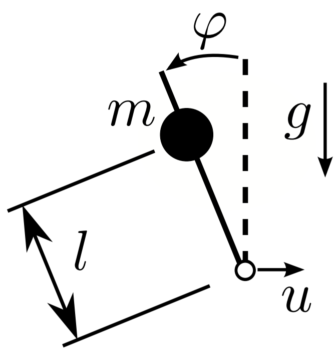
$$\begin{aligned}
t_{extrem,0} &= \frac{1}{2}\arctan(2) = 0.5536\\
t_{extrem,1} &= \frac{1}{2}(\arctan(2) + \pi) = 2.1244 \quad \text{(1.0 Punkt(e))}
\end{aligned}$$

daraus sind die entsprechenden Extrempunkte:

$$\begin{aligned}
\varphi(t_{extrem,0}) &= 0.5e^{-t_{extrem,0}} sin(2t_{extrem,0}) = 0.2571\\
\varphi(t_{extrem,1}) &= 0.5e^{-t_{extrem,1}} sin(2t_{extrem,1}) = -0.0534\\
\Delta\varphi_{max} &= |\varphi(t_{extrem,0}) - \varphi(t_{extrem,1})| = 0.3105 \quad \text{(0.5 Punkt(e))}
\end{aligned}$$

2 Zustandsregelung eines inversen Pendels

Die nebenstehende Abbildung zeigt erneut das inverse Pendel. Die Punktmasse m soll durch eine geeignete Wahl der Motorbeschleunigung u senkrecht stehend balanciert werden. Dabei ist die Länge l des Stabes, auf welchem die Punktmasse balanciert wird, variabel. Zum Balancieren soll ein Zustandsregler eingesetzt werden.
Der Zustandsvektor sei $\boldsymbol{x} = [x_1\ x_2]^T$ mit $x_1 = \varphi$, $x_2 = \dot{\varphi}$, die Stellgröße u, die Systemmatrix $\boldsymbol{A}$ und der Steuervektor $\boldsymbol{b}$. Die um den Arbeitspunkt $\boldsymbol{x_0} = (0, 0)^T$ und $u_0 = 0$ linearisierte Systemgleichung sei allgemein gegeben mit:



$$\boldsymbol{\Delta\dot{x}} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\Delta x} + \mathbf{b} \cdot \Delta u.$$

Der Ansatz des Zustandsreglers mit Vorfilter sei mit

$$u = -\boldsymbol{k}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}w$$

gegeben. Dabei bezeichne $\boldsymbol{k}^T$ den Reglervektor mit den Verstärkungsfaktoren, $\boldsymbol{v}$ den Vorfilter und w die Führungsgröße.

a) Stelle zunächst die geregelte Systemgleichung im Zustandsraum in der Form $\boldsymbol{\Delta\dot{x}} = \widetilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{x} + \widetilde{\mathbf{b}}w$ auf.

Lösungsvorschlag: Aufgrund der Linearisierung um den Arbeitspunkt $\boldsymbol{x_0} = (0, 0)^T$ und $u_0 = 0$ gilt $\boldsymbol{\Delta x} = \boldsymbol{x}$ und $\Delta u = u$. Daraus resultiert

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\dot{x}} &= \mathbf{A}\boldsymbol{x} + \mathbf{b}(-\boldsymbol{k}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}w)\\
&= (\mathbf{A} - \mathbf{b}\boldsymbol{k}^T)\boldsymbol{x} + \mathbf{b}\boldsymbol{v}w.
\end{aligned}$$

b) Was muss für $\boldsymbol{k}$ gelten, damit das geregelte System stabil ist? Nutze zur Berechnung die Zahlenwerte $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 14.0143 & -0.0571 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.4286 \end{pmatrix}$. Runde auf vier Nachkommastellen genau.

Lösungsvorschlag: Eine Aussage über die Stabilität des geregelten Systems kann anhand der Eigenwerte der Matrix $\widetilde{\mathbf{A}}$ getroffen werden:

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{A}} &= \mathbf{A} - \mathbf{b}\boldsymbol{k}^T \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 14.0143 & -0.0571 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1.4286 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 14.0143 - 1.4286\ k_1 & -0.0571 - 1.4286\ k_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Entsprechend ergibt sich für das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned}0 &= \det(\lambda \mathbf{I} - \widetilde{\mathbf{A}}) \\ &= \lambda^2 + \lambda(0.0571 + 1.4286\ k_2) - 14.0143 + 1.4286\ k_1\end{aligned}$$

und die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(0.0507 + 1.4286\ k_2) \pm \sqrt{(0.0507 + 1.4286 k_2)^2 - 4 \cdot (-14.0143 + 1.4286\ k_1)}}{2}$$

Damit das geregelte System stabil ist, muss $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$ gelten. Dies ist der Fall, wenn

$$-(0.0507 + 1.4286\ k_2) < 0 \qquad \rightarrow \qquad k_2 > -0.0355$$

und

$$-4 \cdot (-14.0143 + 1.4286\ k_1) < 0 \qquad \rightarrow \qquad k_1 > 9.8098.$$

c) Gemessen werden soll nun die Position des Pendels, wobei das Messgerät den entsprechenden Zustand mit dem Faktor 2 verstärkt. Gib die Ausgangsgleichung in der Form $y = \mathbf{c}^T \boldsymbol{x}$ an.

Lösungsvorschlag:

$$y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$$

d) Stelle nun die Gleichung für die bleibende Regelabweichung $e_\infty = w - y_\infty$ auf. Hierbei entspricht y_∞ dem stationären Endwert, also der Gleichgewichtslösung, für die Ausgangsgröße y. Diese tritt auf, wenn sich auch die Zustandsgröße $\boldsymbol{x}$ im Gleichgewicht befindet. Wie muss der Vorfilter v gewählt werden, damit keine Regelabweichung verbleibt? Nimm $\boldsymbol{k} = (100, 1)^T$ an.

Lösungsvorschlag: Für die Gleichgewichtslösung für den Zustand $\boldsymbol{x}$ gilt $\dot{\boldsymbol{x}} = 0$. Daraus folgt

$$0 = \widetilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{x}_\infty + \widetilde{\mathbf{b}}w \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{x}_\infty = -\widetilde{\mathbf{A}}^{-1}\widetilde{\mathbf{b}}w$$

Einsetzen in die Ausgangsgleichung ergibt

$$y_\infty = -\boldsymbol{c}^T\widetilde{\mathbf{A}}^{-1}\widetilde{\mathbf{b}}w \qquad \leftrightarrow \qquad e_\infty = (1 + \boldsymbol{c}^T\widetilde{\mathbf{A}}^{-1}\widetilde{\mathbf{b}})w$$

Für $e_\infty = 0$ muss gelten

$$0 = 1 + \boldsymbol{c}^T\widetilde{\mathbf{A}}^{-1}\widetilde{\mathbf{b}} = 1 + \boldsymbol{c}^T\widetilde{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{b}v \qquad \rightarrow \qquad v = -(\boldsymbol{c}^T\widetilde{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{b})^{-1} = 45.0951$$