Yi Cui , 27581772

Aufgabe 1: Konditionszahlen $\frac{x_j}{f_i(x)} \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$

a): ① $f_1(x) = \cos(x) \Rightarrow \frac{x}{\cos x} \cdot (-\sin x) = x \cdot \tan(x)$ $\quad x \in [0, \frac{\pi}{2})$

② $f_2(x) = 1+x \Rightarrow \frac{x}{1+x} \cdot 1 = \frac{x}{1+x}$ $\quad x \in \mathbb{R}$

③ $f_3(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2} \cdot 2x_1 \\ \frac{x_2}{x_1^2+x_2^2} \cdot 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x_1^2}{x_1^2+x_2^2} \\ \frac{2x_2^2}{x_1^2+x_2^2} \end{pmatrix}$ $\quad \underline{x} \in \mathbb{R}^2$

④ $f_4(x) = e^{x-1} \Rightarrow \frac{x}{e^{x-1}} \cdot e^{x-1} = x$ $\quad x \in (1, +\infty)$

b) ① Wenn x_i sehr große ist, ist e^{x_i} auch sehr groß (exponentiale Erhöhung)

$\Rightarrow$ $\text{softmax}(\underline{x})_k = \begin{cases} 0, & k \neq i \\ 1, & k = i \end{cases}$ (paarweise Differenz zu große)

② wenn $|x_i - x_j| < 1$ mit $|x_i|$ sehr große

$\Rightarrow e^{x_i} \approx e^{x_j}$

$\Rightarrow \text{softmax}(\underline{x})_k \approx \frac{e^{x_i}}{d \cdot e^{x_i}} = \frac{1}{d}$

c) $g_1(x) = x^n - x^{n-1}$ $\qquad g_2(x) = x^{n-1}(x-1)$

$$\begin{aligned} rd(g_1(x)) = rd(x^n - x^{n-1}) &= rd(rd(x^n) - rd(x^{n-1})) \\ &= rd([x^n \cdot (1+\varepsilon_1)^n] - [x^{n-1} \cdot (1+\varepsilon_1)^{n-1}]) \\ &= (x^n \cdot (1+\varepsilon_1)^n - x^{n-1} \cdot (1+\varepsilon_1)^{n-1})(1+\varepsilon_2) \\ &= x^{n-1}(1+\varepsilon_1)^{n-1} \cdot (x \cdot \varepsilon_1)(1+\varepsilon_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} rd(g_2(x)) = rd(x^{n-1} \cdot (x-1)) &= rd(rd(x^{n-1}) \cdot rd(x-1)) \\ &= rd([x^{n-1} \cdot (1+\varepsilon_1)^{n-1}] \cdot [(x-1) \cdot (1+\varepsilon_2)]) \\ &= x^{n-1} \cdot (x-1) \cdot (1+\varepsilon_1)^{n-1} \cdot (1+\varepsilon_2) \cdot (1+\varepsilon_1) \end{aligned}$$

$\because x \approx 1$

$\therefore rd(g_2(x)) < rd(g_1(x))$

Messwert i	0	1	2	3	4	5
t_i [s]	0	1	2	3	4	5
$x_{\mathrm{IMU},i} = x_{\mathrm{IMU}}(t_i)$ [m]	0	0.31	0.78	2.17	4.12	5.86

Aufgabe 2

a) Nach Newtonschen Gesetz: $m \cdot \ddot{x}(t) = F \Rightarrow \ddot{x}(t) = \frac{F}{m}$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = \frac{F}{m} \cdot t + C_1$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{F}{2m} t^2 + C_1 t + C_2 \quad \text{mit} \quad \underbrace{C_1 = V_0 \quad C_2 = X_0}_{\text{nicht immer null}}$$

$$\Rightarrow X(t) = \frac{F}{2m} t^2 + V_0 t + X_0$$

b) $$F^* = \arg\min_F \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (\check{x}(t_i, F) - x_{IMU}(t_i))^2$$

$$\Rightarrow \varphi(\underline{t}, F) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (\check{x}(t_i, F) - x_{IMU}(t_i))^2$$

Keine Randbedingung

$$\Rightarrow \frac{d\varphi}{dF} = \sum_{i=0}^{n-1} (\bar{x}(t_i, F) - X_{IMU}(t_i)) \cdot \frac{t_i^2}{2m}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{F}{4m^2} t_i^4 + \frac{V_0}{2m} t_i^3 + (X_0 - X_i) \frac{t_i^2}{2m} \right)$$

$\because$ zum Beginn still stand $(V_0 = 0,\ X_0 = 0)$

$$\therefore \frac{d\varphi}{dF} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{F}{4m_i} t_i^4 - X_i \cdot \frac{t_i^2}{2m} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{d\varphi}{dF} = (0 - 0) + (0{,}25F - 0{,}155) + (4F - 1{,}56) + (20{,}25F - 9{,}765) + (64F - 32{,}96) + (156{,}25F - 73{,}25)$$

$$= 244{,}75F - 117{,}69$$

wenn $\frac{d\varphi}{dF} = 0 \Rightarrow$ $\underline{F = 0.4809\ N \quad (\text{Konstanter Kraft})}$

c): $\check{x}(t) = \frac{F}{2m} t^2 \quad (V_0 = X_0 = 0)$

$\Rightarrow$

t_i	0	1	2	3	4	5
$\bar{x}_i$	0	0,2404	0,9617	2,1639	3,8469	6.0107

$$\Rightarrow \varepsilon_{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{6} \cdot [0^2 + 0{,}0646^2 + 0{,}2517^2 + 0{,}0439^2 + 0.3331^2 + 0{,}1707^2]}$$

$$= 0{,}0349$$

d) $$\bar{x}(t = 100) = \frac{0.4809}{2 \cdot 1} \cdot (100)^2 = 2404{,}9\ m$$