Computational Engineering und Robotik

Prof. Jan Peters, J. Carvalho, P. Klink, P. Liu, S. Stark

Sommersemester 2020

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Lösungsvorschlag der 1. Übung

1 Homogene Transformationen

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass jede affine Transformation der Form ${}^a\boldsymbol{p} = {}^a\boldsymbol{r}_b + {}^a\boldsymbol{R}_b\, {}^b\boldsymbol{p}$ mit Koordinatenvektoren ${}^i\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3$ eines Punktes P bzgl. Koordinatensystem S_i, Translationsvektor ${}^a\boldsymbol{r}_b \in \mathbb{R}^3$ und Rotationsmatrix ${}^a\boldsymbol{R}_b \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ auch als *homogene Transformation* in $\mathbb{R}^4$ darstellt werden kann:

$$ {}^a\hat{\boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} {}^a\boldsymbol{p} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^a\boldsymbol{R}_b & {}^a\boldsymbol{r}_b \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^b\boldsymbol{p} \\ 1 \end{pmatrix} = {}^a\boldsymbol{T}_b \cdot {}^b\hat{\boldsymbol{p}} $$

Homogene Transformationsmatrizen ${}^a\boldsymbol{T}_b$ haben folgende Eigenschaften:

(1) ${}^a\boldsymbol{T}_b^{-1} = \begin{pmatrix} {}^a\boldsymbol{R}_b & {}^a\boldsymbol{r}_b \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} {}^a\boldsymbol{R}_b^T & -{}^a\boldsymbol{R}_b^T\, {}^a\boldsymbol{r}_b \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{pmatrix}$,

(2) ${}^a\boldsymbol{T}_b^{-1} = {}^b\boldsymbol{T}_a$,

(3) ${}^a\boldsymbol{T}_b\, ({}^b\boldsymbol{T}_c\, {}^c\boldsymbol{T}_d) = ({}^a\boldsymbol{T}_b\, {}^b\boldsymbol{T}_c)\, {}^c\boldsymbol{T}_d$ (assoziativ) , aber ${}^a\boldsymbol{T}_b\, {}^b\boldsymbol{T}_c \neq {}^b\boldsymbol{T}_c\, {}^a\boldsymbol{T}_b$ (nicht kommutativ).

a) Es sei S_O ein festes Koordinatensystem und S_a ein weiteres Koordinatensystem, dessen x_a-Achse in Bezug auf S_O in die Richtung $(0, 0, 1)$ zeige. Die y_a-Achse zeige in Richtung $(-1, 0, 0)$. Der Ursprung von S_a liege bei $(3, 0, 0)$. Gib die Rotationsmatrix ${}^O\boldsymbol{R}_a$, den Translationsvektor ${}^O\boldsymbol{r}_a$ und die Transformationsmatrix ${}^O\boldsymbol{T}_a$ an.
Zeichne (qualitativ) das Koordinatensystem S_O und relativ dazu die Lage von S_a.

Lösungsvorschlag: $${}^O\boldsymbol{R}_a = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad {}^O\boldsymbol{r}_a = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad {}^O\boldsymbol{T}_a = \begin{pmatrix} {}^O\boldsymbol{R}_a & {}^O\boldsymbol{r}_a \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

${}^O\boldsymbol{r}_a$ und die Spalten 1 und 2 von ${}^O\boldsymbol{R}_a$ kann man direkt der Aufgabenstellung entnehmen. Spalte 3 muss mit den anderen beiden ein Rechtssystem bilden (mit Rechte-Hand-Regel überlegen oder per Kreuzprodukt ausrechnen).

b) Ein weiteres Koordinatensystem S_{b_O} liege zunächst deckungsgleich auf S_O. Es werde dann in folgender Weise transformiert:

(i) Drehung um π um die y_O-Achse

(ii) Translation in Richtung $(0, 2, 0)$

(iii) Drehung um $-\frac{\pi}{2}$ um die z_O-Achse

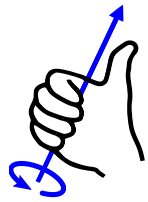


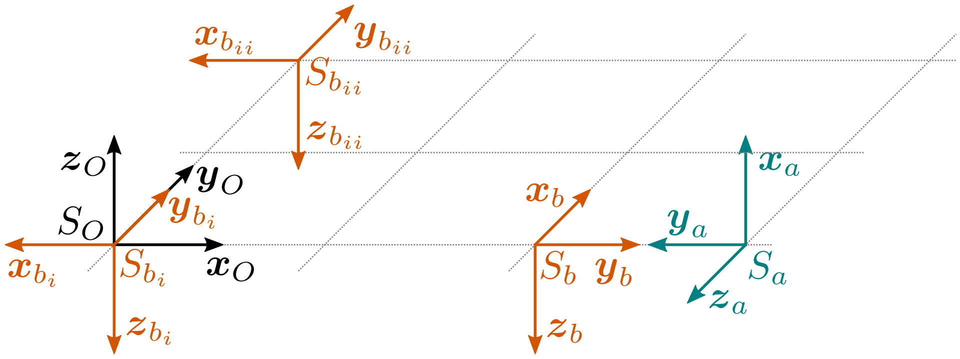
Abbildung 1: Rechte-Faust-Regel

Trage in deiner Zeichnung aus a) die Koordinatensysteme S_{b_i}, $S_{b_{ii}}$ und $S_b = S_{b_{iii}}$ entsprechend den Teiltransformationen (i), (ii) und (iii) ein.

Hinweis: Beachte dabei die Rechte-Faust-Regel aus Abbildung 1: Wenn der Daumen in Richtung der Drehachse zeigt, dann zeigen die gekrümmten Finger in Richtung der positiven Drehrichtung um diese Achse.

Gib die Transformationsmatrizen $\mathrm{Rot}(y_O, \pi)$, $\mathrm{Trans}(0, 2, 0)$ und $\mathrm{Rot}(z_O, -\frac{\pi}{2})$ an und berechne damit ${}^O\boldsymbol{T}_b$. Überprüfe dein Ergebnis anhand der Zeichnung.

Lösungsvorschlag:



$$\mathrm{Rot}(y_O, \pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{Trans}(0, 2, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{Rot}(z_O, -\tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da sich alle Teiltransformationen (i)-(iii) auf das **feste Koordinatensystem** S_O beziehen, ist für die Berechnung von ${}^O\boldsymbol{T}_b$ die **Multiplikationsreihenfolge von rechts nach links** zu wählen:

$$
\begin{aligned}
{}^O\boldsymbol{T}_b &= \mathrm{Rot}(z_O, -\frac{\pi}{2}) \cdot \mathrm{Trans}(0, 2, 0) \cdot \mathrm{Rot}(y_O, \pi) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Aus der Transformationsmatrix liest man ab:
$\boldsymbol{x}_b$ zeigt in positive Richtung von $\boldsymbol{y}_O$ $\rightarrow$ in Zeichnung erfüllt ✓
$\boldsymbol{y}_b$ zeigt in positive Richtung von $\boldsymbol{x}_O$ $\rightarrow$ in Zeichnung erfüllt ✓
$\boldsymbol{z}_b$ zeigt in negative Richtung von $\boldsymbol{z}_O$ $\rightarrow$ in Zeichnung erfüllt ✓
Der Ursprung von S_b liegt bzgl. S_O bei (2,0,0) $\rightarrow$ in Zeichnung erfüllt ✓

c) Bestimme ${}^O\boldsymbol{T}_a^{-1}$ ohne explizit eine Matrixinverse zu berechnen. Überprüfe dein Ergebnis anhand der Zeichnung.

Lösungsvorschlag: $${}^O\boldsymbol{R}_a^T \overset{a)}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad -{}^O\boldsymbol{R}_a^T\,{}^O\boldsymbol{r}_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad {}^O\boldsymbol{T}_a^{-1} = \begin{pmatrix} {}^O\boldsymbol{R}_a^T & -{}^O\boldsymbol{R}_a^T\,{}^O\boldsymbol{r}_a \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aus der Transformationsmatrix liest man ab:
$\boldsymbol{x}_O$ zeigt in negative Richtung von $\boldsymbol{y}_a$ $\rightarrow$ in Zeichnung erfüllt ✓
$\boldsymbol{y}_O$ zeigt in negative Richtung von $\boldsymbol{z}_a$ $\rightarrow$ in Zeichnung erfüllt ✓
$\boldsymbol{z}_O$ zeigt in positive Richtung von $\boldsymbol{x}_a$ $\rightarrow$ in Zeichnung erfüllt ✓
Der Ursprung von S_O liegt bzgl. S_a bei (0,3,0) $\rightarrow$ in Zeichnung erfüllt ✓

d) Bestimme aus ${}^O\boldsymbol{T}_a$ und ${}^O\boldsymbol{T}_b$ die Transformationsmatrix ${}^a\boldsymbol{T}_b$ ohne explizit eine Matrixinverse zu berechnen. Überprüfe dein Ergebnis anhand der Zeichnung.

Lösungsvorschlag: $${}^a\boldsymbol{T}_b = {}^a\boldsymbol{T}_O\,{}^O\boldsymbol{T}_b = {}^O\boldsymbol{T}_a^{-1}\,{}^O\boldsymbol{T}_b \overset{\text{b) und c)}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aus der Transformationsmatrix liest man ab:
$\boldsymbol{x}_b$ zeigt in negative Richtung von $\boldsymbol{z}_a$ $\rightarrow$ in Zeichnung erfüllt ✓
$\boldsymbol{y}_b$ zeigt in negative Richtung von $\boldsymbol{y}_a$ $\rightarrow$ in Zeichnung erfüllt ✓
$\boldsymbol{z}_b$ zeigt in negative Richtung von $\boldsymbol{x}_a$ $\rightarrow$ in Zeichnung erfüllt ✓
Der Ursprung von S_b liegt bzgl. S_a bei (0,1,0) $\rightarrow$ in Zeichnung erfüllt ✓

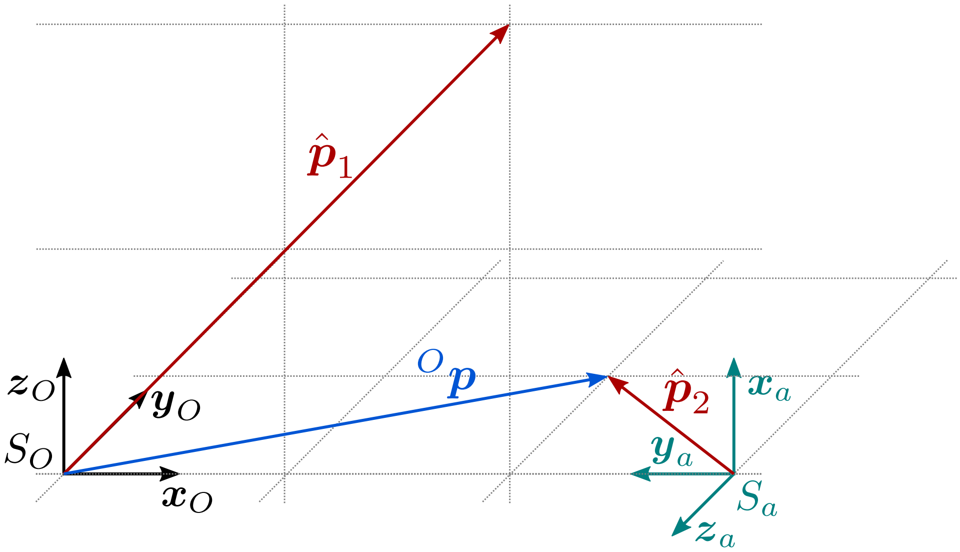
e) Es sei ${}^O\boldsymbol{p} = (2,1,0)^T$ gegeben. Berechne $\hat{\boldsymbol{p}}_1 = {}^O\boldsymbol{T}_a\,{}^O\hat{\boldsymbol{p}}$ und $\hat{\boldsymbol{p}}_2 = {}^O\boldsymbol{T}_a^{-1}\,{}^O\hat{\boldsymbol{p}}$. Entscheide und begründe für beide Fälle, ob der Punkt fest bleibt und sich nur das Bezugssystem ändert oder andersherum.

Lösungsvorschlag: $$\hat{\boldsymbol{p}}_1 = {}^O\boldsymbol{T}_a\,{}^O\hat{\boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Punkt verschiebt sich im Bezugssystem S_O.

$$\hat{\boldsymbol{p}}_2 = \underbrace{{}^O\boldsymbol{T}_a^{-1}}_{={}^a\boldsymbol{T}_O} {}^O\hat{\boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = {}^a\hat{\boldsymbol{p}}$$

Der Punkt bleibt fest, das Bezugssystem ändert sich von S_O in S_a.



2 Direkte und inverse Kinematik (8 Punkte)

Den in Abbildung 2 dargestellten Roboter kannst du dich als Modell eines Baggers vorstellen: Das erste Gelenk stellt die horizontal drehbare Basis des Fahrzeugs dar, an dem in einigem Abstand der jeweils vertikal drehbare Ausleger und Löffelstiel angebracht sind.

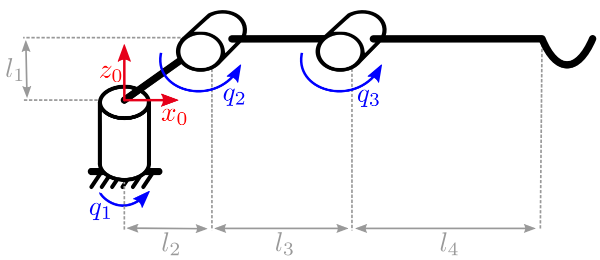


Abbildung 2: Modell des Baggers

Gelenk i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	l_1=1m	l_2=1m	$\frac{\pi}{2}$
2	q_2	0	l_3=2m	0
3	q_3	0	l_4=3m	π

Tabelle 1: Denavit-Hartenberg-Parameter

a) Zeichne in der Vorlage am Ende dieser Aufgabe alle lokalen Roboterkoordinatensysteme ein. Beachte dafür die zwei bereits eingezeichneten Achsen und die Parameter aus Tabelle 1 und halt dich an die Denavit-Hartenberg-Konvention:

- Die z_i-Achse liegt entlang der Bewegungsachse des $i+1$-ten Gelenks.
  Hinweis: Lass dich davon nicht verwirren: Die Aufzählung der Koordinatensysteme beginnt mit 0, wir sprechen aber vom 1. Gelenk.
- Die x_i-Achse steht senkrecht zur z_{i-1}- und z_i-Achse, zeigt von diesen weg und hat einen Schnittpunkt mit der z_{i-1}-Achse.

- Mit der y_i-Achse ergibt x_i, y_i, z_i ein Rechts-Koordinatensystem.

Lösungsvorschlag: Zunächst wird y_0 so eingezeichnet, dass sich ein Rechts-Koordinatensystem ergibt.

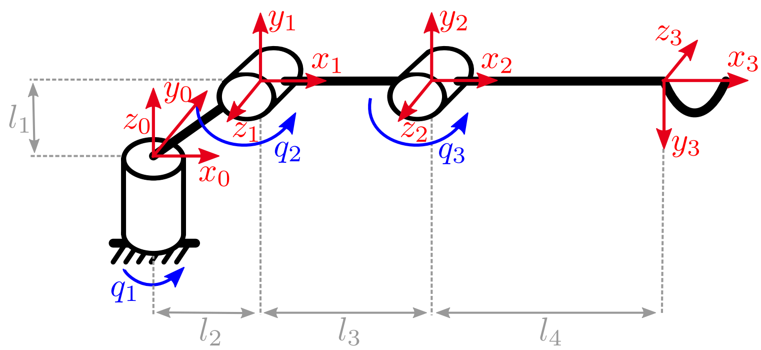
Die übrigen Koordinatensysteme lassen sich mit den DH-Parametern und den DH-Konventionen von einem Gelenk zum nächsten über die Transformationsvorschrift

$$^{i-1}\boldsymbol{T}_i = \text{Rot}(z;\theta_i) \cdot \text{Trans}(0,0,d_i) \cdot \text{Trans}(a_i,0,0) \cdot \text{Rot}(x;\alpha_i)$$

eindeutig bestimmen. Dabei beziehen sich die einzelnen Transformationen immer auf das **lokale Koordinatensystem** S_i und dessen aktuelle Lage, man geht daher in der **Multiplikationsreihenfolge von links nach rechts** vor. Im Folgenden wird beispielhaft die Transformation von S_0 zu S_1 beschrieben:

- Zunächst liegt S_1 deckungsgleich auf S_0.
- S_1 wird um die z_1-Achse um den Winkel θ_1 gedreht, in diesem Fall also um $0°$. (Eine Modellzeichnung wie Abbildung 2 ist eine Darstellung des Roboters mit fester Belegung für die variablen Parameter. Üblicherweise stellt man alle Gelenke in der Nullstellung dar, so auch hier, daher $q_i = 0$, $i = 1, 2, 3$.)
- S_1 wird entlang der z_1-Achse um d_1 verschoben.
- S_1 wird entlang der x_1-Achse um a_1 verschoben. Der Ursprung von S_1 liegt nun im zweiten Gelenk, was man den Längenangaben in Tabelle 1 entnehmen kann.
- Zuletzt wird S_1 um die x_1-Achse um den Winkel $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ gedreht.

Jetzt sollte man anhand der DH-Konventionen auf Fehler überprüfen: Die z_1-Achse zeigt aus der Bildebene heraus, was genau der Bewegungsachse des zweiten Gelenks entspricht. x_1 zeigt nach rechts und erfüllt somit die Schnittpunkte mit z_0 und z_1. y_1 ergibt dann noch das Rechtssystem, damit ist auch das dritte Kriterium erfüllt. Für die übrigen Koordinatensysteme geht man analog vor und es ergibt sich folgende Zeichnung:



(2 Punkte möglich, 0.5 Punkte je richtig eingezeichnetem Koordinatensystem)

b) Berechne die Transformationen $^0\boldsymbol{T}_1$, $^1\boldsymbol{T}_2$ und stelle dann das Vorwärtskinematikmodell $^0\boldsymbol{T}_2$ auf. Berechne in Hinblick auf die Aufgabenteile c) und d) auch den Positionsvektor $^0\boldsymbol{r}_3$ des Endeffektors. Beachte hierbei, dass es dafür nicht notwendig ist $^0\boldsymbol{T}_3$ komplett zu berechnen!
Fasse trigonometrische Ausdrücke so weit wie möglich zusammen! z.B., $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

Lösungsvorschlag: Zunächst stellen wir die Matrizen ${}^0\boldsymbol{T}_1$ und ${}^1\boldsymbol{T}_2$ mit den DH-Parametern auf:

$$
{}^0\boldsymbol{T}_1 = \begin{pmatrix} \cos q_1 & 0 & \sin q_1 & l_2\ \cos q_1 \\ \sin q_1 & 0 & -\cos q_1 & l_2\ \sin q_1 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textcolor{red}{\text{(0.5 Punkt(e))}}
$$

$$
{}^1\boldsymbol{T}_2 = \begin{pmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 & \mathrm{l}_3 \cos q_2 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0 & \mathrm{l}_3 \sin q_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textcolor{red}{\text{(0.5 Punkt(e))}}
$$

Die Transformationsmatrix ${}^0\boldsymbol{T}_2$ ergibt sich durch die Multiplikation von ${}^0\boldsymbol{T}_1$ und ${}^1\boldsymbol{T}_2$:

$$
{}^0\boldsymbol{T}_2 = {}^0\boldsymbol{T}_1 \cdot {}^1\boldsymbol{T}_2 = \begin{pmatrix} \cos q_1 \cos q_2 & -\cos q_1 \sin q_2 & \sin q_1 & l_3\ \cos q_1 \cos q_2 + l_2\ \cos q_1 \\ \sin q_1 \cos q_2 & -\sin q_1 \sin q_2 & -\cos q_1 & l_3\ \sin q_1 \cos q_2 + l_2\ \sin q_1 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0 & l_3\ \sin q_2 + l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textcolor{red}{\text{(0.5 Punkt(e))}}
$$

Um ${}^0\boldsymbol{r}_3$ auszurechnen, werden nur die ersten drei Zeilen von ${}^0\boldsymbol{T}_2$ sowie die letzte Spalte von ${}^2\boldsymbol{T}_3$ benötigt:

$$
{}^0\boldsymbol{T}_3 = \begin{pmatrix} {}^0\boldsymbol{R}_3 & {}^0\boldsymbol{r}_3 \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{pmatrix} = {}^0\boldsymbol{T}_2 \cdot {}^2\boldsymbol{T}_3
$$

$$
\Rightarrow \quad {}^0\boldsymbol{r}_3 = {}^0\tilde{\boldsymbol{T}}_2 \cdot \begin{pmatrix} {}^2\boldsymbol{r}_3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad {}^0\tilde{\boldsymbol{T}}_2 = \left({}^0\boldsymbol{R}_2, {}^0\boldsymbol{r}_2\right) \qquad \textcolor{red}{\text{(0.5 Punkt(e))}}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \cos q_1 \cos q_2 & -\cos q_1 \sin q_2 & \sin q_1 & l_3\ \cos q_1 \cos q_2 + l_2\ \cos q_1 \\ \sin q_1 \cos q_2 & -\sin q_1 \sin q2 & -\cos q_1 & l_3\ \sin q_1 \cos q_2 + l_2\ \sin q_1 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0 & l_3\ \sin q_2 + l_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_4\ \cos q_3 \\ l_4\ \sin q_3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} l_4\ \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3 - l_4 \cos q_1 \sin q_2 \sin q_3 + l_3 \cos q_1 \cos q_2 + l_2 \cos q_1 \\ l_4 \sin q_1 \cos q_2 \cos q_3 - l_4 \sin q_1 \sin q_2 \sin q_3 + l_3 \sin q_1 \cos q_2 + l_2 \sin q_1 \\ l_4 \sin q_2 \cos q_3 - l_4 \cos q_2 \sin q_3 + l_3 \sin q_2 + l_1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \cos q_1 \cdot (l_4\ \cos(q_2 + q_3) + l_3\ \cos q_2 + l_2) \\ \sin q_1 \cdot (l_4\ \cos(q_2 + q_3) + l_3\ \cos q_2 + l_2) \\ l_4\ \sin(q_2 + q_3) + l_3 \sin q_2 + l_1 \end{pmatrix}
$$

(1 Punkt maximal, 0.5 Punkte wenn richtig, aber nicht vollständig zusammengefasst)

Verwendete trigonometrische Formeln:

$$
\boxed{\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta \end{aligned}}
$$

c) Bestimme jetzt die Endeffektorposition des Baggerlöffels für $q_1 = 0$, $q_2 = -\frac{\pi}{4}$, $q_3 = \frac{\pi}{8}$. Gib das Ergebnis auf fünf Dezimalstellen genau an.

Lösungsvorschlag:

$$^0\boldsymbol{r}_3 = \begin{pmatrix} 5.1859m \\ 0.0000m \\ -1.5623m \end{pmatrix} \qquad \textcolor{red}{\text{(0.5 Punkt(e))}}$$

d) Es sei $q_2 = 0$ gegeben. Bestimme gültige Gelenkparameter q_1 und q_3 um die Endeffektorposition

$$^0\boldsymbol{r}_3 = \begin{pmatrix} 0m \\ 6m \\ 1m \end{pmatrix}$$

zu erreichen. Stelle dazu das Inverskinematikmodell auf und löse es zunächst symbolisch nach q_1 und q_3 auf. Setze erst dann konkrete Zahlenwerte für $^0\boldsymbol{r}_3$ und $l_i, i = 1, 2, 3, 4$, ein und runde dein Ergebnis auf fünf Dezimalstellen.

Lösungsvorschlag: Inverskinematikmodell mit $q_2 = 0$:

$$^0\boldsymbol{r}_3 = \begin{pmatrix} ^0r_{3,x} \\ ^0r_{3,y} \\ ^0r_{3,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos q_1 (l_4\ \cos q_3 + l_3 + l_2) \\ \sin q_1 (l_4\ \cos q_3 + l_3 + l_2) \\ l_4\ \sin q_3 + l_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix} \qquad \textcolor{red}{\text{(0.5 Punkt(e))}}$$

Möglicher Lösungsweg:

aus III folgt: $q_3 = \arcsin\left(\frac{^0r_{3,z} - l_1}{l_4}\right) = \arcsin\left(\frac{1-1}{3}\right) = 0.0000$ (0.5 Punkt(e))

aus I folgt: $\cos q_1 \,(l_4 \cos q_3 + l_3 + l_2) =^0 r_{3,x}$

$$\Rightarrow q_1 = \arccos\left(\frac{^0r_{3,x}}{l_4 \cos q_3 + l_3 + l_2}\right) = \arccos\left(\frac{0}{3\cos(0) + 2 + 1}\right) = \arccos\left(\frac{0}{6}\right) = \frac{\pi}{2}$$

sowie aus II: $\sin q_1 \,(l_4 \cos q_3 + l_3 + l_2) =^0 r_{3,y}$

$$\Rightarrow q_1 = \arcsin\left(\frac{^0r_{3,y}}{l_4 \cos q_3 + l_3 + l_2}\right) = \arcsin\left(\frac{6}{3\cos(0) + 2 + 1}\right) = \arcsin\left(\frac{6}{6}\right) = \frac{\pi}{2}$$

e) Überlege und beschreibe anhand der Robotergeometrie (Abbildung 2), wie du die Gelenke einstellen müsstest, um die
Endeffektorposition

$$^0\boldsymbol{r}_3 = \begin{pmatrix} 0\text{m} \\ 1\text{m} \\ 0\text{m} \end{pmatrix}$$

zu erreichen. Warum kannst diese Parameter beim echten Roboter nicht einstellen?

Lösungsvorschlag: Anhand der Grafik kann man sich überlegen, dass das erste Gelenk $\pi/2$ rad dreht, das Glied zwischen Gelenk 2 und 3 direkt nach oben zeigt und das Glied zwischen Gelenk 3 und 4 direkt nach unten zeigt. Die Parameter dafür wären $q_1 = \frac{\pi}{2}$, $q_2 = \frac{\pi}{2}$ und $q_3 = \pi$. (0.5 Punkt(e))
In der Praxis würde eine solche Roboterstellung durch entsprechende Gelenkwinkelbeschränkungen verhindert werden, um eine Kollision von Glied 2 und 3 zu vermeiden. (0.5 Punkt(e))

Vorlage für Aufgabe 2 a)