Übung 4 – Lösungsvorschlag

Prof. Dr. A. Kuijper

Max von Buelow, M.Sc., Volker Knauthe, M.Sc.

Tetiana Rozenvasser, Tamer Tosun, Julian Schwind

Aufgabe 1: Komplexe Zahlen

(Punkteverteilung: 0,25 Punkte für jeweils Realteil und Imaginärteil, 1 Punkte für Berechnung und Ergebnis)

Gegeben sei die komplexe Zahl: $z = 2i + 5$

a) Geben Sie den Realteil Re(z) und den Imaginärteil Im(z) an.

$\mathrm{Re}(z) = 5$, $\mathrm{Im}(z) = 2$

b) Berechnen Sie z^2.

$z^2 = (2i+5)^2 = 4i^2+20i+25 = -4+20i+25 = 20i+21$

Aufgabe 1: Komplexe Zahlen

(Punkteverteilung: 0,5 Punkte für jeweils Radius und Winkel, 0,5 Punkte Koordinatensystem)

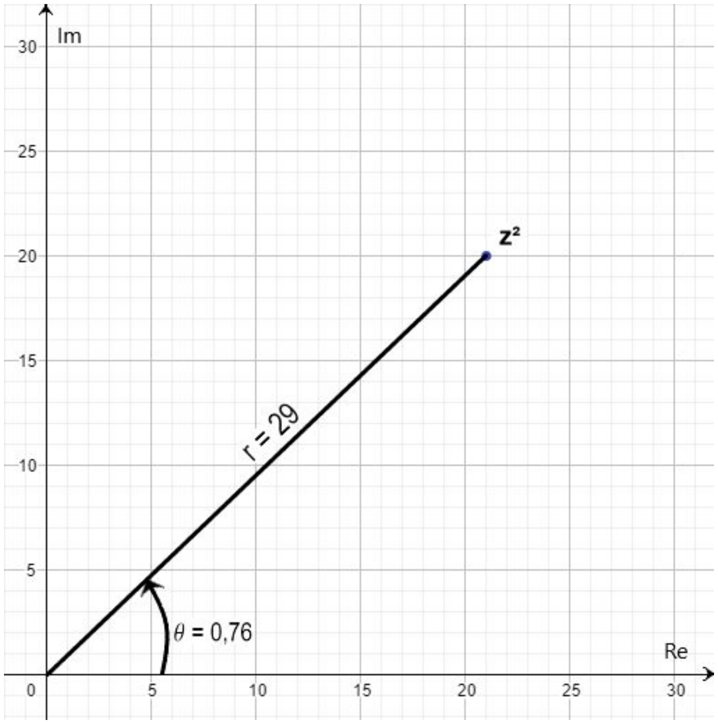
c) Berechnen Sie die Polardarstellung von z² und tragen Sie die Polarkoodrinate in ein passendes Koordinatensystem (kartesisch reicht aus). Runden Sie auf 2 Nachkommastellen und geben Sie den Winkel als Radiant an.

$z^2 = 20i+21$

$r = \sqrt{(20^2+21^2)} = 29$

$\theta = \arctan(20/21) = 0.76$

=> (29, 0.76)



Aufgabe 2: Abtastung

(Punkteverteilung: 0,25 Punkte pro Sample)

Gegeben sei das Signal: f(t) =2*sin(0.5π*t)+3*cos(6π*t)

a) Tasten Sie das Signal an den Werten t=0, 1, 2.5, 4.75 ab und geben Sie die gewonnenen Samples an. Runden Sie die Ergebnisse gegebenenfalls auf 2 Nachkommastellen.

t = 0 => f(0) = 2*sin(0.5π*0)+3*cos(6π*0) = 3

t = 1 => f(1) = 2*sin(0.5π*1)+3*cos(6π*1) = 5

t = 2.5 => f(2.5) = 2*sin(0.5π*2.5)+3*cos(6π*2.5) = -4.41

t = 4.75 => f(4.75) = 2*sin(0.5π*4.75)+3*cos(6π*4.75) = 1.85

Aufgabe 2: Abtastung

(Punkteverteilung: 0,5 für minimale Frequenz, 0,5 Punkt für Erklärung)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Gegeben sei das Signal: $f(t) = 2*\sin(0.5\pi*t)+3*\cos(6\pi*t)$

b) Reicht eine Abtastfrequenz von 5Hz für eine fehlerfreie Rekonstruktion aus? Was ist die minimale Frequenz mit der erfolgreich abgetastet werden kann?

Die minimal Abtastfrequenz enspricht dem Zweifachen der größten Frequenz des Signals.

$f_{max} = 1/(2\pi/6\pi)$ Hz **=** $1/(\frac{1}{3})$ Hz = 3 Hz

Die minimal Abtastfrequenz ist $2*f_{max}$ und somit 6 Hz.

Da 5Hz < 6Hz ist, reicht die Abtastfrequenz nicht aus, um das Signal fehlerfrei rekonstruieren zu können.

Aufgabe 2: Abtastung

(Punkteverteilung: 0,5 für Nennung, 0,5 Punkt für Erklärung)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

c) Nennen und erklären Sie den Effekt, der beim Unterschreiten der Minimalfrequenz auftritt.

Der Effekt heißt Aliasing. Beim Aliasing überlappen sich die Kopien der Fouriertransformierten, wodurch sich in Überschneidungsbereichen Summen bilden. Es ensteht ein Abtastfehler und der ursprüngliche Wert kann nicht gemessen werden.

Aufgabe 3: Fourierreihe

(Punkteverteilung: Jeweils 1 Punkt für ak, bk und a0)

Bestimmen Sie die reellen Fourierkoeffizienten der 2π-periodischen Funktion.

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{\pi} * x & x \in [0..\pi] \\ 0 & x \in [\pi..2\pi] \end{cases}$$

Aufgabe 3: Fourierreihe

(Punkteverteilung: Jeweils 1 Punkt für ak, bk und a0)

Wir berechnen die Fourierkoeffizienten:

$$ak = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0 * \cos(kx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{x}{\pi}\cos(kx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{k*\pi*\sin(k\pi)+\cos(k*\pi)}{\pi k^2} - \frac{k*0*\sin(k*0)+\cos(k*0)}{\pi k^2}\right)$$

$$= \frac{\cos(k*\pi)-1}{\pi^2 k^2}$$

Aufgabe 3: Fourierreihe

(Punkteverteilung: Jeweils 1 Punkt für ak, bk und a0)

$$bk = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \quad f(x) * sin\,(kx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \quad 0 * sin\,(kx)\,dx \; + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \quad \frac{x}{\pi} sin\,(kx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{sin(k\pi) - k\pi * cos(k*\pi)}{\pi k^2} - \frac{sin(k*0) - k*0*cos(k*0)}{\pi k^2}\right)$$

$$= \frac{-k*\pi*cos(k*\pi)}{\pi k^2}$$

$$= \frac{-cos(k*\pi)}{k}$$

Aufgabe 3: Fourierreihe

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

(Punkteverteilung: Jeweils 1 Punkt für ak, bk und a0)

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi} \frac{x}{\pi}dx\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{\pi^2}{2\pi} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4: Quiz

(Punkteverteilung: 0,5 Punkte pro Frage)

Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Begründen Sie ihre Antwort.

a) Jede periodische integrierbare Funktion kann als Fourierreihe dargestellt werden.

Diese Aussage ist falsch. Eine Funktion muss die Dirichlet-Bedingungen erfüllen, um als Fourierreihe dargestellt werden zu können. Bei einer periodisch integrierbaren Funktion ist eine endliche Anzahl von Unstetigkeiten, Maxima und Minima innerhalb einer Periode nicht zwangsläufig gegeben.

b) Eine Faltung im Frequenzraum entspricht einer Addition im Ortstraum.

Nein Addition stimmt nicht. Eine **Multiplikation** im Ortstraum entspricht einer Faltung im Frequenzraum.

Übung 4 – Lösungsvorschlag

Prof. Dr. A. Kuijper

Max von Buelow, M.Sc., Volker Knauthe, M.Sc.

Tetiana Rozenvasser, Tamer Tosun, Julian Schwind

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Schönes Wochenende!