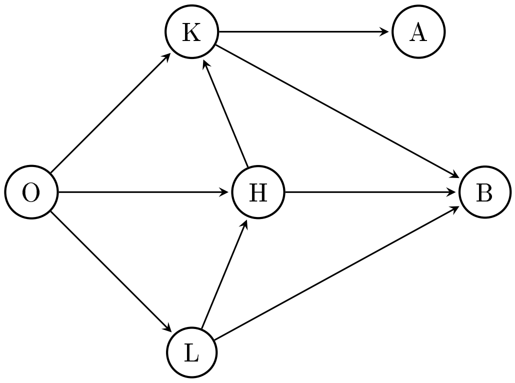
Probabilità e Statistica (Informatica) 2023/24, Foglio III

22 aprile 2023

Esercizio 1. Un pacchetto di dati deve essere trasmesso da un terminale O ad un terminale A, attraverso una serie di terminali intermedi collegati come in figura (si noti che le connessioni sono rappresentate da archi diretti):



Ad ogni nodo il pacchetto di dati viene ritrasmesso scegliendo una connessione a caso tra quelle uscenti (indipendentemente dalle scelte precedenti). Per esempio, se il pacchetto è nel nodo H, viene ritrasmesso con uguale probabilità verso K o B.

(i) Qual è la probabilità che il pacchetto arrivi in A?

(ii) Qual è la probabilità che il pacchetto arrivi in B?

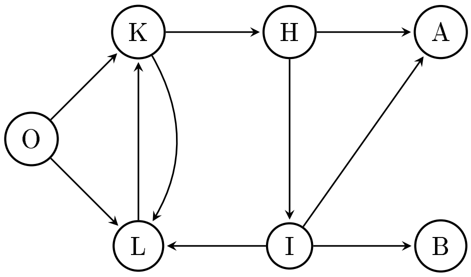
(iii) Qual è la probabilità che il pacchetto passi attraverso H?

(iv) Qual è la probabilità che il pacchetto arrivi in A sapendo che è passato da H?

(v) Sapendo che il pacchetto è arrivato in A, qual è la probabilità che sia passato da H?

(vi) Supponiamo che il pacchetto venga inviato più volte fino a quando non giunge in A. Sia X il numero di tentativi necessari per giungere in A. Si determini la distribuzione di X, e si calcoli il valor atteso di X.

Esercizio 2. Un pacchetto di dati deve essere trasmesso da un terminale O ad un terminale A, attraverso una serie di terminali intermedi collegati come in figura (si noti che le connessioni sono rappresentate da archi diretti):



Ad ogni nodo il pacchetto di dati viene ritrasmesso scegliendo una connessione a caso tra quelle uscenti (indipendentemente dalle scelte precedenti). Per esempio, se il pacchetto è nel nodo K, viene ritrasmesso con uguale probabilità verso A, B o L.

Si calcoli la probabilità che il pacchetto di dati arrivi in A (anziché in B).

Esercizio 3. Un certo componente elettronico di un sistema in servizio continuo ha una probabilità di guastarsi del tre per cento nel giro di un giorno di funzionamento. Si calcoli la probabilità che il componente funzioni per più di 200 giorni ancora sapendo che è in funzione da 100 giorni.

Consideriamo ora 1000 componenti dello stesso tipo di sopra. Si calcoli, anche approssimativamente, la probabilità che almeno 5 di questi abbiano durata di funzionamento maggiore di 200 giorni.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria non-negativa definita su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ tale che, per un $\lambda > 0$, $\mathbf{E}\left[e^{\lambda X}\right] < \infty$. Si mostri che esiste una costante $K \in (0, \infty)$ tale che

$$\mathbf{P}\left(X \geq c\right) \leq K \cdot e^{-\lambda c} \text{ per ogni } c > 0.$$

[Suggerimento: disuguaglianza di Markov-Chebyshev.]

Esercizio 5. Un'azienda offre un servizio di manutenzione di frigoriferi industriali. Si osserva che di un certo pezzo di ricambio costoso e ingombrante ne servono in media quattro unità alla settimana. L'azienda può rifornirsi di quel pezzo di ricambio solo a inizio settimana. Quante unità ne deve avere il lunedì per non trovarsi sprovvista nel corso della settimana con probabilità maggiore del 95%?

Si dia un'interpretazione del problema di sopra in termini di richieste che devono essere elaborate da un server.

Esercizio 6. A Bianca e Carlo piace andare insieme a uno spettacolo, ma hanno preferenze diverse. Bianca vuole andare alle partite di calcio, mentre Carlo preferisce i concerti di musica barocca. Scelgono indipendentemente l'uno dall'altra il tipo di spettacolo a cui assistere. La seguente tabella rappresenta la soddisfazione (o l'utilità) che Bianca e Carlo ottengono dalle loro scelte:

Bianca \Carlo	Partita	Concerto
Partita	2, 1	0, 0
Concerto	0, 0	1, 2

Ad esempio, se Bianca e Carlo scelgono entrambi di andare a vedere una partita di calcio, Bianca ottiene una soddisfazione di 2, Carlo di 1. Viceversa, se entrambi scelgono di andare ad ascoltare un concerto di musica barocca, Carlo ottiene una soddisfazione di 2, Bianca di 1. Se le loro scelte sono incompatibili, rimangono tutt'e due insoddisfatti (soddisfazione zero).

Supponiamo che i due adottino la seguente coppia di strategie: Bianca sceglie con probabilità $2/3$ la partita di calcio e con probabilità $1/3$ il concerto (lanciando, ad esempio, un dado equilibrato a sei facce), mentre Carlo sceglie con probabilità $2/3$, indipendentemente da Bianca, il concerto di musica barocca e con probabilità $1/3$ la partita. Si calcolino le soddisfazioni medie che i due ottengono. Si verifichi inoltre che, data la strategia di Bianca, Carlo non può trovare nessuna strategia migliore (in termini di soddisfazione media) di quella descritta sopra.

Esercizio 7. Siano X, Y, ξ variabili aleatorie discrete su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Supponiamo che ξ abbia distribuzione di Bernoulli di parametro $p \in [0,1]$, e che ξ e (X,Y) siano indipendenti. Poniamo

$$Z(\omega) \doteq \begin{cases} X(\omega) & \text{se } \xi(\omega) = 1, \\ Y(\omega) & \text{altrimenti.} \end{cases} \qquad \omega \in \Omega.$$

Si determini la densità discreta di Z in funzione di p e delle densità discrete di X e Y.

Esercizio 8. Siano X, Y, Z, ξ variabili aleatorie definite su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con le seguenti proprietà:

- X, Y, Z sono a valori in $\mathbb{Z}$;
- ξ è di Bernoulli di parametro $1/2$;
- $\mathbf{P}(X < Y) = 1$;
- (X, Y), Z, ξ sono indipendenti.

Definiamo una variabile aleatoria M tramite

$$M(\omega) \doteq \begin{cases} Y(\omega) & \text{se } \xi(\omega) = 1, \\ X(\omega) & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad \omega \in \Omega,$$

e introduciamo l'evento

$$A \doteq \{\xi = 1, M \geq Z\} \cup \{\xi = 0, M < Z\}.$$

(i) Si calcoli la probabilità di A in termini delle distribuzioni marginali di X, Y, Z.

(ii) Si mostri che $\mathbf{P}(A) \geq 1/2$.

(iii) Si mostri che $\mathbf{P}(A) > 1/2$ se $\mathbf{P}(Z = k) > 0$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 9. Siano X, Y variabili aleatorie discrete su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Supponiamo che X, Y siano indipendenti. Si esprima allora la densità discreta di $X + Y$ in termini delle densità discrete di X e Y.

Esercizio 10. Consideriamo l'esperimento del lancio di tre dadi regolari. Sia $\mathbf{P}$ la distribuzione uniforme su $\Omega \doteq \{1, \dots, 6\}^3$. Per $i \in \{1, 2, 3\}$ poniamo

$$X_i(\omega) \doteq \omega_i, \quad \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega.$$

Di conseguenza, X_i può essere vista come il punteggio segnato dal dado i-esimo. Poniamo inoltre

$$Y_1 \doteq (X_1, X_2), \qquad\qquad Y_2 \doteq (X_2, X_3).$$

a) Si mostri che le variabili aleatorie X_1, X_2, X_3 sono indipendenti, e si trovino le loro distribuzioni.

b) Si mostri che Y_1, Y_2 *non* sono indipendenti.

c) Sia D la diagonale in $\{1, \dots, 6\}^2$, cioè $D \doteq \{(i, i) : i \in \{1, \dots, 6\}\}$. Si decida se gli eventi $\{Y_1 \in D\}$ e $\{Y_2 \in D\}$ sono indipendenti o meno.

Esercizio 11. Siano N, X_i, $i \in \mathbb{N}$, variabili aleatorie indipendenti su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ tali che N ha distribuzione di Poisson di parametro $\lambda > 0$, mentre le X_i hanno distribuzione di Bernoulli di parametro $p \in [0, 1]$. Poniamo

$$Y \doteq \sum_{i=1}^{N} X_i,$$

cioè

$$Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } N(\omega) = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) & \text{se } N(\omega) = n \text{ per un } n \in \mathbb{N}, \end{cases} \qquad \omega \in \Omega.$$

Si determini la densità discreta di Y.

Esercizio 12 ($*$). Immaginiamo di avere una scacchiera da 20 righe (numerate da zero a 19 dal basso in alto) per 12 colonne (numerate da 1 a 12 da sinistra a destra). Disponiamo dodici pedine nelle caselle della riga zero. Ora lanciamo due dadi regolari da sei facce. Spostiamo di una casella in alto la pedina che si trova nella colonna il cui numero è uguale alla somma dei punteggi segnati dai due dadi. Continuiamo a lanciare i due dadi e a spostare pedine, muovendo sempre la pedina che si trova nella colonna del numero corrispondente alla somma dei punteggi segnati, finché la prima pedina non sarà arrivata alla riga 19. A questo punto il gioco si ferma. Si calcolino *numericamente* le probabilità dei seguenti eventi:

a) La pedina della colonna sette arriva prima di quella della colonna otto.

b) La pedina della colonna k arriva per prima, con $k \in \{1, \ldots, 12\}$.

c) Il gioco ha durata di esattamente N mosse, con $N \in \{1, \ldots, 200\}$.

d) Il gioco ha durata di più di 200 mosse.

Per la consegna servono:

- una descrizione della procedura utilizzata per il calcolo delle probabilità di cui sopra;
- lo pseudo-codice del programma e il codice commentato in un linguaggio standard come `C++` o Python (il codice anche in un file separato);
- un grafico in formato `pdf` che riporti la probabilità di vittoria della pedina in colonna k in funzione di $k \in \{1, \ldots, 12\}$;
- un grafico in formato `pdf` che riporti la probabilità che il gioco abbia durata di esattamente N mosse in funzione di $N \in \{1, \ldots, 200\}$.

Contatto: Markus Fischer (fischer@math.unipd.it)