2025年数学建模赛题

A题：动点的运动观测和追逐。

为了观测平面上的移动物体的位置，在相距10000m的两个点A，B设立观测点。（如图1）这样，平面上的任一点P（在AB连线的一侧，不包括A与B连线上的点）都可以利用P点到A点、P点到B点的两条连线与线段AB的夹角α和β表示。我们可以把(α,β)看作点P的观测坐标。

B

A

α

P(α,β)

β

图1：空间一点P的方向角坐标(α,β)

问题1：现有一个动点P(t)。从坐标为（α，β）=（0.2010,3.0922）的点出发，以常速v=1000m/h 在平面上运动。表1是动点P运动的33个位置的观测值

表1：动点P(t)的坐标观测值

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| α | 0.2010 | 0.2101 | 0.2252 | 0.2313 | 0.2821 | 0.3152 | 0.3583 | 0.3908 | 0.4321 | 0.4453 | 0.4608 |
| β | 3.0922 | 3.0920 | 3.0918 | 3.0917 | 3.0908 | 3.0901 | 3.0892 | 3.0885 | 3.0876 | 3.0873 | 3.0870 |
| α | 0.5101 | 0.5322 | 0.5634 | 0.6507 | 0.6901 | 0.7352 | 0.7808 | 0.8032 | 0.8121 | 0.8712 | 0.9130 |
| β | 3.0861 | 3.0854 | 3.0847 | 3.0828 | 3.0819 | 3.0808 | 3.0797 | 3.0792 | 3.0789 | 3.0774 | 3.0762 |
| α | 0.9362 | 0.9910 | 1.0231 | 1.0650 | 1.0912 | 1.1033 | 1.1151 | 1.1340 | 1.1621 | 1.2284 | 1.2772 |
| β | 3.0756 | 3.0739 | 3.0729 | 3.0714 | 3.0704 | 3.0699 | 3.0695 | 3.0687 | 3.0674 | 3.0640 | 3.0608 |

其中夹角的单位为弧度。

设t=0时刻动点的位置是(α0,β0)=(0.2010,3.0922),请求出动点P距离A点最接近的位置P\*=(α\*,β\*),并计算动点P经过P\*的时刻t\*。

问题2：设一动点Q从点α=0.4636,β=3.1365出发，沿直线向目的地α=0.8442,β=1.7895 以常速v0=1000m/h运动。另一动点Q1和点Q同时出发，以常速v追逐Q。Q1的运动方向始终指向Q。已测得Q1在出发后的几个时间点的位置(见表2)，求Q1的速度v和出发位置，预测Q1追上Q的时刻（可以把距离不超过5米时看作追上），并分析要使Q1在Q到达目的地之前追上Q，速度v至少要达到多少？

表2：点Q1在若干时间点的方位信息

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| T | 1 | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.4 | 1.5 | 1.6 |
| α | 1.4422 | 1.4367 | 1.4303 | 1.4231 | 1.4154 | 1.4072 | 1.3985 |
| β | 2.9551 | 2.9370 | 2.9189 | 2.9008 | 2.8827 | 2.8645 | 2.8464 |
| T | 1.7 | 1.8 | 1.9 | 2.0 | 2.1 | 2.2 | 2.3 |
| α | 1.3894 | 1.3801 | 1.3704 | 1.3605 | 1.3503 | 1.3399 | 1.3293 |
| β | 2.8283 | 2.8101 | 2.7920 | 2.7738 | 2.7557 | 2.7375 | 2.7193 |
| t | 2.4 | 2.5 | 2.6 | 2.7 | 2.8 | 2.9 | 3.0 |
| α | 1.3186 | 1.3076 | 1.2965 | 1.2853 | 1.2740 | 1.2625 | 1.2509 |
| β | 2.7011 | 2.6829 | 2.6647 | 2.6464 | 2.6282 | 2.6099 | 2.5916 |

注：表2中时间t的单位：小时，角α和β的单位：弧度

B题：体检规划

某医院体检部计划连续的几天集中为20个单位的员工体检。体检分为四种套餐，分别为一、二类保健、老年、中青年男性和中青年女性，分别记为I,II,III,IV类体检。体检的项目分为3类，记为A类、B类和C类。四种套餐中各类体检项目的用时分别为(单位：min)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 保健类型\项目 | A | B | C |
| I | 20 | 12 | 8 |
| II | 15 | 10 | 8 |
| III | 12 | 10 | 10 |
| IV | 12 | 8 | 15 |

为职工体检的20个单位的各种体检套餐的人数分别为

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 单位\套餐 | I | II | III | IV |
| 1 | 10 | 15 | 45 | 50 |
| 2 | 18 | 12 | 30 | 45 |
| 3 | 0 | 3 | 25 | 20 |
| 4 | 30 | 25 | 35 | 30 |
| 5 | 12 | 0 | 25 | 40 |
| 6 | 15 | 15 | 42 | 54 |
| 7 | 4 | 0 | 18 | 24 |
| 8 | 32 | 18 | 24 | 20 |
| 9 | 2 | 28 | 54 | 42 |
| 10 | 9 | 16 | 27 | 31 |
| 11 | 3 | 8 | 18 | 23 |
| 12 | 12 | 15 | 20 | 20 |
| 13 | 10 | 30 | 43 | 45 |
| 14 | 8 | 15 | 18 | 23 |
| 15 | 2 | 16 | 24 | 22 |
| 16 | 11 | 31 | 31 | 28 |
| 17 | 5 | 12 | 51 | 37 |
| 18 | 14 | 11 | 31 | 28 |
| 19 | 5 | 2 | 17 | 25 |
| 20 | 21 | 23 | 41 | 38 |

医院可以同时为12个人做A类体检，10个人做B类体检，13个人做C类体检。

每个单位的人的体检要安排在同一个半天。

医院体检部的工作时间为上午8:00-12:00，下午13:30-17:00。

**问题1**：如何规划各单位的体检时间，可以在最短的时间完成20个单位的体检？

**问题2**：在安排单位集体体检的同时，还有一些其他的个人要求参加体检。目前有要求预约体检的I、II、III、IV类个人分别有90、90、130、230人，医院希望在不延长20个单位集中体检总时间的前提下，尽可能在单位体检的几天里插入一些其他个人的体检。另外，考虑到A、B、C各项目的需求的不平衡，医院决定在A、B、C三种项目中选择一种，增加一到两人的检查能力(比如，如果选择A，则从同时可以检查12人增加到13或14人)。请你按要求，适当增加检查能力，使能插入尽量多的个人体检人数。