

Ottimizzazione Strutturale e Ottimizzazione Topologica

Claudio Caccia

Progetto di Strutture Aerospaziali

Politecnico di Milano

May 12, 2016

Outline

- 1 Descrizione del Problema
- 2 Definizione di un Modello di Ottimizzazione
- 3 Categorie di modelli di Ottimizzazione
- 4 Ottimizzazione strutturale: Classificazione
- 5 Ottimizzazione Topologica
- 6 OT: algoritmi
- 7 OT: esempi
- 8 OT: implementazioni SW
- 9 Conclusioni

Componenti di un pb. di ottimizzazione strutturale:

Un pb. di ottimizzazione strutturale si compone di:

- modello strutturale
- algoritmo di ottimizzazione
- modello di ottimizzazione

Modello di ottimizzazione

- Modello strutturale:
 - struttura reale \Rightarrow modello
 - funzione obiettivo e vincoli devono essere descritti come variabili del modello
- Algoritmo di ottimizzazione:
 - porta da soluzione iniziale di progetto x_0 all'ottimo x^*
- Modello di ottimizzazione:
 - ponte tra struttura e algoritmo
 - valuta f.o. e vincoli
 - traduce le *design variables* in variabili del pb. strutturale

Schema

Processo di ottimizzazione:

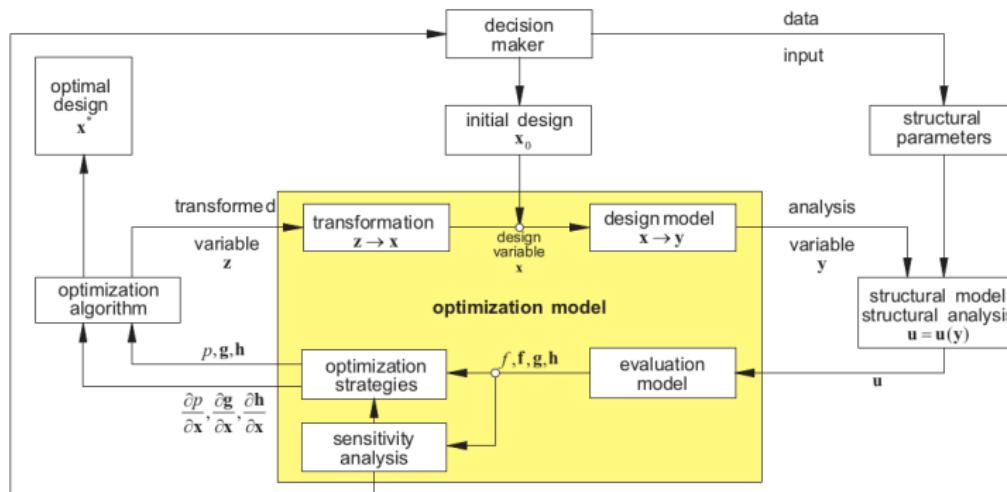


Figure: Optimization schema [5]

Definizione dei termini

Elementi per la formulazione matematica di un pb. di ottimizzazione:

- ① Funzione obiettivo
- ② *inequality constraints*: definiscono le regioni di validità della f.o.
- ③ *equality constraints*: sono sempre attivi
- ④ *side constraints*: definiscono la regione di ricerca delle variabili

Formulazione generale

Forma generale di un pb. di ottimizzazione: [9]:

$$\min_{\mathbf{x}} \quad f(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

$$\text{subject to} \quad g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \quad (2)$$

$$h_k(\mathbf{x}) = 0 \quad k = 1, \dots, r \quad (3)$$

$$\check{x}_i \leq x_i \leq \hat{x}_i \quad i = 1, \dots, n \quad (4)$$

Modelli di Ottimizzazione

Numerose categorie e classificazioni dei pb. di ottimizzazione:

- Formulazione lineare (PL) vs. non-lineare [8]
- Formulazione mono vs. multi obiettivo [4]
- Dominio continuo vs. discreto
- Dominio convesso o no [2]
- Ottimo vincolato o non vincolato
- Modelli euristici vs. esatti
- tecniche di rilassamento
- ...

Note (1)

Ottimizzazione multi-obiettivo

- Frontiera di Pareto
- definizione a priori delle preferenze
 - pb. di omogeneizzazione (ad es. costo?)
- trasformazione di obiettivi in vincoli

O.T. trasforma l'obiettivo di riduzione di massa in un vincolo

Note (2)

Convex optimization

In un certo senso più semplice. Molte tecniche e varie implementazioni software (ad es. www.cvxopt.org)

Algoritmi di O.T. approssimano la f.o. in quadratica nell'intorno della soluzione attuale.

Rilassamento dei vincoli

Possibilità di ridurre la complessità del pb. modificando opportunamente i vincoli del problema.

Varie tecniche, in particolare da *binario [0,1]* a *continuo*.

Gli algoritmi di O.T. usano questa tecnica.

Ottimizzazione Strutturale

Classificazione dei modelli di O.S.[3]

- *Sizing Optimization*
- *Shape Optimization*
- *Topological Optimization*

Sizing Optimization

Parametri

- ① Spessori
- ② Aree
- ③ momenti d'inerzia
- ④ ...

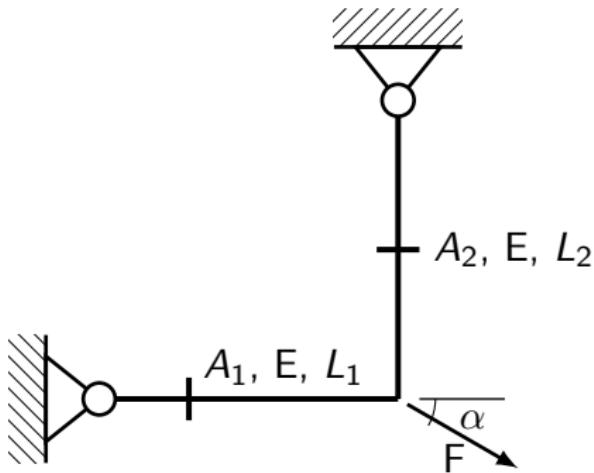


Figure: minimo peso con vincolo su sforzi

Shape Optimization (1)

Esempio:

forma o contorno descritte in modo parametrico:

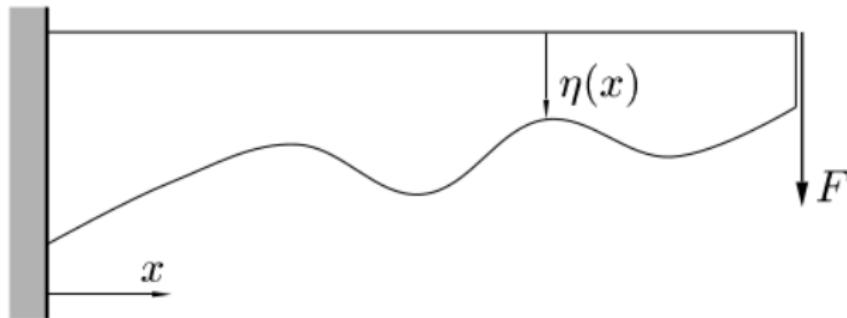


Figure: Shape Optimization

Shape Optimization (2)

Procedura

- ① def. parametri e limiti
- ② mesh
- ③ risoluzione
- ④ calcolo f.o.
- ⑤ calcolo prossimo passo

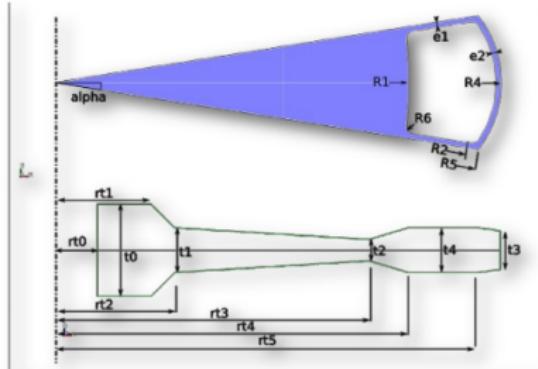


Figure: shape opt.

Shape Optimization (3)

Metodi di **Design Improvement** per la ricerca della forma ottimale:

- Steepest Descent
- Conjugate Gradient
- Response Surface
- Line Search
- Brent
- Stochastic Search
- ...
- (DoE?)

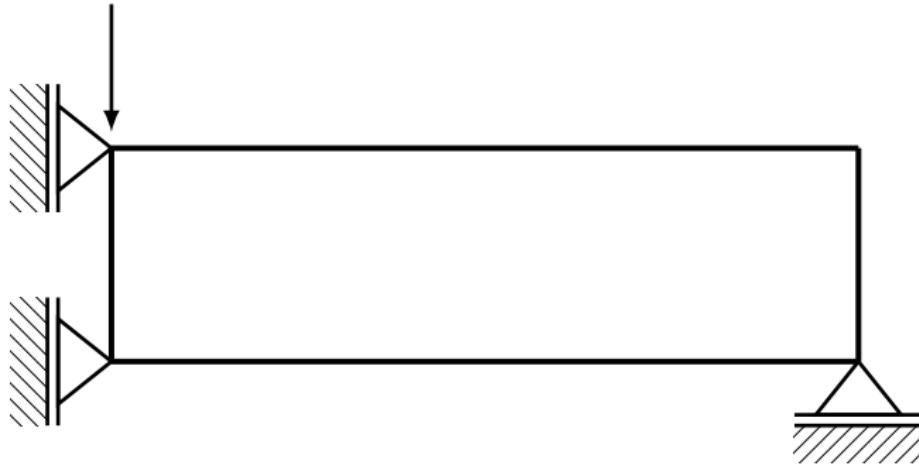
Ottimizzazione Topologica

Richiede il minor numero di informazioni iniziali:

- *design space* (volume occupato)
- vincoli della struttura
- carichi da applicare

Esempio di O.T.(1)

Definizione del problema:



Esempio di O.T. (2)

Soluzione:



Ottimizzazione Topologica [O.T.]

Consiste nello “scavare” la struttura ottimale dal pieno:

- Definiti i vincoli
- Massimizzando la rigidezza del sistema
(nel caso strutturale)
- Data una percentuale prefissata di volume da mantenere
(vincolo sulla massa)

Nota

Nomenclatura (non ufficiale) in particolare per gusci:

- **Topology**: solid-void elements
- **Topometry**: sizing (ottimizzazione degli spessori)
- **Topography**: shape (posizionamento dei nodi)

Topography optimization

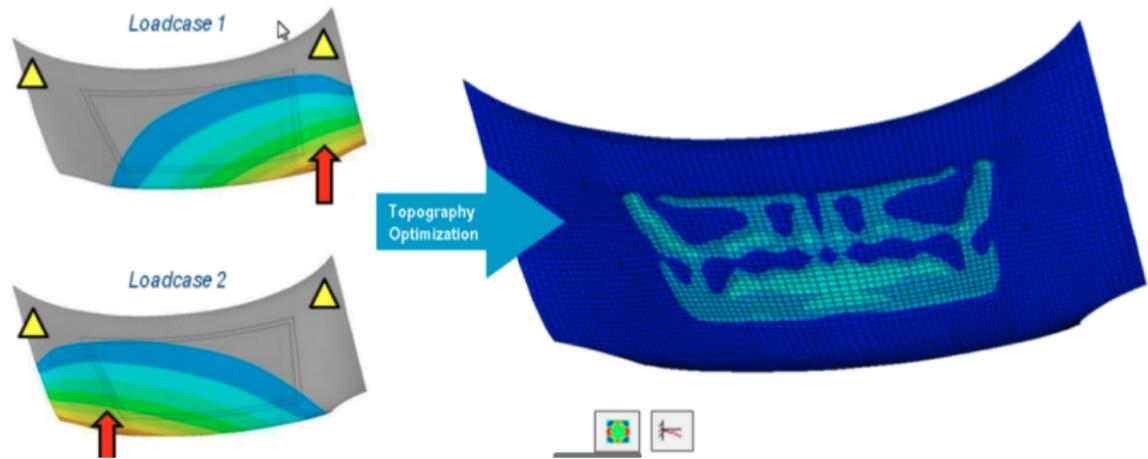


Figure: topography opt.

O.T. : Caratteristiche

Una volta definita una discretizzazione del dominio (*mesh*)
il problema è di ottimizzazione discreta (**binaria**):

- un elemento partecipa alla soluzione [$\rho = 1$]
- un elemento non partecipa alla soluzione [$\rho = 0$]

La qualità della soluzione dipende dalla mesh

O.T. : Ricerca della soluzione

- Il problema risulta intrinsecamente combinatorio
- Complessità computazionale $\mathcal{O}(2^n)$
- moltissime soluzioni prive di significato
- non trattabile “as is” per problemi anche semplici

Definizione del Problema

Il pb. di O.T. viene formalizzato in termini di *minimum compliance*:

$$\min_x \quad f(\mathbf{x}) = \mathbf{q}^T \mathbf{f} = \sum_{i=1}^n (x_i)^p \mathbf{q}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{q}_i \quad (5)$$

subject to

$$g(\mathbf{x}) = \frac{v_e}{v_0} \sum_{i=1}^n x_i - \bar{v} \leq 0 \quad (6)$$

$$\mathbf{Kq} = \mathbf{f} \quad (7)$$

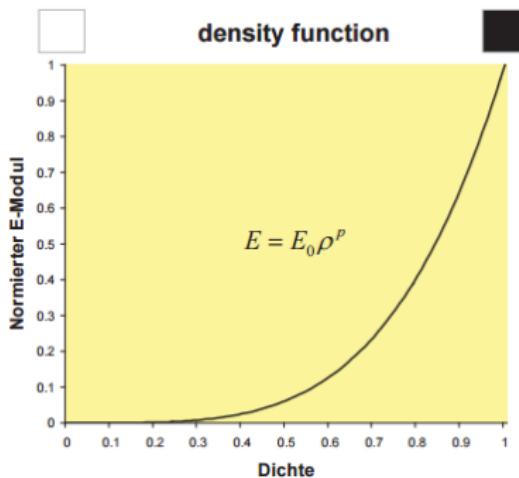
$$0 < \check{x}_i \leq x_i \leq 1 \quad i = 1, \dots, n \quad (8)$$

Le variabili di progetto sono le densità dei singoli elementi

SIMP-like methods

SIMP Solid Isotropic Material with Penalization

- ① homogenization
- ② pb. rilassato
- ③ pb. continuo
- ④ densità penalizzata



SIMP

- Largamente usato in implementazioni sw commerciali
- produce valori intermedi delle variabili di progetto x_i
- eccessivi valori di penalizzazione rendono il pb malcondizionato o soggetto a minimi locali
- fase di *postprocessing* per definire la geometria finale
 - rispetta i vincoli?
 - fattibile?

Sequential Approximate Optimization

S.A.O: [7]

- Obiettivo: generare soluzione a predominanza di "pieni-vuoti"
- Approssimazione lineare locale del problema (*trust region*)
- Soluzione iterativa

$$\check{x}_i^{k+1} \leftarrow \max(x_i^k - \delta, \rho_{min}) \quad (9)$$

$$\hat{x}_i^{k+1} \leftarrow \min(x_i^k + \delta, 1) \quad (10)$$

- uso di *intervening variables* per linearizzare il problema (reciproco o esponenziale)

Altri algoritmi

① Optimality Criterion (O.C.): [1]

- Espressione delle condizioni di KKT sulla Lagrangiana del problema
- Utilizza un *damping factor* per evitare oscillazioni della soluzione

② Gray Scale Suppression (G.S.S.): [6]

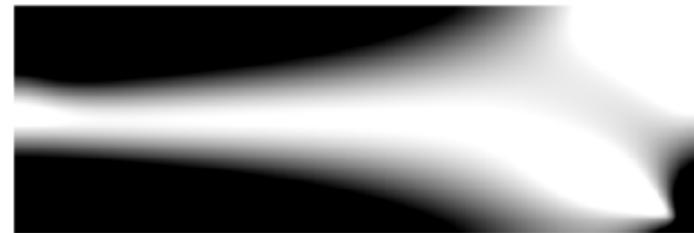
Equivalenti a S.A.O. sotto determinate ipotesi nella scelta di coefficienti e *intervening variables*

T.O. in Python

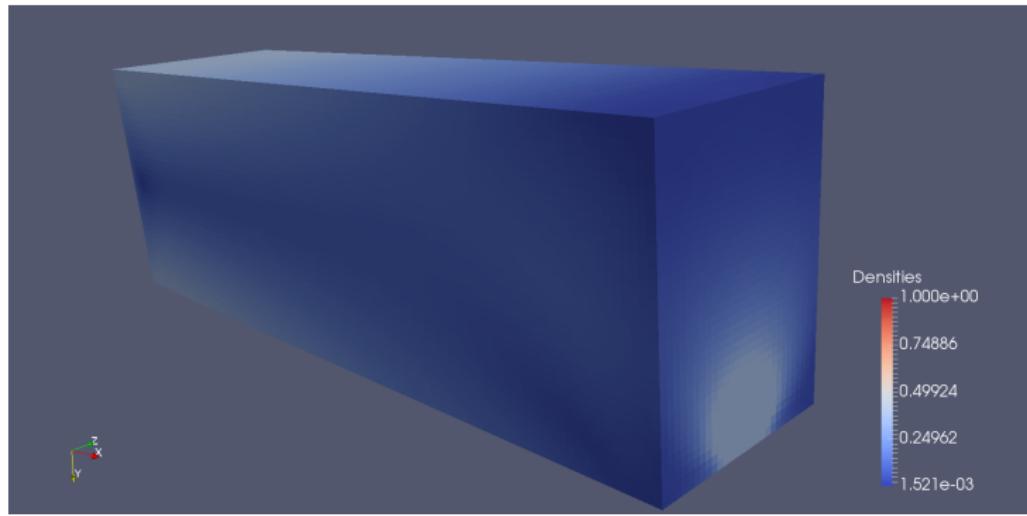
Unico (?) codice sw che implementa gli algoritmi sopra descritti:
<https://github.com/williamhunter/topy>

- elementi regolari (quadrati/cubi)
- domini regolari (rettangoli/parallelepipedi)
- modello definito da un input file
- *tuning* dei parametri per convergenza ottimale

2D example

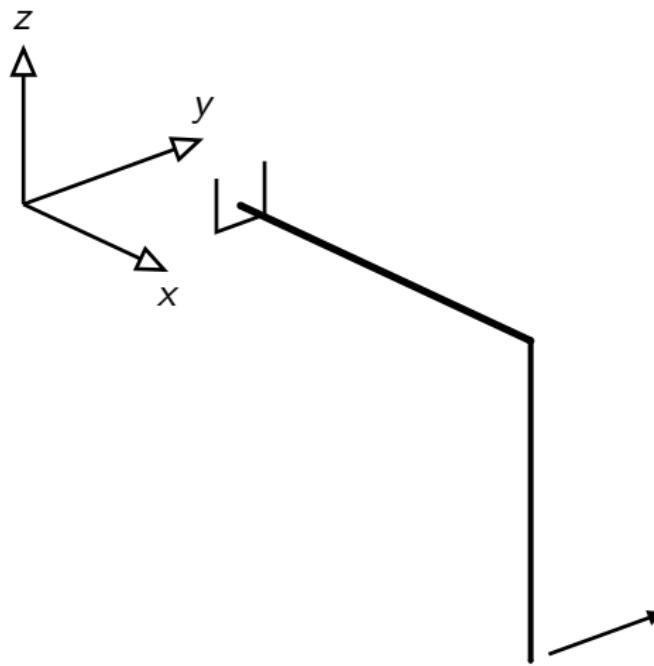


3D cantilever

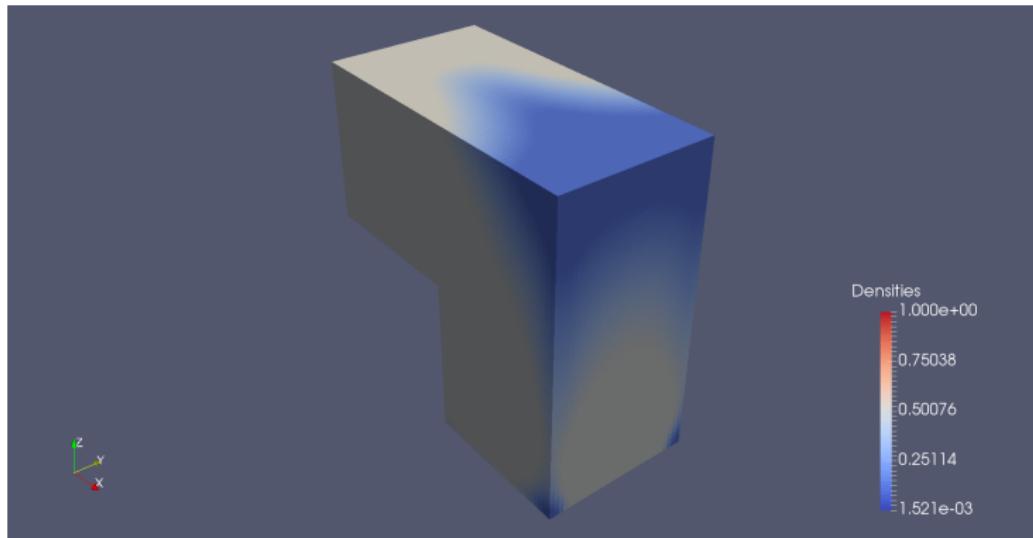


3D flessione torsione

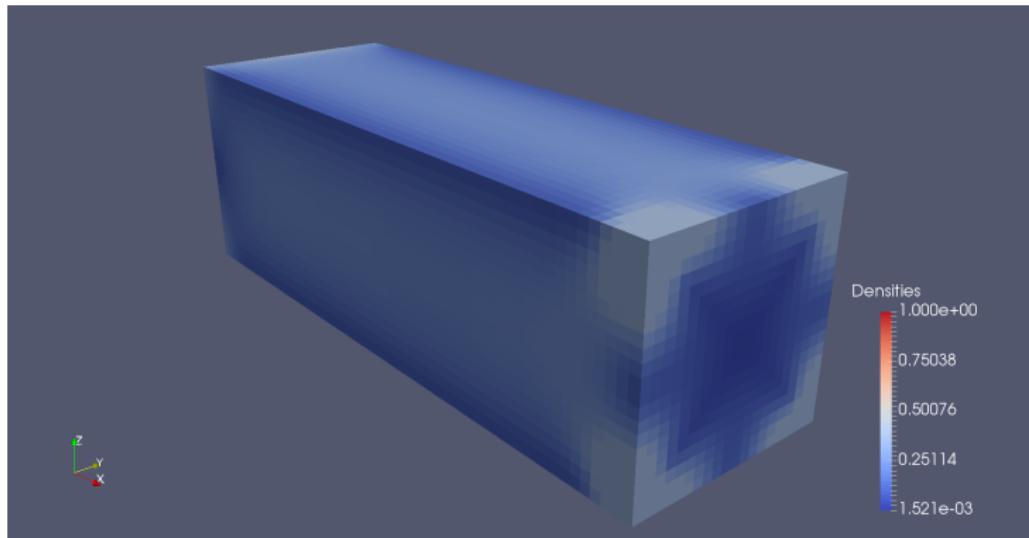
Descrizione del problema:



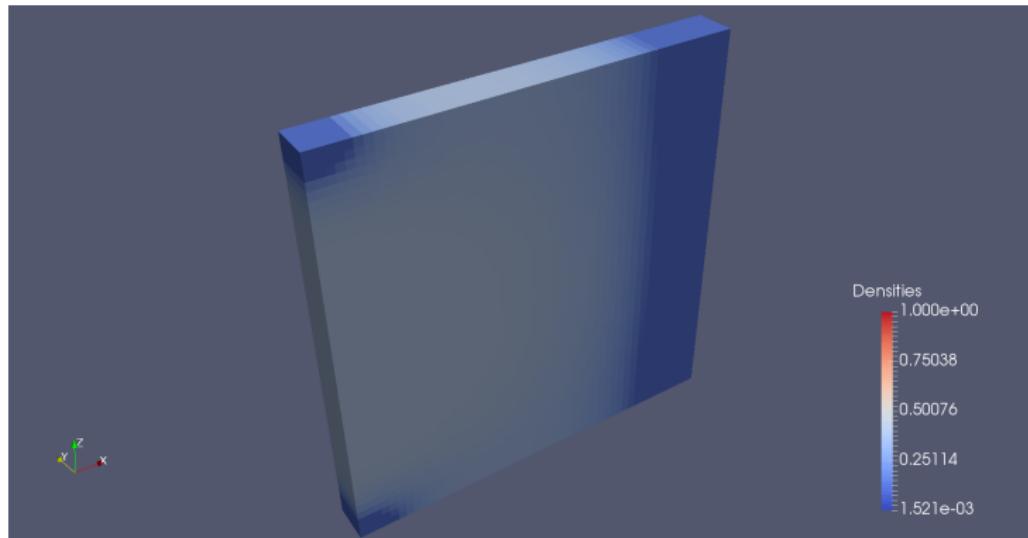
Soluzione



Torque



3D Heating



Implementazioni SW di T.O.

FEA Software che implementano T.O.:

- Altair Optistruct
- Genesis (ANSYS) <http://www.vrand.com/GTAM.html>
- MSC. Nastran
 - Esempio: <https://www.youtube.com/watch?v=IxqV2bFM6bU>
- midas NFX: <http://www.midasnfx.com/>
- ...

Conclusioni

generalmente implementazioni di SIMP

- ① algoritmo robusto e generale
- ② possibilità di introdurre vincoli:
 - simmetria
 - estrudibilità
 - stampabilità
 - minima sezione
- ③ introduzione di load cases differenti
- ④ introduzione di vincoli di spostamento
- ⑤ utilizzo di mesh/volumi più complessi

Criticità nella T.O.

- ① in assenza di vincoli si possono ottenere soluzioni non coerenti
- ② difficoltà nel passaggio dalla soluzione ad una geometria
- ③ non si effettua alcun dimensionamento
- ④ algoritmi proprietari

Fine

References I



Martin P Bendsøe.

Optimal shape design as a material distribution problem.
Structural optimization, 1(4):193–202, 1989.



Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe.

Convex optimization.
Cambridge university press, 2004.



Peter W Christensen and Anders Klarbring.

An introduction to structural optimization, volume 153.
Springer Science & Business Media, 2008.



Jean-Antoine Désidéri.

Hierarchical shape optimization: Cooperation and competition in multi-disciplinary approaches.
Technical report, INRIA, 2010.



Hans Eschenauer, Niels Olhoff, and Walter Schnell.

Applied structural mechanics: fundamentals of elasticity, load-bearing structures, structural optimization: including exercises.
Springer Science & Business Media, 1997.



Albert A Groenwold and LFP Etman.

A simple heuristic for gray-scale suppression in optimality criterion-based topology optimization.
Structural and Multidisciplinary Optimization, 39(2):217–225, 2009.



Raphael T Haftka and Zafer Gürdal.

Elements of structural optimization, volume 11.
Springer Science & Business Media, 2012.

References II



Robert J Vanderbei.

Linear programming.

Springer, 2014.



Garret N Vanderplaats.

Numerical optimization techniques for engineering design: with applications, volume 1.

McGraw-Hill New York, 1984.