

# Ottimizzazione Strutturale e Ottimizzazione Topologica

Claudio Caccia

Progetto di Strutture Aerospaziali

*Politecnico di Milano*

May 11, 2016

# Outline

- 1 Descrizione del Problema
- 2 Definizione di un Modello di Ottimizzazione
- 3 Categorie di modelli di Ottimizzazione
- 4 Ottimizzazione strutturale: Classificazione
- 5 Ottimizzazione Topologica
- 6 OT: algoritmi
- 7 OT: esempi
- 8 OT: implementazioni SW
- 9 Conclusioni

# Elementi dell'ottimizzazione strutturale:

- modello strutturale
- modello di ottimizzazione
- algoritmo di ottimizzazione

# Modello di ottimizzazione

- Modello strutturale:
  - struttura reale  $\Rightarrow$  modello
  - funzione obiettivo e vincoli descritti come variabili del modello  $\mathbf{x}$
- Algoritmo di ottimizzazione:
  - porta da soluzione iniziale  $\mathbf{x}_0$  a  $\mathbf{x}_f$
- Modello di ottimizzazione:
  - ponte tra struttura e algoritmo
  - valuta f.o. e vincoli
  - traduce le variabili strutturali in *design variables*

# Schema

Schema di ottimizzazione:

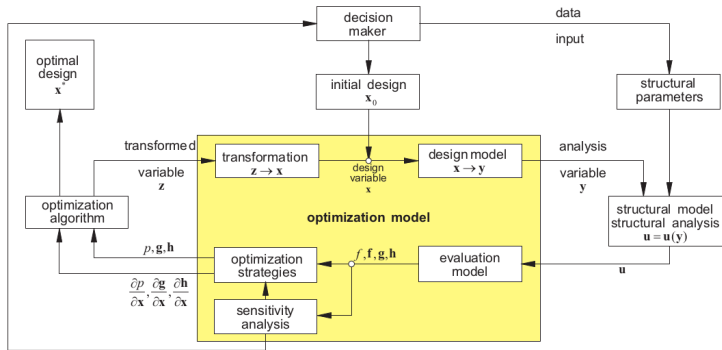


Figure: Optimization schema [5]

# Formulazione

Forma generale [9]:

$$\min_{\mathbf{x}} \quad f(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

$$\text{subject to} \quad g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \quad (2)$$

$$h_k(\mathbf{x}) = 0 \quad k = 1, \dots, r \quad (3)$$

$$\check{x}_i \leq x_i \leq \hat{x}_i \quad i = 1, \dots, n \quad (4)$$

# Definizione dei termini

- ① Funzione obiettivo
- ② *inequality constraints*: definiscono le regioni di validità della f.o.
- ③ *equality constraints*: sono sempre attivi
- ④ *side constraints*: definiscono la regione di ricerca delle variabili

# Categorie di Modelli di Ottimizzazione

- lineare, non-lineare [8]
- continuo, discreto
- vincolato, non vincolato
- convex optimization [2]
- multi-objective [4]
- modelli euristici vs. esatti
- metodi rilassati
- ...



# Note (1)

## Ottimizzazione multi-obiettivo

- Frontiera di Pareto
- definizione a priori delle preferenze
  - pb. di omogeneizzazione (costo?)
- trasformazione di obiettivi in vincoli

# Note (2)

## Convex optimization

In un certo senso più semplice. Strumenti molto potenti. Varie implementazioni software (ad es. [www.cvxopt.org](http://www.cvxopt.org))

## Rilassamento dei vincoli

Possibilità di ridurre la complessità del pb. modificando opportunamente i vincoli del problema.

Varie tecniche, in particolare da *binario* **[0,1]** a *continuo*.

# Ottimizzazione Strutturale

Classificazione dei modelli di O.S.[3]

- *Sizing Optimization*
- *Shape Optimization*
- *Topological Optimization*

# Sizing Optimization

## Parametri

- ① Spessori
- ② Aree
- ③ momenti d'inerzia
- ④ ...

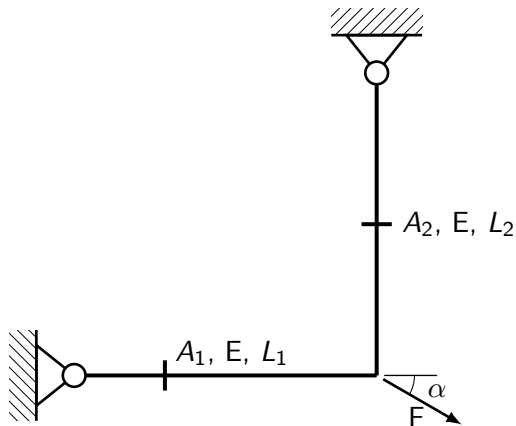


Figure: minimo peso con vincolo su sforzi

# Shape Optimization (1)

Esempio:

forma o contorno descritte in modo parametrico:

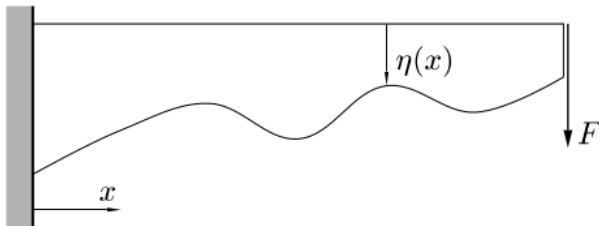


Figure: Shape Optimization

# Shape Optimization (2)

## Procedura

- 1 def. parametri e limiti
- 2 mesh
- 3 risoluzione
- 4 calcolo f.o.
- 5 calcolo prossimo passo

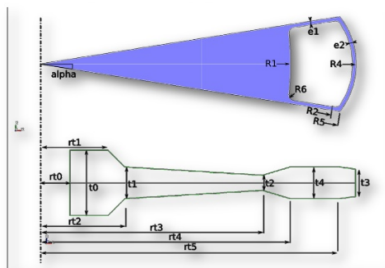


Figure: shape opt.

# Shape Optimization (3)

## Metodi di **Design Improvement**

- Simplex
- Steepest Descent
- Conjugate Gradient
- Response Surface
- Line Search
- Brent
- Stochastic Search
- ...
- (DoE?)

# Ottimizzazione Topologica

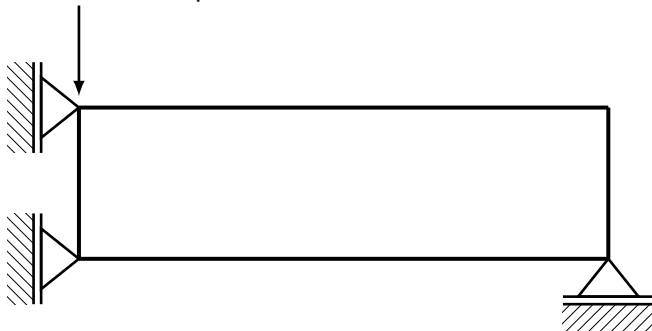
Richiede il minor numero di informazioni iniziali:

- *design space* (volume)
- vincoli
- carichi



# Esempio di O.T.(1)

Definizione del problema:



## Esempio di O.T. (2)

Soluzione:



# Ottimizzazione Topologica [O.T.]

Consiste nello “scavare ” la struttura ottimale dal pieno:

- Definiti i vincoli
- Massimizzando la rigidezza del sistema (ma non solo)
- Data una percentuale prefissata di volume da mantenere

# Nota

Nomenclatura (non ufficiale) in particolare per gusci:

- **Topology**: solid-void elements
- **Topometry**: sizing
- **Topography**: shape

# Topography optimization

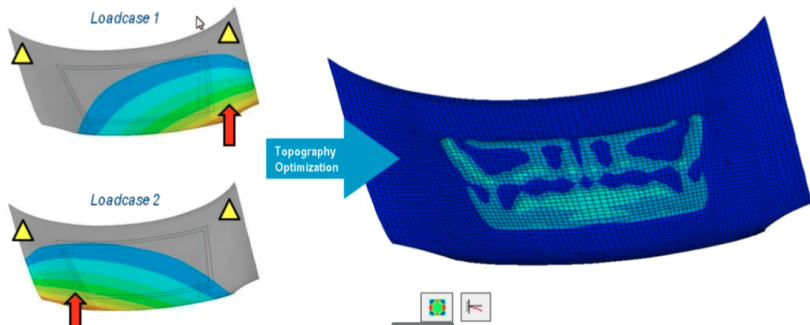


Figure: topography opt.

# O.T. : Caratteristiche

Una volta definita una discretizzazione del dominio (*mesh*)  
il problema è intrinsecamente discreto (**binario**):

- un elemento partecipa **[1]**
- un elemento non partecipa **[0]**

alla soluzione finale

# O.T. : Ricerca della soluzione

- Il problema risulta intrinsecamente combinatorio
- Complessità computazionale  $\mathcal{O}(2^n)$
- moltissime soluzioni prive di significato
- non trattabile “as is ” per problemi anche semplici

# Definizione del Problema

Minimum compliance:

$$\min_{\mathbf{x}} \quad f(\mathbf{x}) = \mathbf{q}^T \mathbf{f} = \sum_{i=1}^n (x_i)^p \mathbf{q}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{q}_i \quad (5)$$

$$\text{subject to} \quad g(\mathbf{x}) = \frac{v_e}{v_0} \sum_{i=1}^n x_i - \bar{v} \leq 0 \quad (6)$$

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{f} \quad (7)$$

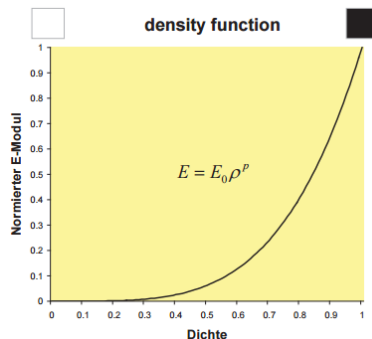
$$0 < \check{x}_i \leq x_i \leq 1 \quad i = 1, \dots, n \quad (8)$$



# SIMP-like methods

## SIMP Solid Isotropic Material with Penalization

- ① homogeneization
- ② relaxed
- ③ penalized
- ④ continuus



# SIMP

- Largamente usato in codici commerciali
- produce valori intermedi delle variabili di progetto  $x_i$
- eccessivi valori di penalizzazione rendono il pb malcondizionato o soggetto a minimi locali
- fase di *postprocessing* per definire la geometria
  - rispetta i vincoli?
  - fattibile?

# Sequential Approximate Optimization

S.A.O: [7]

- Obiettivo: generare soluzione a predominanza di "pieni-vuoti"
- Approssimazione lineare locale del problema
- uso di *intervening variables* per per linearizzare il problema
- Soluzione iterativa

$$\check{x}_i \leftarrow \max(x_i - \delta, \rho_{min}) \quad (9)$$

$$\hat{x}_i \leftarrow \min(x_i + \delta, 1) \quad (10)$$

# Altri algoritmi

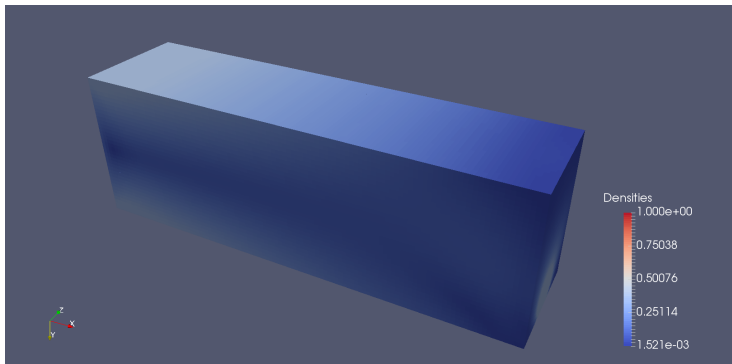
## ① Optimality Criterion (O.C.): [1]

- Espressione delle condizioni di KKT sulla Lagrangiana del problema
- Equivalente a S.A.O. sotto determinate ipotesi

## ② Gray Scale Suppression (G.S.S.): [6]

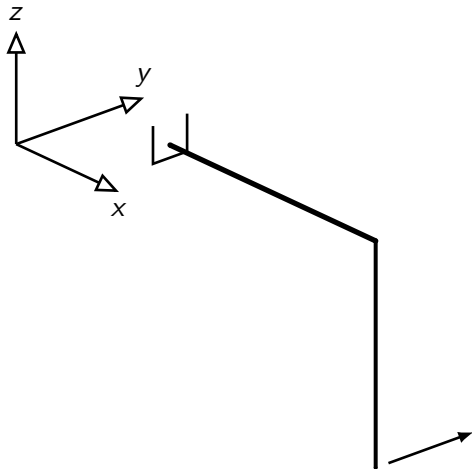
# 2D example

# 3D cantilever

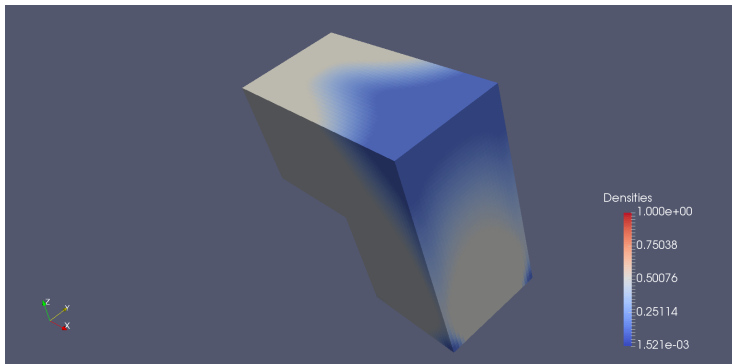


# 3D flessione torsione

Descrizione del problema:

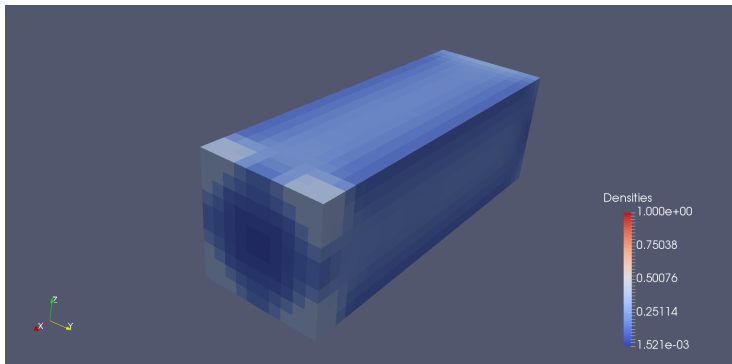


# Soluzione

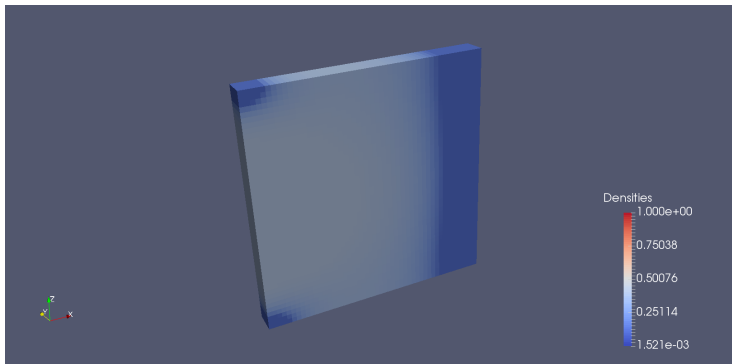




# Torque



# 3D Heating



# Implementazioni SW di T.O.

FEA Software che implementano T.O.:

- Altair Optistruct
- Genesis (ANSYS) <http://www.vrand.com/GTAM.html>
- MSC. Nastran
  - Esempio: <https://www.youtube.com/watch?v=IxqV2bFM6bU>

generalmente SIMP

- ① algoritmo robusto e generale
- ② possibilità di introdurre vincoli:
  - simmetria
  - estrudibilità
  - stampabilità
- ③ introduzione di load cases differenti
- ④ introduzione di vincoli di spostamento
- ⑤ utilizzo di mesh/volumi più complessi

# contro

- 1 in assenza di vincoli si possono ottenere soluzioni non coerenti
- 2 algoritmi proprietari

# References I



Martin P Bendsøe.

Optimal shape design as a material distribution problem.  
*Structural optimization*, 1(4):193–202, 1989.



Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe.

*Convex optimization*.  
Cambridge university press, 2004.



Peter W Christensen and Anders Klarbring.

*An introduction to structural optimization*, volume 153.  
Springer Science & Business Media, 2008.



Jean-Antoine Désidéri.

Hierarchical shape optimization: Cooperation and competition in multi-disciplinary approaches.  
Technical report, INRIA, 2010.



Hans Eschenauer, Niels Olhoff, and Walter Schnell.

*Applied structural mechanics: fundamentals of elasticity, load-bearing structures, structural optimization: including exercises*.  
Springer Science & Business Media, 1997.



Albert A Groenwold and LFP Etman.

A simple heuristic for gray-scale suppression in optimality criterion-based topology optimization.  
*Structural and Multidisciplinary Optimization*, 39(2):217–225, 2009.



Raphael T Haftka and Zafer Gürdal.

*Elements of structural optimization*, volume 11.  
Springer Science & Business Media, 2012.

# References II



Robert J Vanderbei.

*Linear programming.*

Springer, 2014.



Garret N Vanderplaats.

*Numerical optimization techniques for engineering design: with applications*, volume 1.

McGraw-Hill New York, 1984.

# Fine