

# 气轨上弹簧振子的简谐振动

张欣睿<sup>\*</sup>

北京大学化学与分子工程学院 学号：1600011783

**摘 要：**本实验完成了在气垫导轨上探究弹簧振子周期与振幅的关系、探究弹簧振子周期与振子质量的关系的实验，并求出了弹簧振子中弹簧的有效质量和劲度系数，以及验证了弹簧振子在不同位置处在误差范围内机械能守恒。

**关键词：**气垫导轨；弹簧振子；振动周期；机械能守恒

---

<sup>\*</sup> e-mail: zhangxinrui16@pku.edu.cn; mobile number: 18801391162

## 1 实验数据及其分析、处理

### 1.1 弹簧振子的振动周期与振幅的关系

本次实验就弹簧振子的周期与振幅、振子质量间是否有关进行了控制变量探究。首先探究的是测量弹簧振子在一定振幅下的周期，并考察周期随振幅改变的关系。测量数据如表 1 所示。

A(cm)	左侧 $T_L$ (s)			右侧 $T_R$ (s)			$\sigma_{\bar{T}}$ (s)	$\bar{T}$ (s)
10.00	1.93438	1.93376	1.93407	1.93476	1.93467	1.93509	0.0002	1.9345
20.00	1.93778	1.93872	1.93880	1.93710	1.93793	1.93776	0.0003	1.9380
30.00	1.94082	1.94097	1.94150	1.94013	1.94112	1.94119	0.0002	1.9410
40.00	1.94334	1.94324	1.94324	1.94295	1.94339	1.94326	0.0001	1.9432

表 1 测量弹簧振子周期随振幅的变化关系

作平均周期随振幅改变的图线，如图 1 所示。

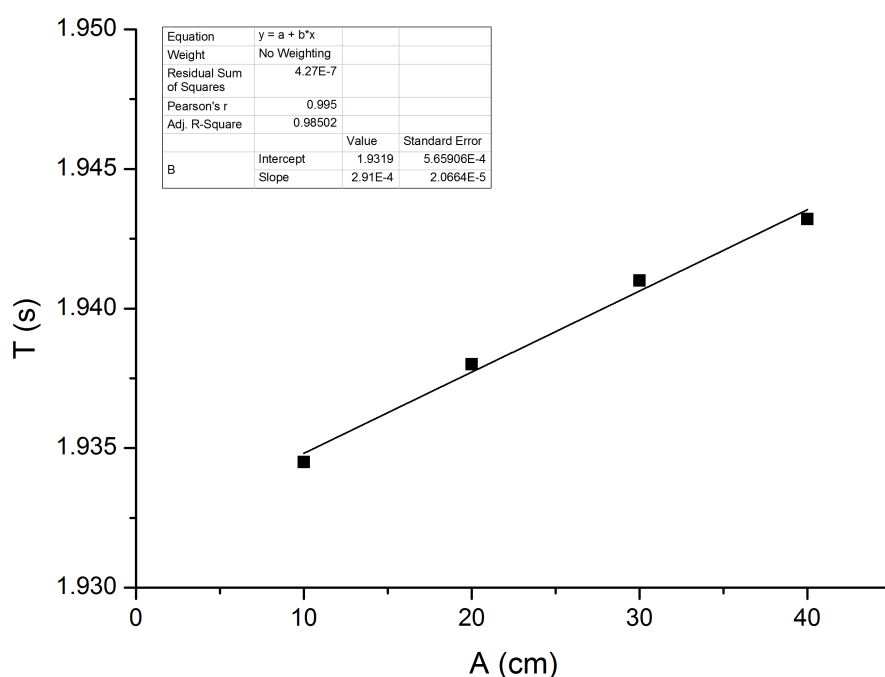


图 1 弹簧振子周期随振幅的变化

从数据及图线可以看出，平均周期随振幅的增加而增加，且呈现一定的线性关系。

若滑块做理想的简谐振动，应当有：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_0}{k}}$$

即周期  $T$  不随振幅的变化而变化，由此可以看出滑块的运动的确不是简谐振动，而是阻尼振动。并且由于阻尼振动满足运动方程：

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

可作试探解得： $x = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$ ， $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

即阻尼振动仍然是具有严格等时性的，但其角频率会受到阻尼因数  $\beta$  的影响而变小。在不同振幅进行的实验中，可能是由于阻尼因数  $\beta = \frac{\gamma}{2m}$  不一定是严格的常量，导致实验测得的周期出现了显著差异。

**结论：**在本实验中，弹簧振子的振动周期与其振幅成正相关，本实验中的滑块所做的并非理想的简谐运动。

## 1.2 弹簧振子的振动周期和振子质量的关系

这一实验对弹簧振子的振动周期和振子质量的关系也进行了控制变量研究。首先使用百分之一电子天平测量滑块及各个骑码的质量，如表 2 所示。

测量项目	滑块质量 $m'_0$	骑码 1 $m'_1$	骑码 2 $m'_2$	骑码 3 $m'_3$	骑码 4 $m'_4$
$m(g)$	456.08	103.64	103.09	53.31	51.38

表 2 振子及其它部件质量测量

使用各种骑码进行质量组合，改变滑块的质量，测出不同振子质量下的振动周期，如表 3 所示。

$m_1(g)$	左侧 $T_L(s)$			右侧 $T_R(s)$			$\sigma_{\bar{T}}(s)$	$\bar{T}(s)$	$\bar{T}^2(s^2)$
507.46	2.04824	2.04766	2.04806	2.04809	2.04826	2.04832	0.0001	2.0481	4.1947
559.72	2.14976	2.14990	2.14992	2.15009	2.14988	2.15017	0.0001	2.1500	4.6223
611.10	2.24575	2.24575	2.24555	2.24542	2.24529	2.24536	0.0001	2.2455	5.0423
662.81	2.33709	2.33744	2.33732	2.33696	2.33740	2.33743	0.0001	2.3373	5.4628
714.19	2.42470	2.42514	2.42542	2.42538	2.42550	2.42532	0.0001	2.4252	5.8818
767.50	2.51321	2.51365	2.51317	2.51344	2.51361	2.51399	0.0001	2.5135	6.3177

表 3 测量弹簧振子周期随滑块质量的变化关系（振幅  $A = 40.00 \text{ cm}$ ）

根据测量数据，可以分别作出振子周期及其平方对滑块质量的线性拟合图线，如图 2 所示。

根据图线及线性拟合可知，拟合结果为弹簧振子的周期的平方对滑块质量构成更好的线性关系（方点代表此图线，其回归方程为  $T^2 = 0.054 + 0.00816m_1$ ，相关系数  $r = 1$ ），并可以从图象的点中看出  $T - m_1$  图线有上凸曲线倾向。故可以初步确定弹簧振子的振动周期的平方正比于滑块的质量。将此图线反向延长至周期的平方为 0，其横轴截距的负值即为振子中弹簧的有效质量；同时，这一图线的斜率与弹簧振子的劲度系数有关。

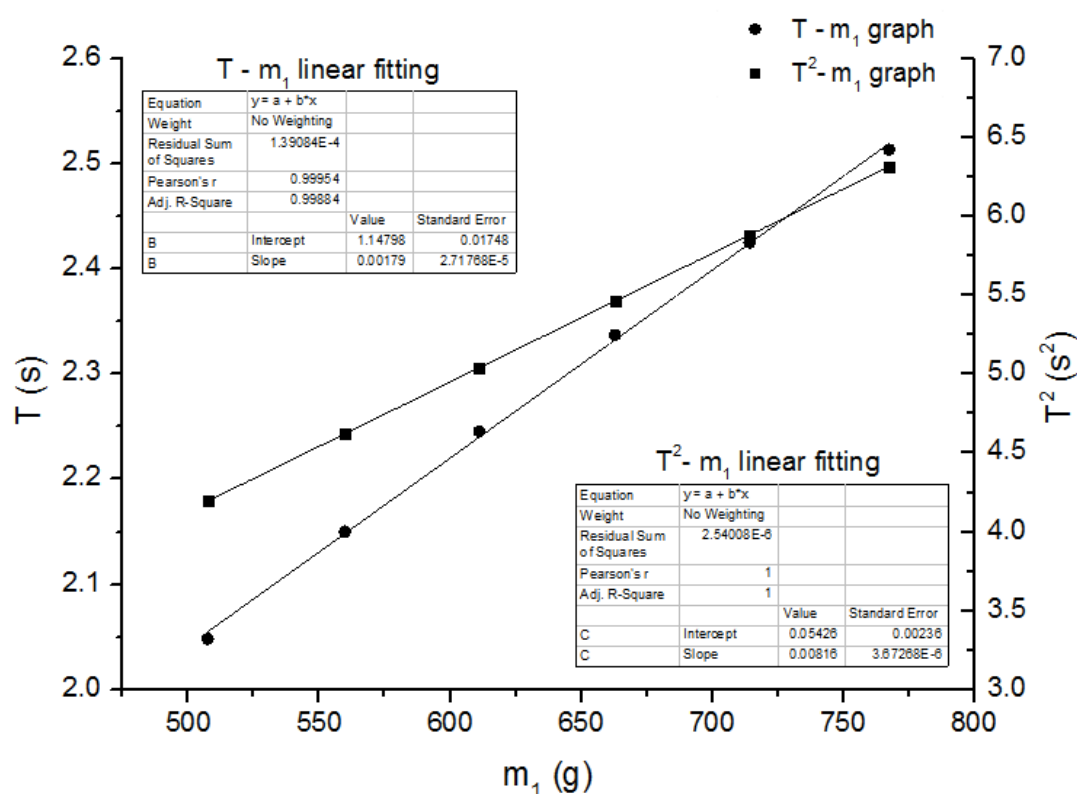


图 2 弹簧振子周期及其平方随滑块质量的变化及拟合直线

这些测定的不确定度来自于  $T^2 - m_1$  图线斜率和截距的不确定度。由线性拟合结果可得：

$$\sigma_{\text{Slope}} = 4 \times 10^{-6} \text{ s}^2 \cdot \text{g}^{-1} = 0.004 \text{ m} \cdot \text{N}^{-1}, \quad \sigma_{\text{Intercept}} = 0.002 \text{ s}^2$$

由此可以计算，弹簧在实验中的有效质量为：

$$m_0 = \frac{0.0543}{0.00816} \text{ g} = 6.654 \text{ g}$$

其不确定度依赖于斜率和截距的不确定度，由不确定度传递公式有：

$$\sigma_{m_0} = 6.654 \text{ g} \cdot \sqrt{\left(\frac{4 \times 10^{-6}}{0.00816}\right)^2 + \left(\frac{0.002}{0.05426}\right)^2} = 0.2 \text{ g}$$

故求得的弹簧有效质量  $m_0 = 6.6 \pm 0.2 \text{ g}$ 。

使用理想的简谐振动情况下的模型，可求出弹簧振子的倔强系数：

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \sqrt{\frac{m_1 + m_0}{k}} \\ \Rightarrow k \frac{d(T^2)}{dm_1} &= 4\pi^2 \\ \Rightarrow k &= 4\pi^2 \frac{d(T^2)}{dm_1} = 4.84 \times 10^3 \text{ g} \cdot \text{s}^{-2} = 4.84 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \end{aligned}$$

该系数是连接滑块的两弹簧自身的劲度系数之和。

由不确定度传递公式，有：

$$\sigma_k = 4\pi^2 \cdot \frac{4 \times 10^{-6}}{0.00816} \cdot 4.84 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} = 0.09 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

故求得的弹簧振子劲度系数  $k = 4.84 \pm 0.09 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ 。

**结论：**弹簧振子的振动周期的平方正比于振子的质量。使用理想的弹簧振子模型，可求得弹簧的有效质量  $m_0 = 6.6 \pm 0.2 \text{ g}$ ，弹簧振子的劲度系数（两弹簧劲度系数之和） $k = 4.84 \pm 0.09 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ 。

### 1.3 振动系统的机械能和位移的关系

这一实验通过研究弹簧振子在不同位移的机械能，探究机械能在合理范围内是否守恒。取定 7 个不同位置，这些位置测量速度的结果如表 4 所示。其中，动能  $E_k$  值、势能  $E_p$  值分别通过  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$  与  $E_p = \frac{1}{2}kx^2$  给出，由实验 1.2 求出的相关量，有振子的质量  $m = m'_0 + m_0 = 462.7 \text{ g}$ ，及劲度系数  $k = 4.84 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ 。

$x \text{ (cm)}$	5.50		11.15		16.10		22.15	
释放方向	R	L	R	L	R	L	R	L
$dt \text{ (s)}$	0.00788	0.00788	0.00817	0.00815	0.00863	0.00857	0.00936	0.00932
$ds \text{ (cm)}$	0.998	0.992	0.998	0.992	0.998	0.992	0.998	0.992
$v \text{ (m} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$	1.266	1.259	1.222	1.217	1.156	1.158	1.066	1.064
$E_k \text{ (J)}$	0.3708	0.3667	0.3455	0.3426	0.3092	0.3102	0.2629	0.2619
$E_p \text{ (J)}$	0.0073	0.0073	0.0301	0.0301	0.0627	0.0627	0.1187	0.1187
$E \text{ (J)}$	0.3781	0.3740	0.3756	0.3727	0.3719	0.3729	0.3816	0.3806

续表 4

$x$ (cm)	26.40		30.85		35.90			
释放方向	R	L	R	L	R	L		
$dt$ (s)	0.01068	0.01070	0.1284	0.1277	0.2123	0.2127		
$ds$ (cm)	0.998	0.992	0.998	0.992	0.998	0.992		
$v$ ( $m \cdot s^{-1}$ )	0.934	0.927	0.777	0.777	0.470	0.466		
$E_k$ (J)	0.2018	0.1988	0.1397	0.1397	0.0511	0.0502		
$E_p$ (J)	0.1687	0.1687	0.2303	0.2303	0.3119	0.3119		
$E$ (J)	0.3705	0.3675	0.3700	0.3700	0.3630	0.3621		

表 4 测量弹簧振子在不同位置处的速度及机械能（振幅  $A = 40.00$  cm，振子质量  $m = 462.7$  g）

由上表数据可以看出，在不同位置处测得的速度近似满足机械能相等。且释放振子时的机械能为：

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2} \cdot 4.84 \cdot 0.4000^2 \text{ J} = 0.3872 \text{ J}$$

考虑到机械能在阻尼作用下可能有一定损失，因而可以近似认定机械能在振动过程中守恒。

**结论：**在不同位移处测量弹簧振子的振动速度，可得出各位移处机械能近似相等的结论，验证了机械能守恒定律。

## 2 实验收获和其它分析

通过本次实验过程，我对预习思考题中实验部分的认识更加清晰了。例如测量振动周期时的计时点必须选在平衡点，是因为不同振幅进行的实验中只有平衡点一处条件相同；在气垫导轨上进行实验时必须将导轨调节水平，否则会有重力的分力做功影响机械能守恒验证实验；实验为了模拟接近简谐振动的条件，在仪器选择上选用和气垫导轨形状适配的滑块，在操作上需要注意气垫导轨调平，并在加骑码时注意尽量使重量分布均匀。

另外，本实验中气垫导轨的米尺部分老化严重，读数不清晰，以及气轨上的滑块在读数时可能会发生微小的运动，对实验的精度产生了较大的随机误差。此外，气轨未精确调平（只是粗调）、光电门位置不够精确、加入骑码时质量分配的不均匀和受空气阻力面的增大，都对实验产生了系统误差。

## 3 致谢

感谢大弢老师的讲解和对实验的指导。