测定金属的杨氏模量 实验报告

蔡丹杨

（北京大学化学与分子工程学院　　1700011774）

1　数据处理

当地 g=9.801N/kg。

（1）CCD 成像系统测定杨氏模量

在正确调节了支架竖直、小圆柱卡紧、光路水平、显微镜工作距离和测微标尺成像清晰后，将 CCD 元件放在目镜处，依次加减砝码，从显示屏图像中读出伸长量如表 1 所示。

i	m/g	r/cm	r'/cm	$\bar{r}$/cm
0	0.00	0.257	0.255	0.2560
1	199.90	0.276	0.276	0.2760
2	399.61	0.290	0.288	0.2890
3	599.67	0.304	0.304	0.3040
4	799.38	0.316	0.314	0.3150
5	998.88	0.328	0.329	0.3285
6	1198.78	0.340	0.339	0.3395
7	1398.77	0.351	0.352	0.3515
8	1598.80	0.363	0.364	0.3635
9	1798.41	0.375	0.375	0.3750

表 1　CCD 成像系统测定杨氏模量位移数据

砝码质量是用百分之一天平（允差$e_m = 0.01\mathrm{g}$）称量的，每个砝码的质量如下表。

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m/g	199.90	199.71	200.06	199.71	199.50	199.90	199.99	200.03	199.61

据此算出$\bar{m} = 199.82\mathrm{g}, \sigma_{\bar{m}} = 0.08\mathrm{g}, \sigma_m = \sqrt{\left(\frac{e_m}{\sqrt{3}}\right)^2 + \sigma_{\bar{m}}^2} = 0.08\mathrm{g}, m \pm \sigma_m = 199.82 \pm 0.08\mathrm{g}$。

用米尺（允差$e_L = 1.5\mathrm{mm}$）单次测量金属丝的有效长度为$L = 101.02 - 24.23 = 76.79\mathrm{cm}$，将允差换算成标准不确定度$\sigma_L = e_L/\sqrt{3} = 0.9\mathrm{mm}$，得到测量结果$L \pm \sigma_L = 76.79 \pm 0.09\mathrm{mm}$。用千分尺（允差$e_d = 0.004\mathrm{mm}$）测量金属丝在 10 个不同位置的直径 d，结果如表 2 所示，算得$\bar{d} = 0.0325\mathrm{cm}, \sigma_{\bar{d}} = 0.0001\mathrm{cm}, \sigma_d = \sqrt{\left(\frac{e_d}{\sqrt{3}}\right)^2 + \sigma_{\bar{d}}^2} = 0.0002\mathrm{cm}, d \pm \sigma_d = 0.0325 \pm 0.0002\mathrm{cm}$。

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d/cm	0.0325	0.0321	0.0323	0.0323	0.0327	0.0325	0.0325	0.0325	0.0327	0.0329

表 2　CCD 成像系统测定杨氏模量直径数据

1.　逐差法处理数据

按照书中要求使用$\delta L = \bar{r}_{i+5} - \bar{r}_i$处理数据，得到$\delta L = \{0.0725, 0.0635, 0.0625, 0.0595, 0.0600\}$，第一组数据与其他四组相差过大，怀疑是应舍去的粗大误差值。用$\delta L = \bar{r}_{i+4} - \bar{r}_i$重新计算的结果如表 3 所示。

i	2	3	4	5
$\delta L = \bar{r}_{i+4} - \bar{r}_i$/cm	0.0505	0.0475	0.0485	0.0465

表 3　逐差法处理位移数据

由于读数允差为$e_{\delta L}=0.003\text{cm}$，故算出$\overline{\delta L}=0.0482\text{cm},\sigma_{\overline{\delta L}}=0.0009\text{cm},\sigma_{\delta L}=\sqrt{\left(\frac{e_{\delta L}}{\sqrt{3}}\right)^2+\sigma_{\overline{\delta L}}^2}=0.002\text{cm}$, $\delta L\pm\sigma_{\delta L}=0.048\pm0.002\text{cm}$。

则$E=\frac{4mgL}{\pi\bar{d}^2\delta L}\approx1.51\times10^{11}\text{Pa},\sigma_E=E\sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2+\left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2+\left(2\frac{\sigma_d}{\bar{d}}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{\delta L}}{\delta L}\right)^2}=1.51\times10^{11}\text{Pa}\times\sqrt{\left(\frac{0.08}{199.82}\right)^2+\left(\frac{0.09}{76.79}\right)^2+\left(2\frac{0.0002}{0.0325}\right)^2+\left(\frac{0.002}{0.048}\right)^2}\approx7\times10^9\text{Pa}$, $E\pm\sigma_E=(1.51\pm0.07)\times10^{11}\text{Pa}$。

2. 最小二乘法处理数据

由于排除了 i=0,1 的点，所以只使用后 8 组数据作图及回归，如下图 1。

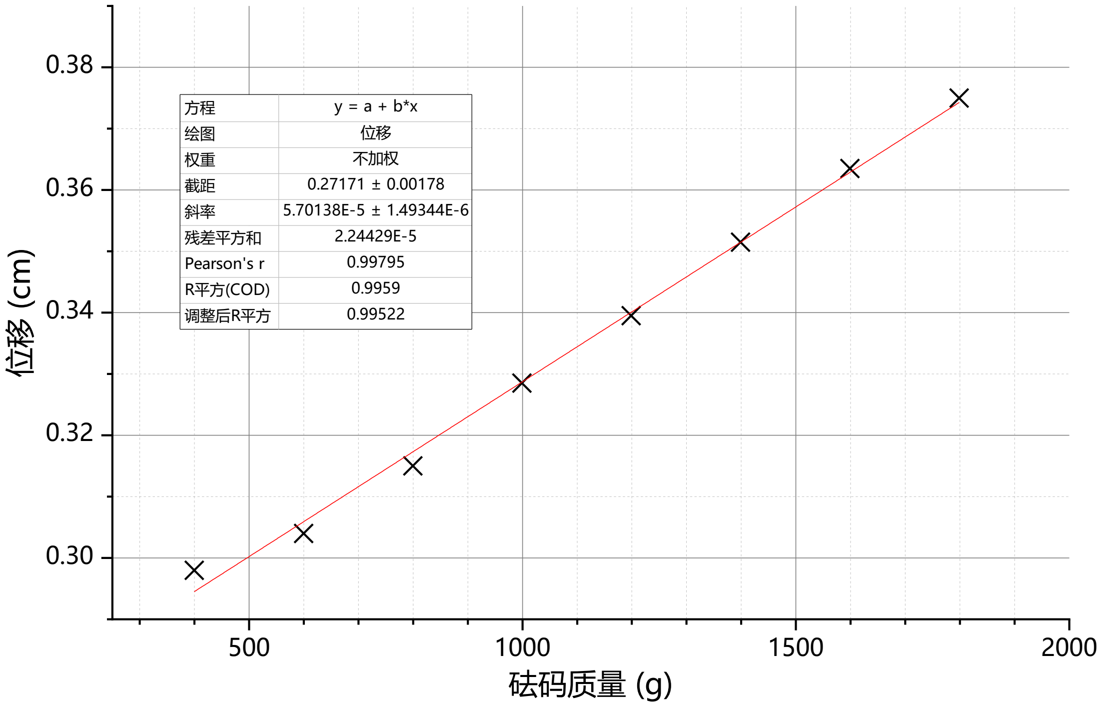
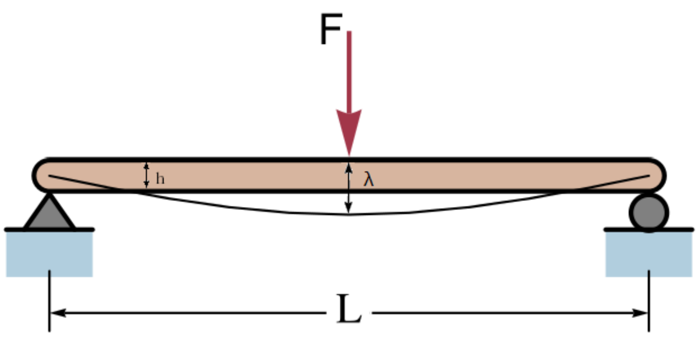


图 1 最小二乘法结果

如图，算得斜率$k\pm\sigma_k=5.70\times10^{-5}\left(1\pm\sqrt{\frac{1/r^2-1}{n-2}}\right)\text{cm/g}=(5.70\pm0.15)\times10^{-5}\text{cm/g}$。而由计算公式得$k=\frac{\delta L}{m}=\frac{4gL}{\pi\bar{d}^2E}$，故$E\pm\sigma_E=\frac{4gL}{k\pi\bar{d}^2}\left(1\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2+\left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2+\left(2\frac{\sigma_d}{\bar{d}}\right)^2}\right)=(1.59\pm0.05)\times10^{11}\text{Pa}$。

（2）梁弯曲法测定杨氏模量



将支柱调至竖直，刀口平行，将梁放到刀口上，用钢尺（允差$e_l=0.15\text{mm}$）单次测量其有效长度$l\pm\sigma_l=33.78\pm0.09\text{cm}$。在不同位置分别用 20 分度游标卡尺（允差$e_a=0.05\text{mm}$）和螺旋测微器（允差$e_h=$

0.004mm）测量梁厚度 h 和宽度 a，结果如表 4 所示。类似（1）中手续可算得$a \pm \sigma_a = 10.31 \pm 0.07\mathrm{mm}$及$h \pm \sigma_h = 1.508 \pm 0.010\mathrm{mm}$。

i	1	2	3	4	5	6
a/mm	10.15	10.20	10.25	10.30	10.40	10.55
h/mm	1.512	1.522	1.514	1.524	1.514	1.462

表 4 梁弯曲法测量杨氏模量尺寸数据

然后，将刀口置于梁中点，依次加减砝码，从读数显微镜中读出位移数据如表 5 所示。

i	m/g	r/cm	r'/cm	$\bar{r}$/cm
0	0.00	4.0525	4.0510	4.05175
1	199.90	3.9618	3.9598	3.96080
2	399.61	3.8704	3.8699	3.87015
3	599.67	3.7812	3.7817	3.78145
4	799.38	3.6938	3.6908	3.69230
5	998.88	3.6048	3.6036	3.60420
6	1198.78	3.5123	3.5192	3.51575

表 5 梁弯曲法测量杨氏模量位移数据

在坐标纸上画出相应的数据点**（见附纸）**，得到斜率为$k \pm \sigma_k = (-4.42 \pm 0.04) \times 10^{-4}\mathrm{cm/g}$。再由计算公式$E = \frac{mgl^3}{4\lambda ah^3} = \frac{gl^3}{4|k|ah^3}$，得结果为$E \pm \sigma_E = \frac{gl^3}{4|k|ah^3}\left(1 \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2 + \left(3\frac{\sigma_l}{l}\right)^2 + \left(3\frac{\sigma_h}{h}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2}\right) = (5.95 \pm 0.15) \times 10^{11}\mathrm{Pa}$。

2 分析与讨论

（1）测量误差来源及不确定度计算

1. CCD 成像系统测定杨氏模量

比较各项直接测量值与不确定度的大小，可知本实验中最大的相对不确定度来源是δL的测量，相对而言其他测量不确定度对最终结果的不确定度的贡献较小。为了减小这一误差，本次实验分别使用逐差法和最小二乘法来处理数据。逐差法相对简单，但误差相对最小二乘法要大些；最小二乘法较复杂，但由于其数学性质，算得的 k 不确定度较小，结果的不确定度也较小。

实验中观察到前一两次放置砝码时，r 的变化量大于后续的正常变化量，检查发现金属丝上有多处弯折。推测是由于前两次放置砝码时将不受力时金属丝中弯曲的部分抻直了，造成金属丝除符合胡克定律的伸长外还有附加的伸长，r 偏大。如果将这样的数据加入处理数据中会造成粗大误差，因此要舍弃。至于 r 比正常值偏小的可能情况，推测是由于夹具与小圆柱之间存在一定静摩擦，使得一开始拉力不够大时被部分抵消，r 偏小。

两种测量结果在包括不确定度范围后能部分重合，说明数据处理较为成功。

2. 梁弯曲法

此法测得的结果数量级与前者相同，但数值明显偏大，且与参考值有显著偏差。观察不确定度合成的表达式，知 h 和 k 的不确定度对结果不确定度的贡献最大。观察实验数据，发现此次使用的梁不均匀性较为明显，特别是 h 随测量地点不同变化很大。推测造成偏差的原因既包括选取刀口位置时未在中点造成的系统误差，也有梁不够均匀时计算公式不再适用的系统误差，还有读取转轮时的随机误差螺距差。

实验中还观察到，放上最后两个砝码时，梁形变已经十分明显，且取下所有砝码后不能完全恢复，推测这也是造成实验误差的原因。

（2）其他

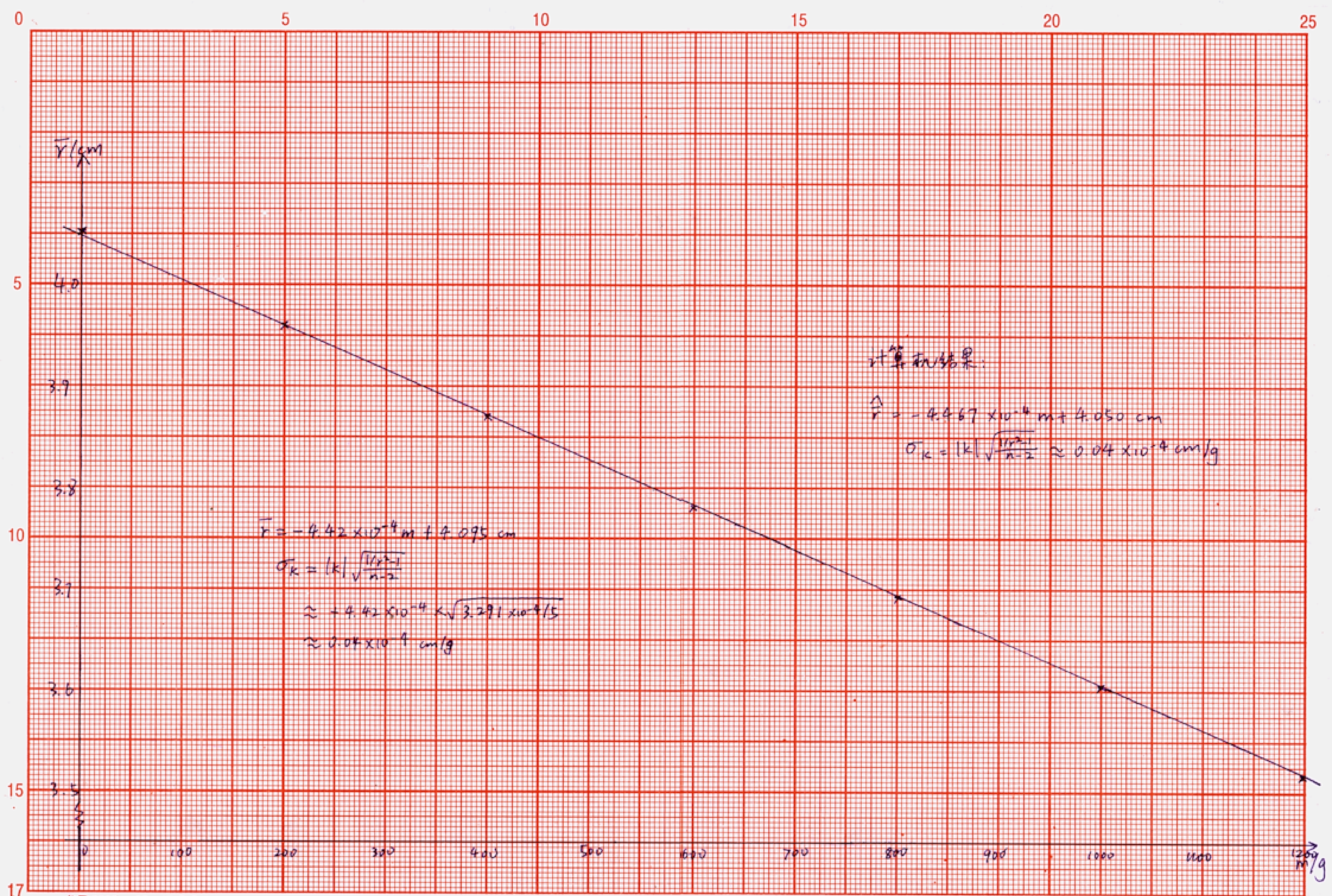
本次实验中，计算数据和步骤都较多，为了减少舍入误差，选择在记录中间结果时多保留一位有效数字。

本来由于δL只有两位数字，乘除运算后得到的 E 也应该只有两位有效数字，但由于不确定度在下一位数字上，为了避免扩大不确定度，只有把 E 多算一位有效数字，以与不确定度匹配；此外，在不确定度首位为 1 的情况，为了减小相对误差，也多保留了一位不确定度。

3 收获与感想

通过本次实验，我掌握了测量杨氏模量的几种方法的原理和操作，熟悉了长度测量的几种工具，进一步理解了实验误差和不确定度的种类和计算公式，为以后的实验打下了基础。

感谢刘春玲老师对实验过程和理论知识的指导，以及孙思原同学对操作仪器的帮助。



$\bar{r} = -4.42 \times 10^{-4}\, m + 4.095$ cm

$\sigma_k = |k| \sqrt{\frac{1/r^2 - 1}{n-2}}$

$\approx + 4.42 \times 10^{-4} \times \sqrt{3.291 \times 10^{-4} / 5}$

$\approx 0.04 \times 10^{-4}$ cm/g

计算机结果：

$\hat{r} = -4.467 \times 10^{-4}\, m + 4.050$ cm

$\sigma_k = |k| \sqrt{\frac{1/r^2 - 1}{n-2}} \approx 0.04 \times 10^{-4}$ cm/g