

RLC 电路的谐振现象

张欣睿^{*}

北京大学化学与分子工程学院 学号：1600011783

摘 要：本次实验对 *RLC* 串联电路的相频、幅频特性进行了测量与考察。通过控制总电压一定，调控正弦信号频率，观察到了显著的谐振现象，并获得在不同频率下电路的相位、振幅，从而得到电路的相频、幅频特性曲线；通过三种方法求得了谐振系统的品质因数 Q 值。

关键词：*RLC* 电路；相频特性；幅频特性；品质因数

^{*} e-mail: zhangxinrui16@pku.edu.cn; mobile number: 18801391162

1 数据处理

1.1 谐振状态下的测量与第一、第二种 Q 值的计算

本次实验首先对连接好的 RLC 串联电路（CH1 为电压信号，CH2 连接在电阻元件两端，作为电流信号的依据）进行电谐振调节。通过李萨如图形法，调节信号发生器的频率，使示波器中用 CH1 信号触发的 CH2 通道信号在 X-Y 显示模式下的李萨如图形从椭圆逐渐变成直线，表明此时电压与电流的相位差为 0。读出信号发生器的峰峰电压 u_{pp} ，分别测定各元件输出端电压，结果如表 1 所示。

发生器 u_{pp}	信号频率 f	总电压 u	电感电压 u_L	电容电压 u_C	电阻电压 u_R
4.294 V	2.260 kHz	1.0007 V	10.556 V	10.506 V	748.38 mV

表 1 谐振情况下电路中电压的测定

在此测定基础上，可以计算这一谐振系统的前两种 Q 值。

第一种意义上， Q 值代表电路的储耗能特性。电路中的电流

$$i = \frac{u_R}{R} = \frac{748.38 \text{ mV}}{100.0 \text{ } \Omega} = 7.4838 \text{ mA}$$

交流电的周期

$$T = \frac{1}{f} = 4.425 \times 10^{-4} \text{ s}$$

故 LC 元件的总储能

$$E = E_L + E_C = \frac{1}{2} (L \cdot i^2 + C \cdot u_C^2) = 5.6 \times 10^{-6} \text{ J}$$

每周期内电路耗能

$$\Delta E = i^2 RT = 2.478 \times 10^{-6} \text{ J}$$

故品质因数

$$Q_1 = 2\pi \frac{E}{\Delta E} = 14$$

由于电感值 0.1 H 仅有一位有效数字，但储能为中间计算量，品质因数的第一位为“1”，故在储能和品质因数中都保留了两位有效数字。

第二种意义上， Q 值的大小代表了电压的分配特性。取电感电压 u_L 计算，则

$$Q_2 = \frac{u_L}{u} = \frac{10.556 \text{ V}}{1.007 \text{ V}} = 10.48$$

结论: 在 RLC 串联电路达到电谐振情况下, 可通过测量各部分电压和信号频率求出前两种意义上的 Q 值。计算结果给出的 $Q_1 = 14$, $Q_2 = 10.48$ 。

1.2 RLC 串联电路的相频特性

实验按相位差取点, 使用读出示波器的光标尺对不同频率下的电压电流相位差进行了测量, 结果如表 2 所示。

$f(\text{kHz})$	1.755	1.890	1.965	2.048	2.090	2.126	2.154	2.178
$\Delta t(\mu\text{s})$	-128.0	-112.0	-103.0	-90.5	-78.5	-69.0	-59.0	-48.5
$\Delta\varphi(^{\circ})$	-80.87	-76.20	-72.86	-66.72	-59.06	-52.81	-45.75	-38.03
$f(\text{kHz})$	2.200	2.215	2.228	2.260	2.290	2.303	2.325	2.342
$\Delta t(\mu\text{s})$	-37.5	-28.5	-20.5	0	20.0	27.5	38.0	46.0
$\Delta\varphi(^{\circ})$	-29.70	-22.73	-16.44	0	16.49	22.80	31.81	38.78
$f(\text{kHz})$	2.362	2.398	2.436	2.507	2.590	2.624	2.755	
$\Delta t(\mu\text{s})$	52.0	61.5	69.0	74.5	78.5	80.0	80.5	
$\Delta\varphi(^{\circ})$	44.21	53.09	60.51	67.24	73.19	75.57	79.84	

表 2 RLC 串联电路的相频特性测量

根据测量结果, 以频率 f 为自变量、相位差 φ 为因变量, 可使用软件 Origin[®] 作出这一串联电路的相频特性曲线, 如图 1 所示。

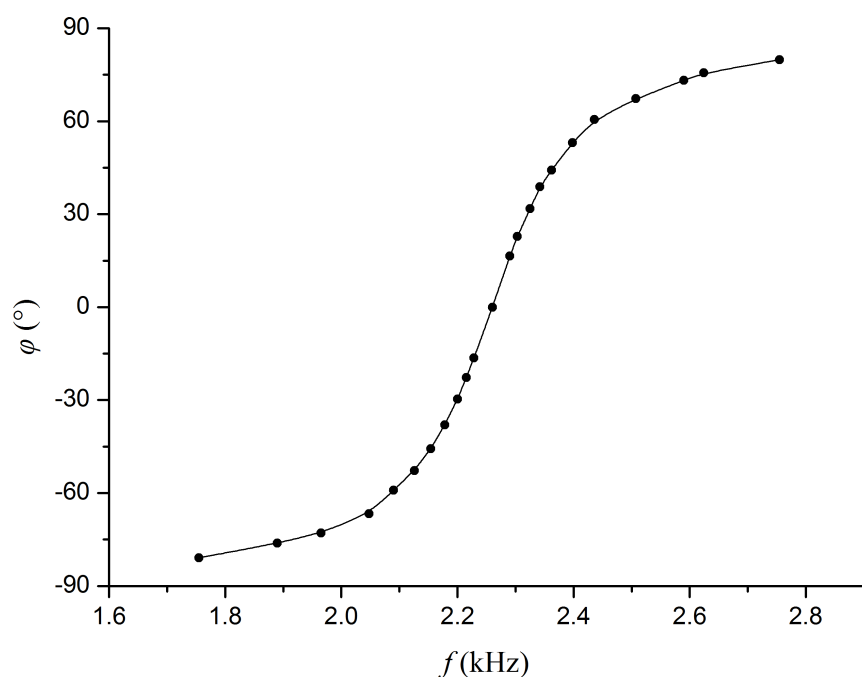


图 1 RLC 串联电路的相频特性曲线

结论：通过读出示波器测量不同频率下电压、电流相位差，可以作出 RLC 串联电路的相频特性曲线。曲线的 φ 范围在 -90° 到 90° 之间，随频率 f 的递增而递增，且在达到谐振时 φ 的变化最快。

1.3 RLC 串联电路的幅频特性

对实验 1.2 中取到的点，均控制其总电压 $u = 1.000\text{ V}$ ，测量电阻两端的电压，可对 RLC 电路的幅频特性进行测量，测量结果如表 3 所示。

$f(\text{kHz})$	1.755	1.890	1.965	2.048	2.090	2.126	2.154	2.178
$u_R(\text{mV})$	135.77	189.99	238.61	323.65	387.74	459.23	527.15	592.60
$i(\text{mA})$	1.3577	1.8999	2.3861	3.2365	3.8774	4.5923	5.2715	5.9260
$f(\text{kHz})$	2.200	2.215	2.228	2.260	2.290	2.303	2.325	2.342
$u_R(\text{mV})$	653.88	691.88	719.17	748.13	716.75	689.87	635.19	590.62
$i(\text{mA})$	6.5388	6.9188	7.1917	7.4813	7.1675	6.8987	6.3519	5.9062
$f(\text{kHz})$	2.362	2.398	2.436	2.507	2.590	2.624	2.755	
$u_R(\text{mV})$	539.82	460.10	393.29	305.76	241.48	222.35	170.82	
$i(\text{mA})$	5.3982	4.6010	3.9329	3.0576	2.4148	2.2235	1.7082	

表 3 RLC 串联电路的幅频特性测量

同理，以频率 f 为自变量，电流 i 为因变量，作出电路的幅频特性曲线，如图 2 所示。

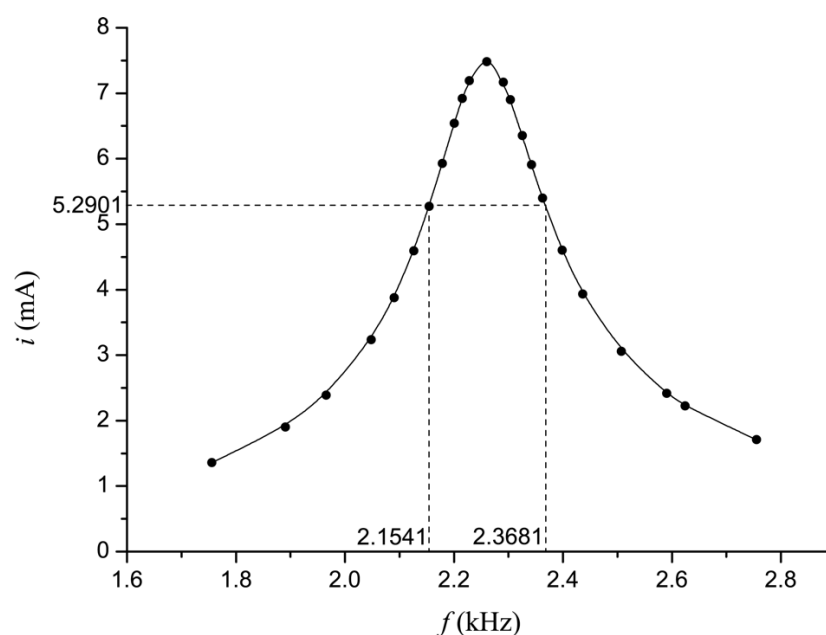


图 2 RLC 串联电路的幅频特性曲线

幅频特性曲线先上升，后下降，在谐振频率 2.260 kHz 处达到其极大值。

在总电压控制为 1.000 V 的谐振点，振幅达到最大，此时电流的极大值 $i_m = 7.4813 \text{ mA}$ 。根据通频带宽度的定义：

$$i' = \frac{i_m}{\sqrt{2}} = 5.2901 \text{ mA}$$

如图所示，使用软件 Origin® 在图中读出 $i' = 5.2901 \text{ mA}$ 的点的横坐标，为 $f_1 = 2.1541 \text{ kHz}$ 和 $f_2 = 2.3681 \text{ kHz}$ ，则这一电路的带宽为 $\Delta f = f_2 - f_1 = 0.2140 \text{ kHz}$ 。因而根据品质因数的第三种物理意义，可以求得第三种 Q 值：

$$Q_3 = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{2.260 \text{ kHz}}{0.2140 \text{ kHz}} = 10.56$$

结论：通过电压表控制总电压 $u = 1.000 \text{ V}$ ，并测定不同频率下电阻两端电压以求得电流，可以作出电路的幅频特性曲线。曲线先上升，后下降，在谐振频率时达到极大值。通过曲线可以求得通频带宽为 0.2140 kHz ，并可以求得第三种意义上的 Q 值 $Q_3 = 10.56$ 。

2 思考题

(1) 若把图 17-1 中的 R 改为 500Ω ，而其它条件不变时，电路的谐振特性会有什么变化（用计算数据予以说明）？

答：

i. 谐振频率：由

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

可知： R 值的变化不改变系统的谐振频率。

ii. 相频特性：由

$$\varphi = \arctan \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$$

可知，将 R 由 100Ω 改为 500Ω ，所有频率对应的相位差的绝对值将减小，（正切值都减少为原来的 $1/5$ ）相频特性曲线在谐振频率处斜率变小，在稳定区域斜率变大，使得总体上曲线更加“平缓”。以 $L = 0.1 \text{ H}$ 、 $C = 0.05 \mu\text{F}$ 为例，理想的相频曲线如图 3 所示。

iii. 幅频特性：由

$$i = \frac{u}{|Z|} = \frac{u}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

可知，将 R 增大至 5 倍后，所有频率对应的电流的有效值将减小，谐振的程度将明显下降，电路的电阻性增强。同理，以 $L=0.1\text{ H}$ 、 $C=0.05\text{ }\mu\text{F}$ 为例，理想的幅频曲线如图 4 所示。

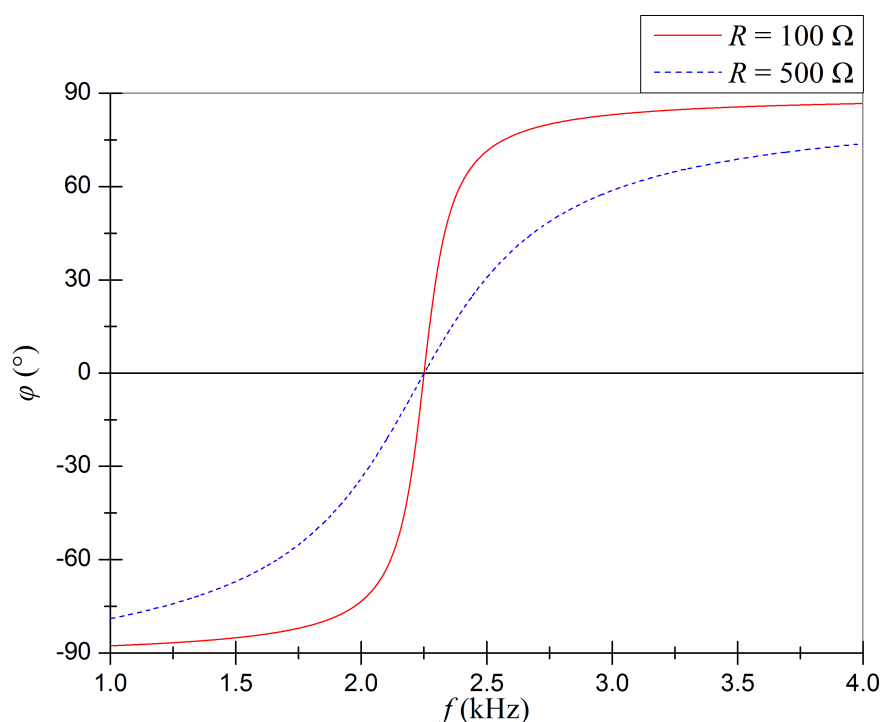


图 3 两种阻值下理想的相频曲线 ($L=0.1\text{ H}$ 、 $C=0.05\text{ }\mu\text{F}$)

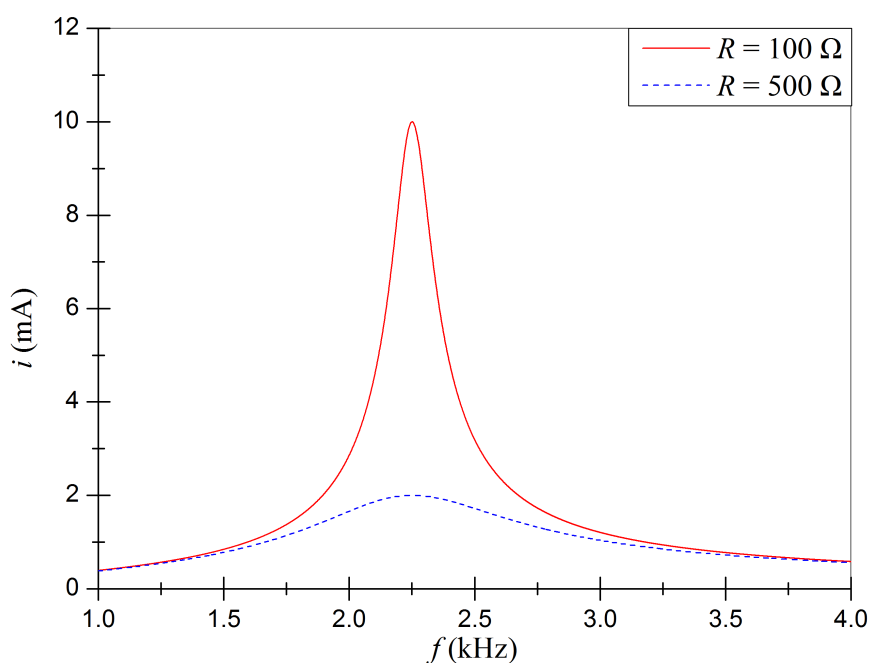


图 4 两种阻值下理想的幅频曲线 ($L=0.1\text{ H}$ 、 $C=0.05\text{ }\mu\text{F}$)

(2) Q 表是常用的一种测量电抗元件 Q 值的仪器。图 5 为其原理图。待测样品为磁环上绕制的电感线圈，它等效于一个纯电感 L 和损耗电阻 R_r ， C 为近乎无

损耗的空气介质电容器, f 为高频信号源, V 、 V_C 为毫伏表。

- ① 说明测量原理;
- ② 写出测量步骤;
- ③ 若在测某样品时, $C = 330 \text{ pF}$, $f_0 = 600 \text{ kHz}$, $u = 10 \text{ mV}$, $u_C = 1.00 \text{ V}$, 试求 L 、 R_r 、 Q 值。

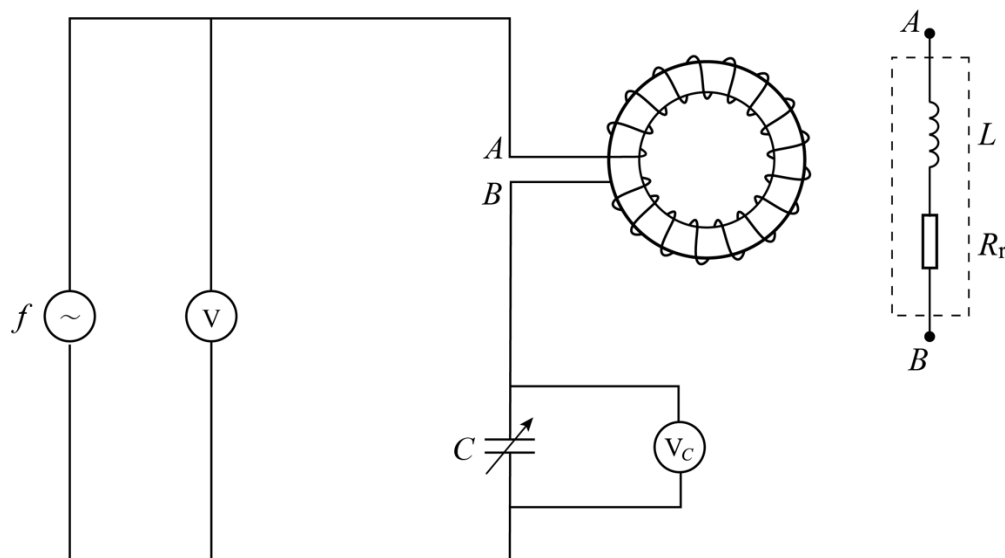


图 5 Q 表原理图

答:

① 测量原理: 这个电路能等效于一个 RLC 串联电路。由 Q 值物理意义中的电压分配特性 (第二种 Q 值), 有:

$$Q = \frac{u_C}{u}$$

当电路达到谐振状态时, 只需通过毫伏表读出电容两端电压 u_C 和总电压 u , 两者之商即为这一谐振系统的 Q 值。

② 测量步骤:

i. 调谐振, 将系统路端接入读出示波器, 使用 $X - Y$ 显示模式, 通过调节输出信号频率 f 或者电容 C 的大小, 使李萨如图形由椭圆形变为直线;

ii. 测定总电压 u 值和电容两端电压 u_C 值;

iii. 计算出系统的 Q 值。

③ 在谐振状态下:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C} = \frac{1}{4\pi^2 \cdot (600 \times 10^3)^2 \cdot 330 \times 10^{-12}} \text{ H} = 2.13 \times 10^{-4} \text{ H}$$

$$Q = \frac{u_C}{u} = \frac{1.00 \text{ V}}{10 \times 10^{-3} \text{ V}} = 100$$

$$\text{并且由于 } Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{2\pi f_0 L}{R}$$

$$\Rightarrow R_r = \frac{1}{2\pi Q f_0 C} = \frac{1}{2\pi \cdot 100 \cdot 600 \times 10^3 \cdot 330 \times 10^{-12}} \Omega = 8.04 \Omega$$

故有： $L = 2.13 \times 10^{-4} \text{ H}$ 、 $R_r = 8.04 \Omega$ 、 $Q = 100$ 。

3 分析与讨论

本次实验测得了 RLC 串联电路的相频、幅频曲线。相频曲线被控制在相位为 -90° 到 90° 之间，且随频率而递增；幅频曲线在 f_0 达到极大值，频率小于 f_0 时递增、大于 f_0 时递减。在理解上，可以结合这些元件的电磁学性质进行理解。

在相频特性上，电感元件的阻抗为 $\omega_0 L$ ，正比于信号频率，其对相位的贡献为 90° ；电容元件的阻抗为 $1/\omega_0 C$ ，反比于信号频率，其对相位的贡献为 -90° 。因而，随着信号频率的增加，电路的电容性逐渐减弱，电感性逐渐增强，自然相位也就逐渐递增；由于电路的电容性、电感性都不能超出纯电容、纯电感，因而相位也被限定在 -90° 到 90° 之间。

在幅频特性上，电路的总阻抗由正比于频率的电感阻抗 $\omega_0 L$ 和反比于频率的电容阻抗 $1/\omega_0 C$ 及电阻的阻抗 R 共同构成。因而当频率较小，电路体现电容性时，随着频率的增加，电路的总阻抗逐渐减小， i 的幅值逐渐增大；当频率较大，电路体现电感性时，随频率的增加总阻抗也逐渐增加， i 的幅值也就逐渐减小；在谐振频率时体现电阻性，阻抗最小， i 的幅值最大，就构成了一幅完整的幅频特性曲线。

实验使用三种物理意义测得了电路的 Q 值，分别为 $Q_1 = 14$ 、 $Q_2 = 10.48$ 、 $Q_3 = 10.56$ 。其中， Q_1 采用能量进行计算，由于涉及仅有一位有效数字的电感值，测定结果偏离较多，而 Q_2 、 Q_3 较为精确和接近，故通过电压分配或电路带宽测量 Q 值的方法要优于通过储耗能特性测定 Q 值的方法。

4 致谢

感谢马平老师对实验的指导。