测量误差和数据处理

张欣睿*

北京大学化学与分子工程学院　学号：1600011783

摘　要：本次实验对测量误差表示方式进行了讲解，并对给定钢杯和小钢球的参数和体积进行了测量，在实验中运用了误差分析理论，并通过习题加以复习，使我充分理解了误差分析和数据处理方法。

关键词：测量误差；数据处理；游标卡尺；螺旋测微器

* e-mail: zhangxinrui16@pku.edu.cn; mobile number: 18801391162

1 引言

物理实验离不开测量，测量离不开测量误差。测量误差是指测量某一物理量时测量值和真值之差，根据习惯的分类方法，可以分为系统误差和随机误差，系统误差可以在测量结果中进行扣除，而随机误差可以在测量后用统计规律进行结果分析。学习如何处理误差，对于物理实验的实验结果十分重要。本次实验通过讲解结合实验的方法，讲授了误差分析和数据处理的方法，为之后的实验打下了基础。

2 数据处理

在实验部分中，进行了“测量钢杯含钢体积”和“测量小钢球的直径与体积”两个实验。对钢杯的测量结果如表 1 所示。

测量项目	外径 D / cm	内径 d / cm	高度 H / cm	深度 h / cm
零点读数	$D_0 = 0.000$	$d_0 = 0.002$	$H_0 = 0.000$	$h_0 = 0.002$
1	2.810	1.998	4.520	3.226
2	2.810	1.990	4.514	3.214
3	2.808	1.996	4.508	3.206
4	2.810	1.994	4.508	3.210
5	2.806	1.990	4.512	3.212
6	2.812	1.996	4.508	3.214
平均值	2.809	1.994	4.512	3.214
平均值的标准差	0.001	0.001	0.002	0.003
考虑仪器允差后的标准差	0.002	0.002	0.002	0.003
修正零点后的平均值	2.809	1.992	4.512	3.212

表 1 钢杯含钢体积测量结果

根据表中数据可得出测量结果：

$\overline{D} \pm \sigma_D = (2.809 \pm 0.002)$ cm　　$\overline{d} \pm \sigma_d = (1.992 \pm 0.002)$ cm

$\overline{H} \pm \sigma_H = (4.512 \pm 0.002)$ cm　　$\overline{h} \pm \sigma_h = (3.212 \pm 0.003)$ cm

计算结果：

$$V = \frac{\pi}{4}\left(\overline{D}^2\overline{H} - \overline{d}^2\overline{h}\right) = 17.95 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial D}\sigma_D\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial H}\sigma_H\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial d}\sigma_d\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h}\sigma_h\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\overline{D}\overline{H}\sigma_D\right)^2 + \left(\frac{\pi}{4}\overline{D}^2\sigma_H\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2}\overline{d}\overline{h}\sigma_d\right)^2 + \left(\frac{\pi}{4}\overline{d}^2\sigma_h\right)^2} = 0.05\ \mathrm{cm}^3$$

故有 $V \pm \sigma_V = (17.95 \pm 0.05)\ \mathrm{cm}^3$。

对小钢球直径及体积的测量结果如表 2 所示。

测量次数	零点读数	1	2	3	4	5	6
d / cm	−0.0003	1.2706	1.2702	1.2708	1.2710	1.2709	1.2706
项目	平均值	平均值的标准差		考虑仪器允差后的标准差		修正零点后的平均值	
值 / cm	1.2707	0.0004		0.0004		1.2710	

表 2 小钢球直径测量结果

根据表中数据可以得出测量结果：

$\overline{d} \pm \sigma_d = (1.2707 \pm 0.0004)\ \mathrm{cm}$

故有体积计算结果：

$V = \frac{1}{6}\pi\overline{d}^3 = 1.0751\ \mathrm{cm}^3$ $\sigma_V = \frac{\partial V}{\partial d}\sigma_d = \frac{\pi}{2}\overline{d}^2\sigma_d = 0.001\ \mathrm{cm}^3$

故有 $V \pm \sigma_V = (1.075 \pm 0.001)\ \mathrm{cm}^3$。

3 习题

习题部分见后附页。

4 分析与讨论

在测量钢杯体积的实验中，D、d、H、h 的标准偏差值相差不多。故在误差传递公式中，各个值的误差对总体标准差的主要贡献依赖于误差传递系数（体积对各个量的偏微分的绝对值）。在各个传递系数中，最大的为$\frac{\partial V}{\partial D} = \frac{\pi}{2}\overline{D}\,\overline{H}$，因而外径 D 的测量比较重要。根据本次实验数据，σ^2_V 中各部分占比如表 3 所示。

长度量 x	D	d	H	h
误差传递系数 $\left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\|$ / cm^2	19.91	10.05	6.197	3.116
部分方差对 σ^2_V 的贡献$(\frac{\partial V}{\partial x}\sigma_x)^2$ / cm^6	1.6×10^{-3}	4.0×10^{-4}	1.5×10^{-4}	2.8×10^{-5}
贡献占 σ^2_V 百分比（保留两位）	73 %	18 %	6.9 %	1.3 %

表 3 测量钢杯实验中各量对体积方差的贡献情况

由表中分析可知，对 V 的标准差起决定性作用的量即为外径 D。在外径 D 的测量中，存在以下几种误差：

- 读数误差
- 使用游标卡尺卡外径时，较大的弹力可能引起杯的微小形变
- 游标卡尺和桌面不平行，导致测量结果可能大于实际半径

经过分析，读数误差不超过允差 0.002 cm，而钢制材料的弹性形变程度较小。实际测定数据中的偏差结果，较以上两者的总和更大，因而其中游标卡尺倾斜造成测量结果偏大的误差应该是误差的主要来源。

在其余量的测定中，也存在一些测量的误差，其中系统误差里，可估计的如游标卡尺的零点误差，不可估计的如在使用温度下，游标卡尺的热胀冷缩。而随机误差较多，如：

- 钢杯本身并非理想几何体，且较旧，各处物理量的真值本身可能不同
- 内径的测量中，内径卡尺的松紧程度和倾斜程度不同
  （实际测定时，发现卡尺测内径时，弹性形变程度比测外径时大许多）
- 高度的测量中，游标卡尺不平行于圆柱母线
- 深度的测量中，深度尺不能垂直于底面，且不能紧贴杯壁，或有所倾斜

这些误差中，系统误差的零点误差可以在测量中扣除；钢制材料的线膨胀系数很小，可以忽略膨胀。分析随机误差得出，由于卡尺不能垂直（平行）于待测物体的参考直线（平面）引起的误差较大，对测量结果有方和根的加和关系；真值的不理想性无法进行估计，形变程度的不同可以多次测量，取平均值适当处理。

而在测量小钢球直径和体积的实验中，体积仅仅是单一变量 d 的函数，所以误差也只来源于 d 的测量。对这一物理量，测量的随机误差有：

- 小球不是理想的球体，各处直径可能不同
- 每次拧动棘轮转过的角度不同（夹紧程度不同）
- 每次测量小球和千分尺的温度都不同，可能有所膨胀

系统误差即为螺旋测微器的零点误差，在测量结果中可以扣除。在随机误差中，棘轮转过的角度不同可能是误差的主要原因。

5 收获与感想

本次实验通过讲解和实验结合的方式使我明白了测量误差的表示、不确定度的概念和表示、以及它们在具体数据处理方法中的应用；同时，我熟悉了长度精确测量仪器的使用，为后续实验在数据处理上打下基础。

6 致谢

感谢杨老师的讲解和李老师对实验的指导。