测量误差和数据处理 实验报告

蔡丹杨
（北京大学化学与分子工程学院 1700011774）

1 数据处理

测量误差的原理讲解部分略，随后进行了“测量铜杯含铜体积”和“测量小钢球的直径与体积”两个实验。

“测量铜杯含铜体积”实验结果如**附表 1（见附录）**所示。根据表中数据算得的测量结果为$\begin{matrix} \bar{D} \pm \sigma_D = (2.8037 \pm 0.0013)\text{cm} & \bar{d} \pm \sigma_d = (2.0073 \pm 0.0018)\text{cm} \\ \bar{H} \pm \sigma_H = (4.4660 \pm 0.0013)\text{cm} & \bar{h} \pm \sigma_h = (4.2487 \pm 0.0018)\text{cm} \end{matrix}$，从而可以计算出体积的测量值：

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{\pi}{4}\left(\bar{D}^2\bar{H} - \bar{d}^2\bar{h}\right) = 14.1242\text{cm}^3 \\
\sigma_V &= \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial D}\sigma_D\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial H}\sigma_H\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial d}\sigma_d\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h}\sigma_h\right)^2} \\
&= \frac{\pi}{4}\sqrt{(2\bar{D}\bar{H}\sigma_D)^2 + (\bar{D}^2\sigma_H)^2 + \left(2\bar{d}\bar{h}\sigma_d\right)^2 + \left(\bar{d}^2\sigma_h\right)^2} \\
&= 0.0365\text{cm}^3 \\
V \pm \sigma_V &= (14.12 \pm 0.04)\text{cm}^3
\end{aligned}
$$

“测量小钢球的直径与体积”实验结果如**附表 2（见附录）**所示。根据表中数据算得的测量结果为$\bar{d} \pm \sigma_d = (1.26928 \pm 0.00012)\text{cm}$，从而可以计算出体积的测量值：

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{\pi}{6}d^3 = 1.0707\text{cm}^3 \\
\sigma_V &= \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial d}\sigma_d\right)^2} \\
&= \frac{\pi}{6}\sqrt{\left(3\bar{d}^2\sigma_d\right)^2} \\
&= 0.0003\text{cm}^3 \\
V \pm \sigma_V &= (1.0707 \pm 0.0003)\text{cm}^3
\end{aligned}
$$

2 习题

习题部分见附录。

3 分析与讨论

（1）测量铜杯含铜体积实验

在测量铜杯体积的实验中，D、d、H、h 的标准偏差值相差不太大，故在误差传递公式中，各个值的误差对总体标准差的主要贡献依赖于误差传递系数（体积对各个量的偏微分的绝对值）。计算可得传递系数中最大的一项是$\frac{\partial V}{\partial D} = \frac{\pi}{2}\bar{D}\bar{H}$，因此外径和高度的准确测量比较重要（具体数据见下表）。

表　测量铜杯实验中各个量对体积方差的贡献

长度量x	D	d	H	h
误差传递系数$\left\lvert\frac{\partial V}{\partial x}\right\rvert$ /cm^2	19.67	13.40	6.174	3.165
部分方差$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\sigma_x\right)^2$/cm^6	6.537×10^{-4}	5.814×10^{-4}	6.442×10^{-5}	3.245×10^{-5}
部分方差占σ_V^2比例	0.491	0.437	0.048	0.024

由表中分析可知，对V的标准差起决定性作用的量为外径D。在外径D的测量中存在以下几种误差：

- 测量者的读数误差
- 使用游标卡尺时卡尺夹钳与杯表面不平行造成误差
- 使用卡尺卡住杯外径时用力过大造成金属形变误差

分析可知，读数误差不会超过允差 0.002cm，而金属在实验条件下的形变可以忽略，因此最大的误差来源应是游标卡尺倾斜造成的误差，且结果总是使得读数偏大，因而属于系统误差。

其他误差中，游标卡尺的零点误差属于可估计的系统误差，并进行了扣除；卡尺热胀冷缩和刻度不均匀造成的误差属于不可估计的系统误差，但在允差范围内；内径和深度测量中卡尺形变和不平行内壁造成的误差属于随机误差，且难以估计其不理想性；铜杯本身几何尺寸的不均匀性造成的误差属于随机误差，但可通过多次测量减小方差。

（2）测量小钢球的直径与体积实验

在测量小钢球的直径与体积实验中，体积仅是单一变量d的函数，所以d的测量误差直接且完全决定了体积测量的误差。测量误差包括：

- 小球和测量砧的几何尺寸不均匀，造成不同部位接触测得d不同的误差
- 每次夹紧时夹紧程度不同造成的误差
- 千分尺刻度不均匀性的误差

其中，千分尺刻度的零点误差属于可估计的系统误差，并进行了扣除；千分尺热胀冷缩的误差属于不可估计的系统误差；每次夹紧程度和被夹处小球直径不同造成的误差属于随机误差，可以通过多次测量减少方差。实验中观察到，在夹紧后仍有±0.001cm 的棘轮转动范围，故推测棘轮转过的角度不同可能是误差的主要原因。

4　收获与感想

本次实验通过讲解和实验结合的方式使我明白了测量误差的表示、不确定度的概念和表示及它们在具体数据处理方法中的应用；同时，我熟悉了长度精确测量仪器的使用，并为后续实验的数据处理打下了基础。

感谢老师对实验原理的讲解和答疑。

附录

测量数据

测量项目	外径D/cm	内径d/cm	外高H/cm	内深h/cm
零点读数	0.000	0.000	0.000	0.002
1	2.802	2.002	4.468	4.248
2	2.804	2.010	4.466	4.254
3	2.804	2.008	4.466	4.250
4	2.802	2.006	4.466	4.252
5	2.804	2.012	4.464	4.254
6	2.806	2.006	4.466	4.246
平均值	2.8037	2.0073	4.4660	4.2507
平均值的标准差	0.0006	0.0014	0.0005	0.0013
考虑仪器允差后的标准差	0.0013	0.0018	0.0013	0.0018
修正零点后的平均值	2.8037	2.0073	4.4660	4.2487

附表 1 铜杯含铜体积测量结果

测量项目	零点读数	1	2	3	4	5	6	平均值	平均值的标准差	考虑仪器允差后的标准差	修正零点后的平均值
直径d/cm	0.0015	1.2708	1.2708	1.2707	1.2709	1.2706	1.2709	1.27078	0.00005	0.00012	1.26928

附表 2 小钢球直径测量结果

习题解答

1.（1）1 位有效数字（2）4 位有效数字（3）2 位有效数字（4）6 位有效数字

2.

（1）$c=\frac{ab}{b-a}=\frac{999.9\times9.9}{999.9-9.9}\text{cm}=\frac{999.9\times9.9}{990.0}\text{cm}=10\text{cm}$（因为 a 只有两位有效数字）

（2）$y=e^{-9.24^2}=e^{-85.38}=8.3\times10^{-38}$（因为 x 的小数部分只有两位有效数字）

（3）$y=\ln 56.7=4.038$（小数部分位数应和真数有效数字数相同）

（4）$y=\cos 9.4°=0.99$（有效数字位数和角度有效数字数相同）

3.利用公式$\sigma_N=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\sigma_x\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\sigma_y\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\sigma_z\right)^2+\cdots}$，计算得

（b）$\sigma_\rho=\sqrt{\left(\frac{m_2\rho_0}{(m_1-m_2)^2}\sigma_{m_1}\right)^2+\left(\frac{m_1\rho_0}{(m_1-m_2)^2}\sigma_{m_2}\right)^2}=\frac{\rho_0}{(m_1-m_2)^2}\sqrt{\left(m_2\sigma_{m_1}\right)^2+\left(m_1\sigma_{m_2}\right)^2}$

（c）$\sigma_y=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\sqrt{\left(\frac{b^2}{(a+b)^2}\sigma_a\right)^2+\left(\frac{a^2}{(a+b)^2}\sigma_b\right)^2}=\frac{1}{ab(a+b)}\sqrt{(b^2\sigma_a)^2+(a^2\sigma_b)^2}$

4.有三种测量方案，分别用到$\{L_1,L_2\}$、$\{L_1,d_1,d_2\}$、$\{L_2,d_1,d_2\}$，它们的标准差分别为$\frac{1}{2}\sqrt{\sigma_{L_1}^2+\sigma_{L_2}^2}=0.6\mu\text{m}$、$\frac{1}{2}\sqrt{4\sigma_{L_1}^2+\sigma_{d_1}^2+\sigma_{d_2}^2}=0.9\mu\text{m}$、$\frac{1}{2}\sqrt{4\sigma_{L_2}^2+\sigma_{d_1}^2+\sigma_{d_2}^2}=1.1\mu\text{m}$。所以最好的方案是采用$L=\frac{L_1+L_2}{2}$计算。

5.写出测量公式$S=L_1L_2-\frac{\pi}{4}d_1^2-\frac{\pi}{4}d_2^2$，则相对不确定度的计算公式为

$$\frac{\sigma_S}{S}=\frac{1}{S}\sqrt{L_1^2L_2^2\left(\frac{\sigma_{L_1}^2}{L_1^2}+\frac{\sigma_{L_2}^2}{L_2^2}\right)+\frac{\pi^2}{16}\left(2d_1\sigma_{d_1}\right)^2+\frac{\pi^2}{16}\left(2d_1\sigma_{d_1}\right)^2}\leq 0.005$$

从中可以解出$\sigma_{d_2}\leq 1\text{cm}$，但这一不确定度已超过$d_2$的测量值，说明测量$d_2$对结果的不确定度无影响，故不需要测量$d_2$即可获得需要的不确定度。

7.

（1）记带下标 0 的为真实值，不带下标的量为测量值，由题意得$\frac{h}{h_0}=\frac{1}{1+10\times1\times10^{-5}}$，$\frac{\text{t}}{\text{t}_0}=\frac{1}{0.9999}$，

则$\frac{g}{g_0}=\frac{\frac{2h}{t^2}}{\frac{2h_0}{t_0^2}}=\frac{0.9999^2}{1.0001}=0.9997$，代入得$g=979.7\text{cm/s}^2$。

（2）由准确公式知道测量值（真实值）总比理论值大。分别解$\frac{T-T_0}{T_0}=0.005$，$\frac{T-T_0}{T_0}=0.0005$，得（只保留一位有效数字）$\theta=16°$，$\theta=5°$。所以分别不能大于 16°和 5°。

10.

首先由题意算得$\bar{x}=5.5,\bar{y}=66.857,\sum x^2=385,\sum xy=4399.25$，从而

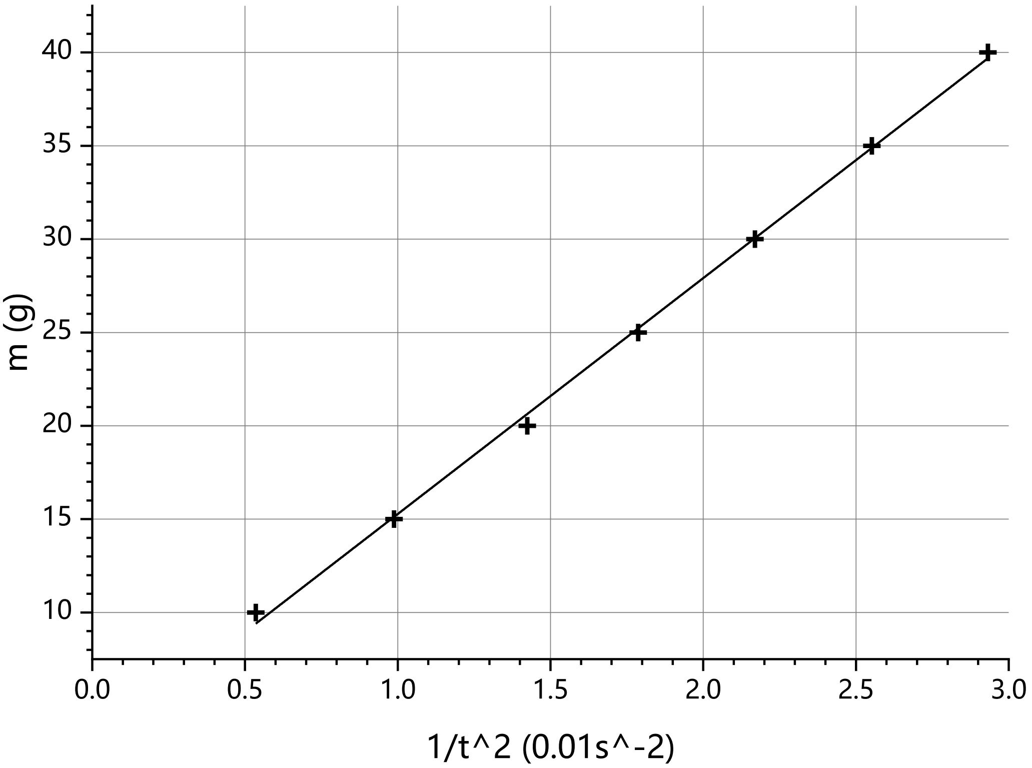
$$\lambda=\frac{\sum xy-n\bar{x}\bar{y}}{\sum x^2-n\bar{x}^2}=\frac{4399.25-10\times5.5\times66.857}{385-10\times5.5^2}=8.753\text{mm}$$

然后由$c=f\lambda$算出声速为$c=39.58\times10^3\times8.753\times10^{-3}\text{m/s}=346.4\text{m/s}$。下面算不确定度：

$$\sigma_c=\sqrt{f^2\sigma_\lambda^2+\lambda^2\sigma_f^2}=\sqrt{f^2\frac{\sigma_{y_i}^2}{\sum x^2-n\bar{x}^2}+\lambda^2\left(\frac{e_f}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{f^2\frac{\left(\frac{e_{y_i}}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{e}{\sqrt{3}}\right)^2}{\sum x^2-n\bar{x}^2}+\lambda^2\left(\frac{e_f}{\sqrt{3}}\right)^2}$$
$$=\sqrt{39.58^2\times10^6\times\frac{0.01^2\times10^{-6}+0.005^2\times10^{-6}}{3\times(385-10\times5.5^2)}+8.753^2\times10^{-6}\times\frac{0.05^2\times10^6}{3}}$$
$$=0.4\text{m/s}$$

所以测量结果为$c\pm\sigma_c=(346.4\pm0.4)\text{m/s}$。

11.①见下页图，看起来有明显的线性关系。计算可得$\overline{\frac{1}{t^2}}=1.770,\bar{m}=25.00,\sum\frac{1}{t^2}=26.30,\sum\frac{m}{t^2}=365.0,\sum m^2=5075$。



② $k_2=\frac{\sum\frac{m}{t^2}-n\bar{m}\overline{\frac{1}{t^2}}}{\sum m^2-n\bar{m}^2}=\frac{365.0-7\times25\times1.770}{5075-7\times25^2}=0.07893, b_2=\overline{\frac{1}{t^2}}-k_2\bar{m}=1.770-0.07893\times 25.00=-0.2032, r_2=\frac{\sum\frac{m}{t^2}-n\bar{m}\overline{\frac{1}{t^2}}}{\sqrt{(\sum m^2-n\bar{m}^2)\left(\sum\frac{1}{t^2}-n\overline{\frac{1}{t^2}}^2\right)}}=\frac{365.0-7\times25\times1.770}{\sqrt{(5075-7\times25^2)(26.30-7\times1.770^2)}}=0.9990$

③$k_1=\frac{\sum\frac{m}{t^2}-n\bar{m}\overline{\frac{1}{t^2}}}{\sum\frac{1}{t^2}-n\overline{\frac{1}{t^2}}^2}=\frac{365.0-7\times25\times1.770}{26.30-7\times1.770^2}=12.64, b_1=\bar{m}-k_1\overline{\frac{1}{t^2}}=25.00-12.64\times1.770=2.620, r_1=\frac{\sum\frac{m}{t^2}-n\bar{m}\overline{\frac{1}{t^2}}}{\sqrt{(\sum m^2-n\bar{m}^2)\left(\sum\frac{1}{t^2}-n\overline{\frac{1}{t^2}}^2\right)}}=\frac{365.0-7\times25\times1.770}{\sqrt{(5075-7\times25^2)(26.30-7\times1.770^2)}}=0.9990$

两个相关系数的关系是$r_1=r_2=r$，因为相关系数的定义式本来就关于自变量和因变量对称。此外，由简单的运算易得k_1，k_2和r的关系是$k_1k_2=\frac{\left(\sum\frac{m}{t^2}-n\bar{m}\overline{\frac{1}{t^2}}\right)^2}{(\sum m^2-n\bar{m}^2)\left(\sum\frac{1}{t^2}-n\overline{\frac{1}{t^2}}^2\right)}=r^2$。