Estudo Dirigido 2

Carlos Henrique Bravo Serrado
119136241

17 de abril de 2021

Questão 1

Começando por A. Encontrar o polinômio característico:

$$det\left(\frac{1}{10}\begin{bmatrix}-7 & 9\\ 9 & 17\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}t & 0\\ 0 & t\end{bmatrix}\right) = \left(-\frac{7}{10} - t\right)\left(\frac{17}{10} - t\right) - \frac{81}{100} = t^2 - t - 2 = (t+1)(t-2)$$

Então, os autovalores de A são 2 e -1. Para os autovetores associados a 2:

$$\frac{1}{10}\begin{bmatrix}-27x_1 + 9x_2\\ 9x_1 - 3x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$x_2 = 3x_1$$

Então, os resultados são da forma $(x_1, 3x_1)$, ou, $x_1(1, 3)$, com $x_1 \neq 0$. Como a matriz A é simétrica ($a_{12} = a_{21}$), podemos usar do Teorema Espectral que os autovetores são ortogonais, então o autovetor associado a -1 é $\lambda(-3, 1)$, com $\lambda \neq 0$. Os autovetores da matriz A são:

$$V_2 = \langle(1, 3)\rangle$$

$$V_{-1} = \langle(-3, 1)\rangle$$

Para B, primeiro encontrar o polinômio característico:

$$det\left(\frac{1}{25}\begin{bmatrix}43 & -24\\ -24 & 67\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}t & 0\\ 0 & t\end{bmatrix}\right) = \left(\frac{43}{25} - t\right)\left(\frac{57}{25} - t\right) - \frac{576}{625} = t^2 - 4t + 3 = (t-3)(t-1)$$

Então B tem os autovalores 3 e 1. Para os autovetores associados a 1:

$$\frac{1}{25}\begin{bmatrix}18x_1 - 24x_2\\ -24x_1 + 32x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{4x_2}{3}$$

Podemos aplicar o Teorema Espectral na matrix B por ela também ser simétrica, então os autovetores são:

$$V_1 = \langle(4, 3)\rangle$$

$$V_3 = \langle(-3, 4)\rangle$$

Questão 2

Queremos encontrar a matriz $(T)_\varepsilon$. Como é um operador autoadjunto, $a_{12} = a_{21}$, então o operador possui o seguinte formato:

$$(T)_\varepsilon = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$$

Como os autovalores são 2 e 3, eles serão a solução do polinômio característico, que é calculado a partir do determinante da matrix:

$$det\left(\begin{bmatrix} a-t & b \\ b & d-t \end{bmatrix}\right) = (t-2)(t-3)$$

$$(a-t)(d-t) - b^2 = (t-2)(t-3)$$

$$t^2 + (-a-d)t + (ad - b^2) = t^2 - 5t + 6$$

$$\begin{cases} a + d = 5 \\ ad - b^2 = 6 \end{cases}$$

No entanto, temos 3 variáveis e 2 equações, precisa de mais uma. Para isso, podemos usar o fato que o vetor $(3, 4)$ é o autovetor associado ao autovalor 2.

$$\begin{bmatrix} a-2 & b \\ b & d-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 3a + 4b = 6 \\ 3b + 4d = 8 \end{cases}$$

Disso tiramos que o operador $(T)_\varepsilon$ é:

$$\frac{1}{25}\begin{bmatrix} 66 & -12 \\ -12 & 59 \end{bmatrix}$$

Questão 3

Escolhendo 2 vetores ortogonais entre si, é possível fazer um triângulo retângulo. Como o operador é autoadjunto, há exatamente 2 autovetores e que são ortogonais entre si, então vamos encontrar esses autovetores e transformá-los em um triângulo isósceles, para manter o mesmo ângulo nas transformações:

$$det\left(\frac{1}{13}\begin{bmatrix} -23-t & 24 \\ 24 & -3-t \end{bmatrix}\right) = (t + \frac{23}{13})(t + \frac{3}{13}) - \frac{576}{169} = t^2 + 2t - 3 = (t+3)(t-1)$$

Então os autovalores são -3 e 1. Para encontrar o autovetor relacionado ao autovalor 1:

$$\frac{1}{13}\begin{bmatrix} -36x_1 + 24x_2 \\ 24x_1 - 16x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$x_2 = \frac{3}{2}x_1$$

Então $V_1 = \langle(2,3)\rangle$. Por ser autoadjunto, $V_{-3} = \langle(-3,2)\rangle$. Normalizando esses vetores:

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{13}}\langle(2,3)\rangle$$

$$V_{-3} = \frac{1}{\sqrt{13}}\langle(-3,2)\rangle$$

Como o triângulo isósceles também é retângulo, os catetos serão iguais. Chamando os catetos de a e a hipotenusa de b, temos as seguintes propriedades:

$$2a^2 = b^2 \implies b = \sqrt{2}a$$

$$2a + b = 9 \implies 2a + \sqrt{2}a = 9 \implies a = \frac{9}{2+\sqrt{2}} = \frac{9(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}$$

Queremos então que os autovetores transformados tenham esse módulo, como o vetor original é multiplicado pelo autovalor, basta dividir esse módulo pelos autovalores. Sejam u_1 e u_2 os vetores que formam o triângulo retângulo.

$$u_1 = \frac{9(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{13}}(2,3) = \frac{9(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{26}}(2,3)$$
$$u_2 = \frac{9(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}\frac{1}{-3}\frac{1}{\sqrt{13}}(-3,2) = \frac{-3(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{26}}(-3,2)$$

Questão 4

Como -1 é o autovalor associado ao autovetor (2,-1), podemos usar esse fato para encontrar os valores de a e b.

$$\begin{bmatrix} 0-(-1) & b \\ 2 & a-(-1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

Igualando, obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2 - b = 0 \\ 4 - (a+1) = 0 \end{cases}$$

$$b = 2$$

$$a = 3$$

Então a matriz é:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Questão 5

(a)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 6 & -5 & 1 \\ -3 & 6 & 3 & 2 & 14 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{1,2}(-2)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 6 & -5 & 1 \\ -3 & 6 & 3 & 2 & 14 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{1,3}(-1)}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -3 \\ -3 & 6 & 3 & 2 & 14 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{1,4}(3)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 12 & -7 & 26 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{2,4}(3)}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 26 \end{array}\right]$$

Substituindo de baixo pra cima obtemos:

$$x_4 = \frac{-13}{2}$$

$$x_3 = \frac{-16}{3}$$

$$x_2 = \frac{-89}{6}$$

$$x_1 = -44$$

(b)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & -4 & -6 & -4 & -4 \\ 4 & -8 & -13 & -8 & -5 \\ -14 & 28 & 45 & 28 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{1,2}(-2)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -4 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 4 \\ 4 & -8 & -13 & -8 & -5 \\ -14 & 28 & 45 & 28 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{1,3}(-4)}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -4 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & -4 & 11 \\ -14 & 28 & 45 & 28 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{1,4}(14)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -4 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & -4 & 11 \\ 0 & -14 & -11 & 14 & -46 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{2,3}(-2)}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -4 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -14 & -11 & 14 & -46 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{2,4}(7)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -4 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -18 \end{array}\right]$$

As duas últimas equações entram em conflito, logo, não há soluções.

Questão 6

(a) Transformando em uma matriz escada:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & k-4 & -4 & -3 \\ -4 & 8 & 3k-4 & k^2-k-5 & k-12 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{1,2}(-2)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & k-4 & -4 & -3 \\ -4 & 8 & 3k-4 & k^2-k-5 & k-12 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{1,3}(1)}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & k-4 & -3 & -1 \\ -4 & 8 & 3k-4 & k^2-k-5 & k-12 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{1,4}(4)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & k-4 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & 3k-4 & k^2-k-1 & k-4 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{2,3}(4)}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3k-4 & k^2-k-1 & k-4 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{2,4}(4)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3k & k^2-k+3 & k-4 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{3,4}(-3)}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & k^2-k & k-1 \end{array}\right]$$

Se $k = 0$ então $k^2 - k = 0$. Se isso acontecer, na última linha diz que a soma de todas as variáveis com coeficiente 0 dá o resultado -1, o que torna o sistema impossível.

Se $k = 1$, a última linha se torna nula, então o sistema fica indeterminado, pois a quantidade de linhas não nulas fica menor que o número de colunas de coeficientes.

Então o sistema é:

$$\begin{gathered} \text{Indeterminado, se } k = 1 \\ \text{Impossivel, se } k = 0 \\ \text{Determinado, se } k \neq 1 \text{ e } k \neq 0 \end{gathered}$$

(b)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & -2 & -6 \\ -3 & 1 & k+2 & 0 & -7 \\ 4 & -6 & k+2 & k^2-k+7 & k+6 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{1,2}(3)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & k+2 & 0 & -7 \\ 4 & -6 & k+2 & k^2-k+7 & k+6 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{1,3}(3)}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & k+2 & 3 & -1 \\ 4 & -6 & k+2 & k^2-k+7 & k+6 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{1,4}(-4)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & k+2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & k+2 & k^2-k+3 & k-2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{2,3}(-2)}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 1 & -1 \\ 0 & -2 & k+2 & k^2-k+3 & k-2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{2,4}(-2)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 1 & -1 \\ 0 & 0 & k & k^2-k+1 & k-2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{3,4}(-1)}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & k^2 - k & k - 1 \end{array}\right]$$

Como essa matriz escada foi igual à da letra A, então a resposta é a mesma:

$$\text{Indeterminado, se } k = 1$$
$$\text{Impossivel, se } k = 0$$
$$\text{Determinado, se } k \neq 1 \text{ e } k \neq 0$$