Estudo Dirigido 1 - ALA

Carlos Henrique Bravo Serrado
119136241

5 de abril de 2021

Questão 1

(a) Sejam u e v os vetores normais das retas $2x+3y = 0$ e $x-2y = 0$, respectivamente. Podemos reescrever $2x + 3y = 0$ como $\langle (x, y)|(2, 3)\rangle = 0$, então, u = (2, 3), pois se o produto interno der 0, é normal. Podemos aplicar a mesma lógica para encontrar $v = (1, -2)$.

Para encontrar o ângulo formado basta calcular o produto interno $\langle u|v\rangle$.

$$\langle u|v\rangle = \|u\|\|v\|cos(\theta)$$

$$\langle u|v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2$$

$$\|u\|\|v\|cos(\theta) = u_1v_1 + u_2v_2$$

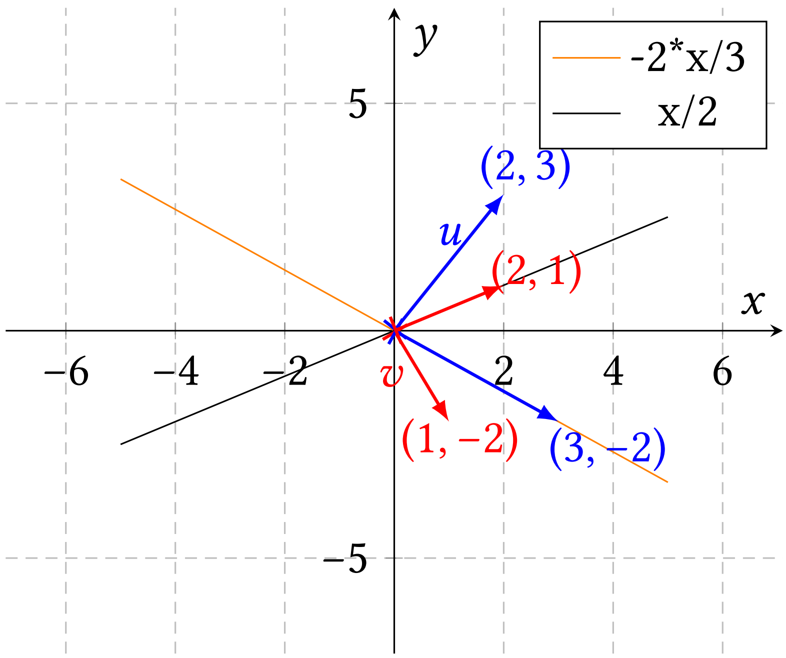
$$cos(\theta) = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\|u\|\|v\|}$$

Substituindo as variáveis com os valores respectivos e sendo $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ e $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

$$cos(\theta) = \frac{(2)(1) + (3)(-2)}{\sqrt{13}\sqrt{5}} = \frac{-4}{\sqrt{65}}$$

$$\theta = arccos(\frac{-4}{\sqrt{65}})$$

(b)



Questão 2

Queremos provar que $det(U) = \pm 1$ para a matriz U dada.

$$U_\beta = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$$

$$det(U_\beta) = u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21} = \langle (u_{11}, u_{12}) | (u_{22}, -u_{21}) \rangle$$

O vetor $(u_{22}, -u_{21})$ é um vetor normal a u_2 e, portanto, é paralelo a u_1. O ângulo formado entre u_1 e $u_2^\perp$ pode ser 0 ou π.

$$det(U_\beta) = \langle (u_{11}, u_{12}) | (u_{22}, -u_{21}) \rangle = \langle u_1 | u_2^\perp \rangle = \|u_1\| \|u_2^\perp\| cos(\theta)$$

Como os vetores u_1 e $u_2^\perp$ são unitários, sua norma é 1. Portanto, $det(U_\beta) = cos(\theta)$. Como θ pode ser 0 ou π, $cos(\theta)$ pode ser 1 ou -1.

Com isso, $det(U_\beta) = \pm 1$. ■

Questão 3

(a) Para ser ortonormal, o segundo vetor precisa ser ortogonal e normal. Um vetor ortogonal a (u_{11}, u_{12}) é $u_2 = (u_{12}, -u_{11})$. A norma de ambos vetores é 1, então são normais ($\frac{\sqrt{(\pm 2)^2 + (\pm 1)^2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$). Falta apenas definir o sentido de u_2.

Para ser orientado positivamente, $det(U_\beta) = 1$. O determinante desta base é $-u_{11}^2 - u_{12}^2$. Como os quadrados são sempre positivos, a soma de dois números negativos será negativo, então $det(U_\beta) = -1$. Basta trocar o sinal, definindo $u_2 = (-u_{12}, u_{11})$, isto é, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, -1)$.

(b) As coordenadas do ponto $p = (-2, 6)$ em relação a base β é $(Proj_{u_1}(p), Proj_{u_2}(p))$.

$$Proj_{u_1} = \langle p | u_1 \rangle \cdot u_1 = \frac{(-2)(-1) + (6)(2)}{\sqrt{5}} \cdot u_1 = \frac{14}{\sqrt{5}} \cdot u_1$$

$$Proj_{u_2} = \langle p|u_2\rangle \cdot u_2 = \frac{(-2)(-2)+(6)(-1)}{\sqrt{5}} \cdot u_2 = \frac{-2}{\sqrt{5}} \cdot u_2$$

Então na base β, as coordenadas do ponto p são $\frac{1}{\sqrt{5}}(14, -2)$.

Questão 4

Para encontrar o operador que leva dos vértices finais ao iniciais, é possível usar o fato que as bases canônicas $(1, 0)$ e $(0, 1)$ fazem parte dos pontos.

$$T^{-1}(e_1) = (2, 3)$$

$$T^{-1}(e_2) = (-6, 4)$$

$$(T^{-1})_\varepsilon = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(T)_\varepsilon = \frac{1}{det((T^{-1})_\varepsilon)} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Questão 5

Para realizar uma rotação e depois uma reflexão, basta fazer a multiplicação dos operadores correspondentes. Primeiro encontrando a matriz responsável por realizar uma rotação.

$$(\rho_{\pi/3})_\varepsilon = \begin{bmatrix} cos(\pi/3) & -sen(\pi/3) \\ sen(\pi/3) & cos(\pi/3) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

Agora para a reflexão, precisa encontrar um vetor unitário diretriz da reta. Como a reta é $y = 2x$, podemos reescrever como $2x - y = 0$, de onde tira-se o vetor $u = (2, -1)$. Normalizando o vetor, tem-se que $u = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1)$.

$$(R)_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{5} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(T)_\varepsilon = R\rho = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4\sqrt{3} - 3 & 4 + 3\sqrt{3} \\ 4 + 3\sqrt{3} & 3 - 4\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(b) Se o determinante de um operador linear for ± 1, ele será uma rotação ou reflexão dependendo do sinal.

$$det(T) = \frac{(4\sqrt{3} - 3)(3 - 4\sqrt{3}) - (4 + 3\sqrt{3})(4 + 3\sqrt{3})}{100} = \frac{-100}{100} = -1$$

Como o determinante é -1, $(T)_\varepsilon$ é uma reflexão.

Questão 6

Para ser uma reflexão, o determinante dessa matriz precisa ser -1.

$$det(Q) = \frac{b}{3} - a^2 = -1$$

$$b = 3a^2 - 3$$

Para encontrar os valores de b, precisamos primeiro encontrar os valores de a, então vamos encontrar os espelhos primeiro. Para isso, basta encontrar os vetores diretores.

$$Q = I - 2nn^\top$$

$$\begin{bmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 \\ n_1 n_2 & n_2^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & a \\ a & 3a^2 - 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-a}{2} \\ \frac{-a}{2} & \frac{4-3a^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} n_1^2 = \frac{1}{3} \\ n_1 n_2 = -\frac{a}{2} \\ n_2^2 = \frac{4-3a^2}{2} \end{cases}$$

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$n_2 = -\frac{a}{2n_1} = -\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$n_2^2 = \frac{4 - 3a^2}{2} = \frac{3a^2}{4} \Longrightarrow a = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$n_2 = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Os valores das variáveis serão $a = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$ e $b = -\frac{1}{3}$. Os espelhos serão as retas formadas pelos vetores diretores $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$ e $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$, pois n_2 tem 2 valores possíveis.

Questão 7

Se a base β é ortonormal, seus vetores formam um ângulo de $\frac{\pi}{2}$ entre si. Utilizando o caso base no qual $u_1 = (1, 0)$, u_2 possui 2 valores possíveis: $(0, 1)$ e $(0, -1)$. Analisando cada caso:

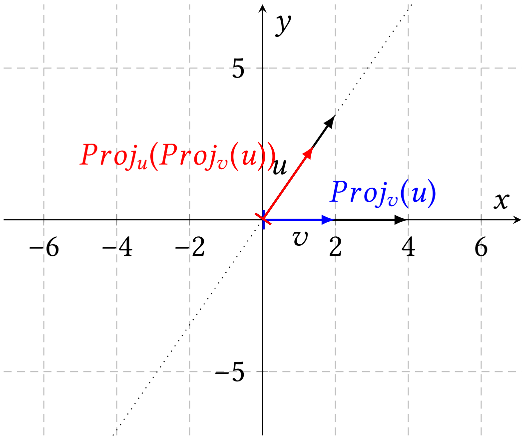
Para a prova da ida, vamos provar a contra-positiva. "Se não existe uma rotação anti-horária, a base não é positivamente orientada". Se $u_2 = (0, -1)$, nenhuma rotação leva e_2 até u_2 enquanto mantém u_1 fixo em e_1, pois qualquer que seja o ângulo de rotação, e_1 não será mais igual a u_1, exceto nos ângulos $2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$, nos quais e_2 não é igual a u_2 . O determinante da base é -1, então, ela não é positivamente orientada, provando a contra-positiva da ida.

Para a prova da volta, veremos o segundo caso, quando $u_2 = (0, 1)$. Nesse caso base, a rotação ρ_0 levará a base canônica para β. Rotacionando β no sentido antihorário para qualquer ângulo, é possível repetir a transformação na base canônica, então sempre existirá uma rotação que a leve até β. O determinante da base é 1, então ela é positivamente orientada, provando a volta.

Como só há esses 2 casos para o caso base e é possível encontrar todas as bases ortonormais existentes apenas rotacionando β, a prova vale para todos os casos. ■

Questão 8

(a) FALSO. Vamos desenhar vetores $v = 4(1,0)$, $u = 4(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ e suas projeções respectivas.



Como estão em direções diferentes, já é possível dizer que não são vetores iguais. ■

(b) VERDADEIRO. A soma de 2 vetores resulta em um vetor entre eles, seguindo um paralelogramo. Aplicando a reflexão R em v, obtem-se um vetor de mesmo módulo e mesmo ângulo em relação ao espelho. Pela simetria de $v + Rv$, daria um vetor na direção do espelho. ■

(c) FALSO. Definindo duas reflexões (Utilizando o fato que seus determinantes são -1) e fazendo sua composta:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Q = R_1 R_2 = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$det(Q) = 1$$

Como o determinante de Q é 1, Q é uma rotação, não uma reflexão. ■