Module : Analyse 2 **Filière : Année Préparatoire**
Série N.°6 : Série de Révision **Année Universitaire : 2019-2020**

Partie I

Exercice 1. Calculer les développements limités suivants :

1. $\frac{1}{1-x} - e^x$ à l'ordre 3 en 0.
2. $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ à l'ordre 4 en 0.
3. $\sin x \cos(2x)$ à l'ordre 6 en 0.
4. $\big(\ln(1+x)\big)^2$ à l'ordre 4 en 0

Exercice 2. Calculer les développements limités suivants :

1. $\frac{1}{1+x+x^2}$ à l'ordre 4 en 0.
2. $\tan(x)$ à l'ordre 5 en 0.

Exercice 3. Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1. $\frac{\sin x - x}{x^3}$ en 0.
2. $\frac{1+\ln(1+x)-e^x}{1-\cos x}$ en 0.

Partie II

Exercice 4. Intégration par parties

Calculer les intégrales suivantes :

$$1.\ I = \int_0^1 xe^x dx \qquad 2.\ J = \int_1^e x^2 \ln(x) dx.$$

Déterminer une primitive de la fonction suivante :

$$x \mapsto \arctan(x)$$

Exercice 5. Changements de variables

En effectuant un changement de variables, calculer

$$\mathbf{K} = \int_1^e \frac{\ln^n(x)}{x} dx,\ n \in \mathbb{N} \qquad \mathbf{J} = \int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

Exercice 6. Fraction rationnelle avec décomposition en éléments simples

Soit $f(x) = \frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}$, $x \in]1, +\infty[$.

1. Démontrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2}.$$

2. En déduire la primitive de f sur $]1, +\infty[$ qui s'annule en 2.

Exercice 7. Primitive de fraction rationnelles

Donner une primitive des fonctions suivantes :

$$1.\ x \mapsto \frac{1}{x^2+4} \qquad 2.\ x \mapsto \frac{1}{x^2+4x+5}$$

Exercice 8. Intégrale trigonométrique

Calculer l'intégrale suivante :

$$1.\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)} dx$$

Partie III

Exercice 9.

1. Pour chacune des intégrales suivantes, déterminer le point incertain, dire si l'intégrale converge, et si c'est le cas, calculer la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt \qquad \int_0^{+\infty} \cos t \, dt \qquad \int_0^1 \frac{1}{1-t} dt \qquad \int_{-\infty}^{\ln 2} e^t dt$$

2. Même question pour ces intégrales ayant deux points incertains :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt \qquad \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{(t-1)^2} dt \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} dt \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} dt$$