

Partie 2

COMPORTEMENT FREQUENTIEL DES CIRCUITS EN REGIME SINUSOIDAL

Le régime sinusoïdal est un cas particulier des régimes variables. Il est particulièrement important pour deux raisons :

- C'est le régime sous lequel est produite et distribuée l'énergie électrique.
- Tous les régimes périodiques peuvent être décomposés en somme de régimes sinusoïdaux. Le théorème de superposition permet d'utiliser les principaux termes de cette décomposition afin de décomposer l'étude d'un circuit linéaire alimenté en régime périodique quelconque en somme de circuit alimenté en régime sinusoïdal.

On rappelle les expressions des impédances et des admittances complexes des dipôles linéaires :

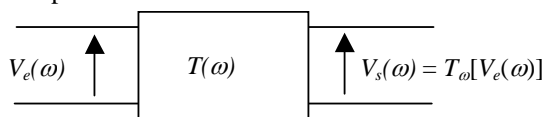
Dipôle	\underline{Z}	\underline{Y}
Résistances R	R	G
Inductances L	$jL\omega$	$-j/L\omega$
Condensateurs C	$-j/C\omega$	$jC\omega$

I. REPONSE EN FREQUENCE DES CIRCUITS LINEAIRES

I.1. Fonction de transfert

L'association de dipôles linéaires dont l'impédance est liée à la fréquence (inductances, condensateurs) permet de réaliser des circuits dont l'une au moins des tensions a une valeur qui dépend de la fréquence d'excitation.

Ce type de circuit peut se mettre sous la forme d'un quadripôle :



On rappelle que la pulsation ω est liée à la fréquence par la relation :

$$\omega = 2\pi f$$

La fonction $T(\omega)$ est couramment appelée fonction de transfert du quadripôle. Il est plus commode d'utiliser la transformation complexe et de définir $\underline{T}(\omega)$ telle que :

$$\underline{T}(\omega) = \frac{V_s(\omega)}{V_e(\omega)}$$

$\underline{T}(\omega)$ est alors un nombre complexe dont le module et l'argument dépendent de la fréquence, donc de la pulsation. Il est donc entièrement défini par les expressions :

- De son module $T = f_T(\omega)$

- De son argument $\varphi = f_\varphi(\omega)$

Afin de rendre compte des propriétés du quadripôle il est habituel de tracer les deux courbes correspondant aux évolutions de son module et de son argument en fonction de la fréquence. Pour des raisons de commodité on préfère utiliser des échelles logarithmiques, d'où l'introduction du *décibel*.

I.2. Le décibel

I.2.a. Décibel sonore

Au son le plus faible perceptible par l'oreille humaine (il s'agit évidemment d'une moyenne réalisée sur un « échantillon représentatif ») on fait correspondre la valeur de 0 Bel.. La puissance sonore correspondante est notée $P_{ref} = 10^{-12}$ W.

- Un son de puissance 10. P_{ref} . correspond à 1 Bel soit 10 décibels (dB).
- Un son de puissance 100. P_{ref} . correspond à 2 Bel soit 20 dB.
- Un son de puissance 10^n . P_{ref} . correspond à n Bel soit (10.n) dB.

I.2.b. Décibel en électricité.

On définit, comme pour les sons, le gain en puissance d'un quadripôle par G_P exprimé en Bel :

$$G_P = \log \frac{P_s}{P_e}$$

Une tension u appliquée aux bornes d'une résistance R provoque la dissipation d'une puissance :

$$P = \frac{u^2}{R}$$

Pour une tension de référence notée V_{ref} choisie arbitrairement, on peut calculer la valeur en décibel d'une tension V à l'aide de la relation :

$$V^2 = 10^n \cdot V_{ref}^2 \text{ soit } V = (10)^{\frac{n}{2}} \cdot V_{ref}$$

Cette échelle est le plus souvent utilisé pour la quantification du module du gain en tension d'un quadripôle :

$$G_V = 20 \cdot \log \frac{V_s}{V_e} = 20 \cdot \log \|\underline{T}\|.$$

Cela revient à considérer que $V_{ref} = V_e$.

Remarque : La valeur du gain en tension d'un quadripôle qui divise la tension par $\sqrt{2}$ (ce qui correspond à une puissance divisée par 2) est égale à :

$$G_V = 20 \cdot \log \frac{1}{\sqrt{2}} = -3,0103 \text{ dB} \approx -3 \text{ dB}$$

I.3. Diagramme de Bode.

Il est constitué de deux courbes ;

- La courbe de gain où l'on trace le gain en fonction du logarithme de la pulsation (ou de la fréquence).
- La courbe de phase où l'on trace l'argument de T (en radians) en fonction du logarithme de la pulsation.

Propriété importante : Lorsqu'une fonction de transfert \underline{T} peut s'écrire sous la forme du produit de 2 fonctions de transfert \underline{T}_1 et \underline{T}_2 alors son diagramme de Bode peut être tracé en faisant la somme des deux diagrammes de Bode de \underline{T}_1 et \underline{T}_2 :

$$\underline{T} = \underline{T}_1 \cdot \underline{T}_2 \Rightarrow 20 \log T = 20 \log T_1 + 20 \log T_2$$

$$\Rightarrow \text{Arg } \underline{T} = \text{Arg } \underline{T}_1 + \text{Arg } \underline{T}_2$$

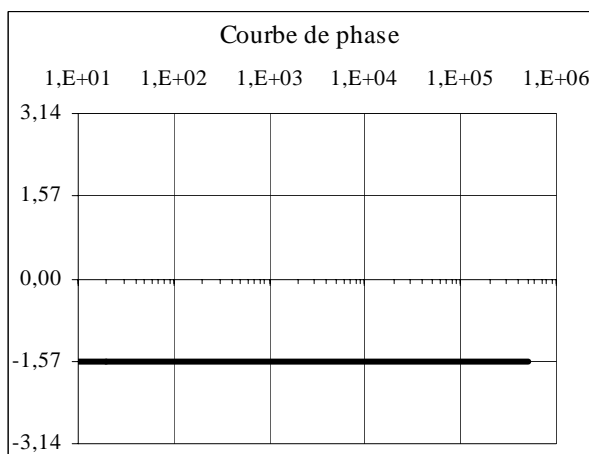
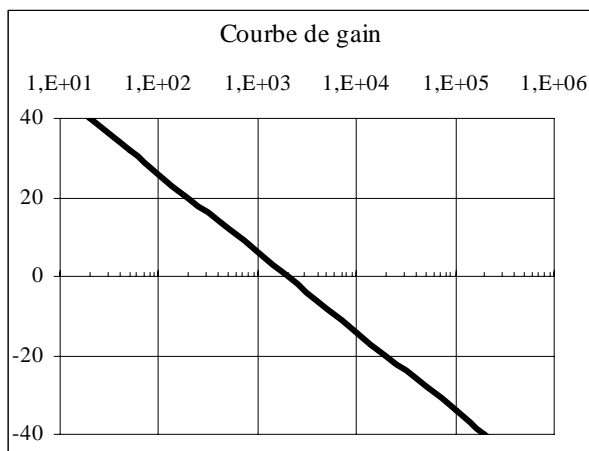
Afin de pouvoir exploiter la propriété précédente, nous présentons ci-dessous les diagrammes de Bode des fonctions de transfert les plus élémentaires (avec ω_0 choisi arbitrairement : $\omega_0 = 2000 \text{ rad/s}$)

I.3.a. Intégrateur

En sinusoïdal, on obtient l'expression complexe de la dérivée d'une grandeur en le nombre complexe image de cette grandeur par $j\omega$:

$$\underline{T} = \frac{\omega_0}{j\omega}$$

dont le diagramme de Bode est :



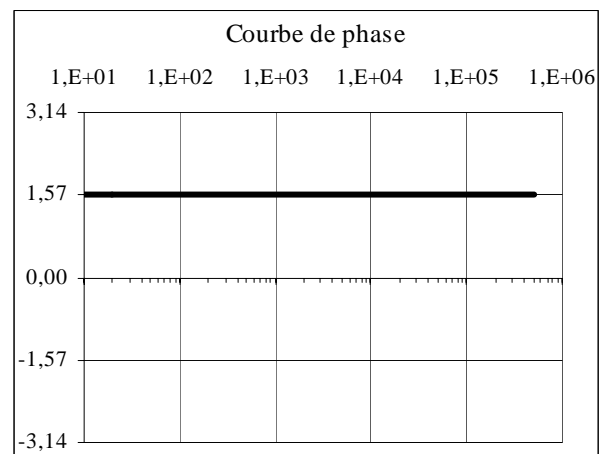
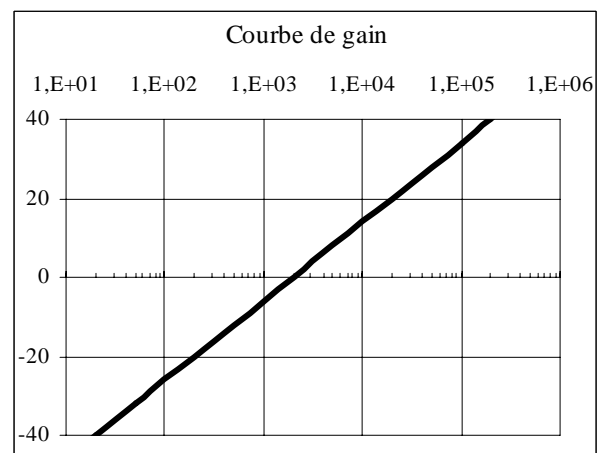
On remarque que la courbe de gain est une droite ayant un coefficient directeur négatif égal à - 20 dB par décade.

Ce quadripôle est inutilisable pour les très basses fréquences. En effet l'intégration d'une grandeur continue conduit à une tension de sortie qui tend vers l'infini. Comme ces quadripôles sont le plus souvent réalisés à l'aide de montage comportants des amplificateurs opérationnels, la tension de sortie est limitée à une quinzaine de volts. Lorsque la tension de sortie atteint cette valeur limite, on dit que le quadripôle est "saturé".

I.3.b. Dérivateur

La fonction de transfert d'un dérivateur est :

$$\underline{T} = \frac{j\omega}{\omega_0}$$



Le coefficient directeur est positif et égal à + 20 dB par décade.

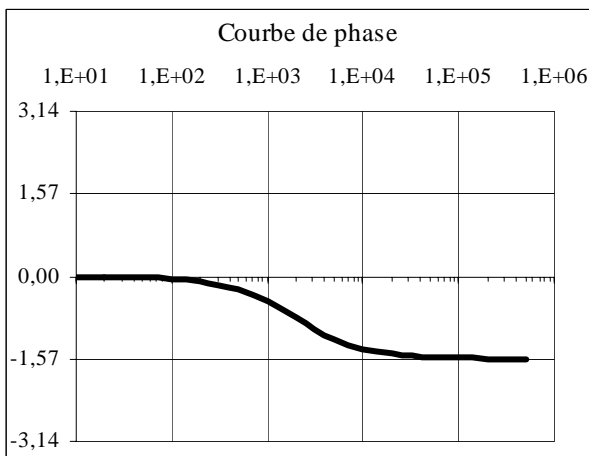
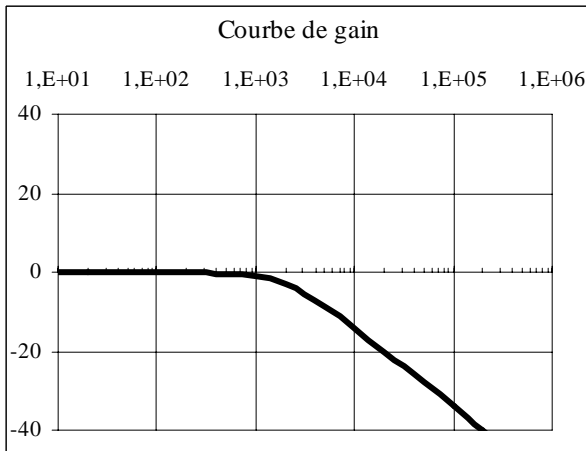
A l'inverse du quadripôle intégrateur, le dérivateur conduit théoriquement à une tension de sortie infini pour les très hautes fréquences. Les montages intégrateurs sont donc saturés à partir d'une certaine valeur de la fréquence d'entrée. D'autre part ils sont très sensibles aux parasites de fréquences élevées qu'ils amplifie considérablement. La solution consiste à les empêcher de fonctionner au delà d'une certaine fréquence.

I.3.c. Passe bas du premier ordre.

Fonction de transfert :

$$\underline{T} = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}}$$

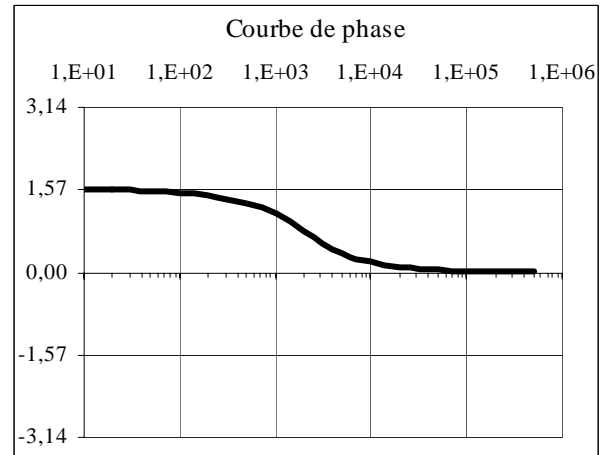
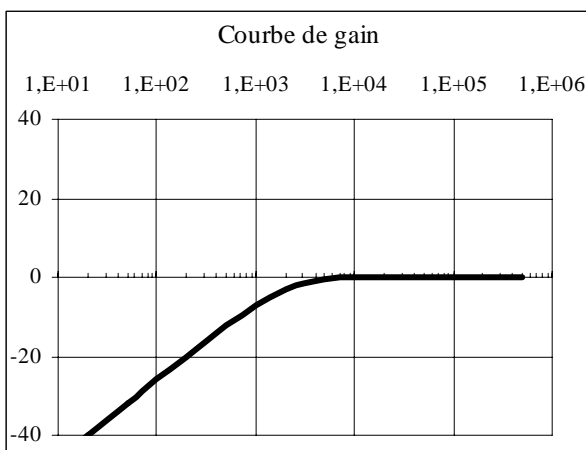
Diagramme de Bode :

**I.3.d. Passe haut du premier ordre n°1**

Fonction de transfert :

$$\underline{T} = \frac{j\omega}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}}$$

Diagramme de Bode :

**Remarque importante :**

Un œil exercé aura remarqué que la fonction de transfert de ce filtre est le produit de celle du dérivateur (§ I.3.b) et de celle du passe bas du premier ordre (§ I.3.c).

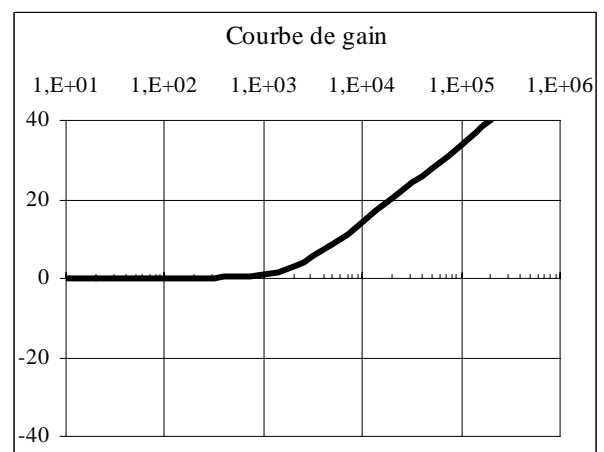
Comme nous l'avons signalé en introduction de ce paragraphe, la courbe de gain obtenue est **exactement** la somme des 2 courbes de gains des § b et c. Il en est de même pour la courbe de phase

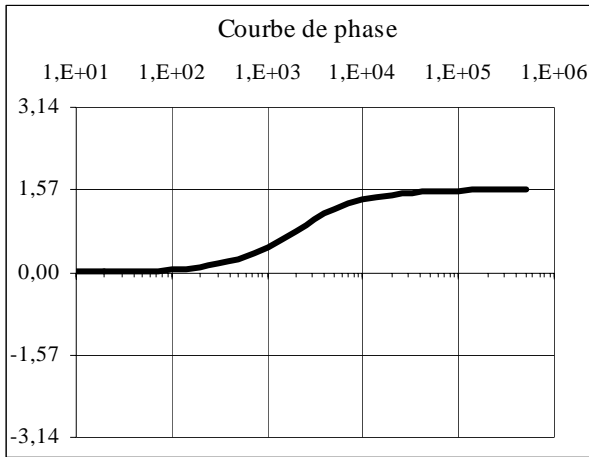
I.3.e. Passe haut du premier ordre n°2

Fonction de transfert :

$$\underline{T} = 1 + \frac{j\omega}{\omega_0}$$

Diagramme de Bode :





Contrairement au précédent il sature pour les hautes fréquences.

I.3.f. Passe bas du second ordre.

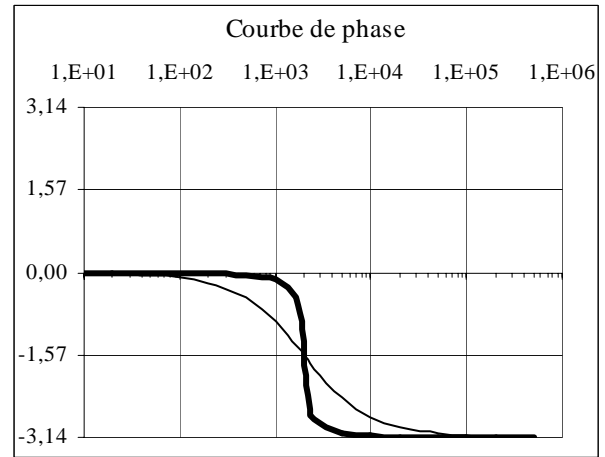
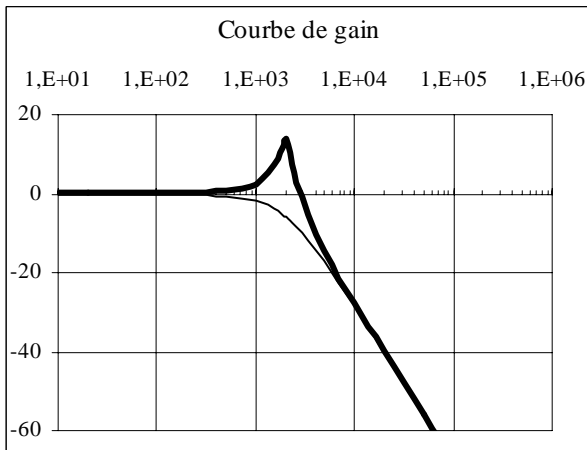
Fonction de transfert :

$$\underline{T} = \frac{1}{1 + 2j\xi \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Le diagramme de Bode dépend de la valeur de ξ , ou du facteur de qualité Q (cf. Chapitre 4). On rappelle que :

$$Q = \frac{1}{2\xi}$$

Les diagrammes de Bode représentés ci-dessous correspondent à $Q = 0,5$ pour les courbes en traits fins et $Q = 5$ pour les courbes en traits épais ($\omega_0 = 2000$ rad/s)



On remarque qu'au-delà de ω_0 , le coefficient directeur vaut -40 dB par décade, et qu'il existe une symétrie de la courbe de phase par rapport au point $(\omega_0; -\pi/2)$.

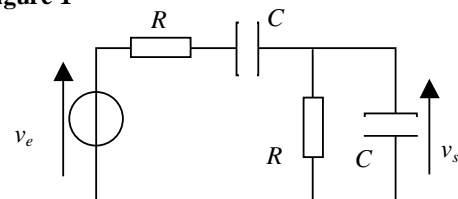
II. METHODE D'ETUDE.

A partir d'un exemple nous allons développer les méthodes mises en œuvre pour l'étude des quadripôles.

II.1. Expression de la fonction de transfert

Considérons le montage représenté à la figure 1 :

Figure 1

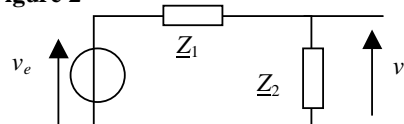


Ce montage est équivalent à celui représenté figure 2, à condition de poser :

$$\underline{Z}_1 = R - \frac{j}{C\omega}$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{-jR}{R - \frac{j}{C\omega}} = \frac{R}{jRC\omega + 1}$$

Figure 2



On a alors :

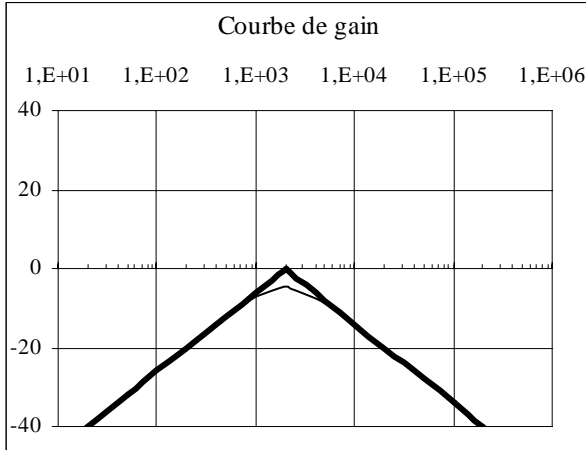
$$\underline{T} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{1}{j\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right) + 3} = \frac{1}{j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) + 3}$$

en posant $\omega_0 = \frac{1}{RC}$

II.2. Tracé du diagramme de Bode asymptotique d'un quadripôle.

- Pour $\omega \rightarrow 0$, $\underline{T} \rightarrow \frac{j\omega}{\omega_0}$: dérivateur (Cf. § I.3.b)
- Pour $\omega \rightarrow \infty$, $\underline{T} \rightarrow \frac{\omega_0}{j\omega}$: intégrateur (Cf. § I.3.a)

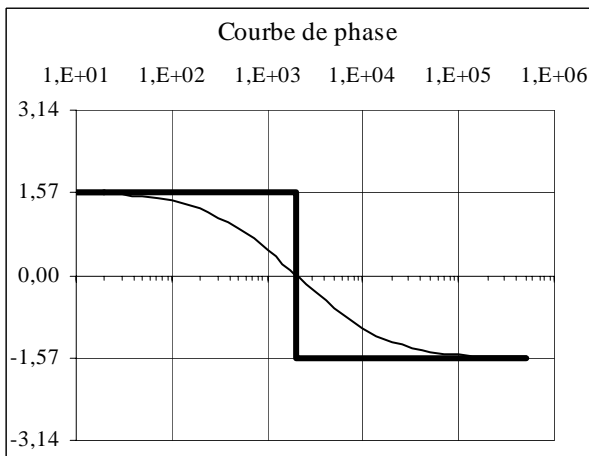
D'où le diagramme asymptotique :



En trait fin, on a tracé la courbe réelle : pour $\omega = \omega_0$,

$$\underline{T} = \frac{1}{3}$$

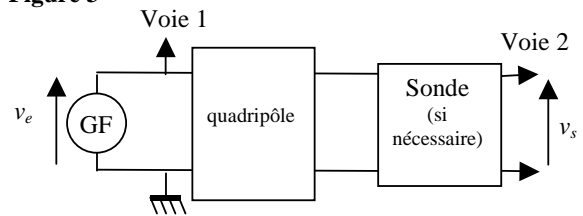
On constate que le diagramme asymptotique fournit une approximation suffisante de la courbe de gain. Il n'est malheureusement pas de même en ce qui concerne la courbe de phase : la courbe réelle étant relativement différente au voisinage de ω_0 .



II.3. Détermination expérimentale du diagramme de Bode d'un quadripôle.

Pour tracer le diagramme de Bode d'un quadripôle, on l'alimente avec un générateur délivrant une tension sinusoïdale dont la valeur efficace (et donc son amplitude) est fixe et dont la fréquence est réglable (figure 3).

Figure 3



Il faut ensuite mesurer l'amplitude de la tension de sortie ainsi que le déphasage entre la sortie et l'entrée. En TP on utilise généralement un oscilloscope qui permet de réaliser simultanément les deux mesures.

Attention : Il est impératif de vérifier préalablement que la bande passante des instruments de mesure choisis permet de les utiliser dans toute la gamme de fréquence à l'intérieur de laquelle on souhaite effectuer les mesures.