Chapitre 6

Intégrales

1. Primitive d'une fonction

1.1. Définition

Définition 1.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I quelconque. On dit que $F : I \to \mathbb{R}$ est une ***primitive*** de f sur I si F est une fonction dérivable sur I vérifiant $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Trouver une primitive est donc l'opération inverse de calculer la fonction dérivée.

Exemple 1.

1. Soit $I = \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Alors $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \frac{x^3}{3}$ est une primitive de f. La fonction définie par $F(x) = \frac{x^3}{3} + 1$ est aussi une primitive de f.
2. Soit $I = [0, +\infty[$ et $g : I \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sqrt{x}$. Alors $G : I \to \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ est une primitive de g sur I. Pour tout $c \in \mathbb{R}$, la fonction $G + c$ est aussi une primitive de g.

Nous allons voir que trouver une primitive permet de les trouver toutes.

Proposition 1.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $F : I \to \mathbb{R}$ une primitive de f. Toute primitive de f s'écrit $G = F + c$ où $c \in \mathbb{R}$.

Notations. On notera une primitive de f par $\int f(t)\,dt$ ou $\int f(x)\,dx$ ou $\int f(u)\,du$ (les lettres $t, x, u, \ldots$ sont des lettres dites *muettes*, c'est-à-dire interchangeables). On peut même noter une primitive simplement par $\int f$.
La proposition 1 nous dit que si F est une primitive de f alors il existe un réel c, tel que $F = \int f(t)\,dt + c$.

Par dérivation on prouve facilement le résultat suivant :

Proposition 2.
Soient F une primitive de f et G une primitive de g. Alors $F + G$ est une primitive de $f + g$. Et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors λF est une primitive de λf.

Une autre formulation est de dire que pour tous réels λ, μ on a

$$\boxed{\int \big(\lambda f(t)+\mu g(t)\big)\,dt = \lambda \int f(t)\,dt + \mu \int g(t)\,dt}$$

Théorème 1 (Résultat d'existence)**.**
Soit f une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Alors il existe une primitive F de f sur I.

1.2. Primitives des fonctions usuelles

$\int e^x\,dx = e^x + c \quad$ sur $\mathbb{R}$
$\int \cos x\,dx = \sin x + c \quad$ sur $\mathbb{R}$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + c \quad$ sur $\mathbb{R}$
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \in \mathbb{N}) \quad$ sur $\mathbb{R}$
$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$ sur $]0,+\infty[$
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + c \quad$ sur $]0,+\infty[$ ou $]-\infty,0[$

$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + c$, $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + c \quad$ sur $\mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c \quad$ sur $\mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ \frac{\pi}{2} - \arccos x + c \end{cases} \quad$ sur $]-1,1[$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \begin{cases} \operatorname{Argsh} x + c \\ \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c \end{cases} \quad$ sur $\mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} \operatorname{Argch} x + c \\ \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + c \end{cases} \quad$ sur $x \in]1,+\infty[$

Remarque.
Ces primitives sont à connaître par cœur.

1. Voici comment lire ce tableau. Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$ alors la fonction : $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Les primitives de f sont les fonctions définies par $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ (pour c une constante réelle quelconque). Et on écrit $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, où $c \in \mathbb{R}$.
2. La variable sous le symbole intégrale est une variable muette. On peut aussi bien écrire $\int t^n\,dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$.
3. La constante est définie pour un intervalle. Si l'on a deux intervalles, il y a deux constantes qui peuvent être différentes. Par exemple pour $\int \frac{1}{x}\,dx$ nous avons deux domaines de validité : $I_1 =]0,+\infty[$ et $I_2 =]-\infty,0[$. Donc $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + c_1$ si $x > 0$ et $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + c_2 = \ln(-x) + c_2$ si $x < 0$.

2. Intégration sur un segment

Définition 2.
Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I et $a, b \in I$. On appelle ***intégrale*** de a à b de f la quantité (qui ne dépend pas du choix de la primitive de f)

$$\int_a^b f(t)dt := [F(t)]_a^b := F(b) - F(a),$$

a, b étant les bornes de l'intégrale.

Attention : $\int f(t)\,dt$ désigne une fonction de I dans $\mathbb{R}$ alors que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ désigne un nombre réel.

Exemple 2.
Nous allons pouvoir calculer plein d'intégrales. Recalculons d'abord les intégrales déjà rencontrées.

1. Pour $f(x) = e^x$ une primitive est $F(x) = e^x$ donc
$$\int_0^1 e^x\,dx = \left[e^x\right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$
2. Pour $g(x) = x^2$ une primitive est $G(x) = \frac{x^3}{3}$ donc
$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\tfrac{x^3}{3}\right]_0^1 = \tfrac{1}{3}.$$
3. $\int_a^x \cos t\,dt = \left[\sin t\right]_{t=a}^{t=x} = \sin x - \sin a$ est une primitive de $\cos x$.

3. Propriétés de l'intégrale

Les trois principales propriétés de l'intégrale sont la relation de Chasles, la positivité et la linéarité.

3.1. Relation de Chasles

Proposition 3 (Relation de Chasles)**.**
Soient $a < c < b$. Si f admet une primitive sur $[a, c]$ et $[c, b]$, alors f admet une primitive sur $[a, b]$, et on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Pour s'autoriser des bornes sans se préoccuper de l'ordre on définit :

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad \text{et pour } a < b \qquad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Pour a, b, c quelconques la ***relation de Chasles*** devient alors

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$$

3.2. Positivité de l'intégrale

Proposition 4 (Positivité de l'intégrale).
Soit $a \leqslant b$ deux réels et f et g deux fonctions admettant des primitives sur $[a, b]$.

$$\boxed{\text{Si } f \leqslant g \quad \text{alors} \quad \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx}$$

En particulier l'intégrale d'une fonction positive est positive :

$$\boxed{\text{Si} \quad f \geqslant 0 \quad \text{alors} \quad \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0}$$

3.3. Linéarité de l'intégrale

Proposition 5.
Soient f, g deux fonctions admettant des primitives sur $[a, b]$. Alors on a

1. $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.
2. *pour tout réel λ,* $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.
   Par ces deux premiers points nous avons la **linéarité de l'intégrale** *: pour tous réels λ, μ*

$$\boxed{\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx}$$

3. $$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b \left|f(x)\right|\,dx}$$

Exemple 3.

$$\int_0^1 \left(7x^2 - e^x\right)dx = 7\int_0^1 x^2\,dx \;-\; \int_0^1 e^x\,dx = 7\frac{1}{3} \;-\; (e-1) = \frac{10}{3} - e$$

Nous avons utilisé les calculs déjà vus : $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$ et $\int_0^1 e^x\,dx = e - 1$.

Exemple 4.
Soit $I_n = \int_1^n \frac{\sin(nx)}{1+x^n}\,dx$. Montrons que $I_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

$$|I_n| = \left|\int_1^n \frac{\sin(nx)}{1+x^n}\,dx\right| \leqslant \int_1^n \frac{|\sin(nx)|}{1+x^n}\,dx \leqslant \int_1^n \frac{1}{1+x^n}\,dx \leqslant \int_1^n \frac{1}{x^n}\,dx$$

Il ne reste plus qu'à calculer cette dernière intégrale (en anticipant un peu sur la suite du chapitre) :

$$\int_1^n \frac{1}{x^n}\,dx = \int_1^n x^{-n}\,dx = \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right]_1^n = \frac{n^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1}{-n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

(car $n^{-n+1} \to 0$ et $\frac{1}{-n+1} \to 0$).

Remarque.
Notez que même si $f \times g$ admet une primitive, on a en général $\int_a^b (fg)(x)\,dx \neq \big(\int_a^b f(x)\,dx\big)\big(\int_a^b g(x)\,dx\big)$. Par exemple, soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0, \frac{1}{2}[$ et $f(x) = 0$ sinon. Soit

$g : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = 1$ si $x \in [\frac{1}{2}, 1[$ et $g(x) = 0$ sinon. Alors $f(x) \times g(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$ et donc $\int_0^1 f(x)g(x)\,dx = 0$ alors que $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$ et $\int_0^1 g(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

4. Méthodes de calcul d'intégrales

Pour trouver une primitive d'une fonction f on peut avoir la chance de reconnaître que f est la dérivée d'une fonction bien connue. C'est malheureusement très rarement le cas, et on ne connaît pas les primitives de la plupart des fonctions. Cependant nous allons voir des techniques qui permettent des calculer des intégrales et des primitives : l'intégration par parties, le changement de variable et intégration des fractions rationnelles.

4.1. Intégration par parties

Théorème 2.
Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $[a,b]$.

$$\boxed{\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = \big[uv\big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx}$$

Notation. Le crochet $\big[F\big]_a^b$ est par définition $\big[F\big]_a^b = F(b) - F(a)$. Donc $\big[uv\big]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$. Si l'on omet les bornes alors $\big[F\big]$ désigne la fonction $F + c$ où c est une constante quelconque.
La formule d'intégration par parties pour les primitives est la même mais sans les bornes :

$$\int u(x)v'(x)\,dx = \big[uv\big] - \int u'(x)v(x)\,dx.$$

La preuve est très simple :

Démonstration. On a $(uv)' = u'v + uv'$. Donc $\int_a^b (u'v + uv') = \int_a^b (uv)' = \big[uv\big]_a^b$. D'où $\int_a^b uv' = \big[uv\big]_a^b - \int_a^b u'v$. □

L'utilisation de l'intégration par parties repose sur l'idée suivante : on ne sait pas calculer directement l'intégrale d'une fonction f s'écrivant comme un produit $f(x) = u(x)v'(x)$ mais si l'on sait calculer l'intégrale de $g(x) = u'(x)v(x)$ (que l'on espère plus simple) alors par la formule d'intégration par parties on aura l'intégrale de f.

Exemple 5.

1. Calcul de $\int_0^1 xe^x\,dx$. On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$. Nous aurons besoin de savoir que $u'(x) = 1$ et qu'une primitive de v' est simplement $v(x) = e^x$. La formule d'intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xe^x\,dx &= \int_0^1 u(x)v'(x)\,dx \\
&= \big[u(x)v(x)\big]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)\,dx \\
&= \big[xe^x\big]_0^1 - \int_0^1 1\cdot e^x\,dx \\
&= \big(1\cdot e^1 - 0\cdot e^0\big) - \big[e^x\big]_0^1 \\
&= e - (e^1 - e^0) \\
&= 1
\end{aligned}$$

2. Calcul de $\int_1^e x\ln x\,dx$.

On pose cette fois $u = \ln x$ et $v' = x$. Ainsi $u' = \frac{1}{x}$ et $v = \frac{x^2}{2}$. Alors

$$\int_1^e \ln x \cdot x\,dx = \int_1^e uv' = \left[uv\right]_1^e - \int_1^e u'v = \left[\ln x \cdot \tfrac{x^2}{2}\right]_1^e - \int_1^e \tfrac{1}{x}\tfrac{x^2}{2}\,dx$$
$$= \left(\ln e \tfrac{e^2}{2} - \ln 1 \tfrac{1^2}{2}\right) - \tfrac{1}{2}\int_1^e x\,dx = \tfrac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\tfrac{x^2}{2}\right]_1^e = \tfrac{e^2}{2} - \tfrac{e^2}{4} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{e^2+1}{4}$$

3. Calcul de $\int \arcsin x\,dx$.
   Pour déterminer une primitive de $\arcsin x$, nous faisons artificiellement apparaître un produit en écrivant $\arcsin x = 1 \cdot \arcsin x$ pour appliquer la formule d'intégration par parties. On pose $u = \arcsin x$, $v' = 1$ (et donc $u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $v = x$) alors
$$\begin{aligned} \int 1 \cdot \arcsin x\,dx &= \left[x \arcsin x\right] - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ &= \left[x \arcsin x\right] - \left[-\sqrt{1-x^2}\right] \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c \end{aligned}$$

4. Calcul de $\int x^2 e^x\,dx$. On pose $u = x^2$ et $v' = e^x$ pour obtenir :
$$\int x^2 e^x\,dx = \left[x^2 e^x\right] - 2\int x e^x\,dx$$
   On refait une deuxième intégration par parties pour calculer
$$\int x e^x\,dx = \left[x e^x\right] - \int e^x\,dx = (x-1)e^x + c$$
   D'où
$$\int x^2 e^x\,dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + c.$$

4.2. Changement de variable

Théorème 3.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\varphi : J \to I$ une bijection de classe $\mathscr{C}^1$. Pour tout $a, b \in J$

$$\boxed{\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,dt}$$

Si F est une primitive de f alors $F \circ \varphi$ est une primitive de $\big(f \circ \varphi\big) \cdot \varphi'$.

Voici un moyen simple de s'en souvenir. En effet si l'on note $x = \varphi(t)$ alors par dérivation on obtient $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ donc $dx = \varphi'(t)\,dt$. D'où la substitution $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$.

Démonstration. Comme F est une primitive de f alors $F'(x) = f(x)$ et par la formule de la dérivation de la composition $F \circ \varphi$ on a
$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$
Donc $F \circ \varphi$ est une primitive de $f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Pour les intégrales : $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \left[F \circ \varphi\right]_a^b = F\big(\varphi(b)\big) - F\big(\varphi(a)\big) = \left[F\right]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.$ □

Remarque.
Comme φ est une bijection de J sur $\varphi(J)$, sa réciproque φ^{-1} existe et est dérivable sauf quand φ s'annule. Si φ ne s'annule pas, on peut écrire $t = \varphi^{-1}(x)$ et faire un changement de variable en sens inverse.

Exemple 6.
Calculons la primitive $F = \int \tan t \, dt$.

$$F = \int \tan t \, dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} \, dt \; .$$

On reconnaît ici une forme $\frac{u'}{u}$ (avec $u = \cos t$ et $u' = -\sin t$) dont une primitive est $\ln |u|$. Donc $F = \int -\frac{u'}{u} = -\big[\ln |u|\big] = -\ln |u| + c = -\ln |\cos t| + c$.

Nous allons reformuler tout cela en terme de changement de variable. Notons $\varphi(t) = \cos t$ alors $\varphi'(t) = -\sin t$, donc

$$F = \int -\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \, dt$$

Si f désigne la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$, qui est bijective tant que $x \neq 0$; alors $F = -\int \varphi'(t) f(\varphi(t)) \, dt$. En posant $x = \varphi(t)$ et donc $dx = \varphi'(t) dt$, on reconnaît la formule du changement de variable, par conséquent

$$F \circ \varphi^{-1} = -\int f(x) \, dx = -\int \frac{1}{x} \, dx = -\ln |x| + c \; .$$

Comme $x = \varphi(t) = \cos t$, on retrouve bien $F(t) = -\ln |\cos t| + c$.
Remarque : pour que l'intégrale soit bien définie il faut que $\tan t$ soit définie, donc $t \not\equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi$. La restriction d'une primitive à un intervalle $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ est donc de la forme $-\ln |\cos t| + c$. Mais la constante c peut être différente sur un intervalle différent.

Exemple 7.
Calcul de $\int_0^{1/2} \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} \, dx$.
Soit le changement de variable $u = \varphi(x) = 1 - x^2$. Alors $du = \varphi'(x) \, dx = -2x \, dx$. Pour $x = 0$ on a $u = \varphi(0) = 1$ et pour $x = \frac{1}{2}$ on a $u = \varphi(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$. Comme $\varphi'(x) = -2x$, φ est une bijection de $[0, \frac{1}{2}]$ sur $[1, \frac{3}{4}]$. Alors

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \frac{x \, dx}{(1-x^2)^{3/2}} &= \int_1^{3/4} \frac{\frac{-du}{2}}{u^{3/2}} = -\frac{1}{2} \int_1^{3/4} u^{-3/2} \, du \\ &= -\frac{1}{2} \big[-2u^{-1/2}\big]_1^{3/4} = \big[\frac{1}{\sqrt{u}}\big]_1^{3/4} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} - 1 = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1. \end{aligned}$$

Exemple 8.
Calcul de $\int_0^{1/2} \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} \, dx$.
On effectue le changement de variable $x = \varphi(t) = \sin t$ et $dx = \cos t \, dt$. De plus $t = \arcsin x$ donc pour $x = 0$ on a $t = \arcsin(0) = 0$ et pour $x = \frac{1}{2}$ on a $t = \arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$. Comme φ est une bijection de $[0, \frac{\pi}{6}]$ sur $[0, \frac{1}{2}]$,

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} &= \int_0^{\pi/6} \frac{\cos t \, dt}{(1-\sin^2 t)^{3/2}} = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos t \, dt}{(\cos^2 t)^{3/2}} \\ &= \int_0^{\pi/6} \frac{\cos t}{\cos^3 t} \, dt = \int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos^2 t} \, dt = \big[\tan t\big]_0^{\pi/6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \; . \end{aligned}$$

Exemple 9.
Calcul de $\int \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} \, dx$.

Soit le changement de variable $x = \tan t$ donc $t = \arctan x$ et $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$ (la fonction tangente établit une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$). Donc

$$\begin{aligned} F &= \int \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\, dx = \int \frac{1}{(1+\tan^2 t)^{3/2}} \frac{dt}{\cos^2 t} \\ &= \int (\cos^2 t)^{3/2} \frac{dt}{\cos^2 t} \qquad \text{car } 1+\tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} \\ &= \int \cos t\, dt = \big[\sin t\big] = \sin t + c = \sin(\arctan x) + c \end{aligned}$$

Donc

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\, dx = \sin(\arctan x) + c.$$

En manipulant un peu les fonctions on trouverait que la primitive s'écrit aussi $F(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + c$.

5. Intégration des fractions rationnelles

5.1. Trois situations de base

On souhaite d'abord intégrer les fractions rationnelles $f(x) = \frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}$ avec $\alpha, \beta, a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$.

Premier cas. Le dénominateur $ax^2 + bx + c$ possède deux racines réelles distinctes $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Alors $f(x)$ s'écrit aussi $f(x) = \frac{\alpha x+\beta}{a(x-x_1)(x-x_2)}$ et il existe des nombres $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$. On a donc

$$\int f(x)\, dx = A \ln|x - x_1| + B \ln|x - x_2| + c$$

sur chacun des intervalles $]-\infty, x_1[$, $]x_1, x_2[$, $]x_2, +\infty[$ (si $x_1 < x_2$).

Deuxième cas. Le dénominateur $ax^2 + bx + c$ possède une racine double $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors $f(x) = \frac{\alpha x+\beta}{a(x-x_0)^2}$ et il existe des nombres $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \frac{A}{(x-x_0)^2} + \frac{B}{x-x_0}$. On a alors

$$\int f(x)\, dx = -\frac{A}{x - x_0} + B \ln|x - x_0| + c$$

sur chacun des intervalles $]-\infty, x_0[$, $]x_0, +\infty[$.

Troisième cas. Le dénominateur $ax^2 + bx + c$ ne possède pas de racine réelle. Voyons comment faire sur un exemple.

Exemple 10.
Soit $f(x) = \frac{x+1}{2x^2+x+1}$. Dans un premier temps on fait apparaître une fraction du type $\frac{u'}{u}$ (que l'on sait intégrer en $\ln|u|$).

$$f(x) = \frac{(4x+1)\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1}{2x^2+x+1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4x+1}{2x^2+x+1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2x^2+x+1}$$

On peut intégrer la fraction $\frac{4x+1}{2x^2+x+1}$:

$$\int \frac{4x+1}{2x^2+x+1}\, dx = \int \frac{u'(x)}{u(x)}\, dx = \ln\left|2x^2+x+1\right| + c$$

Occupons nous de l'autre partie $\frac{1}{2x^2+x+1}$, nous allons l'écrire sous la forme $\frac{1}{u^2+1}$ (dont une primitive est $\arctan u$).

$$\begin{aligned}\frac{1}{2x^2+x+1} &= \frac{1}{2(x+\frac14)^2-\frac18+1} = \frac{1}{2(x+\frac14)^2+\frac78} \\ &= \frac87\cdot\frac{1}{\frac87 2(x+\frac14)^2+1} = \frac87\cdot\frac{1}{\left(\frac{4}{\sqrt7}(x+\frac14)\right)^2+1}\end{aligned}$$

On pose le changement de variable $u=\frac{4}{\sqrt7}(x+\frac14)$ (et donc $du=\frac{4}{\sqrt7}dx$) pour trouver

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{2x^2+x+1} &= \int\frac87\frac{dx}{\left(\frac{4}{\sqrt7}(x+\frac14)\right)^2+1} = \frac87\int\frac{du}{u^2+1}\cdot\frac{\sqrt7}{4} \\ &= \frac{2}{\sqrt7}\arctan u+c = \frac{2}{\sqrt7}\arctan\left(\frac{4}{\sqrt7}(x+\frac14)\right)+c\,.\end{aligned}$$

Finalement :

$$\int f(x)\,dx = \frac14\ln\left(2x^2+x+1\right)+\frac{3}{2\sqrt7}\arctan\left(\frac{4}{\sqrt7}(x+\frac14)\right)+c$$

5.2. Intégration des fonctions trigonométriques

On peut aussi calculer les primitives de la forme $\int P(\cos x,\sin x)\,dx$ ou de la forme $\int\frac{P(\cos x,\sin x)}{Q(\cos x,\sin x)}\,dx$ quand P et Q sont des polynômes, en se ramenant à intégrer une fraction rationnelle.
Il existe deux méthodes :

- les règles de Bioche sont assez efficaces mais ne fonctionnent pas toujours ;
- le changement de variable $t=\tan\frac{x}{2}$ fonctionne tout le temps mais conduit à davantage de calculs.

Les règles de Bioche. On note $\omega(x)=f(x)\,dx$. On a alors $\omega(-x)=f(-x)\,d(-x)=-f(-x)\,dx$ et $\omega(\pi-x)=f(\pi-x)\,d(\pi-x)=-f(\pi-x)\,dx$.

- Si $\omega(-x)=\omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $u=\cos x$.
- Si $\omega(\pi-x)=\omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $u=\sin x$.
- Si $\omega(\pi+x)=\omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $u=\tan x$.

Exemple 11.
Calcul de la primitive $\int\frac{\cos x\,dx}{2-\cos^2 x}$
On note $\omega(x)=\frac{\cos x\,dx}{2-\cos^2 x}$. Comme $\omega(\pi-x)=\frac{\cos(\pi-x)\,d(\pi-x)}{2-\cos^2(\pi-x)}=\frac{(-\cos x)\,(-dx)}{2-\cos^2 x}=\omega(x)$ alors le changement de variable qui convient est $u=\sin x$ pour lequel $du=\cos x\,dx$. Ainsi :

$$\int\frac{\cos x\,dx}{2-\cos^2 x}=\int\frac{\cos x\,dx}{2-(1-\sin^2 x)}=\int\frac{du}{1+u^2}=\left[\arctan u\right]=\arctan(\sin x)+c\,.$$