Module : Analyse 2 | **Filière : Année Préparatoire**

Série N.°6 : Intégrales | **Année Universitaire : 2019-2020**

Exercice 1. Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle considéré :

1. $f(x) = (3x-1)(3x^2-2x+3)^3,\ I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \frac{1-x^2}{(x^3-3x+1)^3},\ I =]-\infty, -2[$
3. $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x(x-2)}},\ I =]-\infty, 0[$
4. $f(x) = \frac{1}{x\ln(x^2)},\ I =]1, +\infty[$.

Exercice 2. Intégration par parties

Calculer les intégrales suivantes :

$$1.\ I = \int_0^1 xe^x dx \qquad 2.\ J = \int_1^e x^2\ln(x)dx.$$

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$1.\ x \mapsto \arctan(x) \qquad 2.\ x \mapsto (\ln(x))^2 \qquad 3.\ x \mapsto \sin(\ln(x)).$$

Exercice 3. On veut chercher une primitive sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ de la fonction

$$f(x) = \frac{x^2}{(\cos(x) + x\sin(x))^2}.$$

1. Calculer la dérivée par rapport à x de $\frac{1}{\cos(x)+x\sin(x)}$ et de $\frac{x}{\cos(x)}$.
2. En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, $\int f(x)dx$.

Exercice 4. Changements de variables

En effectuant un changement de variables, calculer

$$\mathbf{I} = \int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx \qquad \mathbf{J} = \int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x}dx$$
$$\mathbf{K} = \int_1^e \frac{\ln^n(x)}{x}dx,\ n \in \mathbb{N} \qquad \mathbf{F}(x) = \int_1^x \frac{e^x}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}}dx,\ x > 0.$$

Exercice 5. Fraction rationnelle avec décomposition en éléments simples

Soit $f(x) = \frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2},\ x \in]1, +\infty[$.

1. Démontrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2}.$$

2. En déduire la primitive de f sur $]1, +\infty[$ qui s'annule en 2.

Exercice 6. Primitive de fraction rationnelles

Donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4}$ 2. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4x+5}$ 3. $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ 4. $x \mapsto \dfrac{2x+1}{x^2+x-3}$.

Exercice 7. Grande puissance

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^n} dx.$$

1. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire la valeur de I_3.

Exercice 8. Intégrale trigonométrique

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)} dx$ 2. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x)} dx$ 3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos(x)) \tan(x) dx$

Exercices Supplémentaires

Exercice 9. Intégration par parties

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_0^1 x(\arctan(x))^2 dx$ 2. $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2} dx$.

Exercice 10.

Donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{3x+2}{x^2+x+1}$ 2. $x \mapsto \dfrac{2x}{x^2-x+1}$

Exercice 11. Avec une racine carrée

On se propose de calculer $I = \int_0^{\frac{5}{2}} \sqrt{-x^2+2x+8} dx$

1. Mettre le trinôme sous forme canonique.
2. En effectuant deux changements de variable, calculer la valeur de I.

Exercice 12. Fonction avec un axe de symétrie

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $x \in [a, b]$, on $f(a+b-x) = f(x)$. Montrer que

$$\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

En déduire la valeur de $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)} dx$.