ECOLE MAROCAINE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
Membre de HONORIS UNITED UNIVERSITIES

Module : Analyse 2 | **Filière : Année Préparatoire**
Solution de la série N.°6 : Intégrales | **Année Universitaire : 2019-2020**

Solution 1.

1. Posons $u(x) = 3x^2 - 2x + 3$. Donc, $u'(x) = 6x - 2 = 2(3x - 1)$, cela implique que $\frac{1}{2}u'(x) = (3x - 1)$. On a donc

$$f(x) = \frac{1}{2} \times u'(x)u^3(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}(4u'(x)u^3(x)) = \frac{1}{8} \times (u^4(x))'.$$

D'où,

$$\boxed{F(x) = \int f(x)dx = \frac{1}{8}\int (u^4(x))'dx = \frac{1}{8} \times (3x^2 - 2x + 3)^4 + c.}$$

2. Posons $u(x) = x^3 - 3x + 1$. Donc, $u'(x) = 3x^2 - 3 = -3(1 - x^2)$, cela implique que $-\frac{1}{3}u'(x) = (1 - x^2)$. On a donc

$$f(x) = -\frac{1}{3} \times \frac{u'(x)}{u^3(x)} = -\frac{1}{3} \times -\frac{1}{2}\left(\frac{-2u'(x)u(x)}{u^4(x)}\right) = \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{u^2(x)}\right)'.$$

D'où,

$$\boxed{F(x) = \int f(x)dx = \frac{1}{6}\int \left(\frac{1}{u^2(x)}\right)' dx = \frac{1}{6} \times \frac{1}{(x^3 - 3x + 1)^2} + c.}$$

3. Posons $u(x) = x(x - 2) = x^2 - 2x$. Donc, $u'(x) = 2x - 2 = 2(x - 1)$, cela implique que $\frac{1}{2}u'(x) = (x - 1)$. On a donc

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} = \left(\sqrt{u(x)}\right)'.$$

D'où

$$F(x) = \int f(x)dx = \int \left(\sqrt{u(x)}\right)' dx = \sqrt{u(x)} + c.$$

4. Tout d'abord, on sait bien que $\ln(x^2) = 2\ln(x)$, où $x \in]1, +\infty[$. Posons $u(x) = \ln(x)$. Donc $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $2u(x) = \ln(x^2)$. On a donc

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{2} \times (\ln(u(x)))'.$$

D'où,

$$\boxed{F(x) = \int f(x)dx = \frac{1}{2}\int (\ln(u(x)))'dx = \frac{1}{2}\ln(u(x)) + c = \frac{1}{2}\ln(\ln(x)) + c.}$$

Solution 2.

1. On intègre par partie en posant :

$$\begin{array}{ll} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^x & v(x) = e^x. \end{array}$$

En utilisant théorème 2 page 65, on obtient

$$\begin{aligned} I &:= \int_0^1 xe^x \, dx \\ &= \int_0^1 u(x)v'(x) \, dx \\ &= \big[u(x)v(x)\big]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x) \, dx \\ &= \big[xe^x\big]_0^1 \quad - \int_0^1 1 \cdot e^x \, dx \\ &= \big(1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0\big) - \big[e^x\big]_0^1 \\ &= e - (e^1 - e^0) \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{I = 1}$$

2. On intègre par partie en posant :

$$\begin{array}{ll} u(x) = \ln(x) & u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = x^2 & v(x) = \frac{1}{3}x^3. \end{array}$$

On obtient donc,

$$\begin{aligned} J := \int_1^e x^2 \ln(x) \, dx &= \int_1^e u(x)v'(x) \, dx \\ &= \big[u(x)v(x)\big]_1^e - \int_1^e u'(x)v(x) \, dx \\ &= \big[\frac{1}{3}x^3 \ln(x)\big]_1^e \quad - \frac{1}{3}\int_1^e x^2 \, dx \\ &= \big(\frac{e^3}{3}\ln(e) - \frac{1}{3}\ln(1)\big) - \frac{1}{3}\big[\frac{1}{3}x^3\big]_1^e \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{9}(e^3 - 1) \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{J = \frac{2e^3 + 1}{9}}$$

3. Tout d'abord, puisque la fonction $\arctan(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$. Pour déterminer une primitive de cette fonction, nous utilisons une intégration par parties en posant :

$$\begin{array}{ll} u(x) = \arctan(x) & u'(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ v'(x) = 1 & v(x) = x. \end{array}$$

On obtient donc,

$$\begin{aligned} F(x) = \int \arctan(x)\,dx = & \int u(x)v'(x)\,dx \\ & = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx \\ & = x\arctan(x) \quad - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx \end{aligned}$$

Maintenant, nous devons déterminer une primitive de $\frac{x}{1+x^2}$. On a donc,

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{2}\times\frac{2x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{2}\times\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{2}(\ln(1+x^2))'\,dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c.$$

D'où,

$$\boxed{F(x) = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c_1.}$$

4. La fonction $(\ln(x))^2$ est continue sur $]0,+\infty[$, donc elle admet une primitive sur $]0,+\infty[$. Nous cherchons une primitive sur $]0,+\infty[$ en utilisant une intégration par parties en posant :

$$\begin{array}{ll} u(x) = (\ln(x))^2 & u'(x) = \frac{2\ln(x)}{x} \\ v'(x) = 1 & v(x) = x. \end{array}$$

On obtient donc,

$$\begin{aligned} L(x) = \int (\ln(x))^2\,dx = & \int u(x)v'(x)\,dx \\ & = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx \\ & = x(\ln(x))^2 \quad - 2\int \ln(x)\,dx \end{aligned}$$

Maintenant, nous devons déterminer une primitive de $\ln(x)$. Pour cela, nous faisons une intégration par partie en posant :

$$\begin{array}{ll} q(x) = \ln(x) & q'(x) = \frac{1}{x} \\ h'(x) = 1 & h(x) = x. \end{array}$$

On obtient donc,

$$\begin{aligned} \int \ln(x)\,dx = & \int q(x)h'(x)\,dx \\ & = q(x)h(x) - \int q'(x)h(x)\,dx \\ & = x\ln(x) - \int 1\,dx \\ & = x\ln(x) - x + c \end{aligned}$$

Finalement, on trouve

$$\boxed{L(x) = x(\ln(x))^2 - 2(x\ln(x) - x + c) = x(\ln(x))^2 - 2x\ln(x) + 2x + c_1.}$$

5. On va intégrer par parties deux fois. On travaille sur l'intervalle $]0, +\infty[$, là où la fonction est bien définie et continue. On pose alors,

$$\begin{array}{ll} u(x) = \sin(\ln(x)) & u'(x) = \frac{1}{x}\cos(\ln(x)) \\ v'(x) = 1 & v(x) = x. \end{array}$$

On obtient donc,

$$\begin{aligned} J(x) := \int \sin(\ln(x))\ dx &= \int u(x)v'(x)\ dx \\ &= u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\ dx \\ &= x\sin(\ln(x)) - \int \cos(\ln(x))\ dx \end{aligned}$$

Déterminons une primitive $\int \cos(\ln(x))\ dx$. Pour cela, on intègre une deuxième fois par parties en posant

$$\begin{array}{ll} q(x) = \cos(\ln(x)) & q'(x) = -\frac{1}{x}\sin(\ln(x)) \\ h'(x) = 1 & h(x) = x. \end{array}$$

On obtient donc,

$$\begin{aligned} \int \cos(\ln(x))\ dx &= \int q(x)h'(x)\ dx \\ &= q(x)h(x) - \int q'(x)h(x)\ dx \\ &= x\cos(\ln(x)) + \int \sin(\ln(x))\ dx \end{aligned}$$

En mettant tout cela ensemble, on trouve

$$J(x) := \int \sin(\ln(x))\ dx = x\sin(\ln(x)) - x\cos(\ln(x)) - \underbrace{\int \sin(\ln(x))\ dx}_{J(x)}$$

ce qui est équivalent à

$$2J(x) = x\sin(\ln(x)) - x\cos(\ln(x))$$

d'où

$$\boxed{J(x) = \frac{x}{2}\left(\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x))\right) + c.}$$

Solution 3.

1. i) Calculons la dérivée de $\frac{1}{\cos(x)+x\sin(x)}$.

$$\left(\frac{1}{\cos(x)+x\sin(x)}\right)' = -\frac{(\cos(x)+x\sin(x))'}{(\cos(x)+x\sin(x))^2} = -\frac{-\sin(x)+\sin(x)+x\cos(x)}{(\cos(x)+x\sin(x))^2}$$

d'où

$$\boxed{\left(\frac{1}{\cos(x)+x\sin(x)}\right)' = -\frac{x\cos(x)}{(\cos(x)+x\sin(x))^2} \qquad (E_1)}$$

ii) Calculons la dérivée de $\frac{x}{\cos(x)}$.

$$\boxed{\left(\frac{x}{\cos(x)}\right)' = \frac{x'\cos(x)-x\cos(x)'}{\cos^2(x)} = \frac{\cos(x)+x\sin(x)}{\cos^2(x)} \qquad (E_2)}$$

2. Tout d'abord, la fonction f peut être s'écrit sous la forme :

$$f(x) = \frac{x\cos(x)}{(\cos(x)+x\sin(x))^2} \times \frac{x}{\cos(x)}.$$

Maintenant, on intègre par parties on posant (voir (E_1) et (E_2)) :

$$\begin{array}{ll} u(x) = \frac{x}{\cos(x)} & u'(x) = \frac{\cos(x)+x\sin(x)}{\cos^2(x)} \\ v'(x) = \frac{x\cos(x)}{(\cos(x)+x\sin(x))^2} & v(x) = -\frac{1}{\cos(x)+x\sin(x)}. \end{array}$$

On obtient donc,

$$\begin{aligned} \int f(x)\,dx = \int \frac{x^2}{(\cos(x)+x\sin(x))^2}\,dx &= \int u(x)v'(x)\,dx \\ &= u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx \\ &= -\frac{x}{\cos(x)(\cos(x)+x\sin(x))} + \int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx \\ &= -\frac{x}{\cos(x)(\cos(x)+x\sin(x))} + \int (\tan(x))'\,dx \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\int f(x)\,dx = -\frac{x}{\cos(x)(\cos(x)+x\sin(x))} + \tan(x) + c}$$

Solution 4.

1. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est une bijection de classe C^1 de $[1,4]$ sur $[1,2]$. Donc, on peut poser $u = \sqrt{x}$. Lorsque $x = 1, u = 1$ et lorsque $x = 4, u = 2$. De plus, on a

$$\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{1-u}{u}$$

et

$$u = \sqrt{x} \implies t = u^2 \implies dt = 2udu.$$

On obtient donc,

$$\begin{aligned} I := \int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx &= \int_1^2 \frac{1-u}{u} 2u\, du \\ &= \int_1^2 (2-2u)du \\ &= \left[2u-u^2\right]_1^2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

2. La fonction $x \mapsto e^x$ est une bijection de $[1,2]$ sur $[e, e^2]$. Donc, on peut effectuer le changement de variable $u = e^x$. Alors, lorsque $x = 1, u = e$ et lorsque $x = 2, u = e^2$. De plus, on a

$$u = e^x \implies du = e^x dx$$

et

$$\frac{e^x}{1+e^x} dx = \frac{1}{1+u} du$$

On obtient donc,

$$\begin{aligned} J := \int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x}\, dx &= \int_e^{e^2} \frac{1}{1+u}\, du \\ &= \left[\ln(|1+u|)\right]_e^{e^2} \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{J = \ln\left(\frac{1+e^2}{1+e}\right)}$$

3. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est une bijection de $[1,e]$ sur $[0,1]$. Donc, on peut effectuer le changement de variable $u = \ln(x)$. Alors, lorsque $x = 1, u = 0$ et lorsque $x = e, u = 1$. De plus, on a

$$u = \ln(x) \implies du = \frac{1}{x} dx$$

et

$$\frac{\ln^n(x)}{x} dx = u^n du$$

On obtient donc,

$$\begin{aligned} K := \int_1^e \frac{\ln^n(x)}{x}\, dx &= \int_0^1 u^n\, du \\ &= \left[\frac{1}{n+1} u^{n+1}\right]_0^1 \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{K = \frac{1}{n+1}}$$

4. La fonction $t \mapsto \sqrt{e^t - 1}$ est une bijection de $[1,x]$ sur $[\sqrt{e-1}, \sqrt{e^x-1}]$. Donc, on peut effectuer le changement de variable $u = \sqrt{e^t-1}$. Alors, lorsque $t = 1, u = \sqrt{e-1}$ et lorsque $t = x, u = \sqrt{e^x-1}$. De plus, on a

$$u = \sqrt{e^t - 1} \implies du = \frac{e^t}{2\sqrt{e^t-1}} dt$$

et

$$u = \sqrt{e^t - 1} \implies u^2 = e^t - 1 \implies u^2 + 4 = 3 + e^t$$

On obtient donc,

$$\begin{aligned}
F(x) := \int_1^x \frac{e^t}{(3+e^t)\sqrt{e^t-1}}\, dt = 2\int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^x-1}} \frac{1}{u^2+4}\, du \\
= 2\int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^x-1}} \frac{1}{4} \times \frac{1}{1+(\frac{u}{2})^2}\, du \\
= \frac{1}{2}\int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^x-1}} \frac{1}{1+(\frac{u}{2})^2}\, du
\end{aligned}$$

Effectuons un autre changement de variable en posant $\frac{u}{2} = y$. Alors, $du = 2dy$ et lorsque $u = \sqrt{e-1}$, $y = \frac{\sqrt{e-1}}{2}$ et lorsque $u = \sqrt{e^x - 1}$, $y = \frac{\sqrt{e^x-1}}{2}$. De plus, une primitive de $\frac{1}{1+y^2}$ est donnée par la fonction $\arctan(y)$ (voir le cours).
Finalement, on trouve On obtient donc,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1}{2}\int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^x-1}} \frac{1}{1+(\frac{u}{2})^2}\, du \\
&= \frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{e-1}}{2}}^{\frac{\sqrt{e^x-1}}{2}} \frac{2}{1+y^2}\, dy \\
&= \int_{\frac{\sqrt{e-1}}{2}}^{\frac{\sqrt{e^x-1}}{2}} \frac{1}{1+y^2}\, dy \\
&= \big[\arctan(y)\big]_{\frac{\sqrt{e-1}}{2}}^{\frac{\sqrt{e^x-1}}{2}}
\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{F(x) = \arctan\left(\frac{\sqrt{e^x-1}}{2}\right) - \arctan\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right)}$$

Solution 5.

1. On commence par mettre les fractions au même dénominateur, puis on regroupe les termes de même degré. En effet, pour tout $x \in]1, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2} &= \frac{a(x+3)^2 + b(x-1)(x+3) + c(x-1)}{(x-1)(x+3)^2} \\
&= \frac{a(x^2+6x+9) + b(x^2+2x-3) + c(x-1)}{(x-1)(x+3)^2} \\
&= \frac{(a+b)x^2 + (6a+2b+c)x + (9a-3b-c)}{(x-1)(x+3)^2}.
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2}$$

si et seulement si

$$\frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2} = \frac{(a+b)x^2 + (6a+2b+c)x + (9a-3b-c)}{(x-1)(x+3)^2}.$$

Or deux fractions ayant le même dénominateur sont égales si elles ont le même numérateur, c'est-à-dire :

$$5x^2 + 21x + 22 = (a+b)x^2 + (6a+2b+c)x + (9a-3b-c).$$

Il faut donc que les coefficients de même degré des deux polynômes soient égaux deux à deux, c'est à dire :

$$(E_1):\ a+b=5, \quad (E_2):\ 6a+2b+c=21 \quad \text{et} \quad (E_3):\ 9a-3b-c=22.$$

Il ne reste plus qu'à résoudre ce système pour trouver a, b et c. Remarquons qu'à partir de (E_1) on a $a = 5-b$. Remplaçons ceci dans (E_2) et dans (E_3), on trouve

$$(E_4):\ -4b+c=-9 \quad \text{et} \quad (E_5)\ :-12b-c=-23$$

En faisant la somme de (E_4) et (E_5), on trouve $-16b=-32$, donc $b=2$. Maintenant, remplaçons $b=2$ dans (E_4) (où dans(E_5)) on trouve $c=-1$. Finalement, d'après (E_1), on obtient $a=3$. Donc, pour tout $x \in]1,+\infty[$,

$$\boxed{f(x) = \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+3} - \frac{1}{(x+3)^2}.}$$

2. Déduisant une primitive de f :

$$\begin{aligned} F(x) = \int f(x)dx &= \int \left(\frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+3} - \frac{1}{(x+3)^2}\right) dx \\ &= \int \frac{3}{x-1}dx + \int \frac{2}{x+3}dx - \int \frac{1}{(x+3)^2} \\ &= 3\int \frac{1}{x-1}dx + 2\int \frac{1}{x+3}dx - \int \frac{1}{(x+3)^2}. \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{F(x) = 3\ln(x-1) + 2\ln(x+3) + \frac{1}{x+3} + c, \quad \text{avec } x \in]1,+\infty[.}$$

Maintenant, pour répondre à notre question il faut que $F(2)=0$, ce qui est équivalent à

$$3\ln(1) + 2\ln(5) + \frac{1}{5} + c = 0$$

donc,

$$c = -2\ln(5) - \frac{1}{5},$$

finalement, la fonction F est donnée par

$$\boxed{F(x) = 3\ln(x-1) + 2\ln(x+3) + \frac{1}{x+3} - 2\ln(5) - \frac{1}{5}, \quad \text{avec } x \in]1,+\infty[.}$$

Solution 6.

1. Tout d'abord, on a $x^2+4 = x^2+2^2$. Donc,

$$F(x) = \int \frac{1}{x^2+4}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+(\frac{x}{2})^2}dx.$$

Effectuons un changement de variable en posant $\frac{x}{2} = y$. Alors $dx = 2dy$. Donc, on obtient :

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{4}\int \frac{2}{1+y^2}dy = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+y^2}dy = \frac{1}{2}\arctan(y) + c = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c}$$

2. On écrit le dénominateur sous la forme $x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1$. En utilisant la même méthode que précédente, on obtient

$$\boxed{F(x) = \int \frac{1}{x^2+4x+5}dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+1}dx = \arctan(x+2) + c.}$$

3. Le dénominateur s'écrit sous la forme $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$. On sait donc qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x} = \frac{x(a-b)+a+b}{(1-x)(1+x)}.$$

En utilisant la même technique que dans la Solution 5 question 1, on obtient $a = b = \frac{1}{2}$. D'où

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+x}.$$

Finalement,

$$F(x) = \int \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x}dx$$

$\Leftrightarrow$

$$\boxed{F(x) = -\frac{1}{2}\ln|1-x| + \frac{1}{2}\ln|1+x| + c.}$$

4. Cette question est très facile, car le numérateur est exactement la dérivée du dénominateur, c'est-à-dire :

$$\frac{2x+1}{x^2+x-3} = \frac{(x^2+x-3)'}{x^2+x-3}$$

donc, une primitive de la fonction recherchée est donné par

$$F(x) = \int \frac{2x+1}{x^2+x-3}dx = \int \frac{(x^2+x-3)'}{x^2+x-3}dx$$

d'où,

$$\boxed{F(x) = \ln|x^2+x-3| + c.}$$

Solution 7.

1. Pour exprimer I_{n+1} en fonction de I_n, nous utiliserons une intégration par parties en posant :

$$\begin{array}{ll} u(x) = \frac{1}{(x^2+1)^n} & u'(x) = \frac{-2nx}{(x^2+1)^{n+1}} \\ v'(x) = 1 & v(x) = x. \end{array}$$

Donc, on a

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^n}dx = \left[\frac{x}{(x^2+1)^n}\right]_0^1 + 2n\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}dx$$

d'où

$$\boxed{I_n = \frac{1}{2^n} + 2n\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}dx \qquad (E_1)}$$

Calculons $\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}dx$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}dx &= \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}}dx \\ &= \underbrace{\int_0^1 \frac{x^2+1}{(x^2+1)^{n+1}}dx}_{I_n} - \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}dx}_{I_{n+1}}\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}dx = I_n - I_{n+1} \qquad (E_2)}$$

Maintenant, remplaçons (E_2) dans (E_1), on obtient :

$$\begin{aligned}I_n &= \frac{1}{2^n} + 2n\left[I_n - I_{n+1}\right] \\ &= \frac{1}{2^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}\end{aligned}$$

donc

$$2nI_{n+1} = \frac{1}{2^n} + (2n-1)I_n$$

d'où

$$\boxed{I_{n+1} = \frac{1}{n2^{n+1}} + \frac{2n-1}{2n}I_n.}$$

2. Déduisant la valeur de I_3 : On a

$$I_3 = \frac{1}{2\times 2^{2+1}} + \frac{2\times 2-1}{2\times 2}I_2 = \frac{1}{16} + \frac{3}{4}I_2$$

Or

$$I_2 = \frac{1}{1\times 2^{1+1}} + \frac{2\times 1-1}{2\times 1}I_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}I_1$$

et

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx = \big[\arctan(x)\big]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

Donc,

$$I_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$$

alors,

$$I_3 = \frac{1}{16} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}\right)$$

d'où

$$\boxed{I_3 = \frac{1}{4} + \frac{3\pi}{32}}$$

Solution 8.

1. Calculons $I := \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}dx$. Effectuons un changement de variable en posant $u = \cos(x)$. Donc $du = -\sin(x)dx \Leftrightarrow -du = \sin(x)dx$. Il vient, $\sin^3(x)dx = \sin^2(x)\sin(x)dx = (1-\cos^2(x))(-du) = (1-u^2)(-du) = (u^2-1)du$. De plus, pour $x = 0 \implies u = 1$ et pour $x = \frac{\pi}{4} \implies u = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc, on a

$$\begin{aligned}
I := \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}dx &= \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{u^2-1}{1+u^2}du \\
&= \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{u^2+1-2}{1+u^2}du \\
&= \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} du - 2\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{1+u^2}du \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 - 2\left[\arctan(u)\right]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 - 2\left[\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \arctan(1)\right]
\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{I = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + \frac{\pi}{2} - 2\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

2. Calculons $I := \displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x)}dx$. Effectuons un changement de variable en posant $u = \cos(x)$. Donc $du = -\sin(x)dx \Leftrightarrow -du = \sin(x)dx$. Il vient,

$$\frac{1}{\sin(x)}dx = \frac{\sin(x)}{\sin^2(x)}dx = \frac{-du}{1-\cos^2(x)} = \frac{-du}{1-u^2}.$$

De plus, pour $x = \frac{\pi}{3} \implies u = \frac{1}{2}$ et pour $x = \frac{\pi}{2} \implies u = 0$. Donc, on a

$$\begin{aligned}
I &:= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x)}dx \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{0} \frac{-du}{1-u^2} \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-u^2}du \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-u)(1+u)}du \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}du = \frac{1}{2}\left[\ln|1+u| - \ln|1-u|\right]_0^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{I = \frac{1}{2}\ln(3)}$$

3. Calculons $I := \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos(x))\tan(x)dx$. Effectuons un changement de variable en posant $u = \cos(x)$. Donc $du = -\sin(x)dx \Leftrightarrow -du = \sin(x)dx \Leftrightarrow -du = \cos(x)\tan(x)dx \Leftrightarrow -du = u\tan(x)dx \Leftrightarrow -\frac{du}{u} = \tan(x)dx$. Il vient,

$$(1+\cos(x))\tan(x)dx = -\frac{(1+u)}{u}du.$$

De plus, pour $x = 0 \implies u = 1$ et pour $x = \frac{\pi}{3} \implies u = \frac{1}{2}$. Donc, on a

$$\begin{aligned} I &:= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos(x))\tan(x)dx \\ &= -\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{(1+u)}{u}du \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{(1+u)}{u}du \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 du + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{u}du \\ &= [u]_{\frac{1}{2}}^1 + [\ln(u)]_{\frac{1}{2}}^1 \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{I = \frac{1}{2} + \ln(2)}$$