Partie1 : Circuits Électriques en Régime sinusoïdal

I / Généralités

- La grande majorité de l'énergie électrique est produite sous forme alternative.
- Les grandeurs périodiques sont la somme de grandeurs sinusoïdales (Fourier, décomposition harmonique)

1. Définition

- Une grandeur alternative sinusoïdale est une grandeur périodique dont la valeur instantanée est une fonction sinusoïdale du temps.

- $u(t)= \hat{u}.\sin(\omega t+\varphi_u)$ où
  - t est la variable temps (en s)
  - $\hat{u}$ est l'amplitude de u (en V)
  - ω est la pulsation (en $rad.s^{-1}$)
  - φ_u est la phase à l'origine des temps (en rad)
  - $\theta=\omega t+\varphi_u$ est la phase de u à l'instant t (en rad)

a) amplitude

- Par définition, le sinus varie entre –1 et 1 ; donc u varie entre $-\hat{u}$ et $\hat{u}$.

- L'amplitude d'une grandeur sinusoïdale est sa valeur maximale, appelée aussi, valeur crête : c'est $\hat{u}$.

b) pulsation

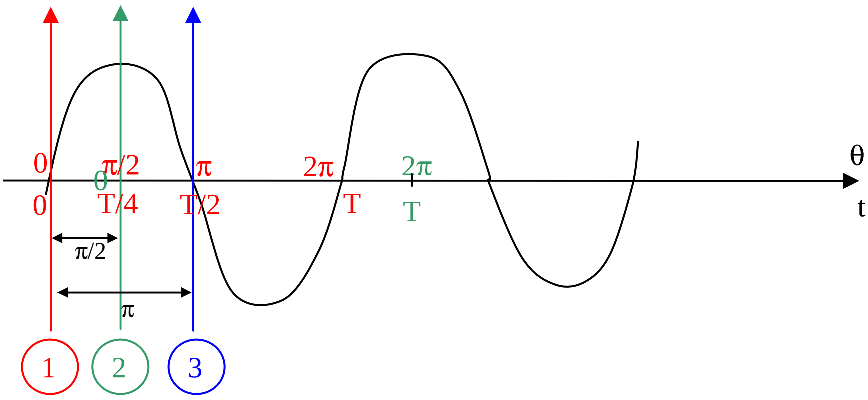
- ω en radian par seconde : $rad.s^{-1}$ (car ωt est en radian)

- on montre que $\boxed{\omega T=2\pi}$ où T est la période du signal (en s)

  or $\boxed{T=1/f}$

  donc $\boxed{\omega=2\pi/T=2\pi f}$ T en s ; f en Hz ; ω en $rad.s^{-1}$

c) phase à l'origine

- A chaque instant t correspond un angle (car ωt en rad), on l'appelle phase θ.
- φ_u est la phase de u(t) quand t=0s.
- Choix arbitraire donc φ dépend de l'observateur (contrairement à l'amplitude, pulsation, fréquence … qui sont intrinsèques au signal).
- 

Avec le choix 1 : φ = 0 ; u=û.sinωt

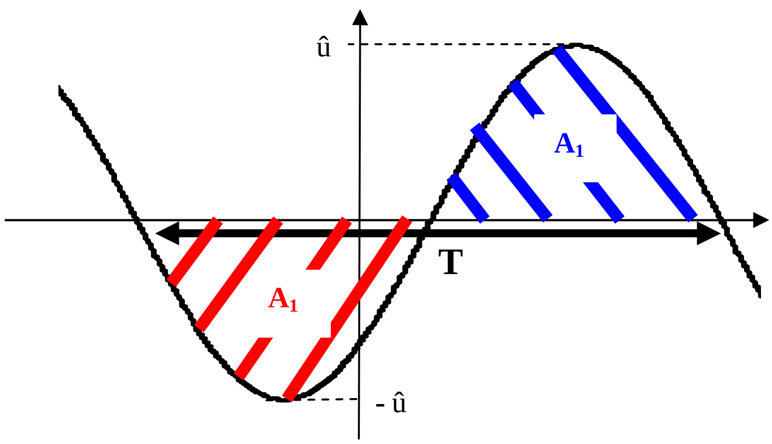
Avec le choix 1 : φ = 0 ; u=û.sin(ωt +π/2)

Avec le choix 1 : φ = 0 ; u=û.sinωt(ωt + π)

Remarque : sin(ωt +π/2) = cosωt donc une grandeur sinusoïdale s'exprime aussi bien en cos

2. valeur moyenne

- la valeur moyenne d'une grandeur sinusoïdale est nulle puisqu'elle est alternative.



3. Valeur efficace

On démontre que la valeur efficace U peut s'exprimer en fonction de l'amplitude û :

$$U=\sqrt{\overline{u^2}}=\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \qquad \boxed{U=\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}}$$

<u>Démo :</u> $u=\hat{u}.\sin(\omega t+\varphi)$ donc $u^2=\hat{u}^2.\sin^2(\omega t+\varphi)$

Or $\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$

D'où $u^2=\hat{u}^2.\left[\frac{1}{2}-\frac{\cos 2(\omega t+\varphi)}{2}\right]$

Donc $u^2=\frac{\hat{u}^2}{2}-\frac{\hat{u}^2}{2}\cos 2(\omega t+\varphi)$

Donc $\overline{u^2}=\frac{\hat{u}^2}{2}-0$

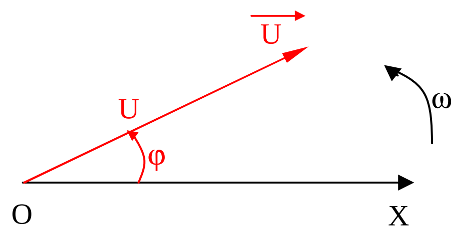
Donc $u=\sqrt{\frac{\hat{u}^2}{2}}=\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$

4. Représentation de Fresnel

$$u(t)=U\sqrt{2}\sin(\omega t+\varphi)$$

- une grandeur sinusoïdale est caractérisée par son amplitude (= valeur efficace $\times\sqrt{2}$) et sa phase $\theta=\omega t+\varphi$
- on associe donc à cette tension un vecteur tournant à ω et on le représente à l'instant t=0s.
- on a :

norme du vecteur $\leftrightarrow$ valeur efficace
angle entre vecteur et $\overrightarrow{OX}$ $\leftrightarrow$ phase à l'origine φ

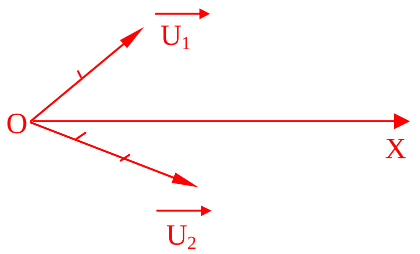


Exercice

1 Représenter par leur vecteur de Fresnel ces deux tensions :

$u_1(t)= 2\sqrt{2} \sin(\omega t + \pi/4)$

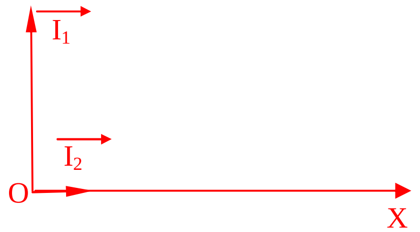
$u_2(t)= 3\sqrt{2} \sin(\omega t - \pi/6)$



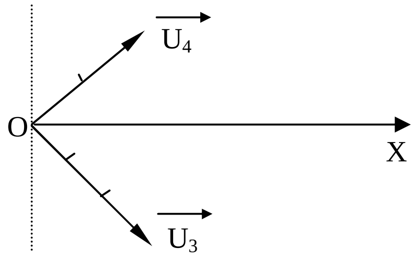
2 Représenter les courants :

$i_1(t)= 3\sqrt{2} \sin(\omega t + \pi/2)$

$i_2(t)= \sqrt{2} \sin(\omega t)$



3 D'après leurs vecteurs de Fresnel, donner l'expression de ces deux tensions:



$u_3(t)= 3\sqrt{2} \sin(\omega t - \pi/4)$

$u_4(t)= 2\sqrt{2} \sin(\omega t + \pi/4)$

5. Complexe associé

→ le vecteur de Fresnel est un outil intéressant mais il conduit à des diagrammes vectoriels et donc à une résolution graphique des problèmes

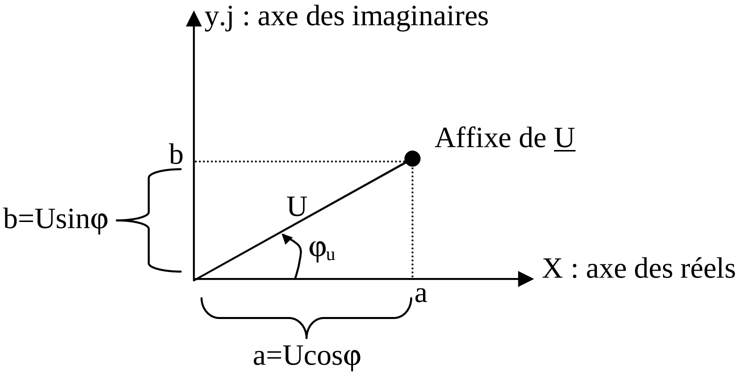
→ on utilise donc un autre outil pour étudier un circuit en régime sinusoïdal

- A une grandeur sinusoïdale u, on associe une grandeur complexe $\underline{U}$
- On a

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \text{module } U \text{ de } \underline{U} & \leftrightarrow & \text{valeur efficace } U \text{ de } u(t) \\ \text{argument } \varphi_u \text{ de } U & \leftrightarrow & \text{phase à l'origine } \varphi_u \text{ de } u(t) \end{array}}$$

$$u = U\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_u) \quad \leftrightarrow \quad U \ (U \,;\, \varphi_u) \ = \ U\cos\varphi_u + \ j.U\sin\varphi_u$$

- Rappels complexes



$\underline{U} = (U\ ;\ \varphi_u) = U\cos\varphi_u + j.U\sin\varphi_u = a + j.b$ avec $\begin{cases} U=\sqrt{a^2+b^2} \\ \varphi=\arctan b/a \end{cases}$

Exercice d'application

1 Donner l'écriture complexe de ces deux tensions

$u_1(t)= 2\sqrt{2}\ \sin(\omega t + \pi/4)$

$u_2(t)= 3\sqrt{2}\ \sin(\omega t - \pi/6)$

$\underline{U_1} = [2\ ;\pi/4]=2\cos\pi/4+2j\sin\pi/4=\sqrt{2} + \sqrt{2}\ j$

$\underline{U_2} = [3\ ;-\pi/6]=3\cos-\pi/6+3j\sin-\pi/6=3\sqrt{3}/2 - 3/2j$

$= 2{,}6 - 1{,}5\ j$

2 De même pour ces courants :

$i_1(t)= 3\sqrt{2}\ \sin(\omega t + \pi/2)$

$i_2(t)= \sqrt{2}\ \sin(\omega t)$

$\underline{I_1} = [\ 3\ ;\ \pi/2\ ] = 3j$

$\underline{I_2} = [\ 1\ ;0\ ] = 1$

3 D'après leurs formes complexes, donner l'expression de ces deux tensions:

$\underline{U_3}= [\ 3\ ;\ -\pi/4\ ]$

$\underline{U_4}= [\ 2\ ;\ \pi/4\ ]$

$u_3(t)= 3\sqrt{2}\ \sin(\omega t - \pi/4)$

$u_4(t)= 2\sqrt{2}\ \sin(\omega t + \pi/4)$

II / Etude des circuits linéaires

1. fréquence

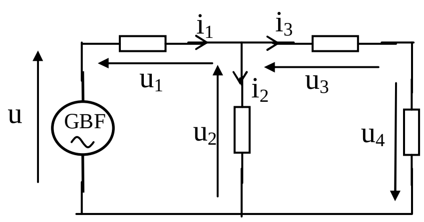
- Quand un circuit ne comporte que des éléments linéaires et est alimenté par une tension sinusoïdale u de fréquence f, tous les courants et toutes les tensions de ce circuit ont la même fréquence.

- On peut alors utiliser la représentation de Fresnel puisque tous les vecteurs tournent à la même vitesse ω. On peut également utiliser la représentation complexe.

2. Lois fondamentales

- Comme en continu, les lois des nœuds, des mailles et d'Ohm s'appliquent aux valeurs instantanées, aux complexes, et aux vecteurs de Fresnel.

- Exercices d'application



1° Déterminer l'expression de $i_1(t)$ sachant que $i_2=0{,}05\sqrt{2}\sin 628t$ et $i_3=0{,}03\sqrt{2}\sin(628t+\pi/3)$

2° Déterminer u(t) sachant que $u_1=3\sin(628t+0{,}5)$ et $u_2=4\sin(628t-1{,}2)$

1° $\underline{I_2} = (0{,}05\ ;\ 0) = 0{,}05$ et $\underline{I_3} = (0{,}03;\ \pi/3)=0.015+0.025j$

donc $\underline{I_1} = \underline{I_2} + \underline{I_3}$

$= 0{,}065 + 0.025j$

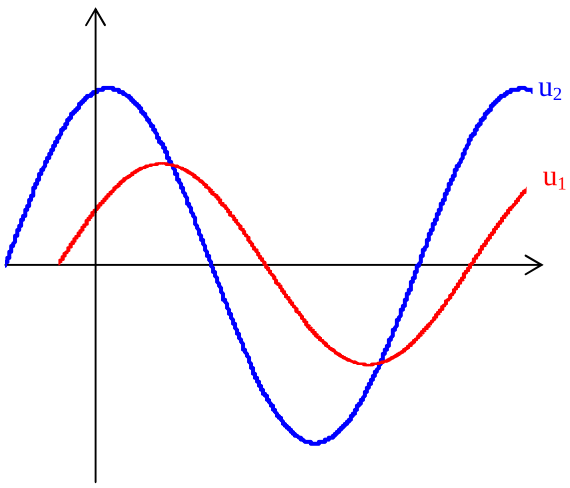
$= (0{,}07\ ;\ 0{,}38) \quad \rightarrow \quad i_1=0{,}07\sqrt{2}\sin(628t+0{,}4)$

2° $\underline{U} = \underline{U_1} + \underline{U_2} = (3/\sqrt{2}\ ;\ 0{,}5) + (4/\sqrt{2}\ ;\ -1{,}2) = 2.9 - 1.6j = (3.3\ ;\ 0{,}51)$

3. déphasage

a)

Lorsqu'on observe à l'oscilloscope deux tensions sur un même circuit, on constate qu'elles sont décalées : on dit qu'il existe une différence de phase ou déphasage.

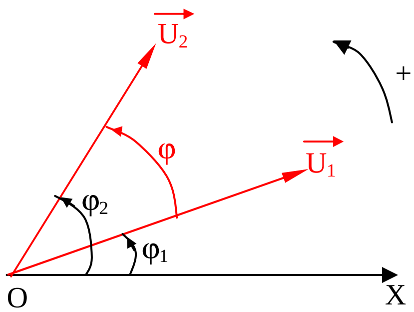


2 tensions de même fréquence

$u_1 = U_1\sqrt{2}.\sin(\omega t+\varphi_1)$

$u_2 = U_2\sqrt{2}.\sin(\omega t+\varphi_2)$

on peut les représenter par leurs vecteurs de Fresnel



$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ déphasage de u_2 par rapport à u_1. $\varphi = (\vec{U_1}\,;\vec{U_2})$

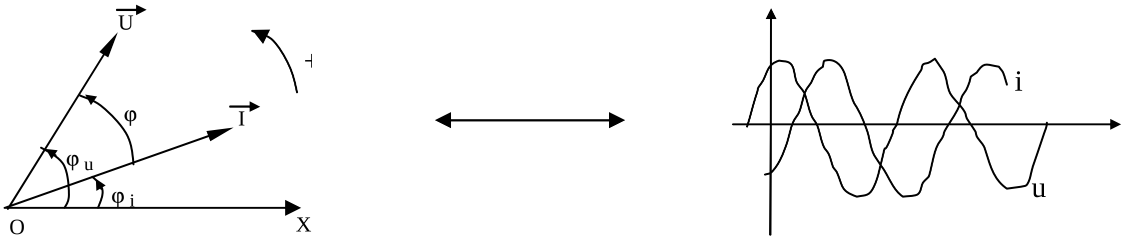
b) avance ou retard

on a un courant et une tension de pulsation ω

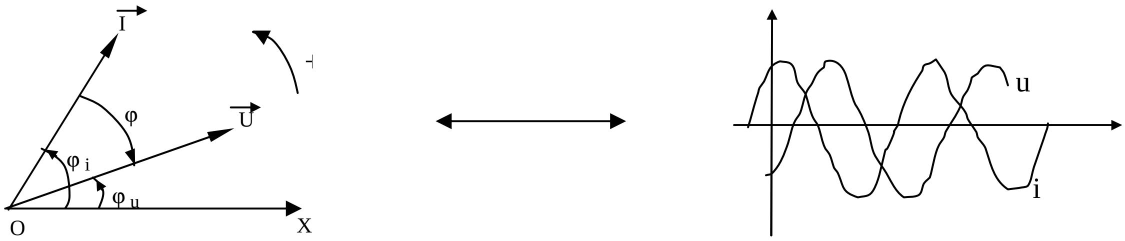
$u(t)= U\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_u)$
$i(t)= I\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_i)$

donc , le déphasage de u par rapport à i est l'angle $(\vec{I}, \vec{U})$: $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$

si $\varphi_u > \varphi_i$ alors $\varphi>0$ et u est en avance sur i



si $\varphi_u < \varphi_i$ alors $\varphi<0$ et u est en retard sur i



- cas particuliers :

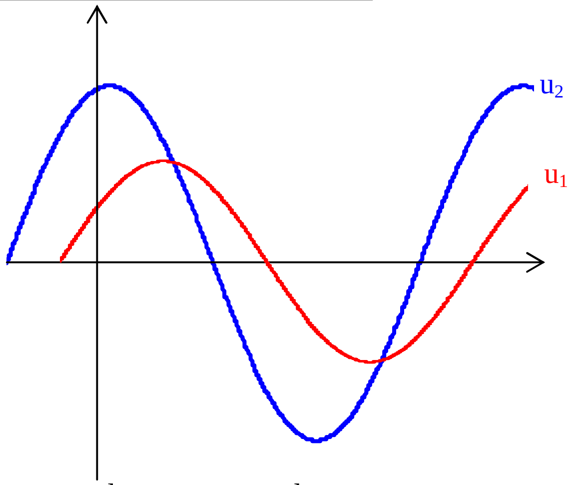
$\varphi_{u2/u1} = \varphi_2 - \varphi_1 = 0$ rad — u_1 et u_2 sont en phase

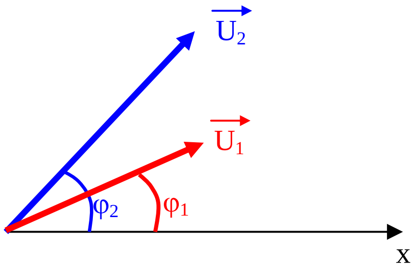
$\varphi_{u2/u1} = \varphi_2 - \varphi_1 = \pi$ rad — u_1 et u_2 sont en opposition de phase

$\varphi_{u2/u1} = \varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$ rad — u_1 est en quadrature retard par rapport à u_2.

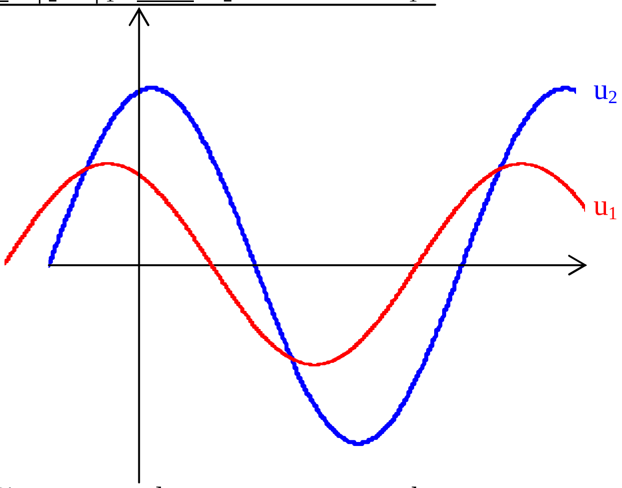
$\varphi_{u2/u1} = \varphi_2 - \varphi_1 = -\pi/2$ rad — u_1 est en quadrature avance par rapport à u_2.

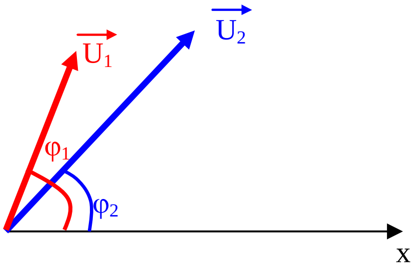
Si : $\varphi_2 > \varphi_1$ alors u_2 en avance sur u_1



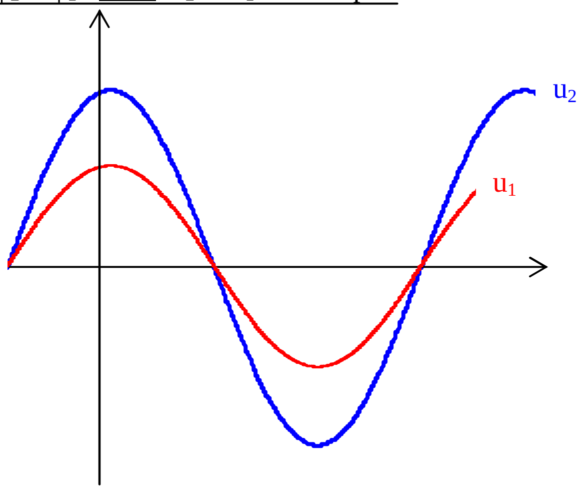


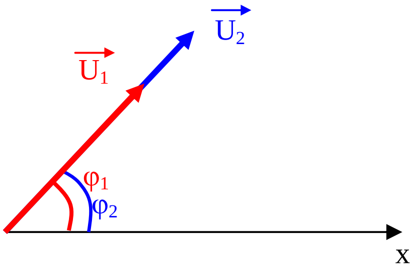
Si : $\varphi_2 > \varphi_1$ alors u_2 en retard sur u_1



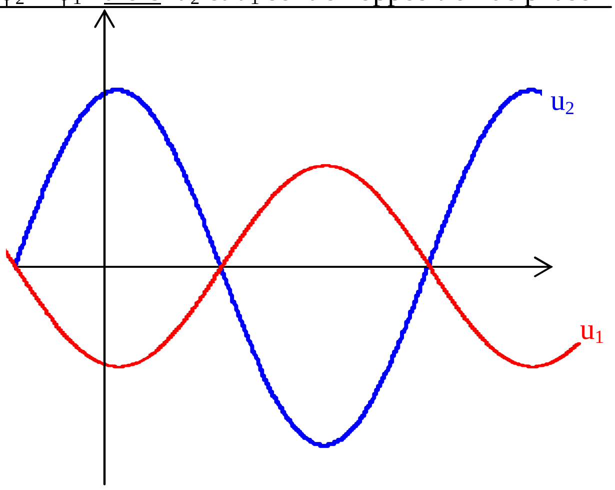


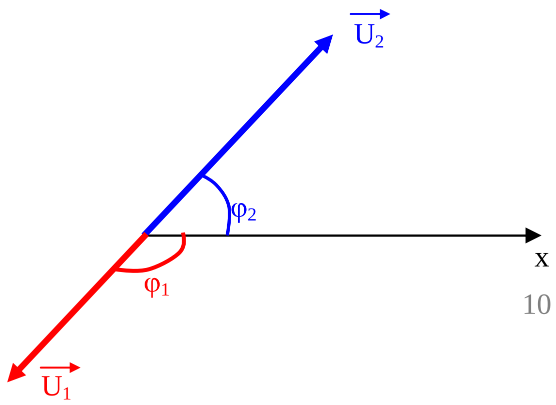
Si : $\varphi_2 = \varphi_1$ alors u_2 et u_1 sont en phase





Si : $\varphi_2 = \varphi_1$ alors u_2 et u_1 sont en opposition de phase

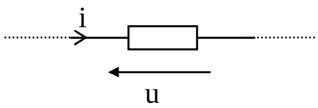




III / Les dipôles passifs linéaires

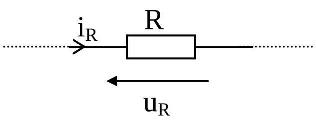
1. Définition

- Un dipôle est linéaire si sa caractéristique courant / tension est une droite.
- Un dipôle est passif si sa caractéristique courant / tension passe par l'origine.



2. Loi d'Ohm pour les dipôles élémentaires

a) Résistance



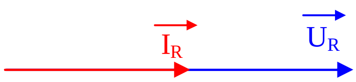
$\boxed{u_R = R \times i_R}$

on a : $\underline{U_R} = \underline{Z_R} \times \underline{I_R}$ où $\underline{Z_R}$ est l'impédance de R

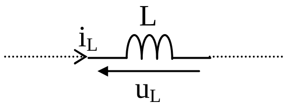
on a $\boxed{\underline{Z_R} = R = [\ R\ ;\ 0\ ]}$ la résistance n'introduit aucun déphasage entre u et i.

donc $U_R = R \times I_R$ et $\varphi_{uR} = \varphi_{iR}$

En Fresnel :



b) bobine parfaite



$$\boxed{u = L\,\frac{di}{dt}}$$

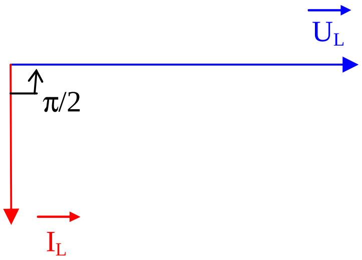
on a : $\underline{U_L} = \underline{Z_L} \times \underline{I_L}$

où $\boxed{\underline{Z_L} = jL\omega = [\ jL\omega\ ;\ \pi/2\ ]}$

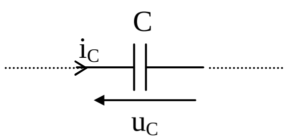
<u>la bobine introduit un déphasage $\pi/2$ radentre u et i.</u>

donc $u_L = L\omega \times I_L$ et $\varphi_{uL} - \varphi_{iL} = \pi/2$

En Fresnel :



c) capacité parfaite



$$\boxed{i = C\,\frac{du}{dt}}$$

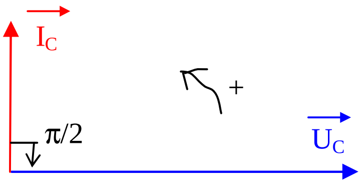
on a : $\underline{U_C} = \underline{Z_C} \times \underline{I_C}$

où $\boxed{\underline{Z_C} = 1\ /\ jC\omega = [\ 1/jC\omega\ ;\ -\pi/2\ ]}$

<u>la bobine introduit un déphasage $-\pi/2$ radentre u et i.</u>

donc $u_C = 1/C\omega \times I_C$ et $\varphi_{uC} - \varphi_{iC} = -\pi/2$

En Fresnel :



3. Impédances et admittances

L'impédance d'un complexe se définit par :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = [\ \frac{U}{I}\ ; \varphi_u - \varphi_i\ ] = [\ |\underline{Z}|\ ; \varphi\ ]$$

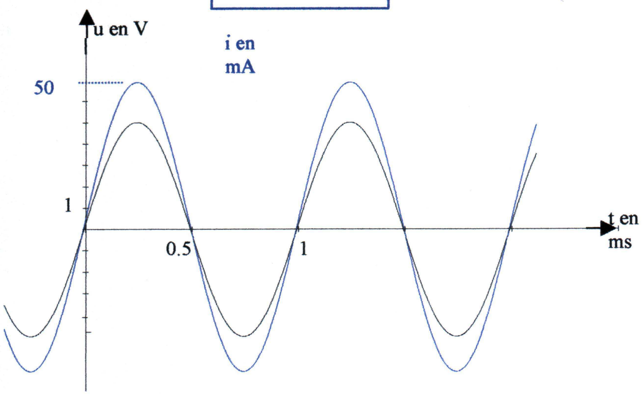
Son admittance complexe est :

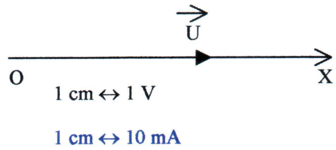
$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = [\ \frac{I}{U}\ ; \varphi_i - \varphi_u\ ] = [\ |\underline{Y}|\ ; -\varphi\ ]$$

Tableau récapitulatif

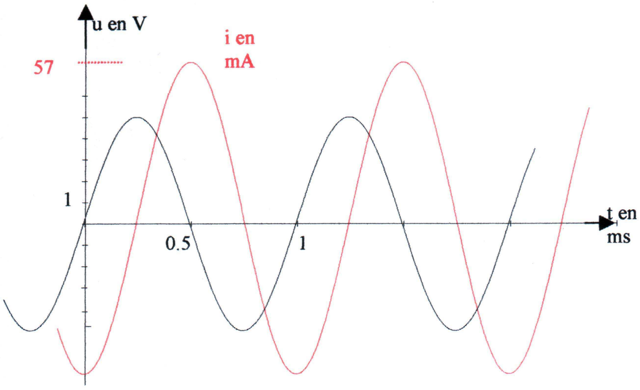
	Impédance $\underline{Z}$	Admittance $\underline{Y}$
Résistance R	R	G
Bobine L	$jL\omega = [\ L\omega\ ; \pi/2\ ]$	$1/jL\omega = [\ 1/L\omega\ ; -\pi/2\ ]$
Condensateur C	$1/jC\omega = [\ 1/C\omega\ ; -\pi/2\ ]$	$jC\omega = [\ C\omega\ ; \pi/2\ ]$

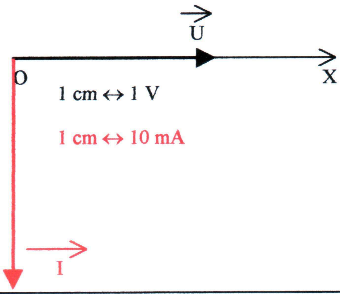
RESISTANCE $Z=R \quad \varphi = 0$ rad



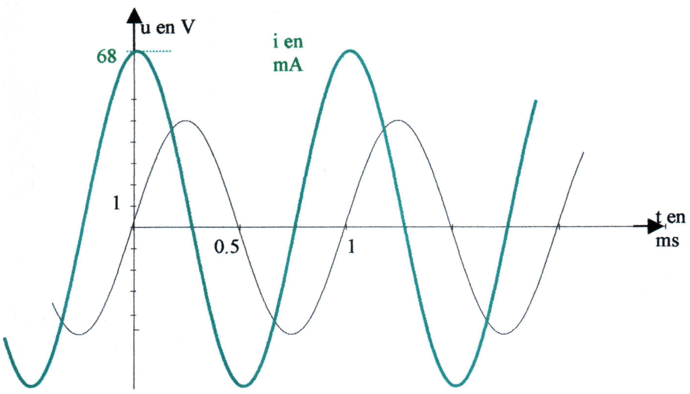


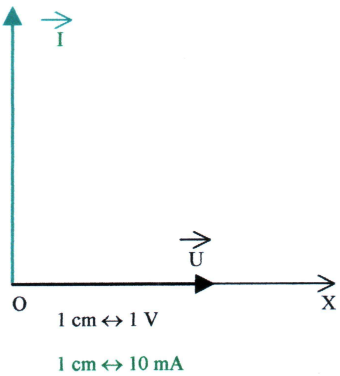
BOBINE $Z=L\omega \quad \varphi = \pi/2$





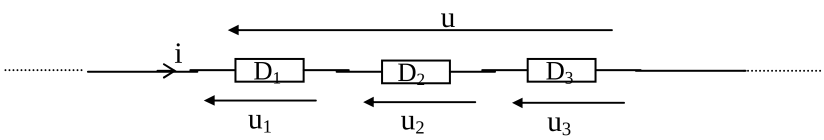
CONDENSATEUR $Z=\frac{1}{C\omega} \quad \varphi = -\pi/2$





4. associations de dipôles linéaires

a) en série



$\underline{Z}_{éq} = \Sigma\, \underline{Z}_i$

Démo : $\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3$

$= (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3).\underline{I}$

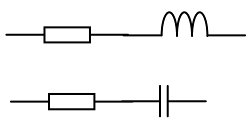
$= \underline{Z}_{éq}.\underline{I}$

En série, les impédances s'ajoutent.

Exercice d'application

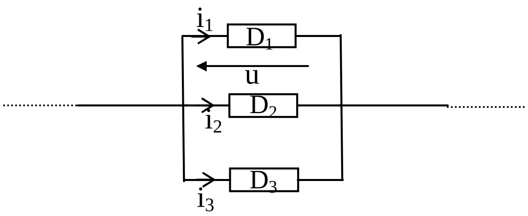
$\underline{Z}_{éq} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L = R + jL\omega$

$\underline{Z}_{éq} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_C = R + 1/jC\omega$



R = 20Ω
L = 0.1H
C=220µF

b) en parallèle



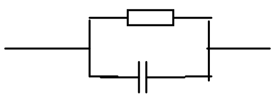
$\underline{Y}_{éq} = \Sigma\, \underline{Y}_i$

Démo : $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$

$= (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3).\underline{U}$

$= \underline{Y}_{éq}.\underline{U}$

En parallèle, les admittances s'ajoutent



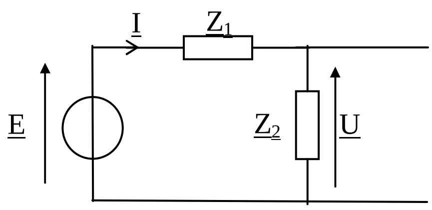
R = 20Ω
L = 0.1H
C=220µF

IV / Les dipôles actifs linéaires

1. définition

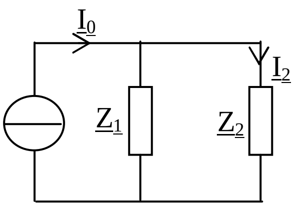
la caractéristique U=f(I) (en valeur efficace) d'un dipôle actif linéaire ne passe pas par l'origine des axes.

2. diviseur de tension



$$\underline{U} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\,\underline{E}$$

3. diviseur de courant



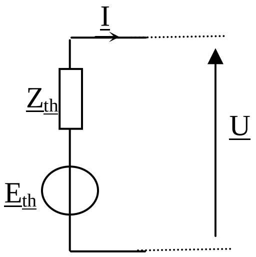
$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} \times \underline{I}_0$$

4. modèle de Thévenin

a) MET :

Tout circuit linéaire est modélisable par l'association série :

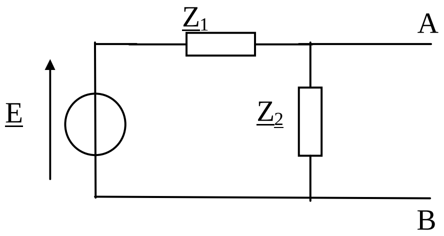
- d'une source de tension idéale $\underline{E}_{th} = \underline{U}_{AB0}$
- d'une impédance $\underline{Z}_{th}$: impédance équivalente du circuit rendu passif



$$\underline{U} = \underline{E}_{th} - \underline{Z}_{th}.\underline{I}$$

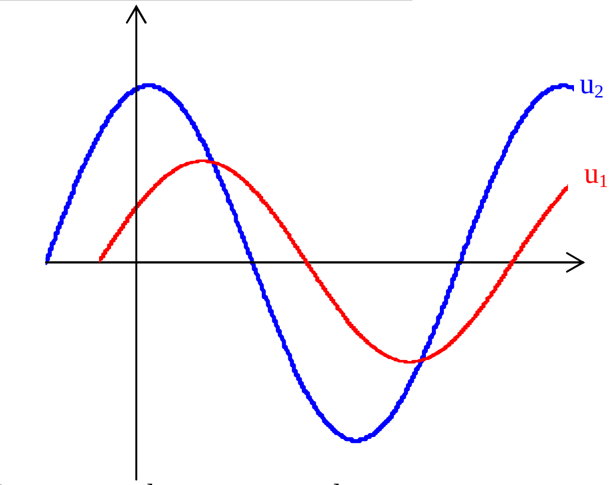
b) exercice :

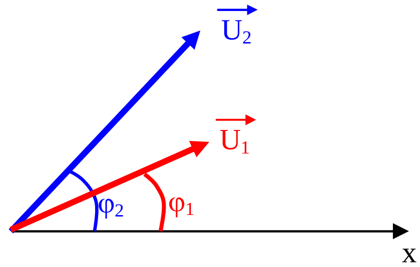
Déterminer le MET :



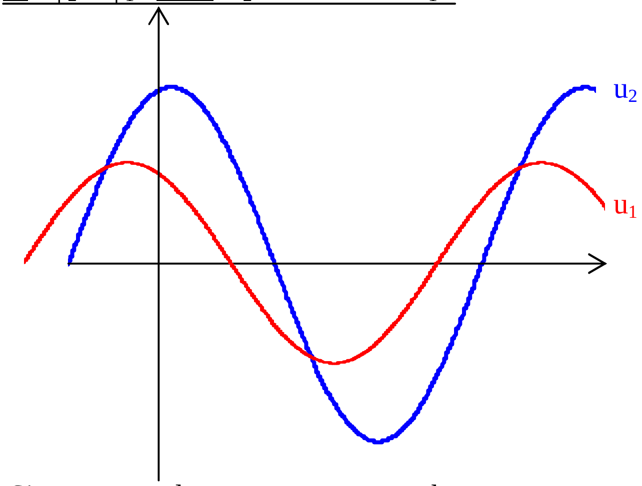
Docs Etudiant

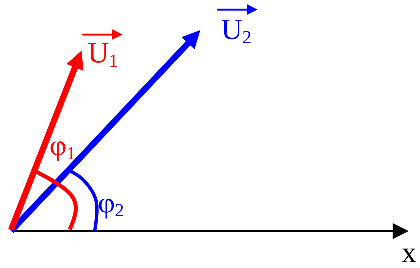
Si : $\varphi_2 > \varphi_1$ alors u_2 en avance sur u_1



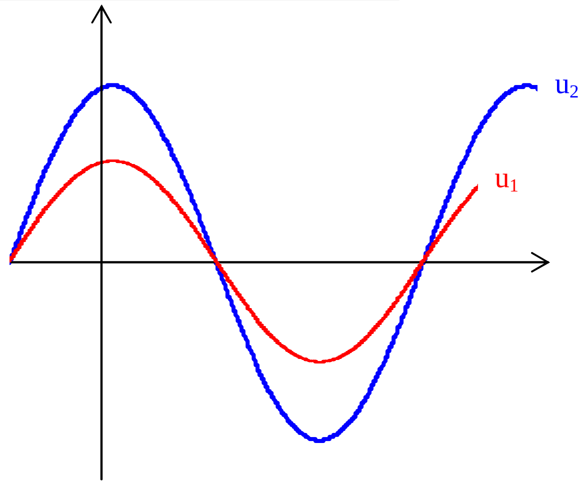


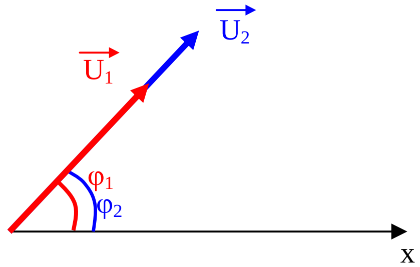
Si : $\varphi_2 > \varphi_1$ alors u_2 en retard sur u_1



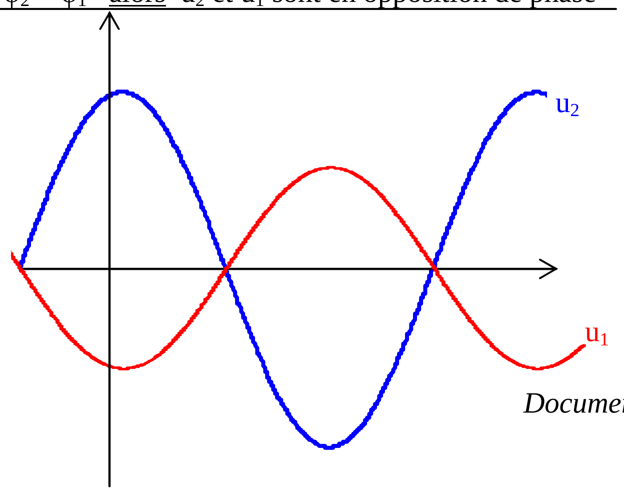


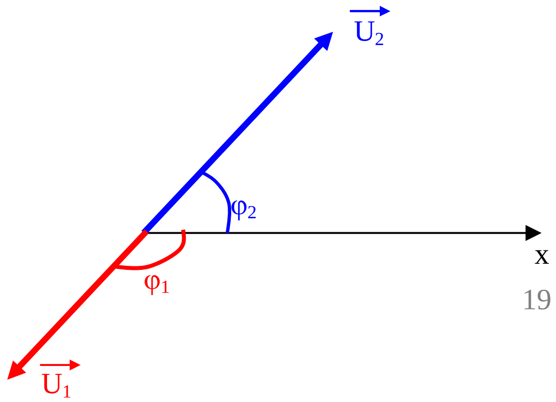
Si : $\varphi_2 = \varphi_1$ alors u_2 et u_1 sont en phase



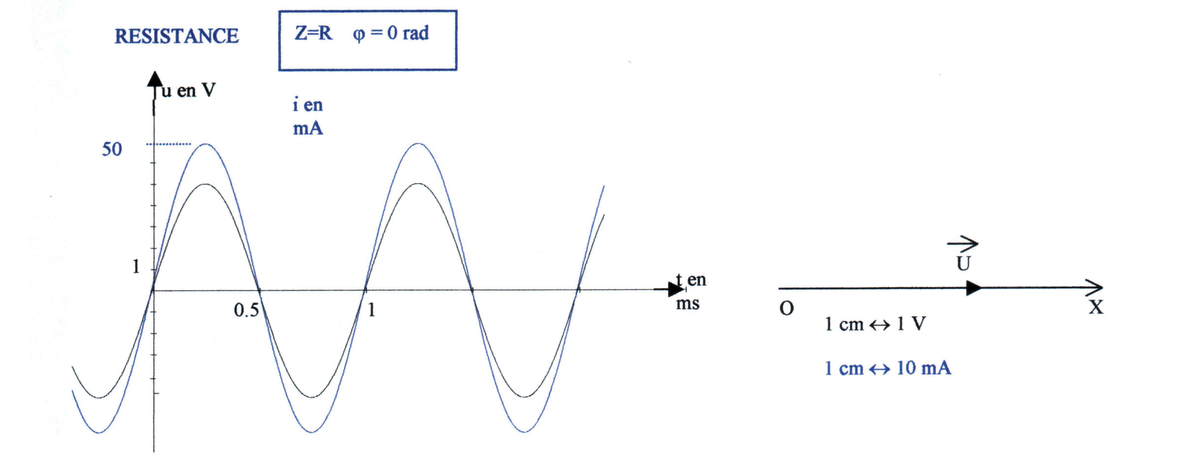


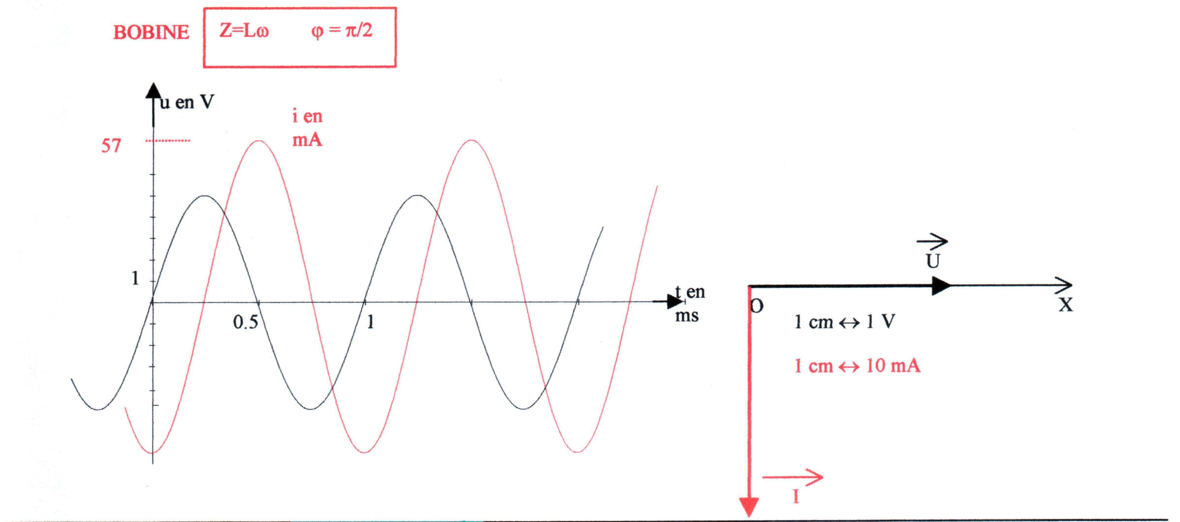
Si : $\varphi_2 = \varphi_1$ alors u_2 et u_1 sont en opposition de phase

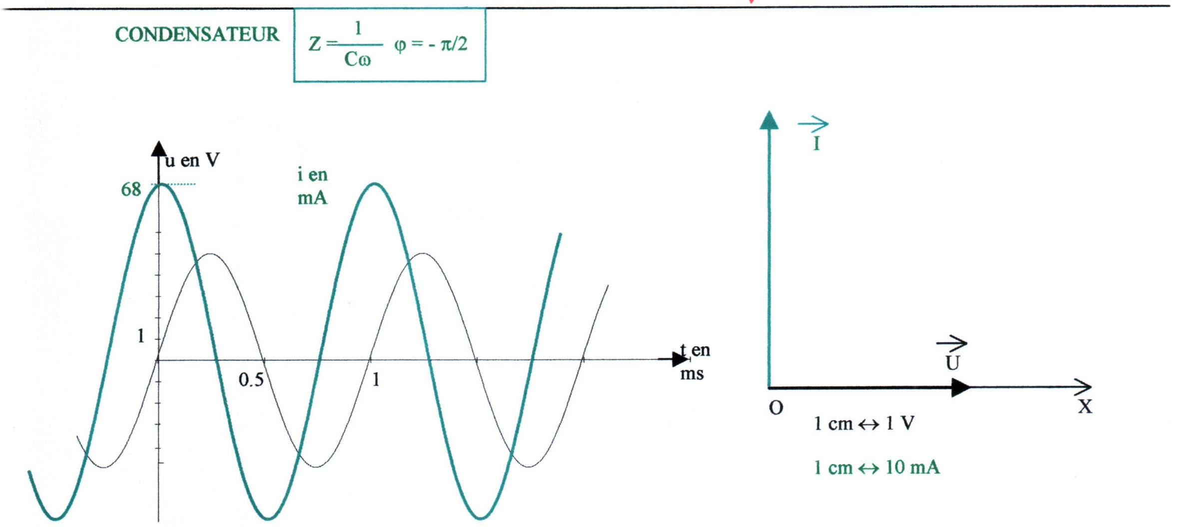




Document 1


RESISTANCE
Z=R φ = 0 rad
u en V
i en mA
50
1
0.5
1
t en ms
U
O
X
1 cm ↔ 1 V
1 cm ↔ 10 mA


BOBINE
Z=Lω φ = π/2
u en V
i en mA
57
1
0.5
1
t en ms
U
O
X
1 cm ↔ 1 V
1 cm ↔ 10 mA
I


CONDENSATEUR
Z = 1/Cω φ = - π/2
u en V
i en mA
68
1
0.5
1
t en ms
I
U
O
X
1 cm ↔ 1 V
1 cm ↔ 10 mA

Document 2