

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE
INGENIERÍA**

FACULTAD DE CIENCIAS

**INSTITUTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIAS
AFINES**



PROBLEMAS EN LA INDUSTRIA

Portafolio de Inversion - Asignacion de Recursos

Integrantes:

- López Arteaga, César Omar - 20236743A

- Sanchez Tejada, Roberto - 202366743A

- Yucra Ccoiccosi, Max Valerio - 20236748C

Profesor: Dr. Gonzalo Panizo

Contenido

| | |
|--|-----------|
| 1 Portafolio de Inversión | 2 |
| 1.1 Introducción | 2 |
| 1.2 Análisis exploratorio de datos | 2 |
| 1.3 Formulación matemática del portafolio | 6 |
| 1.3.1 Definición del valor del portafolio | 6 |
| 1.3.2 Definición de rendimientos financieros | 6 |
| 1.3.3 Matriz de rendimientos y media muestral | 6 |
| 1.4 Modelado de dependencia entre activos | 7 |
| 1.4.1 Matriz de covarianzas | 8 |
| 1.4.2 Regularización y descomposición de Cholesky | 8 |
| 1.5 Variables Aleatoria Multivariadas | 10 |
| 1.5.1 Variable aleatoria normal estándar | 10 |
| 1.5.2 Construcción de la variable aleatoria multivariada | 11 |
| 1.5.3 Verificación estadística de la simulación | 12 |
| 1.6 Espacio de portafolios y estructura de simplex | 13 |
| 1.7 Proyección empírica del precio forward a 90 días | 15 |
| 1.8 Expected Shortfall | 17 |
| 1.9 Análisis Media–Riesgo mediante Expected Shortfall | 17 |
| 1.10 Análisis Media–Riesgo mediante Expected Shortfall | 18 |
| 1.11 Gráfica Media vs Riesgo y Frontera Eficiente | 19 |
| 2 Asignación de Recursos | 21 |
| 2.1 Introducción | 21 |
| 2.2 Modelamiento del Problema | 21 |
| 2.3 Condiciones del modelo | 21 |
| 3 Bibliografía | 24 |

1 Portafolio de Inversión

1.1 Introducción

Se analizará un portafolio de inversión integrado por cuatro instrumentos financieros, utilizando simulaciones Monte Carlo fundamentadas en un modelo de movimiento browniano geométrico, que induce una distribución log-normal en los precios de los activos.

1.2 Análisis exploratorio de datos

Para el análisis se utilizan los precios de cierre diarios de cuatro empresas peruanas, considerando un horizonte temporal de un año. La información histórica se obtuvo de la página oficial de la Bolsa de Valores de Lima (BVL):

<https://www.bvl.com.pe/emisores/listado-emisores>

Las empresas seleccionadas para el estudio son:

- Banco de Crédito del Perú S.A.A (CREDITC1)
- Poderosa S.A.C (PODERC1)
- Credicorp L.T.D (BAP)
- Sociedad Minera Cerro Verde S.A.A. (CVERDEC1)

El periodo de análisis comprende desde el 01-01-2023 hasta el 31-12-2024, obteniéndose un total de 500 observaciones. Los datos corresponden únicamente a días hábiles, excluyendo domingos y feriados (table 1).

| Índice | Fecha | PODEROSA | CREDICORP | BCP | CVERDE |
|--------|------------|----------|-----------|------|--------|
| 1 | 2023-01-02 | 9.40 | 135.25 | 2.60 | 29.80 |
| 2 | 2023-01-03 | 9.40 | 135.25 | 2.65 | 29.80 |
| 3 | 2023-01-04 | 9.40 | 137.87 | 2.65 | 29.00 |
| 4 | 2023-01-05 | 9.40 | 139.47 | 2.65 | 29.00 |
| 5 | 2023-01-06 | 9.40 | 142.02 | 2.68 | 29.10 |
| : | — | — | — | — | — |
| 456 | 2024-12-24 | 8.00 | 181.00 | 4.05 | 41.00 |
| 457 | 2024-12-26 | 8.00 | 182.30 | 4.08 | 40.70 |
| 458 | 2024-12-27 | 8.00 | 182.20 | 4.00 | 41.07 |
| 459 | 2024-12-30 | 8.00 | 180.85 | 4.00 | 40.70 |
| 500 | 2024-12-31 | 8.00 | 180.80 | 4.00 | 40.70 |

Table 1: Primeras y últimas observaciones de los precios de cierre

Para analizar la tendencia de los precios a lo largo del periodo de estudio, se grafican los precios de cierre diarios de cada activo (Figura 1).

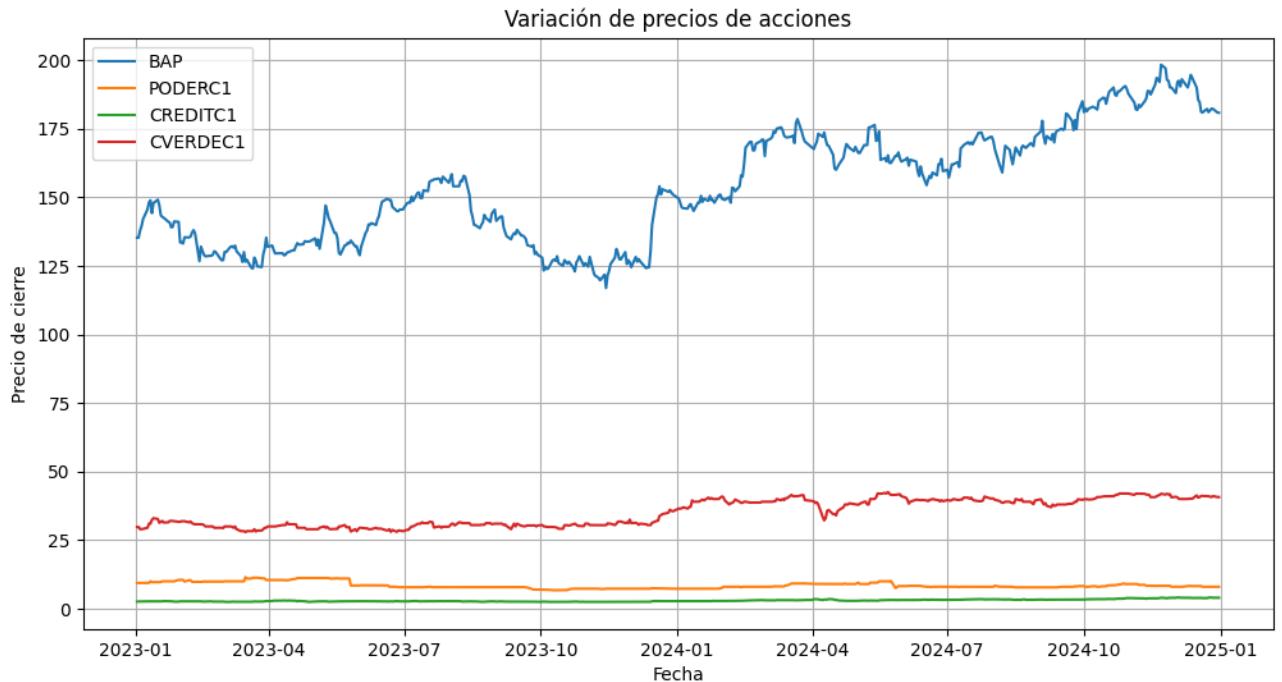


Figure 1: Grafica de Precios de cierre de Mercado con fecha, de las empresas seleccionadas

En los precios de cierre, no se ve las variaciones, por tener una escala de tiempo larga. Para visualizar las variaciones de los precios de mercado, se normaliza cada activo.

Se observa que la tendencia de la empresa BAP, en el primer año es de mantenerse en precios, pero en el segundo año hay un crecimiento (Fig. 2).

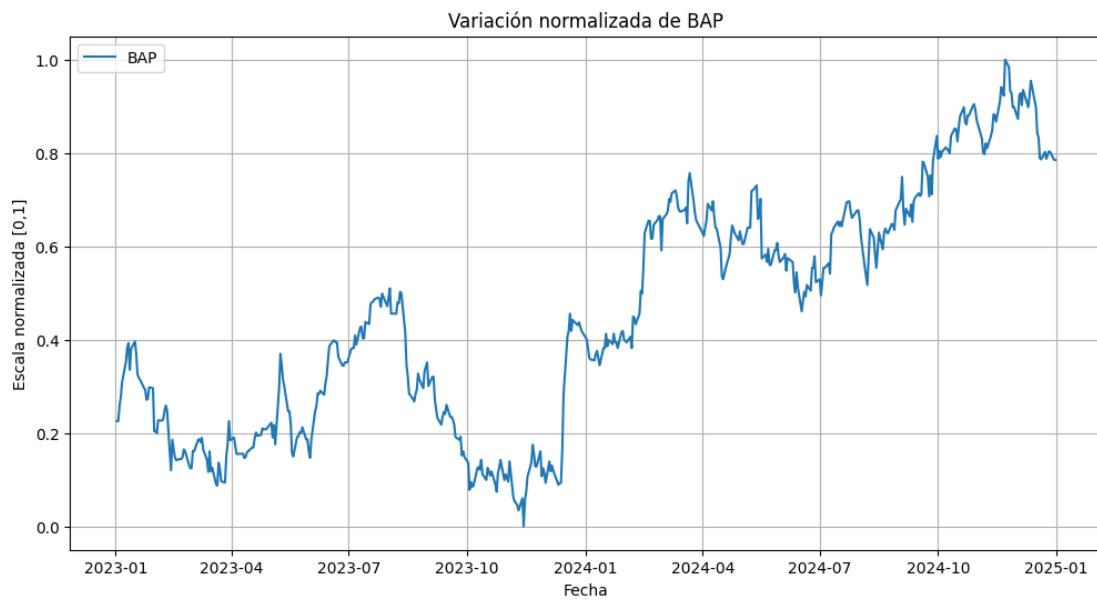


Figure 2: Grafica de Precios de cierre de Mercado de la empresa BAP

La empresa PODERC1, observamos que inicialmente sube los precios, luego estos bajan para posteriormente subir nuevamente, pero a lo largo del periodo, el valor de las acciones pierden valor en el mercado (Fig. 3).

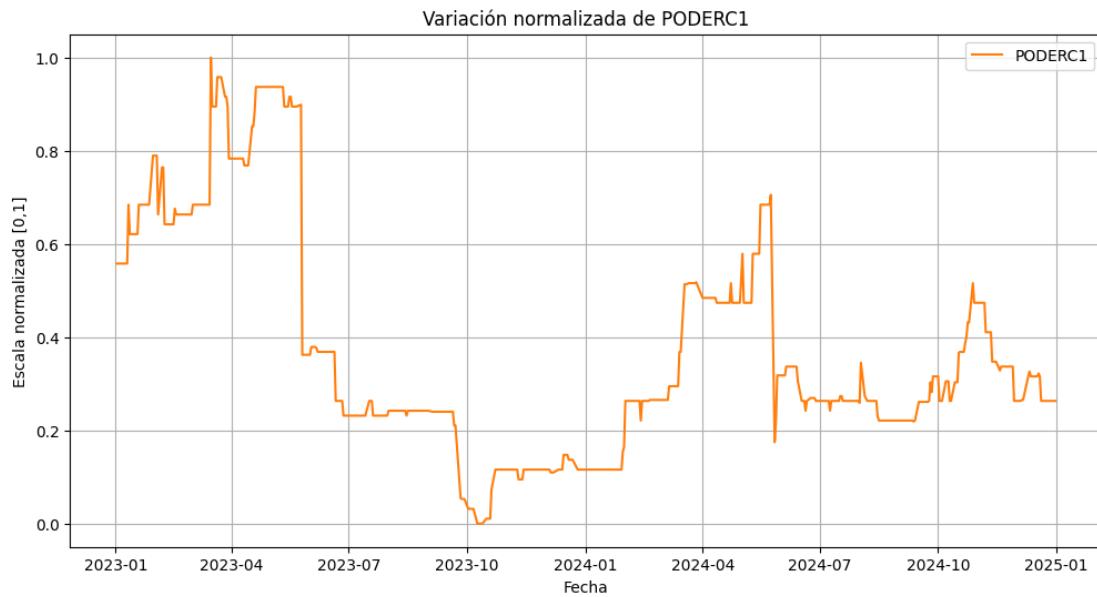


Figure 3: Grafica de Precios de cierre de Mercado de la empresa PODERC1

Para la empresa CREDITC1, se observa que los precios casi se mantienen a lo largo del primer año, en el segundo año los precios de sus activos van subiendo (Fig. 4).

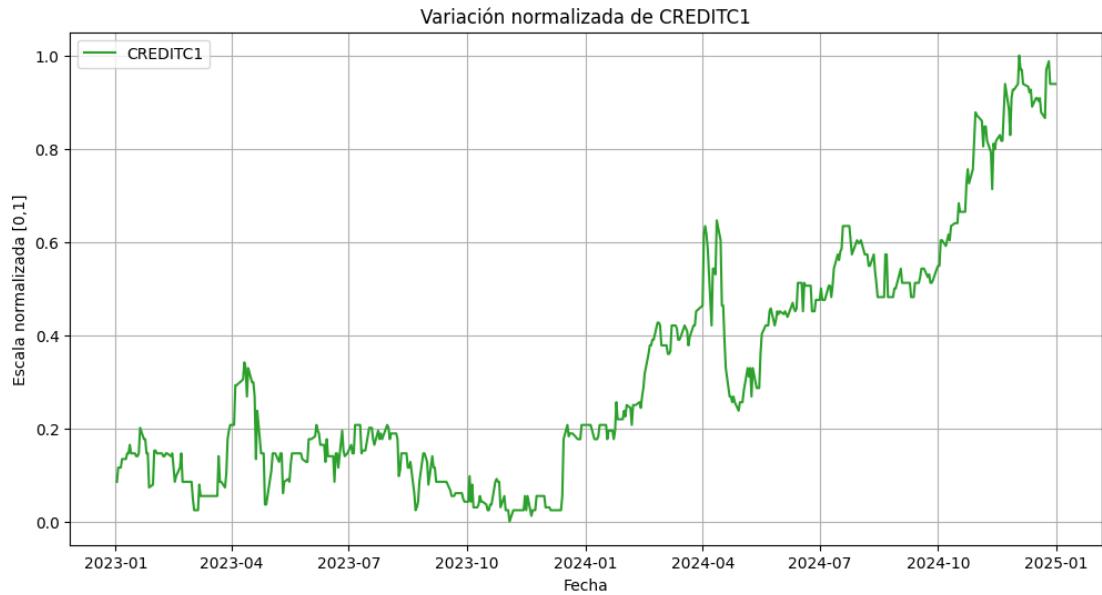


Figure 4: Grafica de Precios de cierre de Mercado de la empresa CREDITC1

Para la empresa CVERDEC1, se observa que los precios casi se mantienen a lo largo del primer año, en el segundo año los precios de sus activos suben manteniendo la subida en el segundo año. (Fig. 5).

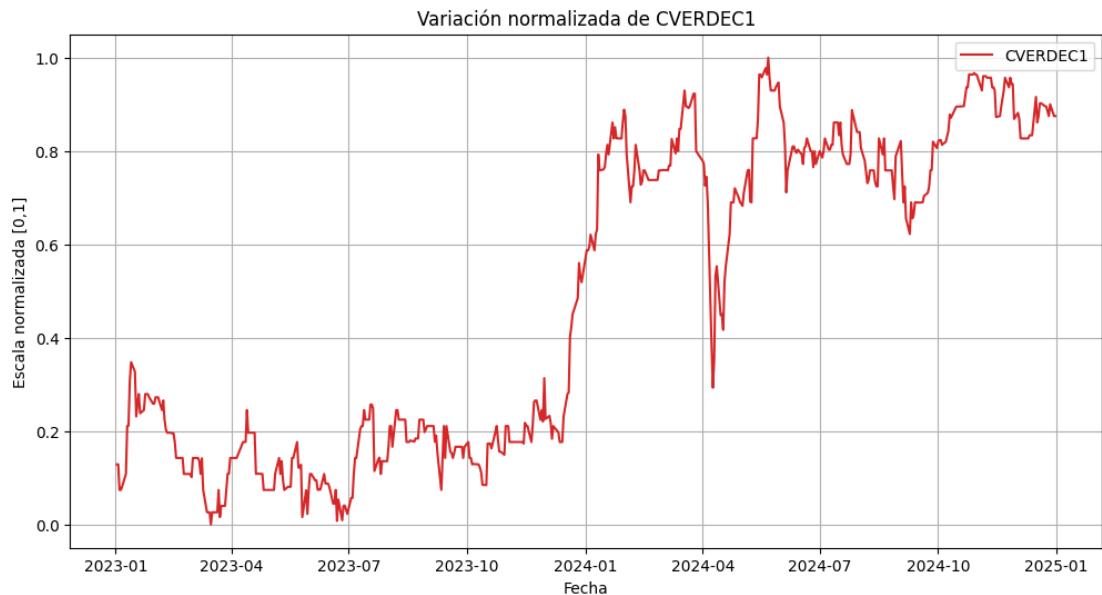


Figure 5: Grafica de Precios de cierre de Mercado de la empresa CVERDEC1

1.3 Formulación matemática del portafolio

1.3.1 Definición del valor del portafolio

Sea un portafolio conformado por n activos financieros. Denotamos por X_i el precio del activo i y por c_i el peso asignado a dicho activo. El valor total del portafolio se define como:

$$f(\mathbf{c}, \mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n c_i X_i, \quad (1)$$

donde

$$\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^\top, \quad \mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top.$$

En forma vectorial:

$$f(\mathbf{c}, \mathbf{X}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{X}. \quad (2)$$

Los pesos del portafolio satisfacen:

$$\sum_{i=1}^n c_i = 1, \quad c_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

1.3.2 Definición de rendimientos financieros

Para el caso de estudio se consideran $n = 4$ activos. A partir de los precios diarios $X_{i,t}$, se definen los rendimientos simples como:

$$w_{i,t} = \frac{X_{i,t} - X_{i,t-1}}{X_{i,t-1}} = \frac{X_{i,t}}{X_{i,t-1}} - 1, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (4)$$

1.3.3 Matriz de rendimientos y media muestral

Se construye la matriz de rendimientos:

$$R = \begin{pmatrix} w_{1,1} & w_{2,1} & w_{3,1} & w_{4,1} \\ w_{1,2} & w_{2,2} & w_{3,2} & w_{4,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{1,T} & w_{2,T} & w_{3,T} & w_{4,T} \end{pmatrix} \quad (5)$$

La media muestral del activo i es:

$$\bar{w}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T w_{i,t} \quad (6)$$

Así con los precios de cierre de la tabla 1, se construye la matriz de rendimientos R (table 2)

| Índice | Fecha | PODERC1 | BAP | CREDIT1 | CVERDEC1 |
|--------|------------|----------|-----------|----------|-----------|
| 1 | 2023-01-03 | 0.000000 | 0.000000 | 0.019231 | 0.000000 |
| 2 | 2023-01-04 | 0.000000 | 0.019372 | 0.000000 | -0.026846 |
| 3 | 2023-01-05 | 0.000000 | 0.011605 | 0.000000 | 0.000000 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 458 | 2024-12-30 | 0.000000 | -0.007409 | 0.000000 | -0.009009 |
| 459 | 2024-12-31 | 0.000000 | -0.000276 | 0.000000 | 0.000000 |

Table 2: Primeras y últimas observaciones de los rendimientos diarios

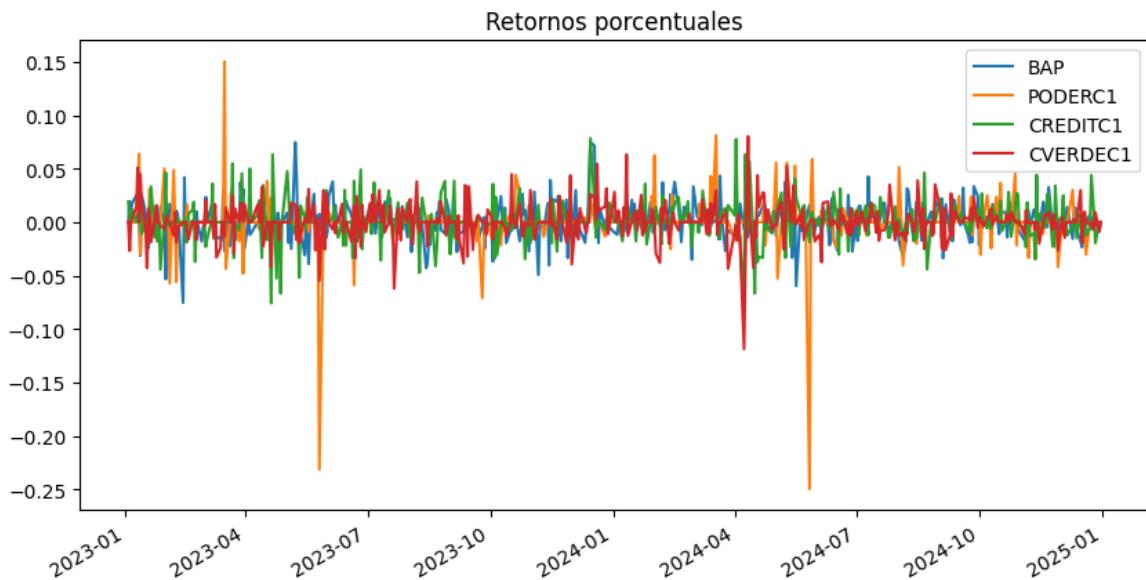


Figure 6: Gráfica de la variación de los retornos porcentuales de las empresas analizadas

1.4 Modelado de dependencia entre activos

En un portafolio multiactivo, los rendimientos de los distintos instrumentos financieros constituyen, en general, un vector aleatorio multivariado cuyos componentes no son independientes. En consecuencia, las fluctuaciones en el rendimiento de un activo pueden

inducir variaciones correlacionadas, positivas o negativas, en los rendimientos de otros activos. La estructura de dependencia lineal entre dichos rendimientos queda completamente caracterizada por la matriz de covarianzas, la cual resume las covariaciones cruzadas y constituye un elemento fundamental en la medición del riesgo conjunto y en el modelado del comportamiento agregado del portafolio.

1.4.1 Matriz de covarianzas

La matriz de covarianzas se define como:

$$\text{Cov}(w_i, w_j) = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (w_{i,t} - \bar{w}_i)(w_{j,t} - \bar{w}_j). \quad (7)$$

Así escrito explicitamente para nuestro cuatro activos, la matriz de covarianza tendrá la forma:

$$Cov = \Sigma = \begin{pmatrix} \text{Var}(w_1) & \text{Cov}(w_1, w_2) & \text{Cov}(w_1, w_3) & \text{Cov}(w_1, w_4) \\ \text{Cov}(w_2, w_1) & \text{Var}(w_2) & \text{Cov}(w_2, w_3) & \text{Cov}(w_2, w_4) \\ \text{Cov}(w_3, w_1) & \text{Cov}(w_3, w_2) & \text{Var}(w_3) & \text{Cov}(w_3, w_4) \\ \text{Cov}(w_4, w_1) & \text{Cov}(w_4, w_2) & \text{Cov}(w_4, w_3) & \text{Var}(w_4) \end{pmatrix}$$

Usando los rendimientos de la tabla 2 y la media muestral (6), se calcula la matriz de covarianzas (tabla 3)

| | BAP | PODERC1 | CREDITC1 | CVERDEC1 |
|----------|-----------|-----------|----------|----------|
| BAP | 0.000283 | -0.000013 | 0.000011 | 0.000030 |
| PODERC1 | -0.000013 | 0.000467 | 0.000022 | 0.000032 |
| CREDITC1 | 0.000011 | 0.000022 | 0.000332 | 0.000034 |
| CVERDEC1 | 0.000030 | 0.000032 | 0.000034 | 0.000274 |

Table 3: Matriz de covarianzas de los rendimientos

1.4.2 Regularización y descomposición de Cholesky

Con el objetivo de garantizar la consistencia matemática del modelado de dependencia entre activos, se procede a verificar que la matriz de covarianzas Cov cumpla las propiedades fundamentales requeridas. En particular, se debe comprobar que:

- la matriz sea simétrica, es decir, $\text{Cov} = \text{Cov}^\top$;

- la matriz sea semidefinida positiva, lo que equivale a que todos sus autovalores sean no negativos;
- su estructura espectral permita una factorización numéricamente estable.

La verificación de estas condiciones se realiza mediante el análisis espectral de la matriz Cov, examinando explícitamente sus autovalores. Si la matriz resulta simétrica y semidefinida positiva, la descomposición de Cholesky puede aplicarse directamente.

$$\text{Cov} = LL^T, \quad (8)$$

donde L es una matriz triangular inferior con elementos diagonales estrictamente positivos. Así para nuestros datos tenemos la descomposición de Cholesky:

$$L = \begin{pmatrix} 0.01681736 & 0 & 0 & 0 \\ -0.00075347 & 0.02160258 & 0 & 0 \\ 0.00065381 & 0.00105952 & 0.01818807 & 0 \\ 0.00177701 & 0.00154759 & 0.00172912 & 0.01629125 \end{pmatrix}$$

Sin embargo, en los computos numéricas reales, es frecuente que la matriz de covarianzas estimada no sea estrictamente definida positiva debido a errores de redondeo, dependencia lineal entre activos o ruido numérico, lo que provoca el fallo de dicha factorización.

Para corregir este inconveniente, se introduce un término de regularización diagonal, conocido como *jitter*, cuyo objetivo es desplazar el espectro de la matriz hacia valores positivos. Este parámetro se define como:

$$\text{jitter} = \max(0, -\lambda_{\min}) + \varepsilon \frac{\text{tr}(\text{Cov})}{n}, \quad \varepsilon = 10^{-12}, \quad (9)$$

donde λ_{\min} denota el menor autovalor de la matriz Cov, $\text{tr}(\cdot)$ representa el operador traza y n es el número de activos considerados en el portafolio.

A partir de este término, se construye la matriz de covarianzas regularizada:

$$\text{Cov}_j = \text{Cov} + \text{jitter } I, \quad (10)$$

donde I es la matriz identidad de dimensión $n \times n$. Por construcción, la matriz Cov_j es simétrica y definida positiva, lo que garantiza la existencia y unicidad de su descomposición de Cholesky, dada por:

$$\text{Cov}_j = LL^\top, \quad (11)$$

Finalmente, para evaluar la exactitud numérica de la factorización obtenida, se calcula el error de reconstrucción utilizando la norma de Frobenius:

$$\|\text{Cov}_j - LL^\top\|_F, \quad (12)$$

donde $\|\cdot\|_F$ denota la norma de Frobenius. Idealmente, este error debe tender a cero, lo que confirma la estabilidad numérica y la consistencia de la descomposición de Cholesky aplicada.

1.5 Variables Aleatoria Multivariadas

1.5.1 Variable aleatoria normal estándar

Se considera un vector aleatorio

$$Z = (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)$$

cuyos componentes son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas:

$$Z_i \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1), \quad i = 1, \dots, 4$$

Al simular $n = 1,000,000$ valores de cada componente, obtenemos una matriz:

$$Z \in \mathbb{R}^{100000 \times 4},$$

Así se define el vector aleatorio:

$$Z \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, I_4). \quad (13)$$

Se hace la simulación para nuestro caso de estudio y se hace su histograma respectivo (Fig. ??)

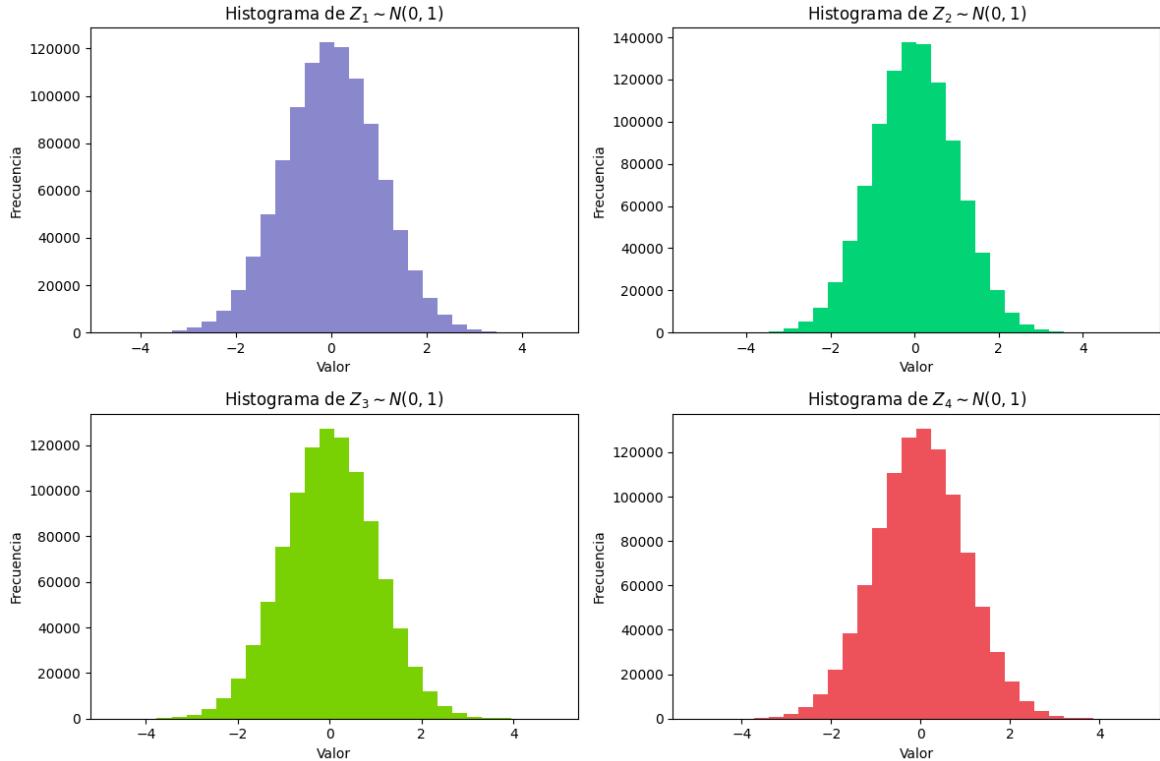


Figure 7: Histograma de las 4 Variables Aleatoria Normales

1.5.2 Construcción de la variable aleatoria multivariada

La variable multivariada se obtiene mediante:

$$W = LZ, \quad (14)$$

donde

$$W_k = LZ_k, \quad k = 1, \dots, 4$$

cumpliéndose:

$$W \sim \mathcal{N}(0, \widetilde{\text{Cov}}).$$

donde $\widehat{\text{Cov}} = LL^\top$ representa la matriz de covarianza del vector aleatorio W .

Se hace la simulación para nuestro caso de estudio y se hace su histograma respectivo (Fig. ??)

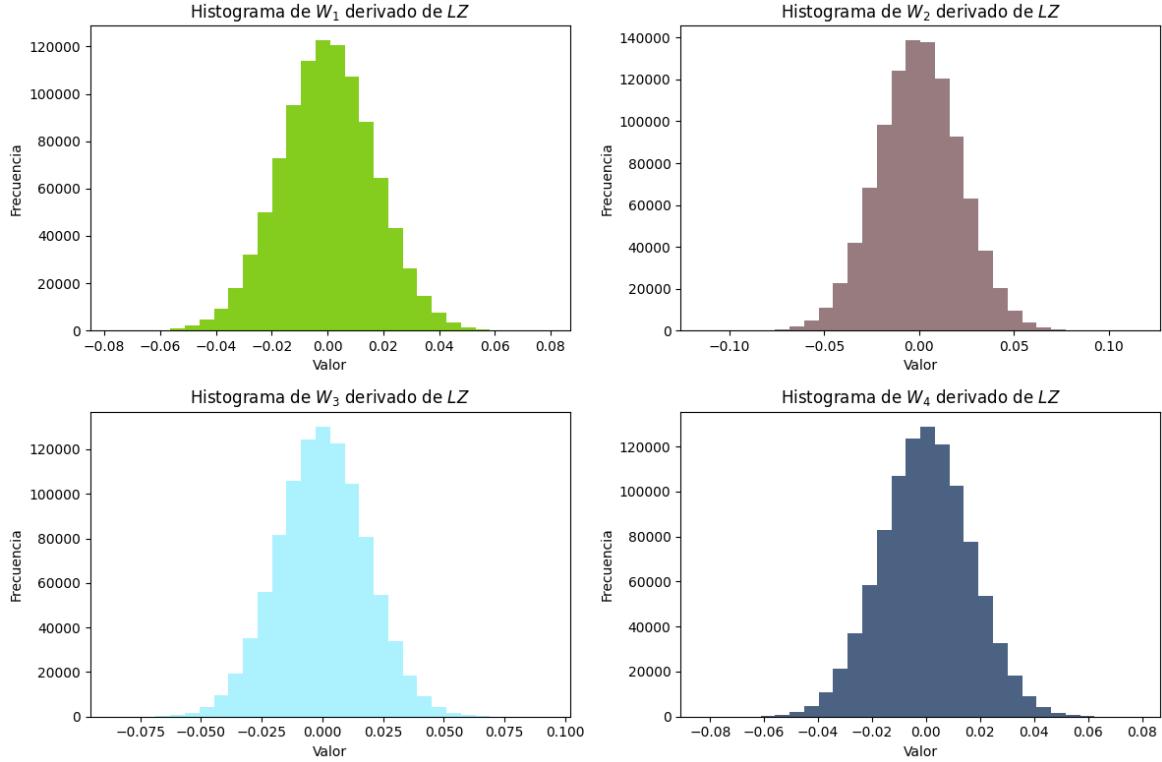


Figure 8: Histograma de las 4 Variables Aleatorias Simuladas

1.5.3 Verificación estadística de la simulación

La matriz de covarianza estimada a partir de los datos simulados se define como:

$$\widehat{\text{Cov}}(X) = \frac{1}{n-1} X^\top X, \quad (15)$$

donde $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$ representa la matriz de datos centrados, con n observaciones y p variables ($n = 1000000$ y $p = 4$).

Idealmente, debe cumplirse que la matriz de covarianza estimada aproxima adecuadamente a la matriz de covarianza teórica:

$$\widehat{\text{Cov}}(X) \approx \text{Cov}. \quad (16)$$

La calidad de esta aproximación se evalúa mediante la norma de Frobenius:

$$\left\| \widehat{\text{Cov}}(X) - \text{Cov} \right\|_F, \quad (17)$$

la cual mide la discrepancia global entre ambas matrices.

En un escenario ideal, al aumentar el número de simulaciones n , se espera que:

$$\left\| \widehat{\text{Cov}}(X) - \text{Cov} \right\|_F \longrightarrow 0. \quad (18)$$

1.6 Espacio de portafolios y estructura de simplex

Sea un portafolio compuesto por n activos financieros y sea

$$\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

el vector de pesos asociado. Un portafolio es financieramente admisible si satisface las restricciones de presupuesto completo y no-negatividad:

$$\sum_{i=1}^n c_i = 1, \quad c_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (19)$$

El conjunto de todos los portafolios admisibles viene dado por:

$$\mathcal{P}_n = \left\{ \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n c_i = 1, \quad c_i \geq 0 \right\}. \quad (20)$$

Este conjunto coincide con el simplex estándar de dimensión $n - 1$:

$$\mathcal{P}_n = \Delta^{n-1}. \quad (21)$$

Desde el punto de vista geométrico, todo portafolio admisible puede expresarse como una combinación convexa de los portafolios puros:

$$\mathbf{c} = \sum_{i=1}^n c_i e_i, \quad \sum_{i=1}^n c_i = 1, \quad c_i \geq 0, \quad (22)$$

donde $\{e_i\}_{i=1}^n$ denota la base canónica de \mathbb{R}^n .

Para realizar simulaciones Monte Carlo sobre el conjunto de portafolios admisibles, se introduce una medida de probabilidad natural sobre Δ^{n-1} . Dicha medida viene dada por la distribución de Dirichlet con parámetros

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \alpha_i > 0,$$

cuya densidad es:

$$f(\mathbf{c}) = \frac{1}{B(\boldsymbol{\alpha})} \prod_{i=1}^n c_i^{\alpha_i - 1}, \quad \mathbf{c} \in \Delta^{n-1}. \quad (23)$$

donde $B(\boldsymbol{\alpha})$ es la función beta multivariada.

En el caso particular $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1$, la densidad es constante sobre el simplex, por lo que:

$$\mathbf{c} \sim \text{Dirichlet}(1, \dots, 1) \iff \mathbf{c} \text{ es uniforme en } \Delta^{n-1}. \quad (24)$$

Esta elección permite generar portafolios aleatorios de manera uniforme sobre el conjunto admisible.

| Índice | C_1 | C_2 | C_3 | C_4 |
|--------|------------|------------|------------|------------|
| 0 | 0.32467572 | 0.31549012 | 0.32204942 | 0.03778475 |
| 1 | 0.01423223 | 0.23918586 | 0.23215518 | 0.51442673 |
| 2 | 0.03469727 | 0.45795037 | 0.03082127 | 0.47653109 |
| 3 | 0.49415935 | 0.11042839 | 0.35152195 | 0.04389031 |
| 4 | 0.05321348 | 0.18314352 | 0.52366655 | 0.23997645 |
| 5 | 0.27499578 | 0.04928912 | 0.40519462 | 0.27052047 |
| 6 | 0.40903415 | 0.26014594 | 0.28274523 | 0.04807467 |
| 7 | 0.07134380 | 0.27218588 | 0.15437052 | 0.50209980 |
| 8 | 0.34576278 | 0.11611632 | 0.22502370 | 0.31309721 |
| 9 | 0.18670295 | 0.17479914 | 0.47725434 | 0.16124357 |

Table 4: Vector de pesos C , los primeras diez simulaciones

1.7 Proyección empírica del precio forward a 90 días

En el análisis cuantitativo de activos financieros, uno de los objetivos centrales es la proyección de precios futuros a partir de la información histórica disponible. En este trabajo se adopta un enfoque de *simulación empírica bajo la medida real* \mathbb{P} , cuyo propósito es estimar el valor esperado futuro de los precios, sin pretender replicar un precio forward de mercado ni incorporar supuestos de ausencia de arbitraje. La proyección obtenida debe interpretarse, por tanto, como una estimación estadística basada en datos históricos.

Sea $X_i(t)$ el precio del activo $i = 1, \dots, n$ en el tiempo t . Se asume que, bajo la medida real \mathbb{P} , los precios siguen una dinámica de movimiento browniano geométrico:

$$\frac{dX_i(t)}{X_i(t)} = \mu_i dt + \sigma_i dW_i^{\mathbb{P}}(t), \quad (25)$$

donde μ_i representa el drift empírico (rendimiento esperado diario), σ_i la volatilidad del activo y $W_i^{\mathbb{P}}(t)$ es un movimiento browniano estándar.

Para capturar la dependencia entre activos, se considera el modelo multivariado. Denotando por $X(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))^T$ el vector de precios, la dinámica conjunta se expresa como:

$$dX(t) = \text{diag}(X(t))(\mu dt + L dB(t)), \quad (26)$$

donde $\mu \in \mathbb{R}^n$ es el vector de drifts empíricos, $B(t)$ es un browniano n -dimensional con componentes independientes, y L es la matriz triangular inferior de Cholesky tal que

$$LL^T = \Sigma,$$

siendo Σ la matriz de covarianzas empírica de los rendimientos diarios.

La solución exacta de este sistema estocástico implica que el vector de log-rendimientos

acumulados en un horizonte t satisface:

$$\log\left(\frac{X(t)}{X(0)}\right) = \left(\mu - \frac{1}{2} \text{diag}(\Sigma)\right)t + \sqrt{t} LZ, \quad Z \sim \mathcal{N}(0, I_n). \quad (27)$$

En consecuencia, el precio proyectado del activo i en el horizonte t puede escribirse como:

$$X_i(t) = X_i(0) \exp\left(\mu_i t - \frac{1}{2} \Sigma_{ii} t + \sqrt{t} (LZ)_i\right). \quad (28)$$

Definiendo el factor de crecimiento relativo

$$\tilde{X}_i(t) := \frac{X_i(t)}{X_i(0)},$$

se obtiene la representación compacta:

$$\tilde{X}_i(t) = \exp\left(\mu_{\text{forward},i} + \sqrt{t} (LZ)_i\right), \quad \mu_{\text{forward},i} = \mu_i t - \frac{1}{2} \Sigma_{ii} t. \quad (29)$$

En la implementación empírica, el vector de drifts μ se estima a partir del crecimiento logarítmico promedio observado:

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{T} \log\left(\frac{X_i(T)}{X_i(0)}\right),$$

mientras que la matriz Σ se calcula como la covarianza muestral de los rendimientos diarios y T es el numero de dias observados. Para un horizonte de 90 días hábiles, se toma $t = 90$, y la proyección empírica del precio forward se obtiene mediante simulación Monte Carlo, calculando finalmente el valor esperado como la media muestral de los precios simulados. Este enfoque permite generar trayectorias futuras coherentes con la volatilidad y la correlación observadas históricamente. Así para nuestros datos de estudio se proyecta los precios Forward para t=90 días (tabla 5).

| Activo | Precio inicial | Forward empírico (90 días) |
|----------|----------------|----------------------------|
| BAP | 135.25 | 142.53 |
| PODERC1 | 9.40 | 9.13 |
| CREDITC1 | 2.60 | 2.81 |
| CVERDEC1 | 29.80 | 31.52 |

Table 5: Precios iniciales y forwards empíricos a 90 días

1.8 Expected Shortfall

Sea Y una variable aleatoria que representa el retorno de un activo o portafolio y sea $p = 5\%$.

El Value at Risk al nivel p se define como

$$\text{VaR}_p(Y) = \inf\{y \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(Y \leq y) \geq p\}.$$

El Expected Shortfall al nivel p se define como

$$\text{ES}_p(Y) = \mathbb{E}[Y \mid Y \leq \text{VaR}_p(Y)].$$

Para nuestra simulacion, sea $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ una muestra de retornos y

$$Y^{(1)} \leq Y^{(2)} \leq \dots \leq Y^{(n)}$$

sus estadísticos de orden.

Definiendo $k = \lfloor pn \rfloor$, el estimador de Expected Shortfall es

$$\text{ES}_p(Y) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k Y^{(i)}.$$

1.9 Análisis Media–Riesgo mediante Expected Shortfall

Sea Y_c el retorno del portafolio asociado al vector de pesos

$$c = (c_1, \dots, c_d) \in \mathbb{R}^d.$$

La media (retorno esperado) del portafolio se define como

$$m(c) = \mathbb{E}[Y_c].$$

El riesgo del portafolio, medido mediante *Expected Shortfall* al nivel p , se define como

$$r(c) = \text{ES}_p(Y_c) = \mathbb{E}[Y_c \mid Y_c \leq \text{VaR}_p(Y_c)].$$

$$\mathcal{F} = \{(m(c), r(c)) : c \in \mathcal{C}\}, \quad \mathcal{C} = \left\{c \in \mathbb{R}^d : \sum_i c_i = 1, c_i \geq 0\right\}.$$

1.10 Análisis Media–Riesgo mediante Expected Shortfall

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Para cada vector de pesos

$$c = (c_1, \dots, c_d) \in \mathcal{C}, \quad \mathcal{C} := \left\{c \in \mathbb{R}^d : \sum_{i=1}^d c_i = 1, c_i \geq 0\right\},$$

definimos el retorno (aleatorio) del portafolio como Y_c . En el enfoque media–riesgo, a cada portafolio c se le asocia el par

$$(m(c), r(c)),$$

donde la *media* (retorno esperado) está dada por

$$m(c) := \mathbb{E}[Y_c],$$

y el *riesgo* se mide mediante *Expected Shortfall* al nivel $p \in (0, 1)$ (en este trabajo $p = 5\%$), definido por

$$r(c) := \text{ES}_p(Y_c) = \mathbb{E}[Y_c \mid Y_c \leq \text{VaR}_p(Y_c)], \quad \text{VaR}_p(Y_c) := \inf\{y \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(Y_c \leq y) \geq p\}.$$

Conjunto factible media–ES. El *conjunto factible* en el plano media–riesgo queda definido como la imagen de \mathcal{C} bajo el mapeo

$$\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \Phi(c) := (m(c), r(c)),$$

esto es,

$$\mathcal{F} := \{(m(c), r(c)) : c \in \mathcal{C}\}.$$

Cada punto de \mathcal{F} representa el desempeño de un portafolio admisible en términos de retorno esperado y riesgo de cola medido por Expected Shortfall.

Aproximación empírica. En la implementación numérica se simulan N escenarios de retornos del portafolio para cada vector de pesos c , obteniendo una muestra $\{Y_c^{(1)}, \dots, Y_c^{(N)}\}$. La media se estima por

$$\hat{m}(c) := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Y_c^{(j)}.$$

Para el Expected Shortfall se ordena la muestra de menor a mayor:

$$Y_{c,(1)} \leq Y_{c,(2)} \leq \dots \leq Y_{c,(N)},$$

y se define $k := \lfloor pN \rfloor$. Entonces el estimador usado sera

$$\widehat{\text{ES}}_p(Y_c) := \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k Y_{c,(j)}.$$

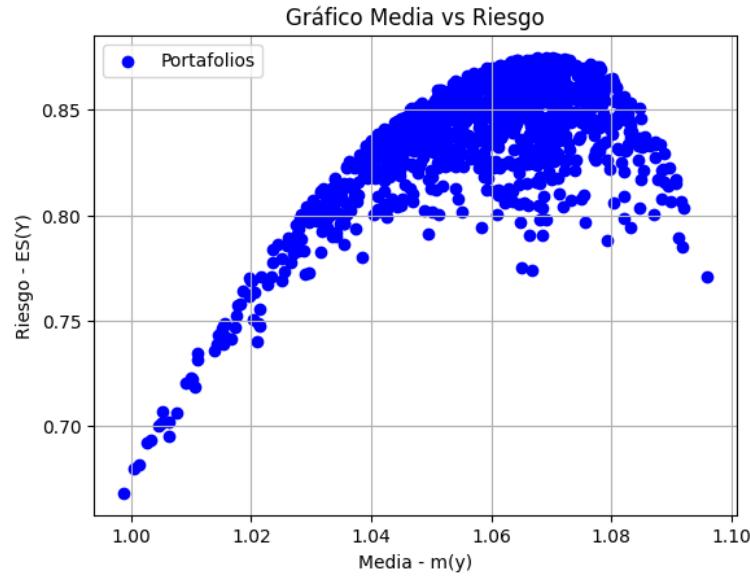
Este estimador corresponde al promedio de los peores $p\%$ escenarios (cola izquierda), consistente con la interpretación de Y_c como retorno.

1.11 Gráfica Media vs Riesgo y Frontera Eficiente

La gráfica Media vs Riesgo, generada por el procedimiento es un diagrama de dispersión que aproxima el conjunto

$$\widehat{\mathcal{F}} := \left\{ (\hat{m}(c^{(s)}), \widehat{\text{ES}}_p(Y_{c^{(s)}})) : s = 1, \dots, S \right\},$$

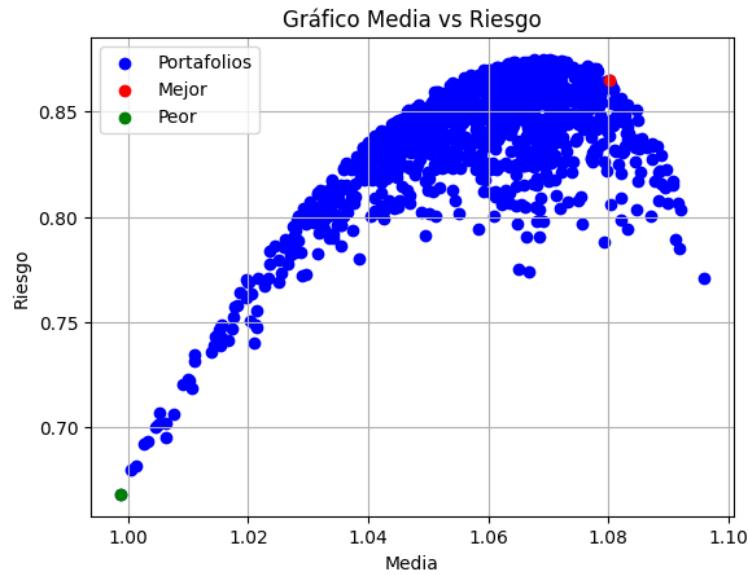
donde $\{c^{(s)}\}_{s=1}^S$ son portafolios simulados (muestreados uniformemente en el simplex mediante una Dirichlet). En el eje horizontal se representa $\hat{m}(c)$ y en el eje vertical el riesgo $\widehat{\text{ES}}_p(Y_c)$. Por tanto, cada punto del gráfico corresponde a un portafolio distinto y su posición resume el compromiso media–riesgo bajo Expected Shortfall(Fig. ??).



Definimos la frontea eficiente de la media vs riesgo, cuando para un portafolio $c^* \in \mathcal{C}$, no existe $c \in \mathcal{C}$ tal que

$$m(c) \geq m(c^*) \quad \text{y} \quad r(c) \leq r(c^*),$$

con al menos una desigualdad estricta. El conjunto de portafolios eficientes induce la *frontera eficiente* en el plano (m, r) .



2 Asignación de Recursos

2.1 Introducción

El presente estudio de caso se centra en la asignación óptima de recursos desde una planta central hacia un conjunto de clientes. Dicha asignación varía diariamente y depende de los pedidos realizados por cada cliente. Para abordar este problema se plantea un modelo de optimización lineal (OL), cuyo análisis numérico se realizará mediante el algoritmo Simplex.

2.2 Modelamiento del Problema

El problema analizado corresponde a la distribución de materiales de construcción mediante la asignación de vehículos ($i = 1, 2, \dots, m$), los cuales transportan los materiales hacia los clientes que los solicitan ($j = 1, 2, \dots, n$).

Cada cliente $j \in J$ realiza un pedido diario que varía en cantidad, y cuya demanda se denota por d_j . Por su parte, cada vehículo $i \in I$ posee una capacidad máxima de carga S_i .

Cada vehículo puede ser asignado a un subconjunto de clientes $P(J)$, pero solo una vez por jornada de despacho. A su vez, cada subconjunto de clientes $j \in P(J)$ tiene asociado un costo de operación r_j , que incluye gastos de combustible, peajes y desgaste vehicular.

El objetivo del modelo es minimizar los costos totales de operación, garantizando que todas las demandas sean atendidas respetando las capacidades de los vehículos.

2.3 Condiciones del modelo

Dado que la asignación se realiza diariamente, las demandas y los clientes varían en cada día de operación. A continuación, se definen los parámetros y variables del modelo.

Primero introduciremos los parámetros del modelo:

- $I = 1, 2, \dots, m$: Conjunto de unidades (vehículos) disponibles en la planta.
- $J = 1, 2, \dots, n$: Conjunto de Clientes.
- $P(J)$: Conjunto de subconjuntos posibles de clientes, que pueden ser atendidos simultaneamente.
- $x_{i,j}$: Variable binaria que indica la asignación de la unidad i al subconjunto de clientes j . $x_{i,j} = 1$ si el vehículo i atiende al subconjunto j , y $x_{i,j} = 0$ en caso contrario.
- $S_i \in \mathbb{R}^+$: Capacidad máxima del vehículo $i \in I$
- $r_j \in \mathbb{R}^+$: Costo asociado al subconjunto de clientes $j \in P(J)$ (combustible, peajes, desgastes vehicular)
- $d_j \in \mathbb{R}^+$: Demanda total correspondiente al subconjunto $j \in P(J)$

Definiendo las restricciones de físicas del modelo:

- Cada unidad $i \in I$ puede asignarse, como máximo, a un subconjunto de pedidos:

$$\sum_{j \in P(J)} x_{i,j} \leq 1$$

- La demanda total asignada a cada unidad no debe exceder su capacidad:

$$\sum_{j \in P(J)} x_{i,j} d_j \leq s_i$$

- Cada cliente $k \in J$ debe ser atendido exactamente una vez:

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in P(J)} x_{i,j} 1_{\{k \in j\}} = 1$$

Asi los costos totales de operacion para el reparto por dia sera:

$$S = \sum_{i \in I} \sum_{j \in \mathcal{P}(J)} x_{i,j} (s_i + r_j)$$

Asi se requiere tener los menores costos de operacion para lo cual tendremos que minimizar estos costos, esto es "min S".

Asi el modelo final a optimizar, considerando las restricciones sera:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i \in I} \sum_{j \in \mathcal{P}(J)} x_{i,j} (s_i + r_j) \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{j \in \mathcal{P}(J)} x_{i,j} \leq 1, \quad i \in I \\ & \sum_{j \in \mathcal{P}(J)} x_{i,j} d_j \leq s_i, \quad i \in I \\ & \sum_{i \in I} \sum_{j \in \mathcal{P}(J)} x_{i,j} 1_{\{k \in j\}} = 1, \quad k \in J \\ & x_{i,j} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, j \in \mathcal{P}(J). \end{aligned} \tag{30}$$

3 Bibliografia

1. Gerard Sierksma and Yori Zwols, Tercera ed., Taylor Francis Group 2015.
2. Jose Luis de la Fuente O Connor - Tecnicas de calculo para sistemas de ecuaciones, programacion lineal y programacion entera, Tercera Edicion, Barcelona: Reverté, 1997.
3. Jean Pierre Crouzeix, Eladio Ocaña Anaya, Analisis Convexo, Fondo Editorial - EDUNI, 2018
4. Hamdy A. Taha, Investigacion de Operaciones, Pearson Educacion, Mexico 2004